



HAL
open science

Algorithmique du polygone de Newton appliqué à la résolution d'équation algébrique

El Hassan Tahiri El Alaoui

► **To cite this version:**

El Hassan Tahiri El Alaoui. Algorithmique du polygone de Newton appliqué à la résolution d'équation algébrique. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1984. Français. NNT : . tel-00312692

HAL Id: tel-00312692

<https://theses.hal.science/tel-00312692v1>

Submitted on 25 Aug 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

l' Université Scientifique et Médicale de Grenoble

pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE 3ème CYCLE
«analyse numérique»

par

TAHIRI EL ALAOUI EI Hassan



ALGORITHMIQUE DU POLYGONE DE NEWTON

APPLIQUE A LA RESOLUTION D'EQUATION ALGEBRIQUE.



Thèse soutenue le 28 juin 1984 devant la commission d'examen.

N. GASTINEL	} Président	
J. DELLA-DORA		} Examineurs
M. DUC JACQUET		
J. THOMANN		

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Année universitaire 1982-1983

Président de l'Université : M. TANCHE

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

(RANG A)

SAUF ENSEIGNANTS EN MEDECINE ET PHARMACIE

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

ARNAUD Paul	Chimie organique
ARVIEU Robert	Physique nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S.
AYANT Yves	Physique approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale C.N.R.S. (labo de magnétisme)
BARJON Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose-Biologie
BARRA Jean-René	Statistiques - Mathématiques appliquées
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude (M.)	Mathématiques pures
BERNARD Alain	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
BILLET Jean	Géographie
BONNIER Jean-Marie	Chimie générale
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
CRABBE Pierre (détaché)	C.E.R.M.O.
CYROT Michel	Physique du solide
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude (M.)	M.I.A.G. Mathématiques appliquées
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique

GASTINEL Noël	Analyse numérique - Mathématiques appliquées
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KAHANE André (détaché DAFCO)	Physique
KAHANE Josette	Physique
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
KUPTA Yvon	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Thermodynamique
LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires I.S.N.
LOUP Jean	Géographie
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAYNARD Roger	Physique du solide
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie (géologie)
MOZIERES Philippe	Spectrométrie - Physique
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (biologie végétale)
PAYAN Jean-Jacques (détaché)	Mathématiques pures
PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIAUX Jacques	Géologie
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
RICHARD Lucien	Biologie végétale
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
SENGEL Philippe	Biologie animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques pures
SOUTIF Michel	Physique
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEN Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VIALON Pierre	Géologie

PROFESSEURS DE 2^{ème} CLASSE

ADIBA Michel	Mathématiques pures
ARMAND Gilbert	Géographie

AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
BEGUIN Claude (M.)	Chimie organique
BOEHLER Jean-Paul	Mécanique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKOVE Claude (M.)	Géologie
LE BRETON Alain	Mathématiques appliquées
LONGEQUEUE Nicole	Sciences nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physiques
LUNA Domingo	Mathématiques pures
MASCLE Georges	Géologie
NEMOZ Alain	Thermodynamique (CNRS - CRTBT)
OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude (détaché)	Physique du solide
PIBOULE Michel	Géologie
PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
ROBERT Gilles	Mathématiques pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
ROSSI André	Physiologie végétale
SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
SARROT REYNAUD Jean	Géologie
SAXOD Raymond	Biologie animale
SOUTIF Jeanne	Physique
SCHOOL Pierre-Claude	Mathématiques appliquées
STUTZ Pierre	Mécanique
SUBRA Robert	Chimie
VIDAL Michel	Chimie organique
VIVIAN Robert	Géographie

A ma famille

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur J. DELLA DORA de m'avoir accepté au sein de l'équipe. Ses conseils et ses encouragements ont été pour moi un soutien très précieux.

Je suis très sensible à l'honneur que me fait Monsieur le Professeur N. GASTINEL en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Je remercie vivement Monsieur le Professeur M. DUC JACQUET qui a accepté de participer à ce jury.

Que Monsieur J. THOMANN reçoive mes sincères remerciements d'être venu de Strasbourg pour siéger à ce jury.

Mes remerciements vont aussi à Mesdames M. LEJEUNE et D. DUVAL pour les possibilités d'échange que j'ai pu avoir avec elles.

Je remercie également Mesdames C. DICRESCENZO et E. TOURNIER pour leur aide à la réalisation des algorithmes de cette thèse.

Je remercie Madame BICAIS pour la frappe ainsi que le service de reprographie pour l'excellente qualité de leur travail.

Enfin, j'exprime ma gratitude et mon amitié à tous les membres de l'équipe d'Analyse Numérique pour leur contribution que chacun d'eux a pu apporter.

S O M M A I R E

	page
INTRODUCTION	1
CHAPITRE I : SOLUTIONS FORMELLES D'EQUATION ALGEBRIQUE DE DEUX VARIABLES.....	5
Introduction	7
I.1 Séries formelles de Puiseux	8
I.2 Fonction algébrique	12
I.3 Algorithme de Newton	21
I.4 Algorithme de manipulation des séries formelles ..	41
I.5 Algorithme et Exemples	46
CHAPITRE II : SOLUTIONS FORMELLES D'EQUATION ALGEBRIQUE DE TROIS VARIABLES	51
Introduction	53
II.1 Quelques définitions	54
II.2 Solutions formelles au voisinage de point régulier	54
II.3 Solutions formelles au voisinage de point critique	61
II.4 Seconde méthode pour le cas critique	79
CHAPITRE III : DETERMINATION DES POLYNOMES FACTEURS DETERMINANTS D'UN OPERATEUR DIFFERENTIEL. 85	
Introduction	87
III.1 Quelques définitions	88
III.2 Coefficients du nouvel opérateur	91
III.3 Détermination des polynômes F.D.	96
III.4 Programme et Exemples	
REFERENCES	115

INTRODUCTION

On étudie dans le corps des séries formelles de Puiseux noté $k((x))^*$, la détermination des branches de solutions d'une équation algébrique $f(x,y)=0$ où $f \in k((x))^*[y]$. Une première réduction ramène le problème au cas où l'origine appartient à la courbe i.e. $f(0,0) = 0$.

Le développement des branches de solutions au voisinage de l'origine, dépend de la nature de celui ci, qu'il soit régulier ou singulier.

Pour le premier cas -origine régulier- nous avons développé un algorithme basé sur la méthode itérative de Newton:

$$(1) \quad y_{k+1} = y_k - f(y_k) \times [f'(y_k)]^{-1}$$

le calcul de l'inverse de $f'(y_k)$ se faisait en appliquant une autre fois la méthode de Newton à la fonction: $f(x) = 1/x - a$, où a est la série à inverser; la formule de Newton devient:

$$(2) \quad x_{k+1} = 2x_k - a \cdot x_k^2$$

La combinaison de ces deux formules donne l'algorithme permettant dans le cas régulier de déterminer les approximants de la solution de l'équation $f(x,y) = 0$ qui s'annule pour $x = 0$.

Pour le second cas -origine singulier- la méthode utilisée est itérative, elle détermine pour chaque itération le terme $\alpha_i x^{\epsilon_i}$ de la solution.

- °) La détermination de ϵ_i se fait à l'aide d'une construction géométrique appelée polygone de Newton

- °) La détermination de α_i s'obtient en résolvant l'équation caractéristique associée à f et ϵ_i .

La procédure se poursuit ainsi, en tenant compte que si l'ordre en y de la nouvelle fonction pour $x=0$ est égale à un, on applique alors l'algorithme du cas régulier pour déterminer le reste de la solution.

Une troisième partie de ce chapitre 1, a été consacré à la définition de la suite des paires caractéristiques de Puiseux qui détermine le type topologique d'une courbe au voisinage d'une singularité isolée. Pour cela, nous avons traité un exemple pour montrer comment on peut décrire géométriquement le type topologique d'une courbe, uniquement à l'aide de cette suite de paires de nombres entiers.

Dans le chapitre 2, on s'est intéressé à la résolution des équations algébriques de trois variables $f(x,y,z) = 0$ où $f \in k[x,y,z]$. Là aussi, le développement des solutions dépend de la nature du point au voisinage duquel on développe les solutions.

Pour les points réguliers, on a étendu les deux formules itératives du cas régulier du chapitre 1, en deux formules qui manipulent les séries doubles; c'est à dire:

- °) La première formule calcule la série inverse d'une série double inversible.
- °) La seconde, détermine la solution de $f(x,y,z) = 0$ qui s'annule pour $x = y = 0$.

Pour les points critiques, nous avons adopté le même principe que celui de la méthode du cas singulier du chapitre 1, c'est à dire en déterminant de proche en proche les termes

$\alpha_i x^{\epsilon_i} y^{\tau_i}$ de la solution, et ceci en deux parties:

- °/ Les exposants ϵ_i et τ_i sont déterminés à partir du polygône de Newton de f .

°/ Le coefficient α_i est obtenu en résolvant l'équation caractéristique associée à f , ϵ_i et τ_i .

La difficulté observé pour cette partie, est la construction du polyèdre de Newton qui a été résolue en construisant un programme nommé polyèdre, qui détermine toutes les faces du polyèdre pour lesquelles le vecteur normal à la face est positif. Evidemment il existe des cas pour lesquels le polyèdre n'est formé que des faces à vecteur normal non positif; dans ce cas nous dirons que le polyèdre est formé d'une droite qui sera utilisée pour paramétriser les solutions.

L'équation caractéristique associée à f et aux exposants ϵ_i et τ_i , est une équation algébrique de deux variables (resp. à une seule variable) lorsque le polyèdre est formé d'une ou plusieurs faces (resp. une droite). La résolution de cette équation se fait à l'aide de l'algorithme du chapitre 1.

Comme le temps d'exécution de cette méthode est très élevé, nous avons proposé une autre méthode qui consiste à prendre l'enveloppe convexe de la projection orthogonale du polyèdre de Newton sur le plan $x=0$. Cette **enveloppe** convexe est le polygone de Newton de la projection orthogonale des points surfaces sur le plan $x = 0$ elle s'obtient rapidement, ce qui permet de gagner du temps par rapport à la première.

Dans le troisième chapitre, on s'est intéressé à la détermination des polynômes facteurs déterminants d'un opérateur différentiel L à singularité irrégulière à l'origine, en utilisant le principe de la méthode de la résolution d'une équation algébrique de deux variables au voisinage d'un point singulier. En effet; après la formalisation des coefficients $b_i(x)$ du nouvel opérateur M défini par:

$$M v(x) = e^{-Q(x)} L (e^{Q(x)} v(x))$$

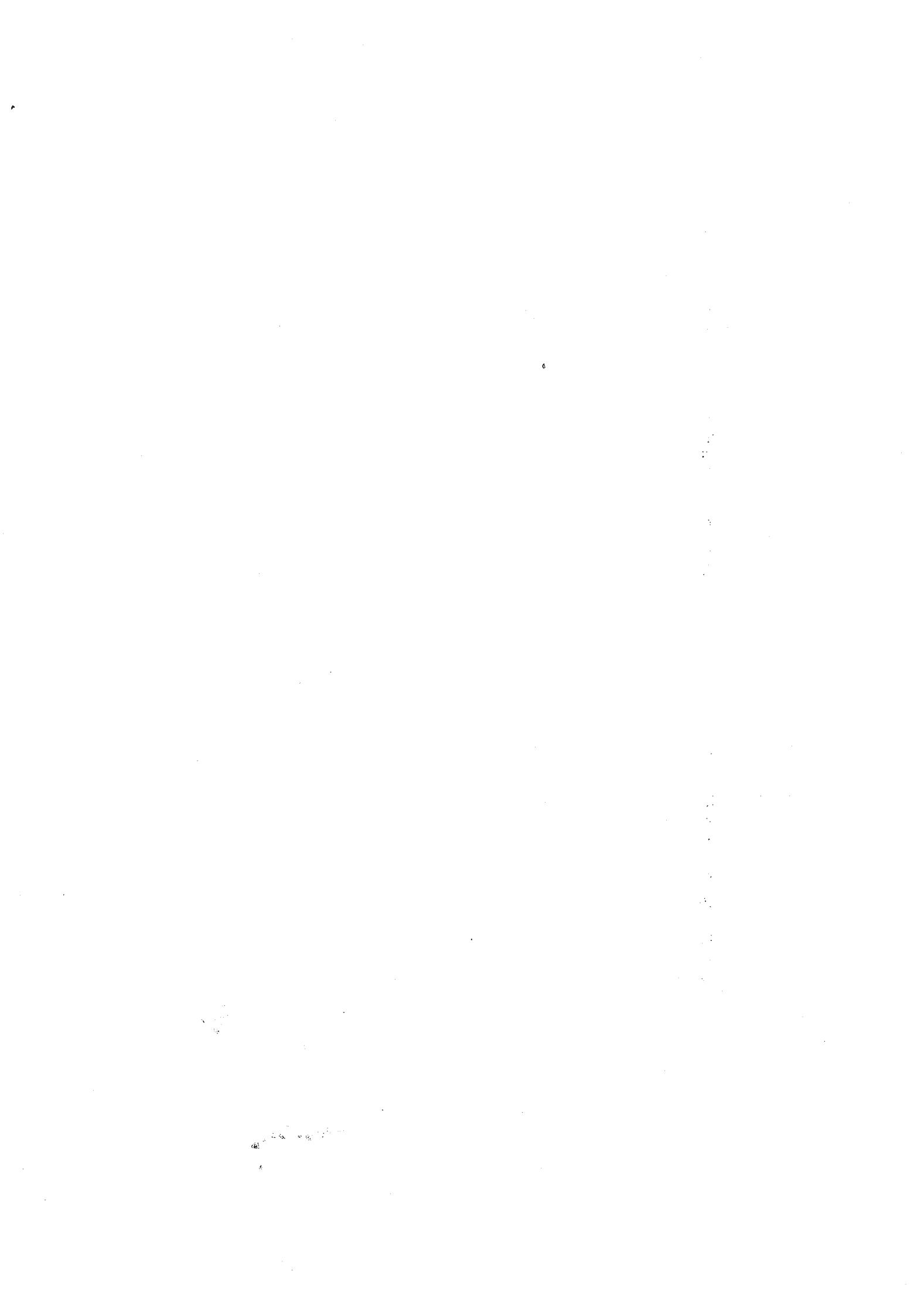
les coefficients $b_i(x)$ sont donnés par une fonction en x , $y = Q'(x)$ et les dérivées successives de y . Pour que l'indice caractéristique de M soit strictement inférieur à m , ceci nécessite d'augmenter l'ordre de cette fonction, d'où d'appliquer le principe de la méthode de la résolution d'une équation algébrique de deux variables.

C H A P I T R E I

=====

SOLUTIONS FORMELLES D'EQUATION
ALGEBRIQUE DE DEUX VARIABLES

- I.0 Introduction
- I.1 Séries formelles de Puiseux
 - 1.1 Séries formelles de Puiseux
 - 1.2 Théorème de Puiseux
- I.2 Fonctions algébriques
 - 2.1 Définitions
 - 2.2 Solutions formelles au voisinage de point régulier
 - 2.3 Solutions formelles au voisinage de point singulier
 - 2.4 Singularité à l'infini
- I.3 Algorithme de Newton
 - 3.1 Introduction
 - 3.2 Polygone de Newton
 - 3.3 Discussion
 - 3.4 Paires caractéristiques de Puiseux
 - 3.5 Cas irréductible
- I.4 Algorithme de manipulation des séries formelles
 - 4.1 Introduction
 - 4.2 Algorithme d'inversion d'une série
 - 4.3 Racine d'un polynôme
- I.5 Algorithme et exemples



INTRODUCTION

Soit k un corps algébriquement clos, de caractéristique zéro. Soit f un polynôme en y à coefficients dans le corps des séries formelles de Puiseux $k((X))^*$. Quitte à faire un changement de variable (c'est l'objet du § 1), on peut supposer que f est un élément de $k[[X]][Y]$. Alors, les solutions formelles de l'équation algébrique $f(x,y) = 0$ au voisinage d'un point x_0 , dépendent de la nature du point, qu'il soit régulier ou singulier ou à l'infini.

*) Si le point est régulier, les développements sont de la forme :

$$Y(x) = a_0 + a_1 (x-x_0) + a_2 (x-x_0)^2 + a_3 (x-x_0)^3 + \dots$$

où $a_i \in k$ et a_0 est une racine simple de $f(x_0, Y) = 0$.

*) Si le point est singulier, les développements sont donnés par :

$$y(x) = a_1(x-x_0)^{r_1} + a_2(x-x_0)^{r_2} + a_3(x-x_0)^{r_3} + \dots$$

où $a_i \in k - \{0\}$ et (r_i) forment une suite croissante de nombres rationnels de même dénominateur, avec seulement un nombre fini de termes à exposants négatifs.

*) Si le point est à l'infini, en effectuant le changement : $g(x,y) = x^m f(1/x, y)$ où m est le degré de f par rapport à x . On obtient une nouvelle fonction f , qui s'annule pour $x=0$ et $y=0$, avec $g(0, Y)$ admettant une racine nulle i.e. $\text{ord}(g(0, Y)) \geq 1$, ce qui nous conduit à appliquer à g l'une des deux méthodes celle du point régulier où celle du point singulier, pour déterminer les branches de solutions de l'équation $g(x,y) = 0$ au voisinage de l'origine.

Nous proposons un algorithme général, qui permet dans les trois cas, de déterminer les branches de solutions de l'équation algébrique $f(x,y) = 0$, au voisinage d'un point x_0 (x_0 peut être le point infini si f appartient à $k[[X, Y]]$).

I.1 - SERIES FORMELLES DE PUISEUX1.1 - Séries formelles de Puiseux

Soit k un corps algébriquement clos et de caractéristique zéro. Nous noterons comme d'habitude :

$k[X]$: l'anneau des polynômes en une indéterminée à coefficients dans k .

$k(X)$: son corps de fraction

$k[[X]]$: l'algèbre des séries formelles à une indéterminée sur k . Ce sont des expressions de la forme : $\sum_{i \geq 0} a_i x^i$ avec $a_i \in k$

Définition

Pour $u \in k[[X]]$, on appelle ordre de u et on note $\text{ord}(u)$, l'entier r défini par :

$$u(x) = x^r \bar{u}(x) \quad \text{avec } \bar{u}(0) \neq 0$$

Soient u et v deux éléments de $k[[X]]$ avec v non nul. Alors il existe \bar{u} et \bar{v} éléments de $k[[X]]$ tels que :

$$u(x) = x^r \bar{u}(x) \quad r = \text{ord}(u), \text{ i.e. } \bar{u}(0) \neq 0$$

$$v(x) = x^s \bar{v}(x) \quad s = \text{ord}(v), \text{ i.e. } \bar{v}(0) \neq 0$$

on peut calculer le quotient $u(x)/v(x) = x^{r-s} w(x)$ où $w = \bar{u}/\bar{v}$ appartient à $k[[X]]$ car \bar{v} est inversible.

Si on écrit $n = r-s$, $n \in \mathbb{Z}$ alors

$$\frac{u(x)}{v(x)} = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + a_{n+2} x^{n+2} + \dots$$

n est l'exposant initial de u/v . C'est un entier égal à l'ordre de u moins l'ordre de v .

Notons $k((x))$, l'ensemble des séries formelles de puissances croissantes et d'exposant initial pris dans \mathbb{Z} .

$$k((x)) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} x^n k[[x]]$$

$k((x))$ est le corps des séries formelles d'une variable. Ce corps n'est pas algébriquement clos, en effet les racines de l'élément $a y^2 + b x^3$ ($a, b \in k$) n'appartiennent pas à $k((x))$.

Donc nous allons construire une clôture algébrique de $k((x))$. Ce sera le corps des séries formelles de Puiseux, que l'on notera $k((x))^*$.

Si on écrit $t = x^{1/m}$, $m \in \mathbb{N}^*$. On introduit le corps $k((t))$ égal à $k((x^{1/m}))$, c'est l'ensemble des séries de la forme : $\sum a_i x^{i/m}$, avec $a_i \in k$ et pour $i < 0$ les a_i sont tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

Posons

$$k((x))^* = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} k((x^{1/m}))$$

Il est évident que $k((x))$ est inclus dans $k((x))^*$ ($m=1$). De plus $k((x))^*$ est un corps. Il suffit de remarquer que pour tout m et n non nuls, $k((x^{1/m}))$ et $k((x^{1/n}))$ sont contenus dans le corps $k((x^{1/mn}))$.

Pour $u \in k((x))^*$, il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $u \in k((x^{1/q}))$. On appelle l'ordre de u et on note $\text{ord}(u)$, le nombre rationnel r tel que :

$$u(x) = x^r \bar{u}(x)$$

avec

$$\bar{u}(0) \neq 0 \text{ et } \bar{u} \in k[[x^{1/q}]]$$

autrement dit, l'ordre de u est le plus petit exposant dans l'expression de u , dont le coefficient est non nul. Dans la suite on se propose de démontrer que le corps $k((x))^*$ est algébriquement clos.

1.2 - Théorème de Puiseux

THEOREME 1

Le corps $k((x))^*$ est algébriquement clos i.e. tout élément de $k((x))^*[Y]$ admet une racine dans $k((x))^*$.

La démonstration de ce théorème se fait en trois parties.

La première partie consiste à transformer le problème : "Déterminer les racines d'un élément de $k((x))^*[Y]$ ", en le problème "Déterminer les racines d'un élément de $k[[x]][Y]$ ".

La seconde partie (c'est l'objet du § 2) permet d'étudier les points régulier et singulier de la fonction algébrique définie par l'équation $f(x,Y) = 0$. Ce qui nous permet de transformer le problème au cas où f vérifie :

$$f(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \text{ord}(f(0,Y)) \geq 1$$

La troisième partie a pour objet de déterminer le développement des solutions, au voisinage de l'origine. Dans le § 3 on a traité le cas où $\text{ord} f(0,Y) = n > 1$, on utilise la méthode constructive de Newton (polygône de Newton), qui permet de déterminer de proche en proche les approximants des solutions. Dans le § 4, on a utilisé un algorithme rapide pour déterminer les coefficients des racines qui sont données par :

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

avec $a_i \in k$, c'est le cas où $\text{ord}(f(0,Y)) = 1$.

lère partie

Un élément f de $k((x))^*[Y]$ s'écrit :

$$f(x,y) = a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_0(x)$$

avec $a_i \in k((x))^*$ pour $i = 0, 1, \dots, n$.

Pour tout $i = 0, 1, \dots, n$, il existe $h_i \in \mathbb{N}^*$ tel que a_i appartient à $k((x^{1/h_i}))$. Notons par h le plus petit commun multiple des h_i $i=0, 1, \dots, n$. Comme $k((x^{1/h_i}))$ est inclu dans $k((x^{1/h}))$. Alors, les a_i pour $i = 0, 1, \dots, n$ sont dans $k((x^{1/h}))$. Posons $z = x^{1/h}$ les $a_i \in k((x))$ pour $i = 0, 1, \dots, n$.

Chaque a_i peut s'écrire :

$$a_i(z) = z^{p_i} b_i(z)$$

où p_i est l'exposant initial de a_i ($p_i \in \mathbb{Z}$) et $b_i \in k[[z]]$, avec $b(0) \neq 0$.
 Si on note $p = \inf(p_i, i = 0, 1, \dots, n)$, en multipliant par z^{-p} tous les a_i ,
 on se ramène au cas où les a_i sont dans $k[[z]]$.

Donc, moyennant les transformations :

$$(*) \quad \begin{cases} z = x^{1/h} \\ \bar{f}(z,y) = z^{-p} f(z^h, y) \in k[[z]][Y] \end{cases}$$

On peut supposer que f est un élément de $k[[z]][Y]$. Car le problème :
 "Résoudre l'équation $f(x,y) = 0$ avec $f \in k((x)) [Y]$ ", est équivalent (modulo
 $(*)$) au problème : "Résoudre l'équation $\bar{f}(z,y) = 0$ avec cette fois ci
 $\bar{f} \in k[[z]][Y]$ ".

I.2 - FONCTION ALGEBRIQUE

2.1 - Définitions

Une partie X de k^2 est une courbe algébrique, s'il existe un polynôme non constant f de $k[x,y]$, tel que X soit l'ensemble des zéros de ce polynôme. On note :

$$X = \{(x,y) \in k^2 / f(x,y) = 0\}$$

Soit π la première projection de X sur k

$$\begin{aligned} \pi : X &\rightarrow k \\ (x,y) &\rightarrow x \end{aligned}$$

Notons par X_1 l'image de X par π i.e. $X_1 = \pi(X)$.

On appelle fonction algébrique, définie par l'équation $f(x,y) = 0$, la fonction $y(x)$ définie pour tout x de X_1 par $f(x,y(x)) = 0$, i.e.

$$\begin{aligned} y : X_1 &\rightarrow k \\ x &\rightarrow Y(x) = z \quad , \quad (x,y) \in X \end{aligned}$$

Il existe en général, plus d'une valeur de $y(x)$ correspondant à chaque point x de X_1 . De plus, les valeurs de $y(x)$ à l'infini sont par définition les racines de l'équation :

$$g(0,Y) = 0 \quad \text{où} \quad g(z,Y) = z^m f(1/z,Y)$$

m étant le degré de f par rapport à x .

Notons par n (respectivement $D(x)$) le degré (respectivement le discriminant) de f polynôme en y .

$$f(x,y) = a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \dots + a_0(x)$$

Alors :

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_n(x) & \dots & a_0(x) & 0 \\ 0 & \dots & a_n(x) & \dots & a_0(x) \\ n a_n(x) & \dots & a_1(x) & & 0 \\ 0 & \dots & & & 0 \\ & & n a_n(x) & \dots & a_1(x) \end{vmatrix}$$

Définition

Un point $x = a$ est dit point régulier si $D(a) \neq 0$, et point singulier si $D(a) = 0$.

Remarquons (la 1^{ère} colonne du discriminant) que $a_n(x)$ divise $D(x)$, donc on a deux catégories de points singuliers.

- les racines de $a_n(x)$

- les points pour lesquels on a $a_n(x) \neq 0$ et $D(x) = 0$.

Notons par S l'ensemble des points singuliers.

$$S = \{x \in X_1 / D(x) = 0\}$$

On sait que l'ensemble des points singuliers est de codimension deux dans k^2 (voir [14]), donc ce sont des points isolés. Nous allons donner quelques exemples de fonctions algébriques dont l'origine $x = 0$ est une singularité.

