



HAL
open science

Calcul de la solution d'une équation intégrale singulière de Cauchy par itérations

Najib Guessous

► **To cite this version:**

Najib Guessous. Calcul de la solution d'une équation intégrale singulière de Cauchy par itérations. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I; Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 1984. Français. NNT: . tel-00311766

HAL Id: tel-00311766

<https://theses.hal.science/tel-00311766>

Submitted on 21 Aug 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble
et à
l'Institut National Polytechnique de Grenoble

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE 3ème CYCLE
Mathématiques appliquées
(Analyse numérique)

par

Najib GUESSOUS



**CALCUL DE LA SOLUTION D'UNE EQUATION
INTEGRALE SINGULIERE DE CAUCHY PAR ITERATIONS**



Thèse soutenue le 12 juin 1984 devant la Commission d'Examen :

Madame	F. CHATELIN	: Président
Messieurs	R. ROBERT	} Examineurs
	I.H. SLOAN	
	P. WITOMSKI	

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Année universitaire 1982-1983

Président de l'Université : M. TANCHE

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

(RANG A)

SAUF ENSEIGNANTS EN MEDECINE ET PHARMACIE

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

ARNAUD Paul	Chimie organique
ARVIEU Robert	Physique nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S.
AYANT Yves	Physique approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale C.N.R.S. (labo de magnétisme)
BARJON Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose-Biologie
BARRA Jean-René	Statistiques - Mathématiques appliquées
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude (M.)	Mathématiques pures
BERNARD Alain	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
BILLET Jean	Géographie
BONNIER Jean-Marie	Chimie générale
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
CRABBE Pierre (détaché)	C.E.R.M.O.
CYROT Michel	Physique du solide
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude (M.)	M.I.A.G. Mathématiques appliquées
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique

GASTINEL Noël	Analyse numérique - Mathématiques appliquées
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KAHANE André (détaché DAFCO)	Physique
KAHANE Josette	Physique
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
KUPTA Yvon	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Thermodynamique
LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires I.S.N.
LOUP Jean	Géographie
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAYNARD Roger	Physique du solide
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie (géologie)
MOZIERES Philippe	Spectrométrie - Physique
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (biologie végétale)
PAYAN Jean-Jacques (détaché)	Mathématiques pures
PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIAUX Jacques	Géologie
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
RICHARD Lucien	Biologie végétale
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
SENGEL Philippe	Biologie animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques pures
SOUTIF Michel	Physique
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEN Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VIALON Pierre	Géologie

PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

ADIBA Michel	Mathématiques pures
ARMAND Gilbert	Géographie

AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
BEGUIN Claude (M.)	Chimie organique
BOEHLER Jean-Paul	Mécanique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKOVE Claude (M.)	Géologie
LE BRETON Alain	Mathématiques appliquées
LONGEQUEUE Nicole	Sciences nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physiques
LUNA Domingo	Mathématiques pures
MASCLE Georges	Géologie
NEMOZ Alain	Thermodynamique (CNRS - CRTBT)
OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude (détaché)	Physique du solide
PIBOULE Michel	Géologie
PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
ROBERT Gilles	Mathématiques pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
ROSSI André	Physiologie végétale
SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
SARROT REYNAUD Jean	Géologie
SAXOD Raymond	Biologie animale
SOUTIF Jeanne	Physique
SCHOOL Pierre-Claude	Mathématiques appliquées
STUTZ Pierre	Mécanique
SUBRA Robert	Chimie
VIDAL Michel	Chimie organique
VIVIAN Robert	Géographie

INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE GRENOBLE

Année universitaire 1982-1983

Président de l'Université : D. BLOCH

**Vice-Président : René CARRE
Hervé CHERADAME
Marcel IVANES**

PROFESSEURS DES UNIVERSITES :

ANCEAU François	E.N.S.I.M.A.G.
BARRAUD Alain	E.N.S.I.E.G.
BAUDELET Bernard	E.N.S.I.E.G.
BESSON Jean	E.N.S.E.E.G.
BLIMAN Samuel	E.N.S.E.R.G.
BLOCH Daniel	E.N.S.I.E.G.
BOIS Philippe	E.N.S.H.G.
BONNETAIN Lucien	E.N.S.E.E.G.
BONNIER Etienne	E.N.S.E.E.G.
BOUVARD Maurice	E.N.S.H.G.
BRISSONNEAU Pierre	E.N.S.I.E.G.
BUYLE BODIN Maurice	E.N.S.E.R.G.
CAVAIGNAC Jean-François	E.N.S.I.E.G.
CHARTIER Germain	E.N.S.I.E.G.
CHENEVIER Pierre	E.N.S.E.R.G.
CHERADAME Hervé	U.E.R.M.C.P.P.
CHERUY Arlette	E.N.S.I.E.G.
CHIAVERINA Jean	U.E.R.M.C.P.P.
COHEN Joseph	E.N.S.E.R.G.
COUMES André	E.N.S.E.R.G.
DURAND Francis	E.N.S.E.E.G.
DURAND Jean-Louis	E.N.S.I.E.G.
FELICI Noël	E.N.S.I.E.G.
FOULARD Claude	E.N.S.I.E.G.
GENTIL Pierre	E.N.S.E.R.G.
GUERIN Bernard	E.N.S.E.R.G.
GUYOT Pierre	E.N.S.E.E.G.
IVANES Marcel	E.N.S.I.E.G.
JAUSSAUD Pierre	E.N.S.I.E.G.
JOUBERT Jean-Claude	E.N.S.I.E.G.
JOURDAIN Geneviève	E.N.S.I.E.G.
LACOUME Jean-Louis	E.N.S.I.E.G.
LATOMBE Jean-Claude	E.N.S.I.M.A.G.

.../...

LESSIEUR Marcel	E.N.S.H.G.
LESPINARD Georges	E.N.S.H.G.
LONGEQUEUE Jean-Pierre	E.N.S.I.E.G.
MAZARE Guy	E.N.S.I.M.A.G.
MOREAU René	E.N.S.H.G.
MORET Roger	E.N.S.I.E.G.
MOSSIERE Jacques	E.N.S.I.M.A.G.
PARIAUD Jean-Charles	E.N.S.E.E.G.
PAUTHENET René	E.N.S.I.E.G.
PERRET René	E.N.S.I.E.G.
PERRET Robert	E.N.S.I.E.G.
PIAU Jean-Michel	E.N.S.H.G.
POLOJADOFF Michel	E.N.S.I.E.G.
POUPOT Christian	E.N.S.E.R.G.
RAMEAU Jean-Jacques	E.N.S.E.E.G.
RENAUD Maurice	U.E.R.M.C.P.P.
ROBERT André	U.E.R.M.C.P.P.
ROBERT François	E.N.S.I.M.A.G.
SABONNADIÈRE Jean-Claude	E.N.S.I.E.G.
SAUCIER Gabrielle	E.N.S.I.M.A.G.
SCHLENKER Claire	E.N.S.I.E.G.
SCHLENKER Michel	E.N.S.I.E.G.
SERMET Pierre	E.N.S.E.R.G.
SILVY Jacques	U.E.R.M.C.P.P.
SOHM Jean-Claude	E.N.S.E.E.G.
SOUQUET Jean-Louis	E.N.S.E.E.G.
VEILLON Gérard	E.N.S.I.M.A.G.
ZADWORNY François	E.N.S.E.R.G.

PROFESSEURS ASSOCIES

BASTIN Georges	E.N.S.H.G.
BERRIL John	E.N.S.H.G.
CARREAU Pierre	E.N.S.H.G.
GANDINI Alessandro	U.E.R.M.C.P.P.
HAYASHI Hirashi	E.N.S.I.E.G.

PROFESSEURS UNIVERSITE DES SCIENCES SOCIALES (Grenoble II)

BOLLIET Louis
Chatelin Françoise

PROFESSEURS E.N.S. Mines de Saint-Etienne

RIEU Jean
SOUSTELLE Michel

CHERCHEURS DU C.N.R.S.

FRUCHART Robert
VACHAUD Georges

Directeur de Recherche
Directeur de Recherche

.../...

ALLIBERT Michel	Maître de Recherche
ANSARA Ibrahim	Maître de Recherche
ARMAND Michel	Maître de Recherche
BINDER Gilbert	
CARRE René	Maître de Recherche
DAVID René	Maître de Recherche
DEPORTES Jacques	
DRIOLE Jean	Maître de Recherche
GIGNOUX Damien	
GIVORD Dominique	
GUELIN Pierre	
HOPFINGER Emil	Maître de Recherche
JOURD Jean-Charles	Maître de Recherche
KAMARINOS Georges	Maître de Recherche
KLEITZ Michel	Maître de Recherche
LANDAU Ioan-Dore	Maître de Recherche
LASJAUNIAS J.C.	
MERMET Jean	Maître de Recherche
MUNIER Jacques	Maître de Recherche
PIAU Monique	
PORTESEIL Jean-Louis	
THOLENCE Jean-Louis	
VERDILLON André	

CHERCHEURS du MINISTERE de la RECHERCHE et de la TECHNOLOGIE (Directeurs et Maîtres de Recherches, ENS Mines de St. Etienne)

LESBATS Pierre	Directeur de Recherche
BISCONDI Michel	Maître de Recherche
KOBYLANSKI André	Maître de Recherche
LE COZE Jean	Maître de Recherche
LALAUZE René	Maître de Recherche
LANCELOT Francis	Maître de Recherche
THEVENOT François	Maître de Recherche
TRAN MINH Canh	Maître de Recherche

PERSONNALITES HABILITEES à DIRIGER des TRAVAUX de RECHERCHE (Décision du Conseil Scientifique)

ALLIBERT Colette	E.N.S.E.E.G.
BERNARD Claude	E.N.S.E.E.G.
BONNET Rolland	E.N.S.E.E.G.
CAILLET Marcel	E.N.S.E.E.G.
CHATILLON Catherine	E.N.S.E.E.G.
CHATILLON Christian	E.N.S.E.E.G.
COULON Michel	E.N.S.E.E.G.
DIARD Jean-Paul	E.N.S.E.E.G.
EUSTAPOPOULOS Nicolas	E.N.S.E.E.G.
FOSTER Panayotis	E.N.S.E.E.G.

.../...

GALERIE Alain	E.N.S.E.E.G.
HAMMOU Abdelkader	E.N.S.E.E.G.
MALMEJAC Yves	E.N.S.E.E.G. (CENG)
MARTIN GARIN Régina	E.N.S.E.E.G.
NGUYEN TRUONG Bernadette	E.N.S.E.E.G.
RAVAINE Denis	E.N.S.E.E.G.
SAINFORT	E.N.S.E.E.G. (CENG)
SARRAZIN Pierre	E.N.S.E.E.G.
SIMON Jean-Paul	E.N.S.E.E.G.
TOUZAIN Philippe	E.N.S.E.E.G.
URBAIN Georges	E.N.S.E.E.G. (Laboratoire des ultra-réfractaires ODEILLON)
GUILHOT Bernard	E.N.S. Mines Saint Etienne
THOMAS Gérard	E.N.S. Mines Saint Etienne
DRIVER Julien	E.N.S. Mines Saint Etienne
BARIBAUD Michel	E.N.S.E.R.G.
BOREL Joseph	E.N.S.E.R.G.
CHOVET Alain	E.N.S.E.R.G.
CHEHIKIAN Alain	E.N.S.E.R.G.
DOLMAZON Jean-Marc	E.N.S.E.R.G.
HERAULT Jeanny	E.N.S.E.R.G.
MONLLOR Christian	E.N.S.E.R.G.
BORNARD Guy	E.N.S.I.E.G.
DESCHIZEAU Pierre	E.N.S.I.E.G.
GLANGEAUD François	E.N.S.I.E.G.
KOFMAN Walter	E.N.S.I.E.G.
LEJEUNE Gérard	E.N.S.I.E.G.
MAZUER Jean	E.N.S.I.E.G.
PERARD Jacques	E.N.S.I.E.G.
REINISCH Raymond	E.N.S.I.E.G.
ALEMANY Antoine	E.N.S.H.G.
BOIS Daniel	E.N.S.H.G.
DARVE Félix	E.N.S.H.G.
MICHEL Jean-Marie	E.N.S.H.G.
OBLÉD Charles	E.N.S.H.G.
ROWE Alain	E.N.S.H.G.
VAUCLIN Michel	E.N.S.H.G.
WACK Bernard	E.N.S.H.G.
BERT Didier	E.N.S.I.M.A.G.
CALMET Jacques	E.N.S.I.M.A.G.
COURTIN Jacques	E.N.S.I.M.A.G.
COURTOIS Bernard	E.N.S.I.M.A.G.
DELLA DORA Jean	E.N.S.I.M.A.G.
FONLUPT Jean	E.N.S.I.M.A.G.
SIFAKIS Joseph	E.N.S.I.M.A.G.
CHARUEL Robert	U.E.R.M.C.P.P.
CADET Jean	C.E.N.G.
COEURE Philippe	C.E.N.G. (LETI)

.../...

DELHAYE Jean-Marc
DUPUY Michel
JOUVE Hubert
NICOLAU Yvan
NIFENECKER Hervé
PERROUD Paul
PEUZIN Jean-Claude
TAIEB Maurice
VINCENDON Marc

C.E.N.G. (STT)
C.E.N.G. (LETI)
C.E.N.G. (LETI)
C.E.N.G. (LETI)
C.E.N.G.
C.E.N.G.
C.E.N.G. (LETI)
C.E.N.G.
C.E.N.G.

LABORATOIRES EXTERIEURS

DEMOULIN Eric
DEVINE
GERBER Roland
MERCHEL Gérard
PAULEAU Yves
GAUBERT C.

