



# Analyse en composantes principales et interpolation de processus en vue d'applications en hydrométéorologie : méthodes et simulation

Omar Bouhaddou

## ► To cite this version:

Omar Bouhaddou. Analyse en composantes principales et interpolation de processus en vue d'applications en hydrométéorologie : méthodes et simulation. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1984. Français. NNT : . tel-00311636

**HAL Id: tel-00311636**

**<https://theses.hal.science/tel-00311636>**

Submitted on 19 Aug 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*présentée à*

**l' Université Scientifique et Médicale de Grenoble**

*pour obtenir le grade de*

**DOCTEUR DE 3ème CYCLE**  
**«Mathématiques appliquées»**

*par*

**BOUHADDOU Omar**



**ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES  
ET INTERPOLATION DE PROCESSUS**

*En vue d'applications en hydrométéorologie*

**METHODES ET SIMULATION.**



**Thèse soutenue le 1er mars 1984 devant la commission d'examen.**

**A. LE BRETON**

**Président**

**J.W. DELLEUR**

**J.C. DEVILLE**

**Ch. OBLED**

**Tuan PHAM DINH**

**Examineurs**



**UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE**

**Année universitaire 1982-1983**

**Président de l'Université : M. TANCHE**

**MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.**

**(RANG A)**

**SAUF ENSEIGNANTS EN MEDECINE ET PHARMACIE**

**PROFESSEURS DE 1ère CLASSE**

|                         |                                                         |
|-------------------------|---------------------------------------------------------|
| ARNAUD Paul             | Chimie organique                                        |
| ARVIEU Robert           | Physique nucléaire I.S.N.                               |
| AUBERT Guy              | Physique C.N.R.S.                                       |
| AYANT Yves              | Physique approfondie                                    |
| BARBIER Marie-Jeanne    | Electrochimie                                           |
| BARBIER Jean-Claude     | Physique expérimentale C.N.R.S.<br>(labo de magnétisme) |
| BARJON Robert           | Physique nucléaire I.S.N.                               |
| BARNOUD Fernand         | Biosynthèse de la cellulose-Biologie                    |
| BARRA Jean-René         | Statistiques - Mathématiques appliquées                 |
| BELORISKY Elie          | Physique                                                |
| BENZAKEN Claude (M.)    | Mathématiques pures                                     |
| BERNARD Alain           | Mathématiques pures                                     |
| BERTRANDIAS Françoise   | Mathématiques pures                                     |
| BERTRANDIAS Jean-Paul   | Mathématiques pures                                     |
| BILLET Jean             | Géographie                                              |
| BONNIER Jean-Marie      | Chimie générale                                         |
| BOUCHEZ Robert          | Physique nucléaire I.S.N.                               |
| BRAVARD Yves            | Géographie                                              |
| CARLIER Georges         | Biologie végétale                                       |
| CAUQUIS Georges         | Chimie organique                                        |
| CHIBON Pierre           | Biologie animale                                        |
| COLIN DE VERDIERE Yves  | Mathématiques pures                                     |
| CRABBE Pierre (détaché) | C.E.R.M.O.                                              |
| CYROT Michel            | Physique du solide                                      |
| DAUMAS Max              | Géographie                                              |
| DEBELMAS Jacques        | Géologie générale                                       |
| DEGRANGE Charles        | Zoologie                                                |
| DELOBEL Claude (M.)     | M.I.A.G. Mathématiques appliquées                       |
| DEPORTES Charles        | Chimie minérale                                         |
| DESRE Pierre            | Electrochimie                                           |
| DOLIQUE Jean-Michel     | Physique des plasmas                                    |
| DUCROS Pierre           | Cristallographie                                        |
| FONTAINE Jean-Marc      | Mathématiques pures                                     |
| GAGNAIRE Didier         | Chimie physique                                         |

.../...



|                                   |                                              |
|-----------------------------------|----------------------------------------------|
| GASTINEL Noël                     | Analyse numérique - Mathématiques appliquées |
| GERBER Robert                     | Mathématiques pures                          |
| GERMAIN Jean-Pierre               | Mécanique                                    |
| GIRAUD Pierre                     | Géologie                                     |
| IDELMAN Simon                     | Physiologie animale                          |
| JANIN Bernard                     | Géographie                                   |
| JOLY Jean-René                    | Mathématiques pures                          |
| JULLIEN Pierre                    | Mathématiques appliquées                     |
| KAHANE André (détaché DAFCO)      | Physique                                     |
| KAHANE Josette                    | Physique                                     |
| KOSZUL Jean-Louis                 | Mathématiques pures                          |
| KRAKOWIAK Sacha                   | Mathématiques appliquées                     |
| KUPTA Yvon                        | Mathématiques pures                          |
| LACAZE Albert                     | Thermodynamique                              |
| LAJZEROWICZ Jeannine              | Physique                                     |
| LAJZEROWICZ Joseph                | Physique                                     |
| LAURENT Pierre                    | Mathématiques appliquées                     |
| DE LEIRIS Joël                    | Biologie                                     |
| LLIBOUTRY Louis                   | Géophysique                                  |
| LOISEAUX Jean-Marie               | Sciences nucléaires I.S.N.                   |
| LOUP Jean                         | Géographie                                   |
| MACHE Régis                       | Physiologie végétale                         |
| MAYNARD Roger                     | Physique du solide                           |
| MICHEL Robert                     | Minéralogie et pétrographie (géologie)       |
| MOZIERES Philippe                 | Spectrométrie - Physique                     |
| OMONT Alain                       | Astrophysique                                |
| OZENDA Paul                       | Botanique (biologie végétale)                |
| PAYAN Jean-Jacques (détaché)      | Mathématiques pures                          |
| PEBAY PEYROULA Jean-Claude        | Physique                                     |
| PERRIAUX Jacques                  | Géologie                                     |
| PERRIER Guy                       | Géophysique                                  |
| PIERRARD Jean-Marie               | Mécanique                                    |
| RASSAT André                      | Chimie systématique                          |
| RENARD Michel                     | Thermodynamique                              |
| RICHARD Lucien                    | Biologie végétale                            |
| RINAUDO Marguerite                | Chimie CERMAV                                |
| SENGEL Philippe                   | Biologie animale                             |
| SERGERAERT Francis                | Mathématiques pures                          |
| SOUTIF Michel                     | Physique                                     |
| VAILLANT François                 | Zoologie                                     |
| VALENTIN Jacques                  | Physique nucléaire I.S.N.                    |
| VAN CUTSEN Bernard                | Mathématiques appliquées                     |
| VAUQUOIS Bernard                  | Mathématiques appliquées                     |
| VIALON Pierre                     | Géologie                                     |
| <b>PROFESSEURS DE 2ème CLASSE</b> |                                              |
| ADIBA Michel                      | Mathématiques pures                          |
| ARMAND Gilbert                    | Géographie                                   |

|                               |                                |
|-------------------------------|--------------------------------|
| AURIAULT Jean-Louis           | Mécanique                      |
| BEGUIN Claude (M.)            | Chimie organique               |
| BOEHLER Jean-Paul             | Mécanique                      |
| BOITET Christian              | Mathématiques appliquées       |
| BORNAREL Jean                 | Physique                       |
| BRUN Gilbert                  | Biologie                       |
| CASTAING Bernard              | Physique                       |
| CHARDON Michel                | Géographie                     |
| COHENADDAD Jean-Pierre        | Physique                       |
| DENEUVILLE Alain              | Physique                       |
| DEPASSEL Roger                | Mécanique des fluides          |
| DOUCE Roland                  | Physiologie végétale           |
| DUFRESNOY Alain               | Mathématiques pures            |
| GASPARD François              | Physique                       |
| GAUTRON René                  | Chimie                         |
| GIDON Maurice                 | Géologie                       |
| GIGNOUX Claude (M.)           | Sciences nucléaires I.S.N.     |
| GUITTON Jacques               | Chimie                         |
| HACQUES Gérard                | Mathématiques appliquées       |
| HERBIN Jacky                  | Géographie                     |
| HICTER Pierre                 | Chimie                         |
| JOSELEAU Jean-Paul            | Biochimie                      |
| KERCKOVE Claude (M.)          | Géologie                       |
| LE BRETON Alain               | Mathématiques appliquées       |
| LONGEQUEUE Nicole             | Sciences nucléaires I.S.N.     |
| LUCAS Robert                  | Physiques                      |
| LUNA Domingo                  | Mathématiques pures            |
| MASCLE Georges                | Géologie                       |
| NEMOZ Alain                   | Thermodynamique (CNRS - CRTBT) |
| OUDET Bruno                   | Mathématiques appliquées       |
| PELMONT Jean                  | Biochimie                      |
| PERRIN Claude (M.)            | Sciences nucléaires I.S.N.     |
| PFISTER Jean-Claude (détaché) | Physique du solide             |
| PIBOULE Michel                | Géologie                       |
| PIERRE Jean-Louis             | Chimie organique               |
| RAYNAUD Hervé                 | Mathématiques appliquées       |
| ROBERT Gilles                 | Mathématiques pures            |
| ROBERT Jean-Bernard           | Chimie physique                |
| ROSSI André                   | Physiologie végétale           |
| SAKAROVITCH Michel            | Mathématiques appliquées       |
| SARROT REYNAUD Jean           | Géologie                       |
| SAXOD Raymond                 | Biologie animale               |
| SOUTIF Jeanne                 | Physique                       |
| SCHOOL Pierre-Claude          | Mathématiques appliquées       |
| STUTZ Pierre                  | Mécanique                      |
| SUBRA Robert                  | Chimie                         |
| VIDAL Michel                  | Chimie organique               |
| VIVIAN Robert                 | Géographie                     |



à Caplêsa ...

à mes frères et soeurs ...

à mes parents ...



Je le dis par la suite, ce travail concrétise un premier pas d'une collaboration entre l'Institut de Mécanique et le Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques Appliquées et plus précisément entre Monsieur Ch. OBLED du groupe d'hydrologie et Messieurs A. LE BRETON et PHAM DINH Tuan de l'équipe de Statistiques. Il a donc bénéficié de contributions nombreuses et variées. Aussi je dois remercier vivement ;

Monsieur A. LE BRETON, président de jury, qui m'a accueilli au sein de l'équipe de Statistiques, m'a permis d'étudier un problème lié directement à une application réelle et a apporté rigueur et clarté à cette étude en s'y intéressant et en acceptant d'en critiquer la rédaction ;

Monsieur PHAM DINH Tuan, membre de jury et directeur de cette thèse qui m'a fait bénéficier, sans compter, de son acquis scientifique ;

Monsieur Ch. OBLED, membre de jury, qui a suggéré le sujet de cette thèse et m'a fourni documentation et conseils avisés pour l'aborder tout en m'assurant de sa sympathie, et par son intermédiaire l'Institut de Mécanique, pour les moyens informatiques offerts

Monsieur DEVILLE pour m'avoir soufflé l'élan premier et pour sa participation spontanée ;

Monsieur DELLEUR, membre de jury, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail ;

Je dois également remercier

Messieurs G.D. D'AUBIGNY, J. DEMONGEOT, H. LEMONNIER et D. CREUTIN pour leur soutien et leurs conseils ;

Madame DE LA ROCHETTE qui a habillé ce travail avec une frappe de grande qualité ;

Monsieur IGLESIAS et Al. qui ont effectué le tirage de cette thèse.

Enfin, je voudrais dire un souvenir chaleureux à mes collègues de travail : ceux de l'Institut de Mécanique et ceux de l'équipe de Statistiques ainsi qu'à mes amis pour leur soutien moral.



## TABLE DES MATIERES

|                                                                                                                              |    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| INTRODUCTION                                                                                                                 | 1  |
| <u>Chapitre 1</u> : PRESENTATION GENERALE DE L'ETUDE                                                                         | 5  |
| 1. Le problème pratique. Sa formulation mathématique.....                                                                    | 7  |
| 2. Méthodologies pour la résolution du problème.....                                                                         | 9  |
| 3. Plan d'étude de la méthode d'ACPP.....                                                                                    | 14 |
| <u>Chapitre 2</u> : ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES DE PROCESSUS (ACPP)                                                   |    |
| APPROXIMATION ET CONVERGENCE                                                                                                 | 19 |
| I. Analyse en composantes principales (ACP).....                                                                             | 21 |
| I.1. ACP abstraite.....                                                                                                      | 23 |
| I.2. ACP d'un élément aléatoire $X$ à valeurs dans un espace de Hilbert.....                                                 | 25 |
| I.3. ACP de Processus (ACPP).....                                                                                            | 28 |
| II. Approximation et convergence.....                                                                                        | 32 |
| A - Approximation par discrétisation.....                                                                                    | 32 |
| A1 . Convergence de l'approximation.....                                                                                     | 39 |
| A2 . Approximation spline.....                                                                                               | 41 |
| B - Estimation par échantillonnage statistique.....                                                                          | 44 |
| <u>Chapitre 3</u> ; ELEMENTS PROPRES DE L'OPERATEUR DE COVARIANCE D UN PROCESSUS STATIONNAIRE                                | 45 |
| I. Quelques rappels sur les distributions et la transformée de Fourier.....                                                  | 48 |
| II. Quelques propriétés générales des éléments propres de l'opérateur de covariance associé à un processus stationnaire..... | 51 |
| III. Calcul explicite des éléments propres de l'opérateur de covariance d'un processus de densité spectrale rationnelle..... | 55 |
| IV. Deux exemples d'application.....                                                                                         | 66 |



|                                                                                                                                      |         |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| <u>Chapitre 4</u> : SIMULATION DE PROCESSUS ALEATOIRES STATIONNAIRES A DENSITE<br>SPECTRALE RATIONNELLE                              | 79      |
| I. Un procédé Markovien de simulation de processus unidi-<br>mentionnel à densité spectrale rationnelle.....                         | 82      |
| I.1 - Représentation Markovienne d'un processus à densité<br>spectrale rationnelle.....                                              | 82      |
| I.2 - L'algorithme de génération.....                                                                                                | 87      |
| I.3 - Mise en oeuvre de l'algorithme de génération.....                                                                              | 90      |
| II. Quelques autres procédés de simulation.....                                                                                      | 97      |
| II.1 - Représentation spectrale d'un processus station-<br>naire.....                                                                | 99      |
| II.2 - Procédé Mejia et R-Iturbe.....                                                                                                | 101     |
| II.3 - Procédé Shinozuka et Jan.....                                                                                                 | 102     |
| II.4 - Remarques générales sur les méthodes spectrales<br>de génération.....                                                         | 104     |
| III. Résultats numériques et comparaison des différentes<br>méthodes.....                                                            | 111     |
| IV. Génération de champs aléatoires par la méthode des bandes<br>tournantes.....                                                     | 113     |
| <br><u>Chapitre 5</u> : ETUDE EXPERIMENTALE PAR SIMULATION DE LA METHODE D'ANALYSE<br>EN COMPOSANTES PRINCIPALES DE PROCESSUS (ACPP) | <br>113 |
| I. Quelques aspects numériques de la mise en oeuvre de l'ACPP                                                                        | 116     |
| II. Plan de l'étude expérimentale.....                                                                                               | 121     |
| III. Résultats de simulation.....                                                                                                    | 125     |
| <br>REFERENCES                                                                                                                       | <br>159 |

L'étude de la méthode d'Analyse en Composantes Principales de Processus (ACPP) que nous proposons ici est motivée par le problème pratique de l'interpolation et de la cartographie de champs de pluie. Ce problème a été abordé dans le cadre d'une collaboration entre le groupe d'hydrologie de l'Institut de Mécanique des Fluides de l'Institut Nationale Polytechnique de Grenoble et de l'équipe de statistiques du Laboratoire d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble.

La méthode d'ACPP, récemment décrite en termes statistiques par Deville et Escouffier puis, de façon plus synthétique, par Pousse, Dauxois et Besse, est l'extention naturelle de l'ACP usuelle à l'analyse d'un élément aléatoire à valeurs dans un espace de Hilbert.

Elle conduit à une formule de reconstitution des données qui est connue depuis plus longtemps sous le nom de décomposition de Karhunen-Loeve en traitement du signal et de décomposition en fonctions empiriques orthogonales en sciences géophysiques ("E.O.F. expansion" dans la littérature anglo-saxonne). Une approximation de cette formule de reconstitution fournit un procédé efficace pour estimer des données manquantes dans un champ de précipitations.

Nous nous sommes alors fixer deux objectifs principaux : d'une part préciser un cadre d'étude mathématique de l'ACPP et des approximations de cette analyse, d'autre part élaborer une base d'expérimentation par simulation qui permette de cerner ses "réactions" à diverses conditions d'utilisation.

Une présentation générale et détaillée de l'ensemble de ce travail et des motivations pratiques dont il est issu est proposée en préliminaire dans le premier chapitre où nous fournissons une base mathématique rigoureuse à l'aspect technique d'interpolation de l'ACPP en la situant par rapport à une approche désormais classique : le Krigeage.

Dans le chapitre 2 nous étudions la notion d'ACP dans le cadre général des espaces de Hilbert dont dérive celle d'ACP de Processus et nous abordons les problèmes liés à la calculabilité d'une telle analyse.

Dans le chapitre 3 nous faisons le calcul analytique de la solution de l'ACP pour certains noyaux de covariance.

Dans le chapitre 4 nous proposons une méthode pour simuler des réalisations de processus stationnaires à densité spectrale rationnelle.

Dans le chapitre 5, nous menons, dans le domaine d'investigation fourni par les chapitres 3 et 4, une étude expérimentale de la méthode d'ACPP afin de cerner ses meilleures conditions de fonctionnement.

Notre travail nous a amené à considérer la méthode d'ACPP, en tant que technique d'interpolation, comme une concurrente compétitive des techniques courantes.

Elle permet de traiter des données concernant un processus, stationnaire ou non, connu par échantillonnage statistique et par discrétisation.

Faute d'analyse mathématique approfondie et faute d'exemples réels suffisamment nombreux, le cadre d'expérimentation que nous avons élaboré fournit une base d'appréciation des possibilités d'utilisation de la méthode d'ACPP. Cette étude nous a conduit aussi à suggérer

de nouvelles approches. Ainsi il semble intéressant de substituer aux techniques d'interpolation qui interviennent lors de l'approximation, des techniques de lissage. Une étude empirique de l'analyse en composantes principales de processus par lissage des trajectoires peut être entreprise sans difficulté, à l'aide du cadre proposé pour des simulations.

Signalons enfin que le plan de simulation proposé ici pour l'étude de l'ACPP peut être appliqué pour expérimenter d'autres méthodes d'interpolation.



**CHAPITRE 1 :**  
**PRESENTATION GENERALE DE L'ETUDE**



Ce chapitre est consacré à la présentation générale de l'étude que nous avons menée concernant le problème d'estimation de données manquantes dans un champ de précipitations.

Une fois le problème pratique formulé en termes mathématiques, nous décrivons la méthodologie retenue, à savoir l'Analyse en Composantes Principales de Processus (A.C.P.P.), en la situant par rapport à l'approche du Krigeage.

Nous présentons ensuite le plan d'expérimentation que nous avons adopté en vue d'explorer les possibilités d'utilisation de la technique d'A.C.P.P.

## 1 - LE PROBLEME PRATIQUE - SA FORMULATION MATHEMATIQUE

L'objet de ce travail est de proposer une solution au problème pratique suivant : Comment "estimer" la hauteur de pluie tombée au cours d'un épisode pluvieux en un point sans mesure du bassin d'étude, à partir du relevé des hauteurs de pluie dans  $n$  stations du bassin, au cours de  $p$  épisodes pluvieux.

Notons  $D$  le domaine d'étude (i.e. le bassin des Cévennes) -  $D$  est une partie de  $\mathbb{R}^2$  - et  $d_j = (x_j, y_j), j=1, n : d_j \in D$ , les points de  $D$ , où les observations sont possibles (i.e. l'ensemble des stations du réseau).

Soit  $I = \{1, \dots, p\}$  un codage de l'ensemble des épisodes pluvieux ( $n = 100$  et  $p = 80$  dans le cas de l'application envisagée)

Pour chaque épisode pluvieux  $i$  de  $I$ , on choisit de modéliser les hauteurs de pluie tombées sur  $D$  par un champ aléatoire

$X_i = \{X_i(d), d \in D\}$  (où  $X_i(d)$  représente la hauteur de pluie tombée au point  $d$ , au cours de l'épisode  $i$ ), défini sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .



On observe donc pour chaque  $i$  de  $I$  un élément aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$  :  $(X_i(d_1), \dots, X_i(d_n))$  dont les composantes sont les points d'observation du champ de précipitation  $X_i$ .

Nous faisons alors l'hypothèse fondamentale suivante qui traduit l'hypothèse à priori que le phénomène climatologique se reproduit d'un épisode pluvieux à l'autre de façon homogène et indépendante :

Les champs aléatoires  $X_i$ ,  $i \in I$  sont indépendants et de même loi de probabilité.

En d'autres termes  $(X_1, \dots, X_p)$  est un  $p$ -échantillon d'un certain champ que l'on notera  $X = \{X(d), d \in D\}$

Dans le modèle introduit, le problème posé par l'utilisateur se formule comme la recherche d'une "estimation" de la hauteur de pluie  $X_i(d_0)$  en un épisode pluvieux  $i$  :  $1 \leq i \leq p$  et un point sans mesure  $d_0$  de  $D$ , à partir du  $p$ -échantillon

$$\{ (X_i(d_1), \dots, X_i(d_n)) ; i = 1, p \}$$

Ce problème présente plusieurs aspects.

Le premier aspect est de nature probabiliste : si la loi de probabilité, ou au moins une partie des caractéristiques de cette loi, est supposée connue, il s'agit alors de rechercher une fonction des variables observées  $X(d_1), \dots, X(d_n)$  qui approche au mieux, en un sens à définir, la variable aléatoire non observable  $X(d_0)$ .

Par exemple, si les caractéristiques  $C(d_i, d_j) = E\{X(d_i) X(d_j)\}$  pour  $i = 1, n$  et  $j = 0, n$  sont connues (ou peuvent être estimées) une approche de type régression peut être utilisée.

Un second aspect de nature statistique est lié à ce que, en pratique les quantités  $C(d_i, d_j)$  :  $i, j = 1, n$  et  $C(d_i, d_0)$  :  $i = 1, n$  sont inconnues et doivent être estimées au vu de l'échantillon

$$\{(X(d_1, \omega_i), \dots, X(d_n, \omega_i)) , i = 1, p \text{ du vecteur aléatoire } (X(d_1), \dots, X(d_n))\}$$

Un troisième aspect du problème est de nature "approximation".

Les estimations  $\hat{C}(d_i, d_j)$  des valeurs  $C(d_i, d_j)$  pour  $i, j = 1, n$  peuvent être obtenues directement à partir des observations ; par contre le calcul d'estimations  $\hat{C}(d_i, d_0)$  des valeurs  $C(d_i, d_0)$  pour  $i = 1, n$  à partir des  $\hat{C}(d_i, d_j)$  conduira à faire une hypothèse sur la fonction  $C$ .

On peut alors envisager plusieurs méthodes de résolution du problème.

## 2 - METHODOLOGIES POUR LA RESOLUTION DU PROBLEME

Une première approche du problème développée par l'équipe de Matheron (1970,....) consiste, pour l'aspect probabiliste du problème, à adopter la voie classique de la régression linéaire. On restreint donc la classe des fonctions de  $(X(d_1), \dots, X(d_n))$  aux fonctions linéaires de la forme :

$$X^*(d_0) = \sum_{j=1}^n \alpha(d_0, d_j) X(d_j)$$

et on choisit comme critère d'optimalité la minimisation de l'écart quadratique moyen :

$$E | X(d_0) - X^*(d_0) |^2$$

Les coefficients  $\alpha(d_0, d_j)$  sont alors déterminés à partir du système de régression :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \alpha(d_0, d_j) C(d_i, d_j) = C(d_i, d_0) \\ i = 1, n \end{array} \right.$$

où  $C(d_i, d_j)$  représente la fonction des moments croisés du champ aléatoire  $X$  (i.e. la fonction de covariance de  $X$  lorsque  $X$  est centré).

Pour les autres aspects du problème, la méthode est fondée, dans sa version simplifiée, sur une hypothèse de nature paramétrique concernant la fonction de covariance  $C$  du processus  $X$  (ou d'un processus différencié

construit à partir de  $X$ ), supposé stationnaire.  $C$  est de plus supposée isotrope.

De façon plus précise  $C$  est supposée de la forme :

$$C(d, d+h) = K(|h|)$$

où  $K$  à l'une des formes suivantes :

$$K(|h|) = a|h|$$

$$K(|h|) = a|h| + b|h|^3$$

$$K(|h|) = a|h| + b|h|^3 + c|h|^5$$

Les paramètres  $a$  (ou  $(a,b)$ , ou  $(a,b,c)$ ) sont estimés à partir des estimations naturelles  $\hat{C}(d_i, d_j)$  des  $C(d_i, d_j)$ . Des estimations des valeurs de la fonction  $C$  en tout point de  $D$  peuvent alors être calculées et le système de régression estimé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n \hat{\alpha}(d_0, d_j) \hat{C}(d_i, d_j) = \hat{C}(d_i, d_0) \\ i = 1, n \end{array} \right.$$

peut être résolu. L'estimation correspondante  $\hat{X}^*$  de la variable non observée  $X(d_0)$  est appelée valeur krigée du champ  $X$  et la technique porte le nom de Krigeage.

Une seconde approche, plus globale du problème, est de type non paramétrique. C'est celle que nous avons choisie.

Elle permet d'éviter le cadre restrictif des hypothèses de stationnarité et d'isotropie. On suppose seulement certaines hypothèses générales de régularité sur la fonction  $C$ .

D'après le théorème de Mercer (Riesz-Nagy 36) lorsque la fonction des moments  $C$  est continue sur  $D \times D$ , où  $D$  est une partie compacte de  $\mathbb{R}^2$ , on a la représentation.

$$C(d, e) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\frac{1}{2}} \cdot c_k(d) \cdot \phi_k(e)$$

avec la série convergeant uniformément et où les  $\lambda_k$  (respectivement les  $\phi_k$ ) sont les valeurs (respectivement les fonctions) propres de l'opérateur  $V$  défini de  $L^2(D)$  dans  $L^2(D)$  par :

$$V \phi(d) = \int_D C(d, e) \phi(e) de, \quad d \in D$$

Les fonctions  $\phi_k$  sont appelées les fonctions orthogonales empirique - Empirical Orthogonal Functions (E.O.F.). A cette représentation correspond une représentation du processus  $X$  lui-même, donnée par :

$$(1) \quad X(d) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\frac{1}{2}} \cdot c_k \cdot \phi_k(d), \quad d \in D$$

où les  $c_k$  sont des variables aléatoires orthogonales et de variance 1 (la série convergeant en moyenne quadratique). Cette décomposition est connue sous le nom de décomposition de Karhunen-Loeve. En termes statistiques, elle constitue la formule de reconstitution des données par Analyse en Composantes Principales de Processus (A.C.P.P.). Les fonctions  $\phi_k$  sont les facteurs principaux et  $V$  est l'opérateur de covariance associé au processus  $X$ .

La première étape de la méthode consiste à choisir une certaine approximation  $C'$  de la fonction  $C$ .

Soit  $H_n$  un sous espace de dimension  $n$  de  $L^2(D)$ , défini par une base de fonctions d'interpolation aux points  $d_1, d_2, \dots, d_n$  de  $D$ , notée

$$\{ \beta(., d_j) \quad , \quad j = 1, n \}$$

(et telles que  $\beta(d_i, d_j) = \delta_{ij}$  ;  $\delta_{ij}$  : symbole de Kronecker)

Les fonctions  $\beta(., d_j)$  pourront être, par exemple, des fonctions constantes par morceaux, des fonctions linéaires par morceaux, ou encore des splines cubiques...

On choisit alors l'approximation  $C'$  comme étant la fonction interpolant la fonction  $C$  aux arguments  $(d_i, d_j)$  où  $C$  est connue (ou du moins peut être estimée) définie par :

$$C'(d, e) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C(d_i, d_j) \beta(d, d_i) \beta(e, d_j) \quad , d, e \in D$$

Notons que  $C'$  est obtenue par deux fois l'interpolation d'une fonction à une variable.

Cette fonction  $C'$  est en fait la fonction des moments d'un champ aléatoire  $X'$  interpolant le champ  $X$  aux points  $d_j : j = 1, n$ , à savoir :

$$X'(d) = \sum_{j=1}^n X(d_j) \cdot \beta(d, d_j) \quad , d \in D$$

On pourrait alors être tenté d'"estimer"  $X(d_0)$  par  $X'(d_0)$  ce qui reviendrait à interpoler, de façon déterministe, trajectoire par trajectoire.

On pourrait aussi, puisque  $C'$  approche  $C$ , estimer les valeurs  $C(d_i, d_0)$  inconnues par les valeurs  $\hat{C}'(d_i, d_0)$  construites à partir des estimations naturelles  $\hat{C}(d_i, d_j)$  et envisager ensuite d'adopter la voie classique de la regression linéaire pour estimer  $X(d_0)$ .

Il est alors facile de voir que le système de regression associé à  $X$  est le même que celui associé à  $X'$  et par conséquent la solution est encore une interpolation déterministe.

La méthode considérée ici est basée sur la formule de reconstitution (1) pour le processus  $X'$ , tronquée à un certain ordre  $q < n$  et où les éléments propres  $\lambda_k$  et  $\phi_k$  du noyau  $C$  sont approchés par ceux du noyau  $C'$  que l'on estimera.

L'opérateur intégral  $V'$  de noyau  $C'$  défini par :

$$\phi \in L^2(D) \quad V' \phi(d) = \int_D C'(d, e) \phi(e) \, de \quad , d \in D$$

est un opérateur de rang fini, son image étant contenue dans  $H_n$ .

Pour la recherche de ses valeurs et vecteurs propres  $\lambda_k^0$  et  $\phi_k^0$  i.e. son Analyse Spectrale (A.S), on peut se restreindre aux  $\phi_k^0$  de  $H_n$ , soit :

$$\phi_k^0(d) = \sum_{i=1}^n \phi_{ik}^0 \cdot \beta(d, d_i)$$

. La recherche du  $k^{\text{ème}}$  élément propre de  $V'$  se ramène à la résolution du système linéaire suivant :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \sum_{l=1}^n C(d_i, d_j) \cdot \phi_{lk}^0 \cdot \int_D \beta(e, d_i) \beta(e, d_l) de = \lambda_k^0 \cdot \phi_{jk}^0 \\ j = 1, n \end{array} \right.$$

Notons  $E$  la matrice symétrique définie positive des produits scalaires des fonctions de base de terme général

$$E_{il} = \int_D \beta(e, d_i) \beta(e, d_l) de$$

et  $C$  la matrice symétrique de terme général  $C(d_i, d_j)$ . Alors l'A.S. de l'opérateur  $V'$  se ramène à la recherche des vecteurs propres et des valeurs propres de la matrice non symétrique  $C.E$ .

La formule de reconstitution des données du champ  $X^0$  s'écrit :

$$(3) \quad X'(d) = \sum_{k=1}^n (\lambda_k^0)^{-\frac{1}{2}} \cdot c_k^0 \cdot \phi_k^0(d), \quad d \in D$$

où les variables aléatoires  $c_k^0$  sont données par :

$$\begin{aligned} c_k^0 &= (\lambda_k^0)^{-\frac{1}{2}} < X'(\cdot), \phi_k^0 >_{H_n} \\ &= (\lambda_k^0)^{-\frac{1}{2}} \int_D \left( \sum_j X(d_j, \omega) \beta(e, d_j) \right) \left( \sum_i \phi_{ik}^0 \beta(e, d_i) \right) de \\ (4) \quad &= \sum_i \sum_j (\lambda_k^0)^{-\frac{1}{2}} X(d_j) \cdot \phi_{ik}^0 \cdot E_{ij} \end{aligned}$$

Il convient de noter que les variables  $c_k^0$  qui sont des combinaisons linéaires des variables initiales  $X(d_j)$  sont 2 à 2 orthogonales et réduites.

Finalement, on utilisera comme "estimation" de  $X(d_0)$  la valeur  $\hat{X}^*(d_0)$  obtenue à partir de la formule (3) tronquée et estimée. De façon plus précise  $\hat{X}^*(d_0)$  est définie par :

$$\hat{X}^*(d_0) = \sum_{k=1}^q (\hat{\lambda}'_k)^{\frac{1}{2}} \cdot \hat{c}'_k \cdot \hat{\phi}'_k(d_0), \quad q < n$$

où les  $\hat{\lambda}'_k$ ,  $\hat{\phi}'_k$  et  $\hat{c}'_k$  sont fournies par (2) et (4) en remplaçant les termes  $C(d_i, d_j)$  par les  $\hat{C}(d_i, d_j)$ .

Notons que le choix  $q = n$  nous ramène à une interpolation déterministe.

Dans le chapitre 2 nous donnons une définition plus complète de l'A.C.P.P. et nous analysons en détail le problème de l'approximation des éléments propres de  $V$  par ceux de  $V'$ .

Nous présentons dans le paragraphe suivant, dans leurs grandes lignes, les différents aspects du plan expérimental que nous avons adopté pour l'étude de la méthode d'A.C.P.P.

### 3 - PLAN D'ETUDE EXPERIMENTALE DE LA METHODE D'ACPP

Pour l'élaboration d'une base d'expérimentation en vue d'explorer les possibilités de la méthode d'A.C.P.P., nous avons centré notre attention sur la classe des processus indexés par  $R$ , stationnaires et de densités spectrales rationnelles.

Nous donnons ici un aperçu des techniques que nous avons élaborées et mises en oeuvre. De plus, comme l'application pratique - interpolation de champ de pluie - concerne des processus indexés par  $R^2$ , nous donnons quelques éléments pour la conception de techniques analogues dans ce cadre.

Pour être en mesure de cerner les "réactions" de la méthode d'A.C.P.P. à diverses "entrées", il est utile d'une part, de savoir calculer analytiquement la solution de l'A.C.P.P. pour certains noyaux  $C$  donnés et d'autre part de savoir simuler des observations de processus  $X$  ayant pour fonctions de covariance ces noyaux.

Pour la classe des processus que nous considérons, nous proposons, au chapitre 3, une procédure de calcul analytique des solutions de l'équation intégrale : ( $T \subset \mathbb{R}$ )

$$(5) \quad \int_T C(t, s) \phi(s) ds = \lambda \phi(t) \quad , t \in T$$

où  $C(t, s) = E X(t) X(s)$  est la fonction de covariance du processus  $X = \{ X(t) , t \in T \}$  supposé de densité spectrale rationnelle  $f$  de la forme :

$$f(\omega) = \frac{P_1(\omega)}{P_2(\omega)} \quad , \quad \text{degré de } P_1 < \text{degré de } P_2$$

Par transformation de Fourier dans  $L^2(T)$ , nous ramenons la résolution de (5) à la résolution d'une équation différentielle linéaire.

Nous avons d'autre part développé, au chapitre 4, une méthode de simulation permettant de "générer" des observations d'un processus gaussien  $X$  de fonction de covariance donnée dans la classe précédente. Elle s'appuie sur la représentation markovienne suivante d'un tel processus :

$$\begin{cases} X(t) &= H \cdot Z(t) \\ dZ(t) &= AZ(t) dt + B dW(t) \end{cases}$$

où  $H$ ,  $A$  et  $B$  sont des matrices ligne, carrée et colonne respectivement et  $W = \{ W(t) , t \in \mathbb{R} \}$  est un processus à accroissements orthogonaux avec :

$$E | W(t) - W(s) |^2 = | t - s |$$

Nous avons supposé que le processus à simuler est gaussien de sorte que  $W$  soit un mouvement Brownien et  $Z$  un processus de Markov dont la probabilité de transition est particulièrement simple.

Les performances de la méthode de simulation sont examinées et comparées à celles d'autres procédures.

La génération de champs aléatoires peut être alors réalisée par la méthode des bandes tournantes.



A l'aide des deux outils précédents, nous avons bâti, dans le chapitre 5, un plan d'expérimentation en vue d'apprécier la sensibilité de la méthode d'A.C.P.P. par rapport aux différents paramètres d'entrée - par exemple, les points d'observations  $t_1, t_2, \dots, t_n$  de l'intervalle d'étude  $T$  (leur nombre, leur localisation) ou les fonctions d'interpolation de base - qui interviennent dans la mise en oeuvre pratique de la méthode.

Partant d'une fonction de covariance théorique  $C$  associée à une densité spectrale rationnelle.

- D'une part, on détermine explicitement les solutions exactes  $\lambda_k$  et  $\phi_k$  de l'A.C.P. du processus  $X$  de fonction de covariance  $C$ .

- D'autre part, on "génère", sur une discrétisation choisie  $\{t_1, \dots, t_n\}$  des observations du processus  $X$ .

A partir d'un  $p$ -échantillon de trajectoires discrétisées de  $X$  l'A.C.P.P. fournit, pour le choix d'une base de fonctions d'interpolation, les éléments propres  $\hat{\lambda}'_k$  et  $\hat{\phi}'_k$

Il est alors possible de confronter les solutions exactes et approchées.

L'A.C.P.P. fournissant également une "estimation" des valeurs en un point différent des points de discrétisation, il est aussi possible de comparer valeur "estimées" et valeurs exactes fournies par la simulation. On dispose alors d'une vue globale de la qualité d'approximation par A.C.P.P.

Pratiquement, nous mesurons la performance de la technique par l'écart quadratique moyen des écarts de reconstitutions sur l'ensemble des  $p$  trajectoires, soit la quantité :

$$\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p |X_i(t_0) - \hat{X}_i^*(t_0)|^2$$

Ces écarts sont représentés en fonction du nombre  $q$  des fonctions propres retenues pour différents choix des paramètres d'entrée.

Au chapitre 5, on trouvera un exposé détaillé des différents aspects de ce plan d'étude expérimental et des résultats de simulation obtenus.

Signalons pour information que tous les calculs numériques ont été effectués sur un NORISK-DATA 10-100 à partir de programmes écrits en FORTRAN 77.



## CHAPITRE 2 :

ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES DE PROCESSUS (ACPP)

APPROXIMATION ET CONVERGENCE



Dans ce chapitre nous étudions le problème de l'Analyse en Composantes Principales (A.C.P.) dans le cadre général des espaces de Hilbert.

Cette extension de la notion d'A.C.P. usuelle a été traitée, par ailleurs, par Escoufier (14) qui a ramené cette analyse à l'étude d'un opérateur de Hilbert-Schmidt et par Deville (9) qui, dans le cadre de l'analyse harmonique, s'intéresse à l'opérateur de covariance ; puis, par Pousse et Dauxois (34) et Besse (3) dans un essai d'étude synthétique.

Dans une première partie, nous introduisons la notion d'A.C.P. abstraite dont dérive la notion d'A.C.P. d'un élément aléatoire à valeurs dans un espace de Hilbert. L'A.C.P. de Processus (A.C.P.P.) est alors définie comme l'A.C.P. d'un élément aléatoire à valeurs dans un espace de Hilbert particulier.

Comme, dans la pratique, on travaille sur des processus discrétisés et échantillonnés nous étudions dans une deuxième partie, l'approximation par discrétisation et l'estimation par échantillonnage statistique de l'A.C.P.P. et nous donnons quelques résultats de convergence.

## I - ANALYSE EN COMPOSANTES PRINCIPALES (A.C.P.)

Les espaces de Hilbert que l'on considérera tout au long du chapitre sont réels séparables et sont identifiés à leur dual topologique.

Rappelons d'abord quelques définitions concernant les opérateurs définis sur les espaces de Hilbert.

Soient E et F deux espaces de Hilbert, un opérateur linéaire continu U de E dans F est dit de Hilbert-Schmidt (H-S) si sa norme de H-S définie par :

$$\|U\|_{H-S} = \left( \sum_i \|Ue_i\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

où  $\{e_i\}$  est une base orthonormale de  $E$ , est finie.

Notons que la norme de  $H-S$  est indépendante du choix de la base  $\{e_i\}$  de  $E$ . En effet, soit  $\{f_j\}$  une base de  $F$  :

$$\begin{aligned} \sum_i \|Ue_i\|^2 &= \sum_i \sum_j \langle Ue_i, f_j \rangle^2 \\ &= \sum_j \sum_i \langle Ue_i, f_j \rangle^2 \\ &= \sum_j \|U^* f_j\|^2 \end{aligned}$$

où  $U^*$  est l'opérateur adjoint de  $U$ . (Les séries étant à termes positifs l'inversion des sommations en  $i$  et  $j$  est permise). La dernière égalité implique que  $\|U\|_{H-S}$  ne dépend pas de  $\{e_i\}$  et en outre

$$\|U\|_{H-S} = \|U^*\|_{H-S}$$

L'opérateur continu  $U$  est dit nucléaire (ou à trace) si sa norme définie par :

$$\|U\|_* = \sup \sum_i |\langle Ue_i, f_i \rangle|$$

où  $\{e_i\}$  et  $\{f_j\}$  sont des bases orthonormales de  $E$  et  $F$  respectivement, est finie.

Le nombre réel  $\|U\|_*$  ne dépend pas de la base choisie et définit la trace de l'opérateur  $U$ , lorsque celui-ci est considéré comme un opérateur de  $E$  dans lui-même.

De manière équivalente, l'élément  $U$  est nucléaire s'il admet la représentation :

$$U = \sum_i \lambda_i \langle e_i, \cdot \rangle f_i$$

La convergence de la série étant prise au sens de la convergence des opérateurs dans  $E \times F$  et où la famille  $\{\lambda_i\}$  est telle que  $\sum_i |\lambda_i|$  est finie. On pose

$$\|U\|_* = \sum_i |\lambda_i|$$

Le nombre  $\|U\|_*$  défini dans chacune des 2 conditions à la même valeur et il est tel que

$$\|U\|_{H-S} \leq \|U\|_*$$

En corollaire, pour qu'un opérateur linéaire continu  $U$  de  $E$  dans  $F$  soit nucléaire, il est nécessaire et suffisant qu'il existe un espace de Hilbert  $G$  et une factorisation  $U = VW$  de  $U$  en le produit de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt respectivement de  $E$  dans  $G$  et de  $G$  dans  $F$ . Enfin, il est également utile de savoir que l'adjoint d'un opérateur de H-S (respectivement nucléaire) est de H-S (resp. nucléaire)

Pour les démonstrations ou des compléments, on peut se référer à Riesz et Nagy (36), par exemple.

Dans un premier temps, nous définissons le problème de l'A.C.P. dans un cadre abstrait.

### I.1. A.C.P. abstraite

Définition. On appelle A.C.P. abstraite du triplet  $(E, F, U)$  où  $E$  et  $F$  sont des espaces de Hilbert et  $U$  un opérateur de Hilbert-Schmidt, la recherche d'un sous espace vectoriel  $F_n$  de  $F$ , de dimension  $n$  ( $= 1, 2, \dots$ ) qui minimise la quantité :

$$\|U - P_{F_n} \circ U\|_{H-S}^2$$

$P_{F_n}$  étant le projecteur orthogonal de  $F$  sur  $F_n$ .



Si  $\{f_j\}$  désigne une base orthonormale de  $F$  telle que  $\{f_j\}_{j=1,n}$  soit une base de  $F_n$ , alors :

$$\begin{aligned} \|U - P_{F_n} \circ U\|_{H-S}^2 &= \sum_j \|U^* \circ (I - P_{F_n}) f_j\|^2 \\ &= \sum_{j>n} \|U^* f_j\|^2 \\ &= \|U\|_{H-S}^2 - \sum_{j=1}^n \|U^* f_j\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi le problème de l'A.C.P. peut s'énoncer comme la recherche d'une suite orthonormée  $\{f_j\}$  telle que  $\{f_j\}_{j=1,n}$  réalise le maximum de :

$$\sum_{j=1}^n \|U^* f_j\|^2$$

parmi les systèmes orthonormés de  $n$  vecteurs de  $F$ .

On montre que, la solution de l'A.C.P. abstraite du triplet  $(E, F, U)$  est le sous-espace vectoriel  $E$  engendré par les  $n$  vecteurs propres de  $U \circ U^*$  associés aux  $n$  plus grandes valeurs propres de cet opérateur.

L'A.C.P. se ramène donc à l'Analyse Spectrale (A.S.) de  $V = U \circ U^*$  qui est, d'après les propriétés citées plus haut, un opérateur continu, autoadjoint, nucléaire et positif.

### DUALITE

L'énoncé du problème dual de l'A.C.P. abstraite est obtenu en inversant le rôle de  $E$  et  $F$  et en remplaçant  $U$  par  $U^*$ .

Le problème conduit à l'A.S. de l'opérateur continu, autoadjoint nucléaire et positif  $W = U^* \circ U$ .

Les opérateurs  $V$  et  $W$  possèdent la même famille de valeurs propres non nulles  $\{\lambda_i\}$

La suite  $\{f_i\}$  des vecteurs propres de  $V$  associés aux valeurs propres  $\{\lambda_i\}$  est la suite des facteurs principaux.

La suite  $\{c_i\}$  des vecteurs propres de  $W$  associés aux valeurs propres  $\{\lambda_i\}$  est la suite des composantes principales.

Les deux suites  $\{f_i\}$  et  $\{c_i\}$  sont liées entre elle par les relations :

$$c_i = (\lambda_i)^{-\frac{1}{2}} U^* f, \quad f_i = \lambda_i^{-\frac{1}{2}} U c_i$$

## I.2 - A.C.P. d'un élément aléatoire $X$ à valeurs dans un espace de Hilbert

Nous introduirons l'A.C.P. d'un élément aléatoire  $X$  à valeurs dans un espace de Hilbert comme un cas particulier d'A.C.P. abstraite.

Soit  $X$  un élément aléatoire défini sur un espace probabilisé  $(\Omega, A, P)$  et à valeurs dans un espace de Hilbert  $F$ . On définit l'opérateur linéaire  $U$  qui à tout élément  $f$  de  $F$  associe la variable aléatoire :

$$U^* f = \langle X, f \rangle_F$$

On dit que  $X$  est du second ordre si

$$E(\|X\|_F^2) = \int_{\Omega} \|X(\omega)\|_F^2 dP(\omega) < +\infty$$

Notons  $E = L^2(\Omega, A, P)$ .

Proposition. Si  $X$  est du second ordre  $U^*$  est un opérateur de Hilbert Schmidt (H-S) de  $F$  dans  $E$ . Son adjoint  $U$  est aussi un opérateur de H-S, de  $E$  dans  $F$ , défini par

$$\forall e \in E, \quad Ue = E(X.e)$$

La définition de  $U$  signifie que, pour tout  $f$  de  $F$

$$\langle f, Ue \rangle = \int_{\Omega} \langle X(\omega), f \rangle e(\omega) dP(\omega)$$

Preuve. En effet,  $\{f_i\}$  étant une base orthonormale de  $F$ , la propriété du second ordre de  $X$  entraîne que :

$$\begin{aligned} \|U^*\|_{H-S}^2 &= \sum_i \|U^* f_i\|^2 = \sum_i E (U^* f_i)^2 \\ &= \int \sum_i \langle X(\omega), f_i \rangle^2 dP(\omega) \\ &= \int \sum_i \langle X(\omega), f_i \rangle^2 dP(\omega) \\ &= E \|X\|^2 < +\infty \end{aligned}$$

ce qui montre que  $U^*$  est un opérateur de H-S.

Son adjoint  $U$  opère du dual (identifié à  $E$ ) de  $E$  dans  $F$  et est défini pour tout  $f$  de  $F$  et tout  $e$  de  $E$  par :

$$\begin{aligned} \langle f, Ue \rangle &= \langle U^* f, e \rangle \\ &= \int U^* f(\omega) e(\omega) dP(\omega) \\ &= \int \langle X(\omega), f \rangle e(\omega) dP(\omega) \quad \Delta \end{aligned}$$

On peut alors donner la

Définition. On appelle A.C.P. de l'élément aléatoire  $X$  du 2<sup>nd</sup> ordre à valeurs dans l'espace de Hilbert  $F$ , l'A.C.P. du triplet  $(E, F, U)$  où  $E$  est l'espace  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et  $U$  l'opérateur défini dans la proposition précédente.

ESPERANCE MATHEMATIQUE ET OPERATEUR DE COVARIANCE

Si  $X$  est du second ordre, l'application définie sur  $F$  par :

$$f \longmapsto E(\langle X, f \rangle) = E(U^* f)$$

est continue et d'après le théorème de Riesz, il existe un unique élément de  $F$ , noté  $E(X) = \int_{\Omega} X(\omega) dP(\omega)$ , et appelé espérance mathématique de  $X$ , tel que :

$$\langle E(X), f \rangle = E(\langle X, f \rangle) \quad , f \in F$$

De même l'application bilinéaire symétrique définie sur  $F \times F$  par :

$$(f, g) \mapsto E(\langle X - E(X), f \rangle \langle X - E(X), g \rangle)$$

est continue et en vertu du théorème de Riesz, il existe un unique élément de  $L(F, F)$ , l'endomorphisme des opérateurs continus sur  $F$ ,  $V$ , appelé opérateur de covariance de  $X$ , tel que :

$$\langle Vf, g \rangle = E(\langle X - E(X), f \rangle \langle X - E(X), g \rangle) \quad f, g \in F$$

Par construction  $V$  est continu, positif et autoadjoint.

Si  $X$  est supposé centré (i.e.  $E(X) = 0$ ) alors  $V = U \circ U^*$ , où  $U$  et  $U^*$  sont les opérateurs définis au début de ce paragraphe.

Dans ce cas  $E((U^* f)^2) = \text{var}(U^* f)$  et le problème d'A.C.P. de l'élément aléatoire  $X$  peut s'énoncer comme la recherche d'une suite  $\{f_i\}$  de  $F$  telle que  $\{f_1, \dots, f_n\}$  réalise le maximum de  $\sum_1^n \text{var}(U^* f_i)$  parmi les systèmes orthonormés de  $n$  vecteurs de  $F$ .

On retrouve, dans un cadre plus général, la définition de l'A.C.P. de Hotelling.

La variance totale de  $X$  est définie par :

$$\sigma^2 = V(X) = E(\|X\|^2) = \int_{\Omega} \|X(\omega)\|^2 dP(\omega)$$

C'est donc une quantité finie et égale par ailleurs à :

$$\begin{aligned} E \left( \sum_i \langle X, f_i \rangle^2 \right) &= E \left( \sum_i \langle X, f_i \rangle \langle X, f_i \rangle \right) \\ &= \sum_i \langle V f_i, f_i \rangle \\ &= \sum_i \lambda_i \\ &= \text{Trace } (V) \end{aligned}$$

où  $\{f_i\}$  est la suite des vecteurs propres de  $V$  associés aux valeurs propres  $\{\lambda_i\}$ .

La quantité  $\lambda_i / \sigma^2$  représente la part de variance expliquée par la  $i^{\text{ème}}$  composante principale.

En résumé, l'A.C.P. d'un élément aléatoire  $X$  à valeurs dans un espace de Hilbert  $F$  se ramène à l'A.C.P. abstraite d'un triplet  $(E, F, U)$  où  $E$  est l'espace  $L^2(\Omega, A, P)$  et  $U$  l'opérateur de  $E$  dans  $F$  défini par  $Ue = E(X.e)$ . Elle a conduit à l'A.S de l'opérateur de covariance  $V$ .

