HAL
open science

Couplage variable entre un qubit de charge et un qubit de phase

Aurélien Fay

To cite this version:

Aurélien Fay. Couplage variable entre un qubit de charge et un qubit de phase. Matière Condensée [cond-mat]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2008. Français. NNT : . tel-00310131

HAL Id: tel-00310131

https://theses.hal.science/tel-00310131v1

Submitted on 7 Aug 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

présentée par

Aurélien Fay

pour obtenir le titre de Docteur
de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I
en Physique

Couplage variable entre un qubit de charge et un qubit de phase

---

Soutenue publiquement le 09 juin 2008 devant le Jury :

M. Sanquer, Président
D. Estève, Rapporteur
P. Hakonen, Rapporteur
A.B. Zorin, Examinateur
W. Guichard, Codirectrice de thèse
O. Buisson, Directeur de thèse

Thèse préparée à l'Institut Néel et
au Laboratoire des Champs Magnétiques Intenses
CNRS - UJF - Grenoble

Remerciements

Je remercie tout d'abord sincèrement Daniel Estève et Pertti Hakonen d'avoir accepté d'être mes rapporteurs et d'avoir lu attentivement ce manuscrit. Merci aussi à Marc Sanquer d'avoir été le président du Jury et merci à Alexander Zorin d'avoir participé à mon jury de thèse.

Je remercie Alain Fontaine, Jean-Louis Tholence et Gérard Martinez pour m'avoir accueilli au sein de leur laboratoire.

Je tiens à remercier chaleureusement mes trois directeurs de thèse, Olivier Buisson, Wiebke Guichard et Laurent Levy pour m'avoir, dans un premier temps, fait confiance pour mener à bien le projet scientifique qu'ils proposaient. Un immense merci à Olivier. Tu m'as patiemment expliqué et transmis tes connaissances expérimentales aiguës. Tu étais toujours prêt à discuter et répondre aux questions scientifiques dont je t'inondais quotidiennement. Je ne peux oublier de te remercier pour tes grandes qualités humaines qui m'ont permis de rayonner durant ma thèse. Je remercie grandement Wiebke pour l'énergie débordante qu'elle m'a insufflée. Merci de m'avoir patiemment aiguillé sur le MEB à mes débuts. Grâce à ton dynamisme, nos nombreuses discussions ont été fructueuses. Merci beaucoup Laurent pour m'avoir éveillé à la mécanique quantique dès la licence, pour m'avoir initié à la "construction" des Hamiltoniens des circuits supraconducteurs et à leur diagonalisation numérique.

Merci à Frank Hekking avec qui j'ai collaboré pour établir l'Hamiltonien théorique du circuit supraconducteur étudié. Cette collaboration a été des plus enrichissantes et s'est terminée par une excellente compréhension des données expérimentales.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à mon prédécesseur, Julien Claudon, qui m'a épaulé à mes débuts.

Un grand merci à Emile Hoskinson pour avoir été un formidable collègue et ami. Tes programmes LabViews dotés d'une grande flexibilité ont permis de démystifier la physique des qubits couplés en un temps record. Côté vélo, j'espère que tu roules toujours autant car, ne l'oublie pas, il nous reste à faire les Marmottes.

Merci à Florent Lecocq, à qui revient le flambeau des recherches sur les qubits. Bonne chance pour la suite ! Fais tout de même attention à la webcam : une image fixe serait la malvenue. Merci également à Nicolas Didier, Ioan Pop, Zhihui Peng, Raphaël Leone et Grigorij Grabovskij du groupe des *circuits quantiques supraconducteurs* pour les discussions scientifiques et leur convivialité.

Une reconnaissance éternelle aux services mécanique (merci spécialement à Anne), électronique et cryogénique qui font un travail d'excellence ! Louée soit l'équipe de Nanofab : Thierry et Thierry (avec et sans hormones), Christophe, Bruno et Khaled.

J'exprime toute ma gratitude aux secrétaires et en particulier à Marielle Lardatto pour être venues à mon secours plus d'une fois.

Merci à Franck Dahlem qui, dès mon stage de maîtrise à Stuttgart, m'a inculqué sa passion pour la physique et pour la culture. Je remercie mes collègues et ex-collègues de bureau et de surcroît amis, Sukumar Rajauria, Thomas Quaglio et Cécile Delacour pour leur sympathie et l'ambiance atypique dans le bureau. J'exprime toute ma gratitude à l'ensemble des thésards et au personnel du laboratoire qui en sont le moteur vivant.

Je tiens à remercier mes colocataires Guillaume, Mickaël et Olivier pour leur cuisson instinctive des pâtes et nos activités nocturnes (légales).

Je remercie mes parents sans qui je ne serais pas allé si loin. Merci maman d'avoir eu le courage de lire ma thèse et d'en avoir exclu les mots inconnus du dictionnaire. Je remercie enfin Viridiane, Josselin et Marianne qui, malgré la distance, ont toujours été présents.

Table des matières

1 Introduction et résumé du manuscrit **1**
1.1 Introduction . . . 1
1.2 Résumé du manuscrit . . . 3
1.2.1 Théorie du circuit couplé . . . 3
1.2.2 Fabrication du circuit supraconducteur . . . 6
1.2.3 Le SQUID dc : un qubit de phase . . . 6
1.2.4 Le transistor asymétrique : un qubit de charge . . . 9
1.2.5 Couplage variable entre les deux qubits . . . 10
1.2.6 Mesure de l'état du transistor asymétrique . . . 14

2 Théorie du circuit couplé **17**
2.1 Modélisation du circuit couplé . . . 17
2.1.1 La jonction Josephson . . . 17
2.1.2 Relations courant-phase . . . 18
2.1.3 Circuit électrique équivalent . . . 19
2.1.4 Les variables des noeuds . . . 19
2.1.5 Les équations dynamiques . . . 21
2.1.6 Le Lagrangien . . . 22
2.1.7 L'Hamiltonien . . . 27
2.2 Le SQUID-dc . . . 30
2.2.1 États supraconducteurs - Diagramme de phase . . . 30
2.2.2 Hamiltonien du SQUID . . . 33
2.2.3 Analyse de l'Hamiltonien du SQUID . . . 36
2.3 Le transistor à paire de Cooper asymétrique (ACPT) . . . 37
2.3.1 Hamitlonien de l'ACPT . . . 37
2.3.2 Spectre d'énergie de l'ACPT . . . 39
2.3.3 Description de l'ACPT par deux états de charge . . . 41
2.3.4 Erreurs induites par la description à deux états de charge . . . 42
2.4 Couplage entre le SQUID et l'ACPT . . . 43
2.4.1 Couplage capacitif . . . 43
2.4.2 Couplage Josephson . . . 44
2.4.3 Hamiltonien du circuit couplé . . . 45
2.4.4 Couplage en fonction de l'asymétrie du transistor . . . 46

3 Micro-fabrication et dispositif expérimental **49**
3.1 Fabrication des échantillons . . . 49
3.1.1 Etalement des résines et recuit . . . 49
3.1.2 Lithographie électronique . . . 50
3.1.3 Trois évaporations sous angle . . . 52
3.2 Dispositif expérimental . . . 57
3.2.1 Principe du montage . . . 58
3.2.2 Génération des signaux hyperfréquences . . . 63
3.3 Blindage et filtrage . . . 67
3.3.1 Blindage . . . 68
3.3.2 Filtrage . . . 68
3.3.3 Environnement proche du SQUID. . . . 69

4 Le SQUID dc : un qubit de phase **71**
4.1 Échappement de l'état fondamental du SQUID . . . 72
4.1.1 Mesure de la probabilité d'échappement du SQUID . . . 72
4.1.2 Activation thermique et échappement par effet tunnel . . . 73
4.1.3 Probabilité d'échappement en fonction de I_p et Φ_S . . . 76
4.1.4 Dépendance de la largeur ΔI avec Φ_S . . . 78
4.1.5 Dépendance de la largeur ΔI avec la température. . . . 80
4.1.6 Discussion sur la largeur ΔI . . . 81
4.2 États excités . . . 81
4.2.1 Éxcitation des niveaux quantiques du SQUID avec un signal micro-onde . . . 82
4.2.2 Mesure de l'état excité du SQUID . . . 83
4.2.3 Spectroscopies . . . 85
4.2.4 Oscillations cohérentes . . . 89
4.3 Analyse de la décohérence du SQUID . . . 91
4.3.1 Introduction au processus de déphasage du SQUID . . . 92
4.3.2 Temps de relaxation T_1 . . . 93
4.3.3 Fonction de déphasage adiabatique . . . 94
4.3.4 Fonction de déphasage du SQUID dû au bruit en courant . . . 94
4.3.5 Fonction de déphasage du SQUID dû au bruit en flux . . . 97
4.3.6 Raies de spectroscopie gaussiennes . . . 98
4.3.7 Raies de spectroscopie non gaussiennes . . . 99

5 Le transistor asymétrique : un qubit de charge **105**
5.1 L'état fondamental du transistor . . . 105
5.1.1 Couplage Josephson dans la limite $\nu_T \gg \nu_S$ . . . 106
5.1.2 Influence de l'ACPT sur l'échappement du SQUID . . . 107
5.2 L'état excité du transistor . . . 111
5.2.1 Excitation de l'ACPT . . . 111
5.2.2 Spectroscopie du transistor . . . 113

5.2.3 Paramètres de l'ACPT 115
5.2.4 Calibration de la charge de la grille 116
5.2.5 Calibration de la phase δ 118
5.2.6 Spectre d'énergie en fonction de δ 120
5.3 Ocillations de Rabi 121
5.3.1 Préambule théorique 121
5.3.2 Mesure des oscillations de Rabi 122
5.4 Décohérence du qubit de charge 126
5.4.1 Relaxation du qubit de charge 126
5.4.2 Processus de la décohérence dans le transistor 129

6 Couplage variable entre les deux qubits 133
6.1 Mise en évidence du couplage 133
6.1.1 Influence du couplage sur le spectre d'énergie 134
6.1.2 Détermination de la résonance des deux qubits 136
6.1.3 Mesure du couplage 136
6.2 Couplage variable 141
6.2.1 Désaccord des deux qubits en fonction de la polarisation 141
6.2.2 Mesures de différents couplages 142
6.2.3 Dépendance du couplage avec la fréquence de résonance 146
6.3 Couplage théorique 147
6.3.1 Expression analytique du couplage 147
6.3.2 Calcul numérique du couplage 150

7 Mesure de l'état du transistor asymétrique 153
7.1 Le SQUID : détecteur du courant dans le transistor 154
7.1.1 Modélisation 154
7.1.2 Confrontation du modèle aux résultats expérimentaux 155
7.2 Transfert quantique adiabatique 156
7.2.1 Introduction de la mesure par transfert adiabatique 156
7.2.2 Modélisation de la mesure par transfert adiabatique 159
7.2.3 Mesure en la présence d'un croisement de niveaux 160
7.2.4 Mesure en l'absence d'un croisement de niveaux 164
7.3 Conclusion sur la mesure du transistor 167

Conclusions et perspectives 169

A Paramètres du circuit couplé 179

B Matrices de Pauli 181

C Expression de la phase δ 183

D Perturbation de l'Hamiltonien par un courant de polarisation additionnel 185

E Publications **187**

Chapitre 1

Introduction et résumé du manuscrit

1.1 Introduction

Un qubit, contraction du terme anglo-saxon "quantum bit", est un système quantique à deux niveaux. Depuis plus d'une dizaine d'années, de nombreux objets physiques pouvant jouer le rôle de qubit sont étudiés activement par la communauté scientifique. Cet engouement se comprend tout d'abord par le fait qu'un qubit est un système quantique simple permettant de nombreuses expériences dans le domaine de la mécanique quantique. Les qubits sont ainsi utilisés dans le laser, l'horloge atomique, l'imagerie par résonance magnétique nucléaire. D'autre part, les qubits sont des éléments de base dans le champ de l'information quantique. Ils peuvent tout d'abord être utilisés en tant que mémoires quantiques. Un bit classique peut stocker seulement deux états, alors qu'un qubit peut être dans un de ses états propres $|a\rangle$ ou $|b\rangle$, tout comme il peut être dans un état de superposition $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$. Par conséquent, les qubits autorisent une quantité de stockage d'informations bien supérieure à celle disponible lors de l'utilisation de bits classiques. Ensuite, les qubits sont utilisés pour la mise au point d'algorithmes quantiques. Grâce aux propriétés quantiques des qubits, telles que la superposition et l'intrication des états, un algorithme quantique peut être exécuté en un temps inférieur à celui demandé par son homologue classique. Par exemple, l'algorithme quantique de Shor [1] peut factoriser un nombre entier en un temps exponentiellement plus court que le meilleur temps requis par un algorithme classique optimisé à cet effet. Un algorithme quantique viable pourrait ainsi faire tomber rapidement les clefs d'encryptage utilisées pour les communications militaires ou celles des transactions monétaires électroniques. Un qubit peut être réalisé à partir d'un objet microscopique tel que, par exemple, un ion piégé [2], un spin nucléaire [3], un spin électronique [4] ou un atome [5].

Les circuits de la micro-électronique sont macroscopiques et obéissent aux lois de la physique "classique". Les circuits supraconducteurs sont aussi macroscopiques mais obéissent aux lois de la mécanique quantique. Ils constituent des systèmes modèles pour créer, analyser, tester des nouvelles propriétés dans le domaine de la nanoélectronique quantique.

Un circuit supraconducteur peut être élaboré afin de réaliser un système quantique à deux niveaux, appelé communément *qubit supraconducteur*. Les qubits supraconducteurs, à la différence des objets microscopiques cités précédemment, sont hautement intégrables grâce aux techniques de l'industrie de la micro-électronique. Ils sont en ce sens des éléments prometteurs pour la réalisation d'un processeur quantique.

Un qubit supraconducteur est réalisé à partir d'un circuit supraconducteur constitué d'une ou plusieurs jonctions Josephson. Une jonction Josephson correspond à un lien faible entre deux réservoirs supraconducteurs. Les deux énergies caractéristiques d'un circuit supraconducteur sont l'énergie de charge $E_C = (2e)^2/(2C)$, où C est la capacité effective des jonctions Josephson, et l'énergie Josephson $E_J = \Phi_0 I_C/(2\pi)$, où I_C est le courant critique effectif et $\Phi_0 = h/(2e)$ le quantum de flux. Le rapport E_J/E_C nous renseigne sur la nature du qubit. Dans le cas où $E_J/E_C \leq 1$, nous sommes en présence de qubits de charge [6, 7]. Lorsque $E_J/E_C \gg 1$, nous trouvons les qubits de phase [8, 9] ou les qubits de flux [10]. Plus précisément, les noms des différents qubits proviennent de la base des états qui est la plus adéquate pour décrire l'état du qubit. Ainsi, l'état du qubit de charge est bien décrit dans la base des états de charge, celui du qubit de phase dans la base des états de phase, celui du qubit de flux dans la base des états de flux. Le premier contrôle cohérent des états quantiques d'un qubit supraconducteur a été réalisé au laboratoire de NEC au Japon en 1999 [11]. L'expérience utilisait une boîte à paires de Cooper qui jouait le rôle de qubit de charge.

Un qubit supraconducteur peut être vu comme un atome artificiel. L'énergie entre les deux niveaux du qubit supraconducteur est définie lors de la fabrication du circuit, puis peut être ajustée à partir des paramètres de polarisation du circuit. A la différence d'un atome, le qubit supraconducteur peut se coupler fortement avec un champ électromagnétique extérieur, permettant des opérations quantiques de l'ordre de la nanoseconde, ainsi que des lectures originales de l'état du qubit [12]. D'un autre côté, le qubit supraconducteur peut aussi être fortement couplé aux modes non contrôlés de l'environnement ce qui entraîne la perte de l'information sur la phase du qubit[(1)], phénomène connu sous le nom de décohérence. La décohérence a été caractérisée dans plusieurs circuits supraconducteurs afin de comprendre ses origines et de parvenir, à terme, à la minimiser [13, 14, 15].

Le couplage entre deux objets quantiques conduit à des phénomènes riches et passionnants. Le couplage est responsable de l'intrication des deux objets, ce qui signifie que l'état d'un des objets dépend de façon inextricable de l'état de l'autre. Des systèmes composés de deux qubits supraconducteurs du même type ont déjà été couplés capacitivement [16, 17], mutuellement [18] ou par l'intermédiaire d'une cavité électromagnétique [19, 20]. Un autre couplage possible est le couplage d'un qubit supraconducteur avec un oscillateur harmonique [21, 12, 22]. Dans ces différents systèmes, le couplage a été mis en évidence par des mesures de spectroscopie. Le couplage entre deux qubits supraconducteurs a permis de réa-

(1) Plus précisément, l'état quantique d'un qubit est caractérisé par la superposition $\alpha|0\rangle + \beta e^{i\varphi}|1\rangle$, où φ est la phase du qubit.

liser des opérations logiques à deux qubits, telles que l'opération conditionnelle "C-NOT" [23, 24] et l'opération "$\sqrt{i}$-SWAP" [25].

Ces opérations à deux qubits constituent une partie des briques élémentaires d'un algorithme quantique, une autre partie correspondant aux opérations à un qubit. A la différence des opérations à deux qubits, les opérations à un qubit doivent être réalisées en l'absence de couplage entre le qubit adressé et les autres qubits du système sous peine de perturber ces derniers. Par conséquent, il serait avantageux d'avoir des qubits qui puissent être couplés et découplés. Pour cela, le couplage entre les qubits doit être contrôlé et variable. Une autre propriété recherchée est de manipuler les qubits en présence ou non de couplage en un point de fonctionnement optimal.

Les systèmes de deux qubits supraconducteurs cités précédemment possédaient tous un couplage fixe entre les deux qubits. Récemment, deux expériences ont permis de mettre en évidence un fort couplage variable entre deux qubits de flux [26, 27]. Ces deux expériences avaient en commun l'utilisation d'un élément extérieur, respectivement un SQUID ou un troisième qubit de flux, pour modifier le couplage mutuel. Deux autres expériences, qui n'étudiaient que l'état fondamental de deux qubits de flux, ont aussi mis en évidence un couplage variable [28, 29].

Durant ma thèse, nous avons pour la première fois couplé deux qubits de nature différente, à savoir un qubit de charge et un qubit de phase. Le couplage entre les deux qubits est contrôlé et peut être varié de plus d'un facteur 18. Les qubits peuvent être couplés ou découplés à un point de fonctionnement optimal du qubit de charge.

1.2 Résumé du manuscrit

Les deux thèses précédentes, réalisées par Franck Balestro et Julien Claudon, étaient consacrées à l'étude d'un circuit quantique supraconducteur : le SQUID dc [30, 31]. Le circuit supraconducteur que j'ai étudié durant ma thèse est constitué d'un SQUID dc placé en parallèle avec un transistor à paires de Cooper asymétrique (ACPT). Le SQUID dc est formé par une boucle supraconductrice interrompue par deux jonctions Josephson identiques. L'ACPT est une petite boîte supraconductrice connectée au circuit extérieur par deux autres jonctions Josephson asymétriques.

1.2.1 Théorie du circuit couplé

La fabrication du circuit a été réalisée après un important travail théorique dans lequel je me suis investi pleinement dès le début de ma thèse. Ce travail théorique a permis de prédire et de comprendre la dynamique quantique complexe du circuit en fonction de ses paramètres. Cette étude a aussi permis d'optimiser les paramètres des jonctions Josephson du circuit que j'ai ensuite fabriqué.

La dynamique quantique d'un circuit supraconducteur est entièrement décrite par son Hamiltonien. Ainsi, la première partie du travail théorique a été consacrée à la recherche

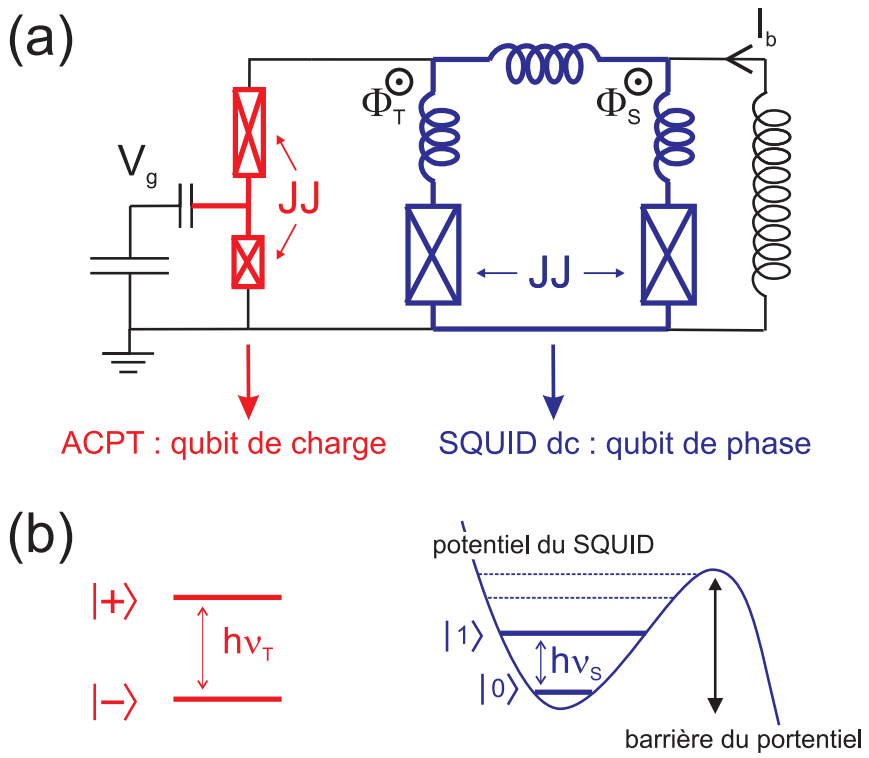

FIG. 1.1 – *(a) Schéma électrique du circuit supraconducteur étudié. Le SQUID dc, qui est représenté en bleu, est composé d'une boucle supraconductrice interrompue par deux jonctions Josephson (JJ) identiques. Les trois inductances de la boucle constituent l'inductance du SQUID. Une boîte à paires de Cooper asymétrique (ACPT), qui est représentée en rouge, est disposée en parallèle avec le SQUID. L'ACPT est une boite supraconductrice connectée aux circuits extérieurs par deux jonctions Josephson asymétriques. (b) L'ACPT est un qubit de charge d'énergie $h\nu_T$ dont les niveaux sont $|-\rangle$ et $|+\rangle$. Le SQUID est un qubit de phase d'énergie $h\nu_S$ dont les niveaux sont $|0\rangle$ et $|1\rangle$.*

de l'Hamiltonien du circuit couplé. Le circuit supraconducteur est tout d'abord modélisé par un circuit électrique équivalent qui est illustré sur la figure 1.1.a. Nous avons ensuite construit le Lagrangien de ce circuit à partir duquel nous en avons déduit l'Hamiltonien. Ce dernier se décompose en trois termes :

$$\widehat{H} = \widehat{H}_S + \widehat{H}_{ACPT} + \widehat{H}_{Coupl}, \tag{1.1}$$

où $\widehat{H}_S$ est l'Hamiltonien du SQUID, $\widehat{H}_{ACPT}$ celui de l'ACPT et $\widehat{H}_{Coupl}$ celui du couplage entre le SQUID et l'ACPT.

La dynamique quantique du SQUID en l'absence de couplage est décrite par l'Hamiltonien du SQUID. Cette dynamique s'apparente à celle d'une particule fictive piégée dans un potentiel cubique comme illustré à la figure 1.1.b. Ainsi, le SQUID est un oscillateur anharmonique quantique. Les états propres de cet oscillateur sont notés $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, etc [32]. L'énergie $h\nu_S$, qui dépend, dans notre circuit, du flux Φ_S passant à travers la boucle du SQUID, ainsi que du courant de polarisation I_p, correspond à l'écart d'énergie entre les niveaux $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Nous limiterons notre étude à la dynamique quantique qui met en jeu seulement les deux premiers niveaux $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Le SQUID est alors considéré comme un *qubit de phase* car le rapport E_J/E_C du SQUID est très grand devant l'unité. Ainsi, l'Hamiltonien $\widehat{H}_S$ du SQUID peut s'exprimer dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ en utilisant les matrices de Pauli[(2)] comme :

$$\widehat{H}_S = \frac{h\nu_S}{2}\sigma_z^S. \tag{1.2}$$

En l'absence de couplage, la dynamique quantique de l'ACPT est décrite par l'Hamiltonien de l'ACPT. L'étude de cet Hamiltonien montre que l'ACPT peut être considéré comme un qubit. Le rapport E_J/E_C dans l'ACPT que j'ai étudié étant inférieur à l'unité, le transistor est classifié comme un *qubit de charge*. Nous notons $|-\rangle$ l'état fondamental et $|+\rangle$ l'état excité de ce qubit. L'énergie $h\nu_T$ sépare ces deux états. Elle dépend dans notre circuit de la charge n_g de la grille et de la phase supraconductrice δ à travers le transistor. La charge n_g est reliée à la tension V_g de la grille par $n_g = C_g V_g/(2e)$, où C_g est la capacité entre la grille et la boîte de l'ACPT. La phase δ est une fonction du flux Φ_S, du flux Φ_T à travers la deuxième boucle du circuit et du courant de polarisation I_p. L'Hamiltonien $\widehat{H}_{ACPT}$ de l'ACPT peut s'exprimer dans la base $\{|-\rangle, |+\rangle\}$ comme :

$$\widehat{H}_T = \frac{h\nu_T}{2}\sigma_z^T. \tag{1.3}$$

Le couplage entre les deux qubits est réalisé, dans notre circuit, au moyen d'une des jonctions Josephson de l'ACPT. Cette jonction Josephson est constituée par une capacité

(2) Les matrices de Pauli sont définies dans l'annexe B.

en parallèle avec une jonction Josephson idéale. Elle conduit donc à deux types de couplage différents, à savoir un couplage capacitif et un couplage Josephson. Ainsi, nous avons réussi à exprimer l'Hamiltonien de couplage comme la somme de deux termes :

$$\widehat{H}_{Coupl} = \widehat{H}_{Coupl,Capa} + \widehat{H}_{Coupl,Jos}, \tag{1.4}$$

où $\widehat{H}_{Coupl,Capa}$ est l'Hamiltonien de couplage capacitif et $\widehat{H}_{Coupl,Jos}$ l'Hamiltonien de couplage Josephson.

Lorsque le désaccord de fréquence $|\Delta\nu| \equiv |\nu_T - \nu_S|$ est très grand devant la valeur du couplage, les effets du couplage sont négligeables et, par conséquent, le SQUID et le transistor peuvent être étudiés de manière indépendante.

Dans le cas où les fréquences ν_S et ν_T sont proches, les effets de l'Hamiltonien de couplage $\widehat{H}_{Coupl}$ sur la dynamique quantique du circuit couplé deviennent importants. Ces effets sont principalement dus aux termes résonants de l'Hamiltonien, c'est-à-dire ceux qui couplent les états $|1,-\rangle$ et $|0,+\rangle$. En négligeant les termes non résonants (approximation de l'onde tournante), l'Hamiltonien du circuit couplé s'écrit dans la base $\{|0,-\rangle, |0,+\rangle, |1,-\rangle, |1,+\rangle\}$ comme :

$$\widehat{H} = \frac{h\nu_S}{2}\,\hat{\sigma}_z^S + \frac{h\nu_T}{2}\,\hat{\sigma}_z^T - \frac{h\nu_g}{2}\left(\hat{\sigma}_+^S\hat{\sigma}_-^T + \hat{\sigma}_-^S\hat{\sigma}_+^T\right), \tag{1.5}$$

où $\hat{\sigma}_+$ et $\hat{\sigma}_-$ sont respectivement les opérateurs d'excitation et de desexcitation du SQUID (indice "S") ou du transistor (indice "T"). La fréquence ν_g correspond à la force du couplage. Cette fréquence s'exprime comme $\nu_g = \nu_g^{Capa} + \nu_g^{Jos}$, où la fréquence ν_g^{Capa} est la force du couplage capacitif et la fréquence ν_g^{Jos} la force du couplage Josephson. Dans le cas d'un transistor symétrique, les couplages Josephson et capacitif s'annulent. Dans le cas d'un transistor asymétrique, la théorie prédit une variation du couplage suivant la polarisation du circuit. Un couplage nul est même attendu. Ces propriétés nous ont déterminés à étudier un SQUID couplé à un transistor à paires de Cooper *asymétrique*.

1.2.2 Fabrication du circuit supraconducteur

Des photos MEB du circuit supraconducteur sont présentées sur la figure 1.2. La fabrication du circuit supraconducteur a été réalisée au moyen d'une seule étape de lithographie électronique. Nous avons réussi à fabriquer les quatre jonctions Josephson du circuit en utilisant trois évaporations sous angle et deux oxydations différentes. La réalisation des motifs fins de l'ACPT a nécessité d'importantes optimisations des procédés de fabrication sur plus d'une année et demi.

1.2.3 Le SQUID dc : un qubit de phase

Nous avons étudié la dépendance de la fréquence du SQUID en fonction des différents paramètres de polarisation. Cette fréquence ν_S a pu être variée sur une large gamme de

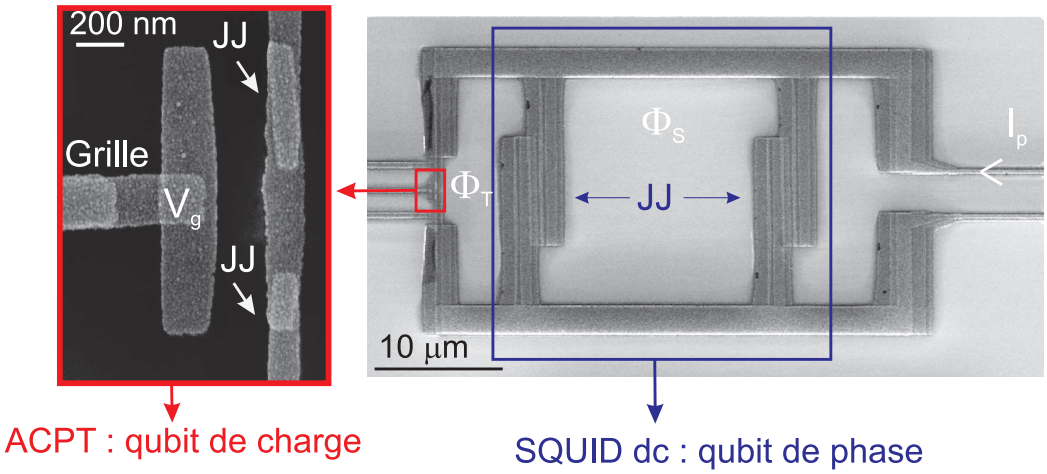

FIG. 1.2 – *Photos MEB du circuit couplé. La photo de droite montre le SQUID disposé en parallèle avec l'ACPT, lequel apparaît en gros plan sur la photo de gauche.*

fréquence, de 8 GHz à 21 GHz. Ces propriétés ont été parfaitement expliquées par le modèle théorique du SQUID. L'ajustement nous a permis de déterminer très précisément les paramètres des jonctions Josephson du SQUID.

Ces mesures de spectroscopies ont été réalisées de la manière suivante. Après une excitation du SQUID au moyen d'un signal micro-onde de flux ou de grille, une impulsion de flux produit l'échappement des états excités du SQUID vers l'état de tension. La mesure de la probabilité d'échappement en fonction de la fréquence du signal micro-onde présente un pic de résonance à la fréquence ν_S du qubit.

Nous nous sommes intéressés aux formes des raies de spectroscopie du SQUID car ces dernières nous informent sur les processus de décohérence du qubit de phase. La figure 1.3 présente deux spectroscopies du SQUID réalisées en deux points de polarisation différents. Pour un des points, un seul pic de résonance est visible à la fréquence ν_S. Pour l'autre, plusieurs pics de résonance espacés de 115 MHz apparaissent. En prenant en compte les fluctuations du flux, du courant et les sensibilités du SQUID à ces fluctuations, nous avons réussi à décrire très précisément les raies de spectroscopie. Nous trouvons que ce bruit en courant provient de l'impédance effective Z_e de l'environnement électrique (figure 1.4). Les fréquences du bruit en courant sont majoritairement situées proche de la résonance de l'environnement évaluée à 115 MHz. Ainsi, les pics satellites sont parfaitement expliqués par l'environnement électrique thermalisé à 75 mK. La valeur RMS des fluctuations du bruit en courant est estimée à $\langle \delta I_{Z_e}^2 \rangle^{1/2} = 12$ nA. Le bruit de flux est, quant à lui, basse fréquence, inférieur à 20 kHz. Il est responsable de l'élargissement des raies de spectroscopie. Nous avons déterminé une valeur des fluctuations du bruit de flux égale à $\langle \delta \Phi_S^2 \rangle^{1/2} \approx 1$ mΦ_0.

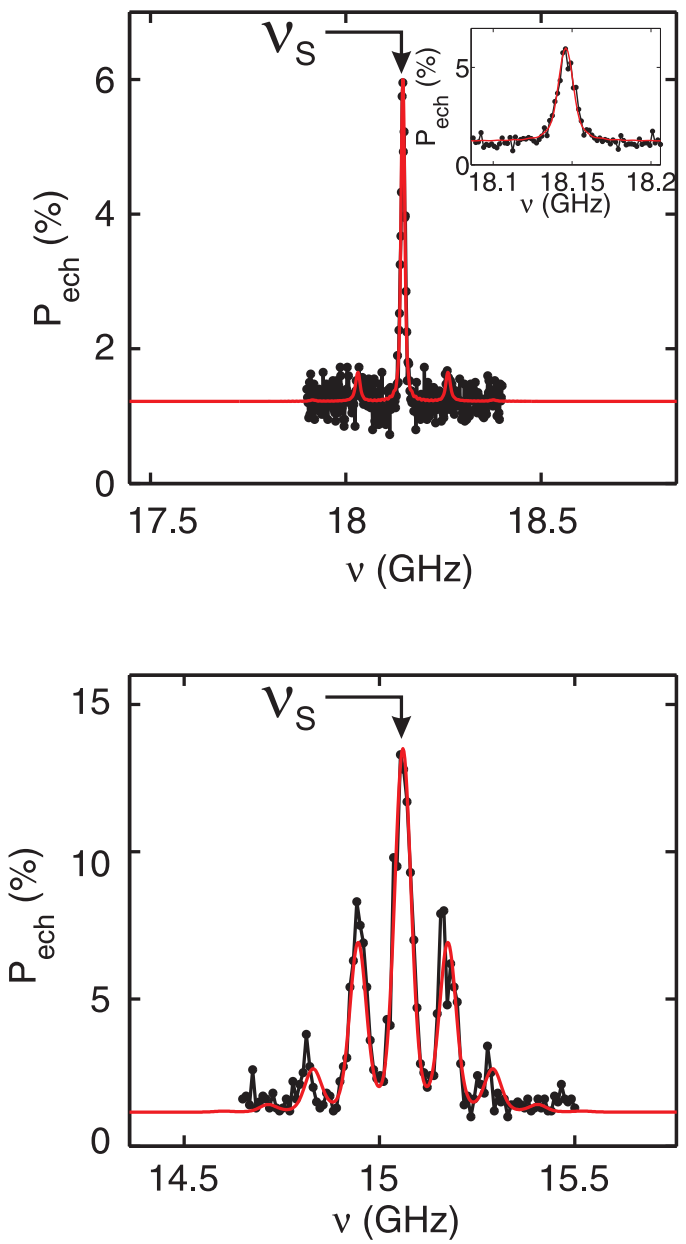

FIG. 1.3 – *Spectroscopies du SQUID en deux points de polarisation différents. Les formes des raies de spectroscopie sont reliées aux processus de décohérence du qubit. Les raies théoriques sont illustrées en trait continu rouge. Elles sont en très bon accord avec les raies expérimentales. La spectroscopie inférieure présente des pics satellites qui sont éloignés de la fréquence ν_S d'une fréquence multiple de 115 MHz. Ces pics satellites sont dus au bruit en courant.*

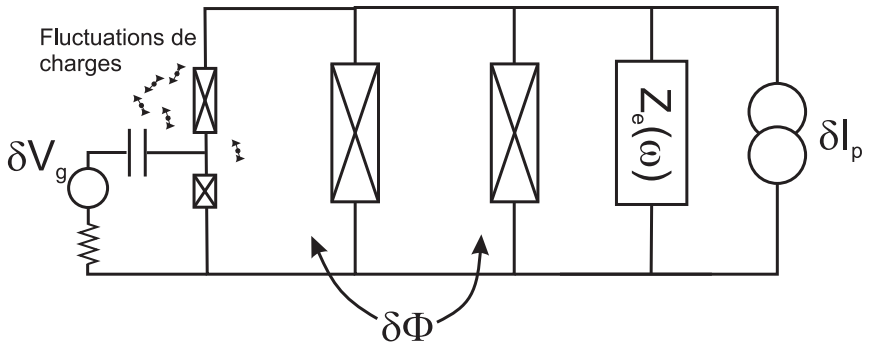

FIG. 1.4 – *Schématisation des sources de bruits dans notre circuit. Le flux, le courant de polarisation et la tension de la grille fluctuent respectivement de $\delta\Phi$, δI_p et δV_g. Des fluctuations de charges proches de l'ACPT peuvent perturber ce dernier.*

1.2.4 Le transistor asymétrique : un qubit de charge

Nous avons caractérisé pour la première fois un transistor à paires de Cooper fortement asymétrique (ACPT). Par son asymétrie, le qubit étudié est différent du Quantronium. Ce dernier correspond à un transistor à paires de Cooper symétrique, qui a été mis au point par le groupe Quantronics au CEA Saclay à partir de 2002 [6]. Il est cependant intéressant de comparer les propriétés de ces deux transistors.

La spectroscopie de l'ACPT est réalisée d'une façon semblable à celle du SQUID. Elle consiste à mesurer la probabilité d'échappement du SQUID en fonction de la fréquence du signal micro-onde (de flux ou de grille), l'échappement du SQUID étant toujours provoqué par une impulsion de flux nanoseconde. Nous utilisons ici le fait que la probabilité d'échappement du SQUID dépend de l'état du qubit de charge. Cette propriété sera expliquée par la suite.

Comme cela a été calculé puis mesuré, la fréquence du transistor est minimale lorsque $n_g = 0.5$. Ainsi, à cette polarisation, l'ACPT est, au premier ordre, découplé du bruit de charge. Pour cette raison, les mesures de l'ACPT ont été principalement réalisées pour la valeur $n_g = 0.5$. La figure 1.5.a montre la dépendance expérimentale de la fréquence ν_T en fonction de la phase δ pour $n_g = 0.5$. La fréquence ν_T varie sur une large gamme de fréquence, de 8.745 GHz à 20.302 GHz. Le modèle théorique permet d'expliquer très précisément cette dépendance. Les paramètres des jonctions Josephson de l'ACPT, et par conséquent, son asymétrie, sont extraits très précisément de l'ajustement.

L'ACPT possède deux points de polarisation optimaux pour lesquels il est, au premier ordre, insensible aux bruits en courant, en flux et en charge. Le premier est le point de coordonnées $(\delta = 0, n_g = 0.5)$ pour lequel la fréquence ν_T est maximale. Le deuxième est celui de coordonnées $(\delta = \pi, n_g = 0.5)$ pour lequel la fréquence ν_T est minimale. En ce point optimal, la théorie prédit que la fréquence ν_T est proportionnelle à l'asymétrie en courant critique des jonctions Josephson du transistor.

En ce point, nous mesurons une largeur à mi-hauteur de la spectroscopie de l'ACPT

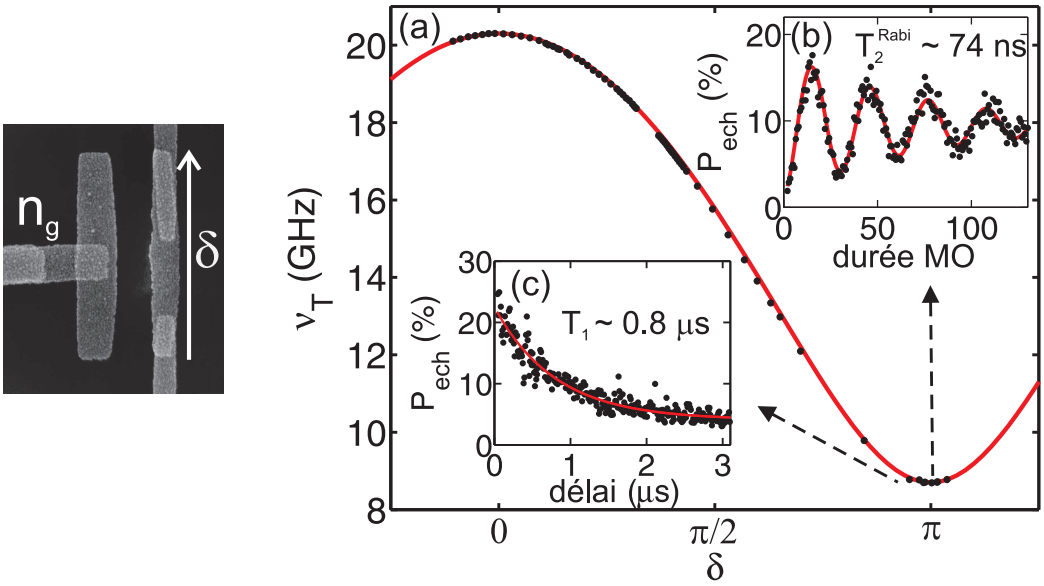

FIG. 1.5 – *(a) Fréquence du transistor ν_T en fonction de la phase surpraconductrice δ pour $n_g = 1/2$. (b) Oscillations de Rabi et (c) mesure du temps de relaxation du transistor au point de polarisation ($\delta = \pi, n_g = 1/2$).*

de 20 MHz. De plus, le temps d'amortissement des oscillations de Rabi est évalué à 74 ns (figure 1.5.b). Ces deux mesures sont des indicateurs de la décohérence du qubit de charge. La décohérence est ici induite par la sensibilité au second ordre de la fréquence ν_T aux fluctuations des charges proches de l'ACPT, du flux et du courant de polarisation. Les estimations des bruits en courant et en flux sont semblables à celles extraites de l'analyse des spectroscopies du SQUID. Nous évaluons aussi la densité spectrale classique du bruit de charge $S^c_{n_g}(\omega) \approx 2 \times 10^{-6}/|\omega|$. Cette densité spectrale est proche de celle trouvée dans le Quantronium [14]. Nous trouvons que l'ACPT est fortement sensible, au deuxième ordre, aux fluctuations de charge. Cette sensibilité pourrait être le facteur limitant de la cohérence du transistor.

D'autre part, au point ($\delta = \pi, n_g = 0.5$), nous mesurons un temps de relaxation du transistor de 0.80 μs (figure 1.5.c). Ce temps de relaxation relativement long est bien expliqué théoriquement par le bruit en courant.

1.2.5 Couplage variable entre les deux qubits

La figure 1.6 montre la mesure des premiers niveaux du spectre d'énergie du circuit couplé en fonction du flux Φ_S à travers le SQUID, pour un courant de polarisation de 1810 nA. Dans le cas où les fréquences ν_S et ν_T sont suffisamment éloignées, l'Hamiltonien de couplage (1.4) est négligeable et les fréquences théoriques ν_S et ν_T décrivent très bien le spectre d'énergie mesuré. Cela nous a permis d'étudier séparément le SQUID et le transistor. En revanche, lorsque la fréquence ν_S est proche de ν_T, les deux qubits sont intriqués.

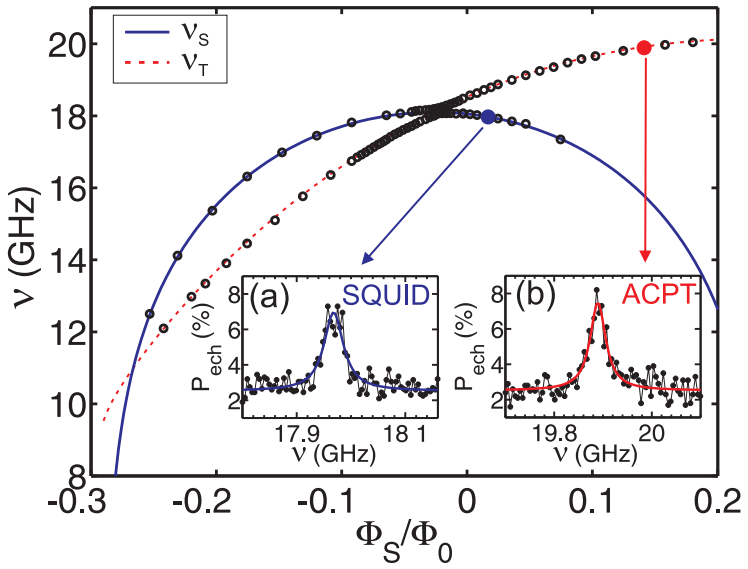

FIG. 1.6 – *Mesure du spectre d'énergie du circuit couplé. La ligne continue bleu correspond à la fréquence ν_S théorique du SQUID. La ligne pointillée rouge correspond à la fréquence ν_T théorique du transistor. Dans le cas où les fréquences ν_S et ν_T sont éloignées, les fréquences théoriques ν_S et ν_T décrivent très bien le spectre d'énergie mesuré.*

Le couplage entre les deux qubits doit être pleinement pris en compte.

La figure 1.7 montre le spectre d'énergie du circuit couplé en fonction de la charge n_g de grille pour un point de polarisation donné. Les fréquences ν_S et ν_T sont illustrées par des traits pointillés blancs. La fréquence ν_S est constante. La fréquence ν_T décrit une parabole et croise la fréquence ν_S en son minimum. Dans le cas où les fréquences des deux qubits sont suffisamment éloignées, les niveaux d'énergie du circuit couplé sont bien décrits par les énergies théoriques $h\nu_S$ et $h\nu_T$. Les états $|0,+\rangle$ et $|1,-\rangle$ sont les états propres du circuit couplé. En revanche, proche de la résonance ($\nu_S \approx \nu_T$), les niveaux d'énergie du circuit couplé s'écartent des énergies $h\nu_S$ et $h\nu_T$. Les niveaux d'énergie se repoussent et un anti-croisement, qui est bien expliqué par l'Hamiltonien (1.4), apparaît. Au point de résonance entre les deux qubits, les états propres sont les états d'intrication maximale entre les deux qubits, à savoir l'état symétrique $(|0,+\rangle + |1,-\rangle)/\sqrt{2}$ et l'état antisymétrique $(|0,+\rangle - |1,-\rangle)/\sqrt{2}$. Les niveaux d'énergie de ces états sont séparés de la valeur du couplage $\nu_g \approx 113$ MHz.

La figure 1.8 présente la mesure du spectre d'énergie du circuit couplé en fonction du flux Φ_S à travers le SQUID pour un autre point de polarisation du circuit. Les fréquences ν_S et ν_T théoriques se croisent maintenant à la fréquence de résonance $\nu_r \equiv \nu_S = \nu_T \approx 10.36$ GHz. Le couplage est de nouveau responsable d'un anti-croisement des niveaux d'énergie. Nous en déduisons la valeur du couplage en ce nouveau point de polarisation $\nu_g \approx 0.9$ GHz. Cette valeur du couplage est différente de celle mesurée précédemment.

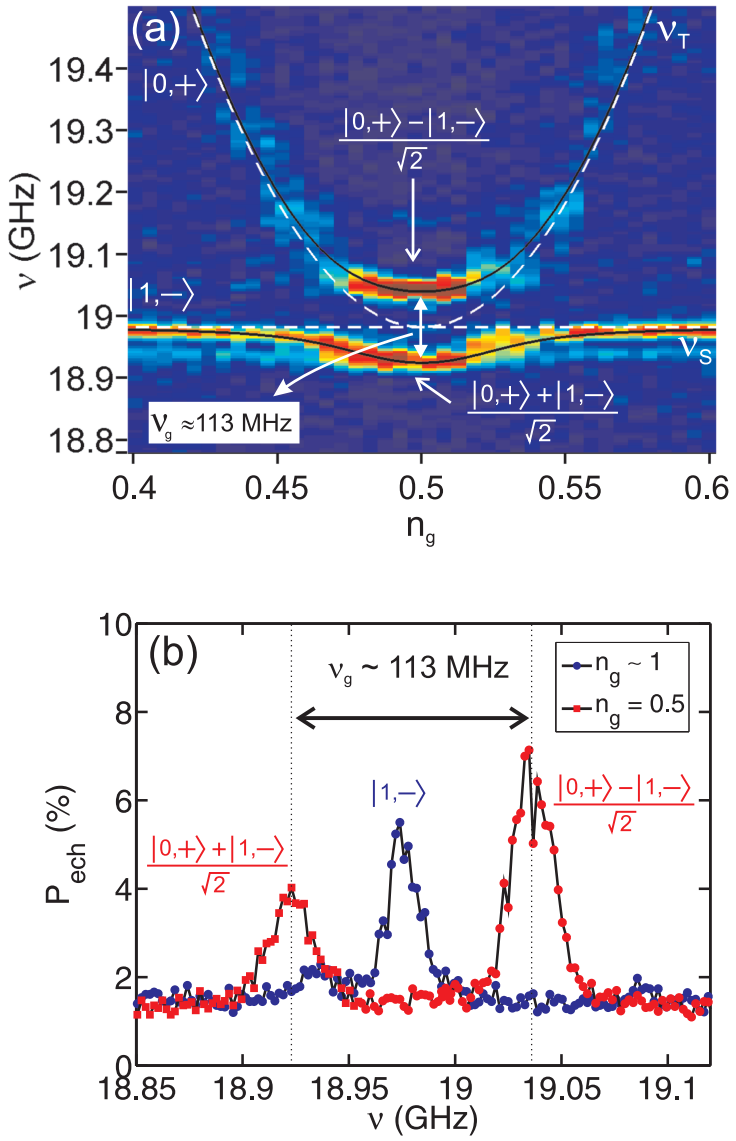

FIG. 1.7 – *(a) Spectroscopie du circuit couplé en fonction de la charge n_g de la grille pour un point de polarisation donné. Le spectre d'énergie ressort en couleurs vives (probabilité d'échappement élevée). Les dépendances théoriques de ν_S et ν_T avec la charge de grille n_g apparaissent en trait pointillé blanc. La fréquence ν_S indépendante de n_g est égale à 18.980 GHz. La fréquence ν_T présente une dépendance parabolique qui coupe ν_S en son minimum ($n_g = 0.5$). Le couplage entre le SQUID et le transistor est responsable d'un anti-croisement des niveaux du circuit couplé. La valeur du couplage ν_g correspond à l'écart des niveaux d'énergie à la résonance des deux qubits. Nous trouvons ainsi $\nu_g \approx 113$ MHz. Le spectre d'énergie théorique est illustré en noir. (b) Détails des spectroscopies réalisées pour $n_g = 0.5$ et pour $n_g \approx 1$.*

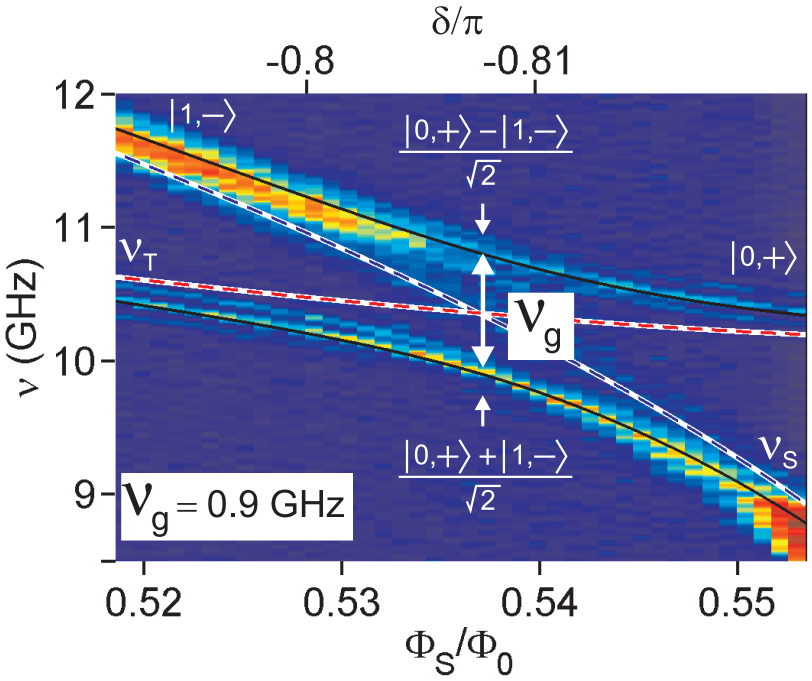

FIG. 1.8 – *Spectroscopie du circuit couplé en fonction du flux Φ_S à travers le SQUID pour un point de polarisation donné. Le spectre d'énergie ressort en couleurs vives (probabilité d'échappement élevée). Les fréquences théoriques ν_S du SQUID et ν_T du transistor sont indiquées respectivement par les lignes bleu et rouge. Elles se croisent à la fréquence de résonance $\nu_r = 10.36$ GHz. Le couplage est responsable d'un anti-croisement des niveaux d'énergie. La valeur du couplage ν_g correspond à l'écart des niveaux d'énergie à la résonance des deux qubits. Nous trouvons ainsi $\nu_g \approx 0.9$ GHz. Le spectre d'énergie théorique est illustré en noir.*

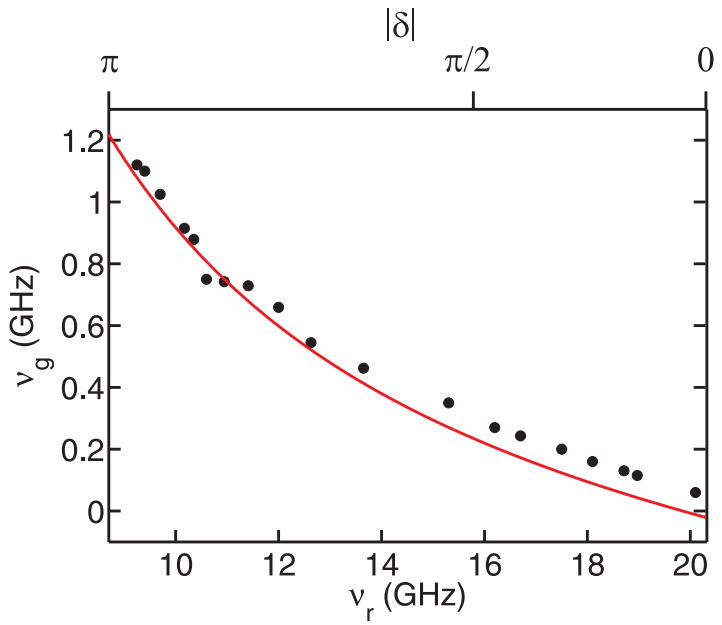

FIG. 1.9 – *Mesure du couplage ν_g en fonction de la fréquence de résonance ν_r. Le couplage varie de plus d'un facteur 18, passant de 1.1 GHz à 60 MHz. Le couplage théorique est représenté par la ligne rouge.*

Grâce à la grande plage de variation des fréquences ν_S et ν_T, nous avons pu mettre en résonance les qubits à des fréquences ν_r allant de 9 GHz à 20 GHz. La figure 1.9 présente la dépendance du couplage ν_g avec la fréquence de résonance ν_r. De manière générale, le couplage ν_g décroît lorsque ν_r augmente. Plus précisément, lorsque ν_r passe de 9 GHz à 20 GHz le couplage ν_g varie de plus d'un facteur 18, passant de 1.1 GHz à 60 MHz. Cette importante variation du couplage est bien expliquée par le couplage théorique total provenant du couplage Josephson et du couplage capacitif.

Le circuit étudié permet d'avoir un couplage nul au premier point optimal du transistor ($\delta = 0, n_g = 1/2$) et un couplage maximal pour l'autre point optimal ($\delta = \pi, n_g = 1/2$). Cette propriété est importante. En effet, le couplage nul permettrait de réaliser des opérations à un qubit sans perturber l'autre qubit. D'un autre côté, une valeur non nulle du couplage est nécessaire pour des opérations à deux qubits.

1.2.6 Mesure de l'état du transistor asymétrique

Les spectroscopies du transistor montrent que la probabilité d'échappement du SQUID dépend de l'état du transistor. Nous avons pu montrer que cette dépendance résulte de l'Hamiltonien de couplage entre le transistor et le SQUID.

Dans la limite $\nu_T \gg \nu_S$, l'analyse de l'Hamiltonien de couplage montre qu'un courant traverse le transistor. Ce courant dépend de l'état du transistor. Il est détecté par le SQUID, nous permettant ainsi de déduire l'état du transistor. Ce premier modèle explique la mesure du Quantronium [33]. En revanche, dans notre circuit, ce modèle ne permet pas d'expliquer les résultats expérimentaux.

L'explication de la mesure de l'état du transistor est résumée à la figure 1.10. La mesure du transistor est réalisée au moyen d'une impulsion de flux nanoseconde. Lors de cette impulsion, les fréquences ν_S et ν_T varient et se croisent. Un transfert adiabatique de l'état $|0,+\rangle$ vers l'état $|1,-\rangle$ a lieu durant le passage du croisement. Ce passage adiabatique est rendu possible grâce à un fort couplage entre le SQUID et le transistor. Ainsi, dans le cas où l'ACPT est initialement excité, son excitation est transmise au SQUID durant l'impulsion de flux. L'excitation du SQUID est ensuite détectée car celle-ci provoque l'échappement du SQUID. En conclusion, la mesure de l'état du transistor est expliquée par un *transfert quantique adiabatique*.

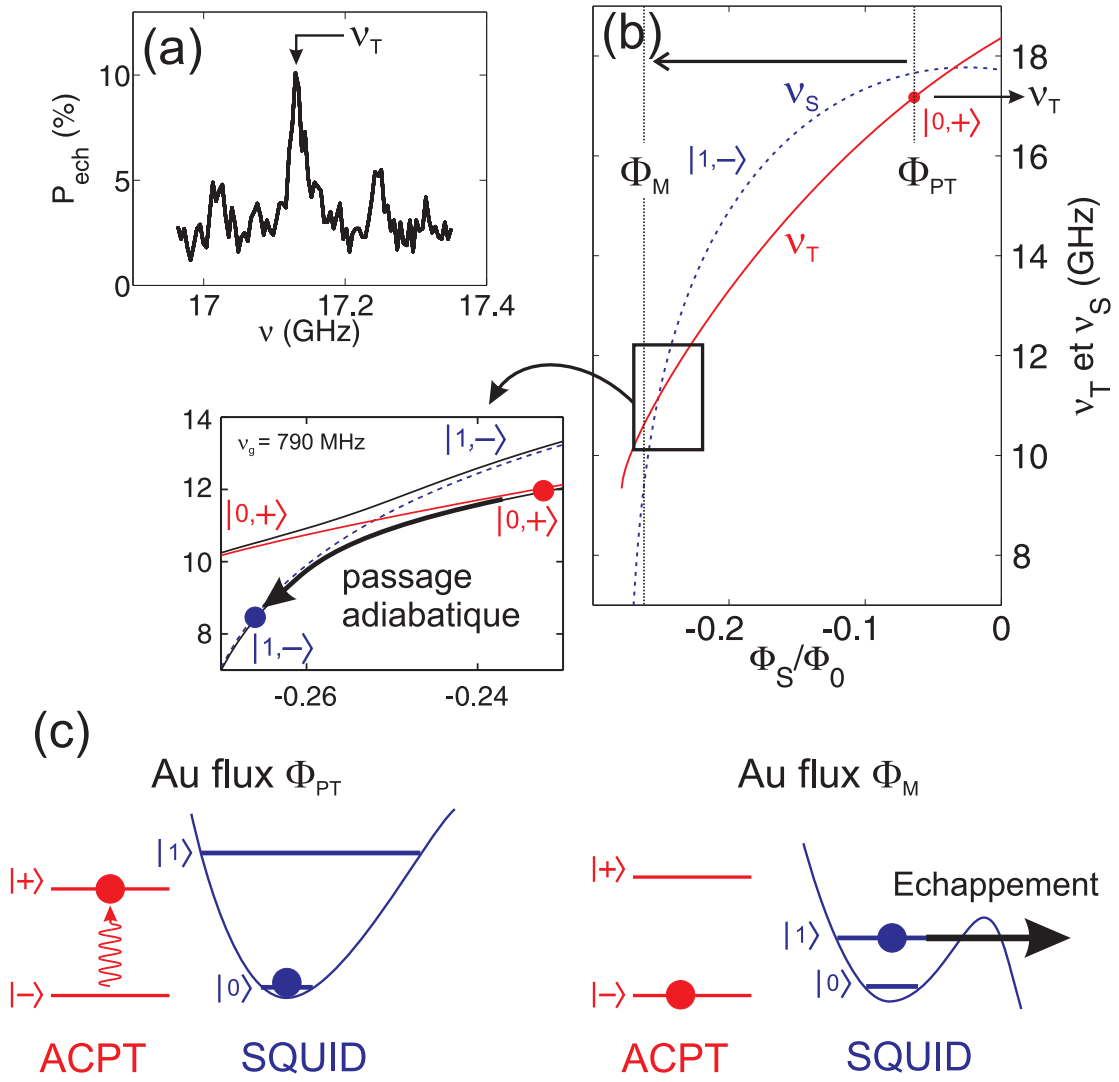

FIG. 1.10 – *(a) Spectroscopie de l'ACPT : mesure de la probabilité d'échappement du SQUID en fonction de la fréquence micro-onde au point de polarisation indiqué à la figure (b) pour Φ_{PT}. La probabilité d'échappement du SQUID augmente quand la fréquence micro-onde est accordée à la fréquence ν_T de l'ACPT. La spectroscopie est réalisée au moyen d'une impulsion de flux nanoseconde qui varie le flux Φ_S de Φ_{PT} à Φ_M. (b) Evolution des fréquences ν_S et ν_T durant cette impulsion de flux. Les fréquences ν_S et ν_T se croisent. En fait, comme le montre le zoom, les véritables niveaux d'énergie s'anti-croisent en raison du couplage $\nu_g = 790$ MHz. Lors du passage du croisement, l'état $|0,+\rangle$ est transféré adiabatiquement vers l'état $|1,-\rangle$. (c) Schématisation de la mesure du transistor. Au flux Φ_{PT}, nous excitons le transistor dans l'état $|+\rangle$. Durant l'impulsion de flux, l'excitation du transistor est transmise au SQUID. Au flux Φ_M, le SQUID est donc dans l'état $|1\rangle$ et, par conséquent, s'échappe.*

Chapitre 2

Théorie du circuit couplé

Le circuit supraconducteur étudié est composé d'un transistor à paires de Cooper asymétrique disposé en parallèle avec un SQUID dc. Par conséquent, nous nous attendons à ce que la dynamique quantique d'un tel circuit fasse ressortir les dynamiques respectives du SQUID et du transistor. D'autre part, le SQUID et le transistor étant connectés, un couplage entre le SQUID et le transistor est prévisible. Nous vérifierons cela dans ce chapitre qui est consacré à l'étude théorique de la dynamique quantique de notre circuit.

La première partie de ce chapitre portera sur la modélisation du circuit couplé. Cela reviendra à déterminer l'Hamiltonien total du circuit. Nous montrerons que cet Hamiltonien se décompose en trois Hamiltoniens différents. A savoir l'Hamiltonien du SQUID, l'Hamiltonien du transistor et l'Hamiltonien de couplage entre le SQUID et le transistor. Nous étudierons dans une deuxième partie la dynamique quantique du SQUID. Nous montrerons que le SQUID peut être vu comme un *qubit de phase*. Nous étudierons ensuite la dynamique quantique du transistor. Ce dernier pourra être vu comme un *qubit de charge*. Enfin, nous nous intéresserons à l'Hamiltonien de couplage entre les deux qubits.

2.1 Modélisation du circuit couplé

Cette partie présentera les différentes étapes théoriques qui ont été nécessaires pour trouver l'expression analytique de l'Hamiltonien du circuit couplé. Nous montrerons dans un premier temps le circuit électrique équivalent. Nous utiliserons ensuite le formalisme des variables de noeuds, qui a été introduit par M. Devoret. Nous nous intéresserons aux équations dynamiques de ces variables. Ces équations permettront de trouver le Lagrangien. A partir de ce dernier, l'Hamiltonien sera déduit.

2.1.1 La jonction Josephson

Il existe plusieurs types de jonction Josephson. En voici une liste non exhaustive : les micro-ponts, les points de contact, les jonctions supraconducteur - métal normal - supra-

conducteur [34]. La jonction Josephson que nous utilisons est formée par deux électrodes supraconductrices de même type séparées par une fine couche isolante de l'ordre de 10 à 30 Å.

Les propriétés de transport de la jonction utilisée dépendent de la température. Plaçons nous tout d'abord au-dessus de la température critique T_c. Les électrodes sont métalliques et le transport électrique se fait au moyen des électrons. Un courant apparaît entre les deux électrodes quand les électrons passent par effet tunnel à travers la jonction Josephson. Ceci est rendu possible si une tension apparaît. Le transport est alors résistif.

En dessous de T_c, les électrodes sont supraconductrices et les électrons se condensent en paires de Cooper. On introduit pour chaque condensat, la fonction d'onde $\Psi(r) = \sqrt{n(r)}e^{i\varphi(r)}$, où n est la densité de paires de cooper et φ est la phase supraconductrice. A tension nulle, les fonctions d'ondes se superposent au niveau de la jonction Josephson. Le recouvrement des fonctions d'ondes est responsable d'un courant tunnel cohérent, sans dissipation, qui est appelé communément "supercourant".

La jonction Josephson, séparée par une fine couche isolante, possède une capacité intrinsèque qui est proportionnelle à la surface de recouvrement des deux supraconducteurs. Ainsi, la jonction Josephson réelle est décrite par une jonction Josephson pure en parallèle avec une capacité. Dans la suite, lorsque nous parlerons de la jonction Josephson, nous supposerons l'association de la capacité et de l'élément Josephson.

2.1.2 Relations courant-phase

Dans notre circuit supraconducteur, on trouve trois différents dipoles : la capacité C, l'inductance L et la jonction Josephson pure JJ. Ces différents éléments sont symbolisés à la figure 2.1. Pour chaque dipole, le courant et la tension peuvent être exprimés en fonction de la *différence de phase* supraconductrice Λ (invariante de gauge) sur le dipole. Nous utilisons le fait que la tension aux bornes de chaque dipole est proportionnelle à la dérivée de la *différence de phase* :

$$V = \phi_0 \dot{\Lambda}, \tag{2.1}$$

où $\phi_0 = \Phi_0/2\pi$; $\Phi_0 = h/2e$ est le quantum de flux.

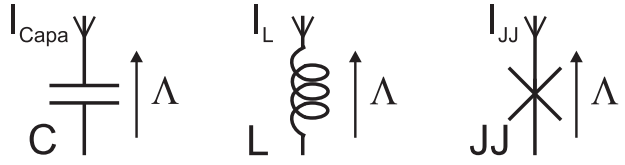

FIG. 2.1 – *Les différents dipoles électriques rencontrés dans notre circuit supraconducteur : la capacité C, l'inductance L et la jonction Josephson pure JJ. Λ correspond à la différence de phase supraconductrice sur le dipole.*

Le courant I_{Capa} dans la capacité est donné par

$$I_{Capa} = C\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = C\phi_0\ddot{\Lambda}. \tag{2.2}$$

Le flux Φ qui traverse une inductance L est relié à la *différence de phase* par $\Phi = \phi_0\Lambda$. Le courant I_L dans l'inductance L s'exprime alors comme

$$I_L = \frac{\Phi}{L} = \frac{\phi_0\Lambda}{L}. \tag{2.3}$$

Enfin, le courant I_{JJ} dans la jonction Josephson pure est reliée à Λ par l'équation Josephson

$$I_{JJ} = I_C \sin(\Lambda). \tag{2.4}$$

Lorsque la *différence de phase* Λ est petite, la jonction Josephson pure peut être vue comme une inductance $L_{JJ} = \phi_0/I_c$.

2.1.3 Circuit électrique équivalent

La figure 2.2 représente le circuit électronique équivalent de notre circuit supraconducteur. Il contient le SQUID dc qui correspond à la boucle contenant les deux jonctions Josephson identiques. Ces dernières sont représentées par une jonction Josephson pure de courant critique I_0 en parallèle avec une capacité C_0. Le SQUID-dc est inductif à cause de l'inductance géométrique et cinétique de la boucle supraconductrice. ces dernières sont divisées en trois inductances : L_1, L_2 et L_3.

Le SQUID dc est en parallèle avec un transistor à paires de Cooper asymétrique, abrégé ACPT en raison de sa traduction anglaise "Asymmetric Cooper Pair Transistor". L'ACPT est constitué de deux jonctions Josephson en série, qui créent un îlot supraconducteur entre elles. Ces jonctions ont respectivement un courant critique I_1^T et I_2^T, ainsi qu'une capacité C_1^T et C_2^T. Les jonctions Josephson de l'ACPT sont asymétriques, c'est-à-dire que les courants critiques et les capacités des deux jonctions diffèrent. L'îlot du transistor est polarisé par une source de tension V_g, décrite théoriquement par une capacité C_P infinie chargée par une charge Q de telle sorte que le rapport $Q/C_p \equiv V_g$.

Le circuit contient de plus une grande inductance $L_p \to \infty$ qui est traversée par un champ magnétique Φ_p tel que le rapport $\Phi_p/L_p \equiv I_p$ est fixe. Cela constitue la polarisation en courant.

2.1.4 Les variables des noeuds

La théorie d'un circuit électronique est établie par les différentes lois de Kirchhoff. Nous écrirons ces lois en utilisant le formalisme des variables de noeuds introduit par M. Devoret [35]. Un noeud est choisi en premier comme noeud de référence, on l'appelle "la masse". Nous avons choisi ici de mettre la masse en bas de notre circuit. Nous mentionnons que ce choix est arbitraire. Les noeuds restants du circuit sont référés comme des noeuds actifs.

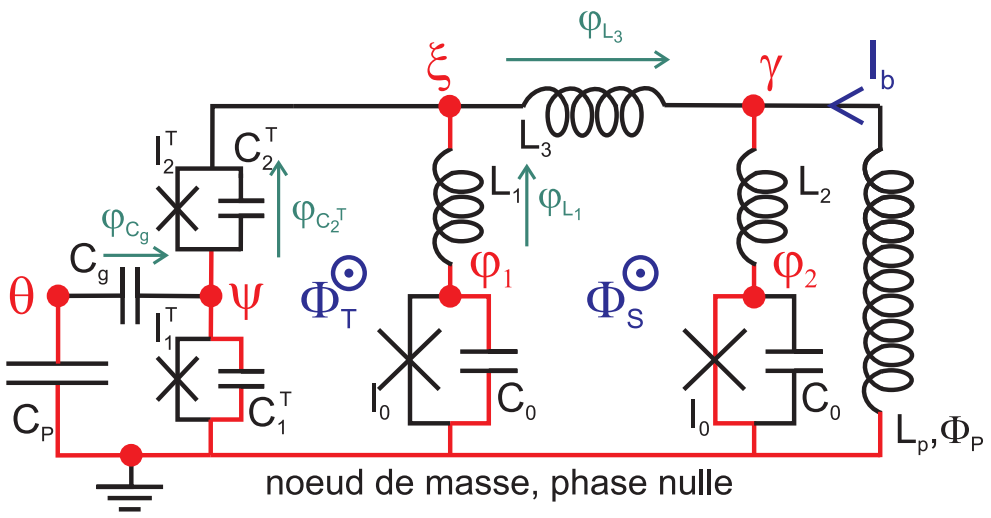

FIG. 2.2 – *Circuit électrique équivalent de l'échantillon.*

Nous en dénotons six dans notre circuit auxquels on associe les phases actives φ_1, φ_2, ψ, θ, γ et ξ. De la masse, on construit alors un "arbre sous-tendu" en dessinant des branches de telle sorte que les noeuds actifs soient connectés à la masse via un seul chemin de l'arbre. L'arbre sous-tendu est dessiné en rouge sur la figure 2.2.

La *différence de phase* sur un dipole est calculée de deux manières différentes en fonction de la position de ce dipole sur l'arbre :

(a) Lorsqu'un dipole est inclus dans une des branches de l'arbre, la *différence de phase* est égale à la différence des phases des noeuds de ce dipole. Par exemple, la *différence de phase* sur l'inductance L_1 est donnée par $\varphi_{L_1} = \xi - \varphi_1$.

(b) Lorsqu'un dipole n'est pas sur l'arbre sous-tendu, on définit tout d'abord un chemin minimal sur l'arbre qui relie entre eux les noeuds A et B de ce dipole. Ce cas est illustré à la figure 2.3. Le chemin minimal forme une boucle dans laquelle passe un flux Φ. Toutes les *différences de phase* des dipoles sur cette boucle sont connues par la règle (a), exceptée la *différence de phase* Λ. On utilise alors la quantification de la phase dans une boucle supraconductrice [36] pour trouver $\Lambda = \phi_B - \phi_A - 2\pi\Phi/\Phi_0$, où ϕ_B et ϕ_A sont respectivement les phases des noeuds A et B.

On en déduit que la *différence de phase* sur l'inductance L_3 est donnée par $\varphi_{L_3} = \gamma - \xi - \phi_S$, où $\phi_S = 2\pi\Phi_S/\Phi_0$ est le flux réduit dans le SQUID. De même, la *différence de phase* sur la capacité C_2^T du transistor est donnée par $\varphi_{C_2^T} = \xi - \psi - \phi_T$, où $\phi_T = 2\pi\Phi_T/\Phi_0$ est le flux réduit dans la boucle du transistor. On trouve aussi la *différence de phase* sur la capacité de grille $\varphi_{C_g} = \psi - \theta$. Enfin, nous notons que la capacité intrinsèque de la jonction Josephson et la jonction Josephson pure qui lui est associée en parallèle, ont des *différences de phases* identiques.

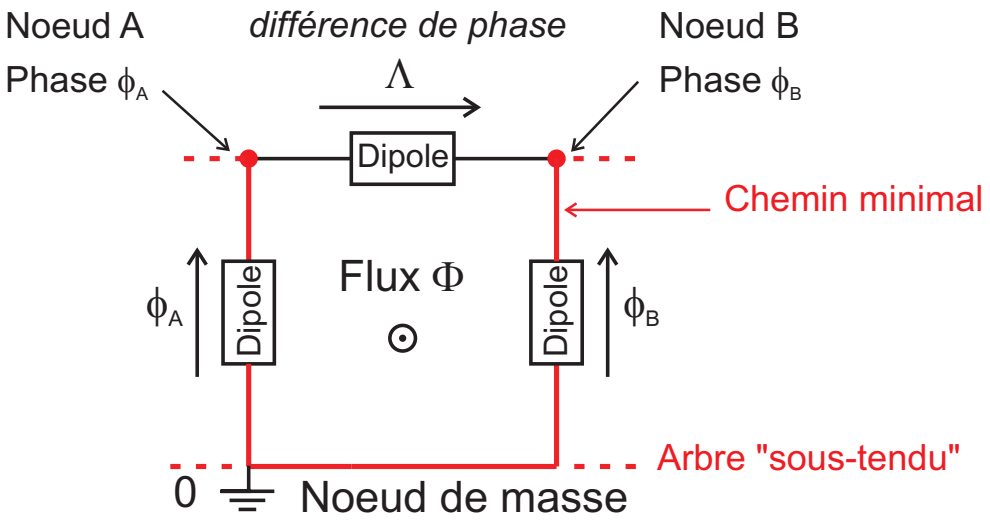

FIG. 2.3 – *Définition du chemin minimal sur l'arbre sous-tendu qui relie le noeud A au noeud B. L'arbre sous tendu est représenté en rouge et le chemin minimal ressort en trait plein.*

2.1.5 Les équations dynamiques

La connaissance de *la différence de phase* sur chaque dipole du circuit, permet grâce aux équations (2.2,2.3,2.4), d'accéder aux courants dans le circuit. Nous allons écrire pour chaque noeud actif l'équation de conservation de courant (loi de Kirchoff) :

- Conservation du courant au noeud φ_2 :

$$\phi_0 \frac{\gamma - \varphi_2}{L_2} - C_0 \phi_0 \ddot{\varphi}_2 - I_0 \sin \varphi_2 = 0 \tag{2.5}$$

- Conservation du courant au noeud γ :

$$\phi_0 \frac{\gamma - \xi - \phi_S}{L_3} + \phi_0 \frac{\gamma - \varphi_2}{L_2} - I_p = 0 \tag{2.6}$$

- Conservation du courant au noeud ξ :

$$\phi_0 \frac{\gamma - \xi - \phi_S}{L_3} - \phi_0 \frac{\xi - \varphi_1}{L_1} - C_2^T \phi_0 (\ddot{\xi} - \ddot{\psi}) - I_2^T \sin(\xi - \psi - \phi_T) = 0 \tag{2.7}$$

- Conservation du courant au noeud φ_1 :

$$\phi_0 \frac{\xi - \varphi_1}{L_1} - C_0 \phi_0 \ddot{\varphi}_1 - I_0 \sin(\varphi_1) = 0 \tag{2.8}$$

- Conservation du courant au noeud ψ :

$$I_2^T \sin(\xi - \psi - \phi_T) + C_2^T \phi_0 (\ddot{\xi} - \ddot{\psi}) - C_g \phi_0 (\ddot{\psi} - \ddot{\theta}) - C_1^T \phi_0 \ddot{\psi} - I_1^T \sin(\psi) = 0 \tag{2.9}$$

- Conservation du courant au noeud θ :

$$C_g\ddot{\psi} - (C_P + C_g)\ddot{\theta} = 0 \tag{2.10}$$

L'équation de conservation de courant au noeud de référence (masse) n'est pas utile car c'est une combinaison des six équations dynamiques précédentes. Le système de six équations trouvé décrit la dynamique complète du circuit.

2.1.6 Le Lagrangien

Expression initiale du Lagrangien. Le Lagrangien du circuit couplé dépend des six phases actives du circuit et de leur dérivée temporelle. On notera sous forme vectorielle les six phases tel que $\vec{x} = (\varphi_1, \varphi_2, \psi, \theta, \gamma, \xi)$. Les six équations d'Euler-Lagrange sont alors définies par

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \tag{2.11}$$

où x_i est la composante i du vecteur $\vec{x}$. Le Lagrangien est construit pour que les équations d'Euler-Lagrange soient identiques aux équations de conservation du courant du §2.1.5. Le Lagrangien trouvé dépend du vecteur $\vec{x}$ et du vecteur dérivé $\dot{\vec{x}}$. Il se met sous la forme

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\dot{\vec{x}}, \vec{x}) \;=\;& \phi_0^2\left\{\frac{1}{2}C_0\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}C_0\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}C_2^T(\dot{\xi} - \dot{\psi})^2 + \frac{1}{2}C_1^T\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}C_g(\dot{\psi} - \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}C_P\dot{\theta}^2\right\}\\ &+\phi_0\left\{I_0\cos(\varphi_2) + I_0\cos(\varphi_1) + I_2^T\cos(\psi - \xi + \phi_T) + I_1^T\cos(\psi)\right\}\\ &-\phi_0^2\left\{\frac{1}{2}\frac{(\xi - \varphi_1)^2}{L_1} + \frac{1}{2}\frac{(\gamma - \varphi_2)^2}{L_2} + \frac{1}{2}\frac{(\gamma - \xi - \phi_S)^2}{L_3} - \frac{1}{\phi_0}I_p\,\gamma\right\}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Le Lagrangien s'écrit aussi comme la différence entre un terme cinétique $T(\dot{\vec{x}})$ qui dépend seulement de $\dot{\vec{x}}$, et un terme potentiel $V(\vec{x})$ qui dépend seulement de $\vec{x}$:

$$\mathcal{L}(\dot{\vec{x}}, \vec{x}) = T(\dot{\vec{x}}) - V(\vec{x}). \tag{2.13}$$

Par identification on trouve le terme cinétique

$$T(\dot{\vec{x}}) \;=\; \phi_0^2\left\{\frac{1}{2}C_0\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}C_0\dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2}C_2^T(\dot{\xi} - \dot{\psi})^2 + \frac{1}{2}C_1^T\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}C_g(\dot{\psi} - \dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}C_P\dot{\theta}^2\right\} \tag{2.14}$$

et le terme potentiel

$$\begin{aligned}V(\vec{x}) \;=\;& -\phi_0\left\{I_0\cos(\varphi_2) + I_0\cos(\varphi_1) + I_2^T\cos(\xi - \psi - \phi_T) + I_1^T\cos(\psi)\right\}\\ &+\phi_0^2\left\{\frac{1}{2}\frac{(\xi - \varphi_1)^2}{L_1} + \frac{1}{2}\frac{(\gamma - \varphi_2)^2}{L_2} + \frac{1}{2}\frac{(\gamma - \xi - \phi_S)^2}{L_3} - \frac{1}{\phi_0}I_p\,\gamma\right\}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Diminution du nombre de variables. Nous allons montrer que le nombre de variables du Lagrangien peut être réduit à quatre. Nous nous intéressons dans un premier temps à la phase γ. Le noeud γ n'est connecté à aucune capacité, ce qui entraîne l'absence de terme cinétique en $\dot{\gamma}^2$ dans le Lagrangien. La dynamique de γ est celle d'un oscillateur LC d'inductance $L_\gamma = L_2 L_3/(L_2 + L_3)$ et de capacité C_γ qui tend vers zéro. La fréquence caractéristique ν_γ de cet oscillateur, qui est donnée par $\nu_\gamma = 1/(2\pi\sqrt{L_\gamma C_\gamma})$, tend vers l'infinie. De ce fait, la phase γ est remplacée par sa valeur moyenne pour laquelle le potentiel $V(\vec{x})$ est minimum : $\partial V(\vec{x})/\partial\gamma = 0$. Notons que la condition précédente n'est qu'une retranscription de l'équation (2.6) de conservation de courant au noeud γ.

Nous étudions maintenant la dynamique de la phase ξ. L'équation (2.7) fait apparaître la fréquence caractéristique de ξ : $\nu_\xi = 1/(2\pi\sqrt{L_\xi C_\xi})$, où $C_\xi = C_2^T$ et $L_\xi = ((L_1 + L_3)/(L_1 L_3) + I_2^T/\phi_0)^{-1}$. En utilisant les paramètres de notre circuit, on trouve une valeur de ν_ξ d'environ 640 GHz. Cette fréquence est très élevée par rapport à la dynamique des variables φ_1, φ_2 et ψ qui seront étudiées par la suite. ξ est alors remplacé par la valeur moyenne $\langle\xi\rangle$ des oscillations rapides. A partir de l'équation (2.7) on trouve :

$$\frac{\phi_0}{L_3}(\gamma - \langle\xi\rangle - \phi_S) - \frac{\phi_0}{L_1}(\langle\xi\rangle - \varphi_1) - I_2^T \sin(\langle\xi\rangle - \psi - \phi_T) + C_2^T \phi_0 \ddot{\psi} = 0. \tag{2.16}$$

En prenant les paramètres de notre circuit et en supposant que la phase ψ oscille à environ 10 GHz, il ressort que les deux derniers termes ont des poids 1000 fois plus petits. Ceux-ci seront négligés. L'équation (2.16) devient

$$\frac{\phi_0}{L_3}(\gamma - \langle\xi\rangle - \phi_S) - \frac{\phi_0}{L_1}(\langle\xi\rangle - \varphi_1) = 0 \tag{2.17}$$

Enfin, on utilise les équations (2.6) et (2.17) pour exprimer les variables γ et $\langle\xi\rangle$ comme :

$$\gamma(x,y) = x + \eta y + \frac{\phi_S}{2}(1-\eta) + \frac{1}{4\phi_0} L_S I_p (1-\eta^2) \tag{2.18}$$

$$\langle\xi\rangle(x,y) = x - \eta y - \frac{\phi_S}{2}(1-\eta) + \frac{1}{4\phi_0} L_S I_p (1-\eta)^2, \tag{2.19}$$

où

$$x = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}. \tag{2.20}$$

L'inductance totale du SQUID est définie par $L_S = L_1 + L_2 + L_3$. Les inductances L_1 et L_2 sont supposées identiques dans notre circuit. La dissymétrie d'inductance η est définie par $L_3 = \eta L_S$.

Finalement, le Lagrangien ne dépend plus que des 4 variables : x, y, ψ et θ. Mentionnons que x et y sont les variables du SQUID. Alors que ψ et θ sont les variables du transistor.

Le potentiel du Lagrangien se réécrit comme :

$$\begin{aligned} V(x,y,\psi) &= 2E_J\left(-\cos(x)\cos(y) - s(\eta y + x) + b(y-y_B)^2\right) \\ &\quad -E_{J1}^T\cos(\psi) - E_{J2}^T\cos\left(\psi - \langle\xi\rangle(x,y) + \phi_T\right), \end{aligned} \tag{2.21}$$

avec les paramètres réduits $b = \phi_0/LI_0$, $s = I_p/2I_0$ et $y_B = \pi(\Phi_S/\Phi_0)$. Nous avons défini les énergies Josephson $E_J = \phi_0 I_0$, $E_{J1}^T = \phi_0 I_1$ et $E_{J1}^T = \phi_0 I_2$.

Nous remplaçons, dans le terme cinétique du Lagrangien, les variables $\dot{\varphi}_1$ et $\dot{\varphi}_2$ par les variables $\dot{x}$ et $\dot{y}$. Nous utilisons l'équation (2.19) pour identifier $\dot{\xi} = \dot{x} - \eta\dot{y}$. Le terme cinétique prend alors la forme :

$$T(\dot{x},\dot{y},\dot{\psi},\dot{\theta}) = \phi_0^2\left\{C_0\dot{x}^2 + C_0\dot{y}^2 + \frac{1}{2}C_2^T(\dot{x}-\eta\dot{y}-\dot{\psi})^2 + \frac{1}{2}C_1^T\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}C_g(\dot{\psi}-\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}C_P\dot{\theta}^2\right\} \tag{2.22}$$

Introduction du potentiel du SQUID dc. Le Lagrangien peut s'exprimer à l'aide des quatre variables x, y, ψ et θ. Néanmoins, nous tenons à changer dès à présent les variables x et y par les bonnes variables du SQUID : $X_\parallel$ et $Y_\perp$. Pour cela, nous introduisons le potentiel bidimensionnel du SQUID $V_S(x,y)$ qui est la contribution du potentiel $V(x,y,\psi)$ (équation (2.21)) qui contient seulement les variables x et y. Le potentiel $V_S(x,y)$ se met sous la forme :

$$V_S(x,y) = 2E_J\left(-\cos(x)\cos(y) - s(\eta y + x) + b(y-y_B)^2\right). \tag{2.23}$$

Nous soulignons que ce potentiel est identique à celui d'un SQUID dc seul, étudié par J. Claudon [31].

Introduisons maintenant la dynamique du SQUID. La dynamique du SQUID est celle d'une particule fictive de masse $\approx \phi_0^2 2C_0$ évoluant dans le potentiel $V_S(x,y)$. Ce potentiel est vallonné sous l'effet du produit des cosinus. Il est composé de puits séparés entre eux par un point col (figure 2.4). Il est modulable au moyen du courant de polarisation I_p et du flux dans le SQUID Φ_S. Nous considérons que la particule est piégée dans un des puits, de minimum local (x_0, y_0), visible figure 2.5. Le premier changement vient en considérant les variables de déplacement autour de x_0 et y_0 définies par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} X &=& x - x_0 \\ Y &=& y - y_0 \end{array}\right. \tag{2.24}$$

Nous supposons que la particule bouge très peu autour de son minimum local. On peut alors remplacer le potentiel $V_S(X,Y)$ par son développement limité à l'ordre 3 au point (X=0,Y=0) [31]. Celui-ci fait apparaître un terme croisé en XY, qui est éliminé par une rotation d'angle θ du repère (X,Y). Les nouvelles variables du SQUID sont définies par

$$\begin{pmatrix} X_\parallel \\ Y_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

On trouve la relation inverse :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_\parallel \\ Y_\perp \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

L'angle θ entre l'axe $(X_\parallel)$ et (X) est donné par

$$\frac{1}{2}\tan(2\theta) = \frac{\partial^2_{xy}U(x_0,y_0)}{\partial^2_{xx}U(x_0,y_0) - \partial^2_{yy}U(x_0,y_0)}. \tag{2.27}$$

La variable $X_\parallel$ correspond à la position de la particule dans la direction longitudinale et la variable $Y_\perp$ correspond à la position de la particule dans la direction transversale. La direction longitudinale est définie par une courbure minimale du potentiel et la direction transversale est définie par une courbure maximale du potentiel.

