



**HAL**  
open science

# Mémoire en vue de l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches

Isabelle Bouchoule

► **To cite this version:**

Isabelle Bouchoule. Mémoire en vue de l'obtention de l'Habilitation à Diriger des Recherches. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Paris Sud - Paris XI, 2008. tel-00312781

**HAL Id: tel-00312781**

**<https://theses.hal.science/tel-00312781v1>**

Submitted on 26 Aug 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

LABORATOIRE CHARLES FABRY DE L'INSTITUT  
D'OPTIQUE

UNIVERSITÉ PARIS XI  
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY

Mémoire en vue de l'obtention de  
l'Habilitation à Diriger des Recherches

présenté par

**Isabelle Bouchoule**

Soutenue le 18 Avril 2008 devant le jury suivant :

M. Ennio Arimondo	Rapporteur
M. Jean Dalibard	Rapporteur
M. Maxim Olshanii	Rapporteur
M. Gora Shlyapnikov	Examineur
M. Chris Westbrook	Examineur

## Remerciements

Pour tous mes travaux postdoctoraux, j'ai eu la chance d'être entourée par des gens de grande valeur qui m'ont beaucoup apporté. Lors de mon séjour postdoctoral, j'ai beaucoup appris de Klaus Mølmer. Travailler avec lui est une chance aussi bien pour toutes les idées qu'il apporte que pour son enthousiasme communicatif. J'ai ensuite eu la chance d'être soutenue et bien conseillée par Alain Aspect pour rentrer dans son groupe de l'Institut d'Optique en tant que chargée de recherche au CNRS. A l'institut d'Optique, j'ai été accueilli par Chris Westbrook pour travailler sur l'expérience de puce atomique, sujet qu'il venait de démarrer. Cela a été une chance pour moi car participer à la réalisation d'une expérience depuis ses débuts est très enrichissant. De plus, discuter avec Chris, qui ne se satisfait pas d'un résultat de calcul mais cherche toujours à comprendre l'origine physique des phénomènes, est toujours intéressant.

Ma plus grande chance a été de travailler avec des étudiants excellents sans lesquels les résultats expérimentaux présentés dans ce mémoire n'auraient pas pu être obtenus. L'expérience doit beaucoup à Christine Aussibal, qui a soutenu sa thèse en 2003. David Stevens, postdoc en 2002, a aussi eu une contribution importante, notamment pour la programmation informatique. Jérôme Estève, qui a travaillé quatre ans avec nous, a eu un rôle très important. Son efficacité redoutable d'expérimentateur nous a été d'une grande aide. Il a aussi été à l'origine de l'éclosion de beaucoup d'idées qui se sont avérées très fructueuses. Thorsten Schumm a aussi été un étudiant très brillant et il a beaucoup apporté à l'expérience. La puce qu'il a réalisée, même si elle n'a malheureusement pas permis la réalisation des oscillations Josephson, a permis de faire de la physique intéressante. Je suis très heureuse qu'il ait eu plus de chance avec la partie allemande de sa thèse. Enfin, Jean-Baptiste Trebbia a réalisé beaucoup de très belles expériences. Seul thésard sur l'expérience pendant la plupart de sa thèse, il a accompli un travail très important et il a eu à me supporter tout seul. Enfin, je remercie Cristina Figl, thésarde à Hambourg qui a passé quelques mois dans notre équipe et Hai Nguyen qui a passé un an avec nous.

Toujours grâce aux étudiants qui ont travaillé sur l'expérience, j'ai eu la chance de pouvoir faire un peu de théorie. Avec Nicolas Withlock j'ai eu l'occasion de faire une étude intéressante. Je remercie Dima Gangardt avec qui j'ai eu de nombreuses discussions. Je remercie aussi Karen Kheruntsyan sans qui l'article sur la transition vers un quasi-condensat dans un gaz 1D piégé n'aurait jamais vu le jour.

Tous les résultats expérimentaux présentés dans ce mémoire n'auraient pas pu être obtenus sans la collaboration avec Dominique Mailly, du Laboratoire de Photonique et Nanostructures, avec lequel nous avons réalisé les puces. Je le remercie chaleureusement ainsi que tous les membres du LPN qui nous ont aidés en salle blanche.

La compétence et la disponibilité des électroniciens Frédéric Moron et André Villing est primordiale pour la réussite des expériences et je les remercie pour leur travail.

Je remercie tout le groupe d'Optique atomique pour les échanges scientifiques fructueux et pour la bonne ambiance de travail qui règne dans le laboratoire.

Finalement, je remercie Jean Dalibard, Ennio Arimondo et Maxim Olshanii pour avoir effectué le travail de rapporteur.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Manuscrit</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Compression de spin d'une assemblée d'atomes</b>	<b>9</b>
2.1	Compression de spin et interférométrie . . . . .	11
2.2	Utilisation du blocage de Rydberg . . . . .	12
2.3	Mesure de déphasage d'un faisceau optique . . . . .	18
2.4	Conclusion . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Interactions dans un laser à atomes guidés</b>	<b>23</b>
3.1	Fluctuations de phases introduites par les interactions . . . . .	24
3.1.1	Géométrie considérée et opérateur phase . . . . .	25
3.1.2	Phénomène de diffusion de phase . . . . .	26
3.1.3	Effet de la production d'atomes de vitesses différentes . . . . .	27
3.2	Application au cas d'un interféromètre . . . . .	30
3.3	Conclusion . . . . .	33
<b>4</b>	<b>Doublets puits unidimensionnels couplés</b>	<b>35</b>
4.1	Condensats bi-modaux couplés . . . . .	36
4.1.1	Dérivation du hamiltonien . . . . .	36
4.1.2	Dynamique . . . . .	37
4.1.3	Fluctuations . . . . .	39
4.2	Cas d'une géométrie allongée . . . . .	40
4.3	Fluctuations de phase relative . . . . .	41
4.4	Instabilités de modulation . . . . .	44
4.5	Conclusion . . . . .	49
<b>5</b>	<b>Rugosité du potentiel</b>	<b>51</b>
5.1	Mise en évidence de l'origine de la rugosité . . . . .	52
5.2	Annulation de la rugosité . . . . .	55
5.2.1	Démonstration expérimentale . . . . .	57
5.2.2	Limites de la méthode . . . . .	57
5.3	Conclusion . . . . .	61

<b>6</b>	<b>Fluctuations de densité dans un gaz quasi-1D</b>	<b>63</b>
6.1	Transition vers un quasi-condensat . . . . .	64
6.1.1	Gaz 1D en interaction faible . . . . .	65
6.1.2	Cas d'un gaz confiné dans dans piège harmonique . . . . .	69
6.1.3	Compétition avec un phénomène de condensation dû à la taille finie du système . . . . .	70
6.1.4	Cas d'un système réel . . . . .	70
6.1.5	Terminologie . . . . .	73
6.2	Mesure des fluctuations de densité . . . . .	73
6.2.1	Dispositif expérimental . . . . .	73
6.2.2	Phénomène de groupement bosonique . . . . .	75
6.2.3	Analyse classique du phénomène de groupement bosonique . . . . .	80
6.2.4	Observation du groupement bosonique . . . . .	81
6.2.5	Saturation des fluctuations à haute densité : limite du quasi-condensat	83
6.3	Échec de la théorie Hartree-Fock . . . . .	85
6.3.1	Théorie de Hartree-Fock : une théorie self-consistante . . . . .	86
6.3.2	Validité de la théorie de Hartree-Fock dans un gaz tri-dimensionnel en interactions faibles . . . . .	88
6.3.3	Échec attendue de la théorie de Hartree-Fock pour un gaz uni-dimensionnel	89
6.3.4	Mise en évidence expérimentale de l'échec de la théorie de Hartree- Fock dans un gaz quasi-unidimensionnel . . . . .	90
6.4	Conclusion . . . . .	91
<b>7</b>	<b>Perspectives</b>	<b>93</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>96</b>
<b>II</b>	<b>Compilation des articles publiés</b>	<b>105</b>
<b>8</b>	<b>Table des matières de la compilation</b>	<b>107</b>
<b>III</b>	<b>Renseignements administratifs</b>	<b>189</b>
<b>9</b>	<b>Curriculum Vitae</b>	<b>191</b>
<b>10</b>	<b>Encadrement d'étudiants</b>	<b>193</b>
<b>11</b>	<b>Liste de publication</b>	<b>195</b>

Première partie

Manuscrit



# Chapitre 1

## Introduction

Mon travail postdoctoral a commencé par un séjour de un an à Aarhus, au Danemark. Lors de ce séjour, j'ai travaillé avec Klaus Mølmer sur des **méthodes de compression de spin d'une assemblée d'atomes**. La compression de spin est relative à une assemblée d'atomes à deux niveaux. Si chaque atome est décrit par un spin  $1/2$  fictif, l'état de spin de l'assemblée d'atomes est décrit par l'état d'un spin collectif. Dans une horloge atomique et plus généralement dans tout interféromètre atomique, la quantité mesurée est la rotation du spin collectif. Cette mesure est intrinsèquement limitée par les relations d'incertitude qui relient les différentes projection du spin. Dans le cas où les atomes sont tous dans le même état interne, le signal sur bruit est limité par le bruit quantique standard en  $\sqrt{N}$ . Pour améliorer le signal sur bruit, la variance de l'une des décomposantes du spin doit être réduite sous la limite quantique standard : le spin collectif doit être comprimé. Pour cela, la présence de corrélations quantiques entre les atomes est nécessaire. J'ai proposé une méthode de compression de spin basée sur le phénomène de blocage de Rydberg. Dans cette proposition, l'état de Rydberg dans lequel les atomes interagissent n'est peuplé que virtuellement dans des processus Raman. Les interactions importantes entre atomes de Rydberg suffisent cependant à réaliser l'intrication nécessaire à la compression de spin. Il est aussi possible de réaliser une compression de spin par une mesure non destructive de la composante de spin que l'on veut comprimer. Ainsi, une compression de spin par mesure d'un déphasage optique a été réalisée. J'ai étudié les limites de cette méthode, dues à l'information véhiculée par les photons diffusés et non recueillie par l'expérimentateur.

Depuis Octobre 2001, je travaille sur l'expérience de **puce atomique** au laboratoire Charles-Fabry de l'Institut d'Optique. Cette expérience a été initiée peu avant mon arrivée et mes travaux sont tous liés à cette expérience. Dans une expérience de puce atomique, les atomes sont confinés au-dessus d'une puce dans des pièges magnétiques réalisés par des micro-fils déposés sur la puce. En se rapprochant des micro-fils réalisant le piège, les gradients de champs magnétiques peuvent être très importants et des pièges très raides sont réalisés. En particulier, des guides atomiques très confinant peuvent être produits. Les études que j'ai poursuivies sont toutes liées à cette possibilité de fort confinement transverse des atomes et à la caractérisation des guides. Elles peuvent se diviser en quatre



parties : l'étude théorique des fluctuations de phase dans un laser à atome guidé, l'étude en vue de la réalisation d'un couplage tunnel cohérent entre deux guides, l'étude de la rugosité des guides et enfin l'étude de la transition vers un quasi-condensat dans un gaz quasiment unidimensionnel.

L'étude théorique sur les **fluctuations de phase introduites par les interactions entre atomes dans un laser à atomes guidé** a été effectuée en collaboration avec Klaus Mølmer. Cette étude s'inscrit dans le cadre des efforts menés, depuis l'existence des puces atomiques, pour réaliser un interféromètre atomique guidé. De même qu'en optique les sources laser améliorent grandement la performance des interféromètres, il semble naturel d'utiliser pour un interféromètre atomique une source cohérente issue d'un condensat de Bose-Einstein. Cependant la présence d'interactions entre atomes peut détruire la cohérence de phase du jet atomique, surtout si les atomes sont fortement confinés transversalement. Nous avons calculé les fluctuations de phase introduites par les interactions sur un jet d'atomes supposé initialement parfaitement cohérent.

Un travail théorique et expérimental important a été effectué dans l'objectif de réaliser un **couplage tunnel cohérent entre deux guides**. La réalisation d'un tel couplage pourrait avoir des applications importantes. En effet, il permettrait de réaliser une séparatrice pour atomes et donc pourrait être utilisé dans un interféromètre atomique. D'autre part, la réalisation d'oscillations Josephson entre deux condensats, jamais réalisé au début de notre travail, constituait une étape importante dans l'étude de la cohérence des condensats. Nous avons proposé une méthode expérimentale pour y parvenir. Dans cette proposition, deux condensats allongés sont couplés sur toute leur longueur et nous avons montré que cette géométrie permet d'atteindre les deux régimes caractérisés par des interactions entre atomes dominantes ou négligeables respectivement. Sur le plan théorique, je me suis intéressée aux particularités de cette géométrie. En particulier, j'ai mis en évidence l'existence d'instabilités de modulations en présence d'oscillations Josephson entre les deux guides.

Un apport important de notre groupe à la communauté des "puces atomiques" est notre **étude de la rugosité du potentiel créé par un micro-fil** et la **mise au point d'une méthode pour s'affranchir de cette rugosité**. La présence d'une rugosité du potentiel longitudinal d'un guide magnétique réalisé par un micro-fil a été observée par tous les groupes travaillant avec des puces atomiques. Cette rugosité constitue une limite importante des puces atomiques. Comme elle augmente lorsque le piège est rapproché du micro-fil, elle est un obstacle à la réalisation de guides très confinés transversalement. En analysant des profils de densité atomique et les imperfections du fil, nous avons montré que cette rugosité était due aux déformations géométriques des bords du fil. Nous avons ensuite mis au point une méthode pour s'affranchir de cette rugosité, dans laquelle le courant passant dans les micro-fils est rapidement modulé.

Finalement, une part importante de notre contribution scientifique est l'étude de la **transition vers un quasi-condensat dans un gaz de Bose très allongé**. Un gaz de Bose idéal unidimensionnel ne présente pas de phénomène de condensation de Bose-Einstein à la limite thermodynamique. En effet, pour toute température, la population des états excités n'est pas bornée lorsque la densité augmente. Le gaz peut toujours être décrit

par un gaz bosonique thermique. En particulier le phénomène de groupement de Bosons est toujours présent, ce qui se traduit par la présence de fluctuations de densité supérieures au bruit de grenaille. En présence d'interactions répulsives entre atomes, les fluctuations de densité sont coûteuses en énergie et elles sont réduites fortement lorsque la densité devient importante. Le gaz entre alors dans un régime appelé quasi-condensat. Contrairement à la condensation de Bose-Einstein apparaissant pour les gaz tridimensionnel, cette transition vers un quasi-condensat dans un gaz unidimensionnel ne résulte pas d'une saturation des états excités mais elle est due aux corrélations entre atomes introduites par les interactions. Je me suis intéressée au cas d'un gaz unidimensionnel piégé dans un piège harmonique. J'ai calculé les paramètres de la transition vers un quasi-condensat pour un gaz piégé et j'ai donné les conditions pour que cette transition ne soit pas masquée par une condensation due à la taille finie du système. Dans notre expérience, le fort confinement transverse réalisable avec une puce atomique nous permet de réaliser des gaz quasi-unidimensionnels ayant une température proche de l'énergie du mouvement transverse. Nous avons mis en évidence la transition vers un quasi-condensat dans un tel système et nous avons montré que la transition n'est pas expliquée par une saturation des états excités du gaz. Pour mettre en évidence le passage vers un quasi-condensat, nous avons mesuré les fluctuations de densité atomiques en mesurant le bruit sur des images du nuage prises par une technique d'imagerie en absorption. Dans le régime de gaz idéal, nous avons mis en évidence le phénomène de groupement de Bosons en mesurant des fluctuations de densité supérieures au bruit de grenaille attendu pour un gaz sans corrélations entre atomes. A plus forte densité, nous avons mesuré des fluctuations de densité très inférieures à celles attendues pour un gaz idéal et en bon accord avec les fluctuations attendues dans un quasi-condensat. Ces résultats sont décrits dans 4. Enfin, en utilisant les profils de densité, nous avons montré que la transition vers un quasi-condensat n'est pas expliquée par une saturation des états excités dans le cadre d'une théorie de champ moyen. Dans une approche champ moyen, les interactions entre atomes sont traités comme un champ externe qui dépend de la densité et l'introduction de corrélation entre atomes par les interactions est négligé.

### **Plan du manuscrit**

Le premier chapitre de ce manuscrit relate les études théoriques que nous avons effectuées sur la compression de spin. Le deuxième chapitre décrit notre calcul des fluctuations de phase introduites par les interactions entre atomes dans un "laser à atomes" guidés. Le troisième chapitre, toujours théorique, relate nos travaux sur les gaz unidimensionnels couplés. Dans le quatrième chapitre, nous décrivons nos études sur la rugosité des micro-guides magnétiques et nous présentons la technique de modulation qui permet de s'affranchir de cette rugosité. Le cinquième chapitre est dédié à nos études sur les gaz unidimensionnel en interaction faible. Les résultats théoriques et expérimentaux sur la transition vers un quasi-condensat sont présentés. Enfin, nous concluons et discutons des perspectives ouvertes par nos travaux. Après la bibliographie de ce manuscrit, nous avons ajouté une compilation des articles correspondant aux travaux postdoctoraux. La table des matières de cette compilation est placée au-début de cette section.



## Chapitre 2

# Compression de spin d'une assemblée d'atomes

Considérons un objet de moment cinétique  $\mathbf{J}$ . Classiquement, si le moment cinétique pointe dans la direction  $x$ , une mesure de sa composante selon les directions orthogonales  $y$  et  $z$  donne un résultat nul. Quantiquement, il en va différemment car les projections du moment cinétiques sur les trois axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  ne peuvent pas être simultanément bien définies. En particulier, si la composante de  $\mathbf{J}$  selon  $x$  est parfaitement connue, alors les composantes  $J_y$  et  $J_z$  présentent une dispersion (ou une incertitude) quantique. Plus techniquement, les relations de commutation des composantes de  $\mathbf{J}$  impliquent l'inégalité

$$\Delta J_z \Delta J_y \geq \hbar \langle J_x \rangle / 2, \quad (2.1)$$

où  $\Delta J_z$  et  $\Delta J_y$  sont les racines des valeurs quadratiques moyennes. Ces relations sont similaires aux relations d'incertitudes reliant la dispersion en position et en vitesse d'une particule.

Le formalisme des moment cinétiques permet de décrire l'état d'un ensemble d'atomes à deux niveaux. En effet, un atome à deux niveaux  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  peut être représentée par un spin  $1/2$  fictif  $\mathbf{S}$  tel que  $S_z = 1/2(|a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle b|)$ . Une assemblée comportant  $N$  atomes peut alors être représentée par le spin collectif  $\mathbf{J}$  et l'inégalité 2.1 est vérifiée, le facteur  $\hbar$  en moins. Considérons le cas où tous les atomes sont dans l'état de spin pointant selon  $x$  (*i.e.* dans l'état  $(|a\rangle + |b\rangle)/\sqrt{2}$ ). Comme  $J_z = (n_a - n_b)/2$ , mesurer  $J_z$  consiste à mesurer le nombre d'atomes dans chacun des états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ . Comme chaque atome a une probabilité  $1/2$  d'être dans l'état  $|a\rangle$  ou  $|b\rangle$ , la distribution de probabilité des résultats de la mesure de  $J_z$  est la distribution binomiale. La racine de la variance (largeur rms de la distribution) est donc  $\Delta J_z = \sqrt{N}/2$ . Quitte à changer de base, le même raisonnement peut être fait pour  $J_y$ . On a donc  $\Delta J_z = \Delta J_y$ . Cet état est un état d'incertitude minimum puisque  $\Delta J_z \Delta J_y = \langle J_x \rangle / 2$ . La figure 2.1 donne une représentation graphique de cet état, appelé état standard ou état cohérent. Les fluctuations de  $J_z$  (resp.  $J_y$ ) sont appelées bruit de projection quantiques car elles résultent du fait que, lors de la mesure de  $J_z$  (resp.  $J_y$ ), l'état de chaque atome effectue un saut quantique. Un état présentant des fluctuations plus faibles que la limite standard dans une direction du spin perpendiculaire au spin

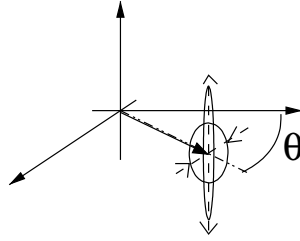


FIG. 2.1 – Représentation de l'état de spin d'une assemblée d'atomes. La dispersion des valeurs que peut prendre le spin dans les directions orthogonales à la direction du spin moyen est représenté par un cercle pour l'état cohérent et pour une ellipse pour un état comprimé.

moyen est appelé état comprimé de spin. Dans ce chapitre, nous introduirons et utiliserons en fait une définition plus restrictive de la notion d'état comprimé de spin, qui impose en plus que la norme du spin moyen soit assez grande. Un état de spin comprimé permet d'améliorer la sensibilité des interféromètres atomiques, comme remarqué depuis 1994[105]. Cette propriété est la motivation principale de l'étude des états comprimés.

On montre qu'une assemblée d'atomes de spin comprimé présente des corrélations quantiques entre atomes (intrication)[93]. La réalisation d'un état de spin comprimé par évolution hamiltonienne nécessite donc la présence d'interactions entre atomes. Il a été proposé par exemple d'utiliser l'interaction entre ions piégés[68] pour réaliser de la compression de spin. Contrairement aux ions, les atomes neutres dans leur état fondamental interagissent peu entre eux et il est à priori difficile de réaliser une intrication entre atomes. D'un autre côté leur faible interaction entre eux et avec les champs extérieurs en font de bons candidats pour l'interférométrie atomique. Réaliser une compression de spin d'une assemblée d'atomes neutres est donc un défi important à relever.

Plusieurs méthodes ont été proposées pour réaliser une compression de spin d'une assemblée d'atomes neutres. Tout d'abord, il est envisageable d'utiliser un condensat de Bose-Einstein [94, 83] : un tel nuage est suffisamment dense pour que les interactions entre atomes puissent être utilisées. Une autre proposition, toujours pour un condensat, consiste à réaliser une interaction effective importante entre atomes en utilisant des transitions Raman via des états moléculaires excités [39]. Dans [12], nous avons proposé une méthode pour réaliser une compression de spin qui utilise l'interaction forte entre atomes lorsqu'ils sont placés dans des états très excités appelés états de Rydberg. L'idée d'utiliser l'interaction dipolaire entre atomes de Rydberg pour introduire des corrélations entre atomes avait déjà été proposé par Lukin, qui avait montré comment utiliser cette interaction pour réaliser une porte logique quantique[45].

Une autre technique pour introduire de l'intrication entre atomes est d'utiliser l'intrication établie entre l'état d'un photon et l'assemblée d'atomes avec laquelle il a interagi. Une mesure de l'état du photon permet de projeter le système atomique sur un état intriqué. Cette réalisation d'intrication utilisant une mesure de l'état d'un photon peut permettre d'intriquer deux atomes[65]. Il est aussi possible de cette façon de réaliser un état de spin

comprimé d'une assemblée d'atomes[59]. Cette méthode de compression de spin repose plus précisément sur la mesure du déphasage optique d'un faisceau lumineux passant dans le nuage atomique. J'ai étudié les limites de cette méthode de compression de spin par mesure de déphasage optique. Ce travail a fait l'objet de l'article [11].

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la première section, nous montrons en quoi la sensibilité des interféromètres est améliorée par l'utilisation d'un état de spin comprimé. La deuxième section présente notre proposition pour réaliser une compression de spin en utilisant l'interaction entre atomes de Rydberg. Dans la troisième section, nous présentons notre étude sur la méthode de compression de spin par mesure d'un déphasage optique. Enfin, nous concluons ce chapitre en mentionnant les perspectives liées à ces travaux.

## 2.1 Compression de spin et interférométrie

Dans une expérience d'interférométrie atomique, la quantité mesurée est le déphasage entre deux états atomiques après la préparation de l'atome dans une superposition cohérente des deux états avec des poids égaux. En terme de spin fictif, on mesure donc une rotation du spin autour de l'axe  $z$ , le spin moyen étant perpendiculaire à  $z$ . Dans le cas d'une assemblée d'atomes de spin collectif  $J$ , l'angle de rotation  $\theta$  présente des fluctuations qui, lorsque  $\theta$  est petit, sont donnés approximativement par

$$\Delta\theta = \Delta J_y / \langle J_x \rangle \quad (2.2)$$

où l'axe  $x$  est la direction du spin moyen. Dans le cas d'un état cohérent,  $\Delta\theta$  est la limite standard  $\Delta\theta_0 = 1/\sqrt{N}$ , aussi appelée bruit de grenaille atomique. Une meilleure résolution peut être obtenue en utilisant un spin comprimé, comme présenté Fig.2.1. La précision de l'interféromètre relativement au cas d'un état cohérent,  $\Delta\theta/\Delta\theta_0$ , est donné par le paramètre de squeezing

$$\xi = \sqrt{N} \Delta J_y / \langle J_x \rangle. \quad (2.3)$$

Plus  $\xi$  est petit, meilleure est la sensibilité de l'interféromètre, ce qu'illustre la figure 2.2. Cette possibilité d'augmenter la sensibilité d'un interféromètre en utilisant des états comprimés a été étudiée par Wineland dans [105]. Plus tard, Sørensen et al. [93] ont montré que la réalisation d'un paramètre  $\xi$  plus petit que un nécessite la présence de corrélation quantique entre atomes. Le facteur  $\xi$  prend ses valeurs minimum lorsque  $\Delta J_y$  et le spin moyen  $\langle J_x \rangle$  tendent vers zéro. La borne inférieure de  $\xi$  (jamais atteinte pour les états de spin moyen non nul) est  $1/\sqrt{N}$ . Cette valeur, qui correspond à une précision de la mesure de la phase relative de  $1/N$  est la limite de Heisenberg : c'est la meilleure précision possible de la mesure d'une phase relative avec  $N$  atomes et elle est obtenue en utilisant l'état  $(|N : a\rangle + |N : b\rangle)/\sqrt{2}$  qui est un état de type chat de Schrödinger[7].

Les deux paramètres  $\Delta J_y$  et  $\langle J_x \rangle$ , qui interviennent dans  $\xi$  ne sont pas indépendants. En particulier, le spin maximum  $N/2$  n'est obtenu que dans l'état cohérent où tous les atomes sont dans le même état et pour lequel  $\Delta J_y = \sqrt{N}/2 : \langle J_x \rangle$  est donc inférieur à  $N/2$  pour tout état comprimé. D'autre part, pour une valeur donnée de  $\Delta J_y$ , le spin moyen

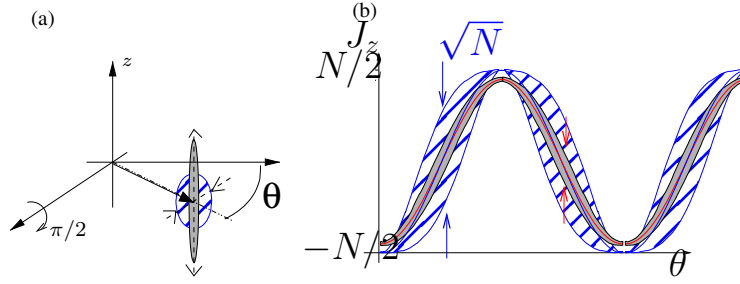


FIG. 2.2 – Intérêt d'un état comprimé pour l'interférométrie. (a) Principe de l'interférométrie : après avoir laissé le spin collectif tourner dans le plan  $(xy)$  sous l'effet d'un déphasage entre les états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ , une impulsion  $\pi/2$  selon  $x$  est appliquée. La quantité mesurée est le spin selon  $z$ . (b) Signal et bruit d'un interféromètre atomique dans le cas d'un état non comprimé (zone hachurée) et dans le cas d'un comprimé (zone grisée). L'amplitude du signal est légèrement diminuée dans le cas du spin comprimé car la norme du spin moyen a légèrement diminuée. Cependant, le bruit a suffisamment diminué pour que le signal sur bruit ait augmenté.

$\langle J_x \rangle$  est maximum pour un état complètement symétrique par échange des atomes. Tout phénomène qui brise l'invariance par échange d'atomes diminue donc le squeezing. Dans le cas où le système reste dans un état symétrique par échange des atomes et où l'on suppose que la distribution de  $J_y$  est gaussienne, le spin moyen est bien approximé par l'équation

$$\langle J_x \rangle = (N/2)e^{-1/(8\Delta J_y^2)}, \quad (2.4)$$

que nous réutiliserons dans la suite.

## 2.2 Utilisation du blocage de Rydberg

Les hamiltoniens s'appliquant à un ensemble d'atomes à deux niveaux invariant par échange de deux atomes peuvent s'écrire à partir des composantes du spin effectif  $\mathbf{J}$ . Un hamiltonien linéaire en  $\mathbf{J}$  ne peut pas introduire de compression de spin. En effet, un tel hamiltonien peut s'écrire comme une somme de hamiltoniens agissant indépendamment sur chacun des spins et il ne peut donc pas introduire les corrélations entre atomes nécessaires à la compression de spin. Par contre, la plupart des hamiltoniens contenant des termes non linéaires en  $\mathbf{J}$  sont susceptibles d'introduire de la compression de spin. Ainsi, la figure 2.3 illustre la compression réalisée par les hamiltoniens  $J_z^2$  et  $J_x^2 - J_y^2$  [55]. Nous allons voir que de tels hamiltoniens peuvent être obtenus en utilisant l'interaction entre atomes dans un état fantôme, dont la population reste négligeable au cours du processus. L'idée est d'utiliser des lasers très désaccordés couplant les états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  qui nous intéressent à un état excité  $|r\rangle$  dans lequel les atomes interagissent fortement. Dans les propositions que nous avons faites, les désaccords sont suffisants pour que la population de l'état  $|r\rangle$  reste toujours très faible, d'où la dénomination d'état fantôme.

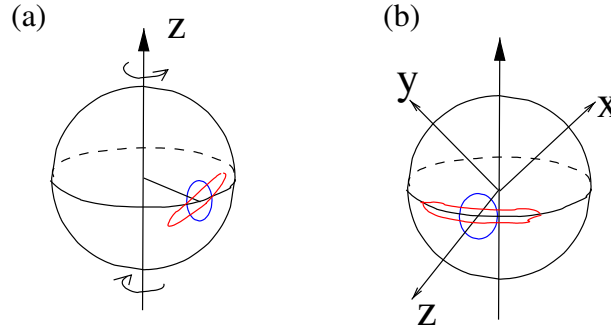


FIG. 2.3 – Compression de spin obtenue en appliquant les hamiltoniens  $J_z^2$  (a) et  $J_x^2 - J_y^2$  (b). On a représenté les évolutions à petit temps pour lesquelles la norme du spin n'est presque pas réduite. Le hamiltonien  $J_z^2$  réalise un twist autour de  $z$  car il produit une rotation autour de  $z$  dont la fréquence est proportionnelle à  $J_z$ . Appliqué à un état dont le spin pointe selon  $x$ , ce twist déforme le disque donnant les fluctuations du spin en une ellipse. Le hamiltonien  $J_x^2 - J_y^2$ , appliqué à un état dont le spin pointe selon  $z$ , réalise une compression de la composante du spin dans la direction  $(\mathbf{x} + \mathbf{y})/\sqrt{2}$ .

La proposition la plus simple consiste à n'utiliser qu'un seul laser couplant  $|a\rangle$  à  $|r\rangle$ , comme indiqué Fig.2.4. En l'absence d'interaction entre atomes, ce laser a pour effet de changer l'énergie du niveau  $|a\rangle$  d'une quantité  $\Delta E$ , appelée déplacement lumineux, indépendante du nombre d'atomes  $n_a$  dans  $|a\rangle$ . Le hamiltonien s'écrit donc  $H = \Delta E n_a$  : il est, à une constante près, proportionnel à  $J_z = (n_a - n_b)/2 = n_a - N/2$ . En fait, l'absence de termes proportionnels à  $n_a^2$  dans le déplacement lumineux peut s'interpréter comme une interférence destructive entre deux contributions : d'une part le terme d'ordre 4 du décalage en énergie du niveau  $|n_a\rangle$  dû à la transition  $|n_a\rangle \rightarrow |n_a - 1, n_r = 1\rangle$  et d'autre part la variation d'énergie due au processus non résonnant  $|n_a\rangle \rightarrow |n_a - 1, n_r = 1\rangle \rightarrow |n_a - 2, n_r = 2\rangle$  (voir fig. 2.4). Ici,  $|n_a, n_r\rangle$  est l'état symétrique par échange de deux atomes contenant  $n_a$  atomes dans l'état  $|a\rangle$  et  $n_r$  atomes dans l'état  $|r\rangle$ .

Considérons maintenant le cas où les atomes interagissent fortement dans l'état  $|r\rangle$ . Si les interactions sont suffisamment fortes, alors, pour toute paire d'atomes dans le nuage, l'énergie de l'état où deux atomes sont dans  $|r\rangle$  est décalée d'une quantité beaucoup plus grande que le désaccord de l'état  $|r\rangle$ . Dans ce cas, le deuxième des processus mentionnés ci-dessus donne une contribution négligeable : le phénomène d'interférence destructive décrit ci-dessus disparaît et le décalage lumineux acquiert un terme en  $n_a^2$ . Le hamiltonien contient donc un terme en  $J_z^2 = (n_a - n_b)^2/4$  et une réalisation de compression de spin est possible. L'inhibition, due aux interactions entre atomes, des processus impliquant l'état à deux atomes dans  $|r\rangle$  est appelé le phénomène de blocage, par analogie avec le blocage de coulomb dans les boîtes à électrons. Le graphe 2.5 donne la compression de spin obtenue, pour un nuage atomique initialement dans l'état cohérent correspondant à l'état  $(|a\rangle + |b\rangle)/\sqrt{2}$ . Dans le calcul, un deuxième laser sur la transition  $|b\rangle \rightarrow |r\rangle$  est utilisé pour compenser les termes en  $J_z$  du hamiltonien. L'évolution de l'état du nuage est alors proche de celle qui serait obtenue avec un hamiltonien en  $J_z^2$  et une compression de spin est réalisée.



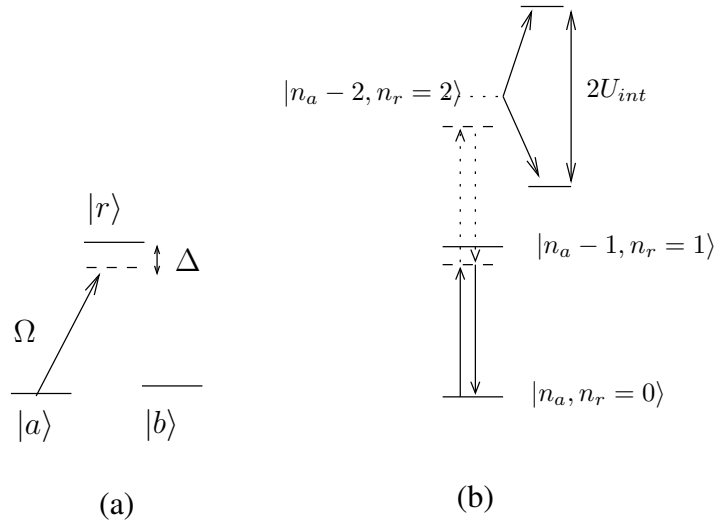


FIG. 2.4 – Utilisation du blocage de Rydberg pour réaliser le Hamiltonien  $J_z^2$ . (a) : configuration utilisée. Les états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  sont les deux états peuplés par les atomes. Le spin effectif selon  $z$  est  $J_z = (n_a - n_b)/2$ . Un couplage  $\Omega$  entre l'état  $|a\rangle$  et un état de Rydberg  $|r\rangle$  est introduit par un laser très désaccordé. (b) : phénomène de blocage. Le terme en  $J_z^2$  (donc en  $n_a^2$ ) dans l'énergie provient du déplacement lumineux d'ordre 4 en  $\Omega$ . En effet, le processus d'ordre 4 en  $\Omega$  qui fait intervenir l'état à deux atomes dans l'état  $|r\rangle$  a une contribution négligeable car l'énergie d'interaction  $U_{int}$  est très grande devant le désaccord lumineux  $\Delta$  : les interférences destructives qui annulent habituellement le terme en  $n_a^2$  ne se produisent plus.

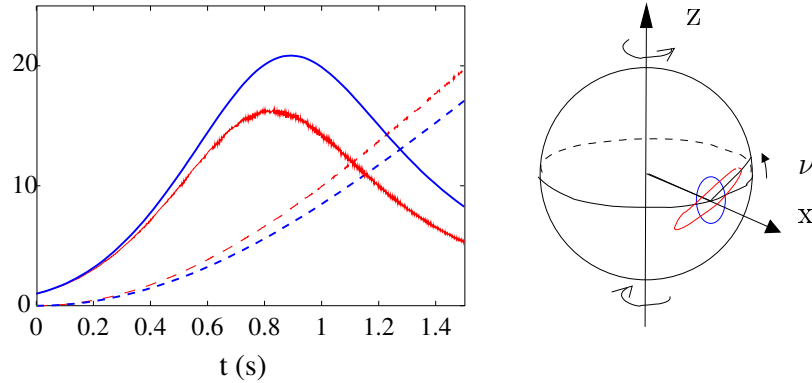


FIG. 2.5 – Compression de spin réalisée sur un ensemble de 100 atomes par la non-linéarité du déplacement lumineux en présence du blocage de Rydberg. La fréquence de Rabi du couplage entre l'état  $|a\rangle$  et l'état  $|r\rangle$  est de 8.3 kHz et le désaccord avec l'état  $|r\rangle$  est de 1 MHz. On suppose ici que le blocage est parfait : un seul atome peut être transféré à la fois dans  $|r\rangle$ . Les quantités  $\sqrt{N}/(2\Delta J_\mu)$  (lignes continues) et  $N/2 - \langle J_x \rangle$  (lignes tiretées) sont représentées.  $J_\mu$  est la composante la plus comprimée du spin (voir figure de droite). Les calculs exacts (lignes fines) sont comparés aux prédictions analytiques pour un hamiltonien en  $J_z^2$  (lignes épaisses). La différence entre les deux est due à des termes d'ordre supérieurs à 2 en  $\mathbf{J}$ .

Nous avons montré ci-dessus une méthode très simple de réalisation d'une compression de spin qui utilise le phénomène de blocage dans un état de Rydberg. L'avantage de l'utilisation du phénomène de blocage est que la méthode est insensible à la valeur exacte de l'interaction entre atomes dans l'état  $|r\rangle$ , la seule condition étant que cette interaction soit assez grande. D'autres méthodes de compression de spin sont basées sur la réalisation du hamiltonien  $J_z^2$  [94, 83, 70]. Notons que dans [70], la nonlinéarité en  $\mathbf{J}$  du hamiltonien provient, comme dans la méthode présentée ici, de l'annulation d'interférences destructives. Plus précisément, dans ce papier, les auteurs considèrent un système d'ions piégés et le terme en  $J_z^2$  du hamiltonien provient de l'annulation d'interférences destructives due à la levée de dégénérescence des modes collectifs de vibrations à cause des interactions entre les ions.

Un hamiltonien plus efficace que  $J_z^2$  pour réaliser du squeezing est

$$H = 2\Omega(J_x^2 - J_y^2). \quad (2.5)$$

Cet hamiltonien a deux avantages par rapport au hamiltonien en  $J_z^2$ . Premièrement, comme montré dans [55], il permet de réaliser des compressions de spin plus importantes que celles réalisées avec le hamiltonien en  $J_z^2$ . Plus précisément, appliqué à l'état initial dans lequel tous les spins pointent vers  $J_z = N/2$ , le hamiltonien 2.5 permet de diminuer la variance de  $J_{-\pi/4} = (J_x + J_y)/\sqrt{2}$  d'un facteur proche de la valeur maximum  $N/2$ . Deuxièmement, l'axe comprimé ne dépend pas du temps, contrairement au cas de l'hamiltonien  $J_z^2$ .

En écrivant différemment le hamiltonien 2.5, on montre qu'il correspond au transfert d'atomes par paires des états  $|a\rangle$  aux états  $|b\rangle$ . Pour cela, nous utilisons le formalisme

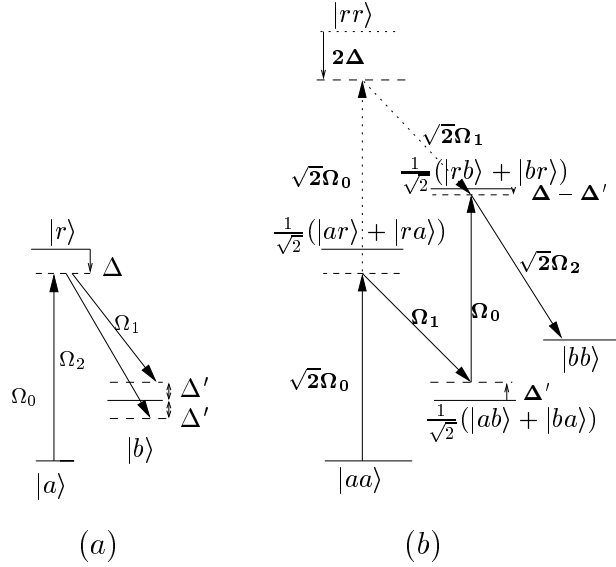


FIG. 2.6 – Réalisation de l'hamiltonien  $J_x^2 - J_y^2$  en utilisant le blocage de Rydberg. Comme pour la production de l'hamiltonien  $J_z^2$ , le hamiltonien non linéaire provient de la destruction d'une interférence destructive à cause de l'inhibition d'un processus produite par l'interaction entre atomes dans l'état virtuel  $|r\rangle$ .

bosonique de la seconde quantification, qui est valable puisque le hamiltonien 2.5 est invariant par échange de deux spins : si l'état initial est symétrique par échange des spins, alors l'état du système reste dans le sous-espace complètement symétrique. Dans ce formalisme,  $J_x = (a^+b + b^+a)/2$  et  $J_y = i(a^+b - b^+a)/2$  où  $a$  est l'opérateur qui annihile un atome dans l'état  $|a\rangle$  et  $b$  annihile un atome dans l'état  $|b\rangle$ . En utilisant ces expressions, on trouve que le hamiltonien 2.5 s'écrit

$$H = \Omega(a^{+2}b^2 + b^{+2}a^2). \quad (2.6)$$

Ainsi, il correspond bien au transfert d'atomes de  $|a\rangle$  à  $|b\rangle$  par paires.

Un transfert résonnant d'atomes par paires peut être réalisé en utilisant deux transitions Raman, chacune couplant un atome de l'état  $|a\rangle$  à l'état  $|b\rangle$ , les désaccords des transitions Raman étant opposés, comme montré fig.2.6. Cependant, si aucune interaction entre atomes n'est présente, le hamiltonien doit nécessairement être linéaire en  $\mathbf{J}$ , ce qui implique que le couplage à deux atomes  $b^{+2}a^2$  doit être nul. Comme précédemment, cette annulation du terme  $b^{+2}a^2$  s'explique comme une interférence destructive entre les deux processus montrés Fig.2.6. Le premier processus est le transfert séquentiel dans  $b$  d'un atome puis d'un autre. Le deuxième processus est le transfert des deux atomes dans l'état intermédiaire  $|r\rangle$  puis leur transfert vers  $|b\rangle$ .

Si les atomes interagissent fortement dans l'état intermédiaire  $|r\rangle$ , alors, le deuxième processus donne une contribution négligeable. Si cette condition est vérifiée pour tout couple d'atomes sur le nuage, alors le hamiltonien effectif est symétrique par échange de deux atomes et contient le terme  $b^{+2}a^2$ . Une réalisation de compression de spin est dans ce

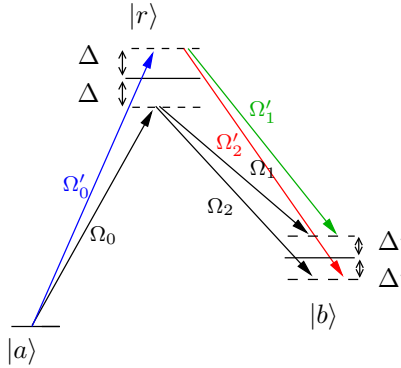


FIG. 2.7 – Configuration de lasers nécessaire pour réaliser un fort squeezing. Six faisceaux asservis en phase sont nécessaires pour s'affranchir des déplacements lumineux non linéaires.

cas possible.

Cependant, comme montré plus haut, le phénomène de blocage est aussi responsable d'un terme non linéaire dans les décalages lumineux. Ce phénomène réduit le squeezing qui peut être obtenu car les transitions Raman deviennent non résonnantes après le transfert de quelques atomes. Pour remédier à cela, et ainsi pouvoir obtenir le squeezing maximum, il est possible de rajouter 3 lasers dont les désaccords sont opposés à ceux montré Fig.2.7. Dans un tel système, les désaccords entre les lasers Stokes et anti-Stokes devront être asservis en phase. Avec un tel système, le hamiltonien 2.6 est réalisé. On peut donc obtenir des compressions de spin qui correspondent à un paramètre de squeezing proche de  $1/\sqrt{N}$ , qui est la meilleure compression possible (*i.e.* le plus petit paramètre  $\xi$ ).

Les propositions ci-dessus nécessitent d'utiliser une interaction forte et à longue portée entre atomes dans l'état  $|r\rangle$ . Lukin a proposé d'utiliser l'interaction dipolaire forte entre atomes dans un état de Rydberg  $|r\rangle$ . Plus précisément, Lukin a proposé d'utiliser un couplage dipolaire  $|r, r\rangle \rightarrow |r+1, r-1\rangle$  résonnant dans lequel deux atomes dans le niveau de Rydberg  $|r\rangle$  passent, l'un dans l'état  $|r+1\rangle$ , et l'autre dans l'état  $|r-1\rangle$ . Le couplage  $\Omega$  entre les états  $|rr\rangle$  et  $|r+1, r-1\rangle$  est un couplage dipole-dipole qui varie en  $1/r^3$  où  $r$  est la distance entre atomes. Le dipôle des transitions étant très important pour des états de Rydberg de nombre quantique principal  $n$  élevé,  $\Omega$  peut être important. Pour  $n \simeq 40$ ,  $\Omega$  peut être de l'ordre du MegaHertz même pour des distances entre atomes de plusieurs microns. Les états propres, qui sont les superpositions symétriques et antisymétriques des états  $|rr\rangle$  et  $|r+1, r-1\rangle$ , ont des énergies qui diffèrent de l'énergie de l'état  $|rr\rangle$  par la quantité  $\Omega/2$ . La résonance doit être ajustée à l'aide d'un champ électrique.

Le phénomène de blocage de Rydberg utilisant une interaction dipole-dipole résonnante a récemment été mis en évidence[100]. Un phénomène de blocage a aussi été observé dans le cas où le champ électrique est nul et où l'interaction entre atomes de Rydberg n'est pas résonnante mais est une interaction de Van-der-Waals (interaction dipole/dipole induit). Bien que cette interaction soit plus faible, elle présente l'avantage d'être isotrope, contrairement à l'interaction dipole-dipole. Ces résultats permettent d'envisager la mise en oeuvre de la

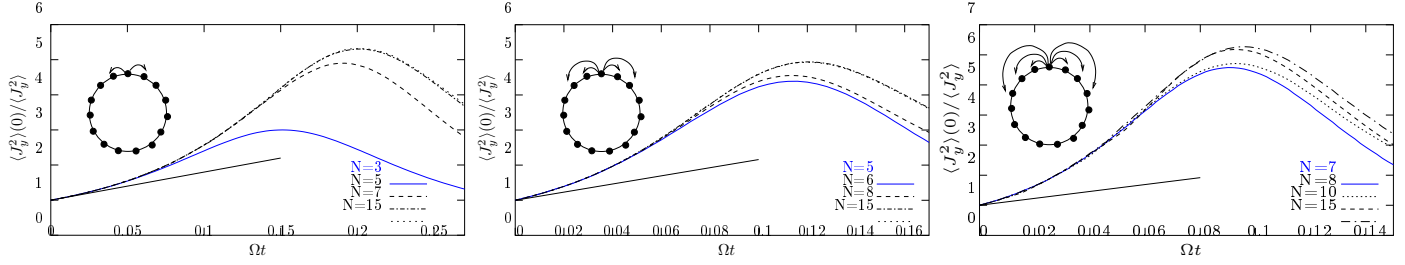


FIG. 2.8 – Compression de spin dans le cas où le phénomène de blocage n'est pas efficace sur tout le nuage. Nous avons considéré une géométrie circulaire dans laquelle le blocage est parfait pour les  $n$  plus proches voisins ( $n = 2, 4, 6$  pour les graphes (a), (b) et (c) respectivement) et nul pour les autres paires d'atomes. La droite est le résultat d'un calcul perturbatif valable à temps court.

compression de spin décrite ci-dessus. Notons que, expérimentalement, il est intéressant d'utiliser deux lasers pour coupler l'état fondamental atomique à un état de Rydberg, en passant par un état intermédiaire hors résonance. Les propositions que nous avons faites peuvent facilement être adaptées à cette situation.

Le cas où le blocage de Rydberg agit sur une distance plus petite que la taille du nuage est intéressant à étudier car cela sera probablement le cas expérimentalement. Nous avons fait des calculs numériques en considérant que le transfert de paires d'atomes ne pouvait se faire qu'entre plus proches voisins. Le hamiltonien n'est plus symétrique par échange entre atomes. Donc l'espace vectoriel entier de dimension  $2^N$  doit être considéré et seuls le cas de nombres d'atomes inférieurs ou égaux à 15 a pu être calculé. La figure 2.8 montre l'évolution de la variance du spin dans le cas où un atome interagit avec ses plus proches voisins, dans une géométrie circulaire comme indiqué sur la figure. Nous trouvons que le facteur maximum de réduction de la variance de la composante comprimée du spin est de l'ordre du nombre de voisins interagissant avec un atome.

## 2.3 Mesure de déphasage d'un faisceau optique

Il a été proposé depuis quelques années de réaliser une compression de spin par mesure de déphasage d'un faisceau optique[58]. L'idée de l'expérience est schématisée Fig.2.9. Un nuage atomique de  $N$  atomes est préparé dans l'état cohérent correspondant à l'état atomique  $(|a\rangle + |b\rangle)/\sqrt{2}$ . Ce nuage est inséré dans l'un des bras d'un interféromètre optique dans lequel on envoie des photons interagissant de façon non résonnante avec l'état atomique  $|a\rangle$ . A cause de l'interaction avec les atomes dans  $|a\rangle$ , le faisceau lumineux passant par le nuage acquiert un déphasage proportionnel au nombre d'atomes dans  $|a\rangle$ . L'interféromètre mesure ce déphasage : il mesure donc le nombre d'atomes dans  $|a\rangle$ . La précision de la mesure du nombre d'atomes dans  $|a\rangle$  est donnée par la précision de la mesure du déphasage. La mesure du déphasage peut être extrêmement précise si on utilise un nombre suffisant de photons. En effet, la précision de la mesure d'un déphasage optique utilisant  $N_p$

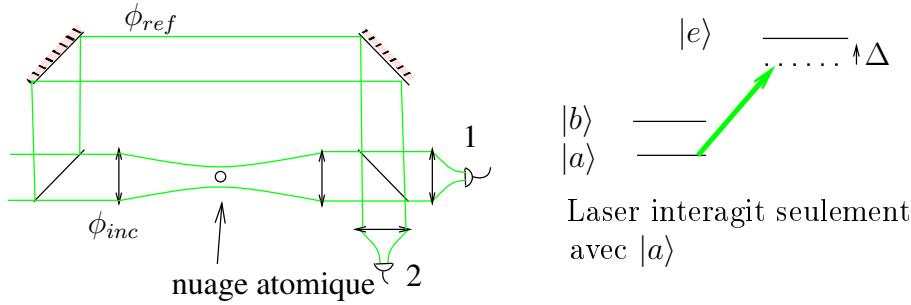


FIG. 2.9 – *Modèle simple utilisé pour analyser la méthode de compression de spin par mesure d'un déphasage optique. Les photons utilisés dans l'interféromètre couplent les atomes dans l'état  $|a\rangle$  à un état excité  $|e\rangle$  très loin de résonance. L'effet de l'interaction est donc un simple décalage lumineux. Du point de vue des photons, ce décalage lumineux est un déphasage par effet d'indice. Ce déphasage est mesuré par interférométrie.*

photons non corrélés est donnée par  $1/\sqrt{N_p}$ . Si le nombre de photons utilisés est suffisamment important, alors le nombre d'atomes dans  $|a\rangle$  est connu à mieux que  $\sqrt{N}$ . L'ensemble atomique est alors dans un état de spin comprimé à l'issue de la mesure. Ainsi, un état de spin comprimé résulte de la projection quantique de l'état du système à l'issue d'une mesure.

J'ai proposé une analyse très simple de ce processus, qui a l'avantage de rendre transparente la réalisation de l'intrication entre atomes nécessaire à la réalisation d'une compression de spin. Cette analyse, basée sur la notion de sauts quantiques, est présentée ci-dessous. J'ai aussi étudié les limites de cette technique de compression de spin, dues à la diffusion de photons dans des modes différents du mode de l'interféromètre : j'ai calculé la compression de spin maximum qui pouvait être réalisée. Les résultats de ce travail sont résumés à la fin de cette section.

Les atomes sont initialement tous préparés dans la superposition  $(|a\rangle + |b\rangle)/\sqrt{2}$ . L'état du nuage atomique est alors l'état cohérent  $\sum_{n_a} c_{n_a} |n_a\rangle$  où  $|n_a\rangle$  est l'état symétrique par échange de deux atomes dans lequel  $n_a$  atomes sont dans l'état  $|n_a\rangle$  et  $c_{n_a} = n!/\sqrt{2^N n_a!(N - n_a)!}$ . La largeur de la distribution en  $n_a$  est  $\sqrt{N}$ . Dans l'analyse simple présentée ci-dessous, on suppose que le couplage entre les atomes et le mode de l'interféromètre est identique pour tous les atomes. Donc, si l'on ne considère que le mode de l'interféromètre dans l'analyse<sup>1</sup>, le nuage atomique reste dans un état symétrique par échange des atomes et il peut être représenté dans la base des états  $|n_a\rangle$ . L'état du système photon/atomes lorsqu'un photon vient de rentrer dans l'interféromètre est donné par l'état séparable

$$|\psi\rangle = \sum_{n_a} C_{n_a} |n_a\rangle (|\phi_{inc}\rangle + |\phi_{ref}\rangle)/\sqrt{2}, \quad (2.7)$$

où  $|\phi_{inc}\rangle$  est la composante du photon qui va interagir avec les atomes,  $|\phi_{ref}\rangle$  est la composante de référence qui n'interagit pas avec les atomes (voir figure 2.9). Après interaction

<sup>1</sup>Cette supposition, qui simplifie l'écriture, n'est pas essentielle et n'est pas utilisée dans notre article.

avec les atomes, la composante en  $|\phi_{inc}\rangle$  est déphasée d'une quantité  $F n_a$  : l'amplitude correspondante de l'état  $|\psi\rangle$  est multiplié par la quantité  $e^{i n_a F}$ . Le système nuage atomique-photon n'est alors plus séparable : une intrication apparaît entre l'état du photon et du nuage atomique. Le photon est ensuite détecté soit dans la voie de sortie 1 qui correspond à l'état  $\phi_1 = (e^{i\phi}|\phi_{inc}\rangle + e^{-i\phi}|\phi_{ref}\rangle)/\sqrt{2}$  soit dans la voie de sortie 2 qui correspond à l'état  $\phi_2 = (e^{i\phi}|\phi_{inc}\rangle - e^{-i\phi}|\phi_{ref}\rangle)/\sqrt{2}$ . La phase  $\phi$  dépend de la longueur de chacun des deux bras de l'interféromètre. Dans chacun des cas, la mesure projette l'état du système sur les états de photons  $\phi_1$  et  $\phi_2$  respectivement. Cette projection modifie les amplitudes des états  $|n_a\rangle$  selon

$$\begin{aligned} C_{n_a} &\rightarrow \frac{1}{2} \left( e^{i\phi} + e^{-i\phi} e^{i F n_a} \right) C_{n_a}, & \text{Detection 1} \\ C_{n_a} &\rightarrow \frac{1}{2} \left( e^{i\phi} - e^{-i\phi} e^{i F n_a} \right) C_{n_a}, & \text{Detection 2} \end{aligned} \quad (2.8)$$

En renouvelant le raisonnement ci-dessus plusieurs fois, on trouve que, après le passage de  $N_p$  photons dans l'interféromètre, l'état du nuage atomique est modifié selon

$$|\psi\rangle = \sum_{n_a} C_{n_a} |n_a\rangle \longrightarrow \sum_{n_a} C_{n_a} e^{i F n_a} f_{N_1, N_p}(n_a) |n_a\rangle \quad (2.9)$$

où  $N_1$  est le nombre de photons détecté dans la voie 1 et

$$f_{N_1, N_p}(n_a) = \cos(\phi - F n_a)^{N_1} \sin(\phi - F n_a)^{N_p - N_1} \quad (2.10)$$

La figure 2.10 donne la distribution initiale en  $n_a$  et la fonction  $f_{N_1, N_p}(n_a)$  pour un nombre  $N_1$  donné. La fonction  $f_{N_1, N_p}$  a une largeur  $1/(F\sqrt{N_p})$ . On retrouve ici la précision attendue en  $n_a$  de la mesure, sachant que le déphasage n'est mesuré qu'à  $\sqrt{N_p}$  près. Pour des nombres de photons suffisant,  $1/(F\sqrt{N_p})$  est bien inférieure à  $\sqrt{N}$  et la distribution finale en nombre d'atomes dans  $|a\rangle$  a été réduite. Aucune information n'a été fournie sur la répartition des atomes dans  $|a\rangle$  et le nuage est resté dans un état symétrique par échange des atomes. On peut alors utiliser l'expression approchée  $\langle J_x \rangle = N/N e^{-1/(8\Delta J_y^2)}$  donnant la réduction du spin moyen associée à la réduction de  $\Delta J_y$ . Le paramètre de squeezing est donc, dans le cas où le nombre de photons  $N_p$  est suffisant pour que la largeur de  $f$  soit bien inférieure à  $\sqrt{N}$ , de l'ordre de

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{N} F \sqrt{N_p}} e^{F^2 N_p}. \quad (2.11)$$

Il est minimum pour un nombre de photons égale à  $1/(2F^2)$  et vaut alors la valeur minimum autorisée  $1/\sqrt{N}$ .

Dans le scénario présenté ci-dessus, toute l'information véhiculée par les photons ayant interagis avec le nuage atomique est enregistrée. Cette méthode de compression de spin est donc basée sur une mesure quantique non destructrice. La réalisation d'intrication *via* la projection quantique liée à une mesure peut être utilisé dans d'autres situations : une porte logique conditionnelle peut être réalisée de cette façon[65].

L'analyse très simple de la compression de spin par mesure d'un déphasage présentée ci-dessus n'est pas satisfaisante car elle ne prend pas en compte les photons diffusés hors

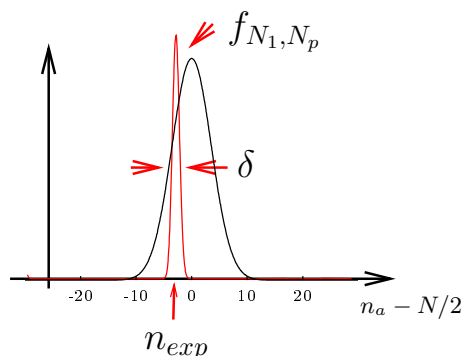


FIG. 2.10 – Réduction de la largeur de la distribution en  $n_a$  due aux sauts quantiques à l'issue de la détection de  $N_p$  photons. La distribution initial des amplitudes de probabilité (courbe large de largeur  $\sqrt{N}$ ) est multiplié par le fonction  $f_{N_1, N_p}$ , de largeur  $\delta = 1/(F\sqrt{N_p})$ .

du mode de l'interféromètre. Le phénomène de diffusion hors du mode de l'interféromètre est intrinsèque à cette méthode de compression de spin, le déphasage mesuré dans le mode de l'interféromètre résultant simplement de l'interférence entre le photon incident et la lumière diffusée. C'est pourquoi je me suis intéressée à l'effet des photons diffusés hors du mode de l'interféromètre sur la compression de spin.

Les photons diffusés hors du mode de l'interféromètre emportent de l'information qui n'est pas enregistrée et l'état du nuage atomique est décrit à l'issue de la mesure par un mélange statistique incohérents. La largeur en  $n_a$  dans ce mélange incohérent est toujours donnée par la largeur de la fonction  $f$ . Par contre, le spin moyen peut être réduit, ce qui conduit à une réduction de la compression (le facteur de compression  $\xi$  est augmenté). Deux phénomènes sont à prendre en compte :

- Les photons diffusés emportent de l'information sur le nombre d'atomes dans  $n_a$ . La compression est en fait, pour une réalisation unique, plus grande que celle donnée par la largeur de la fonction  $f$ . Le spin moyen est alors réduit, d'après l'Eq.2.4.
- Les photons diffusés emportent de l'information sur la distribution des atomes dans  $|a\rangle$ . L'état du système atomique n'est plus symétrique par échange des atomes et le spin moyen est réduit.

J'ai calculé l'effet de la diffusion et j'ai montré que la compression maximum qui pouvait être obtenue est donnée par

$$\xi_{min} = \sqrt{\mathcal{A}/(N\lambda^2)} \quad (2.12)$$

où  $\mathcal{A}$  est l'aire du faisceau à l'endroit du nuage atomique. Le désaccord n'intervient plus dans cette expression et seule la densité optique à résonance est importante. Cette équation est le résultat principal de l'article [11].

Cette formule est triviale à obtenir dans le cas où l'on suppose que le nuage est suffisamment dilué et petit pour qu'il puisse être envisageable de réaliser un système optique qui image chaque atome indépendamment. En effet, pour chaque atome, les processus des diffusion induisent une diminution de la cohérence entre  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ , le terme  $\sigma_{ab}$  de la ma-



trice densité de chaque atome décroissant exponentiellement. On calcule alors aisément la diminution du spin moyen.

Le cas d'un nuage plus dense est autrement plus compliqué. Le processus de diffusion ne donne de l'information que sur certaines composantes de Fourier des fluctuations spatiales des atomes dans  $|a\rangle$ . Une analyse approchée a été effectuée dans ce cas là, qui redonne une formule identique au cas simple mentionné plus haut. Bien que la physique est différente dans ce cas, nous retrouvons la même formule que dans le cas plus simple précédent. Le fait de retrouver la même formule n'était pas attendu à priori.

## 2.4 Conclusion

Nous avons exploré deux méthodes différentes pour effectuer une compression de spin d'une assemblée d'atomes. Alors que la première utilise l'interactions entre atomes de rydberg, la deuxième méthode ne nécessite pas l'existence d'interactions entre atomes puisqu'elle est basée sur un mesure non destructive. Expérimentalement, ces deux techniques sont très prometteuses et il est probable qu'elles soient utilisées dans un avenir proche pour réaliser un interféromètre de signal sur bruit supérieur à la limite standard (signal sur bruit en  $\sqrt{N}$  limité par le bruit de projection quantique).

Le phénomène de blocage de rydberg a été mis en évidence expérimentalement récemment et des énergies d'interactions très importantes peuvent être réalisées. Un programme de recherche a été initié dans une collaboration entre le Laboratoire Charles-Fabry de l'Institut d'Optique et le laboratoire Aimé Cotton pour utilisé ce blocage pour réaliser une porte logique quantique. Il serait intéressant de réaliser, en utilisant le même dispositif expérimental, une compression du spin d'une assemblée d'une dizaine d'atomes. Des études préalables à l'implémentation concrète des propositions que nous avons faites restent à effectuer.

L'utilisation d'une mesure d'un déphasage optique pour réaliser une compression de spin en vue de réaliser un interféromètre atomique est déjà à l'étude dans plusieurs groupes expérimentaux. Ainsi, le groupe de Polzik travail sur ce sujet [74]. Comme nous l'avons étudié, cette méthode de compression de spin est limité par la diffusion de photons hors du mode du faisceau incident. Pour diminuer l'effet néfaste de cette diffusion, il est possible de placer le nuage atomique dans une cavité résonnante avec le faisceau incident. Dans ce cas, comme décrit dans notre article, on s'attend à ce que la compression de spin soit améliorée d'un facteur égal à la racine de la finesse de la cavité. Plusieurs expériences dans le monde utilise des nuages atomiques couplés à une cavité et la réalisation d'une compression de spin dans une telle configuration es envisageable. En particulier, au Laboratoire Charles-Fabry, l'équipe de Philippe Bouyer monte actuellement une expérience dans ce but.

# Chapitre 3

## Interactions dans un laser à atomes guidés

Le confinement des atomes par des microstructures déposés sur une “puce” permet de réaliser des confinements importants aux géométries variées. Ainsi, des guides atomiques peuvent être réalisés[24]. L’une des applications envisagées des puces atomiques est la réalisation d’un interféromètre à atomes guidés. En particulier, il est envisageable de réaliser, sur des puces atomiques, des interféromètres atomiques sensibles au champ de rotation : une structure guidante qui encercle une surface peut être utilisée pour réaliser un gyroscope atomique. De même que l’utilisation de fibres optiques a permis d’améliorer la sensibilité des gyroscopes optiques, on peut espérer augmenter la résolution des interféromètres atomiques en utilisant des guides atomiques. Des premières démonstrations expérimentales d’interféromètres à onde de de Broglie guidée sur puce ont déjà été réalisées[101, 36, 48, 88], en utilisant différentes méthodes pour réaliser une séparatrice.

Contrairement aux photons dans l’espace libre, les atomes interagissent entre eux. L’effet des interactions peut être très important, en particulier lorsque les atomes sont guidés par un potentiel transverse très important, comme c’est le cas dans un interféromètre à atomes guidés. Les interactions entre atomes, qui correspondent à des processus de collisions, ont des effets similaires à certains effets introduits par une nonlinéarité du troisième ordre dans un milieu optique : on retrouve un effet Kerr et des phénomènes de mélange à quatre ondes. Cependant, les effets non linéaires sont typiquement beaucoup plus importants dans le cas des ondes de de Broglie atomique. Les interactions entre atomes peuvent ainsi détériorer les performances d’un interféromètre atomique. Leur étude est donc importante.

Les interactions entre atomes peuvent détériorer un interféromètre via différents mécanismes. Tout d’abord, dans le cas où, comme dans l’expérience[36], l’interféromètre utilise un nuage atomique dont le profil de densité est non homogène, l’effet dominant des interactions est un effet de champ moyen dû à la dépendance en position de l’énergie de champ moyen. Cet effet a été étudié dans [77] et dans [108]. Dans le cas d’un interféromètre qui utiliserait un jet d’atomes cohérent (“laser à atomes”) de densité constante, l’effet précédent est absent puisque la densité moyenne est constante. Dans ce cas, pour calculer l’effet des

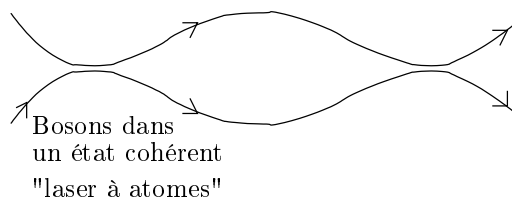


FIG. 3.1 – *Interféromètre à atome guidés. Les interactions entre atomes dans chacun des bras de l'interféromètre peuvent induire des fluctuations de phase dans chacun des bras et donc détériorer l'interféromètre.*

interactions entre atomes, il est nécessaire d'aller au-delà d'une analyse de champ moyen. Nous avons fait une analyse de l'effet des interactions qui va au-delà du champ moyen. Nous nous sommes pour cela restreint au cas où l'on suppose que l'on dispose d'un jet d'atomes cohérent de longueur de cohérence infinie qui passe dans une zone de longueur  $L$  dans laquelle les atomes interagissent. Nous avons calculé la dégradation de la cohérence du faisceau atomique due aux interactions entre atomes. Ces résultats sont publiés dans l'article[13]. Dans la première partie de ce chapitre, nous décrivons brièvement ce calcul. Dans la deuxième partie, nous montrons que ce calcul s'applique aussi au cas d'un interféromètre dans lequel les atomes dans les bras de l'interféromètre.

Dans toute la suite, nous supposons que toutes les énergies en jeu sont très petites devant l'énergie du premier état excité transverse de sorte que l'on puisse se restreindre à un système uni-dimensionnel.

### 3.1 Fluctuations de phases introduites par les interactions dans un laser à atomes

Supposons que l'on réalise un interféromètre atomique de type Mach-Zender, comme schématisé sur la figure 3.1 : un jet atomique incident est séparé en deux sur une première séparatrice, les atomes se propagent ensuite le long des deux bras de l'interféromètre avant d'être recombinés sur la deuxième séparatrice. Le flux d'atomes sur les deux voies de sorties mesure la phase relative accumulée entre les deux trajectoires possibles. La présence d'interactions entre atomes dans chacun des deux bras peut introduire des modifications de la phase relative et brouiller le signal de l'interféromètre. Si l'on suppose que le flux incident d'atomes est parfaitement cohérent et a une densité constante, alors les effets de champs moyen dans chacun des bras ne détériore pas le signal de l'interféromètre. Pour modéliser l'effet des interactions entre atomes, une analyse plus fine est nécessaire et nous nous sommes attaqué à ce problème.

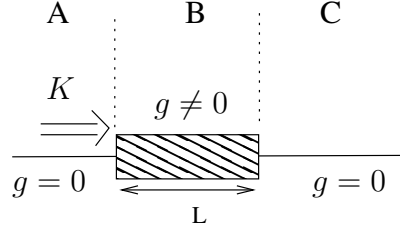


FIG. 3.2 – Situation considérée pour le calcul de l'effet des interactions dans un laser à atomes guidé.

### 3.1.1 Géométrie considérée et opérateur phase

Pour évaluer l'effet des interactions sur un jet d'atomes cohérent, nous avons considéré la situation décrite sur la figure 3.2 dans laquelle un jet d'atome cohérent dont on suppose la longueur de cohérence infinie arrive dans un zone d'extension  $L$  dans laquelle les atomes interagissent avec des interactions ponctuelles de constante de couplage  $g$ . Nous avons calculé les fluctuations de phase induites par les interactions à l'issue du passage dans la zone d'interaction et les résultats ont été publiés dans l'article [13]. Pour ce travail, nous avons supposé que toutes les énergies en jeu étaient beaucoup plus faibles que l'énergie du confinement transverse, de sorte qu'une étude unidimensionnelle est suffisante. Les grandes lignes du calcul et les résultats obtenus sont rappelés ci-dessous.

L'état du jet atomique initial est supposé être un état cohérent correspondant au champs  $\sqrt{n}e^{iKx}$  où  $K$  est relié à la quantité de mouvement  $p$  des atomes par la relation  $\hbar K = p$ . Un changement de représentation, qui consiste à réaliser un déplacement dans l'espace des phases  $(\psi, \psi^+)$ , permet d'écrire l'opérateur champ comme  $\psi = \sqrt{n}e^{iKx} + \delta\psi$ , où le champ complexe  $\sqrt{n}e^{iKx}$  décrit un champ classique et l'opérateur  $\delta\psi$  décrit les fluctuations quantiques autour de ce champ classique. Nous supposons dans la suite que l'effet des interactions entre atomes est suffisamment faible pour n'introduire que de faibles modifications de la phase de sorte que  $\delta\psi$  reste petit. Nous avons montré dans notre article [13], en présentant un protocole de mesure de phase par détection homodyne avec un faisceau de référence, qu'il était possible dans ce cas d'introduire l'opérateur phase

$$\theta(x) = \frac{i}{\sqrt{n}} \left( e^{-iKx} \delta\psi^+(x) - e^{iKx} \delta\psi(x) \right). \quad (3.1)$$

La figure 3.3 donne une interprétation géométrique simple de cet opérateur. La phase du faisceau mesurée en utilisant une zone d'extension  $X$  du faisceau est obtenue en moyennant  $\theta$  sur cette zone.