Un processus aléatoire pouvant être, sous certaines hypothèses, considéré comme un élément aléatoire à valeurs dans un espace de Hilbert, l'A.C.P. de processus peut être traitée, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, comme l'A.C.P. d'un tel élément.

### I.3. A.C.P. de Processus (A.C.P.P.)

Un processus aléatoire réel est défini par la donnée d'un espace probabilisé  $(\Omega, A, P)$ , d'un espace mesurable  $(T, B_T)$  où  $T$  est une partie de  $\mathbb{R}^n$  et  $B_T$  la tribu borélienne, muni d'une mesure positive  $\sigma$ -finie  $\mu$  ( $\mu = dt$  mesure de Lebesgue, en général) et d'une fonction mesurable de  $\mathbb{R}^{T \times \Omega}$ . On le notera :

$$X = \{ X(t, \omega), (t, \omega) \in T \times \Omega \} = \{ X(t), t \in T \}$$

Donnons les hypothèses nécessaires à l'existence de la solution de l'A.C.P.P.

Nous supposons que le processus  $X$  appartient à  $L^2(\Omega \times T, \mathcal{A} \times \mathcal{B}_T, P \otimes \mu)$  que l'on peut identifier à  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  ;  $L^2(T, \mathcal{B}_T, \mu)$  ou de manière équivalente, nous supposons que  $X$  vérifie les conditions :

$$X(\cdot, \omega) \in L^2(T, \mathcal{B}_T, \mu)$$

$$\int_{\Omega} \|X(\cdot, \omega)\|^2 dP(\omega) < \infty \quad (\text{i.e. } X \text{ est du second ordre})$$

Alors le problème de l'A.C.P. du processus  $X$  est défini comme étant celui de l'A.C.P. de l'élément aléatoire  $X$  défini sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et à valeurs dans  $L^2(T, \mathcal{B}_T, \mu)$ .

Les opérateurs  $U$  et  $U^*$  s'écrivent :

$$Ue = \int_{\Omega} X(\cdot, \omega) e(\omega) dP(\omega) \quad , \quad e \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

$$U^*f = \int_T X(t, \cdot) f(t) d\mu(t) \quad , \quad f \in L^2(T, \mathcal{B}_T, \mu)$$

On pose  $E = L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$  et  $F = L^2(T, \mathcal{B}_T, \mu)$ .

Dans toute la suite, on supposera que le processus  $X$  est centré (i.e.  $E(X(t)) = 0$ ).

Cette hypothèse n'est pas contraignante car on peut s'y ramener en soustrayant à  $X(t)$  son espérance mathématique. On peut toutefois éviter le "centrage" et faire une A.C.P. non centrée auquel cas les fonctions et opérateurs de covariance définis ci-dessous doivent s'interpréter comme fonction et opérateur des moments croisés.

FONCTION ET OPERATEUR DE COVARIANCE D'UN PROCESSUS

Soient  $f$  et  $g$  des éléments de  $F$ .

La covariance entre les variables aléatoires  $U^* f$  et  $U^* g$  est définie par :

$$\begin{aligned} E ( U^* g . U^* g ) &= E ( \langle X(t,.) , f \rangle \langle X(s,.) , g \rangle ) \\ &= \int_{T \times T} C(t,s) f(t) g(s) d\mu(t) d\mu(s) \end{aligned}$$

où

$$C(t,s) = E ( X(t,.) X(s,.) )$$

est la fonction de covariance du processus  $X$ .

L'opérateur de covariance  $V$  peut être défini à partir de  $C(t,s)$  de la manière suivante :

$$V f(t) = \langle C(t,.) , f \rangle , \quad f \in L^2(T, \mathcal{B}_T, \mu)$$

Finalement, l'A.C.P. du processus  $X$  peut se définir comme l'A.C.P. abstraite du triplet  $(E, F, U)$  défini plus haut et se résout donc par l'A.S. de l'opérateur continu, positif, autoadjoint et nucléaire  $V$ , qui est l'opérateur de covariance de  $X$ .

Remarque : Nous avons supposé ici que  $F$ , l'espace des trajectoires (de  $X$ ) est l'espace  $L^2(T, \mathcal{B}_T, \mu)$  muni du produit scalaire usuel. En fait, différents choix peuvent être envisagés autant pour l'espace  $F$  que pour son produit scalaire. On peut par exemple considérer les espaces de Sobolev d'ordre  $k$  sur  $T$ . (voir plus loin et aussi Besse ( 3 ) et Mazerolles ( 29 ) )

LA FORMULE DE RECONSTITUTION (LA DECOMPOSITION DE KARHUNEN-LOEVE)

Par ailleurs, l'A.C.P.P. de  $X$  conduit à des décompositions de la fonction de covariance et du processus lui-même.

Par application du théorème de Mercer (Riesz-Nagy (36) p.242), la décomposition du noyau  $C$ , supposé continu sur  $T \times T$  (i.e. le processus  $X$  associé est continu dans  $L^2(T, \mathcal{B}_T, \mu)$ ), s'écrit pour tout couple  $(t, s)$  de  $T \times T$  :

$$C(t, s) = \sum_i \lambda_i f_i(t) f_i(s)$$

la série convergeant uniformément sur  $S \times S$  pour tout compact  $S$  de  $T$ .

Le développement orthogonal de  $X$  constitue la formule de reconstitution de  $X$  dans  $L^2(T, \mathcal{B}_T, \mu)$  et est défini, pour tout  $t$  de  $T$ , par :

$$X(t) = \sum_i \lambda_i^{-1/2} \cdot c_i \cdot f_i(t)$$

la série convergeant dans  $L^2(T, \mathcal{B}_T, \mu)$  c'est à dire en moyenne quadratique et où les composantes principales  $c_i$ , définies en I.1, constituent une famille orthogonale et les  $\lambda_i$  et  $f_i$  sont les éléments propres de l'opérateur de covariance  $V$  de  $X$ .

On retrouve cette décomposition en Analyse du Signal (Analyse Harmonique) sous le nom de décomposition de Karhunen-Loeve (24,26) et en sciences géophysiques sous le nom de "Empirical Orthogonal Functions" (E.O.F.).

Dans ce dernier domaine, elle permet notamment l'interpolation de processus hydrométéorologiques (voir chapitre 1 et aussi Obled (32) et Escoufier (14,15)). L'A.C.P.P. se présente, en tant que technique d'interpolation, comme une concurrente compétitive des méthodes d'interpolation courantes telle que le Krigeage (voir Creutin (6) et aussi Obled et Creutin (7)).

Le traitement numérique de la méthode d'analyse en composantes principales ne peut être envisagé que moyennant une double approximation.



Aussi, nous nous proposons d'étudier dans une deuxième partie de ce chapitre les problèmes liés à l'approximation et à l'estimation de l'A.C.P. de processus en nous intéressant plus particulièrement aux questions posées par l'approximation par discrétisation sur  $T$ .

## II - APPROXIMATION ET CONVERGENCE

Dans la pratique et en général un processus n'est pas connu en tout point  $t$  de  $T$  mais seulement en des points de "discrétisation"  $t_1, \dots, t_n$ . De plus, la structure au 2<sup>nd</sup> ordre d'un élément aléatoire doit être estimée à partir d'un échantillon.

Or l'A.C.P.P. définie plus haut conduit à l'A.S. de l'opérateur de covariance  $V$  de  $X$  dans  $L(F, F)$  où  $F$  dénote l'espace  $L^2(T, \mathcal{B}_T, \mu)$ .

On est donc amené à substituer à l'A.C.P. initiale une A.C.P. basée sur un opérateur "approché" qui sera un opérateur continu de rang fini, donc calculable. Il convient de justifier une telle pratique par une étude de la convergence. Nous montrerons qu'en fait l'A.C.P. approchée revient à l'A.C.P. d'un processus interpolé ou de façon équivalente à l'A.S. d'un opérateur de covariance dont le noyau est obtenu par une double interpolation du "noyau observé".

### A - Approximation par discrétisation

La démarche de l'approximation que nous proposons ici dans le cadre particulier de l'A.C.P.P. est une adaptation de l'approche dans un cadre général d'A.C.P. abstraite (cf. Besse (2) par exemple).

On considère un processus réel centré  $X = \{X(t), t \in T\}$  tel que

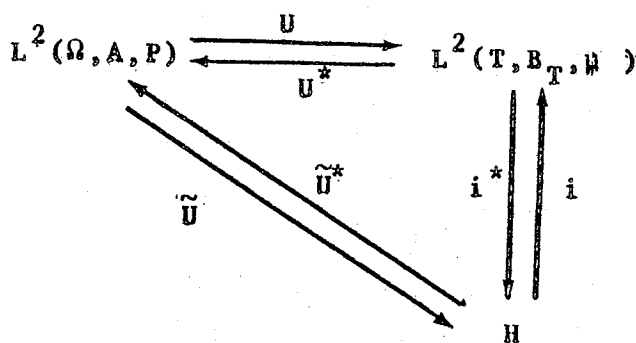
$$X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P; L^2(T, \mathcal{B}_T, \mu))$$

On introduit un espace de travail  $H$ , de Hilbert et séparable, inclus dans  $L^2(T, \mathcal{B}_T, \mu)$  et muni d'une topologie plus fine que celui-ci, vérifiant :

- (i)  $\forall t \in T$ , l'application  $f \in H \mapsto f(t) \in \mathbb{R}$  est continue
- (ii)  $\text{Im } U = \{ Ue, e \in L^2(\Omega, A, P) \} \subset H$  et  $U$  est continu comme application de  $E$  dans  $H$ .

On note  $i$  l'injection canonique de  $H$  dans  $L^2(T, \mathcal{B}_T, \mu)$  supposée continue et  $U^*$  (respectivement  $\tilde{U}$ ) l'opérateur linéaire continu défini de  $H$  dans  $L^2(\Omega, A, P)$  (resp. de  $L^2(\Omega, A, P)$  dans  $H$ ) par  $i \circ \tilde{U} = U$  (resp.  $\tilde{U}^* \circ i^* = U^*$ ).

On construit alors le diagramme suivant :



Soit  $H_n$  un sous-espace de  $H$  de dimension  $n$  muni de la structure hilbertienne induite. Soit  $i_n$  (respectivement  $p_n$ ) l'injection canonique de  $H_n$  dans  $H$  (resp. le projecteur de  $H$  sur  $H_n$ ).

On définit alors l'opérateur  $U_n = i \circ i_n \circ p_n \circ \tilde{U}$  de  $L^2(\Omega, A, P)$  dans  $L^2(T, \mathcal{B}_T, \mu)$ .

L'A.C.P. approchée de  $X$  relative à  $H$  est alors définie comme étant l'A.C.P. du triplet  $(L^2(\Omega, A, P), L^2(T, \mathcal{B}_T, \mu), U_n)$ .

Il est intéressant de constater que l'opérateur  $U_n$  est un opérateur de type  $U$  associé à un processus  $X_n$  obtenu par interpolation de  $X$  aux points  $X(t_1), \dots, X(t_n)$ , si l'on choisit de définir le projecteur  $p_n$  de sorte que l'A.C.P. approchée de  $X$  ne dépende que des valeurs de  $X$  en  $t_1, t_2, \dots, t_n$ . En effet, notre hypothèse implique que l'image de

l'opérateur  $U_n^* = \tilde{U}^* \circ p_n^* \circ i_n^* \circ i^*$  est contenue dans le sous espace engendré par les  $X(t_i) : i = 1, n$ . Autrement dit, le noyau de  $U_n$  contient les variables aléatoires orthogonales aux  $X(t_i) : i = 1, n$  . i.e.

$$(U_n e = 0 \quad \forall e \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P) \text{ tel que } E(e X(t_i)) = (Ue)(t_i) = 0 \quad i = 1, n$$

soit encore

$$U_n e = 0 \quad \forall e \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P) \text{ tel que } (\tilde{U}e)(t_i) = 0 \quad i = 1, n$$

Comme  $U_n = i \circ i_n \circ p_n \circ \tilde{U}$  cette dernière condition est vérifiée si et seulement si le noyau de  $p_n$  contient toutes les fonctions nulles en  $t_1, t_2, \dots, t_n$ .

Ainsi  $p_n f$  ne dépend que de  $f(t_1), \dots, f(t_n)$  et par conséquent  $p_n f$  peut s'écrire sous la forme :

$$p_n f = \sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot \alpha_i, \quad f \in H$$

où les  $\alpha_i$  constituent une base de  $H_n$ . L'adjoint  $p_n^*$  de  $p_n$  est défini, pour tout  $h$  de  $H_n$ , par :

$$\langle f, p_n^* h \rangle = \langle h, p_n f \rangle = \sum_{i=1}^n \langle h, \alpha_i \rangle f(t_i)$$

Comme pour tout  $t$  de  $T$  la forme linéaire qui à tout  $f$  de  $H$  associe  $f(t)$  est supposée continue (hypothèse (i)), en vertu du théorème de Riesz, il existe pour tout  $t$  un élément de  $H$  noté  $g(t, \cdot)$  tel que :

$$\forall h \in H \quad h(t) = \langle g(t, \cdot), h \rangle_H$$

(la fonction  $g$  de  $T \times T$  dans  $\mathbb{R}$  est appelée le noyau auto-reproduisant de  $H$  cf. Duc-Jacquet (10), par exemple).

Par suite

$$\forall h \in H_n \quad p_n^* h = \sum_{i=1}^n \langle h, \alpha_i \rangle_{H_n} \cdot g(t_i, \cdot)$$

D'où

$$\begin{aligned} \forall f \in L^2(T, \beta_T, \mu) \quad (p_n^* \circ i_n^* \circ i) f &= \sum_{i=1}^n \langle (i_n^* \circ i^*) f, \alpha_i \rangle_H g(t_i, \cdot) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle i^* f, i_n \alpha_i \rangle_H g(t_i, \cdot) \\ &= \sum_{i=1}^n \langle f, (i \circ i_n) (\alpha_i) \rangle_{L^2(T, \beta_T, \mu)} g(t_i, \cdot) \end{aligned}$$

D'autre part  $\tilde{U}^* g(t, \cdot) = X(t)$  car

$$\begin{aligned} \forall e \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P) \quad \langle e, \tilde{U}^* g(t, \cdot) \rangle &= \langle \tilde{U}e, g(t, \cdot) \rangle \\ &= (\tilde{U}e)(t) \\ &= \langle e, X(t) \rangle \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \forall f \in L^2(T, \beta_T, \mu) \quad (\tilde{U}^* \circ p_n^* \circ i_n^* \circ i^*) f &= \sum_{i=1}^n \langle f, (i \circ i_n) \alpha_i \rangle X(t_i) \\ &= \int_T \sum_{i=1}^n i_n \alpha_i(t) \cdot X(t_i) f(t) d\mu(t) \end{aligned}$$

On voit donc que  $\tilde{U}_n^*$  n'est autre que l'opérateur de type  $\tilde{U}^*$  associé au processus  $X_n$  défini par :

$$X_n(t) = \sum_{i=1}^n X(t_i) \cdot \beta_i(t) \quad \text{où } \beta_i = i_n \circ \alpha_i$$

L'opérateur  $\tilde{U}_n$  qui remplace  $\tilde{U}$  est défini par

$$\tilde{U}_n e = \int e(\omega) X_n(\cdot, \omega) dP(\omega) \quad , e \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$$

$$= \sum_{i=1}^n (Ue)(t_i) \beta_i$$

D'autre part l'opérateur de covariance du processus  $X_n$ ,  $V_n$ , égal à  $U_n \circ U_n^*$ , peut être défini à partir de la fonction de covariance

$$C_n(s, t) = \sum_i \sum_j \beta_i(s) \beta_j(t) C(t_i, t_j) \quad , \quad t, s \in T$$

$$\text{où } C(t_i, t_j) = E \quad X(t_i) X(t_j)$$

Enfin, comme l'opérateur  $V_n$  est de rang fini, autoadjoint et positif, l'A.C.P. approchée de  $X$  est calculable.

Soit  $\{e_i\}_{i=1, n}$  une base de  $H_n$ . On note encore  $\{e_i\}_{i=1, n}$  son image dans  $L^2(T, \beta_T, \mu)$  par l'injection canonique. Cette dernière famille peut être complétée en une base de  $L^2(T, \beta_T, \mu)$ . Explicitons la matrice de terme général  $A_{ij}$  associée à  $V_n$ .

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \langle V_n e_j, e_i \rangle_{H_n} \\ &= \langle \int_T C_n(., s) e_j(s) d\mu(s), e_i \rangle \end{aligned}$$

or

$$C_n(t, s) = \sum_{k, \ell} C(t_k, t_\ell) e_k(t) e_\ell(s)$$

donc

$$A_{ij} = \sum_k E_{ik} \cdot C_{kj}$$

avec  $C_{ij} = C(t_i, t_j)$  le terme général de la matrice de covariance usuelle des  $n$  variables  $X(t_1), \dots, X(t_n)$  et  $E_{ik} = \int_T e_i(t) e_k(t) d\mu(t)$

le terme général de la matrice symétrique définie positive des produits scalaires des fonctions de base. Matriciellement on a :

$$A = C \cdot E$$

L'A.C.P. approchée du processus  $X$  revient à celle d'un processus  $X_n$  et la solution est fournie par l'A. S. de l'opérateur de covariance  $V_n$  dont le noyau est obtenu par une double interpolation.

L'approximation consiste de manière équivalente à remplacer  $X$  par  $X_n$  ou  $U$  par  $U_n$  ou encore  $C$  par  $C_n$ .

Elle est légitimée par l'étude de convergence du paragraphe suivant.

Remarque : L'hypothèse (ii) sur  $H$  étant assez difficile à vérifier directement nous proposons la condition nécessaire et suffisante suivante :

Théorème : Supposons que  $H$  vérifie (i) alors (ii) est vérifiée si et seulement si :

- Les fonctions  $C(t, \cdot)$  appartiennent à  $H$
- L'opérateur  $\tilde{V}$  défini par  $\tilde{V}f(t) = \langle C(t, \cdot), f \rangle$  pour tout  $f$  de  $H$  est un opérateur continu dans  $H$ .

Sous ces conditions  $\tilde{V} = \tilde{U} \circ \tilde{U}^*$  est identique à  $V = U \circ U^*$  sur  $H$ .

Preuve. Condition nécessaire : Comme  $(Ue)(s) = E(e.X(s))$  faisant  $e = X(t)$  dans (ii) on voit que les  $C(t, \cdot)$  sont dans  $H$ . D'autre part, comme la famille  $\{g(t, \cdot)\}_{t \in T}$  engendre  $H$  (car  $\langle h, g(t, \cdot) \rangle = 0 \quad \forall t$  entraîne  $h \equiv 0$ ) pour montrer la deuxième partie du théorème il suffit de montrer que  $\tilde{V}f \in H$  et  $\|\tilde{V}f\| \leq \text{const.} \|f\|$  pour tout  $f$  de la forme  $\sum a_i g(t_i, \cdot)$ .

Or pour un tel  $f$ ,  $\tilde{V}f = \sum a_i C(t_i, \cdot) = U(\sum a_i X(t_i))$  et par suite appartient à  $H$ . Comme  $U$  est continu

$$\begin{aligned}
 \|\tilde{V}f\|^2 &\leq \|U\|^2 \cdot \|\sum a_i x(t_i)\|^2 \\
 &= \|U\|^2 \sum_i \sum_j a_i a_j C(t_i, t_j) \\
 &= \|U\|^2 \langle \sum_i a_i C(t_i, \cdot), \sum_j a_j g(t_j, \cdot) \rangle_H \\
 &\leq \|U\|^2 \|\sum_i a_i C(t_i, \cdot)\| \cdot \|\sum_j a_j g(t_j, \cdot)\|_H
 \end{aligned}$$

d'où

$$\|\tilde{V}f\|^2 < \|U\|^2 \|\tilde{V}f\|_H \|f\|_H$$

Condition suffisante : Considérons un élément  $e = \sum a_i X(t_i)$ . Alors  $Ue = \sum a_i C(t_i, \cdot)$  appartient à  $H$  par hypothèse. Montrons que  $U$  est continu.

$$\begin{aligned} \|Ue\| &= \|\sum a_i C(t_i, \cdot)\| \\ &= \sup \frac{\langle \sum a_i C(t_i, \cdot), \sum b_i g(t_i, \cdot) \rangle}{\|\sum b_i g(t_i, \cdot)\|} \\ &= \sup \frac{\sum a_i b_j C(t_i, t_j)}{\|\sum b_i g(t_i, \cdot)\|} \end{aligned}$$

Comme la matrice  $(C(t_i, t_j))$  est positive, l'inégalité de Schwarz entraîne

$$\begin{aligned} \sum a_i b_j C(t_i, t_j)^2 &\leq \sum a_i a_j C(t_i, t_j) \sum b_i b_j C(t_i, t_j) \\ &= \|e\|^2 \cdot \sum b_i b_j C(t_i, t_j) \end{aligned}$$

D'où

$$\|Ue\|^2 \leq \sup \frac{\sum b_i b_j C(t_i, t_j)}{\|\sum b_i g(t_i, \cdot)\|^2} \cdot \|e\|^2$$

Si  $f = \sum b_i g(t_i, \cdot)$ , alors  $\langle \tilde{V}f, f \rangle = \sum b_i b_j C(t_i, t_j)$

et comme  $\tilde{V}$  est continu

$$\sum b_i b_j C(t_i, t_j) \leq \text{const.} \|\sum b_i g(t_i, \cdot)\|_H^2$$

Par suite

$$\|Ue\|^2 \leq \text{const.} \|e\|^2$$

Par passage à la limite, cette dernière relation est encore vraie pour tout  $e$  dans le sous espace fermé engendré par les  $X(t)$ .

Comme  $Ue = 0$  si  $\langle e, X(t) \rangle = 0$ ,  $U$  est continu sur  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Finalement, pour montrer que  $\tilde{V} = U \circ U^*$ , il suffit de remarquer que  $\tilde{V} g(t, \cdot) = U \circ U^* g(t, \cdot)$  pour tout  $t$  de  $T$ .  $\Delta$

### A<sub>1</sub> . Convergence de l'approximation

On entendra par convergence de l'approximation ou convergence de l'A.C.P. approchée la convergence uniforme de la suite d'opérateurs  $(V_n)$  vers  $V$ . La convergence est considérée au sens de la norme des opérateurs car celle-ci induit de bonnes propriétés sur les analyses spectrales (i.e. plus  $n$  est grand plus le calcul des éléments propres de  $V$  donne des valeurs proches des éléments correspondants de  $V$ .)

Remarque : La convergence des opérateurs  $V_n$  est équivalente à celles des opérateurs  $U_n$ . Comme  $U_n$  est la composition de  $U$  avec l'application linéaire

$$f \mapsto \sum_{i=1}^n \beta_i \cdot f(t_i)$$

on est amené à étudier la convergence de ces applications vers l'identité. Cette application n'est pas définie sur  $L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ . On est donc conduit à considérer un espace plus petit que  $L^2(\Omega, \beta, \mu)$ , contenant l'image de l'opérateur  $U$  et muni d'une topologie plus fine. C'est l'espace  $H$  introduit précédemment.

Si  $\tilde{V}$  désigne  $\tilde{U} \circ \tilde{U}^*$ , l'opérateur  $V_n$  s'écrit

$$\begin{aligned} V_n &= U_n \circ U_n^* = i \circ i_n \circ p_n \circ \tilde{V} \circ p_n^* \circ i_n^* \circ i^* \\ &= i \circ \pi_n \circ \tilde{V} \circ \pi_n^* \circ i^* \end{aligned}$$

où  $\pi_n$  est l'application  $p_n$  considérée comme une application de  $H$  dans  $H$ .



Pour que la suite  $(V_n)$  converge vers  $V$  il suffit (voir Pousse et Dauxois (34)) que la suite  $(\pi_n)$  converge (au sens des opérateurs) vers l'identité sur  $H$ .

Or par définition la suite des projecteurs orthogonaux  $(\pi_n)$  converge uniformément (i.e. au sens des opérateurs) vers l'identité sur  $H$  si la suite des sous espaces  $(H_n)$  de  $H$  converge fortement vers  $H$ .

Pour construire une telle suite de sous espaces on a le lemme suivant (Dunford-Schwartz (13))

Lemme. Soit  $E$  un espace de Hilbert et  $(\phi_n)$  une suite croissante de sous espaces fermés de  $E$  dont l'union est dense dans le sous-espace fermé de  $E$  de  $\phi$ . Alors la suite  $(\phi_n)$  converge fortement vers  $\phi$ .

On en déduit alors le théorème (Besse (2))

Théorème. Soit  $E$  et  $F$  deux espaces de Hilbert,  $U$  un opérateur linéaire continu de  $E$  dans  $F$ ,  $H$  un sous-espace dense de  $F$  muni d'une topologie plus fine. Si  $(H_n)$  est une suite croissante de sous espaces de  $H$  muni de la structure hilbertienne induite et telle que

$$\dim H_n = n \quad \text{et} \quad \bigcup_n H_n \text{ est dense dans } H$$

alors l'A.C.P. approchée dans  $H$  du triplet  $(E, F, U)$  converge uniformément vers l'A.C.P. du triplet  $(E, F, U)$  pour la topologie de  $H$ .

Autrement dit, si les "sous espaces d'approximation"  $H_n$  vérifient les hypothèses du théorème il y a convergence uniforme de la suite  $(V_n)$  vers  $V$ , ce qui entraîne la convergence des analyses spectrales au sens suivant (Dunford-Schwartz (13))

Lemme. Soit  $(V_n)$  une suite d'opérateurs continus de  $L(H)$  qui converge uniformément vers  $V$  ( $V$  est donc continu). Soit  $\{\lambda_m(V)\}$  une énumération des valeurs propres non nulles de  $V$ , chacune étant répétée suivant son ordre de multiplicité. Alors, il existe des énumérations  $\{\lambda_m(V_n)\}$  des valeurs propres non nulles de  $V_n$ , chacune étant répétée suivant son ordre de multiplicité, telles que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_m(V_n) = \lambda_m(V) \quad m \geq 1$$

De plus, les sous espaces propres associés aux valeurs propres  $\lambda_m(V_n)$  convergent uniformément vers les sous espaces propres associés aux  $\lambda_m(V)$ .

On voit donc que si  $\lambda$  est de multiplicité 1, pour tout vecteur propre normé  $f$  associé à  $\lambda$ , il existe une suite  $(f_n)$  convergeant vers  $f$  telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad V_n f_n = \lambda_n f_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$$

## A<sub>2</sub> . Approximation spline de L.A.C.P.

Nous nous limitons ici au cas où  $X$  est un processus indexé par un intervalle de  $\mathbb{R}$ , mais il est possible d'envisager une approche similaire dans le cas où  $T$  est un compact de  $\mathbb{R}^2$  (voir Duchon (12))

Nous considérons un cas particulier d'approximation.

Soit  $T$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On note  $H^k(T)$  l'ensemble des éléments de  $L^2(T, \beta_T, \mu)$  dont toutes les dérivées (au sens des distributions) d'ordre inférieur ou égal à  $k$  sont des éléments de  $L^2(T, \beta_T, \mu)$  i.e.

$$H^k(T) = \{ f \in L^2(T, \beta_T, \mu) ; \forall j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq k \quad D^j f \in L^2(T, \beta_T, \mu) \}$$

Muni du produit scalaire défini par

$$\langle f, h \rangle = \sum_{j=0}^k \langle D^j f, D^j h \rangle_{L^2(T, \beta_T, \mu)}$$

$H^k(T)$  est un espace de Hilbert.  $H^k(T)$  définit un espace de Sobolev d'ordre  $k$  sur  $T$ .

On sait que  $H = H^k(T)$  satisfait à l'hypothèse (i) de II.1, c'est à dire que l'espace de Sobolev  $H$  est auto-reproduisant (cf Duc-Jacquet(10))

D'après la condition nécessaire et suffisante du théorème donné en II.1,  $H$  vérifie l'hypothèse (ii) si la fonction de covariance est suffisamment régulière i.e.

$$f \in H, \sum_{j=0}^k \left( \frac{\partial^2 j}{\partial s^j \partial t^j} C(t,s) \right) \left( \frac{\partial j}{\partial s^j} f(s) \right) \text{ existe et est intégrable}$$

donc si  $C$  est  $2k$  fois continuellement dérivable par rapport à  $(t,s)$ .

Soit  $\Delta_n = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  une discrétisation de  $T$  ( $n > k$ ).

On considère  $S_n$  le sous espace de  $H^k(T)$  constitué des fonctions spline sur  $T$ . On sait (De Boor (8)) qu'étant données les valeurs  $X(t_1), \dots, X(t_n)$  il existe une unique fonction spline  $s$  de  $S_n$  telle que  $s(t_i) = X(t_i) : i = 1, n$  et qui minimise

$$\int_T (f^{(k)}(t))^2 d\mu(t) \quad \forall f \in H^k(T)$$

L'approximation spline de l'A.C.P. de  $X$  est alors définie comme l'A.C.P. approchée de  $X$  dans  $S_n$  (cf. Besse (2)). On sait d'après ce qui précède qu'elle conduit à l'A.S. de l'opérateur  $V_n$  qui peut être représenté par une matrice.

Par ailleurs, on sait (cf. Attella ( 1 ) ) que pour tout  $h$  élément de  $H^k(T)$  il existe une suite  $(h_n)$  vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad h_n \in S_n$$

$$\text{et } \lim_{\|\Delta_n\| \rightarrow 0} \|h_n - h\|_H = 0$$

$$\text{avec } \|\Delta_n\| = \max |t_i - t_j|.$$

On construit  $S_n$  à partir de  $\Delta_n$  comme étant le sous espace de  $H^k(T)$  engendré par les spline d'interpolation basées sur  $\Delta_n$ . Si  $t_{n+1}$  est un point de  $T$  distinct des précédents, on renumérote les  $t_i$  de façon que

$$t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1}$$

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad S_n \subset S_{n+1}$$

$$\text{et } \bigcup_n S_n \text{ est dense dans } H^k(T)$$

On en déduit alors, d'après le théorème de convergence donné en II.2 que l'approximation spline de l'A.C.P. du processus  $X$  discrétisé aux points  $t_1, t_2, \dots, t_n$  de  $T$  converge uniformément vers l'A.C.P. de  $X$  relativement à  $H^k(T)$  lorsque la discrétisation est de plus en plus fine (i.e.  $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ ).

Remarque : Lorsque les  $t_i$  proviennent de  $p$  tirages aléatoires indépendants la suite  $(t_i)$  vérifie presque sûrement (p.s.)  $\|\Delta_n\| \rightarrow 0$  et la convergence de l'approximation spline est assurée (p.s.)

B - Estimation par échantillonnage statistique

En pratique nous ne connaissons qu'un échantillon de  $p$  trajectoires du processus  $X$ . La fonction de covariance  $C$  de  $X$  est alors estimée par :

$$C^P(t,s) = \frac{1}{p-1} \sum_{n=1}^P X(t,\omega) \cdot X(s,\omega)$$

L'A.C.P. déduite de l'échantillon est obtenu par l'A.S. de l'opérateur  $V^P$  associé au noyau  $C^P$ . On montre (voir Pousse et Dauxois (34) p. 218) qu'il y a convergence de la suite  $(V^P)$  vers  $V$ . Besse montre en (3) page 31 et suivantes un résultat intéressant pour l'application de la méthode. Il montre la convergence uniforme de la double approximation de l'analyse (par discrétisation sur  $T$  et par échantillonnage sur  $\Omega$ ) vers l'AC.P.P. de  $X$ .

CHAPITRE 3 :

ELEMENTS PROPRES DE L'OPERATEUR DE COVARIANCE

D'UN PROCESSUS STATIONNAIRE



L'objet principal de ce chapitre est de proposer une méthode de calcul explicite des valeurs et fonctions propres de l'opérateur de covariance  $V$  d'un processus stationnaire indexé par un intervalle fini de  $\mathbb{R}$  et de densité spectrale rationnelle  $f$ .

Elle consiste à ramener la résolution de l'équation intégrale de Fredholm vérifiée par les éléments propres  $\lambda$  et  $\phi$  à celle d'une équation différentielle linéaire dont l'équation caractéristique est l'équation algébrique  $2\pi f(z) = \lambda$ .

La méthode semble avoir été exposée dans la littérature soviétique mais reste inaccessible. Fortus dans (16) en rappelle les références et l'exploite pour étudier plusieurs exemples de noyau de covariance. En (17), le même auteur illustre la généralisation de la méthode pour des champs aléatoires indexés par une partie bornée de  $\mathbb{R}^2$ .

Outre une meilleure connaissance du comportement (asymptotique) des éléments propres de  $V$ , l'expression exacte de ces éléments permet d'évaluer la qualité de leur "approximation", comme décrit au chapitre 2 et sous diverses conditions d'entrées (voir chapitre 1 et aussi chapitre 5).

Au paragraphe IV nous détaillons l'application de la méthode à deux noyaux de covariance d'emploi courant pour les phénomènes naturels.

Le début du chapitre est consacré au rappel de quelques résultats sur les distributions et la transformation de Fourier dont on trouvera les démonstrations ou des compléments dans le livre (41) de Schwatz. Nous énumérons également quelques propriétés générales des éléments de l'opérateur de covariance d'un processus stationnaire quelconque.



# I - QUELQUES RAPPELS SUR LES DISTRIBUTIONS ET LA TRANSFORMATION DE FOURIER

Soit  $\mathcal{D}$  l'espace des fonctions complexes sur  $\mathbb{R}^n$  indéfiniment dérivables et à support compact. On note  $\mathcal{D}_K$  le sous espace de  $\mathcal{D}$  des fonctions ayant leur support dans le compact  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ . La topologie de  $\mathcal{D}_K$  est caractérisée par le fait que toute suite  $(\phi_p)$  converge dans  $\mathcal{D}_K$  si et seulement si  $(\phi_p)$  et la suite  $(\phi_p')$  des dérivées convergent uniformément.

Une distribution  $T$  est alors une forme linéaire sur  $\mathcal{D}$ , dont la restriction à chaque  $\mathcal{D}_K$  est continue. On notera :

$$T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\phi \longmapsto T(\phi) = \langle T, \phi \rangle$$

On note  $\mathcal{D}^*$  l'espace vectoriel des distributions.

Soit d'autre part  $\mathcal{S}$  l'espace des fonctions complexes, indéfiniment dérivables et à décroissance rapide (c'est à dire telles que  $\|x\|^m \phi^{(k)}(x) \longrightarrow 0$  quand  $\|x\| \longrightarrow \infty$ ,  $\forall k, m \in \mathbb{N}$ ). La topologie de  $\mathcal{S}$  est caractérisée par le fait qu'une suite  $(\phi_p)$  converge dans  $\mathcal{S}$  vers 0 si et seulement si  $(\|x\|^m \phi_p^{(k)}(x))$  converge vers 0 uniformément en  $x$ , pour tout entier  $m$  et  $k$ . Il est clair que  $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{S}$  et que l'injection canonique de  $\mathcal{D}_K$  dans  $\mathcal{S}$  est continue ; par suite le dual  $\mathcal{S}^*$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{D}^*$ . C'est sur  $\mathcal{S}^*$  que nous allons définir la transformation de Fourier.

Rappelons que la transformation de Fourier d'un élément de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  est définie par

$$\bar{F} \phi(x) = \int e^{i\langle x, t \rangle} \phi(t) dt$$

On sait que la restriction de  $\mathcal{F}$  à  $\mathcal{S}$  est un isomorphisme de  $\mathcal{S}$  dans lui même, dont l'isomorphisme inverse est  $(1/2\pi)\bar{\mathcal{F}}$  où  $\bar{\mathcal{F}}$  est défini par :

$$\bar{\mathcal{F}}\phi(t) = \int e^{-i\langle x, t \rangle} \phi(x) dx$$

Le théorème de Fubini justifie la relation suivante

$$\begin{aligned} \phi, \psi \in \mathcal{S} \quad \langle \mathcal{F}\psi, \phi \rangle &= \int \left( \int \psi(t) e^{i\langle x, t \rangle} dt \right) \bar{\phi}(x) dx \\ &= \langle \psi, \bar{\mathcal{F}}\phi \rangle \end{aligned}$$

qui permet de prolonger la transformation de Fourier sur  $\mathcal{S}^*$ .

Pour tout  $T \in \mathcal{S}^*$ , la transformation de Fourier de  $T$ , notée  $\mathcal{F}T$ , est définie par

$$\forall \phi \in \mathcal{S}, \langle \mathcal{F}T, \phi \rangle = \langle T, \bar{\mathcal{F}}\phi \rangle$$

Autrement dit  $\mathcal{F}$  est le dual topologique de  $\bar{\mathcal{F}}$ , considérée comme opérateur de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{S}$ ; celui-ci sera aussi prolongé de façon analogue à ce qui précède en un opérateur de  $\mathcal{S}^*$  dans  $\mathcal{S}^*$ , de sorte que  $(1/2\pi)\bar{\mathcal{F}}$  soit encore l'inverse de  $\mathcal{F}$ .

Une propriété importante de la transformation de Fourier est donnée par :

Théorème (de Plancherel). La restriction à  $L^2(\mathbb{R}^n)$  de  $(1/\sqrt{2\pi})\mathcal{F}$  et de  $(1/\sqrt{2\pi})\bar{\mathcal{F}}$  sont deux isométries de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , adjointes l'une de l'autre i.e.

- 1)  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n) : \mathcal{F}\phi \in L^2(\mathbb{R}^n), \bar{\mathcal{F}}\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$
- 2)  $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n) : \mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}\phi = \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}\phi = (2\pi)^n \phi$
- 3)  $\phi, \psi \in L^2(\mathbb{R}^n) : \langle \mathcal{F}\phi, \bar{\mathcal{F}}\psi \rangle = (2\pi)^n \langle \phi, \psi \rangle$

Nous donnons à présent quelques résultats sur la transformation de Fourier sur  $L^2(\mathbb{R})$  qui nous seront utiles pour la méthode développée au § III. Notons cependant que ces résultats peuvent être étendus dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Les propriétés des fonctions définies par une intégrale entraînent les résultats suivants :

Proposition 1. Si  $\phi$  élément de  $L^2(\mathbb{R})$ , est tel que  $\int |t^p \phi(t)|^2 dt < +\infty$  pour un entier  $p \geq 1$ , alors  $\mathcal{F}\phi$  appartient à  $L^2(\mathbb{R})$  et est presque partout dérivable jusqu'à l'ordre  $p$ . De plus  $(\mathcal{F}\phi)^{(p)}$  appartient à  $L^2(\mathbb{R})$  et s'écrit :

$$(\mathcal{F}\phi)^{(p)}(x) = \mathcal{F}((it)^{(p)}\phi(t))(x) = i^p \int_{\mathbb{R}} t^p e^{ixt} \phi(t) dt$$

Ainsi le comportement de  $\phi$  à l'infini, qui conditionne la finitude des intégrales  $\int |t^p \phi(t)|^2 dt$  influe sur les propriétés de dérivabilité de  $\mathcal{F}\phi$ . Inversement, plus  $\phi$  a de bonnes propriétés de dérivabilité plus sa transformée de Fourier  $\mathcal{F}\phi$  a un "bon comportement" à l'infini.

Proposition 2. Soit  $\phi$  un élément de  $L^2(\mathbb{R})$  admettant presque partout des dérivées jusqu'à l'ordre  $p$  ( $p \geq 1$ ) éléments de  $L^2(\mathbb{R})$  ; alors

$$(it)^p \mathcal{F}\phi(t) = \mathcal{F}\phi^{(p)}(t)$$

On obtient un résultat analogue à celui de la proposition 1 si l'on remplace  $\mathcal{F}$  par  $\bar{\mathcal{F}}$ . Explicitement sous les hypothèses de la proposition 1,  $(\bar{\mathcal{F}}\phi)^{(p)}$  appartient à  $L^2(\mathbb{R})$  et est donné par :

$$(\bar{\mathcal{F}}\phi)^{(p)}(x) = \bar{\mathcal{F}} \left[ (-it)^p \phi(t) \right] (x)$$

Si on applique ce dernier résultat à un élément de  $L^2(\mathbb{R})$  de la forme  $\mathcal{F}f$ , on obtient le

Corollaire. Soit  $\phi$  tel que  $\int |t^p \mathcal{F}\phi(t)|^2 dt < \infty$  pour un entier  $p \geq 1$ , alors  $\phi^{(p)}$  existe presque partout, appartient à  $L^2(\mathbb{R})$  et est donnée par

$$\phi^{(p)}(t) = \frac{1}{2\pi} \left( (-it)^p \mathcal{F}\phi \right)(t)$$

## II - QUELQUES PROPRIETES GENERALES DES ELEMENTS PROPRES DE L'OPERATEUR DE COVARIANCE ASSOCIE A UN PROCESSUS STATIONNAIRE.

Pour les démonstrations ou des compléments on peut se référer à Riesz et Nagy (36) ainsi qu'à Grenauder et Szego (21), par exemple.

Soit  $T = \left[ -T/2, T/2 \right]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  symétrique par rapport à 0, et soit  $X = \{X(t), t \in T\}$  un processus stationnaire au second ordre de fonction de covariance  $C \_ C(t,s) = C(t-s)$ . L'opérateur de covariance  $V_T$  de  $X$  est alors défini de  $L^2(T)$  dans  $L^2(T)$  par :

$$V_T \phi(t) = \int_{-T/2}^{T/2} C(t-s) \phi(s) ds$$

On sait (cf. chapitre 2) que l'opérateur  $V_T$  est continu, auto-adjoint, positif et nucléaire. On peut alors énumérer les propriétés suivantes :

- Toute valeur spectrale non nulle est une valeur propre. Il existe une famille dénombrable de valeurs propres  $\lambda^j$  positives et en dehors de tout voisinage de zéro il n'en existe qu'un nombre fini. De sorte que le spectre de  $V_T$  constitue une suite de limite 0.

- . Tout sous espace propre associé à une valeur propre non nulle est de dimension finie.
- . A la suite  $(\lambda_n^T)$  des valeurs propres on peut toujours associer une famille orthonormale  $(\phi_n^T)$  de fonctions propres qui sont soit paires soit impaires.

Pour montrer ce dernier point il suffit de noter que, en vertu de la parité de la fonction de covariance, lorsque  $\phi$  est une fonction propre, les fonctions  $\phi_1, \phi_2$  définies par  $\phi_1(t) = \phi(t) + \phi(-t)$ ,  $\phi_2(t) = \phi(t) - \phi(-t)$ , si elles ne sont pas nulles, sont aussi des fonctions propres associées à la même valeur propre.

Si l'on suppose de plus que la fonction de covariance  $C$  est continue sur  $T$ ,  $X$  admet une densité spectrale  $f$  donnée par :

$$f(\omega) = \int e^{i\omega t} C(t) dt$$

et on montre alors que

. le spectre de  $V_T$  est contenu dans l'intervalle  $[0, 2\pi \max_u f(u)]$

. Trace  $(V_T) = T. C(0)$

La première propriété découle du fait que pour tout  $\phi$  élément de  $L^2$  on a :

$$\begin{aligned} \langle V_T \phi, \phi \rangle &= \int \int C(t-s) \phi(t) \phi(s) dt ds \\ &= \int \int \left( \int e^{-i\omega(t-s)} f(\omega) d\omega \right) \phi(t) \phi(s) dt ds \\ &= \langle \mathcal{F}\phi, \overline{\mathcal{F}\phi} \cdot f \rangle \\ &\leq 2\pi \max_u f(u) \cdot \int |\phi(t)|^2 dt \end{aligned}$$

La deuxième propriété est obtenue à partir du théorème de Mercer donné au chapitre 2. Il suffit d'intégrer sur  $T$  les 2 membres de la décomposition de  $C$  considérée au point  $t = s$ .

Le comportement asymptotique des valeurs propres  $\lambda^T$ , lorsque  $T$  tend vers l'infini, a été étudié par Grenander et Szego dans le monographe (21) § 8 comme un cas particulier de l'étude de la répartition des valeurs spectrales d'une forme de Toeplitz. Les auteurs ont montré que les valeurs propres  $\lambda^T$  sont asymptotiquement réparties comme les valeurs  $2\pi f(\omega)$  lorsque  $\omega$  est répartie uniformément sur la droite réelle. Les valeurs  $\lambda^T$  sont de plus en plus dense dans l'intervalle  $[0, 2\pi \max f(u)]$  lorsque  $T$  tend vers l'infini, et quand  $T = \mathbb{R}$ , toute valeur de l'intervalle est valeur propre comme nous l'explicitons par la suite. De façon plus précise, le nombre  $n_{a,b}^T$  des valeurs propres de  $V_T$  contenues dans l'intervalle  $[a, b]$  ( $a > 0$ ) est fini et, lorsque  $T$  tend vers l'infini,  $n_{a,b}^T/T$  converge vers la mesure de Lebesgue de l'ensemble des  $\omega$  tels que  $a \leq 2\pi f(\omega) \leq b$ .

Ces résultats généralisent des propriétés connues pour les séries chronologiques (voir Brillinger (5) par exemple).

On suppose maintenant que  $T = \mathbb{R}$ .

L'analyse spectrale de l'opérateur de covariance conduit formellement à la résolution de l'équation intégrale.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C(t-s) \phi(s) ds = \lambda \phi(t)$$

qui n'admet pas de solution  $\phi$  dans  $L^2(\mathbb{R})$ . Une façon de procéder consiste à considérer l'opérateur de covariance comme la restriction à  $L^2(\mathbb{R})$  d'un opérateur  $V$  défini sur  $S^*$ , l'espace des distributions tempérées, par

$$S \in S^*, \phi \in S, \langle VS, \phi \rangle = \langle S, \int C(t-s) \phi(s) ds \rangle$$

Si  $S = \Psi$  appartient à  $L^2(\mathbb{R})$ , alors pour tout  $\phi \in \mathcal{S}$  on a :

$$\langle Vf, \phi \rangle = \langle f, \int C(t-s) \phi(s) ds \rangle = \int f(t) \left[ \int C(t-s) \phi(s) ds \right] dt$$

$$(\text{Fubini}) = \iint f(t) C(t-s) \phi(s) ds dt = \int \left[ \int C(t-s) f(t) dt \right] \phi(s) ds$$

$$= \langle \int C(t-s) f(t) dt, \phi \rangle$$

de sorte que la restriction de  $V$  à  $L^2(\mathbb{R})$  est l'opérateur de covariance associé à  $X$ .

Les fonctions  $e^{i\omega t}$  sont les fonctions propres de  $V$  défini sur  $\mathcal{S}^*$  correspondant aux valeurs propres  $2\pi f(\omega)$  car, pour tout  $\phi$  de  $\mathcal{S}$ , on a :

$$\langle Ve^{i\omega t}, \phi \rangle = \langle e^{i\omega t}, \int C(t-s) \phi(s) ds \rangle$$

$$(\text{Fubini}) = \iint e^{i\omega t} C(t-s) \phi(s) ds dt$$

$$= \iint e^{i\omega(s+u)} C(u) \phi(s) ds du$$

$$= \int e^{i\omega s} \left( \int e^{i\omega u} C(u) du \right) \phi(s) ds$$

$$= \int e^{i\omega s} 2\pi \cdot f(\omega) \phi(s) ds$$

$$= \langle 2\pi f(\omega) e^{i\omega t}, \phi \rangle$$

### III - CALCUL EXPLICITE DES ELEMENTS PROPRES DE L'OPERATEUR DE COVARIANCE D'UN PROCESSUS STATIONNAIRE DE DENSITE SPECTRALE RATIONNELLE

Les notations et les hypothèses sont celles du paragraphe précédent. On suppose de plus que  $X$  admet une densité spectrale rationnelle.

On comprendra par "densité spectrale rationnelle" que celle-ci s'écrit comme le rapport de deux polynômes.

Le problème est de définir explicitement les valeurs et les fonctions propres de l'opérateur de covariance  $V_T$  de  $X$  i.e de déterminer les solutions exactes de l'équation intégrale :

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} C(t-s) \cdot \phi(s) ds = \lambda \phi(t) \quad , t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$$

où  $\phi$  appartient à  $L^2(T)$ .

Sous la condition que la densité spectrale est rationnelle, on montrera que la transformée de Fourier de  $\phi(t)$  est solution d'une équation différentielle linéaire. La résolution de cette équation différentielle fournit les éléments propres  $\lambda$  et  $\phi$  en fonction de  $T$ , ce qui permet d'étudier leur comportement asymptotique lorsque  $T \rightarrow \infty$ .

Donnons au préalable une propriété intéressante des densités spectrales rationnelles. On peut trouver une démonstration de ce résultat dans Doob ( 11) p. 542.

Proposition. Sous les conditions ci-dessus,  $f$  peut s'écrire sous la forme :

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)} \right|^2$$

où les polynômes  $P$  et  $Q$ , d'ordre  $p$  et  $q$  respectivement,  $p < q$ , sont à coefficients réels. De plus on peut supposer que  $Q$  a toutes ses racines dans le demi plan de gauche du plan complexe.



Pour des raisons techniques, on prolongera l'opérateur de covariance  $V_T$  de  $X$  à  $L^2(\mathbb{R})$ , en identifiant l'espace  $L^2(T, \beta_T, dt)$  à un sous espace vectoriel de  $L^2(\mathbb{R})$  constitué des fonctions nulles en dehors de  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ . Ce prolongement, noté  $V$ , est défini par :

$$V \phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} C(t-s) \phi(s) ds$$

Rechercher les éléments propres de  $V_T$  revient alors à résoudre en  $\lambda$  et  $\phi$ , respectivement éléments de  $\mathbb{R}$  et  $L^2(\mathbb{R})$ , le système (1)

$$(1) \quad \begin{cases} \phi(t) = 0 & t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ \int_{\mathbb{R}} C(t-s) \phi(s) = \lambda \phi(t) & t \in \left[\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \end{cases}$$

La première étape du calcul consiste à ramener la résolution du système (1) à celle d'un système d'équations différentielles linéaires. auparavant introduisons quelques notations.

On note  $H^{2q}(\mathbb{R})$  l'espace de Sobolev d'ordre  $2q$  sur  $\mathbb{R}$  constitué des fonctions  $2q$  fois presque partout dérivable et de dérivées de carré intégrable. On pose  $\theta$  la fonction définie par :

$$\theta(t) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega t} \frac{\bar{f}\phi(\omega)}{|Q(i\omega)|^2} d\omega$$

C'est à dire la transformée de Fourier de la fonction  $\omega \rightarrow \bar{f}\phi(\omega) / |Q(i\omega)|^2$  qui est de carré intégrable.

D'autre part  $Q(d/dt)$  désigne l'opérateur :

$$Q(d/dt) \theta(t) = a_0 \theta(t) + a_1 \theta'(t) + \dots + a_q \theta^{(q)}(t)$$

où  $\theta^{(k)}(t)$  est la dérivée  $k^{\text{ème}}$  de  $\theta$  au point  $t$ .

Proposition 1. Les fonctions propres  $\phi$  de l'opérateur  $V_T$  sont données par

$$\phi(t) = Q(d/dt) Q(-d/dt) \theta(t) \quad , \quad t \in T$$

où  $\theta(t)$ , élément de  $H^{2q}(\mathbb{R})$ , est solution du système d'équations différentielles linéaires (2)

$$(2) \quad \begin{cases} Q(d/dt) Q(-d/dt) \theta(t) = 0 & t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \\ P(d/dt) P(-d/dt) \theta(t) = \lambda Q(d/dt) Q(-d/dt) \theta(t) & t \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right] \end{cases}$$

$\lambda$  étant la valeur propre associée à  $\phi$ .