Le développement limité du potentiel du SQUID à l'ordre 3 s'écrit en fonction des variables $X_\parallel$ et $Y_\perp$ comme

$$V_S(X_\parallel, Y_\perp) = \left[\frac{1}{2}k_\parallel X_\parallel^2 + \tilde{\sigma}_\parallel X_\parallel^3\right] + \left[\frac{1}{2}k_\perp Y_\perp^2 + \tilde{\sigma}_\perp Y_\perp^3\right] + \left[\beta_a Y_\perp^2 X_\parallel + \beta_b Y_\perp X_\parallel^2\right]. \tag{2.28}$$

Ce potentiel contient trois contributions différentes qui sont mises entre crochet. Les deux premières correspondent respectivement aux potentiels unidimensionnels dans les directions $[X_\parallel]$ et $[Y_\perp]$. Les coefficients $k_\parallel$ et $\tilde{\sigma}_\parallel$ sont respectivement les coefficients du terme d'ordre 2 et d'ordre 3 du potentiel dans la direction $[X_\parallel]$. De même, Les coefficients $k_\perp$ et $\tilde{\sigma}_\perp$ sont respectivement les coefficients du terme d'ordre 2 et d'ordre 3 du potentiel dans la direction $[Y_\perp]$. Nous soulignons l'absence de terme d'ordre 1 puisque le développement limité a été fait au minimum de V_S. Enfin, la dernière contribution regroupe les termes croisés du troisième ordre en $Y_\perp^2 X_\parallel$ et $Y_\perp X_\parallel^2$ qui sont pondérés par les coefficients β_a et β_b. Le potentiel du SQUID sera analysé au §2.2.2.

Les changements de variables x et y vont aussi modifier le dernier terme du potentiel du Lagrangien (2.21). Nous l'écrivons maintenant en fonction des variables $X_\parallel$ et $Y_\perp$. On trouve

$$-E_{J2}^T\cos(\psi - \langle\xi\rangle(x,y) + \phi_T) = -E_{J2}^T\cos(-\alpha_\parallel X_\parallel + \alpha_\perp Y_\perp + \psi - \langle\xi\rangle(x_0,y_0) + \phi_T), \tag{2.29}$$

où les coefficients $\alpha_\parallel$ et $\alpha_\perp$ sont définis à partir de la rotation d'angle θ :

$$\alpha_\parallel = \cos(\theta) - \eta\sin(\theta) \tag{2.30}$$

$$\alpha_\perp = \sin(\theta) + \eta\cos(\theta). \tag{2.31}$$

Nous supposons toujours $X_\parallel \ll 1$ et $Y_\perp \ll 1$, ce qui nous permet de développer l'équation (2.29) autour de $X_\parallel = 0$ et $Y_\perp = 0$. En nous limitant à un développement à l'ordre 1, nous trouvons

$$-E_{J2}^T\cos(\psi - \langle\xi\rangle(x,y) + \phi_T) = -E_{J2}^T\cos(\psi-\delta) - E_{J2}^T\alpha_\parallel X_\parallel\sin(\psi-\delta) + E_{J2}^T\alpha_\perp Y_\perp\sin(\psi-\delta), \tag{2.32}$$

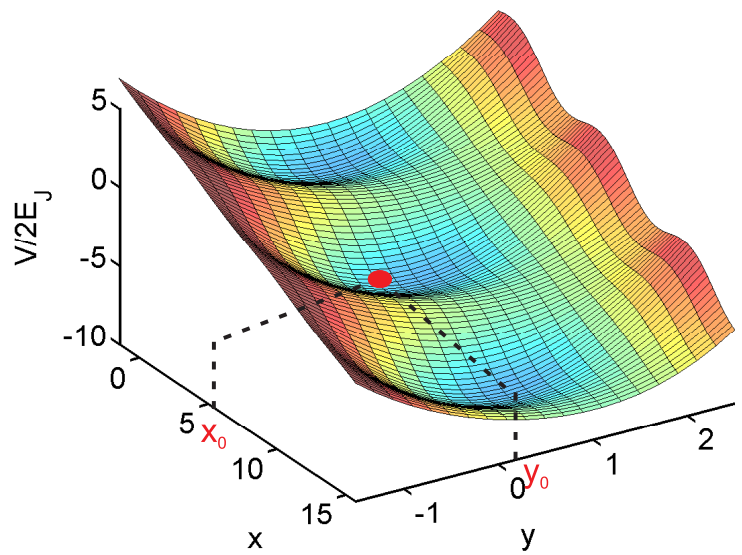

FIG. 2.4 – *Forme de la surface du potentiel du SQUID $V_S(x, y)$ au point de polarisation $s = 0.55$, $y_B = 0$ (paramètre du SQUID : $b = 1.28$, $\eta = 0.29$)*

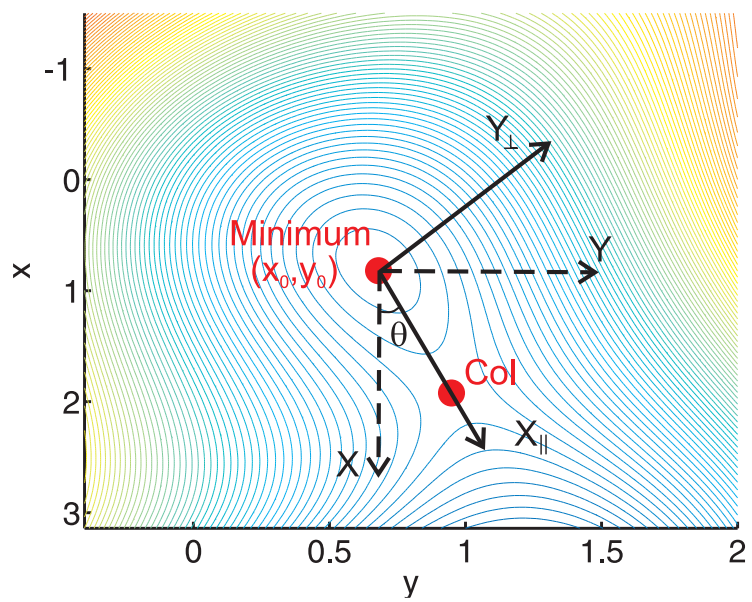

FIG. 2.5 – *Forme du puit de potentiel du SQUID au point de polarisation $s = 0.55$, $\Phi_S/\Phi_0 = 0.25$ (paramètre du SQUID : $b = 1.28$, $\eta = 0.29$). Les lignes pleines sont des équipotentielles régulièrement espacées en énergie.*

où δ est la phase classique sur le transistor définie par

$$\boxed{\delta = \langle\xi\rangle(x_0, y_0) - \phi_T.} \tag{2.33}$$

Lagrangien dans la base appropriée. Le potentiel du Lagrangien (équation (2.21)) se réécrit finalement comme

$$\begin{aligned} V(X_\parallel, Y_\perp, \psi) &= \left[\frac{1}{2}k_\parallel X_\parallel^2 + \tilde{\sigma}_\parallel X_\parallel^3\right] + \left[\frac{1}{2}k_\perp Y_\perp^2 + \tilde{\sigma}_\perp Y_\perp^3\right] + \left[\beta_a Y_\perp^2 X_\parallel + \beta_b Y_\perp X_\parallel^2\right] \\ &\quad -E_{J1}^T\cos(\psi) - E_{J2}^T\cos(\hat{\psi} - \delta) \\ &\quad -E_{J2}^T\alpha_\parallel \hat{X}_\parallel \sin(\hat{\psi} - \delta) + E_{J2}^T\alpha_\perp \hat{Y}_\perp \sin(\hat{\psi} - \delta), \end{aligned} \tag{2.34}$$

Nous nous intéressons maintenant au terme cinétique T du Lagrangien, défini par l'équation (2.22). L'équation (2.26) permet de remplacer les variables $\dot{x} = \dot{X}$ et $\dot{y} = \dot{Y}$ par les variables $\dot{X}_\parallel$ et $\dot{Y}_\perp$. Le terme cinétique se réécrit comme

$$\begin{aligned} T(\dot{X}_\parallel, \dot{Y}_\perp, \dot{\psi}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2}\phi_0^2\Big\{&(2C_0 + \alpha_\parallel^2 C_2^T)\dot{X}_\parallel^2 + (2C_0 + \alpha_\perp^2 C_2^T)\dot{Y}_\perp^2 + C_\Sigma\dot{\psi}^2 \\ &-2C_2^T\left(\alpha_\parallel\dot{X}_\parallel - \alpha_\perp\dot{Y}_\perp\right)\dot{\psi} - 2C_2^T\alpha_\parallel\alpha_\perp\dot{X}_\parallel\dot{Y}_\perp \\ &-2C_g\dot{\psi}\dot{\theta} + (C_P + C_g)\dot{\theta}^2\Big\}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

où C_Σ est la capacité totale de l'îlot du transistor définie par $C_\Sigma = C_1^T + C_2^T + C_g$.

2.1.7 L'Hamiltonien

Une fois le Lagrangien du circuit connu, nous pouvons calculer l'Hamiltonien. Ce dernier s'exprime en fonction des variables $(X_\parallel, Y_\perp, \psi, \theta)$ et des moments conjugués associés $(-\hbar P_\parallel, -\hbar P_\perp, -\hbar n, -\hbar n_Q)$. Les moments conjugués sont reliés aux vitesses $(\dot{X}_\parallel, \dot{Y}_\perp, \dot{\psi}, \dot{\theta})$ par les équations suivantes :

$$-\hbar P_\parallel = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}_\parallel} = \phi_0^2\left\{(2C_0 + \alpha_\parallel^2 C_2^T)\dot{X}_\parallel - \alpha_\parallel C_2^T\left(\alpha_\perp\dot{Y}_\perp + \dot{\psi}\right)\right\} \tag{2.36}$$

$$-\hbar P_\perp = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{Y}_\perp} = \phi_0^2\left\{(2C_0 + \alpha_\perp^2 C_2^T)\dot{Y}_\perp - \alpha_\perp C_2^T\left(\alpha_\parallel\dot{X}_\parallel - \dot{\psi}\right)\right\} \tag{2.37}$$

$$-\hbar n = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\psi}} = \phi_0^2\left\{C_\Sigma\dot{\psi} - C_2^T(\alpha_\parallel\dot{X}_\parallel - \alpha_\perp\dot{Y}_\perp) - C_g\dot{\theta}\right\} \tag{2.38}$$

$$-\hbar n_Q = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} = \phi_0^2\left\{(C_P + C_g)\dot{\theta} - C_g\dot{\psi}\right\}. \tag{2.39}$$

Les moments conjugués font apparaître les charges $P_\parallel$, $P_\perp$, n et n_Q en unité [-2e] qui ont une signification physique claire. $P_\parallel$ est représentatif du nombre de paires de Cooper sur

les deux capacités C_0. n est le nombre de paires de Cooper sur l'île. Dans l'équation (2.39), la capacité de polarisation C_P tend par définition vers l'infini et on a donc la condition $C_p \gg C_g$. Ainsi, la charge $(-2e)n_Q$ s'identifie à la charge de polarisation Q. La variable θ devient une variable classique définie par $\dot{\theta} = V_g/\phi_0$.

L'expression des vitesses en fonction des charges est trouvée en inversant la matrice de capacité :

$$\dot{X}_\parallel = -\frac{\hbar}{\phi_0^2}\frac{1}{\bar{C}^2}\left\{(C_\Sigma + \alpha_\perp^2 C_R)P_\parallel + \alpha_\parallel\alpha_\perp C_R\, P_\perp + \alpha_\parallel C_2^T(n - C_g V_g/2e)\right\} \tag{2.40}$$

$$\dot{Y}_\perp = -\frac{\hbar}{\phi_0^2}\frac{1}{\bar{C}^2}\left\{(C_\Sigma + \alpha_\parallel^2 C_R)P_\perp + \alpha_\parallel\alpha_\perp C_R\, P_\parallel - \alpha_\perp C_2^T(n - C_g V_g/2e)\right\} \tag{2.41}$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\hbar}{\phi_0^2}\frac{1}{\bar{C}^2}\left\{\left(2C_0 + C_2^T(1+\eta^2)\right)(n - C_g V_g/2e) + \alpha_\parallel C_2^T P_\parallel - \alpha_\perp C_2^T P_\perp\right\} \tag{2.42}$$

$$\dot{\theta} = V_g/\phi_0, \tag{2.43}$$

où $C_R = C_2^T(C_1^T + C_g)/2C_0$, $C_\Sigma = C_1^T + C_2^T + C_g$ et $\bar{C}^2 = 2C_0(C_\Sigma + C_R(1+\eta^2))$.

L'Hamiltonien du circuit couplé est déterminé en utilisant la transformation de Legendre :

$$\mathcal{H} = -\hbar P_\parallel \dot{X}_\parallel - \hbar P_\perp \dot{Y}_\perp - \hbar n\dot{\psi} - \mathcal{L}$$

Nous cherchons à remplacer les vitesses qui apparaissent dans l'Hamiltonien par les charges. Une astuce consiste à éliminer le terme cinétique du Lagrangien. Ceci est possible en réécrivant l'Hamiltonien comme :

$$\mathcal{H} = \frac{-\hbar P_\parallel \dot{X}_\parallel - \hbar P_\perp \dot{Y}_\perp - (\hbar n - C_g V_g/2e)\dot{\psi}}{2} + V(X_\parallel, Y_\perp, \psi). \tag{2.44}$$

Le jeu d'équation (2.40-2.42) permet de substituer les vitesses qui apparaissent dans l'Hamiltonien par les charges. L'Hamiltonien se met alors sous la forme :

$$\begin{aligned}
\widehat{H}(\widetilde{P}_\parallel, \widehat{X}_\parallel, \widetilde{P}_\perp, \widehat{Y}_\perp, \hat{n}, \hat{\psi}) = {} & \frac{(2e)^2}{2C_\parallel}\widetilde{P}_\parallel^2 + \frac{1}{2}k_\parallel \widetilde{X}_\parallel^2 + \tilde{\sigma}\widetilde{X}_\parallel^3 \\
& + \frac{(2e)^2}{2C_\perp}\widetilde{P}_\perp^2 + \frac{1}{2}k_\perp \widetilde{Y}_\perp^2 + \tilde{\sigma}_\perp \widetilde{Y}_\perp^3 \\
& + \frac{(2e)^2}{C_{\parallel\perp}}\widetilde{P}_\parallel \widetilde{P}_\perp + \beta_a \widetilde{Y}_\perp^2 \widetilde{X}_\parallel + \beta_b \widetilde{Y}_\perp \widetilde{X}_\parallel^2 \\
& + \frac{(2e)^2}{2C_T}\left(\hat{n} - \frac{C_g V_g}{2e}\right)^2 - E_{J1}^T\cos(\hat{\psi}) - E_{J2}^T\cos(\hat{\psi} - \delta) \\
& + \frac{(2e)^2}{C_{n\parallel}}\widetilde{P}_\parallel\left(\hat{n} - \frac{C_g V_g}{2e}\right) - E_{J2}^T\alpha_\parallel \widetilde{X}_\parallel \sin(\hat{\psi} - \delta) \\
& - \frac{(2e)^2}{C_{n\perp}}\widetilde{P}_\perp\left(\hat{n} - \frac{C_g V_g}{2e}\right) + E_{J2}^T\alpha_\perp \widetilde{Y}_\perp \sin(\hat{\psi} - \delta).
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Les variables classiques ont été remplacées par leurs opérateurs quantiques correspondants et l'Hamiltonien écrit précédemment est une fonction de ces opérateurs. Le tableau 2.1 résume les correspondances entre les variables classiques et quantiques.

	Variable classique	Variable quantique
Variables du SQUID	$P_\parallel$	$\widetilde{P}_\parallel$
	$X_\parallel$	$\widetilde{X}_\parallel$
	$P_\perp$	$\widetilde{P}_\perp$
	$Y_\perp$	$\widetilde{Y}_\perp$
Variables de l'ACPT	n	$\hat{n}$
	ψ	$\hat{\psi}$

TAB. 2.1 – *Correspondance entre les variables classiques et quantiques.*

Par souci de clarté, les paires d'opérateurs conjuguées apparaissent en couleur dans l'Hamiltonien. Elles vérifient les relations de commutations suivantes

$$\begin{cases} [\widetilde{X}_\parallel, \widetilde{P}_\parallel] = -i \\ [\widetilde{Y}_\perp, \widetilde{P}_\perp] = -i \\ [\hat{\psi}, \hat{n}] = -i \end{cases} \tag{2.46}$$

Le tableau 2.2 donne les expressions analytiques des nouvelles capacités introduites dans l'Hamiltonien, ainsi que leur valeur numérique pour les paramètres du circuit en supposant $\theta = 0$. Des expressions approchées sont aussi fournies dans le cas des limites expérimentales $C_g \ll C_2^T$ et $C_1^T \ll C_0$. Nous remarquons que leur valeur numérique est comparable à la valeur exacte justifiant ces approximations dans la suite.

Capacités	Valeur exacte		Valeur approchée	
	Analytique	Numérique	Analytique	Numérique
$C_\parallel$	$\bar{C}^2/(C_\Sigma + \alpha_\perp C_R)$	455.6 fF	$2C_0$	455.0 fF
$C_\perp$	$\bar{C}^2/(C_\Sigma + \alpha_\parallel C_R)$	455.1 fF	$2C_0$	455.0 fF
C_T	$\bar{C}^2/(2C_0 + C_2^T(1+\eta^2))$	2.90 fF	C_Σ	2.91 fF
$C_{n\parallel}$	$\bar{C}^2/(\alpha_\parallel C_2^T)$	653.0 fF	$2C_0(C_2^T + C_1^T)/(\alpha_\parallel C_2^T)$	650.0 fF
$C_{n\perp}$	$\bar{C}^2/(\alpha_\perp C_2^T)$	2.252 pF	$2C_0(C_2^T + C_1^T)/(\alpha_\perp C_2^T)$	2.241 pF
$C_{\parallel\perp}$	$\bar{C}^2/(\alpha_\perp \alpha_\parallel C_R)$	1.17 nF		

TAB. 2.2 – *Capacités intervenant dans l'Hamiltonien. Les valeurs numériques sont calculées pour les paramètres du circuit en prenant $\theta = 0$.*

Les propriétés de l'Hamiltonien total (2.45) ne sont pas triviales. Par conséquent, celui-ci sera divisé en trois Hamiltoniens distincts. A savoir, les Hamiltoniens du SQUID, de l'ACPT et de couplage entre le SQUID et l'ACPT. La section suivante est dédiée à l'étude de l'Hamiltonien du SQUID.

2.2 Le SQUID-dc

Une première description du potentiel du SQUID (équation (2.23)) a déjà été faite pour introduire le changement des variables x et y par les variables $X_{\parallel}$ et $Y_{\perp}$. Le premier paragraphe complétera cette description et introduira les deux états que peut prendre le SQUID, à savoir, l'état supraconducteur et l'état résistif. Nous calculerons la ligne critique du diagramme de phase courant-flux (I_p, Φ_S), qui sépare ces deux états.

Le second paragraphe est consacré à l'introduction de l'Hamiltonien du SQUID, à sa simplification et à son étude. En reprenant les résultats de la thèse de Julien Claudon [31], nous montrerons que le SQUID dc peut être vu comme un oscillateur anharmonique, c'est-à-dire un système multi-niveaux. Si l'anharmonicité de cet oscillateur est assez grande, nous montrerons que le SQUID dc peut être considéré comme un *qubit de phase*.

2.2.1 États supraconducteurs - Diagramme de phase

États supraconducteurs. Pour les paramètres de polarisation adéquates (I_p et Φ_S), le potentiel possède des puits regroupés en famille [f]. Les puits d'une même famille sont situés le long de la direction (x), espacés périodiquement de 2π. Ils sont séparés par des points cols. Les puits d'une même famille ont la même géométrie et confère donc à la particule qui est piégée dans un de ces puits, les mêmes propriétés physiques.

Nous supposons maintenant que la particule du SQUID est piégée dans un puits de la famille [f] de minimum local (x_0, y_0) . De ce fait, les phases φ_1 et φ_2 oscillent autour d'une valeur moyenne. L'équation (2.1) impose que la tension moyenne[(1)] $\overline{V_S}$ aux bornes du SQUID est nulle. Ainsi, les états de la particule piégée sont dénommés *les états supraconducteurs*.

Nous introduisons la profondeur du puits ΔU, qui est définie par la différence d'énergie potentiel entre le minimum local et le point col le plus proche. De manière générale, la profondeur ΔU diminue lorsque l'inclinaison du potentiel dans la direction x augmente. La pente $-s = I_p/2I_0$ contrôle l'inclinaison du potentiel. Lorsque celle-ci atteint la pente critique $s_c[f]$, associée à un courant critique $I_c[f]$, la famille de puits [f] disparaît. A ce moment-là, les minima locaux et les cols sont confondus aux coordonnées (x_c, y_c) et $\Delta U = 0$.

Diagramme de phase. Définissons les différentes conditions mathématiques qui caractérisent le point critique (x_c, y_c, s_c). Nous savons que le gradient du potentiel doit être nul en ce point :

$$\begin{cases} \partial_x V_S = 0 \\ \partial_y V_S = 0 \end{cases} \tag{2.47}$$

[(1)] Les oscillations de tension ont une fréquence d'environ 10 GHz. La ligne de mesure ayant une bande passante de 500 kHz, seul la tension moyenne $\overline{V_S}$ est mesurée.

De plus, la courbure le long de la direction (minimum-col) s'annule alors qu'elle reste positive le long de la direction transversale. Ceci impose la condition :

$$\begin{cases} \partial_x^2 V \cdot \partial_y^2 V - \left(\partial_{xy}^2 V\right)^2 = 0 \\ \partial_x^2 V + \partial_y^2 V \geq 0. \end{cases} \tag{2.48}$$

Les équations (2.47) et (2.48) amènent au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \sin x_c \cos y_c - s_c = 0 \\ \cos x_c \sin y_c - \eta s_c + 2b(y_c - y_B) = 0 \\ (\cos x_c \cos y_c)(\cos x_c \cos y_c + 2b) - (\sin x_c \sin y_c)^2 = 0. \end{cases} \tag{2.49}$$

J'ai résolu ce système numériquement par la méthode de Newton-Raphson [37]. Nous trouvons plusieurs familles de solutions qui correspondent aux différentes familles de puits $[f]$. Pour chaque famille, il existe deux solutions avec des courants critiques de signe différent.

La figure 2.6 représente le courant critique de trois familles de puits en fonction du flux. Une famille de puits $[f]$ existe si le point de polarisation (I_p, Φ_S) se situe à l'intérieur de la ligne fermée $I_c[f]$. De manière générale, quand le point de polarisation s'éloigne de la ligne critique, la profondeur du puits augmente. Nous constatons que le potentiel possède généralement une seule famille de puits. Néanmoins, deux familles de puits cohabitent quand Φ est proche de $\Phi_0/2$ modulo Φ_0. On mentionne que $I_c[f]$ est relié à $I_c[0]$ par la condition de périodicité

$$I_c[f](\Phi_S) = I_c[0](\Phi_S - f\Phi_0). \tag{2.50}$$

Cela s'explique par le fait que, à chaque famille de puits, est associé un nombre [f] de quantum de flux piégés dans le SQUID.

État résistif - Caractéristique $I(V)$. Lorsque le courant de polarisation I_p est très proche de sa valeur critique I_c, la particule peut s'échapper de son puits. Celle-ci prend alors de la vitesse et n'est pas repiégée dans un autre puits car les frottements sont faibles (jonctions sous-amorties). Elle finit par atteindre une vitesse maximum le long de l'axe (x), ce qui implique que les phases φ_1 et φ_2 augmentent linéairement avec le temps. La deuxième équation de Josephson (2.1) prédit l'apparition d'une tension non-nulle aux bornes du SQUID. Cette dernière est égale à $2\Delta/e$, où Δ est le gap supraconducteur de l'aluminium. C'est pourquoi l'état de la particule qui dévale le potentiel est dénommé *l'état résistif*. Par la suite, la tension $\overline{V_s}$ croît lorsque I_p augmente et la résistance $R \equiv \overline{V_s}/I_p$ se rapproche de la résistance normale R_N[(2)] du SQUID.

Lorsque I_p est réduit en-dessous du courant I_c critique, la particule ne se repiège pas tout de suite et la tension V_s est toujours égale à $2\Delta/e$. Une hystérésis est observée. La particule se piège quand l'énergie cinétique gagnée par la particule pendant sa chute est

[(2)] La résistance normale du SQUID correspond la résistance du SQUID lorsque le matériau à partir duquel est créé le SQUID est métallique.

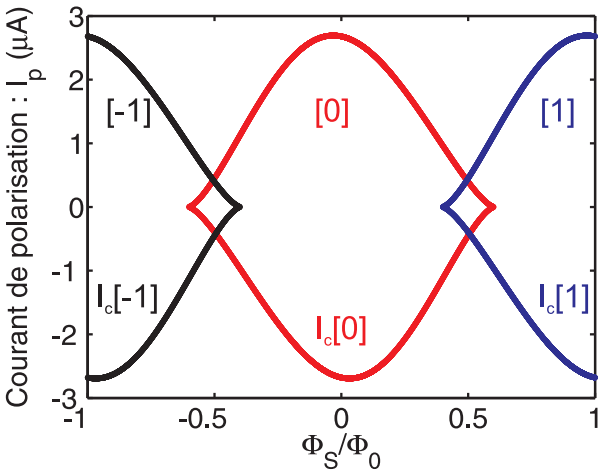

FIG. 2.6 – *Courant critique $I_c[f]$ du SQUID en fonction du flux (calculé numériquement). Le nombre $[f]$ correspond au nombre de quantum de flux piégés, lui-même associé à une famille de puits équivalents sur la surface du potentiel. Le domaine d'existence de la famille de puits $[f]$ est délimité par la frontière critique $I_c[f]$.*

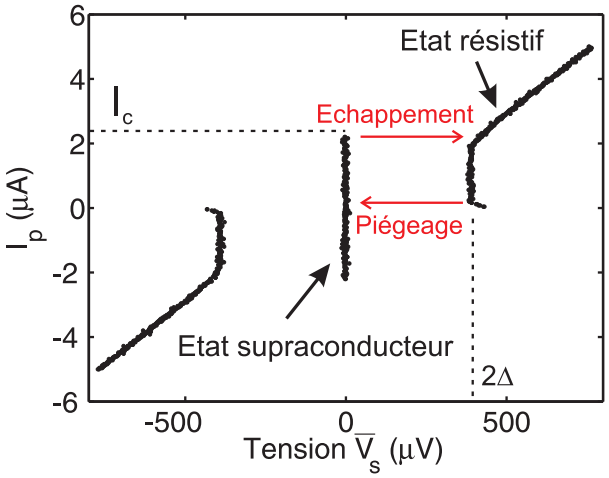

FIG. 2.7 – *Caractéristique I(V) du SQUID.*

plus petite que son énergie de dissipation. Ceci arrive quand I_p est en dessous du courant de repiégeage, dont la valeur est proche du nanoampère pour notre SQUID. Cette propriété est un élément clé de la mesure du SQUID comme nous le verrons plus tard.

L'ACPT, en parallèle au SQUID, a une impédance très grande par rapport au SQUID. En conséquence, la mesure de la caractéristique I(V) du circuit couplé, tracée figure 2.7, est très proche de celle du SQUID seul.

2.2.2 Hamiltonien du SQUID

Dans l'Hamiltonien du circuit couplé (2.45), nous isolons les termes qui contiennent uniquement les opérateurs $\widetilde{X}_\parallel$ et $\widetilde{Y}_\perp$ et les opérateurs conjugués $\widetilde{P}_\parallel$ et $\widetilde{P}_\perp$. Ceux-ci constituent l'Hamiltonien du SQUID qui s'écrit

$$\begin{aligned}\widehat{H}_S &= E_C^\parallel \widetilde{P}_\parallel^2 + \frac{1}{2}k_\parallel \widetilde{X}_\parallel^2 + \tilde{\sigma}_\parallel \widetilde{X}_\parallel^3 \\ &\quad + E_C^\perp \widetilde{P}_\perp^2 + \frac{1}{2}k_\perp \widetilde{Y}_\perp^2 + \tilde{\sigma}_\perp \widetilde{Y}_\perp^3 \\ &\quad + \beta_a \widetilde{Y}_\perp^2 \widetilde{X}_\parallel + \beta_b \widetilde{Y}_\perp \widetilde{X}_\parallel^2 + \frac{(2e)^2}{C_{\parallel\perp}} \widetilde{P}_\parallel \widetilde{P}_\perp, \end{aligned} \tag{2.51}$$

avec les énergies de charges $E_C^\parallel = (2e)^2/(2C_\parallel)$ et $E_C^\perp = (2e)^2/(2C_\perp)$.

Les trois premiers termes de l'Hamiltonien du SQUID représentent l'Hamiltonien d'une particule fictive de masse $m = \phi_0^2 C_\parallel$, qui est piégée dans le potentiel anharmonique dans la direction longitudinale ($X_\parallel$). Ces termes décrivent la dynamique de l'*oscillateur longitudinal*, dont la fréquence plasma ν_p est définie par la relation $2\pi\nu_p = \sqrt{k/m}$. Les trois termes suivants représentent l'Hamiltonien d'une particule fictive de masse $m_\perp = \phi_0^2 C_\perp$, qui est piégée dans le potentiel anharmonique dans direction transversale ($Y_\perp$). Ces termes décrivent la dynamique de l'*oscillateur transversal*, dont la fréquence $\nu_\perp$ est définie par la relation $\nu_\perp = \sqrt{k_\perp/m_\perp}/(2\pi)$. L'anharmonicité des deux oscillateurs est due au terme cubique qui résulte de la non-linéarité de la jonction Josephson. Les trois derniers termes s'expriment à partir des opérateurs des deux oscillateurs. Par conséquent, ils couplent les oscillateurs entre eux.

Introduction des opérateurs sans dimension. Il est commun d'introduire les opérateurs sans dimension suivants :

$$\widehat{X}_\parallel = \sqrt{\frac{h\nu_p}{2E_C^\parallel}}\,\widetilde{X}_\parallel \qquad \widehat{P}_\parallel = -\sqrt{\frac{2E_C^\parallel}{h\nu_p}}\,\widetilde{P}_\parallel, \tag{2.52}$$

$$\widehat{Y}_\perp = \sqrt{\frac{h\nu_\perp}{2E_C^\perp}}\,\widetilde{Y}_\perp \qquad \widehat{P}_\perp = -\sqrt{\frac{2E_C^\perp}{h\nu_\perp}}\,\widetilde{P}_\perp. \tag{2.53}$$

Les nouveaux opérateurs vérifient les relations de commutation canonique suivantes :

$$[\widehat{X}_{\parallel}, \widehat{P}_{\parallel}] = i \tag{2.54}$$

$$[\widehat{X}_{\perp}, \widehat{P}_{\perp}] = i. \tag{2.55}$$

En utilisant les opérateurs sans dimension, l'Hamiltonien $\widehat{H}_S$ se met sous la forme

$$\begin{aligned} \widehat{H}_S &= \frac{1}{2}h\nu_p\left(\widehat{P}_{\parallel}^2 + \widehat{X}_{\parallel}^2\right) - \sigma h\nu_p\widehat{X}_{\parallel}^3 \\ &\quad + \frac{1}{2}h\nu_{\perp}\left(\widehat{P}_{\perp}^2 + \widehat{Y}_{\perp}^2\right) + \sigma_{\perp}h\nu_{\perp}\widehat{Y}_{\perp}^3 \\ &\quad + h\nu_a^*\widehat{Y}_{\perp}^2\widehat{X}_{\parallel} + h\nu_b^*\widehat{Y}_{\perp}\widehat{X}_{\parallel}^2 + h\nu_c^*\widehat{P}_{\perp}\widehat{P}_{\parallel}, \end{aligned} \tag{2.56}$$

où les paramètres σ et $\sigma_{\perp}$ correspondent aux amplitudes relatives du terme cubique par rapport au terme quadratique, et sont représentatifs de l'anharmonicité des oscillateurs. Les énergies $h\nu_a^*$, $h\nu_b^*$ et $h\nu_c^*$ sont les énergies de couplage entre les deux oscillateurs.

Evolution des paramètres de l'Hamiltonien. Nous supposons que la particule du SQUID est piégée dans un puits de la famille [0]. Cela signifie qu'il n'y a pas de quantum de flux dans le SQUID. La géométrie du puits dépend du point de polarisation (I_p, Φ_S) du SQUID, ce qui modifie les paramètres de l'Hamiltonien.

Les figures 2.8.a et 2.8.b montrent la dépendance des fréquences ν_p et $\nu_{\perp}$ avec le point de polarisation. De manière générale, la fréquence $\nu_{\perp}$ est toujours supérieure à 35 GHz et est au moins deux fois plus grande que la fréquence ν_p. La fréquence ν_p tend vers une fréquence nulle quand le point de polarisation se rapproche de la ligne de courant critique.

Les figures 2.8.c,d,e,f présentent la dépendance des paramètres de l'Hamiltonien avec le flux, à un courant de polarisation fixe $I_p = 2\ \mu$A. La figure 2.8.c montre les fréquences ν_p et $\nu_{\perp}$. La figure 2.8.d montre les paramètres d'anharmonicité des deux oscillateurs. Le paramètre σ avoisine typiquement 3 % et augmente près de la ligne de courant critique. Le paramètre $\sigma_{\perp}$ est très faible quelque soit la polarisation, ce qui permet de considérer l'oscillateur transversal comme harmonique. La figure 2.8.e présente les différentes énergies de couplage. La fréquence ν_c^* est de l'ordre de 10 MHz, et ne dépend pas beaucoup de Φ_S, alors que les fréquences ν_a^* et ν_b^* sont plus élevées. Les valeurs numériques des paramètres de l'Hamiltonien, à $\Phi_S = 0.1\ \Phi_0$ et $I_p = 2\ \mu$A, sont données dans le tableau 2.3.

Oscillateur longitudinal		Oscillateur transversale		Couplage		
ν_p	σ	$\nu_{\perp}$	$\sigma_{\perp}$	ν_a^*	ν_b^*	ν_c^*
16.2 GHz	3.4 %	38.3 GHz	0.006 %	−612 MHz	−348 MHz	12 MHz

TAB. 2.3 – *Paramètres de $\widehat{H}_S$ à $\Phi_S = 0.1\ \Phi_0$ et $I_p = 2\ \mu A$.*

La profondeur du puits ΔU, montrée à la figure 2.8.f, n'intervient pas explicitement dans $\widehat{H}_S$. Cependant, si celle-ci est faible, typiquement de l'ordre de $h\nu_p$, l'écriture (2.56)

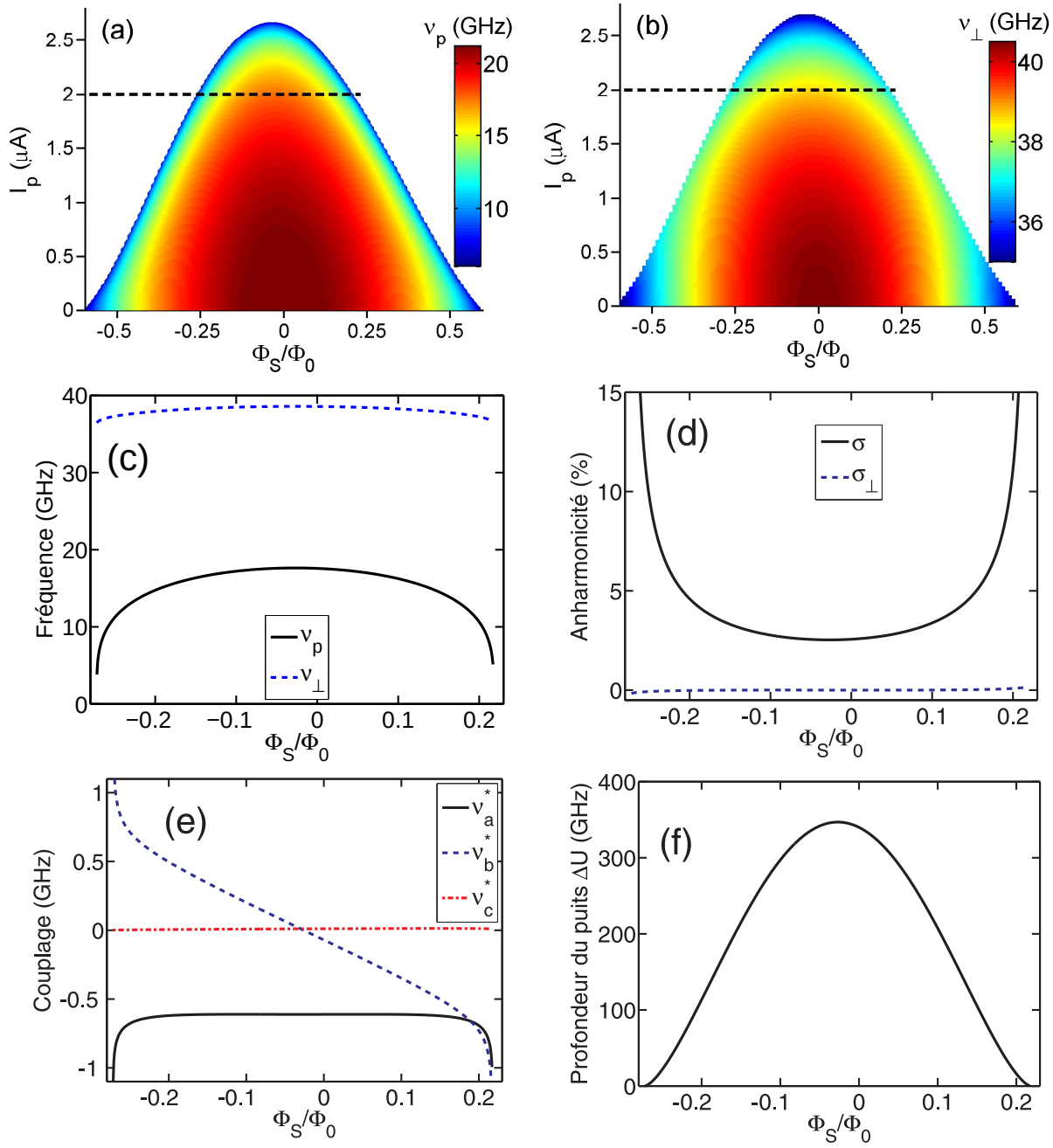

FIG. 2.8 – *(a) Fréquence plasma ν_p et (b) fréquence transversale $\nu_\perp$ en fonction du flux Φ_S et du courant de polarisation I_p. (c) Fréquences ν_p et ν_T en fonction du flux Φ_S à $I_p = 2\ \mu A$. (d) Paramètres de l'anharmonicité des deux oscillateurs en fonction du flux Φ_S, à $I_p = 2\ \mu A$. (e) Intensité des différents couplages entre les deux oscillateurs en fonction du flux Φ_S, à $I_p = 2\ \mu A$. (f) Profondeur ΔU du puits en fonction du flux Φ_S, à $I_p = 2\ \mu A$. Toutes ces simulations ont été réalisées en utilisant les paramètres de notre circuit donnés dans l'annexe A.*

de $\widehat{H}_S$ est trop simplifiée. Ceci arrive lorsque la polarisation du SQUID est proche de la ligne de courant critique. L'Hamiltonien du SQUID doit alors tenir en compte du couplage des niveaux quantiques du SQUID avec les niveaux extérieurs du puits. Ce couplage est responsable de l'échappement de la particule en dehors du puits. Il sera négligé lorsque nous étudierons la dynamique du circuit couplé.

Simplification de l'Hamiltonien. Puisque $\nu_\perp \gg \nu_p$, la dynamique quantique de l'oscillateur transversal est très rapide par rapport à celle de l'oscillateur longitudinal. Dans la suite, l'oscillateur transversal sera considéré dans l'état fondamental. L'Hamiltonien du SQUID décrira uniquement la dynamique de l'oscillateur longitudinal. Qu'advient-il des termes de couplage ? Ceux-ci sont conservés, mais les opérateurs $Y_\perp$, $Y_\perp^2$ et $P_\perp$ sont remplacés par leur valeur moyenne. Les valeurs moyennes sont reportées dans le tableau 2.4. Le terme de couplage en $\langle \widehat{Y}_\perp^2 \rangle \widehat{X}_\parallel$ est le seul terme subsistant. Il peut être vu comme une

Opérateur $\hat{A}$	Valeur moyenne $\langle \widehat{A} \rangle$
$\hat{Y}_\perp$	0
$\hat{Y}_\perp^2$	1/2
$\hat{P}_\perp$	0

TAB. 2.4 – *Moyennes des opérateurs de l'oscillateur transversal dans l'état fondamental.*

modification du courant I_p d'environ 0.5 nA, ayant pour effet de changer la fréquence ν_p d'environ 5 MHz. Ce terme sera dorénavant négligé. Dans ces conditions, la dynamique le long de la direction longitudinale s'écrit :

$$\boxed{\widehat{H}_S = \frac{1}{2} h\nu_p \left(\widehat{P}_\parallel^2 + \widehat{X}_\parallel^2 \right) - \sigma h \nu_p \widehat{X}_\parallel^3.} \tag{2.57}$$

Dans la suite, le SQUID sera décrit par cet Hamiltonien simplifié.

2.2.3 Analyse de l'Hamiltonien du SQUID

On définit les états propres $|n\rangle$ et les valeurs propres E_n de $\widehat{H}_S$, tel que :

$$\widehat{H}_S |n\rangle = E_n |n\rangle, \tag{2.58}$$

où n est un entier positif.

Dans le cas où l'anharmonicité est nulle, les énergies propres sont celles d'un oscillateur harmonique, données par $E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu_p$ [38]. Lorsque l'anharmonicité faible, nous utilisons la théorie des perturbations pour trouver les énergies propres :

$$E_n \approx \left(n + \frac{1}{2}\right) h\nu_p - \frac{15}{4}\sigma^2 \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 h\nu_p. \tag{2.59}$$

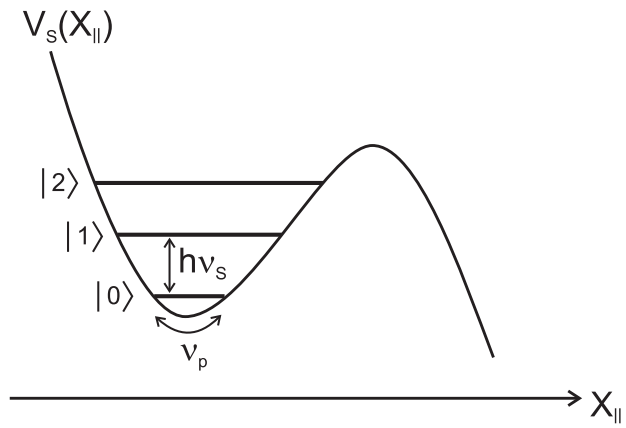

FIG. 2.9 – *Potentiel du SQUID dans la direction $X_\parallel$ et ses états quantiques.*

L'écart d'énergie entre deux niveaux consécutifs vaut :

$$E_n - E_{n-1} = h\nu_p \left(1 - \frac{15}{2}\sigma^2 n\right). \tag{2.60}$$

On définit l'énergie $h\nu_S$ comme étant la différence d'énergie entre des deux premiers niveaux quantiques, c'est-à-dire $h\nu_S = E_1 - E_0$.

La figure 2.9 montre le nouveau potentiel du SQUID : $V_S = h\nu_p X_\parallel^2 - \sigma h\nu_p X_\parallel^3$, ainsi que les trois premiers niveaux quantiques.

Qubit de phase. D'après l'équation (2.60), le désaccord d'énergie entre les niveaux $|0\rangle$-$|1\rangle$ et $|1\rangle$-$|2\rangle$ est égal à $15\sigma^2/2$. Nous verrons au chapitre 4, que si celui-ci est très grand par rapport à la puissance micro-onde, l'excitation du SQUID se limite au premier niveau. Le SQUID peut alors être vu comme un qubit. Par conséquent, l'Hamiltonien du SQUID se réécrit au moyen des matrices de Pauli (*cf* annexe B) comme :

$$\boxed{\widehat{H}_S = \frac{h\nu_s}{2}\,\hat{\sigma}_z^S,} \tag{2.61}$$

2.3 Le transistor à paire de Cooper asymétrique (ACPT)

2.3.1 Hamitlonien de l'ACPT

L'Hamiltonien de l'ACPT est identifié en isolant de l'Hamiltonien du circuit couplé (2.45), les termes qui contiennent uniquement les opérateurs $\hat{\psi}$ et $\hat{n}$. Il s'écrit

$$\hat{H}_{ACPT} = \frac{(2e)^2}{2C_T}\left(\hat{n} - \frac{C_g V_g}{2e}\right)^2 - E_{J1}^T \cos(\hat{\psi}) - E_{J2}^T \cos(\hat{\psi} - \delta). \tag{2.62}$$

Il peut aussi se mettre sous la forme

$$\hat{H}_{ACPT} = E_C^T\,(\hat{n}-n_g)^2 - E_J^T(\cos(\delta/2)\cos(\hat{\psi}-\delta/2) + \mu\sin(\delta/2)\sin(\hat{\psi}-\delta/2)), \quad (2.63)$$

où $E_J^T \equiv E_{J2}^T + E_{J1}^T$ est l'énergie Josephson de l'ACPT et $\mu \equiv (E_{J2}^T - E_{J1}^T)/E_J^T$ est l'asymétrie des énergies Josephson. L'énergie de charge du transistor est définie par $E_C^T = (2e)^2/2C_T$. $n_g \equiv C_g V_g/2e$ est le nombre de paires de Cooper apportées par la grille. Le paramètre n_g sera par la suite appelé "la charge de la grille".

L'opérateur de charge $\hat{n}$ a comme vecteurs propres les états de charge $|n_{2e}\rangle$, qui ont la valeur propre associée n. Cette dernière représente le nombre de paires de Cooper en excès sur l'île. A l'aide de la relation de commutation $[\hat{n},\hat{\psi}] = i$, nous identifions l'action de l'opérateur $e^{i\hat{\psi}} = \sum_n |n_{2e}\rangle\langle(n+1)_{2e}|$ qui baisse d'une unité le nombre de paires de Cooper sur l'île. L'annotation "$2e$", qui apparaît dans l'état $|n_{2e}\rangle$, sert à ne pas confondre les états de charge du transistor avec les états propres du SQUID $|n\rangle$. Néanmoins, nous omettrons un moment son écriture pour ne pas alourdir l'expression de l'Hamilltonien de l'ACPT. Dans la représentation de charge, l'Hamiltonien du transistor s'écrit :

$$\begin{aligned}\hat{H}_{ACPT} = \quad & E_C^T(\hat{n}-n_g)^2 - \sum_n \frac{E_J^T}{2}\left[\cos(\delta/2) - i\mu\sin(\delta/2)\right] e^{-i\delta/2}|n\rangle\langle n+1| \\ & - \sum_n \frac{E_J^T}{2}\left[\cos(\delta/2) + i\mu\sin(\delta/2)\right] e^{i\delta/2}|n+1\rangle\langle n|. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Une simplification supplémentaire vient en écrivant

$$\frac{E_J^T}{2}\left(\cos(\delta/2) + i\mu\sin(\delta/2)\right) \equiv \frac{\rho_j(\delta)}{2}e^{i\chi}, \quad (2.65)$$

où $\tan\chi = \mu\tan(\delta/2)$ et $\rho_j(\delta)^2 = E_J^{T^2}(\cos^2(\delta/2) + \mu^2\sin^2(\delta/2))$. L'Hamiltonien de l'ACPT devient :

$$\boxed{\hat{H}_{ACPT} = E_C^T(\hat{n}-n_g)^2 - \frac{\rho_j(\delta)}{2}\left[\sum_n e^{-i(\delta/2+\chi)}|n\rangle\langle n+1| + \sum_n e^{i(\delta/2+\chi)}|n+1\rangle\langle n|\right].} \quad (2.66)$$

Il est composé d'un terme de charge proportionnel à E_C^T et d'un terme Josephson proportionnel à $\rho_j(\delta)$. Il dépend de deux paramètres : la charge de la grille n_g et la phase supraconductrice δ qui modulent respectivement le terme de charge et le couplage Josephson. Nous supposons dans un premier temps que le terme Josephson est nul ($\rho_j = 0$). Les niveaux d'énergie de l'ACPT sont donnés par les paraboles d'énergie $E_C^T(n+n_g)^2$ associées aux états propres $|n_{2e}\rangle$. La dépendance du spectre d'énergie en fonction de n_g est montrée en trait pointillé à la figure 2.10.a. Proche de $n_g = 0$, la parabole de l'état $|0_{2e}\rangle$ minimise l'énergie du transistor. Le premier état excité est à une énergie d'environ $E_C^T \approx 1.3\ k_B$K. En travaillant à la température de 20 mK, la charge est quantifiée à zéro excès de paires

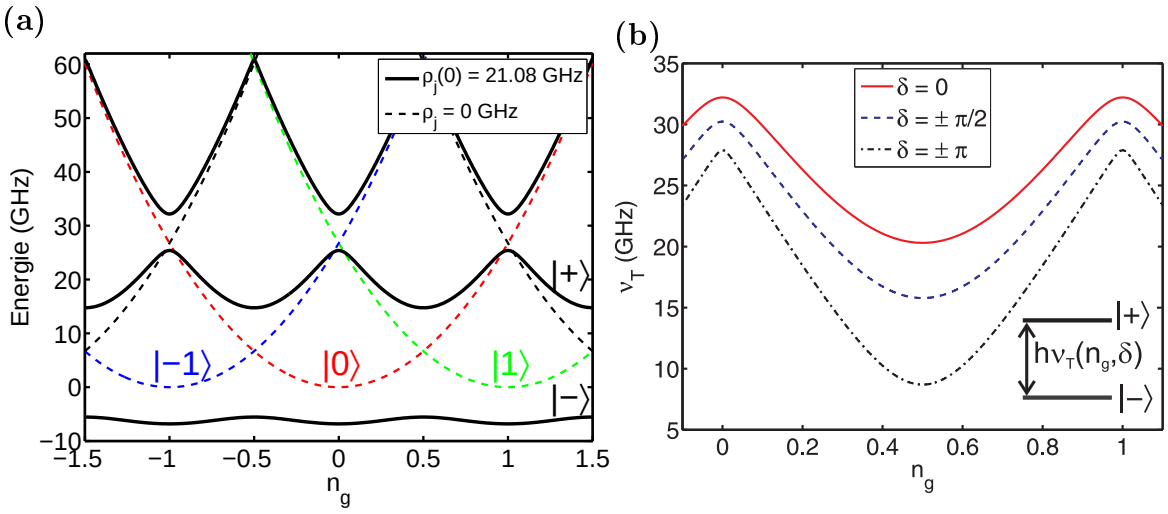

FIG. 2.10 – *(a) Spectre d'énergie de l'ACPT en fonction de n_g lorsque le couplage Josephson est nul ($\rho_j = 0$) et lorsque $\rho_j = 21.08$ GHz. (b) L'ACPT vu comme un qubit de charge d'énergie $h\nu_T$ variable en fonction de n_g et δ. Ces simulations sont réalisées avec les paramètres $E_J^T = 21.08$ GHz et $E_C^T = 26.76$ GHz de notre circuit.*

de Cooper sur l'île. De même, autour de $n_g = 1$, la parabole de l'état $|1_{2e}\rangle$ est la plus basse en énergie. Il y a une paire de Cooper en excès sur l'île. La quantification de la charge dans une boite à paires de Cooper a été mise en évidence en 1998 par V. Bouchiat *et al.* [39]. Lorsque $n_g = 0.5$, les deux paraboles se croisent et les états $|0_{2e}\rangle$ et $|1_{2e}\rangle$ sont dégénérés.

La dégénérescence est levée par le terme Josephson qui couple les charges entre elles (terme entre crochets de l'équation (2.66)). L'amplitude du couplage est donnée par ρ_j, dont la dépendance en fonction de la phase δ est montrée à la figure 2.11 pour trois asymétries des énergies Josephson (μ) différentes. Le couplage Josephson ρ_j a une valeur maximale égale à E_J^T quand $\delta = 0$ et une valeur minimale égale à μE_J^T quand $\delta = \pm\pi$. Pour $\delta = \pm\pi$, le couplage Josephson est nul dans le cas d'un transistor symétrique. Il est de 8.76 GHz pour une asymétrie μ de 41.5 %. Dans le cas d'une boîte à paires de Cooper, où l'asymétrie est de 100 %, le couplage Josephson ne dépend pas de δ.

2.3.2 Spectre d'énergie de l'ACPT

La figure 2.10.a présente le spectre d'énergie du transistor en fonction de la charge de la grille n_g lorsque $\delta = 0$, ce qui correspond à un couplage Josephson égal à E_J^T. Il a été calculé en diagonalisation l'Hamiltonien sur une base de 8 états de charge. Cette restriction à 8 états est justifiée, étant donné que la diagonalisation avec 32 états de charge, que j'ai aussi réalisée, n'apporte aucune correction significative pour les premiers niveaux d'énergie (Correction inférieure à 0.1‰). Les deux bandes de plus basse énergie représentent les énergies des états propres $|-\rangle$ et $|+\rangle$. Nous notons que à $n_g = 0.5$, le désaccord d'énergie entre les niveaux 1-2 et les niveaux 2-3 est de l'ordre de 30 GHz. Ceci nous permet de décrire l'ACPT comme un qubit. Finalement, l'Hamiltonien du transistor s'écrit à l'aide

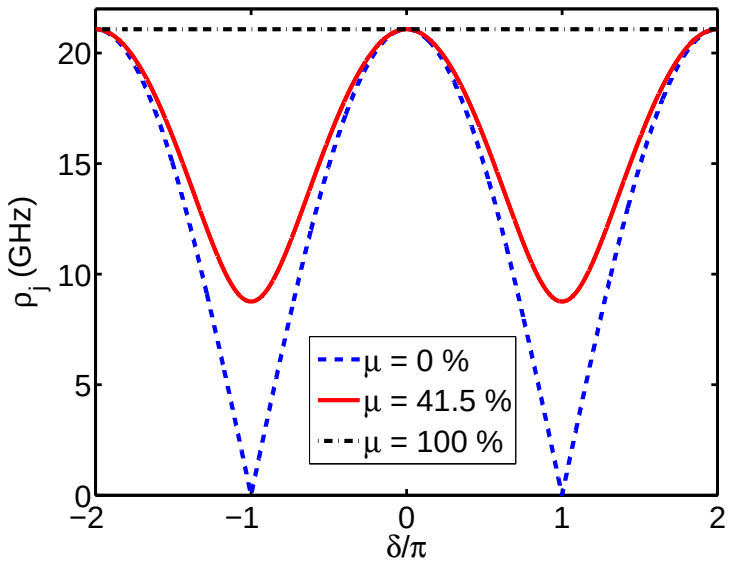

FIG. 2.11 – *Couplage Josephson ρ_j en fonction de δ pour trois asymétries différentes : $\mu = 0$ modélise un transistor symétrique, $\mu = 41.5$ % modélise notre ACPT et $\mu = 100$ % modélise une boîte à paire de Cooper. Les simulations sont réalisées avec les paramètres $E_J^T = 21.08$ GHz et $E_C^T = 26.76$ GHz de notre circuit.*

des matrices de Pauli (*cf* annexe B) comme :

$$\boxed{\widehat{H}_{ACPT} = \frac{h\nu_T}{2}\hat{\sigma}_z^T,} \tag{2.67}$$

où l'énergie $h\nu_T$ du qubit est définie par la différence d'énergie des niveaux $|+\rangle$ et $|-\rangle$. La figure 2.10.b présente la dépendance de ν_T en fonction de n_g pour trois valeurs de δ. Quelque soit la phase δ, ν_T est minimum quand $n_g = 0.5$ et la dérivée $\partial\nu_T/\partial n_g$ est nulle. Nous avons tracé à la figure 2.12.a la dépendance de ν_T en fonction de n_g et δ. La fréquence du qubit est maximale au point $(\delta = 0, n_g = 0.5)$ et minimale à $(\delta = \pi, n_g = 0.5)$. Ces deux points sont appelés des points optimaux, car le qubit y est insensible, au premier ordre, au bruit en charge, en flux et en courant.

Comment varier la charge de la grille n_g et la phase δ expérimentalement ? La charge $n_g = C_g V_g/2e$ est proportionnelle à la tension de la grille V_g. Elle sera donc contrôlée par la tension appliquée sur la grille. L'équation (2.33) montre que la phase δ est fonction du minimum local (x_0, y_0) du potentiel du SQUID et du flux Φ_T. Or, le point (x_0, y_0) est fonction du courant de polarisation I_p et du flux dans le SQUID Φ_S. Finalement, la phase δ dépend de trois paramètres expérimentaux : I_p, Φ_S et Φ_T.

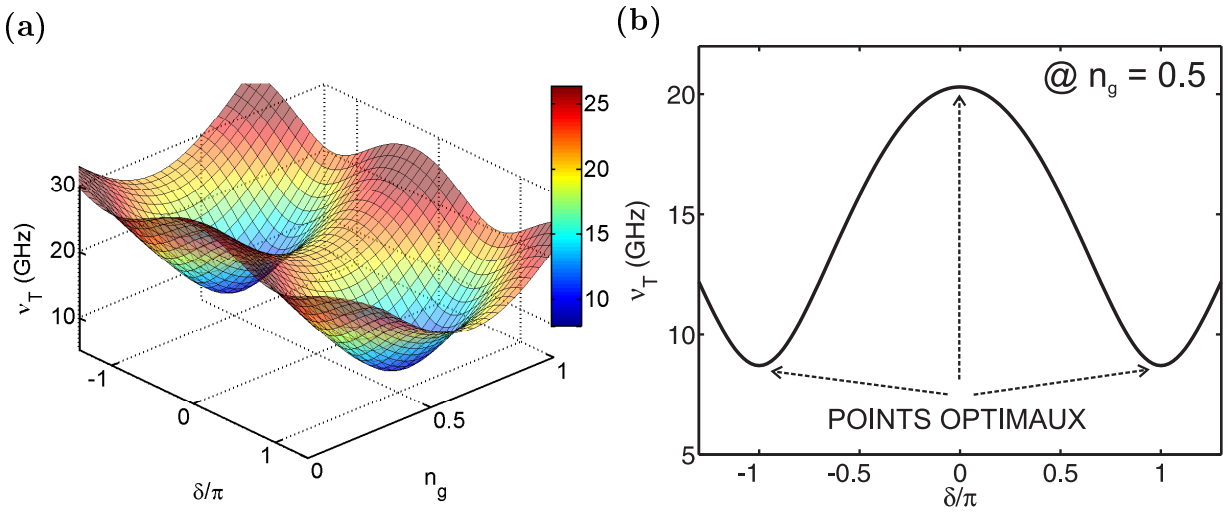

FIG. 2.12 – *(a) Fréquence ν_T du qubit de charge en fonction de n_g et δ.(b) Fréquence ν_T en fonction de δ à $n_g = 0.5$.*

2.3.3 Description de l'ACPT par deux états de charge

En supposant que le couplage Josephson ρ_j est très petit devant l'énergie de charge E_C^T et que $n_g \approx 1/2$, les états du qubit deviennent des superpositions des deux états de charge $|0_{2e}\rangle$ et $|1_{2e}\rangle$. De ce fait, la forme matricielle de l'Hamiltonien du transistor dans la base ($|0_{2e}\rangle$,$|1_{2e}\rangle$), notée $\hat{H}^0_{ACPT}$, est suffisante pour décrire la dynamique du transistor. Elle est donnée par :

$$\hat{H}^0_{ACPT} = \begin{pmatrix} E_C^T n_g^2 & -\rho_j e^{-i(\delta/2+\chi)}/2 \\ -\rho_j e^{i(\delta/2+\chi)}/2 & E_C^T(1-n_g)^2 \end{pmatrix}. \tag{2.68}$$

Les valeurs propres de l'Hamiltonien simplifié sont données par :

$$E^0_\pm = \frac{1}{2}E_C^T\left(n_g^2 + (1-n_g)^2\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{E_C^{T2}(1-2n_g)^2 + \rho_j^2}, \tag{2.69}$$

et l'énergie du qubit s'écrit comme :

$$h\nu_T^0 = E^0_+ - E^0_-. \tag{2.70}$$

A $n_g = 0.5$, $h\nu_T^0$ est simplement donnée par $h\nu_T^0 = \rho_j$. Les vecteurs propres $|-_0\rangle$ et $|+_0\rangle$, associés respectivement aux énergies E^0_+ et E^0_-, s'expriment en fonction des états de charge comme :

$$|+_0\rangle = \alpha^*|0_{2e}\rangle + \beta|1_{2e}\rangle \qquad \text{et} \qquad |-_0\rangle = -\beta^*|0_{2e}\rangle + \alpha|1_{2e}\rangle, \tag{2.71}$$

où

$$\alpha = \cos(\theta/2)e^{i(\delta/2+\chi-\pi)/2} \qquad \text{et} \qquad \beta = \sin(\theta/2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\delta/2+\chi-\pi)/2}, \tag{2.72}$$

et

$$\tan\theta = -\frac{2|\rho_j|}{E_C^T(1-2n_g)}, \ \theta \in [0,\pi]. \tag{2.73}$$

Inversement, les états de charge s'écrivent en fonction des états propres comme :

$$|0_{2e}\rangle = \alpha|+_0\rangle - \beta|-_0\rangle \qquad \text{et} \qquad |1_{2e}\rangle = \beta^*|+_0\rangle + \alpha^*|-_0\rangle. \tag{2.74}$$

Finalement, pour une utilisation future, nous donnons les valeurs de α et β quand $n_g = 0.5$. Dans ce cas, nous obtenons l'angle $\theta = \pi/2$ et

$$\alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\delta/2+\chi-\pi)/2}. \tag{2.75}$$

2.3.4 Erreurs induites par la description à deux états de charge

L'utilisation de seulement deux états de charge pour décrire le qubit induit des erreurs sur les énergies et les états du qubit. Nous allons quantifier celles-ci en fonction de la phase δ à $n_g = 0.5$, en utilisant les paramètres de notre circuit.

Dans un premier temps, nous nous intéressons à la différence entre l'énergie $h\nu_T^0$ et l'énergie exacte du qubit $h\nu_T$. Cette différence dépend de δ comme le montre la figure 2.13.a. Elle est minimale à $\delta = \pm\pi$ (60 MHz) et maximale à $\delta = 0$ (780 MHz). L'erreur faite est donc importante et, par conséquent, la fréquence du qubit sera dorénavant calculée en diagonalisant numériquement l'Hamiltonien dans une base de 8 états de charge.

Nous regardons maintenant l'erreur commise sur les états du qubit $|-_0\rangle$ et $|+_0\rangle$. Tout d'abord, on réécrit l'Hamiltonien de l'ACPT à partir de H^0_{ACPT} :

$$\widehat{H}_{ACPT} = \widehat{H}^0_{ACPT} + \widehat{W}, \tag{2.76}$$

où $\widehat{W}$ est un terme perturbatif qui se met sous la forme

$$\widehat{W} = -\frac{\rho_j(\delta)}{2} \sum_{n\neq 0} \left[e^{-i(\delta/2+\chi)} |n\rangle\langle n+1| + e^{i(\delta/2+\chi)} |n+1\rangle\langle n| \right] + E_C^T \sum_{n\neq\{0,1\}} (n-n_g)^2 |n\rangle\langle n| \tag{2.77}$$

En utilisant la théorie des perturbations à l'ordre 1, on trouve que l'état $|-\rangle$ s'écrit comme une superposition des états $|-_0\rangle$ et des deux états de charge $|-1_{2e}\rangle$ et $|2_{2e}\rangle$. De même, l'état $|+\rangle$ s'écrit comme une superposition des états $|+_0\rangle$, $|-1_{2e}\rangle$ et $|2_{2e}\rangle$. Nous calculons la probabilité $|\langle -_0|-\rangle|^2$ que l'état du qubit $|-\rangle$ soit dans l'état $|-_0\rangle$, ainsi que la probabilité $|\langle +_0|+\rangle|^2$ que l'état du qubit $|+\rangle$ soit dans l'état $|+_0\rangle$. La figure 2.13.b montre la dépendance de ces deux probabilités avec δ. Elles sont toujours supérieures à 94 %, indiquant que les états $|-_0\rangle$ et les états $|+_0\rangle$ sont proches des états respectifs $|-\rangle$ et $|+\rangle$.

L'ACPT est communément appelé *qubit de charge* du fait que les états du qubit peuvent être principalement décrits par une superposition de deux états de charge.

Afin de trouver une expression analytique du couplage entre le SQUID et l'ACPT, nous supposerons dans la partie suivante que $|-\rangle = |-_0\rangle$ et $|+\rangle = |+_0\rangle$.

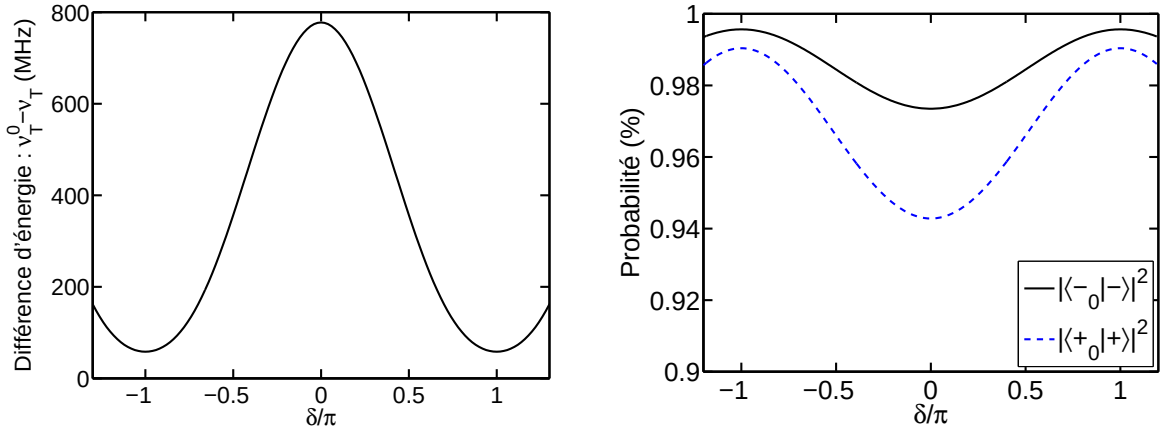

FIG. 2.13 – *(a) Différence entre la fréquence du qubit ν_T^0 calculée avec deux états de charge et la fréquence du qubit ν_T calculée avec huit états de charges en fonction de la phase δ. (b) Probabilité $|\langle -_0|-\rangle|^2$ et $|\langle +_0|+\rangle|^2$ en fonction de δ*

2.4 Couplage entre le SQUID et l'ACPT

Dans cette partie nous cherchons une expression analytique du couplage entre le SQUID et le transistor. Les termes de couplage dans l'Hamiltonien du circuit couplé (2.45) sont ceux qui mélangent les opérateurs du transistor ($\hat{\psi}$ et $\hat{n}$) et du SQUID ($\widetilde{X}_\parallel$ et $\widetilde{P}_\parallel$). Nous trouvons deux couplages : un couplage capacitif par l'intermédiaire de la capacité du transistor C_2^T et un couplage Josephson par la jonction 2 du transistor.

2.4.1 Couplage capacitif

L'Hamiltonien de couplage capacitif couple les charges sur le SQUID avec les charges sur l'ACPT. Il est donné par :

$$\hat{H}_{Coupl,Capa} = \frac{(2e)^2}{C_{n\parallel}} \widetilde{P}_\parallel (\hat{n} - n_g). \tag{2.78}$$

Le changement de l'opérateur $\widetilde{P}_\parallel$ en $\widehat{P}_\parallel$ (équation 2.52) nous amène à

$$\hat{H}_{Coupl,Capa} = -\frac{(2e)^2}{C_{n\parallel}} \sqrt{\frac{h\nu_p}{2E_C^\parallel}} \widehat{P}_\parallel (\hat{n} - n_g). \tag{2.79}$$

Nous souhaitons écrire le terme de couplage en utilisant les matrices de Pauli des deux qubits. Il faut pour cela exprimer les opérateurs $\widehat{P}_\parallel$ et $\widehat{n}$ dans la base des états propres des qubits : $(|-,0\rangle, |-,1\rangle, |+,0\rangle, |+,1\rangle)$. En supposant que l'anharmonicité du SQUID est faible, nous obtenons

$$\widehat{P}_\parallel = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\sigma}_x^S \qquad \text{et} \qquad \widehat{X}_\parallel = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\sigma}_y^S. \tag{2.80}$$

Nous exprimons maintenant l'opérateur $\widehat{n}$ dans la base $(|-\rangle, |+\rangle)$. Dans la base de charge il s'écrit comme $\widehat{n} = |1_{2e}\rangle\langle 1_{2e}|$. En utilisant les équations (2.72) et (2.74), $\widehat{n}$ se met sous la forme

$$\widehat{n} = \frac{1}{2}\,\hat{I} + \frac{1}{2}\sin(\theta)\hat{\sigma}_x^T - \frac{1}{2}\cos(\theta)\hat{\sigma}_z^T, \tag{2.81}$$

où $\hat{I}$ est l'opérateur identité. En utilisant les nouvelles expressions des opérateurs $\widehat{n}$ et $\widehat{P}_{\|}$, l'Hamiltonien du couplage capacitif s'écrit

$$\widehat{H}_{Coupl,Capa} = -E_{c,c}\hat{\sigma}_x^S\left[(1-2n_g)\hat{I} + \sin(\theta)\hat{\sigma}_x^T - \cos(\theta)\hat{\sigma}_z^T\right], \tag{2.82}$$

où $E_{c,c}$ est l'intensité du couplage capacitif, égale à :

$$E_{c,c} = \frac{e^2}{C_{n\|}}\sqrt{\frac{h\nu_p}{E_C^{\|}}}. \tag{2.83}$$

Les mesures expérimentales du couplage ont été majoritairement réalisées à $n_g = 0.5$. Pour une telle polarisation, $\widehat{H}_{Coupl,Capa}$ se simplifie :

$$\boxed{\widehat{H}_{Coupl,Capa} = -E_{c,c}\,\hat{\sigma}_x^S\hat{\sigma}_x^T.} \tag{2.84}$$

2.4.2 Couplage Josephson

Le couplage Josephson couple la phase $\widetilde{X}_{\|}$ associée au SQUID à la phase $\hat{\psi}$ du transistor par l'intermédiaire de la jonction Josephson 2. Il s'écrit :

$$\hat{H}_{Coupl,Jos} = -E_{J2}^T\alpha_{\|}\widetilde{X}_{\|}\sin(\hat{\psi}-\delta), \tag{2.85}$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$\hat{H}_{Coupl,Jos} = -E_{J2}^T\alpha_{\|}\sqrt{\frac{2E_C^{\|}}{h\nu_p}}\widehat{X}_{\|}\sin(\hat{\psi}-\delta). \tag{2.86}$$

Nous allons exprimer le couplage Josephson dans la base $(|-,0\rangle, |-,1\rangle, |+,0\rangle, |+,1\rangle)$, au moyen des matrices de Pauli. L'opérateur $\sin(\widehat{\psi}-\delta)$ s'exprime dans la base des charges comme

$$\sin(\widehat{\psi}-\delta) = \frac{i}{2}\left(e^{i\delta}|1_{2e}\rangle\langle 0_{2e}| - e^{-i\delta}|0_{2e}\rangle\langle 1_{2e}|\right). \tag{2.87}$$

L'utilisation des équations (2.72) et (2.74) permet de réécrire les opérateurs $|1_{2e}\rangle\langle 0_{2e}|$ et $|0_{2e}\rangle\langle 1_{2e}|$ comme

$$\begin{aligned}
|1_{2e}\rangle\langle 0_{2e}| &= \frac{1}{2}e^{-i(\delta/2+\chi-\pi)}\left(\sin(\theta)\hat{\sigma}_z^T + \cos(\theta)\hat{\sigma}_x^T - i\hat{\sigma}_y^T\right), \\
|0_{2e}\rangle\langle 1_{2e}| &= \frac{1}{2}e^{i(\delta/2+\chi-\pi)}\left(\sin(\theta)\hat{\sigma}_z^T + \cos(\theta)\hat{\sigma}_x^T + i\hat{\sigma}_y^T\right).
\end{aligned} \tag{2.88}$$

L'équation (2.87) se met alors sous la forme

$$\sin(\widehat{\psi}-\delta)=\frac{1}{2}\left[\sin(\delta/2-\chi)\sin(\theta)\,\hat{\sigma}_z^T+\sin(\delta/2-\chi)\cos(\theta)\,\hat{\sigma}_x^T-\cos(\delta/2-\chi)\,\hat{\sigma}_y^T\right]. \tag{2.89}$$

En utilisant les équations (2.89) et (2.80), l'Hamiltonien du couplage Josephson devient :

$$\widehat{H}_{Coupl,Jos}=-E_{c,j}\hat{\sigma}_y^S\left[\sin(\delta/2-\chi)\sin(\theta)\,\hat{\sigma}_z^T+\sin(\delta/2-\chi)\cos(\theta)\,\hat{\sigma}_x^T-\cos(\delta/2-\chi)\,\hat{\sigma}_y^T\right], \tag{2.90}$$

où $E_{c,j}$ est l'intensité du couplage Josephson, égale à

$$E_{c,j}=\frac{\alpha_\parallel}{2}E_{J2}^T\sqrt{\frac{E_C^\parallel}{h\nu_p}} \tag{2.91}$$

A $n_g=0.5$, $\widehat{H}_{Coupl,Jos}$ se simplifie :

$$\boxed{\widehat{H}_{Coupl,Jos}=E_{c,j}\cos(\delta/2-\chi)\hat{\sigma}_y^S\hat{\sigma}_y^T-E_{c,j}\sin(\delta/2-\chi)\hat{\sigma}_y^S\hat{\sigma}_z^T.} \tag{2.92}$$

2.4.3 Hamiltonien du circuit couplé

L'Hamiltonien du circuit couplé est égale à la somme des Hamiltoniens du SQUID, de l'ACPT et de couplage :

$$\widehat{H}=\widehat{H}_S+\widehat{H}_{ACPT}+\widehat{H}_{Coupl,Capa}+\widehat{H}_{Coupl,Jos}. \tag{2.93}$$

Nous considérons que la charge de la grille est fixée à $n_g=0.5$. L'Hamilonien total se met alors sous la forme :

$$\boxed{\widehat{H}=\frac{h\nu_S}{2}\hat{\sigma}_z^S+\frac{h\nu_T}{2}\hat{\sigma}_z^T-E_{c,c}\,\hat{\sigma}_x^S\hat{\sigma}_x^T+E_{c,j}\cos(\delta/2-\chi)\hat{\sigma}_y^S\hat{\sigma}_y^T-E_{c,j}\sin(\delta/2-\chi)\hat{\sigma}_y^S\hat{\sigma}_z^T} \tag{2.94}$$

Nous soulignons le fait que l'écriture de l'Hamiltonien total dans la base des états propres des deux qubits constitue l'aboutissement de ce chapitre.

Approximation de l'onde tournante. Nous introduisons les opérateurs d'excitation du SQUID $\hat{\sigma}_+^S$ et du transistor $\hat{\sigma}_+^T$, ainsi que les opérateurs de desexcitation du SQUID $\hat{\sigma}_-^S$ et du transistor $\hat{\sigma}_-^T$. Il sont définis par $\hat{\sigma}_\pm^T\equiv(\hat{\sigma}_x^T\pm i\hat{\sigma}_y^T)/2$ et $\hat{\sigma}_\pm^S\equiv(\hat{\sigma}_x^S\pm i\hat{\sigma}_y^S)/2$. Les couplages en $\sigma_x^S\sigma_x^T$ et $\sigma_y^S\sigma_y^T$ peuvent s'écrire en fonctions des quatres produits : $\sigma_+^S\sigma_-^T$, $\sigma_-^S\sigma_+^T$,$\sigma_+^S\sigma_+^T$ et $\sigma_-^S\sigma_-^T$. Le couplage en $\sigma_y^S\sigma_z^T$ peut s'écrire en fonction des deux produits : $\sigma_+^S\sigma_z^T$ et $\sigma_-^S\sigma_z^T$. Analysons maintenant les effets de chacune de ces combinaisons.

La combinaison $\hat{\sigma}_+^S\hat{\sigma}_-^T$ permet la réalisation simultanée de deux processus élémentaires, à savoir l'excitation du SQUID et la désexcitation du transistor. Celle-ci permet la transition de l'état $|0,+\rangle$ vers l'état $|1,-\rangle$. Cependant, cette transition est possible seulement si la conservation de l'énergie est satisfaite. Si cette dernière condition n'est pas respectée,

la dynamique quantique de l'état du circuit couplé est modifiée par des composantes de fréquence rapide. Ces dernières sont moyennées dans le temps de l'expérience. On applique alors l'*approximation de l'onde tournante* qui consiste à négliger ces composantes. Finalement, la combinaison $\hat{\sigma}_+^S\hat{\sigma}_-^T$ perturbe les états $|0,+\rangle$ et $|1,-\rangle$ si $\nu_S \approx \nu_T$. Le raisonnement précédent fait avec la combinaison $\hat{\sigma}_-^S\hat{\sigma}_+^T$ conduit aux mêmes conclusions.

Les combinaisons $\sigma_+^S\sigma_+^T$ et $\sigma_-^S\sigma_-^T$ couplent les états $|0,-\rangle$ et $|1,+\rangle$. La séparation des niveaux d'énergie de ces états est très grande, environ égale à $\nu_S + \nu_T$. De ce fait, les transitions envisageables $|0,-\rangle \to |1,+\rangle$ ou $|1,+\rangle \to |0,-\rangle$ violent fortement la conservation de l'énergie et sont négligeables. Les termes de couplage en $\sigma_+^S\sigma_+^T$ et $\sigma_-^S\sigma_-^T$ seront occultés. Pour les mêmes raisons, le terme de couplage en $\sigma_y^S\sigma_z^T$ est négligé.

Finalement, proche de la résonance, le couplage significatif est donné par les composantes $\sigma_-^S\sigma_+^T$ et $\sigma_+^S\sigma_-^T$. L'Hamiltonien approximé se met sous la forme

$$\boxed{\widehat{H} = \frac{h\nu_S}{2}\,\hat{\sigma}_z^S + \frac{h\nu_T}{2}\,\hat{\sigma}_z^T - \frac{g}{2}\left(\hat{\sigma}_+^S\hat{\sigma}_-^T + \hat{\sigma}_-^S\hat{\sigma}_+^T\right),} \tag{2.95}$$

où le couplage g est donné par

$$g = 2E_{c,c} - 2E_{c,j}\cos(\delta/2 - \chi). \tag{2.96}$$

Nous notons que g dépend de la polarisation du circuit.

2.4.4 Couplage en fonction de l'asymétrie du transistor

Réécriture du couplage g. Nous supposons $C_g \ll C_2^T, C_1^T \ll C_0$, ce qui permet d'avoir $C_{n\|} \approx 2C_0(C_2^T + C_1^T)/(\alpha_\| C_2^T)$. Dans ces conditions, l'énergie $E_{c,c}$ de couplage capacitif (équation (2.83)) se met sous la forme

$$E_{c,c} = \frac{\alpha_\|}{4}\sqrt{\frac{E_C^\|}{h\nu_p}}\,(1+\lambda)\,h\nu_p, \tag{2.97}$$

où $\lambda = (C_2^T - C_1^T)/(C_2^T + C_1^T)$ est l'asymétrie des capacités du transistor. Nous réécrivons aussi l'énergie $E_{c,j}$ de couplage Josephson (équation (2.91)) en utilisant l'asymétrie des énergies Josephson du transistor μ :

$$E_{c,j} = \frac{\alpha_\|}{4}\sqrt{\frac{E_C^\|}{h\nu_p}}(1+\mu)E_J^T \tag{2.98}$$

En utilisant les expressions (2.97) et (2.98), le couplage g total (équation (2.96)) se met sous la forme

$$g = \frac{\alpha_\|}{2}\sqrt{\frac{E_C^\|}{h\nu_p}}\,\left[(1+\lambda)h\nu_p - (1+\mu)E_J^T\cos(\delta/2-\chi)\right] \tag{2.99}$$

Le couplage g pour quelques cas particuliers. Nous prenons le cas d'un transistor symétrique. Nous avons $\nu = \mu = 0$ et $\chi = 0$. Le terme de couplage devient

$$g = \frac{\alpha_\parallel}{2}\sqrt{\frac{E_C^\parallel}{h\nu_\parallel}}\left[h\nu_p - E_J^T\cos(\delta/2)\right]. \tag{2.100}$$

Nous supposons que le transistor peut-être décrit par une superposition de deux états de charge (*cf* §2.3.4). La fréquence du qubit de charge est alors donnée par $\nu_T = \rho_j = E_J^T\cos(\delta/2)$. Nous supposons aussi que l'anharmonicité du SQUID est faible de telle sorte que $\nu_S \approx \nu_p$ (équation (2.60)). Finalement, lorsque les deux qubits sont en résonance, nous avons $\nu_p = E_J^T\cos(\delta/2)$. Par conséquent, le couplage g est nul à $n_g = 1/2$. Une asymétrie est donc nécessaire pour avoir un couplage entre les deux qubits.

Nous prenons le cas maintenant de la boîte à paires de Cooper, obtenue quand $E_{J2}^T = 0$. Nous avons $\mu = -1$. Le couplage g s'écrit

$$g = \frac{\alpha_\parallel}{2}\sqrt{\frac{E_C^\parallel}{h\nu_\parallel}}h\nu_p(1+\nu). \tag{2.101}$$

Nous retrouvons le résultat de Olivier Buisson et Franck Hekking [40].

Chapitre 3

Micro-fabrication et dispositif expérimental

La fabrication des échantillons s'est déroulée à la plate-forme Nanofab, où nous avons disposé de tous les appareils nécessaires. Soulignons que ces appareils, d'une excellente qualité, étaient entretenus par des techniciens et des ingénieurs hors-pairs, sans quoi tout aurait été plus compliqué. L'appareil clef a été sans aucun doute le microscope électronique à balayage.

J'ai rencontré de nombreuses difficultés durant la fabrication des échantillons, tout particulièrement pour obtenir les fins motifs de l'ACPT. Une année et demi de ma thèse a ainsi été consacrée à l'optimisation des procédés de fabrication.

Ce chapitre est divisé en trois parties. La première s'intéressera à la fabrication des échantillons. Nous y détaillerons les différentes étapes de la fabrication. La deuxième partie montrera le dispositif expérimental utilisé. Enfin, nous présenterons le blindage et le filtrage qui ont été indispensables pour les mesures quantiques.

3.1 Fabrication des échantillons

Nous avons choisi de fabriquer notre échantillon en une seule étape de lithographie. Pour cela, nous avons eu recours à un procédé de trois évaporations sous angle. Ce procédé permet de fabriquer les différentes jonctions Josephson de notre circuit. Cela a nécessité l'utilisation d'un bi-couche de résine, c'est-à-dire de deux couches de résine superposées. Les deux résines sont électron-sensibles.

3.1.1 Etalement des résines et recuit

Le bi-couche, schématisé à la figure 3.1, repose sur un wafer de silicium de 2 pouces. La surface de ce wafer est constituée d'une couche de SiO_2, d'épaisseur 500 nm. Les étapes de la fabrication du bi-couche sont les suivantes. Le wafer est tout d'abord nettoyé par une

attaque ionique (RIE plasma oxygène). La première couche de résine PMMA/MAA[(1)] est alors étalée sur le substrat nettoyé. La résine est ensuite recuite dans un four. Ce dernier, à la différence de la plaque chauffante, assure l'homogénéité de la cuisson. La première couche ainsi fabriquée a une épaisseur d'environ 800 nm.

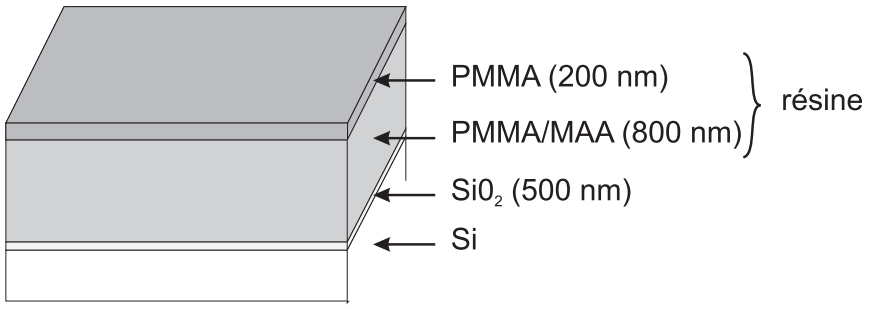

FIG. 3.1 – *Schématisation du bi-couche.*

Par la suite, une couche de résine PMMA[(2)] est étalée. Puis, un nouveau recuit est effectué. L'épaisseur de la deuxième couche est de 200 nm. Les temps de recuit des deux résines sont longs (1 heure) afin de solidifier au maximum la résine. Les différentes étapes de la fabrication du bi-couche sont résumées dans la première partie du tableau 3.2.

Notons que les épaisseurs des résines sont identiques à celles du bi-couche que F. Balestro et J. Claudon utilisaient pour la fabrication d'un SQUID seul. Nous avons décidé de conserver l'épaisseur de 800 nm de la couche inférieure, afin de pouvoir maximiser la taille des jonctions du SQUID. Le bi-couche épais a cependant compliqué la fabrication des fins motifs de l'ACPT.

3.1.2 Lithographie électronique

Le masque de résine du circuit est fabriquer en plusieurs étapes. Le bi-couche est dans un premier temps insolé par un faisceau d'électrons. Ce dernier est créé par un microscope électronique à balayage (MEB)[(3)], qui focalise les électrons et les accélère avec une tension de 20 kV. Les électrons cassent les chaînes de polymère constituant la résine. Celles-ci sont ensuite dissoutes dans un solvant approprié (développeur) au moment du développement.

Les parties insolées dépendent du motif désiré. Les spécificités de l'insolation, telles que le champ et le diaphragme, sont changées suivant l'objet insolé. Les parties fines, telles que le transistor et le SQUID, sont insolées dans un champ de 100 μm $\times$ 100 μm, en utilisant le diaphragme de 7.5 μm. La ligne fine, qui permet de polariser le circuit en courant, a une longueur de 400 μm et une largeur de 300 nm. Elle est insolée dans un champ de 1000 μm $\times$ 1000 μm, en utilisant le diaphragme de 7.5 μm. Enfin, les lignes plus larges, ainsi que les plots de contact, sont insolés dans un champ de 1000 μm $\times$ 1000 μm, en utilisant un

(1) Référence ARP 617.09.
(2) Référence ARP 679.04 950K.
(3) Léo 1530.

champ de 60 μm.

Le développement de la résine est réalisé en trois étapes. La puce est dans un premier temps plongée dans un mélange à un volume de MIBK (Méthyl-Iso-Butyl-Ketone) pour trois volumes d'IPA (Isopropanol) pendant 30 s. Cette étape dissout la résine insolée. La couche de résine inférieure est plus sensible aux électrons. Par conséquent, elle se dissout plus fortement que la couche supérieure. Une cavité apparaît. Celle-ci est schématisée à la figure 3.2.b dans le cas d'une insolation locale. La deuxième étape consiste à rincer le MIBK en plongeant la puce dans un bain d'IPA pendant 5 s. Enfin, la puce est placée dans un nouveau bain d'IPA pendant 1 min 30 s. Durant cette étape, la résine supérieure est quasiment inchangée, alors que la résine inférieure est à nouveau dissoute. Cela permet d'augmenter la taille de la cavité. La puce est ensuite séchée par un jet d'azote.