Exemples $k = \mathbb{C}$

Soit X la courbe algébrique définie par :

$$1^\circ) \quad 0 = f(x,y) = y^2 + x^3 - x^2$$

Le discriminant est $D(x) = 4x^2(x-1)$

$$S = \{0, 1\}$$

Le point $x = 0$ est un point double ordinaire (double parce que l'équation $f(0,y) = 0$ admet $y = 0$ racine double, et ordinaire parce que en $x = 0$ on a deux tangentes distinctes : $Y+x = 0$ et $Y-x = 0$). Par contre, le point $x = 1$

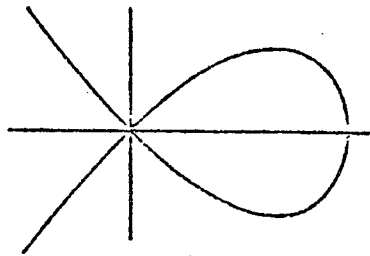


fig 1

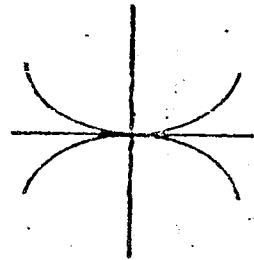


fig 2

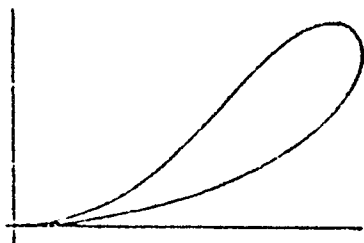


fig 3

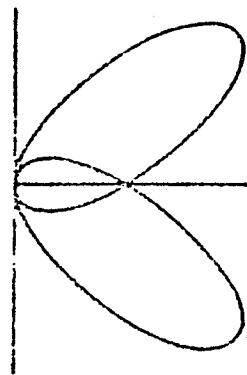


fig 4

est un point double mais non ordinaire (car en $x = 1$ on a une seule tangente $x = 0$) voir figure [1].

$$\begin{aligned} 2^\circ) \quad f(x,y) &= y^2 - x^6 \\ D(x) &= -4x^5 \\ S &= \{0\} \end{aligned}$$

l'origine $x=0$ est un point double non ordinaire, une seule tangente $x=0$ à l'origine (figure [2]).

$$\begin{aligned} 3^\circ) \quad f(x,y) &= y^2 - xy^2 + x^2y^2 - 2x^2y + x^4 \\ D(x) &= 4x^5(x-1)(x^2-x+1) \end{aligned}$$

l'origine $x = 0$ est un point singulier, non ordinaire, une seule tangente $x = 0$ à l'origine (Figure [3]).

$$\begin{aligned} 4^\circ) \quad 0 &= 2y^4 - 3xy^2 + x^4 - 2x^3 + x^2 \\ D(x) &= 576(x-1)^2(8x^2-16x-1) \\ S &= \{0, 1, (4 \pm \sqrt{2})/8\} \end{aligned}$$

Le point $x=0$ est un point quadruple non ordinaire. L'équation $f(0,Y) = 0$ a pour racine $Y = 0$ de multiplicité égale à quatre et $x = 0$ est la seule tangente au point $x = 0$ à la courbe X (Fig. [4]).

2.2 - Solutions formelles au voisinage d'un point régulierTHEOREME 2

Au voisinage d'un point régulier $x = a$, les n branches de la fonction algébrique définie par l'équation $f(x,y) = 0$, sont définies par n séries convergentes au voisinage de a

$$y_i(x) = b_i + c_{i,1}(x-a) + c_{i,2}(x-a)^2 + c_{i,3}(x-a)^3 + \dots$$

$$i = 1, 2, \dots, n ; c_{i,j} \in k.$$

Les b_i sont les n racines distinctes de l'équation $f(a,y) = 0$.

En effet, comme a est un point régulier, on a $D(a) \neq 0$. Donc en particulier $a_n(a) \neq 0$, et ceci entraîne que l'équation $f(a,y) = 0$ admet n racines distinctes b_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Pour chaque paire (a, b_i) on a $f(a, b_i) = 0$ et $\partial f / \partial y(a, b_i) \neq 0$ (car b_i est une racine simple), et d'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage V de a et une fonction y_i définie dans V par

$$y_i(x) = b_i + c_{i,1}(x-a) + c_{i,2}(x-a)^2 + \dots$$

avec

$$f(x, y(x)) = 0 \quad x \in V.$$

Considérons le changement linéaire de variable :

$$\begin{cases} \bar{x} = x - a \\ \bar{y} = y - b_i \\ \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x} + a, \bar{y} + b_i) \end{cases}$$

Alors la fonction \bar{f} ainsi définie vérifie :

$$(H_1) \quad \begin{cases} \bar{f}(0,0) = 0 & \text{car } \bar{f}(0,0) = f(a, b_i) = 0 \\ \text{ord } \bar{f}(0, \bar{y}) = 1 & \text{car } b_i \text{ est une racine simple} \end{cases}$$

Pour un élément f de $k[x,y]$ vérifiant (H_1) , nous proposons au § 4 un algorithme rapide pour calculer les coefficients $c_{i,j}$ des branches \bar{y}_i définies par :

$$\bar{y}_i = c_{i,1} \bar{x} + c_{i,2} \bar{x}^2 + c_{i,3} \bar{x}^3 + \dots \quad c_{i,j} \in k$$

2.3 - Solutions formelles au voisinage d'un point singulier

Lorsque le point $x = a$ est singulier i.e. $D(a) = 0$, l'équation $f(a,y) = 0$ peut avoir des racines multiples, le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas dans ce cas, alors on a le théorème suivant :

THEOREME 3

Au voisinage d'un point singulier $x = a$ ($D(a) = 0$), les n branches de solutions de la fonction algébrique $y(x)$ définie par l'équation $f(x,y) = 0$, sont déterminées par un nombre fini de branches de la forme :

$$x = a + t^s, \quad y = b_1 t^{r_1} + b_2 t^{r_2} + b_3 t^{r_3} + \dots$$

où s est un entier positif non nul ; les coefficients b_i sont non nuls et les exposants r_i forment une suite croissante d'entiers relatifs (i.e. $r_i \in \mathbb{Z}$). Il existe qu'un nombre fini d'exposants négatifs.

Distinguons les deux catégories de points singuliers.

1°) Les points pour lesquels $a_n(x) \neq 0$ et $D(x) = 0$.

2°) Les points racines de l'équation $a_n(x) = 0$.

Pour la première catégorie on a $a_n(x) \neq 0$ pour $x = a$, donc l'équation $f(a,y) = 0$ admet n racines, notons par b une racine de multiplicité égale à n_1 ($1 \leq n_1 \leq n$). Considérons le changement linéaire de variable :

$$\begin{cases} x = \bar{x} - a \\ y = \bar{y} - b \\ f(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x} + a, \bar{y} + b) \end{cases}$$

On a deux cas :

$$\ast) \quad \underline{\underline{n_1 = 1}}$$

Dans ce cas, la fonction \bar{f} vérifie les hypothèses (H_1) , on applique l'algorithme du § 4 pour déterminer les coefficients de la solution vérifiant $y(a) = b$.

$$\ast) \quad \underline{\underline{n_1 > 1}}$$

Dans ce cas, la fonction \bar{f} vérifie les hypothèses (H_2) :

$$(H_2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{f}(0,0) = 0 \\ \text{ord } \bar{f}(0,Y) = n_1 > 1 \end{array} \right.$$

Alors nous cherchons des solutions de type :

$$\bar{y} = b_1 \bar{x}^{r_1} + b_2 \bar{x}^{r_2} + b_3 \bar{x}^{r_3} + \dots$$

avec $b_i \in k - \{0\}$, et (r_i) est une suite croissante de nombres rationnels positifs. On montre dans le § 4 que les exposants r_i ont un dénominateur commun s ce qui conduit à la paramétrisation suivante, en posant $\bar{x} = t^s$,

$$\begin{aligned} x &= a + t^s \\ y &= b + b_1 t^{p_1} + b_2 t^{p_2} + b_3 t^{p_3} + \dots \end{aligned}$$

$$\text{où} \quad r_i = p_i/s.$$

Nous venons d'étudier les racines qui deviennent égales à une valeur finie b quand x tend vers une valeur finie a . L'étude des racines devenant infinie pour $x = a$, nous conduira à la notion de pôles d'une fonction algébrique (c'est la seconde catégorie de points singuliers).

Soit $x = a$ une racine de l'équation $a_n(x) = 0$. Lorsque x tend vers a , une ou plusieurs racines de l'équation $f(a,y) = 0$ deviennent infinies. Pour étudier ces racines, nous posons $y = 1/z$ et l'équation $f(x,y) = 0$ se change en une nouvelle équation :

$$0 = F(x,z) = f(x,1/z)z^n$$

qui aura un nombre fini de racines nulles en $x = a$, et les solutions sont représentées par un développement de la forme :

$$\begin{aligned} z &= (x-a)^{r/s} (b_0 + b_1(x-a)^{1/s} + b_2(x-a)^{2/s} + \dots) \\ &= (x-a)^{r/s} v[(x-a)^{1/s}] \end{aligned}$$

d'où
$$y = (x-a)^{-r/s} 1/v[(x-a)^{1/s}]$$

La série v est régulière (car $v(0) \neq 0$) donc on peut calculer son inverse v^{-1} . Si on écrit :

$$1/v(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots$$

Alors,

$$y(x) = (x-a)^{-r/s} \{ \alpha_0 + \alpha_1 (x-a)^{1/s} + \alpha_2 (x-a)^{2/s} + \dots \}$$

Dans le développement de y , il existe qu'un nombre fini (inférieur ou égal à r) d'exposants négatifs.

Nous allons donner un exemple.

Soit X la courbe définie par l'équation :

$$0 = f(x,y) = x^2 y^4 + x y^2 - y + 1 - x^2$$

Le point $x = 0$ est singulier car $a_4(0) = 0$. L'équation $f(0,y) = 0$, admet une racine finie $y = 1$. Donc on a trois branches qui deviennent égales à l'infini pour $x = 0$. Pour déterminer le développement de chaque branche au voisinage du point $x = 0$, on pose :

$$y = 1/z$$

$$F(x,z) = z^4 f(x, 1/z)$$

$$= (1-x^2)z^4 - z^3 + xz^2 + x^2$$

La fonction F vérifie :

$$F(0,0) = 0$$

Les racines de l'équation $F(x,z) = 0$, qui deviennent nulles pour $x = 0$, sont données par le développement :

$$z_i(x) = x^{2/3} v_i(x^{1/3})$$

avec v_i est régulière et $v_i(0) = \omega$ où $\omega^3 = 1$, donc

$$y_i(x) = x^{-2/3} \{ \alpha_0 + \alpha_1 x^{1/3} + \alpha_2 x^{2/3} + \dots \}$$

$\alpha_0 = \omega$ avec ω est une racine troisième de l'unité.

2.4 - Singularité à l'infini

Le dernier point qui nous reste à étudier est celui pour lequel les racines de l'équation $f(x,y) = 0$ lorsque x devient infinie (singularité à l'infini). On pose alors $x = 1/t$ et l'on est ramené à étudier les racines de l'équation :

$$F(t,y) = t^m f(1/t,y) = 0$$

où m est le degré de f par rapport à x .

Pour les valeurs de t voisines de zéro, plusieurs cas peuvent se présenter suivant que ces racines ont des valeurs distinctes et finies, des valeurs égales où des valeurs infinies. Dans tous les cas, les n branches de y sont représentées dans le voisinage de $t = 0$ par un ou plusieurs développements de l'une des formes :

$$y = b + t^{r/s} \{ \alpha_0 + \alpha_1 t^{1/s} + \alpha_2 t^{2/s} + \dots \}$$

$$y = t^{-r/s} \{ \alpha_0 + \alpha_1 t^{1/s} + \alpha_2 t^{2/s} + \dots \}$$

En conclusion, on peut résumer comme il suit tous les résultats obtenus : dans le voisinage de tout point $x = a$, les n branches de l'équation $f(x,y) = 0$ sont représentées par un certain nombre de développements en séries de la forme :

$$y = (x-a)^{t/s} \{ \alpha_0 + \alpha_1 (x-a)^{1/s} + \alpha_2 (x-a)^{2/s} + \dots \}$$

En convenant de remplacer $x \rightarrow \infty$ par $1/x$. D'autre part, il n'y a qu'un nombre fini d'exposants négatifs.

I.3 - ALGORITHME DE NEWTON

3.1 - Introduction

Nous verrons dans cette partie comment on peut, pour une équation donnée, faire les calculs permettant de partager les racines en groupes de racines conjuguées, et d'obtenir les développements en séries, représentant dans un certain domaine du point $x = a$, les n racines d'un même groupe de racines conjuguées qui deviennent égales à 0 pour $x = 0$.

Supposons que f soit un élément de $k[X, Y]$, vérifiant les hypothèses (H_2) . Dans [13], Newton a cherché des solutions de la forme (1).

$$(1) \quad y(x) = \alpha_1 x^{\epsilon_1} + \alpha_2 x^{\epsilon_2} + \alpha_3 x^{\epsilon_3} + \dots$$

où les coefficients α_i sont non nuls et ϵ_i forment une suite croissante de nombres rationnels positifs.

Dans [15], Puiseux a montré que les exposants ϵ_i ont un dénominateur commun, et que les solutions (1) convergent au voisinage du point $x = 0$.

Nous rappelons ici, la méthode constructive utilisée dans [1], [14], [15], [16] pour chercher de proche en proche les solutions de l'équation $f(x, y) = 0$, qui s'annulent pour $x = 0$.

Ecrivons f sous sa forme explicite :

$$(2) \quad f(x, y) = \sum_{\substack{j=0 \\ i \in I}}^{j=m} \beta_{i,j} x^i y^j$$

sachant que $\beta_{0,j} = 0$ pour $j = 0, 1, \dots, n-1$ (car $\text{ord } f(0, y) = n$).

Si on pose :

$$y = x^{\epsilon_1} (a_1 + y_1)$$

où

$$y_1 = \alpha_2 x^{\sigma_2} + \alpha_3 x^{\sigma_3} + \alpha_4 x^{\sigma_4} + \dots$$

avec

$$\sigma_i = \epsilon_i - \epsilon_1 > 0$$

(2) devient :

$$(3) \quad f(x,y) = \sum_{j=0}^{j=m} \beta_{i,j} x^{i+j\epsilon_1} (\alpha_1+y_1)^j$$

remarquons que l'ordre de α_1+y_1 est égal à zéro, et par conséquent l'ordre en x de la série (3) est égal à celui de la série :

$$(4) \quad \sum_{j=0}^{j=m} \beta_{i,j} x^{i+j\epsilon_1} \alpha_1^j$$

Notons par s l'ordre de (4). Alors (4) peut s'écrire comme la somme de Λ et Λ' , avec :

$$\Lambda = \sum_{i+j.\epsilon_1=s} \beta_{i,j} \alpha_1^j x^s = g(\alpha_1)x^s$$

$$\Lambda' = \sum_{i+j.\epsilon_1>s} \beta_{i,j} \alpha_1^j x^{i+j.\epsilon_1}$$

Pour déterminer l'exposant ϵ_1 et le coefficient α_1 , nous allons introduire la notion du polygône de Newton.

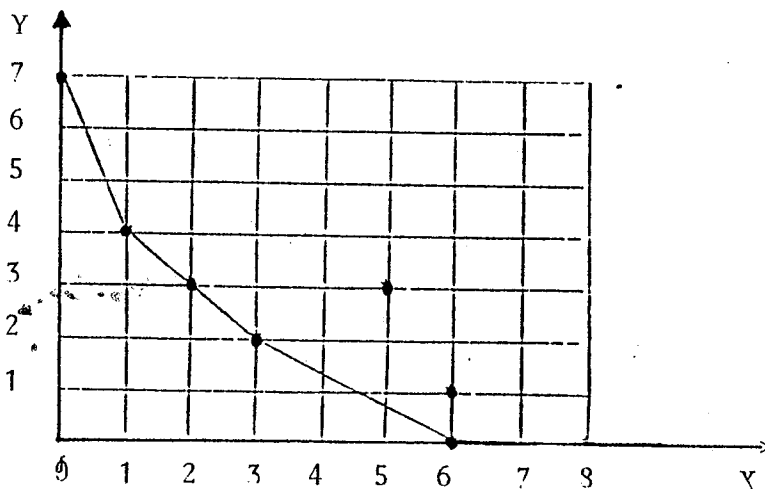
3.2 - Polygône de Newton

A chaque coefficient non nul $\beta_{i,j}$ faisant correspondre dans le plan xOy , le point $M(i,j)$ d'abscisse i et d'ordonnée j , on appelle polygône de Newton, l'enveloppe convexe de tous ces points.

Exemple : Soit la courbe définie par :

$$0 = f(x,y) = y^7 - xy^4 + 2x^2y^3 - x^3y^2 - 2x^5y^3 + x^6y + x^8 + x^6 + xy^7.$$

Dessignons le polygône de Newton de f .



Soit Δ un côté du polygone de Newton de f . Notons par $x+\mu y = \nu$ l'équation de la droite passant par les points de Δ . Comme Δ contient au moins deux points (à savoir les sommets) $M(i,j)$ et $M(k,1)$ on a :

$$\left. \begin{array}{l} i+j.\mu = \nu \\ k+1.\mu = \nu \end{array} \right\} \text{ d'où } \mu = \frac{i-k}{j-1}$$

Le nombre $-1/\mu$ est la pente de Δ . De plus, tous les points qui n'appartiennent pas à Δ sont caractérisés par : $i+j\mu > \nu$.

Si on prend $\epsilon = \mu$ et $s = \nu$, alors Λ s'écrit :

$$\Lambda = g(\alpha_1)x^s$$

$g(t)$ étant le polynôme dont les coefficients sont les coefficients associés aux points de côté Δ . Si on choisit α_1 une racine non nulle de ce polynôme, Λ devient nul et f s'écrit :

$$f(x,y) = \Lambda^t + \dots$$

Remarque

On choisit α_1 une racine non nulle du polynôme g , afin d'augmenter l'ordre de f , et le faire tendre vers l'infini i.e., l'ordre de zéro.

Le polynôme g s'appelle le polynôme caractéristique associé à la fonction f et au côté Δ .

Revenons à notre exemple, on a trouvé trois côtés. Pour chaque côté on a :

côté	ϵ	ν	$g(t)$
1	1/3	7/3	$t^4(t^3-1)$
2	1	5	$-t^2(t-1)^2$
3	3/2	6	$-(t^2-1)$

Pour le côté 1, on a trois valeurs possibles pour α_1 . Ce sont les racines cubiques de l'unité.

Pour le côté 2, on a une seule valeur possible, c'est la racine double α_1 du polynôme $(\alpha-1)^2 = 0$.

Pour le troisième côté, on a deux valeurs possibles : $\alpha_1 = -1$ et $\alpha_1 = +1$ des racines simples.

Les sept racines de l'équation $f(x,y) = 0$, seront du type :

$$\text{pour } i = 1,2,3 \quad y_i = x^{1/3} [\omega + \phi_i(x)]$$

$$\text{avec } \omega^3 = 1 \quad \text{et } \phi_i \in C[[x^{1/3}]]$$

$$\text{pour } i = 4,5 \quad y_i = x^{5/2} [1 + \phi_i(x)] \quad \phi_i \in C[[x^{1/2}]]$$

$$\text{pour } i = 6,7 \quad y_i = x [1 + \phi_i(x)] \quad \phi_i \in C[[x^{1/2}]]$$

Les racines de l'équation $f(x,y) = 0$, se partagent en trois groupes de racines conjuguées, dont le premier est formé de trois racines, et les deux autres de deux racines chacun. De plus toutes les racines s'annulent pour $x = 0$ car $\text{ord } f(0,y) = 7$.

Revenons à la description de la méthode. Une fois ε_1 et α_1 déterminés, on continue la procédure en écrivant ε_1 sous sa forme irréductible.

$$(6) \quad \varepsilon_1 = p_1/q_1 \quad \text{avec } (p_1, q_1) = 1$$

On pose alors :

$$(7) \quad \begin{cases} y = x_1^{p_1} (\alpha_1 + y_1) \\ x = x_1^{q_1} \end{cases}$$

L'expression de f devient :

$$f(x,y) = x^v f_1(x_1, y_1)$$

où $f_1(x_1, y_1) = g(\alpha_1 + y_1) + x_1 \phi(x_1, y_1)$

f_1 est dite fonction itérée de f .

Alors, chercher y solution de l'équation $f(x,y) = 0$, revient à chercher y_1 solution de l'équation $f_1(x_1, y_1) = 0$. On reprend la même démarche avec la fonction f_1 , qui vérifie elle aussi les hypothèses (H_1) ou (H_2) , suivant que α_1 est de multiplicité égale à un ou supérieur à un. En effet :

Notons par n_0 la multiplicité de α_1 , alors :

$$f_1(0,0) = g(\alpha_1) = 0$$

$$f_1(0, y_1) = g(\alpha_1 + y_1) = \frac{1}{n_0!} y_1^{n_0} g^{(n_0)}(\alpha_1) + \dots$$

donc $\text{ord } f_1(0, y_1) = n_0 \geq 1$ avec $n_0 \leq n$

3.3 Discussion

1°) $n_0 = 1$

Dans ce cas la fonction f_1 vérifie les hypothèses (H_1) et par conséquent (théorème des fonctions implicites), on a : $y_1 \in k[[x_1]]$. La détermination des coefficients de y_1 se fait par application de l'algorithme du § 4. La solution y de l'équation $f(x,y) = 0$ sera dans le corps : $k[[x^{1/q}]]$

Exemple :

Prenons l'exemple précédent. On a trouvé pour le côté 3, $\epsilon = 3/2$, $v = 6$ et $g(t) = -t^2 + 1$. La racine $\alpha_1 = 1$ de g est simple. Donc en considérant le changement :

$$\begin{cases} y = x_1^3 (1 + y_1) \\ x = x_1^2 \end{cases}$$

on obtient :

$$f(x,y) = x^6 [x_1^9 (1+x_1^2)(1+y_1)^7 - x_1^2 (1+y_1)^4 + x_1^3 y_1 - y_1^2 + 2x_1(1-x_1^6)(1+y_1)^3 - 2y_1 + x_1^2 + x_1^3]$$

donc $f(x,y) = x^6 f_1(x_1, y_1)$

On remarque que $\text{ord } f_1(0, y_1) = 1 = \text{multiplicité de } \alpha_1$.

2°) $\boxed{1 < n_0 < n}$

Dans ce cas, on recommence la même démarche avec la fonction f_1 dont l'ordre par rapport à y a diminué. On obtient des formules analogues à (6), (7) i.e.

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= p_2/q_2 & \text{avec} & & (p_2, q_2) &= 1 \\ y_1 &= x_2^{p_2} (\alpha_2 + y_2), & & & x_1 &= x_2^{q_2} \end{aligned}$$

et $f_1(x_1, y_1) = x_2^{v_1} f_2(x_2, y_2)$

Remarque

Si $\text{Ord } f_{i+1}(0, y_{i+1}) < \text{ord } f_i(0, y_i)$

au bout d'un nombre fini i_1 ($i_1 \leq n$) d'itérations, on arrive au cas où $\text{ord } f_{i_1}(0, y_{i_1}) = 1$. Dans ce cas, on applique le § 4 qui nous donne $y_{i_1} \in k[[x_{i_1}]]$, donc

$$y = x^{\epsilon_1} \{ \alpha_1 + x_1^{\epsilon_1} \{ \alpha_2 + x_2^{\epsilon_2} + \{ \dots \} \} \}$$

qui s'écrit

$$y = \alpha_1 x^{\epsilon_1} + \alpha_2 x^{\epsilon_1 + \epsilon_2} + \alpha_3 x^{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3} + \dots$$

sachant que $x_i = x_{i+1}^{q_{i+1}}$, $x_0 = x$ et $\epsilon_i > 0$.

Si on pose :

$$r_1 = \epsilon_1$$

et pour $i \geq 1$ $r_{i+1} = r_i + \frac{\epsilon_{i+1}}{q_1 \dots q_i}$ (8)

l'expression de y devient :

$$y = \alpha_1 x^{r_1} + \alpha_2 x^{r_2} + \alpha_3 x^{r_3} + \dots$$

avec r_i est une suite croissante de nombres rationnels positifs. Comme à partir de i_1 tous les q_i sont égaux à un (car α_i pour $i \geq i_1$ est une racine simple). Alors, ceci prouve qu'il existe $s \in \mathbb{N}^*$ tel que $y \in k[[x^{1/s}]]$ ($s = q_1 \dots q_{i_1}$).

