



HAL
open science

**Analyse structurelle des propriétés d'observabilité et de
diagnosticabilité des systèmes linéaires et bilinéaires –
Approche graphique –**

Taha Boukhobza

► **To cite this version:**

Taha Boukhobza. Analyse structurelle des propriétés d'observabilité et de diagnosticabilité des systèmes linéaires et bilinéaires – Approche graphique –. Automatique / Robotique. Université Henri Poincaré - Nancy I, 2008. tel-00312020v1

HAL Id: tel-00312020

<https://theses.hal.science/tel-00312020v1>

Submitted on 25 Aug 2008 (v1), last revised 25 Sep 2008 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Habilitation à Diriger des Recherches

Université Henri Poincaré, Nancy 1

(Spécialité Automatique)

par

Taha Boukhobza

Maître de Conférences à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1

Docteur de l'Université Paris XI,

Analyse structurelle des propriétés d'observabilité et de diagnosticabilité des systèmes linéaires et bilinéaires

– Approche graphique –

Soutenue publiquement le 18 juin 2008

Composition du jury

Rapporteurs :

H. ABOU-KANDIL	Professeur à l'École Nationale Supérieure de Cachan
C. COMMAULT	Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble
M. MALABRE	Directeur de Recherche CNRS, Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes

Examineurs :

J-P. BARBOT	Professeur à l'École Nationale Supérieure de l'Électronique et de ses Applications de Cergy
M. DAROUACH	Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1
M. KINNAERT	Professeur à l'Université Libre de Bruxelles
F. HAMELIN	Professeur à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1

*à la mémoire de mon père
et au courage de ma mère.
à Hasna et Jalil, Nora et Djelloul,
à Moonsook, Nahi, Sila et Nouri,
pour ce qu'ils sont et
tout simplement parce qu'ils sont.*

Remerciements

*“Et voilà posée l'épineuse question des remerciements.
Entre la femme qui l'a mis au monde et celle qui l'y garde,
un romancier se devrait de remercier la terre entière.
Ceux qui vivent autour de lui, ceux qui écrivent, ceux qu'il a lus,
ceux qu'il écoute, ceux qui l'éditent
et ceux qui le supportent pendant qu'il œuvre dans la douleur.”*

Daniel Pennac

Le dictateur et le hamac

En premier lieu, je remercie très vivement M. Christian COMMAULT, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, M. Hisham ABOU-KANDIL, Professeur à l'École Nationale Supérieure de Cachan et M. Michel MALABRE, Directeur de Recherche CNRS à l'Institut de Recherche en Communication et Cybernétique de Nantes qui ont accepté d'être rapporteurs de mon Habilitation à Diriger des Recherches. Je suis très honoré qu'ils fassent partie de ce jury, connaissant leur charge de travail et leurs diverses et nombreuses responsabilités.

Je voudrais également remercier les membres examinateurs de mon jury : M. Michel KINNAERT, Professeur à l'Université Libre de Bruxelles et M. Mohamed DAROUACH, Professeur à l'Université Henri Poincaré. Un grand merci, avec mention spéciale, à M. Jean-Pierre BARBOT, Professeur à l'École Nationale Supérieure de l'Électronique et de ses Applications, qui a été témoin très proche de mes premiers pas en recherche. Je suis maintenant conscient de n'avoir pas toujours été un doctorant facile ou modèle, spécialement au voisinage d'un pendule inversé.

Évidemment, je n'oublie pas mon tuteur scientifique, Frédéric HAMELIN, Professeur à l'Université Henri Poincaré. Je le remercie plus particulièrement pour sa qualité de lecture exceptionnelle, ses encouragements, son rire volumineux et tonitruant et aussi pour avoir grandement contribué par son amitié à mon intégration au CRAN.

Par ces quelques mots, je souhaiterais témoigner ma gratitude à M. Alain RICHARD, Professeur à l'Université Henri Poincaré et directeur du CRAN pour le soutien sans faille qu'il m'a apporté ainsi qu'à M. Dominique SAUTER, Professeur à l'Université Henri Poincaré, pour m'avoir laissé une grande liberté dans mes choix de thématiques scientifiques. Il est aussi certain qu'ils ont tout deux influencé la décision de la commission de spécialistes de la 61^e section qui a accepté ma mutation au printemps 2003. Pour cela, je leur serai toujours redevable.

Dans un tout autre registre, je souhaiterais remercier M. Jean Michel DION, Directeur de recherche CNRS, M. Christian COMMAULT, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble ainsi que M. Jacob VAN DER WOUDE, Professeur à l'Université de Delft pour avoir écrit le “survey” paru

en 2003 et qui m'a fait découvrir l'analyse structurelle par approche graphique. Il est incontestable que sans ce papier, je n'aurais jamais découvert ce thème de recherche sur lequel est fondé l'essentiel des travaux que je présente dans ce manuscrit.

J'adresse aussi mes sincères remerciements à tous les chercheurs qui ont facilité mon insertion "sociale" (aussi importante que l'insertion scientifique) au CRAN, particulièrement Cédric, Patrick, Thierry et Marion.

Mes plus vifs remerciements à la personne la plus sollicitée du couloir, Sabine HURAU, pour son efficacité et sa disponibilité exceptionnelles.

Je remercie mes collègues de l'IUT, plus spécialement Annie AUDINOT, sans qui je n'aurais certainement pas pu mener de front ma recherche et la direction des études du département, Patrick LICKEL pour ses conseils éclairés et évidemment mon ami Franck JOLY 🍷 avec qui j'ai eu énormément de plaisir à enseigner des mathématiques. J'ai beaucoup apprécié son exigence et sa rigueur sans oublier sa générosité, son sens de l'hospitalité et son humour légendaire (?) qui ont quelque peu amorti nos divergences politiques.

Comme il est impensable de mener une activité de recherche sérieuse sans avoir accès à de multiples ressources documentaires, je tiens à exprimer ma gratitude à Mme Raymonde MICHEL et Mme Nathalie PIÉRACHE de la bibliothèque de Mathématiques pour leur efficacité et leur amabilité. Malgré de multiples tentatives, je n'ai toujours pas réussi à trouver une seule référence bibliographique qu'elles ne pouvaient me procurer dans les plus brefs délais et avec le sourire en prime.

Comment ne pas témoigner ma profonde gratitude à Abderrahmane et Mireille TADJEDDINE, qui m'ont accueilli comme un fils ce 17 Septembre 1993 où meurtri j'ai atterri à Paris pour poursuivre mes études. Un immense merci pour ce soutien moral et toutes les discussions qui m'ont tant apporté.

Enfin, sans Moonsook, sa patience, sa grande tolérance à tout type de défauts, son indéfectible soutien et ses encouragements incessants, ce travail n'aurait jamais vu le jour.

Table des matières

Organisation du document	11
I Curriculum vitae détaillé	13
Présentation	15
Résumé des activités de recherche	17
Thématique de recherche	17
Encadrements	21
Autres activités scientifiques	22
Relations avec l'industrie	23
Activités d'enseignement	25
Formation initiale	25
Formation continue	27
Responsabilités administratives et implication au sein de l'Université et du laboratoire	29
Tâches administratives	29
Implication au sein de l'Université et du laboratoire	29
Liste des travaux et publications	31
Revue internationale avec comité de lecture	31
Chapitres d'ouvrages	32
Colloques internationaux avec comité de lecture et actes	32
Colloques nationaux avec comité de lecture et actes	34
Rapports industriels	34
II Description des activités de recherche	37
1 Contributions à l'analyse structurelle des systèmes linéaires	39
1.1 Introduction	39
1.2 Représentation graphique d'un système linéaire structuré	45

1.2.1	Graphe orienté associé à un système linéaire structuré	46
1.2.2	Définitions et notations	47
1.3	Observabilité totale de l'état et des entrées d'un système linéaire	48
1.3.1	Position du problème	48
1.3.2	Subdivision $\Sigma_0 - \Sigma_1$ d'un système linéaire	49
1.3.3	Conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité totale de l'état et de l'entrée d'un système linéaire	50
1.4	Observabilité forte d'une partie de l'état et des entrées d'un système linéaire	51
1.4.1	Position du problème	51
1.4.2	Définitions et notations	52
1.4.3	Conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité d'une partie de l'état et de l'entrée d'un système linéaire	53
1.4.4	Cas particulier : observabilité forte de l'état d'un système linéaire	53
1.5	Application à l'analyse de l'observabilité des systèmes linéaires distribués en réseau	54
1.6	Placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité de l'état et de l'entrée	55
1.6.1	Position du problème	55
1.6.2	Recouvrement de la condition de couplage	56
1.6.3	Recouvrement de la condition de connectivité à la sortie	57
1.6.4	Recouvrement de la condition de distance	58
1.7	Placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité partielle	59
1.7.1	Position du problème	59
1.7.2	Recouvrement de la condition de connectivité à la sortie	60
1.7.3	Recouvrement de la condition β	60
1.7.4	Analyse et critique du résultat obtenu	61
1.8	Observabilité des systèmes singuliers	62
1.8.1	Position du problème	62
1.8.2	Graphe orienté associé à un système linéaire singulier structuré	64
1.8.3	Définitions et notations	64
1.8.4	Conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité à droite d'un système singulier	65
1.8.5	Conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité à droite d'une partie de l'état d'un système singulier	67
1.8.6	Conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité impulsionnelle d'un système singulier	69
1.9	Analyse des résultats obtenus et conclusions	70
2	Contributions à l'analyse structurelle des systèmes bilinéaires	73
2.1	Introduction	73
2.2	Observabilité des systèmes bilinéaires	77
2.2.1	Position du problème	77
2.2.2	Représentation graphique d'un système bilinéaire structuré	78
2.2.2.1	Graphe orienté associé à un système bilinéaire structuré	78

2.2.2.2	Définitions et notations	79
2.2.3	Conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité des systèmes bilinéaires	79
2.3	Observabilité uniforme des systèmes bilinéaires	81
2.3.1	Position du problème	81
2.3.2	Caractérisation de l'observabilité uniforme des systèmes bilinéaires	83
2.3.2.1	Adaptation de la représentation graphique d'un système bilinéaire structuré	83
2.3.2.2	Conditions nécessaires pour l'observabilité uniforme des systèmes bilinéaires	84
2.3.2.3	Condition suffisante pour l'observabilité uniforme générique des systèmes bilinéaires	85
2.4	Observabilité de l'état et des entrées d'un système bilinéaire structuré	87
2.4.1	Position du problème	88
2.4.2	Représentation graphique d'un système bilinéaire structuré à entrées inconnues	89
2.4.3	Conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité de l'état et de l'entrée d'un système bilinéaire	90
2.5	Problème de génération de résidus pour un système bilinéaire	93
2.5.1	Position du problème	93
2.5.2	Représentation graphique d'un système bilinéaire structuré soumis à des défauts	95
2.5.3	Conditions nécessaires et suffisantes de solubilité du problème fondamental de génération de résidus pour un système bilinéaire	98
2.5.3.1	Cas où le système est soumis à un seul défaut	99
2.5.3.2	Cas où le système est soumis à plusieurs défauts éventuellement simultanés	102
2.5.3.3	Cas où le système est soumis à plusieurs défauts non simultanés	102
2.6	Analyse des résultats obtenus et conclusions	103
 III Perspectives et programme de recherche		105
 Références bibliographiques		119
 Annexe A : Publications significatives		137
	Automatica, 2006	139
	European Journal of Control, 2006	146
	Automatica, 2007-1	160
	Automatica, 2007-2	167
	International Journal of Control, 2008	174
 Annexe B : Liste des symboles et notations		185

Organisation du document

Depuis ma mutation en Septembre 2003 de l'Université des Antilles-Guyane, vers l'Université Henri Poincaré (UHP – Nancy 1), je mène mes travaux de recherche au sein du thème “Surveillance et Détection de Défauts” du Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN – CNRS UMR 7039). Les différents problèmes que j'aborde concernent l'analyse structurelle par approche graphique des propriétés d'observabilité et de diagnosticabilité des systèmes linéaires et bilinéaires. L'originalité de cette approche est de fournir des résultats simples, intuitifs et très aisément interprétables. Ainsi, les méthodes d'analyse structurelle proposées sont adaptées à des systèmes de grande taille et ceci dès la phase de conception car ne nécessitant pas la connaissance exacte des paramètres physiques caractérisant le modèle du système considéré.

Afin de rendre homogène ce manuscrit, j'ai volontairement choisi de n'y décrire que les travaux de recherche réalisés au CRAN. En effet, d'une part, mes travaux de recherche à l'Université des Antilles-Guyane avaient, pour une grande partie, des thématiques très proches de celles abordées durant ma thèse et sont de ce fait assez différentes de celles menées depuis Septembre 2003. D'autre part, sans rien vouloir justifier, pendant les quatre années où j'ai été en poste à l'IUT de Kourou, mes activités de recherche étaient assez réduites en comparaison à celles que j'ai eues pendant ma thèse ou depuis ma mutation à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1.

Aussi, l'objectif principal de ce manuscrit est de faire un bilan de mes activités de recherche depuis mon intégration au CRAN, de les positionner dans un contexte national et international et de dégager quelques problématiques me paraissant suffisamment pertinentes scientifiquement pour constituer des perspectives intéressantes de recherche, tout en reconnaissant à cette dernière ses inhérents aspects imprévisibles.

Ce document comporte quatre parties. Dans un premier temps, un résumé de mes différentes implications au niveau tant de la recherche au sein du CRAN que de l'enseignement à l'Université Henri Poincaré et à l'Université des Antilles-Guyane est établi. Cette présentation s'associe à une description des différentes responsabilités administratives que j'ai pu exercer. Des résumés des différents sujets de recherche qui ont été proposés aux étudiants que j'ai co-encadrés et une liste exhaustive de mes publications clôturent cette partie.

La deuxième partie de ce manuscrit est dédiée à une présentation plus détaillée de mes travaux de recherche. Tout d'abord, dans le chapitre 1 sont regroupés les résultats concernant les systèmes linéaires. Plus précisément, les conditions graphiques d'observabilité totale puis partielle de l'état et

de l'entrée sont énoncées et discutées. Une application à la caractérisation graphique de l'observabilité pour des configurations spécifiques de systèmes distribués en réseau est décrite. Ensuite, sont exposées les stratégies proposées pour résoudre le problème du placement de capteurs permettant le recouvrement des propriétés d'observabilité totale ou partielle de l'état et des entrées. Enfin, une analyse graphique de diverses propriétés d'observabilité des systèmes singuliers est présentée.

Dans le chapitre 2 sont rapportées mes principales contributions concernant les systèmes bilinéaires. Ainsi, les études de l'observabilité et de l'observabilité uniforme pour ce type de systèmes sont présentées. Les travaux concernant l'observabilité des états et des entrées des systèmes bilinéaires à entrées inconnues y sont ensuite décrits. Enfin, la dernière partie de ce chapitre traite de la solubilité générique du problème de génération de résidus pour la détection et la localisation de défauts.

Ces deux chapitres constituent la partie la plus importante du bilan de mes propres activités de recherche. Bien que fortement liés aux problématiques que je traite, les travaux effectués par les étudiants et doctorants que j'ai co-encadrés ne seront que brièvement mentionnés à titre indicatif et seulement lorsque cela est opportun ou nécessaire.

Concernant la présentation des divers résultats techniques dans les chapitres 1 et 2, aucune preuve des propositions énoncées n'est donnée. Elles sont pour la majorité accessibles dans les publications jointes en annexe ou dans les références citées. Néanmoins, dans un souci de cohérence, tous les symboles, notations ainsi que la terminologie nécessaires à l'application des propositions et corollaires énoncés, sont définis dans ce document. Cela permet d'évaluer et de discuter de la pertinence, de l'originalité et de l'applicabilité des différents outils d'analyse proposés. Il est vrai que certaines définitions et certains algorithmes, que je pense essentiels à l'énoncé et à l'évaluation de quelques résultats, sont assez techniques, fastidieux donc difficiles à présenter et ardues à appréhender. Néanmoins, quelques d'exemples simples illustrent les différents résultats obtenus ainsi que les principales définitions de ce manuscrit, afin de le rendre, malgré tout, assez lisible. J'ai tenté de faire en sorte que ce document ne soit pas un inventaire à la Prévert de propositions et de corollaires, et de faciliter, au lecteur, la prise en main de certains outils relatifs à l'approche graphique non usuels en automatique classique. Par ailleurs, à la fin de chacun de ces chapitres sont présentées une synthèse et une discussion des les résultats obtenus. L'objectif est de donner un bref aperçu concis, sommaire mais complet, de ce qui a été fait ce qui permet une évaluation rapide de l'apport de mes travaux de recherche.

Dans la troisième partie de ce manuscrit, quelques perspectives de recherche sont discutées. Une description détaillée des différentes problématiques que je souhaite étudier est proposée en soulignant les motivations et les résultats attendus pour chacune d'entre elles.

La quatrième partie du manuscrit est constituée de deux annexes. La première regroupe les articles les plus significatifs que j'ai récemment publiés. S'y trouvent en particulier les preuves de la majorité des lemmes et propositions énoncés dans ce manuscrit. Par ailleurs, au sein de ces publications, d'autres exemples plus complexes ou plus élaborés que ceux exposés dans ce document sont traités. Dans la seconde annexe, une liste des principaux symboles et notations utilisés dans ce manuscrit est fournie.

Première partie

Curriculum vitae détaillé

Présentation

Taha Boukhobza

né le 22 mai 1971 à Alger (Algérie).

marié, trois enfants.

Adresse personnelle

4, allée des fauvettes
54210 Saint Nicolas de Port
Tél : 03.83.35.60.23

Adresse professionnelle

Centre de Recherche en Automatique de Nancy
BP 239 – 54506 Vandœuvre-lès-Nancy cedex
Tél : 03.83.68.44.64
email : taha.boukhobza@cran.uhp-nancy.fr

Situation actuelle

Grade Maître de Conférences depuis le 1^{er} septembre 1999. Classe normale, 5^e échelon.
Date de nomination dans l'échelon : 1^{er} septembre 2007.

Section 61^e (génie informatique, automatique et traitement du signal).

Emploi n°1593 à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1.
Département Génie Électrique et Informatique Industrielle (GEII) – Institut Universitaire de Technologie de Nancy-Brabois pour l'enseignement.
Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN – CNRS UMR 7039) pour la recherche.
Bénéficiaire d'une Prime d'Encadrement Doctoral et de Recherche depuis octobre 2006.

Formation

1995 *Doctorat de l'Université Paris-Sud 11, spécialité automatique.*
Laboratoire : Laboratoire des Signaux et Systèmes (LSS).
Directeurs de thèse : D.R. Dorothée NORMAND-CYROT et Pr. Jean-Pierre BARBOT.
Sujet : “Contribution aux formes d'observabilité pour les observateurs à modes glissants – Etudes des commandes par ordres supérieurs”.
Mention très honorable avec félicitations du jury.
Thèse soutenue le 21 novembre 1997 devant, en plus des encadrants, la commission d'examen suivante :
président : Pr. Jean-Paul LOUIS,
rapporteurs : D.R. Carlos CANUDAS DE WIT, Pr. Nacer M'SIRDI,
examineurs : Pr. Salvatore MONACO, Pr. Wilfrid PERRUQUETTI,
membres invités : C.R. Sette DIOP, Pr. Daniel VIAULT.

- 1994 *Diplôme d'Etudes Approfondies (DEA) Automatique et Traitement numérique du signal.*
Université Paris-Sud 11, mention bien, rang : 2^e (1^{er} à l'écrit).
- 1993 *Diplôme d'Ingénieur d'état en Automatique.*
École Nationale Polytechnique d'Alger, Algérie, mention très bien.

Fonctions exercées :

- 2003–... *Maître de Conférences au département GEII de l'IUT de Nancy-Brabois, Université Henri Poincaré, Nancy 1.*
- 1999–2003 *Maître de Conférences au département GEII de l'IUT de Kourou, Université des Antilles-Guyane.*
- 1998–1999 *Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche au département GEII de l'IUT de Kourou, Université des Antilles-Guyane.*
- 1997–1998 *Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche au département EEA de l'Université Paris-Sud, 11.*

Divers

- 2005–2008 *Membre titulaire de la Commission de Spécialistes (CS) 61^e section de l'Université Henri Poincaré, Nancy 1. Participation active aux campagnes de recrutement des Maîtres de Conférences (présence à trois commissions d'audition).*
- 2005–2008 *Membre du Conseil Scientifique de l'Université Henri Poincaré, Nancy 1.*
- 2004–... *Directeur des études du département GEII de l'IUT Nancy-Brabois, Université Henri Poincaré, Nancy 1.*
- 2003–2008 *Membre titulaire de la Commission de Spécialistes (CS) mixte 61^e– 63^e section de l'Université des Antilles-Guyane. Présence à une seule commission d'audition.*
- 2001–2003 *Directeur des études du département GEII de l'IUT Kourou, Université des Antilles-Guyane.*
- 1999–2001 *Responsable de la formation continue au département GEII de l'IUT Kourou, Université des Antilles-Guyane.*

Résumé des activités de recherche

Thématique de recherche

Mes activités de recherche se déroulent, actuellement, dans l'équipe "Détection de défauts – Interaction modélisation, diagnostic, commande" (DIMODIC) du thème "Surveillance et Détection de Défauts" (SURFDIAG) au Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN – CNRS UMR 7039). Ces travaux concernent le développement d'outils d'analyse de propriétés structurelles pour les systèmes linéaires et bilinéaires structurés. Plus particulièrement, mes thèmes de recherche traitent des propriétés d'observabilité et de diagnosticabilité des systèmes linéaires aussi bien standards que singuliers et des systèmes bilinéaires avec et sans entrées inconnues, en utilisant des outils graphiques. L'objectif des méthodes proposées est de fournir des critères de vérification de ces propriétés qui soient assez intuitifs, facilement interprétables et si possible originaux, élégants et bien adaptés aux systèmes de grande dimension dont les paramètres ne sont pas nécessairement connus. En effet, seule la connaissance de la structure des systèmes est nécessaire pour la mise en œuvre des outils d'analyse proposés, ce qui rend les approches développées utilisables dès la phase de conception du système étudié.

L'approche utilisée est toujours fondée sur une représentation graphique des systèmes qui sont modélisés par des matrices structurées, pour lesquelles seule la structure ou autrement dit la répartition des éléments nuls est connue. Les valeurs des autres éléments, non nuls, de ces matrices sont supposées indépendantes et leur connaissance (numérique) n'est pas nécessaire pour l'analyse structurelle proposée.

Mes travaux de recherche, à caractère assez méthodologique et théorique, ont conduit à quelques publications dont la liste exhaustive est présentée pages 31 à 34.

Ci-dessous sont décrites succinctement les principales problématiques que j'ai abordées ces quatre dernières années. En premier lieu, sont exposées les contributions concernant les systèmes linéaires pour lesquels, naturellement, plus de travaux existent dans la littérature. Dans un second paragraphe, je résumerai les points essentiels abordés pour les systèmes bilinéaires.

Analyse structurelle des systèmes linéaires

Concernant les systèmes linéaires, je me suis principalement intéressé à établir des critères graphiques pour analyser différentes propriétés d'observabilité. Plus précisément, pour les systèmes linéaires standards à entrées inconnues, des conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité de l'état et de l'entrée du système ont été obtenues [6]. Par ailleurs, d'autres critères ont été établis pour l'analyse de l'observabilité d'une partie donnée de l'état et des entrées [2]. Lorsque ces critères

ne sont pas vérifiés, des stratégies de placement de capteurs pour le recouvrement des propriétés d'observabilité forte de toutes les composantes, ou d'une partie donnée, de l'état et/ou de l'entrée sont proposées [2]. De plus, une adaptation de cette analyse au cadre des systèmes distribués en réseau a été effectuée pour étudier la validité de divers schémas d'observation [14].

Avec l'ambition de considérer le cas le plus général possible pour l'analyse de l'observabilité d'un système linéaire, j'ai travaillé sur les systèmes singuliers. L'étude menée considère indifféremment tous les systèmes singuliers, aussi bien carrés, sur-déterminés, que sous-déterminés. Dans ce cadre très général, des conditions graphiques nécessaires et suffisantes pour l'observabilité à droite et l'observabilité impulsionnelle ont été établies et l'ensemble des composantes observables de l'état a été graphiquement caractérisé [7].

Les résultats obtenus concernant l'observabilité des systèmes linéaires standards et singuliers peuvent être utilisés dans un contexte de diagnostic ou de synthèse de commande tolérante aux défauts. Les entrées inconnues seraient alors des défauts dont l'estimation pourrait être utilisée dans la loi de commande. Enfin, l'analyse de la perte d'observabilité due à la présence de défauts sur le système peut aussi être effectuée aisément en utilisant directement les différents résultats décrits ci-dessus.

Analyse structurelle des systèmes bilinéaires

Comparativement au nombre d'études dédiées aux systèmes linéaires, il existe peu de travaux, fondés sur la théorie des graphes, dédiés à l'analyse des propriétés structurelles des systèmes non linéaires. Dans ce contexte, il m'a semblé pertinent de généraliser au cas bilinéaire certains résultats concernant l'observabilité et le diagnostic. Ainsi, quatre résultats principaux ont été établis concernant les propriétés d'observabilité, d'observabilité uniforme et la solubilité du problème de génération de résidus.

Le premier résultat concerne la caractérisation exacte de la propriété d'observabilité en utilisant un nouveau type de graphes [5]. En appliquant les résultats obtenus pour les systèmes linéaires à entrées inconnues et les systèmes singuliers, des conditions nécessaires et d'autres suffisantes ont été trouvées concernant l'observabilité uniforme des systèmes bilinéaires [8, 1]. Par ailleurs, des critères graphiques permettant d'analyser l'observabilité de l'état et des entrées d'un système bilinéaire à entrées inconnues ont été établis [15]. Enfin, dans un objectif de diagnostic et de détection de défauts, des conditions nécessaires et suffisantes pour la solubilité du problème de génération de résidus ont été démontrées [4]. Suite à cette étude, il est apparu que l'un des avantages de l'approche graphique adoptée était de bien révéler les interactions commande-diagnostic. Ainsi, des travaux ont été initiés afin d'analyser la capacité de la commande à rendre détectables et localisables des défauts qui ne le sont pas nécessairement avec une commande quelconque [16].

Positionnement

Différents critères de proximité pourraient être utilisés afin de situer mes travaux de recherche par rapport à la communauté scientifique. En effet, le fait d'analyser des propriétés structurelles fondamentales, particulièrement dans le cas de systèmes linéaires, crée des liens entre mes études et nombre de travaux conséquents et fondamentaux, sur l'observabilité par exemple, d'autant plus que l'intérêt pour ces thématiques remonte aux années 1960. Aussi, pour positionner mes travaux,

j'ai préféré utiliser un critère fondé sur le type d'approche et sur les outils employés, principalement pour la partie concernant les systèmes linéaires. A propos des systèmes bilinéaires, les travaux adoptant des représentations graphiques étant très peu nombreux, il est plus adéquat de situer mon travail par rapport aux propriétés analysées en privilégiant principalement les équipes dont les thèmes de recherche actuels ou récents sont encore relatifs aux propriétés d'observabilité, de diagnostic afin d'avoir une image plus actuelle du positionnement de mes travaux. Évidemment, dans les chapitres dédiés à la présentation détaillée de mes résultats, les références bibliographiques permettent de compléter et de situer plus précisément mes travaux au sein de la communauté automatique.

Sur le plan national, de par l'approche utilisée et des propriétés étudiées, mes travaux sont très proches de ceux menés par Pr. C. COMMAULT et Pr. J-M. DION de l'équipe Systèmes Linéaires et Robustesse du GIPSA-LAB (ex- LAG). Ces chercheurs se sont intéressés depuis la fin des années 1980, entre autres, aux problématiques de découplage, de rejet de perturbations, à la caractérisation de divers zéros et des dimensions des sous-espaces de commandabilité ou d'observabilité ... pour les systèmes linéaires structurés. Plus récemment leurs études ont porté sur le diagnostic et le placement de capteurs. Ainsi, bien que beaucoup moins nombreux, les résultats que j'ai obtenus pour les systèmes linéaires à entrées inconnues et bilinéaires peuvent être, en partie, vus comme complémentaires de ceux établis par cette équipe.

Les équipes animées par Pr. M. STAROSWIECKI, actuellement au SATIE et Pr. V. COQUEMPOT du LAGIS travaillent également sur les propriétés structurelles d'observabilité, de diagnosticabilité et de reconfigurabilité en utilisant des graphes bipartis. Les graphes utilisés ne prennent cependant pas en compte certaines des non-linéarités telles que celles présentes dans les systèmes bilinéaires. Ainsi, nos travaux se démarquent par la réelle considération de ces non-linéarités, ce qui rend nos résultats réellement dédiés aux systèmes bilinéaires. De plus, pour ce qui est de l'observabilité, les graphes bipartis ne peuvent aisément prendre en compte des entrées exogènes inconnues qu'en les considérant comme étant constantes ou lentement variables. Une partie de mon travail est dédié justement à lever cette contrainte.

La représentation des systèmes par graphes bipartis est aussi utilisée par l'équipe dirigée par Pr. L. TRAVÈ-MASSUYÈS notamment pour aborder des problèmes de placement de capteurs afin de maximiser la diagnosticabilité des défauts, qui est une notion structurelle définie pour rendre compte du nombre de défauts discriminables sur le système.

L'équipe Bond Graphs dirigée par Pr. G. DAUPHIN-TANGUY du LAGIS et plus particulièrement Pr. C. SUEUR et Pr. B. OULD BOUAMAMA utilise des représentations graphiques à base de Bond-Graphs pour construire des outils d'analyse structurelle. Ainsi, les principales propriétés des systèmes linéaires standards sans entrée inconnue ont été étudiées dans le début des années 1990. Actuellement, les travaux de cette équipe sont plus dédiés aux systèmes linéaires à paramètres variant dans le temps et aux systèmes hybrides. Les outils graphiques que j'utilise sont assez différents et, mis à part les problèmes de détection de défauts, je ne m'intéresse pas particulièrement aux mêmes propriétés ni au même type de systèmes. Par ailleurs, l'aspect synthèse est assez présent dans les travaux de cette équipe alors que je m'arrête pour l'instant à l'aspect analyse.

Enfin, l'équipe Commande Non-Linéaire et Procédés du LAGEP animée par Pr. H. HAMMOURI s'est beaucoup intéressée à la détection et localisation de défauts pour les systèmes bilinéaires

en utilisant une approche géométrique. Ces travaux ont été à la base de mes recherches sur la solubilité structurelle du problème de génération de résidus pour les systèmes bilinéaires. En outre, Pr. H. HAMMOURI en collaboration avec Pr. G. BORNARD de l'équipe Système non linéaire et Complexité (SYSCO) du GIPSA-LAB (ex- LAG) a beaucoup travaillé sur la propriété d'observabilité uniforme ce qui a abouti à des formes d'observabilité uniforme pour les systèmes multi-sorties. Ces chercheurs ont aussi établi des conditions graphiques suffisantes pour l'observabilité uniforme des systèmes non linéaires obéissant à des contraintes de type Lipschitz et mis au préalable sous forme particulière. J'ai abordé ce même problème pour les systèmes bilinéaires en tentant de donner en plus des conditions nécessaires et directement à partir du modèle du système.

Sur le plan international, plusieurs équipes traitent de l'analyse structurelle des propriétés de systèmes linéaires. Pr. J. VAN DER WOUDE de l'équipe Mathematical Systems Theory de l'Université De Delft aux Pays-Bas travaille depuis fort longtemps dans le domaine. D'ailleurs, l'un de ses résultats essentiels est la caractérisation des zéros invariants d'un système linéaire structuré. Les conditions d'observabilité de l'entrée et de l'état que j'ai établies dérivent assez directement de ces résultats.

L'équipe du Laboratory of Control Theory de l'Université de Technologie de Dresde en Allemagne dirigée par Pr. K. REINSCHKE a travaillé durant la dernière décennie sur les caractérisations graphiques des propriétés structurelles des systèmes singuliers. L'originalité de mon travail, par rapport à ceux de cette équipe, est d'avoir levé certaines hypothèses faites sur ces systèmes (dont l'hypothèse de régularité) et donc d'avoir établi des résultats s'appliquant aux systèmes singuliers aussi bien carrés, que sur-déterminés ou sous-déterminés.

L'équipe Vehicular Systems de l'Université de Linköping en Suède, dont font partie Pr. E. FRISK et M. M. KRYSANDER travaille sur l'analyse structurelle des propriétés liées à la détection et à la localisation de défauts à base de graphes bipartis. L'approche est très proche de celle adoptée par Pr. STAROSWIECKI.

Après avoir étudié la caractérisation des zéros et des sous-espaces invariants des systèmes linéaires structurés, Pr. F. SVARICEK de l'Institute of System Dynamics and Flight Mechanics de l'Université de Munich a été le premier à s'intéresser à l'analyse structurelle par approche graphique des systèmes bilinéaires en donnant des conditions graphiques suffisantes d'observabilité. L'une des motivations à l'origine des résultats que j'ai obtenu sur l'observabilité des systèmes bilinéaires était le perfectionnement de ces conditions et ainsi l'établissement de conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité. Enfin, le problème de génération de résidus pour les systèmes non linéaires en général et bilinéaires en particulier a été largement abordé, en utilisant une approche géométrique principalement, par Pr. M. KINNAERT qui dirige l'équipe Automatique et analyse des systèmes de l'Université libre de Bruxelles en Belgique. Ces travaux m'ont beaucoup inspiré et les conditions graphiques de génération de résidus que j'ai élaborées sont la traduction sur une représentation graphique des conditions géométriques établies par les équipes du Pr. H. HAMMOURI et du Pr. M. KINNAERT.

Encadrements

Depuis mon arrivée au CRAN, je participe pleinement à l'encadrement d'étudiants préparant un Master (DEA) ou une thèse de doctorat de l'Université Henri Poincaré. A ce titre, je suis bénéficiaire depuis octobre 2006 d'une prime d'encadrement doctoral et de recherche.

La majorité des sujets de recherche que je propose est en relation avec l'analyse structurelle des propriétés d'observabilité et de diagnosticabilité des systèmes linéaires et bilinéaires structurés. Toutefois, des sujets davantage liés à la thématique diagnostic ont été abordés tels que l'étude des interactions commande – diagnostic ou l'implémentation d'algorithmes d'estimation de défauts d'actionneurs sur la plateforme expérimentale des 3 cuves.

Master, DEA ou équivalent

- Sébastien CANITROT : 2004–2005

Sujet : “Etude des interactions commande – diagnostic pour les systèmes bilinéaires”.

% encadrement : 100.

- Matthias ROLINK : 2005–2006

Sujet : “Synthèse d'un schéma de localisation et d'estimation de défauts actionneurs pour la plateforme des trois cuves. Utilisation d'observateurs à modes glissants d'ordres supérieurs”. Ce sujet est lié au projet européen “Networked Control Systems Tolerant to faults (NECST)”.

% encadrement : 100

1 article en commun [22] et un rapport (deliverable) pour NECST.

Stage de 2^e année d'école d'ingénieurs

- Theodor MADER : Avril 2006 – Juin 2006

Stage de 12 semaines effectué dans le cadre de sa 2^e année au Swiss Federal Institute of Technology Zurich (ETH)

Sujet : “Elaboration d'une boîte à outils pour l'analyse des propriétés structurelles des systèmes linéaires et bilinéaires”.

% encadrement : 100

2 articles en commun [17, 19].

Thèses (Le directeur de thèse de tous les doctorants que j'ai co-encadrés est Pr. Frédéric HAMELIN)

- Sébastien CANITROT : Octobre 2005 – 2008

3^e année de thèse (allocataire de recherche MJENR, moniteur au CIES).

Son sujet de recherche concerne l'étude par approche graphique des interactions commande – diagnostic et le recouvrement des propriétés d'observabilité et de diagnosticabilité par placement de capteurs pour les systèmes bilinéaires structurés.

% encadrement : 70 Frédéric HAMELIN (30%)

3 articles en commun [16, 24, 4] + 1 article en révision [3].

- Sinuhé MARTINEZ – MARTINEZ : Octobre 2004 – Mai 2008
4^e année de thèse (boursier de la Société Française d’Exportation des Ressources Educatives SFERE).
Son sujet de recherche concerne l’étude par approche graphique des propriétés d’observabilité partielle des entrées et des états pour les systèmes linéaires structurés ainsi que le recouvrement de ces propriétés d’observabilité par placement de capteurs.
% encadrement : 60 Frédéric HAMELIN (40%)
3 articles en commun [6, 17, 19] + 1 soumission à European Journal of Control.
Rapporteurs : Professeur Olivier SENAME (GIPSA-lab, INPG) et M. Mohamed DJEMAI (ECS, ENSEA). Soutenance programmée le 27 mai 2008.

Autres activités scientifiques

- De septembre 2004 à Septembre 2007, j’ai participé, en liaison avec ma thématique de recherche, au projet européen “Networked Eontrol Systems Tolerant to faults ” (NECST – EU – IST – 2004 – 004303 ; 2004 – 2007 ; <http://www.strep-necst.org/>). Ce projet a pour principal objectif de développer des techniques de diagnostic et de commande tolérante aux défauts dédiées à des systèmes distribués en réseau et de les appliquer à des procédés industriels. En parallèle aux six autres organisations participant à son avancement :
 - Gerhard – Mercator, Université de Duisburg, Allemagne ;
 - Université de Technologie d’Helsinki, Finlande ;
 - Université de Hull, Royaume Uni ;
 - Société Neste Jacobs Oy, Finlande ;
 - Société PREDICT, France ;
 - Société SAE AUTOMATION, Slovaquie ;

Le CRAN était particulièrement impliqué dans sa réalisation puisque ce projet était porté par Pr. E. RONDEAU et que Pr. D. SAUTER faisait partie du comité de direction. Parmi les onze tâches spécifiques à ce projet, je me suis impliqué dans les tâches 3 et 4 relatives à l’établissement de méthodes de diagnostic et à l’étude de l’autonomie pour les systèmes distribués en réseau.

Plus précisément, pour de tels systèmes, j’ai conçu une méthode d’analyse structurelle des propriétés de diagnosticabilité et de l’autonomie de différents schémas de génération de résidus ou d’observation [20, 21, 14]. De plus, j’ai encadré M. Matthias Rolink pour son stage de Diplomarbeit de l’Université de Duisburg, dont l’objectif était le développement d’observateurs à modes glissants afin d’estimer les amplitudes de défauts actionneurs sur la plateforme des trois cuves [22]. Cette dernière a servi à éprouver diverses techniques de diagnostic et de commandes tolérantes aux défauts proposées dans le cadre du projet NECST.

- Je suis régulièrement rapporteur de publications soumises à des congrès tels que IEEE CDC, ECC, IFAC World Congress, IFAC SAFEPROCESS et à des revues internationales telles que IEEE Transactions on Automatic Control (IEEE TAC), Automatica, International Journal of Systems Science (IJSS), Journal Européen des Systèmes Automatisés (JESA).
- En septembre 2005, j'ai été membre de jury des soutenances de quelques étudiants de l'option Automatique du DEA Contrôle, Signaux et Communication, délivré conjointement par l'Université Henri Poincaré Nancy 1 et l'Institut National Polytechnique de Lorraine.
- En janvier 2007, j'ai été membre du jury de soutenance du stage de M. Matthias ROLLINK dans le cadre de son Diplomarbeit à l'Université de Duisburg.
- J'ai été membre de jury invité pour la thèse de M. X. MININGER dont l'intitulé était "Réduction des vibrations des machines à réluctance variable à l'aide d'actionneurs piézoélectriques". Cette thèse de doctorat, effectuée au sein du laboratoire SATIE de l'ENS Cachan sous la direction de M. M. GABSI a été soutenue le 25 novembre 2005.

Relations avec l'industrie

- Durant ma thèse de doctorat au LSS, je me suis fortement impliqué dans une étude pour le compte d'ALCATEL-ALSTHOM RECHERCHE concernant l'observation de la machine asynchrone sans capteur de vitesse. Ce travail était en lien direct avec mes propres travaux de recherche de l'époque dans la mesure où une partie de mon sujet de thèse était dédiée à la synthèse d'observateurs à modes glissants pour les systèmes non linéaires. Tout d'abord, une analyse de l'observabilité pour la machine asynchrone sans capteur de vitesse a été faite, puis des observateurs à modes glissants d'ordre 1 et 2 ont été réalisés et testés en simulation. Un comparatif de performances de divers observateurs pour la machine asynchrone a été établi. Ce travail a mené à la rédaction de deux rapports [42, 43] et a servi de base à un chapitre d'ouvrage [13].
- Entre septembre 2007 et mars 2008, j'ai participé à un contrat de veille technologique pour le compte du Centre National des Etudes Spatiales (CNES) concernant la détection et la localisation de défauts pour les systèmes industriels en général et plus spécifiquement pour les systèmes aéronautiques ou embarqués. L'objectif de cette étude était, dans un premier temps, de proposer une cartographie des compétences industrielles et universitaires dans le domaine. Dans un second temps, il a été question de dégager les avantages, inconvénients et les limites des diverses techniques et algorithmes de détection et localisation de défauts existants pour constituer un comparatif de leurs performances. Enfin, pour conclure cette étude, des éléments de réflexion prospectifs sur les techniques les plus pertinentes pour le futur lanceur de satellites ARIANE VI ont été fournis.

Activités d'enseignement

Mes activités d'enseignement associées aux deux postes de Maître de Conférences que j'ai occupés depuis 1999, se sont toujours effectuées dans un département Génie Électrique et Informatique Industrielle (GEII) d'un IUT. Cependant, les contextes et les environnements des départements GEII de l'IUT de Kourou et de l'IUT de Nancy-Brabois étant très différents, la quantité et la variété des enseignements que j'ai effectués sont très disparates. En effet, globalement, lors de mon premier poste à Kourou entre septembre 1999 et juillet 2003, le volume horaire annuel de mes interventions avoisinait les 350 heures équivalents TD sans compter la formation continue. Cela étant principalement dû au manque d'enseignants vacataires et de moniteurs sur place et au fait que j'étais le seul enseignant chercheur de la 61^e section à l'IUT de Kourou. Ainsi, j'ai enseigné de l'automatique, de l'informatique industrielle, des réseaux, de l'électricité, de l'électronique et de la physique.

Ci-dessous sont exposées plus en détails mes diverses activités d'enseignement depuis ma nomination en septembre 1999.

Formation initiale

En raison de la situation géographique de l'IUT de Kourou et du faible nombre d'enseignants permanents qui y étaient en poste, j'ai été assez rapidement responsable de modules entiers couvrant une palette assez large de ce qui se fait dans un département GEII. Beaucoup de ces enseignements ont dû être montés de toutes pièces avec les moyens disponibles sur place. Il est clair que sur certains domaines, mes compétences ne m'ont pas permis de dispenser un cours d'une grande qualité ou des travaux pratiques remarquables par leur pertinence. Mais, somme toute, vu le contexte, l'expérience a été assez enrichissante.

Mes enseignements dans le département GEII de l'IUT de Nancy-Brabois sont beaucoup moins dispersés et sont centrés sur l'automatique, l'informatique industrielle et les mathématiques. A l'exception du module d'automatique dont j'ai la responsabilité, je n'ai pas eu à m'investir dans la création de cours magistraux ou de travaux pratiques. Cependant, j'ai participé activement à la construction de certains enseignements de mathématiques dans l'objectif de rendre attractive cette matière en dépit du caractère abstrait des concepts théoriques enseignés et d'un nombre important d'étudiants ayant de grandes lacunes en mathématiques de base. Par ailleurs, je me suis beaucoup investi dans l'élaboration d'un module de méthodologie qui n'est enseigné que depuis la rentrée universitaire 2004 et dont l'objectif est d'apprendre aux étudiants, parfois en échec malgré leur bonne volonté, à adopter des méthodes correctes de travail, à lire correctement et à analyser un cours ou un sujet d'examen, à rédiger des fiches de synthèse d'un cours et des procédures permettant

la résolution d'exercices ...

Les différences entre les deux profils d'enseignement sur les deux postes que j'ai occupés jusque là se ressentent beaucoup dans les paragraphes ci-dessous, où j'ai séparé les enseignements plus généraux adressés aux étudiants de 1^{re} année de ceux plus spécialisés destinés aux étudiants de 2^e année.

Enseignements en 1^{re} année d'IUT

L'essentiel de mes interventions en 1^{re} année d'IUT s'inscrit dans la formation aux bases de l'informatique industrielle. Ainsi, je dispense des travaux pratiques (TP) d'initiation aux langages C, Visual Basic et récemment C#, des cours magistraux (CM), des travaux dirigés (TD) et des TP de logique câblée et de logique programmée comportant une initiation au VHDL. J'ai encadré des TP de programmation de microprocesseurs et de microcontrôleurs. Enfin, j'ai fait des CM et des TD d'automatismes industriels permettant aux étudiants d'acquérir les techniques du GRAFCET et du GEMMA avec application en TP.

A l'IUT de kourou et aussi à l'Université Quisqueya de Port-au-Prince en Haïti, et ce dans le cadre d'une coopération universitaire gérée par l'AUF (Agence Universitaire de la Francophonie), j'ai effectué et créé des CM, TD et TP de capteurs et instrumentation, de circuits électriques ainsi que des TP d'électronique de base et de CAO-Simulation sous le logiciel ORCAD®. En plus de ces enseignements assez techniques, j'ai eu en charge des TD de mathématiques portant sur les notions de bases de l'algèbre linéaire (espaces vectoriels, applications linéaires, calcul matriciel) et d'analyse (étude de fonctions, intégration, résolution d'équations différentielles, transformée de Laplace) ainsi que des TD de méthodologie dans le cadre de la lutte contre l'échec au premier cycle.

Enseignements en 2^e année d'IUT

Aussi bien à l'IUT de Nancy-Brabois qu'à l'IUT de Kourou, j'ai été chargé des CM, TD et TP d'automatique continue incluant les concepts classiques d'analyse fréquentielle et temporelle des systèmes ainsi que de la synthèse de régulateurs. J'ai aussi eu la responsabilité de l'enseignement d'automatique numérique. Ce cours comprenait une étude de l'échantillonnage des signaux, une initiation aux transformées en z et en w , à l'analyse de la stabilité et des performances des systèmes numériques et enfin à la synthèse de correcteurs numériques.

Par ailleurs, j'ai effectué des CM, TD et TP d'introduction aux réseaux locaux industriels comportant des éléments de codage de données, des principes de transmissions synchrones et asynchrones, de réseaux informatiques et de réseaux d'automates.

J'ai enseigné, pendant deux années, des CM, TD et TP de traitements analogique et numérique du signal. J'ai abordé, alors, des aspects énergétiques des signaux, des éléments d'analyse spectrale, la quantification, l'échantillonnage, différentes techniques de codage et de filtrage, les modulations analogiques et numériques de base et enfin les multiplexages temporel et fréquentiel.

J'ai également dispensé des CM, TD et TP de programmation orientée objet où j'ai traité les notions de classes, d'héritage, de polymorphisme et de généricité.

Enfin, j'ai effectué des TP de supervision ainsi que des TD et TP de systèmes multi-tâches temps réel où l'objectif était d'apprendre aux étudiants de 2^e année (ainsi qu'à ceux de Licence Professionnelle Électronique et Informatique des Systèmes Industriels (EISI)) des concepts de bases tels que les attributs des tâches (contexte, priorités statique et dynamique), les mécanismes de coopération

(synchronisation, communication, exclusion mutuelle), les diverses stratégies d'ordonnancement et enfin les services d'un noyau exécutif temps réel.

Enseignements en 3^e cycle

Lors de l'année universitaire 2006–2007, j'ai effectué 4 heures de CM et 2 heures de TD d'introduction à l'analyse structurale en 2^e année du Master Ingénierie Système en Électronique, Électrotechnique, Automatique, Productique, Réseaux, spécialité P4 (Automatique et Traitement de l'Information) de l'Université Henri Poincaré. Ce cours avait pour objectif de faire découvrir aux étudiants l'analyse structurale par approche graphique en leur présentant des résultats de base sur les propriétés structurales des systèmes (commandabilité, observabilité, découplage, rejet de perturbations, diagnosticabilité, . . .) équivalents à ceux qu'ils ont étudiés par des méthodes algébriques ou géométriques plus classiques. Ce cours n'a pas été reconduit cette année universitaire en raison d'effectifs trop faibles.

Enfin, Je m'investis également dans l'évaluation des étudiants en participant aux jurys de stage et de projets tuteurés des formations dans lesquelles j'interviens.

Expérience d'enseignement durant la thèse

1997–1998 *Attaché Temporaire d'Enseignement et de Recherche (demi-poste) à l'Université Paris-Sud, 11.*

TD-TP de langage C, 1^{re} année d'école d'ingénieurs (FIUSO) et DESS,

TP de traitement du signal et des images, Maîtrise EEA,

TD d'électronique numérique, Licence EEA,

TP d'automatique non linéaire, DEA Automatique et Traitement du Signal.

1994–1997 *Enseignant vacataire :*

TP d'électronique, 1^{re} année département GEII de l'IUT de Vélizy (Université de Versailles Saint-Quentin),

TD de mathématiques, 1^{re} année DEUG MIAS (Université de Cergy-Pontoise),

TP d'électronique, 1^{re} année d'école d'ingénieurs (ESME-SUDRIA),

TD d'automatique, 1^{re} année d'école d'ingénieurs (EPF-Sceaux),

TP de traitement analogique du signal, Licence GEII, IUP de Cachan (Université de Paris-Sud 11).

Formation continue

Les seules activités que j'ai eues dans le domaine de la formation continue remontent à la période où j'étais en poste en Guyane. Ces activités peuvent être divisées en deux parties.

La première consiste en l'enseignement et l'encadrement de stages courts et intensifs pour les techniciens du Centre Spatial Guyanais. J'ai ainsi eu à dispenser une formation UNIX d'une semaine en Mai 2000, une formation "capteurs et mesures" en Janvier 2001 et enfin une formation "internet et messagerie" en Avril 2001. Pour toutes ces formations, qui n'étaient pas diplômantes et qui re-

groupaient entre 4 et 8 auditeurs, j'ai rédigé des fascicules de cours et/ou de travaux pratiques.

La seconde partie de mes activités de formation continue consiste en mon intervention dans des modules de cours du soir pour adultes organisés par le CNAM-Guyane sous la tutelle du CNAM-Paris. J'ai participé entre septembre 1999 et juillet 2003 à trois formations diplômantes : le Diplôme Premier Cycle Technique (DPCT) du CNAM Informatique, le Diplôme d'Etudes Supérieures Techniques (DEST) Électronique et le Diplôme Premier Cycle Économique (DPCE) Économie et Gestion du CNAM.

Pour le premier de ces diplômes, j'ai monté les cours d'algorithmique et programmation, de mathématiques pour l'informatique, de graphes et recherche opérationnelle, ainsi que d'architecture de machines. Concernant le DEST Électronique du CNAM, j'ai dispensé les enseignements théoriques et pratiques de traitements numérique et analogique du signal. Enfin, pour le DPCE Économie et Gestion, j'ai enseigné les modules de mathématiques générales et celui de statistiques. Tous ces modules qui avaient chacun un volume de 120 heures étaient sous mon entière responsabilité.

Responsabilités administratives et implication au sein de l'Université et du laboratoire

Tâches administratives

Depuis septembre 2004, en plus des différents enseignements précités, je suis directeur des études du département GEII de l'IUT Nancy-Brabois dont l'effectif total varie entre 160 et 200 étudiants. Cette tâche consiste en l'organisation des plannings annuels, la réalisation et le suivi des emplois du temps pour les 3 niveaux (1^{re}, 2^e année DUT et Licence Professionnelle EISI), la gestion des services des enseignants du département, la déclaration des heures complémentaires ainsi que la coordination pratique des intervenants extérieurs au département.

En outre, entre septembre 2001 et juillet 2003, j'ai été aussi directeur des études du département GEII de l'IUT de Kourou. En plus de la gestion des plannings annuels, des emplois du temps et des services des enseignants, j'ai été amené à faire le suivi de la scolarité des étudiants en termes d'absences et de notes.

Enfin, dès ma première année en tant que maître de conférences à l'IUT de Kourou en Guyane, en septembre 1999, et ce pendant deux ans, j'ai été responsable du service de formation continue. Étant proche du Centre Spatial Guyanais, base de lancement des fusées Ariane, l'IUT était très sollicité pour des formations ponctuelles sous forme de stages de durée variable entre une semaine et plusieurs mois. Ma charge consistait en l'organisation pédagogique et administrative de ces formations en satisfaisant au mieux le cahier des charges et les contraintes des industriels demandeurs. J'avais aussi pour tâche de rédiger, puis de mettre à jour, un fascicule décrivant les formations que proposait l'IUT.

Implication au sein de l'Université et du laboratoire

Depuis Janvier 2005, je suis membre élu du Conseil Scientifique de l'Université Henri Poincaré, Nancy 1. Je participe, à ce titre, aux diverses discussions relatives à la stratégie scientifique de l'Université, aux évaluations des projets BQR, à l'examen des dossiers de reconnaissance d'unités et de fédérations de recherche ainsi qu'aux auditions des porteurs de projets CPER du secteur Informatique-Automatique-Électronique-Mathématiques auquel j'appartiens.

Depuis mars 2005, je suis membre titulaire de la Commission de Spécialistes 61^e section de l'Université Henri Poincaré, Nancy 1. J'ai activement participé aux campagnes de recrutement des ATER et des Maîtres de Conférences ainsi qu'à leur promotion et je suis régulièrement membre des commissions d'audition (trois années).

Par ailleurs, depuis septembre 2003, je suis aussi membre extérieur titulaire de la Commission de Spécialistes mixte 61^e – 63^e section de l'Université des Antilles et de la Guyane.

Enfin, dès mon recrutement à l'Université Henri Poincaré, Nancy 1, je me suis investi avec mes collègues du CRAN dans la préparation du 11^e IFAC Symposium on Automation in Mining, Mineral and Metal Processing qui s'est déroulé à Nancy du 8 au 10 septembre 2004.

Liste des travaux et publications

Revue internationale avec comité de lecture

- [1] T. BOUKHOBZA. Generic uniform observability analysis for bilinear systems. *à paraître dans Automatica*, 2008.
- [2] T. BOUKHOBZA. Partial state and input observability recovering by additional sensor Implementation : a graph-theoretic approach. *à paraître dans International Journal of Systems Science*, 2008.
- [3] S. CANITROT, T. BOUKHOBZA et F. HAMELIN. Observability recovering by additional sensor implementation in structured bilinear systems. *à paraître dans I.E.T. Control Theory & Applications*, 2008.
- [4] T. BOUKHOBZA, F. HAMELIN et S. CANITROT. A graph-theoretic approach to fault detection and isolation for structured bilinear systems. *International Journal of Control*, **81**(4), 661–678, 2008.
- [5] T. BOUKHOBZA et F. HAMELIN. Observability analysis for structured bilinear Systems : a graph-theoretic approach. *Automatica*, **43**(11), 1968–1974, 2007.
- [6] T. BOUKHOBZA, F. HAMELIN et S. MARTINEZ-MARTINEZ. State and input observability for structured linear Systems : a graph-theoretic approach. *Automatica*, **43**(7), 1204–1210, 2007.
- [7] T. BOUKHOBZA, F. HAMELIN et D. SAUTER. Observability of structured linear systems in descriptor Form : a graph-theoretic approach. *Automatica*, **42**(4), 629–635, 2006.
- [8] T. BOUKHOBZA, F. HAMELIN et D. SAUTER. Uniform observability analysis for structured bilinear Systems : a graph-theoretic approach. *European Journal of Control*, **12**(5), 505–518, 2006.
- [9] T. BOUKHOBZA, M. DJEMAI et J-P. BARBOT. Implicit triangular observer form dedicated to a sliding mode observer for systems with unknown inputs. *Asian Journal of Control*, **5**(4), 513–527, 2003.
- [10] N. MANAMANI, M. DJEMAI, T. BOUKHOBZA et N. K. M’SIRDI. Nonlinear sliding mode observer-based feedback control for a pneumatic robot leg. *International Journal of Robotics and Automation*, **6**(2), 100–112, 2001.

Chapitres d'ouvrages

- [11] J-P. BARBOT, M. DJEMAI et T. BOUKHOBZA. *Sliding Mode Observers*, chapitre 4, pages 103–130. Control Engineering Series. Marcel Dekker, 2002.
- [12] J-P. BARBOT et T. BOUKHOBZA. *Discretization Issues*, chapitre 8, pages 217–232. Control Engineering Series. Marcel Dekker, 2002.
- [13] J-P. BARBOT, M. DJEMAI, T. BOUKHOBZA et A. GLUMINEAU. *Observateur Non Linéaire de Type Modes Glissants : application au Moteur Asynchrone*, chapitre 7, pages 219–284. Systèmes Automatisés, Volume. Hermes Sciences Publications, 2000.

Colloques internationaux avec comité de lecture et actes

- [14] T. BOUKHOBZA et F. HAMELIN. Observability analysis for networked control systems : a graph theoretic approach. Dans *IFAC World Congress*, Séoul, Corée du Sud, 2008.
- [15] T. BOUKHOBZA et F. HAMELIN. State and input observability for structured bilinear Systems : a graph-theoretic approach. Dans *IFAC World Congress*, Séoul, Corée du Sud, 2008.
- [16] S. CANITROT, T. BOUKHOBZA et F. HAMELIN. Control/Fault diagnosis interactions analysis for bilinear systems. Dans *IFAC Symposium on System, Structure and Control (SSSC)*, Foz do Iguaçu, Brésil, 2007.
- [17] S. MARTINEZ-MARTINEZ, T. MADER, T. BOUKHOBZA et F. HAMELIN. LISA : a linear structured system analysis program. Dans *IFAC Symposium on System, Structure and Control (SSSC)*, Foz do Iguaçu, Brésil, 2007.
- [18] F. HAMELIN, T. BOUKHOBZA, H. JAMOULI et C. JOIN. An integrated way to design FDI/FTC modules via parity space and model following. Dans *IFAC Safeprocess*, Pékin, Chine, 2006.
- [19] S. MARTINEZ-MARTINEZ, T. MADER, T. BOUKHOBZA et F. HAMELIN. LISA : a linear structured system analysis program. Dans *Workshop de l'Institut Franco-Allemand pour les Applications de la Recherche (IAR/ACD)*, Nancy, France, 2006.
- [20] D. SAUTER et T. BOUKHOBZA. Robustness against unknown networked induced delays of observer based FDI. Dans *IFAC Safeprocess*, Pékin, Chine, 2006.
- [21] D. SAUTER, T. BOUKHOBZA et F. HAMELIN. Decentralized and autonomous design for FDI/FTC of networked control systems. Dans *IFAC Safeprocess*, Pékin, Chine, 2006.
- [22] M. ROLLINK, T. BOUKHOBZA et D. SAUTER. High order sliding mode observer for fault actuator estimation and its application to the three-tanks benchmark. Dans *Workshop de l'Institut Franco-Allemand pour les Applications de la Recherche (IAR/ACD)*, Nancy, France, 2006.
- [23] T. BOUKHOBZA, F. HAMELIN, C. JOIN et D. SAUTER. Input and state functional observability for descriptor systems. Dans *IFAC World Congress*, Prague, République Tchèque, 2005.

- [24] S. CANITROT, T. BOUKHOBZA et F. HAMELIN. Control/Fault diagnosis interactions for structured bilinear systems. Dans *Workshop de l'Institut Franco-Allemand pour les Applications de la Recherche (IAR/ACD)*, Mulhouse, France, 2005.
- [25] F. HAMELIN et T. BOUKHOBZA. Geometric-based approach to fault detection for multilinear affine systems. Dans *IFAC World Congress*, Prague, République Tchèque, 2005.
- [26] C. JOIN, T. BOUKHOBZA, F. HAMELIN et D. SAUTER. FPRG : another view and propositions. Dans *IFAC World Congress*, Prague, République Tchèque, 2005.
- [27] F. HAMELIN et T. BOUKHOBZA. Fault tolerance methodology using model reference control and parity space approach. Dans *IFAC Symposium on Automation in Mining, Mineral and Metal Processing*, Nancy, France, 2004.
- [28] T. BOUKHOBZA, M. GABSI et B. GRIONI. Random variations of control angles for SRM vibrations. Dans *IEEE International Electric Machines and Drives Conference*, pages 640–643, Cambridge, U.S.A., 2001.
- [29] N. K. M'SIRDI, D. EL GHANAMI, T. BOUKHOBZA et N. KHRAIEF. Gaits stabilisation for legged robots using energetic regulation. Dans *International Conference on Advanced Robotics*, pages 393–398, Budapest, Hongrie, 2001.
- [30] M. DJEMAI, J-P. BARBOT et T. BOUKHOBZA. Some comments on higher order sliding modes utilities. Dans *European Control Conference*, Karlsruhe, Allemagne, 1999.
- [31] T. BOUKHOBZA et J-P. BARBOT. High order sliding modes observer. Dans *IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, U.S.A., 1998.
- [32] T. BOUKHOBZA et J-P. BARBOT. Sliding mode observer based control for inverted pendulum. Dans *IEEE - Systems, Man and Cybernetics - Computational Engineering in Systems Applications*, Hammamet, Tunisie, 1998.
- [33] T. BOUKHOBZA et J-P. BARBOT. Step by step observer for implicit triangular observer form. Dans *IFAC Nonlinear Control Design Symposium (NOLCOS)*, Enschede, Pays Bas, 1998.
- [34] T. BOUKHOBZA, M. DJEMAI, J-P. BARBOT, J. L. THOMAS et S. POUILLAIN. Rotor speed and flux nonlinear observer for speed sensorless induction motors. Dans *IEEE Conference on Control Application*, Trieste, Italie, 1998.
- [35] N. MANAMANI, M. DJEMAI, T. BOUKHOBZA et N. K. M'SIRDI. Nonlinear sliding observer-based control for a pneumatic robot leg. Dans *IEEE - Systems, Man and Cybernetics - Computational Engineering in Systems Applications*, Hammamet, Tunisie, 1998.
- [36] T. BOUKHOBZA et J-P. BARBOT. Application of sliding mode techniques to high order control. Dans *European Control Conference*, Bruxelles, Belgique, 1997.
- [37] T. BOUKHOBZA et L. KARSENTI. Sliding-mode control for nonlinear systems non affine in the input. Dans *European Control Conference*, Bruxelles, Belgique, 1997.
- [38] J. P. BARBOT, T. BOUKHOBZA et M. DJEMAI. Triangular input observer form and sliding mode observer. Dans *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 1489–1491, Kobé, Japon, 1996.

- [39] T. BOUKHOBZA, M. DJEMAI et J. P. BARBOT. Nonlinear sliding observer for systems in output and output derivative injection form. Dans *IFAC World Congress*, pages 299–305, 1996.

Colloques nationaux avec comité de lecture et actes

- [40] T. BOUKHOBZA, N. K. M'SIRDI, H. CHERRID et N. GAUTHIER-NADJAR. Observateurs à modes glissants d'ordres supérieurs échantillonnés pour un robot manipulateur. Dans *Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA)*, Lille, France, 2000.
- [41] D. EL GHANAMI, T. BOUKHOBZA et N. K. M'SIRDI. Contrôle énergétique pour la stabilisation de cycles périodiques pour un robot sauteur. Dans *Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA)*, Lille, France, 2000.

Rapports industriels

- [42] D. NORMAND-CYROT, J-P. BARBOT, T. BOUKHOBZA et M. DJEMAI. Rapport final de l'étude DB04. Alcatel-Alsthom Recherche, 1999.
- [43] J-P. BARBOT, O. BERTHOUX, T. BOUKHOBZA, M. DJEMAI, D. NORMAND-CYROT, S. POUILLAIN, M. TAI-LEUNG et J. L. THOMAS. Observateurs à modes glissants d'ordre 1 et 2 pour la machine asynchrone. Alcatel-Alsthom Recherche, 1998.
- [44] T. BOUKHOBZA. Procédure de réglage des gains et de la fonction signe pour l'observateur à modes glissants présenté dans l'étude DB04. Alcatel-Alsthom Recherche, 1997.

Deuxième partie

Description des activités de recherche

Chapitre 1

Contributions à l'analyse structurelle des systèmes linéaires

1.1 Introduction

Parmi les travaux fondamentaux de l'automatique, nombreux sont ceux dédiés à l'analyse des propriétés de commandabilité, d'observabilité ou à l'étude de la solubilité de certains problèmes classiques tels que le découplage, le rejet de perturbations Ces travaux utilisent, pour la plupart d'entre eux, des représentations d'état ou fréquentielles de systèmes linéaires et reposent sur des approches algébriques ou géométriques [Zadeh et Desoer, 1963, Kalman, 1968, Kailath, 1980, Rosenbrock, 1970, Wonham, 1985]. Il s'est avéré que les propriétés les plus importantes dépendent essentiellement de ce qui est appelé la "structure" du système considéré et beaucoup moins de la valeur de ses paramètres internes [Willems, 1986]. On parle alors de propriétés structurelles. La notion de structure, pour un système linéaire représenté sous forme de modèle d'état, peut être définie par le nombre de variables internes (dimension), le nombre et le type de ses entrées/sorties, l'existence ou non ainsi que la nature des relations statiques ou dynamiques entre toutes ces variables. Évidemment, il est aussi possible de définir cette notion de structure pour des systèmes représentés autrement que sous forme d'état. L'analyse structurelle consiste en l'étude de la validité de certaines propriétés liées à la structure du système.

Dans les années 1970, afin de bien traduire la structure d'un système, sont introduits des systèmes, dits systèmes structurés, qui sont caractérisés par une représentation d'état où toutes les matrices ont, soit des éléments nuls fixes, soit des éléments non nuls symbolisés par des paramètres supposés indépendants. L'analyse des systèmes structurés permet de conclure sur les caractéristiques d'une grande classe de systèmes dont les matrices, numériquement fixées, ont la même répartition des termes nuls/non-nuls.

[Lin, 1974] est l'une des études originales relatives aux systèmes structurés. L'auteur y donne pour la première fois des conditions graphiques de commandabilité pour les systèmes mono-entrée. Le système linéaire est représenté par un graphe orienté et les conditions de commandabilité sont exprimées de façon très simple et intuitive : existence de cycles, de chemins formant des "cactus"

L'élégance, l'originalité et la simplicité des résultats obtenus dans [Lin, 1974] ont encouragé d'autres études parmi lesquelles [Shields et Pearson, 1976, Glover et Silverman, 1976, Davison, 1977] qui généralisent les résultats sur la commandabilité des systèmes structurés au cas multi-entrées. [Corfmat et Morse, 1976] étudient la commandabilité structurelle de systèmes linéaires paramétrés par un ensemble de valeurs indépendantes et représentés d'une manière un peu plus complexe que les systèmes structurés utilisés initialement dans [Lin, 1974]. [Lin, 1977] définit la notion de commandabilité structurelle minimale et en donne les conditions pour les systèmes multi-entrées multi-sorties. [Mayeda, 1981] permet d'obtenir une preuve assez simplifiée des conditions graphiques nécessaires et suffisantes de commandabilité pour les systèmes multi-entrées établies algébriquement dans [Shields et Pearson, 1976, Glover et Silverman, 1976]. [Mayeda et Yamada, 1979, Reinschke *et al.*, 1992] proposent pour les systèmes structurés une étude de la commandabilité non plus générique mais vérifiée pour toutes les valeurs non nulles des paramètres formant les matrices du système linéaire considéré. C'est ce que les auteurs ont appelé la propriété de commandabilité forte. Dans le même ordre d'idée, dans [Murota, 1987a], l'auteur propose une analyse de la commandabilité d'un système singulier régulier structuré dont les paramètres ne sont pas nécessairement indépendants, ce qui est une hypothèse faite par la majorité des travaux effectués sur les systèmes structurés. L'étude repose sur la théorie des matroïdes et aboutit à des conditions nécessaires et suffisantes de commandabilité. .

Les avantages de la représentation graphique des systèmes structurés ont été soulignés dès les travaux de [Lin, 1974]. En effet, les graphes, en contenant toute l'information du modèle structuré, permettent de mieux visualiser certaines propriétés du système. L'expression de divers résultats d'analyse est alors assez intuitive et élégante [Andrë, 1985, Murota, 1987b, Reinschke, 1988] même si les preuves sont encore souvent fondées sur des arguments algébriques ou géométriques. Enfin, la vérification de ces propriétés fait appel à des algorithmes classiques de la théorie des graphes dont des versions optimisées peuvent être utilisées pour obtenir des implémentations d'ordre de complexité polynomial et non exponentiel. Cela permet d'étudier des systèmes de grande dimension.

Lors des trois dernières décennies, beaucoup de résultats classiques de l'automatique ont été exprimés pour les systèmes structurés en termes graphiques. D'une part, les études concernant la commandabilité se sont sophistiquées. Ainsi, [Hosoe, 1980] caractérise graphiquement les dimensions génériques des sous-espaces de commandabilité. Les problèmes de commandabilité et stabilisabilité des systèmes distribués ont été abordés dans [Kobayashi et Yoshikawa, 1982, Hayakawa et Silijak, 1988]. [Murota et Poljak, 1990] donnent les conditions graphiques nécessaires et suffisantes de commandabilité de la sortie. Une approche plus qualitative est adoptée dans [Hopkins *et al.*, 1998, Lin et Newell, 1991], où les auteurs définissent la notion de commandabilité structurelle de sortie, qui traduit le fait que des objectifs de commande indépendants sur les sorties d'un système soient atteignables. Puis ils donnent des conditions nécessaires et suffisantes à la validité de cette propriété en utilisant une matrice de type cause à effet modélisant les interactions entrées/sorties.

D'autre part, après les études initiales sur la commandabilité et l'observabilité, les travaux se sont focalisés sur la caractérisation graphique de certains sous-espaces in-

variants, le rang générique des fonctions de transfert, la structure à l'infini ainsi que le nombre générique de différents types de zéros des systèmes structurés [Davison et Wang, 1974, Ohta et Kodama, 1985, Hayakawa et Silijak, 1988, Suda *et al.*, 1989, Svaricek, 1990, van der Woude, 1991a, van der Woude, 1991b, van der Woude, 1993, Hovelaque *et al.*, 1996, Sueur et Dauphin-Tanguy, 1997, Hovelaque *et al.*, 1999, van der Woude, 2000, van der Woude *et al.*, 2003, Sagianos et Karcanias, 2007]. Ces avancées ont conduit à l'étude de la solubilité de certains problèmes de l'automatique très liés à la structure à l'infini ou aux zéros infinis, invariants ou de transmission des systèmes. Ainsi, des conditions de solubilité des problèmes classiques de découplage [Linnemann, 1981, Yamada et Saga, 1985, Dion et Commault, 1993, Commault *et al.*, 1999], de rejet de perturbations par retour d'état [van der Woude et Murota, 1995, Commault *et al.*, 1991] ou par retour de sortie [van der Woude, 1996, Commault *et al.*, 1993, Commault *et al.*, 1997, van der Woude, 1993, Dion *et al.*, 1994] et de génération de résidus pour la détection et la localisation de défauts [Commault *et al.*, 2002a] ont été établis.

Un passage en revue plus complet des résultats obtenus sur l'analyse structurelle et la solubilité de divers problèmes de commande ou d'observation des systèmes linéaires par approche graphique est proposé dans [Commault *et al.*, 2002b, Dion *et al.*, 2003].

Tous les travaux précités utilisent le même type de représentation graphique des systèmes linéaires *i.e.* des graphes orientés non pondérés dont la construction repose sur les matrices d'état du système à l'exception de [Commault *et al.*, 1987], où la représentation graphique utilisée pour l'étude de la solubilité du problème de découplage ne repose pas sur un modèle d'état mais sur un modèle de transfert du système multi-entrées/multi-sorties considéré. Pour cela, le modèle de transfert est décomposé en plusieurs matrices de transfert mono-entrée/mono-sortie qui sont ensuite connectées en parallèle, ou en série,...

Par ailleurs, d'autres types de graphes ont été utilisés dans le cadre de l'analyse structurelle. Ainsi, [Blanke *et al.*, 2003, Starkov, 2002, Staroswiecki *et al.*, 2000, Düstegör *et al.*, 2006] ont exploité les avantages des graphes bipartis pour aborder des problèmes de diagnostic et de synthèse de commande tolérante aux défauts. Les Bond Graphs ont notamment servi pour l'analyse structurelle des propriétés d'observabilité et de commandabilité des systèmes linéaires [Karnopp, 1979, Rosenberg et Andry, 1979, Suda et Hatanaka, 1986, Sueur et Dauphin-Tanguy, 1989, Sueur et Dauphin-Tanguy, 1991, Bertrand *et al.*, 1997, Gawthrop, 2000], pour la synthèse d'observateurs [Pichardo-Almarza *et al.*, 2005] ou pour aborder le problème de détection et localisation de défauts [Ould Bouamama *et al.*, 2000, Samantaray *et al.*, 2006]. D'autres études encore utilisent les réseaux de Petri pour analyser certaines propriétés structurelles des systèmes linéaires telles que la commandabilité dans [Murata, 1977].

Les travaux de recherche que j'ai menés lors des quatre dernières années et dont je fais la synthèse dans ce mémoire sont exclusivement dédiés à l'analyse structurelle des propriétés des systèmes structurés représentés par des graphes orientés. Malgré le grand nombre d'études menées dans ce contexte pour les systèmes linéaires, quelques questions relatives à la caractérisation graphique de certaines propriétés structurelles sont restées encore ouvertes. J'ai tenté de répondre à certaines d'entre elles, en particulier celles qui sont liées à l'observabilité. Ainsi, en ce qui concerne les

systèmes linéaires, il est possible de regrouper les travaux que j'ai menés en quatre problématiques de difficulté et d'importance différentes :

Observabilité des systèmes à entrées inconnues : La première propriété à laquelle je me suis intéressé est l'observabilité générique de l'état et des entrées d'un système linéaire structuré. Les entrées et l'état d'un système sont génériquement observables lorsque ce dernier est simultanément fortement observable et inversible à gauche. [Sain et Massey, 1969, Silverman, 1969, Basile et Marro, 1969, Guidorzi et Marro, 1971, Basile et Marro, 1973, Basile *et al.*, 1981, Hautus, 1983, Kratz, 1995, Hou et Patton, 1998] donnent des conditions géométriques ou algébriques, pour la validité de ces propriétés. Ces dernières ont été notamment très étudiées dans l'objectif d'une synthèse d'observateurs à entrées inconnues et/ou d'une reconstruction d'entrées inconnues. En effet, la synthèse d'observateurs à entrées inconnues, dont l'objectif est d'estimer tout ou une partie de l'état d'un système en découplant complètement la dynamique de l'erreur d'estimation des entrées inconnues, a fait l'objet de plusieurs travaux parmi lesquels [Wang *et al.*, 1975, Wang et Davison, 1975, Bhattacharyya, 1978, Kudva *et al.*, 1980, Kurek, 1983, Fairman *et al.*, 1984, Yang et Wilde, 1988, Guan et Saif, 1991, Hou et Müller, 1992, Hou et Müller, 1994b, Hou *et al.*, 1999, Tsui, 1996, Trinh et Ha, 2000, Xiong et Saif, 2003]. L'observation conjointe de l'état et des entrées inconnues est encore un sujet d'étude ouvert comme en témoignent les récentes publications dans le domaine. Ainsi, [Floquet et Barbot, 2006] démontrent que tout système fortement observable et inversible à gauche se met sous une forme d'observabilité particulière, puis un observateur à modes glissants est suggéré pour une telle forme.

Pour ma part, je ne me suis pas intéressé à la synthèse d'un quelconque observateur mais plutôt aux conditions structurelles d'observabilité de l'état et de l'entrée. La question à laquelle j'ai essayé de répondre, à partir de la représentation d'un système structuré par un graphe orienté, est : les mesures contiennent-elles suffisamment d'informations pour permettre de reconstruire, du moins théoriquement, les variables inconnues du système? De manière équivalente, est-il possible d'exprimer les entrées et l'état du système uniquement en fonction des mesures et de leurs dérivées?

Les réponses à ces questions avaient été données, évidemment, par des études utilisant des outils algébriques et géométriques. Néanmoins, cela pas encore été réalisé par l'approche graphique, qui s'était arrêtée à la caractérisation de l'observabilité classique de l'état pour des systèmes sans entrée inconnue. Les conditions d'observabilité forte et d'inversibilité à gauche ne garantissent pas l'existence d'un observateur causal permettant de reconstruire l'état et les entrées inconnues. Ces conditions ne peuvent être à l'origine d'une procédure de synthèse d'un tel d'observateur même si elles sont nécessaires à son existence. Elles sont, en outre, nécessaires et suffisantes à l'existence d'un observateur généralisé ou non causal qui utiliserait alors les dérivées des mesures.

Par ailleurs, les conditions graphiques d'existence d'un observateur causal à entrées inconnues permettant d'estimer l'état d'un système linéaire avec une dynamique de l'erreur d'estimation indépendante des entrées inconnues ont été données dans [Commault *et al.*, 2001]. Elles sont notamment et logiquement plus restrictives que les conditions d'observabilité de l'état et de l'entrée.

Mes recherches ont abouti à l'établissement de conditions graphiques nécessaires et suffisantes de l'observabilité de tout ou d'une partie donnée de l'état et des entrées inconnues d'un système linéaire structuré.

Observabilité des systèmes distribués en réseau : Les systèmes distribués ont fait l'objet d'attentions dès les années 1970. Parmi les premières études concernant l'observation de systèmes distribués ou décentralisés, [Aoki, 1971] énonce les principaux problèmes que soulèvent ces structures en théorie de la commande. Des travaux spécifiques à l'observabilité et à la synthèse d'observateurs ont suivi [Fujita, 1974, Sanders *et al.*, 1974, Sundareshan et Huang, 1984, Saif et Guan, 1992, Hou et Müller, 1994a]. Le principe utilisé, en général, repose sur des observateurs à entrées inconnues. Pour chaque sous-système, l'état et les entrées des autres sous-systèmes sont considérés comme étant des entrées exogènes inconnues.

Dans le cadre du projet européen "Networked Control Systems Tolerant to faults (NECST)", j'ai voulu caractériser la propriété d'observabilité de ce type de système par rapport aux différentes configurations d'observation choisies. L'outil graphique permet de bien rendre compte de la structure distribuée de ces systèmes. Ainsi, j'ai appliqué les résultats obtenus sur l'observabilité des entrées et de l'état d'un système à l'analyse de l'observabilité des systèmes distribués en réseau. J'ai établi, des conditions graphiques d'observabilité de tout ou d'une partie de l'état et/ou des entrées inconnues d'un système distribué pour deux schémas d'observation appelés schéma d'observation en mode distribué (avec accès aux données réseau) et en mode autonome (sans accès aux données réseau). Les résultats trouvés peut être utilisés dès la phase de conception afin de pouvoir garantir, pour un système distribué, l'observabilité de certaines variables même en mode autonome, ce qui est serait nécessaire dans le cas d'une coupure totale ou partielle du réseau.

Placement de capteurs : Le troisième problème que j'ai abordé est celui du placement de capteurs qui permettrait le recouvrement de l'observabilité totale ou partielle des entrées et de l'état d'un système structuré. Deux principales approches sont employées dans la littérature pour traiter ce sujet. La première concerne l'utilisation de techniques d'optimisation d'un critère reflétant un grammien d'observabilité ou des fonctions de sensibilité Elle a fait l'objet de plusieurs travaux dont certains sont rapportés dans [van de Wal et de Jager, 2001, Demetriou, 2005, Khosrowjerdi *et al.*, 2007]. La seconde regroupe des études plus structurelles telles que [Liu *et al.*, 2003] qui présente une stratégie de placement de capteurs et d'actionneurs dans l'objectif de garantir des propriétés telles que l'inversibilité

Certains travaux de l'approche structurelle utilisent des représentations graphiques permettant de bien décrire la structure d'un système. Ainsi [Ragot *et al.*, 1992, Maquin *et al.*, 1994, Meyer *et al.*, 1994] proposent des algorithmes de placement de capteurs à partir de représentations graphiques des équations algébriques d'observation et non pas directement à partir des matrices du modèle d'état du système. D'autres études traitent de l'optimisation du placement de capteurs pour atteindre des objectifs de commande tels que [Fahroo et Demetriou, 2000] pour un rejet de perturbations ou une poursuite de trajectoire.

Dans le contexte de la détection et la localisation de défauts, [Commault et Dion, 2007, Commault *et al.*, 2005a] donnent, en utilisant des graphes orientés, des conditions de placement

d'un nombre minimal de capteurs permettant de rendre soluble le problème de génération de résidus pour un système linéaire. Une autre approche utilisée dans [Trave-Massuyes *et al.*, 2006, Travé-Massuyès *et al.*, 2001, Frisk et Krysander, 2007] est fondée sur la représentation du système considéré par des graphes bipartis et compare diverses configurations de placement de capteurs en cherchant celle qui maximiserait le nombre de défauts que l'on peut localiser. Un travail similaire est effectué dans [Khemliche *et al.*, 2006] mais repose sur une représentation des systèmes par des bond graphs.

Mon étude peut être vue comme l'extension aux systèmes à entrées inconnues de [Commault *et al.*, 2005b] qui traitent des conditions graphiques de placement de capteurs pour le recouvrement de la propriété d'observabilité. En fait, il s'agit de proposer une stratégie de placement de capteurs reposant entièrement sur la structure du système et qui permettrait, dans un premier temps, de rendre observables l'état et les entrées du système. Ce problème reste original par rapport à ceux précédemment cités en raison de la présence des entrées inconnues qui ne sont pas supposées constantes ou lentement variables. Ceci entraîne, par exemple, que les méthodes reposant sur les graphes bipartis ne sont plus adéquates. Dans un second temps, je me suis intéressé au recouvrement de l'observabilité d'une partie désirée de l'état et de l'entrée. Deux groupes de conditions sur les capteurs additionnels ont été établis. Les premières conditions sont nécessaires et les secondes, énoncées sous forme d'un système de relations graphiques, sont suffisantes. Ce résultat est certes mitigé mais reste assez encourageant pour envisager d'autres études afin d'améliorer la stratégie proposée.

Observabilité des systèmes singuliers : Le dernier résultat présenté dans ce chapitre concerne l'analyse des propriétés d'observabilité de systèmes linéaires singuliers structurés. Les différentes propriétés structurelles de ce type de systèmes ont été largement étudiées dans [Rosenbrock, 1974, Verghese *et al.*, 1979, Pandolfi, 1980, Verghese *et al.*, 1981, Yip et Sincovec, 1981, Bernhard, 1982, Cobb, 1984, Wonham, 1985, Zhou *et al.*, 1987, Mertzios *et al.*, 1988, Dai, 1989, Malabre, 1989, Özçaldiran et Lewis, 1990, Aplevich, 1991, Özçaldiran et Haliloğlu, 1993, Yan, 2007] concernant les systèmes singuliers satisfaisant à certaines conditions de régularité et dans [Lewis, 1992, Özçaldiran *et al.*, 1992, Geerts, 1993b, Geerts, 1993a, Wang et Zhou, 2003] pour des systèmes singuliers quelconques. Tous ces travaux utilisent des approches géométriques ou algébriques.

Pour ce qui est de l'observabilité, [Hou et Müller, 1999a] rappellent diverses propriétés d'observabilité des systèmes singuliers notamment les notions d'observabilité à droite, impulsionnelle et causale. Ces propriétés ainsi que la détectabilité sont caractérisées algébriquement en utilisant les faisceaux de matrices du système. Par ailleurs, le problème de synthèse d'observateurs pour les systèmes singuliers a fait et fait toujours l'objet de plusieurs études, parmi lesquelles on peut citer de manière non exhaustive [Lewis, 1990, Müller et Hou, 1993, Paraskevopoulos et Koumboulis, 1992, Darouach *et al.*, 1994, Darouach et Boutayeb, 1995, Hou et Müller, 1995, Darouach *et al.*, 1996, Hou et Müller, 1999b, Chu et Mehrmann, 1999, Gao et Wang, 2006].

A l'instar de l'étude menée sur les systèmes linéaires à entrées inconnues, mon apport ne se situe pas au niveau de la synthèse d'observateurs mais uniquement dans l'étude des propriétés d'observabilité par approche graphique.

Les premiers résultats relatifs à l'analyse structurelle de ce type de systèmes par approche graphique sont établis dans [Yamada et Luenberger, 1985a] qui traitent de la causalité et la commandabilité de système singuliers structurés discrets. Pour ce même type de systèmes, [Yamada et Luenberger, 1985b] font l'analyse de la commandabilité en relaxant la contrainte d'indépendance des paramètres constituant les matrices décrivant le système. Une investigation assez poussée et relativement complète, reposant sur une représentation par graphes orientés des systèmes singuliers a été menée dans les années 1990 dans [Reinschke et Wiedemann, 1997, Reinschke, 1994, Röbenack et Reinschke, 1997] ainsi que dans la thèse de doctorat [Wiedemann, 1999]. Néanmoins, dans ces travaux, en plus d'être réguliers, les systèmes considérés doivent satisfaire à une autre contrainte matricielle. Ma contribution dans ce contexte a été de lever toutes les contraintes relatives aux matrices décrivant le système, comprenant aussi l'hypothèse de régularité faite sur le système. Ainsi, j'ai étendu l'analyse de l'observabilité à tous les types de systèmes singuliers sous-déterminés, carrés ou encore sur-déterminés.

La suite de ce chapitre est consacrée à l'exposé plus détaillé des diverses problématiques abordées et des propositions ou solutions que j'y ai apporté. Le développement de l'analyse menée sur les systèmes linéaires est présenté en cinq sections. Les deux premières traitent respectivement de l'observabilité totale puis partielle des entrées et de l'état. Ces résultats sont appliqués à l'étude de l'observabilité des systèmes distribués en réseau. Ensuite, j'expose les stratégies de placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité totale, puis partielle, des entrées et de l'état. La dernière partie technique de ce chapitre concerne l'analyse de l'observabilité à droite puis de l'observabilité impulsionnelle des systèmes singuliers. Enfin, une discussion sur la pertinence, l'applicabilité et l'efficacité des outils d'analyse ainsi proposés pour les systèmes linéaires clôt ce chapitre.

Avant de présenter plus en détails chacun de ces divers thèmes d'observabilité ou de placement de capteurs, le paragraphe suivant est dédié à l'introduction de la représentation graphique des systèmes linéaires structurés et à la définition de certaines notations utiles pour l'énoncé, la compréhension et la discussion des résultats obtenus.

1.2 Représentation graphique d'un système linéaire structuré

Ce paragraphe introduit dans un premier temps le graphe orienté associé au système linéaire structuré Σ_Λ défini par

$$\Sigma_\Lambda : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A^\lambda x(t) + B^\lambda u(t) \\ y(t) &= C^\lambda x(t) + D^\lambda u(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où $u \in \mathbb{R}^q$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement le vecteur d'entrées inconnues du système, l'état et la sortie (le vecteur mesure) du système. Les matrices A^λ , B^λ , C^λ et D^λ sont des matrices dites structurées *i.e.* des matrices dont les éléments sont ou bien nuls ou bien supposés être des paramètres indépendants notés λ_i , $i = 1, \dots, h$. Ces systèmes peuvent être pertinents dans une phase de conception ou lorsque les paramètres d'un système ne sont pas bien ou pas définitivement connus.

La validité ou non des propriétés analysées sur ce type de systèmes sera générique par rapport

aux paramètres λ_i , $i = 1, \dots, h$ i.e. vraie pour presque toutes les valeurs des paramètres λ_i , $i = 1, \dots, h$. En d'autres termes, une propriété est génériquement vraie si elle ne s'avère fausse que pour un ensemble de valeurs de ces paramètres vérifiant un système d'équations polynomiales explicites à coefficients réels.

Dans une seconde partie de ce paragraphe, quelques définitions et notations utiles à l'analyse structurelle des diverses propriétés d'observabilité seront énoncées.

1.2.1 Graphe orienté associé à un système linéaire structuré

Le graphe orienté associé au système linéaire structuré est noté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$. Il est constitué d'un ensemble de sommets \mathcal{V} et d'un ensemble d'arcs \mathcal{E} .

L'ensemble des sommets représente les diverses variables du système et l'ensemble des arcs représente, quant à lui, les relations entre ces variables. Plus précisément, $\mathcal{V} = \mathbf{X} \cup \mathbf{Y} \cup \mathbf{U}$ où $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ est l'ensemble des sommets associés aux composantes de l'état, $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p\}$ est l'ensemble des sommets associés aux composantes de la sortie et $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_q\}$ est l'ensemble des sommets associés aux composantes de l'entrée.

L'ensemble des arcs est $\mathcal{E} = A\text{-arcs} \cup B\text{-arcs} \cup C\text{-arcs} \cup D\text{-arcs}$, avec $A\text{-arcs} = \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) \mid A^\lambda(i, j) \neq 0\}$, $B\text{-arcs} = \{(\mathbf{u}_j, \mathbf{x}_i) \mid B^\lambda(i, j) \neq 0\}$, $C\text{-arcs} = \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_i) \mid C^\lambda(i, j) \neq 0\}$, $D\text{-arcs} = \{(\mathbf{u}_j, \mathbf{y}_i) \mid D^\lambda(i, j) \neq 0\}$.

L'exemple suivant permet d'illustrer la représentation décrite ci-dessus.

Exemple 1.1 Soit le système linéaire structuré de la forme (1.1) dont les matrices sont

$$A^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \lambda_6 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \lambda_7 \end{pmatrix}, C^\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_9 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$D^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_{10} & 0 \end{pmatrix}. \text{ A ce système est associé le graphe orienté de la figure 1.1.}$$

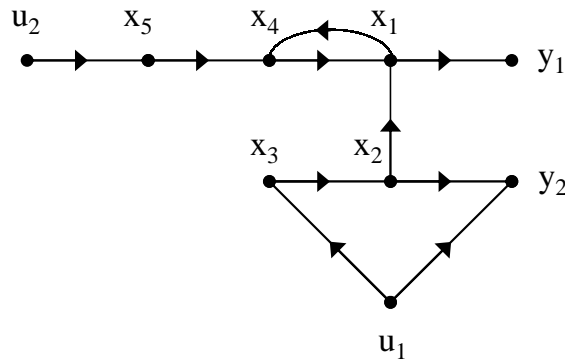


FIG. 1.1: Représentation graphique pour l'exemple 1.1

1.2.2 Définitions et notations

Ce paragraphe est consacré à un bref énoncé des quelques définitions et notations utiles à l'expression et à l'établissement des résultats exposés dans ce chapitre.

- Deux arcs $e_1 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1)$ et $e_2 = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_2)$ sont v -disjoints si leurs sommets de début ainsi que leurs sommets de fin sont distincts *i.e.* $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}'_1 \neq \mathbf{v}'_2$. Des arcs sont v -disjoints s'ils sont v -disjoints deux à deux.

- Un graphe partiel de $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ engendré par un ensemble d'arcs $\mathcal{S}_\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}$ est noté $\mathcal{S}_\mathcal{G} = (\mathcal{S}_\mathcal{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E})$ où l'ensemble de sommets $\mathcal{S}_\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$ est constitué des sommets de début et de fin de tous les arcs de $\mathcal{S}_\mathcal{E}$. Le graphe partiel $\mathcal{S}_\mathcal{G} = (\mathcal{S}_\mathcal{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E})$ de $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ est dit v -disjoint si tous les arcs de $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ sont v -disjoints. D'autre part, $\mathcal{S}_\mathcal{G}$ couvre un sommet \mathbf{v} , s'il existe un arc e dans $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ qui a comme début \mathbf{v} .

- Un chemin P passant par les sommets $\mathbf{v}_{\mathbf{r}_0}, \dots, \mathbf{v}_{\mathbf{r}_i}$ est noté $P = \mathbf{v}_{\mathbf{r}_0} \rightarrow \mathbf{v}_{\mathbf{r}_1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{v}_{\mathbf{r}_i}$, où pour $j = 0, 1, \dots, i-1$, $(\mathbf{v}_{\mathbf{r}_j}, \mathbf{v}_{\mathbf{r}_{j+1}}) \in \mathcal{E}$.

Un *cycle* est un chemin de la forme $\mathbf{v}_{\mathbf{r}_0} \rightarrow \mathbf{v}_{\mathbf{r}_1} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{v}_{\mathbf{r}_i} \rightarrow \mathbf{v}_{\mathbf{r}_0}$, où tous les sommets $\mathbf{v}_{\mathbf{r}_0}, \mathbf{v}_{\mathbf{r}_1}, \dots, \mathbf{v}_{\mathbf{r}_i}$ sont distincts.

Un chemin est dit simple lorsqu'il ne passe pas deux fois par le même sommet.

- Des chemins sont disjoints s'ils n'ont aucun sommet commun.

- Un chemin P est dit "chemin entrée-sortie" ("resp. état-sortie") si son sommet de début est dans \mathbf{U} (resp. dans \mathbf{X}) et son sommet de fin est dans \mathbf{Y} .

- Soient \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 deux ensembles de sommets. Un chemin P est dit "chemin \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 " si son sommet de début est dans \mathcal{V}_1 et son sommet de fin est dans \mathcal{V}_2 . Si, de plus, les seuls sommets de P appartenant à $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ sont ses sommets de début et de fin, alors P est dit "chemin direct \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 "

- Un ensemble de ℓ chemins \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 disjoints forme un lien¹ \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 . Les liens consistant en un nombre maximal de chemins sont dits liens maximaux.

On note par $\rho[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$ le nombre de chemins dans un lien \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 maximal ou autrement dit le nombre maximal de chemins disjoints partant de \mathcal{V}_1 et arrivant à \mathcal{V}_2 .

- On note par $\mu[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$ le nombre minimal de sommets couverts par un lien \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 maximal.