Une photo optique d'une partie du masque du circuit est visible à la figure 3.2.c. Le bi-couche intact est en gris clair. Les zones sans résine apparaissent en gris foncé.

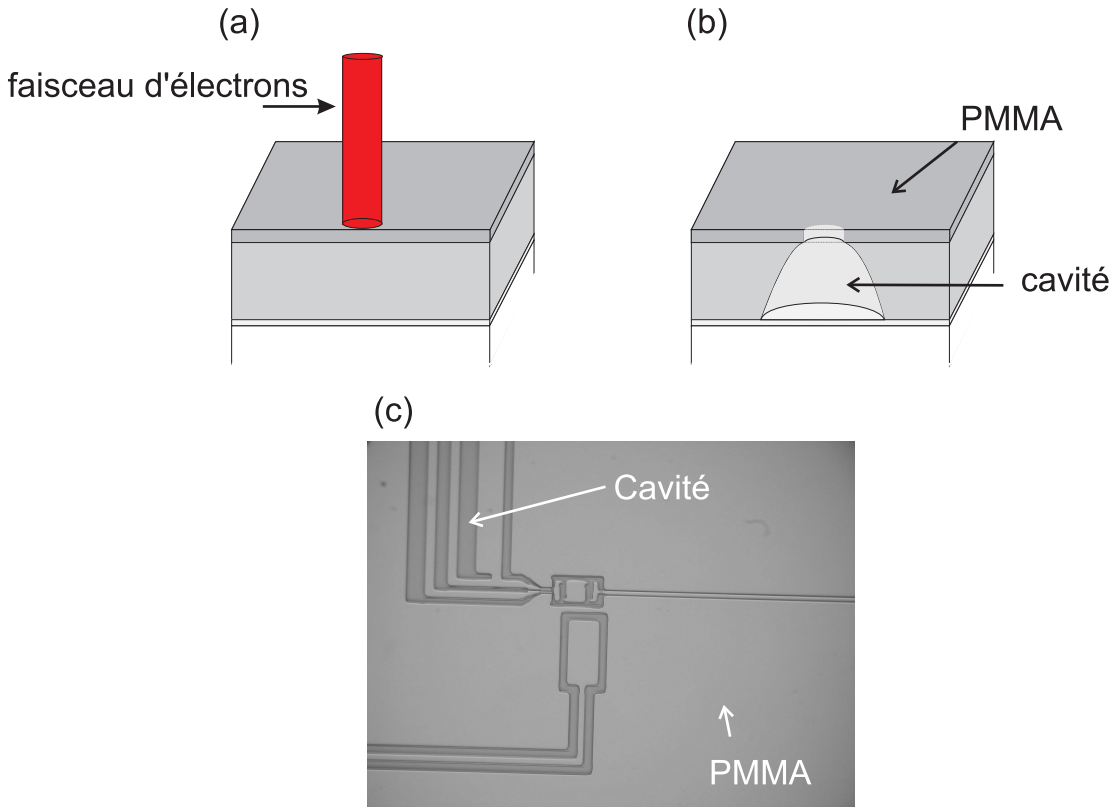

FIG. 3.2 – *(a) Insolation locale du bi-couche. (b) Après le développement du bi-couche, une cavité apparaît. (c) Photo d'une partie du masque de résine utilisé pour la fabrication de notre échantillon. Les cavités sont visibles en gris foncé, alors que la résine intacte apparaît en gris clair.*

Nettoyage du wafer	
RIE "RES" - plasma oxygène - durant 1 min	
Étalement des résines	
Couche inférieure	PMMA/MAA (33 %) dilué à 9 % dans 1-méthoxy-2-propanol
étalement	2000 t/min pendant 50 s
recuit au four	214 °C pendant 60 min
épaisseur	⇒ 800 nm
Couche supérieure	PMMA (950K) dilué à 4 % dans l'éthyl-lactate
étalement	5000 t/min pendant 45 s
recuit au four	205 °C pendant 60 min
épaisseur	⇒ 200 nm
Insolation	
Insolation	doses de 250 à 350 μC/cm^2, 20 kV
haute résolution	diaphragme 7.5 μm (12 pA), champ 100 × 100 μm^2
moyenne résolution	diaphragme 7.5 μm (12 pA), champ 1000 × 1000 μm^2
basse résolution	diaphragme 60 μm (0.9 nA), champ 1000 × 1000 μm^2
Développement	
PMMA et PMMA/MAA	MIBK : IPA(25%) pendant 30 s
rinçage	IPA pendant 5 s
PMMA/MAA	IPA pendant 1 min 30 s

TAB. 3.1 – *Paramètres techniques de la fabrication du masque suspendu.*

3.1.3 Trois évaporations sous angle

L'évaporation de l'aluminium a été réalisée dans un bâti ultra-vide[(4)] (UHV), où la pression résiduelle est d'environ 10^{-10} Torr. Avant de transférer le masque de résine dans ce bâti, celui-ci reste au préalable une nuit dans un sas de transfert, où la pression est de l'ordre de 10^{-7} mBar. Cela permet de faire dégazer la résine sans contaminer l'UHV.

Le sas de transfert est aussi utilisé pour oxyder l'aluminium, de manière contrôlée. Une fois le masque transféré dans le bâti UHV, le sas, ainsi que les lignes d'amenée d'oxygène, sont chauffés et pompés pendant environ trois heures. Cela afin d'assurer une meilleure reproductibilité du procédé d'oxydation.

La fabrication du circuit a nécessité l'utilisation successive de trois évaporations d'Aluminium sous des angles différents. Ces évaporations sont schématisées à la figure 3.3. L'épaisseur d'aluminium déposée à chacune des évaporations est d'environ 15 nm. Une première évaporation est réalisée à un angle nul (motif rouge). Le motif d'aluminium formé sur le substrat est l'image conforme du masque. L'aluminium, qui ne s'est pas déposé sur le substrat, est resté sur la surface de la résine supérieure. La couche d'aluminium est ensuite oxydée pendant 15 min dans le sas, avec une pression d'oxygène de 2.0×10^{-2} mBar. L'éva-

(4) Ce bâti a été mis au point par Thierry Crozes et Bernard Pannetier.

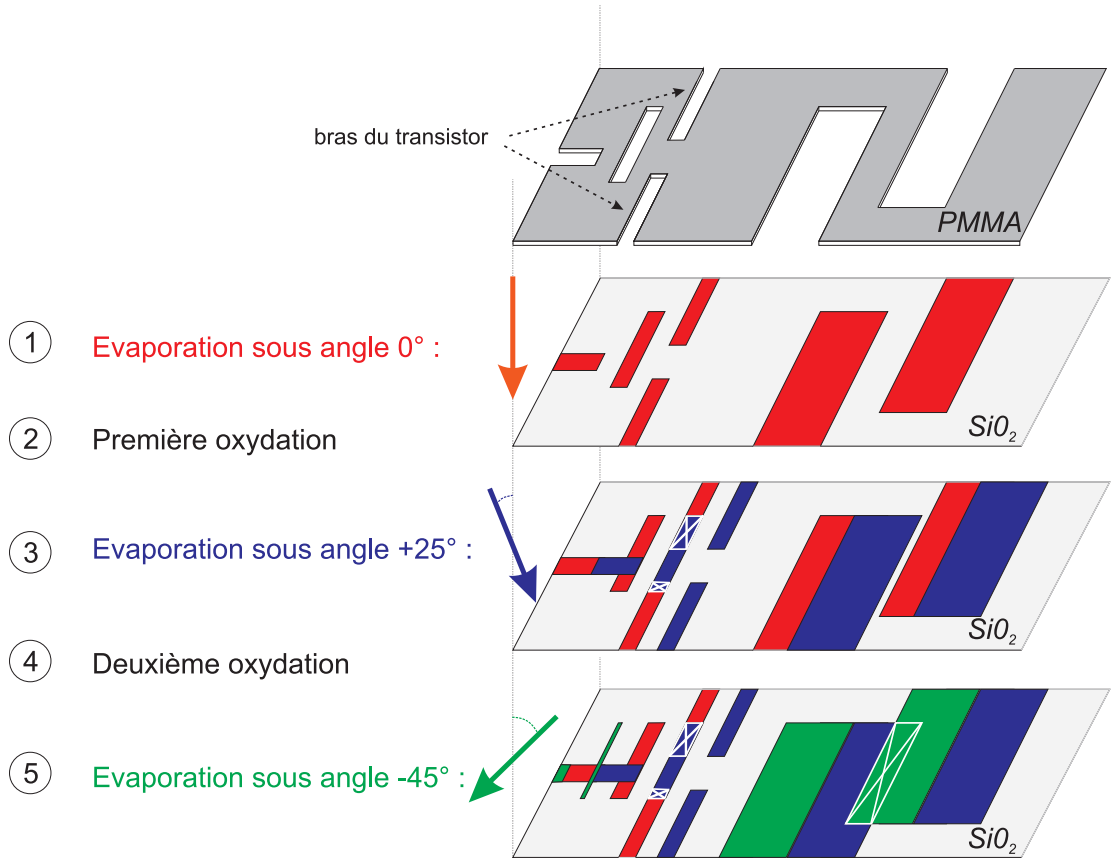

FIG. 3.3 – *Les trois évaporations d'aluminium utilisées pour fabriquer le circuit. Entre chaque évaporation, une oxydation est réalisée. La première et la deuxième évaporation créent les jonctions Josephson du transistor. La deuxième et la troisième évaporation créent les jonctions Josephson du SQUID.*

poration de l'aluminium sous un angle de 25° (motif bleu) recouvre la couche d'aluminium oxydé, et permet de créer les jonctions Josephson du transistor.

La couche d'aluminium dernièrement évaporée est à son tour oxydée pendant 30 min, avec une pression d'oxygène de 1.9 mBar. Cette pression est élevée. Ceci peut être expliqué par une bonne qualité du vide de l'enceinte. La pression d'oxygène utilisée pour la première oxydation était plus faible. Nous le comprenons par le fait que le masque supérieur est moins ouvert au-dessus des jonctions Josephson du transistor. Par conséquent, l'état du vide pourrait être localement détérioré par le dégazement de la résine environnante, facilitant l'oxydation.

La seconde oxydation crée la couche isolante des jonctions du SQUID. Ces dernières sont formées par la troisième évaporation d'aluminium sous un angle de -45° (motif vert). Les deux bras du transistor, indiqués à la figure 3.3, ne sont pas reproduits sur le substrat lors de cette évaporation. La largeur des bras de 100 nm est inférieure à l'épaisseur de la résine supérieure de 200 nm. Par conséquent, l'aluminium est évaporé sur les bords de la résine supérieure. Cette particularité empêche un court-circuit du transistor.

Une fois la troisième évaporation terminée, le circuit électrique est achevé. Il reste encore à enlever le masque de résine et, par la même occasion, l'aluminium que ce dernier soutient. Ceci est réalisé en plongeant la puce dans une solution de N-méthyl pyrrolidone (NMP) à la température de 80°C, pendant 60 min. Cette dernière étape est appelée "lift-off".

	Pression d'oxygène
Première oxydation (JJ du transitor)	2.0×10^{-2} mBar durant 15 min
Deuxième oxydation (JJ du SQUID)	1.9 mBar durant 30 min

TAB. 3.2 – *Paramètres d'oxydation.*

Des photos du circuit, réalisées au microscope électronique, sont montrées à la figure 3.4. La photo 3.4.a est une vue générale du circuit. On y voit les huit plots de contact de superficies identiques et égales à 100×150 μm^2. Nous avons souhaité minimiser la superficie de ces plots afin de réduire le nombre de vortex piégés. En effet, ces derniers sont responsables, de par leurs fluctuations, d'un bruit de flux au niveau de l'échantillon. Afin de réduire ce bruit, les plots sont éloignées de la partie centrale de l'échantillon d'une distance d'environ 500 μm.

Les plots de contact permettent de connecter le circuit aux lignes de polarisation. Les plots du haut servent à contrôler la tension de la grille du transistor. Les plots de gauche sont connectés à l'antenne on-chip. Les deux plots de droite servent à polariser le circuit en courant. Ils sont reliés au SQUID via deux lignes fines de largeur 300 nm. Celles-ci sont visibles sur la photo 3.4.b. La photo 3.4.c zoom sur la partie centrale du circuit. L'encadré rouge montre une boucle en aluminium interrompue par deux jonctions Josephson (JJ). Cela constitue le SQUID dc. Les aires des jonctions Josephson sont identiques et égales à 5 μm^2. La boucle du SQUID, notée S, a une superficie de 347 μm^2.

Le SQUID est connecté à l'ACPT, en parallèle. Cela forme une nouvelle boucle, qui

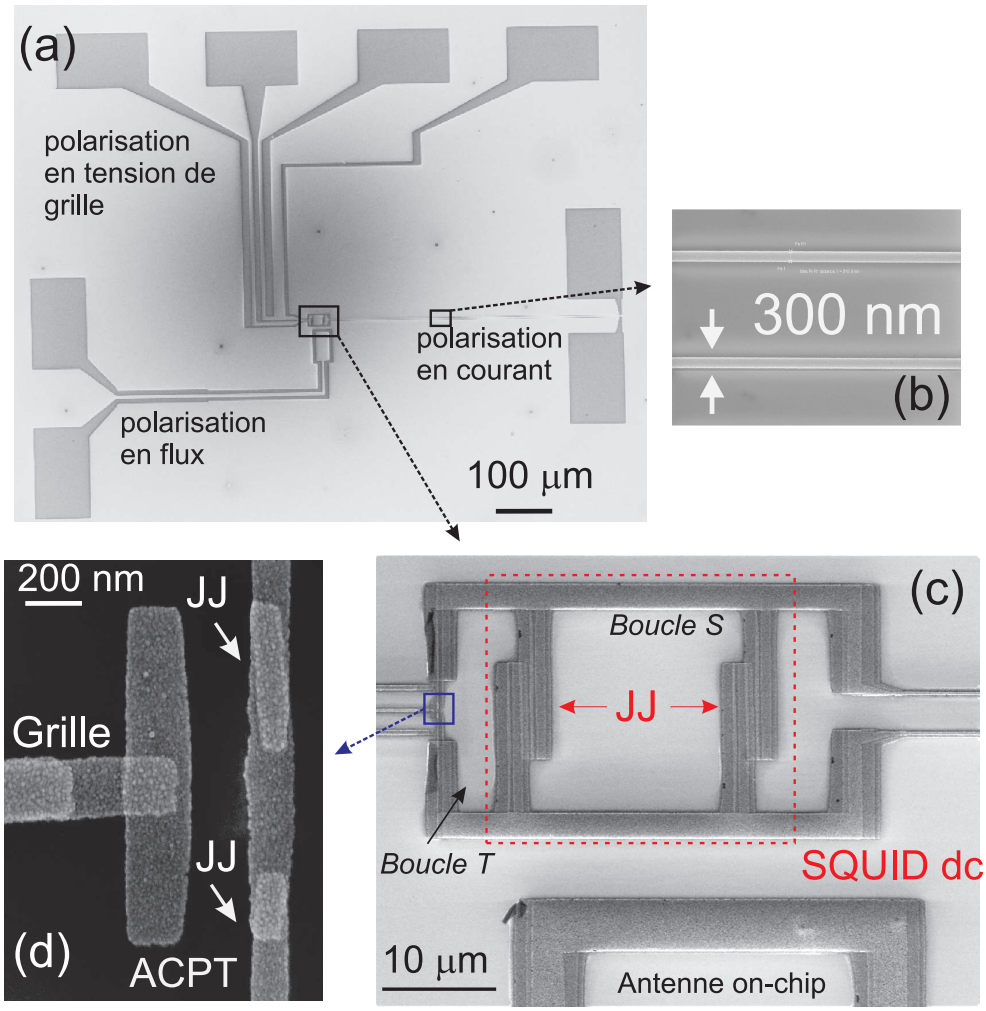

FIG. 3.4 – *Différentes photos MEB du circuit étudié. (a) Vue générale du circuit. (b) Lignes fines par lesquelles passe le courant de polarisation. (c) L'encadré rouge montre le SQUID. C'est-à-dire, la boucle supraconductrice interrompue par deux jonctions Josephson (JJ). Le SQUID est en parallèle avec l'ACPT (d). On distingue clairement l'îlot du transistor, isolé par deux petites jonctions Josephson.*

contient l'ACPT et la jonction Josephson du SQUID la plus proche. Cette boucle, notée T, a une superficie de 126 μm^2. La photo 3.4.d montre l'îlot du transistor, ainsi que ses deux jonctions Josephson dissymétriques. Les aires des jonctions du transistor sont respectivement égales à 0.05 μm^2 et à 0.02 μm^2. La ligne, située à gauche de l'îlot, correspond à la grille du transistor.

L'antenne on-chip est en partie visible en bas de la photo 3.4.c. Elle sert à créer des impulsions de flux rapides (de durée typique 5 ns), ainsi que des impulsions de flux micro-onde.

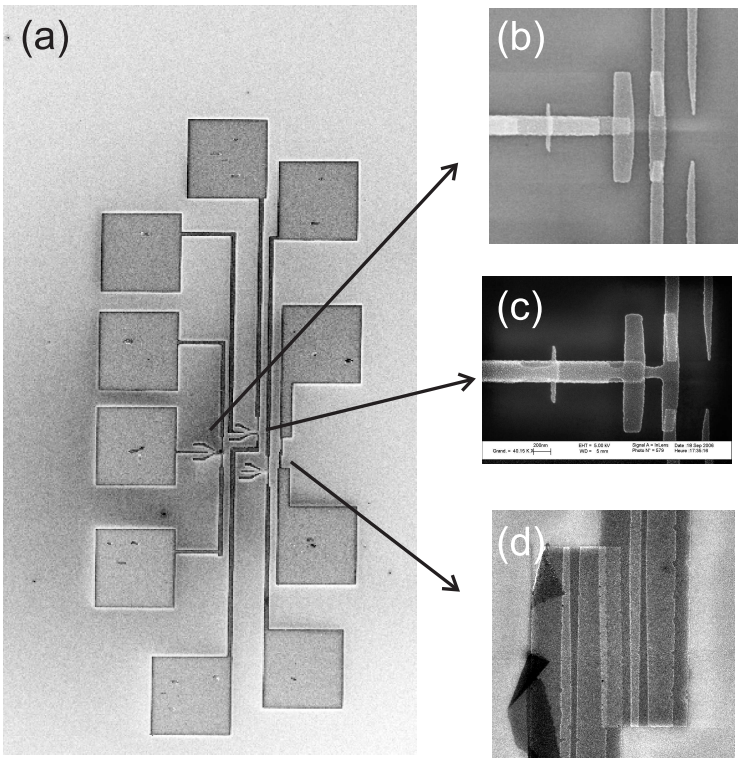

FIG. 3.5 – *(a) Photographie MEB de l'ensemble des circuits tests. (b) Circuit test permettant la mesure de la somme des résistances des deux jonctions Josephson du transistor. (c) Circuit test du transistor modifié. La grille est connecté à l'îlot du transistor. Cela permet la mesure de chacune des résistances des jonctions du transistor. (d) Circuit test permettant de trouver la résistance de la jonction du SQUID. La longueur de la jonction test (5 μm) est volontairement diminuée par rapport à la longueur de la jonction du SQUID (8 μm). La résistance de la jonction test est ainsi plus grande, ce qui facilite sa mesure.*

Test de résistance des jonctions Josephson Nous souhaitons évaluer, à la température ambiante, le courant critique I_c des différentes jonctions Josephson de notre circuit. Cela est indispensable pour optimiser rapidement les paramètres du circuit. La relation de d'Ambegaokar-Baratov relie le courant critique à la résistance normale R_n de la jonction

(à température nulle) : $I_c = \pi\Delta_{Al}/(2eR_n)$, où $\Delta_{Al} \approx 220$ μeV est le gap supraconducteur de l'aluminium à température nulle[5]. A la température ambiante, la résistance de la jonction Josephson est inférieure à R_n. Sa mesure donnera donc une sur-estimation du courant critique.

Les résistances des jonctions du circuit ne peuvent pas être mesurées directement. Pour y remédier, nous fabriquons des circuits tests à côté des circuits finaux. Ceux-ci sont montrés à la figure 3.5. Un circuit (b) permet de mesurer la somme des résistances des jonctions du transistor. Notons que les résistances de chaque jonction sont différentes à cause de la dissymétrie de l'ACPT. La mesure précédente ne permet pas d'accéder à la résistance de chacune des jonctions. Le circuit (c) correspond au transistor avec une connection entre la grille et l'île. Cela nous permet de mesurer indépendamment chacune des résistances du transistor. La connection ne modifie pas trop les résistances des jonctions. En effet, les circuits tests sans et avec connection, donnent des résistances des jonctions en série semblables.

Le circuit (d) permet de mesurer la résistance de la jonction du SQUID. La longueur de la jonction test (5 μm) est volontairement diminuée par rapport à la longueur de la jonction du SQUID (8 μm). La résistance de la jonction test est ainsi plus grande, ce qui facilite sa mesure.

Finalement, ces circuits tests permettent d'évaluer les courants critiques (I_C^2 et I_C^1) des deux jonctions du transistor, ainsi que le courant critique du SQUID ($2I_0$). Les estimations sont reportées dans le tableau 3.3. Nous comparons maintenant les estimations aux vraies valeurs. Ces dernières ont été extraites des mesures de spectroscopie des qubits. On trouve un bon accord pour les jonctions du transistor, l'estimation étant de 10% inférieure à la vraie valeur.

En revanche, l'estimation du courant critique du SQUID est de plus de 30% inférieure à la vraie valeur. Cette sous-estimation est étrange car on s'attendait à une sur-estimation. Une explication pourrait venir de la différence entre les masques de résine de la jonction test et de la jonction du SQUID. Le résine supérieure de la jonction test étant moins ouverte, la vitesse d'oxydation de la jonction test pourrait être supérieure à celle de la jonction du SQUID. Au final, la résistance de la jonction test serait supérieure à la résistance d'une jonction du SQUID.

La résistance normale du SQUID a pu être extraite de la caractéristique I-V à 30 mK. On en déduit le courant critique du SQUID égal à 2.5 μA, ce qui est cohérent avec la vraie valeur.

3.2 Dispositif expérimental

L'échantillon a été mesuré dans une dilution, fabriquée au laboratoire, et adaptée à l'intérieure d'un cryostat orange. Le câblage de la dilution a été mis en place par Franck

[5] Le gap supraconducteur est trouvé à l'aide de la caractéristique $I - \bar{V}$.

	ACPT		SQUID
Courants critiques	I_c^2	I_c^1	$2I_0$
à partir des circuits tests	27 nA	11 nA	1.8 μA
à partir de la caractéristique I-V			2.5 μA
à partir des spectroscopies	30 nA	12 nA	2.7 μA

TAB. 3.3 – *Valeurs des courants critiques des jonctions Josephson du SQUID et de l'ACPT, qui sont issues des résistances des jonctions Josephson à température ambiante, de la caractéristique I-V ou des spectroscopies.*

Balestro durant sa thèse [30]. Nous avons ajouté une ligne hyperfréquence qui permet d'envoyer une tension de grille micro-onde sur le transistor. Le reste du câblage a été inchangé.

3.2.1 Principe du montage

La figure 3.6 montre les différents appareils, qui ont été utilisés pour créer les signaux de polarisation, et mesurer l'échantillon. Ces appareils sont pilotés par le PC par l'intermédiaire du logiciel LabVIEW. Emile Hoskinson a développé, durant son post-doc, les programmes Lab-VIEW que j'ai utilisé et amélioré. Le circuit est connecté aux appareils par le câblage de la dilution, visible à la figure 3.7. Nous allons expliquer maintenant comment les trois différentes polarisations du circuit sont réalisées. Les appareils, ainsi que les éléments du câblage, seront alors introduits au fur et à mesure.

Polarisation en courant - mesure de la tension. Nous verrons au §4.1.1 du chapitre 4 que la probabilité d'échappement de l'état fondamental du SQUID est mesurée par une salve d'impulsions de courant. En résumé, une impulsion de courant déclenche ou non l'échappement du SQUID. L'échappement se traduit par l'apparition d'une impulsion de tension $\bar{V}_S(t)$ aux bornes du SQUID, d'amplitude $2\Delta_{Al}$ (le gap supraconducteur de l'aluminium). Nous décrivons maintenant le dispositif expérimental utilisé pour la mesure de la probabilité d'échappement du SQUID.

Quatre lignes sont utilisées pour la polarisation en courant et la mesure de la tension du circuit (mesure 4 fils). Une salve d'impulsions de tension est générée par une source de tension commerciale[(6)]. Elle est appliquée sur l'impédance de 500 kΩ en série avec l'échantillon (de résistance nulle). Par conséquent, la tension de polarisation $V_p(t)$ crée un courant de polarisation $I_p(t) \approx V_p(t)/(500 \times 10^3)$. Les paramètres de la salve d'impulsions de tension sont définies par le PC, et transmis à la source de tension au moyen d'une communication GPIB. Ils correspondent à l'amplitude V_p et à la durée Δt d'une impulsion, ainsi qu'au nombre N et à la fréquence de répétition f_{rep} des impulsions.

La tension $\bar{V}_S$ aux bornes du SQUID est amplifiée au moyen d'un amplificateur diffé-

(6) DAQ BNC-2110, NI.

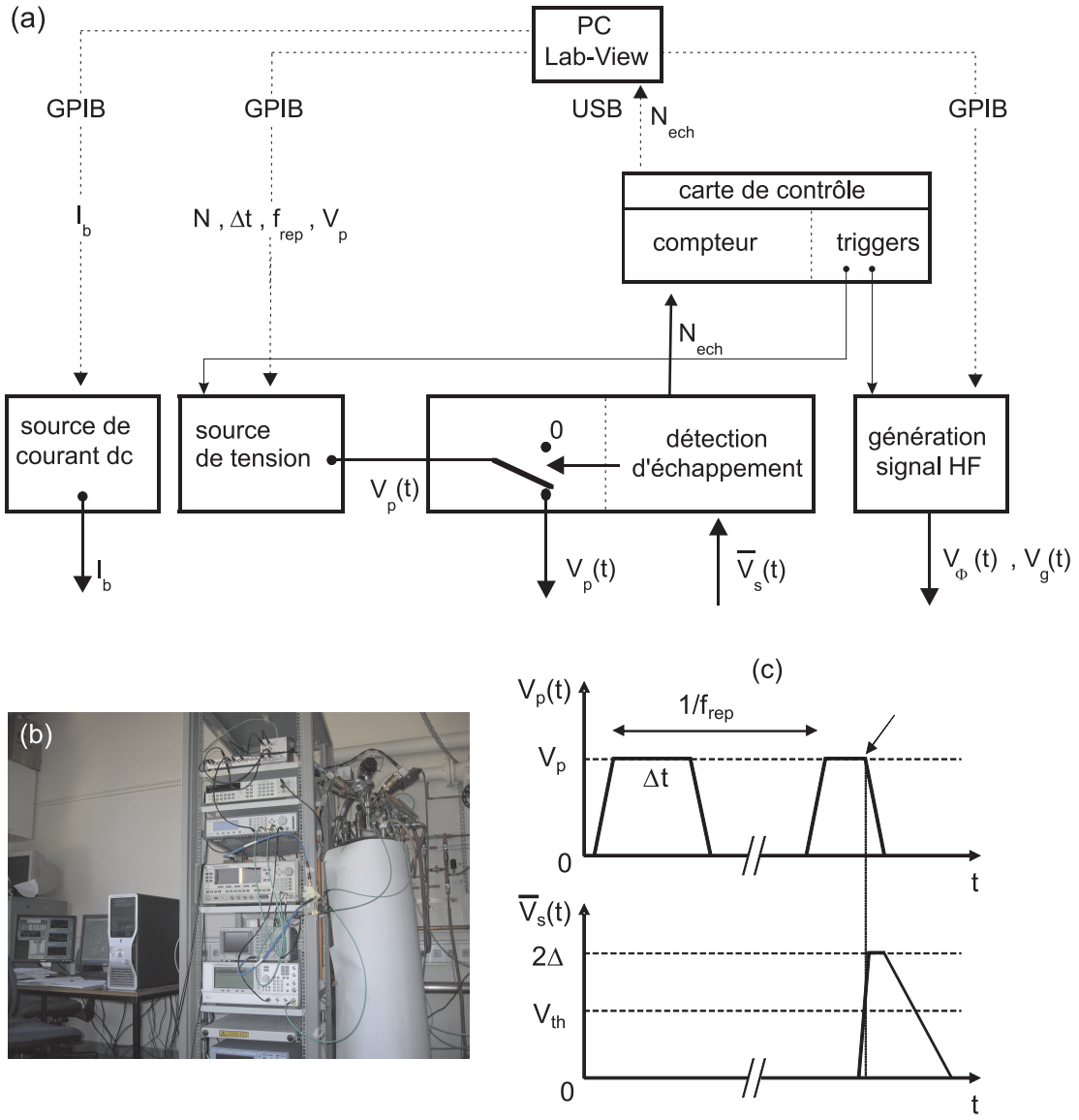

FIG. 3.6 – *(a) Appareils utilisés pour créer les signaux de polarisation et mesurer l'échantillon. (b) Photos du PC, des instruments et de la dilution. (c) Salve d'impulsions de tension $V_p(t)$ qui polarise le circuit en courant. Tension $\bar{V}_s$ mesurée aux bornes du circuit. Lorsque $\bar{V}_s$ est supérieure à une tension seuil V_{th} la polarisation en courant est remise à zéro.*

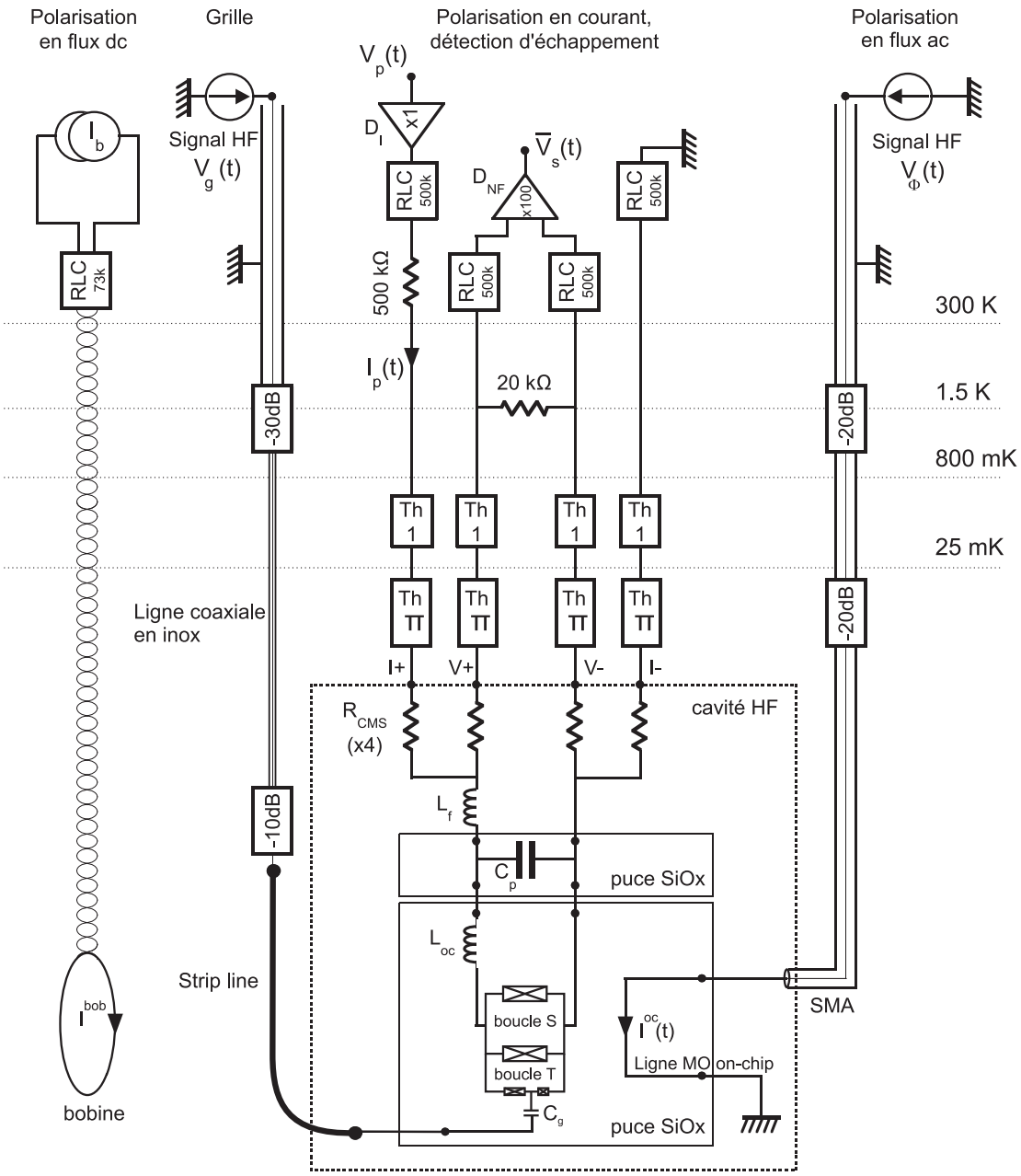

FIG. 3.7 – *Câblage du circuit.*

rentiel ×100 bas bruit[7](bloc "D NF"). Cette tension est lue par un boîtier électronique, et comparée à une tension seuil (fixée typiquement à la moitié de $2\Delta_{Al}$.). Si la tension seuil est dépassée, le boîtier coupe la polarisation en courant afin de réduire le chauffage de l'échantillon.

Une carte de contrôle, mise au point au laboratoire par Julien Minet, comptabilise le nombre de fois que la tension $V_s(t)$ a dépassé la tension seuil. Une fois la salve de N impulsions terminée, le PC lit sur la carte de contrôle le nombre N_{ech} d'échappements détectés. La probabilité d'échappement est alors donnée par $P_{ech} = N_{ech}/N$.

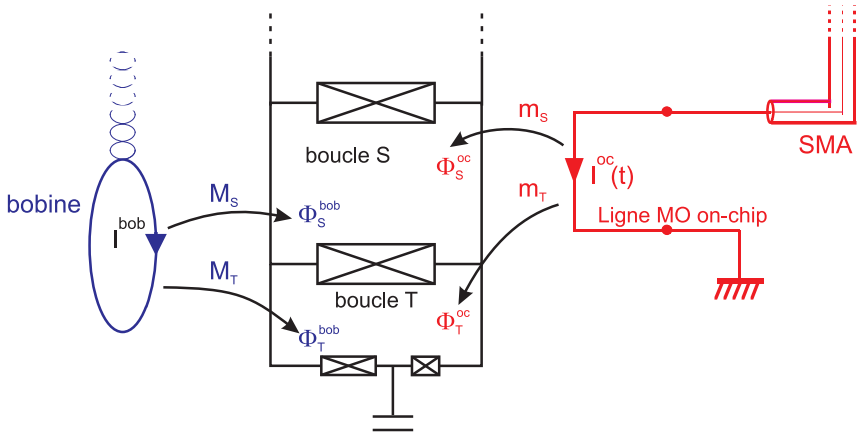

FIG. 3.8 – *Principe de la polarisation en flux du circuit.*

Polarisation en flux. Le principe de la polarisation en flux du circuit est schématisé à la figure 3.8. Une bobine en cuivre, située au dessus du porte échantillon, crée un champ magnétique homogène au niveau de l'échantillon. Elle est parcourue par un courant continu I^{bob} qui est généré par une source de courant dc[8]. La bobine induit respectivement à travers les boucles S et T les flux continus Φ_S^{bob} et Φ_T^{bob}. Ces deux flux s'expriment en fonction de I^{bob} comme $\Phi_S^{bob} = M_S I^{bob}$ et $\Phi_T^{bob} = M_T I^{bob}$, où M_S correspond à la mutuelle entre la bobine et la boucle S ; M_T correspond à la mutuelle entre la bobine et la boucle T.

Lors des spectroscopies des deux qubits, la polarisation en flux a été effectuée par des impulsions de flux Φ_S^{oc} et Φ_T^{oc} à travers les boucles respectives S et T. Ces impulsions, de durée typique 1 μs, sont créées par une impulsion de courant $I^{oc}(t)$ dans l'antenne on-chip. Le courant $I^{oc}(t)$, quant à lui, est produit par la tension $V_\Phi(t)$. Les flux Φ_S^{oc} et Φ_T^{oc} s'expriment en fonction du courant I^{oc} comme $\Phi_S^{bob} = m_S I^{oc}$ et $\Phi_S^{bob} = m_T I^{oc}$, où m_S correspond à la mutuelle entre l'antenne on-chip et la boucle S ; m_T correspond à la mutuelle entre l'antenne on-chip et la boucle T. Les valeurs numériques des mutuelles M_S, M_T, m_S et m_T ont été trouvées par des mesures de spectroscopie des deux qubits. Elles sont données dans le tableau 3.4.

[7] Amplificateur LI-75A, NF electronic instrument.
[8] Universal Source 3245A, HP.

M^S	M_T	m_S	m_T
0.131 pH	0.047 pH	1.58 pH	0.35 pH

TAB. 3.4 – *Valeurs des mutuelles.*

Nous mentionnons que l'antenne on-chip permet aussi d'induire un flux micro-onde. Nous verrons que ce flux micro-onde sera utilisé pour exciter les deux qubits.

Polarisation en tension de grille. Les photos MEB de la figure 3.9 montrent les différentes lignes qui définissent l'environnement électrique du transistor. Seules les lignes nommées *grille AC* et *grille DC* sont contrôlables, c'est-à-dire la tension de ces lignes peut être changée. La *grille AC* est écrantée par deux lignes de masse qui sont soudées au porte échantillon, et donc connectées à la masse du cryostat.

Pour les toutes premières mesures du circuit, la charge de grille du transistor était contrôlée par une tension dc sur la *grille dc*. Des mesures du transistor montraient une hystérésis lorsque nous augmentions puis diminuions la tension dc. Cette hystérésis pourrait s'expliquer par le fait que la *grille dc* n'est pas écrantée. Lors du balayage de la tension dc, la distribution des charges sur le substrat change. La charge de grille, qui est sensible à cette distribution, est alors affectée. Pour cette raison, les mesures ont par la suite été réalisées en contrôlant la charge de grille au moyen de la *grille AC*. La *grille DC* a été connectée à la masse. Afin d'alléger l'écriture, la notation AC présent dans le nom "*grille AC*" ne sera plus indiquer par la suite.

La grille est connectée à la deuxième ligne hyperfréquence qui porte ainsi son nom. La tension de la grille est définie par la tension $V_g(t)$. L'atténuateur à 30 mK empêche de polariser le transistor avec une tension de la grille dc. En effet, un signal dc chaufferait la dilution. Par conséquent, la tension de la grille est définie par une impulsion de tension.

Nous mentionnons qu'une tension de la grille micro-onde sera utilisée pour exciter les deux qubits.

Signaux de trig. Nous signalons que la carte de contrôle mise au point par Julien Minet permet d'envoyer des signaux de trig aux différents instruments, et ceci avec des temps contrôlés. Elle synchronise ainsi les impulsions de courant, les impulsions de flux et les impulsions micro-ondes.

Lignes hyperfréquences. Deux lignes hyperfréquences, de large bande passante [0-20 GHz] en utilisant la connectique SMA, descendent dans la dilution jusqu'au porte-échantillon. Elles sont utilisées pour transporter des signaux impulsionnels et micro-ondes. La génération de ces signaux fera l'objet du §3.2.2.

Nous nous intéressons tout d'abord à la ligne qui conduit le signal $V_\Phi(t)$. Celle-ci est composée d'un premier cable coaxial cryogénique installé entre 300 K et 1.5 K. Un second cable coaxial supraconducteur en niobium, situé à l'intérieur du calorimètre, relie l'étage

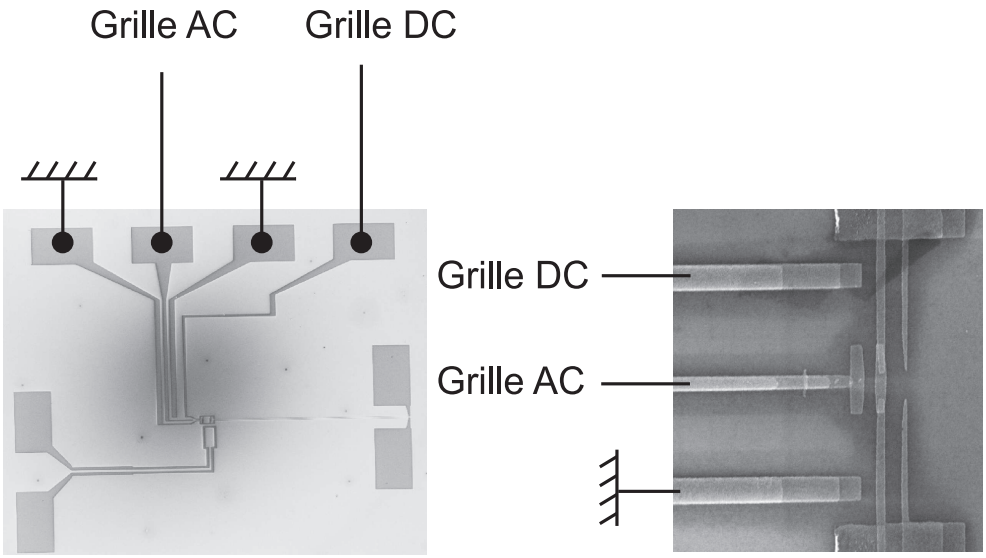

FIG. 3.9 – *Photos MEB des différentes lignes qui définissent l'environnement électrique du transistor.*

à 1.5 K au porte échantillon (30 mK). L'âme du coax est connectée à l'un des plots de l'antenne on-chip de notre circuit, la gaine extérieure étant soudée à la masse du cryostat.

La deuxième ligne, quant à elle, conduit le signal $V_g(t)$. Elle correspond à la grille. Elle est constituée d'un premier câble coaxial cryogénique entre 300 K et 1.5 K. Le manque de place dans le calorimètre nous a empêché d'installer un câble coaxial en niobium. Nous avons opté pour un coax en inox, d'une longueur de 30 cm. Le coax en inox a été retenu pour sa faible conductivité thermique. De plus, son faible diamètre a permis une grande flexibilité. Sa conductivité thermique est faible. Nous estimons la puissance thermique amenée par le câble sur le porte échantillon à 0.3 nW. Cette puissance est suffisamment faible pour ne pas élever la température de la dilution.

La résistance linéique de l'âme intérieure du coax en inox a été mesurée égale à 61 Ω/m. Nous nous attendons à ce que le coax atténue les signaux micro-ondes. Nous avons caractérisé la transmission micro-onde du coax en inox entre 0 et 20 GHz, au moyen d'un analysateur vectoriel (figure 3.10). On trouve une atténuation de -17 dB à 10 GHz et de -25 dB à 20 GHz.

L'âme centrale du coax en inox est ensuite connectée à la *strip line* disposée sur le porte échantillon. J'ai fabriqué la strip line pour que son impédance caractéristique soit proche de 50 Ω. Elle est soudée à sa fin au plot de la grille (figure 3.11).

3.2.2 Génération des signaux hyperfréquences

Le principe de génération des signaux rapides est résumé à la figure 3.12. Un tel montage permet de contrôler indépendamment les deux tensions $V_g(t)$ et $V_\Phi(t)$, qui sont appliquées respectivement sur deux lignes hyperfréquences. Ce dispositif permet la génération de si-

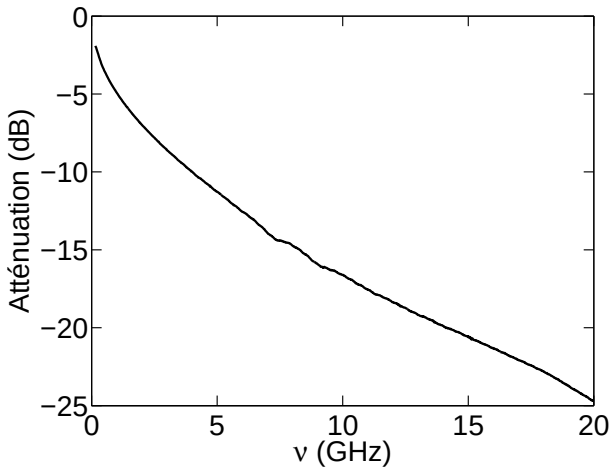

FIG. 3.10 – *Transmission de la ligne coaxiale en inox de longueur 30 cm.*

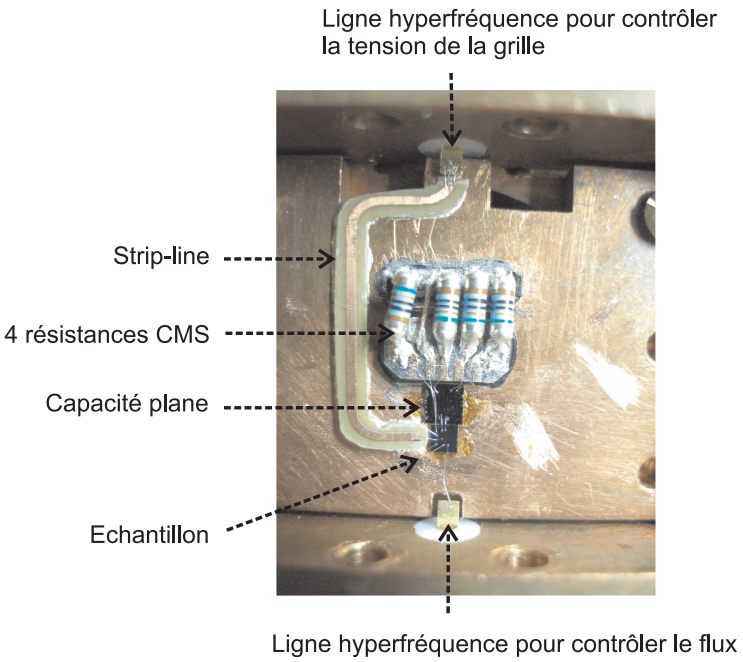

FIG. 3.11 – *Photo du porte échantillon.*

gnaux impulsionnels et micro-ondes.

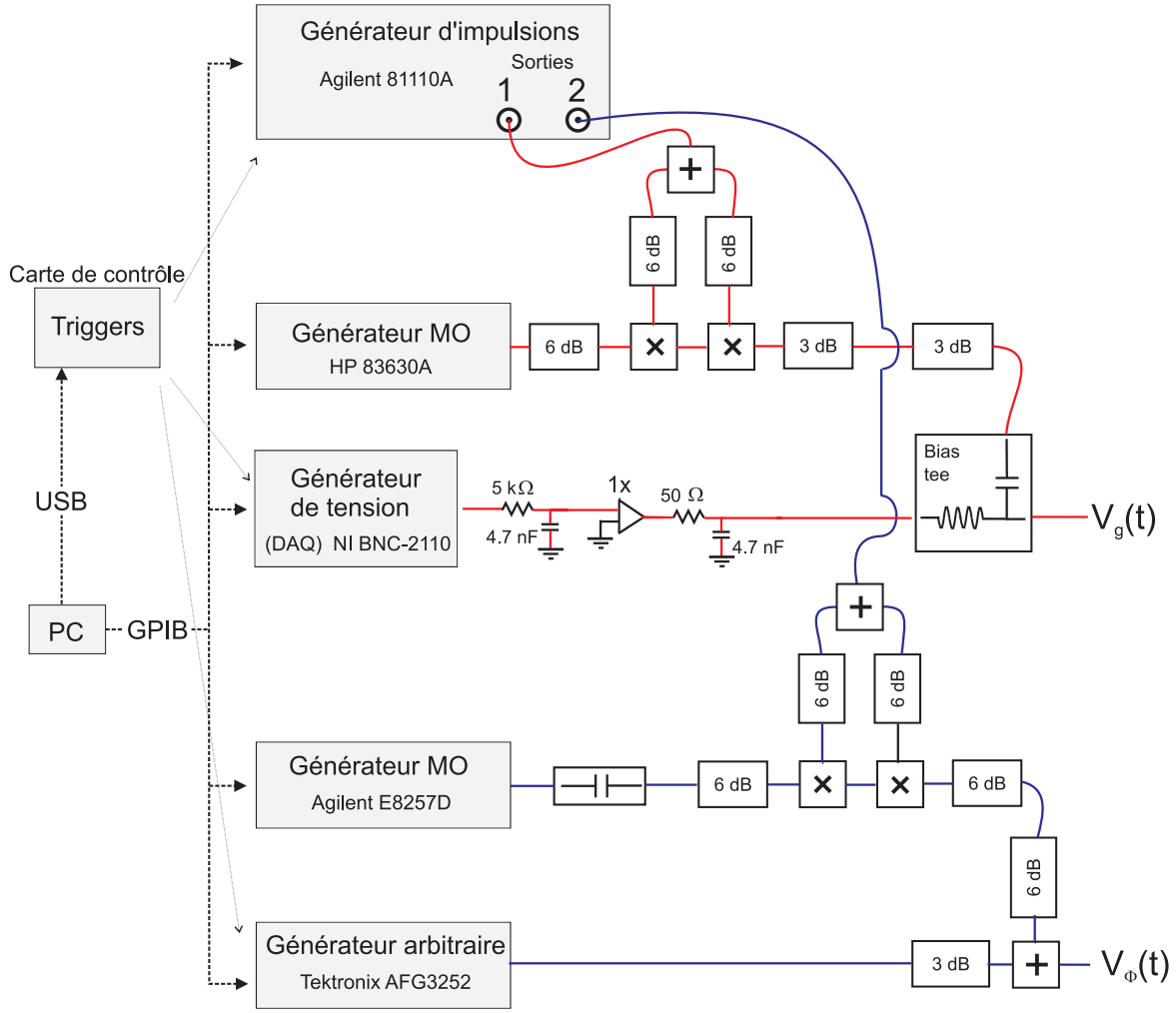

FIG. 3.12 – *Dispositif expérimental permettant la génération des signaux hyperfréquences $V_g(t)$ et $V_\Phi(t)$.*

Génération des signaux micro-ondes. Nous présentons dans un premier temps comment une impulsion de tension V_g micro-onde est créée. Seul les appareils de la figure 3.13.a sont utilisés dans ce cas. Le générateur MO[9] produit en continu une tension micro-onde d'amplitude A_{MO}. Cette dernière est mixée au signal venant du générateur d'impulsions, au moyen de deux multiplieurs[10] (bloc "×"). Signalons que le diviseur[11] (bloc "+"), situé après le générateur, distribue également le signal sur les deux multiplieurs. Lorsque le générateur d'impulsion ne délivre aucune tension, le signal micro-onde à la sortie du deuxième

[9] Synthesized Sweeper 88630A, HP.
[10] Mixer M8-0420 LS, Marki Microwave.
[11] Picosecond Pulse Labs.

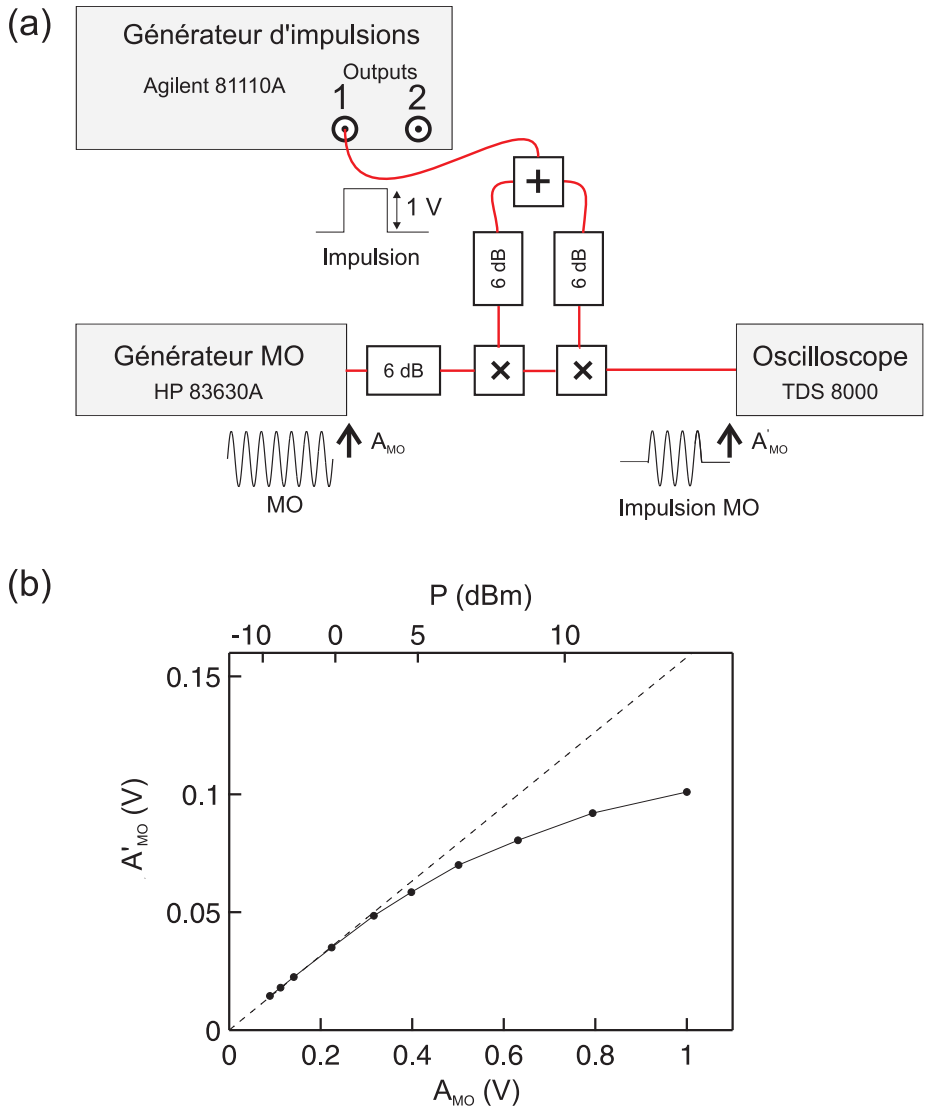

FIG. 3.13 – *(a) Dispositif expérimental permettant la génération des impulsions micro-ondes. (b) Dépendance de l'amplitude A'_{MO} des signaux micro-ondes à la sortie du dispositif en fonction de leur amplitude A_{MO} à l'entrée.*

multiplieur est nul. Mentionnons que dans ce cas, le premier multiplieur laisse passer un faible signal micro-onde. L'association de deux multiplieurs consécutifs est utilisée pour obtenir une atténuation totale de la micro-onde.

Lorsque le générateur d'impulsions envoie une impulsion de tension dans les multiplieurs, nous visualisons à l'oscilloscope à échantillonnage[12] une impulsion micro-onde d'amplitude A'_{MO}. Les différents atténuateurs servent à atténuer les réflexions des signaux hyperfréquences.

Nous testons à présent le précédent dispositif à différentes puissances micro-ondes. Le générateur d'impulsions envoie une salve d'impulsions d'amplitude 1 V (à la cadence de 1 kHz). La dépendance de l'amplitude A'_{MO} avec l'amplitude A_{MO} est montrée à la figure 3.13.b. Le système est linéaire pour les faibles amplitudes, c'est-à-dire l'amplitude A'_{MO} est proportionnelle à A_{MO}. Par contre, le signal micro-onde sature lorsque l'amplitude A_{MO} est supérieure à 0.4 V, c'est-à-dire 5 dBm. Cela devra être pris en compte par la suite.

L'impulsion de tension $V_\Phi(t)$ micro-onde est créée de façon similaire. Nous utilisons pour cela le deuxième générateur MO[13], et la deuxième sortie du générateur d'impulsions. Mentionnons l'utilisation d'une capacité[14] (bloc "‖"), qui empêche l'apparition d'une tension dc à la sortie du générateur MO, protégeant ainsi l'appareil.

Génération des signaux impulsionnels. Nous souhaitons générer une impulsion de tension V_g afin de définir la charge de grille du transistor. Celle-ci est réalisée par un générateur de tension[15]. Ce dernier ne pouvant délivrer une puissance électrique importante, un amplificateur opérationnel $\times 1$ fournit la puissance nécessaire[16]. L'impulsion de tension s'additionne à l'impulsion de tension micro-onde au moyen d'un bias tee[17].

Nous verrons dans le chapitre 4 que les spectroscopies du SQUID utilisent deux impulsions de flux consécutives. La première, d'une durée de 1 μs, polarise le circuit. La deuxième, d'une durée de 5 ns, sonde l'échappement du SQUID. Le signal de flux est réalisé en générant la tension V_Φ adéquate au moyen d'un générateur arbitraire[18]. Ce signal est additionné à l'impulsion de tension micro-onde à l'aide d'un diviseur.

3.3 Blindage et filtrage

Le blindage et le filtrage sont les deux différentes barrières qui sont dressées face aux bruits extérieurs. Ils permettent d'isoler les qubits des signaux non contrôlés. En effet, nous

[12] Digital Sampling Oscilloscope TDS 8000, Texktronix.
[13] Synthesized Sweeper E8257D, Agilent.
[14] DC-block MITEQ DCB4000.
[15] DAQ BNC-2110, NI.
[16] Fabriqué au laboratoire.
[17] Pulsar BT-29-463/1S.
[18] Arbitrary Generator AFG3252, Tektronix.

verrons par la suite que ces signaux sont responsables de la décohérence des qubits. Les caractéristiques du blindage et du filtrage seront résumées dans cette partie.

3.3.1 Blindage

Les deux qubits sont sensibles au bruit de flux. Le flux résiduel doit donc être le plus stable possible au niveau de l'échantillon. Pour cela, l'échantillon est isolé des dérives basse fréquence du champ magnétique par trois écrans concentriques. Les deux premiers sont situés à l'extérieur du cryostat, à température ambiante. Le plus à l'extérieur, est une tôle de fer doux. Vient ensuite un écran de μ-métal. Le troisième rempart, situé à 1.5 K, est une couche supraconductrice de plomb qui tapit la surface intérieure du calorimètre. A basse température, le flux est figé. Il peut varier d'un refroidissement à l'autre d'une amplitude inférieure à 2 μT.

Les radiations électromagnétiques extérieures sont arrêtées par le cryostat, qui fait office de cage de Faraday. Des radiations intérieures au crysostat, émises par exemple par les résistances de chauffage ou par les zones chaudes du cryostat, persistent. Entre de 300 K à 1.5 K, les lignes de courant et de tension sont donc torsadées et blindées par un capillaire en cupronickel (Ceci n'a pas été représenté à la figure 3.7 pour alléger le schéma). En dessous de 1.5 K le blindage est assuré par les dispositifs de filtrage. Le circuit est placé au sein d'une cavité en cuivre, dont les premiers modes électromagnétiques se situent aux alentours de 20 GHz. Ces modes peuvent affecter l'un des qubits si sa fréquence est supérieure à 20 GHz.

Le blindage ne peut pas cependant stopper le bruit thermique qui descend jusqu'à l'échantillon par le câblage de la dilution. Des dispositifs de filtrage sont alors utilisés.

3.3.2 Filtrage

Lignes de polarisation en courant et de mesure de tension. L'amplificateur $\times 1$ (D_I), situé au début de la ligne de polarisation, isole la masse du cryostat de la masse du secteur. Cela permet de se débarrasser des fluctuations du mode commun.

Nous trouvons à l'entrée du cryostat des filtres basse fréquence RLC dont la fréquence de coupure est 500 kHz (bloc "RLC 500k"), et ceci pour chaque ligne. Ces filtres passe-bas, développés au laboratoire, comportent notamment des capacités de traversée. Les lignes en dessous de 1.5 K sont constituées de thermocoax[(19)] (bloc "Th 1") de 75 cm qui sont thermalisés entre 1.5 K et 30 mK. Ces thermocoax permettent d'atténuer fortement les signaux dont les fréquences sont supérieures au GHz. Ils sont terminés par deux filtres π en série (bloc "Th π") qui augmentent cette atténuation. L'atténuation de ce dispositif a été estimée à -100 dB pour un signal à 1 GHz [30]. Le filtrage proche de l'échantillon sera discuté au §3.3.3.

[(19)] Gaine extérieure et âmes centrales en Inconel, diélectrique Al_2O_3

Amenées de courant de la bobine. Les amenées de courant sont tressées, et filtrées par des filtres RLC (bloc "RLC 73") à l'entrée du cryostat. Ces filtres sont du même type que ceux utilisés pour la ligne de polarisation en courant. Ils coupent les signaux au-dessus de 73 kHz.

Lignes hyperfréquences. Les lignes hyperfréquences ne peuvent pas être filtrées sous peine de réduire leur large bande passante. Nous avons ainsi atténué le bruit thermique par des atténuateurs à différents étages de la dilution. La ligne de flux possède deux atténuateurs de -20 dB. Ils sont thermalisés respectivement à 1.5 K et à 30 mK. La grille, quant à elle, possède un atténuateur de -30 dB à 1.5 K et un atténuateur de -10 dB à 30 mK.

3.3.3 Environnement proche du SQUID.

Une photo optique du porte échantillon est présentée à la figure 3.11. Elle permet de visualiser l'environnement électrique proche du circuit. Un filtre LC passe-bas est utilisé au plus proche de l'échantillon. Ce filtre est relié aux lignes de polarisation de courant et de mesure de tension par l'intermédiaire de quatre résistances RMS de 500 Ω. Un filtre LC similaire avait été utilisé par Julien Claudon pour mesuré un SQUID seul. Il a été caractérisé durant sa thèse [31]. Nous utiliserons les résultats de cette étude pour caractériser notre propre filtre.

L'inductance du filtre LC, notée L_{oc}, provient des longues et fines lignes d'amenée de courant situées entre le SQUID et la capacité plane. Elle se décompose en trois différents types d'inductance. C'est-à-dire l'inductance cinétique L_K et géométrique L_G des lignes, et l'inductance du fil de soudure L_f qui relie les lignes fines à la capacité plane. On estime à partir de la longueur de 0.5 mm des fils l'inductance L_f à 0.5 nH. Nous calculons l'inductance géométrique $L_G = 0.5$ nH [41]. La valeur de l'inductance cinétique L_K est déterminée à partir de la résistance normale des fils R_n par $L_K/R_N = 1.1$ nH/kΩ [31]. A partir de la résistance normale mesurée égale à 5.5 kΩ, nous déduisons l'inductance cinétique $L_K = 6.0$ nH. Nous obtenons alors $L_{oc} = 7$ nH.

La capacité plane, notée C_p, est composée des couches successives NbTi/Al_2O_3/NbTi[20]. La valeur de $C_p = 272$ pF sera trouvée au §4.3.4, à partir de la mesure de la fréquence de résonance du filtre $\nu_{r,env} = 1/(2\pi\sqrt{L_{oc}C_p}) = 115$ MHz.

Nous discutons maintenant de l'utilité du filtre LC. Celui-ci permet tout d'abord de filtrer les fluctuations du courant de polarisation aux fréquences élevées des qubits (≈10 GHz). Ces fluctuations sont en effet néfastes pour les qubits puisqu'elles provoquent leur relaxation [15].

Les fluctuations de courant basse fréquence, quant à elles, ne sont pas filtrées. Celles-ci entraînent la décohérence des qubits. Nous montrerons au §4.3.4 que la valeur RMS de ces

[20] La capacité plane a été fabriquée par Cristophe Lemonias du pôle de Nanofab.

fluctuations est proportionnelle à $1/\sqrt{L_{oc}}$. Une inductance élevée est donc nécessaire pour minimiser la décohérence des qubit.

Chapitre 4

Le SQUID dc : un qubit de phase

Nous avons montré au chapitre 2 que le SQUID est un oscillateur anharmonique, avec plusieurs niveaux quantiques notés $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, etc. Julien Claudon a étudié pendant sa thèse la dynamique du SQUID lorsque celui-ci est couplé à un signal micro-onde accordé à la fréquence du SQUID [31]. Cette dynamique présente deux régimes [32]. Lorsque l'amplitude micro-onde est faible par rapport à l'anharmonicité du SQUID, le SQUID se comporte comme un système à deux niveaux. Il peut être vu comme un qubit de phase. A l'inverse, si l'amplitude micro-onde est de l'ordre ou plus grande que l'anharmonicité du SQUID, la dynamique du SQUID fait intervenir plusieurs niveaux. Le SQUID se comporte alors comme un système multi-niveaux.

Le SQUID est, en plus d'être un objet quantique, le détecteur de son propre état quantique. En effet, la probabilité d'échappement du SQUID dépend de l'état quantique du SQUID [42].

Le circuit étudié ici est composé d'un SQUID dc auquel est couplé un transistor à paires de Cooper asymétrique. Nous souhaitons cependant rapporter dans ce chapitre les propriétés du SQUID en occultant le transistor. Pour cela, nous considérerons les situations pour lesquelles la fréquence du transistor ν_T est éloignée considérablement de la fréquence du SQUID ν_S. Cette condition est en générale vérifiée lorsque la charge de grille n_g est fixée à 1. Le couplage entre le SQUID et le transistor peut ainsi être considéré comme négligeable (*cf* chapitre 6).

Les propriétés d'échappement de l'état fondamental du SQUID feront l'objet de la première partie de ce chapitre. La deuxième partie présentera les mesures de l'état excité. Des mesures de spectroscopie montreront le niveau important de flexibilité de la fréquence ν_S. Des oscillations cohérentes mettront en évidence les deux régimes du SQUID qui ont été discutés plus haut. La troisième partie portera sur l'étude de la décohérence de l'état quantique du SQUID. Cette étude permettra de caractériser les bruits en courant et en flux dans notre échantillon.

4.1 Échappement de l'état fondamental du SQUID

Nous rapporterons dans un premier temps le principe de la mesure de la probabilité d'échappement de l'état fondamental du SQUID. Nous décrirons ensuite les deux échappements possibles, à savoir les échappements par activation thermique (AT) et par effet tunnel (MQT). Puis nous présenterons le diagramme critique du SQUID. Enfin, les dernières parties confronteront les résultats expérimentaux et les résultats théoriques des échappements AT et MQT.

4.1.1 Mesure de la probabilité d'échappement du SQUID

Caractéristique courant-tension. Le circuit est polarisé par un courant continu et la tension moyenne est mesurée aux bornes du SQUID. Le courant de polarisation imposé évolue dans le temps de façon triangulaire, ce qui permet d'accéder à la caractéristique courant-tension complète. Cette caractéristique est présentée à la figure 4.1. L'impédance de l'ACPT est deux ordres de grandeur plus élevée que l'impédance du SQUID. Ainsi, la caractéristique I-V mesurée est principalement celle du SQUID.

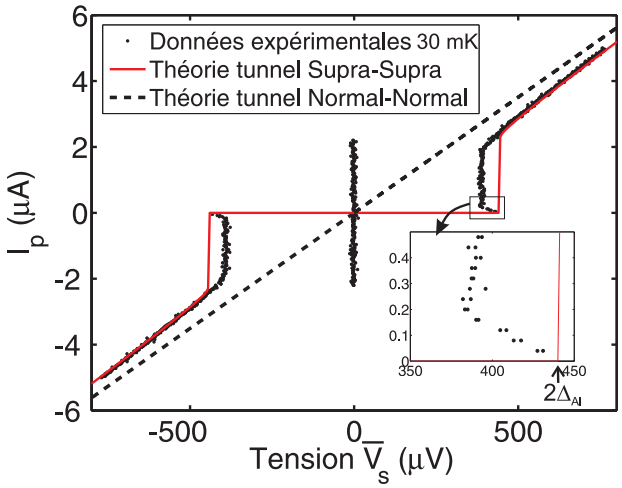

FIG. 4.1 – *Caractéristique courant-tension ($I_p - V_s$) du circuit pour une température de 30 mK. La courbe pleine est l'ajustement du courant tunnel entre deux supraconducteurs en utilisant la théorie BCS. On détermine la résistance normale $R_n \approx 142\ \Omega$ et le gap supraconducteur de l'aluminium $\Delta_{Al} = 220\ \mu eV$. La ligne en pointillée est la caractéristique courant-tension théorique lorsque l'aluminium est métallique et donc le transport résistif.*

La caractéristique I-V du SQUID et son analogie avec la dynamique de la particule fictive du SQUID dans le potentiel bidimmensionel du SQUID a été discutée au §2.2.1 du chapitre 2. Nous rappelons ici les principaux résultats de cette étude. La branche supraconductrice, visible sur la caractéristique I-V, correspond à un courant de polarisation inférieur

au courant critique et à une tension nulle. Sur cette branche, la particule est piégée dans un des minima locaux du potentiel du SQUID.

Lorsque le courant de polarisation est proche du courant critique, la particule initialement piégée a une certaine probabilité de s'échapper du puits. Si cet échappement a lieu, la particule dévale le potentiel et la tension saute de zéro à $2\Delta_{Al}$, où Δ_{Al} est le gap supraconducteur de l'aluminium. L'échappement est donc mis en évidence par l'apparition d'une tension aux bornes du circuit. En augmentant encore le courant, la caractéristique I-V tend vers la caractéristique d'une jonction résistive (aluminium normal). On note R_n la résistance normale de cette jonction.

Lorsque le courant est à nouveau abaissé en-dessous du courant critique, la tension ne revient pas à une valeur nulle. Elle garde une valeur d'environ 390 μV, signifiant que la particule ne se repiège pas dans un des puits du potentiel. Ceci peut s'interprêter par une viscosité trop faible pour réduire à zéro l'énergie cinétique de la particule. Proche du courant de repiègeage, la tension augmente jusqu'à environ 440 μV (figure 4.1 intérieure). Nous supposons que cette dernière tension est égale à $2\Delta_{Al}$, soit $\Delta_{Al} = 220$ μV. Notons que la tension de 390 μV inférieure à $2\Delta_{Al}$ n'est pas attendue théoriquement. Celle-ci pourrait être expliquée par un effet de chauffage local de l'échantillon. Enfin, en dessous du courant de repiégeage, qui est égal à quelques nA, la tension redevient nulle. La particule est donc à nouveau piégée.

L'ajustement de la caractéristique I-V expérimentale, en utilisant la théorie BCS [36], permet d'extraire la valeur de la résistance normale du SQUID : $R_n = 142$ Ω.

Principe de la mesure de la probabilité d'échappement. La figure 4.2 résume le principe de la mesure de la probabilité d'échappement du SQUID. Typiquement, nous envoyons dans le circuit 2000 impulsions de courant identiques, d'une durée de 50 μs. La mesure de la tension pendant chaque impulsion nous informe de l'état de la particule : la particule est considérée comme échappée si la tension est supérieure à une tension seuil d'environ 50 μV. Elle est comptée étant piégée si la tension est inférieure à cette valeur. Un compteur [(1)] enregistre le nombre d'impulsions N_{ech} qui ont fait échapper la particule et le nombre d'impulsions envoyées N. La probabilité d'échappement est alors donnée par $P_{ech} = N_{ech}/N$.

Un temps d'attente de 1 ms est utilisé après chaque impulsion pour permettre à la particule de se réinitialiser dans son état fondamental. Ce temps est assez long pour empêcher le chauffage de l'échantillon. Dans le même but, le courant de polarisation est mis à zéro dès que l'échappement est détecté.

4.1.2 Activation thermique et échappement par effet tunnel

Nous allons décrire dans cette partie les deux mécanismes d'échappement de l'état fondamental du SQUID. L'effet de l'ACPT sur la dynamique d'échappement du SQUID sera

[(1)] Compteur développée par J. Minet du service électronique.

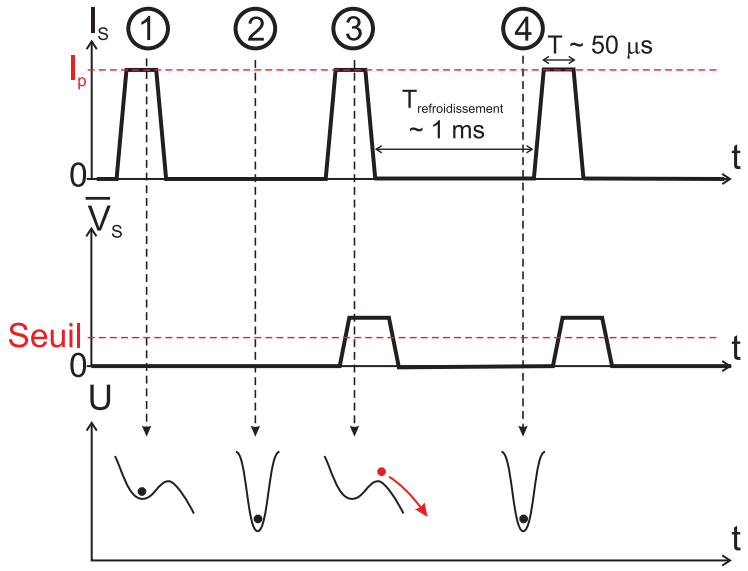

FIG. 4.2 – *Méthode expérimentale pour accéder à la probabilité d'échappement de la particule du SQUID. Plusieurs impulsions de courant (typiquement 2000) sont envoyées dans le circuit à la fréquence de 1 kHz. Pour chaque impulsion, la barrière du potentiel est réduite et la particule peut rester piégée (1) ou s'échapper (3). Une tension $\overline{V}_s$ supérieure à la tension de seuil témoigne de l'échappement de la particule. Après chaque impulsion, un temps d'attente à courant nul permet de repiéger la particule dans un puits profond (2 et 4). Le comptage du nombre de fois que la particule s'est échappée permet d'accéder à la probabilité d'échappement.*

ignoré.

Nous supposons dans un premier temps que la particule fictive du SQUID est piégée en fond de puits. Lorsque le courant de polarisation est proche du courant critique, la profondeur du puits est assez faible pour que la particule puisse s'échapper du puits. Si cet échappement a lieu, on parlera de l'*échappement du SQUID*. Le potentiel étudié pour décrire l'échappement peut se réduire à un potentiel unidimensionnel dans la direction de l'échappement ($X_{\parallel}$) [31]. Le problème de l'échappement dans ce nouveau potentiel est identique à celui de l'échappement d'une simple jonction Josephson. L'échappement dépend des deux paramètres géométriques du potentiel : la hauteur de barrière ΔU et la fréquence plasma ν_p, qui sont définies par le courant I_p et le flux Φ_S. Deux échappements différents sont envisageables et sont illustrés à la figure 4.3.

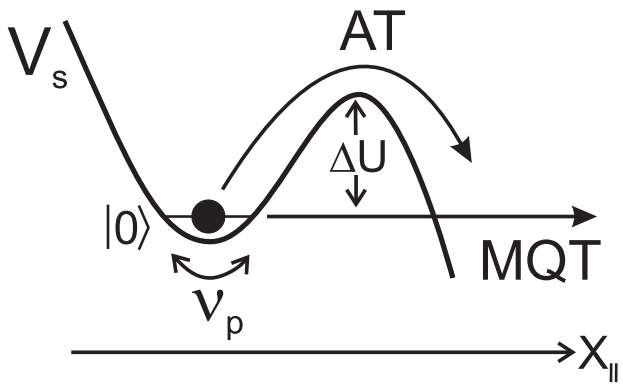

FIG. 4.3 – *Potentiel unidimensionnel du SQUID proche de l'échappement. La particule peut s'échapper par activation thermique (AT) ou par un passage tunnel (MQT)*

Nous discutons tout d'abord de l'échappement par activation thermique. Lorsque l'énergie thermique k_BT (k_B est la constante de Bolzmann) est grande devant l'énergie caractéristique $h\nu_p$, le SQUID n'est pas dans son état fondamental. La distribution des populations des états excités est donnée par la loi de Boltzmann. Le taux d'échappement thermique Γ_0^{AT} est alors donné par une loi d'Ahrénius renormalisée [43] :

$$\Gamma_0^{AT}(I_p, \Phi_S, T) = a_\perp \nu_p \exp\left(-\frac{\Delta U}{k_B T}\right), \tag{4.1}$$

où le préfacteur $a_\perp$ est égal au rapport entre la fréquence transversale dans le puits et la fréquence transversale au point col. Nous avons $a_\perp \approx 1$ pour notre échantillon.

Lorsque le SQUID est dans son état fondamental $|0\rangle$, la particule peut s'échapper par un passage tunnel à travers la barrière de potentiel. Cet échappement est communément appelé échappement *MQT* pour *Macroscopic Quantum Tunneling*. Le taux d'échappement

tunnel Γ_0^{MQT} est donné par la théorie MQT d'une simple jonction Josephson [44] :

$$\Gamma_0^{MQT}(I_p, \Phi_S) = 12\sqrt{6\pi\Delta U/h\nu_p}\,\nu_p \exp\left(-\frac{36}{5}\frac{\Delta U}{h\nu_p}\right). \tag{4.2}$$

En comparant les fonctions exponentielles (termes prépondérants) dans le taux d'échappement MQT (4.2) et thermique (4.1), on trouve que la transition entre l'activation thermique et l'échappement tunnel se fait à la température de cross-over T_{co}. Celle-ci est donnée par [45] :

$$T_{co} = \frac{h\nu_p}{2\pi k_B}. \tag{4.3}$$

La fréquence plasma du SQUID proche de l'échappement est environ égale à 12 GHz. Cela permet d'estimer T_{co} à environ 95 mK. Les mesures de notre échantillon ont été réalisées à une température d'environ 30 mK. Les mesures de spectroscopie du SQUID, qui ont été analysées à la fin de ce chapitre, permettent de trouver une température de 75 mK. Cette température et la température de la dilution sont toutes les deux inférieures à T_{co}. Nous supposons donc, à partir de maintenant, que le mécanisme d'échappement de notre SQUID est dominé par l'échappement tunnel.

Probabilité d'échappement. En supposant que la particule au temps 0 passe instantanément d'un taux d'échappement nul à un taux Γ_0^{MQT}, la probabilité d'échappement P_{ech} de la particule au temps t s'exprime comme

$$P_{ech}(I_p, \Phi_S) = 1 - \exp\left(-\Gamma_0^{MQT} t\right). \tag{4.4}$$

4.1.3 Probabilité d'échappement en fonction de I_p et Φ_S

La figure 4.4 montre la dépendance de la probabilité d'échappement en fonction du courant de polarisation I_p[(2)], au flux $\Phi_S = -0.03\ \Phi_0$ (Nous montrerons plus bas comment le flux est calibré). Nous constatons qu'une augmentation de I_p fait passer la probabilité d'échappement de 0 % à 100 % de façon continue. Nous introduisons les courants d'échappement $I_{20\%}$, $I_{50\%}$ et $I_{80\%}$ pour lesquels les probabilités d'échappement sont égales respectivement à 20%, 50% et 80%. La largeur ΔI est définie par $\Delta I \equiv I_{80\%} - I_{20\%}$.

Diagramme de phase du SQUID. Nous nous intéressons maintenant à la dépendance du courant $I_{50\%}$ avec le flux Φ_S. Ce flux est créé par le courant I_{bob} qui circule dans la bobine en cuivre au-dessus de l'échantillon. Il s'écrit comme $\Phi_S = M_S I_{bob} + \Phi_S^{res}$, avec M_S la mutuelle entre le SQUID et la bobine, et Φ_S^{res} le champ magnétique résiduel.

La figure 4.5 présente les mesures du courant $I_{50\%}$ en fonction du courant I_{bob} dans la bobine. La ligne de courant $I_{50\%}$, qui est proche de la ligne de courant critique, montre une succession d'arches bien connues pour un SQUID. Trois arches sont visibles et sont

(2) Le courant I_p est maintenant associé à l'amplitude des impulsions.

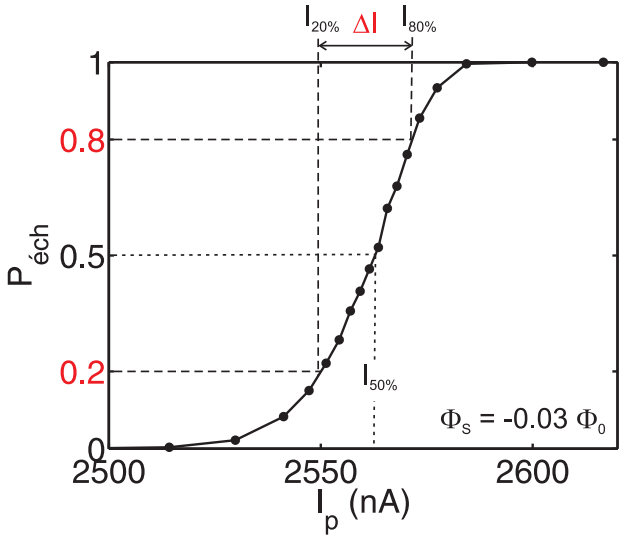

FIG. 4.4 – *Dépendance de la probabilité d'échappement P_{ech} avec le courant de polarisation I_p. Pour les courants $I_{20\%}$, $I_{50\%}$ et $I_{80\%}$, les probabilités d'échappement sont respectivement égales à 20%, 50% et 80%. La largeur ΔI est définie par $\Delta I = I_{80\%} - I_{20\%}$.*

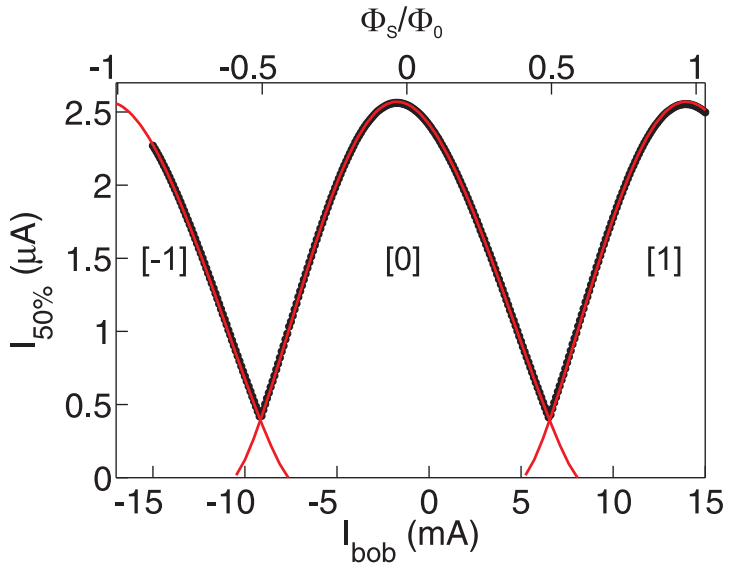

FIG. 4.5 – *Courant $I_{50\%}$ en fonction du courant I_{bob} dans la bobine (Le courant I_{bob} induit le flux Φ_S à travers la boucle du SQUID). La ligne pleine correspond à la théorie MQT.*

respectivement annotées [-1], [0] et [1]. L'arche [n] est trouvée par l'échappement du SQUID, lorsque celui-ci piège n quantums de flux[(3)].

La dépendance de $I_{50\%}$ en fonction de I_{bob} est utilisée pour calibrer le flux. Pour cela, nous utilisons les trois points singuliers suivants [46]. Tout d'abord, le courant $I_{50\%}$ est maximum et égal à I_p^{max} quand le flux $\Phi_S = -\eta/2\pi b$. Ensuite, les arches [0] et [-1] se croisent à $I_{50\%} = I_\times$, quand $\Phi_S = -\Phi_0/2 - \eta/(2\pi b) I_\times / I_p^{max}$. Enfin, les arches [0] et [1] se croisent à $I_{50\%} = I_\times$, quand $\Phi_S = \Phi_0/2 - \eta/(2\pi b) I_\times / I_p^{max}$. Les mesures de ces derniers points permettent de trouver la mutuelle $M_S = \Phi_S / I_{bob} = 0.13$ pH, ainsi que le champ résiduel $\Phi_S^{res} = 0.08\ \Phi_0$. L'axe du flux Φ_S est indiqué en haut de la figure 4.5.

L'ajustement du courant $I_{50\%}$ par la théorie MQT permet de trouver trois paramètres du SQUID, à savoir, la dissymétrie d'inductance $\eta = 0.28 \pm 0.01$, la dissymétrie de courant critique $\alpha = 0.0035 \pm 0.0003$ et $b = 1.28 \pm 0.01$.

4.1.4 Dépendance de la largeur ΔI avec Φ_S

La figure 4.6 montre la dépendance de la largeur ΔI avec le flux Φ_S. La largeur théorique MQT est tracée en ligne pleine. Elle prédit une largeur Φ_0 périodique, ce qui est vérifié expérimentalement. Cependant, la largeur expérimentale est toujours supérieure à la largeur théorique. Nous essayons dans la suite d'expliquer cet élargissement en considérant différentes sources de bruit.

Bruit en flux. Des mesures de la largeur ΔI en fonction du flux, réalisées par J. Claudon sur un SQUID dc seul, ont montré un élargissement de la largeur expérimentale par rapport à la largeur théorique MQT. Cet élargissement a été expliqué par un bruit de flux basse fréquence, compris entre 100 mHz et 20 kHz, dont les fluctuations RMS sont égales à $\langle \delta\Phi^2 \rangle \approx 0.55$ mΦ_0 [15].

Les fluctuations RMS du bruit de flux basse-fréquence dans notre circuit sont évaluées à la fin de ce chapitre. Nous trouvons $\langle \delta\Phi^2 \rangle^{1/2} \approx 1$ mΦ_0. La largeur ΔI théorique, qui est prédite avec un tel bruit de flux, est tracée en ligne pointillée noire, à la figure 4.6. On constate que le bruit de flux ne permet pas, dans notre cas, d'expliquer les largeurs ΔI expérimentales. Ceci est d'autant plus vrai au maximum du courant critique, où la probabilité d'échappement et donc ΔI n'est pas sensible à un bruit de flux au premier ordre. La largeur ΔI mesurée est égale à 21.5 nA, alors que la largeur prédite par la théorie MQT, en tenant en compte ou non du bruit de flux, est égale à 12.7 nA.

Nous mentionnons qu'un tel élargissement, au maximum du courant critique, n'a jamais été observé dans les SQUID seuls, étudiés par J. Claudon et F. Balestro [31, 30].

Bruit en courant de polarisation. Le bruit en courant de polarisation est causé par l'environnement électrique proche de l'échantillon. Il sera caractérisé à la fin de ce chapitre. Ses fluctuations RMS sont égales à $\langle \delta I_{Ze}^2 \rangle^{1/2} \approx 12$ nA. Les fréquences de ce bruit sont

(3) Cela correspond à l'échappement de la particule fictive du SQUID de la famille de puits [n].

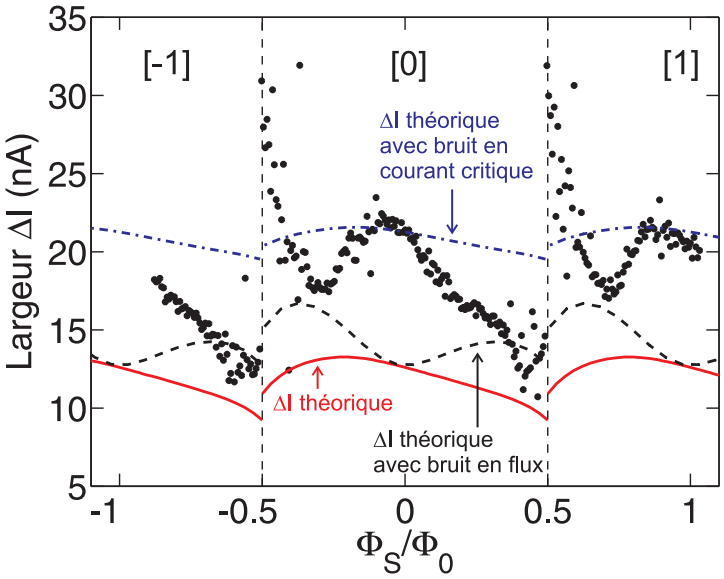

FIG. 4.6 – *Largeur ΔI en fonction du flux. La ligne pleine rouge correspond à la largeur théorique MQT. La ligne pointillée noire correspond à la largeur théorique MQT avec du bruit en flux basse-fréquence, dont les fluctuation RMS sont $\langle \delta\Phi^2 \rangle^{1/2} = 1\ m\Phi_0$. La ligne pointillée bleue correspond à la largeur théorique MQT avec du bruit en courant critique basse-fréquence, dont les fluctuation RMS sont $\langle \delta I_c^2 \rangle^{1/2} = 10\ nA$.*

principalement centrées autour de 115 MHz. C'est un bruit haute fréquence par rapport à la durée de l'impulsion de courant de 50 μs.