Preuve. Il s'agit de montrer que les systèmes (1) et (2) sont équivalents. Montrons d'abord que si le système (1) est vérifié alors le système (2) l'est aussi. Soit la fonction  $\Psi$  définie par :

$$\Psi(t) = \int C(t-s) \phi(s) ds$$

Comme  $C(t-s) = \mathcal{F}f(t-s)$  et que  $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ , le théorème de Fubini montre que

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega(t-s)} f(\omega) d\omega \right) \phi(s) ds \\ &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{i\omega(t-s)} \phi(s) f(\omega) ds d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega s} \phi(s) ds \right) e^{i\omega t} f(\omega) d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} \bar{\mathcal{F}}\phi(\omega) \cdot f(\omega) d\omega \\ &= \mathcal{F} \left[ (\bar{\mathcal{F}}\phi) \cdot f \right] (t) \end{aligned}$$

$f$  continue et bornée sur  $\mathbb{R}$  et  $\bar{f}\phi$  appartient à  $L^2(\mathbb{R})$  impliquent que  $(\bar{f}\phi).f$  est un élément de  $L^2(\mathbb{R})$ . Sa transformée de Fourier  $\Psi$  appartient aussi à  $L^2(\mathbb{R})$ . On peut donc appliquer la transformation de Fourier aux deux membres de la dernière égalité et, en vertu du théorème de Plancherel, écrire :

$$\bar{f}\Psi(\omega) = 2\pi \bar{f}\phi(\omega) . f(\omega)$$

On voit alors que la transformée de Fourier inverse de

$$\theta(t) = \frac{1}{2\pi} \bar{f}(\bar{f}\phi(\omega) / |Q(i\omega)|^2) \quad \text{vérifie le système :}$$

$$\begin{cases} \bar{f}\theta(\omega) = \frac{\bar{f}\phi(\omega)}{|Q(i\omega)|^2} \\ \bar{f}\theta(\omega) = \frac{\bar{f}\Psi(\omega)}{|P(i\omega)|^2} \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \bar{f}\phi(\omega) = Q(i\omega) \bar{Q}(i\omega) \bar{f}\theta(\omega) \\ \bar{f}\Psi(\omega) = P(i\omega) \bar{P}(i\omega) \bar{f}\theta(\omega) \end{cases}$$

Comme la fonction  $\omega \longrightarrow \omega^{2q} \bar{f}\phi(\omega) / |Q(i\omega)|^2$  appartient à  $L^2(\mathbb{R})$ , la proposition 1 du paragraphe I montre que  $\theta(t)$  est presque partout dérivable jusqu'à l'ordre  $2q$ . Aussi nous pouvons appliquer la proposition 2 à la fonction  $\theta(t)$ . Si de plus on note que  $\bar{Q}(i\omega) = Q(i\omega)$ ,  $|Q(i\omega)|^2 = Q(i\omega) Q(-i\omega)$  et à l'aide des notations introduites le système précédent est alors équivalent à

$$\begin{cases} \bar{f}\phi(\omega) = \bar{f} \left[ Q(d/dt) Q(-d/dt) \theta \right] (\omega) \\ \bar{f}\Psi(\omega) = \bar{f} \left[ P(d/dt) P(-d/dt) \theta \right] (\omega) \end{cases}$$

En appliquant de nouveau le théorème de Plancherel, on obtient

$$\phi(t) = Q(d/dt) Q(-d/dt) \theta(t)$$

$$\psi(t) = P(d/dt) P(-d/dt) \theta(t)$$

En reportant ces dernières expressions de  $\phi$  et  $\psi$  dans le système (1) on obtient le système (2) d'équations différentielles d'ordre  $2q$  de la proposition. Notons que  $\theta$  appartient à l'espace de Sobolev  $H^{2q}(\mathbb{R})$ .

Réciproquement supposons que le système (2) admet une solution  $\theta$ , élément de  $H^{2q}(\mathbb{R})$ . Soient  $\phi$  et  $\psi$  deux éléments de  $L^2(\mathbb{R})$  définis par :

$$\phi(t) = Q(d/dt) Q(-d/dt) \theta(t)$$

$$\psi(t) = \int_{\mathbb{R}} C(t-s) \phi(s) ds$$

Alors  $\bar{f}\phi$  est donnée par

$$\bar{f}\phi(\omega) = |Q(i\omega)|^2 \cdot \bar{f}\theta(\omega)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} f(\omega) \bar{f}\phi(\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} |P(i\omega)| \bar{f}\theta(\omega) d\omega \end{aligned}$$

et par application de la proposition 2 du § I à la fonction  $\theta$ , on a :

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} (\bar{f} P(d/dt) P(-d/dt) \theta)(\omega) d\omega \\ &= P(d/dt) P(-d/dt) \theta(t) \end{aligned}$$

Finalement en revenant au système (2), on voit que  $(\lambda, \phi)$  vérifient le système (1).  $\Delta$

La seconde étape consiste à résoudre le système (2) d'équations différentielles linéaires.

Pour tout  $t$  intérieur à  $[-T/2, T/2]$  (respectivement extérieur) et pour toute racine  $z$ , supposée simple, de l'équation caractéristique  $P(iz) P(-iz) = \lambda Q(iz) Q(-iz)$  (resp.  $Q(iz) Q(-iz) = 0$ ) la fonction complexe d'une variable réelle :  $\theta(t) = e^{izt}$  est solution particulière de l'équation différentielle  $P(d/dt) P(-d/dt)\theta(t) = \lambda Q(d/dt) Q(-d/dt) \theta(t)$  (resp.  $Q(d/dt) Q(-d/dt) \theta(t) = 0$ ). De sorte que la solution générale du système (2),  $\theta(t)$ , définie pour tout  $t$  de  $T$ , est obtenue par combinaison linéaire de  $2q$  solutions particulières linéairement indépendantes ; de façon plus précise, la fonction  $\theta(t)$  est définie par :

$$\theta(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{2q} c_{1k} e^{iz_{1k} t} & t \leq -\frac{T}{2} \\ \sum_{k=1}^{2q} c_{2k} e^{iz_{2k} t} & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \sum_{k=1}^{2q} c_{3k} e^{iz_{3k} t} & t \geq \frac{T}{2} \end{cases}$$

où les  $\{z_{1k}, z_{3k}\}$  et  $z_{2k} : k=1, 2q$  sont respectivement les racines (complexes ou non) des équations caractéristiques

$$\begin{cases} Q(iz) Q(-iz) = 0 \\ P(iz) P(-iz) = \lambda Q(iz) Q(-iz) \end{cases}$$

et les  $C_{ik} : i=1, 2, 3, k=1, 2q$  sont des constantes arbitraires.

En fait, on s'intéresse à la solution  $\theta$  dans l'intervalle  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ .

Les conditions de recollement aux points  $-\frac{T}{2}$  et  $\frac{T}{2}$  définissent  $2q$  conditions aux limites pour la restriction de  $\theta$  à  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ , qui correspondent aux valeurs propres  $\lambda$  et permettent d'identifier les coefficients  $c_{2k} : k = 1, 2q$ .

Proposition 2. La solution du système (2) est non triviale si et seulement si le réel  $\lambda$  est tel que l'une des deux matrices  $A + B$  ou  $A - B$  est singulière, où  $A$  et  $B$  sont des matrices d'ordre  $q$  de terme général respectif :

$$A_{jk} = (iz_k)^{j-1} Q(iz_k) e^{iz_k \frac{T}{2}} \quad B_{jk} = (-iz_k)^{j-1} Q(-iz_k) e^{-iz_k \frac{T}{2}}$$

Les  $z_k$  et  $-z_k$ ,  $k = 1, q$  étant les  $2q$  racines (complexes) de l'équation algébrique  $\lambda = 2\pi f(z)$ , avec  $z_k$  de partie réelle négative.

Dans le cas  $\det(A+B) = 0$  (resp.  $\det(A-B) = 0$ ) la solution  $\theta$  est paire (resp. impaire) et est définie pour tout  $t$  de  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  par

$$\theta(t) = \sum_{k=1}^q c_k \cdot \cos z_k t$$

$$\text{(resp. } \theta(t) = \sum_{k=1}^q c_k \cdot \sin z_k t \text{ )}$$

où le  $q$ -vecteur  $c$  des coefficients  $c_k$  est solution du système linéaire homogène d'ordre  $q$  :

$$(A+B) \cdot c = 0$$

$$\text{(resp. } (A-B) \cdot c = 0 \text{ )}$$

Preuve. On sait que les fonctions propres  $\phi$  sont soit paires soit impaires. Or si  $\phi$  est paire (resp. impaire)  $\bar{f}\phi$  est paire (resp. impaire) et donc  $\theta$  est paire (resp. impaire).

Montrons que chacune des conditions de recollement, en  $-\frac{T}{2}$  et en  $\frac{T}{2}$ , correspond à  $q$  conditions aux limites.

On a :

$$\theta(t) = \sum_{k=1}^{2q} c_k \cdot e^{u_k t}, \quad t \geq \frac{T}{2}$$

où les  $u_k$  sont solutions de  $Q(u) Q(-u) = 0$ , c'est à dire, les  $u_k$  sont les racines de  $Q$  et leurs opposées. Si  $u_k$  possède une partie réelle positive ou nulle, la fonction  $c_k \cdot e^{u_k t}$  ne sera pas de carré intégrable sur  $\left[\frac{T}{2}, +\infty\right]$  sauf si elle est identiquement nulle. Par conséquent, dans la somme  $\sum c_k e^{u_k t}$  les  $c_k$  correspondant aux  $u_k$  de partie réelle positive ou nulle sont nuls. Les racines de  $Q$  sont supposées appartenir au demi plan de gauche du plan complexe, donc les  $c_k$  non nuls sont ceux qui correspondent aux racines de  $Q$ . Finalement dans l'intervalle  $\left[\frac{T}{2}, +\infty\right]$ ,  $\theta$  vérifie l'équation différentielle linéaire d'ordre  $q$  :  $Q(d/dt) \theta(t) = 0$ . De même, dans l'intervalle  $\left]-\infty, -\frac{T}{2}\right]$   $\theta$  vérifie l'équation  $Q(-d/dt) \theta(t) = 0$ . Par conséquent, la donnée de la limite à droite  $\theta^{(j)}\left(\frac{T}{2}\right)$  en  $\frac{T}{2}$  et de la limite à gauche  $\theta^{(j)}\left(-\frac{T}{2}\right)$  en  $-\frac{T}{2}$  de  $\theta^{(j)}(t)$ ,  $j = 0, \dots, q-1$  détermine de manière unique la fonction  $\theta$  dans les intervalles  $\left[\frac{T}{2}, +\infty\right]$  et  $\left]-\infty, -\frac{T}{2}\right]$ , de sorte que les limites à droite en  $\frac{T}{2}$  et à gauche en  $-\frac{T}{2}$  de  $\theta^{(j)}(t)$  sont aussi déterminées pour tout  $j$ . Cellès-ci peuvent être calculées à partir de  $\theta^{(j)}\left(\frac{T}{2}\right)$ ,  $\theta^{(j)}\left(-\frac{T}{2}\right)$ ,  $j = 0, \dots, q-1$  par des relations de récurrence :

$$\begin{aligned} (d/dt)^j Q(d/dt) \theta(t) \Big|_{t \downarrow \frac{T}{2}} &= 0 \\ (-d/dt)^j Q(-d/dt) \theta(t) \Big|_{t \uparrow \frac{T}{2}} &= 0 \quad j = 0, 1, \dots, q-1 \end{aligned}$$

Utilisant le fait que les  $\theta^{(j)}(t)$ , pour  $j = 0, \dots, 2q-1$ , sont continues, les relations de récurrences s'écrivent pour  $j = 0, \dots, q-1$

$$\begin{aligned} (d/dt)^j Q(d/dt) \theta(t) \Big|_{t \uparrow \frac{T}{2}} &= 0 \\ (-d/dt)^j Q(-d/dt) \theta(t) \Big|_{t \downarrow \frac{T}{2}} &= 0 \end{aligned}$$

et constituent  $2q$  conditions aux limites de la solution dans l'intervalle  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ .

Par ailleurs si  $z_k$  est racine de l'équation algébrique  $2\pi f(z) = \lambda$ ,  $-z_k$  l'est également et l'on peut écrire :

$$\theta(t) = \sum_{k=1}^q c_k e^{iz_k t} + \sum_{k=1}^q c'_k e^{-iz_k t}, \quad \frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

les  $2q$  conditions aux limites s'explicitent pour  $j = 1, \dots, q$  :

$$(d/dt)^{j-1} Q(d/dt) \theta(t) \Big|_{t \uparrow \frac{T}{2}} = \sum_{k=1}^q A_{jk} c_k + \sum_{k=1}^q B_{jk} c'_k$$

$$(-d/dt)^{j-1} Q(-d/dt) \theta(t) \Big|_{t \downarrow \frac{T}{2}} = \sum_{k=1}^q B_{jk} c_k + \sum_{k=1}^q A_{jk} c'_k$$

où  $A_{jk}$  (resp.  $B_{jk}$ ) est le terme général de la matrice  $A$  (resp.  $B$ ) définie dans la proposition 2. Notons  $c_k$  et  $c'_k$  les  $q$  vecteurs de composantes  $c_k$  et  $c'_k$  respectivement.

Les conditions aux limites s'écrivent sous forme matricielle :

$$Ac + Bc' = 0$$

$$Bc + Ac' = 0$$

ou encore

$$(A + B) \left( \frac{c + c'}{2} \right) = 0$$

$$(A - B) \left( \frac{c - c'}{2} \right) = 0$$

et se ramènent à la résolution du système linéaire homogène d'ordre  $2q$  :

$$\begin{bmatrix} A + B & 0 \\ 0 & A - B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{c + c'}{2} \\ \frac{c - c'}{2} \end{bmatrix} = 0$$

dont on suppose que la matrice des coefficients est singulière pour éviter la solution triviale. Ainsi, la solution  $\theta$  est non identiquement nulle seulement pour les valeurs de  $\lambda$  telles que :

$$\det [(A+B) (A-B)] = 0 \quad \det (A+B) = 0 \quad \text{ou} \quad \det (A-B) = 0$$



Si  $\det(A+B) = 0$  mais  $\det(A-B) = 0$  alors  $c - c' = 0$ , soit  $c = c'$  avec  $c$  vérifiant le système linéaire homogène d'ordre  $q$  :  $(A+B) c = 0$  ; auquel cas la solution  $\theta$  est paire et donnée pour tout  $t$  de  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  par :

$$\theta(t) = \sum_{k=1}^q c_k (e^{iz_k t} + e^{-iz_k t}) = \sum_{k=1}^q (2c_k) \cos z_k t$$

Si  $\det(A-B) = 0$  mais  $\det(A+B) = 0$  alors  $c + c' = 0$ , soit  $c = -c'$  avec  $c$  vérifiant le système linéaire homogène d'ordre  $q$  :  $(A-B) c = 0$  ; auquel cas la solution  $\theta$  est impaire et donnée pour tout  $t$  de  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  par :

$$\theta(t) = \sum_{k=1}^q c_k (e^{iz_k t} - e^{-iz_k t}) = \sum_{k=1}^q (2ic_k) \sin z_k t$$

Le cas où  $\det(A-B) = \det(A+B) = 0$  correspond à la situation où il existe 2 fonctions propres, l'une paire et l'autre impaire données comme précédemment. Il est facile de voir que toute fonction propre est combinaison linéaire de celle-ci, car on peut toujours écrire  $c = (c+c')|_2 + (c-c')|_2$ ,  $c' = (c+c')|_2 - (c-c')|_2$ . La démonstration est achevée.  $\Delta$

En reportant les expressions explicites des solutions  $\theta$  données dans la proposition 2 dans le "polynôme différentiel" de la proposition donnant les fonctions propres, nous obtenons finalement le

Corollaire. Les éléments propres de l'opérateur de covariance  $V_T$  sont les valeurs  $\lambda$  pour lesquelles les matrices  $A + B$  ou  $A - B$ , définies dans la proposition 2, sont singulières et les fonctions correspondantes  $\phi$ , paires ou impaires sont définies pour tout  $t$  de  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  par :

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^q c_k Q(iz_k) Q(-iz_k) \cos z_k t$$

ou par

$$\phi(t) = \sum_{k=1}^q c_k Q(iz_k) Q(-iz_k) \sin z_k t$$

où les  $z_k$  sont les solutions complexes (de partie réelle négative) de l'équation algébrique  $2\pi f(z) = \lambda$ , et le  $q$ -vecteur  $c = (c_k)$  est solution de

$$(A+B) c = 0 \quad \text{ou} \quad (A-B) c = 0$$

Preuve. Il suffit de noter que

$$Q(d/dt) Q(-d/dt) e^{zt} = Q(z) Q(-z) e^{zt}$$

et d'écrire les fonctions sinus et cosinus sous la forme :

$$\sin y = \frac{1}{2} (e^{iy} - e^{-iy}) \quad \cos y = \frac{1}{2} (e^{iy} + e^{-iy}) \quad \Delta$$

#### . Perspectives de calcul lorsque $T$ est un domaine borné de $\mathbb{R}^2$

Si  $X$  est un champ aléatoire, le calcul des éléments propres de l'opérateur de covariance associé peut être envisagé moyennant une hypothèse supplémentaire d'isotropie de la fonction de covariance (i.e.  $c(t,s) = c(|t-s|)$ ).

La densité spectrale est alors une fonction d'une variable. En considérant des domaines spécifiques de  $\mathbb{R}^2$  (le cercle par exemple), le calcul des éléments propres  $\phi$  peut être mené de façon analogue au cas unidimensionnel.

La résolution de l'équation intégrale est ramenée à celle d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$P(-\Delta) \{ \phi(t_1, t_2) \} = 0$$

où  $P(-\Delta)$  est la forme "polynomiale" de l'opérateur de Laplace déterminée à partir de la densité spectrale. Fortus en (17) décrit sommairement la démarche dans le cas d'une fonction de covariance définie sur le cercle par  $C(|t-s|) = A K_0(\alpha|t-s|) - K_0(\beta|t-s|)$  où  $K_0$  est une fonction de Bessel.

#### IV - DEUX EXEMPLES D'APPLICATIONS

Nous avons choisi deux exemples de fonctions de covariance (donc de densité spectrale) d'expression assez simple et d'emploi courant pour les phénomènes naturels. Le degré  $2q$  de l'équation algébrique à résoudre est inférieur ou égal à 4 et l'ordre des systèmes linéaires inférieur ou égal à 2, (voir corollaire § III). L'exemple 1, où  $q = 1$ , a été traité par d'autres auteurs (Fortus (16) et aussi Saporta (39)). L'exemple 2, où  $q = 2$ , a été partiellement examiné par Fortus dans (16).

##### - EXEMPLE 1

On considère la fonction de covariance  $C$  définie par

$$C(t,s) = e^{-\alpha|t-s|} \quad \alpha > 0$$

La densité spectrale associée  $f$  est rationnelle, définie par

$$f(\omega) = \frac{\alpha}{\pi(\omega^2 + \alpha^2)}$$

En vertu de la proposition du début du § III,  $f$  peut s'écrire sous la forme :

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)} \right|^2$$

où les polynômes  $P$  et  $Q$  à coefficients réels sont définis par

$$P(z) = \sqrt{2\alpha}$$

$$Q(z) = z + \alpha$$

Notons que la racine de  $Q$  est réelle négative.

Appliquons les résultats du corollaire précédent. Ici les matrices A et B sont des scalaires

$$A = Q(i\omega) e^{i\omega}$$

$$B = Q(-i\omega) e^{-i\omega} = \bar{A}$$

où  $\omega$  est la racine négative de l'équation algébrique de degré 2  
 $2\pi f(z) = \lambda$

Les valeurs propres  $\lambda$  de l'opérateur de covariance et associées aux fonctions propres paires (resp. impaires) sont les réels pour lesquels la quantité  $A+B$  (resp.  $A-B$ ) est nulle. Ecrivons explicitement ces deux conditions :

$$(i) \quad A + B = \alpha \cos \omega \frac{T}{2} - \omega \sin \omega \frac{T}{2} = 0$$

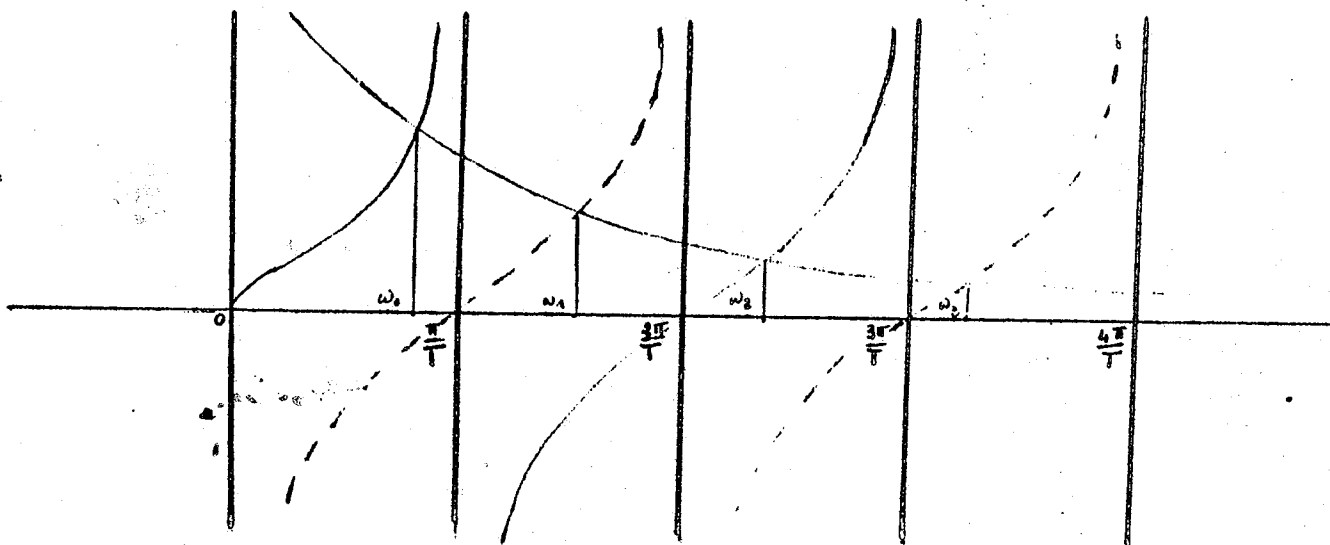
$$(ii) \quad A - B = \omega \cos \omega \frac{T}{2} + \alpha \sin \omega \frac{T}{2} = 0$$

ou encore

$$(i) \quad \operatorname{tg} \omega \frac{T}{2} = \frac{\alpha}{\omega}$$

$$(ii) \quad \operatorname{tg} \left( \omega \frac{T}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\alpha}{\omega}$$

Les  $\omega$  satisfaisant à (i) ou (ii) sont représentés dans la figure ci-dessous :



Les  $\omega_{2n}$  (resp.  $\omega_{2n+1}$ ) :  $n = 0, 1, 2, \dots$  désignent les solutions de (i) (resp. (ii))

Lorsqu'elles sont rangées dans l'ordre croissant les  $\omega_n$  pour tout  $n$  de  $N$  vérifient :

$$\frac{n\pi}{T} \leq \omega_n \leq \frac{(n+1)\pi}{T} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \left[ \left( \omega_n - n \frac{\pi}{T} \right) \frac{T}{2} \right] = \frac{\alpha}{\omega_n}$$

La solution numérique est obtenue par itération du point fixe. En effet, posons  $x_n = \omega_n - n \frac{\pi}{T}$  alors

$$0 \leq x_n \leq \frac{\pi}{T} \quad \text{et} \quad x_n = \frac{2}{T} \operatorname{Arctg} \left( \frac{\alpha}{n \frac{\pi}{T} + x_n} \right)$$

et l'itération du point fixe se fait à partir de la relation :

$$x_n^{(j+1)} = \frac{2}{T} \operatorname{Arctg} \left( \frac{\alpha}{n \frac{\pi}{T} + x_n^{(j)}} \right), \quad x_n^{(0)} = 0$$

A chaque  $x_n$  correspond une valeur propre  $\lambda_n = 2\pi f(x_n + n \frac{\pi}{T})$

Si  $n$  est pair (resp. impair) la fonction propre normée  $\phi_n$  associée à  $\lambda_n$  est paire (resp. impaire) et est définie pour tout  $t$  de  $\left[ -\frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right]$  par :

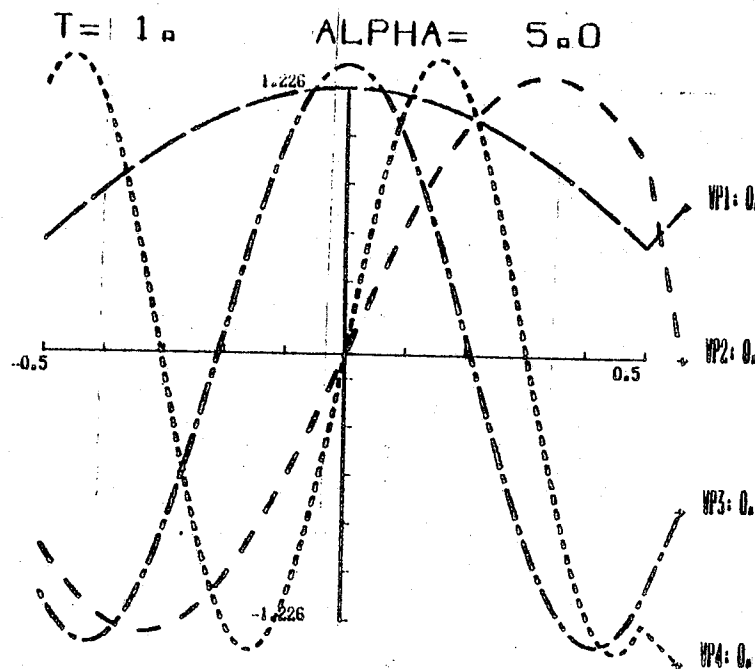
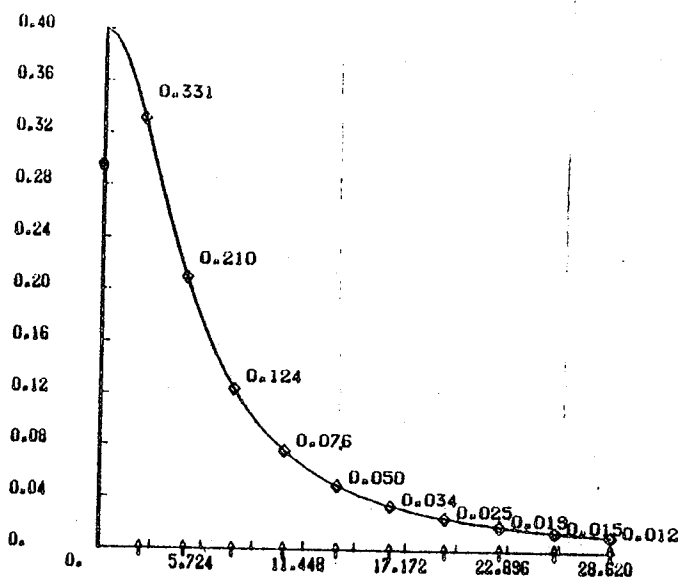
$$\phi_n(t) = \left( \frac{2\omega_n}{\omega_n T + \sin \omega_n T} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \omega_n t$$

respectivement par

$$\phi_n(t) = \left( \frac{2\omega_n}{\omega_n T - \sin \omega_n T} \right)^{\frac{1}{2}} \sin \omega_n t$$

Notons que les  $\phi_n$  ont au plus  $(n-1)$  zéros entre  $-\frac{T}{2}$  et  $\frac{T}{2}$ .

DENSITE SPECTRALE ASSOCIEE A  $C(H) = \exp(-\alpha H)$   
 $\alpha = 5.0$   $T = 1.0$



Les polynômes  $P$  et  $Q$  de la représentation de  $f$  sous la forme

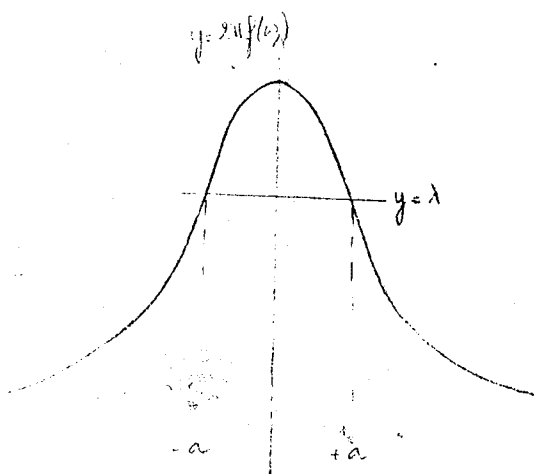
$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)} \right|^2 \quad \text{avec les racines de } Q \text{ supposées de partie réelle}$$

négative, sont donnés par :

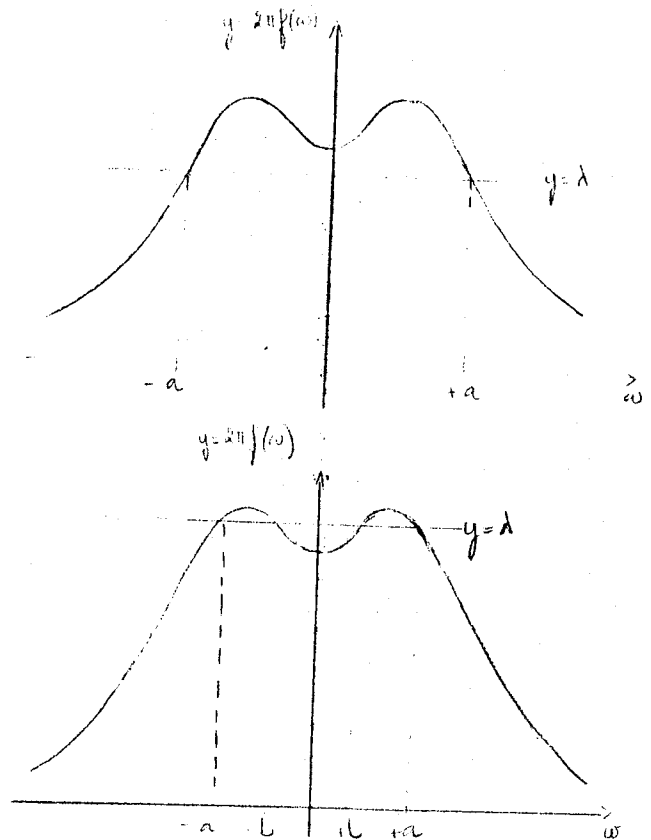
$$P(z) = 2\alpha (z - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$$

$$Q(z) = z^2 + 2\alpha z + \alpha^2 + \beta^2$$

L'étude de l'équation algébrique (2)  $2\pi f(z) = \lambda$  nous amène à distinguer plusieurs cas



$$1) \frac{\lambda}{\beta} > \sqrt{3}$$



$$2) \frac{\lambda}{\beta} \leq \sqrt{3}$$

On sait, comme  $\lambda \in [0, 2\pi \max_{\omega} f(\omega)]$ , que (2) admet 4 racines dans  $\mathbb{C}$ .

Les racines réelles correspondent aux points d'intersection de la courbe  $y = 2\pi f(\omega)$  et  $y = \lambda$ , donc au moins 2 racines réelles. Les autres sont soit imaginaires pures, soit réelles, soit complexes de la forme  $a + ib$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ; et les racines réelles ou imaginaires pures sont par paires et les racines complexes sont par quatre ( $\pm a \pm ib$ ) car  $f$  représente un rapport de 2 polynômes en  $\omega^2$  à coefficients réels. Comme il a déjà 2 racines réelles, il ne peut donc pas avoir de racines complexes.

Pour  $\frac{\alpha}{\beta} > \sqrt{3}$  il existe 2 solutions réelles  $\pm a$  et 2 solutions imaginaires pures  $\pm ib$ . Le cas où  $\frac{\alpha}{\beta} > \sqrt{3}$  admet deux sous cas, un premier sous cas analogue au cas  $\frac{\alpha}{\beta} > \sqrt{3}$  et un second sous cas où (2) admet 4 solutions réelles  $\pm a$  et  $\pm b$ .

Considérons les deux cas différents séparément.

. 1er cas : L'équation (2) admet 2 racines réelles  $\pm a$  et 2 racines imaginaires pures  $\pm ib$ .

Les matrices  $A$  et  $B$ , d'ordre 2, sont définies par :

$$A = \begin{bmatrix} |Q(ia)|^2 \frac{e^{ia^2}}{Q(-ia)} & Q(-b) e^{-b^2} \\ ia |Q(ia)|^2 \frac{e^{ia^2}}{Q(-ia)} & -b Q(-b) e^{-b^2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} |Q(ia)|^2 \frac{e^{-ia^2}}{Q(ia)} & Q(b) e^{b^2} \\ -ia |Q(ia)|^2 \frac{e^{-ia^2}}{Q(ia)} & b Q(b) e^{b^2} \end{bmatrix}$$

En vertu du corollaire du § III, on sait que les valeurs propres associées aux fonctions propres paires (resp. impaires) sont les réels pour lesquels (i)  $\det(A+B) = 0$  (resp. (ii)  $\det(A-B) = 0$ ).



Or

$$\det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Donc, en notant que  $\operatorname{Re}\{iz\} = -\operatorname{Im}\{z\}$  et  $\operatorname{Im}\{z\} / \operatorname{Re}\{z\} = \operatorname{tg}(\operatorname{Arg}\{z\})$

Les conditions (i) et (ii) sont respectivement équivalents

$$(i) \quad -a \operatorname{tg}\left(\operatorname{Arg} \frac{e^{ia\frac{T}{2}}}{Q(-ia)}\right) = b \cdot \frac{Q(b)e^{b\frac{T}{2}} - Q(-b)e^{-b\frac{T}{2}}}{Q(b)e^{b\frac{T}{2}} + Q(-b)e^{-b\frac{T}{2}}}$$

$$(ii) \quad \frac{1}{a} \operatorname{tg}\left(\operatorname{Arg} \frac{e^{ia\frac{T}{2}}}{Q(-ia)}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{Q(b)e^{b\frac{T}{2}} - Q(-b)e^{-b\frac{T}{2}}}{Q(b)e^{b\frac{T}{2}} + Q(-b)e^{-b\frac{T}{2}}}$$

Posons

$$u(b) = \frac{Q(b)e^{b\frac{T}{2}} - Q(-b)e^{-b\frac{T}{2}}}{Q(b)e^{b\frac{T}{2}} + Q(-b)e^{-b\frac{T}{2}}}$$

$$v(a) = \operatorname{Arg}(Q(-ia)) \Leftrightarrow \operatorname{tg} v(a) = \frac{2a}{-a^2 + \alpha^2 + \beta^2}$$

alors les contraintes précédentes s'écrivent plus simplement :

$$(i) \quad -a \operatorname{tg}\left(a \frac{T}{2} - v(a)\right) = b u(b)$$

$$(ii) \quad \frac{1}{a} \operatorname{tg}\left(a \frac{T}{2} - v(a)\right) = \frac{1}{b} u(b)$$

A chaque solution  $(a, b)$  de (i) (resp. (ii)) correspond une valeur propre  $\lambda = 2\pi f(\pm a) = 2\pi f(\pm ib)$ .

Comme pour l'exemple 1, on peut utiliser l'itération du point fixe pour résoudre numériquement (i) et (ii). Pour cela rappelons que le produit des racines d'une équation algébrique est égal au quotient du terme constant par le coefficient du terme du plus haut degré. Par conséquent

$$-a^2 \cdot b^2 = \frac{-P(o)^2 + \lambda Q(o)^2}{\lambda}$$

Or,  $\lambda = 2\pi f(a)$ , donc  $b$  peut s'écrire en fonction de  $a$

$$b^2 = \frac{Q(o)^2}{a^2} \left[ 1 - \frac{f(a)}{f(o)} \right]$$

Posons

$$b = w(a) = \frac{Q(o)}{a} \left[ 1 - \frac{f(a)}{f(o)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

alors l'itération du point fixe pour (i) par exemple, est faite à partir de la relation :

$$a^{(j+1)} = \left[ \frac{2}{T} \operatorname{Arg} \left[ -\frac{w(a^j)}{a^j} u(w(a^j)) \right] + v(a^j) + k\pi \right], \quad a^{(0)} = 0$$

D'autre part, la condition (i) (resp. (ii)) implique que les coefficients  $c_1, c_2$  (resp.  $c_1^0, c_2^0$ ) intervenant dans l'expression des fonctions propres paires (resp. impaires) vérifient la relation :

$$c_1 = - \frac{(A+B)_{12}}{(A+B)_{11}} \quad c_2 = -k_+ \cdot c_2$$

$$(\text{resp. } c_1^0 = - \frac{(A-B)_{12}}{(A-B)_{11}} \quad c_2^0 = -ik_- \cdot c_2^0)$$

où  $(A+B)_{ij}$  désigne le terme général de la matrice  $A+B$ . Le coefficient  $c_2$  (resp.  $c'_2$ ) est déterminé de façon à normaliser la fonction propre associée.

Finalement les expressions explicites des fonctions propres sont données pour tout  $t$  de  $-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}$ , et dans le cas paire par :

$$\phi(t) = c \left[ -k_+ |Q(ia)|^2 \cos at + Q(b) Q(-b) \cdot \text{ch } b t \right]$$

avec

$$c = \left\{ k_+^2 |Q(ia)|^4 \left( \frac{T}{2} + \frac{\sin aT}{a} \right) + Q(b) Q(-b)^2 \left( \frac{T}{2} + \frac{1}{2b} \text{sh } bT \right) - \frac{2k_+}{b^2 + a^2} |Q(ia)|^2 Q(b) Q(-b) \left( b \cos a \frac{T}{2} \text{sh } b \frac{T}{2} + a \sin a \frac{T}{2} \text{ch } b \frac{T}{2} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

et dans le cas impaire par :

$$\phi(t) = c' \left[ -k_- |Q(ia)|^2 \sin at + Q(b) Q(-b) \text{sh } b t \right]$$

avec

$$c' = \left\{ k_-^2 |Q(ia)|^4 \left( \frac{T}{2} - \frac{\sin aT}{a} \right) + Q(b) Q(-b)^2 \left( \frac{1}{2b} \text{sh } bT - \frac{T}{2} \right) - \frac{2k_-}{b^2 + a^2} |Q(ia)|^2 Q(b) Q(-b) \left( b \sin a \frac{T}{2} \text{ch } b \frac{T}{2} - a \cos a \frac{T}{2} \text{sh } b \frac{T}{2} \right) \right\}^{-\frac{1}{2}}$$

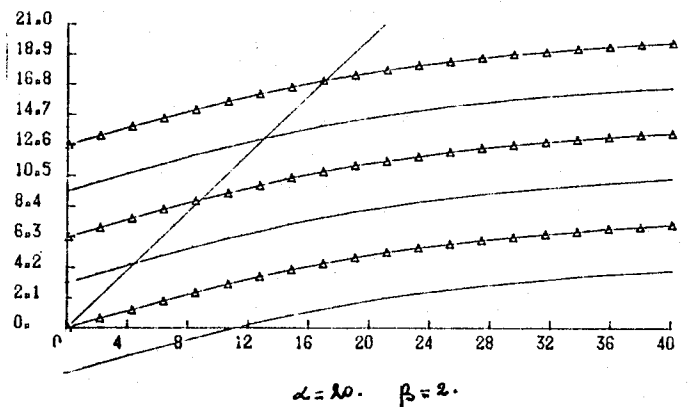
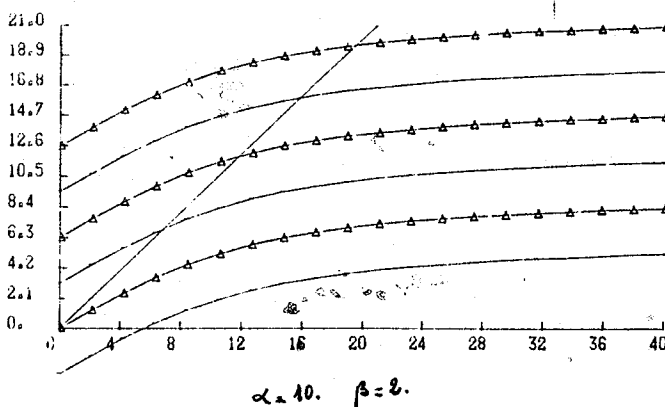
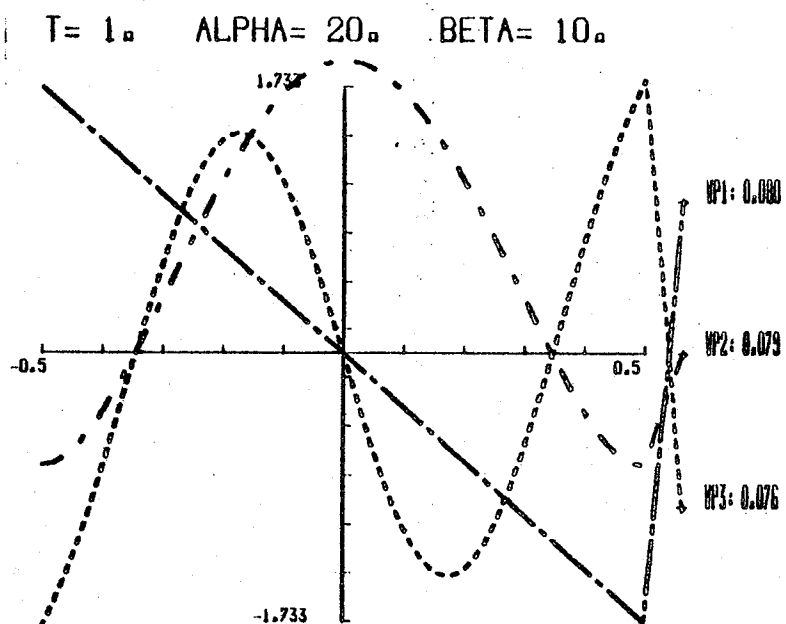
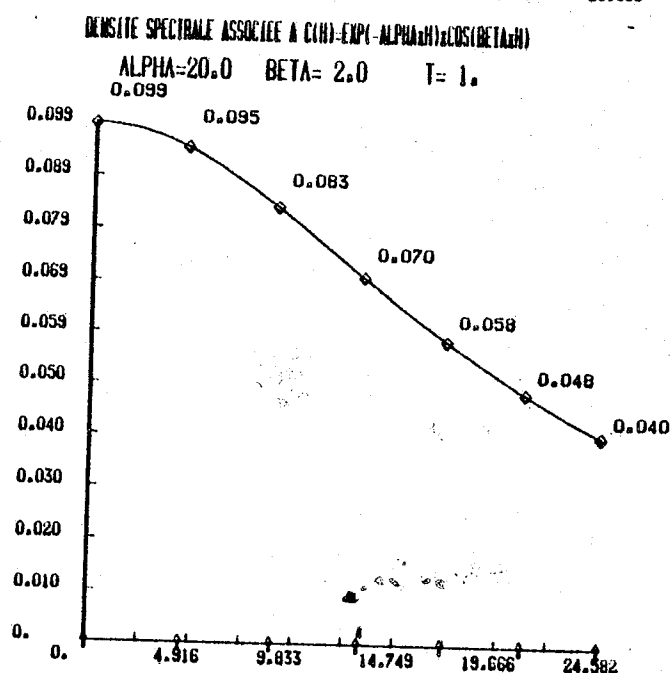
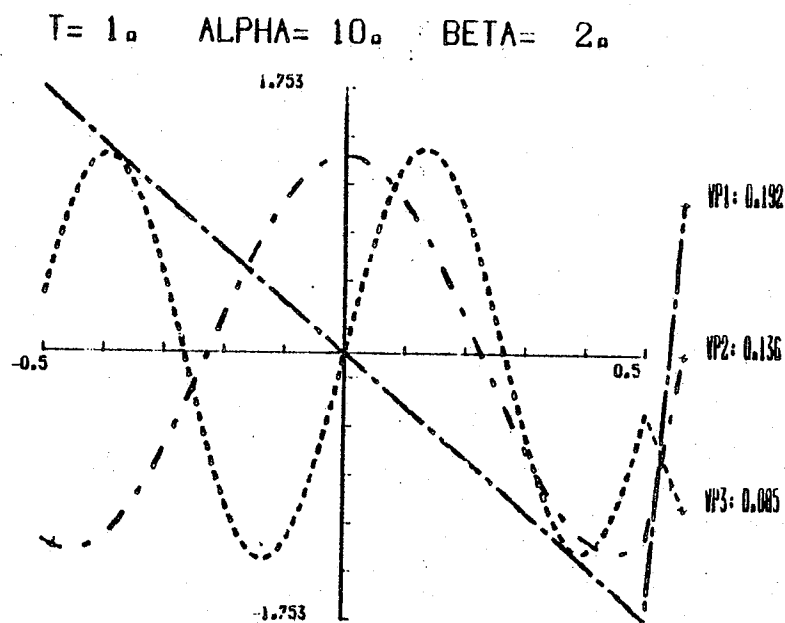
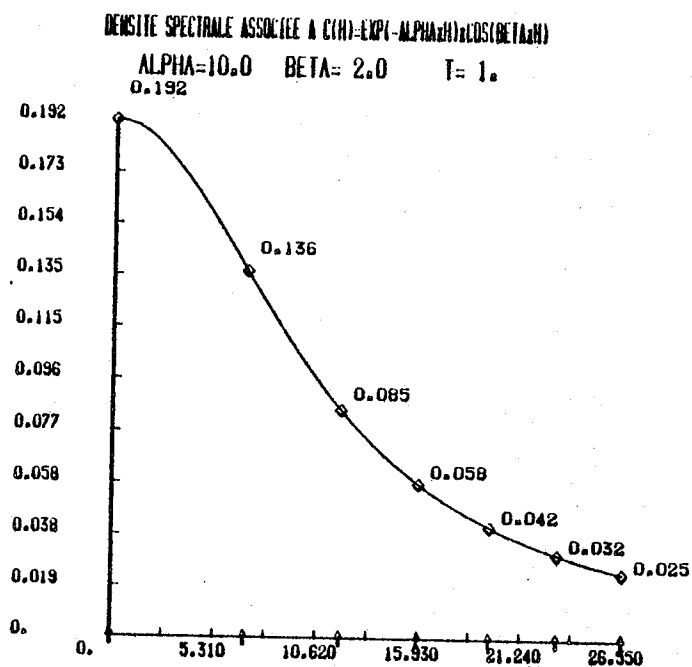


FIGURE 2 . Conditions aux limites : — (i) et —△— (ii).

**FIGURE 3.** A gauche la fonction de densité spectrale et les valeurs propres, notées par  $\diamond$ , et à droite les premières fonctions propres associées. Le noyau de covariance est  $C(h) = \exp(-\alpha \cdot h) \cos \beta h$ .



. 2ème cas. L'équation (2) admet 4 racines réelles  $\pm a$  et  $\pm b$ .

Nous suivons un raisonnement analogue au cas précédent. Ici les contraintes (i) et (ii) s'écrivent :

$$(i) \quad -a \operatorname{tg} \operatorname{Arg} \left\{ \frac{e^{ia_2^T}}{Q(-ia)} \right\} = -b \operatorname{tg} \operatorname{Arg} \left\{ \frac{e^{ib_2^T}}{Q(-ib)} \right\}$$

$$(ii) \quad \frac{1}{a} \operatorname{tg} \operatorname{Arg} \left\{ \frac{e^{ia_2^T}}{Q(-ia)} \right\} = \frac{1}{b} \operatorname{tg} \operatorname{Arg} \left\{ \frac{e^{ia_2^T}}{Q(-ib)} \right\}$$

Posons

$$v_1(a) = \operatorname{Arg} \{Q(-ia)\} \Leftrightarrow \operatorname{tg} v_1(a) = \frac{2a}{-a^2 + \alpha^2 + \beta^2}$$

$$v_2(b) = \operatorname{Arg} \{Q(-ib)\} \Leftrightarrow \operatorname{tg} v_2(b) = \frac{2b}{-b^2 + \alpha^2 + \beta^2}$$

Alors

$$(i) \quad a \operatorname{tg} \left( a \frac{T}{2} - v_1(a) \right) = b \operatorname{tg} \left( b \frac{T}{2} - v_2(b) \right)$$

$$(ii) \quad \frac{1}{a} \operatorname{tg} \left( a \frac{T}{2} - v_1(a) \right) = \frac{1}{b} \operatorname{tg} \left( b \frac{T}{2} - v_2(b) \right)$$

Ici le produit des racines est  $a^2 \cdot b^2$  et on a

$$a^2 b^2 = \frac{P(o)^2 - \lambda Q(o)^2}{-\lambda}$$

ce qui permet d'écrire  $b$  en fonction de  $a$ .

$$b = w(a) = \frac{Q(o)}{a} \left[ \frac{f(a)}{f(o)} - 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Pour (1) par exemple, la solution numérique  $a$  est obtenue par l'itération du point fixe :  $(a^{(0)} = 0)$

$$a^{(j+1)} = \frac{2}{T} \left\{ \operatorname{Arctg} \frac{w(a^{(j)})}{a^{(j)}} \operatorname{tg} \left( w(a^{(j)}) \frac{T}{2} - v_2(w(a^{(j)})) \right) + v_1(a^{(j)}) + k\pi \right\}$$

A chaque solution  $a$  correspond une valeur propre  $\lambda = 2\pi f(a)$ .

Les fonctions propres sont explicitement définies pour tout  $t$  de  $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$  et dans le cas paire par : (Les notations sont celles du cas précédent).

$$\phi(t) = c \left[ -k_+ |Q(ia)|^2 \cos at + |Q(ib)|^2 \cos bt \right]$$

avec

$$c = \left\{ k_+^2 |Q(ia)|^4 \left( \frac{T}{2} + \frac{\sin aT}{a} \right) + |Q(ib)|^4 \left( \frac{T}{2} + \frac{\sin bT}{b} \right) - \frac{4k_+}{a^2 + b^2} |Q(ia)|^2 |Q(ib)|^2 \right. \\ \left. \times \left( a \sin a \frac{T}{2} \cos b \frac{T}{2} - b \sin b \frac{T}{2} \cos a \frac{T}{2} \right) \right\}^{-1/2}$$

et dans le cas impaire par :

$$\phi(t) = c' \left[ -k_- |Q(ia)|^2 \sin at + |Q(ib)|^2 \sin bt \right]$$

avec

$$c' = \left\{ k_-^2 |Q(ia)|^4 \left( \frac{T}{2} - \frac{\sin aT}{a} \right) + |Q(ib)|^4 \left( \frac{T}{2} - \frac{\sin bT}{b} \right) - \frac{4k_-}{a^2 + b^2} |Q(ia)|^2 |Q(ib)|^2 \right. \\ \left. \times \left( -a \sin b \frac{T}{2} \cos a \frac{T}{2} + b \sin a \frac{T}{2} \cos b \frac{T}{2} \right) \right\}^{-1/2}$$



CHAPITRE 4 :  
SIMULATION DE PROCESSUS ALEATOIRES STATIONNAIRES  
A DENSITE SPECTRALE RATIONNELLE





Dans la pratique nous possédons des observations du processus à étudier mais ne connaissons pas l'expression exacte de sa structure de covariance. Nous voulons ici, proposer une méthode qui permette de résoudre le problème inverse, c'est-à-dire produire des valeurs numériques d'un processus dont la fonction de covariance soit une fonction donnée a priori.