- L'ensemble de sommets, noté $V_{ess}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$, regroupe les sommets contenus dans tous les liens \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 maximaux. Ces sommets sont dits sommets essentiels dans les liens \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 maximaux.

- Un ensemble de sommets \mathbf{S} est dit séparateur pour les ensembles \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 , si chaque chemin \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 contient au moins un sommet appartenant à \mathbf{S} . Un séparateur est dit minimal s'il contient un nombre minimal d'éléments. Ce nombre est égal à $\rho[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$ d'après le théorème de Menger.

- Il existe deux séparateurs minimaux particuliers et uniques : le séparateur d'entrée et le séparateur de sortie notés respectivement $\mathbf{S}^i(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ et $\mathbf{S}^o(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ et définis comme suit :

- $\mathbf{S}^i(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ est l'ensemble des sommets de fin de tous les chemins \mathcal{V}_1 - $V_{ess}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ directs en prenant en compte les chemins de longueur nulle.

- $\mathbf{S}^o(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ est l'ensemble des sommets de début de tous les chemins $V_{ess}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) - \mathcal{V}_2$ directs, en prenant en compte les chemins de longueur nulle.

¹C'est la traduction que nous avons faite du terme "linking"

Une conséquence directe de ces définitions est que $V_{ess}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) \cap \mathcal{V}_1 \subseteq \mathbf{S}^i(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ et $V_{ess}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) \cap \mathcal{V}_2 \subseteq \mathbf{S}^o(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$.

- $\theta[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$ est le nombre maximal d'arcs v -disjoints dont les sommets de début sont dans \mathcal{V}_1 et les sommets de fin dans \mathcal{V}_2 .
- Une union disjointe de chemins et de cycles est un ensemble de chemins et de cycles n'ayant aucun sommet commun. Une telle union couvre un sommet \mathbf{v} , s'il y a un chemin appartenant à cette union passant par \mathbf{v} .

1.3 Observabilité totale de l'état et des entrées d'un système linéaire

1.3.1 Position du problème

Le problème abordé ci-dessous est de savoir quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes assurant que l'état et les entrées du système linéaire structuré Σ_Λ sont génériquement observables *i.e.* toute variation des entrées ou de l'état initial se reflète sur la sortie, ce qui peut s'écrire plus formellement :

Définition 1.1 *L'état et les entrées du système linéaire structuré Σ_Λ sont génériquement observables lorsque pour tout état initial x_0 et pour tout signal d'entrée $u(t)$, l'égalité $y(t) = 0, \forall t \geq 0$ implique $x(t) = 0, \forall t \geq 0$ et $u(t) = 0, \forall t > 0$.*

Ainsi, l'état et les entrées du système linéaire structuré Σ_Λ sont génériquement observables est équivalent à dire que le système est génériquement fortement observable et inversible à gauche [Trentelman *et al.*, 2001]. Une caractérisation géométrique complète de l'observabilité forte et de l'inversibilité des systèmes est faite dans [Basile et Marro, 1969, Basile et Marro, 1973, Basile *et al.*, 1981]. Les travaux de Hautus sur l'observabilité [Hautus, 1983] repris dans [Trentelman *et al.*, 2001] ont permis de donner des conditions algébriques caractérisant entièrement les propriétés d'observabilité forte et d'inversibilité à gauche pour les systèmes linéaires. L'extension naturelle de ces résultats aux systèmes linéaires structurés est déduite dans le théorème ci-dessous :

Théorème 1.1 *Considérons le système structuré Σ_Λ et soit $P(s) = \begin{pmatrix} A^\lambda - sI_n & B^\lambda \\ C^\lambda & D^\lambda \end{pmatrix}$ le faisceau de matrices de Σ_Λ . L'état et les entrées du système linéaire structuré Σ_Λ sont génériquement observables si et seulement si*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad g\text{-rang}(P(s)) = n + g\text{-rang} \begin{pmatrix} B^\lambda \\ D^\lambda \end{pmatrix} = n + q$$

où $g\text{-rang}(P(s))$ dénote le rang générique de la matrice structurée $P(s)$.

Ce résultat est aussi déductible des travaux sur les systèmes singuliers en considérant Σ_Λ comme étant un système singulier Σ_Λ^s dont l'état serait $\xi = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$. Aussi, en utilisant les résultats énoncés dans [Hou et Müller, 1999a], les conditions d'observabilité à droite de Σ_Λ^s , notion qui serait équivalente à l'observabilité de l'état et des entrées de Σ_Λ , sont celles du Théorème 1.1.

L'objectif de l'étude menée est de trouver les conditions graphiques équivalentes à celle énoncée dans le Théorème 1.1. Ces conditions permettraient de dire si les sorties sont suffisamment informatives pour permettre de reconstruire l'état et les entrées du système. Lorsque la réponse est affirmative seulement, la synthèse d'un observateur pourrait alors être envisageable mais cette synthèse dépasse le cadre des résultats énoncés dans ce manuscrit.

L'analyse de l'observabilité des entrées et de l'état du système est fortement liée à la matrice $P(s)$ et particulièrement aux zéros de cette matrice. Ainsi l'établissement des conditions graphiques d'observabilité repose amplement sur les deux principaux théorèmes énoncés dans [van der Woude, 2000]. Pour cela, il a été nécessaire de subdiviser le système en deux sous-systèmes particuliers. Le premier doit être carré (autant d'entrées que de sorties) et le second rectangulaire ayant un faisceau de matrices de rang plein colonne même si une ligne quelconque en est effacée. Évidemment, les résultats de [van der Woude *et al.*, 2003] qui complètent ceux de [van der Woude, 2000] sont applicables aussi au problème de l'observabilité. Cependant, d'une part la subdivision en trois systèmes utilisée dans [van der Woude *et al.*, 2003] n'est pas nécessaire pour l'étude de l'observabilité. D'autre part, l'originalité de notre résultat par rapport à [van der Woude *et al.*, 2003] qui est malgré tout plus général que notre étude d'observabilité, est d'avoir graphiquement spécifié la subdivision du système utilisée. Cette subdivision est détaillée dans le paragraphe ci-dessous.

1.3.2 Subdivision $\Sigma_0 - \Sigma_1$ d'un système linéaire

Afin de donner l'équivalent graphique de la condition d'observabilité du Théorème 1.1, l'ensemble des sommets du graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ est subdivisé en plusieurs sous-ensembles :

- $\mathbf{X}_1 \stackrel{def}{=} \{ \mathbf{x}_i \mid \rho[\mathbf{U} \cup \{ \mathbf{x}_i \}, \mathbf{Y}] > \rho[\mathbf{U}, \mathbf{Y}] \},$
- $\mathbf{Y}_0 \stackrel{def}{=} \{ \mathbf{y}_i \mid \rho[\mathbf{U}, \mathbf{Y}] > \rho[\mathbf{U}, \mathbf{Y} \setminus \{ \mathbf{y}_i \}] \} = \mathbf{Y} \cap V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}),$
- $\mathbf{Y}_1 \stackrel{def}{=} \mathbf{Y} \setminus \mathbf{Y}_0,$
- $\mathbf{U}_0 \stackrel{def}{=} \{ \mathbf{u}_i \mid \theta[\{ \mathbf{u}_i \}, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1] = 0 \},$
- $\mathbf{U}_1 \stackrel{def}{=} \mathbf{U} \setminus \mathbf{U}_0,$
- $\mathbf{X}_s \stackrel{def}{=} \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cap \mathbf{X},$
- $\mathbf{X}_0 \stackrel{def}{=} \mathbf{X} \setminus (\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{X}_s).$

Nous définissons aussi les entiers $n_0 = \text{card}(\mathbf{X}_0)$, $n_s = \text{card}(\mathbf{X}_s)$, $n_1 = \text{card}(\mathbf{X}_1)$, $q_0 = \text{card}(\mathbf{U}_0)$, $q_1 = \text{card}(\mathbf{U}_1)$, $p_0 = \text{card}(\mathbf{Y}_0)$ et $p_1 = \text{card}(\mathbf{Y}_1)$.

Cette subdivision est un cas particulier spécifique à l'étude de l'observabilité de la décomposition définie dans [van der Woude, 2000]. L'interprétation de chacun des ensembles définis ci-dessus ainsi que les propriétés de cette subdivision sont détaillées dans [Boukhobza *et al.*, 2007] où il a été montré qu'il n'y a aucun arc reliant $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0$ à $\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1$ et que $\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}_s \cup \mathbf{Y}_0$. Subséquemment le système Σ_Λ peut s'écrire :

$$\begin{cases} \dot{X}_0(t) &= A_{0,0}^\lambda X_0(t) + A_{0,s}^\lambda X_s(t) + A_{0,1}^\lambda X_1(t) + B_{0,0}^\lambda U_0(t) + B_{0,1}^\lambda U_1(t) \\ \dot{X}_s(t) &= A_{s,0}^\lambda X_0(t) + A_{s,s}^\lambda X_s(t) + A_{s,1}^\lambda X_1(t) + B_{s,0}^\lambda U_0(t) + B_{s,1}^\lambda U_1(t) \\ \dot{X}_1(t) &= A_{1,s}^\lambda X_s(t) + A_{1,1}^\lambda X_1(t) + B_{1,1}^\lambda U_1(t) \\ Y_0(t) &= C_{0,0}^\lambda X_0(t) + C_{0,s}^\lambda X_s(t) + C_{0,1}^\lambda X_1(t) + D_{0,0}^\lambda U_0(t) + D_{0,1}^\lambda U_1(t) \\ Y_1(t) &= C_{1,s}^\lambda X_s(t) + C_{1,1}^\lambda X_1(t) + D_{1,1}^\lambda U_1(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

où X_0, X_s, U_0, U_1, Y_0 et Y_1 représentent les vecteurs associés respectivement aux ensembles de sommets $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_s, \mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \mathbf{Y}_0$ et \mathbf{Y}_1 .

1.3.3 Conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité totale de l'état et de l'entrée d'un système linéaire

À partir de la subdivision précédente, deux systèmes sont définis :

- Σ_0 qui a comme entrée U_0 , comme état X_0 et comme sortie $\begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_s \end{pmatrix}$ où $Y_s = X_s$ est un vecteur de sortie virtuel.
- Σ_1 qui a comme entrée $\begin{pmatrix} U_1 \\ X_s \end{pmatrix}$, comme état X_1 et comme sortie Y_1 .

Il a été prouvé dans [Boukhobza *et al.*, 2007] que les entrées et l'état du système Σ_Λ sont génériquement observables si et seulement si aussi bien pour le système Σ_0 que pour le système Σ_1 les entrées et l'état sont génériquement observables.

En utilisant les propriétés de chacun de ces deux systèmes et en s'appuyant sur les résultats de [van der Woude, 2000], le résultat suivant a été établi :

Proposition 1.1 *Soit le système linéaire structuré Σ_Λ représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$. Les entrées et l'état de Σ_Λ sont génériquement observables si et seulement si dans $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$,*

Cond. a. $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0 \subseteq V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s)$,

Cond. b. $\theta[\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s \cup \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1] = q_1 + n_s + n_1$.

Il est à noter que la condition **Cond. a.** est équivalente à $\text{card}(\mathbf{U}_0 \cup \mathbf{X}_0) = \mu[\mathbf{U}_0, \mathbf{X}_s \cup \mathbf{Y}_0] - \rho[\mathbf{U}_0, \mathbf{X}_s \cup \mathbf{Y}_0]$. Par ailleurs, si la condition **Cond. a.** est vérifiée alors la seconde condition est équivalente à $\theta[\mathbf{U} \cup \mathbf{X}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}] = n + q$. Ainsi, il n'est pas nécessaire de déterminer tous les ensembles de la subdivision pour vérifier l'observabilité des entrées et de l'état du système Σ_Λ car les conditions de la proposition 1.1, s'écrivent :

Cond. \bar{a} . $\Delta_0 \cup \mathbf{U} \subseteq V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$,

Cond. \bar{b} . $\theta[\mathbf{U} \cup \mathbf{X}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}] = n + q$.

Enfin, notons que l'on retrouve les conditions d'observabilité des systèmes sans entrée inconnue rappelées dans [Dion *et al.*, 2003, Murota, 1987b]. En effet, pour un système sans entrée inconnue, d'une part, la condition **Cond. a.** devient $\mathbf{X}_0 = \emptyset$ ce qui est équivalent à la condition de connectivité de tous les sommets état à au calcul de la subdivision $\Sigma_0 - \Sigma_1$ pour ce système : $\mathbf{X}_1 = \emptyset, \mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}, \mathbf{Y}_1 = \emptyset, \mathbf{U}_0 = \mathbf{U}, \mathbf{U}_1 = \emptyset, \mathbf{X}_s = \emptyset$ et $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}$. D'autre part, $V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s) = V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$ n'inclut pas \mathbf{x}_3 . Ce sommet peut être vu comme étant trop éloigné des sommets des sorties que ne le sont les sommets des entrées. De ce fait, un lien maximal entrée-sortie de longueur minimale ne peut couvrir \mathbf{x}_3 . Par conséquent, $\text{card}(\mathbf{U}_0 \cup \mathbf{X}_0) > \mu[\mathbf{U}_0, \mathbf{X}_s \cup \mathbf{Y}_0] -$

$\rho[\mathbf{U}_0, \mathbf{X}_s \cup \mathbf{Y}_0]$. Ainsi, la condition **Cond. a.** de la proposition 1.1 n'est pas vérifiée. Les entrées et l'état du système de l'exemple 1.1 ne sont donc pas génériquement observables.

L'exemple suivant, même s'il s'agit d'un système de plus grande taille, permet d'illustrer la simplicité et l'applicabilité des conditions énoncées dans la proposition 1.1 :

Exemple 1.2 *Considérons le système structuré représenté par le graphe orienté de la figure 1.2.*

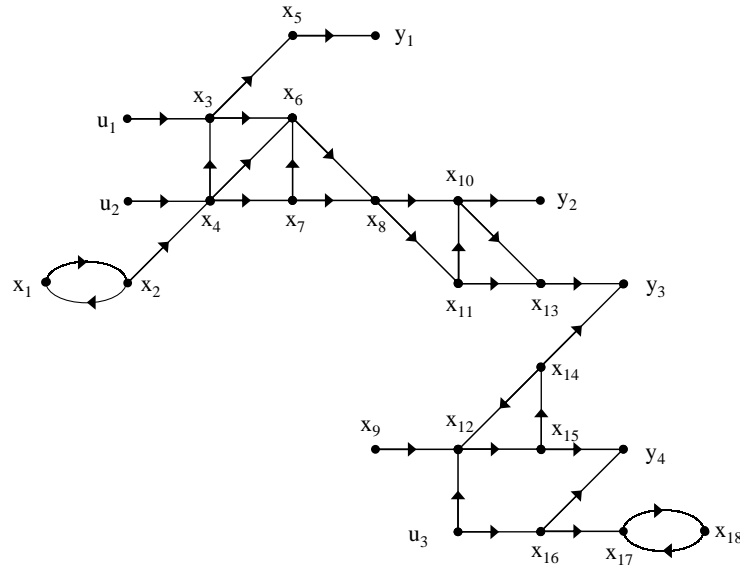


FIG. 1.2: Représentation graphique dédiée à un exemple illustrant de la proposition 1.1

La subdivision du système, d'après les règles énoncées au paragraphe 1.3.2, fait apparaître les ensembles suivants :

$$\mathbf{X}_1 = \{x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{16}\}, \mathbf{Y}_0 = \{y_1\}, \mathbf{Y}_1 = \{y_2, y_3, y_4\}, \mathbf{U}_0 = \{u_1, u_2\}, \\ \mathbf{U}_1 = \{u_3\}, \mathbf{X}_s = \{x_8\} \text{ et } \mathbf{X}_0 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_{17}, x_{18}\}.$$

D'une part, comme $V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s) = \{u_1, u_2, x_3, x_4, x_5, x_8, y_1\}$, la condition **Cond. a.** de la proposition 1.1 n'est pas vérifiée. D'autre part, $\theta[\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s \cup \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1] = 9 \neq q_1 + n_s + n_1 = 1 + 1 + 8 = 10$ implique que la condition **Cond. b.** de la proposition 1.1 n'est pas non plus vérifiée. Les entrées et l'état du système de l'exemple représenté par le graphe orienté de la figure 1.2 ne sont donc pas génériquement observables.

1.4 Observabilité forte d'une partie de l'état et des entrées d'un système linéaire

1.4.1 Position du problème

La seconde partie concernant les systèmes linéaires structurés, est dédiée à l'analyse de l'observabilité d'une partie donnée de l'état et des entrées du système Σ_Λ . En d'autres termes, il s'agit de savoir quelle partie de l'état et de entrées est fortement observable. Les systèmes étudiés étant structurés, l'observabilité d'une fonctionnelle $L \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$ n'a de sens que si la matrice L est formée

de vecteurs de la base canonique *i.e.* $L \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}, u_{j_1}, u_{j_2}, \dots, u_{j_\ell})^T$.

Aussi, le problème posé est de savoir si la composante de l'état x_i ou de l'entrée u_j est fortement observable. La notion d'observabilité forte définie dans [Hautus, 1983, Trentelman *et al.*, 2001] est appliquée ci-dessous à une composante de l'état ou de l'entrée pour un système structuré :

Définition 1.2 *La composante de l'état x_i (respectivement de l'entrée u_j) du système linéaire structuré Σ_Λ est génériquement fortement observable quand pour tout état initial x_0 et pour tout signal d'entrée $u(t)$, l'égalité $y(t) = 0, \forall t \geq 0$ implique $x_i(t) = 0, \forall t \geq 0$ (respectivement $u_j(t) = 0, \forall t > 0$).*

En d'autres termes, une composante de l'état x_i (respectivement de l'entrée u_j) est fortement observable si elle peut s'exprimer uniquement en fonction des composantes de sortie et de leurs dérivées. L'objectif de l'étude menée est de trouver des conditions graphiques qui permettent de savoir si la composante de l'état x_i (respectivement de l'entrée u_j) de Σ_Λ est génériquement fortement observable. Ainsi, il est possible de caractériser l'ensemble des composantes de l'état et de l'entrée qui sont fortement observables. De manière évidente, cet ensemble peut être vide même si la dimension de l'espace d'observabilité étendu (*i.e.* dans l'espace d'état étendu $\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$) vaut $n + q - 1$.

1.4.2 Définitions et notations

Afin de caractériser l'ensemble des composantes des vecteurs d'état et d'entrée qui sont fortement observables, il est nécessaire de paramétrer les ensembles $\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_s, \mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_0$ et \mathbf{Y}_1 définis dans le paragraphe 1.3.2 traitant de la subdivision $\Sigma_0 - \Sigma_1$. Ainsi, pour tout ensemble de sommets \mathbf{V} qui jouerait le rôle de sortie et donc tel que $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{V} \subseteq \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$, on définit les ensembles de sommets suivants :

- $\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \mathbf{X} \setminus (\mathbf{V} \cap \mathbf{X})$,
- $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}) \subseteq \mathbf{U}$ tel que $\text{card}(\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V})) = \rho[\mathbf{U}, \mathbf{V}] = \rho[\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}), \mathbf{V}]$ et $\mu[\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}), \mathbf{V}] = \mu[\mathbf{U}, \mathbf{V}]$. Évidemment, l'ensemble $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V})$ existe mais n'est pas nécessairement unique. L'étude de l'observabilité forte des composantes de l'entrée peut se limiter aux composantes de éléments de $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V})$ car il est aisé de voir que les autres composantes de l'entrée ne peuvent être fortement observables.
- $\mathbf{X}_1(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{x}_i \in \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{V}) \mid \rho[\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \mathbf{V}] > \rho[\mathbf{U}, \mathbf{V}] \right\}$,
- $\mathbf{Y}_0(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{v}_i \in \mathbf{V} \mid \rho[\mathbf{U}, \mathbf{V}] > \rho[\mathbf{U}, \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{v}_i\}] \right\} = \mathbf{V} \cap V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$,
- $\mathbf{Y}_1(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \mathbf{V} \setminus \mathbf{Y}_0(\mathbf{V})$,
- $\mathbf{U}_0(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{u}_i \in \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}) \mid \theta[\{\mathbf{u}_i\}, \mathbf{X}_1(\mathbf{V}) \cup \mathbf{Y}_1(\mathbf{V})] = 0 \right\}$,
- $\mathbf{U}_1(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}) \setminus \mathbf{U}_0(\mathbf{V})$,
- $\mathbf{S}^\circ(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0(\mathbf{V}), \mathbf{V})$,
- $\mathbf{X}_s(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \mathbf{S}^\circ(\mathbf{V}) \cap \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{V})$,
- $\mathbf{X}_0(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{V}) \setminus (\mathbf{X}_1(\mathbf{V}) \cup \mathbf{X}_s(\mathbf{V}))$.
- $\beta_1(\mathbf{V})$ est le nombre maximal de sommets de $\mathbf{X}_1(\mathbf{V}) \cup \mathbf{X}_s(\mathbf{V}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{V})$ couverts par une union disjointe
 - d'un lien $\mathbf{X}_s(\mathbf{V}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{V}) - \mathbf{Y}_1(\mathbf{V})$ de taille $\rho[\mathbf{X}_s(\mathbf{V}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{V}), \mathbf{Y}_1(\mathbf{V})]$,
 - d'une famille de chemins $\mathbf{X}_1(\mathbf{V}) - \mathbf{Y}_1(\mathbf{V})$ simples,

- d'une famille de cycles ne couvrant que des éléments de $\mathbf{X}_1(\mathbf{V})$.
- $\beta_0(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \mu[\mathbf{U}_0(\mathbf{V}), \mathbf{S}^o(\mathbf{V})] - \rho[\mathbf{U}_0(\mathbf{V}), \mathbf{S}^o(\mathbf{V})]$,
- $\beta(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \beta_1(\mathbf{V}) + \beta_0(\mathbf{V}) + \text{card}(\mathbf{V} \setminus \mathbf{Y})$.

1.4.3 Conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité d'une partie de l'état et de l'entrée d'un système linéaire

De par les propriétés des systèmes Σ_0 et Σ_1 et en utilisant les résultats de [van der Woude, 2000], il a été montré que le nombre de zéros invariants pour le système Σ_0 est égal à

$$\text{card}(\mathbf{U}_0(\mathbf{Y})) + \text{card}(\mathbf{X}_0(\mathbf{Y})) - \beta_0(\mathbf{Y})$$

et que celui du système Σ_1 vaut

$$\text{card}(\mathbf{U}_1(\mathbf{Y})) + \text{card}(\mathbf{X}_s(\mathbf{Y})) + \text{card}(\mathbf{X}_1(\mathbf{Y})) - \beta_1(\mathbf{Y})$$

Par conséquent, le nombre de zéros invariants du système Σ_Λ est égal à $\beta(\mathbf{Y})$, d'où la proposition suivante [Boukhobza *et al.*, 2008a, Boukhobza, 2008b] :

Proposition 1.2 *Soit le système linéaire structuré Σ_Λ représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$. Une composante de l'état x_i (resp. une composante de l'entrée u_j) est génériquement fortement observable si et seulement si $\mathbf{x}_i \in \mathcal{V}_{obs} \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{X} \cup \mathbf{U}, \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{v}\}) = \beta(\mathbf{Y}) \right\}$ (resp. $\mathbf{u}_j \in \mathcal{V}_{obs}$)*

L'ensemble des sommets \mathcal{V}_{obs} représente l'ensemble de toutes les composantes de l'état et des entrées fortement observables et le nombre $\beta(\mathbf{Y})$ correspond, quant à lui, à la dimension générique du sous-espace observable dans l'espace étendu $\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$. La proposition 1.2 est établie simplement en considérant que la composante x_i (resp. u_j) est fortement observable si et seulement si l'ajout d'une mesure $y_{p+1} = x_i$ (resp. $y_{p+1} = u_j$) au vecteur de sortie y ne change pas la dimension du sous-espace observable dans l'espace étendu $\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$.

1.4.4 Cas particulier : observabilité forte de l'état d'un système linéaire

Un cas particulier de l'observabilité partielle est l'observabilité forte de toutes les composantes de l'état qui est classiquement définie comme correspondant à l'observabilité forte du système [Trentelman *et al.*, 2001].

L'intérêt de ce cas est que l'étude menée peut s'appliquer à l'analyse de l'observabilité de toutes les composantes de l'état d'un système soumis à des défauts ou des perturbations et qu'elle permette de savoir si les défauts ou les perturbations peuvent rendre inobservable l'état du système. Ainsi, il a été montré [Boukhobza et Hamelin, 2008a] que :

Proposition 1.3 *Soit le système linéaire structuré Σ_Λ représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$. L'état de Σ_Λ est génériquement fortement observable si et seulement si dans $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$,*

Cond. a'. $\mathbf{X}_0 \subseteq V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s)$,

Cond. b'. $\theta[\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s \cup \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1] = n_s + n_1 + \theta[\mathbf{U}_1, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1]$ ou encore $\theta[\mathbf{U} \cup \mathbf{X}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}] = n + \theta[\mathbf{U}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}]$.

Ces conditions sont plus proches de celles de la proposition 1.1 que de celles de la proposition 1.2. Évidemment, il est toujours possible d'appliquer cette dernière proposition au cas particulier de l'observabilité forte de tout l'état. Néanmoins, les conditions ainsi obtenues seraient moins efficaces d'un point de vue algorithmique.

Exemple 1.3 *Considérons l'exemple présenté dans le paragraphe 1.2. Au vu des calculs effectués précédemment, l'état n'est pas fortement observable. Par ailleurs, même sans entrée inconnue, ce système n'est pas génériquement observable. Le problème est maintenant de savoir quelles composantes de l'état et des entrées sont fortement observables. Un calcul relativement simple permet d'obtenir $\beta_0(\mathbf{Y}) = 6$ et $\beta_1(\mathbf{Y}) = 9$. De plus, on a $\beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_3\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_5\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_8\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_{10}\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_{11}\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_{15}\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_{16}\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{u}_3\}) = 15$, $\beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_4\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_6\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_7\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_9\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_{12}\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_{13}\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_{14}\}) = 16$, $\beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_1\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_2\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_{17}\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_{18}\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{u}_1\}) = 17$ et $\beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{u}_2\}) = 19$. Ainsi, seules les composantes $\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_8, \mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{15}, \mathbf{x}_{16}$ et \mathbf{u}_3 sont fortement observables.*

1.5 Application à l'analyse de l'observabilité des systèmes linéaires distribués en réseau

Dans le cadre du projet européen "Networked Control Systems Tolerant to faults" (NECST), les résultats obtenus sur l'observabilité des systèmes à entrées inconnues ont été appliqués à l'analyse des propriétés d'observabilité de systèmes structurés distribués en réseau. Un tel système est composé de sous-systèmes Σ_i^R , $i = 1, \dots, N$ dont le modèle structuré est de la forme :

$$\Sigma_i^R \begin{cases} \dot{x}_i(t) &= A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N A_{i,j} x_j(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N B_{i,j} u_j(t) \\ y_i(t) &= C_i x_i(t) + D_i u_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N C_{i,j} x_j(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N D_{i,j} u_j(t) \end{cases} \quad (1.3)$$

où x_i est l'état, u_i le vecteur des entrées et y_i le vecteur des mesures effectuées sur le sous-système Σ_i^R . Les mesures parvenant par au sous-système Σ_i^R peuvent être modélisées par

$$y_{r,i}(t) = \tilde{C}_i x_i(t) + \tilde{D}_i u_i(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{C}_{i,j} x_j(t) + \sum_{j=1, j \neq i}^N \tilde{D}_{i,j} u_j(t)$$

Afin de représenter ces mesures, un ensemble de sommets de sortie noté $\mathbf{Y}_{r,i}$ associés au vecteur $y_{r,i}(t)$ est rajouté au graphe $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ représentant le système. Ces sommets sont reliés aux sommets état et entrée de la même manière que les sommets de sortie \mathbf{Y} .

En appliquant les résultats de la proposition 1.2, il est aisé de déduire des conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité forte des composantes de l'état, des entrées et des défauts constituant un ensemble quelconque $\Delta_i \subseteq \mathbf{X}_i \cup \mathbf{U}_i$ en mode distribué (avec accès aux données réseau) ou en mode autonome (sans accès aux données réseau) :

Proposition 1.4 *Soit le système linéaire structuré Σ_Λ représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ et composé de plusieurs sous-systèmes Σ_i^R , $i = 1, \dots, N$ et un ensemble de composantes $\Delta_i \subseteq \mathbf{X}_i \cup \mathbf{U}_i$. Les composantes associées aux éléments de Δ_i sont fortement observables dans un schéma d'observation distribué si et seulement si*

$$\beta(\Delta_i \cup \mathbf{Y}_i \cup \mathbf{Y}_{r,i}) = \beta(\mathbf{Y}_i \cup \mathbf{Y}_{r,i})$$

Les composantes associées aux éléments de Δ_i sont fortement observables dans un schéma d'observation autonome si et seulement si

$$\beta(\Delta_i \cup \mathbf{Y}_i) = \beta(\mathbf{Y}_i)$$

1.6 Placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité de l'état et de l'entrée

1.6.1 Position du problème

Dans ce paragraphe, un système linéaire à entrées inconnues Σ_Λ de la forme (1.1) dont l'état et l'entrée ne sont pas génériquement observables est considéré. Le seul moyen de recouvrer l'observabilité de l'entrée et de l'état est de rajouter des capteurs. Ainsi, le placement de capteurs étudié dans ce paragraphe a comme objectif de faire satisfaire les conditions de la proposition 1.1 au système noté Σ_Λ^c , correspondant au système Σ_Λ complété par les nouvelles mesures z associées aux capteurs rajoutés :

$$\Sigma_\Lambda^c : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A^\lambda x(t) + B^\lambda u(t) \\ y(t) &= C^\lambda x(t) + D^\lambda u(t) \\ z(t) &= H_x^\lambda x(t) + H_u^\lambda u(t) \end{cases} \quad (1.4)$$

L'hypothèse suivante est faite sur le système :

$$\mathbf{H}_1 : g\text{-rang} \begin{pmatrix} B^\lambda \\ D^\lambda \end{pmatrix} = \theta(\mathbf{U}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) = q.$$

Cette hypothèse n'est pas très restrictive car si ce elle n'était pas vérifiée, cela voudrait dire que certaines colonnes de $\begin{pmatrix} B^\lambda \\ D^\lambda \end{pmatrix}$ ne sont pas libres. Les entrées seraient alors redondantes et il suffirait d'éliminer les entrées inutiles et donc les colonnes liées.

La condition **Cond. a.** de la proposition 1.1 n'est pas simple à appréhender. En effet, elle sous-entend plusieurs conditions : connectivité à la sortie de tous les sommets de $\mathbf{X} \cup \mathbf{U}$, inversibilité à gauche du système carré Σ_0 et une condition limitant le nombre de sommets appartenant à \mathbf{X}_0 par rapport à la distance $\mu[\mathbf{U}_0, \mathbf{X}_s \cup \mathbf{Y}_0] - \rho[\mathbf{U}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{X}_s \cup \mathbf{Y}_0]$ (**Cond. b.** de la proposition 1.1). Aussi, pour caractériser les placements de capteurs garantissant l'observabilité des entrées et des états de Σ_Λ , il est plus aisé de considérer le corollaire suivant de la proposition 1.1 :

Corollaire 1.1 *Soit le système linéaire structuré Σ_Λ représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$. Les entrées et les états de Σ_Λ sont génériquement observables si et seulement si dans $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$,*

Cond. 1. $\theta[\mathbf{X} \cup \mathbf{U}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}] = n + q$ (condition de couplage) ;

Cond. 2. tout sommet de $\mathbf{X} \cup \mathbf{U}$ est le début d'au moins un chemin atteignant un sommet de \mathbf{Y}

(condition de connectivité à la sortie);

Cond. 3. $\mathbf{X}_0 \subseteq V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s)$ (condition de distance).

L'utilisation de ce corollaire revient à faire la division du problème de placement de capteurs initial en trois sous-problèmes. L'avantage est que ces derniers ont, soit déjà été traités, ou encore sont équivalents en partie, d'un point de vue graphique, à des problèmes résolus dans d'autres contextes. Ainsi, le recouvrement des conditions **Cond. 1.** et **Cond. 2.** a déjà été abordé dans [Commault *et al.*, 2005b] pour satisfaire à l'observabilité de l'état d'un système linéaire. La condition **Cond. 3.** est plus originale car spécifique aux systèmes linéaires à entrées inconnues.

Le but du placement de capteurs est que le système Σ_Λ^c satisfasse aux trois conditions du corollaire 1.1. À cette fin, ces dernières sont traitées dans l'ordre. Cette démarche permet d'aborder plus simplement ce problème assez complexe tout en garantissant la minimalité globale du nombre de capteurs à rajouter.

1.6.2 Recouvrement de la condition de couplage

Dans ce paragraphe, seule l'hypothèse **H₁** est supposée satisfaite. Le problème de recouvrement de la condition de couplage est abordé dans [Commault *et al.*, 2005b, Staroswiecki, 2006] en utilisant des graphes bipartis. L'objectif étant d'éliminer toutes les "dilatations" présentes dans le graphe représentant le système et qui causeraient $\theta[\mathbf{X} \cup \mathbf{U}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}] < n + q$. La décomposition de Dulmage-Mendelsohn appliquée sur un graphe biparti étant un outil très adapté à cette étude, un graphe de ce type noté $B(\Sigma_\Lambda) = (V^+, V^-, W)$ est alors associé au système. Plus précisément, $B(\Sigma_\Lambda) = (V^+, V^-, W)$ est défini tel que $V^+ = \mathbf{X}^+ \cup \mathbf{U}^+$ et $V^- = \mathbf{Y}^- \cup \mathbf{X}^-$ sont les ensembles de sommets avec $\mathbf{X}^+ = \{\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^+, \dots, \mathbf{x}_n^+\}$, $\mathbf{U}^+ = \{\mathbf{u}_1^+, \mathbf{u}_2^+, \dots, \mathbf{u}_q^+\}$, $\mathbf{X}^- = \{\mathbf{x}_1^-, \mathbf{x}_2^-, \dots, \mathbf{x}_n^-\}$, $\mathbf{Y}^- = \{\mathbf{y}_1^-, \mathbf{y}_2^-, \dots, \mathbf{y}_p^-\}$. W est l'ensemble des arcs reliant V^+ à V^- . Il est défini par $\{(\mathbf{x}_j^+, \mathbf{x}_i^-) \mid A^\lambda(i, j) \neq 0\} \cup \{(\mathbf{u}_j^+, \mathbf{x}_i^-) \mid B^\lambda(i, j) \neq 0\} \cup \{(\mathbf{x}_j^+, \mathbf{y}_i^-) \mid C^\lambda(i, j) \neq 0\} \cup \{(\mathbf{u}_j^+, \mathbf{y}_i^-) \mid D^\lambda(i, j) \neq 0\}$.

Un couplage dans le graphe biparti $B(\Sigma_\Lambda) = (V^+, V^-, W)$ est un ensemble d'arcs disjoints $M \subseteq W$. Un couplage M est dit maximal lorsqu'il contient un nombre maximal d'arcs *i.e.* $\text{card}(M) = \theta[V^+, V^-]$. On note par $\partial^+ M$ (resp. $\partial^- M$) l'ensemble des sommets de V^+ (resp. de V^-) couverts par M . A chaque couplage M est associé un graphe orienté noté $B_M(\Sigma_\Lambda) = (V^+, V^-, \bar{W})$ où $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \bar{W} \Leftrightarrow (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in W$ ou $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) \in M$. Enfin, l'ensemble S_0^+ regroupe tous les sommets de V^+ non couverts par M *i.e.* $S_0^+ = V^+ \setminus \partial^+ M$.

Il est facile de montrer que le nombre minimal de capteurs permettant de satisfaire la condition de couplage **Cond. 1.** est égal à $\gamma \stackrel{\text{def}}{=} n + q - \theta[V^+, V^-]$. Le problème est maintenant de caractériser les localisations possibles de ces γ capteurs. À cette fin, un algorithme simplifié issu de la décomposition de Dulmage-Mendelsohn est utilisé :

Algorithme 1.1

↔ Trouver un couplage maximal M dans $B(\Sigma_\Lambda)$,

↔ Soit $\mathbf{V}_0^+ = S_0^+ \cup \{\mathbf{v} \in V^+, \text{ il existe un chemin dans } B_M(\Sigma_\Lambda) \text{ partant de } S_0^+ \text{ et arrivant à } \mathbf{v}\}$

et $\mathbf{V}_0^- = \{\mathbf{v} \in V^-, \text{ il existe un chemin dans } B_M(\Sigma_\Lambda) \text{ partant de } S_0^+ \text{ et arrivant à } \mathbf{v}\}$.

Il est alors établi [Boukhobza et Hamelin, 2008a] que :

Proposition 1.5 *Soit le système linéaire structuré Σ_Λ représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$. Afin de satisfaire à la condition de couplage (**Cond. 1.**), il est nécessaire et suffisant d'utiliser $n + q - \theta[V^+, V^-]$ capteurs qui mesureraient des éléments associés de V_0^+ de sorte à avoir un couplage maximal de taille $n + q$ dans $B(\Sigma_\Lambda^c)$.*

Après avoir calculé les ensembles \mathbf{V}_0^+ et \mathbf{V}_0^- , il est possible de définir l'ensemble $\mathbf{V}_0 \stackrel{def}{=} \mathbf{V}_0^+ \cup \mathbf{V}_0^-$. Par ailleurs, un chemin simple P est appelé “ \mathbf{V}_0 -chemin” s'il ne couvre que des sommets appartenant à l'ensemble \mathbf{V}_0 . Pour chaque \mathbf{V}_0 -chemin P est associé un ensemble de sommets $\nu(P)$ tel que $\nu(P) = \{\mathbf{v} \in V_0^+, P \text{ couvre } \mathbf{v}\}$. Enfin, un \mathbf{V}_0 -chemin P est dit maximal, s'il n'existe pas un \mathbf{V}_0 -chemin P' tel que $\nu(P) \subset \nu(P')$.

\mathbf{Z}_1 est l'ensemble de sommets associés dans $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda^c)$ aux capteurs additionnels requis lors de cette première étape de la procédure de recouvrement des propriétés d'observabilité de l'état et de l'entrée. Cet ensemble correspond à un ensemble de sommets noté \mathbf{Z}_1^- dans le graphe biparti $B(\Sigma_\Lambda^c)$. Des précisions complémentaires sur le placement des capteurs \mathbf{Z}_1^- sont données par les contraintes (nécessaires seulement) suivantes :

- i. Pour tout \mathbf{V}_0 -chemin maximal P , $\theta(\nu(P), \mathbf{Z}_1^-) \neq 0$
- ii. Pour tout \mathbf{V}_0 -chemin maximal P , $\theta(\mathbf{V}_0^+, \mathbf{Z}_1^- \cup \mathbf{V}_0^-) - \theta(\mathbf{V}_0^+ \setminus \nu(P), \mathbf{Z}_1^- \cup \mathbf{V}_0^-) > 0$
- iii. $\theta(\mathbf{V}_0^+, \mathbf{Z}_1^-) \geq \gamma$

(1.5)

où V_0 est calculé sur le graphe biparti $B(\Sigma_\Lambda)$. Ces contraintes n'ont pas pour ambition de remplacer la condition nécessaire et suffisante énoncée dans la proposition 1.5. Leur objectif est de compléter cette dernière pour avoir plus de précision et de finesse dans le placement de capteurs principalement lors d'une phase de conception.

Notons enfin qu'en raison de l'hypothèse \mathbf{H}_1 , si la condition de couplage est satisfaite alors $\rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}_1) = \text{card}(\mathbf{U})$ et donc le système devient génériquement inversible à gauche après le recouvrement de la condition de couplage.

1.6.3 Recouvrement de la condition de connectivité à la sortie

Le problème de recouvrement de la condition de connectivité a été résolu dans [Commault *et al.*, 2005b]. Je présenterai assez brièvement la solution proposée. Ainsi, les définitions suivantes sont assez similaires à celles présentées dans [Commault *et al.*, 2005b].

Deux sommets \mathbf{v}_i et \mathbf{v}_j sont dit fortement connectés s'il existe un chemin de \mathbf{v}_i à \mathbf{v}_j et un chemin de \mathbf{v}_j à \mathbf{v}_i . Par définition, un sommet est fortement connecté à lui même.

La relation “fortement connecté à” est une relation d'équivalence. Chaque classe d'équivalence de cette relation est dite composante fortement connexe de $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$. Les composantes fortement connexes de $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ peuvent être partiellement ordonnées en utilisant la relation “ \preceq ” définie par :

Soient deux composantes fortement connexes \mathbf{C}_i et \mathbf{C}_j . On a $\mathbf{C}_i \preceq \mathbf{C}_j$, s'il existe au moins un arc $(\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i)$ où $\mathbf{v}_j \in \mathbf{C}_j$ et $\mathbf{v}_i \in \mathbf{C}_i$. En d'autres termes, $\mathbf{C}_i \preceq \mathbf{C}_j$ si $\theta[\mathbf{C}_j, \mathbf{C}_i] \neq 0$.

Les éléments minimaux par rapport à la relation “ \preceq ” sont des composantes fortement connexes n'ayant aucun arc sortant vers une autre composante fortement connexe. C'est le cas pour les sommets de sortie. On appelle composantes minimales non connectées les composantes fortement connexes minimales qui ne sont pas des sommets de sortie. L'entier \bar{d} dénote le nombre

de ces composantes minimales non connectées. En utilisant des arguments similaires à ceux de [Commault *et al.*, 2005b], la proposition suivante est aisément démontrable :

Proposition 1.6 *Soit le système linéaire structuré Σ_Λ représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$. Afin de satisfaire à la condition de connectivité à la sortie (**Cond. 2.**), il est nécessaire que les capteurs rajoutés mesurent au moins un élément dans chaque composante minimale non connectée.*

La proposition 1.6 donne une condition nécessaire sur l'emplacement des nouveaux capteurs mais ne donne pas leur nombre minimal. En effet, un seul capteur est suffisant s'il mesure une combinaison des composantes de l'état incluant au moins un élément dans chaque composante minimale non connectée. En particulier, il est aussi possible d'utiliser, théoriquement, les capteurs rajoutés pour le recouvrement de la condition de couplage pour assurer aussi le recouvrement de la condition de connectivité à la sortie. En effet, en plus des contraintes de la proposition 1.5, il est possible d'imposer à l'ensemble \mathbf{Z}_1 de satisfaire à $\theta(\mathbf{C}_i, \mathbf{Z}_1) \neq 0$ pour toute composante minimale non connectée \mathbf{C}_i . Cela aura pour effet de ne pas augmenter le nombre de capteurs requis qui restera égal à γ . Par ailleurs, il y aurait une redondance certaine à placer plus de \bar{d} capteurs afin de satisfaire la condition de connectivité à la sortie (**Cond. 2.**).

1.6.4 Recouvrement de la condition de distance

Dans ce paragraphe, les conditions **Cond. 1.** et **Cond. 2.** du Corollaire 1.1 sont supposées satisfaites. Si pour cela, des capteurs ont déjà été rajoutés au système, nous notons par $\tilde{\mathbf{Y}}$, les sommets de sorties regroupant les sommets de sortie \mathbf{Y} et les nouveaux capteurs. Nous redéfinissons les notations relatives à la subdivision du système présentée dans 1.3.2, en remplaçant \mathbf{Y} par $\tilde{\mathbf{Y}}$: $\tilde{\mathbf{X}}_1 \stackrel{def}{=} \{\mathbf{x}_i \mid \rho[\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \tilde{\mathbf{Y}}] > \rho[\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{Y}}]\}$; $\tilde{\mathbf{Y}}_0 \stackrel{def}{=} \tilde{\mathbf{Y}} \cap V_{ess}(\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{Y}})$; $\tilde{\mathbf{Y}}_1 \stackrel{def}{=} \tilde{\mathbf{Y}} \setminus \tilde{\mathbf{Y}}_0$; $\tilde{\mathbf{U}}_0 \stackrel{def}{=} \{\mathbf{u}_i \in \mathbf{U} \mid \theta[\{\mathbf{u}_i\}, \tilde{\mathbf{X}}_1 \cup \tilde{\mathbf{Y}}_1] = 0\}$; $\tilde{\mathbf{U}}_1 \stackrel{def}{=} \mathbf{U} \setminus \tilde{\mathbf{U}}_0$; $\tilde{\mathbf{X}}_s \stackrel{def}{=} \mathbf{S}^o(\tilde{\mathbf{U}}_0, \tilde{\mathbf{Y}}) \cap \mathbf{X}$ and $\tilde{\mathbf{X}}_0 \stackrel{def}{=} \mathbf{X} \setminus (\tilde{\mathbf{X}}_1 \cup \tilde{\mathbf{X}}_s)$.

Comme il a été montré dans [Boukhobza *et al.*, 2007], vu que le système est génériquement inversible à gauche, on a $V_{ess}(\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{Y}}) = V_{ess}(\tilde{\mathbf{U}}_0, \tilde{\mathbf{Y}}_0 \cup \tilde{\mathbf{X}}_s) \cup \tilde{\mathbf{U}}_1$. Cela implique que l'expression $\tilde{\mathbf{X}}_0 \subseteq V_{ess}(\tilde{\mathbf{U}}_0, \tilde{\mathbf{Y}}_0 \cup \tilde{\mathbf{X}}_s)$ est équivalente à $\tilde{\mathbf{X}}_0 \subseteq V_{ess}(\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{Y}})$.

Si cette condition n'est pas vérifiée alors $\tilde{\mathbf{X}}_\emptyset$ défini par $\tilde{\mathbf{X}}_\emptyset \stackrel{def}{=} \tilde{\mathbf{X}}_0 \setminus (\tilde{\mathbf{X}}_0 \cap V_{ess}(\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{Y}}))$ est un ensemble non vide. D'une part, le placement de capteurs sur les états ou les entrées associés à $\tilde{\mathbf{X}}_1 \cup \tilde{\mathbf{X}}_s \cup \tilde{\mathbf{U}}_1$ serait complètement inutile car il n'aurait aucun effet sur la condition de distance **Cond. 3.** D'autre part, suite à la validité des conditions **Cond. 1.** et **Cond. 2.**, quel que soit l'emplacement des nouveaux capteurs z , on a $V_{ess}(\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{Y}} \cup \mathbf{Z}) \subseteq V_{ess}(\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{Y}})$. En d'autres termes, le rajout d'un capteur ne peut en aucun cas augmenter le nombre d'éléments de $V_{ess}(\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{Y}} \cup \mathbf{Z})$. La seule solution qui permettrait d'avoir $\tilde{\mathbf{X}}_0 \subseteq V_{ess}(\tilde{\mathbf{U}}_0, \tilde{\mathbf{Y}}_0 \cup \tilde{\mathbf{X}}_s)$ est donc de réduire le nombre d'éléments de $\tilde{\mathbf{X}}_0$. Ainsi, il s'agit de placer des capteurs tels que, pour tout élément $\mathbf{x}_i \in \tilde{\mathbf{X}}_\emptyset$, $\rho[\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \tilde{\mathbf{Y}} \cup \mathbf{Z}] > \rho[\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{Y}} \cup \mathbf{Z}] = \rho[\mathbf{U}, \tilde{\mathbf{Y}}] = \text{card}(\mathbf{U})$. Cela permettrait de réduire l'ensemble $\tilde{\mathbf{X}}_0$ et d'en enlever tous les éléments se trouvant dans $\tilde{\mathbf{X}}_\emptyset$.

Une condition nécessaire et suffisante pour cela est que les capteurs rajoutés doivent mesurer, pour chaque $\mathbf{x}_i \in \tilde{\mathbf{X}}_\emptyset$, au moins un élément dans chaque ensemble $\delta_i \stackrel{def}{=} \{\mathbf{v}_j \in \tilde{\mathbf{X}}_0 \cup$

$\tilde{\mathbf{U}}_0, \mathbf{v}_j$ couvert par un chemin $\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\} - \mathbf{S}^i(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \tilde{\mathbf{Y}})$ direct d'une longueur $\neq 0$ $\} \cup (\mathbf{C}_i \cap \tilde{\mathbf{X}}_\emptyset)$ où \mathbf{C}_i est la composante connexe comprenant \mathbf{x}_i .

En posant pour tout $\mathbf{x}_j \notin \tilde{\mathbf{X}}_\emptyset$, $\delta_j = \mathbf{X} \cup \mathbf{U}$ et en ordonnant les ensembles δ_i , $i = 1, \dots, n$ avec la relation d'inclusion " \subseteq " qui est une relation d'ordre partiel, on a alors :

Proposition 1.7 *Soit le système linéaire structuré Σ_Λ représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$. Afin de satisfaire à la condition de distance (**Cond. 3.**), il est nécessaire que les capteurs rajoutés mesurent au moins une composante d'état où d'entrée associée à un élément de chaque ensemble δ_i constituant un élément minimal par rapport à la relation d'ordre " \subseteq ".*

De même que pour la condition de connectivité à la sortie, la proposition 1.7 donne une condition nécessaire sur l'emplacement des nouveaux capteurs mais ne donne pas leur nombre minimal. En effet, un seul capteur est suffisant s'il mesure une combinaison des composantes de l'état incluant au moins un élément de chaque ensemble δ_i qui est élément minimal par rapport à la relation d'ordre " \subseteq ". En particulier, il est aussi possible d'utiliser, théoriquement, les capteurs rajoutés pour le recouvrement de la condition de couplage pour assurer aussi le recouvrement de la condition de distance. En effet, en plus des contraintes de la proposition 1.5, il est possible d'imposer à l'ensemble \mathbf{Z}_1 de satisfaire à $\theta(\delta_i, \mathbf{Z}_1) \neq 0$ pour tout ensemble minimal δ_i . Cela aura pour effet de ne pas augmenter le nombre de capteurs requis qui restera égal à γ .

1.7 Placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité partielle

1.7.1 Position du problème

Dans ce paragraphe, le placement de capteurs additionnels a pour objectif de rendre fortement observable une partie quelconque de l'état et de l'entrée. Pour les mêmes raisons citées au paragraphe 1.4, cette partie de l'état et de l'entrée est associée à un ensemble de sommets $\Delta \subseteq \mathbf{X} \cup \mathbf{U}$.

À cette fin, on sépare la condition de la proposition 1.2 en deux conditions :

Cond. 5. tout sommet de Δ est le début d'au moins un chemin atteignant un sommet de \mathbf{Y} (condition de connectivité à la sortie),

Cond. 6. $\forall \mathbf{v} \in \Delta, \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{v}\}) = \beta(\mathbf{Y})$ (condition β).

Ce problème est plus complexe que le problème du placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité totale de l'état et des entrées inconnues. D'une part, des éléments extérieurs à Δ peuvent influencer le placement de capteurs et même faire partie des composantes à mesurer dans une solution optimale. D'autre part, il est impossible de transformer la condition β en une condition de couplage. En effet, par exemple, des éléments peuvent être essentiels dans un couplage entre $\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s$ et $\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1$ sans être associés à des composantes fortement observables.

Les éléments de réponse apportés à ce problème s'articulent autour des deux conditions **Cond. 5.** et **Cond. 6.**. Le critère d'évaluation des solutions utilisé est fondé sur la fonction β .

1.7.2 Recouvrement de la condition de connectivité à la sortie

L'approche adoptée pour le recouvrement de cette condition par ajout de capteurs est très similaire à celle du paragraphe 1.6.3. Soit l'ensemble de sommets $\Delta_1 = \{\mathbf{v} \in \Delta, \rho[\{\mathbf{v}\}, \mathbf{Y}] = 0\}$. Cet ensemble regroupe tous les sommets de Δ qui ne sont pas connectés à une sortie de \mathbf{Y} .

La relation “ \preceq ” définie dans le paragraphe 1.6.3 permet d'ordonner partiellement les composantes connexes relatives aux éléments de Δ_1 . Soit I^* l'ensemble des sommets de Δ_1 dont les composantes fortement connexes sont minimales dans Δ_1 *i.e.*

$$I^* = \left\{ \mathbf{v} \in \Delta_1, \nexists \mathbf{v}' \in \Delta_1 \text{ vérifiant } \rho[\{\mathbf{v}\}, \{\mathbf{v}'\}] > \rho[\{\mathbf{v}'\}, \{\mathbf{v}\}] \right\}$$

Pour chaque élément \mathbf{v} de cet ensemble, on associe un ensemble $\Omega_{\mathbf{v}}$ formé des successeurs de \mathbf{v}

$$\Omega_{\mathbf{v}} = \left\{ \mathbf{v}' \in \mathbf{X} \cup \mathbf{U}, \rho[\{\mathbf{v}\}, \{\mathbf{v}'\}] = 1 \right\}$$

En utilisant les ensembles précédemment définis, la proposition suivante énonce une contrainte à laquelle doit satisfaire tout placement de capteurs servant à recouvrir la condition de connectivité à la sortie de Δ (**Cond. 5.**) :

Proposition 1.8 *Soit le système linéaire structuré Σ_{Δ} représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_{\Delta})$. Afin de satisfaire à la condition de connectivité à la sortie (**Cond. 5.**), il est nécessaire que les capteurs rajoutés mesurent, pour tout $\mathbf{v} \in I^*$, au moins un élément dans l'ensemble $\Omega_{\mathbf{v}}$.*

La proposition 1.8 ne donne pas le nombre minimal de capteurs à placer pour recouvrir la condition de connectivité à la sortie de Δ (**Cond. 5.**). En effet, là aussi un seul capteur est suffisant s'il mesure une combinaison des composantes de l'état incluant au moins un élément dans chaque ensemble $\Omega_{\mathbf{v}}$, pour tout $\mathbf{v} \in I^*$. Par ailleurs, il serait inutile de placer plus de $\text{card}(I^*)$ capteurs afin de satisfaire la condition de connectivité à la sortie (**Cond. 5.**).

1.7.3 Recouvrement de la condition β

Dans ce paragraphe, la condition de connectivité à la sortie (**Cond. 5.**) est supposée être satisfaite. Concernant l'ajout de capteurs pour satisfaire à la condition β (**Cond. 6.**), les résultats sont moins efficaces ou incisifs que ceux concernant le recouvrement de l'observabilité totale. Le point de départ du raisonnement suivi est que pour garantir l'observabilité d'un élément \mathbf{v} de Δ , il suffit de placer un capteur dont la mesure est la combinaison d'un élément de

$$\Gamma_{\mathbf{v}} = \left\{ \mathbf{v}' \in \mathbf{X} \cup \mathbf{U}, \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{v}'\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{v}, \mathbf{v}'\}) \right\}$$

et d'éléments de \mathcal{V}_{obs} (défini dans le paragraphe 1.4.3).

Cette condition n'étant que suffisante, on en déduit une procédure systématique de placement de capteurs assurant l'observabilité des éléments de Δ qui n'est ni exhaustive ni optimale du point de vue du nombre de capteurs rajoutés.

Les ensembles $\Gamma_{\mathbf{v}}$, $\mathbf{v} \in \Delta$ sont partiellement ordonnés en utilisant la relation d'inclusion “ \subseteq ”. Δ_2^* est alors défini comme étant un sous-ensemble de Δ relatif aux éléments minimaux par rapport à cette relation *i.e.*

$$\Delta_2^* \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{v} \in \Delta, \nexists \mathbf{v}' \in \Delta \text{ satisfaisant } \Gamma_{\mathbf{v}'} \subset \Gamma_{\mathbf{v}} \right\}$$

La proposition suivante donne une condition suffisante pour le placement de capteurs permettant le recouvrement de l'observabilité forte des éléments de Δ pour le système complété.

Proposition 1.9 [Boukhobza, 2008b] *Soit le système linéaire structuré Σ_Λ représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$. Afin de satisfaire à la condition β , il est suffisant de rajouter des capteurs représentés par un ensemble de sommets \mathbf{Z} tel qu'il existe $\mathbf{V}_{\mathbf{X},\mathbf{U}} \subseteq \left(\bigcup_{\mathbf{v} \in \Delta_2^*} \Gamma_{\mathbf{v}} \right)$ satisfaisant aux contraintes :*

$$\begin{cases} \forall \mathbf{v} \in \Delta_2^*, \mathbf{V}_{\mathbf{X},\mathbf{U}} \cap \Gamma_{\mathbf{v}} \neq \emptyset \\ \theta[(\mathbf{X} \cup \mathbf{U}) \setminus \mathcal{V}_{obs}, \mathbf{Z}] = \text{card}(\mathbf{V}_{\mathbf{X},\mathbf{U}}) + \theta[(\mathbf{X} \cup \mathbf{U}) \setminus (\mathcal{V}_{obs} \cup \mathbf{V}_{\mathbf{X},\mathbf{U}}), \mathbf{Z}] \\ \theta[\mathbf{V}_{\mathbf{X},\mathbf{U}}, \mathbf{Z}] = \text{card}(\mathbf{V}_{\mathbf{X},\mathbf{U}}) \end{cases} \quad (1.6)$$

A noter que dans le cas où l'on veut recouvrir l'observabilité forte de l'état *i.e.* $\Delta = \mathbf{X}$, les conditions pour le placement de capteurs sont identiques à celles données au paragraphe 1.6 en remplaçant dans le graphe orienté représentant le système l'ensemble des sommets d'entrée \mathbf{U} par n'importe quel ensemble $\bar{\mathbf{U}} \subseteq \mathbf{U}$ tel que $\theta[\mathbf{U}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}] = \theta[\bar{\mathbf{U}}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}] = \text{card}(\bar{\mathbf{U}})$.

1.7.4 Analyse et critique du résultat obtenu

La proposition 1.9 permet d'obtenir une procédure de placement de capteurs garantissant l'observabilité forte des composantes de l'état et de l'entrée associées aux éléments de Δ . Cependant, d'une part, comme le montre l'exemple suivant, cette procédure n'est pas exhaustive car elle ne permet pas d'obtenir tous les placements de capteurs possibles permettant de rendre fortement observables les composantes de l'état et de l'entrée associées aux éléments de Δ .

Exemple 1.4 *Soit le système linéaire structuré associé au graphe orienté représenté sur la figure 1.3. On désire rendre fortement observables les éléments de $\Delta = \{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$. Des calculs relativement simples permettent d'écrire $\Gamma_{\mathbf{x}_3} = \{\mathbf{x}_3\}$ et $\Gamma_{\mathbf{x}_4} = \{\mathbf{x}_4\}$. Il est, de plus, facile de voir que n'importe quelle solution nécessiterait deux capteurs. Néanmoins, la solution consistant à mesurer x_5 et x_4 *i.e.* $z_1 = x_5$ et $z_2 = x_4$ ne peut être vue en utilisant les ensembles $\Gamma_{\mathbf{x}_3}$ et $\Gamma_{\mathbf{x}_4}$ car \mathbf{x}_5 ne fait partie d'aucun de ces ensembles. Ainsi, travailler uniquement sur les ensembles $\Gamma_{\mathbf{v}}$, comme cela est préconisée par la proposition 1.9 ne garantit pas d'avoir toutes les solutions de placement de capteurs permettant le recouvrement de la propriété d'observabilité forte des éléments de Δ .*

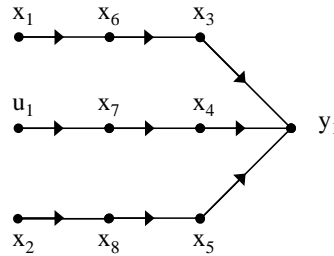


FIG. 1.3: Exemple 1.4

D'autre part, la proposition 1.9 ne donne aucune information sur le nombre minimal de capteurs nécessaire au recouvrement de l'observabilité forte des éléments de Δ . En effet, la solution proposée

comporte au plus $\text{card}(\Delta_2^*)$ capteurs. Il peut évidemment y avoir des solutions avec moins de capteurs et même des solutions qui ne mesurent aucun élément dans l'un des ensembles $\Gamma_{\mathbf{v}}$, $\mathbf{v} \in \Delta_2^*$ comme l'illustre l'exemple suivant :

Exemple 1.5 *Considérons le même système que dans l'exemple 1.4 avec cette fois-ci un ensemble $\Delta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$. Le calcul des ensembles $\Gamma_{\mathbf{x}_1}$, $\Gamma_{\mathbf{x}_2}$ et $\Gamma_{\mathbf{u}_1}$ donne :*

$$\Gamma_{\mathbf{x}_1} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_6\}, \Gamma_{\mathbf{x}_2} = \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_8\} \text{ et } \Gamma_{\mathbf{u}_1} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_7\}.$$

Ainsi, $\Gamma_{\mathbf{x}_1}$, $\Gamma_{\mathbf{x}_2}$ et $\Gamma_{\mathbf{u}_1}$ sont mutuellement disjoints. Subséquemment, toute solution satisfaisant aux contraintes (1.6) doit comporter au moins trois capteurs. Cependant, il existe bien une solution ne nécessitant seulement que deux capteurs : $z_1 = x_3$ et $z_2 = x_4$ par exemple. Cette solution n'inclut aucun élément de $\Gamma_{\mathbf{x}_2}$.

Par conséquent, le nombre minimal de capteurs ne peut être lié uniquement au nombre minimal d'éléments appartenant à un ensemble $\mathbf{V}_{\mathbf{X}, \mathbf{U}^*}$ sous la contrainte $\forall \mathbf{v} \in \Delta_2^*, \Gamma_{\mathbf{v}} \cap \mathbf{V}_{\mathbf{X}, \mathbf{U}^*} \neq \emptyset$. Certes, une solution avec un nombre de capteurs égal à $\text{card}(\mathbf{V}_{\mathbf{X}, \mathbf{U}^*})$ existe mais il n'est pas garanti qu'il n'y ait pas de solutions utilisant moins de capteurs.

1.8 Observabilité des systèmes singuliers

Dans cette dernière section concernant les systèmes linéaires, j'expose les résultats obtenus concernant l'analyse de l'observabilité des systèmes singuliers. Cette étude a comme objectif de généraliser les résultats décrits précédemment pour les systèmes linéaires. En effet, d'une part un système linéaire à entrées inconnues peut être vu comme un système singulier particulier. D'autre part, l'étude des systèmes singuliers est plus délicate et plus complexe que celle des systèmes linéaires standards, d'autant plus que plusieurs notions d'observabilité y sont associées [Dai, 1989, Hou et Müller, 1999a].

Pour ma part, l'étude menée concerne l'observabilité à droite (right-hand side observability) et assez succinctement l'observabilité impulsionnelle et ceci pour tout type de système singulier sans aucune contrainte de régularité ou autre.

1.8.1 Position du problème

Le système singulier structuré étudié a la forme suivante :

$$\Sigma_{\Lambda}^d : \begin{cases} E^{\lambda} \dot{x}(t) &= A^{\lambda} x(t) + B^{\lambda} u(t) \\ y(t) &= C^{\lambda} x(t) \end{cases} \quad (1.7)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ et $y \in \mathbb{R}^p$ sont respectivement l'état, l'entrée et la sortie du système.

Évidemment, pour garantir l'existence d'une trajectoire $x(t)$ satisfaisant aux relations du système Σ_{Λ}^d , $u(t)$ et $Ex(0_-)$ sont supposés être admissibles *i.e.* ils ne donnent pas des équations incompatibles avec les relations de Σ_{Λ}^d . Le problème d'existence et d'unicité des trajectoires [Gertler, 1993, Yip et Sincovec, 1981] n'est pas abordé ici.

Par ailleurs, la seule hypothèse faite sur le système est que la matrice E^{λ} n'a aucune ligne identiquement nulle. Cette hypothèse n'est pas restrictive, car si elle n'est pas vérifiée, par une permutation

des lignes, il est possible de la satisfaire.

L'étude menée considère indifféremment la matrice E^λ carrée, sur-déterminée ou sous-déterminée et donc aussi bien des systèmes singuliers réguliers que non réguliers. De plus, aucune hypothèse n'est faite sur le rang de $[sE^\lambda - A^\lambda]$ ni sur sa diagonale principale contrairement aux études graphiques [Reinschke et Wiedemann, 1997, Reinschke, 1994, Röbenack et Reinschke, 1997]. Cela permet aux résultats énoncés d'être les plus généraux possibles concernant la propriété d'observabilité des systèmes linéaires singuliers.

Dans cette section, tout d'abord, la propriété d'observabilité à droite (right-hand side observability) [Hou et Müller, 1999a], qui est équivalente à la propriété de R -observabilité [Dai, 1989, Yip et Sincovec, 1981] ou à l'observabilité finie (finite observability) [Verghese *et al.*, 1981] pour les systèmes singuliers réguliers, est analysée. Ensuite, la propriété d'observabilité impulsionnelle de Σ_Λ^d , appelée aussi observabilité à l'infini (infinite observability) dans [Verghese *et al.*, 1981], est abordée.

Ci-dessous, sont rappelées les définitions d'observabilité à droite et d'observabilité impulsionnelle [Hou et Müller, 1999a] généralisées au système structuré Σ_Λ^d .

Définition 1.3 *Le système singulier structuré Σ_Λ^d est génériquement*

- *observable à droite, lorsque pour presque toutes ses réalisations, $\forall t \geq 0$, $y(t) \equiv 0$ implique $x(0_+) = 0$.*
- *impulsionnellement observable, lorsque pour presque toutes ses réalisations, $\forall t \geq 0$, l'absence d'impulsion sur $y(t)$ implique l'absence d'impulsion sur $x(t)$.*
- *observable (ou fortement observable pour [Verghese et al., 1981]), lorsqu'il est génériquement observable à droite et impulsionnellement observable.*

Des critères algébriques d'observabilité à droite et d'observabilité impulsionnelle sont rappelés dans [Hou et Müller, 1999a, Hou et Müller, 1999b]. Ainsi, Σ_Λ^d est génériquement

- observable à droite si et seulement si $g_rang \begin{bmatrix} sE^\lambda - A^\lambda \\ C \end{bmatrix} = n, \forall s \in \mathbb{C}$.
- impulsionnellement observable si et seulement si $g_rang \begin{bmatrix} E^\lambda & A^\lambda \\ 0 & C^\lambda \\ 0 & E^\lambda \end{bmatrix} = n + g_rang[E^\lambda]$.

La propriété d'observabilité à droite est une propriété importante car il a été prouvé dans [Hou et Müller, 1999b] qu'elle est liée à la propriété de détectabilité et qu'elle conditionne l'existence d'un observateur généralisé permettant de reconstruire l'état $x(t)$. En effet, Σ_Λ^d est observable à droite si et seulement si l'état $x(t)$, pour $t > 0$, peut être exprimé uniquement en fonction des sorties, des entrées et de leurs dérivées.

Avant d'énoncer les divers critères graphiques d'observabilité auxquels a abouti notre étude, une représentation graphique et de nouvelles définitions, adaptées aux systèmes singuliers, sont données ci-après.

1.8.2 Graphe orienté associé à un système linéaire singulier structuré

Le graphe orienté associé au système linéaire singulier structuré est noté $\mathcal{G}_{\mathcal{D}}(\Sigma_{\Lambda}^d)$. Il est constitué d'un ensemble de sommets \mathcal{V} et d'un ensemble d'arcs \mathcal{E} . Plus précisément, $\mathcal{V} = \mathbf{X} \cup \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}$ où $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ est l'ensemble des sommets des états, $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p\}$ est l'ensemble des sommets de sortie et $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_q\}$ est l'ensemble des sommets des variables dites dynamiques représentées par une équation supplémentaire rajoutée au système : $z(t) \stackrel{\text{def}}{=} E^{\lambda} x(t)$. L'ensemble des arcs est $\mathcal{E} = A\text{-arcs} \cup E\text{-arcs} \cup C\text{-arcs}$, avec $A\text{-arcs} = \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{z}_i) \mid A^{\lambda}(i, j) \neq 0\}$, $E\text{-arcs} = \{(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_j) \mid E^{\lambda}(i, j) \neq 0\}$ et $C\text{-arcs} = \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_i) \mid C^{\lambda}(i, j) \neq 0\}$.

L'adjonction de l'ensemble de sommets \mathbf{Z} , non usuel dans la représentation classique [Reinschke et Wiedemann, 1997, Wiedemann, 1999] des systèmes singuliers, permet d'étudier ces derniers qu'ils soient réguliers ou non, sous-déterminés, carrés ou encore sur-déterminés.

L'exemple suivant permet d'illustrer cette nouvelle représentation.

Exemple 1.6 *Le système linéaire singulier structuré défini par les matrices*

$E^{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{\lambda} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & \lambda_7 \\ 0 & 0 & \lambda_8 & 0 & \lambda_9 \\ \lambda_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $C^{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est associé au graphe orienté de la figure 1.4.

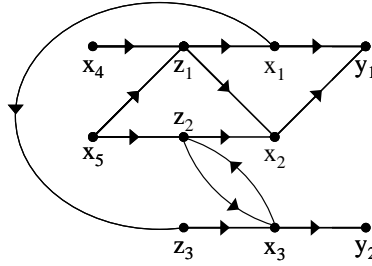


FIG. 1.4: Représentation graphique du système linéaire singulier de l'exemple 1.6

1.8.3 Définitions et notations

En complément aux définitions présentées dans le paragraphe 1.2.2, quelques autres notations, décrites ci-dessous, sont utilisées pour traiter les systèmes singuliers :

- Soit l'ensemble de sommets $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}$, $\varphi(\mathcal{V}_1)$ représente l'ensemble des sommets successeurs immédiats des sommets de \mathcal{V}_1 i.e. $\varphi(\mathcal{V}_1) = \{\mathbf{v}' \in \mathcal{V}, \theta[\mathcal{V}_1, \{\mathbf{v}'\}] \neq 0\}$.

De la même manière, est définie la fonction $\bar{\varphi}$ associant un ensemble de sommets \mathcal{V}_1 à l'ensemble de ces sommets prédécesseurs immédiats i.e. $\bar{\varphi}(\mathcal{V}_1) = \{\mathbf{v}' \in \mathcal{V}, \theta[\{\mathbf{v}'\}, \mathcal{V}_1] \neq 0\}$.

- On note par $\mathbf{z}_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ le sommet virtuel dit sommet composé (non représenté sur le graphe) correspondant à n'importe quelle combinaison linéaire des variables dynamiques $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_k}$.

La fonction bijective π permet d'associer un ensemble de sommets inclus dans \mathbf{Z} à son sommet composé i.e. $\{\mathbf{z}_{i_1}, \mathbf{z}_{i_2}, \dots, \mathbf{z}_{i_k}\} \mapsto \pi(\{\mathbf{z}_{i_1}, \mathbf{z}_{i_2}, \dots, \mathbf{z}_{i_k}\}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{z}_{i_1, i_2, \dots, i_k}$. La fonction réciproque de π est notée $\bar{\pi}$. L'ensemble de tous les sommets composés est noté $\mathbf{Z}_{\mathbf{C}}$. Cet ensemble inclut évidemment \mathbf{Z} .

- Un ensemble de sommets composés $\mathbf{V}_C \subseteq \mathbf{Z}_C$ est dit “structurellement minimal” si

$$\forall \bar{\mathbf{V}} \subseteq \mathbf{V}_C, \text{card} \left(\bigcup_{\mathbf{v} \in \bar{\mathbf{V}}} \bar{\pi}(\mathbf{v}) \right) - \text{card}(\bar{\mathbf{V}}) \geq \max_{\mathbf{v} \in \bar{\mathbf{V}}} (\text{card}(\bar{\pi}(\mathbf{v}))) - 1 \quad (1.8)$$

Ainsi, indépendamment de l'exemple traité, pour un système où $q \geq 4$, $\mathbf{V}_1 = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_{2,3}, \mathbf{z}_{2,4}\}$ est structurellement minimal alors que $\mathbf{V}_2 = \{\mathbf{z}_{1,2,3}, \mathbf{z}_{2,3}, \mathbf{z}_{2,4}\}$ ne l'est pas car pour $\bar{\mathbf{V}} = \{\mathbf{z}_{1,2,3}, \mathbf{z}_{2,3}\}$,

$$\text{card} \left(\bigcup_{\mathbf{v} \in \bar{\mathbf{V}}} \bar{\pi}(\mathbf{v}) \right) - \text{card}(\bar{\mathbf{V}}) = 3 - 2 \text{ et } \max_{\mathbf{v} \in \bar{\mathbf{V}}} (\text{card}(\bar{\pi}(\mathbf{v}))) - 1 = 3 - 1.$$

- A chaque ensemble de sommets composés $\mathbf{V}_C \subseteq \mathbf{Z}_C$, il est associé un ensemble de sommets $\wp(\mathbf{V}_C)$ constitué de tous les éléments $\mathbf{s} \in \mathbf{Z}_C$ pour lesquels il existe un ensemble $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathbf{V}_C$ tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{card} \left(\bigcup_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_0} \bar{\pi}(\mathbf{v}) \right) - \text{card}(\bar{\pi}(\mathbf{s})) = \text{card}(\mathcal{V}_0) - 1 \\ \forall \bar{\mathbf{V}}_0 \subset \mathcal{V}_0 \mid \text{card}(\bar{\mathbf{V}}_0) = \text{card}(\mathcal{V}_0) - 1, \quad \bigcup_{\mathbf{v} \in \bar{\mathbf{V}}_0} \bar{\pi}(\mathbf{v}) \cup \bar{\pi}(\mathbf{s}) = \bigcup_{\mathbf{v} \in \mathcal{V}_0} \bar{\pi}(\mathbf{v}) \end{array} \right.$$

- La définition de $\bar{\varphi}$ est étendue pour prendre en compte l'ensemble \mathbf{Z}_C : pour $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathbf{Y} \cup \mathbf{X} \cup \mathbf{Z}_C$, $\bar{\varphi}_e(\mathcal{V}_0) = \left(\bigcup_{\mathbf{s} \in \mathcal{V}_0 \cap \mathbf{Z}_C} \bar{\varphi}(\bar{\pi}(\mathbf{s})) \right) \cup \bar{\varphi}(\mathcal{V}_0 \cap (\mathbf{Y} \cup \mathbf{X}))$.

- Afin de prendre en compte l'ensemble \mathbf{Z}_C dans le calcul de la fonction θ , on remplace virtuellement dans sa définition originale l'ensemble A -arcs par l'ensemble A_C -arcs = $\left\{ (\mathbf{x}_j, \mathbf{z}_{i_1, i_2, \dots, i_k}) \mid A_{r,j}^\lambda \neq 0 \text{ où } r \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \right\}$. Il n'est pas nécessaire de re-dessiner le graphe orienté. Cette définition est utilisée ponctuellement pour l'évaluation de la fonction θ .

1.8.4 Conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité à droite d'un système singulier

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité des systèmes linéaires standards ne s'appliquent évidemment pas aux systèmes singuliers comme l'illustre l'exemple suivant :

Exemple 1.7

$$\begin{cases} \lambda_1 \dot{x}_1(t) + \lambda_2 \dot{x}_2(t) = \lambda_3 x_3(t) \\ \lambda_4 \dot{x}_3(t) = \lambda_5 x_2(t) \\ y_1(t) = \lambda_6 x_1(t) + \lambda_7 x_2(t) \end{cases}$$

Ce système est représenté par le graphe orienté de la figure 1.5. Ce système satisfait bien aux

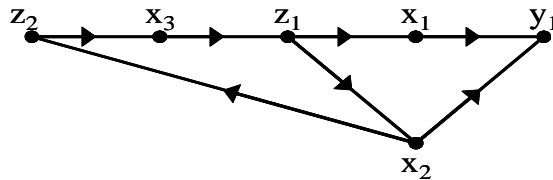


FIG. 1.5: Représentation graphique de l'exemple 1.7

conditions d'observabilité des systèmes linéaires standards. En effet, tous les sommets-états sont connectés à la sortie et il existe un chemin sortie-état ($\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{z}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{z}_1 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{y}_1$) qui

couvre tous les sommets états.

Cependant ce système n'est pas observable. En effet, la dérivée de la sortie ne peut être génériquement exprimée en fonction de l'état. Cette dérivée n'est donc pas utilisable pour la reconstruction des composantes de l'état. Cela se traduit par le fait qu'il n'existe aucune combinaison des variables dynamiques qui puisse exprimer la dérivée de la mesure y_1 . Ainsi, on dira que les variables dynamiques z_1 et z_2 ne sont pas "permises". En effet, les chemins utilisés pour satisfaire les conditions d'observabilité ne peuvent passer par les sommets correspondant à ces variables dynamiques.

Dans le cas du système de l'exemple 1.6 précédent représenté à la figure 1.4, la dérivée de y_1 est exprimable en fonction de z_1 et z_2 . En effet, $\dot{y}_1 = \frac{\lambda_{11}}{\lambda_1} z_1 + \frac{\lambda_5 z_2 - \lambda_4 z_3}{\lambda_3} \left(\lambda_{12} - \frac{\lambda_2 \lambda_{11}}{\lambda_1} \right)$ et $\dot{y}_2 = z_3 \frac{\lambda_{13}}{\lambda_5}$, d'où l'existence d'une combinaison de z_1 et z_2 pouvant s'exprimer en fonction d'une combinaison des mesures et de leurs dérivées. Dans ce cas là, le sommet composé $\mathbf{z}_{1,2}$ est permis.

La première étape de l'établissement des conditions nécessaires et suffisantes assurant l'observabilité générique des systèmes linéaires singuliers structurés consiste à déterminer l'ensemble des sommets correspondant aux variables dynamiques permises. Cet ensemble est noté \mathbf{Z}^* et est un sous ensemble de \mathbf{Z}_C .

Il est montré dans [Boukhobza *et al.*, 2006a] que l'algorithme suivant permet de calculer \mathbf{Z}^* :

Algorithme 1.2

Initialisation : $\mathbf{M}_0 = \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_0 = \emptyset$ et $i = 0$

Étape i : $\mathbf{Q}_i = \bar{\varphi}_e(\bar{\varphi}_e(\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}_i))$, $\mathbf{Z}_{i+1} = \emptyset$

pour $\kappa = 1$ à $\text{card}(\mathbf{Q}_i)$

pour $j = 1$ à $\mathbb{C}_{\text{card}(\mathbf{Q}_i)}^\kappa$

soit $\Omega_{\kappa,j}$ la j^e partie (dans un ordre lexicographique par exemple) à κ éléments de \mathbf{Q}_i

si $\forall \mathbf{V} \subseteq \mathbf{Z}_{i+1}$, $\text{card}\left(\bigcup_{\mathbf{v}_r \in \mathbf{V}} \bar{\pi}(\mathbf{v}_r) \cup \Omega_{\kappa,j}\right) - \text{card}(\mathbf{V}) \geq \kappa$,

et s'il existe un ensemble $\mathbf{V}_Y \subseteq \mathbf{Y}$ ainsi qu'un ensemble structurellement minimal $\mathbf{V}_Z \subseteq \varphi(\mathbf{Z}_i)$ tels que

$\theta[\mathbf{X}, \mathbf{V}_Y \cup \mathbf{V}_Z] = \text{card}\left(\bar{\varphi}_e(\mathbf{V}_Y \cup \mathbf{V}_Z) \cup \varphi(\Omega_{\kappa,j})\right) - \theta[\Omega_{\kappa,j}, \mathbf{X}] + 1$,

alors $\mathbf{Z}_{i+1} = \mathbf{Z}_{i+1} \cup \{\pi(\Omega_{\kappa,j})\}$.

Fin

Fin de l'Étape i :

Si $\theta[\mathbf{X}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}_{i+1}] \neq \theta[\mathbf{X}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}_i]$, $i \leftarrow i + 1$ et retourner à **l'Étape i :**

Sinon $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}_{i+1}$.

La proposition suivante donne les conditions nécessaires et suffisantes de l'observabilité générique à droite du système linéaire singulier structuré Σ_Λ^d :

Proposition 1.10 *Le système linéaire singulier structuré Σ_Λ^d , représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}_D(\Sigma_\Lambda^d)$, est génériquement observable à droite si et seulement si*

- $\theta[\mathbf{X}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}] = n$ (condition de couplage),
- $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}$ (condition sur les variables dynamiques)

La condition **a.** de la proposition 1.10 est similaire à la condition de couplage dans les diverses propositions traitant de l'observabilité des systèmes linéaires. La condition **b.**, quant à elle, généralise la condition de connectivité à la sortie.

1.8.5 Conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité à droite d'une partie de l'état d'un système singulier

Similairement à ce qui a été présenté pour les systèmes linéaires, en utilisant l'algorithme 1.2, il est possible de caractériser, pour le système singulier structuré, les composantes de l'état génériquement observables à droite *i.e.* les composantes x_i telles que pour tout état initial x_0 , si $\forall t \geq 0, y(t) = 0$ alors $\forall t \geq 0, x_i(t) = 0$. Ceci est l'objet de la proposition ci-dessous :

Proposition 1.11 *Soit le système linéaire singulier structuré Σ_Λ^d , représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}_D(\Sigma_\Lambda^d)$. Le vecteur $(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n'}})^T$ est observable si et seulement si il existe un ensemble $\mathbf{V}_Y \subseteq \mathbf{Y}$ et un ensemble structurellement minimal $\mathbf{V}_Z \subseteq \wp(\mathbf{Z}^*)$ tels que :*

$$\begin{cases} \{\mathbf{x}_{j_1}, \mathbf{x}_{j_2}, \dots, \mathbf{x}_{j_{n'}}\} \subseteq \bar{\varphi}_e(\mathbf{V}_Y \cup \mathbf{V}_Z) \\ \theta[\mathbf{X}, \mathbf{V}_Y \cup \mathbf{V}_Z] = \text{card}(\bar{\varphi}_e(\mathbf{V}_Y \cup \mathbf{V}_Z)) \end{cases} \quad (1.9)$$

Une autre manière de caractériser l'ensemble des composantes génériquement observables de l'état est d'appliquer la décomposition de Dulmage-Mendelsohn au graphe biparti $B_D(\Sigma_\Lambda^d) = (V^+, V^-, W)$ défini par :

$V^+ = \mathbf{X}^+$ et $V^- = \mathbf{Y}^- \cup \mathbf{Z}^{*-}$ sont les ensembles de sommets avec $\mathbf{X}^+ = \{\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^+, \dots, \mathbf{x}_n^+\}$,

$\mathbf{Y}^- = \{\mathbf{y}_1^-, \mathbf{y}_2^-, \dots, \mathbf{y}_p^-\}$ et $\mathbf{Z}^{*-} = \{\mathbf{z}_{i_1 i_2 \dots i_k}^-, \mathbf{z}_{i_1 i_2 \dots i_k} \in \mathbf{Z}^*\}$.

W est l'ensemble des arcs reliant V^+ à V^- . Il est défini par $\{(\mathbf{x}_j^+, \mathbf{z}_{i_1, i_2, \dots, i_k}^-) \mid A_{r,j}^\lambda \neq 0 \text{ où } r \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\}\} \cup \{(\mathbf{x}_j^+, \mathbf{y}_i^-) \mid C^\lambda(i, j) \neq 0\}$.

En reprenant les mêmes notations que celles utilisées dans le paragraphe 1.6.2, on a alors :

Proposition 1.12 *Soit le système linéaire singulier structuré Σ_Λ^d , représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}_D(\Sigma_\Lambda^d)$. Le vecteur $(x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_{n'}})^T$ est génériquement observable à droite si et seulement si*

$$\{\mathbf{x}_{j_1}, \mathbf{x}_{j_2}, \dots, \mathbf{x}_{j_{n'}}\} \cap \mathbf{V}_0^+ = \emptyset \quad (1.10)$$

En plus de l'exemple plus complexe présenté en annexe dans [Boukhobza *et al.*, 2006a], les exemples simples suivants illustrent le déroulement de l'algorithme 1.2.

Exemple 1.8 *Considérons le système associé au graphe orienté représenté sur la figure 1.6.*

Le déroulement de l'algorithme 1.2 conduit à :

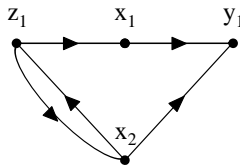


FIG. 1.6: Graphe orienté associé au système singulier de l'exemple 1.8

Initialisation : $M_0 = Y = \{y_1\}$, $Z_0 = \emptyset$ et $i = 0$

Étape 0 :

$$Q_0 = \bar{\varphi}_e(\bar{\varphi}_e(Y)) = \{z_1\}, Z_1 = \emptyset$$

$\Omega_{1,1} = \{z_1\}$ est le seul ensemble sur lequel on peut faire le test. De plus, le seul ensemble possible pour $V_Y \subseteq Y$ est $V_Y = \{y_1\}$.

Or, $\theta[X, V_Y] = 1$ et $\text{card}(\bar{\varphi}_e(V_Y) \cup \varphi(\Omega_{1,1})) - \theta[\Omega_{1,1}, X] + 1 = 2 - 1 + 1 = 2$. On en déduit alors que $Z_1 = Z_0 = \emptyset = Z^*$. D'après la proposition 1.10, le système n'est donc pas génériquement observable à droite.

Exemple 1.9 Considérons le système associé au graphe orienté de la figure 1.7 L'algorithme 1.2

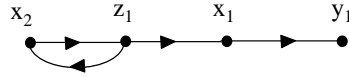


FIG. 1.7: Graphe orienté associé au système singulier de l'exemple 1.9

donne le même résultat que pour l'exemple précédent i.e. $Z_1 = Z_0 = \emptyset = Z^*$ car, $\Omega_{1,1} = \{z_1\}$ et $V_Y = \{y_1\}$ sont les seuls ensembles sur lesquels on peut faire le test à l'étape $i = 0$. Or, $\theta[X, V_Y] = 1$ et $\bar{\varphi}_e(V_Y) \cup \varphi(\Omega_{1,1}) = \{x_1, x_2\}$. Cela implique $\text{card}(\bar{\varphi}_e(V_Y) \cup \varphi(\Omega_{1,1})) - \theta[\Omega_{1,1}, X] + 1 = 2 - 1 + 1 = 2$ et donc que $Z_1 = \emptyset$. Cependant, pour ce système, $\theta[\{x_1\}, \{y_1\}] = \text{card}(\bar{\varphi}_e(\{y_1\})) = 1$ implique que la composante x_1 est génériquement observable.

Exemple 1.10 Considérons le système associé au graphe orienté représenté à la figure 1.8.

Le déroulement de l'algorithme 1.2 conduit à :

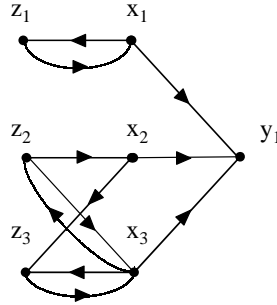


FIG. 1.8: Graphe orienté associé au système singulier de l'exemple 1.10

Initialisation : $M_0 = Y = \{y_1\}$, $Z_0 = \emptyset$ et $i = 0$

Étape 0 :

$$Q_0 = \bar{\varphi}_e(\bar{\varphi}_e(Y)) = \{z_1, z_2, z_3\}, Z_1 = \emptyset$$

Les ensembles possibles sont $\Omega_{1,1} = \{z_1\}$, $\Omega_{1,2} = \{z_2\}$, $\Omega_{1,3} = \{z_3\}$, $\Omega_{2,1} = \{z_1, z_2\}$,

$\Omega_{2,2} = \{z_1, z_3\}$, $\Omega_{2,3} = \{z_2, z_3\}$, $\Omega_{3,1} = \{z_1, z_2, z_3\}$. Par ailleurs, la seule possibilité pour V_Y est $V_Y = \{y_1\}$.

Or, pour $j = 1, \dots, 3$, $\theta[X, V_Y] = 1$ et $\text{card}(\bar{\varphi}_e(V_Y) \cup \varphi(\Omega_{1,j})) - \theta[\Omega_{1,j}, X] + 1 = 3 - 1 + 1 = 3$.

Pour $j = 1, \dots, 3$, $\theta[X, V_Y] = 1$ et $\text{card}(\bar{\varphi}_e(V_Y) \cup \varphi(\Omega_{2,j})) - \theta[\Omega_{2,j}, X] + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$.

Enfin, $\text{card}(\bar{\varphi}_e(V_Y) \cup \varphi(\Omega_{3,1})) - \theta[\Omega_{3,1}, X] + 1 = 3 - 3 + 1 = 1$, ce qui fait que $Z_1 = \{z_1, z_2, z_3\}$.

Comme $\mathbf{Z}_1 \neq \mathbf{Z}_0$, l'algorithme continue ($i = 1$).

Étape 1 :

$$\mathbf{Q}_1 = \bar{\varphi}_e(\bar{\varphi}_e(\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}_1)) = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}, \mathbf{Z}_2 = \emptyset.$$

On a également les mêmes ensembles $\Omega_{i,j}$ que précédemment. Le seul ensemble possible pour $\mathbf{V}_Y \subseteq \mathbf{Y}$ est $\mathbf{V}_Y = \{\mathbf{y}_1\}$ et le seul ensemble possible pour $\mathbf{V}_Z \subseteq \wp(\mathbf{Z}_1)$ est $\mathbf{V}_Z = \{\mathbf{z}_1\}$.

Ainsi, pour $j = 1, \dots, 3$, $\theta[\mathbf{X}, \mathbf{V}_Y \cup \mathbf{V}_Z] = 2$ et

$\text{card}(\bar{\varphi}_e(\mathbf{V}_Y \cup \mathbf{V}_Z) \cup \varphi(\Omega_{1,j})) - \theta[\Omega_{1,j}, \mathbf{X}] + 1 = 3 - 1 + 1 = 3$. Cependant, pour $j = 1, 2, 3$, $\theta[\mathbf{X}, \mathbf{V}_Y \cup \mathbf{V}_Z] = 2$ et $\text{card}(\bar{\varphi}_e(\mathbf{V}_Y \cup \mathbf{V}_Z) \cup \varphi(\Omega_{2,j})) - \theta[\Omega_{2,j}, \mathbf{X}] + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$. Donc, $\mathbf{Z}_2 = \{\mathbf{z}_{1,2}, \mathbf{z}_{1,3}\}$. On ne peut inclure $\mathbf{z}_{2,3}$ car $\{\mathbf{z}_{1,2}, \mathbf{z}_{1,3}, \mathbf{z}_{2,3}\}$ n'est pas structurellement minimal.

Comme $\mathbf{Z}_2 \neq \mathbf{Z}_1$, l'algorithme continue ($i = 2$).

Étape 2 :

$$\mathbf{Q}_2 = \bar{\varphi}_e(\bar{\varphi}_e(\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}_2)) = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}, \mathbf{Z}_3 = \emptyset.$$

Comme, $\mathbf{V}_Z = \mathbf{Z}_2$ et $\mathbf{V}_Y = \mathbf{Y}$, alors pour $j = 1, \dots, 3$, $\theta[\mathbf{X}, \mathbf{V}_Y \cup \mathbf{V}_Z] = 3$ et

$\text{card}(\bar{\varphi}_e(\mathbf{V}_Y \cup \mathbf{V}_Z) \cup \varphi(\Omega_{1,j})) - \theta[\Omega_{1,j}, \mathbf{X}] + 1 = 3 - 1 + 1 = 3$. Ce qui implique que $\mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}$.

On en déduit alors que $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}_3 = \mathbf{Z}$. D'après la proposition 1.10, comme $\theta[\mathbf{X}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}] = n$, le système est génériquement observable à droite.

1.8.6 Conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité impulsionnelle d'un système singulier

La condition nécessaire et suffisante de l'observabilité impulsionnelle générique de Σ_Λ^d est d'avoir

$$g_rang \begin{bmatrix} E^\lambda & A^\lambda \\ 0 & C^\lambda \\ 0 & E^\lambda \end{bmatrix} = n + g_rang[E^\lambda] \text{ [Hou et Müller, 1999b].}$$

Cette condition est très aisément transposable sous forme graphique. Pour cela, un graphe modifié représentant $\mathcal{G}_\delta(\Sigma_\Lambda^d)$ est introduit. Ce dernier est constitué d'un ensemble de sommets $\mathbf{V}_\delta = \mathbf{X}_\delta \cup \bar{\mathbf{Z}}_\delta \cup \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}$ défini par :

- $\mathbf{X}_\delta = \{\mathbf{x}_{0,1}, \dots, \mathbf{x}_{0,n}, \mathbf{x}_{1,1}, \dots, \mathbf{x}_{1,n}\}$;
- $\bar{\mathbf{Z}}_\delta = \{\bar{\mathbf{z}}_1, \dots, \bar{\mathbf{z}}_q\}$,
- $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p\}$,
- $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_q\}$,

et d'un ensemble d'arcs $\mathcal{E}_\delta = E'_\delta\text{-arcs} \cup A_\delta\text{-arcs} \cup C_\delta\text{-arcs} \cup E_\delta\text{-arcs}$ tel que :

- $E'_\delta\text{-arcs} = \left\{ (\mathbf{x}_{0,j}, \bar{\mathbf{z}}_i) \mid E_{i,j}^\lambda \neq 0 \right\}$,
- $A_\delta\text{-arcs} = \left\{ (\mathbf{x}_{1,j}, \bar{\mathbf{z}}_i) \mid A_{i,j}^\lambda \neq 0 \right\}$,
- $C_\delta\text{-arcs} = \left\{ (\mathbf{x}_{1,j}, \mathbf{y}_i) \mid C_{i,j}^\lambda \neq 0 \right\}$,
- $E_\delta\text{-arcs} = \left\{ (\mathbf{x}_{1,j}, \mathbf{z}_i) \mid E_{i,j}^\lambda \neq 0 \right\}$

Sur ce graphe biparti ainsi défini, il est assez aisé de montrer que :

Proposition 1.13 *Le système linéaire singulier structuré Σ_Λ^d , représenté par le graphe biparti $\mathcal{G}_\delta(\Sigma_\Lambda^d)$, est génériquement impulsionnellement observable si et seulement si*

$$\theta[\mathbf{X}_\delta, \bar{\mathbf{Z}}_\delta \cup \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}] = n + \theta[\mathbf{X}_\delta, \mathbf{Z}] \quad (1.11)$$

1.9 Analyse des résultats obtenus et conclusions

Dans ce chapitre ont été résumés les principaux résultats relatifs à l'analyse structurelle des propriétés d'observabilité des systèmes linéaires structurés. Tout d'abord, pour les systèmes linéaires sous forme standard, les conditions nécessaires et suffisantes à l'observabilité générique de l'entrée et de l'état ont été établies. Lorsque ces conditions ne sont pas satisfaites, une procédure de placement de capteurs permettant le recouvrement de l'observabilité de l'état et de l'entrée a été donnée. Pour cette procédure, le nombre minimal de capteurs requis théoriquement est donné.