Le bruit en courant de polarisation modifie les taux d'échappement MQT et thermique (équations (4.1) et (4.2)). Les nouvelles expressions des taux d'échappement, qui tiennent en compte du bruit en courant de polarisation, sont données dans la référence [47].

Les calculs montrent que la largeur ΔI n'est pas affectée par le bruit en courant de polarisation.

Bruit en courant critique. Nous supposons maintenant l'existence d'un bruit en courant critique basse fréquence, compris entre 100 mHz et 20 kHz, dont les fluctuations RMS sont égales $\langle \delta I_c^2 \rangle^{1/2} = 10$ nA.

Nous calculons la largeur théorique ΔI en présence d'un tel bruit, à l'aide de la référence [31]. La largeur théorique est tracée en trait pointillé bleu à la figure 4.6. Nous constatons qu'elle est en accord avec la largeur expérimentale au maximum du courant critique. La largeur théorique est cependant surévaluée à d'autres flux (excepté entre -0.5 Φ_0 et -0.45 Φ_0).

Un bruit en courant critique, dont les fluctuations RMS sont constantes, ne permet pas d'expliquer les largeurs expérimentales.

4.1.5 Dépendance de la largeur ΔI avec la température.

Les mesures précédentes ont toutes été réalisées à environ 30 mK. Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la dépendance de la largeur ΔI avec la température. Cette dépendance est montrée à la figure 4.7, au maximum du courant critique. Les largeur expérimentales, qui sont représentées par des points, sont constantes et égales à environ 21 nA jusqu'à 120 mK, puis augmentent.

La largeur théorique est calculée en considérant les deux sources d'échappement du SQUID, c'est-à-dire les échappements par effet tunnel et par activation thermique. La largeur théorique, qui est tracée en trait pointillé noir sur la figure 4.7, montre deux régimes suivant la température. Lorsque la température est inférieure à 100 mK, la largeur est constante et l'échappement du SQUID est dominé par l'échappement tunnel. Au dessus de 100 mK, la largeur augmente et l'échappement du SQUID se fait par activation thermique. Nous constatons que la largeur expérimentale est toujours supérieure à la largeur théorique.

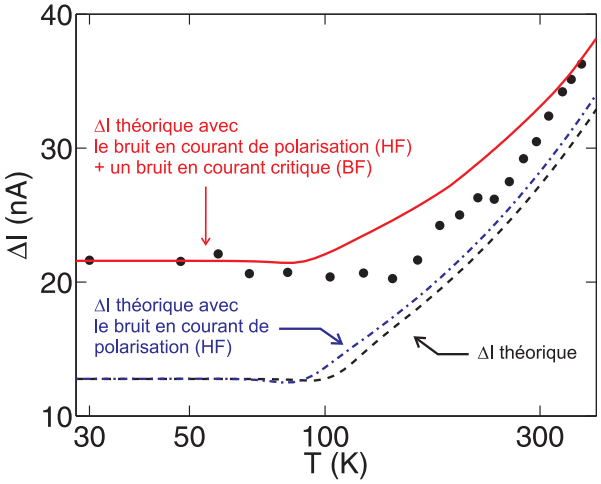

FIG. 4.7 – *Les points représentent les largeurs ΔI expérimentales en fonction de la température, au maximum du courant critique. La ligne pointillée noire est la largeur théorique MQT. La ligne pointillée bleue est la largeur théorique MQT en présence du bruit en courant de polarisation haute fréquence ($\langle \delta I_{Ze}^2 \rangle^{1/2} = 12$ nA). La ligne rouge est la largeur théorique MQT en présence d'un bruit en courant critique basse fréquence ($\langle \delta I_c^2 \rangle^{1/2} = 10$ nA) et du bruit en courant de polarisation.*

Bruit en courant de polarisation. Nous calculons les effets du bruit en courant de polarisation, qui a été introduit plus haut, sur la largeur ΔI, en fonction de la température. La largeur prédite est tracée en ligne pointillée bleue à la figure 4.7. Nous constatons que le bruit en courant de polarisation ne change pas la largeur dans le régime MQT et l'augmente d'environ 1 nA dans le régime thermique. Le bruit en courant de polarisation ne permet donc pas d'expliquer les largeurs expérimentales.

Bruit en courant critique. La dépendance de la largeur théorique avec la température est maintenant calculée en présence de deux bruits. Nous conservons le bruit en courant de polarisation et rajoutons un bruit en courant critique. Nous supposons que le bruit en courant critique est basse fréquence, de fluctuations RMS $\langle \delta I_c^2 \rangle^{1/2} = 10$ nA. Nous avons vu dans la section précédente qu'un tel bruit permet d'expliquer la largeur expérimentale au maximum du courant critique.

La dépendance de la largeur théorique avec la température est tracée en trait rouge à la figure 4.7. La théorie est en accord avec l'expérience en dessous de 100 mK, mais ne parvient pas à expliquer la largeur au dessus de cette température.

4.1.6 Discussion sur la largeur ΔI

La dépendance de la largeur ΔI avec le flux (figure 4.6) reste pour l'instant incomprise. Je discute ici les différentes hypothèses qui pourraient expliquer l'élargissement de la largeur expérimentale par rapport à la largeur MQT.

(1) Nous avons mesuré un SQUID couplé à un transistor symétrique[(4)], environ un an avant l'échantillon étudié dans ce manuscrit. La largeur ΔI, qui a été trouvée au maximum du courant critique, était en accord avec la prédiction théorique MQT. Le changement du système de mesure entre la mesure des deux échantillons, à savoir la carte d'acquisition et de génération de données (et l'ordinateur), est peut être responsable d'un bruit supplémentaire. Mais aucun test expérimental n'a permis de mettre en évidence un tel défaut.

(2) Nous verrons au §5.1 du chapitre 5 que l'échappement du SQUID est affecté par l'ACPT. De ce fait, la théorie MQT qui est utilisée pour calculer les largeurs n'est peut-être plus valide.

Pourtant un élément contredit cette explication : la largeur ΔI expérimentale est Φ_0 périodique en Φ_S. Or, nous verrons plus tard que les propriétés du transistor ne sont pas Φ_0 périodique en Φ_S, mais Φ_0 périodique en Φ_T. Je pense donc que l'élargissement de ΔI ne peut pas être expliqué par l'ACPT.

(3) Un bruit en courant critique basse fréquence, modulable en fonction du flux, et Φ_0 périodique en Φ_S, pourrait être la cause de l'élargissement de ΔI.

4.2 États excités

Les mesures sur le SQUID ont été jusqu'à maintenant réalisées dans l'état fondamental du SQUID. Nous montrerons dans un premier temps que les niveaux excités du SQUID peuvent être peuplés par à un signal micro-onde de flux ou de grille. Nous présenterons ensuite le principe de mesure de l'état excité. Nous nous intéresserons aux spectroscopies du SQUID, à partir desquelles nous trouverons la dépendance de ν_S avec la polarisation

[(4)] Cet échantillon est nommé "TRSQ 27-10-05 II".

du SQUID. Nous analyserons enfin les oscillations cohérentes créées par une excitation micro-onde de courte durée. Ces oscillations nous permettront de distinguer les régimes à deux niveaux et multi-niveaux du SQUID.

4.2.1 Éxcitation des niveaux quantiques du SQUID avec un signal micro-onde

Nous rappelons l'écriture de l'Hamiltonien du SQUID non perturbé :

$$\widehat{H}_S^0 = \frac{1}{2}h\nu_p\left(\widehat{P}_\parallel^2 + \widehat{X}_\parallel^2\right) - \sigma h\nu_p\widehat{X}_\parallel^3. \tag{4.5}$$

Flux micro-onde. Nous supposons qu'un flux micro-onde (MO), d'amplitude Φ_S^{mo} et de fréquence ν, s'ajoute au flux de polarisation Φ_S. Celui-ci est créé expérimentalement au moyen d'un courant MO dans l'antenne on-chip. L'Hamiltonien du SQUID est perturbé par la MO et devient $\widehat{H}_S = \widehat{H}_S^0 + \widehat{W}_S^\Phi$, où $\widehat{W}_S^\Phi$ est la perturbation recherchée. En développant le potentiel du SQUID à l'ordre 1 en Φ_S^{mo}, on trouve l'expression de $\widehat{W}_S^\Phi$. Elle s'écrit :

$$\widehat{W}_S^\Phi = -\sqrt{2}\hbar\Omega_S^\Phi\cos(2\pi\nu t)\widehat{X}_\parallel, \tag{4.6}$$

où la pulsation Ω_S^Φ est l'amplitude de la perturbation et s'écrit comme

$$\Omega_S^\Phi = \sin(\theta)\frac{1}{L_S}\frac{1}{\sqrt{C_0 h\nu_p}}\Phi_S^{mo}. \tag{4.7}$$

Ω_S^Φ dépend de la polarisation du SQUID via l'angle θ et la fréquence ν_p. Le SQUID ne se couple pas aux MO de flux proche de $\Phi_S = -0.03\ \Phi_0$ ou proche de $I_b = 0$, où $\theta \approx 0$.

Tension de grille micro-onde. Nous nous intéressons maintenant à la perturbation de l'Hamiltonien par l'ajout d'une tension de grille micro-onde à la tension de grille V_g. Cette tension MO est caractérisée par son amplitude V_g^{mo} et sa fréquence ν. Elle perturbe l'Hamiltonien du SQUID par l'intermédiaire de l'Hamiltonien de couplage capacitif (équation (2.79)). La perturbation $\widehat{W}_S^{V_g}$ qui en résulte s'écrit :

$$\widehat{W}_S^{V_g} = \sqrt{2}\hbar\Omega_S^{V_g}\cos(2\pi\nu t)\widehat{P}_\parallel, \tag{4.8}$$

où la pulsation $\Omega_S^{V_g}$ est l'amplitude de la perturbation et s'exprime comme

$$\Omega_S^{V_g} = 2\pi\frac{1}{C_{n\parallel}}\sqrt{\frac{\nu_p C_0}{h}}C_g V_g^{mo}. \tag{4.9}$$

$\Omega_S^{V_g}$ dépend de la polarisation du circuit via la fréquence ν_p, mais ne peut pas être annulée. L'ordre de grandeur, en supposant une amplitude micro-onde très forte $C_g V_g^{mo} = 2e/100$, est $\Omega_S^{V_g} \approx 2\pi \times 9$ MHz.

Excitation du SQUID. Le terme $\widehat{X}_{\parallel}$ de $\widehat{W}_S^{\Phi}$ couple l'état fondamental $|n\rangle$ à l'état $|n+1\rangle$. L'état fondamental $|0\rangle$ est ainsi couplé au premier état excité $|1\rangle$. On rappelle que l'énergie qui sépare l'état $|0\rangle$ de l'état $|1\rangle$ est égale à $h\nu_S$. Lorsque la fréquence de la micro-onde ν est identique à la fréquence ν_S, l'excitation de l'état $|1\rangle$ est possible. Si l'anharmonicité σ est faible, l'excitation ne se limite pas à l'état $|1\rangle$. Les états supérieurs peuvent être peuplés à leur tour. Nous reviendrons sur ce point plus tard.

La perturbation $\widehat{W}_S^{V_g}$ peut être étudiée de la même façon que la perturbation $\widehat{W}_S^{\Phi}$. Le terme $\widehat{P}_{\parallel}$ est similaire au terme $\widehat{X}_{\parallel}$ dans le sens où il couple aussi l'état $|n\rangle$ à l'état $|n+1\rangle$. Une tension de grille micro-onde peut ainsi exciter le SQUID si sa fréquence est proche de ν_S.

4.2.2 Mesure de l'état excité du SQUID

Le principe de la mesure de l'état excité du SQUID est présenté à la figure 4.8. Le SQUID est polarisé par une impulsion de courant d'amplitude I_p, de durée 50 μs. Nous utilisons deux sources différentes pour polariser le SQUID en flux. Tout d'abord, le courant I_{bob} dans la bobine en cuivre crée un flux continu noté Φ_S^{bob} à travers le SQUID. Ensuite, une impulsion de courant dans l'antenne on-chip induit une impulsion de flux d'amplitude Φ_S^{oc} à travers le SQUID. Pendant la durée de l'impulsion, typiquement égale à 2 μs, le flux total dans le SQUID $\Phi_S = \Phi_S^{oc} + \Phi_S^{bob}$ et le courant de polarisation définissent le point de travail du SQUID (I_p, Φ_S).

A ce point de travail, une impulsion micro-onde de flux ou de grille est envoyée. Celle-ci peuple les niveaux excités du SQUID si sa fréquence est proche de la fréquence du SQUID ν_S.

La mesure de l'état du SQUID se fait par une impulsion de flux nanoseconde Φ_S^m, dont la durée est environ égale à 5 ns. Cette impulsion est créée par une impulsion de courant nanoseconde dans l'antenne on-chip. Elle est appliquée typiquement 1 ns après les micro-ondes, ce qui est suffisamment rapide pour éviter la relaxation des niveaux excités. Les temps de montée et de descente de l'impulsion, environ égaux à 1.6 ns, sont longs devant le temps $1/\nu_S$. Cela assure l'adiabaticité de la mesure. L'amplitude de l'impulsion amène le SQUID proche du courant critique, où le taux d'échappement de l'état $|1\rangle$ est environ 500 fois plus grand que le taux d'échappement de l'état $|0\rangle$ [48]. L'apparition d'une tension aux bornes du SQUID indique que le SQUID s'est échappé.

A la fin de l'impulsion de courant, le SQUID revient dans son état fondamental. Les étapes précédentes sont reproduites typiquement 4000 fois toutes les 1 ms, ce qui permet d'accéder à la probabilité d'échappement de la particule. Nous notons P_{ech}^n la probabilité d'échappement de l'état $|n\rangle$ du SQUID. En supposant que seul le premier niveau excité $|1\rangle$ est peuplé, la probabilité d'échappement P_{ech} s'écrit :

$$P_{ech} = P_{ech}^0 + (P_{ech}^1 - P_{ech}^0)p_1, \tag{4.10}$$

où p_1 est la population de l'état $|1\rangle$. La population p_1 correspond à la probabilité que l'état quantique du SQUID soit dans l'état $|1\rangle$.

La quantité $P^1_{ech} - P^0_{ech}$ représente le contraste de la mesure. La mesure quantique est optimale si le contraste est maximum, égal à 100%. Dans ce cas, le SQUID s'échappe si et seulement si il est dans l'état $|1\rangle$. La théorie MQT prédit un contraste de la mesure d'environ 100%, alors qu'il n'est que de 30% expérimentalement. La chute du contraste de la mesure dans un SQUID seul a été expliquée par J. Claudon *et al.* [42]. L'explication trouvée à la chute du contraste est aussi valide pour notre SQUID. Lors de la montée de l'impulsion de flux nano-seconde, la fréquence du SQUID est abaissée à environ 9 GHz et croise de nombreuses résonances parasites. Ces dernières sont en grande partie responsables de la relaxation du SQUID et de la chute du contraste. L'origine de ces résonances parasites n'est pas encore complètement comprise. Elles ont déjà été observées dans d'autres qubits de phase [49].

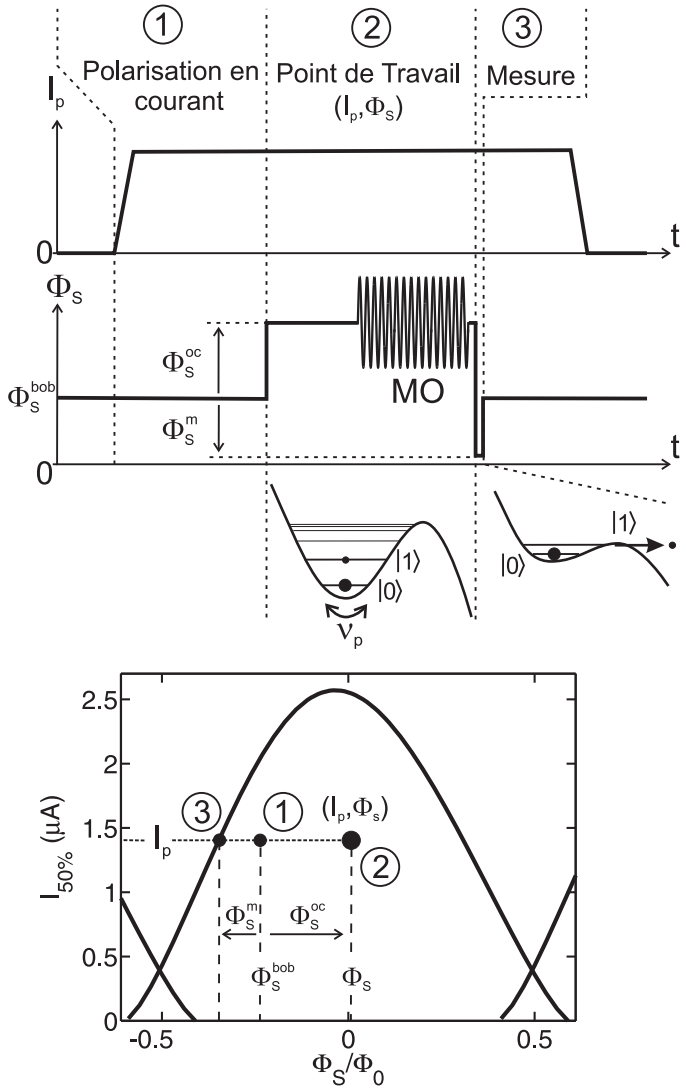

FIG. 4.8 – *Principe de la spectroscopie du SQUID.*

4.2.3 Spectroscopies

Le principe de la mesure de l'état excité du SQUID, qui est expliqué précédemment, est utilisé pour faire la spectroscopie du SQUID à son point de travail, tantôt avec une impulsion micro-onde de flux, tantôt avec une impulsion micro-onde de tension de grille. La spectroscopie consiste à mesurer la probabilité d'échappement du SQUID en fonction de la fréquence micro-onde ν. La durée de l'impulsion micro-onde est typiquement de 1 μs, de telle sorte que l'excitation du SQUID conduit à un mélange d'états[5]. De manière générale, la probabilité d'échappement présente une raie de résonance associée à la condition $\nu = \nu_S$. Celle-ci est attribuée à la population des états excités du SQUID.

La figure 4.9 montre la spectroscopie du SQUID au point de polarisation $I_p = 1872$ nA, $\Phi_S = -0.05\ \Phi_0$. L'excitation est réalisée à partir d'une impulsion micro-onde de flux. L'amplitude micro-onde est suffisamment faible pour sonder uniquement la transition $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$. Un ajustement gaussien de la raie de spectroscopie permet de trouver la fréquence du SQUID : $\nu_S = 18.146$ GHz.

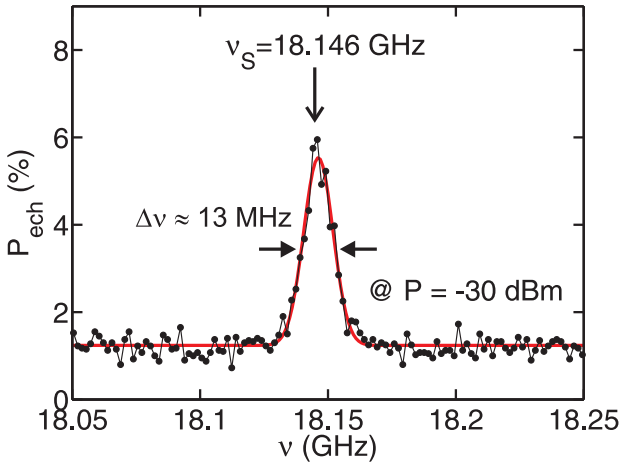

FIG. 4.9 – *Spectroscopie du SQUID au point de polarisation $I_p = 1872$ nA et $\Phi_S = -0.05\ \Phi_0$. L'ajustement gaussien, en trait plein, donne une largeur à mi hauteur $\Delta\nu \approx 13$ MHz. (L'excitation des niveaux du SQUID est réalisée par une impulsion micro-onde de tension de grille.)*

La figure 4.10 montre les spectroscopies du SQUID, au même point de travail, obtenues à différentes puissances micro-onde. Des pics satellites à 115 MHz de la raie centrale apparaissent, de manière plus prononcée, aux fortes amplitudes micro-ondes. Nous soulignons le fait que la position de la raie centrale indique la fréquence ν_S. La forme et la largeur des raies de spectroscopie seront étudiées plus tard. Nous nous focalisons maintenant sur la dépendance de la fréquence ν_S en fonction du point de polarisation.

[5] Les effets de cohérence, qui apparaissent à des temps MO plus courts, seront discutés plus tard.

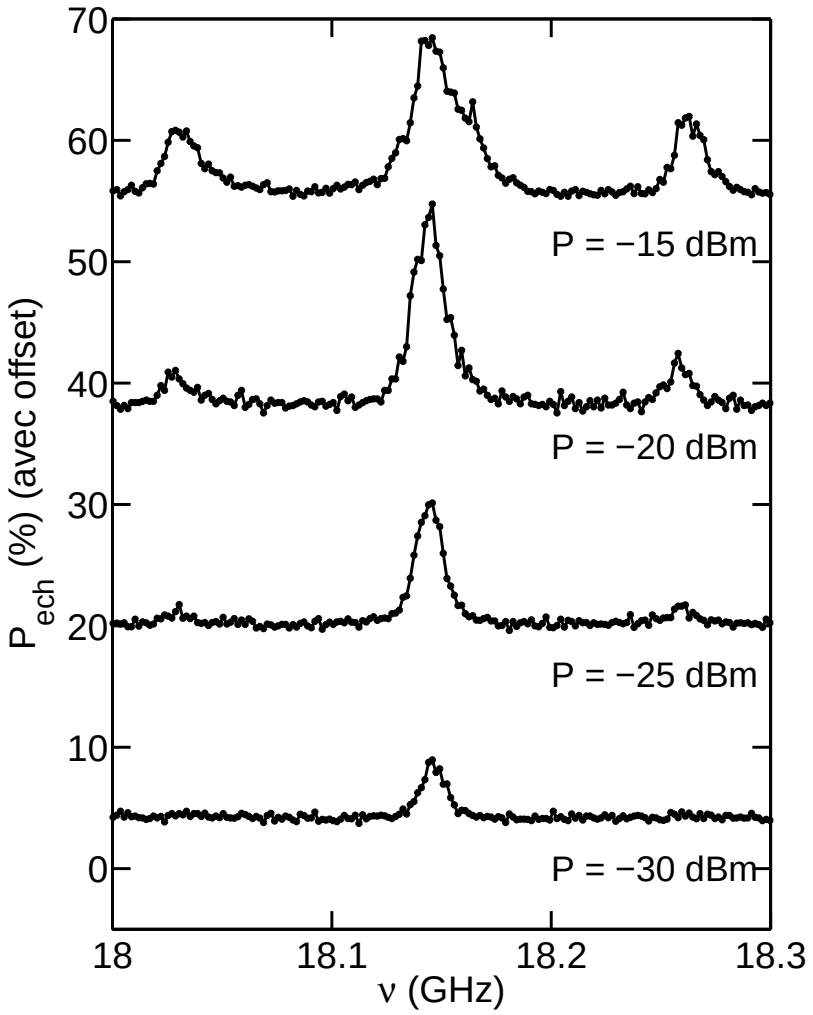

FIG. 4.10 – *Spectroscopie du SQUID à différentes puissances micro-onde. Le SQUID est polarisé à* $I_p = 1872\ nA$ *et* $\Phi_S = -0.05\ \Phi_0$. *(L'excitation est réalisée par une impulsion micro-onde de flux.)*

Dépendance de la fréquence ν_S avec le flux Φ_S. La figure 4.11 présente les fréquences ν_S en fonction du flux Φ_S, obtenues pour trois courants de polarisation différents : 2140 nA, 1890 nA et 1180 nA. La polarisation en flux se fait en fixant $\Phi_S^{bob} = -0.064\ \Phi_0$ et en variant Φ_S^{oc}. L'excitation du SQUID est réalisée par une impulsion micro-onde de tension de grille. Quelque soit le courant, la fréquence est maximale au maximum du courant critique, lorsque le point de travail est au plus loin de la ligne de courant critique. La fréquence chute au voisinage de la ligne de courant critique.

L'ajustement de la fréquence théorique du SQUID, qui est calculée numériquement, permet de trouver la capacité du SQUID $C_{\|} = 455$ fF et le courant critique d'une jonction du SQUID $I_0 = 1.356\ \mu$A. On trouve aussi que la mutuelle m_S entre la ligne micro-onde on-chip et la boucle du SQUID est égale à 1.58 pH. On déduit des paramètres I_0 et b la valeur de l'inductance du SQUID $L_S = \phi_0/(bI_0) = 190$ pH.

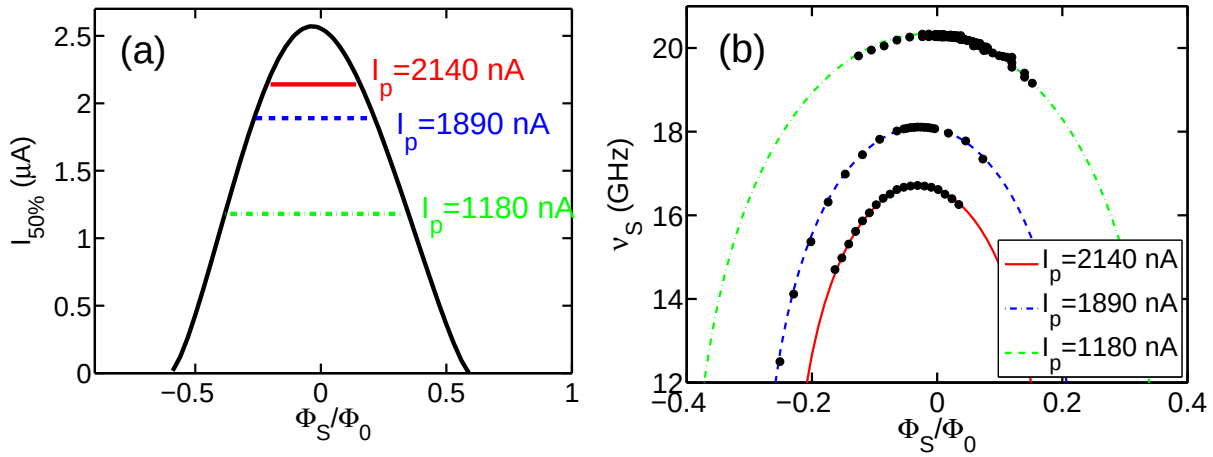

FIG. 4.11 – *(a) Courant $I_{50\%}$ en fonction du flux pour la famille [0] de puits. Des spectroscopies ont été mesurées en fonction du flux à trois courants différents. Les points de travail étudiés se situent sur les trois lignes de courant : 2140 nA, 1890 nA et 1180 nA. Pour ces trois courants, on reporte en (b) la fréquence mesurée du SQUID ν_S en fonction du flux ainsi que les fréquences théoriques. (L'excitation est réalisée par une impulsion micro-onde de flux.)*

Dépendance de la fréquence ν_S avec le courant de polarisation I_p. La figure 4.12 présente la variation de ν_S en fonction de I_p, à $\Phi_S = -0.064\ \Phi_0$. Généralement, la fréquence ν_S décroît quand le courant augmente (à condition que I_p soit positif). Cette décroissance est plus prononcée proche du courant critique. La courbe théorique est en accord avec les données expérimentales.

La figure 4.13 montre la probabilité d'échappement du SQUID en fonction du courant et de la fréquence MO à $\Phi_S = 0.153\ \Phi_0$. Les couleurs vives correspondent à des probabilités d'échappement plus importantes et déterminent la fréquence du SQUID ν_S. Les données expérimentales sont en accord avec la prédiction théorique, sauf aux deux anticroisements

indiqués par les flèches. Cette déviation est expliquée par le couplage du SQUID avec des résonateurs parasites.

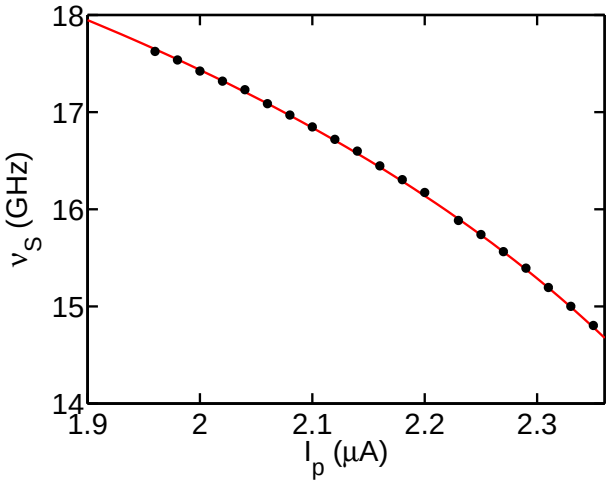

FIG. 4.12 – *Les points représentent la fréquence du SQUID ν_S mesurée en fonction de I_p à $\Phi_S = -0.064\ \Phi_0$. La ligne pleine correspond à la fréquence ν_S théorique. (L'excitation est réalisée par une impulsion micro-onde de tension de grille.)*

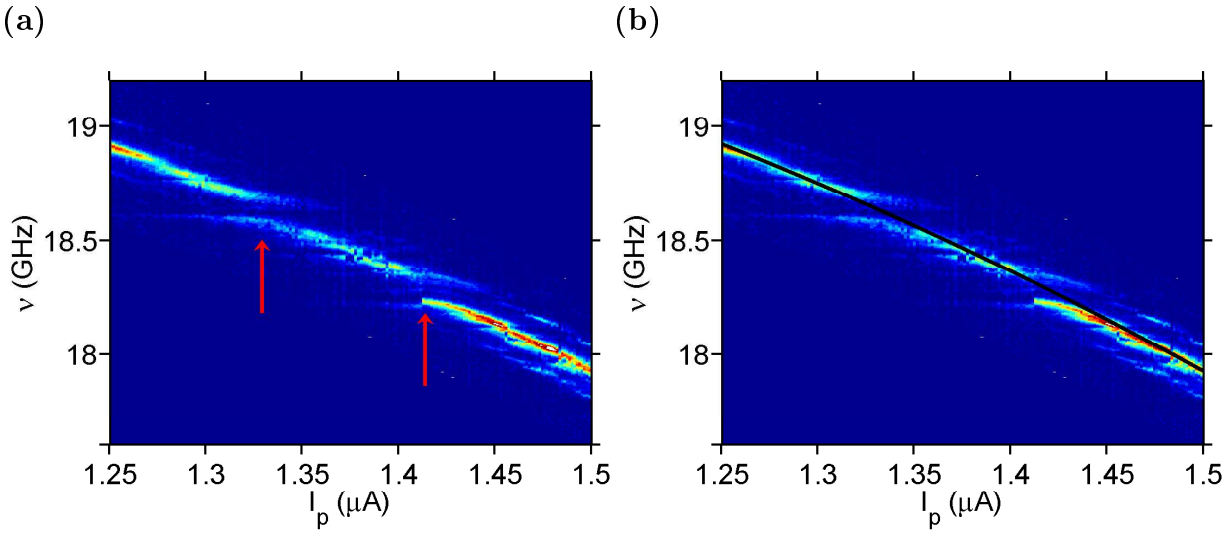

FIG. 4.13 – *(a) Probabilité d'échappement du SQUID en fonction de la fréquence micro-onde et du courant I_p à $\Phi_S = 0.153\ \Phi_0$. Les flèches indiquent la présence de deux résonances parasites. (b) Le même graphique que (a) avec la fréquence ν_S théorique en trait noire. (L'excitation est réalisée par une impulsion micro-onde de tension de grille.)*

4.2.4 Oscillations cohérentes

Théorie. L'évolution temporelle de l'état fondamental $|0\rangle$, après l'application de manière instantanée de la perturbation $\hat{W}_S^\Phi$ (4.6) à l'Hamiltonien $\hat{H}_S^0$ (4.5), a été étudiée par J. Claudon [31]. Celle-ci présente deux régimes :

(1) L'amplitude micro-onde $\Omega_S^\Phi/2\pi$ est très petite devant l'anharmonicité du SQUID $\nu_S - \nu_{12}$ ($h\nu_{12}$ est l'énergie entre les niveaux $|1\rangle$ et $|2\rangle$). Dans cette situation, seul les deux premiers états participent à la dynamique quantique du SQUID. La population p_1 de l'état $|1\rangle$ oscille à la fréquence de Rabi, $\Omega_R/2\pi$ [50]. Lorsque la micro-onde est en résonance avec le SQUID : $\nu = \nu_S$, on trouve :

$$p_1 = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(\Omega_R t)\right], \tag{4.11}$$

avec $\Omega_R = \Omega_S^\Phi$. La fréquence des oscillations de Rabi est ainsi reliée à l'amplitude de la micro-onde (*cf* équation (4.7))

(2) L'amplitude micro-onde $\Omega_S^\Phi/2\pi$ est de l'ordre ou supérieure à l'anharmonicité $\nu_S - \nu_{12}$. Les états $|2\rangle$ et supérieurs interviennent dans la dynamique et l'évolution de p_1 donnée à l'équation (4.11) n'est plus valide. Le calcul théorique de l'évolution des populations $p_0(t), p_1(t), ...p_n(t)$ des états $|0\rangle, |1\rangle ... |n\rangle$ a été réalisé par J. Claudon [31, 32]. Il prédit l'oscillation des populations à des fréquences multiples.

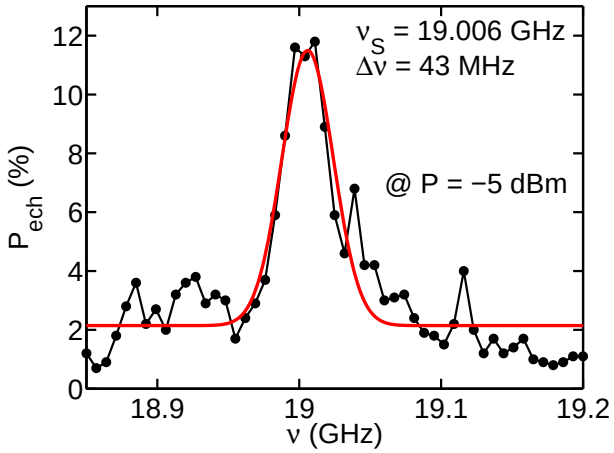

FIG. 4.14 – *Spectroscopie du SQUID au point de travail $I_p = 1647$ nA, $\Phi = 0.015\ \Phi_0$. La ligne pleine est un ajustement gaussien, qui permet de trouver la largeur à mi-hauteur de la raie : $\Delta\nu = 43$ MHz.*

Résultats expérimentaux. Les expériences présentées dans ce paragraphe ont été réalisées au point de travail $I_p = 1647$ nA et $\Phi_S = 0.015\ \Phi_0$. La spectroscopie du SQUID, qui est présentée à la figure 4.14, permet de trouver $\nu_S = 19.006$ GHz.

Nous accordons la fréquence MO à ν_S et mesurons la dépendance de la probabilité d'échappement avec la durée T_{MO} de la micro-onde. Cette dépendance est montrée à la

figure 4.15 pour quatre puissances MO différentes. Des oscillations amorties sont visibles. La fréquence de ces oscillations dépend de la puissance micro-onde. Nous ajustons les données expérimentales par une loi du type $P_{ech}(t) = A[1 - \cos(\nu_{coh}t)\exp(-t/T_2^*)] + P_{ech}^0$, où A est un paramètre libre ; ν_{coh} est la fréquence des oscillations cohérentes et T_2^* est le temps d'amortissement.

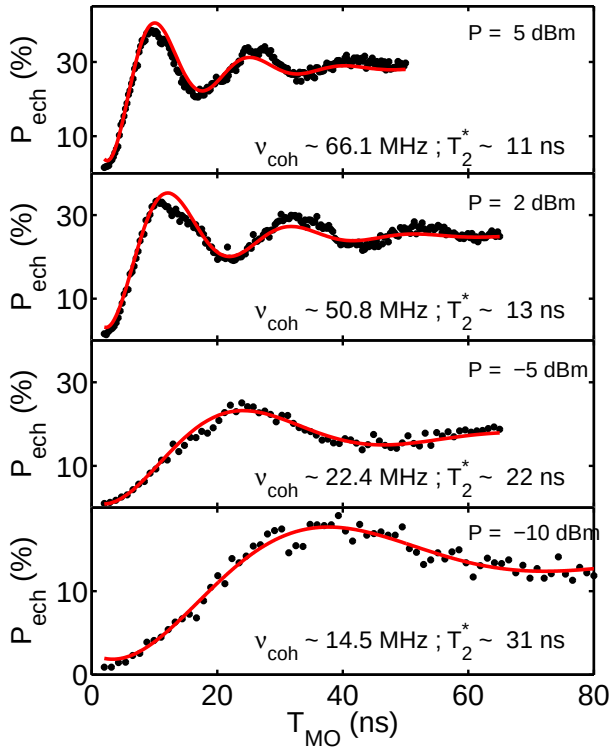

FIG. 4.15 – *Mesure de la probabilité d'échappement du SQUID en fonction de la durée de la micro-onde T_{MO}, pour quatre puissances micro-ondes. Les lignes pleines sont des ajustement de la loi $P_{ech}(t) = A[1 - \cos(\nu_{coh}t)\exp(-t/T_2^*)] + P_{ech}^0$.*

La figure 4.16 présente la dépendance de ν_{coh} avec l'amplitude micro-onde A_{MO} à la sortie du générateur micro-onde. On mentionne que l'amplitude A_{MO} donnée en [V], est reliée à la puissance micro-onde P donnée en [dBm], par la relation $A_{MO} = (50\times10^{-3})^{1/2}\times 10^{P/20}\times\sqrt{2}$.

Nous calibrons maintenant la fréquence Ω_S^Φ avec l'amplitude MO (équation (4.7)). Nous utilisons pour cela les oscillations cohérentes réalisées à la puissance MO la plus basse : $P = -10$ dBm ($A_{MO} = 0.1$ V). Celles-ci sont supposées être dans le régime des oscillations de Rabi et, de ce fait, vérifient la relation $\nu_{coh} = \Omega_R = \Omega_S^\Phi = 2\pi \times 14$ MHz. On en déduit la calibration $\Omega_S^\Phi/2\pi = 140 \times 10^6 \times A_{MO}$.

Le calcul de l'anharmonicité $\nu_S - \nu_{12} = 43$ MHz au point de travail étudié permet de calculer la fréquence des oscillations théoriques en fonction de Ω_S^Φ [31]. Grâce à la calibration précédente, cette fréquence théorique est tracée en trait plein à la figure 4.16. Tout d'abord, lorsque l'amplitude MO, donnée par la fréquence $\Omega_S^\Phi/(2\pi)$, est très petite

devant l'anharmonicité, on trouve la loi linéaire de Rabi $\nu_{coh} = \Omega_S^\Phi$. Dans ce régime, le SQUID peut être vu comme un qubit de phase. A $\Omega_S^\Phi = 2\pi \times 14$ MHz, la théorie prédit une contribution de l'état $|2\rangle$ de moins de 8 %. Ensuite, lorsque l'amplitude MO, donnée par la fréquence $\Omega_S^\Phi/(2\pi)$, est supérieure à l'anharmonicité $\nu_S - \nu_{12} = 43$ MHz, le SQUID se comporte comme un système multi-niveaux.

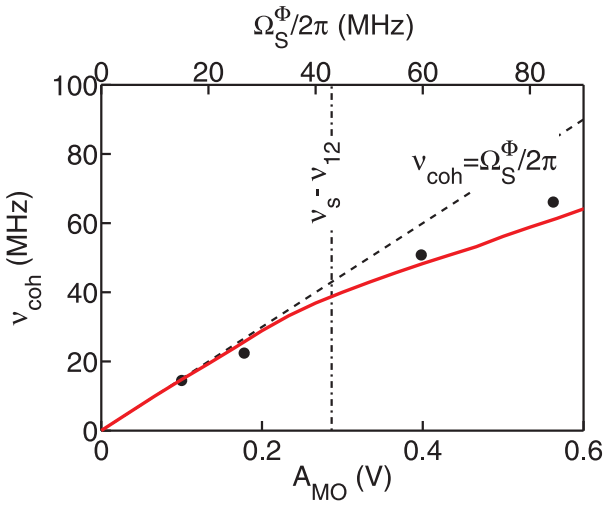

FIG. 4.16 – *Dépendance de la fréquence des oscillations cohérentes ν_{coh} avec l'amplitude du couplage micro-onde $\Omega_S^\Phi/2\pi$. La ligne pleine est la prédiction théorique.*

4.3 Analyse de la décohérence du SQUID

Le SQUID est fortement couplé à son environnement. Ceci est responsable d'une perte de la cohérence de phase de son état quantique. L'objectif de ce paragraphe sera d'avoir une bonne connaissance de l'environnement pour comprendre les différents processus de décohérence du SQUID.

Nous commencerons par introduire les termes de cohérence de la matrice densité et leur fonction d'amortissement $f_{coh}(t)$. Cette dernière fonction est accessible expérimentalement. En effet, elle correspond à la décroissance temporelle de l'enveloppe des franges de Ramsey. Ces franges n'ont pu être observées expérimentalement. Cependant, la transformée de Fourier de la fonction $f_{coh}(t)$ est directement reliée à la forme de la raie de spectroscopie.

Nous nous intéresserons ensuite aux différentes sources de décohérence. Nous montrerons que la décohérence due au couplage du SQUID avec l'ACPT peut être négligée. La décohérence sera expliquée par le couplage du SQUID avec les degrés de liberté non contrôlés de l'environnement. Nous traiterons ce couplage comme une perturbation de l'Hamiltonien du SQUID par des fluctuations des polarisations de flux et de courant. L'expression analytique de la fonction $f_{coh}(t)$ sera alors trouvée en s'aidant des travaux de J. Claudon sur la décohérence d'un SQUID dc seul [31, 32].

Nous analyserons enfin les résultats expérimentaux. Nous commencerons par analyser les raies de spectroscopie gaussiennes, ce qui permettra d'évaluer le bruit de flux. L'analyse de raies plus exotiques permettra ensuite d'extraire le bruit en courant.

4.3.1 Introduction au processus de déphasage du SQUID

La décohérence du SQUID est étudiée dans la limite où le SQUID se comporte comme un qubit de phase. Les résultats trouvés s'appliqueront donc à des puissances d'excitations du SQUID faibles ($\Omega_S^\Phi \ll \nu_S - \nu_{12}$).

L'Hamiltonien du SQUID considéré s'écrit

$$\hat{H}_S = \frac{h\nu_S}{2}\hat{\sigma}_z \tag{4.12}$$

L'évolution de l'état du SQUID est régie par les Hamiltoniens du SQUID (4.12) et de l'environnement, ainsi que par le couplage entre l'environnement et le SQUID. Toute l'information sur la mesure est contenue dans la matrice densité réduite[(6)] $\hat{\rho}(t)$ qui s'écrit :

$$\hat{\rho}(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}(t) & \rho_{10}(t) \\ \rho_{01}(t) & \rho_{00}(t) \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

où les termes diagonaux ρ_{11} et ρ_{00} correspondent respectivement à la population de l'état $|1\rangle$ et de l'état $|0\rangle$. On peut montrer que la population de l'état excité décroît de façon exponentielle à basse température ($k_bT \ll \nu_S$) avec le temps de relaxation T_1 :

$$\begin{cases} \rho_{00}(t) = 1 - |\beta|^2 e^{-t/T_1} \\ \rho_{11}(t) = |\beta|^2 e^{-t/T_1} \end{cases} \tag{4.14}$$

Les termes anti-diagonaux sont les termes de cohérence qui caractérisent la survie des superpositions quantiques d'états. La forme de l'amortissement de l'amplitude $f_{coh}(t)$ des termes de cohérence $\rho_{10}(t)$ et $\rho_{01}(t)$ est donnée par la référence [51] :

$$f_{coh}(t) = f_\varphi(t)\exp(-t/(2T_1)). \tag{4.15}$$

On différencie dans la fonction $f_{coh}(t)$ le déphasage adiabatique $f_\varphi(t)$ dû aux variations de la fréquence ν_S, et le déphasage dû au processus de relaxation $\exp(-t/(2T_1))$.

D'après la référence [14], la forme de la raie de spectroscopie est proportionnelle à la transformée de Fourier de $f_{coh}(t)$:

$$P_{ech}(\nu) \propto \int_0^\infty dt\, f_{coh}(t)\cos\left((\nu - \nu_S)\,t\right). \tag{4.16}$$

Ce résultat est valide dans le régime linéaire, c'est-à-dire pour des spectroscopies réalisées à basses puissances pour lesquelles la largeur de raie ne dépend pas de l'amplitude d'excitation.

(6) La matrice de densité réduite correspond à la trace partielle sur l'environnement de la matrice densité totale (circuit couplé et l'environnement).

4.3.2 Temps de relaxation T_1

En supposant que le SQUID est dans son état excité $|1\rangle$, le processus de relaxation correspond à l'émission spontanée d'un photon d'énergie $h\nu_S$, qui est capté par un mode de l'environnement. La durée de vie de l'excitation du SQUID correspond au temps de relaxation T_1.

L'expérience suivante permet de mesurer le temps de relaxation pour la fréquence $\nu_S =$ 19 GHz. Nous excitons le SQUID par une impulsion micro-onde de flux dont la durée t_π est définie par $\Omega_S^\Phi \times t_\pi = \pi$. Cette impulsion est communément appelée impulsion π. La puissance micro-onde est suffisamment faible pour considérer le SQUID comme un qubit de phase. A partir de l'équation (4.11), on déduit que l'impulsion π amène le SQUID dans l'état $|1\rangle$.

L'impulsion de flux nanoseconde, qui permet de mesurer l'état du SQUID, est différée d'un délai D_m de la fin de l'impulsion π. La figure 4.17 montre la dépendance de la probabilité d'échappement avec D_m. La probabilité d'échappement, qui est reliée à la population p_1 (équation (4.10)), décroît avec une loi du type $P_{ech} \propto \exp(-D_m/T_1)$. On trouve le temps de relaxation $T_1 \approx 30$ ns.

Nous avons constaté que le temps de relaxation dépendait de la fréquence du SQUID. A titre d'exemple, nous avons mesuré un temps de relaxation de 152 ns pour la fréquence $\nu_S = 9$ GHz.

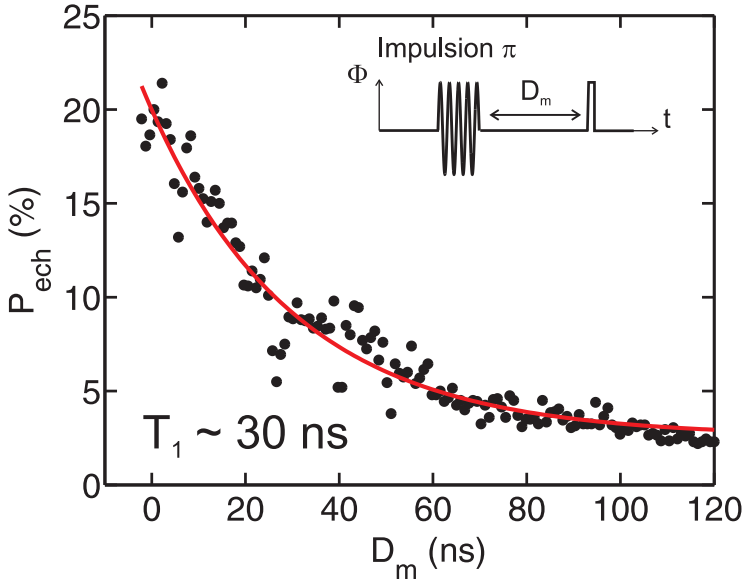

FIG. 4.17 – *Mesure de la relaxation de l'état $|1\rangle$ pour la fréquence $\nu_S = 19$ GHz. Probabilité d'échappement en fonction du délai D_m entre la fin de l'impulsion π et la mesure nanoseconde. La ligne pleine est un ajustement exponentiel de la forme $\exp(-D_m/T_1)$. On extrait ici $T_1 \approx 30$ ns.*

4.3.3 Fonction de déphasage adiabatique

Au sein de l'environnement, nous distinguons deux sources responsables des fluctuations de ν_S. La première source est l'ensemble des degrés de libertés non contrôlé de l'environnement qui peuvent faire fluctuer le courant de polarisation I_p et le flux de polarisation Φ_S. La deuxième source est le couplage du SQUID avec l'ACPT.

Déphasage adiabatique du SQUID dû au couplage avec l'ACPT. Les mesures présentées dans ce chapitre sont réalisées en gardant l'ACPT dans son état fondamental. Le désaccord $\Delta = \nu_T - \nu_S$ entre les fréquences de l'ACPT et du SQUID est supérieur à 20 GHz. De manière générale, il est très grand devant le couplage g, ce qui nous place dans la limite du couplage dispersif (*cf* chapitre 6). La fréquence ν_S du SQUID est ainsi modifiée de g^2/Δ.

L'ACPT est couplé aux degrés de liberté non contrôlés de l'environnement, tels que les charges d'offset, le flux et le courant de polarisation, ce qui fait fluctuer sa fréquence ν_T de $\delta\nu_T$. La fréquence du SQUID varie alors, via le couplage, de $\delta\nu_T g^2/\Delta^2$. Si nous considérons $\delta\nu_T$ de l'ordre du GHz, les fluctuations maximales de ν_S seraient d'environ 0.5 MHz. Cette valeur est faible, ce qui se vérifie expérimentalement : en changeant la tension de grille pour modifier ν_T d'environ 1 GHz, la résonance du SQUID n'est pas affectée. De ce fait, le déphasage adiabatique dû aux bruits sur l'ACPT est négligeable.

Déphasage dû aux bruits en courant et en flux. En négligeant le déphasage adiabatique provenant de l'ACPT, nous pouvons reprendre les résultats de J. Claudon [31, 15] sur l'étude de la décohérence d'un SQUID-dc seul, soumis à des bruits en courant et en flux semblables aux nôtres.

Cette étude suppose que le déphasage adiabatique est causé par un couplage *linéaire* avec des sources de fluctuations *gaussiennes*. Dans ces conditions, l'amortissement de l'amplitude des termes de cohérence de la matrice densité est donné par :

$$f_{coh}(t) = f_I(t) f_\Phi(t) \exp\left(-t/(2T_1)\right), \tag{4.17}$$

où la fonction $f_I(t)$ correspond au déphasage adiabatique dû au bruit en courant, et la fonction $f_\Phi(t)$ correspond au déphasage adiabatique dû au bruit en flux. Ces deux fonctions sont étudiées dans les deux sections suivantes.

4.3.4 Fonction de déphasage du SQUID dû au bruit en courant

L'expression de la fonction de déphasage adiabatique dû au bruit en courant s'écrit comme [31]

$$f_I(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\left(2\pi\frac{\partial\nu_S}{\partial I_b}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_I(\omega)\mathrm{sinc}(\omega t/2)\right), \tag{4.18}$$

où $S_I(\omega)$ est la densité spectrale quantique du bruit en courant à la pulsation ω.

Le bruit en courant est associé à l'environnement électrique proche du SQUID dc. La partie résistive de cet environnement crée un bruit en courant sur l'échantillon, qui ne peut pas être filtré par les thermocoaxes et les filtres π, situés juste en amont. L'environnement proche, schématisé à la figure 4.18, est caractérisé par une inductance on-chip L_{oc} et une capacité plane C_p qui sont fiables jusqu'à une dizaine de gigahertz au moins. L'inductance est créée par un long et fin fil d'Aluminium, évaporé en même temps que le circuit. Nous trouvons aussi quatre résistances R_{cms} montées en surface qui sont reliées aux thermocoaxes. L'inductance L_f est associée aux fils de contact entre la capacité plane et les résistances. Les valeurs des paramètres du circuit sont reportées dans le tableau 4.1.

Nous précisons que l'environnement de la figure 4.18 n'est valable que pour des fréquences supérieures à 2 MHz, pour lesquelles les thermocoaxes jouent le rôle de court-circuit à la masse. Toutefois, nous considérerons que cet environnement simplifié bruite à toute fréquence. Cela reste valable tant que le bruit basse fréquence (inférieure à 2 MHz) est négligeable, ce qui sera vérifié plus loin.

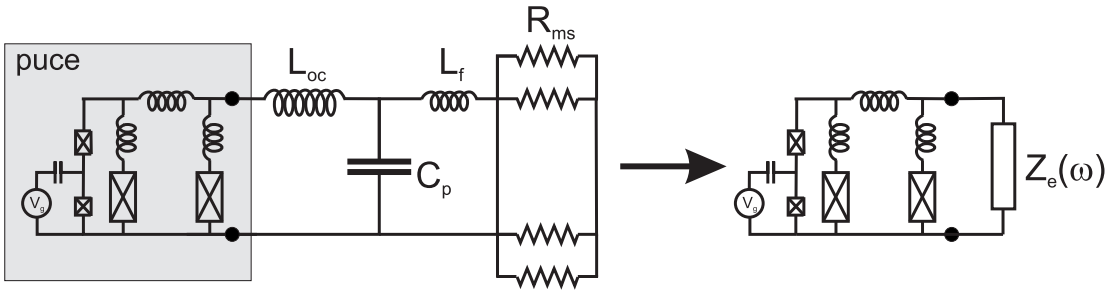

FIG. 4.18 – *Environnement électrique proche du SQUID. Le schéma est valable pour des fréquences supérieures à 2 MHz.*

L_{oc}	C_p	L_f	R_{cms}
7 nH	272 pF	2 nH	500 Ω

TAB. 4.1 – *Paramètres de l'environnement électrique du SQUID.*

Mesure de la résonance de l'environnement électrique. Nous utilisons une impulsion de courant qui amène le SQUID proche de l'échappement ($P_{ech} \approx 1$ %). L'antenne on-chip qui permet d'exciter le SQUID, se couple aussi à l'environnement électrique par un couplage mutuel [30]. Lorsque la fréquence MO est proche de la fréquence de l'environnement $\nu_{r,env} \equiv 1/(2\pi\sqrt{L_{oc}C_p})$, des courants oscillants apparaissent dans le SQUID, augmentant la probabilité d'échappement de façon significative. La figure 4.19.a présente la probabilité d'échappement du SQUID en fonction de la fréquence MO. Un pic de résonance est visible à la fréquence de l'environnement $\nu_{r,env} = 115.25$ MHz. Notons que l'excitation du SQUID est interdite à ces fréquences d'excitations $\nu \ll \nu_S$.

A partir de la fréquence de résonance $\nu_{r,env} = 1/(2\pi\sqrt{L_{oc}C_p}) = 115.25$ MHz et de l'inductance $L_{oc} = 7$ nH, nous déduisons la valeur de la capacité plane : $C_p = 272$ pF.

Densité spectrale du bruit en courant. L'impédance effective $Z_e(\omega)$ de l'environnement s'écrit :

$$Z_e(\omega) = jL_{oc}\omega + \left[jC_p\omega + \frac{1}{jL_f\omega + R_{cms}}\right]^{-1} \tag{4.19}$$

La densité spectrale du bruit en courant créé par $Z_e(\omega)$ est trouvée par le théorème de fluctuation-dissipation [52] :

$$S_I(\omega) = \frac{\hbar\omega}{2\pi}\left[\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_BT}\right) + 1\right]\frac{1}{R_{eff}(\omega)}, \tag{4.20}$$

où T est la température de l'environnement. La résistance effective $R_{eff}(\omega)$ correspond à la partie réelle de $Z_e(\omega)$. Sa dépendance avec la fréquence $\nu = \omega/2\pi$ est montrée à la figure 4.19.b. La densité spectrale $S_I(\omega)$ est importante si $R_{eff}(\omega)$ est faible, ce qui est vérifié à la fréquence de résonance de l'environnement : $\nu_{r,env} = 1/(2\pi\sqrt{L_{oc}C_p})$.

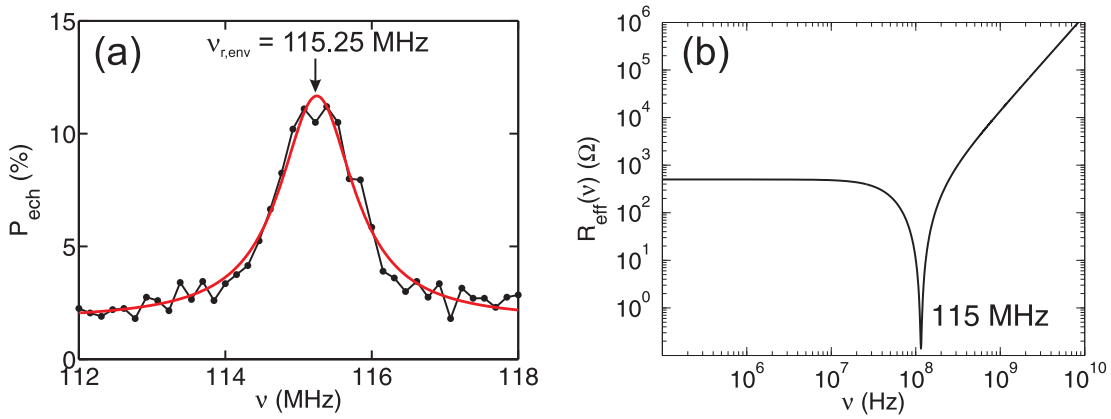

FIG. 4.19 – *(a) Spectroscopie permettant de trouver la fréquence de résonance de l'environnement $\nu_{r,env} = 115$ MHz. (b) Variation de la résistance effective de l'environnement avec la fréquence. La résistance est minimale à la fréquence de résonance de l'environnement $\nu_{r,env} = 1/(2\pi\sqrt{L_{oc}C_p})$.*

Nous introduisons la valeur RMS des fluctuations de courant : $\langle\delta I_{Ze}^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega S_I(\omega)$. Une très bonne approximation est donnée par [30]

$$\langle\delta I_{Ze}^2\rangle = \frac{k_BT}{L_{oc}} \tag{4.21}$$

Fonction de déphasage gaussienne. La densité spectrale du bruit en courant $S_I(\nu)$, définie équation (4.20), devient nulle à des fréquences $\nu \gg \nu_{r,env}$. Pour les temps courts $t \ll 1/\nu_{r,env}$, la fonction $f_I(t)$, définie à l'équation (4.18), suit la forme gaussienne suivante

$$f_I(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}t^2(2\pi)^2\langle\delta\nu_I^2\rangle\right), \tag{4.22}$$

où $\langle\delta\nu_I^2\rangle = [(\partial\nu_S/\partial I_p)^2\langle\delta I_{Ze}^2\rangle]$ est la valeur RMS des fluctuations de ν_S causées par le bruit de courant dans la limite linéaire. La figure 4.20 compare la fonction $f_I(t)$ avec la forme gaussienne pour une sensibilité $\partial\nu_S/\partial I_p = 10$ MHz/nA.

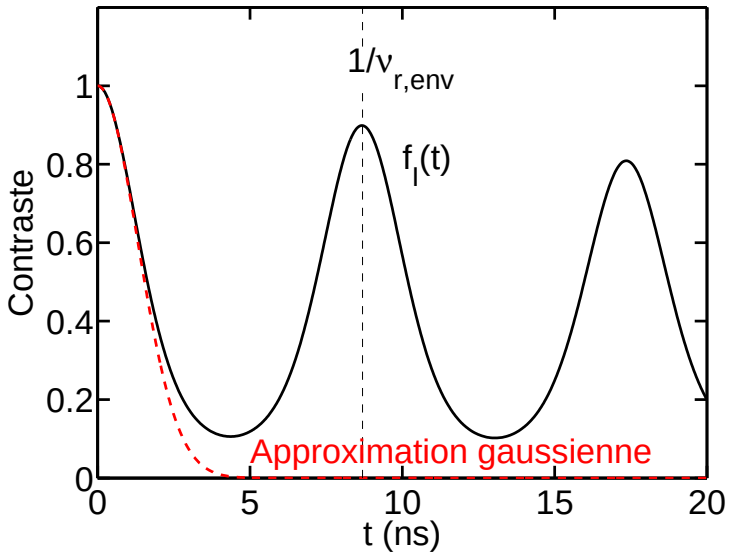

FIG. 4.20 – *La fonction $f_I(t)$ et l'approximation gaussienne sont représentées respectivement en trait plein et en pointillé. Nous avons considéré la sensibilité en courant $\partial\nu_S/\partial I_p = 10$ MHz/nA.*

4.3.5 Fonction de déphasage du SQUID dû au bruit en flux

La fonction de déphasage adiabatique du SQUID dû au bruit en flux s'écrit comme [31]

$$f_\Phi(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\left(2\pi\frac{\partial\nu_S}{\partial\Phi_b}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}d\omega S_\Phi(\omega)\mathrm{sinc}(\omega t/2)\right), \tag{4.23}$$

où $S_\Phi(\omega)$ est la densité spectrale quantique du bruit de flux à la pulsation ω.

L'étude d'un SQUID dc seul par J. Claudon *et al* [15], de fabrication similaire au notre, a montré l'existence d'un bruit de flux gaussien. Les fréquences des fluctuations de flux

appartenait à l'intervalle des basses fréquences [100 mHz, 20 kHz]. Nous supposerons que le bruit de flux dans notre SQUID a des caractéristiques similaires.

L'expression de la fonction de déphasage $f_\Phi(t)$ (équation (4.23)) est recherchée pour des temps t qui sont de l'ordre ou plus petits que le temps de cohérence : $T_2 \approx 10$ ns. La fréquence $1/t$ est donc très grande par rapport aux basses fréquences du SQUID : $1/t \gg 20$ kHz. Dans ces conditions, $f_\Phi(t)$ se met sous une forme gaussienne :

$$f_\Phi(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\left(2\pi\frac{\partial\nu_S}{\partial\Phi_S}\right)^2\langle\delta\Phi_S^2\rangle\right), \tag{4.24}$$

où $\langle\delta\Phi_S^2\rangle = \int_{-20kHz}^{-100\ \mathrm{mHz}} \mathrm{d}\omega S_\Phi(\omega) + \int_{100\ \mathrm{mHz}}^{20\ \mathrm{kHz}} \mathrm{d}\omega S_\Phi(\omega)$ sont les fluctuations RMS du bruit de flux basse fréquence. L'équation (4.24) peut se réécrire comme

$$f_\Phi(t) = \exp\left(-\frac{1}{2}t^2(2\pi)^2\langle\delta\nu_\Phi^2\rangle\right), \tag{4.25}$$

où $\langle\delta\nu_\Phi^2\rangle = [(\partial\nu_S/\partial\Phi_S)^2\langle\delta\Phi_S^2\rangle]$ est la valeur RMS des fluctuations de ν_S causées par le bruit de flux dans la limite linéaire.

4.3.6 Raies de spectroscopie gaussiennes

L'amortissement des termes de cohérence $f_{coh}(t)$ (équation (4.17)) peut être calculée en utilisant l'approximation gaussienne de $f_I(t)$, si les termes multiplicatifs $f_\Phi(t)\exp(-t/(2T_1))$ décroissent rapidement devant le temps $1/\nu_{r,env} \approx 9$ ns. Cette condition ne peut pas être réalisée par le déphasage dû à la relaxation car T_1 est typiquement supérieur à 30 ns. L'utilisation de l'approximation gaussienne dépend donc uniquement de l'intensité du bruit en flux. Elle est valable si :

$$\frac{\nu_{r,env}}{2\pi} \ll \sqrt{\langle\delta\nu_\Phi^2\rangle}, \tag{4.26}$$

ce qui revient numériquement à : 18 MHz $\ll \sqrt{\langle\delta\nu_\Phi^2\rangle}$. Si cette condition est vérifiée, la fonction $f_{coh}(t)$ s'écrit :

$$f_{coh}(t) \approx \exp\left(-\frac{1}{2}t^2(2\pi)^2\left(\langle\delta\nu_I^2\rangle + \langle\delta\nu_\Phi^2\rangle\right)\right). \tag{4.27}$$

Pour cette dernière fonction, l'équation (4.16) prédit une forme gaussienne de la raie de spectroscopie :

$$P_{ech}(\nu) \propto exp\left(-\frac{(\nu-\nu_S)^2}{2\sigma^2}\right), \tag{4.28}$$

où la déviation standard de la gaussienne σ est définie par

$$\sigma = \sqrt{\langle\delta\nu_I^2\rangle + \langle\delta\nu_\Phi^2\rangle}. \tag{4.29}$$

Analyse de raies gaussiennes Nous avons mesuré plusieurs spectroscopies du SQUID en fonction du courant de polarisation, à $\Phi_S = 0.509\ \Phi_0$[7]. Les formes des raies sont des gaussiennes, ce qui suppose un fort bruit de flux. Un ajustement gaussien permet d'extraire pour chacune des raies la fréquence ν_S et la déviation standard σ. Ces deux valeurs sont reportées à la figure 4.21.

A un courant de 30 nA, les simulations prédisent[8] une sensibilité en courant $\partial\nu_S/\partial I_p = 0$ et une sensibilité en flux $\partial\nu_S/\partial\Phi_S \approx 43$ GHz$/\Phi_0$. La fréquence ν_S ne dépend plus de I_p au premier ordre, et donc $\langle\delta\nu_I^2\rangle^{1/2} = 0$ MHz. D'après l'équation (4.29), la déviation standard $\sigma = 43$ MHz de la raie de spectroscopie (figure 4.21.b) est simplement égale à $\langle\delta\nu_\Phi^2\rangle^{1/2}$. Nous en déduisons la valeur RMS des fluctuations de flux :

$$\boxed{\sqrt{\langle\delta\Phi_S^2\rangle} \approx 1\ \mathrm{m}\Phi_0.} \tag{4.30}$$

Si le courant de polarisation diffère de 30 nA, le SQUID devient sensible au bruit de courant. De nombreux fluctuateurs autour de la fréquence de 13 GHz sont responsables d'un élargissement des raies de spectroscopie. Dans ces conditions, l'évaluation précise du bruit de courant ne peut être menée. Nous verrons plus tard que d'autres mesures de spectroscopie permettent de trouver la température de l'environnement égale à 75 mK. Cette température correspond, d'après l'équation (4.21), à la valeur RMS des fluctuations de courant $\langle\delta I_{Ze}^2\rangle^{1/2} = 12.2$ nA. Celle-ci est utilisée pour le calcul de la déviation standard théorique, visible à la figure 4.21.c.

Nous avons aussi réalisé des spectroscopies en fonction du flux et à courant constant : $I_p = -31$ nA. Les fréquences ν_S et les déviations standards σ venant des fits gaussiens des raies de spectroscopie sont montrées à la figure 4.22. La déviation standard théorique, calculée à partir des mêmes paramètres de bruit : $\langle\delta I_{Ze}^2\rangle^{1/2} = 12.2$ nA et $\langle\delta\Phi_S^2\rangle^{1/2} = 1\ m\Phi_0$, est en accord avec l'expérience.

4.3.7 Raies de spectroscopie non gaussiennes

Si les fluctuation RMS de flux $\sqrt{\langle\delta\nu_\Phi^2\rangle}$ sont trop faibles pour respecter la condition (4.26), le facteur d'amortissement $f_{coh}(t)$ ne suit pas une loi gaussienne. La fonction $f_{coh}(t)$ est alors calculée numériquement.

Les spectroscopies du SQUID, faites à trois différents points de polarisation, sont visibles à la figure 4.23. A chaque point de polarisation, nous calculons les sensibilités en courant et en flux, ce qui nous permet de calculer ensuite $f_{coh}(t)$. La transformée de fourier de cette dernière fonction donne la forme théorique de la raie de spectroscopie.

[7] La particule fictive du SQUID est ici dans la famille de puits [1].

[8] Le très bon accord entre les fréquences ν_S théoriques et mesurées nous assurent que les erreurs sur les sensibilités calculées sont très faibles.

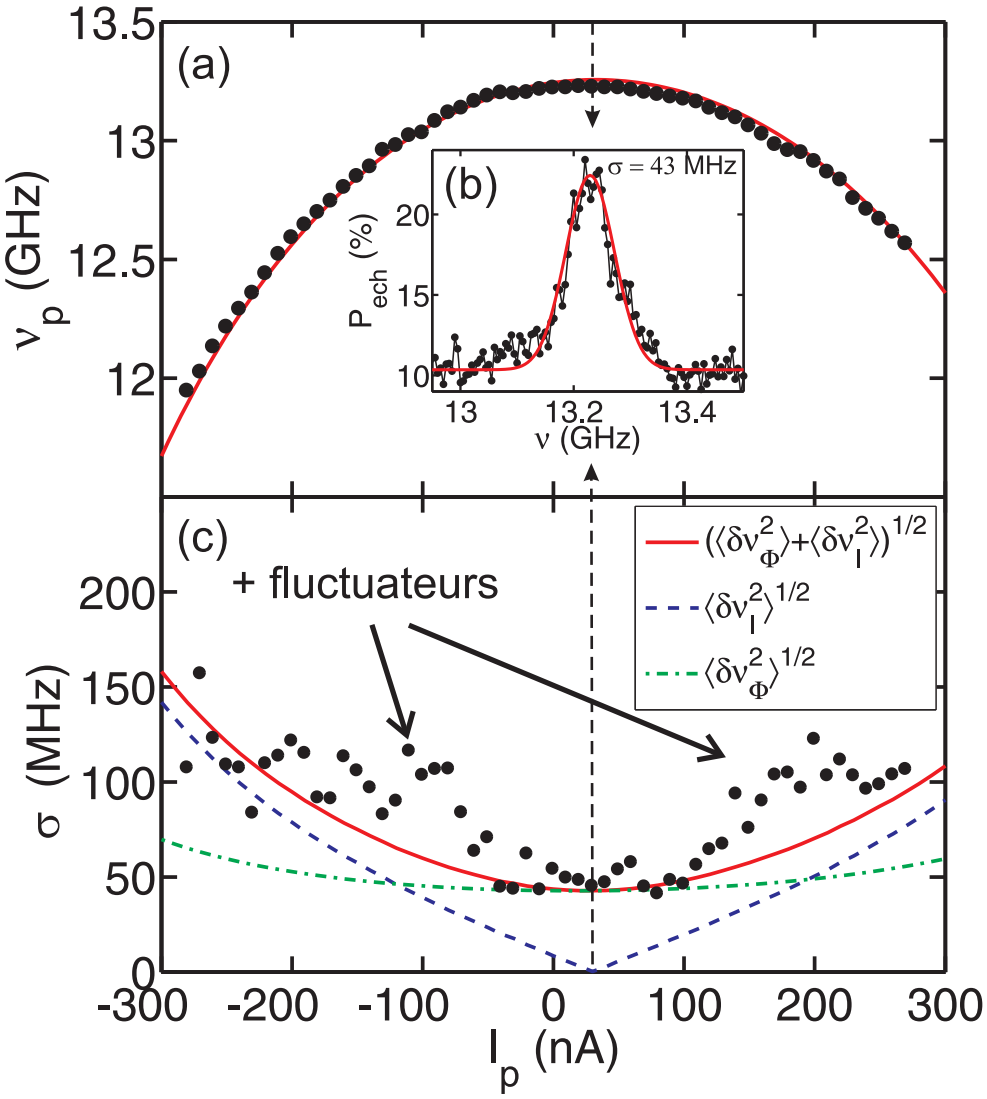

FIG. 4.21 – *Des spectroscopies du SQUID sont mesurées en fonction du courant de polarisation I_p, pour le flux $\Phi_S = 0.509\ \Phi_0$. L'ajustement gaussien des raies de spectroscopie permet d'extraire la fréquence ν_S du SQUID et la déviation standard σ. (a) Les points représentent les fréquences ν_S mesurées en fonction de I_p, pour le flux $\Phi_S = 0.509\ \Phi_0$. La ligne continue correspond à la fréquence ν_S théorique. (b) Spectroscopie réalisée à $I_p = 30$ nA et $\Phi_S = 0.509\ \Phi_0$. L'ajustement gaussien de la raie est illustré en trait continu. (c) Les points correspondent à la déviation standard σ en fonction de I_p, à $\Phi_S = 0.509\ \Phi_0$. La ligne continue représente la déviation standard théorique.*

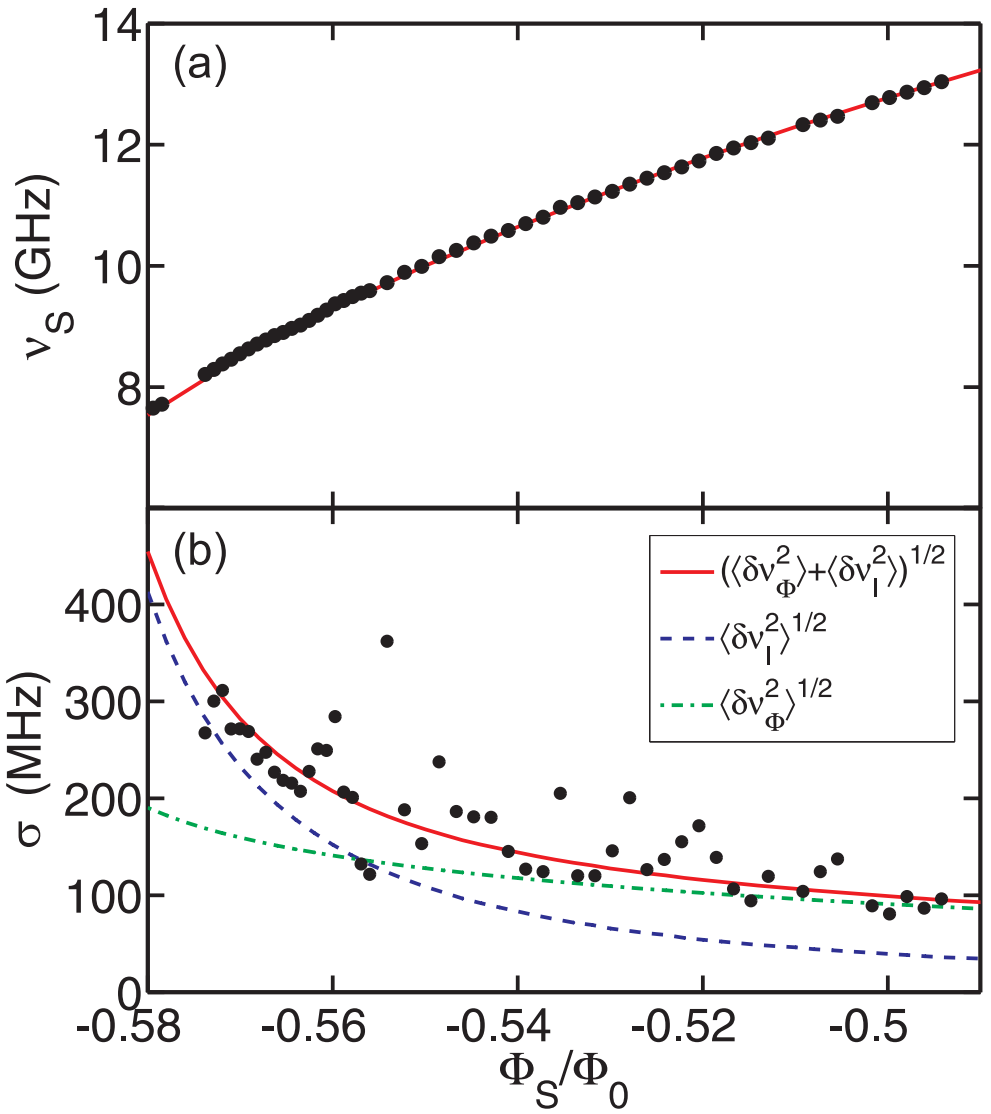

FIG. 4.22 – *Des spectroscopies du SQUID sont mesurées en fonction du flux Φ_S, pour un courant constant $I_p = -31$ nA. L'ajustement gaussien des raies permet d'extraire la fréquence du SQUID ν_S et la déviation standard σ. (a) Les points représentent les fréquences ν_S en fonction du flux Φ_S, pour $I_p = -31$ nA. La ligne continue correspond à la fréquence ν_S théorique. (b) Les points correspondent à la déviation standard σ en fonction de Φ_S, pour $I_p = -31$ nA. Le trait continu représente la déviation standard théorique.*

Les spectroscopies présentent un pic central à la fréquence ν_S, qui est entouré de pics satellites à des fréquences multiples de 115 MHz. Ces derniers sont très bien expliqués par le bruit en courant créé par l'environnement électrique quand celui-ci est thermalisé à 75 mK. La largeur des pics est relié au bruit en flux et au temps de relaxation. Nous supposons que T_1 est identique pour les trois points de polarisation, égal à 30 ns. On trouve des fluctuations RMS de flux $\langle \delta\Phi_S^2 \rangle^{1/2} = 1.2\ m\Phi_0$ pour les points de polarisation (a) et (b). Toutefois, au point (c), le bruit en flux est moins important : $\langle \delta\Phi_S^2 \rangle^{1/2} \approx 0.18\ m\Phi_0$.

Les paramètres du bruit en flux et en courant, qui sont utilisés pour ajuster les spectroscopies aux trois points de polarisation étudiés, sont résumés dans le tableau 4.2.

Points de polarisation			
	(a)	**(b)**	**(c)**
I_p (nA)	1872	2279	1379
Φ_S/Φ_0	-0.050	-0.095	-0.346
Sensibilités			
$\partial\nu_S/\partial\Phi_S$ (GHz/Φ_0)	2.7	15.8	130
$\partial\nu_S/\partial I_p$ (MHz/nA)	4.6	9.8	20
Bruit en flux			
$\sqrt{\langle \delta\Phi_S{}^2 \rangle}$ (mΦ_0)	1.2	1.2	0.18
$\sqrt{\langle \delta\nu_\Phi{}^2 \rangle}$ (MHz)	3.2	18.9	23.4
Bruit en courant			
$\sqrt{\langle \delta I_{Z_e}{}^2 \rangle}$ (nA)	12.2	12.2	12.2
T_{env} (mK)	75	75	75

TAB. 4.2 – *Paramètres du bruit en flux et en courant aux trois points de polarisation du SQUID (a), (b) et (c) de la figure 4.23.*

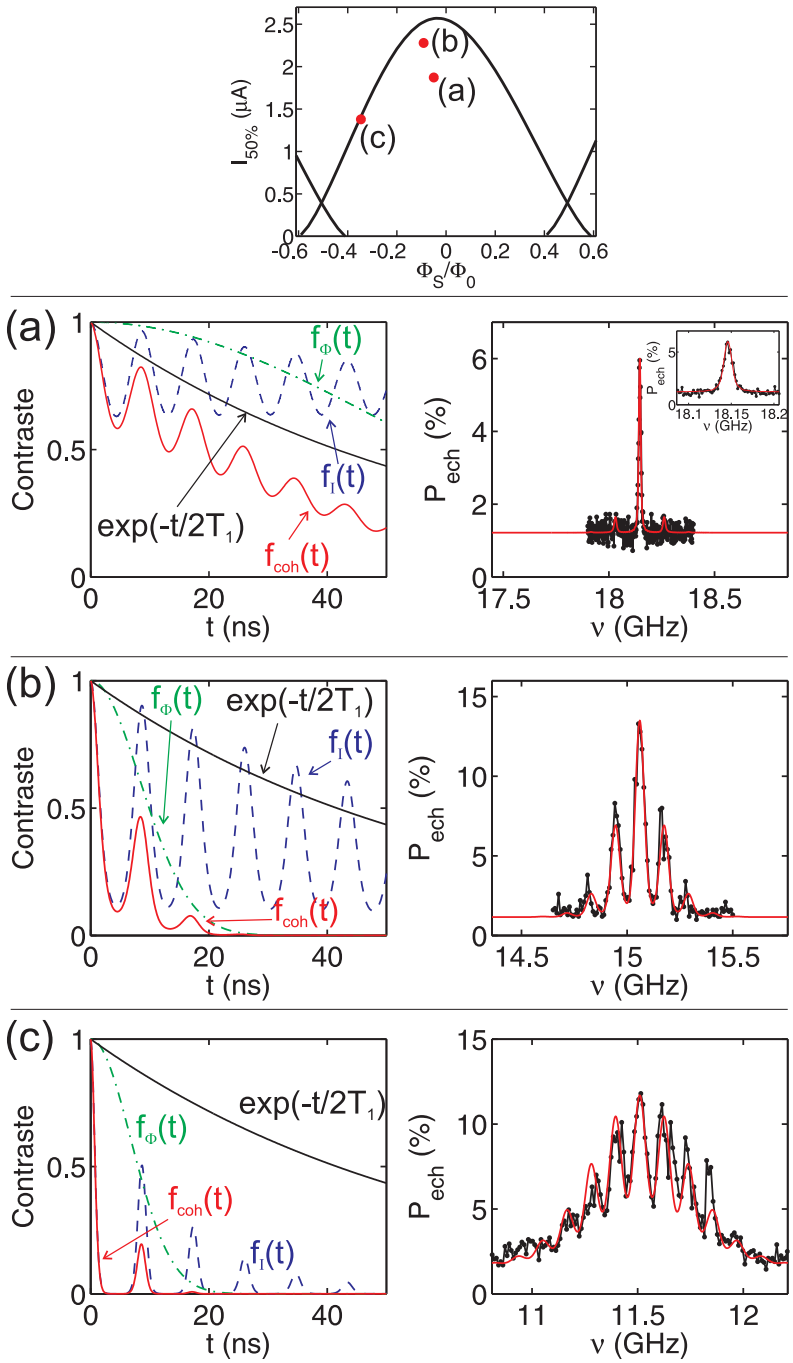

FIG. 4.23 – *Spectroscopies expérimentales (à basse puissance) et théoriques à trois différents points de polarisation : (a), (b) et (c). Pour une meilleur comparaison, les spectroscopies sont présentées avec la même échelle des fréquences. La fonction* $f_{coh}(t) = f_I(t) f_\Phi(t) \exp(-t/(2T_1))$ *d'amortissement des termes de cohérence de la matrice densité du SQUID est tracée sur la gauche de chaque spectroscopie.*

Chapitre 5

Le transistor asymétrique : un qubit de charge

Notre expertise sur le SQUID était déjà acquise avant le commencement du travail sur le circuit couplé. Il en était autrement pour le qubit de charge. Les problématiques étaient nombreuses. Le procédé de fabrication du transistor n'était pas au point. Nous n'avions jamais mesuré de qubit de charge dans notre système expérimental. Nous ne savions pas si le qubit de charge allait être empoisonné de manière notable par des quasiparticules [53]. La mesure du qubit de charge par échappement du SQUID était un pari. Elle devait être basée sur un transfert adiabatique de l'état quantique du transistor vers le SQUID, mais elle n'avait jamais été observée auparavant [54]. Ces problématiques ont étaient toutes relevées.

Nous présenterons dans ce chapitre les différentes mesures effectuées sur le qubit de charge. Pour toutes les mesures présentées, la fréquence du SQUID sera très éloignée de celle du transistor. Par conséquent, nous négligerons les effets de couplage.

Dans une première partie, nous montrerons l'influence de l'état fondamental du transistor sur l'échappement du SQUID. Nous présenterons ensuite les mesures de l'état excité du transistor. Celles-ci permettront d'accéder aux différents paramètres du qubit. A savoir, l'énergie de charge E_C^T et l'énergie Josephson E_J^T. Nous analyserons dans une troisième partie les oscillations de Rabi. Enfin, nous terminerons ce chapitre par l'étude de la décohérence dans le qubit de charge.

5.1 L'état fondamental du transistor

Nous avons jusqu'alors négligé les effets du transistor sur le SQUID. Le premier paragraphe montrera cependant que le transistor crée, dans la limite $\nu_T \gg \nu_S$, un courant supplémentaire dans le SQUID et le perturbe. Nous étudierons ensuite l'influence de l'état fondamental du transistor sur la probabilité d'échappement du SQUID. Nous montrerons que cette influence peut être expliquée par le couplage Josephson.

5.1.1 Couplage Josephson dans la limite $\nu_T \gg \nu_S$

Le couplage Josephson entre le SQUID et le transistor a été introduit au §2.4.2. Nous rappelons son écriture :

$$\hat{H}_{Coupl,Jos} = -E_{J2}^T \alpha_\parallel \sin(\hat{\psi} - \delta)\widetilde{X}_\parallel \tag{5.1}$$

L'angle θ étant faible, on a $\alpha_\parallel \equiv \cos\theta - \eta \sin\theta \approx 1$. Le couplage Josephson se réécrit alors comme

$$\hat{H}_{Coupl,Jos} = -\phi_0 \hat{I}_s \widetilde{X}_\parallel, \tag{5.2}$$

où $\hat{I}_s = \frac{1}{\phi_0} E_{J2}^T \sin(\hat{\psi} - \delta)$ est l'opérateur de courant. Cet opérateur peut s'écrire à partir de l'Hamiltonien de l'ACPT (2.62) comme

$$\hat{I}_s = -\frac{1}{\phi_0}\frac{\partial \hat{H}_{ACPT}}{\partial \delta}. \tag{5.3}$$

En supposant la limite $\nu_T \gg \nu_S$, l'opérateur $\hat{I}_s$ peut être remplacé par la valeur moyenne $I_s^- = \langle -|\hat{I}_s|-\rangle$ si le transistor est dans l'état $|-\rangle$. De même, $\hat{I}_s$ est remplacé par la valeur moyenne $I_s^+ = \langle +|\hat{I}_s|+\rangle$ si le transistor est dans l'état $|+\rangle$. Le couplage Josephson s'exprime alors comme

$$\hat{H}_{Coupl,Jos} = -\phi_0 I_s^\pm \widetilde{X}_\parallel. \tag{5.4}$$

où $I_s^\pm$ correspond à I_s^+ ou à I_s^-. D'après l'équation (5.3), I_s^- et I_s^+ s'expriment comme

$$I_s^- = -\frac{1}{\phi_0}\frac{\partial E_-}{\partial \delta} \qquad \text{et} \qquad I_s^+ = -\frac{1}{\phi_0}\frac{\partial E_+}{\partial \delta}, \tag{5.5}$$

où $E_- = \langle -|\hat{H}_{ACPT}|-\rangle$ et $E_+ = \langle +|\hat{H}_{ACPT}|+\rangle$ sont respectivement les niveaux d'énergie du fondamental et de l'état excité du qubit de charge.

D'après l'annexe D et l'équation (D.2), le couplage Josephson (5.4) s'apparente à la perturbation de l'Hamiltonien total par un courant de polarisation supplémentaire. Ceci peut être compris par le fait qu'un courant est créé à travers le transistor et s'ajoute au courant de polarisation. Le courant supplémentaire est différent suivant l'état du transistor. Il est égal à I_s^+ si l'état de l'ACPT est dans l'état $|+\rangle$, et est égal à I_s^- si l'état de l'ACPT est dans l'état $|-\rangle$.

Nous focalisons dans un premier temps notre étude sur le courant I_s^-. Le courant I_s^+ sera étudié plus tard, lorsque nous traiterons de la mesure de l'état de l'ACPT (*cf* chapitre 7). D'après l'équation (5.5), le courant I_s^- s'obtient en dérivant l'énergie fondamentale $E_-(n_g, \delta)$ par rapport à la variable δ. Pour cela, nous calculons au préalable la fonction $E_-(n_g, \delta)$ en diagonalisant l'Hamiltonien $\hat{H}_{ACPT}$ (2.62) avec 8 états de charge. La diagonalisation est réalisée par le programme `ACPT.cpp`, écrit en language `C++`, en utilisant les paramètres de notre circuit (annexe A).