La valeur moyenne de  $\theta$  est nulle (en effet,  $\langle \delta\psi \rangle = 0$ ) et ses fluctuations sont données par

$$\langle \theta(x)\theta(x') \rangle = \frac{1}{n} \left\{ (-\langle \delta\psi(x')\delta\psi(x) \rangle e^{-iK(x+x')} - c.c.) + (\langle \delta\psi^\dagger(x')\delta\psi(x) \rangle e^{iK(x'-x)} + c.c.) \right\} + \frac{1}{n} \delta(x' - x) \quad (3.2)$$

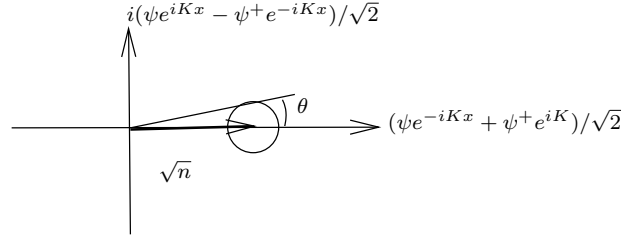


FIG. 3.3 – *Interprétation géométrique de l'opérateur phase donné Eq.3.1. Nous avons représenté ici les fluctuations qu'auraient un état cohérent  $\psi = \sqrt{n}e^{iKx}$ .*

où *c.c.* signifie complexe conjugué. Le terme en  $\delta(x - x')$  donne les fluctuations attendues pour un faisceau dans un état cohérent. Sa contribution aux fluctuations de phase est  $\Delta\theta^2 = 1/(nX)$  où  $X$  est la longueur de la zone d'intégration utilisée. Ces fluctuations correspondent au bruit de grenaille d'un interféromètre. Les autres termes sont responsables d'un excès de fluctuations de phase. Il ne sont non nuls qu'en présence d'interactions entre atomes.

Deux phénomènes liés aux interactions peuvent introduire une dispersion de la phase. Tout d'abord, la dispersion du nombre d'atomes dans l'état quantique peuplé et la non linéarité de l'énergie avec le nombre d'atomes en présence d'interaction est responsable du phénomène de diffusion de phase. D'autre part, les interactions entre atomes peuvent engendrer la production d'atomes à des vitesses différentes de celle du jet incident. Nous allons voir dans la suite que le premier phénomène est négligeable dès que le jet d'atome a une extension spatiale suffisante. L'effet dominant est alors dû à la production d'atomes de différentes vitesses.

### 3.1.2 Phénomène de diffusion de phase

Le phénomène de diffusion de phase[17, 62] apparaît lorsque l'énergie de  $N$  atomes dans un état quantique donné n'est pas linéaire en  $N$ . Pour expliquer cet effet, il est utile de considérer l'espace des phases  $((a + a^+)/\sqrt{2}, i(a - a^+)/\sqrt{2})$ , où  $a$  est l'opérateur qui annihile un atome dans l'état quantique considéré, comme sur la figure 3.4. La représentation de Wigner du système est représentée sur la figure par la zone hachurée. L'effet d'une variation linéaire de l'énergie avec le nombre d'atome ( $E = \mu N$ ) est celle d'un oscillateur harmonique : la distribution dans l'espace des phases tourne à la fréquence de rotation  $\mu/\hbar$ . Dans le cas d'un système non linéaire, comme  $\mu$  dépend de  $n$ , la fréquence de rotation dépend de  $n$  et la distribution dans l'espace des phase est déformée. Un calcul classique de l'évolution dans l'espace des phases montre que, au bout d'un temps  $T$ , la dispersion en phase a augmenté d'une quantité

$$\Delta\theta = \sqrt{\langle\theta^2\rangle} \simeq T\Delta N(\partial\mu/\partial N)/\hbar \quad (3.3)$$

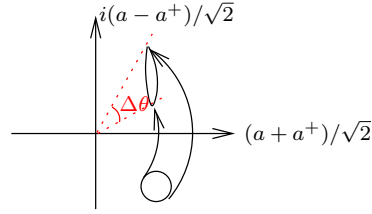


FIG. 3.4 – Phénomène de diffusion de phase. Sous l’effet d’une énergie non linéaire en  $a^+a$  (population du mode considéré), la distribution dans l’espace des phases est déformée et la dispersion en phase  $\Delta\theta$  augmente.

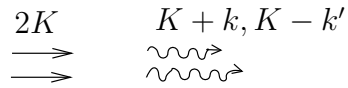


FIG. 3.5 – Processus responsables de la génération d’atomes de quantités de mouvement différentes de la quantité de mouvement  $\hbar K$  des atomes incidents.

où  $\Delta N$  est la dispersion en  $N$  du système<sup>1</sup>.

Pour appliquer ces résultats au cas d’un laser à atome qui passe dans une zone de taille  $L$  dans laquelle les interactions entre atomes sont importantes, nous supposons que l’état des atomes est décrit par une fonction d’onde qui s’étale sur une distance  $\mathcal{L}$  beaucoup plus importante que  $L$ . Le cas qui nous intéresse correspond à  $\mathcal{L} \rightarrow \infty$ . Le paramètre  $\partial\mu/\partial N$  est dans ce cas  $gL/(4\mathcal{L}^2)$ , où  $g$  est la constante de couplage entre atomes. Nous supposons que le faisceau incident est cohérent. La dispersion en  $N$  est donc  $\Delta N = \sqrt{n\mathcal{L}}$ . Le temps d’interaction est le temps de passage  $T = \mathcal{L}/(\hbar K/m)$ . Finalement, on trouve une diffusion de la phase qui varie en  $1/\mathcal{L}$ . Ce phénomène devient donc négligeable dans la limite où  $\mathcal{L}$  est très grand.

### 3.1.3 Effet de la production d’atomes de vitesses différentes

Les interactions entre atomes correspondent à des collisions à deux corps. Les processus qui peuvent avoir lieu correspondent au transfert de deux atomes du jet incident de quantité de mouvement  $K$  vers deux états de quantité de mouvement  $K + k$  et  $K - k'$ , comme schématisé sur le graphe 3.5. La conservation de la quantité de mouvement n’est pas imposée strictement car l’interaction n’a lieu que dans une zone finie de l’espace. Cependant, seules des petites modifications de la quantité de mouvement sont possibles, de l’ordre de  $1/(\hbar L)$ .

Pour calculer les fluctuations de phases induites par les collisions entre atomes, une approche perturbative en  $g$  est a priori possible. Cependant, une telle approche n’est pas satisfaisante car il est connu que l’effet des interactions entre atomes dans un gaz ultrafroid n’est pas perturbatif. En particulier, la relation de dispersion des excitations, qui à basse

<sup>1</sup>Cette formule, valable aux temps courts pour  $\Delta\theta \ll 2\pi$ , devient fautive aux temps longs. En particulier, elle ne décrit pas le phénomène de récurrence attendu[17]

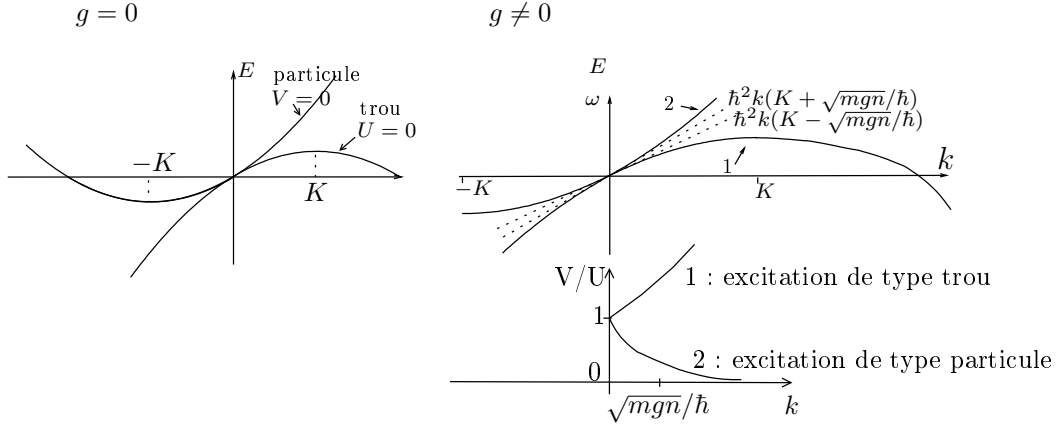


FIG. 3.6 – Modes de Bogoliubov dans les zones sans et avec interaction. Le spectre est divisé en deux branches : les solutions de type particule avec  $U > V$  et les solutions de type trou avec  $U < V$ . Les courbes tracées ne sont pas exactes.

énergie est donné par le spectre des phonons  $\omega = k\sqrt{gn/m}$ , n'est pas perturbatif en  $g$ . Nous avons donc utilisé une approche différente, qui est l'approche de Bogoliubov dans laquelle le calcul est perturbatif en  $\delta\psi$  et non en  $g$ . Nous donnons ci-dessous les grandes lignes de ce calcul.

Nous cherchons l'état stationnaire de plus basse énergie qui correspond à la géométrie de la figure 3.2. Dans l'approximation de champ moyen,  $\psi = \varphi_{MF}$  où  $\varphi_{MF}$  vérifie l'équation de Gross-Pitaevski. Dans notre cas, la solution de champ moyen s'écrit, dans le domaine C en aval de la zone d'interaction (voir figure 3.2),  $\sqrt{n_C}e^{iK_i x}$ , où  $K_i$  est la quantité de mouvement des atomes incidents. A priori, dans le domaine A situé en amont de la zone d'interaction, en plus du champ incident  $\sqrt{n}e^{iK_i x}$ , coexiste un champ réfléchi en  $e^{-iK_i x}$ . Cependant, si  $gn \ll \hbar^2 K^2/m$ , cette réflexion est petite et nous la négligeons dans la suite. Dans la zone d'interaction, toujours en négligeant les réflexions, le champ moyen s'écrit  $\varphi_{MF} = \sqrt{n}e^{iKx}$  où  $K = \sqrt{\hbar^2 K_i^2/(2m) - gn}$ . Le potentiel chimique de cette solution de champ moyen est  $\mu = gn + \hbar^2 K^2/(2m)$ . Cette approximation ne permet pas de rendre compte des fluctuations de phase produites par les interactions et il est nécessaire d'aller plus loin en écrivant l'opérateur champs comme  $\psi = \varphi_{MF} + \delta\psi$ . Pour cela, nous utilisons la théorie de Bogoliubov dans laquelle les termes d'ordre supérieurs à 2 en  $\delta\psi$  du Hamiltonien sont négligés. Le hamiltonien peut alors s'écrire comme un hamiltonien d'un ensemble de Bosons indépendants,  $H = \sum_k \omega_k \alpha_k^\dagger \alpha_k$ . L'opérateur champ s'écrit

$$\delta\psi = \sum_k \left( u_k(x) \alpha_k - v_k^*(x) \alpha_k^\dagger \right), \quad (3.4)$$

où les fonction  $u_k$  et  $v_k$ , normalisées à  $f(|u_k|^2 - |v_k|^2) = 1$ , vérifient les équations de Bogoliubov données dans l'article[13]. Si le terme  $v_k$  est non nul, alors l'opérateur  $\delta\psi$  appliqué au vide de Bogoliubov est non nul. Cela signifie que, même dans l'état fondamental, des particules peuplent des modes différents de  $\varphi_{MF}$ . C'est le phénomène de réplétion quantique.

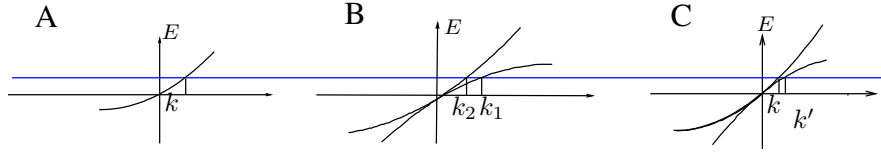


FIG. 3.7 – Mode de Bogoliubov dont les fluctuations de point zéro vont générer des fluctuations de phase dans la zone C.

C'est cette déletion quantique qui est responsable des fluctuations de phase dans la zone C. Ainsi, seuls les modes de Bogoliubov pour lesquels la fonction  $v$  est non nulle dans la zone C contribuent aux fluctuations de phase dans la zone C dans le vide de Bogoliubov. La relation entre les fonctions  $u_k$  et  $v_k$  des modes de Bogoliubov et les fluctuations de phase du jet atomique, obtenue en injectant 3.4 dans 3.2, est donnée dans l'article[13]. Une fois cette relation établie, le calcul des fluctuations de phase du jet atomique dans la zone C se ramène au problème de la détermination des modes de Bogoliubov. Nous montrons ici comment ces modes sont déterminés.

Dans chacun des domaines A,B et C, les solutions des équations de Bogoliubov peuvent s'écrire  $(u, v) = (Ue^{i(k+K)x}, Ve^{i(k-K)x})$ . La figure 3.6 donne le spectre de Bogoliubov dans le cas où  $g = 0$  (zone A et C) et dans le cas où  $g \neq 0$  (zone B). Le spectre est constitué de deux branches, l'une plutôt de type particule, l'autre de type trou<sup>2</sup>. Connaissant les solutions des équations de Bogoliubov dans chacun des domaines A, B et C, les conditions de continuité permettent de calculer les solutions du problème général. Comme détaillé dans [13], le seul mode de Bogoliubov qui va contribuer aux fluctuations de phase dans la zone C est celui qui correspond à une particule incidente de quantité de mouvement  $\hbar(K + k)$ , différente de  $\hbar K$ . La figure 3.7 montre que cet état se développe sur des états de type trou et particule dans la zone C. Le calcul des fonctions  $u$  et  $v$  pour un tel mode est détaillé dans l'article.

Une fois connu les excitations de Bogoliubov, le calcul des fluctuations de phase peut être réalisé. Deux contributions apparaissent. La première contribution donne des fluctuations de phase d'amplitude

$$\langle \theta(x)^2 \rangle_1 = \frac{L\lambda_{dB}}{2\pi n\xi^3}, \quad (3.5)$$

où  $\lambda_{dB} = 2\pi/K$  est la longueur d'onde de de Brooglie du faisceau incident et  $\xi = \hbar/\sqrt{mgn}$  est la longueur de relaxation dans le milieu B. La longueur de corrélation de ces fluctuations

<sup>2</sup>Nous nous restreignons ici aux solutions propagatives pour lesquelles  $k$  est réel. Ceci est justifié tant que des énergies inférieures à  $\hbar K^2/(2m)$  sont considérées. En effet, dans ce domaine d'énergie, 4 solutions propagatives des équations de Bogoliubov existent, comme cela est visible sur la figure 3.6. Or les équations de Bogoliubov étant des équations linéaires différentielles du second degré portant sur un vecteur de dimension 2, elles admettent seulement quatre solutions linéairement indépendantes. Les quatre solutions propagatives forment donc une base des solutions et il n'existe pas, dans ce domaine d'énergie, de solutions sous forme d'onde évanescence.



de phase est

$$\Delta x_1 = \frac{L\lambda_{dB}}{2\pi\xi}. \quad (3.6)$$

La deuxième contribution des fluctuations de phase a la même contribution après intégration sur des distances longues, *i.e.* son amplitude  $\langle\theta(x)^2\rangle$  et sa longueur de corrélation  $\Delta x_2$  vérifient  $\Delta x_2\langle\theta(x)^2\rangle_2 = \Delta x_1\langle\theta(x)^2\rangle_1$ . Cependant, la longueur de corrélation  $\Delta x_2$  augmente au fur et à mesure que l'on s'éloigne de la zone d'interaction. A une distance  $X$  après la zone d'interaction, la longueur de corrélation  $\Delta x_2$  s'écrit

$$\Delta x_2 = \frac{X\xi}{L}. \quad (3.7)$$

Notons que ces résultats ne sont pas perturbatifs en  $g$ . Ces résultats n'auraient donc pas pu être obtenus par une approche perturbative, ce qui justifie l'utilisation du formalisme de Bogoliubov. Le formalisme de Bogoliubov permettent de faire des prédictions quantitatives mais il a le désavantage de ne pas rendre la physique transparente. En particulier, la notion de production d'atomes par paire via des collisions n'est pas explicite dans l'approche de Bogoliubov. Cependant, on retrouve des traces de la physique de la production des atomes par paires dans le formalisme de Bogoliubov. En particulier, comme étudié dans la littérature[38], le vide de Bogoliubov est un état comprimé du champ atomique dans lequel seuls les états ayant un nombre pair d'atomes dans les différents modes du champ atomiques sont peuplés.

Avant continuer, nous voudrions conclure cette section en revenant sur l'approximation faite sur la solution de champ moyen dans le calcul présenté ci-dessus. Nous avons supposé que la solution de champ moyen s'écrivait comme une onde plane de densité constante dans chacune des zones. Ceci est bien sur une approximation puisque les conditions aux limites sur la fonction d'onde et sa dérivée ne sont pas vérifiées avec un tel ansatz. Si cette approximation est sans doute valable pour notre calcul car on a supposé que l'énergie cinétique incidente est grande devant l'énergie d'interaction, cette approximation n'est pas valable dans le cas où l'énergie cinétique incidente est de l'ordre de l'énergie d'interaction. La détermination d'une solution de champ moyen est alors un problème difficile et intéressant. Une situation similaire a été étudiée dans les articles [61, 78]. Dans [78], les auteurs étudie la transmission d'un jet atomique guidé en présence d'une constriction du guide. Ils montrent que, pour certains flux incidents, ils n'existe pas de solution stationnaire et qu'il pouvait aussi exister une solution stationnaire de forme solitonique présentant une transmission anormalement élevée.

## 3.2 Application au cas d'un interféromètre

Nous montrons ici que les calculs effectués dans la section précédente s'appliquent au cas d'un interféromètre à atomes dans lequel les atomes interagissent dans chacun des bras. Nous nous intéressons donc à la situation générique présentée Fig.3.8. Les atomes arrivent dans l'un des ports d'entrée de l'interféromètre et, à l'issue de la première séparatrice, les

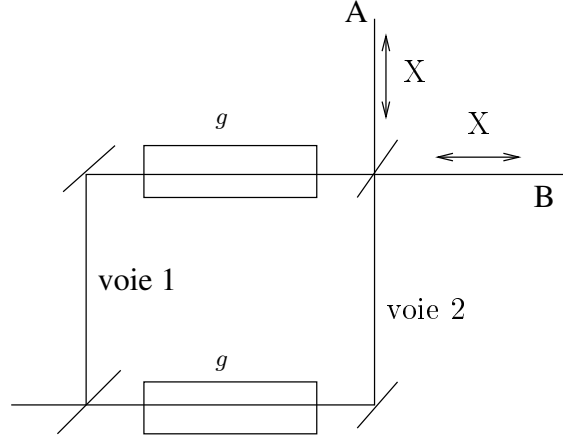


FIG. 3.8 – Interféromètre dans lequel des atomes interagissent entre eux dans chacun des bras. Les interactions sont responsables d'une dégradation de l'interféromètre.

atomes sont transférés dans la superposition symétrique des modes 1 et 2 correspondant à chacun des bras<sup>3</sup>. A l'issue de la propagation dans chacun des bras, les modes de chacun des deux bras acquièrent une différence de phase  $\phi$ , qui est la quantité que l'on cherche à mesurer et que l'on suppose petite. La deuxième séparatrice est choisie de façon à ce que, pour  $\phi = 0$ , le flux dans les deux modes de sortie soit identiques. La phase relative mesurée est alors

$$\phi_X \simeq \sin(\phi_X) = \frac{N_A - N_B}{N_A + N_B}, \quad (3.8)$$

où  $N_A$  et  $N_B$  sont les nombres d'atomes détectés sur la voie de sortie A et B respectivement si l'on suppose que l'on intègre sur une distance  $X$ , comme schématisé sur la figure 3.8. La conservation du nombre d'atomes montre que le dénominateur est simplement relié au nombre d'atomes incidents sur l'interféromètre. Ses fluctuations sont celles du faisceau incident, qui sont données par le bruit de grenaille atomique pour un faisceau cohérent. Nous ne nous intéresseront pas à ces fluctuations dans la suite et remplacerons donc le dénominateur par la quantité  $nX$  où  $n$  est la densité linéaire incidente. En terme d'opérateur champs, l'équation 3.8 s'écrit

$$\phi_X = \frac{1}{nX} \int_0^X dx (\psi_A(x)^\dagger \psi_A(x) - \psi_B(x)^\dagger \psi_B(x)), \quad (3.9)$$

où  $\psi_A$  et  $\psi_B$  sont les opérateurs champs de la voie A et B respectivement. En utilisant les relations  $\psi_A = (\psi_1 + i\psi_2)/\sqrt{2}$  et  $\psi_B = (\psi_2 - i\psi_1)/\sqrt{2}$ , qui utilise les opérateurs champs  $\psi_1$  et  $\psi_2$  décrivant les champs dans les modes 1 et 2 de l'interféromètre (voir figure), on a

$$\phi_X = \frac{i}{nX} \int_0^X dx (\psi_1(x)^\dagger \psi_2(x) - \psi_2(x)^\dagger \psi_1(x)) / (nX), \quad (3.10)$$

<sup>3</sup>Pour une séparation en deux modes avec des poids égaux, on peut toujours supposer que l'on réalise l'état symétrique, quitte à modifier la phase des états  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ .

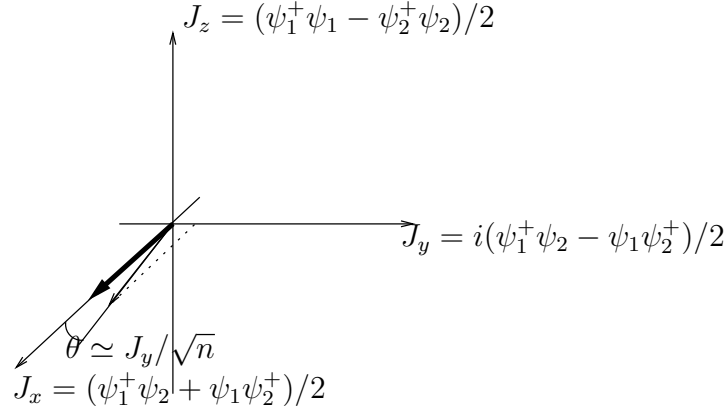


FIG. 3.9 – Interprétation géométrique des formules 3.10 et 3.8. Les opérateurs  $j_x = 1/2(\psi_1^\dagger \psi_2 + \psi_2^\dagger \psi_1)$ ,  $j_y = i/2(\psi_1^\dagger \psi_2 - \psi_1 \psi_2^\dagger)$  et  $j_z = 1/2(\psi_1^\dagger \psi_1 - \psi_2^\dagger \psi_2)$  vérifient les relations de commutations des opérateurs de moment cinétique. L'état atomique considéré est proche de l'état cohérent qui correspond, dans l'analogie des moment cinétique, à un spin de norme  $\sqrt{n}$  pointant selon  $x$ . Un déphasage  $\theta$  entre les états 1 et 2 se traduira par une rotation du spin dans le plan  $(xy)$  d'un angle  $\theta \simeq j_y/\sqrt{n}$ . On retrouve ainsi l'équation 3.10.

On peut donner une interprétation géométrique simple à cette formule comme montrée Fig.3.9.

Comme nous nous restreignons à des déphasages petits, nous pouvons faire une approximation de type Bogoliubov et approximer l'opérateur champs dans chaque voie  $i$  par

$$\psi_i(x) = \sqrt{n/2} e^{iKx} + \delta\psi_i(x), \quad (3.11)$$

où  $\sqrt{n/2} e^{iKx}$  est le champ classique correspondant à la solution de champ moyen et  $\delta\psi$  est l'opérateur qui décrit les déviations par rapport au champ moyen. La phase relative mesurée en intégrant sur une zone  $X$  s'écrit alors, à l'ordre le plus bas en  $\delta\psi$ ,

$$\phi_X = \frac{i}{X\sqrt{2n}} \int_0^X dx e^{iKx} ((\delta\psi_1 - \delta\psi_2)^+ - e^{-iKx} (\delta\psi_1 - \delta\psi_2)). \quad (3.12)$$

et l'on peut donc identifier un opérateur phase local par

$$\phi(x) = \frac{i}{\sqrt{2n}} (e^{iKx} (\delta\psi_1 - \delta\psi_2)^+ - e^{-iKx} (\delta\psi_1 - \delta\psi_2)). \quad (3.13)$$

Les fluctuations de phase sont donc données par les fluctuations de  $\delta\psi_1 - \delta\psi_2$ . Pour les calculer, on peut utiliser une approche de Bogoliubov comme celle développée dans le paragraphe précédent. Si l'on suppose que le paramètre d'interaction  $g$  est le même dans les deux voies de l'interféromètre, alors les modes de Bogoliubov se divisent en deux branches : les modes symétriques et les modes antisymétriques. Les modes symétriques et antisymétriques obéissent à la même équation de Bogoliubov et, pour chaque branche, les résultats obtenus dans le paragraphe précédent sont valables. Le champ  $\delta\psi_1 - \delta\psi_2$  se développe uniquement sur les modes antisymétriques. Le calcul des fluctuations de  $\delta\psi_1 - \delta\psi_2$  est donc identique au calcul effectué dans la section précédente.

### 3.3 Conclusion

Les résultats obtenus dans l'article [13] décrivent les fluctuations de phase générées par les interactions entre atomes dans un jet atomique initialement cohérent, dans une situation où l'effet des interactions n'est pas un effet de champ moyen. Ces fluctuations de phase sont susceptibles de détériorer un interféromètre atomique.

Nous avons supposé dans cet article que le faisceau atomique incident avait une longueur de cohérence infinie. Dans la réalité, on s'attend à ce qu'un faisceau atomique, même issu d'un condensat de Bose, ait une longueur de cohérence finie. Une limite fondamentale sera par exemple le phénomène de diffusion de phase dans le condensat dont est issu le jet atomique. Les résultats présentés ici ne resteront valables que si les échelles considérées sont petites devant la longueur de corrélation du jet atomique incident.

Malheureusement, aucune expérience à ce jour n'est en mesure d'observer ces phénomènes. Certes, des effets importants des interactions ont été mis en évidence dans les expériences d'interférométrie atomique [101], mais ces effets sont dus à l'inhomogénéité du champ moyen. Pour que l'effet auquel nous nous sommes intéressé ne soit pas dominé par un effet de champ moyen, un nuage très allongé dont la densité est très plate doit être utilisé. La réalisation récente de laser à atome guidé, comme celui produit dans [35], permettra peut être de mesurer les fluctuations de phase que nous avons calculées.

Une situation similaire à celle que nous avons considérée est obtenue dans le domaine temporel lorsqu'un nuage très allongé est coupé en deux condensats allongés comme dans les expériences récentes décrites dans [40] et [47]. Juste après la séparation, la phase relative entre les deux condensats est nulle tout le long des nuages. Ensuite, à cause des interactions entre atomes, des fluctuations de la phase relative se développent. En développant l'état initial sur les modes de Bogoliubov, Demler et al. [15], ont calculé l'évolution de la phase relative entre les deux condensats. Dans l'expérience décrite dans [40], le développement des fluctuations de la phase relative à l'issue de la séparation en deux est en fait dominée par le couplage des modes antisymétrique aux modes symétriques qui sont initialement peuplés thermiquement. La physique est dans ce cas assez différente de celle que nous avons étudiée dans laquelle les fluctuations quantiques dominent.



# Chapitre 4

## Doubles puits unidimensionnels couplés : équilibre thermodynamique et instabilités de modulations

Un condensat bi-modal, par exemple dans un double puits de potentiel séparé par une barrière de potentiel, est un système physique encore largement inexploré. Les phénomènes attendus, comme l'existence d'oscillations Josephson, sont caractéristiques de la présence de cohérence en phase entre les deux parties du système. C'est pourquoi l'observation d'oscillations Josephson dans l'Helium superfluide[79] et dans les jonctions supraconductrices[64] ont été des étapes importantes de l'étude de ces systèmes. La réalisation d'oscillations Josephson a été observée pour la première fois dans des gaz dilués en 2004 dans des pièges optiques[1]. Dans notre équipe, nous avons commencé en 2002 un programme pour réaliser et étudier des oscillations Josephson. Le dispositif expérimental que nous avons mis au point, détaillé dans [22], vise à utiliser deux condensats très allongés couplés par effet tunnel sur toute leur longueur. Comme nous le détaillons dans [22], cette géométrie a l'avantage de permettre d'atteindre le régime d'oscillation de Rabi, dans lequel des oscillations de nombre d'atomes d'amplitude égale au nombre d'atomes total peuvent être générées, tout en disposant d'un nombre d'atomes important. Si cette expérience n'a malheureusement pas été concluante, nous avons effectué des études théoriques propres à la géométrie allongée qui permettent d'approfondir la compréhension du comportement de ces systèmes.

Contrairement aux systèmes tri-dimensionnels, la densité d'état dans une géométrie unidimensionnelle est très importante pour les excitations de faible énergie. Ceci implique un rôle important de ces excitations dans les systèmes unidimensionnels. En particulier, le théorème de Mermin-Wagner-Hohenberg proscrit l'existence d'un condensat dans un gaz de Bosons unidimensionnel à la limite thermodynamique. En effet les fluctuations thermiques ou quantiques (de point zéro) associées aux phonons de faible énergie introduisent des fluctuations de phase : la phase n'est pas homogène sur la taille du système et elle fluctue temporellement. On peut alors se poser la question de savoir si, dans le cas de deux condensats allongés couplés par effet tunnel, ces fluctuations de phase empêcheront la réalisation d'oscillations Josephson. Nous nous sommes intéressés à cette problématique.

Plus humblement, nous avons montré quelles sont les conditions sur la température et le couplage tunnel entre les deux puits pour que la phase relative entre les deux condensats soit bien définie à l'équilibre thermodynamique. Ces conditions sont bien sur nécessaires à l'observation d'oscillations Josephson entre les deux puits. Ce résultat a été publié dans l'article [103].

Si l'étude précédente donne des conditions nécessaires à l'observation d'oscillations Josephson, une analyse plus approfondie est nécessaire pour étudier le rôle des excitations longitudinales en présence d'oscillations Josephson. En prenant en compte le couplage non linéaire entre les excitations, nous avons montré la présence d'instabilité de modulation en présence d'oscillations Josephson entre les deux puits et nous avons caractérisé cette instabilité. Ce travail est publié dans l'article [8].

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la première section, nous présentons rapidement quelques aspects des condensats bi-modaux. La deuxième section présente l'étude de l'équilibre thermodynamique de deux gaz unidimensionnels couplés. Nous donnons ici une interprétation cinématique simple des résultats de [103]. La troisième section est consacrée à l'étude des instabilités de modulation en présence d'oscillations Josephson entre les deux puits. Nous nous efforçons de replacer ce travail dans le cadre plus général de l'étude des systèmes non linéaires. Nous concluons finalement ce chapitre.

## 4.1 Condensats bi-modaux couplés

La dynamique d'un condensat de Bose Einstein placé dans un double puits de potentiel est bien décrite par un modèle à deux modes tant que la dynamique est très lente devant les fréquences d'oscillations dans chacun des deux puits. Ce modèle, bien que très simplifié, prédit beaucoup de phénomènes observés ou actuellement en cours d'investigation expérimentale. Nous donnons ci-dessous une analyse simple de ce modèle qui permet de rendre compte de différents phénomènes physiques. Nous tâchons de rendre compte de l'état de l'art dans ce domaine tout en soulevant quelques aspects encore non explorés qui nous semblent intéressants.

### 4.1.1 Dérivation du hamiltonien

Dans la suite, on s'intéressera au modèle à deux modes, notés  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ , dans lequel le hamiltonien décrivant la dynamique s'écrit, en seconde quantification,

$$H = \frac{\kappa}{2}(a^+a^+aa + b^+b^+bb) - J(a^+b + b^+a). \quad (4.1)$$

Le premier terme est dû aux interactions répulsives entre atomes et le deuxième terme est le couplage tunnel entre les deux modes. Ici, on a supposé que l'énergie des deux états était identiques. En utilisant l'opérateur  $n = (a^+a - b^+b)/2$ ,  $H$  s'écrit, à des termes constants près qui dépendent du nombre total d'atomes  $N$ ,

$$H = \kappa n^2 - J(a^+b + b^+a). \quad (4.2)$$

Pour simplifier, on supposera ici que  $N/2$  est entier. L'opérateur  $n$  a pour valeur propre les entiers de  $-N/2$  à  $N/2$ . Comme l'espace a une dimension finie, il n'existe pas d'opérateur conjugué à  $n$ . Cependant, si on suppose que la différence de nombre d'atomes entre les deux puits ne s'approche jamais des valeurs extrêmes  $\pm N/2$ , on peut supposer que  $n$  prend toutes les valeurs entières de  $-\infty$  à  $+\infty$ . Il existe alors un opérateur  $\theta$  conjugué de  $n$ , c'est-à-dire tel que  $[\theta, n] = i$ . On a alors une correspondance avec le système décrivant un pendule qui peut tourner autour d'un axe fixe : l'opérateur  $n$  correspond, au facteur  $\hbar$  près, au moment cinétique et l'opérateur conjugué  $\theta$  est l'angle donnant la position du pendule. L'opérateur  $e^{\pm i\theta}$  correspond à une translation dans l'espace  $n$  de  $\pm 1$ . En écrivant  $\sqrt{(N/2 + n + 1)(N/2 - n)} \simeq N/2\sqrt{1 - (2n/N)^2}$ , on trouve

$$H = \kappa n^2 - JN\sqrt{1 - (2n/N)^2} \cos(\theta). \quad (4.3)$$

Cet hamiltonien est le hamiltonien d'un pendule pesant non rigide, dont l'élongation dépend du moment cinétique. Nous avons donné ici, moyennant quelques approximations, une dérivation quantique de cet hamiltonien. Ce hamiltonien peut aussi être obtenu par une analyse de type champ moyen qui utilise l'équation de Gross-Pitaevskii[91, 111].

### 4.1.2 Dynamique

Les équations du mouvement dérivées du hamiltonien 4.3 sont non linéaires et la dynamique du système dépend fortement des paramètres  $\kappa$ ,  $J$  et  $N$ . Dans la suite de cette section nous allons étudier la dynamique prédite par ce hamiltonien.

Pour des nombres d'atomes importants, on s'attend à ce que la dynamique soit bien décrite par la dynamique classique attendue pour les variables  $n$  et  $\theta$ . En effet, on s'attend à ce que l'effet des fluctuations quantiques des quantités  $n$  et  $\theta$  soit négligeable. Nous reviendront sur cette approximation dans la section suivante. Si on utilise la variable réduite  $y = 2n/N$ , les équations classiques du mouvement s'écrivent  $\partial y/\partial t = \partial \tilde{H}/\partial \theta$  et  $\partial \theta/\partial t = -\partial \tilde{H}/\partial y$ , le hamiltonien  $\tilde{H}$  s'écrivant

$$\tilde{H} = E_i y^2 - \frac{J}{2} \sqrt{1 - y^2} \cos(\theta) \quad (4.4)$$

où  $E_i = \kappa N/2$ . Ainsi, la dynamique classique est gouvernée par les deux paramètres  $E_i$  et  $J$ . Elle est étudiée en détail dans la littérature[91, 84]. Nous donnons ici un résumé de la dynamique attendue. Trois régimes existent, séparés par des bifurcations :

- $J > E_i/8$  : **Régime Rabi**. Dans ce régime, les trajectoires dans l'espace des phases  $(\theta, y)$  sont similaires à celles décrivant des oscillations de Rabi. Deux points fixes existent en  $y = 0$  et  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ . Des oscillations d'amplitude un existent.
- $E_i/16 < J < E_i/8$  : **Régime intermédiaire**. Dans ce régime, le point fixe  $(y = 0, \theta = \pi)$  se dédouble en deux points fixes sur l'axe  $\theta = \pi$ . Les oscillations autour de ces nouveaux points fixes sont appelées les oscillation de phase  $\pi$  dans la littérature[84].



- $E_i/16 > J$  : **Régime Josephson.** Les trajectoires correspondant aux oscillations d'amplitude un disparaissent et de nouvelles trajectoires apparaissent, qui correspondent à des oscillations de  $y$  autour d'une valeur non nulle. La phase  $\theta$  sur ces trajectoires augmente à l'infini (*i.e.* va de  $-\pi$  à  $\pi$  modulo  $2\pi$ ). Ces trajectoires sont appelées les trajectoires macroscopiques auto-piégées[91] (“macroscopic quantum self trapped states” en anglais). Dans ces états, le désaccord en énergie correspondant à la transition dans laquelle un atome passe d'un puits à l'autre inhibe les oscillations. Loin dans le régime Josephson, c'est-à-dire lorsque  $E_i/16 \gg J$ , la dynamique du système, restreint aux trajectoires où  $y \ll 1$ , est approximativement gouvernée par le hamiltonien Josephson  $\tilde{H}_J = E_i y^2 - \frac{J}{2} \cos(\theta)$ , bien connu en matière condensées. En revenant aux variables  $\theta$  et  $n$ , cet hamiltonien s'écrit

$$H_J = \kappa n^2 - \frac{JN}{2} \cos(\theta), \quad (4.5)$$

L'amplitude maximum des oscillations autour du point fixe ( $y = 0, \theta = 0$ ) est  $Y = \sqrt{J/(2E_i)}$ . Elle est petite devant un : les oscillations ont une amplitude en nombre d'atomes petite devant le nombre d'atome total car le transfert d'atomes entre les deux puits devient non résonnant à cause des interactions entre atomes.

Dans les expériences réalisées jusqu'à présent, les interactions entre atomes sont suffisamment importantes pour que le système soit dans le régime Josephson. Les oscillations Josephson autour du point fixe ( $\theta = 0, y = 0$ ) et les trajectoires macroscopiques auto-piégées ont été observées[1]. Le phénomène d'auto-piégeage a aussi été observé dans un réseau de puits couplés les uns aux autres par effet tunnel[3]. La physique est alors similaire à celle qui gouverne les trajectoires macroscopiques auto-piégées dans un double puits.

Nous n'avons ici considéré que le cas où les deux modes sont dégénérés. Le cas où les deux états ont une différence d'énergie non nulle est traité dans [84].

Nous n'avons pas traité ici le cas où un paramètre dépend du temps. Une dynamique très riche est attendue dans ce cas : des résonances de Shapiro sont attendues[19] (des trajectoires auto-piégées peuvent devenir des trajectoires avec des oscillations importantes), une dynamique chaotique est possible[66]. Un phénomène de renormalisation du couplage entre les deux modes apparaît à grande fréquence de modulation[19], qui peut être interprété comme une interférence entre des processus invoquant différents quanta du champ oscillant. Un tel phénomène a été observé dans un réseau de puits[90].

La dynamique de condensats couplés a déjà été explorée dans les systèmes de matière condensés, aussi bien avec de l'Helium superfluide[79] qu'avec des jonctions supraconductrices[64]. Cependant, le grand degré de contrôle des paramètres des expériences d'atomes froids peuvent permettre d'explorer des aspects de cette dynamique non accessible avec les systèmes de matière condensée. Par exemple, la bifurcation entre les différents régimes de la dynamique est a priori accessible dans des expériences utilisant des atomes froids. Ces bifurcations n'ont pas été observées dans les supra-conducteurs ou l'Helium superfluide. En effet, dans ces systèmes le “terme de charge”  $E_i$  est toujours suffisamment important pour que le hamiltonien soit bien décrit par le Hamiltonien de Josephson (4.5).

### 4.1.3 Fluctuations

A petit nombre d'atomes, on s'attend à ce que les fluctuations quantiques des variables conjuguées  $n$  et  $\theta$  et la nature discrète de  $n$  aient un effet important. On s'attend à ce que les fluctuations de  $n$  modifient la dynamique, par exemple en introduisant un amortissement des oscillations non linéaires[92]. Plus simplement, les fluctuations de  $n$  dans l'état fondamental du système sont actuellement en cours d'étude.

Les fluctuations de  $n$  dans l'état fondamental ont été calculées, dans le cadre du modèle à deux modes décrit ci-dessus, dans [46]. Dans le cas où  $J \gg \kappa N$ , l'état fondamental du système est proche de l'état fondamental du système sans interactions dans lequel tous les atomes sont dans la superposition symétrique des états  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$ . Les fluctuations de  $n$  sont alors données par le bruit de grenaille (ou bruit de projection quantique)  $\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle$ . Les interactions répulsives entre atomes rendent coûteuses en énergie les fluctuations de nombre d'atomes et les fluctuations de  $n$  diminuent lorsque le paramètre  $\kappa$  augmente. Dans le régime Josephson, on peut utiliser le hamiltonien simplifié Eq.(4.5) pour calculer les fluctuations de  $n$  dans l'état fondamental. En développant  $\cos(\theta)$ , on se ramène au cas d'un oscillateur harmonique et on trouve alors des fluctuations  $\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \sqrt{JN/\kappa}/4$ . Ces fluctuations sont bien inférieures au bruit de grenaille dans le régime considérées. L'état fondamental du système est donc un état comprimé. Comme expliqué au chapitre 1, un tel état peut permettre d'améliorer la sensibilité d'un interféromètre atomique. Ceci motive les recherches actuelles visant à produire un tel état à l'issue d'une séparation en deux d'un condensat[48].

Dans la limite où  $JN \ll \kappa$ , les fluctuations de nombre d'atomes deviennent très petite devant un : on est dans le régime de Fock. La variable conjuguée de  $n$ ,  $\theta$ , est complètement non définie dans ce régime. Ce régime de Fock est analogue au régime d'isolant de MOTT dans un réseau[32], observé expérimentalement pour un nombre d'atomes par puits de un à trois. La réalisation d'un état de Fock à grand nombre d'atomes est difficile car cela nécessite a priori un temps long.

Notons pour finir que les fluctuations quantiques des condensats bimodaux peuvent être utilisées pour réaliser des états de type chat de Schrödinger. Ces états sont intéressants non seulement car ils permettent de sonder la frontière entre le mode quantique dans lequel les superpositions cohérentes existent et le monde classique mais aussi pour leur applications en spectroscopie [7]. La proposition la plus simple pour réaliser un état de type chat de Schrödinger dans un double puits consiste à utiliser les fluctuations de  $n$  à l'issue d'une séparation rapide en deux d'un condensat, en combinaison avec les interactions répulsives entre atomes, de façon similaire à la proposition décrite dans [94]. Cette méthode utilise le fait qu'un hamiltonien proportionnel à  $n^2$  agissant sur l'état initial cohérent où tous les atomes sont dans la superposition symétrique de  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  permet de réaliser un état de type chat de Schrödinger. Cependant le temps nécessaire pour obtenir un état chat de Schrödinger est typiquement très long ce qui rend en pratique cette méthode inopérante. D'autres méthodes plus rapides ont été proposées dans lesquelles un point fixe instable de l'espace des phases est utilisé [69, 66].

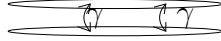


FIG. 4.1 – Géométrie allongée étudiée : deux quasi-condensats unidimensionnels sont couplés sur toute leur longueur avec le couplage  $\gamma$ .

## 4.2 Cas d’une géométrie allongée

Dans la section précédente, nous avons vu que, en présence de fortes interactions répulsives entre atomes (*i.e.*  $J \ll \kappa N$ ), le système est dans le régime Josephson dans lequel les oscillations de nombre d’atomes ont une amplitude réduite. Or, dans la plupart des situations expérimentales, le paramètre  $\kappa N$ , qui est de l’ordre du potentiel chimique des atomes, est plus important que la fréquence d’oscillation dans chacun des puits (régime Thomas Fermi). La condition du modèle à deux modes qui impose  $J \ll \hbar\omega$  implique alors que  $J \ll \kappa N$  : le système est donc dans le régime Josephson et il n’est pas possible de réaliser des oscillations de nombre d’atomes de grande amplitude. Or, il peut être intéressant de pouvoir réaliser des oscillations d’amplitude un, par exemple pour utiliser le couplage tunnel pour réaliser la séparatrice d’un interféromètre atomique. Pour pouvoir atteindre le régime Rabi, qui permet de réaliser des oscillations d’amplitude un, nous proposons d’aller au-delà du système à deux modes en utilisant deux condensats allongés couplés sur toute leur longueur comme schématisé sur la figure 4.1. Dans une telle géométrie, détaillée dans notre article [22], la condition  $J \ll \hbar\omega$  n’est vérifiée que pour les fréquences du mouvement transverse. Le paramètre  $\kappa N$  peut être inférieur à  $J$  même avec un nombre d’atomes important si le nuage est suffisamment étalé longitudinalement. Il est alors envisageable de réaliser des oscillations d’amplitude un entre les deux puits.

Dans la géométrie allongée, plusieurs modes longitudinaux sont susceptibles d’être peuplés et le modèle à deux modes présenté ci-dessus n’est pas suffisant. Les excitations collectives de basse énergie sont des phonons, qui sont essentiellement des ondes de phase. Dans chaque puits, la population thermique des phonons introduit des fluctuations de phase. Nous avons calculé quelle était la condition sur la température et le couplage tunnel entre les deux puits pour que, malgré ces fluctuations thermiques, la phase relative entre les deux puits soit bien définie à l’équilibre thermodynamique. Si cette condition est satisfaite, il est a priori possible d’observer des oscillations de Josephson entre les deux puits. Nous avons étudié ces oscillations et nous avons montré la présence d’instabilité de modulation. Ces résultats, qui font l’objet des articles [103] et [8] sont brièvement présentés ci-dessous.

La géométrie allongée décrite Fig.4.1 est obtenue expérimentalement, depuis 2004, par les groupes qui utilisent les pièges magnétiques habillés par radio-fréquence pour réaliser un double puits de potentiel [87, 48] et les études que nous avons effectuées s’appliquent à ces expériences.

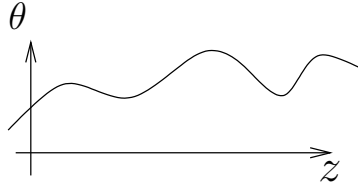


FIG. 4.2 – *Fluctuation de la phase d'un quasi-condensat unidimensionnel.* A température supérieure à l'énergie de champ moyen  $gn$ , les fluctuations sont dominées par la population thermique des phonons et l'équation 4.8 donne  $\langle(\theta(z) - \theta(0))^2\rangle = mk_B T z / (\hbar^2 n)$ . A température faible devant  $gn$ , les fluctuations quantiques dominent et  $\langle(\theta(z) - \theta(0))^2\rangle \simeq \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{mg}{\hbar^2 \rho}} \ln(\sqrt{mg\rho} z / \hbar)$ .

### 4.3 Fluctuations de phase relative entre deux quasi-condensats unidimensionnels couplés

Nous nous sommes intéressés, sur le plan théorique, au système de deux gaz allongés couplés sur toute leur longueur par effet tunnel, comme schématisé sur la figure 4.1. A très faible température, les fluctuations de densité dans chacun des deux puits sont très réduites : le système est cohérent vis-à-vis de la fonction de corrélation à deux corps. Cependant, le théorème de Mermin-Wagner-Hohenberg proscrit l'existence d'un véritable condensat de Bose dans un système uni-dimensionnel. En effet, les fluctuations phases induites par les fluctuations quantiques ou bien par la population thermique des phonons détruisent la cohérence en phase du gaz : le gaz n'est pas cohérent vis-à-vis de la fonction de corrélation à un corps. Ainsi, chaque puits présente des fluctuations de phase même à très faible température, comme schématisé sur la figure 4.2. Le gaz est alors appelé un quasi-condensat. En l'absence de couplage tunnel, les fluctuations de phase des deux puits sont indépendantes et la phase relative présente elle aussi des fluctuations. D'un autre côté, en présence d'une interaction tunnel entre les puits, les fluctuations de phase relatives sont coûteuses en énergie. Si le couplage tunnel est faible et la température assez importante, les fluctuations thermiques dominent et la phase relative entre les deux condensats ne sera pas bien définie. Des oscillations de Josephson seront alors impossibles à observer. Par contre, si le couplage est suffisamment fort, les fluctuations de phases seront absentes et les oscillations de Josephson pourront à priori être observées.

En utilisant une approche linéarisée (calcul de Bogoliubov), nous avons calculé les fluctuations de la phase relative entre les deux condensats à l'équilibre thermodynamique à une température  $T$ . Nous avons montré qu'elles étaient faibles tant que

$$k_B T \ll n \hbar \sqrt{\gamma/m} \quad (4.6)$$

où  $n$  est la densité linéaire d'atomes dans chaque puits,  $\gamma$  le couplage tunnel entre les deux puits et  $m$  la masse des atomes. Le domaine dans lequel la phase relative entre les deux quasi-condensats est bien définie est représentée sur la figure 4.3. Comme décrit dans

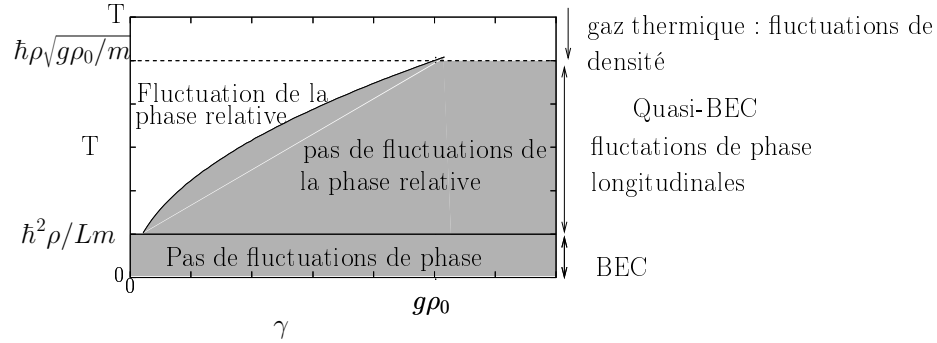


FIG. 4.3 – *Domaine, dans le plan  $(\gamma, T)$ , pour lequel la phase relative entre les deux quasi-condensats est bien définie. La partie grisée correspond au domaine dans lequel la phase relative entre les deux nuages a des fluctuations très petites devant  $\pi$ . Pour une température inférieure à  $\hbar^2 \rho / Lm$ , où  $L$  est la taille du système, chaque condensat est cohérent sur toute sa longueur. Les transitions indiquées sur ce graphe sont des transitions molles.*

l'article, cette condition peut être retrouvée simplement à l'aide de l'argument cinétique : le temps de fluctuation de la phase dans chacun des condensats en un point donné doit être petit devant la période Josephson des oscillations tunnel entre les deux condensats. Nous détaillons ci-dessous cet argument.

Dans la suite, nous utilisons la représentation en terme de phase et de densité dans laquelle l'opérateur champ, pour chacun des condensats, s'écrit  $\psi = \sqrt{n + \delta n} e^{i\theta}$  où le réel  $n$  est la densité moyenne et les opérateurs  $\theta$  et  $\delta n$  correspondent aux variables conjuguées phase et fluctuation de densité. Nous supposons dans un premier temps que les deux condensats ne sont pas couplés et nous calculons le temps de corrélation de la phase en un point d'un nuage. Les excitations de grande longueur d'onde dans chacun des puits sont les phonons qui sont décrits par le hamiltonien harmonique

$$H_k = L \left( n \hbar^2 k^2 \theta_k^2 / (2m) + g n_k^2 / 2 \right), \quad (4.7)$$

où  $k$  est le vecteur d'onde du phonon considéré,  $\theta_k$  et  $n_k$  les variables conjuguées qui décrivent l'amplitude de la phase et des fluctuations de densité,  $g$  le paramètre de couplage et  $L$  est la taille du système. A suffisamment haute température, la population des phonons est beaucoup plus grande que 1 et la physique statistique classique est valable. Ainsi, comme le hamiltonien est quadratique en  $\theta_k$ , les fluctuations de  $\theta_k$  vérifient

$$\langle \theta_k^2 \rangle^2 = m k_B T / (L n \hbar^2 k^2). \quad (4.8)$$

Sachant que l'onde de vecteur d'onde  $k$  a pour fréquence  $\omega_k = k \sqrt{gn/m}$ , on peut maintenant calculer le temps de fluctuation de la phase en un point  $z$  donné. On trouve

$$\langle (\theta(z, t) - \theta(z, 0))^2 \rangle = t \frac{k_B T}{\hbar} \sqrt{mg / (\hbar^2 n)}. \quad (4.9)$$

Ainsi le temps caractéristique d'évolution de la phase en un point donné est

$$T_{\text{phase}} = \sqrt{\hbar^2 n / (mg)} \hbar / (k_B T). \quad (4.10)$$

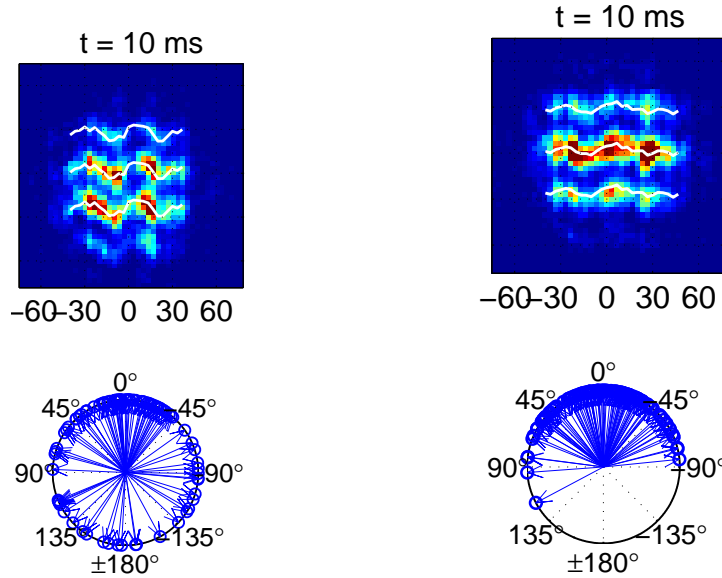


FIG. 4.4 – *Mesure expérimentale de la dispersion en phase relative de deux condensats couplés à l'équilibre thermodynamique (image tirée de [41]). La première image correspond à un couplage tunnel nul entre les puits. La deuxième image est obtenue pour un couplage tunnel non nul.*

En présence d'un couplage tunnel entre les deux nuages, des fluctuations de la phase relative sont coûteuses en énergie : une compétition a lieu entre le couplage tunnel et les phonons thermiquement excités dans chacun des nuages. De même que, si on déplace le point d'attache d'un oscillateur mécanique lentement par rapport à sa fréquence, la masse attachée au bout du ressort suit le mouvement, on s'attend à ce que la phase relative entre les deux nuages reste quasiment nulle si la période de l'oscillation Josephson entre les deux puits est beaucoup plus petite que  $T_{\text{phase}}$ . Or la période Josephson des oscillations entre les deux puits est, dans la limite Josephson  $\gamma \ll gn$ ,  $T_J = \pi\hbar/(2\sqrt{\gamma gn})$ . En écrivant que la période Josephson doit être petite devant  $T_{\text{phase}}$ , on retrouve la condition donnée Eq.4.6.

Expérimentalement, la phase relative à l'équilibre thermodynamique de deux quasi-condensats a été étudiée dans [41]. Comme montré sur la figure 4.4, il a bien été observé que la phase relative avait des fluctuations réduites lorsque le couplage tunnel est assez grand et les résultats sont en accords qualitatifs avec le calcul présenté ici. Cependant, le calcul de la dispersion en phase relative entre les deux quasi-condensats basé sur une mesure indépendante de la température, de la densité linéaire et un calcul du couplage tunnel attendu est différent par un facteur trois de la dispersion attendue. Ce désaccord peut être dû au fait que le système n'est pas vraiment unidimensionnel.

Dans le travail que nous avons effectué, nous ne nous sommes intéressés qu'à l'équilibre thermodynamique et nous n'avons pas étudié la cinétique de la mise à l'équilibre. Or des

situations hors d'équilibre thermodynamiques sont réalisées à l'issue d'une séparation en deux de deux quasi-condensats : les modes antisymétriques subissent un fort refroidissement adiabatique alors que les modes symétriques restent à la température initiales [15]. Dans l'article [15], les auteurs calculent la mise en équilibre entre les modes symétriques et les modes antisymétriques en l'absence de couplage tunnel entre les quasi-condensats. Cette thermalisation est due au couplage entre phonons symétriques et antisymétriques qui apparaît lorsque l'on prend en compte l'anharmonicité des phonons. Leurs calculs sont en bon accord avec les mesures expérimentales [15, 41]. La cinétique de la thermalisation dans le cas de deux condensats couplés n'a pas été calculé. L'étude de cette cinétique est cependant importante puisqu'elle limite la compression des fluctuations de nombre d'atomes qui peut être obtenue à l'issue d'une séparation en deux de deux quasi-condensats (voir section précédente).

#### 4.4 Instabilités de modulation en présence d'oscillations Josephson entre deux condensats couplés

Si la condition 4.6 est vérifiée, la phase relative entre les deux quasi-condensats est bien définie à l'équilibre thermodynamique. Il est alors a priori possible d'initier et d'observer des oscillations Josephson entre les deux quasi-condensats. Si le potentiel confinant les atomes est séparable en un potentiel décrivant le double puits transverse et un potentiel longitudinal décrivant le confinement longitudinal, alors, en l'absence d'interactions entre atomes, la dynamique transverse et longitudinale sont séparables : des oscillations non amorties entre les deux puits peuvent être observées.

En présence d'interactions entre atomes, la séparation de la dynamique longitudinale et transverse n'est plus valable, même pour un potentiel de piégeage séparable. Un premier effet auquel on peut penser est l'effet de la dépendance de la fréquence des oscillations Josephson avec la densité atomique : une variation longitudinal de la densité atomique introduira un déphasage des oscillations et donc un amortissement. Pour un système homogène longitudinalement cet effet "trivial" n'existe pas et des oscillations Josephson non amorties sont formellement solution des équations du mouvement. Cependant, dans cette situation, nous avons mis en évidence, dans l'article [8], la présence d'instabilités de modulation du mouvement longitudinal en présence d'oscillations Josephson. Ces instabilités, dues à la non linéarité du système, engendrent un développement d'excitations longitudinales, au détriment des oscillations Josephson dont l'amplitude décroît. Des instabilités de modulation existent dans beaucoup de systèmes non linéaires décrivant la dynamique d'un champ uni-dimensionnel lorsque la dispersion et la non linéarité ont des effets travaillant ensemble (on montre ci-dessous ce que l'on entend par là). Par exemple, des instabilités de modulations apparaissent dans un condensat placé dans un potentiel périodique, lorsque la quasi-impulsion du condensat est suffisamment grande [23, 18]. Elles ont aussi été observées dans des fibres optiques présentant une dispersion anormale [95], comme représenté sur la figure 4.5. La figure 4.5 illustre ces deux exemples.

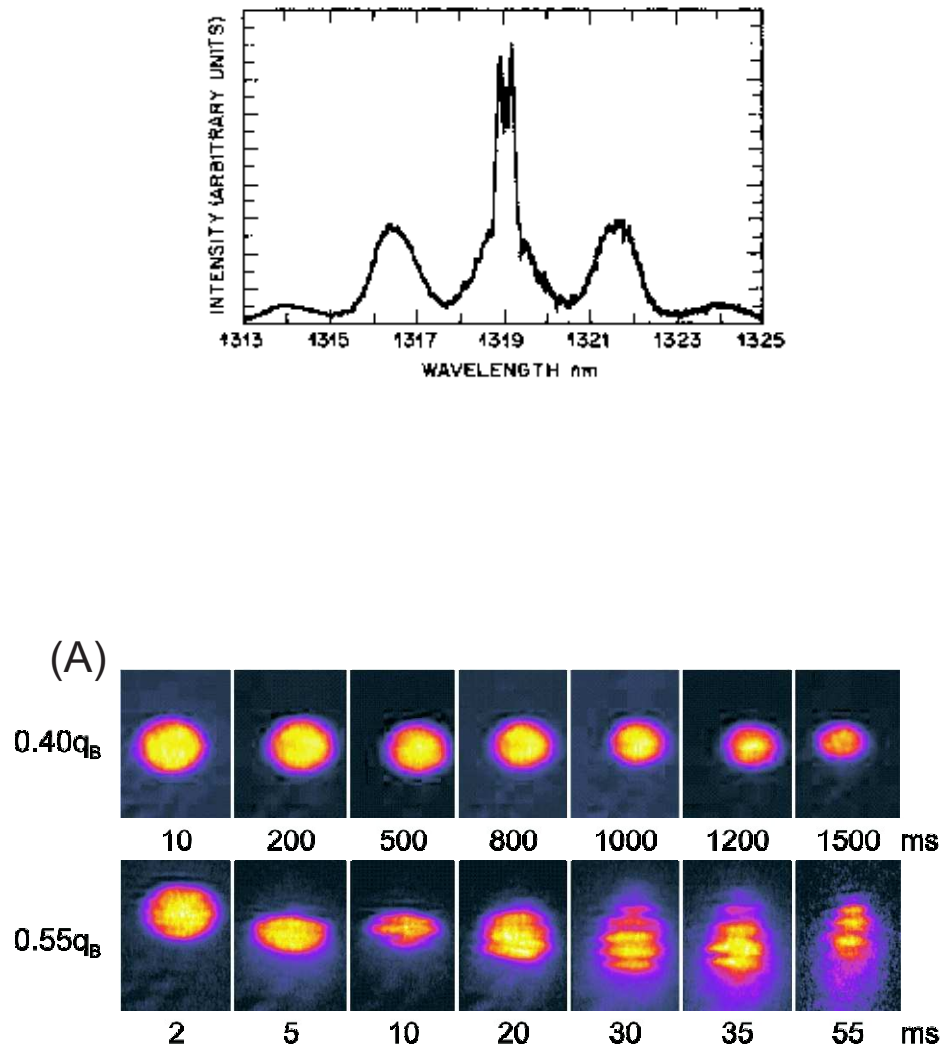


FIG. 4.5 – *Instabilités de modulations dans différents systèmes physiques. Image du haut : Instabilité de modulation dans une fibre optique présentant un effet Kerr et une dispersion anormale (figure tirée de [95]). Le spectre obtenu à la sortie de la fibre, injectée avec une lumière monochromatique, est représenté. Pour plus de détail, voir [95]. Image du bas : Instabilités de modulation d'un condensat dans un réseau périodique. Cette figure, tirée de [23] montre des images prises après temps de vol, en fonction du temps pendant lequel le condensat a été maintenu dans le réseau périodique. Pour une quasi-impulsion du condensat de  $0.4q_B$  où  $q_B$  est la quasi-impulsion du bord de la zone de Brillouin, le condensat est stable. Pour une quasi-impulsion du condensat de  $0.55q_B$ , la relation de dispersion devient anormale et le condensat est instable. Dans les deux cas présentés, on note que les modes instables ont des vecteurs d'onde centrés autour d'une valeur non nulle (bandes latérales de la figure (a) et apparition d'une période de modulation en (b)).*



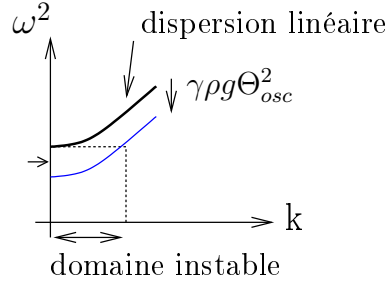


FIG. 4.6 – *Instabilité de modulation dans le modèle de Sine Gordon. La relation de dispersion obtenue en linéarisant l'équation de Sine Gordon donnée Eq. 4.12 est représentée en ligne épaisse. La flèche horizontale indique la fréquence de la solution de vecteur d'onde  $k = 0$  de l'équation de Sine-Gordon (oscillations indépendantes de  $z$ ) d'amplitude  $\Theta_{osc}$ , qui vérifie  $\omega_J^2 = 4\gamma\rho g - \gamma\rho g\Theta_{osc}^2/2$ . A cause de la non-linéarité du  $\sin(\theta)$ , les modes de vecteur d'onde non nul ont une fréquence donnée par  $\hbar^2\omega^2 = 2\rho_0g(\hbar^2k^2/(2m) + 2\gamma - \gamma\Theta_{osc}^2/2) + \gamma\rho_0g\Theta_{osc}^2\cos(2\omega_J t)$ . Leur fréquence est donc diminuée d'une quantité  $\gamma\rho g\Theta_{osc}^2/\hbar$  comme présenté sur la figure en ligne fine. D'autre part, ces modes subissent une modulation de fréquence et les modes de petit vecteurs d'onde présentent une instabilité paramétrique.*

Dans l'article [8], nous avons mis en évidence les instabilités de modulation de deux condensats couplés en effectuant une analyse linéarisée autour de la solution présentant des oscillations Josephson. De plus, dans la limite Josephson où le couplage tunnel est faible devant l'énergie de champs moyen  $ng$ , nous avons montré que le système est bien décrit par une équation de Sine-Gordon, comme le sont les jonctions Josephson supraconductives allongées[64]. Dans cette limite, nous avons donné une expression analytique de la constante de temps des instabilités et du domaine des modes instables. Nous donnons ci-dessous, dans la limite Josephson, une analyse simplifiée de ces instabilités..

Dans la suite, nous adoptons, comme dans la section précédente, la représentation phase-amplitude pour décrire le champ atomique. La phase relative entre les deux nuages, qui dépend de la coordonnée  $z$ , est notée  $\theta(z)$ , la demi-différence de densité linéique entre les deux puits est notée  $\rho_a$  et la densité linéique moyenne dans chaque puits est notée  $\rho_0$ . Plusieurs simplifications sont faites dans l'analyse simplifiée présentée ci-dessous. Tout d'abord, nous n'étudions que la dynamique des modes antisymétriques, négligeant leur couplage aux modes symétriques. D'autre part, nous ne nous intéressons qu'aux modes de longueur d'onde très grande devant la longueur de relaxation  $\xi = \hbar/\sqrt{m\rho_0g}$ , pour lesquels l'énergie cinétique par unité de longueur est simplement  $\hbar^2\rho_0/(4m)(\partial\theta/\partial z)^2$ . Cette approximation sera vérifiée à posteriori : nous verrons que les modes instables ont effectivement des grandes longueur d'onde. Enfin, nous nous intéressons au régime Josephson dans lequel les oscillations Josephson ont une amplitude faible, ce qui permet d'approximer l'énergie correspondant au couplage tunnel par  $\gamma\rho_0(\cos(\theta) - 1)$ . Finalement, le hamiltonien décrivant

les modes antisymétriques s'écrit

$$H_{SG} = \int \left( \frac{\hbar^2 \rho_0}{4m} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)^2 + g \rho_a^2 - 2\gamma \rho_0 (\cos(\theta) - 1) \right) dz, \quad (4.11)$$

où  $\hbar\theta$  et  $\rho_a$  sont des variables conjuguées ( $\hbar\partial\rho(z,t)/\partial t = \delta H_{SG}/\delta\theta(z)$  et  $\hbar\partial\theta(z,t)/\partial t = -\delta H_{SG}/\delta\rho(z)$ ). Cet hamiltonien est le célèbre hamiltonien de Sine-Gordon, largement étudié en physique théorique. Les équations du mouvement dérivées de 4.11 donnent

$$0 = \partial^2\theta/\partial t^2 - \frac{g\rho_0}{m} \partial^2\theta/\partial z^2 - \frac{4\gamma g\rho_0}{\hbar^2} \sin(\theta). \quad (4.12)$$

A faible amplitude des oscillations, le terme  $\sin(\theta)$  peut être linéarisé et l'on obtient comme solution des ondes planes avec la relation de dispersion linéaire  $\omega^2 = 4\gamma g\rho_0/\hbar^2 + k^2 g\rho_0/m$ . Dans notre cas, nous nous intéressons à la solution invariante par translation  $\theta = \Theta_{osc} \cos(\omega t)$  de fréquence proche de  $\omega = 2\sqrt{\gamma\rho_0 g}$ . A cause de la nonlinéarité dans l'équation 4.12, ces oscillations Josephson réalisent une modulation de la fréquence des modes de vecteur d'onde  $k$  non nul. On montre alors, comme décrit sur la Fig. 4.6, que les excitations de vecteurs d'onde de norme inférieure à  $\Theta_{osc}\sqrt{m\gamma}/\hbar$  subissent une instabilité paramétrique. Cette analyse en terme d'instabilité paramétrique est détaillée dans notre article [8]. Ci-dessous, nous proposons une analyse différente de ces instabilités, basée sur la méthode des échelles multiples[73], méthode générale d'analyse de la dynamique des systèmes non linéaires.

Pour évaluer les effets de la nonlinéarité du terme en  $\sin(\theta)$  de l'Eq. 4.12, nous faisons une hypothèse d'enveloppe lentement variable, en supposant que la solution s'écrit  $\theta = \Theta(z,t)e^{i\omega t} + c.c.$  où  $\Theta(z,t)$  a des variations temporelles et spatiales lentes<sup>1</sup> et *c.c.* signifie le complexe conjugué. L'amplitude des oscillations est  $\Theta_{osc} = 2\Theta$ . En développant  $\sin(\theta)$  à l'ordre 3 en  $\theta$  et en ne gardant que les termes variant en  $e^{i\omega t}$ , Eq.4.12 donne

$$0 = 2i\omega\partial\Theta/\partial t + \frac{g\rho_0}{m} \partial^2\Theta/\partial z^2 + \frac{2\gamma\rho_0 g}{\hbar^2} |\Theta|^2\Theta. \quad (4.13)$$

Cette équation n'est rien d'autre que l'équation de Shrödinger non linéaire. Elle décrit, de façon très générale, l'évolution de l'enveloppe d'ondes non linéaires[73] et a été très étudiée dans le domaine de la physique non linéaire[73]. Lorsque le facteur du terme en  $\partial^2\Theta/\partial z^2$  (terme de dispersion) et le facteur du terme non linéaire  $|\Theta|^2\Theta$  ont le même signe, la solution uniforme où  $\Theta$  ne dépend pas de  $z$  est instable. C'est bien le cas dans notre situation. Les vecteurs d'onde instables sont les vecteurs d'onde inférieurs à  $\Theta_{osc}\sqrt{m\gamma}/\hbar$  et le taux de croissance exponentielle des excitations, maximum pour le vecteur d'onde  $\Theta_{osc}\sqrt{m\gamma}/(2\hbar)$  est

$$\Gamma = \Theta_{osc}^2 \frac{\sqrt{\gamma\rho_0 g}}{8\hbar}. \quad (4.14)$$

<sup>1</sup>Les échelles temporelles et spatiales sont d'ordre supérieur à un en l'amplitude des oscillations.

Ce phénomène d'instabilité est appelé instabilité de modulation. Il se traduit par une localisation de l'énergie, le système développant un train de solitons. L'énergie dans le mode d'oscillation uniforme initial diminue.