L'étude expérimentale de la méthode d'analyse en composantes principales de processus telle que nous l'envisageons (voir chapitre 1 et aussi chapitre 5) pose ce problème.

Dans le souci de rendre homogène cette étude, quant au domaine d'investigation (voir chapitre 1 et aussi chapitre 3), nous avons centré notre attention sur les processus stationnaires à densité spectrale rationnelle pour lesquels nous avons développé un procédé de génération approprié qui est basé sur leur représentation Markovienne. Nous avons appris par la suite qu'un procédé équivalent a déjà été développé par Franklin dans

( 19 ) en suivant une approche différente. Dans ce travail nous avons introduit l'utilisation de la représentation Markovienne qui fournit une base mathématique rigoureuse du procédé et avons proposé une mise en oeuvre plus simple de l'algorithme.

La première partie de ce chapitre est consacrée à l'exposé du procédé Markovien et de sa mise en oeuvre.

Par la suite, dans une deuxième partie, nous décrivons quelques autres générateurs de processus couramment utilisés dans les sciences géophysiques et construits à partir d'une discrétisation de la représentation spectrale du processus.

Puis dans une troisième partie nous comparons, en termes de précision et de temps de calcul par ordinateur, les performances d'un de ces générateurs à celles du procédé Markovien.

Enfin, dans une quatrième partie, nous proposons la méthode des bandes tournantes, introduite par Matheron ( 28 ), pour étendre la simulation à des champs aléatoires.

## I - UN PROCEDE MARKOVIAN DE SIMULATION DE PROCESSUS UNIDIMENSIONNEL A DENSITE SPECTRALE RATIONNELLE

Nous présentons dans cette partie une méthode de calcul de valeurs numériques d'un processus aléatoire, unidimensionnel, en temps continu, supposé stationnaire et de densité spectrale rationnelle.

Dans un premier paragraphe nous précisons les fondements de la méthode et ensuite nous résolvons les différents problèmes posés par la mise en oeuvre.

### I.1 - REPRESENTATION MARKOVIANNE D'UN PROCESSUS A DENSITE SPECTRALE RATIONNELLE

A ce sujet on peut consulter Liptser et Shiryaev (25).

Théorème. *Un processus réel stationnaire au second ordre  $X = \{ X(t) , t \in \mathbb{R} \}$  de densité spectrale rationnelle admet la représentation :*

$$(M) \quad \begin{cases} X(t) = H \cdot Z(t) \\ dZ(t) = A Z(t)dt + BdW(t) \end{cases} \quad (1-1)$$

où  $H, A$  et  $B$  sont des matrices réelles ligne, carrée et colonne respectivement, avec  $A$  ayant ses valeurs propres de partie réelle négative, et  $W = \{ W(t) , t \in \mathbb{R} \}$  un processus à accroissements orthogonaux avec :

$$E | W(t) - W(s) |^2 = | t - s |$$

La démonstration de ce résultat est basée sur une représentation du processus, comme transformation linéaire d'un "bruit blanc" où la forme du gain de l'opération est fixée (Doob (11) ).

Preuve. Soit  $X$  un processus stationnaire de densité spectrale rationnelle  $f$  supposée de la forme

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} |\phi(\omega)|^2$$

Alors  $X$  peut être défini (Doob (11)) comme transformée linéaire d'un processus  $W$  à accroissements orthogonaux vérifiant  $E |W(t) - W(s)|^2 = |t - s|$ :

$$(*) \quad X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t-s) dW(s)$$

avec  $g(t) = \mathcal{F} \phi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \phi(\omega) d\omega$ . ( $g$  est appelée le gain de l'opération linéaire et  $\mathcal{F}g = G$  la fonction de transfert associée.) On montre (Doob (11), ou Priestley (35) par exemple) les relations :

$$f(\omega) = |G(\omega)|^2 f_W(\omega) \quad C(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega h} |\phi(\omega)|^2 d\omega$$

où  $C$  désigne la fonction de covariance de  $X$  et  $f_W \equiv \frac{1}{2\pi}$

D'autre part le processus  $Z(t)$  de la représentation (M), en tant que solution de l'équation différentielle stochastique (1-1), est défini pour  $t > s$  par :

$$(1-2) \quad Z(t) = e^{A(t-s)} Z(s) + \int_s^t e^{A(t-v)} B dW(v)$$

En effet, si  $Z(t)$  est donné par la formule (1-1), on a

$$A \int_s^t Z(u) du = \int_s^t A e^{A(u-s)} Z(s) du + \int_s^t A \int_s^u e^{A(u-v)} B dW(v) du$$

et en inversant l'ordre d'intégration (Doob (11), chapitre IX), on obtient

$$A \int_s^t Z(u) du = \int_s^t A e^{A(u-s)} Z(s) du + \int_s^t \left( \int_u^t A e^{A(u-v)} du \right) B dW(v)$$

et comme  $e^{At} = I + At + \frac{1}{2!} (At)^2 + \dots$ , et  $(\frac{d}{dt}) e^{At} = A e^{At}$ , on obtient finalement :

$$\begin{aligned} A \int_s^t Z(u) du &= (e^{A(t-s)} - I) Z(s) + \int_s^t (e^{A(t-v)} - I) BdW(v) \\ &= Z(t) - Z(s) - B (W(t) - W(s)) \end{aligned}$$

Comme on suppose que la matrice  $A$  a des valeurs propres à partie réelle négative, alors  $e^{As}$  tend vers zéro lorsque  $s$  tend vers l'infini et l'expression de  $Z(t)$  devient :

$$(1-3) \quad Z(t) = \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)} BdW(s)$$

En reportant cette dernière expression dans la représentation (M),  $X(t)$  s'écrit

$$X(t) = H \int_{-\infty}^t e^{A(t-s)} BdW(s)$$

Ainsi, sous les hypothèses du théorème, cette dernière représentation sera identique à la représentation (\*) si la fonction  $g$  peut se mettre sous la forme :

$$g(t) = \begin{cases} H \cdot e^{At} \cdot B & t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

ou, ce qui est équivalent, si sa transformée de Fourier inverse  $\overline{f}g = \phi$  peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \phi(\omega) &= \int_0^\infty e^{i\omega t} H \cdot e^{At} \cdot B dt \\ &= H \left( \int_0^\infty e^{(A-i\omega I)t} dt \right) B \\ &= H (i\omega I - A)^{-1} B \end{aligned}$$

Montrons maintenant que toute fonction rationnelle en  $z$  dont le polynôme de numérateur est de degré inférieur à celui de dénominateur peut être mise sous la forme  $H(zI - A)^{-1} B$ . Pour cela considérons une matrice  $A$  de la forme :

$$(1-4) \quad A = \begin{bmatrix} -a_1 & \dots & \dots & \dots & -a_q \\ 1 & 0 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Alors les éléments de la première colonne de  $(zI - A)^{-1}$  sont  $z^{q-1}/d(z), \dots, 1/d(z)$  où  $d(z) = z^q + \sum_{j=1}^q a_j z^{q-j}$ . En effet, si on multiplie la dernière colonne de  $zI - A$  par  $1/z$  et si on l'ajoute à celle qui la précède, et que l'on répète cette opération pour la colonne précédente ainsi de suite jusqu'à la première colonne, on obtient la matrice triangulaire supérieure

$$\begin{bmatrix} z(1 + a_1/z + \dots + a_q/z^q) & * & & \\ & z & & \\ & & z & \\ & & & z \end{bmatrix}$$

dont les termes non précisés sont notés  $*$ . Par suite  $\det(zI - A) = z^q + \sum_{j=1}^q a_j z^{q-j} = d(z)$ . De la même façon, la sous matrice  $zI - A$  obtenue en supprimant la  $i$ ème ligne et la  $j$ ème colonne :

$$\begin{bmatrix} -1 & z & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & 0 & & & \\ & & & z & & & \\ & & & -1 & 0 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & -1 & 0 \\ & & & & & & -1 & z \end{bmatrix}$$

a pour déterminant  $(-1)^j z^{q-j}$ . On voit alors que les éléments de la lère colonne de  $(zI - A)^{-1}$  sont bien ceux annoncés plus haut. Ainsi toute fraction rationnelle  $(\sum_1^q h_j z^{q-j}) / (z^q + \sum_1^q a_j z^{q-j})$  peut s'écrire sous la forme  $H(zI - A)^{-1} B$  avec  $A$  une matrice d'ordre  $q$  donnée par (1-4) et  $B$  et  $H$  des  $q$ -vecteurs donnés par

$$(1-5) \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}'$$

$$H = (h_1, h_2, \dots, h_q)$$

Par ailleurs, (voir chapitre 3) la densité spectrale  $f$  supposée rationnelle peut se mettre sous la forme

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{P(i\omega)}{Q(i\omega)} \right|^2$$

où  $P$  et  $Q$  sont des polynômes à coefficients réels tels que le degré de  $P$  soit inférieur au degré de  $Q$ . D'après ce qui précède si

$$P(i\omega) = \sum_{j=0}^q b_j (i\omega)^{p-j}$$

$$Q(i\omega) = \sum_{j=0}^q a_j (i\omega)^{q-j}, \quad a_0 = 1$$

et  $p < q$ , alors  $\phi(\omega) = P(i\omega) / Q(i\omega) = H(i\omega I - A)^{-1} B$  où  $A$  et  $B$  sont comme précédemment et

$$(1-6) \quad H = (0, \dots, 0, b_0, b_1, \dots, b_p) \quad \Delta$$

Remarque. Les matrices  $H$ ,  $A$  et  $B$  de la représentation  $(M)$  de  $X$  sont complètement déterminées à partir de la définition de la densité spectrale  $f$  sous forme rationnelle (formules (1-4), (1-5) et (1-6)). Mais il peut exister un autre triplet de matrices  $(H', A', B')$  qui conduise à une autre représentation de  $X$ , toutefois nous ne cherchons pas une représentation unique.

## I.2 - L'ALGORITHME DE GENERATION

Supposons que  $X = \{X(t), t \in T\}$  est un processus gaussien (centré), stationnaire et de densité spectrale  $f$  rationnelle. A partir de la représentation  $(M)$  de la proposition du paragraphe précédent il est possible de "générer" des valeurs numériques de  $X$  sur toute discrétisation  $t_1, t_2, \dots, t_n$  de  $T$ ,  $(T \subset \mathbb{R})$ , rangés dans l'ordre croissant.

Supposons que les polynômes  $P$  et  $Q$ , de degré  $p$  et  $q$  respectivement, de la définition de  $f$  sous forme rationnelle sont connus, (voir chapitre 3).

Les considérations du paragraphe précédent donnent explicitement les matrices  $H$ ,  $A$  et  $B$  de la représentation Markovienne  $(M)$  de  $X$  à partir des coefficients des polynômes  $P$  et  $Q$ .

Pour "générer"  $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$  il suffit de "générer" les vecteurs aléatoires  $Z(t_1), Z(t_2), \dots, Z(t_n)$ , or la formule (1-2) de la démonstration faite au paragraphe précédent permet d'obtenir les valeurs  $Z(t_j)$  :  $j \geq 2$  de façon récursive à partir de  $Z(t_1)$ .

Pour  $j \geq 2$  la formule (1-2) s'écrit :

$$(2-2) \quad Z(t_j) = e^{A(t_j - t_{j-1})} Z(t_{j-1}) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{A(t_j - s)} B dW(s)$$



On pose, pour  $j \geq 2$  :

$$\xi_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{A(t_j-s)} B dW(s)$$

$$\Delta_j = t_j - t_{j-1}$$

Le processus  $W$  étant à accroissements orthogonaux, les vecteurs  $\xi_j$  sont non corrélés. De plus, comme  $X$  est gaussien (centré)  $W$  l'est aussi et par conséquent est un mouvement Brownien. Donc les  $\xi_j$  sont des vecteurs aléatoires gaussiens (centrés), indépendants et de matrice de covariance  $C_j$  définie par :

$$\begin{aligned} (2-3) \quad C_j &= E(\xi_j \xi_j') = \int_{t_{j-1}}^{t_j} e^{A(t_j-s)} B B' e^{A'(t_j-s)} ds \\ &= \int_0^{\Delta_j} e^{As} B B' e^{A's} ds \end{aligned}$$

Par ailleurs, la matrice de covariance du vecteur gaussien (centré)  $Z(t_1)$  est, d'après la formule 1-3 :

$$\begin{aligned} (2-4) \quad C_1 &= E Z(t_1) Z'(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1} e^{A(t_1-s)} B B' e^{A'(t_1-s)} ds \\ &= \int_0^{\infty} e^{As} B B' e^{A's} ds \end{aligned}$$

On note alors que (voir par exemple Franklin (17) p.76)

Lemme. Les matrices  $C_j : j \geq 1$ , données par (2-3) et (2-4) où la matrice  $A$  d'ordre  $q$  est supposée telle que ses valeurs propres  $\lambda$  sont de parties réelles négatives (i.e.  $\text{Re}(\lambda) < 0$ ) et  $B$  est le  $q$ -vecteur  $(1 \ 0 \ \dots \ 0)'$ , pour chaque  $j$  de 1 à  $n$ , la solution de l'équation matricielle de Lyapunov :

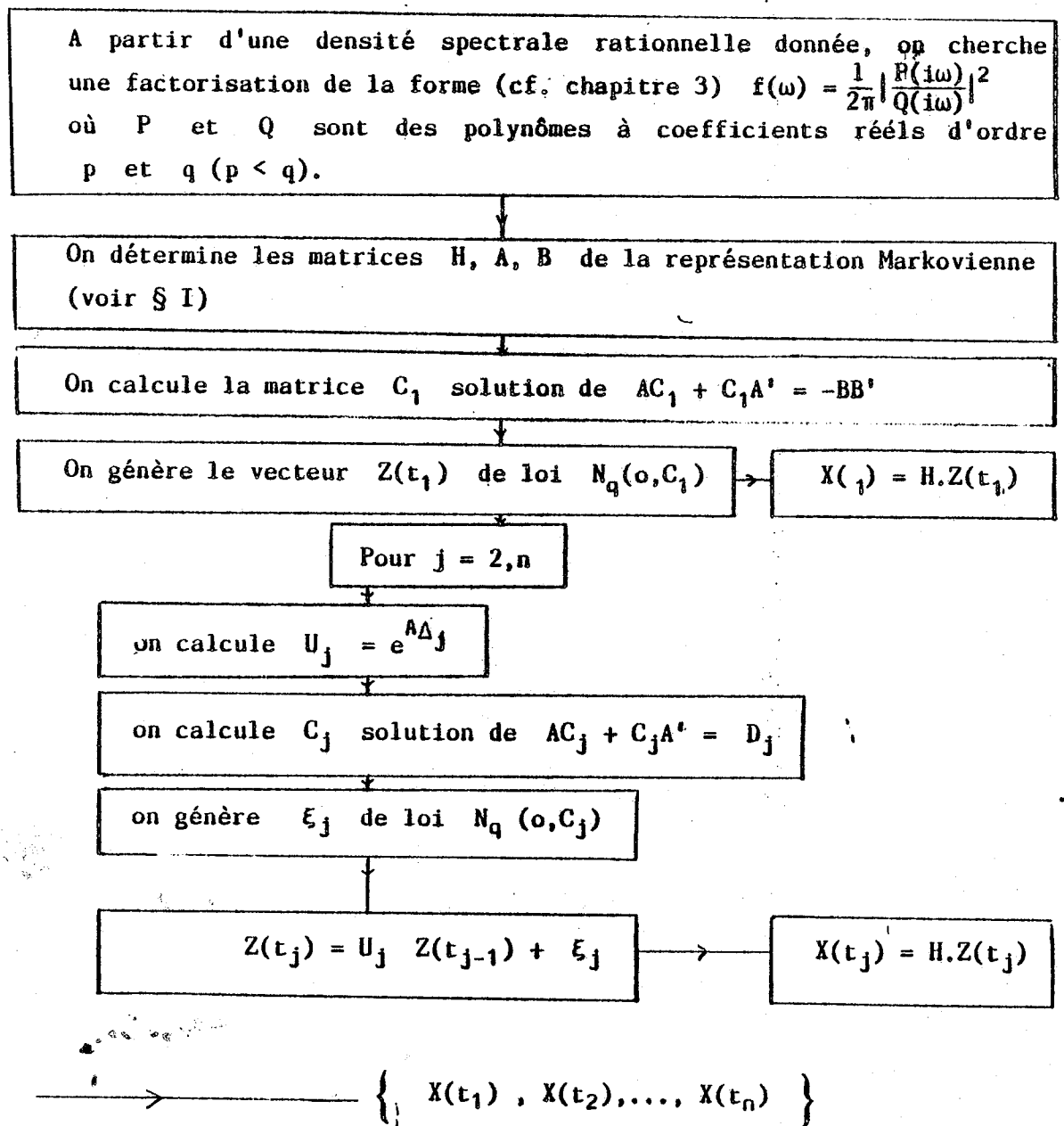
$$(2-5) \quad AC_j + C_j A' = D_j$$

avec  $D_j$  la matrice symétrique donnée par :

$$D_j = \begin{cases} -BB' & j = 1 \\ e^{\Delta_j A} B B' e^{\Delta_j A'} - BB' & j \geq 2 \end{cases}$$

La condition sur les valeurs propres de  $A$  (i.e.  $\text{Re}(\lambda) < 0$ ) assure l'existence et l'unicité de la solution de l'équation matricielle de Lyapunov (2-5) (voir Gantmacher (20) par exemple). Nous en donnons l'expression explicite au paragraphe suivant.

Les étapes de la méthode de génération sont alors décrites par le schéma suivant :



### I. 3 - MISE EN OEUVRE DE L'ALGORITHME DE GENERATION

Pour mettre en oeuvre la méthode nous avons besoin d'une part de déterminer les matrices de covariance  $C_j : j \geq 1$  solutions des équations (2-5) de Lyapunov définies dans le lemme précédent et les matrices  $U_j = e^{A\Delta_j} : j \geq 2$  et d'autre part de définir un procédé de génération de valeurs numériques d'un vecteur aléatoire gaussien.

Ce dernier point, basé sur la décomposition de Cholesky, sera discuté au paragraphe IV, lors de l'application numérique.

Les matrices  $C_j : j \geq 1$  sont obtenues par application d'un résultat général que nous donnons concernant la résolution de l'équation matricielle de Lyapunov  $AC + CA' = D$  lorsque  $A$  est supposée de la forme (1-4),  $D$  étant une matrice symétrique donnée et  $C$  la matrice symétrique cherchée. Ce résultat généralise celui connu par ailleurs (voir Franklin (18)), par exemple dans le cas où  $D = -BB'$  avec  $B = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0)'$ . Notons que si  $A$  est une matrice quelconque et  $a_{ij}$  son terme général, la résolution de l'équation matricielle de Lyapunov (3-1) est équivalente à celle d'un système linéaire à  $q(q+1)/2$  inconnues et  $q(q+1)/2$  équations car  $C$  est une matrice symétrique. Notre résultat permet, dans le cas où  $A$  a la forme (1-4), de ramener la résolution de l'équation de Lyapunov (3-1) à celle d'un système linéaire d'ordre  $q$  seulement.

Proposition. Le terme général  $C_{ij}$  de la matrice symétrique  $C$  solution de l'équation de Lyapunov  $AC + CA' = D$  où  $A$  est de la forme (1-4) et supposée avoir toute ses valeurs propres de parties réelles négatives et  $D$  est une matrice symétrique de terme général  $d_{ij}$ , est donnée par :

$$C_{ij} = \begin{cases} r_{ij} & , i + j \text{ impaire} \\ r_{ij} + (-1)^{(j-1)/2} \frac{c_{i+j}}{2} & , i + j \text{ paire} \end{cases}$$

où les  $q$  inconnues  $c_1, c_2, \dots, c_q$ , définies par

$c_i = c_{i,1} : i = 1, q$  sont déterminées de manière unique par la résolution du système linéaire d'ordre  $q$  ( $r_{10} = d_{11}/2$ )

$$\left\{ \begin{array}{l} j = 1, q \\ - \sum_{j/2 \leq k \leq (q+j)/2} a_{2k-j} (-1)^{k-j} c_k = d_{1j} - r_{k,j+1} + \sum_{l=1}^q a_{kl} \cdot r_{l,j} \end{array} \right.$$

et où  $r_{ij}$  est le terme général d'une matrice symétrique d'ordre  $q$  défini pour  $1 \leq i \leq j \leq q$  par :

$$r_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=0}^{(j-i-3)/2} (-1)^k d_{i+1+k, j-k} + (-1)^{(j-i-1)/2} d_{\frac{i+j+1}{2}, \frac{i+j+1}{2}} & i+j \text{ impair} \\ \sum_{k=0}^{(j-i)/2-1} (-1)^k d_{i+1+k, j-k} & i+j \text{ pair} \end{cases}$$

#### Preuve de la proposition.

La matrice  $AC + CA'$  étant symétrique, l'égalité terme à terme des deux matrices de l'équation (3-1) conduit aux formules suivantes :

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & + 2 \sum_{k=1}^q a_k \cdot c_{1k} = d_{11} \\ \text{(ii)} \quad & - \sum_{k=1}^q a_k \cdot c_{kj} + c_{1,j-1} = d_{1j} \quad j = 2, \dots, q \\ \text{(iii)} \quad & c_{i-1,j} + c_{1,j-1} = d_{i,j} \quad 1 < i \leq j \leq q \end{aligned}$$

Dans le cas où  $1 < i \leq j \leq q$ , l'équation (iii) est équivalente à :

$$\begin{aligned} c_{1,j} &= -c_{i+1,j-1} + d_{i+1,j} \\ &= (-1)^2 c_{i+2,j-2} + d_{i+1,j} - d_{i+2,j-1} \\ &= \dots \\ &= (-1)^{j-1} c_{j,1} + d_{i+1,j} - d_{i+2,j-1} + \dots + d_{j,i+1} \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où  $i + j$  est impaire, nous obtenons pour  $c_{ij}$  l'expression :

$$c_{ij} = \frac{1}{2} (d_{i+1,j} - d_{i+2,j-1} + \dots + d_{j,i+1})$$

En regroupant les termes  $d_{ij}$  2 par 2 l'expression de  $c_{ij}$  devient :

$$c_{ij} = d_{i+1,j} - d_{i+2,j-1} + \dots (-1)^{\frac{j-i-3}{2}} d_{\frac{i+j+1}{2}, \frac{i+j+1}{2}}$$

d'où

$$c_{i,j} = \sum_{k=0}^{(j-i-3)/2} (-1)^k d_{i+1+k, j-k} + (-1)^{\frac{j-i-1}{2}} d_{\frac{i+j+1}{2}, \frac{i+j+1}{2}}$$

Dans le cas où  $i + j$  est paire, on a

$$c_{ij} = (-1)^{(j-i)/2} c_{\frac{i+j}{2}, \frac{i+j}{2}} + d_{i+1,j} - d_{i+2,j-1} + \dots + (-1)^{\frac{j-i-1}{2}} d_{\frac{i+j+1}{2}, \frac{i+j+1}{2}}$$

soit

$$c_{ij} = (-1)^{(j-i)/2} c_{\frac{i+j}{2}, \frac{i+j}{2}} + \sum_{k=0}^{(j-i)/2-1} (-1)^k d_{i+1+k, j-k}$$

Si nous utilisons les notations  $r_{ij}$  et  $c_i$  définies plus haut, l'équation (iii) est finalement équivalent à ( $1 < i \leq j \leq q$ )

$$(iii) \begin{cases} c_{ij} = r_{ij} & , i+j \text{ impaire} \\ c_{ij} = r_{ij} + (-1)^{(j-i)/2} c_{\frac{i+j}{2}} & , i+j \text{ paire} \end{cases}$$

Reportons (iii) dans les formules (i) et (ii). Alors la formule (i) devient, en posant  $k+1 = 2\ell$  :

$$(i) \quad - \sum_{1 \leq \ell \leq (q+1)/2} a_{2\ell-1} \cdot (-1)^{\ell-1} c_{\ell} = \frac{d_{11}}{2} + \sum_{\ell=1}^q a_{\ell} \cdot r_{1\ell}$$

et la formule (ii) s'écrit pour  $j = 2, q$  et en posant  $k+j = 2\ell$  :

$$(ii) \quad \begin{cases} \sum_{(j+1)/2 \leq \ell \leq (q+j)/2} a_{2\ell-j} (-1)^{\ell-j} c_{\ell} = d_{1j} + r_{1,j-1} + \sum_{\ell=1}^q a_{\ell} r_{\ell j}, & j \text{ impair} \\ - \sum_{(j+1)/2 \leq \ell \leq (q+j)/2} a_{2\ell-j} (-1)^{\ell-j} c_{\ell} - (-1)^{j/2} c_{j/2} = d_{1j} - r_{1,j-1} + \sum_{\ell=1}^q a_{\ell} r_{\ell j}, & j \text{ pair} \end{cases}$$

Si on pose  $a_0 = 1$  si  $j$  est pair et 0 sinon, alors la formule (ii) est finalement donnée pour  $j=2, q$  par :

$$(ii) \quad - \sum_{j/2 \leq \ell \leq (q+j)/2} a_{2\ell-j} (-1)^{\ell-j} c_{\ell} = d_{1,j} - r_{1,j-1} + \sum_{\ell=1}^q a_{\ell} r_{\ell,j}$$

On note alors que (i) est obtenue à partir de (ii) en posant  $j=1$  et  $r_{10} = d_{11}/2$ . Les formules (i), (ii) et (iii) définissant le système linéaire d'ordre  $2q$  associé à l'équation matricielle de Lyapunov donnent les inconnues  $c_{ij}$  par résolution d'un système linéaire d'ordre  $q$  : celui donné par la proposition. La démonstration est achevée.  $\Delta$

Lorsque  $D = -BB'$  avec  $B = (1 \ 0 \ \dots \ 0)'$  le système linéaire à résoudre, donné par la proposition précédent, se trouve considérablement simplifié.

Nous le décrivons par le corollaire suivant.

Corollaire. Sous les hypothèses de la proposition précédente le terme général  $C_{ij}$  de la matrice symétrique  $C$ , solution de l'équation  $AC + CA' = -BB'$  où  $B = (1 \ 0 \ \dots \ 0)'$ , est donnée par :

$$C_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i+j \text{ impaire} \\ (-1)^{(j-1)/2} \frac{c_{1+j}}{2} & \text{si } i+j \text{ paire} \end{cases}$$

$c_1, c_2, \dots, c_q$  sont déterminés de manière unique par la résolution du système linéaire d'ordre  $q$  :

$$\sum_{j/2 \leq k \leq (q+j)/2} (-1)^{k-j} \cdot a_{2k-j} \cdot c_k = \begin{cases} 0 & , j = 2, q \\ -\frac{1}{2} & , j = 1 \end{cases}$$

Ainsi la détermination de la matrice symétrique  $C_1$  passe par la résolution d'un système linéaire d'ordre  $q$  qui, pour être résolu numériquement, doit être écrit sous forme matricielle. De façon plus précise et dans le cas où  $q$  est paire ( $q=2m$ ) le système linéaire vérifié par le vecteur  $c = (c_1, c_2, \dots, c_q)$  et donné par le corollaire précédent s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} a_{2k-1} c_k = \frac{1}{2} \\ \sum_{k=1}^m (-1)^k a_{2k-2p+1} c_k = 0 \\ \sum_{k=1}^m (-1)^k a_{2k-2p} c_k = 0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \\ , p = 2, m \\ , p = 1, m \end{array}$$

La représentation de ce système sous forme matricielle du type  $T \cdot C = (\frac{1}{2} \ 0 \ 0)'$  où  $T$  est une matrice d'ordre  $q$  de terme général  $T_{ij}$  est obtenue par identification des coefficients des  $c_i$  :  $i=1, q$  dans les deux systèmes. Ainsi la matrice  $T$  est donnée par :

$$T_{ij} = \begin{cases} (-1)^{j-1} a_{2j-1} & i = 1 \text{ et } j = 1, m \\ (-1)^j a_{2j-i} & i = 2, 2m \text{ et } j = 1, 2m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour le calcul des matrices  $C_j : j \geq 2$  il existe plusieurs possibilités.

- Une première possibilité consiste à appliquer la proposition précédente avec  $D = D_j$ , ce qui présente l'avantage d'utiliser une même procédure pour le calcul de toutes les matrices  $C_j : j=1, q$  mais entraîne par contre une lourdeur dans la définition matricielle du système à résoudre.

- Une deuxième possibilité permet d'éviter la résolution des équations de Lyapunov en considérant le développement (matriciel) en séries des matrices  $C_j : j \geq 2$ , du type

$$C_j = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \alpha_k \Delta_j^k$$

où  $\alpha_k$  est la valeur en 0 de la dérivée kème de la fonction  $c(t) = \int e^{As} BB' e^{A's} ds$ . Il est facile de voir que les  $\alpha_k$  vérifient la relation de récurrence :

$$\alpha_{k+1} = A \alpha_k + \alpha_k A' \quad k \geq 1$$

et  $\alpha_1 = BB'$ .

Cette seconde approche est convenable dans la mesure où lorsque  $\Delta_j$  est petit, la quantité  $\alpha_k \Delta_j^k / k!$  tend vers 0 assez vite, de sorte qu'on peut tronquer la série définissant  $C_j$  en une somme ayant quelques termes seulement.

- Une troisième possibilité, qui est celle que nous avons retenue, exploite la structure du second membre de l'équation de Lyapunov.

Lemme. Pour tout  $j \geq 2$  la matrice solution de l'équation (2-3) est  $C_j = C_1 - \tilde{C}_j$  où  $C_1$  est solution de (2-3) pour  $j=1$  (et donnée par le corollaire précédent) et  $\tilde{C}_j = e^{A\Delta_j} C_1 e^{A'\Delta_j}$ .

La preuve est triviale et la définition des matrices  $\tilde{C}_j$  découle de celle des  $C_j$  ( $j \geq 2$ ). Signalons une difficulté : le calcul des matrices



$C_j : j \geq 2$ , ainsi définies, présente un risque d'instabilité numérique dû au fait que la matrice  $e^{A\Delta_j}$  est proche de l'identité pour un  $\Delta_j$  petit. Pour pallier cette difficulté, on pose pour  $j \geq 2$ ,  $E_j = e^{A\Delta_j} - I$ . L'expression des  $C_j : j \geq 2$  devient :

$$C_j = C - (I + E_j) C (I + E_j') = - (E_j C + E_j' C + E_j C E_j')$$

Pour le calcul des matrices  $E_j$  on peut également considérer plusieurs possibilités. On peut soit utiliser son développement en série

(i.e.  $E_j = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \Delta_j^k$ ) , soit diagonaliser la matrice  $A$  et calculer  $E_j$  directement en appliquant le fait que

$$\text{si } A = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_q \end{bmatrix} P^{-1} \text{ alors } e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_q t} \end{bmatrix} P^{-1},$$

soit encore se servir de la formule  $E_j = Y(\Delta_j) - I$  où  $Y(t) = e^{At}$  ( $t > 0$ ) est solution de l'équation différentielle avec valeur initiale :

$$\begin{cases} \frac{dY(t)}{dt} = AY(t) \\ Y(0) = I \end{cases}$$

Notons enfin que pour  $j \geq 2$  les matrices  $U_j$  sont obtenues à partir des matrices  $E_j$  par  $U_j = e^{A\Delta_j} = E_j + I$ .

Dans le § III nous considérons l'application de la méthode à deux exemples de fonctions de covariance.

## II - QUELQUES AUTRES PROCEDES DE SIMULATION

C'est surtout dans les sciences géophysiques (hydrologie, météorologie, gravimétrie,...) que les générateurs de processus sont fréquemment utilisés. Comme la principale information, hormis les données elles-mêmes, concerne la structure de covariance du phénomène, on demande à ces générateurs de préserver la fonction de covariance fixée à priori.

Nous présentons dans ce paragraphe quelques exemples de tels générateurs unidimensionnels avant de la comparer en termes de précision et de coût de calcul par ordinateur, au procédé Markovien développé au paragraphe précédent.

Auparant, il est utile de rappeler quelques résultats sur la représentation spectrale d'un processus stationnaire à partir de laquelle sont construits ces générateurs.

### II.1 - REPRESENTATION SPECTRALE D'UN PROCESSUS STATIONNAIRE

Les processus  $X = \{ X(t) , t \in T \}$  considérés dans cette deuxième partie sont supposés stationnaires au second ordre, centrés et continus en moyenne quadratique, c'est à dire vérifiant :

$$\lim_{h \rightarrow 0} E |X(t+h) - X(t)|^2 = 0$$

Sous ces hypothèses la fonction de covariance  $C$  associée est de type positif et continue. Par suite la fonction  $C$  admet la représentation

$$C(h) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda h} dF(\lambda)$$

où  $F$  est une fonction réelle croissante déterminée de manière unique à partir de  $C$ . On peut trouver une démonstration de ce résultat dû à Bochner dans Doob ( 11 ) p.474.  $dF$  est appelée mesure spectrale du processus

Si de plus la fonction de covariance est absolument intégrable (i.e  $\int_{-\infty}^{+\infty} |C(h)| dh < +\infty$ ) il existe une fonction  $f$  appelée densité spectrale de  $X$  et définie par la transformation de Fourier inverse de la fonction de covariance :

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\omega h} C(h) dh$$

$F$  et  $f$  sont liés par la relation :

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f(\omega) d\omega$$

La quantité  $\sigma_X^2 = C(0)$  s'interprète comme la puissance totale de  $X$  et  $f(\lambda) d\lambda / \sigma_X^2$  représente la part de la puissance totale due aux composantes de  $X$  de fréquences entre  $\lambda$  et  $\lambda + d\lambda$ .

Si le processus  $X$  est supposé réel, la représentation de la fonction de covariance  $C$  est simplifiée :

$$C(h) = 2 \int_0^{\infty} \cos(h.\lambda) dF(\lambda)$$

Un processus  $Z = \{ Z(\lambda), \lambda \in [a, b] \}$  est dit à accroissements orthogonaux si pour  $a \leq a' < b' \leq a'' < b''$ ,  $E(Z(b') - Z(a'))(Z(b'') - Z(a'')) = 0$ . A un tel processus on peut associer une fonction croissante  $G$  unique telle que  $E|Z(\lambda) - Z(\mu)|^2 = G(\lambda) - G(\mu)$ ,  $\mu \leq \lambda$ . La fonction  $G$  définit une mesure appelée mesure spectrale associée au processus  $Z$ . On peut alors définir de façon rigoureuse l'intégrale stochastique, notée  $\int g dZ$ , d'une fonction  $g$  de  $L^2([a, b], G)$  par rapport au processus  $G$  (cf. Pham Dinh Tuan (33)). Cette dernière notion est nécessaire pour donner un sens à la représentation spectrale d'un processus stationnaire.

Tout processus  $X$  de la classe considérée au début du paragraphe admet la représentation dite spectrale :

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} dZ(\lambda)$$

où  $Z = \{ Z(\lambda) , \lambda \in \mathbb{R} \}$  est un processus à accroissements orthogonaux, de mesure associée la mesure spectrale  $dF$  et déterminé de manière unique à partir de  $X$ . On peut trouver une démonstration de ce résultat dû à Cramer dans Doob (11) p. 481.

Dans le cas où le processus  $X$  est réel, la représentation spectrale précédente peut être mise sous la forme :

$$(1-1) \quad X(t) = 2 \left( \int_0^\infty \cos(\lambda t) dA(\lambda) - \int_0^\infty \sin(\lambda t) dB(\lambda) \right)$$

où  $A = \{ A(\lambda) , \lambda \in \mathbb{R} \}$  et  $B = \{ B(\lambda) , \lambda \in \mathbb{R} \}$ , respectivement partie réelle et imaginaire de  $Z$ , sont des processus réels à accroissements orthogonaux tels que :

$$E (A(\lambda+h) - A(\lambda)) (B(\mu+h) - B(\mu)) = 0 \quad h, \lambda, \mu > 0$$

## II.2 - PROCEDE MEJIA et R-ITURBE (33)

Ce premier procédé est basé sur une discrétisation de la représentation spectrale du processus  $X$  en somme d'harmoniques de fréquences aléatoires, tirées selon la mesure spectrale  $F$  associée. Le processus ainsi construit, outre qu'il possède la fonction de covariance théorique  $C$ , est asymptotiquement ergotique dans un sens que l'on précisera par la suite et asymptotiquement gaussien.

Sans perte de généralité on peut supposer que  $\int dF = C(0) = 1$ , car dans le cas contraire il suffit de diviser le processus considéré par son écart-type. Le processus généré est le suivant :

$$Y = \{ Y(t) = \left( \frac{2}{N} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^n \cos(\Lambda_i t + \phi_i) , t \in T \}$$

où les  $\Lambda_i$  (respectivement les  $\phi_i$ ) sont des variables aléatoires indépendantes de loi  $F$  (resp. uniforme sur  $[0, 2\pi]$ ). De plus les  $\Lambda_i$  et  $\phi_i$  sont supposées indépendantes.

Il est facile de voir que le processus  $Y$  a bien la fonction de covariance  $C$  fixée a priori. De plus,  $Y$  est asymptotiquement gaussien au sens que pour tout  $t_1, t_2, \dots, t_k$  les variables aléatoires  $Y(t_1), Y(t_2), \dots, Y(t_k)$  convergent conjointement en loi quand  $N \rightarrow \infty$  vers des variables gaussiennes, en vertu du théorème centrale limite. Par contre le processus n'est pas ergodique (au second ordre) c'est à dire que la moyenne temporelle

$$\frac{1}{T} \int_0^T Y(t) Y(t+s) ds$$

ne converge pas quand  $T \rightarrow \infty$  vers  $C(s)$ . En fait, on peut vérifier que cette moyenne converge presque sûrement (p.s.) vers  $C_Y(s) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos(\Lambda_i s)$ , qui converge p.s. vers  $C(s)$  quand  $N \rightarrow \infty$ . On dira donc que le processus est asymptotiquement ergodique.

La génération de valeurs numériques du processus  $Y$  sur une discrétisation  $\Delta_n = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$  de  $T$  nécessite de simuler, d'une part  $N$  réalisations d'une variable aléatoire  $\Lambda$  de fonction de répartition  $F$  calculée à partir de la fonction de covariance  $C$  et d'autre part  $N$  réalisations d'une variable aléatoire de la loi uniforme sur  $[0, 2\pi]$

Dans (30) les auteurs incluent également une expression de "l'écart à l'ergodicité"

$$E |C_Y(s) - C(s)|^2,$$

comme  $E C_Y(s) = C(s)$ , cet écart est la variance de  $C_Y(s)$  donnée par

$$\text{var}(C_Y(s)) = \frac{C(2s) - 2C^2(s) + 1}{2N}$$

Au paragraphe III nous illustrons cette méthode de simulation à partir d'un exemple simple de fonction de covariance.

### II.3 - PROCÉDE SHINOZUKA ET JAN (42)

La méthode a été d'abord introduite par Rice en 1954 dans (37). Elle est également basée sur une discrétisation de la représentation spectrale et fournit un processus somme d'harmoniques qui est ergodique, gaussien mais qui ne possède qu'asymptotiquement la fonction de covariance théorique.

Le processus généré est

$$Y = \{ Y(t) = 2 \sum_{i=1}^N (f(\omega_i) \cdot \Delta\omega)^{1/2} \cos(\omega_i t + \phi_i) \}, \quad t \in T$$

où les  $\phi_i$  sont des variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur  $[0, 2\pi]$ ,  $\Delta\omega$  est le pas de discrétisation,  $\omega_i = (i - \frac{1}{2}) \Delta\omega$  et  $\omega_i' = \omega_i + \delta\omega$  avec  $\delta\omega$  une variable aléatoire uniforme sur  $[-\Delta', \Delta']$  et  $\Delta' < \Delta\omega$ .

Pour un nombre d'harmoniques  $N$ , le pas de discrétisation  $\Delta\omega$  est défini par  $\Delta\omega = \omega_{\max} / N$  ou  $\omega_{\max}$  est tel que pour un  $\epsilon$  positif donné et pour tout  $\omega < \omega_{\max}$ ,  $f(\omega) < \epsilon$ . La fréquence aléatoire  $\delta\omega$  est ajoutée pour retirer du caractère périodique.

Il a été prouvé par les auteurs que la fonction de covariance  $C_Y$  du processus  $Y$  converge vers la fonction de covariance théorique  $C$  lorsque  $N$  tend vers l'infini,  $\omega_{\max}$  tend vers l'infini et  $\Delta\omega$  tend vers 0.

La mise en oeuvre est plus simple que celle du premier procédé si l'on connaît l'expression de la densité spectrale  $f$  car on est alors dispensé du calcul de  $F$  et de son inverse.

#### II.4 - REMARQUES GENERALES SUR LES METHODES SPECTRALES DE GENERATION

Les méthodes spectrales de génération dont nous venons de voir deux exemples sont pour la plupart basées sur une discrétisation de la représentation spectrale du processus et conduisent à des processus somme d'harmoniques d'amplitude, de fréquence et de phase décrites par le tableau suivant :

| Amplitude<br>$a_i$                                | Fréquence<br>$\omega_i$        | Phase<br>$\phi_i$                     |                             |
|---------------------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------|
| constante<br>$a_i = (1/2 N)^{\frac{1}{2}}$        | aléatoire<br>$\omega_i \sim F$ | aléatoire<br>$\phi_i \sim U(0, 2\pi)$ | Mejia et R-Iturbe (cf.II.2) |
| non aléatoire<br>$a_i = f(\omega_i) \Delta\omega$ | non aléatoire<br>$\omega_i$    | aléatoire<br>$\phi_i \sim U(0, 2\pi)$ | Shinozuka et Jan (cf.II.3)  |
| aléatoire<br>$a_i \sim \chi^2$                    | non aléatoire<br>$\omega_i$    | aléatoire<br>$\phi_i \sim U(0, 2\pi)$ | Autre exemple (cf.III. )    |

Par discrétisation de la représentation spectrale (1-1) d'un processus réel, on définit un processus  $Y$  par

$$Y(t) = 2 \left( \sum_{i=1}^N A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t) \right)$$

où les  $\omega_i$  sont des constantes et les  $A_i$  (resp.  $B_i$ ) sont des variables aléatoires indépendantes de variance  $v_i$ . De plus  $\text{cov}(A_i B_j) = 0 \quad \forall i, j = 1, n$

Le processus  $Y$  peut se mettre sous la forme

$$Y(t) = 2 \left( \sum_{i=1}^N a_i \cos(\omega_i t + \phi_i) \right)$$

avec  $a_i \cos \phi_i = A_i$  et  $a_i \sin \phi_i = B_i$ . Alors on vérifie que si l'on choisit dans l'expression de  $Y$  les paramètres  $a_i$ ,  $\omega_i$  et  $\phi_i$  comme indiqué par la première (resp. la deuxième) ligne du tableau, on retrouve le modèle et les caractéristiques du modèle du § II.2 (resp. § II.3). Dans le premier (resp. le deuxième) cas  $v_i = 1/4N$  (resp.  $v_i = f(\omega_i) (\omega_{i+1} - \omega_i)/2$ )  $i = 1, N$ . Le troisième cas correspond à la situation où les variables aléatoires  $A_i$  et  $B_i$  sont gaussiennes donc  $a_i^2 / v_i$  :  $i = 1, N$  suit une loi du  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté. Dans ce cas les  $v_i$  sont définis par  $\int_{\omega_{i-1}}^{\omega_i} f(\omega) \cos(\omega h) d\omega = v_i \cos(\omega_i h)$  où les  $\omega_i$  sont choisis comme au § II.3. On vérifie alors que  $Y$  ainsi défini est gaussien, ne possède qu'asymptotiquement la fonction de covariance théorique et n'est qu'asymptotiquement ergodique.

En conclusion, lorsque  $Y$  possède la structure de covariance théorique, il perd la propriété d'ergodicité et lorsqu'il n'a pas la structure de covariance théorique il est ergodique. Ainsi, à partir d'un même schéma de discrétisation, il ne semble pas possible de construire un processus - somme d'harmoniques - qui soit à la fois ergodique et qui préserve la fonction de covariance théorique. Par contre, en nous limitant à la classe des fonctions de covariance associées à une densité spectrale rationnelle, il est possible d'éviter la discrétisation de la représentation spectrale et d'obtenir, comme nous l'avons vu au § I, un générateur gaussien, ergodique et de fonction de covariance fixée à priori.

Signalons enfin que les méthodes spectrales permettent de construire des processus de génération de champs aléatoires stationnaires de fonction de covariance supposée isotrope (cf (30) par exemple).



### III - RESULTATS NUMERIQUES ET COMPARAISON DES DIFFERENTES METHODES

La mise en oeuvre des différentes méthodes de génération présentées dans ce chapitre conduit au calcul de valeurs numériques d'une variable aléatoire de loi connue ou d'un vecteur aléatoire gaussien.

Pour obtenir des réalisations d'une variable aléatoire  $\Lambda$  de fonction de répartition  $F$ , on utilisera la propriété suivante : "Si  $F$  est continue, la variable aléatoire  $U = F \circ \Lambda$  suit une loi uniforme sur  $[0,1]$ ".

Dans le cas de variable aléatoire gaussienne on utilisera plutôt la propriété : "Si  $R$  et  $\Theta$  sont deux variables aléatoires indépendantes de lois respectivement du  $\chi^2$  à 2 degrés de liberté et uniforme sur  $[0,2\pi]$  alors  $X = R \cos \Theta$  et  $B = R \sin \Theta$  sont deux variables aléatoires centrées, indépendantes et de loi normale centrée réduite". La méthode correspondante est connue sous le nom de méthode de Box et Müller (voir (4)).

Pour générer des valeurs numériques d'un  $q$  vecteur aléatoire (centré)  $Z$  de matrice de covariance  $\Sigma$ , il suffit de considérer la décomposition de Cholesky  $T.T'$  de  $\Sigma$  (voir Grantmacher (20)) où  $T$  est une matrice triangulaire inférieure, de sorte que  $Z$  admet la représentation :

$$Z = T . U$$

où  $U = (u_1 \ u_2 \dots \ u_q)'$  avec les  $u_i : i = 1, q$  des variables aléatoires indépendantes et de loi gaussienne centrée réduite.

Il apparaît donc que toutes les simulations envisagées sont obtenues à partir des générateurs de réalisations de loi uniforme. Les algorithmes de générations de "nombres au hasard" qui peuvent être considérés comme tirés de manière indépendante selon une loi uniforme sont pour la plupart basés sur des congruences linéaires. Soient  $a, b, m$  des entiers naturels vérifiant  $1 < a < m$ ,  $0 < b < m$ , l'algorithme s'écrit

$$x_{n+1} \equiv a x_n + b \pmod{m}$$

Pour un choix convenable des entiers  $a, b, m$  et de la valeur initiale  $x_0$ , la suite  $\{u_n = \frac{1}{m} x_n\}_n$  est une suite de nombres (pseudo-) aléatoires (cf. Hullet Dobell (23) par exemple). Notons que les indications que l'on trouve dans la littérature pour choisir  $a, b, m$  et  $x_0$  permettent plutôt d'éviter le mauvais choix que de trouver le bon.

Compte tenu de l'utilisation massive que nous faisons de ces suites de "nombres au hasard", il est utile d'en apprécier la qualité à l'aide de tests statistiques appropriés.

Le générateur utilisé est celui de la librairie SSP-STATS du NORISK-DATA de l'Institut de Mécanique des Fluides de Grenoble. On a considéré deux statistiques de test : la statistique du Khi-2 des fréquences (TKHI2F) et la statistique du Khi-2 des séries (TKHI2S) (cf. (22)). Les résultats obtenus sont reportés dans le tableau

| TESTS  | NC=10 NX=1000 |      | NC=200 NX=2000 |      | NC=100 NX=10000 |      |
|--------|---------------|------|----------------|------|-----------------|------|
| TKHI2F | 0.86          | 0.87 | 0.56           | 0.06 | 0.63            | 0.83 |
|        | 0.53          | 0.80 | 0.03           | 0.09 | 0.60            | 0.96 |
| TKHI2S | 0.83          | 0.31 | 0.40           | 0.91 | 1.              | 1.   |
|        | 0.86          | 0.73 | 0.61           | 0.44 | 1.              | 1.   |

. Les valeurs du tableau sont les probabilités pour que le  $\chi^2$  considéré dépasse la valeur du  $\chi^2$  observé. Nous avons effectué 5 fois chaque test sur des séquences consécutives de NX nombres au hasard réparties en NC classes. Dans chaque cas une séquence commence là où la précédente se termine.

La qualité d'un générateur de valeurs numérique d'un processus  $X$  est appréciée en comparant la fonction de covariance théorique  $C(s)$  et son estimateur pour différents décalages  $s$ .

Supposons que le processus  $X$  est observé sur une discrétisation  $t_1, t_2, \dots, t_n$  avec  $t_{i+1} - t_i = h$ , alors l'estimateur naturel de  $C(kh)$ ,  $k = 0, 1, \dots$  basée sur une trajectoire de ce processus est donnée par la covariance empirique :

$$\tilde{C}(kh) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-k} X_{t_i} X_{t_{i+k}}$$

et est asymptotiquement sans biais. Si  $X$  est réel, gaussien, une condition nécessaire et suffisante pour que  $C(s)$  converge en moyenne quadratique vers  $C(s)$  pour tout  $s$  est :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |C(j)|^2 = 0$$

Cette condition est équivalente à la continuité en tout point de la fonction  $F$ . Pour des compléments ou les démonstrations on peut se référer à Doob (11) ou à Priestley (35).

Notons que dans le cas où le processus n'est pas ergodique  $\tilde{C}(kh)$  est un estimateur de  $C(kh)$  (cf. II.2) plutôt que  $C(kh)$ . la comparaison entre  $\tilde{C}(kh)$  et  $C(kh)$  fournit une indication de "l'écart à l'ergodicité". A cause de la finitude de  $n$ , l'estimateur  $\tilde{C}(kh)$  contient toujours une part d'erreur. Pour diminuer celle-ci, on calcule les  $C(kh)$  sur plusieurs trajectoires et on prend la moyenne. L'écart-type de ces  $\tilde{C}(kh)$  fournit alors de plus une indication de la précision de l'estimateur.