Le courant I_s^- dépend de la charge de la grille n_g et de la phase sur l'ACPT δ. Il est 2π périodique avec δ et est nul si $\delta = \{0, -\pi, \pi\}$. La figure 5.1.a présente la dépendance

de I_s^- avec n_g pour différentes valeurs de δ. Le courant I_s^- est $2e$ périodique avec la charge n_g. De manière générale, il est compris entre les valeurs de I_s^- à $n_g = 0.5$ et à $n_g = 0$. La variation maximale de I_S^- en fonction n_g est donc donnée par

$$\Delta I_s^-(\delta) \equiv I_s^-(\delta, n_g = 0.5) - I_s^-(\delta, n_g = 0). \tag{5.6}$$

La dépendance de ΔI_s^- avec δ est montrée à la figure 5.1.b. Nous notons que le signe de ΔI_s^- est positif si δ appartient à l'intervalle $]0; \pi[$, et est négatif si δ appartient à l'intervalle $]-\pi; 0[$.

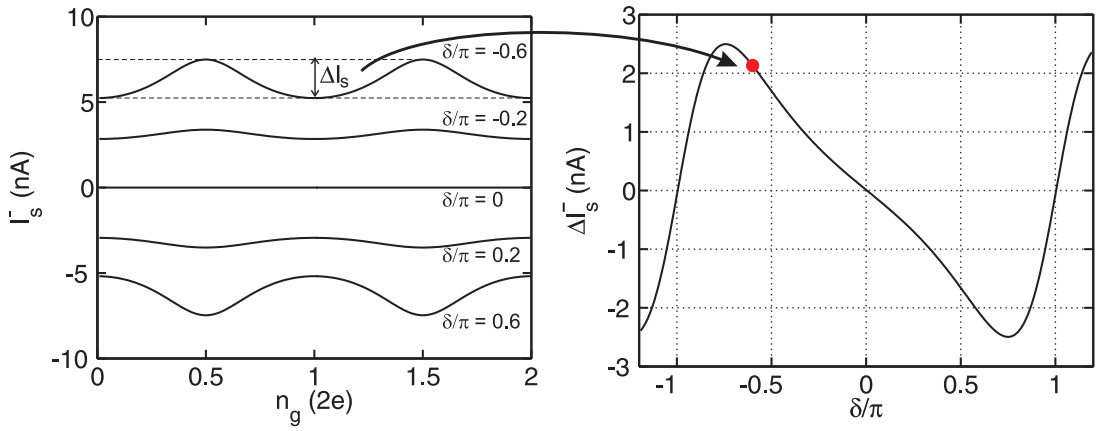

FIG. 5.1 – *(a) Dépendance théorique du courant I_s^- avec n_g pour différentes valeur de δ. (b) Dépendance théorique de ΔI_s^- avec δ.*

5.1.2 Influence de l'ACPT sur l'échappement du SQUID

Nous avons étudié au §4.1.3 la dépendance de la probabilité d'échappement du SQUID avec le courant de polarisation I_p et le flux à travers le SQUID Φ_S, sans tenir compte du couplage entre le SQUID et l'ACPT. Cette partie montre que l'état fondamental du transistor affecte légèrement la probabilité d'échappement du SQUID.

L'expérience suivante consiste à mesurer la probabilité d'échappement du SQUID en fonction de la charge de la grille n_g. Pour cela, nous utilisons le principe de la mesure qui est schématisé à la figure 5.2. La probabilité du SQUID est mesurée par une série d'impulsions de courant d'une durée $\approx 10\ \mu s$. Une impulsion de tension de la grille V_g permet de définir la charge de la grille $n_g = C_g V_g / 2e$ pendant l'impulsion de courant. Cette impulsion a un temps de montée long d'environ 15 μs et est filtrée par un filtre basse fréquence $RC = 5\ \mu s$ (montage 3.12). Ces précautions sont prises afin d'éviter d'induire un courant parasite dans le circuit. La durée de l'impulsion est d'environ $40 \mu s$, ce qui assure une tension V_g stable au moment de l'impulsion de courant.

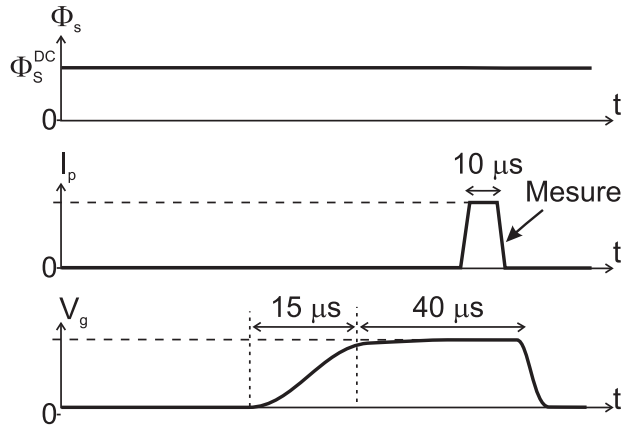

FIG. 5.2 – *Principe de la mesure de la probabilité d'échappement du SQUID avec une tension de la grille fixée. Une impulsion de tension est utilisée à cette effet.*

Dans un premier temps, nous regardons la dépendance de la probabilité d'échappement avec I_p, qui est tracée à la figure 5.3.a pour les paramètres $n_g = -0.6$[(1)] et $\Phi_S = -0.12\ \Phi_0$. Nous fixons ensuite le courant de polarisation à une valeur proche de $I_{50\%}$ où la probabilité d'échappement est linéaire avec I_p ($\partial P_{ech}/\partial I_p \approx 3.6$ %/nA).

La figure 5.3.b montre la dépendance de la probabilité d'échappement avec n_g, pour $I_p = 2601$ nA et $\Phi_S/\Phi_0 = -0.12$. La probabilité d'échappement est 2e périodique (seule une période est visible ici), avec une valeur minimale à $n_g = \pm 0.5$ et maximale à $n_g = 0$. Nous introduisons la différence ΔP^-_{ech} définie par :

$$\Delta P^-_{ech} \equiv P^-_{ech}(n_g = 0.5) - P^-_{ech}(n_g = 0). \tag{5.7}$$

L'exposant "$-$" indique que nous considérons l'échappement de l'état fondamental du transistor $|-\rangle$. Nous mesurons $\Delta P^-_{ech} \approx -7$ % pour $\Phi_S/\Phi_0 = -0.12$.

Les variations de la probabilité d'échappement en fonction de n_g reste dans le régime linéaire, pour lequel la probabilité d'échappement est proportionnelle au courant de polarisation. Par conséquent, ΔP^-_{ech} est relié à ΔI^-_S (équation (5.6)) par la relation suivante :

$$\Delta I^-_S = \left(\left. \frac{\partial P_{ech}}{\partial I_p} \right|_{I_{50\%}} \right)^{-1} \times \Delta P^-_{ech} \tag{5.8}$$

Nous en déduisons $\Delta I^-_S \approx -2$ nA pour $\Phi_S/\Phi_0 = -0.12$.

Chauffage dû aux impulsions de tension de la grille. La longue durée des impulsions de tension de la grille est responsable du chauffage de l'échantillon via l'atténuateur de -10 dB, situé à 30 mK. Nous calculons une puissance dissipée moyenne d'environ 0.2 μW lorsque $n_g = 1$. Nous savons qu'une puissance dissipée de 1 μW accroît la température de

(1) Nous montrerons plus tard comment la calibration de n_g avec la tension de la grille V_g est réalisée.

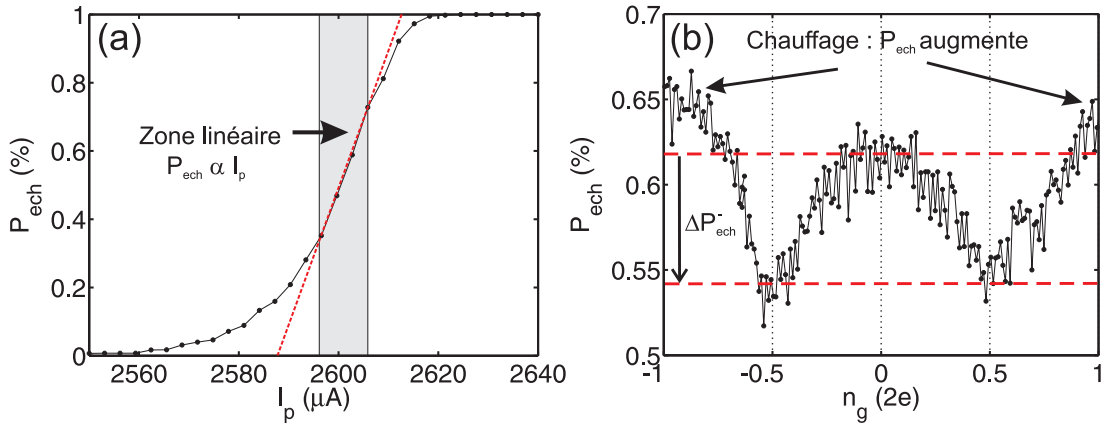

FIG. 5.3 – *(a) Probabilité d'échappement du SQUID en fonction du courant de polarisation I_p. (b) Probabilité d'échappement en fonction de la charge de la grille n_g, à $I_p = 2601$ nA et $\Phi_S = -0.12\ \Phi_0$.*

la dilution. Par conséquent, les impulsions de tension de la grille peuvent augmenter localement la température de notre échantillon. Ceci est responsable d'une légère augmentation de la probabilité d'échappement vers $n_g = \pm 1$. Par conséquent, nous limiterons notre étude dans la fenêtre $-1/2 < n_g < 1/2$ où les effets de chauffage peuvent être négligés.

Résultats expérimentaux. La figure 5.4.a présente les modulations de la probabilité d'échappement du SQUID en fonction de n_g pour différents flux Φ_S. Ces mesures ont été réalisées en fixant préalablement, pour chaque flux, le courant de polarisation autour de $I_{50\%}$. Nous constatons que la valeur de ΔP^-_{ech} dépend de Φ_S. Elle peut être positive ou négative et s'annule pour $\Phi_S = 0.2\ \Phi_0$.

Nous utilisons la relation (5.8) afin de calculer la différence ΔI^-_s expérimentale pour chaque valeur de ΔP^-_{ech} mesurée. La dépendance de ΔI^-_s avec Φ_S est montrée à la figure 5.4.b. Sur la même figure, nous avons reportée la valeur théorique $\Delta I^-_s(\delta)$ en fonction du flux Φ_S. Pour cela, nous avons utilisé la relation (C.10) qui relie la phase δ au flux Φ_S. L'axe représentatif de la phase δ apparaît en haut de la figure.

Avant de comparer les valeurs théoriques et expérimentales de ΔI^-_s, nous calculons tout d'abord la fréquence ν_S du SQUID et la fréquence ν_T de l'ACPT en fonction du flux Φ_S, à un courant $I_p \approx I_{50\%}$ et $n_g = 1/2$. La dépendance du rapport ν_T/ν_S en fonction de Φ_S est montrée à la figure 5.4.c. Nous insistons sur le fait que le rapport ν_T/ν_S est minimal puisqu'il est calculé à $n_g = 0.5$, où ν_T est minimale.

Reprenons maintenant les résultats de la figure 5.4.b. Nous constatons que les valeurs expérimentales de ΔI^-_s suivent la prédiction théorique si $\nu_T/\nu_S > 1$ sans aucun paramètre ajustable. En revanche, lorsque $\nu_T/\nu_S \leq 1$, $|\Delta I^-_s|$ est plus petit que la valeur théorique. Ce résultat n'est pas surprenant, puisque la théorie utilisée est basée sur l'hypothèse $\nu_T \gg \nu_S$. Il semble ainsi que lorsque $\nu_T \leq \nu_S$, le SQUID n'arrive plus à mesurer les modulations de

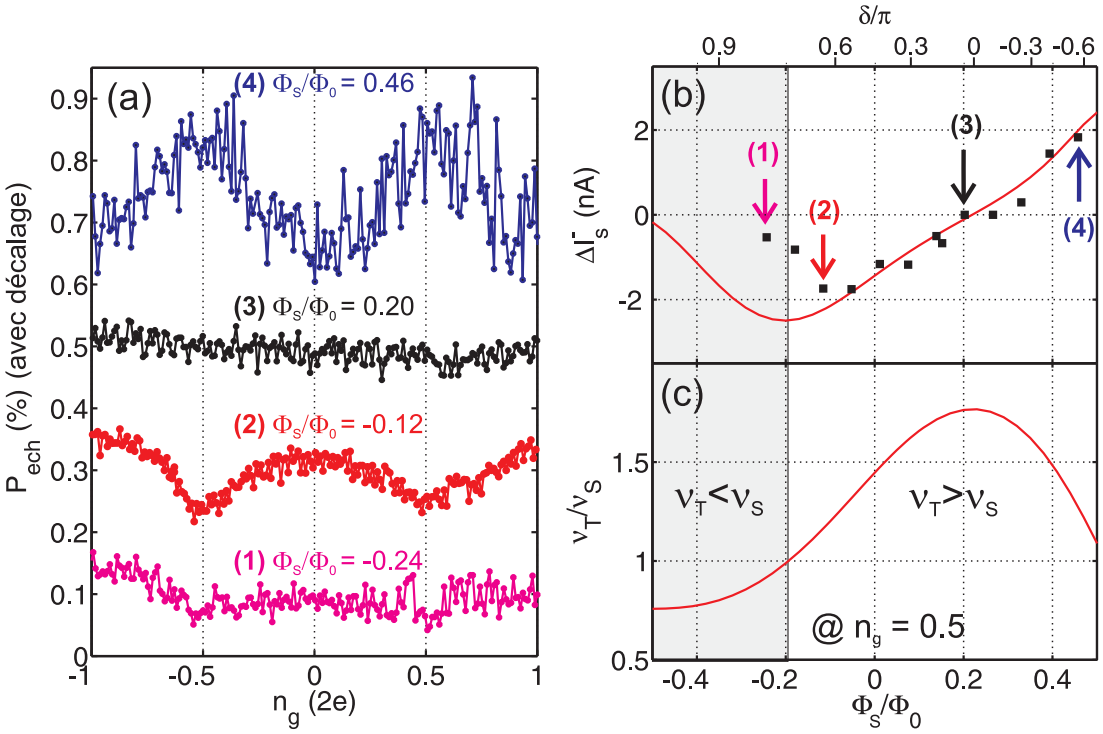

FIG. 5.4 – *(a) Mesure de la probabilité d'échappement du SQUID en fonction de n_g, pour différents flux Φ_S. Le courant de polarisation est réglé autour de $I_{50\%}$ pour chacune des courbes. Un décalage vertical est effectué sur les différentes courbes pour les rendre plus visibles. (b) Les carrés représentent les valeurs de ΔI_S^- mesurées en fonction de Φ_S. La courbe pleine est la valeur théorique de ΔI_S^- déduite du calcul de la phase $\delta(\Phi_S)$, dont l'axe représentatif apparaît en haut. (c) Rapport entre la fréquence du transistor ν_T et la fréquence du SQUID ν_S en fonction du flux Φ_S, à $n_g = 1/2$.*

courant à travers le transistor de l'état fondamental.

5.2 L'état excité du transistor

Nous montrerons tout d'abord qu'un flux ou une tension de la grille micro-onde peuvent exciter le transistor. Nous expliquerons ensuite le principe de la spectroscopie du transistor. Nous trouverons alors, au moyen des spectroscopies, les différents paramètres de l'ACPT. Nous présenterons ensuite une calibration rapide de la charge de la grille n_g. Nous calibrerons la phase δ en fonction du point de polarisation du circuit. Enfin, nous nous intéresserons à la dépendance de ν_T avec δ.

5.2.1 Excitation de l'ACPT

tension de la grille micro-onde. Nous considérons une tension de la grille micro-onde $V_g^{mo}\cos 2\pi\nu t$. Celle-ci entraîne l'oscillation de la charge de la grille ($n_g = C_g V_g/2e$) autour de sa valeur initiale n_g^0. L'évolution de la charge de la grille est donnée par

$$n_g(t) = n_g^0 + n_g^{mo}\cos(2\pi\nu t). \tag{5.9}$$

La charge de la grille $n_g(t)$ perturbe l'Hamiltonien de l'ACPT (2.66). Un développement de l'Hamiltonien à l'ordre 1 en n_g^{mo} permet de trouver le terme perturbatif $\widehat{W}_T^{n_g}$:

$$\widehat{W}_T^{n_g} = -\hbar\Omega_T^{n_g}\cos(2\pi\nu t)\hat{\sigma}_x^T, \tag{5.10}$$

où

$$\Omega_T^{n_g} = \frac{E_C^T n_g^{mo}}{\hbar}. \tag{5.11}$$

$\Omega_T^{n_g}$ dépend de l'énergie de charge E_C^T de l'ACPT, et de l'amplitude n_g^{mo} du signal micro-onde. Nous soulignons le fait que $\Omega_T^{n_g}$ ne dépend pas du point de polarisation du circuit.

La perturbation du signal micro-onde $\widehat{W}_T^{n_g}$ est un terme en $\hat{\sigma}_x^T$ qui peut exciter le transistor si $\nu \approx \nu_T$. L'amplitude de l'excitation de l'ACPT dépend directement de la pulsation $\Omega_T^{n_g}$. Pour la forte amplitude $n_g^{mo}/2e = 10^{-2}$, nous obtenons $\Omega_T^{n_g} = 2\pi \times 267$ MHz.

Flux micro-onde. Nous considérons maintenant un flux micro-onde. Celui-ci est créé expérimentalement par l'antenne on-chip, qui est parcourue par un courant constant I^{oc} et un courant micro-onde $I^{mo}\cos(2\pi\nu t)$. Ces courants induisent respectivement un flux constant Φ_S^{oc} et un flux micro-onde $\Phi_S^{mo}\cos(2\pi\nu t)$ à travers le SQUID. Le flux total $\tilde{\Phi}_S^{oc}(t)$ s'écrit alors comme :

$$\tilde{\Phi}_S^{oc}(t) = \Phi_S^{oc} + \Phi_S^{mo}\cos(2\pi\nu t). \tag{5.12}$$

D'après l'équation (C.10), la phase δ sur l'ACPT dépend du flux $\tilde{\Phi}_S^{oc}$ et va donc évoluer dans le temps. Dans la limite où $\Phi_S^{mo}/\Phi_0 \ll 1$, $\delta(t)$ peut se mettre sous la forme

$$\delta(t) = \delta_0 + \delta_{mo}\cos(2\pi\nu t), \tag{5.13}$$

où δ_0 est la valeur de δ en absence de micro-onde. En présence de micro-onde, δ oscille autour de δ_0 à la fréquence ν et avec une amplitude δ_{mo}, où δ_{mo} est définie par

$$\delta_{mo} = \left.\frac{\partial\delta(I_p, \Phi_S^{oc}, \Phi_S^{bob})}{\partial\Phi_S^{oc}}\right|_{I_p,\Phi_S^{bob}} \times \Phi_S^{mo} \tag{5.14}$$

La phase oscillante $\delta_{mo}\cos(2\pi\nu t)$ perturbe l'Hamiltonien de l'ACPT (2.66) par le terme $\widehat{W}_T^{\Phi}$. Cette perturbation est trouvée, dans la limite $\delta_{mo} \ll \delta$, par un développement de l'Hamiltonien à l'ordre 1 en δ_{mo}. Nous obtenons

$$\widehat{W}_T^{\Phi} = \hbar\Omega_T^{\Phi}\cos(2\pi\nu t)\hat{\sigma}_y^T, \tag{5.15}$$

où

$$\Omega_T^{\Phi} = \frac{1+\mu}{4}E_J^T\cos\left(-\frac{\delta}{2}+\chi\right)\delta_{mo}/\hbar. \tag{5.16}$$

La perturbation $\widehat{W}_T^{\Phi}$ est un terme en $\hat{\sigma}_y^T$ qui peut exciter le ACPT lorsque $\nu \approx \nu_T$. L'amplitude de l'excitation de l'ACPT dépend directement de la pulsation Ω_T^{Φ}.

Nous avons vu au §4.2.1 qu'un flux micro-onde peut aussi exciter le SQUID lorsque $\nu \approx \nu_S$. L'amplitude de cette excitation est donnée par la pulsation Ω_S^{Φ} (équation (4.7)). Nous comparons maintenant les pulsations Ω_T^{Φ} et Ω_S^{Φ} afin de savoir si un flux micro-onde excite plus facilement le transistor ou le SQUID.

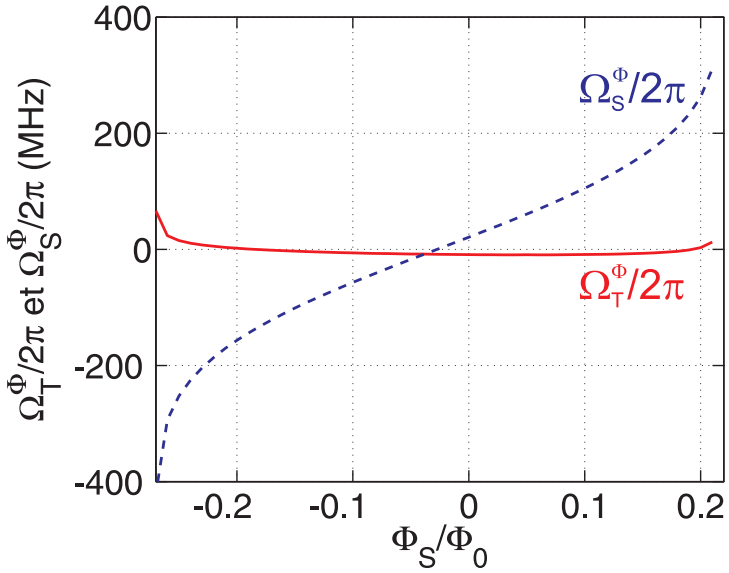

FIG. 5.5 – *Dépendance de Ω_T^{Φ} et Ω_S^{Φ} avec Φ_S, à $I_p = 2000$ nA. La ligne micro-onde on-chip est utilisée pour créer un flux MO à travers le SQUID : $\Phi_S^{oc} = \Phi_S^{mo}\cos(2\pi\nu t)$, où l'amplitude $\Phi_S^{mo} = 1$ mΦ_0.*

La figure 5.5 présente les fréquences $\Omega_T^\Phi/2\pi$ et $\Omega_S^\Phi/2\pi$ en fonction du flux Φ_S, pour une forte amplitude micro-onde $\Phi_S^{mo} = 1$ mΦ_0 et pour un courant de polarisation $I_p = 2000$ nA. La fréquence $|\Omega_T^\Phi/2\pi|$ reste inférieure à 15 MHz. La fréquence $|\Omega_S^\Phi/2\pi|$ varie quant à elle entre 0 et 300 MHz. $|\Omega_S^\Phi|$ est supérieure à $|\Omega_T^\Phi|$ excepté au maximum du courant critique où $|\Omega_S^\Phi|$ est nulle.

De manière générale, si la polarisation du circuit n'est pas proche du maximum du courant critique, l'excitation de l'ACPT devra se faire avec une puissance de flux micro-onde plus importante que celle nécessaire pour exciter le SQUID. Cela explique pourquoi le transistor a été majoritairement excité au moyen d'une tension de la grille micro-onde.

5.2.2 Spectroscopie du transistor

Principe de la mesure. Le principe de la mesure de la spectroscopie de l'ACPT est semblable à celui utilisé pour la spectroscopie du SQUID, qui a été décrit au §4.2.2. Le circuit est polarisé en courant par une impulsion de courant d'amplitude I_p et de durée 50 μs. La charge de la grille n_g est fixée par une impulsion de tension de la grille de durée 40 μs.

La bobine en cuivre fixe des flux constants, respectivement égaux à Φ_S^{bob} et Φ_T^{bob}. Des impulsions de flux, de durée 2 μs et d'amplitudes respectives Φ_S^{oc} et Φ_T^{oc}, sont créées au moyen d'une impulsion de courant dans la ligne micro-onde on-chip. Les flux Φ_S et Φ_T s'expriment en fonction des flux précédents comme $\Phi_S = \Phi_S^{bob} + \Phi_S^{oc}$ et $\Phi_T = \Phi_T^{bob} + \Phi_T^{oc}$. A ce moment, le courant de polarisation I_p, ainsi que les flux Φ_S^{bob} et Φ_S^{oc} fixent la phase δ sur l'ACPT (équation (C.10)), et forment avec n_g le point de travail de l'ACPT. Au point de travail $(I_p, \Phi_S^{bob}, \Phi_S^{oc}, n_g)$, la fréquence ν_T est déterminée par la phase $\delta(I_p, \Phi_S^{bob}, \Phi_S^{oc})$ et la charge n_g de la grille.

Une impulsion micro-onde de tension de la grille est envoyée au point de travail. Comme nous l'avons vu précédemment, celle-ci excite l'ACPT si $\nu \approx \nu_T$. Dans certains cas, l'excitation de l'ACPT sera réalisée par une impulsion MO de flux auquel cas nous le mentionnerons.

Dès la fin de l'excitation micro-onde, une impulsion de flux nano-seconde amène le point de polarisation du SQUID proche de l'échappement du SQUID (Typiquement la probabilité d'échappement du SQUID est proche de 1% lorsque aucune micro-onde n'est appliquée). La mesure de la tension V aux bornes du circuit permet de savoir si le SQUID s'est échappé (V>0) ou non (V=0). L'ensemble de ces opérations est répété environ 5000 fois ce qui nous permet d'accéder à la probabilité d'échappement du SQUID. Nous utilisons le fait que la probabilité d'échappement du SQUID dépend de l'état de l'ACPT pour déterminer ce dernier. Cette propriété très intéressante, qui provient du couplage entre le SQUID et l'ACPT, sera discutée en détail au chapitre 7.

Exemple de spectroscopie. La spectroscopie consiste à mesurer la probabilité d'échappement du SQUID en fonction de la fréquence ν de la micro-onde. De manière générale, un pic de résonance est visible lorsque $\nu = \nu_T$. La figure 5.7 montre la spectroscopie de l'ACPT au point de travail $\Phi_S^{bob}/\Phi_0 = -0.130$, $\Phi_S^{oc} = 0$, $I_p = 2097$ nA et $n_g = 1/2$.

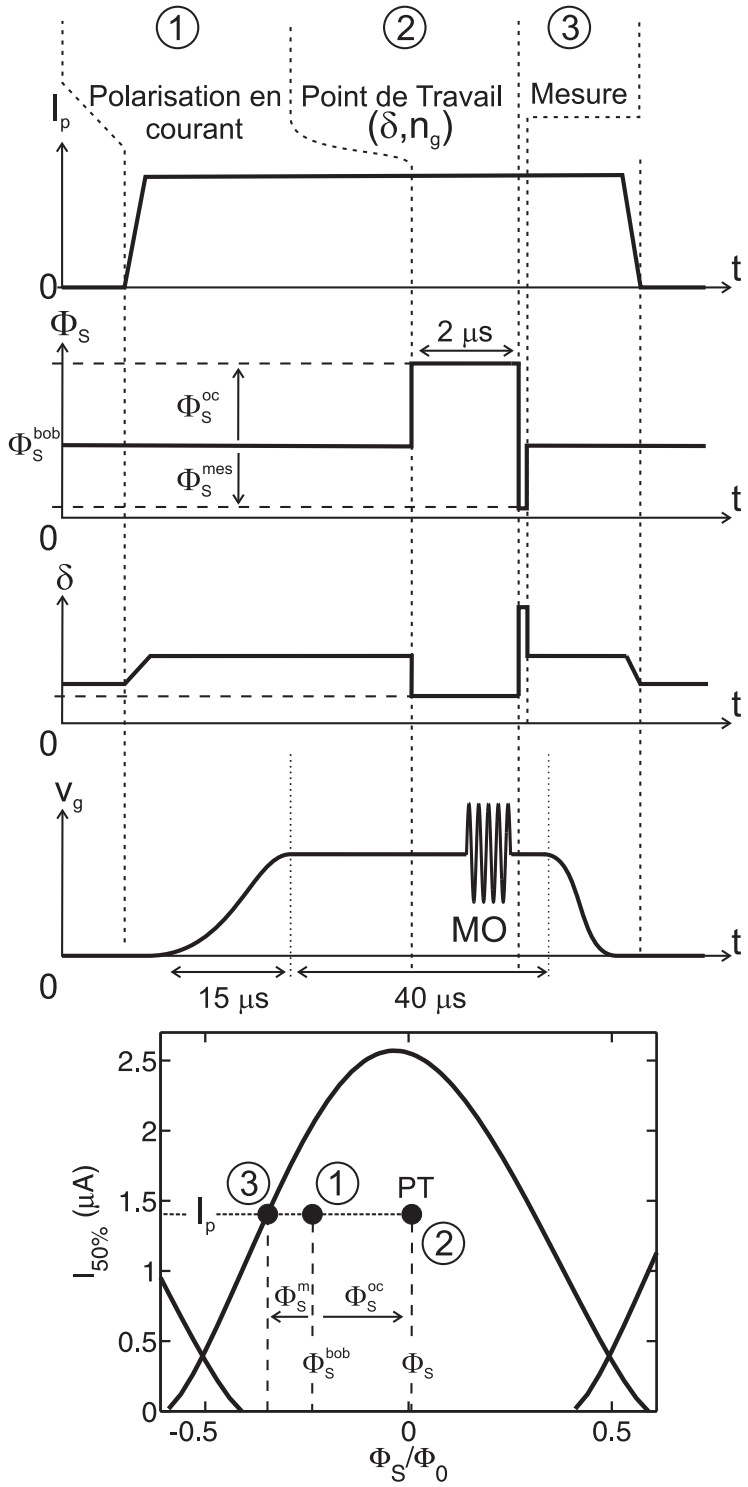

FIG. 5.6 – *Principe de mesure de la spectroscopie de l'ACPT. L'impulsion micro-onde est ici sur la tension de la grille, mais elle peut aussi être sur le flux.*

Nous observons un pic de résonance à la fréquence ν_T, qui est entouré par deux pics satellites positionnés aux fréquences $\nu_T \pm 115$ MHz. Ces derniers ont les mêmes origines que les pics satellites présents dans la spectroscopie du SQUID. Ils proviennent du bruit en courant créé par l'environnement électrique proche du SQUID. L'ACPT est en effet sensible aux fluctuations du courant de polarisation I_p via la phase δ. Nous analyserons la forme de la raie de spectroscopie plus en détail à la fin de ce chapitre.

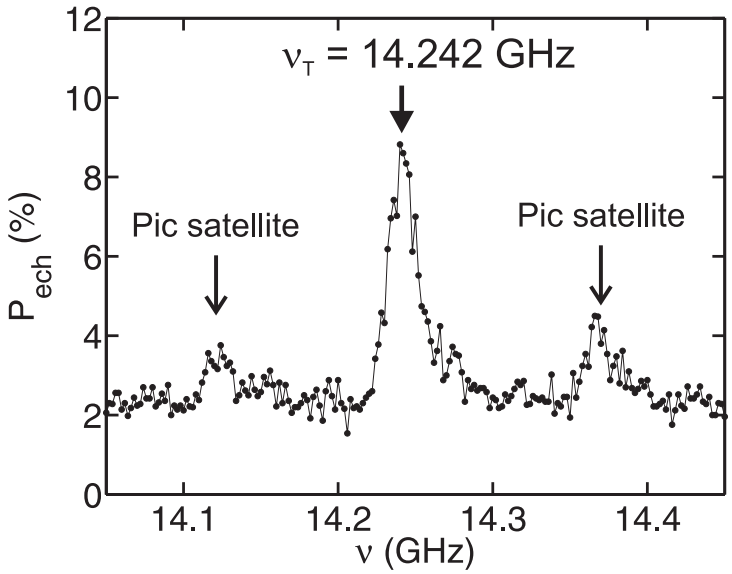

FIG. 5.7 – *Spectroscopie de l'ACPT au point de travail* $I_p = 2097$ *nA,* $\Phi_S^{bob} = -0.14\ \Phi_0$, $\Phi_S^{oc} = 0\ \Phi_0$ *et* $n_g = 0.5$.

5.2.3 Paramètres de l'ACPT

Valeurs extrémales de ν_T à $n_g = 1/2$. La charge n_g de la grille est fixée à une valeur de 1/2. En changeant le point de polarisation $(I_p, \Phi_S^{bob}, \Phi_S^{oc})$, et donc la phase δ, la fréquence du transistor ν_T varie fortement. Nous trouvons que la fréquence ν_T a une valeur maximale de 20.302 GHz et une valeur minimale de 8.745 GHz.

Dépendance de ν_T avec n_g. Des spectroscopies du transistor sont réalisées au point de travail $I_p = 2097$ nA, $\Phi_S^{bob}/\Phi_0 = -0.12$ et $\Phi_S^{oc}/\Phi_0 = 0$, à différentes valeurs de n_g. L'excitation de l'ACPT est ici réalisée par une impulsion MO de flux. La dépendance de la fréquence ν_T avec n_g est montrée à la figure 5.8. La fréquence ν_T est minimale et égale à 14.946 GHz lorsque $n_g = 0.5$, et augmente quadratiquement lorsque n_g s'éloigne de 0.5. D'autre part, la largeur des spectroscopies dépend fortement de n_g. Elle est minimale lorsque n_g prend la valeur de 0.5. A ce point, l'ACPT est insensible au bruit de charge au premier ordre $(\partial\nu_T/\partial n_g = 0)$. Lorsque la valeur de n_g s'éloigne de 0.5, l'élargissement de

la raie de spectroscopie, visible à la figure 5.8.b, est causé par la sensibilité grandissante de la fréquence ν_T au bruit de charge.

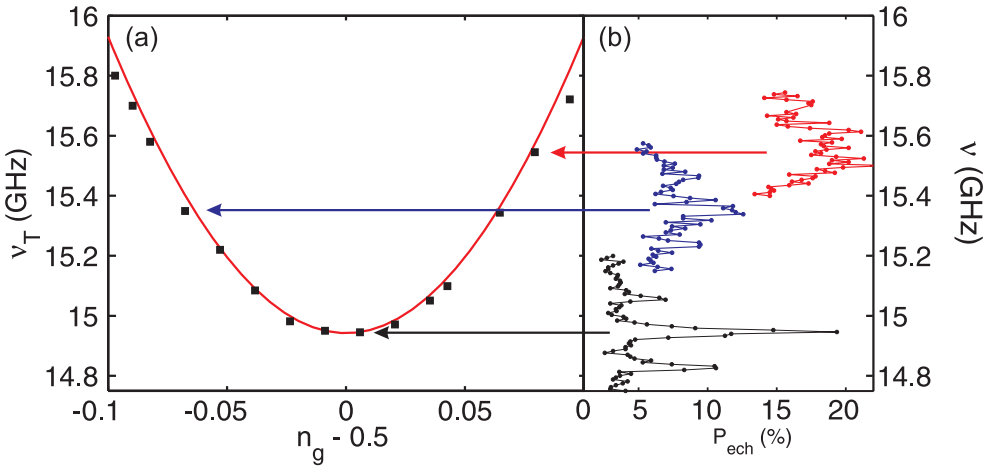

FIG. 5.8 – *Au point de travail $I_p = 2097$ nA, $\Phi_S^{bob}/\Phi_0 = -0.12$ et $\Phi_S^{oc}/\Phi_0 = 0$: (a) dépendance de la fréquence ν_T avec n_g, extraite des spectroscopies (b) réalisées à différentes charges de la grille n_g. L'excitation de l'ACPT est réalisée par une impulsion de flux microonde.*

Paramètres de l'ACPT. Nous calculons la fréquence théorique du transistor en diagonalisant l'Hamiltonien (2.66) de l'ACPT avec 8 états de charge. Les résultats précédents, à savoir, les fréquences extrêmes du transistor et la dépendance de la fréquence ν_T avec la charge de la grille n_g, sont parfaitement expliquées avec les paramètres de l'ACPT suivants : l'énergie de charge $E_C^T = 1.28$ k$_B$K, l'énergie Josephson $E_J^T = 1.01$ k$_B$K et la dissymétrie de l'énergie Josephson $\mu = -41.6$ %. Nous en déduisons la capacité totale du transistor $C_\Sigma = 2.9$ fF, ainsi que les courants critiques $I_1^T = E_{J,1}^T/\phi_0 = 30.1$ nA et $I_2^T = E_{J,2}^T/\phi_0 = 12.4$ nA. Nous pouvons maintenant calculer la fréquence théorique du transistor en fonction de δ et n_g.

5.2.4 Calibration de la charge de la grille

La charge de la grille n_g est déterminée par la tension de la grille V_g, mais aussi par une charge d'offset n_g^{offset}, de sorte que :

$$n_g = \frac{C_g V_g}{2e} + n_g^{offset}. \tag{5.17}$$

La charge d'offset a jusqu'alors été ignorée dans les calculs théoriques de l'Hamiltonien de l'ACPT, faits au §2.3 du chapitre 2. Cette charge d'offset est due aux champs électriques créés par des charges proches de l'îlot, situées dans le substrat et les barrières tunnel. Du fait de la périodicité en 2e de l'ACPT en fonction de n_g, la charge de la grille ne peut être

connue qu'à un nombre entier n près de charge 2e. Nous introduisons les tensions de la grille $V_g^{1/2}$ et $V_g^{-1/2}$ pour lesquelles $n_g = 1/2 + n[2e]$ et $n_g = -1/2 + n[2e]$ respectivement. L'entier n sera occulté dans la suite mais sous-entendu.

Les mesures de l'ACPT sont pour la plupart réalisées à $n_g = \pm 1/2$. Nous allons présenter la procédure qui nous permet d'accéder rapidement et précisément à $V_g^{1/2}$ et $V_g^{-1/2}$. Nous fixons la fréquence de l'impulsion micro-onde à la fréquence du qubit de charge lorsque $n_g = 1/2$. La probabilité d'échappement du SQUID est alors mesurée en fonction de V_g. Le résultat est montré à la figure 5.9 pour $\delta = 0.41\pi$ et $\nu = \nu_T(n_g = 1/2) = 17.200$ GHz. Deux raies de résonance apparaissent lorsque le qubit est en résonance avec l'excitation micro-onde, ce qui a justement lieu quand $V_g = V_g^{-1/2}$ et $V_g = V_g^{1/2}$.

Lorsque la tension de la grille passe de $V_g^{-1/2}$ et $V_g^{1/2}$ (variation de 11 mV), la charge de la grille augmente de 2e. Nous avons ainsi accès à la capacité de la grille C_g qui s'exprime comme :

$$C_g = \frac{2e}{V_g^{1/2} - V_g^{-1/2}}. \tag{5.18}$$

Nous obtenons $C_g = 29$ aF.

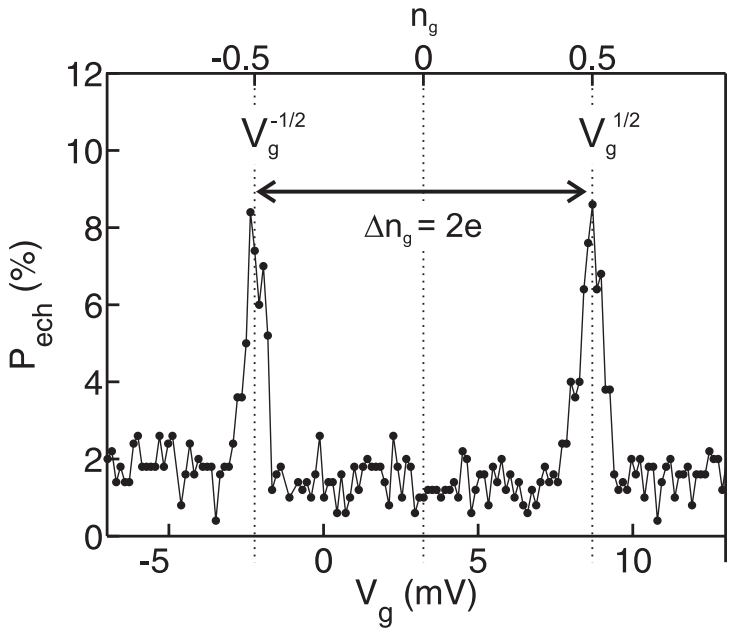

FIG. 5.9 – *Mesure de la probabilité d'échappement du SQUID en fonction de la tension V_g de la grille, en la présence d'un signal micro-onde de la tension de la grille. Ce signal micro-onde est accordé à la fréquence du qubit de charge pour $V_g = V_g^{\pm 1/2}$. Cette mesure permet de calibrer la charge de la grille avec la tension de la grille.*

La charge d'offset $\mathbf{n_g^{offset}}$. A partir de l'équation (5.17), la charge d'offset n_g^{offset} s'exprime en fonction de $V_g^{-1/2}$ et $V_g^{1/2}$ comme

$$n_g^{offset} = \frac{C_g(V_g^{-1/2} + V_g^{1/2})/2}{2e}. \tag{5.19}$$

Notons que si les tensions $V_g^{1/2}$ et $V_g^{-1/2}$ sont opposées, la charge d'offset est nulle.

La figure 5.10 montre la dépendance temporelle de n_g^{offset} à deux dates différentes. Les mesures du 8 janvier 2007 et du 12 février ont été réalisées respectivement à $\delta = 0.43\pi$ et $\delta = 0.44\pi$. Nous avons vérifié que l'évolution de n_g^{offset} ne dépend pas de δ. Le 8 janvier 2007, soit une semaine après le refroidissement de l'échantillon (de la température ambiante à 30 mK), la charge d'offset est quasiment stable. En revanche, à la date du 12 février 2007, n_g^{offset} fluctue entre deux valeurs : -0.37 et -0.31. Ceci peut être expliqué par la présence d'une charge bistable proche de l'ACPT. De manière générale, les sauts de charge d'offset deviennent de plus en plus fréquents après avoir mesuré longuement l'ACPT. Ces sauts créent un bruit de charge qui affecte la fréquence ν_T de l'ACPT. Lorsque ce dernier est trop important, nous réchauffons l'échantillon à environ 70 K, puis le refroidissons de nouveau à 30 mK. Ce cyclage thermique permet si on est chanceux de diminuer le bruit.

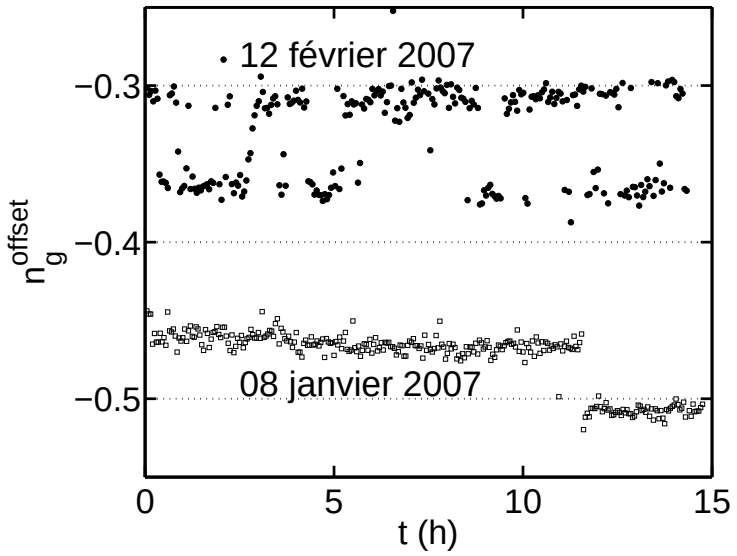

FIG. 5.10 – *Evolution dans le temps de la charge d'offset n_g^{offset} à deux dates différentes : le 08 janvier 2007 et le 12 février 2007.*

5.2.5 Calibration de la phase δ

Dans cette partie, nous montrerons comment la phase δ a été calibrée en fonction du point de polarisation $(I_p, \Phi_S^{bob}, \Phi_S^{oc})$.

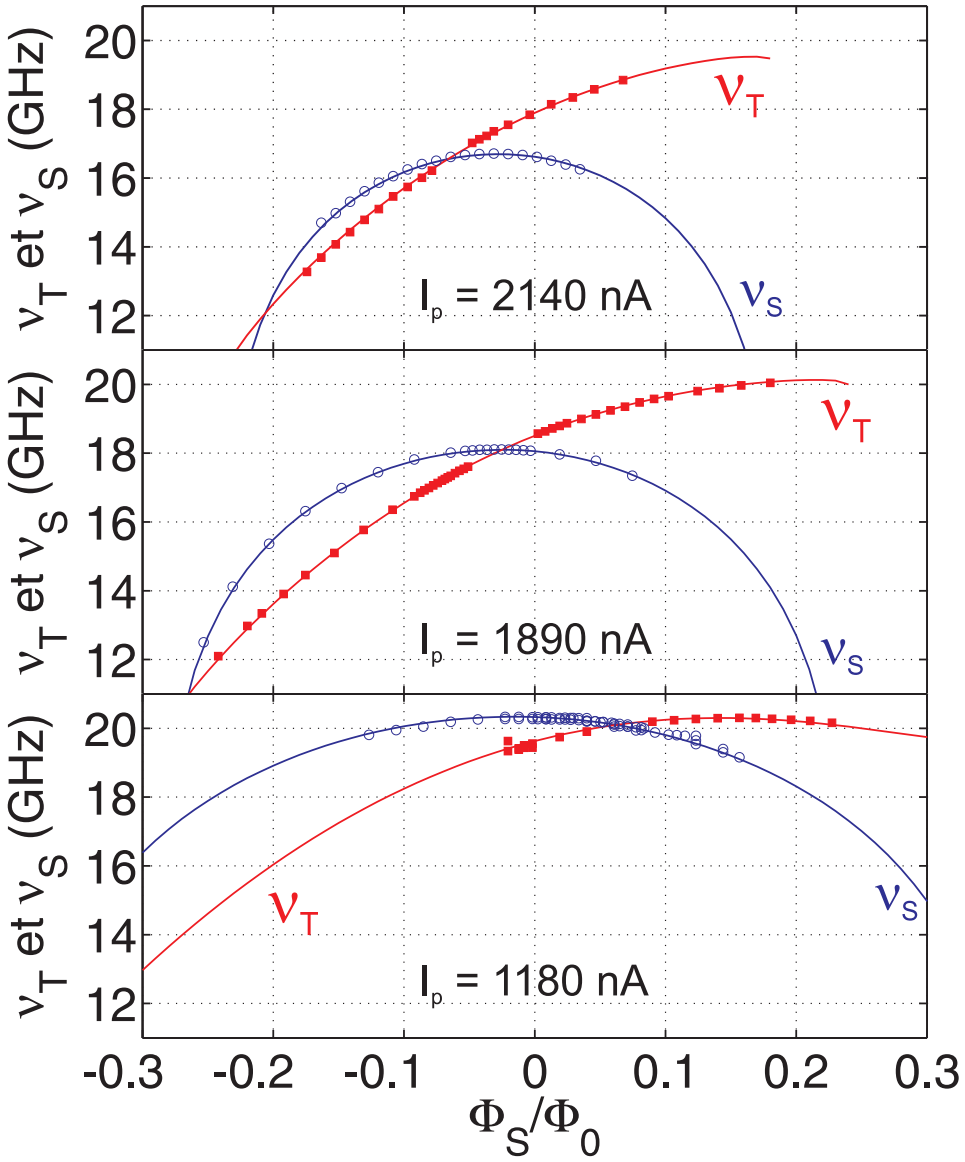

FIG. 5.11 – *Dépendance des fréquences ν_T et ν_S avec le flux $\Phi_S = \Phi_S^{oc} + \Phi_S^{bob}$. Cette dépendance est montrée à trois courants de polarisation différents $I_p = 2140$ nA, $I_p = 1890$ nA et $I_p = 1180$ nA. Le flux Φ_S est uniquement modifié via Φ_S^{oc}, alors que Φ_S^{bob} est fixé à $-0.064\ \Phi_0$. Les spectroscopies du transistor sont réalisées à $n_g = 1/2$ et celles du SQUID sont faites à $n_g \approx 1$. Les fréquences mesurées ν_T et ν_S sont représentées respectivement par des carrés et des cercles. Les fréquences théoriques, montrées en traits pleins, ne tiennent pas compte du couplage entre le SQUID et l'ACPT.*

Nous mesurons la dépendance de la fréquence ν_T avec le flux Φ_S^{oc} aux trois courants de polarisation $I_p = 2140$ nA, $I_p = 1890$ nA et $I_p = 1180$ nA, en gardant fixe $\Phi_S^{bob}/\Phi_0 = -0.064$. La figure 5.11 présente les fréquences ν_T mesurées en fonction du flux à travers le SQUID $\Phi_S = \Phi_S^{oc} + \Phi_S^{dc}$.

La dépendance de la fréquence du SQUID avec le flux, pour les trois courants de polarisation précédents, a déjà été étudiée au §4.2.3. Les dépendances expérimentale et théorique de la fréquence du SQUID sont représentées respectivement par les cercles et la ligne bleue. Nous soulignons que la fréquence du transistor ne peut être mesurée lorsque les fréquences du SQUID et du transistor sont trop proches. Ceci est dû au fait que, dans cette région, le couplage entre les deux qubits n'est pas négligeable. Le spectre d'énergie des qubits couplés, proche du croisement des fréquences ν_S et ν_T, sera étudié au chapitre 6.

La fréquence théorique $\nu_T(\delta, n_g = 1/2)$, tracée en trait plein, est calculée à partir des paramètres du transistor trouvés au §5.2.3. La phase δ est auparavant calculée en fonction du point de travail en utilisant l'équation (C.10). L'ajustement théorique permet d'obtenir précisément les paramètres libres de l'équation (C.10). Nous trouvons la mutuelle $m_T = 0.35$ pH entre la ligne micro-onde on-chip et la boucle T qui contient le transistor et la jonction Josephson du SQUID la plus proche. Nous obtenons aussi la mutuelle $M_T = 0.047$ pH entre la boucle T et la bobine en cuivre. Nous déterminons enfin la mutuelle $M_{ind} = 7$ pH entre la boucle T et la boucle du SQUID.

La mutuelle M_T ainsi obtenue et la mutuelle du SQUID M_S (déterminée au §4.2.3) ont un rapport M_T/M_S égal à 0.354. Puisque le champ créé par la bobine en cuivre est supposé homogène, ce rapport doit correspondre au rapport des surfaces S_T/S_S, où S_S et S_T sont respectivement les surfaces des boucles S et T (*cf* figure 3.4). A partir d'une photo MEB du circuit, nous trouvons $S_T = 126\ \mu m^2$ et $S_S = 367\ \mu m^2$. Le rapport $S_S/S_T = 0.363$ est très proche du rapport M_T/M_S.

5.2.6 Spectre d'énergie en fonction de δ

Grâce à la calibration de δ, nous sommes maintenant en mesure de calculer la phase δ sur l'ACPT à chaque point de polarisation $(I_p, \Phi_S^{oc}, \Phi_S^{bob}, n_g)$. Les fréquences ν_T mesurées à différentes valeurs de δ, à $n_g = 1/2$, sont reportées à la figure 5.12. La fréquence théorique est en parfait accord avec les données expérimentales, avec moins de 1% d'erreurs.

La fréquence de l'ACPT est maximale à $\delta = 0$ et est égale à 20.302 GHz. Elle est minimale à $\delta = \pi$ et est égale à 8.745 GHz. A ces deux points, la dérivée première $\partial\nu_T/\partial\delta$ est nulle. Le qubit de charge est insensible à un bruit de courant ou de flux, au premier ordre. De plus, à $n_g = 1/2$, le transistor est aussi insensible à un bruit de charge, au premier ordre. Le transistor est donc insensible à tout bruit des paramètres extérieurs du qubit. De ce fait, les deux points $(\delta = 0, n_g = 1/2)$ et $(\delta = \pi, n_g = 1/2)$, sont communément dénommés "point optimal".

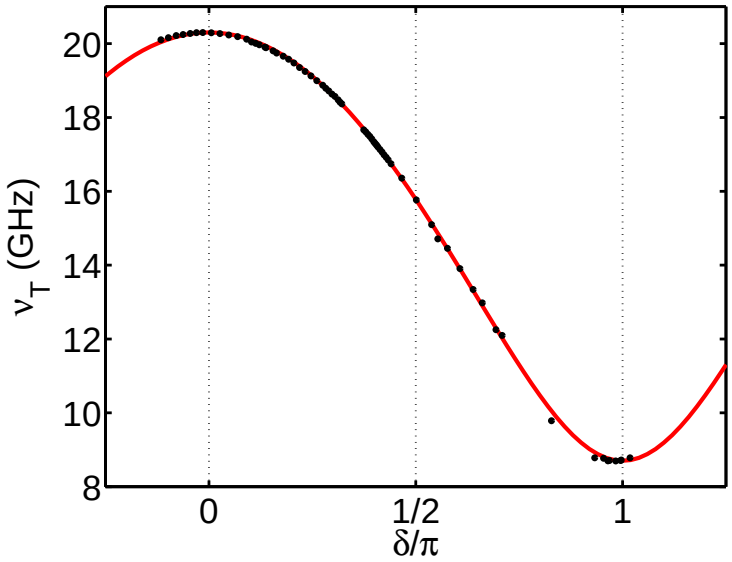

FIG. 5.12 – *Mesure de la fréquence ν_T en fonction de δ, pour $n_g = 1/2$. La ligne rouge correspond à la fréquence ν_T théorique.*

5.3 Ocillations de Rabi

Nous avons vu au §4.2.4 que les oscillations de Rabi sont mesurées lorsque la puissance micro-onde est suffisamment faible par rapport à l'anharmonicité du SQUID. Dans le cas contraire, la dynamique est plus complexe, faisant intervenir plusieurs niveaux du SQUID. L'anharmonicité du transistor étant très grande, celui-ci peut être considéré comme un qubit quelque soit la puissance micro-onde.

5.3.1 Préambule théorique

Le transistor est excité par une tension de la grille micro-onde de fréquence ν. En présence de cette perturbation micro-onde, donnée à l'équation (5.10), l'Hamiltonien de l'ACPT se réécrit comme

$$\widehat{H}_{ACPT} = h\nu_T \hat{\sigma}_z^T - \hbar\Omega_T^{n_g} \cos(2\pi\nu t)\hat{\sigma}_x^T. \tag{5.20}$$

L'évolution de l'état $|\Psi\rangle$ du transistor est régie par l'équation de Schrödinger :

$$\frac{\mathrm{d}|\Psi(t)\rangle}{\mathrm{d}t} = \widehat{H}_{ACPT}|\Psi(t)\rangle. \tag{5.21}$$

Nous introduisons la population p_+ de l'état $|+\rangle$, qui représente la probabilité d'occupation de l'état $|+\rangle$ du transistor, c'est-à-dire $p_+ \equiv |\langle +|\Psi\rangle|^2$. En supposant que l'état $|\Psi\rangle$ du transistor est initialement dans l'état $|-\rangle$ et que $\nu = \nu_T$, la résolution de l'équation (5.21) permet de trouver l'évolution de p_+ [50] :

$$p_+(t) = \frac{1}{2}\left[1 - \cos(\Omega_R t)\right]. \tag{5.22}$$

La population p_+ oscille à la pulsation de Rabi Ω_R définie par

$$\Omega_R = \Omega_T^{n_g} = \frac{E_C^T}{\hbar} \times n_g^{mo}. \tag{5.23}$$

Nous notons que Ω_R est proportionnelle à l'amplitude micro-onde n_g^{mo} de la charge de la grille.

Lorsque la fréquence ν est désaccordée par rapport à ν_T, p_+ oscille avec une plus faible amplitude et à une pulsation plus rapide égale à $\Omega_R = \sqrt{\Omega_T^{n_g} + (2\pi)^2(\nu - \nu_T)^2}$.

5.3.2 Mesure des oscillations de Rabi

Des oscillations de Rabi ont été mesurées à différentes valeurs de δ. Je présenterai dans ce paragraphe seulement les oscillations de Rabi au point optimal ($\delta = \pi, n_g = 1/2$).

Dans un premier temps, une spectroscopie du transistor est réalisée au point optimal ($\delta = \pi, n_g = 1/2$). La probabilité d'échappement du SQUID en fonction de la fréquence ν est tracée à la figure 5.13. La fréquence du qubit ν_T est trouvée égale à 8.745 GHz. La fréquence de l'impulsion micro-onde sera fixée à 8.745 GHz par la suite.

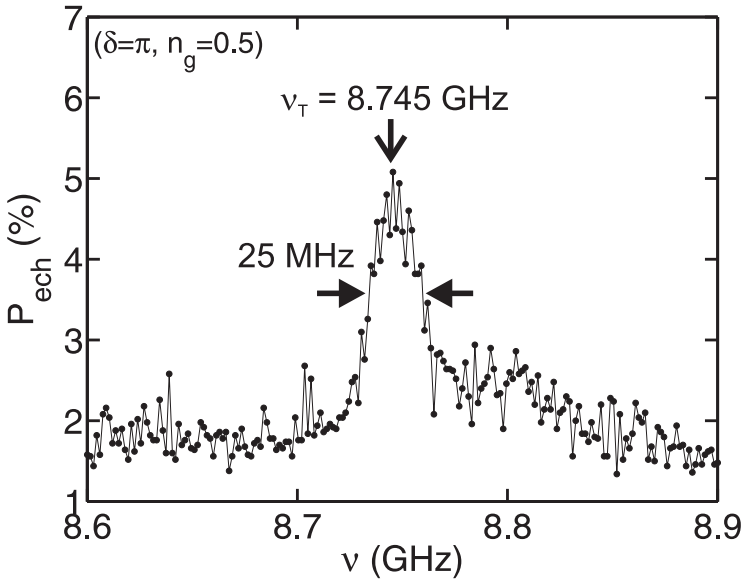

FIG. 5.13 – *Spectroscopie de l'ACPT à* ($\delta = \pi, n_g = 1/2$) *permettant de trouver* $\nu_T = 8.745$ *GHz.*

La dépendance de la probabilité d'échappement du SQUID avec la durée de la micro-onde T_{MO} est montrée à la figure 5.14 pour une puissance MO de 1 dBm. Nous obtenons des oscillations de la probabilité d'échappement qui sont exponentiellement amorties. Nous ajustons les oscillations par une loi du type $P_{ech}(T_{MO}) = P_{ech}^- + (1 - \cos(\Omega_R T_{MO})) \times C_{mes} \times \exp(-t/T_{2,R})/2$, où C_{mes}, $\Omega_R/2\pi$ et $T_{2,R}$ sont des paramètres libres. On extrait le

contraste de la mesure $C_{mes} \approx 22$ %. Ce dernier dépend du point de polarisation et de la mesure. Au maximum, il a été mesuré égal à 40 %. On extrait aussi la fréquence de Rabi $\Omega_R/2\pi = 48$ MHz, et le temps de cohérence $T_{2,R} = 50$ ns. Soulignons que $T_{2,R}$ correspond au temps de cohérence du qubit en présence d'un champ micro-onde. Il se différencie du temps T_2, qui est le temps de cohérence du qubit en régime libre (en absence de champ micro-onde).

Nous nous attendions à un temps de cohérence plus long au point optimal. Ce faible temps pourrait provenir de la sensibilité du qubit au bruit de charge et de phase au deuxième ordre.

L'évolution de l'état du transistor $|\Psi\rangle$, régie par l'équation (5.21), montre que l'état du transistor devient l'état $(|-\rangle + |+\rangle)/\sqrt{2}$ lorsque $T_{MO} = (\pi/2)/\Omega_R$, et devient l'état $|+\rangle$ lorsque $T_{MO} = \pi/\Omega_R$. Pour cette raison, les états $(|-\rangle + |+\rangle)/\sqrt{2}$ et $|+\rangle$ sont créés par des impulsions nommées respectivement $\pi/2$ et π.

Le panneau gauche de la figure 5.15 présente la dépendance de la probabilité d'échappement du SQUID avec la durée T_{MO}, pour quatre amplitudes MO différentes. L'amplitude A_{MO} est associée à l'amplitude de la MO à la sortie du générateur (HP 83630A)[(2)].

La dépendance de la fréquence de Rabi $\Omega_R/2\pi$ avec A_{MO} est présentée sur le panneau de droite. Nous constatons que Ω_R augmente linéairement avec A_{MO}, comme le prédit la théorie de Rabi pour un système à deux niveaux (équation (5.23)).

Un ajustement linéaire, qui apparaît en trait plein, nous permet de calibrer précisément n_g^{mo} avec l'amplitude A_{MO}. Les points obtenus aux fortes amplitudes MO s'écartent de la loi théorique, et s'expliquent par la non linéarité des mixers (*cf* §3.2.2).

A partir de la calibration, nous déduisons que l'atténuation MO à la fréquence de 8.7 GHz est égale à -84.5 dB. Cette valeur est compatible avec l'estimation de l'atténuation totale de -77.5 dB. Les origines de l'atténuation sont dues pour -12 dB aux mixers, pour -52 dB aux atténuateurs et pour -15.5 dB à la ligne coaxiale en inox[(3)]. La différence de 7 dB s'explique sans doute par un mauvais accord d'impédance entre la ligne coaxiale en inox et la stripline.

Oscillations de Rabi au deuxième point optimal. Nous avons aussi mesuré les oscillations de Rabi du transistor au deuxième point optimal ($\delta = 0, n_g = 1/2$). Nous n'avons pu obtenir des fréquences de Rabi supérieures à 11 MHz. Cette limitation s'explique par une importante atténuation micro-onde dans la ligne coaxiale en inox, à la fréquence du qubit $\nu_T = 20.302$ GHz. Nous avons estimé le temps de décroissance des oscillations de Rabi à 100 ns. La présence de nombreux fluctuateurs proches de 20.3 GHz nous a dissuadés d'explorer plus longuement ce point.

[(2)] A la puissance micro-onde P en [dBm] correspond l'amplitude $A_{MO} = (50 \times 10^{-3})^{1/2} \times 10^{P/20} \times \sqrt{2}$ en [V].

[(3)] La ligne coaxiale en inox de 30 cm relie les atténuateurs de -30 dB et -10 dB (*cf* §3.2.1).

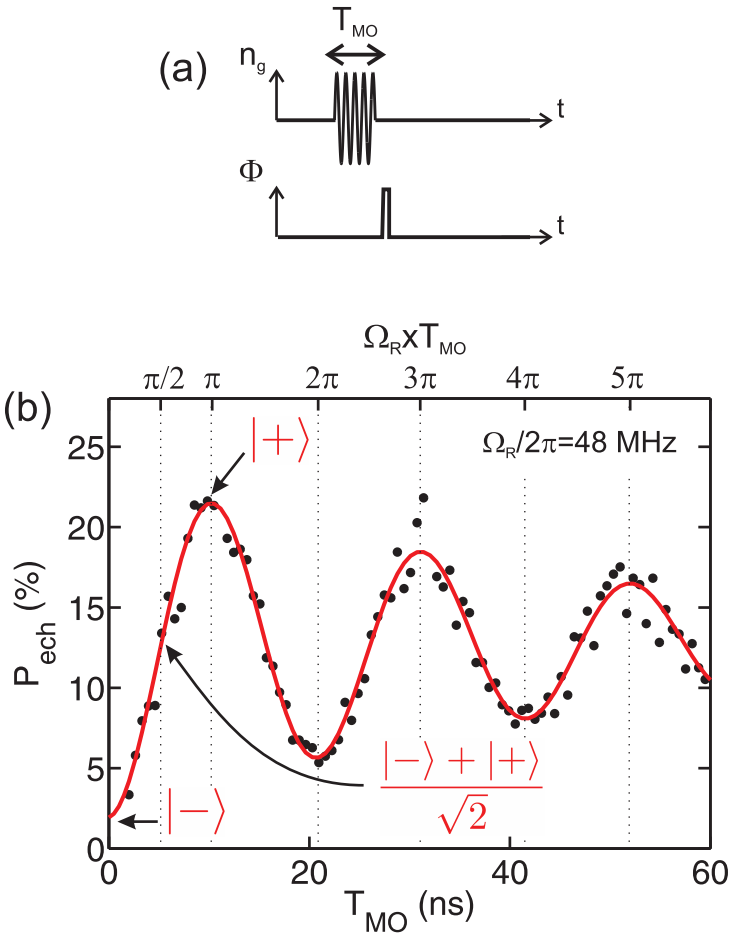

FIG. 5.14 – *Oscillations de Rabi au point* $(\delta = \pi, n_g = 1/2)$ *: dépendance de la probabilité d'échappement avec la durée de la micro-onde* T_{MO}*, à la puissance MO de 1 dBm. L'ajustement théorique, tracé en trait plein, permet de trouver* $\Omega_R/2\pi = 48$ *MHz et* $T_{2,R} = 50$ *ns*

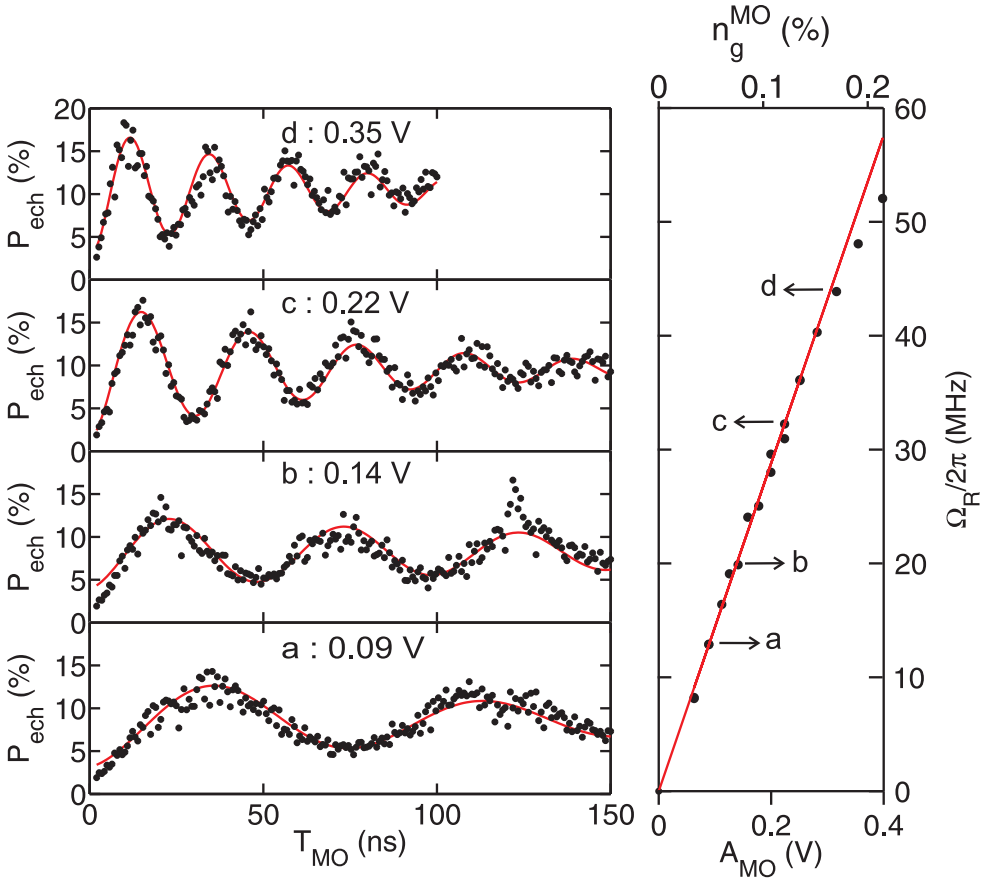

FIG. 5.15 – ***Panneau de gauche :*** *oscillations de Rabi pour différentes amplitudes micro-ondes* A_{MO}. ***Panneau de droite :*** *fréquence de Rabi* $\Omega_R/2\pi$ *en fonction de* A_{MO}. *L'ajustement de la loi linéaire permet de calibrer l'axe du haut : l'amplitude micro-onde* n_g^{MO} *de la charge de la grille. Les fréquences de Rabi extraites des oscillations de Rabi du panneau de gauche, sont indiquées par les lettres a, b, c et d.*

5.4 Décohérence du qubit de charge

La décohérence du qubit de charge s'explique par le couplage du qubit avec les fluctuations non contrôlées des paramètres de polarisation. Autrement dit, la décohérence est causée par les bruits en courant de polarisation, en flux, et en tension de la grille. Nous caractériserons dans cette partie la décohérence par la fonction d'amortissement f_{coh} des termes de cohérence de la matrice densité de l'ACPT. Nous avions caractérisé de cette façon la décohérence du SQUID au §4.3. Nous reprendrons les résultats de cette étude.

La fonction $f_{coh}(t)$ de l'ACPT s'exprime comme le produit de quatres fonctions :

$$f_{coh}(t) = f_I(t) f_\Phi(t) f_{n_g}(t) \exp\left(-t/(2T_1)\right), \tag{5.24}$$

où $f_I(t)$, $f_\Phi(t)$ et $f_{n_g}(t)$ sont les fonctions de déphasage adiabatique dues respectivement au bruit en courant, en flux et en charge. La fonction $\exp(-t/(2T_1))$ provient de la relaxation du qubit de charge.

Nous utiliserons le fait que la forme de la raie de spectroscopie théorique est donnée par la transformée de Fourier de $f_{coh}(t)$ (équation 4.16).

La première partie de cette section sera consacrée à la relaxation du qubit de charge. L'ajustement théorique de la raie de spectroscopie du transistor permettra ensuite de caractériser les bruits en courant, en flux et en charge.

5.4.1 Relaxation du qubit de charge

La mesure de la relaxation du qubit de charge est optimale si la population p_+ est initialement grande. Ceci est réalisé par une impulsion π qui place idéalement l'état du transistor dans son état $|+\rangle$. L'impulsion de flux nano-seconde, qui permet de mesurer la probabilité d'échappement du SQUID, est effectuée après l'impulsion MO avec un délai D_m variable (insert de la figure 5.16). Le résultat de cette mesure au point optimal ($\delta = \pi, n_g = 1/2$) est présenté à la figure 5.16. La probabilité d'échappement décroit exponentiellement avec une loi du type : $P_{ech} = A(1-\exp(-t/T_1))+P_{ech}^-$, où A et T_1 sont des paramètres libres. On extrait le temps de relaxation $T_1 \approx 0.80$ μs pour ce point de polarisation. Ce temps long nous informe que le transistor, dans notre circuit, est bien isolé de son environnement.

Sources de la relaxation. Les fluctuations ΔX du paramètre $X = \{\delta, n_g\}$ perturbent l'Hamiltonien du transistor. Un développement de l'Hamiltonien au premier ordre en ΔX fait apparaître le terme de perturbation $\widehat{W}_X$, qui se met sous la forme :

$$\widehat{W}_X = -\frac{\hbar}{2}(x_X \hat{\sigma}_x^T + y_X \hat{\sigma}_y^T + z_X \hat{\sigma}_z^T)\,\Delta X. \tag{5.25}$$

La contribution contenant les termes en $\hat{\sigma}_x^T$ et $\hat{\sigma}_y^T$ est dite transverse. Celle contenant le terme $\hat{\sigma}_z^T$ est dite longitudinale.

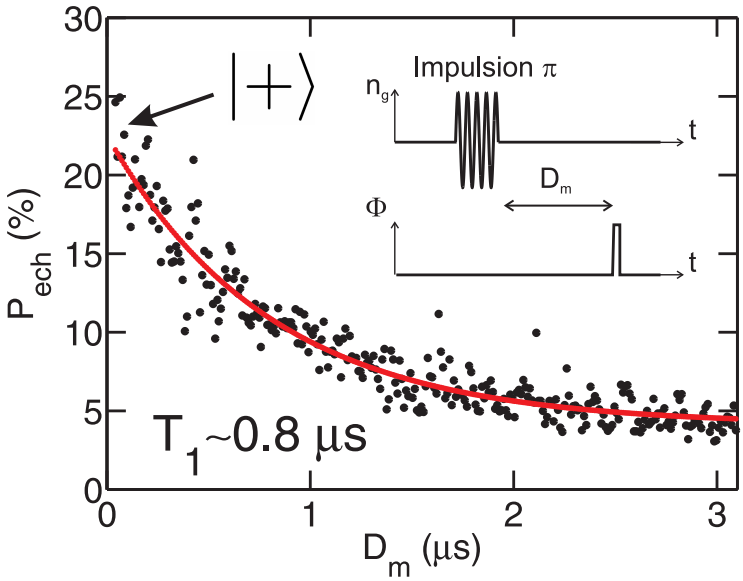

FIG. 5.16 – *Mesure de la relaxation de l'état* $|+\rangle$ *: probabilité d'échappement en fonction du délai* D_m *entre la fin d'une impulsion* π *et la mesure nano-seconde. La ligne pleine est un ajustement exponentiel de la forme* $\exp(-D_m/T_1)$*. On extrait ici* $T_1 \approx 0.8$ *µs.*

Le temps de relaxation T_1 est trouvé à partir de la règle d'or de Fermi :

$$T_1^{-1} = \sum_X \frac{\pi}{2}(x_X^2 + y_X^2) S_X(\nu_T), \tag{5.26}$$

où $S_X(\nu_T)$ est la densité spectrale quantique du bruit de X à la fréquence ν_T. Le transistor relaxe si l'environnement peut absorber un photon d'énergie $h\nu_T$. La relaxation du qubit de charge est donc produit par les fluctuations δV_g de la tension de la grille, δI_p de courant, $\delta\Phi$ de flux à la fréquence ν_T (théorème fluctuation-dissipation). La condition précédente n'est pas suffisante : il faut aussi que que la contribution transverse de (5.25) soit non nulle. Cette dernière joue le rôle de couplage entre le qubit et l'environnement, et est ainsi appelée communément couplage transverse.

Le tableau 5.1 regroupe l'expression générale des termes de couplage transverse, ainsi que leur valeur numérique au point de travail ($\delta = \pi, n_g = 1/2$).

Coefficient	Fluctuations de la phase $X = \delta$	Fluctuation de charge $X = n_g$
x_X à $(\delta = \pi, n_g = 1/2)$	0 0 rad/s	$2E_C^T/\hbar$ 336×10^9 rad/s
y_X à $(\delta = \pi, n_g = 1/2)$	$(1+\mu)/2\, E_J^T \cos(-\delta/2 + \chi)/\hbar$ 390×10^9 rad/s	0 0 rad/s

TAB. 5.1 – *Les coefficients du couplage transverse.*

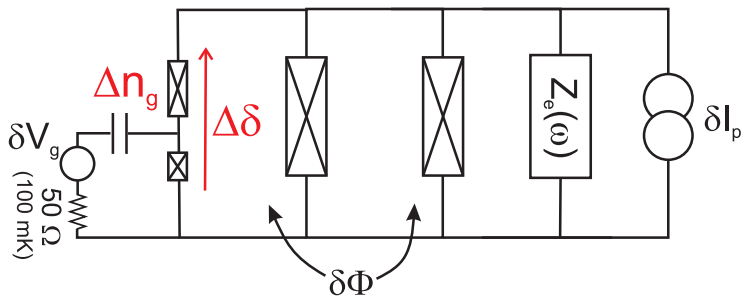

FIG. 5.17 – *Schématisation des sources de bruit dans notre cicuit. L'impédance de la grille vue par le transistor est modélisée par une résistance 50 Ω thermalisée à 100 mK. $Z_e(\omega)$ correspond à l'impédance de l'environnement électrique. Le flux, le courant de polarisation et la tension de la grille fluctuent respectivement de $\delta\Phi$, δI_p et δV_g. Ces fluctuations affectent la charge de la grille et la phase sur le transistor qui fluctuent alors de Δn_g et $\Delta\delta$.*

Temps de relaxation dû au bruit du courant de polarisation. On note $T_1^{I_b}$ la composante de la relaxation de l'ACPT qui provient des fluctuations δI_p du courant de polarisation. Ces fluctuations sont produites par l'impédance $Z_e(\nu)$ de l'environnement électrique, qui est visible à la figure 5.17. L'étude de la relaxation d'un SQUID seul, rapportée dans la référence [15], a montré que le temps de relaxation du SQUID était principalement dû aux fluctuations de courant. Nous supposons qu'il en est de même pour notre SQUID. Dans ce cas, on peut montrer que le temps $T_1^{I_b}$ est relié au temps de relaxation du SQUID $T_{1,SQUID}$ à la fréquence du transistor par :

$$T_1^{I_b} = \left(\frac{\partial I_p}{\partial \delta}\right)^2 \left(\frac{x_{I_p}^s}{x_\delta}\right)^2 T_{1,SQUID}, \tag{5.27}$$

où $x_{I_p}^s$ est le coefficient de couplage transverse du SQUID aux fluctuations δI_p. Celui-ci est donné dans la référence [31] par $x_{I_p}^s = (\cos(\theta) + \eta\sin(\theta))/(C_\parallel h\nu_S/2)^{1/2}$.

Nous cherchons maintenant $T_1^{I_b}$ au point de polarisation ($\delta = \pi, n_g = 1/2$). Le temps de relaxation du SQUID à la fréquence du transistor, c'est-à-dire à $\nu_S \approx 8.7$ GHz, avoisine 150 ns. Nous calculons les paramètres $x_{I_p}^s = 6.3 \times 10^8$ rad/(nA.s) et $\partial\delta/\partial I_p = 7 \times 10^{-4}$ rad/nA. En utilisant ces valeurs dans l'équation (5.27), nous obtenons $T_1^{I_b} \approx 0.80$ μs à ($\delta = \pi, n_g = 1/2$).

Temps de relaxation dû au bruit de charge. On note $T_1^{n_g}$ la composante de la relaxation de l'ACPT qui provient des fluctuations de la charge de la grille. G. Ithier et al. ont montré dans la référence [14] que le bruit de charge à la fréquence du transistor était principalement causé par l'impédance de la grille. Nous modélisons l'impédance de la grille de l'ACPT par une résistance $R_g = 50$ Ω thermalisée à $T = 100$ mK. La résistance est responsable des fluctuations δV_g de la tension de la grille. La densité spectrale de ces

fluctuations est calculée par le théorème de fluctuation-dissipation quantique [52] :

$$S_{V_g}(\nu) = \frac{h\nu}{2\pi}\left[\coth\left(\frac{h\nu}{2k_BT}\right)+1\right]R_g. \tag{5.28}$$

En utilisant l'équation (5.26) et la relation $S_{n_g}(\nu) = (C_g/(2e))^2 S_{V_g}(\nu)$, nous trouvons que $T_1^{n_g}$ s'exprime en fonction de $S_{V_g}(\nu_T)$ comme

$$T_1^{n_g} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{x_{n_g}^2+y_{n_g}^2}\left(\frac{2e}{C_g}\right)^2\frac{1}{S_{V_g}(\nu_T)} \tag{5.29}$$

Nous en déduisons $T_1^{n_g} \approx 7$ μs au point de polarisation ($\delta = \pi, n_g = 1/2$).

Temps de relaxation dû au bruit de flux. Plusieurs expériences ont montré que les fluctuations $\delta\Phi$ de flux étaient basses fréquences [55]. Nous avons trouvé que les fluctuations de flux hautes fréquences contribuent de manière négligeable à la relaxation d'un SQUID seul [15]. Nous supposerons donc que les fluctuations de flux ne contribuent pas à la relaxation du transistor.

Temps de relaxation dû à l'ensemble des sources de bruit. Les bruits en courant de polarisation et en charge sont principalement responsable du temps de relaxation du transistor. Ce dernier s'exprime comme :

$$T_1 = \left(\frac{1}{T_1^{I_p}}+\frac{1}{T_1^{n_g}}\right)^{-1}. \tag{5.30}$$

Nous obtenons $T_1 \approx 0.72$ μs au point ($\delta = \pi, n_g = 1/2$). Cette valeur théorique est en très bon accord avec le temps T_1 mesuré. Nous constatons que le bruit de charge contribue peu à la relaxation ($T_1 \approx T_1^{Ib}$). Il apparaît que le bruit en courant de polarisation pourrait être le principal responsable de la relaxation du transistor dans notre circuit. Pour conclure cette observation, il serait toutefois intéressant d'inclure l'effet du bruit en courant critique du SQUID sur la relaxation du transistor.

5.4.2 Processus de la décohérence dans le transistor

Les fonctions de déphasage adiabatique $f_I(t)$ et $f_\Phi(t)$ du SQUID sont données respectivement par les équations (4.18) et (4.24). Celles-ci restent valables pour l'ACPT si on remplace les sensibilités du SQUID en courant et en flux par celles du transistor : $\partial\nu_T/\partial I_p$ et $\partial\nu_T/\partial\Phi_S$. Ces fonctions de déphasage ont été calculées en supposant un couplage linéaire avec des sources de fluctuations gaussiennes. Au points optimaux, les sensibilités du transistor en courant et en flux sont nulles. Le calcul doit alors être mené à l'ordre quadratique pour estimer la décohérence.

La fonction $f_{n_g}(t)$ n'intervient pas dans le calcul de la fonction d'amortissement du SQUID, puisque la fréquence du SQUID ne dépend pas de n_g. La majeure partie des

spectroscopies du transistor a été réalisée à $n_g = 1/2$, où la sensibilité du transistor à n_g, au premier ordre, est nulle ($\partial\nu_T/\partial n_g = 0$). De ce fait, $f_{n_g}(t)$ doit être calculée en prenant en compte les fluctuations quadratiques de charge. Ces fluctuations sont supposées gaussiennes et de basse fréquence. D'autre part, la densité spectrale classique du bruit de charge $S^c_{n_g}(\omega) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\langle\delta n_g(0)\delta n_g(t)\rangle e^{i\omega t}$ est supposée suivre une loi en $1/f$:

$$S^c_{n_g}(\omega) = A_{n_g}/|\omega|. \tag{5.31}$$

Le détail du calcul de $f_{n_g}(t)$ se trouve à la référence [14]. La fonction $f_{n_g}(t)$ dépend principalement du coefficient A_{n_g}, ainsi que de la sensibilité au bruit de charge du deuxième ordre.

Analyse de la spectroscopie au point ($\delta = 0.47\pi, \mathbf{n_g} = 1/2$). La spectroscopie du transistor au point de travail ($\delta = 0.47\pi, n_g = 1/2$) est montrée à la figure 5.18. Trois raies de résonance sont visibles. La raie centrale apparaît à la fréquence du qubit $\nu_T = 14.24$ GHz. Deux pics satellites sont situés de part et d'autre de la raie centrale. Ils sont espacés de 115 MHz de la raie centrale. Ces pics satellites s'expliquent par la sensibilité du transistor au bruit en courant (*cf* §4.3.4).

La raie centrale est dissymétique. Une augmentation de la probabilité d'échappement est visible vers les fréquences élevées, ce qui donne une "queue" à la raie (flèche 1). Ceci peut s'expliquer par un effet du bruit de charge du deuxième ordre. En effet, la fréquence étant minimale à $n_g = 1/2$, un bruit de charge ne peut qu'augmenter la fréquence du transistor. Un saut de charge pendant la mesure cause un décalage vers les hautes fréquences du pic satellite de droite (flèche 2).

Les différentes sensibilités du transistor aux paramètres de polarisation sont regroupées dans le tableau 5.2. Celles-ci interviennent dans les calculs de la fonction $f_{coh}(t)$ et sa transformée de Fourier, c'est-à-dire la forme de la raie de spectroscopie théorique. L'ajustement théorique de la spectroscopie permet de trouver les différentes caractéristiques du bruit en courant, en flux et en charge. Tout d'abord, à partir de l'amplitude des pics satellites, on trouve la température de l'environnement électrique égale à environ 200 mK. Cette température est plus élevée que la température de 75 mK extraite des spectroscopies du SQUID. Une explication vient peut être des impulsions de grille qui dissipent de la chaleur dans l'atténuateur de -10 dB situé à 30 mK. On déduit de la température de 200 mK le bruit RMS en courant $\langle\delta I^2_{Ze}\rangle^{1/2} \approx 20$ nA (équation (4.21))

Nous trouvons ensuite les fluctuations RMS de flux $\langle\delta\Phi^2_{BF}\rangle^{1/2} = 0.2$ mΦ_0, qui sont en accord avec les mesures du SQUID. Enfin, l'ajustement de la queue de la spectroscopie permet de trouver la densité spectrale de charge :

$$S^c_{n_g}(\omega) \approx 2 \times 10^{-6}/|\,\omega|. \tag{5.32}$$

Cette densité spectrale est proche de celle du Quantronium évaluée à $S^c_{n_g}(\omega) = 1.7 \times 10^{-6}/|\,\omega|$.

Analyse de la spectroscopie au point optimal ($\delta = \pi, \mathbf{n_g = 1/2}$). Au point optimal ($\delta = \pi, n_g = 1/2$), le transistor est seulement sensible au bruit en courant, en flux et en charge au deuxième ordre. Les sensibilités $\partial^2\nu_T/\partial n_g^2$ et $\partial^2\nu_T/\partial\delta^2$ étant toutes les deux positives, les fluctuations des paramètres ne peuvent que faire augmenter ν_T. Pourtant, la raie de spectroscopie, montrée à la figure 5.19 ne présente qu'une légère dissymétrie. Cette absence de dissymétrie prononcée reste pour l'instant incomprise.

A ce point de polarisation, la sensibilité au bruit quadratique de charge $\partial^2\nu_T/\partial n_g^2 =$ 329 GHz est très importante. A titre comparatif, au point ($\delta = 0, n_g = 1/2$) le Quantronium avait une sensibilité $\partial^2\nu_T/\partial n_g^2 = 46$ GHz. L'ACPT à $\delta = \pi$ est donc 7 fois plus sensible au bruit de charge que le Quantronium à $\delta = 0$. Cette différence provient d'un rapport $E_J^T/E_C^T \approx 0.79$ de l'ACPT inférieur à celui du Quantronium évalué à 1.33. Elle pourrait expliquer pourquoi le temps de cohérence de l'ACPT est plus court.

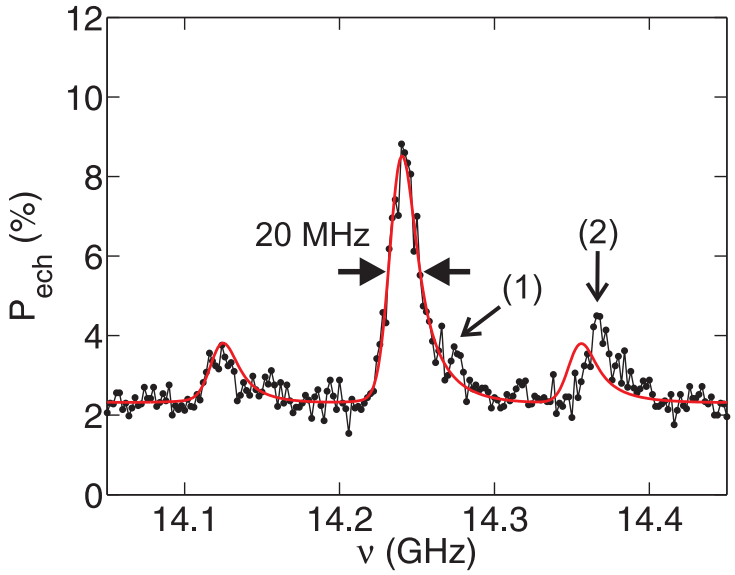

FIG. 5.18 – *Spectroscopie de l'ACPT à $\delta = 0.47\pi$ et $n_g = 0.5$. L'ajustement théorique apparaît en trait plein. Les deux pics satellites sont causés par le bruit en courant. La dissymétrie de la spectroscopie (flèche 1) est la conséquence du bruit de charge basse fréquence du deuxième ordre. Le décalage du pic satellite de droite vers les fréquences élevées (flèche 2) est sans doute dû à un saut de charge.*

Paramètre	Φ_S	I_p	n_g
Sensibilité	$\partial\nu_T/\partial\Phi_S = 32$ GHz$/\Phi_0$	$\partial\nu_T/\partial I_p = 4$ MHz/nA	$\partial^2\nu_T/\partial n_g^2 = 186$ GHz

TAB. 5.2 – *Au point ($\delta = 0.47\pi, n_g = 1/2$) : sensibilité du transistor aux fluctuations des paramètres Φ_S, I_p et n_g.*

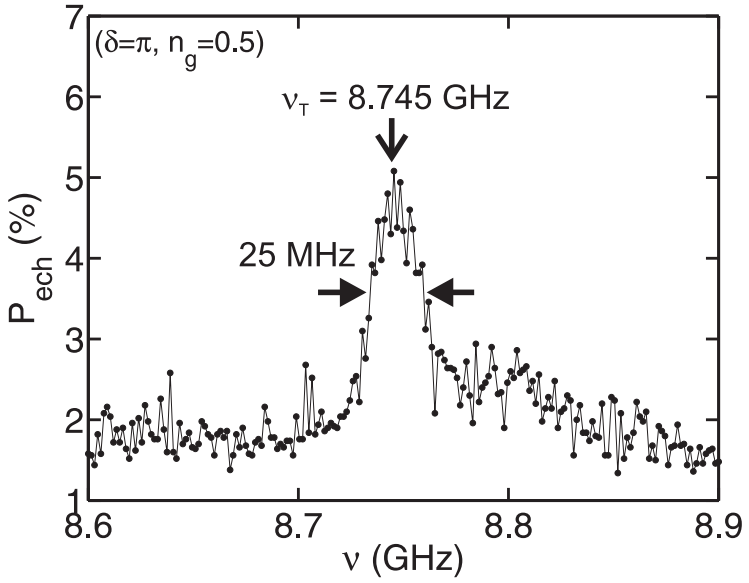

FIG. 5.19 – *Spectroscopie de l'ACPT à* $(\delta = \pi, n_g = 1/2)$. *Une légère dissymétrie de la raie est visible.*

Chapitre 6

Couplage variable entre les deux qubits

Dans les deux chapitres précédents, le SQUID et le transistor ont été étudiés de manière indépendante. Lorsque le désaccord de fréquence des deux qubits était important, nous avons été en mesure d'occulter les effets de couplage entre le SQUID et le transistor. Proche de la résonance entre le SQUID et le transistor ($\nu_S \approx \nu_T$), le couplage est à l'origine de l'enchevêtrement des états des deux qubits.