Exemple :

Pour l'exemple précédent, on a trouvé pour le côté 2, $r = 1$, $s = 5$ et $g(t) = -t^2(t-1)^2$, donc $\alpha = 1$ est une racine double ($2 = n_0 < n = 7$), et le changement :

$$\begin{cases} y = x_1(1+y_1) \\ x = x_1 \end{cases}$$

conduit à $f(x,y) = x^5 f_1(x_1, y_1)$

avec $f_1(x_1, y_1) = -y_1^4 - 2y_1^3 - y_1^2 + x_1 \phi_1(x_1, y_1)$

d'où $\text{ord } f_1(0, y_1) = 2$

Le polygône de Newton de f_1 donne :

$$\epsilon_2 = 1/2 \quad \text{et} \quad g(t) = t^2 - \text{cte} t^2$$

donc en posant

$$\begin{cases} y_1 = x_2 (\text{cte} + y_2) \\ x_1 = x_2^2 \end{cases}$$

on obtient $f_1(x_1, y_1) = x_1 f_2(x_2, y_2)$

La résolution de l'équation $f_1(x_2, y_2) = 0$ conduit à $y_2 \in k[[x_2]]$
 d'où :

$$y = x_1 \{1 + x_2(\text{cte} + y_2)\}$$

avec $y_2 = x_2 \{\beta_0 + \beta_1 x_2 + \beta_2 x_2^2 + \dots\}$

et $x = x_1 = x_2^2$

donc $y = x + \text{cte } x^{3/2} + x^{5/2} \{\beta_0 + \beta_1 x^{1/2} + \beta_2 x + \dots\}$

3°) $n_0 = n$

Dans ce cas on a :

$$g(t) = c(t - \alpha_1)^n \quad c \neq 0$$

car α_1 est de multiplicité n , et comme

$$g(t) = \sum_{i+j \cdot \epsilon_1 = s} \beta_{i,j} t^j$$

si on compare les deux polynômes, ceci donne :

$$\beta_{i,j} = c C_n^j (-\alpha_1)^{(n-j)}$$

pour $j = 0, 1, \dots, n$ et $i = s - j \cdot \epsilon_1$

Comme c et α_1 sont non nuls, par conséquent $\beta_{i,j}$ est non nul. Donc le polygône de Newton est formé d'un seul côté, et contient $(n+1)$ points. En particulier les points $M(0, n)$ et celui qui correspond à $j = n-1$ appartiennent au polygône, d'où

$$\left. \begin{array}{l} 0 + n \cdot \epsilon_1 = s \\ i + (n-1) \cdot \epsilon_1 = s \end{array} \right\} \Rightarrow \epsilon_1 = i$$

Donc ϵ_1 est un entier et l'algorithme se poursuit en écrivant :

$$\varepsilon_1 = p_2, \quad (q_2 = 1)$$

$$y_1 = x_2^{p_2} (\alpha_2 + y_2), \quad x_1 = x_2$$

$$f_1(x_1, y_1) = x_1^{s_1} f_2(x_2, y_2)$$

A la fin de la procédure on obtient :

$$y = \alpha_1 x^{\varepsilon_1} + \alpha_2 x^{\varepsilon_1} x_1^{\varepsilon_2} + \alpha_3 x^{\varepsilon_1} x_1^{\varepsilon_2} x_3^{\varepsilon_3} + \dots$$

En conservant les notations

$$r_1 = \varepsilon_1 \text{ et } r_{i+1} = r_i + \frac{\varepsilon_{i+1}}{q_1 \dots q_i}$$

On obtient :

$$y = \alpha_1 x^{r_1} + \alpha_2 x^{r_2} + \alpha_3 x^{r_3} + \dots$$

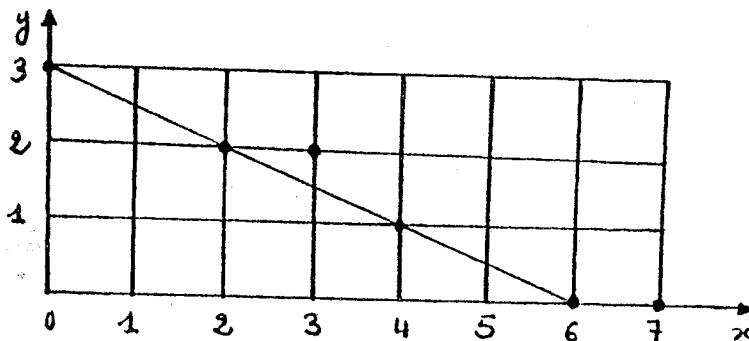
La procédure s'arrête lorsque $f_i(x_i, 0) = 0$.

Exemple

Soit la fonction algébrique définie par l'équation :

$$f(x, y) = y^3 + 3x^2 y^2 + 3x^4 y + x^6 - x^3 y^2 + x^7.$$

Le polygone de Newton est formé d'un seul côté.



Donc $\varepsilon_1 = 2$, $v = 6$ et $g(t) = (t+1)^3$

Donc $\alpha_1 = -1$ est une racine triple du polynôme caractéristique g .

Le changement :

$$\begin{cases} y = x_1^2(-1+y_1) \\ x = x_1 \end{cases}$$

entraîne que

$$f(x,y) = x^6 \underbrace{\{y_1^3 + 2x_1 - x_1 y_1\}}_{f_1(x_1, y_1)}$$

donc

$$\text{ord } f_1(0, y_1) = 3$$

Remarque

La discussion précédente montre qu'à chaque étape ε_i est :

soit un entier $q_i = 1$ alors, $\text{ord } f_{i+1}(0, y_{i+1}) = \text{ord } f_i(0, y_i)$; soit une fraction irréductible $\varepsilon_i = p_i/q_i$ avec $q_i \neq 1$, mais dans ce cas on a

$$\text{ord } f_{i+1}(0, y_{i+1}) < \text{ord } f_i(0, y_i)$$

3.4 - Paires caractéristiques de Puiseux

Dans la première partie de ce paragraphe, on se propose de montrer que les exposants r_i définis par (8), ont un dénominateur commun s et définir la suite des paires caractéristiques de Puiseux

Notons par :

$$G_0 = \{f_i / \text{ord } f_i(0, y_i) = \text{ord } f(0, y) = n\}$$

où bien G_0 contient toutes les fonctions itérées de f , dans ce cas on a : $q_i = 1$ pour tout i , et par conséquent la solution $y(x)$ appartient à l'algèbre des séries formelles $k[[X]]$, donc l'origine est un point régulier. ou bien il existe un indice i_1 pour lequel f_{i_1} n'appartient pas à G_0 . Dans ce cas, on a bien

$$n = \text{ord } f_{i_1-1}(0, y_{i_1}) > \text{ord } f_{i_1}(0, y_{i_1})$$

or, d'après la remarque précédente, ceci veut dire que les exposants r_i pour $i = 1, 2, \dots, i_1 - 1$ sont des entiers mais r_{i_1} est un rationnel, car :

$$r_{i_1} = r_{i_1-1} + \frac{p_{i_1}}{q_{i_1}}$$

avec

$$(p_{i_1}, q_{i_1}) = 1 \text{ et } q_{i_1} \neq 1.$$

Notons par

$$G_1 = \{f_i / \text{ord } f_i(0, y_i) = \text{ord } f_{i_1}(0, y_{i_1})\}$$

Pour un indice i pour lequel $f_i \in G_1$, on a $\text{den}(r_i) = q_{i_1}$.

Donc, ou bien G_1 contient le reste des fonctions itérées de f , ce qui donne y appartient à $k[[X^{1/q_{i_1}}]]$, ou bien il existe un indice i_2 tel que :

$$\text{ord } f_{i_2}(0, y_{i_2}) < \text{ord } f_{i_2-1}(0, y_{i_2-1}) = \text{ord } f_{i_1}(0, y_{i_1})$$

Formons le paquet G_2 de la même façon que les paquets G_0 et G_1 . i.e. :

$$G_2 = \{f_i / \text{ord } f_i(0, y_i) = \text{ord } f_{i_2}(0, y_{i_2})\}$$

pour un indice i , pour lequel f_i appartient à G_2 on a :

$$\text{den}(r_i) = q_{i_1} \cdot q_{i_2}$$

Si on continue ainsi, finalement, on obtient $(l+1)$ paquets ($1 \leq l$) tel que pour chaque paquet on a : f_i appartient à G_j si et seulement si

$$\text{ord } f_i(0, y_i) = \text{ord } f_{i_j}(0, y_{i_j})$$

$$\text{den}(r_i) = q_{i_1} \cdot q_{i_2} \cdots q_{i_j}$$

$$j = 1, 2, \dots, l$$

Si on pose $h = q_{i_1} \cdot q_{i_2} \cdots q_{i_l}$ alors pour tout $i = 1, 2, \dots$ r_i peut s'écrire comme une fraction de dénominateur h et ceci entraîne que y appartient à $k[[X^{1/h}]]$.

De plus h est un diviseur de $n!$. Nous verrons dans la suite que lorsque f est un élément irréductible dans $k[[X]][[Y]]$ alors toutes les branches de

solutions appartiennent à $k[[X^{1/n}]]$ i.e. $h = n$, ou n est le degré de f par rapport à y .

Considérons la suite des exposants r_{i_j} $j = 1, 2, \dots, l$; on a vu que

$$\text{den}(r_{i_j}) = q_{i_1} q_{i_2} \cdots q_{i_j}.$$

Posons

$$r_{i_j} = \frac{m_j}{n_1 n_2 \cdots n_j} \quad \text{avec } n_k = q_{i_k}$$

comme $(m_j, n_1 \cdot n_2 \cdots n_j) = 1$ ceci donne $(m_j, n_j) = 1$ pour $j = 1, 2, \dots, l$.

La suite (m_j, n_j) $j = 1, 2, \dots, l$ s'appelle la suite des paires caractéristiques de Puiseux. Elle vérifie :

$$\frac{m_{j-1}}{n_1 n_2 \cdots n_{j-1}} < \frac{m_j}{n_1 \cdot n_2 \cdots n_j} \quad j = 2, \dots, l.$$

$$(m_j, n_j) = 1$$

De plus on a :

$$\prod_{j=1}^l n_j = h$$

Définition

L'expression $\sum \alpha_i x^{E_i}$ s'appelle développement de Puiseux de la fonction algébrique définie par l'équation $f(x, y) = 0$, au voisinage de l'origine. Il existe n développements de Puiseux vérifiant $f(x, y(x)) = 0$.

Remarque

Si f est irréductible dans $k[[X]][Y]$ la suite $(m_j, n_j)_{j=1, 2, \dots, l}$ est unique. Dans le cas réductible, il existe autant de suite $(m_j, n_j)_{j=1, \dots, l}$ que de nombre de composantes irréductibles de f .

Autrement dit, à chaque composante irréductible de f dans $k[[X]][Y]$ est associé une suite de paires caractéristiques de Puiseux.

Exemple

Soit

$$f(x,y) = y^4 - 2x^3y^2 - 4x^5y + x^6 - x^7$$

une racine de l'équation $f(x,y) = 0$, s'écrit :

$$y(x) = x^{3/2} + x^{7/4}.$$

La suite des paires caractéristiques de Puiseux est : $(3,2), (7,2)$.

Description géométrique du type topologique d'une courbe :

Dans [14], Pham a montré que le type topologique d'une courbe plane irréductible X , au voisinage du point singulier isolé 0 est complètement déterminé à l'aide de la suite des paires caractéristiques de Puiseux, c'est un $(n_1 \cdot n_2 \dots n_g)$ noeud. On sait de plus décrire géométriquement ce type topologique uniquement à l'aide des paires (m_i, n_i) $i = 1, 2, \dots, g$.

Donc pour l'exemple précédent, le type topologique est un (4)-noeud. Pour décrire géométriquement ce (4)-noeud à l'aide de la suite $(3,2), (7,2)$, nous allons introduire d'abord quelques notations qui seront utiles dans la suite.

Notons par B_ϵ la boule fermée de centre 0 et de rayon ϵ , et S_ϵ la sphère qui borde B_ϵ . Dans [12], J. Milnor montre que, pour ϵ assez petit, on a un difféomorphisme de la paire $(B_\epsilon, B_\epsilon \cap X)$ sur $(B_\epsilon, C(K_\epsilon))$ où $C(K_\epsilon)$ est le cône réel union des segments d'extrémités 0 et un point de $K_\epsilon = S_\epsilon \cap X$. Dans [4] Pham donne deux homéomorphismes qui permettent de ramener l'étude topologique de la paire $(B_\epsilon, C(K_\epsilon))$ à celui de la paire (S_1, K_1) avec :

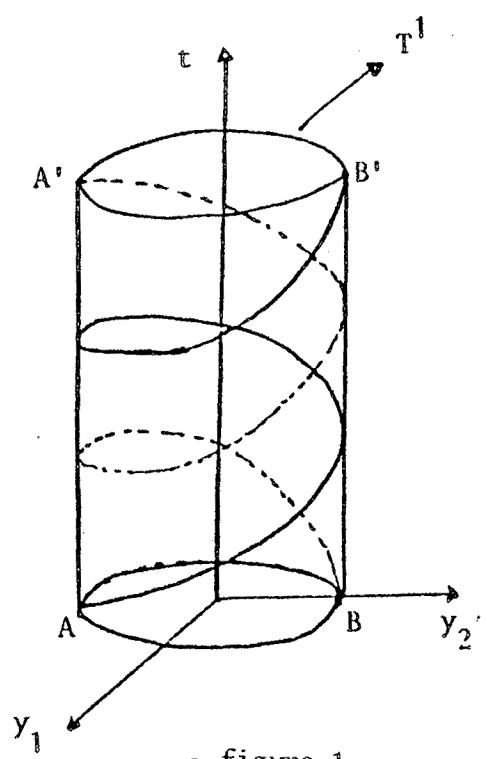
$$\theta_y = \{(x,y) \in B_\epsilon / |x|^2 = \frac{\epsilon}{2}, |y|^2 \leq \frac{\epsilon}{2}\}$$

$$\theta_x = \{(x,y) \in B_\epsilon / |x|^2 \leq \frac{\epsilon}{2}, |y|^2 = \frac{\epsilon}{2}\}$$

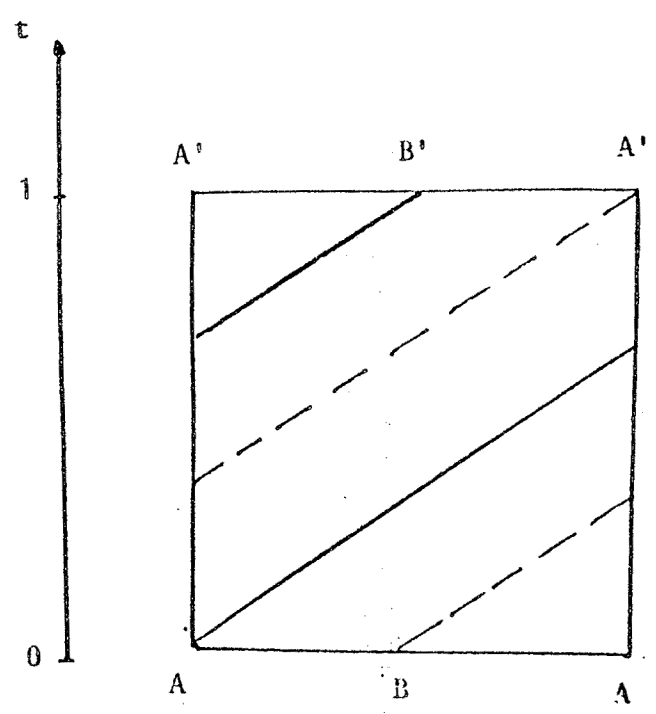
$$S_1 = \theta_x \cup \theta_y \quad \text{et} \quad K_1 = S_1 \cap X.$$

Comme on peut toujours se ramener au cas où le cône tangent est égal à la droite $y = 0$, on rappelle le cône tangent est

$$\{(x,y) \in k^2 / \text{in}(f) = 0\}$$



- figure 1 -



- figure 2 -

La figure 2 représente la surface du cylindre T^1 de la figure 1.

j = 2

Chaque courbe où branche de solution tracée sur le bord de T^1 sera remplacée par un cylindre dont l'axe est la courbe elle-même et de rayon $r = |x|^{m_2/n_1 \cdot n_2}$. (Le choix de ϵ assez petit, évitera l'intersection de ces cylindres entre eux). L'ensemble ainsi formé sera noté T^2 . Sur chaque cylindre de rayon r , on trace le noeud torique de type (m_2, n_2) , il s'enroule régulièrement sur le bord de ce cylindre en tournant n_2 fois longitudinalement et m_2 fois transversalement sur le bord de ce cylindre. Ce qui nous donne au total $n_1 \cdot n_2$ courbes.

Pour l'exemple précédent, on obtient les figures 3 et 4.

Remarque

Pour $j = 1$ on a obtenu 2 courbes qui s'enroulent sur le bord de T^1 .

Donc T^2 est formé de 2 cylindres de rayon $|x|^{7/4}$.

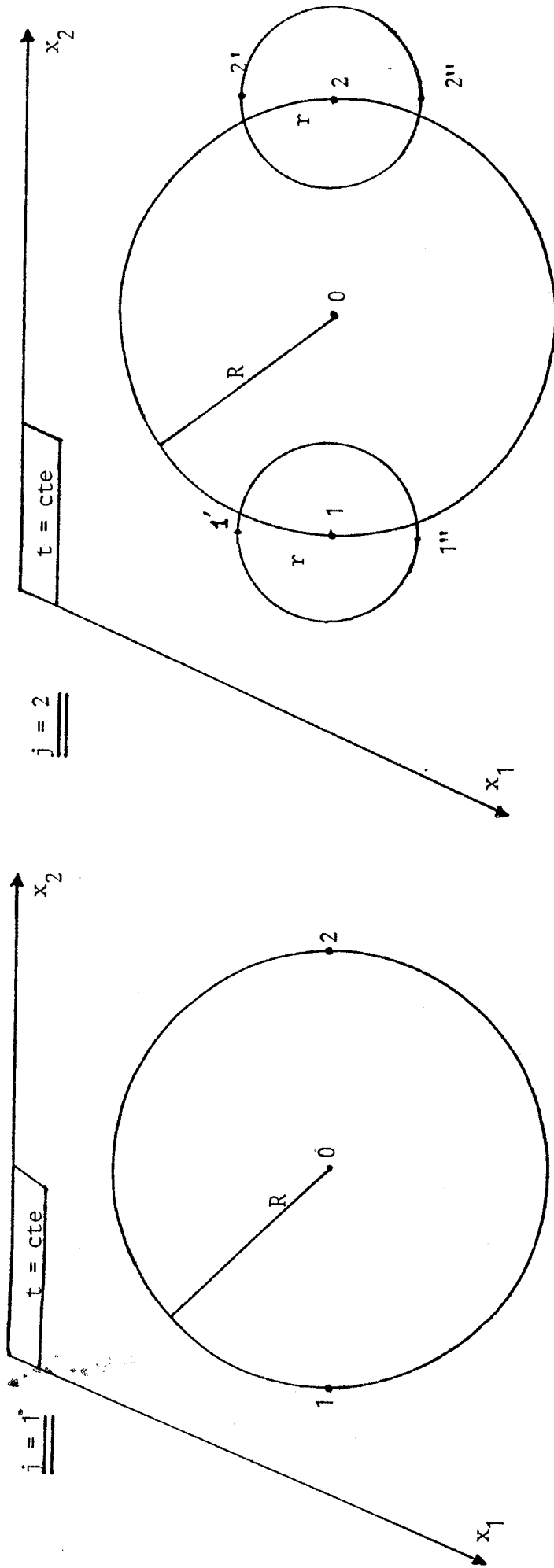
Sur les figures 3 et 4, on a tracé qu'un seul cylindre.

Une fois qu'on a décrit géométriquement le $(n_1 \cdot n_2)$ noeud, la description se poursuit en formant T^3 qui s'obtient en remplaçant les courbes de T^2 par des cylindres d'axes, les courbes elles-mêmes et de rayon

$|x|^{m_3/n_1 \cdot n_2 \cdot n_3}$, donc on obtient $n_1 \cdot n_2$ cylindres.

Les coupes horizontales : $t = \text{cte}$

- $j = 1$: correspond au (2)-noeud dont la paire est (3,2)
- $j = 2$: correspond au (4)-noeud dont les paires sont (3,2) et (7,2)

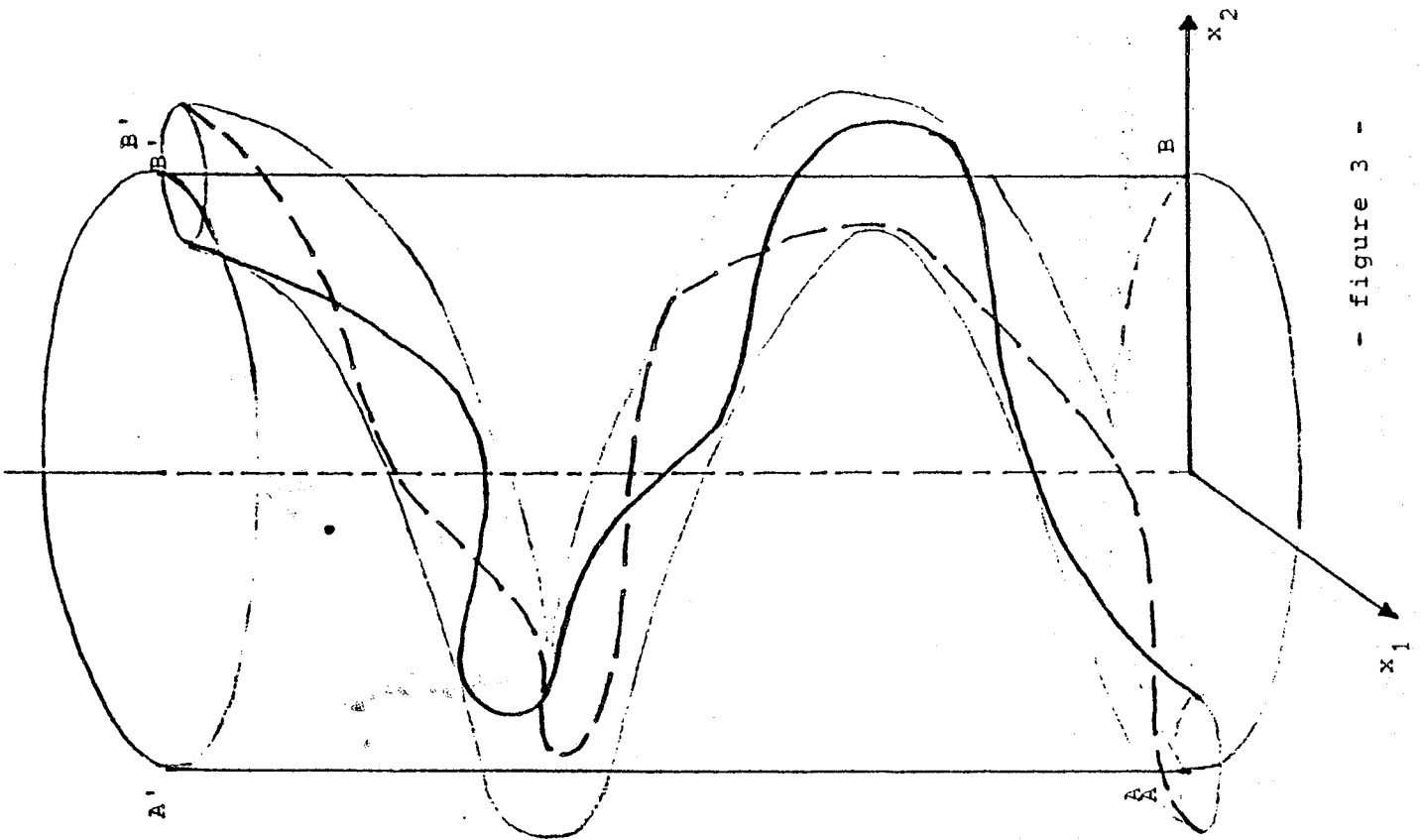


$$R = ||x||^{3/2}$$

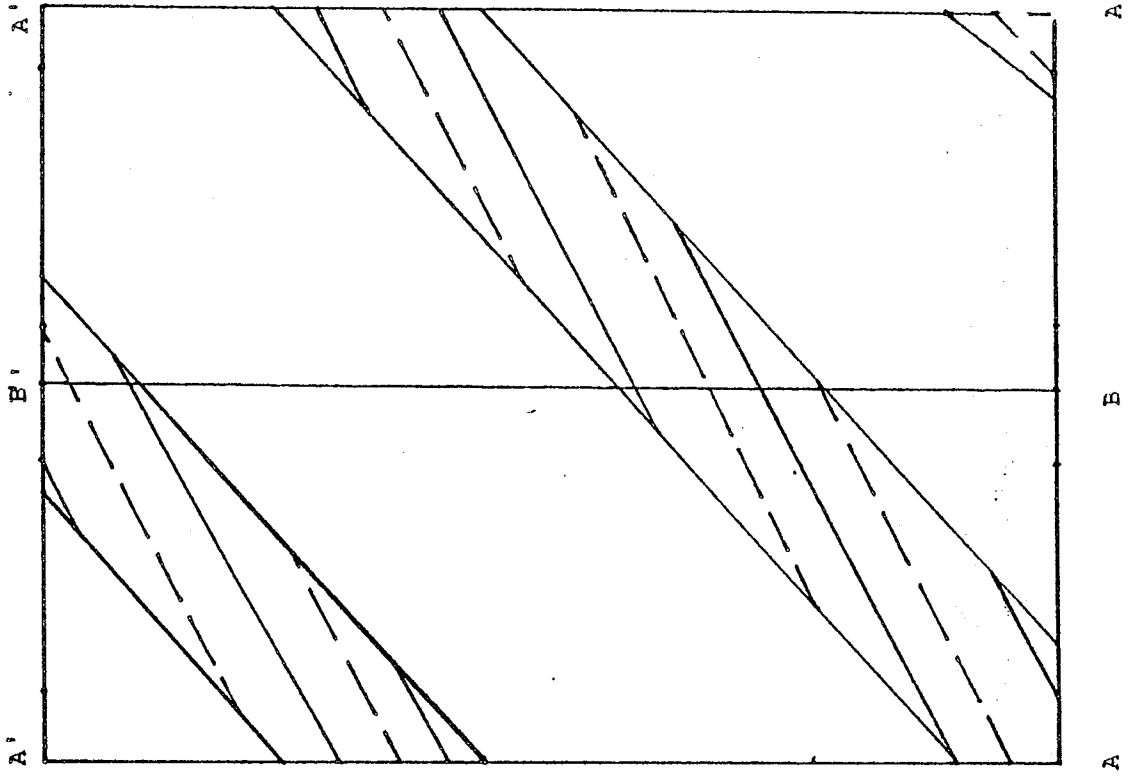
Les points 1 et 2 sont les traces des courbes 1 et 2 dans le plan $t = \text{cte}$

$$R = ||x||^{3/2}, \quad r = ||x||^{7/4}$$

Les points 1', 1'', 2' et 2'' sont les traces des 4 courbes, dans le plan $t = \text{cte}$.



- figure 3 -



- figure 4 -

— courbe 1'

- - courbe 1''

Sur chaque cylindre de T^3 on trace le noeud torique de type (m_3, n_3) qui s'enroulent régulièrement sur le bord du cylindre de T^3 , en tournant n_3 fois longitudinalement et m_3 fois transversalement et ceci donne $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$ courbes.

En opérant jusqu'à ce que $j = g$, on obtient finalement la description géométrique du $(n_1 \dots n_g)$ noeud qui caractérise le type topologique de la courbe X au voisinage du point singulier isolé \emptyset .

3.5 - Cas irréductible

Nous supposons dans cette partie que f est un élément irréductible dans $k[[x]][y]$. Alors on a le résultat suivant :

PROPOSITION 11

Le polynôme f de $k[[x]][y]$ est irréductible dans $k[[x]][y]$ si et seulement si toutes les racines de f dans $k[[x]]^*$, se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par l'action du groupe des racines $q^{\text{ème}}$ de l'unité. Ou q est le plus petit entier non nul tel que $y \in k[[x^{1/q}]]$. De plus, q coïncide avec le degré de f (polynôme en y).

Démonstration [3]

Distinguons les deux cas suivants :

1°) $q = 1$ alors $y \in k[[x]]$ et comme f est irréductible, donc f est un polynôme de degré un d'où $n = q = 1$.