D'autre part, des conditions nécessaires et suffisantes graphiques pour l'observabilité forte d'un ensemble donné de composantes de l'entrée et de l'état du système ont été énoncées. Lorsque la partie de l'état ou de l'entrée à laquelle on s'intéresse n'est pas observable, une étude de placement de capteurs a été réalisée. Cette étude mène à une procédure qui n'est ni optimale ni exhaustive dans le sens où le nombre de capteurs trouvé n'est pas forcément le nombre minimal de capteurs permettant le recouvrement de l'observabilité forte de la partie désirée de l'état et de l'entrée et que certaines possibilités de placement sont ignorées. Cependant, la procédure donnée permet de trouver systématiquement des solutions.

Toujours en ce qui concerne les systèmes linéaires standards, dans le cadre du projet européen NECST, une analyse de l'observabilité des systèmes distribués en réseau a été menée. Plus précisément, pour ces systèmes, des conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité générique en mode distribué et en mode autonome ont été établies.

Les derniers résultats présentés dans cette partie concernent les systèmes linéaires singuliers quelconques pour lesquels des conditions graphiques nécessaires et suffisantes d'observabilité ont été énoncées. L'outil d'analyse de la propriété d'observabilité proposé est relativement complet car il englobe les systèmes singuliers sans contrainte sur leur régularité ni sur le fait qu'ils soient sous ou sur-déterminés. Néanmoins, l'algorithme permettant de repérer les sommets dits "permis" est de complexité exponentielle car il impose, dans le pire des cas, des tests sur tous les sous-ensembles d'un ensemble de sommets.

Concernant les systèmes linéaires standards, tous les résultats obtenus font intervenir la subdivision du système introduite dans le paragraphe 1.3.2. La mise en œuvre de cette subdivision requiert uniquement des calculs de taille de liens maximaux. Une fois la subdivision effectuée, la vérification des conditions d'observabilité générique de l'état et de l'entrée ne nécessite que la détermination de sommets essentiels dans des liens entre deux ensembles et le calcul de la taille du couplage maximal dans un graphe biparti. Le test effectif de l'observabilité générique de l'état et de l'entrée a donc un ordre de complexité non exponentiel, ce qui garantit l'applicabilité de ce résultat aux systèmes de grande dimension.

Il en est de même pour la procédure de placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité générique de l'état et de l'entrée car elle repose sur un calcul de séparateurs par l'algorithme de Ford-Fulkerson et sur l'algorithme de Dulmage-Mendelsohn permettant la subdivision des sommets d'un graphe biparti.

L'analyse de l'observabilité forte d'une composante de l'entrée ou de l'état est, quant à elle, fondée sur le calcul d'une fonction β définie dans le paragraphe 1.4.2. Cette fonction fait appel à la subdivision du système introduite au paragraphe 1.3.2, au calcul du nombre minimal de sommets

couverts par un lien de taille maximale entre deux ensembles et au calcul du nombre maximal de sommets couverts par une union disjointe de chemins et de cycles.

Pour ce qui est du calcul du nombre minimal de sommets couverts par un lien de taille maximale entre deux ensembles, l'algorithme Primal-Dual [Hovelaque, 1997, Hovelaque *et al.*, 1996] qui aboutit à un ordre de complexité non exponentiel, peut être utilisé. Pour le calcul du nombre maximal de sommets couverts par une union disjointe de chemins et de cycles, un algorithme dont la complexité est polynomiale est actuellement en conception. Il s'en suit que tous les tests concernant l'observabilité partielle ainsi que la procédure de placement de capteurs proposée dans le paragraphe 1.7 ont un ordre de complexité polynomial.

En conclusion, tous les algorithmes mettant en œuvre les résultats relatifs à l'analyse des propriétés d'observabilité des systèmes linéaires standards sont d'une part libres de toutes les difficultés numériques rencontrées dans les méthodes géométriques et algébriques, telles que le mauvais conditionnement des matrices etc . . . , et d'autre part ont des ordres de complexité polynomiaux. D'ailleurs, les conditions de la proposition 1.1 ont été implémentées par M. T. MADER, étudiant de l'ETH Zurich qui a effectué son stage de 2^e année sous ma responsabilité. L'objet de ce stage était de développer une boîte à outils d'analyse structurelle "LISA" pour les systèmes linéaires et bilinéaires sur une plateforme logicielle libre sur laquelle je reviendrai dans la partie III. Cette boîte à outils, appelée à se développer pour inclure une majorité de résultats et de tests de diverses propriétés structurelles des systèmes linéaires et bilinéaires, a pour ambition de fournir aux chercheurs du domaine un outil d'analyse interactif, relativement complet et plus généraliste que le logiciel SA-TOOL [Blanke et Lorentzen, 2006] plus dédié à l'analyse de propriétés relatives au diagnostic et à la commande tolérante aux défauts.

Enfin, la principale faiblesse des travaux exposés dans ce chapitre, reste l'hypothèse faite sur les paramètres des systèmes structurés. Tous les éléments des matrices structurées représentant les systèmes étudiés sont supposés être indépendants. Cette hypothèse peut être assez contraignante en pratique. De plus, lorsqu'elle n'est pas vérifiée, les résultats trouvés ne sont plus applicables. En effet, ces derniers sont génériques *i.e.* vrais pour presque toutes les valeurs des paramètres, ou de manière équivalente, ne peuvent être faux que pour un ensemble de valeurs de paramètres vérifiant un système d'équations polynomiales explicites à coefficients réels. Si les paramètres sont liés par une relation, il n'est plus possible de conclure sur la validité des résultats car cette relation peut induire éventuellement la vérification du système d'équations polynomiales explicites à coefficients réels caractérisant la variété algébrique dans l'espace des paramètres sur laquelle la propriété étudiée n'est plus vraie. Des pistes de réflexion permettant de prendre en compte les relations entre paramètres sont suggérées dans la dernière partie de ce manuscrit.

Chapitre 2

Contributions à l'analyse structurelle des systèmes bilinéaires

2.1 Introduction

La classe des systèmes bilinéaires, qui est une classe particulière des systèmes non linéaires, a été introduite et étudiée dès les années 1960. Les motivations incitant à l'étude de tels systèmes sont nombreuses. D'une part, cette classe de systèmes est la plus simple à étudier parmi les divers types de systèmes non linéaires. D'autre part, de nombreux processus industriels, biologiques ou économiques admettent des modèles mathématiques bilinéaires [Mohler, 1973, Oster, 1978, Mohler et Frick, 1979, Mohler et Kolodziej, 1980, Mohler, 1991]. Par ailleurs, l'approximation d'un système non linéaire autour d'un point de fonctionnement est plus précise en considérant une approximation bilinéaire qu'une linéarisation. Enfin, certaines techniques de commande (gain variable par exemple) d'un système linéaire peuvent le rendre bilinéaire en boucle fermée et améliorer certaines de ses performances.

L'étude des propriétés de ces systèmes a fait l'objet de nombreux travaux [Bruni *et al.*, 1974, Isidori et Ruberti, 1973, Brockett, 1972, D'Allessandro *et al.*, 1974, Dorissen, 1989, Khapalov et Mohler, 1996], jusqu'à récemment où [Elliot, 2005] s'est penché sur les propriétés de commandabilité des systèmes bilinéaires discrétisés ou encore [Bounit et Hammouri, 2003] qui ont traité du principe de séparation et de stabilisation d'une classe de systèmes bilinéaires.

Parmi les diverses propriétés structurelles de ce type de systèmes, je me suis principalement intéressé à celles qui ont trait à l'observabilité. Des définitions de l'observabilité et de l'observabilité uniforme pour ces systèmes ont été énoncées dans [Williamson, 1977]. Des conditions géométriques nécessaires et suffisantes à l'observabilité d'un système bilinéaire y sont aussi données et il a été montré que ces conditions étaient aussi nécessaires et suffisantes à l'existence d'un observateur généralisé permettant de reconstruire l'état du système. Les conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité de [Grasselli et Isidori, 1977] généralisent le concept de matrice d'observabilité des systèmes linéaires ce qui permet d'établir un critère sous forme de condition sur le rang de cette matrice. Dans [Sen, 1981], l'auteur discute du choix des entrées constantes par morceaux qui

permettent de rendre distinguables n'importe quelle paire d'états initiaux d'un système observable. L'analyse particulière de l'existence d'observateurs bilinéaires pour les systèmes bilinéaires est abordée dans [Adachi et Funahashi, 1979] où, sous la contrainte d'observabilité pour une entrée constante donnée, un observateur, dont la vitesse de convergence est indépendante de l'entrée, est construit.

Évidemment, les critères d'observabilité analytiques, géométriques [Hermann et Krener, 1977, Kou *et al.*, 1973, D'Allessandro *et al.*, 1974, Isidori et Ruberti, 1973, Bartosiewicz, 1995, Bruni *et al.*, 1980] et algébriques [Brockett, 1972, Fliess, 1981, Fliess, 1982, Diop et Fliess, 1991] établis pour les systèmes non linéaires en général s'appliquent aussi aux systèmes bilinéaires. Par ailleurs, notons que les résultats sur les systèmes linéaires variant dans le temps [D'Angelo, 1970] peuvent aussi s'appliquer aux systèmes bilinéaires. Ainsi les conditions d'observabilité des systèmes bilinéaires peuvent être comparées à celles obtenues dans [Kratz et Liebscher, 1998, Deylon, 2001] par exemple.

Pour être plus complet par rapport aux différentes propriétés d'observabilité, je me suis aussi intéressé à l'analyse de l'observabilité uniforme des systèmes bilinéaires. Cette propriété est spécifique aux systèmes non linéaires de par le fait que la notion d'observabilité des systèmes non linéaires repose sur la notion de “distinguabilité” d'états initiaux. En effet, un système non linéaire est observable s'il existe des entrées pour lesquelles la connaissance des mesures permet de distinguer toute paire d'états initiaux. Ces entrées sont dites entrées universelles pour le système [Sussmann, 1979, Hermann et Krener, 1977]. Si toute entrée du système est universelle alors le système est dit uniformément observable. Il est évident que l'analyse de la propriété d'observabilité uniforme est importante lorsque l'on veut synthétiser un observateur mais elle l'est aussi dans un contexte de commande ou de diagnostic car elle nous informe sur la possible altération de la propriété de “distinguabilité”. Cela peut poser problème lorsqu'on utilise des estimées de l'état provenant d'un schéma d'observation à des fins de commande par exemple. C'est ainsi que la propriété d'observabilité uniforme est assez souvent présumée vérifiée pour la synthèse des observateurs. En effet, dès les premiers papiers traitant de la synthèse d'observateurs, l'hypothèse d'observabilité uniforme est considérée vraie comme dans [Grasselli et Isidori, 1981], où les auteurs proposent un théorème d'existence d'un observateur dit uniforme. De même dans [Bestle et Zeitz, 1983, Rudolph et Zeitz, 1994, Deza *et al.*, 1992, Hou *et al.*, 2000, Boukhobza *et al.*, 2003, Behal *et al.*, 2006] qui proposent des procédures de synthèse d'observateurs pour des systèmes supposés se mettre sous une forme triangulaire via un difféomorphisme local ce qui constitue une condition au moins suffisante d'observabilité uniforme. En effet, il a été montré dans [Gauthier et Bornard, 1981] que la mise sous forme triangulaire dite “uniform observable structure”, via un changement de coordonnées, est une condition nécessaire et suffisante d'observabilité uniforme pour les systèmes mono-sortie et une condition suffisante pour les systèmes multi-sorties [Hammouri et Farza, 2003]. Pour ces derniers, il n'existe pas de conditions nécessaires et suffisantes (de ce type) caractérisant l'observabilité uniforme. En fait, à l'exception de la définition même de l'observabilité uniforme (*i.e.* toute entrée permet de distinguer toute paire d'état initiaux), il n'existe pas d'autres caractérisations exactes de cette propriété.

La propriété équivalente à l'observabilité uniforme pour les systèmes bilinéaires en temps discret est

appelée observabilité séquentielle dont il existe aussi une caractérisation par une forme triangulaire canonique pour les systèmes mono-sortie [Funahashi, 1979].

La suite logique à l'analyse de l'observabilité des systèmes bilinéaires et des résultats obtenus pour les systèmes linéaires à entrées inconnues, est d'aborder le problème de l'observabilité de l'entrée et de l'état d'un système bilinéaire structuré. Peu de travaux ont traité la caractérisation de cette propriété. Par ailleurs, la synthèse d'observateurs bilinéaires à entrées inconnues est un problème encore ouvert. Parmi les études publiées sur le sujet, [Busawon et Saif, 1998] font la synthèse d'un observateur pour des systèmes non linéaires triangulaires à entrées inconnues supposées très lentement variables. [Bara *et al.*, 1999] proposent un observateur de l'état d'un système bilinéaire soumis à des perturbations. La validité de certaines équations matricielles garantit l'existence d'un observateur où la dynamique de l'erreur est linéaire, exponentiellement stable et complètement découplée de la perturbation. [Ha et Trinh, 2004] font la synthèse d'un observateur à structure linéaire permettant de reconstruire l'état et d'estimer l'entrée d'un système non linéaire sous la contrainte que la partie non linéaire est Lipschitz par rapport à l'état et l'entrée du système et sous certaines conditions matricielles de type LMI. Plus récemment, dans [Barbot *et al.*, 2005], les auteurs présentent un algorithme de synthèse d'observateurs à modes glissants permettant de reconstruire l'état d'un système non linéaire soumis à des entrées inconnues.

Pour ma part, j'ai établi les conditions graphiques nécessaires et suffisantes assurant l'observabilité générique de l'entrée et de l'état d'un système bilinéaire structuré. L'étude menée est l'exacte extension aux systèmes bilinéaires des résultats obtenus pour les systèmes linéaires, présentés dans le paragraphe 1.3.

Enfin, pour terminer ce chapitre, je présente une analyse de la solubilité du problème de génération de résidus pour les systèmes bilinéaires structurés. Ce problème de détection et de localisation de défauts est proche de celui de l'analyse de l'observabilité de l'état et de l'entrée. D'ailleurs, les représentations graphiques adéquates pour traiter ces deux questions ainsi que les notations utilisées sont similaires. L'étude que j'ai menée s'inscrit dans un projet d'extension aux systèmes non linéaires en général et aux systèmes bilinéaires en particulier des résultats concernant le diagnostic et la détection de défauts obtenus dans [Commault *et al.*, 2001].

De manière générale, les approches fréquentielles ainsi que celles fondées sur l'espace de parité, qui sont fort bien adaptées aux systèmes linéaires [Frank, 1996, Frank et Ding, 1997, Patton, 1997], sont assez difficilement transposables dans un contexte non linéaire. Ainsi, de nombreuses solutions de détection et de localisation de défauts pour les systèmes non linéaires reposent sur l'utilisation d'observateurs à entrées inconnues [Wünnenberg, 1990, Seliger et Franck, 1991, Edelmayer *et al.*, 2004, Pillonetto et Saccomani, 2006]. Ces observateurs servent parfois à donner l'estimation en ligne des amplitudes des défauts comme dans [Polycarpou et Vemuri, 1995, Polycarpou et Trunov, 2000, Li et Zhou, 2004, Floquet *et al.*, 2004, Edwards *et al.*, 2000, Tan et Edwards, 2002]. D'autres références de travaux relatifs au diagnostic à base de modèles non linéaires sont récapitulées et discutées dans les études bibliographiques [Alcorta-Garcia et Frank, 1997, Kinnaert, 2003, Shumsky et Zhirabok, 2005].

Les conditions théoriques d'existence d'observateurs à entrées inconnues, ou de générateurs de résidus en général, permettant le diagnostic des défauts du système ont fait l'objet d'études

initialement par approche géométrique. Le problème de génération de résidus, abordé pour les systèmes linéaires dans [Massoumnia *et al.*, 1989, Massoumnia, 1986], consiste à générer des signaux appelés résidus permettant de localiser chaque défaut lorsqu'il apparaît sur le système. C'est principalement le problème (ou l'une de ses variantes) que doit résoudre un schéma d'observation classique pour pouvoir détecter et localiser un défaut. La solubilité de ce problème a été étudiée dans [De Persis et Isidori, 2001b] qui en ont donné des conditions géométriques nécessaires dans le cas où le système peut être soumis à plusieurs défauts simultanés.

Pour les systèmes bilinéaires, les conditions nécessaires et suffisantes à la solubilité de ce problème ont été données dans [Hammouri *et al.*, 2001] en utilisant le concept de co-distributions d'observabilité "observability co-distributions" [De Persis et Isidori, 2000]. S'appuyant aussi sur l'idée de découplage de perturbations, un générateur de résidus pour les systèmes bilinéaires a été réalisé en utilisant un observateur grand gain.

Dans ce contexte, mon travail a porté sur l'analyse graphique de la solubilité de ce problème de génération de résidus qui dépend fortement de la structure du système bilinéaire considéré. En d'autres termes, il s'agit de donner des conditions graphiques équivalentes à celles énoncées dans [Hammouri *et al.*, 2001].

Comme pour les systèmes linéaires, l'utilisation de l'approche graphique pour déterminer des résultats en partie déjà établis par d'autres outils algébriques ou géométriques a été motivée par le fait que l'application des méthodes géométriques et algébriques nécessite une connaissance exacte des paramètres du système. Ces méthodes sont également peu adaptées aux systèmes de grande dimension. Il a donc été naturel de chercher à appliquer des approches plus simples ou moins onéreuses en information et en calcul pour étudier les propriétés structurelles des systèmes non linéaires. En fait, certains avantages à utiliser la théorie des graphes ont été démontrés dès les années 1980 avec la décomposition graphique faite dans [Vidyasagar, 1980] pour étudier la stabilité de systèmes de grande dimension. Il s'en est suivi d'autres études utilisant des représentations graphiques de systèmes non linéaires pour étudier des problèmes classiques d'automatique souvent spécifiques au contexte non linéaire ou pour procéder à des réductions ou simplifications de grands systèmes complexes. Ainsi, dans [Kasinski et Lévine, 1984, Lévine, 1997], une étude graphique sur le découplage entrée-sortie par retour d'état statique et sur la linéarisation de systèmes non linéaires est présentée. Les graphes utilisés sont des graphes entrée-sortie orientés et pondérés et les systèmes étudiés sont non structurés. Ce même type de graphes est utilisé pour la réduction du modèle d'un processus industriel d'absorption/désorption de CO_2 à des fins de commande dans [Dore *et al.*, 1995]. Une étude portant sur la simplification structurelle des systèmes non linéaires linéarisés autour d'un point de fonctionnement utilisant des graphes orientés est présentée dans [Leitold *et al.*, 2002].

Concernant les propriétés d'observabilité, l'une des premières études graphiques structurelles dédiées aux systèmes bilinéaires est décrite dans [Svaricek, 1993], où l'auteur donne l'interprétation graphique des éléments de la matrice d'observabilité sur un graphe pondéré en supposant l'entrée du système constante par morceaux et aboutit à des conditions suffisantes d'observabilité. Enfin, plus récemment, dans [Bornard et Hammouri, 2002], les auteurs étudient graphiquement le problème d'observabilité uniforme de certains systèmes non linéaires ayant une forme particulière

et aboutissent à des conditions suffisantes.

L'analyse structurelle des propriétés de diagnostic en utilisant des graphes bipartis a été très étudiée cette dernière décennie, particulièrement par l'équipe dirigée par Pr. M. STAROSWIECKI du LAGIS [Declerck et Staroswiecki, 1991, Staroswiecki *et al.*, 2000, Staroswiecki, 2002, Blanke *et al.*, 2003, Frisk *et al.*, 2003, Düstegör *et al.*, 2004a, Düstegör *et al.*, 2004b, Düstegör *et al.*, 2006]. Cependant à mon avis, la représentation de systèmes non linéaires par un graphe biparti, telle que proposée dans les papiers précités, n'est pas complète en vue d'une analyse structurelle des propriétés d'observabilité et de diagnostic de systèmes non linéaires en général et bilinéaires en particulier. La représentation par les Bond Graphs est aussi utilisée pour l'analyse de la diagnosticabilité et pour la synthèse de schémas de détection et de localisation de défauts, comme cela est fait dans [Ould Bouamama *et al.*, 2000, Samantaray *et al.*, 2006] en se fondant sur les relations analytiques de redondance [Staroswiecki et Comtet-Varga, 2001].

Dans la suite de ce chapitre, je présente plus en détails les différents résultats décrits succinctement ci-dessus, à savoir les conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité, l'analyse graphique de l'observabilité uniforme, la caractérisation exacte de l'observabilité de l'entrée et de l'état et enfin les conditions nécessaires et suffisantes de solubilité générique du problème de génération de résidus. Les représentations graphiques des systèmes bilinéaires utilisées n'étant pas nécessairement les mêmes pour chacune des diverses problématiques abordées, chaque paragraphe de ce chapitre comporte sa propre section de définitions de graphes et de notations. Les preuves des résultats énoncés ne sont pas exposées dans le manuscrit. En revanche, des exemples plus ou moins simples illustrent les diverses définitions utilisées et l'application des conditions présentées.

2.2 Observabilité des systèmes bilinéaires

2.2.1 Position du problème

Soit le système bilinéaire structuré :

$$\Sigma_{\Lambda}^B : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t) A_i x(t) + B u(t) \\ y(t) &= C x(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

où $u \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement l'entrée connue du système, l'état et la sortie (le vecteur mesure) du système.

En raison de la présence d'indices sur les matrices, l'exposant λ a été omis sur toutes les matrices afin de ne pas alourdir l'écriture des équations ou des expressions mathématiques telles que celle du critère d'observabilité du théorème 2.1 par exemple.

La notion d'observabilité pour les systèmes non linéaires est liée en général à la notion de "distinguabilité" de toute paire d'états initiaux distincts par la connaissance des trajectoires de sortie et de l'entrée. Ainsi, deux états initiaux $x'(0)$ et $x''(0)$ sont dits distinguables, s'il existe une entrée $u(t)$ telle que les trajectoires $y'(t)$ et $y''(t)$, pour $t \geq 0$ correspondant à ces états initiaux lorsque le système est soumis à l'entrée $u(t)$, ne sont pas identiques. En utilisant cette notion de

“distinguable”, la définition suivante pour la propriété d'observabilité générique de Σ_{Λ}^B généralise la définition d'observabilité communément admise pour les systèmes non structurés :

Définition 2.1 *Le système bilinéaire structuré Σ_{Λ}^B est génériquement observable si, pour presque toutes ses réalisations, il existe une entrée $u(t)$ telle que toute paire d'états initiaux $x'(0)$ et $x''(0)$ est distinguable par l'observation des trajectoires de sortie correspondantes $y'(t)$ et $y''(t)$, $t \geq 0$.*

Il a été montré dans [Williamson, 1977] que l'observabilité est une propriété dont la validité est nécessaire et suffisante pour assurer la reconstruction de l'état par un observateur généralisé (utilisant les dérivées des entrées et des sorties) pour un système bilinéaire. L'existence d'un observateur bilinéaire pour un système bilinéaire est étudiée dans [Adachi et Funahashi, 1979]. Par ailleurs, l'existence d'un observateur d'état causal pour un système bilinéaire est abordée dans [Grasselli et Isidori, 1981]. Évidemment, l'observabilité est une condition nécessaire préalable à l'existence de l'un ou de l'autre type d'observateur.

D'autre part, le théorème 1 de [Grasselli et Isidori, 1977] établit un critère d'observabilité similaire à celui des systèmes linéaires. Ce critère est énoncé ci-dessous dans sa version étendue aux systèmes structurés :

Théorème 2.1 *Le système bilinéaire structuré Σ_{Λ}^B est génériquement observable si et seulement si*

$$\mathbf{T1} : \text{rang-}g\left(\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \dots, A_m)\right) = n, \text{ où}$$

$$\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \dots, A_m) = \text{col}\left(C, CA_0, CA_1, \dots, CA_m, CA_0^2, CA_0A_1, \dots, CA_0A_m, CA_1A_0, \dots\right)$$

représente la matrice d'observabilité de Σ_{Λ}^B .

L'objectif de la première partie de ce chapitre est de donner des conditions graphiques équivalentes à la condition du théorème 2.1. L'avantage des conditions graphiques réside principalement dans leur simplicité et la facilité de leur utilisation.

2.2.2 Représentation graphique d'un système bilinéaire structuré

Vu que le problème étudié est un problème d'observabilité, sur le graphe orienté associé à un système bilinéaire structuré, les entrées ne sont pas représentées par des sommets mais par des “indices” sur des arcs. Ainsi, le graphe obtenu est plus proche des graphes dits colorés que de ceux utilisés classiquement pour représenter les systèmes non linéaires [Lévine, 1997].

2.2.2.1 Graphe orienté associé à un système bilinéaire structuré

Le graphe orienté associé à un système bilinéaire structuré est noté $\mathcal{G}_B(\Sigma_{\Lambda}^B)$. Il est constitué d'un ensemble de sommets \mathcal{V} et d'un ensemble d'arcs \mathcal{E} . Plus précisément, $\mathcal{V} = \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$ où $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ est l'ensemble des sommets des états et $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p\}$ est l'ensemble des sommets de sortie. L'ensemble des arcs est $\mathcal{E} = \bigcup_{\ell=0}^m A_{\ell}\text{-arcs} \cup C\text{-arcs}$, où pour $\ell = 0, \dots, m$, $A_{\ell}\text{-arcs} = \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) \mid A_{\ell}(i, j) \neq 0\}$ et $C\text{-arcs} = \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_i) \mid C(i, j) \neq 0\}$.

Afin de distinguer l'ensemble d'appartenance des divers arcs sur le graphe, un indice noté u_ℓ est associé à chaque arc appartenant à l'ensemble A_ℓ -arcs, $\ell = 1, \dots, m$ et u_0 est associé aux arcs appartenant à A_0 -arcs \cup C -arcs. Cet indice est reporté au dessus de chaque arc sur le graphe. Ainsi, un arc est caractérisé aussi bien par ses sommets de début et de fin que par son indice. Deux arcs ayant même début et même fin peuvent donc être distincts s'ils ne sont pas associés au même indice.

En comparaison avec la représentation graphique de [Lévine, 1997, Kasinski et Lévine, 1984], nos graphes ne sont pas pondérés mais colorés. En effet, dans [Lévine, 1997, Kasinski et Lévine, 1984], si la dynamique de x_j est $\dot{x}_j = f_j(x, u)$, l'arc reliant les sommets x_i à x_j admet comme poids $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$, ce qui serait équivalent dans notre cas à $\sum_{\ell=0}^m A_\ell(j, i)$. De plus, les problèmes traités dans [Lévine, 1997, Kasinski et Lévine, 1984] étant de découplage entrée-sortie, des sommets sont associés aux composantes de l'entrée, alors que l'entrée dans notre représentation graphique est matérialisée ou symbolisée par un indice sur des arcs. Enfin, les systèmes traités dans [Lévine, 1997, Kasinski et Lévine, 1984] ne sont pas des systèmes structurés. Il en découle que les résultats trouvés ne sont pas génériques et sont valables seulement pour un système particulier. Cela implique aussi que les calculs effectués sur les graphes sont assez différents de ceux qui seront présentés dans ce manuscrit.

2.2.2.2 Définitions et notations

Aux notations du paragraphe 1.2.2 viennent se rajouter les définitions suivantes spécifiques à l'analyse des systèmes bilinéaires :

- Deux arcs $e_1 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1)$ d'indice u_{i_1} et $e_2 = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_2)$ d'indice u_{i_2} sont dits A -disjoints si

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \\ \text{et} \\ \mathbf{v}'_1 \neq \mathbf{v}'_2 \text{ ou } i_1 \neq i_2 \end{array} \right.$$

Autrement dit, deux arcs sont A -disjoints s'ils ont des sommets de début distincts et si leurs sommets de fin ou leurs indices sont aussi distincts.

- Un ensemble d'arcs forme un ensemble d'arcs A -disjoints si ces derniers sont tous A -disjoints deux à deux.
- Soient \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 deux ensembles de sommets. $\theta_A[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$ est le nombre maximal d'arcs A -disjoints dont les sommets de début sont dans \mathcal{V}_1 et les sommets de fin dans \mathcal{V}_2 .

2.2.3 Conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité des systèmes bilinéaires

Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité des systèmes bilinéaires structurés sont données par la proposition suivante démontrée dans [Boukhobza et Hamelin, 2007] :

Proposition 2.1 *Le système linéaire structuré Σ_Λ^B représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}_B(\Sigma_\Lambda^B)$ est génériquement observable si et seulement si*

- tout sommet état est le début d'un chemin état-sortie (condition de connectivité à la sortie),*

b. $\theta_A[\mathbf{X}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}] = n$ ce qui est équivalent à l'existence d'un graphe partiel formé d'arcs A -disjoints couvrant tous les sommets de \mathbf{X} (condition de couplage).

La proposition 2.1 étend le résultat obtenu pour les systèmes linéaires. En effet, d'une part, la condition de connectivité est la même que pour les systèmes linéaires. D'autre part, dans le cas des systèmes linéaires, la notion d'arcs A -disjoints devient équivalente à celle d'arcs v -disjoints.

Par ailleurs, la condition **b.** de la proposition 2.1 peut être testée en calculant le couplage maximal dans le graphe biparti associé à la matrice $\text{col}(C, A_0, A_1, \dots, A_m)$. Ce graphe biparti, noté $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, est obtenu de la manière suivante :

$$\mathcal{B}_{\mathcal{M}} = (\mathcal{V}^+; \mathcal{V}^-; \mathcal{E}_{\mathcal{M}}), \text{ où } \mathcal{V}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^+, \dots, \mathbf{x}_n^+\}, \mathcal{V}^- \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{y}_1^-, \mathbf{y}_2^-, \dots, \mathbf{y}_p^-\} \cup \{\mathbf{x}_{0,1}^-, \mathbf{x}_{0,2}^-, \dots, \mathbf{x}_{0,n}^-, \mathbf{x}_{1,1}^-, \mathbf{x}_{1,2}^-, \dots, \mathbf{x}_{m,n}^-\} \text{ et } \mathcal{E}_{\mathcal{M}} = C^M\text{-arcs} \cup \left(\bigcup_{k=0}^m A_k^M\text{-arcs} \right), \text{ avec } C^M\text{-arcs} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbf{x}_i^+, \mathbf{y}_j^-) \mid C(j, i) \neq 0\} \text{ et pour } k = 0, \dots, m, A_k^M\text{-arcs} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbf{x}_\ell^+, \mathbf{x}_{k,i}^-) \mid A_k(i, \ell) \neq 0\}.$$

L'exemple suivant permet d'illustrer l'application des conditions de la proposition 2.1.

Exemple 2.1 Soit le système associé au graphe orienté représenté à la figure 2.1.

Pour ce système, tous les sommets état sont le début d'au moins un chemin état-sortie. La condi-

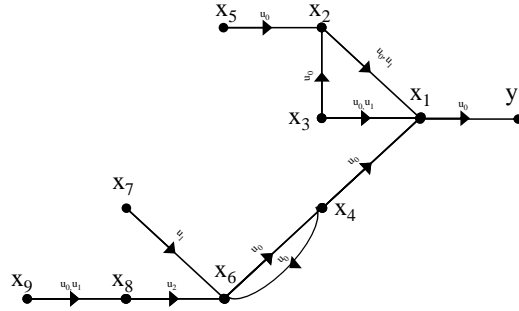


FIG. 2.1: Graphe orienté associé au système bilinéaire de l'exemple 2.1

tion de connectivité à la sortie est donc vérifiée.

De plus, comme le montre la figure 2.2, le couplage maximal dans le graphe biparti associé à la matrice $\text{col}(C, A_0, A_1, \dots, A_m)$ comporte 9 arcs. Comme on a $\theta_A[\mathbf{X}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}] = 9 = \text{card}(\mathbf{X})$, cela implique que la condition de couplage est aussi vérifiée. Le système est donc génériquement observable.

Il est à noter que l'existence d'un graphe partiel formé d'arcs A -disjoints et couvrant tous les sommets état (figure 2.3) est équivalente à la condition de couplage. Ce graphe partiel, contrairement aux graphes partiels disjoints utilisables pour l'analyse de l'observabilité des systèmes linéaires [Dion et al., 2003], n'est pas formé que de chemins état-sortie et de cycles disjoints. En effet, dans le cas le plus général, il est formé de cycles, de chemins état-sortie et de chemins ayant comme sommet de fin un élément d'un cycle.

Suite à cette étude menée sur l'observabilité générique des systèmes bilinéaires structurés, S. CANITROT a abordé le problème du placement de capteurs pour le recouvrement de cette propriété. Des résultats très similaires à ceux établis pour les systèmes linéaires sont en cours de développement.

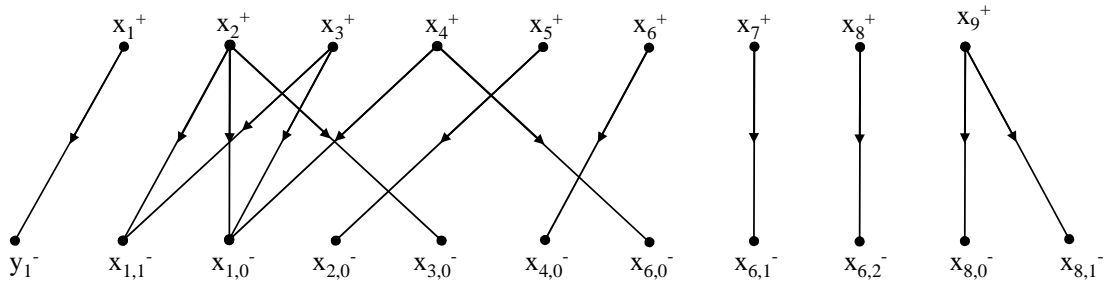
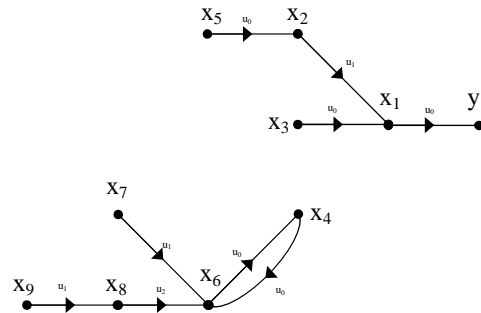


FIG. 2.2: Graphe biparti associé au système bilinéaire de l'exemple 2.1

FIG. 2.3: Graphe partiel A -disjoint couvrant les sommets \mathbf{X} du graphe associé au système de l'exemple 2.1

2.3 Observabilité uniforme des systèmes bilinéaires

2.3.1 Position du problème

Pour les systèmes non linéaires, l'entrée même lorsqu'elle est connue, joue un rôle important dans la "distingabilité" de deux états initiaux. Ainsi, l'étude présentée dans le paragraphe précédent a bien montré que l'établissement de l'observabilité peut faire appel à des arcs appartenant aux ensembles A_i -arcs, $i > 0$. Cela prouve l'importance de l'entrée pour cette propriété. En effet, contrairement au cas des systèmes linéaires, il peut exister éventuellement des entrées, mêmes connues ou mesurées, pour lesquelles les mesures ne suffiraient pas à reconstruire l'état, comme l'illustre l'exemple suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u_1 x_3 \\ \dot{x}_2 = 0 \\ \dot{x}_3 = 0 \\ y_1 = x_1 \end{cases} \quad (2.2)$$

L'entrée $u_1 = 0$ en particulier et $u_1 = \text{constante}$ en général ne permet pas d'observer toutes les composantes de l'état alors que le système est observable. En effet, pour ce système, l'expression des composantes de l'état en fonction des sorties, des entrées et de leurs dérivées donne :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \dot{y}_1 - \frac{u_1 \ddot{y}_1}{\dot{u}_1} \\ x_3 = \frac{\ddot{y}_1}{\dot{u}_1} \end{cases}$$

Ces expressions ont des singularités lorsque $\dot{u}_1 = 0$ ce qui implique que le système obtenu, si l'on maintient $u_1 = \text{constante}$, n'est pas observable. Cette entrée particulière ne permet donc pas de distinguer n'importe quelle paire d'états initiaux.

Une entrée qui rendrait distinguable n'importe quelle paire d'états initiaux est dite entrée universelle [Hermann et Krener, 1977, Sussmann, 1979]. Un système pour lequel toute entrée est universelle est un système uniformément observable.

La définition formelle de l'observabilité uniforme pour les systèmes structurés est directement déduite de celle introduite dans [Gauthier et Bornard, 1981, Williamson, 1977] :

Définition 2.2 *Le système bilinéaire structuré Σ_{Λ}^B est génériquement uniformément observable si, pour presque toutes ses réalisations et pour toute entrée, toute paire d'états initiaux $x'(0)$ et $x''(0)$ est distinguable par l'observation des trajectoires de sortie correspondantes $y'(t)$ et $y''(t)$, $t \geq 0$.*

Pour les systèmes mono-sortie, [Gauthier et Bornard, 1981] ont donné des conditions nécessaires et suffisantes assurant qu'un système est uniformément observable et ont démontré que dans ce cas, le système se mettait, via un changement de coordonnées, sous une forme triangulaire. Cependant, pour les systèmes multi-sorties, il n'existe pas de conditions nécessaires et suffisantes permettant de caractériser exactement l'observabilité uniforme même si la forme triangulaire des systèmes mono-sortie a été étendue aux systèmes multi-sorties pour obtenir une forme appelée "uniform observable structure" dans [Hammouri et Farza, 2003] ou encore forme triangulaire implicite dans [Boukhobza *et al.*, 2003]. L'existence d'un changement de coordonnées qui mettrait le système sous l'une ou l'autre des deux formes est une condition suffisante d'observabilité uniforme.

Un premier travail ayant trait à l'analyse structurelle de cette propriété par approche graphique a été réalisé dans [Bornard et Hammouri, 2002], où les auteurs ont donné des conditions suffisantes assurant l'observabilité uniforme. L'objectif que j'ai tenté d'atteindre, avec plus ou moins de réussite, est d'améliorer les résultats de ce premier travail. Ainsi, les résultats présentés ci-dessous donnent deux groupes de conditions graphiques. Les premières sont nécessaires et les secondes, suffisantes équivalentes à celle de [Bornard et Hammouri, 2002] mais s'appliquant à des systèmes n'ayant pas été mis au préalable sous une forme particulière. Par ailleurs, j'ai abordé le problème en utilisant deux approches différentes. La première repose sur les résultats concernant l'observabilité des systèmes singuliers. La seconde se fonde sur les critères d'observabilité forte des systèmes linéaires à entrées inconnues. Aucune des deux approches n'a malheureusement permis d'établir des conditions nécessaires et suffisantes pour les systèmes multi-sorties. Cependant les conditions trouvées ne sont pas triviales et l'une de mes perspectives de recherche est justement d'encadrer de manière plus précise cette propriété à défaut de la caractériser exactement. En effet, comme cela est discuté à la fin de ce manuscrit, l'étude de cette propriété est assez liée aux travaux menés sur les interactions commande – diagnostic et donc aux recherches menées au sein de l'équipe sur le diagnostic actif.

Je ne présenterai dans ce manuscrit que les résultats obtenus en utilisant la seconde approche. En effet, cette dernière donne des conditions plus proches des conditions nécessaires et suffisantes et plus faciles à appliquer. En ce qui concerne les conditions suffisantes, les deux approches donnent des critères mathématiquement équivalents. Néanmoins, l'algorithme utilisé par la première ap-

proche, issu de l'algorithme 1.2, a un ordre de complexité exponentiel ce qui rend cette méthode lourde à appliquer même pour les systèmes relativement simples. L'algorithme 2.1 présenté par la suite et utilisé par la seconde approche a, quant à lui, un ordre de complexité polynomial, il est donc plus adapté aux systèmes de grande dimension. Les détails concernant la première méthode sont accessibles dans [Boukhobza *et al.*, 2006b] jointe dans l'annexe A.

2.3.2 Caractérisation de l'observabilité uniforme des systèmes bilinéaires

L'idée est de considérer dans la dynamique du système Σ_Λ^B chaque terme $x_i u_j$ comme étant une entrée inconnue tant que l'observabilité forte de x_i n'a pas été établie. Cela garantit l'observabilité de chaque composante de l'état du système pour toute valeur de l'entrée u . Ainsi, le formalisme et les résultats assez simples des systèmes linéaires standards à entrées inconnues sont utilisés. Il est pour cela nécessaire d'adapter la représentation graphique du système bilinéaire structuré au contexte des systèmes linéaires à entrées inconnues.

2.3.2.1 Adaptation de la représentation graphique d'un système bilinéaire structuré

Dans cette analyse, le système bilinéaire Σ_Λ^B est représenté par un graphe orienté noté $\mathcal{G}_{BU}(\Sigma_\Lambda^B)$ défini par un ensemble de sommets \mathcal{V} et un ensemble d'arcs \mathcal{E} tels que :

$\mathcal{V} = \mathbf{X} \cup \mathbf{U}_e \cup \mathbf{U} \cup \mathbf{Y}$, où $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ est l'ensemble des sommets des composantes de l'état, $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m\}$ est l'ensemble des sommets des composantes de l'entrée, $\mathbf{U}_e = \{\mathbf{u}_{i,j}, \text{ si } \exists \ell = 1, \dots, n \text{ tel que } A_i(\ell, j) \neq 0\}$ est l'ensemble des sommets représentant les produits $u_i x_j$ présents dans le modèle du système, enfin $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p\}$ est l'ensemble des sommets de sortie.

$\mathcal{E} = \bigcup_{i=0}^m A_i\text{-arcs} \cup C\text{-arcs} \cup B\text{-arcs} \cup B_u\text{-arcs}$ avec $C\text{-arcs} = \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_i) \mid C(i, j) \neq 0\}$, pour $i = 0, \dots, m$, $A_i\text{-arcs} = \{(\mathbf{x}_k, \mathbf{x}_j) \mid A_i(j, k) \neq 0\}$, $B\text{-arcs} = \{(\mathbf{u}_{i,j}, \mathbf{x}_k) \mid A_i(k, j) \neq 0\}$ et $B_u\text{-arcs} = \{(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_{i,j}), \forall i = 1, \dots, m \text{ et } \forall j = 1, \dots, n \text{ si } \exists \ell = 1, \dots, n \text{ tel que } A_i(\ell, j) \neq 0\}$.

L'exemple suivant illustre cette représentation graphique :

Exemple 2.2 Soit le système bilinéaire structuré défini par les matrices suivantes :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 \\ 0 & 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$C = \begin{pmatrix} \lambda_9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{10} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour l'analyse de la propriété d'observabilité uniforme, à ce système est associé le graphe orienté de la figure 2.4.

Quelques définitions et notations complémentaires sont aussi nécessaires :

- \mathcal{E}_0 est la partie de l'ensemble \mathcal{E} privé de tous les A_i -arcs, $i = 1, \dots, m$ i.e. $\mathcal{E}_0 = A_0\text{-arcs} \cup C\text{-arcs} \cup B_u\text{-arcs} \cup B\text{-arcs}$.

2.3.2.3 Condition suffisante pour l'observabilité uniforme générique des systèmes bilinéaires

D'abord, une adaptation de la subdivision canonique présentée dans le paragraphe 1.3.2 pour les systèmes linéaires au contexte de l'analyse de l'observabilité uniforme et du graphe orienté $\mathcal{G}_{BU}(\Sigma_\Lambda^B)$ est nécessaire pour l'énoncé de la condition suffisante à l'observabilité uniforme générique du système bilinéaire structuré Σ_Λ^B . Ainsi, les ensembles \mathbf{U}_0 , \mathbf{U}_1 , \mathbf{X}_0 , \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_s , \mathbf{Y}_0 , \mathbf{Y}_1 et les nombres β_0 et β_1 du paragraphe 1.4.2 sont redéfinis en considérant que le graphe se restreint au graphe partiel engendré par un ensemble d'arcs $\mathcal{S}_\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}$:

Soit un sous-ensemble d'arcs noté $\mathcal{S}_\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}$, pour tout ensemble de sommets \mathbf{V} tel que $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{V} \subseteq \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$, les ensembles suivants sont définis :

- $\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \mathbf{X} \setminus (\mathbf{V} \cap \mathbf{X})$;
- L'ensemble $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) \subseteq \mathbf{U}_e$ est tel que $\text{card}(\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E})) = \bar{\rho}[\mathbf{U}_e, \mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}] = \bar{\rho}[\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}), \mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}]$ et $\bar{\mu}[\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}), \mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}] = \bar{\mu}[\mathbf{U}_e, \mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}]$.
- $\mathbf{X}_1(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) \stackrel{def}{=} \{ \mathbf{x}_i \in \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{V}) \mid \bar{\rho}[\mathbf{U}_e \cup \{ \mathbf{x}_i \}, \mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}] > \bar{\rho}[\mathbf{U}_e, \mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}] \}$;
- $\mathbf{Y}_0(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) \stackrel{def}{=} \{ \mathbf{v}_i \in \mathbf{V} \mid \bar{\rho}[\mathbf{U}_e, \mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}] > \bar{\rho}[\mathbf{U}_e, \mathbf{V} \setminus \{ \mathbf{v}_i \}, \mathcal{S}_\mathcal{E}] \}$;
- $\mathbf{Y}_1(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) \stackrel{def}{=} \mathbf{V} \setminus \mathbf{Y}_0(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E})$;
- $\mathbf{U}_0(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) \stackrel{def}{=} \{ \mathbf{u}_{i,j} \in \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) \mid \bar{\theta}[\{ \mathbf{u}_{i,j} \}, \mathbf{X}_1(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}), \mathcal{S}_\mathcal{E}] = 0 \}$;
- $\mathbf{U}_1(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) \stackrel{def}{=} \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) \setminus \mathbf{U}_0(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E})$;
- $\mathbf{S}^o(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) \stackrel{def}{=} \mathbf{S}^o(\mathbf{U}_0(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}), \mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E})$;
- $\mathbf{X}_s(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) \stackrel{def}{=} \mathbf{S}^o(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) \cap \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{V})$.
- $\mathbf{X}_0(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) \stackrel{def}{=} \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{V}) \setminus (\mathbf{X}_1(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) \cup \mathbf{X}_s(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}))$.
- $\beta_1(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E})$ est le nombre maximal de sommets de $\mathbf{X}_1(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) \cup \mathbf{X}_s(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E})$ couverts par une union disjointe
 - d'un lien $\mathbf{X}_s(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) - \mathbf{Y}_1(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E})$ de taille $\bar{\rho}[\mathbf{X}_s(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}), \mathbf{Y}_1(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}), \mathcal{S}_\mathcal{E}]$,
 - de chemins $\mathbf{X}_1(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) - \mathbf{Y}_1(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E})$ simples,
 - de cycles ne couvrant que des éléments de $\mathbf{X}_1(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E})$.
- $\beta(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) \stackrel{def}{=} \beta_1(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}) + \bar{\mu}[\mathbf{U}_0(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}), \mathbf{S}^o(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}), \mathcal{S}_\mathcal{E}] - \bar{\rho}[\mathbf{U}_0(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}), \mathbf{S}^o(\mathbf{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E}), \mathcal{S}_\mathcal{E}]$.

L'algorithme suivant permet de calculer un ensemble de sommets de \mathbf{X} correspondant à des composantes de l'état dont l'observabilité uniforme est garantie. Cet algorithme s'appuie simplement sur le calcul itératif d'un ensemble de sommets \mathbf{V}_k , $k \geq 0$ représentant les composantes de l'état fortement observables en considérant chaque terme $x_i u_j$ comme étant une entrée inconnue tant que $x_i \notin \mathbf{V}_k$. Au fur et à mesure que cet ensemble s'agrandit, le nombre de termes $x_i u_j$ décroît.

Algorithme 2.1

Initialisation : $\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{U}_\emptyset = \emptyset$, $\mathcal{E}_1 = \bigcup_{i=0}^m A_i\text{-arcs} \cup C\text{-arcs} \cup B\text{-arcs}$, $\mathbf{V}_0 = \emptyset$.

Faire

↷ $\mathbf{k} = \mathbf{k} + 1$

↷ $\mathbf{V}_k = \left\{ \mathbf{x}_i \in \mathbf{X}, \beta(\{ \mathbf{x}_i \} \cup \mathbf{Y}, \mathcal{E}_1) = \beta(\mathbf{Y}, \mathcal{E}_1) \right\}$

$$\leadsto \mathbf{U}_\emptyset = \{\mathbf{u}_{i,j}, \mathbf{x}_j \in \mathbf{V}_k, i = 1 \dots, m\},$$

$$\leadsto \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1 \setminus \{e \in B\text{-arcs, tel que le sommet de début de } e \text{ appartient à } \mathbf{U}_\emptyset\}.$$

tant que $\mathbf{V}_k \neq \mathbf{V}_{k-1}$ et $\mathbf{V}_k \neq \mathbf{X}$

$$\leadsto \mathbf{X}_{\text{obs}} = \mathbf{V}_k.$$

Les ensembles \mathbf{V}_k ne contiennent que des sommets associés à des composantes uniformément observables car fortement observables par rapport aux termes $u_i x_j$ jouant le rôle d'entrées inconnues. Il est alors aisé de prouver la condition suffisante d'observabilité uniforme [Boukhobza, 2008a] :

Proposition 2.3 *Le système bilinéaire structuré Σ_Λ^B représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}_{\text{BU}}(\Sigma_\Lambda^B)$ est uniformément observable si $\mathbf{X}_{\text{obs}} = \mathbf{X}$.*

Par ailleurs, les composantes de l'état associées aux éléments de \mathbf{X}_{obs} sont génériquement uniformément observables.

Exemple 2.3 *Reprenons le système décrit par la représentation graphique de la figure 2.5.*

Les conditions a. et b. de la proposition 2.2 sont satisfaites. En effet, chaque état de \mathbf{X} est le

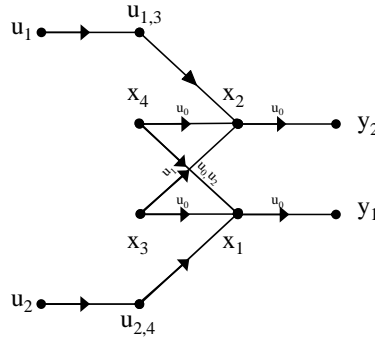


FIG. 2.5: Graphe orienté dédié à l'étude de l'observabilité uniforme pour le système bilinéaire de l'exemple 2.3

début d'un chemin entrée-sortie n'utilisant que des arcs de \mathcal{E}_0 et il existe 4 arcs v -disjoints de \mathcal{E}_0 qui couvrent tous les sommets de \mathbf{X} : $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$, $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$, $(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1)$ et $(\mathbf{x}_4, \mathbf{y}_2)$. Cependant la condition c. de la proposition 2.2 n'est pas satisfaite. En effet, en prenant $\mathbf{V}_x = \{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$, on a $\bar{\rho}[\mathbf{V}_x \cup \mathbf{U}, \mathbf{Y}, \mathcal{S}_\mathcal{E}] = \bar{\rho}[\mathbf{U}, \mathbf{Y}, \mathcal{S}_\mathcal{E}] = 2$ et $\bar{\mu}[\mathbf{V}_x \cup \mathbf{U}, \mathbf{Y}, \mathcal{S}_\mathcal{E}] = \bar{\mu}[\mathbf{U}, \mathbf{Y}, \mathcal{S}_\mathcal{E}] = 6$, avec $\mathcal{S}_\mathcal{E} = C\text{-arcs} \cup A_0\text{-arcs} \cup B_u\text{-arcs} \cup \{(\mathbf{u}_{i,k}, \mathbf{x}_j) \mid A_i(j, k) \neq 0 \text{ et } \mathbf{x}_k \in \mathbf{V}_x\}$ i.e. $\mathcal{S}_\mathcal{E} = \mathcal{E} \setminus (A_1\text{-arcs} \cup A_2\text{-arc})$. Ainsi, ce système n'est pas génériquement uniformément observable. Il est à noter que l'approche basée sur les systèmes singuliers [Boukhobza et al., 2006b] ne permettait pas de conclure à la non-observabilité uniforme.

Exemple 2.4 *Soit le système représenté par le graphe de la figure 2.6. Les conditions a. , b. et c. de la proposition 2.2 sont satisfaites. Effectivement, chaque état de \mathbf{X} est le début d'un chemin entrée-sortie n'utilisant que des arcs de \mathcal{E}_0 et il existe 5 arcs v -disjoints de \mathcal{E}_0 qui couvrent tous les sommets de \mathbf{X} : $(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1)$, $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$, $(\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1)$, $(\mathbf{x}_5, \mathbf{x}_3)$ et $(\mathbf{x}_4, \mathbf{y}_2)$. Par ailleurs, le seul sommet de \mathbf{U}_e est $\mathbf{u}_{1,5}$, en prenant donc $\mathbf{V}_x = \{\mathbf{x}_5\}$ (seul ensemble de test pertinent pour la condition c. de la proposition 2.2), on a $\bar{\rho}[\mathbf{V}_x \cup \mathbf{U}, \mathbf{Y}, \mathcal{S}_\mathcal{E}] = 2$ alors que $\bar{\rho}[\mathbf{U}, \mathbf{Y}, \mathcal{S}_\mathcal{E}] = 1$, où dans ce cas $\mathcal{S}_\mathcal{E} = \mathcal{E}$.*

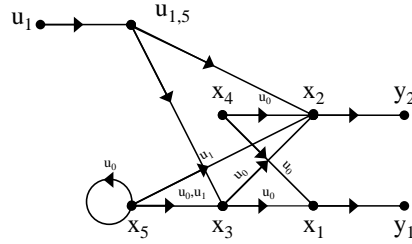


FIG. 2.6: Graphe orienté dédié à l'étude de l'observabilité uniforme pour le système bilinéaire de l'exemple 2.4

Ce qui conduit à la validité de la condition *c.* de la proposition 2.2.

Nous déroulons maintenant l'Algorithme 2.1 :

Initialisation : $\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{U}_0 = \emptyset$, $\mathcal{E}_1 = \bigcup_{i=0}^1 A_i\text{-arcs} \cup C\text{-arcs} \cup B\text{-arcs}$, $\mathbf{V}_0 = \emptyset$.

On a $\mathbf{X}_0(\mathbf{V}, \mathcal{S}_{\mathcal{E}}) = \mathbf{U}_0(\mathbf{V}, \mathcal{S}_{\mathcal{E}}) = \mathbf{Y}_0(\mathbf{V}, \mathcal{S}_{\mathcal{E}}) = \mathbf{X}_s(\mathbf{V}, \mathcal{S}_{\mathcal{E}}) = \emptyset$ et $\beta(\mathbf{V}, \mathcal{S}_{\mathcal{E}}) = 6$ car l'union du cycle $\mathbf{x}_5 \xrightarrow{u_0} \mathbf{x}_5$ et des chemins $\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{u}_{1,5} \rightarrow \mathbf{x}_2 \xrightarrow{u_0} \mathbf{y}_2$ et $\mathbf{x}_3 \xrightarrow{u_0} \mathbf{x}_1 \xrightarrow{u_0} \mathbf{y}_1$ couvre tout $\mathbf{X} \cup \mathbf{U}$. Cela implique donc que $\mathbf{X}_{\text{obs}} = \mathbf{X}$ et que le système est génériquement uniformément observable.

Il est à noter que les conditions de la proposition 2.3 assurent l'existence d'un changement de coordonnées pouvant mettre du système sous forme "uniform observable structure" ou encore sous forme triangulaire implicite [Boukhobza *et al.*, 2003].

2.4 Observabilité de l'état et des entrées d'un système bilinéaire structuré

Le dernier problème d'observabilité abordé dans ce manuscrit concerne les systèmes bilinéaires soumis à des entrées inconnues de la forme :

$$\Sigma_{\Lambda}^{BW} : \begin{cases} \dot{x} &= A_0 x + \sum_{i=1}^m u_i A_i x + H w \\ y &= C x + D w \end{cases} \quad (2.3)$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^T \in \mathbb{R}^m$, $w = (w_1, w_2, \dots, w_q)^T \in \mathbb{R}^q$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)^T \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement l'état, l'entrée connue (mesurée), l'entrée inconnue et la sortie du système. Cette entrée inconnue peut être par exemple un défaut survenant sur le système dont l'estimation pourrait être utilisée pour synthétiser une loi de commande tolérante aux défauts comme cela est fait dans [Kabore et Wang, 2001, Zhang *et al.*, 2004] ou dans [Gao et Ding, 2007] pour les systèmes non linéaires singuliers.

Les non-linéarités considérées dans l'étude présentée dans ce paragraphe concernent uniquement les entrées connues et l'état pour des raisons de simplicité de présentation. En effet, tous les résultats

énoncés ci-dessous s'appliquent aux systèmes de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} &= A_0x + \sum_{i=1}^m u_i A_i x + Hw + \sum_{i=1}^m u_i H_i w \\ y &= C_0x + \sum_{i=1}^m u_i C_i x + D_0w + \sum_{i=1}^m u_i D_i w \end{cases}$$

La seule restriction théorique à l'étude présentée ici est de ne pas avoir dans le modèle du systèmes de produits entre variables non connues du type $x_i w_j$. Pour un système ayant ce genre de produits dans son modèle, il est possible de créer une nouvelle entrée inconnue correspondant à chaque produit. Cela donnera des conditions seulement suffisantes d'observabilité, ce qui est évidemment assez restrictif. Je pense en effet que le bon cadre d'étude de ce genre de systèmes serait celui des systèmes non linéaires polynomiaux. L'analyse de ce genre de systèmes fait partie des perspectives de recherches exposées à la dernière partie du manuscrit.

2.4.1 Position du problème

Le problème abordé ci-dessous est de savoir quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes assurant que l'état et l'entrée du système bilinéaire structuré Σ_{Λ}^{BW} sont génériquement observables *i.e.* toute variation de l'entrée ou de l'état initial se reflète sur la sortie, ce qui peut s'écrire plus formellement de la même manière que pour les systèmes linéaires structurés :

Définition 2.3 *L'état et l'entrée du système bilinéaire structuré Σ_{Λ}^{BW} sont génériquement observables lorsque, pour presque toute entrée $u(t)$, pour tout état initial x_0 et pour tout signal d'entrée $w(t)$, l'égalité $y(t) = 0, \forall t \geq 0$ implique $x(t) = 0, \forall t \geq 0$ et $w(t) = 0, \forall t > 0$.*

L'observabilité de l'entrée et de l'état est équivalente à dire que l'entrée et l'état sont exprimables en fonction des entrées connues, des sorties et de leurs dérivées. Cette observabilité n'est pas uniforme par rapport à l'entrée connue u . C'est à dire que l'observabilité de l'entrée w et de l'état x ne garantit pas que ces derniers soient exprimables en fonction de l'entrée connue u , des sorties et de leurs dérivées pour toutes les fonctions $u(t)$. D'autre part, lorsque l'entrée w et l'état x du système sont dits génériquement observables en considérant une sorte de généricité aussi par rapport à u même si cette dernière n'est pas un paramètre du système. Ainsi, l'entrée w et l'état du système peuvent être génériquement inobservables même si pour certaines valeurs particulières de u , il est possible d'exprimer l'entrée w et l'état x en fonction des entrées connues, des sorties et de leurs dérivées. Par ailleurs, il est à noter que l'observabilité de l'entrée et de l'état n'assure pas l'existence d'un observateur causal permettant leur estimation au moins asymptotique. En revanche, un observateur non causal (utilisant des dérivées des entrées u et des sorties) permettrait de reconstruire l'état x et l'entrée w , dès que ces derniers sont génériquement observables. Cela est réalisé dans [Lopez-Morales *et al.*, 2001].

Enfin, contrairement au cas des systèmes linéaires, il n'y a pas, à ma connaissance, de résultats classiques algébriques ou géométriques donnant les conditions d'observabilité des entrées et des états du système Σ_{Λ}^{BW} . Les conditions graphiques données ci-dessous sont donc originales non seulement par la méthode utilisée mais aussi par le résultat trouvé.

La démarche adoptée est d'abord d'appliquer au système la subdivision $\Sigma_0 - \Sigma_1$, définie au paragraphe 1.3.2. Il a été démontré alors que l'état et les entrées du système Σ_Λ^{BW} sont génériquement observables si et seulement si les états et les entrées des deux sous-systèmes Σ_0 et Σ_1 le sont aussi. La condition d'observabilité de l'état et des entrées de Σ_0 reste identique à celle trouvée dans le cas des systèmes linéaires. Pour ce qui est du système Σ_1 , une transformation itérative de son graphe, fondée uniquement sur l'effacement et le rajout d'arcs particuliers, est proposée afin d'aboutir à la subdivision du graphe en deux parties. La première consiste en un sous-graphe formé uniquement d'un lien entrée-sortie de taille maximale et de longueur minimale. Le second sous-graphe est lui sans entrées inconnues. Les conditions d'observabilité de l'état et des entrées de Σ_1 sont alors du même type que celles vues pour les systèmes bilinéaires sans entrée inconnue au paragraphe 2.2 et ne concernent que le second sous-système.

La mise en œuvre de cette idée a nécessité la définition de nouvelles notations présentées ci-dessous. Ces quelques définitions et notations complètent celles énoncées dans le paragraphe 2.2.2.2. Dans le cadre d'un document d'Habilitation à Diriger des Recherches, certaines de ces définitions peuvent paraître très (voire trop) techniques. Malgré cela, j'ai choisi de les exposer afin d'obtenir un document cohérent.

2.4.2 Représentation graphique d'un système bilinéaire structuré à entrées inconnues

Le graphe orienté associé au système Σ_Λ^{BW} est similaire au graphe $\mathcal{G}_B(\Sigma_\Lambda^B)$ avec l'adjonction de l'ensemble de sommets $\mathbf{W} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q\}$ associé aux composantes de l'entrée inconnue et des deux ensembles d'arcs D -arcs $= \{(\mathbf{w}_i, \mathbf{y}_j) \mid D(j, i) \neq 0\}$ et H -arcs $= \{(\mathbf{w}_i, \mathbf{x}_j) \mid H(j, i) \neq 0\}$.

- Un chemin P , couvrant les sommets $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ où pour $j = 1, \dots, s$, $(\mathbf{v}_{j-1}, \mathbf{v}_j) \in \bar{A}_{i_j}$ -arcs, est noté $P = \mathbf{v}_0 \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v}_1 \xrightarrow{u_{i_2}} \dots \xrightarrow{u_{i_s}} \mathbf{v}_s$.

- La fonction α permet d'associer un chemin P à son sommet de fin noté $\alpha(P)$. Réciproquement, la fonction $\bar{\alpha}$ permet d'associer un chemin P à son sommet de début noté $\bar{\alpha}(P)$

- A chaque chemin $P = \mathbf{v}_0 \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v}_1 \xrightarrow{u_{i_2}} \dots \xrightarrow{u_{i_s}} \mathbf{v}_s$, on associe un indice noté $\sigma(P)$ défini par le monôme ordonné $u_{i_1} \cdot u_{i_2} \cdot \dots \cdot u_{i_s}$. Un chemin P est défini de façon unique par son monôme et l'ensemble des sommets qu'il couvre. Ainsi, deux chemins couvrant les mêmes sommets peuvent être distincts s'ils ont des indices distincts.

- Les indices sont des monômes ordonnés en u_0, u_1, \dots, u_m de la forme $u_{i_1} \cdot u_{i_2} \cdot \dots \cdot u_{i_\ell}$, où $\{i_1, i_2, \dots, i_\ell\} \subseteq \{0, \dots, m\}$ ne sont pas nécessairement distincts. L'ensemble des indices est noté $\mathcal{M}(u)$. Cet ensemble est muni de la loi de composition interne non commutative “ \cdot ” (correspondant à la concaténation). Pour illustrer les propriétés de “ \cdot ”, considérons $\sigma_1 = u_{i_1} \cdot u_{i_2} \cdot \dots \cdot u_{i_\ell} \in \mathcal{M}(u)$ et $\sigma_2 = u_{j_1} \cdot u_{j_2} \cdot \dots \cdot u_{j_k} \in \mathcal{M}(u)$, on a :

$$\diamond \sigma_1 = \sigma_2 \text{ si et seulement si } \ell = k \text{ et } i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_\ell = j_k,$$

$$\diamond \sigma_1 \cdot \sigma_2 = u_{i_1} \cdot u_{i_2} \cdot \dots \cdot u_{i_\ell} \cdot u_{j_1} \cdot u_{j_2} \cdot \dots \cdot u_{j_k},$$

$$\diamond \text{ Pour tout } \sigma_3 \in \mathcal{M}(u), \sigma_1 \cdot (\sigma_2 \cdot \sigma_3) = (\sigma_1 \cdot \sigma_2) \cdot \sigma_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3,$$

- L'élément neutre de l'opération “ \cdot ” est noté 1 et il représente le chemin de longueur nulle.

On a alors $1 \cdot \sigma = \sigma \cdot 1 = \sigma$,

- La longueur d'un indice correspond au nombre de termes u_i qu'il contient, en tenant

compte du nombre de fois où ces derniers apparaissent.

• L'élément $(u_{j_1} \cdot u_{j_2} \cdot \dots \cdot u_{j_\kappa})^{-1} \stackrel{def}{=} u_{j_\kappa}^{-1} \cdot \dots \cdot u_{j_2}^{-1} \cdot u_{j_1}^{-1}$ est l'inverse du monôme $u_{j_1} \cdot u_{j_2} \cdot \dots \cdot u_{j_\kappa}$. On a $\forall j = 0, \dots, m, u_j^{-1} \cdot u_j = u_j \cdot u_j^{-1} = 1$.

• Une autre opération commutative notée \otimes est aussi associée aux indices de $\mathcal{M}(u)$. Cette opération n'agit que sur des termes de type $\sigma^{-1} \cdot \sigma_2$ où σ_1 et σ_2 sont des éléments de $\mathcal{M}(u)$. En plus de sa commutativité, la principale propriété de cette opération est que pour tout $\sigma_1 \in \mathcal{M}(u)$, $\sigma_2 \in \mathcal{M}(u)$ et $\sigma_3 \in \mathcal{M}(u)$, nous avons $(\sigma_3^{-1} \cdot \sigma_1) \otimes (\sigma_1^{-1} \cdot \sigma_2) = (\sigma_1^{-1} \cdot \sigma_2) \otimes (\sigma_3^{-1} \cdot \sigma_1) = \sigma_3^{-1} \cdot \sigma_2$.

• A chaque chemin simple $P = \mathbf{v}_0 \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v}_1 \xrightarrow{u_{i_2}} \dots \xrightarrow{u_{i_s}} \mathbf{v}_s$, est associé un ensemble noté $\phi(P)$ incluant tous les chemins couvrant exactement les mêmes sommets *i.e.* $\phi(P) = \left\{ P', P' = \mathbf{v}_0 \xrightarrow{u_{j_1}} \mathbf{v}_1 \xrightarrow{u_{j_2}} \dots \xrightarrow{u_{j_s}} \mathbf{v}_s \right\}$. Évidemment, $P \in \phi(P)$.

• A chaque chemin simple P , est associé un ensemble d'arcs noté $\epsilon(P)$ défini par $\epsilon(P) = \{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathcal{E}, \text{ tel que } P \text{ couvre } \mathbf{v}_2 \text{ et ne couvre pas } \mathbf{v}_1, \text{ où } \mathbf{v}_2 \neq \bar{\alpha}(P)\}$.

• Afin de pouvoir transformer le graphe orienté associé au système en préservant la notion d'arcs A -disjoints, une nouvelle notion d'arcs AX -disjoints est définie :

D'abord, à tout arc e est associé un ensemble de couples noté $\vartheta(e)$ ayant initialement la valeur $\vartheta(e) = \{(\alpha(e), \sigma(e))\}$.

Ensuite, deux arcs $e_1 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1)$ et $e_2 = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_2)$ sont dits AX -disjoints si

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2 \\ \text{et} \\ \vartheta(e_1) \cap \vartheta(e_2) = \emptyset \end{array} \right.$$

On dit qu'un ensemble d'arcs forme un ensemble d'arcs AX -disjoints s'ils sont AX -disjoints deux à deux.

• Soient \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 deux ensembles de sommets. $\theta_{AX}[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$ est le nombre maximal d'arcs AX -disjoints dont les sommets de début sont dans \mathcal{V}_1 et les sommets de fin dans \mathcal{V}_2 .

2.4.3 Conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité de l'état et de l'entrée d'un système bilinéaire

La stratégie de vérification de l'observabilité générique des entrées et des états du système bilinéaire structuré Σ_{Λ}^{BW} passe par la transformation itérative du graphe orienté initial en un graphe formé de deux parties :

- un premier sous-graphe où l'entrée inconnue est reliée à au plus q sorties par des chemins disjoints de façon à former un système carré de dimension minimale,
- un second sous-graphe sans entrées inconnues et qui représente un système insensibles à l'entrée inconnue.

L'algorithme suivant permet cette transformation qui utilise la subdivision présentée dans le paragraphe 1.3.2 :

- $\mathbf{X}_1 \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{x}_i \mid \rho[\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \mathbf{Y}] > \rho[\mathbf{U}, \mathbf{Y}] \right\}$,
- $\mathbf{Y}_0 \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{y}_i \mid \rho[\mathbf{U}, \mathbf{Y}] > \rho[\mathbf{U}, \mathbf{Y} \setminus \{\mathbf{y}_i\}] \right\} = \mathbf{Y} \cap V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$,

- $\mathbf{Y}_1 \stackrel{def}{=} \mathbf{Y} \setminus \mathbf{Y}_0$,
- $\mathbf{U}_0 \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{u}_i \mid \theta[\{\mathbf{u}_i\}, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1] = 0 \right\}$,
- $\mathbf{U}_1 \stackrel{def}{=} \mathbf{U} \setminus \mathbf{U}_0$,
- $\mathbf{X}_s \stackrel{def}{=} \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cap \mathbf{X}$,
- $\mathbf{X}_0 \stackrel{def}{=} \mathbf{X} \setminus (\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{X}_s)$.

L'algorithme de cette transformation est présenté ci-dessous :

Algorithme 2.2

Initialisation :

$\rightsquigarrow \mathcal{G}_0 = \mathcal{G}(\Sigma)$, $\mathbf{X}_Q = \mathbf{X}_0$, $\mathbf{Y}_Q = \emptyset$, $\mathbf{W}_Q = \emptyset$, $i = 1$

Tant que $i \leq q_1 + n_s$

- { \rightsquigarrow Soit Q l'un des chemins $(\mathbf{X}_s \cup \mathbf{W}_1 \setminus \mathbf{W}_Q) - (\mathbf{Y}_1 \setminus \mathbf{Y}_Q)$ les plus courts dans \mathcal{G}_{i-1} ,
- $\rightsquigarrow \mathbf{W}_Q = \mathbf{W}_Q \cup \{\bar{\alpha}(Q)\}$, $\mathbf{Y}_Q = \mathbf{Y}_Q \cup \{\alpha(Q)\}$,
- $\rightsquigarrow \mathbf{X}_Q = \mathbf{X}_Q \cup \{ \text{tous les sommets état couverts par } Q \}$,

Construction de \mathcal{G}_i

\rightsquigarrow Initialisation : $\mathcal{G}_i = \mathcal{G}_{i-1}$.

Pour $\ell = \text{longueur}(Q)$, \dots , 1, faire

Pour tous les chemins P de longueur ℓ tels que $\bar{\alpha}(P) = \bar{\alpha}(Q)$ et $\alpha(P) \notin \mathbf{X}_Q \cup \mathbf{Y}_Q$,

\rightsquigarrow Soit Q' le sous-chemin de Q de longueur ℓ tel que $\bar{\alpha}(Q') = \bar{\alpha}(Q)$

Rajout d'arcs dans \mathcal{G}_i

\rightsquigarrow Pour chaque arc $e \in \epsilon(Q')$ tel que $\alpha(e) = \alpha(Q')$,

Si e est A -disjoint avec le dernier arc de Q'

ou si le dernier arc de Q' a le même début que le dernier arc de P alors

rajouter au graphe orienté \mathcal{G}_i un arc e' défini par :

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(e') &= \bar{\alpha}(e), \\ \sigma(e') &= \sigma(e) \otimes (\sigma(Q')^{-1} \cdot \sigma(P)), \\ \alpha(e') &= \alpha(P). \\ \vartheta(e') &= \vartheta(e) \cup \{(\alpha(P), \sigma(e'))\} \end{aligned}$$

Suppression d'arcs dans \mathcal{G}_i

\rightsquigarrow Effacer de \mathcal{G}_i tous les arcs partant de, et arrivant sur Q ,

$\rightsquigarrow i = i + 1$.

}

Si tous les chemins Q utilisés dans l'algorithme ci-dessus sont les seuls chemins reliant $\bar{\alpha}(Q)$ à $\alpha(Q)$ alors l'algorithme est exploité tel quel. Autrement, une étape d'homogénéisation est adjointe à l'algorithme avant l'étape de *rajout d'arcs*.

Les conditions nécessaires et suffisantes de l'observabilité générique des entrées et de l'état de Σ_Λ^{BW} sont données par la proposition suivante démontrée dans [Boukhobza, 2008c, Boukhobza et Hamelin, 2008b]

Proposition 2.4 Soit le système bilinéaire structuré Σ_{Λ}^{BW} représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}_{BW}(\Sigma_{\Lambda})$. L'entrée et l'état de Σ_{Λ} sont génériquement observables si et seulement si

- i. Dans le graphe original $\mathcal{G}_{BW}(\Sigma_{\Lambda})$, $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{W}_0 \subseteq V_{ess}(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$,
- ii. Dans le graphe orienté $\mathcal{G}_{n_s+q_1}$ obtenu par l'algorithme 2.2,

$$\theta_{AX} \left[\mathbf{X}_1 \setminus \mathbf{X}_Q, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1 \setminus (\mathbf{X}_Q \cup \mathbf{Y}_Q) \right] = n_1 - \text{card}(\mathbf{X}_Q)$$

Notons que les conditions précédentes sont assez simples à vérifier une fois obtenu le graphe $\mathcal{G}_{n_s+q_1}$. D'autre part, l'algorithme 2.2 consiste essentiellement en l'effacement et en la création d'arcs. Il a un déroulement systématique et est aussi assez simple à programmer car il repose essentiellement sur la recherche de chemins directs entrée-sortie. L'exemple (très) simple suivant montre la philosophie de la méthode.

Exemple 2.5 Considérons le système représenté sur la figure 2.7. Dans cet exemple, $\mathbf{X}_0 = \mathbf{Y} = \mathbf{0} = \mathbf{U}_0 = \mathbf{X}_s = \emptyset$ et donc, il n'y a pas de partie relative au système Σ_0 . Les chemins menant des

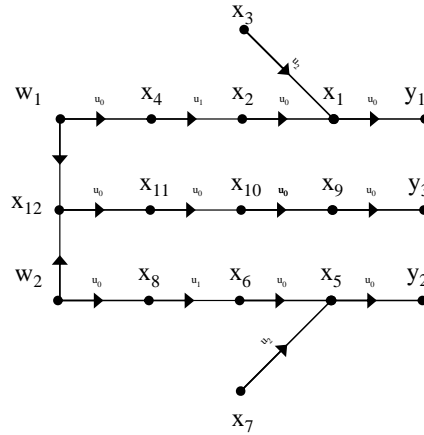


FIG. 2.7: Représentation graphique pour l'illustration de la Proposition 2.4

deux entrées inconnues à la sortie sont simples, uniques : $Q_1 = w_1 \xrightarrow{u_0} x_4 \xrightarrow{u_1} x_2 \xrightarrow{u_0} x_1 \xrightarrow{u_0} y_1$ et $Q_2 = w_2 \xrightarrow{u_0} x_8 \xrightarrow{u_0} x_6 \xrightarrow{u_1} x_5 \xrightarrow{u_0} y_2$. Par ailleurs, ces chemins sont disjoints, ce qui rend les deux étapes de l'algorithme 2.2 indépendantes. Ces deux étapes préconisent la suppression des arcs partant du sommet x_{12} . Les arcs rajoutés correspondent aux arcs inclus respectivement dans $\epsilon(Q_1)$ et $\epsilon(Q_2)$ i.e. $e_1 = x_3 \xrightarrow{u_2} x_1$ et $e_2 = x_7 \xrightarrow{u_2} x_5$. Ainsi, le nouveau graphe $\mathcal{G}_{n_s+q_1}$ obtenu par l'algorithme 2.2, est celui de la figure 2.8.

Il est aisé de voir sur ce graphe et sachant que les arcs e_1 et e_2 ont été transformés en e'_1 et e'_2 reliant respectivement x_3 à x_9 et x_7 à x_9 avec $\sigma_1 = \sigma(e'_1) = u_2 \cdot (u_1 \cdot u_0)^{-1} \cdot (u_0 \cdot u_0) \neq \sigma(e'_2) = u_2 \cdot (u_0 \cdot u_1)^{-1} \cdot (u_0 \cdot u_0) = \sigma_2$ et $\vartheta(e'_1) = \{(x_1, u_2), (x_9, \sigma_1)\}$, $\vartheta(e'_2) = \{(x_5, u_2), (x_9, \sigma_2)\}$. Ainsi, e'_1 et e'_2 sont AX-disjoints. L'entrée et l'état du système sont alors génériquement observables.

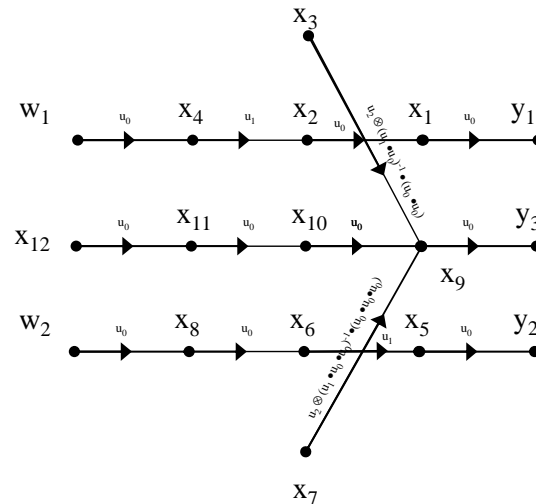


FIG. 2.8: Graphe 2.7 modifié par l'algorithme 2.2

2.5 Problème de génération de résidus pour un système bilinéaire

Le dernier problème abordé dans ce manuscrit est un problème de diagnostic. Une partie de l'entrée inconnue du système bilinéaire est supposée révéler des défauts. Le reste de l'entrée inconnue représente des perturbations. L'objectif est de savoir s'il est possible de détecter et de localiser ces défauts en utilisant un observateur causal appelé générateur de résidus. Il ne s'agit pas ici de faire la synthèse de ces générateurs de résidus mais seulement de répondre à la question de leur existence.

2.5.1 Position du problème

Soit le système bilinéaire structuré de la forme :

$$\Sigma_{\Lambda}^{Bf} : \begin{cases} \dot{x} &= A_0 x + \sum_{i=1}^m u_i A_i x + E f + H w \\ y &= C x \end{cases} \quad (2.4)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $f \in \mathbb{R}^d$, $w \in \mathbb{R}^q$ et $y \in \mathbb{R}^p$ représentent respectivement l'état, l'entrée de commande, le vecteur de défauts, les perturbations et la sortie.

Dans ce paragraphe, l'objectif est de trouver des critères pour savoir si le problème de génération de résidus est génériquement soluble. Ce problème décrit pour les systèmes linéaires par [Massoumnia *et al.*, 1989] est étendu aux systèmes non linéaires en général dans [De Persis et Isidori, 2001a, Hammouri *et al.*, 1999] et pour les systèmes bilinéaires en particulier dans [Hammouri *et al.*, 2001]. Ainsi, pour le système bilinéaire structuré Σ_{Λ}^{Bf} , le problème fondamental de génération de résidus consiste à trouver un filtre de la forme :

$$\begin{cases} \dot{z}(t) &= \phi(z(t), y(t)) + \psi(z(t), y(t))u \\ r(t) &= h(z(t), y(t)) \end{cases} \quad (2.5)$$

où les "résidus" représentés par le vecteur $r \in \mathbb{R}^q$ sont tels que pour tout entier $i \in \{1, 2, \dots, q\}$:

- i. quand $f_i = 0$, r_i est insensible à la perturbation w et à toute entrée f_j si $j \neq i$ et il doit décroître vers zéro pour toute entrée de commande u et quelles que soient les conditions initiales $x(0)$ et $z(0)$,
- ii. r_i est affecté par f_i i.e. il existe une entrée u telle que r_i prend des valeurs non nulles persistantes quelles que soient les conditions initiales $x(0)$ et $z(0)$.

La solubilité de ce problème a été abordée et entièrement caractérisée dans [Hammouri *et al.*, 2001] pour les systèmes bilinéaires par une méthode géométrique. En généralisant directement ce résultat aux systèmes structurés, dans le cas d'un seul défaut ($q = 1$), il a été prouvé que :

le problème fondamental de génération de résidus est génériquement soluble si et seulement si, pour presque toutes les réalisations de Σ_{Λ}^{Bf} , $E \notin \bar{\mathcal{O}}_H$ où $\bar{\mathcal{O}}_H$ est le sous-espace d'inobservabilité minimal contenant $\text{Im } H$. Ce sous-espace se calcule par la suite non-croissante de sous-espaces vectoriels suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{T}_0 = & \mathcal{R}_H + \text{Ker } C \\ \mathcal{T}_{i+1} = & \mathcal{R}_H + \left(\bigcap_{j=0}^m ((A_j)^{-1} \mathcal{T}_i) \right) \cap \text{Ker } C \end{cases} \quad (2.6)$$

où \mathcal{R}_H représente le sous-espace (C, A_j) -invariant ($j = 0, \dots, m$) minimal contenant $\text{Im } H$ et donné par la suite non-décroissante de sous-espaces vectoriels suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_0 = \text{Im } H, \\ \mathcal{R}_{i+1} = \mathcal{R}_i + \sum_{j=0}^m A_j (\mathcal{R}_i \cap \text{Ker } C) \end{cases} \quad (2.7)$$

L'objectif de l'étude menée ci-dessous est de proposer des conditions nécessaires et suffisantes graphiques équivalentes à celles, géométriques, énoncées dans [Hammouri *et al.*, 2001]. En effet, le calcul des sous-espaces \mathcal{R}_H et $\bar{\mathcal{O}}_H$ peut s'avérer fastidieux en particulier pour les systèmes de grande dimension.

L'approche développée repose sur un résultat équivalent à celui utilisant les sous-espaces d'inobservabilité et énoncé ci-dessous :

Lemme 2.1 *Soit le système bilinéaire structuré Σ_{Λ}^{Bf} soumis à un seul défaut ($q = 1$). Le problème fondamental de génération de résidus est génériquement soluble pour Σ_{Λ}^{Bf} si et seulement si*

$$g\text{-dim}(C\mathcal{R}_{H,E}) > g\text{-dim}(C\mathcal{R}_H)$$

où $\mathcal{R}_{H,E}$ représente le sous-espace (C, A_j) -invariant ($j = 0, \dots, m$) minimal contenant $\text{Im } H + \text{Im } E$ et $g\text{-dim}$ dénote la dimension générique d'un sous-espace vectoriel.

La démarche adoptée consiste à caractériser graphiquement $g\text{-dim}(C\mathcal{R}_H)$ (resp. $g\text{-dim}(C\mathcal{R}_{H,E})$) qui représentent, le nombre de sorties indépendantes vers lesquelles se "propagent" les perturbations (resp. les perturbations et les défauts). Une fois ces nombres calculés, leur comparaison permet d'arriver à des conditions nécessaires et suffisantes de solubilité du problème fondamental de génération de résidus dans les cas mono-défaut puis multi-défauts général et enfin dans le cas où au plus un seul défaut peut survenir sur le système à un instant donné.

La propagation des perturbations ou/et des défauts se fait assez simplement dans le graphe. Vérifier l'indépendance des directions de propagation obtenues est moins trivial. Pour cela de nouvelles

notations ont été nécessaires. Ci-dessous, ces définitions et l'algorithme utilisé pour le calcul de $g\text{-dim}(C\mathcal{R}_H)$ et $g\text{-dim}(C\mathcal{R}_{H,E})$ sont présentés. Pour le lecteur intéressé et pour plus de détails la publication [Boukhobza *et al.*, 2008b] plus complète décrivant ces résultats est jointe en annexe.

Remarque 2.1 *Pour des raisons de présentation et de simplicité des notations, la matrice structurée C est supposée être de la forme $(\text{diag}(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_p}) \mid \mathbf{0})$.*

2.5.2 Représentation graphique d'un système bilinéaire structuré soumis à des défauts

Le graphe orienté associé au système Σ_{Λ}^{Bf} est similaire au graphe $\mathcal{G}_{\mathcal{B}}(\Sigma_{\Lambda}^B)$ avec l'adjonction des deux ensembles de sommets $\mathbf{F} = \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_d\}$ associé aux composantes des défauts et $\mathbf{W} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_q\}$ associé aux composantes des perturbations et des deux ensembles d'arcs $E\text{-arcs} = \{(\mathbf{f}_i, \mathbf{x}_j) \mid E(j, i) \neq 0\}$ et $H\text{-arcs} = \{(\mathbf{w}_i, \mathbf{x}_j) \mid H(j, i) \neq 0\}$.

En comparaison avec les travaux sur l'analyse structurelle présentés dans [Blanke *et al.*, 2003, Düstegör *et al.*, 2004a, Düstegör *et al.*, 2004b, Düstegör *et al.*, 2006, Frisk *et al.*, 2003, Staroswiecki *et al.*, 2000, Staroswiecki, 2002] et qui sont tous fondés sur des graphes bipartis, je pense que les graphes orientés sont mieux adaptés aux systèmes non-linéaires. En effet, les résultats exposés dans les travaux pré-cités ne sont pas applicables de manière rigoureuse à certains systèmes non linéaires et plus spécifiquement aux systèmes bilinéaires. Ainsi, pour illustrer ce propos, considérons le système linéaire structuré :

$$\begin{cases} c_1 : \dot{x}_1(t) = \lambda_1 f_1(t) \\ c_2 : \dot{x}_2(t) = \lambda_2 x_1(t) + \lambda_3 u_1(t) + \lambda_4 f_2(t) \\ c_3 : \dot{x}_3(t) = \lambda_5 x_1(t) \\ c_4 : y_1(t) = \lambda_6 x_3(t) \\ c_5 : y_2(t) = \lambda_7 x_2(t) \end{cases} \quad (2.8)$$

où $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ représente l'état du système, $y = (y_1, y_2)^T$ représente la sortie du système, $f = (f_1, f_2)^T$ correspondent aux défauts survenant sur le système, $u = u_1$ est l'entrée scalaire du système et les λ_i sont des paramètres réels non nuls *a priori* indépendants. A ce système on peut associer le graphe biparti de la figure 2.9 (les contraintes c_6 , c_7 , c_8 représentent respectivement les contraintes $\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}$, $\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt}$, $\dot{x}_3 = \frac{dx_3}{dt}$). En utilisant les résultats de [Düstegör *et al.*, 2004b] ou de [Commault *et al.*, 2002a], on peut affirmer que le problème de localisation est génériquement soluble pour presque toutes les valeurs des paramètres λ_i .

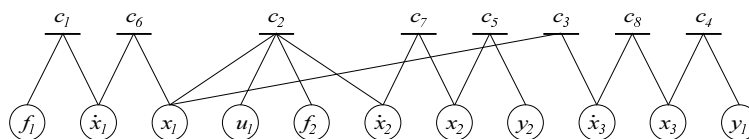


FIG. 2.9: *Graphe biparti associé au système (2.8)*

Considérons maintenant le système bilinéaire structuré

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \lambda_1 f_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = \lambda_2 u_1 x_1(t) + \lambda_3 f_2(t) \\ \dot{x}_3(t) = \lambda_4 x_1(t) \\ y_1(t) = \lambda_5 x_3(t) \\ y_2(t) = \lambda_6 x_2(t) \end{cases} = A_0 x(t) + u_1 A_1 x(t) + E_1 f_1(t) + E_2 f_2(t) \quad (2.9)$$

où, pareillement, $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ représente l'état du système, $y = (y_1, y_2)^T$ représente la sortie du système, $f = (f_1, f_2)^T$ les défauts survenant sur le système, $u = u_1$ est l'entrée scalaire du système et les λ_i sont des paramètres réels non nuls *a priori* indépendants. Ce système a la même représentation par graphe biparti que le précédent. Les variables des deux systèmes ont des "calculabilités" [Düstegör *et al.*, 2004b] similaires et on obtient les mêmes tables de signatures et d'isolabilité pour les deux systèmes. Partant d'un même graphe et en appliquant les mêmes critères que précédemment, on affirmerait donc que le problème de localisation de défauts est génériquement soluble pour le système (2.9).

Or, calculons $\bar{\mathcal{O}}_{E_1}$ le sous-espace $(C-A)$ d'inobservabilité minimal contenant $\mathcal{E}_1 = \text{span}(E_1)$ où \mathcal{A} représente le couple (A_0, A_1) suivant les notations de [Hammouri *et al.*, 2001]. Des calculs simples aboutissent à $\bar{\mathcal{O}}_{E_1} = \mathbb{R}^3$, pour presque toutes les valeurs de λ_i . Le défaut f_2 se propage indépendamment sur les deux sorties. D'après [Hammouri *et al.*, 2001, De Persis et Isidori, 2001a], comme $E_2 \in \bar{\mathcal{O}}_{E_1}$ pour presque toutes les valeurs des λ_i , le problème fondamental de génération de résidus ne serait génériquement pas soluble pour f_2 et donc f_2 serait structurellement non localisable si l'on se restreint à utiliser un générateur de résidus tel que dans [Hammouri *et al.*, 2001]. Cela est en contradiction avec la conclusion de l'étude menée en utilisant les graphes bipartis. En fait, cette incohérence est due au fait qu'il n'est pas prévu que les arcs dépendent de l'état ou de la commande dans ces graphes bipartis. Ainsi, si $u_1 = \text{constante}$, on pourrait conclure à juste titre sur l'isolabilité du défaut f_2 mais pas dans le cas général où l'entrée de commande n'est pas constante.

On constate donc la perte d'une information importante pour l'analyse de la solubilité structurelle du problème fondamental de génération de résidus lorsque l'on représente le système par un graphe biparti. Afin de pallier à ce problème, j'ai décidé de représenter le système bilinéaire en utilisant un graphe orienté où l'on fait apparaître les produits $u \cdot x$ (figure 2.10).

Les conditions de détectabilité et d'isolabilité des défauts obtenues prennent en compte la propagation indépendante d'un défaut sur plusieurs sorties et donc prennent en considération la structure non linéaire du système.

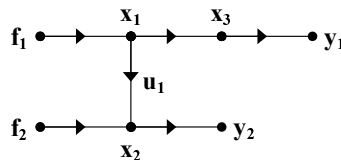


FIG. 2.10: Graphe Orienté associé au système 2.9

Ce problème se pose aussi pour l'observabilité. Ainsi, le système linéaire (2.10) représenté par le graphe de la figure 2.11 (les contraintes c_5 , c_6 , c_7 représentent respectivement les contraintes

$\dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt}$, $\dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt}$, $\dot{x}_3 = \frac{dx_3}{dt}$) est génériquement non observable, le couplage maximal étant incomplet.

$$\begin{cases} c_1 : \dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_2(t) + \lambda_2 x_3(t) + \lambda_3 u_1(t) \\ c_2 : \dot{x}_2(t) = 0 \\ c_3 : \dot{x}_3(t) = 0 \\ c_4 : y_1(t) = \lambda_4 x_1(t) \end{cases} \quad (2.10)$$

Or le système linéaire (2.10) a la même représentation par graphe biparti que le système (2.11)

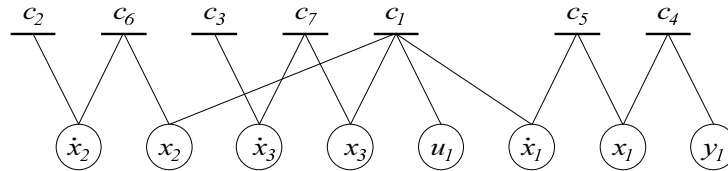


FIG. 2.11: *Graphe Orienté associé au système 2.10*

qui, lui, est génériquement et donc structurellement observable.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \lambda_1 x_2(t) + \lambda_2 u_1(t) x_3(t) \\ \dot{x}_2(t) = 0 \\ \dot{x}_3(t) = 0 \\ y_1(t) = \lambda_3 x_1(t) \end{cases} \quad (2.11)$$

Ainsi, pour que l'approche par graphe biparti soit correcte, un même graphe biparti devrait permettre d'aboutir à deux conclusions complètement opposées. Cela étant impossible, le choix d'utiliser une autre représentation graphique, semblable à celle définie dans le paragraphe 2.2.2.1, qui permettrait de différencier entre autres les deux systèmes précédents est donc justifié.

Enfin, pour résumer mon point de vue, dans un cadre non linéaire, les graphes bipartis ne m'ont pas paru être l'outil adéquat pour appréhender le problème de génération de résidus à base d'observateurs ou pour faire l'analyse de l'observabilité. De plus, même dans un cadre linéaire, une représentation par des graphes orientés non bipartis m'a semblé plus appropriée pour l'analyse de l'observabilité de l'état et de l'entrée. L'interprétation des résultats obtenus est aussi plus intuitive et plus aisée.