#### . Résultat concernant le procédé Markovien (cf. § I)

Nous reprenons le deuxième exemple de fonction de covariance introduit au chapitre 3 § IV. La fonction de covariance considérée est

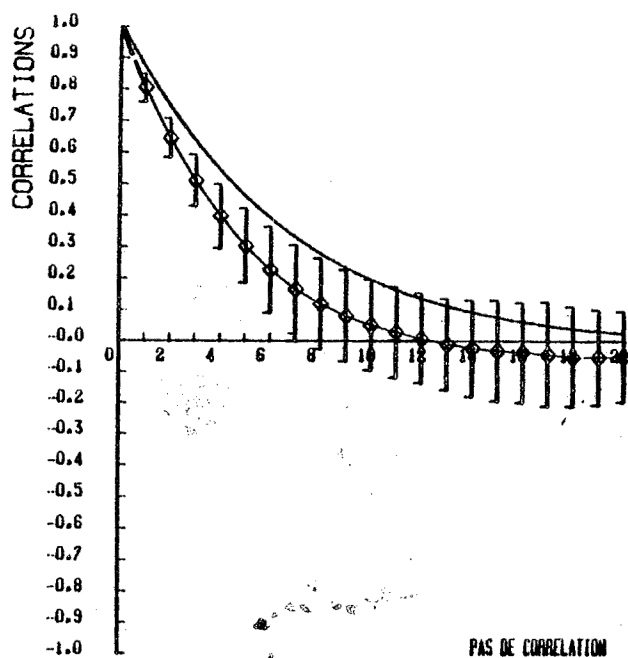
$$C(h) = e^{-\alpha |h|} \cos \beta h \quad \alpha, \beta > 0$$

et est associée à la densité spectrale rationnelle

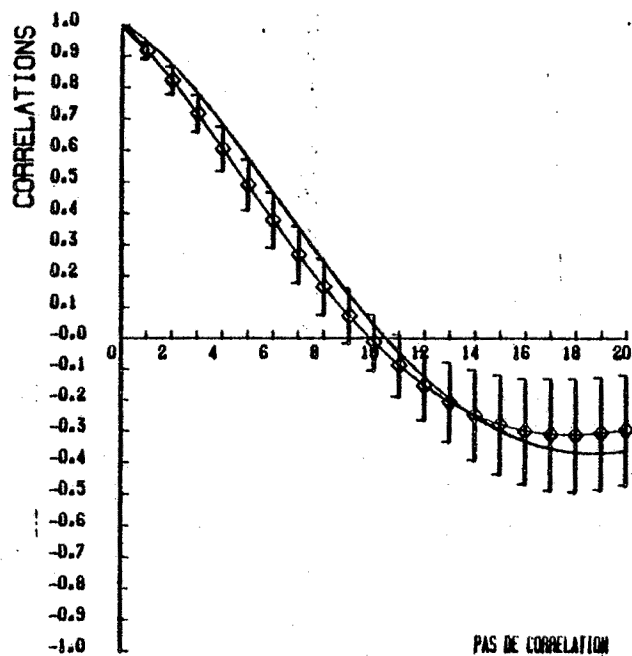
$$f(\omega) = \frac{\alpha(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{\pi(\omega^4 + 2(\alpha^2 - \beta^2)\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)}$$

Dans les figures suivantes, nous représentons, pour différentes valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  les fonctions de corrélations théoriques et empiriques. La valeur empirique est une moyenne sur NTR réalisations. On indique de plus, par un intervalle de chaque côté de cette valeur, l'écart type associé. NTR = 30, NST = 100 (nombre de points de discrétisation ou nombre de station) et T = 1.

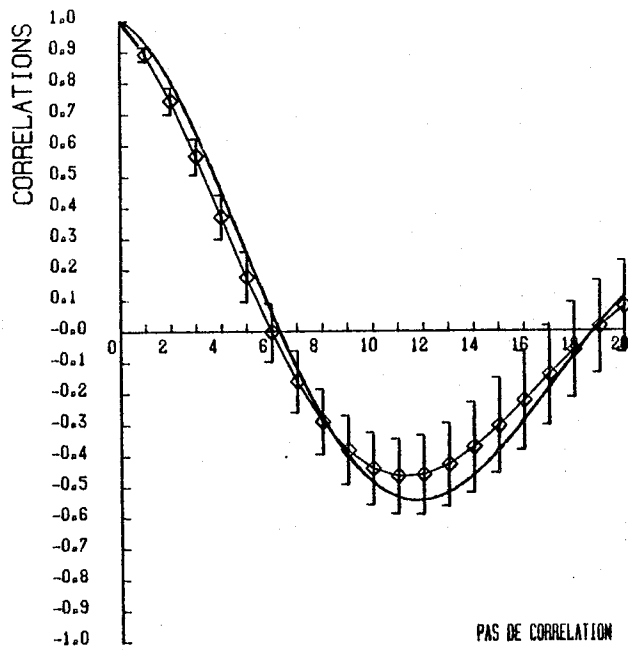
ALPHA= 30. BETA= 10.



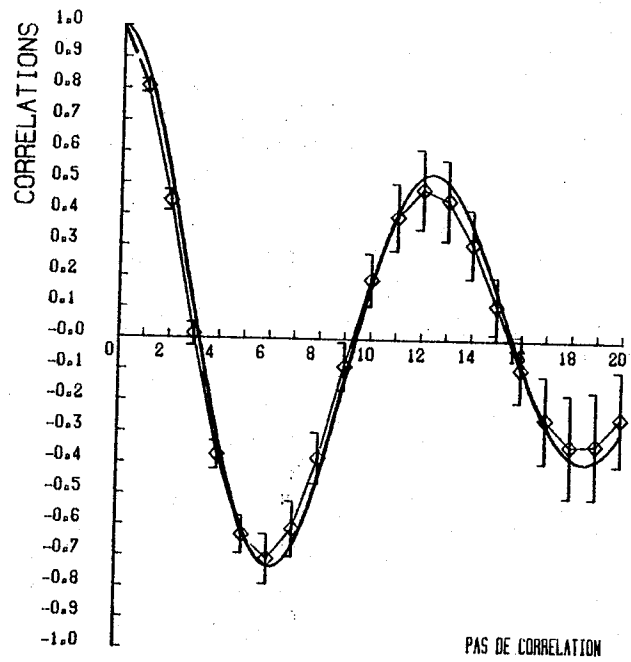
ALPHA= 10. BETA= 30.



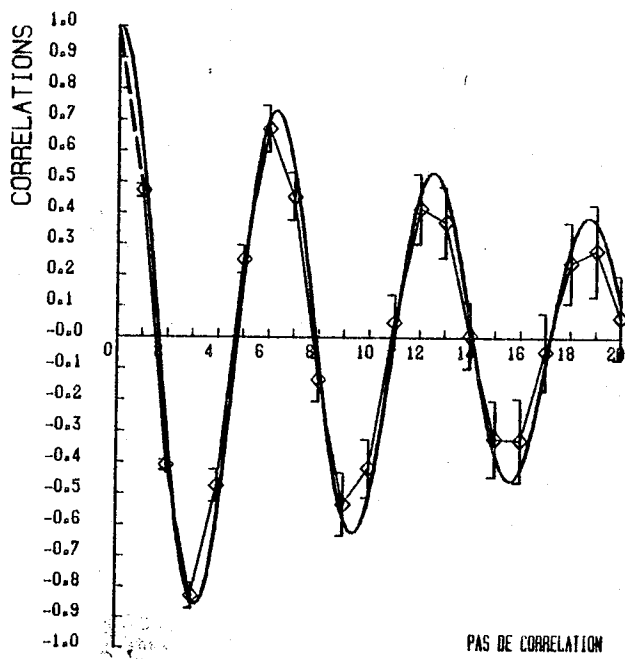
ALPHA= 10. BETA= 50.



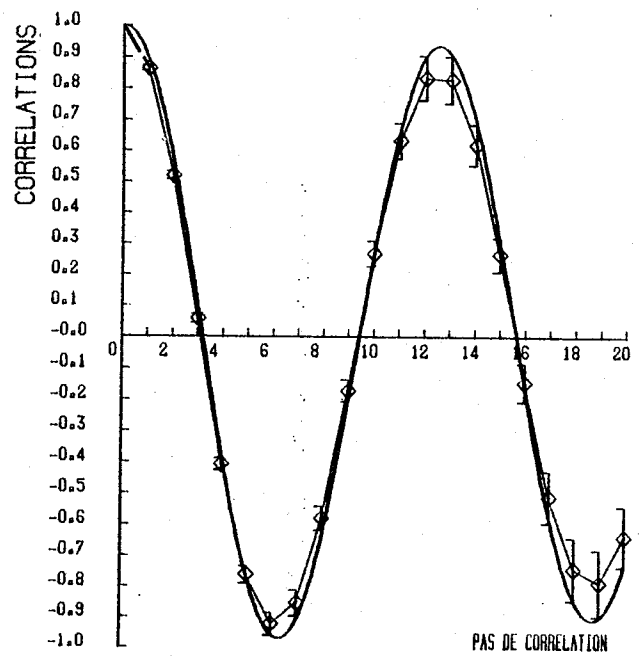
ALPHA= 10. BETA=100.



ALPHA= 10. BETA=200.



ALPHA= 1. BETA=100.



. Exemple de comparaison des différentes méthodes

Nous considérons l'exemple 1 de fonction de covariance présenté au chapitre 3 § IV, soit  $C(h) = e^{-\alpha|h|}$  ( $\alpha > 0$ ). On considère un processus de fonction de covariance  $C$ .

Sa densité spectrale et la fonction de répartition associée sont respectivement

$$f(\omega) = \frac{2 \alpha}{\pi (\omega^2 + \alpha^2)}$$

$$F(\lambda) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctg} \left( \frac{\lambda}{\alpha} - \frac{\pi}{2} \right)$$

La fonction  $F$  est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $\left[ -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$  et son inverse est donnée par :

$$F^{-1}(u) = \alpha \operatorname{tg} \left( \pi u - \frac{\pi}{2} \right)$$

Dans le tableau 1 suivant, nous comparons, pour plusieurs valeurs de  $k$ , la valeur moyenne ( $\tilde{C}(kh)$ ) et l'écart type (SD) estimés sur NTR réalisations de la fonction de corrélation empirique correspondante à chacun des processus Markovien et de Mejia et R-ITURBE en les confrontant aux valeurs de la fonction de corrélation théorique  $C(kh)$ .

$T=0.1, h=(NST-1), NST = 200, NTR = 10, N = 200$  (nombre d'harmoniques)

| k  | SD     | $\tilde{C}_{Markov} (kh)$ | $C(kh)$ | $\tilde{C}_{M-R-I}(kh)$ | SD     |
|----|--------|---------------------------|---------|-------------------------|--------|
| 1  | 0.0577 | 0.6119                    | 0.6310  | 0.6062                  | 0.0576 |
| 2  | 0.0876 | 0.3812                    | 0.3981  | 0.3496                  | 0.0801 |
| 3  | 0.0840 | 0.2279                    | 0.2512  | 0.1988                  | 0.0970 |
| 4  | 0.0912 | 0.1484                    | 0.1585  | 0.0974                  | 0.1170 |
| 5  | 0.0657 | 0.1031                    | 0.1000  | 0.0864                  | 0.1139 |
| 6  | 0.0640 | 0.0734                    | 0.0631  | 0.0679                  | 0.1167 |
| 7  | 0.0931 | 0.0565                    | 0.0398  | 0.0065                  | 0.1142 |
| 8  | 0.1141 | 0.0379                    | 0.0251  | 0.0059                  | 0.1488 |
| 9  | 0.1084 | 0.0279                    | 0.0158  | -0.0093                 | 0.1245 |
| 10 | 0.1229 | 0.0001                    | 0.0100  | -0.0123                 | 0.0956 |

CPU = 0.3 mn

CPU = 2.50 mn

$NST = 1500, NTR=20, N=1500$

|    |        |         |        |         |        |
|----|--------|---------|--------|---------|--------|
| 1  | 0.0155 | 0.6309  | 0.6310 | 0.6188  | 0.0265 |
| 2  | 0.0216 | 0.3984  | 0.3981 | 0.3920  | 0.0331 |
| 3  | 0.0213 | 0.2506  | 0.2512 | 0.2497  | 0.0387 |
| 4  | 0.0225 | 0.1577  | 0.1585 | 0.1488  | 0.0382 |
| 5  | 0.0299 | 0.0988  | 0.1000 | 0.1080  | 0.0355 |
| 6  | 0.0410 | 0.0613  | 0.0631 | 0.0703  | 0.0390 |
| 7  | 0.0413 | 0.0376  | 0.0398 | 0.0419  | 0.0399 |
| 8  | 0.0419 | 0.0226  | 0.0251 | 0.0234  | 0.0327 |
| 9  | 0.0466 | 0.0124  | 0.0158 | 0.0103  | 0.0361 |
| 10 | 0.0465 | 0.0056  | 0.0100 | 0.0110  | 0.0406 |
| 11 | 0.0410 | 0.0028  | 0.0063 | 0.0109  | 0.0456 |
| 12 | 0.0390 | 0.0008  | 0.0040 | 0.0155  | 0.0474 |
| 13 | 0.0306 | -0.0017 | 0.0025 | 0.0078  | 0.0399 |
| 14 | 0.0305 | -0.0033 | 0.0016 | 0.0025  | 0.0308 |
| 15 | 0.0295 | -0.0028 | 0.0010 | 0.0006  | 0.0333 |
| 16 | 0.0331 | -0.0025 | 0.0006 | 0.0014  | 0.0418 |
| 17 | 0.0339 | -0.0018 | 0.0004 | 0.0021  | 0.0478 |
| 18 | 0.0382 | -0.0010 | 0.0003 | -0.0019 | 0.0489 |
| 19 | 0.0365 | -0.0013 | 0.0002 | 0.0025  | 0.0449 |
| 20 | 0.0391 | -0.0002 | 0.0001 | -0.0012 | 0.0438 |

CPU = 3 mn

CPU = 287 mn

**TABLEAU 1.** Comparaison entre valeurs de la fonction de corrélation théorique  $C(Kh)$  et valeurs de la fonction de corrélation empirique moyennisées sur NTR trajectoires pour  $h = T/(NST - 1)$  et  $k = 1, 2, \dots, 20$ . On donne de plus l'écart type des NTR valeurs  $\tilde{C}(kh)$  noté SD.

#### IV - GENERATION DE CHAMPS ALEATOIRES PAR LA METHODE DES BANDES TOURNANTES (MBT)

La méthode des bandes tournantes (MBT) permet la simulation de processus aléatoires indexés dans  $\mathbb{R}^n$  à partir de simulation de processus indexé dans  $\mathbb{R}$ . Elle a été introduite par Matheron en 1972 (28), et connaît depuis une large diffusion (cf. Montoglu et Wilson (31)).

Pour simuler la valeur en tout point  $x$  de  $\mathbb{R}^n$ , on ajoute les valeurs numériques obtenues, aux projections de  $x$  sur les différentes droites, par les simulations à une dimension correspondantes. Explicitement, pour  $x$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on pose

$$Z(x) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^L Y_i (\langle x, u_i \rangle)$$

où  $L$  est le nombre de droites retenues,  $u_i$  vecteur directeur unitaire de la  $i$ ème droite et où les  $Y_i$  sont des processus unidimensionnelles, stationnaires au 2nd ordre, indépendants et de même loi. On montre (voir (28)) que si les  $u_i$  sont indépendants entre-eux et indépendants des  $Y_i$  et réparties selon la loi uniforme sur la sphère unité  $= \{u : \|u\| = 1\}$ , alors le processus  $Z$  est stationnaire au 2nd ordre et de fonction de covariance isotrope. Dans le cas où  $n = 2$  (resp.  $n = 3$ ) la fonction de covariance  $C_2$  (resp.  $C_3$ ) du processus  $Z$  et la fonction de covariance  $C_1$  du processus  $Y$  indexé dans  $\mathbb{R}$  sont liées par la relation :

$$C_2(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{C_1(u)}{(r^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}} du$$

$$(\text{resp. } C_1(u) = \frac{d}{du}(u C_3(u)) \quad )$$

Si dans le cas  $n = 3$  on peut calculer analytiquement la fonction  $C_3$  à partir de  $C_2$ , dans le cas  $n = 2$  l'opération analogue n'est possible que pour certaines fonctions  $C_2$  particulières. Cependant, dans (31), les auteurs ont montré que la densité spectrale (radiale)  $f_2$  du champ aléatoire et celle du processus indexé dans  $\mathbb{R}$  correspondant sont liées par la relation :



$$f_1(\omega) = \frac{\sigma^2}{2} f_2(\omega)$$

où  $\sigma^2$  est la variance totale du champ. Dans (31) les auteurs donnent également pour quelques fonctions de covariance dans le plan, les densités spectrales correspondantes, ce qui rend possible l'utilisation de la MBT pour ces fonctions.

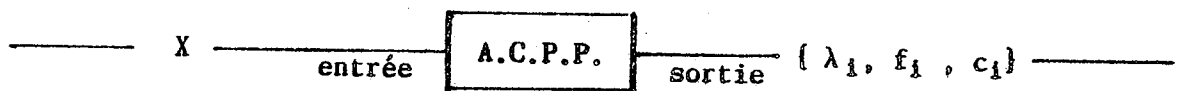
La qualité de simulation réalisée par la MBT est en rapport direct avec la qualité du générateur sur la droite, ainsi dans le cas où la densité spectrale du champ est rationnelle l'utilisation du procédé Markovien est avantageuse puisqu'elle s'avère meilleure en précision et en temps de calcul sur ordinateur comme le montre les résultats du § précédent (cf. tableau 1).

CHAPITRE 5 :

ETUDE EXPERIMENTALE PAR SIMULATION DE LA METHODE D'ANALYSE  
EN COMPOSANTES PRINCIPALES DE PROCESSUS (ACPP)



On peut concevoir l'Analyse en Composantes Principales (A.C.P.) d'un processus  $X = \{X(t), t \in T\}$  comme une opération que nous décrivons par le schéma suivant :



où les  $\lambda_i, f_i, c_i$  sont les éléments principaux de la décomposition du "signal"  $X$ , (cf. chapitre 2). La mise en oeuvre pratique d'une telle opération ne peut être effectuée que moyennant une approximation qui fait intervenir un certain nombre de paramètres à choisir par l'utilisateur ou imposés par les conditions d'observations (cf. liste § II). Ces paramètres peuvent être schématisés par un ensemble de touches de sélection sur la "boite" : chaque ensemble de valeurs des paramètres (i.e. chaque position de l'ensemble des touches) conditionne le traitement du processus.

Une étude théorique approfondie des "réactions" de la méthode d'ACPP aux différents choix de valeurs des paramètres "d'entrée" - i.e. de l'effet de la position des touches sur le traitement de  $X$  - n'a pas encore, à notre connaissance, été entreprise.

L'analyse mathématique étant ici impuissante et aussi faute d'exemples réels suffisamment nombreux et variés, nous proposons, dans ce chapitre, une étude empirique par simulation de la technique d'ACPP.

D'abord, nous résumons les étapes de la mise en oeuvre de la technique d'ACPP en mettant l'accent sur quelques aspects numériques. Ensuite nous présentons la liste des paramètres d'entrée et le plan d'expérimentation adopté pour évaluer l'effet de chacun d'eux. Enfin, dans la dernière partie nous donnons quelques résultats de simulation obtenus à partir d'un exemple choisi et permettant d'apprécier la qualité de la méthode d'ACPP pour chaque jeu des paramètres d'entrée.

## I - QUELQUES ASPECTS NUMERIQUES DE LA MISE EN OEUVRE DE L'ACPP

On peut envisager par exemple d'utiliser la technique d'ACPP soit dans le but de résumer et de décrire un phénomène, soit dans le but d'interpoler des valeurs manquantes. l'aspect technique d'interpolation de l'ACPP a déjà été présenté au chapitre 1.

Nous allons dans cette partie décrire quelques aspects numériques de la mise en oeuvre de l'ACP d'un processus  $X = \{X(t), t \in T\}$  connu par échantillonnage statistique et par discrétisation sur  $T$  ( $T \subset \mathbb{R}$ ). Autrement dit nous nous intéressons à la situation pratique où le processus  $X$  est observé en  $n$  points de discrétisation  $t_1, t_2, \dots, t_n$  de  $T$  et pour  $p$  trajectoires, c'est à dire encore que l'ensemble des observations (i.e. les données) constitue un tableau  $p \times n$ . Nous noterons  $X_i(t_j)$  l'élément de la  $i$ ème ligne et de la  $j$ ème colonne.

Lorsqu'on traite un tel tableau par une ACP usuelle on ne suppose, en général, aucune liaison entre les variables (i.e. les colonnes du tableau) et on accorde alors à chacune le même poids dans l'analyse. La mise en oeuvre d'une telle approche revient à diagonaliser la matrice des moments croisés (dans le cas d'une analyse non centrée, sinon il s'agit de la matrice de covariance) et demeure inchangée pour les  $n!$  permutations possibles des variables.

Par contre, l'ACPP considère la structure complète du phénomène. Elle traite le tableau des données comme un  $p$ -échantillon de fonctions discrétisées et appartenant à un espace de Hilbert  $H$ . Nous avons vu au chapitre 1 et aussi au chapitre 2 qu'en pratique l'ACPP se ramène à l'ACP usuelle, c'est à dire relative à  $n$  variables aléatoires, avec une métrique  $E$  qui est celle des produits scalaires, dans  $H$ , des fonctions d'interpolation de base. Dans toute cette étude nous supposons que l'espace de référence  $H$  est  $L^2(T, \beta_T, dt)$  muni de son produit scalaire usuel. D'autres choix de  $H$  et de son produit scalaire peuvent être envisagés (cf. remarque p. 30, chapitre 2).

Nous savons (cf. chapitre 2) que l'ACP de  $X$  relativement à  $H$  ne peut se faire que moyennant une double approximation. il est possible de définir une approximation par discrétisation sur  $T$  qui ne tienne compte que des valeurs de  $X$  prises aux points de discrétisation. L'ACP approchée, ainsi définie, appelée ACP approchée de  $X$  relativement à  $H_n$ , un certain sous espace de  $H$  de dimension  $n$ , est celle d'un processus  $X_n$  interpolant  $X$  aux points  $t_1, t_2, \dots, t_n$ .

De façon précise si  $e_1, e_2, \dots, e_n$  sont  $n$  fonctions linéairement indépendantes et telles que  $e_i(t_j) = \delta_{ij}$  et  $H_n$  est le sous espace engendré par ces  $n$  fonctions d'interpolation, le processus  $X_n$  s'écrit

$$X_n(t) = \sum_{j=1}^n X(t_j) e_j(t)$$

Au chapitre 2, nous avons montré que l'ACP d'un processus est fournie par l'Analyse Spectrale (A.S.) de son opérateur de covariance. Ainsi l'ACP du processus  $X$  est ramenée à l'A.S. de l'opérateur de covariance  $V_n$  défini au chapitre 2 et associé à la matrice non symétrique  $CE$  où  $C$  est la matrice des moments croisés des variables  $X(t_i) : i = 1, n$  et  $E$  est la matrice des produits scalaires, dans  $L^2(T, \beta_T, dt)$ , des fonctions  $e_i : i=1, n$ . L'A.S. de  $V_n$  est donc la recherche des valeurs  $\lambda$  et des vecteurs  $f$  qui sont solutions de l'équation matricielle :

$$C.E f = \lambda f$$

Par ailleurs, l'interpolation par ACPP de la valeur du processus en un point test  $t_0$  de  $T$  est basée (cf. chapitre 1) sur une troncature de la formule de reconstitution de  $X_n$  :

$$X_n(t_0) = \sum_{i=1}^q \tilde{\lambda}_i \cdot \tilde{c}_i \cdot \tilde{f}_i(t_0) \quad (q < n)$$

où les  $(\tilde{\lambda}_i)$  et  $(\tilde{f}_i)$  sont les éléments propres de la matrice C.E et les  $(\tilde{c}_i)$  sont les composantes principales de l'analyse et constituent une famille orthogonale de variables aléatoires données par la formule (4) du chapitre 1.

Le problème numérique posé par la mise en oeuvre de l'ACPP est donc celui de la recherche des éléments propres de la matrice C.E. Ce problème peut être ramené à un problème symétrique de la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi' C \phi \cdot h = \lambda h \\ h = \phi' \cdot f \end{array} \right.$$

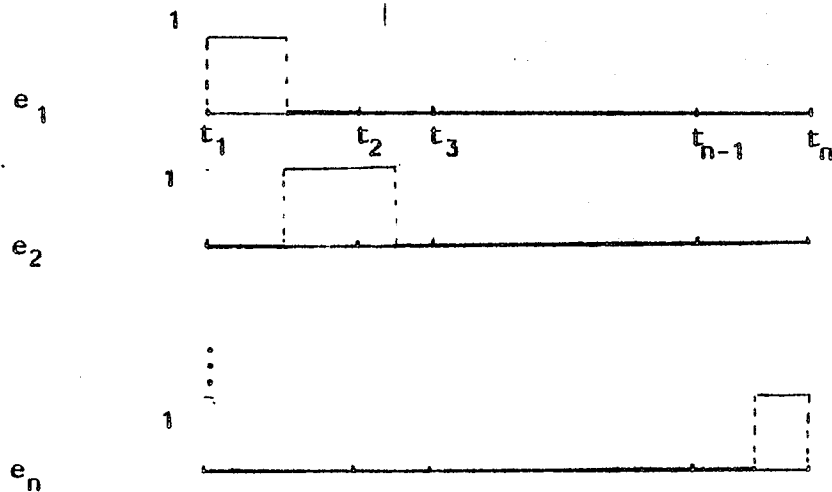
En effet, comme E est une matrice symétrique définie positive, il existe une unique matrice définie positive et triangulaire inférieure  $\phi$  telle que  $E = \phi \cdot \phi'$  (décomposition de Cholesky).

Cette approche revient en fait à considérer une base orthonormale  $e'_1, e'_2, \dots, e'_n$  de  $H_n$  telle que  $[e] = \phi [e']$  où  $[e] = (e_1 e_2 \dots e_n)'$ , c'est à dire à orthogonaliser la base  $\{e_i\}$  par le procédé de Gram-Schmidt, par exemple.

La détermination de f à partir du vecteur h est immédiate car  $\phi'$  est une matrice triangulaire.

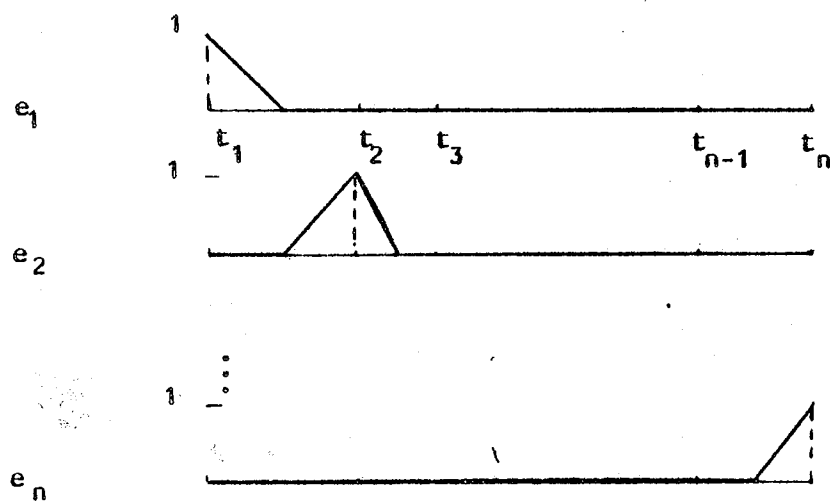
Dans le cas des fonctions d'interpolation spline (i.e. approximation spline - cf chapitre 2) les produits scalaires  $\langle e_i, e_j \rangle$  sont connus (voir, par exemple, Schumaker (43)) et la matrice E des produits scalaires des fonctions de base (MPSFB) est une matrice "bande" de largeur  $2k-1$  où k est l'ordre des fonctions spline considérées.

Ainsi dans le cas des fonctions spline d'ordre 1 (i.e. des fonctions étagées) représentées graphiquement par :



la MPSFB  $E$  est diagonale et  $E_{ii} = (t_i - t_{i-1})/2 : i=1,n$ .

Dans le cas de fonctions spline d'ordre 2 (i.e. de fonctions affines par morceaux) représentées graphiquement par :



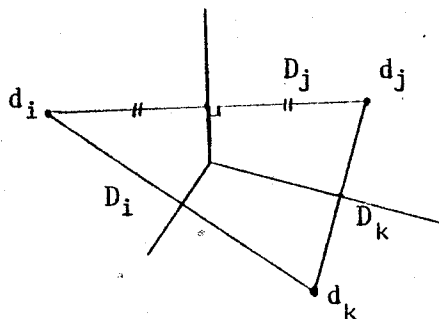


la MPSFB  $E$  est tridiagonale définie par

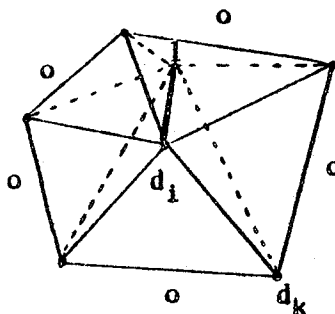
$$E = \begin{bmatrix} (t_2-t_1)/3 & (t_2-t_1)/6 & 0 & & 0 \\ & (t_3-t_1)3 & (t_{j+1}-t_j)/6 & & \\ & & (t_{j+1}-t_{j-1})/3 & & 0 \\ & & & (t_n-t_{n-1})/6 & \\ & & & & (t_n-t_{n-1})3 \end{bmatrix}$$

Dans le cas des fonctions spline d'ordre  $k$  supérieur à 2 (i.e. des recollements de polynômes), l'utilisation des fonctions spline élémentaires d'interpolation comporte un risque d'instabilité numérique, car ces fonctions ne sont pas à support compact et induisent, par conséquent, des erreurs relatives importantes sur les termes de la matrice  $E$ . Il est alors nécessaire de considérer les fonctions spline de base ou B-spline (cf. De Boor ou Schumaker) qui sont définies de façon récurrente et stable. Les produits scalaires  $\langle e_i, e_j \rangle$  correspondent à des intégrales de polynômes et sont calculés à partir de la formule de quadrature de Gauss qui est donc exacte.

Supposons maintenant que  $X$  est un processus indépendant par une partie bornée de  $D$  de  $\mathbb{R}^2$ . La mise en oeuvre de l'ACP de  $X$  est analogue au cas unidimensionnel. Soient  $d_1, d_2, \dots, d_n$   $n$  points de  $D$ . On considère un découpage de  $D$  en polygones  $D_i$  tel que "la plus proche station de tout point  $d$  de  $D_i$  est la station  $d_i$ " (découpage de Thiessen). On suppose une forme à priori du bord de  $D$ .



Les fonctions d'interpolation constantes par morceaux valent 1 sur  $D_i$  et 0 partout ailleurs. L'interpolation spline d'ordre supérieur est considérée sur un découpage de  $D$  du type suivant :



La fonction d'interpolation  $e_i$  associée à  $d_i$  vaut 1 en  $d_i$ , décroît linéairement (ou comme un polynôme de degré 2,3,...) sur les triangles issus de  $d_i$  pour atteindre 0 sur le côté du triangle opposé à  $d_i$ .

Pour des exemples d'application de ces techniques dans  $\mathbb{R}^2$  se référer, par exemple à Sauvaget (40) pour les interpolations spline d'ordres 1 et 2 et aussi à Duchon (12) pour les interpolations spline cubiques.

## II - PLAN DE L'ETUDE EXPERIMENTALE

Dans cette partie nous énumérons la liste des paramètres d'entrée considérés et nous présentons le plan d'expérimentation adopté afin de visualiser, dans un sens précisé par la suite, le comportement de la méthode d'ACPP pour différents jeux des valeurs de ces paramètres.

Lorsqu'on met en oeuvre l'ACPP sur un jeu de données réelles, les paramètres suivants sont imposés :

. T la longueur de l'intervalle d'observation

. NST le nombre de points de discrétisation (ou nombre de stations)

. ICECH le mode de discrétisation de T

. NTR le nombre de trajectoires observées

Dans un modèle de simulation la valeur de ces paramètres peut être choisie par l'expérimentateur. D'autre part, les paramètres suivants sont à choisir lors de toute application :

. ICFB le mode d'interpolation (i.e. les fonctions d'interpolation de base).

. NFP le nombre de fonctions propres retenues pour représenter ou reconstituer le signal.

Les modes de discrétisation (ICECH) et les modes d'interpolation (ICFB) que nous avons retenus pour les expériences de simulation sont les suivants :

|         |   |   |                                                                        |
|---------|---|---|------------------------------------------------------------------------|
| ICECH = | { | 1 | discrétisation à pas constant                                          |
|         |   | 2 | " favorisant les bords (i.e. plus de points au bord de T qu'au milieu) |
|         |   | 3 | " aléatoire suivant une loi uniforme                                   |

$$\text{ICFB} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ fonctions constantes par morceaux} \\ 2 \text{ fonctions affines par morceaux} \end{array} \right.$$

Avant de décrire le plan d'expérimentation adopté rappelons que le domaine d'investigation de cette étude expérimentale par simulation est limité à la classe des processus  $X = \{ X(t) , t \in T \}$  à densités spectrales rationnelles. Pour les processus de cette classe, nous disposons; d'une part, d'une méthode exacte de calcul des éléments propres associés à leur opérateur de covariance (cf. chapitre 3) et, d'autre part, d'un procédé de génération de valeurs numériques de processus ayant exactement la fonction de covariance donnée (cf. chapitre 4).

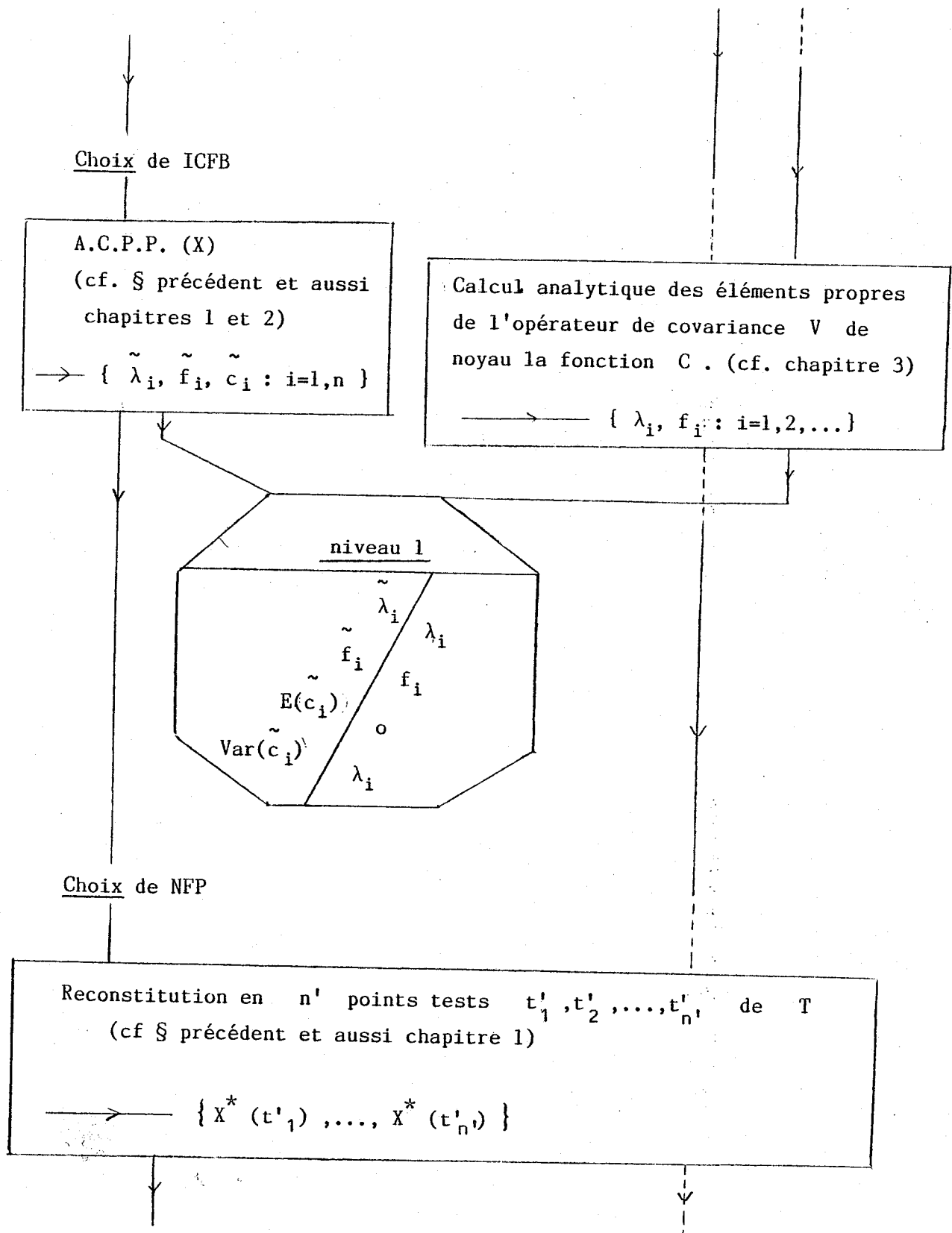
Partant d'une fonction  $C$  de type positif et de transformée de Fourier une fraction rationnelle  $f$ , notre étude s'intéresse au comportement de l'ACP du processus  $X$  de fonction de covariance  $C$  et de densité spectrale  $f$ .

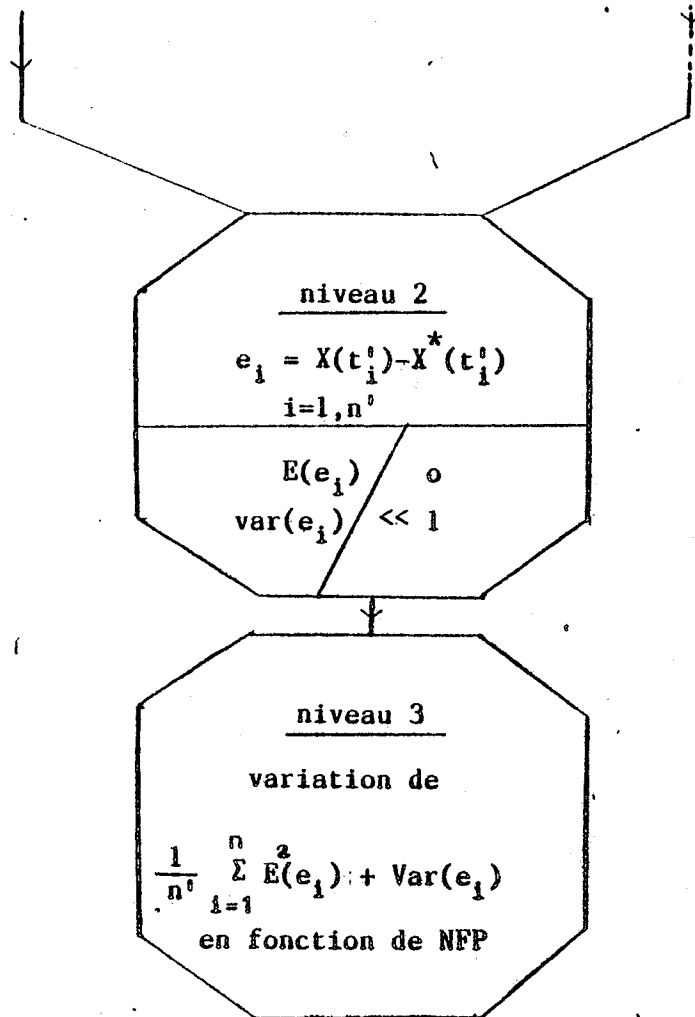
Pour cela nous proposons le plan d'étude donné par l'organigramme suivant où on a noté dans un cadre rectangulaire les instructions exécutables, dans un octogone les instructions correspondant à des comparaisons et sans encadrement les paramètres d'entrée qui sont à choisir par l'expérimentateur.

Choix de  $T$ , ICECH, NST, NTR

On simule un NTR échantillon de trajectoires, repérées sur les NST points de discrétisation de  $T$ , d'un processus gaussien (centré) et de densité spectrale  $f$ . (cf. chapitre 4)

→  $\{ (X_1(t_1), X_1(t_2), \dots, X_1(t_n)), i=1, \text{NTR} \}$





### III. RESULTATS DE SIMULATION

Les résultats de simulation que nous présentons sont organisés en 3 niveaux : un niveau 1, local, où on compare les éléments propres théoriques et approchés, un niveau 2, global, où on étudie les écarts entre les vraies valeurs fournies par le procédé de génération et les valeurs reconstituées par ACP et un niveau 3, de synthèse, où on représente la moyenne sur l'ensemble des points (ou stations) tests des erreurs quadratiques moyennes des écarts de reconstitutions en fonction du nombre de fonctions propres retenues.

Le regroupement des résultats par niveau apporte des éléments de réponse spécifiques des performances, et le parcours des 3 niveaux permet

une appréciation relativement fiable de la qualité d'approximation de la technique d'ACPP pour chaque jeu des valeurs des paramètres d'entrée.

La fonction de covariance  $C$  choisie pour illustrer le modèle de simulation est la fonction

$$C(h) = e^{-\alpha|h|} \quad \alpha > 0$$

associée à la densité spectrale  $f(\omega) = \frac{\alpha}{\pi (\omega^2 + \alpha^2)}$ .

Nous avons adopté le mode graphique pour présenter nos résultats, offrant ainsi une lecture rapide et globale. Cependant, afin de permettre une analyse plus approfondie, nous donnons, pour les niveaux 2 et 3 les tableaux des valeurs exactes (cf. tableaux 2 et 3).

Les différentes situations (i.e. chaque jeu des valeurs des paramètres d'entrée) présentées dans cette étude ont été sélectionnées sans souci d'exhaustivité, mais pour donner un aperçu des possibilités d'exploitation qui sont offertes; Nous les décrivons dans le tableau 0 ci-dessous signalons que  $T$  est fixé égal à 1. Mais comme nous faisons varier  $\alpha$  (ALPHA), cela revient à considérer plusieurs valeurs de  $T$ .

TABLEAU 0 (cf page suivante)

| paramètre<br>Situation | NTR | NST | ICECH | ICFB | ALPHA |          |
|------------------------|-----|-----|-------|------|-------|----------|
| 1                      | 50  | 30  | 1     | 1    | 8.    | Groupe 1 |
| 2                      | -   | -   | -     | 2    | -     |          |
| 3                      | -   | -   | 2     | 1    | -     |          |
| 4                      | -   | -   | -     | 2    | -     |          |
| 5                      | -   | -   | 3     | 1    | -     |          |
| 6                      | -   | -   | -     | 2    | -     |          |
| 7                      | 30  | 50  | 1     | 2    | -     | Groupe 2 |
| 8                      | 50  | -   | -     | -    | -     |          |
| 9                      | 200 | -   | -     | -    | -     |          |
| 10                     | 30  | 60  | -     | -    | -     |          |
| 11                     | 50  | -   | -     | -    | -     |          |
| 12                     | 200 | -   | -     | -    | -     |          |
| 13                     | + ∞ | 20  | 1     | 1    | -     | Groupe 3 |
| 14                     | -   | -   | -     | 2    | -     |          |
| 15                     | -   | -   | 2     | 1    | -     |          |
| 16                     | -   | -   | -     | 2    | -     |          |
| 17                     | -   | -   | 3     | 1    | -     |          |
| 18                     | -   | -   | -     | 2    | -     |          |
| 19                     | 50  | 30  | 1     | 2    | 1.    | Groupe 4 |
| 20                     | -   | -   | -     | -    | 30.   |          |

**TABEAU 0** : Pour chaque situation, de 1 à 20, nous avons noté les valeurs des paramètres d'entrée. "NTR = +∞" signifie que lors de la mise en oeuvre de l'ACPP on a remplacé la matrice des moments croisés estimés par la matrice théorique correspondante.



Dans un premier temps nous présentons les résultats du niveau 1, concernant les comparaisons des éléments propres théoriques  $\lambda_i$  et  $f_i$  et de leur approximation  $\tilde{\lambda}_i$  et  $\tilde{f}_i$  pour  $i = 1, 2, 3, 4, 9$  et  $10$ . (planches p. 129, 139)

L'appréciation de la qualité à ce niveau peut s'aider du tableau 1 des moyennes et variances des composantes principales.

Toutes les situations énumérées dans le tableau 0 ne sont pas représentées.

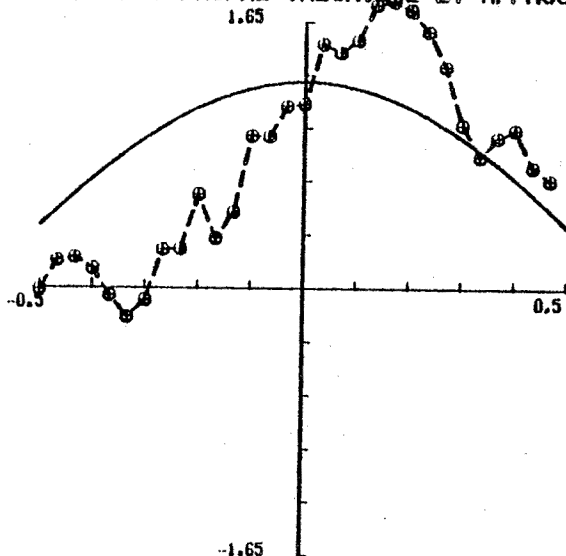
Les 4 premières figures correspondant aux situations 1, 2, 4 et 6 du groupe 1 décrivent l'interaction entre le mode de discrétisation (ICECH) et d'interpolation (ICFB). On note que la discrétisation aléatoire (ICECH=3) donne nettement les meilleurs approximations des valeurs propres, à l'exception de la situation 18 qui correspond à un petit nombre de points de discrétisation trop regroupés. Notons également, qu'en général, les valeurs propres sont sous estimées.

Dans les situations 11 et 12, on apprécie l'effet de la taille de l'échantillon : la qualité d'approximation est supérieure pour des échantillons de grande taille.

Les situations 13, 14, 16 et 18 décrivent de nouveau l'effet combiné du mode de discrétisation et d'interpolation lorsque la matrice  $C$  des moments croisés est exacte ( $NTR = +\infty$ ). Les valeurs propres sont mieux estimées. Dans ces situations les interpolations basées sur une discrétisation à pas constant (ICECH) sont avantagées.

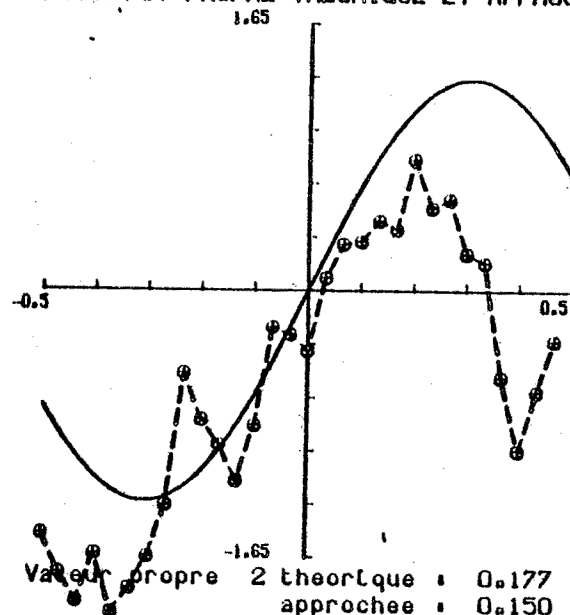
Dans la situation 20, on évalue l'effet de ALPHA, la portée de corrélation (i.e. de  $T$ , la longueur de l'intervalle d'observation). On note, comme on pouvait s'y attendre, que l'approximation est de meilleure qualité pour un temps d'observation plus long (i.e. ALPHA plus petit).