Aux temps longs, l'équation de Shrödinger non linéaire ne décrit plus le système de façon adéquate : des termes d'ordres supérieurs dans le développement de  $\sin(\theta)$  peuvent intervenir et des évolutions à des échelles de temps plus longues sont à prendre en compte. On peut s'attendre à priori à ce que l'amplitude dans le mode initial des oscillations uniformes décroisse exponentiellement et tende vers zéros aux temps long, l'énergie se distribuant sur le nombre infini de degré de liberté du système. Cependant, l'équation de Sine Gordon est une équation non linéaire particulière car elle est intégrable : il existe un nombre infini de constantes du mouvement. Ainsi, la trajectoire de l'état du système, qui évolue dans un espace des phases de dimension infinie, est contrainte à évoluer sur un tore et ne peut explorer tout l'espace des phases : le système n'est pas ergodique. Le système ne thermalise donc pas et sa dynamique peut présenter des régularités. Dans notre cas, on s'attend à observer des oscillations de la quantité d'énergie dans le mode des oscillations uniformes. De telles oscillations, appelées récurrences de Fermi-Ulam-Pasta, sont observées dans tous les systèmes non linéaires intégrables présentant des instabilités de modulation. En particulier, l'équation de Shrödinger non linéaire est intégrable et peut présenter des récurrences de Fermi-Ulam-Pasta. Fermi, Ulam et Pasta ont mis en évidence numériquement les récurrences en 1953 alors qu'ils cherchaient à observer une thermalisation dans une chaîne d'oscillateurs couplés non linéaires : l'équation qu'ils utilisaient était intégrable, notion encore inconnue à l'époque ! Expérimentalement, le phénomène de récurrence de Fermi-Ulam-Pasta a été mis en évidence dans des fibres optiques [99] et récemment dans un système qui utilise des ondes de spin dans un fil magnétique non linéaire[106].

Nous avons effectué des simulations numériques de l'évolution de deux quasi-condensats couplés. Les résultats, présentés Fig.4.7 et dans l'article [8], montrent que l'on observe en effet des oscillations de l'amplitude des oscillations Josephson, réminiscentes des récurrences de Fermi-Ulam-Pasta. Cependant, on observe un amortissement de ces oscillations, dû au fait que la description du système par l'équation de Sine Gordon n'est qu'une approximation. En effet, un couplage existe entre les modes symétriques et antisymétriques, qui n'a pas été pris en compte ici, le terme de pression quantique n'a pas été pris en compte et la nonlinéarité des phonons n'a pas non plus été incluse. Le hamiltonien réel décrivant deux quasi-condensats couplés n'est pas intégrable.

D'autres études ont été effectuées sur la dynamique de deux quasi-condensats unidimensionnels couplés et nous concluons cette section par un bref aperçu des études qui nous semblent intéressantes. Kaurov et Kuklov ont montré l'existence de solitons[51], appelés solitons vortex, dans lesquels la phase relative entre les deux nuages passe de 0 à  $2\pi$ . Une circulation d'atomes entre les deux nuages a lieu dans la zone de variation de la phase relative. Ces solitons, stables seulement pour un couplage tunnel suffisamment faible, correspondent, dans la limite Josephson, aux solitons de l'équation de Sine-Gordon. De tels solitons se propagent dans les jonctions Josephson supraconductrices allongées [64]. Un autre aspect de la dynamique de quasi-condensats couplés a été étudié par V. Gritsev et al. dans [34]. Dans cette étude, les auteurs étudient l'évolution quantique de la largeur  $\Delta\theta$

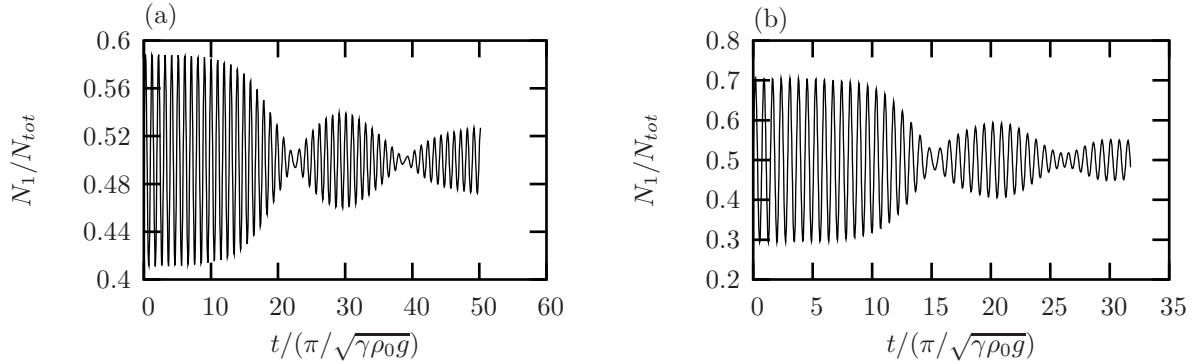


FIG. 4.7 – *Réurrences de Fermi-Ulam-Pasta : Évolution du nombre d’atomes dans l’un des deux quasi-condensats en fonction du temps. Le couplage tunnel est  $\gamma = 0.1\rho g$  pour le graphe (a) et  $pg$  pour le graphe (b).*

de la dispersion en phase relative entre deux quasi-condensats couplés lorsque qu’un état initial hors d’équilibre est préparé. Il montrent, en utilisant le modèle de Sine Gordon, que cette dynamique n’est pas celle d’oscillations amorties mais présente des régularités, caractérisées par des composantes discrètes du spectre de Fourier. L’absence d’amortissement est dû ici à l’intégrabilité du modèle de Sine-Gordon. En réalité, comme nous l’avons vu, le modèle de Sine-Gordon ne décrit qu’approximativement la dynamique de deux condensats couplés. On s’attend en réalité à observer un amortissement aux temps longs, comme dans la situation que nous avons étudiée.

## 4.5 Conclusion

Nous avons apporté une petite contribution à l’étude théorique extrêmement vaste sur les propriétés des condensats bi-modaux. Plus précisément, nous avons étudié quelques aspects propres aux nuages unidimensionnels couplés sur toute leur longueur. Nous avons calculé les fluctuations de la phase relative entre les deux nuages à l’équilibre thermodynamique. Nous avons aussi mis en évidence l’existence d’instabilité de modulation en présence d’oscillations Josephson. Beaucoup d’autres travaux théoriques sur le sujet ont été effectués, comme indiqué dans ce chapitre. Expérimentalement, les condensats bi-modaux couplés ont été encore peu explorés. En particulier, la dynamique en présence d’oscillations Josephson n’a pas été étudiée. Cependant, plusieurs groupes dans le monde réalisent des doubles puits de potentiel très allongés et il est probable que les effets étudiés théoriquement puissent être confrontés aux résultats expérimentaux dans un avenir proche.

Sur le plan théorique, beaucoup de questions restent en suspens. En particulier, la cinétique de la thermalisation entre les modes symétriques et antisymétriques en présence d’un couplage non nul entre les deux quasi-condensats reste à étudier.

Notons finalement que, tant que seules les excitations de grande longueur d’onde sont impliquées, les résultats que nous avons obtenus peuvent se généraliser au cas de gaz

unidimensionnels en régime d'interaction forte. En effet, le formalisme des liquides de Luttinger, qui décrit les excitations de grandes longueur d'onde dans les gaz unidimensionnel est un formalisme unifié qui peut être utilisé.

# Chapitre 5

## Rugosité du potentiel d'un guide pour atomes réalisé par un micro-fil

Toutes les pièges réalisés par des micro-structures présentent une rugosité du potentiel lorsque les atomes sont approchés des micro-structures. Ce phénomène a été observé aussi bien dans des expériences utilisant des micro-fils parcourus par un courant [56, 49, 20] que dans des expériences utilisant des micro-structures magnétiques[104]. Dans notre expérience, nous avons élucidé, pour la première fois, l'origine de la rugosité du potentiel : nous avons montré qu'elle provient des déformations du bord du fil. La connaissance de l'origine de la rugosité permet d'anticiper la rugosité attendue pour un fil donné et permet de connaître les lois d'échelles de variation de la rugosité. Ce résultat, présenté dans nos articles [20] et [89], a donc eu un retentissement important dans la communauté.

La rugosité du potentiel empêche de pouvoir tirer parti pleinement de certains avantages des micro-structures qui sont la possibilité de réaliser de très forts confinements et la possibilité de réaliser des potentiels variant sur des échelles très faibles. En effet, pour réaliser ces types de potentiels, les atomes doivent être approchés très près des micro-structures. En particulier, cette rugosité a empêchée jusqu'à maintenant la réalisation de gaz unidimensionnels en interactions fortes dans une expérience utilisant des micro-structures. Nous avons démontré qu'il est possible de s'affranchir de la rugosité en utilisant des courants modulés rapidement. Cette technique ouvre de nouvelles perspectives dans le domaine des micro-structures et il est probable qu'elle permette la réalisation de nouvelles expériences. La démonstration expérimentale de cette technique fait l'objet de l'article [96]. Nous avons aussi effectué une étude théorique des limitations de cette technique, qui est présentée dans notre article [10].

Dans la première partie de ce chapitre, nous montrons comment nous avons mis en évidence l'origine de la rugosité du potentiel. La technique de modulation qui permet de s'affranchir de la rugosité est présentée dans la deuxième section. Nous concluons sur les perspectives ouvertes par ces études.

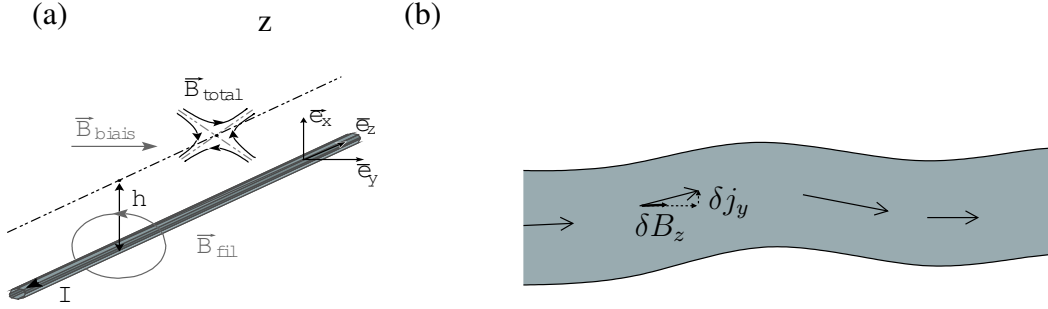


FIG. 5.1 – (a) : Réalisation d'un guide pour atome avec un fil parcouru par un courant et un champ perpendiculaire à ce fil. (b) : Champ magnétique rugueux longitudinal  $\delta B_z$  produit par les déformations géométriques du bord du fil. Dans ce dessin, la rugosité du bord du fil est très exagérée par rapport aux rugosité typiques des fils dont l'amplitude est environ 4 ordres de grandeurs plus petite que la largeur du fil.

## 5.1 Mise en évidence de l'origine de la rugosité

Le guide magnétique utilisé dans notre expérience utilise un fil d'or de  $6 \mu\text{m}$  d'épaisseur et de  $50 \mu\text{m}$  de large. Ce fil est déposé par électrodéposition dans les gouttières d'un masque en résine réalisé par photolithographie. Comme schématisé sur la figure 5.1, la combinaison du champ magnétique créé par un courant parcourant ce fil et d'un champs externe homogène perpendiculaire au fil réalise un guide magnétique pour atomes le long de la ligne parallèle au fil sur laquelle le champs magnétique total s'annule. L'ajout d'un champs longitudinal de l'ordre du Gauss permet de réaliser un confinement transverse quadratique et empêche les pertes par transitions de Majorana. Le potentiel au minimum transverse du guide est  $V = \mu|B_z|$  où  $\mu$  est le moment magnétique des atomes et  $B_z$  le champs magnétique longitudinal. Si  $B_z$  dépend de  $z$ , le potentiel longitudinal ressenti par les atomes dépend de  $z$ . Une dépendance quadratique à grande échelle de  $B_z$  peut réaliser un confinement du nuage atomique, ce qui est utilisé pour réaliser un piège à trois dimensions. Des variations spatiales de  $B_z$  à petites échelle sont par contre responsables d'une rugosité du guide. En présence d'une rugosité des surfaces géométriques du fil, les lignes de courants dans le fil ne sont plus exactement parallèles à  $z$ . La composante transverse de la densité de courant produit un champs magnétique longitudinal, comme présenté sur la figure 5.1. Nous avons montré que, dans notre expérience, ce champ longitudinal produit par la déformation géométrique des surfaces du fil est responsable de la rugosité du potentiel du guide. En effet, le potentiel rugueux calculé à partir de la mesure de la rugosité des surfaces du fil est en bon accord avec la rugosité du potentiel mesuré à partir de profils de nuages atomiques piégés. Nous décrivons ci-dessous succinctement les mesures effectuées et les résultats, qui ont fait l'objet des articles [20] et [89].

Dans un premier temps, la rugosité du potentiel longitudinal du guide a été mesurée en enregistrant le profil de densité longitudinal d'un nuage à l'équilibre thermodynamique piégé dans le guide. La formule de Maxwell-Boltzmann permet alors de calculer le potentiel

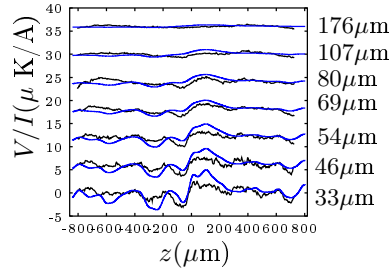


FIG. 5.2 – *Potentiel rugueux mesuré avec les profils atomiques (ligne présentant un bruit à petite échelle) comparé au potentiel calculé à partir de la mesure des déformations du bord du fil (ligne moins bruitée à petite échelle).*

longitudinal vu par les atomes. La température du nuage est mesurée indépendamment en utilisant la technique du temps de vol <sup>1</sup>. La figure 5.2 montre les potentiels rugueux obtenus pour des guides à différentes hauteurs au-dessus du fil.

Dans un deuxième temps, nous avons calculé la rugosité produite par la déformation des bords du fil. Pour cela, nous avons mesuré les déformations géométriques du bord du fil en utilisant des images prises au microscope à électron. Comme on peut le voir sur l'image 5.3, les déformations du bord du fil sont quasiment identiques sur toute la hauteur du fil, ce qui est attendu à l'issue d'une croissance électrolytique. Nous avons donc simplifié le problème en supposant qu'elles étaient indépendantes de  $x$  (voir axes sur la figure 5.3) et nous avons mesuré les déformations en utilisant des images prises à l'aplomb du fil comme présenté sur la figure 5.3. Il apparaît sur la figure que le fil présente des déformations à une échelle de l'ordre du micron et d'une amplitude de l'ordre de quelques centaines de nanomètres. Comme la rugosité du potentiel ressenti par les atomes a une longueur de corrélation typique de plusieurs dizaines de microns, il est important de mesurer les déformations du fil sur ces échelles. Pour cette mesure sur des grandes longueurs, nous avons recollé des dizaines d'images, comme présenté sur la figure 5.3. Nous avons observé des déformations importantes à grande échelle, comme le montre la densité spectrale des déformations montrée figure 5.3. Cette figure montre que la rugosité n'est pas décrite par une unique échelle de longueur : en plus de la rugosité à petite échelle (longueur de corrélation de l'ordre du micron), on observe un excès de fluctuations aux grandes échelles. Une fois connues les déformations du bord du fil, nous avons calculé la densité de courant à l'intérieur du fil. Ce calcul suppose que la densité de courant  $\mathbf{j}$  à l'intérieur du fil obéit à l'équation d'ohm  $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$  où la conductivité  $\sigma$  est supposée homogène dans le fil et  $\mathbf{E}$  est le champ électrique. Le champ électrique  $\mathbf{E}$  dérive du potentiel  $V$  qui obéit à l'équation de Laplace  $\Delta V = 0$  dans le fil. Les conditions aux limites sur les bords du fil sont la nullité du gradient du potentiel perpendiculaire à la surface. Ces conditions aux limites permettent d'assurer que le courant électrique est tangent à la surface du métal. L'équation de Laplace a été résolue de façon perturbative, à l'ordre un en  $\delta/l_c$  où  $\delta$  est l'amplitude des

<sup>1</sup>Mesure de la distribution en vitesse basée sur l'observation de l'étalement transverse du nuage après une coupure rapide du potentiel piégeant.



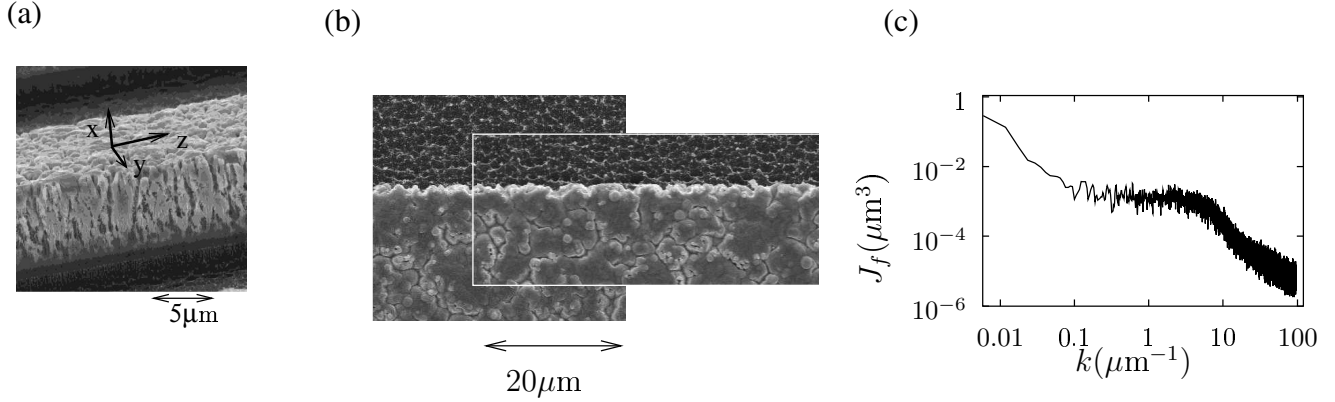


FIG. 5.3 – Déformations géométriques du bord du fil. L'image (a), prise au microscope à électron, montre que les bords du fil présentent une structure assez verticale. Les déformations du bord du fil sont mesurées à partir d'images prises à l'aplomb du fil (image (b)) et raccordées les unes aux autres. Le graphe (c) montre la densité spectrale des déformations du bord du fil. Les grains de la croissance électrolytique sont responsables du plateau de la densité spectrale pour les vecteur d'onde inférieurs à quelques  $\mu\text{m}^{-1}$ . Le fil présente en plus un excès de déformations aux grandes longueur d'ondes dont l'origine n'est pas connue.

déformations du bord du fil et  $l_c$  leur longueur de corrélation. Cette approximation n'est pas a priori très bonne pour les déformations à petite échelle car leur amplitude est de l'ordre de leur longueur d'onde. Cependant, elle est très bonne pour les déformations à des échelles de plusieurs microns, qui sont les échelles de longueur observées dans la rugosité du potentiel. On peut toutefois s'inquiéter du mélange de fréquences spatiales qui peut apparaître dans la densité de courant via des termes d'ordres supérieures à un dans la résolution de l'équation de Laplace. Nous n'avons pas poursuivi plus en avant cette analyse et nous nous sommes restreint au calcul à l'ordre un en  $\delta/l_c$ . Finalement, une fois la densité de courant connue dans le fil, nous avons calculé le champ magnétique longitudinal créé et nous en avons déduit la rugosité du potentiel. Ces calculs sont détaillés dans [89]. La figure 5.2 montre que, pour les hauteurs explorées au-dessus du fil, cette rugosité calculée à partir de la mesure des déformations du fil est en bon accord avec la rugosité mesurée avec les nuages atomiques.

Le fil d'or, déposé sur un substrat de silicium dépourvu de rugosité, a trois surfaces rugueuses : les bords du fil perpendiculaire à la puce et sa surface parallèle à la puce. Dans le cas d'un fil beaucoup plus large que haut, on s'attend à ce que la rugosité de la surface du fil produise une rugosité plus importante que celle des bords du fil lorsque les atomes sont approchés très près du fil. L'effet de la surface a ainsi été observé par [57]. Nous avons mesuré la rugosité de la surface de notre fil à microscope à force atomique. Le calcul montre que, pour les hauteurs que nous avons considérées, la rugosité produite par la rugosité de la surface est négligeable devant celle produite par les bords du fil. Ce calcul est donc en accord avec les résultats obtenus figure 5.2 qui montre que les déformations des bords du fil suffisent à elles seules à rendre compte de la rugosité du potentiel.

Avant de conclure cette section, nous discutons succinctement ci-dessous de la dépendance du potentiel rugueux avec la distance au-dessus du micro-fil. Une étude approfondie de cette dépendance est effectuée dans notre article [89]. On s'attend à ce que la rugosité introduite par une composante de Fourier de vecteur d'onde  $k$  décroisse à grande distance du fil à cause d'un effet de moyennage. Plus précisément, les équations de Maxwell montre que la rugosité diminue exponentiellement en  $e^{-kh}$  à grande distance  $h$  au-dessus du fil. Cette décroissance exponentielle du champ réalisé par une structure périodique, est utilisée dans les miroirs à atomes magnétiques [85]. Dans notre cas, cette décroissance montre que, plus on s'éloigne du fil, plus la longueur de corrélation du potentiel rugueux augmente, la longueur de corrélation étant de l'ordre de la hauteur du guide au-dessus du fil. C'est bien ce que l'on observe expérimentalement.

En conclusion, nous avons montré que pour notre fil, et pour les hauteurs au-dessus du fil que nous avons explorées, la rugosité du potentiel était principalement dûes à la rugosité des bords du fil. La qualité des fils est donc primordiale. Plusieurs techniques de fabrications ont été développées dans le monde [22, 82]. Ces différentes techniques donnent des fils de qualité différentes. Par exemple, nous avons montré que des fils déposés par évaporation sur un masque réalisé au masqueur à électron présentait des bords de densité spectrale 100 fois meilleurs que ceux des fils réalisés par électrodéposition dans un masque imprimé par lithographie [22]. Cependant, il semble que dans tous les cas les imperfections géométriques des fils sont la source dominante de la rugosité du potentiel. En particulier, tous les groupes ayant étudié la rugosité de micro-pièges ont observé une dépendance linéaire de la rugosité avec le courant passant dans les micro-fils. Bien sur, en l'absence de rugosité due aux déformations des micro-structures réalisant le piège, d'autres sources de rugosité, typiquement beaucoup plus faibles, peuvent être observées. Ainsi, Cornell et al[67] ont montré que les atomes de Rubidium adsorbés sur la surface génère des dipôles électriques qui interagissent avec les atomes. Une non uniformité de la répartition des atomes adsorbés produit alors une rugosité du potentiel. Cette rugosité est extrêmement faible : elle ne fragmente pas un condensat et n'a pu être mise en évidence que grâce à la mesure de petites modifications des fréquences d'oscillations.

## 5.2 Annulation de la rugosité par l'utilisation de courants modulés

La rugosité du potentiel longitudinal est produite par la rugosité de la composante longitudinale du champ magnétique créé par le courant circulant dans le micro-fil. Plus précisément, le potentiel longitudinal ressenti par les atomes est  $V(z) = \mu|B_z(z)|$  où  $\mu$  est le dipôle magnétique des atomes et  $B_z(z)$  la composante longitudinale du champs magnétique. Le champ  $B_z$  est la somme d'un champ  $B_0$ , de l'ordre du Gauss, réalisé par des structures éloignées du nuage atomique et de la composante longitudinale  $\delta B_z(z)$  du champ rugueux créé par les déformations des lignes de courant dans le micro-fil réalisant le guide. Comme  $\delta B_z$  est typiquement inférieur au milligauss, la valeur absolue dans l'expression de

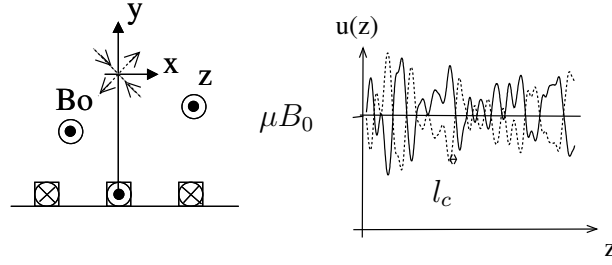


FIG. 5.4 – *Principe de la méthode de modulation pour s'affranchir de la rugosité du potentiel. Le schéma montre un exemple de réalisation d'un guide magnétique avec trois fils et un champ longitudinal  $B_0$ . Les trois fils réalisent un champ transverse quadrupolaire dont les axes de champ rentrant et sortant sont représentés en pointillés. Les déformations géométriques des fils sont responsables d'un potentiel rugueux proportionnel au courant passant dans les fils. Le graphe donne un exemple d'un tel potentiel rugueux pour des courants positifs (ligne continue) et négatifs (ligne pointillée). Si le courant dans les fils est modulé rapidement, les atomes sont sensibles au potentiel moyen qui ne présente pas de rugosité.*

$V(z)$  peut être enlevée et le potentiel ressenti par les atomes, représenté Fig. 5.4 s'écrit simplement  $V(z) = \mu(B_0 + \delta B_z(z))$ . La composante  $\delta B_z(z)$ , qui est produit par la déformation des lignes de courant due aux imperfections géométriques du fil, est proportionnel au courant  $I$  passant dans le fil. Cette proportionnalité, attendue si le courant électrique obéit à la loi d'Ohm, est vérifiée expérimentalement par tous les groupes qui ont étudiée la rugosité.

La proportionnalité de la rugosité avec le courant peut être utilisée pour annuler l'effet de la rugosité. L'idée est de moduler rapidement le courant dans le fil autour de zéro. Si la fréquence de modulation est assez grande, le mouvement des atomes n'a pas le temps de suivre la modulation et la dynamique des atomes est bien décrite par l'action du potentiel effectif  $V_{\text{eff}}$  obtenu en prenant la valeur moyenne temporelle du potentiel. Comme la rugosité est proportionnelle au courant, la rugosité est moyennée à zéro et  $V_{\text{eff}}$  ne présente pas de rugosité. Pour préserver un confinement transverse lors de la modulation du courant dans le fil, le champ magnétique transverse au fil  $B_{\perp}$  doit lui aussi être modulé, en phase avec le courant passant dans le fil. Cette modulation est simple à réaliser si  $B_{\perp}$  est lui-même produit avec des fils déposés sur la puce comme proposé sur la figure 5.4. Notons que la réalisation d'un potentiel effectif moyen, résultant de la modulation rapide de champs, avait déjà été utilisé dans notre domaine dans les pièges TOP (Time orbital potentiel) [80].

Nous avons mis en oeuvre expérimentalement cette méthode de modulation pour s'affranchir de la rugosité du potentiel. Ces résultats, qui font l'objet de l'article [96], sont présentés dans la section suivante. Nous avons aussi fait une étude théorique des limites de cette technique, présentée dans la section 5.2.2, qui montre que cette technique fonctionne pour un très grand domaine de paramètres.

### 5.2.1 Démonstration expérimentale

La réalisation expérimentale de la méthode de modulation pour s'affranchir de la rugosité a donné de très bons résultats. En effet, en modulant les courants des micro-fils à 30 kHz, nous avons mesuré une réduction de la rugosité du potentiel par au moins un facteur 5 par rapport au cas où les courants ne sont pas modulés.

Dans cette expérience le guide atomique considéré est celui réalisé par des micro-fils de section carré de 700 nm de côté. Le guide est situé 8  $\mu\text{m}$  au-dessus du fil central. En l'absence de modulation des courants passant dans les micro-fils, la rugosité du guide, présentée Fig.5.5 pour des courants positifs et négatifs  $\pm I$ , a une amplitude de l'ordre de 1  $\mu\text{K}$ . Cette rugosité est mesurée, comme dans la mesure décrite dans la section 5.1, en ajoutant un confinement longitudinal et en appliquant la loi de Boltzmann à un nuage à l'équilibre thermodynamique. La fréquence d'oscillation transverse de ce guide est de 2 kHz. En modulant le courant dans les micro-fils avec une amplitude  $I$  et une fréquence de 50 kHz, la rugosité est réduite d'un facteur 5, comme présenté Fig. 5.5. La rugosité résiduelle mesurée est limitée par la précision de notre mesure et le facteur 5 obtenu est donc une borne inférieure.

Un autre diagnostic de la rugosité du potentiel est l'amortissement des oscillations dipolaires du nuage dans un piège harmonique longitudinal rajouté au guide. Pour un potentiel harmonique pur, les oscillations dipolaires ne sont pas amorties. Par contre, la rugosité du potentiel introduit un amortissement. Nous avons étudié l'amortissement des oscillations, comme présenté dans l'article [96]. Nous avons observé une forte réduction de l'amortissement des oscillations dans le guide modulé, la constante de temps de l'amortissement augmentant d'un facteur 10. Des calculs numériques dans lesquels les collisions entre atomes sont négligés et qui sont moyennées sur différentes réalisations de la rugosité, montrent qu'une telle augmentation de la constante de temps d'amortissement correspond à une réduction d'un facteur 14 de l'amplitude de la rugosité. En fait, l'amortissement observé dans le guide modulé est compatible avec celui attendu en l'absence totale de rugosité, en prenant en compte le terme quartique du confinement longitudinal réalisé dans notre expérience. Ces études tendent donc à montrer que la rugosité est réduite par un facteur au moins égale à 14, ce qui est beaucoup plus que le facteur 5 obtenus en analysant les profils atomiques. Cependant, les incertitudes sur la validité des approximations faites pour estimer le facteur 14 de réduction de la rugosité nous incitent à être prudents.

### 5.2.2 Limites de la méthode

La méthode de modulation présentée ci-dessus présente plusieurs contraintes. Premièrement, la fréquence de modulation doit être suffisamment rapide pour que le mouvement transverse des atomes, soumis à un potentiel modulé, soit stable. Deuxièmement, la modulation doit être suffisamment rapide devant les fréquences typiques du mouvement longitudinal pour que ce mouvement puisse être correctement décrit par l'effet du potentiel moyen. Finalement, la fréquence de modulation doit être suffisamment faible pour que l'orientation du spin des atomes ait le temps de suivre la modulation de l'orientation du

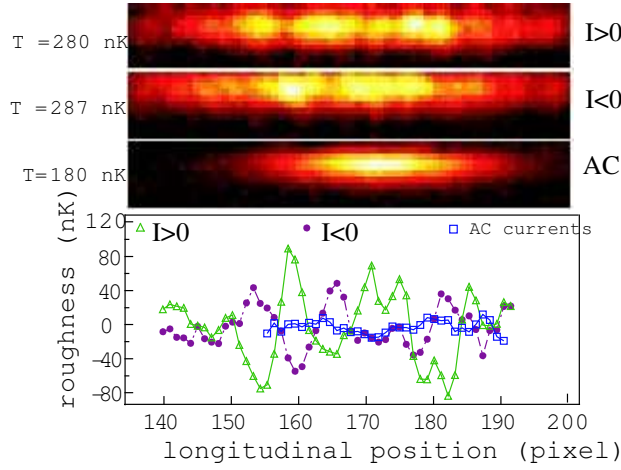


FIG. 5.5 – Annulation de la rugosité du potentiel par une modulation rapide du courant dans les fils. La rugosité, extraite des images par absorption des nuages atomiques en utilisant la loi de Boltzmann, est tracée pour des courants positifs, négatifs et modulés. La rugosité du potentiel créé par les fils modulés a une amplitude au moins 5 fois plus faible que celle obtenue pour des courants continus.

champ magnétique : une modulation trop rapide se traduira par la présence de pertes par retournement de spin dans l'état non piégé. Nous avons étudié ces contraintes de façon théorique et nous résumons ci-dessous les résultats obtenus, présentés dans l'article [10].

### Stabilité du mouvement transverse

Transversalement, le potentiel instantané est un potentiel harmonique dont la courbure, proportionnelle au carré du courant passant dans les fils, varie comme  $\cos^2(\omega t)$ . Le mouvement des atomes est alors décrit par une équation de Mathieu. Les solutions de cette équation différentielle linéaire ont été largement étudiées. En utilisant les tables donnant l'exposant critique des solutions, on trouve que le mouvement des atomes est stable tant que la fréquence de modulation vérifie  $\omega > 0.87\omega_{\perp}$  où  $\omega_{\perp}$  est la fréquence de modulation du confinement transverse pour un courant égale à l'amplitude de la modulation. Ce raisonnement classique donne aussi le critère de stabilité du mouvement quantique puisque, pour un potentiel harmonique, l'évolution de la fonction de Wigner est donnée par l'évolution classique d'une distribution dans l'espace des phases.

Avec les paramètres de notre expérience, les résultats précédents prédisent un mouvement transverse des atomes stable tant que  $\omega/(2\pi) > 1.82$  kHz. Expérimentalement, comme reporté dans l'article mis en annexe, nous observons que la durée de vie du nuage atomique diminue pour des fréquences de modulations de l'ordre de 10 kHz, bien supérieures à la fréquence attendue. Nous attribuons cet écart à la présence de champs transverses non modulés. En effet, en présence de tels champs, le mouvement des atomes n'est plus décrit par l'équation de Mathieu : le potentiel instantané, représenté Fig.5.6, ne présente pas uniquement une modulation du confinement mais la position du centre est aussi modulée.

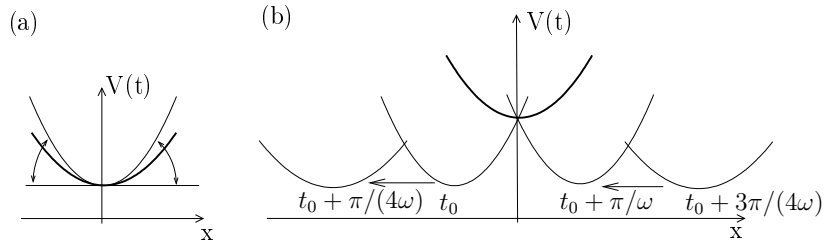


FIG. 5.6 – Potentiel instantané dans le plan transverse lorsque le courant dans les fils créant le guide atomique est modulé en  $\cos(\omega(t - t_0))$ , où  $u(z)$  est un potentiel rugueux. En l'absence de champ externe transverse (figure (a)), le potentiel instantané est un potentiel harmonique toujours centré au même endroit dont la fréquence d'oscillation est proportionnel au courant. En présence d'un champ externe transverse non nul  $\mathbf{b}$  (figure (b)), le centre du quadrupole magnétique transverse, qui résulte de l'annulation de  $\mathbf{b}$  et du champ produit par les fils, se déplace lors de la modulation du courant dans les fils. Lorsque la fréquence de modulation est très élevée devant la fréquence du confinement, le mouvement des atomes est bien décrit par l'action du potentiel moyen (moyenné sur une période de la modulation) représenté en ligne grasse sur les dessins.

Un calcul numérique classique de la trajectoire des atomes montre qu'un champ transverse d'une centaine de milliGauss suffit à expliquer la réduction de la durée de vie des atomes dès que la fréquence de modulation est inférieure à 10 kHz. Notons que, en plus de champs transverses externes mal compensés, un champ transverse est produit, sur les bords du nuage, par les fils réalisant le confinement longitudinal du nuage.

### Effet de la rugosité sur le mouvement longitudinal

Nous nous sommes intéressés à l'effet sur le mouvement longitudinal du potentiel rugueux longitudinal modulé. Nous avons donc étudié la dynamique des atomes dans le potentiel  $V(z, t) = u(z) \cos(\omega t)$ . Pour une fréquence de modulation suffisamment élevée, on s'attend à ce que ce mouvement des atomes n'ait pas le temps de suivre et que ce mouvement soit bien décrit par l'effet d'un potentiel effectif sans rugosité, qui est la valeur moyenne sur une période de modulation du potentiel instantané. Nous sommes allés au-delà de cette analyse et nous avons quantitativement étudié les effets du potentiel modulé sur le mouvement longitudinal. Nous avons utilisé la représentation de Floquet pour décrire la dynamique des atomes dans le cadre de la physique quantique. Nous avons ensuite effectué un calcul perturbatif vis-à-vis du potentiel rugueux  $u$ . Deux phénomènes apparaissent.

Premièrement, des couplages d'ordre deux en  $u$  sont responsables d'un potentiel conservatif effectif

$$V_{ad} = (\partial_z u)^2 / (4m\omega^2). \quad (5.1)$$

Ce potentiel, qui correspond à l'énergie cinétique du micro-mouvement des atomes, est bien connu [60]. En particulier, il a été étudié dans les pièges TOP (times orbiting potential) [72]. La dérivation que nous en avons faite est cependant originale. Ce potentiel

rugueux résiduel est très faible devant le potentiel rugueux initial dès que la fréquence de modulation  $\omega$  est suffisante pour que  $u/(l_c^2 m \omega^2) \ll 1$ , où  $l_c$  est la longueur de corrélation de la rugosité. Expérimentalement, cette condition est largement vérifiée et des potentiels rugueux résiduels plus petit que le nanoKelvin sont attendus.

Le deuxième phénomène qui apparaît est un chauffage des atomes dû au départ irréversible d'un niveau de Floquet vers les niveaux de Floquet adjacents. Ce taux de chauffage est simplement calculé en utilisant la règle d'or de Fermi. On montre que le taux de chauffage est très faible dans la limite où l'énergie cinétique des atomes est très inférieure à l'énergie cinétique d'un atome qui parcourrait une distance égale à la longueur de corrélation du potentiel rugueux pendant une période de modulation. Plus précisément, dans la limite classique de vitesses élevées, on trouve que le taux de variation de l'énergie d'un atome de vitesse  $v_0$  s'écrit

$$\frac{dE}{dt} = -\pi\omega/(2mv_0^2) \left[ \frac{d}{dk} k^2 S(k) \right]_{k=\omega/v_0}, \quad (5.2)$$

où  $S$  est la densité spectrale du potentiel rugueux. En général  $S$  décroît rapidement à grand vecteur d'onde <sup>2</sup>. Par exemple, la densité spectrale du potentiel rugueux produit par un fil dont les bords ont des déformations à toutes les échelles (bruit blanc), décroît en  $e^{-kl_c}$ , où  $l_c$  est le double de la distance du guide au fil. La formule précédente montre alors que le taux de variation de l'énergie, pour une fréquence de modulation grande devant  $v_0/l_c$  décroît exponentiellement en  $e^{-l_c\omega/v_0}$ . Ainsi, comme attendu, le taux de chauffage diminue avec la fréquence de modulation, le taux de chauffage devenant exponentiellement faible lorsque la fréquence de modulation excède  $v_0/l_c$ . La formule précédente doit être corrigée pour des fréquences de modulations supérieures à  $mv_0^2/\hbar$ , pour lesquels la limite classique n'est plus valable. Le calcul montre que le taux de chauffage est alors plus important que celui donné par la formule 5.2. Dans le cas où la longueur d'onde de de Broglie des atomes est très grande devant la longueur de corrélation de la rugosité, le calcul quantique donne

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\pi\sqrt{2m\omega}}{\sqrt{\hbar^3}} S(\sqrt{2m\omega/\hbar}). \quad (5.3)$$

Ces résultats sont détaillés dans l'article [96]. La conclusion de cette étude est que, pour des paramètres expérimentaux réalistes, le taux de chauffage du nuage atomique est toujours extrêmement faible. Par exemple, pour des paramètres identiques à ceux de l'expérience que nous avons faite [96], le taux de chauffage maximum attendu est de 64 nK/s. Il est obtenu pour une température très élevée de 1.8 mK. A plus faible température, le taux de chauffage est encore plus faible.

---

<sup>2</sup>Le taux de variation de l'énergie peut être négatif pour certaines valeurs de  $v_0$  et certaines densité spectrales  $S$ . Cependant, on montre que, quelque soit la densité spectrale  $S$ , le taux de variation de  $E$  moyenné sur un nuage thermique est positif, comme attendu d'après les lois de la thermodynamique.

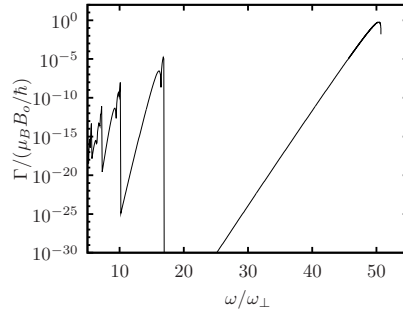


FIG. 5.7 – Taux de pertes dû au retournement de spin dans le guide modulé en fonction de la fréquence de modulation. Le champ magnétique longitudinal  $B_0$  et le gradient de champ transverses sont choisis de façon à ce que  $\mu B_0/(\hbar\omega_\perp) = 50$ , où  $\mu$  est le moment magnétique des atomes et  $\omega_\perp$  est la fréquence d'oscillation transverse pour un courant dans les fils égal à l'amplitude du courant modulé.

### Pertes par retournement de spin à haute fréquence de modulation

Pour diminuer les effets néfastes de la méthodes de modulation étudiées dans les deux paragraphes précédents, de grandes fréquences de modulations sont nécessaires. Cependant, à trop grande fréquence de modulation, la modulation locale de l'orientation du champ magnétique peut entraîner des retournement de spin des atomes et donc des pertes. Nous avons calculé le taux de pertes, dans la limite où la fréquence de modulation est élevée par rapport à la fréquence du confinement transverse. Pour cela, nous avons à nouveau utilisé le formalisme de Floquet. Le taux de perte obtenu en fonction de la fréquence de modulation est présenté sur la figure 5.7. Nous observons différentes résonances qui correspondent à l'absorption d'un nombre de "quanta de modulation" différents lors du processus de retournement du spin. Entre deux résonances, la chute rapide du taux de pertes avec l'écart à la résonance est dû au fait que, loin de résonance, l'état final à une grande énergie cinétique : sa fonction d'onde oscille rapidement et le facteur de recouvrement avec l'état initial est mauvais.

## 5.3 Conclusion

Les études que nous avons effectuées sur la rugosité des guides atomiques utilisant des microfils constituent des étapes importantes pour la communauté des puces atomiques. L'élucidation de l'origine de la rugosité permet de connaître les paramètres à améliorer lors du processus de fabrication. Malgré les progrès réalisés en microfabrication, nous pensons que la rugosité des fils sera toujours problématique. Notre étude sur l'annulation de la rugosité par une méthode de modulation est donc importante. Cette technique ouvre la



porte à de nouvelles expériences dans le domaine des puces atomiques. En particulier, la réalisation sur puce de gaz unidimensionnels en interaction forte, qui nécessite à la fois un fort confinement transverse et un très faible confinement longitudinal est maintenant envisageable.

En plus de la réduction de la rugosité, un autre avantage de la méthode de modulation est de rendre le potentiel transverse effectif (moyenné sur une période) quasiment insensible à tout champ externe non modulé. Ceci permet d'envisager de réaliser des potentiels complexes très sensibles, en l'absence de modulation, à tout champ externe. Par exemple, le double puits de potentiel réalisé par des fils que nous avons proposé dans [22] peut être réalisé avec des courants modulés.

# Chapitre 6

## Fluctuations de densité dans un gaz quasi-1D

Le comportement d'un système physique dépend de façon cruciale de sa dimensionnalité. En particulier, la physique des systèmes unidimensionnelle est très différente de la physique des systèmes tridimensionnels et elle a été l'objet de beaucoup d'études théoriques. Si les systèmes étudiés expérimentalement sont tri-dimensionnels, en confinant suffisamment un degré ou deux degrés de liberté, il est possible de réaliser des systèmes qui se comportent comme des systèmes bi-dimensionnels ou uni-dimensionnels. L'étude expérimentale des gaz en dimension réduite est relativement récente et beaucoup de phénomènes sont encore à explorer. Nous avons contribué à l'étude des systèmes unidimensionnels. Plus précisément, nous avons étudié les fluctuations de densité dans les gaz de Bosons quasi-unidimensionnels.

Contrairement à un gaz de Bosons tridimensionnel, un gaz de Bosons unidimensionnel sans interactions ne présente pas de phénomène de condensation de Bose-Einstein à la limite thermodynamique : la population des états excités ne sature pas lorsque la densité augmente à température constante. Ceci implique la présence de fluctuations de densité importantes dans le nuage car le phénomène de groupement bosonique est toujours présent : la fonction de corrélation à deux atomes à distance nulle vérifie  $g_2(0) = 2$ . Ce groupement de Bosons, dû aux corrélations entre atomes introduites par la statistique quantique, est responsable d'un excès de fluctuations de densité comparé au cas d'un gaz idéal d'atomes discernables.

En présence d'interactions répulsives entre atomes, les fluctuations de densité sont coûteuses en énergie. A suffisamment haute densité, les interactions entre atomes introduisent des corrélations entre atomes qui permettent d'abaisser l'énergie libre du gaz. Dans le cas où les interactions restent faibles, la fonction  $g_2(0)$  tend vers 1 : c'est le phénomène de transition vers un quasi-condensat. Cette transition n'est pas une transition de phase mais une transition molle.

Les résultats ci-dessus persistent dans le cas d'un nuage piégé dans un piège harmonique. A la limite thermodynamique où la fréquence d'oscillation tend vers 0 à densité constante (ce qui implique  $N\omega = \text{cste}$ ), il n'y a pas de saturation de la population des états excités et donc pas de phénomène de condensation de Bose-Einstein. En présence d'in-

teractions répulsives entre atomes faibles, une transition molle vers un quasi-condensat est attendue. Nous avons donné une expression analytique pour les paramètres de cette transition.

Dans le cas d'un système de taille finie, à cause de l'existence d'un gap entre l'énergie de l'état fondamental et l'énergie des états excités, un phénomène de condensation dû à une saturation des états excités peut avoir lieu à la place de la transition vers un quasi-condensat. Dans le cas d'un confinement harmonique, nous avons déterminé à quelle condition sur le confinement le nombre d'atomes ce phénomène de condensation pouvait avoir lieu.

En mesurant les fluctuations de densité à partir du bruit sur des images en absorption, nous avons étudié la transition vers un quasi-condensat dans un nuage quasi-unidimensionnel piégé dans un micro-piège très allongé. A faible densité atomique, nous avons mis en évidence le phénomène de groupement bosonique qui se traduit par un excès de fluctuations comparé aux fluctuations attendu dans le cas d'atomes non corrélés. A plus haute densité, nous avons mis en évidence la diminution des fluctuations de densité caractéristique de la transition vers un quasi-condensat. D'autre part, nous avons montré que la transition vers le quasi-condensat dans notre expérience n'est pas due à une saturation de la population des états excités. Plus précisément, un calcul dans lequel les interactions entre atomes sont prises en comptes uniquement via un champ moyen, les atomes étant toujours considérés comme des Bosons sans interactions, (théorie Hartree-Fock) ne prédit pas l'apparition du quasi-condensat dans notre expérience.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. Dans la première section, nous présentons nos résultats théoriques, publiés dans [9], sur la transition vers un quasi-condensat dans un gaz unidimensionnel confiné dans un piège harmonique. Dans la deuxième section, nous présentons nos mesures de fluctuations de densité dans les gaz quasi-unidimensionnel. Ces résultats sont publiés dans l'article [21]. Dans la troisième section, nous présentons les résultats de l'article [97] qui montrent que la transition vers un quasi-condensat que nous observons expérimentalement n'est pas explicable par la théorie de Hartree-Fock. Finalement nous concluons ce chapitre.

## 6.1 Transition vers un quasi-condensat dans un gaz de Bose unidimensionnel confiné dans un piège harmonique

Dans cette section, nous présentons les résultats théoriques que nous avons obtenus concernant la transition vers un quasi-condensat dans gaz unidimensionnel confiné dans un piège harmonique. Pour comprendre ce qui se passe dans un piège harmonique, il est nécessaire de connaître les résultats concernant les gaz unidimensionnels homogènes. C'est pourquoi la première partie de cette section est consacrée à un rappel sur la transition vers un quasi-condensat dans les gaz unidimensionnels homogènes. La deuxième sous-section présente les résultats obtenus dans le cas d'un gaz piégé dans un piège harmonique.

Plus précisément, les paramètres de la transition vers un quasi-condensat sont calculés. La troisième sous-section donne les conditions pour que cette transition ne soit pas occultée par un phénomène de condensation de Bose dû à la taille finie du système. Dans la quatrième sous-section, nous présentons une étude des conditions d'applications des résultats obtenus au cas de systèmes réels tridimensionnels.

### 6.1.1 Gaz 1D en interaction faible

Le système de Bosons unidimensionnel ayant des interactions répulsives ponctuelles est un système exactement soluble de la physique à  $N$  corps[63]. Les propriétés thermodynamiques peuvent être calculées numériquement[109], quel que soit le paramètre d'interaction et la température. Ces résultats théoriques ont permis de calculer beaucoup de propriétés des gaz de Bosons unidimensionnels comme la fonction de corrélation à deux corps à distance nulle[53] ou la distribution en impulsion[76]. Un paramètre important est le paramètre d'interaction  $\gamma = mg/(\hbar^2 n)$  où  $g$  est la constante de couplage,  $m$  la masse des atomes et  $n$  la densité linéaire. Ce paramètre détermine l'état du système à température faible. Pour des interactions entre atomes assez fortes pour que la condition  $\gamma \gg 1$  soit vérifiée, la fonction de corrélation à deux corps à distance nulle  $g_2(0)$  est très petite devant un. Le gaz acquiert alors des propriétés proches de celles d'un gaz de Fermions dans lequel le principe de Pauli impose  $g_2(0) = 0$ . C'est la limite du gaz de Girardeau[31] aussi appelée régime d'interaction fortes. Au contraire, dans la limite  $\gamma \ll 1$ , la fonction de corrélation à deux corps à distance nulle  $g_2(0)$  est de l'ordre de un, comme dans un condensat de Bose-Einstein. Dans cette limite, appelée limite d'interaction faible, le gaz est bien décrit par la théorie des quasi-condensats. Nous avons ici considéré une température nulle. En étudiant les propriétés collisionnelles, M. Olshanii [75] a montré que le régime de fermionisation, qui nécessite la condition  $\gamma \gg 1$ , est valable tant que la température est très inférieure à  $mg^2/\hbar^2$ .

Le raisonnement simple ci-dessous permet de retrouver les résultats énoncés précédemment et donne un sens physique aux deux régimes. L'état fondamental du gaz peut prendre deux formes asymptotiques différentes, comme schématisé Fig.6.1 : ou bien les positions des atomes sont fortement corrélées de façon à ce que deux atomes ne se trouvent jamais au même endroit, ou bien au contraire, la position d'un atome n'est que très faiblement corrélée à la position des autres atomes et les atomes se "recouvrent". Dans le premier cas, l'énergie des atomes du gaz est uniquement de l'énergie cinétique puisque les interactions entre atomes sont ponctuelles et deux atomes ne se trouvent jamais au même endroit. Cette énergie est de l'ordre de  $\hbar^2 n^2/m$  puisque la fonction d'onde d'un atome, à position des  $N - 1$  autres atomes données, présente des zéros espacés de  $1/n$  en moyenne. Dans le deuxième cas, chaque atome est délocalisé sur une grande zone et a peu d'énergie cinétique. Par contre, il interagit avec les autres atomes. L'énergie d'interaction est proportionnelle à la probabilité conditionnelle d'avoir un deuxième atome situé au même endroit qu'un premier atome, c'est à dire à  $ng_2(0)$ . Puisque  $g_2(0) \simeq 1$  pour des atomes non corrélés, l'énergie du gaz par atome est donc de l'ordre de  $ng$ . En comparant les énergies associées à l'état fortement corrélé et à l'état peu corrélé, on retrouve que l'état fondamental du

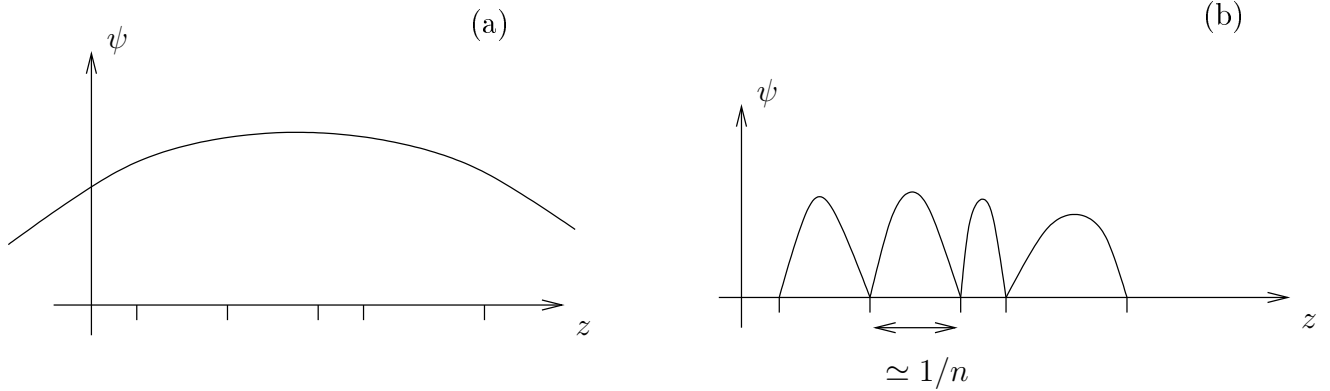


FIG. 6.1 – *Interprétation “avec les mains” des régimes d’interaction faible (graphe a) et forte (graphe b) d’un gaz unidimensionnel. Dans le régime d’interaction faible, la fonction d’onde d’un atome  $\psi(z_1)$ , à position des autres atomes donnée, varie peu sur l’échelle  $1/n$ . Au contraire, dans le régime d’interaction forte, la fonction d’onde s’annule pour lorsque  $z_1$  est égale à la position d’un autre atome.*

gaz est l’état fortement corrélé (régime de Tonks-Girardeau) pour  $\gamma \gg 1$  alors que l’état fondamental est l’état peu corrélé (régime de quasi-condensat) pour  $\gamma \ll 1$ <sup>1</sup>. Dans la suite, nous nous placerons toujours dans la limite d’interactions faibles où  $\gamma \ll 1$ .

La figure 6.2 donne les principales caractéristiques d’un gaz unidimensionnel en interaction faible, en fonction de la densité pour une température donnée. A faible densité, les interactions entre atomes ont un effet négligeable et le gaz est bien décrit par un gaz idéal. Ce régime se scinde en deux parties. A très faible densité, le gaz est très non dégénéré. La fonction de corrélation à un corps a une longueur de cohérence égale à la longueur d’onde de de Brooglie  $\hbar/\sqrt{Tm}$ . Le théorème de Wick s’applique puisque le gaz est bien représenté par un gaz sans interactions. La fonction de corrélation à deux corps a donc aussi une longueur de corrélation de l’ordre de  $\hbar/\sqrt{Tm}$  (à un facteur  $\sqrt{2}$  près). Lorsque la densité devient de l’ordre de  $\sqrt{mT}/\hbar$ , le gaz devient dégénéré et la longueur de corrélation des fonctions de corrélation à un et à deux corps augmentent. Dans la limite d’un gaz très dégénéré, obtenue pour  $n \gg \sqrt{mT}/\hbar$ , la fonction de corrélation décroît exponentiellement en  $e^{-mTz/(n\hbar^2)}$  à grande distance : la longueur de corrélation des fonctions  $g_1$  et  $g_2$  augmentent comme  $\hbar^2 n/(mT)$ . Dans ce régime de gaz très dégénéré, la valeur absolue du potentiel chimique est une échelle d’énergie importante dans le système et elle est de l’ordre de  $mT^2/(\hbar^2 n^2)$ .

Lorsque la densité devient de l’ordre de

$$n_{co} = \left( \frac{mT^2}{\hbar^2 g} \right)^{1/3}, \quad (6.1)$$

<sup>1</sup>Notons que le même raisonnement pour un gaz tridimensionnel montre que l’état faiblement corrélé est attendu pour une densité atomique  $\rho$  qui vérifie  $\rho a^3 \ll 1$ , où  $a = mg/(4\pi\hbar^2)$  est la longueur de diffusion. En opposition avec les gaz unidimensionnels, le régime d’interactions faibles à 3D est donc obtenu à faible densité atomique.

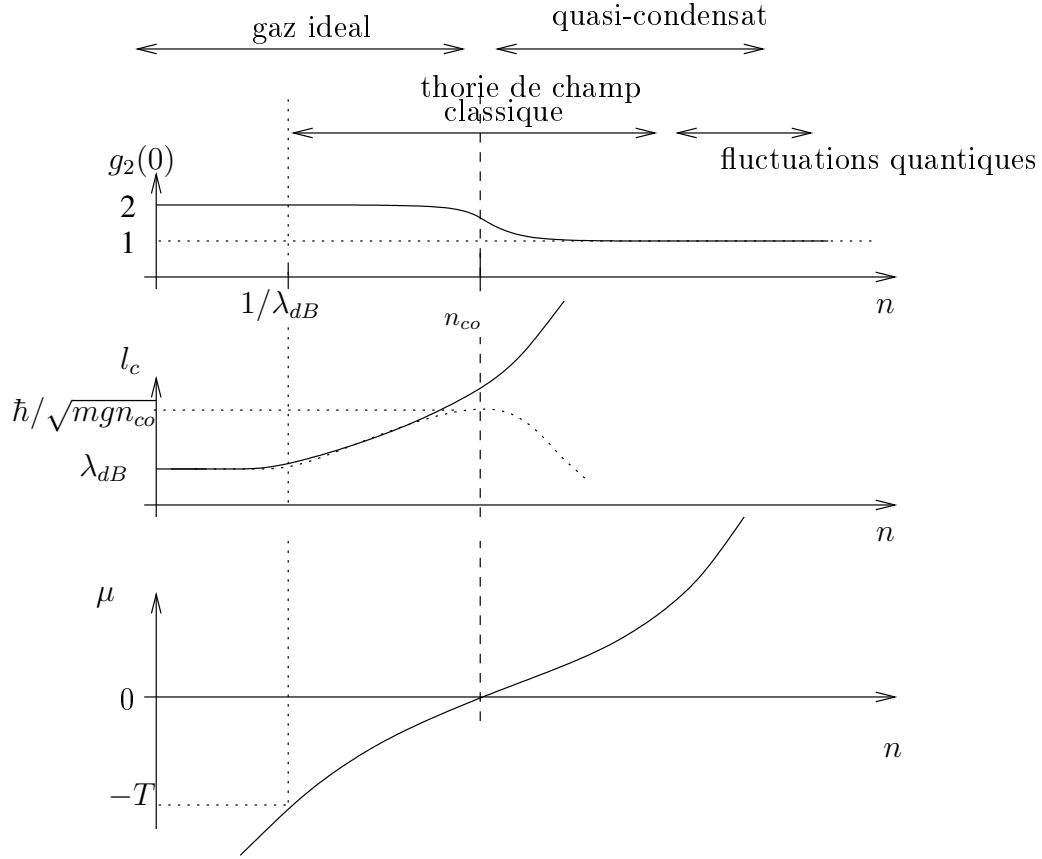


FIG. 6.2 – Différents régimes d'un gaz uni-dimensionnel en interaction faible. Sont représentés, en fonction de la densité linéique  $n$  pour une température donnée : la fonction de corrélation à 2 corps à distance nulle (graphe du haut), les longueurs de corrélation des fonctions de corrélation à 1 (courbe pleine) et à 2 corps (courbe pointillée) (graphe du milieu) et le potentiel chimique (graphe du bas). On a supposé que le paramètre  $k_B T \hbar^2 / (mg^2)$  est très grand devant un, ce qui permet de s'assurer que le gaz reste dans un régime d'interactions faibles. On distingue deux régimes principaux, qui se distinguent par la valeur de la fonction de corrélation à deux corps à distance nulle  $g^{(2)}(0)$  : le régime de gaz idéal pour  $n \ll n_{co}$ , où  $n_{co} = (mT^2 / (\hbar^2 g))^{1/3}$ , pour lequel  $g^{(2)}(0) \simeq 2$  et le régime de quasi-condensat pour  $n \gg n_{co}$  pour lequel  $g^{(2)}(0) \simeq 1$ . Le régime de gaz idéal est lui-même divisé en deux régimes : le régime de gaz non dégénéré pour  $n \ll 1/\lambda_{dB}$  où  $\lambda_{dB} = \hbar / \sqrt{mT}$  et le régime dégénéré pour  $n \gg 1/\lambda_{dB}$ . De même, le régime de quasi-condensat est séparé en une partie ( $n \ll T/g$ ) dans laquelle les fluctuations sont dominées par les excitations thermiques et une partie ( $n \gg T/g$ ) dans laquelle les fluctuations sont dominées par les fluctuations quantiques. D'autre part, pour  $1/\lambda_{dB} \ll n \ll \hbar^2 T / (mg)$  le gaz est bien décrit par un modèle de champ classique. Les graphes ne sont pas des résultats exacts mais des guides pour les yeux. En particulier, la fonction  $g^{(2)}(0)$  prend des valeurs légèrement inférieures à un dans le régime de quasi-condensat dominé par les fluctuations quantiques. L'échelle  $n$  est une échelle logarithmique. En particulier,  $1/\lambda_{dB} \ll n_{co}$ .

c'est-à-dire lorsque le potentiel chimique atteint  $-(\sqrt{m}gT/\hbar)^{2/3}$ , l'énergie d'interaction entre atomes, de l'ordre de  $gn_{co}$ , n'est plus négligeable devant la valeur absolue du potentiel chimique. Dans ce cas, les interactions entre atomes ne sont plus négligeables et le gaz subit une transition vers un quasi-condensat. Cette transition est due à l'apparition de corrélations entre atomes introduites par les interactions. Le théorème de Wick ne s'applique plus. La longueur de corrélation des fluctuations de densité diminue avec la densité alors que celle des fluctuations de phase continue d'augmenter. D'autre part, les fluctuations de densité diminuent en amplitude : la fonction  $g_2(0)$  tend vers un, sa valeur dans un vrai condensat. L'inversion de l'expression précédente de  $n_{co}$  montre que la transition vers un quasi-condensat a lieu pour une température  $T_{co} = \sqrt{\gamma}T_d$ , où  $T_d = \hbar^2 n^2/m$  est la température de dégénérescence quantique. Comme  $\gamma \ll 1$  dans le régime étudié, la transition a lieu pour un gaz très dégénéré. D'autre part, le paramètre  $t = \hbar^2 T/(mg^2)$  vaut  $\gamma^3$  à la transition. Comme le régime d'interaction faible nécessite, pour des gaz dégénérés, la condition  $\gamma \ll 1$ , l'analyse précédente n'a de sens que si  $t^{1/3} \ll 1$ .

Dans le raisonnement ci-dessus, nous avons supposé que l'on approchait la transition entre le régime de gaz de Bose idéal et le régime de quasi-condensat en partant du régime de gaz de Bose idéal. Ci-dessous nous retrouvons la condition de la transition (6.1) en supposant cette fois-ci que l'on approche la transition du côté quasi-condensat. Dans le régime de quasi-condensat, à température très grande devant  $gn$ , les fluctuations de densité sont induites par la population thermique des excitations collectives. En utilisant un calcul linéarisé de Bogoliubov[81, 71], on montre que les fluctuations de densité vérifient  $\delta n^2 \simeq 1/(\sqrt{\gamma} \lambda_T^2)$  où  $\lambda = \hbar/\sqrt{mT}$  est le l'ordre de la longueur d'onde de de Brooglie. Or le régime de quasi-condensat n'est valable que pour  $\delta n^2 \ll n^2$ . Cette condition et l'égalité précédente montre que le régime de quasi-condensat n'est valable que jusqu'à une température  $T \simeq \sqrt{gn}\sqrt{\hbar^2 n^2/m}$ . Cette condition n'est rien d'autre que la condition (6.1) donnant la densité à la transition entre un gaz idéal et un quasi-condensat.

Il est instructif de caractériser la transition entre le régime de gaz de Bose idéal et celui de quasi-condensat par le potentiel chimique du gaz. Nous avons vu que le régime de gaz de Bose idéal correspondait à un potentiel chimique négatif qui vérifie  $\mu \ll -(\sqrt{m}gT/\hbar)^{2/3}$ . D'un autre côté, nous avons montré ci-dessous que le régime de quasi-condensat était valable pour une densité  $n \gg n_{co}$ . Or le potentiel chimique dans le régime de quasi-condensat est positif et est approximativement  $\mu = gn$ . On trouve donc que le régime de quasi-condensat correspond à  $\mu \gg (\sqrt{m}gT/\hbar)^{2/3}$ . Ainsi, la transition entre les deux régimes correspond au passage à 0 du potentiel chimique, la "largeur en potentiel chimique" de la transition étant de l'ordre de  $(\sqrt{m}gT/\hbar)^{2/3}$ .

Plusieurs approches théoriques permettent de sonder la transition entre un gaz de Bose idéal et un quasi-condensat. Comme nous l'avons déjà mentionné, des résultats exacts peuvent être obtenus en utilisant la théorie de Lieb-Liniger : par exemple l'équation d'état  $n(\mu, T)$  et la fonction  $g_2(0)$  peuvent être calculées. D'autre part, des méthodes approchées donnent des résultats satisfaisants. Ainsi, une description du système via un champ classique  $\psi(z) = \sqrt{\rho}e^{i\theta}$ , possédant une énergie d'interaction  $(g/2) \int dz |\psi|^4$ , est suffisante[16, 6] pour décrire la transition entre le régime de gaz de Bose idéal très dégénéré et le régime

de quasi-condensat. Ceci est dû au fait que la population des états quantiques pertinents est très grande dans ces régimes. Dans la suite, nous utiliserons les résultats exacts de la théorie de Lieb-Liniger pour confronter nos expressions analytiques aux calculs numériques.

### 6.1.2 Cas d'un gaz confiné dans dans piège harmonique

Nous nous intéressons ici au cas d'un gaz unidimensionnel confiné dans un piège harmonique de fréquence d'oscillation  $\omega$ . Pour des fréquences d'oscillations suffisamment faibles, les échelles de variations spatiales de la densité dans le nuage sont très petites devant les longueurs de corrélation du gaz et il est possible d'utiliser une approche de densité locale. La profil de densité est alors bien décrit en utilisant l'équation d'état  $n(\mu, T)$  d'un gaz de Bose homogène infini et en utilisant le potentiel chimique local  $\mu(z) = \mu_0 - m\omega^2 z^2/2$ . La transition molle vers un quasi-condensat est attendue, pour une température donnée, lorsque la densité pic atteint  $n_{co}$ , donné équation 6.1. Pour des densités pics très inférieures à  $n_{co}$ , le profil de densité est bien décrit en utilisant l'équation d'état  $n(\mu, T)$  d'un gaz de Bose idéal. Ceci nous permet de calculer le nombre d'atomes total qui s'écrit, pour des nuages très dégénérés au centre du piège,

$$N = T/(\hbar\omega) \ln(T/|\mu_0|). \quad (6.2)$$

La densité pic est reliée au potentiel chimique par

$$n(0) = \sqrt{mT^2/(2\hbar^2|\mu_0|)}. \quad (6.3)$$

Le nombre d'atomes à la transition vers un quasi-condensat est obtenu lorsque la densité pic devient égale à  $n_{co}$ . En injectant  $n(0) = n_{co}$  dans les équations précédentes on trouve que le nombre d'atomes à la transition est

$$N_{co} = T/(\hbar\omega) \ln\left((\hbar^2 T/(mg^2))^{1/3}\right) = T/(3\hbar\omega) \ln(t/2). \quad (6.4)$$

Comme  $t^{1/3} \gg 1$  dans le régime d'interactions faible, cette équation s'inverse approximativement en

$$T_{co} = N\hbar\omega / \ln\left((N\hbar^3\omega/(mg^2))^{1/3}\right). \quad (6.5)$$

Comme  $t \gg 1$ , la transition a lieu pour un gaz très dégénéré au centre du nuage et  $N_{co} > T/\hbar\omega$ . Cependant le rapport  $N_{co}\hbar\omega/T$  est donné par un logarithme et, comme on le verra plus loin, il est très difficile expérimentalement de réaliser des rapport  $N_{co}\hbar\omega/T$  très grand tout en restant dans le domaine de la physique unidimensionnelle.

Ces expressions des paramètres  $T$  et  $N$  à la transitions vers un quasi-condensat ont été comparées à un calcul numérique. Les résultats, présentés dans l'article [9], montrent que les résultats simples présentés ci-dessus sont en bon accords avec les résultats des calculs exacts.



### 6.1.3 Compétition avec un phénomène de condensation dû à la taille finie du système

Dans une situation plus réaliste où la fréquence d'oscillation (resp. le nombre d'atomes) est non nulle (resp. non infinie), la transition vers un quasi-condensat est en compétition avec un phénomène de condensation dû à la saturation de la population des états excités du piège. En effet, à cause du gap fini en énergie entre l'état fondamental et les états excités, une saturation de la population des états excités a toujours lieu dans un système de taille finie lorsque le potentiel chimique tend vers l'énergie de l'état fondamental. Il a été montré dans [52] que, pour un gaz de Bose idéal, la saturation des états excités apparaissait pour un nombre d'atomes  $N_C$  qui vérifie

$$N_C = T/(\hbar\omega) \ln(2T/\hbar\omega). \quad (6.6)$$

Ce phénomène est dû à la taille finie du système puisque la quantité  $N_C\hbar\omega/T$  tend vers l'infini quand  $\hbar\omega$  tend vers zéro. Nous donnons ci-dessous une dérivation simple de l'équation 6.6.  $N_C$  est le nombre d'atomes maximum qui peut être accumulé dans les états excités. C'est donc la population des états excités pour un potentiel chimique égale à l'énergie de l'état fondamental  $\hbar\omega/2$ . Comme les niveaux d'énergie d'un piège harmonique sont équidistants,  $N_C$  est aussi le nombre d'atomes total pour un potentiel chimique égale à  $-\hbar\omega/2$ . L'équation 6.2 donne alors l'expression 6.6 de  $N_C$ . Notons que l'hypothèse d'équilibre local, nécessaire pour l'établissement de l'équation 6.2, n'est pas vérifiée pour un potentiel chimique aussi grand que  $-\hbar\omega/2$ . Cependant, le résultat obtenu est une bonne approximation.

La transition induite par les interactions vers un quasi-condensat apparaît, lorsque le nombre d'atomes augmente à température fixée, au lieu du phénomène de condensation si  $N_{co}$  est inférieur à  $N_C$ . Cette condition s'écrit

$$\omega \ll \omega_{co} = \left(mg^2T^2/\hbar^5\right)^{1/3}. \quad (6.7)$$

Le graphe 6.3 donne, dans l'espace  $(t, \hbar^2\omega/(mg^2))$ , le domaine dans lequel une transition induite par les interactions a lieu et celui où un phénomène de condensation apparaît. Les limites de ce graphe correspondent à des transitions molles près desquels les deux phénomènes agissent.

La condition donnée équation 6.7 est facilement réalisée expérimentalement et les interactions répulsives en général gouvernent la transition vers un état cohérent<sup>2</sup> dans un gaz unidimensionnel.

### 6.1.4 Cas d'un système réel

Le régime de gaz unidimensionnel est réalisé expérimentalement si la température et le potentiel chimique des atomes sont très petits devant l'énergie du confinement transverse des atomes  $\hbar\omega_{\perp}$ . Dans le cas d'un gaz en interactions faibles proche de la transition vers

<sup>2</sup>On parle ici d'état cohérent au sens de la fonction  $g_2$  (voir la section suivante).