Afin d'appréhender la propagation des perturbations et des défauts dans le système, les définitions et notations suivantes complètent celles énoncées dans les paragraphes 2.2.2.2 et 2.4.2. Bien que ces définitions peuvent paraître assez rébarbatives et difficiles à appréhender, j'ai tenu à les présenter afin que ce document soit complet et cohérent.

- Soit \mathbf{V}_0 un ensemble de sommets, le chemin $P = \mathbf{v}_0 \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v}_1 \xrightarrow{u_{i_2}} \dots \xrightarrow{u_{i_s}} \mathbf{v}_s$ est inclus dans \mathbf{V}_0 si $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{s-1}\} \subseteq \mathbf{V}_0$. De même, un ensemble de chemins est inclus dans \mathbf{V}_0 si tous ces éléments sont inclus dans \mathbf{V}_0 .

- Deux chemins $P_1 = \mathbf{v}_0^1 \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v}_1^1 \xrightarrow{u_{i_2}} \dots \xrightarrow{u_{i_{k_1}}} \mathbf{v}_{k_1}^1$ et $P_2 = \mathbf{v}_0^2 \xrightarrow{u_{j_1}} \mathbf{v}_1^2 \xrightarrow{u_{j_2}} \dots \xrightarrow{u_{j_{k_2}}} \mathbf{v}_{k_2}^2$ sont A -disjoints si et seulement si

$$\text{Cond1- } \mathbf{v}_{k_1}^1 \neq \mathbf{v}_{k_2}^2,$$

Cond2- $\forall j = 1, 2, \dots, \min(k_1, k_2)$ tels que $\mathbf{v}_{\mathbf{k}_1-j}^1 = \mathbf{v}_{\mathbf{k}_2-j}^2$, les chemins $\mathbf{v}_{\mathbf{k}_1-j}^1 \xrightarrow{u_{i_{k_1-j+1}}} \dots \xrightarrow{u_{i_{k_1}}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}_1}^1$ et $\mathbf{v}_{\mathbf{k}_2-j}^2 \xrightarrow{u_{j_{k_2-j+1}}} \dots \xrightarrow{u_{j_{k_2}}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}_2}^2$ ont des indices distincts.

Deux chemins disjoint sont évidemment A -disjoints.

Un ensemble de chemins est dit A -disjoint, si tous les chemins qu'il contient sont mutuellement A -disjoints.

- Soient \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 deux ensembles de sommets. Un ensemble de ℓ chemins \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 A -disjoints forme un lien \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 A -disjoint. Les liens \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 A -disjoints consistant en un nombre maximal de chemins sont dits liens \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 A -disjoints maximaux.

- On note par $\mu_{X,Y}[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$ le nombre minimal de sommets dans $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$ couverts par un lien \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 maximal.

- Soient $P_1 = \mathbf{v}_0^1 \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v}_1^1 \xrightarrow{u_{i_2}} \dots \xrightarrow{u_{i_{k_1}}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}_1}^1$ et $P_2 = \mathbf{v}_0^2 \xrightarrow{u_{j_1}} \mathbf{v}_1^2 \xrightarrow{u_{j_2}} \dots \xrightarrow{u_{j_{k_2}}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}_2}^2$ deux chemins \mathcal{V} - \mathbf{X} . Le chemin P_1 est dit "multiple" de P_2 s'il existe un entier $j \leq k_1$ tel que $\mathbf{v}_0^1 \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v}_1^1 \xrightarrow{u_{i_2}} \dots \xrightarrow{u_{i_j}} \mathbf{v}_j^1$ et P_2 ne sont pas A -disjoints. Dans ce cas, si j_0 est le plus petit entier $j > 0$ tel que $\mathbf{v}_0^1 \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v}_1^1 \xrightarrow{u_{i_2}} \dots \xrightarrow{u_{i_j}} \mathbf{v}_j^1$ et P_2 ne sont pas A -disjoints, alors $\sigma(P_1/P_2)$ désigne $\sigma(\mathbf{v}_{j_0}^1 \xrightarrow{u_{i_{j_0+1}}} \dots \xrightarrow{u_{i_{k_1}}} \mathbf{v}_{\mathbf{k}_1}^1) = u_{i_{j_0+1}} \cdot \dots \cdot u_{i_{k_1}}$. La notation $P_1 \equiv P_2 \odot u_{i_{j_0+1}} \cdot u_{i_{j_0+2}} \cdot \dots \cdot u_{i_{k_1}}$ est aussi utilisée.

Si P_1 et P_2 ne sont pas A -disjoints, on écrit $\sigma(P_1/P_2) = 1$ et $P_1 \equiv P_2$. De plus, P_1 est un "multiple strict" de P_2 lorsque P_1 est un multiple de P_2 et que $\sigma(P_1/P_2) \neq 1$.

- Considérons deux ensembles de sommets $\mathbf{W}_0 \subseteq \mathbf{W} \cup \mathbf{F}$ et $\Gamma_{\text{int}} \subseteq \mathbf{X}_{\mathbf{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p\}$. En raison de la Remarque 2.1, $\mathbf{X}_{\mathbf{C}}$ représente l'ensemble des sommets tels que \mathbf{x}_i est relié par un arc à \mathbf{y}_i pour $i = 1, \dots, p$.

Un chemin Q_1 est dit chemin \mathbf{W}_0 - Γ_{int} premier si Q_1 est un chemin \mathbf{W}_0 - Γ_{int} et s'il n'existe pas de chemins \mathbf{W}_0 - Γ_{int} P qui soient multiples stricts de Q_1 .

- A toute matrice $B \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ est associé un graphe biparti $\mathcal{B}_{\mathcal{M}} = (\mathcal{V}^+; \mathcal{V}^-; \mathcal{E}_{\mathcal{M}})$ où $\mathcal{V}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^+, \dots, \mathbf{x}_\ell^+\}$, $\mathcal{V}^- \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{X}$ et $\mathcal{E}_{\mathcal{M}} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbf{x}_i^+, \mathbf{x}_j), B(j, i) \neq 0\}$. On définit la notion "d'ensemble de couplages maximaux" l'ensemble $\text{Couplages}(B) = \{\gamma \subseteq \mathbf{X}, \text{card}(\gamma) = \theta(\mathcal{V}^+, \mathbf{X}) = \theta(\mathcal{V}^+, \gamma)\}$.

2.5.3 Conditions nécessaires et suffisantes de solubilité du problème fondamental de génération de résidus pour un système bilinéaire

L'objectif de cette étude est d'étendre au cas bilinéaire les conditions nécessaires et suffisantes graphiques de solubilité du problème fondamental de génération de résidus proposées dans [Commault et al., 2002a] pour les systèmes linéaires structurés. Ces conditions, qui reposent sur le calcul de taille de liens maximaux, sont très simples :

Théorème 2.2 Soit le système linéaire structuré Σ_{Λ}^f

$$\Sigma_{\Lambda}^f : \begin{cases} \dot{x} &= A_0 x + E f + H w \\ y &= C x \end{cases} \quad (2.12)$$

représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}_{\mathcal{B}_f}(\Sigma_{\Lambda}^f)$. Le problème fondamental de génération de résidus est génériquement soluble pour Σ_{Λ}^f si et seulement si $\rho(\mathbf{W} \cup \mathbf{F}, \mathbf{Y}) = \text{card}(\mathbf{F}) + \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$

Il est évident que, pour les systèmes bilinéaires, il n'est pas possible d'arriver à un résultat aussi simple. En effet, pour les systèmes linéaires, la propagation d'un vecteur perturbation vers les sorties peut aisément être quantifiée par $\rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$ qui est égal à $g_dim(C\mathcal{R}_H)$. En revanche, pour un système bilinéaire, une seule composante du vecteur des perturbations peut se propager indépendamment sur plusieurs sorties simultanément et donc $g_dim(C\mathcal{R}_H)$ peut être plus grand que $g_rang(H)$. La quantification de cette propagation induit une complexité certaine. En premier lieu, au vu de la définition de \mathcal{R}_H , pour obtenir la valeur de $g_dim(C\mathcal{R}_H)$, il ne faut plus comptabiliser les chemins \mathbf{W} - \mathbf{Y} disjoints mais les chemins \mathbf{W} - \mathbf{Y} A -disjoints. Par ailleurs, en raison du terme $\mathcal{R}_i \cap \text{Ker } C$ dans la séquence de calcul de \mathcal{R}_H , certains des chemins \mathbf{W} - \mathbf{Y} A -disjoints ne doivent pas être comptabilisés.

Dans le paragraphe ci-dessous, un algorithme permettant le calcul exact de $g_dim(C\mathcal{R}_H)$ est proposé. Pour des raisons de simplicité de présentation, je traite en premier lieu le cas où le système est soumis à un seul défaut. La généralisation au cas multi-défauts est ensuite réalisée en considérant séparément le cas où les défauts peuvent survenir simultanément et le cas où cela est supposé impossible.

Afin de simplifier le graphe et avant de procéder au calcul de $g_dim(C\mathcal{R}_H)$, l'hypothèse suivante est faite sur le système :

H1 : Tout sommet de $\mathbf{X} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{W}$ est le début d'au moins un chemin atteignant un sommet de \mathbf{Y} . Si un sommet de \mathbf{F} n'est pas le début d'au moins un chemin atteignant un sommet de \mathbf{Y} alors le problème de génération de résidus n'est pas soluble. En revanche, si un sommet de $\mathbf{X} \cup \mathbf{W}$ n'est pas le début d'au moins un chemin atteignant un sommet de \mathbf{Y} alors ce sommet n'a aucune influence sur la solubilité du problème de génération de résidus et il est tout simplement effacé du graphe.

2.5.3.1 Cas où le système est soumis à un seul défaut

Pour les systèmes linéaires, la caractérisation du sous espace $(A - C)$ invariant minimal contenant $\text{Im } H$ utilise [Commault *et al.*, 1997] l'ensemble de sommets

$$\mathbf{J}_1 \stackrel{def}{=} \{ \mathbf{x}_j \in \mathbf{X}, \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y} \cup \{ \mathbf{x}_j \}) = \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) \text{ et } \mu_{X,Y}(\mathbf{W}, \mathbf{Y} \cup \{ \mathbf{x}_j \}) = \mu_{X,Y}(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) \}$$

Il est clair que, pour un système structuré paramétré par un vecteur $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h)^T \in \mathbb{R}^h$, \mathcal{R}_H varie en fonction des valeurs spécifiques des paramètres λ_i . Néanmoins, il existe des sous-espaces vectoriels fixes qui contiennent \mathcal{R}_H pour presque toutes les valeurs des paramètres [Commault *et al.*, 1997]. Aussi, le plus petit de ces sous-espaces vectoriels fixes (dont la base serait formée uniquement de vecteurs de la base canonique), est noté \mathcal{R}_H^f . Il est alors prouvé [Commault *et al.*, 1997] que

$$\mathcal{R}_H^f = \text{span} \{ e_j, \mathbf{x}_j \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{J}_1 \} \quad (2.13)$$

où e_j est le j^e vecteur de la base canonique.

L'ensemble \mathbf{J}_1 peut être défini autrement en utilisant l'ensemble de couplages maximaux de la matrice H :

$$\mathbf{J}_1 \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{x}_j \in \mathbf{X}, \max_{\gamma \in \Omega_0} \rho(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{ \mathbf{x}_j \}) = \rho_0 \text{ et } \min_{\gamma \in \Omega_0, \rho(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{ \mathbf{x}_j \}) = \rho_0} \mu_{X,Y}(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{ \mathbf{x}_j \}) = \mu_0 \right\},$$

où $\Omega_0 = \text{Couplages}(H)$, $\rho_0 = \max_{\gamma \in \Omega_0} \rho(\gamma, \mathbf{Y})$ et $\mu_0 = \min_{\gamma \in \Omega_0, \rho(\gamma, \mathbf{Y}) = \rho_0} \mu_{X,Y}(\gamma, \mathbf{Y})$.

Soient les ensembles de sommets définis par :

- $\Delta_1 \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{x}_j \in \mathbf{X} \mid \max_{\gamma \in \Omega_0} \rho(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_j\}) > \rho_0 \text{ ou } \min_{\gamma \in \Omega_0, \rho(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_j\}) = \rho_0} \mu_{X,Y}(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_j\}) < \mu_0 - 1 \right\}$.
- $\Gamma_1 \stackrel{def}{=} \mathbf{X} \setminus (\mathbf{J}_1 \cup \Delta_1)$.

L'ensemble $\mathbf{X} \setminus \mathbf{J}_1$ est partitionné en deux ensembles Δ_1 et Γ_1 . L'ensemble Δ_1 ne contient aucun élément de \mathbf{X}_C et donc $\rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \rho(\mathbf{W}, \mathbf{X}_C) = \rho(\mathbf{W}, \Gamma_1)$ et $Ce_\Delta = 0$ où e_Δ est la matrice diagonale $n \times n$ définie par $e_\Delta(i, i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x}_i \in \Delta_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Ainsi, pour les systèmes linéaires, on a $C\mathcal{R}_H = Ce_\Gamma \mathcal{R}_H$ et

$g_dim(C\mathcal{R}_H) = g_dim(Ce_\Gamma \mathcal{R}_H) = g_dim(e_\Gamma \mathcal{R}_H)$ où e_Γ est la matrice diagonale $n \times n$ définie par $e_\Gamma(i, i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x}_i \in \Gamma_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

• L'ensemble Γ_1 est divisé en deux parties :

$\Gamma_{\text{int}} \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{x}_i \in \Gamma_1, \exists \text{ deux chemins } \mathbf{W} - \Gamma_1 \text{ simples } P \text{ et } Q \text{ inclus dans } \Delta_1 \text{ tels que } \alpha(Q) = \mathbf{x}_i \text{ et } P \text{ est un multiple strict de } Q \right\}$ et $\Gamma_{\text{ext}} = \Gamma_1 \setminus \Gamma_{\text{int}}$.

Évidemment, $\Gamma_{\text{int}} \subseteq \mathbf{X}_C$.

• Soient $\mathbf{W}_0 \subseteq \mathbf{W} \cup \mathbf{F}$ et $\Gamma_{\text{int}} \subseteq \mathbf{X}_C$ deux ensembles de sommets et soit l'ensemble de chemins $S = \{Q_1 \odot \sigma_1, Q_2 \odot \sigma_2, Q_3 \odot \sigma_3, \dots, Q_k \odot \sigma_k\}$, où $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ sont des éléments de $\mathcal{M}(u)$ et Q_1, \dots, Q_k sont des chemins $\mathbf{W}_0 - \Gamma_{\text{int}}$ premiers tels que $\forall i \neq j$, au moins l'une des deux conditions suivantes est vraie

- $\alpha(Q_i) = \alpha(Q_j)$,
- Q_i et Q_j sont A -disjoints.

S est dite famille $\mathbf{W}_0 - \Gamma_{\text{int}}$ complète lorsque $\forall \ell = 1, \dots, k$,

si $Q_\ell \odot \sigma_\ell \equiv P_1 \odot \sigma'_1 \equiv P_2 \odot \sigma'_2 \equiv \dots \equiv P_s \odot \sigma'_s$, avec pour tout $i = 1, \dots, s$, P_i est un chemin $\mathbf{W}_0 - \Gamma_{\text{int}}$ et $\sigma'_i \neq 1$,

alors il existe un sous ensemble $S_0 = \{Q_{i_1} \odot \sigma_{k_1} \cdot \sigma'_{j_1}, Q_{i_2} \odot \sigma_{k_2} \cdot \sigma'_{j_2}, \dots, Q_{i_t} \odot \sigma_{k_t} \cdot \sigma'_{j_t}\} \subseteq S \setminus \{Q_\ell \odot \sigma_\ell\}$ et des chemins $P'_1 \equiv Q_{i_1} \odot \sigma_{k_1}, P'_2 \equiv Q_{i_2} \odot \sigma_{k_2}, \dots, P'_t \equiv Q_{i_t} \odot \sigma_{k_t}$, tels que :

Cond3. $\{P'_1, P'_2, \dots, P'_t\}$ constitue un lien $\mathbf{W}_0 - \{\alpha(P_1), \dots, \alpha(P_s)\}$ A -disjoint de taille t ,

Cond4. la taille du lien $\mathbf{W}_0 - \{\alpha(P_1), \dots, \alpha(P_s)\}$ A -disjoint maximal parmi les chemins de $\{P_1, P_2, \dots, P_s, P'_1, P'_2, \dots, P'_t\}$ est égale à t .

Par définition, $S = \emptyset$ est une famille $\mathbf{W}_0 - \Gamma_{\text{int}}$ complète.

S est une famille $\mathbf{W}_0 - \Gamma_{\text{int}}$ complète minimale lorsqu'aucune partie non vide de S ne constitue une famille $\mathbf{W}_0 - \Gamma_{\text{int}}$ complète.

Enfin, afin de calculer $g_dim(C\mathcal{R}_H)$, une dernière définition est nécessaire :

Définition 2.4 Soit $\mathfrak{N}(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1)$ l'ensemble de tous les liens $\mathbf{W} - \Gamma_1$ A -disjoints inclus dans Δ_1 . A chaque chemin $\mathbf{W} - \Gamma_1$ P inclus dans Δ_1 , on associe une famille $\mathbf{W} - \Gamma_{\text{int}}$ complète $S(P)$ telle que :

- $S(P) = \emptyset$ lorsque P n'est pas un multiple strict d'un quelconque chemin $\mathbf{W} - \Gamma_{\text{int}}$ premier,
- Pour tout chemin Q_i $\mathbf{W} - \Gamma_{\text{int}}$ premier et $\forall \sigma_i \in \mathcal{M}(u)$, si $P \equiv Q_i \odot \sigma_i$ alors, soit $Q_i \odot \sigma_i \in S(P)$,

soit $\exists Q'_i \odot \sigma_i \in S(P)$ tel que $\alpha(Q_i) \neq \alpha(Q'_i)$ et $Q_i \equiv Q'_i$,
- $\forall Q_i \odot \sigma_i \in S(P)$, $\text{longueur}(Q_i) + \text{longueur}(\sigma_i) \leq \text{card}(\Delta_1) + \text{card}(\Gamma_1)$.

• Pour tout ensemble $\gamma \subseteq \Gamma_1$, on définit le nombre

$$\rho_A(\mathbf{W}, \gamma, \Delta_1, \Gamma_1) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{L_0 \in \mathcal{N}(\mathbf{W}, \gamma, \Delta_1)} [\text{card}(L_0)]$$

sous les contraintes :

Ca : $\forall P_0 \in L_0$, si $P_0 \equiv Q_0 \odot \sigma_0$ alors $Q_0 \odot \sigma_0 \notin \bigcup_{P \in L_0 \setminus \{P_0\}} S(P)$,

Cb : aucun élément de $S(P)$ n'est un multiple strict d'un quelconque chemin \mathbf{W} - Γ_{ext}
ou
si un élément de $S(P)$ est un multiple strict d'un chemin \mathbf{W} - Γ_{ext} P' , alors

$$\max_{L \in \mathcal{N}(\mathbf{W}, \Gamma_{\text{ext}} \setminus \{\alpha(P')\}, \Delta_1)} \text{card}(L) = \max_{L' \in \mathcal{N}(\mathbf{W}, \Gamma_{\text{ext}}, \Delta_1)} \text{card}(L') - 1$$

où L et L' contiennent seulement des chemins \bar{P} satisfaisant $S(\bar{P}) = \emptyset$.

• Finalement, on définit

$$\Omega_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{\gamma \subseteq \Gamma_1, \text{card}(\gamma) = \rho_A(\mathbf{W}, \gamma, \Delta_1, \Gamma_1) = \rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1)\}$$

L'algorithme suivant permet de quantifier en plusieurs étapes la propagation des perturbations vers les sorties. A chaque étape, on évalue la propagation des perturbations vers les sorties les plus proches. Ensuite, on détermine les directions de propagation de ces perturbations dans l'espace d'état qui sont indépendantes de celles vers les sorties les plus proches évaluées précédemment. Lorsque ces nouvelles directions existent, on les utilise comme nouveau point de départ d'un ensemble de perturbations virtuelles caractérisé par une matrice associée aux couplages maximaux Ω_i qui est l'image des directions de propagation trouvées jusque là. Tant que la propagation des perturbations virtuelles génère de nouvelles directions dans l'espace d'état, l'algorithme continue :

Algorithme 2.3 *Considérons un sous ensemble $\mathbf{V}_0 = \{\mathbf{w}_{i_1}, \mathbf{w}_{i_2}, \dots, \mathbf{w}_{i_k}, \mathbf{f}_{j_1}, \mathbf{f}_{j_2}, \dots, \mathbf{f}_{j_s}\} \subseteq \mathbf{W} \cup \mathbf{F}$. A ce sous-ensemble correspond une matrice H_0 constituée des colonnes des matrices H et E i.e. $H_0 = (H_{i_1}, H_{i_2}, \dots, H_{i_k}, E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_s})$, où H_i et E_j représentent respectivement la i^e colonne de la matrice H et la j^e colonne de la matrice E .*

Initialisation :

$\hookrightarrow \Omega_0 = \text{Couplages}(H_0)$, $\mathbf{J}_0 = \mathbf{X}$, $i = 0$

Étape i :

$\hookrightarrow \rho_i = \max_{\gamma \in \Omega_i} \rho(\gamma, \mathbf{Y})$, $\mu_i = \min_{\gamma \in \Omega_i, \rho(\gamma, \mathbf{Y}) = \rho_i} \mu_{X,Y}(\gamma, \mathbf{Y})$,

$\hookrightarrow \mathbf{J}_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{x}_j \in \mathbf{J}_i, \max_{\gamma \in \Omega_i} \rho(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_j\}) = \rho_i \text{ et } \min_{\gamma \in \Omega_i, \rho(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_j\}) = \rho_i} \mu_{X,Y}(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_j\}) = \mu_i \right\}$,

$\hookrightarrow \Delta_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_i \cup \left\{ \mathbf{x}_j \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{J}_{i+1}, \max_{\gamma \in \Omega_i} \rho(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_j\}) > \rho_i \text{ ou } \min_{\gamma \in \Omega_i, \rho(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_j\}) = \rho_i} \mu_{X,Y}(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_j\}) < \mu_i \right\}$,

$\hookrightarrow \Gamma_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{X} \setminus (\mathbf{J}_{i+1} \cup \Delta_{i+1})$,

$\hookrightarrow \Gamma_{\text{int}} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{x}_i \in \Gamma_{i+1}, \text{il existe deux chemins } \mathbf{W} - \Gamma_{i+1} P \text{ et } Q \text{ inclus dans } \Delta_{i+1} \text{ tels que} \right.$

$\alpha(Q) = \mathbf{x}_i$ et P est un multiple strict de Q }, $\Gamma_{\text{ext}} = \Gamma_{i+1} \setminus \Gamma_{\text{int}}$,

↪ Calculer $\rho_A(\mathbf{V}_0, \Gamma_{i+1}, \Delta_{i+1}, \Gamma_{i+1})$ en remplaçant Δ_1 et Γ_1 dans la définition 2.4 par Δ_{i+1} et Γ_{i+1} respectivement,

↪ Si $\rho_A(\mathbf{V}_0, \Gamma_{i+1}, \Delta_{i+1}, \Gamma_{i+1}) > \rho_i$ et $\rho_i < p$, alors

$$\Omega_{i+1} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \gamma \subseteq \Gamma_i, \text{card}(\gamma) = \rho_A(\mathbf{V}_0, \gamma, \Delta_{i+1}, \Gamma_{i+1}) = \rho_A(\mathbf{V}_0, \Gamma_{i+1}, \Delta_{i+1}, \Gamma_{i+1}) \right\},$$

$i=i+1$, puis aller à l'**Étape** i

↪ Sinon $\Gamma_*(\mathbf{V}_0) = \Gamma_{i+1}$, $\Delta_*(\mathbf{V}_0) = \Delta_{i+1}$, $\rho_*(\mathbf{V}_0) = \rho_i$, $\Omega_*(\mathbf{V}_0) = \Omega_i$.

Fin.

Il a été prouvé [Boukhobza et al., 2008b] que

$$g\text{-dim}(C\mathcal{R}_H) = \rho_*(\mathbf{W}) \quad (2.14)$$

Il est alors aisé de déduire :

Proposition 2.5 [Boukhobza et al., 2008b] Soit le système bilinéaire structuré Σ_{Λ}^{Bf} représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}_{Bf}(\Sigma_{\Lambda}^{Bf})$ et soumis à un seul défaut.

Le problème fondamental de génération de résidus est génériquement soluble pour Σ_{Λ}^{Bf} si et seulement si

$$\rho_*(\mathbf{W} \cup \mathbf{F}) > \rho_*(\mathbf{W})$$

2.5.3.2 Cas où le système est soumis à plusieurs défauts éventuellement simultanés

Dans le cas où le système Σ_{Λ}^{Bf} est soumis à plusieurs défauts, on a :

Corollaire 2.1 Soit le système bilinéaire structuré Σ_{Λ}^{Bf} représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}_{Bf}(\Sigma_{\Lambda}^{Bf})$ et soumis à plusieurs défauts éventuellement simultanés.

Le problème fondamental de génération de résidus est génériquement soluble pour Σ_{Λ}^{Bf} si et seulement si $\forall i \in \{1, 2, \dots, q\}$,

$$\rho_*(\mathbf{W} \cup \mathbf{F}) > \rho_*(\mathbf{W} \cup \mathbf{F} \setminus \{\mathbf{f}_i\})$$

2.5.3.3 Cas où le système est soumis à plusieurs défauts non simultanés

Enfin, dans le cas où à un instant donné seul un défaut peut survenir sur le système, on a

Corollaire 2.2 Soit le système bilinéaire structuré Σ_{Λ}^{Bf} représenté par le graphe orienté $\mathcal{G}_{Bf}(\Sigma_{\Lambda}^{Bf})$ et soumis à plusieurs défauts ne survenant pas simultanément.

Le problème fondamental de génération de résidus est génériquement soluble pour Σ_{Λ}^{Bf} si et seulement si $\forall i, j \in \{1, \dots, q\}$, avec $i \neq j$,

$$\Omega_*(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f}_i\}) \neq \Omega_*(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f}_j\})$$

Dans la publication [Boukhobza et al., 2008b] jointe en annexe, les trois exemples traités illustrent suffisamment bien les divers résultats exposés ci-dessus. Pour cette raison, il ne m'a pas semblé utile d'en rajouter dans ce manuscrit.

2.6 Analyse des résultats obtenus et conclusions

Dans cette partie, quatre résultats concernant les systèmes bilinéaires structurés ont été présentés. En premier lieu, des conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité ont été énoncées. Ces conditions, fondées sur un nouveau type de graphe orienté généralisent les conditions bien connues d'observabilité des systèmes linéaires structurés. La méthode proposée pour la vérification de l'observabilité, qui a fait l'objet d'une publication [Boukhobza et Hamelin, 2007], est aisément implémentable. En effet, elle nécessite un algorithme de faible ordre de complexité polynomial constitué d'un calcul de prédécesseurs et d'un calcul de taille de couplages maximaux dans un graphe biparti. Cette implémentation a été réalisée par M. T. MADER dans la boîte à outils LISA. Le second problème étudié dans cette partie est l'observabilité uniforme des systèmes bilinéaires. Deux approches ont été proposées pour résoudre ce problème. La première [Boukhobza *et al.*, 2006b] repose sur l'observabilité des systèmes singuliers. Seule la seconde [Boukhobza, 2008a] qui repose sur l'observabilité forte des systèmes linéaires standards à entrées inconnues a été présentée dans ce manuscrit. Les deux approches aboutissent à deux groupes de conditions non triviales. Les premières sont nécessaires et les secondes suffisantes équivalentes à la mise sous forme "uniform observable structure" de [Hammouri et Farza, 2003].

Le dernier résultat relatif à l'observabilité présenté dans ce manuscrit permet de caractériser exactement l'observabilité de l'état et des entrées d'un système bilinéaire. La même subdivision que celle introduite pour les systèmes linéaires est utilisée pour obtenir deux sous-systèmes dont l'observabilité conjointe est équivalente à l'observabilité du système global. Des conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité de l'état et de l'entrée sont obtenues. La première condition est similaire à celle des systèmes linéaires. Elle nécessite le calcul de sommets essentiels dans un lien entrée-sortie. La seconde condition revient à vérifier l'observabilité d'un système bilinéaire sans entrée inconnue après un nombre fini de transformations itératives du graphe d'origine. La propriété d'observabilité générique de l'état et de l'entrée d'un système bilinéaire structuré est ainsi complètement caractérisée grâce à des algorithmes dont l'ordre de complexité est polynomial. Cependant, l'observabilité de l'état et de l'entrée ne garantit pas l'existence d'un observateur causal permettant la reconstruction de l'état et de l'entrée inconnue. Cela conduit à des résultats quelque peu singuliers comme le fait que l'état et l'entrée d'un système soient fortement observables mais qu'il n'existe pas de générateurs de résidus causaux de la forme (2.5) permettant de localiser cette entrée parmi d'autres dans un contexte de diagnostic.

Suite à ce constat, mon attention s'est portée sur l'analyse des propriétés de diagnosticabilité des systèmes bilinéaires. Des conditions graphiques nécessaires et suffisantes à la solubilité générique du problème de génération de résidus ont été trouvées. Ce résultat, de loin le plus complexe de ceux présentés dans ce manuscrit a fait l'objet d'une publication [Boukhobza *et al.*, 2008b]. Son implémentation est rendue difficile par la notion de familles complètes dont la définition est nécessaire. Cependant, l'algorithme proposé repose essentiellement sur des recherches de chemins, de liens A -disjoints et sur des calculs d'indices. Ainsi, la vérification des conditions de solubilité générique du problème de génération de résidus requiert une implémentation d'ordre de complexité assez élevé mais polynomial alors que par la méthode géométrique, la séquence de calcul du sous-espace invariant \mathcal{R}_H a un ordre de complexité exponentiel car elle nécessite dans le pire cas le calcul de

$(m + 2)^n$ produits de matrices. De plus, des simplifications du graphe considéré peuvent aisément être envisagées.

Les divers résultats exposés dans cette partie ont un lien certain avec les études menées par S. CANITROT, un des doctorants que je co-encadre. Dans le domaine de l'observabilité, ses travaux portent principalement sur la problématique du placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité générique de tout ou d'une partie de l'état pour un système bilinéaire structuré.

En ce qui concerne le diagnostic, les résultats exposés ici ont permis de souligner le lien structurel entre la solubilité du problème de génération de résidus et la commande appliquée au système. En effet, la structure même du système change si les entrées appliquées aux systèmes sont nulles ou constantes, . . . , de par la suppression de certains chemins par exemple. La propagation des défauts ou des perturbations vers les sorties dépend ainsi fortement des valeurs des entrées. Ainsi, S. CANITROT, dès son stage de D.E.A, a mis en évidence l'existence de valeurs d'entrée pour lesquelles il est possible de générer des résidus permettant la localisation d'un défaut ce qui n'aurait pas été possible pour d'autres entrées. Le cas particulier où certaines entrées sont nulles et toutes les autres ont des valeurs constantes quelconques a été considéré. Cette étude a abouti à des conditions suffisantes pour la solubilité du problème de génération de résidus active [Canitrot *et al.*, 2007]. De plus, lorsque ce problème est soluble, un algorithme exhaustif caractérisant toutes les configurations des entrées nulles ou constantes qui permettent de le résoudre a été proposé. Suite à ces résultats, d'autres analyses plus poussées de la solubilité de ce problème appelé génération de résidus active font partie des perspectives de recherche exposées à la fin du document.

Il est à noter que la problématique de l'observabilité uniforme est assez proche de celle de génération de résidus active. En effet, dans le premier cas, il s'agit de répondre à la question d'existence de valeurs de commande rendant inobservable une partie de l'état alors que pour la seconde, il s'agit de vérifier l'existence de valeurs de commande rendant inobservable une perturbation tout en maintenant l'observabilité d'un défaut à détecter.

De même que pour les systèmes linéaires structurés, tous les résultats exposés dans cette partie sont génériques. De plus, les paramètres non nuls du système sont supposés être indépendants et ne vérifiant *a priori* aucun système d'équations polynomiales. Lorsque cette hypothèse n'est pas vérifiée, les diverses propositions énoncées ici ne sont plus valides. Ce problème sera abordé dans mes perspectives de recherche.

Troisième partie

Perspectives et programme de
recherche

L'apport essentiel de mes travaux de recherche se situe dans la proposition d'outils d'analyse graphique de diverses propriétés d'observabilité pour les systèmes linéaires et bilinéaires. Certaines de ces propriétés ont bien sûr été étudiées dans le passé en utilisant des outils algébriques ou géométriques. L'originalité de mon travail réside, pour ces cas là, dans la nouveauté de l'approche graphique utilisée et dans les points forts qui la caractérisent. En effet, l'objectif que j'ai tenté d'atteindre est d'obtenir des critères graphiques intuitifs d'observabilité ou de diagnosticabilité, utilisant des algorithmes classiques de la théorie des graphes et qui aient, si possible, un ordre de complexité polynomial afin de garantir leur applicabilité aux systèmes de grande dimension. En ce qui concerne certains autres des résultats exposés dans ce manuscrit et qui n'ont pas d'exactes équivalents géométriques ou algébriques tels que les conditions nécessaires d'observabilité uniforme, les critères d'observabilité de l'état et des entrées inconnues pour les systèmes bilinéaires ou bien les diverses études de placement de capteurs, l'originalité est double de par le résultat lui même et ensuite par l'approche utilisée.

Évidemment, et cela est particulièrement vrai en recherche, les objectifs de départ n'ont pas tous été atteints et les études menées ont amené de nouvelles questions ou ont permis de croire en la possibilité de s'atteler à la résolution de nouveaux problèmes.

Dans cette partie, je décris différentes pistes autour desquelles je souhaite construire un projet de recherche, qui je le pense actuellement, peut être intéressant et réalisable à court et moyen terme. Ma prétention n'ira pas au delà. Je ne sais point encore le nombre de pas que je ferai sur ce chemin dont je ne perçois, heureusement, pas le bout.

Il est en général attendu que la rédaction d'un document d'Habilitation à Diriger les Recherches vient mettre un point final à un projet de recherche et permet de refermer un chapitre pour commencer l'écriture d'un autre, qui peut être d'une autre dimension. Je pense ainsi que pour ce qui est de l'analyse structurelle des propriétés d'observabilité des systèmes linéaires standards ou singuliers, le chapitre est pratiquement écrit, quand bien même quelques pages sont encore perfectibles, des hypothèses peuvent éventuellement être levées, des résultats peuvent davantage être simplifiés... Reste cependant un livret d'accompagnement à écrire (on dirait actuellement peut être un CD d'accompagnement) qui consiste en la concrétisation (la mise en musique) des résultats exposés, et d'autres encore, dans un logiciel ou plus précisément une boîte à outils d'analyse et de conception des systèmes par approche graphique. L'aspect recherche dans cette entreprise est moins axé sur l'automatique que sur la théorie des graphes. Cela est déjà une autre rencontre.

Concernant l'automatique, le nouveau chapitre à écrire est la proposition d'outils d'analyse structurelle par approche graphique dédiés aux systèmes non linéaires en général. Vaste et ambitieux programme. Quelques résultats obtenus pour les systèmes bilinéaires sont assez encourageants pour assurer l'optimisme minimal nécessaire pour démarrer ce projet. Ils sont aussi suffisamment complexes pour prévoir que ce programme de recherche ne sera pas trivial et pour mettre un peu d'expérience dans les espoirs à avoir.

Le projet de recherche que je présente regroupe tout cela. Il a été divisé en plusieurs points à des fins de présentation mais forme un ensemble dont l'objectif est de proposer des critères d'analyse reposant sur la théorie des graphes pour les systèmes complexes et/ou de grande dimension avec mise en œuvre logicielle. Les problématiques exposées ci-dessous correspondent à la structuration rhétorique de ce projet et ne sont pas considérées comme des étapes ou des axes de recherches

indépendants. Ces problématiques pourraient aussi servir de trame de fond à des sujets de thèse qui en incluraient les parties les moins risquées. En effet, je préférerais assumer autant que possible, pour ce projet, la responsabilité des échecs inhérents à toute démarche de recherche. Cela nécessite évidemment non seulement une implication dans la supervision de ce projet mais aussi beaucoup dans sa réalisation technique.

Amélioration des résultats obtenus

Quelques uns des résultats présentés dans ce manuscrit sont encore perfectibles. L'amélioration que l'on peut y apporter peut être de deux types différents. Pour les résultats assez complexes, tels que ceux concernant l'observabilité à droite des systèmes linéaires singuliers ou la solubilité du problème de génération de résidus pour les systèmes bilinéaires, une simplification peut être recherchée dans le but d'en améliorer l'énoncé et l'applicabilité.

En fait, parmi tous les résultats présentés dans ce manuscrit, les conditions d'observabilité à droite des systèmes singuliers sont les seules dont l'implémentation conduit à un algorithme d'ordre de complexité structurellement exponentiel car incluant un test à faire sur tous les sous-ensembles d'un ensemble de sommets. Or, l'un des avantages affichés de l'approche graphique est son adéquation du point de vue calculatoire aux systèmes de grande dimension, ce qui consisterait, entre autres, à avoir des algorithmes d'ordre de complexité aussi peu élevé que possible. Ainsi, certaines pistes pour modifier l'approche adoptée pour les systèmes singuliers comprendraient par exemple l'utilisation généralisée des séparateurs d'entrée ou d'autres types de séparateurs ainsi que des simplifications systématiques des graphes étudiés pouvant aboutir à des propositions moins compliquées à mettre en œuvre. D'autre part, l'approfondissement des connaissances en théorie des graphes pourrait amener à utiliser de nouveaux outils adaptés aux problèmes d'automatique auxquels je m'intéresse. En effet, les résultats obtenus jusque-là avec les connaissances nouvellement acquises au cours des quatre dernières années laissent espérer qu'une meilleure compréhension et maîtrise des outils graphiques, notamment en ce qui concerne les graphes colorés aboutirait à des résultats plus fins et plus efficaces. Aussi, en parallèle à d'autres projets de recherche que je pourrai mener, il me tient à cœur d'acquérir une base de connaissances plus solide en théorie des graphes.

Le second résultat qu'il semble possible d'améliorer pour le rendre plus applicable concerne l'analyse de la solubilité du problème de génération de résidus pour les systèmes bilinéaires. Dans ce cas, l'algorithme utilisé n'est pas d'ordre de complexité exponentiel, comme cela est discuté dans [Boukhobza *et al.*, 2008b], mais son énoncé est fastidieux et pourrait être éventuellement simplifié. Notamment, la détermination des familles complètes permettant de quantifier la propagation des perturbations et des défauts des systèmes pourrait être améliorée. Une étude est en cours pour associer au graphe du système bilinéaire, un autre graphe orienté auxiliaire où certains sommets et arcs seraient dupliqués afin de transformer la recherche de familles complètes en recherche de chemins disjoints à l'image du graphe biparti défini dans le paragraphe 2.2.3.

Pour d'autres résultats, où au lieu de conditions nécessaires et suffisantes, par exemple, nous ne sommes parvenus à établir que des conditions nécessaires et/ou suffisantes, il serait ambitieux de rechercher des améliorations dans la précision et l'efficacité des outils d'analyse proposés. En par-

ticulier, les solutions proposées à deux problèmes sont concernées par cette intention. Le premier est celui du placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité d'un ensemble donné de composantes de l'entrée et de l'état. Le second, plus difficile, se rapporte à la caractérisation assez difficile de la propriété d'observabilité uniforme des systèmes bilinéaires. L'objectif dans un premier temps, pour les deux problèmes est d'avoir des conditions nécessaires plus pertinentes, les conditions suffisantes étant, quant à elles, moins facilement perfectibles

Implémentation logicielle d'outils d'analyse structurelle

Afin de rendre plus concret l'apport de l'analyse structurelle par approche graphique, il est important, de mon point de vue, d'implémenter tous les résultats trouvés et même tous ceux disponibles dans la littérature pour mettre à disposition de la communauté un outil d'analyse structurelle pertinent pour les systèmes linéaires et bilinéaires. La boîte à outils LISA a été conçue dans cet esprit. Elle dispose pour l'instant des outils de base et comprend quelques implémentations de résultats sur l'observabilité.

Plus précisément, LISA est une boîte à outils d'analyse structurelle graphique dédiée aux systèmes linéaires et bilinéaires structurés [Martinez-Martinez *et al.*, 2007]. Elle a comme objectif d'être utilisée pour l'analyse et la conception de systèmes de grande dimension. Dans ce cas, la majorité des problèmes à résoudre peuvent être assez coûteux en temps et en complexité de calcul, comme par exemple celui de trouver des chemins disjoints dans un graphe orienté . . . Il nous a semblé crucial d'utiliser un langage de programmation avec un faible surcoût propre (overhead), convivial et assez proche du niveau du code machine. Le langage C/C++ nous a paru assez adapté, il est très flexible dans la création d'objets ou classes et est assez performant à l'exécution. Concernant l'interface graphique utilisateur, la bibliothèque libre QT 4.0 a été choisie car elle est flexible, très portable et assez simple d'utilisation pour la création d'interfaces graphiques. La simplicité de programmation et l'évolutivité ont été des critères cruciaux dans le choix des outils de programmation. De plus, le fait d'adopter des plateformes libres de droits, permet d'envisager un partage et une diffusion plus simples auprès de la communauté scientifique. Par ailleurs, LISA a été conçue pour s'exécuter aussi bien sur les systèmes d'exploitations Microsoft Windows[®] 98, XP et NT, que LINUX. Enfin, une attention particulière a été portée à sa documentation. Tous les objets, les classes, les méthodes utilisés ont documentés. Cette documentation est sous forme de pages html regroupés dans un répertoire dédié.

Avant d'évoquer mes perspectives à court et moyen terme concernant LISA, je décris en premier lieu brièvement son contenu actuel.

Afin de faire l'analyse des propriétés structurelles de systèmes linéaires et bilinéaires, LISA utilise des algorithmes de base. Ces "briques" élémentaires ont été créées pour être portables et implémentables dans d'autres contextes dans un souci d'évolutivité. Ci-dessous, j'en expose les principaux algorithmes en donnant leurs ordres de complexité.

- Calcul des sommets successeurs (resp. prédécesseurs) : l'ordre de complexité de cet algorithme est en $O(M)$, où M représente ici le nombre total d'arcs dans le graphe qui dépend de la dimension du système considéré.

- Calcul du nombre maximal de chemins disjoints entre deux ensembles de sommets : l'algorithme utilisé consiste en une partie de l'algorithme de Ford-Fulkerson [Ford et Fulkerson, 1962, Cormen *et al.*, 2001] et a un ordre de complexité total en $O(N^2\sqrt{M})$.
- Calcul de l'ensemble des sommets essentiels : le calcul s'effectue en faisant le constat simple que le nombre maximal de chemins entre \mathbf{V}_1 et \mathbf{V}_2 diminue si tous les arcs arrivant et partant d'un sommet essentiel sont effacés. En revanche, ce nombre ne varie pas si sont effacés les arcs arrivant et partant d'un sommet non essentiel. L'ordre de complexité pour ce calcul est $O(N^3\sqrt{M})$.
- Calcul des séparateurs d'entrée et de sortie : on utilise l'algorithme précédent pour trouver les sommets essentiels. Pour trouver le séparateur d'entrée, il est suffisant de prendre les sommets essentiels les plus proches de la source dans le graphe auxiliaire. Le séparateur de sortie est construit par symétrie en considérant les sommets essentiels les plus proches du sommet puits. Ainsi, l'ordre de complexité total de l'algorithme permettant le calcul des séparateurs d'entrée et de sortie est de $O(N^3\sqrt{M})$.
- Calcul de la taille du couplage maximal entre deux ensembles de sommets : pour cette fonctionnalité, un graphe biparti est construit sur lequel est appliqué un calcul de flot maximal. Ainsi, l'ordre de complexité total de l'algorithme proposé pour le calcul de la taille du couplage maximal est de $O(N^2\sqrt{M})$.

Les algorithmes de base, présentés ci-dessous, sont utilisés afin de construire les différents tests d'analyse des propriétés structurelles d'observabilité. Les propriétés analysées dans LISA sont pour l'instant l'observabilité totale de l'entrée et de l'état et la solubilité du problème de génération de résidus dans les cas mono-défaut et multi-défauts pour les systèmes linéaires ainsi que l'observabilité des systèmes bilinéaires.

L'analyse de plusieurs propriétés, concernant les systèmes linéaires du moins, pourrait être assez facilement implémentée en utilisant les algorithmes de base existants de LISA. D'autres, en revanche, nécessiteraient des études et des recherches supplémentaires afin de satisfaire à la contrainte qui est de n'implémenter si possible que des algorithmes d'ordre de complexité polynomial. Dans ce paragraphe, je présente quelques résultats qu'il est envisageable de programmer dans LISA. D'abord, je discuterai des résultats présentés dans ce manuscrit avant d'aborder d'autres résultats d'analyse structurelle dont il est possible de trouver les détails notamment dans [Dion *et al.*, 2003].

Observabilité forte de tout l'état : l'analyse de cette propriété ne présente aucune difficulté à être implémentée. En effet, les conditions de la proposition 1.3 sont très proches des conditions programmées pour l'observabilité forte de l'état et de l'entrée. L'algorithme utilisé aurait un ordre de complexité égal à celui dédié à l'observabilité forte de l'état et de l'entrée *i.e.* $O(N^3\sqrt{M})$.

Observabilité forte d'une partie donnée de l'entrée et de l'état : afin de déterminer si un ensemble Δ des composantes de l'état ou de l'entrée est fortement observable, il faut ou bien déterminer l'ensemble $\mathcal{V}_{obs} \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{X} \cup \mathbf{U}, \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{v}\}) = \beta(\mathbf{Y}) \right\}$ (cf. proposition 1.2) ou vérifier si $\beta(\mathbf{Y} \cup \Delta) = \beta(\mathbf{Y})$. Dans les deux cas, il s'agit de calculer la fonction $\beta(\bullet)$ dont l'expression est

donnée au paragraphe 1.4.2. Cette fonction est la somme de deux fonctions β_0 et β_1 .

Pour un ensemble \mathbf{V} tel que $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{V} \subseteq \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$, l'expression de β_0 est : $\beta_0(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \mu[\mathbf{U}_0(\mathbf{V}), \mathbf{S}^o(\mathbf{V})] - \rho[\mathbf{U}_0(\mathbf{V}), \mathbf{S}^o(\mathbf{V})]$. L'évaluation de β_0 nécessite une décomposition du système qui s'effectue avec un algorithme d'ordre de complexité $O(N^3\sqrt{M})$ déjà programmé dans LISA. Le calcul du nombre maximal de chemins $\rho[\mathbf{U}_0(\mathbf{V}), \mathbf{S}^o(\mathbf{V})]$ est aussi programmé dans LISA. Reste la fonction $\mu[\mathbf{U}_0(\mathbf{V}), \mathbf{S}^o(\mathbf{V})]$ qui retourne le nombre minimal de sommets couverts par un lien $\mathbf{U}_0(\mathbf{V})$ - $\mathbf{S}^o(\mathbf{V})$ maximal. Cette fonction peut être implémentée grâce à l'algorithme primal-dual [Hovelaque *et al.*, 1996] qui aboutirait à un ordre de complexité en $O(N^3\sqrt{M})$. Pour l'évaluation de β_0 , un ordre de complexité total en $O(N^3\sqrt{M})$ est possible.

Pour ce qui est de la fonction β_1 , elle est définie, pour tout ensemble \mathbf{V} , tel que $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{V} \subseteq \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$, comme étant le nombre maximal de sommets de $\mathbf{X}_1(\mathbf{V}) \cup \mathbf{X}_s(\mathbf{V}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{V})$ couverts par une union disjointe :

- d'un lien $\mathbf{X}_s(\mathbf{V}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{V})$ - $\Upsilon_1(\mathbf{V})$ de taille $\rho[\mathbf{X}_s(\mathbf{V}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{V}), \Upsilon_1(\mathbf{V})]$,
- d'une famille de chemins $\mathbf{X}_1(\mathbf{V})$ - $\Upsilon_1(\mathbf{V})$ simples,
- d'une famille de cycles ne couvrant que des éléments de $\mathbf{X}_1(\mathbf{V})$.

Jusque très récemment, l'algorithme pensé pour cette fonction était basé sur un balayage de toutes les unions disjointes de chemins et de cycles pour évaluer celles qui couvriraient le maximum de sommets. Cette solution conduit évidemment à un ordre de complexité exponentiel. Cependant, les travaux sur l'observabilité des systèmes bilinéaires à entrées inconnues m'ont amené à transformer le graphe afin que l'évaluation de β_1 soit équivalente à la détermination juste du nombre maximal de sommets couverts par une famille de chemins disjoints. Ensuite, par des recherches successives du chemin le plus long et par des transformations itératives du graphe d'origine similaire à celles décrites dans l'algorithme 2.2, il est possible d'aboutir à des graphes plus simples formé de chemins entrée-sortie disjoints couvrant un nombre maximal de sommets et d'une partie de graphe non connectée aux sommets d'entrée. L'ordre de complexité de cet algorithme serait polynomial car ne faisant appel qu'à des algorithmes d'ordre de complexité polynomial. Cette approche est encore en développement et pourrait aboutir prochainement à une implémentation de la fonction β .

Une fois cet algorithme lié au calcul de $\beta(\bullet)$ mis en œuvre, l'analyse de l'observabilité partielle pourrait rapidement être implémentée.

Placement de capteurs pour l'observabilité forte de tout l'état : Les étapes du placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité forte de tout l'état reposent essentiellement sur :

- Le calcul de la taille de couplages maximaux et l'application de décomposition de Dulmage-Mendelsohn pour le recouvrement de la condition de couplage. Pour ce faire, les algorithmes de la décomposition de Dulmage-Mendelsohn existent dans plusieurs bibliothèques et aboutissent à un ordre de complexité en $O(M^2)$ [Lovasz et Plummer, 1986, Chen et Kanj, 2003].
- La détermination des composantes connexes et leur ordonnancement pour le recouvrement de la condition de connectivité. Cela peut se faire respectivement par les algorithmes déjà présents dans **lisa** : calcul du nombre de chemins disjoints entre deux sommets, détermination n des ensembles de successeurs et de prédécesseurs et calcul de la taille de couplage entre deux composantes connexes. Ainsi, trouver les composantes connexes minimales reposerait sur des algorithmes de base déjà programmés qui induiraient un ordre de complexité polynomial.

- Le calcul de séparateurs de sortie pour le recouvrement des conditions de distance et d'inversibilité à gauche dont les outils sont déjà programmés dans LISA.

En résumé, l'implémentation de l'aide au placement de capteurs pour le recouvrement de la propriété d'observabilité forte serait assez aisée à réaliser à partir des outils existant dans LISA et dans la littérature classique de la théorie des graphes.

Placement de capteurs pour l'observabilité partielle : la stratégie proposée de placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité forte d'un ensemble donné de composantes de l'état et de l'entrée se déroule en deux étapes. La première est relative au recouvrement de la condition de connectivité à la sortie. Comme cela est décrit précédemment, il est possible d'associer des algorithmes de base permettant l'évaluation des ensembles de successeurs et de prédécesseurs et l'évaluation de la taille de couplage entre deux composantes connexes.

La seconde étape nécessite, quant à elle, l'utilisation de la fonction β pour la détermination des ensembles $\Gamma_{x,k}$. Comme cela a été discuté auparavant, l'algorithme relatif à cette fonction est en cours de conception. Cela reste la seule difficulté avant l'implémentation d'une fonctionnalité de placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité forte d'un ensemble donné des composantes. En effet, pour le reste, il suffit d'ordonner des ensembles de sommets par rapport à la relation d'inclusion des ensembles. La solution du système de contraintes (1.6) pourrait se faire par une décomposition de Dulmage-Mendelsohn.

Implémentation d'outils d'analyse d'autres propriétés structurelles pour les systèmes linéaires : la finalité de LISA étant de proposer une panoplie d'outils d'analyse la plus large possible, il est prévu d'implémenter les résultats relatifs à d'autres propriétés structurelles des systèmes linéaires que celles établies au sein de l'équipe DIMODIC du CRAN. Ainsi, en utilisant les algorithmes de base de LISA, l'analyse de la propriété de commandabilité, propriété duale de l'observabilité, est programmable sans effort.

Par ailleurs, une fois le calcul de la fonction β mis au point, la fonctionnalité calculant le nombre générique de zéros invariants du système pourra être rajoutée.

L'analyse du problème de découplage par retour d'état [Dion et Commault, 1993] utilise le calcul du nombre maximal de chemins disjoints entre deux ensembles ainsi que le nombre minimal de sommets couverts par un lien entrée-sortie maximal. L'algorithme de base pour le calcul du premier nombre existe déjà. Quant au second nombre, il est calculable par l'algorithme primal-dual [Hovelaque *et al.*, 1996]. Cette fonctionnalité serait implémentable assez aisément. Il en est de même pour la solubilité du problème de rejet de perturbations par retour d'état ou retour de sortie ainsi que les caractérisations de la structure à l'infini et des dimensions de différents sous-espaces invariants qui requièrent ces mêmes outils de base.

Concernant les systèmes bilinéaires, l'observabilité de l'état et de l'entrée inconnue peut aussi être programmée avec les outils existants. Quant aux conditions de solubilité du problème fondamental de génération de résidus, des efforts doivent d'abord être fournis pour la simplification de leur énoncé. Une implémentation pourrait alors suivre.

Comme cela est donc argumenté, un projet réalisable à court terme serait de compléter la boîte à outils LISA du moins pour ce qui est des systèmes linéaires. Bien qu'il ne s'agisse pas là d'un travail de recherche méthodologique pure, je pense que cette perspective n'est pas futile pour ce qui est

de l'analyse structurelle par approche graphique et sa diffusion. Cela permettrait aussi de faire un point sur tout ce qui a été fait et ouvrirait le champ à des collaborations qui pourraient être très fructueuses. En effet, l'implémentation de certaines fonctionnalités ou résultats n'étant pas trivial, un travail de réflexion et d'optimisation sur les ordres de complexité des algorithmes utilisés devrait accompagner la partie programmation. Des solutions devront ainsi être recherchées du côté de la théorie des graphes et de la recherche opérationnelle.

Analyse structurelle d'autres propriétés. Diverses extensions

Du point de vue de l'automatique, les premiers points de mon projet de recherche, énoncés ci-dessus, concernent plus l'achèvement de ce qui a été fait jusque-là. Quant à la mise en œuvre de la boîte à outils LISA, je pense qu'il y a à fournir un effort de recherche non négligeable mais davantage dans le domaine de l'algorithmique et de la théorie des graphes, qui est une nouvelle direction que je souhaite aussi prendre.

Néanmoins, concernant la théorie de l'automatique ou de l'analyse structurelle, ces deux parties de mon projet nécessitent bien moins d'imagination et de force de projection dans l'avenir qu'aller vers de nouvelles recherches, en l'occurrence l'établissement de critères graphiques pour l'analyse de classes plus larges de systèmes non linéaires par exemple. Là, le risque de ne pas y arriver est plus grand, bien que les connaissances actuelles et les résultats obtenus pour les systèmes bilinéaires rendent le défi non complètement insensé. En tout cas, les vrais challenges scientifiques que je souhaite relever se trouvent dans l'extension des résultats obtenus à de nouvelles propriétés ou/et à de nouveaux types de systèmes. Les différents points de recherche qui suivent font partie de mon projet de recherche pour les quatre ou cinq années à venir. Ils sont d'ordres de difficulté divers et concernent de nouveaux problèmes de recherche encore ouverts et toujours dans la thématique analyse structurelle par approche graphique. Aussi, comme l'a dit Claude Lévi-Strauss, "Le savant n'est pas l'homme qui fournit les vraies réponses, c'est celui qui pose les vraies questions", j'espère et je crois, aujourd'hui, que ces problèmes méritent d'être étudiés.

Synthèse d'observateurs et étude de la propriété d'observation causale pour systèmes bilinéaires

Comme cela a déjà été évoqué, la propriété d'observabilité ne garantit aucunement l'existence d'un observateur causal permettant l'estimation de l'état et de les entrées inconnues d'un système bilinéaire et même d'un système linéaire à entrées inconnues. C'est ainsi que les travaux relatifs à la synthèse d'observateurs pour les systèmes linéaires à entrées inconnues, ou pour les systèmes non linéaires en général, imposent des contraintes qui sont des conditions suffisantes d'observabilité en plus des conditions de stabilisabilité de l'observateur utilisé. De la même manière et tout comme pour le problème de génération de résidus, où la causalité de l'observateur est imposée et fait partie du problème, je pense qu'il est possible de définir pour les systèmes bilinéaires avec et sans entrée inconnue une propriété "d'observation causale" pour l'observation de la totalité ou d'une quelconque partie de l'état et des entrées inconnues. La caractérisation graphique de cette propriété fait partie des perspectives envisageables et serait un complément intéressant aux travaux d'observabilité

exposés dans ce manuscrit. Ce travail serait assez proche de celui effectué pour les systèmes linéaires dans [Commault *et al.*, 2001] où les auteurs proposent des conditions graphiques nécessaires pour l'existence d'un observateur causal stable permettant d'obtenir une estimée de l'état d'un système totalement découplée de l'entrée inconnue à laquelle il est soumis.

Placement de capteurs pour la solubilité de problèmes de commande

Pour l'instant, seuls des problèmes de placement de capteurs liés à des propriétés d'observabilité ont été traités, si le problème de détection et localisation de défauts est considéré comme un problème d'observation. Cela est tout à fait logique vu que l'observabilité est un problème directement lié au placement de capteurs. Cependant, je pense que la solubilité de certains problèmes d'automatique dépend aussi du placement des capteurs. Plus précisément, je pense à tout ce qui est lié au retour de sortie. Ainsi, les premiers problèmes de commande qui seraient intéressants à aborder sont ceux du rejet de perturbations et du découplage entrée-sortie par retour de sortie. En effet, les conditions de solubilité de ce problème [van der Woude, 1996, Commault *et al.*, 1997] sont relativement proches de la condition de distance relative à l'observabilité de l'état et de l'entrée d'un système linéaire.

Extension des résultats d'observabilité aux systèmes bilinéaires singuliers

Une réduction de la complexité de l'approche et des algorithmes dédiés à l'analyse de l'observabilité des systèmes linéaires singuliers ouvrirait la voie à une extension des résultats relatifs à l'observabilité des systèmes bilinéaires singuliers. Je pense ainsi que l'analyse structurelle de l'observabilité ou de la propriété d'observation causale que je propose serait assez complémentaire de travaux récents notamment de chercheurs du CRAN [Bara *et al.*, 1999] qui sont dédiés à la synthèse d'observateurs pour les systèmes bilinéaires singuliers. Néanmoins, même si cette étude peut être menée dès maintenant, en l'état actuel de mes connaissances en théorie des graphes, je pense qu'elle aboutirait à des conditions graphiques assez complexes à présenter et à manipuler. Or, l'un des objectifs principaux de l'utilisation de l'approche graphique est de proposer des résultats simples à énoncer et à utiliser qui soient adaptés aux grands systèmes par leur faible ordre de complexité algorithmique.

Etude des interactions commande - diagnostic pour les systèmes bilinéaires

A l'identique d'un diagnostic médical, la détection d'un dysfonctionnement précoce et sûr permettrait de prévenir des dommages importants sur les systèmes. Au vu de la complexité des modèles et donc de la diversité des défauts pouvant y survenir, il serait judicieux de faire participer les commandes du système à la détection et à l'isolation des défauts. En effet, la commande peut être un bon moyen d'action sur le système rendant possible, aussi bien la mise en évidence d'un défaut que son masquage.

Suite à ce constat et au déficit des recherches actuelles dans le domaine, l'objectif est de proposer une méthodologie de diagnostic dit "actif" en exploitant les liens bilatéraux unissant la commande au diagnostic pour les systèmes non linéaires. En effet, pour les systèmes linéaires, le problème du diagnostic tout comme le problème d'observation est complètement "séparable" de la commande, bien qu'un défaut peut être rendu non détectable par les effets d'un retour d'état. Mais l'approche proposée ici est plus structurelle.

L'étude des interactions existant entre la commande et le diagnostic présente plusieurs aspects différents. Comme en témoigne le nombre important de sessions dévolues à ce problème lors du dernier SAFEPROCESS, cet axe de recherche est en plein essor [Blanke *et al.*, 2003]. La majorité des travaux ayant trait à ce problème se focalise essentiellement sur l'utilisation de l'information de détection d'un défaut pour modifier ou reconfigurer la commande du système en fonction de la sévérité du défaut. En effet, dans de nombreuses applications, le diagnostic d'un défaut n'est pas une fin en soi mais fait partie intégrante de la stratégie de commande d'un système. Ainsi, la plupart des méthodes prenant en compte les interactions commande/diagnostic privilégient une synthèse simultanée du correcteur et du générateur de résidus dédié au diagnostic. Un autre côté des interactions commande/diagnostic consiste à établir des lois de commande facilitant et ne dégradant pas la "diagnosticabilité" du système. Bien que peu de travaux abordent ce sujet, il me semble important d'exploiter les possibilités qu'offre la loi de commande à modifier les effets du défaut sur le système.

Cet axe de recherche se distingue des travaux classiques dans le domaine car il a pour ambition de rendre actives ces interactions. En effet, aucun travail existant ne fait état des apports liés à la mise en œuvre d'une stratégie de commande active favorisant ou de ne dégradant pas la "diagnosticabilité" d'un défaut sur un système.

Pour illustration des avantages de cette stratégie sur le diagnostic, je peux citer la succession de tests effectués par un garagiste sur une voiture dans une procédure de détection et de localisation de pannes. Cela se traduirait sur un système par l'enclenchement de modes de fonctionnement spécifiques permettant de localiser un défaut et d'en parfaire le diagnostic.

La synthèse d'une stratégie de commande "utile" au diagnostic d'un système, qui serait la principale originalité de ce travail, passe inéluctablement par une étude préalable concernant l'action de la commande sur les propriétés de détection et de localisation des défauts. Ce travail d'analyse est, en partie, entamé sur des systèmes bilinéaires. En effet, j'ai commencé avec S. CANITROT l'étude de l'effet de la commande sur la solvabilité du problème de génération de résidus pour les systèmes bilinéaires. Nos recherches ont déjà abouti [Canitrot *et al.*, 2007] à des conditions suffisantes sur les lois de commande assurant la détection et la localisation de défauts sachant que ce diagnostic n'est pas possible pour des entrées de commande quelconques. Aussi, je pense que l'approche graphique, qui met bien en évidence les interactions commande- diagnostic est un outil bien adapté pour mener à bien cetes étude.

Placement de capteurs pour les systèmes bilinéaires

En parallèle à l'étude débutée par S. CANITROT sur le recouvrement de l'observabilité totale ou partielle des systèmes bilinéaires, je compte aborder divers problèmes de placement de capteurs. En effet, il me semble possible de proposer à court terme une procédure de placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité de l'entrée et de l'état d'un système bilinéaire en s'inspirant assez efficacement des travaux exposés dans le paragraphe 1.6 et dans [Boukhobza et Hamelin, 2008b, Boukhobza, 2008c].

D'autre part, les travaux [Commault et Dion, 2007, Commault *et al.*, 2006] ayant montré l'intérêt de l'analyse du placement de capteurs afin de rendre soluble le problème de génération de résidus,

cette problématique serait une perspective intéressante à mes travaux. Une idée qui permettrait d'aborder cette question serait de transformer le problème de génération de résidus pour les systèmes bilinéaires en un problème similaire pour les systèmes linéaires par duplication des sommets dans le graphe associé au système sous certaines contraintes. Il en découlerait une adaptation de la définition des séparateurs tels qu'utilisés dans [Commault et Dion, 2007] puis une première version, probablement non exhaustive, d'une procédure de placement de capteurs pour rendre soluble le problème de génération de résidus pour les systèmes bilinéaires.

Extension des résultats aux systèmes non linéaires polynomiaux

L'étude des propriétés d'observabilité des systèmes bilinéaires peut être vue comme n'étant qu'une étape de passage entre le linéaire et le non linéaire. La généralisation des résultats les plus probants, exposés dans ce manuscrit, à la classe des systèmes non linéaires polynomiaux peut être un objectif assez intéressant et accessible à moyen terme. L'analyse de certaines propriétés de systèmes polynomiaux a déjà fait l'objet de certaines études telle que [Nešić et Mareels, 1999] qui donnent des conditions de commandabilité pour les systèmes en temps discret en utilisant des bases de Gröbner. Le choix des systèmes polynomiaux est motivé, entre autres, par le fait qu'il est possible de les représenter en utilisant des matrices structurées. Ainsi, pour de tels systèmes, la notion de structure existe et les résultats obtenus seront donc génériques par rapport à cette structure. De plus, en utilisant des techniques de développements limités, il est possible de modéliser, avec plus de précision qu'une linéarisation simple, les systèmes non linéaires par des systèmes polynomiaux. Enfin, il sera dès lors possible de considérer des systèmes bilinéaires dont le modèle comprendrait des produits état-entrée inconnue.

Il n'est pas aisé de prévoir la complexité des résultats que j'escompte obtenir. Une première étape consisterait à étudier la représentation graphique la mieux adaptée à représenter ce genre de systèmes. Ensuite, même si dans un premier temps je me limiterai à la propriété d'observabilité, il faudrait définir quel type d'observabilité fera l'objet de l'analyse structurelle à étudier. En cela, il faudra choisir entre étendre la notion de généricité aux composantes de l'état ou faire état des singularités d'observabilité dans l'espace d'état. Enfin, la solubilité du problème de synthèse d'observateurs causaux, que je préfère appeler propriété d'observation causale sera abordée. Afin de compléter l'analyse de ces systèmes polynomiaux, une étude relative au placement de capteurs pour le recouvrement des propriétés d'observabilité ou d'observation causale de ce genre de structure pourrait être menée.

Cas des systèmes à paramètres liés

Comme cela a été souligné dans ce manuscrit, l'une des hypothèses les plus fortes faite dans le cadre de l'approche structurelle que j'ai développée au cours de ces quelques dernières années, est que les paramètres représentant le système sont supposés être indépendants. Tous nos résultats, ainsi que d'autres qui adoptent les mêmes outils, ne sont donc valables que sous cette hypothèse. Lorsque le système est décrit par des matrices ayant des éléments constants ou liés, une solution a été proposée dans [Murota, 1987a] qui étudie, en utilisant la théorie des matroïdes [Murota, 1987b, Murota, 2000] la propriété de commandabilité des systèmes singuliers carrés ne

contenant pas que des paramètres indépendants dans les diverses matrices qui le représentent. Bien que la théorie des matroïdes me paraisse plus complexe et moins intuitive que les outils graphiques utilisés jusque-là, il me semble pertinent d'utiliser ces concepts pour l'investigation de quelques propriétés d'observabilité de systèmes linéaires à entrées inconnues ou de systèmes bilinéaires ne vérifiant pas l'hypothèse d'indépendance des paramètres. Si les résultats sont concluants et si j'arrive à des critères simples d'énoncé et aisément applicables, il serait intéressant à plus long terme d'étudier d'autres propriétés par le biais des matroïdes. Une autre solution consiste à utiliser des matrices à colonnes structurées (column-structured matrices) pour lesquelles la condition d'indépendance des paramètres est quelque peu relaxée et qui présentent des propriétés particulières intéressantes décrites dans [Yamada et Luenberger, 1985b]. Enfin, une troisième voie plus rapidement accessible en l'état de mes connaissances, est d'aborder les problèmes d'observabilité et de diagnosticabilité en utilisant une approche plus transférée qu'état comme cela est fait dans [Commault *et al.*, 1987]. Il semblerait que les hypothèses d'indépendance des paramètres soient moins contraignantes. Cependant, l'utilisation de cette approche pour les systèmes bilinéaires en particulier et non linéaires polynomiaux en général ne me paraît pas évidente.

Ce projet de recherche écrit, tout est donc dit et tout reste alors à faire. Il me semble pour cela que des collaborations intéressantes peuvent être envisagées, aussi bien avec des doctorants qu'avec des équipes de recherche en automatique ou en théorie des graphes. Certains de ces axes poseront de nouvelles questions et d'autres n'aboutiront peut être pas. Toutefois, je pense que mon objectif de construire des outils d'analyse structurelle fondés sur la théorie des graphes et adaptés aux systèmes complexes et/ou de grande dimension, survivra dans mes activités de recherche encore quelques années.

“Ce qui embellit le désert, c'est qu'il cache un puits quelque part.”

Antoine de Saint Exupéry

Références bibliographiques

- [Adachi et Funahashi, 1979] Y. ADACHI et Y. FUNAHASHI. Existence of bilinear observers for bilinear systems. *Information Sciences*, **19**(1), 67–80, 1979.
- [Alcorta-Garcia et Frank, 1997] E. ALCORTA-GARCIA et P. M. FRANK. Deterministic nonlinear observer-based approaches to fault diagnosis : a survey. *Control Engineering Practice*, **5**(5), 663–670, 1997.
- [André, 1985] N. ANDRÉ. *Sparse Systems, Digraph Approach of Large-Scale Linear Systems Theory*. TÜV, Köln, Germany, 1985.
- [Aoki, 1971] M. AOKI. Some control problems associated with decentralized dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-16**(5), 515–516, 1971.
- [Aplevich, 1991] J. D. APLEVICH. *Implicit Linear Systems*. Springer, New York, 1991.
- [Bara et al., 1999] G. I. BARA, H. RAFARALAHY, M. ZASADZINSKI et M. DAROUACH. State observers for a class of bilinear descriptor systems subjected to unmeasurable disturbances. Dans *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*, pages 85–87, Phoenix, U.S.A., 1999.
- [Barbot et al., 2005] J-P. BARBOT, D. BOUTAT et T. FLOQUET. A new observation algorithm for nonlinear systems with unknown inputs. Dans *IEEE Conference on Decision and Control*, Seville, Spain, 2005.
- [Bartosiewicz, 1995] Z. BARTOSIEWICZ. Local observability of nonlinear systems. *System & Control Letters*, **25**(4), 295–298, 1995.
- [Basile et al., 1981] G. BASILE, F. HAMANO et G. MARRO. Some new results on unknown input observability. Dans *IFAC World Congress*, pages 21–24, Kyoto, Japan, 1981.
- [Basile et Marro, 1969] G. BASILE et G. MARRO. On observability of linear time-invariant systems with unknown inputs. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **3**(6), 410–415, 1969.
- [Basile et Marro, 1973] G. BASILE et G. MARRO. A new characterization of some structural properties of linear systems : unknown-input observability, invertibility and functional controllability. *International Journal of Control*, **17**(5), 931–943, 1973.
- [Behal et al., 2006] A. BEHAL, K. JAIN et K. JOSHI. Observers for a special class of bilinear systems : Design and applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **51**(11), 1854–1858, 2006.
- [Bernhard, 1982] P. BERNHARD. On singular implicit linear dynamical systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, **20**(5), 612–633, 1982.

- [Bertrand *et al.*, 1997] J. BERTRAND, C. SUEUR et G. DAUPHIN-TANGUY. Bond graph for modeling and control : Structural analysis tools for the design of input-output decoupling state feedbacks. Dans *International Conference on Bond Graph Modeling and Simulation*, pages 317–322, vol. 2, Belfort, France, 1997.
- [Bestle et Zeitz, 1983] D. BESTLE et M. ZEITZ. Canonical form observer design for nonlinear time varying systems. *International Journal of Control*, **38**(2), 419–431, 1983.
- [Bhattacharyya, 1978] S. P. BHATTACHARYYA. Observer design for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-23**(3), 483–484, 1978.
- [Blanke *et al.*, 2003] M. BLANKE, M. KINNAERT, J. LUNZE et M. STAROSWIECKI. *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2003.
- [Blanke et Lorentzen, 2006] M. BLANKE et T. LORENTZEN. SATOOL - a software tool for structural analysis of complex automation systems. Dans *IFAC Safeprocess Conference*, Beijing, China, 2006.
- [Bornard et Hammouri, 2002] G. BORNARD et H. HAMMOURI. A graph approach to uniform observability of linear multi output systems. Dans *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 701–706, Las Vegas, U.S.A., 2002.
- [Boukhobza *et al.*, 2003] T. BOUKHOBZA, M. DJEMAI et J-P. BARBOT. Implicit triangular observer form dedicated to a sliding mode observer for systems with unknown inputs. *Asian Journal of Control*, **5**(4), 513–527, 2003.
- [Boukhobza *et al.*, 2006a] T. BOUKHOBZA, F. HAMELIN et D. SAUTER. Observability of structured linear systems in descriptor form : a graph-theoretic approach. *Automatica*, **42**(4), 629–635, 2006.
- [Boukhobza *et al.*, 2006b] T. BOUKHOBZA, F. HAMELIN et D. SAUTER. Uniform observability analysis for structured bilinear Systems : a graph-theoretic approach. *European Journal of Control*, **12**(5), 505–518, 2006.
- [Boukhobza *et al.*, 2007] T. BOUKHOBZA, F. HAMELIN et S. MARTINEZ-MARTINEZ. State and input observability for structured linear Systems : a graph-theoretic approach. *Automatica*, **43**(7), 1204–1210, 2007.
- [Boukhobza *et al.*, 2008a] T. BOUKHOBZA, S. MARTINEZ-MARTINEZ F. HAMELIN et D. SAUTER. Structural analysis of the partial state and input observability for structured linear systems. application to networked control systems. *Soumis à European Journal of Control*, 2008.
- [Boukhobza *et al.*, 2008b] T. BOUKHOBZA, F. HAMELIN et S.CANITROT. A graph-theoretic approach to fault detection and isolation for structured bilinear systems. *International Journal of Control*, **81**(4), 661–678, 2008.
- [Boukhobza et Hamelin, 2007] T. BOUKHOBZA et F. HAMELIN. Observability analysis for structured bilinear Systems : a graph-theoretic approach. *Automatica*, **43**(11), 1968–1974, 2007.
- [Boukhobza et Hamelin, 2008a] T. BOUKHOBZA et F. HAMELIN. Observability analysis for networked control systems : A graph theoretic approach. Dans *IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.

- [Boukhobza et Hamelin, 2008b] T. BOUKHOBZA et F. HAMELIN. State and input observability for structured bilinear systems : A graph-theoretic approach. Dans *IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.
- [Boukhobza, 2008a] T. BOUKHOBZA. Generic uniform observability analysis for bilinear systems. *à paraître dans Automatica*, 2008.
- [Boukhobza, 2008b] T. BOUKHOBZA. Partial state and input observability recovering by additional sensor Implementation : a graph-theoretic approach. *à paraître dans International Journal of Systems Science*, 2008.
- [Boukhobza, 2008c] T. BOUKHOBZA. State and input observability for structured bilinear systems : A graph-theoretic approach. *Soumis à Automatica*, 2008.
- [Bounit et Hammouri, 2003] H. BOUNIT et H. HAMMOURI. A separation principle for distributed dissipative bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **48**(3), 479–483, 2003.
- [Brockett, 1972] R. W. BROCKETT. *On the Algebraic Structure Theory of Bilinear Systems*, pages 153–168. Academic, 1972.
- [Bruni *et al.*, 1974] C. BRUNI, G. DI PILLO et G. KOCH. Bilinear Systems : an appealing class of nearly linear systems in theory and application. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-19**(4), 334–348, 1974.
- [Bruni *et al.*, 1980] C. BRUNI, A. GANDOLFI et A. GERMANI. Observability of linear-in-the-state Systems : a fonctionnal approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-25**(3), 566–567, 1980.
- [Busawon et Saif, 1998] K. K. BUSAWON et M. SAIF. An observer for a class of disturbance driven nonlinear systems. *Applied Mathematics Letters*, **11**(6), 109–113, 1998.
- [Canitrot *et al.*, 2007] S. CANITROT, T. BOUKHOBZA, F. HAMELIN et S. MARTINEZ-MARTINEZ. Control/Fault diagnosis interactions analysis for bilinear systems. Dans *IFAC Symposium on System, Structure and Control*, Foz do Iguaçu, Brésil, 2007.
- [Chen et Kanj, 2003] J. CHEN et I. A. KANJ. Constrained minimum vertex cover in bipartite graphs : Complexity and parameterized algorithms. *Journal-of-Computer-and-System-Sciences*, **67**(4), 833–847, 2003.
- [Chu et Mehrmann, 1999] D. CHU et V. MEHRMANN. Disturbance decoupled observer design for descriptor systems. *System & Control Letters*, **38**(1), 37–48, 1999.
- [Cobb, 1984] J. D. COBB. Controllability, observability, and duality in singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-29**(12), 1076–1082, 1984.
- [Commault *et al.*, 1987] C. COMMAULT, J. M. DION et A. BELMEHDI. Structured systems within the transfer matrix approach : Application to decoupling. *System & Control Letters*, **9**(4), 335–339, 1987.
- [Commault *et al.*, 1991] C. COMMAULT, J. M. DION et A. PEREZ. Disturbance rejection for structured systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **36**(7), 884–887, 1991.
- [Commault *et al.*, 1993] C. COMMAULT, J. M. DION et M. BENAHCENE. Output feedback disturbance decoupling. graph interpretation for structured systems. *Automatica*, **29**(6), 1463–1472, 1993.

- [Commault *et al.*, 1997] C. COMMAULT, J. M. DION et V. HOVELAQUE. A geometric approach for structured systems : Application to disturbance decoupling. *Automatica*, **33**(3), 403–409, 1997.
- [Commault *et al.*, 1999] C. COMMAULT, J. M. DION et M. BENAHCENE. Decoupling of structured systems by parameter-independent compensation and state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44**(2), 348–352, 1999.
- [Commault *et al.*, 2001] C. COMMAULT, J. M. DION, O. SENAME et R. MOTYEIAN. Unknown input observer - a structural approach. Dans *European Control Conference*, Porto, Portugal, 2001.
- [Commault *et al.*, 2002a] C. COMMAULT, J. M. DION, O. SENAME et R. MOTYEIAN. Observer-based fault diagnosis for structured systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **47**(12), 2074–2079, 2002.
- [Commault *et al.*, 2002b] C. COMMAULT, J. M. DION et J. W. VAN DER WOUDE. Characterization of generic properties of linear structured systems for efficient computations. *Kybernetika*, **38**(5), 503–520, 2002.
- [Commault *et al.*, 2005a] C. COMMAULT, J. M. DION et S. Y. AGHA. A system decomposition for sensor location in fault detection and isolation. Dans *IFAC World Congress*, Praha, Czech Republic, 2005.
- [Commault *et al.*, 2005b] C. COMMAULT, J. M. DION et D. H. TRINH. Observability recovering by additional sensor implementation in linear structured systems. Dans *IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*, Seville, Spain, 2005.
- [Commault *et al.*, 2006] C. COMMAULT, J. M. DION et S. Y. AGHA. Structural analysis for the sensor location problem in fault detection and isolation. Dans *IFAC Safeprocess Conference*, Beijing, China, 2006.
- [Commault et Dion, 2007] C. COMMAULT et J. M. DION. Sensor location for diagnosis in linear Systems : a structural analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **52**(2), 155–169, 2007.
- [Corfmat et Morse, 1976] J. P. CORFMAT et A. S. MORSE. Structurally controllable and structurally canonical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-21**(1), 129–131, 1976.
- [Cormen *et al.*, 2001] T. H. CORMEN, C. E. LEISERSON, R. L. RIVEST et C. STEIN. *Introduction to Algorithms*. MIT Press and McGraw-Hill, second edition, 2001.
- [Dai, 1989] L. DAI. *Singular Control Systems*. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [D’Alessandro *et al.*, 1974] P. D’ALESSANDRO, A. ISIDORI et A. RUBERTI. Realization and structure theory of bilinear dynamical systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, **12**, 517–535, 1974.
- [D’Angelo, 1970] H. D’ANGELO. *Linear time varying systems : Analysis and Synthesis*. Allyn and Bacon, Boston, U.S.A., 1970.
- [Darouach *et al.*, 1994] M. DAROUACH, M. ZASADZINSKI et S. J. XU. Full-order observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**(3), 606–609, 1994.

- [Darouach *et al.*, 1996] M. DAROUACH, M. ZASADZINSKI et M. HAYAR. Reduced order observer design for descriptor systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **41**(7), 1068–1072, 1996.
- [Darouach et Boutayeb, 1995] M. DAROUACH et M. BOUTAYEB. Design of observers for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-40**(7), 1323–1327, 1995.
- [Davison et Wang, 1974] E. J. DAVISON et S. H. WANG. Properties and calculation of transmission zeros of linear multivariable time-invariant systems. *Automatica*, **10**(4), 643–658, 1974.
- [Davison, 1977] E. J. DAVISON. Connectability and structural controllability of composite systems. *Automatica*, **13**(2), 109–123, 1977.
- [De Persis et Isidori, 2000] C. DE PERSIS et A. ISIDORI. On the observability codistributions of a nonlinear system. *System & Control Letters*, **40**(5), 297–304, 2000.
- [De Persis et Isidori, 2001a] C. DE PERSIS et A. ISIDORI. A geometric approach to nonlinear fault detection and isolation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **46**(6), 853–865, 2001.
- [De Persis et Isidori, 2001b] C. DE PERSIS et A. ISIDORI. To design of a fault detection filter with game-theoretic-optimal sensitivity. Dans *IFAC Nonlinear Control Systems*, Saint-Petersburg, Russia, July 2001.
- [Declerck et Staroswiecki, 1991] P. DECLERCK et M. STAROSWIECKI. Characterization of the canonical components of a structural graph for fault detection in large scale industrial plants. Dans *European Control Conference*, pages 298–303, Grenoble, France, 1991.
- [Demetriou, 2005] M. A. DEMETRIOU. Robust sensor location and optimization in distributed parameter systems using functional observers. Dans *IEEE Conference on Decision and Control, European Control Conference*, pages 7187–7192, Seville, Spain, 2005.
- [Deylon, 2001] B. DEYLON. A note on uniform observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **46**(8), 1326–1327, 2001.
- [Deza *et al.*, 1992] F. DEZA, E. BUSVELLE, J-P. GAUTHIER et D. RAKOTOPARA. High gain estimation for nonlinear systems. *System & Control Letters*, **18**, 295–299, 1992.
- [Dion *et al.*, 1994] J. M. DION, C. COMMAULT et J. MONTROYA. Simultaneous decoupling and disturbance Rejection : a structural approach. *International Journal of Control*, **59**(5), 1325–1344, 1994.
- [Dion *et al.*, 2003] J. M. DION, C. COMMAULT et J. W. VAN DER WOUDE. Generic properties and control of linear structured systems : a survey. *Automatica*, **39**(7), 1125–1144, 2003.
- [Dion et Commault, 1993] J. M. DION et C. COMMAULT. Feedback decoupling of structured systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **38**(7), 1132–1135, 1993.
- [Diop et Fliess, 1991] S. DIOP et M. FLIESS. On nonlinear observability. Dans *European Control Conference*, pages 152–157, Grenoble, France, 1991.
- [Dore *et al.*, 1995] S. D. DORE, J. D. PERKINS et L. S. KERSHENBAUM. Application of geometric nonlinear control in the process industries - a case study. *Control Engineering Practice*, **3**(3), 397–402, 1995.
- [Dorissen, 1989] H. T. DORISSEN. Canonical forms for bilinear systems. *System & Control Letters*, **13**(2), 153–160, 1989.

- [Düstegör *et al.*, 2004a] D. DÜSTEGÖR, V. COCQUEMPOT et M. STAROSWIECKI. Structural analysis for residual generation : Implementation issues considerations. Dans *IEEE International Conference on Control Applications*, pages 1217 – 1222, Bath, U.K., 2004.
- [Düstegör *et al.*, 2004b] D. DÜSTEGÖR, V. COCQUEMPOT, M. STAROSWIECKI et E. FRISK. Isolabilité structurelle des défauts. application à un modèle de vanne. *RS - JESA*, **38**(1), 103–123, 2004.
- [Düstegör *et al.*, 2006] D. DÜSTEGÖR, E. FRISK, V. COCQUEMPOT, D. KRYSANDER et M. STAROSWIECKI. Structural analysis of fault isolability in the DAMADICS benchmark. *Control Engineering Practice*, **14**(6), 597–608, 2006.
- [Edelmayer *et al.*, 2004] A. EDELMAYER, J. BOKOR, Z. SZABÓ et F. SZIGETI. Input reconstruction by means of system Inversion : a geometric approach to fault detection and isolation in nonlinear systems. *International Journal of Mathematics and Computer Sciences*, **14**(2), 189–199, 2004.
- [Edwards *et al.*, 2000] C. EDWARDS, S. SPURGEON et R. PATTON. Sliding mode observers for fault detection and isolation. *Automatica*, **36**, 541–553, 2000.
- [Elliot, 2005] D. L. ELLIOT. A controllability counterexample. *Automatica*, **50**(6), 840–841, 2005.
- [Fahroo et Demetriou, 2000] F. FAHROO et M. A. DEMETRIOU. Optimal actuator/sensor location for active noise regulator and tracking problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **114**(1), 137–158, 2000.
- [Fairman *et al.*, 1984] F.W. FAIRMAN, S. S. MAHIL et L. LUK. Disturbance decoupled observer design via singular value decomposition. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-29**(1), 84–89, 1984.
- [Fliess, 1981] M. FLIESS. The unobservability ideal for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-26**(2), 592–593, 1981.
- [Fliess, 1982] M. FLIESS. A remark on nonlinear observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-27**(2), 489–490, 1982.
- [Floquet *et al.*, 2004] T. FLOQUET, J.P. BARBOT, W. PERRUQUETTI et M. DJEMAÏ. On the robust fault detection via a sliding mode disturbance observer. *International Journal of Control*, **77**(7), 622–629, 2004.
- [Floquet et Barbot, 2006] T. FLOQUET et J-P. BARBOT. An observability form for linear systems with unknown inputs. *International Journal of Control*, **79**(2), 132–139, 2006.
- [Ford et Fulkerson, 1962] L. R. FORD et D. R. FULKERSON. *Flows in Networks*. Princeton University Press, 1962.
- [Frank et Ding, 1997] P.M. FRANK et S.X. DING. Survey of robust residual generation and evaluation methods in observer-based fault detection systems. *Journal of Process Control*, **7**(6), 403–424, 1997.
- [Frank, 1996] P. M. FRANK. Analytical and qualitative model-based fault diagnosis— a survey and some new results. *European Journal of Control*, **2**(1), 6–28, 1996.
- [Frisk *et al.*, 2003] E. FRISK, D. DÜSTEGÖR, D. KRYSANDER et V. COCQUEMPOT. Improving fault isolability properties by structural analysis of faulty behavior models : Application to

- the DAMADICS benchmark problem. Dans *IFAC SAFEPROCESS Symposium*, Washington, D.C. U.S.A., 2003.
- [Frisk et Krysander, 2007] E. FRISK et M. KRYSANDER. Sensor placement for maximum fault isolability. Dans *DX-07*, pages 106–113, Nashville, U.S.A., 2007.
- [Fujita, 1974] S. FUJITA. On the observability of decentralized dynamic systems. *Information and Control*, **26**(1), 45–60, 1974.
- [Funahashi, 1979] Y. FUNAHASHI. An observable canonical form of discrete-time bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-24**(5), 802–803, 1979.
- [Gao et Ding, 2007] Z. GAO et S. X. DING. Actuator fault robust estimation and fault-tolerant control for a class of nonlinear descriptor systems. *Automatica*, **43**(5), 912–920, 2007.
- [Gao et Wang, 2006] Z. GAO et H. WANG. Descriptor observer approaches for multivariable systems with measurement noises and application in fault detection and diagnosis. *System & Control Letters*, **55**(4), 304–313, 2006.
- [Gauthier et Bornard, 1981] J-P. GAUTHIER et G. BORNARD. Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-26**(4), 922–926, 1981.
- [Gawthrop, 2000] P. J. GAWTHROP. Physical interpretation of inverse dynamics using bicausal bond graphs. *Journal of the Franklin Institute*, **337**(6), 743–769, 2000.
- [Geerts, 1993a] T. GEERTS. Invariant subspaces and invertibility properties for singular systems : The general case. *Linear Algebra and Applications*, **183**, 61–88, 1993.
- [Geerts, 1993b] T. GEERTS. Solvability conditions, consistency and weak consistency for linear differential-algebraic conditions and time-invariant singular systems : the general case. *Linear Algebra and Applications*, **181**, 111–130, 1993.
- [Gertler, 1993] J.J. GERTLER. Residual generation in model-based fault diagnosis. *Control Theory and Advanced Technology*, **9**(1), 259–285, 1993.
- [Glover et Silverman, 1976] K. GLOVER et L. M. SILVERMAN. Characterization of structural controllability approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-21**(4), 534–537, 1976.
- [Grasselli et Isidori, 1977] O. M. GRASSELLI et A. ISIDORI. Deterministic state reconstruction and reachability of bilinear processes. Dans *Proceedings of IEEE Joint Automatic Control Conference*, pages 1423–1427, San Francisco, U.S.A., 1977.
- [Grasselli et Isidori, 1981] O. M. GRASSELLI et A. ISIDORI. An existence theorem for observers of bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-26**(6), 451–454, 1981.
- [Guan et Saif, 1991] Y. GUAN et M. SAIF. A novel approach to the design of unknown input observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **36**(5), 632–635, 1991.
- [Guidorzi et Marro, 1971] R. GUIDORZI et R. MARRO. On wonham stabilizability condition in the synthesis of observers for unknown-input systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-16**(5), 499–500, 1971.
- [Ha et Trinh, 2004] Q. P. HA et H. TRINH. State and input simultaneous estimation for a class of nonlinear systems. *Automatica*, **40**(10), 1779–1785, 2004.

- [Hammouri *et al.*, 1999] H. HAMMOURI, M. KINNAERT et E. H. EL YAAGOUBI. Observer based approach to fault detection and isolation for nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44**(10), 1879–1884, 1999.
- [Hammouri *et al.*, 2001] H. HAMMOURI, K. KABORE et M. KINNAERT. A geometric approach to fault detection and isolation for bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **46**(9), 1451–1455, 2001.
- [Hammouri et Farza, 2003] H. HAMMOURI et M. FARZA. Nonlinear observers for locally uniformly observable systems. *ESAIM Control, Optimization and Calculus of Variations*, **9**, 353–370, 2003.
- [Hautus, 1983] M.L.J. HAUTUS. Strong detectability and observers. *Linear Algebra and its Applications*, **50**, 353–360, 1983.
- [Hayakawa et Silijak, 1988] Y. HAYAKAWA et D. D. SILIJAK. On almost invariant subspaces of structured systems and decentralized control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-33**(10), 931–939, 1988.
- [Hermann et Krener, 1977] R. HERMANN et A. J. KRENER. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-22**(5), 728–740, 1977.
- [Hopkins *et al.*, 1998] L. HOPKINS, P. LANT et B. NEWELL. Output structural Controllability : a tool for integrated design and control. *Journal of Process Control*, **8**(1), 57–68, 1998.
- [Hosoe, 1980] S. HOSOE. Determination of generic dimensions of controllable subspaces and its application. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-25**(6), 1192–1196, 1980.
- [Hou *et al.*, 1999] M. HOU, A. C. PUGH et P. C. MÜLLER. Disturbance decoupled functional observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44**(2), 382–386, 1999.
- [Hou *et al.*, 2000] M. HOU, K. BUSAWON et M. SAIF. Observer design based on triangular form generated by injective map. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45**(7), 1350–1355, 2000.
- [Hou et Müller, 1992] M. HOU et P. C. MÜLLER. Design of observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **37**(6), 871–875, 1992.
- [Hou et Müller, 1994a] M. HOU et P. C. MÜLLER. Design of decentralized linear state function observers. *Automatica*, **30**(11), 1801–1805, 1994.
- [Hou et Müller, 1994b] M. HOU et P. C. MÜLLER. Disturbance decoupled observer design : a unified viewpoint. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**(6), 1338–1341, 1994.
- [Hou et Müller, 1995] M. HOU et P. C. MÜLLER. Design of a class of luenberger observers for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **40**(1), 133–136, 1995.
- [Hou et Müller, 1999a] M. HOU et P. C. MÜLLER. Causal observability of descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44**(1), 158–163, 1999.
- [Hou et Müller, 1999b] M. HOU et P. C. MÜLLER. Observer design for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44**(1), 164–169, 1999.
- [Hou et Patton, 1998] M. HOU et R. J. PATTON. Input observability and input reconstruction. *Automatica*, **34**(6), 789–794, 1998.
- [Hovelaque *et al.*, 1996] V. HOVELAQUE, C. COMMAULT et J. M. DION. Analysis of linear structured systems using a primal-dual algorithm. *System & Control Letters*, **27**, 73–85., 1996.