La première partie de ce chapitre sera consacrée à la mise en évidence du couplage par des mesures de spectroscopie des états du circuit couplé. Dans la deuxième partie, nous présenterons différentes mesures expérimentales du couplage. Ce dernier varie de plus d'un facteur 18, de 60 MHz et 1.1 GHz. Enfin, nous montrerons que ce couplage expérimental est bien expliqué théoriquement par l'addition d'un couplage capacitif et d'un couplage Josephson. Nous pouvons, avec un tel circuit, coupler et découpler les deux qubits. C'est une des propriétés qui est recherchée dans le domaine de l'information quantique. En effet, cette propriété permet de manipuler un des qubits sans perturber l'autre lorsque le couplage est nul, tout comme elle permet une opération sur deux qubits lorsque le couplage est fini.

6.1 Mise en évidence du couplage

Le premier paragraphe présentera le spectre d'énergie théorique du circuit couplé. Nous montrerons que l'effet du couplage entre les qubits de charge et de phase est maximal à la résonance des deux qubits. Cette propriété permettra de déterminer la valeur du couplage à la résonance. Nous montrerons ensuite le principe expérimental qui permet de s'assurer de la résonance des deux qubits. Enfin, nous nous intéresserons aux spectroscopies expérimentales du circuit couplé (proche de la résonance) à partir desquelles en est déduite une valeur de couplage d'environ 110 MHz.

6.1.1 Influence du couplage sur le spectre d'énergie

Proche de la résonance des deux qubits, nous avons vu au §2.4.3 du chapitre 2 que l'Hamiltonien $\widehat{H}$ du circuit couplé s'écrit comme

$$\widehat{H} = \frac{h\nu_S}{2}\hat{\sigma}_z^S + \frac{h\nu_T}{2}\hat{\sigma}_z^T - \frac{h\nu_g}{2}\left(\hat{\sigma}_+^S\hat{\sigma}_-^T + \hat{\sigma}_-^S\hat{\sigma}_+^T\right), \tag{6.1}$$

avec la fréquence de couplage $\nu_g \equiv g/\mathrm{h}$. Lorsque le couplage est non nul, les états $|0,+\rangle$ et $|1,-\rangle$ ne sont plus les états propres de l'Hamiltonien $\widehat{H}$. De même, les énergies ν_S et ν_T ne sont plus les énergies propres. On note $|\Psi_+\rangle$ et $|\Psi_-\rangle$ les nouveaux états propres du circuit couplé, et $h\nu_+$ et $h\nu_-$ leurs énergies respectives. Les définitions précédentes vérifient la convention $\nu_+ > \nu_-$. Ces niveaux d'énergie sont obtenus en diagonalisant l'Hamiltonien $\widehat{H}$. Nous redéfinissons l'énergie de l'état fondamental $|0,-\rangle$ de l'Hamiltonien $\widehat{H}$ comme l'origine des énergies, c'est-à-dire $\langle 0,-|\widehat{H}|0,-\rangle \equiv 0$. Dans cet condition, les fréquences propres sont

$$\nu_\pm = \bar{\nu} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\Delta\nu)^2 + \nu_g^2}, \tag{6.2}$$

avec la fréquence moyenne $\bar{\nu} \equiv (\nu_S + \nu_T)/2$ et le désaccord de fréquence $\Delta\nu \equiv \nu_T - \nu_S$.

La figure 6.1.a présente la dépendance des niveaux d'énergies $h\nu_+$ et $h\nu_-$ en fonction du désaccord de fréquence $\Delta\nu$. Toutes les fréquences de la figure sont normalisées par ν_g qui ne dépend pas de $\Delta\nu$. A titre de comparaison, les niveaux d'énergie $h\nu_S$ et $h\nu_T$ sont ajoutées à la figure en ligne pointillée. De manière générale, le couplage est responsable d'un repoussement des niveaux d'énergies. Ce repoussement est maximum à la résonance des deux qubits ($\Delta\nu = 0$). Afin de mieux appréhender cet effet, la différence $\nu_+ - \nu_-$ est tracée en fonction de $\Delta\nu$ sur la figure 6.1.b.

Deux régimes extrêmes de couplage apparaissent. Le premier correspond au couplage dispersif qui est atteint lorsque $|\Delta\nu| \gg \nu_g$. Dans ce régime, les énergies ν_+ et ν_- sont données par $\nu_+ = \nu_T + \frac{\nu_g^2}{4|\Delta\nu|}$ et $\nu_- = \nu_S - \frac{\nu_g^2}{4|\Delta\nu|}$ si $\nu_T > \nu_S$, et par $\nu_+ = \nu_S + \frac{\nu_g^2}{4|\Delta\nu|}$ et $\nu_- = \nu_T - \frac{\nu_g^2}{4|\Delta\nu|}$ si $\nu_T < \nu_S$. La différence $\nu_+ - \nu_-$ s'exprime alors comme

$$\nu_+ - \nu_- = |\Delta\nu| + \frac{\nu_g^2}{2|\Delta\nu|}. \tag{6.3}$$

Lorsque le rapport $\nu_g^2/(4|\Delta\nu|)$ est typiquement inférieur à 1 MHz, nous supposons dans notre expérience que les fréquences ν_+ et ν_- sont identiques aux fréquences ν_S et ν_T. Cela est raisonnable car la largeur des raies de l'ACPT est d'environ 20 MHz. Cette hypothèse a déjà été utilisée pour l'analyse séparée du SQUID et du transistor aux chapitres 4 et 5.

Le deuxième régime de couplage correspond au couplage résonant. Il est atteint lorsque les qubits sont en résonance ($\Delta\nu = 0$). On définit la fréquence de résonance par $\nu_r \equiv \nu_S = \nu_T$. En l'absence de couplage, les états propres $|0,+\rangle$ et $|1,-\rangle$ sont dégénérés.

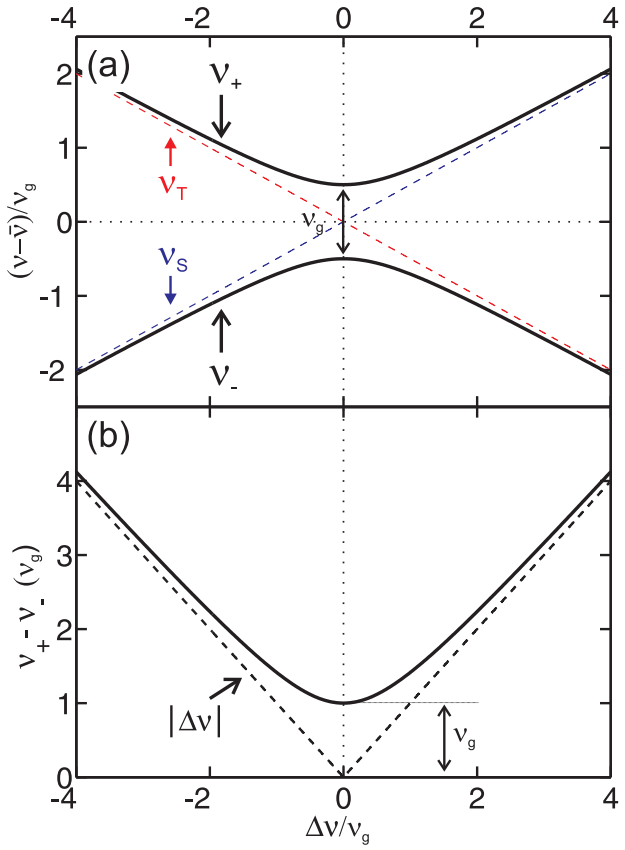

FIG. 6.1 – *(a) Niveaux d'énergie des deux premiers états excités en fonction du désaccord de fréquence $\Delta\nu = \nu_T - \nu_S$ en absence (lignes pointillées) et en présence (lignes pleines) de couplage. (b) Différence $\nu_+ - \nu_-$ en fonction de $\Delta\nu$ en absence (lignes pointillées) et en présence (lignes pleines) de couplage. Toutes les fréquences sont normalisées en unité ν_g.*

Cette dégénérescence est levée lorsque le couplage est non nul. Les nouveaux états propres sont alors l'état symétrique $|\Psi_S\rangle = (|0,+\rangle + |1,-\rangle)/\sqrt{2}$ et l'état antisymétrique $|\Psi_A\rangle = (|0,+\rangle - |1,-\rangle)/\sqrt{2}$. Ils correspondent aux états d'intrication maximale des deux qubits. En supposant $\nu_g > 0$, les états $|\Psi_S\rangle$ et $|\Psi_A\rangle$ ont respectivement les énergies propres $E_S = h(\nu_r - \nu_g/2)$ et $E_A = h(\nu_r + \nu_g/2)$. De ce fait, la mise en évidence de ces états et de leur énergie permet de déduire la valeur de ν_g via la relation

$$\boxed{\nu_g = \frac{E_A - E_S}{h}.} \tag{6.4}$$

6.1.2 Détermination de la résonance des deux qubits

Nous nous intéressons ici à la méthode utilisée pour trouver la polarisation du circuit à laquelle les deux qubits sont en résonance. La dépendance théorique de ν_S et ν_T (fréquences des deux qubits sans couplage) avec la polarisation du circuit permet d'estimer le croisement de ces fréquences. Cette méthode étant imprécise, nous utilisons le principe de l'expérience illustré à la figure 6.2 afin de garantir la résonance entre les deux qubits. Il s'agit tout d'abord de réaliser la spectroscopie du SQUID à $n_g \approx 1$, où ν_T est très éloignée de ν_S, rendant le couplage entre les deux qubits négligeable. La spectroscopie du SQUID permet alors de trouver la valeur de ν_S. La charge de grille n_g est ensuite fixée à 0.5, pour laquelle le circuit couplé a été principalement étudié. C'est en effet à cette charge de grille que le que le circuit couplé est le moins sensible au bruit de charge. Nous soulignons le fait que la fréquence ν_S n'est pas modifiée par le changement de n_g. Par contre, la fréquence ν_T avoisine maintenant la fréquence ν_S. L'obtention de deux raies de spectroscopies distinctes, également situées de part et d'autre de la fréquence ν_S, nous donne une preuve du couplage résonant entre les deux qubits.

6.1.3 Mesure du couplage

Nous réalisons l'expérience décrite précédemment au point de polarisation $I_b = 1647$ nA, $\Phi_S = 0.03\ \Phi_0$ et $\delta = 0.26\pi$. Le résultat est montré à la figure 6.3. Pour une valeur de $n_g \approx 1$, la spectroscopie du SQUID, qui est réalisée avec une excitation de flux MO, permet de déterminer la fréquence $\nu_S = 18.975$ GHz. Pour $n_g = 1/2$, la spectroscopie, réalisée avec la même excitation, montre deux raies de spectroscopie situées également de part et d'autre de la précédente raie de spectroscopie. Pour cette polarisation, le SQUID et le transistor sont donc en résonance et ces deux raies correspondent à l'excitation des états intriqués $(|0,+\rangle + |1,-\rangle)/\sqrt{2}$ et $(|0,+\rangle - |1,-\rangle)/\sqrt{2}$. A partir de l'équation (6.4), l'écart de fréquence entre les deux raies permet de déterminer un couplage ν_g d'environ 113 MHz.

La figure 6.4 est une présentation en trois dimensions des spectroscopies du circuit couplé, qui sont obtenues au même point de polarisation $I_b = 1647$ nA, $\Phi_S = 0.03\ \Phi_0$ et $\delta = 0.26\pi$, pour différentes valeurs de n_g. Les spectroscopies sont réalisées par une excitation micro-onde de flux. Les couleurs vives correspondent à des probabilités d'échappement du

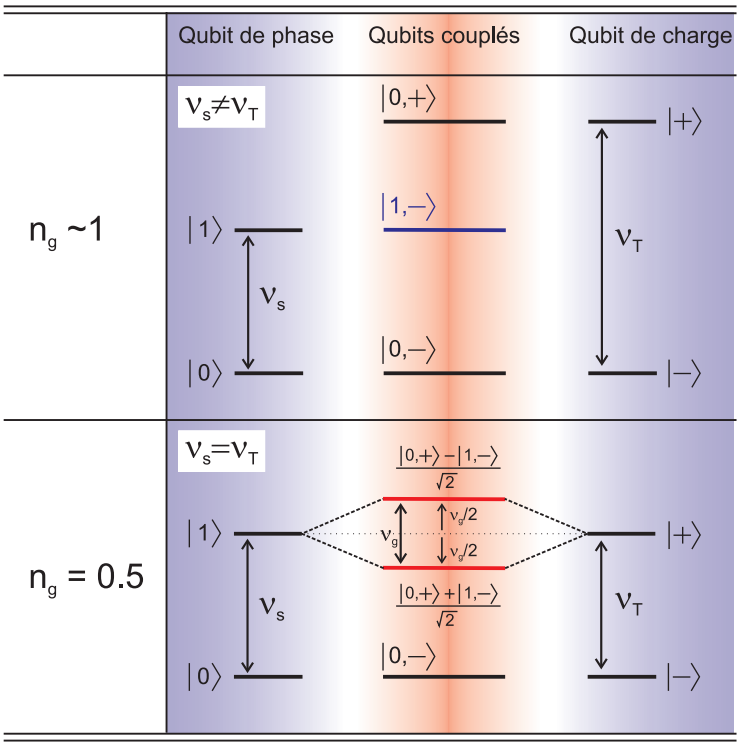

FIG. 6.2 – *Principe de l'expérience permettant de se placer à la résonance des deux qubits. En fond bleu (sur les bords) : les spectres d'énergies de chaque qubit (sans couplage) à $n_g \approx 1$ et à $n_g = 0.5$. En fond rouge (au centre) : les spectres d'énergies du circuit couplé à $n_g \approx 1$ et à $n_g = 0.5$.*

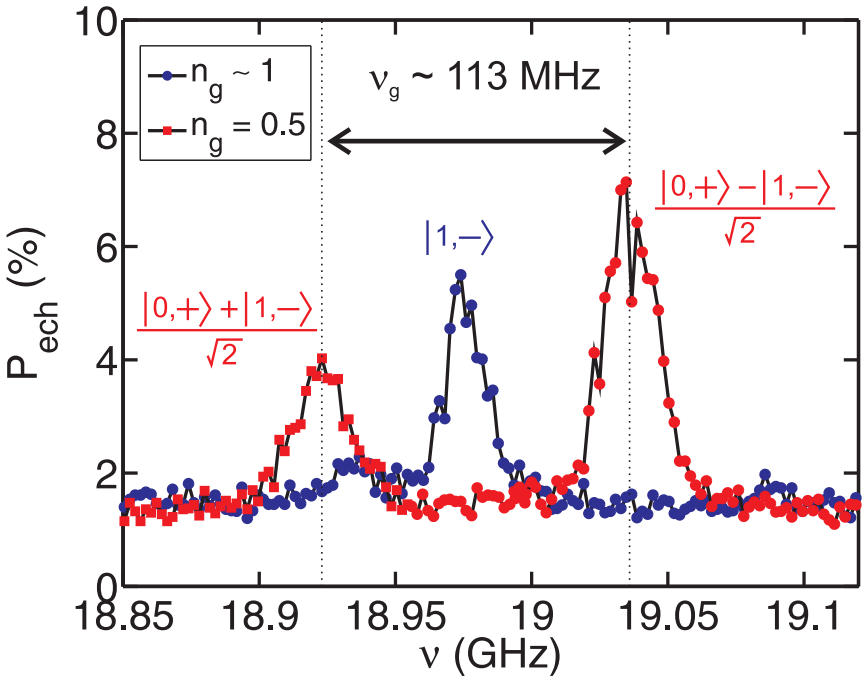

FIG. 6.3 – *Le circuit couplé est polarisé à* $I_p = 1647$ *nA,* $\Phi_S = 0.03\ \Phi_0$ *et* $\delta = 0.26\pi$. *Pour* $n_g \approx 1$ *(courbe bleue), les fréquences du SQUID et de l'ACPT sont très éloignées. La spectroscopie du SQUID montre une seule raie à partir de laquelle on extrait* $\nu_S = 18.975$ *GHz. Pour* $n_g = 1/2$ *(courbe rouge), le SQUID et le transistor sont en résonance. La spectroscopie présente deux raies de part et d'autre de l'ancienne raie du SQUID. Ces deux raies sont séparées par la valeur du couplage* $\nu_g = 113$ *MHz. Elles correspondent à l'excitation des états intriqués* $(|0,+\rangle + |1,-\rangle)/\sqrt{2}$ *et* $(|0,+\rangle - |1,-\rangle)/\sqrt{2}$.

SQUID élevées. Cette augmentation de la probabilité d'échappement a lieu lorsque le signal MO de fréquence ν excite le circuit couplé (initialement dans son état fondamental $|0,-\rangle$) dans l'état excité $|\Psi_-\rangle$ ou $|\Psi_+\rangle$. C'est-à-dire lorsque $\nu = \nu_-$ ou $\nu = \nu_+$. De ce fait, les lignes de couleurs vives correspondent au spectre d'énergie du circuit couplé.

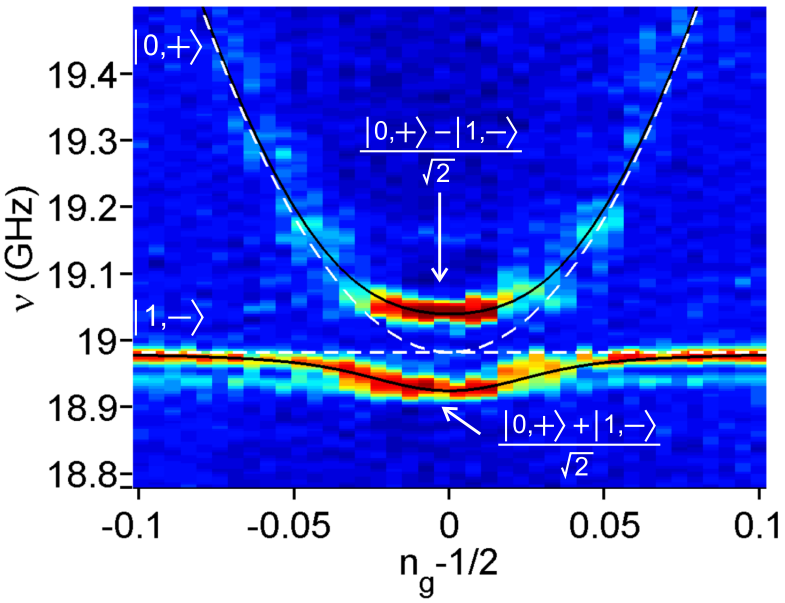

FIG. 6.4 – *Spectroscopie du circuit couplé au point de polarisation $I_p = 1647$ nA, $\Phi_S = 0.03\ \Phi_0$ et $\delta = 0.26\pi$ en fonction de n_g. Les couleurs vives correspondent à des probabilités d'échappement élevées. Les dépendances théoriques de ν_S et ν_T avec la charge de grille n_g apparaissent en trait pointillé blanc. La fréquence ν_S indépendante de n_g est égale à 18.980 GHz. La fréquence ν_T présente une dépendance parabolique qui coupe ν_S en son minimum ($n_g = 1/2$). Le couplage entre le SQUID et le transistor est responsable d'un anti-croisement des niveaux du circuit couplé. L'ajustement du spectre d'énergie du circuit couplé, illustré par la courbe noire, permet de déterminer $\nu_g \approx 110$ MHz.*

Les traits pointillés blancs sont les fréquences théoriques ν_S et ν_T. Ces fréquences correspondent au spectre d'énergie des deux qubits sans couplage. La fréquence ν_S reste toujours égal à 18.980 GHz quelque soit la valeur de la charge de grille n_g. En revanche, ν_T décrit une parabole qui coupe ν_s à son minimum, c'est-à-dire à $n_g = 1/2$. Le spectre d'énergie expérimental dévie des fréquences ν_S et ν_T. Cette déviation est d'autant plus marquée lorsque les fréquences des deux qubits sont proches. Les fréquences ν_+ et ν_- sont calculées à partir de l'équation (6.2), en supposant que le seul paramètre libre ν_g est constant sur la fenêtre de variation de n_g. L'ajustement de ces fréquences, tracé en trait noir, permet de déterminer la valeur du couplage : $\nu_g \approx 110$ MHz.

Loin de la résonance des deux qubits (par exemple à $n_g = -0.1$ ou à $n_g = 0.1$), le couplage est négligeable. Les états propres du circuit couplé sont alors les états $|1,-\rangle$ et

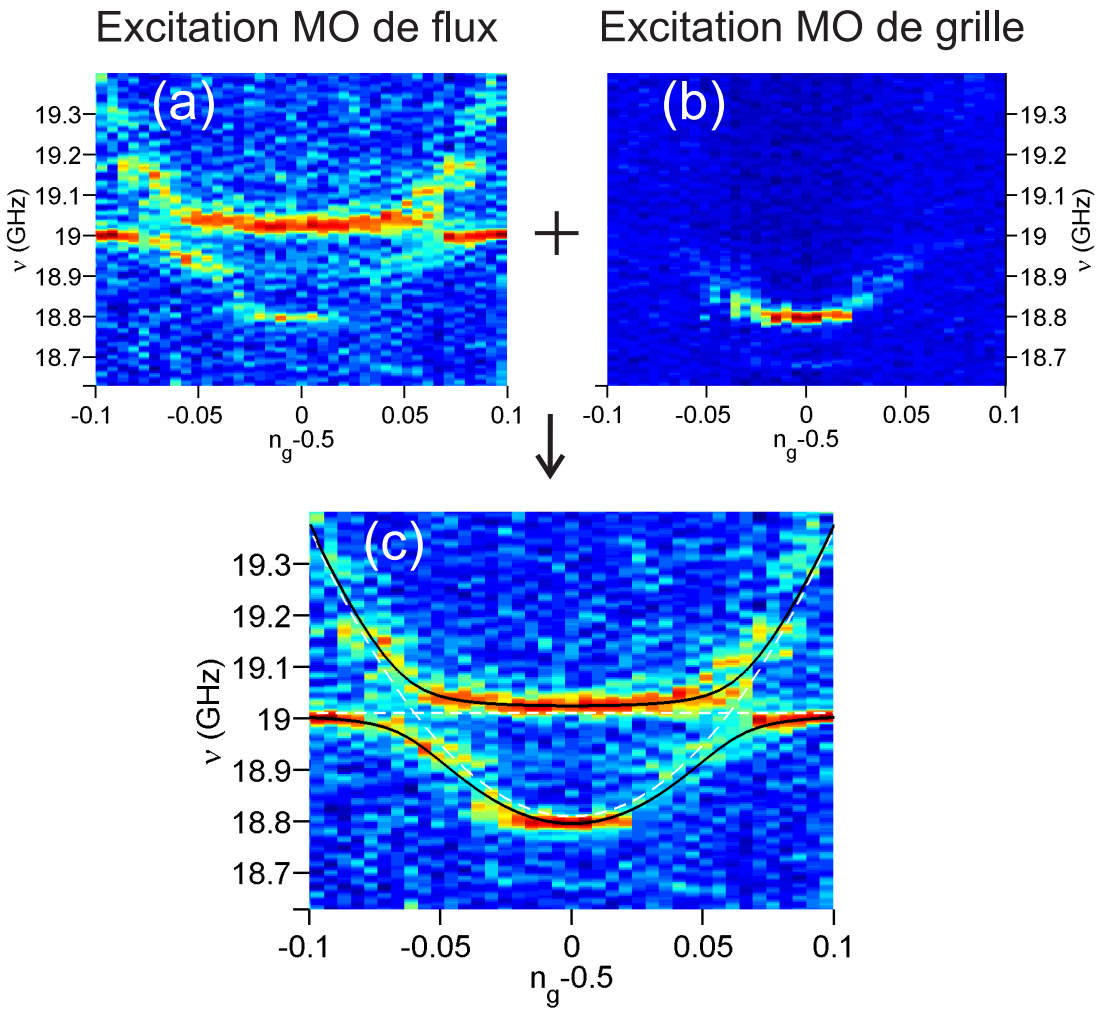

FIG. 6.5 – *Spectroscopie du circuit couplé au point de polarisation* $I_p = 1647$ *nA*, $\Phi_S = 0.02\ \Phi_0$ *et* $\delta = 0.28\pi$ *en fonction de* n_g. *Cette spectroscopie est réalisée par une excitation mico-onde de grille (a) ou par une excitation mico-onde de flux (b). La figure (c) est la réunion des deux spectroscopies précédentes. Les dépendances théoriques de* ν_S *et* ν_T *avec la grille apparaissent en traits pointillés blancs. La fréquence* ν_S *est constante et égale à 19.010 GHz. La fréquence* ν_T *présente une dépendance parabolique qui coupe la fréquence* ν_S *en deux endroits, pour* $n_g = 0.5 \pm 0.061$. *L'ajustement du spectre d'énergies du circuit couplé, illustré par les courbes noires, permet de déterminer* $\nu_g \approx 110$ *MHz.*

$|0,+\rangle$ d'énergies respectives ν_S et ν_T.

Nous nous intéressons maintenant aux niveaux d'énergie du circuit couplé en fonction de la charge de grille n_g lorsque la valeur du flux est imposée à $\Phi_S = 0.02\ \Phi_0$. Comme précédemment, ces niveaux d'énergie sont obtenus par des spectroscopies réalisées à différentes valeurs de n_g. La figure 6.5.a regroupe les spectroscopies basées sur une excitation micro-onde de flux, tandis que la figure 6.5.b regroupe les spectroscopies qui utilisent une excitation micro-onde de grille.

Nous constatons que la tension de grille MO excite plus facilement le transistor que le SQUID. A l'inverse, le flux MO excite plus facilement le SQUID que le transistor. Ces résultats sont en accord avec les couplages MO théoriques qui ont été calculés aux *cf* §4.2.1 et au §5.2.1.

La figure 6.5.c superpose les spectroscopies obtenues par une excitation MO de flux et de grille afin d'avoir une plus grande visibilité des niveaux d'énergie. Pour $n_g = 0.5$, la fréquence ν_T est égale à 18.810 GHz ($\delta = 0.28\pi$). Cette valeur étant inférieure à $\nu_S = 19.010$ GHz, les niveaux d'énergie ν_T et ν_S se croisent aux deux valeurs de grille $n_g = 0.5 \pm 0.061$. Les niveaux d'énergie théoriques ν_+ et ν_-, montrés en traits noirs, sont calculés à partir de l'équation (6.2) en supposant le couplage constant. Leur ajustement permet de trouver $\nu_g \approx 110$ MHz.

6.2 Couplage variable

Les spectroscopies qui permettent de trouver la valeur du couplage doivent être réalisées lorsque les deux qubits sont à la résonance. Il est donc important de connaître les différents points de polarisation où la condition de résonance $\nu_r = \nu_T = \nu_S$ est satisfaite. Cela fera l'objet de notre premier paragraphe. Nous montrerons ensuite quatre spectroscopies réalisées à des fréquences ν_r différentes à partir desquelles quatre intensités de couplage différentes sont obtenues. Le troisième paragraphe s'intéressera à la dépendance du couplage avec la fréquence ν_r.

6.2.1 Désaccord des deux qubits en fonction de la polarisation

La figure 6.6.a présente les simulations du désaccord de fréquence des deux qubits ($\Delta\nu = \nu_T - \nu_S$) en fonction du point de polarisation (Φ_S, I_p) dans l'arche [0] du SQUID, à $n_g = 0.5$. La fréquence ν_T est déduite de la phase δ qui est calculée à partir de l'équation (C.10). Nous supposons pour ce calcul que la polarisation en flux Φ_S est créée par le flux Φ_S^{bob} fixé à $-0.064\ \Phi_0$ et le flux ϕ_S^{oc} de valeur variable.

Les régions rouges et bleues correspondent respectivement aux conditions $\nu_T > \nu_S$ et $\nu_T < \nu_S$. La ligne noire qui sépare ces deux régions indique la polarisation où les deux qubits sont en résonance : $\nu_r = \nu_S = \nu_T$. Pour un courant de polarisation fixe et inférieur à environ 2.3 μA, la condition de résonance est vérifiée pour deux flux : Φ_r^g et Φ_r^d, avec $\Phi_r^g \leq \Phi_r^d$. La figure 6.6.b montre la dépendance de la fréquence de résonance ν_r avec I_p.

Nous constatons que la fréquence ν_r varie sur une large gamme comprise entre de 8.7 GHz et 20.3 GHz.

Nous mentionnons que les fréquences ν_S et ν_T ont aussi été simulées en fixant le flux Φ_S^{bob} à des valeurs différentes. Ces fréquences sont semblables à celles calculées précédemment.

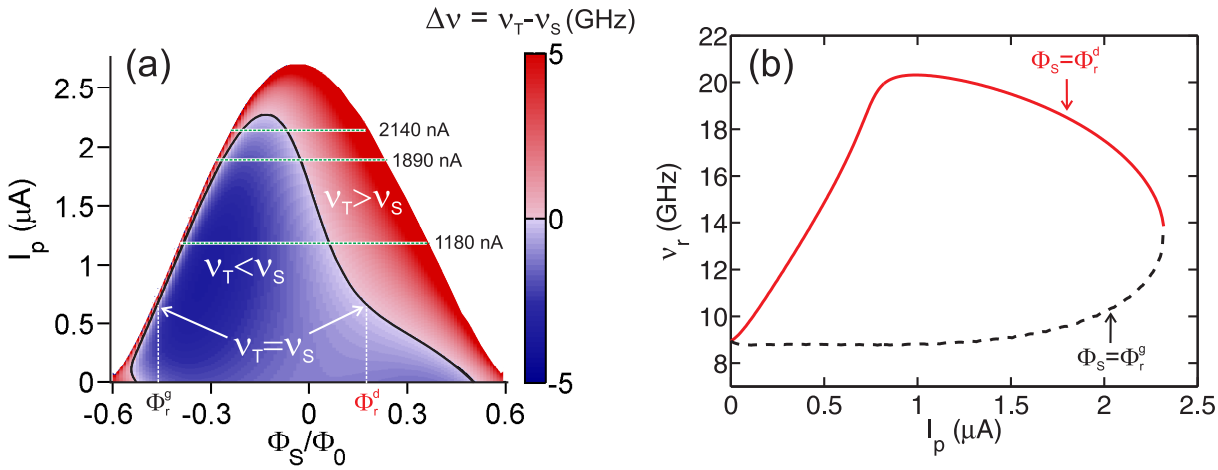

FIG. 6.6 – *(a) Simulation du désaccord de fréquence $\Delta\nu = \nu_T - \nu_S$ en fonction du point de polarisation (Φ_S, I_p) dans l'arche [0] du SQUID, à $n_g = 0.5$. Les régions rouges et bleues correspondent respectivement aux conditions $\nu_T > \nu_S$ et $\nu_T < \nu_S$. La ligne noire qui sépare ces deux régions indique les polarisations où les deux qubits sont en résonance. Les spectroscopies de la figure 6.7 ont été réalisées sur les trois lignes vertes à courant constant. Pour un courant de polarisation fixe et inférieur à environ 2.3 μA, les fréquences ν_T et ν_S se croisent à deux flux différents Φ_r^g et Φ_r^d, avec $\Phi_r^g \leq \Phi_r^d$. (b) Simulation de la dépendance de la fréquence de résonance ν_r avec I_p, pour le flux Φ_r^g en ligne pointillée noire et pour le flux Φ_r^d en ligne pleine rouge.*

6.2.2 Mesures de différents couplages

Nous nous sommes intéressés au §5.2.5 (figure 5.11) à la dépendance de ν_S et ν_T avec Φ_S[(1)] pour trois courants de polarisation différents : $I_p = 2140$ nA, $I_p = 1890$ nA et $I_p = 1180$ nA. Des spectroscopies ont été réalisées le long des trois lignes de polarisation indiquées en vert sur la figure 6.6. Les effets du couplage, qui apparaissent proche de la résonance des deux qubits, avaient été masqués. Ceux-ci sont maintenant présentés à la figure 6.7.

Les carrés de couleur bleu correspondent à la fréquence ν_S, qui est mesurée par spectroscopie à $n_g \approx 1$. A cette valeur de grille, le désaccord $\Delta\nu$ est de l'ordre de 10 GHz, ce

(1) La polarisation en flux est réalisée par le flux Φ_S^{bob} fixé à $-0.64\ \Phi_0$ et le flux Φ_S^{oc} variable.

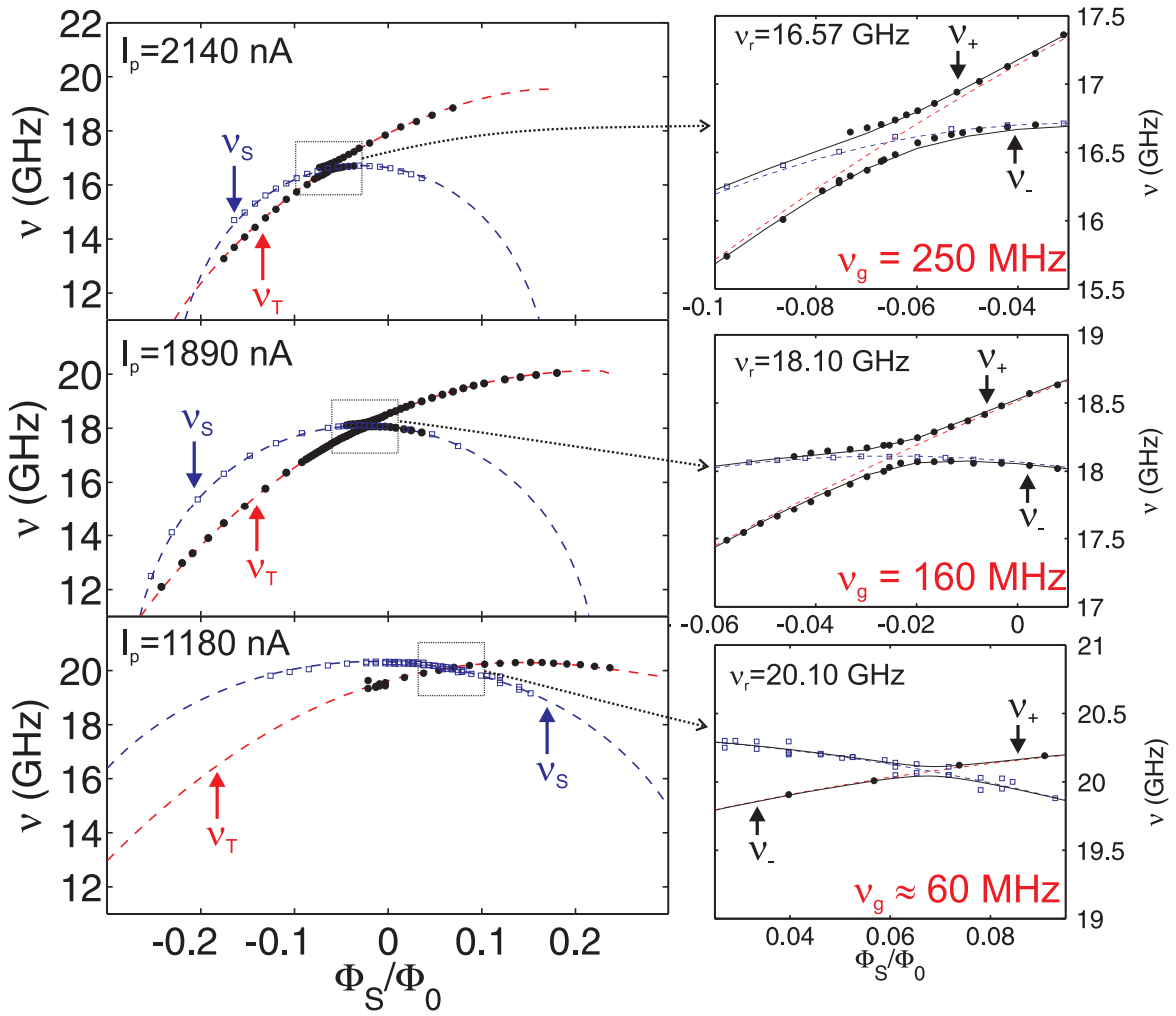

FIG. 6.7 – *Spectroscopie du circuit couplé en fonction de Φ_S, à $n_g \approx 1$ (points bleus) et $n_g = 0.5$ (points noirs), pour trois courants de polarisation $I_p = 2140$ nA, $I_p = 1890$ nA et $I_p = 1180$ nA. Les fréquences théoriques ν_S et ν_T sont représentées respectivement par la ligne pointillée bleue et la ligne pointillée rouge. On montre à droite de la figure un agrandissement de la région de croisement entre ν_S et ν_T, dont les proportions sont identiques pour chaque courant. Les lignes noires correspondent à l'ajustement des niveaux d'énergie ν_+ est ν_- à $n_g = 0.5$.*

qui permet de négliger le couplage entre le SQUID et l'ACPT. A $n_g = 0.5$, la fréquence théorique ν_T, représentée par la ligne pointillée rouge, croise la fréquence ν_S à la fréquence de résonance ν_r. Pour chaque courant de polarisation, nous avons représenté sur la droite de la figure 6.7 un agrandissement de la région de croisement.

Les fréquences ν_+ et ν_- sont trouvées expérimentalement par les positions des raies de spectroscopie (points noirs). Celles-ci diffèrent des fréquences ν_S et ν_T proche de la condition de résonance. Le couplage est en effet responsable d'un anti-croisement des niveaux d'énergie ν_+ et ν_-. Les deux lignes noirs sont l'ajustement théorique des fréquences ν_+ et ν_- calculées par l'équation (6.2) en supposant que ν_g est constant. Le tableau 6.1 donne la valeur du couplage ν_g et la fréquence de résonance ν_r pour les trois courants de polarisation étudiés. Le couplage ν_g est différent suivant la fréquence de résonance des deux qubits et il tend à augmenter quand ν_r diminue. Notons que la valeur du couplage de 60 MHz pour $I_b = 1180$ nA est obtenue avec une incertitude de plus ou moins 30 MHz. Cette dernière est due à la présence des nombreuses résonances parasites proches de la fréquence de résonance.

I_p (nA)	ν_r (GHz)	ν_g (MHz)
2140	16.57	250
1890	18.10	160
1180	20.10	60

TAB. 6.1 – *Valeur du couplage ν_g et fréquence de résonance ν_r en fonction du courant de polarisation.*

Pour compléter notre étude sur le couplage, nous étudions à présent la région où le SQUID et le transistor sont en résonance à $\nu_r \approx 10.36$ GHz. Le SQUID est polarisé à $I_p = 107$ nA et à $n_g = 0.5$. Des spectroscopies des qubits couplés sont réalisées à différents flux, en fixant Φ_S^{bob} à 0.482 Φ_0 et en variant Φ_S^{oc}. Celles-ci sont montrées à la figure 6.8.a. Chaque spectroscopie contient deux raies qui sont associées aux transitions $|0,-\rangle \rightarrow |\Psi_+\rangle$ et $|0,-\rangle \rightarrow |\Psi_-\rangle$. Les fréquences théoriques ν_S et ν_T, représentées respectivement par les lignes pointillées bleues et rouges, se croisent à $\Phi_S = 0.537\ \Phi_0$. L'ajustement théoriques des niveaux d'énergies ν_+ et ν_-, qui est montré en noir, permet de trouver $\nu_g \approx 0.9$ GHz.

La dépendance des largeurs des raies de spectroscopie avec le flux est montrée à la figure 6.8.b. La largeur de la raie correspond ici à la largeur à mi-hauteur de l'ajustement gaussien de cette raie. Loin de la résonance, les raies de spectroscopie qui sont situées proche de ν_S correspondent principalement à l'excitation du SQUID, c'est-à-dire à la transition $|0,-\rangle \rightarrow |1,-\rangle$. La largeur des raies est dans ce cas environ égale à 300 MHz. Cette largeur importante est expliquée par une grande sensibilité de ν_S au bruit de flux à cette polarisation. Toujours loin de la résonance, les raies situées proche de ν_T correspondent principalement à l'excitation du transistor, c'est-à-dire à la transition $|0,-\rangle \rightarrow |0,+\rangle$. Ces raies sont plus fines ($\Delta\nu \approx 40$ MHz.) car ν_T est moins sensible au bruit de flux. Les deux pics satellites de part et d'autre des raies sont causés par la sensibilité du transistor au bruit en courant.

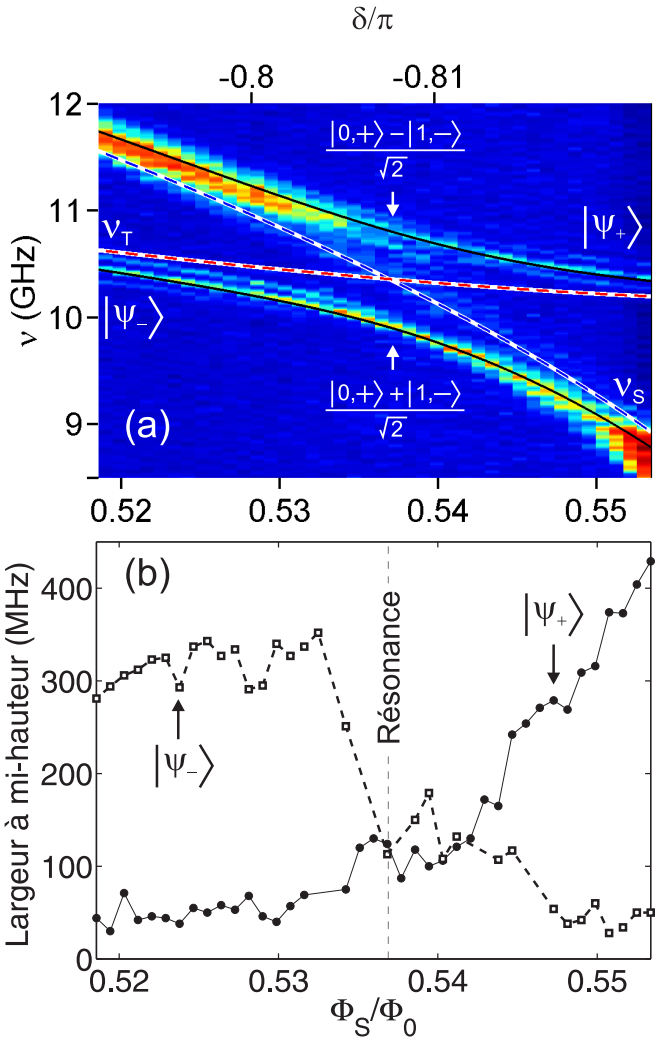

FIG. 6.8 – *(a) Spectroscopie du circuit couplé en fonction de* Φ_S *à* $I_p = 107$ *nA et à* $n_g = 0.5$. *Les lignes pointillées bleues et rouges correspondent respectivement aux fréquences théoriques* ν_S *et* ν_T. *Les ajustements théoriques des niveaux d'énergie des deux états* $|\Psi_-\rangle$ *et* $|\Psi_+\rangle$, *montrés en noir, permettent de trouver* $\nu_g \approx 0.9$ *GHz. (b) Dépendance de la largeur des deux raies de spectroscopie avec* Φ_S. *La largeur de la raie correspond ici à la largeur à mi-hauteur de l'ajustement gaussien de la raie.*

A la résonance, les largeurs des deux raies de spectroscopie sont environ égales à 100 MHz chacune. Les états propres des qubits couplés sont les états d'intrication maximale $|\Psi_S\rangle$ et $|\Psi_A\rangle$. Ces derniers décohérent de la même façon ce qui explique l'égalité des largeurs de raie.

6.2.3 Dépendance du couplage avec la fréquence de résonance

De nombreuses spectroscopies ont été réalisées à différents points de polarisation où la condition de résonance $\nu_r = \nu_S = \nu_T$ est satisfaite. La polarisation du circuit se fait le long de la ligne de résonance des deux qubits, qui est montrée à la figure 6.6.a dans le cas où $\Phi_S^{bob} = -0.064\ \Phi_0$. Pour un courant de polarisation donnée, la polarisation en flux est réalisée au flux Φ_r^d. Nous n'avons pas mesuré le couplage au flux Φ_r^g, car le point de polarisation requis est trop proche de la ligne de courant critique du SQUID. Ces spectroscopies permettent d'obtenir la dépendance du couplage ν_g avec la fréquence de résonance ν_r, qui est tracée à la figure 6.9. L'axe supérieur indique la valeur absolue de la phase δ sur l'ACPT. Cette dernière est calculée à partir de la dépendance théorique de la fréquence ν_T avec δ. Les mesures où $\nu_r < 16$ GHz ont été réalisées pour $\delta \in [-\pi, 0]$, alors que les mesures où $\nu_r > 16$ GHz ont été réalisées pour $\delta \in [0, \pi]$.

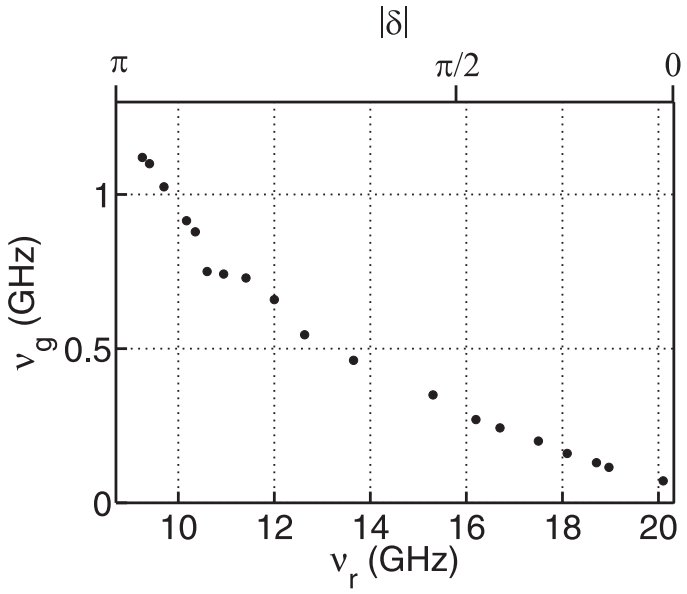

FIG. 6.9 – *Dépendance expérimentale du couplage ν_g avec la fréquence de résonance ν_r. L'axe supérieur indique la valeur absolue de la phase δ sur le transistor.*

La fréquence ν_r peut varier théoriquement de 8.7 GHz à 20.3 GHz, ce qui correspond à une variation de $|\delta|$ de π à 0. Nous n'avons pas réussi à mettre les deux qubits en résonance à $\delta = \pi$. En effet, cela nécessite une fréquence plasma faible d'environ 8.7 GHz à laquelle le SQUID s'échappe. La fréquence de résonance minimale, qui a été mesurée

expérimentalement, se limite à 9.25 GHz ($|\delta| = 0.89\pi$). A ce point, le couplage ν_g est maximal et environ égal à 1.12 GHz.

Lorsque $\nu_r \approx 20.10$ GHz, à $|\delta| = 0.10\pi$, le couplage ν_g est minimal et environ égal à 60 MHz. Le couplage à $\delta = 0$ n'a pu être mesuré à cause de la présence de nombreuses résonances parasites proche de 20.3 GHz. Entre ces deux polarisations "extrêmes", c'est-à-dire entre $|\delta| = 0.10\pi$ et $|\delta| = 0.89\pi$, le couplage diminue lorsque ν_r augmente. Il varie de plus d'un facteur 18.

6.3 Couplage théorique

Nous présenterons dans un premier temps une expression analytique du couplage. Cette dernière est la somme de deux contributions : un couplage capacitif et un couplage Josephson. Le couplage sera ensuite calculé en fonction du point de polarisation dans l'arche [0] du SQUID. Le couplage théorique à la résonance des deux qubits sera comparé au couplage expérimental. Nous présenterons ensuite la méthode utilisée pour calculer numériquement le couplage. Cette aproche numérique permet de s'abstenir des quelques hypothèses établies pour l'obtention de l'expression analytique du couplage.

6.3.1 Expression analytique du couplage

Calcul du couplage. L'expression analytique du couplage g est donnée au paragraphe 2.4.3 du chapitre 2 par l'équation (2.96). On définit la fréquence de couplage $\nu_g = g/h$. Elle se met sous la forme

$$\nu_g = \nu_g^{Capa} + \nu_g^{Jos}, \tag{6.5}$$

où $\nu_g^{Capa} = 2E_{c,c}/h$ est le *couplage capacitif* et $\nu_g^{Jos} = -2E_{c,j}\cos(\delta/2-\chi)/h$ est le *couplage Josephson*. L'expression (6.5) est uniquement valable à $n_g = 0.5$. Elle a été trouvée à l'aide de deux hypothèses. Premièrement, nous avons supposé que les états propres du transistor étaient ceux de l'Hamiltonien du transistor décrit dans la base de deux états de charge (*cf* §2.3.3). Enfin, nous avons considéré le SQUID comme un oscillateur harmonique.

Nous soulignons que le couplage théorique est une fonction paire de δ. Cela explique pourquoi nous avons montré à la figure 6.9 le couplage ν_g en fonction de la valeur absolue de δ (ou en fonction de ν_r).

Pour calculer ν_g, nous effectuons les hypothèses supplémentaires suivantes. Tout d'abord, l'angle θ (équation (2.27)) est supposé faible, de sorte que le paramètre $\alpha_\parallel$, qui est défini par l'équation (2.30), est environ égal à l'unité. Deuxièmement, nous considérons que l'asymétrie λ des capacités du transistor est identique à l'asymétrie μ des énergies Josephson du transistor, plus précisément $\lambda = \mu = -41.6$ %. Enfin, l'anharmonicité σ du SQUID est suffisamment faible pour exprimer la fréquence plasma ν_p en fonction de ν_S comme $\nu_p = \nu_S(1 + 15/2\sigma^2)$ (*cf* équation (2.60)). Les fréquences ν_S et ν_T, ainsi que l'anharmonicité σ, sont calculées numériquement en fonction de la polarisation. Le couplage ν_g est alors calculé sans aucun paramètre libre.

Variation du couplage en fonction de la polarisation du circuit. La figure 6.10 présente la dépendance de ν_g avec le point de polarisation (I_p, Φ_S), dans l'arche [0] du SQUID, à $n_g = 0.5$. Pour cette simulation, le flux Φ_S est égal à Φ_S^{bob} ($\Phi_S^{oc} = 0$). Les zones de couleur bleue indiquent un faible couplage : $\nu_g \approx 0$ GHz, alors que les zones de couleur rouge indiquent un couplage élevé : $\nu_g \approx 1.2$ GHz. On constate que le couplage est élevé à gauche de l'arche. Celui-ci permet d'expliquer la mesure de l'état du transistor qui sera abordée au chapitre 7. La ligne noire correspond aux polarisations où les deux qubits sont en résonance.

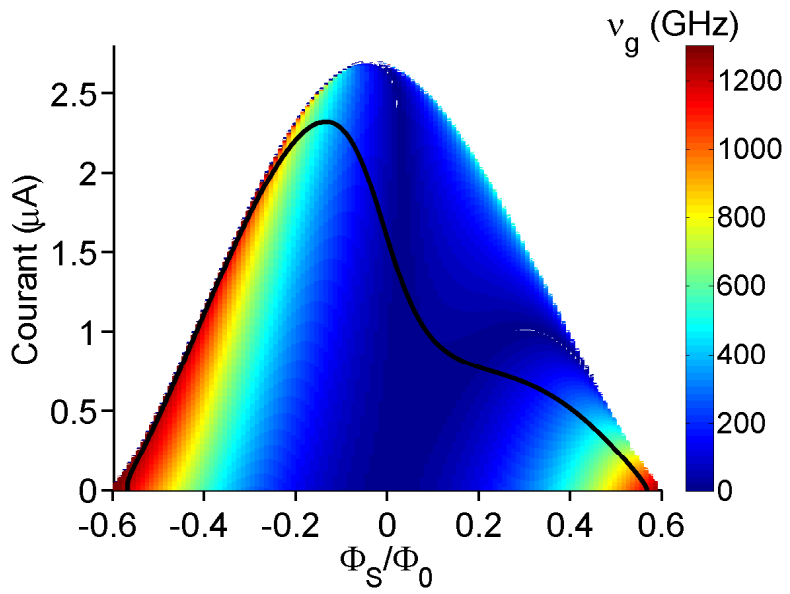

FIG. 6.10 – *Couplage ν_g en fonction du point de polarisation (I_p, Φ_S) à $n_g = 0.5$ avec $\Phi_S = \Phi_S^{bob}$. Les deux qubits sont en résonance sur la ligne noire.*

Couplage à la résonance des deux qubits. Le calcul de ν_g à la résonance des deux qubits utilise la condition de résonance $\nu_S = \nu_T$. La figure 6.11 présente la dépendance expérimentale de ν_g avec ν_r (et $|\delta|$), ainsi que le couplage théorique ν_g et ses composantes ν_g^{Capa} et ν_g^{Jos}. Le couplage théorique ν_g représenté par la ligne rouge est en bon accord avec l'expérience. Le couplage capacitif (ligne noire) varie peu avec $|\delta|$. Il est compris entre 350 MHz et 540 MHz. Le couplage Josephson est de l'ordre de 860 MHz à $|\delta| = \pi$. Il décroît quand $|\delta|$ diminue, s'annule à $|\delta| \approx 0.64\pi$ et atteint la valeur d'environ -560 MHz à $\delta = 0$. Les variations du couplage total ν_g sont donc dues principalement au couplage Josephson. Le couplage total est maximum à $|\delta| = \pi$ environ égal à 1.2 GHz. Il est presque nul à $|\delta| = 0$.

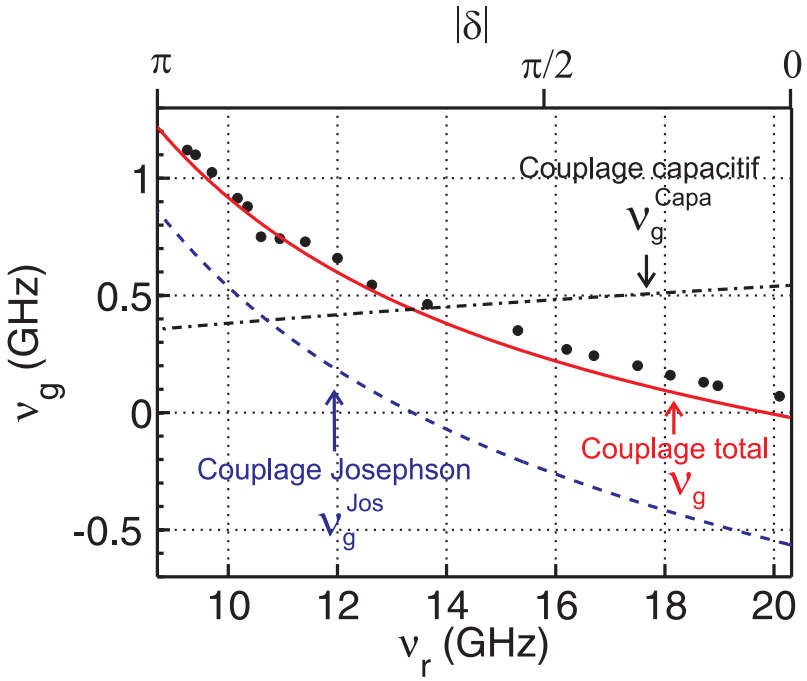

FIG. 6.11 – *Dépendance du couplage ν_g avec ν_r (et $|\delta|$). Les points sont les données expérimentales et la ligne rouge est la prédiction théorique. Le couplage capacitif ν_g^{Capa} et le couplage Josephson ν_g^{Jos} sont représentés respectivement par la ligne noire et la ligne bleue. Le couplage théorique est calculé en prenant $\lambda = \mu = -41.6$ %.*

6.3.2 Calcul numérique du couplage

Nous souhaitons vérifier la validité des hypothèses émises pour calculer analytiquement le couplage ν_g. Pour cela, nous allons calculer la valeur du couplage numériquement afin de s'abstenir de ces hypothèses.

Nous rappelons l'écriture de l'Hamiltonien du circuit couplé :

$$\widehat{H} = \widehat{H}_S + \widehat{H}_{ACPT} + \widehat{H}_{Coupl,Capa} + \widehat{H}_{Coupl,Jos}. \tag{6.6}$$

Nous le réécrivons dans la base des états de l'oscillateur harmonique $|n\rangle$ et des états de charge. Tout d'abord, l'Hamiltonien du transistor $\widehat{H}_{ACPT}$ est déjà donné dans la base des états de charge par l'équation (2.66). Ensuite, les deux Hamiltoniens de couplage $\widehat{H}_{Coupl,Capa}$ et $\widehat{H}_{Coupl,Jos}$, qui sont donnés par les équations (2.79) et (2.86), s'expriment naturellement dans la base recherchée en utilisant les équations (2.80) et (2.87). Enfin, l'Hamiltonien du SQUID (équation (2.57)) s'exprime dans la base $\{|n\rangle\}$ en développant le terme anharmonique à l'ordre 1 en σ ; on trouve

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_S \;=\; & h\nu_p\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle\langle n| \\
& +\sigma\left(\frac{(n+3)(n+2)(n+1)}{8}\right)^{1/2} h\nu_p|n+3\rangle\langle n| \\
& +\sigma\left(\frac{n(n-1)(n-2)}{8}\right)^{1/2} h\nu_p|n-3\rangle\langle n| \\
& +3\sigma\left(\frac{n+1}{2}\right)^{3/2} h\nu_p|n+1\rangle\langle n| \\
& +3\sigma\left(\frac{n}{2}\right)^{3/2} h\nu_p|n-1\rangle\langle n|.
\end{aligned} \tag{6.7}$$

La diagonalisation de l'Hamiltonien est réalisée numériquement par le programme `C++ TRSQ2.cpp`, en utilisant les 6 premiers états de l'oscillateur harmonique et 8 états de charges. Les valeurs propres de l'Hamiltonien sont calculées en fonction de δ pour différentes valeurs de ν_S et σ. Dans un premier temps, l'Hamiltonien est diagonalisé sans les termes de couplage. On trouve que les niveaux d'énergie ν_S et ν_T se croisent à la fréquence ν_r. L'Hamiltonien total est ensuite diagonalisé. Les niveaux d'énergie ν_+ et ν_- s'anticroisent avec un gap d'énergie ν_g à la place du croisement précédent .

La figure 6.12.a présente les niveaux d'énergie de l'Hamiltonien sans couplage et avec couplage en fonction de δ, pour $\nu_S = 15$ GHz et $\sigma = 2\%$. La dépendance du couplage numérique avec ν_r (ou $|\delta|$) est montré à la figure 6.12.b. Le couplage numérique est proche du couplage analytique, ce qui conforte notre modèle analytique et valide les hypothèses de ce modèle.

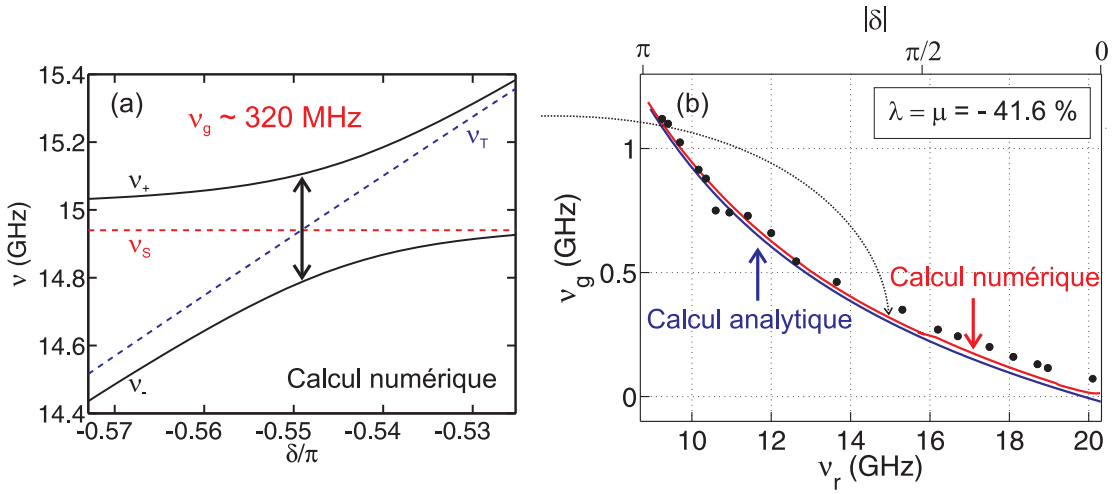

FIG. 6.12 – *(a) Simulations du spectre d'énergie de l'Hamiltonien du circuit couplé en fonction de δ avec (lignes pleines) et sans (lignes pointillées) couplage. Nous choisissons les paramètres $\nu_S = 15$ GHz et $\sigma = 2\%$. (b) Dépendance du couplage numérique, analytique et expérimental avec ν_r.*

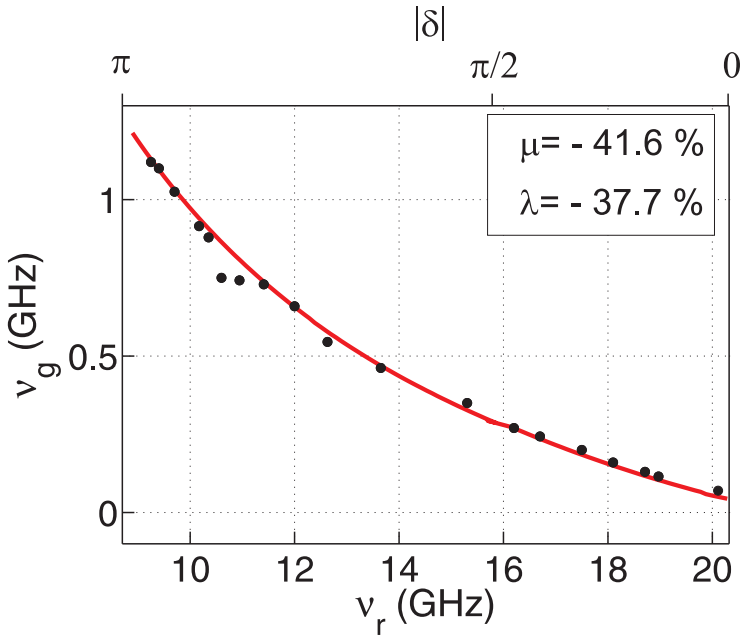

FIG. 6.13 – *Dépendance du couplage numérique et expérimental avec ν_r. Les simulations du couplage sont réalisées avec les paramètres d'asymétrie $\mu = -41.6\%$ et $\lambda = -37.7\%$.*

Vers $\delta = 0$, le couplage expérimental est plus grand que le couplage numérique. Cette déviation peut être expliquée par une légère différence entre l'asymétrie des énergies Josephson et l'asymétrie des capacités du transistor. En choisissant $\lambda = -37.7\%$ et $\mu = -41.6\%$, le couplage numérique s'ajuste bien avec le couplage expérimental, comme le montre la figure 6.13.

Chapitre 7

Mesure de l'état du transistor asymétrique

L'état du qubit de phase et l'état du qubit de charge sont tous les deux connus en mesurant la probabilité d'échappement du SQUID. Cet échappement est réalisé par une impulsion de flux nanoseconde qui amène le point de polarisation du SQUID proche du courant critique. Dans le cas du SQUID, le taux d'échappement de l'état $|1\rangle$ est au moins 500 fois plus élevé que le taux d'échappement de l'état $|0\rangle$, ce qui permet de différencier ces deux états.

La dépendance de la probabilité d'échappement du SQUID avec l'état du transistor est moins intuitive. Nous allons voir qu'elle peut s'expliquer par l'Hamiltonien de couplage entre les deux qubits. L'expression analytique de l'Hamiltonien de couplage à $n_g = 1/2$, a été établie au §2.4.3 du chapitre 2. Nous rappelons son écriture :

$$\widehat{H}_{Coupl} = -E_{c,c}\,\hat{\sigma}_x^S\hat{\sigma}_x^T + E_{c,j}\cos(\delta/2-\chi)\hat{\sigma}_y^S\hat{\sigma}_y^T - E_{c,j}\sin(\delta/2-\chi)\hat{\sigma}_y^S\hat{\sigma}_z^T \tag{7.1}$$

Deux explications différentes sur la mesure de l'état du transistor seront avancées dans ce chapitre. La première explication fera l'objet de la première partie de ce chapitre. Elle sera basée sur le terme en $\sigma_y^S\hat{\sigma}_z^T$ de l'Hamiltonien de couplage. Dans la limite $\nu_T \gg \nu_S$, nous montrerons qu'un courant passe à travers le transistor. Celui-ci dépend de l'état du transistor. Le SQUID détecte ce courant et mesure ainsi l'état du transistor.

Le terme $\sigma_y^S\hat{\sigma}_z^T$ permet d'expliquer la mesure du Quantronium [6] effectuée au moyen d'une jonction Josephson de faible fréquence plasma. Nous montrerons que cette première explication n'est pas valide dans notre circuit.

La deuxième partie montrera que la mesure du transistor se décrit par un transfert quantique adiabatique. Ce dernier consiste en un passage adiabatique de l'état $|0,+\rangle$ vers l'état $|1,-\rangle$ pendant l'impulsion de flux, permettant ainsi le transfert de l'excitation du transistor vers le SQUID. Ce passage nécessite un couplage entre les qubits lorsqu'ils sont en résonance. Cette mesure sera donc décrite par les termes en $\sigma_x^S\hat{\sigma}_x^T$ et $\sigma_y^S\hat{\sigma}_y^T$ de l'Hamiltonien de couplage.

7.1 Le SQUID : détecteur du courant dans le transistor

7.1.1 Modélisation

Dans la limite $\nu_T \gg \nu_S$, nous pouvons remplacer les opérateurs du transistor $(\sigma_x^T, \sigma_y^T, \sigma_z^T)$ de l'Hamiltonien de couplage (7.1) par leur valeur moyenne dans l'état du transistor. Lorsque le transistor est dans l'état $|+\rangle$, seul la moyenne de l'état σ_z^T est non nulle et égale à $\langle +|\sigma_z^T|+\rangle = 1$. Il en est de même lorsque le transistor est dans l'état $|-\rangle$. L'opérateur $\hat{\sigma}_z$ est alors remplacé par la moyenne $\langle -|\sigma_z^T|-\rangle = -1$. Par conséquent, l'Hamiltonien de couplage se simplifie et devient :

$$\widehat{H}_{Coupl} = \pm E_{c,j} \sin(\delta/2 - \chi)\hat{\sigma}_y^S, \tag{7.2}$$

où le signe "$\pm$" est donné par l'état du transistor $|+\rangle$ ou $|-\rangle$. En supposant que l'angle θ associé au SQUID est faible et en substituant $\hat{\sigma}_y^S$ par $\sqrt{2}\widetilde{X}_{\parallel}$, l'Hamiltonien de couplage se réécrit comme

$$\widehat{H}_{Coupl} = \pm \frac{1}{2}\frac{E_{J2}}{\phi_0} \sin(\delta/2 - \chi)\widetilde{X}_{\parallel}. \tag{7.3}$$

L'expression précédente est équivalente à la perturbation de l'Hamiltonien total causée par un courant de polarisation supplémentaire. Cette perturbation est donnée à l'équation (D.2) de l'annexe D. On trouve alors les courants supplémentaires I_S^+ et I_S^- qui sont associés à $\widehat{H}_{Coupl}$ lorsque le transistor est respectivement dans l'état $|+\rangle$ ou $|-\rangle$. Ils s'expriment comme

$$I_S^+ = \frac{1}{2}\frac{E_{J2}}{\phi_0} \sin(\delta/2 - \chi), \tag{7.4}$$

$$I_S^- = -\frac{1}{2}\frac{E_{J2}}{\phi_0} \sin(\delta/2 - \chi). \tag{7.5}$$

Soulignons que ces courants proviennent du terme en $\sigma_y^S\hat{\sigma}_z^T$ de l'Hamiltonien de couplage (7.1). Leurs expressions analytiques sont uniquement valables à $n_g = 1/2$. Ces courants peuvent être interprétés comme des courants à travers le transistor, qui s'additionnent ou se soustraient au courant de polarisation.

La probabilité d'échappement du SQUID est sensible aux courants supplémentaires I_S^+ et I_S^-. Ces courants sont opposés et leur différence est égale à $I_S^+ - I_S^- = E_{J2}\sin(\delta/2 - \chi)/\phi_0$. Lorsque la différence des courants est non nulle, la probabilité d'échappement du SQUID est sensible à l'état quantique du transistor. En effet, si $I_S^+ - I_S^- > 0$, la probabilité d'échappement de l'état $|0,+\rangle$ est supérieure à celle de l'état $|0,-\rangle$. A l'inverse, si $I_S^+ - I_S^- < 0$, la probabilité d'échappement de l'état $|0,+\rangle$ est inférieure à celle de l'état $|0,-\rangle$.

Le Quantronium est un transistor symétrique, qui est en parallèle avec une jonction Josephson. Cette dernière a une fréquence plasma faible. Elle détecte le courant qui passe à travers le transistor et mesure ainsi l'état quantique du transistor [6]. Dans notre circuit, le SQUID joue t-il le même rôle que la jonction Josephson du Quantronium ?

A titre de remarque, les courants I_S^+ et I_S^- ont déjà été introduits au §5.1.1 sous une forme différente. Ils étaient exprimées par les dérivées (5.5) qui peuvent se calculer numériquement (sans condition sur n_g). A $n_g = 0.5$, nous avons vérifié que ces valeurs numériques et analytiques des courants I_S^+ et I_S^- sont en très bon accord.

7.1.2 Confrontation du modèle aux résultats expérimentaux

La figure 7.1 montre deux spectroscopies du transistor au point de polarisation ($I_p =$ 2140 nA,$\Phi_S/\Phi_0 = 0.017, \delta = 0.33\pi, n_g = 0.5$)[1]. Ces spectroscopies sont réalisées respectivement avec une impulsion de flux négative et positive. Chacune des impulsions polarise pendant 5 ns le circuit à un point de mesure, pour lequel la probabilité d'échappement de l'état fondamental $|0,-\rangle$ avoisine 4%. Le point de mesure pour l'impulsion négative est ($I_p =$ 2140 nA,$\Phi_S/\Phi_0 = -0.229$) et celui pour l'impulsion positive est ($I_p =$ 2140 nA,$\Phi_S/\Phi_0 = 0.173$).

La spectroscopie, qui est réalisée avec une impulsion négative, montre un pic de résonance à la fréquence $\nu_T = 17.25$ GHz, qui correspond à la transition $|0,-\rangle \rightarrow |0,+\rangle$. L'amplitude du pic est environ égale à 10%. Quand la fréquence de la micro-onde est accordée à cette transition, l'état excité du transistor se peuple. La probabilité d'échappement du SQUID est sensible à cette population.

La spectroscopie, qui est réalisée avec une impulsion de flux positive, ne montre aucune raie bien que le champ micro-onde soit le même. La probabilité d'échappement reste proche de 4% quelque soit la fréquence d'excitation micro-onde. Les états $|0,+\rangle$ et $|0,-\rangle$ ne peuvent pas être différenciés. Autrement dit, le contraste de la mesure de l'état du transistor est nul lorsque l'impulsion de flux est positive.

Interprétation des spectroscopies par le premier modèle. Nous supposons que la limite $\nu_T \gg \nu_S$ est vérifiée aux deux points de mesure précédents. La différence $I_S^+ - I_S^-$ théorique est calculée à ces points. Nous déterminons dans un premier temps la phase δ. Les équations (7.4) et (7.5) permettent ensuite de trouver $I_S^+ - I_S^-$ en fonction des phases δ calculées. La différence $I_S^+ - I_S^-$ est égale à 10 nA pour l'impulsion de flux négative et est égale à 5 nA pour l'impulsion de flux positive.

La différence de courant $I_S^+ - I_S^-$ est toujours positive quelque soit le signe de l'impulsion de flux. On s'attend alors à une augmentation de la probabilité d'échappement si le qubit de charge est dans l'état excité. De plus, la différence $I_S^+ - I_S^-$ pour l'impulsion positive est deux fois plus petite que celle pour l'impulsion négative. La raie de spectroscopie réalisée avec l'impulsion positive devrait donc être deux fois plus petite que celle réalisée avec l'impulsion négative. Or, nous n'observons aucune raie expérimentalement pour une impulsion positive. Ce désaccord est incompatible avec l'interprétation de la mesure du transistor par la détection, au moyen du SQUID, des courants I_S^+ et I_S^-.

[1] Pour ce point de polarisation, le couplage entre le SQUID et le transistor est négligeable.

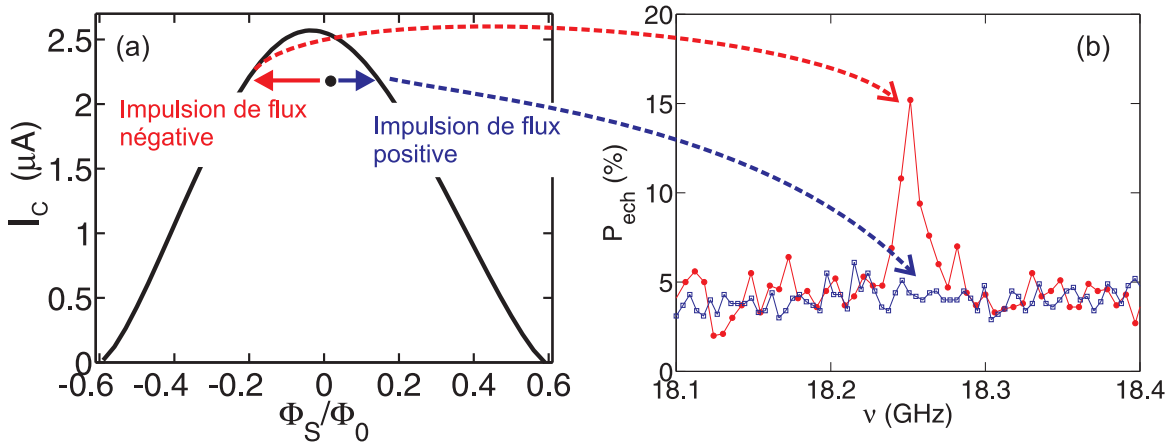

FIG. 7.1 – *Deux spectroscopies de l'ACPT au même point de polarisation* ($I_p = 2140$ $nA, \Phi_S/\Phi_0 = 0.017, \delta = 0.33\pi, n_g = 0.5$) *qui utilisent respectivement pour la mesure une impulsion de flux nanoseconde négative et positive. Ces spectroscopies sont réalisées avec la même amplitude micro-onde.*

Nous concluons que ce premier modèle ne permet pas d'expliquer la mesure de l'état quantique du transistor dans notre circuit.

7.2 Transfert quantique adiabatique

L'idée de la mesure de l'état quantique du transistor par un transfert adiabatique sera dans un premier temps introduite à partir des deux spectroscopies étudiées précédemment. Elle correspondra à un passage adiabatique de l'état $|0,+\rangle$ vers l'état $|1,-\rangle$, qui se produit pendant l'impulsion de flux nanoseconde, au moment du croisement des fréquences ν_S et ν_T. Le transfert adiabatique sera ensuite discuté et analysé pour deux cas de figure différents, c'est-à-dire en la présence et en l'absence d'un croisement des fréquences ν_S et ν_T lors de l'impulsion de flux.

7.2.1 Introduction de la mesure par transfert adiabatique

Les spectroscopies au flux $\Phi_S = \Phi_{PT} = 0.017\ \Phi_0$, reportées à la figure 7.1, sont réalisées par des impulsions de flux nanoseconde. Au cours de ces impulsions, les fréquences ν_S et ν_T varient. La dépendance théorique des fréquences ν_S et ν_T avec le flux Φ_S est montrée à la figure 7.2. Lors d'une impulsion de flux négative, Φ_S passe de Φ_{PT} à $\Phi_M^- = -0.229\ \Phi_0$ et les fréquences ν_S et ν_T se croisent deux fois. A ces deux croisements, le couplage est responsable du repoussement des niveaux d'énergie du circuit couplé.

Lors d'une impulsion de flux positive, Φ_S passe de Φ_{PT} à $\Phi_M^+ = 0.173\ \Phi_0$ et les fréquences ν_S et ν_T ne se croisent pas.

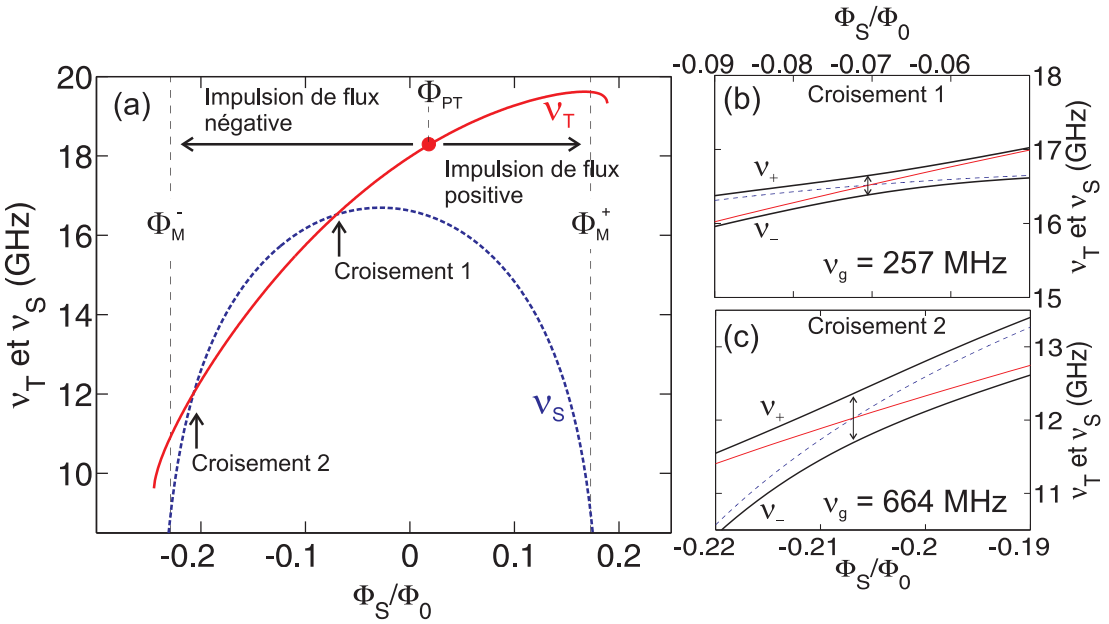

FIG. 7.2 – *Les mesures des deux spectroscopies de la figure 7.1 sont réalisées respectivement par des impulsions de flux nanoseconde négative et positive. Celles-ci changent le flux* Φ_S *de* $\Phi_{PT} = 0.017\ \Phi_0$ *à respectivement* $\Phi_M^- = -0.229\ \Phi_0$ *et* $\Phi_M^+ = 0.173\ \Phi_0$. *(a) Dépendance de* ν_S *(ligne pointillée bleue) et* ν_T *(ligne pleine rouge) avec* Φ_S. *Les figures (b) et (c) sont les agrandissements des croisements 1 et 2 des fréquences* ν_S *et* ν_T. *Les ligne noires sont les niveaux d'énergie* ν_+ *et* ν_- *des qubits couplés.*

Passage adiabatique et transition Landau-Zener. Deux processus différents, qui sont illustrés à la figure 7.3, peuvent se produire pendant le passage du croisement des fréquences ν_S et ν_T. Nous considérons que l'état initial du circuit est l'état $|0,+\rangle$ d'énergie ν_T. Tout d'abord, si l'impulsion de flux est infiniment lente, l'état du circuit reste dans un état propre à tout instant, et l'énergie du système suit les variations du niveau d'énergie initial. Ceci correspond à un *passage adiabatique*. Dans notre cas, l'état $|0,+\rangle$ est changé en l'état $|1,-\rangle$.

Lorsque le passage du croisement se fait à une vitesse finie, l'état initial peut être conservé après le croisement. On parlera alors de *transition Landau-Zener*. La probabilité Landau-Zener, notée P_{LZ}, correspond à la probabilité que l'état du qubit soit le même avant et après le croisement. P_{LZ} avoisine 100% si la vitesse de passage du croisement est très grande par rapport à la valeur du couplage au croisement.

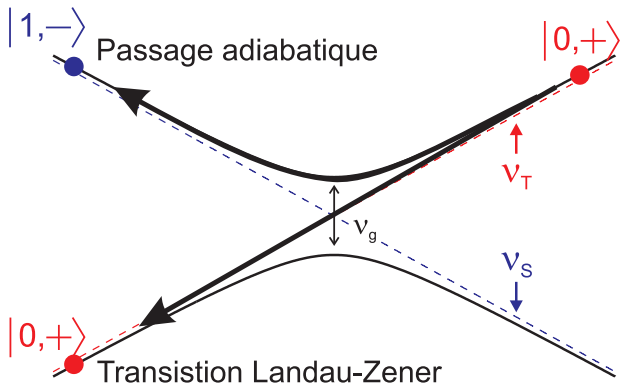

FIG. 7.3 – *Illustration du passage d'un anti-croisement de niveau. En partant initialement dans l'état $|0,+\rangle$ à la droite du croisement, le passage adiabatique change l'état $|0,+\rangle$ en l'état $|1,-\rangle$. La transition Landau-Zener conserve l'état initial.*

Interprétation qualitative des spectroscopies. Nous allons essayer d'expliquer les deux spectroscopies de la figure 7.1 en utilisant les notions qualitatives de passage adiabatique et de transition Landau-Zener. Nous considérons que l'état du circuit au point de travail est l'état excité du transistor $|0,+\rangle$. Les deux spectroscopies sont réalisées respectivement par une impulsion de flux négative et positive.

Tout d'abord, lorsque la mesure de l'état du transistor est réalisée par une impulsion de flux négative, les fréquences ν_S et ν_T se croisent deux fois. La valeur du couplage au premier croisement, égale à 257 MHz, est trop faible par rapport à la vitesse de passage du croisement, ce qui laisse inchangé l'état $|0,+\rangle$ (transition Landau-Zener). La valeur du couplage au deuxième croisement, égale à 664 MHz, est assez grande pour permettre un passage adiabatique de l'état $|0,+\rangle$ vers l'état $|1,-\rangle$.

En conclusion, l'état excité du transistor $|0,+\rangle$ est transféré vers l'état excité du SQUID $|1,-\rangle$. Le contraste de l'échappement du SQUID entre l'état $|1,-\rangle$ et l'état $|0,-\rangle$ permet

de mesurer l'état du transistor au point de travail. Nous parlerons ainsi de la mesure de l'état du transistor par un *transfert quantique adiabatique*.

Lorsque la mesure de l'état du transistor est réalisée par une impulsion de flux positive, il n'y a pas de croisement des fréquences ν_S et ν_T. Tout transfert adiabatique est alors impossible. L'état du transistor au flux Φ_M^+ reste donc l'état $|0,+\rangle$. Il ne peut pas être différencié de l'état $|0,-\rangle$ par l'échappement du SQUID. Aucun contraste n'existe, ce qui permet d'expliquer l'absence de pic de résonance dans la mesure de spectroscopie.

7.2.2 Modélisation de la mesure par transfert adiabatique

Une expression analytique de la probabilité Landau-Zener a été trouvée en 1932 par Landau et Zener [56, 57]. Elle n'est valable que si la séparation des niveaux ν_S et ν_T évolue linéairement dans le temps et si le couplage ν_g est indépendant du temps. Ces dernières hypothèses ne sont pas vérifiées dans notre cas. Par conséquent, j'ai dû analyser l'évolution de l'état quantique du circuit par une étude numérique.

Pendant l'impulsion de flux nanoseconde, l'état du cicuit $|\Psi(t)\rangle$ au temps t évolue. Nous considérons que $|\Psi(t)\rangle$ est représenté par une superposition des états $|0,+\rangle$ et $|1,-\rangle$, tel que

$$|\Psi(t)\rangle = a(t)|0,+\rangle + b(t)|1,-\rangle, \tag{7.6}$$

où $a(t)$ et $b(t)$ correspondent respectivement au poids de l'état $|0,+\rangle$ et $|1,-\rangle$ dans la superposition. L'évolution de $|\Psi(t)\rangle$ est régie par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}|\Psi(t)\rangle}{\mathrm{d}t} = \widehat{H}(t)|\Psi(t)\rangle, \tag{7.7}$$

où $\widehat{H}(t)$ est l'Hamiltonien des qubits couplés dépendant du temps, qui est donné par l'équation (6.1).

Nous considérons le cas expérimental pour lequel l'impulsion de flux est suffisamment lente devant les fréquences ν_S et ν_T afin de ne pas induire les transitions $|0,-\rangle \rightarrow |0,+\rangle$ et $|0,-\rangle \rightarrow |1,-\rangle$. Les états $|1,-\rangle$ et $|0,+\rangle$ sont alors les états propres instantanés du qubit de charge et du qubit de phase en l'absence de couplage.

En substituant $|\Psi(t)\rangle$ dans l'équation (7.7) par son expression (7.6), on trouve que l'évolution des coefficients $a(t)$ et $b(t)$, et donc de l'état quantique, est donnée par le système de deux équations suivant

$$\begin{cases} \dfrac{i}{\pi}\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{a}(\mathbf{t})}{\mathrm{d}t} = [\nu_T(t) - \nu_S(t)]\ \mathbf{a}(\mathbf{t}) - \nu_g(t)\,\mathbf{b}(\mathbf{t}) \\ \dfrac{i}{\pi}\dfrac{\mathrm{d}\mathbf{b}(\mathbf{t})}{\mathrm{d}t} = [\nu_S(t) - \nu_T(t)]\ \mathbf{b}(\mathbf{t}) - \nu_g(t)\,\mathbf{a}(\mathbf{t}) \end{cases} \tag{7.8}$$

Ce système est résolu numériquement en utilisant la méthode de Runge-Kutta à l'ordre 4 [37].

Cette méthode numérique, qui permet de prédire l'évolution de l'état du circuit, sera utilisée par la suite pour expliquer la mesure des spectroscopies du SQUID et du transistor dans deux situations différentes. Dans la première situation, les niveaux ν_S et ν_T se croiseront durant l'impulsion de flux. Alors que dans la deuxième situation, ils ne se croiseront pas.

7.2.3 Mesure en la présence d'un croisement de niveaux

Des spectroscopies du SQUID et du transistor ont été réalisées à $I_p = 1957$ nA et $\Phi_S = \Phi_{PT} = -0.064\ \Phi_0$, pour deux charges de la grille différentes, c'est à dire $n_g = 0.5$ et $n_g \approx 1$. Le transistor et le SQUID sont tous les deux excités par une impulsion micro-onde de tension de grille. La figure 7.4.a présente les spectroscopies du transistor et du SQUID à $n_g = 0.5$. La spectroscopie du transistor en rouge montre un pic de résonance à la fréquence $\nu_T = 17.13$ GHz. La spectroscopie du SQUID en bleue ne montre aucun pic. Lorsque $n_g \approx 1$, la spectroscopie du SQUID, qui est réalisée à la même puissance micro-onde que auparavant, montre une raie à la fréquence $\nu_S = 17.63$ GHz (figure 7.4.b).