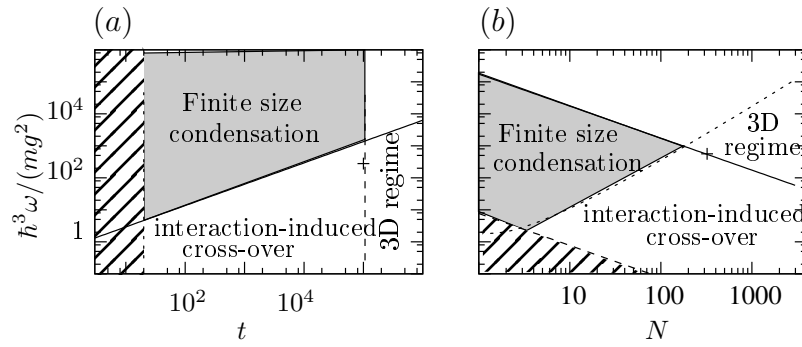


FIG. 6.3 – Domaines des différentes transitions qui peuvent avoir lieu dans un gaz unidimensionnel. Blanc : domaine où se produit une transition vers un quasi-condensat due aux interactions. Gris clair : domaine où se produit une condensation due à la taille finie du système. Dans le graphe (a), on s’intéresse la transition lorsque le nombre d’atomes augmente à température donnée et les paramètres sont les quantités sans dimension  $t = \hbar^2 T / (mg^2)$  et  $\hbar^3 \omega / (mg^2)$ . Dans le graphe (b), on s’intéresse la transition lorsque la température diminue à nombre d’atomes  $N$  donné et les paramètres sont les quantités sans dimension  $N$  et  $\hbar^3 \omega / (mg^2)$ . La zone hachurée correspond au cas où la condition d’interaction faible  $\gamma \ll 1$  n’est pas vérifiée près de la transition. La limite de validité du domaine unidimensionnel est aussi représentée dans le cas d’atomes d’Helium métastables confinés dans un piège de fréquence transverse égale à 200 Hz. La croix correspond à un confinement longitudinal de seulement 1 Hz pour ce système. Toutes les limites représentées sur ce graphe sont des “cross-over” mous.

le quasi-condensat, cette condition est vérifiée si  $T \ll \hbar\omega_{\perp}$ . En effet, la valeur absolue du potentiel chimique est très inférieur à la température lorsque le gaz est proche de la transition.

Dans la limite où  $\hbar^2/(ma^2) \gg \hbar\omega_{\perp}$ ,  $a$  étant la longueur de diffusion des atomes, le paramètre d'interaction unidimensionnel  $g$  est relié aux propriétés collisionnelles tridimensionnelles par la relation  $g = 2\hbar\omega_{\perp}a$  [75]. La condition 6.7 pour observer une transition due aux interactions s'écrit alors

$$\omega \ll \omega \left( \frac{T}{\hbar\omega_{\perp}} \right)^{2/3} \left( \frac{a}{l_{\perp}} \right)^{2/3}, \quad (6.8)$$

où  $l_{\perp} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$  est l'extension de l'état fondamental du mouvement transverse. Expérimentalement, cette inégalité est facilement vérifiée et la physique est dominée par les interactions entre atomes.

Une particularité des gaz unidimensionnels est que la transition vers l'état cohérent<sup>3</sup> (le quasi-condensat) a lieu pour un gaz très dégénéré. Dans un piège harmonique, si on utilise les variables  $N$  et  $T$ , cela se traduit par le fait que  $N_{co} > T/\hbar\omega$ . Cependant, pour mettre clairement en évidence ce phénomène en utilisant les variables  $N$  et  $T$ , une très grande valeur du paramètre  $t$  est requise, comme il apparaît équation 6.4. Or la condition du régime unidimensionnel et l'expression  $g = 2\hbar\omega_{\perp}a$  montrent que le paramètre  $t$  maximum qui peut être atteint est de l'ordre de  $t_{max} \simeq \hbar/(ma^2\omega_{\perp})$ . Pour obtenir un paramètre  $t$  important, il convient donc de ne pas utiliser un confinement transverse trop important. D'autre part, il est avantageux d'utiliser des atomes légers, comme l'Helium. Sur le graphe 6.3, nous avons représenté la limite de validité du régime unidimensionnel dans le cas de l'atome d'hélium métastable confiné dans un piège de fréquence d'oscillation transverse égale à 200 Hz. Des valeurs de  $t$  aussi grandes que  $10^5$  peuvent alors être atteintes. L'inconvénient est que le nombre d'atomes et le confinement longitudinal sont faibles, comme on le voit sur le graphe.

Une alternative est d'utiliser d'une résonance de Feshbach pour diminuer la longueur de diffusion, par exemple en utilisant des atomes de Lithium. Cette possibilité est détaillée dans notre article [9]. Dans ce cas, la transition vers le quasi-condensat peut être sondée avec des nombres d'atomes et des confinements plus importants. D'autre part, il est possible avec cette résonance de Feshbach de diminuer suffisamment la longueur de diffusion pour pouvoir observer le phénomène de condensation dû à la taille finie avec un nombre important d'atomes.

Notons finalement que la condition  $T \ll \hbar\omega_{\perp}$  est pessimiste. En effet, expérimentalement, comme nous allons le voir dans la section 6.2, nous avons pu observer toutes les caractéristiques de la transition entre un gaz idéal et un quasi-condensat dans un gaz de rubidium quasi-unidimensionnel dont la température était aussi grande que  $2\hbar\omega_{\perp}$ . Plus précisément, nous avons montré que la transition avait lieu pour un gaz très dégénéré et nous avons montré qu'elle n'était pas due à un phénomène de condensation.

<sup>3</sup>Voir la section 6.1.5 pour le sens de ce mot

### 6.1.5 Terminologie

Comme nous l'avons déjà mentionné, la transition entre le régime de gaz de Bose idéal très dégénéré et le régime de quasi-condensat à haute température peuvent être bien représenté par la physique statistique d'un champ classique. Le hamiltonien de ce champ classique  $\psi(z)$  contient le terme d'interaction  $(g/2) \int dz |\psi|^4$ . Dans cette approche, la discrétisation des atomes n'est pas prise en compte,  $\psi$  étant un champ moyen. C'est pour cela que les régimes des gaz unidimensionnels en interactions faibles sont appelés régimes de champ moyen dans la littérature. Cette terminologie ne signifie pas l'absence de corrélations entre particules.

Notons aussi que le régime de quasi-condensat est aussi appelé régime cohérent. Cette appellation fait référence à la fonction  $g_2$  qui est identique à celle d'un état cohérent. Cela ne signifie pas que le gaz est cohérent au sens de la fonction  $g_1$ .

## 6.2 Mesure des fluctuations de densité dans un gaz quasi-unidimensionnel : transition d'un gaz de Bose idéal à un quasi-condensat

Comme indiqué dans la section précédente, la transition vers un quasi-condensat dans un gaz unidimensionnel n'est rien d'autre que l'inhibition du phénomène de groupement bosonique, qui se traduit par une diminution des fluctuations de densité atomiques. En analysant le bruit sur des images en absorption, nous avons mis en évidence le passage vers un quasi-condensat dans un gaz quasi-unidimensionnel. En effet, à "faible" densité nous avons mis en évidence le phénomène de groupement bosonique par la présence de fortes fluctuations de densité. Nous avons montré que ce phénomène de groupement bosonique persistait même pour un gaz fortement dégénéré. A "forte" densité, nous avons mesuré une réduction des fluctuations de densité, en accord avec la prédiction théorique pour un quasi-condensat.

Le plan de cette section est le suivant. La première sous-section décrit le dispositif expérimental et les mesures réalisées. La deuxième sous-section est une introduction au phénomène de groupement bosonique. La mise en évidence de ce phénomène quantique est présentée dans la sous-section suivante. La dernière sous-section présente les fluctuations de densité mesurée dans le régime de quasi-condensat, et la comparaison avec un calcul théorique.

### 6.2.1 Dispositif expérimental

Dans notre expérience, des atomes de rubidium sont confinés dans un micro-piège magnétique réalisé par une structure en forme de H, comme montré sur la figure 6.4. Le courant de 3 A passant dans la barre centrale du H et un champ transverse homogène de l'ordre de 30 G réalisent le confinement transverse des atomes. Avec un champs longitudinal de 1 G, la fréquence d'oscillation transverse est de 3,0 kHz. Le courant passant dans les barres du

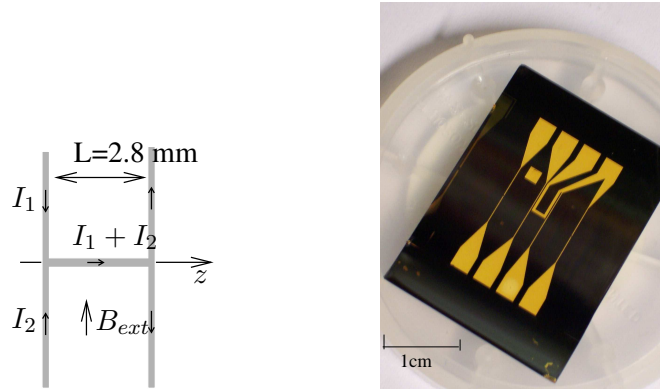


FIG. 6.4 – Fil en forme de H utilisé pour réaliser des pièges très allongés. La partie centrale du H et un champ externe homogène réalisent le confinement transverse. Les bras du H sont responsables du confinement longitudinal. La photo montre la puce en silicium sur laquelle les fils sont déposés par électrodéposition.

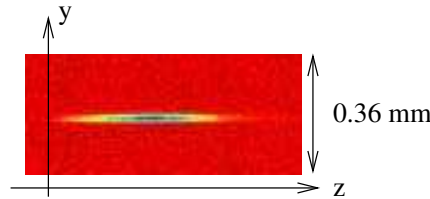


FIG. 6.5 – Image en absorption d'un nuage atomique confiné dans le piège très allongé réalisé par le fil en forme de H de la puce (voir fig. 6.4).

H réalise un champs longitudinal quadratique en  $z$ , qui produit le confinement longitudinal des atomes. La fréquence longitudinale d'oscillation des atomes peut être variée de 6 HZ environ à 20 Hz.

Les mesures de fluctuations de densité atomiques sont réalisées sur des images en absorption prises in situ, comme celle présentée Fig.6.5. Aucune information sur la distribution transverse des atomes n'est obtenue, la taille transverse des images étant limitée par la résolution optique et la diffusion des atomes lors de la prise d'image. Nous étudions donc les profils longitudinaux, obtenus à partir des images en intégrant dans la direction transverse.

Pour mesurer les fluctuations de densité, environ 300 images sont prises dans les mêmes conditions expérimentales (ce qui correspond à environ deux heures d'acquisition de données) sur lesquelles une étude statistique est réalisée. Pour s'affranchir de petites dérives lentes de la température et des fluctuations du nombre d'atomes total, nous comparons chaque courbe avec la courbe moyenne obtenue avec les 30 images adjacentes. L'aire de la courbe moyenne est renormalisée pour contenir le même nombre d'atome total. On s'affranchit ainsi des fluctuations coup à coup de nombre d'atomes, qui sont de quelques pourcent.

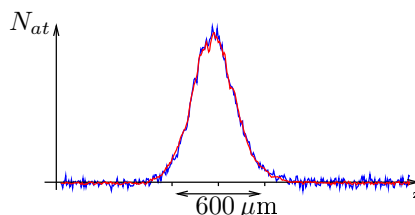


FIG. 6.6 – Un profil longitudinal typique (bleu), comparé au profil de référence (rouge). On observe dans les régions où la densité atomique est nulle des fluctuations dues au bruit de grenaille optique des impulsions optiques utilisées pour réaliser l’image. Les fluctuations mesurées dans le nuage atomique présentent un excès de bruit (non visible à l’œil) dû à la contribution des fluctuations de densité atomique.

La Fig.6.6 compare une courbe typique avec sa courbe de référence. A grande distance du nuage atomique, les fluctuations observées sont dues aux fluctuations du nombre de photons reçu par un pixel. Nous avons vérifié que ces fluctuations sont limitées par le shot noise optique. Dans la zone où des atomes sont présents, des fluctuations supplémentaires sont dues aux fluctuations de densité atomiques. Pour chaque pixel, la contribution attendue du shot noise optique est soustraite. Finalement, nous réalisons un histogramme des fluctuations de nombre d’atomes, en regroupant les résultats en fonction du nombre moyen d’atomes dans le pixel considéré.

La figure 6.7 montre le résultat obtenu pour un nuage très chaud. On observe des fluctuations de nombre d’atomes qui augmentent linéairement avec le nombre moyen d’atomes. Ce comportement est caractéristique d’un nuage d’atomes non corrélés. En effet, si chaque atome a une probabilité  $\alpha \ll 1$  de se trouver dans le pixel considéré, alors la distribution du nombre d’atomes dans le pixel est donnée par la distribution binomiale  $\alpha^n \binom{n}{N}$ , où  $N$  est le nombre d’atomes total. Les fluctuations sont donc

$$\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle (1 - \alpha) \simeq \langle n \rangle. \quad (6.9)$$

Expérimentalement, la pente observée est très inférieure à sa valeur attendue de un. Ceci est dû à la résolution optique de notre système d’imagerie, qui n’est pas très inférieure à la taille du pixel. La contribution à l’absorption d’un atome unique est donc réduite. Un calcul prenant en compte la résolution finie du système d’imagerie, mesurée indépendamment, est en bon accord avec la pente observée.

### 6.2.2 Phénomène de groupement bosonique

L’analyse précédente est valable pour des atomes discernables. Dans le cas d’atomes identiques, une telle analyse n’est pas valable car elle considère comme différentes des situations identiques physiquement car ne différant que par l’échange de deux atomes. Pour décrire correctement un gaz de particules identiques, on utilise une base à une particule ( $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots$ ). On prendra ici comme vecteurs  $|\varphi_1\rangle$  les états propres du hamiltonien à une

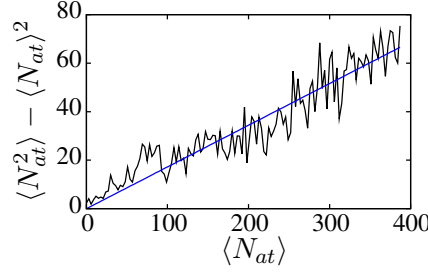


FIG. 6.7 – Fluctuations de nombre d’atomes dans chacun des pixels, en fonction du nombre moyen d’atomes, pour un nuage à une température très élevée ( $T \simeq 10\hbar\omega$ ). On observe des fluctuations linéaires en  $\langle N_{at} \rangle$ , le nombre moyen d’atomes, comme attendu pour un nuage très non dégénéré.

particule. Une base des état du gaz est la base de Fock ( $|n_1, n_2, \dots\rangle$ ) où  $n_1, n_2, \dots$  sont des entiers naturels qui donne la population de chaque état  $|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle, \dots$ . Des échanges de populations entre des états  $|\varphi_i\rangle$  ont lieu lors de collisions. Ainsi, à l’équilibre thermodynamique, chaque état  $|\varphi_i\rangle$  est en équilibre avec les autres états pouvant être considérés comme un réservoir de particules et d’énergie. Ceci justifie l’utilisation de la représentation grand-canonique<sup>4</sup>. A une température  $T$  et un potentiel chimique  $\mu$ , pour un gaz de Bosons, la probabilité pour qu’il y ait  $n$  atomes dans l’état  $|\varphi_i\rangle$  d’énergie  $\epsilon_i$  est donnée par la loi de Boltzman

$$p_n = e^{n(\epsilon_i - \mu)/T} / Z, \quad (6.10)$$

où  $Z = \sum e^{n(\epsilon_i - \mu)/T}$ . Le moment d’ordre deux de cette distribution donne les fluctuations

$$\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = \langle n \rangle + \langle n \rangle^2. \quad (6.11)$$

Le premier terme correspond au bruit de grenaille attendu pour des atomes discernables. Le terme  $\langle n \rangle^2$  est le terme de groupement bosonique. En écrivant  $n = a^+a$ , où  $a^+$  et  $a$  sont les opérateurs de création et d’annihilation d’un Boson dans le mode  $|\varphi_i\rangle$ , et en utilisant les relations de commutations des opérateurs  $a^+$  et  $a$ , on montre que la relation ci-dessous implique  $\langle a^+a^+aa \rangle = 2\langle a^+a \rangle^2$ , ce qui n’est rien d’autre qu’un cas particulier du théorème de Wick. Le terme de groupement bosonique dans l’équation 6.11 est négligeable devant le terme de grenaille tant que  $\langle n \rangle \ll 1$ , c’est-à-dire tant que la population moyenne de l’état est très petite devant un.

Expérimentalement, on mesure les fluctuations du nombre d’atomes  $N$  dans un certain volume d’observation dans l’espace des phases. Comme les populations de différents états propres ne sont pas corrélées, l’équation 6.11 montre que les fluctuations de  $N$  sont

$$\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \langle N \rangle + \sum_i \langle n_i \rangle^2, \quad (6.12)$$

<sup>4</sup>Pour que ceci soit valable, les fluctuations du nombre d’atomes dans chaque états doivent être suffisamment petites pour négliger la réplétion induite dans les autres états. Cette condition n’est pas valable près de la transition de Bose-Einstein dans un gaz parfait tri-dimensionnel. La représentation canonique doit être utilisée dans ce cas [102, 30]

où la somme est faite sur les états propres  $|\varphi_i\rangle$  contenus dans le volume d'observation. Supposons pour simplifier que ce volume contiennent  $M$  états propres de même population moyenne. L'équation précédente se simplifie alors en

$$\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \langle N \rangle + \langle N \rangle \frac{\langle N \rangle}{M}. \quad (6.13)$$

Le terme de groupement bosonique est diminué par le facteur  $M$ . Pour le détecter dans une mesure de résolution donnée,  $M$  ne doit pas être trop grand. D'autre part,  $\frac{\langle N \rangle}{M}$  est la densité dans l'espace des phases. Tant que cette densité est très petite devant un, les fluctuations de  $N$  sont très proches du bruit de grenaille  $\langle N \rangle$ .

Dans notre expérience, le volume d'observation est une tranche de l'espace des phase d'épaisseur  $\Delta = 6 \mu\text{m}$  dans la direction longitudinale. A température  $T \gg \hbar\omega_\perp$  et pour une densité dans l'espace des phases faible, ce volume contient environ  $(T/(\hbar\omega_\perp))^2$  états transverse peuplés. Pour chacun des niveaux transverse, le volume occupé dans l'espace des phase  $(z, p_z)$  est de l'ordre de  $\Delta\sqrt{mT}$ . Le nombre d'états peuplés est donc de l'ordre de  $\Delta\sqrt{mT}/\hbar$ . Finalement, le nombre d'états peuplés est

$$M \simeq (T/(\hbar\omega_\perp))^2 \Delta\sqrt{mT}/\hbar. \quad (6.14)$$

Les fluctuations de nombre d'atomes s'écrivent alors

$$\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \langle N \rangle + \langle N \rangle^2 \frac{\hbar(\hbar\omega_\perp)^2}{T^2 \Delta\sqrt{mT}} \quad (6.15)$$

Si le raisonnement simple ci-dessus donne la loi d'échelle de  $\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 - \langle N \rangle$ , le facteur numérique exact est obtenu en réalisant le calcul 6.12 et en utilisant la distribution de Maxwell-Boltzmann. Pour que  $M$  ne soit pas trop grand, donc pour que le phénomène de groupement bosonique ne soit pas trop réduit, on cherchera à réaliser des nuages à une température faible, proche de  $\hbar\omega_\perp$ . D'autre part, pour que le terme de bunching ne soit pas trop faible par rapport au bruit de grenaille, on cherchera à augmenter la densité dans l'espace des phases.

L'analyse ci-dessus n'est valable que tant que la densité dans l'espace des phases est petite devant un. Lorsque la densité dans l'espace des phase devient de l'ordre ou plus grande que un, la distribution des populations moyennes des états en fonction de leur énergie devient plus piquée en zéro. Le nombre effectif d'états peuplés est alors plus petit que la valeur donnée équation 6.14 et le phénomène de groupement bosonique est renforcé.

Dans le cas d'un nuage fortement dégénéré (*i.e.* densité dans l'espace des phases grande devant un), les fluctuations de nombre d'atomes peuvent à nouveau être estimées simplement. Plus précisément, à haute densité dans l'espace des phases, et si la valeur absolue du potentiel chimique est très petite devant  $\hbar\omega_\perp$ , la plupart des atomes sont accumulés dans le mode transverse fondamental et le gaz unidimensionnel résultant est très dégénéré. La populations des états de quantité de mouvement  $p \ll \sqrt{m|\mu|}$  est grande devant un et s'écrit  $\langle n \rangle \simeq T/(p^2/(2m) + |\mu|)$ . Le volume efficace de l'espace des phases est donc de l'ordre de



$\Delta\sqrt{m|\mu|}$  et le nombre d'état peuplés est

$$M \simeq \Delta\sqrt{m|\mu|}/\hbar. \quad (6.16)$$

Dans ce régime très dégénéré, le potentiel chimique est lié à la densité linéaire, notée  $n_{1D}$ , par la relation  $n_{1D} \simeq T/(\hbar\sqrt{2|m\mu|}/m)$ . En utilisant cette expression, les équations 6.13 et 6.16 donnent des fluctuations de nombre d'atomes

$$\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 \simeq \langle N \rangle^3 \frac{\hbar^2}{m\Delta^2 T}. \quad (6.17)$$

En conclusion, à température constante, lorsque la densité linéaire augmente, le groupement bosonique introduit des fluctuations qui augmente en  $\langle N \rangle^2$  à faible densité. Lorsque ces fluctuations deviennent comparable au bruit de grenaille, elle se mettent à augmenter plus rapidement que  $\langle N \rangle^2$ . A très grande densité, on s'attend à une augmentation en  $\langle N \rangle^3$  des fluctuations.

Dans l'analyse qui précède nous avons supposé implicitement que la taille  $\Delta$  de la zone sur laquelle le nombre d'atomes et ses fluctuations étaient mesurés est très grande devant la longueur de corrélation du système. Plus précisément, on a supposé que les propriétés de la zone étudiée était identiques à celle d'une boîte de taille  $\Delta$  en équilibre avec un réservoir de particules de potentiel chimique  $\mu$  et un réservoir d'énergie de température  $T$ . Pour que ceci soit valable, la quantification des impulsions imposée par la taille  $\Delta$  doit avoir un effet négligeable, ce qui implique que  $\Delta$  doit être grande devant l'inverse de la largeur de la distribution en impulsion. Plus précisément,  $\Delta$  doit être grand devant  $\hbar/\sqrt{m|\mu|}$  et devant  $\hbar/\sqrt{mT}$ .

Si les conditions précédentes ne sont pas satisfaites, une analyse plus fine est nécessaire pour calculer les fluctuations de nombre d'atomes. Il est dans ce cas utile d'introduire la fonction de corrélation à deux corps  $g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2) \rangle / (\langle \rho(\mathbf{r}_1) \rangle \langle \rho(\mathbf{r}_2) \rangle) - \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) / \langle \rho(\mathbf{r}_1) \rangle$ , où  $\rho$  est la densité atomique. En effet, les fluctuations de nombre d'atomes s'écrivent

$$\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \langle N \rangle + \int \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \langle \rho(\mathbf{r}_1) \rangle \langle \rho(\mathbf{r}_2) \rangle (g_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - 1) \quad (6.18)$$

où les intégrations sont faites sur le volume délimité par  $z \in [z_0, z_0 + \Delta]$ .

En développant l'opérateur champ sur les opérateur d'annihilation correspondant aux états propres  $|\varphi_i\rangle$  et en utilisant l'équation 6.11, on calcule aisément la fonction  $g_2$ . Elle vaut deux en zéro et tend vers un à l'infini. Sa forme dépend du paramètre de dégénérescence du gaz. Dans le cas où la densité dans l'espace des phase est très petite devant un et la température grande devant  $\hbar\omega_\perp$ ,  $g_2 - 1$  est proche d'une gaussienne de largeur rms égale à la longueur d'onde de de Brooglie  $\lambda_{dB}$ . Si  $\lambda_{dB}$  est très petite devant  $\Delta$ , l'équation 6.18 donne alors des fluctuations dues au groupement bosonique de l'ordre de  $L_\perp^2 \Delta \rho^2 \lambda_{dB}^3$ , où  $\rho$  est la densité pic et  $L_\perp \simeq \sqrt{T/m/\omega_\perp}$  est la taille transverse du nuage. En écrivant  $\rho \simeq \langle N \rangle / (L_\perp^2 \Delta)$ , on retrouve bien les fluctuations données par l'équation 6.13 et 6.14.

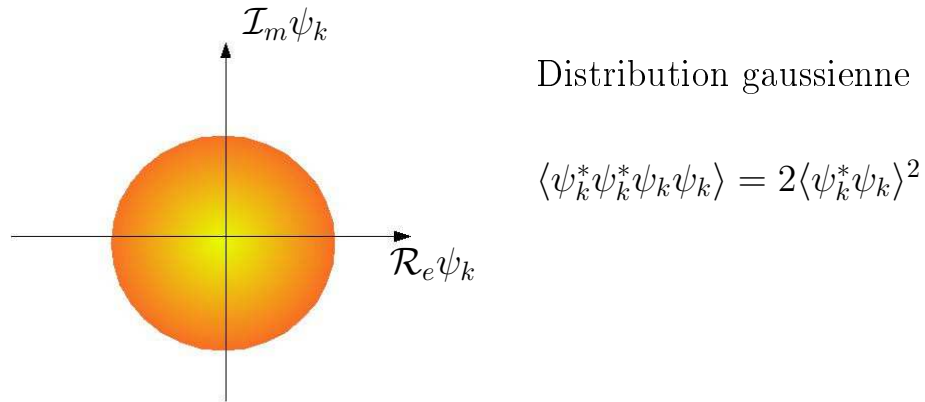


FIG. 6.8 – *Distribution gaussienne du champ  $\psi_k$  dans l'espace des phases. Cette distribution gaussienne est responsable du phénomène de bunching.*

Dans le cas inverse d'un gaz très dégénéré, seul le gaz unidimensionnel du mode transverse fondamental peut être considéré et la fonction  $(g_2 - 1)$  est proche d'une exponentielle décroissante de longueur de décroissance égale à  $l_c = n_{1D} \hbar^2 / (mT)$ . Si  $l_c \ll \Delta$ , l'équation (6.18) donne alors les fluctuations  $\Delta l_c n_{1D}^2$ . En utilisant l'expression de  $l_c$ , on trouve la même expression que celle de l'équation 6.17.

Le phénomène de groupement bosonique est un phénomène qui a fait coulé beaucoup d'encre. Il implique l'existence de corrélations entre particules puisque, comme détaillé ci-dessus, on attend simplement le bruit de grenaille pour des particules non corrélées. Ces corrélations ne sont pas apparentes dans le formalisme de seconde quantification utilisé ci-dessus car elles sont dues à la symétrisation des fonctions d'ondes à plusieurs Bosons qui sont contenues de façon non explicite dans ce formalisme. D'autres phénomènes ont pour origine l'intrication présente dans un système de Bosons à cause de la symétrisation. Par exemple, lorsque l'on fait interférer deux condensats indépendants, on obtient un système de franges dont la position est aléatoire mais dont la visibilité est bonne [2], et ceci même si chacun des deux condensats avaient initialement un nombre d'atome bien défini [17] (et donc une phase non définie). Dans le cas d'un réseau unidimensionnel de condensats indépendants, on observe aussi de fortes modulations de densité à l'issue de l'interférence [37]. Dans le cas d'un réseau tri-dimensionnel de puits contenant chacun exactement un atome, on s'attend aussi à observer des corrélations de densité dans la figure d'interférence [25]. Si les fluctuations de densité correspondantes sont trop faibles pour être visibles sur une seule image, elles apparaissent clairement à l'issue d'une étude statistique des images. Le phénomène de groupement de Bosons est aussi observé dans d'autres domaines. En optique, il est appelé effet Hanbury-Brown et Twiss [14], du nom des astrophysiciens qui l'ont étudié.

### 6.2.3 Analyse classique du phénomène de groupement bosonique

Dans les situations où la population des états à une particule est importante, le phénomène de groupement bosonique (et plus généralement les expériences d'interférences mentionnées ci-dessus) ont une interprétation classique extrêmement simple. En effet, ces situations correspondent à une limite classique de la physique quantique qui est la théorie des champs classique. Dans le cadre de la théorie des champs classique, le phénomène de groupement bosonique n'est rien d'autre qu'un phénomène de tavelure (speckle en anglais) dû à des interférences entre différents modes. Ainsi, le phénomène de groupement de Bosons, intrigant si l'on raisonne en terme d'atomes individuels car il montre, même en l'absence d'interactions entre atomes, l'existence de corrélations entre particules, est trivial si l'on oublie la quantification du champ bosonique (*i.e.* les particules). Nous détaillons ci-dessous l'analyse classique du phénomène de groupement.

Considérons un champ classique  $\psi$  obéissant à un hamiltonien quadratique de modes propres  $\psi_{\mathbf{k}} \propto e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$ , le hamiltonien s'écrivant  $\sum_{\mathbf{k}} \epsilon_{\mathbf{k}} |\psi_{\mathbf{k}}|^2$ . A l'équilibre thermodynamique, les  $\psi_{\mathbf{k}}$  ne sont pas corrélés entre eux et la loi de Boltzmann montre que la distribution des variables conjuguées  $(\psi_{\mathbf{k}} + \psi_{\mathbf{k}}^+)/\sqrt{2}$  et  $i(\psi_{\mathbf{k}} - \psi_{\mathbf{k}}^+)/\sqrt{2}$  est une distribution gaussienne, comme présentée sur la figure 6.8. Les différents moments de  $\psi_{\mathbf{k}}$  peuvent alors facilement être calculés. En particulier,  $\langle |\psi_{\mathbf{k}}|^4 \rangle = 2\langle |\psi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle^2$ . Cette égalité n'est rien d'autre que le terme de bunching de l'équation (6.11). Le champ  $\psi(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi_{\mathbf{k}}$  résulte de l'interférence de tous les champs aléatoires  $\psi_{\mathbf{k}}$ . Le champ  $\psi(\mathbf{r})$  présente est donc un champ de tavelure (speckle en anglais) qui présente des fluctuations d'intensité. Plus précisément, la fonction de corrélation de l'intensité du champ s'écrit

$$\langle |\psi(\mathbf{r})|^2 |\psi(\mathbf{r}')|^2 \rangle = \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} \langle |\psi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle \langle |\psi_{\mathbf{k}'}|^2 \rangle + \sum_{\mathbf{k}} \langle |\psi_{\mathbf{k}}|^4 \rangle + \sum_{\mathbf{k} \neq \mathbf{k}'} \langle |\psi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle \langle |\psi_{\mathbf{k}'}|^2 \rangle e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}')(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}. \quad (6.19)$$

Le dernier terme est un terme d'interférence entre les différentes composantes  $\mathbf{k}$ . Ceci peut être réécrit, en utilisant  $\langle |\psi_{\mathbf{k}}|^4 \rangle = 2\langle |\psi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle^2$ ,

$$\langle |\psi(\mathbf{r})|^2 |\psi(\mathbf{r}')|^2 \rangle = \left( \sum_{\mathbf{k}} \langle |\psi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle \right)^2 + \left( \sum_{\mathbf{k}} \langle |\psi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \right)^2. \quad (6.20)$$

En  $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ , le deuxième terme est égal au premier et on trouve

$$\langle |\psi(\mathbf{r})|^4 \rangle = 2\langle |\psi(\mathbf{r})|^2 \rangle^2, \quad (6.21)$$

qui n'est rien d'autre que la contrepartie classique du fait que la fonction  $g_2$  vaut deux à distance nulle. Le terme d'interférence décroît avec  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  sur une distance de l'ordre de la largeur en  $\mathbf{k}$ . A grande distance, les intensités ne sont pas corrélées et  $\langle |\psi(\mathbf{r})|^2 |\psi(\mathbf{r}')|^2 \rangle = \langle |\psi(\mathbf{r})|^2 \rangle \langle |\psi(\mathbf{r}')|^2 \rangle$ . Les fluctuations de densité produites par le phénomène de groupement de Bosons apparaît ici à l'issue de l'interférence de différents champs aléatoires. C'est donc un phénomène de speckle. Notons que l'égalité  $\langle |\psi_{\mathbf{k}}|^4 \rangle = 2\langle |\psi_{\mathbf{k}}|^2 \rangle^2$  n'est pas absolument nécessaire. Le champ de speckle apparaît de façon plus général dès que le champ  $\psi(\mathbf{r})$  résulte de l'interférence d'un nombre important de champs aléatoires de valeur moyenne nulle. En

effet, les termes  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$  ont une contribution faibles dans les sommes de l'équation 6.19 et peuvent être négligés si le nombre de composantes  $\mathbf{k}$  qui interviennent est suffisamment grand<sup>5</sup>.

Les calculs ci-dessus s'appliquent au champ électromagnétique, les champs conjugués  $(\psi + \psi^+)/\sqrt{2}$  et  $i(\psi - \psi^+)/\sqrt{2}$  étant les quadratures du champs électrique. En particulier, le phénomène de groupement de Bosons est attendu pour une source thermique. Dans le contexte des ondes optiques, on parle de phénomène de Hanbury-Brown et Twiss [14], du nom des chercheurs ayant étudié ce phénomène en 1956.

### 6.2.4 Observation du groupement bosonique

Très peu d'expériences ont mis en évidence le phénomène de groupement bosonique pour des atomes. La première expérience, datant de 1996, a mesuré les corrélations d'intensité d'un jet thermique [110]. Plus récemment, la fonction de corrélation à deux corps d'un gaz d'Helium métastable a été mesurée dans notre laboratoire [86] grâce à un détecteur de bonne résolution spatiale et temporelle. Avec nos mesures de fluctuations de densité, nous mettons aussi en évidence le phénomène de groupement de Bosons dans notre expérience.

Les fluctuations mesurées sur des nuages assez froids sont reportées Fig.6.9. Le niveau du bruit de grenaille, obtenu avec des nuages chauds, est montré comme référence. L'excès des fluctuations observées par rapport au bruit de grenaille est une mise en évidence du phénomène de groupement bosonique. Nous avons comparé les résultats mesurés avec les fluctuations attendues pour un gaz de Bosons sans interactions. Nous supposons dans ce calcul que les fluctuations mesurées dans un pixel sont les même que celle d'un gaz homogène et infini longitudinalement. L'erreur introduite par cette approximation est inférieure à un pourcent pour notre confinement longitudinal. La température du nuage est mesurée à partir d'un ajustement du profil moyen de densité avec le profil attendu pour un gaz de Bose sans interactions. Les fluctuations calculées sont ensuite multipliées par le facteur  $\kappa$  dû à la résolution optique et obtenu à partir de la mesure du bruit de grenaille sur des nuages chauds. Comme montré sur la figure, les résultats expérimentaux sont en accord avec ces calculs. La contribution du phénomène de groupement bosonique aux fluctuations est du même ordre ou plus important que la contribution du bruit de grenaille. Comme montré section 6.2.2, ceci implique que la densité dans l'espace des phase est supérieure à un au centre du nuage (le gaz est dégénéré). Cette possibilité de réaliser un gaz dégénéré mais non condensé et toujours bien décrit par un gaz sans interaction est caractéristique des gaz quasi-unidimensionnels, comme nous l'avons vu dans la section 6.1.1.

---

<sup>5</sup>Ceci peut aussi être retrouvé en invoquant le théorème de la limite centrale :  $\psi(\mathbf{r})$  étant la somme d'un nombre important de champs aléatoire, sa distribution de probabilité est proche d'une gaussienne, ce qui implique l'équation 6.21.

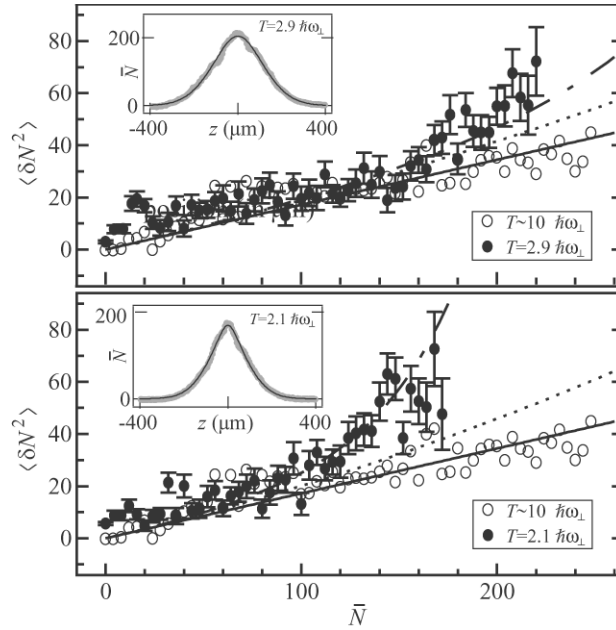


FIG. 6.9 – Mise en évidence du phénomène de groupement de Bosons. Les cercles vides donnent les fluctuations de nombre d’atomes dans chaque pixel mesurées pour un nuage suffisamment chaud pour que les fluctuations soient dominées par le bruit de grenaille. Les cercles pleins correspondent à des données plus froides. L’excès de fluctuations pour les données froides est dû au phénomène de groupement de Bosons. La courbe en tireté est la prédiction pour un gaz de Bose idéal de même température que les données. La courbe en pointillée est la prédiction pour un gaz très non dégénéré.

### 6.2.5 Saturation des fluctuations à haute densité : limite du quasi-condensat

A suffisamment haute densité, les interactions répulsives entre atomes ne sont plus négligeables et le gaz ne se comporte plus comme un gaz idéal. Les interactions répulsives ont pour effet de réduire les fluctuations de densité, coûteuses en énergie. Le gaz entre alors dans le régime de quasi-condensat. Nous avons mesuré les fluctuations de densité pour un nuage dont la partie centrale est dans ce régime. Les résultats sont montrés figure 6.10. Si, à faible densité (*i.e.* sur les bord du nuages), on observe clairement le phénomène de bunching, à forte densité, on observe un phénomène de saturation des fluctuations de nombre d'atomes. Cette saturation est attendue pour un gaz unidimensionnel dans le régime de quasi-condensat, comme le montre le calcul ci-dessous.

Les fluctuations de nombre d'atomes dans le cas d'un gaz uni-dimensionnel dans le régime de quasi-condensat peuvent être simplement calculées. La taille du pixel est très grande devant la longueur de relaxation  $\xi = \hbar/\sqrt{mg n_0}$  où  $n_0$  est la densité linéaire et  $g$  la constante de couplage entre atomes. Or les fluctuations de densité contribuant aux fluctuations du nombre d'atomes dans le pixel sont les fluctuations de longueurs d'onde de l'ordre ou supérieures à la taille du pixel puisque les fluctuations sur des échelles plus petites sont moyennées à zéros. Donc les fluctuations de densité responsables des fluctuations de nombre d'atomes dans ce pixel sont de longueur d'onde supérieure à  $\xi$ . L'énergie cinétique de ces excitations est dominée par les fluctuations de phase et le hamiltonien est, pour une excitation de vecteur d'onde  $k$ ,

$$H_k = L \left( \delta\rho_k^2 g/2 + n_0 \hbar^2 k^2 \theta_k^2 / (2m) \right), \quad (6.22)$$

où  $L$  est la taille du système. Pour des températures  $T \gg n_0 g$ , la population thermique des phonons est importante et les résultats de la physique statistique classique peuvent être utilisés. Ainsi, l'énergie moyenne par degré de liberté quadratique est  $T/2$  et

$$\langle \delta\rho_k^2 \rangle = T/(gL). \quad (6.23)$$

Cette formule est celle de fluctuations de longueur de corrélation infiniment petite. Ceci est dû à l'approximation faite dans 6.22 où le terme de pression quantique est négligé. En réalité, les fluctuations de densité ont une longueur de corrélation de l'ordre de la longueur de relaxation  $\xi$ , très petite devant la taille du pixel.

Les fluctuations de nombre d'atomes sur un pixel s'écrivent

$$\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \int_{\Delta} \int_{\Delta} dz dz' \delta\rho(z) \delta\rho(z'). \quad (6.24)$$

Comme la longueur de corrélation des fluctuations de densité est très petite devant la taille du pixel, la formule précédente se simplifie en

$$\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 \simeq \Delta \int_{-\infty}^{\infty} dz \langle \delta\rho(z) \delta\rho(0) \rangle. \quad (6.25)$$

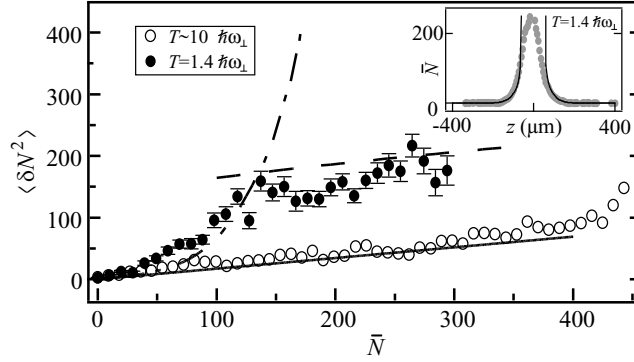


FIG. 6.10 – *Fluctuations de densité mesurées sur un nuage dont la partie centrale est dans le régime de quasi-condensat. La courbe en tireté-pointillé est la prédiction pour un gaz idéal et la courbe en tireté est la prédiction pour un quasi-condensat.*

En développant sur les ondes de densité et en utilisant  $\sum_k = L/(2\pi) \int dk$ , on obtient

$$\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \Delta T / (2\pi g) \int dz \int dk e^{ikz} = \Delta T / g. \quad (6.26)$$

Ainsi, pour une température donnée, les fluctuations de nombre d'atomes ne dépendent pas de  $\langle N \rangle$  dans le régime de quasi-condensat.

Le phénomène de saturation prédit par le calcul ci-dessus est en effet observé expérimentalement comme montré figure 6.10. Cependant, l'équation 6.26 sous-estime d'environ 30% les fluctuations mesurées pour des densités de 300 atomes par pixel. D'autre part, il apparaît sur ce graphique que les fluctuations de densité dans le régime de quasi-condensat ne sont pas vraiment indépendantes de la densité, contrairement à la prédiction de l'équation 6.26. Comme détaillé ci-dessous, ces désaccords sont dus au caractère tri-dimensionnel de nos expériences.

Les calculs présentés ci-dessus ne s'appliquent pas directement à la situation expérimentale car le gaz n'est pas purement uni-dimensionnel. Dans le cas où l'énergie d'interaction  $gn$  est très inférieure à la fréquence du confinement transverse, on retrouve le résultat présenté plus haut. Dans l'expérience  $gn$  est de l'ordre de la fréquence transverse et les degrés de liberté transverses ne peuvent pas être négligés. Plus précisément, les ondes de densité longitudinales sont associées à une onde de respiration du mode transverse qui doit être prise en compte. Nous donnons ci-dessous une analyse classique simple qui permet de calculer les fluctuations attendues.

Le pixel étant assez grand, les ondes de densité qui interviennent ont des fréquences temporelles très inférieures à la fréquence du mouvement transverse<sup>6</sup>. On peut donc supposer que le profil transverse du gaz a le temps de suivre adiabatiquement les modifications de la densité linéaire. Le hamiltonien des ondes de densité longitudinales se simplifie alors

<sup>6</sup>On ne prend pas en compte ici les modes d'excitation qui correspondent à un mode excité transverse. Ces modes ont une énergie importante et contribuent peu aux fluctuations de nombre d'atomes.

en

$$H \simeq \int dz \left( E_{GP}(n(z)) + \frac{1}{2}n(z)v(z)^2 \right) \quad (6.27)$$

où  $E_{GP}(n)$  est l'énergie du gaz par unité de longueur à l'équilibre pour la densité linéaire  $n$  et le terme  $\frac{1}{2}n(z)v(z)^2$  est l'énergie cinétique du mouvement longitudinal par unité de longueur. Pour des petites fluctuations, on développe l'équation précédente à l'ordre 2 en  $\delta n$  et on trouve, en utilisant  $\int dz \delta n = 0$  et  $\mu = \partial E_{GP}/\partial n$ ,

$$H \simeq \int dz \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \mu}{\partial n} \delta n^2 + \frac{1}{2} n_0 v^2 \right). \quad (6.28)$$

Ici,  $\mu(n)$  est le potentiel chimique à température nulle pour une densité linéaire  $n$ . A l'équilibre thermodynamique, chaque degré de liberté quadratique a une énergie  $T/2$ . Donc, en notant  $\delta n_k = \int dz \delta n(z) e^{ikz}/L$ , on a

$$\langle \delta n_k^2 \rangle = \frac{1}{L} T / \left( \frac{\partial \mu}{\partial n} \right). \quad (6.29)$$

Le résultat de l'équation 6.29 est similaire a celui de l'équation 6.23 et on montre de même qu'il implique

$$\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \frac{\Delta T}{\partial \mu / \partial n} \quad (6.30)$$

On retrouve ici le résultat bien connu de la thermodynamique. Cette formule de thermodynamique a un champ d'application très large : elle est valable à toute température dans la limite où la taille du pixel est beaucoup plus grande que la longueur de corrélation des fluctuations de densité.

Pour utiliser cette formule thermodynamique, la connaissance de la dépendance du potentiel chimique avec la densité linéaire est nécessaire. Le calcul montre que la formule  $\mu = \hbar \omega_{\perp} \sqrt{1 + 4na}$  où  $a$  est la longueur de diffusion des atomes est une bonne approximation du potentiel chimique, valable du régime unidimensionnel où  $n \ll 1/a$  au régime Thomas-Fermi où  $n \gg 1/a$  [26]. Les fluctuations données par l'équation 6.30 en utilisant l'expression précédente du potentiel chimique sont en très bon accord avec les fluctuations calculées en utilisant une résolution numérique à trois dimension de la théorie de Bogoliubov. D'autre part, cette prédiction est en accord avec les résultats expérimentaux, comme montré sur la figure 6.10

## 6.3 Échec de la théorie Hartree-Fock

L'apparition d'un condensat de Bose-Einstein dans les gaz atomiques ultrafroids a lieu en général pour une température et un nombre d'atomes en bon accord avec leur valeurs attendues pour un gaz sans interactions, pour lequel la condensation est due à la saturation de la population des états excités du gaz. Dans un gaz tri-dimensionnel, cette image simple du gaz sans interaction est très peu modifiée par la présence d'interactions



entre atomes, dans la limite d'interactions faibles. Dans le cas d'un gaz confiné dans un piège harmonique, l'effet principal est un effet de champ moyen. Dans la théorie de champ moyen, appelée théorie de Hartree-Fock, les interactions entre atomes sont traités comme un champ moyen qui s'ajoute au potentiel de piégeage et où la condensation est, comme dans le cas d'un gaz idéal, dûe à une saturation de la population des états excités. Dans le cas d'un piège harmonique, cette théorie prédit une petite modification de la relation entre le nombre d'atomes et la température à la condensation, en bon accord avec les mesures expérimentales [27].

Dans le cas d'un gaz quasi-unidimensionnel, la théorie de Hartree-Fock ne permet pas de rendre compte du phénomène de transition vers un quasi-condensat. En effet, cette transition est dûe aux corrélations entre atomes introduites par les interactions. Or les corrélations entre atomes, autres que celles induites par la symétrisation, ne sont pas prises en compte par l'analyse de Hartree-Fock. Dans notre expérience, qui n'est pas purement unidimensionnelle, nous avons montré que la transition vers un quasi-condensat n'est pas non plus expliquée par la théorie de Hartree-Fock. Ceci est la première mise en évidence, dans un régime d'interactions faibles, de l'échec de la théorie de Hartree-Fock.

Cette section est organisée de la façon suivante. Dans la première sous-section, nous rappelons ce qu'est la théorie de Hartree-Fock. Nous discutons ensuite de l'aptitude de cette théorie à décrire la transition vers un état cohérent dans un gaz tridimensionnel et dans un gaz unidimensionnel. Enfin, nous décrivons la confrontation que nous avons effectuée entre nos résultats expérimentaux et la théorie de Hartree-Fock.

### 6.3.1 Théorie de Hartree-Fock : une théorie self-consistante

La théorie de Hartree-Fock a été développée dans le domaine de la physique moléculaire pour déterminer, dans l'approximation de Born Oppenheimer, l'état fondamental du système des  $N$  électrons en jeu. C'est une méthode variationnelle dans laquelle on se restreint aux états décrits par un déterminant de Slater de  $N$  fonctions d'ondes électroniques. On minimise donc dans un sous espace dans lequel il n'y a pas de corrélation entre électrons, autres que celles dûes à la statistique de Pauli.

En physique statistique, la théorie de Hartree-Fock se généralise pour déterminer, de façon variationnelle, la matrice densité d'un système de Bosons à l'équilibre thermodynamique. Dans la description grand canonique, la matrice densité du système est celle qui minimise le potentiel thermodynamique

$$G = \langle U \rangle - TS - \mu \langle N \rangle \quad (6.31)$$

où  $U$  est l'énergie du système,  $S$  l'entropie,  $N$  le nombre d'atomes et  $T$  et  $\mu$  la température et le potentiel chimique. La méthode variationnelle de Hartree-Fock consiste à minimiser  $F$  sur l'ensemble des matrices densités décrivant un gaz sans interactions soumis à un hamiltonien à une particule  $h_0$  quelconque. Plus précisément, en notant

$$h_0 = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha} |\psi_{\alpha}\rangle \langle \psi_{\alpha}| \quad (6.32)$$

où les états propres  $|\psi_\alpha\rangle$  ont pour fonction d'onde  $\psi_\alpha$ , la matrice densité d'essai  $\rho_0$  est

$$\rho_0 = e^{-(H_0 - \mu N)/T} / Z \quad (6.33)$$

où, en notant  $a_\alpha$  l'opérateur annihilant une particule dans l'état  $|\alpha\rangle$ ,  $H_0 = \sum_\alpha \epsilon_\alpha a_\alpha^+ a_\alpha$ ,  $N = \sum_\alpha a_\alpha^+ a_\alpha$  est le nombre d'atomes total et  $Z$  est la fonction de partition qui vérifie  $Z = \prod_\alpha \sum_{n_\alpha} e^{-(\epsilon_\alpha - \mu)n_\alpha/T}$ .

Dans la suite, nous allons appliquer la méthode de Hartree-Fock au cas d'un gaz avec des interactions entre atomes décrites par le potentiel  $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . L'énergie du système s'écrit, en seconde quantification,

$$U = \int d^3\mathbf{r} \psi^+ \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext} \right) \psi + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi^+(\mathbf{r}) \psi^+(\mathbf{r}') \psi(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}'). \quad (6.34)$$

En utilisant le fait que  $\langle H_0 \rangle - \mu \langle N \rangle - TS = \sum_\alpha T \ln(1 - e^{(\epsilon_\alpha - \mu)/T})$  pour la matrice densité d'essai  $\rho_0$ , le potentiel grand canonique du système s'écrit

$$G = \sum_\alpha T \ln(1 - e^{(\epsilon_\alpha - \mu)/T}) + \sum_\alpha n_\alpha \left( \int d^3\mathbf{r} \left( \psi_\alpha^* \frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext} \right) \psi_\alpha - \epsilon_\alpha \right) + U_{int} \quad (6.35)$$

où  $n_\alpha = 1/(e^{(\epsilon_\alpha - \mu)/T} - 1)$  et  $U_{int}$  est l'énergie d'interaction. En utilisant le fait que  $\langle a_\alpha^+ a_\alpha^+ a_\alpha a_\alpha \rangle = 2n_\alpha^2$  pour la matrice densité d'essai  $\rho_0$  (le théorème de Wick s'applique à  $\rho_0$ ), on trouve

$$U_{inter} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{r}' V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n_\alpha n_\beta \left( |\psi_\alpha(\mathbf{r})|^2 |\psi_\beta(\mathbf{r}')|^2 + \psi_\alpha(\mathbf{r}) \psi_\alpha^*(\mathbf{r}') \psi_\beta(\mathbf{r}) \psi_\beta^*(\mathbf{r}') \right). \quad (6.36)$$

On distingue bien sur cette expression le terme direct (Hartree) et le terme d'échange (Fock). Dans la suite, nous nous restreignons au cas d'interactions ponctuelles où  $V = g\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ . Les termes direct et d'échange sont alors égaux et on a

$$U_{inter} = g \sum_{\alpha, \beta} \int d^3\mathbf{r} |\psi_\alpha(\mathbf{r})|^2 |\psi_\beta(\mathbf{r})|^2 n_\alpha n_\beta. \quad (6.37)$$

En minimisant le potentiel thermodynamique par rapport aux fonctions d'onde  $\psi_\alpha$  on trouve, en ajoutant un multiplicateur de Lagrange pour assurer la normalisation,

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext} + 2g\rho(r) \right) \psi_\alpha = \epsilon_\alpha \psi_\alpha \quad (6.38)$$

où  $\rho(\vec{r}) = \sum_\beta n_\beta |\psi_\beta(\vec{r})|^2$  est la densité du gaz. D'autre part, en minimisant  $G$  par rapport à  $\epsilon_\alpha$ , on trouve

$$\epsilon_\alpha = \int d^3r \psi_\alpha^* \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{ext} + 2g\rho(r) \right) \psi_\alpha. \quad (6.39)$$

Finalement, on trouve que le hamiltonien qui  $h_0$  qui permet de minimiser  $G$  est

$$H_{HF} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V_{ext} + 2g\rho(r) \quad (6.40)$$

Le profil de densité du gaz  $\rho(\mathbf{r})$  est donnée par la distribution de Bose pour un gaz soumis, en plus du potentiel externe de piégeage, au champ moyen  $2g\rho$ .  $H_{HF}$  dépend de  $\rho$  qui lui-même dépend de  $H_{HF}$ . La théorie de Hartree-Fock est donc une théorie self-consistante.

La théorie de Hartree-Fock, théorie self-consistante obtenue par une méthode variationnelle, n'est bien sur pas une théorie exacte. En fait, cette théorie ne donnera des prédictions correctes que dans la limite où les interactions sont faibles. Pour s'en convaincre, on peut comparer les prédictions de la théorie de Hartree-Fock avec les résultats d'un calcul perturbatif en  $g$ . C'est seulement au premier ordre en  $g$  que le calcul perturbatif est compatible avec la prédiction de Hartree-Fock, elle-même développée au premier ordre en  $g$ . A l'ordre deux en  $g$ , le calcul perturbatif prédit une diminution de la fonction de corrélation à distance nulle  $g_2(0)$ , phénomène non prédit par la théorie de Hartree-Fock.

### 6.3.2 Validité de la théorie de Hartree-Fock dans un gaz tri-dimensionnel en interactions faibles

Dans le cas d'un gaz tri-dimensionnel homogène (ie confiné dans une boîte), la théorie de Hartree-Fock prédit un simple décalage des énergies égale à  $2g\rho$ . Quitte à décaler le potentiel chimique d'une quantité  $2g\rho$ , les propriétés du gaz sont inchangés. En particulier, pour une température donnée, la densité sature à une valeur égale à  $2.612/\lambda_{dB}^3$  lorsque le potentiel chimique atteint la valeur  $\mu_c = 2g \times 2.612/\lambda_{dB}^3$ . Ici,  $\lambda_{dB} = \hbar\sqrt{2\pi/(mk_B T)}$  est la longueur d'onde de de Brooglie. Si la densité du système est plus importante, des atomes s'accumulent dans un condensat de Bose et il est nécessaire d'introduire un deuxième fluide pour décrire le condensat. Il existe plusieurs théories de type champ moyen qui utilisent deux fluides pour décrire un tel système[33], la plus populaire étant l'approximation de Hartree-Fock-Bogoliubov-Popov[29]. Dans tous les cas, le critère de condensation est donné par la formule d'un gaz idéal  $\rho\lambda_{dB}^3 = 2.612$  et le système est décrit par Hartree-Fock tant que  $\rho\lambda_{dB}^3 < 2.612$ .

Expérimentalement, les gaz étudiés ne sont pas homogènes à cause du potentiel de confinement, généralement harmonique. Dans le cas d'un gaz tri-dimensionnel piégé dans un piège harmonique de fréquences de confinement suffisamment faibles, les prédictions de la théorie de Hartree-Fock obtenues pour le gaz homogène peuvent être appliqués en utilisant une approximation de densité locale. En particulier, le critère de condensation est donné par  $n_0 = 2.612/\lambda_{dB}^3$ , où  $n_0$  est la densité au centre du piège. Cependant, le profil de densité du nuage atomique est modifié par le terme d'énergie de champs moyen : le nuage est dilaté comparé au cas d'un gaz sans interactions. Ainsi, pour une température donnée, le nombre d'atome total à la condensation est supérieur à sa valeur pour un gaz parfait [28]. Ce décalage est de l'ordre de quelques pourcent dans les expériences typiques d'atomes froids. Le décalage mesuré dans les expériences est en accord avec cette prédiction de champ moyen [27].

Le bon accord entre les prédictions de Hartree-Fock et les résultats expérimentaux est dû au fait que les expériences sont réalisées dans un régime d'interaction faible où  $\rho a^3 \ll 1$ ,  $\rho$  étant la densité atomique et  $a$  la longueur de diffusion des atomes. En effet, la condition  $\rho a^3 \ll 1$  implique que l'énergie d'interaction  $g\rho = (4\pi\hbar^2/m)a\rho$  est faible devant la température, même à l'approche de la condensation. En réalité, on s'attend à ce que les théories de champs moyen ne permettent pas de prédire le comportement du gaz très près de la transition de Bose-Einstein. En effet, près de transition, les fluctuations de densité deviennent très importantes, les fluctuations de grande longueur d'onde divergeant. Ce phénomène est typique des transitions de phase critiques et le critère de Ginsburg-Landau permet d'estimer la zone dans laquelle une théorie de type champ moyen échoue. Dans cette zone, les interactions entre atomes ne peuvent pas être décrites uniquement par un champ moyen mais les corrélations entre atomes qu'elles introduisent doivent être prises en compte. Des calculs Monte-Carlo ont été effectués pour pouvoir rendre compte de la physique près de la température critique. Ils ont montré qu'il y avait un décalage de la température critique [50, 4, 42], la transition de phase apparaissant pour une température légèrement supérieure à celle attendue pour un gaz sans interactions de même densité. Cependant, dans le régime d'interaction faible où  $\rho a^3 \ll 1$ , ce décalage est très faible. En pratique, ce décalage n'a jamais été observé dans les gaz ultra-froids dilués.

Au moment où nous avons commencé à étudier la transition vers un quasi-condensat dans notre expérience, la théorie de champ moyen expliquait les expériences réalisées avec des atomes froids dans le régime d'interaction faible. Or nous allons voir que la théorie de champ moyen ne permet pas d'expliquer la transition vers un quasi-condensat dans un gaz unidimensionnel. Expérimentalement, nous avons montré que la théorie de Hartree-Fock ne permettait pas de rendre compte de la transition vers un quasi-condensat dans notre expérience où le gaz est quasi-unidimensionnel.

### 6.3.3 Échec attendue de la théorie de Hartree-Fock pour un gaz uni-dimensionnel

Pour un gaz unidimensionnel homogène et infini de densité linéaire  $n$ , la théorie de Hartree-Fock se résume à un décalage du potentiel chimique de la quantité  $2ng$ . Comme dans un gaz idéal, aucune saturation des états excités n'a lieu : la théorie de Hartree-Fock ne prédit donc pas l'apparition d'un condensat de Bose-Einstein. Dans le cas d'un nuage confiné dans un piège harmonique, la théorie de Hartree-Fock prédit un gonflement du nuage atomique. Cependant, de même que pour un gaz idéal, la théorie de Hartree-Fock ne prévoit pas de saturation de la population des états excités à la limite thermodynamique. La théorie de Hartree-Fock ne permet donc pas de rendre compte de la transition vers un quasi-condensat attendue pour un gaz unidimensionnel. Cet échec de la théorie de Hartree-Fock pour les systèmes unidimensionnel n'est pas une surprise puisque la transition vers un quasi-condensat est gouvernée par les corrélations entre atomes introduites par les interactions et que ces corrélations sont négligées dans la théorie de Hartree-Fock.

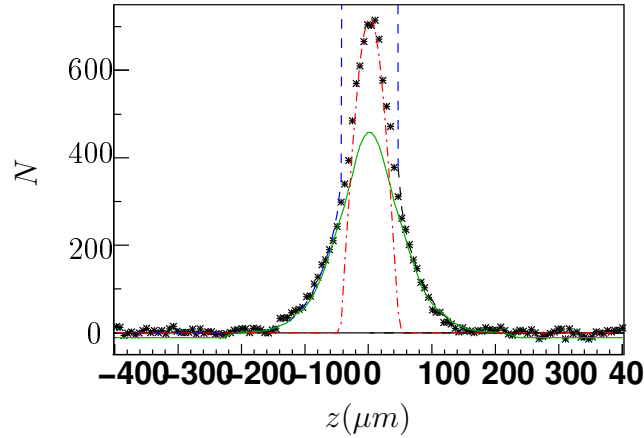


FIG. 6.11 – Échec de la théorie Hartree-Fock pour expliquer la transition vers un quasi-condensat. Le profil expérimental (croix) est comparé au profil Thomas-Fermi attendu pour un quasi-condensat (tirés rouges), au profil attendu pour un gaz idéal de même température et potentiel chimique (tirés bleus) et au profil attendu d'après la théorie Hartree-Fock (ligne verte). Le calcul Hartree-Fock ne prédit pas de saturation des états excités et ne reproduit pas le profil expérimental.

### 6.3.4 Mise en évidence expérimentale de l'échec de la théorie de Hartree-Fock dans un gaz quasi-unidimensionnel

Nous avons montré que, dans notre expérience, la théorie de Hartree-Fock ne permettait pas de rendre compte de l'apparition du quasi-condensat. Ce résultat est la première mise en évidence de l'échec de la théorie de Hartree-Fock dans un régime d'interaction faible. Pour ceci, nous avons analysé les profils de densité des nuages atomiques (montrés dans l'article [97]), lorsqu'un quasi-condensat apparaît au centre du nuage. Plus précisément, nous avons montré que la théorie Hartree-Fock ne permettait pas de rendre compte des profils observés expérimentalement et ne prédisait pas de phénomène de condensation pour les paramètres de nos expériences.

Sur la figure 6.11, nous avons tracé un profil expérimental et le profil calculé en utilisant la théorie de Hartree-Fock, pour une même température et un même potentiel chimique. L'apparition du quasi-condensat sur les données expérimentales, montrée par la saturation des fluctuations de densité sur les données de fluctuations (voir Fig.6.10), est aussi visible sur le profil de densité. En effet, le profil de la partie centrale du nuage est bien décrite par la forme Thomas-Fermi attendue pour un quasi-condensat et indiquée sur le graphe. La température et le potentiel chimique des données expérimentales sont extraites d'un ajustement par une distribution de gaz de Bose idéal des ailes du profil, suffisamment diluées pour que les interactions y soient négligeables. Un calcul Hartree-Fock est ensuite effectué. Pour les paramètres expérimentaux étudiés, le calcul Hartree-Fock ne prédit pas de saturation des états excités, la population de l'état fondamental restant toujours inférieur à 1% du nombre d'atomes total. D'autre part, le profil attendu avec la théorie de

Hartree-Fock, représenté sur la figure en train plein, n'est pas en accord avec les résultats expérimentaux. Ces calculs sont détaillés dans l'article [97].

L'échec de la théorie Hartree-Fock pour expliquer l'apparition d'un pic de densité décrit par Thomas-Fermi dans notre expérience est dû au caractère quasi-unidimensionnel de notre expérience. En effet, comme on l'a vu dans la section 6.3.3, la transition vers un quasi-condensat dans un gaz unidimensionnel n'est pas explicable par la théorie de Hartree-Fock qui néglige les corrélations entre atomes introduites par les interactions.

Décrire les profils de densité expérimentaux est difficile car cela nécessite une théorie qui prenne en compte les corrélations entre atomes et qui soit valable aussi bien dans le régime de gaz de Bose idéal que dans le régime de quasi-condensat. Un tel problème à  $N$  corps est à priori très complexe. Plusieurs pistes peuvent être explorées. Tout d'abord, comme les nombres d'atomes utilisés ne dépassent pas quelques milliers, un calcul numérique exact Monte Carlo est à priori possible [43]. Une deuxième possibilité est d'utiliser une théorie qui allie des calculs de champ classique pour les modes très peuplés d'énergie faible et un modèle Hartree-Fock pour les modes de plus haute énergie peu peuplés, comme la théorie développée dans [6]. Finalement, dans une situation suffisamment proche du cas unidimensionnel, il est tentant d'utiliser la solution exacte trouvée par Lieb-Liniger pour les gaz unidimensionnels. L'équipe de van Druten à Amsterdam a montré que l'utilisation de ce résultat exact, combiné avec une estimation de la population des états transverses excités via un modèle de gaz de Bose idéal permettait de reproduire très bien les résultats expérimentaux [98]. Cependant, les nuages étudiés dans ce cas sont plus froids que les nuages que nous avons étudiés. Ce calcul se serait peut être pas satisfaisant dans notre cas.

## 6.4 Conclusion

Nos études sur les fluctuations de densité dans les gaz quasi-unidimensionnels ont permis de sonder la transition vers un quasi-condensat. Sur le plan théorique, nous avons contribué à clarifier les idées sur les gaz unidimensionnels piégés. Plus précisément, notre détermination des paramètres de la transition vers un quasi-condensat dans un gaz confiné dans un piège harmonique a mis un terme à la circulation d'idées fausses sur ce sujet dans notre communauté. Sur le plan expérimental, nous avons observé la transition en ce qu'elle a de plus fondamentale puisque nous avons mesuré les fluctuations de densité, dont la saturation caractérise le régime de quasi-condensat. Dans le régime de gaz de Bose idéal, nous avons mis en évidence le phénomène de groupement bosonique, phénomène mis en évidence dans une petite poignée d'expériences seulement. Nous avons aussi montré qu'il existe un régime de gaz idéal dégénéré dans lequel le gaz, bien que fortement dégénéré, présente toujours le phénomène de groupement bosonique. Enfin, nous avons montré que la transition vers un quasi-condensat dans un gaz très allongé ne pouvait pas être expliqué via une théorie de champ moyen, comme la célèbre théorie de Hartree-Fock-Bogoliubov-Popov. Ce résultat est la première mise en défaut d'une théorie de champ moyen pour décrire un gaz en interaction faible. Il est dû à l'importance des effets à  $N$  corps dans les gaz unidimensionnels, elle-même dûe à l'importance des fluctuations.

Ce travail ouvre de nouvelles perspectives pour notre expérience. En effet, la mesure de fluctuations de densité peut être appliquée pour sonder d'autres phénomènes physique. En particulier, la mesure des fluctuations de densité dans un gaz unidimensionnel en interaction forte est envisageable.

# Chapitre 7

## Perspectives

Lors de mes travaux postdoctoraux, j'ai eu l'occasion de travailler, tant sur le plan théorique qu'expérimental, sur différents sujets, allant de la compression de spin aux gaz unidimensionnels. En particulier, j'ai travaillé ces dernières années sur une expérience de puce atomique, dans laquelle des atomes de Rubidium sont confinés dans des micro-pièges magnétique. Pour les années à venir, j'ai plusieurs projets de recherche réalisables à partir de ce dispositif expérimental et qui se situent dans le prolongement des travaux antérieurs. Plus précisément, trois axes de recherches seront menés. Tout d'abord, nous chercherons à étendre l'étude des gaz quasi-unidimensionnels au cas où le gaz est dans le régime d'interactions fortes. Le phénomène de fermionisation des gaz de Bosons unidimensionnels pourra être étudié. La technique de suppression de la rugosité que nous avons mise au point dans notre équipe[96] sera primordiale pour mener à bien ce projet. Un deuxième axe de recherche envisagé est l'étude des condensats bimodaux. En particulier, nous chercherons à étudier les fluctuations de la différence du nombre d'atomes entre deux puits d'un double puits de potentiel. Plus précisément, nous chercherons à étudier la compression des fluctuations de nombre d'atomes attendues lors de la séparation en deux d'un condensat ayant des interactions répulsives entre atomes. Nous chercherons aussi à étudier la dynamique de condensats couplés. En particulier, les phénomènes propres à une géométrie allongée, comme la présence des instabilités de modulation que nous avons prédites théoriquement, pourront être étudiés. Le dernier axe de recherche est l'étude des gaz bi-dimensionnel, et plus particulièrement, l'étude de la transition de Kosterlitz-Thaules. Ces différents projets forment un programme de recherche ambitieux qui s'étale sur plusieurs années. Il nécessitera un travail d'équipe et pourra permettre de former plusieurs étudiants en thèse.

### **Etude d'un gaz uni-dimensionnel en interaction forte**

L'idée de ce projet de recherche est de poursuivre l'étude des gaz quasi-unidimensionnels effectué dans notre groupe[21, 97] en se rapprochant du régime d'interactions fortes, obtenu lorsque le paramètre  $\gamma = mg/\hbar^2 n$  devient grand,  $g$  étant la constante de couplage effective unidimensionnelle entre atomes et  $n$  la densité linéique d'atomes. Nous espérons pouvoir atteindre  $\gamma \simeq 3$  avec une densité linéaire  $n = 1 \mu\text{m}^{-1}$ , et un confinement transverse de



40 kHz dans notre expérience qui utilise des atomes de Rubidium. Dans un tel gaz en interactions fortes, nous désirons faire des mesures de fluctuations de densité et observer le phénomène de fermionisation. Ces mesures complèteraient les mesures déjà effectuées de la fonction de corrélation à distance nulle  $g_2(0)$ [54]. Nous nous intéressons aussi au couplage entre un gaz unidimensionnel et un potentiel modulé spatialement. En particulier, on cherchera à étudier la superfluidité des gaz unidimensionnels[5]. En présence d'une modulation du potentiel à une période  $\lambda_r$  proche de la distance inter-atomique, on attend en effet une dissipation, liée à l'échange d'une quantité de mouvement  $4\pi\hbar/\lambda_r$  avec le potentiel, d'autant plus importante que le paramètre d'interactions  $\gamma$  est grand. Cette problématique est liée au phénomène de localisation des gaz unidimensionnels[44] : on attend une transition de phase quantique lorsque le paramètre  $\gamma$  atteint 3.8. Nous chercherons à étudier ce phénomène.

La réalisation d'un gaz en interaction faible nécessite un confinement longitudinal très faible (densité linéique faible) et un confinement transverse fort (constante de couplage effective grande). Le fort confinement transverse est obtenu en se rapprochant à faible distance des micro-fils réalisant le piège magnétique. Dans ces conditions, la rugosité du potentiel due à l'imperfection des fils devient un problème car elle confine les atomes sur des petits domaines dans lesquels la densité l'atomes est trop fortes pour que le gaz soit dans le régime d'interaction forte. Il sera donc nécessaire d'utiliser la méthode de modulation, décrite au chapitre 5, qui permet d'annuler cette rugosité.

## Condensats bimodaux : études de la dynamique et des fluctuations

Nous avons vu au chapitre 4 que la physique de deux condensats couplés est très riche et encore très peu explorée expérimentalement. La dynamique d'un condensat bi-modal est celle d'un système non linéaire qui présente plusieurs phénomènes intéressants encore non étudiés : des bifurcations sont attendus lorsque les paramètres sont modifiés, un comportement chaotique est attendu en présence de modulations temporelles ... Cette dynamique est encore plus riche dans le cas où chaque puits de potentiel est un gaz unidimensionnel. Nous avons montré par exemple que l'on attendait des instabilités de modulations et des phénomènes de récurrences. La possibilité de réaliser des vortex a aussi été montré. Au-delà de cette physique classique, il peut être intéressant de s'intéresser aux fluctuations quantiques dans ces systèmes. Par exemple, la compression des fluctuations de nombre d'atomes entre les deux puits lors d'une séparation lente des deux condensats est un phénomène intéressant à étudier. Notons enfin que plusieurs propositions existent pour utiliser les interactions entre atomes dans un double puits de potentiel pour réaliser des systèmes fortement corrélés, de type chats de schrödinger. Ces états sont intéressants car ils permettent de sonder une limite de la physique quantique

Un double puits de potentiel peut être réalisé de différentes manière sur notre expérience. Une première méthode consiste à utiliser des potentiels habillés par radio-fréquence, comme ceux utilisés dans les expériences décrites dans [87] et [48]. Cependant, cette méthode a ses limites. Par exemple, il est difficile de varier l'écart entre les puits sur une grande distance. Les groupes utilisant cette technique n'ont pas, jusqu'à présent, montré qu'il

était possible d'étudier la dynamique des condensats couplés. En particulier, ils n'ont pas généré d'oscillations Josephson. Une deuxième méthode consiste à utiliser des potentiels magnétiques statiques réalisés avec 5 micro-fils, comme ceux que nous avons réalisés sur notre puce[22]. Le désavantage de cette technique est sa très grande sensibilité aux champs externes. Cette sensibilité nous a empêché jusqu'à présent de charger ce double puits avec un condensat de Bose Einstein. Pour remédier à ce problème, nous envisageons d'utiliser la méthode de modulation décrite dans le chapitre 5. Cette méthode consiste à moduler le courant dans les fils réalisant le double puits de potentiel suffisamment vite pour que le mouvement du centre des masses des atomes n'ait pas le temps de suivre. Les atomes sont alors sensibles à un potentiel moyen. Un champ externe homogène n'a pas d'effet sur ce potentiel moyen.