2°) $q < 1$, soit $\xi \neq 1$ et $\xi^q = 1$. Considérons le changement :

$$x^{1/q} \rightarrow \xi x^{1/q} \text{ la racine } y_1(x) = \alpha_1 x^{p_1/q_1} + \alpha_2 x^{p_2/q_2} + \dots$$

devient

$$y_\xi(x) = \alpha_1 \xi^{p_1} x^{p_1/q_1} + \alpha_2 \xi^{p_2} x^{p_2/q_2} + \dots$$

qui est différente de $y_1(x)$. En effet, l'égalité $y_1(x) = y_\xi(x)$ entraîne que $\xi^{p_i} = 1$ pour tout i , et comme $\xi^q = 1$, on en déduit que $\{q, (p_i)\}$ admet un diviseur commun d , ce qui donne :

$$q = d q' \quad \text{et} \quad p_i = d p'_i$$

comme $d \neq 1$ et $p_i/q = p'_i/q'$, ceci entraîne que $y_\xi \in k[[x^{1/q'}]]$ avec $q' < q$, ce qui contredit la définition de q i.e. le plus petit entier tel que $y_1(x) \in k[[x^{1/q}]]$, donc $y_1(x) \neq y_\xi(x)$.

$$\text{Posons} \quad h(x,y) = \prod_{\xi^{q=1}} [y - y_\xi(x)]$$

h est un élément de $k[[x^{1/q}]][[y]]$, invariant sous l'action des racines $q^{\text{ème}}$ de l'unité, donc en fait un élément de $k[[x]][[y]]$. Cet élément divise f qui est irréductible, donc il existe une unité telle que $f = uh$ avec $u \in k[[x]]$. Ceci donne :

$$\deg f/y = \deg h/y \quad \text{d'où} \quad n = q$$

Exemple

Soit f l'élément de $C[[x]][[y]]$ définie par :

$$f(x,y) = y^4 - 2xy^2 - 4xy + x^2 - x^3$$

Une racine de f s'écrit $y_1(x) = x^{1/2} + x^{3/4}$ alors on a $q = n = 4$.
En faisant agir les racines $4^{\text{ème}}$ de l'unité, on obtient :

$$y_{-1}(x) = x^{1/2} - x^{3/4} \quad (\xi = -1)$$

$$y_i(x) = -x^{1/2} - \% i x^{3/4} \quad (\xi = i)$$

$$y_{-i}(x) = -x^{1/2} + \% i x^{3/4} \quad (\xi = -i)$$

Les éléments $y(x)$ sont distincts, de plus :

$$f(x,y) = [y - y_1(x)][y - y_{-1}(x)][y - y_i(x)][y - y_{-i}(x)]$$

donc, on en déduit que f est irréductible dans $C[[x]][[y]]$.

Pour utiliser ce résultat qui nous aidera à déterminer les racines du polynôme caractéristique g . Reprenons la démarche faite aux § 3.2 et § 3.3. On a posé :

$$\begin{cases} y = x_1^{p_1} (\alpha_1 + y_1) \\ x = x_1 \end{cases}$$

où α_1 est une racine de g , or lorsque f est irréductible, tous les premiers coefficients des solutions sont de type $\alpha_1 \xi^{p_1}$ avec $p_1' = n p_1 / q_1$, et c'est les seules racines de $g(t)$. on en déduit que le polynôme $g(t)$ s'écrit :

$$g(t) = c \prod_{\xi=1}^n (t - \alpha_1 \xi^{p_1'})$$

or on a l'expression explicite de g qui est :

$$g(t) = \sum_{M(i,j) \in \Delta} c_j t^j$$

donc g est un polynôme de degré n (car il a n racines) ce qui donne :

$$c_n = c \quad \text{et} \quad c_0 = c \prod_{\xi=1}^n \xi^{p_1'} (-\alpha_1)^n$$

d'où
$$\alpha_1 = \left\{ -\frac{c_0}{c_n} \prod_{\xi=1}^n \xi^{p_1'} (-1) \right\}^{1/n}$$

or

$$\prod_{\xi=1}^n \xi^{p_1'} = \prod_{k=0}^{n-1} e^{2\pi i k p_1' / n} = (-1)^{(n-1)p_1'}$$

ce qui donne

$$(9) \quad \alpha_1 = -\left\{ (-1)^{(n-1)p_1'} \frac{c_0}{c_n} \right\}^{1/n}$$

Dans ce cas où f est irréductible, on a pu déterminer explicitement les racines de $g(t)$. On continue la procédure en faisant le changement (7). Alors si $q_1 = n$ toutes les racines de $g(t)$ sont distinctes, et les polynômes caractéristiques des fonctions itérées sont de degré un, ce qui permet de déterminer facilement les racines α_i pour $i > 2$. Si $q_1 \neq n$ alors q_1 est un diviseur de n , le polynôme $g(t)$ à q_1 racines de multiplicité égale à $n/q_1 = n_1$ ce qui donne le degré du polynôme caractéristique de la fonction itérée est égal à n_1 et ces racines seront données par une relation analogue à (9). i.e.

$$\alpha_2 = -\left\{ (-1)^{(n_1-1)p_2'} \frac{c_0}{c_n} \right\}^{1/n_1}$$

et c'est ainsi qu'on détermine les racines des polynômes caractéristiques. Or le problème qu'on peut poser maintenant est : "existe-t-il un algorithme pour tester l'irréductibilité d'un élément de $k[[x]][y]$, pour pouvoir appliquer cette relation (9) au calcul des racines du polynôme caractéristique $g(t)$.

1.4 - ALGORITHME DE MANIPULATION DES SERIES FORMELLES

4.1 - Introduction

Nous étudions dans cette partie, un algorithme donné dans [9], basé sur l'utilisation de la méthode de Newton pour résoudre une équation $f(x) = 0$. Cet algorithme permet de calculer les approximants de la solution de l'équation $f(x,y) = 0$, lorsque $\text{ord } f(0,y) = 1$. Dans ce cas, nous avons vu qu'il existe une solution vérifiant $y(0) = 0$ et dont la forme est donnée par :

$$y(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \dots \quad \alpha_i \in k$$

Au début, nous allons introduire quelques notations qui seront utiles par la suite.

Pour $a, b \in k[[t]]$; $a(t) = \sum a_i t^i$ et $b(t) = \sum b_i t^i$.

On note :

$$*) \quad T_n[a(t)] = \sum_{i=0}^{n-1} a_i t^i \in k[t]_n$$

où $k[t]_n$ est l'espace vectoriel sur k des polynômes de degré inférieur à n .

$$*) \quad T_n \circ T_m = T_m \circ T_n = T_s \quad \text{où } s = \min(n,m)$$

$$*) \quad a(t) \otimes b(t) = T_n[a(t).b(t)] \quad a, b \in k[t]_n$$

*) si $a \in k[[t]]$ avec a inversible i.e. $a(0) \neq 0$

On pose :

$$a(t)^{\textcircled{-1}} = T_n[a(t)^{-1}]$$

4.2 - Algorithme d'inversion d'une série formelle

Définition

Pour $a \in k[[t]]$, on appelle approximant de $a(t)$ modulo n , le polynôme $u_n(t) = T_n[a(t)]$ (i.e. $\text{ord}(a(t) - u_n(t)) > n$)

THEOREME 4 [9]

Soit $a \in k[[t]]$ avec $a(0) \neq 0$. On note $b(t)$ la série inverse de $a(t)$. Si $u(t)$ est un approximant de $b(t)$ modulo n , alors le polynôme $v(t)$ défini par :

$$(10) \quad v(t) = 2u(t) - T_{2n}[a(t)] \otimes u(t)^2$$

est un approximant de $b(t)$ modulo $2n$.

Démonstration

Posons $\lambda(t) = b(t) - u(t)$

$$\delta(t) = b(t) - v(t)$$

alors

$$\lambda(t) = t^n \phi(t) \quad \text{avec} \quad \phi(t) \in k[[t]].$$

Pour montrer que $v(t)$ est un approximant de $b(t)$ modulo $2n$, il suffit de montrer que $T_{2n}[\delta(t)] = 0$. Or en utilisant (10) on a :

$$\delta(t) = b(t) - 2u(t) + T_{2n}[a(t)] \otimes u(t)^2$$

$$= \lambda(t) - u(t) + T_{2n}[a(t)] \otimes u(t)^2$$

$$u(t) = T_{2n}[u(t)], \quad u(t)^2 = T_{2n}[u(t)^2]$$

ce qui donne :

$$\delta(t) = \lambda(t) - T_{2n}[u(t) - a(t)u(t)^2]$$

en utilisant la relation $a(t).b(t) = 1$, le terme entre crochets peut s'écrire :

$$\begin{aligned} u(t) a(t) b(t) - a(t) u(t)^2 &= a(t) u(t) [b(t) - u(t)] \\ &= a(t) u(t) \lambda(t) \end{aligned}$$

et en remplaçant $u(t)$ par $b(t) - \lambda(t)$, on obtient :

$$\delta(t) = a(t) \lambda(t)^2$$

or $\lambda(t) = t^n \phi(t)$ ce qui donne $\lambda(t) = t^{2n} \phi(t)$
avec $\phi(t) = \phi(t)^2$. Comme $\text{ord}(a(t)\lambda(t)^2) > 2n$ alors :

$$T_{2n}[\delta(t)] = 0 \implies v(t) \text{ est un approximant de } b(t) \text{ modulo } 2n.$$

De ce théorème on déduit un algorithme, qui donne de proche en proche les approximants de la série inverse de $a(t)$. Pour cela, il suffit de poser $n = 2^k$ et $x_k = T_{2n}[b(t)]$, alors on obtient une formule analogue à celle de Newton pour inverser un nombre (i.e. $x_{k+1} = 2x_k - ax_k^2$).

$$(11) \quad \begin{cases} x_0 = (a_0)^{-1} \\ x_{k+1} = 2x_k - T_{2^{k+1}}[a(t) \cdot x_k^2] \end{cases}$$

Exemple :

Considérons l'élément a de $C[[t]]$

$$a(t) = 1 + 2t + 10t^2 + 4t^3 + t^4 + 3t^5 + 3t^6 + t^7 + \dots$$

en calculant les premiers approximants de $a(t)$, on obtient :

$$x_0 = 1$$

$$x_1 = 1 - 2t$$

$$x_2 = 1 - 2t - 6t^2 + 28t^3$$

$$x_3 = 1 - 2t - 6t^2 + 28t^3 + 11t^4 - 279t^5 + 343t^6 + 2055t^7$$

4.3 - Racine d'un élément de $k[[x]][y]$

Soit f un polynôme en y à coefficients dans $k[[x]][y]$. On cherche à déterminer $\bar{y} \in k[[x]]$ tel que $f(\bar{y}) = 0$. On suppose que $f'_y(0) \neq 0$. En utilisant les mêmes notations que dans le § 4.2, et en définissant :

$$\begin{aligned} f_{(n)}(y) &= \sum_{i=0}^{i=r} T_n[f_i] y^i & f_i &\in k[[x]] \\ \text{où} \\ f(y) &= \sum_{i=0}^{i=r} f_i y^i \end{aligned}$$

Alors on a le théorème suivant :

THEOREME 5

Soit f un élément de $k[[x]][y]$. Notons par :

$\bar{y} = \sum \alpha_i x^i$ la racine de f satisfaisant :

$$f'_{(1)}(\alpha_0) \neq 0 \text{ et } f_{(1)}(\alpha_0) = 0$$

Si $u(x) = T_n[\bar{y}]$, alors $v(x)$ définie par (12), (avec $g(y) = f_{(2n)}(y)$) est un approximant de y modulo $2n$.

$$(12) \quad v(x) = u(x) - g(u) \otimes g'(u) \quad \textcircled{-1}$$

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du théorème précédent. Il suffit de s'assurer que $g'(u)$ est inversible. i.e. $T_1[g(u)] \neq 0$.

Or
$$T_1[g(u)] = T_1[f_{(2n)}(u)]$$

et comme
$$f_{(2n)}(u) = \sum_{i=0}^{i=r} i T_{2n}[f_i] u^{i-1}$$

Alors

$$\begin{aligned} T_1[f_{(2n)}(u)] &= \sum_{i=0}^{i=r} i T_1[T_{2n}[f_i]] (T_1[u])^{i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{i=r} i T_1[f_i] \alpha_0^{i-1} = f'_{(1)}(\alpha_0) \neq 0 \end{aligned}$$

donc $g'(u)$ est inversible. Pour calculer son inverse on utilise la formule itérative (11).

Posons $n = 2^k$, on obtient une formule itérative, qui est analogue à celle de la méthode de Newton pour résoudre une équation $f(x) = 0$.

$$(13) \quad \begin{cases} y_0 = \alpha_0 \\ y_{k+1} = y_k - g(y_k) \otimes g'(y_k)^{-1} \end{cases}$$

avec

$$g(y) = f'_{(2n)}(y), \quad f_{(1)}(\alpha_0) = 0 \text{ et } f'_{(1)}(\alpha_0) \neq 0.$$

Revenons à notre problème de départ i.e. déterminer y solution de l'équation $f(x,y) = 0$, lorsque $f(0,0) = 0$ et $f'_y(0,0) \neq 0$. Dans ce cas on a $f_1(y) = f(0,y) \neq 0$.

Prenons $\alpha_0 = 0$, ce qui donne $f_{(1)}(\alpha_0) \neq 0$ et $f'_{(1)}(\alpha_0) = 0$, donc on est sous les hypothèses du théorème 2, et par conséquent on peut calculer les approximations de y par la formule (13). D'où l'algorithme suivant :

```

débüt
|
|   y0 : 0 ;
|   pour k = 0 jusqu'a n faire
|   débüt
|   |   m : 2^(k+1);
|   |   g : f(m)(y);
|   |   h : subst(yk, y, diff(g, y));
|   |   h : h(-1); ←---- ( Algorithme d'inversion)
|   |   yk+1 : yk - subst(yk, y, g)*h;
|   |   fin
|   fin
|   fin

```

I.5 - ALGORITHMES ET EXEMPLESAlgorithmeI Données

- 1°/ f : polynôme en y à coefficients dans $C[x,y]$
 2°/ k : nombre d'itérations
 3°/ x_0 : le point, au voisinage duquel on cherche le développement des solutions.

II Résultats

- $y[1::n]$: solutions exactes ou approchées (i.e. approximants modulo k) de l'équation $f(x,y)=0$.

III Algorithme

- [1] rentrer des données
 [2] substitution
 $x \leftarrow x + x_0$ ou $1/x$ si $x_0 = \infty$
 [3] polygone de Newton
 $\rightarrow (\mu[1::n], \nu[1::n])$
 [4] pour $i = 1$ jusqu'à n faire [5]
 [5] pour $j = 1$ jusqu'à n faire
- début
- [5.1] $\text{eps} \leftarrow \mu[i], p \leftarrow \text{num}(\text{eps}), q \leftarrow \text{denom}(\text{eps})$
 [5.2] polynôme caractéristique
 [5.3] résoudre l'équation $g(t) = 0$
 cø soit α une racine non nulle de $g(t)$
 [5.4] $f \leftarrow \text{subst}(x^q, x, f)$
 $f \leftarrow \text{subst}(x^{p*(\alpha + y)}, y, f) / x^{\nu[i]}$
 [5.5] $\text{eps} \leftarrow \text{eps} + \mu[i] / \text{denom}(\text{eps})$
 $y_0 \leftarrow y_0 + \alpha * x^{\text{eps}}$
 [5.6] si $\text{ord } f(0, y) = 1$ alors ($ll=j$, faire [6])
 sinon si $j = k$ faire [7]
- fin
- [6] pour $l = ll$ jusqu'à k faire
- début
- [6.1] $y_2 \leftarrow \text{pcnm}(f(0, y))$
 cø $\text{pcnm}(p)$: signifie le premier coefficient non nul du polynôme p .
 [6.2] $g \leftarrow$ fonction tronquée de f

[6.3] $y1 \leftarrow 2*y1 - y1^2*df(g,y,y2)$
 c0 $df(f,y,u)$: signifie la valeur de la première
 dérivée de f par rapport à y, prise en $y = u$.
 [6.4] $y2 \leftarrow y2 - y1*g(y2)$
 [6.5] $yo \leftarrow yo + y2$

fin

[7] Sortie des résultats
 Impression de :
 - la fonction f
 - les n branches de solutions

EXEMPLES

1/ Cas regulier, i.e. $D(0) \neq 0$

Les 3 branches de solutions de la
 fonction algebrique, definie par :

$$0 = f(x,y) = y^3 - 3y^2 + xy^2 + xy^2 + 2y^3 - x^3 + x^2 - 4x$$

au voisinage du point $x_0 = 0$, pour $k = 2$ sont :

$$\text{branche(1)} = \frac{53}{2}x^3 + \frac{11}{2}x^2 + 2x$$

$$\text{branche(2)} = -30x^3 - 4x^2 - 3x + 1$$

$$\text{branche(3)} = \frac{7}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$$

2/ Cas singulier avec $a(0) = 0$
 -----ⁿ-----

Les 4 branches de solutions de la
 fonction algebrique, definie par :

$$0 = f(x,y) = y^4 - 2x^3y^2 - 5x^4y + x^6$$

au voisinage du point $x_0 = 0$, pour $k = 3$ sont :

$$\text{branche(1)} = \frac{9/4}{2} x^2 - \frac{7/4}{2} x^{3/2} - \frac{3/2}{2} x$$

$$\text{branche(2)} = \frac{9/4}{2} x^2 + \frac{7/4}{2} x^{3/2} - \frac{3/2}{2} x$$

$$\text{branche(3)} = \frac{9/4}{2} x^2 - \frac{7/4}{2} x^{3/2} + \frac{3/2}{2} x$$

$$\text{branche(4)} = \frac{9/4}{2} x^2 + \frac{7/4}{2} x^{3/2} + \frac{3/2}{2} x$$

3/ Cas singulier avec $a(0) = 0$
 -----ⁿ-----

Les 4 branches de solutions de la
 fonction algebrique, definie par :

$$0 = f(x,y) = y^4 - 2x^3y^2 - 4x^5y + x^6 - x^7$$

au voisinage du point $x_0 = 0$, pour $k = 3$ sont :

$$\text{branche(1)} = -\frac{7/4}{2} x^{3/2} - \frac{3/2}{2} x$$

$$\text{branche(2)} = \frac{7/4}{2} x^{3/2} - \frac{3/2}{2} x$$

$$\text{branche(3)} = \frac{3/2}{2} x - \frac{7/4}{2} x^{3/2}$$

$$\text{branche(4)} = \frac{7/4}{2} x + \frac{3/2}{2} x$$

4/ Cas singulier avec $a(0) = 0$
 -----n-----

Les 4 branches de solutions de la

fonction algébrique, définie par :

$$0 = f(x,y) = x^2 y - 2 x^3 y + y^2 + x^2 y - x^4 - 1$$

au voisinage du point $x_0 = 0$, pour $k = 3$ sont :

$$\text{branche(1)} = - 18 x^5 - 3 x^3 - x + \frac{1}{x}$$

$$\text{branche(2)} = 2 x^6 - x^4 + x^2 + \frac{1}{x}$$

$$\text{branche(3)} = 3 x^3 - \frac{5}{8} x^2 + \frac{1}{2} x - 1$$

$$\text{branche(4)} = x^3 + \frac{5}{8} x^2 + \frac{1}{2} x + 1$$

5/ Singularité à l'infini

Les 4 branches de solutions de la

fonction algébrique, définie par :

$$0 = f(x,y) = x^2 y^4 - 2 x^3 y^2 + y^3 + x^2 y - x^4 - 1$$

au voisinage du point $x_0 = \text{infini}$, pour $k = 3$ sont :

$$\text{branche(1)} = \frac{1}{2} x^2 + \frac{\sqrt{1}}{4} x + \frac{3/2}{2} + \frac{1}{2} x - \frac{\sqrt{1}}{2} \text{sqrt}(x)$$

$$\text{branche(2)} = \frac{1}{2} x^2 + \frac{\sqrt{1}}{4} x + \frac{3/2}{4} + \frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{1}}{2} \text{sqrt}(x)$$

$$\text{branche(3)} = \frac{1}{2} x^2 - \frac{\sqrt{1}}{4} x - \frac{3/2}{4} + \frac{1}{2} x - \frac{\sqrt{1}}{2} \text{sqrt}(x)$$

$$\text{branche(4)} = \frac{1}{2} x^2 + \frac{\sqrt{1}}{4} x + \frac{3/2}{4} + \frac{1}{2} x + \frac{\sqrt{1}}{2} \text{sqrt}(x)$$



C H A P I T R E I I

xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx

SOLUTIONS FORMELLES D'EQUATION ALGEBRIQUE DE TROIS VARIABLES

II.0 Introduction

II.1 Quelques définitions

II.2 Solutions formelles au voisinage de point régulier

2.1 Notations

2.2 Racine d'un polynôme

2.3 Algorithme et exemples

II.3 Solutions formelles au voisinage de point critique

3.1 Définition du polyèdre de Newton

3.2 Construction du polyèdre

3.3 Détermination des solutions

3.4 Algorithmes et exemples

II.4 Seconde méthode pour le cas critique

4.1 Introduction

4.2 Description de la méthode

4.3 Programme et Exemples



II.0 - INTRODUCTION

La théorie de Puiseux [15] des singularités des courbes algébriques, a été étendue à la singularité des surfaces algébriques par Kobb [7], qui a démontré le théorème suivant ([5],[7]) :

THEOREME 1

Une hypersurface de C^3 définie par

$$(1) \quad V = \{(x,y,z) \in C^3 / f(x,y,z) = 0\}$$

$f \in C[x,y,z]$, peut toujours être représentée par un nombre fini de séries de deux variables auxiliaires.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à déterminer les séries représentant la surface, au voisinage d'un point x_0 quelconque de cette surface. Ces séries dépendent éventuellement de la nature du point x_0 .

Dans le cas d'un point régulier, un algorithme inspiré de celui donné au chapitre I, qui calcule la série $y(x)$ solution de l'équation $f(x,y) = 0$ lorsque $f(0,0) = 0$ et $\partial f / \partial y(0,0) \neq 0$, permet de calculer sous les mêmes hypothèses i.e. $f(0,0,0) = 0$ et $\partial f / \partial g(0,0,0) \neq 0$ la série $z(x,y)$ solution de l'équation $f(x,y,z) = 0$ qui s'annule pour $x = y = 0$.

Dans le cas d'un point critique, un algorithme basé sur l'utilisation du polyèdre de Newton, nous détermine de proche en proche les séries représentant la surface. Dans ce cas, on est amené à étudier les deux points suivants :

- 1°) Construction du polyèdre de Newton
- 2°) Détermination du développement des séries racines de (1).

Nous donnons aussi dans ce cas, une autre méthode qui permet de calculer la série $Z(x,y)$ racine de (1), sans utiliser le polyèdre de Newton, mais sa projection sur le plan $x = 0$. L'enveloppe convexe de cette projection est facile à déterminer ce qui nous donne un algorithme plus rapide que le premier.

II.1 - QUELQUES DEFINITIONS

Soit k un corps algébriquement clos, de caractéristique zéro. Soit f un polynôme en Z (non constant) dans $k[x,y]$. On appelle Hypersurface, l'ensemble des points $(x,y,z) \in k^3$, pour lequel $f(x,y,z) = 0$.

Soit (a,b,c) un point de la surface. Quitte à faire le changement :
 $x = a+u$, $y = b+v$, $z = c+w$ et

$$F(u,v,w) = f(x,y,z)$$

on peut supposer que l'origine appartient à la surface. Nous dirons que l'origine est un point régulier. Si $\partial f / \partial z(0,0,0) \neq 0$, et critique dans le cas contraire.

L'ensemble des points critiques est caractérisé par

$$S = \{(x,y,z) \in k^3 / f(x,y,z) = 0 \text{ et } \partial f / \partial z(x,y,z) = 0\}.$$

Evidemment plus l'infini i.e. singularité à l'infini.

II.2 - SOLUTIONS FORMELLES AU VOISINAGE D'UN POINT REGULIER

Supposons que l'origine est un point régulier i.e. :

$$(2) \quad \begin{cases} f(0,0,0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) \neq 0 \end{cases}$$

sous ces hypothèses ; il existe une série entière double $Z(x,y)$ qui s'annule pour $x = y = 0$ et qui vérifie $f(x,y,z(x,y)) = 0$. On se propose donc, de construire un algorithme qui permet de déterminer les polynômes approximants de la série $Z(x,y)$. Pour cela, nous allons introduire quelques notations.

2.1 - Notations

Soit $g(x,y)$ une série double entière en x et y

$$g(x,y) = \sum_{i,j=0}^{\infty} g_{i,j} x^i y^j$$

F un polynôme en Z à coefficients dans $k[x,y]$.

$$F(Z) = \sum_{k=0}^r F_k(x,y) Z^k$$

on note

$$*) \quad T_n[g(x,y)] = \sum_{i+j=0}^{n-1} g_{i,j} x^i y^j$$

approximant de g modulo n .

$$*) \quad F_n(Z) = \sum_{k=0}^r T_n[F_k(x,y)] Z^k$$

Pour g et h appartenant à $k_n[x,y]$

$$k_n[x,y] = \{\text{polynômes en } x \text{ et } y \text{ de degré total } < n\}$$

On définit le produit \otimes et l'inverse $\textcircled{-1}$ dans $k_n[x,y]$ de la manière suivante

$$*) \quad g(x,y) \otimes h(x,y) = T_n[g(x,y) \times h(x,y)]$$

$$*) \quad g(x,y) \textcircled{-1} = T_n[g(x,y)^{-1}]$$

2.2 - Racine d'un polynôme

Sous ces notations et les hypothèses (2), la détermination de la série $Z(x,y)$ racine de l'équation $f(x,y,Z(x,y)) = 0$, se déduit du théorème suivant : (on note $F(Z) = f(x,y,Z)$).

THEOREME 2

Soit $\alpha_0 \in k$ tels que $F_{(1)}(\alpha_0) = 0$ et $F'_{(1)}(\alpha_0) \neq 0$.
 Notons par $Z(x,y)$ la racine de l'équation $F(Z) = 0$, qui prend la
 valeur α_0 pour $x=y=0$, et

$$p(x,y) = T_n[Z(x,y)]$$

Alors,

$$(3) \quad q(x,y) = p(x,y) - F_{(2n)}(p(x,y)) \otimes [F'_{(2n)}(p(x,y))]^{-1}$$

est un approximant de $Z(x,y)$ modulo $2n$, i.e.

$$q(x,y) = T_{2n}[Z(x,y)].$$

Démonstration

Tout d'abord, il faut s'assurer que $F'_{(2n)}(p(x,y))$ est inversible.
 Pour cela, il suffit de montrer que :

$$T_1[F'_{(2n)}(p(x,y))] \neq 0$$

Puisque $F'_{(2n)}(p(x,y)) = \sum_{k=0}^r k T_{2n}[F_k(x,y)](p(x,y))^k$
 donc

$$T_1[F'_{(2n)}(p(x,y))] = \sum_{k=0}^r k T_1[T_{2n}[F_k(x,y)]] \otimes T_1[(p(x,y))^k]$$

comme $T_1 \circ T_{2n} = T_1$

$$T_1[F_k(x,y)] = F_k(0,0)$$

$$T_1[(p_k(x,y))^{k-1}] = \alpha_0^{k-1}$$

ceci entraîne que :

$$T_1[F'_{(2n)}(p(x,y))] = \sum_{k=0}^r k F_k(0,0) \alpha_0^{k-1} = f'(0,0, \alpha_0) \neq 0.$$

Et par conséquent $F'_{(2n)}(p(x,y))$ est inversible.