C.N.E.T.
C.N.E.T. (R.A.B.)
C.N.E.T.
C.N.E.T.
C.N.E.T.
I.N.S.A. Lyon

à mes Parents;

*J'exprime toute ma reconnaissance à
Madame Françoise CHATELIN qui a dirigé cette thèse,
pour ses nombreux conseils et encouragements.*

*Je suis très sensible à l'honneur que me
fait Monsieur I.H. SLOAN en acceptant de siéger à
ce Jury.*

*Je remercie Monsieur R. ROBERT et
Monsieur P. WITOMSKI qui m'ont fait l'honneur de
participer au Jury.*

*Mes remerciements vont aussi à
Madame G. BICAÏS qui a assuré la dactylographie
du manuscrit et à toute l'équipe du service de
reprographie qui aura contribué à son impression.*

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

CHAPITRE 1

Rappels théoriques sur les équations intégrales singulières de Cauchy -----	3
--------------------------------------------------------------------------------	---

CHAPITRE 2

Méthodes directe et indirecte de résolution d'une équation intégrale singulière de Cauchy -----	9
2.1 Formules de quadratures approchées de Gauss-Jacobi -----	10
2.2 Méthode directe de résolution d'une E.I.S.C. -----	11
2.3 Méthode indirecte de résolution d'une E.I.S.C. -----	15
2.4 Equivalence entre la méthode directe et la méthode indirecte	18
2.5 Convergence -----	26

CHAPITRE 3

Méthodes itératives de résolution d'une E.I.S.C. -----	28
3.1 Intérêt du raffinement itératif -----	29
3.2 Méthodes de raffinement itératif -----	31
3.3 Algorithmes de résolution d'une E.I.S.C. par itérations ---	39
3.4 Expériences numériques -----	46
3.5 Conclusions -----	52

BIBLIOGRAPHIE -----	53
---------------------	----

NOTATIONS

- E.I.S.C. : Equation intégrale singulière de Cauchy
- E.I.F. : Equation intégrale de Fredholm
- $A = (a_{ij})$: matrice d'élément a_{ij} en ième ligne, jème colonne.
- I_N : matrice unité de taille N.
- $\mathcal{L}(X)$: l'espace des opérateurs linéaires bornés
 $T : X \rightarrow X$
- $\rho(T)$: l'ensemble résolvant de T où $T \in \mathcal{L}(X)$
 $\rho(T) = \{z \in \mathbb{C} ; (T-z)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$

INTRODUCTION

Beaucoup de problèmes aux limites mixtes rencontrés en élasticité se ramènent à la résolution d'une équation intégrale singulière de Cauchy de la forme :

$$a y(x) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{y(t)}{t-s} dt + \lambda \int_{-1}^1 K(x,t) y(t) dt = f(x) ; \quad |x| < 1$$

où a et b sont deux constantes réelles, K et f sont deux fonctions connues qui vérifient la condition de Hölder sur $[-1,1] \times [-1,1]$ et $[-1,1]$ respectivement.

En mécanique de la rupture, les propriétés de la solution d'une telle équation sont utilisées pour avoir une idée sur la propagation de la fissure, cf. ERDOGAN , GUPTA et COOK [20] et GERASOULIS et SRIVASTAV [15].

Parmi les grands travaux concernant la théorie des équations intégrales singulières de Cauchy, on cite par exemple les livres de GAKHOV [13] et de MUSKHELISHVILI [19], la transformation de Carleman-Vekua nous permet d'écrire une équation intégrale singulière de Cauchy, de façon équivalente, sous la forme d'une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce, cf. MUSKHELISHVILI [19].

Beaucoup de méthodes numériques ont été développées pour la résolution d'une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce. Cf ATKINSON [3], [4]; BRAKHAGE [5] ; CHATELIN [6] et SLOAN [21][22]

Pour une équation intégrale singulière de Cauchy, on peut envisager soit d'utiliser une méthode numérique directe basée sur des formules de quadratures approchées, soit d'utiliser une méthode indirecte qui consiste à résoudre l'équation intégrale de Fredholm équivalente.

Le premier chapitre est consacré à quelques rappels théoriques sur les équations intégrales singulières de Cauchy, la méthode de Carleman-Vekua y sera présentée.

Dans le deuxième chapitre, on propose une méthode directe basée sur deux formules de quadratures approchées. Une pour donner une approximation de la valeur principale de Cauchy et l'autre pour une approximation de l'intégrale régulière, une méthode indirecte sera obtenue en appliquant la méthode de Nyström à l'équation intégrale de Fredholm. On montrera que ces deux méthodes sont équivalentes, ceci va nous permettre d'appliquer les résultats de convergence déjà connus pour la méthode indirecte, afin de prouver la convergence de la méthode directe et de donner une estimation de l'erreur.

Le troisième chapitre sera consacré au raffinement d'une solution approchée par deux méthodes itératives, tenant compte de l'équivalence entre les deux méthodes directe et indirecte vues au chapitre 2, nous allons développer les variantes itératives de ATKINSON et de BRAKHAGE de la méthode de Nyström et les adapter à la résolution d'équations intégrales singulières de Cauchy. Des expériences numériques sont données à la fin du troisième chapitre qui confirment la supériorité déjà vérifiée de la variante de BRAKHAGE sur celle d'ATKINSON. Cf CHATELIN [6] et AHUES [1] dans le cas de problèmes aux valeurs propres.

CHAPITRE 1 - RAPPELS THEORIQUES SUR LES EQUATIONS INTEGRALES SINGULIERES DE CAUCHY

On va donner dans ce chapitre quelques notions fondamentales sur les équations intégrales singulières de Cauchy.

La méthode de Carleman-Vekua permettant de donner l'équivalence entre une équation intégrale singulière de Cauchy et une équation intégrale de Fredholm sera présentée.

1.1 - REDUCTION D'UNE E.I.S.C. EN UNE E.I.F. DE 2ème ESPECE

Définition 1.1.1.

Soit f une fonction définie sur $[-1,1]$, on dit que f vérifie la condition de Hölder d'ordre α sur $[-1,1]$ où $0 < \alpha \leq 1$. Si :

Il existe une constante $C \geq 0$ telle que :
pour tout $(t_1, t_2) \in [-1,1]^2$: $|f(t_1) - f(t_2)| \leq C|t_1 - t_2|^\alpha$.

Soit $H_\alpha([-1,1])$ l'espace des fonctions vérifiant la condition de Hölder d'ordre α . On muni $H_\alpha([-1,1])$ de la norme de Hölder $\|\cdot\|_H$ définie par :

$$\|f\|_H = \|f\|_\infty + \sup_{\substack{-1 < t, t' \leq 1 \\ t \neq t'}} \frac{|f(t) - f(t')|}{|t - t'|^\alpha}$$

Il est clair que : $H_\alpha([-1,1]) \subset C([-1,1])$.

Si $f \in H_\alpha([-1,1])$ alors $\int_{-1}^{+1} \frac{f(s)}{s-t} ds$ existe en tant que valeur principale de Cauchy, pour tout $t \in [-1,1]$.

De même si $K(x,t)$ est définie sur $[-1,1]^2$ on dira que K vérifie la condition de Hölder d'ordre α : $0 < \alpha \leq 1$.

Si il existe une constante $C \geq 0$ telle que :

$$|K(s,t)-K(s',t')| \leq C(|s-s'|^\alpha + |t-t'|^\alpha)$$

pour tout $(s,t), (s',t') \in [-1,1]^2$.

Soit $H^*([-1,1])$ l'espace des fonctions ϕ définies sur $[-1,1]$ et vérifiant :

- i) ϕ vérifie la condition de Hölder sur tout sous intervalle fermé de $]-1,1[$.
- ii) $\phi(t) = \frac{\phi^*(t)}{(t-c)^\mu}$ au voisinage de $C = \pm 1$; $0 \leq \mu < 1$. ϕ^* vérifie la condition de Hölder

Remarque 1.1.1

- 1) $H_\alpha([-1,1]) \subset H^*([-1,1])$.
- 2) Si $\phi \in H^*([-1,1])$ alors $\int_{-1}^1 \frac{\phi(t)}{t-s} dt$ existe en tant que valeur principale de Cauchy, pour tout $s \in [-1,1]$.
- 3) Si $\phi \in H^*([-1,1])$ alors ϕ peut admettre des singularités en -1 et 1 au plus intégrables.

On considère l'E.I.S.C. suivante :

$$(1.1.1) \quad a g(s) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(t)}{t-s} dt + \lambda \int_{-1}^1 K(s,t) g(t) dt = f(s) ; \quad |s| < 1.$$

a, b sont deux constantes réelles telles que : $a^2 + b^2 = 1$, f et K sont deux fonctions connues vérifiant la condition de Hölder d'ordre α ($0 < \alpha \leq 1$) sur $[-1,1]$ et $[-1,1] \times [-1,1]$ respectivement.

On cherche les solutions de l'équation (1.1.1) appartenant à l'espace $H^*([-1,1])$.

Proposition 1.1.1.

Si g est une solution de (1.1.1) appartenant à $H^*([-1,1])$ alors g peut s'écrire : $g(t) = w(t)\phi(t)$, où ϕ vérifie la condition de Hölder et $w(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$, α et β sont définis par :

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \log \frac{a-ib}{a+ib} + \nu$$

(1.1.2)

$$\beta = -\frac{1}{2\pi i} \log \frac{a-ib}{a+ib} + \nu'$$

ν et ν' sont deux entiers choisis de telle façon que $-1 < \alpha < 1$ et $-1 < \beta < 1$.

Preuve :

Cf. MUSKHELISHVILI [19].

Dans toute la suite, on supposera $b \neq 0$ (si $b = 0$, l'équation (1.1.1) se réduit à une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce).

Suivant des différents choix possibles pour ν_1 et ν_2 , on aura quatre types de solutions de (1.1.1) appartenant à $H^*([-1,1])$.

- 1) $-1 < \alpha < 0$ et $0 < \beta < 1$:
Solution bornée en -1 et non bornée avec une singularité intégrable en $+1$.
- 2) $-1 < \alpha < 0$ et $-1 < \beta < 0$:
solution non bornée avec une singularité intégrable en -1 et 1 .
- 3) $0 < \alpha < 1$ et $-1 < \beta < 0$:
solution bornée en 1 et non bornée avec une singularité intégrable en -1 .
- 4) $0 < \alpha < 1$ et $0 < \beta < 1$:
solution bornée en -1 et 1 .

Définition 1.1.2

Pour chaque type de solution de l'E.I.S.C. (1.1.1.) dans $H^*([-1,1])$. On définit l'indice χ de l'E.I.S.C. (1.1.1.) par :

$$\chi = -(\alpha + \beta) = -(\nu + \nu')$$

Il est clair de voir que χ ne peut prendre que les valeurs $-1, 0$ ou 1 .

$\chi = 1$ correspond aux solutions de type 4)

$\chi = -1$ correspond aux solutions de type 2)

$\chi = 0$ correspond aux solutions de types 1) et 3).

D'après la proposition 1.1.1. l'E.I.S.C. (1.1.1) peut s'écrire :

$$(1.1.3) \quad aw(s)\phi(s) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^{+1} w(t) \frac{\phi(t)}{t-s} dt + \lambda \int_{-1}^{+1} K(s,t)w(t)\phi(t)dt = f(s)$$

$$|s| < 1.$$

Considérons les deux opérateurs K^0 et K^1 définis par :

$$K^0\phi = aw(t)\phi(t) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^{+1} w(s) \frac{\phi(s)}{s-t} ds.$$

$$K^1\phi = \int_{-1}^{+1} w(s) K(t,s)\phi(s)ds.$$

il est facile de vérifier que si $\phi \in H_{\alpha}([-1,1])$ alors $K^0\phi$ et $K^1\phi$ vérifient la condition de Hölder. On écrit l'équation (1.1.3) sous la forme :

$$(1.1.4) \quad K^0\phi + \lambda K^1\phi = f.$$

On va s'intéresser d'abord à la résolution de l'E.I.S.C. :

$$(1.1.5) \quad K^0\phi = h ; \quad \text{où } h \in H_{\alpha}([-1,1]).$$

THEOREME 1.1.1.

Soit χ l'indice de l'équation (1.1.5)

- i) Si $\chi=1$, alors l'équation (1.1.5) admet une solution non bornée en -1 et 1 , non unique définie par :

$$(1.1.6) \quad \phi(s) = a \frac{h(s)}{w(s)} - \frac{b}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{h(t)}{w(t)} \frac{dt}{t-s} + \frac{b}{\pi} C$$

où C est une constante arbitraire.

ii) Si $\chi = 0$, alors l'équation (1.1.5) admet une solution unique définie par (1.1.6) avec $C = 0$.

iii) Si $\chi = -1$, alors l'équation (1.1.5) admet une solution si et seulement si la condition de compatibilité suivante est vérifiée :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{h(t)}{w(t)} dt = 0. \text{ Dans ce cas on a une solution unique définie par (1.1.6) avec } C = 0.$$

Preuve :

Cf. MUSKHELISHVILI [19].

Considérons l'opérateur intégrale singulier \tilde{K} défini par :

$$\tilde{K}\phi(s) = a w^*(s)\phi(s) - \frac{b}{\pi} \int_{-1}^{+1} w^*(t)\phi(t) \frac{dt}{t-s}$$

où $w^*(s) = 1/w(s)$.

dans (1.1.5) remplaçons h par $f - \lambda K^1\phi$, alors d'après le théorème 1.1.1 l'équation (1.1.4) peut être réduite à l'équation suivante :

$$(1.1.7) \quad \phi(t) + \lambda \tilde{K} K^1\phi(t) = \tilde{K} f(t) + \frac{b}{\pi} C$$

où C est une constante arbitraire, de plus :

si $\chi = 1$ l'équation (1.1.4) ou (1.1.3) est équivalente à l'équation (1.1.7)

si $\chi = 0$, on a équivalence avec $C = 0$.

si $\chi = -1$, on a équivalence pourvu que $\int_{-1}^{+1} w^*(t)(f(t) - \lambda K^1\phi(t)) dt = 0$
dans ce cas $C = 0$.