1 ERE FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



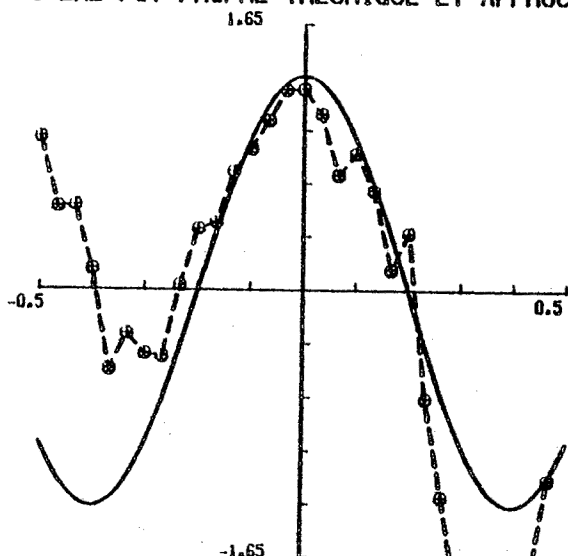
Valeur propre 1 theorique : 0.227  
approche : 0.319

2 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



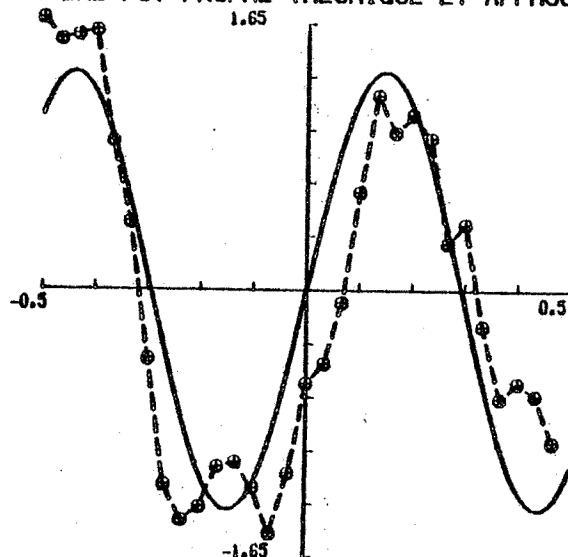
Valeur propre 2 theorique : 0.177  
approche : 0.150

3 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



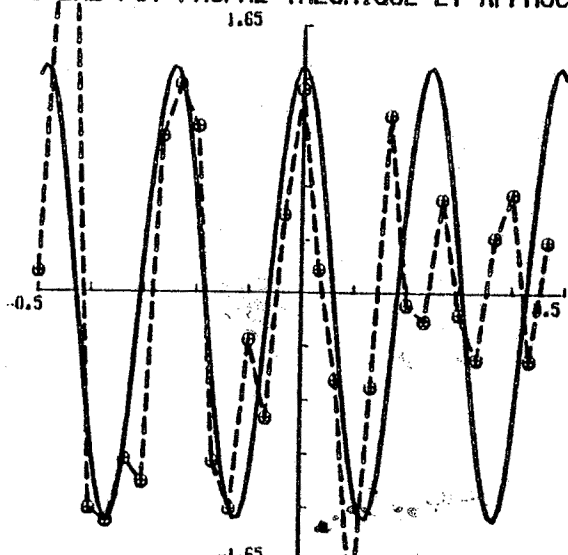
Valeur propre 3 theorique : 0.127  
approche : 0.012

4 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



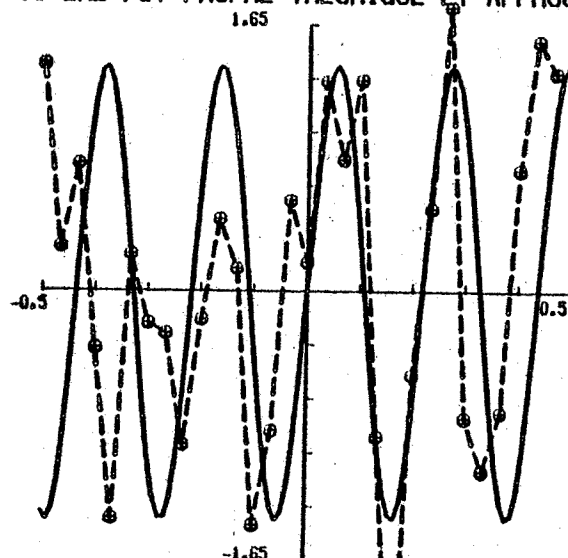
Valeur propre 4 theorique : 0.090  
approche : 0.091

9 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



Valeur propre 9 theorique : 0.022  
approche : 0.019

10 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE

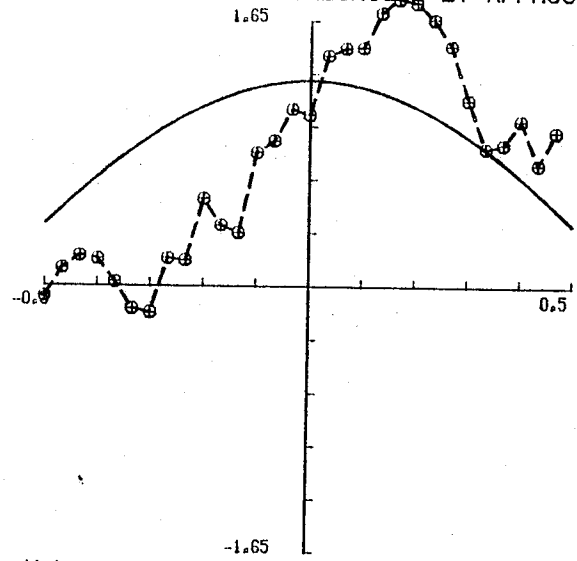


Valeur propre 10 theorique : 0.018  
approche : 0.015

ELEMENTS PROPRES THEORIQUES ET APPROCHES ASSOCIEES AU NOYAU  $C(H) = \exp(-\alpha H)$   
NTR= 50 NST=30 ICECH=1 ICFB=1 ALPHA= 8.0

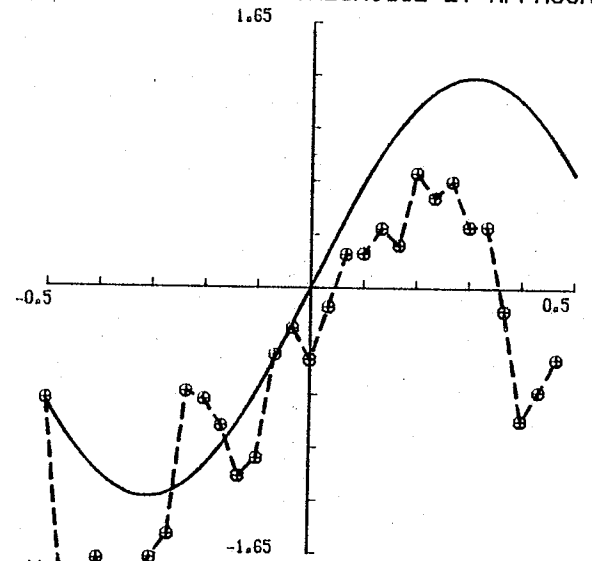
(A)

1 ERE FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



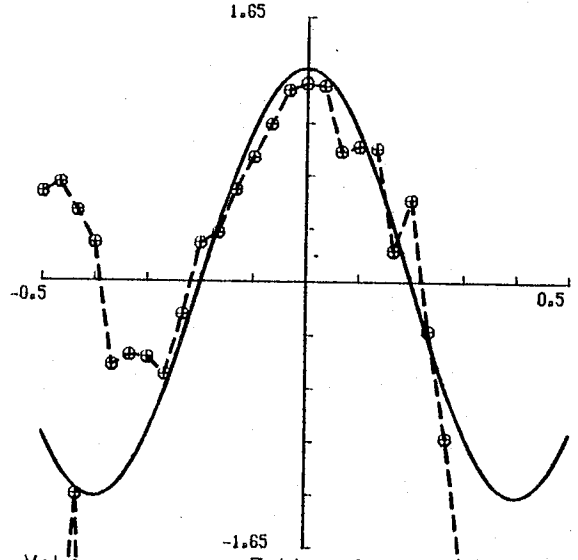
Valeur propre 1 theorique : 0.227  
                                  approchee : 0.316

2 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



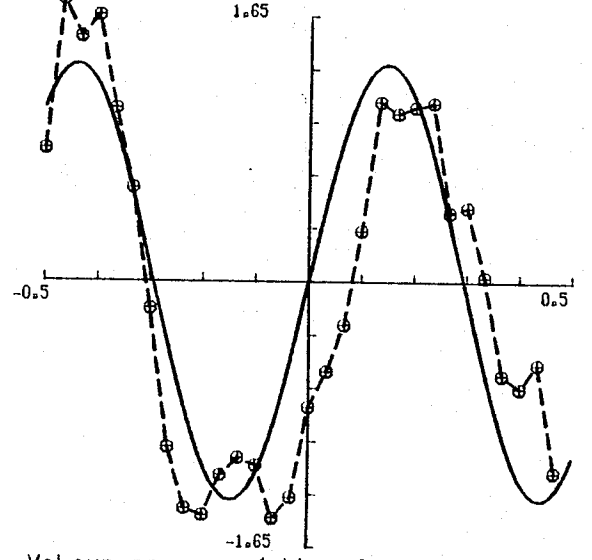
Valeur propre 2 theorique : 0.177  
                                  approchee : 0.149

3 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



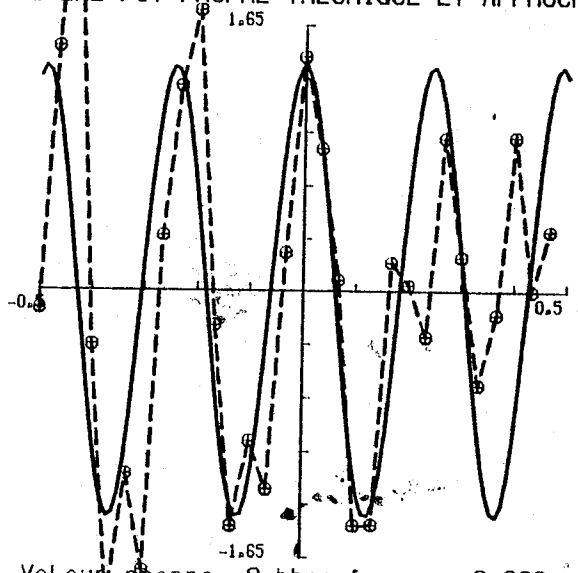
Valeur propre 3 theorique : 0.127  
                                  approchee : 0.109

4 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



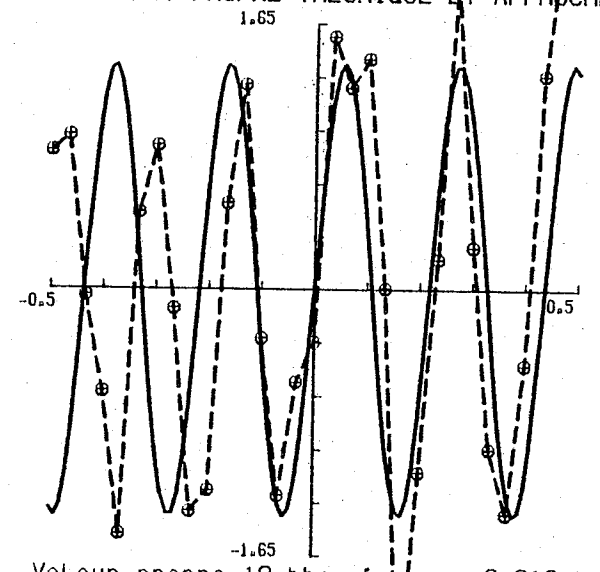
Valeur propre 4 theorique : 0.090  
                                  approchee : 0.090

9 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



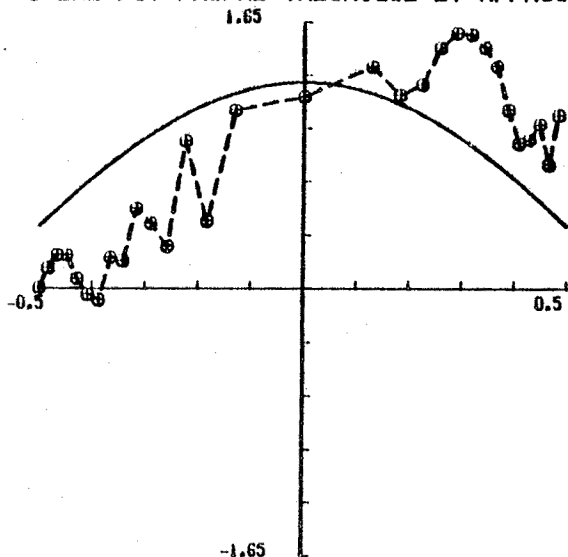
Valeur propre 9 theorique : 0.022  
                                  approchee : 0.015

10 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE

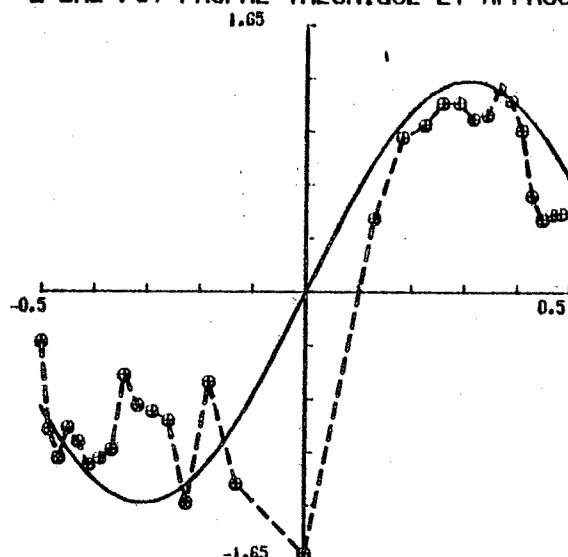


Valeur propre 10 theorique : 0.018  
                                  approchee : 0.012

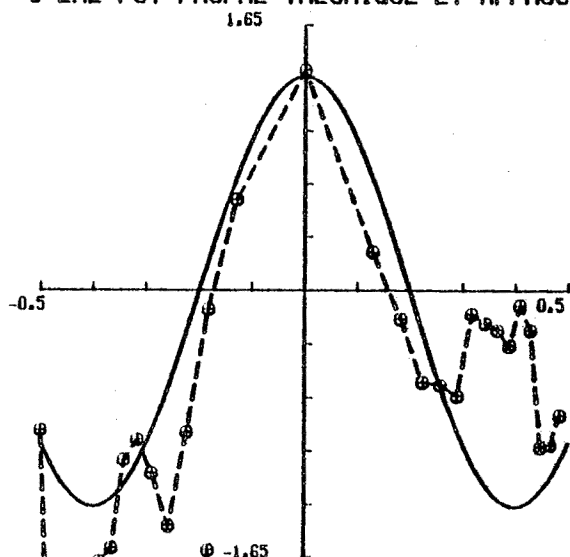
ELEMENTS PROPRES THEORIQUES ET APPROCHEES ASSOCIEES AU NOYAU  $C(H)=EXP(-ALPHA \times H)$   
NTR= 50    NST=30    ICECH=1'    ICFB=2    ALPHA= 8.



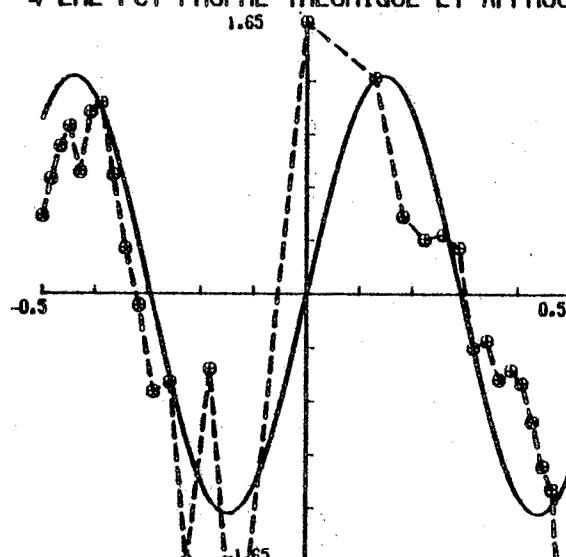
Valeur propre 1 theortque : 0.227  
approche : 0.324



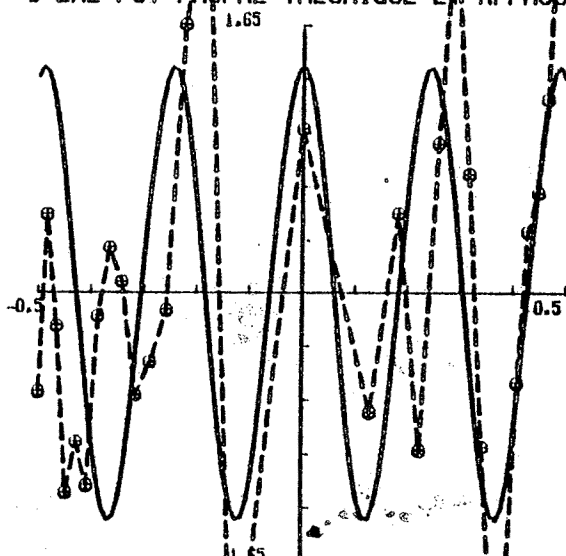
Valeur propre 2 theortque : 0.177  
approche : 0.177



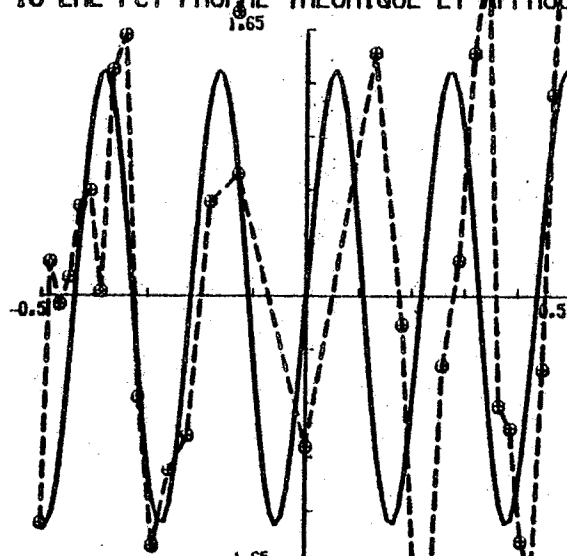
Valeur propre 3 theortque : 0.127  
approche : 0.114



Valeur propre 4 theortque : 0.090  
approche : 0.084

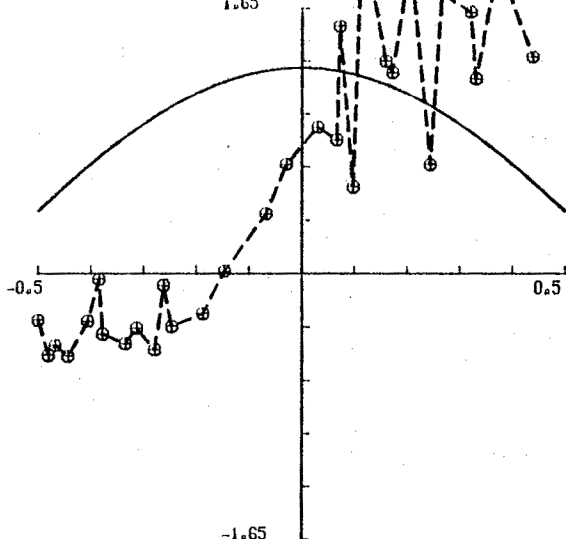


Valeur propre 9 theortque : 0.022  
approche : 0.014



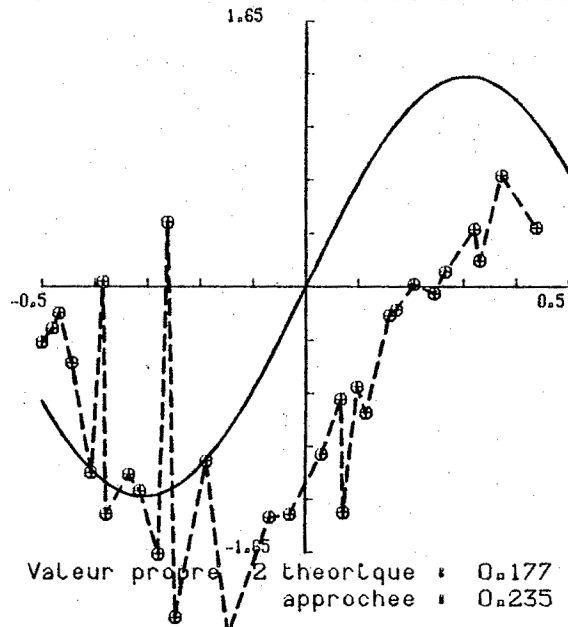
Valeur propre 10 theortque : 0.018  
approche : 0.010

1 ERE FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE - 132 -



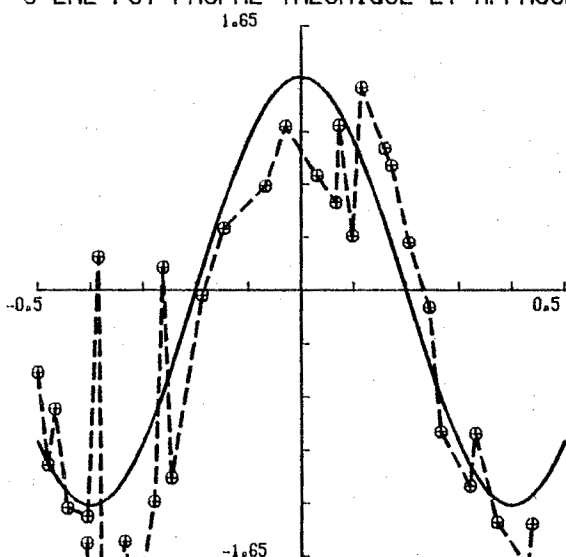
Valeur propre 1 theorique : 0.227  
approche : 0.262

2 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



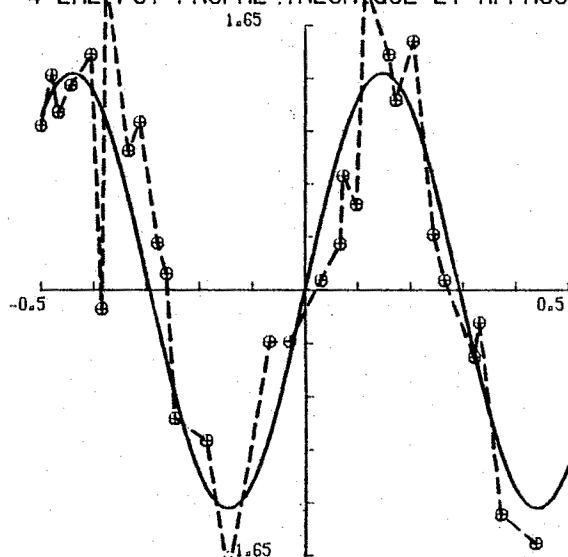
Valeur propre 2 theorique : 0.177  
approche : 0.235

3 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



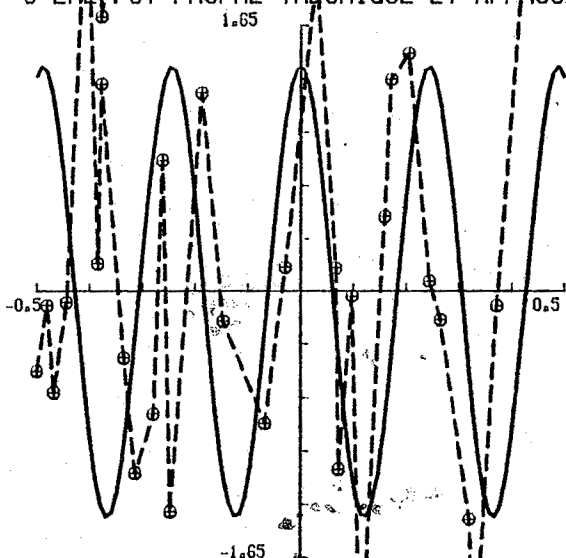
Valeur propre 3 theorique : 0.127  
approche : 0.160

4 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



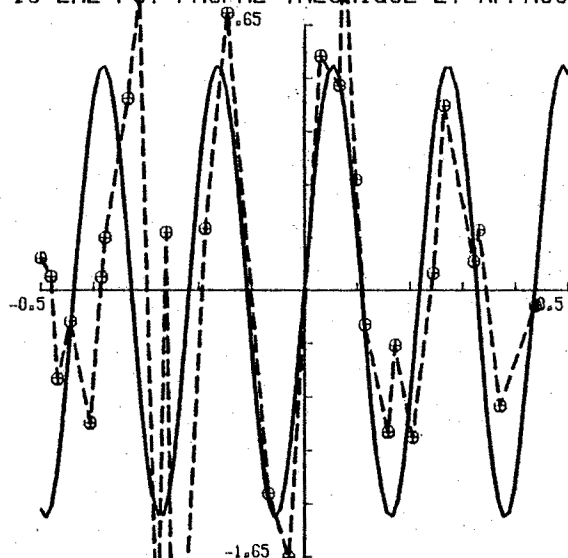
Valeur propre 4 theorique : 0.090  
approche : 0.084

9 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



Valeur propre 9 theorique : 0.022  
approche : 0.016

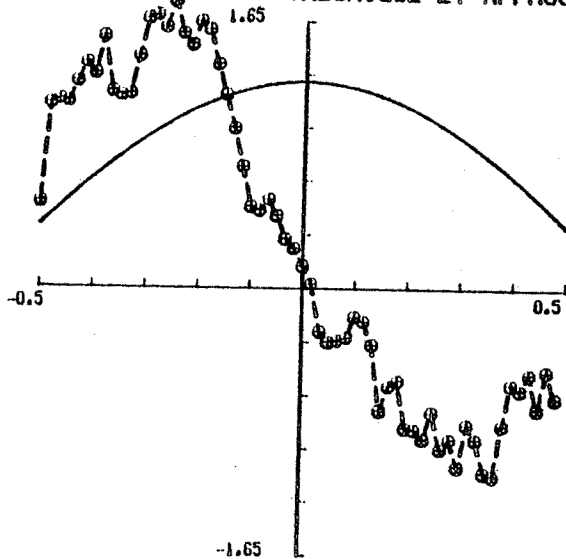
10 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



Valeur propre 10 theorique : 0.018  
approche : 0.013

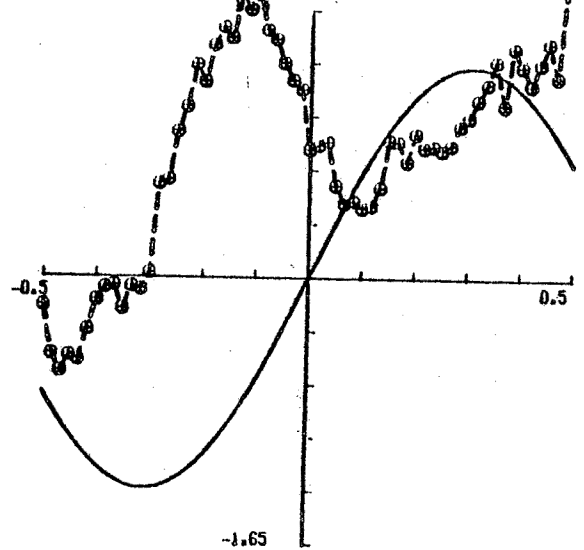
ELEMENTS PROPRES THEORIQUES ET APPROCHEES ASSOCIEES AU NOYAU  $C(H) = \exp(-\alpha H)$   
NTR= 50 NST=30 ICECH=3 ICFB=2 ALPHA= 8.0

1 ERE FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



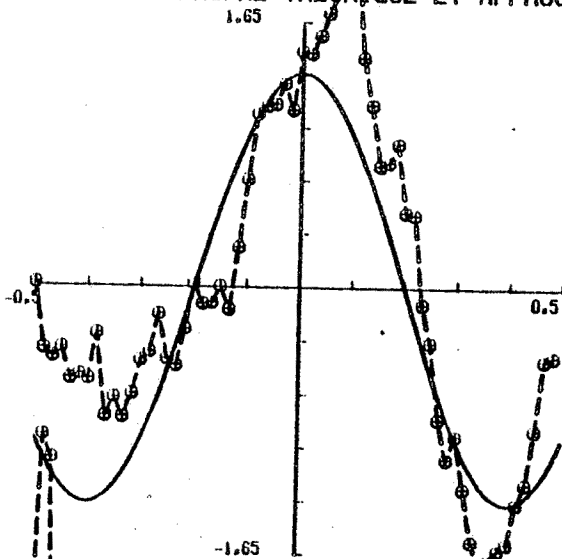
Valeur propre 1 theorique : 0.227  
approchee : 0.233

2 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



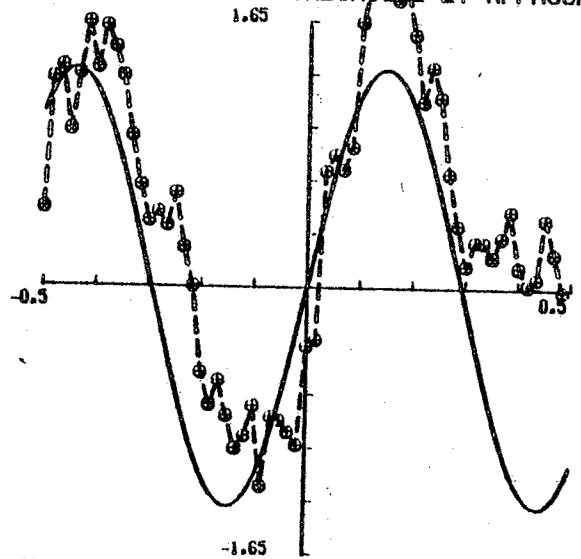
Valeur propre 2 theorique : 0.177  
approchee : 0.190

3 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



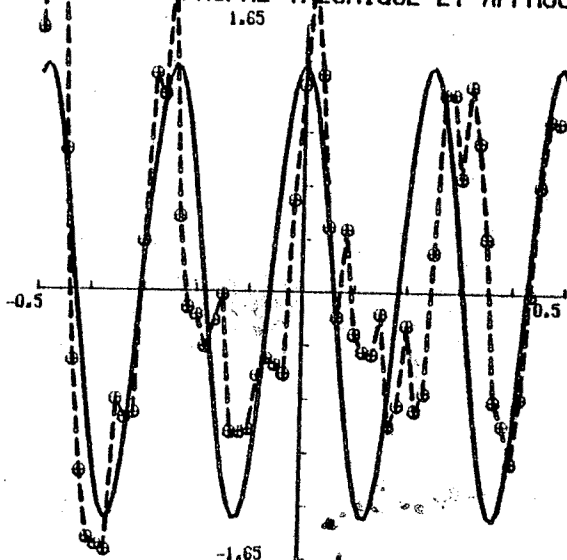
Valeur propre 3 theorique : 0.127  
approchee : 0.142

4 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



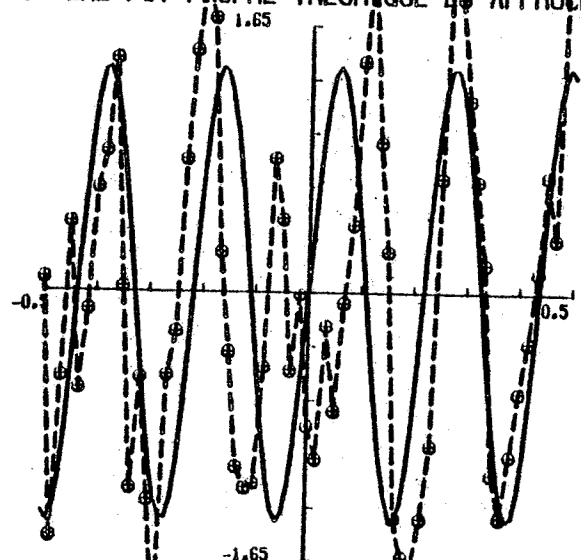
Valeur propre 4 theorique : 0.090  
approchee : 0.111

9 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



Valeur propre 9 theorique : 0.022  
approchee : 0.017

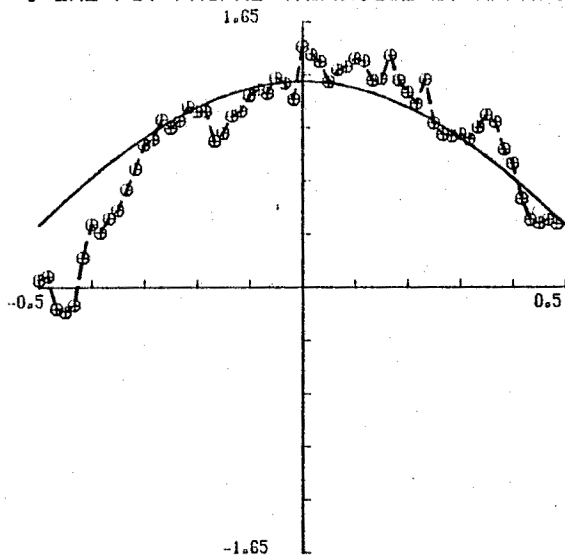
10 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



Valeur propre 10 theorique : 0.018  
approchee : 0.012

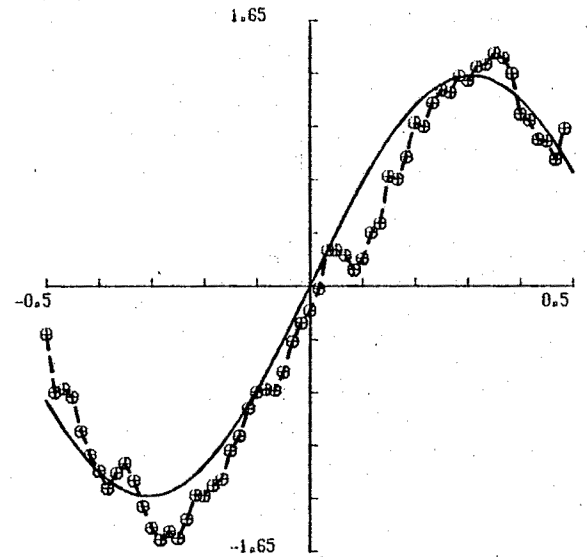
ELEMENTS PROPRES THEORIQUES ET APPROCHEES ASSOCIEES AU NOYAU  $C(H)=EXP(-ALPHA \times H)$   
NTR= 50 NST=60 ICECH=1 ICFB=2 ALPHA= 8

1 ERE FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



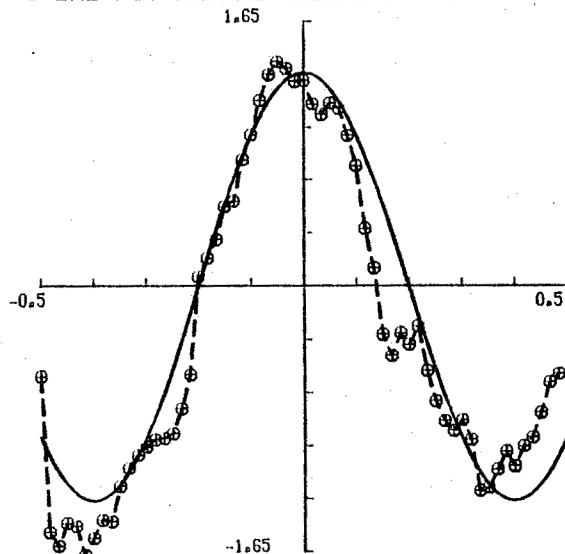
Valeur propre 1 theorique : 0.227  
approche : 0.294

2 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



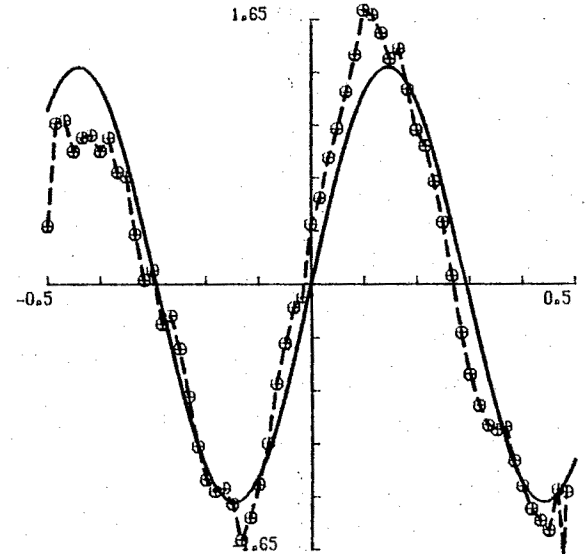
Valeur propre 2 theorique : 0.177  
approche : 0.182

3 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



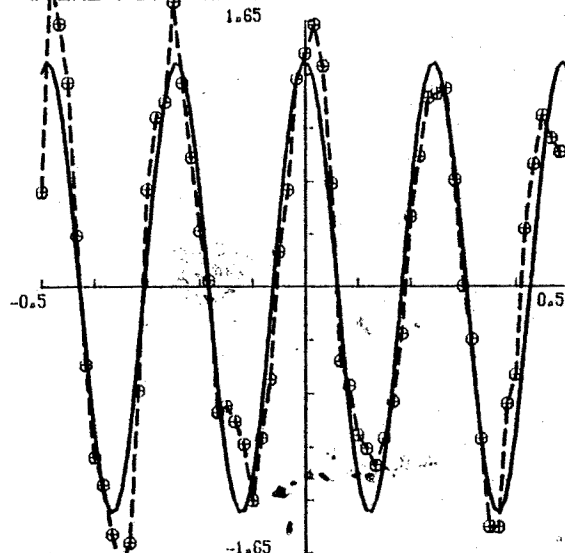
Valeur propre 3 theorique : 0.127  
approche : 0.120

4 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



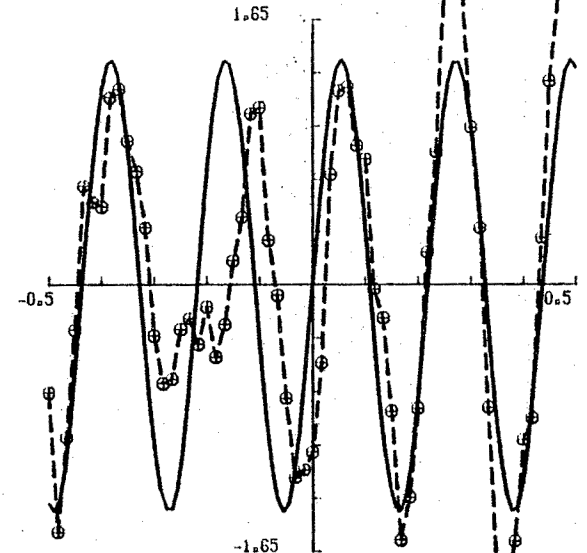
Valeur propre 4 theorique : 0.090  
approche : 0.103

9 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



Valeur propre 9 theorique : 0.022  
approche : 0.021

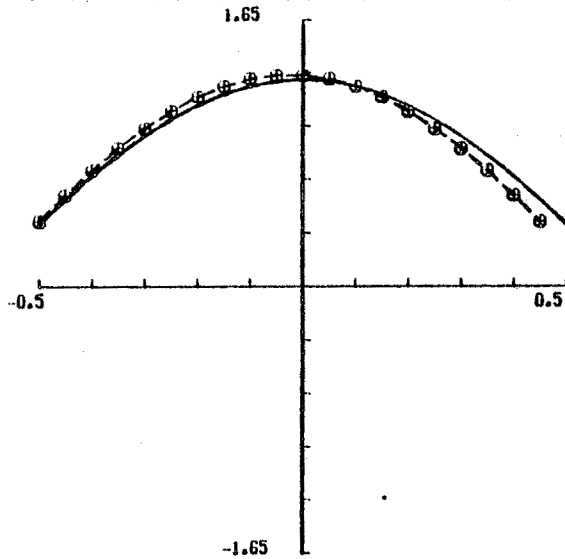
10 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



Valeur propre 10 theorique : 0.018  
approche : 0.015

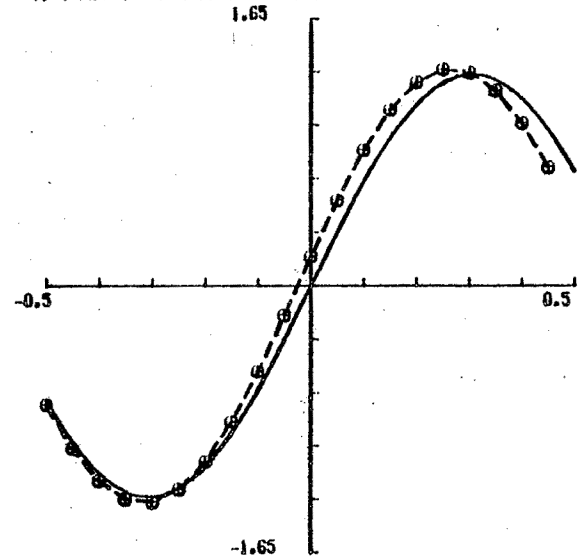
ELEMENTS PROPRES THEORIQUES ET APPROCHEES ASSOCIEES AU NOYAU  $C(H)=EXP(-ALPHA \times H)$   
NTR=200 NST=60 ICECH=1 ICFB=2 ALPHA= 8. (12)

1 ERE FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



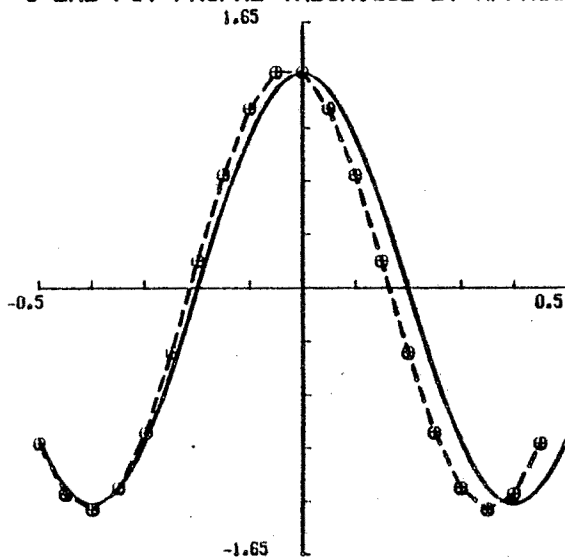
Valeur propre 1 theorique : 0.227  
approchée : 0.229

2 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



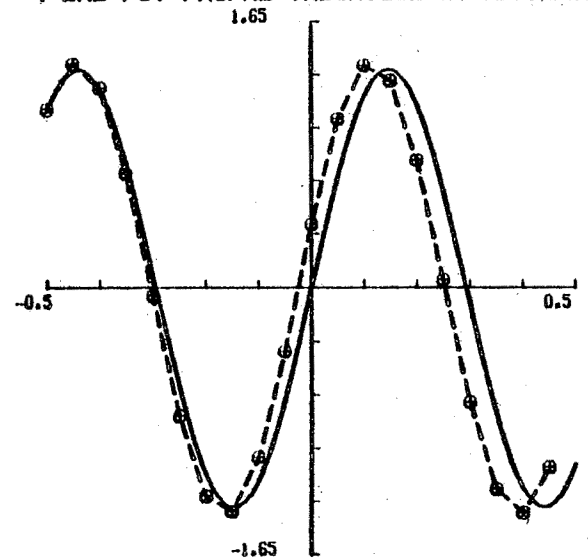
Valeur propre 2 theorique : 0.177  
approchée : 0.175

3 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



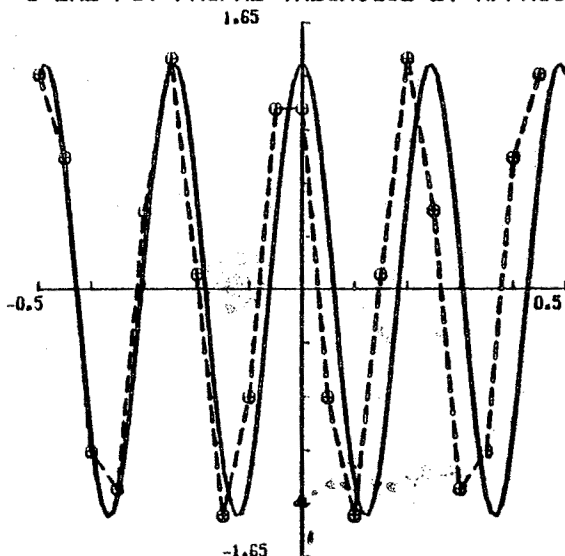
Valeur propre 3 theorique : 0.127  
approchée : 0.124

4 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



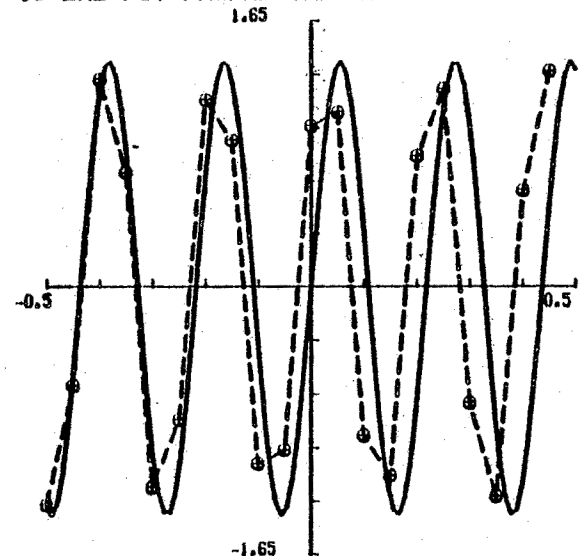
Valeur propre 4 theorique : 0.090  
approchée : 0.087

9 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



Valeur propre 9 theorique : 0.022  
approchée : 0.023

10 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



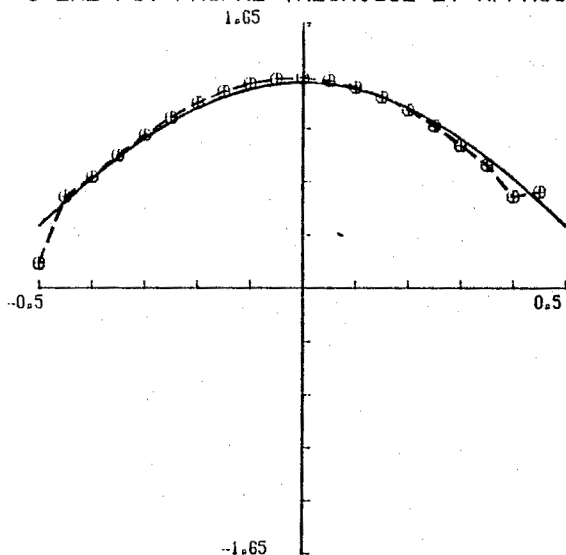
Valeur propre 10 theorique : 0.018  
approchée : 0.020

ELEMENTS PROPRES THEORIQUES ET APPROCHES ASSOCIEES AU NOYAU  $C(H) = \exp(-\alpha H)$

NTR= +8 NST=20 ICECH=1 ICFB=1 ALPHA= 8 (13)

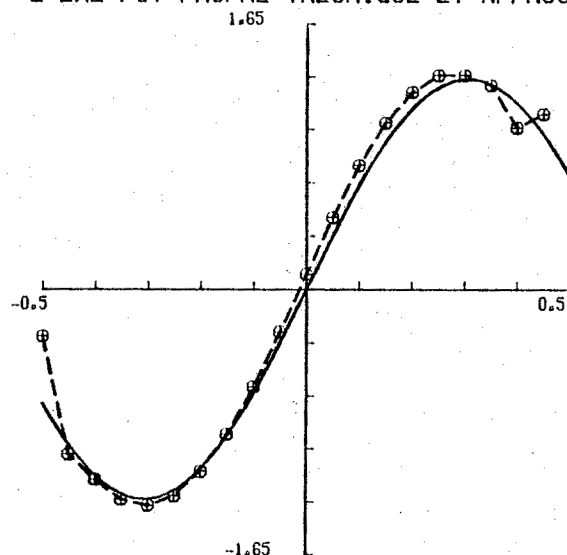


1 ERE FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



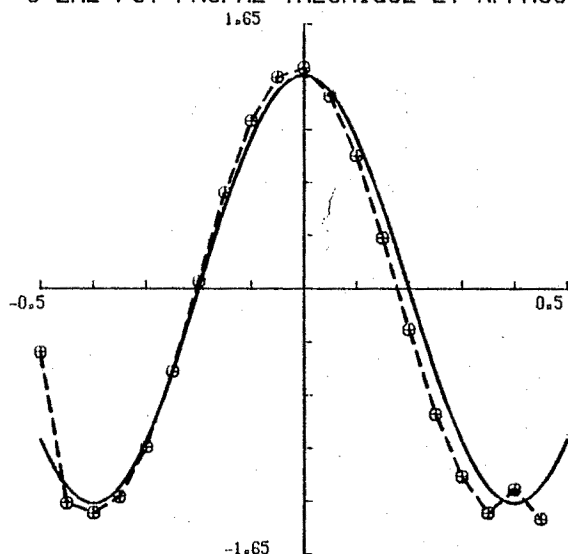
Valeur propre 1 theorique : 0.227  
approchee : 0.228

2 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



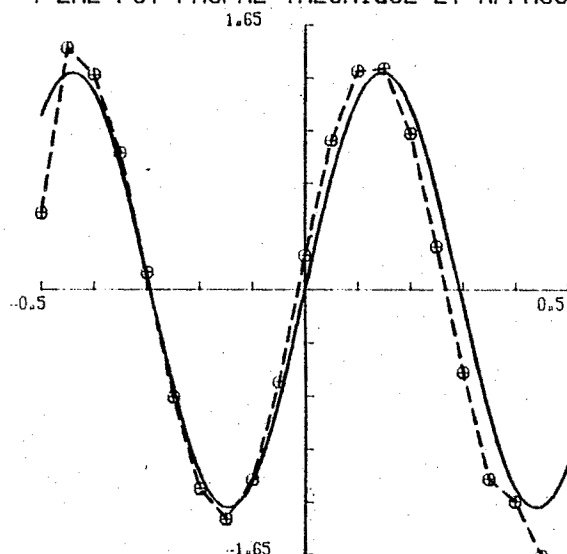
Valeur propre 2 theorique : 0.177  
approchee : 0.174

3 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



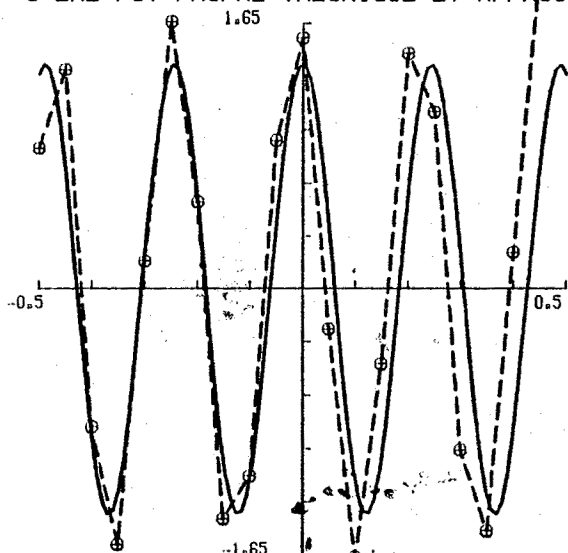
Valeur propre 3 theorique : 0.127  
approchee : 0.121

4 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



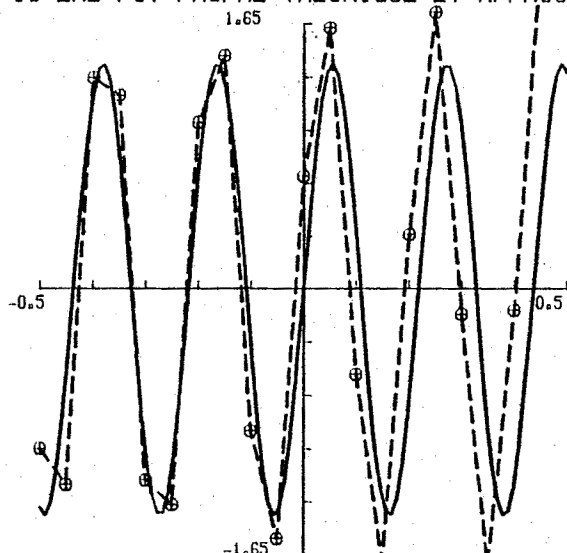
Valeur propre 4 theorique : 0.090  
approchee : 0.083

9 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



Valeur propre 9 theorique : 0.022  
approchee : 0.018

10 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE

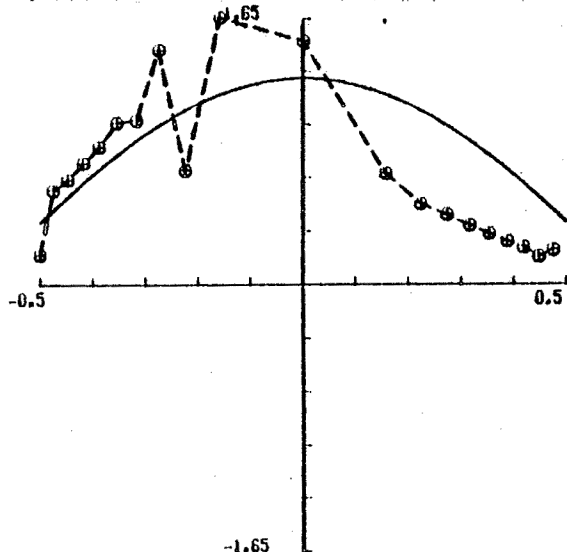


Valeur propre 10 theorique : 0.018  
approchee : 0.014

ELEMENTS PROPRES THEORIQUES ET APPROCHEES ASSOCIEES AU NOYAU  $C(H)=\exp(-\alpha H)$

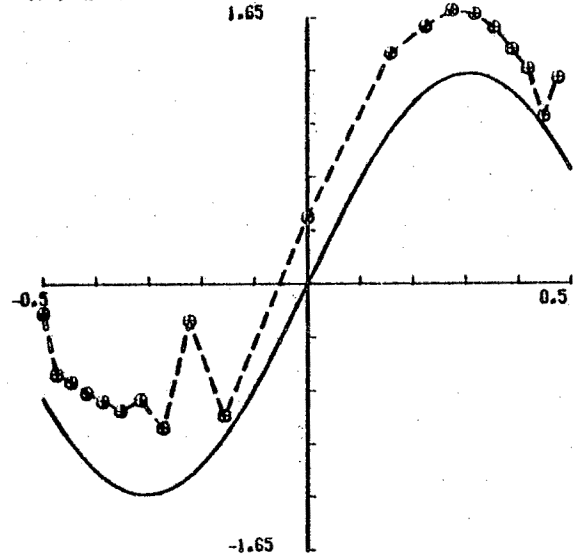
NTR= +8 NST=20 ICECH=1 ICFB=2 ALPHA= 8. (14)