La démonstration de ce théorème est analogue à celle du Théorème 5, chapitre I.

Or

$$F_1(\alpha_0) = \sum_{k=0}^r T_1[F_k(x,y)]\alpha_0^k$$

$$= \sum_{k=0}^r F_k(0,0)\alpha_0^k = f(0,0,\alpha_0)$$

de même $F'_{(1)}(\alpha_0) = \sum_{k=0}^r k T_1[F_k(x,y)]\alpha_0^{k-1}$

$$= \sum_{k=0}^r k F_k(0,0)\alpha_0^{k-1} = f'(0,0,\alpha_0)$$

comme f vérifie les hypothèses (2), il suffit de poser $\alpha_0 = 0$ pour satisfaire les hypothèses du théorème ce qui donne $F_{(1)}(0) = 0$ et $F'_{(1)}(0) \neq 0$ et par conséquent si on note :

$$Z_k(x,y) = T_2^k[Z(x,y)]$$

approximant de la série $Z(x,y)$ modulo $n = 2^k$, alors la formule (3) du théorème devient :

$$Z_{k+1}(x,y) = Z_k(x,y) - F_{(2^{k+1})}(Z_k(x,y)) \circ [F'_{(2^{k+1})}(Z_k(x,y))]^{-1}$$

avec $Z_0(x,y) = 0$ et $k \geq 0$.

Pour calculer l'inverse de la série $F'_{(2^{k+1})}(Z_k(x,y))$ nous procédons de la manière suivante :

Soit $g(x,y)$ une série inversible, le calcul de sa série inverse est assuré par le théorème suivant :

THEOREME 3

Notons par $h(x,y)$ l'inverse de $g(x,y)$ et par $p(x,y)$ l'approximant de $h(x,y)$ modulo n . i.e. $p(x,y) = T_n[h(x,y)]$. Alors :

$$(5) \quad q(x,y) = 2p(x,y) - T_{2n}[g(x,y)] \otimes p(x,y)^2$$

est un approximant de $h(x,y)$ modulo $2n$.

La démonstration est analogue à celle du théorème 4 du chapitre I.

Posons $n = 2^k$, $h_0(x,y) = 1/g(0,0)$ et $h_k(x,y) = T_{2^k}[h(x,y)]$ la formule (5) devient :

$$(6) \quad h_{k+1}(x,y) = 2h_k(x,y) - T_{2^{k+1}}[g(x,y)] \otimes h_k(x,y)^2$$

Remarque

Le calcul de l'inverse de la série $F'_{(2^{k+1})}(p(Z_k))$ nécessite une application de l'algorithme d'inversion d'une série $(k+1)$ fois. Or, il suffit de remarquer que les approximants de

$$F'_{(2^{k+1})}(p(Z_k)) \quad \text{et} \quad F'_{(2^k)}(p(Z_{k-1}))$$

coïncident jusqu'à l'ordre 2^k . Ceci entraîne que les k premiers approximants de l'inverse de $F'_{(2^{k+1})}(p(Z_k))$ coïncident avec les k premiers approximants de l'inverse de $F'_{(2^k)}(p(Z_{k-1}))$.

Donc, il suffit de prendre le k ième approximant de la série inverse de $F'_{(2^k)}(p(Z_{k-1}))$ et de lui appliquer l'itération donnée par (6), pour déterminer l'approximant modulo 2^{k+1} de la série inverse de $F'_{(2^{k+1})}(p(Z_k))$.

D'où le gain de k itérations pour chaque étape.

Cette remarque, nous permet de combiner les deux algorithmes en un seul algorithme qui sera défini par les deux formules itératives suivantes :

Posons :

$$p(Z) = F_{(2^k)}(Z), \quad q_k = T_{2^k}[p'(Z_k)^{-1}]$$

$$w_k = T_{2^k}[Z], \quad q_0 = 0$$

$$q_0 = 1 / \left[\frac{d}{dz} (F(0,0,z)) \right]_{z=0}.$$

Alors on a :

$$(7) \quad \begin{array}{l} q_{k+1} = 2 q_k - T_{2^{k+1}}[p'(z_k) \times q_k^2] \\ w_{q+1} = w_k - T_{2^{k+1}}[p(z_k) \times q_{k+1}^2] \end{array}$$

- La 1ère ligne de (7) sert à calculer l'inverse de $F'_{(2^{k+1})}(p(z_k))$.
- la 2ème ligne sert à calculer l'approximant de la racine de l'équation $F(x,y,Z) = 0$.

II.3 - SOLUTIONS FORMELLES AU VOISINAGE D'UN POINT CRITIQUE

Supposons que l'origine est un point critique de l'hypersurface définie par l'équation $f(u,v,w) = 0$; ceci veut dire que f vérifie

$$(8) \quad f(0,0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial w}(0,0,0) = n > 1.$$

Dans ce cas, les séries représentant les séries hypersurfaces ne sont plus des séries doubles entières. Leur détermination nous conduit à la notion du polyèdre de Newton. Pour plus de détails sur le polyèdre de Newton voir [8], [11], [17].

3.1. - Définition du polyèdre de Newton

Soit

$$0 = f(u,v,w) = \sum a_{i,j,k} u^i v^j w^k$$

l'équation d'une hypersurface vérifiant (8). A chaque coefficient $a_{i,j,k}$ non nul faisons correspondre dans un repère orthonormé d'origine 0 et d'axes Ox, Oy, Oz , le point (i,j,k) . Ce point sera appelé point surface.

Si (i,j,k) est un point surface, on définit

$$\Lambda(i,j,k) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x \geq i, y \geq j, z \geq k\}$$

$$\Delta = \bigcup \Lambda(i,j,k) \text{ ou } (i,j,k) \text{ est un point surface.}$$

L'enveloppe convexe de Δ est appelée polyèdre de Newton.
Ce polyèdre vérifie :

- *) Chaque sommet du polyèdre est un point surface.
- *) Les points surfaces d'une face, sont caractérisés par l'équation

$$(9) \quad lx + my + nz = a$$

l, m, n, a sont des entiers positifs, ce qui veut dire que le vecteur normal N de la face est positif : $(N = (l,m,n))$.

(9) étant l'équation du plan d'appui de la face.

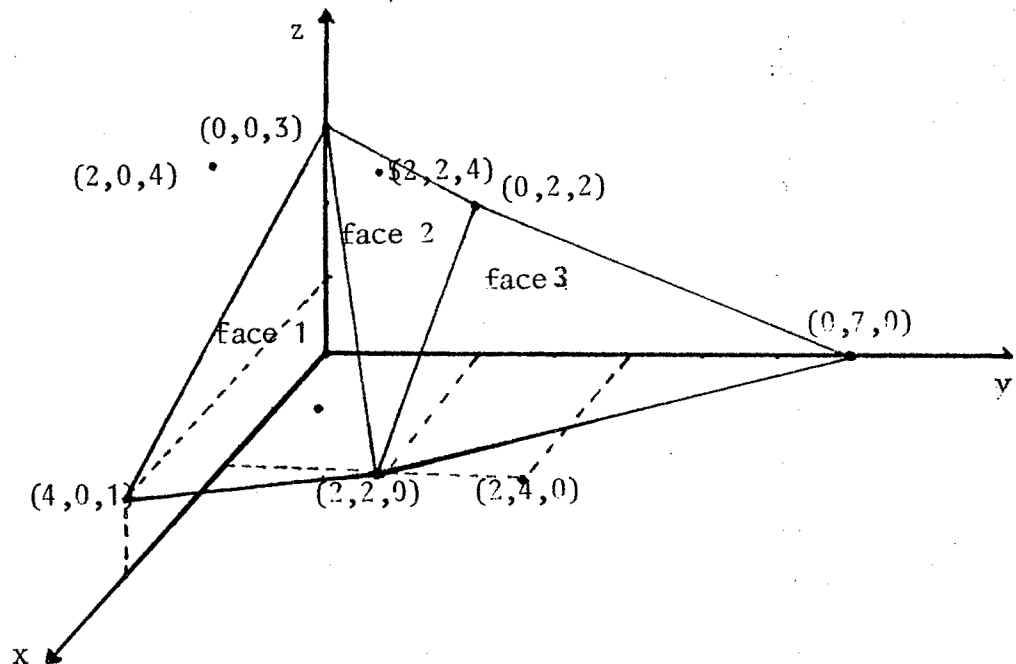
*) les autres points vérifient :

$$lx + my + nZ > a$$

Pour illustrer la définition du polyèdre de Newton associé à une équation algébrique, nous allons donner un exemple.

Soit :

$$0 = f(x,y,Z) = x^2y^2Z^4 + x^2Z^4 + Z^3 + y^2Z^2 + x^4Z + x^2yz + x^2y^2 + x^2y^4 + y^7$$



Le polyèdre de Newton associé à cet exemple est constitué de 3 faces :

face	points associés à la face	équation de la face
1	(0,0,3), (2,2,0), (4,0,1)	$x + 2y + 2Z = 6$
2	(0,0,3), (2,2,0), (0,2,2)	$2x + y + 2Z = 6$
3	(0,7,0), (2,2,0), (0,2,2)	$5x + 2y + 5Z = 14$

On remarque que les vecteurs normaux de ces trois faces sont positifs. Par contre si on considère la face passant par les 3 points (2,0,4), (0,0,3) et (2,2,4) l'équation de son plan d'appui est $2x - 3y + 4Z = 12$, le vecteur normal à ce plan n'est pas positif, par conséquent cette face n'appartient pas au polyèdre de Newton.

Une fois que la définition du polyèdre de Newton a été établie, nous allons étudier la méthode permettant de trouver toutes les faces qui le constituent ainsi que leurs points sommets.

Pour cela, nous distinguons deux cas :

1°) $f(0,0,Z) \neq 0$, alors on note $n_0 = \text{ord } f(0,0,Z)$. Le point $(0,0,n_0)$ est un point sommet, dans ce cas nous commençons par construire toutes les faces pour lesquelles $(0,0,n_0)$ est un sommet, ensuite on construit les faces restantes.

2°) $f(0,0,Z) = 0$, ce cas peut être considéré comme un cas particulier du 1er, à condition de remplacer n_0 par ∞ (car $\text{ord } f(0,0,Z) = \infty$).
Donc les formules de ce second cas seront la limite, lorsque n_0 tend vers l'infini, des formules du premier cas. Il suffit donc d'étudier que le premier cas.

3.2 - Construction du polyèdre de Newton

Dans cette partie nous nous intéressons à décrire la méthode permettant de trouver toutes les faces constituant le polyèdre, en commençant par celles qui passent par le point $(0,0,n_0)$.

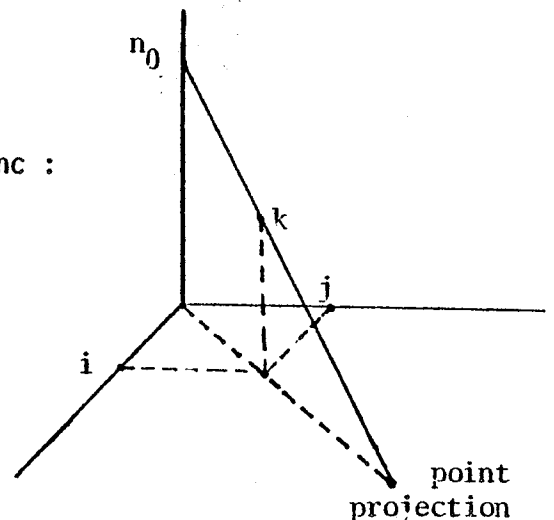
1ère étape

Cette étape consiste à projeter tous les points surfaces (i,j,k) ($0 \leq k < n_0$) sur le plan $Z = 0$ suivant la droite (D) passant par les deux points $(0,0,n_0)$ et le point lui même, i.e. (i,j,k) . Ce point projection est donc l'intersection du plan $Z = 0$ avec la droite (D) dont l'équation est :

$$\frac{x}{i} = \frac{y}{j} = \frac{Z-n_0}{k-n_0}$$

Les coordonnées du point intersection sont donc :

$$(7) \quad x = \frac{i n_0}{n_0 - k}, \quad y = \frac{j n_0}{n_0 - k}, \quad Z = 0$$



- figure 2-

Remarque

Lorsque $f(0,0,Z) = 0$, alors $n_0 = \infty$ et par passage à la limite de (7) on obtient :

$$(7') \quad x = i, \quad y = j, \quad Z = 0$$

ce qui revient à dire que cette projection est la projection orthogonale sur le plan $Z = 0$.

2ème étape

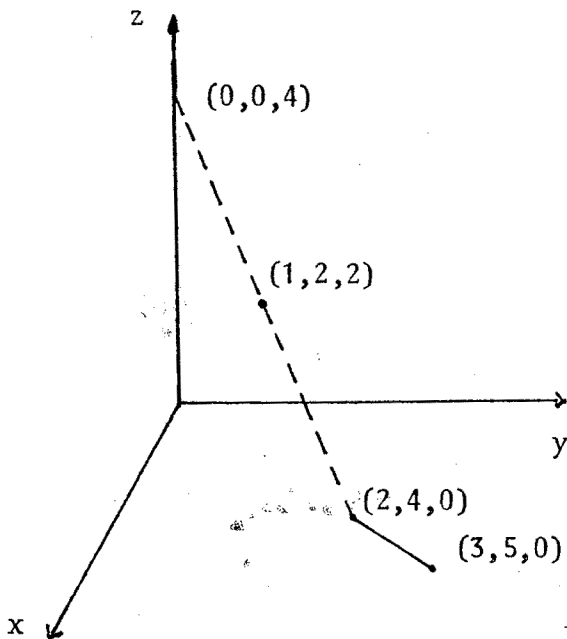
Construisons le polygône de Newton de ces points projections qui appartiennent au plan $Z = 0$. Ceci nous donne 2 cas à envisager.

3.2.1 - Toutes les pentes des côtés du polygône de Newton sont positives.

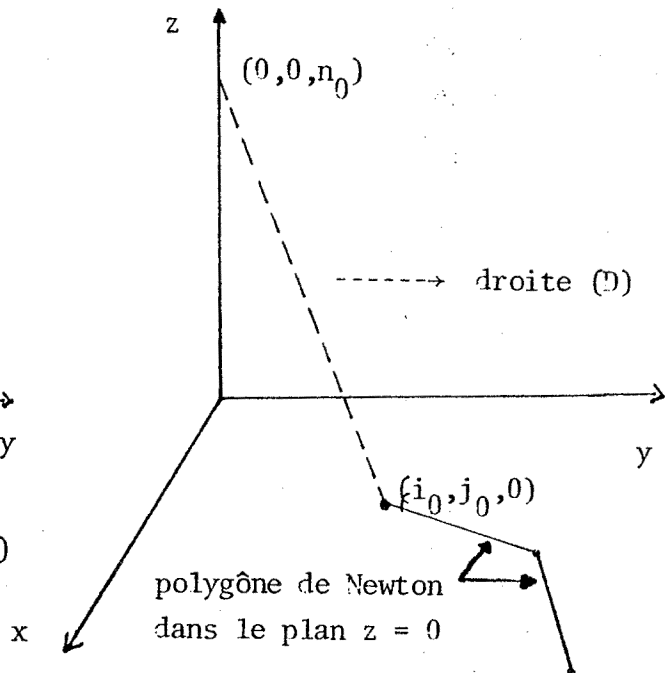
Exemple : $f(x,y,Z) = Z^4 + 2x y^2 z^2 + x^3 y^5 + x^2 y^4$.

Le polygône de Newton est formé d'un seul côté d'équation $y = x+2$, donc de pente positive. Figure 3.

Dans ce cas, il n'existe pas de faces dont le vecteur normal est positif. Alors, nous dirons que le polyèdre est formé de la droite (D) passant par les points $(0,0,n_0)$ et $(i_0,j_0,0)$. Voir Figure 4.



- figure 3 -



- figure 4 -

L'équation de cette droite est donnée par :

$$\frac{x}{i_0} = \frac{y}{j_0} = \frac{n_0 - Z}{n_0}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} n_0 x + i_0 Z = i_0 n_0 \\ n_0 y + j_0 Z = j_0 n_0 \end{cases}$$

En simplifiant la première équation (resp. la seconde) par le pgcd (n_0, i_0) (resp. pgcd (n_0, j_0)) on obtient :

$$(8) \quad \begin{cases} p_1 x + q_1 Z = a_1 \\ p_2 y + q_2 Z = a_2 \end{cases}$$

C'est ces deux équations que nous utiliserons dans ce cas, pour déterminer les séries définissant l'hypersurface.

3.2.2 Il existe des côtés à pentes négatives.

A chaque côté à pente négative, nous faisons correspondre la face définie par : le point $(0,0,n_0)$ et les deux points $(i,j,0)$ et $(i',j',0)$ sommets du côté du polygone.

L'équation du plan d'appui de cette face est : $lx + my + nZ = a$.

En exprimant que ces trois points appartiennent au plan, on obtient :

$$(9) \quad \begin{cases} l = n_0(j' - j) & q = ij' - i'j \\ p = n_0(i - i') & a = q n_0 \end{cases}$$

En parcourant tous les côtés du polygone de Newton, on obtient les équations de toutes les faces pour lesquelles $(0,0,n_0)$ est un sommet.

Pour construire les autres faces non passant par le point $(0,0,n_0)$ nous procédons de la manière suivante :

On range les points sommets des côtés du polygone de Newton, dans un tableau nommé poincôté, de dimension $(l+1)$ (l étant le nombre des côtés constituant

le polygône). Commençons par les deux premiers points du tableau (poincôte[p] = (i[p], j[p], k[p]), p = 1,2,...,l+1 et faisons leur associer l'ensemble S des points (i,j,k) tel que k < max(k[1], k[2]). Alors nous allons construire la face dont le plan d'appui passe par les deux points : poincote[1] et poincote [2], et un point de S ; de plus, il faut que cette face laisse tous les autres points de S dans sa partie positive, c'est-à-dire si on note : $lx+my+nz = a$ l'équation de cette face, alors pour tout point (i,j,k) de S, on a : $li + mj + nk \geq a$.

Pour faciliter la recherche de cette face, on range les éléments de S dans un tableau nommé spt et nous noterons les éléments de ce tableau par $spt[p] = (si[p], sj[p], sk[p])$.

On commence par construire la face passante par les 3 points poincote[1], poincote[2] et spt[1]. On note $lx + my + nz = a$ l'équation de cette face (avec l, m, n, a sont positifs). Ensuite on regarde la position du point spt[2] par rapport à cette face. Si il se situe dans sa partie positive c'est-à-dire :

$$l \ si[2] + m \ sj[2] + n \ sk[2] \geq a$$

alors on passe au point suivant du tableau spt.

Sinon, on permute les deux points : spt[1] et spt[2], c'est-à-dire le nouveau point spt[1] contient les coordonnées du point spt[2] et vice-versa, et on construit la nouvelle face passante par les trois points poincote[1], poincote[2] et le nouveau point spt[1] et on continue la comparaison avec le point suivant du tableau spt. La face obtenue à la fin de la comparaison vérifie bien, pour tout point (i,j,k) de S on a $li + mj + kn \geq a$.

Donc, si son vecteur normal (l,m,n) est positif, cette face appartient au polyèdre de Newton sinon on la rejette, et on continue la procédure en répétant la même technique pour deux autres points du tableau poincote.

Remarque 1

Si pour les deux points : poincote p et poincote $p+1$ on a obtenu une face telle que son troisième sommet qui la constitue appartient lui aussi au tableau poincote, alors la procédure se répète avec les deux points : poincote[p] et le troisième de la face.

Remarque 2

Dans le cas où $f(0,0,Z) = 0$, le point $(0,0,n_0)$ est à l'infini, donc il n'y a pas de faces pour lesquelles $(0,0,n_0)$ est un sommet et par conséquent la construction des faces du polyèdre se réduit à la partie qui consiste à construire les faces restantes. Mais pour cela, il faut d'abord tracer le polygone de Newton des points projections $(i,j,0)$ ($k = 0$, projection orthogonale).


```

polyedre(f,l9):= block(
/* Determination des faces constituant
   le polyedre de Newton associ a f */

n1:hipow(f,x), n2:hipow(f,y),
j:subst(0,x,subst(0,y,f)),
n3:lopow(j,z), l1:0, erreur:1,
/* Projection des points surfaces sur le plan z=0 */
n4: if n3=0 then hipow(f,z) else (n3-1),
for i3=n4 step -1 thru 0 do
[ a:coeff(f,z,i3), if not(a=0) then
  ( for j1:0 thru hipow(a,x) do
    [ b:coeff(a,x,j1), if not(b=0) then
      ( l1:l1+1, j2:lopow(b,y), n5:n3-i3,
        point[l1]: if n3=0 then [j1,j2,j1,j2,j3]
                    else [j1*n3/n5,j2*n3/n5,j1,j2,i3] )]]],
/* Classement des points projections */
i1:1, while i1<l1 do [
  i2:i1+1, pp:point[i1][2],
  for j1:i2 thru l1 do [
    pg:point[j1][2],
    if pg<pp then (
      pp:pg, pq:point[j1],
      point[j1]:point[i1],
      point[i1]:pq ),
    i1:i1+1 ],
/* Elimination des points projections doubles */
i:1, l2:l1-i,
while l2>0 do [
  pp1:point[i][1], pg1:point[i+1][1],
  pp2:point[i][2], pg2:point[i+1][2],
  pp3:point[i][5], pg3:point[i+1][5],
  if pp2=pg2 then (
    if pp1>pg1 then point[i]:point[i+1]
    else if pp1=pg1 then
      if pp3>pg3 then point[i]:point[i+1],
    i1:i+2, if i1<=l1 then
      for j:i1 thru l1 do point[j-1]:point[j],
      l1:l1-1 )
    else i:i+1,
  l2:l1-i],
pp:point[l1][1], l2:l1,
for i1:(l1-1) thru 1 step -1 do [
  pg:point[i1][1],
  if pg<=pp then ( pp:pg, l2:i1 )],
/* 1er cas: polyedre forme d'une droite */
if l2=1 then (
  u1:point[1][3], u2:point[1][4],
  u3:n3-point[1][5],
  p1:u3/gcd(u3,u1), q1:u1/gcd(u3,u1),
  p2:u3/gcd(u3,u2), q2:u2/gcd(u3,u2),
  s1:q1*n3, s2:q2*n3, l2:0,
  fco1:p1*x+q1*z, fco2:p2*y+q2*z, print(" "),
  print(" L'equation de la droite "),
  print(" constituant le polyedre est:"),
  print(" "), print( fco1," = ",s1),
  print(" "), print( fco2," = ",s2),
  face[0]:[p1,q1,s1,p2,q2,s2])
  else (

```

```

/* 2d cas: polyedre forme d'une ou plusieurs faces */
u:point[l2], l3:l2, l4:1,
poincote[1]:[u[3],u[4],u[5]],
while l3>1 do [
  pp:point[l3-1][1]-point[l3][1], l4:l4+1,
  jp:pp/(point[l3][2]-point[l3-1][2]),
  for i:(l3-1) thru 1 step -1 do [
    qp:point[i][1]-point[l3][1],
    qj:qp/(point[l3][2]-point[i][2]),
    if qj<=qj then ( qj:qj, l5:i)],
  l3:l5, pp:point[l5],
  poincote[l4]:[pp[3],pp[4],pp[5]] ],
/* Construction des faces */
if n3=0 then l2:0 else (
u1:poincote[1][1],
u2:poincote[1][2],
u3:poincote[1][3],
if l9=1 then l4:2,
for j:2 thru l4 do [
  v1:u1, u1:poincote[j][1],
  v2:u2, u2:poincote[j][2],
  v3:u3, u3:poincote[j][3],
  l:v2*u3-v3*u2+n3*(u2-v2), q:v1*u2-v2*u1,
  p:v3*u1-v1*u3+n3*(v1-u1),
  if q<0 then ( l:-l, p:-p, q:-q ),
  r:gcd(gcd(l,p),q), l:l/r,
  p:p/r, q:q/r, s:q*n3,
  if not(l>0 and p>0) then ( erreur:0,
  print(" Erreur dans le polyedre "),
  print(" l= ",l," p= ",p," q= ",q," s= ",s))
  else ( face[j-1]:[l,p,q,s],
  sortie(face[j-1],j-1)),
  l2:(l4-1 ),
  j:l4, pp:poincote[j],
  pj:poincote[j-1],
  while (j>2 and not(l9=1 and l2=1)) do
  [ l1:0,
  for il:(j-2) step -1 thru 1 do
  [ l1:l1+1, point[l1]:poincote[il] ],
  j3:max(pp[3],pj[3]),
  while j3>0 do [
    j3:j3-1, a:coeff(f,z,j3),
    if not(a=0) then (
      for j2:0 thru hipow(a,y) do [
        b:coeff(a,y,j2),
        if not(b=0) then (
          teste:1, j1:lbpow(b,x),
          for il:1 thru l4 do [
            pv:[j1,j2,j3],
            if poincote[il]=pv then teste:0],
          if teste=1 then (
            l1:l1+1, point[l1]:pv )))]],
  if l1>0 then (
  il:0, pq:poincote[il+1],
  thru l1 while il<l1 do [
    if not(pq=pp or pq=pj) then (
      j:gousse(pp,pj,pq),
      if not(erreur=0 and il=l1) then (
        tv:j[4],
        while (j[4]<=tv and il<l1) do [

```

```

        tv:0, for il:1 thru 3 do
        tv:tv+j[il]*point[i1+1][il],
        if g[4]>tv then pq:point[i1+1]
            else (i1:i1+1, pq:point[i1])))),
if not(erreur=0) then
( l2:l2+1, face[l2]:g, sortie(g,l2) ),
if not(l9=1 and l2=1) then (
l02:j1:j-1, teste:1,
while j1>1 do [ j1:j1-1,
if poincote[j1]=pq then (teste:0,l01:j1)],
if teste=0 then
( if l02>(l01+1) then
rattrape(l01,l02,l2,pv,pg,face[l2]),
poincote[j]:poincote[l01+1], pg:pq,
poincote[l01+1]:pp, j:l01+1 )
else ( l4:l4+1, poincote[l4]:pp,
poincote[j]:pp:pq ))))] s