Proposition 1.1.2

Supposons que $K(s,t) \in C^1([-1,1] \times [-1,1])$ et $f \in C^1([-1,1])$ pour tout $x \in [-1,1]$ considérons la fonction $L(x, \cdot) = \tilde{K} K(\cdot, x)$ et soit $F = \tilde{K} f + \frac{b}{\pi} C$ alors :

i) $L(x,t) \in C([-1,1] \times [-1,1])$

ii) $F(t) \in C([-1,1])$

iii) l'opérateur $\mathcal{L} : C[-1,1] \rightarrow C[-1,1]$ défini par

$$(1.1.8) \quad \mathcal{L}\phi(t) = \int_{-1}^{+1} w(x) L(x,t)\phi(x)dx$$

est compacte.

Preuve :

triviale.

On supposera dans toute la suite que $L(x,t)$ et $F(t)$ sont continues.

Il est facile de vérifier que l'équation (1.1.7) est une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce et s'écrit :

$$(1.1.9) \quad \phi + \lambda \mathcal{L}\phi = F.$$

où \mathcal{L} est l'opérateur intégral compact défini par (1.1.8) et $F = \tilde{K} f + \frac{b}{\pi} C$.

CHAPITRE 2 - METHODES DIRECTE ET INDIRECTE DE RESOLUTION D'UNE
EQUATION INTEGRALE SINGULIERE DE CAUCHY

- 2.1 Formules de quadratures approchées de Gauss-Jacobi.
- 2.2 Méthode directe de résolution d'une E.I.S.C.
- 2.3 Méthode indirecte de résolution d'une E.I.S.C.
- 2.4 Equivalence entre la méthode directe et la méthode indirecte
- 2.5 Convergence

2.1 - FORMULES DE QUADRATURES APPROCHEES DE GAUSS-JACOBI

Soit $w(t) = (1-t)^\alpha(1+t)^\beta$ avec $-1 < \alpha, \beta < 1$. $P_n^{(\alpha, \beta)}$ est le polynôme de Jacobi de degré n associé à la fonction poids $w(t)$ sur $[-1, 1]$.

$\{P_n^{(\alpha, \beta)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système de polynômes orthogonaux par rapport à $w(t)$ sur $[-1, 1]$, cf. STROUD et SECREST [21]; DAVIS et RABINOWITZ [10].

Si $\{t_j\}_{j=1}^n$ sont les racines de $P_n^{(\alpha, \beta)}$, alors pour toute fonction $h \in C[-1, 1]$, on a la formule de quadrature approchée :

$$(2.1.1) \quad \int_{-1}^1 w(t) h(t) dt \approx \sum_{j=1}^n w_j h(t_j)$$

les poids $\{w_j\}_{j=1}^n$ sont donnés par :

$$w_j = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{2} \frac{P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(t_j)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(t_j)} ; \quad j = 1, \dots, n.$$

où Γ désigne la fonction Γ , on a la formule suivante :

$$(2.1.2) \quad \Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

La formule (2.1.1) est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2n-1$, et n'est valable que dans le cas de fonctions continues sur $[-1, 1]$. Dans le cas d'une valeur principale de Cauchy, on a la formule suivante :

$$(2.1.3) \quad \int_{-1}^1 w(t) \frac{\phi(t)}{t-s} dt \approx \sum_{j=1}^n w_j \frac{\phi(t_j)}{t_j-s} - 2 \frac{\Psi_n^{(\alpha, \beta)}(s)}{P_n^{(\alpha, \beta)}(s)} \phi(s)$$

avec

$$s \neq t_j ; \quad j = 1, \dots, n$$

et

$$\Psi_n^{(\alpha, \beta)}(t) = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 w(s) \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(s)}{s-t} ds$$

La formule (2.1.3) est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2n$.

2.2. - METHODE DIRECTE DE RESOLUTION D'UNE E.I.S.C.

Considérons l'E.I.S.C. :

$$(2.2.1) \quad aw(t)\phi(t) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{w(s)\phi(s)}{s-t} ds + \lambda \int_{-1}^{+1} w(s) K(t,s)\phi(s) ds = f(t)$$

$$-1 < t < 1.$$

On va supposer que l'indice χ de (2.2.1) vaut 1, et a, b, f, K sont donnés et vérifient les hypothèses du chapitre 1.

La deuxième intégrale de (2.2.1) sera approchée, en utilisant la formule (2.1.2) par :

$$(2.2.2) \quad \int_{-1}^{+1} w(s) K(t,s)\phi(s) ds \approx \sum_{j=1}^n w_j K(t, t_j)\phi(t_j)$$

pour tout $t \in [-1, 1]$.

Pour approcher $K^0\phi(t)$ on va utiliser la formule suivante : cf. KRENK, S [17]

$$(2.2.3) \quad aw(t) p_n^{(\alpha, \beta)}(t) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^{+1} w(s) \frac{p_n^{(\alpha, \beta)}(s)}{s-t} ds = - \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{2\pi} b p_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(t)$$

Proposition 2.2.1

Pour tout $t \in [-1, 1]$ $t \neq t_j$ $j = 1, \dots, n$ on a l'approximation de $K^0\phi(t)$ par :

$$(2.2.4) \quad K^0\phi(t) = \frac{b}{\pi} \sum_{j=1}^n w_j \frac{\phi(t_j)}{t_j - t} - \frac{b}{2 \sin \pi \alpha} \frac{p_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(t)}{p_n^{(\alpha, \beta)}(t)} \phi(t)$$

$$t \neq t_j ; j = 1, \dots, n$$

exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à $2n$.

Preuve :

immédiate d'après les formules (2.1.3) et (2.2.3).

Puisque $\chi = 1$, on a vu au chapitre 1 que l'équation (2.2.1) est équivalente à l'équation intégrale de Fredholm :

$$(2.2.5) \quad \phi + \lambda \mathcal{L} \phi = F$$

où \mathcal{L} est définie par (1.1.8) et F est donnée dans la proposition 1.1.2 par : $F = \tilde{K} f + \frac{b}{\pi} C$, C est une constante arbitraire.

Supposons que $-\lambda^{-1}$ n'est pas valeur propre de \mathcal{L} , alors l'équation (2.2.5) admet une solution unique pour tout C fixé. L'équation (2.2.1) n'aura donc pas une solution unique puisque C est arbitraire. Pour assurer l'unicité, on est obligé d'ajouter une condition qui fixe C . On va considérer la condition suivante :

$$(2.2.6) \quad \int_{-1}^{+1} w(t)\phi(t) dt = N, \text{ ou } N \text{ est une constante donnée.}$$

Détermination de C :

L'équation (2.2.1) peut s'écrire : $K^0 \phi + \lambda K^1 \phi = f$.

Posons $h = f - \lambda K^1 \phi$, alors on aura :

$$K^0 \phi = h \Leftrightarrow \tilde{K} K^0 \phi = \tilde{K} h = \phi - \frac{b}{\pi} C$$

Comme $\chi = 1$, donc l'indice de \tilde{K} est -1 . D'après la proposition (1.1.1) la condition de compatibilité

$$\int_{-1}^{+1} w(t)\phi(t) dt = \frac{b}{\pi} C \int_{-1}^{+1} w(t) dt$$

doit être vérifiée.

On obtient alors :

$$N = \frac{b}{\pi} C \int_{-1}^{+1} w(t) dt$$

Comme $\int_{-1}^{+1} w(t) dt = \frac{\Gamma(-\alpha)\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1)} = \frac{-\pi}{\sin \pi\alpha}$,

on a $\frac{b}{\pi} C = -\frac{N \sin \pi\alpha}{\pi}$.

Il est facile de vérifier que $\sin^2 \pi\alpha = b^2$ et comme $-1 < \alpha < 0 \Rightarrow -1 < \sin \pi\alpha < 0$ d'où :

$$-\sin \pi\alpha = |b|$$

d'où on a :

$$\frac{b}{\pi} C = \frac{|b|}{\pi} N.$$

En utilisant les formules (2.2.2) et (2.2.4) le problème (2.2.1) (2.2.6) peut être approché par :

$$(2.2.1) \left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^n w_j \left[\frac{b}{\pi(t_j-s)} + \lambda K(s, t_j) \right] \tilde{\phi}_n(t_j) - \\ - \frac{b}{2 \sin \pi\alpha} \frac{p_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(s)}{p_n^{(\alpha, \beta)}(s)} \tilde{\phi}_n(s) = f(s) \\ s \neq t_j ; j = 1, \dots, n \\ \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^n w_j \tilde{\phi}_n(t_j) = \frac{N}{\pi} \end{array} \right.$$

En prenant comme points de collocation en (2.2.2) les $\{s_k\}_{k=1}^{n-1}$ qui sont les racines de $p_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(s)$ on obtient un système linéaire $(n \times n)$ qui nous permet d'avoir une approximation de la solution aux points $\{t_j\}_{j=1}^n$:

$$(2.2.8) \quad [A_n + \lambda C_n] \tilde{\phi}_n = \tilde{f}_n$$

$$A_n = (a_{ij}) = \frac{b}{\pi} \frac{w_j}{t_j - s_i}, \quad C_n = (C_{ij}) = w_j K(s_i, t_j) \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n-1 \\ j = 1, \dots, n \end{array}$$

$$a_{nj} = \frac{w_j}{\pi}, \quad C_{nj} = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

$$\tilde{\phi}_n = [\tilde{\phi}_n(t_1) \ , \dots \ , \tilde{\phi}_n(t_n)]^T$$

$$\bar{f}_n = [f(s_1) \ , \dots \ , f(s_{n-1}), \frac{N}{\pi}]^T.$$

Après avoir résolu le système (2.2.8), la première relation de (2.2.7) nous donne une formule d'interpolation directe nous permettant d'avoir une approximation de la solution en des points autres que $\{t_j\}_{j=1}^n$.

(2.2.9)

$$\phi_n(s) = \frac{2 \sin \pi \alpha}{b} \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(s)}{P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(s)} \left[\sum_{j=1}^n w_j \left[\frac{b}{\pi(t_j - s)} + \lambda K(s, t_j) \right] \tilde{\phi}_n(t_j) - f(s) \right]$$

$$s \neq t_j \ , \quad j = 1, \dots, n$$

$$s \neq s_k \ , \quad h = 1, \dots, n-1.$$

2.3 - METHODE INDIRECTE DE RESOLUTION D'UNE E.I.S.C.

La méthode de Nyström joue un rôle très important dans l'approximation de solution d'une E.I.F. de deuxième espèce. Cf. CHATELIN [6], ATKINSON [3]. On va utiliser cette méthode basée sur la formule de quadrature approchée de Gauss-Jacobi pour approcher la solution de l'E.I.F. (2.2.5) équivalente à l'équation (2.2.1) (2.2.6).

Pour tout t fixé, on discrétise (2.2.5) par :

$$(2.3.1) \quad \phi_n(t) + \lambda \sum_{j=1}^n w_j L(t_j, t) \phi_n(t_j) = F(t).$$

De la même manière qu'on a obtenu une approximation de $K^0\phi(t)$ en (2.2.4) on peut donner les approximations $L_n(t_j, t)$ et $F_n(t)$ de $L(t_j, t)$ et $F(t)$ respectivement

$$L_n(t_j, t) = \frac{-b}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} w_k^* \frac{K(s_k, t_j)}{s_k - t} - \frac{2b}{\sin \pi \alpha} \frac{p_n^{(\alpha, \beta)}(t)}{p_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(t)} K(t, t_j).$$

$$F_n(t) = \frac{-b}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} w_k^* \frac{f(s_k)}{s_k - t} - \frac{2b}{\sin \pi \alpha} \frac{p_n^{(\alpha, \beta)}(t)}{p_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(t)} f(t).$$

$$+ |b| \frac{N}{\pi}.$$

$$t \neq s_k ; \quad k = 1, \dots, n-1$$

où $\{w_k\}_{k=1}^{n-1}$ sont les poids associés à la formule de quadrature approchée :

$$\int_{-1}^{+1} w^*(t) h(t) dt \approx \sum_{k=1}^{n-1} w_k^* h(s_k) \text{ pour } h \in C([-1, 1]).$$

En remplaçant dans (2.3.1.) $L(t_j, t)$ par $L_n(t_j, t)$ et $F(t)$ par $F_n(t)$ on obtient une approximation de (2.2.5) par :

$$(2.3.2) \quad (I + \lambda \mathcal{L}_n) \tilde{\phi}_n = F_n$$

où \mathcal{L}_n est l'opérateur intégrale définie par $\mathcal{L}_n : C[-1, 1] \rightarrow C[-1, 1]$.

$$\mathcal{L}_n h(t) = \sum_{j=1}^n w_j L_n(t_j, t) h(t_j)$$

En prenant comme points de collocation en (2.3.2) les $\{t_j\}_{j=1}^n$, on aboutit à un système linéaire ($n \times n$)

$$(2.3.3) \quad (I_n + \lambda \tilde{Q}_n) \tilde{\phi}_n = \tilde{F}_n$$

$$\tilde{Q}_n = (\tilde{q}_{ij}) = w_j L_n(t_j, t_i) \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$\tilde{F}_n = [F_n(t_1), \dots, F_n(t_n)]^T \text{ et } \tilde{\phi}_n = [\tilde{\phi}_n(t_1), \dots, \tilde{\phi}_n(t_n)]^T$$

La méthode de Nyström consiste à résoudre (2.3.3), on obtient alors une approximation de la solution aux points $\{t_j\}_{j=1}^n$, puis revenir en (2.3.2) qui nous donne la formule d'interpolation de Nyström :

$$(2.3.4) \quad \tilde{\phi}_n(t) = F_n(t) - \lambda \mathcal{L}_n \tilde{\phi}_n(t). \quad t \neq s_k, k = 1, \dots, n$$

qui nous permet d'avoir une approximation de la solution en des points différents de $\{t_j\}_{j=1}^n$.