1 ERE FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



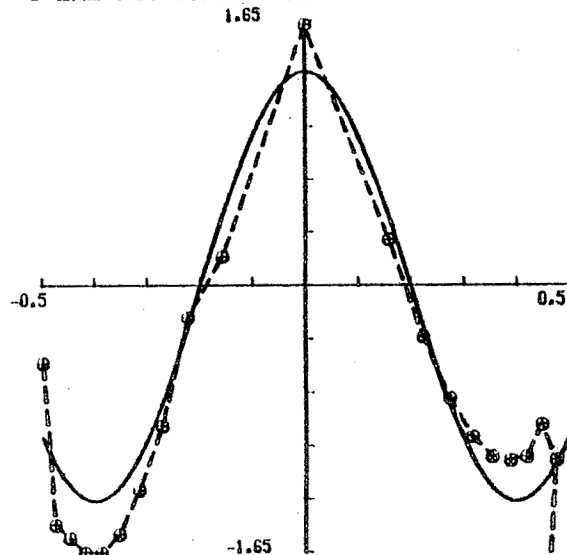
Valeur propre 1 theorique : 0.227  
approchee : 0.262

2 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



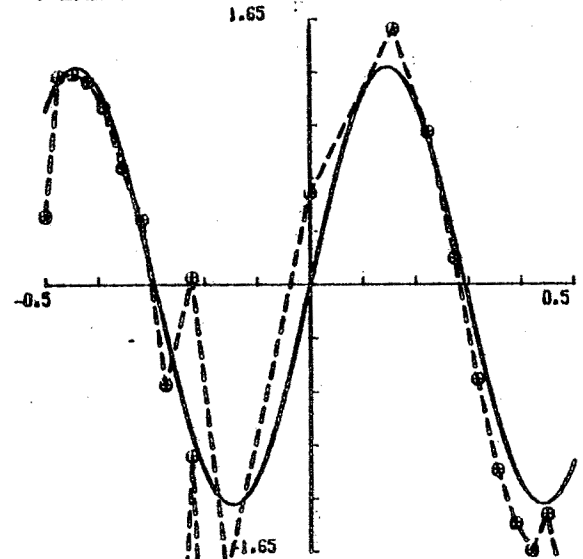
Valeur propre 2 theorique : 0.177  
approchee : 0.174

3 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



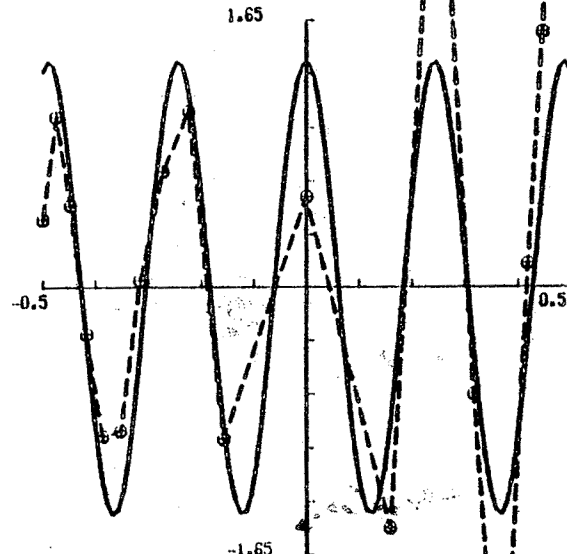
Valeur propre 3 theorique : 0.127  
approchee : 0.123

4 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



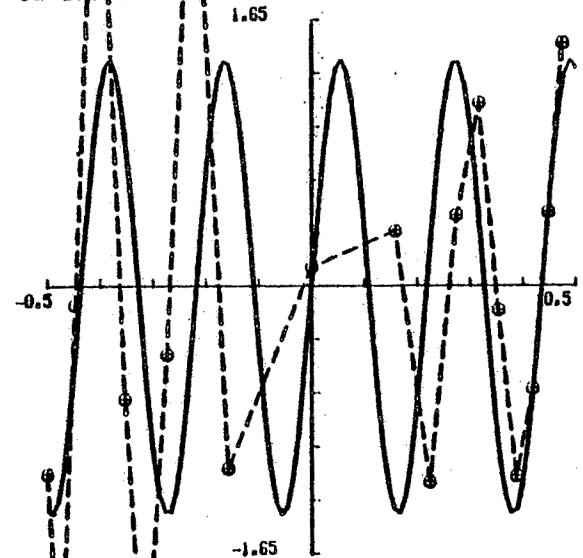
Valeur propre 4 theorique : 0.090  
approchee : 0.085

9 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



Valeur propre 9 theorique : 0.022  
approchee : 0.017

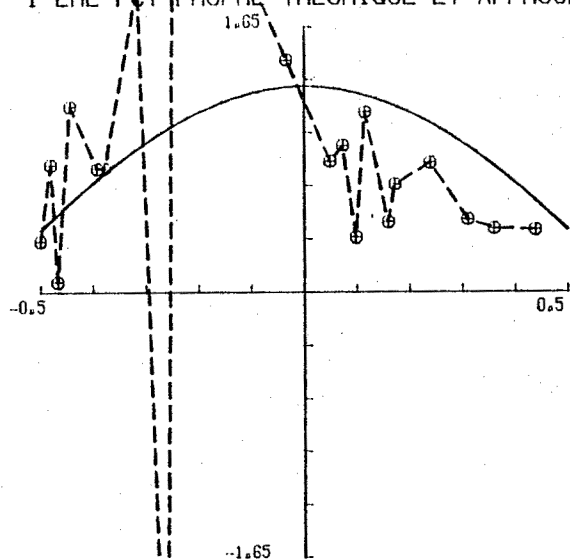
10 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



Valeur propre 10 theorique : 0.018  
approchee : 0.010

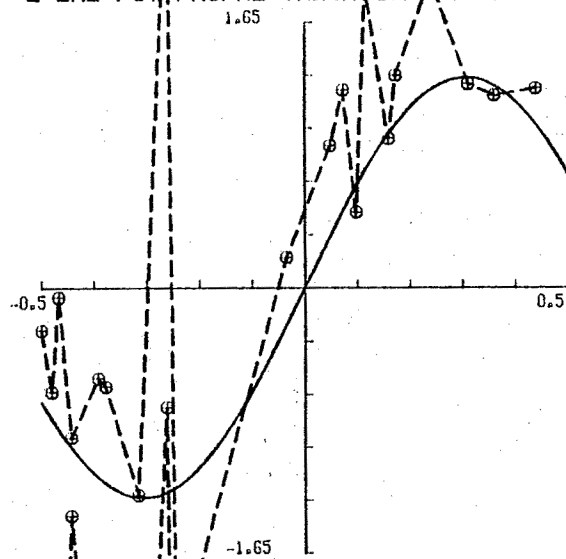
ELEMENTS PROPRES THEORIQUES ET APPROCHEES ASSOCIEES AU NOYAU  $C(H) = \exp(-\alpha H)$   
NTR= +8 NST=20 ICECH=2 ICFB=2 ALPHA= 8

1 ERE FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



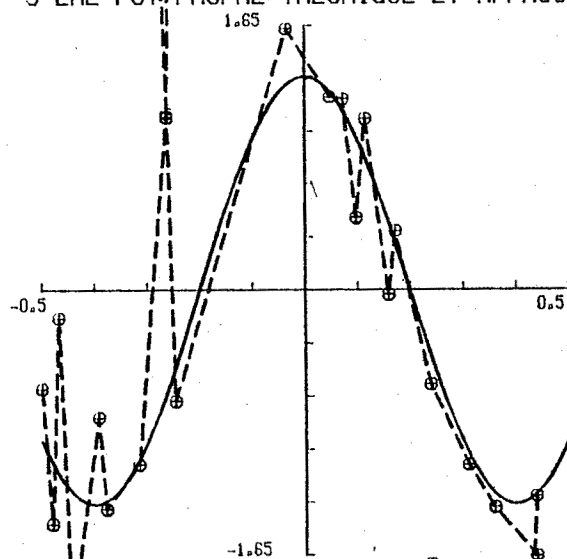
Valeur propre 1 theorique : 0.227  
approchee : 0.262

2 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



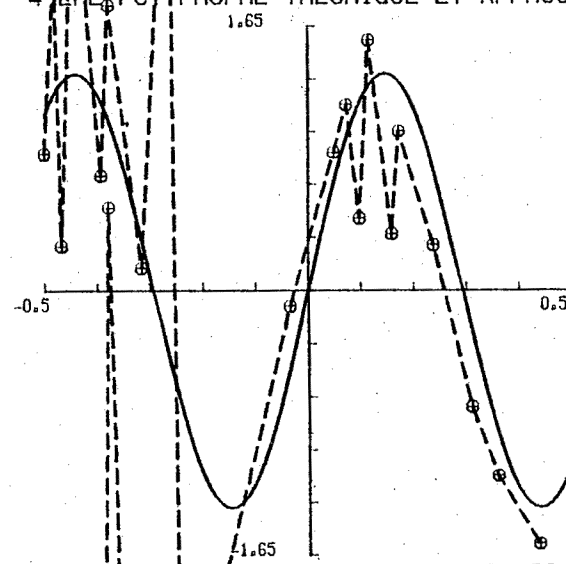
Valeur propre 2 theorique : 0.177  
approchee : 0.199

3 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



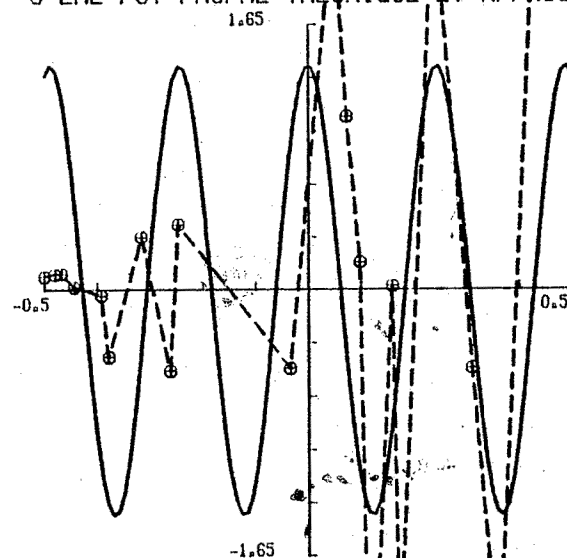
Valeur propre 3 theorique : 0.127  
approchee : 0.115

4 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



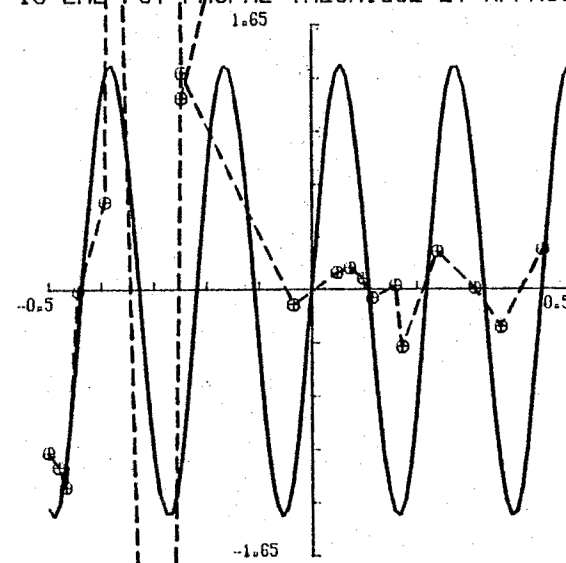
Valeur propre 4 theorique : 0.090  
approchee : 0.091

9 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



Valeur propre 9 theorique : 0.022  
approchee : 0.013

10 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE

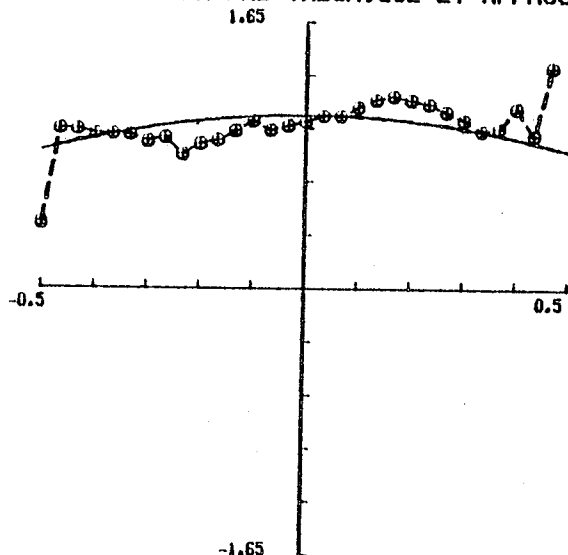


Valeur propre 10 theorique : 0.018  
approchee : 0.011

ELEMENTS PROPRES THEORIQUES ET APPROCHEES ASSOCIEES AU NOYAU  $C(H) = \exp(-\alpha H)$

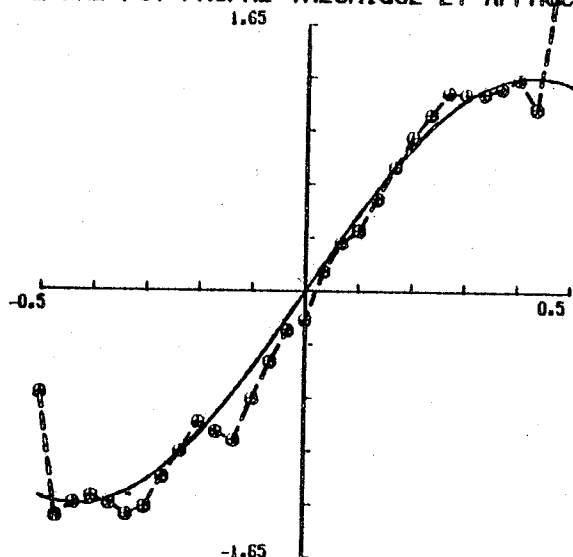
NTR= +8 NST=20 ICECH=3 ICFB=2 ALPHA= 8 (10)

1 ERE FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



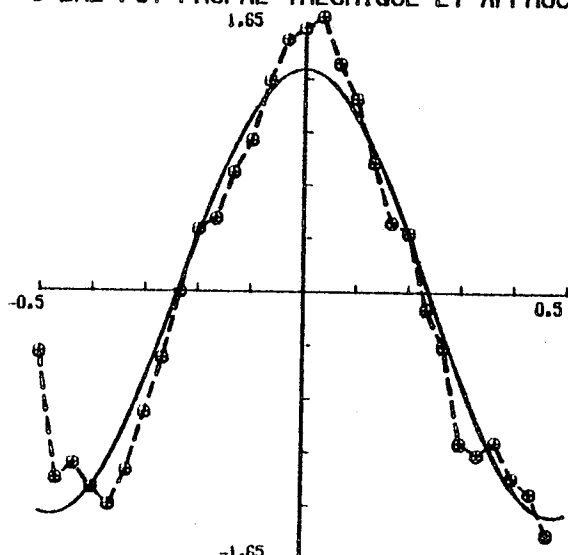
Valeur propre 1 theorique : 0.739  
approche : 0.721

2 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



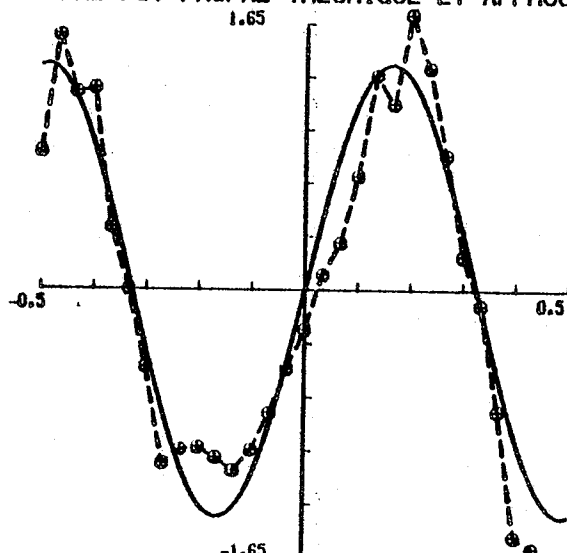
Valeur propre 2 theorique : 0.138  
approche : 0.184

3 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



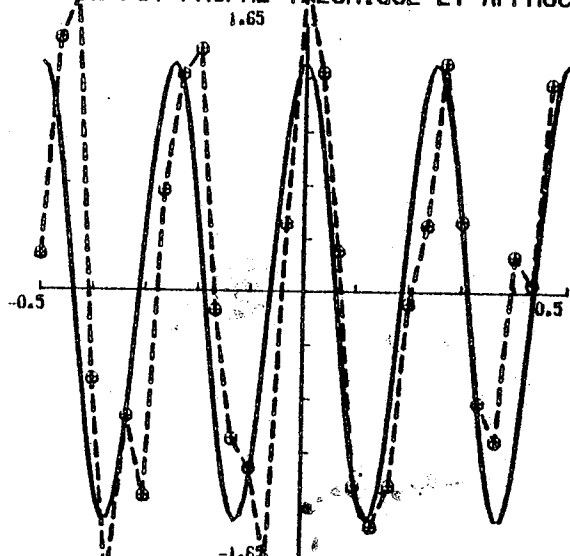
Valeur propre 3 theorique : 0.045  
approche : 0.029

4 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



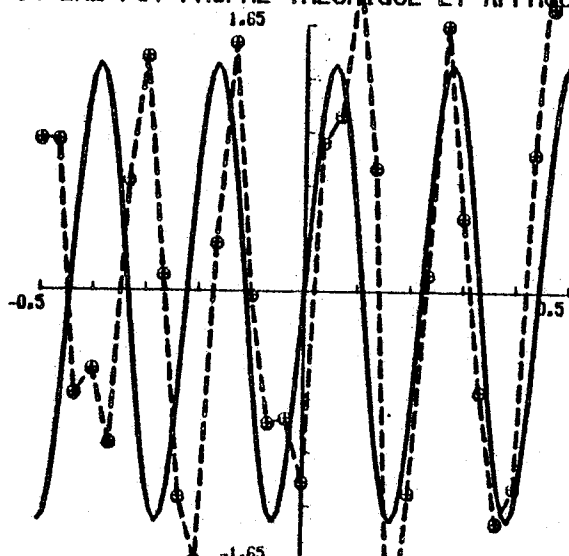
Valeur propre 4 theorique : 0.021  
approche : 0.022

9 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



Valeur propre 9 theorique : 0.003  
approche : 0.002

10 EME FCT PROPRE THEORIQUE ET APPROCHEE



Valeur propre 10 theorique : 0.002  
approche : 0.002

ELEMENTS PROPRES THEORIQUES ET APPROCHEES ASSOCIEES AU NOYAU  $C(H)=EXP(-ALPHA \cdot X \cdot H)$   
NTR= 50 NST=30 ICECH=1 ICFB=2 ALPHA= 1

Au niveau 2, nous avons calculé, en NSTEST = 10 stations tests  $t'_i$  appartenant à T et distincts des points  $t_i: i=1, NST$  où le processus est observé (ou plutôt simulé), l'écart  $e_i = X(t'_i) - X^*(t'_i)$  pour  $i=1, NSTEST$  entre la vraie valeur  $X(t'_i)$  fournie par le générateur Markovien et la valeur  $X^*(t'_i)$  reconstituée par ACPD en retenant NFP = 10 facteurs.

Sur l'axe horizontal, nous avons représenté les points  $t_1, t_2, \dots, t_n$  suivant le mode de discrétisation (ICECH) sélectionné permettant ainsi de situer les stations tests. Pour chaque station test  $t'_i$  on a représenté la moyenne et la déviation standard (écart type) de  $e_i$  estimées à partir de NTR réalisations :

- par une croix ("x") on représente la moyenne empirique de  $e_i$ , notée  $\bar{e}_i$ , et
- par un intervalle de chaque côté de la moyenne (" $\text{---x---}$ ") on représente l'écart type empirique de  $e_i$ , noté  $s_{ei}$ .

La qualité de la reconstitution est mesurée, pour chaque  $i$ , par la quantité

$$\rho^2 = \frac{s^2_{x^*(t'_i)}}{s^2_{x(t'_i)}} = s^2_{x^*(t'_i)} = 1 - s^2_{e_i}$$

où  $\rho$  est le coefficient de corrélation linéaire entre  $X(t'_i)$  et  $X^*(t'_i)$

A ce niveau, le tableau 2 permet de préciser les comparaisons.

Les situations 1 à 6, qui combinent l'effet du mode de discrétisation et d'interpolation ne semblent pas indiquer une meilleure performance de la méthode dans le cas d'interpolation par fonctions linéaires par morceaux et ce quel que soit le mode de discrétisation considéré. On retrouve la performance avantageuse du mode de discrétisation aléatoire ( $ICECH=3$ ), déjà notée au niveau 1.

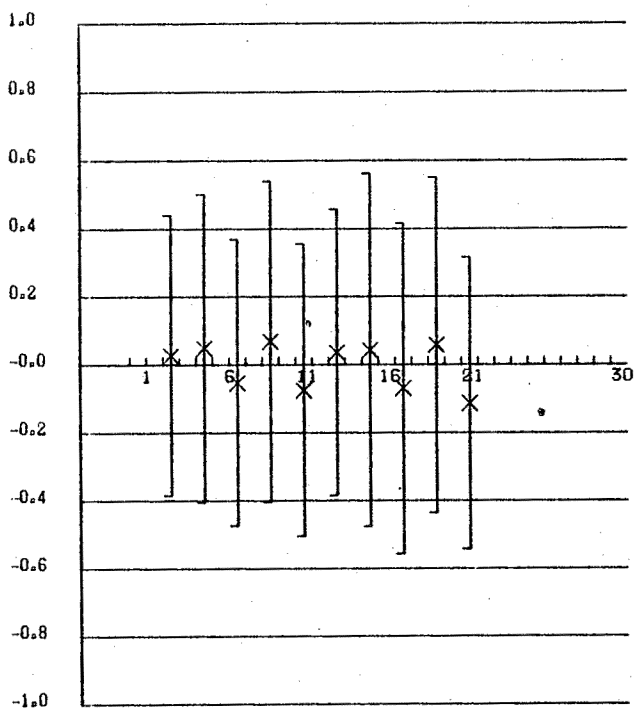
Dans les situations 7,8,...,12, il apparaît que l'observation d'un plus grand nombre (NTR) de trajectoires, pour un même nombre (NST) de stations, à pour effet de "lisser" les écarts types des écarts de reconstitution à une valeur constante pour toutes les stations tests sans améliorer la qualité des reconstitutions.

Les situations 13 à 18 montrent que l'effet du choix des fonctions d'interpolation de base (ICFB), pour un même mode de discrétisation ( $ICECH$ ) est présent seulement pour le mode aléatoire ( $ICECH=3$ ). La combinaison  $ICECH=3$ ,  $ICFB=1$  est, au vu de ces situations, la plus performante.

Les situations 19 et 20 donnent une idée de la vitesse de convergence de l'approximation de la technique d'ACPP lorsque  $T$  augmente (i.e.  $ALPHA$  diminue).

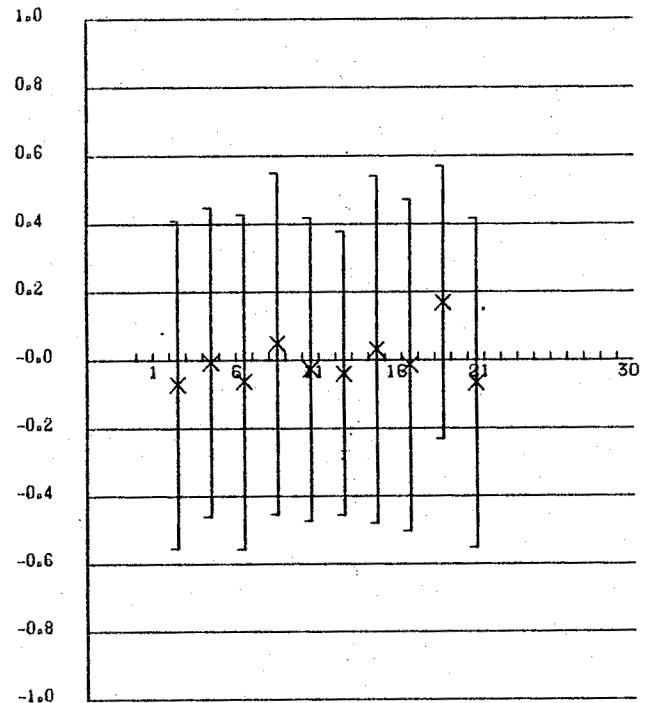
NTR= 50 NST= 30 ICECH=1 ICFB=1 ALPHA= 8.0

①



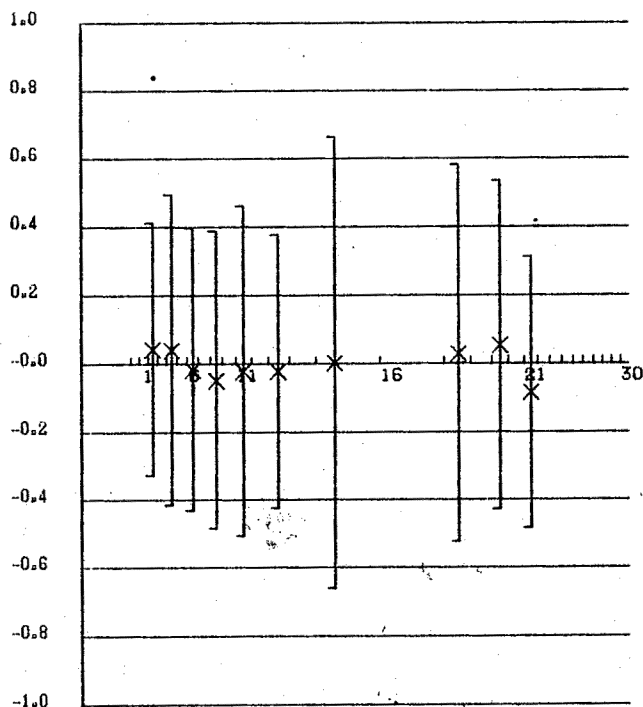
NTR= 50 NST= 30 ICECH=1 ICFB=2 ALPHA= 8.0

②



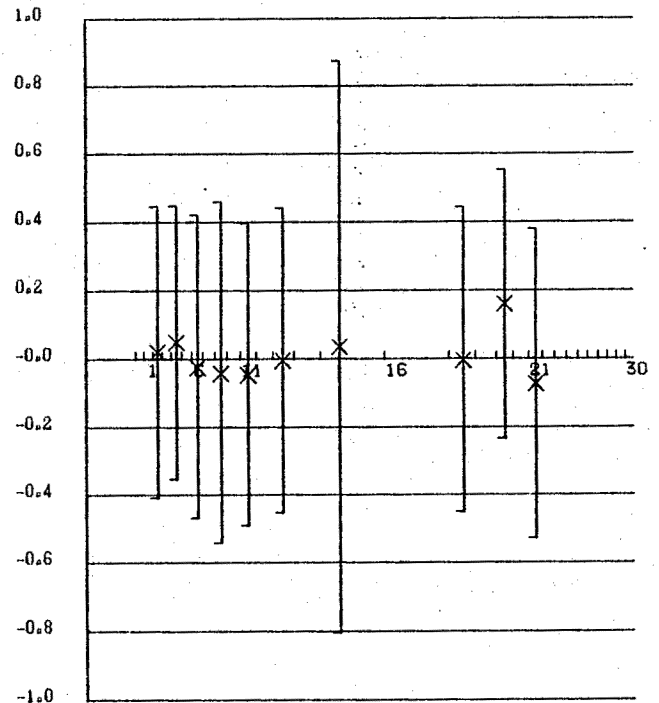
NTR= 50 NST= 30 ICECH=2 ICFB=1 ALPHA= 8.0

③



NTR= 50 NST= 30 ICECH=2 ICFB=2 ALPHA= 8.0

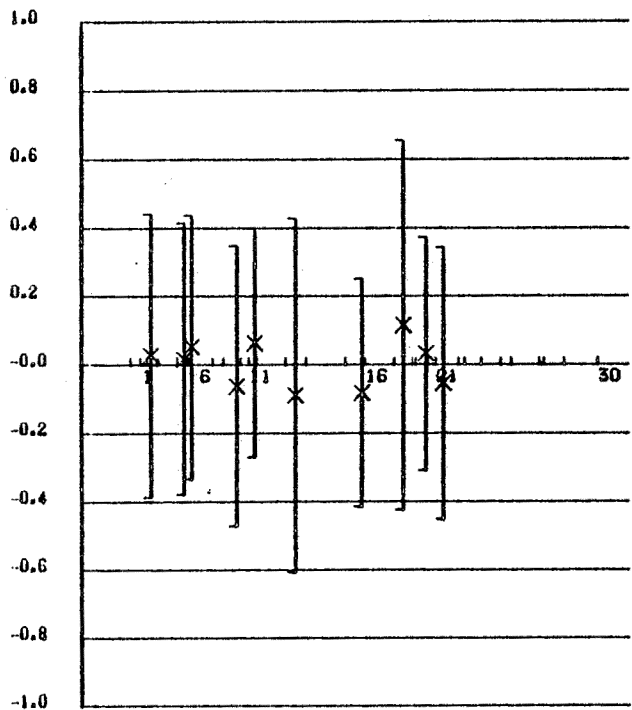
④



MOYENNE ET DEVIATION AUX STATIONS TESTS DES ECARTS DE RECONSTITUTION  
NSTEST=10 NFP=10

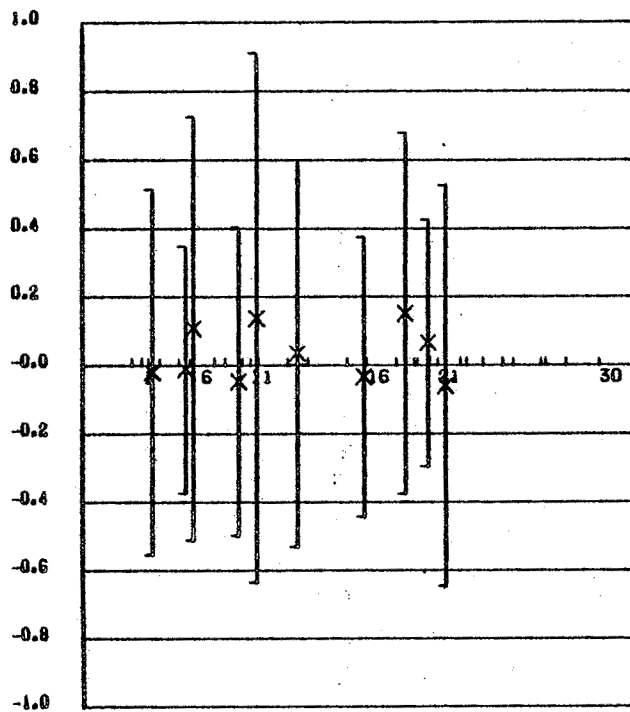
NTR= 50 NST= 30 ICECH=3 ICFB=1 ALPHA= 8.0

(5)



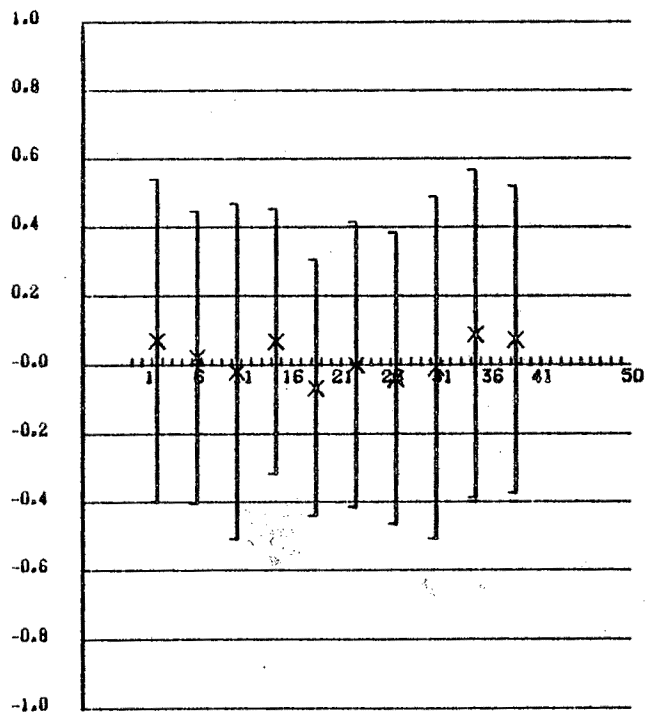
NTR= 50   NST= 30   ICECH=3   ICFB=2   ALPHA= 8.0

⑥



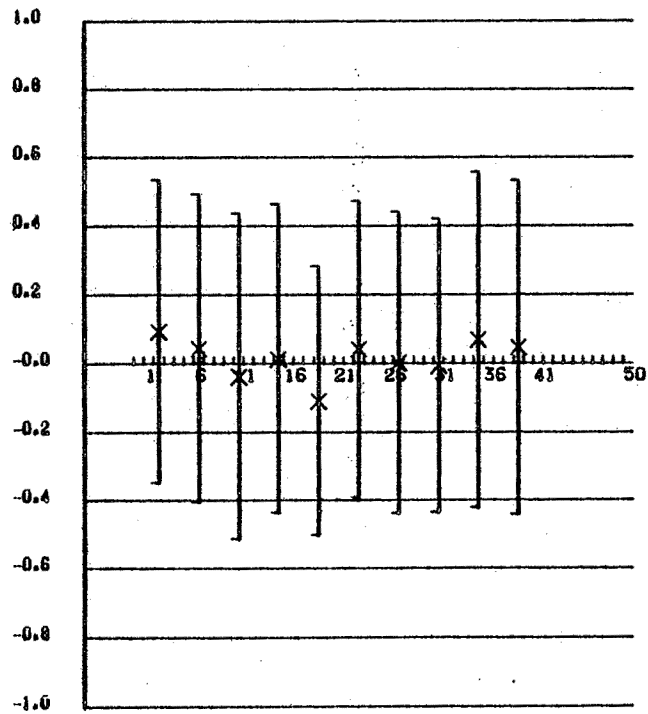
NTR= 30    NST= 50    ICECH=1    ICFB=2    ALPHA= 8.0

⑦



NTR= 50   NST= 50   ICECH=1   ICFB=2   ALPHA= 8.0

8



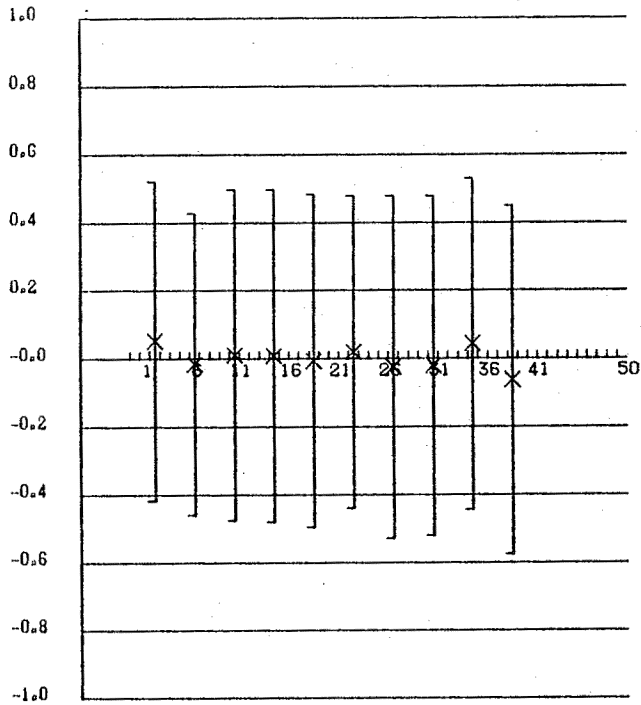
## MOYENNE ET DEVIATION AUX STATIONS TESTS DES ECARTS DE RECONSTITUTION

NSTEST=10      NFP=10



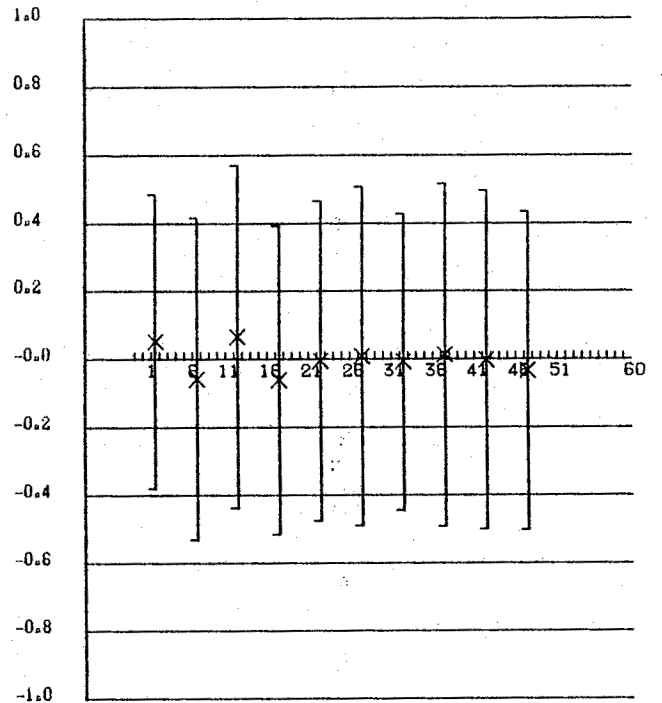
NTR=200 NST= 50 ICECH=1 ICFB=2 ALPHA= 8.0

(9)



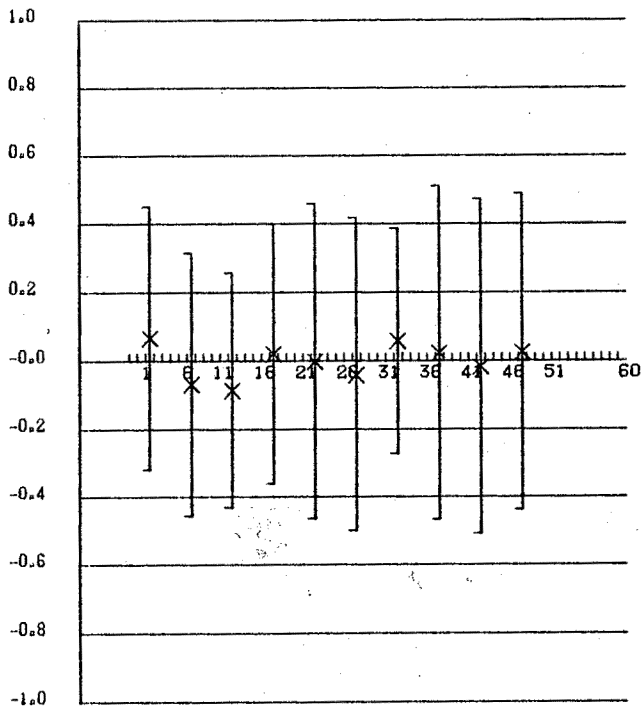
NTR=200 NST= 60 ICECH=1 ICFB=2 ALPHA= 8.0

(12)



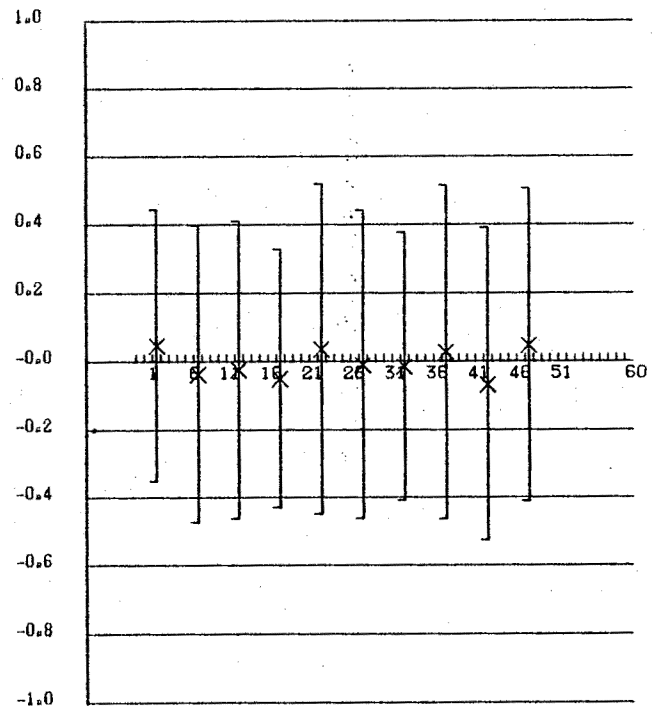
NTR= 30 NST= 60 ICECH=1 ICFB=2 ALPHA= 8.0

(10)



NTR= 50 NST= 60 ICECH=1 ICFB=2 ALPHA= 8.0

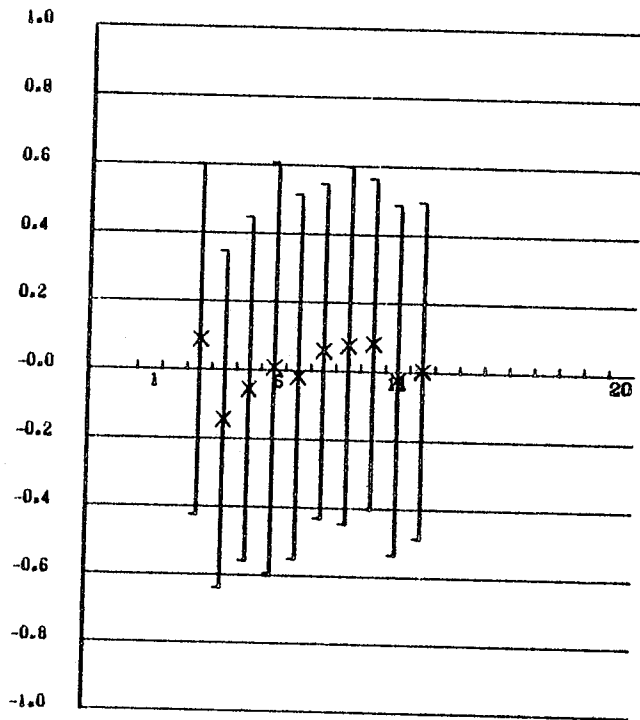
(11)



MOYENNE ET DEVIATION AUX STATIONS TESTS DES ECARTS DE RECONSTITUTION  
NSTEST=10 NFP=10

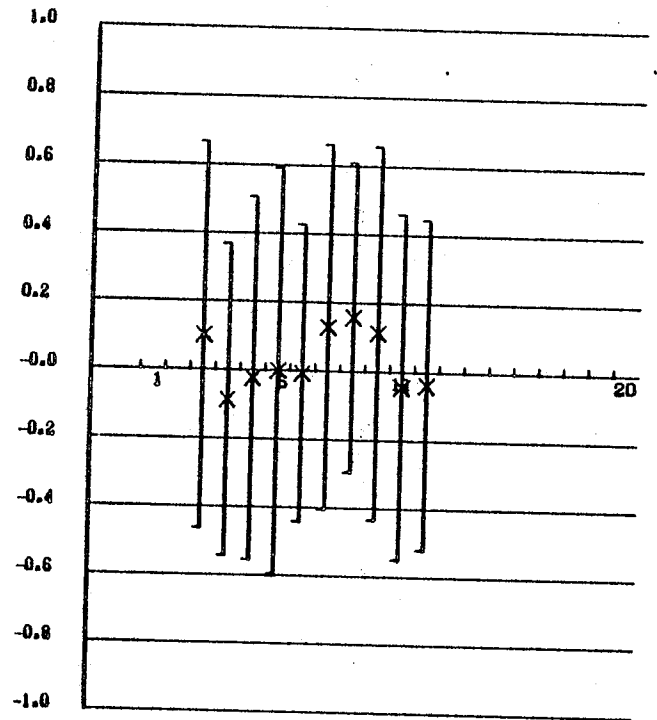
NTR= +8 NST= 20 ICECH=1 ICFB=2 ALPHA= 8.0

(14)



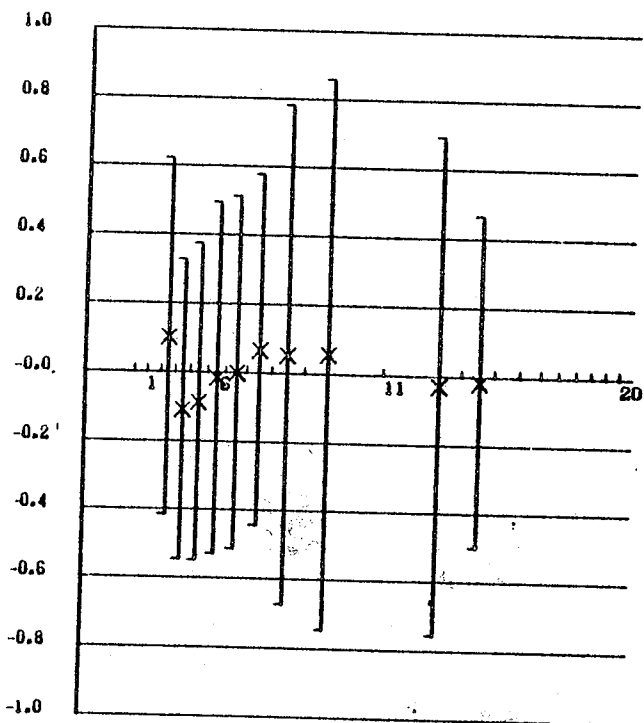
NTR= +8 NST= 20 ICECH=1 ICFB=1 ALPHA= 8.0

(13)



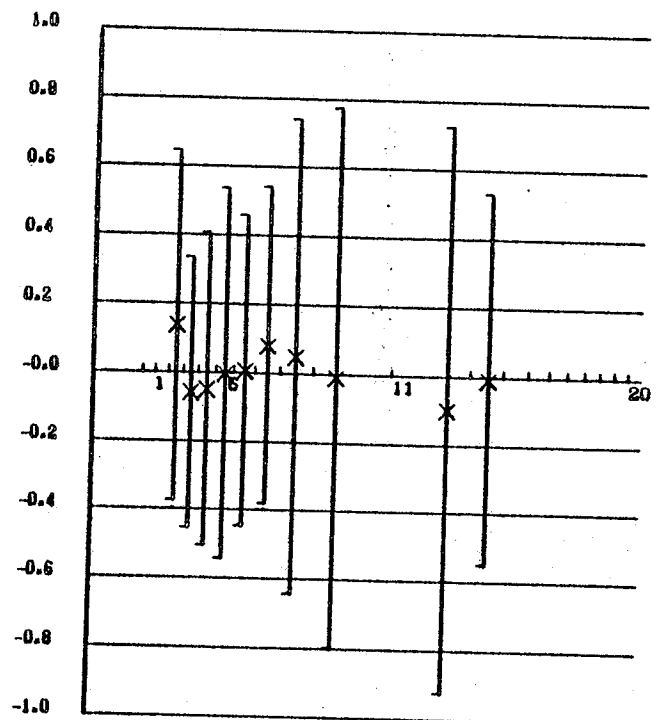
NTR= +8 NST= 20 ICECH=2 ICFB=2 ALPHA= 8.0

(16)



NTR= +8 NST= 20 ICECH=2 ICFB=1 ALPHA= 8.0

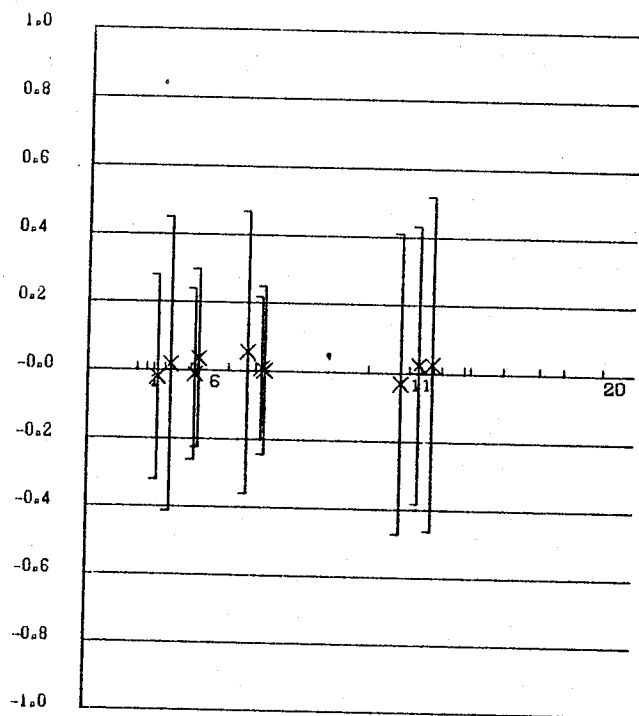
(15)



MOYENNE ET DEVIATION AUX STATIONS TESTS DES ECARTS DE RECONSTITUTION  
NSTEST=10 NFP=10

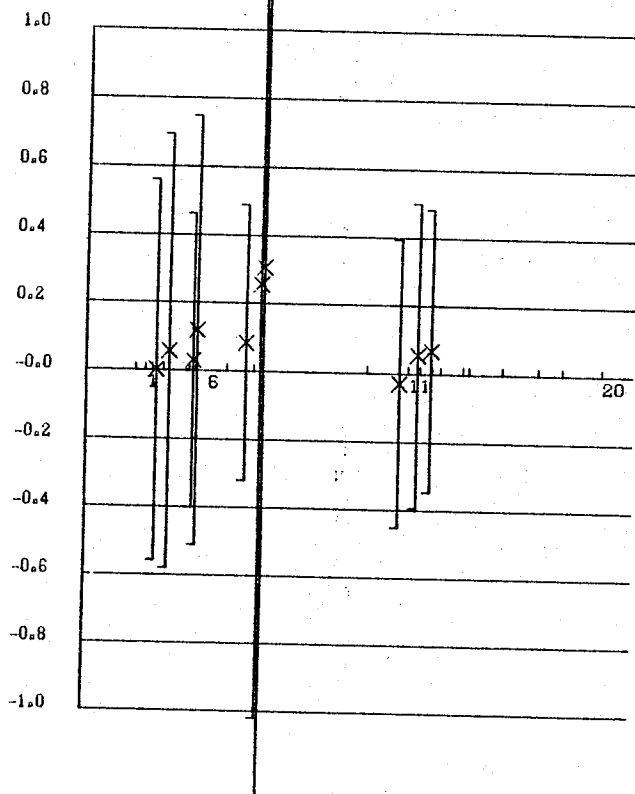
NTR= +8 NST= 20 ICECH=3 ICFB=1 ALPHA= 8.0

(17)



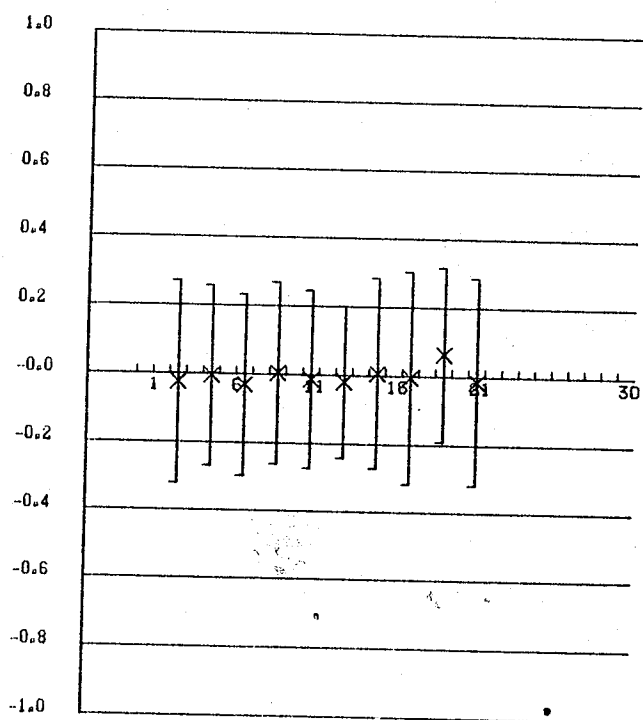
NTR= +8 NST= 20 ICECH=3 ICFB=2 ALPHA= 8.0

(18)



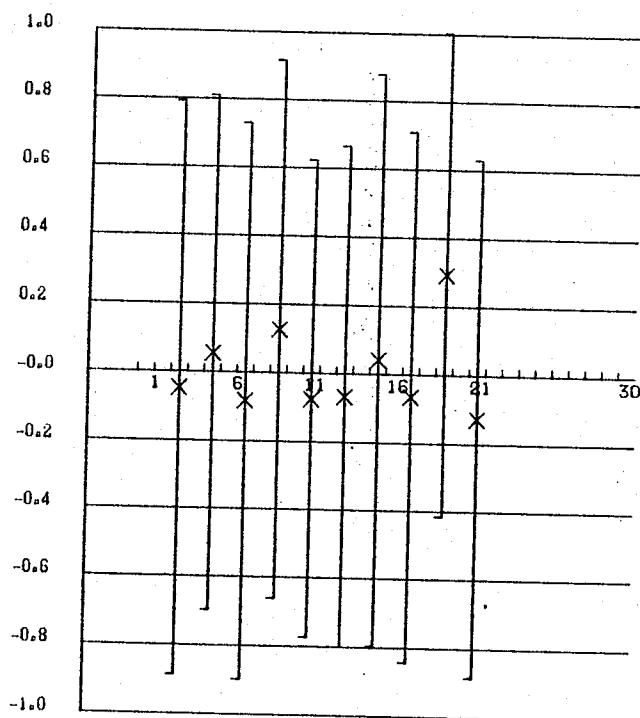
NTR= 50 NST= 30 ICECH=1 ICFB=2 ALPHA= 1.0

(19)



NTR= 50 NST= 30 ICECH=1 ICFB=2 ALPHA= 30.0

(20)



MOYENNE ET DEVIATION AUX STATIONS TESTS DES ECARTS DE RECONSTITUTION  
NSTEST=10 NFP=10

Au niveau 3, nous avons représenté la moyenne des erreurs en moyenne quadratique des écarts de reconstitutions  $e_i$  sur l'ensemble des NSTEST stations tests :

$$\frac{1}{\text{NSTEST}} \sum_{i=1}^{\text{NSTEST}} (\bar{e}_i^2 + s_{e_i}^2)$$

en fonction de NFP, le nombre de fonctions propres retenues pour la reconstitution. Nous avons considéré 4 valeurs de NFP : NFP = 5, 10, 15 et 20. La représentation graphique de cette fonction donne un aperçu synthétique de la qualité d'approximation de l'ACPP pour chacune des situations considérées. Nous suggérons alors, par exemple, d'attribuer une note A, B, C ou D pour la performance selon que la courbe se trouve dans la 1ère, 2ème, 3ème ou 4ème tranche horizontale de la figure avec la convention suivante : A = bon, B = moyen + , C = moyen -, et D = mauvais.