```

```

sortie(sg,ls):=block(
print(" "), ordre(x,y,z),
fce:sg[1]*x+sg[2]*y+sg[3]*z,
print(" face["ls,"]: ",
fce," = ",sg[4] ) ) s

```

```

rattrape(lr1,lr2,l2,rpp,rpq,rpf):=block(

```

```

/* Cette procedure determine les faces
manquees par la procedure principale */

```

```

rtest:1, while rtest=1 do
[ lr3:lr2-lr1-1,
if lr3=1 then
( g:gausse(rpp,rpq,poincote[lr1+1]),
rtest:0, if erreur=1 then
( l2:l2+1, face[l2]:g, sortie(g,l2) ))
else
( ir1:ir2:0,
for ir1:(lr1+1) thru lr2-1 do
[ tt:0, for j1:1 thru 3 do
tt:tt+rpf[j1]*poincote[ir1][j1],
if tt=rpf[4] then ir1:ir
else ir2:ir ],
if ir2>0 then
( if ir1=(lr1+1) then
( lr1:ir1, rpp:poincote[ir1] ),
if ir1=(lr2-1) then
( lr2:ir1, rpq:poincote[ir1] ),
if ((lr1+1)<ir1 and ir1<(lr2-1) and ir1>ir2) then
( lr1:ir2+1, rpp:poincote[lr1] ),
if ((lr1+1)<ir1 and ir1<(lr2-1) and ir1<ir2) then
( th1:poincote[ir1], th2:poincote[ir2],
rpf:gausse(rpp,th1,th2), l2:l2+1,
face[l2]:rpf, sortie(rpf,l2),
rpp:th2, rpq:th1, lr1:ir1 ),
if ir1=0 then
( rpg:poincote[lr1+1], ir1:lr1+2,
g:gausse(rpp,rpg,rpq), j1:lr1+2,
thru lr2 while j1<lr2 do

```

```

[ th:0, for ir3:1 thru 3 do
  th:th+j[ir3]*poincote[j1][ir3],
  if th<j[4] then
    ( ir1:j1, rpg:poincote[j1],
      rpf:gousse(rpp,rpg,rpq)),
    l2:l2+1, face[l2]:rpf, sortie(rpf,l2),
    if ir1=(lr1+1) then (lr1:ir1, rpp:rpg),
    if ir1=(lr2-1) then (lr2:ir1, rpg:rpg),
    if ((lr1+1)<ir1 and ir1<(lr2-1)) then
      ( th1:poincote[ir1], th2:poincote[lr1+1],
        rpf:face[l2+1]:gousse(rpp,th1,th2),
        l2:l2+1, sortie(rpf,l2), rpp:th1 )))) $

```

```

gousse(point1,point2,point3):=block(

```

```

/* Cette procedure determine l'equation
de la face passant par les 3 points:
point1,point2 et point3. */

```

```

i:0, while (point1[3]=0 and i<3) do
[ point4:point1, point1:point2,
  point2:point3, point3:point4,
  Ii:i+1 ],
if i=3 then erreur:0 else
( p1:point1[1]*point2[2]-point2[1]*point1[2],
  p2:point1[1]*point2[3]-point2[1]*point1[3],
  p3:point1[1]*point3[2]-point3[1]*point1[2],
  p4:point1[1]*point3[3]-point3[1]*point1[3],
  bb2:point1[1]-point2[1], bb1:1,
  bb3:point1[1]-point3[1],
  if p1=0 then
    if p3=0 then erreur:0 else
      ( bb4:bb2, bb2:bb3, bb3:bb4,
        p1:p3, p3:p2, p2:p4, p4:p3, p3:0 ),
  if not(erreur=0) then
    ( p4:p1*p4-p3*p2,
      bb3:bb3*p1-bb2*p3,
      if p1=0 then erreur:0 else
        ( fc[3]:bb3/p4, fc[2]:(bb2-fc[3]*p2)/p1,
          fc[1]:point1[2]*fc[2]+point1[3]*fc[3],
          fc[1]:( bb1-fc[1] )/ point1[1],
          fc[4]:denom(fc[1])*denom(fc[2]),
          fc[4]:denom(fc[3])*fc[4],
          fc[1]:fc[1]*fc[4],
          fc[2]:fc[2]*fc[4],
          fc[3]:fc[3]*fc[4],
          bb:gcd(fc[3],gcd(fc[2],fc[1])),
          for i:1 thru 4 do fc[i]:fc[i]/bb,
          test:i:0, while i<3 do
            [ i:i+1, if fc[i]<=0 then
              ( test:test+1,
                for j:1 thru 4 do fc[j]:-fc[j] ]),
            if test>1 then erreur:0 ]),
  if not( erreur=0 ) then
    return([fc[1],fc[2],fc[3],fc[4]] ) ) $

```

Exemple 1

$$f(x,y,z) = x^2 y^2 z^4 + x^2 z^4 + z^3 + y^2 z^2 + x^4 z + y^7 + x^2 y^4 + x^2 y^2$$

Les faces constituant le polyedre de Newton sont :

$$\text{face}[1] : 2z + 2y + x = 6$$

$$\text{face}[2] : 2z + y + 2x = 6$$

$$\text{face}[3] : 5z + 2y + 5x = 14$$

Exemple 2

$$f(x,y,z) = z^3 + x^2 y^2 z + x^6 y z + y^5 + x$$

Les faces constituant le polyedre de Newton sont :

$$\text{face}[1] : 2z + y + 2x = 6$$

$$\text{face}[2] : 3z + 2y + 2x = 9$$

$$\text{face}[3] : 5z + 4y + 3x = 15$$

$$\text{face}[4] : 2z + y + x = 5$$

$$\text{face}[5] : 14z + 5y + 6x = 30$$

Exemple 3

$$f(x,y,z) = z^4 + 2x^2 y^2 z + x^3 y^5 + x^2 y^4$$

pas de face a vecteur normal positif.

l'equation de la droite constituant

le polyedre , dans ce cas est :

$$z + 2x = 4$$

$$z + y = 4$$

3.3 - Détermination des séries

La détermination du polyèdre de Newton, nous conduit à envisager les deux cas suivants :

- .) Polyèdre est formé d'une droite
- .) Polyèdre est formé d'une ou plusieurs faces.

Commençons par le premier cas.

3.3.1 - Considérons les transformations :

$$(10) \quad x = \xi^{p_1} \quad y = \eta^{p_2} \quad Z = \xi^{q_1} \eta^{q_2} \zeta$$

où p_1, p_2, q_1, q_2 sont les coefficients des équations (8).
En substituant (10) dans l'expression de F , on obtient :

$$F(x, y, Z) = \xi^{a_1} \eta^{a_2} [\zeta^\sigma h(\zeta) + \xi\psi + \eta\phi]$$

où ψ et ϕ sont des polynômes en ζ à coefficients des séries doubles en ξ et η et h est un polynôme en ζ à coefficient dans k avec $h(0) \neq 1$.
Or nous cherchons à déterminer Z en fonction de x et y , ce qui revient d'après (10) à exprimer ζ en fonction de ξ et η c'est-à-dire à écrire Z sous la forme :

$$Z = \xi^{q_1} \eta^{q_2} \zeta \quad \text{avec} \quad \zeta = g(\xi, \eta)$$

où $g(\xi, \eta)$ est une série double en ξ et η , avec $g(0, 0) \neq 0$. La valeur de ζ pour $\xi = \eta = 0$ est donnée par l'équation $h(\zeta) = 0$.

Si on note ζ_0 une racine de ce polynôme, et si on pose :

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1$$

Alors

$$F(\xi^{p_1}, \eta^{p_2}, \xi^{q_1} \eta^{q_2} (\zeta_0 + \zeta_1)) = \xi^{a_1} \eta^{a_2} x$$

$$\underbrace{[(\zeta_0 + \zeta_1)^\sigma h(\zeta_0 + \zeta_1) + \xi\psi + \eta\phi]}_{F_1(\xi, \eta, \zeta_1)}$$

$$F_1(\xi, \eta, \zeta_1)$$

Remarquons que $F_1(0,0,0) = \zeta_0^\sigma h(\zeta_0) = 0$ car $h(\zeta_0) = 0$, donc $(0,0,0)$ est un point de la surface définie par l'équation $F_1(\xi, \eta, \zeta_1) = 0$. Pour exprimer ζ_1 en fonction de ξ et η on a deux cas : ou bien $\text{ord } F_1(0,0,\zeta_1) = 1$ donc $(0,0,0)$ est un point régulier, donc il suffit d'appliquer l'algorithme donné dans I.2, qui déterminera ζ_1 en fonction de ξ et η . Ou bien $\text{ord } F_1(0,0,\zeta_1) \neq 1$, alors le point $(0,0,0)$ est un point critique, donc on trace le polyèdre de Newton associé à F_1 , et à partir de là on a deux cas à envisager :

1°) Le polyèdre de F_1 est formé d'une droite, donc il suffit de réappliquer le paragraphe 3.3.1 à la fonction F_1 .

2°) Le polyèdre de F_1 est formé d'une ou plusieurs faces, alors on a :

3.3.2 - On choisit une face du polyèdre dont l'équation du plan d'appui est : $lx + my + nZ = a$ avec l, m, n et a sont des entiers positifs définis par (9). Ensuite on considère les transformations suivantes :

$$(11) \quad x = \xi^l, \quad y = \eta \xi^m \quad \text{et} \quad Z = \zeta \xi^n$$

En substituant (11) dans l'expression de F les termes de la forme :

$$x^i y^j z^k \quad \text{se transforment en : } \eta^j \zeta^k \xi^{li+mj+nk}$$

or par construction du polyèdre de Newton on a :

$$li + mj + nk \geq a$$

Donc F s'écrira :

$$F(x,y,Z) = \xi^a \underbrace{[\eta^\sigma \zeta^\phi \Phi(\eta, \zeta) + \xi \Psi(\xi, \eta, \zeta)]}_{f_1(\xi, \eta, \zeta)}$$

La série Z , solution de l'équation $F(x,y,Z) = 0$ est caractérisée par

$$Z = \zeta \xi^n \quad \text{avec} \quad \zeta = g(\xi, \eta)$$

où $g(\xi, \eta)$ est une série double en ξ et η avec $z(0,0) \neq 0$, et la valeur de ζ pour $\xi = 0$ est donnée par l'équation $f_1(0, \eta, \zeta) = 0$ c'est-à-dire

$$(12) \quad \phi(\eta, \zeta) = 0 \quad \text{où } \phi \in k[\eta, \zeta].$$

c'est une équation algébrique de deux variables η et ζ , donc il faut la développer au voisinage du point $(0, \alpha)$ où α est une racine du polynôme $\phi(0, \zeta)$, ($\alpha \neq 0$, car $\phi(0,0) \neq 0$). Pour cela nous allons appliquer l'algorithme du chapitre 1 à l'équation (12) au voisinage du point $(0, \alpha)$, cette résolution nous donne une solution ζ_0 de (12) et nous continuons la méthode en posant : $\zeta = \zeta_0 + \zeta_1$. Donc f_1 devient :

$$f_1(\xi, \eta, \zeta_0 + \zeta_1) = \underbrace{\eta^\sigma(\zeta_0 + \zeta_1)^\phi \phi(\eta, \zeta_0 + \zeta_1) + \xi \psi(\xi, \eta, \zeta_0 + \zeta_1)}_{F_1(\xi, \eta, \zeta_1)}$$

la nouvelle fonction F_1 s'annule pour $\zeta = \zeta_1 = 0$. Donc pour déterminer ζ_1 en fonction de ξ et η on est amené à résoudre l'équation $F_1(\xi, \eta, \zeta_1) = 0$. Pour cela nous allons réappliquer la méthode appliquée à F au § 3.3, en commençant par étudier la nature du point $(0,0,0)$.

Si $(0,0,0)$ est régulier i.e. $\text{ord } F_1(0,0,\zeta_1) = 1$ il suffit d'appliquer la méthode du 3.2

Sinon, on trace le polyèdre de la nouvelle fonction F_1 et suivant que le polyèdre est formé d'une droite où d'une ou plusieurs faces on applique 3.3.1 où 3.3.2.

3.4 - Algorithme et Exemples

$$f(x,y,z) = z^2 + 2xyz - 2xy - x^2$$

face[1] : $z + y + x = 2$

equation caracteristique : $z^2 - 2y - 1 = 0$

solution : $z_0 = -1 - y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}y^3$

nouvelle fonction :

$$f = z^2 + 2xyz - 2z - 2yz + y^2z - y^3z - 2xy - 2xy^2 + xy^3 - xy^4$$

cas regulier

$$z_1 = -xy - \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}x^2y^2$$

finalement

$$X = x$$

$$Y = xy$$

$$Z = -x - xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}x^2y^2 - x^2y^3$$

$$- \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^2y^3$$

II.4 - AUTRE METHODE POUR LE CAS CRITIQUE

4.1 - Introduction

On suppose que l'origine appartient à l'hypersurface d'équation $f(x,y,Z) = 0$ où $f \in k[x,y,Z]$. (15).

On se propose de chercher des solutions $Z(x,y)$ qui s'annulent pour $x = y = 0$. Ces solutions sont de types :

$$(16) \quad Z(x,y) = \sum a_i(x) y^{\epsilon_i} \quad \epsilon_0 = 0$$

où les $a_i(x) \in k((x^{1/m_i}))$ où m_i est à déterminer, et les (ϵ_i) forment une suite croissante de nombre rationnels positifs.

4.2. - Description de la méthode

La série (16) est une solution de (15) pour tout x et y ceci entraîne que $Z(x,0)$ est solution de l'équation :

$$(17) \quad f(x,0,Z) = 0$$

or $Z(x,0) = a_0(x)$, ce qui détermine $a_0(x)$ en résolvant l'équation (17) par l'algorithme du chapitre 1, d'où :

$$a_0(x) \in k((x^{1/m_0})).$$

Pour continuer la description, nous posons :

$$(18) \quad x = x_1^{m_0}, \quad Z = a_0(x_1^{m_0}) + u$$

avec

$$u = \sum_{i \geq 1} a_i(x) y^{\epsilon_i}.$$

Calculons le développement limité de f au voisinage de $a_0(x)$, on obtient (avec $f_0(x,Z) = f(x,0,Z)$) :

$$f_0(x,Z) = \underbrace{f_0(x_1, a_0(x))}_{= 0} + \underbrace{(Z - a_0(x))}_{= u} f'_0(x_1, a_0(x)) + \dots$$

ce qui donne :

$$f_0(x,Z) = u f'_0(x, a_0(x)) + \frac{u^2}{2} f''_0(x, a_0(x)) + \dots$$

en substituant (18) dans f , on obtient :

$$f(x,y,Z) = g(x_1, y, u) = u \phi(x_1, u) + y \psi(x_1, y, u)$$

remarquons que $g(x_1, 0, 0) = 0$, ce qui entraîne que dans l'expression de g ne figure pas de termes en x_1^i .

Diagramme de Newton

Construisons le diagramme de Newton de g de la façon suivante : A chaque terme $x_1^i y^j u^k$ dont le coefficient associé est non nul, faisons correspondre le point $M(j,k)$ dans le plan OyZ , ceci revient à considérer la projection du polyèdre de Newton sur le plan $x = 0$. Ensuite prenons l'enveloppe convexe de tous ces points. En tenant compte de la remarque précédente, cette enveloppe convexe ne passe pas par l'origine (i.e. pas de termes en x_1^i). Choisissons un côté de ce diagramme et posons $\varepsilon_1 = -1/\mu$ où μ est la pente de la droite passant par ce côté ($\varepsilon_1 > 0$). Posons :

$$\varepsilon_1 = p_1/q_1 \quad \text{avec} \quad (p_1, q_1) = 1$$

$$u = y_1^{p_1} v \quad \text{et} \quad y = y_1^{q_1}$$

un terme de la forme

$$x_1^i y^j u^k \quad \text{deviendra} \quad x_1^i v^k y_1^{(q_1 j + p_1 k)}$$

Par construction du diagramme de Newton, on a :

$$j \cdot q_1 + k p_1 \geq q_1 v$$

ou v est l'intersection de la droite passant par le côté choisi avec l'axe $Z=0$. (intersection prise dans le plan Oyz). Donc :

$$g(x_1, y, u) = y^v \underbrace{[\phi_1(x_1, v) + y_1^\sigma \psi_1(x_1, y_1, v)]}_{F(x_1, y_1, v)}$$

$\phi_1(x_1, v)$ est un polynôme en v de degré inférieur ou égal à celui de f par rapport à Z .

$$\phi_1(x_1, v) = \sum_{jp_1 + kq_1 = q_1 v} g_{i,j,k} x_1^i v^k.$$

Alors, pour que $Z(x, y)$ soit solution de (14), il est nécessaire que v soit solution de l'équation $F(x_1, y_1, v) = 0$.

La valeur de v pour $y_1=0$ est donnée par l'équation :

$$(19) \quad F_1(x_1, 0, v) = 0.$$

En résolvant cette équation par l'algorithme du chapitre I, on obtient :

$$v(x_1, 0) = a_1(x_1) \in k((x_1^{1/m_1}))$$

alors on pose

$$(20) \quad x_1 = x_2^{m_1} \quad \text{et} \quad v = a_1(x_1) + u_2$$

ce qui donne, lorsque on substitue (20) dans F

$$F(x_1, y_1, v) = \underbrace{\phi_1(x_2^{m_1}, a_1(x_1) + u_2) + y_1^\sigma \psi_2(x_2, y_2, u_2)}_{F_2(x_2, y_2, u_2)}.$$

En posant $y_1 = u_2 = 0$ dans F on obtient :

$$F(x_1, 0, a_1(x_1)) = \phi_1(x_1, a_1(x_1)) = 0$$

(car $a_1(x_1)$ est une solution de (19)).

La nouvelle fonction F_2 vérifie bien l'hypothèse $F_1(0, 0, 0) = 0$; la procédure se poursuit ainsi, en traçant le polygone de Newton de F_2 pour déterminer ϵ_2 et en résolvant l'équation caractéristique $\phi_2(x_2, v_2) = 0$, pour déterminer le coefficient $a_2(x_2)$ associé au terme y .

La procédure s'arrête lorsque $F_i(x_i, y_i, 0) = 0$. Dans ce cas la solution Z de (13) s'écrit sous la forme :

$$(21) \quad Z = a_0(x) + y^0 v.$$

avec

$$x_0 = x ; \quad y_0 = y, \quad v_0 = v$$

et pour $j^* = 0, 1, \dots$, on a :

$$\begin{cases} x_j = x_{j+1}^{m_j} & , \quad y_j = y_{j+1}^{q_j} \\ v_j = y_{j+1}^{p_j} (a_j(x_j) + v_{j+1}) \end{cases}$$

si on pose $\epsilon_j = p_j/q_j$, $r_1 = \epsilon_1$
et

$$r_{j+1} = r_j + \epsilon_{j+1}/q_1 \dots q_j \quad j = 1, 2, \dots$$

(21) devient alors :

$$Z = a_0(x) + a_1(x) y^{r_1} + a_2(x) y^{r_2} + \dots$$

Remarque

Lorsque l'ordre de $F_i(0, 0, v_i) = 1$, le point $(0, 0, 0)$ est un point régulier, dans ce cas on applique l'algorithme du paragraphe 2, chapitre 2, pour déterminer le reste de la série $Z(x, y)$ solution de (13).

```

    requal3(f,k):=block(
/* #####
   Cette procedure determine une solution de
   modulo y^k, de l'equation algebrique :
   f(x,y,z) = 0.
#####
Donnees
-----
*) f : polynome en z, a coefficients
   dans C[x,y].
*) k : nombre d'iterations demande
Resultat
-----
*) z5 : les k premiers termes d'une
   solution de f(x,y,z) = 0.
##### */
    print(" "); print(" ");
    print(" L'EXPRESSION DE F EST : ");
    print(" "); print(" f(x,y,z) = ",f);
    print(" "); print(" ");
    epsy:zs=0, qdy:qdx2:1, kk:kk,
    q:subst(0,y,f), f0:subst(y,z,q),
    a0:requal0( ), zs:zs+a0,
    print(" LA SOLUTION MODULO ",y^k," EST : ");
    print(" "); print(" Z = ",zs);
    f:subst(a0+z,z,f), f:=subst(x^qdx,x,f),
    qdx2:qdx2*qdx, kk:kk*qdx,
    thru 10 while epsy<k do [ f:=expand(f),
        q:subst(t,x,f), q:=subst(x,y,q),
        f1:subst(y,z,q), pn:1, polynew( ),
        f:=subst(y^q,y,f), f:=subst(y^p+q,z,f),
        f:=expand(f/y^mu), q:=subst(0,y,f),
        f:=subst(t+z,t,f), f0:=subst(y,t,q),
        epsy:=epsy+mu/qdy, qdy:=qdy*q,
        a0: '(requal0( )),
        a0:=subst(x^qdx,x,a0),
        f:=at(f,[t=a0]),qdx2:=qdx2*qdx,
        kk:kk*qdx,a0:=subst(x^(1/qdx2),x,a0),
        z50:=a0*y^epsy,q:=subst(0,z,f),
        print(" "); print(" + ",z50),
        z5:=z5+z50,if q=0 then epsy:=k ],
    print(" "); print(" + . . . ")$

```

```

requal0( ):=block(
    mn:lopow(f0,y), nm:lopow(f0,x),
    f1:=expand(f0/x^m*y^n), pn:0,
    yso:epso:0, qdx:1, polynew( ),
    thru 10 while epso < kk do [
        f0:=subst(x^q,x,f1),f0:=subst(x^p+q,y,f0),
        f0:=expand(f0/x^nu), q:=subst(0,x,f0),
        f0:=subst(t+y,t,f0), f0:=expand(f0),
        racine:=solve(g,t), rac:=first(racine),
        f1:=at(f0,rac), epso:=epso+mu/qdx,
        qdx:=qdx*q, yso:=yso+t*x^epso,
        yso:=at(yso,rac), q:=subst(0,y,f1),
        if q=0 then epso:=kk,
        if epso<kk then (pn:=1, polynew( )),
        return(yso)]$
    polynew( ):=block(
        if pn=0 then ( n:=hipow(f1,y)
            else(q:=subst(0,x,f1),n:=lopow(q,y)),
            m:=hipow(f1,x),
            for i:=0 thru n do [ b[i]:=coeff(f1,y,i),
                mu[i]:=if b[i]=0 then n
                    else lopow(b[i],x)],
                if i:=n-1,mu:=mu[i]-mu[i],
                for i:=1 thru 0 step -1 do [
                    mu2:=(mu[i]-mu[i+1])/(n-i),
                    if mu2<mu then mu:=mu2 ],
                p:=num(mu), q:=denom(mu),
                nu:=n*p+mu[i] ] ) $

```


L'EXPRESSION DE F EST :

$$f(x,y,z) = z^2 + 2xy z - 2xy - x^2$$

LA SOLUTION MODULO y^4 EST :

$$\begin{aligned} z = & -x \\ & + (-x - 1)y \\ & + \left(\frac{1}{2x} - \frac{x}{2}\right)y^2 \\ & + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2x}\right)y^3 \\ & + \left(\frac{x}{8} - \frac{3}{4x} + \frac{5}{8x}\right)y^4 \\ & + \dots \end{aligned}$$

L'EXPRESSION DE F EST :

$$f(x,y,z) = z^2 + 2xy z - y^3 - 2xy + y^2 - x^2$$

LA SOLUTION MODULO y^4 EST :

$$\begin{aligned} z = & -x \\ & + \left(-x + \frac{1}{2x} - 1\right)y \\ & + \left(-\frac{x}{2} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8x}\right)y^2 \\ & + \left(-\frac{3}{4x} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4x} - \frac{3}{8x} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}\right)y^3 \\ & + \left(-\frac{x}{8} + \frac{3}{4x} + \frac{5}{4x} - \frac{3}{16x} + \frac{5}{4x} - \frac{15}{16x} + \frac{5}{16x} + \frac{5}{128x}\right)y^4 \\ & + \dots \end{aligned}$$

C H A P I T R E I I I

DETERMINATION DES POLYNOMES FACTEURS DETERMINANTS D'UN OPERATEUR DIFFERENTIEL

- III.0 Introduction

- III.1 Quelques définitions

- III.2 Les coefficients du nouvel opérateur

- III.3 Détermination des polynômes F.D.
 - 3.1 Description de la méthode
 - 3.2 Justification

- III.4 Algorithme et Exemples



INTRODUCTION

Soit L un opérateur différentiel défini par :

$$(1) \quad L = \sum_{k=0}^m a_k(x) \partial^k$$

où

$$\partial = \frac{d}{dx} \quad \text{et} \quad a_k \in k[x].$$

k est un corps algébriquement clos de caractéristique zéro.

On suppose que l'origine est une singularité irrégulière de L , et qu'il existe au moins un indice j , $0 \leq j \leq m-1$ tel que $a_j(0) = 0$. Les solutions formelles de l'équation différentielle $Lu = 0$, au voisinage de l'origine 0 , sont de la forme : (cf. [2], [4], [19])

$$(2) \quad \begin{cases} x = t^q \\ u(t) = e^{Q(1/t)} t^\lambda \sum_{j=0}^{\ell} \phi_j(t) (\text{Log } t)^j \end{cases}$$

où Q est un polynôme en $1/t$, et $\phi_j(t)$ sont des séries formelles.

On se propose dans cette partie, de donner une application du polygone de Newton défini au chapitre I, pour déterminer le polynôme $Q(1/t)$ que l'on appelle polynôme facteur déterminant de L . Une fois Q déterminé, un simple changement de type :

$$(3) \quad Mv(t) = e^{-Q(1/t)} L(e^{Q(1/t)} v(t))$$

permet de transformer l'équation $Lu = 0$ à l'équation $Mv = 0$, où v est une solution formelle régulière de M . Autrement dit, on cherche à déterminer Q tel que le polygone de Newton-Ramis Malgrange [3], [10] de l'opérateur M ait une pente nulle.

III.1 - QUELQUES DEFINITIONS

A l'opérateur différentiel L défini par :

$$(3) \quad Lu(x) = \sum_{k=0}^m a_k(x) \partial^k u(x) \quad \text{où } \partial = \frac{d}{dx} .$$

faisons correspondre l'équation algébrique définie par

$$(4) \quad 0 = f(x,y) = \sum_{k=0}^m a_k(x) y^k$$

(4) est obtenu en remplaçant l'opérateur dérivé par l'opérateur multiplicatif i.e. $\partial^k \rightarrow y^k$.