Remarque 2.3.1

Sous l'hypothèse de $f \in C^1([-1,1])$ et $K \in C^1([-1,1] \times [-1,1])$ on peut définir $L_n(x,t)$ et $F_n(t)$ pour tout x et t appartenant à $[-1,1]$. De plus $L_n(x,t) \in C([-1,1] \times [-1,1])$ et $F_n(t) \in C([-1,1])$.

Il suffit pour cela, par exemple dans le cas de $F(t)$, de considérer la fonction :

$$h(t,s) = \begin{cases} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} & \text{si } t \neq s \\ f'(x) & \text{si } t = s \end{cases}$$

dans l'écriture de $F(t)$. On a de plus le résultat suivant :

Proposition 2.3.1

i) Si $K \in C^1([-1,1] \times [-1,1])$ alors :

$$\max_{-1 \leq x, t \leq 1} |L_n(x,t) - L(x,t)| \rightarrow 0 ; \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

ii) Si $f \in C^1([-1,1])$ alors :

$$\|F_n - F\|_\infty \rightarrow 0 ; \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

Preuve :

i) Soit la fonction $g(x,t,s)$ définie par :

$$g(x,t,s) = \begin{cases} \frac{K(s,x) - K(t,x)}{s-t} & \text{si } s \neq t \\ \frac{\partial K(s,t)}{\partial s} & \text{si } s = t \end{cases}$$

puisque K est de classe C^1 , g est continue sur $[-1,1]^3$, et on a la formule suivante :

$$L(x,t) = L_n(x,t) + r_n(K;x,t)$$

où $r_n(K;x,t)$ est donné par :

$$r_n(K;x,t) = -\frac{b}{\pi} \left[\int_{-1}^1 w^*(s)g(x,t,s)ds - \sum_{k=1}^{n-1} w_k^* g(x,t,s_k) \right]$$

$\{r_n(K;x,t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers 0 sur $[-1,1] \times [-1,1]$ et comme $\int_{-1}^1 w^*(t)dt < +\infty$ et $\text{Sup}_n \sum_{k=1}^{n-1} w_k^* \leq c < \infty$ on déduit que $\{r_n(K;x,t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions uniformément bornée et équicontinue. D'après le lemme d'Arzela-Ascoli, elle converge uniformément vers 0.

$$\text{ii) } F(t) = F_n(t) + r_n(f;t)$$

de la même façon, on montre que $r_n(f;t)$ converge uniformément vers 0.

c.q.f.d.

2.4 - EQUIVALENCE ENTRE LA METHODE DIRECTE ET LA METHODE INDIRECTE

Théorème 2.4.1

Le système linéaire (2.2.8) obtenu par la méthode directe est équivalent au système linéaire (2.3.3) obtenu par la méthode indirecte.

La démonstration de ce théorème découlera facilement du prochain lemme.

Lemme 2.4.1

La matrice A_n définie par :

$$\begin{aligned} A_n = (a_{ij}) &= \frac{b}{\pi} \frac{w_j}{t_j - s_i} & ; & \quad i = 1, \dots, n-1 \\ & & & \quad j = 1, \dots, n \\ a_{nj} &= \frac{w_j}{\pi} & ; & \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

est inversible. Son inverse est la matrice B_n définie par :

$$B_n = (b_{ij}) = \frac{b}{\pi} \frac{w_j^*}{t_i - s_j} \quad ; \quad \begin{aligned} i &= 1, \dots, n \\ j &= 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

$$b_{in} = |b| \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

Preuve :

On a la formule suivante cf. KRENK [15].

$$(2.4.1.) \quad p_{j-1}^{(-\alpha, -\beta)}(s_k) = \sum_{i=1}^n \frac{p_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(t_i)}{p_n^{(\alpha, \beta)}(t_i)} \frac{p_j^{(\alpha, \beta)}(t_i)}{t_i - s_k}$$

$$k = 1, \dots, n-1$$

$$j \leq n$$

où
$$p_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(s_k) = 0 \quad ; \quad k = 1, \dots, n-1$$

et $p_n^{(\alpha, \beta)}(t_i) = 0$; $i = 1, \dots, n$.

avec par convention cf. Szögö [24]

$$p_{-1}^{(-\alpha, -\beta)}(s_k) = 0 ; \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Comme $w_i = -\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{2} \frac{p_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(t_i)}{p_n^{(\alpha, \beta)'}(t_i)}$

On en déduit que :

$$p_{j-1}^{(-\alpha, -\beta)}(s_k) = \frac{-2}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n w_i \frac{p_j^{(\alpha, \beta)}(t_i)}{t_i - s_k}$$

comme $p_0^{(\alpha, \beta)} = 1$. On obtient :

$$(2.4.2) \quad \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{t_j - s_k} = 0.$$

De plus on la formule suivante. Cf. KRENK [17]

$$(2.4.3) \quad \frac{p_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x) p_j^{(\alpha, \beta)}(x) - p_n^{(\alpha, \beta)}(x) p_{j-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x)}{p_n^{(\alpha, \beta)}(x)} = - \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{t_i - x}$$

avec $j \leq n$.

avec $c_i = \frac{p_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(t_i) p_j^{(\alpha, \beta)}(t_i)}{p_n^{(\alpha, \beta)'}(t_i)}$, $i = 1, \dots, n$

pour $j = 0$ (2.4.3) nous donne :

$$\frac{p_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x)}{p_n^{(\alpha, \beta)}(x)} = \frac{2}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{t_i - x}$$

en dérivant par rapport à x , on obtient pour $x = s_k$; $k = 1, \dots, n-1$

$$(2.4.4) \quad \frac{p_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)'}(s_k)}{p_n^{(\alpha, \beta)}(s_k)} = \frac{2}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{(t_i - s_k)^2}$$

Comme $w_k^* = -2 \Gamma(-\alpha) \Gamma(1+\alpha) \frac{p_n^{(\alpha, \beta)}(s_k)}{p_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(s_k)}$

$$k = 1, \dots, n-1.$$

et $b^2 = \sin^2 \pi \alpha$. (2.4.4.) s'écrit :

$$(2.4.5) \quad \frac{1}{w_k^*} = \frac{b^2}{\pi^2} \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{(t_j - s_k)^2}.$$

Si $l \neq m$ on a :

$$(2.4.6) \quad \frac{1}{(t_i - s_l)(t_i - s_m)} = \frac{1}{(s_l - s_m)} \left[\frac{1}{t_i - s_l} - \frac{1}{t_i - s_m} \right]$$

on déduit alors facilement de (2.4.2) (2.4.5) et (2.4.6) que :

$$(2.4.7) \quad \frac{b^2}{\pi^2} w_l^* \sum_{i=1}^n \frac{w_i}{(t_i - s_l)(t_i - s_m)} = \begin{cases} 0 & \text{si } l \neq m \\ 1 & \text{si } l = m \end{cases}$$

De plus, comme $\int_{-1}^{+1} w(t) dt = \frac{\pi}{|b|}$. On a

$$(2.4.8) \quad \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n w_i = \frac{1}{|b|}$$

(2.4.2) (2.4.7) et (2.4.8) nous permettent alors de prouver le résultat que l'on cherche.

c.q.f.d.

Preuve du théorème 2.4.1

Il est facile de vérifier que :

$$i) \quad \bar{F}_n = A_n^{-1} \bar{f}_n$$

$$ii) \quad \tilde{Q}_n = A_n^{-1} C_n$$

c.q.f.d.

Théorème 2.4.2

La formule d'interpolation directe (2.2.9) est équivalente à la formule d'interpolation de Nyström (2.3.4) obtenue par la méthode indirecte.

Preuve :

En utilisant le fait que $\{\phi_n(t_j)\}_{j=1}^n$ vérifie (2.2.8) on voit facilement qu'il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} \frac{2 \sin \pi \alpha}{b} \frac{p_n^{(\alpha, \beta)}(s)}{p_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(s)} &= \sum_{j=1}^n w_j \frac{b \phi_n(t_j)}{\pi(t_j - s)} = \\ &= \frac{b}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{w_k^*}{s_k - s} \left[- \sum_{j=1}^n w_j \frac{b \phi_n(t_j)}{\pi(t_j - s_k)} \right] + \\ &= \frac{|b|}{\pi} \sum_{j=1}^n w_j \phi_n(t_j) \end{aligned}$$

pour $s \neq t_j$, $j = 1, \dots, n$ et $s \neq s_k$; $k = 1, \dots, n-1$. Ce qui revient à montrer que :

$$(2.4.9) \quad \frac{2 \sin \pi \alpha}{\pi} \frac{p_n^{(\alpha, \beta)}(s)}{p_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(s)} = \frac{b^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{w_k^*}{s_k - t_j} - \frac{b^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{w_k^*}{s_k - s} + \frac{|b|}{\pi}$$

$s \neq t_j$; $j = 1, \dots, n$ et $s \neq s_k$; $k = 1, \dots, n-1$.

Pour montrer (2.4.9) on va utiliser la formule suivante cf. KRENK [17]

$$(2.4.10) \quad -a w^*(x) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^{+1} w^*(t) \frac{dt}{t-x} = \frac{2b}{\sin \pi \alpha} p_1^{(\alpha, \beta)}(x)$$

de même on a une formule analogue à (2.2.4) :

$$(2.4.11) \quad a w^*(x) \phi(x) - \frac{b}{\pi} \int_{-1}^{+1} w^*(t) \frac{\phi(t)}{t-x} dt = \\ - \frac{b}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} w_k^* \frac{\phi(s_k)}{s_k - x} - \frac{2b}{\sin \pi \alpha} \frac{p_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{p_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x)} \phi(x).$$

en remplaçant dans (2.4.11) ϕ par 1 on obtient :

$$(2.4.12) -aw^*(x) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{w^*(t)}{t-x} dt = \frac{b}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{w_k^*}{x_k - x} + \frac{2b}{\sin \pi \alpha} \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x)}$$

En comparant (2.4.10) et (2.4.12) on obtient :

$$\frac{b}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{w_k^*}{x_k - x} + \frac{2b}{\sin \pi \alpha} \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x)} = \frac{2b}{\sin \pi \alpha} P_1^{(\alpha, \beta)}(x)$$

$$P_1^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{2} (\alpha + \beta + 2)x + \frac{1}{2} (\alpha - \beta) = \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} (\alpha - \beta).$$

On aboutit alors à la relation suivante :

$$(2.4.13) \quad \frac{b}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{w_k^*}{x_k - x} = \frac{b}{\sin \pi \alpha} (x + \alpha - \beta) - \frac{2b}{\sin \pi \alpha} \frac{P_n^{(\alpha, \beta)}(x)}{P_{n-1}^{(-\alpha, -\beta)}(x)}$$

En utilisant le fait que $b^2 = \sin^2 \pi \alpha$ et $\sin \pi \alpha = -|b|$; (2.4.13) nous permet facilement de montrer la relation (2.4.9.).

c.q.f.d.

Existence d'une solution approchée

Soit \mathcal{L}_n l'opérateur défini de $C[-1,1] \rightarrow C[-1,1]$ par :

$$\mathcal{L}_n \phi = \sum_{j=1}^n w_j L(t_j, t) \phi(t_j)$$

\mathcal{L}_n est un opérateur compact et $\|\mathcal{L}_n\| = \max_{-1 \leq t \leq 1} \sum_{j=1}^n |w_j L(t_j, t)|$

l'équation (2.3.1) peut s'écrire :

$$(2.4.14) \quad (I + \lambda \mathcal{L}_n) \phi_n = F$$

En prenant comme points de collocations en (2.4.14) les $\{t_j\}_{j=1}^n$ on obtient un système linéaire :

$$(2.4.15) \quad (I_n + \lambda Q_n) \bar{\phi}_n = \bar{F}$$

$$Q_n = (q_{ij}) = w_j L(t_j, t_i) \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$\bar{\phi}_n = [\phi_n(t_1), \dots, \phi_n(t_n)]^T \quad ; \quad \bar{F} = [F(t_1), \dots, F(t_n)]^T.$$

Proposition 2.4.1

Si l'équation fonctionnelle (2.4.14) admet une solution unique, alors le système (2.4.15) admet une solution unique.

Preuve :

facile à vérifier.

Théorème 2.4.3

i) $\mathcal{L}_n \phi \rightarrow \mathcal{L} \phi$ quand $n \rightarrow \infty$, dans $C([-1,1])$ pour tout $\phi \in C[-1,1]$.

ii) $\{\mathcal{L}_n\}_{n \geq 1}$ est une famille d'opérateurs collectivement compacte (c'est-à-dire $\{\mathcal{L}_n \phi \mid n \geq 1, \|\phi\|_\infty \leq 1\}$ est relativement compact dans $C[-1,1]$).

Preuve :

Pour tout $t \in [-1,1]$, $\mathcal{L}_n \phi(t) \rightarrow \mathcal{L} \phi(t)$ quand $n \rightarrow \infty$ de plus on a :

$$(2.4.16) \quad \|\mathcal{L}_n \phi\|_\infty \leq \|\phi\|_\infty \cdot \max_{-1 \leq x, t \leq 1} |L(x, t)| \cdot \sum_{j=1}^n w_j$$

$$(2.4.17) \quad |\mathcal{L}_n \phi(t_1) - \mathcal{L}_n \phi(t_2)| \leq \|\phi\|_\infty \cdot \max_{-1 \leq x \leq 1} |L(t_1, x) - L(t_2, x)| \cdot \sum_{j=1}^n w_j$$

Comme $\sum_{j=1}^n w_j \leq c < \infty$ pour tout n .

$\mathcal{L}_n \phi(t)$, $n \geq 1$ est uniformément bornée, équicontinue et converge simplement vers $\mathcal{L} \phi(t)$, donc elle converge uniformément vers $\mathcal{L} \phi(t)$ (d'après le lemme d'Arzela-Ascoli) de la même manière on déduit facilement ii).

Théorème 2.4.4.