- [Hovelaque *et al.*, 1999] V. HOVELAQUE, C. COMMAULT et J. M. DION. Zeros of structured linear systems. *Automatica*, **35**, 1683–1688., 1999.
- [Hovelaque, 1997] V. HOVELAQUE. *Analyse Structurelle, Géométrie et Graphique Des Systèmes Linéaires Structurés*. Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble, France, Octobre 1997.
- [Isidori et Ruberti, 1973] A. ISIDORI et A. RUBERTI. *Realization Theory of Bilinear Systems*, pages 83–130. D. Reidel, 1973.
- [Kabore et Wang, 2001] P. KABORE et H. WANG. Design of fault diagnosis filters and fault-tolerant control for a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **46**(11), 1805–1810, 2001.
- [Kailath, 1980] T. KAILATH. *Linear systems*. Prentice Hall Information and system science series. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1980.
- [Kalman, 1968] R. E. KALMAN. Lectures on controlability and observability. Dans *Proceedings of C.I.M.E. (International Mathematical Summer Center)*, Bologna, Italy, 1968.
- [Karnopp, 1979] D. KARNOPP. Bond graphs in control : Physical state variables and observers. *Journal of the Franklin Institute*, **308**(3), 219–234, 1979.
- [Kasinski et Lévine, 1984] A. KASINSKI et J. LÉVINE. A fast graph theoretic algorithm for the feedback decoupling problem of nonlinear systems. Dans *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, volume 58, pages 550–562. Springer-Verlag, New York, P. A. Fuhrmann edition, 1984.
- [Khapalov et Mohler, 1996] A. Y. KHAPALOV et R. R. MOHLER. Reachable sets and controllability of bilinear time-invariant systems : a qualitative approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **41**(9), 1342–1346, 1996.
- [Khemliche *et al.*, 2006] M. KHEMLICHE, B. OULD BOUAMAMA et H. HAFFAF. Sensor placement for component diagnosability using bond-graph. *Sensors and Actuators : A Physical*, **132**(2), 547–556, 2006.
- [Khosrowjerdi *et al.*, 2007] M. J. KHOSROWJERDI, N. SAFARI-SHAD et R. NIKOUKHAH. Optimal sensor location for robust fault detection. Dans *European Control Conference*, pages 402–407, Kos, Greece, 2007.
- [Kinnaert, 2003] M. KINNAERT. Fault diagnosis based on analytical models for linear and nonlinear systems - a tutorial. Dans *International Workshop on Principles of Diagnosis (DX'03)*, pages 37–50, Washington, DC, U.S.A., 2003.
- [Kobayashi et Yoshikawa, 1982] H. KOBAYASHI et T. YOSHIKAWA. Graph-theoretic approach to controllability and localizability of decentralized control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-27**(5), 1096–1108, 1982.
- [Kou *et al.*, 1973] S. R. KOU, D. L. ELLIOT et T. J. TARN. Observability of nonlinear systems. *Information and Control*, **22**(1), 89–99, 1973.
- [Kratz et Liebscher, 1998] W. KRATZ et D. LIEBSCHER. A local characterization of observability. *Linear Algebra and Its Applications*, **269**(1), 115–137, 1998.
- [Kratz, 1995] W. KRATZ. Characterization of strong observability and construction of an observer. *Linear algebra and its applications*, **221**, 31–40, 1995.

- [Kudva *et al.*, 1980] P. KUDVA, N. VISWANADHAM et A. RAMAKRISHNA. Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-25**(1), 113–115, 1980.
- [Kurek, 1983] J. E. KUREK. The state vector reconstruction for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-28**(12), 1120–1122, 1983.
- [Leitold *et al.*, 2002] A. LEITOLD, K. HANGOS et Z. TUZA. Structure simplification of dynamic process model. *Journal of Process Control*, **12**(1), 69–83, 2002.
- [Lévine, 1997] J. LÉVINE. A graph-theoretic approach to input-output decoupling and linearization. Dans A. J. Fossard et D. Normand-Cyrot, éditeurs, *Nonlinear Systems*, chapitre 3, pages 77–91. Chapman & Hall, London, U.K., 1997.
- [Lewis, 1990] F. L. LEWIS. Geometric design techniques for observers in singular systems. *Automatica*, **26**(2), 411–415, 1990.
- [Lewis, 1992] F. L. LEWIS. A tutorial on the geometric analysis of linear time-invariant implicit systems. *Automatica*, **28**(1), 119–137, 1992.
- [Li et Zhou, 2004] L. LI et D. ZHOU. Fast and robust fault diagnosis for a class of nonlinear systems : detectability analysis. *Computers and Chemical Engineering*, **28**(12), 2635–2646, 2004.
- [Lin et Newell, 1991] X. LIN et R. B. NEWELL. Further developments in output structural controllability and an assessment of structural techniques. *Journal of Process Control*, **1**(5), 1437–1459, 1991.
- [Lin, 1974] C. T. LIN. Structural controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-19**(3), 201–208, 1974.
- [Lin, 1977] C. T. LIN. System structure and minimal structure controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-22**(5), 855–862, 1977.
- [Linnemann, 1981] A. LINNEMANN. Decoupling of structured systems. *System & Control Letters*, **1**(2), 79–86, 1981.
- [Liu *et al.*, 2003] X. LIU, B. M. CHEN et Z. LIN. On the problem of general structural assignments of linear systems through sensor/actuator selection. *Automatica*, **39**(2), 233–241, 2003.
- [Lopez-Morales *et al.*, 2001] V. LOPEZ-MORALES, F. PLESTAN et A. GLUNIMEAU. An algorithm for the structural analysis of state space : synthesis of nonlinear observers. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, **11**(12), 1145–1160, 2001.
- [Lovasz et Plummer, 1986] L. LOVASZ et M. D. PLUMMER. *Matching Theory*, volume 29 of *Annals of Discrete Mathematics*. North-Holland, Amsterdam, Netherlands, 1986.
- [Malabre, 1989] M. MALABRE. Generalized linear systems : geometric and structural approaches. *Linear Algebra and its Applications*, **122-124**, 591–621, 1989.
- [Maquin *et al.*, 1994] D. MAQUIN, M. LUONG et J. RAGOT. Observability analysis and sensor placement. Dans *IFAC SAFEPROCESS'94/IMACS Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Process*, Espoo, Finland, 1994.
- [Martinez-Martinez *et al.*, 2007] S. MARTINEZ-MARTINEZ, T. MADER, T. BOUKHOBZA et F. HAMELIN. LISA : a linear structured system analysis program. Dans *IFAC Symposium on System, Structure and Control*, Foz do Iguaçu, Brésil, 2007.

- [Massoumnia *et al.*, 1989] M. A. MASSOUMNIA, G. C. VERGHESE et A. S. WILLSKY. Failure detection and identification. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **34**(3), 316–321, 1989.
- [Massoumnia, 1986] M. A. MASSOUMNIA. A geometric approach to the synthesis of failure detection filters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-31**(9), 839–846, 1986.
- [Mayeda et Yamada, 1979] H. MAYEDA et T. YAMADA. Strong structural controllability. *SIAM Journal of Control and Optimization*, **17**(1), 123–138, 1979.
- [Mayeda, 1981] H. MAYEDA. On structural controllability theorem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-26**(3), 795–798, 1981.
- [Mertziou *et al.*, 1988] B. G. MERTZIOS, M. A. CHRISTODOULOU, B. L. SYRMOS et F. L. LEWIS. Direct controllability and observability time domain conditions of singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **33**(8), 788–791, 1988.
- [Meyer *et al.*, 1994] M. MEYER, J. M. LE LANN, B. KOEHRET et M. ENJALBERT. Optimal selection of sensor location on a complex plant using a graph oriented approach. *Computers & Chemical Engineering*, **18**, S535–S540, 1994.
- [Mohler et Frick, 1979] R. R. MOHLER et P. A. FRICK. Bilinear demographic control processes. *International Journal of Policy Analysis Information Systems*, **2**, 57–70, 1979.
- [Mohler et Kolodziej, 1980] R. R. MOHLER et W. J. KOLODZIEJ. An overview of bilinear system theory and applications. *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics*, **SMC-10**(10), 683–688, 1980.
- [Mohler, 1973] R. R. MOHLER. *Bilinear Control Processes*. Academic Press, Inc, New-York, U.S.A., 1973.
- [Mohler, 1991] R. R. MOHLER. *Nonlinear Systems : Application to Bilinear Systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, U.S.A., 1991.
- [Müller et Hou, 1993] P. C. MÜLLER et M. HOU. On the observer design for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **38**(11), 1666–1671, 1993.
- [Murata, 1977] T. MURATA. State equation, controllability and maximal matchings of petri nets. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-22**(3), 412–416, 1977.
- [Murota et Poljak, 1990] K. MUROTA et S. POLJAK. Note on a graph-theoretic criterion for structural output controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **35**(8), 939–942, 1990.
- [Murota, 1987a] K. MUROTA. Refined study on structural controllability of descriptor systems by means of matroids. *SIAM Journal of Control and Optimization*, **25**(4), 967–989, 1987.
- [Murota, 1987b] K. MUROTA. *System Analysis by Graphs and Matroids*. Springer-Verlag, New York, U.S.A., 1987.
- [Murota, 2000] K. MUROTA. *Matrices and Matroids for Systems Analysis*, volume 20 of *Algorithms and Combinatorics*. Springer, Berlin, 2000.
- [Nešić et Mareels, 1999] D. NEŠIĆ et I. M. Y. MAREELS. Controllability of structured polynomial systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **44**(4), 761–764, 1999.
- [Ohta et Kodama, 1985] Y. OHTA et S. KODAMA. Structural invertibility of transfer functions. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-30**(8), 818–819, 1985.

- [Oster, 1978] G. OSTER. *Bilinear Models in Ecology*, pages 260–271. Springer-Verlag, Berlin, Germany, r. r. mohler and a. ruberti edition, 1978.
- [Ould Bouamama *et al.*, 2000] B. OULD BOUAMAMA, G. DAUPHIN-TANGUY, M. STAROSWIECKI et D. AMO-BRAVO. Bond graph analysis of structural FDI properties in mechatronic systems. Dans *IFAC Conference on Mechatronic Systems*, volume 3, pages 1057–1062, Darmsdadt, Germany, 2000.
- [Özçaldıran *et al.*, 1992] K. ÖZÇALDIRAN, D. W. FOUNTAIN et F. L. LEWIS. Some generalized notions of observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **37**(6), 856–860, 1992.
- [Özçaldıran et Haliloğlu, 1993] K. ÖZÇALDIRAN et L. HALILOĞLU. Structural properties of singular systems. *Kybernetika*, **29**(6), 518–546, 1993.
- [Özçaldıran et Lewis, 1990] K. ÖZÇALDIRAN et F. L. LEWIS. On the regularizability of singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **35**(10), 1156–1160, 1990.
- [Pandolfi, 1980] L. PANDOLFI. Controllability and stabilisation of linear systems of algebraic and differential equations. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **30**(4), 601–620, 1980.
- [Paraskevopoulos et Koumboulis, 1992] P. N. PARASKEVOPOULOS et F. N. KOUMBOULIS. Observers for singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **37**(8), 1211–1215, 1992.
- [Patton, 1997] R.J. PATTON. Robustness in model-based fault diagnosis : the 1995 situation. *Annual Reviews in Control*, **21**, 103–123, 1997.
- [Pichardo-Almarza *et al.*, 2005] C. PICHARDO-ALMARZA, A. RAHMANI, G. DAUPHIN-TANGUY et M. DELGADO. Proportional-integral observer for systems modelled by bond graphs. *Simulation Modelling Practice and Theory*, **13**(3), 179–211, 2005.
- [Pillonetto et Saccomani, 2006] G. PILLONETTO et M. P. SACCOMANI. Input estimation in nonlinear dynamical systems using differential algebra techniques. *Automatica*, **42**(12), 2117–21129, 2006.
- [Polycarpou et Trunov, 2000] M. M. POLYCARPOU et A. B. TRUNOV. Learning approach to nonlinear fault diagnosis : Detectability analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45**(4), 806–812, 2000.
- [Polycarpou et Vemuri, 1995] M. M. POLYCARPOU et A. T. VEMURI. Learning methodology for failure detection and accomodation. *IEEE Control Systems*, **15**(3), 16–24, 1995.
- [Ragot *et al.*, 1992] J. RAGOT, D. MAQUIN et G. BLOCH. Sensor positioning for processes described by bilinear equations. *Diagnostic et Sûreté de Fonctionnement*, **2**, 1992.
- [Reinschke *et al.*, 1992] K. J. REINSCHKE, F. SVARICEK et H. D. WEND. On strong structural controllability of linear systems. Dans *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 203–208, Tucson, U.S.A., 1992.
- [Reinschke et Wiedemann, 1997] K. J. REINSCHKE et G. WIEDEMANN. Digraph characterization of structural controllability for linear descriptor systems. *Linear Algebra and its Applications*, **266**, 199–217, 1997.
- [Reinschke, 1988] K. J. REINSCHKE. *Multivariable Control. A Graph Theoretic Approach*. Springer-Verlag, New York, U.S.A., 1988.

- [Reinschke, 1994] K. J. REINSCHKE. Graph-theoretic approach to symbolic analysis of linear descriptor systems. *Linear Algebra and its Applications*, **197-198**, 217–244, 1994.
- [Röbenack et Reinschke, 1997] K. RÖBENACK et K. J. REINSCHKE. Graph-theoretically determined jordan-block-size structure of regular matrix pencils. *Linear Algebra and its Applications*, **263**, 333–348, 1997.
- [Rosenberg et Andry, 1979] R. C. ROSENBERG et A. N. ANDRY. A controllability test for linear system using a graphical technique. Dans *IFAC Symposium on Computer Aided Design of Control Systems*, pages 143–147, Zürich, 1979.
- [Rosenbrock, 1970] H.H. ROSENBRÖCK. *State-space and multivariable theory*. Studies in dynamical systems. Nelson Wiley, London, 1970.
- [Rosenbrock, 1974] H. H. ROSENBRÖCK. Structural properties of first-order dynamical systems. *International Journal of Control*, **20**(2), 191–202, 1974.
- [Rudolph et Zeitz, 1994] J. RUDOLPH et M. ZEITZ. A block triangular nonlinear observer normal form. *System & Control Letters*, **23**(1), 1–8, 1994.
- [Sagianos et Karcaniyas, 2007] E. SAGIANOS et N. KARCANIYAS. Computation of structural system properties, integer matrices and bipartite graphs. Dans *European Control Conference*, pages 3040–3047, Kos, Greece, 2007.
- [Saif et Guan, 1992] M. SAIF et Y. GUAN. Decentralized state estimation in large-scale interconnected dynamical systems. *Automatica*, **28**(1), 215–219, 1992.
- [Sain et Massey, 1969] M. K. SAIN et J. L. MASSEY. Invertibility of linear time-invariant dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-14**(2), 141–149, 1969.
- [Samantaray et al., 2006] A.K. SAMANTARAY, K. MEDJAHER, B. OULD BOUAMAMA, M. STAROSWIECKI et G. DAUPHIN-TANGUY. Diagnostic bond graphs for online fault detection and isolation. *Simulation Modelling Practice and Theory*, **14**(3), 237–262, 2006.
- [Sanders et al., 1974] C. W. SANDERS, E. C. TACKER et T. D. LINDON. A new class of decentralized filters for interconnected systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-23**(2), 259–262, 1974.
- [Seliger et Franck, 1991] R. SELIGER et P.M. FRANCK. Fault-diagnosis by disturbance decoupled nonlinear observers. Dans *IEEE Conference on Decision and Control*, pages 2248–2253, Brighton, England, 1991.
- [Sen, 1981] P. SEN. On the choice of input for observability in bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-26**(2), 451–454, 1981.
- [Shields et Pearson, 1976] R. W. SHIELDS et J. B. PEARSON. Structural controllability of multi-input linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-21**(2), 203–212, 1976.
- [Shumsky et Zhirabok, 2005] A. Y. SHUMSKY et A. N. ZHIRABOK. Nonlinear diagnostic filter design : Algebraic and geometric points of view. Dans *IFAC World Congress*, Praha, Czech Republic, 2005.
- [Silverman, 1969] L. M. SILVERMAN. Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC -14**(3), 270–276, 1969.

- [Starkov, 2002] K. E. STARKOV. Observability conditions of linear time-varying systems and its computational complexity aspects. *Mathematical Problems in Engineering*, **8**(4-5), 439–449, 2002.
- [Staroswiecki *et al.*, 2000] M. STAROSWIECKI, J. CASSAR et P. DECLERCK. A structural framework for the design of FDI in large scale industrial plants. Dans R. Patton, P. Franck et R. Clark, éditeurs, *Issues of Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Springer-Verlag, 2000.
- [Staroswiecki et Comtet-Varga, 2001] M. STAROSWIECKI et G. COMTET-VARGA. Analytical redundancy relations for fault detection and isolation in algebraic dynamic systems. *Automatica*, **37**(5), 687–699, 2001.
- [Staroswiecki, 2002] M. STAROSWIECKI. Structural analysis for fault detection and isolation and for fault tolerant control. Dans P.M. Franck et M. Blanke, éditeurs, *Fault Diagnosis and Fault Tolerant Control*. Eolss Publishers, Oxford, U.K., 2002.
- [Staroswiecki, 2006] M. STAROSWIECKI. *Observability and the Design of Fault Tolerant Estimation Using Structural Analysis*, pages 257–278. Advances in Control Theory and Application. Springer, 2006.
- [Suda *et al.*, 1989] N. SUDA, B. WAN et I. UENO. The orders of infinite zeros of structural systems. *Transactions of the Society of Instrument Control Engineers*, **25**(10), 1062–1068, 1989.
- [Suda et Hatanaka, 1986] N. SUDA et T. HATANAKA. Structural properties of systems represented by bond graphs. Dans *Complex and Distributed Systems : Analysis, Simulation and Control, Congrès IMACS*, pages 73–80, Lille, France, 1986.
- [Sueur et Dauphin-Tanguy, 1989] C. SUEUR et G. DAUPHIN-TANGUY. Structural Controllability/Observability of linear systems represented by bond-graphs. *Journal of the Franklin Institute*, **326**(6), 869–883, 1989.
- [Sueur et Dauphin-Tanguy, 1991] C. SUEUR et G. DAUPHIN-TANGUY. Bond graph approach for structural analysis of MIMO linear systems. *Journal of The Franklin Institute*, **328**(1), 55–70, 1991.
- [Sueur et Dauphin-Tanguy, 1997] C. SUEUR et G. DAUPHIN-TANGUY. Controllability indices for structured systems. *Linear Algebra and its Applications*, **250**(1), 275–287, 1997.
- [Sundareshan et Huang, 1984] M. K. SUNDARESHAN et P. C. K. HUANG. On the design of a decentralized observation scheme for large scale systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-29**(3), 274–276, 1984.
- [Sussmann, 1979] H. J. SUSSMANN. Single input observability of continuous time systems. *Mathematical System Theory*, **12**, 371–393, 1979.
- [Svaricek, 1990] F. SVARICEK. An improved graph-theoretic algorithm for computing the structure at infinity of linear systems. Dans *IEEE Conference on Decision and Control*, Hawaii, 1990.
- [Svaricek, 1993] F. SVARICEK. A graph-theoretic approach for the investigation of the observability of bilinear systems. Dans *Proceedings of the 12th IFAC World Congress*, volume 4, pages 351–354, Sydney, Australia, 1993.
- [Tan et Edwards, 2002] C.P. TAN et C. EDWARDS. Sliding mode observers for detection and reconstruction of sensor faults. *Automatica*, **38**(10), 1815–1821, 2002.

- [Travé-Massuyès *et al.*, 2001] L. TRAVÉ-MASSUYÈS, T. ESCOBET et R. MILNE. Model-based diagnosability and sensor placement. Application to a frame 6 gas turbine subsystem. Dans *DX'01 International Workshop on Principles of Diagnosis*, pages 205–212, Nashville, U.S.A., 2001.
- [Trave-Massuyes *et al.*, 2006] L. TRAVE-MASSUYES, T. ESCOBET et X. OLIVE. Diagnosability analysis based on component-supported analytical redundancy relations. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics - Part A : Systems and Humans*, **36**(6), 1146–1160, 2006.
- [Trentelman *et al.*, 2001] H. L. TRENTELMAN, A. A. STOOORVOGEL et M. HAUTUS. *Control Theory for Linear Systems*. Springer, London, U.K., 2001.
- [Trinh et Ha, 2000] H. TRINH et Q. HA. Design of linear functional observers for linear systems with unknown inputs. *International Journal of Systems Science*, **31**(6), 741–749, 2000.
- [Tsui, 1996] C. C. TSUI. A new design approach to unknown input observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **41**(3), 464–468, 1996.
- [van de Wal et de Jager, 2001] M. VAN DE WAL et B. DE JAGER. A review of methods for input/output selection. *Automatica*, **37**(4), 487–510, 2001.
- [van der Woude *et al.*, 2003] J. W. VAN DER WOUDE, C. COMMAULT et J. M. DION. Zero orders and dimensions of some invariant subspaces in linear structured systems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, **16**(2-3), 225–237, 2003.
- [van der Woude et Murota, 1995] J. W. VAN DER WOUDE et K. MUROTA. Disturbance decoupling with pole placement for structured Systems : a graph-theoretic approach. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **16**(3), 922–942, 1995.
- [van der Woude, 1991a] J. W. VAN DER WOUDE. A graph theoretic characterization for the rank of the transfer matrix of a structured system. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, **4**(1), 33–40, 1991.
- [van der Woude, 1991b] J. W. VAN DER WOUDE. On the structure at infinity of a structured system. *Linear Algebra and its Application*, **148**, 145–169, 1991.
- [van der Woude, 1993] J. W. VAN DER WOUDE. Disturbance decoupling by measurement feedback for structured Systems : a graph theoretical approach. Dans *European Control Conference*, pages 1132–1137, Groningen, Netherlands, 1993.
- [van der Woude, 1996] J. W. VAN DER WOUDE. Disturbance decoupling by measurement feedback for structured transfer matrix systems. *Automatica*, **32**(3), 357–363, 1996.
- [van der Woude, 2000] J. W. VAN DER WOUDE. The generic number of invariant zeros of a structured linear system. *SIAM Journal of Control and Optimization*, **38**(1), 1–21, 2000.
- [Verghese *et al.*, 1979] G. VERGHESE, P. VAN DOOREN et T. KAILATH. Properties of the system matrix of a generalized state-space system. *International Journal of Control*, **30**(2), 235–243, 1979.
- [Verghese *et al.*, 1981] G. C. VERGHESE, B. C. LÉVY et T. KAILATH. A generalized state-space for singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-26**(4), 811–831, 1981.
- [Vidyasagar, 1980] M. VIDYASAGAR. On the well-posedness of large-scale interconnected systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-25**(3), 413–421, 1980.

- [Wang *et al.*, 1975] S. H. WANG, E. J. DAVISON et P. DORATO. Observing the state of systems with unmeasurable disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-20**(5), 716–717, 1975.
- [Wang et Davison, 1975] S. H. WANG et E. J. DAVISON. Observing partial states for systems with unmeasurable disturbances. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-23**(3), 481–483, 1975.
- [Wang et Zhou, 2003] W. WANG et Y. ZHOU. Analysis of impulsive modes and Luenberger observers for descriptor systems. *System & Control Letters*, **44**(5), 347–353, 2003.
- [Wiedemann, 1999] G. WIEDEMANN. *Strukturelle Zugänge Zur Analyse und Synthese Linearer Regelungssysteme in Deskriptorform*. Shaker Verlag, Aachen, shaker verlag edition, 1999.
- [Willems, 1986] J. L. WILLEMS. Structural controllability and observability. *System & Control Letters*, **8**(1), 5–12, 1986.
- [Williamson, 1977] D. WILLIAMSON. Observation of bilinear systems with application to biological control. *Automatica*, **13**(3), 243–254, 1977.
- [Wonham, 1985] W. M. WONHAM. *Linear multivariable control : a geometric approach*, volume 10 of *Applications of mathematics*. Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 1985.
- [Wünnenberg, 1990] J. WÜNNENBERG. *Observer-based fault detection in dynamic systems*. Thesis, University of Duisburg, Germany, 1990.
- [Xiong et Saif, 2003] Y. XIONG et M. SAIF. Unknown disturbance inputs estimation based on a state functional observer design. *Automatica*, **39**(8), 1389–1398, 2003.
- [Yamada et Luenberger, 1985a] T. YAMADA et D. G. LUENBERGER. Generic controllability theorems for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-30**(2), 144–152, 1985.
- [Yamada et Luenberger, 1985b] T. YAMADA et D.G. LUENBERGER. Generic properties of column-structured matrices. *Linear Algebra and its Applications*, **65**(2), 189–206, 1985.
- [Yamada et Saga, 1985] T. YAMADA et T. SAGA. A sufficient condition for structural decouplability of linear nonsquare systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-30**(9), 918–921, 1985.
- [Yan, 2007] Z. YAN. Geometric analysis of impulse controllability for descriptor system. *System & Control Letters*, **56**(1), 1–6, 2007.
- [Yang et Wilde, 1988] F. YANG et R. W. WILDE. Observers for linear systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **33**(7), 677–681, 1988.
- [Yip et Sincovec, 1981] E. L. YIP et R. F. SINCOVEC. Solvability, controllability and observability of continuous descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-26**(3), 702–707, 1981.
- [Zadeh et Desoer, 1963] L.A. ZADEH et C.A. DESOER. *Linear system theory*. MacGraw-Hill Book Company, 1963.
- [Zhang *et al.*, 2004] X. ZHANG, T. PARISINI et M. M. POLYCARPOU. Adaptive fault-tolerant control of nonlinear uncertain Systems : an information-based diagnostic approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **49**(8), 1259–1274, 2004.

- [Zhou *et al.*, 1987] Z. ZHOU, M. A. SHAYMAN et T-J. TARN. Singular Systems : a new approach in the time domain. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-32**(1), 42–50, 1987.

Annexe A : Publications significatives

Observability of structured linear systems in descriptor form : a graph-theoretic approach.

T. Boukhobza, F. Hamelin et D. Sauter, Automatica, 42(4), 629-635, 2006.

Uniform observability analysis for structured bilinear Systems : a graph-theoretic approach.

T. Boukhobza, F. Hamelin et D. Sauter,
European Journal of Control, 12(5), 505-518, 2006.

State and input observability for structured linear Systems : a graph-theoretic approach.

T. Boukhobza, F. Hamelin et S. Martinez-Martinez,
Automatica, 43(7), 1204-1210, 2007.

Observability analysis for structured bilinear systems : a graph-theoretic approach.

T. Boukhobza et F. Hamelin,
Automatica, 43(11), 1968-1974, 2007.

A graph-theoretic approach to fault detection and isolation for structured bilinear systems.

T. Boukhobza, F. Hamelin et S. Canitrot,
International Journal of Control, 81(4), 661-679, 2008.

Available online at www.sciencedirect.com

SCIENCE @ DIRECT®

automatica

Automatica 42 (2006) 629–635

www.elsevier.com/locate/automatica

Brief paper

Observability of structured linear systems in descriptor form: A graph-theoretic approach[☆]

T. Boukhobza*, F. Hamelin, D. Sauter

Henri Poincaré University, Nancy 1, CRAN UMR 7039 CNRS-INPL-UHP, BP 239, 54506 Vandœuvre Cedex, France

Received 22 July 2004; received in revised form 22 July 2005; accepted 1 December 2005

Abstract

This paper deals with the right-hand side observability of structured linear systems in descriptor form. The method we propose is based on a graph-theoretic approach. It is applicable to a large class of descriptor systems including regular and nonregular systems even if they are square, underdetermined or overdetermined. After defining digraphs which represent such systems, we express in graphic terms necessary and sufficient conditions to achieve the observability of the whole or of a given part of the state. These conditions are easy to check because they are based on comparison of integers and on finding edges and subgraphs in a digraph. Therefore, our approach is suited to study large scale and/or uncertain systems.

© 2006 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Keywords: Descriptor systems; Observability; Structured systems; Graph theory

1. Introduction

During the last decades, a large amount of attention has been paid to the graphical analysis of dynamical system properties. This approach is mainly dedicated to linear systems in standard form for which many structural properties such as controllability, observability, solvability of several classical control problems including disturbance rejection, input–output decoupling, fault detection and isolation are studied. Survey paper (Dion, Commault, & Van der Woude, 2003) reviews the most significant results in this area. Unfortunately, not so many papers have dealt with the graphical analysis of the properties of descriptor systems. Effectively, descriptor systems are more complicated to study than linear systems in standard form. Descriptor systems result from a convenient and natural process modeling (Lewis, 1992) and their applications can be found in various fields (Müller, 2000) such as robotics, electrical circuit networks, biologic and economic systems. Moreover,

considering a system with unknown inputs is quite easy using descriptor forms since unknown inputs, like faults or disturbances, can be included in an extended state of descriptor system, which may then be non-square and non-regular. All these features increase interest of such systems.

Structural properties like solvability, controllability and observability are revisited for descriptor systems in Aplevich (1991), Cobb (1984), Dai (1989), Özcaldiran, Fountain, and Lewis (1992), and Yip and Sincovec (1981). Among these properties, the observability analysis of the whole or of a given part of the state for descriptor systems is of great interest mainly in the design of control laws, fault detection and isolation schemes, fault tolerant control strategies, supervision proposals and so on. The observability characterization is also an important stage in the design of state or unknown input observers for descriptor systems. Indeed, most existence conditions of observers devoted to descriptor systems (Chu & Mehrmann, 1999; Darouach, Zasadzinski, & Hayar, 1996; Hou & Müller, 1999b; Nikoukah, Campbell, & Delebecque, 1998) are related to some sufficient observability conditions.

Until now, in most cases, the studies concerning the observability of descriptor systems deal with algebraic and geometric tools. Yet, the use of such tools to analyse the observability of descriptor systems assumes the exact knowledge of the

[☆] This paper was not presented at any IFAC meeting. This paper was recommended for publication in revised form by Associate Editor Michel Verhaegen under the direction of Editor Torsten Soederstroem.

* Corresponding author. Tel.: +33 383 684 464; fax: +33 383 684 462.
E-mail address: taha.boukhobza@cran.uhp-nancy.fr (T. Boukhobza).

state space matrices which characterize the model of the system. In many modeling problems, these matrices have a number of fixed zero entries, determined by the physical structure, while the remaining entries are not exactly known. To study the properties of these systems in spite of the poor knowledge we have of them, the idea is that we only keep the zero/nonzero entries in the matrices of the state-space representation. Thus, we consider models where the fixed zeros are conserved while the nonzero entries are replaced by free parameters. There is a huge amount of interesting studies in the literature using this kind of models called structured models. These models capture most of the available structural information from physical laws. Moreover, they are helpful to handle uncertain systems i.e. systems where parameters values are not exactly known. Finally, their study requires a low computational burden which allows us to deal with large scale systems. Because of these characteristics, we think that structured systems are particularly adapted to study the observability. Subsequently, in this paper, we consider only structured linear systems in descriptor form (or structured descriptor systems):

$$\Sigma_A: \begin{cases} E^\lambda \dot{x} = A^\lambda x + B^\lambda u, \\ y = C^\lambda x, \\ z \stackrel{\text{def}}{=} E^\lambda x, \end{cases} \quad (1)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ and $y \in \mathbb{R}^p$ are, respectively, the state vector, the input vector and the output vector. $E^\lambda \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $A^\lambda \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $B^\lambda \in \mathbb{R}^{q \times m}$, and $C^\lambda \in \mathbb{R}^{p \times n}$ represent matrices in which elements are either fixed to zero or assumed to be nonzero free parameters noted λ_i . The set of these parameters is $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h\}$. New variable $z \in \mathbb{R}^q$ called dynamic variable, is introduced in this paper.

If all the nonzero parameters λ_i are fixed, we obtain an admissible realization of structured system Σ_A . The properties of each realization can be studied according to the values of λ_i . We say that this property is generically true if it is true for almost all the realizations of the system.

Among the studies analysing structured systems in descriptor form by means of a graph-theoretic approach, we can cite Reinschke and Wiedemann (1997), Wiedemann (1999). In Reinschke and Wiedemann (1997), the authors use digraphs to characterize structural controllability of descriptor system. However, they make some assumptions about the studied systems: matrices E^λ and A^λ have to be square ($q = n$), $\det[sE^\lambda - A^\lambda] \neq cst$ and no main diagonal element of $[sE^\lambda - A^\lambda]$ equals zero. Many descriptor systems do not satisfy all these assumptions like the underdetermined ones which are very helpful to represent systems with unknown inputs. In Wiedemann (1999), structural properties of regular descriptor systems,¹ including the observability, are studied by assuming also that there is no zero element in the main diagonal of $[sE^\lambda - A^\lambda]$. In particular, using a graph-theoretic approach, necessary and sufficient conditions for R -observability (which is equivalent to the right-hand side observability

(Hou & Müller, 1999a) property for regular descriptor systems) and impulse-observability are given.

The aim of this paper is to study the right-hand side observability (Hou & Müller, 1999a) which do not necessarily satisfy the previous assumptions. Indeed, the regularity assumption on descriptor systems as well as the hypothesis on the main diagonal of $[sE^\lambda - A^\lambda]$ are dropped through this paper. That means that our method is applicable also to non-regular and/or non-square descriptor systems.

The paper is organized as follows: after Section 2, which is devoted to the problem formulation, a digraph representation of structured systems is given in Section 3. Necessary and sufficient conditions for the right-hand side observability of the whole or any given part of the state of the system are provided in Section 4. The proposed approach is illustrated with an example in Section 5. Finally, a conclusion ends the paper.

2. Problem statement

First of all, let us precise hereafter the assumptions made on the system and the type of observability we study.

Obviously, in order to guarantee that there exists at least one trajectory $x(t)$ satisfying relations (1), $u(t)$ and $Ex(0_-)$ are assumed to be admissible i.e. they do not result in contrary equations in (Σ_A) and are such that system (1) is solvable. This assumption is quite natural and readers interested by the solvability of descriptor systems can refer to Geerts (1993), Yip and Sincovec (1981). Moreover, in addition to the previous hypothesis and without loss of generality, we only assume that E^λ does not have any row identically zero. However, this assumption is not restrictive.

We consider, in this paper, underdetermined, overdetermined or square structured descriptor systems. Moreover, no assumption is done on the rank of $[sE^\lambda - A^\lambda]$ neither on its main diagonal. Therefore, our approach is adapted to analyse the input observability (Hou & Patton, 1998) of systems with unknown inputs since we do not make any hypothesis on the regularity of system (Σ_A) . The kind of observability we study is related to the right-hand side (r.h.s.) observability (Hou & Müller, 1999a), which is equivalent to the R -observability (Dai, 1989; Yip & Sincovec, 1981) or to the finite observability (Verghese, Levy, & Kailath, 1981) for regular descriptor systems. Hereafter, we recall the definition of the r.h.s. observability. This definition extends the one given in Hou and Müller (1999a) for non-structured descriptor systems:

Definition 1. Structured system (Σ_A) is generically r.h.s. observable, if, for almost all the realizations of structured system (Σ_A) , $y(t) = 0$ for $t \geq 0$ implies $x(0_+) = 0$.

The property of r.h.s. observability is a very important observability property for descriptor systems. Indeed, it is proved in Hou and Müller (1999b), that it is closely related to the finite detectability which ensures the existence of a generalized observer which allows to reconstruct the state. In fact, (Σ_A) is r.h.s. observable iff for $t > 0$, state $x(t)$ can be uniquely determined using the knowledge of the output and

¹ System (Σ_A) is generically regular when matrices E^λ and A^λ are square and when for almost all its realizations, $\det[sE^\lambda - A^\lambda] \neq 0$.

the input (Hou & Müller, 1999b; Müller & Hou, 1993) and so equivalently iff there exist generically integers k and l and structured matrices G_y^λ and G_u^λ such that $x(t) = G_y^\lambda (y(t)^T, \dot{y}(t)^T, \dots, y^{(k)}(t)^T)^T + G_u^\lambda (u(t)^T, \dot{u}(t)^T, \dots, u^{(l)}(t)^T)^T, \forall t > 0$.

To summarize, considering structured system in descriptor form (Σ_A) , we propose to answer the question whether or not the whole or any given part of state $x(t)$ is r.h.s. observable. It turns out that this question can be answered by checking some simple graphic conditions.

3. Digraph representation of a structured descriptor system

This section is devoted to the definition of a digraph used to represent structured descriptor system (Σ_A) . This digraph is noted $\mathcal{G}(\Sigma_A)$ and is constituted by a vertex set \mathcal{V} and an edge set \mathcal{E} . The vertices are associated to variables $x(t)$, $y(t)$ and $z(t)$ of (Σ_A) and the directed edges represent links between these variables. For the sake of simplicity, known input $u(t)$ is not taken into account in $\mathcal{G}(\Sigma_A)$ since it is well known that the r.h.s. observability of descriptor systems depends only on matrices E^λ , A^λ and C^λ (Hou & Müller, 1999a). The edge direction is adapted to the observation problem since it corresponds to the knowledge-flow used to observe the state from the outputs and their derivatives. More precisely, $\mathcal{V} = \mathbf{X} \cup \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}$ where $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ denotes the set of state vertices, $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p\}$ denotes the set of output vertices, $\mathbf{Z} = \{\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_q\}$ denotes the set of dynamic variable vertices and $\mathcal{E} = E\text{-edges} \cup A\text{-edges} \cup C\text{-edges}$ with, $E\text{-edges} = \{(\mathbf{x}_i, \mathbf{z}_j) | E_{j,i}^\lambda \neq 0\}$, $A\text{-edges} = \{(\mathbf{z}_i, \mathbf{x}_j) | A_{i,j}^\lambda \neq 0\}$, $C\text{-edges} = \{(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_j) | C_{i,j}^\lambda \neq 0\}$. Here $M_{i,j}^\lambda$ is the (i, j) th element of matrix M^λ and $(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2)$ denotes a directed edge from vertex $\mathbf{s}_1 \in \mathcal{V}$ to vertex $\mathbf{s}_2 \in \mathcal{V}$. Note that to differentiate the state, the output and the dynamic variables from their corresponding vertices, the latter are written in bold font.

The digraph we define above has not exactly the same structure than the one used in Dion et al. (2003), Reinschke and Wiedemann (1997), Wiedemann (1999) because we add vertex subset \mathbf{Z} . This set allows us to remove all assumptions on matrix pencil $[sE^\lambda - A^\lambda]$ and on the regularity of the system.

Readers interested by different representations in graph-theoretic approach can refer to Murota (1987) and Reinschke (1988). Hereafter, we illustrate the proposed digraph definition with an example.

Example 2. Consider the structured system defined by

$$E^\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & \lambda_7 \\ 0 & 0 & \lambda_8 & 0 & \lambda_9 \\ \lambda_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$C^\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{13} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

To such a model, we associate the digraph in Fig. 1.

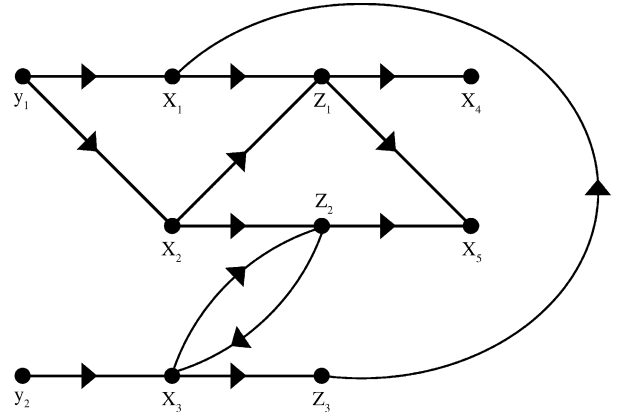


Fig. 1. Example 2.

We give now some helpful definitions and notations.

- For each edge $e = (\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1) \in \mathcal{E}$, \mathbf{s}_0 is the begin vertex and \mathbf{s}_1 is the end vertex of e . Two edges $e_1 = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}'_1)$ and $e_2 = (\mathbf{s}_2, \mathbf{s}'_2)$ are v -disjoint if $\mathbf{s}_1 \neq \mathbf{s}_2$ and $\mathbf{s}'_1 \neq \mathbf{s}'_2$. Note that e_1 and e_2 can be v -disjoint even if $\mathbf{s}'_1 = \mathbf{s}_2$ or $\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}'_2$. Some edges are v -disjoint if they are mutually v -disjoint.
- A subgraph $\mathcal{S}_g = (\mathcal{S}_v, \mathcal{S}_e)$ of $\mathcal{G}(\Sigma_A)$ is defined by an edge subset $\mathcal{S}_e \subseteq \mathcal{E}$ and a vertex subset $\mathcal{S}_v \subseteq \mathcal{V}$ such that \mathcal{S}_v is constituted by the begin and the end vertices of all the edges of \mathcal{S}_e . \mathcal{S}_g is said to cover a vertex \mathbf{s} if there exists an edge $e \in \mathcal{S}_e$ such that \mathbf{s} is the end vertex of e . Moreover, \mathcal{S}_g is a v -disjoint subgraph if all its edges are v -disjoint.
- Let $2^{\mathcal{V}}$ denote the power set of set \mathcal{V} composed of all the subsets of \mathcal{V} . Function φ is defined by

$$\varphi : 2^{\mathcal{V}} \rightarrow 2^{\mathcal{V}},$$

$$V_0 \mapsto V_1 = \varphi(V_0) = \{\mathbf{s} \in \mathcal{V} / (\mathbf{s}_0, \mathbf{s}) \in \mathcal{E}, \text{ where } \mathbf{s}_0 \in V_0\},$$

$\varphi(V_0)$ represents the reachable set from V_0 using any edge of \mathcal{E} beginning in V_0 . We define also function $\bar{\varphi}$ such that

$$\bar{\varphi} : 2^{\mathcal{V}} \rightarrow 2^{\mathcal{V}},$$

$$V_1 \mapsto \bar{V}_0 = \bar{\varphi}(V_1) = \{\mathbf{s} \in \mathcal{V} / (\mathbf{s}, \mathbf{s}_1) \in \mathcal{E}, \text{ where } \mathbf{s}_1 \in V_1\}.$$

4. Main results

The observability of descriptor systems has been mainly studied using geometric and algebraic tools (Cobb, 1984; Hou & Müller, 1999a; Özcaldiran et al., 1992; Verghese et al., 1981; Yip & Sincovec, 1981). In this context, the originality of our work, based on graph theory, is to provide observability conditions which have an intuitive interpretation and are very simple to check. Moreover, our approach allows us to characterize also the right-hand observability of any given part of the state. The graphic conditions, given in this paper, are related to the existence of a v -disjoint subgraph which covers all the state vertices, knowing that some A -edges cannot be used in such subgraph, due to the presence of matrix E^λ . Therefore, the first

part of this section is devoted to determine which edges can be used. These edges are called useful edges.

4.1. Determination of the useful vertices of $\mathcal{G}(\Sigma_A)$

The theorems giving necessary and sufficient conditions to ensure the observability of linear systems in standard form are recalled in Dion et al. (2003). These theorems cannot be directly applied to descriptor systems mainly because they assume that all the derivatives of the outputs are exploitable to observe the state. This assumption is not always verified in the case of descriptor systems, particularly when the output derivatives cannot be expressed in function of the state and the input. Effectively, recall that the derivative of $H^\lambda x$ can be generically expressed in function of the state and the input iff $\text{Im}(H^{\lambda T}) \subseteq \text{Im}(E^{\lambda T})$. In this case, we say that $H^\lambda x$ has a useful derivative. We precise hereafter the notion of useful derivative:

Definition 3. Consider (Σ_A) , we say that $\sum_{i=0}^r \sigma_i y^{(i)}$ has generically a useful derivative iff there exist an integer l and matrices Γ^λ and Γ_u^λ such that $\sum_{i=0}^r \sigma_i y^{(i)} = \Gamma^\lambda x + \Gamma_u^\lambda (u^T, \dot{u}^T, \dots, (u^{(l)})^T)^T$, with $\text{Im}(\Gamma^{\lambda T}) \subseteq \text{Im}(E^{\lambda T})$ for almost all the realizations of structured system (Σ_A) , or equivalently, if there exist an integer l and matrices P^λ and $\Gamma_u^\lambda(t)$ of appropriate dimensions such that $\sum_{i=0}^r \sigma_i y^{(i)} = P^\lambda z + \Gamma_u^\lambda (u^T, \dot{u}^T, \dots, (u^{(l)})^T)^T$. $\sum_{i=0}^r \sigma_i y^{(i)}$ is useful to observe the state only when $\sum_{i=0}^r \sigma_i y^{(i)}$ has generically a useful derivative.

A first step to analyze the r.h.s. observability of descriptor systems is to determine which edges, or equivalently which dynamical vertices correspond to useful derivatives of the output and so can be used to observe the state. In this respect, let us precise the notion of combined vertices which correspond to a linear combination of dynamical variables.

- We denote by $\mathbf{z}_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ the vertex associated to any combination of dynamic variables $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_k}$ whatever $i_1 < i_2 < \dots < i_k$.

$\mathbf{z}_{i_1, i_2, \dots, i_k}$, which we call combined vertex, can be defined by means of bijective function π associating a combined vertex to every nonempty subset of

$$\mathbf{Z} : \{\mathbf{z}_{i_1}, \mathbf{z}_{i_2}, \dots, \mathbf{z}_{i_k}\} \mapsto \pi(\{\mathbf{z}_{i_1}, \mathbf{z}_{i_2}, \dots, \mathbf{z}_{i_k}\}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{z}_{i_1, i_2, \dots, i_k}.$$

We denote by $\bar{\pi}$ the inverse function of π . The set of combined vertices is denoted \mathbf{Z}_C . Obviously, \mathbf{Z}_C includes \mathbf{Z} .

- A nonempty vertex subset $\mathbf{V}_C \subseteq \mathbf{Z}_C$ is said “structurally minimal” if $\forall \bar{\mathbf{V}} \subseteq \mathbf{V}_C$,

$$\text{card} \left(\bigcup_{\mathbf{v} \in \bar{\mathbf{V}}} \bar{\pi}(\mathbf{v}) \right) - \text{card}(\bar{\mathbf{V}}) \geq \max_{\mathbf{v} \in \bar{\mathbf{V}}} (\text{card}(\bar{\pi}(\mathbf{v}))) - 1.$$

For example, $\mathbf{V}_1 = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$ is structurally minimal while $\mathbf{V}_2 = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$ is not structurally minimal because for $\bar{\mathbf{V}} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$, $\text{card}(\bigcup_{\mathbf{v} \in \bar{\mathbf{V}}} \bar{\pi}(\mathbf{v})) - \text{card}(\bar{\mathbf{V}}) = 3 - 2$ and $\max_{\mathbf{v} \in \bar{\mathbf{V}}} (\text{card}(\bar{\pi}(\mathbf{v}))) - 1 = 3 - 1$.

- To each $\mathbf{V}_C \subseteq \mathbf{Z}_C$, we can associate a vertex subset $\wp(\mathbf{V}_C)$ constituted by all the elements $\mathbf{s} \in \mathbf{Z}_C$ for which there exists $\mathbf{V}_0 \subseteq \mathbf{V}_C$ such that:

$$\begin{cases} \text{card} \left(\bigcup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0} \bar{\pi}(\mathbf{v}) \right) - \text{card}(\bar{\pi}(\mathbf{s})) = \text{card}(\mathbf{V}_0) - 1, \\ \forall \bar{\mathbf{V}}_0 \subset \mathbf{V}_0 \mid \text{card}(\bar{\mathbf{V}}_0) = \text{card}(\mathbf{V}_0) - 1, \\ \bigcup_{\mathbf{v} \in \bar{\mathbf{V}}_0} \bar{\pi}(\mathbf{v}) \cup \bar{\pi}(\mathbf{s}) = \bigcup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0} \bar{\pi}(\mathbf{v}). \end{cases}$$

For example, for $\mathbf{V}_C = \{\mathbf{z}_{1,2}, \mathbf{z}_{1,3}, \mathbf{z}_4\}$, we have $\wp(\mathbf{V}_C) = \{\mathbf{z}_{1,2}, \mathbf{z}_{1,3}, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4\}$. Note that $\forall \mathbf{V}_Z \subseteq \mathbf{Z}$ we have $\wp(\mathbf{V}_Z) = \mathbf{V}_Z$. Obviously, we have $\forall \mathbf{V}_C \subseteq \mathbf{Z}_C, \mathbf{V}_C \subseteq \wp(\mathbf{V}_C)$.

- The definition of φ in Section 3 is adapted for taking into account \mathbf{Z}_C . In the sequel, φ_e is such that:

$$\varphi_e : 2^{\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}_C} \rightarrow 2^{\mathbf{X} \cup \mathbf{Z}_C},$$

$$V_0 \mapsto \varphi_e(V_0) = V_1 = \left(\bigcup_{\mathbf{s} \in V_0 \cap \mathbf{Z}_C} \varphi(\bar{\pi}(\mathbf{s})) \right) \cup \varphi(V_0 \cap \mathbf{Y}).$$

- We also define functions θ and $\bar{\theta}$ as:

$$\theta : 2^{\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}_C} \rightarrow \mathbb{N},$$

$$V_0 \mapsto \theta(V_0) = \text{maximal number of } v\text{-disjoint edges from } V_0 \text{ to } \varphi_e(V_0),$$

$$\bar{\theta} : 2^{\mathbf{Z}} \rightarrow \mathbb{N},$$

$$V_0 \mapsto \bar{\theta}(V_0) = \text{maximal number of } v\text{-disjoint edges from } \bar{\varphi}(V_0) \text{ to } V_0$$

knowing that, edge subset $A_C\text{-edges} = \{(\mathbf{z}_{i_1, i_2, \dots, i_k}, \mathbf{x}_j) \mid A_{r, j}^\lambda \neq 0 \text{ with } r \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\}\}$ is added virtually to the digraph (there is no need to redraw the digraph associated to the system) to take into account \mathbf{Z}_C .

Functions θ and $\bar{\theta}$ have the following properties:

- P1.** Let $\tilde{\mathbf{Y}} \subseteq \mathbf{Y}$ and denote by $\tilde{\mathbf{y}}$ its associated vector. Let C^λ the matrix such that $\tilde{\mathbf{y}} = C^\lambda x$, we have $\theta(\tilde{\mathbf{Y}}) = g\text{-rank}[\tilde{C}^\lambda]$, where $g\text{-rank}$ denotes the generic rank (Reinschke, 1988).
- P2.** Similarly, let $\tilde{\mathbf{Z}} \subseteq \mathbf{Z}$ and denote by $\tilde{\mathbf{z}}$ its associated vector. Let E^λ the matrix such that $\tilde{\mathbf{z}} = E^\lambda x$, we have that $\bar{\theta}(\tilde{\mathbf{Z}}) = g\text{-rank}[\tilde{E}^\lambda]$.

In order to graphically analyse the observability of structured descriptor systems, we follow an iterative approach where the i th stage corresponds to the i th differentiation order of the output. To observe the state, only useful derivatives of the output can be used. Determining these derivatives amounts to find the elements of A -edges, or equivalently the vertices of \mathbf{Z}_C , corresponding to the useful derivatives of the output. These edges (resp. vertices) are called useful edges (resp. vertices).

Let us denote $\mathbf{M}_0 = \mathbf{Y}$. If $\theta(\mathbf{M}_0) = n$, then there is no need to resort to the output derivatives to observe the state. Indeed, in

this case, generic rank of C^λ is equal to the state dimension and so the system is observable. Otherwise, a first differentiation of the output is necessary to achieve the observability of the whole state. In this respect, we must find vertices of z_{i_1, i_2, \dots, i_k} of \mathbf{Z}_C which can express the useful first derivatives of the output i.e. there exists generically a matrix Γ^λ such that $\Gamma^\lambda y$ can be expressed using a combination of z_{i_1}, \dots, z_{i_k} . The following lemma allows us to determine which vertices of \mathbf{Z}_C are useful. Note that only linearly independent equations linking y and its derivatives to the state are useful to achieve the state observability.

Lemma 4. Consider a subset $\Omega_Z = \{z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_k}\}$ and its corresponding combined vertex z_{i_1, i_2, \dots, i_k} . Assume that $\nexists \Omega'_Z \subset \Omega_Z$ such that $\pi(\Omega'_Z)$ is useful. $\pi(\Omega_Z)$ is useful or equivalently there exist vectors $P^\lambda \in \mathbb{R}^{1 \times k}$ and $\Gamma^\lambda \in \mathbb{R}^{1 \times p}$ satisfying $P^\lambda(z_{i_1}, \dots, z_{i_k})^T = \Gamma^\lambda y$ iff $\exists \Omega_M \subseteq \mathbf{M}_0$ such that

$$\theta(\Omega_M) = \text{card}(\varphi_e(\Omega_M) \cup \bar{\varphi}(\Omega_Z)) - \bar{\theta}(\Omega_Z) + 1. \quad (2)$$

Proof of sufficiency. Assume that condition (2) is satisfied and let us take the following notations: x_Ω is the vector of the state components represented by the elements of vertex set $\varphi_e(\Omega_M) \cup \bar{\varphi}(\Omega_Z)$, z_Ω is the vector of the dynamic variables associated to Ω_Z and y_Ω is the vector of the output components associated to Ω_M .

Using these notations, we can write $y_\Omega = C_\Omega x_\Omega$ and $z_\Omega = E_\Omega x_\Omega$. Relation (2) of Lemma 4 implies that generically $\dim(\text{Im}(C_\Omega^T)) + \dim(\text{Im}(E_\Omega^T)) = \dim(x_\Omega) + 1$. Then, immediately we can conclude that $\dim(\text{Im}(E_\Omega^T) \cap \text{Im}(C_\Omega^T)) \geq 1$. Consequently, generically there exist line vectors $P^\lambda \in \mathbb{R}^{1 \times k}$ and $\Gamma_\Omega^\lambda \in \mathbb{R}^{1 \times p_\Omega}$ such that $P^\lambda E_\Omega x_\Omega = \Gamma_\Omega^\lambda C_\Omega x_\Omega \Rightarrow \exists \Gamma^\lambda$ such that $P^\lambda z_\Omega = \Gamma^\lambda y$. This proves the sufficiency.

Note that $\theta(\Omega_M) \geq \text{card}(\varphi_e(\Omega_M) \cup \bar{\varphi}(\Omega_Z)) - \bar{\theta}(\Omega_Z) + 1$ is also sufficient to prove the existence of vectors $P^\lambda \in \mathbb{R}^k$ and $\Gamma^\lambda \in \mathbb{R}^{1 \times p}$ such that $P^\lambda z_\Omega = \Gamma^\lambda y$.

Proof of necessity. Assume now that there exist line vectors $P^\lambda \in \mathbb{R}^{1 \times k}$ and $\Gamma^\lambda \in \mathbb{R}^p$ such that $P^\lambda z_\Omega = \Gamma^\lambda y$. Let y_Ω be the vector of components of y which intervenes in $\Gamma^\lambda y$ i.e. $\Gamma^\lambda y = \Gamma_\Omega^\lambda y_\Omega$ and let Ω_M be the vertex subset associated to the components of y_Ω .

From the construction of the digraph, $P^\lambda z_\Omega$ is a linear function of x_j where $\mathbf{x}_j \in \bar{\varphi}(\Omega_Z)$. To satisfy $P^\lambda z_\Omega = \Gamma^\lambda y = \Gamma_\Omega^\lambda y_\Omega$, the variables corresponding to $\bar{\varphi}(\Omega_Z)$ are necessarily either eliminated in combination $P_k^\lambda z_\Omega$ or can be expressed only in function of y_Ω . On the one hand, a combination of k dynamical variables z_i can eliminate at most $\bar{\theta}(\Omega_Z) - 1$ elements of $\bar{\varphi}(\Omega_Z)$. Let $q = \text{card}[\bar{\varphi}(\Omega_Z)]$. Thus, at least $q - \bar{\theta}(\Omega_Z) + 1$ variables corresponding to the vertices included in $\bar{\varphi}(\Omega_Z)$ must be generically expressed in function of y_Ω to satisfy equation $P^\lambda z_\Omega = \Gamma_\Omega^\lambda y_\Omega$. However, y_Ω is a linear function of the state components associated to $\varphi_e(\Omega_M)$, which are not necessarily included in $\bar{\varphi}(\Omega_Z)$. Thus, the components of $\varphi_e(\Omega_M) \setminus (\bar{\varphi}(\Omega_Z) \cap \varphi_e(\Omega_M))$ must be added to the components which must be expressed using y_Ω . The number of state variables we can

express using y_Ω is equal to $\theta(\Omega_M)$. Thus, Ω_M must satisfy $\theta(\Omega_M) \geq n_1 \stackrel{\text{def}}{=} \text{card}(\varphi_e(\Omega_M) \cup \bar{\varphi}(\Omega_Z)) - \bar{\theta}(\Omega_Z) + 1$.

Moreover, assume now that there exists $\Omega_M \subseteq \mathbf{M}_0$ such that $\theta(\Omega_M) = n'_1 > n_1$. Then, for all $\Omega'_Z \subset \Omega_Z$ such that $\text{card}(\Omega'_Z) = \text{card}(\Omega_Z) - 1$, we have $\theta(\Omega_M) \geq \text{card}(\varphi_e(\Omega_M) \cup \bar{\varphi}(\Omega'_Z)) - \bar{\theta}(\Omega'_Z) + 1$. According to the sufficiency of lemma 4 proved above, $\pi(\Omega'_Z)$ is useful. However, it was assumed that $\nexists \Omega'_Z \subset \Omega_Z$ where $\pi(\Omega'_Z)$ useful. So, there cannot exist $\Omega_M \subseteq \mathbf{M}_0$ such that $\theta(\Omega_M) = n'_1 > n_1$.

On the one hand, we have proved the existence of $\Omega_M \subseteq \mathbf{M}_0$ such that $\theta(\Omega_M) \geq n_1$ and, on the other hand, under the assumption of Lemma 4, we have established that there does not exist $\Omega_M \subseteq \mathbf{M}_0$ such that $\theta(\Omega_M) > n_1$. Consequently, $\exists \Omega_M \subseteq \mathbf{M}_0$ such that $\theta(\Omega_M) = n_1 = \text{card}(\varphi_e(\Omega_M) \cup \bar{\varphi}(\Omega_Z)) - \bar{\theta}(\Omega_Z) + 1$. \square

We present hereafter the algorithm used to determine a vertex subset noted \mathbf{Z}^* representing all the useful vertices.

Algorithm 1.

Initialisation : $\mathbf{M}_0 = \mathbf{Y}, \mathbf{Z}_0 = \emptyset$ and $i = 0$

Step i: $\mathbf{Q}_i = \varphi_e(\varphi_e(\mathbf{M}_i)), \mathbf{Z}_{i+1} = \emptyset$

for $\kappa = 1$ to $\text{card}(\mathbf{Q}_i)$

for $j = 1$ to $\binom{\text{card}(\mathbf{Q}_i)}{\kappa}$

let $\Omega_{\kappa j}$ be the j^{th} κ -subset of \mathbf{Q}_i

if $\text{card}\left(\bigcup_{\mathbf{v}_r \in \mathbf{V}} \bar{\pi}(\mathbf{v}_r) \cup \Omega_{\kappa j}\right) - \text{card}(\mathbf{V}) \geq \kappa, \forall \mathbf{V} \subseteq \mathbf{Z}_{i+1}$,

then if there exist $\mathbf{V}_Y \subseteq \mathbf{Y}$ and a structurally minimal vertex subset $\mathbf{V}_Z \subseteq \varphi(\mathbf{Z}_i)$ such that

$\theta(\Omega_M) = \text{card}(\varphi_e(\Omega_M) \cup \bar{\varphi}(\Omega_{\kappa j})) - \bar{\theta}(\Omega_{\kappa j}) + 1$,

where $\Omega_M = \mathbf{V}_Y \cup \mathbf{V}_Z$

then $\mathbf{Z}_{i+1} = \mathbf{Z}_{i+1} \cup \{\pi(\Omega_{\kappa j})\}$,

end

End of step i: $\mathbf{M}_{i+1} = \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}_{i+1}$

If $\theta(\mathbf{M}_{i+1}) \neq \theta(\mathbf{M}_i)$, $i \leftarrow i + 1$ and go to Step i

else $\mathbf{M}^* = \mathbf{M}_i$ and $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}_{i+1}$.

$\mathbf{M}_0 = \mathbf{Y}$ represents the output derivatives of order 0. Lemma 4 states that \mathbf{Z}_1 represents all vertices of \mathbf{Z}_C used to express the first derivative of the output in function of x . Moreover, $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_0 \cup \mathbf{Z}_1$ represents the outputs and their first useful derivatives. This set is sufficient to generically achieve the r.h.s. observability of the system iff $\theta(\mathbf{M}_1) = \text{card}(\mathbf{X}) = n$. Otherwise, the outputs must be differentiated once again. From definition of $\varphi(\cdot)$, all the elements $z_{i_1, \dots, i_k} \in \varphi(\mathbf{Z}_1)$ are such that there exist vectors $P^\lambda \in \mathbb{R}^k$ and $\Gamma^\lambda \in \mathbb{R}^p$ satisfying $P^\lambda(z_{i_1}, \dots, z_{i_k})^T = \Gamma^\lambda y$. Thus, using a similar reasoning to the one of the proof of Lemma 4, and assuming that $\nexists \Omega'_Z \subset \Omega_Z$ such that $\pi(\Omega'_Z)$ is useful, we can prove that $\pi(\Omega_Z)$ is useful or equivalently that there exist line vectors $P^\lambda \in \mathbb{R}^{1 \times k}$ and $\Gamma_0^\lambda \in \mathbb{R}^{1 \times p}$, $\Gamma_1^\lambda \in \mathbb{R}^{1 \times p}$, $\Gamma_u^\lambda \in \mathbb{R}^{1 \times m}$ satisfying $P^\lambda(z_{i_1}, \dots, z_{i_k})^T = \Gamma_0^\lambda y + \Gamma_1^\lambda \dot{y} + \Gamma_u^\lambda u$ iff there exist $\mathbf{V}_Y \subseteq \mathbf{Y}$ and a structurally minimal vertex subset

$V_Z \subseteq \wp(Z_1)$ such that $\theta(\Omega_M) = \text{card}(\varphi_e(\Omega_M) \cup \bar{\varphi}(\Omega_{\kappa,j}) - \bar{\theta}(\Omega_{\kappa,j}) + 1$ where $\Omega_M = V_Y \cup V_Z$. Therefore, we deduce that Z_2 represents all vertices of Z_C used to express the first derivatives of the variables associated to M_1 and so the first and second derivatives of the output in function of x . Extending this reasoning, Z_{i+1} represents all vertices of Z_C used to express the derivatives of order less or equal to $i+1$ of the output in function of x . When $\theta(M_{i+1}) = \theta(M_i)$, the $(i+1)$ th output derivative does not give any new information for the state observation. We can conclude that Z^* represents all vertices of Z_C used to express the derivatives of the output in function of x . Note that, obviously, if the system is r.h.s. observable then $Z^* = Z$.

4.2. Observation of the whole state

The previous issue suggests the following proposition which gives necessary and sufficient conditions to the generic r.h.s. observability of (Σ_A) :

Proposition 5. Consider structured system (Σ_A) represented by digraph $\mathcal{G}(\Sigma_A)$. (Σ_A) is generically r.h.s. observable iff

- (a) $Z^* = Z$,
- (b) in graph $\mathcal{G}(\Sigma_A)$ there exists a v -disjoint subgraph \mathcal{S}_g which covers X .

4.3. Functional observation case

The last result we present hereafter concerns the r.h.s. observability of only a given part of the state $w = (x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n})^T$. This problem is important in many applications where only a partial knowledge of the state is required. Note that the matrix pencil approach used to characterize the r.h.s. observability does not allow us to handle easily this problem. Let $w = \{x_{j_1}, x_{j_2}, \dots, x_{j_n}\}$ denote the vertex subset associated to w . As previously, we use Algorithm 1 to determine the useful vertices of Z_C . We can suggest directly the following proposition:

Proposition 6. For system (Σ_A) represented by $\mathcal{G}(\Sigma_A)$, state part w is generically observable iff there exist $V_Y \subseteq Y$ and a structurally minimal vertex subset $V_Z \subseteq \wp(Z^*)$ such that

$$\begin{cases} w \subseteq \varphi_e(V_Y \cup V_Z), \\ \theta(V_Y \cup V_Z) = \text{card}(\varphi_e(V_Y \cup V_Z)). \end{cases}$$

According to Proposition 6, a graphic condition to check the observability of w can be enounced:

Proposition 7. Consider structured system (Σ_A) represented by graph $\mathcal{G}(\Sigma_A)$. $w = (x_{j_1}, \dots, x_{j_n})^T$ is generically r.h.s. observable iff there exists a v -disjoint subgraph $\mathcal{S}_g = (\mathcal{S}_g, \mathcal{S}_g^c)$, which covers the vertices of w and such that

- (a) no edges of \mathcal{S}_g begin with an element of $Z \setminus (\bigcup_{s \in Z^*} \bar{\pi}(s))$,
- (b) for each vertex $s \in Z^*$, only one A -edge beginning with one element of $\bar{\pi}(s)$ can be used in \mathcal{S}_g . In the case where such edge is used in \mathcal{S}_g , the latter must cover $\varphi_e(\{s\})$,

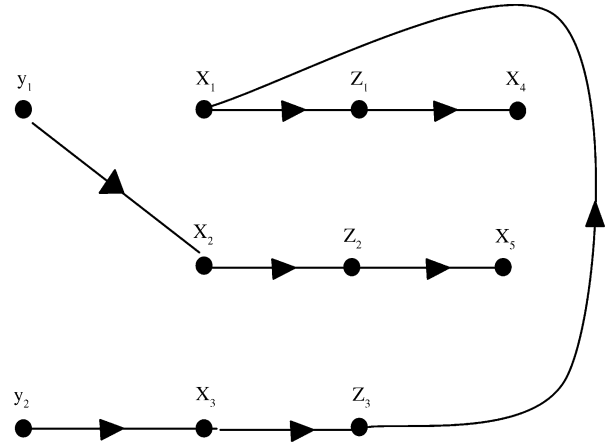


Fig. 2. v -disjoint subgraph covering X for Example 2.

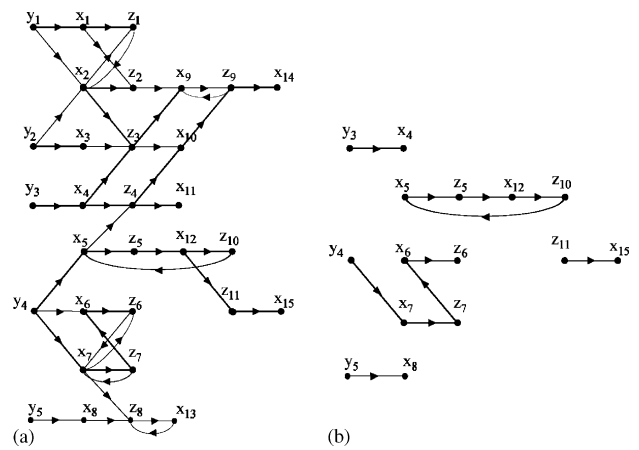


Fig. 3. Illustrative example.

- (c) all the edges beginning with $s \in Y$ can be used in \mathcal{S}_g . In the case where such edge is used in \mathcal{S}_g , the latter must cover $\varphi_e(\{s\})$.

5. Example

For the system of Example 2, Algorithm 1 gives $Z^* = Z$ and in Fig. 2, we represent a v -disjoint subgraph which covers all the state vertices. Thus, this system is generically r.h.s. observable.

Consider the structured system represented in Fig. 3a.

Using Algorithm 1, we compute $Z^* = \{z_{1,2}, z_{2,3}, z_{1,9}, z_4, z_5, z_6, z_7, z_{10}, z_{11}\}$. Since $Z^* \neq Z$, the whole state is not generically observable. However, it is possible to search the maximal observable part of the state. The observability subgraph covering the maximal number of state vertices and satisfying conditions of Proposition 7 is presented in Fig. 3b. Thus, only $w = (x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{12}, x_{15})^T$ is generically r.h.s. observable.

6. Conclusion

In this paper, a new analysis tool to check the r.h.s. observability of the whole or any given part of structured descriptor systems is proposed. The studied system can be underdetermined, overdetermined or square and obviously non-regular. Using a new graph representation of this kind of systems, necessary and sufficient conditions for the r.h.s. observability are expressed in simple graphic terms. These intrinsic conditions, which do not depend on the parameter values of the system, need few information about the system and so allow us to handle systems with uncertain parameters. Moreover, these conditions are very easy to check by means of well-known combinatorial techniques and simply by hand for small systems. From a computational point of view, note that our approach is particularly suited for large-scale systems and is free from numerical difficulties. Indeed, the proposed algorithm and conditions can be easily implemented because they require simple computations on integers and are based on finding v -disjoint subgraphs in graphs. Furthermore, the graph-theoretic approach makes easy the visualization of the system structure. This may be very helpful for the optimisation of sensor placement or for adding sensors to make r.h.s. observable some particular part of the state.

References

- Aplevich, J. D. (1991). *Implicit linear systems*. New York: Springer.
- Chu, D., & Mehrmann, V. (1999). Disturbance decoupled observer design for descriptor systems. *System & Control Letters*, 38(1), 37–48.
- Cobb, J. D. (1984). Controllability, observability, and duality in singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-29(12), 1076–1082.
- Dai, L. (1989). *Singular control systems*. Berlin: Springer.
- Darouach, M., Zasadzinski, M., & Hayar, M. (1996). Reduced order observer design for descriptor systems with unknown inputs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(7), 1068–1072.
- Dion, J.-M., Commault, C., & Van der Woude, J. (2003). Generic properties and control of linear structured systems: A survey. *Automatica*, 39(7), 1125–1144.
- Geerts, T. (1993). Solvability conditions, consistency and weak consistency for linear differential-algebraic conditions and time-invariant singular systems: The general case. *Linear Algebra Applications*, 181, 111–130.
- Hou, M., & Müller, P. C. (1999a). Causal observability of descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1), 158–163.
- Hou, M., & Müller, P. C. (1999b). Observer design for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1), 164–169.
- Hou, M., & Patton, R. J. (1998). Input observability and input reconstruction. *Automatica*, 34(6), 789–794.
- Lewis, F. L. (1992). A tutorial on the geometric analysis of linear time-invariant implicit systems. *Automatica*, 28(1), 119–137.
- Müller, P. C. (2000). Descriptor systems: Pros and cons of system modelling by differential-algebraic equations. *Mathematics and Computers in Simulation*, 53(4–6), 273–279.
- Müller, P. C., & Hou, M. (1993). On the observer design for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(11), 1666–1671.
- Murota, K. (1987). *System analysis by graphs and matroids*. New York, USA: Springer.
- Nikoukah, R., Campbell, S. L., & Delebecque, F. (1998). Observer design for general linear time-invariant systems. *Automatica*, 34(5), 575–583.
- Özcaldiran, K., Fountain, D. W., & Lewis, F. L. (1992). Some generalized notions of observability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6), 856–860.
- Reinschke, K. J. (1988). *Multivariable control. A graph theoretic approach*. New York, U.S.A.: Springer.
- Reinschke, K. J., & Wiedemann, G. (1997). Digraph characterization of structural controllability for linear descriptor systems. *Linear Algebra and its Applications*, 266, 199–217.
- Vergheze, G. C., Levy, B. C., & Kailath, T. (1981). A generalized state-space for singular systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26(4), 811–831.
- Wiedemann, G. (1999). *Strukturelle Zugänge Zur Analyse und Synthese Linearer Regelungssysteme in Deskriptorform*. Aachen, Germany: Shaker Verlag.
- Yip, E. L., & Sincovec, R. F. (1981). Solvability, controllability and observability of continuous descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26(3), 702–707.



Taha Boukhobza was born in Algiers, Algeria, in 1971. He obtained his Ph.D. Degree in Automatic control from the Paris XI University, France in 1997. He is currently Associate Professor in Henri Poincaré University, Nancy1, France. His current research interests are observability, fault diagnosis, fault-tolerant control and graph theory.



Frédéric Hamelin was born in Saint-Dizier, France, in 1970. He received his Ph.D. Degree from the Department of Automatic Control of the Henri Poincaré University of Nancy 1, France, in 1995. He is currently Professor of Automatic Control at this University. Previously, he was Associate Professor from 1996 to 2005. His main research interests are in the fields of robust fault diagnosis and fault-tolerant control.



Dominique Sauter received his Doctorat ès Sciences Degree (1991) from the University of Henri Poincaré, Nancy1, France. Since 1993 he is a full Professor at this University, where he teaches Automatic Control. He has been the Director of the Institut Universitaire Professionnalisé in Electrical Engineering for 4 years. He is a member of the Research Center in Automatic Control of Nancy (CRAN) associated to the French National Center For Scientific Research (CNRS). He is also a member of the French German Institute on Automatics and Robotics (IAR) where he chaired a working group on Intelligent Control and Fault Diagnosis. His current research interests are focused on model-based fault diagnosis and fault tolerant with emphasis on networked control systems. The results of his research works are published in over 30 articles in journals and book contributions and 60 conference papers.

Uniform Observability Analysis for Structured Bilinear Systems A Graph-theoretic Approach

Taha Boukhobza*, Frédéric Hamelin and Dominique Sauter

Research Centre in Automatic Control (CRAN - CNRS UMR 7039), Henri Poincaré University, BP 239, 54506 Vandœuvre Cedex, Nancy, France

This paper deals with the analysis of generic uniform observability for structured bilinear systems. The proposed method is based on a graph-theoretic approach and assumes only the knowledge of the system's structure. We express, in graphical terms two conditions, the first one is necessary and the second one is sufficient, to check whether or not structured linear systems are generically uniformly observable. These conditions are quite easy to verify because they are based on comparisons of integers and on finding edges and subgraphs in a digraph. Therefore, our approach is very well suited to study large scale and/or uncertain systems.

Keywords: Structured bilinear systems; uniform observability; graph theory; generic properties

1. Introduction

For nonlinear systems, the observability notion is based on the concept of indistinguishability of two initial states for every input. In fact, it results from [3,13,15,21,24] that a nonlinear system is observable if it can be found an input such that any pair of initial states are distinguishable by observation of the corresponding output. The distinguishability of two initial states is thus depending on the input applied to the system. In this respect, for nonlinear systems, the notion of universal input is defined [13,21] as an input

for which every pair of initial states can be distinguished by observation of the output. A system, for which every input is universal is said uniformly observable, knowing that we are interested in the inputs which take only real values. We call these inputs admissible inputs. In other words, a system is uniformly observable when we can express its whole state components in function of the measured variables and their derivatives for all the admissible input values. The analysis of the uniform observability is important since it informs us on the possible alteration of the state distinguishability for some input values. This information is useful obviously for the design of nonlinear observers and also for control, fault detection and isolation and reconfiguration schemes which both use the estimated state variables.

Many studies are dedicated to the uniform observability [10,11,24]. In most cases, either the authors are interested only in the single output case or they provide geometric trivial conditions to achieve uniform observability. These conditions are mainly difficult to apply to large scale systems because they are based on the computation of the rank of the observability matrix. Note that some studies assume that the system can be transformed into some triangular form which ensures the uniform observability and which is used in the design of nonlinear observers [2,7,14,19]. Finally, in the single output case, a triangular canonical form for uniformly observable systems is provided [9]. In this context, this paper is dedicated to the characterization of the uniform observability of a particular class of

*Correspondence to: T. Boukhobza, E-mail: taha.boukhobza@cran.uhp-nancy.fr

Received 31 March 2005; Accepted 21 March 2006
 Recommended by A. Astolfi and A. Isidori

nonlinear systems. According to their applicative interest and their intrinsic simplicity, we focus on multi-output bilinear systems. This class of systems, whose dynamics are jointly linear in the state and the input was introduced in control theory in the 1960s. Industrial process control, economics and biology (switched circuits, mechanical brakes, controlled suspension systems, immunological systems, population growth, enzyme kinetics, etc.) provide examples of bilinear systems (BLS). Furthermore, this kind of systems are simpler and better understood than most other nonlinear systems. Finally, the usual linearization of a nonlinear control system near an equilibrium point can be improved by using a bilinear approximation. For these reasons many works deal with BLS.

Generally, BLS are studied in connection with the theories of time-variant linear systems and matrix Lie groups [4,16,20]. However, the use of such tools assumes the exact knowledge of the state space matrices characterizing the system's model. In many modeling problems, these matrices have a number of fixed zero entries determined by the physical laws while the remaining entries are not known precisely. This is also true during the system conception stage. To study the properties of these systems in spite of the poor knowledge we have on them, the idea is that we only keep the zero/nonzero entries in the state space matrices. Thus, we consider models where the fixed zeros are conserved while the nonzero entries are replaced by free parameters. There is a huge amount of interesting works in the literature using this kind of models called structured models. These models are useful to describe the class of systems having the same structure and they capture most of the structural available information from physical laws. Moreover, their study requires a low computational burden which allows to deal with large scale systems. Because of these features, we think that structured systems are suited to study the uniform observability and subsequently this paper deals with this kind of systems.

Many studies on structured systems are related to the graph-theoretic approach. Until now, this approach is principally dedicated to linear systems for which structural properties, such as controllability, observability, solvability of several classical control problems including disturbance rejection, input-output decoupling, fault detection and isolation, are studied. Survey paper [8] reviews the most significant results in this area. From these works, it results that the graph-theoretic approach provides simple and elegant solutions and so is very well suited to analyse large scale or/and uncertain systems. Unfortunately, few works based on graph-theoretic methods deal with nonlinear systems. Among them, [22] gives sufficient conditions

to fulfill the observability of bilinear systems and more recently, [1] provides sufficient conditions for checking the uniform observability of nonlinear systems which are preliminarily put in a canonical form and where the nonlinearities satisfy Lipschitz conditions.

The aim of this paper is to provide a necessary and a sufficient conditions to achieve the uniform observability of multi-output structured bilinear systems (SBLS). The study of this property is based on a graphic representation, which does not necessitate any preliminary computation. Comparatively with the results of [9] which enounce necessary and sufficient conditions to the uniform observability of single output nonlinear systems, our results concern only a particular class of nonlinear system, but for multi-output and structured systems. In the single output case, our conditions are also necessary and sufficient. Moreover, in [24], the author give a geometric necessary and sufficient criterion to the uniform observability of a multi-output bilinear system. This criterion is not a structural one i.e. depends on the parameters of the system, is quite trivial as it assesses that a system is uniformly observable if and only if the rank of the observability matrix is equal to the dimension of the state for every input. This criterion is difficult to verify especially in the case of large scale or uncertain systems. Starting from an equivalent criterion to the one given in [24] and using original mathematical tools, we give two conditions (one necessary and the other sufficient) to the uniform observability of structured bilinear systems which are more "computable" and which depends only on the structure of the systems and not on its parameters. The main interest of the proposed conditions are their easy computability and the fact that they allows to handle system's structure.

The paper is organized as follows: after Section 2, which is devoted to the problem formulation, a digraph representation of SBLS is given in Section 3. The main result of the paper is provided in Section 4 and is illustrated with an example in Section 5. Finally, some concluding remarks are made.

2. Problem Statement

In this paper, we are interested in the uniform observability of SBLS:

$$(\Sigma_A) : \begin{cases} \dot{x} = A^\lambda x + \sum_{i=1}^m u_i B_i^\lambda x \\ y = C^\lambda x \\ z = \dot{x} - \sum_{i=1}^m u_i B_i^\lambda x \end{cases} \quad (1)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ and $y \in \mathbb{R}^p$ are respectively the state vector, the input vector and the output vector. New variable $z \in \mathbb{R}^n$ called dynamic variable, is introduced in this paper. $A^\lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i^\lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ for $i = 1, \dots, m$ and $C^\lambda \in \mathbb{R}^{p \times n}$ represent matrices whose elements are either fixed to zero or assumed to be free non-zero parameters. The vector of these parameters is $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h)^T$.

If all the non-zero parameters λ_i are fixed, we obtain an admissible realization of structured system (Σ_Λ) . Theoretic properties of each realization can be studied according to the values of λ_i .

We say that a property is true generically if it is true for almost all realizations of the system or equivalently for almost all parameter values [6]. Here “for almost all parameter values” is to be understood [8] as “for all parameter values ($\Lambda \in \mathbb{R}^h$) except for those in some proper algebraic variety in the parameter space”. The proper algebraic variety for which the property is not true is the zero set of some nontrivial polynomial with real coefficients in the h parameters of the system, which can be written down explicitly. Recall that a proper algebraic variety is an algebraic variety which has Lebesgue measure zero. A property which is true for almost all parameters values is also said to be true generically or to be a generic property for the considered structured system.

In order to precise the notion of generic uniform observability, we adapt hereafter the definition of the uniform observability [9,24] to the SBLS:

Definition 1. Structured bilinear system (Σ_Λ) is generically uniformly observable if, for almost all its realizations and for any input value, any pair of initial states $x^0(0)$ and $x^1(0)$ are distinguishable by observation of the corresponding outputs $y^0(t)$ and $y^1(t)$ for $t \geq 0$.

From the latter definition, we deduce that a structured system is generically uniformly observable iff for almost all its realizations and for all the input values we can express $x(t)$ in function of $y(t)$, $u(t)$ and their derivatives *i.e.* there always exists a nonsingular function f such that:

$$x(t) = f\left(y(t), \dot{y}(t), y^{(2)}(t), \dots, y^{(\kappa_y)}(t), u(t), \dot{u}(t), u^{(2)}(t), \dots, u^{(\kappa_u)}(t)\right) \quad (2)$$

Indeed, according to Definition 1, if a structured system is generically uniformly observable then we can always (for all the input values) express its initial conditions in function of the output and its derivatives. In this case, using the system’s dynamics (Σ_Λ) , we can write an expression of the form (2). Reciprocally, if we can write an expression like (2), then we can determine in a unique way, using the system’s

dynamics (Σ_Λ) , the initial conditions $x(0)$ in function of the corresponding output $y(t)$, whatever the value of the known input $u(t)$.

In the case of bilinear systems, since $y(t)$ is a linear function of $x(t)$ and since the dynamics are jointly linear in the state and the input, if we have an expression of $x(t)$ in function of the measured variables, then it is necessarily in the form:

$$x(t) = \Gamma\left(u(t), \dot{u}(t), u^{(2)}(t), \dots, u^{(\kappa_u)}(t)\right) \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(\kappa_y)}(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

$\Gamma(u(t), \dot{u}(t), u^{(2)}(t), \dots, u^{(\kappa_u)}(t))$ is a matrix whose elements are polynomials in the input components and their derivatives, $\kappa_y < n$ and $\kappa_u < n$. From the previous settings, a system is uniformly observable if and only if we can deduce from the equations (Σ_Λ) , according to the differentiation of output $y(t)$, a nonsingular system parameterized by the input and its derivatives and where the unknown variables are the state components.

Hereafter, we enounce a first proposition which allows to define a triangular form ensuring the generic uniform observability of a bilinear system:

Proposition 1. A structured bilinear system is generically uniformly observable if there exist matrices $\Gamma_0^\lambda, \Gamma_1^\lambda, \dots, \Gamma_k^\lambda$ such that we can generically deduce from equations (Σ_Λ) relations of the form:

1st derivation order of the output

$$\begin{cases} Y_0 &= y = C^\lambda x \\ \Gamma_0^\lambda \dot{Y}_0 &= C_1^\lambda x + \sum_{i=1}^m u_i H_{0,i}^\lambda Y_0 \end{cases}$$

2nd derivation order of the output

$$\begin{cases} Y_1 &= \begin{pmatrix} C^\lambda \\ C_1^\lambda \end{pmatrix} x \\ \Gamma_1^\lambda \dot{Y}_1 &= C_2^\lambda x + \sum_{i=1}^m u_i H_{1,i}^\lambda Y_1 \end{cases}$$

⋮

k th derivation order of the output

$$\begin{cases} Y_{k-1} &= \begin{pmatrix} C^\lambda \\ C_{k-1}^\lambda \end{pmatrix} x \\ \Gamma_{k-1}^\lambda \dot{Y}_{k-1} &= C_k^\lambda x + \sum_{i=1}^m u_i H_{k-1,i}^\lambda Y_{k-1} \\ Y_k &= \begin{pmatrix} C^\lambda \\ C_k^\lambda \end{pmatrix} x \end{cases} \quad (4)$$

508

T. Boukhobza et al.

with $g_rank \begin{pmatrix} C^\lambda \\ C_1^\lambda \\ \vdots \\ C_k^\lambda \end{pmatrix} = n$. Note that, by construction of form (4), $g_rank \begin{pmatrix} C^\lambda \\ C_1^\lambda \\ \vdots \\ C_k^\lambda \end{pmatrix} = g_rank \begin{pmatrix} C^\lambda \\ C_k^\lambda \end{pmatrix}$.

Here $g_rank(M^\lambda)$ denotes the generic rank [8,12,17,18] of structured matrix M^λ . Roughly speaking the generic rank of a structured matrix M^λ with h free parameters $\lambda_1, \dots, \lambda_h$ is defined as $\max_{(\lambda_1, \dots, \lambda_h) \in \mathbb{R}^h} rank(M^\lambda)$.

In form (4), to be coherent with (Σ_λ) 's equations, $C_1^\lambda = \Gamma_0^\lambda C^\lambda A^\lambda, H_{0,i}^\lambda$ is such that $H_{0,i}^\lambda C^\lambda = \Gamma_0^\lambda C^\lambda B_i^\lambda$ and for $j = 1, \dots, k-1, C_{j+1}^\lambda = \Gamma_j^\lambda \begin{pmatrix} C^\lambda \\ C_j^\lambda \end{pmatrix} A^\lambda$ and $H_{j+1,i}^\lambda$ is such that $H_{j+1,i}^\lambda \begin{pmatrix} C^\lambda \\ C_j^\lambda \end{pmatrix} = \Gamma_j^\lambda \begin{pmatrix} C^\lambda \\ C_j^\lambda \end{pmatrix} B_i^\lambda$.

Proof. Assume that we can put the system into the form (4), then we can write

$$\begin{pmatrix} C^\lambda \\ C_1^\lambda \\ C_2^\lambda \\ \vdots \\ C_k^\lambda \end{pmatrix} x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \Gamma_0^\lambda \dot{y}(t) \\ \Gamma_1^\lambda \dot{Y}_1(t) \\ \vdots \\ \Gamma_{k-1}^\lambda \dot{Y}_{k-1}(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sum_{i=1}^m u_i(t) H_{0,i}^\lambda Y_0(t) \\ \sum_{i=1}^m u_i(t) H_{1,i}^\lambda Y_1(t) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m u_i(t) H_{k-1,i}^\lambda Y_{k-1}(t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

Since we have $Y_0(t) = y(t)$ and for $j \geq 1, Y_j(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ \Gamma_{j-1}^\lambda \dot{Y}_{j-1}(t) - \sum_{i=1}^m u_i(t) H_{j-1,i}^\lambda Y_{j-1}(t) \end{pmatrix}$, then all the

$$\mathcal{O}(u, \dot{u}) = \begin{pmatrix} \lambda_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_9(\lambda_1 + \lambda_2 u_1) & \lambda_9 \lambda_3 \\ 0 & 0 & \lambda_{10} \lambda_4 & \lambda_{10} \lambda_5 u_1 \\ 0 & 0 & \lambda_9(\lambda_2 \dot{u}_1 + \lambda_3 \lambda_8) & \lambda_9 \lambda_7(\lambda_1 + \lambda_2 u_1) \\ 0 & 0 & \lambda_{10} \lambda_5 \lambda_8 u_1 & \lambda_{10}(\lambda_4 \lambda_7 + \lambda_5 \dot{u}_1) \end{pmatrix}$$

Y_j can be expressed in function of the output, the input and their derivatives i.e.

$$Y_j(t) = \phi_j(u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(j)}(t)) \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(j)}(t) \end{pmatrix}$$

Therefore, we can write $\begin{pmatrix} C^\lambda \\ C_1^\lambda \\ \vdots \\ C_k^\lambda \end{pmatrix} x(t) = \Phi(u(t), \dot{u}, u^{(2)}(t), \dots, u^{(k_u)}(t)) \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(k_u)}(t) \end{pmatrix}$ as the generic rank

of $\Gamma_x = \begin{pmatrix} C^\lambda \\ C_1^\lambda \\ \vdots \\ C_k^\lambda \end{pmatrix}$ is equal to $n = \dim(x)$, we can write $x(t) = (\Gamma_x^T \Gamma_x)^{-1} \Phi(u(t), \dot{u}, u^{(2)}(t), \dots, u^{(k_u)}(t)) \times \begin{pmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(k_u)}(t) \end{pmatrix}$. Consequently, starting from equation

(4) we obtain, for any input value, an expression on the form (3). This concludes to the generic uniform observability of structured system (Σ_λ) . \square

Remark 1. For single output systems as it was proved in [9], the condition of Proposition 1 is necessary and sufficient to ensure the generic observability of a bilinear system. Nevertheless, in the case of multi-output systems, the following counter-example shows that this condition is not necessary:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \lambda_1 x_3 + \lambda_2 u_1 x_3 + \lambda_3 x_4 \\ \dot{x}_2 &= \lambda_4 x_3 + \lambda_5 u_1 x_4 \\ \dot{x}_3 &= \lambda_7 x_4 \\ \dot{x}_4 &= \lambda_8 x_3 \\ y_1 &= \lambda_9 x_1 \\ y_2 &= \lambda_{10} x_2 \end{aligned} \quad (6)$$

This system cannot be put on the form (4) of the paper. The observability matrix (by differentiating twice each output) is equal to

To establish the non-uniform observability of system (6) we must have simultaneously: $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 u_1 & \lambda_3 \\ \lambda_4 & \lambda_5 u_1 \end{pmatrix} = 0$, $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 u_1 & \lambda_3 \\ \lambda_2 \dot{u}_1 + \lambda_3 \lambda_8 & \lambda_7(\lambda_1 + \lambda_2 u_1) \end{pmatrix} = 0$, $\det \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 u_1 & \lambda_3 \\ \lambda_5 \lambda_8 u_1 & \lambda_4 \lambda_7 + \lambda_5 \dot{u}_1 \end{pmatrix} = 0$, $\det \begin{pmatrix} \lambda_4 & \lambda_5 u_1 \\ \lambda_2 \dot{u}_1 + \lambda_3 \lambda_8 & \lambda_7(\lambda_1 + \lambda_2 u_1) \end{pmatrix} = 0$ and $\det \begin{pmatrix} \lambda_4 & \lambda_5 u_1 \\ \lambda_5 \lambda_8 u_1 & \lambda_4 \lambda_7 + \lambda_5 \dot{u}_1 \end{pmatrix} = 0$ and $\det \begin{pmatrix} \lambda_2 \dot{u}_1 + \lambda_3 \lambda_8 & \lambda_7(\lambda_1 + \lambda_2 u_1) \\ \lambda_5 \lambda_8 u_1 & \lambda_4 \lambda_7 + \lambda_5 \dot{u}_1 \end{pmatrix} = 0$. Generically, u and \dot{u} cannot verify simultaneously all these equations. So, System (6) is generically uniformly observable.

In the present work, we are interested in the question whether or not SBLS (Σ_Λ) can be generically transformed into the form (4) using a graph-theoretic approach. It turns out that this question can be answered by checking some simple graphic conditions. These conditions are sufficient to the generic uniform observability of SBLS (Σ_Λ). Note that we provide also a necessary condition to the generic uniform observability of SBLS (Σ_Λ).

Before presenting the main results of the paper, we give, in the next section, some definitions related to a graphical representation of SBLS.

3. Graphical Representation of a Structured Bilinear System

This section is devoted to the definition of the digraph which is used to represent structured system (Σ_Λ). This digraph is noted $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ and is constituted by a vertex set \mathcal{V} and an edge set \mathcal{E} . More precisely, the vertex set is defined by: $\mathcal{V} = \mathbf{X} \cup \mathbf{XU} \cup \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}$, where $\mathbf{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ is the set of state vertices, $\mathbf{XU} = \{x_j u_i \mid \exists k \in \{1, \dots, n\} \text{ such that } B_i^\lambda(k, j) \neq 0\}$ is the set of X - U mixed vertices, $\mathbf{Y} = \{y_1, \dots, y_p\}$ is the set of output vertices, $\mathbf{Z} = \{z_1, \dots, z_n\}$ is the set of dynamic variable vertices.

The edge set is $\mathcal{E} = I\text{-edges} \cup A\text{-edges} \cup C\text{-edges} \cup B_i\text{-edges}$ with $I\text{-edges} = \{(x_i, z_i), i = 1, \dots, n\}$, $A\text{-edges} = \{(z_i, x_j) \mid A^\lambda(i, j) \neq 0\}$, $C\text{-edges} = \{(y_i, x_j) \mid C^\lambda(i, j) \neq 0\}$, for $i = 1, \dots, m$, $B_i\text{-edges} = \{(x_j u_i, z_k) \mid B_i^\lambda(k, j) \neq 0\}$.