A l'aide du tableau 3 on peut considérer des classifications plus fines et aussi aider à l'interprétation par le pourcentage de variance expliquée donnée pour chaque valeur de NFP.

De façon générale la meilleure qualité d'approximation de la méthode est réalisée lorsque le nombre de fonctions propres retenues (NFP) est entre 10 et 15.

Dans certaines situations (voir 12, par exemple) il y a, paradoxalement, dégradation de la qualité lorsque NFP augmente. Cela est probablement dû à une mauvaise approximation numérique des dernières "harmoniques", de sorte qu'en tenir compte augmente la propension à l'erreur.

Au vu du premier groupe de situations, il apparaît que l'interpolation par fonctions linéaires (ICFB=2) ne modifie pas sensiblement la qualité de l'approximation par rapport à l'interpolation par fonctions constantes (ICPB=1) et dans le cas d'une discrétisation en mode aléatoire

(ICECH=3) il est plus avantageux d'interpoler par ces dernières. D'autre part, on note que la qualité de reconstitution dans le cas d'interpolation par fonctions constantes par morceaux se stabilise (voire se dégrade) à partir de (NFP=) 10 fonctions propres retenues alors que dans le cas des fonctions linéaires (ICFB=2) celle-ci s'améliore de façon monotone quand NFP augmente. Les situations 21 et 22 définies dans le tableau ci-dessous et les pourcentages de variance expliquée plus faible dans le cas de l'interpolation linéaire confirment cette remarque. Il semble donc que l'utilisation de ce mode d'interpolation est plus efficace lorsque le mode de discrétisation est régulier et le nombre de fonctions propres retenues assez élevé.

Les situations du groupe 2 confirment l'importance du rapport NTR/NST. Il paraît donc inutile (et coûteux) "d'empiler" les réalisations à l'infini, pour un nombre de stations restreint.

Les situations du groupe 3 et 4 confirment les observations déjà faites.

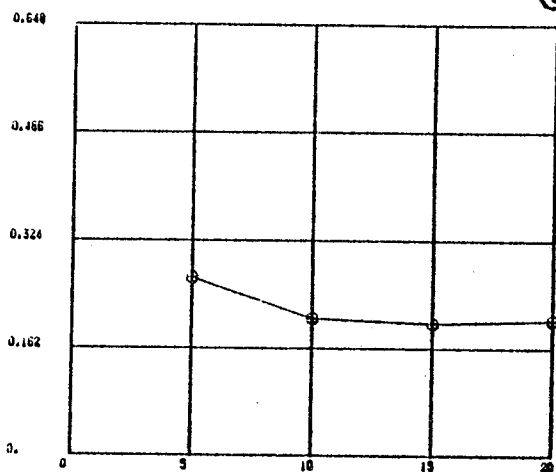
Nous avons, à ce niveau, considéré quelques situations supplémentaires décrites par le tableau :

|    | NTR | NST | ICECH | ICFB | ALPHA |
|----|-----|-----|-------|------|-------|
| 21 | 50  | 30  | 1     | 1    | 30.   |
| 22 | -   | -   | -     | 2    | -     |
| 23 | -   | -   | 3     | 1    | -     |
| 24 | -   | -   | -     | 2    | -     |
| 25 | -   | -   | 1     | 1    | 1.    |
| 26 | -   | -   | 3     | -    | -     |

Les situations 23,...,26 contribuent à renforcer l'impression de bonne performance du combiné ICECH=3, ICFB=1

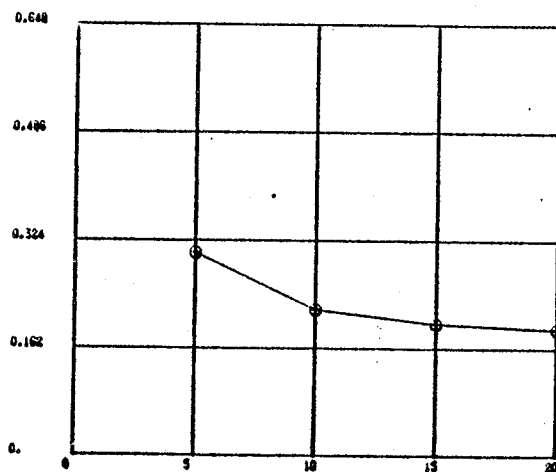
NTR= 50 NST= 30 ICECH=1 ICFB=1 ALPHA= 8.0

①



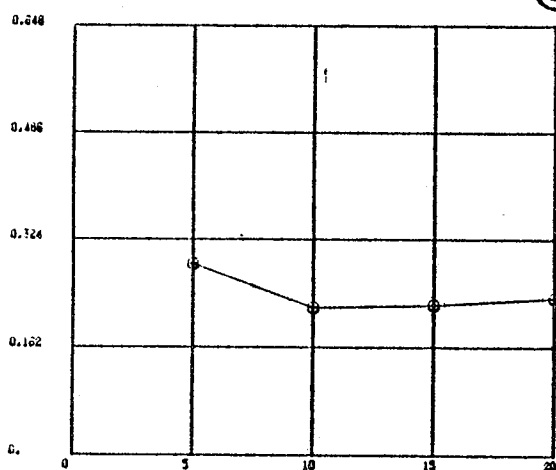
NTR= 50 NST= 30 ICECH=1 ICFB=2 ALPHA= 9.0

②



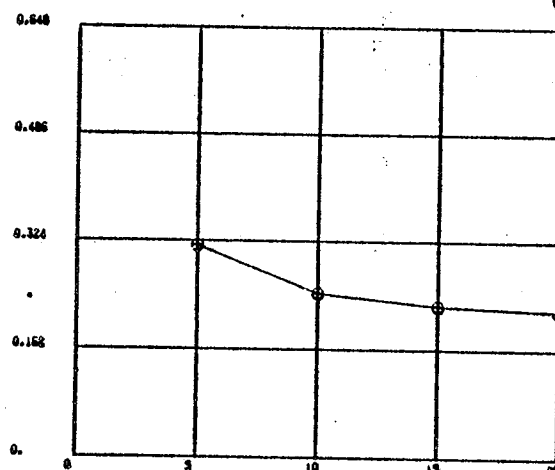
NTR= 50 NST= 30 ICECH=2 ICFB=1 ALPHA= 8.0

③



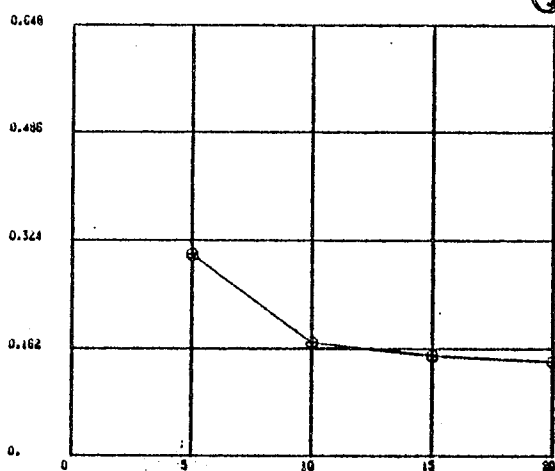
NTR= 50 NST= 30 ICECH=2 ICFB=2 ALPHA= 8.0

④



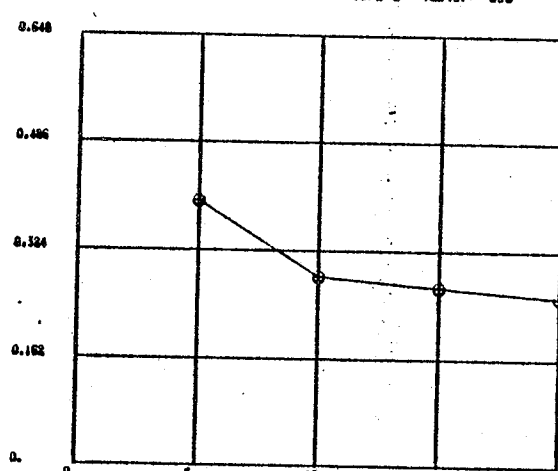
NTR= 50 NST= 30 ICECH=3 ICFB=1 ALPHA= 8.0

⑤

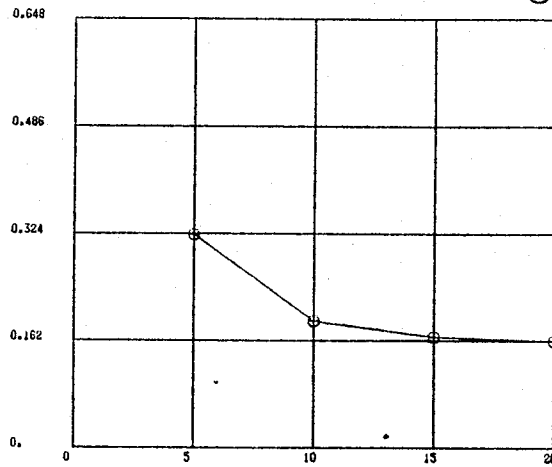


NTR= 50 NST= 30 ICECH=3 ICFB=2 ALPHA= 8.0

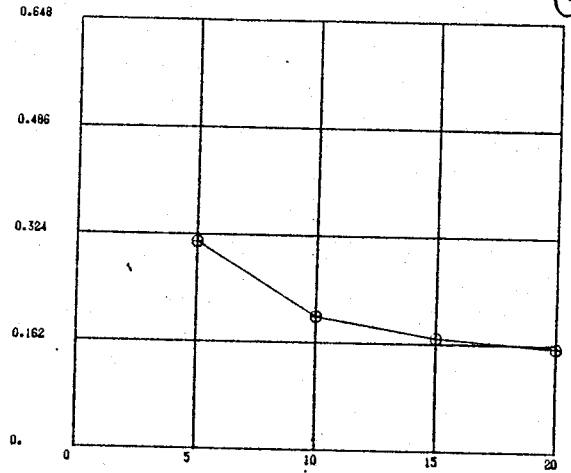
⑥



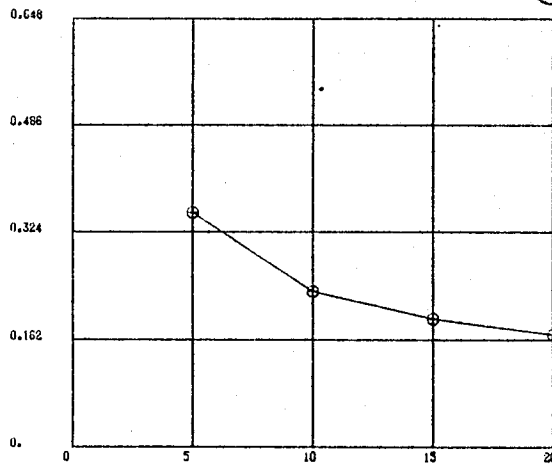
NTR= 30 NST= 50 ICECH=1 ICFB=2 ALPHA= 8.0 (7)



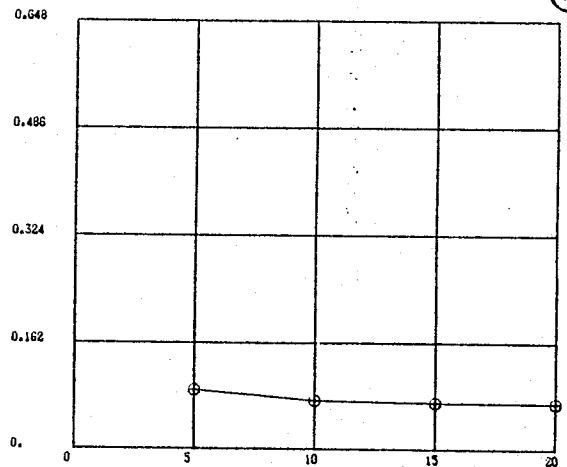
NTR= 50 NST= 50 ICECH=1 ICFB=2 ALPHA= 8.0 (8)



NTR=200 NST= 50 ICECH=1 ICFB=2 ALPHA= 8.0 (9)

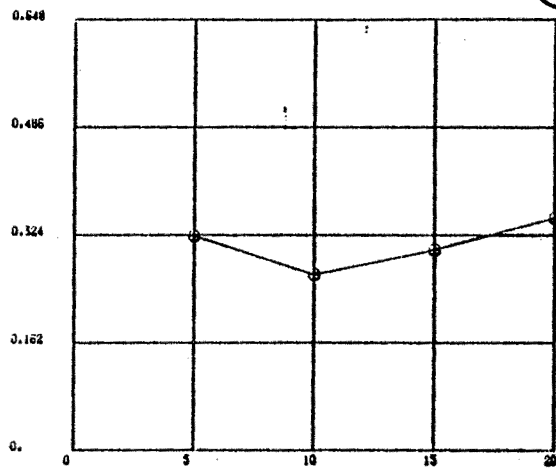


NTR= 50 NST= 30 ICECH=1 ICFB=2 ALPHA= 1.0 (19)



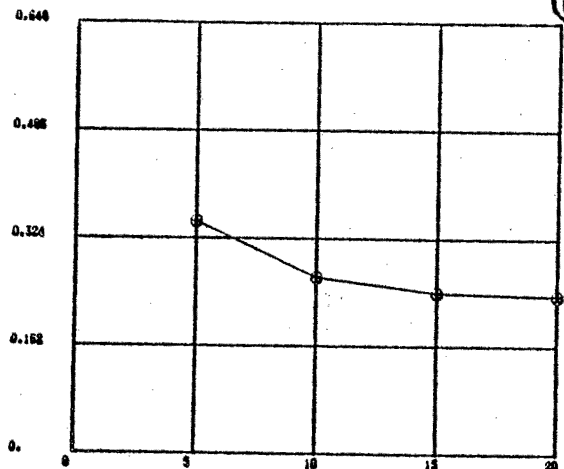
NTR= 18 NST= 20 ICECH=1 ICFB=1 ALPHA= 8.0

(13)



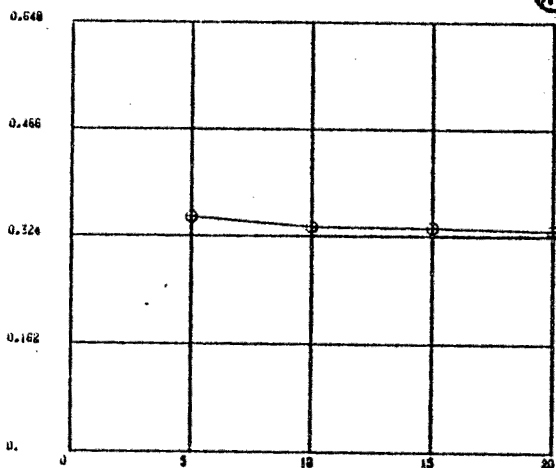
NTR= 18 NST= 20 ICECH=1 ICFB=2 ALPHA= 8.0

(14)



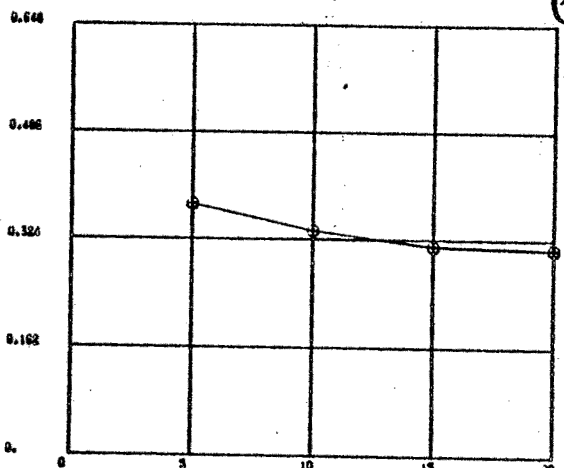
NTR= 18 NST= 20 ICECH=2 ICFB=1 ALPHA= 8.0

(15)



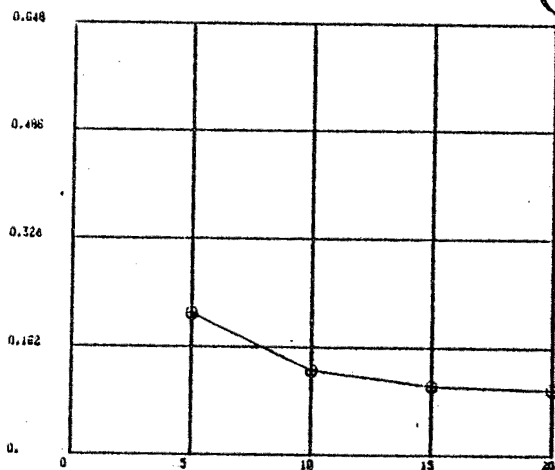
NTR= 18 NST= 20 ICECH=2 ICFB=2 ALPHA= 8.0

(16)



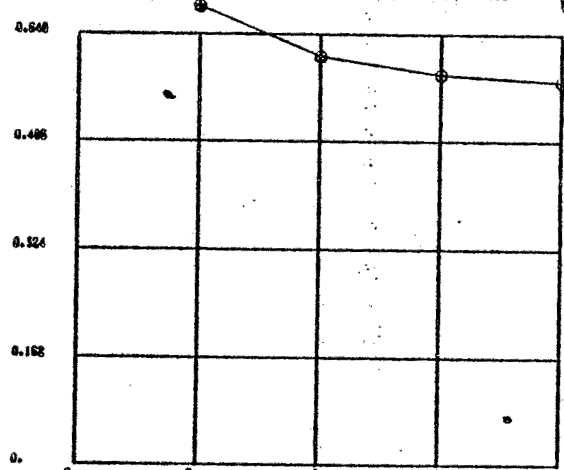
NTR= 18 NST= 20 ICECH=3 ICFB=1 ALPHA= 8.0

(17)

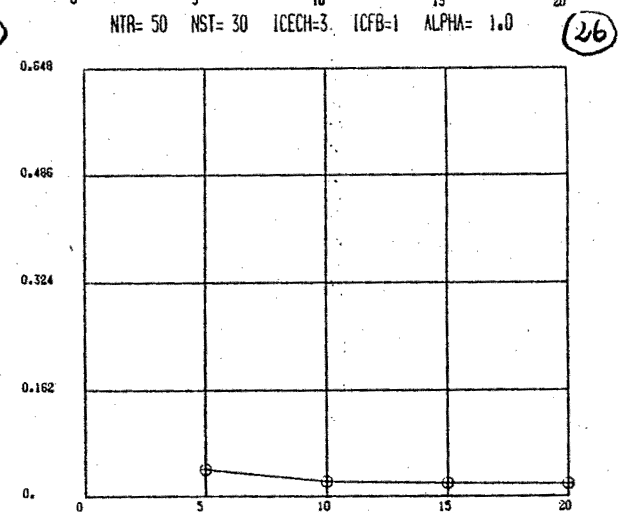
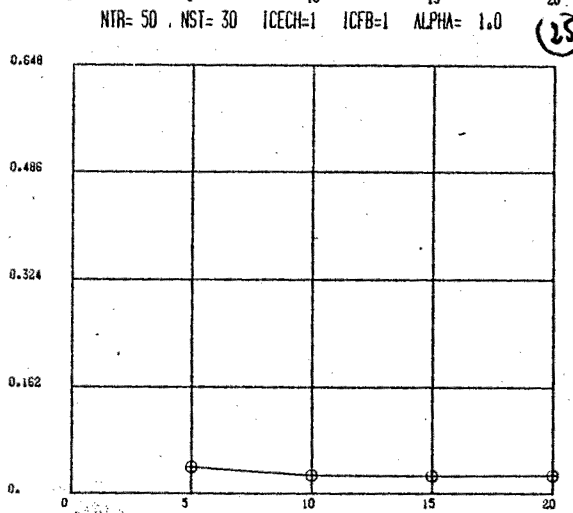
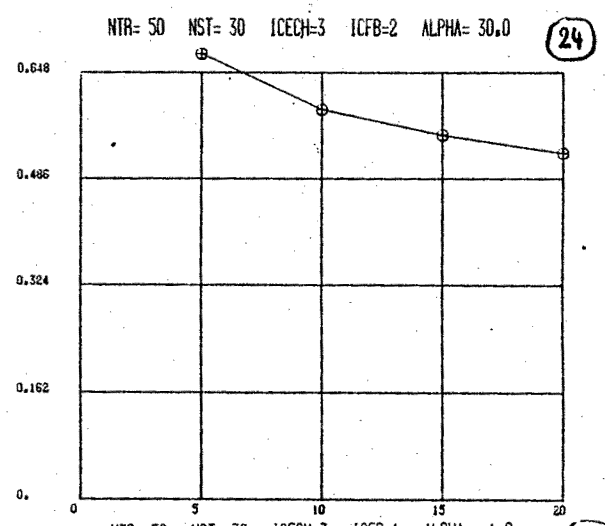
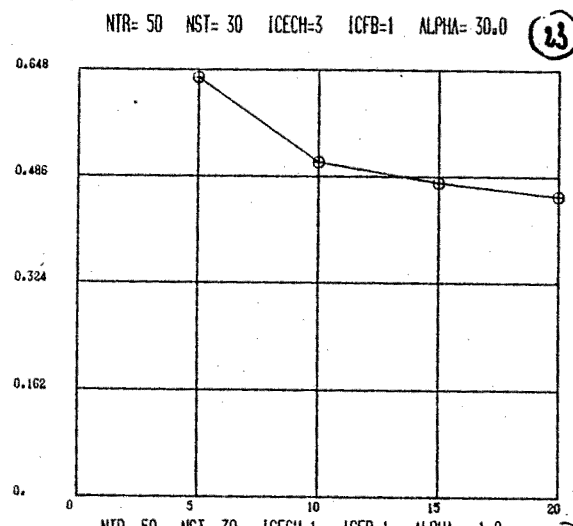
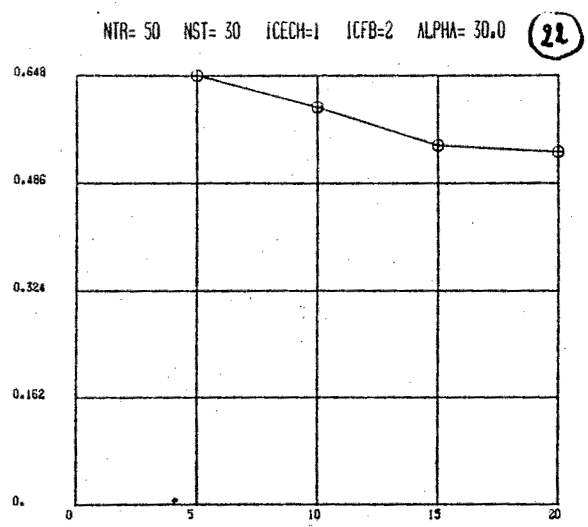
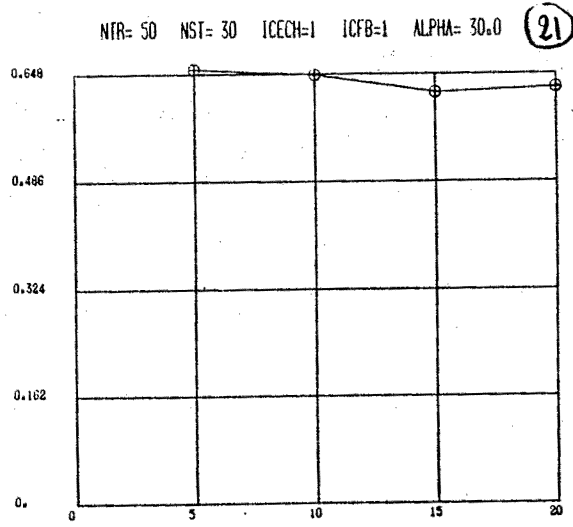


NTR= 50 NST= 20 ICECH=3 ICFB=2 ALPHA= 8.0

(18)







En conclusion, certains aspects remarquables du fonctionnement de la technique d'ACPP (de la boîte ) sont apparus aux 3 niveaux de résultats de simulation obtenus à partir de l'exemple de covariance considéré. Ainsi :

- pour un nombre NST de points d'observation donné, il semble que le cumul des réalisations (NTR) ne modifie pas sensiblement la qualité de reconstitution et stabilise sans la réduire la dispersion des écarts de reconstitution.
- le choix des fonctions d'interpolation doit être lié au mode de discrétisation et l'interpolation par fonctions affines par morceaux ne fournit pas toujours une qualité meilleure particulièrement dans le cas de localisation aléatoire des points d'observation.
- le nombre de fonctions propres à retenir doit être choisi judicieusement, plutôt petit que trop grand, de sorte à tronquer la décomposition à un niveau fiable. Ce niveau peut être lié au mode d'interpolation.
- le rapport de la longueur de l'intervalle d'étude à la portée de corrélation a un effet primordial sur la qualité d'approximation.

Enfin, notons que nos simulations fournissent une justification empirique de la légitimité de l'approximation de l'ACPP. Au niveau 1, nous avons pu noter une convergence assez rapide des éléments propres approchés vers les éléments correspondants théoriques lorsque le nombre NST de points de discrétisation et le nombre NTR de réalisations tendent vers l'infini.

Avant de clore ce chapitre, il est utile de rappeler que ces résultats partiels sont relatifs à une fonction de covariance donnée. D'autres essais expérimentaux sont nécessaires pour donner une base rigoureuse à toute interprétation, sans quoi, au niveau scientifique, "cette interprétation pourrait avoir autant de valeur que les observations des enfants qui voient des châteaux dans les nuages".

| CP.<br>Situation | 1                    | 2                    | 3                     | 4                     | 5                     | 6                     | 7                     | 8                    | 9                    | 10                   |
|------------------|----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
|                  | .227                 | .177                 | .127                  | .090                  | .064                  | .047                  | .036                  | .028                 | .022                 | .018                 |
| 1                | -.066<br>.251        | -.010<br>.173        | .031<br>.119          | .016<br>.088          | .031<br>.072          | -.019<br>.051         | -.051<br>.039         | .050<br>.022         | .009<br>.018         | -.035<br>.016        |
| 2                | -.066<br>.249        | -.010<br>.170        | .034<br>.116          | .018<br>.083          | -.030<br>.071         | -.023<br>.046         | .038<br>.036          | .054<br>.018         | .008<br>.015         | .037<br>.012         |
| 3                | -.067<br>.310        | -.049<br>.160        | -.034<br>.124         | .018<br>.100          | -.023<br>.075         | -.020<br>.048         | .023<br>.041          | .029<br>.025         | .004<br>.023         | -.031<br>.019        |
| 4                | -.060<br>.333        | -.051<br>.148        | -.035<br>.115         | .023<br>.086          | -.023<br>.071         | -.032<br>.099         | -.002<br>.031         | -.005<br>.021        | -.010<br>.015        | -.034<br>.013        |
| 5                | -.087<br>.223        | .063<br>.162         | -.022<br>.139         | .015<br>.092          | .025<br>.067          | .010<br>.054          | .044<br>.033          | .025<br>.026         | .003<br>.023         | .010<br>.019         |
| 6                | -.086<br>.230        | .058<br>.172         | -.035<br>.138         | .031<br>.097          | -.005<br>.060         | .019<br>.049          | -.037<br>.028         | .013<br>.019         | -.022<br>.018        | -.020<br>.016        |
| 7                | -.004<br>.301        | -.033<br>.197        | .001<br>.109          | -.107<br>.075         | -.013<br>.073         | .042<br>.047          | .007<br>.040          | -.038<br>.023        | -.018<br>.018        | .030<br>.015         |
| 8                | .035<br>.254         | -.006<br>.162        | -.064<br>.114         | .127<br>.085          | -.022<br>.075         | .003<br>.045          | .022<br>.036          | .016<br>.025         | .010<br>.019         | .017<br>.013         |
| 9                | .007<br>.251         | .017<br>.144         | .006<br>.115          | .024<br>.097          | -.003<br>.063         | -.009<br>.043         | -.017<br>.036         | .012<br>.029         | .019<br>.018         | -.018<br>.017        |
| 10               | -.044<br>.323        | -.014<br>.199        | -.004<br>.119         | .013<br>.096          | .023<br>.060          | .077<br>.029          | .051<br>.030          | -.008<br>.026        | .001<br>.018         | .033<br>.014         |
| 11               | .015<br>.242         | .031<br>.191         | -.020<br>.118         | .001<br>.100          | .019<br>.051          | .012<br>.046          | -.049<br>.038         | .042<br>.024         | .006<br>.021         | .018<br>.018         |
| 12               | .007<br>.243         | -.019<br>.177        | .020<br>.112          | .027<br>.087          | .012<br>.072          | -.007<br>.049         | .012<br>.036          | -.007<br>.049        | .012<br>.036         | .002<br>.017         |
| 13               | -.031<br>.248        | -.061<br>.154        | .062<br>.122          | .069<br>.097          | .009<br>.060          | -.010<br>.031         | -.001<br>.033         | .010<br>.020         | .023<br>.031         | .013<br>.014         |
| 14               | -.030<br>.246        | -.063<br>.151        | .055<br>.124          | .070<br>.091          | .012<br>.058          | -.007<br>.028         | -.003<br>.028         | .012<br>.016         | .020<br>.023         | .010<br>.010         |
| 15               | -.098<br>.259        | -.073<br>.188        | .070<br>.100          | .005<br>.104          | .005<br>.103          | .014<br>.048          | .041<br>.036          | .003<br>.018         | -.005<br>.026        | -.003<br>.014        |
| 16               | -.047<br>0.272       | .095<br>-.182        | -.061<br>.091         | .037<br>.082          | -.005<br>.085         | .021<br>.028          | .028<br>.029          | .001<br>.012         | -.004<br>.016        | -.007<br>.011        |
| 17               | -.114<br>.180        | .037<br>.242         | -.007<br>.123         | -.017<br>.081         | .012<br>.063          | .023<br>.099          | -.028<br>.027         | .002<br>.032         | .011<br>.019         | .002<br>.021         |
| 18               | -.125<br>.209        | -.001<br>.259        | .012<br>.116          | .009<br>.070          | .001<br>.050          | -.033<br>.020         | -.013<br>.032         | .001<br>.022         | -.004<br>0.012       | -.001<br>.013        |
|                  | .739                 | .138                 | .045                  | .021                  | .012                  | .008                  | .006                  | .004                 | .003                 | .002                 |
| 19               | -.035<br>.592        | .053<br>.113         | .008<br>.049          | .004<br>.021          | .002<br>.014          | .007<br>.007          | .002<br>.006          | .024<br>.002         | -.004<br>.002        | .013<br>.002         |
| 20               | .066<br>.031<br>.112 | .064<br>.011<br>.089 | .061<br>-.032<br>.072 | .058<br>-.028<br>.069 | .054<br>-.030<br>.057 | .049<br>-.060<br>.052 | .045<br>-.038<br>.045 | .041<br>.038<br>.031 | .037<br>.014<br>.031 | .034<br>.052<br>.027 |

**TABEAU 1 :** Pour chaque situation (en ligne) et pour chaque composante principale (en colonne)  $c_i$  :  $i=1,10$ , nous avons porté la moyenne (à gauche) et la variance (à droite) empiriques. les variances théoriques (égales aux valeurs propres théoriques  $\lambda_i$ ) sont portées dans les cases ouvertes.

| SITEST<br>Situation | 1                      | 2                      | 3                      | 4                      | 5                      | 6                      | 7                      | 8                      | 9                      | 10                     |
|---------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| 1                   | .028<br>.412<br>- .071 | .167<br>.453<br>- .006 | .203<br>.420<br>- .063 | .176<br>.473<br>- .049 | .068<br>.473<br>- .049 | .224<br>.473<br>- .049 | .249<br>.502<br>- .018 | .491<br>.491<br>- .018 | .236<br>.490<br>- .019 | .140<br>.490<br>- .019 |
| 2                   | .483<br>.043<br>.370   | .234<br>.454<br>.455   | .202<br>.491<br>.414   | .241<br>.502<br>.437   | .197<br>.447<br>.484   | .197<br>.412<br>.400   | .172<br>.511<br>.663   | .257<br>.487<br>.553   | .233<br>.402<br>.482   | .187<br>.487<br>.482   |
| 3                   | .019<br>.428<br>.028   | .180<br>.401<br>.019   | .160<br>.446<br>.053   | .195<br>.501<br>- .062 | .248<br>.444<br>.065   | .196<br>.449<br>- .089 | .197<br>.840<br>- .082 | .693<br>.448<br>.115   | .197<br>.393<br>.033   | .177<br>.454<br>- .054 |
| 4                   | .414<br>- .019<br>.535 | .169<br>.396<br>.280   | .154<br>.386<br>.108   | .149<br>.410<br>.452   | .169<br>.169<br>.202   | .114<br>.519<br>.035   | .271<br>.333<br>.033   | .115<br>.540<br>.151   | .299<br>.341<br>.066   | .115<br>.398<br>- .060 |
| 5                   | .071<br>.469<br>.094   | .218<br>.426<br>.044   | .231<br>.489<br>- .038 | .223<br>.385<br>.014   | .148<br>.374<br>- .109 | .139<br>.415<br>.041   | .167<br>.425<br>.002   | .176<br>.498<br>- .006 | .240<br>.477<br>.068   | .228<br>.447<br>.046   |
| 6                   | .052<br>.442<br>.469   | .200<br>.449<br>.222   | .223<br>.476<br>.012   | .199<br>.450<br>.009   | .163<br>.392<br>- .006 | .184<br>.432<br>.020   | .189<br>.439<br>- .024 | .180<br>.429<br>- .021 | .240<br>.491<br>.043   | .235<br>.487<br>- .062 |
| 7                   | .066<br>.384<br>.147   | .197<br>.386<br>.149   | .236<br>.345<br>.122   | .239<br>.380<br>.140   | .240<br>.462<br>.207   | .211<br>.459<br>.205   | .254<br>.329<br>.108   | .249<br>.489<br>.231   | .239<br>.491<br>.233   | .265<br>.512<br>.026   |
| 8                   | .066<br>.384<br>.147   | .197<br>.386<br>.149   | .236<br>.345<br>.122   | .239<br>.380<br>.140   | .240<br>.462<br>.207   | .211<br>.459<br>.205   | .254<br>.329<br>.108   | .249<br>.489<br>.231   | .239<br>.491<br>.233   | .265<br>.512<br>.026   |
| 9                   | .066<br>.384<br>.147   | .197<br>.386<br>.149   | .236<br>.345<br>.122   | .239<br>.380<br>.140   | .240<br>.462<br>.207   | .211<br>.459<br>.205   | .254<br>.329<br>.108   | .249<br>.489<br>.231   | .239<br>.491<br>.233   | .265<br>.512<br>.026   |
| 10                  | .066<br>.384<br>.147   | .197<br>.386<br>.149   | .236<br>.345<br>.122   | .239<br>.380<br>.140   | .240<br>.462<br>.207   | .211<br>.459<br>.205   | .254<br>.329<br>.108   | .249<br>.489<br>.231   | .239<br>.491<br>.233   | .265<br>.512<br>.026   |

| SITEST<br>Situation | 1                    | 2                     | 3                     | 4                     | 5                    | 6                     | 7                     | 8                    | 9                     | 10                  |
|---------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|----------------------|-----------------------|---------------------|
| 11                  | .047<br>.396<br>.054 | -.038<br>.188<br>.436 | -.025<br>.187<br>.437 | -.050<br>.143<br>.379 | .036<br>.231<br>.485 | -.011<br>.201<br>.452 | -.016<br>.152<br>.393 | .026<br>.236<br>.490 | -.068<br>.211<br>.459 | .048<br>.20<br>.459 |
| 12                  | .433<br>.012         | .474<br>-.087         | .505<br>-.022         | .455<br>-.001         | .472<br>-.006        | .500<br>.129          | .437<br>.157          | .504<br>.113         | .499<br>-.043         | .469<br>-.037       |
| 13                  | .565<br>.089         | .455<br>-.145         | .530<br>-.055         | .593<br>.008          | .435<br>-.018        | .534<br>.059          | .454<br>.076          | .546<br>.081         | .505<br>-.024         | .483<br>.005        |
| 14                  | .513<br>.137         | .494<br>-.059         | .504<br>-.048         | .601<br>-.002         | .534<br>.007         | .491<br>.081          | .523<br>.049          | .484<br>-.010        | .512<br>-.098         | .492<br>-.008       |
| 15                  | .510<br>.103         | .395<br>-.109         | .457<br>-.086         | .540<br>-.016         | .453<br>-.000        | .462<br>.067          | .692<br>.054          | .786<br>.058         | .825<br>-.030         | .541<br>-.017       |
| 16                  | .519<br>-.019        | .437<br>.017          | .462<br>-.011         | .512<br>.037          | .514<br>.054         | .511<br>.009          | .728<br>.002          | .802<br>-.032        | .726<br>.025          | .483<br>.028        |
| 17                  | .300<br>.003         | .432<br>.058          | .251<br>.031          | .262<br>.119          | .415<br>.085         | .209<br>.256          | .247<br>.308          | .442<br>-.028        | .408<br>.055          | .492<br>.069        |
| 18                  | .559<br>-.025        | .637<br>-.005         | .433<br>-.032         | .630<br>.004          | .405<br>-.013        | 1.276<br>-.021        | 1.554<br>.007         | .424<br>-.005        | .449<br>.064          | .416<br>-.016       |
| 19                  | .296<br>-.047        | .264<br>.057          | .266<br>-.083         | .266<br>.128          | .259<br>-.075        | .222<br>-.066         | .278<br>.042          | .309<br>-.066        | .254<br>.294          | .301<br>-.127       |
| 20                  | .841<br>.695         | .755<br>.561          | .814<br>.656          | .790<br>.628          | .700<br>.485         | .733<br>.531          | .837<br>.689          | .776<br>.594         | .710<br>.581          | .759<br>.581        |

TABLEAU 2 . Pour chaque situation de 1 à 20, et pour chaque station test de 1 à 10, nous avons noté, à gauche, la valeur moyenne (en haut) et l'écart type (en bas), et, à droite, l'erreur quadratique moyenne des écarts de reconstitutions.

| NFP<br>Situation | 5            | 10           | 15           | 20           |
|------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1                | .736<br>.268 | .895<br>.207 | .953<br>.200 | .981<br>.205 |
| 2                | .782<br>.306 | .932<br>.221 | .974<br>.199 | .991<br>.191 |
| 3                | .772<br>.287 | .931<br>.221 | .973<br>.225 | .990<br>.235 |
| 4                | .822<br>.317 | .953<br>.245 | .984<br>.227 | .995<br>.220 |
| 5                | .738<br>.303 | .905<br>.171 | .967<br>.151 | .991<br>.142 |
| 6                | .793<br>.397 | .941<br>.285 | .982<br>.267 | .996<br>.254 |
| 7                | .782<br>.323 | .932<br>.192 | .978<br>.168 | .992<br>.161 |
| 8                | .763<br>.313 | .912<br>.201 | .960<br>.171 | .981<br>.158 |
| 9                | .728<br>.353 | .884<br>.235 | .939<br>.194 | .965<br>.170 |
| 13               | .712<br>.323 | .874<br>.265 | .947<br>.302 | 1.<br>.350   |
| 14               | .785<br>.349 | .934<br>.265 | .979<br>.243 | 1.<br>.239   |
| 15               | .767<br>.353 | .928<br>.338 | .979<br>.336 | 1.<br>.332   |
| 16               | .822<br>.377 | .957<br>.337 | .990<br>.313 | 1.<br>.310   |
| 17               | .780<br>.212 | .938<br>.127 | .987<br>.104 | 1.<br>.099   |
| 18               | .840<br>.690 | .968<br>.614 | .996<br>.587 | 1.<br>.576   |
| 19               | .966<br>.090 | .990<br>.074 | .996<br>.071 | .999<br>.070 |
| 20               | .532<br>.648 | .790<br>.600 | .908<br>.543 | .965<br>.533 |
| 21               | .956<br>.041 | .984<br>.028 | .993<br>.027 | .997<br>.028 |
| 22               | .964<br>.042 | .988<br>.023 | .996<br>.020 | .999<br>.019 |
| 23               | .514<br>.636 | .764<br>.508 | .906<br>.476 | .972<br>.456 |
| 24               | .579<br>.676 | .833<br>.591 | .942<br>.553 | .985<br>.525 |

**TABLEAU 3** : Pour chaque situation (en ligne) et pour chaque nombre de fonctions propres (NFP) retenues (en colonne), nous avons porté, à gauche, le pourcentage de variance expliquée et, à droite, la valeur moyenne sur 10 stations tests de l'erreur en moyenne quadratique des écarts de reconstitutions.

## REFERENCES





- 1 - ATTEIA M. Etude de certains noyaux et théorie des fonctions spline. Thèse. Grenoble, 1966.
- 2 - BESSE P. Approximation Spline de l'A.C.P. d'une fonction aléatoire. Publication du Laboratoire de Statistiques et Probabilités. Toulouse, N° 02-79, Mars 1979.
- 3 - BESSE P. Etude descriptive d'un processus. Approximation et Interpolation. Thèse de 3ème cycle, Toulouse, 1979.
- 4 - BOX G.E.P. and MULLER M.E.  
A note on the generation of random normal deviates,  
Ann. Math. Statist., 29, p. 610-11, 1958.
- 5 - BRILLINGER D.R. Time series. Data Analysis and theory.  
International Series in Decision Processus.  
Holt, Reinhart et Winston Ed., 1975.
- 6 - CREUTIN D. Méthodes d'interpolation optimale de champs hydrométéorologiques cévenoles. Thèse de Docteur-Ingénieur, U.S.M.G., Décembre 1979.
- 7 - CREUTIN D. et OBLED Ch. Objective analysis and mapping techniques for rainfall fields : an objective comparison. Wat. Ressources Res., vol. 18, N° 2, P. 413-431, 1982.
- 8 - DE BOOR C. A practical Guide to Splines. Springer-Verlag, New-York, 1978.
- 9 - DEVILLE J.C. Méthodes statistiques et numériques de l'analyse harmonique. Annales de l'INSEE, N° 15, Janvier-Avril 1974.

- 10 - DUC-JACQUET M. Approximation des fonctionnelles linéaires sur des espaces hilbertiens auto-reproduisants. Thèse. Grenoble, 1973.
- 11 - DOOB J.L. Stochastic Processes. Joh, Wilez, New York, 1953.
- 12 - DUCHON J. Interpolation des fonctions de 2 variables suivant le principe de la flexion des plaques minces. Rev. Automat. Inf. Rech. Oper., vol. 10, n° 12, p. 5-12, Décembre 1976.
- 13 - DUNFORD N. and SCHWARTZ J.T. Linear operators. Interscience Publishers, New York, 2<sup>nd</sup> Ed., 1964.
- 14 - ESCOUFIER Y. Echantillonnage dans une population de variables aléatoires réelles. Thèse, Publ. de l'I.S.U.P., vol. XIX, Fascicule 4, p. 1-47, Paris, 1970.
- 15 - ESCOUFIER Y., LOBERT A., CASTELLANI X. Interpolation et extrapolation de fonctions aléatoires en hydrologie, D.G.R.S.T. action concertée Eau-Rapport partiel, 1969.
- 16 - FORTUS M.I. Statistically orthogonal functions for a finite segment of a random process. Bull. (Izv.), Acad. Sci. U.R.S.S., Atmospheric and Oceanic Physics, 9, n° 1, p. 34-36, 1973.
- 17 - FORTUS M.I. Statistically Orthogonal Functions for a random field specified in a finite region of plane. Bull. (Izv.), Acad. Sci. U.S.S.R., Atmospheric and Oceanic Physics, 11, n° 11, p. 1107-12, 1975.
- 18 - FRANKLIN J.N. The covariance matrix of a continuons auto-regressive vector time-series. Ann. Math. Statist., 34, p. 1259-64, 1963.

- 19 - FRANKLIN J.N. Numerical simulation of stationary and non stationary Gaussian random processes, SIAM Rev., 7, p. 68-80, 1965.
- 20 - GANTMACHER F.R. Théorie des matrices. Théorie générale. Tome 1, Dunod, Paris, 1967.
- 21 - GRENANDER U. and SZEGO G. Toeplitz Forms and Their applications. University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1958.
- 22 - HULL T.E. and DOBELL A.R. Random number generators. SIAM Rev., 4, p. 230-54, 1962.
- 23 - HULL T.E. and DOBELL A.R.. Mixed congruential random number generator for binary machines. J. ACM, 11, p. 31-40, 1964.
- 24 - KARHUNEN K. On linear methods in probability theory. (I. Selin, transl.) RAND Corporation T-131, August 1960.
- 25 - LIPTSER R.S. et SHIRYAEV A.N.  
Statistics of random Process II. Applications.  
Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 19
- 26 - LOEVE M. Probability theory. 2<sup>nd</sup> Ed. Princeton, N.J. : Van Nostrand, 1960.
- 27 - MATHERON G. La théorie des variables régionalisées et ses applications. Les cahiers du C.M.M., Fasc. 5, 1970.
- 28 - MATHERON G. The turning bands : a method for simulating random functions in  $R^n$ . Ecole des mines, C.M.M., n° 303, 1972.

- 29 - MAZEROLLES-MONDOT A.M. Problèmes numériques et statistiques relatifs à l'analyse en composantes principales des variables à valeurs dans un espace de Hilbert. Thèse de 3ème cycle, Toulouse, Janvier 1979.
- 30 - MEJIA J.M. and R-ITURBE I. On the synthesis of random field sampling from the spectrum : an application to the generation of hydrologic spatial process. Wat. Ressources Res., vol. 10, n° 4, p. 705-711, Aug. 1974.
- 31 - MONTGLOU A. and WILSON J.L. The turning band method for simulation of random fields using line generation by spectral method. Wat. Resources Res., vol. 18, n° 5, p. 1379-1394, October 1982.
- 32 - OBLED Ch. Contribution à l'analyse des données en hydrométéorologie. Thèse, U.S.M.G., 1979.
- 33 - PHAM DINH TUAN Introduction à l'analyse statistique des séries chronologiques. Cours de D.E.A., U.S.M.G., 1981/1982.
- 34 - POUSSE A. et DAUXOIS J. Les analyses factorielles en calcul des probabilités et en statistique : essai d'étude synthétique. Thèse, Toulouse, 1976.
- 35 - PRIESTLEY M.B. Spectral analysis and time series. Volume 1. Academic Press, 1981.
- 36 - RIESZ F. et NAGY B.SZ. Leçons d'analyse fonctionnelle. Gauthier-Villars, 1968.

- 37 - RICE S.O. Mathematical analyses of random noise. Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, Edited by N. Wax, Dover, New York, 1954.
- 38 - ROMAIN Y. Etude asymptotique des approximations par échantillonnage de l'analyse en composantes principales d'une fonction aléatoire. Thèse de 3ème cycle, Toulouse, 1979.
- 39 - SAPORTA G. Méthodes exploratoires d'analyse de données temporelles. Thèse, Paris, 1981.
- 40 - SAUVAGET P. Rapport de DEA. Institut de Mécanique, INP. Grenoble, 1981
- 41 - SCHWARTZ L. Théorie des distributions. Hermann, Paris, 1966.
- 42 - SHINOZUKA M. and JAN C.M. Digital simulation of random process and its applications. J. Acoust. Soc. Am., 49, p. 357-367, 1971.
- 43 - SHUMAKER L.L. Spline functions : Basic theory  
A Wiley - Interscience publication, 1981.

DERNIERE PAGE D'UNE THESE

3<sup>E</sup> CYCLE, DOCTEUR INGÉNIEUR OU UNIVERSITÉ

Vu les dispositions de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu les rapports de M. Pham Dinh Tuan.....

M. Alain Le Breton.....

M. Gmar BOUHAPOU..... est autorisé  
à présenter une thèse en vue de l'obtention du grade de DOCTEUR 3<sup>e</sup> cycle  
Math. Appliquées (Statistique).....

Grenoble, le 6 FEV. 1984

Le Président de l'Université Scientifique  
et Médicale



M. TANCHE

*Tanche*