Si $-\lambda^{-1}$ n'est pas une valeur propre de \mathcal{L} , alors pour n assez grand $(I+\lambda \mathcal{L}_n)^{-1}$ existe, et est uniformément bornée de plus $\|\phi - \phi_n\|_\infty \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$ avec

$$(2.4.18) \quad \|\phi - \phi_n\|_\infty \leq \|(I+\lambda \mathcal{L}_n)^{-1}\| \cdot |\lambda| \cdot \|(\mathcal{L} - \mathcal{L}_n)\phi\|_\infty$$

Preuve :

Découle du théorème 2.4.3. Cf. ATKINSON [4] la majoration obtenue en (2.4.18) s'obtient par :

$$(I+\lambda \mathcal{L})\phi = F, \quad (I+\lambda \mathcal{L}_n)\phi_n = F$$

$$\Rightarrow (I+\lambda \mathcal{L}_n)(\phi_n - \phi) = \lambda(\mathcal{L} - \mathcal{L}_n)\phi$$

d'où :

$$\phi_n - \phi = (I+\lambda \mathcal{L}_n)^{-1}[\lambda(\mathcal{L} - \mathcal{L}_n)\phi]$$

c.q.f.d

Remarque 2.4.1.

D'après la proposition 2.4.1 le système (2.4.15) est inversible pour n assez grand. De plus $(I+\lambda Q_n)^{-1}$ $n \geq 1$ est uniformément bornée.

Théorème 2.4.5

Avec les mêmes hypothèses du théorème 2.4.4 on a :

i) $\|\mathcal{L}_n - \tilde{\mathcal{L}}_n\|_\infty \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$

ii) pour n assez grand, $(I+\lambda \tilde{\mathcal{L}}_n)^{-1}$ existe et est uniformément bornée.

iii) pour n assez grand $(I+\lambda \tilde{Q}_n)^{-1}$ existe.

Preuve :

i) découle immédiatement de la proposition 2.3.1 et de l'inégalité suivante :

$$|(\mathcal{L}_n - \tilde{\mathcal{L}}_n)\phi(t)| \leq \|\phi\|_\infty \cdot \max_{-1 \leq x, t \leq 1} |L_n(x,t) - L(x,t)| \cdot \sum_{j=1}^n w_j$$

ii) et iii) sont des conséquences faciles de i).

Remarque 2.4.2.

Il résulte des théorèmes 2.4.5 et 2.4.1 que le système linéaire (2.2.8) obtenu par la méthode directe admet une solution unique pour n assez grand et on a :

$$(A_n + \lambda C_n)^{-1} = (I + \lambda A_n^{-1} C_n)^{-1} A_n^{-1} = (I + \lambda \tilde{Q}_n)^{-1} A_n^{-1}.$$

L'existence de A_n^{-1} est démontrée au lemme 2.4.1.

2.5. CONVERGENCE

On a vu que la méthode indirecte vue en 2.4 consiste à approcher l'équation intégrale de Fredholm de 2ème espèce $(I + \lambda \mathcal{L})\phi = F$, une première fois par $(I + \lambda \mathcal{L}_n)\phi_n = F$, puis une deuxième fois par $(I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_n)\tilde{\phi}_n = F_n$.

Lemme 2.5.1.

$$\|\phi_n - \tilde{\phi}_n\|_\infty \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Preuve :

$$(I + \lambda \mathcal{L}_n)(\phi_n - \tilde{\phi}_n) = F - F_n + \lambda(\tilde{\mathcal{L}}_n - \mathcal{L}_n)\tilde{\phi}_n$$

$$\|\phi_n - \tilde{\phi}_n\|_\infty \leq \|(I + \lambda \mathcal{L}_n)^{-1}\| (\|F - F_n\|_\infty + |\lambda| \cdot \|\tilde{\mathcal{L}}_n - \mathcal{L}_n\| \cdot \|\tilde{\phi}_n\|_\infty)$$

Le résultat découle immédiatement de la proposition 2.3.1 et des théorèmes 2.4.4. et 2.4.5.

Théorème 2.5.1

Si $-\lambda^{-1}$ n'est pas une valeur propre de \mathcal{L} et si $K(s,t) \in C^1([-1,1] \times [-1,1])$ et $f(t) \in C^1([-1,1])$ alors : l'interpolation de Nyström (2.3.4) obtenue par la méthode indirecte, converge uniformément vers l'unique solution $\phi(t)$ de (2.2.1) (2.2.6).

Preuve :

Le résultat de ce théorème découle facilement du lemme 2.5.1 et du théorème 2.4.4 de plus on a l'estimation suivante :

$$(2.5.1) \quad \|\phi - \tilde{\phi}_n\|_\infty \leq \|(I + \lambda \mathcal{L}_n)^{-1}\| \{ |\lambda| \cdot \|\mathcal{L} - \mathcal{L}_n\| \|\phi\|_\infty + |\lambda| \cdot \|\mathcal{L}_n - \tilde{\mathcal{L}}_n\| \cdot \|\tilde{\phi}_n\|_\infty + \|F - F_n\|_\infty \}$$

Remarque 2.5.1

i) La majoration (2.5.1) nous permet d'avoir une borne de l'erreur commise lorsqu'on approche ϕ par $\tilde{\phi}_n$. Cette borne dépend essentiellement des erreurs associées aux formules de quadratures approchées de Gauss-Jacobi, permettant de donner les approximations suivantes : $\mathcal{L}\phi \approx \mathcal{L}_n\phi$, $\mathcal{L}_n\phi \approx \tilde{\mathcal{L}}_n\phi$ et $F \approx F_n$ et plus les fonctions données K et f sont régulières, plus la convergence vers la solution est rapide.

- ii) En tenant compte de l'équivalence entre les deux formules d'interpolation (2.2.9) et (2.3.4) données au théorème 2.4.2. tout ce qu'on a dit à propos de l'interpolation de Nyström est aussi valable pour l'interpolation directe (2.2.9).
- iii) En pratique, le plus souvent, on utilise la méthode directe, vu la simplicité des formules par rapport à la méthode indirecte.
- iv) L'intérêt essentiel de l'équivalence obtenue entre les deux méthodes est qu'on puisse utiliser des résultats de convergence connus pour les E.I.F. de 2ème espèce pour l'approximation de la solution d'une E.I.S.C.
- v) On remarque que l'équivalence obtenue entre les deux méthodes dépend surtout des formules de quadratures approchées utilisées.

CHAPITRE 3 - METHODES ITERATIVES DE RESOLUTION D'UNE EQUATION
INTEGRALE SINGULIERE DE CAUCHY

- 3.1 Intérêt du raffinement itératif pour les équations intégrales.
- 3.2 Méthodes de raffinement itératif.
- 3.3 Algorithmes de résolution d'une E.I.S.C. par itération
- 3.4 Applications numériques.
- 3.5 Conclusions

3.1 - INTERET DU RAFFINEMENT ITERATIF POUR LES EQUATIONS INTEGRALES

Considérons une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce :

$$(3.1.1.) \quad \lambda x(s) - \int_{-1}^1 k(s,t) x(t) dt = y(s)$$

où $y \in C[-1,1]$ et $k(s,t)$ est telle que l'opérateur intégrale associé K soit compact de $C[-1,1] \rightarrow C[-1,1]$.

Supposons que $\lambda \in \rho(K)$ et $\lambda \neq 0$.

L'équation 3.1.1. peut s'écrire :

$$(3.1.2) \quad (\lambda - K)x = y$$

En utilisant une formule de quadrature approchée pour discrétiser $K x(s)$, l'équation (3.1.2) nous amène à la résolution numérique de problème matriciel

$$(3.1.3) \quad (\lambda I_N - A_N)x_N = y_N$$

où I_N est la matrice unité de taille N , N est le nombre de noeuds de la formule de quadrature approchée, la matrice A_N de taille N est pleine.

Si N est grand ($N > 100$) la résolution numérique de (3.1.3) constitue un problème coûteux, voire impossible, lorsque nous ne disposons que des méthodes d'algèbre linéaire numérique, et surtout lorsqu'on est limité par les capacités mémoires de la machine. Or en pratique il est parfois nécessaire que A_N soit une matrice de grande taille pour que la solution x_N approche x de façon satisfaisante.

L'intérêt d'une méthode de raffinement itératif est donc de ne nécessiter que la résolution de :

$$(\lambda I_n - A_n)x_n = y_n$$

où n est beaucoup plus petit que N , pour obtenir le point de départ des méthodes itératives qui convergent vers x_N .

ATKINSON [3],[4] et BRAKHAGE [5] ont développé chacun une méthode de raffinement itératif, ces deux méthodes n'utilisent la discrétisation de taille A_N que pour le calcul du produit $A_N Y_N$, où Y_N est un vecteur donné. Ce sont les deux méthodes de raffinement le plus fréquemment utilisées pour les équations intégrales de Fredholm.

Dans ce qui suit, nous allons appliquer ces deux méthodes à l'équation intégrale de Fredholm de 2ème espèce $(I + \lambda \mathcal{K})\phi = F$, puis les adapter à l'équation intégrale singulière de Cauchy qui lui est équivalente.

3.2 - METHODES DE RAFFINEMENT ITERATIF

Considérons l'E.I.S.C. suivante :

$$(3.2.1.) \quad \begin{cases} aw(t)\phi(t) + \frac{b}{\pi} \int_{-1}^{+1} w(s) \frac{\phi(s)}{s-t} ds + \lambda \int_{-1}^{+1} w(s)K(t,s)\phi(s)ds = f(t) \\ \int_{-1}^{+1} w(t)\phi(t) dt = N \end{cases} \quad -1 < t < 1$$

a et b sont deux réels tels que $a^2 + b^2 = 1$.

K et f sont deux fonctions connues vérifiant la condition de Hölder sur $[-1,1] \times [-1,1]$ et $[-1,1]$ respectivement, et N est une constante connue. On a vu au chapitre 2 qu'une telle équation est équivalente à une équation intégrale de Fredholm de 2ème espèce.

$$(3.2.2) \quad (I + \lambda \mathcal{L})\phi = F$$

où \mathcal{L} est l'opérateur intégrale compact de $C[-1,1] \rightarrow C[-1,1]$ définie par

$$\mathcal{L}\phi(t) = \int_{-1}^{+1} w(x) L(x,t)\phi(x)dx, \quad \text{cf. proposition 1.1.2.}$$

La méthode indirecte présentée au chapitre 2, consistait à approcher l'opérateur $\mathcal{L}\phi$ par $\mathcal{L}_n\phi$ où :

$$\mathcal{L}_n\phi(t) = \sum_{j=1}^n w_j L(t_j, t)\phi(t_j)$$

et comme $L(x,t)$ a été elle même approchée par $L_n(x,t)$, cf. chapitre 2, on a encore approché $\mathcal{L}_n\phi$ par $\tilde{\mathcal{L}}_n\phi$ où :

$$\tilde{\mathcal{L}}_n\phi(t) = \sum_{j=1}^n w_j L_n(t_j, t)\phi(t_j)$$

et la méthode indirecte consiste alors à résoudre le problème approché :

$$(3.2.3) \quad (I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_n)\phi_n = F_n$$

où F_n est une approximation de F (cf. chapitre 2).

Proposition 3.2.1

Supposons que $K(s,t) \in C^1([-1,1] \times [-1,1])$ alors :

- i) $\tilde{\mathcal{L}}_n \phi \rightarrow \mathcal{L} \phi$ si $n \rightarrow \infty$, $\forall \phi \in C([-1,1])$
 ii) $\{\tilde{\mathcal{L}}_n\}_{n \geq 1}$ est collectivement compacte.

Preuve :

i)
$$\|\tilde{\mathcal{L}}_n \phi - \mathcal{L} \phi\|_\infty \leq \|(\tilde{\mathcal{L}}_n - \mathcal{L}_n) \phi\|_\infty + \|(\mathcal{L}_n - \mathcal{L}) \phi\|_\infty$$

le résultat découle immédiatement du théorème 2.4.3 et du théorème 2.4.5

ii)
$$\tilde{\mathcal{L}}_n \phi = \mathcal{L}_n \phi + (\tilde{\mathcal{L}}_n - \mathcal{L}_n) \phi$$

Soit $r_n(K; x, t) = L(x, t) - L_n(x, t)$ alors :

$$\tilde{\mathcal{L}}_n \phi(t) = \mathcal{L}_n \phi(t) - \sum_{j=1}^n w_j r_n(K; t_j, t) \phi(t_j)$$

Comme $\{\mathcal{L}_n \phi ; n \geq 1, \|\phi\| \leq 1\}$ est uniformément bornée. Cf. Théorème 2.4.3 ; $\{r_n(K; x, t)\}_{n \geq 1}$ est uniformément bornée. Cf. proposition 2.3.1 et

$$\sup_n \sum_{j=1}^n w_j < \infty, \{\tilde{\mathcal{L}}_n \phi ; n \geq 1, \|\phi\| \leq 1\}$$

est alors uniformément bornée :

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathcal{L}}_n \phi(t_1) - \tilde{\mathcal{L}}_n \phi(t_2)| &\leq |\mathcal{L}_n \phi(t_1) - \mathcal{L}_n \phi(t_2)| \\ &+ \sum_{j=1}^n w_j |r_n(K; t_j, t_1) - r_n(K; t_j, t_2)| \cdot |\phi(t_j)| \end{aligned}$$

$\{\tilde{\mathcal{L}}_n \phi, n \geq 1, \|\phi\| \leq 1\}$ est équicontinue d'après le théorème 2.4.3.

$\{r_n(K, x, t)\}_{n \geq 1}$ est équicontinue d'après la proposition 2.31 donc $\{\tilde{\mathcal{L}}_n ; n \geq 1, \|\phi\| \leq 1\}$ est équicontinue et d'après le théorème d'Arzola-Ascoli on peut dire que $\{\tilde{\mathcal{L}}_n \phi ; n \geq 1, \|\phi\| \leq 1\}$ est relativement compact dans $C[-1,1]$.

c.q.f.d.