## Étude d'un gaz bi-dimensionnel

Les mesures de fluctuations de densité que nous avons mises au point sur notre expérience peuvent être appliquées au cas d'un gaz bi-dimensionnel. Les gaz bi-dimensionnels sont encore largement inexplorés. En particulier, la transition de Kosterlitz-Thouless est très peu connue, bien qu'une première mise en évidence d'une phase de type Kosterlitz-Thouless a été effectuée dans une expérience récente de l'Ifrap[112]. Nous espérons pouvoir contribuer à la compréhension des gaz bi-dimensionnels avec notre expérience. Plus précisément, nous espérons mettre en évidence la présence de nombreuses paires de vortex près de la transition de Kosterlitz-Thouless, via une augmentation des fluctuations de densité. Pour réaliser un gaz bi-dimensionnel, nous envisageons d'utiliser un piège magnétique habillé par de la radio-fréquence, comme cela a été mis au point au laboratoire de Physique des Lasers de l'université de Villeneuve[107], dans une autre équipe de l'Ifrap.



# Bibliographie

- [1] Michael Albiez, Rudolf Gati, Jonas Foelling, Stefan Hunsmann, Matteo Cristiani, and Markus K. Oberthaler. Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping in a single bosonic josephson junction. *cond-mat/0411757*, 2004.
- [2] M. R. Andrews, C. G. Townsend, H.-J. Miesner, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle. Observation of interference between two bose condensates. *Science*, 275 :637, 1997.
- [3] Th. Anker, M. Albiez, R. Gati, S. Hunsmann, B. Eiermann, A. Trombettoni, and M. K. Oberthaler. Nonlinear self-trapping of matter waves in periodic potentials. *Physical Review Letters*, 94(2) :020403, 2005.
- [4] P. Arnold and G. Moore. Bec transition temperature of a dilute homogeneous imperfect bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :120401, 2001.
- [5] GE Astrakharchik and LP Pitaevskii. Motion of a heavy impurity through a bose-einstein condensate. *Phys. Rev. A*, 70 :013608, 2004.
- [6] P. Blair Blakie and Matthew J. Davis. Projected gross-pitaevskii equation for harmonically confined bose gases at finite temperature. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 72(6) :063608, 2005.
- [7] J. J . Bollinger, Wayne M. Itano, D. J. Wineland, and D. J. Heinzen. Optimal frequency measurements with maximally correlated states. *Phys. Rev. A*, 54(6) :R4649–R4652, Dec 1996.
- [8] I. Bouchoule. Modulational instabilities in josephson oscillations of elongated coupled condensates. *Eur. Phys. J D*, 2005.
- [9] I. Bouchoule, K. V. Kheruntsyan, and G. V. Shlyapnikov. Interaction-induced crossover versus finite-size condensation in a weakly interacting trapped one-dimensional bose gas. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 75(3) :031606, 2007.
- [10] I. Bouchoule, J.-B. Trebbia, and C. L. Garrido-Alzar. Limitations of the modulation method to smooth wire-guide roughness. *accepté à Phys. Rev. A*, 2008.
- [11] Isabelle Bouchoule and Klaus Mølmer. Preparation of spin-squeezed atomic states by optical-phase-shift measurement. *Phys. Rev. A*, 66(4) :043811, Oct 2002.
- [12] Isabelle Bouchoule and Klaus Mølmer. Spin squeezing of atoms by the dipole interaction in virtually excited rydberg states. *Phys. Rev. A*, 65(4) :041803, Apr 2002.

- [13] Isabelle Bouchoule and Klaus Mølmer. Interaction-induced phase fluctuations in a guided atom laser. *Phys. Rev. A*, 67(1) :011603, Jan 2003.
- [14] R. Hanbury Brown and R. Q. Twiss. Correlation between photons in two coherent beams of light. *Nature*, 178 :1046, 1956.
- [15] A. A. Burkov, M. D. Lukin, and Eugene Demler. Decoherence dynamics in low-dimensional cold atom interferometers. *Physical Review Letters*, 98(20) :200404, 2007.
- [16] Y. Castin, R. Dum, E. Mandonner, A. Minguzzi, and I. Carusotto. Coherence properties of a continuous atom laser. *J. Modern Opt.*, 47 :2671, 2000.
- [17] Yvan Castin and Jean Dalibard. Relative phase of two bose-einstein condensates. *Phys. Rev. 1*, 55 :4330, 1997.
- [18] M. Cristiani, Olivier Morsch, M. Jonas-Lasinio, E. Courtade, and E. Arimondo. Instabilities of a bose-einstein condensate in a periodic potential : an experimental investigation. *Opt. Express*, 12 :4, 2004.
- [19] Andre Eckardt, Tharanga Jinasundera, Christoph Weiss, and Martin Holthaus. Analog of photon-assisted tunneling in a bose-einstein condensate. *Physical Review Letters*, 95(20) :200401, 2005.
- [20] J. Esteve, C. Aussibal, T. Schumm, C. Figl, D. Mailly, I. Bouchoule, C. I. Westbrook, and A. Aspect. Role of wire imperfections in micromagnetic traps for atoms. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 70(4) :043629, 2004.
- [21] J. Esteve, J.-B. Trebbia, T. Schumm, A. Aspect, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule. Observations of density fluctuations in an elongated bose gas : Ideal gas and quasi-condensate regimes. *Physical Review Letters*, 96(13) :130403, 2006.
- [22] Jerome Esteve, Thorsten Schumm, Jean-Baptiste Trebbia, Isabelle Bouchoule, Alain Aspect, and Christopher Westbrook. Realizing a stable magnetic double-well potential on an atom chip. *Eur. Phys. J D*, 35 :141, 2005.
- [23] L. Fallani, L. De Sarlo, J. E. Lye, M. Modugno, R. Saers, C. Fort, and M. Inguscio. Observation of dynamical instability for a bose-einstein condensate in a moving 1d optical lattice. *Physical Review Letters*, 93(14) :140406, 2004.
- [24] R. Folman, P. Krüger, J. Schmiedmayer, J. Denschlag, and C. Henkel. Microscopic atom optics : From wires to an atom chip. *Adv. Atom. Mol. Opt. Phys.*, 48 :263, 2002.
- [25] Simon Fölling, Fabrice Gerbier, Artur Widera, Olaf Mandel, Tatjana Gericke, and Immanuel Bloch. Spatial quantum noise interferometry in expanding ultracold atom clouds. *Nature*, 434 :481.
- [26] F. Gerbier. *Europhys. Lett.*, 66 :771, 2004.
- [27] F. Gerbier, J. H. Thywissen, S. Richard, M. Hugbart, P. Bouyer, and A. Aspect. Critical temperature of a trapped, weakly interacting bose gas. *Phys. Rev. Lett.* 92, 030405 (, 92 :030405, 2004.

- [28] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari. Condensate fraction and critical temperature of a trapped interacting bose gas. *Pys. Rev. A*, 54 :R4633, 1996.
- [29] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari. Thermodynamics of a trapped bose-condensed gas. *J. Low Temp. Phys.*, 109 :309, 1997.
- [30] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari. Anomalous fluctuations of the condensate in interacting bose gases. *Phys. Rev. Lett.*, 80(23) :5040–5043, Jun 1998.
- [31] M. Girardeau. Relationship between systems of impenetrable bosons and fermions in one dimension. *Journal of Mathematical Physics*, 1(6) :516–523, 1960.
- [32] Markus Greiner, Olaf Mandel, Tilman Esslinger, Theodor W. Hänsch, and Immanuel Bloch. Quantum phase transition from a superfluid to a mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, 415 :39, 2002.
- [33] A. Griffin. Conserving and gapless approximations for an inhomogeneous bose gas at finite temperatures. *Phys. Rev. B*, 53 :9341, 1996.
- [34] Vladimir Gritsev, Eugene Demler, Mikhail Lukin, and Anatoli Polkovnikov. Spectroscopy of collective excitations in interacting low-dimensional many-body systems using quench dynamics. *Physical Review Letters*, 99(20) :200404, 2007.
- [35] W. Guerin, J.-F. Riou, J. P. Gaebler, V. Josse, P. Bouyer, and A. Aspect. Guided quasicontinuous atom laser. *Physical Review Letters*, 97(20) :200402, 2006.
- [36] A. Gunther, S. Kraft, C. Zimmermann, and J. Fortagh. Atom interferometer based on phase coherent splitting of bose-einstein condensates with an integrated magnetic grating. *Physical Review Letters*, 98(14) :140403, 2007.
- [37] Zoran Hadzibabic, Sabine Stock, Baptiste Battelier, Vincent Bretin, and Jean Dalibard. Interference of an array of independent bose-einstein condensates. *Physical Review Letters*, 93(18) :180403, 2004.
- [38] Masudul Haque and Andrei E. Ruckenstein. Squeezing in the weakly interacting uniform bose-einstein condensate. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 74(4) :043622, 2006.
- [39] Kristian Helmerson and Li You. Creating massive entanglement of bose-einstein condensed atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 87(17) :170402, Oct 2001.
- [40] S. Hofferberth, I. Lesanovsky, B. Fischer, T. Schumm, and J. Schmiedmayer. Non-equilibrium coherence dynamics in one-dimensional bose gases. *arXiv :0706.2259*, 2007.
- [41] S. Hofferberth, I. Lesanovsky, B. Fischer, T. Schumm, and J. Schmiedmayer. Non-equilibrium coherence dynamics in one-dimensional bose gases. *Nature*, 2007.
- [42] M. Holzmann, G. Baym, J.-P. Blaizot, and F. Laloë. Nonanalytic dependence of the transition temperature of the homogeneous dilute bose gas on scattering length. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :120403, 2001.
- [43] Markus Holzmann, Werner Krauth, and Martin Naraschewski. Precision monte carlo test of the hartree-fock approximation for a trapped bose gas. *Phys. Rev. A*, 59 :002956, 1999.

- [44] G. Blatter HP Büchler and W. Zwerger. Commensurate-incommensurate transition of cold atoms in an optical lattice. *Phys. Rev. Lett.*, 90 :130401, 2003.
- [45] D. Jaksch, J. I. Cirac, P. Zoller, S. L. Rolston, R. Côté, and M. D. Lukin. Fast quantum gates for neutral atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 85(10) :2208–2211, Sep 2000.
- [46] Juha Javanainen and Misha Yu. Ivanov. Splitting a trap containing a bose-einstein condensate : Atom number fluctuations. *Phys. Rev. A*, 60 :2351, 1999.
- [47] . B. Jo, J. H. Choi, C. A. Christensen, Y. R. Lee, T. A. Pasquini, W. Ketterle, and D. E. Pritchard. Matter-wave interferometry with phase fluctuating bose-einstein condensates. *arXiv :0706.4041v3*, 2007.
- [48] G.-B. Jo, Y. Shin, S. Will, T. A. Pasquini, M. Saba, W. Ketterle, D. E. Pritchard, M. Vengalattore, and M. Prentiss. Long phase coherence time and number squeezing of two bose-einstein condensates on an atom chip. *Physical Review Letters*, 98(3) :030407, 2007.
- [49] M. P. A. Jones, C.J. Vale, D. Sahagun, B.V. Hall, C.C. Eberlein, B.E. Sauer, K. Furusawa, D. Richardson, and E.A. Hinds. Cold atoms probe the magnetic field near a wire. *J. Phys. B : At. Mol. Opt. Phys.*, 37 :L15, 2004.
- [50] V. A. Kashurnikov, N. V. Prokofév, and B. V. Svistunov. Critical temperature shift in weakly interacting bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 87 :120402, 2001.
- [51] V. M. Kaurov and A. B. Kuklov. Josephson vortex between two atomic bose-einstein condensates. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 71(1) :011601, 2005.
- [52] Wolfgang Ketterle and N. J. van Druten. Bose-einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions. *Phys. Rev. A*, 54 :656, 1996.
- [53] K. V. Kheruntsyan, D. M. Gangard, P. D. Drummond, and G. V. Shlyapnikov. Pair correlations in a finite-temperature 1d bose gas. *Phys. Rev. Lett.*, 91 :040403, 2003.
- [54] Toshiya Kinoshita, Trevor Wenger, and David S. Weiss. Local pair correlations in one-dimensional bose gases. *Phys. Rev. Lett.*, 95 :190406, 2005.
- [55] M. Kitagawa and M. Ueda. Squeezed spin states. *Phys. Rev. A*, 47 :5138, 1993.
- [56] S. Kraft, A. Günther, H. Ott, D. Wharam, C. Zimmermann, and J. Fortàgh. Anomalous longitudinal magnetic field near the surface of copper conductors. *J. Phys. B*, 35 :L469, 2002.
- [57] P. Kruger, L. M. Andersson, S. Wildermuth, S. Hofferberth, E. Haller, S. Aigner, S. Groth, I. Bar-Joseph, and J. Schmiedmayer. Disorder potentials near lithographically fabricated atom chips. *arXiv :cond-mat/0504686*, 2004.
- [58] A. Kuzmich, N. P. Bigelow, and L. Mandel. Atomic quantum non-demolition measurements and squeezing. *Europhys. Lett.*, 42 :481, 1998.
- [59] A. Kuzmich, L. Mandel, and N. P. Bigelow. Generation of spin squeezing via continuous quantum nondemolition measurement. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :1594, 2000.
- [60] L. Landau and E. Lifshitz. *Cours de physique, Mécanique*.

- [61] P. Leboeuf, N. Pavloff, and S. Sinha. Solitonic transmission of bose-einstein matter waves. *Phys. Rev. A*, 68(6) :063608, Dec 2003.
- [62] M. Lewenstein and L. You. Quantum phase diffusion of a bose-einstein condensate. *Phys. Rev. Lett.*, 77(17) :3489–3493, Oct 1996.
- [63] Ellioth H. Lieb and Werner Liniger. Exact analysis of an interacting bose gas. i. the general solution and the ground state. *Phys. Review*, 130 :1605, 1963.
- [64] Konstantin K. Likharev. *Dynamics of Josephson junctions and circuits*. Gordon and Breach science publishers.
- [65] Yuan Liang Lim, Almut Beige, and Leong Chuan Kwek. Repeat-until-success linear optics distributed quantum computing. *Physical Review Letters*, 95(3) :030505, 2005.
- [66] Khan W. Mahmud, Heidi Perry, and William P. Reinhardt. Quantum phase-space picture of bose-einstein condensates in a double well. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 71(2) :023615, 2005.
- [67] J. M. McGuirk, D. M. Harber, J. M. Obrecht, and E. A. Cornell. Alkali-metal adsorbate polarization on conducting and insulating surfaces probed with bose-einstein condensates. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 69(6) :062905, 2004.
- [68] V. Meyer, M. A. Rowe, D. Kielpinski, C. A. Sackett, W. M. Itano, C. Monroe, and D. J. Wineland. Experimental demonstration of entanglement-enhanced rotation angle estimation using trapped ions. *Phys. Rev. Lett.*, 86(26) :5870–5873, Jun 2001.
- [69] A. Micheli, D. Jaksch, J. I. Cirac, and P. Zoller. Many-particle entanglement in two-component bose-einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 67(1) :013607, Jan 2003.
- [70] Klaus Mølmer and Anders Sørensen. Multiparticle entanglement of hot trapped ions. *Phys. Rev. Lett.*, 82(9) :1835–1838, Mar 1999.
- [71] C. Mora and Y. Castin. Extension of bogoliubov theory to quasi-condensates. *Phys. Rev. A*, 67 :053615, 2003.
- [72] J. H. Müller, O. Morsch, D. Ciampini, M. Anderlini, R. Mannella, and E. Arimondo. Atomic micromotion and geometric forces in a triaxial magnetic trap. *Phys. Rev. Lett.*, 85(21) :4454–4457, Nov 2000.
- [73] Alan C. Newell. *Solitons in Mathematics and Physics*. Society of Industrial and Applied Mathematics, 1985.
- [74] Daniel Oblak, Plamen G. Petrov, Carlos L. Garrido Alzar, Wolfgang Tittel, Anton K. Vershovski, Jens K. Mikkelsen, Jens L. Sorensen, and Eugene S. Polzik. Quantum-noise-limited interferometric measurement of atomic noise : Towards spin squeezing on the cs clock transition. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 71(4) :043807, 2005.
- [75] M. Olshanii. Atomic scattering in the presence of an external confinement and a gas of impenetrable bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 81(5) :938–941, Aug 1998.



- [76] Maxim Olshanii and Vanja Dunjko. Short-distance correlation properties of the lieb-liniger system and momentum distributions of trapped one-dimensional atomic gases. *Phys. Rev. Lett.*, 91(9) :090401, Aug 2003.
- [77] Maxim Olshanii and Vanja Dunjko. Interferometry in dense nonlinear media and interaction-induced loss of contrast in microfabricated atom interferometers. *arXiv :cond-mat/0505358v2*, 2005.
- [78] Nicolas Pavloff. Breakdown of superfluidity of an atom laser past an obstacle. *Phys. Rev. A*, 66(1) :013610, Jul 2002.
- [79] S. V. Pereverzev, A. Loshak, S. Backhaus, J. C. Davis, and R. E. Packard. Quantum oscillations between two weakly coupled reservoirs of superfluid  $^3\text{He}$ . *Nature*, 388 :449, 1997.
- [80] Wolfgang Petrich, Michael H. Anderson, Jason R. Ensher, and Eric A. Cornell. Stable, tightly confining magnetic trap for evaporative cooling of neutral atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 74(17) :3352–3355, Apr 1995.
- [81] D.S. Petrov, G.V. Shlyapnikov, and J.T.M. Walraven. Regimes of quantum degeneracy in trapped 1d gases. *Phys. Rev. Lett.*, 85 :3745, 2000.
- [82] Leonardo Della Pietra, Simon Aigner, Christoph vom Hagen, Sönke Groth, Israel Bar-Joseph, Henri J. Lezec, and Jörg Schmiedmayer. Designing potentials by sculpturing wires. *arXiv :cond-mat/0604619*, 2006.
- [83] Uffe V. Poulsen and Klaus Mølmer. Positive-p simulations of spin squeezing in a two-component bose condensate. *Phys. Rev. A*, 64(1) :013616, Jun 2001.
- [84] S. Raghavan, A. Smerzi, S. Fantoni, and S. R. Shenoy. Coherent oscillations between two weakly coupled bose-einstein condensates : Josephson effects,  $\pi$  oscillations, and macroscopic quantum self-trapping. *Phys. Rev. A*, 59(1) :620–633, Jan 1999.
- [85] T. M. Roach, H. Abele, M. G. Boshier, H. L. Grossman, K. P. Zetie, and E. A. Hinds. Realization of a magnetic mirror for cold atoms. *Phys. Rev. Lett.*, 75(4) :629–632, Jul 1995.
- [86] M. Schellekens, R. Hoppeler, A. Perrin, J. Viana Gomes, D. Boiron, A. Aspect, and C. I. Westbrook. Hanbury brown twiss effect for ultracold quantum gases. *Science*, 310 :648, 2005.
- [87] T. Schumm, S. Hofferberth, L. M. Andersson, S. Wildermuth, S. Groth, I. Bar-Joseph, J. Schmiedmayer, and P. Krüger. Matter-wave interferometry in a double well on an atom chip. *Nature Physics*, 2005.
- [88] T. Schumm, S. Hofferberth, L. M. Andersson, S. Wildermuth, S. Groth, I. Bar-Joseph, J. Schmiedmayer, and P. Krüger. Matter-wave interferometry in a double well on an atom chip. *Nature Physics* 1, 57 - 62 (2005), 1 :57, 2005.
- [89] Thorsten Schumm, Jerome Esteve, Cristina Figl, J.B. Trebbia, Christine Aussibal, Dominique Mailly, Isabelle Bouchoule, Christopher Westbrook, and Alain Aspect. 'atom chips in the real world : the effects of wire corrugation. *Eur. Phys. J. D*, 32 :171, 2005.

- [90] C. Sias, H. Lignier, Y. P. Singh, A. Zenesini, D. Ciampini, O. Morsch, and E. Arimondo. Observation of photon-assisted tunneling in optical lattices. *arXiv :0709.3137*, 2007.
- [91] A. Smerzi, S. Fantoni, S. Giovanazzi, and S. R. Shenoy. Quantum coherent atomic tunneling between two trapped bose-einstein condensates. *Phys. Rev. Lett.*, 79 :4950, 1997.
- [92] Augusto Smerzi and Srikanth Raghavan. Macroscopic quantum fluctuations in the josephson dynamics of two weakly linked bose-einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 61(6) :063601, May 2000.
- [93] A. Sørensen, L. M. Duan, J. I. Cirac, and P. Zoller. Many-particle entanglement with bose-einstein condensates. *Nature*, 409 :63, 2001.
- [94] A. Sorensen, Duan L-M., Cirac J. I., and Zoller P. Many-particle entanglement with bose-einstein condensates. *Nature*, 409 :63, 2001.
- [95] K. Tai, A. Hasegawa, and A. Tomita. Observation of modulational instability in optical fibers. *Physical Review Letters*, 56(2) :135–138, 1986.
- [96] J.-B. Trebbia, C. L. Garrido Alzar, R. Cornelussen, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule. Roughness suppression via rapid current modulation on an atom chip. *Physical Review Letters*, 98(26) :263201, 2007.
- [97] J.-B. Trebbia, J. Esteve, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule. Experimental evidence for the breakdown of a hartree-fock approach in a weakly interacting bose gas. *Physical Review Letters*, 97(25) :250403, 2006.
- [98] A.H. van Amerongen, J.J.P. van Es, P. Wicke, K.V. Kheruntsyan, and N.J. van Druten. Yang-yang thermodynamics on an atom chip. *arXiv :0709.1899*, 2007.
- [99] G. Van Simaëys, Ph. Emplit, and M. Haelterman. Experimental demonstration of the fermi-pasta-ulam recurrence in a modulationally unstable optical wave. *Phys. Rev. Lett.*, 87(3) :033902, Jun 2001.
- [100] Thibault Vogt, Matthieu Viteau, Amodsen Chotia, Jianming Zhao, Daniel Comparat, and Pierre Pillet. Electric-field induced dipole blockade with rydberg atoms. *Physical Review Letters*, 99(7) :073002, 2007.
- [101] Ying-Ju Wang, Dana Z. Anderson, Victor M. Bright, Eric A. Cornell, Quentin Diot, Tetsuo Kishimoto, Mara Prentiss, R. A. Saravanan, Stephen R. Segal, and Saijun Wu. Atom michelson interferometer on a chip using a bose-einstein condensate. *Physical Review Letters*, 94(9) :090405, 2005.
- [102] Christoph Weiss and Martin Wilkens. Particle number counting statistics in ideal bose gases. *Opt. Express*, 1(10) :272–283, 1997.
- [103] Nicholas K. Whitlock and Isabelle Bouchoule. Relative phase fluctuations of two coupled one-dimensional condensates. *Phys. Rev. A*, 68(5) :053609, Nov 2003.
- [104] S. Whitlock, B. V. Hall, T. Roach, R. Anderson, M. Volk, P. Hannaford, and A. I. Sidorov. Effect of magnetization inhomogeneity on magnetic microtraps for atoms. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 75(4) :043602, 2007.

- [105] D. J. Wineland, J. J. Bollinger, and W. M. Itano. Squeezed atomic states and projection noise in spectroscopy. *Phys. Rev. A*, 50 :67, 1994.
- [106] Mingzhong Wu and Carl E. Patton. Experimental observation of fermi-pasta-ulam recurrence in a nonlinear feedback ring system. *Physical Review Letters*, 98(4) :047202, 2007.
- [107] Colombe Y., Knyazchyan E., Morizot O., Mercier B., Lorent V., and Perrin H. Ultracold atoms confined in rf-induced two-dimensional trapping potentials. *Europhys. Lett.*, 67 :593.
- [108] Le Coq Y., A. Retter J., Richard S., Aspect A., and Bouyer P. Coherent matter wave inertial sensors for precision measurements in space. *Applied Physics B : Lasers and Optics*, 2006.
- [109] C. N. Yang and C. P. Yang. "thermodynamics of a one-dimensional system of bosons with repulsive delta-function interaction". *J. Math. Phys.*, 10 :1115, 1969.
- [110] Masami Yasuda and Fujio Shimizu. Observation of two-atom correlation of an ultracold neon atomic beam. *Phys. Rev. Lett.*, 77(15) :3090–3093, Oct 1996.
- [111] Ivar Zapata, Fernando Sols, and Anthony J. Leggett. Josephson effect between trapped bose-einstein condensates. *Phys. Rev. A*, 57(1) :R28–R31, Jan 1998.
- [112] Marc Cheneau Baptiste Battelier Jean B. Dalibard Zoran Hadzibabic (LKB Lhomond), Peter Krüger (LKB Lhomond). Berezinskii-kosterlitz-thouless crossover in a trapped atomic gas. *Nature*, 441 :1118, 2006.

Deuxième partie  
Compilation des articles publiés



# Chapitre 8

## Compilation des articles publiés

J'ai reproduit ci-dessous les articles concernant mes travaux postdoctoraux publiés dans des journaux à comité de lecture. Les articles sont classés par thème, chaque thème correspondant à un chapitre de ce manuscrit. La liste des articles compilés est donnée ci-dessous. Le chiffre au bout de la ligne à droite indique la page correspondant au début de chaque article.

- **Compression de spin d'une assemblée d'atomes**
  - ★ Isabelle Bouchoule and Klaus Mølmer. Spin squeezing of atoms by the dipole interaction in virtually excited rydberg states. *Phys. Rev. A*, 65(4) :041803, Apr 2002. .... 109
  - ★ Isabelle Bouchoule and Klaus Mølmer. Preparation of spin-squeezed atomic states by optical-phase-shift measurement. *Phys. Rev. A*, 66(4) :043811, Oct 2002. .... 113
- **Interaction dans un laser à atomes guidés**
  - ★ Isabelle Bouchoule and Klaus Mølmer. Interaction-induced phase fluctuations in a guided atom laser. *Phys. Rev. A*, 67(1) :011603, Jan 2003. .... 124
- **Doublets puits unidimensionnels couplés**
  - ★ Jerome Esteve, Thorsten Schumm, Jean-Baptiste Trebbia, Isabelle Bouchoule, Alain Aspect, and Christopher Westbrook. Realizing a stable magnetic double-well potential on an atom chip. *Eur. Phys. J D*, 35 :141, 2005. .... 128
  - ★ Nicholas K. Whitlock and Isabelle Bouchoule. Relative phase fluctuations of two coupled one-dimensional condensates. *Phys. Rev. A*, 68(5) :053609, Nov 2003. .... 134
  - ★ I. Bouchoule. Modulational instabilities in josephson oscillations of elongated coupled condensates. *Eur. Phys. J D*, 2005. .... 139
- **Rugosité du potentiel**
  - ★ J. Esteve, C. Aussibal, T. Schumm, C. Figl, D. Mailly, I. Bouchoule, C. I. Westbrook, and A. Aspect. Role of wire imperfections in micromagnetic traps for atoms. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 70(4) :043629, 2004. .... 147

- ★ Thorsten Schumm, Jerome Esteve, Cristina Figl, J.B. Trebbia, Christine Aussibal, Dominique Mailly, Isabelle Bouchoule, Christopher Westbrook, and Alain Aspect. 'atom chips in the real world : the effects of wire corrugation. *Eur. Phys. J. D*, 32 :171, 2005. .... 151
- ★ J.-B. Trebbia, C. L. Garrido Alzar, R. Cornelussen, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule. Roughness suppression via rapid current modulation on an atom chip. *Physical Review Letters*, 98(26) :263201, 2007. .... 161
- ★ I. Bouchoule, J.-B. Trebbia, and C. L. Garrido-Alzar. Limitations of the modulation method to smooth wire-guide roughness. *accepté à Phys. Rev. A*, 2008. .... 165
- **Fluctuations de densité dans un gaz quasi-1D**
- ★ I. Bouchoule, K. V. Kheruntsyan, and G. V. Shlyapnikov. Interaction-induced crossover versus finite-size condensation in a weakly interacting trapped one-dimensional bose gas. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)*, 75(3) :031606, 2007. .... 176
- ★ J. Esteve, J.-B. Trebbia, T. Schumm, A. Aspect, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule. Observations of density fluctuations in an elongated bose gas : Ideal gas and quasicondensate regimes. *Physical Review Letters*, 96(13) :130403, 2006. .... 180
- ★ J.-B. Trebbia, J. Esteve, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule. Experimental evidence for the breakdown of a hartree-fock approach in a weakly interacting bose gas. *Physical Review Letters*, 97(25) :250403, 2006. .... 184

## Spin squeezing of atoms by the dipole interaction in virtually excited Rydberg states

Isabelle Bouchoule and Klaus Mølmer

*Institute of Physics and Astronomy, University of Aarhus, DK 8000 Aarhus C, Denmark*

(Received 7 May 2001; revised manuscript received 31 August 2001; published 10 April 2002)

We show that the interaction between Rydberg atomic states can provide continuous spin squeezing of atoms with two ground states. The interaction prevents the simultaneous excitation of more than a single atom in the sample to the Rydberg state, and we propose to utilize this blockade effect to realize an effective collective spin Hamiltonian  $J_x^2 - J_y^2$ . With this Hamiltonian the quantum-mechanical uncertainty of the spin variable  $J_x - J_y$  can be significantly reduced.

DOI: 10.1103/PhysRevA.65.041803

PACS number(s): 42.50.-p, 32.80.-t

The sizable dipole interaction between atoms that have been transferred with pulsed laser fields to highly excited Rydberg states has been proposed [1,2] as a mechanism for entanglement operation on the state of neutral atoms. A ‘‘Rydberg blockade’’ effect realized by the dipole interaction prevents more than one atom to enter a Rydberg state at a time. Hence, the evolution of one atom can be conditioned on the state of another one as required for a two-qubit gate in a quantum computer [1]. The Rydberg blockade effect can be used in a multistep procedure to prepare any collective symmetric state of an entire atomic ensemble [2].

In this paper, we propose to use the Rydberg blockade effect in an easier way that uses only continuous laser fields to realize the particular collective states called spin squeezed states. Spin squeezing refers to the collective spin  $\vec{J} = \sum_i \vec{S}_i$  of a collection of spin 1/2 particles, for which the Heisenberg inequality assures  $\Delta J_x \Delta J_y \geq |\langle J_z \rangle|/2$ , ( $\hbar = 1$ ). A state whose mean spin is along  $z$  and in which the width of the distribution of  $J_x$  is reduced so that  $\Delta J_x < \sqrt{|\langle J_z \rangle|/2}$  is called spin squeezed. The spin notation represents the state of an ensemble of two-level atoms, where the two states are represented as the  $S_z = \pm 1/2$  eigenstates of a spin 1/2 particle. Spin squeezing is a useful property since reduced spin fluctuations imply an improvement of the counting statistics for the number of atoms in specific states, i.e., improved resolution in spectroscopy and in atomic clocks [3,4].

Recently, a number of proposals for spin squeezing and atomic noise reduction has been made involving absorption of broadband squeezed light [5,6], collisional interactions in two-component condensates [7,8], and quantum nondemolition detection of atomic populations [9–11]. In the work presented here, an atomic gas is illuminated with lasers that couple long-lived states  $|a\rangle$  and  $|b\rangle$  to a Rydberg state  $|r\rangle$ . The lasers are far detuned so that the population in the Rydberg state is small and their effect is described by an effective Hamiltonian  $H$  acting on the states  $|a\rangle$  and  $|b\rangle$ . We first show how nonlinearities appear in the simple case of the lightshift produced by a single laser. The Hamiltonian  $J_z^2$  is realized and squeezing will occur. This Hamiltonian, however, has the drawback that the squeezing axis depends on the interaction time and on the total number of atoms. Thus, we propose a way to realize the Hamiltonian  $J_x^2 - J_y^2$  that enables stronger squeezing and which also presents the advantage that the squeezing axis is stationary [12].

Let us consider the situation depicted in Fig. 1, where an ensemble of  $N$  atoms is illuminated by a laser field detuned by  $\Delta$  from resonance of the transition  $|a\rangle \rightarrow |r\rangle$ . If the internal state of the atoms is initially symmetric with respect to exchange of atoms, we can consider only the symmetric states and a basis is formed by the states  $|n_a, n_r\rangle$ , where  $n_a$  is the number of atoms in the state  $|a\rangle$ ,  $n_r$  is the number of atoms in the state  $|r\rangle$ , and the remaining  $N - n_a - n_r$  atoms populate the state  $|b\rangle$ . The state  $|n_a, 0\rangle$  is coupled with the amplitude  $\sqrt{n_a}\Omega$  to  $|n_a - 1, 1\rangle$  which, in turn, is coupled to the state  $|n_a - 2, 2\rangle$  with the amplitude  $\sqrt{2}\sqrt{n_a - 1}\Omega$ . If the laser is sufficiently weak, the population in the state with  $n_r > 0$  is very small, and the only effect of the laser is to shift the energy of the states  $|n_a, 0\rangle$ . The expression for the light shift to fourth order in the laser field amplitude is

$$\Delta E_{n_a} = -n_a \frac{\Omega^2}{\Delta} + n_a^2 \frac{\Omega^4}{\Delta^3} - \frac{1}{2\Delta} \frac{2n_a(n_a - 1)\Omega^4}{\Delta^2}, \quad (1)$$

where the last term is due to a two photon transition to the state  $|n_a - 2, 2\rangle$ . The terms proportional to  $n_a^2$  in  $\Delta E_{n_a}$  cancel and the light shift is proportional to  $n_a$  as expected for non-

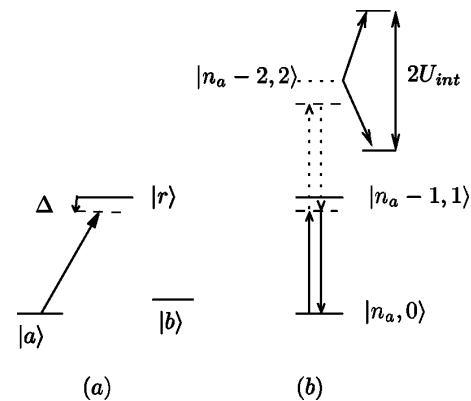


FIG. 1. Laser configuration and relevant states for calculation of the light shift to fourth order in the presence of a single laser. (a) the energy levels of a single atom. (b) the energy levels of a collection of atoms: the upper part of the figure shows how interaction causes an upward or downward shift  $U_{int}$  of the state with two Rydberg excited atoms.



ISABELLE BOUCHOULE AND KLAUS MØLMER

PHYSICAL REVIEW A 65 041803(R)

interacting atoms. Indeed, the energy of the state  $|a\rangle$  of each atom does not depend on the state of the other atoms. In the picture suggested by Fig. 1(b), the absence of nonlinearities for noninteracting atoms is due to destructive interference between processes involving states with at most one atom in the Rydberg state and processes involving states with several atoms in the Rydberg state.

Let us now assume that atoms in the Rydberg state interact so that the energy of the states  $|n_a-2,2\rangle$  is shifted by  $\pm U_{int} \gg \Delta$ . Then, the two photon contribution to the light shift is negligible and the light shift of  $|n_a,0\rangle$  is given by the two first terms of Eq. (1),

$$\Delta E_{n_a} = -n_a \frac{\Omega^2}{\Delta} + n_a^2 \frac{\Omega^4}{\Delta^3}. \quad (2)$$

By removing the interference path with more than one atom in the Rydberg state, the ‘‘Rydberg Blockade’’ leads to a nonlinear interaction. Note that the light shift (2) is independent of the precise interaction strength between Rydberg excited atoms. This implies that as long as the interaction is strong enough to substantially increase the detuning, i.e., for atoms with a wide range of spatial separations, the light shift is given by Eq. (2). Writing  $n_a = J_z + N/2$ , we see that the quadratic light shift in  $n_a$  results in an effective Hamiltonian containing a term in  $J_z^2$ . Such a Hamiltonian, applied to an initial coherent spin state directed in the  $(x,y)$  plane, gives squeezing [12]. The terms linear in  $J_z$  in the Hamiltonian are responsible for a rotation of the spin. The addition of a second laser, affecting the atomic state  $|b\rangle$ , enables us to realize a rotation independent of the number of atoms.

A better Hamiltonian to produce squeezing is

$$H = 2\Omega_{\text{eff}}(J_x^2 - J_y^2) = \Omega_{\text{eff}}(a^2b^{+2} + b^2a^{+2}). \quad (3)$$

$H$  corresponds to the transfer of atoms to  $|b\rangle$  in pairs, and it is thus analogous to the Hamiltonian for production of squeezed light that creates and annihilates photons in pairs. If this Hamiltonian is applied to an ensemble of atoms initially in  $|a\rangle$ , the spin variance  $\langle J_{\pm\pi/4}^2 \rangle = \langle (e^{i\pi/4}a^+b + e^{-i\pi/4}b^+a)^2 \rangle$  is reduced. We propose to realize the Hamiltonian (3) in the following way.

As shown in Fig. 2(a), Raman couplings between  $|a\rangle$  and  $|b\rangle$  are introduced by three laser fields with two Stokes fields,  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$ , detuned symmetrically around the Raman resonance by the amount  $\pm\Delta'$ . The idea is now that a single atom will not make the transition between states  $|a\rangle$  and  $|b\rangle$  because it is not resonant, but *two* atoms can simultaneously make the transition  $|aa\rangle \leftrightarrow |bb\rangle$  since this process occurs resonantly if one atom emits a Stokes photon stimulated by  $\Omega_1$  and the other emits a photon stimulated by  $\Omega_2$ .

Consider two atoms initially in the product state  $|aa\rangle$  illuminated by lasers with equal couplings for both atoms as depicted in Fig. 2(b). If the atoms do not interact, there is no way they can exchange the energy mismatch of the stimulated emissions in the fields  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  and the effective coupling to  $|bb\rangle$  vanishes. As in the previous proposal, this can be understood in terms of the destructive interferences

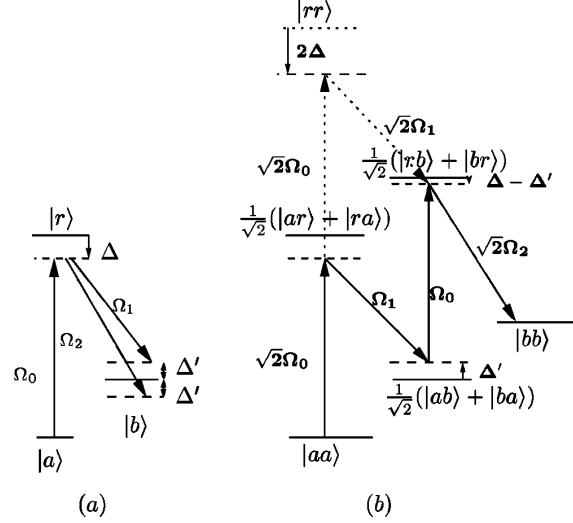


FIG. 2. (a) Energy levels in a single atom and transitions induced by laser fields  $\Omega_i$ ,  $i=0,1,2$  to couple the ‘‘spin’’ states  $|a\rangle$  and  $|b\rangle$  via the intermediate Rydberg state  $|r\rangle$ . (b) Transition paths transferring two atoms from the state  $|aa\rangle$  to the state  $|bb\rangle$ . The first path (solid lines) does not use the state  $|rr\rangle$ , the second path (dotted lines) does. If the atoms interact in the state  $|rr\rangle$ , so that this level is shifted by an amount much larger than  $\Delta$ , the amplitude of the dotted path becomes negligible, and a net coupling appears from  $|aa\rangle$  to  $|bb\rangle$ .

between paths involving the state  $|rr\rangle$  and the other paths. Figure 2(b) only shows the paths for which stimulated emission in the field  $\Omega_1$  occurs first.

By contrast, if the interaction between the atoms shifts the energy of the state  $|rr\rangle$  by  $\pm U_{int} \gg \Delta$ , the amplitude of the paths involving the intermediate state  $|rr\rangle$  [dotted line in Fig. 2(b)] is suppressed compared to the paths represented by the solid line in the figure, the destructive interference is suppressed, and the coupling between  $|aa\rangle$  and  $|bb\rangle$  is now

$$\Omega_c = -\frac{4\Omega_0^2\Omega_1\Omega_2}{\Delta(\Delta-\Delta')(\Delta+\Delta')}. \quad (4)$$

A similar four photon transition has been used to entangle ions in ion traps [13,14], where the suppression of destructive interference arises from the Coulomb interaction that lifts the degeneracy of collective vibrational modes. We note that the emergence of a resonant transition due to removal of interfering transition paths also has analogies in spectroscopy on gases, where different mechanisms for pressure induced resonances work by similar mechanism [15,16].

As  $U_{int}$  scales as  $1/r^3$ , the coupling between  $|aa\rangle$  and  $|bb\rangle$  is given by Eq. (4) as long as the distance between the atoms is smaller than a given critical distance  $d_0$  for which  $U_{int} \gg \Delta$ . Thus, in an atomic sample with a size smaller than  $d_0$  the transfer of atoms from  $|a\rangle$  to  $|b\rangle$  is represented by the squeezing Hamiltonian (3) with  $\Omega_{\text{eff}} = \Omega_c/2$ . Terms involving more than two atoms at a time would be of higher order in the Rabi frequencies of the lasers and are neglected.

SPIN SQUEEZING OF ATOMS BY THE DIPOLE . . .

PHYSICAL REVIEW A 65 041803(R)

We now turn to an analysis of the time required to obtain substantial spin squeezing. The coupling between states with  $n_b$  and  $n_b+2$  atoms transferred to  $|b\rangle$  is about the same as the one between harmonic-oscillator number states introduced by the squeezing Hamiltonian  $N\Omega_{\text{eff}}(b^2+b^{\dagger 2})$ , as long as  $n_b$  is much smaller than the total number of atoms  $N$ . Thus, we expect the squeezing to evolve as

$$\langle J_{-\pi/4}^2 \rangle(t) = e^{-4N\Omega_{\text{eff}}t} \langle J_{-\pi/4}^2 \rangle(0) \quad (5)$$

and the mean number of atoms in  $|b\rangle$  to follow

$$\bar{n}_b = \sinh^2(2N\Omega_{\text{eff}}t). \quad (6)$$

For ease of presentation we introduce the amount of squeezing,  $S = (N/4)/\langle J_{-\pi/4}^2 \rangle$ . Solving numerically the evolution produced by the Hamiltonian (3), we find that these simple analytical expressions are accurate up to 5% as long as  $\bar{n}_b < 0.05N$  and that the maximum squeezing obtained is about  $S \approx N/2$ .

The amplitudes for the excitations of Rydberg states from state  $|a\rangle$  and state  $|b\rangle$  are proportional to  $\sqrt{\bar{n}_a}\Omega_0$  and  $\sqrt{\bar{n}_b}\Omega_{1,2}$ , respectively. Therefore, to justify the elimination of the Rydberg state, the coupling amplitudes should obey

$$\begin{aligned} \sqrt{N}\Omega_0 &\ll \Delta, \\ \sqrt{S/4}\Omega_1 &\ll \Delta + \Delta', \\ \sqrt{S/4}\Omega_2 &\ll \Delta - \Delta'. \end{aligned} \quad (7)$$

Here, we used that, for intermediate times so that  $1 \ll \bar{n}_b \ll N$ ,  $\bar{n}_b \approx S/4$ . Assuming that these inequalities are all fulfilled by an order of magnitude, and taking  $\Delta \pm \Delta' \sim \Delta$ , the time required to obtain the squeezing  $S$  is about

$$T \approx \frac{1}{16} \frac{10^4}{\Delta} S \ln(S). \quad (8)$$

$T$  is almost linear in the squeezing parameter  $S$ , and does not depend on the total number of atoms. The coherence time of the ground states  $|a\rangle$  and  $|b\rangle$  may be of the order of seconds, and the spin squeezing will be limited only by incoherent effects such as spontaneous emission and thermal field absorption by the small Rydberg state population. To estimate the effect of such incoherent processes, we consider the simple case of loss of atoms, which represents atomic decay to states different from  $|a\rangle$  and  $|b\rangle$ . If the atom  $i$  has been lost, the spin variance of the remaining atoms is  $\langle J_x'^2 \rangle = \langle (J_x - S_{x_i})^2 \rangle$  where  $S_{x_i}$  is the spin of the lost particle. Due the permutation symmetry of the atomic state,  $\langle \sum_j S_{x_j} S_{x_i} \rangle = (1/N) \langle J_x^2 \rangle$ , and thus  $\langle J_x'^2 \rangle = \langle J_x^2 \rangle (1 - 2/N) + \frac{1}{4}$ . After the loss of  $n_L$  atoms, we thus have the reduced squeezing

$$S' = \frac{(N - n_L)/4}{\langle J_x'^2 \rangle} \approx S \frac{1}{1 + \frac{n_L S}{N}}, \quad (9)$$

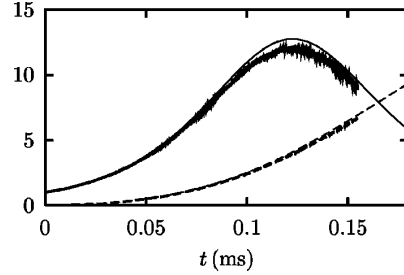


FIG. 3. Evolution of the squeezing factor  $S = (N/4)/\langle J_{-\pi/4}^2 \rangle$  as a function of time. Thick lines: numerical evolution with six lasers as explained in the text with  $\Delta = 50$  MHz,  $\Delta' = 20$  MHz and  $|\Omega_0| = |\Omega_1| = |\Omega_2| = 1.1$  MHz. Thin lines: evolution according to the Hamiltonian (3). The dashed lines show the evolution of the number of atoms in the state  $|b\rangle$  (3).

where  $S$  is the value of the squeezing before the losses. To have a negligible effect of losses on the squeezing, we require  $n_L S/N \ll 1$ . The sensibility of squeezing to losses increases as the squeezing increases as expected since strong squeezing corresponds to strong correlations and entanglement of the particles [17]. With a population of the Rydberg state of about  $10^{-2}$ , which corresponds to the inequalities (7) fulfilled by a factor 10, the expression (8) for the squeezing time implies that the loss rate  $\Gamma$  should obey

$$\frac{\Delta}{\Gamma} \gg \frac{10^2 S^2 \ln(S)}{16N}. \quad (10)$$

For Rydberg atoms with  $n \sim 50$ , an overestimate for the spontaneous emission rate and the interaction with the black body field yields  $\Gamma \sim 10$  kHz [2]. Thus, to obtain a squeezing of a factor about 10 with 20 atoms, we require  $\Delta \gg 6$  MHz. For  $\Delta = 50$  MHz the interaction energy between the Rydberg atom is much larger than  $\Delta$  for a distance between atoms  $r \leq d_0 = 3 \mu\text{m}$  [2]. To avoid Doppler broadening of  $\Delta$  it is necessary to use a cold atomic sample. With a density of atoms of  $2 \times 10^{11}$  atoms/cm<sup>3</sup>, realized in atomic ensembles obtained from a magneto-optical trap, the number of atoms in a volume of  $d_0^3$  is about 20. Thus, squeezing by a factor about 10 can be obtained.

The coupling introduced by the lasers is well represented by the Hamiltonian (3), but as seen in our first proposal for spin squeezing, the dipole Blockade effect is accompanied by a nonlinearity in the lightshift of the states and the resulting nonlinear terms inhibit the evolution towards states with significant squeezing. To cancel these lightshifts, we propose to add three other lasers of the same intensity but with opposite detuning of the laser fields indicated in Fig. 2(a). These lasers contribute to both the lightshift and the two-atom Raman coupling. If the two added Stokes fields are dephased, respectively, by  $+90^\circ$  and  $-90^\circ$  with the original ones, the net effect is a vanishing lightshift but a nonvanishing Raman coupling. Figure 3 shows the calculated evolution of 20 atoms illuminated by six lasers with appropriate relative phases. Only states with  $n_r < 2$  have been taken into account in the calculation since they are the only states relevant in the

ISABELLE BOUCHOULE AND KLAUS MØLMER

PHYSICAL REVIEW A **65** 041803(R)

presence of a strong interaction between Rydberg atoms. The numerical results follow the results of the simple quadratic spin Hamiltonian (3) with a small discrepancy due to even higher-order terms in the lightshift. The maximum squeezing factor is approximately half of the number of interacting atoms.

It is experimentally relevant to analyze also the case of a macroscopic sample, where the Rydberg blockade is effective only for the  $n$  nearest neighbors of a given atom. The Hamiltonian for a large ensemble of atoms can be modeled

$$H = 2 \sum_{i \neq j} \omega_{ij} (S_{x_i} S_{y_j} + S_{y_i} S_{x_j}), \quad (11)$$

where  $\omega_{ij} = \Omega_{\text{eff}}$  if the distance between the atoms  $i$  and  $j$  is smaller than  $d_0$  and vanishes otherwise. (We have introduced a phase shift of the states  $|a\rangle$  and  $|b\rangle$  so that the squeezing occurs along  $y$ .) The time derivative of  $\langle J_y^2 \rangle$  is

$$\frac{d}{dt} \langle J_y^2 \rangle = -4 \sum_{i,j,k} \omega_{ij} \langle S_{y_k} S_{z_i} S_{y_j} + S_{z_i} S_{y_j} S_{y_k} \rangle. \quad (12)$$

Initially, all the atoms are in  $|a\rangle$ . There is no correlation between atoms and Eq. (12) gives  $(d/dt)\langle J_y^2 \rangle(t=0) = -4n\Omega_{\text{eff}}\langle J_y^2 \rangle(t=0)$ . Thus, the initial behavior is similar to that of a small ensemble of  $n$  atoms. For later times, numeri-

cal simulations in the case of a static ensemble show that to a good approximation, the squeezing evolves similarly to that in an entire ensemble with  $n$  atoms all interacting with each other and the maximum squeezing is of the order of  $n/2$ . If now the atoms move around sufficiently quickly ( $v_{\text{rms}} \gg 4n\Omega_{\text{eff}}d_0$ ) so that they are brought constantly in contact with new neighbors with whom they are not entangled, stronger squeezing could be expected. Indeed, in each term of Eq. (12), the atoms  $i$  and  $j$  are not correlated, and because  $\langle S_{y_i} \rangle = 0$  and  $\langle S_{z_i} \rangle \approx 1/2$ ,  $\langle J_y^2 \rangle$  continues to decrease exponentially as  $e^{-4n\Omega_{\text{eff}}t}$  beyond the minimum obtained for  $n$  atoms.

In summary, we have proposed a mechanism to produce spin squeezed states of atoms by use of a Rydberg blockade effect induced by cw laser fields. Our calculations show that reduction of the collective spin noise by a factor larger than 10 is possible with current experimental parameters. Note that many other interaction mechanisms may produce a similar blockade of destructive interference. Due to the interference blockade, bichromatically driven quantum transitions via intermediate states with enhanced interparticle interactions, will in general lead to pairwise transitions and nonlinear collective dynamics of the ensemble.

Isabelle Bouchoule thanks the European Community for financial support.

- 
- [1] D. Jaksch *et al.*, Phys. Rev. Lett. **85**, 2208 (2000).
  - [2] M.D. Lukin *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 037901 (2001).
  - [3] D.J. Wineland, J.J. Bollinger, W.M. Itano, and D.J. Heinzen, Phys. Rev. A **50**, 67 (1994).
  - [4] G. Santarelli *et al.*, Phys. Rev. Lett. **82**, 4619 (1999).
  - [5] A. Kuzmich, K. Mølmer, and E.S. Polzik, Phys. Rev. Lett. **79**, 4782 (1997).
  - [6] J. Hald *et al.*, Phys. Rev. Lett. **83**, 1319 (1999).
  - [7] A. Sørensen *et al.*, Nature (London) **409**, 63 (2001).
  - [8] U.V. Poulsen and K. Mølmer, Phys. Rev. A **64**, 013616 (2001)
  - [9] A. Kuzmich, L. Mandel, and N.P. Bigelow, Phys. Rev. Lett. **85**, 1594 (2000).
  - [10] A. Kuzmich, N.P. Bigelow, and L. Mandel, Europhys. Lett. **42**, 481 (1998).
  - [11] K. Mølmer, Eur. Phys. J. D **5**, 301 (1999).
  - [12] M. Kitagawa and M. Ueda, Phys. Rev. A **47**, 5138 (1993).
  - [13] A. Sørensen and K. Mølmer, Phys. Rev. Lett. **82**, 1971 (1999).
  - [14] C.A. Sackett *et al.*, Nature (London) **404**, 256 (2000).
  - [15] G.V. Varada and G.S. Agarwal, Phys. Rev. A **45**, 6721 (1992).
  - [16] G. Grynberg and P.R. Berman, Phys. Rev. A **41**, 2677 (1990).
  - [17] A. Sørensen and K. Mølmer, Phys. Rev. Lett. **86**, 4431 (2001).

## Preparation of spin-squeezed atomic states by optical-phase-shift measurement

Isabelle Bouchoule<sup>1</sup> and Klaus Mølmer<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institut d'Optique, Centre Universitaire Bâtiment 503, 91403 Orsay Cedex, France*

<sup>2</sup>*QUANTOP, Department of Physics and Astronomy, University of Aarhus, DK 8000 Aarhus C, Denmark*

(Received 28 June 2002; published 24 October 2002)

In this paper we present a state vector analysis of the generation of atomic spin squeezing by the measurement of an optical phase shift. The frequency resolution is improved when a spin squeezed sample is used for spectroscopy in place of an uncorrelated sample. When light is transmitted through an atomic sample some photons will be scattered out of the incident beam, and this has a destructive effect on the squeezing. We present quantitative studies for three limiting cases: the case of a sample of atoms of size smaller than the optical wavelength, the case of a large dilute sample, and the case of a large dense sample.

DOI: 10.1103/PhysRevA.66.043811

PACS number(s): 42.50.Dv, 42.50.Ct, 32.80.-t

### I. INTRODUCTION

Spin squeezing is a means for improving frequency resolution in spectroscopy with samples of two-level atoms. With uncorrelated atoms the resolution is limited by the projection noise [1], due to the width of the binomial atomic distribution when each atom is in a superposition  $\alpha|a\rangle + \beta|b\rangle$  of the two states  $|a\rangle$  and  $|b\rangle$ . In a spin squeezed ensemble, entanglement between atoms enables reduced population fluctuations without strong decrease of the coherence between  $|a\rangle$  and  $|b\rangle$  [1,2]. Such a squeezed ensemble of atoms can be produced by a quantum nondemolition (QND) measurement of the population  $n_a$  in  $|a\rangle$  if this measurement has better resolution than the initial width  $\sqrt{N}/2$  of the uncorrelated sample (for the case of  $|\alpha|^2 = |\beta|^2 = 1/2$ ). A recent experiment [3,4] performed such a QND measurement of  $n_a$  using the phase shift of a laser beam passing through the sample and interacting only with the atoms in the state  $|a\rangle$ . Far from resonance, this phase shift is simply proportional to the number of atoms in  $|a\rangle$ . The atomic system is modified by the back action of the measurement on the system state vector, and the final uncertainty in the number of atoms in  $|a\rangle$  is reduced. Following the theoretical proposal of Ref. [5], further experiments have shown [6] that two separate atomic ensembles can be driven into an entangled state by measurements of the total phase shifts of optical fields passing through both samples.

In this paper we present a state vector analysis of spin squeezing by such phase shift measurements. In a microscopic formulation, the phase shifts result from the interference between the incident field and the scattered field. When light interacts with atoms, apart from the phase shift of the incident mode, scattering of light out of this field mode occurs, and the scattered photons carry information about the atoms which is not recorded by the experimentalist. The state of the system is therefore not that deduced from the phase-shift measurement alone, but rather an incoherent mixture of states that one would have determined if the scattered photons had also been detected. This effect reduces the coherence between  $|a\rangle$  and  $|b\rangle$  and it thus counteracts the noise reduction by reducing also the signal used in spectroscopy.

The purpose of the present paper is to investigate the importance of photon scattering for the preparation of spin

squeezed atomic states by phase-shift measurements. In particular, we shall derive criteria for the possibility to produce spin squeezed states and calculate the maximum possible squeezing in the presence of scattering.

The paper is organized as follows. In Sec. II, we introduce the concept of spin squeezing and some useful relations for the mean values and variances of spin operators. In Sec. III, we present our model for phase-shift measurements, and we introduce a formalism that makes it possible to take photon scattering into account. In Sec. IV, we analyze the information given by the registration of phase shifts only. In Sec. V, we present simulations and analytical estimates valid for a cloud that is smaller than the optical wavelength, and for which photon scattering does not provide any information about the state of individual atoms. In Sec. VI, we consider the opposite case where the scattered photons can, in principle, be traced back to individual atoms in the cloud. In Sec. VII, we turn to the more complicated case of a large dense cloud, which turns out to present the most promising case for spin squeezing. In Sec. VIII we summarize the results and conclusions of our calculations.

### II. COLLECTIVE SPIN REPRESENTATION OF AN ATOMIC SAMPLE

The term spin squeezing originates in the treatment of two-level atoms as fictitious spin- $\frac{1}{2}$  particles,  $\vec{j} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$ , where  $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  are the familiar  $2 \times 2$  Pauli matrices in the basis of atomic states  $|a\rangle$  and  $|b\rangle$ . For a gas of  $N_{at}$  atoms, the collective spin components

$$\vec{J} = \sum_i \vec{j}_i \quad (1)$$

have mean values, which characterize the polarization and atomic state populations of the gas, and quantum-mechanical uncertainties, which characterize the population statistics. For precision in spectroscopy and in atomic clocks it is pertinent to have a large mean spin vector of the sample and to have as small a variance as possible in a spin component orthogonal to the mean spin. Assume that the mean spin points in the  $x$  direction. Heisenberg's uncertainty relation states that

ISABELLE BOUCHOULE AND KLAUS MØLMER

PHYSICAL REVIEW A **66**, 043811 (2002)

$$\Delta J_y \Delta J_z \geq \frac{1}{2} |\langle J_x \rangle|. \quad (2)$$

For the state with all atoms in their respective  $j_x = \frac{1}{2}$  eigenstate, the binomial distribution leads to uncertainties of  $\Delta J_y = \Delta J_z = \sqrt{N_{at}}/2$ , in accord with the previous inequality. It was shown by Wineland *et al.* [1] that if one can construct spin squeezed states which do not have the same uncertainty in the two spin components orthogonal to the mean spin, one may reduce the variance in a frequency measurement on  $N_{at}$  particles by the factor

$$\xi^2 = \frac{N_{at} (\Delta J_z)^2}{\langle J_x \rangle^2}. \quad (3)$$

In Ref. [2], states which for a given  $\langle J_x \rangle$  have the smallest possible  $\Delta J_z$  were identified. For large  $N_{at}$  these are well represented by a Gaussian ansatz for the amplitudes on states  $|J = N_{at}/2, M\rangle$  with different eigenvalues of  $J_z$ , in which case one obtains the approximate relation:

$$\begin{aligned} \langle J_x \rangle &\approx (J + \frac{1}{2}) \left( 1 - \frac{2(\Delta J_z)^2}{(2J+1)^2} \right) \exp\left( -\frac{1}{8(\Delta J_z)^2} \right) \\ &\sim J \exp\left( -\frac{1}{8(\Delta J_z)^2} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Spin squeezed states may be produced in a number of different ways: by absorption of squeezed light [7], by controlled collisional interaction in Bose-Einstein condensates [8] or in a classical gas [9], by coupling through a single motional degree of freedom or through an optical cavity field mode [10,11]. One advantage of the QND scheme, analyzed in the present paper, is the automatic matching of the capability to produce the state and the ability to detect spin squeezing, which is done by the same kind of measurement. To verify that the fluctuations in  $n_a$  have been reduced, one has to show that two subsequent measurements agree (to within the desired uncertainty). If one can produce a state with a reduced number fluctuations by means of a QND measurement, one will also have the resolving power to make use of such a reduction in a high-precision experiment.

### III. A PHYSICAL SETUP FOR PHASE MEASUREMENTS

In Fig. 1, we illustrate a physical setup, where a beam of light enters a Stern-Gerlach interferometer which contains an atomic sample in one of its arms. By lenses, the field is focused on the sample of transverse dimension  $X$ . For simplicity, we assume that the decomposition in plane waves of the incident photons is uniform for all angles  $\theta$  smaller than the focusing angle  $\theta_0$ , which, in turn, is so small that the incident field is homogeneous across the area of the atomic cloud. Let  $g_0 = k \theta_0 / (2\sqrt{\pi})$  denote the probability amplitude per unit surface for a photon to pass at the center of the mode ( $g_0^2 dx dy$  gives the probability that the photon passes in the area  $dx dy$  around the center). A second lens maps the field back onto the initial mode, and the second beam splitter

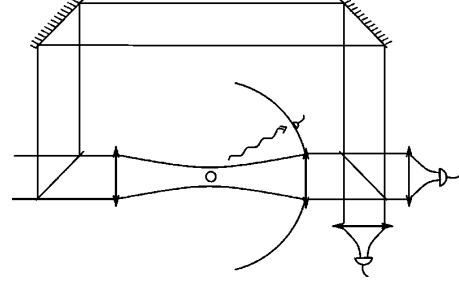


FIG. 1. Configuration for a spin squeezing experiment. Atoms occupying a region in one arm of an interferometer are illuminated by a component of an optical field, incident from the left in the figure. The phase shift of the light field due to interaction with the atoms in a specific internal state is registered by the different photocurrents in the two detectors.

the interferometer recombines the optical beams for the read-out of the phase shift induced by the presence of atoms in the lower part of the interferometer. The atoms populate states  $|a\rangle$  and  $|b\rangle$ , and the optical field couples off-resonantly the state  $|a\rangle$  to an auxiliary atomic state, so that a phase shift on the light field is induced, which is proportional to the population  $n_a$ .

We now take into account the scattering of the photons by the atoms. The scattering is the normal spontaneous emission by the atom, given in the electric dipole approximation by well-known angular distributions for photons of different polarizations. Since our purpose is not to determine the angular distribution of scattered light, but rather to estimate its damaging effect on the atomic state preparation, we assume simply that every atom scatters photons isotropically with amplitude  $f$ . At low atomic saturation, the scattered photons are coherent with the incident field.

We shall present a calculation in which the photons are scattered one at a time by the sample. The scattered part of the wave function of a single photon is entangled with the state of the atomic sample, since an atomic state with a definite sequence of atoms populating the state  $|a\rangle$ ,  $|\vec{\epsilon}\rangle = |1: \epsilon_1, 2: \epsilon_2, \dots, N_{at}: \epsilon_{N_{at}}\rangle$ , where  $\epsilon_i = |a\rangle$  or  $|b\rangle$ , leads to the photonic wave function

$$\psi_{\text{scatt}, \vec{\epsilon}} = \frac{e^{ikr}}{r} f_{\vec{\epsilon}}(\Omega) g_0, \quad (5)$$

where  $f_{\vec{\epsilon}}(\Omega)$  depends on the state of the atomic sample.

In the first Born approximation,  $f_{\vec{\epsilon}}(\Omega)$  is

$$f_{\vec{\epsilon}}(\Omega) = f \sum_{i, \epsilon_i = |a\rangle} e^{i\Delta\vec{k} \cdot \vec{r}_i}, \quad (6)$$

where  $\Delta\vec{k}$  is the difference between the scattered and the incident wave vectors. For  $\theta < \theta_0$ ,  $f_{\vec{\epsilon}}(\Omega) \approx f_{\vec{\epsilon}}(0) = f n_a$ .

In the Born approximation, the flux of photons is not conserved. To remedy this problem, we write the angular part of the photon wave function far from the atomic sample (sum of the scattered wave function and the incident wave func-



tion) in the following form which is equivalent to the first-order Born approximation but which conserves the photon flux:

$$f_{\vec{\epsilon}}(\Omega)g_0 = \begin{cases} f_{\vec{\epsilon}}(\Omega)g_0 & \text{for } \theta > \theta_0 \\ -i \frac{k}{2\pi g_0} \sqrt{(1-\sigma_{\text{scatt}})} e^{i(2\pi/k)fn_a|g_0|^2} & \text{for } \theta < \theta_0, \end{cases} \quad (7)$$

where

$$\sigma_{\text{scatt}} = \int_{\theta > \theta_0} |f_{\vec{\epsilon}}(\Omega)g_0|^2 d\Omega \quad (8)$$

and  $f_{\vec{\epsilon}}$  is given by Eq. (6).

If the atomic sample is in one of the states  $|\vec{\epsilon}\rangle$ , this state is unchanged by the transmission of a photon through the interferometer. The scattering state of the photon, however, depends on the argument  $\vec{\epsilon}$ , and taking into account the unscattered component in the upper arm, we write this state in quantum notation as

$$|\psi\rangle_{p,\vec{\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi\rangle_{\text{ref}} + |\psi\rangle_{\vec{\epsilon}}). \quad (9)$$

If the initial state of the cloud is in a superposition of different states  $|\vec{\epsilon}\rangle$  the joint state of the photon and the atoms becomes the entangled state

$$|\Psi\rangle = \sum_{\vec{\epsilon}} C_{\vec{\epsilon}} |\psi\rangle_{p,\vec{\epsilon}} |\vec{\epsilon}\rangle = \sum_{\vec{\epsilon}} C_{\vec{\epsilon}} \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi\rangle_{\text{ref}} + |\psi\rangle_{\vec{\epsilon}}) |\vec{\epsilon}\rangle. \quad (10)$$

It is at this stage that the photodetection takes place. Photodetector 1 [2] of the interferometer detects photons in the mode  $|1\rangle = (e^{i\phi}|\psi\rangle_{\text{ref}} + e^{-i\phi}|\psi\rangle_{\text{inc}})/\sqrt{2}$   $|2\rangle = (e^{i\phi}|\psi\rangle_{\text{ref}} - e^{-i\phi}|\psi\rangle_{\text{inc}})/\sqrt{2}$ , with  $|\psi\rangle_{\text{inc}}$  the field transmitted by the lower path of the interferometer in the absence of atoms. The detection of a photon in one of the detectors sketched in Fig. 1 thus extracts the corresponding projection of the state vector  $|\Psi\rangle$ . This projection causes a noncontinuous change of the atomic state vector amplitudes,

$$C_{\vec{\epsilon}} \rightarrow \frac{1}{2} [e^{i\phi} + e^{-i\phi} \sqrt{(1-\sigma_{\text{scatt}})} e^{i(2\pi/k)fn_a|g_0|^2}] C_{\vec{\epsilon}}, \quad \text{detector 1,}$$

$$C_{\vec{\epsilon}} \rightarrow \frac{1}{2} [e^{i\phi} - e^{-i\phi} \sqrt{(1-\sigma_{\text{scatt}})} e^{i(2\pi/k)fn_a|g_0|^2}] C_{\vec{\epsilon}}, \quad \text{detector 2.} \quad (11)$$

We recall that  $n_a$  and  $\sigma_{\text{scatt}}$  depend on  $\vec{\epsilon}$ .

The probabilities  $\pi_1$  and  $\pi_2$  to detect the photon in detector modes 1 and 2 are given by the squared norms of the

vectors described by the new amplitudes after application of either projection according to Eq. (11). One may thus simulate the detection process by choosing one of the two prescriptions, update the amplitudes, and renormalize the state vector. Detection of many photons is simulated by iterative updating of the state vector amplitudes.

In addition to the detection events just described, we have identified the possibility for photons to be scattered into other directions  $\Omega$ . The effect of such an event is of precisely the same character as the projections just described. If the photon is detected in the direction  $\Omega$ , the corresponding projection operator amounts to multiplying each amplitude of the initial atomic state with the corresponding scattering amplitude

$$C_{\vec{\epsilon}} \rightarrow f_{\vec{\epsilon}}(\Omega) C_{\vec{\epsilon}}, \quad \text{detection in direction } \Omega. \quad (12)$$

The detector actually has a finite size and detects the photon in a mode with  $f$  centered around  $\Omega$  but spread over  $\delta\Omega$ . With  $\delta\Omega \ll 1/kX$ , the scattered wave function is constant over  $\delta\Omega$  and the probability to detect a scattered photon within the solid angle  $\delta\Omega$  in the direction  $\Omega$  is thus

$$P(\Omega) = \sum_{\vec{\epsilon}} 1/2 |g_0|^2 |f(\Omega)|^2 |C_{\vec{\epsilon}}|^2 \delta\Omega. \quad (13)$$

To simulate the scattering of photons we divide the surface of the scattering sphere in sections by longitudes and latitudes, and we imagine detectors located in each section. The poles of the sphere are in the direction of the incident beam, and the solid angle delimited by  $\theta < \theta_0$  corresponding to the incident beam is of course not covered by such detectors since photons emitted in this solid angle go in the interferometer. For each incident photon, the probability to have a click in each detector of the sphere is computed. By adding the probabilities we compute  $\sigma_{\text{scatt}}$  and determine the probabilities to detect the photon in detectors 1 or 2. The detector in which the photon is detected is chosen randomly in the simulation accordingly to all the calculated probabilities, and the state of the atoms is modified according to Eq. (11) or (12).

#### IV. INFORMATION GIVEN BY THE INTERFEROMETER

We shall now analyze the states resulting from the interaction with the field and the detection of the photons. In this section we neglect photon scattering and study only the effect of photons measured in detectors 1 and 2. We thus assume that  $\sigma_{\text{scatt}} = 0$ , in which case we can rewrite the factors in Eq. (11), and obtain the state of the atoms after the detection of  $N_1$  photons in detector 1 and  $N_p - N_1$  photons in detector 2,

$$|\psi\rangle = \sum_{\vec{\epsilon}} C_{\vec{\epsilon}} \cos\left(\phi - \pi g_0^2 \frac{f}{k} n_a\right)^{N_1} \times \sin\left(\phi - \pi g_0^2 \frac{f}{k} n_a\right)^{N_p - N_1} |\vec{\epsilon}\rangle. \quad (14)$$

In this equation we have ignored a phase factor  $e^{i\pi f n_a g_0^2 N_p/k}$ , which corresponds to a phase shift of the state  $|a\rangle$  or a rota-

ISABELLE BOUCHOULE AND KLAUS MØLMER

PHYSICAL REVIEW A **66**, 043811 (2002)

tion around  $z$  in the spin language. To avoid such a rotation, one may apply an energy shift on state  $|a\rangle$  or an alternative measurement scheme, where atoms in state  $|b\rangle$  are also detected by optical phase shifts.

As a consequence of the photodetections, the populations of states with a definite number  $n_a$  of atoms in state  $|a\rangle$  are thus multiplied by the factors

$$\mathcal{F}_{N_p}(N_1, n_a) = \cos\left(\phi - \pi g_0^2 \frac{f}{k} n_a\right)^{2N_1} \times \sin\left(\phi - \pi g_0^2 \frac{f}{k} n_a\right)^{2(N_p - N_1)}. \quad (15)$$

By differentiation with respect to  $n_a$ , we find that  $\mathcal{F}_{N_p}(N_1, n_a)$  is peaked at values  $n_a^0$ , which obey

$$\tan\left(\phi + \pi g_0^2 \frac{f}{k} n_a^0\right) = \pm \sqrt{\frac{N_p - N_1}{N_1}}. \quad (16)$$

The values  $n_a^0$  correspond of course to atomic populations so that the probability for the photons to be detected in modes 1 and 2 after the interaction are in agreement with the ratios  $N_1/N_p$  and  $N_2/N_p$  observed by the measurement.