La différence entre la spectroscopie du SQUID à $n_g = 0.5$ et $n_g \approx 1$ n'est pas due au couplage entre le SQUID et le transistor dont l'effet est négligeable au point de travail. Elle ne peut pas être expliquée non plus par un couplage micro-onde différent, puisque celui-ci ne dépend pas de n_g (*cf* équation (4.8)). Comme nous allons le voir dans la suite, l'absence de raie de spectroscopie du SQUID à $n_g = 0.5$ pourra s'expliquer par une chute du contraste de la mesure du SQUID.

Evolution du spectre d'énergie pendant l'impulsion de flux. La mesure de l'état du transistor et du SQUID est réalisée par une impulsion de flux négative, qui change le flux Φ_S de $\Phi_{PT} = -0.064\ \Phi_0$ à $\Phi_M = -0.265\ \Phi_0$. Les dépendances des fréquences ν_S et ν_T avec Φ_S sont montrées à la figure 7.4.c, pour $n_g = 0.5$. Entre les flux Φ_{PT} et Φ_M, la fréquence ν_S diminue à environ 9 GHz. La fréquence ν_T diminue aussi et croise la fréquence ν_S à environ 11 GHz.

Calcul numérique de l'évolution de l'état du circuit pendant l'impulsion de flux. L'impulsion de flux est modélisée par l'équation

$$\Phi_S = \Phi_{PT} + (\Phi_M - \Phi_{PT})\frac{1}{2}\left[\tanh\left(\frac{2t}{\tau}\right) - \tanh\left(\frac{2(t+\Delta T)}{\tau}\right)\right], \tag{7.9}$$

où τ est le temps de montée et de descente de l'impulsion, dont la valeur est égale à 1.6 ns. ΔT correspond à la durée de l'impulsion. L'impulsion de flux est tracée à l'intérieure de la figure 7.5.

La probabilité $|\langle 1, -|\Psi(t)\rangle|^2$ représente la population de l'état excité du SQUID. Son évolution est calculée numériquement en fonction du flux Φ_S pendant l'impulsion de flux. Nous considérons que l'état initial, avant l'impulsion de flux, est l'état propre $|\Psi(0)\rangle = 0.977|0,+\rangle + 0.213|1,-\rangle$. L'état propre est choisi car c'est l'état qui est sondé lors d'une

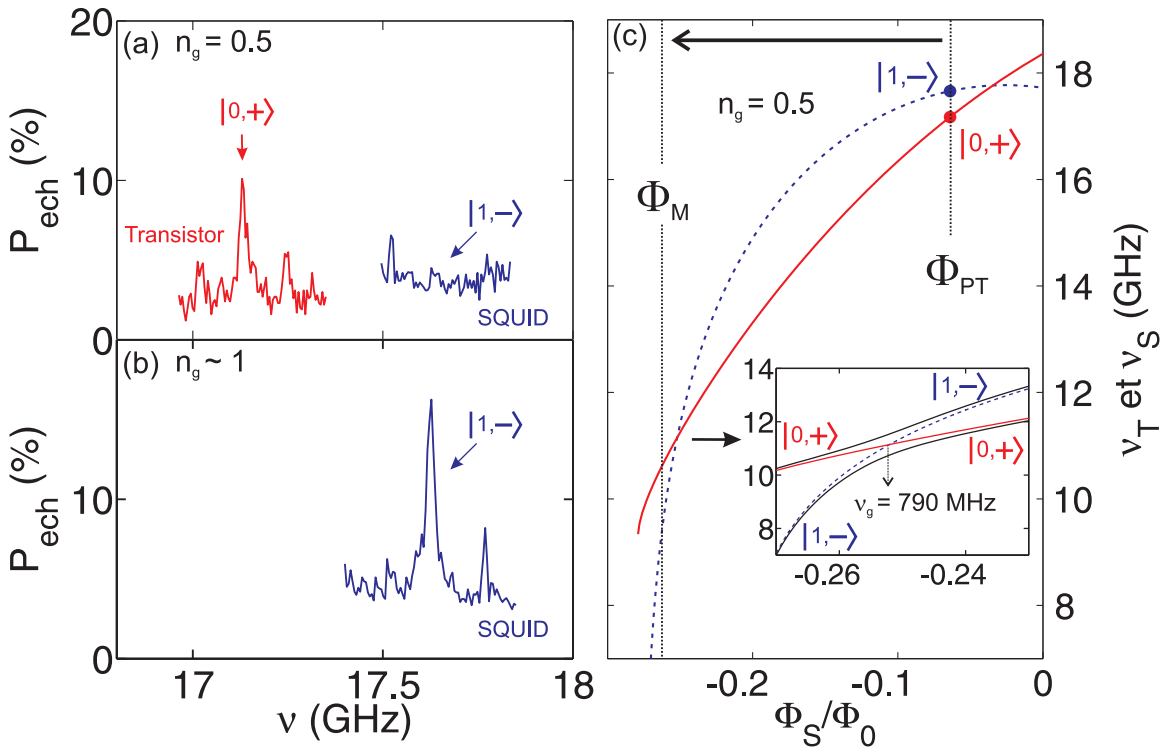

FIG. 7.4 – *Le circuit est polarisé au point (I_p = 1957 nA, $\Phi_{PT} = -0.064\ \Phi_0$). (a) A $n_g = 0.5$, spectroscopies du transistor en rouge (ν_T = 17.13 GHz) et du SQUID en bleue. (b) A $n_g \approx 1$, spectroscopie du SQUID en bleue (ν_S = 17.63 GHz). Ces spectroscopies sont mesurées par une impulsion de flux négative, qui amène le flux à $\Phi_m = -0.265\ \Phi_0$. (c) Evolution des niveaux d'énergie ν_S (ligne pointillée) et ν_T (ligne pleine) pendant cette impulsion, pour $n_g = 0.5$.*

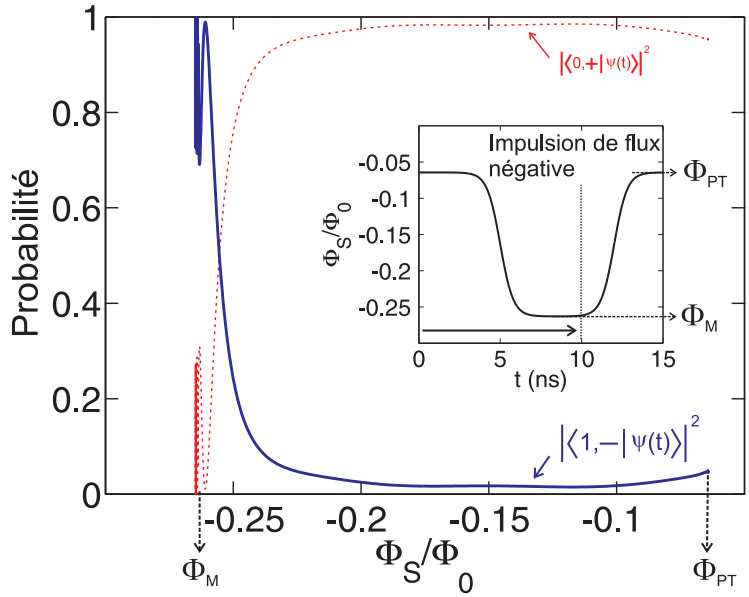

FIG. 7.5 – *Au point de polarisation (I_p = 1957 nA,$\Phi_S = -0.064\ \Phi_0$,$n_g = 0.5$), l'état initial du circuit est l'état propre $|\Psi(0)\rangle = 0.977|0,+\rangle + 0.213|1,-\rangle$. Une impulsion de flux négative amène le flux à $\Phi_m = -0.265\ \Phi_0$. Les évolutions des probabilités $|\langle 1,-|\Psi(t)\rangle|^2$ et $|\langle 0,+|\Psi(t)\rangle|^2$ sont tracées en fonction de Φ_S pendant cette impulsion.*

spectroscopie. Il est "proche" de l'état $|0,+\rangle$. La probabilité initiale d'être dans l'état excité du SQUID est donc quasiment nulle.

L'évolution de la probabilité $|\langle 1,-|\Psi(t)\rangle|^2$ est calculée jusqu'à la fin du plateau de l'impulsion de flux, à $t = 10$ ns. Elle est tracée en fonction de Φ_S à la figure 7.5. Nous avons aussi tracé la probabilité $|\langle 0,+|\Psi(t)\rangle|^2$. La somme des deux probabilités précédentes est toujours égale à 100%, ce qui indique la bonne convergence des calculs numériques. La probabilité $|\langle 1,-|\Psi(t)\rangle|^2$ reste proche de zéro jusqu'au croisement. Elle augmente durant le croisement et atteint après celui-ci, au flux Φ_M, une valeur qui oscille autour de 85%. Cette oscillation a une amplitude de 15% et une période d'environ 0.6 ns. Elle est expliquée par le fait que l'état $|\Psi(t)\rangle$ n'est pas un état propre au flux Φ_M. Le transfert de l'état $|0,+\rangle$ vers l'état $|1,-\rangle$ est quasiment parfait. Le passage du croisement est adiabatique. On peut l'expliquer par un fort couplage au croisement, égal à 790 MHz.

Si nous avions considéré que l'état initial était l'état $|1,-\rangle$. Des simulations similaires aux précédentes montreraient que l'impulsion de flux transfère l'état $|1,-\rangle$ vers l'état $|0,+\rangle$.

Interprétation des résultats expérimentaux à l'aide des simulations. Nous nous intéressons tout d'abord à la spectroscopie du transistor à $n_g = 0.5$. Lorsque la fréquence est accordée à la fréquence ν_T, l'état $|0,+\rangle$ est peuplé. Durant l'impulsion de flux, l'état $|0,+\rangle$ est transférée adiabatiquement vers l'état $|1,-\rangle$. L'excitation initiale du transistor est donc transmise au SQUID. La probabilité d'échappement du SQUID étant plus grande

pour l'état $|1,-\rangle$ que pour l'état fondamental $|0,-\rangle$, un pic de résonance est mesuré à la fréquence ν_T.

Nous passons maintenant à la spectroscopie du SQUID à $n_g = 0.5$. Lorsque la fréquence est accordée à la fréquence ν_S, l'état $|1,-\rangle$ est peuplé. Durant l'impulsion de flux, l'état $|1,-\rangle$ est transféré adiabatiquement vers l'état $|0,+\rangle$. L'excitation initiale du SQUID est donc transmise au transistor. L'échappement du SQUID étant identique pour les états $|0,+\rangle$ et $|0,-\rangle$, aucun pic de résonance n'est mesuré à la fréquence ν_S.

Nous regardons enfin la spectroscopie du SQUID à $n_g \approx 1$. La fréquence du transistor dans le spectre d'énergie de la figure 7.4.c est augmentée à environ 30 GHz . Les fréquences ν_S et ν_T ne se croisent plus pendant l'impulsion de flux. L'état $|1,-\rangle$ n'est donc pas perturbé par l'impulsion de flux. Il reste l'état $|1,-\rangle$ au point de mesure et le contraste de la mesure du SQUID n'est pas altéré.

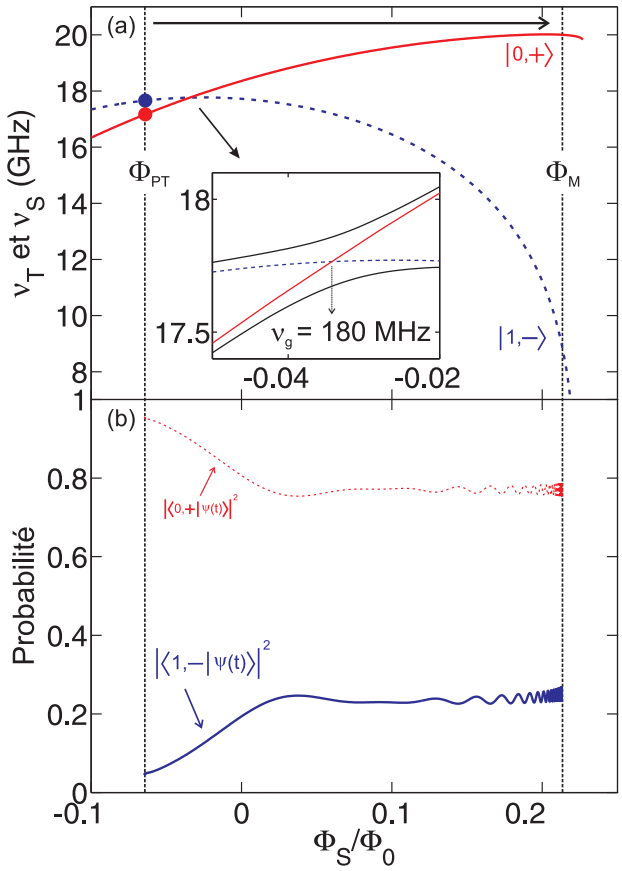

FIG. 7.6 – *Le circuit est initialement polarisé à $I_p = 1957$ nA, $\Phi_S = \Phi_{PT} = -0.064\ \Phi_0$ et $n_g = 0.5$. (a) Dépendance des niveaux d'énergie ν_S (ligne pointillée) et ν_T (ligne pleine) avec Φ_S. On suppose que l'état initial du circuit, à Φ_{PT}, est l'état propre $|\Psi(0)\rangle = 0.977|0,+\rangle + 0.213|1,-\rangle$. Une impulsion de flux positive amène le flux à $\Phi_M = 0.213\ \Phi_0$. (b) Evolutions des probabilités $|\langle 1,-|\Psi(t)\rangle|^2$ et $|\langle 0,+|\Psi(t)\rangle|^2$ en fonction de Φ_S pendant cette impulsion.*

Impulsion de flux positive. La variation des niveaux d'énergie ν_S et ν_T est montrée à la figure 7.6.a pour une impulsion de flux positive, au même point de travail que précédemment. Nous constatons que les niveaux se croisent à $\Phi_S = -0.036\ \Phi_0$, ce qui peut affecter l'état du circuit.

Nous nous intéressons à l'évolution de l'état du circuit $|\Psi(t)\rangle$ pendant l'impulsion de flux ($\tau = 1.6$ ns). Nous considérons que l'état initial est l'état propre $|\Psi(0)\rangle = 0.977|0,+\rangle + 0.213|1,-\rangle$. Cet état est "proche" de l'état $|0,+\rangle$.

La dépendance de la probabilité $|\langle 1,-|\Psi(t)\rangle|^2$ avec Φ_S est montrée à la figure 7.6.b. La probabilité $|\langle 1,-|\Psi(t)\rangle|^2$ passe d'environ 4% à 23%. Le transfert de l'état $|0,+\rangle$ vers l'état $|1,-\rangle$ n'est donc pas efficace. Cette inefficacité est due à un couplage plus faible au croisement, égal à 180 MHz. Cela explique pourquoi la mesure de l'état du transistor ne pouvait pas être réalisée expérimentalement par une impulsion de flux positive.

7.2.4 Mesure en l'absence d'un croisement de niveaux

Des spectroscopies du SQUID et du transistor ont été réalisées au point de travail ($I_p = 2347$ nA, $\Phi_S/\Phi_0 = -0.064$), pour les charges de grille $n_g = 0.5$ et $n_g \approx 1$. Le transistor et le SQUID sont tous les deux excités par une impulsion micro-onde de tension de grille. La figure 7.7.a présente les spectroscopies du transistor et du SQUID à $n_g = 0.5$. La spectroscopie du transistor en rouge montre une raie à la fréquence $\nu_T = 15.94$ GHz. Cette dernière est de faible amplitude (3%), alors que la puissance micro-onde est forte (0 dBm)[(2)]. La spectroscopie du SQUID en bleue montre une raie à la fréquence $\nu_S = 15.11$ GHz. De plus, la raie de spectroscopie du SQUID est aussi mesurée à $n_g = 1$ (figure 7.7.b). Nous constatons que l'amplitude de la raie ne dépend presque pas de la tension de grille. Ces mesures présentent donc un comportement différent des mesures relatées à la figure 7.4.

Evolution du spectre d'énergie pendant l'impulsion de flux. Les spectroscopies précédentes sont mesurées avec une impulsion de flux négative, qui change le flux Φ_S de $\Phi_{PT} = -0.064\ \Phi_0$ à $\Phi_M = -0.19\ \Phi_0$. Cette impulsion modifie les niveaux d'énergie ν_S et ν_T, comme le montre la figure 7.7.c. Les fréquence ν_S et ν_T diminuent toutes les deux mais ne se croisent jamais.

Calcul numérique de l'évolution de l'état du circuit pendant l'impulsion de flux. Nous nous intéressons à l'évolution de l'état $|\Psi(t)\rangle$ pendant l'impulsion de flux, pour ce nouveau spectre d'énergie. Au temps zéro, nous supposons que l'état du circuit, au point de travail précédent, est l'état propre $|\Psi(0)\rangle = 0.989|0,+\rangle - 0.148|1,-\rangle$. L'état initial est "proche" de l'état $|0,+\rangle$. La probabilité d'être dans l'état excité du SQUID avoisine donc zéro avant l'impulsion.

La figure 7.8 présente la dépendance de la probabilité $|\langle 1,-|\Psi(t)\rangle|^2$ avec Φ_S. La probabilité $|\langle 1,-|\Psi(t)\rangle|^2$ augmente à environ 40% vers $-0.16\ \Phi_0$. Ceci est expliqué par la proximité des fréquences ν_S et ν_T à ce point. A Φ_m, $|\langle 1,-|\Psi(t)\rangle|^2$ est environ égale à 10%

[(2)] A titre comparatif, la spectroscopie du transistor de la figure 7.4.a a été réalisée à -17 dBm.

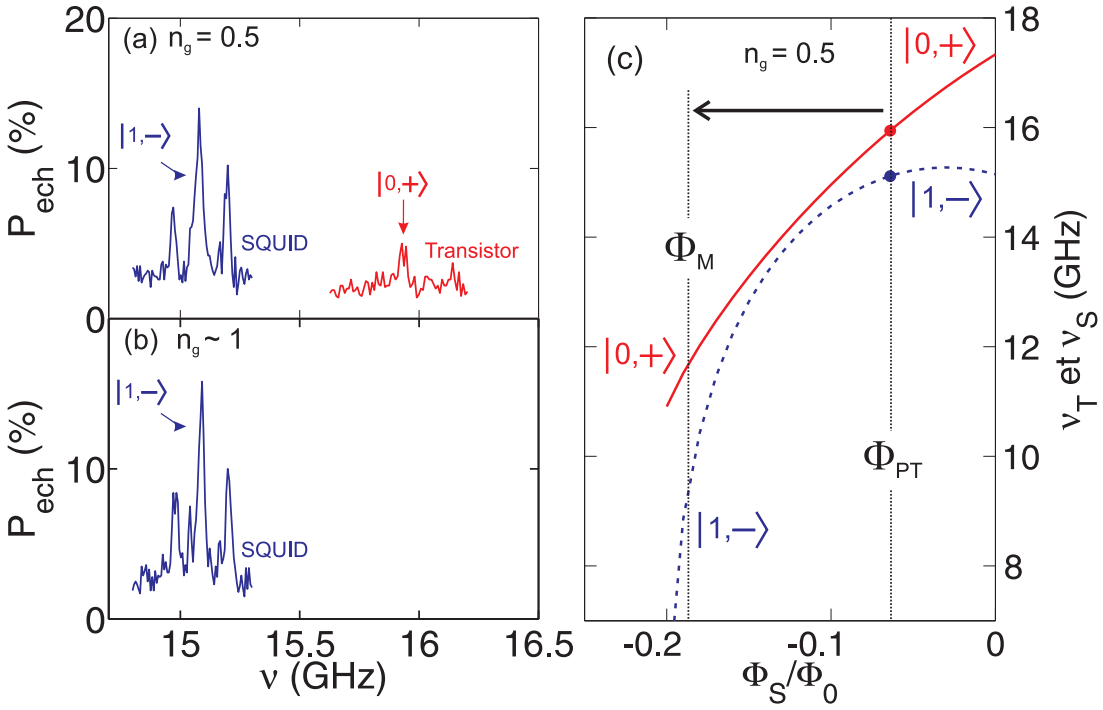

FIG. 7.7 – *Le circuit est polarisé au point (I_p = 2317 nA, $\Phi_{PT} = -0.064\ \Phi_0$) (a) A $n_g = 0.5$, spectroscopies du SQUID en bleue (ν_S = 15.11 GHz) et du transistor en rouge (ν_T = 15.94 GHz). (b) A $n_g \approx 1$, spectroscopie du SQUID en bleue (ν_S = 15.11 GHz). Ces spectroscopies sont mesurées par une impulsion de flux négative, qui amène le flux à $\Phi_m = -0.265\ \Phi_0$. (c) Evolutions des niveaux d'énergie ν_S (ligne pointillée) et ν_T (ligne pleine) durant cette impulsion, pour $n_g = 0.5$.*

et oscille avec une amplitude de 10%. Le transfert de l'état $|0,+\rangle$ vers l'état $|1,-\rangle$ est donc très faible.

Si nous avions considéré que l'état initial était l'état $|1,-\rangle$. Des simulations similaires aux précédentes montreraient que le transfert de l'état $|1,-\rangle$ vers l'état $|0,+\rangle$ est très faible.

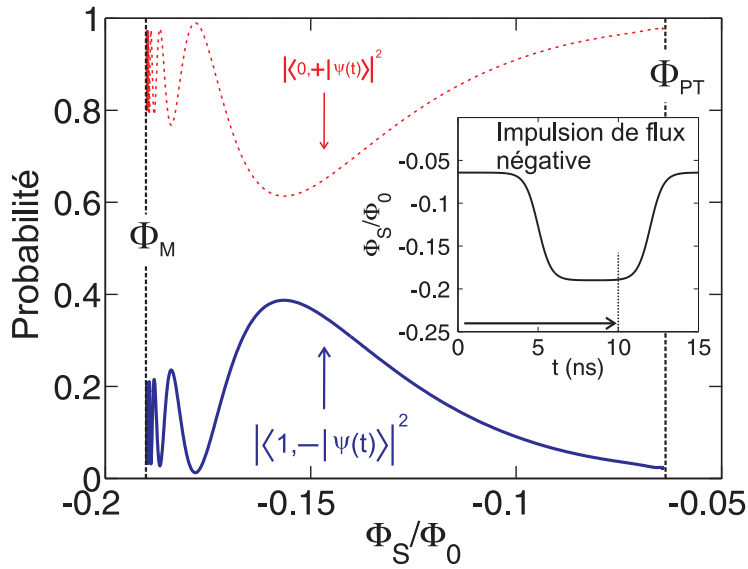

FIG. 7.8 – *Au point de polarisation ($I_p = 2317$ nA,$\Phi_S/\Phi_0 = -0.064$), l'état initial du circuit est l'état propre $|\Psi(0)\rangle = 0.977|0,+\rangle + 0.213|1,-\rangle$. Une impulsion de flux négative amène le flux à $\Phi_m = -0.190\ \Phi_0$. Les évolutions des probabilités $|\langle 1,-|\Psi(t)\rangle|^2$ et $|\langle 0,+|\Psi(t)\rangle|^2$ sont tracées en fonction de Φ_S pendant cette impulsion.*

Interprétation des résultats expérimentaux à l'aide des simulations. Nous nous intéressons tout d'abord à la spectroscopie du transistor à $n_g = 0.5$. Lorsque la fréquence est accordée à la fréquence ν_T, l'état $|0,+\rangle$ est peuplé. Durant l'impulsion de flux, l'état $|0,+\rangle$ n'est que faiblement transféré vers l'état $|1,-\rangle$. Une très légère partie de l'excitation initiale du transistor est transmise au SQUID. Cela explique la faible amplitude du pic de résonance.

Nous passons maintenant à la spectroscopie du SQUID à $n_g = 0.5$. Lorsque la fréquence est accordée à la fréquence ν_S, l'état $|1,-\rangle$ est peuplé. Durant l'impulsion de flux, l'état $|1,-\rangle$ n'est que faiblement transférée vers l'état $|0,+\rangle$. Une très légère partie de l'excitation initiale du SQUID est transmise au transistor. Le contraste de la mesure du SQUID n'est donc pratiquement pas altéré.

Nous regardons enfin la spectroscopie du SQUID à $n_g \approx 1$. La fréquence du transistor est augmentée à environ 30 GHz dans le spectre d'énergie de la figure 7.4.c. Les fréquences ν_S et ν_T ne se croisent plus pendant l'impulsion de flux. Par conséquent, l'état $|1,-\rangle$ n'est

pas perturbé par l'impulsion de flux. Il reste l'état $|1,-\rangle$ au point de mesure et le contraste de la mesure du SQUID n'est pas altéré.

7.3 Conclusion sur la mesure du transistor

La premier modèle de la mesure de l'état du transistor correspond à la détection des courants à travers le transistor au moyen du SQUID. Ce modèle ne permet pas d'expliquer les résultats expérimentaux.

La mesure réalisée dans notre circuit s'explique en fait par un transfert quantique adiabatique. Elle consiste en un transfert adiabatique de l'état $|0,+\rangle$ vers l'état $|1,-\rangle$ lors de l'impulsion de flux nanoseconde. Pour que ce passage puisse avoir lieu, deux conditions doivent être remplies. La première condition est un croisement des niveaux d'énergie ν_S et ν_T lors de l'impulsion. La deuxième condition correspond à un couplage à la résonance suffisamment grand devant le temps de montée de l'impulsion τ. Ce couplage provient des termes en $\sigma_x^S\hat{\sigma}_x^T$ et $\sigma_y^S\hat{\sigma}_y^T$ de l'Hamiltonien de couplage (7.1). Ces deux conditions sont généralement réunies dans notre circuit lorsque la mesure est réalisée par une impulsion de flux négative.

Le contraste de la mesure de l'état du transistor est de l'ordre de 40%, proche de celui du SQUID. Or, la théorie prédit un contraste de 100% dans le cas du transfert adiabatique de l'état $|0,+\rangle$ vers l'état $|1,-\rangle$. La chute du contraste de la mesure du transistor pourrait être expliquée comme celle du SQUID. La fréquence ν_T croise de nombreuses fréquences parasites au cours de l'impulsion de flux. Une partie de l'excitation du transistor est perdue lors de ces croisements parasites.

Conclusion et perspectives

Nous avons couplé, pour la première fois, deux qubits supraconducteurs de nature différente, à savoir un qubit de charge et un qubit de phase. Nous avons réalisé le qubit de charge au moyen d'une boîte à paires de Cooper asymétrique (ACPT). Nous avons réalisé le qubit de phase au moyen d'un SQUID dc.

Avant la fabrication du circuit supraconducteur, nous avons au préalable effectué un important travail théorique. Ce travail a consisté à modéliser et analyser la dynamique quantique complexe du circuit couplé. Pour cela, nous avons réussi à établir l'Hamiltonien du circuit qui décrit complètement cette dynamique quantique. Cet Hamiltonien est divisé en trois termes. Le premier terme $\widehat{H}_S = h\nu_S\hat{\sigma}_z^S$ correspond à l'Hamiltonien du SQUID. Le deuxième terme $\widehat{H}_T = h\nu_T\hat{\sigma}_z^T$ est l'Hamiltonien de l'APCT. Le troisième terme est l'Hamiltonien de couplage entre le SQUID et l'ACPT. Nous avons montré que, sous certaines conditions, celui-ci pouvait se mettre sous la forme $\widehat{H}_{Coupl} = -h\nu_g\left(\hat{\sigma}_+^S\hat{\sigma}_-^T + \hat{\sigma}_-^S\hat{\sigma}_+^T\right)/2$, où la fréquence ν_g correspond à la force du couplage. Le couplage entre le SQUID et l'ACPT est réalisé au moyen d'une des jonctions Josephson de l'ACPT qui est schématisé par une jonction Josephson idéale en parallèle avec une capacité. Ainsi, nous avons réussi à exprimer le couplage comme la somme d'un couplage capacitif et d'un couplage Josephson.

La réalisation du circuit couplé a nécessité de nombreuses optimisations des procédés de nano-fabrication. Nous avons fabriqué le circuit supraconducteur en une seule étape de lithographie électronique. Les quatre jonctions Josephson du circuit ont été réalisées au moyen de trois évaporations d'aluminium sous angle et de deux oxydations différentes.

Dans le cas où le désaccord de fréquence $|\Delta\nu| = |\nu_S - \nu_T|$ était suffisamment grand, nous avons pu caractériser indépendamment les deux qubits en négligeant les effets du couplage.

Nous avons mesuré, par spectroscopie, la dépendance de la fréquence du SQUID pour différents paramètres de polarisation, à savoir le courant de polarisation I_p et le flux Φ_S à travers le SQUID. Cette dépendance a été très bien expliquée par notre analyse théorique. L'ajustement théorique a permis de déterminé de manière précise les différents paramètres du SQUID. D'autres part, ces spectroscopies ont permis de caractériser les bruits des paramètres de polarisation du SQUID qui sont responsables des processus de décohérence du qubit de phase. Ainsi, nous avons bien expliqué les pics satellites présents dans les

spectroscopies du SQUID par le bruit en courant de polarisation. Nous avons trouvé des fluctuations RMS du bruit en courant de $\langle \delta I_p^2 \rangle^{1/2} = 12$ nA. Nous avons aussi extrait les différentes caractéristiques du bruit en flux. Les fréquences de ce bruit sont basses-fréquences, inférieures à 20 kHz. La valeur RMS des fluctuations a été évaluée à $\langle \delta \Phi_S^2 \rangle^{1/2} = 1$ mΦ_0.

Nous avons caractérisé, pour la première fois, un transistor à paires de Cooper fortement asymétrique (ACPT). Nous avons mesuré la dépendance de la fréquence ν_T du transistor avec ses paramètres de polarisation, à savoir le courant de polarisation I_p, le flux Φ_S, le flux Φ_T et la tension V_g de la grille. Cette dépendance a été très bien expliquée par notre analyse théorique. De l'ajustement théorique, nous avons extrait précisément les différents paramètres de l'ACPT. Deux points optimaux, pour lesquels l'ACPT est insensible au premier ordre aux bruits des paramètres de polarisation, ont été mis en évidence. Ces spectroscopies ont aussi été utilisées afin de caractériser les différents bruits des paramètres de polarisation qui sont responsables des processus de décohérence du qubit de charge. Ainsi, nous avons trouvé des bruits en flux et en courant comparables à ceux trouvés au moyen des spectroscopies du SQUID. Nous avons aussi évalué la densité spectrale classique du bruit de charge $S_{n_g}^c(\omega) \approx 2 \times 10^{-6}/|\omega|$. Nous avons réussi à expliquer le temps de relaxation du qubit de charge de 0.8 μs par le bruit en courant.

D'autre part, nous avons mesuré des oscillations de Rabi sur le qubit de charge. Le temps de décroissance des oscillations était typiquement de l'ordre de 70 ns. Des oscillations cohérentes ont aussi été observées dans le SQUID. Des oscillations de Rabi ont été mesurées à basse puissance micro-onde. A plus haute puissance, nous avons mesuré des oscillations cohérentes qui mettent en jeu plus de deux niveaux dans le SQUID.

Nous avons déterminé la valeur du couplage ν_g entre les deux qubits en mesurant le spectre d'énergie du circuit couplé à la résonance des deux qubits. Ce couplage a été déterminé pour différentes fréquences de résonance. Nous avons pu varier le couplage de plus d'un facteur 18, entre 1.1 GHz et 60 MHz. Le couplage théorique, composé du couplage Josephson et du couplage capacitif, est en très bon accord avec le couplage mesuré. La théorie prédit un couplage nul pour un des points optimaux de l'ACPT et un couplage maximum pour l'autre. Ce couplage variable, qui peut s'annuler, est une des propriétés recherchées afin de réaliser des opérations à deux qubits dans le domaine de l'information quantique.

Nous avons expliqué la mesure de l'état du transistor par un transfert quantique adiabatique de l'état $|0,+\rangle$ vers l'état $|1,-\rangle$. Dans le cas où le transistor est excité, son excitation est transmise au SQUID, laquelle est alors détectée par une mesure de la probabilité d'échappement du SQUID. Soulignons que cette nouvelle mesure est une alternative séduisante aux autres mesures utilisées dans le domaine.

Les expériences que nous avons réalisées sur le circuit couplé nous ouvrent la voie vers de nouvelles expériences. Une première expérience serait la réalisation d'une opération logique entre le qubit de phase et le qubit de charge (opération SWAP). Une autre expérience très

intéressante consisterait à manipuler les états supérieurs du SQUID. Par exemple, nous pouvons exciter le qubit de charge dans l'état $|+\rangle$ et transmettre l'excitation vers le SQUID. En répétant cette séquence n fois, nous créons l'état $|n\rangle$ du SQUID. Afin d'optimiser la séquence, l'excitation du transistor, correspondant à la transition $|n-1,-\rangle \rightarrow |n-1,+\rangle$, pourrait être faite au point optimal ($\delta = 0, n_g = 0.5$) et en l'absence de couplage. Le transfert de l'excitation du transistor au SQUID serait réalisé en amenant rapidement, de manière non adiabatique[(3)], le SQUID et l'ACPT en résonance. En raison du couplage, l'état $|n-1,+\rangle$ n'est pas un état propre et évolue. Ainsi, après un temps $1/(4\nu_g)$, l'état du circuit deviendrait l'état $|n,-\rangle$.

Cependant, le premier rempart à ces expériences est la décohérence. Un premier objectif est donc d'augmenter la cohérence des deux qubits. Dans le cas du SQUID, nous pouvons travailler à un courant de polarisation nul. En effet, à cette polarisation le SQUID est insensible, au premier ordre, au bruit en courant [58]. Cependant, il reste sensible au bruit de flux. Le bruit de flux est anormalement élevé dans notre circuit. La fabrication du circuit par un autre procédé pourrait permettre de diminuer considérablement le bruit de flux.

Dans le cas de l'ACPT, nous pouvons travailler aux deux points optimaux pour lesquels le transistor est insensible, au premier ordre, à tous les bruits des paramètres de polarisation. Cependant, dans notre circuit, la décohérence du qubit de charge était importante à ces deux points optimaux. Celle-ci pourrait s'expliquer par la sensibilité importante au deuxième ordre du transistor au bruit de charge. Cette sensibilité peut être réduite en augmentant le rapport entre l'énergie Josephson et l'énergie de charge de l'ACPT [9].

Enfin, nous souhaitons augmenter les contrastes des mesures du transistor et du SQUID. La chute du contraste peut s'expliquer par le fait que les fréquences des qubits croisent de nombreuses résonances parasites pendant la mesure [42]. Ces résonances parasites pourraient être dues aux systèmes à deux niveaux présents dans le diélectrique des jonctions Josephson [59]. De ce fait, nous essayons de fabriquer des jonctions Josephson avec un diélectrique épitaxié afin de réduire le nombre de ces systèmes à deux niveaux.

[(3)] L'état du circuit à la résonance est identique à l'état créé au point ($\delta = 0, n_g = 0.5$).

Bibliographie

[1] P.W. Shor. *Proceedings of the symposium on the foundations of computer science.* IEEE Computer Society press, New York, 1994.

[2] D. L. Moehring, P. Maunz, S. Olmschenk, K. C. Younge, L.-M. Duan1 D. N. Matsukevich, and C. Monroe. Entanglement of single-atom quantum bits at a distance. *Nature*, 449 :68, 2007.

[3] L.M.K. Vandersypen, M. Steffen, G. Breyta, C.S. Yannoni, M.H. Sherwood, and I.L. Chuang. Experimental realization of Shor's quantum factoring algorithm using nuclear magnetic resonance. *Nature*, 414 :883, 2001.

[4] K. C. Nowack, F. H. L. Koppens, Yu. V. Nazarov, and L. M. K. Vandersypen. Coherent Control of a Single Electron Spin with Electric Fields. *Science*, 318(5855) :1430–1433, 2007.

[5] C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, C. Sayrin, S. Kuhr S. Gleyzes1, Michel Brune, J.-M. Raimond1, and S. Haroche. Progressive field-state collapse and quantum non-demolition photon counting. *Nature*, 448 :889, 2007.

[6] D. Vion, A. Aassime, A. Cottet, P. Joyez, H. Pothier, C. Urbina, D. Esteve, and M.H. Devoret. Manipulating the Quantum State of an Electrical Circuit. *Science*, 296 :886, 2002.

[7] T. Duty, D. Gunnarsson, K. Bladh, and P. Delsing. Coherent dynamics of a charge qubit. *Phys. Rev. B*, 69 :1405023, 2004.

[8] J.M. Martinis, S. Nam, J. Aumentado, and C. Urbina. Rabi Oscillations in a Large Josephson Junction Qubit. *Phys. Rev. Lett.*, 89 :117901, 2002.

[9] Jens Koch, Terri M. Yu, Jay Gambetta, A. A. Houck, D. I. Schuster, J. Majer, Alexandre Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf. Charge-insensitive qubit design derived from the cooper pair box. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 76(4) :042319, 2007.

[10] I. Chiorescu, Y. Nakamura, C.J. Harmans, and J.E. Mooij. Coherent quantum dynamics of a superconducting flux qubit. *Science*, 299 :1869, 2003.

[11] Y. Nakamura, Yu A. Pashkin, and J.S. Tsai. Coherent Control of Macroscopic Quantum States in a single-Cooper-pair box. *Nature*, 398 :786, 1999.

[12] Wallraff, D. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin, and R.J. Schoelkopf. Cavity quantum electrodynamics : Coherent coupling of a single photon to a Cooper pair box. *Nature*, 431 :138, 2004.

[13] O. Astafiev, Yu. A. Paskin, Y. Nakamura, T. Yamamoto, and J.S. Tsai. Quantum noise in the Josephson Charge Qubit. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :267007, 2004.

[14] G. Ithier, E. Collin, P. Joyez, P. J. Meeson, D. Vion, D. Esteve, F. Chiarello, A. Shnirman, Y. Makhlin, J. Schriefl, and G. Schon. Decoherence in a superconducting quantum bit circuit. *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)*, 72(13) :134519, 2005.

[15] J. Claudon, A. Fay, L. P. Lévy, and O. Buisson. Decoherence processes in a current biased dc squid. *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)*, 73(18) :180502, 2006.

[16] Yu.A. Pashkin, T. Yamamoto, O. Astafiev, Y. Nakamura, D.V. Averin, and J.S. Tsai. Quantum oscillation in two coupled charge qubit. *Nature*, 421 :823, 2003.

[17] A.J. Berkley, R.C. Ramos H. Xu, M.A. Gubrud, F.W. Strach, P.R. Johnson, J.R. Anderson, A.J. Dagt, C.J. Lobb, and F.C. Wellstood. Entangled Macroscopic Quantum States in Two Superconducting Qubits. *Science*, 368 :284, 2003.

[18] J.B. Majer, J.B. Paauw, A. ter Haar, C.J.P.M. Harmans, and J.E. Mooij. Spectroscopy on two coupled flux qubits. *Phys. Rev. Lett.*, 94 :090501, 2005.

[19] M. A. Sillanpää, J. I. Park, and R. W. Simmonds. Coherent quantum state storage and transfer between two phase qubits via a resonant cavity. *Nature*, 449 :438, 2007.

[20] J. Majer, J. M. Chow, J. M. Gambetta, J. Koch, B. R. Johnson, J. A. Schreier, L. Frunzio, D. I. Schuster, A. A. Houck, A. Wallraff, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf. Coupling superconducting qubits via a cavity bus. *Nature*, 449 :443, 2007.

[21] I. Chiorescu, P. Bertet, K. Semba, Y. Nakamura, C.J.P.M. Harmans, and J.E. Mooij. Coherent dynamics of a flux qubit coupled to a harmonic oscillator. *Nature*, 431 :159, 2004.

[22] J. Johansson, S. Saito, T. Meno, H. Nakano, M. Ueda, K. Semba, and H. Takayanagi. Vacuum rabi oscillations in a macroscopic superconducting qubit lc oscillator system. *Physical Review Letters*, 96(12) :127006, 2006.

[23] T. Yamamoto, Yu. Pashkin, O. Astafiev, Y. Nakamura, and J.S. Tsai. Demonstration of conditional gate operation using superconducting charge qubits. *Nature*, 425 :941, 2003.

[24] J. H. Plantenberg, P. C. de Groot, C. J. P. M. Harmans, and J. E. Mooij. Demonstration of controlled-not quantum gates on a pair of superconducting quantum bits. *Nature*, 447 :836, 2007.

[25] Matthias Steffen, M. Ansmann, Radoslaw C. Bialczak, N. Katz, Erik Lucero, R. Mcdermott, Matthew Neeley, E. M. Weig, A. N. Cleland, and John M. Martinis. Measurement of the entanglement of two superconducting qubits via state tomography. *Science*, 313(5792) :1423–1425, September 2006.

[26] T. Hime, P. A. Reichardt, B. L. T. Plourde, T. L. Robertson, C.-E. Wu, A. V. Ustinov, and John Clarke. Solid-State Qubits with Current-Controlled Coupling. *Science*, 314(5804) :1427–1429, 2006.

[27] A. O. Niskanen, K. Harrabi, F. Yoshihara, Y. Nakamura, S. Lloyd, and J. S. Tsai. Quantum Coherent Tunable Coupling of Superconducting Qubits. *Science*, 316(5825) :723–726, 2007.

[28] S. H. W. van der Ploeg, A. Izmalkov, Alec Maassen van den Brink, U. Hubner, M. Grajcar, E. Il'ichev, H.-G. Meyer, and A. M. Zagoskin. Controllable coupling of superconducting flux qubits. *Physical Review Letters*, 98(5) :057004, 2007.

[29] R. Harris, A. J. Berkley, M. W. Johnson, P. Bunyk, S. Govorkov, M. C. Thom, S. Uchaikin, A. B. Wilson, J. Chung, E. Holtham, J. D. Biamonte, A. Yu. Smirnov, M. H. S. Amin, and Alec Maassen van den Brink. Sign- and magnitude-tunable coupler for superconducting flux qubits. *Physical Review Letters*, 98(17) :177001, 2007.

[30] F. Balestro. *Dynamique quantique d'un SQUID-DC.* Thèse de doctorat (Grenoble I), 2003.

[31] J. Claudon. *Ocillations cohérentes dans un circuit quantique supraconducteur : le SQUID dc.* Thèse de doctorat (Grenoble I), 2005.

[32] J. Claudon, F. Balestro, F.W.J. Hekking, and O. Buisson. Coherent Oscillations in a Superconducting Multilevel Quantum System. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :187003, 2004.

[33] G. Ithier, E. Collin, P. Joyez, D. Vion, D. Esteve, J. Ankerhold, and H. Grabert. Zener enhancement of quantum tunneling in a two-level superconducting circuit. *Physical Review Letters*, 94(5) :057004, 2005.

[34] L. Solymar. *Superconductive Tunneling andApplications.* Chapman. and Hall, London, 1972.

[35] M. H. Devoret. Quantum Fluctuations in Electrical Circuits. In S. Reynaud, E. Giacobino, and J. Zinn-Justin, editors, *Fluctuations Quantiques/Quantum Fluctuations*, page 351, 1997.

[36] M. Tinkham. *Introduction to Superconductivity, second edition.* McGraw-Hill, Inc., 1996.

[37] William H. Press, Brian P. Flannery, Saul A. Teukolsky, and William T. Vetterling. *Numerical recipes in C : the art of scientific computing.* Cambridge University Press, New York, NY, USA, 1988.

[38] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Mécanique Quantique, tome I, Nouveau tirage.* Hermann, 1998.

[39] V. Bouchiat, D. Vion, P. Joyez, D. Esteve, and M. H. Devoret. Quantum coherence with a single cooper pair. *Physica Scripta T*, 76 :165, 1998.

[40] O. Buisson and F. W. J. Hekking. Entangled states in a Josephson charge qubit coupled to a superconducting resonator. In D. Averin, B. Ruggiero, and P. Silvestrini, editors, *Macroscopic Quantum Coherence and Computing*, page 137, 2001.

[41] K.C. Gupta, R. Garg, and I.J. Bahl. *Microstrip Lines and Slotlines.* Artech House, 1979.

[42] J. Claudon, A. Fay, E. Hoskinson, and O. Buisson. Nanosecond quantum state detection in a current-biased dc squid. *Physical Review B (Condensed Matter and Materials Physics)*, 76(2) :024508, 2007.

[43] H.C. Brinkman. *Physica (Utrecht)*, 22 :149, 1956.

[44] A.O. Caldeira and A.J. Leggett. *Ann. Phys.*, 149 :374, 1983.

[45] *Quantum Tunneling in Condensed Media, Modern Problems in Condensed Matter Sciences Vol. 34*. edited by Yu. Kagan and A.J. Leggett (Elsiver Science Publishers, Amsterdam, 1992).

[46] V. Lefevre-Seguin, E. Turlot, C. Urbina, D. Esteve, and M.H. Devoret. Thermal activation of a hysteretic dc superconducting quantum interference device from its zero-voltage states. *Phys. Rev. B*, 46 :5507, 1992.

[47] F. Balestro, J. Claudon, J.P. Pekola, and O. Buisson. Evidence of Two-dimensional Macroscopic Quantum Tunneling of a Current-Biased dc SQUID. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :158301, 2003.

[48] A.I. Larkin and Y.N. Ovchinnikov. Effect of level quantization on the lifetime of metastable states. *Sov. Phys. JETP*, 64 :185, 1986.

[49] K.B. Cooper, M. Steffeen, R. McDermott, R.W. Simmonds, S. Oh, D.A. Hite, and J. Martinis. Observation of Quantum Oscillations between a Josephson Phase Qubit and a Microscopic Resonator Using fast Readout. *Phys. Rev. Lett.*, 93 :180401, 2004.

[50] I.I. Rabi. Space Quantization in a Gyrating Magnetic Field. *Phys. Rev.*, 51 :652, 1937.

[51] Y. Makhlin and A. Shnirman. *JETP Letters*, 78 :497, 2003.

[52] H.B. Callen and T.A. Welton. Irreversibility and Generalized Noise. *Phys. Rev.*, 83 :34, 1951.

[53] J. Aumentado, Mark W. Keller, John M. Martinis, and M. H. Devoret. Nonequilibrium quasiparticles and 2e periodicity in single-cooper-pair transistors. *Phys. Rev. Lett.*, 92(6) :066802, 2004.

[54] O. Buisson, F. Balestro, J.P. Pekola, and F.W.J. Hekking. One Shot Quantum Measurement Using a Hysteretic dc SQUID. *Phys. Rev. Lett.*, 90 :238304, 2003.

[55] F.C. Wellstood, C. Urbina, and J. Clarke. Flicker (1/f) noise in the critical current of Josephson junctions at 0.09-4.2 K. *Appl. Phys. Lett.*, 85 :5296, 2004.

[56] L. P. Landau. Zur theorie der energieubertragung. *Phys. Z. Sowjet Union 2*, pages 46–51, 1932.

[57] C. Zener. Non-adiabatic Crossing of Energy Levels. In *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, volume 137, pages 696–702, september 1932.

[58] E. Hoskinson, F. Lecocq, A. Fay, N. Didier, F. W. Hekking, W. Guichard, and O. Buisson. Quantum dynamics of a camel back potential of a dc squid. *In preparation*, 2008.

[59] Matthias Steffen, M. Ansmann, R. McDermott, N. Katz, Radoslaw C. Bialczak, Erik Lucero, Matthew Neeley, E. M. Weig, A. N. Cleland, and John M. Martinis. State tomography of capacitively shunted phase qubits with high fidelity. *Physical Review Letters*, 97(5) :050502, 2006.

Annexe A

Paramètres du circuit couplé

	Notation	
Paramètres électriques du SQUID		
Courant critique d'une jonction	I_0	1.356 μA
Capacité d'une jonction	C_0	227 fF
Inductance de la boucle	L_s	190 pH
Dissymétrie d'inductance	η	0.28
Dissymétrie de courant critique	α	0.0035
Grandeurs caractéristiques du SQUID		
Énergie Josephson (pour une JJ)	E_J/k_B	32.4 K
Énergie de charge (pour une JJ)	E_C/k_B	16.3 mK
Paramètre de bidimensionalité	b	1.28
Paramètres électriques de l'ACPT		
Courant critique de la première JJ	I_1^T	30.1 nA
Courant critique de la deuxième JJ	I_2^T	12.4 nA
Capacité de la première JJ	C_1^T	2.0 fF
Capacité de la deuxième JJ	C_2^T	0.9 fF
Capacité de la grille	C_g	29 aF
Grandeurs caractéristiques de l'ACPT		
Énergie Josephson	$E_J^T = \phi_0(I_1^T + I_2^T)$	1.01 k_BK
Énergie de charge	$E_C^T = (2e)^2/(2(C_1^T + C_2^T))$	1.28 k_BK
Asymétrie en courant critique	μ	$-41.6\,\%$
Asymétrie en capacité	λ	$-37.7\,\%$
Environnement proche		
Inductance de filtrage on-chip	L_{oc}	7 nH
Capacité plane NbTi/Al_2O_3/NbTi	C_p	272 pF
Mutuelle entre la ligne MO et la boucle S	m_S	1.58 pH
Mutuelle entre la ligne MO et la boucle T	m_T	0.35 pH
Mutuelle entre la bobine et la boucle S	M_S	0.131 pH
Mutuelle entre la bobine et la boucle T	M_T	0.047 pH
Boucles du circuit		
Surface de la boucle S	S_S	347 μm^2
Surface de la boucle T	S_T	126 μm^2

TAB. A.1 – *Paramètres électriques du SQUID et de l'ACPT.*

Annexe B

Matrices de Pauli

Les matrices de Pauli du SQUID sont définies dans la base $\{|1\rangle, |0\rangle\}$ par :

$$\sigma_z^S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_x^S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y^S = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{B.1}$$

Les matrices de Pauli de l'ACPT sont définies dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ par :

$$\sigma_z^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_x^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y^T = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{B.2}$$

Annexe C

Expression de la phase δ

La *différence de phase* classique δ sur l'ACPT a été trouvée au §2.1.6. Nous rappelons son expression :

$$\delta = \langle\xi\rangle(x_0, y_0) - \frac{\Phi_T}{\phi_0}, \tag{C.1}$$

où (x_0, y_0) est la position du fond de puits, dans lequel la particule fictive du SQUID est piégée. Dans le régime classique $x = x_0$ et $y = y_0$, la phase φ_1 sur la jonction Josephson gauche du SQUID (figure C.1) est constante, égale à $\varphi_1^0 = x_0 - y_0$. Le courant I_1, qui traverse cette jonction, est ainsi constant, défini par $I_1^0 = I_0 \sin(\varphi_1^0)$. La phase classique $\langle\xi\rangle$ se met alors sous la forme :

$$\langle\xi\rangle(I_p, \Phi_S) = \varphi_1^0 + \frac{L_1 I_0 \sin(\varphi_1^0)}{\phi_0}. \tag{C.2}$$

La valeur de la phase φ_1^0 dépend des paramètres du SQUID : le courant de polarisation I_p et le flux de polarisation Φ_S ; elle est calculée par le programme `SQUID.cpp`. Finalement, la phase δ s'écrit :

$$\delta(I_p, \Phi_S, \Phi_T) = \varphi_1^0 + \frac{L_1 I_0 \sin(\varphi_1^0)}{\phi_0} - \frac{\Phi_T}{\phi_0}. \tag{C.3}$$

Contrôle des flux $\mathbf{\Phi_S}$ et $\mathbf{\Phi_T}$. Les flux Φ_S et Φ_T à travers les surfaces respectives S_S et S_T, sont fixés à l'aide de la bobine de cuivre (sur le porte-échantillon) et la ligne micro-onde on-chip (figure C.1).

Le courant continu I^{bob} dans la bobine en cuivre, induit le flux Φ_S^{bob} à travers S_S et le flux Φ_T^{bob} à travers S_T. Nous introduisons les mutuelles M_S^{bob} et M_T^{bob} telles que :

$$\Phi_S^{bob} = M_S I^{bob} \qquad \text{et} \qquad \Phi_T^{bob} = M_T I^{bob}. \tag{C.4}$$

Le courant I^{oc} dans la ligne micro-onde on-chip induit un flux Φ_S^{oc} à travers S_S et un flux Φ_T^{oc} à travers S_T. Nous introduisons les mutuelles m_S et m_T telles que :

$$\Phi_S^{oc} = m_S I^{oc} \qquad \text{et} \qquad \Phi_T^{oc} = m_T I^{oc}. \tag{C.5}$$

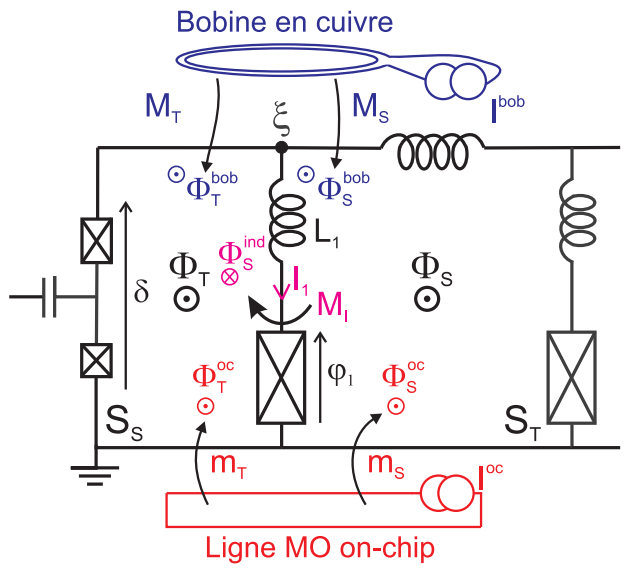

FIG. C.1 – *Schématisation des différentes mutuelles.*

A partir des équations (C.4) et (C.5), nous trouvons que les flux Φ_T^{oc} et Φ_T^{bob} sont reliées respectivement à Φ_S^{oc} et Φ_S^{bob} par :

$$\Phi_T^{oc} = \frac{m_T}{m_S}\,\Phi_S^{oc} \qquad \text{et} \qquad \Phi_T^{bob} = \frac{M_T}{M_S}\,\Phi_S^{bob}. \tag{C.6}$$

Le champ magnétique créé par le courant I^{bob} peut être considéré comme homogène au niveau de l'échantillon. Ainsi, le rapport des mutuelles M_T/M_S est égale au rapport des surfaces S_T/S_S.

Flux induit $\mathbf{\Phi_{ind}}$. Le courant I_1 crée un flux Φ_T^{ind} à travers S_T par l'intermédiaire de la mutuelle M_I. En négligeant les fluctuations quantiques de φ_1, de sorte que $I_1 = I_1^0$, Φ_T^{ind} s'écrit

$$\Phi_T^{ind} = M_I I_1^0 = M_I I_0 \sin(\varphi_1^0). \tag{C.7}$$

Expression de la phase δ. Le flux total Φ_T, qui apparaît dans l'expression (C.3) de δ, est la somme de trois composantes :

$$\Phi_T = \Phi_T^{bob} + \Phi_T^{oc} - \Phi_T^{ind}. \tag{C.8}$$

Les relations (C.6) permettent d'exprimer Φ_T en fonction du jeu de paramètres $(I_p, \Phi_S^{oc}, \Phi_S^{bob})$:

$$\Phi_T(I_p, \Phi_S^{oc}, \Phi_S^{bob}) = \frac{M_T}{M_S}\,\Phi_S^{bob} + \frac{m_T}{m_S}\,\Phi_S^{oc} - M_I I_0 \sin(\varphi_1^0). \tag{C.9}$$

Finalement, la *différence de phase* δ se réécrit comme :

$$\delta(I_p, \Phi_S^{bob}, \Phi_S^{oc}) = \varphi_1^0 + \frac{(L_1 + M_I) I_0 \sin(\varphi_1^0)}{\phi_0} - \frac{S_T}{S_S}\frac{\Phi_S^{bob}}{\phi_0} - \frac{m_T}{m_S}\frac{\Phi_S^{oc}}{\phi_0}. \tag{C.10}$$

Annexe D

Perturbation de l'Hamiltonien par un courant de polarisation additionnel

Nous cherchons dans cette annexe comment l'Hamiltonien du circuit couplé est perturbé par l'ajout d'un courant supplémentaire I_s au courant de polarisation I_p.

Le potentiel du SQUID, qui est défini par l'équation (2.21) pour un courant de polarisation I_p, s'écrit, en présence de I_S, avec un terme supplémentaire $-\phi_0 I_s(x+\eta y)$. D'après les changements de variables (2.24) et (2.25), nous déduisons que l'Hamiltonien total est perturbé par le terme $\widehat{W}_{I_s}$:

$$\widehat{W}_{I_s} = -\phi_0 I_s \left[(\cos\theta + \eta\sin\theta)\widetilde{X}_\parallel + (\eta\cos\theta - \sin\theta)\widetilde{Y}_\perp\right] \tag{D.1}$$

Lors de l'étude de l'Hamiltonien du SQUID (*cf* §2.2.2), nous avons retenu uniquement la dynamique de la variable $\widetilde{X}_\parallel$ pour décrire le SQUID. Ainsi, la dynamique du SQUID est uniquement perturbée par le terme en $\widetilde{X}_\parallel$ de $\widehat{W}_{I_s}$. Le terme en $\widetilde{Y}_\perp$ sera donc occulté par la suite. Dans notre échantillon, l'angle θ étant assez faible, la perturbation (D.1) est approximée par

$$\hat{W}_{I_s} = -\phi_0 I_s \widetilde{X}_\parallel. \tag{D.2}$$

Annexe E

Publications

- "Decoherence processes in a current biased dc-SQUID"
  J. Claudon, A. Fay, L. P. Lévy and O. Buisson,
  Phys. Rev. B. **73**, 180502 (2006).

- "Nanosecond quantum state detection in a current-biased dc SQUID"
  J. Claudon, A. Fay, E. Hoskinson and O. Buisson,
  Phys. Rev. B. **76**, 024508 (2007).

- "Strong tunable coupling between a superconducting charge and phase qubit"
  A. Fay, E. Hoskinson, F. Lecocq, L. P. Lévy, F. W. J. Hekking, W. Guichard and O. Buisson,
  Phys. Rev. Lett. **100**, 187003 (2008).

- "Quantum dynamics of a camel back potential of a dc SQUID"
  E. Hoskinson, F. Lecocq, A. Fay, N. Didier, F. W. Hekking, W. Guichard and O. Buisson,
  En préparation.

PHYSICAL REVIEW B **73**, 180502(R) (2006)

Decoherence processes in a current biased dc SQUID

J. Claudon, A. Fay, L. P. Lévy, and O. Buisson
CRTBT-LCMI, C.N.R.S., Université Joseph Fourier, Boîte Postale 166, 38042 Grenoble-cedex 9, France
(Received 14 December 2005; published 5 May 2006)

A current biased dc superconducting quantum interference device behaves as an anharmonic quantum oscillator controlled by a bias current and an applied magnetic flux. We consider here its two level limit consisting of the two lower energy states $|0\rangle$ and $|1\rangle$. We have measured energy relaxation times and microwave absorption for different bias currents and fluxes in the low microwave power limit. Decoherence times are extracted. The low frequency flux and current noise have been measured independently by analyzing the probability of current switching from the superconducting to the finite voltage state, as a function of applied flux. The high frequency part of the current noise is derived from the electromagnetic environment of the circuit. The decoherence of this quantum circuit can be fully accounted for by these current and flux noise sources.

DOI: 10.1103/PhysRevB.73.180502 PACS number(s): 85.25.Dq, 03.65.Yz

In past years, coherent manipulation of two and multilevel quantum systems, efficient quantum readouts, and entanglement between quantum bits have been achieved,[1–6] demonstrating the full potential of quantum logic in solid state physics. Future developments will require longer coherence times.[8–10] In contrast with atomic systems, the huge number of degrees of freedom makes its optimization a challenging problem. Up to now, the most successful strategy has been to manipulate the quantum system at particular working points where its coupling to external noise is minimal.[2] Nevertheless, experimental analysis of decoherence phenomena in superconducting circuits remains a priority for the full control of quantum experiments. Different models for the noise sources have been proposed to describe the decoherence processes acting on various qubits.[7–10] However, a complete and consistent understanding of decoherence remains a current and open problem. In this paper, we study decoherence processes of a phase qubit: the current biased dc superconducting quantum interference device (SQUID).

This superconducting circuit consists of two Josephson junctions (JJ), each with a critical current I_0 and a capacitance C_0. The junctions are embedded in a superconducting loop of inductance L_s, threaded by a flux Φ_b. In the limit where $L_s I_0 \approx \Phi_0/2\pi$, the phase dynamics of the two junctions can be mapped onto a fictitious particle following a one dimensional path in a two-dimensional (2D) potential.[5] If the biasing current I_b is smaller than the SQUID critical current I_c, the particle is trapped in a cubic potential well characterized by its bottom frequency $\omega_p(I_b,\Phi_b)$ and a barrier height $\Delta U(I_b,\Phi_b)$ [Fig. 1(a)]. The quantum states in this anharmonic potential are denoted $|n\rangle$, with corresponding energies E_n, $n=0,1,\ldots$. In the following, only the lowest states $|0\rangle$ and $|1\rangle$ will be involved. For I_b well below I_c, these two levels are stable and constitute a phase qubit.

When the bias current I_b is close to I_c, ΔU decreases and becomes of the order of a few $\hbar\omega_p$. The ground state can tunnel through the potential barrier and the SQUID switches to a voltage state.[11] The tunneling rate Γ_0 of the ground state $|0\rangle$ is given by the MQT formula for an underdamped JJ:[12] $\Gamma_0(I_b,\Phi_b)=a\omega_p \exp(-36\Delta U/5\hbar\omega_p)$, where a is of order unity.

The environment of the dc SQUID induces fluctuations of the bias current and the bias flux. In this work, we show how the current and flux noise sources can be separately quantified. This is achieved by escape measurements of the SQUID at specific working points where it is mostly sensitive to current or flux noise. These identified noise sources explain very well the measured decoherence times and their bias current dependence.

Experimental results are analyzed assuming a linear coupling between the SQUID and the environment degrees of freedom. We suppose that current $\hat{\delta I}$ and flux $\hat{\delta\Phi}$ noises are generated by independent Gaussian sources. Here, $\hat{\delta x}$ ($x=I$ or Φ) is an operator acting on the environment. Their fluctuations are specified by the quantum spectral densities $S_x(\nu)$.[14] In the presence of flux microwave (MW) excitation, the total Hamiltonian $\hat{H}$ in the SQUID eigenstate basis $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ reads: $\hat{H}=-\frac{1}{2}h\nu_{01}\hat{\sigma}_z-h\nu_R\cos(2\pi\nu t)\hat{\sigma}_x+\hat{N}$, where $\hat{\sigma}_x$

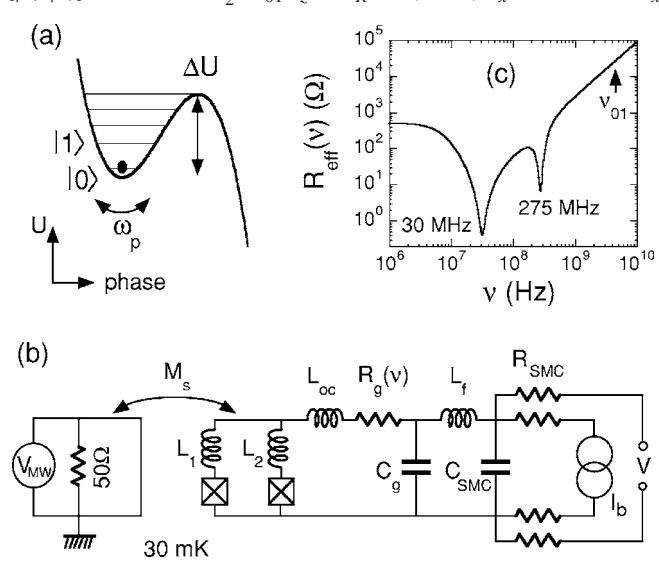

FIG. 1. (a) Squid cubic-quadratic potential. (b) Electrical environment of the SQUID. (c) Calculated effective real impedance R_{eff} vs frequency.

 ©2006 The American Physical Society

and $\hat{\sigma}_z$ are Pauli matrices and $\nu_{01}=(E_1-E_0)/h$. The first term is the qubit Hamiltonian and the second term describes the MW excitation of reduced amplitude ν_R at frequency ν. In this notation, ν_R is also the Rabi precession frequency for a tuned excitation ($\nu=\nu_{01}$). The last term is the coupling to the noise sources. For our circuit it is, within linear approximation,

$$\hat{N}=-\frac{h}{2}\hat{\sigma}_x\left[\frac{r_I(\theta)}{2\pi\sqrt{C_0 h\nu_{01}}}\hat{\delta I}+\frac{r_\Phi(\theta)}{\pi L_s\sqrt{C_0 h\nu_{01}}}\hat{\delta\Phi}\right]-\frac{h}{2}\hat{\sigma}_z\left[\left(\frac{\partial\nu_{01}}{\partial I_b}\right)\hat{\delta I}+\left(\frac{\partial\nu_{01}}{\partial\Phi_b}\right)\hat{\delta\Phi}\right], \quad (1)$$

where η is the inductance asymmetry parameter (see below), $r_I(\theta)=\cos\theta+\eta\sin\theta$, $r_\Phi(\theta)=\sin\theta$, and θ is the angle between the escape and the mean slope directions in the 2D potential.[11,15] To first order, the transverse noise proportional to $\hat{\sigma}_x$ only induces depolarization. The longitudinal term proportional to $\hat{\sigma}_z$ induces "pure" dephasing. The qubit sensitivity to longitudinal noise is given by the partial derivatives $(\partial\nu_{01}/\partial I_b)$ and $(\partial\nu_{01}/\partial\Phi_b)$. They depend strongly on the experimental working point and increase near the critical current.

The measured SQUID consists of two large aluminum JJs of 15 μm^2 area ($I_0=1.242$ μA and $C_0=0.56$ pF) enclosing a 350 μm^2-area superconducting loop. The two SQUID branches of inductances L_1 and L_2 contribute to the total loop inductance $L_s=280$ pH with the asymmetry parameter $\eta=(L_1-L_2)/L_s=0.414$. The immediate electromagnetic environment of the SQUID is designed to decouple the circuit from the external world. It consists of two cascaded filters [see Fig. 1(b)]. A large on-chip inductance $L_{oc}=9$ nH is made of two long and thin superconducting wires. L_{oc}, derived from the normal state resistance, is dominated by the kinetic inductance. The gold thin film parallel capacitor, $C_g\approx150$ pF, introduces a finite resistor. Its dc value at 30 mK is $R_g=0.1$ Ω giving the gold resistivity $\rho_g=1.2\times10^{-8}$ Ω m. The second filter consists of the bounding wires, with an estimated inductance $L_f=3$ nH, and a surface mounted (SMC) capacitor $C_{\mathrm{SMC}}=2$ nF and four 500 Ω SMC resistors. The nominal room temperature high frequency signal (microwave and fast dc pulses) is guided by a 50 Ω coaxial line, attenuated twice by 20 dB (at 1.5 K and 30 mK) before reaching the SQUID through a mutual inductance $M_s=1.3$ pH. Special care was taken both in magnetic shielding (soft iron and mu-metal shield at room temperature, superconducting shield at 1.5 K) and in bias lines filtering.[13] All these electrical parameters were determined independently.[11] Our environment model predicts two resonances [resistance dips in Fig. 1(c)]. They were observed in a similar setup and the associated resonance frequencies were in precise agreement with the model.

The current noise through the SQUID comes mostly from its immediate environment thermalized at $T=30$ mK ($\nu_T\equiv k_BT/h=600$ MHz$\ll\nu_{01}$). The quantum spectral density of the current noise, $S_I(\nu)$ in this environment is set by the fluctuation-dissipation theorem: $S_I(\nu)=h\nu\left[\coth\left(\frac{h\nu}{2k_BT}\right)+1\right]R_{\mathrm{eff}}(\nu)^{-1}$, where $R_{\mathrm{eff}}(\nu)^{-1}$ is the real part of the environment circuit admittance. $R_{\mathrm{eff}}(\nu)$ is calculated using the electrical circuit shown in Fig. 1(b). and is plotted in Fig. 1(c). To a good approximation, the root mean square (rms) current fluctuations are of order $\sqrt{k_BT/L_{\mathrm{oc}}}=6$ nA. Most of the noise is peaked around 30 MHz, a frequency much smaller than ν_T. A simple estimate of the flux noise produced by the inductive coupling to the 50 Ω coaxial line shows it can be neglected in the following.

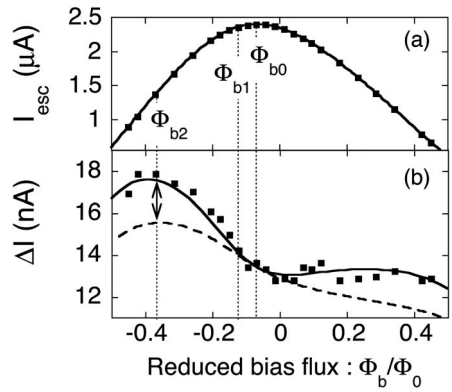

FIG. 2. (a) Measured escape current (dots) vs external applied flux fitted to the MQT theory (solid line) at 30 mK. (b) The width of the probability distribution $P_{esc}(I_b)$ (dots) fitted to the 2D MQT predictions. The solid curve takes the low frequency flux noise into account while the dashed line does not. At bias flux Φ_{b0} (respectively, Φ_{b1}) the sensitivity to flux noise is zero (respectively, small) while it is maximum at Φ_{b2}.

The escape probability $P_{\mathrm{esc}}(I_b)$ out of the superconducting states is measured at fixed flux using dc current pulses with $\Delta t=50$ μs duration and I_b amplitude. Each measurement involves 5000 identical current pulses and the total acquisition time is $T_{\mathrm{m}}=10$ s. The escape current I_{esc} is defined as the current I_b where the escape probability $P_{esc}(I_b)=0.5$ and the width of the switching curve $\Delta I=I_h-I_l$ as the difference between the currents where $P_{esc}(I_h)=0.9$ and $P_{esc}(I_l)=0.1$. In Fig. 2, the dependence of I_{esc} and ΔI on Φ_b are plotted. The SQUID parameters I_0, L_s, and η are deduced from the fit of the escape current curve $I_{\mathrm{esc}}(\Phi_b)$. C_0 is obtained from spectroscopy measurements, detailed later.

Moreover, escape measurements are a sensitive tool to characterize noise (frequency range and amplitude). If noise frequencies exceed the inverse of a current pulse duration Δt^{-1}, the tunnel rate fluctuates during each current pulse. The escape probability is controlled by the average $\langle\Gamma_0\rangle$ escape rate in the frequency window $[\Delta t^{-1},\ \nu_T]$: $P_{\mathrm{esc}}=1-\exp[-\langle\Gamma_0(I_b+\delta I,\Phi_b+\delta\Phi)\rangle\Delta t]$.[16,11] The current noise produced by the electrical environment lies in this frequency interval. Its effect is to decrease $I_{\mathrm{esc}}(\Phi_b)$ by about 6 nA, the rms current fluctuations [unobservable in Fig. 2(a)]. Similarly, the width of the switching curve is not affected.

On the other hand, if noise frequencies are slower than Δt^{-1}, the tunnel rate is constant during a pulse, but fluctuates from pulse to pulse. In this limit, the escape probability becomes $P_{\mathrm{esc}}=\langle1-\exp[-\Gamma_0(I_b+\delta I,\Phi_b+\delta\Phi)\Delta t]\rangle$, where the statistical average $\langle\ \rangle$ is now in the frequency range T_{m}^{-1} to Δt^{-1}. To the first order, low frequency noise does not affect I_{esc}, but increases the width ΔI. Thus ΔI is the best quantity

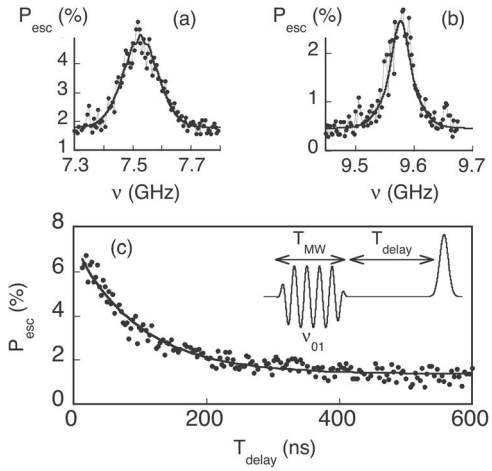

FIG. 3. (a) and (b) Escape probability vs applied microwave frequency at two different working points (I_b=2.288 μA, Φ_{b1}= −0.117 Φ_0) and (I_b=0.946 μA, Φ_{b2}=−0.368 Φ_0), respectively. The points are experimental data and the continuous lines are the Fourier transforms of $f_{\rm coh}(t)$ (see text). (c) Measured escape probability vs delay time (dots) fitted to an exponential law with T_1=95ns (continuous line). The inset specifies the timing of the measurement pulse which follows the MW excitation pulse.

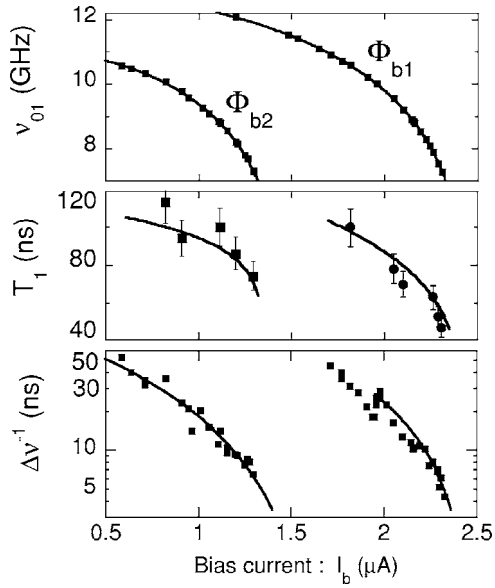

FIG. 4. Resonant transition frequency (a), relaxation time (b), and microwave width (c) as function of bias current at Φ_{b1} =−0.117 Φ_0 and Φ_{b2}=−0.368 Φ_0, respectively, right and left curves. Symbols correspond to experiments and continuous line to model predictions.

to probe the origin and the magnitude of the low frequency fluctuations: if the flux Φ_b is set at the value Φ_{b0} which maximizes I_c, the SQUID is only sensitive to current fluctuations since $\frac{\partial I_{\rm esc}}{\partial \Phi_b}=0$. In the vicinity of this flux, the measured width is explained by the usual MQT theory. Hence the measured RMS current fluctuations in the $[T_{\rm m}^{-1},\ \Delta t^{-1}]$ interval (low frequency current noise) is below 0.5 nA, the error bar in ΔI measurements. This is consistent with the 0.1 nA rms value derived from the spectral density of noise at frequencies below Δt^{-1}. For other applied fluxes, the width is slightly larger than MQT predicts, indicating a residual low frequency flux noise. The dependence of ΔI on Φ_b shown in Fig. 2(b) is explained by a Gaussian low frequency flux noise. Its rms amplitude, $\langle \delta\Phi_{LF}^2\rangle^{1/2}=5.5\times 10^{-4}\ \Phi_0$, is extracted from the fit shown in Fig. 2(b) and is attributed to the flux noise in the [100 mHz, 20 kHz] frequency interval. This noise may be produced by uncontrolled vortices trapped in the four aluminum contact pads located at a 0.5 mm distance from the SQUID.

Hereafter we discuss dephasing and relaxation induced by the noise sources previously identified. These incoherent processes are experimentally studied by spectroscopy and energy relaxation measurement. As described in Ref. 5, a MW flux pulse is applied followed by a 2 ns duration dc flux pulse to perform a fast but adiabatic measurement of the quantum state of the SQUID [Fig. 3(c) inset]. The duration T_{MW}=300 ns of MW pulses is sufficient to reach the stationary state where the population p_1 of the level $|1\rangle$ only depends on ν and the MW amplitude ν_R. ν_R was calibrated using Rabi like oscillations.[5] In the experiments discussed below, ν_R (∼5 MHz) is at least one order of magnitude smaller than the anharmonicity of the potential well ($\nu_{01}-\nu_{12}$). The population of level $|2\rangle$ is negligible and the measured escape probability $P_{\rm esc}$ induced by the dc flux pulse reads $P_{\rm esc}=P_{\rm esc}^{|0\rangle}+(P_{\rm esc}^{|1\rangle}-P_{\rm esc}^{|0\rangle})\times p_1(\nu,\nu_R)$. $P_{\rm esc}^{|n\rangle}$ denotes the escape probability out of the pure state $|n\rangle$. In Figs. 3(a) and 3(b), the escape probability versus microwave frequency ν is plotted at two different biasing points. These experimental curves present a single resonant peak; its position and full width at half maximum define the resonant frequency ν_{01} and $\Delta\nu$. Resonance lines do not show the resonance splitting observed in Ref. 7. Spectroscopy experiments were performed in the linear regime ($\nu_R \ll \Delta\nu$) where $\Delta\nu$ is independent of ν_R and p_1 is necessarily small (a few percent). Relaxation measurements were performed by populating the $|1\rangle$ state with MW tuned at ν_{01} during a time $T_{\rm MW}$=300 ns, and measuring its population with increasing time delay $T_{\rm delay}$ after the end of the MW pulse. As shown in Fig. 3(c), the escape probability follows an exponential relaxation with a characteristic time T_1. In Fig. 4, measured resonant frequency ν_{01}, relaxation time T_1 and the inverse of microwave width $\Delta\nu^{-1}$ are plotted versus current bias for the two different applied fluxes Φ_{b1} (close to Φ_{b0}) and Φ_{b2} shown in Fig. 2. ν_{01}, T_1, and $\Delta\nu^{-1}$ decrease as I_b gets closer to I_c. For these fluxes, the ν_{01} dependence is well described by the semiclassical formulas for a cubic potential[17] whose fit determines C_0.

The depolarization rate T_1^{-1} is given by the sum $T_1^{-1}=\Gamma_R+\Gamma_E$ of the relaxation Γ_R and the excitation Γ_E rates. These two rates are calculated using Fermi's golden rule. At low temperature, excitation can be neglected and Γ_R reads

$$\Gamma_R=\frac{r_I^2(\theta)}{4C_0h\nu_{01}}S_I(\nu_{01})+\frac{r_\Phi^2(\theta)}{L_s^2C_0h\nu_{01}}S_\Phi(\nu_{01}).$$

Neglecting the high frequency part of the flux noise, one obtains $T_1=2R_{\rm eff}(\nu_{01})C_0/r_I^2(\theta)$ where $R_{\rm eff}(\nu_{01})=(2\pi L_{oc}\nu_{01})^2/R_g(\nu_{01})$. $R_g(\nu)=\alpha R_s$ is the high frequency re-

sistance of the gold capacitor where $R_s=\sqrt{\pi\mu_0\rho_g\nu}$ is the surface resistance and α is a dimensionless geometrical parameter. The T_1 vs I_b dependence is well fitted with $\alpha=200$ as the only adjustable parameter [Fig. 4(b)]. This value is the right order of magnitude for the geometry of the gold capacitor.

Relaxation alone is too weak to explain the value of $\Delta\nu$ and "pure" dephasing also contributes to the linewidths. First, we consider the time evolution of the reduced density matrix in the basis $\{|0\rangle,|1\rangle\}$ in the absence of MW. The linear coupling to noise sources induces a time decay of the amplitude $f_{\mathrm{coh}}(t)$ of the coherence terms. Since current and flux noises are independent, $f_{\mathrm{coh}}(t)$ is factorized as $f_{\mathrm{coh}}(t)=f_I(t)f_\Phi(t)\exp(-t/2T_1)$ where $f_I(t)$ and $f_\Phi(t)$ are, respectively, the "pure" dephasing contributions due to current and flux noises.

The current contribution is given by the well-known Gaussian noise formula:[18,10] $f_I(t)=\exp\left[-\frac{1}{2}t^2\times\left(2\pi\frac{\partial\nu_{01}}{\partial I_b}\right)^2\times\int_{-\infty}^{+\infty}d\nu S_I(\nu)\mathrm{sinc}(\pi\nu t)\right]$, where $(\partial\nu_{01}/\partial I_b)$ is extracted directly from the slope of the experimental curve of Fig. 4(a). We neglect flux noise contributions with frequencies higher than 20 kHz. Since the acquisition time of absorption spectra and escape measurements are similar, the SQUID undergoes the same rms flux fluctuations in the two experiments. In these conditions, $f_\Phi(t)$ takes the simple Gaussian form: $f_\Phi(t)=\exp\left[-\frac{1}{2}t^2\times\left(2\pi\frac{\partial\nu_{01}}{\partial\Phi_b}\right)^2\langle\delta\Phi_{LF}^2\rangle\right]$. $(\partial\nu_{01}/\partial\Phi_b)$ was computed using the known electrical parameters of the SQUID.[19]

Within the linear response, the shape of the resonance curve is proportional to the Fourier transform (FT) of $f_{\mathrm{coh}}(t)$.[10] Resonance curves in Fig. 3(a) and 3(b) are fitted using $P_{esc}-P_{esc}^{|0\rangle}\propto\mathrm{FT}\{f_{\mathrm{coh}}\}(\nu-\nu_{01})$. Our model explains the shape of the experimental curves. In Fig. 4(c), the theoretical width $\Delta\nu$ extracted from the curve $\mathrm{FT}\{f_{\mathrm{coh}}\}(\nu)$ is in very good agreement with experimental data with no new free parameters (α is extracted from T_1 fit). When I_b gets close to I_c, the partial derivatives $(\partial\nu_{01}/\partial I_b)$ and $(\partial\nu_{01}/\partial\Phi_b)$ increase: the noise sensitivity increases and $\Delta\nu$ broadens. The broadening is dominated by the current noise. For bias points corresponding to Φ_{b2}, the flux noise contributes about 10% of the width. For a bias flux equal to Φ_{b1}, the width is entirely given by current noise. At this flux, for $I_b<1.95$ μA, our model predicts satellite resonances around ν_{01} which are not observed. Other noise mechanism may blur the predicted satellite peaks.

In conclusion, we have shown how the flux and current noise present in this controlled quantum circuit can be separately identified. We measured the decoherence times at low microwave power where the quantum circuit can be reduced to a two level system. Analyzing the coupling of the SQUID to the known noise sources, the measured relaxation times and the resonance width can be fully understood.

We thank E. Colin, V. H. Dao, K. Hasselbach, F. W. J Hekking, B. Pannetier, P. E. Roche, J. Schrieff, and A. Shnirman for very useful discussions. This work was supported by two ACI programs and by the Institut de Physique de la Matière Condensée.

[1] T. Yamamoto *et al.*, Nature (London) **425**, 941 (2003).
[2] D. Vion *et al.*, Science **296**, 886 (2002).
[3] J. M. Martinis, S. Nam, J. Aumentado, and C. Urbina, Phys. Rev. Lett. **89**, 117901 (2002).
[4] I. Chiorescu *et al.*, Science **299**, 1869 (2003).
[5] J. Claudon, F. Balestro, F. W. J. Hekking, and O. Buison, Phys. Rev. Lett. **93**, 187003 (2004).
[6] A. Wallraff *et al.*, Nature (London) **431**, 162 (2004).
[7] K. B. Cooper, M. Steffen, R. McDermott, R. W. Simmonds, S. Oh, D. A. Hite, D. P. Pappas, and J. M. Martinis, Phys. Rev. Lett. **93**, 180401 (2004).
[8] O. Astafiev, Y. A. Pashkin, Y. Nakamura, T. Yamamoto, and J. S. Tsai, Phys. Rev. Lett. **93**, 267007 (2004).
[9] P. Bertet *et al.*, Phys. Rev. Lett. **95**, 257002 (2005).
[10] G. Ithier *et al.*, Phys. Rev. B **72**, 134519 (2005).
[11] F. Balestro, J. Claudon, J. P. Pekola, and O. Buisson, Phys. Rev. Lett. **91**, 158301 (2003).
[12] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Ann. Phys. **149**, 374 (1983).
[13] J. Claudon, Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 2005.
[14] The quantum spectral density is defined as follows: $S_x(\nu)=\int dt\langle\delta\hat{x}(0)\delta\hat{x}(\tau)\rangle e^{-i2\pi\nu\tau}$.
[15] V. Lefevre-Seguin, E. Turlot, C. Urbina, D. Esteve, and M. H. Devoret, Phys. Rev. B **46**, 5507 (1992).
[16] J. M. Martinis and H. Grabert, Phys. Rev. B **38**, 2371 (1988).
[17] A. I. Larkin and Y. N. Ovchinnikov, Sov. Phys. JETP **64**, 185 (1986).
[18] A. Cottet, P.hD. thesis, Université Paris VI, 2002.
[19] It can be roughly estimated using $(\partial\nu_{01}/\partial\Phi_b)\approx(\partial\nu_{01}/\partial I_b)\times(\mathrm{d}I_c/\mathrm{d}\Phi_b)$.

Nanosecond quantum state detection in a current-biased dc SQUID

J. Claudon,* A. Fay, E. Hoskinson, and O. Buisson
Institut NEEL, CNRS & Université Joseph Fourier, 25 Avenue des Martyrs, BP 166, 38042 Grenoble, France
(Received 19 February 2007; revised manuscript received 24 May 2007; published 13 July 2007)

This paper presents our procedure to measure the quantum state of a dc superconducting quantum interference device (SQUID) within a few nanoseconds, using an adiabatic dc flux pulse. Detection of the ground state is governed by standard macroscopic quantum tunneling (MQT) theory, with a small correction due to residual noise in the bias current. In the two-level limit, where the SQUID constitutes a phase qubit, an observed contrast of 0.54 indicates a significant loss in contrast compared to the MQT prediction. It is attributed to spurious depolarization (loss of excited state occupancy) during the leading edge of the adiabatic flux measurement pulse. We give a simple phenomenological relaxation model which is able to predict the observed contrast of multilevel Rabi oscillations for various microwave amplitudes.

DOI: 10.1103/PhysRevB.76.024508 PACS number(s): 85.25.Dq, 85.25.Cp, 03.67.Lx

I. INTRODUCTION

The last few years have shown significant breakthrough in the domain of superconducting Josephson qubits. Coherent manipulations have been achieved on a single qubit with various designs.[1–5] Recently, coupling between two qubits has been demonstrated[6–8] and quantum logical gates have been realized.[9,10]

The dc superconducting quantum interference device (SQUID) is a versatile quantum circuit displaying several energy levels with tunable anharmonicity. In the high anharmonicity limit, it becomes a phase qubit whose decoherence has been characterized.[11] With smaller anharmonicity, microwave excitation induces complex dynamics which involve many levels.[12]

Readout of the quantum state is one of the key issues in quantum circuit operation. As proposed in Ref. 13 and experimentally implemented in Ref. 12, our measurement of the quantum state of the dc SQUID is performed within a few nanoseconds, using adiabatic dc flux pulses. Depending on the SQUID state, the pulse implements a selective switch to the resistive state. The dc SQUID design thus combines two functionalities: the quantum circuit and the state measurement. A fast measurement allows for a time domain study of fast dynamics. A similar measurement procedure for a phase qubit, developed independently, has been used to investigate the coupling to spurious two-level fluctuators[14] and more recently the coupling between two qubits.[8] Moreover, speed also minimizes contrast losses due to depolarization during the measurement stage. In this paper, we present a complete characterization of our measurement performance, both in the two-level and multilevel limits.

The paper is organized as follows. Section I introduces the physics of the SQUID and discusses its operation as a quantum circuit. The experimental implementation is presented in Sec. II, focusing on the microwave part which is a key point of the experimental setup. In the third part, results on the ground state detection are presented. Except a small correction due to residual noise on bias parameters, the experiment is consistent with macroscopic quantum tunneling theory. Detection in the two-level limit and measurement in the multilevel limit are then successively presented. A simple relaxation model successfully accounts for measurement performances. To finish, Sec. IV contains concluding remarks and improvement perspectives.