Soient M, n deux entiers positifs tels que $M \gg n$, et considérons l'équation :

$$(3.2.5) \quad (I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_M) \tilde{\phi}_M = F_M$$

Soit $R_M(\lambda) = (I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_M)^{-1}$, $\tilde{\phi}_M = R_M(\lambda) F_M$.

Méthode itérative d'ATKINSON

Nous allons décrire la méthode itérative d'ATKINSON qui nous permet à partir de la solution approchée $\tilde{\phi}_n = R_n(\lambda) F_n$ où $R_n(\lambda) = (I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_n)^{-1}$ de gérer une suite $\{\phi^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ convergente vers $\tilde{\phi}_M$.

L'équation (3.2.5) peut s'écrire :

$$(I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_n) \tilde{\phi}_M = F_M + \lambda (\tilde{\mathcal{L}}_n - \tilde{\mathcal{L}}_M) \tilde{\phi}_M$$

et soit $\{\phi^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$(II) \quad \begin{cases} \phi^0 = \tilde{\phi}_n \\ \phi^{k+1} = R_n(\lambda) [F_M + \lambda (\tilde{\mathcal{L}}_n - \tilde{\mathcal{L}}_M) \phi^k] ; k \geq 0 \end{cases}$$

Proposition 3.2.2

Pour n assez grand, on a :

$$0 \leq \| [\lambda R_n(\lambda) (\tilde{\mathcal{L}}_n - \tilde{\mathcal{L}}_M)]^2 \| \leq C_n(\lambda) < 1$$

Preuve :

La démonstration est donnée dans ATKINSON [4]

La suite $\{\phi^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie :

$$\tilde{\phi}_M - \phi^{k+1} = \lambda R_n(\lambda) (\tilde{\mathcal{L}}_n - \tilde{\mathcal{L}}_M) (\tilde{\phi}_M - \phi^k) ; k \geq 0$$

On n'a pas nécessairement $\| \lambda R_n(\lambda) (\tilde{\mathcal{L}}_n - \tilde{\mathcal{L}}_M) \| < 1$ pour n assez grand puisque $\| \tilde{\mathcal{L}}_n - \tilde{\mathcal{L}} \| \neq 0$ quand $n \rightarrow \infty$, mais le résultat de la proposition 3.2.2. nous permet d'écrire :

$$(3.2.6) \quad \|\tilde{\phi}_M - \phi^{k+2}\| \leq C_n(\lambda) \|\tilde{\phi}_M - \phi^k\|; k \geq 0$$

Ceci entraîne que la suite $\{\phi^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{\phi}_M = R_M(\lambda)F_M$.

Remarque 3.2.1

- i) On voit de l'inégalité (3.2.6) que l'erreur $\|\tilde{\phi}_M - \phi^k\|$ ne décroît pas nécessairement de façon uniforme.
- ii) Une façon équivalente d'écrire le schéma itératif (I1), plus commode pour le calcul est :

$$(I2) \quad \begin{cases} \phi^0 = \tilde{\phi}_n \\ \phi^{k+1} = \phi^k + R_n(\lambda)[F_M - (I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_M)\phi^k] \quad ; k \geq 0 \end{cases}$$

iii) Lorsque ϕ^k est calculé

$$F_M - (I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_M)\phi^k = (I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_M)(\tilde{\phi}_M - \phi^k)$$

$$\Rightarrow \tilde{\phi}_M = \phi^k + R_M(\lambda)[F_M - (I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_M)\phi^k]$$

donc pour passer à ϕ^{k+1} , il suffit d'approcher dans la relation précédente $R_M(\lambda)$ par $R_n(\lambda)$.

iv) Soit $B = \{\phi \in C[-1,1]; \|\phi\|_\infty \leq 1\}$.

Comme $\tilde{\mathcal{L}}_n \phi \rightarrow \mathcal{L} \phi$ si $n \rightarrow \infty$, $\forall \phi \in C[-1,1]$; $\cup_{n \geq 1} \tilde{\mathcal{L}}_n B$ est relativement compact, dans $C([-1,1])$ et \mathcal{L} est un opérateur compact alors $\cup_{n \geq 1} (\tilde{\mathcal{L}}_n - \mathcal{L})B$ est relativement compact dans $C[-1,1]$. Cf. ANSELONE [2].
Soit $R(\lambda) = (I + \lambda \mathcal{L})^{-1}$. Alors

$$R_n(\lambda)\phi \rightarrow R(\lambda)\phi \quad \text{si } n \rightarrow \infty, \quad \forall \phi \in C([-1,1])$$

et

$$\left(\cup_{n \geq 1} (R_n(\lambda) - R(\lambda))B \right) \text{ est relativement compact dans } C[-1,1]$$

cf. CHATELIN [6].

Mais on n'a pas nécessairement $\|R_n(\lambda) - R(\lambda)\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Pour tout $\phi \in C([-1,1])$ on a :

$$R_n(\lambda)\phi - R_M(\lambda)\phi \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty$$

mais pas nécessairement

$$\|R_n(\lambda) - R_M(\lambda)\| \rightarrow 0 \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Posons $r^k = F_M^{-1}(I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_M)\phi^k$, à chaque pas d'itération dans (I2), on doit résoudre une équation de la forme :

$$(I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_n)\delta^k = r^k ; \quad r^k = F_M^{-1}(I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_M)\phi^k$$

et ϕ^{k+1} peut être interprétée comme la correction de ϕ^k par δ^k .

$$\phi^{k+1} = \phi^k + \delta^k$$

Cette méthode peut donc être considérée comme une méthode de correction du résidu. Cf. CHATELIN [6].

Dans le cas où le résidu $r^k = F_M^{-1}(I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_M)\phi^k$ admet un comportement oscillatoire, BRAKHAGE [5] a proposé la méthode de raffinement suivante.

Méthode itérative de BRAKHAGE

L'équation $(I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_M)\tilde{\phi}_M = F_M$ peut s'écrire

$$(I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_n)\tilde{\phi}_M = F_M + \lambda(\tilde{\mathcal{L}}_n - \tilde{\mathcal{L}}_M)\tilde{\phi}_M$$

on remplace dans le 2ème membre $\tilde{\phi}_M$ par $F_M^{-1}\lambda \tilde{\mathcal{L}}_M \tilde{\phi}_M$ on obtient :

$$(I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_n)\tilde{\phi}_M = F_M + \lambda(\tilde{\mathcal{L}}_n - \tilde{\mathcal{L}}_M)(F_M^{-1}\lambda \tilde{\mathcal{L}}_M \tilde{\phi}_M)$$

et considérons la suite $\{\phi_k^i\}_{k \in \mathbb{N}}$ définie par

$$(J1) \quad \begin{cases} \phi'_0 = \tilde{\phi}_n \quad \text{ou} \quad \tilde{\phi}_n = R_n(\lambda) F_n \\ Z_k = F_M^{-\lambda} \tilde{\mathcal{L}}_M^{\lambda} \phi'_k \quad ; \quad k \geq 0 \\ \phi'_{k+1} = R_n(\lambda) [F_M + \lambda (\tilde{\mathcal{L}}_n^{\lambda} - \tilde{\mathcal{L}}_M^{\lambda}) Z_k] \quad ; \quad k \geq 0 \end{cases}$$

Soit $D_{n,M}$ l'opération définie par :

$$\begin{aligned} D_{n,M} &= \lambda^2 (I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_n^{\lambda})^{-1} (\tilde{\mathcal{L}}_M^{\lambda} - \tilde{\mathcal{L}}_n^{\lambda}) \tilde{\mathcal{L}}_M^{\lambda} \\ &= \lambda^2 R_n(\lambda) (\tilde{\mathcal{L}}_M^{\lambda} - \tilde{\mathcal{L}}_n^{\lambda}) \tilde{\mathcal{L}}_M^{\lambda} \end{aligned}$$

Proposition 3.2.3

Pour n assez grand :

$$0 \leq \|D_{n,M}\| \leq d_n(\lambda) < 1.$$

où $d_n(\lambda) \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$.

Preuve :

La démonstration est basée sur le fait que $\tilde{\mathcal{L}}_n^{\lambda} \phi \rightarrow \mathcal{L} \phi$ si $n \rightarrow \infty$, $\forall \phi \in C[-1,1]$ et $\{\tilde{\mathcal{L}}_n^{\lambda}\}_{n \geq 1}$ est collectivement compacte (proposition 3.2.1) Cf. ATKINSON [4].

La suite $\{\phi'_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ définie par (J1) vérifie :

$$(I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_n^{\lambda})(\tilde{\phi}_M - \phi'_{k+1}) = \lambda^2 (\tilde{\mathcal{L}}_M^{\lambda} - \tilde{\mathcal{L}}_n^{\lambda}) \tilde{\mathcal{L}}_M^{\lambda} (\tilde{\phi}_M - \phi'_k) \quad ; \quad k \geq 0$$

d'où :

$$(3.2.7) \quad \|\tilde{\phi}_M - \phi'_{k+1}\| \leq d_n(\lambda) \|\tilde{\phi}_M - \phi'_k\| \quad ; \quad k \geq 0.$$

ceci entraîne que pour n assez grand, la suite $\{\phi'_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ converge vers $\tilde{\phi}_M = R_M(\lambda) F_M$ et on a une convergence linéaire.

Remarque 3.2.2.

i) L'inégalité (3.2.7) nous indique que l'erreur $\|\tilde{\phi}_M - \phi'_k\|$ décroît de façon régulière.

ii) Une façon équivalente d'écrire le schéma itératif (J1), plus commode pour le calcul est la suivante :

$$(J2) \quad \begin{cases} \phi'_0 = \tilde{\phi}_n \\ r'_k = F_M - (I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_M) \phi'_k ; \quad k \geq 0 \\ \phi'_{k+1} = \phi'_k + [I - \lambda R_n(\lambda) \tilde{\mathcal{L}}_M] r'_k ; \quad k \geq 0 \end{cases}$$

iii) Lorsque ϕ'_k est calculé, le passage à ϕ'_{k+1} peut être interprété de la façon suivante :

$$\begin{aligned} F_M - (I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_M) \phi'_k &= (I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_M) (\tilde{\phi}_M - \phi'_k) \\ \Rightarrow \tilde{\phi}_M &= \phi'_k + R_M(\lambda) [F_M - (I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_M) \phi'_k] \end{aligned}$$

donc on passe à ϕ'_{k+1} en utilisant l'approximation suivante :

$$R_M(\lambda) \approx [I - \lambda R_n(\lambda) \tilde{\mathcal{L}}_M]$$

Proposition 3.2.4

$$\|R_M(\lambda) - [I - \lambda R_n(\lambda) \tilde{\mathcal{L}}_M]\| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Preuve :

$$\begin{aligned} R_M(\lambda) - (I - \lambda R_n(\lambda) \tilde{\mathcal{L}}_M) &= \\ &= [I - (I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_M) + \lambda R_n(\lambda) (I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_M) \tilde{\mathcal{L}}_M] R_M(\lambda) \\ &= [-\lambda \tilde{\mathcal{L}}_M + \lambda R_n(\lambda) (I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_M)] \tilde{\mathcal{L}}_M R_M(\lambda) \\ &= [-\lambda R_n(\lambda) (I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_M) \tilde{\mathcal{L}}_M + \lambda R_n(\lambda) (I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_M) \tilde{\mathcal{L}}_M] R_M(\lambda) \\ &= [\lambda^2 R_n(\lambda) (\tilde{\mathcal{L}}_M - \tilde{\mathcal{L}}_n) \tilde{\mathcal{L}}_M] R_M(\lambda). \end{aligned}$$

Comme $\|D_{n,M}\| \rightarrow 0$ si $n \rightarrow \infty$ d'après la proposition 3.2.3 et
 $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|R_k(\lambda)\| < \infty$ puisque $R_k(\lambda)\phi \rightarrow R(\lambda)\phi$ si $k \rightarrow \infty$ pour tout $\phi \in C[-1,1]$,
d'après la remarque 3.2.1, le résultat s'en déduit alors immédiatement.

c.q.f.d.

* En regardant les remarques 3.2.1 et 3.2.2 on se rend compte de la supériorité de la méthode de BRAKHAGE. Ceci sera confirmé pour les expériences numériques qu'on va présenter plus loin.

3.3 - ALGORITHMES DE RESOLUTION D'UNE E.I.S.C. PAR ITERATION

Pour simplifier, on va considérer une E.I.S.C. de la forme :

$$(3.3.1) \begin{cases} \pi^{-1} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{-1/2} \frac{y(t)}{t-s} dt + \lambda \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{-1/2} K(s,t)y(t)dt = f(s); |s| < 1 \\ \pi^{-1} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{-1/2} y(t)dt = N \end{cases}$$

$K(s,t)$ et $f(x)$ sont deux fonctions connues vérifiant la condition de Hölder sur $[-1,1] \times [-1,1]$ et $[-1,1]$ respectivement et N est une constante donnée.

La méthode de réduction de Carleman-Vekua vue au chapitre 1, nous permet d'avoir l'équivalence entre l'équation (3.3.1) et l'équation intégrale de Fredholm de 2ème espèce.

$$(3.3.2) \quad y(t) + \lambda(\mathcal{L}y)(t) = F(t)$$

où

$$y(t) = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)^{-1/2} L(x,t)y(x)dx$$

$$L(x,t) = -\pi^{-1} \int_{-1}^{+1} (1-s^2)^{1/2} \frac{K(s,x)}{s-t} ds$$

$$F(t) = -\pi^{-1} \int_{-1}^{+1} (1-s^2)^{1/2} \frac{f(s)}{s-t} ds + N$$

pour les expressions de $L(x,t)$ et $F(t)$. (cf. proposition 1.1.2). On supposera que $K(s,t) \in C^1([-1,1] \times [-1,1])$ et $f \in C^1([-1,1])$, ce qui entraîne que $L(x,t)$ et $F(t)$ sont des fonctions continues sur $[-1,1] \times [-1,1]$ et $[-1,1]$ respectivement.