Here $M^\lambda(i, j)$ is the (i, j) th element of matrix M^λ and (s_1, s_2) denotes a directed edge from vertex $s_1 \in \mathcal{V}$ to vertex $s_2 \in \mathcal{V}$. Note that to differentiate the state, the output and the dynamic variables from their corresponding vertices, the latter are written in bold fonts. Hereafter, we illustrate our proposed

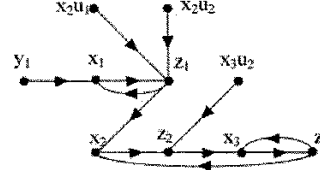


Fig. 1. Digraph associated to Example 1.

digraph representation for SBLS with a simple example:

Example 1. Consider the SBLS defined by:

$$A^\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_4 & \lambda_5 \end{pmatrix}, B_1^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_7 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and } C^\lambda = (\lambda_9 \ 0 \ 0). \text{ To such}$$

a model, we associate the digraph in Fig. 1

We give now some useful definitions and notations:

- For each edge $e = (s_0, s_1) \in \mathcal{E}$, s_0 is the begin vertex and s_1 the end vertex of e .
- Two edges $e_1 = (s_1, s'_1)$ and $e_2 = (s_2, s'_2)$ elements of \mathcal{E} are v -disjoint if $s_1 \neq s_2$ and $s'_1 \neq s'_2$.
- Note that e_1 and e_2 can be v -disjoint even if $s'_1 = s_2$ or $s_1 = s'_2$. In Example 1, (x_1, z_1) and (x_2, z_2) are v -disjoint. It is also the case for (y_1, x_1) and (x_1, z_1) . Nevertheless, neither (z_1, x_1) and (z_1, x_2) nor $(x_2 u_1, z_1)$ and $(x_2 u_2, z_1)$ are v -disjoint.
- Some edges are v -disjoint if they are mutually v -disjoint.
- A subgraph \mathcal{S}_G of $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ is defined by an edge subset $\mathcal{S}_E \subseteq \mathcal{E}$ and a vertex subset $\mathcal{S}_V \subseteq \mathcal{V}$ such that \mathcal{S}_V is constituted by the begin and the end vertices of all the elements of \mathcal{S}_E .
- An edge e belongs to a subgraph $\mathcal{S}_G = (\mathcal{S}_E, \mathcal{S}_V)$ if $e \in \mathcal{S}_E$. A subgraph \mathcal{S}_G of $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ is said to cover a vertex s if there exists an edge e belonging to \mathcal{S}_G such that s is the end vertex of e .
- A subgraph \mathcal{S}_G of $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ is a v -disjoint subgraph if all its edges are v -disjoint.
- For any $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}$, we denote by $2^{\mathcal{V}_0}$ the power set of \mathcal{V}_0 composed of all the subsets of \mathcal{V}_0 . Function φ is defined by:

$$\varphi : 2^{\mathcal{V}} \rightarrow 2^{\mathcal{V}}$$

$$\mathbf{V}_0 \mapsto \mathbf{V}_1 = \varphi(\mathbf{V}_0) = \{s \in \mathcal{V} \mid \exists s_0 \in \mathbf{V}_0 \text{ where } (s_0, s) \in \mathcal{E}\} \quad (7)$$

510

T. Boukhobza et al.

Roughly speaking, $\varphi(\mathbf{V}_0)$ represents the reachable set from \mathbf{V}_0 using any edge of \mathcal{E} beginning at \mathbf{V}_0 . In Example 1, $\varphi(\{\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_3\}) = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$. We define also function $\bar{\varphi}$ such that:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}: 2^{\mathbf{Z}} &\rightarrow 2^{\mathbf{X} \cup \mathbf{XU}} \\ \mathbf{V}_1 \mapsto \bar{\mathbf{V}}_0 &= \bar{\varphi}(\mathbf{V}_1) = \{\mathbf{s} \in \mathbf{X} \cup \mathbf{XU} / \exists \mathbf{s}_1 \in \mathbf{V}_1 \\ &\text{where } (\mathbf{s}, \mathbf{s}_1) \in \mathcal{E}\} \quad (8) \end{aligned}$$

In Example 1, $\bar{\varphi}(\{\mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3\}) = \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_3\mathbf{u}_2\}$.

- α is the function defined by:

$$\begin{aligned} \alpha: 2^{\mathbf{XU}} &\rightarrow 2^{\mathbf{X}} \\ \mathbf{V}_{\mathbf{XU}} \mapsto \mathbf{V}_{\mathbf{X}} &= \alpha(\mathbf{V}_{\mathbf{XU}}) = \{\mathbf{x}_i \in \mathbf{X} / \exists j \in \{1, \dots, m\} \\ &\text{such that } \mathbf{x}_i \mathbf{u}_j \in \mathbf{V}_{\mathbf{XU}}\} \quad (9) \end{aligned}$$

In Example 1, $\alpha(\{\mathbf{x}_2\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_2\mathbf{u}_2\}) = \{\mathbf{x}_2\}$.

4. Main Results

In order to graphically analyse the generic uniform observability of SBLS, we follow an iterative approach where the i th stage corresponds to the i th differentiation order of the output.

Hereafter, we detail the first step of our approach. As it is shown in the form (4), only combinations $\Gamma_0^\lambda y$ such that we can deduce from (Σ_A) an equation of the form:

$$\Gamma_0^\lambda \dot{y} = C_1^\lambda x + \sum_{i=1}^m u_i H_{0,i}^\lambda Y_0, \quad Y_0 = y = C^\lambda x \quad (10)$$

are useful. In equation (10), $C_1^\lambda = \Gamma_0^\lambda C^\lambda A^\lambda$ and $H_{0,i}^\lambda C^\lambda = \Gamma_0^\lambda C^\lambda B_i^\lambda$. Determining these combinations amounts to find the combined vertices associated to some combinations $P^\lambda z$ which satisfy $P^\lambda z = \Gamma_0^\lambda \dot{y} - \sum_{i=1}^m u_i H_{0,i}^\lambda y$. These vertices are called **useful vertices**. The first part of this section is dedicated to the determination of these useful vertices.

Let us first precise the notion of combined vertices corresponding to combinations $P^\lambda z$:

- We denote by $\mathbf{z}_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ the vertex associated to any combination of dynamic variables $z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_k}$ whatever $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. $\mathbf{z}_{i_1, i_2, \dots, i_k}$, which we call combined vertex, can be defined by means of bijective function π associating a combined vertex to each nonempty subset of \mathbf{Z} : $\{\mathbf{z}_{i_1}, \mathbf{z}_{i_2}, \dots, \mathbf{z}_{i_k}\} \mapsto \pi(\{\mathbf{z}_{i_1}, \mathbf{z}_{i_2}, \dots, \mathbf{z}_{i_k}\}) = \mathbf{z}_{i_1, i_2, \dots, i_k}$. We denote by $\bar{\pi}$ the inverse function of π . The set of combined vertices is noted \mathbf{Z}_C . Obviously, $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Z}_C$.

- For each vertex subset $\mathbf{V}_0 \subseteq \mathcal{V} \cup \mathbf{Z}_C$, $\text{card}(\mathbf{V}_0)$ represents the cardinality of \mathbf{V}_0 i.e. the number of vertices included in \mathbf{V}_0 .
- A nonempty vertex subset $\mathbf{V}_C \subseteq \mathbf{Z}_C$ is said structurally minimal if

$$\begin{aligned} \forall \bar{\mathbf{V}} \subseteq \mathbf{V}_C, \\ \text{card} \left(\bigcup_{\mathbf{v} \in \bar{\mathbf{V}}} \bar{\pi}(\mathbf{v}) \right) - \text{card}(\bar{\mathbf{V}}) \geq \max_{\mathbf{v} \in \bar{\mathbf{V}}} [\text{card}(\bar{\pi}(\mathbf{v}))] - 1 \end{aligned} \quad (11)$$

For example, $\mathbf{V}_1 = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_{2,3}, \mathbf{z}_{2,4}\}$ is structurally minimal while $\mathbf{V}_2 = \{\mathbf{z}_{1,2,3}, \mathbf{z}_{2,3}, \mathbf{z}_{2,4}\}$ is not structurally minimal because for $\bar{\mathbf{V}} = \{\mathbf{z}_{1,2,3}, \mathbf{z}_{2,3}\}$, $\text{card} \left(\bigcup_{\mathbf{v} \in \bar{\mathbf{V}}} \bar{\pi}(\mathbf{v}) \right) - \text{card}(\bar{\mathbf{V}}) = 3 - 2$ and $\max_{\mathbf{v} \in \bar{\mathbf{V}}} (\text{card}(\bar{\pi}(\mathbf{v}))) - 1 = 3 - 1$. Similarly, $\mathbf{V}_3 = \{\mathbf{z}_{1,2}, \mathbf{z}_{1,3}, \mathbf{z}_{2,3}\}$ is not structurally minimal because for $\bar{\mathbf{V}} = \mathbf{V}_3$, condition (11) is not satisfied.

The notion of structural minimality is related to the notion of vector linear independence. Indeed, consider a structurally minimal vertex subset $\mathbf{V}_Z = \{z_{\Omega_1}, z_{\Omega_2}, \dots, z_{\Omega_k} \subseteq \mathbf{Z}_C$ and its associated vector $\bar{z} = (z_{\Omega_1}, z_{\Omega_2}, \dots, z_{\Omega_k})^T = (P_1^\lambda z, P_2^\lambda z, \dots, P_k^\lambda z)^T$, where $P_i^\lambda \in \mathbf{R}^{1 \times n}$. We can easily prove that the family of vectors $(P_1^\lambda)^T, \dots, (P_k^\lambda)^T$ is generically linearly independent because of the structural minimality of \mathbf{V}_Z .

- To each $\mathbf{V}_C \subseteq \mathbf{Z}_C$, we can associate a vertex subset $\wp(\mathbf{V}_C)$ constituted by all the elements $\mathbf{s} \in \mathbf{Z}_C$ for which there exists $\mathbf{V}_0 \subseteq \mathbf{V}_C$ such that:

$$\begin{cases} \text{card} \left(\bigcup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0} \bar{\pi}(\mathbf{v}) \right) - \text{card}(\bar{\pi}(\mathbf{s})) = \text{card}(\mathbf{V}_0) - 1, \\ \forall \bar{\mathbf{V}}_0 \subset \mathbf{V}_0 \mid \text{card}(\bar{\mathbf{V}}_0) = \text{card}(\mathbf{V}_0) - 1, \\ \bigcup_{\mathbf{v} \in \bar{\mathbf{V}}_0} \bar{\pi}(\mathbf{v}) \cup \bar{\pi}(\mathbf{s}) = \bigcup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0} \bar{\pi}(\mathbf{v}) \end{cases} \quad (12)$$

For example, for $\mathbf{V}_C = \{\mathbf{z}_{1,2}, \mathbf{z}_{1,3}, \mathbf{z}_4\}$, we have $\wp(\mathbf{V}_C) = \{\mathbf{z}_{1,2}, \mathbf{z}_{1,3}, \mathbf{z}_{2,3}, \mathbf{z}_4\}$. Note that $\forall \mathbf{V}_Z \subseteq \mathbf{Z}$ we have $\wp(\mathbf{V}_Z) = \mathbf{V}_Z$. Obviously, we have $\forall \mathbf{V}_C \subseteq \mathbf{Z}_C, \mathbf{V}_C \subseteq \wp(\mathbf{V}_C)$.

- The definition of φ in section 3 is adapted for taking into account \mathbf{Z}_C . In the sequel, φ_e is such that:

$$\begin{aligned} \varphi_e: 2^{\mathcal{V} \cup \mathbf{Z}_C} &\rightarrow 2^{\mathcal{Y}} \\ \mathbf{V}_0 \mapsto \mathbf{V}_1 &= \varphi_e(\mathbf{V}_0) = \left(\bigcup_{\mathbf{s} \in \mathbf{V}_0 \cap \mathbf{Z}_C} \varphi(\bar{\pi}(\mathbf{s})) \right) \\ &\bigcup \varphi(\mathbf{V}_0 \cap \mathcal{V}) \quad (13) \end{aligned}$$

In Example 1, $\varphi_e(\{\mathbf{y}_1, \mathbf{z}_{2,3}\}) = \varphi(\{\mathbf{y}_1\}) \cup \varphi(\{\mathbf{z}_2\}) \cup \varphi(\{\mathbf{z}_3\}) = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$. We define, finally, function θ as:

$$\begin{aligned} \theta: 2^{\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}_C} &\rightarrow \mathbb{N} \\ \mathbf{V}_0 &\mapsto \theta(\mathbf{V}_0) = \text{maximal number of} \\ & \quad v - \text{disjoint edges starting from } \mathbf{V}_0 \end{aligned} \quad (14)$$

knowing that, to take into account \mathbf{Z}_C , we add virtually (there is no need to redraw the digraph associated to the system) to the digraph the following edge subset $A_C\text{-edges} = \{(z_{i_1, i_2, \dots, i_k}, \mathbf{x}_j) \text{ if } \exists r \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \mid A^\lambda(r, j) \neq 0\}$. In Example 1, $\theta(\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}) = 3$ ($(\mathbf{y}_1, \mathbf{x}_1)$, $(\mathbf{z}_1, \mathbf{x}_2)$, $(\mathbf{z}_2, \mathbf{x}_3)$ are 3 v -disjoint edges starting from $\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}$) and $\theta(\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_{2,3}\}) = 2$ ($(\mathbf{z}_1, \mathbf{x}_2)$, $(\mathbf{z}_{2,3}, \mathbf{x}_3)$ are 2 v -disjoint edges starting from $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_{2,3}\}$).

Function θ has the following property:

P1. Consider $\mathbf{V}_Y = \{\mathbf{y}_{i_1}, \mathbf{y}_{i_2}, \dots, \mathbf{y}_{i_k}\} \subseteq \mathbf{Y}$ and its associated vector $\tilde{y} = (y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k})^T$. Let us denote by \tilde{C}^λ the matrix such that $\tilde{y} = \tilde{C}^\lambda x$, then from the results on the matrices generic rank [18,23], $\theta(\mathbf{V}_Y) = g\text{-rank}(\tilde{C}^\lambda)$.

Similarly, consider a structurally minimal vertex subset $\mathbf{V}_Z = \{z_{\Omega_1}, z_{\Omega_2}, \dots, z_{\Omega_k}\} \subseteq \mathbf{Z}_C$ and its associated vector $\tilde{z} = (z_{\Omega_1}, z_{\Omega_2}, \dots, z_{\Omega_k})^T = (P_1^\lambda z, P_2^\lambda z, \dots, P_k^\lambda z)^T$,

where $P_i^\lambda \in \mathbf{R}^{1 \times n}$. Let $\tilde{E}^\lambda = \begin{pmatrix} P_1^\lambda \\ P_2^\lambda \\ \vdots \\ P_k^\lambda \end{pmatrix} A^\lambda$. We have then

$\tilde{z} = \tilde{E}^\lambda x$ and so $\theta(\mathbf{V}_Z) = g\text{-rank}(\tilde{E}^\lambda)$.

This property can be directly deduced from the results of [23] or from the results related to the maximum matching notion [17].

Using function θ , we define a particular vertex set $\mathbf{V}_{M^0}^*$:

Definition 2. Let $\mathbf{V}_{M^0}^*$ be a subset of \mathbf{Y} such that

$$\begin{cases} \theta(\mathbf{V}_{M^0}^*) = \text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}_{M^0}^*)) \\ \text{card}(\mathbf{V}_{M^0}^*) \text{ is maximal} \end{cases} \quad (15)$$

Moreover, we take the following notations $\mathbf{V}_{X^0}^* = \varphi_e(\mathbf{V}_{M^0}^*)$ and $\mathbf{V}_{XU^0}^* = \{\mathbf{s} \in \mathbf{XU} \text{ such that } \alpha(\{\mathbf{s}\}) \subseteq \mathbf{V}_{X^0}^*\}$.

If $\mathbf{V}_{M^0}^*$ exists, then it is unique because if relation $\theta(\mathbf{V}_M) = \text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}_M))$ is satisfied for $\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_{M_1}$ and for $\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_{M_2}$, then it is also satisfied for $\mathbf{V}_M = \mathbf{V}_{M_1} \cup \mathbf{V}_{M_2}$.

We give now, in the following lemma, the necessary and sufficient conditions to be satisfied in order to express state component x_i by means of output y :

Lemma 1. Consider structured bilinear system (Σ_A) represented by digraph $\mathcal{G}(\Sigma_A)$. State component x_i can

be generically expressed in function of the output i.e. there exists a matrix T_i^λ such that $x_i = T_i^\lambda y$, iff in $\mathcal{G}(\Sigma_A)$

$$\exists \mathbf{V}_Y \subseteq \mathbf{Y} \text{ such that } \begin{cases} (i) & \mathbf{x}_i \in \varphi_e(\mathbf{V}_Y) \\ (ii) & \theta(\mathbf{V}_Y) = \text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}_Y)) \end{cases} \quad (16)$$

or equivalently $\mathbf{x}_i \in \mathbf{V}_{X^0}^*$

Proof. Sufficiency: Assume that (16) is satisfied. Let x_Ω be the part of the state vector associated to vertex set $\varphi_e(\mathbf{V}_Y)$ and let y_Ω be the output vector associated to \mathbf{V}_Y . According to the graph construction, there exists necessarily a matrix C_Ω such that $y_\Omega = C_\Omega x_\Omega$. If $\theta(\mathbf{V}_Y) = \text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}_Y))$ then using Property **P1** of function θ , the generic rank of C_Ω equals $\text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}_Y)) = \text{dim}(x_\Omega)$. Thus, there exists generically a matrix T_Ω of full row rank such that $x_\Omega = T_\Omega y_\Omega$ where T_Ω is the pseudo-inverse of C_Ω . Since $\mathbf{x}_i \in \varphi_e(\mathbf{V}_Y)$, we have $x_i = T_i^\lambda y$ where T_i^λ is the row of T_Ω corresponding to the state component x_i in the equality $x_\Omega = T_\Omega y_\Omega$.

Necessity: Suppose that there exists a matrix T_i^λ such that $x_i = T_i^\lambda y$, then there exists necessarily a square nonsingular linear system of independent equations linking an output subvector y_Ω to a state subvector x_Ω which includes x_i i.e. there exists a square nonsingular matrix T_Ω such that $x_\Omega = T_\Omega y_\Omega$. So, $y_\Omega = T_\Omega^{-1} x_\Omega$. Let \mathbf{V}_Y the vertex subset associated to the output components included in y_Ω , and \mathbf{V}_X the vertex subset associated to the state components included in x_Ω . On the one hand, as $y_\Omega = T_\Omega^{-1} x_\Omega$, we have that $\mathbf{V}_X = \varphi_e(\mathbf{V}_Y)$ and since state subvector x_Ω includes x_i , we have that $\mathbf{x}_i \in \mathbf{V}_X$. On the other hand, as T_Ω is of full rank, we have that $g\text{-rank}(T_\Omega) = g\text{-rank}(T_\Omega^{-1}) = \theta(\mathbf{V}_Y) = \text{card}(\mathbf{V}_X) = \text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}_Y))$. \square

4.1. Determination of the Useful Vertices

If $\theta(\mathbf{Y}) = n$, or equivalently $\mathbf{V}_{X^0}^* = \mathbf{X}$, then $g\text{-rank}(C^\lambda) = n$ and so the system is generically uniformly observable. Otherwise, the first derivative of the output is necessary to achieve the state observation. Hereafter, we study the conditions ensuring that a combination of dynamical variables z_i can be expressed using y and u only i.e. there exists generically matrix P^λ such that $P^\lambda z = \Gamma_0^\lambda y - \sum_{i=1}^m u_i H_{0,i}^\lambda y$. This amounts to find matrix Γ_0 of the form (4). To do so, our first objective is to construct a subset of \mathbf{Z}_C which represents all the output combinations having derivatives independent from $x_i u_j$ if x_i cannot be expressed using only y . In this respect, the following lemma aims to provide the conditions which guarantee that a combined vertex is useful.

Lemma 2. Consider system (Σ_Λ) , represented by digraph $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$. Let $\mathbf{V}_0 = \{z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_k}\}$ be a subset of \mathbf{Z} and note by $\pi(\mathbf{V}_0) = z_{i_1, i_2, \dots, i_k}$ its corresponding combined vertex. Assume that $\nexists \mathbf{V}'_0 \subset \mathbf{V}_0$ such that $\pi(\mathbf{V}'_0)$ is useful.

Combined vertex z_{i_1, i_2, \dots, i_k} is generically useful and there exists vector $P_k^\lambda \in \mathbb{R}^{1 \times k}$, such that $P_k^\lambda(z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_k})^T$ can be expressed in function of \dot{y} and $u_i y$ only i.e. $P_k^\lambda(z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_k})^T = \Gamma_0^\lambda \dot{y} - \sum_{i=1}^m u_i H_{0,i}^\lambda y$ iff $\exists \mathbf{V}_Y \subseteq \mathbf{Y}$ satisfying:

$$\begin{aligned} \theta(\mathbf{V}_Y) + k + \text{card}(\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0) \cap \mathbf{V}_{\mathbf{XU}^0}^*) \\ = \text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}_Y) \cup \bar{\varphi}(\mathbf{V}_0)) + 1 \end{aligned} \quad (17)$$

proof.

Sufficiency: Assume that $\exists \mathbf{V}_Y \subseteq \mathbf{Y}$ such that (17) is satisfied and let us take the following notations:

$\bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{XU}^0}^*$ is the complementary set of $\mathbf{V}_{\mathbf{XU}^0}^*$ in \mathbf{XU} i.e. $\bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{XU}^0}^* = \mathbf{XU} \setminus \mathbf{V}_{\mathbf{XU}^0}^*$;

- x_Ω is the vector whose components correspond to the elements of subset $\varphi_e(\mathbf{V}_Y) \cup (\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0) \cap \mathbf{X})$.
- $x_{U\Omega}$ is the vector whose components correspond to the elements of vertex set $\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0) \cap \bar{\mathbf{V}}_{\mathbf{XU}^0}^*$;
- $z_\Omega = (z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_k})^T$ is the vector of dynamic variables associated to \mathbf{V}_0 ;
- $X_\Omega = \begin{pmatrix} \dot{x}_\Omega \\ x_{U\Omega} \end{pmatrix}$;
- y_Ω is the vector of the output components associated to \mathbf{V}_Y .

By construction of graph $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ representing system (Σ_Λ) , y_Ω is a linear function of the state components associated to $\varphi_e(\mathbf{V}_Y)$ and z_Ω is a linear function of the state components associated to $\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0)$. A part of $\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0)$ can be directly written in function of y , particularly the part associated to $\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0) \cap \mathbf{V}_{\mathbf{XU}^0}^*$ as it is proven in Lemma 1. Then, using our notations, there exist structured matrices C_Ω , E_Ω and $F_{i,\Omega}$ for $i = 1, \dots, m$ such that we can write $\dot{y}_\Omega = C_\Omega X_\Omega$ and $z_\Omega = E_\Omega X_\Omega + \sum_{i=1}^m u_i F_{i,\Omega} y_\Omega$. Yet, we have that $\dim(\text{Im}(E_\Omega^T)) = k$, $X_\Omega \in \mathbb{R}^\nu$ where $\nu = \text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}_Y) \cup \bar{\varphi}(\mathbf{V}_0)) - \text{card}(\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0) \cap \mathbf{V}_{\mathbf{XU}^0}^*)$ and from property **P1** of θ , we have that $\theta(\mathbf{V}_Y) = \dim(\text{Im}(C_\Omega^T))$. Therefore, relation (17) implies that generically

$$\dim(\text{Im}(C_\Omega^T)) + \dim(\text{Im}(E_\Omega^T)) = \nu + 1 \quad (18)$$

Obviously, C_Ω and E_Ω have ν columns and so $\text{Im}(C_\Omega^T)$ and $\text{Im}(E_\Omega^T)$ are subspaces of \mathbb{R}^ν . From equation (18), we can conclude that $\dim(\text{Im}(E_\Omega^T) \cap \text{Im}(C_\Omega^T)) \geq 1$. Consequently, generically there exist matrices P_k^λ and Γ_0^λ such that $P_k^\lambda E_\Omega = \Gamma_0^\lambda C_\Omega \Rightarrow P_k^\lambda z_\Omega = \Gamma_0^\lambda \dot{y} - \sum_{i=1}^m u_i H_{0,i}^\lambda y$. This proves the sufficiency of Lemma 2.

Remark 2. Note that $\theta(\mathbf{V}_Y) + k \geq \text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}_Y) \cup \bar{\varphi}(\mathbf{V}_0)) + 1 - \text{card}(\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0) \cap \mathbf{V}_{\mathbf{XU}^0}^*)$ is also sufficient

to prove the existence of vectors $P_k^\lambda \in \mathbb{R}^{1 \times k}$ such that $P_k^\lambda(z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_k})^T = \Gamma_0^\lambda \dot{y} - \sum_{i=1}^m u_i H_{0,i}^\lambda y$.

Necessity: Assume that there exists vector $P_k^\lambda \in \mathbb{R}^k$, such that $P_k^\lambda z_\Omega = \Gamma_0^\lambda \dot{y} - \sum_{i=1}^m u_i H_{0,i}^\lambda y$ then at least one combination of components associated to $\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0)$ can be expressed using \dot{y}_Ω (y_Ω is the vector of components of y which intervenes in $\Gamma_0^\lambda \dot{y}$ i.e. $\Gamma_0^\lambda \dot{y} = \Gamma_{0,\Omega}^\lambda \dot{y}_\Omega$). Let \mathbf{V}_Y be the vertex subset associated to the components of y_Ω .

From the construction of the digraph, $P_k^\lambda z_\Omega$ is a linear function of \dot{x}_j where $\mathbf{x}_j \in \bar{\varphi}(\mathbf{V}_0) \cap \mathbf{X}$ and of $x_k u_l$ where $\mathbf{x}_k \mathbf{u}_l \in \bar{\varphi}(\mathbf{V}_0) \cap \mathbf{XU}$. To satisfy $P_k^\lambda z_\Omega = \Gamma_0^\lambda \dot{y} + \sum_{i=1}^m u_i H_{0,i}^\lambda y$, the variables corresponding to $\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0)$ are necessarily either eliminated in combination $P_k^\lambda z_\Omega$ or can be expressed only in function y . On the one hand, a combination of k dynamical variables z_i can eliminate at most $k - 1$ elements of $\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0)$. On the other hand, the variables associated to the vertices of $\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0) \cap \mathbf{V}_{\mathbf{XU}^0}^*$ can be expressed in function of y and u as they are included in $\mathbf{V}_{\mathbf{XU}^0}^*$ (Lemma 1). Let $q = \text{card}[\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0) \setminus (\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0) \cap \mathbf{V}_{\mathbf{XU}^0}^*)]$. Thus, at least $q - k + 1$ variables corresponding to the vertices included in $\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0) \setminus (\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0) \cap \mathbf{V}_{\mathbf{XU}^0}^*)$ must be generically expressed in function of y_Ω to satisfy equation $P_k^\lambda z_\Omega = \Gamma_{0,\Omega}^\lambda \dot{y}_\Omega + \sum_{i=1}^m u_i H_{0,i}^\lambda y$. However, y_Ω is a linear function of the state components associated to $\varphi_e(\mathbf{V}_Y)$, which are not necessarily included in $\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0)$. Thus, the components of $\varphi_e(\mathbf{V}_Y) \setminus (\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0) \cap \varphi_e(\mathbf{V}_Y))$ must be added to the components which must be expressed using y_Ω . The number of state variables we can express using y_Ω is equal to $\theta(\mathbf{V}_Y)$. Thus, \mathbf{V}_Y must satisfy $\theta(\mathbf{V}_Y) \geq \text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}_Y) \cup \bar{\varphi}(\mathbf{V}_0)) - k + 1 - \text{card}(\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0) \cap \mathbf{V}_{\mathbf{XU}^0}^*) = n_1$.

Furthermore, assume now that there exists a vertex subset $\mathbf{V}'_Y \subseteq \mathbf{Y}$ satisfying, $\theta(\mathbf{V}'_Y) = n'_1 > n_1$.

The latter inequality implies that $\theta(\mathbf{V}'_Y) \geq \text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}'_Y) \cup \bar{\varphi}(\mathbf{V}_0)) - (k - 1) + 1 - \text{card}(\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0) \cap \mathbf{V}_{\mathbf{XU}^0}^*)$. Thus, that for all $\mathbf{V}'_0 \subset \mathbf{V}_0$ such that $\text{card}(\mathbf{V}'_0) = \text{card}(\mathbf{V}_0) - 1 = k - 1$, we have $\theta(\mathbf{V}'_Y) \geq \text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}'_Y) \cup \bar{\varphi}(\mathbf{V}_0)) - (k - 1) - \text{card}(\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0) \cap \mathbf{V}_{\mathbf{XU}^0}^*) + 1$. According to the sufficiency of Lemma 2 proved above $\pi(\mathbf{V}'_0)$ is useful (see Remark 2). However, we take as hypothesis $\nexists \mathbf{V}'_0 \subset \mathbf{V}_0$ such that $\pi(\mathbf{V}'_0)$ is useful. Consequently, $\bar{\nexists} \mathbf{V}'_Y \subseteq \mathbf{Y}$ such that $\theta(\mathbf{V}'_Y) \leq n_1$.

On the one hand, we have proved that the existence of a vector $P_k^\lambda \in \mathbb{R}^{1 \times k}$, such that $P_k^\lambda(z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_k})^T$ can be expressed in function of \dot{y} and $u_i y$ implies the existence of $\mathbf{V}_Y \subseteq \mathbf{Y}$ such that $\theta(\mathbf{V}_Y) \geq n_1$. On the other hand, the hypothesis of lemma 1 imposes that there cannot exist $\mathbf{V}_Y \subseteq \mathbf{Y}$ such that $\theta(\mathbf{V}_Y) > n_1$. Consequently, the existence of a vector $P_k^\lambda \in \mathbb{R}^{1 \times k}$ such that $P_k^\lambda(z_{i_1}, z_{i_2}, \dots, z_{i_k})^T$ can be expressed in function of \dot{y} and $u_i y$ implies the existence of $\mathbf{V}_Y \subseteq \mathbf{Y}$

such that $\theta(\mathbf{V}_Y) = n_1 = \text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}_Y) \cup \bar{\varphi}(\mathbf{V}_0)) - k - \text{card}(\bar{\varphi}(\mathbf{V}_0) \cap \mathbf{V}_{XU^0}^*) + 1$. \square

The hypothesis of Lemma 2, which is in relation with the notion of structural minimality, is necessary to ensure that the combined vertices verifying conditions of Lemma 2 represent effectively the number of linear independent vectors P^λ such that $P^\lambda z$ can be expressed in function of \dot{y} and $u_i y$. Indeed, assume that \mathbf{z}_1 is useful and that $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$ satisfies condition (17). We have then two cases: either \mathbf{z}_2 is useful and in this case the vectors representing $\{\mathbf{z}_1\}$, $\{\mathbf{z}_2\}$, $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$ are not linearly independent. Or \mathbf{z}_2 is not useful and so only P^λ representing \mathbf{z}_1 is such that $P^\lambda z$ can be expressed in function of \dot{y} and $u_i y$. In both cases, the fact that $\{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2\}$ satisfies condition (17) is not significative in the search of useful vertices corresponding to vectors P^λ such that $P^\lambda z$ can be expressed in function of \dot{y} and $u_i y$.

Let us denote by \mathbf{Z}^1 the biggest (in the sens of cardinality) structurally minimal set of useful vertices of \mathbf{Z}_C obtained after the first step. Since this set is structurally minimal, it represents all the linearly independent combinations of the first derivative of the output components. \mathbf{Z}^1 represents then $\Gamma_0^\lambda \dot{Y}_0 - \sum_{i=1}^m u_i H_{0,i}^\lambda \times Y_0 = C_1^\lambda x$ and $\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}^1$ represents Y_1 in relations (4).

If $\mathbf{Z}^1 \neq \emptyset$ then the first derivative of the output components can be exploited to give new informations on the state components for any value of u . If $\theta(\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}^1) = \text{card}(\mathbf{X}) = n$ then system (Σ_Λ) is uniformly observable. Otherwise, the output must be differentiated once again. At this aim, a second step is necessary to determinate which vertices of \mathbf{Z}_C are useful for a second differentiation of the output.

In this second step, we consider $\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}^1$ as the new output vertices of the system. This is equivalent in form (4), to the fact that in the second step we differentiate $Y_1 = \begin{pmatrix} C_1^\lambda \\ C_1^\lambda \end{pmatrix} x$ to obtain a relation on the

form $\Gamma_1^\lambda \dot{Y}_1 = C_2^\lambda x + \sum_{i=1}^m u_i H_{1,i}^\lambda Y_1$. As a matter of fact, this second step is similar to the first one but with considering as an output Y_1 instead of $Y_0 = y$. Graphically, this amounts to consider $\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}^1$ as output vertex subset instead of \mathbf{Y} .

Therefore, in this second step, we can follow a similar approach than the one presented previously in Lemma 2 by replacing " $\exists \mathbf{V}_Y \subseteq \mathbf{Y}$ " by " $\exists \mathbf{V}_Y \subseteq \mathbf{Y}$ " and a structurally minimal subset $\mathbf{V}_Z \subseteq \varphi(\mathbf{Z}^1)$, $\mathbf{V}_{M^0}^*$ by $\mathbf{V}_{M^1}^*$, $\mathbf{V}_{X^0}^*$ by $\mathbf{V}_{X^1}^*$ and $\mathbf{V}_{XU^0}^*$ by $\mathbf{V}_{XU^1}^*$, where $\mathbf{V}_{M^i}^*$, $\mathbf{V}_{X^i}^*$ and $\mathbf{V}_{XU^i}^*$ for $i \geq 0$ are defined by:

Definition 3. For $i \geq 1$, $\mathbf{V}_{M^i}^*$ is the maximal (in the sens of the cardinality) subset of $\mathbf{Y} \cup \varphi(\mathbf{Z}^i)$ such that: $\mathbf{V}_Z = \mathbf{V}_{M^i}^* \cap \mathbf{Z}_C$ is structurally minimal and $\theta(\mathbf{V}_{M^i}^*) = \text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}_{M^i}^*))$. We take the following notations: $\mathbf{V}_{X^i}^* = \varphi_e(\mathbf{V}_{M^i}^*)$ and $\mathbf{V}_{XU^i}^* = \{\mathbf{s} \in \mathbf{XU} \text{ such that, } \alpha(\{\mathbf{s}\}) \subseteq \mathbf{V}_{X^i}^*\}$.

Let us denote by \mathbf{Z}^2 the set of useful vertices representing linearly independent combinations of the first and second derivatives of the output components. If $\theta(\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}^2) = \text{card}(\mathbf{X}) = n$ then system (Σ_Λ) is generically uniform observable. Otherwise, we must differentiate the output once again and so on. We present the algorithm which allows us to determine the set \mathbf{Z}^* which is the limit of the structurally minimal subset sequence (\mathbf{Z}^i) and which represents the set of all useful vertices:

Algorithm 1.

Initialisation: $\mathbf{Z}^0 = \emptyset$ and $i = 0$

Step i: $\mathbf{Q}_i = \varphi(\varphi_e(\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}^0))$, $\mathbf{Z}^{i+1} = \emptyset$. Compute $\mathbf{V}_{XU^i}^*$ according to Definition 3

Determination of the useful vertices:

End of step i: If $\theta(\mathbf{Z}^{i+1}) \neq \theta(\mathbf{Z}^i)$, we must differentiate y again: $i \leftarrow i + 1$ and we go to **Step i**
Else $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}^i$

for $\kappa = 1$ to $\text{card}(\mathbf{Q}^i)$

for $j = 1$ to $\binom{\text{card}(\mathbf{Q}^i)}{\kappa}$

let $\mathbf{V}_{\kappa,j}$ be the j^{th} κ -subset of \mathbf{Q}^i

if $\forall \mathbf{V} \subseteq \mathbf{Z}^{i+1}$, $\text{card}\left(\bigcup_{v_r \in \mathbf{V}} \bar{\pi}(v_r) \cup \mathbf{V}_{\kappa,j}\right) - \text{card}(\mathbf{V}) \geq \kappa$, (Cond1)

then if there exist $\mathbf{V}_Y \subseteq \mathbf{Y}$ and a structurally minimal vertex subset $\mathbf{V}_Z \subseteq \varphi(\mathbf{Z}^1)$ such that

$\theta(\mathbf{V}_Y \cup \mathbf{V}_Z) + \kappa + \text{card}(\bar{\varphi}(\mathbf{V}_{\kappa,j}) \cap \mathbf{V}_{XU^0}^*) = \text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}_Y \cup \mathbf{V}_Z) \cup \bar{\varphi}(\mathbf{V}_{\kappa,j})) + 1$ (Cond2)

then $\mathbf{Z}^{i+1} = \mathbf{Z}^{i+1} \cup \{\pi(\mathbf{V}_{\kappa,j})\}$,

end

end

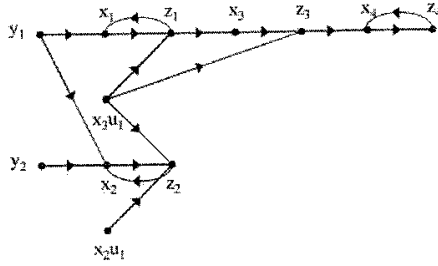


Fig. 2. Digraph associated to Example 2.

Remark 3.

- Condition **(Cond1)** above ensures that Z^{i+1} is structurally minimal. Due to condition **(Cond1)**, if $V_0 \subseteq Z$ satisfies condition **(Cond2)** then either $\pi(V_0)$ belongs to Z^{i+1} or $\pi(V_0) \cup Z^{i+1}$ is not structurally minimal. This means that if $V_0 \subseteq Z$ satisfies condition **(Cond2)** then $\exists \bar{V}_0 \subseteq V_0$ such that $\pi(\bar{V}_0) \in \wp(Z^{i+1})$. Furthermore, by construction of $\wp(Z^{i+1})$, $\forall s \in \wp(Z^{i+1})$, $\bar{\pi}(s)$ satisfies condition **(Cond2)**.
- It is easy to see from condition **(Cond2)** that for $i \geq 0$, if $s \in Z^i$ then there exists s_0 such that $\bar{\pi}(s_0) \subseteq \bar{\pi}(s)$ and $s_0 \in Z^{i+1}$.

We illustrate hereafter the previous algorithm on a simple example:

Example 2. Consider the structured system defined by:

$$A^\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{pmatrix}, B_1^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_6 & 0 \\ 0 & \lambda_7 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

and $C^\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_9 & \lambda_{10} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{11} & 0 & 0 \end{pmatrix}$. To such a model, we associate the digraph in Figure 2.

For such a system, we apply algorithm 1.

Step 0: Since $\theta(Y) = 2$ and $\varphi_e(Y) = \{x_1, x_2\}$ we have that $V_{M^0}^* = Y = \{y_1, y_2\}$ satisfies condition (15). So, we deduce $V_{X^0}^* = \varphi(V_{M^0}^*) = \{x_1, x_2\}$ and $V_{XU^0}^* = \{x_2u_1\}$. $Q_0 = \{z_1, z_2\}$.

For $V_{1,1} = \{z_1\}$, there does not exist any subset V_Y of Y ($Z^0 = \emptyset$) which allows to satisfy equality **(Cond2)**. Indeed, for $V_Y = \{y_1\}$, $\theta(V_Y) + \kappa + \text{card}(\bar{\varphi}(V_{1,1}) \cap V_{XU^0}^*) = 1 + 1 + 0 = 2$ and $\text{card}(\varphi_e(V_Y) \cup \bar{\varphi}(V_{1,1})) + 1 = 3 + 1 = 4$. This is also the case for $V_Y = \{y_2\}$ where $\theta(V_Y) + \kappa + \text{card}(\bar{\varphi}(V_{1,1}) \cap V_{XU^0}^*) = 1 + 1 + 0 = 2$ and $\text{card}(\varphi_e(V_Y) \cup \bar{\varphi}(V_{1,1})) + 1 = 3 + 1 = 4$ and for $V_Y = \{y_1, y_2\}$ where $\theta(V_Y) + \kappa + \text{card}(\bar{\varphi}(V_{1,1}) \cap V_{XU^0}^*) = 2 + 1 + 0 = 3$ and $\text{card}(\varphi_e(V_Y) \cup \bar{\varphi}(V_{1,1})) + 1 = 3 + 1 = 4$.

We can do exactly the same computations to conclude that for $V_{1,2} = \{z_2\}$, there does not exist any subset V_Y of Y which allows to satisfy equality **(Cond2)**. On the other hand, for $V_{2,1} = \{z_2, z_2\}$, if we

take $V_Y = \{y_1, y_2\}$, condition **(Cond2)** is verified: $\theta(V_Y) + \kappa + \text{card}(\bar{\varphi}(V_{2,1}) \cap V_{XU^0}^*) = 2 + 2 + 1 = 5$ and $\text{card}(\varphi_e(V_Y) \cup \bar{\varphi}(V_{2,1})) + 1 = 4 + 1 = 5$.

Thus, $Z^1 = \{z_{1,2}\}$. As $\theta(Z^1) = 1 > \theta(Z^0) = 0$, we go to step 1.

Step 1: Since, $\theta(Z^1 \cup Y) = 3$ and $\text{card}(\varphi_e(Z^1 \cup Y)) = \text{card}(\{x_1, x_2, x_3\}) = 3$, we have that $V_{X^1}^* = \{x_1, x_2, x_3\}$, $V_{XU^1}^* = \alpha(V_{X^1}^*) = \{x_2u_1, x_3u_1\}$. Furthermore, $Q_1 = \{z_1, z_2, z_3\}$ and for each one-subset of Q_1 there exist $V_Y \subseteq Y$ and a structurally minimal vertex subset $V_Z \subseteq \wp(Z^1)$ such that equality **(Cond2)** is satisfied:

- For $V_{1,1} = \{z_1\}$, if we take $V_Y = \{y_1, y_2\}$ and $V_Z = \emptyset$, we have $\theta(V_Y \cup V_Z) + \kappa + \text{card}(\bar{\varphi}(V_{1,1}) \cap V_{XU^1}^*) = 2 + 1 + 1 = 4$ and $\text{card}(\varphi_e(V_Y \cup V_Z) \cup \bar{\varphi}(V_{1,1})) + 1 = 3 + 1 = 4$.
- For $V_{1,2} = \{z_2\}$, if we take $V_Y = \{y_2\}$ and $V_Z = \emptyset$, we have $\theta(V_Y \cup V_Z) + \kappa + \text{card}(\bar{\varphi}(V_{1,1}) \cap V_{XU^1}^*) = 1 + 1 + 2 = 4$ and $\text{card}(\varphi_e(V_Y \cup V_Z) \cup \bar{\varphi}(V_{1,1})) + 1 = 3 + 1 = 3$.
- For $V_{1,3} = \{z_3\}$ if we take $V_Y = \{y_1, y_2\}$ and $V_Z = \{z_{1,2}\}$ (V_Z is obviously structurally minimal and is included in Z^1), we have $\theta(V_Y \cup V_Z) + \kappa + \text{card}(\bar{\varphi}(V_{1,1}) \cap V_{XU^1}^*) = 3 + 1 + 1 = 5$ and $\text{card}(\varphi_e(V_Y \cup V_Z) \cup \bar{\varphi}(V_{1,1})) + 1 = 4 + 1 = 5$.

Moreover, since all the other subsets of Q_1 do not satisfy condition **(Cond1)** because for any $V_{\kappa,j} \subseteq Q_1$, $\kappa \geq 2$, $\{\pi(V_{\kappa,j})\} \cup \{z_1, z_2, z_3\}$ is not structurally minimal. Thus, $Z^2 = \{z_1, z_2, z_3\}$.

Let us now do some comments about algorithm 1. At step 0, Y represents all output derivatives of order 0 exploitable to reconstruct a part of the state for any value of input value u . Indeed relation $y = C^\lambda x$ does not depend on input value u . We use Lemma 2 to compute Z^1 which represents all vertices of Z_C associated to all the linearly independent combinations of dynamic variables which can be expressed in function of the output, its first derivative and the input: $P^\lambda z = \Gamma_0^\lambda \dot{Y}_0 + \sum_{i=1}^m u_i H_{0,i}^\lambda Y_0 = P^\lambda A^\lambda x$. This equation allows us to "observe" $P^\lambda A^\lambda x$ for any value u . The linear independence of such combinations is ensured by condition **(Cond1)** which imposes to Z^1 to be structurally minimal and which ensures that the hypothesis of Lemma 2 is satisfied. Z^1 represents then $\Gamma_0^\lambda \dot{Y}_0 - \sum_{i=1}^m u_i H_{0,i}^\lambda Y_0 = C_1^\lambda x$ defined in relations (4) and $Y \cup Z^1$ corresponds to Y_1 .

Step i of the algorithm is equivalent to step 0 by enlarging the output components to Y_i and so the vertex set Y to $Y \cup Z^i$ or, roughly speaking, to all the part of state vector observed in the previous steps. Indeed, in form (4), Step i corresponds to the search of matrix Γ_i such that: $\Gamma_i^\lambda \dot{Y}_i = C_{i+1}^\lambda x + \sum_{j=1}^m u_j H_{i,j}^\lambda Y_i$,

where $Y_i = \begin{pmatrix} C_i^\lambda \\ C_i^\lambda \end{pmatrix} x$. This step is equivalent to step 0 by considering that the output vector is enlarged to Y_i . So, as in step 0, we mark in step i all the vertices of \mathbf{Z}_C which correspond to linear independent combinations $P^\lambda z$ satisfying relation of the form (10) between the first derivative of the variables associated to $\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}^i$, corresponding to vector Y_i in (4), the input and the state. Consequently, edges starting from $\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}^i$ correspond to all relations, linking the state to the input and the output derivatives of order less or equal to $i + 1$, which allow us to observe a part of the state for any input value. Due to the second item of Remark 3, \mathbf{Z}^i is a non-decreasing sequence of structurally minimal subset w.r.t. the function θ ($\theta(\mathbf{Z}^i) \leq \theta(\mathbf{Z}^{i+1})$). Moreover, since $\theta(\mathbf{Z}^i)$ is bounded by n , there exists an integer k for which $\theta(\mathbf{Z}^{k+j}) = \theta(\mathbf{Z}^k)$, for all $j \geq 0$. So after a finite number of iterations the algorithm stops when $\theta(\mathbf{Z}^{i+1}) = \theta(\mathbf{Z}^i)$ which means that in the $(i + 1)^{th}$ step, the $(i + 1)^{th}$ output differentiation does not give any new relation useful to achieve uniform observability of (Σ_A) . In this case, we pose $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}^k$ and vertex subset $\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}^*$, represents all the vertices of $\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}_C$ which can be associated to output vector $Y_k = \begin{pmatrix} C \\ C_k \end{pmatrix} x$ of relation (4). These vertices can be associated to useful and independent relations between the outputs and their derivatives and the state and which are exploitable to observe x for any input value. The system can be put into the form (4) if and only if $\theta(\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}^*) = n$ which is equivalent, according to the construction of \mathbf{Z}^* , to $g\text{-rank} \begin{pmatrix} C^\lambda \\ C_k^\lambda \end{pmatrix} = n$.

4.2 Graphic Conditions for Generic Uniform Observability

The first part of this section suggests immediately the following proposition:

Proposition 2 Consider structured bilinear system (Σ_A) represented by digraph $\mathcal{G}(\Sigma_A)$. Structured system (Σ_A) can be put into form (4) if and only if in graph $\mathcal{G}(\Sigma_A)$, $\theta(\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}^*) = n$, where \mathbf{Z}^* is computed according to Algorithm 1.

Proof: The proof of (1) \Leftrightarrow (2) is immediate using Lemmas 1 and 2, algorithm 1 and Property **P1** of function θ . \square

Note that if the system can be put into form (4), then there exists an integer k such that $\mathbf{V}_{X^k}^* = \mathbf{X}$, and $\mathbf{V}_{XU^k}^* = \mathbf{XU}$. In this case, $\mathbf{Z}^{k+1} = \mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}$. Thus, from

Proposition 2, we can deduce the following corollary which represents the main result of the paper:

Corollary 1. Consider structured bilinear system (Σ_A) represented by digraph $\mathcal{G}(\Sigma_A)$.

(1) (Σ_A) is generically uniform observable only if, in graph $\mathcal{G}(\Sigma_A)$, there exists a path from \mathbf{Y} to each state vertex and there exists a ν -disjoint subgraph \mathcal{S}_G which covers all the state vertices.

(2) (Σ_A) is generically uniform observable if $\mathbf{Z}^* = \mathbf{Z}$, where \mathbf{Z}^* is computed using to Algorithm 1.

Note that the condition (1) of Corollary 1 is necessary because it means also the observability of the generic observability of the system for $u(t) = 0$. Furthermore, from the results of [9], condition (2) is obviously necessary and sufficient in the single output case.

The results of Corollary 1 and Algorithm 1 (used to compute \mathbf{Z}^*) show that to achieve the uniform observability, we can either add sensors or put some inputs to zero by removing some actuators. The first solution is obviously more suitable. In the one hand it allows to enlarge \mathbf{Z}^* and to achieve the first condition of Corollary 1, while the second one allows to enlarge \mathbf{Z}^* only. On the second hand, the second solution is not always acceptable from a control point of view.

5. Example

In this section, we illustrate the results presented above with an example. The latter is intentionally not very complicated. Nevertheless, it is clear that the algorithm we propose is well suited to large-scale systems using combinatorial programming techniques.

Example 3. Consider the SBLS represented in the digraph of Fig. 3. This system has 14 state components. The matrix representation of this system is not given because of lack of space. Nevertheless, it can be easily deduced from the digraph. First, note that necessary sufficient condition (1) enounced in Corollary 1 is satisfied as it is shown by the ν -disjoint subgraph (Fig. 4) which covers all the state vertices.

We use now algorithm 1 to determine \mathbf{Z}^* :

Step 0: First, we compute $\mathbf{V}_{M^0}^* = \{y_3, y_5\}$, $\mathbf{V}_{X^0}^* = \{x_4, x_8\}$, $\mathbf{V}_{XU^0}^* = \{x_4u_1, x_4u_2\}$ and graphically we have $\mathbf{Q}^0 = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8\}$. Because of the presence of x_1u_1 in $\varphi(\{z_2\})$ and the fact that $\varphi_c(\{y_1, y_2\}) = \{x_1, x_2, x_3\}$, we can not find a subset $\mathbf{V}_Y \subseteq \mathbf{Y}$ ($\mathbf{Z}^0 = \emptyset$) which allows to satisfy equality (Cond2) for $\mathbf{V}_{\kappa,j} = \{z_1\}, \{z_2\}, \{z_3\}, \{z_1, z_2\}$ or $\{z_2, z_3\}$. Nevertheless, for $\mathbf{V}_{2,2} = \{z_1, z_3\}$ there exists $\mathbf{V}_Y = \{y_1, y_2\}$, which allows to verify condition

516

T. Boukhobza et al.

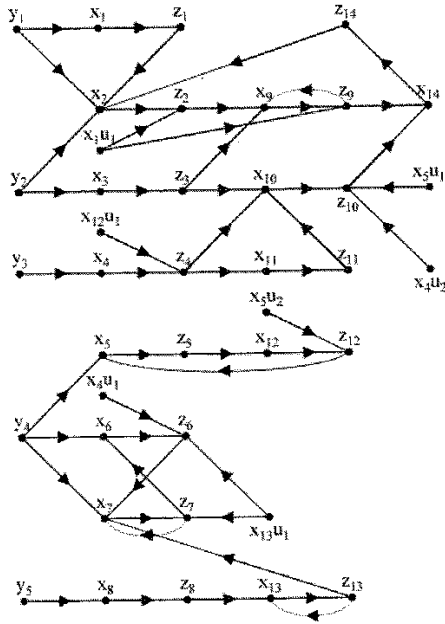
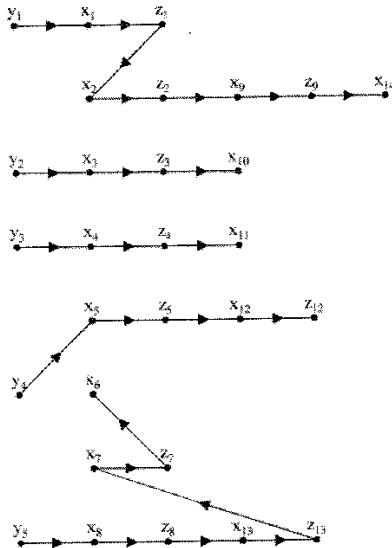


Fig. 3. Digraph associated to Example 3.

Fig. 4. v -disjoint subgraph covering all the state vertices for Example 3.

(Cond2): $\theta(\mathbf{V}_Y) + \kappa + \text{card}(\bar{\varphi}(\mathbf{V}_{2,2}) \cap \mathbf{V}_{XU^0}^*) = 2 + 2 + 0 = 4$ and $\text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}_Y) \cup \bar{\varphi}(\mathbf{V}_{2,1})) + 1 = 3 + 1 = 4$.

Similarly, due to the presence of $x_{12}u_1$ in $\bar{\varphi}(\{z_4\})$ and of $x_{13}u_1$ in $\bar{\varphi}(\{z_6\}) \bar{\varphi}(\{z_7\})$, there cannot exist a subset $\mathbf{V}_Y \subseteq Y$ which allows to satisfy equality (Cond2) for any nonempty subset $\mathbf{V}_{\kappa,j} \subseteq \{z_4, z_5, z_6, z_7\}$. Otherwise, for $\mathbf{V}_{1,8} = \{z_8\}$, there

exists $\mathbf{V}_Y = \{y_5\}$, which allows to verify condition (Cond2): $\theta(\mathbf{V}_Y) + \kappa + \text{card}(\bar{\varphi}(\mathbf{V}_{1,8}) \cap \mathbf{V}_{XU^0}^*) = 1 + 1 + 0 = 2$ and $\text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}_Y) \cup \bar{\varphi}(\mathbf{V}_{2,1})) + 1 = 1 + 1 = 2$. Thus, $\mathbf{Z}^1 = \{z_8, z_{1,3}\}$. As $\theta(\mathbf{Z}^1) = 2 > \theta(\mathbf{Z}^0) = 0$, we go to step 1.

Step 1: Simple computations give $\mathbf{V}_{M^1}^* = \{y_3, y_5, z_8\}$, $\mathbf{V}_{X^1}^* = \{x_4, x_8, x_{13}\}$, $\mathbf{V}_{XU^1}^* = \{x_4u_1,$

$x_4u_2, x_{13}u_1\}$, $\mathbf{Q}^1 = \varphi_e(\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}^1) = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6,$

$z_7, z_8, z_9, z_{10}, z_{13}\}$. For the same reasons than in step 0, we cannot find subsets $\mathbf{V}_Y \subseteq Y$ and $\mathbf{V}_Z \subseteq \varphi(\mathbf{Z}^1)$ which allow to satisfy equality (Cond2) for $\mathbf{V}_{\kappa,j} = \{z_1\}, \{z_2\}, \{z_3\}, \{z_1, z_2\}, \{z_2, z_3\}$. Nevertheless, as previously, for $\mathbf{V}_{1,8} = \{z_8\}$ and for $\mathbf{V}_{2,2} = \{z_1, z_3\}$, there exist subsets $\mathbf{V}_Y \subseteq Y$ and $\mathbf{V}_Z \subseteq \mathbf{Z}^1$ which allow to satisfy equality (Cond2) and so $z_{1,3}$ and z_8 belong to \mathbf{Z}^2 . Besides, for $\mathbf{V}_{1,13} = \{z_{13}\}$, there exists $\mathbf{V}_Y = \emptyset$ and $\mathbf{V}_Z = \{z_8\} \subseteq \varphi(\mathbf{Z}^1)$ which allow to verify condition (Cond2): $\theta(\mathbf{V}_Z) + \kappa + \text{card}(\bar{\varphi}(\mathbf{V}_{1,13}) \cap \mathbf{V}_{XU^1}^*) = 1 + 1 + 0 = 2$ and $\text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}_Z) \cup \bar{\varphi}(\mathbf{V}_{1,13})) + 1 = 1 + 1 = 2$.

Furthermore, as $x_{12}u_1 \in \bar{\varphi}(\{z_4\})$, $x_1u_1 \in \bar{\varphi}(\{z_9\})$ and $x_5u_1 \in \bar{\varphi}(\{z_{10}\})$, no subset $\mathbf{V}_{\kappa,j}$ containing z_4, z_9 or z_{10} can satisfy (Cond1) and (Cond2). Finally, as $x_{13}u_1$ belongs to $\mathbf{V}_{XU^1}^*$, for $\mathbf{V}_{3,j} = \{z_5, z_6, z_7\}$ there exist $\mathbf{V}_Y = \{y_4\}$ and $\mathbf{V}_Z = \emptyset$ which allow to verify condition (Cond2): $\theta(\mathbf{V}_Y) + \kappa + \text{card}(\bar{\varphi}(\mathbf{V}_{3,j}) \cap \mathbf{V}_{XU^1}^*) = 1 + 3 + 2 = 6$ and $\text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}_Y) \cup \bar{\varphi}(\mathbf{V}_{3,j})) + 1 = 5 + 1 = 6$. So, after step 1, we have $\mathbf{Z}^2 = \{z_8, z_{1,3}, z_{5,6,7}\}$. As $\theta(\mathbf{Z}^2) = 4 > \theta(\mathbf{Z}^1) = 1$, we go to step 2.

Step 2: We have first compute $\mathbf{V}_{M^2}^* = \{y_3, y_5, z_8, z_{13}\}$, $\mathbf{V}_{X^2}^* = \{x_4, x_7, x_8, x_{13}\}$, $\mathbf{V}_{XU^2}^* = \{x_4u_1, x_4u_2, x_{13}u_1\}$. From the graph, we obtain $\mathbf{Q}^2 = \{z_1, z_2, z_3, z_4,$

$z_5, z_6, z_7, z_8, z_9, z_{10}, z_{12}, z_{13}\}$. Using the same arguments than for step 1, we have that z_8 and z_{13} belongs to \mathbf{Z}^3 . As nothing changes for $z_1, z_2, z_3, z_4, z_9, z_{10}$, only $z_{1,3}$ belongs to \mathbf{Z}^3 . Otherwise, for $\mathbf{V}_{1,7} = \{z_7\}$, there exist $\mathbf{V}_Z = \{z_8, z_{13}\} \subseteq \varphi(\mathbf{Z}^2)$ and $\mathbf{V}_Y = \emptyset$ which allow to verify condition (Cond2): $\theta(\mathbf{V}_Z) + \kappa + \text{card}(\bar{\varphi}(\mathbf{V}_{2,j}) \cap \mathbf{V}_{XU^2}^*) = 2 + 1 + 1 = 4$ and $\text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}_Z) \cup \bar{\varphi}(\mathbf{V}_{1,13})) + 1 = 3 + 1 = 3$.

Furthermore, for $\mathbf{V}_{2,j} = \{z_5, z_6\}$, there exist $\mathbf{V}_Y = \{y_4\} \subseteq Y$ and a structurally minimal subset $\mathbf{V}_Z = \{z_{13}, z_8\} \subseteq \varphi(\mathbf{Z}^2)$ such that: $\theta(\mathbf{V}_Y \cup \mathbf{V}_Z) + \kappa + \text{card}(\bar{\varphi}(\mathbf{V}_{1,13}) \cap \mathbf{V}_{XU^2}^*) = 3 + 2 + 2 = 7$ and $\text{card}(\varphi_e(\mathbf{V}_Y \cup \mathbf{V}_Z) \cup \bar{\varphi}(\mathbf{V}_{1,13})) + 1 = 6 + 1 = 7$. The previous settings lead to $\mathbf{Z}^3 = \{z_7, z_8, z_{13}, z_{1,3}, z_{5,6}\}$ which is structurally minimal because of condition (Cond1). As $\theta(\mathbf{Z}^3) = 5 > \theta(\mathbf{Z}^2) = 4$, we go to step 3.

Step 3: First, we compute $\mathbf{V}_{M^3}^* = \{y_3, y_4, y_5, z_7, z_8, z_{13}, z_{5,6}\}$, $\mathbf{V}_{X^3}^* = \{x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{12}, x_{13}\}$, and $\mathbf{V}_{XU^3}^* = \{x_4u_1, x_4u_2, x_5u_1, x_5u_2, x_{12}u_1, x_{13}u_1\}$. Graphically, we have $\mathbf{Q}^3 = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6,$

$z_7, z_8, z_9, z_{10}, z_{12}, z_{13}\}$.

As $x_{12}u_1 \in V_{XU^3}^*$, we have that z_4 belongs to Z^4 : for $V_{1,4} = \{z_4\}$ and for $V_Y = \{y_4\}$, we have $\theta(V_Y) + \kappa + \text{card}(\bar{\varphi}(V_{1,4}) \cap V_{XU^3}^*) = 1 + 1 + 1 = 3$ and $\text{card}(\varphi_e(V_Y) \cup \bar{\varphi}(V_{1,4})) + 1 = 2 + 1 = 3$.

Moreover, the presence of z_7 in Z^3 implies that for $V_{1,5} = \{z_5\}$ there exist $V_Y = \{y_4\} \subseteq Y$ and $V_Z = \{z_7, z_{13}, z_8\} \subseteq \wp(Z^3)$ such that condition (Cond2) is satisfied: $\theta(V_Y \cup V_Z) + \kappa + \text{card}(\bar{\varphi}(V_{1,5}) \cap V_{XU^3}^*) = 4 + 1 + 0 = 5$ and $\text{card}(\varphi_e(V_Y \cup V_Z) \cup \bar{\varphi}(V_{1,5})) + 1 = 4 + 1 = 5$.

Finally, due also to the presence of z_7 in Z^3 we have that for $V_{1,6} = \{z_6\}$ and for $V_Z = \{z_7, z_8, z_{13}\} \subseteq \wp(Z^3)$, $\theta(V_Z) + \kappa + \text{card}(\bar{\varphi}(V_{1,6}) \cap V_{XU^3}^*) = 3 + 1 + 2 = 6$ and $\text{card}(\varphi_e(V_Z) \cup \bar{\varphi}(V_{1,6})) + 1 = 5 + 1 = 6$.

Similarly, since $x_5u_1 \in V_{XU^3}^*$ we have that z_{12} belongs to Z^4 : for $V_{1,12} = \{z_{12}\}$ and for $V_Z = \{z_8, z_{5,6}, z_{13}\} \subseteq \wp(Z^3)$, we have $\theta(V_Z) + \kappa + \text{card}(\bar{\varphi}(V_{1,12}) \cap V_{XU^3}^*) = 3 + 1 + 1 = 5$ and $\text{card}(\varphi_e(V_Z) \cup \bar{\varphi}(V_{1,12})) + 1 = 4 + 1 = 5$. Therefore, we obtain $Z^4 = \{z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_{12}, z_{13}, z_{1,3}\}$. As $\theta(Z^4) = 7 > \theta(Z^3) = 5$, we go to step 4.

Step 4: Firstly, we compute $V_{M^4}^* = \{y_3, y_4, y_5, z_5, z_6, z_7, z_8\}$, $V_{X^4}^* = \{x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{12}, x_{13}\}$, $V_{XU^4}^* = \{x_4u_1, x_4u_2, x_5u_1, x_5u_2, x_{12}u_1, x_{13}u_1\}$. We obtain graphically $Q^4 = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_9, z_{10}, z_{11}, z_{12}, z_{13}\}$. $z_4 \in Z^4$ implies that for both $V_{2,j} = \{z_{10}, z_{11}\}$ and $V_{4,j} = \{z_1, z_2, z_9, z_{10}\}$, there exist $V_Y \subseteq Y$ and a structurally minimal vertex subset $V_Z \subseteq \wp(Z^4)$ such that (Cond2) is satisfied. Therefore, $Z^5 = \{z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_{12}, z_{13}, z_{1,3}, z_{10,11}, z_{1,2,9,10}\}$. As $\theta(Z^5) = 9 > \theta(Z^4) = 7$, we go to step 5.

Step 5: As previously, $V_{M^5}^* = \{y_3, y_4, y_5, z_5, z_6, z_7, z_8\}$, $V_{X^5}^* = \{x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{12}, x_{13}\}$, $V_{XU^5}^* = \{x_4u_1, x_4u_2, x_5u_1, x_5u_2, x_{12}u_1, x_{13}u_1\}$ and $Q^5 = Z$. Since $z_{1,10,11} \in Z^5$ and $z_{1,2,9,10} \in Z^5$, we can find $V_Y \subseteq Y$ and a structurally minimal vertex subset $V_Z \subseteq \wp(Z^5)$ such that (Cond2) is satisfied for $V_{2,j} = \{z_1, z_{14}\}$, $\{z_1, z_3\}$, $\{z_3, z_{11}\}$ and $\{z_{10}, z_{11}\}$. Obviously it is also the case for any 2-subset of $\{z_1, z_3, z_{10}, z_{11}, z_{14}\}$, but we must choose only four of these 2-subsets to satisfy condition (Cond1) which ensures the structural minimality of Z^6 . Moreover, we can also find $V_Y \subseteq Y$ and a structurally minimal vertex subset $V_Z \subseteq \wp(Z^5)$ such that (Cond2) is satisfied for $V_{3,j} = \{z_1, z_2, z_9\}$. Consequently, $Z^6 = \{z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_{12}, z_{13}, z_{1,3}, z_{1,14}, z_{3,11}, z_{10,11}, z_{1,2,9}\}$. As $\theta(Z^6) = 10 > \theta(Z^5) = 9$, we go to step 6.

Step 6: We compute $V_{M^6}^* = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8, z_{1,14}, z_{1,3}, z_{3,11}, z_{10,11}\}$ and as $V_{X^6}^* = X$, we can easily deduce that $Z^7 = Z = Z^*$. According to Condition (2) of Corollary 1, we can conclude to the generic uniform observability of the system.

6. Conclusion

In this paper, we propose an analysis tool to study the generic uniform observability of structured bilinear systems. Using a graphic representation dedicated to this class of nonlinear systems two conditions are provided and expressed in graphic terms. The first one is a necessary condition and can be checked directly from the digraph associated to the system. The second one is sufficient and necessitates the use of an iterative algorithm providing the computation of a particular vertex subset. The proposed conditions, which need few information about the system, are very easy to check by means of well-known combinatorial techniques and simply by hand for small systems. That makes our approach particularly suited for large-scale and sparse systems as it is free from numerical difficulties. Indeed, the proposed algorithm and conditions can be easily implemented because they require simple computations on integers and are based on finding edges and subgraphs in a digraph.

Starting from the presented results, we can study, as in [5] for linear systems, the optimisation of the sensor location to achieve the generic uniform observability. Finally, sensor defects and also the addition of new actuators to the system, for fault tolerant control strategy for example, can lead to the lost of the generic uniform observability property. One of the perspectives of the presented work can be also the study of the actuator placement and sensor redundancy in order to preserve the generic uniform observability property.

References

1. Bornard G, Hammouri H. A graph approach to uniform observability of linear multi output systems. In: 41st IEEE Conference on Decision and Control 2002; pp 701–706, Las Vegas, USA
2. Boukhobza T, Djemai M, Barbot J-P. Implicit triangular observer form dedicated to a sliding mode observer for systems with unknown inputs. Asian J Control 2004; 5(4): 513–527
3. Brandin VN, Kostyukovskii YML, Razorenov GN. Global observability conditions for nonlinear dynamic systems. Autom Remote Control 1975; 36(10): 18–25
4. Bruni C, Di Pillo G, Koch G. Bilinear systems: An appealing class of nearly linear systems in theory and application. IEEE Trans Autom Control 1974; AC-19(4): 334–348
5. Commault C, Dion J-M, Trinh DH. Observability recovering by additional sensor implementation in linear structured systems. In: Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference, Seville, Spain, 2005
6. Davison EJ, Wang SH. Properties of linear time-invariant multivariable systems subject to arbitrary

- output and state feedback. *IEEE Trans Autom Control* 1973; AC-18(1): 24–32
7. Deza F, Busvelle E, Gauthier J-P, Rakotopara D. High gain estimation for nonlinear systems. *Syst Control Lett* 1992; 18(4): 295–299
 8. Dion J-M, Commault C, Van der Woude J. Generic properties and control of linear structured systems: A survey. *Automatica*, 2003; 39(7): 1125–1144
 9. Gauthier J-P, Bornard G. Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems. *IEEE Trans Autom Control*, 1981; 26(4): 922–926
 10. Gauthier J-P, Hammouri H, Othman S. A simple observer for nonlinear systems: Application to bioreactors. *IEEE Trans Autom Control*, 1992; 37(6): 875–880
 11. Gauthier J-P, Kupka IAK. Observability and observers for nonlinear systems. *SIAM J Control Optim* 1994; 32(4): 975–994
 12. Glover K, Silverman LM. Characterization of structural controllability approach. *IEEE Trans Autom Control* 1976; AC-21(4): 534–537
 13. Hermann R, Krener AJ. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Trans Autom Control* 1977; AC-22(5): 728–740
 14. Hou M, Busawon K, Saif M. Observer design based on triangular form generated by injective map. *IEEE Trans Autom Control* 2000; 45(7): 1350–1355
 15. Kou SR, Elliot DL, Tarn TJ. Observability of nonlinear systems. *Inf Control*, 1973; 22(1): 89–99
 16. Mohler RR, Kolodziej W. An overview of bilinear system theory and applications. *IEEE Trans Syst Man and Cybern* 1980; SMC-10(10): 683–688
 17. Murota K. *System Analysis by Graphs and Matroids*. Springer-Verlag, New York, USA, 1987
 18. Reinschke KJ. *Multivariable Control. A Graph Theoretic Approach*. Springer-Verlag, New York, USA, 1988
 19. Rudolph J, Zeitz M. A block triangular nonlinear observer normal form. *Syst Control Lett*, 1994; 23(1): 1–8
 20. Sontag ED. *Mathematical control theory, Volume 6 of Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 2nd edition, 1998
 21. Sussmann HJ. Single input observability of continuous time systems. *Math Syst Theory* 1979; 12(4): 371–393
 22. Svaricek F. A graph theoretic approach for the investigation of the observability of bilinear systems. In: *Proceedings of the 12th IFAC World Congress*, pp 351–354, Sydney, Australia, 1993
 23. Van derWoude J. A graph theoretic characterization for the rank of the transfer matrix of a structured system. *Math Control Signals Syst* 1991; 4(1): 33–40
 24. Williamson D. Observation of bilinear systems with application to biological control. *Automatica*, 1977; 13(3): 243–254

Available online at www.sciencedirect.com

automatica

Automatica 43 (2007) 1968–1974

www.elsevier.com/locate/automatica

Brief paper

Observability analysis for structured bilinear systems: A graph-theoretic approach[☆]

T. Boukhobza*, F. Hamelin

Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN—CNRS UMR 7039), Nancy University, BP 239, 54506 Vandœuvre Cedex, Nancy, France

Received 15 July 2005; received in revised form 17 December 2006; accepted 22 March 2007

Available online 24 August 2007

Abstract

This paper is devoted to the generic observability analysis for structured bilinear systems using a graph-theoretic approach. On the basis of a digraph representation, we express in graphic terms the necessary and sufficient conditions for the generic observability of structured bilinear systems. These conditions have an intuitive interpretation and are easy to check by hand for small systems and by means of well-known combinatorial techniques for large-scale systems.

© 2007 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Keywords: Structured bilinear systems; Generic observability; Graph theory

1. Introduction

The class of bilinear systems (BLS), representing particular nonlinear systems whose dynamics are jointly linear in the state and the input variables, was introduced in control theory in the 1960s. This kind of systems are simpler and better understood than most other nonlinear systems. Furthermore, industrial process control, economics and biology (switched circuits, mechanical brakes, controlled suspension systems, immunological systems, population growth, enzyme kinetics, etc.) provide examples of BLS. Finally, the usual linearization of a nonlinear control system near an equilibrium point can be improved by using a bilinear approximation. For these reasons, many works deal with BLS.

The observability of BLS was tackled in many works among which we can cite Williamson (1977) and Grasselli and Isidori (1977). The necessary and sufficient conditions to achieve this property are now very well known. These conditions have been established using essentially geometric or algebraic tools. However, the use of such tools assumes the exact knowledge of the

state space matrices characterizing the system's model. In many modeling problems, these matrices have a number of fixed zero entries determined by the physical laws while the remaining entries are not known precisely. To study the properties of these systems in spite of the poor knowledge we have on them, the idea is that we only keep the zero/non-zero entries in the state space matrices. Thus, we consider models where the fixed zeros are conserved while the non-zero entries are replaced by free parameters. There is a huge amount of interesting works in the literature using this kind of models called structured models. These models are useful to describe the class of systems having the same structure and they capture most of the structural available information from physical laws. Moreover, their study requires a low computational burden which allows one to deal with large-scale systems. Because of these features, we think that structured systems are adapted to study a property like the observability and subsequently this paper deals with this kind of systems.

Many results on structured systems are related to the graph-theoretic approach. This approach is mainly dedicated to linear systems for which many structural properties such as controllability, observability, solvability of several classical control problems including disturbance rejection, input–output decoupling, fault detection and isolation are studied. Survey paper (Dion, Commault, & van der Woude, 2003) reviews the most

[☆] This paper was not presented at any IFAC meeting. This paper was recommended for publication in revised form by Associate Editor Henk Nijmeijer under the direction of Editor Hassan Khalil.

* Corresponding author. Tel.: +33 383 684 464; fax: +33 383 684 462.

E-mail address: taha.boukhobza@cran.uhp-nancy.fr (T. Boukhobza).

significant results in this area. From these studies, it follows that the graph-theoretic approach provides simple and elegant solutions and so is very well suited to analyse large-scale or/and uncertain systems. Unfortunately, not so many works based on graph-theoretic methods deal with nonlinear systems. Among them, Lévine (1997) and Kasinski and Lévine (1984) give conditions to the input–output decoupling and linearization of a nonlinear system, Svaricek (1993) gives sufficient conditions to fulfill the observability of bilinear systems and recently, Bornard and Hammouri (2002) provide sufficient conditions for the uniform observability of some nonlinear systems.

In this context, this paper is dedicated to the analysis of the observability for structured bilinear systems (SBLS). More precisely, for such class of systems, we give simple necessary and sufficient conditions to achieve the observability of the whole or of a given part of the state. These conditions, which are equivalent to the well-known observability criteria (Grasselli & Isidori, 1977; Sen, 1981; Williamson, 1977) are easier to check from a computational point of view.

The paper is organized as follows: after Section 2, which is devoted to the problem formulation, a digraph representation of SBLS is defined in Section 3. The main results are given in Section 4 and are illustrated with an example in Section 5. Finally, some concluding remarks are made.

2. Problem statement

In this paper, we consider SBLS in the form:

$$(\Sigma_A): \begin{cases} \dot{x}(t) = A_0x(t) + \sum_{i=1}^m u_i(t)A_i x(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (1)$$

where $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T \in \mathbb{R}^m$ and $y(t) = (y_1(t), \dots, y_p(t))^T \in \mathbb{R}^p$ are, respectively, the state, the input and the output vectors. For $i = 0, \dots, m$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ and $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ are matrices which elements are either fixed to zero or assumed free non-zero parameters. We can parameterize these nonzero entries by scalar real (nonzero) parameters λ_i , $i = 1, \dots, h$ forming a parameter vector $A = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h)^T \in \mathbb{R}^h$. If all the parameters λ_i are fixed, we obtain an admissible realization of structured system (Σ_A) . Theoretic properties of each realization can be studied according to the values of λ_i . We say that a property is true generically (Davison & Wang, 1973) if it is true for almost all the realizations of structured system (Σ_A) . Here, “for almost all the realizations” is to be understood (Dion et al., 2003; van der Woude, 2000) as “for all parameter values ($A \in \mathbb{R}^h$) except for those in some proper algebraic variety in the parameter space”. The proper algebraic variety for which the property is not true is the zero set of some nontrivial polynomial with real coefficients in the h system parameters, which can be written down explicitly. Recall that a proper algebraic variety is an algebraic variety which has Lebesgue measure zero.

Many studies deal with the observability of bilinear systems using generally either geometric tools or linear time-varying system theory (D’Angelo, 1970). In these studies, the notions

of u -indistinguishability, u -observability and u -unobservability subspaces are defined to characterize the ability of state reconstruction using the knowledge of the input and the output. In this respect, observability definition of BLS is given in Williamson (1977). We extend this definition to SBLS:

Definition 1. Structured bilinear system (Σ_A) is generically observable if, for almost all the realizations of (Σ_A) , there exists an input $u(t)$ such that any pair of initial states $x^0(0)$ and $x^1(0)$ are distinguishable by observation of the corresponding outputs $y^0(t)$ and $y^1(t)$ for $t \geq 0$.

Directly, from results provided in Williamson (1977), the generic observability of SBLS (Σ_A) is necessary and sufficient to ensure, for almost all the realizations of (Σ_A) , the existence of an observer which provides an asymptotic estimate of the state. Moreover, Theorem 1 of Grasselli and Isidori (1977) states that for piecewise constant or continuous controls, a BLS is observable iff there exists an input $u(t)$ for which it is u -observable. The proof is based on the construction of an universal input \bar{u} , which distinguishes all initial states $x^1(0)$ from $x^0(0) = \mathbf{0}$ by concatenating at most $n + 1$ constant inputs: $\bar{u} = u^0 \circ u^1 \circ \dots \circ u^n$. At the k th stage in the construction, the set of states indistinguishable from $x(0) = \mathbf{0}$ is reduced in dimension by well-chosen input value u^k . This leads to the following observability criterion for BLS. This criterion is based on the observability matrix rank conditions proposed in Grasselli and Isidori (1977) for BLS.

Theorem 2. For piecewise continuous input signals $u(t)$, structured bilinear system (Σ_A) is generically observable iff

T1: $g_rank(\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \dots, A_m)) = n$, where

$$\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \dots, A_m) = \begin{bmatrix} C \\ CA_0 \\ CA_0^2 \\ \vdots \\ CA_0^{n-1} \\ CA_1 \\ CA_1A_0 \\ \vdots \\ CA_1A_0^{n-1} \\ \vdots \\ CA_m \\ CA_mA_0 \\ \vdots \\ CA_mA_0^{n-1} \end{bmatrix}$$

is the observability matrix of system (Σ_A) and where $g_rank(M)$ denotes the generic rank of matrix M (Murota, 1987).

The aim of this paper is to provide graphic conditions equivalent to the one of Theorem 2. It turns out that these graphic conditions are easier to check and so more adapted to tackle large-scale or uncertain systems. Indeed, the computation of $g_rank(\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \dots, A_m))$ is quite difficult particularly for large-scale systems.

3. Graph representation of structured bilinear systems

This section is devoted, in a first stage, to the definition of a digraph which represents SBLS (Σ_A) . Next, some useful notations and definitions are given.

3.1. Digraph definition for structured bilinear system

Not so many works use the graph-theoretic approach to study nonlinear systems. The digraph we use in this paper is quite close to the one presented in Lévine (1997). The main differences are due to the fact that we adapt our representation to the

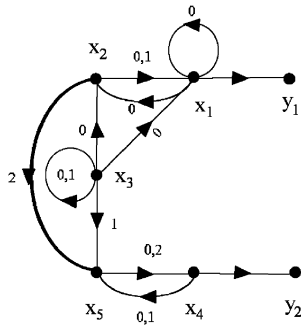


Fig. 1. Digraph for the study of observability for Example 3.

context of observability analysis and to the fact that we deal with structured systems.

The digraph we associate to (Σ_A) is noted $\mathcal{G}(\Sigma_A)$ and is constituted by a vertex set \mathcal{V} and an edge set \mathcal{E} i.e. $\mathcal{G}(\Sigma_A) = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. The vertices are associated to the state and the output components of (Σ_A) and the directed edges represent links between these variables.

More precisely, $\mathcal{V} = \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$, where $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ is the set of state vertices, $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p\}$ is the set of output vertices. For the sake of clarity, the state and the output vertices are written in bold fonts. The edge set is $\mathcal{E} = \bigcup_{l=0}^m A_l\text{-edges} \cup C\text{-edges}$, where, for $l=0, \dots, m$, $A_l\text{-edges} = \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) \mid A_l(i, j) \neq 0\}$ and $C\text{-edges} = \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_i) \mid C(i, j) \neq 0\}$.

Here $M(i, j)$ is the (i, j) th element of matrix M and $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ denotes a directed edge from vertex $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}$ to vertex $\mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}$. Note that number i is indicated under each A_i -edge in order to preserve the information about the belonging of the edges in the digraph representation. Moreover, for $i \in \{0, \dots, m\}$, to each edge $e \in A_i\text{-edges}$ we associate index i . Note that we associate several indexes to an edge e if it belongs to several subsets A_i -edges. The following example illustrates the proposed digraph representation.

Example 3. In Fig. 1, we represent the digraph associated to the defined SBLs:

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ \lambda_4 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_7 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{13} \\ 0 & \lambda_{14} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ and}$$

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{16} & 0 \end{pmatrix}.$$

As we can see, comparatively with the digraph presented in Lévine (1997), the input vertices are removed since we study the state observability. Moreover, due to this removal, the edges, which start in Lévine (1997) from the input vertices, start in our digraph from state vertices and constitute the A_i -edges. Finally, as we are interested in structured systems, each edge represents a free parameter which has no numerical value. Thus, it is not necessary to indicate it on each edge of the digraph as in Lévine (1997).

3.2. Definitions and notations

We present hereafter briefly some definitions concerning particular tools, we use in the paper. For the classical definitions related to the digraphs, the readers are referred to André (1985), Reinschke (1988), Murota (1987), Lévine (1997) and Dion et al. (2003).

- A path P is an \mathbf{Y} -topped path if its end vertex is an element of \mathbf{Y} .
- Two edges $e_1 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1)$ and $e_2 = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_2)$, elements of \mathcal{E} , are v -disjoint if $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{v}_2$ and $\mathbf{v}'_1 \neq \mathbf{v}'_2$. Note that e_1 and e_2 can be v -disjoint even if $\mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_2$ or $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}'_2$. k edges are v -disjoint if they are mutually v -disjoint.
- Consider k edges $e_1 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}'_1), e_2 = (\mathbf{v}_2, \mathbf{v}'_2), \dots, e_k = (\mathbf{v}_k, \mathbf{v}'_k)$. We define for $i=1, \dots, k$, I_i as the set of integers j such that $\mathbf{v}'_j = \mathbf{v}'_i$ i.e. $I_i \stackrel{def}{=} \{1 \leq j \leq k \mid \mathbf{v}'_j = \mathbf{v}'_i\}$. e_1, e_2, \dots, e_k are A -disjoint if **C1** and **C2** are satisfied, where:
 - C1:** edges e_1, e_2, \dots, e_k have distinct begin vertices.
 - C2:** for $i = 1, \dots, k$, $(I_i = \{i\})$ or (there exist r distinct integers i_1, i_2, \dots, i_r such that $e_{j_1} \in A_{i_1}\text{-edges}, e_{j_2} \in A_{i_2}\text{-edges}, \dots, e_{j_r} \in A_{i_r}\text{-edges}$, where j_1, j_2, \dots, j_r are all the elements of I_i).
 Roughly speaking, k edges are A -disjoint if their begin vertices are all distinct and if all the edges which have the same end vertex can be associated to distinct indexes i .

To illustrate the latter definition, note that in Example 3, $e_1 = (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$ and $e_2 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1)$ are A -disjoint as well as $e_1 = (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$ and $e_3 = (\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1)$. So, e_1, e_2 and e_3 are mutually A -disjoint but they are not A -disjoint even if condition **C1** is satisfied. Indeed, these three edges have the same end vertex i.e. $I_1 = I_2 = I_3 = \{1, 2, 3\}$ and there do not exist three distinct integers i_1, i_2 and i_3 such that $e_1 \in A_{i_1}\text{-edges}, e_2 \in A_{i_2}\text{-edges}$ and $e_3 \in A_{i_3}\text{-edges}$. Thus, **C2** is not satisfied. Otherwise, edges $e_1 = (\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_5), e_2 = (\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5)$ and $e_3 = (\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5)$ are A -disjoint. Indeed, as they have distinct begin edges, **C1** is satisfied. Moreover, even if $I_1 = I_2 = I_3 = \{1, 2, 3\}$, as $e_1 \in A_2\text{-edges}, e_2 \in A_1\text{-edges}$ and $e_3 \in A_0\text{-edges}$, **C2** is satisfied too.

4. Main results

We give hereafter a graphical criterion to characterize the generic-observability of system (Σ_A) .

Proposition 4. *Structured bilinear system (Σ_A) is generically observable iff in its associated digraph $\mathcal{G}(\Sigma_A)$*

- i. *every state vertex is the begin vertex of an \mathbf{Y} -topped path;*
- ii. *there exist n A -disjoint edges in $\mathcal{G}(\Sigma_A)$.*

Proof.

Necessity:

- Assume that Condition (i) is not satisfied i.e. $\exists x_j$ from which there does not exist an \mathbf{Y} -topped path. Then, we can state that, $\forall k > 0$, $\forall i_1, i_2, \dots, i_k$ elements of $\{0, 1, \dots, m\}$, the j th column of $CA_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k}$ is equal to zero. Thus, condition **T1** of Theorem 2 cannot be satisfied and the system is not generically observable.
- If structured bilinear system (Σ_A) is generically observable i.e. $\underline{g_rank}(\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \dots, A_m)) = n$ then

$$\text{Im}(C^T, A_0^T C^T, A_1^T C^T, \dots, A_m^T C^T, (A_0^T)^2 C^T, A_0^T A_1^T C^T, \dots, A_0^T A_m^T C^T, A_1^T A_0^T C^T, \dots, (A_m^T)^{n-1} C^T) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Yet, since $\forall M \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $\text{Im}(A_i^T M) \subseteq \text{Im}(A_i^T)$, we have that

$$\text{Im}(C^T, A_0^T C^T, A_1^T C^T, \dots, A_m^T C^T, (A_0^T)^2 C^T, \dots, A_0^T A_m^T C^T, A_1^T A_0^T C^T, \dots, (A_m^T)^{n-1} C^T) \subseteq \text{Im}(C^T, A_0^T, \dots, A_m^T) \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Thus, necessarily $\underline{g_rank}(\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \dots, A_m)) = n$ implies that $\text{Im}(C^T, A_0^T, A_1^T, \dots, A_m^T) = \mathbb{R}^n$ and so $\underline{g_rank}(C^T, A_0^T, A_1^T, \dots, A_m^T) = n$ which is equivalent to $\underline{g_rank}(\text{col}(C, A_0, A_1, \dots, A_m)) = n$.

On the other hand, we can prove (Appendix A) using the results of Reinschke (1988), Murota (1987) and van der Woude (1991), that:

Statement 1. The maximal number of A -disjoint edges in $\mathcal{G}(\Sigma_A)$ is equal to $\underline{g_rank}(\text{col}(C, A_0, A_1, \dots, A_m))$.

Thus, immediately, the generic-observability of SBLS (Σ_A) implies that condition (ii) is satisfied.

Sufficiency: At first, let us recall some facts on linear systems. Consider a structured linear system,

$$\Sigma_{L,A}: \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases}$$

It is well known that the system is observable iff

$$\underline{g_rank} \begin{pmatrix} C \\ sI - A \end{pmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C}.$$

Otherwise, the PBH test (Kailath, 1980) states that $(\Sigma_{L,A})$ is unobservable iff there exists generically a vector $q \neq 0$ such that $Aq = s_0 q$, $s_0 \in \mathbb{C}$ and $Cq = 0$.

On the one hand, if

$$\underline{g_rank} \begin{pmatrix} C \\ sI - A \end{pmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

then the unobservability of $(\Sigma_{L,A})$ implies necessarily that there exists generically a vector $q \neq 0$ such that $Aq = 0$ and $Cq = 0$.

On the other hand, Lemma 14.1 of Reinschke (1988) states that, if in the digraph associated to $(\Sigma_{L,A})$, every state vertex is a begin vertex of an \mathbf{Y} -topped path, then

$$\underline{g_rank} \begin{pmatrix} C \\ sI - A \end{pmatrix} = n \quad \forall s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Assume now that conditions of Proposition 4 are satisfied. On the one hand, using Lemma 14.1 of Reinschke (1988), as all the parameters of matrices A_0, \dots, A_m are assumed to be free, we can state that condition (i) of Proposition 4 implies that, for almost all input values $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)^T$, we have

$$\underline{g_rank}(\text{col}(C, sI - (A_0 + \bar{u}_1 A_1 + \dots + \bar{u}_m A_m))) = n \quad \forall s \neq 0.$$

On the other hand, if SBLS (Σ_A) is generically unobservable, then for all input constant values, $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)^T$, linear systems defined by matrices (C, \bar{A}) are also unobservable, where $\bar{A} = A_0 + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i A_i$. This is due to the fact that for all input constant values, \bar{u} , $\text{Im}(\mathcal{O}(C, \bar{A})) \subseteq \text{Im}(\mathcal{O}(C, A_0, A_1, \dots, A_m))$.

Therefore, If (Σ_A) is unobservable, using the previous settings, we have that for each matrix \bar{A} , there exists a nonzero vector q such that $\bar{A}q = 0$ and $Cq = 0$. Since this statement is true for almost all the input values $\bar{u} = (\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m)^T$, we have that for almost $n(m+1)$ -uple values of input noted $\bar{u}^j = (\bar{u}_1^j, \dots, \bar{u}_m^j)^T$, $j = 1, \dots, n(m+1)$, we can find nonzero vectors q_j such that the following system is satisfied:

$$\begin{cases} Cq_j = 0, \\ A_0 q_j + \sum_{i=1}^m \bar{u}_i^j A_i q_j = 0 \quad j = 1, \dots, n(m+1). \end{cases} \quad (2)$$

Obviously, there cannot exist more than n independent vectors q_j . Let us note q_1, \dots, q_n the vectors such that $\text{span}(q_1, q_2, \dots, q_{n(m+1)}) \subseteq \text{span}(q_1, q_2, \dots, q_n)$ (we can renumber the vectors, if necessary). All the vectors q_j , $j = n+1, \dots, n(m+1)$ are linear combinations of q_1, \dots, q_n . Therefore, system (2) contains the following $n(m+1) + n$ equations

$$\begin{cases} Cq_k = 0, & k = 1, \dots, n, \\ \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^m a_{i,k}^j(\bar{u}) A_i q_k = 0, & j = 1, \dots, n(m+1), \end{cases} \quad (3)$$

where $a_{i,k}^j(\bar{u})$ are linear functions of \bar{u}^j , $j = 1, \dots, n(m+1)$. Since system (2) is satisfied for almost all the input values, we can generically find \bar{u}^j , $j = 1, \dots, n(m+1)$ such that

$$\det \begin{pmatrix} a_{0,1}^1(\bar{u}) & a_{0,2}^1(\bar{u}) & \dots & a_{m,n}^1(\bar{u}) \\ a_{0,1}^2(\bar{u}) & a_{0,2}^2(\bar{u}) & \dots & a_{m,n}^2(\bar{u}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{0,1}^{n(m+1)}(\bar{u}) & a_{0,2}^{n(m+1)}(\bar{u}) & \dots & a_{m,n}^{n(m+1)}(\bar{u}) \end{pmatrix} \neq 0.$$

In this case, the only solution of system (3) is

$$\begin{cases} Cq_k = 0, \\ A_0 q_k = A_1 q_k = \dots = A_m q_k = 0, & k = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (4)$$

Obviously, if (Σ_A) is unobservable then at least one vector q_k , $k = 1, \dots, n$ is nonzero. Consequently, SBLS (Σ_A)

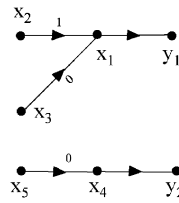


Fig. 2. A set of 5 A -disjoint edges for Example 3.

is unobservable only if there exists at least a nonzero vector q such that $Cq = 0$ and $A_0q = A_1q = \dots = A_mq = 0$. However, if condition (ii) of Proposition 4 is satisfied, then $\text{g_rank}(\text{col}(C, A_0, A_1, \dots, A_m)) = n$ and so there does not exist a vector $q \neq 0$ such that $Cq = 0$ and $A_0q = A_1q = \dots = A_mq = 0$. Hence, for almost all the realizations of SBLs (Σ_A) , conditions of Proposition 4 are sufficient to ensure the observability. \square

In the case of system described in Example 3, Fig. 2 represents 5 A -disjoint edges extracted from digraph of Fig. 1. Since all the state vertices are begin vertices of Y -topped paths, this system is generically observable.

As in Murota (1987) (Theorem 14.1) for the linear case, we can give simpler graphic conditions based on bipartite graphs:

Corollary 5. Structured bilinear system (Σ_A) is generically observable iff in its associated digraph $\mathcal{G}(\Sigma_A)$

- i. every state vertex is the begin vertex of an Y -topped path;
- ii. $\text{g_rank}(\text{col}(C, A_0, A_1, \dots, A_m)) = n$ or equivalently, the maximal matching of the bipartite graph associated to matrix $\text{col}(C, A_0, A_1, \dots, A_m)$ is equal to n .

The main advantage of the previous corollary is its computational aspect. Indeed, the first condition can be checked using depth search algorithms. These algorithms have a complexity order $O(M \cdot N)$ where M is the number of edges in the digraph and $N = n + p$ the number of vertices. For our digraphs, in the worst case $M = (m + 1) \cdot n^2 + n \cdot p$. Thus, the complexity of these algorithms, in our case, is $O(m \cdot n^3)$, (assuming without loss of generality that $p \leq n$). To check the second condition of Corollary 5, we define the bipartite graph related to matrix $\text{col}(C, A_0, A_1, \dots, A_m)$ (Murota, 1987). Then, we use the Bipmatch method (Micali & Vazirani, 1980), which allows to compute the cardinal of maximal matching into a bipartite graph. The complexity order of algorithms using this method is $O(M \cdot N^{0.5})$, where $M = (m + 1) \cdot n^2 + n \cdot p$ and $N = n + p + (m + 1) \cdot n$. So, for checking the second condition of Corollary 5 we can use algorithms which have complexity order $O(m^{\frac{3}{2}} \cdot n^{\frac{5}{2}})$. The proposed solution has an acceptable computational burden and so is very well suited to large-scale systems.

The previous result can be seen as a generalization of the results concerning linear structured systems recalled in Murota (1987) and Dion et al. (2003):

Proposition 6. A structured linear system

$$(\Sigma_{L,A}) : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

is generically observable iff in its associated graph $\mathcal{G}(\Sigma_{L,A})$

- i. every state vertex is the begin vertex of an Y -topped path;
- ii. the maximal matching of the bipartite graph associated to matrix $\text{col}(C, A)$ is equal to n .

The first condition of both Corollary 5 and Proposition 6 is exactly the same. Moreover, since for a linear system, there is no matrices $A_i, i = 1, \dots, m$, the second condition of Proposition 4 is equivalent to the second one of Corollary 5 in the linear case. Thus, in the linear case, Proposition 4 is equivalent to the one presented in Murota (1987) or to the one based on paths and cycles (Dion et al., 2003).

5. Example

In this section, we illustrate the results presented above with an example. This example is intentionally not very complicated. Nevertheless, it is clear that the observability criteria presented in Proposition 4 and Corollary 5 are very well adapted to more complex or large-scale systems using combinatorial programming techniques.