To estimate the width of  $\mathcal{F}_{N_p}(N_1, n_a)$ , we calculate the second derivative of  $\mathcal{F}_{N_p}(N_1, n_a)$  at  $n_a^0$ . We find that

$$\frac{\partial^2}{\partial n_a^2} \mathcal{F}_{N_p}(N_1, n_a)(n_a^0) = -4N_p \left(\pi g_0^2 \frac{f}{k}\right)^2 \mathcal{F}_{N_p}(N_1, n_a^0). \quad (17)$$

So the more photons that are transmitted, the narrower the width of the peaks in  $\mathcal{F}_{N_p}(N_1, n_a)$ . The width does not depend on the initial relative phase  $\phi$  between the two arms of the interferometer nor on the result of the measurement. If we suppose that  $\mathcal{F}$  is Gaussian, the following equation gives the rms width of  $\mathcal{F}$  in  $n_a$ :

$$\Delta n_{a,\text{int}} = \frac{1}{2\pi g_0^2 \frac{f}{k} \sqrt{N_p}}. \quad (18)$$

Equation (16) has several solutions due to the two possible signs, and due to the periodicity of the tan function. If several such solutions lie within the initial binomial distribution of  $n_a$ , the state obtained after the measurement will be a coherent superposition of spin states with different mean values of  $J_z$ , i.e., a kind of ‘‘Schrödinger cat.’’ However, a change of  $N_1$  or  $N_p - N_1$  by unity changes the relative phase between peaks by  $\pi$ . Thus, with realistic photon detectors with an efficiency smaller than unity, the relative phase is unknown and the system is described by a statistical mixture of the states.

In order to obtain spin squeezing, we want to ensure that only a single value of  $n_a^0$  inside the initial distribution obeys Eq. (16), so that the detection unambiguously leads to a more narrow distribution in  $n_a$ . This requires

$$\frac{\pi}{2\pi g_0^2 f/k} > \sqrt{N} \quad \text{and} \quad \frac{\phi k}{\pi g_0^2 f} \gg \sqrt{N}. \quad (19)$$

Equation (3) shows that it is not enough to reduce the uncertainty in  $J_z$  to have useful spin squeezing, one must also ensure that the mean value of  $J_x$  remains large. The outcome of the interferometric detection is close to ideal in this respect. The resulting state vector has amplitudes on the different  $J_z$  eigenstates which follow a Gaussian distribution very well, and the approximation (4) for the mean spin is close to the maximum possible value for any given variance of  $J_z$ .

Using Eqs. (4) and (18) we obtain

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{N_{at}} \sqrt{N_p} \pi g_0^2 \frac{f}{k}} e^{\pi^2 g_0^4 f^2 N_p / 2k^2}. \quad (20)$$

The minimum value of  $\xi$ , for a fixed  $N_{at}$ , is

$$\xi_{\text{Min}} = \sqrt{\frac{1}{N_{at}}}, \quad (21)$$

and is obtained for the photon number  $N_p = k^2 / \pi^2 g_0^4 f^2$ . This value of  $\xi$  is the minimum value allowed as shown in Ref. [1].

For a large number of atoms, the squeezing factor (21) can be really significant. The production of spin squeezed states by QND detection is susceptible, however, to two possible drawbacks caused by scattering of photons.

(1) Scattered photons carry information about  $J_z$ , so that this quantity could, in principle, be known better than the width of  $\mathcal{F}_{N_p}(N_1, n_a)$ , and according to Eq. (4), the mean spin will be reduced.

(2) Scattered photons carry information about the spatial distribution of atoms in the state  $|a\rangle$ . The state is then no longer symmetric under the exchange of particles,  $J$  values smaller than  $N_{at}/2$  become populated, and the mean spin is accordingly reduced.

We shall now turn to a quantitative analysis of these effects.

## V. SMALL CLOUD

In this section we consider the case of a cloud of atoms confined to a region in space smaller than the optical wavelength. This implies that the scattered photons will not contain information about the individual atoms in the ensemble. They will, however, carry information about  $n_a$  that is not known to the experimentalist who measures only the fields by detectors 1 and 2.

### A. Numerical simulations

In a numerical simulation of the detection process we place atoms randomly in space according to a Gaussian probability distribution, and assume an initial state where all at-

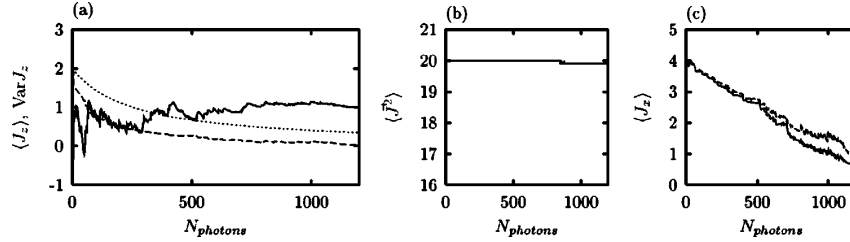


FIG. 2. Results of a single simulation with eight atoms whose spatial positions follow a Gaussian law with a width of  $10^{-2}\lambda/2\pi$ . The angular spread of the incident beam is  $\theta_0=0.45\pi$ , close to the best that can be achieved. (a) Solid line:  $\langle J_z \rangle$  as a function of the number of photons launched on the atoms. Long-dashed line:  $\langle (J_z - \langle J_z \rangle)^2 \rangle$ . Short-dashed line: expected evolution of  $\langle (J_z - \langle J_z \rangle)^2 \rangle$  according to Eq. (18), taking into account the width of the initial distribution. (b) Evolution of  $\langle \vec{J}^2 \rangle$ . The slight decrease shows that the state vector acquires only small components outside the symmetric subspace. (c) Evolution of the mean value of the spin in the horizontal direction (upper trace) and of the component of the spin along the expected direction (lower trace).

oms are in  $(|a\rangle + |b\rangle)/\sqrt{2}$ . No restriction is made on the state at later times, which is expanded in the whole space of dimension  $2^{N_{at}}$ .

Figure 2 presents the evolution obtained for one particular history for a cloud of eight atoms confined to a spatial region of dimension  $\lambda/100$  and interrogated by a beam that is focused on the atoms with an angular aperture of  $\theta_0=0.45\pi$ . The variance of the distribution of atoms in  $|a\rangle$  [i.e.,  $\langle (J_z - \langle J_z \rangle)^2 \rangle$ ] is plotted as well as the value expected from the results of Sec. IV [i.e., the multiplication of the initial distribution with the function  $\mathcal{F}_{N_p}(N_1, n_a)$ ].

The value of  $\langle \vec{J}^2 \rangle$  keeps almost the initial maximal value of 20, which indicates that the cloud stays in a symmetric state. This is expected as the atoms are closer to each other than  $\lambda$  and then it is not possible to discriminate between the atoms with the scattered photons.

The last graph plots the value of  $\langle J_x \rangle$  and of  $\sqrt{\langle J_x \rangle^2 + \langle J_y \rangle^2}$ , which is the length of the mean spin in the horizontal plane, and which may be larger than the  $x$  component because of small angular spin rotations that occur during photon scattering.

Figure 3 shows the variance of  $J_z$  and the mean value of  $J_x$  and of the largest projection of the spin orthogonal to the  $z$  axis. These results are obtained as the average over 90 independent realizations of our simulation. Both in Figs. 2 and 3, we observe that the actual width in  $J_z$  is smaller than that concluded from the interferometric measurement: the fact that the atoms are coupled to other modes of the field also leads to squeezing. We recall, however, that the quantity  $\langle (J_z - \langle J_z \rangle)^2 \rangle$  is not a measurable quantity, as  $\langle J_z \rangle$  depends on the particular history. To exploit the squeezing due to scattering, one has to deduce  $\langle J_z \rangle$  for each experiment by keeping track of the scattered photons.

### B. Analytical estimates

The effect of the scattered photons can be computed analytically. Taking  $\vec{r}_i = \vec{0}$  for all  $i$ , Eqs. (6) and (12) show that the atomic state vector amplitudes are multiplied simply by the coefficient  $\sqrt{\sigma_1 n_a}$  after the detection of a scattered photon, and by the coefficient  $\sqrt{1 - \sigma_1 n_a^2}$  in the absence of scattering where  $\sigma_1 = f^2 g_0^2 2\pi(1 + \cos \theta_0)$  is the scattering probability per atom in state  $|a\rangle$ .

After the detection of  $N_{\text{scatt}}$  out of a total number of  $N_p$  photons, the wave function of the atoms becomes

$$|\psi\rangle = \sum_{n_a} C_{n_a} (\sqrt{\sigma_1 n_a})^{N_{\text{scatt}}} \sqrt{1 - \sigma_1 n_a^2}^{N_p - N_{\text{scatt}}} |\vec{e}\rangle, \quad (22)$$

so the probability distribution for  $n_a$  is multiplied by

$$\mathcal{G}(N_{\text{scatt}}, n_a) = (\sigma_1 n_a^2)^{N_{\text{scatt}}} (1 - \sigma_1 n_a^2)^{N_p - N_{\text{scatt}}}. \quad (23)$$

This function is maximum at

$$n_{a0_{\text{scat}}} = \sqrt{\frac{N_{\text{scatt}}}{2\pi(1 + \cos \theta_0)g_0^2 f^2 N_p}} \quad (24)$$

and its width can be estimated by assuming a Gaussian shape with the same second derivative at the peak value,

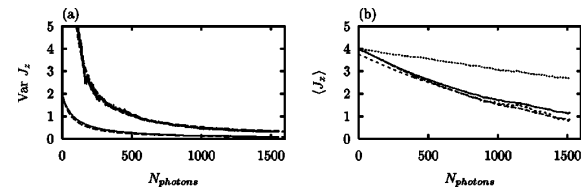


FIG. 3. Average over 90 histories. (a) Thin solid line: evolution of  $\langle (J_z - \langle J_z \rangle)^2 \rangle$  as a function of the number of photons launched on the atoms. Note that this quantity is not measurable, as  $\langle J_z \rangle$  depends on the particular history. The dashed thin line gives the value expected from the scattering process only. It is a convolution between the initial distribution and a distribution of width given by Eq. (25), both assumed to be Gaussian. Solid fat line: evolution of  $\langle (J_z - J_{z_{\text{calc}}})^2 \rangle$ , where  $J_{z_{\text{calc}}}$  is deduced, for each history, from Eq. (16) and from the knowledge of the number  $N_1$  of photons detected in detector 1 and the number  $N_2$  of photons detected in detector 2. This quantity agrees with Eq. (18) shown by the dashed fat line. (b) Solid line and short-dashed line: evolution of  $\sqrt{\langle J_x \rangle^2 + \langle J_y \rangle^2}$  and  $\langle J_x \rangle$ . A rotation of  $\pi/kf g_0^2 N_{\text{photons}}$  is applied in the  $xy$  plane to compensate for the light shift. Dashed line: expected behavior due to the squeezing realized by scattering. Dotted line: expected behavior if the width of the  $J_z$  distribution were only given by interference detection.



ISABELLE BOUCHOULE AND KLAUS MØLMER

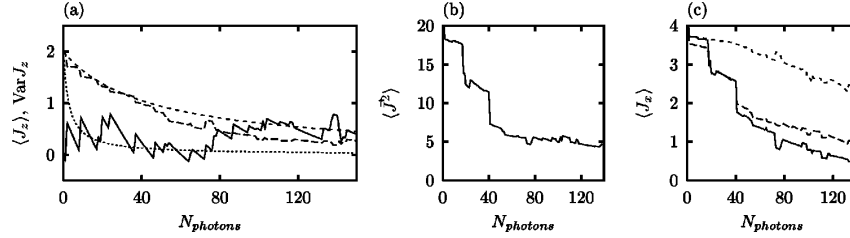
PHYSICAL REVIEW A **66**, 043811 (2002)

FIG. 4. The cloud contains eight atoms spatially distributed according to a 3D Gaussian probability law of rms width  $10\lambda/2\pi$ . The incident beam, focused on the atoms, has an angular spread  $\theta_0 = 2\sqrt{\pi}g_0/k = 2\sqrt{\pi}0.05 = 0.14$ . (a) Evolution of  $\langle J_z \rangle$  (solid line) and  $\langle (J_z - \langle J_z \rangle)^2 \rangle$  (long dashed line) as functions of the number of photons which are launched on the atoms. The dotted line indicates the value of  $\langle (J_z - \langle J_z \rangle)^2 \rangle$  expected for a dense cloud of eight atoms illuminated by the same beam [Eq. (25)]. The short dashed line gives the result of Eq. (29). (b) Evolution of  $\langle J^2 \rangle$ . The first drop from the maximal value 20 occurs at the first detection of a scattered photon. (c) Evolution of the mean horizontal spin (solid line). In short-dashed lines is shown the expected value of  $\langle J_x \rangle$  according to Eq. (4) for  $J = N_{at}/2$ . The result of Eq. (30) is shown with the dashed line.

$$\Delta n_{a \text{ scat}} \approx \frac{1}{\sqrt{8\pi(1 + \cos \theta_0)g_0^2 f^2 N_p}}. \quad (25)$$

This width is always smaller than the width in  $n_a$  of the function  $\mathcal{F}$  because  $g_0 = k\theta_0/(2\sqrt{\pi})$ , which is about the inverse of the transverse size of the beam on the cloud, is always smaller than  $k$ :

$$\frac{\Delta n_{a \text{ scat}}}{\Delta n_{a \text{ int}}} = \frac{1}{4} \frac{g_0}{k} \frac{1}{1 + \cos(\theta_0)} < 1. \quad (26)$$

In every single realization, the width of the  $n_a$  distribution is thus set by the number of scattered photons. After averaging over the unknown number of scattered photons we recover the broader distribution determined by the interferometer readout  $N_1$  and  $N_2$ . Since the scattered photons do not drive atoms out of or into the state  $|a\rangle$ , the atomic density matrix obtained by an average over the number of scattered photons has the same diagonal elements in the basis  $\{|J, M\rangle\}$  as the pure state that one would expect without photon scattering. But, the coherence terms of the density matrix are different from that of the pure state, and therefore the length of the mean spin will be altered by the scattering events. This is seen in Fig. 3(b), where the three lower curves show the actual value of  $\langle J_x \rangle$ , of  $\sqrt{\langle J_x \rangle^2 + \langle J_y \rangle^2}$ , and of the estimate (4), based on the small variance of  $J_z$  due to the scattering. There is excellent agreement between these curves. The upper curve shows the larger value of the mean spin, which one would have obtained in the absence of scattering.

Our numerical simulations and our analytical estimates show that the effect of the scattering is to produce stronger squeezing than the interference measurement. After averaging over the unresolved scattering histories, this squeezing does not affect the  $n_a$  populations. But, its effect is to reduce the mean spin  $\langle J_x \rangle$ . In principle, one could determine the number of scattered photons by the difference between the number of incident photons and the number of photons detected in the interferometer. For a Poissonian source of light, however, this number cannot be determined to a higher pre-

cision than  $\sqrt{N_p}$ , which turns out to be larger than the required precision on the loss in photon number due to scattering.

As pointed out in Sec. II, the pertinent factor for spin squeezing is  $\xi$  defined in Eq. (3). Using Eq. (18) for  $\Delta J_z$  and Eqs. (4) and (25) to determine  $\langle J_x \rangle$ , we obtain

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{N_{at}}\sqrt{N_p}\pi g_0^2 \frac{f}{k}} e^{2\pi g_0^2 f^2 N_p}. \quad (27)$$

The minimum value of  $\xi$ , for a fixed  $N_{at}$ , is

$$\xi_{\text{Min}} = \sqrt{\frac{4e}{\pi N_{at} g_0} k}, \quad (28)$$

and is obtained for the photon number  $N_p = 1/(\sqrt{4\pi}g_0^2 f^2)$ . Because the size of the incident beam is larger than the wavelength,  $g_0 < k$  and  $\xi_{\text{Min}}$  is larger than in the ideal case (21).

## VI. LARGE DILUTE CLOUD

The effect of the scattering in the case of a cloud of extension larger than  $\lambda$  is very different from the case of a small cloud. The number of scattered photons will still, as in the case of a small cloud, give us information on the total number of atoms in  $|a\rangle$  and, thus, scattering will by itself produce squeezing. But in the case of a big cloud, the angular distribution of the scattered photons gives information also on the position of the atoms in  $|a\rangle$ , and the atomic system therefore loses its invariance under the permutation of particles. The system will thus no longer be fully represented by the  $(N_{at} + 1)$  Dicke states of maximal  $J = N_{at}/2$ . This does not affect the  $z$  component of the spin but strongly reduces the horizontal component of the spin.

### A. Numerical simulation

In order to analyze the effect of the scattering alone, we have performed simulations of the evolution of the atomic state under the detection of scattered photons. The directions

of photodetection were chosen according to the procedure outlined in Sec. III, and Fig. 4 presents the result of a single simulation. In this simulation, we see a decrease of  $\langle\langle J_z - \langle J_z \rangle \rangle^2\rangle$  as well as a departure from the symmetric space (decrease of  $\langle \vec{J}^2 \rangle$ ). It is also clear that the decrease of  $\langle\langle J_z - \langle J_z \rangle \rangle^2\rangle$  is not as rapid as suggested by Eq. (25), which was valid for the small cloud.

Let us present a naive argument for the decrease of  $\langle\langle J_z - \langle J_z \rangle \rangle^2\rangle$ . Assume that the cloud is in a state  $|\vec{e}\rangle$ , where each atom is either in  $|a\rangle$  or  $|b\rangle$ . This state is unaffected by the interaction with the photon field. Let  $p$  denote the probability that a photon is scattered by the cloud of atoms. In the absence of super-radiance, we expect  $p = \sigma_1 n_a$ . The number of scattered photons  $N_{\text{scatt}}$  thus has a mean value  $pN_p$  and an uncertainty  $\sqrt{pN_p}$ , and we estimate  $n_a$  by  $N_{\text{scatt}}/\sigma N_p$  with an uncertainty of  $\Delta n_a = \sqrt{n_a/\sigma N_p}$ . If the state of the cloud expands over different  $n_a$ , the measurement of  $N_{\text{scatt}}$  will reduce the width of the distribution by multiplying with a function of width  $\Delta n_a = \sqrt{n_a/\sigma N_p}$ . Taking  $\sigma = 4\pi g_0^2 f^2$  and an initial state where all atoms are in  $(|a\rangle + |b\rangle)/\sqrt{2}$ ,

$$\langle\langle J_z - \langle J_z \rangle \rangle^2\rangle = \frac{1}{\frac{4}{N_{at}} + \frac{8\pi g_0^2 f^2 N_p}{N_{at}}}. \quad (29)$$

This function is plotted in Fig. 4(a). It reproduces quite well the numerical evolution, although the numerical evolution shows a faster squeezing.

After averaging over histories, as discussed in Sec. V, the squeezing due to scattering has no effect on the distribution of  $n_a$  but it will reduce the horizontal component of the total spin. The upper dashed line in Fig. 4(c) predicts the reduction due to this effect, according to Eq. (4), taking  $J = N_{at}/2$ . We see that the horizontal spin determined in our simulation is even smaller than this estimate. The reason for this is that the state of the cloud is not in the symmetric subspace as assumed when we put  $J = N_{at}/2$  in Eq. (4). The state of the cloud may be expanded on subspaces with different total  $J$ , and the mean value of  $J_x$  is averaged over these different subspace components. To check the consistency of this picture we compare the decrease of  $\langle \vec{J}^2 \rangle$  with that of  $\langle J_x \rangle$ . The maximum  $\langle J \rangle$  for a given  $\langle \vec{J}^2 \rangle = \langle J(J+1) \rangle$  is  $\sqrt{1+4\langle J(J+1) \rangle}/2 - 1/2$  and it is obtained if only the subspace with  $J = \langle J \rangle$  is populated. If we assume that the  $J_z$  distribution (centered around zero) is the same in all subspaces, we estimate that

$$\langle J_x \rangle \leq e^{-1/8 \text{Var}(J_z)} \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4\langle J(J+1) \rangle}}{2} \right). \quad (30)$$

The curve corresponding to the right-hand side of this inequality is plotted in Fig. 4. It reproduces quite well the decrease of  $\langle J_x \rangle$ .

### B. Analytical estimates

If the atomic cloud is dilute enough and not too large, it is possible to know by which atom any photon has been emitted.

In other words, it is possible to design an optical system which collects all the photons emitted outside the incident mode and which produces a separate image of each atom. This implies that the flux of scattered photons is only proportional to  $n_a$  and not to  $n_a^2$ : there is no super-radiance. Then the scattered photons give information not only on the total number of atoms in  $|a\rangle$  but also on which atoms are in  $|a\rangle$ . The second effect damages the squeezing realized by the interference measurement as it decreases correlations between atoms. When a photon is transmitted, the probability that it is scattered by an atom in  $|a\rangle$  is approximately  $4\pi g_0^2 f^2$ . Thus after about  $N_p = 1/4\pi g_0^2 f^2$  photons have been transmitted, we know almost with certainty if the atom is in  $|b\rangle$  or  $|a\rangle$ , and there is then almost no correlation between the atoms and hence no squeezing. Indeed, as each atom is either in  $|a\rangle$  or  $|b\rangle$ ,  $\langle j_x \rangle = 0$  for each atom. In order to observe squeezing, the number of photons used in the experiment is limited and this in turn limits the reduction in  $\text{Var}(J_z)$ .

Within a more quantitative analysis of the effect of scattering let,  $\phi$  denote the flux of incident photons. As long as an atom scatters no photons, its state evolves according to the effective Hamiltonian

$$H_{nh} = -\frac{i}{2} \phi 4\pi g_0^2 f^2 |a\rangle\langle a|. \quad (31)$$

The probability to scatter a photon during  $\delta t$  is

$$P \delta t = \langle a | \psi | a \rangle^2 \phi 4\pi g_0^2 f^2 \delta t. \quad (32)$$

After averaging over histories only the coherence term  $\sigma_{ab}$  of the density matrix evolves and it obeys

$$\frac{d\sigma_{ab}}{dt} = -\frac{\phi}{2} 4\pi g_0^2 f^2 \sigma_{ab}. \quad (33)$$

Thus,  $\langle j_x \rangle = 1/2(\sigma_{ab} + \sigma_{ab}^*)$  follows the same exponential decay, and it follows that the total spin  $J_x = \sum j_{x_i}$  decreases as

$$\langle J_x \rangle_t = \langle J_x \rangle_0 e^{-2\phi \pi g_0^2 f^2 t} = \langle J_x \rangle_0 e^{-2N_p \pi g_0^2 f^2 t}. \quad (34)$$

The reduction of  $\langle J_x \rangle$  due to the interferometric detection, estimated using Eq. (4), is less important than the reduction of  $\langle J_x \rangle$  due to scattering and we will neglect it here.  $\text{Var}(J_z)$  is given by Eq. (18), and the squeezing factor reads

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{N N_p} \pi g_0^2 \frac{f}{k}} e^{2N_p \pi g_0^2 f^2 t}. \quad (35)$$

Its minimum value is

$$\xi_{\text{Min}} = \sqrt{\frac{2e}{\pi N} \frac{k}{g_0}}, \quad (36)$$

and it is obtained for  $N_p = 1/(4\pi g_0^2 f^2)$ .

Although the physical regimes are very different, the result is similar to Eq. (26).

ISABELLE BOUCHOULE AND KLAUS MØLMER

PHYSICAL REVIEW A **66**, 043811 (2002)

### VII. LARGE DENSE CLOUD

We now turn to an analysis of the situation of many atoms in a large cloud with a density that is large compared to  $1/\lambda^3$ . In this case, we are not able to carry out simulations, and we are therefore restricted to an analytical approach. We shall make the assumption of a dense cloud, so that it may be divided into a large number of cells of size  $a^3$  smaller than  $\lambda^3$  but still containing a large number of atoms. For simplicity, we assume that the distribution of atoms is uniform over a box of size  $L_x=L_y=L_z$ . As the size of the cell is smaller than  $\lambda^3$ , the scattering of photons does not bring information on the repartitioning of the atoms in  $|a\rangle$  inside each cell and the state of the cloud can be described by states that are symmetric under exchange of particles inside each cell. The states  $|\vec{n}\rangle = |n_1, n_2, \dots, n_M\rangle$  with well-defined numbers  $n_1, n_2, \dots, n_M$  of atoms in  $|a\rangle$  in the cells  $1, 2, \dots, M$  are not modified by the scattering. The number of atoms per cell is sufficiently large so that we consider that the number of atoms in  $|a\rangle$ , on the order of  $N_{\text{cell}}/2$ , can be considered as a continuous variable with initial fluctuations of order  $\sqrt{N_{\text{cell}}}/2$ .

#### A. Initial state of the cloud

Initially, all the atoms are in the state  $1/\sqrt{2}(|a\rangle + |b\rangle)$ . The expansion of the state of the cloud on the basis  $\{|\vec{n}\rangle\}$  is then

$$|\psi\rangle_{\text{at}} = \int dn_1 \int dn_2 \cdots \int dn_M c(n_1)c(n_2)\cdots c(n_M) |n_1, n_2, \dots, n_M\rangle, \quad (37)$$

where  $c(n)$  is the square root of the binomial distribution of mean value  $N_{\text{cell}}/2$ , which we will approximate by a Gaussian distribution.

We will now define the new variables

$$\begin{aligned} N_{c_{i_x, i_y, i_z}} &= \sqrt{\frac{2}{M}} \sum_i n_i \cos(\vec{K}_i \cdot \vec{r}_i), \\ N_{s_{i_x, i_y, i_z}} &= \sqrt{\frac{2}{M}} \sum_i n_i \sin(\vec{K}_i \cdot \vec{r}_i), \\ N_0 &= \sqrt{\frac{1}{M}} \sum_i n_i, \end{aligned} \quad (38)$$

with

$$\begin{aligned} \vec{K}_i &= \frac{2\pi}{aN_x} i_x \vec{x}^0 + \frac{2\pi}{aN_y} i_y \vec{y}^0 + \frac{2\pi}{aN_z} i_z \vec{z}^0, \\ \vec{r}_i &= a i_x \vec{x}^0 + a i_y \vec{y}^0 + a i_z \vec{z}^0, \end{aligned} \quad (39)$$

where  $i_z < 0$  or ( $i_z = 0$  and  $i_x < 0$ ) or ( $i_z = i_x = 0$  and  $i_y < 0$ ).

Note that all the operators  $N_\alpha$  and  $N_\beta$  commute since they are all diagonal in the basis  $\{|\vec{n}\rangle\}$ .

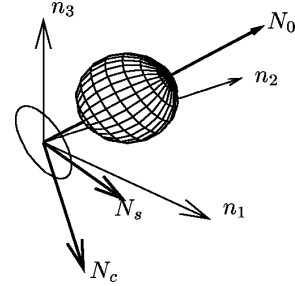


FIG. 5. Initial distribution among the states  $(|n_1, n_2, \dots, n_M\rangle)$  or the states  $(|N_0, N_{c_1}, N_{s_1}, \dots, N_{c_{(M-1)/2}}, N_{s_{(M-1)/2}}\rangle)$  in the case where there are only three cells ( $M=3$ ). Represented is a surface on which the population is constant. The circle surrounding the origin is the projection of the sphere on the  $(N_c, N_s)$  plane.

The initial state of the cloud can be expanded in the new basis of eigenstates

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_{\text{at}} &= \int dN_0 \int dN_{c_1} \int dN_{s_1} \cdots \int dN_{c_{(M-1)/2}} \int dN_{s_{(M-1)/2}} \\ &\quad \times C(N_0)h(N_{c_1})h(N_{s_1})\cdots h(N_{c_{(M-1)/2}})h(N_{s_{(M-1)/2}}) \\ &\quad \times |N_0, N_{c_1}, N_{s_1}, \dots, N_{c_{(M-1)/2}}, N_{s_{(M-1)/2}}\rangle, \end{aligned} \quad (40)$$

where  $h$  is a Gaussian centered on 0 with an rms width of  $\sqrt{N_{\text{cell}}}/2$  [ $h^2$  has a width  $\sqrt{N_{\text{cell}}}/2$  equal to the width of  $c^2(n_i)$ ] and  $C$  has the same width but is centered on  $\sqrt{MN_{\text{cell}}}/2$ . This distribution is represented in Fig. 5. Initially, there is no correlation between the distributions in  $N_{s/c_i}$  and they are all the same.

The vector space can be seen as a tensor product of  $(M+1)/2$  spaces: The space acted upon by  $N_0$ , and for each  $i$ , the space  $\mathcal{E}_i$  acted upon by the operators  $N_{c_i}$  and  $N_{s_i}$ . All these spaces have infinite dimension and they admit as basis states  $|N_{c_i}, N_{s_i}\rangle$ , where  $N_{c_i}, N_{s_i}$  are real. This basis will turn out to be useful for the description of the state vector dynamics due to photon scattering.

#### B. Effect of the scattering

Due to energy and momentum conservation in the scattering process, a fluctuation in the cloud will couple to the light only if its Fourier transform has components  $\vec{K}_i$  on the scattering sphere defined as the vectors  $\vec{k}_d$ , which fulfill  $|\vec{k}_d - \vec{k}_{\text{in}}| = k$ .

We will now assume for simplicity that the Fourier transform associated with each  $\vec{K}_i$  are uniform over disjoint volumes  $\delta k_x = 2\pi/L_x$ ,  $\delta k_y = 2\pi/L_y$ , and  $\delta k_z = 2\pi/L_z$ , shown as small rectangles in Fig. 6. The circle in Fig. 6 depicts the scattering sphere and crosses represent the discrete  $\vec{K}_i$  wave vectors which contribute to the scattering. With this approximation, the observation of a scattered photon gives information on the modulation of the atomic population in state  $|a\rangle$  with the corresponding discrete wave vector.

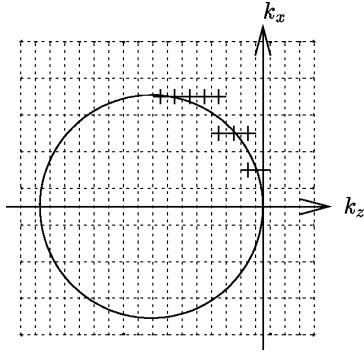


FIG. 6. Diffusion sphere and components of the discrete Fourier decomposition which participate in the diffusion.

Let us consider a  $\vec{K}_i$  which is on the scattering sphere and the associated solid angle  $\delta\Omega_i$ . The effect on the state of the system associated with the detection of a photon in this solid angle is given by the operator

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Omega) &= \sqrt{\delta\Omega_i} g_0 f \sum_i n_i e^{i(\vec{k}_d - \vec{k}_{inc}) \cdot \vec{r}_i} \\ &= \sqrt{\delta\Omega_i} g_0 f \sqrt{\frac{M}{2}} (N_{c_i} + iN_{s_i}). \end{aligned} \quad (41)$$

This operator changes the relative phase between the component with fluctuations in cosine and sine components. Because the operator in Eq. (40) acts only on the space  $\mathcal{E}_i$ , no correlations between fluctuations at different wave vector appear and the state of the cloud will thus remain of the form

$$|\psi_0\rangle |\psi_1\rangle \dots |\psi_{(M-1)/2}\rangle, \quad (42)$$

where  $|\psi_i\rangle$  is a state of the space  $\mathcal{E}_i$ . Note that this result is an approximation that relies on our assumption that the Fourier transform of the fluctuations at different  $\vec{K}_i$  are disjoint. Furthermore, the assumption that atoms are uniformly distributed over our spatial grid is important. Indeed, if the number of atoms in  $|a\rangle$  in different cells is not the same for each cell, the initial state would present correlations between  $K_i$ 's and knowledge about the state in the subspace  $\mathcal{E}_i$  would also imply knowledge about the state in other  $\mathcal{E}_j$ .

If a photon is detected in the incident mode, the effect on the state of the atoms, to second order in  $f$ , is given by

$$\mathcal{P} = \prod_i \sqrt{1 - g_0^2 f^2 \frac{M}{2} \delta\Omega_i (N_{c_i}^2 + N_{s_i}^2)}. \quad (43)$$

Thus, in this approximation, neither scattering nor the absence of it yields correlations between different  $K_i$ 's, and the state of the cloud will stay in a product state as in Eq. (42).

After transmission of  $N_p$  photons and the detection of  $N_{sc}$  photons scattered in the direction  $\vec{k}_{diff} = \vec{k}_{inc} - \vec{K}_i$ , the wave function in the space  $\mathcal{E}_i$  becomes

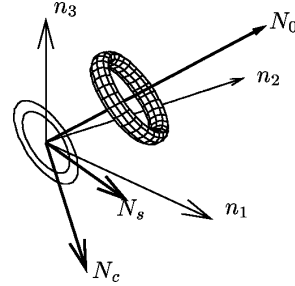


FIG. 7. Distribution over the states ( $|n_1, n_2, \dots, n_M\rangle$ ) or the states ( $|N_0, N_{c_1}, N_{s_1}, \dots, N_{c_{(M-1)/2}}, N_{s_{(M-1)/2}}\rangle$ ) after the measurement. Compare with Fig. 5. The case of only three cells is represented. The distribution of the population in the basis ( $|N_c, N_s\rangle$ ) for a well-defined  $N_0$  does not depend on  $N_0$  and is given by the projection of the torus on the plane ( $N_c, N_s$ ).

$$\begin{aligned} |\psi_i\rangle &= \int dN_{c_i} \int dN_{s_i} (N_{c_i} + iN_{s_i})^{N_{sc}} \\ &\times \left( \sqrt{1 - g_0^2 f^2 \frac{M}{2} \delta\Omega_i (N_{c_i}^2 + N_{s_i}^2)} \right)^{N_p - N_{sc}} h \\ &\times (N_{c_i}) h(N_{s_i}) |N_{c_i}, N_{s_i}\rangle. \end{aligned} \quad (44)$$

Thus, the population of the states  $|N_{c_i}, N_{s_i}\rangle$  is multiplied by the factor

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\sqrt{N_{c_i}^2 + N_{s_i}^2}) &= (N_{c_i}^2 + N_{s_i}^2)^{N_{sc}} \\ &\times \left[ 1 - g_0^2 f^2 \frac{M}{2} \delta\Omega_i (N_{c_i}^2 + N_{s_i}^2) \right]^{N_p - N_{sc}}, \end{aligned} \quad (45)$$

which depends only on  $N_{c_i}^2 + N_{s_i}^2$ . This is expected as the detection of the scattered photons does not reveal any information about the phase of the spatial grating in the cloud of atoms in  $|a\rangle$ .

A calculation similar to that in Sec. VI B shows that  $\mathcal{G}$  has a width

$$\Delta N_i = \frac{1}{\sqrt{\delta\Omega_i \frac{M}{2} g_0^2 f^2 N_p}}. \quad (46)$$

Figure 7 depicts the final distribution over the states  $N_0(N_{c_i}, N_{s_i})$  in the simple case where the cloud is divided into only three cells.

### C. Effect of scattering on $\langle J_x \rangle$

Photons scattered in the forward direction in the solid angle  $\theta < \theta_0$  give information on  $N_0$  and thus on the total number of atoms in  $|a\rangle$ . The other scattered photons give information on the spatial fluctuations of the atoms in  $|a\rangle$  and, in the case we consider where the number of atoms per

ISABELLE BOUCHOULE AND KLAUS MØLMER

PHYSICAL REVIEW A **66**, 043811 (2002)

cell is large and approximately constant, no information on  $N_0$  is given by the photons scattered outside the solid angle  $\theta < \theta_0$ . This is completely different from the case considered in Sec. VI B, where in a single experiment the number of atoms in  $|a\rangle$  was mainly determined by the scattering.

In the case considered here, even if  $N_0$  is not affected by the scattering outside the incident beam, the state is affected by scattering events due to the departure from the space of states, which is symmetric under exchange of atoms. After a series of detections, the state of the cloud has components in different subspaces  $J$  because the scattering (or its absence) brings the system into nonsymmetric states with  $J < N/2$ . We thus expect  $\langle J_x \rangle$  to be smaller than the value obtained for a state with the same distribution of  $J_z$  eigenstates but in the symmetric subspace  $J = N/2$ .

We have

$$\langle J_x \rangle = \sum_i \langle J_{x_i} \rangle, \quad (47)$$

where  $\langle J_{x_i} \rangle$  is the mean value of  $J_x$  corresponding to the atoms of the cell  $i$ . It is

$$\begin{aligned} \langle J_{x_i} \rangle &= \int dn_1 \cdots dn_{i-1} dn_{i+1} \cdots \\ &\quad \times dn_M \left( \int dn_i \left| f(n_1, \dots, n_M) \right|^2 \right) \\ &\quad \times \langle J_{x_i} \rangle_{n_1, \dots, n_{i-1}, n_{i+1}, \dots, n_M}. \end{aligned} \quad (48)$$

The state is invariant by exchange of atoms inside a single cell, and the results of Eq. (4) can be used to estimate  $\langle J_{x_i} \rangle_{n_1, \dots, n_{i-1}, n_{i+1}, \dots, n_M}$  by

$$\langle J_{x_i} \rangle_{n_1, \dots, n_{i-1}, n_{i+1}, \dots, n_M} \simeq \frac{N_{cell}}{2} e^{-1/8 \text{Var}(J_{z_i})}. \quad (49)$$

Taking  $i = 1$ , we note that  $\text{Var}(J_{z_1})$  is the rms width of the function

$$\begin{aligned} F(n_1) &= C' \left( \frac{n_1}{\sqrt{M}} + \frac{n_2 + \cdots + n_M}{\sqrt{M}} \right) \\ &\quad \times \prod_i \mathcal{H}'_i \left[ \sqrt{N_{c_i}(n_1)^2 + N_{s_i}(n_1)^2} \right], \end{aligned} \quad (50)$$

where  $C'(N_0)$  is the final population distribution over the states  $\{|N_0\rangle\}$  and  $\mathcal{H}'_i(N_i) = \mathcal{G}_i(N_i) h^4(N_i)$  is the final population distribution among the states  $\{|N_{c_i} = \cos(\alpha)N_i, N_{s_i} = \sin(\alpha)N_i\rangle\}$  (It does not depend on the angle  $\alpha$ ).

For the initial distribution,  $C'(n_1/\sqrt{M} + \cdots)$  has an rms width of  $\sqrt{MN_{cell}}/2$  in  $n_1$  and  $\mathcal{H}_i(\sqrt{N_{c_i}(n_1)^2 + N_{s_i}(n_1)^2}) = h^2[\sqrt{2/M} \cos(\vec{K}_i \cdot \vec{r}_1) n_1 + \cdots] h^2[\sqrt{2/M} \sin(\vec{K}_i \cdot \vec{r}_1) n_1 + \cdots]$  has an rms width of  $\sqrt{MN_{cell}}/8$  as a function of  $n_1$ . Thus, Eq. (50) gives an rms width  $\Delta J_{z_1}$  equal to  $\sqrt{N_{cell}}/2$  for any  $(n_2, \dots, n_M)$ , which is expected.

After the detection, the width of  $C'$  has been reduced by the interference measurement to  $\Delta n_{a_{inter}}/\sqrt{M}$  and the rms width in  $n_1$  of  $C'(n_1/\sqrt{M} + \cdots)$  is

$$\Delta n_{1inter} = \Delta n_{a_{inter}}. \quad (51)$$

The detection of scattered photons modifies the distribution  $\mathcal{H}'_i$  which is then no longer separable in  $N_{c_i}$  and  $N_{s_i}$ . But it follows from the definition (38) and from Eq. (46) that, on average,  $\mathcal{H}'_i$  has an rms width in  $n_1$  which scales as

$$\Delta n_{1i} \sim \sqrt{M} \Delta N_i. \quad (52)$$

If we assume that the distribution of  $n_1$  is given by the initial Gaussian, which is multiplied by Gaussian factors due to the interferometric detection and due to the scattering, we obtain the result

$$\frac{1}{\Delta n_1^2} = \frac{1}{\Delta n_{a_{inter}}^2} + \sum_{i, \vec{K}_i \in S_{scatt}} \frac{1}{M \Delta N_i^2} + \sum_{i, \vec{K}_i \notin S_{scatt}} \frac{8}{MN_{cell}}. \quad (53)$$

The squeezing due to scattering and due to interferometric detection is significant, and we can hence ignore the last term, which is due to the initial width of the distribution. The contribution due to the interferometric detection is given by Eq. (18), and the sum over the  $i$  for which  $\vec{K}_i$  is on the scattering sphere follows from Eq. (46):

$$\sum_{i, \vec{K}_i \in S_{scatt}} \frac{1}{M \Delta N_i^2} = 2\pi g_0^2 f^2 N_p. \quad (54)$$

By comparison of Eqs. (18) and (54), we see that the contribution due to interferometric detection is approximately a factor  $g_0^2/k^2$  times that due to scattering.  $1/g_0^2$  is larger than the area of the cloud, which itself is much larger than  $\lambda^2$ . Thus,  $g_0^2/k^2 \ll 1$  and the width in  $n_1$  is mainly determined by the scattered photons:

$$\frac{1}{\Delta n_1^2} = \frac{1}{\text{Var}(J_{z_1})} \simeq \frac{1}{2} \sigma_1 N_p. \quad (55)$$

Coming back to Eqs. (49) and (47), we get

$$\langle J_x \rangle \simeq \frac{N}{2} e^{-(\pi/8)g_0^2 f^2 N_p}. \quad (56)$$

Thus, the squeezing factor reads

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{NN_p} \pi g_0^2 f} e^{(\pi/8)g_0^2 f^2 N_p}. \quad (57)$$

Its minimum value, achieved for  $N_p = 4/(\pi g_0^2 f^2)$ , is

$$\xi_{\min} = \sqrt{\frac{e}{4\pi N_{at} g_0} k}, \quad (58)$$



which is similar to the result obtained for the small cloud and for the dilute sample.

### VIII. CONCLUSION

We have presented an analysis of the change of the atomic distribution on internal levels caused by a measurement of the phase-shift of an optical field traversing the atomic sample. In every run of the detection experiment, the atomic population statistics is modified in accordance with the phase shift measurements. In practical spin squeezing, the reduced variance in one of the spin components is not the only relevant parameter. One has to observe the change of the length of the mean spin  $\langle J_x \rangle$  as well. The mean spin is reduced, and in case of perfect detection, we estimate the optimum number of detected photons and the optimum value of the squeezing parameter  $\xi = \sqrt{1/N_{at}}$ , Eq. (21).

In an experimental implementation, scattering of photons is inevitable. If these photons are not detected, they will have no average effect on the atomic populations, but scattering leads to further reduction of the mean spin and an increase of  $\xi$ . Two different mechanisms are shown to be responsible for this reduction: In case of the small cloud, the scattered photons carry information on  $n_a$ , which forces a reduction in  $\langle J_x \rangle$ . In case of the dilute cloud, they carry information on the spatial distribution of the atoms in  $|a\rangle$ . The general problem is difficult to treat, and we focused on three different limiting cases: a cloud of size smaller than the wavelength, a dilute cloud where each scattered photon can be traced back to a single atom, and a large cloud of density larger than  $1/\lambda^3$ . Both numerical simulations and an analytical approach were carried out and we showed that scattering decreases the mean spin  $\langle J_x \rangle$ .

Although the physics is very different, the scattering gives

rise to approximately the same optimum squeezing

$$\xi_{\min} = \sqrt{1/N_{at}} \frac{k}{g_0}, \quad (59)$$

which is obtained by detecting the phase shift of a given number of photons,  $N_p \approx 1/(g_0^2 f^2)$ . We cannot focus to better than within a wavelength, hence the optimum always exceeds the ideal results (21). In the case of a large cloud,  $1/g_0^2$  is of the order of the area of the beam at the focus, and  $g_0$  is limited by  $\sqrt{\mathcal{A}}$ , where  $\mathcal{A}$  is the area of the cloud. In this case we can therefore rewrite the expression for  $\xi_{\min}$

$$\xi_{\min} > \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{N_{at} \lambda^2}} = \sqrt{\frac{1}{D}}, \quad (60)$$

where  $D = N_{at} \lambda^2 / \mathcal{A}$  is the optical density of the cloud. Thus for a dense cloud spin squeezing is possible, whereas for a very dilute cloud we recover the result that the possibility to know, for any scattered photon, which atom it comes from effectively prevents spin squeezing.

To improve the squeezing or to make spin squeezing possible for dilute samples, one may consider locating the atoms in an optical cavity, so that the light effectively has to pass through the sample  $n_t$  times, where  $n_t$  is the finesse of the cavity. On one hand, the increased interaction with the atoms leads to further reduction of the width in  $n_a$  by a factor  $1/n_t$  compared to Eq. (18). On the other hand, the scattering probability is increased by the factor  $n_t$ , so that the reduction of the mean spin occurs  $n_t$  times faster. The net result, however, is that after detection of  $N_p \approx 1/(g_0^2 f^2 n_t)$  photons, we find the minimum value  $\xi_{\min}$ , which is reduced by a factor  $1/\sqrt{n_t}$  compared to the free space situation. Even a bad cavity thus suffices to significantly improve on spin squeezing.

- 
- [1] D.J. Wineland, J.J. Bollinger, W.M. Itano, and O.J. Heinzen Phys. Rev. A **50**, 67 (1994).  
 [2] K. Mølmer and A. Sørensen, Phys. Rev. Lett. **86**, 4431 (2001).  
 [3] A. Kuzmich, L. Mandel, J. Janis, Y.E. Young, R. Eijnisman, and N.P. Bigelow, Phys. Rev. A **60**, 2346 (1999).  
 [4] A. Kuzmich, L. Mandel, and N.P. Bigelow, Phys. Rev. Lett. **85**, 1594 (2000).  
 [5] Lu-Ming Duan, J.I. Cirac, P. Zoller, and E.S. Polzik, Phys. Rev. Lett. **85**, 5643 (2000).  
 [6] B. Julsgaard, A. Kozhekin, and E. Polzik, Nature (London)

- 413**, 400 (2001).  
 [7] A. Kuzmich, K. Mølmer, and E.S. Polzik, Phys. Rev. Lett. **79**, 4782 (1997).  
 [8] A. Sørensen, L.M. Duan, J.I. Cirac, and P. Zoller, Nature (London) **409**, 63 (2001).  
 [9] I. Bouchoule and K. Mølmer, Phys. Rev. A **65**, 041803(R) (2002).  
 [10] A. André and M.D. Lukin, Phys. Rev. A **65**, 053819 (2002).  
 [11] A.S. Sørensen and K. Mølmer, e-print quant-ph/0202073.

PHYSICAL REVIEW A 67, 011603(R) (2003)

**Interaction-induced phase fluctuations in a guided atom laser**Isabelle Bouchoule<sup>1</sup> and Klaus Mølmer<sup>2</sup><sup>1</sup>*Institut d'Optique, 91 403 Orsay Cedex, France*<sup>2</sup>*QUANTOP, Danish National Research Foundation Center for Quantum Optics, Department of Physics and Astronomy, University of Aarhus, DK 8000 Aarhus C, Denmark*

(Received 12 November 2002; published 29 January 2003)

In this paper we determine the magnitude of phase fluctuations caused by atom-atom interaction in a one-dimensional beam of bosonic atoms. We imagine that the beam is created with a large coherence length, and that interactions only act in a specific section of the beam, where the atomic density is high enough to validate a Bogoliubov treatment. The magnitude and coherence length of the ensuing phase fluctuations in the beam after the interaction zone are determined.

DOI: 10.1103/PhysRevA.67.011603

PACS number(s): 03.75.Pp, 03.75.Be

Recent progress on microfabricated magnetic traps and guides for atoms [1,2] has stimulated the efforts to realize guided atom-laser beams [3] with possible applications for high-precision atom interferometry. The phase coherence is a crucial property of such beams and interferometers, and interactions between atoms may influence the coherence. So far, the effect of interactions on the condensate phase was mainly studied in condensates of finite spatial extent [4], where both degradation [5] and squeezing of the phase [6] have been studied. In these cited works, the main effect can be ascribed to the atom number fluctuations in the condensate and the dependence of the mean-field energy on atom number due to interactions. The goal of the present work is to determine the amplitude and the coherence length of the phase fluctuations created by the atomic interactions in a continuous beam whose coherence length is initially infinite. The main contribution in this case is collisions that transfer atoms from the condensate at momentum  $\hbar K_f$  to different momenta  $\hbar(K_f+k)$  in the beam. At very low density an interacting Bose gas in one dimension is described by the Tonks-Girardeau regime, but we shall assume a higher density for which Bogoliubov theory is well suited to describe the deviations from mean-field theory [7].

We consider the situation depicted in Fig. 1, where a non-interacting monoenergetic beam of atoms with momentum  $\hbar K_f$  arrives in a region of length  $L$  where the atoms interact with each other. For the practical realization of such a model, one may imagine a guided atom beam, where the transverse width is particularly narrow, and therefore the density and the effective interaction are significantly increased over the length  $L$ .

The system is described by the effective one-dimensional Hamiltonian

$$H = \int dx \psi^\dagger(x) h_0 \psi(x) + \frac{g}{2} \int_{-L}^0 dx \psi^\dagger(x) \psi^\dagger(x) \psi(x) \psi(x), \quad (1)$$

where  $h_0 = -\hbar^2/(2m)d^2/dx^2$ , and the coupling constant  $g = (2\hbar^2/m)(2a/a_\perp^2)$ , assuming that the size of the transverse ground state in the guide  $a_\perp = \sqrt{2\hbar/m\omega}$  is much larger than the  $s$ -wave scattering length  $a$ .

We always consider the case where  $na_\perp^2/a \gg 1$  so that correlations between atoms are small, and the state of the sys-

tem can be described by a mean-field wave function and a noise term that writes, on the right side of the interacting region starting at  $x=0$ ,

$$\psi(x) = \sqrt{n} e^{iK_f x} + \delta\psi(x). \quad (2)$$

The fluctuations represented by  $\delta\psi(x)$  are probed by interference with a reference beam in a coherent state  $\psi_{ref}(x) = \alpha e^{iK_f x}$ . The quantity measured is the number of atoms on each side of the beam splitter. In an actual experiment, this beam splitter may be realized by tunneling between two guides, or the atomic beams may be physically overlapping, but with two different internal states, which can be coupled by Raman laser beams. In either case, the operators giving the density of atoms in the two output states are

$$n_\pm(x) = \frac{1}{2} [\psi_{ref}^\dagger(x) \pm \psi^\dagger(x)] [\psi_{ref}(x) \pm \psi(x)]. \quad (3)$$

For  $\alpha = \sqrt{n_0} e^{i\pi/2}$ , the mean density is identical in the two output beams and we define the local phase operator as

$$\theta(x) = \frac{n_+(x) - n_-(x)}{\sqrt{n_0 n}}. \quad (4)$$

The fluctuations in  $\theta(x)$  are given by the correlation function

$$\begin{aligned} \langle \theta(x) \theta(x') \rangle = & \frac{1}{n} \{ -\langle \delta\psi(x') \delta\psi(x) \rangle e^{-iK_f(x+x')} - \text{c.c.} \\ & + \langle \delta\psi^\dagger(x') \delta\psi(x) \rangle e^{iK_f(x'-x)} + \text{c.c.} \\ & + \delta(x' - x) \}, \end{aligned} \quad (5)$$

and it is our goal to present a quantitative analysis of these fluctuations. After averaging over a distance  $X$ , the fluctuation of the phase is given by

$$\Delta\theta^2 = \left\langle \left( \frac{1}{X} \int_X \theta(x) dx \right)^2 \right\rangle. \quad (6)$$

In the absence of interactions between atoms, only the last  $\delta$ -correlated quantum noise term is present in Eq. (5), and we find  $\Delta\theta = 1/\sqrt{nX}$  as expected from the usual number and phase uncertainties in a coherent state.

In the presence of interactions between atoms, a condensate will experience phase diffusion that is due to the spread of chemical potential over the Poisson distribution of number

ISABELLE BOUCHOULE AND KLAUS MØLMER

PHYSICAL REVIEW A 67, 011603(R) (2003)

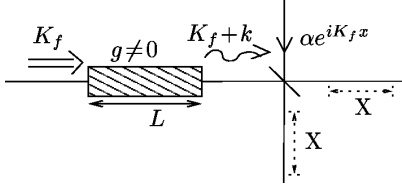


FIG. 1. An atomic beam crosses a region  $L$  where the atoms interact with each other. The interactions scatter atoms out of the macroscopically populated mode into other momentum states, and the resulting phase fluctuations in the beam can be probed by the interference with a coherent reference beam.

states that form the coherent state. Let us assume that the atomic beam is, in fact, a very long wave packet with length  $\mathcal{L} > L$ . When a superposition of number states  $|N\rangle$  of this wave packet passes the interaction zone the interaction perturbs the energy of each number state by the amount  $(g/2)n^2L = (g/2)(N^2/\mathcal{L}^2)L$ . The passage time is  $T = \mathcal{L}/(\hbar K_f/m)$  and hence the number state component  $|N\rangle$  accumulates a phase shift  $\theta_N = (gmL/2\mathcal{L}\hbar^2 K_f)N^2$ . The phase of a coherent state is the derivative  $d\theta/dN$  of the phase of the Fock components. After passage of the interacting zone, this derivative depends on  $N$  and the spread of the phase over the width  $\sqrt{N}$  of the Fock state distribution is

$$\Delta\theta = \sqrt{N} \frac{gmL}{\mathcal{L}\hbar^2 K_f} = \frac{\sqrt{ngmL}}{\sqrt{\mathcal{L}\hbar^2 K_f}}. \quad (7)$$

The relative number fluctuations vanish in the limit of very large coherence length  $\mathcal{L}$  of the incident beam, and in that limit the Bogoliubov theory will give the dominant contribution to phase diffusion.

If the expression for the field operator (2) is introduced in the second quantized Hamiltonian (1), and the noise terms  $\delta\psi(x), \delta\psi^\dagger(x)$  are truncated above second order,  $H$  can be diagonalized by a Bogoliubov transformation,  $H = E_0 + \sum \omega_k \alpha_k^\dagger \alpha_k$ , where the field operator  $\delta\psi(x)$  is expanded on the bosonic operators  $\alpha_k, \alpha_k^\dagger$  as  $\delta\psi(x) = \sum_k [u_k(x)\alpha_k - v_k^*(x)\alpha_k^\dagger]$ . The wave functions  $u_k$  and  $v_k$  solve the equations

$$\begin{pmatrix} h_0 - \mu + 2g|\varphi|^2 & -g\varphi^2 \\ g\varphi^{*2} & -h_0 + \mu - 2g|\varphi|^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix} = \omega_k \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}, \quad (8)$$

where  $g$  takes the value zero outside the interaction interval, and  $u_k$  and  $v_k$  fulfill the normalization condition  $\int dx [u_k(x)u_{k'}(x)^* - v_k(x)v_{k'}(x)^*] = \delta(k - k')$ . If the incident condensate has an infinite coherence length, no Bogoliubov excitations are present and the phase fluctuations given by Eq. (5) should be calculated in the Bogoliubov vacuum. This calculation requires the knowledge of the functions  $u_k$  and  $v_k$  for all the Bogoliubov excitations and it is the main aim of this paper to compute those functions. Note that only modes with nonvanishing  $v_k$  functions on the right-hand side will contribute to phase fluctuations.

The mean-field wave function entering in Eq. (8) should be a solution to the Gross-Pitaevskii equation. We consider

the case where  $gn \ll \hbar^2 K_f^2/2m$  so that reflection of this mean field is very small and we neglect it in the following. Like in the standard problem of transmission by a barrier, the solutions of Eq. (8) are constructed by matching the different homogeneous solutions at the boundaries. In the interaction zone, the mean-field wave function writes  $\varphi(x) = \sqrt{n}e^{iKx}$ , the chemical potential is  $\mu = \hbar^2 K_f^2/2m = \hbar^2 K^2/2m + gn$ , and Eq. (8) has the plane-wave solutions

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{i(k+K)x}U \\ e^{i(k-K)x}V \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Inserting this expansion in Eq. (8) we obtain

$$\begin{aligned} \left( \frac{\hbar^2}{2m}(k+K)^2 - \mu + 2gn \right) U - gnV &= \omega U, \\ \left( \frac{\hbar^2}{2m}(k-K)^2 - \mu + 2gn \right) V - gnU &= -\omega V. \end{aligned} \quad (10)$$

This leads to the spectrum

$$\omega = \frac{\hbar^2}{m}kK \pm \sqrt{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2gn \right)} \quad (11)$$

with two branches corresponding for high energies to particle like and holelike excitations, respectively. For the two branches of respective wave numbers  $k_1$  and  $k_2$ , the ratios  $V/U$  of the solutions are

$$\begin{aligned} y_1 = \frac{V_1}{U_1} &= 1 + \frac{\hbar^2}{mgn} \left[ \frac{k_1^2}{2} + \sqrt{\frac{k_1^2}{2} \left( \frac{k_1^2}{2} + 2mgn/\hbar^2 \right)} \right], \\ y_2 = \frac{V_2}{U_2} &= 1 + \frac{\hbar^2}{mgn} \left[ \frac{k_2^2}{2} - \sqrt{\frac{k_2^2}{2} \left( \frac{k_2^2}{2} + 2mgn/\hbar^2 \right)} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Outside the interaction zone, the mean-field wave function has the momentum  $K_f$  and  $u = Ue^{i(k+K_f)x}$  and  $v = Ve^{i(k-K_f)x}$  are independent solutions with energies  $\omega_{u/v} = (\hbar^2/m)(kK_f \pm k^2/2)$ .

In each region along the atomic beam, four solutions are possible, corresponding in the noninteracting region to particles or holes propagating in one direction or the other, and the global solutions should be continuous with continuous derivatives for both the  $u$  and  $v$  functions. Thus eight equations relate the twelve parameters and for each energy four solutions exist. Like in normal scattering theory, our choice of boundary conditions serves to identify the relevant basis for the solution to the problem. Excitations with an escaping hole (removal of an incident particle) in either direction are not physically relevant, and we thus study the elementary excitations with incoming particle components only.

Let us first consider the excitation corresponding to an incoming particle  $u(x) \propto e^{i(K_f+k)x}$  from the right, ( $k < -K_f$ ). This particle has a momentum that differs from that of the condensate by more than  $K_f$ . If we assume that rather than being an exact delta function, the microscopic atomic interaction has a momentum cut off that is smaller than  $K$ , the coupling to the  $v(x)$  function in the Bogoliubov equa-



INTERACTION-INDUCED PHASE FLUCTUATIONS IN A . . .

PHYSICAL REVIEW A 67, 011603(R) (2003)

tions is suppressed, and this mode does not contribute to phase fluctuations in the Bogoliubov vacuum. Thus we are interested only in Bogoliubov modes corresponding to an incoming particle from the left, of momentum  $\hbar(k+K_f)$ , and we label those modes by  $k$ . Equation (11) has four solutions, but since coupling to terms with different momenta is strongly suppressed we will consider only momentum components  $K+k_1$  and  $K+k_2$  close to  $K$ . Continuity of the solution at the left entrance to the interaction zone ( $x=-L$ ) implies

$$\begin{aligned} U_i &= U_1 e^{-i(k_1+K)L} + U_2 e^{-i(k_2+K)L}, \\ 0 &= V_1 e^{-i(k_1-K)L} + V_2 e^{-i(k_2-K)L}. \end{aligned} \quad (13)$$

Equation (12) dictates the ratio between the  $U$  and  $V$  amplitudes, and the continuity of the derivatives of  $u$  and  $v$  cannot be fulfilled without allowing for reflection. This reflection will, however, be very small as  $k \ll K$ , and we make an insignificant error by requiring only continuity of the Bogoliubov mode functions. The condition  $[\delta\psi(x), \delta\psi^\dagger(x')] = \delta(x-x')$  applied on the left side where no holes are present gives the normalization  $U_i = 1/\sqrt{2\pi}$  for the amplitude of the incoming particle component, in terms of which we can express all amplitudes in the interaction zone,

$$U_1 = \frac{y_2}{y_2 - y_1} \frac{e^{i(k_1+K)L}}{\sqrt{2\pi}}, \quad U_2 = \frac{y_1}{y_1 - y_2} \frac{e^{i(k_2+K)L}}{\sqrt{2\pi}}$$

and

$$V_1 = \frac{y_1 y_2}{y_2 - y_1} \frac{e^{i(k_1-K)L}}{\sqrt{2\pi}}, \quad V_2 = \frac{y_1 y_2}{y_1 - y_2} \frac{e^{i(k_2-K)L}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (14)$$

At the right side of the interaction zone ( $x=0$ ), we have to match to the independent solutions  $U e^{i(K_f+k)x}$  and  $V e^{-i(K_f-k')x}$  of same Bogoliubov energy  $\omega$ , i.e., the amplitudes  $U$  and  $V$  are given by the continuity relations

$$\begin{aligned} U &= U_1 e^{i(k_1+K)L} + U_2 e^{i(k_2+K)L}, \\ V &= V_1 e^{i(k_1-K)L} + V_2 e^{i(k_2-K)L}. \end{aligned} \quad (15)$$

Using the relations (14), this gives

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{y_2}{y_2 - y_1} e^{ik_1 L} + \frac{y_1}{y_1 - y_2} e^{ik_2 L} \right), \\ V &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{y_1 y_2}{y_1 - y_2} \right) e^{i[(k_1+k_2)/2]L} 2i \sin\left(\frac{k_2 - k_1}{2} L\right). \end{aligned} \quad (16)$$

The phase fluctuations given in Eq. (5) can now be expressed as

$$\begin{aligned} \langle \theta(x) \theta(x') \rangle &= \frac{1}{n} \int dk \{ 2\text{Re}[V(k) * U(k) e^{ikx'} e^{-ik'x}] \\ &\quad + 2|V(k)|^2 \cos[(k'(x'-x))] \}, \end{aligned} \quad (17)$$

where the  $\delta$ -function part has been omitted.

We now present a number of simplifications, which are valid under reasonable assumptions and which will lead to a better understanding of the dependence of the phase fluctuations on the physical parameters of the problem. First, we will neglect the refractive index effect on the mean-field wave function and set  $K_f = K$ . Second, as long as  $|k| \ll K$ ,  $k_1 \approx k_2 \approx k$  and we can use the expressions of  $y_1$  and  $y_2$  (12) for the single value  $k$ . We cannot, however, replace  $k_1$  and  $k_2$  generally by  $k$  in the exponential factors in Eq. (16). Instead, we look at limiting cases. If  $|k| \gg \sqrt{mgn}/\hbar$ ,  $y_1$  and  $y_2$  are approximated by  $y_1 \approx \hbar^2 k^2 / mgn$  and  $y_2 \approx mgn / \hbar^2 k^2$ . The  $V(k)$  amplitude in Eq. (16) is thus suppressed by a factor  $y_1 y_2 / (y_1 - y_2) \approx mgn / \hbar^2 k^2 \ll 1$ , resulting in negligible phase fluctuations from these momentum components. If instead,  $|k| \ll \sqrt{mgn}/\hbar$ , the Bogoliubov dispersion law approximately yields  $k_1 \approx k + k(\sqrt{mgn}/\hbar K)$  and  $k_2 \approx k - k(\sqrt{mgn}/\hbar K)$ , and the expressions for  $y_1$  and  $y_2$  are in this limit approximated by  $y_1 \approx 1 + \hbar|k|/\sqrt{mgn}$  and  $y_2 \approx 1 - \hbar|k|/\sqrt{mgn}$ . We then find,

$$U(k) = V(k) \approx -i \frac{\sqrt{mgn}}{\hbar k} \frac{e^{i[(k_1+k_2)/2]L}}{\sqrt{2\pi}} \sin\left(\frac{k\sqrt{mgn}}{\hbar K} L\right). \quad (18)$$

In Eq. (17)  $k'$  is the momentum associated with the  $v$  component in the noninteracting region and, as long as  $|k| \ll K$ , it writes  $k' \approx k + k^2/K$ , and the cross term in  $V(k) * U(k)$  can thus be written,

$$I(x, x') = \frac{2}{n} \int dk |V(k)|^2 \text{Re}(e^{ik(x'-x)} e^{ixk^2/K}). \quad (19)$$

Approximating  $k'$  by  $k$  in the cosine term, the  $|V(k)|^2$  term in Eq. (17) can be written as

$$J(x, x') = \frac{2}{n} \int dk |V(k)|^2 \cos[k(x-x')]. \quad (20)$$

With  $V(k)$  given by Eq. (18),  $J$  is a triangular function that vanishes for  $|x|$  larger than

$$\Delta x = 2 \frac{\sqrt{mgn} L}{\hbar K}. \quad (21)$$

For large  $x$ ,  $I(x, x')$  becomes wider as a function of  $y = x' - x$ . If we label  $x/K$  as  $\hbar t/2m$  in the last exponential we recover the expression for the spreading wave packet of a massive particle, given by the momentum spread  $\Delta k$  of  $|V(k)|^2$ , i.e.,  $\Delta y = \hbar \Delta k (x/K) = \hbar x/L \sqrt{mgn}$ . At distances far from the interacting region  $I(x, x')$  gives thus a negligible contribution to local phase fluctuations, but when integrated over intervals larger than  $\Delta y$ , the conserved “norm” of the spreading wave packet implies a result comparable to the contribution from the  $J(x, x')$  term.

Figure 2(a) shows the value of  $\langle \theta(x) \theta(x') \rangle$  for different values of  $x$  and as functions of  $x'$ . The curves are obtained by a numerical integration of Eq. (17) with the proper expressions for  $U(k)$  and  $V(k)$ . For large  $x$ , we see both the spreading  $I(x, x')$  and the narrow  $J(x, x')$  component, cf. Fig. 2(b).

ISABELLE BOUCHOULE AND KLAUS MØLMER

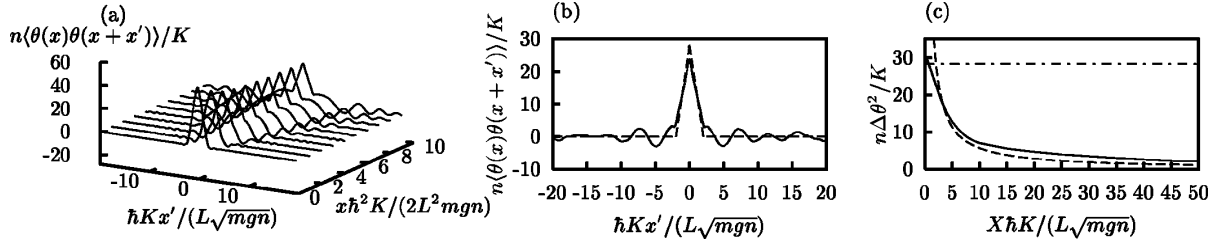
PHYSICAL REVIEW A **67**, 011603(R) (2003)

FIG. 2. Phase fluctuations calculated for an example with numerical parameters  $L=10^4/K$  and  $gn=0.02\hbar^2K^2/m$ . (a) Phase fluctuations given by Eq. (17). For large  $x$  the curves clearly separate in a central triangular feature and a broad pedestal due to the  $|V(k)|^2$  and the  $V(k)^*U(k)$  contributions, respectively. (b) Phase correlations around  $x_0=20L^2mgn/\hbar^2K$ . The  $J(x,x')$  term is shown as a dashed line, and the  $I(x,x')$  term is shown as a solid line. (c) Phase fluctuations averaged over intervals of variable length  $X$ . The curves show  $\langle[\int_{x_0}^{x_0+X} dx \theta(x)/X]^2\rangle$  for  $x_0=50L^2mgn/\hbar^2K$ . The full line is the result of a numerical calculation, the dashed line is the analytical expression (23), and the horizontal dot-dashed line is the value (22) expected for  $X$  comparable to the coherence length  $\Delta x = \sqrt{gnmL/\hbar K}$ .

We are now in a position to obtain the essential scaling of the phase fluctuations with the physical parameters of the problem. If we focus on the narrow part  $J(x,x')$ , at distances from the interaction zone larger than  $L^2mgn/\hbar^2K$ , the phase fluctuations have a finite coherence length given by Eq. (21). The dependence on the size of the interacting region  $L$  is due to a phase matching condition: momentum and energy conservation cannot be both fulfilled in a collision that creates excitations and the violation of momentum conservation becomes more severe as  $L$  increases. The magnitude of the fluctuations increases linearly with  $L$ ,

$$\langle\theta(x)^2\rangle = \frac{1}{n} \left( \frac{mgn}{\hbar^2} \right)^{3/2} \frac{L}{K}, \quad (22)$$

and to recover a well defined phase, one has to integrate over a finite detector region in space. If one detects atoms on a length  $X$  larger than  $\Delta x$ , the phase precision is given by the  $k=0$  component of the Fourier transform of the phase fluctuations,

$$\Delta\theta^2 = \frac{4\pi}{nX} |V(0)|^2 = \frac{2}{nX} \left( \frac{mgnL}{\hbar^2K} \right)^2 = \frac{\langle\theta(x)^2\rangle}{X/\Delta x}. \quad (23)$$

If  $X$  becomes larger than the length scale  $\Delta y$ , the integral of  $I(x,x')$  contributes with the same amount, i.e., Eq. (23) is multiplied by a factor of 2. This analysis is confirmed in Fig. 2(c), showing as a dashed line the analytical result (23) and as a solid line the results of the full numerical calculation. The dot-dashed line in the figure shows the value (22), applicable for short intervals  $X < \Delta x$ .

Let us conclude with a numerical example for a beam of Rubidium atoms with velocity  $\hbar K/m=80$  mm/s, and a lin-

ear density of  $n=10^6$  atoms/m, subject to an interacting region with a perpendicular confinement of  $a_{\perp}=0.5$   $\mu\text{m}$  and a length of  $L=1$  cm. With the value  $a=5$  nm for the scattering length we then obtain

$$\Delta x \approx 26 \mu\text{m} \quad \text{and} \quad \langle\theta(x)^2\rangle \approx 2. \quad (24)$$

To have a phase uncertainty  $\Delta\theta$  as small as 0.1, one has to count the Rb atoms in this example over a length of order 2 cm. Note that the phase uncertainty is two orders of magnitude larger than the standard result for a perfect coherent state on that interval, and if we assume a coherence length  $\mathcal{L}$  of the beam exceeding 2 cm, the contribution from number fluctuations (7) is smaller than the Bogoliubov excitation result by at least a factor of 2.

To summarize, we have quantified the phase fluctuations in an atomic beam, and found that they manifest themselves at different observational length scales. If detection is done over an interval of length  $X \sim 1/n$ , the number of atoms observed is of order unity and the phase is always ill defined. The phase uncertainty falls off when  $X$  is increased, but in the presence of interactions, until  $X$  reaches the length scale  $\Delta x = \sqrt{mgnL/\hbar K}$ , it levels off to a value given by Eq. (22). For  $X$  larger than  $\Delta x$ , it decreases according to Eq. (23) or Eq. (23) multiplied by a factor 2 if  $X$  is also larger than  $\Delta y = \hbar x_0/(L\sqrt{mgn})$ , where  $x_0$  is the location of the detection interval. If the coherence length  $\mathcal{L}$  of the beam is short, there is an extra contribution (7) to phase fluctuations due to the number fluctuations. Finally, it should be mentioned that other sources of phase fluctuations may be important in a guided atomic beam. For example, the decoherence and heating of the atomic beam due to the presence of the surfaces of the macroscopic elements that provide the guiding potential have been analyzed in Ref. [8].