Soit $T_n(t) = \cos(n\theta)$, $\cos \theta = t$; $-1 \leq t \leq 1$.

Le polynôme de Tchebycheff de degré n , de 1ère espèce et $t_i^n = \cos((2i-1)\pi/2n)$; $i = 1, \dots, n$, les racines de $T_n(t)$. $\{T_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est un système orthogonal par rapport à la fonction poids $w(t) = (1-t^2)^{-1/2}$ sur $[-1,1]$.

Soit $U_{n-1}(t) = \frac{\sin(n\theta)}{\sqrt{1-t^2}}$ avec $\text{Cos}\theta = t$; $t \in [-1,1]$ le polynôme de Tchebycheff de degré $n-1$, de 2ème espèce. $s_k = \text{Cos}(\frac{k\pi}{n})$; $l = 1, \dots, n-1$ sont les racines de $U_{n-1}(t)$. $\{U_m(t)\}_{m \in \mathbb{N}}$ est un système de polynôme orthogonaux par rapport à la fonction poids $w(t) = (1-t^2)^{1/2}$ sur $[-1,1]$.

On a les relations suivantes. cf. F. ERDOGAN. and G.D. GUPTA [11]

$$(3.3.3) \quad \begin{cases} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w(t)T_j(t)dt}{t-x} = 0 & j = 0 \\ & (-1 < x < 1) \\ & = U_{j-1} & \text{si } j \geq 1 \end{cases}$$

$$(3.3.4) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{w(t)U_j(t)}{t-x} dt = -T_{j+1}(x) \quad (-1 < x < 1)$$

En utilisant ces relations, la méthode directe exposée au chapitre 2 consiste à :

a) résoudre le système linéaire $(n \times n)$:

$$(3.3.5) \quad (A_n + \lambda C_n) \bar{Y}_n = \bar{F}_n$$

$$\text{où : } \left. \begin{aligned} A_n = (a_{ij}) &= \frac{1}{n(t_j^n - s_i)} \\ C_n = (c_{ij}) &= n^{-1} \pi K(s_i, t_j^n) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} i &= 1, \dots, n-1 \\ j &= 1, \dots, n \end{aligned}$$

$$a_{nj} = n^{-1}, \quad c_{nj} = 0 ; \quad j = 1, \dots, n$$

$$\bar{F}_n = [f(s_1), \dots, f(s_{n-1}), N]^T$$

et

$$\bar{Y}_n = [\tilde{y}_n(t_1^n), \dots, \tilde{y}_n(t_n^n)]^T$$

où $\tilde{y}_n(t_j^n)$ est une approximation de la solution au point t_j^n .

b) Utiliser la formule d'interpolation directe (2.2.9) pour avoir une approximation de la solution en un point autre que les $\{t_j^n\}_{j=1}^n$. cette formule s'écrit dans le cas de l'équation (3.3.1).

$$(3.3.6) \quad \tilde{y}_n(s) = \frac{T_n(s)}{U_{n-1}(s)} \left[f(s) - n^{-1} \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{t_j^n - s} + \lambda^\pi K(s, t_j^n) \right) \tilde{y}_n(t_j^n) \right]$$

$$s \neq t_j^n ; j = 1, \dots, n$$

$$s \neq s_k \quad k = 1, \dots, n-1.$$

De même, la méthode indirecte qui consiste à résoudre l'équation intégrale de Fredholm (3.3.2) par la méthode de Nyström basée sur les formules de quadratures approchées de Gauss-Tchebycheff. cf. chapitre 2, nous donne :

a) Résoudre le système linéaire ($n \times n$)

$$(3.3.7) \quad (I_n + \lambda \tilde{Q}_n) \tilde{Y}_n = \tilde{F}_n$$

La matrice $\tilde{Q}_n = (q_{ij}) \quad 1 \leq i, j \leq n$ est définie par :

$$q_{ij} = \frac{\pi}{n} L_n(t_j^n, t_i^n) ; \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$\tilde{F}_n = [F_n(t_1^n), \dots, F_n(t_n^n)]^T$$

$$\tilde{Y}_n = [\tilde{y}_n(t_1^n), \dots, \tilde{y}_n(t_n^n)]^T$$

avec :

$$L_n(x, t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} w_k^* \frac{K(s_k, x)}{s_k - t} + \frac{T_n(t)}{U_{n-1}(t)} K(t, x)$$

$$F_n(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} w_k^* \frac{f(s_k)}{s_k - t} + \frac{T_n(t)}{U_{n-1}(t)} f(t) + N$$

si $t \neq s_k ; k = 1, \dots, n-1.$

avec $w_k^* = n^{-1} \pi (1 - s_k^2) ; k = 1, \dots, n-1.$

b) Utiliser la formule d'interpolation de Nyström (2.3.4) pour donner une approximation de la solution en un point autre que les $\{t_j^n\}_{j=1}^n$.

$$(3.3.8) \quad \tilde{y}_n(t) = F_n(t) - \lambda \tilde{\mathcal{L}}_n \tilde{y}_n(t)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_n \hat{y}_n(t) = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^n L_n(t_j^n, t) \tilde{y}_n(t_j^n)$$

pour $t = s_k$; $k = 1, \dots, n-1$, alors on a les formules suivantes :

$$L_n(t_j, s_i) = -n^{-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n-1} (1-s_k^2) \frac{K(s_k, t_j^n) - K(s_i, t_j^n)}{s_k - s_i} \\ + s_i K(s_i, t_j^n) - n^{-1} (1-s_i^2) \frac{\partial K}{\partial s}(s_i, t_j^n)$$

$$F_n(s_i) = -n^{-1} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n-1} (1-s_k^2) \frac{f(s_k) - f(s_i)}{s_k - s_i} + s_i f(s_i) \\ - n^{-1} (1-s_i^2) f'(s_i) + N.$$

On a vu au chapitre 2 que les deux systèmes linéaires (3.3.5) et (3.3.7) sont équivalents (cf. théorème 2.4.1) de même les deux formules d'interpolations (3.3.6) et (3.3.8) sont équivalentes (cf. théorème 2.4.2).

En tenant compte de ces observations, nous allons donner deux algorithmes de raffinement d'une solution approchée de l'équation (3.3.1), le premier est associé à la méthode itérative d'ATKINSON, le deuxième à la méthode itérative de BRAKHAGE.

m et n sont deux entiers tels que $m \gg n$

$$\tilde{y}_n = R_n(\lambda) F_n$$

$$\tilde{y}_m = R_m(\lambda) F_m$$

où

$$R_k(\lambda) = (I + \lambda \mathcal{L}_k)^{-1} ; k \in \mathbb{N}^*.$$

Algorithme 1

On va utiliser le schéma itératif (I2), en tenant compte des équivalences entre la méthode directe et la méthode indirecte.

1. - Initialisation

$$y^0(t_i^n) = \tilde{y}_n(t_i^n) ; \quad i = 1, \dots, n$$

$$y^0(t_i^m) = \tilde{y}_m(t_i^m) ; \quad i = 1, \dots, m$$

- résoudre $[A_n + \lambda C_n] \bar{Y}_n = \bar{f}_n$

$$\bar{Y}_n = [\tilde{y}_n(t_1^n), \dots, \tilde{y}_n(t_n^n)]^T$$

- pour calculer $\{\tilde{y}_n(t_i^m)\}_{i=1}^m$, on va utiliser la formule d'interpolation directe (3.3.6), mais il faut que : $t_i^m \neq t_j^n \quad i = 1, \dots, m ; j = 1, \dots, n$
et

$$t_i^m \neq s_k^n \quad i = 1, \dots, m ; k = 1, \dots, n-1$$

pour cela, il suffit de prendre $m = l \times n$ où l est un entier positif pair

2.- Évaluer $r^k(s) = F_m(s) - (I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_m) y^k(s)$

aux points : $s = t_j^n ; j = 1, \dots, n$

$$s = t_i^m ; i = 1, \dots, m.$$

3.- Posons

$$\delta^k = R_n(\lambda) r^k$$

$$\bar{\delta}^k = [\delta^k(t_1^n), \dots, \delta^k(t_n^n)]^T$$

$$\bar{r}^k = [r^k(t_1^n), \dots, r^k(t_n^n)]^T.$$

- résoudre : $[A_n + \lambda C_n] \bar{\delta}^k = A_n \bar{r}^k$

- évaluer : $\delta^k(s) = r^k(s) - \lambda \tilde{\mathcal{L}}_n \delta^k(s)$

aux points :

$$s = t_i^m ; i = 1, \dots, m$$

4. - $y^{k+1} = y^k + \delta^k$

aux points $\{t_i^n\}_{i=1}^n$ et $\{t_j^m\}_{j=1}^m$

5. - Si $\max_{i=1, \dots, m} |y^{k+1}(t_i^m) - y^k(t_i^m)| \leq \epsilon$

On arrête l'itération sur k .

Si non on recommence l'itération à partir de 2.

6.- Utiliser la formule d'interpolation (3.3.6) pour déterminer $\tilde{y}_m(s)$ en un point s différent des $\{t_j^m\}_{j=1}^m$ et des $\{s_k^m\}_{k=1}^{m-1}$.

$$\text{On posera : } \tilde{y}_m(t_i^m) = y^{k+1}(t_i^m)$$

$$i = 1, \dots, m.$$

Algorithme 2

On va utiliser le schéma itératif (J2), en tenant compte des équivalences entre la méthode directe et la méthode indirecte.

1. - initialisation

La même que dans l'algorithme 1.

$$y'_0(t_i^m) = \tilde{y}_n(t_i^m) ; i = 1, \dots, m$$

2. - Evaluer $r'_k(s) = F_m(s) - (I + \lambda \tilde{\mathcal{L}}_m) y'_k(s)$

aux points $s = t_i^m ; i = 1, \dots, m.$

3. - Posons $z'_k = -\lambda \tilde{\mathcal{L}}_m r'_k$ et $\delta'_k = R_n(\lambda) z'_k$

- calculer : $z'_k(t_i^n) \quad i = 1, \dots, n$

$$\bar{z}'_k = [z'_k(t_1^n), \dots, z'_k(t_n^n)]^T$$

- résoudre : $[A_n + \lambda \cdot C_n] \bar{\delta}'_k = A_n \bar{z}'_k$

$$\bar{\delta}'_k = [\delta'_k(t_1^n), \dots, \delta'_k(t_n^n)]^T$$

- évaluer : $\delta'_k(s) = z'_k(s) - \lambda \tilde{\mathcal{L}}_n \delta'_k(s)$

aux points $s = t_i^m ; i = 1, \dots, m.$

4. - $y'_{k+1} = y'_k + r'_k + \delta'_k$ aux points $t_i^m, i = 1, \dots, m.$

5. - Si $\max_{i=1, \dots, m} |y'_{k+1}(t_i^m) - y'_k(t_i^m)| \leq \epsilon$, on arrête l'itération sur k , si non on recommence l'itération à partir de 2.
6. - On prend $\tilde{y}_m(t_i^m) = y'_{k+1}(t_i^m)$; $i = 1, \dots, m$ on utilise la formule d'interpolation (2.2.9) pour déterminer $\tilde{y}_m(s)$ en un point s différent des $\{t_j^m\}_{j=1}^m$ et des $\{s_k^{m,m-1}\}$.

Remarques

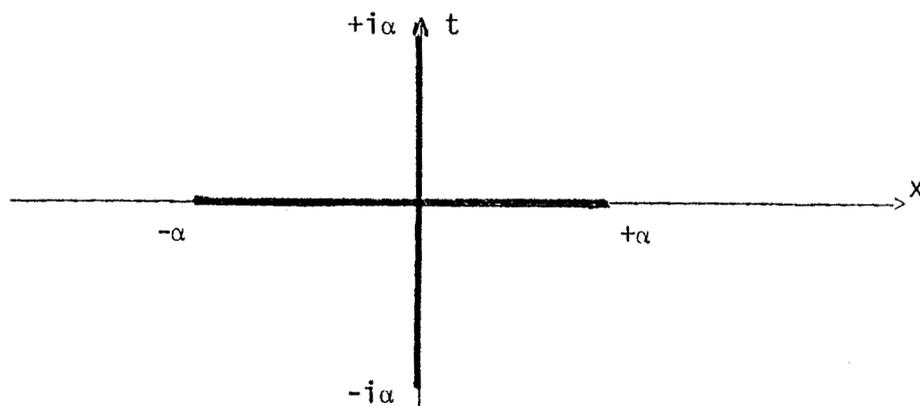
- i) Dans la version itérative de Brakhage (Algorithme 2) on n'a pas besoin d'évaluer $y'_k(t_i^n)$; $i = 1, \dots, n$.
- ii) Pour $m \gg n$, le coût d'une itération de Brakhage est environ le double de celui d'une itération d'Atkinson.
- iii) Pour des raisons de calcul, l'évaluation du résidu $r^k(s) = F_m(s) - (I + \lambda \mathcal{L}_m) y^k(s)$, dans l'algorithme 1 se fait en calculant $F_m(s)$ en double précision et $(I + \lambda \mathcal{L}_m) y^k(s)$ en simple précision, $r^k(s)$ est donné en simple précision.
La même chose pour le résidu $r'_k(s)$ dans l'algorithme 2.

3.4 - EXPERIENCES NUMERIQUES1er exemple

Détermination du coefficient intensité des contraintes aux extrémités d'une fissure en forme d'une croix.

On considère le problème d'une fissure en forme d'une croix, dans un milieu élastique, isotrope et infini, avec une charge constante σ le long de ses quatre branches.

Une telle fissure peut être considérée comme un système de deux fissures de longueur 2α , se coupant en angle droit. On veut étudier la propagation de la fissure.



Ce problème a été étudié par Datsyshin et Savruk [9] qui ont montré qu'il peut être réduit à une équation intégrale singulière de Cauchy donnée par :

$$(3.4.1) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{t-x} + \frac{t(t^2-x^2)}{(t^2+x^2)^2} \right] \phi(t) dt = \sigma.$$

où la fonction inconnue $\phi(t)$ est proportionnelle à la densité de dislocation le long des branches de la fissure. Elle présente une singularité d'ordre $(-1/2)$ aux bouts de la fissure.