D'après le théorème de Puiseux (chapitre I), l'équation (4) admet m solutions formelles qui sont données par (5) :

$$(5) \quad y_j(x) = \sum_{k=N(j)}^{\infty} \alpha_{k,j} x^{k/q_j} \quad j = 1,2,\dots,m ; N(j) \in \mathbb{Z} .$$

Posons $\beta(j) = N(j)/q_j \in \mathbb{Q}$

de telle sorte que les $\beta(j)$ forment une suite décroissante ($\beta(j)$ étant l'ordre de la série de Puiseux $y_j(x)$). Notons :

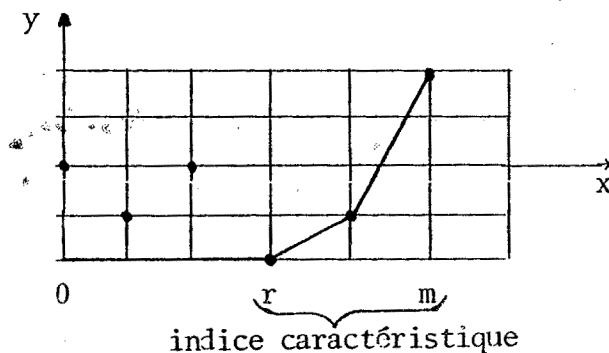
$$j_k = \text{ord } a_k(x).$$

Définition

On appelle indice caractéristique de l'opérateur L, l'entier (m-r) tel que r soit le plus grand entier vérifiant :

$$n_k - k \geq n_r - r \quad 0 \leq k \leq r$$

$$n_k - k > n_r - r \quad r < k \leq m$$

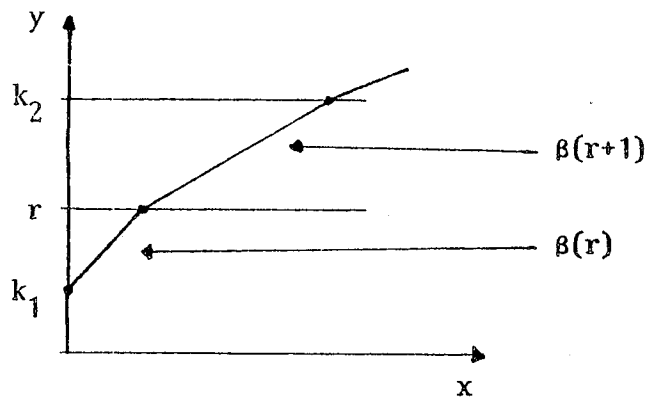


- figure 1 -

Alors les $\beta(j)$ vérifient les relations suivantes ($j = r, r+1$).

$$\beta(r) \geq -1 \quad \text{et} \quad \beta(r+1) < -1.$$

En effet, notons par k_1 et k_2 les sommets du polygône de Newton (pour la définition, voir chapitre 1) définissant les exposants $\beta(r)$ et $\beta(r+1)$ (voir Figure 2).



- figure 2 -

Dans les deux cas, $\beta(j)$ s'écrit :

$$\beta(j) = \frac{n_{k_i} - n_r}{r - k_i} \quad k_i = k_1 \text{ ou } k_2$$

Le numérateur de $\beta(j)$ peut s'écrire sous la forme :

$$n_{k_i} - n_r = (n_{k_i} - k_i) - (n_r - r) - (r - k_i)$$

ce qui donne :

$$\beta(j) = \frac{(n_{k_i} - k_i) - (n_r - r)}{n_{k_i} - r - k_i} - 1$$

pour $j = r$ $k_i = k_1 < r$ (voir Fig. 2) et par définition de r , on a :

$$n_{k_1} - k_1 \geq n_r - r$$

d'où

$$\frac{(n_{k_1} - k_1) - (n_r - r)}{r - k_1} \geq 0$$

et par conséquent $\beta(r) \geq -1$.

pour $j = r+1$; $k_j = k_2 > r$ et par définition de r on a

$$n_{k_2} - k_2 > n_r - r$$

d'où :

$$\frac{(n_{k_2} - k_2) - (n_r - r)}{r - k_2} < 0 \Rightarrow \beta(r-1) < -1.$$

Remarque

Lorsque l'origine est un point singulier régulier, $r = m$ alors $\beta(m) \geq -1$; comme $\beta(j)$ est une suite décroissante, alors $\beta(k) \geq -1 \quad \forall k = 1, 2, \dots, m$.

Dans la suite on suppose que l'origine est un point singulier irrégulier i.e. $r < m$. Les solutions de l'équation différentielle $Lu = 0$ sont de la forme (2), avec $Q_j(t) \equiv 0$ pour $j = 1, 2, \dots, r$ et pour $j > r$, $Q_j(t)$ est un polynôme en $1/t$.

Considérons l'opérateur différentiel M défini par (3), on remarque que $v(t)$ est une solution formelle régulière de l'équation $M v(t) = 0$, si et seulement si $e^{Q(1/t)} v(t)$ est une solution formelle singulière de l'équation $Lu(x) = 0$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $u(x)$ soit une solution de (1) est que, le polygone de Newton - Ramis-Malgrange (N.R.M.) de M ait une pente nulle ; ce qui nous conduit à chercher le polynôme $Q(1/t)$ tel que l'indice caractéristique de M soit strictement inférieur à m . Dans ce cas, l'équation indiciale associée à M admet une racine et la solution de l'équation $Mv(t) = 0$ sera déterminée par l'algorithme de Frobenius décrit dans [3].

III.2 - COEFFICIENTS DU NOUVEL OPERATEUR

Nous allons exprimer dans cette partie, les coefficients de l'opérateur M, en fonction de ceux de l'opérateur L et les dérivées successives du polynôme Q. D'après (2) on a :

$$M v(t) = e^{-Q(1/t)} \sum_{k=0}^m a_k(t^Q) (e^{Q(1/t)} v(t))^{(k)}$$

En développant l'expression $(e^{Q(1/t)} v(t))^{(k)}$, on obtient :

$$\begin{aligned} Mv(t) &= \sum_{k=0}^m a_k(t^Q) \left[\sum_{h=0}^{h=k} C_k^h e^{-Q(1/t)} (e^{Q(1/t)})^{(k-h)} v^{(h)}(t) \right] \\ &= \sum_{k=0}^m \left[\sum_{k=h}^m C_k^h a_k(t^Q) e^{-Q(1/t)} \right] v^{(h)}(t) \end{aligned}$$

Si on pose :

$$b_h(t) = \sum_{k=h}^m C_k^h a_k(t^Q) e^{-Q(1/t)} (e^{Q(1/t)})^{(k-h)} \quad (6)$$

l'opérateur M devient :

$$Mv(t) = \sum_{h=0}^m b_h(t) v^{(h)}(t).$$

Avec $v^{(h)}(t) = \frac{d^h}{dx^h} v(t)$ et $(e^{Q(1/t)})^{(h)} = \frac{d^h}{dx^h} (e^{Q(x)})$

Dans (6), posons $S(n,t) = e^{-Q(1/t)} (e^{Q(1/t)})^{(n)}$ (7)

Calculons la dérivée de $S(n,t)$ par rapport à x . On a :

$$(7') \quad \frac{dS(n,t)}{dx} = - \frac{dQ(1/t)}{dx} S(n,t) + S(n+1,t)$$

écrivons (7') sous cette forme :

$$(8) \quad \boxed{S(n+1,t) = S'(n,t) + Q'(1/t) S(n,t)}$$

d'après (7), on a :

$$S(0,t) = e^{-Q(1/t)} (e^{Q(1/t)})^{(0)} = 1.$$

et la relation (8), on tire

$$S(1,t) = Q'(1/t)$$

$$S(2,t) = Q''(1/t) + (Q'(1/t))^2.$$

Donc, à partir de (8) et sachant que $S(0,t) = 1$, on peut calculer par récurrence $S(n,t)$ en fonction des dérivées successives du polynôme $Q(1/t)$. Et par conséquent, les coefficients $b_h(t)$ de l'opérateur M seront donnés par la formule

$$(9) \quad b_h(t) = \sum_{k=h}^m c_k^h a_k (t^q) S(k-h,t)$$

avec

$$S(0,t) = 1$$

et

$$S(n+1,t) = S'(n,t) + Q'(1/t) S(n,t)$$

Nous désignerons dans la suite $Q'(1/t)$ par y . On a le lemme suivant :

LEMME 1

$$S(n,x) = y^n + R_n(x)$$

avec

$$R_0(x) = R_1(x)$$

$$(10) \quad R_{n+1} = y R_n(x) + R_n'(x) + n y^{n-1} y'$$

où R_{n+1} est un polynôme en $x^{-1/q} = 1/t$, de degré par rapport à t , inférieur ou égal à $ns+q$; s étant le degré de $y = Q'(x)$ en u^{-1} ($S > q$). La démonstration de ce lemme se fait par récurrence sur n et en appliquant la formule (8). En effet :

$$S(0,x) = 1 = y^0 + R_0(x)$$

$$S(1,x) = y = y + R_1(x)$$

Supposons que $S(n,x) = y^n + R_n(x)$ avec $\deg R_n(x)/x < \frac{(n-1)s+q}{q}$

Alors

$$S(n+1,x) = S'(n,x) + Q'(x) S(n,x)$$

comme

$$S(n,x) = y^n + R_n(x) \text{ alors}$$

$$S'(n,x) = ny^{n-1}y' + R'_n(x)$$

d'où

$$\begin{aligned} S(n+1,x) &= ny^{n-1}y' + R'_n(x) + y^{n+1} + yR'_n(x) \\ &= y^{n+1} + \underbrace{(yR'_n(x) + R'_n(x) + ny^{n-1}y')}_{R_{n+1}(x)} \end{aligned}$$

Pour le degré de $R_{n+1}(x)$, on a :

$$R_{n+1}(x) = yR'_n(x) + R'_n(x) + ny^{n-1}y'.$$

donc

$$\text{degré } R_{n+1}/x \leq \min(\text{deg } yR'_n(x), \text{deg } R'_n(x), \text{deg } y^{n-1}y')$$

comme

$$\text{deg } y/x = \frac{s}{q} \text{ et } \text{deg } R_n(x)/x < \frac{(n-1)s+q}{q} \text{ ceci donne :}$$

$$\begin{aligned} \text{deg } R_{n+1}(x)/x &\leq \min\left(\frac{s+(n-1)s+q}{q}, \frac{(n-1)s+2q}{q}, \frac{(n-1)s+s+q}{q}\right) \\ &= \min\left(\frac{ns+q}{q}, \frac{ns+q}{q}, \frac{ns+2q-s}{q}\right) \end{aligned}$$

or $q < s$ d'où $(n-1)s + 2q < ns+q$ ce qui donne finalement :

$$\text{degré } R_{n+1}(x)/x \leq \frac{ns+q}{q}.$$

Revenons aux polynômes $R_n(x)$, en utilisant la relation (10) calculons les premiers polynômes $R_k(x)$ pour $k = 1, 2, 3$; on obtient :

$$R_2(x) = y' \quad , \quad R_3(x) = y'' + 3yy'$$

$$R_4(x) = y''' + 4yy'' + 3y'^2 + 6y^2y'$$

Si on considère $R_n(x)$ un polynôme à n variables indépendantes à savoir $y, y'', \dots, y^{(n-1)}$. En dérivant $R_n(x)$ par rapport à y on obtient :

$$\frac{dR_3}{dy}(x) = 3y' = 3R_2(x)$$

de la même façon on a :

$$\frac{dR_4}{dy}(x) = 12yy' + 4y'' = 4R_3(x).$$

De ces résultats, on tire le lemme 2, dont la démonstration se fait par récurrence et par application de (10).

LEMME 2

$$\frac{dR_n}{dy}(x) = n R_{n-1}(x)$$

Démonstration

La propriété est vraie pour $n=1$, supposons qu'elle soit vraie jusqu'à l'ordre n , et montrons la pour $n+1$. Alors en utilisant la relation (10) on a :

$$\frac{dR_n}{dy}(x) = R_n(x) + y \frac{dR_n}{dy}(x) + \frac{dR'_n}{dy}(x) + n(n-1) y^{n-2} y'$$

comme $\frac{dR_n}{dy}(x) = n R_{n-1}(x)$ ceci donne

$$\begin{aligned} \frac{dR_{n+1}}{dy}(x) &= R_n(x) + n[y R_{n-1}(x) + (n-1)y^{n-2}y'] + \frac{dR'_n}{dy}(x) \\ &= (n+1) R_{n+1}(x) + \frac{dR'_n}{dy}(x) - nR'_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Or, d'après la formule de Schwartz on a :

$$\frac{d^2}{dy dx} R_n(x) = \frac{d^2}{dx dy} R_n(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{dR_n}{dy}(x) \right] = n R'_{n-1}$$

ce qui prouve que

$$\frac{dR'_n}{dy}(x) = n R'_{n-1}(x) = 0.$$

et par conséquent : $\frac{dR_{n+1}(x)}{dy} = (n+1) R_n(x)$.

Comme $S(n,x)$ s'exprime en fonction de y et de $R_n(x)$ alors on a :

$$\begin{aligned} \frac{dS(n,x)}{dy} &= \frac{d}{dy} [y^{n+R_n(x)}] = ny^{n-1+R_n(x)} \\ &= n S(n-1,x). \end{aligned}$$

D'où le résultat :

$$\boxed{\frac{dS(n,x)}{dy} = nS(n-1,x)}$$

Si on dérive h fois $S(n,x)$ par rapport à y , on obtient :

$$\frac{d^h S(n,x)}{dy^h} = n(n-1)\dots(n-h+1) S(n-h,x)$$

Soit $\frac{1}{h!} \frac{d^h S(n,x)}{dy^h} = C_n^h S(n-h,x)$ (11)

Le second terme de (11) figure dans l'expression des coefficients $b_h(x)$ ce qui nous permet d'écrire les $b_h(x)$ de cette façon

$$b_h(x) = \sum_{k=h}^m a_k(x) + \frac{1}{h!} \frac{d^h S(k,x)}{dy^h}$$

comme $a_k(x)$ ne dépend pas de y alors :

$$b_h(x) = \frac{1}{h!} \left[\sum_{k=h}^m a_k(x) S(k,x) \right]^{(h)}$$

soit

$$H(x,y) = \sum_{k=0}^m a_k(x) S(k,0)$$

alors

$$\boxed{b_h(x) = \frac{1}{h!} H^{(h)}(x,y)} \quad h = 0,1,2,\dots,m ; \quad (12)$$

$H^{(h)}(x,y)$ désigne la dérivée d'ordre h de la fonction H par rapport à y .

Exemple - Considérons l'opérateur L défini par :

$$L = x^3 \partial^4 + x \partial^2 + x \partial + 1.$$

La fonction $H(x,y)$ est :

$$H(x,y) = x^3 y^4 + xy^2 + xy + 1 + 4x^3 y y'' + x^3 y'''' + xy' \\ + 3x^3 y'^2 + 6x^3 y^2 y'.$$

En dérivant H par rapport à y on obtient

$$b_1(x) = H'(x,y) = 4x^3 y'' + 4x^3 y^3 + 2xy + x + 12x^3 y y'$$

$$b_2(x) = \frac{1}{2} H''(x,y) = 6x^3 y^2 + x + 6x^3 y$$

$$b_3(x) = \frac{1}{6} H'''(x,y) = 4x^3 y + 2x^3.$$

$$b_4(x) = \frac{1}{24} H^{(4)}(x,y) = x^3.$$

III.3 - DETERMINATION DES POLYNOMES F.D.

D'après le lemme 1,(12) peut s'écrire sous la forme :

$$H(x,y) = f(x,y) + \phi(x,y)$$

avec

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^m a_k(x) y^k$$

et

$$\phi(x,y) = \sum_{k=0}^m a_k(x) R_k(x)$$

Les fonctions f et ϕ sont appelées les fonctions associées de l'opérateur L.

Notons par s le degré de $y = Q'(x)$ polynôme en $x^{-1/q}$ ($s > q$).

$$\mu_1 = -s/q < -1, \quad n_k = \text{ord } a_k(x)$$

$$v_1 = \min(n_k + \mu_1 k)$$

$$K = \{k/n_k + k\mu_1 = v_1\}$$

$$g(t) = \sum_{t \in K} \beta_k t^k.$$

β_k étant le coefficient de x^{n_k} dans $a_k(x)$.

$g(t)$ est appelé polynôme caractéristique associé à μ_1

3.1 - Description de la méthode

Posons

$$(13) \quad y = x_1^{p_1} (\alpha_1 + y_1) \quad x = x_1^{q_1}$$

avec

$$\mu_1 = p_1/q_1 \quad (p_1, q_1) = 1.$$

En substituant (13) dans les expressions de f et ϕ , on obtient :

$$\text{ord } f(x,y)/x_1 = \min(q_1 n_k + p_1 k) = q_1 v_1$$

$$\text{ord } \phi(x,y)/x_1 = \min(q_1 n_k + \text{Ord } R_n(x)/x_1)$$

puisque

$$\text{ord } R_k(x)/x \leq \frac{(k-1)s - q}{q} = \frac{(k-1)p_1 - q_1}{q_1} \Rightarrow \text{ord } R_k(x)/x_1 = (k-1)p_1 - q_1$$

ceci donne $\text{ord } \phi(x,y)/x_1 \geq \min(q_1 n_k + kp_1 - p_1 - q_1)$

$$v_1 q_1 - (p_1 + q_1) > v_1 q_1 = \text{ord } f/x_1$$

puisque $\mu_1 = p_1/q_1 < -1$ alors $p_1 + q_1 < 0$ d'où

$$\text{ord } \phi/x_1 = v_1 \times q_1 - (p_1 + q_1) > \text{ord } f/x_1$$

Et par conséquent les fonctions f et ϕ peuvent s'écrire sous la forme :

$$f(x,y) = x_1^{v_1 q_1} f_1(x_1, y_1) = x^{v_1} f_1(x_1, y_1)$$

$$\phi(x,y) = x_1^{v_2} \phi_1(x_1, y_1) \quad \text{avec } v_2 = v_1 q_1 + \delta_1, \quad \delta_1 > 0$$

de la même façon H s'écrit comme :

$$H(x,y) = x_1^{v_1} [f_1(x_1, y_1) + x_1^{\delta_1} \phi_1(x_1, y_1)]$$

$$H_1(x_1, y_1)$$

$$\delta_1 = -(p_1 + q_1) > 0.$$

Remarque

La seule hypothèse faite sur μ_1 est d'être strictement plus petit que -1. Or la singularité à l'origine est irrégulière, on a vu que les β_j pour $j = r+1, \dots, m$, sont strictement inférieur à -1.

D'où l'idée de prendre μ_1 égal à l'une des β_j $j = r+1, \dots, m$. Les β_j sont déterminés par le polynôme de Newton de la fonction associée f . Une fois que μ_1 est déterminé la fonction f_1 s'écrit : $f_1(x_1, y_1) = g(\alpha_1 + y_1) + x_1 \times$ fonction (x_1, y_1) . Alors on a le lemme suivant :

LEMME 3

Une condition nécessaire pour que le polygôme de Newton de l'opérateur M , ait une pente nulle est que α_1 soit une racine non nulle de $g(t)$.

Avant de démontrer ce lemme, nous allons donner un exemple. Soit L l'opérateur différentiel défini par :

$$L = x^4 \partial^3 - 2x^2 \partial + x.$$

Le polygôme de Newton de f donne

$$\mu_1 = -2, \quad v_1 = -2, \quad g(t) = t(t-1)$$

Les fonctions associées de L sont

$$f(x,y) = x^4 y^3 - 2x^2 y^2 + y + x$$

$$\phi(x,y) = x^4 y'' + 3x^4 y y' - 2x^2 y'.$$

en substituant $x = x_1$, $y = x_1^{-2}(\alpha_1 + y_1)$ dans f et ϕ on obtient :

$$f(x,y) = x_1^{-2} [\alpha_1 y_1^2 + y_1^3 + x_1^3]$$

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= x_1^{-1} [(3\alpha_1 + 3y_1 - 2)(x_1 y_1^2 - 2y_1 - 2\alpha_1)] \\ &= x_1^3 y_1^4 - 4x_1^2 y_1^3 + 6x_1 y_1^2 + 6\alpha_1 x_1 \end{aligned}$$

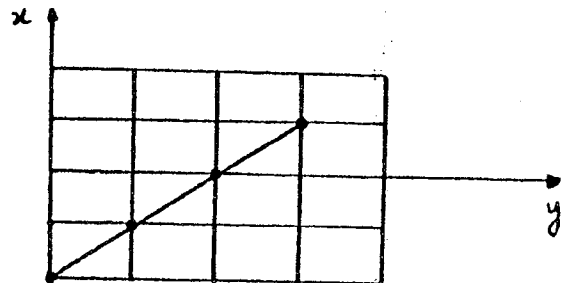
donc pour $\alpha_1 \neq \{0,1\}$, (0,1 sont les racines de $g(t) = 0$), on obtient

$$\text{ord } b_0(x) = -2$$

$$\text{ord } b_1(x) = 0$$

$$\text{ord } b_2(x) = 2$$

$$\text{ord } b_3(x) = 4$$



pas de côté de pente nulle

ce qui exige de prendre α_1 une racine de $g(t)$.

Revenons à la démonstration du Lemme. Supposons que $g(\alpha_1)$ soit non nul, ceci entraîne que l'ordre de f_1 en x_1 est nul et comme $\text{ord } f < \text{ord } \phi$ alors :

$$\text{ord } b_k(x) = \text{ord } H^{(k)}(x,y) = \text{ord } F^{(k)}(x,y)$$

or

$$\text{ord } F^{(k)}(x,y)/x_1 = \min(q_1 n_h + (1-k)p_1)$$

$$= \min(q_1 n_1 + l p_1) - k p_1$$

$$\geq q_1 v_1 - k p_1$$

et par conséquent $\text{ord } b_k(x)/x_1 \geq v_1 q_1 - k p_1$

donc

$$\text{ord } b_k(x)/x \geq v_1 - k \mu_1 > v_1 + k \mu \quad (\text{car } \mu_1 < -1)$$

Finalement

$$\text{ord } b_k(k) - k > v_1 = \text{ord } b_0(x) - 0$$

cette dernière inégalité entraîne que dans le polygone de N.R.M. il n'existe pas de pente nulle i.e. l'indice caractéristique de M est égal à m . ($r=0$).

Ceci est une contradiction.

Après avoir choisi α_1 une racine non nulle de $g(t)$ on continue la procédure en posant :

$$F_1(x_1, y_1) = f_1(x_1, y_1) + x_1^{\delta_1} \phi_1(x_1, 0)$$

$$\phi_1(x_1, y_1) = x_1^{\delta_1} [\phi_1(x_1, y_1) - \phi_1(x_1, 0)]$$

$$H_1(x_1, y_1) = F_1(x_1, y_1) + \phi_1(x_1, y_1)$$

Puis on trace le polygone de Newton de F_1 , notons par $\mu_2 = p_2/q_2$ (p_2, q_2)=1 l'opposé de l'inverse de la pente d'un côté de ce polygone.

$$\varepsilon_1 = \mu_1 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \mu_{i+1}/q_1 \dots q_i$$

Alors tant que $\varepsilon_{i+1} < -1$ on applique le block suivant :

Block

[1] On choisit α_{i+1} une racine du polynôme caractéristique associé à F_i et μ_{i+1} .

[2] On considère les transformations :

$$(14) \quad \begin{cases} y_i = x_{i+1}^{p_{i+1}} (\alpha_{i+1} + y_{i+1}) \\ x_i = x_{i+1}^{q_{i+1}} \end{cases}$$

ce qui donne en substituant (14) dans les expressions de F_i et ϕ_i

$$F_i(x_i, y_i) = x_{i+1}^{v_1} f_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$$

$$\phi_i(x_i, y_i) = x_{i+1}^{v_2} \phi_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$$

avec $v_1 = q_{i+1}v_{i+1}$ et $v_2 = v_1 + \delta_{i+1}$

$$\text{d'où } H_i(x_i, y_i) = x_{i+1}^{v_1} H_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$$

[3] On pose :

$$F_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}) = f_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}) + x_{i+1}^{\delta_{i+1}} \phi_{i+1}(x_{i+1}, 0)$$

$$\phi_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}) = x_{i+1}^{\delta_{i+1}} [\phi_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}) - \phi_{i+1}(x_{i+1}, 0)]$$

[4] On choisit μ_{i+2} tel que $-1/\mu_{i+1}$ soit la pente d'un côté du polygône de Newton de F_i .

[5] Test : si $\epsilon_{i+2} < -1$ on réapplique le block sinon fin de la procédure.

Le polynôme facteur déterminant de L sera alors :

$$Q(x) = \sum_{\epsilon_j < -1} \frac{\alpha_j}{\epsilon_j + 1} x^{1 + \epsilon_j}$$

$Q(x)$ est une primitive de $y = \sum \alpha_j x^{\epsilon_j}$

Exemple

$$L = x^4 \partial^3 - 2x^2 \partial^2 + \partial + x$$

Les fonctions associées de L sont :

$$f(x, y) = x^4 y^3 - 2x^2 y^2 + y + x$$

$$\phi(x, y) = x^4 y'' + 3x^4 y y' - 2x^2 y$$

Le polygône de Newton de f donne

$$\mu_1 = -2, \nu_1 = -2, g(t) = t^3 - 2t^2 + t \Rightarrow \alpha_1 = 1$$

donc en substituant

$$x = x_1^{-2} \text{ et } y = x_1^{-2} (1 + y_1)$$

dans f et ϕ on obtient :

$$f(x,y) = x_1^{-2} [y_1^3 + y_1^2 + x_1^2] = x_1^{-2} f_1(x_1, y_1)$$

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= x_1^{-1} [3y_1(x_1 y_1' - 2y_1 - 2) + x_1^3 y_1'' + x_1 y_1' \\ &\quad - 4x_1^2 y_1' + 6x_1 y_1 - 2y_1 + 6x_1 - 2] \\ &= x_1^{-1} \phi_1(x_1, y_1) \quad \delta_1 = 1. \end{aligned}$$

D'où :

$$F_1(x_1, y_1) = y_1^3 + y_1^2 - 2x_1 + 6x_1^2 + x_1^3$$

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1, y_1) &= x_1 [3y_1(x_1 y_1' - 2y_1 - 2) + x_1^3 y_1'' + x_1 y_1' \\ &\quad - 4x_1^2 y_1' + 6x_1 y_1 - 2y_1] \end{aligned}$$

Le polygône de Newton de F_1 donne $\mu_2 = 1/2$ d'où $\epsilon_2 = -2 + 1/2 = -3/2 < -1$.
On réapplique le block ce qui donne $g(t) = t^2 - 2$ soit $\alpha_2 = \pm \sqrt{2}$.