[1] W. Hänsel *et al.*, Nature (London) **413**, 498 (2001).[2] H. Ott *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 230401 (2001).[3] A.E. Leanhardt *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 040401 (2002).[4] M. Lewenstein and L. You, Phys. Rev. Lett. **77**, 3489 (1996).[5] J. Javanainen and M. Wilkens, Phys. Rev. Lett. **78**, 4675

(1997).

[6] U.V. Poulsen and K. Mølmer, Phys. Rev. A **65**, 033613 (2002).[7] V. Dunjko *et al.*, Phys. Rev. Lett. **86**, 5413 (2001).[8] C. Henkel and S. Pötting, Appl. Phys. B: Lasers Opt. **72**, 73 (2001).

Eur. Phys. J. D **35**, 141–146 (2005)  
 DOI: 10.1140/epjd/e2005-00190-9

---

THE EUROPEAN  
 PHYSICAL JOURNAL D

---

## Realizing a stable magnetic double-well potential on an atom chip

J. Estève<sup>a</sup>, T. Schumm, J.-B. Trebbia, I. Bouchoule, A. Aspect, and C.I. Westbrook

Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, UMR 8501 du CNRS, 91403 Orsay Cedex, France

Received 14 March 2005

Published online 26 July 2005 – © EDP Sciences, Società Italiana di Fisica, Springer-Verlag 2005

**Abstract.** We discuss design considerations and the realization of a magnetic double-well potential on an atom chip using current-carrying wires. Stability requirements for the trapping potential lead to a typical size of order microns for such a device. We also present experiments using the device to manipulate cold, trapped atoms.

**PACS.** 39.20.+q Atom interferometry techniques – 03.75.Lm Tunneling, Josephson effect, Bose-Einstein condensates in periodic potentials, solitons, vortices and topological excitations

### 1 Introduction

Progress in the fabrication and use of atom chips has been rapid in the past few years [1]. Two notable recent results concern the coherent manipulation of atomic ensembles on the chip: reference [2] reported the coherent superposition of different internal degrees of freedom while in [3, 4] a coherent beam splitter and interferometer using Bragg scattering was reported. In the same vein, the observation of a coherent ensemble in a chip-based double-well potential also represents a significant milestone and motivates many experiments [5, 6]. The dynamics of a Bose-Einstein condensate in a double-well potential has attracted an enormous amount of theoretical attention [7], in part because one can thus realize the analog of a Josephson junction. Indeed, coherent oscillations of atoms in a laser induced double-well potential have recently been observed [8]. In addition, the observation of an oscillation in a double-well amounts to the realization of a coherent beam splitter which promises to be enormously useful in future atom interferometers based on atom chips [9–12].

In this paper, we discuss progress towards the realization of coherent oscillations on an atom chip following a different way than references [5, 6]. We begin with some theoretical considerations concerning atoms in double-well potentials and show that a configuration with two elongated Bose-Einstein condensates that are coupled along their entire length allows one to achieve a variety of oscillation regimes. Then, we will discuss design considerations which take into account stability requirements for the trapping potentials in the transverse direction. Fluctuations in the external magnetic fields impose a typical size less than or on the order of microns on the double-well. Atom chips implemented with current-carrying wires are well suited to elongated geometry and the micron

size scale. After these general considerations, we discuss a particular realization of a magnetic double-well potential which has been constructed in our laboratory. Our device has much in common with the proposal of reference [10], but we believe it represents an improvement over the first proposal in that it is quite robust against technical noise in the various currents. We will also show some initial observations with the device using trapped <sup>87</sup>Rb atoms.

### 2 Dynamics of two elongated Bose-Einstein condensates coupled by tunneling

The dynamics of a Bose-Einstein condensate in a double-well potential has been widely discussed in the literature [7]. In this section, we will review some of the basic results and apply them to the case of two elongated condensates coupled by tunneling along their entire length  $L$ .

We assume the trapping potential can be written as the sum of a weakly confining longitudinal potential  $V_l(z)$  and a two dimensional (2D) double-well in the transverse direction  $V_r(\mathbf{r})$ . We characterize the two transverse potential wells by the harmonic oscillator frequency at their centers,  $\omega_0$ . We also assume that the longitudinal motion of the atoms is decoupled from the transverse motion, so that we may restrict ourselves to a 2D problem. As discussed in [13], this assumption is not always valid, but it gives a useful insight into the relevant parameters of the problem and how they affect the design of the experiment.

Considering the motion of a single atom, the lowest two energy states of the 2D potential  $V_r$  are symmetric and antisymmetric states,  $|\phi_s\rangle$  and  $|\phi_a\rangle$ . The energy splitting  $\hbar\delta$  between them is related to the tunneling matrix element between the states describing a particle in the right and left wells,  $|\phi_r\rangle$  and  $|\phi_l\rangle$ . When including atom-atom interactions, we assume that the longitudinal linear density  $n_1$

<sup>a</sup> e-mail: jerome.esteve@iota.u-psud.fr

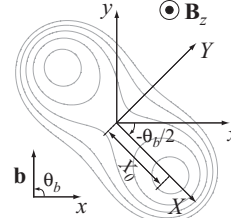
is low enough to satisfy  $n_1 a \ll 1$  where  $a$  is the  $s$ -wave scattering length. In this case, the interaction energy is small compared to the characteristic energy  $\hbar \omega_0$  of the transverse motion, and in a mean field approximation the eigenstates of the Gross-Pitaevskii equation are identical to the single particle eigenstates. The tunneling rate  $\delta$  is unchanged in this approximation. If in addition,  $\delta \ll \omega_0$ , the two mode approximation in which one considers only the states  $|\phi_s\rangle$  and  $|\phi_a\rangle$  (or  $|\phi_l\rangle$  and  $|\phi_r\rangle$ ) is valid.

We now define two characteristic energies  $E_J$  and  $E_C$ . The Josephson energy  $E_J = N \hbar \delta / 2$  characterizes the strength of the tunneling between the wells. The charging energy  $E_C = 4 \hbar \omega_0 a / L$  is analogous to the charging energy in a superconducting Josephson junction and characterizes the strength of the inter atomic interaction in each well. The properties of the system depend drastically on the ratio  $E_C / E_J$  [7]. For the considered elongated geometry, this ratio is equal to  $(4 n_1 a) \times (\omega_0 / \delta) \times 1 / N^2$ . A ratio  $\omega_0 / \delta$  of 10 is enough to insure the validity of the two mode approximation. We have also assumed  $n_1 a \ll 1$  and since  $N \gg 1$  we indeed obtain  $E_C / E_J \ll 1$ . This means that the phase difference between the two wells is well defined and that a mean field description of the system is valid.

In the mean field approximation, the transverse part of the atomic wavefunction can be written  $|\phi\rangle = c_l |\phi_l\rangle + c_r |\phi_r\rangle$  where  $c_l$  and  $c_r$  are complex numbers. The atom number difference  $\Delta N = (|c_l|^2 - |c_r|^2) / 2$  and the phase difference  $\Delta \theta = \arg(c_l / c_r)$  evolve as the classically conjugate variables of a non rigid pendulum Hamiltonian [15]. The solutions of the motion for  $\Delta N$  and  $\Delta \theta$  have been analytically solved [15,16]. Depending on the ratio  $E_J / (N^2 E_C)$ , we distinguish two regimes: the Rabi regime ( $E_J \gg N^2 E_C$ ) and the Josephson regime ( $E_J \ll N^2 E_C$ ). For a fixed geometry ( $L$ ,  $\delta$  and  $\omega_0$  fixed), the Rabi regime is delimited by  $N \ll N_C$  where  $N_C = \delta L / (4 \omega_0 a)$  while the Josephson regime corresponds to  $N \gg N_C$ . For a box like potential of length  $L = 1$  mm and a ratio  $\omega_0 / \delta = 10$ , this number corresponds to  $N_C = 5000$  for  $^{87}\text{Rb}$  atoms.

In the Rabi regime, an initial phase difference of  $\pi / 2$  leads to the maximal relative atom number difference  $\Delta N / N = 1 / 2$ . In the Josephson regime, the signal  $\Delta N / N$  is limited to  $\sqrt{N_C / N}$ . One motivation to attain the Rabi regime is to maximize the relative population difference. If tunneling is to be used as a beam splitting device in an atom interferometer, the Rabi regime is clearly favorable as it maximizes the measured signal. It is also important to note that the neglect of any longitudinal variations in the atom number difference or the relative phase is only valid deep in the Rabi regime [13].

The specific geometry of two elongated Bose-Einstein condensates coupled by tunneling is of special interest since it allows one to tune the strength of the interaction compared to the tunneling energy by adjusting the longitudinal atomic density. This allows realization of experiments in both the Rabi regime and the Josephson regime. On the other hand a complication of the elongated geometry is the coupling between the transverse and longitudinal motions introduced by interactions be-



**Fig. 1.** Adding a small magnetic field  $\mathbf{b}$  to the magnetic hexapole described in equation (1) will split the hexapole into two quadrupoles. The distance between the two minima increases with  $b$  and the direction along which the minima are split depends on the orientation of  $\mathbf{b}$  as shown in the figure. We also have plotted lines of constant modulus of the total magnetic field (equipotential lines for the atoms).

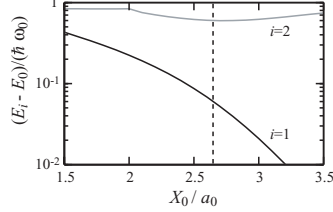
tween atoms. This coupling is responsible for dynamical longitudinal instabilities in presence of uniform Josephson oscillations [13]. However, reference [13] predicts that a few Josephson oscillations periods should be visible before instabilities become too strong. Furthermore, the study of these instabilities may prove quite interesting in their own right. Other manifestations of the coupling between the transverse and the longitudinal motion may be observed. In particular, Josephson vortices are expected for large linear density [14]. These nonlinear phenomena are analogous to observations on long Josephson junctions in superconductors [17].

### 3 Realization of a magnetic double-well potential

We now turn to some practical consideration concerning the realization of the transverse double-well potential  $V_r(x, y)$  using a magnetic field. As first pointed out in [10], a hexapolar magnetic field is a good starting point to produce such a potential. The hexapolar field can be written

$$\begin{cases} B_x = A(y^2 - x^2) = -A r^2 \cos 2\theta \\ B_y = 2Axy = A r^2 \sin 2\theta. \end{cases} \quad (1)$$

where  $A$  is a constant characterizing the strength of the hexapole. In the following, we write this constant  $A = \alpha \mu_0 I / (4 \pi d^3)$  where  $I$  is the current used to create the hexapole,  $d$  is the typical size of the current distribution creating the magnetic field (see Fig. 4) and  $\alpha$  is a geometrical factor close to unity. Adding a uniform transverse magnetic field  $\mathbf{b} = b(\cos \theta_b \mathbf{x} + \sin \theta_b \mathbf{y})$  will split the hexapole into two quadrupoles, thus realizing a double-well potential. The two minima are separated by a distance  $2X_0$  where  $X_0 = \sqrt{b/A}$  and are located on a line making an angle  $\theta_b/2$  with the  $\mathbf{x}$ -axis (see Fig. 1). Tilting the axis of the double-well allows one to null the gravitational energy shift which arises between the two wells if they are not at the same height. This shift has to be precisely cancelled to allow the observation of unperturbed



**Fig. 2.** Bohr frequency between the ground state and the first two excited states of the double-well potential versus the spacing between the wells. The dashed line corresponds to  $X_0 = 2.65 a_0$  for which the Bohr frequency  $\omega_{2,0}$  is ten times bigger than the tunneling rate  $\delta = \omega_{1,0}$ .

phase oscillations in the double-well. For example, if the two wells are separated by a vertical distance of  $1 \mu\text{m}$  the gravitational energy shift between the two wells leads to a phase difference of  $13 \text{ rad ms}^{-1}$  for  $^{87}\text{Rb}$ .

In the rotated basis  $(O, X, Y)$  (see Fig. 1), the modulus of the total magnetic field is

$$B^2 = 2 A b Y^2 + 2 A^2 X^2 Y^2 + A^2 (X^2 - X_0^2)^2. \quad (2)$$

To prevent Majorana losses around each minimum, a uniform longitudinal magnetic field  $B_z$  is added. Under the assumption  $B_z \gg b$ , the potential seen by an atom with a magnetic moment  $\mu$  and a mass  $m$  is

$$V(X, Y) \simeq \frac{m \omega_0^2}{4} Y^2 + \frac{m \omega_0^2}{4 X_0^2} X^2 Y^2 + \frac{m \omega_0^2}{8 X_0^2} (X^2 - X_0^2)^2 \quad (3)$$

with  $\omega_0 = \sqrt{4 \mu A b / (m B_z)}$ .

Around each minimum ( $X = \pm X_0, Y = 0$ ), the potential is locally harmonic with a frequency  $\omega_0$  and we denote  $a_0 = \sqrt{\hbar / (m \omega_0)}$  the size of the ground state of this harmonic oscillator. On the  $X$ -axis, we recover the 1D double-well potential usually assumed in the literature. As seen in equation (3), the potential is entirely determined by the values of  $\omega_0$  and  $X_0$ . We have computed the energy differences between the ground state and the two first excited states for a single atom as a function of these two parameters (see Fig. 2). The Bohr frequency  $\omega_{1,0}$  is equal to the tunneling rate  $\delta$ . We calculate that a ratio  $X_0/a_0 = 2.65$  ensures that  $\omega_{2,0} = 10 \delta$ , so that the two mode approximation is valid. Further calculations are made for a double-well potential fulfilling the condition  $X_0/a_0 = 2.65$ .

### 3.1 Stability of the double-well

We now turn to the analysis of the stability of the system with respect to fluctuations of magnetic field. We will impose two physical constraints: first we require a stability of 10% on the tunneling rate  $\delta$  and second we impose a gravitational energy shift between the two wells of less than 10% of the tunneling energy. Assuming a perfectly stable hexapole and that fluctuations in the external fields can

be kept below 1 mG, we will obtain constraints on the possible size of the current distribution  $d$  and on the spacing between the two wells  $X_0$ .

The geometry of the magnetic double-well is determined by four experimental parameters:  $I$  the current creating the hexapole,  $d$  the size of the current distribution,  $B_z$  the longitudinal magnetic field and  $b$  the transverse field. To minimize the sensitivity of the system to magnetic field fluctuations, the current  $I$  creating the hexapole should be maximized. If we suppose the wires that create the hexapole are part of an atom chip, the maximal current allowed in such wires before damage scales as  $I = I_0 (d/d_0)^{3/2}$  [18]. Henceforth we suppose that the current  $I$  follows this scaling law and is not a free parameter anymore. Furthermore, the condition of the last section  $X_0/a_0 = 2.65$  relates  $b$  and  $B_z$ . Thus we are left with only two free parameters which may be chosen as the size of the source  $d$  and the distance between the wells  $X_0$ . The experimental parameters  $b$  and  $B_z$  can be deduced afterwards.

We first calculate the variation  $\Delta\delta$  of the tunneling rate due to longitudinal and transverse magnetic field fluctuations (respectively noted  $\Delta B_z$  and  $\Delta b$ ). From the numerical calculation of the tunneling rate shown in Figure 2 we obtain

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} = -2.40 \frac{\Delta X_0}{X_0} - 2.18 \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0} \quad (4)$$

$$= -4.27 \frac{\Delta b}{b} + 1.09 \frac{\Delta B_z}{B_z}. \quad (5)$$

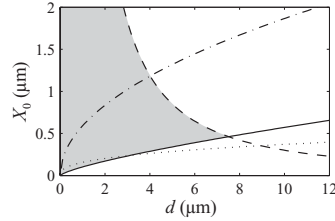
If we require a relative stability of 10% on the tunneling rate, the required relative stability for the magnetic fields  $b$  and  $B_z$  is approximately the same and is easily achievable with a standard experimental set-up. However fluctuations due to the electromagnetic environment may be problematic. Within the assumption  $B_z \gg b$ , only the first term in equation (5) contributes. Thus we have

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} \simeq -4.27 \frac{4 \pi d^3}{\alpha \mu_0 I X_0^2} \Delta b. \quad (6)$$

Using the scaling law stated above for the current creating the hexapole, we finally obtain the following expression for the tunneling rate fluctuations due to variations of the transverse magnetic field

$$\frac{\Delta\delta}{\delta} \simeq -4.27 \left( \frac{4 \pi d_0^{3/2}}{\alpha \mu_0 I_0} \right) \frac{d^{3/2}}{X_0^2} \Delta b. \quad (7)$$

We require a relative stability of 10% for the tunneling rate given an amplitude  $\Delta b = 1 \text{ mG}$  for the magnetic field fluctuations. This limits the possible values for  $X_0$  and  $d$  to the domain above the continuous line plotted in Figure 3. For the numerical calculation, we have used a geometrical factor  $\alpha = 4/\sqrt{3}$  (see Sect. 4) and the following values for  $I_0$  and  $d_0$ . A maximal current of  $I_0 = 20 \text{ mA}$  is reasonable for gold wires having a square section of  $500 \text{ nm} \times 500 \text{ nm}$  which are deposited on an oxidized silicon wafer [18].



**Fig. 3.** Stability diagram for the size  $d$ , and the well separation  $X_0$ . The gray area represents pairs of  $d$  and  $X_0$  for which a 1 mG fluctuation of an external magnetic field does not significantly disturb the double-well. The solid line delimits the zone where the tunneling rate fluctuates less than 10%, while the dashed line shows the area below which the fluctuations of the gravitational energy are less than 10% of the tunneling rate. In addition we show two additional constraints because of  $B_z$ : the area above the dotted line assures a  $B_z$  large enough to avoid Majorana losses and the dash-dotted line corresponds to  $B_z < 100$  G. The device we describe in Section 4 operates at  $d = 5 \mu\text{m}$ .

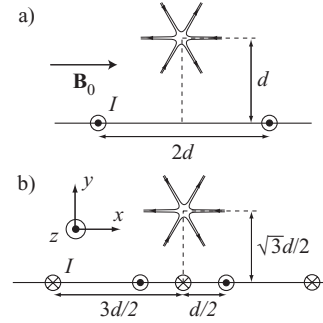
Such wires can be used in a configuration where the typical distance between wires is  $d_0 = 5 \mu\text{m}$ .

We now turn to the calculation of the fluctuations of the gravitational energy shift between the two wells. Transverse magnetic field fluctuations lead to fluctuations  $\Delta h = \Delta b / (A X_0)$  of the height difference between the two wells. The associated fluctuations of the gravitational energy difference have to be small compared to the tunneling energy so that the phase difference between the wells is not significantly modified during one oscillation in the double-well. The ratio between these two energies is

$$\frac{m g \Delta h}{\hbar \delta} \simeq 2.37 \left( \frac{4 \pi m^2 g d_0^{3/2}}{\alpha \mu_0 I_0 \hbar^2} \right) X_0 d^{3/2} \Delta b. \quad (8)$$

We have used the same scaling law as before for the current in the hexapole. The possible values for  $X_0$  and  $d$  that insure this ratio being smaller than 10% are located below the dashed line in Figure 3. We have assumed the same numerical parameters as for the first condition. The intersection of the two possible domains we have calculated for  $X_0$  and  $d$  corresponds to the gray area in Figure 3. The main result is that the characteristic size of the source  $d$  has to be smaller than  $7.5 \mu\text{m}$  in order to achieve a reasonable stability of the double-well. This motivates the use of atom chips to create a magnetic double-well where external magnetic fluctuations of 1 mG still allows the possibility of coherently splitting a Bose-Einstein condensate using a magnetic double-well potential.

We have also plotted in Figure 3 the limit (dotted line) above which the condition  $\mu B_z > 10 \hbar \omega_0$  is fulfilled. This insures the Majorana loss to be negligible in the double-well. Furthermore, above this line the condition  $B_z \gg b$  which is assumed in all our calculation is also fulfilled. We see this condition is not very restrictive and does not significantly reduce the domain of possible parameters. However we note that this condition becomes the limiting



**Fig. 4.** Two configurations that produce a hexapolar magnetic field. Each wire carries the same current  $I$ . In (a) the hexapole is obtained with two wires and a uniform magnetic field  $B_0 = \mu_0 I / (2 \pi d)$ . In (b) it is produced by 5 wires and no external field. In the first configuration the stability of  $B_0$  relative to  $I$  is critical. The second configuration avoids this difficulty provided that the wires are connected in series.

factor as one decreases the size  $d$  of the current distribution. The last plotted dash-dotted line delimits the more practical usable parameters. Above this line the longitudinal field  $B_z$  is greater than 100 G. Such high values of the longitudinal field should be avoided since the longitudinal field may have a small transverse component that would disturb the double-well.

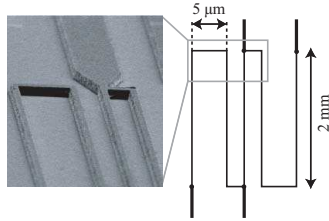
#### 4 Experimental realization of a magnetic double-well on an atom chip

As first proposed in [10], the simplest scheme to obtain a hexapolar magnetic field on an atom chip uses two wires and an external uniform field (see Fig. 4a). Denoting  $2d$  the distance between the two wires, the value of the external field has to be  $B_0 = \mu_0 I / (2 \pi d)$ . One then obtains a hexapole located at a distance  $d$  from the surface of the chip. This configuration leads to a geometrical factor  $\alpha = 1$ . In order to safely lie in the stability domain in Figure 3, one can choose  $d = 5 \mu\text{m}$ . This leads to a current  $I = 20$  mA and to a uniform magnetic field  $B_0 = 8$  G. The required relative stability  $\Delta B_0 / B_0$  for this field is about  $10^{-4}$  since fluctuations of only 1 mG are tolerable<sup>1</sup>. Relative temporal stability of this magnitude can be achieved with the appropriate experimental precaution, but it is quite difficult to produce a spatially homogeneous field on the overall length of the condensate (1 mm) with such accuracy.

To circumvent this difficulty we propose to realize the hexapolar field using only wires on the chip. Assuming all the wires are fabricated on the same layer, at least five wires must be used to create a hexapole. As seen in Figure 4, the distance between the wires can be chosen so

<sup>1</sup> More precisely the ratio  $I/B_0$  has to be kept constant with such accuracy. Here we assume that the current  $I$  in the wires does not fluctuate.





**Fig. 5.** Schematic and SEM picture of our five wire device. The design allows one to send the same current with a single power supply in all the wires to create a magnetic hexapole. The connections on the central wires allow us to imbalance the currents between the central wire, the two left wires and the two right wires.

that a hexapole is obtained with the same current running in all the wires. This allows rejection of the noise from the power supply delivering the current  $I$ . For this geometry, we calculate  $\alpha = 4/\sqrt{3}$  which is the value we used to plot the curves in Figure 3.

We have implemented this five wire scheme on an atom chip. The wires are patterned on an oxidized silicon wafer using electron beam lithography followed by liftoff of a 700 nm thick evaporated gold layer. Each wire has a  $700 \text{ nm} \times 700 \text{ nm}$  cross-section and is 2 mm long. Figure 5 shows the schematic diagram of the chip and a SEM image of the wire ends. This design allows us to send the same current in the five wires using a single power supply. The extra connections are used to add a current in the central wire in order to split the hexapole into two quadrupoles without any external magnetic field. We can also change the current in the left (right) pair of wires in order to release the atoms from the left (right) trap when the separation between the wells is large enough. The transverse wires connecting the five wires at their ends insure the longitudinal confinement of the atoms in a box like potential.

The distance  $d$  characterizing the wire spacing is  $5 \mu\text{m}$ . Using the exact expression of the magnetic field created by the five wires, we have carried out numerical calculation of the spectrum of the double-well. Using a transverse field  $b = 60 \text{ mG}$  and a longitudinal field  $B_z = 550 \text{ mG}$ , we obtain a spacing between the wells of  $2X_0 = 1.0 \mu\text{m}$  and a tunneling rate of  $\delta = 2\pi \times 290 \text{ Hz}$ . The parameters have been chosen to fulfill the condition  $\omega_{0,2} = 10 \delta$  and to lie in the center of the stability domain. In our experiment, the chip is oriented so that the gravity points in the direction  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$  in Figure 4. We thus have to tilt the transverse field  $\mathbf{b}$  using an angle  $\theta_b = 0.74 \times \pi$  to compensate for the gravitational energy shift. Finally, we have checked numerically that the two conditions on the stability of the tunneling rate and of the gravitational energy shift are indeed fulfilled.

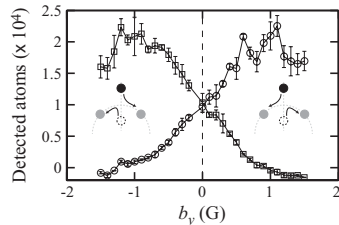
#### 4.1 Splitting of a thermal cloud

In order to load the double-well with a sample of cold  $^{87}\text{Rb}$  atoms, the five wire chip is glued onto an atom chip

like that used in a previous experiment to produce a Bose-Einstein condensate [19]. The five wire chip surface is located approximately  $150 \mu\text{m}$  above the surface of the other chip. This two-chip design allows one to combine wires having very different sizes (typically  $50 \mu\text{m} \times 10 \mu\text{m}$  for the first chip and  $700 \text{ nm} \times 700 \text{ nm}$  for the five wire chip) and therefore different current-carrying capacities in a single device. Large currents are needed to efficiently capture the atoms from a MOT in the magnetic trap.

Using evaporative cooling, we prepare a sample of cold atoms in a Ioffe trap created by a Z-shaped wire on the first chip and a constant external field. Transfer of the atoms to the double-well potential is achieved by ramping down the current in the Z-shaped wire and the external field while we ramp up the currents in the five wires. The final value of the current in the central wire is smaller (10.4 mA) than for the one in the other wires (17.5 mA). We use the fact that an imbalanced current in the central wire is qualitatively equivalent to adding an external transverse field to the hexapole. Ignoring the field due to the lower chip, these current values lead to two trapping minima located on the  $y$ -axis. The position of the upper minimum is superimposed on the position of the Ioffe trap due to the lower chip. We typically transfer of order  $10^4$  atoms having a temperature below  $1 \mu\text{K}$ .

To realize a splitting experiment, we then increase the current in the central wire to 17.5 mA and decrease the current in the other wires to 15 mA. The duration of the ramp is 20 ms. If the external transverse field is zero, the two traps located on the  $y$ -axis coalesce when all the currents are equal and then split along the  $x$ -axis when the current in the central wire is above the one in the other wires. Then, by lowering the current in the left (right) wires to zero, we eliminate the atoms in the left (right) trap and measure the number of atoms remaining in the other trap using absorption imaging. If the external magnetic field has a small component along the  $y$ -axis, the coalescence point is avoided and the atoms initially in the upper trap preferentially go in the right (left) trap if  $b_y$  is positive (negative). The number of atoms in the left or in the right well as a function of  $b_y$  is plotted in Figure 6. As expected, we observe a 50% split between the two wells if the two traps coalesce using  $b_y = 0$ . For an amplitude of the magnetic field  $b_y$  larger than 0.6 G, the transferred fraction of atoms is almost zero. For this specific value of the transverse magnetic field, the atomic temperature at closest approach between the wells is estimated to be 420 nK. On the other hand, for this transverse field and for the longitudinal field  $B_z = 1 \text{ G}$  used in the experiment, the barrier height between wells at closest approach is  $12 \mu\text{K}$ . Thus, the value of the atomic temperature seems too small to explain our observations. The estimated atomic temperature is calculated knowing the initial temperature (220 nK) and assuming adiabatic compression. We have reason to be confident in the adiabaticity because the temperature is observed to be constant when the splitting ramp is run backward and forward at  $b_y = 0.6 \text{ G}$ . More precisely, numerical calculations of the classical trajectories during the splitting indicate that the



**Fig. 6.** Final number of atoms in the right well ( $\square$ ) and in the left well ( $\circ$ ) after a splitting experiment. The schematics depict the trajectories of the two traps during the sequence. Initially all the atoms are in the upper trap. Depending on the sign of the  $y$  component of  $b$ , the atoms preferentially end in the left or in the right well. The minimal distance between the traps depends on the modulus of  $b_y$ . This distance is zero if  $b_y = 0$ , leading to a splitting with half of the atoms in each well.

typical width of the curves shown in Figure 6 is approximately three times too large. For the moment, we do not have a satisfactory explanation for this broadening.

#### 4.2 Longitudinal potential roughness

For our present set-up, the actual longitudinal potential differs from the ideal box-like potential because of distortions in the current distribution inside the wires [19,20]. Preliminary measurements indicate a roughness with a rms amplitude of a few mG and a correlation length of a few  $\mu\text{m}$ . The condensate will thus be fragmented. Each fragment will be trapped in a potential with a typical longitudinal frequency of about 400 Hz. Given the same number of atoms and the same total length for the whole condensate, the longitudinal density in each fragment will be approximately ten times higher than for the ideal box-like potential. Thus the Rabi regime may be out of reach with our present set-up. More precise measurements of the exact longitudinal potential shape are in progress to determine the maximum ratio  $E_J/(N^2 E_C)$  we can actually achieve. Improved wire fabrication techniques may allow us to obtain a flatter longitudinal potential and to increase the  $E_J/(N^2 E_C)$  ratio.

## 5 Conclusion

We have shown that atom chip based set-ups are well suited to produce a stable magnetic double-well potential. Our main argument is that atom chips allow one to design a current distribution having a characteristic size small enough so that oscillations of a condensate between the wells can be reproducibly despite a noisy electromagnetic field environment.

We have fabricated a device using five wires spaced by a distance of a few microns. The preliminary data in Figure 6 shows that we have good control over our transverse magnetic potential, although we cannot entirely validate our design choices before having observed coherent

oscillations. To do this it remains to reproducibly place a condensate in the trap so that the two mode description applies and can be tested.

This work was supported by the E.U. under grants IST-2001-38863 INTAS (Contract 211-855) and MRTN-CT-2003-505032 and by the D.G.A. (03.34.033).

## References

1. R. Folman, P. Krüger, J. Schmiedmayer, J. Denschlag, C. Henkel, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **48**, 263 (2002), and references therein
2. P. Treutlein, P. Hommelhoff, T. Steinmetz, T.W. Hänsch, J. Reichel, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 203005 (2004)
3. Y.-J. Wang, D.Z. Anderson, V.M. Bright, E.A. Cornell, Q. Diot, T. Kishimoto, M. Prentiss, R.A. Saravanan, S.R. Segal, S. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 090405 (2005)
4. A. Guenther, S. Kraft, M. Kemmler, D. Koelle, R. Kleiner, C. Zimmermann, J. Fortagh, e-print [arXiv:cond-mat/0504210](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0504210) (2005)
5. P. Hommelhoff, W. Hänsel, T. Steinmetz, T.W. Hänsch, J. Reichel, *New J. Phys.* **7**, 3 (2005)
6. T. Schumm, S. Hofferberth, L.M. Andersson, S. Wildermuth, S. Groth, I. Bar-Joseph, J. Schmiedmayer, P. Krüger, e-print [arXiv:quant-ph/0507047](https://arxiv.org/abs/quant-ph/0507047) (2005)
7. F. Dalfovo, S. Giorgini, L. Pitaevskii, S. Stringari, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 463 (1999), and references therein; A.J. Leggett, *Rev. Mod. Phys.* **73**, 307 (2001), and references therein
8. M. Albiez, R. Gati, J. Foelling, S. Hunsmann, M. Cristiani, M.K. Oberthaler, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 010402 (2005)
9. D. Cassettari, B. Hessmo, R. Folman, T. Maier, J. Schmiedmayer, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 5483 (2000)
10. E.A. Hinds, C.J. Vale, M.G. Boshier, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 1462 (2001)
11. W. Hänsel, J. Reichel, P. Hommelhoff, T.W. Hänsch, *Phys. Rev. A* **64**, 063607 (2001)
12. E. Andersson, T. Calarco, R. Folman, M. Andersson, B. Hessmo, J. Schmiedmayer, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 100401 (2002)
13. I. Bouchoule, *Eur. Phys. J. D* **35**, 147 (2005)
14. V.M. Kaurov, A.B. Kuklov, *Phys. Rev. A* **71**, 011601(R) (2005)
15. A. Smerzi, S. Fantoni, S. Giovanazzi, S.R. Shenoy, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 4950 (1997)
16. S. Raghavan, A. Smerzi, V.M. Kenkre, *Phys. Rev. A* **59**, 620 (1999)
17. K.K. Likharev, *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits* (Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1986)
18. S. Groth, P. Krüger, S. Wildermuth, R. Folman, T. Fernholz, J. Schmiedmayer, D. Mahalu, I. Bar-Joseph, *Appl. Phys. Lett.* **85**, 2980 (2004)
19. J. Estève, C. Aussibal, T. Schumm, C. Figl, D. Mailly, I. Bouchoule, C.I. Westbrook, A. Aspect, *Phys. Rev. A* **70**, 043629 (2004)
20. T. Schumm, J. Estève, C. Figl, J.-B. Trebbia, C. Aussibal, H. Nguyen, D. Mailly, I. Bouchoule, C.I. Westbrook, A. Aspect, *Eur. Phys. J. D* **32**, 171 (2005)



PHYSICAL REVIEW A 68, 053609 (2003)

**Relative phase fluctuations of two coupled one-dimensional condensates**Nicholas K. Whitlock<sup>1</sup> and Isabelle Bouchoule<sup>2</sup><sup>1</sup>*Department of Physics, University of Strathclyde, Glasgow G4 0NG, United Kingdom*<sup>2</sup>*Institut d'Optique, 91 403 Orsay Cedex, France*

(Received 11 June 2003; published 18 November 2003)

We study the relative phase fluctuations of two one-dimensional condensates coupled along their whole extension with a local single-atom interaction. The thermal equilibrium is defined by the competition between independent longitudinal thermally excited phase fluctuations and the coupling between the condensates which locally favors identical phase. We compute the relative phase fluctuations and their correlation length as a function of the temperature and the strength of the coupling.

DOI: 10.1103/PhysRevA.68.053609

PACS number(s): 03.75.Lm, 03.75.Mn, 03.75.Hh

**I. INTRODUCTION**

Recently, longitudinal phase fluctuations in very elongated Bose-Einstein condensates have been observed experimentally [1,2]. Such phase fluctuations are characteristic of one-dimensional (1D) Bose gases and appear in the small interaction regime where  $\rho \gg \sqrt{m\rho g}/\hbar$ ,  $\rho$  being the linear density of atoms  $g$  the interparticle interaction between atoms and  $m$  their mass. The opposite limit, called the Tonks regime [3], where strong correlations between atoms appear is not investigated in this paper. For 1D Bose gases, at temperatures  $T$  much smaller than  $T_p = \hbar \rho \sqrt{\rho g}/m/k_B$ , fluctuations of density are suppressed and one has a quasicondensate [4–8]. However fluctuations of phase, given by

$$\langle [\theta(0) - \theta(r)]^2 \rangle = \frac{\sqrt{m\rho g}}{\pi \hbar \rho} \ln(\sqrt{m g \rho} r / \hbar) + \frac{m k_B T r}{\hbar^2 \rho},$$

are still present [4]. The logarithmic zero-temperature term is negligible when using normal experimental parameters and phase fluctuations are produced by the thermal population of collective modes.

In this paper we are interested in the case of two elongated condensates coupled along their whole extension by a single-atom interaction which enables local transfer of atoms from one condensate to the other (see Fig. 1). Such a situation could be achieved using a Raman or rf coupling between different internal states [9]. It could also model the case of condensates in two very elongated traps coupled by a tunneling effect. The physics of two coupled condensates, which contains the Josephson oscillations, has been studied in a two-mode model in Refs. [10–12]. In particular the many-body ground state [11] and the thermal equilibrium state [12] have been computed. Behind the two-mode model the excitation spectrum of two-component condensates coupled by a local single-atom coupling has been calculated using the Bogoliubov theory in Ref. [13]. In the case of two elongated condensates, two effects act in opposite directions. Longitudinal phase fluctuations in each condensate tend to smear out the relative phase between the two condensates, while the coupling between the condensates energetically favors the case of identical local relative phase. The goal of this paper is to determine the relative phase of the two condensates at thermal equilibrium as a function of the strength of the coupling.

**II. FORMALISM**

We are interested in pure 1D condensates where the temperature, the interaction energy, and the coupling strength  $\gamma$  are much smaller than the transverse confinement energy. Thus, the Hamiltonian is written as

$$H = \int dz \left\{ \frac{-\hbar^2}{2m} \left[ \psi_a^\dagger(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi_a(z) + \psi_b^\dagger(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi_b(z) \right] + [U(z) - \mu] [\psi_a^\dagger(z) \psi_a(z) + \psi_b^\dagger(z) \psi_b(z)] + \frac{g}{2} [\psi_a^\dagger(z) \psi_a^\dagger(z) \psi_a(z) \psi_a(z) + \psi_b^\dagger(z) \psi_b^\dagger(z) \psi_b(z) \psi_b(z)] - \gamma [\psi_a^\dagger(z) \psi_b(z) + \psi_b^\dagger(z) \psi_a(z)] \right\}, \quad (1)$$

where  $\psi_{a,b}$  are the boson annihilation operators for the condensates labeled  $a$  and  $b$ ,  $U(z)$  is the trapping potential, and  $\mu$  is the chemical potential. Assuming that the size of the transverse ground state  $a_\perp = \sqrt{2\hbar/m\omega_\perp}$  is much larger than the s-wave scattering length  $a$ , the effective coupling constant is simply  $g = (2\hbar^2/m)(2a/a_\perp^2)$ .

Following the calculations made for 1D condensates [4,8] we expand the field operators in terms of their density  $\rho$  and phase  $\theta$  as

$$\psi_{a,b}(z) = e^{i\theta_{a,b}(z)} \sqrt{\rho_{a,b}(z)}. \quad (2)$$

The Hermitian density and phase operators obey  $[\rho_i(z), \theta_j(z')] = i \delta(z - z') \delta_{i,j}$  [14].

As we are interested in temperatures small enough to be in the quasicondensate regime, density fluctuations are small and we write

$$\rho_{a,b}(z) = \rho_0(z) + \delta\rho_{a,b}(z), \quad (3)$$

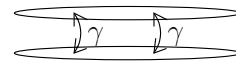


FIG. 1. Situation studied in this article. Two elongated condensates are coupled by an interaction which enables local transfer of atoms from one condensate to the other.

where  $(\delta\rho_{a,b}/\rho_0)\ll 1$  and  $\rho_0$  satisfies the Gross-Pitaevskii equation modified by taking  $\mu\rightarrow\mu+\gamma$ :

$$\left[\frac{-\hbar^2}{2m}\Delta+U(z)-(\mu+\gamma)+g_0\rho_0\right]\sqrt{\rho_0}=0. \quad (4)$$

We also assume that the phase difference between the condensates at a given position is small

$$|\Delta\theta(z)|=|\theta_a(z)-\theta_b(z)|\ll 1. \quad (5)$$

The Heisenberg evolution equations for  $\rho_{a,b}$  and  $\theta_{a,b}$  are developed to first order in  $\delta\rho_{a,b}$ ,  $\nabla\theta_{a,b}$ , and  $\Delta\theta$ , and we obtain

$$\begin{aligned} \hbar\partial_t\theta_{a,b}= & -\frac{1}{2\sqrt{\rho_0}}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+U+3g\rho_0-\mu\right]\left(\frac{\delta\rho_{a,b}}{\sqrt{\rho_0}}\right) \\ & +\gamma\frac{\delta\rho_{b,a}}{2\rho_0}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \hbar\partial_t\delta\rho_{a,b}= & 2\sqrt{\rho_0}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+U+g\rho_0-\mu\right](\theta_{a,b}\sqrt{\rho_0}) \\ & -2\gamma\rho_0\theta_{b,a}. \end{aligned} \quad (7)$$

The first terms on the right-hand side are identical to those for a single condensate and the second terms couple the two condensates. We perform a canonical transformation to the bosonic operators

$$B_{a,b}=\frac{\delta\rho_{a,b}}{2\sqrt{\rho_0}}+i\sqrt{\rho_0}\theta_{a,b}, \quad (8)$$

which evolve according to

$$i\hbar\partial_t\begin{pmatrix} B_a \\ B_a^\dagger \\ B_b \\ B_b^\dagger \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{GP}(\mu) & \Gamma \\ \Gamma & \mathcal{L}_{GP}(\mu) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_a \\ B_a^\dagger \\ B_b \\ B_b^\dagger \end{pmatrix}, \quad (9)$$

where we have introduced the operators

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{GP}(\alpha) & \\ & =\begin{pmatrix} \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta+U-\alpha+2g\rho_0 & g\rho_0 \\ -g\rho_0 & \frac{\hbar^2}{2m}\Delta-U+\alpha-2g\rho_0 \end{pmatrix}, \\ \Gamma & =\begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (10)$$

Such an evolution is the same as the one given by the standard Bogoliubov theory and we recover indeed the same result as that of Ref. [13]. As the matrix in Eq. (9) is invariant by exchange of  $a$  and  $b$ , eigenvectors may be split in two families: the symmetric eigenvectors invariant by exchange

of  $a$  and  $b$  and the antisymmetric eigenvectors which are multiplied by  $-1$  by exchange of  $a$  and  $b$ . The eigenvalue equations are thus reduced to two  $2\times 2$  matrix equations. For the symmetric family the eigenvalue equation becomes

$$\mathcal{L}_{GP}(\mu+\gamma)\begin{pmatrix} u_{sk} \\ v_{sk} \end{pmatrix}=\epsilon_{sk}\begin{pmatrix} u_{sk} \\ v_{sk} \end{pmatrix} \quad (11)$$

and for the antisymmetric family it becomes

$$\mathcal{L}_{GP}(\mu-\gamma)\begin{pmatrix} u_{nk} \\ v_{nk} \end{pmatrix}=\epsilon_{nk}\begin{pmatrix} u_{nk} \\ v_{nk} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

As for the standard Bogoliubov theory the Hamiltonian is then written, up to a real factor, as a sum of independent bosonic excitations

$$H_2=\sum_k\epsilon_{sk}b_{sk}^\dagger b_{sk}+\sum_k\epsilon_{nk}b_{nk}^\dagger b_{nk}, \quad (13)$$

and the  $B$  operator is written

$$B_{a,b}=\sum_k(b_{sk}u_{sk}+b_{sk}^\dagger v_{sk}^*)\pm\sum_k(b_{nk}u_{nk}+b_{nk}^\dagger v_{nk}^*), \quad (14)$$

where the sums are done only on the eigenvectors normalized to  $\int dz(|u_k|^2-|v_k|^2)=1/2$ .

We are interested in the correlation function of the phase difference  $\Delta\theta$ , which is written after commuting the  $B$  operators to normal order as

$$\langle\Delta\theta(z)\Delta\theta(z')\rangle=\langle:\Delta\theta(z)\Delta\theta(z'):\rangle+\frac{\delta(z-z')}{2\rho_0}. \quad (15)$$

The second term accounts for the phase fluctuations in a coherent state with linear density  $\rho_0$  for  $a$  and  $b$ . We are not interested in this term, and thus we will consider only the normal ordered expectation value. If we expand this in terms of the  $b$  operators and consider thermal equilibrium where no correlations between different excitations exist, we obtain

$$\begin{aligned} \langle:\Delta\theta(z)\Delta\theta(z'):\rangle & =\frac{1}{\rho_0}\sum_k\{(b_{nk}^\dagger b_{nk})(f_{nk}^- f_{nk}^{-*'}+f_{nk}^- f_{nk}^{-*}) \\ & \quad -v_{nk}^* f_{nk}^{-'}-v_{nk} f_{nk}^{-*'}\}, \end{aligned} \quad (16)$$

where the prime means that we evaluate the function at  $z'$  and  $f_{nk}^- = u_{nk} - v_{nk}$ . As expected, only the antisymmetric modes contribute because we are interested in phase difference. This expression gives the relative phase fluctuations once the modified Bogoliubov spectrum of Eq. (12) has been calculated. In the following we will give explicit results in the case of a homogeneous gas.

### III. RESULTS FOR HOMOGENEOUS CONDENSATES

We now consider a homogeneous gas with periodic boundary conditions in a box of size  $L$ . The potential  $U$  then vanishes and the Gross-Pitaevskii equation gives

RELATIVE PHASE FLUCTUATIONS OF TWO COUPLED . . .

PHYSICAL REVIEW A **68**, 053609 (2003)

$$\mu = g\rho_0 - \gamma. \quad (17)$$

The Bogoliubov function can be looked for in the form

$$\begin{aligned} u_{sk} &= (2L)^{-(1/2)} \exp(ikz) U_{sk}, \\ v_{sk} &= (2L)^{-(1/2)} \exp(ikz) V_{sk}, \end{aligned} \quad (18)$$

where  $|U_{sk}|^2 - |V_{sk}|^2 = 1$  and similarly for the antisymmetric modes. The Bogoliubov eigenvalue equation for the symmetric branch then reduces to the standard Bogoliubov equation

$$\begin{pmatrix} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g\rho_0 & g\rho_0 \\ -g\rho_0 & -\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g\rho_0\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{sk} \\ V_{sk} \end{pmatrix} = \epsilon_{sk} \begin{pmatrix} U_{sk} \\ V_{sk} \end{pmatrix}, \quad (19)$$

spectrum and eigenvectors of which are well known. For the antisymmetric case the eigenvalue equation becomes

$$\begin{pmatrix} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + g\rho_0 + 2\gamma & g\rho_0 \\ -g\rho_0 & -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - g\rho_0 - 2\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{nk} \\ V_{nk} \end{pmatrix} = \epsilon_{nk} \begin{pmatrix} U_{nk} \\ V_{nk} \end{pmatrix}, \quad (20)$$

which is simply the same as the symmetric case, with the kinetic energy shifted by  $2\gamma$ . Thus the eigenvalues and eigenvector components are

$$\begin{aligned} \epsilon_{nk} &= \left[ \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2\gamma \right) \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2\gamma + 2g\rho_0 \right) \right]^{(1/2)}, \\ U_{nk} + V_{nk} &= \left( \frac{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2\gamma}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2\gamma + 2g\rho_0} \right)^{(1/2)}, \\ U_{nk} - V_{nk} &= \left( \frac{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2\gamma}{\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2\gamma + 2g\rho_0} \right)^{-(1/2)}. \end{aligned} \quad (21)$$

This two-branch spectrum was already obtained in a more general case in Ref. [13]. In the case where  $\gamma \gg g\rho_0$ , these excitations are almost purely particles with  $V_{nk} \ll U_{nk}$  for any  $k$  and their energy is simply  $\hbar^2 k^2 / 2m + 2\gamma$  as expected for a particle in the state  $(|a\rangle - |b\rangle) / \sqrt{2}$  and of momentum  $k$ . In the opposite case where  $\gamma \ll g\rho_0$ , three zones can be identified. For  $k \ll 2\sqrt{m\gamma}/\hbar$  we obtain collective excitations with  $V \approx U$  and with energy  $2\sqrt{\gamma g\rho_0}$ . For  $2\sqrt{m\gamma}/\hbar \ll k \ll 2\sqrt{mg\rho_0}/\hbar$ , we still have collective excitations with  $V \approx U$  but their energy is given by the normal Bogoliubov

dispersion law  $\hbar k \sqrt{g\rho_0/m}$ . Finally, for  $k \gg 2\sqrt{mg\rho_0}/\hbar$  excitations are just particles with energy  $\hbar^2 k^2 / 2m$ .

Using the plane wave expansion (18) and the normalization condition  $U_{nk}^2 - V_{nk}^2 = 1$ , the correlation function (16) of the relative phase fluctuation is written as

$$\langle : \Delta \theta(z) \Delta \theta(z') : \rangle = \frac{1}{2\rho_0 L} \sum_k \{ (U_{nk} - V_{nk})^2 (2n_{nk} + 1) - 1 \} \times \cos[k(z - z')], \quad (22)$$

where  $n_{nk} = 1/(e^{\epsilon_{nk}/k_B T} - 1)$  is the occupation number for the state with energy  $\epsilon_{nk}$ . Using the expression (21) this correlation function can be computed numerically. In the following we analytically compute the phase fluctuations using some approximations.

The terms which do not involve  $n_k$  correspond to the zero-temperature contribution. As the function  $V_{nk}^2 - U_{nk} V_{nk}$  is always smaller than the corresponding function for a single condensate, the relative phase fluctuations will be smaller than the phase fluctuations of a single condensate which implies

$$\langle : \Delta \theta^2 : \rangle < \frac{\sqrt{mg\rho_0}}{\hbar \rho_0} \ln \left( \frac{L \sqrt{mg\rho_0}}{\hbar} \right). \quad (23)$$

The whole theory is valid only for large density so that  $\sqrt{mg\rho_0}/(\hbar \rho_0) \ll 1$  and in the experiments accessible until now the size of the condensate is not large enough to produce noticeable phase fluctuations at zero temperature.

Phase fluctuations are thus due to thermal excitation of the collective modes and we will give a simplified expression by making several approximations. First, we will approximate the Bose factor by

$$n_k = \frac{k_B T}{\epsilon_{nk}}. \quad (24)$$

This is justified as this expression deviates in a significant way from the Bose occupation factor only when  $n_k$  becomes smaller than 1, ie when  $\epsilon_{nk} > k_B T$ , and the contribution to phase fluctuations of those modes is small even with the preceding expression which overestimates their population. Let us now consider separately the case where  $\gamma \gg g\rho_0$  and the case  $\gamma \ll g\rho_0$ .

If  $\gamma \gg g\rho_0$ , then  $(U_{nk} - V_{nk})^2 \approx 1$  for all  $k$  and  $\epsilon_k \approx \hbar^2 k^2 / 2m + 2\gamma$ . This gives, approximating the discrete sum by an integral,

$$\langle : \Delta \theta(z) \Delta \theta(z') : \rangle = \frac{2k_B T}{2\pi \rho_0} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\cos[k(z - z')]}{\hbar^2 k^2 / m + 4\gamma}, \quad (25)$$

$$= \frac{k_B T}{2\hbar \rho_0} \sqrt{\frac{m}{\gamma}} e^{-2|z - z'| \sqrt{m\gamma}/\hbar}. \quad (26)$$

As we consider only temperatures  $k_B T \ll \hbar \rho_0 \sqrt{g \rho_0 / m}$ , so that we have quasicondensates, these phase fluctuations are always very small.

Let us now consider the case where  $\gamma \ll g \rho_0$ . The modes with  $|k| \gg k_0 = \sqrt{m g \rho_0} / \hbar$  give a negligible contribution to the phase fluctuations. Indeed for those terms  $(U_{nk} - V_{nk})^2 \approx 1$  and  $\epsilon_k \approx \hbar^2 k^2 / 2m$ , so that their contribution to the phase fluctuation is

$$\frac{m k_B T}{\pi \hbar^2 \rho_0} \int_{k_0}^{\infty} dk \frac{1}{k^2} = \frac{k_B T \sqrt{m}}{\pi \hbar \rho_0 \sqrt{g \rho_0}}, \quad (27)$$

which is always small in the regime of quasicondensates. Thus only the modes  $|k| \ll 2 \sqrt{g \rho_0 m} / \hbar$  are considered for which

$$(U_{nk} - V_{nk})^2 \approx \frac{2 \sqrt{g \rho_0}}{\sqrt{\hbar^2 k^2 / m + 4 \gamma}}, \quad (28)$$

and the correlation function then becomes

$$\langle : \Delta \theta(z) \Delta \theta(z') : \rangle \approx \frac{2 k_B T}{\rho_0 \pi} \int_0^{k_0} dk \frac{1}{\hbar^2 k^2} \cos[k(z - z')]. \quad (29)$$

The integral can actually be extended to infinity as higher  $k$  values give negligible contributions and we find

$$\langle : \Delta \theta(z) \Delta \theta(z') : \rangle = \frac{k_B T}{2 \rho_0 \hbar} \sqrt{\frac{m}{\gamma}} \exp\left[-\frac{2 \sqrt{m \gamma} |z - z'|}{\hbar}\right]. \quad (30)$$

Note that this expression is the same as Eq. (26), which was not expected *a priori*. This formula, which gives the amplitude of the relative phase fluctuations as well as their correlation length  $1/\gamma$  is the main result of the paper. It agrees well with the numerical calculation of Eq. (22) as shown in Fig. 2. Phase fluctuations are small only if

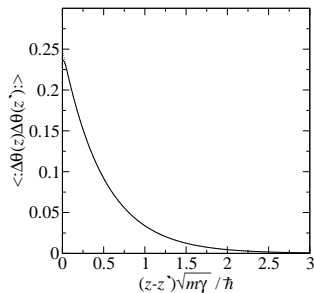


FIG. 2. Correlation function of the relative phase fluctuations. The solid line is the numerical calculation of Eq. (22) with  $\gamma = g \rho_0 / 10$ ,  $T = \hbar \rho_0 \sqrt{\gamma} / (2 \sqrt{m} k_B)$ , and  $L = 100 \hbar / \sqrt{m g \rho_0}$ . The dotted line is the analytical expression, Eq. (30), which only differs from the numerical expression at small separations.

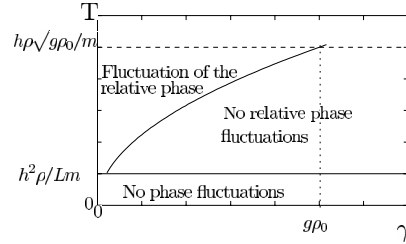


FIG. 3. Phase diagram for the fluctuations of the relative phase between the two condensates. Only temperatures much smaller than  $\hbar \rho_0 \sqrt{g \rho_0} / (k_B \sqrt{m})$  are relevant, as for larger temperatures one does not have a quasicondensate anymore. For temperatures larger than  $\hbar \rho_0 / (k_B L \sqrt{m})$ , each condensate has longitudinal phase fluctuations. Below the curve, which corresponds to Eq. (31), the coupling between the condensates is large enough to suppress local relative phase fluctuations between the two condensates. Above this curve, there are local relative phase fluctuations between the two condensates.

$$k_B T \ll \rho_0 \hbar \sqrt{\frac{\gamma}{m}}. \quad (31)$$

Note that as we assumed small relative phase difference, this is also the limit of validity of our calculation. The phase diagram of Fig. 3 summarizes the previous results.

#### IV. DYNAMICAL INTERPRETATION

The condition (31) to have small relative phase fluctuations has a dynamical interpretation, which is shown very qualitatively below. In a two-mode model of the Josephson coupling between two condensates of  $N$  atoms it has been shown that if  $\gamma \ll N \partial \mu / \partial N$ , then the Josephson oscillation frequency is [10–12]

$$\omega_J = \frac{2}{\hbar} \sqrt{\gamma N \frac{\partial \mu}{\partial N}} \approx \frac{\sqrt{\gamma \mu}}{\hbar} = \frac{\sqrt{\gamma g \rho_0}}{\hbar}. \quad (32)$$

On the other hand, a single elongated condensate will experience phase fluctuations and the phase at a given position will evolve in time. If the change of the phase during a Josephson oscillation time is small, then the Josephson coupling will ensure that the relative phase between the two condensates remains zero: there will be no relative phase fluctuations. However, if the change of the phase during a Josephson oscillation time is large, then the Josephson coupling will not have time to adjust the phase of one condensate with respect to the other: there will be relative phase fluctuations of the two condensates. We thus have to compute the change of the local phase of a single condensate

$$\langle [\theta(1/\omega_J) - \theta(0)]^2 \rangle, \quad (33)$$

with the average corresponding to the thermal equilibrium, and the coupling between the two condensates being ignored. This calculation could be done rigorously by developing the operator  $\theta$  on the collective excitation bosonic operators  $b_k$  and  $b_k^\dagger$ . In the following we present a simpler argument that

RELATIVE PHASE FLUCTUATIONS OF TWO COUPLED . . .

PHYSICAL REVIEW A **68**, 053609 (2003)

gives the same order of magnitude. We first estimate the amplitude  $A_k$  of the phase modulation of wave vector  $k$ . The energy of this phase modulation is just the kinetic energy  $N|A_k|^2\hbar^2k^2/4m$  which in a classical field theory at thermal equilibrium corresponds to an energy of  $k_B T/2$  and thus

$$|A_k|^2 \approx \frac{2mk_B T}{\hbar^2 k^2} \frac{1}{\rho_0 L}. \quad (34)$$

This is indeed the contribution of the mode  $k$  to phase fluctuations as computed in Eq. (29) if  $\gamma=0$ . According to the Bogoliubov spectrum and because only modes with  $|k| \ll 2\sqrt{g\rho_0 m}/\hbar$  contribute, the mode  $k$  evolves with the frequency

$$\omega_k = \frac{k\sqrt{g\rho_0}}{\sqrt{m}}. \quad (35)$$

The evolution of the phase after a Josephson oscillation time  $t_J \approx \hbar/\sqrt{\gamma g\rho_0}$  is then written, after averaging over the independent phases of the phase modulations,

$$\begin{aligned} \langle [\theta(t_J) - \theta(0)]^2 \rangle &\approx \sum_k |A_k|^2 [1 - \cos(\omega_k t_J)] \\ &\approx \frac{2mk_B T}{\hbar^2 \rho_0 2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(\sqrt{t_J g\rho_0} k/\sqrt{m})}{k^2} dk \\ &\approx \frac{k_B T \sqrt{m}}{\hbar \rho_0 \sqrt{\gamma}}. \end{aligned} \quad (36)$$

Small relative phase fluctuations of the two condensates occur when this quantity is small and we recover the condition (31).

## V. DISCUSSION

In conclusion, we have shown that as long as the temperature is small enough to fulfill Eq. (31), although there might exist large phase fluctuations along each condensate, the local

relative phase of the two condensates stays small. In the opposite case, there are large fluctuations of the relative phase whose correlation length is  $l_c = \hbar/2\sqrt{m}\gamma$ . For example let us consider the case of two Rubidium condensates of  $10^4$  atoms elongated over  $L=200 \mu\text{m}$ , confined transversely with an oscillation frequency  $\omega_{\perp}/2\pi=1 \text{ kHz}$ , and coupled using  $\gamma=50 \text{ Hz}$ . The phase of each condensate changes by about  $2\pi$  from one end of the condensate to the other as soon as  $T > T_{\phi} = \hbar^2 \rho_0 / (mLk_B) = 1.8 \text{ nK}$ . However the local relative phase between the two condensates stays much smaller than 1 if  $T \ll \hbar \rho_0 \sqrt{\gamma} / (k_B \sqrt{m}) = 180 \text{ nK}$ . The calculations made here for homogeneous condensates could be used to describe a trapped inhomogeneous gas *via* a local density approximation similar to that used in Ref. [15] as long as both the healing length  $l_h = \hbar/\sqrt{mg\rho_0}$  and the correlation length of the phase fluctuations are much smaller than the extension of the condensate. In the above example,  $l_h = 0.6 \mu\text{m}$  and  $l_c = 2 \mu\text{m}$  are indeed much smaller than  $L$ .

To measure experimentally the relative phase fluctuations and their correlation length, one should perform an interference experiment. In the case where the two states are internal states, an intense  $\pi/2$  pulse has to be applied. Measurement of the local density of atoms in the states  $|a\rangle$  and  $|b\rangle$  then gives access to the local relative phase of the two condensates. In the case where  $|a\rangle$  and  $|b\rangle$  are confined in the wells of a double well potential, the interference measurement is performed via a fast release of the confining potential followed by a time of flight long enough for the two clouds to overlap. Indeed, the total intensity presents fringes in the direction orthogonal to  $z$  [16] and, at a given  $z$ , the position of the central fringe gives the value of the local relative phase.

## ACKNOWLEDGMENTS

We are grateful to Alain Aspect and Stephen Barnett for suggesting this collaboration and for stimulating discussions. We thank Fabrice Gerbier and Gora Shlyapnikov for helpful discussions. We would also like to thank the Carnegie Fund, the University of Strathclyde, and the CNRS for financial support.

- [1] S. Dettmer *et al.*, Phys. Rev. Lett. **87**, 160406 (2001).
- [2] S. Richard, F. Gerbier, J.H. Thywissen, M. Hugbart, P. Bouyer, and A. Aspect, e-print cond-mat/0303137.
- [3] M. Girardeau, J. Math. Phys. **1**, 516 (1960).
- [4] See D. Petrov, Ph.D. thesis, Universiteit van Amsterdam, 2003 (unpublished), <http://www.amolf.nl/publications/theses/petrow>, and references therein.
- [5] D. Petrov, G. Shlyapnikov, and J. Walraven, Phys. Rev. Lett. **85**, 3745 (2000).
- [6] U.A. Khawaja, J.O. Andersen, N.P. Proukakis, and H.T.C. Stoof, Phys. Rev. A **66**, 013615 (2002).
- [7] J.O. Andersen, U.A. Khawaja, and H.T.C. Stoof, Phys. Rev. Lett. **88**, 070407 (2002).
- [8] C. Mora and Y. Castin, e-print cond-mat/0212523.
- [9] M.R. Matthews, D.S. Hall, D.S. Jin\*, J.R. Ensher, C.E. Wie-

- man, and E.A. Cornell, Phys. Rev. Lett. **81**, 243 (1998)
- [10] A. Smerzi, S. Fantoni, S. Giovanazzi, and S.R. Shenoy, Phys. Rev. Lett. **79**, 4950 (1997).
- [11] J. Javanainen and M.Y. Ivanov, Phys. Rev. A **60**, 2351 (1999).
- [12] L. Pitaevskii and S. Stringari, Phys. Rev. Lett. **87**, 180402 (2001).
- [13] E.V. Goldstein and P. Meystre, Phys. Rev. A **55**, 2935 (1997).
- [14] This approach presents the problem of the definition of the phase operator. For a more rigorous approach, see the work of Popov [V.N. Popov, *Functional Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics* (Reidel, Dordrecht, 1983)] or the work of C. Mora and Y. Castin [8], where the space is discretized in cells containing a large number of atoms.
- [15] F. Gerbier *et al.*, Phys. Rev. A **67**, 051602 (2003).
- [16] Y. Shin *et al.*, e-print cond-mat/0306305.



## Modulational instabilities in Josephson oscillations of elongated coupled condensates

I. Bouchoule<sup>a</sup>

Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, UMR 8501 du CNRS, 91403 Orsay, France

Received 9 February 2005 / Received in final form 4 April 2005

Published online 14 June 2005 – © EDP Sciences, Società Italiana di Fisica, Springer-Verlag 2005

**Abstract.** We study the Josephson oscillations of two coupled elongated condensates. Linearized calculations show that the oscillating mode uniform over the length of the condensates (uniform Josephson mode) is unstable: modes of non zero longitudinal momentum grow exponentially. In the limit of strong atom interactions, we give scaling laws for the instability time constant and unstable wave vectors. Beyond the linearized approach, numerical calculations show a damped recurrence behavior: the energy in the Josephson mode presents damped oscillations. Finally, we derive conditions on the confinement of the condensates to prevent instabilities.

**PACS.** 03.75.Lm Tunneling, Josephson effect, Bose-Einstein condensates in periodic potentials, solitons, vortices and topological excitations – 03.75.Kk Dynamic properties of condensates; collective and hydrodynamic excitations, superfluid flow

### 1 Introduction

Josephson oscillations arise between two Bose-Einstein condensates coupled by tunneling effect. They have been observed in superfluid helium [1] and in superconductors [2] and have recently been achieved in dilute atomic BEC in a double well potential [3]. The physics of two coupled condensates has been extensively studied in a two modes model, where only two single particle modes are involved [4, 5]. For atoms interacting in each well through a two-body interaction, different regimes are reached depending on the ratio between the tunneling strength to the interaction energy of atoms in each well [6, 4]. For small interaction energy, one expects to observe Rabi oscillations. For large interaction energy one enters the Josephson regime. In this regime, oscillations around equilibrium configuration have a reduced amplitude in atom number and their frequency depends on the mean field energy. Finally, for very large interaction energy, quantum fluctuations are no longer negligible: the system is in the so-called Fock regime and oscillations of atoms between the wells do not occur any more. In this paper, we assume this regime is not reached. Oscillations between the two wells, both in the Rabi and in the Josephson regime, are then well described by a mean field approach.

Atom chips [7] are probably good candidates to realize Josephson oscillations of Bose-Einstein Condensates as they enable the realization of micro-traps with strong

confinement and flexible geometries. A possible configuration to realize a tunnel coupling between BEC on an atom-chip is proposed in [8]. In this proposal, the two condensates are very elongated and are coupled all along their longitudinal extension. With such an elongated geometry, both the Rabi and the Josephson regime could be accessed. However, in this case, tunnel coupling may be larger than the longitudinal frequency and the two modes model a priori breaks down. In this paper, we are interested in the stability of the uniform Josephson mode where all the atoms oscillate between the two wells independently of their longitudinal position. In the absence of interaction between atoms and if the transverse and longitudinal trapping potentials are separable, the longitudinal and transverse degree of freedom are decoupled and one expects to observe stable Rabi oscillations between the condensates. On the other hand interactions between atoms introduce non linearities that may couple the two motions. For a homogeneous situation such as atoms trapped in a box-like potential, uniform Josephson oscillations are a solution of the mean field evolution equations and are a priori possible, even in presence of interactions between atoms. However, the non linearities introduced by interactions between atoms may cause instability of this uniform Josephson mode. Similar modulational instabilities appear in many situations of nonlinear physics such as water waves propagation [9] or light propagation in a non linear fiber [11]. In the context of Bose Einstein condensates, they have been observed in presence of a periodic potential, at positions in the Brillouin zone where the effective

<sup>a</sup> e-mail: [isabelle.bouchoule@iota.p-sud.fr](mailto:isabelle.bouchoule@iota.p-sud.fr)

mass is negative [12–14]. In our case a modulational instability would cause uniform Josephson oscillations to decay into modes of non vanishing longitudinal momentum. The goal of this paper is to investigate those instabilities.

We assume that all the relevant frequencies (interaction energy and tunnel coupling) are much smaller than the transverse oscillation frequencies in each well so that we can consider only a one-dimensional problem. Thus, the system we consider is described by the Hamiltonian

$$H = \int dz \left\{ \frac{-\hbar^2}{2m} \left[ \psi_1^\dagger(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi_1(z) + \psi_2^\dagger(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi_2(z) \right] + U(z) \left[ \psi_1^\dagger(z) \psi_1(z) + \psi_2^\dagger(z) \psi_2(z) \right] + \frac{g}{2} \left[ \psi_1^\dagger(z) \psi_1^\dagger(z) \psi_1(z) \psi_1(z) + \psi_2^\dagger(z) \psi_2^\dagger(z) \psi_2(z) \psi_2(z) \right] - \gamma \left[ \psi_1^\dagger(z) \psi_2(z) + \psi_2^\dagger(z) \psi_1(z) \right] \right\}, \quad (1)$$

where  $g$  is the one-dimensional coupling constant and  $U(z)$  is the longitudinal trapping potential. For a harmonic transverse confinement for which  $\omega_\perp \ll \hbar^2/(ma^2)$ , we have  $g = 2\hbar\omega_\perp a$ , where  $a$  is the scattering length [15]. The parameter  $\gamma$  describes the tunnel coupling.

We are interested in the stability of uniform Josephson oscillations around the equilibrium configuration where the two condensates have the same phase and equal longitudinal density. In Sections 2–4, we consider a homogeneous configuration where  $U(z) = 0$ . In Sections 2 and 3, we calculate the linearized evolution of modes of non zero longitudinal momentum in the presence of uniform Josephson oscillations. In Section 2, we give results of a calculation valid both in the Josephson and in the Rabi regime. In Section 3, we show that, in the Josephson regime, the system is well described by a modified Sine-Gordon equation. For small amplitude oscillations, we derive scaling laws for the instability time constant and the wave vectors of the growing modes. In Section 4, we go beyond the previous linearized approaches and present numerical results. We observe damped oscillations of the uniform Josephson mode amplitude. Such oscillations are similar to the Fermi-Pasta-Ulam recurrence behavior [16,17]. In the last section (Sect. 5), we present numerical calculations in the case of a harmonic longitudinal confinement. We show that Josephson oscillations are stable for a sufficiently strong confinement and we give an approximate condition of stability.

## 2 Numerical linearized calculation

To investigate whether Josephson oscillations are unstable with respect to longitudinal excitations, we use a linearized calculation around the time-dependent solution corresponding to uniform Josephson oscillations. Writing  $\psi_1 = \varphi_1 + \delta\psi_1$  and  $\psi_2 = \varphi_2 + \delta\psi_2$  with uniform ( $z$ -independent)  $\varphi_{1,2}$ , equation (1) gives to zeroth order

the coupled Gross-Pitaevski equations

$$i\hbar \frac{d}{dt} \varphi_1 = g|\varphi_1|^2 \varphi_1 - \gamma \varphi_2 + (\gamma - \rho_0 g) \varphi_1, \\ i\hbar \frac{d}{dt} \varphi_2 = g|\varphi_2|^2 \varphi_2 - \gamma \varphi_1 + (\gamma - \rho_0 g) \varphi_2. \quad (2)$$

We shifted the zero of energy by adding to the Hamiltonian a “chemical potential” term  $\gamma - \rho_0 g$ , where  $\rho_0$  is the density of each condensate at equilibrium. We recover here the well known results established for a two modes model [4–6]. More precisely, writing  $\varphi_1 = \sqrt{N_1/L} e^{i\theta_1}$  and  $\varphi_2 = \sqrt{(N - N_1)/L} e^{i\theta_2}$  where  $L$  is the size of the system, equation (2) implies that the conjugate variables  $\theta_1 - \theta_2$  and  $k = (N_1 - N_2)/2$  evolve according to the non rigid pendulum Hamiltonian  $H_p = E_C k^2/2 + E_J \sqrt{1 - 4k^2/N^2} \cos(\theta_1 - \theta_2)$  where the charge energy is  $E_C = 2g/L$  and the Josephson energy is  $E_J = \gamma N$ . We consider oscillations of  $\theta_1 - \theta_2$  around 0 of amplitude  $\Theta_{osc}$ . Let us now consider the evolution of excitations around those uniform oscillations. To first order in  $\delta\psi_{1,2}$ , equation (1) yields the coupled Bogoliubov equations

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta\psi_1 \\ -\delta\psi_1^+ \\ \delta\psi_2 \\ -\delta\psi_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{L}_1 & \mathcal{C} \\ \mathcal{C} & \mathcal{L}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta\psi_1 \\ -\delta\psi_1^+ \\ \delta\psi_2 \\ -\delta\psi_2^+ \end{pmatrix} \quad (3)$$

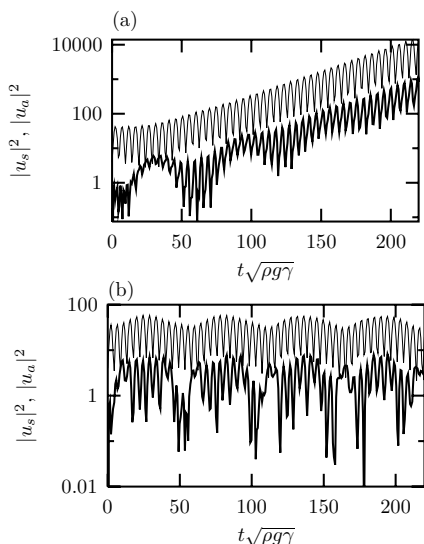
where, for  $i = 1, 2$ ,

$$\mathcal{L}_i = \begin{pmatrix} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + 2g|\varphi_i|^2 - \rho_0 g + \gamma & -g\varphi_i^2 \\ g\varphi_i^{*2} & \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2g|\varphi_i|^2 + \rho_0 g - \gamma \end{pmatrix} \quad (4)$$

and the coupling term is

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} -\gamma & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Instabilities arise if there exist modes growing exponentially in time under equation (3). The evolution matrix is invariant under translation so that we can study independent plane waves modes  $e^{ikz}(u_1, v_1, u_2, v_2)$ , the second derivatives in  $\mathcal{L}_1$  and  $\mathcal{L}_2$  being replaced by  $-k^2$ . Note that the evolution of excitations depends only on the four parameters  $k$ ,  $\rho_0 g$ ,  $\gamma$  and  $\Theta_{osc}$ . For a given  $k$  component, we numerically evolve equations (2) and (3). Figure 1 gives the evolution of the square amplitude of the symmetric mode  $|u_s|^2 = |u_1 + u_2|^2$  and of the antisymmetric mode  $|u_a|^2 = |u_1 - u_2|^2$  for two different  $k$  vectors, for  $\gamma = 0.1\rho_0 g$  and for  $\Theta_{osc} = 0.6$ . For these calculations, we choose the initial condition as  $(u_1, v_1, u_2, v_2) = (1, -1, -1, 1)$ . In the two cases, we observe a fast oscillation at a frequency close to the frequency of the antisymmetric mode  $\sqrt{(2\rho_0 g + 2\gamma + \hbar^2 k^2/2m)(2\gamma + \hbar^2 k^2/2m)}$  and a slower oscillation at a frequency close to that of the symmetric mode  $\sqrt{(2\rho_0 g + \hbar^2 k^2/2m)\hbar^2 k^2/2m}$  [18]. On top of this, we observe, for  $k = 0.1$ , an exponential growth  $e^{2\Gamma t}$  of



**Fig. 1.** Evolution of the square amplitude of the symmetric (fat lines) and antisymmetric (thin lines) excitations of wave vector  $k = 0.1\sqrt{m\rho_0g}/\hbar$  (a) and  $k = 0.3\sqrt{m\rho_0g}/\hbar$  (b). Those graphs are computed for  $\gamma = 0.1\rho_0g$  and a uniform Josephson oscillation amplitude  $\Theta_{osc} = 0.6$ .