D'après les résultats du chapitre 1, $\phi(t)$ est donc nécessairement de la forme :

$$(3.4.2) \quad \phi(t) = (1-t^2)^{-1/2} g(t)$$

où $g(t)$ est une fonction continue.

Les ingénieurs s'intéressent surtout au calcul du facteur intensité de contrainte noté k_I , aux bouts des branches de la fissure ; k_I est donnée par la formule suivante :

$$(3.4.3) \quad k_I = \sigma \alpha^{1/2} g(1).$$

Donc il est important de calculer $g(1)$.

Comme l'indice de l'E.I.S.C. (3.4.1) est égal à 1, on a une solution non unique, la condition suivante nous assure l'unicité d'une solution (cf. chap. 2).

$$(3.4.4.) \quad \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1/2} g(t) dt = 0.$$

THEOCARIS et IOAKIMIDIS [25] ont utilisé deux formules de quadratures approchées de Lobatto-Tchebycheff pour discrétiser le problème (3.4.1) (3.4.2) :

$$(3.4.5) \quad \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1/2} g(t) dt \approx \frac{\pi}{n-1} \left[\frac{1}{2} g(-1) + \frac{1}{2} g(1) + \sum_{h=2}^{n-1} g(t_k) \right]$$

$$U_{n-2}(t_k) = 0 ; \quad k = 2, \dots, n-1$$

U_{n-2} est le polynôme de Tchebycheff de 2ème espèce de degré $(n-2)$.

Cette formule est exacte pour tout polynôme de degré $\leq 2n-3$.

$$(3.4.6) \quad \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1/2} \frac{y(t)}{t-x} dt \approx \frac{\pi}{n-1} \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{y(t_k)}{t_k-x}$$

$$\lambda_k = \begin{cases} 1/2 ; & k = 1, n \\ 1 ; & k = 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

$$x \neq t_k ; \quad k = 1, \dots, n$$

$$t_1 = -1 ; \quad t_n = 1$$

Cette formule est exacte pour tout polynôme de degré $\leq (2n-2)$.

En appliquant les formules (3.4.5) et (3.4.6) à l'équation (3.4.1) (3.4.4.) et en prenant comme points de collocation $\{x_r\}_{r=1}^{n-1}$ où $T_{n-1}(x_r) = 0$, $r = 1, \dots, n-1$, on aboutit alors au système linéaire suivant :

$$(3.4.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{g(t_k)}{t_k - x_r} + \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n \lambda_k \frac{t_k(t_k^2 - x_r^2)}{(t_k^2 + x_r^2)^2} g(t_k) = \sigma \\ \frac{\pi}{n-1} \sum_{k=1}^n \lambda_k g(t_k) = 0. \end{array} \right. \quad r = 1, \dots, n-1.$$

En résolvant le système (3.4.7) on obtient directement une approximation de $g(1)$ et $g(-1)$. Mais, parfois il est intéressant de connaître la valeur de la fonction en un point quelconque de l'intervalle $[-1, 1]$, une formule d'interpolation demeure alors indispensable.

Après avoir résolu le système linéaire obtenu par la méthode directe (cf. 3.3.5) KRENK [18] a proposé une formule basée sur les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $(t_j, \tilde{y}_n(t_j))$ $j = 1, \dots, n$.

Dans la table 1, on présentera les valeurs de $g(1)$ calculées par ces deux méthodes, ainsi que par la méthode directe exposée au chapitre 2.

La valeur approximativement exacte donnée par ROOKE et SNEDDON [20] est 0.8636.

Dans les tables 2,3 on présentera les résultats obtenus en appliquant les méthodes itératives d'ATKINSON et de BRAKHAGE.

Table 1 : Calcul du facteur intensité de contrainte $g(1)$

n	Gauss-Tchebycheff + Interpolation de Lagrange	Lobatto - Tchebycheff	Gauss-Tchebycheff + interpolation directe (2.2.9)
6	0.83363	0.85970	0.86261
8	0.87264	0.86387	0.86435
10	0.86289	0.86449	0.86448
12	0.86381	0.86441	0.86433
14	0.86527	0.86424	0.86415
16	0.86281	0.86408	0.86401
18	0.86503	0.86396	0.86391
20	0.86283	0.86387	0.86383
22	0.86463	0.86380	0.86372
40	0.86335		0.86358
60	0.86348		0.86355

Table 2 : Itération de ATKINSON

n	M	nombre d'itérations	$\tilde{y}_n(1)$
4	8	5	0.8644
4	16	8	0.8639
4	24	10	0.8637
4	32	16	0.8636
4	40	22	0.8634

Table 3 : Itération de BRAKHAGE

n	M	nombre d'itérations	$\tilde{y}_n(1)$
4	8	2	0.8639
4	16	2	0.8636
4	24	3	0.8634
4	32	4	0.8634
4	40	4	0.8634

2ème exemple

Considérons l'E.I.S.C. suivante :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1/2} \frac{y(t)}{t-s} dt - \frac{1}{3} \int_{-1}^s (1-t^2)^{-1/2} y(t) dt = 1$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{-1/2} y(t) dt = 0$$

Dans la table 6 on compare les résultats obtenus par la méthode directe du 2ème chapitre avec la méthode utilisée par KRENK [18] et qui consiste à résoudre le système linéaire obtenu par la méthode directe (cf. 3.3.5), ensuite utiliser une formule basée sur les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points $(t_j, y_n(t_j))$; $j = 1, \dots, n$.

Dans la table 6, on compare les résultats obtenus en appliquant les algorithmes 1 et 2.

Table 6

n	Gauss-Tchebycheff + interpolation de Lagrange	Gauss-Tchebycheff interpolation directe
20	0.8325	0.8336
30	0.8330	0.8335
40	0.8332	0.8335

Table 7

	n	M	nombre d'itération	$\tilde{y}_m(1)$
ATKINSON	4	16	8	0.8337
	4	40	16	0.8336
BRAKHAGE	4	16	3	0.8338
	4	40	4	0.8335

3ème Exemple

Soit l'E.I.S.C. suivante :

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{g(t)}{t-s} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sin(t-s) g(t) dt = J_1(1) \cos s + 1 \quad -1 < s < 1.$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 g(t) dt = 0.$$

J_1 est la fonction de Bessel de 1er espèce d'ordre 1.

Supposons que la solution g admet une singularité d'ordre $(-1/2)$ aux extrémités ± 1 . Alors g s'écrit sous la forme :

$$g(t) = (1-t^2)^{-1/2} \phi(t).$$

On peut vérifier que la solution exacte est $g(t) = t(1-t^2)^{-1/2}$. Dans la table 8, on donnera les résultats obtenus par la méthode itérative d'ATKINSON, la table 9 contiendra les résultats associés à la méthode itérative de BRAKHAGE. On prendra $\epsilon = 0.001$

Table 8

n	M	nombre d'itérations	$ \tilde{y}_n(1)-1 $
2	4	3	3.10^{-5}
2	8	3	3.10^{-5}
2	16	3	3.10^{-5}
4	8	4	6.10^{-5}
4	16	4	6.10^{-5}

Table 9

n	M	nombre d'itérations	$ \tilde{y}_m(1)-1 $
2	4	2	2.10^{-5}
2	8	2	3.10^{-5}
2	16	2	3.10^{-5}
4	8	1	2.10^{-5}
4	16	1	2.10^{-5}

3.5 - CONCLUSIONS

Le fait qu'une équation intégrale singulière de Cauchy puisse se mettre sous la forme d'une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce, nous a permis d'adapter les méthodes de raffinement itératif connues pour les équations de Fredholm au cas d'une équation intégrale singulière de Cauchy.

Le coût d'une itération de BRAKHAGE est environ le double de celui d'une itération d'ATKINSON.

Nous dirons que la méthode itérative de BRAKHAGE est plus intéressante que la méthode itérative d'ATKINSON. Si le nombre d'itérations effectuées par la première méthode est inférieur à la moitié du nombre d'itérations effectuées en utilisant la deuxième méthode, pour l'obtention d'un même ordre de précision.

Les expériences que nous avons présentées nous montrent la nette supériorité de la variante itérative de BRAKHAGE sur celle d'ATKINSON, on voit de plus que la première méthode est d'autant plus intéressante que $(m-n)$ est grand. Ceci est lié au fait que l'approximation $\tilde{\mathcal{L}}_m$ de \mathcal{L} est aussi un opérateur compact et que $\tilde{\mathcal{L}}_m r'_k$ devient plus lisse que r'_k , r'_k étant le résidu.

La supériorité de la variante de BRAKHAGE a été aussi étudiée par CHATELIN [6] et AHUES [1] dans le cas de problèmes aux valeurs propres.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AHUES, M.
Raffinement d'éléments propres approchés d'un opérateur compact.
Thèse de Docteur Ingénieur, Université de Grenoble (1983)

- [2] ANSELONE, P.M.
Collectively Compact Operator Approximation Theory
Prentice-Hall, Engelwood Cliffs
New Jersey (1971)

- [3] ATKINSON, K.
Iterative variants of the Nyström Method for the Numerical Solution
of the Integral Equations.
Numer. Math. 22, 17-31 (1973)

- [4] ATKINSON, K.
A Survey of Numerical Methods of the Solution of Fredholm Integral
Equations of the Second Kind
SIAM, Philadelphia, Pennsylvania (1976)

- [5] BRAKHAGE, H.
Über die numerische Behandlung von Integralgleichungen nach der
Quadraturformelmethode
Numer. Math. 2, 183-196 (1960)

- [6] CHATELIN, F.
Spectral Approximation of linear operators.
Academic Press, New York (1983)

- [7] CHATELIN, F. et GUESSOUS, N.
Iterative Refinement for the Solution of Cauchy Singular Integral
Equations
Symposium on the numerical solution of CSIE, IMACS (1984)

- [8] CHAWLA, M.M. and RAMAKRISHNAN, T.R.
Modified Gauss-Jacobi quadrature formulas for the numerical evaluation
of Cauchy type singular Integrals.
BIT, vol. 14, n° 1, pp. 14-21 (1974)
- [9] DATSYSHIN, A.P. and SAVRUK, M.P.
A system of arbitrarily oriented cracks in elastic solids
J. Appl. Mech. (PMM) 37- 306-313 (1973)
- [10] DAVIS and RABINOWITZ
Numerical Integration.
Blaisdell Publ. Company (1967)
- [11] ERDOGAN, F. and GUPTA, G.D.
On the Numerical Solution of Singular Integral Equations
Quart. Appl. Math, 30, 525-534 (1972)
- [12] ERDOGAN, F., GUPTA, G.D. and COOK, T.S.
Numerical Solution of Singular Integral Equations in Methods
of Analysis and Solutions of Crack Problems.
G.C. SIH, ed. Noordhoff Leyden (1973)
- [13] GAKHOV, F.D.
Boundary value Problems
Pergamon Press, Oxford (1966)
- [14] GERASOULIS, A
Singular Integral Equations. The convergence of the Nyström
Interpolatant of the Gauss-Chebychev method.
BIT 22, 200-210 (1982)
- [15] GERASOULIS, A and SRIVASTAV, R.P.
A Method for the Numerical Solution of Singular Integral Equations
with A principal Value Integral
Int. J. Engeng Sci. vol. 19, pp. 1293-1298 (1981)
- [16] IOAKIMIDIS, N.I.
On the quadrature methods for the numerical Solution of Singular
Integral Equations
Journal of Comp. and Applied Math., Vol. 8, n° 2 (1982)

- [17] KRENK, S.
On quadrature formulas for singular integral equations of the first and second kind.
Quart. App. Math. 33, 225-232 (1975)
- [18] KRENK, S.
On the use of the interpolation polynomial for solution of singular integral equations
Quart. App. Math, 32, 479-484 (1975)
- [19] MUSKHELISHVILI, N.
Singular Integral Equations
P. Noordhoff. Groningen (1953)
- [20] ROOKE, D.P. and SNEDDON, I.N.
The Crack energy and the Stress intensity factor for cruciform crack deformed by internal pressure.
Int. J. Engng Science, 7, 1079-1089 (1964)
- [21] SLOAN, I.H.
A review of numerical methods for Fredholm equations of the second kind. The application and numerical solution of integral equations. (R.S. Anderssen, F.R. de Hoog and M.A. Lukas, eds). pp. 51-74 Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn. The Netherlands. (1980)
- [22] SLOAN, I.H.
Analysis of general quadrature methods for integral equations of the second kind.
Numer. Math. 38, 263-278 (1981).
- [23] STROUD, A.H. and DON SECREST
Gaussian quadrature formulas
Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs.
New-York (1965)
- [24] SZEGO, G.
Orthogonal polynomials, revised edition,
American Mathematical Society, New York (1959)
- [25] THEOCARIS, P.S. and IOAKIMIDIS, N.I.
Numerical integration methods for the solution of singular integral equations.
Quart. App. Math. 35. pp. 173-182 (1977)

DERNIERE PAGE D'UNE THESE

3È CYCLE, DOCTEUR INGÉNIEUR OU UNIVERSITÉ

Vu les dispositions de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu les rapports de M. *adame CHATELIN*.....

M.

M. *CHATELIN*..... *Magib*..... est autorisé

à présenter une thèse en vue de l'obtention du grade de DOCTEUR *de 3ème cycle*

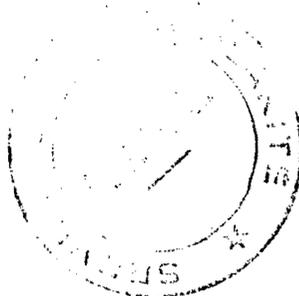
.....

Grenoble, le *5 mai 1974*

Le Président de l'Université Scientifique
et Médicale

M. TANCHE

f. chatelin



L. Tanche