Consider the SBLs represented in the digraph of Fig. 3. This system has 19 state components. The matrix representation of this system is not given because of lack of place. Nevertheless, it can be easily deduced from the digraph. Our aim is to show the simplicity of the proposed method on a relatively large example. The proposed conditions can be checked easily by hand whereas the rank test of the observability matrix is quite difficult to do by hand.

In fact, this system is observable as each state vertex is a begin vertex of an Y -topped paths and there exist 19 A -disjoint edges as it is displayed in Fig. 4.

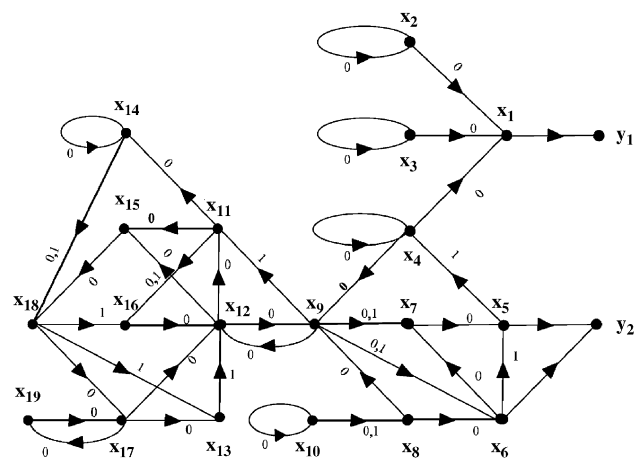


Fig. 3. Illustrative example.

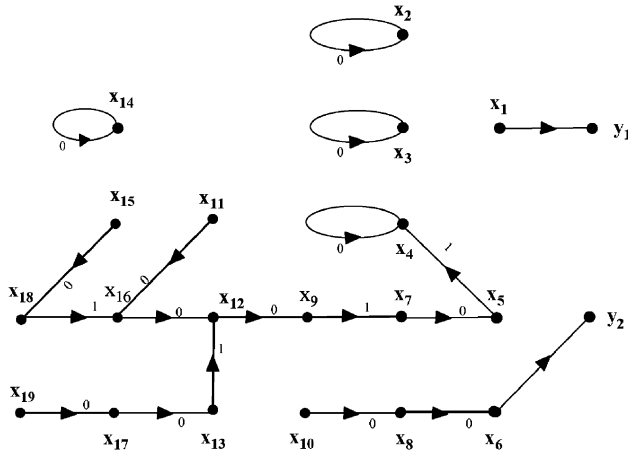


Fig. 4. A set of 19 A-disjoint edges for the illustrative example.

6. Conclusion

In this paper, we propose a new analysis tool to study the observability of structured bilinear systems. Using a new graph representation of this class of nonlinear systems, necessary and sufficient conditions for generic observability are given and expressed in graphic terms. These intrinsic conditions need few information about the system and are easy to check by means of combinatorial techniques or simply by hand for small systems. From a computational point of view, our approach is particularly suited for large-scale systems since it is free from numerical difficulties. Indeed, the proposed conditions can be easily implemented because they require simple computations based on finding edges in digraphs and on integer comparisons. Furthermore, the use of a graph-theoretic approach makes it easy to visualize the system structure. This may be very helpful for the optimization of sensor placement to achieve the observability of the system. Indeed, starting from the above results, we can study, as in Commault, Dion, and Trinh (2005) for linear systems, the sensor location problem in order to achieve the generic observability.

Appendix A. Proof of Statement 1

We prove hereafter that the maximal number of A-disjoint edges ending with vertices of $\mathbf{Y} \cup \mathbf{X}$ is equal to $\underline{\text{g_rank}}(M)$, where $M = \text{col}(C, A_0, A_1, \dots, A_m)$.

To compute $\underline{\text{g_rank}}(M)$, let us define bipartite graph $\mathcal{B}_{\mathcal{M}} = (\mathcal{V}^+; \mathcal{V}^-; \mathcal{E}_{\mathcal{M}})$ associated to matrix M and where

$$\mathcal{V}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^+, \dots, \mathbf{x}_n^+\}, \quad \mathcal{V}^- \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{y}_1^-, \mathbf{y}_2^-, \dots, \mathbf{y}_p^-\} \cup \{\mathbf{x}_{0,1}^-, \mathbf{x}_{0,2}^-, \dots, \mathbf{x}_{0,n}^-, \mathbf{x}_{1,1}^-, \mathbf{x}_{1,2}^-, \dots, \mathbf{x}_{m,n}^-\}$$

and

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}} = C^M\text{-edges} \cup \left(\bigcup_{k=0}^m A_k^M\text{-edges} \right),$$

with $C^M\text{-edges} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbf{x}_i^+, \mathbf{y}_j^-) \mid C(j, i) \neq 0\}$ and for $k = 0, \dots, m$, $A_k^M\text{-edges} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbf{x}_\ell^+, \mathbf{x}_{k,i}^-) \mid A_k(i, \ell) \neq 0\}$.

Note that $C^M\text{-edges}$ are the same than $C\text{-edges}$ in $\mathcal{G}(\Sigma_A)$.

From the results on the generic rank matrices (Reinschke, 1988), since all the parameters of matrices A_0, \dots, A_m and C are assumed to be free, we have that $\underline{\text{g_rank}}(M)$ is equal to the maximal number of disjoint edges in $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$, which is called the maximum matching in $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$.

If, for $i = 1, \dots, n$, vertices $\mathbf{x}_{0,i}^-, \mathbf{x}_{1,i}^-, \dots, \mathbf{x}_{m,i}^-$ are joined to form an unique vertex \mathbf{x}_i^- and if \mathbf{x}_i^+ and \mathbf{y}_i^- are noted respectively, \mathbf{x}_i and \mathbf{y}_i , the number of disjoint edges in $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ becomes the number of A-disjoint edges in $\mathcal{G}(\Sigma_A)$. Indeed, k edges are disjoint in $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$ iff their corresponding edges in the original graph satisfy condition C1 (to have distinct begin vertices in $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$) and condition C2 (to have distinct end vertices in $\mathcal{B}_{\mathcal{M}}$).

Therefore, $\underline{\text{g_rank}}(M)$ is equal to the maximal number of A-disjoint edges ending with vertices in $\mathcal{G}(\Sigma_A)$ and Statement 1 is proved. \square

References

- André, N. (1985). *Sparse systems, digraph approach of large-scale linear systems theory*. Köln, Germany: TÜV.
- Bornard, G., & Hammouri, H. (2002). A graph approach to uniform observability of linear multi output systems. In *Proceedings of the 41st IEEE conference on decision and control* (pp. 701–706) Las Vegas, USA.
- Commault, C., Dion, J.-M., & Trinh, D. H. (2005). Observability recovering by additional sensor implementation in linear structured systems. In *Proceedings of the 44th IEEE conference on decision and control, and the European control conference*, Seville, Spain.
- D'Angelo, H. (1970). *Linear time varying systems: Analysis and synthesis*. Boston, USA: Allyn & Bacon.
- Davison, E. J., & Wang, S. H. (1973). Properties of linear time-invariant multivariable systems subject to arbitrary output and state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-18(1), 24–32.
- Dion, J.-M., Commault, C., & van der Woude, J. W. (2003). Generic properties and control of linear structured systems: a survey. *Automatica*, 39(7), 1125–1144.
- Grasselli, O. M., & Isidori, A. (1977). Deterministic state reconstruction and reachability of bilinear processes. In *Proceedings of IEEE joint automatic control conference* (pp. 1423–1427) San Francisco, USA.
- Kailath, T. (1980). *Linear systems*. Prentice Hall Information and system science series. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- Kasinski, A., & Lévine, J. (1984). A fast graph theoretic algorithm for the feedback decoupling problem of nonlinear systems (Vol. 58) (pp. 550–562). New York: Springer (P.A. Fuhrmann edition).
- Lévine, J. (1997). A graph-theoretic approach to input output decoupling and linearization. In: A.J. Fossard, & D. Normand-Cyrot (Eds.), *Nonlinear systems* (pp. 77–91) (Chapter 3) London, UK: Chapman & Hall.
- Micali, S., & Vazirani, V. V. (1980). An $O(|V|^{1/2}|E|)$ algorithm for finding maximum matching in general graphs. In *Proceedings of the 21st annual symposium on the foundations of computer science*, (pp. 17–27).
- Murota, K. (1987). *System analysis by graphs and matroids*. New York, USA: Springer.
- Reinschke, K. J. (1988). *Multivariable control. A graph theoretic approach*. New York, USA: Springer.
- Sen, P. (1981). On the choice of input for observability in bilinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-26(2), 451–454.
- Svaricek, F. (1993). A graph theoretic approach for the investigation of the observability of bilinear systems. In *Proceedings of the 12th IFAC world congress* (pp. 351–354) Sydney, Australia.
- van der Woude, J. W. (1991). A graph theoretic characterization for the rank of the transfer matrix of a structured system. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 4(1), 33–40.

1974

T. Boukhobza, F. Hamelin / Automatica 43 (2007) 1968–1974

van der Woude, J. W. (2000). The generic number of invariant zeros of a structured linear system. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 38(1), 1–21.

Williamson, D. (1977). Observation of bilinear systems with application to biological control. *Automatica*, 13(3), 243–254.



Taha Boukhobza was born in Algiers, Algeria, in 1971. He obtained his Ph.D. Degree in Automatic control from the Paris XI University, France in 1997. He is currently an associate professor in Henri Poincaré University, Nancy 1, France. His current research interests are observability, fault diagnosis, fault-tolerant control and graph theory.



Frédéric Hamelin was born in Saint-Dizier, France, in 1970. He received his Ph.D. Degree from the Department of Automatic control of the Henri Poincaré University of Nancy 1, France, in 1995. He is currently Professor of automatic control at this University. Previously, he was associate professor from 1996 to 2005. His main research interests are in the fields of robust fault diagnosis and fault-tolerant control.



Brief paper

State and input observability for structured linear systems: A graph-theoretic approach[☆]

T. Boukhobza*, F. Hamelin, S. Martinez-Martinez

Centre de Recherche en Automatique de Nancy, Nancy–University, CNRS UMR 7039, BP 239, 54506 Vandœuvre, France

Received 3 April 2006; received in revised form 11 September 2006; accepted 8 December 2006

Available online 6 April 2007

Abstract

This paper deals with the state and input observability analysis for structured linear systems with unknown inputs. The proposed method is based on a graph-theoretic approach and assumes only the knowledge of the system's structure. Using a particular decomposition of the systems into two subsystems, we express, in simple graphic terms, necessary and sufficient conditions for the generic state and input observability. These conditions are easy to check because they are based on comparison of integers and on finding particular subgraphs in a digraph. Therefore, our approach is suited to study large-scale systems.

© 2007 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Keywords: Graph theory; Structured systems; Generic state and input observability**1. Introduction**

The problem of estimating the state and the unknown input is of great interest mainly in control law synthesis, fault detection and isolation, fault tolerant control, supervision and so on. In this respect, many works (Chu, 2000; Chu & Mehrmann, 1999; Hou, Pugh, & Müller, 1999; Trinh & Ha, 2000; Tsui, 1996) are focused on the design of state observers for linear systems subject to unknown inputs. Otherwise, the issue of simultaneously observing the whole state and the unknown input has been investigated in Hou and Müller (1992) and Koenig (2005).

In most cases, the studies on the state and input observability deal with algebraic and geometric tools (Basile & Marro, 1973; Hou & Müller, 1999; Hou & Patton, 1998; Trentelman, Stoorvogel, & Hautus, 2001). The use of such tools requires the exact knowledge of the state space matrices characterizing the system's model. However, in many modeling problems, these matrices have a number of fixed zero entries determined by the physical laws while the remaining entries are

not precisely known. To study the properties of these systems in spite of poor knowledge we have on them, the idea is that we only keep the zero/nonzero entries in the state space matrices. Thus, we consider models where the fixed zeros are conserved while the nonzero entries are replaced by free parameters. There is a huge amount of interesting works in the literature using this kind of models called structured models. The study of such systems requires a low computational burden which allows one to deal with large-scale systems. Many studies on structured systems are related to the graph-theoretic approach to analyze some system properties such as controllability, observability or the solvability of several classical control problems including disturbance rejection, input–output decoupling, etc. (Dion, Commault, & van der Woude, 2003). It results from these works that the graph-theoretic approach provides simple and elegant solutions.

However, the well-known graphic observability conditions for linear structured systems recalled in Dion et al. (2003) cannot be applied to systems with unknown inputs. More recently, in Boukhobza, Hamelin, and Sauter (2006) authors express in graphic terms necessary and sufficient conditions for the observability of general descriptor systems. Nevertheless, these conditions are quite complicated.

In this context, the purpose of this paper is to use a graph-theoretic approach for providing necessary and sufficient

[☆] This paper was not presented any IFAC meeting. This paper was recommended for publication in revised form by Associate Editor Ben M. Chen under the direction of Editor Ian Peterson.

* Corresponding author. Tel.: +33 383 684 464; fax: +33 383 684 462.

E-mail address: taha.boukhobza@cran.uhp-nancy.fr (T. Boukhobza).

conditions for the state and input observability for structured linear systems.

The paper is organized as follows: after Section 2, which is devoted to the problem formulation, a digraph representation of structured systems is given in Section 3. The main result is enounced in Section 4. Finally, some concluding remarks are made.

2. Problem formulation

In this paper, we treat numerically nonspecified systems in the form:

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t), \end{cases} \quad (1)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^q$ and $y \in \mathbb{R}^p$, are, respectively the state vector, the unknown input vector and the output vector. We assume that only the zero/nonzero structure of A , B , C and D is known. This means that, to each entry in these matrices, we only know whether its value is fixed to zero, in which case we call it a fixed zero, or that it has an unknown real value, in which case we call the entry a free parameter. In a structured system with h nonzero entries in A , B , C and D , we can parameterize these nonzero entries by scalar real (nonzero) parameters λ_i , $i = 1, \dots, h$ forming a parameter vector $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_h)^T \in \mathbb{R}^h$. We denote by A^λ , B^λ , C^λ and D^λ , respectively, the matrices obtained by replacing the nonzeros in A , B , C and D by the corresponding parameters λ_i , $i = 1, \dots, h$, and we denote

$$\Sigma_A : \begin{cases} \dot{x}(t) = A^\lambda x(t) + B^\lambda u(t), \\ y(t) = C^\lambda x(t) + D^\lambda u(t). \end{cases} \quad (2)$$

If all parameters λ_i are numerically fixed, we obtain a so-called admissible realization of structured system Σ_A . More precisely, a realization of Σ_A is a linear system Σ which has no indeterminate parameters and has the same structure than Σ_A , i.e. $A(i, j) = 0 \Leftrightarrow A^\lambda(i, j) = 0$, $B(i, j) = 0 \Leftrightarrow B^\lambda(i, j) = 0$, $C(i, j) = 0 \Leftrightarrow C^\lambda(i, j) = 0$ and $D(i, j) = 0 \Leftrightarrow D^\lambda(i, j) = 0$.

We say that a property is true generically (van der Woude, 2000) if it is true for almost all the realizations of structured system Σ_A . Here, “for almost all the realizations” are to be understood (Dion et al., 2003; van der Woude, 2000) as “for all parameter values ($\lambda \in \mathbb{R}^h$) except for those in some proper algebraic variety in the parameter space”. The proper algebraic variety for which the property is not true is the zero set of some nontrivial polynomial with real coefficients in the h system parameters $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ or equivalently it is an algebraic variety which has Lebesgue measure zero (Reinschke, 1988).

In this paper, we study the generic state and input observability for structured system Σ_A . This notion is related to the strong observability and the left invertibility (Trentelman et al., 2001). Let us recall the definition of the generic state and input observability:

Definition 1. Consider structured system Σ_A , we say that Σ_A is generically state and input observable if and only if it is generically strongly observable and left invertible.

In other words, system Σ_A is generically state and input observable iff, for almost all realizations of Σ_A , for all initial state x_0 and for every input function $u(t)$, $y(t) = 0$ for $t \geq 0$ implies $x(t) = 0$ for $t \geq 0$ and $u(t) = 0$ for $t > 0$. Roughly speaking, generic state and input observability means that a change in input or initial state can be reflected in a change of measurements.

Necessary and sufficient conditions for the state and input observability of structured system Σ_A can be deduced from the ones provided in (Trentelman et al., 2001) or from the conditions of the right-hand side observability of a descriptor system (Hou & Müller, 1999):

Theorem 2. Consider structured system Σ_A and let us denote $P(s) = \begin{pmatrix} A^\lambda - sI_n & B^\lambda \\ C^\lambda & D^\lambda \end{pmatrix}$. Structured system Σ_A is generically state and input observable iff $\forall s \in \mathbb{C}$,

$$g_rank(P(s)) = n + g_rank \begin{pmatrix} B^\lambda \\ D^\lambda \end{pmatrix} = n + q.$$

Assume that system Σ_A is numerically specified. Regarding $P(s)$ as a rational matrix, we call its rank the normal-rank (van der Woude, 2000) and we denote this normal rank by n -rank($P(s)$). Thus, for each realization of system Σ_A , we can compute the n -rank of $P(s)$. This rank will have the same value for almost all parameter values $\lambda \in \mathbb{R}^h$ (Reinschke, 1988; van der Woude, 2000). This so-called generic n -rank of $P(s)$ will be denoted by g - n -rank($P(s)$). Generic rank of matrix $P(s)$, denoted $g_rank(P(s))$, is quite different as it depends on s . Hence, $g_rank(P(s)) = r$, $\forall s \in \mathbb{C}$ means that for almost all parameter values $\lambda \in \mathbb{R}^h$, $rank(P(s)) = r$, $\forall s \in \mathbb{C}$.

The aim of the paper is to give graphical conditions to analyze the question whether or not structured system Σ_A is generically state and input observable. These conditions are equivalent to the ones of Theorem 2 but are quite easy to check since they are based on finding paths in a digraph.

3. Graph representation of structured linear systems

This section is devoted in a first stage to the definition of a digraph representing Σ_A . Next, we give some useful notations and definitions.

Digraph $\mathcal{G}(\Sigma_A)$ associated to Σ_A is constituted by a vertex set \mathcal{V} and an edge set \mathcal{E} , i.e. $\mathcal{G}(\Sigma_A) = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. More precisely, $\mathcal{V} = \mathbf{X} \cup \mathbf{Y} \cup \mathbf{U}$, where $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ is the set of state vertices, $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p\}$ is the set of output vertices and $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_q\}$ is the set of unknown input vertices. The edge set is $\mathcal{E} = A$ -edges $\cup B$ -edges $\cup C$ -edges $\cup D$ -edges, with A -edges = $\{(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) \mid A^\lambda(i, j) \neq 0\}$, B -edges = $\{(\mathbf{u}_j, \mathbf{x}_i) \mid B^\lambda(i, j) \neq 0\}$, C -edges = $\{(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_i) \mid C^\lambda(i, j) \neq 0\}$, D -edges = $\{(\mathbf{u}_j, \mathbf{y}_i) \mid D^\lambda(i, j) \neq 0\}$.

Here, $M^\lambda(i, j)$ is the (i, j) th element of matrix M^λ and $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ denotes a directed edge from vertex $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{V}$ to vertex $\mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}$.

Hereafter, we illustrate the proposed digraph representation with an example.

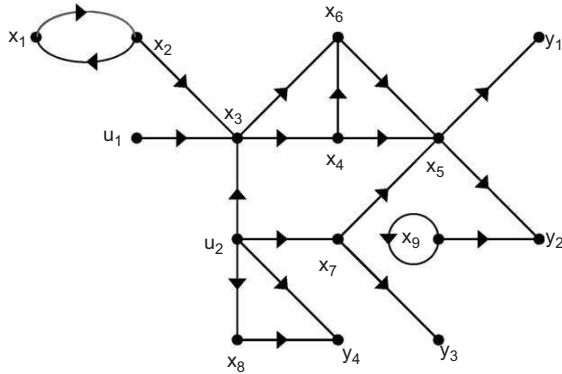


Fig. 1. Digraph associated to system of Example 3.

Example 3. To the system defined by the following matrices, we associate the digraph in Fig. 1.

$$A^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & \lambda_6 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_8 & \lambda_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{10} \end{pmatrix},$$

$$B^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{13} \\ 0 & \lambda_{14} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{16} & 0 & 0 & 0 & \lambda_{17} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{18} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{19} & 0 \end{pmatrix},$$

$$D^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{20} \end{pmatrix}.$$

Let us now give some useful definitions and notations.

- Two edges $e_1 = (v_1, v'_1)$ and $e_2 = (v_2, v'_2)$ are v -disjoint if $v_1 \neq v_2$ and $v'_1 \neq v'_2$. Note that e_1 and e_2 can be v -disjoint even if $v'_1 = v_2$ or $v_1 = v'_2$.
To illustrate the latter definition, note that in Example 3, (x_5, y_2) and (x_4, x_5) as well as (x_2, x_1) and (x_1, x_2) is v -disjoint. However, neither (x_3, x_6) and (x_4, x_6) nor (x_7, y_3) and (x_7, x_5) is v -disjoint. Some edges are v -disjoint if they are mutually v -disjoint.

- A subgraph \mathcal{S}_g of $\mathcal{G}(\Sigma_A)$ is defined by an edge subset $\mathcal{S}_g \subseteq \mathcal{E}$ and a vertex subset $\mathcal{S}_v \subseteq \mathcal{V}$ such that \mathcal{S}_v is constituted by the begin and the end vertices of all elements of \mathcal{S}_g . We note $\mathcal{S}_g = (\mathcal{S}_v, \mathcal{S}_g)$. A subgraph \mathcal{S}_g of $\mathcal{G}(\Sigma_A)$ is a v -disjoint subgraph if all its edges are v -disjoint. A subgraph $\mathcal{S}_g = (\mathcal{S}_v, \mathcal{S}_g)$ of $\mathcal{G}(\Sigma_A)$ covers vertex v if $\exists e \in \mathcal{S}_g$ such that v is the begin vertex of e .
- We denote path P containing vertices v_{r_0}, \dots, v_{r_i} by $P = v_{r_0} \rightarrow v_{r_1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{r_i}$, where $(v_{r_j}, v_{r_{j+1}}) \in \mathcal{E}$ for $j = 0, 1, \dots, i - 1$. A cycle is a path of the form $v_{r_0} \rightarrow v_{r_1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{r_i} \rightarrow v_{r_0}$, where all vertices $v_{r_0}, v_{r_1}, \dots, v_{r_i}$ are distinct. Some paths are disjoint if they have no common vertex. Path P is an Y -topped path if its end vertex is an element of Y .
- The length of a path is the number of edges that the path uses, counting multiple edges multiple times.
- Let \mathcal{V}_1 and \mathcal{V}_2 denote two subsets of \mathcal{V} . The cardinality of \mathcal{V}_1 is noted $\text{card}(\mathcal{V}_1)$. A path P is said a \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 path if its begin vertex belongs to \mathcal{V}_1 and its end vertex belongs to \mathcal{V}_2 . If the only vertices of P belonging to $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ are its begin and its end vertices, P is said a direct \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 path.
- A set of l disjoint \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 paths is called a \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 linking of size l . The linkings which consist of a maximal number of disjoint \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 paths are called maximum \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 linkings. We define by $\rho(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ the size of these maximum \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 linkings.
- The length of a \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 linking is defined as the sum of the lengths of all its paths.
- $\mu(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ is the minimal number of vertices belonging to a maximum \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 linking. Note that the minimal length of a maximum \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 linking is equal to $\mu(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) - \rho(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$.
- $V_{\text{ess}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in \mathcal{V} \mid v \text{ is included in every maximum } \mathcal{V}_1\text{-}\mathcal{V}_2 \text{ linking}\}$. Vertex subset $V_{\text{ess}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ denotes the set of all essential vertices (van der Woude, 2000), which correspond by definition to vertices present in all the maximum \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 linkings.
- $S \subseteq \mathcal{V}$ is a separator between sets \mathcal{V}_1 and \mathcal{V}_2 , if every path from \mathcal{V}_1 to \mathcal{V}_2 contains at least one vertex in S . We call minimum separators between \mathcal{V}_1 and \mathcal{V}_2 any separators having the smallest size. According to Menger's Theorem, the latter equals $\rho(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$.
- There exist two uniquely determined minimum separators between \mathcal{V}_1 and \mathcal{V}_2 noted $S^i(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ and $S^o(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ such that (van der Woude, 2000):
 - $S^i(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ is the set of the end vertices of all direct $\mathcal{V}_1 - V_{\text{ess}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ paths, where $V_{\text{ess}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) \cap \mathcal{V}_1$ is considered, in the present definition, as output vertices. Vertex subset $S^i(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ is the minimum input separator.
 - $S^o(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ is the set of begin vertices of all direct $V_{\text{ess}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) - \mathcal{V}_2$ paths, where $V_{\text{ess}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) \cap \mathcal{V}_2$ is considered, in the present definition, as input vertices. Vertex subset $S^o(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ is the minimum output separator.

- It results, from the previous definitions, that $V_{\text{ess}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) \cap \mathcal{V}_1 \subseteq \mathbf{S}^i(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ and $V_{\text{ess}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) \cap \mathcal{V}_2 \subseteq \mathbf{S}^o(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$.
- $\theta(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ is the maximal number of v -disjoint edges from \mathcal{V}_1 to \mathcal{V}_2 .

In Example 3, $\rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y})=2$ and $\theta(\mathbf{U}, \mathbf{Y})=1$. Furthermore, there exist several maximum linkings:

$$\{\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{y}_1; \mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{y}_4\},$$

$$\{\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_6 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{y}_1; \mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{x}_8 \rightarrow \mathbf{y}_4\}, \dots$$

According to the fact that the first maximum linking is the "shortest one" with a length equal to 5, we have that $\mu(\mathbf{U}, \mathbf{Y})=7$. Finally, $V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5, \mathbf{u}_2\}$, $\mathbf{S}^i(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ and $\mathbf{S}^o(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \{\mathbf{x}_5, \mathbf{u}_2\}$.

4. Main results

4.1. Preliminary results

At first, let us specify a particular subdivision of structured system Σ_A :

Definition 4. For structured system Σ_A represented by digraph $\mathcal{G}(\Sigma_A)$, we define the vertex subsets:

$$\Delta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x}_i \mid \rho(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \mathbf{Y}) = \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y})\},$$

$$\mathbf{X}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x}_i \mid \rho(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \mathbf{Y}) > \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y})\} = \mathbf{X} \setminus \Delta_0,$$

$$\mathbf{Y}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{y}_i \mid \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) > \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y} \setminus \{\mathbf{y}_i\})\} = \mathbf{Y} \cap V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}),$$

$$\mathbf{Y}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{Y} \setminus \mathbf{Y}_0, \quad \mathbf{U}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{u}_i \mid \theta(\{\mathbf{u}_i\}, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = 0\},$$

$$\mathbf{U}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{U} \setminus \mathbf{U}_0, \quad \mathbf{X}_s \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}^o(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cap \mathbf{X} \quad \text{and} \quad \mathbf{X}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_0 \setminus \mathbf{X}_s.$$

Furthermore, we define $n_0 = \text{card}(\mathbf{X}_0)$, $n_s = \text{card}(\mathbf{X}_s)$, $n_1 = \text{card}(\mathbf{X}_1)$, $q_0 = \text{card}(\mathbf{U}_0)$, $q_1 = \text{card}(\mathbf{U}_1)$, $p_0 = \text{card}(\mathbf{Y}_0)$ and $p_1 = \text{card}(\mathbf{Y}_1)$.

Considering the system described in Example 3, we have mentioned that $\rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y})=2$. Since $\mathbf{Y} \cap V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \emptyset$, we have that $\mathbf{Y}_0 = \emptyset$, $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}$. Moreover, for $i = 1, \dots, 9$, let us compute the number of disjoint paths from $\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}$ to \mathbf{Y} : for $i = 1, \dots, 6$, $\rho(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \mathbf{Y}) = 2$ and for $i = 7, \dots, 9$, $\rho(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \mathbf{Y}) = 3$. We can deduce that $\Delta_0 = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6\}$, $\mathbf{X}_1 = \{\mathbf{x}_7, \mathbf{x}_8, \mathbf{x}_9\}$. Furthermore, contrary to \mathbf{u}_2 , \mathbf{u}_1 cannot be linked with an edge to an element of $\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1$, so $\mathbf{U}_0 = \{\mathbf{u}_1\}$ and $\mathbf{U}_1 = \{\mathbf{u}_2\}$. Finally, $V_{\text{ess}}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_5\}$ and so $\mathbf{S}^o(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) = \{\mathbf{x}_5\}$. Thus, $\mathbf{X}_s = \{\mathbf{x}_5\}$ and $\mathbf{X}_0 = \Delta_0 \setminus \mathbf{X}_s = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_6\}$.

Let us comment the graph partition presented above:

- Δ_0 merges the state vertices which cannot be linked to \mathbf{Y} , the state vertices belonging to $V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ and the state vertices from which all \mathbf{Y} -topped paths lead to $V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$. Indeed, if it is not the case, i.e. there exist $\mathbf{v}_i \in \Delta_0$ and a path P from \mathbf{v}_i to \mathbf{Y} which does not contain any element of $V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$, then there is no element of $\mathbf{S}^o(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$

in P and so $\text{card}(\mathbf{S}^o(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{Y})) > \text{card}(\mathbf{S}^o(\mathbf{U}, \mathbf{Y}))$. According to Menger's Theorem, this implies that $\rho(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{Y}) > \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$, which is in contradiction with assumption $\mathbf{v}_i \in \Delta_0$.

- Directly from the definition of \mathbf{Y}_0 , we have that $\mathbf{Y}_0 \subseteq V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ and so $\mathbf{Y}_0 \subseteq \mathbf{S}^o(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$.
- Assume that $\rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y})=q$, then $\rho(\mathbf{U}_1, \mathbf{Y}) = \text{card}(\mathbf{U}_1)$. In this case, $\mathbf{U}_1 \subseteq V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ and subsequently $\mathbf{U}_1 \subseteq \mathbf{S}^i(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$. Moreover, all elements of \mathbf{U}_1 are begin vertices of \mathbf{U} - \mathbf{Y} paths where all vertices are in $\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1$. Since, $(\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) \cap V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \emptyset$, all elements of \mathbf{U}_1 are begin vertices of direct $V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) - \mathbf{Y}$ paths and so $\mathbf{U}_1 \subseteq \mathbf{S}^o(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$. Otherwise, $\mathbf{U}_1 \subseteq \mathbf{S}^i(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ and $\mathbf{U}_1 \subseteq \mathbf{S}^o(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ imply that, in a maximum \mathbf{U} - \mathbf{Y} linking, all vertices included in a path starting from \mathbf{U}_1 are not included in $V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ and so are not included in Δ_0 . So,

$$V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \mathbf{U}_1 \cup V_{\text{ess}}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}). \quad (3)$$

- From each $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_1$, there exists an \mathbf{Y} -topped path, which is disjoint with at least one maximum \mathbf{U} - \mathbf{Y} linking. Therefore, $\forall \mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_1$, there exists an \mathbf{Y} -topped path constituted only by the elements of \mathbf{X}_1 and \mathbf{Y}_1 . In the same sense, $\forall \mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_1$, in all the maximum $\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}$ - \mathbf{Y} linkings, the paths beginning with the vertices of $\mathbf{U}_1 \cup \{\mathbf{x}_i\}$ are necessarily in $\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1$. Similarly, $\forall \mathbf{y}_i \in \mathbf{Y}_1$, in all the maximum \mathbf{U} - $\mathbf{Y} \setminus \{\mathbf{y}_i\}$ linkings, the paths beginning with the vertices of \mathbf{U}_1 are necessarily in $\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1$. Thus, $\forall \mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_1$ and $\forall \mathbf{y}_i \in \mathbf{Y}_1$,

$$\begin{aligned} V_{\text{ess}}(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \mathbf{Y}) \cap (\Delta_0 \cup \mathbf{Y}_0) \\ = V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y} \setminus \{\mathbf{y}_i\}) \cap (\Delta_0 \cup \mathbf{Y}_0) = V_{\text{ess}}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}). \end{aligned} \quad (4)$$

According to Definition 4, we state now:

Lemma 5. Consider structured system Σ_A represented by digraph $\mathcal{G}(\Sigma_A)$, where $\rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y})=q$. Using the subdivision given in Definition 4, we have:

- St1. $\mathbf{S}^o(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cap (\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = \emptyset$;
- St2. $\forall \mathbf{v}_i \in \Delta_0 \cup \mathbf{U}_0$, $\mathbf{v}_i \in \mathbf{S}^o(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \Leftrightarrow \theta(\{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) \neq 0$;
- St3. $\theta(\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = \text{card}(\mathbf{X}_s) = n_s$;
- St4. $\mathbf{S}^o(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cap \mathbf{U}_0 = \emptyset$;
- St5. $\theta(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = 0$;
- St6. $\mathbf{Y}_0 \subseteq \mathbf{S}^o(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$.

Proof. [St1.] Due to the definition of \mathbf{X}_1 and \mathbf{Y}_1 , $(\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) \cap V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \emptyset$. Yet, $\mathbf{S}^o(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \subseteq V_{\text{ess}}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \subseteq V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$. Then, $\mathbf{S}^o(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cap (\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = \emptyset$.

[St2.] First, we show that $\forall \mathbf{v}_i \in \Delta_0$, if $\theta(\{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) \neq 0$ then $\mathbf{v}_i \in \mathbf{S}^o(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$.

We have that $\mathbf{v}_i \in \Delta_0$ and $\theta(\{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) \neq 0$ imply that $\mathbf{v}_i \in V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$. Indeed, if it is assumed that it is not the case, then according to relations (4), $\forall \mathbf{x}_j \in \mathbf{X}_1$, $\mathbf{v}_i \notin V_{\text{ess}}(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_j\}, \mathbf{Y})$ and $\forall \mathbf{y}_k \in \mathbf{Y}_1$, $\mathbf{v}_i \notin V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y} \setminus \{\mathbf{y}_k\})$. Since \mathbf{v}_i is directly linked to $\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1$, then there exists a $\{\mathbf{v}_i\}$ - \mathbf{Y} path which is disjoint from all the paths constituting a maximum \mathbf{U} - \mathbf{Y} linking. This is

equivalent to $\rho(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{Y}) > \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$, which is in contradiction with the fact that $\mathbf{v}_i \in \Delta_0$. Furthermore, not only $\mathbf{v}_i \in V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ but also it is the begin vertex of a direct $V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ - \mathbf{Y} path. Thus, $\mathbf{v}_i \in \mathbf{S}^0(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$.

Moreover, from equality (3), $\mathbf{v}_i \in V_{\text{ess}}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$ and as \mathbf{v}_i is the begin vertex of a direct $V_{\text{ess}}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$ - \mathbf{Y} path, this implies that $\mathbf{v}_i \in \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$.

Now, we will prove that $\forall \mathbf{v}_i \in \Delta_0 \cup \mathbf{U}_0, \theta(\{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_i \notin \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$.

Assume that there exists $\mathbf{v}_i \in \Delta_0 \cup \mathbf{U}_0$ such that $\theta(\{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = 0$ and $\mathbf{v}_i \in \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$. Obviously, $\mathbf{v}_i \in \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$ implies that \mathbf{v}_i is included in all maximum $\mathbf{U}_0 - \mathbf{Y}$ linkings. Consider any maximum $\mathbf{U}_0 - \mathbf{Y}$ linking, it necessarily includes a path of the form $P = \mathbf{u}_j \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{v}_i \rightarrow \mathbf{v}_{j_1} \rightarrow \mathbf{v}_{j_2} \dots \rightarrow \mathbf{v}_{j_k} \rightarrow \mathbf{y}_t$. First note that as $\theta(\{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = 0$, $\mathbf{v}_{j_1} \in \Delta_0$. Next, for $r > 1$ if $\mathbf{v}_{j_r} \in \mathbf{X}_1$ then from the previous settings $\mathbf{v}_{j_{r-1}} \in \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$. Nevertheless, this is impossible because in any maximum $\mathbf{U}_0 - \mathbf{Y}$ linkings, we must have one and only one element of $\mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$ in every path. So, $\mathbf{v}_{j_1}, \mathbf{v}_{j_2}, \dots, \mathbf{v}_{j_k}$ are all included in Δ_0 . Besides, $\mathbf{y}_t \notin \mathbf{Y}_1$ because otherwise $\mathbf{v}_{j_k} \in \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$. This implies necessarily that, $\mathbf{y}_t \in \mathbf{Y}_0$. By definition, $\mathbf{Y}_0 \subseteq V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ and from equality (3), we have $\mathbf{y}_t \in V_{\text{ess}}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$. Thus, $\mathbf{y}_t \in \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$. Hence, in path P , we have two elements of $\mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$. As this fact is impossible, the assumption that there exists $\mathbf{v}_i \in \Delta_0 \cup \mathbf{U}_0$ such that $\theta(\{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = 0$ and $\mathbf{v}_i \in \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$ is false and [St2] is proved.

[St3.] In any maximum $\mathbf{U}_0 - \mathbf{Y}$ linking, there are n_s paths containing vertices of \mathbf{X}_s which end necessarily with a vertex of \mathbf{Y}_1 . Moreover, in all these paths, all state vertices between elements of \mathbf{X}_s and output vertices belong to \mathbf{X}_1 . Hence, there exist n_s disjoint paths linking \mathbf{X}_s to \mathbf{Y}_1 and including only vertices of $\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1$. So, $\theta(\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = n_s$.

[St4.] As $\theta(\mathbf{U}_0, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = 0$, we have from [St2] that $\mathbf{U}_0 \cap \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) = \emptyset$.

[St5.] Since $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X} \setminus (\mathbf{X}_s \cup \mathbf{X}_1)$, where $\mathbf{X}_s = \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cap \mathbf{X}$, we have that $\mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cap \mathbf{X}_0 = \emptyset$. So, directly from [St2], $\theta(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = 0$.

[St6.] From statement [St2], $\forall \mathbf{v}_i \in \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$, satisfying $\theta(\{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) \neq 0$ we have that $\mathbf{v}_i \in \mathbf{S}^0(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ and so that $\mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \subseteq \mathbf{S}^0(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$. Besides, $\mathbf{U}_1 \subseteq \mathbf{S}^0(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$, $\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) = \emptyset$ and $\text{card}(\mathbf{S}^0(\mathbf{U}, \mathbf{Y})) = q_1 + q_0 = \text{card}(\mathbf{U}_1) + \text{card}(\mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}))$. Thus, $\mathbf{S}^0(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cup \mathbf{U}_1$. Yet, $\mathbf{Y}_0 \subseteq V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) \Rightarrow \mathbf{Y}_0 \subseteq \mathbf{S}^0(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ and as $\mathbf{S}^0(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cup \mathbf{U}_1$, we have finally $\mathbf{Y}_0 \subseteq \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$. \square

To summarize, Lemma 6 states that $V_{\text{ess}}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = V_{\text{ess}}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cup \mathbf{U}_1$, $\theta(\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = n_s$, $\mathbf{S}^0(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cup \mathbf{U}_1 = \mathbf{X}_s \cup \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{U}_1$ and that $\theta(\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{Y}_0, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = 0$.

These equalities are important in the sequel of the paper.

4.2. Generic input and state observability

Using the graph decomposition presented above, we now give the first result of the paper

Proposition 6. Σ_A is generically state and input observable iff, in its associated digraph $\mathcal{G}(\Sigma_A)$, there exists a v -disjoint

subgraph \mathcal{S}_g which satisfies:

Cond1. \mathcal{S}_g covers $\mathbf{X} \cup \mathbf{U}$;

Cond2. All vertices \mathbf{x}_i covered by cycles in \mathcal{S}_g are included in \mathbf{X}_1 ;

Cond3. \mathcal{S}_g contains a maximum $\mathbf{U}_0 - \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$ linking, with a length equal to $\mu(\mathbf{U}_0, \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})) - \text{card}(\mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}))$.

Proof. We first prove the necessity of Cond1, next we decompose the system into two subsystems and we study separately each of them.

Necessity of condition Cond1: Cond1 is equivalent to the existence of $n+q$ v -disjoint edges and means that $g_rank(P(0)) = n+q$. Indeed, the number of v -disjoint edges in $\mathcal{G}(\Sigma_A)$ is equal to the maximum matching in the bipartite graph (Murota, 1987) associated to matrix $P(0)$, which is equal to $g_rank(P(0))$. Therefore, Cond1 is a necessary condition to the generic input and state observability of Σ_A . Moreover, Cond1 implies also that $\rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = q$ and so we can apply the results of Lemma 5.

Decomposition of system Σ_A : Using Definition 4 and results of Lemma 5, there is no edge from $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0$ to $\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1$. So, we can write Σ_A as

$$\begin{cases} \dot{X}_0(t) = A_{0,0}^\lambda X_0(t) + A_{0,s}^\lambda X_s(t) + A_{0,1}^\lambda X_1(t) \\ \quad + B_{0,0}^\lambda U_0(t) + B_{0,1}^\lambda U_1(t), \\ \dot{X}_s(t) = A_{s,0}^\lambda X_0(t) + A_{s,s}^\lambda X_s(t) + A_{s,1}^\lambda X_1(t) \\ \quad + B_{s,0}^\lambda U_0(t) + B_{s,1}^\lambda U_1(t), \\ \dot{X}_1(t) = A_{1,s}^\lambda X_s(t) + A_{1,1}^\lambda X_1(t) + B_{1,1}^\lambda U_1(t), \\ Y_0(t) = C_{0,0}^\lambda X_0(t) + C_{0,s}^\lambda X_s(t) + C_{0,1}^\lambda X_1(t) \\ \quad + D_{0,0}^\lambda U_0(t) + D_{0,1}^\lambda U_1(t), \\ Y_1(t) = C_{1,s}^\lambda X_s(t) + C_{1,1}^\lambda X_1(t) + D_{1,1}^\lambda U_1(t). \end{cases} \quad (5)$$

where X_0, X_s, U_0, U_1, Y_0 and Y_1 represent the variables associated to vertex subsets $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_s, \mathbf{U}_0, \mathbf{U}_1, \mathbf{Y}_0$ and \mathbf{Y}_1 , respectively.

Therefore, with some appropriate permutations on the rows and columns of $P(s)$, we can transform $P(s)$ into

$$\tilde{P}(s) = \begin{pmatrix} A_{0,0}^\lambda - sI_{n_0} & A_{0,s}^\lambda & B_{0,0}^\lambda & A_{0,1}^\lambda & B_{0,1}^\lambda \\ A_{s,0}^\lambda & A_{s,s}^\lambda - sI_{n_s} & B_{s,0}^\lambda & A_{s,1}^\lambda & B_{s,1}^\lambda \\ C_{0,0}^\lambda & C_{0,s}^\lambda & D_{0,0}^\lambda & C_{0,1}^\lambda & D_{0,1}^\lambda \\ 0 & A_{1,s}^\lambda & 0 & A_{1,1}^\lambda - sI_{n_1} & B_{1,1}^\lambda \\ 0 & C_{1,s}^\lambda & 0 & C_{1,1}^\lambda & D_{1,1}^\lambda \end{pmatrix}.$$

According to statement St3, $g_rank \begin{pmatrix} A_{1,s}^\lambda \\ C_{1,s}^\lambda \end{pmatrix} = \theta(\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = n_s$. Matrix $P(s)$, and so $\tilde{P}(s)$, has generically full column rank $\forall s \in \mathbb{C}$, iff $P_e(s)$ has also generically full column rank $\forall s \in \mathbb{C}$,

where

$$P_e(s) = \begin{pmatrix} A_{0,0}^\lambda - sI_{n_0} & A_{0,s}^\lambda & B_{0,0}^\lambda & A_{0,1}^\lambda & B_{0,1}^\lambda & 0 \\ A_{s,0}^\lambda & A_{s,s}^\lambda - sI_{n_s} & B_{s,0}^\lambda & A_{s,1}^\lambda & B_{s,1}^\lambda & 0 \\ C_{0,0}^\lambda & C_{0,s}^\lambda & D_{0,0}^\lambda & C_{0,1}^\lambda & D_{0,1}^\lambda & 0 \\ 0 & I_{n_s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{1,1}^\lambda - sI_{n_1} & B_{1,1}^\lambda & A_{1,s}^\lambda \\ 0 & 0 & 0 & C_{1,1}^\lambda & D_{1,1}^\lambda & C_{1,s}^\lambda \end{pmatrix}.$$

Moreover, we have that $\rho(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) = \text{card}(\mathbf{U}_0) = q_0 = \text{card}(\mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})) = p_0 + n_s$ and so

$$P_1(s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A_{0,0}^\lambda - sI_{n_0} & A_{0,s}^\lambda & B_{0,0}^\lambda \\ A_{s,0}^\lambda & A_{s,s}^\lambda - sI_{n_s} & B_{s,0}^\lambda \\ C_{0,0}^\lambda & C_{0,s}^\lambda & D_{0,0}^\lambda \\ 0 & I_{n_s} & 0 \end{pmatrix}$$

is a square matrix. Matrix $P_e(s)$ has generically full column rank $\forall s \in \mathbb{C}$ iff $P_1(s)$ and $P_2(s)$ have both generically full column rank $\forall s \in \mathbb{C}$, where

$$P_2(s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A_{1,1}^\lambda - sI_{n_1} & B_{1,1}^\lambda & A_{1,s}^\lambda \\ C_{1,1}^\lambda & D_{1,1}^\lambda & C_{1,s}^\lambda \end{pmatrix}.$$

Necessity and sufficiency of Cond2 and Cond3: For $P_1(s)$, we can apply Theorem 5.1 of van der Woude (2000) which states that the degree of the determinant of $P_1(s)$ is generically equal to $n_0 + q_0 - (\mu(\mathbf{U}_0, \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})) - \text{card}(\mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})))$, with obviously $\mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) = \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s$. This determinant is nonzero $\forall s \in \mathbb{C}$ iff its degree is equal to 0 and $g_rank(P_1(0)) = n_0 + q_0 + n_s$. Yet, according to $\theta(\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{U}_1) = 0$, the existence of a v -disjoint subgraph which covers $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0$, with the requirements enounced in Cond2 and Cond3, is necessary and sufficient to ensure that $g_rank(P_1(0)) = n_0 + q_0 + n_s$ and $\mu(\mathbf{U}_0, \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})) = n_0 + q_0 + \text{card}(\mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}))$, and so, to ensure that $P_1(s)$ has generically full column rank, i.e. $g_rank(P_1(s)) = n_0 + q_0 + n_s$, $\forall s \in \mathbb{C}$.

Sufficiency of condition Cond1: From Theorem 5.2 of van der Woude (2000), adapted to the observation context, we have:

If $P_2(s)$ has generically full column n -rank even after the deletion of an arbitrary row, then, generically, the greatest common divisor of all the $(n_1 + q_1 + n_s)$ th order minors of $P_2(s)$ is a monomial in s with a degree equal to: $n_1 + q_1 + n_s$ minus the maximum number of edges in the disjoint union of a linking of size $n_s + q_1$ from $\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s$ to \mathbf{Y} , an \mathbf{Y} -topped family and a cycle family in \mathbf{X}_1 .

Cond1 implies that $\rho(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s, \mathbf{Y}_1) = q_1 + n_s$ and that the maximal number of edges in a disjoint union of a linking of size $n_s + q_1$ from $\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s$ to \mathbf{Y} , an \mathbf{Y} -topped family and a cycle family in \mathbf{X}_1 are equal to $n_1 + n_s + q_1$. Thus, if the hypothesis that generically $P_2(s)$ has full column n -rank even after the deletion of an arbitrary row is satisfied then, generically, the greatest common divisor of all the $(n_1 + q_1 + n_s)$ th order minors of $P_2(s)$ is a monomial in s with a degree equal to zero and so $P_2(s)$ has generically full column rank.

We will now show that the hypothesis that $P_2(s)$ generically has full column n -rank even after the deletion of an arbitrary row is true. That is to say $g_rank(P_{2,i}(s)) = n_1 + n_s + q_1$, $\forall i = 1, \dots, n_1 + q_1$, where $P_{2,i}(s)$, for $i = 1, \dots, n_1 + q_1$, corresponds to matrix $P_2(s)$ after the deletion of its i th row.

The deletion of the i th row of $(A_{1,1}^\lambda - sI_{n_1} \ B_{1,1}^\lambda \ A_{1,s}^\lambda)$ in $P_2(s)$ is equivalent to the deletion of all the edges ending by \mathbf{x}_{i_1} in the digraph, where x_{i_1} is the i th component of the state subvector \mathbf{X}_1 . Yet, $\rho(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_{i_1}\}, \mathbf{Y}) > \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ and so $\rho(\mathbf{S}^0(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) \cup \{\mathbf{x}_{i_1}\}, \mathbf{Y}) > \rho(\mathbf{S}^0(\mathbf{U}, \mathbf{Y}), \mathbf{Y})$. Moreover, from Lemma 5, $\mathbf{S}^0(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s \cup \mathbf{Y}_0$. Knowing that $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y} \setminus \mathbf{Y}_0$, we have that $\rho(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s \cup \{\mathbf{x}_{i_1}\}, \mathbf{Y}_1) > \rho(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s, \mathbf{Y}_1) = q_1 + n_s$. Then, $\rho(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s \cup \{\mathbf{x}_{i_1}\}, \mathbf{Y}_1) = q_1 + n_s + 1$. Applying results of van der Woude (2000), we have that for $i < n_1$, $g_rank(P_{2,i}(s))$ is equal to $n_1 - 1$ plus the maximal size of a $\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s \cup \{\mathbf{x}_{i_1}\} - \mathbf{Y}_1$ linking. Thus, $g_rank(P_{2,i}(s)) = n_1 + q_1 + n_s$ for $i \leq n_1$.

The deletion of the i th row of $(C_{1,1}^\lambda \ D_{1,1}^\lambda \ C_{1,s}^\lambda)$ in $P_2(s)$ is equivalent to the deletion of all edges ending by \mathbf{y}_{i_1} in the digraph, where y_{i_1} is the i th component of output subvector \mathbf{Y}_1 . Yet, $\rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y} \setminus \{\mathbf{y}_{i_1}\})$. Thus, $\rho(\mathbf{S}^0(\mathbf{U}, \mathbf{Y}), \mathbf{Y}) = \rho(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s \cup \mathbf{Y}_0, \mathbf{Y} \setminus \{\mathbf{y}_{i_1}\})$. As $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y} \setminus \mathbf{Y}_0$, we have that $\rho(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s, \mathbf{Y}_1 \setminus \{\mathbf{y}_{i_1}\}) = q_1 + n_s$. Applying results of van der Woude (2000), we have that $g_rank(P_{2,i}(s))$ for $n_1 < i \leq n_1 + p_1$ is equal to n_1 plus the maximal size of a $\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s - \mathbf{Y}_1 \setminus \{\mathbf{y}_{i_1}\}$ linking. So, for $n_1 < i \leq n_1 + p_1$, $g_rank(P_{2,i}(s)) = n_1 + q_1 + n_s$.

To summarize, Cond1 of Proposition 6 ensures that:

- the maximal number of edges in the disjoint union of a linking of size $n_s + q_1$ from $\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s$ to \mathbf{Y} , an \mathbf{Y} -topped family and a cycle family in \mathbf{X}_1 are equal to $n_1 + n_s + q_1$;
- $P_2(s)$ has generically full column n -rank, even after the deletion of an arbitrary row.

Therefore, the greatest common divisor of all the $(n_1 + q_1 + n_s)$ th order minors of $P_2(s)$ is generically a monomial in s with a degree equal to zero. As $g_rank(P_2(0)) = n_1 + n_s + q_1$, then $P_2(s)$ has generically full column rank $\forall s \in \mathbb{C}$.

Thus, conditions of Proposition 6 are necessary and sufficient to ensure that $\forall s \in \mathbb{C}$, $P_e(s)$ has generically full column rank. Then, $g_rank(P(s)) = n + q$, $\forall s \in \mathbb{C}$. \square

We can deduce from Proposition 6 other simpler graphic conditions:

Corollary 7. Σ_A is generically state and input observable iff

- Ca. in its associated digraph $\mathcal{G}(\Sigma_A)$, there exists a v -disjoint subgraph \mathcal{S}_g which covers $\mathbf{X} \cup \mathbf{U}$;
- Cb. $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0 \subseteq V_{\text{ess}}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s)$.

Proof. First note that condition Ca is the same as Cond1 in Proposition 6. So, we have only to prove hereafter that condition Cb of Corollary 7 is equivalent to conditions Cond2 and Cond3 in Proposition 6.

Necessity: If condition Cb is not satisfied then $\text{card}(\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0) > \mu(\mathbf{U}_0, \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})) - \rho(\mathbf{U}_0, \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}))$. In this case, we cannot cover all the elements of $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0$ with paths of total

length $\mu(\mathbf{U}_0, \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})) - \text{card}(\mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}))$. Thus, since no cycle can be used to cover $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0$, there cannot exist a v -disjoint subgraph which covers $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0$ and which satisfies Cond2 and Cond3.

Sufficiency: Assume that Ca is satisfied. Condition Cb implies, on the one hand, that $\rho(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) = \text{card}(\mathbf{U}_0)$ and on the other hand, that $\text{card}(\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0) = \mu(\mathbf{U}_0, \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})) - \rho(\mathbf{U}_0, \mathbf{S}^0(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}))$. So, all the v -disjoint subgraphs which cover $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0$ are constituted by a maximum $\mathbf{U}_0 - \mathbf{X}_s \cup \mathbf{Y}_0$ linking of a minimal length. Therefore, all v -disjoint subgraphs covering $\mathbf{X} \cup \mathbf{U}$ contain a maximum $\mathbf{U}_0 - \mathbf{X}_s \cup \mathbf{Y}_0$ linking of a minimal length, which covers $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0$ and so cannot contain any cycles on $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{X}_s$. This is sufficient to ensure that conditions Cond2 and Cond3 are satisfied. \square

Finally, note that conditions of Corollary 7 generalize explicitly the well-known state observability conditions for linear systems without unknown inputs. Indeed, if $\mathbf{U} = \emptyset$, Cb is equivalent to $\mathbf{X}_0 = \emptyset$ and so, each state component is the begin vertex of an \mathbf{Y} -topped path and Ca is equivalent to the existence of disjoint \mathbf{Y} -topped paths and cycles, which cover \mathbf{X} (Dion et al., 2003).

5. Conclusion

In this paper, we propose a graph-theoretic tool to analyze the state and input generic observability for structured linear systems. Necessary and sufficient conditions for state and unknown input generic observability are given and expressed in graphic terms. These intrinsic conditions need few information about the system. Moreover, they are easy to check by means of well-known combinatorial techniques. Indeed, from a computational point of view, to check the first condition of Corollary 7, we use the Bipmatch method (Micali & Vazirani, 1980), which complexity order of algorithms is $O(M \times N^{0.5})$, where $M = n^2 + nq + np + pq$ is the number of edges and $N = n + q + p$ is the number of vertices in the digraph. Furthermore, condition Cb can be checked using depth search algorithms. These algorithms have a complexity order $O(M \times N)$. Thus, the global complexity of our method is $O(n^3)$. This is why our approach is particularly suited for large-scale systems.

References

- Basile, G., & Marro, G. (1973). A new characterization of some structural properties of linear systems: Unknown-input observability, invertibility and functional controllability. *International Journal of Control*, 17(5), 931–943.
- Boukhobza, T., Hamelin, F., & Sauter, D. (2006). Observability of structured linear systems in descriptor form: A graph-theoretic approach. *Automatica*, 42(6), 629–635.
- Chu, D. (2000). Disturbance decoupled observer design for linear time-invariant systems: A matrix pencil approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 45(8), 1569–1575.
- Chu, D., & Mehrmann, V. (1999). Disturbance decoupled observer design for descriptor systems. *System Control & Letters*, 38(1), 37–48.
- Dion, -M., Commault, C., & van der Woude, J. (2003). Generic properties and control of linear structured systems: A survey. *Automatica*, 39(7), 1125–1144.

- Hou, M., & Müller, P. C. (1992). Design of observers for linear systems with unknown input. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(4), 871–875.
- Hou, M., & Müller, P. C. (1999). Causal observability of descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1), 158–163.
- Hou, M., & Patton, R. J. (1998). Input observability and input reconstruction. *Automatica*, 34(6), 789–794.
- Hou, M., Pugh, A. C., & Müller, P. C. (1999). Disturbance decoupled functional observer. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44, 382–386.
- Koenig, D. (2005). Unknown input proportional multiple-integral observer design for linear descriptor systems: Application to state and fault estimation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 50(2), 212–217.
- Micali, S., Vazirani, & V. V. (1980). An $O(|V|^{1/2}|E|)$ algorithm for finding maximum matching in general graphs. In *Proceedings of the 21st annual symposium on the foundations of computer science*, pp. 17–27.
- Murota, K. (1987). *System analysis by graphs and matroids*. New York, USA: Springer.
- Reinschke, K. J. (1988). *Multivariable control. A graph theoretic approach*. New York, USA: Springer.
- Trentelman, H. L., Stoorvogel, A. A., & Hautus, M. (2001). *Control theory for linear systems*. London, UK: Springer.
- Trinh, H., & Ha, Q. (2000). Design of linear functional observers for linear systems with unknown inputs. *International Journal of Systems Science*, 31(6), 741–749.
- Tsui, C. C. (1996). A new design approach to unknown input observers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 41(3), 464–468.
- van der Woude, J. W. (2000). The generic number of invariant zeros of a structured linear system. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(1), 1–21.



Taha Boukhobza was born in Algiers, Algeria, in 1971. He obtained his Ph.D. Degree in Automatic Control from the Paris XI University, France in 1997. He is currently associate professor in Henri Poincaré University of Nancy 1, France. His current research interests are observability, fault diagnosis, fault-tolerant control and graph theory.



Frédéric Hamelin was born in Saint-Dizier, France, in 1970. He received his Ph.D. Degree from the Department of Automatic Control of the Henri Poincaré University of Nancy 1, France, in 1995. He is currently Professor of Automatic Control at this University. Previously, he was associate professor from 1996 to 2005. His main research interests are in the fields of robust fault diagnosis and fault-tolerant control.



Sinuhé Martínez Martínez was born in San Luis Potosí, México, in 1979. He received the B.E. in Mechanical and Electrical Engineering in 2001 and the M.Sc. in Electrical Engineering in 2004 from the Autonomous University of San Luis Potosí, México. He is currently pursuing his Ph.D. degree with the Research Centre for Automatic Control in the Henri Poincaré University of Nancy 1, France. His research interests include fault-tolerant control and structural system analysis.

A graph-theoretic approach to fault detection and isolation for structured bilinear systems

T. BOUKHOBZA*, F. HAMELIN and S. CANITROT

Centre de Recherche en Automatique de Nancy (CRAN), Nancy University, CNRS UMR 7039, Nancy, France

(Received 8 January 2007; in final form 3 September 2007)

In this paper, using a graph-theoretic approach, we address some issues related to the fault detection and isolation for structured bilinear systems. Considering a structured bilinear system submitted to faults and disturbances, we give necessary and sufficient conditions to the solvability of the so-called bilinear fundamental problem of residual generation. We also treat the cases where the system is submitted to multiple failures occurring simultaneously or only one at a time. One of the main advantages of the proposed analysis tool is that all the given conditions are easy to check because they deal with finding paths in a digraph. This makes our approach well suited to studying large scale systems.

1. Introduction

The fault detection and isolation (FDI) problem has received considerable attention in the last two decades (Gertler 1998, Blanke *et al.* 2003). In fact, the detection and the location of incipient faults is important for safety critical systems where a malfunction can cause human and material damage. An FDI system is mainly made of two parts: the first is related to the generation and the evaluation of some signals called residuals which must be sensitive to faults occurring on the system; the second concerns the decision-making part on the basis of these residuals. In this paper, we concentrate on the residual generation part in the particular case of bilinear systems.

The class of bilinear systems (BLS), representing the particular non-linear systems whose dynamics are jointly linear in the state and the input variables, was introduced in control theory in the 1960s. Industrial process control, economics and biology (switched circuits, mechanical brakes, controlled suspension systems, immunological systems, population growth, enzyme kinetics, ...) provide examples of BLS. Finally, note that the usual linearization of a non-linear system, which is not intrinsically bilinear, near an equilibrium point can be improved by using bilinear system

approximation (Ekman 2005). For these reasons, many works deal with BLS.

The problem of FDI for BLS has been tackled mainly since the works of (Yang and Saif 1995, Yu and Shields 1996). Yang and Saif (1995) explore the design of a reduced order observer with unknown inputs for estimating the fault values. Results of Yu and Shields (1996) and Yu *et al.* (1996) are based on unknown input observers, and sufficient conditions for the existence of bilinear FDI observers are given. Kinnaert (1999) proposes two robust FDI schemes for BLS which are not necessarily affine in the failure modes. Finally, one of the most important results is given in Hammouri *et al.* (2001). Using a geometric approach, the authors provide necessary and sufficient conditions for the solvability of the so-called bilinear fundamental problem of residual generation (BFPRG). This problem extends the fundamental problem of residual generation (FPRG) defined and solved for linear systems in Massoumnia *et al.* (1989). The solvability conditions of such a problem for non-linear systems, which are affine in the control inputs and in the failure modes, have been also given in Hammouri *et al.* (1999) and De Persis and Isidori (2001) using the concept of observability codistributions (De Persis and Isidori 2000).

Up to now, the solvability conditions of the BFPRG are mainly based on algebraic or geometric tools. Nevertheless, the use of such methods assumes precise

*Corresponding author. Email: taha.boukhobza@cran.uhp-nancy.fr

knowledge of the state space matrices characterizing the system's model. In many modelling problems, these matrices have a number of fixed zero entries determined by the physical structure, while the remaining entries are not precisely known. To study the properties of the systems for which we have poor knowledge, the idea is that we only keep the zero/non-zero entries in the state space matrices. Thus, we consider models where the fixed zeros are conserved while the non-zero entries are replaced by free parameters. There is a huge amount of interesting work using this kind of model called structured models because their study requires a low computational burden which allows large scale systems to be dealt with.

Many studies on structured systems are related to the graph-theoretic approach. Until now, this approach was principally dedicated to linear systems for which structural properties, such as controllability, observability, solvability of several classical control problems, including disturbance rejection, input-output decoupling, fault detection and isolation, are studied. The survey paper by Dion *et al.* (2003) reviews the most significant results in this area. From these works, it results that the graph-theoretic approach provides simple and elegant solutions and so is very well suited to analyse large scale systems. Unfortunately, few works based on graph-theoretic methods deal with non-linear systems.

Among these works, we can cite Staroswiecki (2002) and Düstegor *et al.* (2004) where the authors use bipartite graphs to analyse the structural fault detectability and isolability for linear and non-linear systems. Nevertheless, in this approach, the graphic representation of the following linear system (Σ_1) and bilinear one (Σ_2) are similar:

$$\begin{aligned}
 (\Sigma_1): \quad & \begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 f_1 \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_1 + \lambda_3 u_1 + \lambda_2 f_2 \\ \dot{x}_3 = \lambda_5 x_1 \\ y_1 = \lambda_6 x_3, \\ y_2 = \lambda_7 x_2 \end{cases} \\
 (\Sigma_2): \quad & \begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1' f_1 \\ \dot{x}_2 = \lambda_2' u_1 x_1 + \lambda_2' f_2 \\ \dot{x}_3 = \lambda_4' x_1 \\ y_1 = \lambda_5' x_3, \\ y_2 = \lambda_6' x_2 \end{cases} = A_0 x + u_1 A_1 x + E_1 f_1 + E_2 f_2.
 \end{aligned}$$

Therefore, the conditions provided in Düstegor *et al.* (2004) lead to the same conclusion: for both systems (Σ_1) and (Σ_2) the faults are detectable and isolable. Nevertheless, using the results of De Persis and Isidori (2001) and Hammouri *et al.* (2001) we can prove that for almost all the values of λ_i' the BFPRG is not solvable for

bilinear system (Σ_2). Indeed, the bipartite graphs used in Staroswiecki (2002) and Düstegor *et al.* (2004) are not so complete to express all the non-linearities, particularly the product $u \cdot x$.

The purpose of this paper is to determine the conditions for the solvability of some residual generation problems for structured bilinear systems (SBLs) using a graph-theoretic approach. More precisely, we study the BFPRG with multiple failure events. We consider the case where the system is submitted to multiple and possibly simultaneous failure events and the case where only one failure can occur at a time on the system.

The paper is organized as follows: after §2, which is devoted to the problem formulation, a digraph representation of SBLs is defined in §3. The necessary and sufficient conditions for the solvability of BFPRG are announced in §4. We present two simple examples which illustrate the applicability of our approach in §5. The first one deals with the immunologic system and the second one treats a simplified model of vehicle suspension. Finally, some concluding remarks are made.

2. Problem statement

In this paper, we address the generic solvability of the bilinear fundamental problem of residual generation (BFPRG) for SBLs

$$(\Sigma_\Lambda): \quad \begin{cases} \dot{x} = A_0 x + \sum_{i=1}^m u_i A_i x + E f + H w \\ y = C x, \end{cases} \quad (1)$$

where $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $f \in \mathbb{R}^p$, $w \in \mathbb{R}^d$ and $y \in \mathbb{R}^r$ are respectively the state, the input, the fault, the disturbance and the output vectors. A_i , for $i=0, \dots, m$, C , E , and H represent matrices of appropriate dimensions, which elements are either fixed to zero or assumed free non-zero parameters. We can parameterize these non-zero entries by scalar real (non-zero) parameters λ_h , $h=1, \dots, h$ forming a parameter vector $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h)^T \in \mathbb{R}^h$. If all the non-zero parameters λ_i are fixed, we obtain an admissible realization of structured system (Σ_Λ). Theoretic properties of each realization can be studied according to the values of λ_i . We say that a property is true generically if it is true for almost all the realizations of structured system (Σ_Λ). Here, "for almost all the realizations" is to be understood (van der Woude 2000, Dion *et al.* 2003) as "for all parameter values ($\Lambda \in \mathbb{R}^h$) except for those in some proper algebraic variety in the parameter space". The proper algebraic variety for which the property is not true is the zero set of some nontrivial polynomial with real coefficients in the system parameters $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$

or, equivalently, an algebraic variety, which has Lebesgue measure zero.

Consider SBLs (Σ_λ) , we define the BFPRG as the problem of finding filter of the form

$$\begin{cases} \dot{z} = \phi(z, y) + \psi(z, y)u \\ r = h(z, y), \end{cases} \quad (2)$$

where residual $r \in \mathbb{R}^q$ is such that, for all $i \in \{1, 2, \dots, q\}$;

- (i) when $f_i=0$, r_i is insensitive to w and to all f_j for $j \neq i$, it may decay to zero for all admissible inputs u and whatever $x(0), z(0)$;
- (ii) r_i is affected by f_i , i.e., it takes a non-zero value for at least some $t \geq 0$ whatever $x(0)$ and $z(0)$.

We can relax the constraints on the residual generation problem solvability in the case of multiple failure modes by assuming that there is only one failure present at a time. We define the problem of residual generation with no simultaneous faults as the problem of finding filter (2), where residual $r \in \mathbb{R}^k$ (with $2^k - 1 \geq q$), is such that

- (i) when no failure is present (and only in this case), all the residual components r_i decay asymptotically to zero whatever the value of w , for all admissible inputs u and for all initial conditions $x(0)$ and $z(0)$;
- (ii) in the i th failure mode (i.e., $f_i \neq 0$ and $f_\ell = 0, \forall \ell \neq i$), residual r_j for $j \in \Upsilon_i \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ are non-zero while other residuals r_j for $j \in \{1, 2, \dots, k\} \setminus \Upsilon_i$ decay to zero for all admissible inputs u , for all initial conditions $x(0), z(0)$ and for all $w(t), t \geq 0$. Here, the prespecified family of coding sets Υ_i is chosen such that $\forall i \neq j, \Upsilon_i \neq \Upsilon_j$ in order to uniquely identify each failure.

The BFPRG has been treated and solved in Hammouri *et al.* (2001) for non-structured systems using a geometric approach. By a straightforward extension of the results enounced in Hammouri *et al.* (2001) to SBLs, we can deduce that, in the single fault case ($q=1$), the BFPRG has generically a solution iff for almost all the realizations of system (Σ_λ) , $E \notin \hat{O}_H$, where \hat{O}_H is the minimal unobservability subspace containing $\text{im } H$. The objective of this paper is to find graphic conditions equivalent to the previous one. It turns out that these graphic conditions are easier to check and so more adapted to tackle large scale systems with unknown parameters. Indeed, the computation of \hat{O}_H is quite complicated in the case where we deal with large scale systems: \hat{O}_H is the limit of the non-increasing sequence

$$\begin{cases} \mathcal{T}_0 = \mathcal{R}_H + \ker C \\ \mathcal{T}_{i+1} = \mathcal{R}_H + \left(\bigcap_{j=0}^i (A_j^{-1} \mathcal{T}_j) \right) \cap \ker C, \end{cases}$$

where \mathcal{R}_H represents the minimum (C, A_j) -conditioned invariant subspace including $\text{im } H$, with $j=0, \dots, m$.

More precisely, \mathcal{R}_H is the limit of the following non-decreasing sequence:

$$\begin{cases} \mathcal{R}_0 = \text{im } H, \\ \mathcal{R}_{i+1} = \mathcal{R}_i + \sum_{j=0}^m A_j (\mathcal{R}_i \cap \ker C). \end{cases} \quad (3)$$

The computation of these sequences is characterized by a high computational burden, particularly concerning the term $(\bigcap_{j=0}^m A_j^{-1} \mathcal{T}_j) \cap \ker C$ when the parameters of the system are not fixed. One of the main objectives of our method is to provide simpler conditions from a computational point of view. Indeed, one of the advantages of a graph-theoretic approach is precisely the computational simplicity of the obtained results. We recall that for linear systems, the graphic solvability conditions of the FPRG are quite simple and are given in Commault *et al.* (2002). Our aim is to obtain a solvability criterion for the BFPRG as simple as possible. To do so, we focus on the minimum (C, A_j) -conditioned invariant subspace including $\text{im } H$, with $j=0, \dots, m$ noted above by \mathcal{R}_H . More precisely, our aim is to quantify the generic dimension of \mathcal{R}_H noted $g.\dim(\mathcal{R}_H)$ and not to characterize \mathcal{R}_H since the latter varies with the specific values of parameters λ_i . The importance of $g.\dim(\mathcal{R}_H)$ for BFPRG solvability is highlighted in the following lemma.

Lemma 1: Consider structured bilinear system (Σ_λ) , in the single fault case, i.e., $q=1$, the BFPRG has generically a solution iff $g.\dim(\mathcal{R}_{H,E}) > g.\dim(\mathcal{R}_H)$, where $\mathcal{R}_{H,E}$ represents the minimum (C, A_j) -conditioned invariant subspace including $\text{im } H + \text{im } E$, with $j=0, \dots, m$.

Proof:

Sufficiency: Condition of Lemma 1 implies that $\mathcal{R}_{H,E} \not\subseteq \mathcal{R}_H$ and particularly that there exists generically a vector $u \notin \ker C$ such that $u \notin \mathcal{R}_{H,E}$ and $Cu \notin \mathcal{R}_H$. Thus, $u \notin \mathcal{R}_H + \ker C$ and so, as $\hat{O}_H \subseteq \mathcal{R}_H + \ker C$, $u \notin \hat{O}_H$. Nevertheless, since $u \in \mathcal{R}_{H,E}$, we have that $u \in \hat{O}_{H,E}$ and so $\hat{O}_{H,E} \not\subseteq \hat{O}_H \Rightarrow E \notin \hat{O}_H$, which means that the BFPRG is generically solvable.

Necessity: If the BFPRG has not generically a solution then $E \in \hat{O}_H$. This implies that $\hat{O}_{H,E} = \hat{O}_H$ and so $C\hat{O}_{H,E} = C\hat{O}_H$. Nevertheless, since $\mathcal{R}_{H,E} \subseteq \hat{O}_{H,E}$ so $C\hat{O}_{H,E} \subseteq C\mathcal{R}_{H,E}$, we have that $C\mathcal{R}_{H,E} \subseteq C\hat{O}_{H,E} \subseteq C\mathcal{R}_{H,E} + \ker C$. Thus, $C\hat{O}_{H,E} = C\mathcal{R}_{H,E}$ and similarly $C\hat{O}_H = C\mathcal{R}_H$. Therefore, we have that $C\hat{O}_{H,E} = C\hat{O}_H \Rightarrow g.\dim(C\mathcal{R}_{H,E}) = g.\dim(C\mathcal{R}_H)$. \square

The approach we propose is based on the previous Lemma and so a great part of the paper deals with the computation of the generic dimension of subspace \mathcal{R}_H using a graph approach.

3. Graphic representation of structured bilinear systems

In this section, we firstly define the digraph, which can be associated to SBLs (Σ_λ) in order to study the BFPRG generic solvability. Next, we give some useful notations and definitions.

3.1 Digraph definition for structured bilinear systems

The digraph associated to (Σ_λ) is noted $\mathcal{G}(\Sigma_\lambda)$ and is constituted by a vertex set \mathcal{V} and an edge set $\mathcal{E}: \mathcal{G}(\Sigma_\lambda) = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. The vertices are associated to the state, output, disturbance and fault components of (Σ_λ) and the directed edges represent links between these variables.

More precisely, $\mathcal{V} = \mathbf{X} \cup \mathbf{Y} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{W}$, where $\mathbf{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ is the set of state vertices, $\mathbf{Y} = \{y_1, \dots, y_p\}$ is the set of output vertices, $\mathbf{F} = \{f_1, \dots, f_q\}$ is the set of fault vertices and $\mathbf{W} = \{w_1, \dots, w_a\}$ is the set of disturbance vertices.

The edge set is $\mathcal{E} = \bigcup_{k=0}^m A_k\text{-edges} \cup C\text{-edges} \cup E\text{-edges} \cup H\text{-edges}$, where for $k=0, \dots, m$, $A_k\text{-edges} = \{(x_i, x_j) | A_k(j, i) \neq 0\}$, $C\text{-edges} = \{(x_i, y_j) | C(j, i) \neq 0\}$, $E\text{-edges} = \{(f_i, x_j) | E(j, i) \neq 0\}$ and $H\text{-edges} = \{(w_i, x_j) | H(j, i) \neq 0\}$. Here, (v_1, v_2) denotes a directed edge from vertex $v_1 \in \mathcal{V}$ to vertex $v_2 \in \mathcal{V}$. We indicate indice u_i over each A_j -edges and u_0 also under C -edges, E -edges and H -edges. Moreover, we take the following notations: $A_0\text{-edges} = A_0\text{-edges} \cup C\text{-edges} \cup E\text{-edges} \cup H\text{-edges}$ and for $i=1, \dots, m$, $A_i\text{-edges} = A_i\text{-edges}$. Hereafter, we illustrate our proposed digraph representation with a simple example.

Example 1: Consider a structured bilinear system defined by the following matrices:

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_9 & \lambda_{10} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{11} \\ 0 & 0 \\ \lambda_{12} & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_{13} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{and}$$

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{15} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{17} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{18} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

This model is associated to the digraph of figure 1.

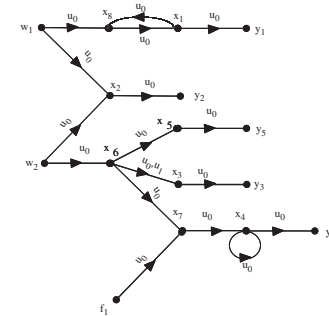


Figure 1. Digraph associated to system of Example 1.

Remark 1: For the sake of simplicity in the presentation, we will assume that matrix C is in the form $(\text{diag}\{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_2}, \lambda_{i_\ell}\})\mathbf{0}$. The notations used in this paper can be easily modified to take any matrix C into account.

3.2 Definitions and notations

- $P = v_0 \xrightarrow{u_1} v_1 \xrightarrow{u_2} \dots \xrightarrow{u_s} v_s$ denotes a path P , which contains vertices v_0, v_1, \dots, v_s and where $(v_{j-1}, v_j) \in A_j$ -edges, for $j=1, \dots, s$. A path is simple when every vertex occurs only once in this path. The length of a path is the number of edges that the path uses, counting multiple edges multiple times. For each path P , we denote by $\alpha(P)$ the end vertex of P . P is said an \mathbf{Y} -topped path iff $\alpha(P) \in \mathbf{Y}$.
- Some paths are disjoint if they have no common vertex.
- To any path $P = v_0 \xrightarrow{u_1} v_1 \xrightarrow{u_2} \dots \xrightarrow{u_s} v_s$, we associate a unique indice noted $\sigma(P)$ and defined by the ordered monomial $u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_s$. A path P is uniquely characterized by its indice and the vertices it covers. Note that two paths are distinct when they have distinct indices, even if they cover the same vertices. In Example 1, paths $P_1 = w_2 \xrightarrow{u_6} x_6 \xrightarrow{u_7} x_3$ and $P_2 = w_2 \xrightarrow{u_6} x_6 \xrightarrow{u_1} x_3$ and, which include the same vertices, are distinct because they have distinct indices. Indeed, $\sigma(P_1) = u_6 \cdot u_7$ and

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \{f_1 \xrightarrow{u_1} x_7 \xrightarrow{u_4} x_4 \xrightarrow{u_1} y_4, w_1 \xrightarrow{u_1} x_8 \xrightarrow{u_1} x_1 \xrightarrow{u_1} y_1, w_2 \xrightarrow{u_1} x_2 \xrightarrow{u_1} y_2\} \\ \mathcal{L}_2 &= \{f_1 \xrightarrow{u_1} x_7 \xrightarrow{u_4} x_4 \xrightarrow{u_1} y_4, w_1 \xrightarrow{u_1} x_8 \xrightarrow{u_1} x_1 \xrightarrow{u_1} y_1, w_2 \xrightarrow{u_1} x_6 \xrightarrow{u_1} x_5 \xrightarrow{u_1} y_5\} \\ \mathcal{L}_3 &= \{f_1 \xrightarrow{u_1} x_7 \xrightarrow{u_4} x_4 \xrightarrow{u_1} y_4, w_1 \xrightarrow{u_1} x_8 \xrightarrow{u_1} x_1 \xrightarrow{u_1} y_1, w_2 \xrightarrow{u_1} x_6 \xrightarrow{u_1} x_3 \xrightarrow{u_1} y_3\} \\ \mathcal{L}_4 &= \{f_1 \xrightarrow{u_1} x_7 \xrightarrow{u_4} x_4 \xrightarrow{u_1} y_4, w_1 \xrightarrow{u_1} x_8 \xrightarrow{u_1} x_1 \xrightarrow{u_1} y_1, w_2 \xrightarrow{u_1} x_6 \xrightarrow{u_1} x_3 \xrightarrow{u_1} y_3\} \\ \mathcal{L}_5 &= \{f_1 \xrightarrow{u_1} x_7 \xrightarrow{u_4} x_4 \xrightarrow{u_1} y_4, w_1 \xrightarrow{u_1} x_2 \xrightarrow{u_1} y_2, w_2 \xrightarrow{u_1} x_6 \xrightarrow{u_1} x_5 \xrightarrow{u_1} y_5\} \\ \mathcal{L}_6 &= \{f_1 \xrightarrow{u_1} x_7 \xrightarrow{u_4} x_4 \xrightarrow{u_1} y_4, w_1 \xrightarrow{u_1} x_2 \xrightarrow{u_1} y_2, w_2 \xrightarrow{u_1} x_6 \xrightarrow{u_1} x_3 \xrightarrow{u_1} y_3\} \\ \mathcal{L}_7 &= \{f_1 \xrightarrow{u_1} x_7 \xrightarrow{u_4} x_4 \xrightarrow{u_1} y_4, w_1 \xrightarrow{u_1} x_2 \xrightarrow{u_1} y_2, w_2 \xrightarrow{u_1} x_6 \xrightarrow{u_1} x_3 \xrightarrow{u_1} y_3\} \end{aligned}$$

$$\sigma(P_2) = u_6 \cdot u_1.$$

- The indices are ordered monomials in u_0, u_1, \dots, u_m of the form $u_{i_1} \cdot u_{i_2} \cdot \dots \cdot u_{i_\ell}$, where $\{i_1, i_2, \dots, i_\ell\} \subseteq \{0, \dots, m\}$ are not necessarily distinct. The set of all possible ordered monomials is noted $\mathcal{G}(u)$. To present the properties of $\mathcal{G}(u)$ provided with a binary non-commutative operation noted $\mathcal{G}(u)$, let us consider

- three indices $\sigma_1 = u_{i_1} \cdot u_{i_2} \cdot \dots \cdot u_{i_\ell} \in \mathcal{G}(u)$, $\sigma_2 = u_{j_1} \cdot u_{j_2} \cdot \dots \cdot u_{j_k} \in \mathcal{G}(u)$, and $\sigma_3 \in \mathcal{G}(u)$, we have:
 - ◊ $\sigma_1 = \sigma_2$ iff $\ell = k$ and $i_1 = j_1, i_2 = j_2, \dots, i_\ell = j_\ell$;
 - ◊ $\sigma_1 \cdot \sigma_2 = u_{i_1} \cdot u_{i_2} \cdot \dots \cdot u_{i_\ell} \cdot u_{j_1} \cdot u_{j_2} \cdot \dots \cdot u_{j_k}$;
 - ◊ $\sigma_1 \cdot (\sigma_2 \cdot \sigma_3) = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$.
- ◊ For operation “ \cdot ”, 1 represents the indice of the zero length path. It is the identity element and for any indice σ , we have that $1 \cdot \sigma = \sigma \cdot 1 = \sigma$.
- ◊ The length of an indice consists in the number of terms u_i it contains, counting multiple terms u_i multiple times.

Let \mathcal{V}_1 and \mathcal{V}_2 denote two vertex subsets.

- $\text{card}(\mathcal{V}_1)$ represents the cardinality of \mathcal{V}_1 . Path P is said a \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 path if its begin vertex belongs to \mathcal{V}_1 and its end vertex belongs to \mathcal{V}_2 .
- A set of l disjoint \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 paths is called a \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 linking of size l . The linkings, which consist of a maximal number of disjoint \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 paths are called maximal \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 linkings. We define $\rho(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ as the maximal number of disjoint \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 paths. Consider a \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 linking noted \mathcal{L}_0 , we define $\alpha(\mathcal{L}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{P \in \mathcal{L}_0} \alpha(P)$. Finally, we denote by $\mu(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ the minimal number of vertices of $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$ belonging to a maximal \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 linking.

In Example 1, $\rho(\mathbf{W} \cup \mathbf{F}, \mathbf{Y}) = 3$. There exist seven maximal $\mathbf{W} \cup \mathbf{F}$ - \mathbf{Y} linkings:

Moreover, $\mu(\mathbf{W} \cup \mathbf{F}, \mathbf{Y}) = 8$.

- Consider a vertex subset \mathcal{V}_0 , we say that path $P = v_0 \xrightarrow{u_1} v_1 \xrightarrow{u_2} \dots \xrightarrow{u_s} v_s$ is included in \mathcal{V}_0 if $\{v_1, \dots, v_{s-1}\} \subseteq \mathcal{V}_0$.
- Two paths $P_1 = v_0^1 \xrightarrow{u_1} v_1^1 \xrightarrow{u_2} \dots \xrightarrow{u_{k_1}} v_{k_1}^1$ and $P_2 = v_0^2 \xrightarrow{u_1} v_1^2 \xrightarrow{u_2} \dots \xrightarrow{u_{k_2}} v_{k_2}^2$ are A -disjoint iff the

following conditions hold:

- Cond1 $v_{k_1}^1 \neq v_{k_2}^2$;
- Cond2 $\forall j = 1, 2, \dots, \min(k_1, k_2)$ such that $v_{k_1-j}^1 = v_{k_2-j}^2$, sub-paths $v_{k_1-j}^1 \xrightarrow{u_{i_1}} \dots \xrightarrow{u_{i_{k_1-j}}} v_{k_1}^1$ and $v_{k_2-j}^2 \xrightarrow{u_{j_1}} \dots \xrightarrow{u_{j_{k_2-j}}} v_{k_2}^2$ must have distinct indices.

In Example 1, $P_1 = w_2 \xrightarrow{u_6} x_6 \xrightarrow{u_7} x_3$, $P_2 = w_2 \xrightarrow{u_6} x_6 \xrightarrow{u_1} x_7$ are A -disjoint whereas neither P_1 and $P_3 = w_2 \xrightarrow{u_6} x_6 \xrightarrow{u_1} x_3$ nor P_2 and P_3 are A -disjoint.

As a matter of fact, some paths forms an A -disjoint set of paths if all these paths are mutually A -disjoint. Note also that two disjoint paths are naturally A -disjoint.

- An A -disjoint set of \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 paths is called a \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 A -disjoint linking of size l . The linkings, which consist on a maximal number of A -disjoint paths, are called maximal \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 A -disjoint linkings.
- Consider two \mathcal{V} - \mathbf{X} paths $P_1 = v_0^1 \xrightarrow{u_1} v_1^1 \xrightarrow{u_2} \dots \xrightarrow{u_{k_1}} v_{k_1}^1$ and $P_2 = v_0^2 \xrightarrow{u_1} v_1^2 \xrightarrow{u_2} \dots \xrightarrow{u_{k_2}} v_{k_2}^2$. We say that P_1 is “multiple” of P_2 if there exists $j \leq k_1$ such that $v_0^1 \xrightarrow{u_1} v_1^1 \xrightarrow{u_2} \dots \xrightarrow{u_j} v_j^1$ and P_2 are not A -disjoint. In this case, if j_0 is the minimal value of $j > 0$ such that $v_0^1 \xrightarrow{u_1} v_1^1 \xrightarrow{u_2} \dots \xrightarrow{u_{j_0}} v_{j_0}^1$ and P_2 are not A -disjoint, then we denote by $\sigma(P_1/P_2)$ the indice $\sigma(v_{j_0}^1 \xrightarrow{u_{j_0+1}} \dots \xrightarrow{u_{k_1}} v_{k_1}^1) = u_{i_{j_0+1}} \cdot \dots \cdot u_{i_{k_1}}$ and we use the notation $P_1 \equiv P_2 \odot u_{i_{j_0+1}} \cdot u_{i_{j_0+2}} \cdot \dots \cdot u_{i_{k_1}}$. If P_1 and P_2 are not A -disjoint then we note $\sigma(P_1/P_2) = 1$ and $P_1 \equiv P_2$.

We say that P_1 is a “strict multiple” of P_2 when P_1 is a “multiple” of P_2 and $\sigma(P_1/P_2) \neq 1$.

In Example 3.1, $P_4 = w_1 \xrightarrow{u_8} x_8 \xrightarrow{u_1} x_1$ is multiple of $P_3 = w_1 \xrightarrow{u_8} x_2$ and we write $P_4 \equiv P_3 \odot u_0$.

Note that if $P_1 \equiv P_2 \odot \sigma_1$, $P_2 \equiv P_3$ and $P_4 \equiv P_3 \odot \sigma_1$ then we do not have necessarily that $P_1 \equiv P_4$ neither that $P_1 \equiv P_3 \odot \sigma_1$.

- Consider vertex subsets $\mathbf{W}_0 \subseteq \mathbf{W} \cup \mathbf{F}$ and $\Gamma_{\text{int}} \subseteq \mathbf{X}_c \stackrel{\text{def}}{=} \{x_1, x_2, \dots, x_p\}$. Due to Remark 1, \mathbf{X}_c represents the set of all state vertices, which have edges towards \mathbf{Y} and are such that x_i is linked to y_i for $i=1, \dots, p$. A path Q_1 is said prime \mathbf{W}_0 - Γ_{int} path if Q_1 is a \mathbf{W}_0 - Γ_{int} path and there does not exist a \mathbf{W}_0 - Γ_{int} path P such that Q_1 is a strict multiple of P . In Example 1, $Q_1 = w_1 \xrightarrow{u_8} x_2$ and $Q_2 = w_2 \xrightarrow{u_6} x_6 \xrightarrow{u_1} x_3$ are prime \mathbf{W} - \mathbf{X}_c paths, whereas $w_2 \xrightarrow{u_6} x_6 \xrightarrow{u_1} x_3$ and $w_1 \xrightarrow{u_8} x_8 \xrightarrow{u_1} x_1$ are not prime \mathbf{W} - \mathbf{X}_c paths.
- To each structured matrix $B \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$, we can associate a bipartite graph $B_M = (\mathcal{V}^+, \mathcal{V}^-; \mathcal{E}_M)$, where

$\mathcal{V}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{x_1^+, x_2^+, \dots, x_p^+\}$, $\mathcal{V}^- \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{X}$ and $\mathcal{E}_M \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_i^+, x_j)\}$, $B(j, i) \neq 0$. Let $\theta(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ denote the maximal number of disjoint edges from $\mathcal{V}_1 \subseteq \mathcal{V}^+$ to $\mathcal{V}_2 \subseteq \mathcal{V}^-$. We define the notion of maximal matching partition of matrix B as $\mathcal{M}(B) = \{\gamma \subseteq \mathbf{X}, \text{card}(\gamma) = \theta(\mathcal{V}^+, \mathbf{X}) = \theta(\mathcal{V}^+, \gamma)\}$. Note that $\theta(\mathcal{V}^+, \mathbf{X})$ represents the maximal matching of matrix B and it is equal to the generic rank of matrix B , noted $g_rank(B)$ (Murota 1987).

In Example 1, $\mathcal{M}(A_0) = \{x_1, x_3, x_4\}$, $\{x_1, x_5, x_4\}$, $\{x_1, x_7, x_4\}$, $\mathcal{M}(A_1) = \{x_3\}$, $\mathcal{M}(H) = \{x_2, x_8\}$, $\{x_2, x_6\}$, $\{x_6, x_8\}$ and $\mathcal{M}(C) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_8\} = \{X_c\}$.

4. Main results

First, we recall the result obtained for linear systems in Commault *et al.* (2002), in order to highlight the simplicity of the conditions obtained using graphic tools.

Theorem 1: Consider a structured linear system (i.e. (Σ_A)), with matrices $A_i = 0$, $\forall i \geq 1$ represented by digraph $\mathcal{G}(\Sigma_A)$. The FPRG is generically solvable iff $\rho(\mathbf{W} \cup \mathbf{F}, \mathbf{Y}) = \text{card}(\mathbf{F}) + \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$

Our aim is to obtain, for the BFPRG generic solvability, graphic conditions which are as simple as the one given in Theorem 1. First, let us do the following assumption on the system:

A1: Every vertex in $\mathbf{X} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{W}$ is the begin vertex of an \mathbf{Y} -topped path.

We can motivate assumption **A1** by the fact that if a vertex of \mathbf{F} does not satisfy **A1**, then this fault component is obviously not detectable and we can conclude immediately that the BFPRG is not solvable. So, we are interested only in the cases where whole elements of \mathbf{F} satisfy **A1**. Moreover, if there exist elements of $\mathbf{X} \cup \mathbf{W}$ which do not verify **A1**, we can, without loss of generality, remove these vertices as they have no effect on the BFPRG solvability.

4.1 Bilinear fundamental problem of residual generation with a single fault

For the sake of simplicity, we begin in this subsection by the single fault case, i.e., $q=1$, and so $E \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ and $\mathbf{F} = \{f_1\}$. Hereafter, we give some definitions useful to the graphical characterization of $g_dim(CR_H)$ for bilinear systems.

- $J_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{x_j \in \mathbf{X}, \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y} \cup \{x_j\}) = \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) \text{ and } \mu(\mathbf{W}, \mathbf{Y} \cup \{x_j\}) = \mu(\mathbf{W}, \mathbf{Y})\}$.

It is obvious that, for a structured system which is parameterized by $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$, \mathcal{R}_H varies with the specific values of the parameters λ_i , but there exists a constant subspace that includes \mathcal{R}_H for almost any value of the parameters (Commault *et al.* 1997). This subspace is called the minimal structured fixed subspace containing \mathcal{R}_H and is noted \mathcal{R}_H^f . For structured linear systems ($A_1, \dots, A_m = 0$), when Assumption A1 is satisfied, it is shown that (Commault *et al.* 1997)

$$\mathcal{R}_H^f = \text{span}\{e_j, x_i \in X \setminus J_1\} \quad (4)$$

where e_j is the j th Euclidean vector.

It is important to note that, including the eventual zero length paths in the linkings, we can rewrite relation (4) using the maximal matching partition of matrix H :

$$J_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x_i \in X, \max_{y \in \Omega_h} \rho(y, Y \cup \{x_i\}) = \rho_0 \text{ and } \min_{y \in \Omega_h, \rho(y, Y \cup \{x_i\}) = \rho_0} \mu(y, Y \cup \{x_i\}) = \mu_0 \right\},$$

where $\Omega_h = \mathcal{M}(H)$, $\rho_0 = \max_{y \in \Omega_h} \rho(y, Y)$ and $\mu_0 = \min_{y \in \Omega_h, \rho(y, Y) = \rho_0} \mu(y, Y)$.

$$\bullet \Delta_1 \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ x_i \in X \mid \max_{y \in \Omega_h} \rho(y, Y \cup \{x_i\}) > \rho_0 \text{ or } \min_{y \in \Omega_h, \rho(y, Y) = \rho_0} \mu(y, Y \cup \{x_i\}) < \mu_0 - 1 \right\}.$$

Obviously, $\Delta_1 \subseteq X \setminus J_1$.

$$\bullet \Gamma_1 \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus (J_1 \cup \Delta_1)$$

We have partitioned $X \setminus J_1$ into two subsets Δ_1 and Γ_1 . Δ_1 does not contain any vertex of X_C . Thus, due to the particular structure of matrix C , $\rho(W, Y) = \rho(W, X_C) = \rho(W, \Gamma_1)$ and $Ce_{\Delta} = 0$ where e_{Δ} is the diagonal $n \times n$ matrix such that

$$e_{\Delta}(i, i) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i \in \Delta_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Consequently and according to (4), for linear systems, we can easily prove that $C\mathcal{R}_H = C e_C \mathcal{R}_H$ and $g\text{-dim}(C\mathcal{R}_H) = g\text{-dim}(C e_C \mathcal{R}_H) = g\text{-dim}(e_C \mathcal{R}_H)$ where e_C is the diagonal $n \times n$ matrix such that

$$e_C(i, i) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_i \in \Gamma_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

We can subdivide Γ_1 into two subsets:

$\Gamma_{\text{int}} \stackrel{\text{def}}{=} \{x_i \in \Gamma_1, \exists W\text{-}\Gamma_1 \text{ simple paths } P \text{ and } Q \text{ included in } \Delta_1 \text{ such that } \alpha(Q) = x_i \text{ and } P \text{ is a strict multiple of } Q\}$, $\Gamma_{\text{ext}} = \Gamma_1 \setminus \Gamma_{\text{int}}$. Obviously $\Gamma_{\text{int}} \subseteq X_C$.