II. THE CURRENT-BIASED DC SQUID

The dc SQUID, presented in Fig. 1(a), consists of two identical Josephson junctions (JJs), each with a critical current I_0 and a capacitance C_0. The junctions are embedded in a superconducting loop of total inductance L_s, which is unequally distributed between the two arms of the SQUID. The asymmetry in inductance is characterized by the parameter $\eta=(L_1-L_2)/L_s$, where L_1 and L_2 are, respectively, the inductance of the first and second arms. In our circuit, the Josephson energy $E_J=(\Phi_0/2\pi)I_0$ is more than 3 orders of magnitude greater than the Cooper pair Coulomb energy $E_c=(2e)^2/2C_0$ ($\Phi_0=h/2e$ is the superconducting flux quantum). In this limit, the two superconducting phase differences φ_1 and φ_2 across the two Josephson junctions are the natural variables to describe the dynamics of the system. This two-dimensional phase dynamics can be treated as that of a fictitious particle of mass $m=2C_0(\Phi_0/2\pi)^2$ moving in a two-dimensional potential,[15]

$$U(x,y) = 2E_J\left[-\left(\frac{I_b}{2I_0}\right)(x+\eta y) - \cos x \cos y + b\left(y - \pi\frac{\Phi_b}{\Phi_0}\right)^2\right], \quad (1)$$

where $x=\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)$ and $y=\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)$. The shape of the potential, which contains valleys and mountains, is experimentally controlled through the bias current I_b and the bias flux Φ_b threading the superconducting loop. Here, the inductance coupling parameter $b=\Phi_0/(2\pi L_s I_0)$ is of order unity. With the values of I_b and Φ_b used in our experiments, the potential surface displays only one type of local minimum. They are separated from each other by a saddle point, where the particle can escape.[16,17] A contour plot of the potential surface for a typical bias point is presented in Fig. 1(b). Along the escape direction, which makes an angle θ with the x axis, the potential is cubic and is completely characterized by its bot-

 ©2007 The American Physical Society

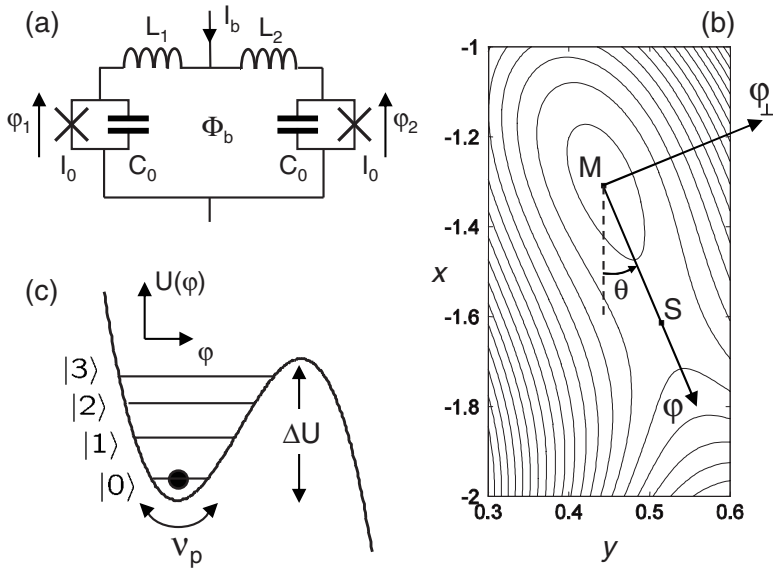

FIG. 1. (a) Electrical schematic of the dc SQUID. In the superconducting state, this circuit can be seen as two inductively coupled resonators. The two pure Josephson dipoles, symbolized by crosses, introduce two nonlinear inductances controlled by the bias current I_b and the loop current which tends to screen the external applied flux Φ_b. (b) Contour plot of the potential surface $U(x,y)$ versus $x=\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_2)$ and $y=\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_2)$ for a typical bias point; (x) and (y) scales are identical, and energy scale is arbitrary. Along the escape direction (φ), which joins the local minimum M and the only saddle point S, the potential is cubic (c). The quantum states under study are vibration states within the potential well. In the transverse direction ($\varphi_\perp$), the potential is roughly quadratic with a bottom frequency which is about twice ν_p. Coupling between the escape and the transverse direction is neglected.

tom frequency ν_p and a barrier height ΔU [Fig. 1(c)]. These two quantities depend on the magnetic flux and vanish at the SQUID's critical current $I_c(\Phi_b)$. We assume complete separation of the variables along the escape direction and the transverse one by neglecting the coupling terms between these two directions. In this approximation, the phase dynamics of the SQUID along the escape direction is similar to the phase dynamics of a current-biased single Josephson junction. The parameters ΔU and ν_p, explicitly given in Appendix A, are renormalized, thereby taking into account the two-dimensional nature of the potential.

For bias currents $I_b<I_c$, the particle is trapped in a local minimum and its quantum dynamics is described by the Hamiltonian

$$\hat{H}_0=\frac{1}{2}h\nu_p[\hat{p}_\varphi^2+\hat{\varphi}^2]-\sigma h\nu_p\hat{\varphi}^3. \tag{2}$$

$\hat{\varphi}=(2\pi\sqrt{m\nu_p/h})\hat{\phi}$ represents the reduced phase operator associated with the phase $\hat{\phi}=\cos\theta\hat{x}+\sin\theta\hat{y}$ along the escape direction. $\hat{p}_\varphi$ is the reduced momentum conjugated to $\hat{\varphi}$. The relative magnitude σ of the cubic term compared to the harmonic term is related to the barrier height $\Delta U=h\nu_p/54\sigma^2$. For I_b below I_c, several low-lying quantum states are found near the local minimum. These states, describing the oscillatory motion within the anharmonic potential, are denoted $|n\rangle$ for the nth level, with $n=0,1,2,\ldots$. The corresponding energies E_n were calculated in Ref. 18. The transition frequency associated with the transition $n\rightarrow k$ is denoted ν_{nk} in the following. Since energy levels are trapped in a finite height potential barrier, they are metastable. Escape out of the potential well is possible both by tunneling and thermal activation. For temperatures well below $T^*=h\nu_p/(2\pi k_B)$, the so-called crossover temperature, the thermal process can be neglected.[19] On the time scale of the experiment, only the three highest energy levels, closest to the top of the barrier, undergo a significant tunneling effect. Lower energy levels are stable.

Our procedure to perform quantum experiments consists of the repetition of an elementary sequence, which is decomposed into four successive steps. A bias current I_b is first switched on through the SQUID at fixed magnetic flux Φ_b. The working point (I_b,Φ_b) defines the geometry of the potential well. The I_b rise time is slow enough to induce adiabatic transformation of the potential and the circuit is initially in the ground state $|0\rangle$. A microwave flux pulse characterized by its frequency ν and amplitude $\Phi_{\mu w}$ manipulates the quantum state of the system. It induces a time-dependent perturbation term $-ha_{\mu w}\sqrt{2}\cos(2\pi\nu t)\hat{\varphi}$ in the Hamiltonian which couples neighboring levels. In this expression, $a_{\mu w}$ is directly proportional to $\Phi_{\mu w}$ and corresponds to the frequency of the Rabi oscillation between $|0\rangle$ and $|1\rangle$ for an excitation tuned on ν_{01} (see Appendix B). Then, a dc flux pulse of amplitude Φ_m is applied and brings the system to the measuring point $(I_b,\Phi_b+\Phi_m)$. This flux pulse adiabatically reduces the barrier height and allows tunneling escape of the localized states to finite voltage states during a time Δt of the order of a few nanoseconds. As discussed in Ref. 13, with precise adjustment of Φ_m it is theoretically possible to induce a selective escape of excited states. Because the SQUID is hysteretic, the zero and finite voltage states are stable and the result of the measurement can be read out by monitoring the voltage V_s across the dc SQUID. Escape out of the well corresponds to the detection of a voltage which is twice the superconducting gap of the circuit material. The current bias I_b must be switched off to reset the circuit in the ground state. This elementary sequence is repeated to extract the occupancies of the excited states.

This paper is devoted to the characterization of the nanosecond measurement procedure. The experiments presented here only involve levels $|0\rangle$ to $|3\rangle$. Denoting p_n the population of the nth level, we thus restrict the discussion to states characterized by the set of occupancies $\{p_0,p_1,p_2,p_3\}$; generalization to higher energy levels is straightforward. For such a state, the escape probability P_e out of the potential well reads

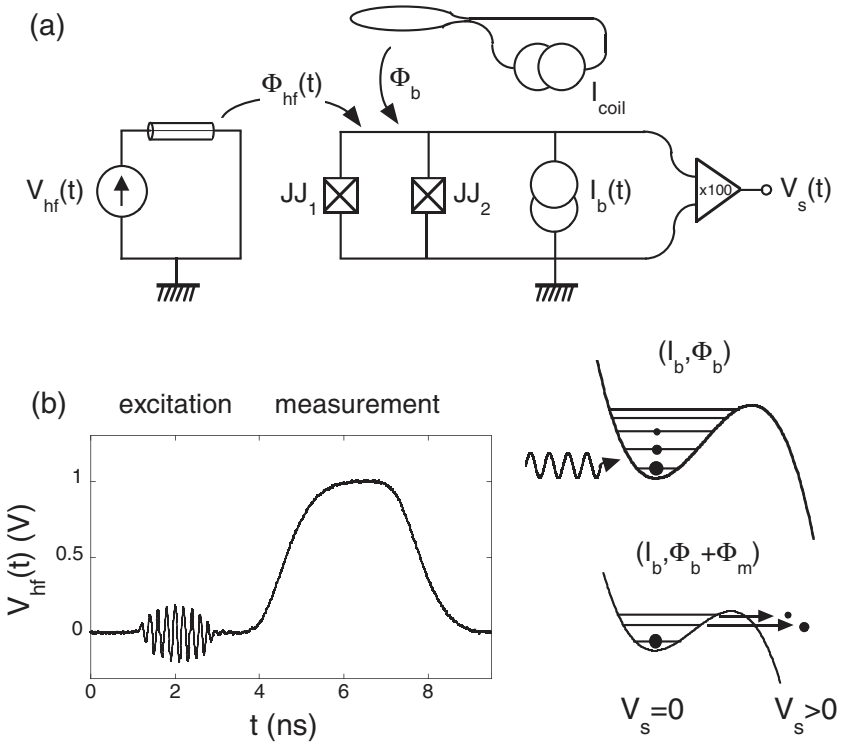

FIG. 2. Principle of the SQUID operation. (a) Schematic of the electrical circuit. The capacitively shunted JJs are symbolized by a square with diagonals. In our experiments, I_b is first switched on through the SQUID at fixed magnetic flux Φ_b, defining the shape of the potential well. A high frequency flux signal is then applied on the superconducting loop with a microwave antenna. A digital sampling oscilloscope record of this signal is presented in (b). It is composed of a microwave pulse which induces transition between adjacent energy levels, followed by a measuring dc pulse which adiabatically reduces the barrier height and induces a selective tunneling escape of excited states. Escape is detected by a voltage V_s across the circuit amplified at room temperature. At the end of the sequence, I_b is switched off and the circuit is reset to the superconducting ground state.

$$P_e = P_e^0 + \sum_{n=1}^{3} (P_e^n - P_e^0) p_n. \tag{3}$$

$P_e^n(\Phi_m) = 1 - \exp[-\Gamma_n(\Phi_m)\Delta t]$ is the escape probability of the state $|n\rangle$. From the measurement point of view, P_e^n corresponds to the probability to detect this level when it is fully populated. The tunneling escape rate Γ_n depends on the geometry of the potential barrier which is in turn fixed by the measuring point $(I_b, \Phi_b + \Phi_m)$. Escape rates are obtained from semiclassical calculations. Particularly, Γ_0 is given by the usual expression for macroscopic quantum tunneling of the ground state of a single Josephson junction,

$$\Gamma_0 = 12\sqrt{6\pi \frac{\Delta U}{h\nu_p}}\,\nu_p \exp\left(-\frac{36}{5}\frac{\Delta U}{h\nu_p}\right), \tag{4}$$

and the contrast in escape rate between two successive levels is $\Gamma_{n+1}/\Gamma_n = \exp(2\pi) \approx 535$.[18] In the following, we refer to the plot of P_e^n versus Φ_m as the escape curve of level $|n\rangle$.

In the two-level limit, the detection contrast between states $|0\rangle$ and $|1\rangle$ is $P_e^1 - P_e^0$. The measuring amplitude which optimizes the detection probability allows a detection contrast of 0.98 and corresponds to $P_e^0 = 0.02$. With these settings, in the general case where more than two levels are populated in the system, the escape probability is practically equal to the population of excited states,

$$P_e = 0.02 + 0.98 p_1 + p_2 + p_3. \tag{5}$$

Moreover, it is possible to find a lower pulse amplitude for which the ground and first excited states remain trapped, but states $|2\rangle$ and $|3\rangle$ escape with close to 100% probability. Repeating this procedure with successively smaller pulse amplitudes, one can measure $p_1 + p_2 + p_3$, $p_2 + p_3$, and p_3 and therefore reconstruct all level occupancies.

Our measurement is one of the fastest implemented in Josephson quantum circuits. The experimental measuring pulse has a rise time $\tau = 1.6$ ns and a duration Δt which can be as short as 1.5 ns (see Sec. III for the exact definition of τ and Δt). Such short timings raise the question of possible nonadiabatic effects, namely, transitions between energy levels which modify the level occupancies. This has been recently addressed for a rf SQUID which is a very similar device.[20] The nonadiabatic error Q can be directly quantified as $Q = |p_0(0) - p_0(\text{top})|$, where $p_0(0)$ is the ground state population before the measuring pulse and $p_0(\text{top})$ is the ground state population at the time corresponding to the maximum pulse amplitude. Q depends on the measurement pulse characteristics (rise time, amplitude, and pulse shape) and on the particular quantum state which is measured. Among the various pulse shapes investigated by the authors of Ref. 20, the expression $\Phi(t) \propto 1 - \cos^4\left(\frac{\pi}{2}\frac{t}{1.71\tau}\right)$ describes well our experimental pulse rise, as presented in Fig. 2, with $\tau = 1.6$ ns. For

a potential well which is slightly shallower than the one studied in this paper, the authors of Ref. 20 find that the maximum Q value is lower than 10^{-3}. We can therefore neglect nonadiabatic errors.

A fast measurement speed, characterized by a short τ, Δt, and delay between the microwave excitation and the measurement pulse, is crucial to efficiently detect states with short lifetimes. This is especially true for a multilevel system, since the relaxation rate of the excited state $|n\rangle$ scales as n. From this perspective, escape to the running state of a tilted washboard potential may have an advantage over the method used for the rf SQUID.[14] In that case, the fictitious particle escapes to another trapped state, which can interact strongly with the qubit levels if relaxation is insufficient. This leads to retrapping of the particle in the qubit states. This has been investigated numerically in Ref. 20: assuming an infinite T_1, the retrapping probability was found to be greater than 15%. In our case, the excited states escape to an unbound state of the tilted washboard potential. Retrapping is therefore much less likely, and faster quantum state measurement times are possible. The trade-off, however, is the generation of quasiparticles and heating that occurs in the resistive state. The need to wait until equilibrium is reestablished limits the measurement repetition rate.

III. EXPERIMENTAL SETUP

The measured circuit was realized using e-beam lithography and shadow evaporation of aluminum on an oxidized silicon chip. A scanning electron microscope picture of the circuit is presented in Fig. 3(b). The SQUID consists of two large JJs of 15 μm^2 area enclosing a 350 μm^2 area superconducting loop. Each Al/AlO$_x$/Al junction has a critical current I_0=1.242 μA and a capacitance C_0=0.56 pF. The two SQUID branches combine to give a total loop inductance L_s=280 pH with asymmetry parameter η=0.414. These electrical parameters are obtained by combining the analysis of two independent measurements. First, I_0, L_s, η, and an approximate value of C_0 are extracted from macroscopic quantum tunneling measurements, as discussed in Refs. 12 and 19. Second, spectroscopic measurements of the $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ transition frequency ν_{01} as a function of I_b are used to determine a precise value for C_0.[11,12] All measurements are performed with the sample at a temperature of 30 mK in a dilution fridge. Thermal energy is then small compared to the relevant energy scales of the circuit, namely, the Josephson energy $E_J = k_B \times 29.6$ K and the vibration quantum $\sqrt{E_J E_c} = k_B \times 442$ mK, with k_B the Boltzmann constant.

To avoid spurious microwave resonances, the chip is mounted in a shielded copper cavity whose cutoff frequency is above 20 GHz. The immediate electromagnetic environment of the SQUID, located in the microwave cavity, is designed to decouple the circuit from the external room temperature classical electrical apparatus. It consists of two cascaded filters. The first and most important includes a 9 nH on-chip inductance introduced by long on-chip superconducting thin wires and a gold thin film 150 pF parallel capacitor. The second filter consists of the bonding wires, with an estimated inductance of 3 nH, and a surface mounted

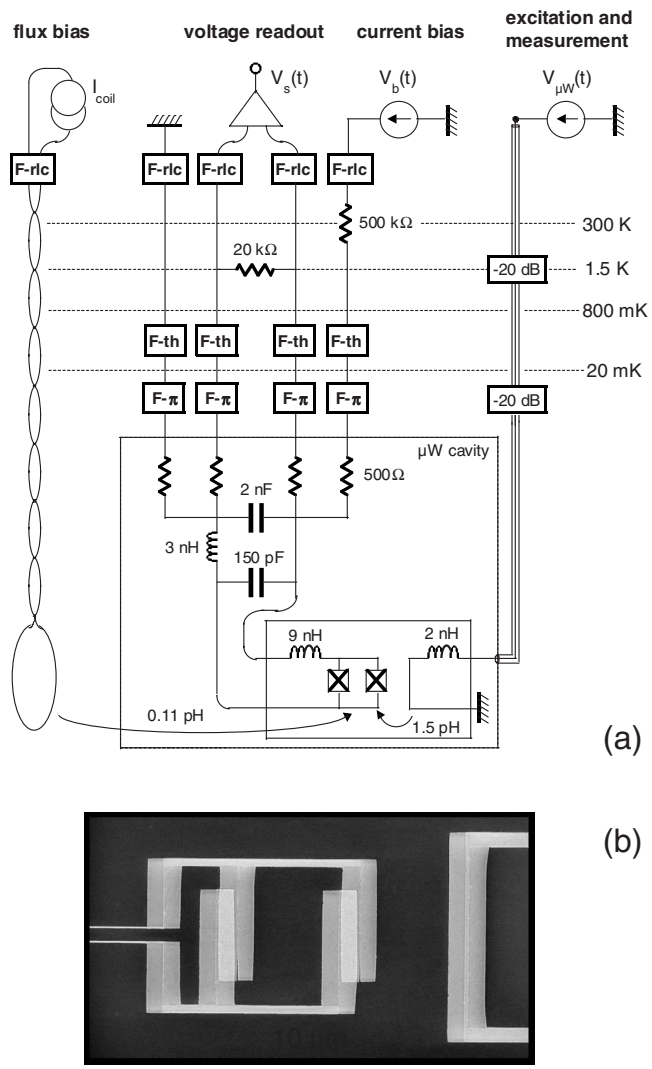

FIG. 3. (a) Schematics of the experimental setup with temperatures indicated on the right. "F-rlc" stands for a second order low-pass rlc filter, F-th is a 1 m lossy thermocoax, and "F-π" is composed of two cascaded π filters and 2 m of lossy thermocoax. "−20 dB" is a 50 Ω attenuator. (b) Scanning electron microscope picture of the SQUID. The circuit is obtained by shadow evaporation of two 15 nm aluminum layers; Josephson junctions appear in light gray color. The extremity of the 500 μm long thin current bias line is visible on the left: their width is between 200 and 300 nm. The end of the on-chip microwave antenna appears on the right.

2 nF capacitor. This electrical environment displays two low frequency resonances whose measured frequencies are consistent with the above parameters.[21] As illustrated in Fig. 3(a), special care was taken in bias line filtering, and the experimental setup includes several low temperature filters. Bias flux is applied with a copper coil cooled down to 30 mK. External low frequency flux fluctuations are screened with soft iron and Mumetal at room temperature and a superconducting lead shield at 1.5 K. The room temperature high frequency signal is guided by 50 Ω coax lines and attenuated twice by 20 dB at 1.5 K and 30 mK, before reaching the SQUID through an on-chip short circuit. The antenna is located 10 μm from the SQUID, leading to a

1.5 pH mutual inductance coupling. The microwave line is terminated by an inductance estimated to be 2 nH which introduces a supplementary 6 dB attenuation at 10 GHz. Special care was taken to minimize the coupling between the high frequency antenna and the bonding wire loops in the direct electrical environment of the SQUID.

The high frequency signal used in our experiments results from the combination of a microwave excitation pulse and a measurement dc pulse. The microwave pulse is generated by mixing continuous microwaves with a shaping dc pulse. We define the rise time as the duration to reach 95% of the peak amplitude starting from 5%. The duration is defined as the time interval where the pulse amplitude is at least 95% of the maximal amplitude. With this convention, the shaping pulse has a 0.8 ns rise time and a duration tunable from 1 ns to several milliseconds. The measurement pulse has a 1.6 ns rise time and a minimum duration of 1.6 ns. Both microwave shaping and measurement pulse are produced by two outputs of one dc pulse generator, allowing precise control of timing. In Fig. 2(c), a digital sampling oscilloscope record of the signal is presented. As a demonstration of signal generation performance, the duration of the microwave and measurement pulses has been reduced to the minimum: the whole sequence is then finished in less than 7 ns. Except in specific measurements, the delay between microwave and measurement is kept as short as 1 ns to minimize depolarization due to population relaxation. The microwave amplitude $a_{\mu w}$ can be tuned from 0 to 300 MHz. Depending on the bias point, the measuring pulse amplitude ranges between a few $10^{-2}\Phi_0$ and $2\times10^{-1}\Phi_0$.

To limit heating in the SQUID voltage state, a specific electronic circuit cuts the bias current to zero as soon as a finite voltage across the SQUID is detected. The voltage readout time, about 10 μs, is determined by the bandwidth of the strongly filtered voltage lines. With a wait of 1 ms after each voltage measurement to allow the sample to cool back down to base temperature, the overall repetition rate is about 1 kHz. The experiment sequence is repeated up to 5000 times such that the statistical noise on P_e has a theoretical standard deviation lower than 4×10^{-3}.

IV. EXPERIMENTAL RESULTS

In this section, we present an experimental characterization of the detection performances. All the results have been obtained at the working point $W_p=(2.222\ \mu\text{A},-0.117\Phi_0)$. The bias flux is close to the one which maximizes the critical current (see inset in Fig. 4) and W_p thus presents a low sensitivity to flux fluctuations. Using the electrical parameters of the SQUID, the characteristics of the potential well are calculated: $\nu_p=8.428$ GHz and $\Delta U=h\times71.1$ GHz. The well contains eight energy levels and the anharmonicity is $\nu_{01}-\nu_{12}=160$ MHz. The measuring pulse has a duration $\Delta t=4$ ns. Our setup allows for faster measurement, but this timing preserves a trapezoidal pulse shape with a well defined plateau. This simple shape makes the application of tunneling theory straightforward.

A. Detection of the ground state

Figure 4 shows a plot of the experimental detection probability P_e^0 of the ground state versus the measuring pulse amplitude. The measured curve is slightly wider than the MQT prediction [Eq. (4)]. To quantify this, we introduce the width $\Delta\Phi$ of the transition defined as the flux range between $P_e^0=0.05$ and $P_e^0=0.95$. MQT predicts $\Delta\Phi=7.46\times10^{-3}\Phi_0$, whereas the experimental value corresponds to $9.52\times10^{-3}\Phi_0$. As will be discussed below, this broadening is an effect of residual noise in the bias parameters.

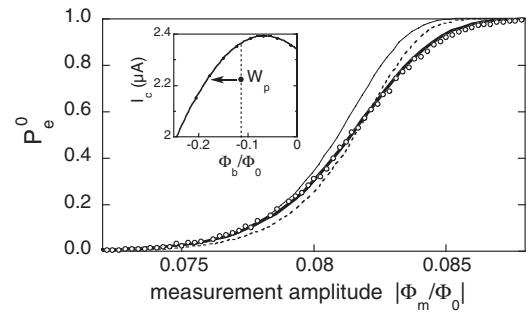

FIG. 4. Detection probability of the ground state versus the amplitude of a 4 ns measuring pulse. The fit of experimental data (○) to pure tunneling theory (dashed line) is in qualitative agreement with experiment. A closer fit is achieved by taking into account a low frequency current noise with rms value $\langle\delta I^2\rangle^{1/2}=5$ nA, which broadens the escape curve (thick solid line). The effect of a high frequency noise with the same rms fluctuations is also plotted (thin solid line). Inset: the working point W_p in the bias parameter space. A negative flux pulse brings the system close to the critical line $I_c(\Phi_b)$.

We restrict the discussion to adiabatic noise, whose frequencies are below the typical transition frequency of the SQUID, approximately given by ν_p. Such a perturbation does not induce transitions between levels. Without any loss of generality, we can focus on a current noise δI. The influence of the noise on the escape process depends strongly on the spectral composition of the noise. Two limiting situations can be distinguished. Fluctuations much slower than Δt^{-1} are called low frequency noise. In this case, Γ_0 is constant during one measurement pulse but randomly fluctuates from one measurement to the other. Assuming that 5000 repetitions are enough to explore all realizations of δI (ergodicity hypothesis), the actual measured probability is the average

$$\langle P_e^0\rangle_{lf}=1-\langle\exp[-\Gamma_0(I_b+\delta I,\Phi_b+\Phi_m)\Delta t]\rangle, \qquad (6)$$

where the brackets denote an averaging over the different values of δI. As illustrated in Fig. 4, this averaging broadens the escape curves. On the other hand, high frequency noise, with fluctuations much faster than Δt^{-1}, induce random fluctuations of escape rate during one measuring pulse. Following Ref. 22, the corresponding high frequency averaging reads

$$\langle P_e^0\rangle_{hf}=1-\exp[-\langle\Gamma_0(I_b+\delta I,\Phi_b+\Phi_m)\rangle\Delta t]. \qquad (7)$$

At lowest order, it just translates the escape curve (see Fig. 4) and does not modify its shape.

Thanks to the massive filtering and shielding of the experimental setup, noise on bias parameters is mostly generated by the close environment of the SQUID which is thermalized at 30 mK. The associated thermal frequency ν_T

$=k_BT/h=600$ MHz is much lower than the typical transition frequency $\nu_p \approx 8$ GHz. Therefore, the noise can be treated as an adiabatic perturbation.

In Ref. 11, escape measurements of the ground state induced by slow current pulses exhibited a low frequency flux noise for the same experimental setup and SQUID. Its rms value $\langle \delta\Phi^2 \rangle^{1/2}=5.5\times 10^{-4}\Phi_0$, corresponding to noise frequencies ranging from 100 mHz to 20 kHz, is largely insufficient to account for the broadening of the width. In the following, this flux noise is neglected.

The close electrical environment of the SQUID also generates Nyquist current fluctuations whose spectral density is easily derived from the quantum fluctuation-dissipation theorem. Integration between 100 mHz, the inverse of a 5000 repetition sequence duration, and $\Delta t^{-1}=250$ MHz gives $\langle \delta I^2 \rangle^{1/2}=5.5$ nA. The best fit to experimental data, presented in Fig. 4, is obtained when a low frequency Gaussian current noise with $\langle \delta I^2 \rangle^{1/2}=5$ nA is taken into account. This value is in good agreement with the previous calculation, and the whole analysis demonstrates that we control the measurement of the ground state on the nanosecond scale.

B. Detection in the two-level limit

In the two-level limit, the escape probability takes the simple form

$$P_e = \langle P_e^0 \rangle + [\langle P_e^1 \rangle - \langle P_e^0 \rangle] p_1. \tag{8}$$

The two detection probabilities $\langle P_e^0 \rangle$ and $\langle P_e^1 \rangle$ depend on Φ_m. They are calculated taking into account the low frequency current noise previously discussed (for clarity, the index $_{lf}$ is implicit). This noise slightly broadens the escape curves and thus affects the contrast of detection. The expected contrast $\langle P_e^1 \rangle - \langle P_e^0 \rangle$ is 0.95 (compared to the 0.98 predicted by the pure MQT regime). We note that high frequency noise does not change the separation between escape curves of states $|0\rangle$ and $|1\rangle$ and leaves the contrast of detection unchanged.

In the following, $|1\rangle$ is first populated with a low power microwave pulse whose 300 ns duration is sufficient to reach a stationary state, where p_1 depends only on ν and $a_{\mu w}$. The inset of Fig. 5 shows the resonance curve associated with the $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ transition for a microwave amplitude $a_{\mu w}=16.4$ MHz. A fit to a Gaussian line shape leads to $\nu_{01}=8.283$ GHz and a full width at half maximum $\Delta\nu=110$ MHz. For these typical microwave amplitudes, the $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ transition is not yet saturated and $\Delta\nu$ is dominated by dephasing processes. Relaxation plays a minor role and dephasing is mostly due to current noise, which leads to a roughly Gaussian line shape.[11] The location of the $|1\rangle \rightarrow |2\rangle$ transition, with resonant frequency $\nu_{12}=\nu_{01}-160$ MHz, is indicated by the vertical dashed line to the left of ν_{01} in the inset. This transition is not excited for such a microwave amplitude.

The main plot of Fig. 5 shows the escape probability after a microwave pulse tuned to ν_{01} versus the measurement amplitude Φ_m. The experimental detection probability of the ground state, already discussed, is also plotted. The contrast of the detection is directly proportional to the difference of these two curves. To help the interpretation, the calculated

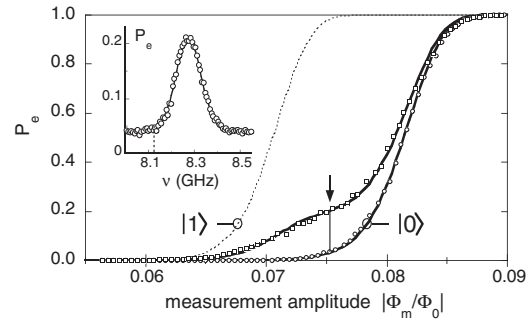

FIG. 5. Detection of level $|1\rangle$ partially populated with an $a_{\mu w}=16.4$ MHz amplitude microwave pulse (□). The solid line is a fit with p_1 as the only free parameter, giving $p_1=0.18$. The experimental detection probability of the ground state (○) and the calculated detection probability of $|1\rangle$ (dashed line) are also plotted. The optimal detection contrast, pointed to by an arrow, is obtained for $\Phi_m=-0.0754\Phi_0$; this setting corresponds to $P_e^0=0.03$. Inset: spectroscopy of the $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ transition for the same microwave amplitude. The circles are experimental data and the continuous line is a fit to a Gaussian line shape. The resonance peak is centered on $\nu_{01}=8.283$ GHz with a 110 MHz full width at half maximum.

detection probability of $|1\rangle$ is also shown. For small Φ_m, $|0\rangle$ and $|1\rangle$ remain trapped within the well. When Φ_m is increased, a clear bulge appears: it corresponds to the selective escape of state $|1\rangle$. At higher Φ_m, the potential barrier is so small that both levels escape. A fit to Eq. (8) quantitatively reproduces the data and gives $p_1=0.18$. The experimental optimization of the contrast leads to the amplitude $\Phi_m=-0.0754\Phi_0$ which corresponds to a ground state detection probability of about 0.03, a value consistent with theory. In the next paragraph, the measurement amplitude is tuned on this optimal value.

To quantify the detection contrast, we increased the microwave amplitude to fully saturate the $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ transition. The amplitude of the resonance peak versus the microwave amplitude is plotted in Fig. 6. The experimental data display two regimes separated by a saturation microwave amplitude of about 15 MHz. The low microwave amplitude regime is characterized by a square law dependence (solid line). Well

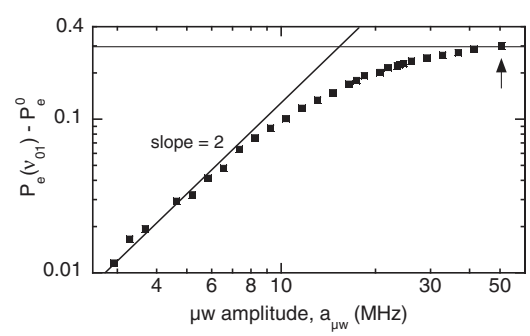

FIG. 6. Measured amplitude of the resonance peak, such as shown in the inset of Fig. 5, versus the microwave amplitude plotted with a double logarithmic scale. The measurement amplitude has been tuned to maximize the detection contrast. Well below a saturation microwave amplitude of about 15 MHz, the experimental data (■) display a square law dependence (solid line). In the high microwave amplitude regime, the $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ transition is saturated.

above 15 MHz, the resonance amplitude is nearly independent of the microwave amplitude: the $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ transition is saturated. We now focus on the measurement corresponding to $a_{\mu w}=50.5$ MHz, with an associated resonance amplitude equal to 0.30. Unfortunately, for such a high power, the microwave excitation is less selective and a slight population of $|2\rangle$ occurs. We note that this contamination could be avoided with a longer coherence time, since saturation could be achieved with a smaller drive strength. A rough estimation using the multilevel Rabi theory[12] gives for this contamination $p_2=0.06$. The corrected experimental population of $|1\rangle$ is thus $0.30-0.06=0.24$. The theoretical value is $0.50-0.06=0.44$. The ratio of these two quantities, equal to 0.54, is the optimal contrast of the detection. It is significantly smaller than the expected value of 0.95. To understand the reason for this contrast loss, we investigate in the next paragraph the effects of relaxation during the measurement flux pulse.

Relaxation can occur at three different stages of the experiment: between the microwave pulse and the flux ramping of the measurement pulse (1), during the flux ramping (2), and during the measurement stage (3).

(1) At the working point W_p, the energy relaxation of state $|1\rangle$ has been experimentally investigated using T_1 NMR-like measurements. $|1\rangle$ is first selectively populated with a 300 ns microwave pulse tuned at ν_{01}, with an amplitude $a_{\mu w}=16.4$ MHz. Then, the state occupancy is measured with increasing time delay after the end of the microwave pulse. The escape probability follows an exponential relaxation with a rate $1/\Gamma_R^1=60$ ns (not presented here; see Ref. 11 for a similar curve). Here, the delay between flux ramping and microwave is kept as short as 1 ns and the resulting depolarization is 1.6%.

(2) During the adiabatic flux ramp, ν_{01} decreases from 8.28 to 5.42 GHz. During this 2.8 GHz frequency sweep, the SQUID can couple to spurious resonators located in the dielectric tunnel barrier of the junctions, as demonstrated in Refs. 14, 23, and 24. We show evidence for the presence of these spurious resonators in the SQUID at the end of this paper.

Finally, at the top of the flux pulse, relaxation competes with tunneling, yielding a contrast loss given by the ratio Γ_R^1/Γ_1 of these two process rates. A fast measurement implies high tunneling rate and thus low depolarization. Indeed, at the measuring point, Γ_1 is typically 2.5 GHz. An extrapolation of the results presented in Ref. 11 to the transition frequency $\nu_{01}=5.42$ GHz suggests a relaxation rate of about 33 MHz. Therefore, the contrast loss is very small, about 1.3%.

In the following, we neglect depolarization before and after the flux ramping. We assume that depolarization during the flux ramping is entirely responsible for the observed contrast loss. We describe this process with the help of an effective relaxation rate Γ_{eff} from $|0\rangle$ to $|1\rangle$ which acts during the flux ramping time $\tau=1.6$ ns. The population $p_1(\tau)$ just after the ramp is related to the population p_1^0 after the microwave pulse by $p_1(\tau)=p_1^0\exp(-\Gamma_{\text{eff}}\tau)$. Γ_{eff}, the only free parameter of this phenomenological model, is deduced from the experimental detection contrast: $0.95\exp(-\Gamma_{\text{eff}}\tau)=0.54$ gives $\Gamma_{\text{eff}}=350$ MHz. In the next section, we show that this model can be extended to account for measurement performance when more than two levels are populated. We will distinguish between $\{p_n^0\}$, the set of occupancies just after microwave, and $\{p_n(\tau)\}$, the level populations just after the end of the flux ramping.

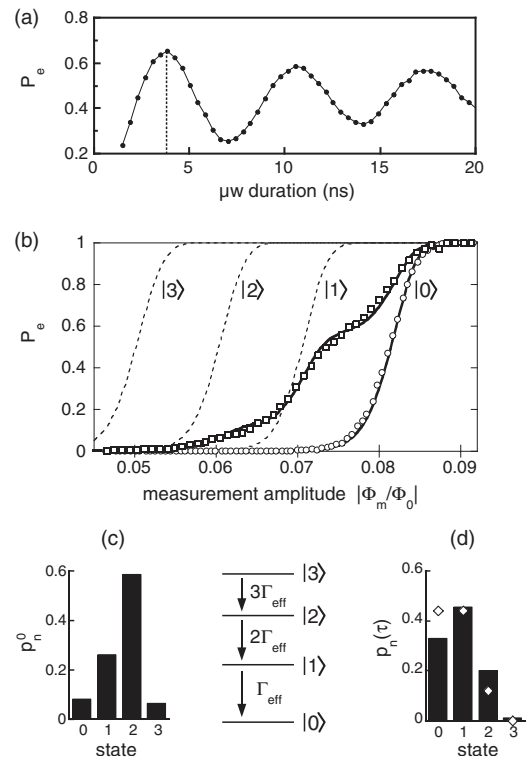

FIG. 7. (a) Experimental Rabi oscillation for $a_{\mu w}=164.4$ MHz. (b) Detection of excited states populated by a Rabi pulse with duration $t_{\mu w}=3.8$ ns. The solid line is a theoretical adjustment of experimental data (□). For comparison, the experimental detection probability of $|0\rangle$ is plotted (○). The calculated detection efficiencies of pure states $|1\rangle$–$|3\rangle$ are also plotted as dashed lines. (c) Calculated population distribution after the end of microwave excitation, neglecting decoherence. During the flux ramping, this distribution relaxes to the calculated configuration plotted as solid bars in (d). The diamonds are the experimental populations extracted from the fit of curve (b).

C. Multilevel detection

To investigate the measurement performances in the multilevel regime, the states $|1\rangle$, $|2\rangle$, and $|3\rangle$ are populated with a Rabi pulse. Figure 7(a) presents a Rabi oscillation induced by microwaves tuned on ν_{01} with an amplitude $a_{\mu w}=164.4$ MHz similar to the anharmonicity of the potential well. The oscillation is damped in time with the characteristic time $\tilde{T}_2=19$ ns.

A microwave duration $t_{\mu w}=3.8$ ns maximizes P_e. In the two-level limit, this setting corresponds to a Rabi π pulse, which coherently brings the system from $|0\rangle$ to $|1\rangle$. With the help of the model developed in Ref. 12, the population distribution $\{p_n^0\}$ in the present case is calculated [see Fig. 7(c)]. Particularly, the population of $|2\rangle$ nearly reaches 0.60 and the higher energy state $|3\rangle$ is occupied at about 0.10. Figure 7(b) shows the evolution of the escape probability versus Φ_m. To

clarify the interpretation, the calculated escape curves of levels $|0\rangle$–$|3\rangle$ are also plotted. Surprisingly, there is practically no detectable escape of $|3\rangle$. The first noticeable bulge corresponds to the selective escape of $|2\rangle$, and the second one to the escape of $|2\rangle$ and $|1\rangle$. For higher measurement amplitudes, all the states escape. The experimental occupancies $\{p_n(\tau)\}$ just after the flux ramping can be extracted from a fit to the following formula:

$$P_e = \langle P_e^0 \rangle + \sum_{n=1}^{3} [\langle P_e^n \rangle - \langle P_e^0 \rangle] p_n(\tau), \tag{9}$$

where the escape probabilities $\langle P_e^n \rangle$ depend on Φ_m. From the fit, plotted as a solid curve in Fig. 7(b), we obtain $p_1(\tau) = 0.44$, $p_2(\tau) = 0.12$, and $p_3(\tau) \approx 0$. This set of occupancies, plotted as diamonds in Fig. 7(d), is completely different from the predicted values after the microwave Rabi pulse. Such a striking discrepancy can be explained by a relaxation cascade during the flux ramping. In the following, we expand the relaxation model proposed in the previous section to a four-level system.

We keep for $|1\rangle$ the relaxation rate Γ_{eff}. As n increases, the relaxation rate of level $|n\rangle$ dramatically increases. The relaxation rate associated with the random transition $|n\rangle$ to $|n-1\rangle$ is proportional to $|\langle n|\hat{\varphi}|n-1\rangle|^2 \propto n$. If we neglect other relaxation channels, such as $|n\rangle \to |n-2\rangle$, with a relaxation rate proportional to the anharmonicity coefficient σ, the relaxation rate of the nth level is $n\Gamma_{\text{eff}}$. Thus, populations evolve in time according to the closed set of master equations,

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} p_3 \\ p_2 \\ p_1 \\ p_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\Gamma_{\text{eff}} & 0 & 0 & 0 \\ +3\Gamma_{\text{eff}} & -2\Gamma_{\text{eff}} & 0 & 0 \\ 0 & +2\Gamma_{\text{eff}} & -\Gamma_{\text{eff}} & 0 \\ 0 & 0 & +\Gamma_{\text{eff}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_3 \\ p_2 \\ p_1 \\ p_0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

which is easily solved analytically. The populations $\{p_n(\tau)\}$ are obtained starting from the initial populations $\{p_n^0\}$ after microwave excitation and letting relaxation act during the ramping time τ. The result, plotted as solid bars in Fig. 7(d), is in relatively good agreement with experimental values. However, our model still overestimates $p_2(\tau)$. This may be due to the neglected $|2\rangle \to |0\rangle$ relaxation channel or to decoherence. Nevertheless, the essence of the physics is captured by this simple model.

Figure 8(a) presents the measured escape probability after a Rabi π pulse with increasing microwave amplitudes. In this experiment, the measurement pulse amplitude has been set to maximize the detection contrast between $|0\rangle$ and $|1\rangle$. Our phenomenological model can be used to calculate the global detection efficiencies of each level and to predict the final escape probability given an arbitrary initial population distribution $\{p_n^0\}$ *before* the measurement pulse,

$$P_e = 0.03 + 0.54p_1^0 + 0.79p_2^0 + 0.90p_3^0. \tag{11}$$

Without any free parameter, this expression describes very well the measured escape probability obtained with high microwave amplitude. Relaxation explains why P_e does not saturate to exactly 1 when three or four levels are populated

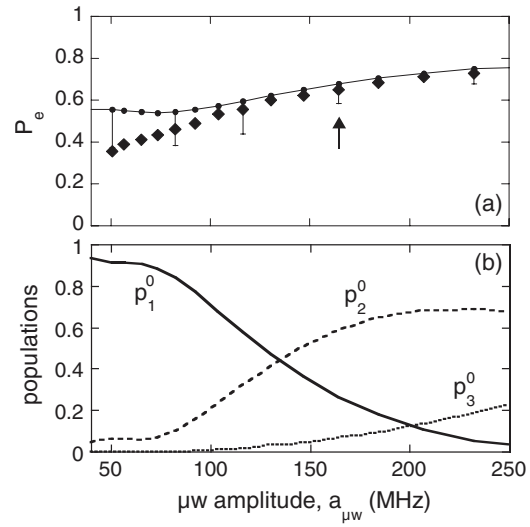

FIG. 8. (a) Measured escape probability after a Rabi π pulse versus microwave amplitude. The measurement pulse amplitude has been set to maximize the detection contrast between $|0\rangle$ and $|1\rangle$. The solid line with solid circles is a calculation with no free parameter (details in the text) consistent with experimental data (◆). (b) Set of calculated populations after the microwave pulse (without decoherence).

after the end of the Rabi π pulse. We also remark that, though levels $|2\rangle$ and $|3\rangle$ undergo fast relaxation during the flux ramping, their detection probability is not so different from the pure tunneling prediction given by Eq. (5). In fact, to give a crude picture, the populations relax toward $|1\rangle$ where they accumulate and can be detected.

The discrepancy which appears for small $a_{\mu w}$ is due to decoherence: low amplitude microwave implies a slow Rabi pulse and bigger errors due to incoherent processes. In a two-level system, decoherence during a π pulse leads to a population reduction $\frac{1}{2}[1-\exp(-t_{\mu w}/\tilde{T}_2)]$ for the first excited state. We use this result to roughly estimate the complex effect of decoherence in the multilevel regime. The previous formula leads to the error bars on the predicted escape probability plotted in Fig. 8(a).

D. Spurious resonators in the SQUID

A central ingredient of our model is the phenomenological relaxation rate Γ_{eff}, which describes depolarization during the ramping of the measuring flux pulse. We attribute this depolarization to the interaction of the multilevel system with microscopic resonators. In Fig. 9(a), we present spectroscopic evidence of the existence of such microscopic resonators in our sample. The three spectroscopic curves were measured for three slightly different bias currents. As the current bias is increased, the broad SQUID resonance shifts to lower frequency. As it does, it passes through a narrow resonance whose position is slightly affected. This shift, typical of an avoided level crossing, reveals the coupling between the SQUID and a resonator. Many similar features were observed in this sample.

However, we did not perform spectroscopy with fine enough current spacing to create detailed images of avoided

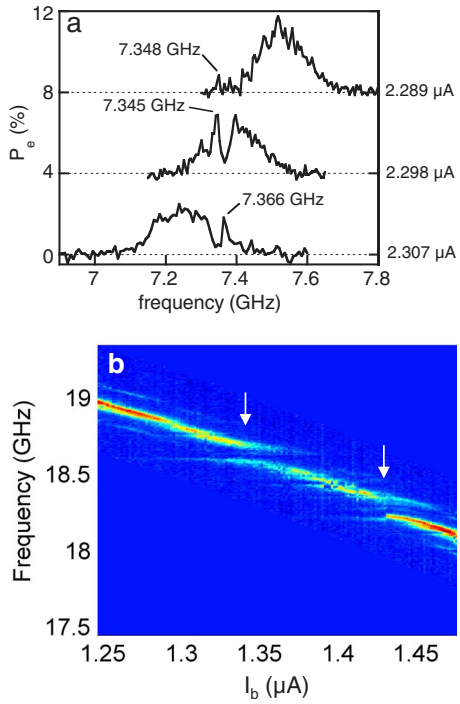

FIG. 9. (Color online) Evidence for the existence of microscopic resonators. (a) Three spectroscopic curves showing the broad SQUID resonance and a narrow resonance attributed to a microscopic resonator. As the SQUID resonance passes through the narrow resonance, the narrow resonance is shifted slightly in a way typical of an avoided level crossing. The three curves have been shifted for clarity. (b) Spectroscopic image of the SQUID resonance with avoided level crossings attributed to microscopic resonators in a more recent but similar sample.

level crossings. In Fig. 9(b), we present such an image, taken on a similar but more recent sample. Two crossings at least can clearly be seen. This sample was fabricated using the same procedures as for the circuit studied in this paper. It has also similar parameters. The data plotted in Fig. 9(b) are at relatively high frequency; we have also seen such avoided level crossings at lower frequencies.

V. CONCLUSION

In conclusion, we have demonstrated a very fast method for detecting the state of a current-biased dc SQUID. This technique exploits an adiabatic but ultrafast reduction of the barrier height seen by the trapped levels, which allows a selective escape of the excited states. Practically, the measurement is performed with a roughly trapezoidal flux pulse whose plateau duration is a few nanoseconds. The detection probability of the ground state is well understood using the standard macroscopic quantum tunneling formula. We report a slight broadening of the escape curve due to current noise generated by the close electrical environment of the SQUID. This broadening is by far insufficient to account for the observed experimental contrast of detection in the two-level limit. A detailed study of depolarization processes reveals that spurious relaxation during the flux ramping dominates depolarization. As in Ref. 14, it can be attributed to microscopic fluctuators which couple to the SQUID during the frequency shift induced by the measuring pulse. Spectroscopic evidences of avoided crossings between the SQUID and the fluctuator resonances support this hypothesis.

The simple model that we have developed explains the observed contrast of Rabi-like oscillations, when the measuring pulse amplitude is set to maximize the detection contrast between $|0\rangle$ and $|1\rangle$. Measurement then gives the population of excited states with a good fidelity. Detection contrast between $|n\rangle$ and $|n+1\rangle$ with $n \geqslant 1$, however, is strongly lowered by relaxation. Depolarization during the flux ramping thus appears as a clear limitation to the experimental determination of the level occupancies in the multilevel regime. Considering the remarkable results obtained in Ref. 25, a new design of the dc SQUID, combined with a new dielectric for the junction, should lead to a significant improvement of the detection contrast. This will open a path to a deeper insight in the multilevel dynamics.

ACKNOWLEDGMENTS

We thank W. Guichard, F. W. J. Hekking, L. P. Lévy, and A. Zazunov for fruitful discussions. This work was supported by two ACI programs, by the EuroSQIP project, and by the Institut de Physique de la Matière Condensée.

APPENDIX A: FROM TWO-DIMENSIONAL TO ONE-DIMENSIONAL POTENTIAL

This analytical calculation is strongly inspired by Ref. 17, in the general case where the inductance asymmetry coefficient η is finite. Let us consider the two-dimensional potential,

$$U(x,y) = 2E_J[-sx - \cos x \cos y - s\eta y + b(y - y_B)^2], \tag{A1}$$

where $s = I_b/2I_0$ and $y_B = \pi(\Phi_b/\Phi_0)$ are the reduced bias parameters. For the bias points used in this paper, the potential surface displays equivalent local minima separated by saddle points. The critical current of the SQUID is geometrically defined as the bias current I_c where the minimum vanishes and merges with adjacent saddle point at the coordinate (x_c, y_c). Experiments are performed close to the critical current; therefore, a Taylor expansion of the potential in the vicinity of the critical point (s_c, x_c, y_c) is justified. Following Ref. 17, we introduce $\Delta x = x - x_c$ and $\Delta y = y - y_c$. Limiting calculation to the third order, one obtains

$$\begin{aligned} U/(2E_J) = {} & (s_c - s)(\Delta x + \eta\Delta y) + \frac{1}{2}\cos x_c \cos y_c(\Delta x^2 + \Delta y^2) \\ & - \sin x_c \sin y_c \Delta x \Delta y + b\Delta y^2 - \frac{1}{6}\sin x_c \cos y_c(\Delta x^2 \\ & + 3\Delta y^2)\Delta x - \frac{1}{6}\sin y_c \cos x_c(\Delta y^2 + 3\Delta x^2)\Delta y. \end{aligned} \tag{A2}$$

We are interested in the dynamics along the escape direction

which corresponds to the direction of minimum curvature at the critical point. It makes an angle θ with the x axis,

$$\tan\theta = -\frac{\partial_x^2 U(x_c,y_c)}{\partial_x\partial_y U(x_c,y_c)} = \frac{\cos x_c \cos y_c}{\sin x_c \sin y_c}. \quad \text{(A3)}$$

Let ϕ be the phase along the escape direction. Looking for extrema of the potential along this direction, one finds a minimum located at $\phi=0$ and a saddle point. Along the escape direction, the anharmonic potential reads

$$U(\phi) = m\omega_p^2\left(\frac{\phi^2}{2} - \sqrt{\frac{m\omega_p^2}{6\Delta U}}\frac{\phi^3}{3}\right). \quad \text{(A4)}$$

It is fully determined by the plasma frequency $\nu_p=\omega_p/(2\pi)$ and the barrier height ΔU,

$$\Delta U = \left(\frac{s_c}{u_3}\right)^{1/2}(\cos\theta + \eta\sin\theta)^{3/2}\Delta U^{JJ}(I_b,I_c), \quad \text{(A5)}$$

$$\nu_p = \left(\frac{u_3}{s_c}\right)^{1/4}(\cos\theta + \eta\sin\theta)^{1/4}\nu_p^{JJ}(I_b,I_c,2C_0). \quad \text{(A6)}$$

The prefactor $u_3=\sin x_c \cos y_c \cos\theta(1+2\sin^2\theta) + \sin y_c \cos x_c \sin\theta(1+2\cos^2\theta)$ is the third derivative of the potential along the escape direction. ΔU^{JJ} and ν_p^{JJ} are the well known barrier height and plasma frequency for a single Josephson junction with critical current I_c and capacitance $2C_0$, biased with a current I_b,

$$\Delta U^{JJ}(I_b,I_c) = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\frac{\Phi_0}{2\pi}I_c\right)(1-I_b/I_c)^{3/2}, \quad \text{(A7)}$$

$$\nu_p^{JJ}(I_b,I_c,2C_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2\pi}\frac{1}{\Phi_0}\frac{I_c}{2C_0}\right)^{1/2}(1-I_b/I_c)^{1/4}. \quad \text{(A8)}$$

APPENDIX B: COUPLING TO A FLUX SIGNAL

In the general case, a small flux perturbation $\delta\Phi(t)$ added to the bias flux introduces a perturbation term

$$\hat{W}(t) = -\frac{\Phi_0}{\pi}\frac{1}{L_s}\delta\Phi(t)\hat{y}. \quad \text{(B1)}$$

The component of this operator on the escape direction reads

$$\hat{W}_\varphi(t) = -\frac{\sin\theta}{2\pi}\frac{1}{L_s}\left(\frac{2h}{C_0\nu_p}\right)^{1/2}\delta\Phi(t)\hat{\varphi}. \quad \text{(B2)}$$

Assuming a monochromatic perturbation $\delta\Phi(t) = \Phi_{\mu w}\cos(2\pi\nu t)$, one obtains the perturbation term

$$\hat{W}_\varphi(t) = -ha_{\mu w}\sqrt{2}\cos(2\pi\nu t)\hat{\varphi}, \quad \text{(B3)}$$

where $a_{\mu w}$ is the two-level Rabi frequency for a tuned excitation ($\nu=\nu_{01}$),

$$a_{\mu w} = \frac{\sin\theta}{2\pi}\frac{1}{L_s}\frac{1}{\sqrt{C_0 h\nu_p}}\Phi_{\mu w}. \quad \text{(B4)}$$

*Present address: CEA-CNRS group "Nanophysique et Semiconducteurs," Département de Recherche Fondamentale sur la Matière Condensée, SP2M, CEA Grenoble, 17 Avenue des Martyrs, 38054 Grenoble, France.

[1] Y. Nakamura, Yu. A. Pashkin, and J. S. Tsai, Nature (London) **398**, 786 (1999).
[2] D. Vion, A. Aassime, A. Cottet, P. Joyez, H. Pothier, C. Urbina, D. Esteve, and M. H. Devoret, Science **296**, 886 (2002); E. Collin, G. Ithier, A. Aassime, P. Joyez, D. Vion, and D. Esteve, Phys. Rev. Lett. **93**, 157005 (2004).
[3] J. M. Martinis, S. Nam, J. Aumentado, and C. Urbina, Phys. Rev. Lett. **89**, 117901 (2002).
[4] I. Chiorescu, Y. Nakamura, C. J. P. M. Harmans, and J. E. Mooij, Science **299**, 1869 (2003); P. Bertet, I. Chiorescu, K. Semba, C. J. P. M. Harmans, and J. E. Mooij, Phys. Rev. B **70**, 100501(R) (2004).
[5] A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, R.-S. Huang, J. Majer, S. Kumar, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, Nature (London) **431**, 162 (2004); A. Wallraff, D. I. Schuster, A. Blais, L. Frunzio, J. Majer, M. H. Devoret, S. M. Girvin, and R. J. Schoelkopf, Phys. Rev. Lett. **95**, 060501 (2005).
[6] Yu. A. Pashkin, T. Yamamoto, O. Astafiev, Y. Nakamura, D. V. Averin, and J. S. Tsai, Nature (London) **421**, 823 (2003).
[7] A. J. Berkley, H. Xu, R. C. Ramos, M. A. Gubrud, F. W. Strauch, P. R. Johnson, J. R. Anderson, A. J. Dragt, C. J. Lobb, and F. C. Wellstood, Science **300**, 1548 (2003).
[8] R. McDermott, R. W. Simmonds, M. Steffen, K. B. Cooper, K. Cicak, K. D. Osborn, S. Oh, D. P. Pappas, and J. M. Martinis, Science **307**, 1299 (2005).
[9] T. Yamamoto, Yu. A. Pashkin, O. Astafiev, Y. Nakamura, and J. S. Tsai, Nature (London) **425**, 941 (2003).
[10] M. Steffen, M. Ansmann, R. C. Bialczak, N. Katz, E. Lucero, R. McDermott, M. Neeley, E. M. Weig, A. N. Cleland, and J. M. Martinis, Science **313**, 1423 (2006).
[11] J. Claudon, A. Fay, L. P. Lévy, and O. Buisson, Phys. Rev. B **73**, 180502(R) (2006).
[12] J. Claudon, F. Balestro, F. W. J. Hekking, and O. Buisson, Phys. Rev. Lett. **93**, 187003 (2004).
[13] O. Buisson, F. Balestro, J. P. Pekola, and F. W. J. Hekking, Phys. Rev. Lett. **90**, 238304 (2003).
[14] K. B. Cooper, M. Steffen, R. McDermott, R. W. Simmonds, S. Oh, D. A. Hite, D. P. Pappas, and J. M. Martinis, Phys. Rev. Lett. **93**, 180401 (2004).
[15] C. D. Tesche and J. Clarke, J. Low Temp. Phys. **29**, 301 (1977).
[16] There simutaneously exist two distinct flux states near $\Phi_b/\Phi_0 = 0.5+n\pi$ (with n a relative integer), with associated nonequivalent minima and critical current. These particular bias points are not studied in this paper.
[17] V. Lefevre-Seguin, E. Turlot, C. Urbina, D. Esteve, and M. H. Devoret, Phys. Rev. B **46**, 5507 (1992).
[18] A. I. Larkin and Y. N. Ovchinnikov, Sov. Phys. JETP **64**, 185 (1986); B. I. Ivlev and Yu. N. Ovchinnikov, *ibid.* **66**, 378

(1987).
[19] F. Balestro, J. Claudon, J. P. Pekola, and O. Buisson, Phys. Rev. Lett. **91**, 158301 (2003).
[20] Q. Zhang, A. G. Kofman, J. M. Martinis, and A. N. Korotkov, Phys. Rev. B **74**, 214518 (2006).
[21] J. Claudon, Ph.D. thesis, Université Joseph Fourier (Grenoble I), 2006; http://tel.ccsd.cnrs.fr/tel-00011407
[22] J. M. Martinis and H. Grabert, Phys. Rev. B **38**, 2371 (1988).
[23] R. W. Simmonds, K. M. Lang, D. A. Hite, S. Nam, D. P. Pappas, and J. M. Martinis, Phys. Rev. Lett. **93**, 077003 (2004).
[24] J. M. Martinis, K. B. Cooper, R. McDermott, M. Steffen, M. Ansmann, K. D. Osborn, K. Cicak, S. Oh, D. P. Pappas, R. W. Simmonds, and C. C. Yu, Phys. Rev. Lett. **95**, 210503 (2005).
[25] M. Steffen, M. Ansmann, R. McDermott, N. Katz, R. C. Bialczak, E. Lucero, M. Neeley, E. M. Weig, A. N. Cleland, and J. M. Martinis, Phys. Rev. Lett. **97**, 050502 (2006).

Strong Tunable Coupling between a Superconducting Charge and Phase Qubit

A. Fay,[1] E. Hoskinson,[1] F. Lecocq,[1] L. P. Lévy,[1] F. W. J. Hekking,[2] W. Guichard,[1] and O. Buisson[1]

[1]*Institut Néel, C.N.R.S.-Université Joseph Fourier, BP 166, 38042 Grenoble-cedex 9, France*

[2]*LPMMC, C.N.R.S.-Université Joseph Fourier, BP 166, 38042 Grenoble-cedex 9, France*

(Received 21 December 2007; published 6 May 2008)

We have realized a tunable coupling over a large frequency range between an asymmetric Cooper pair transistor (charge qubit) and a dc SQUID (phase qubit). Our circuit enables the independent manipulation of the quantum states of each qubit as well as their entanglement. The measurement of the charge qubit's quantum states is performed by an adiabatic quantum transfer from the charge to the phase qubit. The measured coupling strength is in agreement with an analytic theory including a capacitive and a tunable Josephson coupling between the two qubits.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.187003 PACS numbers: 85.25.Cp, 03.67.Lx, 74.50.+r

Interaction between two quantum systems induces entangled states whose properties have been studied since the 1980s for pairs of photons [1], for atoms coupled to photons [2], and for trapped interacting ions [3]. In the last decade, quantum experiments were extended to macroscopic solid state devices opening the road for application within the field of quantum information. In superconducting circuits, theoretical proposals [4–6] and experimental realizations for interacting quantum systems were put forward. In these systems, coupling has been achieved between a quantum two-level system (qubit) and a resonator [7–9] as well as between two identical qubits [10–12], the interaction being realized through a fixed capacitive or inductive coupling. The tunability of the coupling strength appears as an important issue to optimize the control of two or more coupled quantum systems. Indeed, it enables to decouple the quantum systems for individual manipulations and to couple them when entanglement between the quantum states is needed. Recently, different tunable couplings between two identical qubits have been proposed and measured [13–19]. In this Letter, we report for the first time on a tunable composite coupling between a charge qubit, an asymmetric Cooper pair transistor (ACPT), and a phase qubit, a dc SQUID. In our circuit (see Fig. 1), the coupling is composed of two independent terms, a fixed capacitive and a tunable Josephson part, leading to a tunability of the total coupling. Note that the coupling element is one of the ACPT junctions; i.e., no additional coupling system is needed.

The dynamics of the current biased dc SQUID can be described by the Hamiltonian of an anharmonic oscillator: $\hat{H}_S = \frac{1}{2}h\nu_p(\hat{P}^2 + \hat{X}^2) - \sigma h\nu_p\hat{X}^3$ where ν_p is the plasma frequency of the SQUID. Here, $\hat{P}$ and $\hat{X}$ are the reduced charge and phase conjugate operators [20]. In our case, the anharmonicity prevents multiplasmon excitation, and therefore at low energy, the SQUID reduces to a two-level system with levels denoted by $|0\rangle$ and $|1\rangle$ corresponding, respectively, to the zero- and one-plasmon state. As a result, the SQUID Hamiltonian reads $\hat{H}_S = h\nu_S\hat{\sigma}_z^S/2$ where $\hat{\sigma}_z$ is the Pauli matrix. The frequency ν_S depends on the working point and is determined by the bias current I_b and the dc flux Φ_S through the SQUID loop. The ACPT can be described as a two-level system with quantum states denoted by $|-\rangle$ and $|+\rangle$ for, respectively, the ground and first excited state. Its Hamiltonian takes the form $\hat{H}_T = h\nu_T\hat{\sigma}_z^T/2$ where ν_T depends on the gate-induced charge n_g and the phase difference δ across the transistor. We now turn to the coupling between the two quantum systems, see the circuit shown in Fig. 1. As the ACPT is in parallel to the SQUID, both a Josephson and a capacitive coupling appear. The Josephson coupling results from the phase relation along the loop between the transistor and the closer SQUID junction. The capacitive coupling originates from the charge displacement between the transistor and SQUID capacitance. As will be shown later, the total coupling can be tuned in our circuit from about 1.1 GHz down to 0.06 GHz.

The ACPT consists of a superconducting island connected by two Josephson junctions of different surfaces

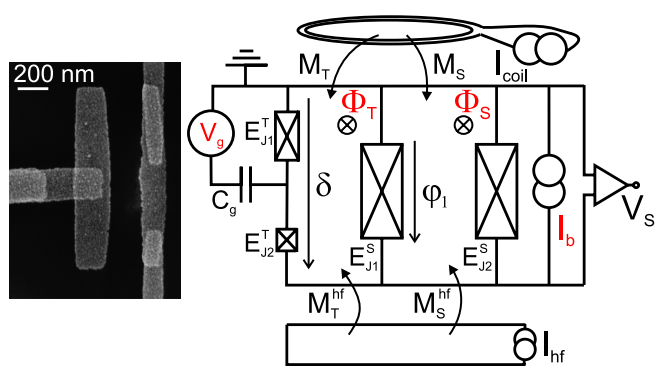

FIG. 1 (color online). Electrical schematic of the coupled circuit. The working point is controlled by the dc gate voltage V_g, the bias current I_b, and the fluxes Φ_T and Φ_S. The current I_{coil} and I_{hf} produce a flux through the loops containing the SQUID and transistor via the mutual inductances M_S, M_T and M_S^{hf}, M_T^{hf}. The high frequency (hf) line is also used to produce μw and nanosecond flux pulses for the escape measurement of the SQUID. On the left side, a SEM image of the ACPT.

 © 2008 The American Physical Society

(0.02 μm^2 and 0.05 μm^2) to the superconducting electrodes. The dc SQUID comprises two large Josephson junctions of 5 μm^2 area each, enclosing a 347 μm^2 superconducting loop. The ACPT and the SQUID Josephson junction closer to the ACPT forms a second loop of 126 μm^2 surface. The coupled circuit is realized by a three-angle shadow evaporation of aluminum with two different oxidations, respectively, for the SQUID junctions and the ACPT junctions. Measurements are performed in a dilution fridge at $T = 30$ mK. The microwave (μw) flux and charge-gate signal are guided by 50 Ω coax lines and 40 dB attenuated at low temperature before reaching the circuit through a mutual inductance and a gate capacitance, respectively. The measurement of the quantum states of the circuit is performed by a nanosecond flux pulse which produces switching to the voltage state of the SQUID [21].

We first study the separate SQUID and ACPT resonant frequency (Fig. 2). Spectroscopy measurements of the SQUID are performed by a μw flux pulse followed by a nanosecond flux pulse. The escape probability shows a resonant peak associated with the transition $|0\rangle \rightarrow |1\rangle$ [inset (a) of Fig. 2]. The SQUID resonance frequency ν_S can be tuned by varying the flux Φ_S (Fig. 2) or the current I_b. At fixed flux, ν_S increases as I_b decreases; the accessible range extends from 8 GHz to more than 20 GHz. From flux calibration, we obtain $M_S = 0.13$ pH and $M_S^{\rm hf} = 1.58$ pH. From ν_S, the SQUID parameters such as the critical current I_c^S, the capacitance C^S per junction, and the total SQUID inductance L can be determined with a precision better than 1%. We find $I_c^S = 1346$ nA, $C^S = 0.227$ pF, $L = 190$ pH, and an inductance asymmetry $\eta = 0.29$ between the two SQUID arms. These values are similar to typical parameters of previous samples [21]. Depending on the working points, the resonance linewidth changes from 300 to 20 MHz. This finite width can be qualitatively explained by a 12 nA rms current noise and a 1 mΦ_0 rms effective flux noise following Refs. [22,23]. Rabi-like oscillations have been measured with a typical decay time of about 10 ns and a relaxation time of about 30 ns. These times are shorter in comparison with our previous SQUID sample. Moreover, a high density of parasitic resonances is observed in the current sample (see Fig. 9 of Ref. [21]) which could explain these shorter times. The origin of these resonances is still not completely understood but has also been observed in other phase-qubits [24]. All presented measurements were performed at working points where these parasitic resonances are not visible.

Similarly, the energy levels of the ACPT can be determined by escape probability measurements on the SQUID via an adiabatic quantum transfer. We apply a μw signal of 1 μs on the gate line at fixed frequency when the ACPT and the SQUID are off resonance. If the applied μw frequency matches the ACPT frequency the $|+\rangle$ level is populated. For the measurement, a nanosecond flux pulse with a rise time of 2 ns and a negative flux polarity drives the two systems adiabatically across the resonance where the coupling is about 1 GHz (see below) up to the SQUID escape point indicated by the arrow in Fig. 2. The initial state $|+, 0\rangle$ is thereby transferred into the state $|-, 1\rangle$ [25]. Afterwards, an escape measurement is performed on the SQUID, revealing its quantum state (Inset b of Fig. 2) [26].

The ACPT resonant frequency is shown in Fig. 3 as a function of δ at $n_g = 1/2$. Here, δ is given by the relation $\delta = \varphi_1 + 2\pi L_1 I_c^S \sin(\varphi_1)/\Phi_0 - 2\pi\Phi_T/\Phi_0$ where Φ_T is the dc flux inside the loop, φ_1 the classical phase difference

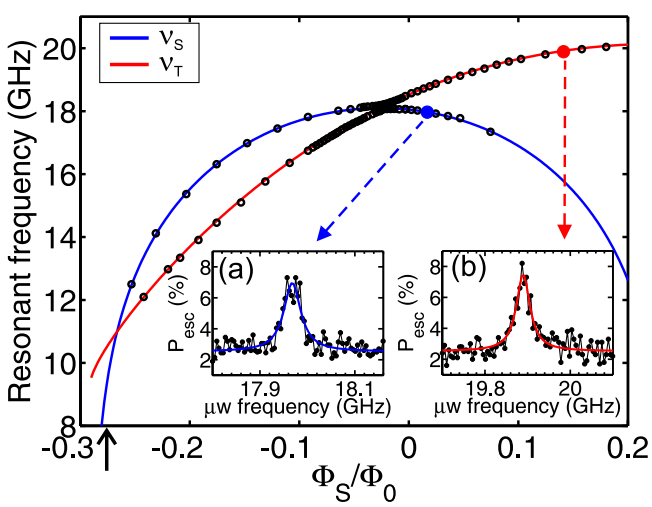

FIG. 2 (color online). Experimental resonant frequency versus Φ_S for the coupled circuit with $I_b = 1890$ nA and $n_g = 1/2$. The solid lines are the fit using the uncoupled Hamiltonians of the dc SQUID and the ACPT. The vertical solid arrow indicates the SQUID escape point where all the measurements were done. Inset: Escape probability of the SQUID versus frequency probing (a) the SQUID at $\Phi_S = 0.02\Phi_0$ and (b) the ACPT at $\Phi_S = 0.14\Phi_0$ (fitted by a Lorentzian law).

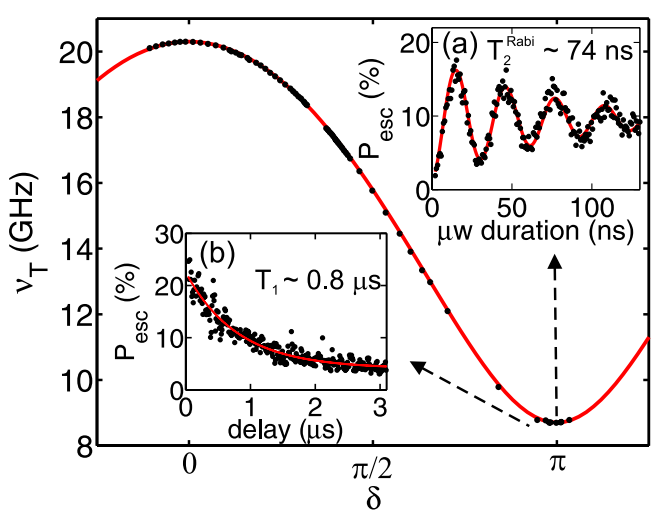

FIG. 3 (color online). The ACPT energy versus δ at $n_g = 0.5$ fitted by the ACPT Hamiltonian. Inserts: Measurements at $\delta = \pi$. (a) Escape probability versus μw pulse duration for $-3dBm$ room temperature μw power. (b) Escape probability versus delay time between μw and measurement pulses, fitted by an exponential decay (continuous line) giving $T_1 = 810$ ns.

across the SQUID junction closer to the transistor, and L_1 the inductance of the corresponding branch of the SQUID. In our setup, we have $M_T = 0.047$ pH, $M_T^{\rm hf} = 0.35$ pH, and $L_1 = 70$ pH. The qubit resonant frequency ν_T versus δ can be fitted within 1% error by considering that the $|+\rangle$ and $|-\rangle$ states are superpositions of four charge states. The ACPT has two optimal working points for qubit manipulations: one at $(n_g, \delta) = (1/2, 0)$ [27] and an additional one at $(n_g, \delta) = (1/2, \pi)$ due to the transistor asymmetry. The width of the resonance peak far from the optimal points is around 40 MHz while close to the two optimal points $\delta = 0$ and $\delta = \pi$, it is reduced to about 20 MHz. From the two extreme resonant frequencies $\nu_T = 20.302$ GHz and $\nu_T = 8.745$ GHz, the critical current of the two junctions can be deduced, and we obtain $I_{c,1}^T = 30.1$ nA and $I_{c,2}^T = 12.3$ nA. From the frequency spectrum ν_T versus the gate charge n_g, we find a total transistor capacitance of $C^T = 2.9$ fF and a gate capacitance $C_g = 29$ aF. Figure 3(a) presents Rabi oscillations in the ACPT at the new optimal point $(n_g, \delta) = (1/2, \pi)$. The Rabi frequency follows a linear dependance on the μw amplitude as expected for a two-level quantum system. The two-level system presents a long relaxation time of about 800 ns [Fig. 3(b)].

Hereafter, we consider the case when the two qubits are in resonance ($\nu_T = \nu_S$). Figure 4(a) shows the measured escape probability at the working point $I_b = 1647$ nA and $\Phi_S = 0.03\Phi_0$ for two different gate charges $n_g = 1/2$ and $n_g \sim 1$ corresponding, respectively, to the in and off resonance case. Off resonance, the ACPT frequency being very much larger than the SQUID resonance, only one resonance peak is observed which corresponds to the $|1\rangle$ state excitation of the SQUID. At $n_g = 1/2$, the resonance condition is satisfied for this working point. The coupling leads to a splitting of the resonance peak of about 115 MHz into two peaks corresponding to the two entangled states $(|0, +\rangle \pm |1, -\rangle)/\sqrt{2}$. The resonance width is about 4 times smaller than the coupling strength which demonstrates clearly the strong coupling of the ACPT two-level system with the zero- and the one-plasmon state of the dc SQUID. In Fig. 4(b), the escape probability is plotted versus n_g and μw frequency for the same working point. Far from the resonance condition, the value can be well estimated assuming two uncoupled circuits. In the vicinity of $n_g = 1/2$, antilevel crossing occurs modifying the resonance frequency of each qubit. In Fig. 4(c), the escape probability is measured at $n_g = 1/2$ versus Φ_S and μw frequency for a different working point. Antilevel crossing is clearly observed with a splitting of about 900 MHz. The width of the two resonances strongly depends on Φ_S and varies from 300 MHz to about 40 MHz as the crossing point is passed. This effect can be explained by the large difference in the SQUID and ACPT resonance widths around this working point.

The coupling strength between the two qubits is measured at $n_g = 1/2$ for working points where the resonance

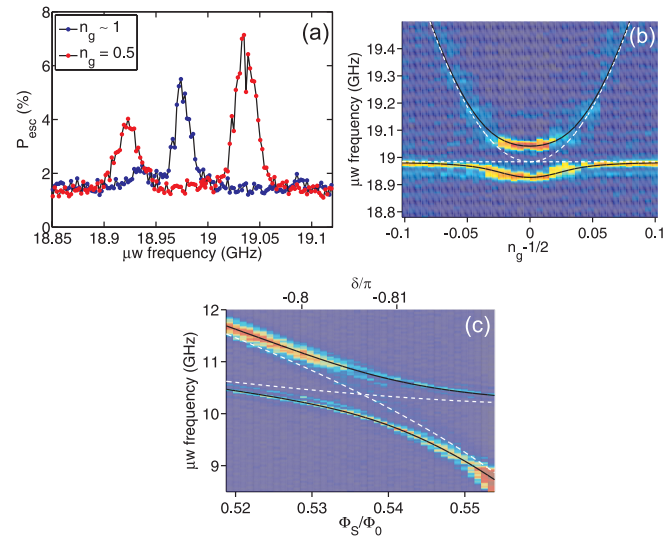

FIG. 4 (color online). (a) Escape probability of the SQUID at the working point $I_b = 1647$ nA, $\Phi_S = 0.03\Phi_0$, $\delta = 0.26\pi$. At $n_g \sim 1$ SQUID and ACPT are out off resonance ($\nu_T \sim 31.6$ GHz). At $n_g = 0.5$ the resonance condition is fulfilled leading to antilevel crossing. (b) $P_{\rm esc}$ versus n_g and μw frequency at the working point $I_b = 1647$ nA, $\Phi_S = 0.03\Phi_0$, and $\delta = 0.26\pi$. (c) $P_{\rm esc}$ versus $\Phi_S(\delta)$ and μw frequency at the working point $I_b = 107$ nA and $n_g = 1/2$. Dark color corresponds to small $P_{\rm esc}$, bright color to large $P_{\rm esc}$. Dashed and continuous lines correspond to uncoupled and coupled cases, respectively.

condition $\nu_T = \nu_S$ is satisfied. The frequency splitting is plotted versus the resonant frequency in Fig. 5. The coupling is minimal close to 20 GHz ($g = 60$ MHz at 20.1 GHz with an uncertainty of about 30 MHz due to

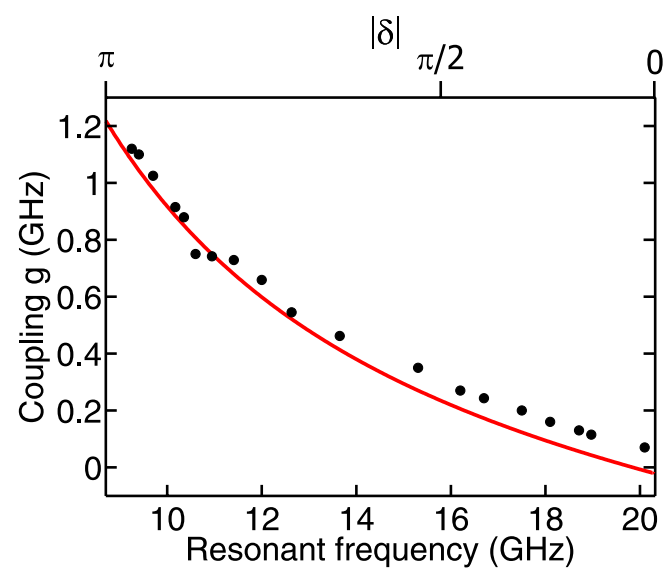

FIG. 5 (color online). Coupling strength versus frequency at the resonance condition between the two circuits for $n_g = 1/2$. The points are experimental data, and the continuous line is the theoretical prediction.

parasitic resonances) and strongly increases with decreasing resonant frequency. Note that when the resonance frequency changes from 20.3 GHz down to 8.8 GHz, the absolute value of the phase over the ACPT changes from $\delta = 0$ to $|\delta| = \pi$. We find therefore nearly zero coupling at $\delta = 0$ and a very strong coupling at $|\delta| = \pi$.

For the theoretical analysis, we consider that the ACPT states $|-\rangle$ and $|+\rangle$ are superpositions of two charge states, and we neglect anharmonicity effects of the SQUID potential on the frequency ν_S. We obtain the following analytical expression for the coupling strength at $n_g = 1/2$: $H_{\text{coupling}} = (E_{c,c}/4)\sigma_S^x\sigma_T^x - E_{c,j}/2[\cos(\delta/2 - \chi)\sigma_S^y\sigma_T^y + \sin(\delta/2 - \chi)\sigma_S^y\sigma_T^z]$, where $\tan(\chi) = -\mu\tan(\delta/2)$, $E_{c,c} = (1-\lambda)\sqrt{E_C^S/h\nu_p}h\nu_p$ and $E_{c,j} = (1-\mu)\times\sqrt{E_C^S/h\nu_p}E_j^T/2$, with $E_C^S = e^2/C^S$ the SQUID charge energy and $E_j^T = E_{J,1}^T + E_{J,2}^T$ the transistor Josephson energy. $\lambda = (C_1^T - C_2^T)/(C_1^T + C_2^T)$ and $\mu = (E_{J,1}^T - E_{J,2}^T)/(E_{J,1}^T + E_{J,2}^T)$ are the transistor capacitance and Josephson energy asymmetry, respectively. The coupling contains two independent contributions: one related to the capacitance and the other one to the Josephson coupling of the ACPT. Close to resonance, slow dynamics dominates and the Hamiltonian simplifies to a Jaynes-Cummings type Hamiltonian $H_{\text{coupling}} = \frac{1}{2}hg(\sigma_S^+\sigma_T^- + \sigma_S^-\sigma_T^+)$ where $hg = [E_{c,c}/2 - E_{c,j}\cos(\delta/2 - \chi)]$ and $\sigma_{S/T}^{+/-}$ creates or annihilates an excitation in the SQUID or the ACPT. At this point, we stress that the coupling strength at $n_g = 1/2$ depends only on the δ parameter. If we replace one of the transistor junctions by a pure capacitance ($E_{J,2}^T = 0$), we obtain $E_{c,j} = 0$ and we retrieve the capacitive coupling [4] calculated for a Cooper pair box coupled to a SQUID. For a *symmetric* transistor ($\lambda = \mu = 0$), the charge and the Josephson coupling compensate each other, giving zero coupling for any value of the δ parameter. It is the asymmetry of the transistor which enables nonzero coupling at the optimum point of the charge qubit. In particular, for the case that $\lambda = \mu$—which is realized for a transistor containing two junctions having the same plasma frequency—the total coupling vanishes at $\delta = 0$ but becomes nonzero at the second optimum point at $\delta = \pi$. This enables to manipulate the ACPT at zero coupling, and exchange information with the SQUID at nonzero coupling, both at minimum decoherence. By assuming an asymmetry of $\mu = \lambda = 41.9\%$ for our sample, the coupling strength can be very well fitted without any other free parameters as can be seen in Fig. 5. The slight discrepancy can be explained by a small difference between λ and μ.

In conclusion, we have demonstrated strong tunable coupling in a hybrid superconducting two-qubit system. Far from resonance, our quantum circuit enables us to control the quantum dynamics of each qubit separately. At resonance, we demonstrate entanglement between the quantum states of the charge and phase qubit which is consistent with the exchange of a single energy quantum. The measured coupling strength could be perfectly understood by an analytical coupling expression of the type Jaynes-Cummings Hamiltonian. The quantum state measurement of the charge qubit has been performed by an adiabatic quantum transfer from the charge to the phase qubit. Our result demonstrates the possibility to transfer quantum information between the two qubits in a controlled way. Our coupling scheme can be used to implement an i-SWAP quantum gate. The circuit could be extended in a scalable architecture considering parallel ACPTs coupled to a phase qubit following the proposition of Ref. [5].

This work was supported by two ACI programs, by the EuroSQIP and INTAS projects, and by the Institut Universitaire de France.

[1] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982).
[2] J. Raimond, M. Brune, and S. Haroche, Rev. Mod. Phys. **73**, 565 (2001).
[3] D. Leibfried *et al.*, Rev. Mod. Phys. **75**, 281 (2003).
[4] O. Buisson and F. W. J. Hekking, in *Macroscopic Quantum Coherence and Computing*, edited by D. Averin, B. Ruggiero, and P. Silvestrini (Kluwer Academic, New York, 2001), p. 137.
[5] F. Plastina and G. Falci, Phys. Rev. B **67**, 224514 (2003).
[6] A. Blais *et al.*, Phys. Rev. A **69**, 062320 (2004).
[7] I. Chiorescu *et al.*, Nature (London) **431**, 159 (2004).
[8] A. Wallraff *et al.*, Nature (London) **431**, 162 (2004).
[9] J. Johansson *et al.*, Phys. Rev. Lett. **96**, 127006 (2006).
[10] Yu. A. Pashkin *et al.*, Nature (London) **421**, 823 (2003).
[11] A. J. Berkley *et al.*, Science **300**, 1548 (2003).
[12] R. McDermott *et al.*, Science **307**, 1299 (2005).
[13] D. V. Averin and C. Bruder, Phys. Rev. Lett. **91**, 057003 (2003).
[14] A. O. Niskanen *et al.*, Science **316**, 723 (2007).
[15] T. Hime *et al.*, Science **314**, 1427 (2006).
[16] M. Sillanpaa, J. I. Park, and R. W. Simmonds, Nature (London) **449**, 438 (2007).
[17] J. Majer *et al.*, Nature (London) **449**, 443 (2007).
[18] S. H. W. van der Ploeg *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98**, 057004 (2007).
[19] R. Harris *et al.*, Phys. Rev. Lett. **98**, 177001 (2007).
[20] J. Claudon *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 187003 (2004).
[21] J. Claudon *et al.*, Phys. Rev. B **76**, 024508 (2007).
[22] G. Ithier *et al.*, Phys. Rev. B **72**, 134519 (2005).
[23] J. Claudon *et al.*, Phys. Rev. B **73**, 180502 (2006).
[24] K. B. Cooper *et al.*, Phys. Rev. Lett. **93**, 180401 (2004).
[25] O. Buisson *et al.*, Phys. Rev. Lett. **90**, 238304 (2003).
[26] Note the difference with the measurement scheme implemented in [27], where the readout is performed using a Josephson junction as a current threshold detector.
[27] D. Vion *et al.*, Science **296**, 886 (2002).

Résumé : Couplage variable entre un qubit de charge et un qubit de phase

Nous avons étudié la dynamique quantique d'un circuit supraconducteur constitué d'un SQUID dc couplé à un transistor à paires de Cooper fortement asymétrique (ACPT). Le SQUID dc est un qubit de phase contrôlé par un courant de polarisation et un champ magnétique. L'ACPT est un qubit de charge contrôlé par un courant de polarisation, un champ magnétique et une tension de la grille.

Nous avons mesuré par spectroscopie micro-onde les premiers niveaux d'énergie du circuit couplé en fonction des paramètres de contrôle. Les mesures des états quantiques des qubits de charge et de phase sont réalisées par une mesure d'échappement du SQUID dc avec une impulsion de flux nanoseconde appliquée dans celui-ci. La mesure de l'ACPT utilise un nouveau processus quantique : l'état excité de l'ACPT est transféré adiabatiquement vers l'état excité du SQUID durant l'impulsion de flux.

Notre circuit permet de manipuler indépendamment chaque qubit tout comme il permet d'intriquer les états quantiques des deux circuits. Nous avons observé des anti-croisements des niveaux d'énergie des deux qubits lorsqu'ils sont mis en résonance. Le couplage a été mesuré sur une large gamme de fréquence, pouvant varier de 60 MHz à 1.1 GHz. Nous avons réussi à obtenir un couplage variable entre le qubit de charge et le qubit de phase. Nous avons analysé théoriquement la dynamique quantique de notre circuit. Cette analyse a permis de bien expliquer le couplage variable mesuré par une combinaison entre un couplage Josephson et un couplage capacitif entre les deux qubits.

Mots-clés

Jonctions Josephson – qubit supraconducteur – oscillations cohérentes – décohérence – intrication quantique – SQUID dc – transistor à paires de Cooper – nano-électronique quantique

Abstract : Tunable coupling between a charge qubit and a phase qubit

We have studied the quantum dynamics of a superconducting circuit based on a dc-SQUID coupled to a highly asymmetric Cooper pair transistor (ACPT). The dc-SQUID is a phase qubit controlled by a bias current and magnetic field. The ACPT is a charge qubit controlled by a bias current, magnetic flux and gate voltage.

We have measured by microwave spectroscopy the lowest quantum levels of the coupled circuit as a function of the bias parameters. Quantum state measurements of the phase and charge qubit are achieved by an escape measurement on the dc SQUID with a nanosecond flux pulse applied to it. The measurement of the ACPT state consist of a new quantum process : the excited state of the ACPT is adiabatically transferred to the excited state of the SQUID during the flux pulse.

Our circuit enables the independent manipulation of each qubit as well as the entanglement of the quantum states of the two circuits. We observe avoided level crossings between the two qubits when they are put in resonance. The coupling strength is measured over a large frequency range and varies from 60 MHz to 1.1 GHz. In this coupled circuit, we succeed to realize a tunable coupling between the charge and the phase qubit. We have analyzed theoretically the quantum dynamics of our circuit. This analysis explains well the measured tunable coupling strength by a combination of a capacitive and a Josephson coupling between the two qubits.

Keywords

Josephson Junctions – superconducting qubit – coherent oscillations – decoherence – quantum entanglement – dc-SQUID – Cooper pair transistor – quantum nanoelectronics