On pose alors

$$(15) \quad y_1 = x_2^1(\alpha_2 + y_2) \quad \text{et} \quad x_1 = x_2^2$$

d'où

$$F_1(x_1, y_1) = x_2^2 \underbrace{[x_2(\alpha_2 + y_2)^3 + y_2^2 + 2\alpha_2 y_2 + 6x_2^2 + x_2^4]}_{f_2(x_2, y_2)}$$

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1, y_1) &= x_2^3 \left[\frac{1}{4}(x_2^4 + x_2^3) y_2'' + \frac{1}{2}(3x_2^2 y_2 - 8x_2^3 + 3\alpha_2 x_2^2 + x_2) y_2' \right. \\ &\quad \left. - \frac{9}{2} x_2 y_2^2 + \left(\frac{7}{4} x_2^2 - 9\alpha_2 x_2 - \frac{7}{4} \right) y_2 + \frac{7}{4} \alpha_2 x_2^2 - 9x_2 + \frac{7}{4} \alpha_2 \right] \\ &= x_2 \underbrace{[\dots]}_{\phi_2(x_2, y_2)} \end{aligned}$$

donc on pose :

$$F_2(x_2, y_2) = f_2(x_2, y_2) + x_2 \phi_2(x_2, 0)$$

$$\phi_2(x_2, y_2) = x_2 [\phi_2(x_2, y_2) - \phi_2(x_2, 0)]$$

Ensuite, on trace le polygone de Newton de F_2 qui donne $\mu_3 = 1$ d'où $\epsilon_3 = -3/2 + \frac{1}{2} = -1$, comme $\epsilon_3 = -1$ alors la procédure s'arrête ici ce qui donne $Q'(x) = y = x_1^{-2} + \alpha_2 x_1^{-2} x_2^1$

i.e $Q'(x) = x^{-2} + \alpha_2 x^{-3/2}$ avec $\alpha_2 = \pm \sqrt{2}$.

$$Q(x) = -x^{-1} - 2\alpha_2 x^{-1/2}$$

d'où les deux polynômes :

$$Q_1(x) = -x^{-1} - 2/\sqrt{2} x^{-1/2}$$

$$Q_2(x) = -x^{-1} + 2/\sqrt{2} x^{-1/2}.$$

3.2 - Justification

Dans cette partie, on s'intéresse à vérifier que le polynôme $Q(x)$ déterminé par cette méthode est bien un polynôme facteur déterminant de L . Pour cela, il suffit de vérifier que l'indice caractéristique de M est strictement plus petit que m , i.e. il existe un entier r , $0 < r \leq m$ tel que

$$\text{ord } b_k(x) - k \geq \text{ord } b_r(x) - r \quad 0 \leq k \leq r,$$

où les $b_k(x)$ sont les coefficients du nouvel opérateur M .

Les coefficients $b_k(x)$ sont donnés par (12) avec $y = Q'(x)$. Or en considérant les transformations (13) on obtient :

$$\frac{dH(x,y)}{dy} = x^{v_1} H_1(x_1, y_1)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{d^k H(x,y)}{dy^k} &= x^{v_1} \frac{d^k H_1(x_1, y_1)}{dy_1^k} \left[\frac{dy_1}{dt} \right]^k \\ &= x^{v_1 - k\mu_1} \frac{d^k H_1(x_1, y_1)}{dy_1^k} \end{aligned}$$

de la même façon on a :

$$\frac{d^k H_i(x_i, y_i)}{dy_i^k} = x_i^{v_{i+1} - k\mu_{i+1}} \frac{d^k H_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})}{dy_{i+1}^k}$$

D'où

$$\frac{d^k H(x, y)}{dy^k} = x^{v_1 - k\mu_1} x_1^{v_2 - k\mu_2} \dots x_{l-1}^{v_l - k\mu_l} \frac{d^k H_1(x_1, y_1)}{dy_1^k}$$

l étant le nombre d'itérations effectuées pour déterminer $Q'(x)$.
Posons

$$\lambda_1 = v_1 \quad \text{et} \quad \lambda_{i+1} = \lambda_i + \frac{v_{i+1}}{q_1 \dots q_i}$$

et comme $\varepsilon_1 = \mu_1$ et $\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + \mu_{i+1}/q_1 \dots q_i$, alors

$$(17) \quad \frac{d^k H(x, y)}{dy^k} = x^{\lambda_1 - k\varepsilon_1} \frac{d^k H_1(x_1, y_1)}{dy_1^k}$$

or

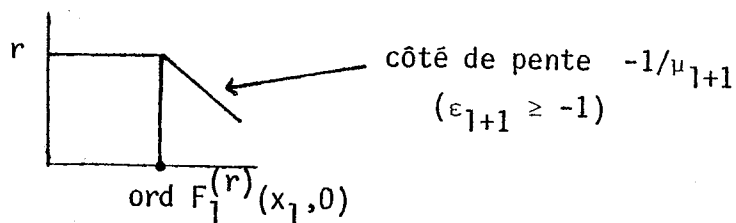
$$Q'(x) = \alpha_1 x^{\varepsilon_1} + \alpha_2 x^{\varepsilon_2} + \dots + \alpha_l x^{\varepsilon_l},$$

ceci donne $y_1 = 0$,

et par construction de F on a $\text{ord } H_i(x_i, y_i) = \text{ord } F_i(x_i, y_i)$ donc
 $\text{ord } H_1^{(k)}(x_1, 0) = \text{ord } F_1^{(k)}(x_1, 0)$.

Notons par r l'ordonnée du point sommet du côté du polygone de Newton associé à la fonction et dont la pente $-1/\mu_{l+1}$ vérifie :

$$\varepsilon_{l+1} = \varepsilon_l + \mu_{l+1}/q_1 \dots q_l \geq -1.$$



Par définition de la pente μ_{l+1} on a :

$$(18) \quad \text{ord } F_1^{(k)}(x_1, 0) - \text{ord } F_1^{(r)}(x_1, 0) \geq (r-k)\mu_{l+1}$$

Donc d'après (17) on a :

$$(19) \quad \text{ord } b_k(x) = \lambda_1 - k\varepsilon_1 + \frac{\text{ord } H_1^{(k)}(x_1, 0)}{q_1 \cdots q_1}$$

ce qui donne en utilisant (18) et (19)

$$\begin{aligned} \text{ord } b_k(x) - \text{ord } b_r(x) &= \lambda_1 - k\varepsilon_1 + \frac{\text{ord } H_1^{(k)}(x_1, 0)}{q_1 \cdots q_1} \\ &\quad - \lambda_1 + r\varepsilon_1 - \frac{\text{ord } H_1^{(r)}(x_1, 0)}{q_1 \cdots q_1} \\ &= (r-k)\varepsilon_1 + \frac{1}{q_1 \cdots q_1} \underbrace{[\text{ord } H_1^{(k)}(x_1, 0) - \text{ord } H_1^{(r)}(x_1, 0)]}_{> (r-k)\mu_{l+1}} \end{aligned}$$

Donc

$$\text{ord } b_k(x) - \text{ord } b_r(x) \geq (r-k) \underbrace{\left(\varepsilon_1 + \frac{\mu_{l+1}}{q_1 \cdots q_1} \right)}_{\varepsilon_{l+1}}$$

comme $\varepsilon_{l+1} \geq -1$, alors :

$$\text{ord } b_k(x) - \text{ord } b_r(x) \geq k-r$$

ce qui donne

$$\text{ord } b_k(x) - k \geq \text{ord } b_r(x) - r$$

ceci entraîne que l'indice caractéristique de l'opérateur M est inférieur ou égal à $m-r < m$ (car $r > 0$). Donc le polynôme $Q(X)$ est un facteur déterminant de L.

En parcourant tous les polynômes possibles (déterminés de cette façon) on en déduit les $(m-r)$ solutions singulières de L par

$$u(x) = e^{Q(x)} v(x)$$

où $v(x)$ est obtenu par l'algorithme de Frobenius (cf. [3]).

Remarques

Lorsque la racine α_1 du polynôme caractéristique est simple, les dérivées des polynômes F.D. sont données par les racines (en y) du polynôme $f(x,y)$. Mais, lorsque la multiplicité de α_1 est différente de un, le résultat n'est plus vrai et l'exemple suivant l'illustre :

Exemple

$$L = x^4 \partial^3 - 2x^2 \partial^2 + \partial + x.$$

Les dérivées des polynômes F.D. sont :

$$Q'(x) = \frac{1}{x^2} \pm \frac{\sqrt{2}}{x^{3/2}}$$

où 1 est une racine de multiplicité égale à 2.

Les solutions de l'équation $f(x,y) = 0$, sont :

$$y = \frac{1}{x^2} \pm \frac{i}{x^{3/2}} + \dots$$

Le second terme de y est différent de celui de $Q'(x)$.

Dans ce cas où la multiplicité de α_1 est égale à deux, B. Helffer et Y. Kannai [4] ont établis une formule pour l'équation des facteurs déterminants, i.e. que les dérivées des facteurs déterminants sont les solutions du polynôme

$$\tilde{f}(x,y) = f(x,y) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

```

fardet( ) := block(
/* Initialisation des composantes du vecteur a */
  print(" "), print(" "),
  print(" QUELLE EST LA TAILLE DU VECTEUR A ?"),
  print(" "), read( n ), print(" "),
  print(" QUELS SONT LES COMPOSANTES DU VECTEUR A ?"),
  print(" "), for i:0 thru n do read( a[i] ),
  print(" "), print(" "),
  print(" "), reduction(a,n) )$

reduction(a,n) := block(
/* Determination des polynomes facteurs
determinants d'un operateur differentiel
a singularite irreguliere a l'origine.
=====
Donnees :
-----
n      :: dimension de l'operateur L
a[0::n] :: vecteur a coefficients dans C[x]

Resultats :
-----
ys[1::n,0::n] :: tableau des polynomes facteurs
determinants de l'operateur L.
c [1::n,0::n] :: tableau des coefficients des
operateurs differentiaux permettant
de retrouver les solutions regulie-
res de l'equation de depart.
Sortie des donnees
----- */
  print(" "), print(" "), print(" "),
  print(" les coefficients de l'equation "),
  print(" differentielle sont : "),
  print(" "), for i:0 thru n do [
  print(" a(",i,") = ",a[i]),print(" ")],
/* Nature de la singularite
----- */
  f:0, for i:0 thru n do f:=f+a[i]*y**i,
  M:=hipow(f,x),
  for i:0 thru n do [ b[i]: if a[i]=0 then M
  else lopow(a[i],x),b[i]:b[i]-i],
  c:=b[0], for i:0 thru n do
  [ if b[i]<=c then (c:=b[i],ic:=n-i)],
/* ic :: est l'indice caracteristique
de l'operateur differentiel */
  if ic=0 then (
  print(" La singularite a l'origine est reguliere")
  else (
/* Singularite Irreguliere
----- */
  for i:0 thru n do
  [ qmu[i]:1,f[i]:f,ys[i]:0,
  eps[i]:test[i]:sim[i]:0],
  pr[0]:pr[1]:fphi:0,depends(y,x)],
  for i:1 thru (n-1) do [ i:i+1,
  pr[i]::=diff(pr[i],x)+y*pr[i]+i*diff(y,x)*y**(i-1),
  fphi:=pr[i]*a[i]+fphi ], fh:=fphi,

```



```

for i:0 thru n do phi[i]:fphi,
/* Polygone de Newton
----- */
for i:0 thru n do [
  mu1[i]: if a[i]=0 then n
  else lopow(a[i],x) ],
  i:n, thru n while i>0 do
  [ i:i-1, i2: n-i, mu1[j]:mu1[i1]-mu1[i],
  for j:i1 thru 0 step -1 do
  [ mu2:(mu1[j]-mu1[i])/(i-j),
  if mu2 <= mu1[i] then (
    mu1[j]:mu2, l1[i]:i-j, sim[i]:j)],
  p:num(mu1[i]), q:denom(mu1[i]),
  mu1[j]:i*p+q*mu1[i],
  for j:1 thru l1[i] do
  [ j:i-j, mu1[j]:mu1[i], mu1[j]:mu1[i],
  l1[j]:l1[i], sim[j]:sim[i]],
  i:i-l1[i], print(" "), print(" "),
  print(" Les polynomes facteurs
  determinants sont : "),
  print("
  ----- ") ],
/* Determination des polynomes facteurs determinants
----- */
k:n, thru n while k>(n-ic) do
[ epsi:eps[k]+mu[k]/qmu[k],
while epsi<-1 do [ l:l1[k], print(" "),
/* Polynome caracteristique
----- */
p:num(mu[k]), q:denom(mu[k]),
q:subst(x*q,x,f1[k]), g:subst(x**p*t,y,g),
f1[k]:expand(q/x**mu[k]),
if test[k]=0 then (
  g:at(f1[k],x=0)/(t**sim[k]),
  q:expand(q), res:solve(g,t),
  if l1=1 then alpha[k]:res
  else ( i:0, p1:subst(t+y,t,f1[k]),
  while i < l1 do
  [ j:l1-k-i, racine:first(res),
  p1:ev(p1,expand,racine),
  p1:subst(0,x,p1), l1:lopow(p1,y),
  for i:0 thru (l1-1) do

```

alpha[j2]:racinej,

```

l12:l1+i,
if not (l12=11) then res:rest(res),
i:l12 ) ],
eps[k]:eps[k]+mu[k]/qmu[k],
f1[k]:subst(t+y,t,f1[k]),
f1[k]:ev(f1[k],expand,alpha[k]),
ys[k]:ys[k]+t*x^eps[k],
ys[k]:at(ys[k],alpha[k]),
q:subst(0,x,f1[k]), l1[k]:lopow(g,y),
for j:0 thru (l1[k]-1) do test[k-j]:0,
if l1[k]<11 then
  for j:l1[k] thru (l1-1) do test[k-j]:1,

```

```

/* determination des fonctions iterees
----- */
depends([y,y1],[x1]),
y2[i]:x1**p*(t+y1),g:phi[k],
for i:1 thru (n-1) do
  [ y2[i]:diff(y2[i-1],x1)/(q*x1**(q-1)),
  g:subst(y2[i],diff(y,x,i),g) ],
  g:subst(x1**q,x,g),g:subst(x1**p*(t+y1),y,g),
  g:ev(g,diff,expand,alpha[k]),
  g:expand(g/x1**mu[k]), g:subst(x,x1,g),
  g:subst(y,y1,g), phi[k]:g,
  for i:0 thru (n-1) do g:subst(0,diff(y,x,i),g),
  f1[k]:f1[k]+g, phi[k]:phi[k]-g,
  if not(l1[k]=1) then ( for j:0 thru (l1[k]-1) do
  [ j:l1-k-j, qmu1[j]:qmu[k], eps[j]:eps[k],
  ysc[j]:ys[k], f1[j]:f1[k], phi[j]:phi[k]],
  qmu[k]:qmu[k]*q,delta[k]:lopow(phi[k],x),

```

```

/* Polygone de Newton a pentes negatives
----- */
for j:0 thru l1[k] do
  [ m1:hipow(f1[k],x), b[j]:coeff(f1[k],y,j),
  mu1[j]: if b[j]=0 then m1 else lopow(b[j],x)],
  i:l1[k], while i>0 do
  [ i:i-1, mu2:mu1[i1]-mu1[i],
  for j:i1 thru 0 step -1 do
  [ mu3:(mu1[j]-mu1[i])/(i-j),
  if mu3<=mu2 then (mu2:mu3, l2:i-j),
  i2:k+i-l1[k], mu12:mu2, l12:l1-l2,
  mu123:i*num(mu12)+mu1[i]*denom(mu12)],

```

```

for j:0 thru (l1[i2]-1) do
  [ i3:i2-j, l1[i3]:l1[i2], sim[i3]:sim[i2],
    mu[i3]:mu[i2], nu[i3]:nu[i2]], i:i-12],
  if delta[k] <= nu[k]/denom(mu[k]) then(

```

/* Determination des fonctions associees
 au nouveau operateur differentiel. */

```

h[k]:f1[k]+phi[k],
f1[k]:h[k], for i:1 thru (n-1) do
  [ f1[k]#subst(0,diff(y,x,i),f1[k]) ],
  for i:0 thru n do b[i]:coeff(f1[k],y,i),
  pt[0] : pt[1] : phi[k] : 0,
  lamb : - qmu[k]*(eps[k]+1),

```

```

for i:1 thru (n-1) do [ i1:i+1,
  q1:eps[k]*pt[i]+(x/qmu[k])*diff(pt[i],x),
  q : q + i*eps[k]*y^i +
  (x/qmu[k])*diff(pt[i],x),
  pt[i]: y*pt[i] + x*lamb*q,
  phi[k]: phi[k] + pt[i]*b[i] ],
  n1 : hipow(f1[k],x),

```

```

for i:0 thru n do [ b[i]:coeff(f1[k],y,i),
  mu[i] : if b[i]=0 then n1
  else lopow(b[i],x) ],
  i:l1[k], thru n while i>0 do
  [ i1:i-1, mu2:mu[i]-mu[i1],
  for j:1 thru 0 step -1 do
  [ mu3:(mu[i1]-mu[i1])/(i-j),
  if mu3<=mu2 then (

```

```

    mu2:mu3, i3:i-j, si1:}]],
    i3:k+i-l1[k], mu[i3]:mu2,
    l1[i3]:i3, sim[i3]:si1,
    nu[i3]:i*nu(mu[i3])+mu[i1]*denom(mu[i3]),
    for i:1 thru l1[i3] do [
      i4:i3-j+1, l1[i4]:l1[i3], mu[i4]:mu[i3],
      sim[i4]:sim[i3], nu[i4]:nu[i3]],
      i:i-13]],
    epsi:eps[k]+mu[k]/qmu[k]],
    q: fh, cc[k,0]:ev(q,[y=ys[k]],diff,expand),
    for i:1 thru n do [
      q:diff(q,y)/i, g1:ev(q,[y=ys[k]]),
      g1:ev(g1,diff), cc[k,i]:expand(g1) ],

```

/* Sortie des resultats
 -----*/

```

kk:n-k+1, yss:integrate(ys[k],x),
for j:0 thru (l1[k]-1) do [
  kk : kk + j, print(" "),
  print(" polynome(",kk,") = ",yss),
  for ii:0 thru n do c[kk,ii]:cc[k,ii],
  k:k-l1[k], print(" "), print(" ").
  for j:n thru (n-ic+1) step -1 do [
    kk : n - j + 1, print(" ");
    print(" Les coefficients de l'
      operateur differentiel ",
      print(" associe au polyno
        me : ",kk," sont : ");
    print(" "), for i:0 thru n do [
      print(" "), print(" c ( "
        ,kk," ,i,") = ",c[kk,i]),
    print(" "), print(" ") j-j) ] $

```

/* Four utiliser cette procedure tapez :
 batch(" reducte.mac ") suivi de
 point virgule et return chariot, puis
 tapez : facdet() suivi aussi de
 point virgule et return chariot.
 -----*/

Exemple 1

les coefficients de l'equation differentielle sont :

$$a(0) = x$$

$$a(1) = 1$$

$$a(2) = -2x^2$$

$$a(3) = x^4$$

les polynomes facteurs determinants sont :

$$\text{polynome}(1) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

$$\text{polynome}(2) = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

les coefficients de l'operateur differentiel
associe au polynome : 1 sont :

$$c(1, 0) = x - \frac{15\sqrt{2}\sqrt{x}}{4} + \frac{11\sqrt{2}}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}$$

$$c(1, 1) = \frac{9\sqrt{2}x^{3/2}}{2} - 2\sqrt{2}\sqrt{x}$$

$$c(1, 2) = x^2 - 3\sqrt{2}x^{5/2}$$

les coefficients de l'operateur differentiel
associe au polynome : 2 sont :

$$c(2, 0) = x + \frac{15 \sqrt{2} \sqrt{x}}{4} - \frac{11 \sqrt{2}}{2 \sqrt{x}} - 3$$

$$c(2, 1) = 2 \sqrt{2} \sqrt{x} - \frac{9 \sqrt{2} x^{3/2}}{2}$$

$$c(2, 2) = 3 \sqrt{2} x^{5/2} + x^2$$

$$c(2, 3) = x^4$$

Exemple 2

les coefficients de l'equation differentielle sont :

$$a(0) = x^3 + x^2 - 1$$

$$a(1) = x^4 + x^2$$

$$a(2) = x^3 - x^6$$

$$a(3) = -x^6 + x^6 + 2x^5$$

$$a(4) = x^8 + x^7$$

les polynomes facteurs determinants sont :

$$\text{polynome(1)} = \frac{1}{x}$$

$$\text{polynome(2)} = \frac{1}{x}$$

$$\text{polynome(3)} = \frac{2}{\text{sqrt}(x)}$$

$$\text{polynome(4)} = \frac{2}{\text{sqrt}(x)}$$

les coefficients de l'operateur differentiel
associe au polynome : 1 sont :

$$c(1, 0) = 29 x^3 + 59 x^2 + 31 x$$

$$c(1, 1) = -27 x^4 - 45 x^3 - 12 x^2$$

$$c(1, 2) = -x^6 + 15 x^5 + 15 x^4 + x^3$$

$$c(1, 3) = -x^7 - 3 x^6 - 2 x^5$$

$$c(1, 4) = x^8 + x^7$$

les coefficients de l'operateur differentiel
associe au polynome : 2 sont :

$$c(2, 0) = 29x^3 + 59x^2 + 31x$$

$$c(2, 1) = -27x^4 - 45x^3 - 12x^2$$

$$c(2, 2) = -x^6 + 15x^5 + 15x^4 + x^3$$

$$c(2, 3) = -x^7 - 3x^6 - 2x^5$$

$$c(2, 4) = x^8 + x^7$$

les coefficients de l'operateur differentiel
associe au polynome : 3 sont :

$$c(3, 0) = \frac{123x^{7/2}}{8} + \frac{105x^3}{4} + \frac{147x^{5/2}}{8} + \frac{77x^2}{4} + \frac{x^{3/2}}{2} - 8x - \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

$$c(3, 1) = -\frac{35x^{9/2}}{2} - 20x^4 - \frac{29x^{7/2}}{2} - 15x^3 + 5x^{5/2} + 7x^2$$

$$-2x^{3/2}$$

$$c(3, 2) = -x^6 + 12x^{11/2} + 6x^5 + 6x^{9/2} + 6x^4 - 6x^{7/2} + x^3$$

$$c(3, 3) = -x^7 - 4x^{13/2} + x^6 - 4x^{11/2} + 2x^5$$

$$c(3, 4) = x^8 + x^7$$

les coefficients de l'operateur differentiel
associe au polynome : 4 sont :

$$c(4, 0) = -\frac{123x^{7/2}}{8} + \frac{105x^3}{4} - \frac{147x^{5/2}}{8} + \frac{77x^2}{4} - \frac{x^{3/2}}{2} - 8x + \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

$$c(4, 1) = \frac{35x^{9/2}}{2} - 20x^4 + \frac{29x^{7/2}}{2} - 15x^3 - 5x^{5/2} + 7x^2 + 2x^{3/2}$$

$$c(4, 2) = -x^6 - 12x^{11/2} + 6x^5 - 6x^{9/2} + 6x^4 + 6x^{7/2} + x^3$$

$$c(4, 3) = -x^7 + 4x^{13/2} + x^6 + 4x^{11/2} + 2x^5$$

$$c(4, 4) = x^8 + x^7$$

REFERENCES

- [1] G. A. BLISS
Algebraic function. Amercain Mathematical Society,
volume 16 New York.

- [2] F. T. COPE
Formal solutions of irregular linear differential
equations Part I. Americain J. Math. 56, 411-437, 1934

- [3] J. DELLA DORA
Solutions formelles d'équations différentielles au
voisinage de points singuliers réguliers.
Rapport de recherche N° 239, IRMA, fevrier 81.

- [4] B. HELFFER and Y. KANNAI
Determining factors and hypoellipticity of ordinary
differential operators with double "charactristics".
Asteristique 2-3, 1973, 198-216.

- [5] W. V. D. HODGE
Isolated singularities of an algebraic surface
Proc. London Math. Soc. II, volume 30 (1930)

- [6] Y. KANNAI
Hypoelliptic differential operators.
Israel J. Math. volume 13 (1972)

- [7] G. KORB
Sur la théorie des fonctions algébriques de deux
variables. Journal Math. pures et appliquées,
volume VIII, 385-419, (1892) .

- [8] A. G. KOJCHNIRENKO
Polyèdre de Newton et nombre de Milnor.
Inventiones Math. 32, 1- 31 , (1976)
- [9] J. D. LIPSON
Elements of algebra and algebraic computing.
Addison-Wesley Publishing Company, (1981) .
- [10] B. MALGRANGE
Sur la réduction formelles des équations différentielles
à singularité irrégulière. (preprint)
- [11] M. MERLE
Polyèdre de Newton, éventails et désingularisation,
d'après A. N. VARCHENKO.
Séminaire sur les singularités des surfaces (1977).
- [12] J. MILNOR
Singular points of complex hypersurface.
Ann. of Math Stud. 61, Princeton University Press
- [13] I. NEWTON
Mathematical works, the method of fluxion and infinite series, with
application to the geometry of curves.
Russian Translation ONTI, Moscow 1937.
- [14] F. PHAM
Singularités des courbes planes. Cours de 3eme cycle,
Faculté des Sciences de Paris, 1969-1970
- [15] V. PUISEUX
Recherche sur les fonctions algébriques.
J. Math pures et appliquées, tome 15 (1850)
- [16] M. M. VAINBERG AND V. A. TRENIGIN
Theory of branching of solution of non linear equations
Noordhoff (1974)

- [17] A. N. VARCHENKO
Zeta-function of monodromy and Newton's diagram.
Inventiones Math. 37, 253-262 (1976)

- [18] R. J. WALKER
Algebraic curves.
Dover Publication, INC. New York (1950)

- [19] W. WASOW
Asymptotic expansions for ordinary differential
equations. Intersciences Publishers, (1965).

DERNIERE PAGE D'UNE THESE

3È CYCLE, DOCTEUR INGÉNIEUR OU UNIVERSITÉ

Vu les dispositions de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu les rapports de M. J. Della Dora.....

M.

M. ...T.A.HIRI...EL.:ALAQWI.....EL..HASSAN..... est autorisé
à présenter une thèse en vue de l'obtention du grade de DOCTEUR de 3ème Cycle
.....

Grenoble, le

Le Président de l'Université Scientifique
et Médicale

M. TANCHE

Tanche