In Example 1, we have that $\rho(W, Y) = 2 = \rho_0$, $\mu(W, Y) = 5 = \mu_0$. On the one hand, $\forall x_i \in X, \rho(W, Y \cup \{x_i\}) = 2$. On the other hand, $\forall x_i \in X \setminus \{x_4\}$, $\mu(W, Y \cup \{x_i\}) < 5$ and only $\mu(W, Y \cup \{x_4\}) = 5$. That implies $J_1 = \{x_4\}$. Since, x_6 and x_8 are the only state vertices which satisfy $\mu(W, Y \cup \{x_i\}) = 3 < 5 - 1$, then $\Delta_1 = \{x_6, x_8\}$. Therefore, $\Gamma_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_5, x_7\}$. Since there exists one $W\text{-}\Gamma_1$ path $P_1 = w_1 \xrightarrow{m_0} x_8 \xrightarrow{m_1} x_1$ included in Δ_1 , which is strict multiple of the $W\text{-}\Gamma_1$ path $Q_1 = w_1 \xrightarrow{m_0} x_2$, we have that $\Gamma_{\text{int}} = \{x_2\}$.

Let us consider a $W\text{-}\Gamma_{\text{ext}}$ path P_2 , a prime $W\text{-}\Gamma_{\text{int}}$ path Q_1 and a monomial σ_1 . We say that $Q_1 \odot \sigma_1$ is a strict multiple of path P_2 if P_2 is multiple of Q_1 and if there exists a monomial $\sigma_1 \neq 1$ such that $\sigma_1 = \alpha(P_2/Q_1) \cdot \sigma_1$. To introduce the next definitions, let us now compute \mathcal{R}_H for Example 1:

$$\mathcal{R}_0 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_{10} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

($g\text{-dim}(\mathcal{R}_0) = 2$ and $g\text{-dim}(\mathcal{R}_0 \cap \ker C) = 1$). Indeed, a combination of the two vectors

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_{10} \end{pmatrix} \text{ and } \begin{pmatrix} \lambda_8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

is included in $\ker C$:

$$\mathcal{R}_0 \cap \ker C = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\lambda_7 \lambda_9 \\ 0 \\ \lambda_8 \lambda_{10} \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{R}_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_{10} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\lambda_6 \lambda_7 \lambda_9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_1 \lambda_8 \lambda_{10} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\lambda_4 \lambda_7 \lambda_9 \\ 0 \\ -\lambda_5 \lambda_7 \lambda_9 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

, $g\text{-dim}(\mathcal{R}_1) = 4$.

and $g\text{-dim}(\mathcal{R}_1 \cap \ker C) = 1 = g\text{-dim}(\mathcal{R}_0 \cap \ker C)$. Thus, $\mathcal{R}_H = \mathcal{R}_1$. Consequently,

$$C\mathcal{R}_H = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{13} \lambda_7 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{13} \lambda_8 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\lambda_{14} \lambda_6 \lambda_7 \lambda_9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda_{12} \lambda_1 \lambda_8 \lambda_{10} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\lambda_{16} \lambda_4 \lambda_7 \lambda_9 \end{pmatrix} \right\}$$

and $g\text{-dim}(C\mathcal{R}_H) = 3$.

There exists obviously a matrix B such that $C\mathcal{R}_H = \text{im } B$. Generically, $\mathcal{M}(B) = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_2, x_3, x_5\}\}$. Graphically, \mathcal{R}_H can be traduced using $W\text{-}\Gamma_1$ A -disjoint linkings: $\mathcal{L}_1 = \{w_1 \xrightarrow{m_0} x_8 \xrightarrow{m_1} x_1, w_2 \xrightarrow{m_0} x_2, w_2 \xrightarrow{m_0} x_6 \xrightarrow{m_1} x_3\}$ and $\mathcal{L}_2 = \{w_2 \xrightarrow{m_0} x_6 \xrightarrow{m_1} x_5, w_2 \xrightarrow{m_0} x_2, w_2 \xrightarrow{m_0} x_2, w_2 \xrightarrow{m_0} x_6 \xrightarrow{m_1} x_3\}$. Nevertheless, linking $\mathcal{L}_3 = \{w_1 \xrightarrow{m_0} x_8 \xrightarrow{m_1} x_1, w_2 \xrightarrow{m_0} x_6 \xrightarrow{m_1} x_5, w_2 \xrightarrow{m_0} x_2, w_2 \xrightarrow{m_0} x_6 \xrightarrow{m_1} x_3\}$ is also an A -disjoint linking but cannot be associated to \mathcal{R}_H . Indeed, even if $P = w_1 \xrightarrow{m_0} x_8 \xrightarrow{m_1} x_1$ and $P' = w_2 \xrightarrow{m_0} x_6 \xrightarrow{m_1} x_5$ are A -disjoint, they are "linked" by the fact that $P \equiv Q_1 \odot u_0$ and $P' \equiv Q_2 \odot u_0$ where $Q_1 = w_1 \xrightarrow{m_0} x_2$ and $Q_2 = w_2 \xrightarrow{m_0} x_2$ are prime $W\text{-}\Gamma_{\text{int}}$ paths which have same end vertex x_2 .

To take into account the link between P and P' , which is not explicitly apparent in the digraph associated to the system, we define the notion of complete family. Intuitively, a $W\text{-}\Gamma_1$ path $w_1 \xrightarrow{m_0} x_{i_1} \xrightarrow{m_1} \dots \xrightarrow{m_{k-1}} x_{k+1}$ can be associated to a vector $A_{i_1} \dots A_{i_k} H_i$ and, as we will see later, a complete family traduces the linear combinations of elements $A_{i_1} \dots A_{i_k} H_i, A_{i_1} \dots A_{i_k} H_i, \dots$ which, under some conditions, belong to \mathcal{R}_H . More precisely, we have for the present example $P \equiv Q_1 \odot u_0 \equiv P_1 \odot u_0$ where P_1 is a $W\text{-}\Gamma_{\text{int}}$ path. To constitute a complete family associated to P , we must add to element $Q_1 \odot u_0$

another one of the form $P'_1 \odot u_0$ such that $\alpha(P'_1) = \alpha(P_1)$ and $\{P_1, P'_1\}$ constitutes a $W\text{-}\Gamma_1$ linking of size $l = 1$. Since the unique path which attains x_2 is $w_2 \xrightarrow{m_0} x_2 \equiv Q_2$, we have that $P'_1 \equiv Q_2$. Hence, we call the set $\{Q_1 \odot u_0, Q_2 \odot u_0\}$ a complete $W\text{-}\Gamma_{\text{int}}$ family. Similarly, $\{Q_1 \odot u_1, Q_2 \odot u_1\}$ is a complete $W\text{-}\Gamma_{\text{int}}$ family. Naturally, the complete family associated to P includes P and *vice-versa*.

Now, we give the rigorous definition of a complete family:

• Consider vertex subsets $W_0 \subseteq W \cup F$ and $\Gamma_{\text{int}} \subseteq X_C$ and let $S = \{Q_1 \odot \sigma_1, Q_2 \odot \sigma_2, Q_3 \odot \sigma_3, \dots, Q_k \odot \sigma_k\}$, where $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ belong to $\mathcal{G}(u)$ and Q_1, \dots, Q_k are prime $W_0\text{-}\Gamma_{\text{int}}$ paths which satisfy

$$\forall i \neq j, \alpha(Q_i) = \alpha(Q_j) \text{ or } Q_i \text{ and } Q_j \text{ are } A\text{-disjoint,}$$

S is said a complete $W_0\text{-}\Gamma_{\text{int}}$ family when $\forall \ell = 1, \dots, k$, if $Q_\ell \odot \sigma_\ell \equiv P_1 \odot \sigma'_1 \equiv P_2 \odot \sigma'_2 \equiv \dots \equiv P_s \odot \sigma'_s$, where for $i = 1, \dots, s$, P_i is $W_0\text{-}\Gamma_{\text{int}}$ paths and $\sigma'_i \neq 1$, then there exist $S_0 = \{Q_i \odot \sigma_{e_i} \cdot \sigma'_i, Q_2 \odot \sigma_{e_2} \cdot \sigma'_2, \dots, Q_i \odot \sigma_{e_i} \cdot \sigma'_i\} \subseteq S \setminus \{Q_\ell \odot \sigma_\ell\}$, with $\{\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_s\} \subseteq \{\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_s\}$, and paths $P'_1 \equiv Q_i \odot \sigma_{e_1}, P'_2 \equiv Q_2 \odot \sigma_{e_2}, \dots, P'_s \equiv Q_i \odot \sigma_{e_s}$ such that:

Cond3. $\{P'_1, P'_2, \dots, P'_s\}$ constitutes a $W_0\text{-}\Gamma_{\text{int}}$ family $\alpha(P_i)$, \dots , $\alpha(P_s)$ A -disjoint linking of size l ;
Cond4. the size of the maximal $W_0\text{-}\Gamma_{\text{int}}$ family $\{P_1, \dots, P_s\}$ A -disjoint linking included in $\{P_1, P_2, \dots, P_s, P'_1, P'_2, \dots, P'_s\}$, is equal to l .

By definition, empty set \emptyset is a complete family. An illustration of the notion of complete family is given in Example 2.

• Consider vertex subsets $W_0 \subseteq W \cup F$ and $\Gamma_{\text{int}} \subseteq X_C$. S is a minimal complete $W_0\text{-}\Gamma_{\text{int}}$ family if it does not exist a non-empty complete $W_0\text{-}\Gamma_{\text{int}}$ family $S' \subset S$.

To compute $g\text{-dim}(C\mathcal{R}_H)$ using this notion of complete family, we need a last definition.

Definition 1: Let us denote by $\mathcal{N}(W, \Gamma_1, \Delta_1)$ the set of all A -disjoint $W\text{-}\Gamma_1$ linkings included in Δ_1 . For each $W\text{-}\Gamma_1$ path P included in Δ_1 , we can associate a minimal complete $W\text{-}\Gamma_{\text{int}}$ family $S(P)$ such that:

- $S(P) = \emptyset$ when P is not a strict multiple of any prime $W\text{-}\Gamma_{\text{int}}$ path;
- $\forall Q$, prime $W\text{-}\Gamma_{\text{int}}$ path and $\forall \sigma_i \in \mathcal{G}(u)$, if $P \equiv Q_i \odot \sigma_i$, then either $Q_i \odot \sigma_i \in S(P)$ or $\exists Q'_i \odot \sigma_i \in S(P)$ such that $\alpha(Q_i) \neq \alpha(Q'_i)$ and $Q_i \equiv Q'_i$;
- $\forall Q_i \odot \sigma_i \in S(P)$, $\text{length}(Q_i) + \text{length}(\sigma_i) \leq \text{card}(\Delta_1) + \text{card}(\Gamma_1)$.

Fault detection and isolation for structured bilinear systems

9

For each $\gamma \subseteq \Gamma_1$, we define the number $\rho_A(\mathbf{W}, \gamma, \Delta_1, \Gamma_1) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{L_0 \in \mathcal{R}(\mathbf{W}, \gamma, \Delta_1)} [\text{card}(L_0)]$ under the constraints:

Ca: $\forall P_0 \in L_0$, if $P_0 \subseteq Q_0 \circ \sigma_0$ then $Q_0 \circ \sigma_0 \notin \bigcup_{P \in L_0 \setminus \{P_0\}} S(P)$,

Cb: either no element of $S(P)$ is strict multiple of any $\mathbf{W}\text{-}\Gamma_{\text{ext}}$ path or if an element of $S(P)$ is a strict multiple of a $\mathbf{W}\text{-}\Gamma_{\text{ext}}$ path P' , then

$$\max_{L \in \mathcal{R}(\mathbf{W}, \Gamma_{\text{int}}, \{a(P), \Delta_1\})} \text{card}(L) = \max_{L' \in \mathcal{R}(\mathbf{W}, \Gamma_{\text{int}}, \Delta_1)} \text{card}(L') - 1$$

where L and L' contain only paths \bar{P} which satisfy $S(\bar{P}) = \emptyset$.

Finally, we define $\Omega_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{\gamma \subseteq \Gamma_1, \text{card}(\gamma) = \rho_A(\mathbf{W}, \gamma, \Delta_1, \Gamma_1) = \rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1)\}$.

Using the previous definitions and settings, we can state the following lemma.

Lemma 2: Consider structured bilinear system (Σ_Δ) represented by digraph $\mathcal{G}(\Sigma_\Delta)$. Let us denote by e_j, e_r and e_Δ , the diagonal $n \times n$ matrices such that

$$e_j(i, i) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x}_i \in \Delta_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad e_r(i, i) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x}_i \in \Gamma_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$e_\Delta(i, i) = \begin{cases} 1 & \text{if } \mathbf{x}_i \in \Delta_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

let \mathcal{R}_i denote the i th term of sequence (3), we have generically:

$\forall i \geq 0$, if $e_j \mathcal{R}_i = 0$, then for almost all realizations of (Σ_Δ) , there exists a matrix B_1 such that:

- $\mathcal{M}(e_r B_1) = \Omega_1$;
- $e_j B_1 = 0$;
- $g\text{-rank}(B_1) = g\text{-rank}(e_r B_1) = \rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1)$;
- $\text{im } B_1 \subseteq \mathcal{R}_H$;
- $\mathcal{R}_i \setminus (\mathcal{R}_i \cap \text{im } e_\Delta) \subseteq \text{im } B_1$.

Proof: For the sake of readability, we subdivide the proof into several points. We first comment the elements of Definition 1 as the proof concerns this definition.

- Foremost, it is easy to see that if there exist t A -disjoint paths noted P_1, P_2, \dots, P_t between $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_k\}$ and $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k\}$ with $\sigma(P_k) = u_0 \cdot u_{n_1} \cdot \dots \cdot u_{n_{k-1}}$ and $\sigma(P_k) = u_0 \cdot u_{n_1} \cdot \dots \cdot u_{n_{k-1}}$, then $g\text{-dim}(\sum_{k=1}^t \text{span}(A_{n_{k-1}} \dots A_{n_1} H_k)) = t$.
- Moreover, for each $\{\mathbf{w}_k\}\text{-}\Gamma_1$ path P included in Δ_1 with $\sigma(P) = u_0 \cdot u_{r_1} \cdot \dots \cdot u_{r_t}$, $S(P) = \emptyset$ implies that $A_{r_t} \dots A_{r_1} H_j \in \mathcal{R}_H$. Indeed, $S(P) = \emptyset$ is equivalent to say that P is not a strict multiple of a path leading to Γ_{int} . This implies $H_j \in \ker C$, $A_{r_t} H_j \in \ker C, \dots$, and $A_{r_{t-1}} \dots A_{r_1} H_j \in \ker C$. Therefore, $A_{r_t} \dots A_{r_1} H_j \in \mathcal{R}_H$.
- On the contrary, the same $\{\mathbf{w}_k\}\text{-}\Gamma_1$ path P included in Δ_1 is such that $P = Q_1 \circ \sigma_1$, where Q_1 is a prime

$\mathbf{W}\text{-}\Gamma_{\text{int}}$ path implies that $A_{r_t} \dots A_{r_1} H_j \notin \ker C$, where $\sigma(P) = u_0 \cdot u_{r_1} \cdot \dots \cdot u_{r_t}$ and $\sigma_1 = u_{r_{t-1}} \cdot \dots \cdot u_{r_1}$.

- Consider now a $\mathbf{W}\text{-}\Gamma_1$ path P included in Δ_1 and its associated complete $\mathbf{W}\text{-}\Gamma_{\text{int}}$ family $S(P) = \{Q_1 \circ \sigma_1, Q_2 \circ \sigma_2, \dots, Q_k \circ \sigma_k\}$ satisfying condition **Cb**. We show hereafter that

$$\left(\sum_{s=1}^k \text{span}(A_{r_{t,s}} \dots A_{r_{1,s}} H_j) \right) \cap \mathcal{R}_H \neq \emptyset,$$

where for $s = 1, \dots, k$, $\sigma(Q_s) \cdot \sigma_s = u_0 \cdot u_{r_{t,s}} \cdot \dots \cdot u_{r_{1,s}}$ and \mathbf{w}_k is the begin vertex of Q_s .

At first, due to constraint $\text{length}(Q_s) + \text{length}(\sigma_s) \leq \text{card}(\Delta_1) + \text{card}(\Gamma_1)$, $S(P)$ has a finite number of elements. Moreover, let us consider in $S(P)$ an element noted $Q_1 \circ \sigma_1$, where Q_1 is a prime $\mathbf{W}\text{-}\Gamma_{\text{int}}$ path and such that $\text{length}(\sigma_1)$ is maximal in $S(P)$. Even if this element is not unique, it exists since $S(P)$ has a finite number of elements. We denote this element $Q_1 \circ \sigma_1$ only for the sake of simplicity and in order to avoid an additional index. To do so, an eventual reordering of $S(P)$ may be necessary.

Let us take the following notations, $\sigma(Q_1) = u_0 \cdot u_{r_{t,1}} \cdot \dots \cdot u_{r_{1,1}}$, $\sigma_1 = u_{r_{t,1}} \cdot \dots \cdot u_{r_{1,1}}$ and $\mathbf{v}_1 = A_{r_{t,1}} \dots A_{r_{1,1}} H_j$, where \mathbf{w}_k is the begin vertex of Q_1 . Obviously, $\text{span}(\mathbf{v}_1) \cap \ker C = 0$ and $\mathbf{v}_1 \in \mathcal{R}_H$.

As $S(P)$ is complete, there exist some elements denoted, for the sake of simplicity, $Q_2 \circ \sigma_2, Q_3 \circ \sigma_3, \dots, Q_{t+1} \circ \sigma_{t+1}$ which satisfy **Cond3** and **Cond4**. Let us note for $s = 2, \dots, t+1$, $\sigma(Q_s) = u_0 \cdot u_{r_{t,s}} \cdot \dots \cdot u_{r_{1,s}}$, $\sigma_s = u_{r_{t,s}} \cdot \dots \cdot u_{r_{1,s}}$ and $\mathbf{v}_s = A_{r_{t,s}} \dots A_{r_{1,s}} H_j$, where \mathbf{w}_k is the begin vertex of Q_s . Note that as they are prime $\mathbf{W}\text{-}\Gamma_{\text{int}}$ paths, Q_s , for $s = 1, \dots, t+1$ can not be strict multiple of $\mathbf{W}\text{-}\Gamma_{\text{ext}}$ paths.

Moreover, we have for elements Q_s , $s = 1, \dots, t+1$, only two possible cases:

Case 1: $\forall s = 1, \dots, t+1$, Q_s is not a multiple of any $\mathbf{W}\text{-}\Gamma_{\text{ext}}$ path. In this case, all vectors $A_{r_{t,s}} \mathbf{v}_s, s = 1, \dots, t+1$ associated to $Q_s \circ u_{r_{t,s+1}}$ are such that $e_j \mathbf{v}_s = 0$.

Moreover, since, $\forall s = 2, \dots, t+1$, $\text{length}(\sigma_s) \leq \text{length}(\sigma_1)$ and due to conditions **Cond3** and **Cond4**, we have that $\mathbf{v}_s \in \mathcal{R}_H$ and $\sigma_s = \sigma_1$. Furthermore, these conditions **Cond3** and **Cond4** imply also that $g\text{-dim}(\sum_{s=1}^{t+1} \text{span}(\mathbf{v}_s)) = t+1$, $g\text{-dim}(C \sum_{s=1}^{t+1} \text{span}(\mathbf{v}_s)) = t$ and $g\text{-dim}(C \sum_{s=2}^{t+1} \text{span}(\mathbf{v}_s)) = t$. Therefore, $\sum_{s=1}^{t+1} \text{span}(\mathbf{v}_s) \cap \ker C \neq \emptyset$. Since $\sum_{s=1}^{t+1} \text{span}(\mathbf{v}_s) \subseteq \mathcal{R}_H$, there exists $\mathbf{v}'_1 \in \sum_{s=1}^{t+1} \text{span}(\mathbf{v}_s)$ such that $A_{r_{t,t+1}} \mathbf{v}'_1 \in \mathcal{R}_H$ and $e_j A_{r_{t,t+1}} \mathbf{v}'_1 = 0$.

Case 2: $\exists s$ such that Q_s is a multiple of a $\mathbf{W}\text{-}\Gamma_{\text{ext}}$ path P . Due to constraint **Cb**, $e_r \in \mathcal{R}_H$, where $\mathbf{x}_k = \alpha(P)$ and e_k is the i th Euclidean vector. Obviously, $e_k \in \text{im } e_r$.

10

T. Boukhobza et al.

For all the $Q_s \circ \sigma_s$ which are multiple of $\mathbf{W}\text{-}\Gamma_{\text{ext}}$ paths, we join to $\{Q_1 \circ u_{r_{t,t+1}}, Q_2 \circ u_{r_{t,t+1}}, \dots, Q_t \circ u_{r_{t,t+1}}\}$, the path subset $\{\bar{P}_1 \circ u_{r_{t,t+1}}, \dots, \bar{P}_t \circ u_{r_{t,t+1}}\}$ where $L = \{\bar{P}_1, \dots, \bar{P}_t\}$ is the linking described in **Cb**. Let us denote by $\bar{\mathbf{v}}_s$ the vector associated to each $\bar{P}_s, s = 1, \dots, t$. We can deduce from **Cb**, conditions **Cond3** and **Cond4** that,

$$\bar{\mathbf{v}}_s \in \mathcal{R}_H \cap \text{im } e_r,$$

$$g\text{-dim} \left(\sum_{s=1}^{t+1} \text{span}(\mathbf{v}_s) + \sum_{s=1}^t \text{span}(\bar{\mathbf{v}}_s) \right)$$

$$g\text{-dim} \left(C \sum_{s=1}^{t+1} \text{span}(\mathbf{v}_s) + \sum_{s=1}^t \text{span}(\bar{\mathbf{v}}_s) \right)$$

$$g\text{-dim} \left(C \sum_{s=1}^{t+1} \text{span}(\mathbf{v}_s) + \sum_{s=1}^t \text{span}(\bar{\mathbf{v}}_s) \right) = t + t'.$$

Using similar arguments than previously, we have that $(\sum_{s=1}^{t+1} \text{span}(\mathbf{v}_s) + \sum_{s=1}^t \text{span}(\bar{\mathbf{v}}_s)) \cap (\ker C \cap \text{im } e_\Delta) \neq \emptyset$. Since $\sum_{s=1}^{t+1} \text{span}(\mathbf{v}_s) + \sum_{s=1}^t \text{span}(\bar{\mathbf{v}}_s) \subseteq \mathcal{R}_H$, there exists $\mathbf{v}'_1 \in \sum_{s=1}^{t+1} \text{span}(\mathbf{v}_s) + \sum_{s=1}^t \text{span}(\bar{\mathbf{v}}_s)$ such that $A_{r_{t,t+1}} \mathbf{v}'_1 \in \mathcal{R}_H$ and $\mathbf{v}'_1 \in \text{im } e_\Delta$ which implies that $e_j A_{r_{t,t+1}} \mathbf{v}'_1 = 0$.

To summarize, in the two previous cases, we have that we can extract from the vectors associated to $\{Q_1 \circ u_{r_{t,t+1}}, Q_2 \circ u_{r_{t,t+1}}, \dots, Q_t \circ u_{r_{t,t+1}}\}$ a vector \mathbf{v}'_1 such that $A_{r_{t,t+1}} \mathbf{v}'_1 \in \mathcal{R}_H$ and $e_j A_{r_{t,t+1}} \mathbf{v}'_1 = 0$.

In fact, in $S(P)$, the presence of elements $Q_s \circ \sigma_s, s = 1, \dots, t+1$, satisfying **Ca** and **Cb**, is equivalent to the presence of $Q_1 \circ \sigma_1$, where $\sigma_1 = u_{r_{t,1}} \cdot \dots \cdot u_{r_{1,1}}$ is "shorter" than σ_1 and Q_1 could be represented by $\{Q_1 \circ u_{r_{t,t+1}}, Q_2 \circ u_{r_{t,t+1}}, \dots, Q_t \circ u_{r_{t,t+1}}\}$ which traduces the existence of a non-zero vector $\mathbf{v}'_1 \in \sum_{s=1}^{t+1} \text{span}(\mathbf{v}_s) \cap \mathcal{R}_H$ satisfying $e_j \mathbf{v}'_1 = 0$ since $\mathbf{v}'_1 \in \text{im } e_\Delta$.

We can repeat this reasoning, until obtaining a final element $Q^{(k)} \sigma_k^e$, where $\sigma_k^{(k)} = 1$ and $Q^{(k)}$ traduces the fact that there exists a nonzero vector $\mathbf{v}'_k \in (\sum_{s=1}^{t+1} \text{span}(A_{r_{t,s}} \dots A_{r_{1,s}} H_j)) \cap \mathcal{R}_H$ with $e_j \mathbf{v}'_k = 0$.

Therefore, for each path P such that either $S(P) = \emptyset$ or $S(P)$ verifies constraint **Cb**, we can associate a vector $\mathbf{v}' \in \mathcal{R}_H$ satisfying $e_j \mathbf{v}' = 0$. In this case, we have obviously, $\mathcal{M}(e_r \mathbf{v}') = \{\alpha(P)\}$, $P_i = Q_i \circ \sigma_i \in S(P)$ and $\alpha(P) \in \Gamma_1$. Since P is an $\mathbf{W}\text{-}\Gamma$ path and as $S(P)$ is minimal, we have necessarily $e_r \mathbf{v}' \neq 0$.

- Consider now any set $S = \bigcup_{P \in L_0} S(P)$ of complete families $S(P)$. If $S(P), \forall P \in L_0$, is minimal and satisfies constraint **Cb** and since all the paths $P \in L_0$ are A -disjoint, then all vectors \mathbf{v}' associated to each subset $S(P)$ are generically linearly independent. Moreover,

as we have shown it above, if $S(P), \forall P \in L_0$, is minimal and satisfies constraint **Cb**, then all vectors \mathbf{v}' associated to each subset $S(P)$ are generically such that $\mathbf{v}' \in \mathcal{R}_H$, $e_j \mathbf{v}' = 0$ and $e_r \mathbf{v}' \neq 0$.

Hence, if we consider matrix B_1 defined by the concatenation of all these independent vectors \mathbf{v}' , then we have obviously that $e_j B_1 = 0$, $\mathcal{M}(e_r B_1) = \Omega_1$, $g\text{-rank}(B_1)$ is equal to the number of vectors associated to paths $P \in L_0$ and since all these vectors are such that $e_r \mathbf{v}' \neq 0$ so $g\text{-rank}(e_r B_1) = g\text{-rank}(B_1) = \rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1)$. Moreover, $\text{im } B_1 \subseteq \mathcal{R}_H$ and $e_j B_1 = 0$ and so the first four points of Lemma 2 are proved.

- To prove the last point of Lemma 2, we use a proof by contradiction in assuming that for some $i \geq 0$, $e_j \mathcal{R}_i = 0$ and $\mathcal{R}_i \setminus (\mathcal{R}_i \cap \text{im } e_\Delta) \not\subseteq \text{im } B_1$. This means obviously that $\exists \mathbf{v}_0 \in \mathcal{R}_i$ such that $e_r \mathbf{v}_0 \notin \text{im } e_r B_1$.

Let B'_1 be the matrix obtained by the concatenation of B_1 and \mathbf{v}_0 i.e. $B'_1 = (B_1 | \mathbf{v}_0)$. Obviously, there exists a subset $\gamma' = \gamma \cup \{\mathbf{x}_k\} \in \mathcal{M}(e_r B'_1)$, where $\gamma \in \mathcal{M}(e_r B_1)$, $\mathbf{x}_k \in \Gamma_1$ and $\{\mathbf{x}_k\} \in \mathcal{M}(\mathbf{w}_0)$. Recall that $\gamma \in \mathcal{M}(e_r B_1)$ is equivalent to say that $\rho_A(\mathbf{W}, \gamma, \Delta_1, \Gamma_1) = \rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1)$.

Let $P_{0,1}, P_{0,2}, \dots, P_{0,k_0}$ all the $\mathbf{W}\text{-}\{\mathbf{x}_k\}$ paths included in Δ_1 and such that $\text{length}(P_{0,j}) \leq i$, $\forall j = 1, \dots, k_0$. Obviously, since $\mathbf{v}_0 \in \mathcal{R}_i$ and $e_j \mathcal{R}_i = 0$, there exists at least a path satisfying conditions above.

Let S_1, S_2, \dots, S_k be all the sets of minimal complete families $S_i = \bigcup_{P \in L_0} S(P)$, satisfying constraints **Ca** and **Cb** with $\alpha(L_0) = \gamma$. In fact, since there can exist many A -disjoint linkings L_0 with $\alpha(L_0) = \gamma$ and as for one path P we can associate different $S(P)$, there can exist many sets S_i .

Only three cases have to be distinguished.

Case 1: there exists a path $P_{0,j}$ associated to a minimal complete family $S(P_{0,j}) \neq \emptyset$ and such that $L_0 = L_0 \cup \{P_{0,j}\}$ is A -disjoint.

Case 2: there exists a path $P_{0,j}$ associated to a minimal complete family $S(P_{0,j}) \neq \emptyset$ (i.e., $\mathbf{x}_k \in \Gamma_{\text{ext}}$) satisfying constraint **Cb**, a set of complete family S_i such that, $\forall S(P) \in S_i$ and $\forall Q_i \circ \sigma_i \in S(P)$, $P_{0,j} \not\subseteq Q_i \circ \sigma_i$ and $\mathcal{M}(L_0) = \gamma$ and $\forall Q_i \circ \sigma_i \in S(P)$, $P_{0,j} \not\subseteq Q_i \circ \sigma_i$ and $L_0 = L_0 \cup \{P_{0,j}\}$ is A -disjoint.

In the two first cases, $S' = \bigcup_{P \in L_0 \cup \{P_{0,j}\}} S(P)$ satisfies constraints of linear independence **Ca**. Thus, linking L'_0 satisfies constraints of Definition 1 and $\rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1) = \rho_A(\mathbf{W}, \gamma, \Delta_1, \Gamma_1) < \text{card}(L'_0) = \rho_A(\mathbf{W}, \gamma', \Delta_1, \Gamma_1)$, with $\gamma' \subseteq \Gamma_1$. This is in contradiction with Definition 1. Indeed, $\rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1)$ is the cardinality of the biggest A -disjoint linking which satisfies all constraints of Definition 1. Therefore, for these two first cases, we cannot have $e_r \mathbf{v}_0 \notin \text{im } e_r B_1$ and so $\mathcal{R}_i \setminus (\mathcal{R}_i \cap \text{im } e_\Delta) \subseteq \text{im } B_1$.

Fault detection and isolation for structured bilinear systems

11

Case 3: $\forall i, \forall \ell, S(P_{0,i}) \neq \emptyset$ and $\exists S(P) \in \mathcal{S}_\ell$ such that $\exists Q_k \circ \sigma_k \in S(P), P_{0,j} \equiv Q_k \circ \sigma_k$. This implies, according to the fact that $S(P)$ satisfies constraint **Ca** and due to the minimality of $S(P) \in \mathcal{S}_\ell$, that vector $v_{0,j}$ associated to $P_{0,j}$ belongs generically to $\text{im } B_1$. Indeed, in this case $S(P)$ can also be associated to $P_{0,j}$. This is true for all paths $P_{0,j}, j = 1, \dots, k_0$ i.e., all $\mathbf{W}\text{-}(x_{k_0})$ paths included in Δ_1 . Therefore, $\forall v \in \mathcal{R}_i$ such that $\{x_{k_0}\} \in \mathcal{M}(v)$, we have that $v \in \text{im } B_1$.

In particular $v_0 \in \text{im } B_1$.

Therefore, all the possible three cases lead to $\mathcal{R}_i \setminus (\mathcal{R}_i \cap \text{im } e_\Delta) \subseteq \text{im } B_1$ and the lemma follows. \square

Roughly speaking, the object of Lemma 2 is to establish that the obtained set Ω_1 can be generically associated to a structured matrix denoted B_1 which summarizes the influence of the propagation of the perturbation w until it reaches the state components in J_1 . Defining B_1 on the basis of Ω_1 such that $\mathcal{M}(e_i B_1) = \Omega_1, e_j B_1 = 0$ and $e_r B_{1,j} \neq 0 \forall j$, where $B_{1,j}$ is the j th column of B_1 , implies necessarily that $g\text{-rank}(B_1) = g\text{-rank}(e_i B_1) = \rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1)$. Furthermore, $\text{im } B_1 \subseteq \mathcal{R}_H$, implies that structured matrix B_1 does not contain any new directions w.r.t. \mathcal{R}_H . Finally, as long as $e_j \mathcal{R}_i = 0, \mathcal{R}_i \setminus (\mathcal{R}_i \cap \text{im } e_\Delta) \subseteq \text{im } B_1$ implies that B_1 represents all the influence of the perturbation w on Γ_1 and so on the outputs since $\mathbf{X}_c \subseteq \Gamma_1 \cup J_1$. Thus, as long as $e_j \mathcal{R}_i = 0$, we obtain the same generic dimensions of subspaces $e_r \mathcal{R}_i$ and CR_i if we replace virtually matrix H by matrix B_1 .

We can deduce from the previous lemma.

Lemma 3: Consider structured bilinear system (Σ_Δ) represented by digraph $\mathcal{G}(\Sigma_\Delta)$. We have generically: $\forall i \geq 0$, if $e_i \mathcal{R}_i = 0$, then there exist generically a subspace $U_1 \subseteq \text{im } e_\Delta \subseteq \ker C$ and a matrix B_1 satisfying conditions of Lemma 2 (i.e. $\mathcal{M}(e_i B_1) = \Omega_1, e_j B_1 = 0, g\text{-rank}(B_1) = \rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1)$, $\text{im } B_1 \subseteq \mathcal{R}_H$) and such that

$$- \sum_{j=0}^m A_j U_1 \subseteq U_1 + \text{im } B_1,$$

$$- \mathcal{R}_i \subseteq U_1 + \text{im } B_1.$$

Proof: This Lemma is quite obvious, so we present only a sketch of proof.

$e_i \mathcal{R}_i = 0$ implies that $\mathcal{R}_i = (\mathcal{R}_i \cap \text{im } e_\Delta) + \mathcal{R}_r$ where, from Lemma 4.3, there exists a matrix B_1 satisfying conditions of Lemma 2 such that $\mathcal{R}_r \subseteq \text{im } B_1$. Let us denote $\mathcal{R}_i \cap \text{im } e_\Delta$ by \mathcal{D}_0 and let us define $\mathcal{D}_{i+1} = \mathcal{D}_i + \sum_{j=0}^m A_j (\mathcal{D}_i \cap \text{im } e_\Delta)$. The non-decreasing sequence \mathcal{D}_i has a unique limit noted \mathcal{D}_* . By construction $\forall i \geq 0, e_i \mathcal{D}_i = 0$ and using similar arguments to the ones of Lemma 2, we have $\mathcal{D}_i \setminus (\mathcal{D}_i \cap \text{im } e_\Delta) \subseteq \text{im } B_1$. Besides, $\sum_{j=0}^m A_j (\mathcal{D}_* \cap \text{im } e_\Delta) \subseteq \mathcal{D}_*$. So, if we denote

$\mathcal{D}_* \cap \text{im } e_\Delta$ by U_1 , then we have that $\sum_{j=0}^m A_j U_1 \subseteq \mathcal{D}_* \subseteq U_1 + \text{im } B_1$.

Moreover, since $\mathcal{R}_i \cap \text{im } e_\Delta = \mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}_*$ and as $\mathcal{R}_r \subseteq \text{im } B_1$, we have finally $\mathcal{R}_i = (\mathcal{R}_i \cap \text{im } e_\Delta) + \mathcal{R}_r \subseteq U_1 + \text{im } B_1$. \square

We can deduce from the last lemma, the following corollary, which allows to characterize \mathcal{R}_H :

Corollary 1: Consider SBLS (Σ_Δ) represented by digraph $\mathcal{G}(\Sigma_\Delta)$.

St1 for almost all structured matrices B such that $\mathcal{M}(e_i B) = \Omega_1$, we have that $g\text{-dim}(CR_H) = g\text{-dim}(CR_B)$, where \mathcal{R}_B is the minimum (C, A) -conditioned invariant subspace including $\text{im } B$, with $j=0, \dots, m$.

St2 if $\rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1) = \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$ then $g\text{-dim}(CR_H) = \rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1)$.

Proof: **St1.** This statement can be proved using mathematical induction. According to Lemma 3 and to the fact that $e_j \mathcal{R}_0 = 0$, we have obviously that there exists a structured matrix B_1 such that $\mathcal{R}_0 \subseteq U_1 + \text{im } B_1 \subseteq U_1 + \mathcal{R}_{B_1}$, where \mathcal{R}_{B_1} is the minimum (C, A) -conditioned invariant subspace including $\text{im } B_1$, with $j=0, \dots, m$. Assume now that

$\mathcal{R}_i \subseteq U_1 + \mathcal{R}_{B_i}$ is true until $i = i_0$. From sequence (3), we have that $\mathcal{R}_{i_0+1} = \mathcal{R}_{B_{i_0}} + \sum_{j=0}^m A_j (\mathcal{R}_{B_{i_0}} \cap \ker C)$. As $U_1 \subseteq \ker C$ and $\sum_{j=0}^m A_j U_1 \subseteq U_1 + \text{im } B_1$, we can write that $\mathcal{R}_{i_0+1} \subseteq U_1 + \mathcal{R}_{B_1} + U_1 + \text{im } B_1 + \sum_{j=0}^m A_j (\mathcal{R}_{B_i} \cap \ker C) \subseteq U_1 + \mathcal{R}_{B_i}$.

Thus, $\mathcal{R}_i \subseteq U_1 + \mathcal{R}_{B_i}$ is true for any integer $i \geq 0$ and therefore, $\mathcal{R}_H \subseteq U_1 + \mathcal{R}_{B_m}$. Furthermore, as $\text{im } B_1 \subseteq \mathcal{R}_H$, which implies that $\mathcal{R}_{B_m} \subseteq \mathcal{R}_H$, we have that $\mathcal{R}_{B_m} \subseteq \mathcal{R}_H \subseteq U_1 + \mathcal{R}_{B_m}$. Thus $CR_{B_m} \subseteq CR_H \subseteq C(U_1 + \mathcal{R}_{B_m})$ and as $U_1 \subseteq \ker C$, we obtain $CR_H = CR_{B_m}$. Then, $g\text{-dim}(CR_H) = g\text{-dim}(CR_{B_m})$. Since this equality is true for at least one structured matrix B_1 , it is also true for almost all structured matrices B such that $\mathcal{M}(e_i B) = \Omega_1$.

St2. $\rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1) = \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$ is equivalent to the fact that there exists a structured matrix B_1 satisfying conditions of Lemma 3 such that $g\text{-rank}(B_1) = g\text{-rank}(e_i B_1) = \rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1) = \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$.

On the one hand, from definition of Γ_1 and Δ_1 , $(\Gamma_1 \cup \Delta_1) \cap \mathbf{X}_c = \Gamma_1 \cap \mathbf{X}_c$. Furthermore, due to the structure of matrix C , we have that $\rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \rho(\mathbf{W}, \mathbf{X}_c \cap \Gamma_1)$. On the other hand, every maximal $\mathbf{W} - \Gamma_1 \cap \mathbf{X}_c$ linking can be associated to complete families such that constraint **Ca** is satisfied. Therefore, for each maximal $\mathbf{W} - \Gamma_1 \cap \mathbf{X}_c$ linking \mathcal{L} , there exists $\gamma \in \Omega_1$, such that $\alpha(\mathcal{L}) = \gamma$. Yet, $\rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) \leq g\text{-rank}(CB_1) = \max_{\gamma \in \Omega_1, \gamma \in \mathcal{L}_c} \text{card}(\gamma) \leq \max_{\gamma \in \Omega_1} \text{card}(\gamma)$.

12

T. Boukhobza et al.

Consequently, we have in general that $\rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) \leq g\text{-rank}(CB_1) \leq g\text{-rank}(B_1)$.

Thus, if equality of **St2** is satisfied i.e. $\rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1) = \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$, then it means that $\rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1) \leq g\text{-rank}(CB_1)$. As, by definition, $\rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1) = g\text{-rank}(B_1)$ we have $g\text{-rank}(B_1) \leq g\text{-rank}(CB_1)$, which implies that $g\text{-rank}(B_1) = g\text{-rank}(CB_1)$. So, $g\text{-dim}(\text{im } B_1 \cap \ker C) = 0$ and consequently $\mathcal{R}_{B_1} = \text{im } B_1$. Using Statement **St1**, proved above, we have then that $g\text{-dim}(CR_H) = g\text{-dim}(CR_{B_1}) = g\text{-rank}(CB_1) = g\text{-rank}(B_1) = \rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1) = \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$ \square

Statement **St2** of the previous lemma allows to compute $g\text{-dim}(CR_H)$ in the specific case where $\rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1) = \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$. Knowing that, by construction, $\rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1) \geq \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$, we are interested, in the following paragraph, in the determination of $g\text{-dim}(CR_H)$ in the case where $\rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1) > \rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y})$.

In order to compute exactly $g\text{-dim}(CR_H)$, we introduce now following subsets Γ_i, Δ_i and $\Omega_i, i > 1$, which are the generalization of Γ_1, Δ_1 and Ω_1 introduced above. More precisely, the latter is quite general in order to be applied also in the multiple fault case. It allows us to characterize $g\text{-dim}(CR_{H_i})$, where matrix H_0 is constituted by any columns of H and E , i.e., $H_0 = (H_{i_1}, H_{i_2}, \dots, H_{i_n}, E_{j_1}, E_{j_2}, \dots, E_{j_n})$, where H_i and E_j represent respectively the i th column of matrix H and the j th column of matrix E . To such matrix, we associate vertex subset $\mathbf{V}_0 \subseteq \mathbf{W} \cup \mathbf{F}$ such that $\mathbf{V}_0 = \{w_1, w_2, \dots, w_k, f_1, f_2, \dots, f_l\}$.

Algorithm 1: Consider any $\mathbf{V}_0 \subseteq \mathbf{W} \cup \mathbf{F}$.

Initialization:

$$\hookrightarrow \Omega_0 = \mathcal{M}(H_0), \mathbf{J}_0 = \mathbf{X}, i = 0$$

Step i:

$$\hookrightarrow \rho_i = \max_{\gamma \in \Omega_i} \rho(\gamma, \mathbf{Y}), \mu_i = \min_{\gamma \in \Omega_i, \rho(\gamma, \mathbf{Y}) = \rho_i} \mu(\gamma, \mathbf{Y}),$$

$$\hookrightarrow \mathbf{J}_{i+1} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_i \in \mathbf{J}_i, \max_{\gamma \in \Omega_i} \rho(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_i\}) = \rho_i \\ \text{and} \\ \min_{\gamma \in \Omega_i, \rho(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_i\}) = \rho_i} \mu(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_i\}) = \mu_i \end{array} \right\},$$

$$\hookrightarrow \Delta_{i+1} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta_i \cup \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_j \in \mathbf{X} \setminus \mathbf{J}_{i+1}, \max_{\gamma \in \Omega_i} \rho(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_j\}) > \rho_i \\ \text{or} \\ \min_{\gamma \in \Omega_i, \rho(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_j\}) = \rho_i} \mu(\gamma, \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_j\}) < \mu_i - 1 \end{array} \right\} \end{array} \right\},$$

$$\hookrightarrow \Gamma_{i+1} = \mathbf{X} \setminus (\mathbf{J}_{i+1} \cup \Delta_{i+1}),$$

$$\hookrightarrow \Gamma_{\text{int}} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}_i \in \Gamma_{i+1}, \exists \mathbf{W} - \Gamma_{i+1} \text{ paths } P \text{ and } Q \\ \text{included in } \Delta_{i+1} \text{ such that } \alpha(Q) = \mathbf{x}_i \\ \text{and } P \text{ is a strict multiple of } Q \end{array} \right\},$$

$$\hookrightarrow \Gamma_{\text{ext}} = \Gamma_{i+1} \setminus \Gamma_{\text{int}},$$

\hookrightarrow Compute $\rho_A(\mathbf{V}_0, \Gamma_{i+1}, \Delta_{i+1}, \Gamma_{i+1})$ by substituting Δ_1 and Γ_1 in Definition 4.2 by Δ_{i+1} and Γ_{i+1} respectively,

\hookrightarrow If $\rho_A(\mathbf{V}_0, \Gamma_{i+1}, \Delta_{i+1}, \Gamma_{i+1}) > \rho_i$ and $\rho_i < \rho$, then

$$\Omega_{i+1} = \left\{ \lambda \subseteq \Gamma_i, \text{card}(\gamma) = \rho_A(\mathbf{V}_0, \gamma, \Delta_{i+1}, \Gamma_{i+1}) \right. \\ \left. = \rho_A(\mathbf{V}_0, \Gamma_{i+1}, \Delta_{i+1}, \Gamma_{i+1}) \right\}, i = i + 1, \text{ go to Step } i$$

\hookrightarrow Else $\Gamma_i(\mathbf{V}_0) = \Gamma_{i+1}, \Delta_i(\mathbf{V}_0) = \Delta_{i+1}, \rho_i(\mathbf{V}_0) = \rho_i, \Omega_i(\mathbf{V}_0) = \Omega_i$.

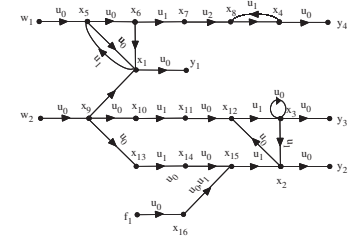


Figure 2. Example 2.

Example 2: Let us illustrate Algorithm 1 and Definition 1 and compute $\rho_A(\mathbf{W})$ for the structured system associated to the digraph of figure 2.

Initialization:

$$\hookrightarrow \Omega_0 = \{\{x_5, x_9\}\}, \mathbf{J}_0 = \mathbf{X}, i = 0$$

Step 0:

$$\hookrightarrow \rho_0 = \rho(\{x_5, x_9\}, \mathbf{Y}) = 2, \mu(\{x_5, x_9\}, \mathbf{Y}) = 9,$$

$$\hookrightarrow \mathbf{J}_1 = \{x_{16}\},$$

$$\hookrightarrow \Delta_1 = \{x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}\},$$

$$\hookrightarrow \Gamma_1 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}.$$

We have also that $\Gamma_{\text{int}} = \{x_1\}$.

• Computation of $\rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1)$. First note that $\rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1) = 4$. Indeed, there exist three A -disjoint linkings of size 4

$$\mathcal{L}_1 = \{P_1, P_2, P_3, P_4\}$$

$$\mathcal{L}_2 = \{P_5, P_2, P_3, P_4\}, \text{ where}$$

$$\mathcal{L}_3 = \{P_6, P_2, P_3, P_4\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 = w_1 \xrightarrow{a_0} x_5 \xrightarrow{a_6} x_1 = Q_1 \\ P_2 = w_1 \xrightarrow{a_0} x_5 \xrightarrow{a_6} x_6 \xrightarrow{a_7} x_7 \xrightarrow{a_2} x_8 \xrightarrow{a_1} x_4 \\ P_3 = w_2 \xrightarrow{a_0} x_9 \xrightarrow{a_6} x_{10} \xrightarrow{a_1} x_{11} \xrightarrow{a_6} x_{12} \xrightarrow{a_2} x_3 \\ P_4 = w_2 \xrightarrow{a_0} x_9 \xrightarrow{a_6} x_{13} \xrightarrow{a_1} x_{14} \xrightarrow{a_2} x_{15} \xrightarrow{a_1} x_2 \\ P_5 = w_2 \xrightarrow{a_0} x_9 \xrightarrow{a_6} x_1 = Q_2 \\ P_6 = w_1 \xrightarrow{a_0} x_5 \xrightarrow{a_6} x_6 \xrightarrow{a_1} x_1. \end{array} \right.$$

All paths P_2, P_3 and P_4 are multiple of some prime $\mathbf{W}\text{-}\Gamma_{\text{int}}$ paths, i.e. $P_2 \equiv Q_1 \odot u_1$, $P_3 \equiv Q_1 \odot (u_1 \cdot u_2 \cdot u_1) \equiv P_2 \odot (u_2 \cdot u_1)$, $P_4 \equiv Q_2 \odot (u_1 \cdot u_0 \cdot u_2)$ and $P_4 \equiv Q_2 \odot (u_1 \cdot u_2 \cdot u_1)$. To these paths we can associate the following complete families:

$$\begin{aligned} S(P_1) &= \emptyset \\ S(P_2) &= \{Q_1 \odot (u_1 \cdot u_2 \cdot u_1), Q_1 \odot (u_1 \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot u_1), \\ &\quad Q_2 \odot (u_1 \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot u_1), Q_1 \odot (u_2 \cdot u_1)\} \\ S(P_3) &= \{Q_2 \odot (u_1 \cdot u_0 \cdot u_2), Q_1 \odot (u_1 \cdot u_0 \cdot u_2), Q_1 \odot (u_0 \cdot u_2)\} \\ S(P_4) &= \{Q_2 \odot (u_1 \cdot u_2 \cdot u_1), Q_1 \odot (u_1 \cdot u_2 \cdot u_1), Q_1 \odot (u_2 \cdot u_1)\} \\ S(P_4) &= \{Q_2 \odot (u_1 \cdot u_2 \cdot u_1), Q_1 \odot (u_1 \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot u_1), Q_2 \cdot \\ &\quad \odot (u_1 \cdot u_1 \cdot u_2 \cdot u_1), Q_1 \odot (u_2 \cdot u_1)\} \end{aligned}$$

The second choice for $S(P_4)$ is more suitable because it allows to obtain a set satisfying constraint Ca of Definition 1 (because $P_2 \equiv Q_1 \odot (u_1 \cdot u_2 \cdot u_1)$). Therefore, $\rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1) = 4$ and so $\Omega_1 = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4\}\}$, $i = 1$.

Step 1:

$$\begin{aligned} \rightarrow \rho_1 &= \rho(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \mathbf{Y}) = 4, \\ \rightarrow \mu_1 &= \mu(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}, \mathbf{Y}) = 8, \\ \rightarrow \mathbf{J}_2 &= \{x_1\}, \\ \rightarrow \Delta_2 &= \{x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}\}, \\ \rightarrow \Gamma_2 &= \{x_1, x_2, x_3, x_4\}. \end{aligned}$$

We have also that $\Gamma_{\text{int}} = \{x_1\}$.

\rightarrow Since $\Delta_2 = \Delta_1$ and $\Gamma_2 = \Gamma_1$ then $\rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_2, \Delta_2, \Gamma_2) = \rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1) = 4$.

As, $\rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_2, \Delta_2, \Gamma_2) = \rho_1 = 4 = p$, we have that $\Gamma_*(\mathbf{W}) = \Gamma_2$, $\Delta_*(\mathbf{W}) = \Delta_2$, $\rho_*(\mathbf{W}) = 4$, $\Omega_*(\mathbf{W}) = \Omega_1$.

The following lemma characterizes the value of $g\text{-dim}(\mathcal{CR}_H)$:

Lemma 4: Consider SBLS (Σ_Δ) represented by digraph $G(\Sigma_\Delta)$, we have that $g\text{-dim}(\mathcal{CR}_H) = \rho_A(\mathbf{W})$.

Proof: Let κ be the first integer such that $\rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_{\kappa+1}, \Delta_{\kappa+1}, \Gamma_{\kappa+1}) = \rho_\kappa = \max_{\gamma \in \Omega_\kappa} \rho(\gamma, \mathbf{Y})$.

From Statement S1 of Corollary 1, we can write that $g\text{-dim}(\mathcal{CR}_H) = g\text{-dim}(\mathcal{CR}_{B_i})$ for almost all structured matrices B_i such that $\mathcal{M}(B_i)$ is equal to Ω_1 . Moreover, if we denote $\mathbf{W}' = \{w'_1, \dots, w'_d\}$, with $d' = \rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_{\kappa-1}, \Delta_{\kappa-1}, \Gamma_{\kappa-1})$, a virtual vertex subset connected to vertex subset \mathbf{X} through the virtual edges noted B_i -edges $= \{(w'_k, x_k) | B_i(j, k) \neq 0\}$, we have that $\rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_\kappa, \Delta_\kappa, \Gamma_\kappa) = \rho_A(\mathbf{W}', \Gamma_\kappa, \Delta_\kappa, \Gamma_\kappa)$. Thus, we can generalize Statement S1 of Corollary 1, and so we have iteratively, $g\text{-dim}(\mathcal{CR}_H) = g\text{-dim}(\mathcal{CR}_{B_i}) = g\text{-dim}(\mathcal{CR}_{B_k}) = \dots = g\text{-dim}(\mathcal{CR}_{B_k})$ for almost all structured matrices B_i , $1 \leq i \leq \kappa + 1$, such that $\mathcal{M}(e_{\gamma, B_i})$ is equal to Ω_1 .

Moreover, as $\rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_{\kappa+1}, \Delta_{\kappa+1}, \Gamma_{\kappa+1}) = \rho_\kappa = \max_{\gamma \in \Omega_\kappa} \rho(\gamma, \mathbf{Y})$, statement S2 applied to Ω_κ gives

$g\text{-dim}(\mathcal{CR}_B) = \rho_A(\mathbf{W}, \Gamma_{\kappa+1}, \Delta_{\kappa+1}, \Gamma_{\kappa+1}) = \rho_\kappa(\mathbf{W})$. Thus, $g\text{-dim}(\mathcal{CR}_H) = \rho_\kappa(\mathbf{W})$ and the Lemma is proved.

Note that by construction, $\rho_i \leq \rho_{i+1} \leq p$. The latter inequality and assumption A1 ensure that Algorithm 1 converges at most in p steps. \square

Proposition 1: Consider structured system (Σ_Δ) represented by digraph $G(\Sigma_\Delta)$. In the single fault case, the BFPRG has generically a solution iff $\rho_*(\mathbf{W} \cup \mathbf{F}) > \rho_*(\mathbf{W})$.

Proof: The proof is immediate according to Lemma 4 and to Lemma 1. \square

Note, finally, that for SBLS (Σ_Δ) , it is quite easy to prove that $\mathcal{R}'_j = \text{span}\{e_j, x_j \in \Gamma_*(\mathbf{W} \cup \Delta_*(\mathbf{W}))\}$, where e_j is the j th Euclidean vector.

For the system described in Example 2, $\rho_*(\mathbf{W} \cup \{\mathbf{f}_1\}) = 4 = \rho_*(\mathbf{W})$ and so the BFPRG is not generically solvable.

4.2 Problem of residual generation: multiple fault case

4.2.1 Bilinear fundamental problem of residual generation with eventually simultaneous failure events. In the case of multiple and possibly simultaneous failure events, we must solve the BFPRG for each failure component f_i for $i = 1, \dots, q$. Thus, directly from Proposition 1, we can enounce:

Corollary 2: Consider structured system (Σ_Δ) represented by digraph $G(\Sigma_\Delta)$. The BFPRG with multiple and simultaneous failure events has generically a solution iff $\forall i \in \{1, 2, \dots, q\}$, $\rho_*(\mathbf{W} \cup \mathbf{F}) > \rho_*(\mathbf{W} \cup \mathbf{F}\{\mathbf{f}_i\})$.

The previous corollary aims to provide an analysis tool which allows to know whether or not the BFPRG is generically solvable for a bilinear system. In the case where the BFPRG has a solution, the remaining problem is to design the residual generator (2) which allows to detect and locate the faults.

According to the results presented in De Persis and Isidori (2001) and Hammouri et al. (2001), if components f_k is detectable and localizable (i.e. $\rho_*(\mathbf{W} \cup \mathbf{F}) > \rho_*(\mathbf{W} \cup \mathbf{F}\{f_k\})$), then there exist a linear combination y_k of the output components which measures the state components included in an element of $\Omega_*(\mathbf{W} \cup \mathbf{F})$ and a coordinate change $(\xi_1^i, \xi_2^i)^T = Hx$ such that, we have the following dynamics for

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \tilde{A}_0 \xi_1 + \sum_{i=1}^m u_i \tilde{A}_i \xi_1 + \tilde{E}_i f_k + \phi(u, y) \\ y_1 = \tilde{C} \xi_1 = \tilde{G} y. \end{cases}$$

The dimension of ξ_1 can be characterized structurally, as $\dim(\xi_1) \leq n - \mu_\kappa$ where μ_κ is the minimal number of state vertices covered by an A -disjoint $\mathbf{W} \cup \mathbf{F}$ - \mathbf{Y}_0 linking

of size $\rho_*(\mathbf{W} \cup \mathbf{F}\{f_k\})$. The dimension of y_1 is necessarily less or equal to $p - \rho_*(\mathbf{W} \cup \mathbf{F}\{f_k\})$.

Writing a part of original system on the form given above allows to design quite easily a stable residual generator assuming the uniform observability of the system as in De Persis and Isidori (2001). The knowledge of matrices G and H allows to complete the residual generator which has the form:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \tilde{A}_0 \xi_1 + \sum_{i=1}^m u_i \tilde{A}_i \xi_1 + \phi(u, y) + K(u)(y_1 - \tilde{C} \xi_1) \\ r = L_1(u)y_1 + L_2(u)\xi_1, \end{cases}$$

where $K(u)$, $L_1(u)$ and $L_2(u)$ are gain matrices.

Yet, giving more details on the structure of G and H is possible but necessitates further studies completely dedicated to the residual generator synthesis on the basis of the structural analysis of the system.

4.2.2 Problem of residual generation with no simultaneous faults. In the case where only one failure can occur at a time on the system, we have the following corollary.

Corollary 2: Consider structured system (Σ_Δ) represented by digraph $G(\Sigma_\Delta)$ and assume that only one failure event can occur at a time on the system. The BFPRG has generically a solution iff $\forall i, j \in \{1, \dots, q\}$, with $i \neq j$, $\Omega_*(\mathbf{w} \cup \{\mathbf{f}_i\}) \neq \Omega_*(\mathbf{w} \cup \{\mathbf{f}_j\})$.

5. Examples

In this section, we illustrate our approach on two physical examples. These two examples are intentionally quite simple. Nevertheless, as we will discuss it in the next section, it is clear that our method is quite well-adapted to complex or large-scale systems using classical combinatorial programming techniques.

5.1 Application in immunology: case of B-cell model

In immunology, there are many examples of systems modelled by bilinear equations. These processes are studied in Mohler et al. (1978). We choose to illustrate the applicability of the presented method the basic proliferation of B-cells (Mohler and Kolodziej 1980). A class of white blood cells called lymphocytes is dedicated to immunity. These cells of the lymphatic system circulate in the body and are present in high concentration in certain lymphoid organs such as spleen and lymph nodes. Two lineages of lymphocyte may be recognized: B lymphocytes and T lymphocytes. B cells are directly bone marrow derived. In the humoral immune response, B cells, upon stimulation by antigen,

undergo a process of proliferation and differentiation into long-living, lymphocytes called memory cells and short-lived but high-antibody secreting cells called plasma cells. Antibodies are secreted also, but to a lesser extent, by cells incompletely differentiated. This process is modeled by the following system:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0 x + A_1 u_1 x + A_2 u_2 x + A_3 u_3 x + E_1 f_1 + E_2 f_2 \\ y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \end{cases} \quad (5)$$

where state vector is $x \in \mathbb{R}^5$, control vector is $u \in \mathbb{R}^3$ and the inputs to detect, which are not stricto-sensu considered as failures are $f \in \mathbb{R}^2$. The state and input components have the following meaning: x_5 is the population density of immunocompetent cells (ICC), which are sensitized lymphocyte cells with particular surface receptors of antigens according to k , which is the specificity or association constant. These immunocompetent cells may differentiate into plasma cells or into memory cells. The latter may further divide and enter the pool of immunocompetent cells. x_2 is the population density of the plasma cells, which are nonreproducing offspring of stimulated immunocompetent cells. x_3 is the population density of antibody sites which are free. x_4 is the population density of immune complex, which individually includes the antibody site and antigens. x_1 is the antigen concentration which triggers the response mechanism. u_1 is the ICC multiplication. u_2 is the plasma cell multiplication. u_3 is the binding multiplication. f_1 is the stem-cell source rate (from the bone marrow). f_2 is the inoculation rate of antigens.

f_1 is significant in immunotherapy since certain cancers (leukemia) have been treated by injection of healthy bone marrow cells into the blood stream of the patient. The model is used to analyze the effectiveness of such treatment by consideration of deterioration of infected process or organs as an added component to the model. Through this source of stem cells, f_1 is distributed according to affinity k (usually to be Poisson or Gaussian). We must detect any significant difference between the average k of f_1 and the real value of f_1 .

The other additive input f_2 is significant in disease prevention by vaccination, as well as in the simulation of experiments whereby may be inoculated with antigen of particular characteristics. The system matrices are given by

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 & \lambda_7 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_9 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{10} \end{pmatrix},$$

Fault detection and isolation for structured bilinear systems 15

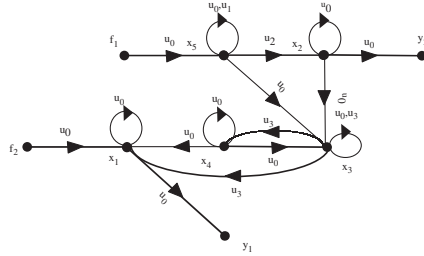


Figure 3. Digraph associated to B-cell model.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{13} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \lambda_{15} \end{pmatrix} \text{ and } E_2 = \begin{pmatrix} \lambda_{16} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

The digraph associated to such system is given in figure 3.

Let us first compute $\rho_c(\{f_1\})$:

Initialization:

$\rightarrow \Omega_0 = \{\{x_8\}\}, J_0 = X, i = 0$

Step 0:

- $\rightarrow \rho_0 = \rho(\{x_8\}, Y) = 1, \mu_0 = \mu(\{x_8\}, Y) = 3,$
- $\rightarrow J_1 = \{x_1, x_4\},$
- $\rightarrow \Delta_1 = \{x_8\},$
- $\rightarrow \Gamma_1 = \{x_2, x_3\},$

We have also that $\Gamma_{int} = \emptyset$.

- \rightarrow Computation of $\rho_A(\{f_1\}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1)$: $\rho_A(\{f_1\}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1) = 2$. Indeed, there exists an A -disjoint linking of size 2:

$$\mathcal{L}_1 = \{P_1, P_2\} \text{ where } \begin{cases} P_1 = f_1 \xrightarrow{\mu_0} x_5 \xrightarrow{\mu_1} x_2 \\ P_2 = f_1 \xrightarrow{\mu_0} x_5 \xrightarrow{\mu_0} x_3 \end{cases}$$

Since these two paths are prime $\{f_1\}$ - Γ_1 paths, we have $S(P_1) = S(P_2) = \emptyset$. Therefore, $\rho_A(\{f_1\}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1) = 2$ and so $\Omega_1 = \{\{x_2, x_3\}\}$.

$i = 1.$

Step 1:

- $\rightarrow \rho_1 = \rho(\{x_2, x_3\}, Y) = 2, \mu_1 = \mu(\{x_2, x_3\}, Y) = 6,$
- $\rightarrow J_2 = \emptyset,$
- $\rightarrow \Delta_2 = \{x_3, x_4, x_8\},$
- $\rightarrow \Gamma_2 = \{x_1, x_2\},$

We have that $\Gamma_{int} = \emptyset$.

- \rightarrow Computation of $\rho_A(\{f_1\}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1)$: $\rho_A(\{f_1\}, \Gamma_1, \Delta_1, \Gamma_1) = 2$. Indeed, there exists an A -disjoint linking of size 2:

$$\mathcal{L}_1 = \{P_1, P_2\} \text{ where } \begin{cases} P_1 = f_1 \xrightarrow{\mu_0} x_8 \xrightarrow{\mu_1} x_2 \\ P_2 = f_1 \xrightarrow{\mu_0} x_8 \xrightarrow{\mu_0} x_3 \end{cases}$$

Since these two paths are prime $\{f_1\}$ - Γ_2 paths, we have $S(P_1) = S(P_2) = \emptyset$. Therefore, $\rho_A(\{f_1\}, \Gamma_2, \Delta_2, \Gamma_2) = 2$ and so $\Omega_2 = \{\{x_1, x_2\}\}$.

- \rightarrow Since $\rho_A(\{f_1\}, \Gamma_2, \Delta_2, \Gamma_2) = \rho_1 = 2$, we have that $\Gamma_c(\{f_1\}) = \Gamma_2, \Delta_c(\{f_1\}) = \Delta_2, \rho_c(\{f_1\}) = 2, \Omega_c(\{f_1\}) = \Omega_2$.

Using the fact that $\rho_c(\{f_1\}) \leq \rho_c(F) \leq 2$, we have obviously that $\rho_c(F) = 2$. Moreover, doing the same computation than previously, we have $\rho_c(\{f_2\}) = 1$ and $\Omega_c(\{f_2\}) = \{\{x_1\}\}$.

The problem of residual generation with eventually simultaneous failures events is not generically solvable since $\rho_c(F) = \rho_c(\{f_1\}) = 2$ and $\rho_c(\{f_2\}) = 1$. Otherwise, since $\Omega_c(\{f_1\}) \neq \Omega_c(\{f_2\})$, the problem of residual

generation with no simultaneous faults is generically solvable.

Note that the problem of residual generation will be generically solvable if we add a sensor on x_3 or x_5 . In this case, $\rho_c(F) = 2$ while $\rho_c(\{f_1\}) = \rho_c(\{f_2\}) = 1$.

5.2 Application in transport: Case of vehicle suspension

We consider the example of a two degree of freedom quarter car model of vehicle suspension given in Mohler (1991) and Jiang and Wang (2002). Such bilinear system is described by a model of the form (after a reordering of the state component indices)

$$\begin{cases} \dot{x} = A_0x + u_1A_1x + E_fI + Hw_1 \\ y = Cx \end{cases} \quad (6)$$

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ is the state in which x_1 is the suspension deflection, x_2 is the wheel velocity, x_3 is the quarter car body displacement from the road, x_4 is the quarter car body velocity and u_1 the input, which consists on the variable damping. The output measurements are $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ where y_1 is the suspension deflection, y_2 is the wheel velocity and y_3 is the body displacement with respect to the road. Fault f_1 is an actuator fault and w_1 stands the disturbance which affects the vehicle body velocity. The system matrices are given by

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & \lambda_6 \\ 0 & \lambda_7 & 0 & 0 \\ \lambda_8 & \lambda_9 & 0 & \lambda_{10} \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{11} & 0 & \lambda_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{13} & 0 & \lambda_{14} \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{15} \\ 0 \\ \lambda_{16} \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_{17} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ and } C = \begin{pmatrix} \lambda_{18} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{19} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{20} & 0 \end{pmatrix}.$$

The digraph associated to the system is given in figure 4. It is quite easy to see that $\rho_c(W) = 1, \Omega_c(W) = \{\{x_2\}, \{x_4\}\}$ and $\rho_c(W \cup F) = 2, \Omega_c(W \cup F) = \{\{x_1, x_2\}\}$. Thus, the BFPRG problem is generically solvable. Note that if we do not have output y_2 , the BFPRG will be not generically solvable as we will have $\rho_c(W) = \rho_c(W \cup F) = 2$ and $\Omega_c(W) = \Omega_c(W \cup F) = \{\{x_1, x_3\}\}$.

6. Computational aspects and concluding remarks

Let us first analyse briefly the computational aspects of the proposed method. Mainly, according to Algorithm 1, there are three stages in the computation of $\rho_c(W_0) \subseteq W \cup F$:

- Computation of $\rho(\gamma, Y)$ and $\mu(\gamma, Y)$: we use classical algorithms of maximum flow calculation, the overall

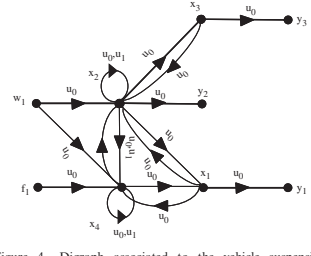


Figure 4. Digraph associated to the vehicle suspension model.

complexity is equal to $O(N^2\sqrt{M})$, where $M = (m+1)n^2 + n(q+d) + p$ is the maximal number of edges and $N = n+q+p+d$ is the number of vertices in the digraph.

- Extraction of the maximal A -disjoint linkings: on the basis of the precedent computation, we add to the disjoint paths (which are A -disjoint) other paths to complete the linking. There are two stages: path extraction and verification of conditions **Cond1** and **Cond2**. The overall complexity is equal to $O(N^3M\sqrt{M})$.
- Association of complete families to each path and computation of Ω_i ; these two calculations are made simultaneously, using logical expressions to characterize Ω_i . The construction of complete families is done according to constraints **Ca** and **Cb** of Definition 1. The overall complexity of this step is estimated equal to $O(N^3M)$. Note that at step $i+1$, we use results of step i , the definition of Δ_i and Γ_i is very useful to reduce the number of paths to be tested in the algorithm. Moreover, at each step, we construct a structured matrix \tilde{B}_i such that $\mathcal{M}(\tilde{B}_i) = \Omega_i$, this allows also to reduce considerably the number of paths to be tested in the algorithm.

Consequently, if we assume, without loss of generality, that $p \leq n, q \leq n$ and $d \leq n$, the overall complexity of Algorithm 1 is then $O(nm^2\sqrt{mm})$.

In order to improve the efficiency of the presented algorithms, we can simplify the considered digraph by removing all the edges starting from vertices included in X_c as well as all the edges which do not belong to a $F \cup W = Y$ path. Moreover, if there exists a set $W_0 \subseteq W$ and a set $Y_0 \subseteq Y$ such that all the outputs reached by elements of W_0 are included in Y_0 and all the elements of Y_0 are sensitive only to elements of W_0 (i.e. if $\exists W_0 \subseteq W$

and $Y_0 \subseteq Y$ such that $(W_1 \in W, \rho(W_1, Y_0) \neq 0) \subseteq W_0$ and $\{Y_1 \in Y, \rho(W_0, Y_1) \neq 0\} \subseteq Y_0$ then we can remove from the digraph the vertices of W_0 and all the state vertices which are sensitive to W_0 as well as Y_0 and all the state vertices which have a path towards Y_0 (i.e. we remove $W_0 \cup Y_0 \cup \{x_i \in X, \rho(W_0, \{x_i\}) + \rho(\{x_i\}, Y_0) > 0\}$ and all the edges starting and going to these vertices).

These simplifications allow us to work with a reduced digraph. Further studies can reduce the used digraph more efficiently using an extended notion of input separators.

Note, comparatively with geometric methods, that to compute the "minimum (C, A_j) -conditioned invariant sub-space" including H , we have to compute, in the worst case, all the products $A_1 \dots A_k H, k = 1, \dots, n$ and i_1, \dots, i_k elements of $\{0, \dots, m\}$. So there are more than $(m+1)^n$ matrix products to do. Since one such matrix product has a complexity order equal to $O(n^2 \times d)$, the overall complexity order, for the geometric methods, may be exponential. Moreover, if we consider all the numerical difficulties concerning the computation of intersection between subspaces and matrices inversion, like unconditioned matrices..., the proposed method is then more computationally efficient.

The main result of the paper is mainly to propose a graphical analysis tool to check if, for a given structured bilinear system, the fundamental problem of residual generation has a solution or not. Obviously, as we use a graphic approach, it is an extension to bilinear systems of the result provided in Commault *et al.* (2002) which concerns linear systems. The principal novelty here is that we deal with bilinear systems. To do so, necessarily we do not use the same approach to establish our result. Indeed, Commault *et al.* (2002) use a transfer matrix approach. The latter cannot be used for bilinear systems. This is why we characterize graphically, for any matrix H , the invariant \mathcal{R}_H which represents the minimum (C, A_j) -conditioned invariant subspace including $\text{im } H$, with $j=0, \dots, m$. On the one hand, this characterization is also an other original result for bilinear systems (for linear systems, this subspace has been characterized in Commault *et al.* (1997)). On the other hand, the used digraph is quite original with the use of indexed edges, where the indices are symbolic because they do not represent numerical values as in Lévine (1997). The indices on the edges allow us to handle the structure of the system (Boukhobza and Hamelin 2007) and are particularly adapted to study bilinear systems.

Furthermore, not many papers deal with the graph theoretic approach for non-linear systems while many interesting works study linear ones and this fact augments also the originality of the present work. In fact, we think that providing an adapted graphic representation and tools which allow us to extend the results obtained on linear systems to non-linear ones,

without loss of the numerical efficiency and other advantages of the graph-theoretic approach, constitutes the real originality of the present paper. Indeed, as noticed before, the proposed method needs little information about the system and is free from numerical difficulties. This makes it well-suited for large scale and uncertain systems and also in conception stages.

Finally, the presented results can be exploited in further works to study the sensor location in order to fulfill the solvability of residual generation problem as it is done in Commault and Dion (2007) for linear systems.

Appendix A: List of the main notations and symbols

- (Σ_λ) is the considered bilinear system on the form

$$(\Sigma_\lambda): \begin{cases} \dot{x} = A_0 x + \sum_{i=1}^m u_i A_i x + E f + H w \\ y = C x \end{cases}$$

where $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, f \in \mathbb{R}^q, w \in \mathbb{R}^d$ and $y \in \mathbb{R}^p$.

- \bar{O}_H is the minimal unobservability subspace of (Σ_λ) containing $\text{im } H$.
- \mathcal{R}_H represents the minimum (C, A_j) -conditioned invariant subspace including $\text{im } H$, with $j=0, \dots, m$.
- $\mathcal{R}_i, i \geq 0$ represents a subspace used to compute iteratively \mathcal{R}_H by means of relation of sequence 3.
- \mathcal{R}_H^f is the minimal structured fixed (w.r.t. structured parameters λ_i) subspace containing \mathcal{R}_H .
- $\mathcal{R}_{H,E}$ represents the minimum (C, A_j) -conditioned invariant subspace including $\text{im } H + \text{im } E$, with $j=0, \dots, m$.
- Let U a vector subspace depending on some structured parameters, $g_dim(U)$ represents the generic dimension of U .
- $\mathcal{G}(\Sigma_\lambda) = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ is the digraph associated to system (Σ_λ) . The vertex set is $\mathcal{V} = X \cup Y \cup F \cup W$, where $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ is the set of state vertices, $Y = \{y_1, \dots, y_p\}$ is the set of output vertices, $F = \{f_1, \dots, f_q\}$ is the set of fault vertices and $W = \{w_1, \dots, w_d\} W = \{w_1, \dots, w_d\}$ is the set of disturbance vertices.
- X_C is the vertex subset defined by $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$.
- $\alpha(P)$ is the end vertex of a path P . Similarly, consider a \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 linking noted \mathcal{L}_0 , we have that $\alpha(\mathcal{L}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{p \in \mathcal{L}_0} \{\alpha(P)\}$
- $\text{length}(P)$ represents the length of a path P .

- Let \mathcal{V}_1 and \mathcal{V}_2 denote two vertex subsets.
- $\text{card}(\mathcal{V}_1)$ represents the cardinality of vertex subset \mathcal{V}_1 .
- $\rho(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ is the maximal number of disjoint \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 paths.

- $\mu(\mathcal{V}_1$ - $\mathcal{V}_2)$ is the minimal number of vertices of $X \cup Y$ belonging to a maximal \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 linking.
- Consider path $P = v_0 \xrightarrow{u_1} v_1 \xrightarrow{u_2} \dots \xrightarrow{u_n} v_n$, $\sigma(P) = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$ is the indice associated to P . Operations \oplus and \odot are related to these indices. $\text{length}(\sigma)$ is the length of indice σ i.e. the number of terms u_i in σ . $p(u)$ is the set of all possible ordered monomials.
- $\theta(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ denotes the maximal number of disjoint edges from \mathcal{V}_1 to \mathcal{V}_2 .
- $M(B) \subseteq 2^X$ is the maximal matching partition of structured matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
- Consider vertex subsets $W_0 \subseteq W \cup F$ and $\Gamma_{\text{int}} \subseteq X_C, Q_j$ denotes a prime W_0 - Γ_{int} path i.e. Q_j is a W_0 - Γ_{int} and there does not exist a W_0 - Γ_{int} path P such that Q_j is a strict multiple of P .
- $S(P)$ is a minimal complete W - Γ_{int} associated to a path P (see Definition 1 for more details).
- $J_i, \Delta_i, \Gamma_i, \Gamma_{\text{ext}}$ and Γ_{ext} are vertex subsets included in X while Ω_i is a set of vertex subsets of X and $\rho_A(\dots)$ as well as $\rho(\dots)$ are positive integers. All these sets and numbers are defined and computed in Algorithm 1.
- Let V_0 a vertex subset included in X (it can be indifferently, Γ_1, J_1 or Δ_1 in the text), we denote by e_{V_0} the following diagonal $n \times n$ matrix:

$$e_{V_0}(j,j) = \begin{cases} 1 & \text{if } x_j \in V_0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- For any subset $V_w \in W \cup F$, positive integer $\rho_d(V_w, \gamma, \Delta_1, \Gamma_1)$ is defined in Definition 1.

References

M. Blanke, M. Kinnaert, J. Lunze and M. Staroswiecki, *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*, Heidelberg, Germany: Springer-Verlag, 2003.

T. Boukhobza and F. Hamelin, "Observability analysis for structured bilinear systems: a graph-theoretic approach", *Automatica*, 43, pp. 1111-1118, 2007.

C. Commault and J.M. Dion, "Sensor location for diagnosis in linear systems: a structural analysis", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 52, pp. 155-169, 2007.

C. Commault, J.M. Dion and V. Hovelague, "A geometric approach for structured systems: application to disturbance decoupling", *Automatica*, 33, pp. 403-409, 1997.

C. Commault, J.M. Dion, O. Senarne and R. Moteyan, "Observer-based fault diagnosis for structured systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 47, pp. 2074-2079, 2002.

C. De Persis and A. Isidori, "On the observability codistributions of a nonlinear system", *Syst. Contr. Lett.*, 40, pp. 297-304, 2000.

C. De Persis and A. Isidori, "A geometric approach to nonlinear fault detection and isolation", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 46, pp. 853-865, 2001.

J.M. Dion, C. Commault and J.W. van der Woude, "Generic properties and control of linear structured systems: a Survey", *Automatica*, 39, pp. 1125-1144, 2003.

D. Düstogor, V. Cocquemot and M. Staroswiecki, "Structural analysis for residual generation: towards implementation", in *IEEE Conference on Control Application: Proceedings of CCA'04*, Taipei, Taiwan, pp. 1217-1222, 2004.

M. Ekman, "Suboptimal control for the bilinear quadratic regulator problem: application to the activated sludge process", *IEEE Trans. Contr. Syst. T.*, 13, pp. 162-168, 2005.

J. Gertler, *Fault Detection and Diagnosis in Engineering Systems*, New York, USA: Marcel Dekker, 1998.

H. Hammouri, K. Kabore and M. Kinnaert, "A geometric approach to fault detection and isolation for bilinear systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 46, pp. 1451-1455, 2001.

H. Hammouri, M. Kinnaert and E.H. El Yaagoubi, "Observer based approach to fault detection and isolation for non linear systems", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 44, pp. 1879-1884, 1999.

B. Jiang and J.L. Wang, "Actuator fault diagnosis for a class of bilinear systems with uncertainties", *J. Franklin I.*, 339, pp. 361-374, 2002.

M. Kinnaert, "Robust fault detection based on observers for bilinear systems", *Automatica*, 35, pp. 1829-1842, 1999.

J. Lévine, "A graph-theoretic approach to input output decoupling and linearization", in *Nonlinear Systems*, A.J. Fossard and D. Normand-Cyrot, Eds, London, UK: Chapman & Hall, 1997, pp. 77-91.

M.A. Massoumia, G.C. Verghese and A.S. Willsky, "Failure detection and identification", *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 34, pp. 316-321, 1989.

R.R. Mohler, *Nonlinear Systems: Application to Bilinear Systems*, Englewood Cliffs, USA: Prentice-Hall, 1991.

R.R. Mohler, C.F. Barton and C.S. Hsu, *T and B Cell Models in the Immune System*, New York, USA: Marcel Dekker, 1978, pp. 415-436.

R.R. Mohler and W. Kolodziej, "An overview of bilinear system theory and applications", *IEEE Trans. Syst., Man and Cybernet.*, SMC, pp. 683-688, 1980.

K. Murota, *System Analysis by Graphs and Matroids*, New York, USA: Springer-Verlag, 1987.

M. Staroswiecki, "Structural analysis for fault detection and isolation and for fault tolerant control", in *Fault Diagnosis and Fault Tolerant Control*, P. Frank and M. Blanke, Eds, Oxford, UK: Eolss Publishers, 2002.

J.W. van der Woude, "The generic number of invariant zeros of a structured linear system", *SIAM J. Contr. Optimiz.*, 38, pp. 1-21, 2000.

H. Yang and M. Saif, "State observation, failure detection and isolation (FDI) in bilinear systems", in *Proceedings of the 34th IEEE Conference on Decision and Control*, New Orleans, USA: pp. 2391-2396, 1995.

D. Yu and D.N. Shields, "A bilinear fault detection observer", *Automatica*, 32, pp. 1597-1602, 1996.

D. Yu, D.N. Shields and S. Daley, "A bilinear fault detection observer and its application to a hydraulic drive system", *Inter. J. Contr.*, 64, pp. 1023-1047, 1996.

Annexe B : Liste des symboles et notations

Dans cette annexe, sont rappelées les définitions des principaux symboles et notations relatifs aux outils graphiques que j'utilise dans les chapitres 1 et 2. Cette liste n'est pas exhaustive et ne comporte pas les symboles n'intervenant que localement dans un paragraphe.

Soient \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 deux ensembles de sommets.

- ◇ Un **lien** \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 est un ensemble de ℓ chemins \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 disjoints. C'est la traduction que nous avons faite du terme "linking". Les liens consistant en un nombre maximal de chemins sont dits liens maximaux.

- ◇ $\text{card}(\mathcal{V}_1)$ représente le nombre d'éléments de l'ensemble \mathcal{V}_1 .

- ◇ $\rho[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$ est le nombre maximal de chemins disjoints partant de \mathcal{V}_1 et arrivant à \mathcal{V}_2 . C'est donc la taille d'un lien \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 maximal.

- ◇ $\mu[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$ le nombre minimal de sommets couverts par un nombre maximal de chemins disjoints partant de \mathcal{V}_1 et arrivant à \mathcal{V}_2 .

- ◇ $\mathbf{V}_{\text{ess}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ regroupe les sommets communs à tous les liens \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 maximaux.

- ◇ $\mathbf{S}^i(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$, appelé séparateur d'entrée pour les ensembles \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 , est l'ensemble des sommets de fin de tous les chemins \mathcal{V}_1 - $\mathbf{V}_{\text{ess}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$ directs en prenant en compte les chemins de longueur nulle.

- ◇ $\mathbf{S}^o(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2)$, appelé séparateur de sortie pour les ensembles \mathcal{V}_1 et \mathcal{V}_2 , est l'ensemble des sommets de début de tous les chemins $\mathbf{V}_{\text{ess}}(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2) - \mathcal{V}_2$ directs, en prenant en compte les chemins de longueur nulle.

- ◇ $\theta[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$ est le nombre maximal d'arcs v -disjoints dont les sommets de début sont dans \mathcal{V}_1 et les sommets de fin dans \mathcal{V}_2 .

- ◇ $g_rang(M)$ est le rang générique de la matrice structurée M .
- ◇ $g_dim(E)$ est la dimension générique du sous-espace vectoriel E .
- ◇ La subdivision $\Sigma_0 - \Sigma_1$ d'un graphe consiste à déterminer les ensembles $\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_0, \mathbf{U}_1, \mathbf{U}_0, \mathbf{X}_s$ et \mathbf{X}_0 . Diverses versions de cette subdivision, consistant en sa paramétrisation par un ensemble de sommets et un ensemble d'arcs, sont définies aux paragraphes 1.3.2, 1.4.2 et 2.3.2.3.
- Soit \mathbf{V} un ensemble de sommets tel que $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{V} \subseteq \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$.
- ◇ $\beta_1(\mathbf{V})$ est le nombre maximal de sommets de $\mathbf{X}_1(\mathbf{V}) \cup \mathbf{X}_s(\mathbf{V}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{V})$ couverts par une union disjointe
- d'un lien $\mathbf{X}_s(\mathbf{V}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{V}) - \Upsilon_1(\mathbf{V})$ de taille $\rho[\mathbf{X}_s(\mathbf{V}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{V}), \Upsilon_1(\mathbf{V})]$,
 - d'une famille de chemins $\mathbf{X}_1(\mathbf{V}) - \Upsilon_1(\mathbf{V})$ simples
 - d'une famille de cycles ne couvrant que des éléments de $\mathbf{X}_1(\mathbf{V})$.
- ◇ $\beta_0(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \mu[\mathbf{U}_0(\mathbf{V}), \mathbf{S}^\circ(\mathbf{V})] - \rho[\mathbf{U}_0(\mathbf{V}), \mathbf{S}^\circ(\mathbf{V})]$.
- ◇ $\beta(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \beta_1(\mathbf{V}) + \beta_0(\mathbf{V}) + \text{card}(\mathbf{V} \setminus \mathbf{Y})$.
- ◇ $\mathcal{V}_{obs} \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{X} \cup \mathbf{U}, \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{v}\}) = \beta(\mathbf{Y}) \right\}$.
- ◇ $\varphi(\mathcal{V}_1)$ représente l'ensemble des sommets successeurs immédiats des sommets de \mathcal{V}_1 *i.e.*
 $\varphi(\mathcal{V}_1) = \left\{ \mathbf{v}' \in \mathcal{V}, \theta[\mathcal{V}_1, \{\mathbf{v}'\}] \neq 0 \right\}$.
- ◇ $\bar{\varphi}(\mathcal{V}_1)$ représente l'ensemble des sommets prédécesseurs immédiats des sommets de \mathcal{V}_1 *i.e.*
 $\bar{\varphi}(\mathcal{V}_1) = \left\{ \mathbf{v}' \in \mathcal{V}, \theta[\{\mathbf{v}'\}, \mathcal{V}_1] \neq 0 \right\}$.
- ◇ π est une fonction bijective qui associe un ensemble de sommets inclus dans \mathbf{Z} à son sommet composé *i.e.* $\{\mathbf{z}_{i_1}, \mathbf{z}_{i_2}, \dots, \mathbf{z}_{i_k}\} \mapsto \pi(\{\mathbf{z}_{i_1}, \mathbf{z}_{i_2}, \dots, \mathbf{z}_{i_k}\}) \stackrel{def}{=} \mathbf{z}_{i_1, i_2, \dots, i_k}$.
 $\bar{\pi}$ est la fonction réciproque de π .
- ◇ $\bar{\varphi}_e(\mathcal{V}_0) = \left(\bigcup_{s \in \mathcal{V}_0 \cap \mathbf{Z}_C} \bar{\varphi}(\bar{\pi}(s)) \right) \cup \bar{\varphi}(\mathcal{V}_0 \cap (\mathbf{Y} \cup \mathbf{X}))$, où $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathbf{Y} \cup \mathbf{X} \cup \mathbf{Z}_C$. Cette fonction étend la définition de $\bar{\varphi}$ pour prendre en compte l'ensemble \mathbf{Z}_C .
- ◇ $\theta_A[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$ est le nombre maximal d'arcs A -disjoints dont les sommets de début sont dans \mathcal{V}_1 et les sommets de fin dans \mathcal{V}_2 .
- Soit $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ un ensemble d'arcs.

- ◇ $\bar{\rho}[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{S}_{\mathcal{E}}]$ représente le nombre maximal de chemins disjoints dont le début est dans \mathcal{V}_1 , la fin dans \mathcal{V}_2 et qui n'utilisent que des arcs de $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$.
- ◇ $\bar{\theta}[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{S}_{\mathcal{E}}]$ représente le nombre maximal d'arcs v -disjoints inclus dans $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$, dont le début est dans \mathcal{V}_1 , la fin dans \mathcal{V}_2 .
- ◇ $\bar{\mu}[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, \mathcal{S}_{\mathcal{E}}]$ est le nombre minimal de sommets de $\mathbf{U}_e \cup \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$ couverts par un lien \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 maximal n'utilisant que des arcs de $\mathcal{S}_{\mathcal{E}}$.
Soit P un chemin,
- ◇ $\alpha(P)$ représente le sommet de fin de P .
- ◇ $\bar{\alpha}(P)$ représente le sommet de début de P .
- ◇ $\epsilon(P)$ est un ensemble d'arcs défini pour chaque chemin simple P , tel que $\epsilon(P) = \{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \mathcal{E}, \text{ tel que } P \text{ couvre } \mathbf{v}_2 \text{ et ne couvre pas } \mathbf{v}_1, \text{ où } \mathbf{v}_2 \neq \bar{\alpha}(P)\}$.
- ◇ $\sigma(P)$ définit l'indice d'un chemin dans les représentations graphiques d'un système bilinéaire. Plus précisément, à chaque chemin $P = \mathbf{v}_0 \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v}_1 \xrightarrow{u_{i_2}} \dots \xrightarrow{u_{i_s}} \mathbf{v}_s$, est associé $\sigma(P) \stackrel{def}{=} u_{i_1} \cdot u_{i_2} \cdot \dots \cdot u_{i_s}$.
- ◇ $\mathcal{M}(u)$ est l'ensemble de tous les monômes ordonnés en u_0, u_1, \dots, u_m .
- ◇ $\phi(P)$ est un ensemble de chemins défini pour chaque chemin simple $P = \mathbf{v}_0 \xrightarrow{u_{i_1}} \mathbf{v}_1 \xrightarrow{u_{i_2}} \dots \xrightarrow{u_{i_s}} \mathbf{v}_s$, et qui regroupe $\phi(P)$ tous les chemins couvrant exactement les mêmes sommets *i.e.* $\phi(P) = \left\{ P', P' = \mathbf{v}_0 \xrightarrow{u_{j_1}} \mathbf{v}_1 \xrightarrow{u_{j_2}} \dots \xrightarrow{u_{j_s}} \mathbf{v}_s \right\}$.
- ◇ La fonction σ est étendue pour pouvoir être appliquée à un ensemble de chemins \mathfrak{C} :
$$\sigma(\mathfrak{C}) = \bigoplus_{Q \in \mathfrak{C}} \sigma(Q).$$
- ◇ $\vartheta(e)$ est un ensemble de sommets associé à chaque arc et ayant initialement la valeur $\vartheta(e) = \{\alpha(e)\}$.
- ◇ $\theta_{AX}[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$ est le nombre maximal d'arcs AX -disjoints dont les sommets de début sont dans \mathcal{V}_1 et les sommets de fin dans \mathcal{V}_2 .
Soit H une matrice quelconque à n lignes où n est aussi le nombre de colonnes de C et de toutes les matrices carrées $A_i, i = 0, \dots, m$.

- ◇ $\bar{\mathcal{O}}_H$ est le sous-espace d'inobservabilité minimal contenant $\text{Im } H$.
- ◇ \mathcal{R}_H représente le sous-espace (C, A_j) -invariant ($j = 0, \dots, m$) minimal contenant $\text{Im } H$.
- ◇ \mathcal{R}_H^f est le plus petit des sous-espaces vectoriels fixes (dont la base serait formé uniquement de vecteurs de la base canonique), qui contiennent \mathcal{R}_H , dans le cas ou le système considéré est structuré.
- ◇ $\mu_{X,Y}[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2]$ le nombre minimal de sommets dans $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$ couverts par un lien \mathcal{V}_1 - \mathcal{V}_2 maximal.
Soit une matrice $B \in \mathbb{R}^{\ell \times n}$ à laquelle est associé un graphe biparti $\mathcal{B}_M = (\mathcal{V}^+; \mathcal{V}^-; \mathcal{E}_M)$ où $\mathcal{V}^+ \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^+, \dots, \mathbf{x}_\ell^+\}$, $\mathcal{V}^- \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{X}$ et $\mathcal{E}_M \stackrel{\text{def}}{=} \{(\mathbf{x}_i^+, \mathbf{x}_j), B(j, i) \neq 0\}$.
- ◇ $\text{Couplage}(B) = \{\gamma \subseteq \mathbf{X}, \text{card}(\gamma) = \theta(\mathcal{V}^+, \mathbf{X}) = \theta(\mathcal{V}^+, \gamma)\}$.

$S(P)$ dénotant une famille complète associée au chemin P , et le nombre ρ_A ont des descriptions assez complexes (c.f. définition 2.4) qu'il ne nous a pas semblé intéressant de reporter dans cette liste. Il en est de même pour le nombre ρ_* ainsi que l'ensemble de sommets Ω_* associés à un ensemble de défauts et/ou de perturbations, qui traduisent la propagation de ce dernier dans un système bilinéaire et qui sont calculés par l'algorithme 2.3 (page 101). L'utilisation de ces définitions, propres à l'étude du problème de génération de résidu, reste très concentrée sur quelques pages du manuscrit.