$|u_1 + u_2|^2$  and  $|u_1 - u_2|^2$ , signature of an instability. We find that, for given  $\rho_0g$  and  $\Theta_{osc}$ , the instability domain in  $k$  is  $[0, k_{max}]$ . Figure 2 gives the maximum growth rate  $\Gamma$  and the maximum unstable wave vector  $k_{max}$ .

### 3 Calculation in the Josephson limit

In this section, we focus on the Josephson regime where  $\gamma \ll \rho_0g$  [10]. In this regime the amplitude of oscillations in the relative density  $\delta\rho$  remains small compared to the mean density and one can assume  $\rho_1 = \rho_2$  in the Josephson energy term of the Hamiltonian. Furthermore, we restrict ourselves to long wavelength excitations described by phonons and we neglect anharmonicity of phonons. Then, the Hamiltonian reduces to

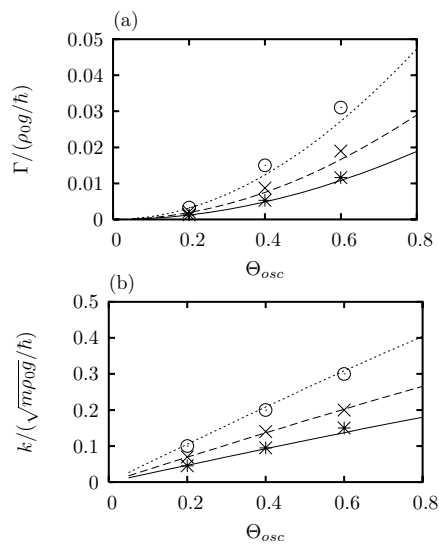
$$H_J = H_s + H_{SG} + H_c, \quad (6)$$

where, writing  $\psi_1 = \sqrt{\rho_1}e^{i\theta_1}$ ,  $\psi_2 = \sqrt{\rho_2}e^{i\theta_2}$ ,  $\theta_a = \theta_1 - \theta_2$ ,  $\theta_s = \theta_1 + \theta_2$ ,  $\rho_a = (\rho_1 - \rho_2)/2$  and  $\rho_s + \rho_0 = (\rho_1 + \rho_2)/2$ ,

$$H_s = \int \left( \frac{\hbar^2 \rho_0}{4m} \left( \frac{\partial \theta_s}{\partial z} \right)^2 + g\rho_s^2 \right) dz \quad (7)$$

describes the symmetric phonons,

$$H_{SG} = \int \left( \frac{\hbar^2 \rho_0}{4m} \left( \frac{\partial \theta_a}{\partial z} \right)^2 + g\rho_a^2 - 2\gamma\rho_0(\cos(\theta_a) - 1) \right) dz \quad (8)$$



**Fig. 2.** Maximum instability rate of excitations (a) and maximum wave vector  $k$  of unstable modes (b) as a function of the amplitude of the relative phase oscillations for  $\gamma = 0.05\rho_0g$  (stars and solid line)  $\gamma = 0.1\rho_0g$  (crosses and dashed line) and  $\gamma = 0.2\rho_0g$  (circles and dotted line). The points are the results of the linearized numerical calculations presented in Section 2 and are given with a precision of 10%. The continuous lines are given by diagonalising the four by four matrix as presented in Section 3.

is the Sine-Gordon Hamiltonian and

$$H_c = -2\gamma \int \rho_s (\cos(\theta_a) - 1) dz \quad (9)$$

is a coupling between the symmetric and antisymmetric modes. The Sine-Gordon Hamiltonian has already been introduced in the physics of elongated superconducting Josephson junction [2]. In those systems, symmetric modes would have a very large charge and magnetic energy and do not contribute. The Sine-Gordon model has been extensively studied [19]. In particular, it has been shown that, for a Sine-Gordon Hamiltonian, oscillations of well defined momentum (in particular  $k = 0$ ) present Benjamin-Feir instabilities [19]. Our system is not described by the Sine-Gordon Hamiltonian because of the presence of  $H_c$ . In the following, we derive results about stability of our modified Sine-Gordon system. As we will see later, we recover results close to that obtained for the Sine-Gordon model.

The Josephson oscillations correspond to oscillations where  $\rho_a = \rho_{osc}$  and  $\theta_a = \theta_{osc}$  are independent of  $z$ . They are given by

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_{osc}}{\partial t} = 2\gamma\rho_0 \sin(\theta_{osc})/\hbar \\ \frac{\partial \theta_{osc}}{\partial t} = -2g\rho_{osc}/\hbar \end{cases} \quad (10)$$



$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} i(-\omega_a + \omega_J + \gamma\Theta_{osc}^2 f_a^2/4) & -i\gamma\Theta_{osc} f_a/(2f_s) & \gamma\Theta_{osc} f_a/(2f_s) & -\gamma\Theta_{osc}^2 f_a^2/8 \\ i\gamma\Theta_{osc} f_a/f_s/2 & i\omega_s & 0 & -\gamma\Theta_{osc} f_a/(2f_s) \\ \gamma\Theta_{osc} f_a/(2f_s) & 0 & -i\omega_s & -i\gamma\Theta_{osc} f_a/(2f_s) \\ -\gamma\Theta_{osc}^2 f_a^2/8 & \gamma\Theta_{osc} f_a/(2f_s) & i\gamma\Theta_{osc} f_a/(2f_s) & i(\omega_a - \omega_J - \gamma\Theta_{osc}^2 f_a^2/4) \end{pmatrix} \quad (16)$$

They also induce an oscillation  $\theta_{osc}^{(s)}$  of  $\theta_s$  given by

$$\frac{\partial\theta_{osc}^{(s)}}{\partial t} = -2\gamma(\cos(\theta_{osc}) - 1)/\hbar. \quad (11)$$

To investigate whether some non vanishing  $k$  modes are unstable in presence of a Josephson oscillation, we linearize, as in the previous section, the equation of motion derived from equation (6) around the solution  $\rho_{osc}, \theta_{osc}$ . Because of translational invariance, we can study independently the evolution of modes of well defined longitudinal wave vector  $k$ . Writing  $\rho_1 = \rho_0 + \rho_{osc} + (\delta\rho_a + \delta\rho_s)e^{ikz}$ ,  $\rho_2 = \rho_0 - \rho_{osc} + (-\delta\rho_a + \delta\rho_s)e^{ikz}$ ,  $\theta_1 = (\theta_{osc}^{(s)} + \theta_{osc} + (\delta\theta_s + \delta\theta_a)e^{ikz})/2$ , and  $\theta_2 = (\theta_{osc}^{(s)} - \theta_{osc} + (\delta\theta_s - \delta\theta_a)e^{ikz})/2$ , we find the evolution equation

$$\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta\rho_a/\rho_0 \\ \delta\theta_a \\ \delta\rho_s/\rho_0 \\ \delta\theta_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 2\gamma \cos(\theta_{osc}) & 2\gamma \sin(\theta_{osc}) & 0 \\ -2\rho_0 g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \\ 0 & 2\gamma \sin(\theta_{osc}) & -2\rho_0 g & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \delta\rho_a/\rho_0 \\ \delta\theta_a \\ \delta\rho_s/\rho_0 \\ \delta\theta_s \end{pmatrix}. \quad (12)$$

We solved numerically equations (10, 12) and we find that modes of low  $k$  wave vectors are unstable. Figure 3 gives the instability rate and the maximum  $k$  wave vector of unstable modes. Those results agree within 10% to the more general results of the previous section as long as  $\gamma/\rho_0 g < 0.2$  and the oscillation amplitude fulfills  $\Theta_{osc} < 0.6$ .

To get more insight into the physics involved and to obtain scaling laws for the instability rate and the instability range in  $k$ , we will perform several approximations. The evolution matrix  $M$  of equation (12) is periodic in time with a period  $\omega_J$ . We can thus use a Floquet analysis [20] and look for solutions of equation (12) in the form

$$e^{i\nu t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\omega_J t} c_n = e^{i\nu t} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\omega_J t} \begin{pmatrix} c_{1n} \\ c_{2n} \\ c_{3n} \\ c_{4n} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Expanding equation (12) for each Fourier component, we find

$$\nu c_n = -\omega_J n c_n - iM_0 c_n - i \sum_m M_m c_{n-m}, \quad (14)$$

where the time independent matrices  $M_n$  are the Fourier components

$$M_m = \frac{\omega_J}{2\pi\hbar} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_J}} e^{-im\omega_J t} M(t) dt. \quad (15)$$

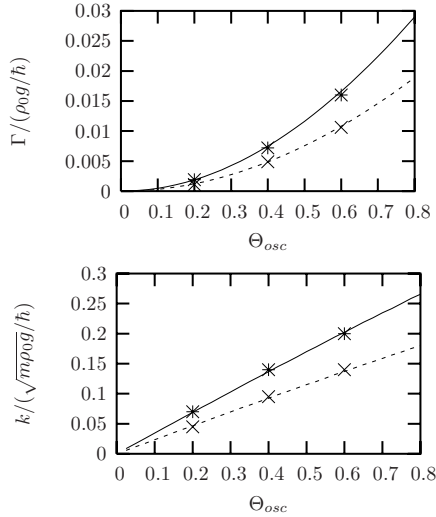
Thus, solutions of equation (12) are found as eigenvalues of the linear set of equations (14). The mode is unstable if there exists an eigenvalue of non vanishing real part and its growth rate is the real part of the eigenvalue.

For  $\Theta_{osc} = 0$ , only the dc component  $M_0$  is not vanishing and its eigenvalues are  $\pm\omega_a = \pm i\sqrt{2\rho_0 g(2\gamma + \hbar k^2/2m)}$  and  $\pm\omega_s = \pm i\hbar k\sqrt{\rho_0 g/m}$  corresponding, for each Fourier component  $n$ , to the symmetric modes  $c_{\pm n}^{(s)}$  and antisymmetric modes  $c_{\pm n}^{(a)}$ . The four states  $c_{-1}^{(a)}, c_{-0}^{(s)}, c_{+0}^{(s)}$  and  $c_{+1}^{(a)}$  form a subspace almost degenerate in energy and of energy far away from the other states as depicted Figure 4. Thus, we will restrict ourselves to those states in the following. In the limit of oscillations of small amplitude  $\Theta_{osc}$ , the matrix elements of  $M$  can be expanded to second order in  $\theta_{osc}$ . Furthermore, the oscillations are well described by  $\theta_{osc} = \Theta_{osc} \cos(\omega_J t)$ , where  $\omega_J = 2\sqrt{\gamma\rho_0 g(1 - \Theta_{osc}^2/16)}/\hbar$ . We then find that, in the 4-dimensional subspace spanned by  $(c_{-1}^{(a)}, c_{-0}^{(s)}, c_{+0}^{(s)}, c_{+1}^{(a)})$ , the eigenvalue  $\nu$  of equation (14) are the eigenvalues of the four by four matrix

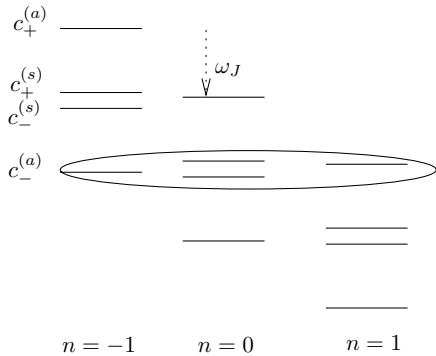
see equation (16) above

where  $f_a = (2\rho_0 g/(\hbar^2 k^2/2m + 2\gamma))^{(1/4)}$  and  $f_s = (4m\rho_0 g/\hbar^2 k^2)^{(1/4)}$ .

We numerically diagonalise this matrix and find the instability rate as the largest real part of the eigenvalues. For a given oscillation amplitude  $\Theta_{osc}$ , scanning the wave vector  $k$ , we find the largest instability rate and the maximum wave vector of unstable modes. Figure 3 compare those results with the values obtained by integration of equation (12). We find a very good agreement in the range  $\theta < 0.6$  and  $\gamma/\rho_0 g < 0.1$ . Finally, in Figure 2, we compare the instability rate and the maximum unstable wave vector found with this simplified Floquet analysis with the more general results of Section 1. We find a very good agreement as long as  $\gamma/\rho_0 g < 0.2$  and  $\Theta_{osc} < 0.6$ .



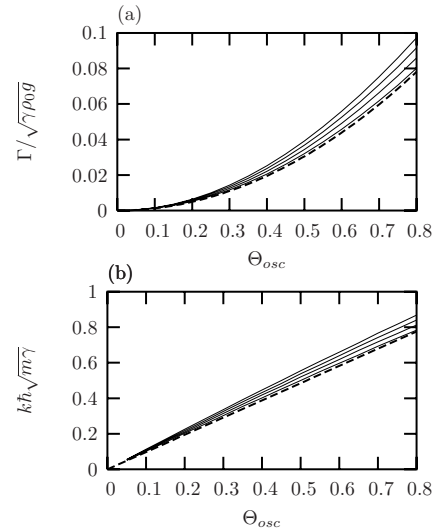
**Fig. 3.** Comparison between numerical evolution of equations (10, 12) (points) and the results obtained by diagonalising the 4 by 4 matrix of the Floquet representation (lines). Parameters are  $\gamma = 0.1 \times \rho_0 g$  (stars and continuous lines) and  $\gamma = 0.05 \times \rho_0 g$  (crosses and dashed line).



**Fig. 4.** Floquet representation of the equation (12). The ellipse surrounds the four states that are considered in the calculation of instability rates.

If we restrict ourselves to terms linear in  $\Theta_{osc}$ , then the only effect of the Josephson oscillations is to introduce a coupling between the symmetric and antisymmetric mode. We checked that this coupling alone does not introduce any instability. Thus instability is due to the quadratic terms. Those terms contain a modulation at  $2\omega_J$ . This modulation corresponds to the modulation of the frequency of the antisymmetric mode

$$\omega_a^2 = 2\rho_0 g (\hbar^2 k^2 / 2m + 2\gamma - 2\gamma \Theta_{osc}^2 / 4) + \gamma \rho_0 g \Theta_{osc}^2 \cos(2\omega_J t). \quad (17)$$



**Fig. 5.** Maximum instability rate normalized to the Josephson oscillation frequency (a) and maximum wave vector of unstable modes normalized to  $\sqrt{m\gamma}/\hbar$  (b) as a function of the oscillations amplitude  $\Theta_{osc}$  for different ratios  $\gamma/\rho_0 g$  (from lower curves to upper curves: 0.02, 0.06, 0.1, 0.14). Fat dashed lines are the scaling laws equations (18, 19). Thin continuous lines are found by diagonalising the matrix of equation (16).

This parametric oscillation leads to instability for  $k \in [0, \Theta_{osc} \sqrt{m\gamma/2}/\hbar]$  and the instability time constant at resonance is  $\Gamma = \Theta_{osc}^2 \sqrt{\gamma\rho_0 g}/8\hbar$ . We recover here the well known results of Benjamin-Feir instability derived for example in [19] using the multiple-scale perturbation technique. In our case, the coupling to the symmetric mode will modify those values. However, for small values of  $\gamma$ , the qualitative behavior is unchanged. Indeed, as seen in Figure 5, as long as  $\gamma < 0.05\rho_0 g$  and within a precision of 10%, the instability rate  $\Gamma$  scales as

$$\Gamma = 0.122(1) \Theta_{osc}^2 \sqrt{\gamma\rho_0 g} / \hbar \quad (18)$$

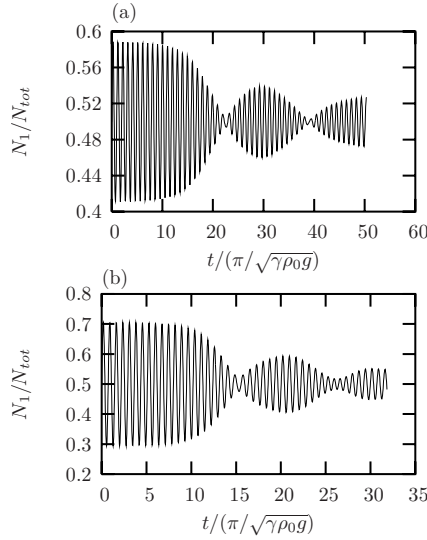
and the maximum wave vector of unstable modes as

$$k_{max} = 0.97(1) \frac{\sqrt{m\gamma}}{\hbar} \Theta_{osc}. \quad (19)$$

For larger  $\gamma$ , the  $\Gamma$  and  $k_{max}$  are higher than those lows as seen in Figure 5.

#### 4 Beyond the linearisation

The two previous sections give a linearized analysis of the evolution of perturbations. They show that the presence of uniform Josephson oscillations produces instabilities of modes of non vanishing momentum. The energy in these mode grows and consequently, the energy of the uniform Josephson mode decreases and one expects a decrease of

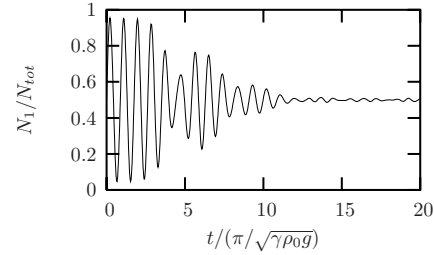


**Fig. 6.** Evolution of the number of atoms in the condensate 1, normalized to the total number of atoms, as a function of time. The initial state corresponds to a phase difference between the condensate  $\Theta_{osc} = 0.6$  superimposed on phase and density fluctuations corresponding to a thermal equilibrium at temperature  $k_B T = 0.1\rho_0 g$ . For this calculation,  $\gamma = 0.1\rho_0 g$  (a) and  $\gamma = \rho_0 g$  (b).

the uniform Josephson oscillations amplitude. Such a decrease is beyond the previous linearized analysis and we perform full numerical calculation of the evolution of the mean fields  $\psi_1(z, t)$  and  $\psi_2(z, t)$ . The evolution equations derived from equation (1) are

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} \psi_1 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_1}{dz^2} + g|\psi_1|^2 \psi_1 - \gamma \psi_2 \\ i\hbar \frac{d}{dt} \psi_2 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_2}{dz^2} + g|\psi_2|^2 \psi_2 - \gamma \psi_1 \end{cases} \quad (20)$$

Figure 6 gives the evolution of the total number of atoms in the condensate 1,  $N_1 = \int |\psi_1|^2$ , for initial amplitude  $\Theta_{osc} = 0.6$  and for different values of  $\gamma/(\rho_0 g)$ . For these calculations, the initial state consists in a  $z$ -independent phase difference  $\Theta_{osc}$  between  $\psi_1$  and  $\psi_2$  superposed on thermal fluctuations of the density and phase of the two condensates corresponding to a temperature  $k_B T = \rho_0 g/10$ . We observe that the amplitude of the Uniform Josephson Oscillations presents damped oscillations. For  $\gamma \ll \rho_0 g$ , the period of these amplitude oscillations is about three times the inverse of the instability rate of equation (18). The ratio between the Josephson frequency and the frequency of these amplitude oscillations is about 20 and is almost independent on the ratio between  $\gamma$  and  $\rho_0 g$  as long as  $\gamma < \rho_0 g$ . For larger  $\gamma$ , this ratio increases and more Josephson oscillations are seen in a period of the amplitude modulation. Such amplitude oscillations are a reminiscence of the Fermi-Ulam-Pasta



**Fig. 7.** Evolution of the number of atoms in the condensate 1, normalized to the total number of atoms, as a function of time for  $\gamma = \rho_0 g$  and an initial phase difference between condensates  $\Theta_{osc} = \pi/2$ . Initial thermal population of excited modes corresponding to  $k_B T = 0.1\rho_0 g$  is assumed.

recurrence behavior observed in many non linear systems with modulational instabilities [16,17,19]. In particular, this recurrence behavior has been seen in numerical evolution of the Sine-Gordon Hamiltonian [21]. In our case, we observe an additional damping which results probably from the coupling to symmetric modes.

The case of an initial amplitude  $\Theta_{osc} = \pi/2$  is of particular interest as, in absence of interactions between atoms, it corresponds to Rabi oscillations of maximum amplitude. Figure 7 gives the evolution of  $N_1$  for  $\gamma = \rho_0 g$  and an initial amplitude  $\Theta_{osc} = \pi/2$ .

## 5 Case of a confined system

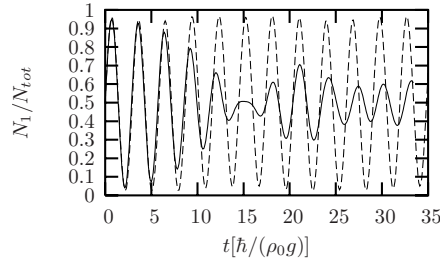
In the previous sections, we considered large and homogeneous systems. We found that unstable excited modes are those of low wave vectors. In the Josephson limit where  $\gamma \ll \rho_0 g$ , we derived the scaling law equation (19) for the maximum unstable wave vector. In a cloud trapped in a box like potential of extension  $L$ , the minimum  $k$  value of the excitation modes is  $2\pi/L$ . Thus, if

$$L < \frac{2\pi\hbar}{1.0\sqrt{m\gamma}\Theta_{osc}}, \quad (21)$$

the minimum wave vector of excited modes is larger than the maximum unstable  $k$  value equation (19) and the system is stable. This condition can be understood in a different way: the energy of the lowest longitudinal mode is  $\hbar 2\pi\sqrt{\rho_0 g}/(mL)$  (here we assume  $L \gg \hbar/\sqrt{m\rho_0 g}$ ). Thus, we find that the system is stable provided that the energy of the lowest excited mode satisfies  $E_{exc} > 0.52\omega_J\Theta_{osc}$  where  $\omega_J = 2\sqrt{\gamma\rho_0 g}/\hbar$  is the Josephson frequency.

An approximate condition of stability of Josephson oscillations in the case of a cloud trapped in a harmonic longitudinal potential of frequency  $\omega$  is found as follows. The size of cloud, described by a Thomas Fermi profile, is  $L = 2\mu/(m\omega^2)$ , where  $\mu = \rho_0 g$  is the chemical potential and  $\rho_0$  the peak linear density. Then, from the same argument as above, one expects to observe stable oscillations for

$$\omega > \alpha\sqrt{\gamma\rho_0 g}\Theta_{osc} = \alpha\Theta_{osc}\omega_J/2 \quad (22)$$



**Fig. 8.** Josephson oscillations of clouds trapped in a harmonic potential of frequency  $\omega = 0.1\rho_0g/\hbar$  (solid line) and  $\omega = \rho_0g/\hbar$  (dashed line), where  $\rho_0$  is the peak linear density in each condensate. The initial phase difference between the condensates is  $\pi/2$  and the tunnel coupling is  $\gamma = \rho_0g$ .  $N_1$  is the number of atoms in the condensate 1 and  $N_{tot}$  the total number of atoms.

where  $\alpha$  is a numerical factor close to one. We performed numerical simulations of the evolution in the case of a harmonic potential, adding to both left hand sides of equations (20) a trapping potential  $1/2m\omega^2z^2$ . The initial situation is the Thomas Fermi profile superposed on thermal random fluctuations and a global phase difference between the condensates  $\Theta_{osc} = \pi/2$ . The tunnel coupling is  $\gamma = \rho_0g$ . The resulting Josephson oscillations are shown in Figure 8 for  $\omega = \rho_0g/\hbar$  and  $\omega = 0.1\rho_0g/\hbar$ . We observe that for  $\omega = \rho_0g/\hbar$ , Josephson oscillations are stable whereas, for  $\omega = 0.1\rho_0g/\hbar$ , oscillations are unstable.

## 6 Conclusion and prospects

We have shown that Josephson oscillations of two coupled elongated condensates are unstable with respect to excitations of longitudinal modes. The unstable modes are those of small wave vectors. In the Josephson limit where  $\gamma \ll \rho_0g$ , we have derived the scaling laws equation (18, 19) for the instability time constant and wave vectors. Since the frequency of Josephson oscillations are  $2\sqrt{\gamma\rho_0g}$ , the first equation tells us that the number of oscillations that can be observed scales as  $\Theta_{osc}^2$  and is independent on  $\gamma/\rho_0g$ . This is true as long as  $\gamma < \rho_0g$ . For larger  $\gamma/(\rho_0g)$ , the Josephson condition is not fulfilled. Effect of interactions is less pronounced and more oscillations can be observed. Performing numerical calculations beyond the linearized approach, we have shown that the system presents a recurrence behavior, although it is damped quickly. Finally, we investigated the stability of oscillations in finite size systems. Equation (21) gives the maximum longitudinal size of confined condensate that enables the presence of stable Josephson oscillations. We also considered the case of harmonically trapped cloud and give an approximate condition on the oscillation frequency to have stable Josephson oscillations.

The results of this paper are not changed drastically for finite temperature. Indeed, although elongated Bose-Einstein condensates present thermally excited longitudinal phase fluctuations [22,23], it has been shown

in [18] that, because the antisymmetric modes present an energy gap, thermal fluctuations of the relative phase between elongated coupled condensates are strongly suppressed.

Among the possible extensions of this work, two questions are of immediate experimental interest. First, the effect of a random longitudinal potential could be investigated. Indeed, it has been proposed to realized elongated coupled condensates using magnetic trapped formed by micro-fabricated wires [8], but, for such systems, a roughness of the longitudinal potential has been observed [24–26]. If the amplitude of the roughness potential is smaller than the chemical potential of the condensate, one expects to still have a two single elongated condensate. However, the roughness of the potential may change significantly the results of this paper. Second, the effect of correlations between atoms may be studied. Indeed, for large interactions between atoms, correlations between atoms become important. More precisely, for  $\rho_0 < mg/\hbar^2$ , a mean field approach is wrong and the gas is close to the Tonks-Girardeau regime [27–29]. Such a situation is not described in this paper in which a mean field approach has been assumed. Thus, a new study should be devoted to the physics of coupled elongated Tonks gas.

Dynamical instabilities of the uniform Josephson mode are not the only effect of non linearities in the system of two coupled elongated condensates and other interesting phenomena are expected. For instance, reference [30] shows that Josephson vortices similar to the solitons of the Sine-Gordon model exist for large enough interaction energy.

We thank Dimitri Gangardt for helpful discussions. This work was supported by EU (IST-2001-38863, MRTN-CT-2003-505032), DGA (03.34.033) and by the French ministry of research (action concertée “nanosciences”).

## References

1. S.V. Pereverzev et al., Nature **388**, 449 (1997)
2. K.K. Likharev, *Dynamics of Josephson junctions and circuits* (Gordon and Breach science publishers, 1986)
3. M. Albiez et al., e-print [arXiv:cond-mat/0411757](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0411757) (2004)
4. A.J. Legett, Rev. Mod. Phys. **73**, 307 (2001)
5. F. Sols, in *Bose-Einstein Condensation in Atomic Gases* (IOS Press, 1999)
6. A. Smerzi, S. Fantoni, S. Giovanazzi, S.R. Shenoy, Phys. Rev. Lett. **79**, 4950 (1997)
7. R. Folman et al., Adv. Atom. Mol. Opt. Phys. **48**, 263 (2002), and references therein
8. J. Estève, T. Schumm, J.-B. Trebbia, I. Bouchoule, A. Aspect, C.I. Westbrook, Eur. Phys. J. D **35**, 141 (2005)
9. T.B. Benjamin, J.E. Feir, J. Fluid Mech. **27**, 417 (1967)
10. We also consider that  $\gamma \gg g\rho_0/N^2$ ,  $N$  being the total number of atoms, so that quantum fluctuations of the relative phase are negligible.
11. K. Tai, A. Hasegawa, A. Tomita, Phys. Rev. Lett. **49**, 236 (1986)
12. L. Fallani et al., Phys. Rev. Lett. **93**, 140406 (2004)

13. B. Wu, Q. Niu, Phys. Rev. A **64**, 061603 (2001)
14. V.V. Konotop, M. Salerno, Phys. Rev. A **65**, 021602 (2002)
15. M. Olshani, Phys. Rev. Lett. **81**, 938 (1998)
16. H.C. Yuen, W.E. Ferguson, Phys. Fluids **21**, 1275 (1978)
17. E. Infeld, Phys. Rev. Lett. **47**, 717 (1981)
18. N.K. Whitlock, I. Bouchoule, Phys. Rev. A **68**, 053609 (2003)
19. A.C. Newell, *Solitons in Mathematics and Physics* (Society of Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, USA, 1985), p. 43
20. J.H. Shirley, Phys. Rev. **138**, B979 (1965)
21. D. Barday, M. Remoissenet, Phys. Rev. B **43**, 7297 (1991)
22. S. Dettmer et al., Phys. Rev. Lett. **87**, 160406 (2001)
23. S. Richard, F. Gerbier, J.H. Thywissen, M. Hugbart, P. Bouyer, A. Aspect, e-print [arXiv:cond-mat/0303137](https://arxiv.org/abs/cond-mat/0303137)
24. J. Fortágh et al., Phys. Rev. A **66**, 41604 (2002)
25. M.P.A. Jones et al., J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **37**, L15 (2004)
26. J. Estève et al., Phys. Rev. A **70**, 043629 (2004)
27. P.B. et al., Nature **429**, 277 (2004)
28. H. Moritz, T. Stöferle, M. Köhl, T. Esslinger, Phys. Rev. Lett. **91**, 250402 (2003)
29. B.L. Tolra et al., Phys. Rev. Lett. **92**, 190401 (2004)
30. V.M. Kaurov, A.B. Kuklov, Phys. Rev. A **71**, 011601 (2004)

## Role of wire imperfections in micromagnetic traps for atoms

J. Estève,<sup>1</sup> C. Aussibal,<sup>1</sup> T. Schumm,<sup>1</sup> C. Figl,<sup>1,\*</sup> D. Mailly,<sup>2</sup> I. Bouchoule,<sup>1</sup> C. I. Westbrook,<sup>1</sup> and A. Aspect<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, UMR 8501 du CNRS, 91403 Orsay, France

<sup>2</sup>Laboratoire de Photonique et de Nanostructures, UPR 20 du CNRS, 91460 Marcoussis, France

(Received 8 March 2004; published 29 October 2004)

We present a quantitative study of roughness in the magnitude of the magnetic field produced by a current carrying microwire, i.e., in the trapping potential for paramagnetic atoms. We show that this potential roughness arises from deviations in the wire current flow due to geometric fluctuations of the edges of the wire: a measurement of the potential using cold trapped atoms agrees with the potential computed from the measurement of the wire edge roughness by a scanning electron microscope.

DOI: 10.1103/PhysRevA.70.043629

PACS number(s): 03.75.Be, 39.25.+k

The use of micro or even nanofabricated electrical devices to trap and manipulate cold atoms has attracted substantial interest, especially since the demonstration of Bose-Einstein condensation using such structures [1,2]. Compact and robust systems for producing BEC's, single mode waveguides and possibly atom interferometers can now be envisaged. The small size of the trapping elements, usually current-carrying wires producing magnetic traps, and the proximity of the atoms to these elements (typically tens of microns), means that many complex and rapidly varying potentials can be designed [3]. This approach has some disadvantages however. On the one hand it has been shown that atoms are sensitive to the magnetic fields generated by thermally fluctuating currents in a metal when they are very close [3–7]. On the other hand, a time independent fragmentation of a cold atomic cloud has been observed when atoms are brought close to a current carrying microwire [4,8,10].

This fragmentation has been shown to be due to a potential roughness arising from distortions of the current flow in the wire [9,11]. It has also been demonstrated experimentally that the effect of these distortions decreases with increasing distance from the wire [10,11]. In an attempt to account for the observations, a theoretical suggestion has been made that the current distortions may be simply due to geometrical deformations, more specifically meanders, of the wire [12]. In this paper we show that for at least one realization of a microfabricated magnetic trap, using electroplating of gold, this suggestion is substantially correct. We have measured the longitudinal density variation of a fragmented thermal cloud of atoms trapped above a wire, and inferred the rough magnetic potential. We have also made scanning electron microscope images of the same wire and measured the profile of the wire edges over the region explored by the atoms. The magnetic potential as a function of position deduced from the edge measurements is in good quantitative agreement with that inferred from the atomic density. We suspect that this result is not unique to our sample or fabrication process and we emphasize the quantitative criterion for the necessary wire quality to be used for atom manipulation.

The wires we use are produced using standard microelectronic techniques. A silicon wafer is first covered by a 200 nm silicon dioxide layer. Next, layers of titanium (20 nm) and gold (200 nm) are evaporated. The wire pattern is imprinted on a 6  $\mu\text{m}$  thick photoresist using optical lithography. Gold is electroplated between the resist walls using the first gold layer as an electrode. After removing the photoresist and the first gold and titanium layers, we obtain electroplated wires of thickness  $w_0=4.5 \mu\text{m}$  with a rectangular transverse profile (see Fig. 1). A planarizing dielectric layer (BCB, a benzocyclobutene-based polymer) is deposited to cover the central region of the chip. On top of the BCB, a 200 nm gold layer is evaporated to be used as an optical mirror for light at 780 nm. The distance between the center of the wire and the mirror layer has been measured to be 14(1)  $\mu\text{m}$ .

The magnetic trap is produced by a current  $I$  flowing through a Z-shaped microwire [13] together with an external uniform magnetic field  $\mathbf{B}_0$  (along the  $y$  axis; see Fig. 1) parallel to the chip surface and perpendicular to the central part of the wire. The central part of the Z-wire is 50  $\mu\text{m}$  wide and 2800  $\mu\text{m}$  long. Cold  $^{87}\text{Rb}$  atoms, collected in a surface magneto-optical trap, are loaded into the magnetic trap after a stage of optical molasses and optical pumping to the  $|F=2, m=2\rangle$  hyperfine state. The trap is then compressed so that efficient forced evaporative cooling can be applied. Finally, the trap is decompressed. Final values of  $I$  and  $B_0$  vary from 200 mA to 300 mA and from 3 G to 14 G, respectively, so that the height of the magnetic trap above the wire ranges from 33  $\mu\text{m}$  to 170  $\mu\text{m}$ . An external longitudinal

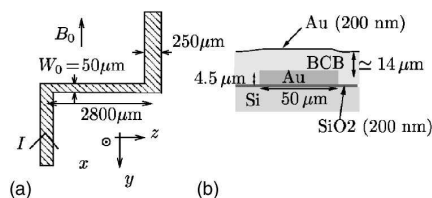


FIG. 1. (a) Z-wire used to produce the magnetic trap. (b) Cross section of the wire in the  $(xy)$  plane. The wire is covered with a layer of BCB polymer, and a thin gold layer acting as a mirror. The origin of the coordinate system is taken at the center of the wire.

\*Permanent address: Universität Hannover, D 30167 Hannover, Germany.



ESTÈVE *et al.*

PHYSICAL REVIEW A 70, 043629 (2004)

magnetic field of a few G aligned along  $z$  is added to limit the strength of the transverse confinement and to avoid spin flip losses induced by technical noise. For these parameters, the trap is highly elongated along the  $z$  axis. The transverse oscillation frequency is typically  $\omega_{\perp}/(2\pi)=3.5$  kHz and 120 Hz for traps at  $33 \mu\text{m}$  and  $170 \mu\text{m}$  from the wire, respectively.

The potential roughness is deduced from measurements of the longitudinal density distribution of cold trapped atoms. The atomic density is probed using absorption imaging after the atoms have been released from the final trap by switching off the current in the Z-wire (switching time smaller than  $100 \mu\text{s}$ ). The probe beam is reflected by the chip at  $45^\circ$  allowing us to have two images of the cloud on the same picture. From images taken just after ( $500 \mu\text{s}$ ) switching off the Z-wire current we infer the longitudinal density  $n(z) = \iint dx dy n(x, y, z)$ . We also deduce the height of the atoms above the mirror layer from the distance between the two images. The temperature of the atoms is determined by measuring the expansion of the cloud in the transverse direction after longer times of flight (1 to 5 ms).

To infer the longitudinal potential experienced by the atoms, we assume the potential is given by

$$V(x, y, z) = V_z(z) + V_{\text{harm}}(x, y), \quad (1)$$

where  $V_{\text{harm}}(x, y)$  is a transverse harmonic potential. Under this separability assumption, the longitudinal potential is directly obtained from the measured longitudinal density of a cloud at thermal equilibrium using the Boltzmann law  $V_z(z) = -k_B T \ln[n(z)]$ . To maximize the sensitivity to the longitudinal potential variations, we choose a temperature of the same order as the variations ( $T \approx 0.4 \mu\text{K}$  for traps at  $170 \mu\text{m}$  from the wire and  $T \approx 2.2 \mu\text{K}$  for traps at  $33 \mu\text{m}$  from the wire). The separability assumption has been checked experimentally by deducing a  $z$ -dependent oscillation frequency from the rms width of the transverse atomic density at different positions. At  $33 \mu\text{m}$  from the wire, there is no evidence of a varying oscillation frequency. At a height of  $170 \mu\text{m}$  above the chip, over a longitudinal extent of  $450 \mu\text{m}$ , we deduce a variation of the transverse oscillation frequency of about 13%. In this case, the assumption of separability introduces an error of  $0.2k_B T$  in the deduced potential.

The potential experienced by the atoms is  $V = \mu_B |\vec{B}|$ . To a very good approximation, the magnetic field at the minimum of  $V_{\text{harm}}$  is along the  $z$  axis (for our parameters, the deviation from the  $z$  axis is computed to be always smaller than 1 mrad) so that the longitudinal potential is given by  $V_z(z) = \mu_B B_z(z)$ . For a perfect Z-wire, the longitudinal potential is solely due to the arms of the wire and has a smooth shape. However, we observe a rough potential which is a signature for the presence of an additional spatially fluctuating longitudinal magnetic field. A spatially fluctuating transverse magnetic field of similar amplitude would give rise to transverse displacement of the potential which is undetectable with our imaging resolution and small enough to leave our analysis unchanged.

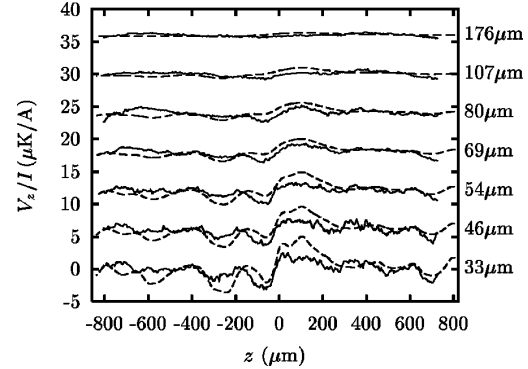


FIG. 2. Rough potentials normalized to the current in the Z-shaped wire for different heights from the wire. Solid lines: potentials measured using cold atomic clouds. Dashed lines: potentials calculated from the measured geometric roughness of the edges of the wire. The different curves have been shifted by  $6 \mu\text{K}/\text{A}$  from each other.

In the following, we present the data analysis which enables us to extract the longitudinal potential roughness. In order to have a large statistical sample and to gain access to low spatial frequencies, one must measure the potential roughness over a large fraction of the central wire. In our experiment, however, the longitudinal confinement produced by the arms of the Z-wire itself is too strong to enable the atomic cloud to spread over the full extent of the central wire. To circumvent this difficulty, we add an adjustable longitudinal gradient of  $B_z$  which shifts the atomic cloud along the central wire. We then measure the potential above different zones of the central wire. We typically use four different spatial zones which overlap each other by about  $200 \mu\text{m}$ . We then reconstruct the potential over the total explored region by subtracting gradients from the potentials obtained in the different zones. Those gradients are chosen in order to minimize the difference between the potentials in the regions where they overlap.

We are interested in those potential variations which differ from the smooth confining potential due to the arms of the wire. We thus subtract the expected confining potential of an ideal wire from the reconstructed potential. To find the expected potential, we model the arms of the Z by two infinitesimally thin, semi-infinite wires of width  $250 \mu\text{m}$ , separated by a distance  $l$  and assume a uniform current distribution. We fit each reconstructed potential to the sum of the result of the model and a gradient, using the gradient,  $l$  and the distance  $h$  above the wire as fitting parameters. The fitted values of  $l$  differ by a few percent from the nominal value  $2.8 \text{ mm}$ , while we find  $h = 13(1) \mu\text{m} + d$  where  $d$  is the distance from the mirror as measured in the trap images. This result is consistent with the measured  $14 \mu\text{m}$  thickness of the BCB layer.

The potential which remains after the above subtraction procedure is plotted for different heights in Fig. 2. For a fixed trap height  $h$  (fixed ratio  $l/B_0$ ), we have checked that the potential is proportional to the current in the wire; therefore we normalize all measurements to the wire current.

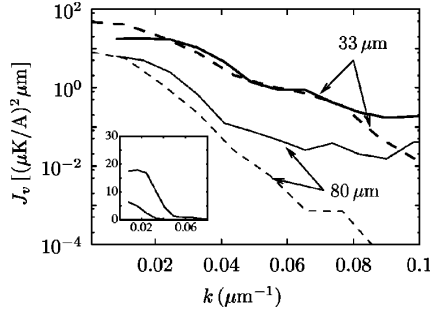


FIG. 3. Potential spectral density  $J_v = 1/(2\pi I^2) \int_{-\infty}^{\infty} \langle V_z(z) V_z(z+u) \rangle e^{iku} du$  at  $33 \mu\text{m}$  from the wire (fat lines) and at  $80 \mu\text{m}$  from the wire (thin lines). Solid lines: potential measured using cold atomic clouds; the inset shows the curves on a linear scale. Dashed lines: potentials calculated from the measured geometric fluctuations of the edges of the wire. These estimations of the spectral density are made with the Welch algorithm [14] using windows half the size of the total explored region ( $1.6 \text{ mm}$ )

The most obvious observation is that the amplitude of the roughness decreases as one gets further away from the wire. The spectral density of the potential roughness is shown in Fig. 3 for two different heights above the wire. We observe that the spectrum gets narrower as the distance from the wire increases (see inset in Fig. 3). This is expected since fluctuations of wavelength much smaller than the height above the wire are averaged to zero. At high wave vectors ( $k > 0.07 \mu\text{m}^{-1}$  at  $33 \mu\text{m}$  and  $k > 0.04 \mu\text{m}^{-1}$  at  $80 \mu\text{m}$ ) the spectrum exhibits plateaus which we interpret as instrumental noise. We expect this noise level to depend on our experimental parameters such as temperature, current and atomic density. Qualitatively, smaller atom-wire distances, which are analyzed with higher temperatures should result in higher plateaus. This is consistent with the observation.

In the following we evaluate the rough potential due to edge fluctuations of the central wire. For this purpose, the edges of the wire are imaged using a scanning electron microscope (SEM), after removal of the BCB layer by reactive ion etching. Figure 4(a) indicates that the function  $f$ , which gives the deviation of the position of the wire edge from the mean position  $y = \pm W_0/2$ , is roughly independent of  $x$ . We make the approximation that  $f$  depends only on  $z$ . We deduce  $f$  from SEM images taken from above the wire [see Fig. 4(b)]. To resolve  $f$ , whose rms amplitude is only  $0.2 \mu\text{m}$ , we use fields of view as small as  $50 \mu\text{m}$ . The function  $f$  is reconstructed over the entire length of the central wire using many images having about  $18 \mu\text{m}$  overlaps. As shown in Fig. 4(c), several length scales appear in the spectrum. There are small fluctuations of correlation length of about  $100 \text{ nm}$  and, more importantly, fluctuations of a larger wavelength ( $60$  to  $1000 \mu\text{m}$ ).

The geometric fluctuations of the edges of the wire induce a distortion of the current flow which produces a longitudinal magnetic field roughness responsible for a potential roughness. To compute the current density in the wire, we assume a uniform resistivity inside the wire. We also assume that

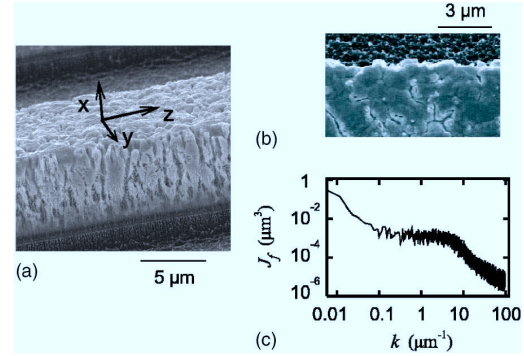


FIG. 4. Imperfections of the edges of the wire. In the SEM image of the wire taken from the side (a), one can see that the edge deviation function  $f$  is roughly independent of  $x$ . (c) Spectral density of  $f$  extracted from SEM images taken from the top as in (b).

fluctuations are small enough to make the current density distortion linear in  $f_{L/R}$ , where  $f_{L/R}$  are the fluctuations of the left and right edge of the wire respectively. The current density is in the  $yz$  plane and, because the rough potential is proportional to the longitudinal magnetic field, we are only interested in its  $y$  component,  $j_y$ . Because of symmetry, only the part of  $j_y(z, y)$  which is even in  $y$  contributes to  $B_z$  in the  $xz$  plane. Thus, only the symmetric component  $f^+ = 1/2(f_L + f_R)$  is considered. The Fourier component  $f^+(k)$  of  $f^+$  induces a transverse current density [12]

$$j_y^+(k, y) = ikf^+(k) \frac{I \cosh(ky)}{W_0 \mu_0 \cosh(kW_0/2)}. \quad (2)$$

As the distances from the wire we consider ( $33$  to  $176 \mu\text{m}$ ) are much larger than the thickness of the wire  $u_0 = 4.5 \mu\text{m}$  we will in the following assume an infinitely flat wire. To efficiently compute the longitudinal magnetic field produced by these current distortions, we use the expansion on the modified Bessel functions of second kind  $K_n(kx)$ , which is valid for  $x > W_0/2$ . This expansion is, in the  $xz$  plane,

$$B_z(k, x) = - \sum_{n \geq 0} k [c_{2n}(k) + c_{2n+2}(k)] K_{2n+1}(kx), \quad (3)$$

where

$$c_{2n}(k) = (-1)^n \frac{\mu_0}{\pi} u_0 \int_0^{W_0/2} I_{2n}(ky) j_y^+(k, y) dy, \quad (4)$$

$I_n$  being the modified Bessel function of the first kind. For small wave numbers  $k$  such that  $kW_0 \ll 1$ , one expects the  $c_n$  coefficients to decrease rapidly with  $n$ . Indeed, for  $kr \ll 1$ ,  $I_n(kr) \approx (kr)^n / (2^n n!)$ . In our data analysis, only  $k$  wave vectors smaller than  $0.07 \mu\text{m}^{-1}$  are considered for which  $kW_0/2 < 0.8$  so we expect the  $c_n$  coefficients to decrease rapidly with  $n$ . In the calculations, only the terms up to  $n=20$  are used.

Equations (2), (4), and (3) then allow us to compute the fluctuating potential from the measured function  $f$ . In Fig. 3, we plot the spectral density of the potential roughness calculated from  $f$  for two different heights above the wire ( $33$  and



ESTÈVE *et al.*PHYSICAL REVIEW A **70**, 043629 (2004)

80  $\mu\text{m}$ ) and compare it with those obtained from the potential measured with the atoms. For both heights, and for wave vectors small enough so that the measurements made with the atoms are not limited by experimental noise, the two curves are in good agreement. As we have measured the  $f$  function on the whole region explored by the atoms, we can compute directly the expected potential roughness. In Fig. 2, this calculated potential roughness is compared with the roughness measured with the atoms for different heights above the wire. Remarkably the potential computed from the wire edges and the one deduced from the atomic distributions have not only consistent spectra but present well correlated profiles. We thus conclude that the potential roughness is due to the geometric fluctuations of the edges of the wire. The good agreement between the curves also validates the assumption of uniform conductivity inside the wire used to compute the current distortion flow.

In conclusion, we have shown that the potential roughness we observe can be attributed to the geometric fluctuations of the wire edges. Fluctuations at low wave vectors, responsible for most of the potential roughness, correspond to wire edge fluctuations of very small amplitude compared to their correlation length. We emphasize that a quantitative evaluation of these wire roughness components demands dedicated measurement methods.

Furthermore, wire edge fluctuations put a lower limit on the possibility of down-scaling atom chips. For a given fabrication technology the wire edge fluctuations are expected to be independent of the wire width  $W_0$ . Thus assuming a white noise spectrum, the normalized potential roughness  $V_{\text{rms}}/I$  varies as  $1/W_0^{5/2}$  for fixed ratio  $h/W_0$ ,  $h$  being the distance to the wire [12]. In order to reduce the potential roughness, one must pay careful attention to edge fluctuations when choosing a fabrication process. For example, we are currently investigating electron beam lithography followed by gold evaporation. Preliminary measurements indicate a reduction of the spectral density of the wire edge fluctuations by at least two orders of magnitude for wave vectors ranging from  $0.1 \mu\text{m}^{-1}$  to  $10 \mu\text{m}^{-1}$ . This should allow us to reduce the spectral density of the potential roughness by the same factor unless a new as yet unobserved phenomenon such as bulk inhomogeneity sets a new limit on atom chip down-scaling [15].

We thank C. Henkel and H. Nguyen for helpful discussions. This work was supported by the EU (IST-2001-38863, MRTN-CT-2003-505032), by DGA (03.34.033), and by the French Ministry of Research (Action Concertée "Nanosciences-Nanotechnologies").

- 
- [1] W. Hänsel, P. Hommelhoff, T. W. Hänsch, and J. Reichel, *Nature (London)* **413**, 498 (2001).
  - [2] H. Ott, J. Fortágh, G. Schlotterbeck, A. Grossmann, and C. Zimmermann, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 230401 (2001).
  - [3] R. Folman *et al.*, *Adv. At., Mol., Opt. Phys.* **48**, 263 (2002), and references therein.
  - [4] J. Fortágh, H. Ott, S. Kraft, A. Gunther, and C. Zimmermann, *Phys. Rev. A* **66**, 041604 (2002).
  - [5] M. P. A. Jones *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 080401 (2003).
  - [6] Y. J. Lin, I. Teper, C. Chin, and V. Vuletic, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 050404 (2004).
  - [7] D. Harber, J. McGuirk, J. Obrecht, and E. Cornell, *J. Low Temp. Phys.* **133**, 229 (2003).
  - [8] A. E. Leanhardt *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 040401 (2002).
  - [9] A. E. Leanhardt *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 100404 (2003).
  - [10] M. P. A. Jones *et al.*, *J. Phys. B* **37**, L15 (2004).
  - [11] S. Kraft *et al.*, *J. Phys. B* **35**, L469 (2002).
  - [12] D. Wang, M. Lukin, and E. Demler, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 076802 (2004).
  - [13] J. Reichel, W. Hänsel, and T. W. Hänsch, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 3398 (1999).
  - [14] P. D. Welch, *IEEE Trans. Audio Electroacoust.* **AU-15**, 70 (1967).
  - [15] Measurements by the Heidelberg group of an atom chip produced by photolithography and gold evaporation indicates reduced potential roughness compared to other observations. J. Schmiedmayer (private communication); S. Groth *et al.*, e-print cond-mat/0404141.

## Atom chips in the real world: the effects of wire corrugation

T. Schumm<sup>1,a</sup>, J. Estève<sup>1</sup>, C. Figl<sup>1,b</sup>, J.-B. Trebbia<sup>1</sup>, C. Aussibal<sup>1</sup>, H. Nguyen<sup>1</sup>, D. Mailly<sup>2</sup>, I. Bouchoule<sup>1</sup>, C.I. Westbrook<sup>1</sup>, and A. Aspect<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, UMR 8501 du CNRS, 91403 Orsay Cedex, France

<sup>2</sup> Laboratoire de Photonique et de Nanostructures, UPR 20 du CNRS, 91460 Marcoussis, France

Received 16 July 2004 / Received in final form 28 October 2004

Published online 1st February 2005 – © EDP Sciences, Società Italiana di Fisica, Springer-Verlag 2005

**Abstract.** We present a detailed model describing the effects of wire corrugation on the trapping potential experienced by a cloud of atoms above a current carrying micro wire. We calculate the distortion of the current distribution due to corrugation and then derive the corresponding roughness in the magnetic field above the wire. Scaling laws are derived for the roughness as a function of height above a ribbon shaped wire. We also present experimental data on micro wire traps using cold atoms which complement some previously published measurements [11] and which demonstrate that wire corrugation can satisfactorily explain our observations of atom cloud fragmentation above electroplated gold wires. Finally, we present measurements of the corrugation of new wires fabricated by electron beam lithography and evaporation of gold. These wires appear to be substantially smoother than electroplated wires.

**PACS.** 39.25.+k Atom manipulation (scanning probe microscopy, laser cooling, etc.) – 03.75.Be Atom and neutron optics

### 1 Introduction

Magnetic traps created by current carrying micro wires have proven to be a powerful alternative to standard trapping schemes in experiments with cold atoms and Bose-Einstein condensates [1]. These so-called “atom chips” combine robustness, simplicity and low power consumption with strong confinement and high flexibility in the design of the trapping geometry. Integrated atom optics elements such as waveguides and atom interferometers have been proposed and could possibly be integrated on a single chip using fabrication techniques known from micro-electronics. Quantum information processing with a single atom in a micro trap has also been proposed [2].

Real world limitations of atom chip performance are thus of great interest. Losses and heating of atoms due to thermally excited currents inside conducting materials composing the chip were predicted theoretically [3,4] and observed experimentally soon after the first experimental realizations of atomic micro traps [5,6].

An unexpected problem in the use of atom chips was the observation of a fragmentation of cold atomic clouds in magnetic micro traps [7,8]. Experiments have shown that this fragmentation is due to a time independent roughness in the magnetic trapping potential created by a distortion of the current flow inside the micro wire [9]. It has also

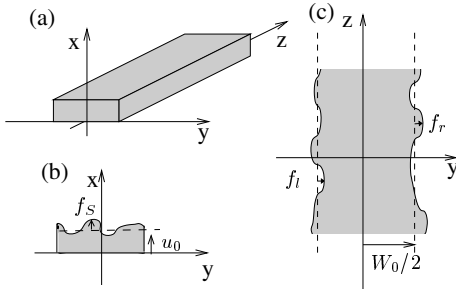
been demonstrated that the amplitude of this roughness increases as the trap center is moved closer to the micro wire [10]. Fragmentation has been observed on atom chips built by different micro fabrication processes using gold [11] and copper wires [7,8], and on more macroscopic systems based on cylindrical copper wires covered with aluminum [10] and micro machined silver foil [12]. The origin of the current distortion inside the wires causing the potential roughness is still not known for every system.

In a recent letter [11], we experimentally demonstrated that wire edge corrugation explains the observed potential roughness (as theoretically proposed in [13]) in at least one particular realization of a micro trap. In this paper, we will expand on our previous work giving a more detailed description of the necessary calculations as well as presenting a more complete set of experimental observations. We emphasize that extreme care has to be taken when fabricating atom chips, and that high quality measurements are necessary to evaluate their flatness in the frequency range of interest. We will discuss the influence of corrugations both on the edges as well as on the surface of the wire and give scaling laws for the important geometrical quantities like atom wire separation and wire dimensions. We will also present preliminary measurements on wires using improved fabrication techniques.

The paper is organized as follows. In Section 2, we give a brief introduction to magnetic wire traps and emphasize that the potential roughness is created by a spatially fluctuating magnetic field component parallel to the wire.

<sup>a</sup> e-mail: thorsten.schumm@iota.u-psud.fr

<sup>b</sup> Present address: Universität Hannover, D-30167 Hannover, Germany.



**Fig. 1.** Rectangular wire considered in this paper. The edge roughness and the top surface roughness are illustrated in (c) and (b) respectively.

In Section 3, we give a general framework to calculate the rough potential created by any current distortion in the wire. A detailed calculation of the current flow distortion due to edge and surface corrugations on a rectangular wire is presented in Section 4. In Section 5, we apply these calculations to the geometry of a flat wire, widely used in experiments. Edge and surface effects are compared for different heights above the wire and we present important scaling laws that determine the optimal wire size for a given fabrication quality. In Sections 6 and 7, we show measurements of the spectra of edge and surface fluctuations for two types of wires produced by different micro fabrication methods: optical lithography followed by gold electroplating and direct electron beam lithography followed by gold evaporation. We also present measurements of the rough potential created by a wire of the first type using cold trapped rubidium atoms.

## 2 Magnetic micro traps

The building block of atom chip setups is the so-called side wire guide [1]. The magnetic field created by a straight current carrying conductor along the  $z$ -axis combined with a homogeneous bias field  $B_0$  perpendicular to the wire creates a two-dimensional trapping potential along the wire (see Fig. 1). The total magnetic field cancels on a line located at a distance  $x$  from the wire and atoms in a low field seeking state are trapped around this minimum. For an infinitely long and thin wire, the trap is located at a distance  $x = \mu_0 I / (2\pi B_0)$ . To first order, the magnetic field is a linear quadrupole around its minimum. If the atomic spin follows adiabatically the direction of the magnetic field, the magnetic potential seen by the atoms is proportional to the magnitude of the magnetic field. Consequently, the potential of the side wire guide grows linearly from zero with a gradient  $B_0/x$  as the distance from the position of the minimum increases.

For a straight wire along  $z$ , all magnetic field vectors are in the  $(x, y)$ -plane. Three dimensional trapping can be obtained by adding a spatially varying magnetic field component  $B_z$  along the wire. This can be done by bending the

wire, so that a magnetic field component along the central part of the wire is created using the same current. Alternatively, separate chip wires or even macroscopic coils can be used to provide trapping in the third dimension.

For a realistic description of the potential created by a micro wire, its finite size has to be taken into account. Because of finite size effects, the magnetic field does not diverge but reaches a finite value at the wire surface. For a square shaped wire of height and width  $a$  carrying a current  $I$ , the magnetic field saturates at a value proportional to  $I/a$ , the gradient reaches a value proportional to  $I/a^2$ . Assuming a simple model of heat dissipation, where one of the wire surfaces is in contact with a heat reservoir at constant temperature, one finds the maximal applicable current to be proportional to  $a^{3/2}$  [14]. Therefore, the maximal gradient that can be achieved is proportional to  $1/\sqrt{a}$ . This shows that bringing atoms closer to smaller wires carrying smaller currents still increases the magnetic confinement, which is the main motivation for miniaturizing the trapping structures. However the magnetic field roughness arising from inhomogeneities in the current density inside the wire also increases as atoms get closer to the wire. This increase of potential roughness may prevent the achievement of high confinement since the trap may become too corrugated.

We emphasize that only the  $z$ -component of the magnetic field is relevant to the potential roughness. A variation of the magnetic field in the  $(x, y)$ -plane will cause a negligible displacement of the trap center, whereas a varying magnetic field component  $B_z$  modifies the longitudinal trapping potential, creating local minima in the overall potential [11].

## 3 Calculation of the rough magnetic field created by a distorted current flow in a wire

In this section, we present a general calculation of the extra magnetic field due to distortions in the current flow creating the trapping potential. By  $\mathbf{j}$  we denote the current density that characterizes the distortion in the current flow. The total current density  $\mathbf{J}$  is equal to the sum of  $\mathbf{j}$  and the undisturbed flow  $j_0 \mathbf{e}_z$ . As the longitudinal potential seen by the atoms is proportional to the  $z$ -component of the magnetic field, we restrict our calculation to this component. We thus have to determine the  $x$ - and  $y$ -components of the vector potential  $\mathbf{A}$  from which the magnetic field derives. In the following, we consider the Fourier transform of all the quantities of interest along the  $z$ -axis which we define by

$$A_{l,k}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi L}} \int A_l(x, y, z) e^{-ikz} dz, \quad (1)$$

where we have used the vector potential as an example and  $l$  stands for  $x$  or  $y$ ,  $L$  being the length of the wire. We choose this definition so that the power spectral density of a quantity coincides with the mean square of its Fourier transform:

$$\frac{1}{2\pi} \int e^{ikz} \langle A_l(z) A_l(0) \rangle dz = \langle |A_{l,k}|^2 \rangle. \quad (2)$$

The vector potential satisfies a Poisson equation with a source term proportional to the current density in the wire. Thus the Fourier component  $A_{l,k}$  satisfies the following time independent heat equation

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}\right) A_{l,k} - k^2 A_{l,k} = -\mu_0 j_{l,k}. \quad (3)$$

where  $j_l$  is one component of the current density  $\mathbf{j}$ . In the following, we use cylindrical coordinates defined by  $x = r \cos(\varphi)$  and  $y = r \sin(\varphi)$ . Outside the wire, the right hand side of equation (3) is zero. The solution of this 2D heat equation without source term can be expanded in a basis of functions with a given ‘‘angular momentum’’  $n$ . The radial dependence of the solution is therefore a linear combination of modified Bessel functions of the first kind  $I_n$  and of the second kind  $K_n$ . Thus expanding  $A_{l,k}$  on this basis, we obtain the following linear combination for the vector potential

$$A_{l,k}(r, \varphi) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_{l,n}(k) e^{in\varphi} K_n(kr). \quad (4)$$

We retain only the modified Bessel functions of the second kind, since the potential has to go to zero as  $r$  goes to infinity. The  $c_{l,n}(k)$  coefficients are imposed by equation (3), and can be determined using the Green function of the 2D heat equation [15]. We obtain

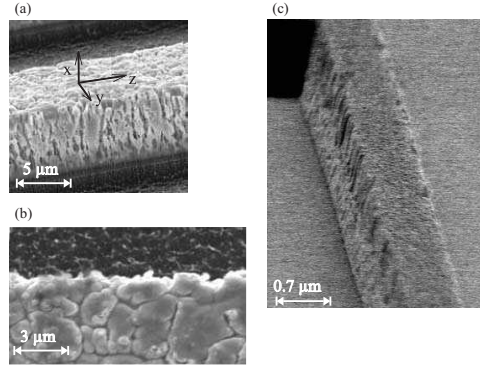
$$c_{l,n}(k) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \iint I_n(kr) e^{-in\varphi} j_{l,k}(\varphi, r) r dr d\varphi. \quad (5)$$

Taking the curl of the vector potential and using the relations  $K_n' = -(K_{n-1} + K_{n+1})/2$  and  $2nK_n(u)/u = -K_{n-1} + K_{n+1}$ , we obtain the  $z$ -component of the magnetic field from equation (4)

$$B_{z,k} = -\frac{k}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [c_{y_{n-1}}(k) + c_{y_{n+1}}(k)] K_n(kr) e^{in\varphi} - i \frac{k}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [c_{x_{n-1}}(k) - c_{x_{n+1}}(k)] K_n(kr) e^{in\varphi}. \quad (6)$$

This expression is valid only for  $r$  larger than  $r_0$ , the radius of the cylinder that just encloses the wire. At a given distance  $x$  from the wire, we expect that only fluctuations with wavelengths larger or comparable to  $x$  contribute to the magnetic field, since fluctuations with shorter wavelengths average to zero. Therefore we can simplify expression (6) assuming we calculate the magnetic field above the center of the wire ( $y = 0$ ) for  $x$  much larger than  $r_0$ . The argument of  $I_n$  in equation (5) is very small in the domain of integration and we can make the approximation  $I_n(kr) \simeq (kr)^n / (2^n n!)$ . This shows that the  $c_{l,n}$  coefficients decrease rapidly with  $n$ . Keeping only the dominant term of the series in equation (6), we obtain

$$B_{z,k}(x) \simeq -\frac{c_{y_0}(k)}{k} [k^2 K_1(kx)]. \quad (7)$$



**Fig. 2.** Scanning electron microscope images of micro fabricated wires. Side view (a) and top view (b): electroplated gold wire of width  $50 \mu\text{m}$  and height  $4.5 \mu\text{m}$  fabricated using optical lithography. Side view (c): evaporated gold wire of width and height  $0.7 \mu\text{m}$  fabricated using electron beam lithography.

We will see in the next section that the first factor of this expression, characterizing the distortion flow, is proportional to the power spectral density of the wire corrugation. The second factor peaks at  $k \simeq 1.3/x$  justifying the expansion. Fluctuations with a wavelength much smaller or much larger than  $1/x$  are filtered out and do not contribute. As we approach the wire, more and more terms have to be added in the series of equation (6) to compute the magnetic field. We emphasize that the expressions derived in equations (6) and (7) are general for any distorted current flow that may arise from bulk inhomogeneities or edge and surface corrugations.

#### 4 Calculation of the distorted current flow in a corrugated wire

We now turn to the calculation of the distortion in the current flow due to wire edge and surface corrugations in order to determine the associated  $c_{l,n}$  coefficients. We suppose the wire has a rectangular cross-section of width  $W_0$  and height  $u_0$  as shown in Figure 1. Let us first concentrate on the effect of corrugations of the wire edges, i.e. the borders perpendicular to the substrate (model equivalent to [13]). Figure 2 shows that, in our samples, these fluctuations are almost independent of the  $x$  coordinate both for wires deposited by electrodeposition and by evaporation. We believe this result to be general for wires fabricated by a lithographic process, since any defect in the mask or in the photoresist is projected all along the height of the wire during the fabrication process. Thus, in the following, the function  $f_{r/l}$  that describes the deviation of the right (respectively left) wire edge from  $\pm W_0/2$  is assumed to depend only on  $z$ .

Conservation of charge and Ohm’s law give  $\nabla \mathbf{J} = 0$  and  $\mathbf{J} = -\chi \nabla V$  where  $\chi$  is the electrical conductivity and  $V$  the electrostatic potential. We will make the approximation that  $\chi$  is uniform inside the wire. In this

case  $V$  satisfies the Laplace equation  $\nabla^2 V = 0$ . As we are interested in deviations from the mean current density  $j_0 = I/(u_0 W_0)$ , we introduce the electric potential  $v = V - j_0 z/\chi$  which is equal to zero in the absence of deviations. From what we have said above,  $v$  only depends on  $y$  and  $z$  and satisfies the 2D Laplace equation. The boundary conditions for the current density on the wire edge require the current to be parallel to the wire edge. Thus  $v$  satisfies

$$\frac{df_{r/l}}{dz}(z) \left[ j_0 - \chi \frac{\partial v}{\partial z}(y = \pm W_0/2 + f_{r/l}, z) \right] = -\chi \frac{\partial v}{\partial y}(y = \pm W_0/2 + f_{r/l}, z). \quad (8)$$

In the following we assume the amplitude of  $f_{r/l}$  to be small enough so we can make an expansion to first order in  $f_{r/l}$  of both terms. We then obtain a linear relation between  $v(\pm W_0/2, z)$  and  $f_{r/l}(z)$  which in Fourier space can be written as

$$ikj_0 f_{r/l,k} = -\chi \frac{\partial v_k}{\partial y}(y = \pm W_0/2). \quad (9)$$

The potential  $v$  satisfies the 2D Laplace equation, so the  $k$  component  $v_k(y)$  is a linear combination of  $e^{+ky}$  and  $e^{-ky}$ . The two coefficients are imposed by the two boundary conditions of equation (9). To complete the calculation of these two coefficients, we introduce the symmetric component  $f^+ = (f_r + f_l)/2$  and antisymmetric component  $f^- = (f_r - f_l)/2$  of the wire edge fluctuations. Going back to the current density, we obtain

$$j_{y,k} = ikj_0 \left( \frac{\cosh(ky)}{\cosh(kW_0/2)} f_k^+ + \frac{\sinh(ky)}{\sinh(kW_0/2)} f_k^- \right). \quad (10)$$

We note that the symmetric part (first term) of the current deviation is maximal near the wire edges for components with a wave vector large compared to  $1/W_0$ . On the other hand, the components with a small wave vector are constant over the width of the wire.

We now turn to the calculation of the current distortions due to surface corrugation. We assume the bottom surface to be flat, since the wire is supposed to be fabricated on a flat substrate. We denote by  $f_S$  the fluctuations of the height of the wire from its mean value  $u_0$  (see Fig. 1). We follow the same procedure as for the calculation of the effect of the wire edge fluctuations. Now  $v$  is the electrical potential associated with the current density  $j$  due to the surface corrugation. It depends on  $x$ ,  $y$  and  $z$  and satisfies the 3D Laplace equation. To first order in  $f_S$ , the boundary conditions of a current tangent to the surface of the wire are

$$\begin{cases} \chi \frac{\partial v}{\partial x}(x = u_0, y, z) + j_0 \frac{\partial f_S}{\partial z}(z) = 0 \\ \chi \frac{\partial v}{\partial x}(x = 0, y, z) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

and

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y = \pm W_0/2, z) = 0. \quad (12)$$

Symmetry arguments show that only the part of  $f_S(y, z)$  which is odd in  $y$  contributes to the magnetic field along  $z$  in the plane  $y = 0$ . An even component of  $f_S$  produces currents which are symmetric under inversion with respect to the plane  $y = 0$ . Therefore, they cannot contribute to  $B_z$  in this plane. Thus, only the Fourier components

$$f_{S_{k,m}} = \iint \frac{dydz}{\pi\sqrt{2LW_0}} e^{-ikz} \sin(2m\pi y/W_0) f_S(y, z) \quad (13)$$

contribute, where  $m = 1, \dots, \infty$ . With this definition,  $f_{S_k}(y) = 2\sqrt{\pi/W_0} \sum_{m=0}^{\infty} \sin(2m\pi y/W_0) f_{S_{k,m}}$ . We choose this definition of the Fourier component  $f_{S_{k,m}}$  so that  $\langle |f_{S_{k,m}}|^2 \rangle$  is equal to the 2-dimensional spectral density of  $f_S$ . To obtain the electric potential produced by a given component  $f_{S_{k,m}}$  we use the expansion

$$\sin(2m\pi y/W_0) = \sum_{p=0}^{\infty} \gamma_{m,p} \sin((2p+1)\pi y/W_0), \quad (14)$$

where

$$\gamma_{m,p} = \frac{-8m}{\pi} \frac{(-1)^{m+p}}{(2(m+p)+1)(2(p-m)+1)}, \quad (15)$$

valid for  $y \in [-W_0/2, W_0/2]$ . Each  $p$  Fourier component induces an electrical potential  $v_{k,m,p}$  and, since  $v$  satisfies the Laplace equation,  $v_{k,m,p}$  is a linear combination of  $e^{+\nu_p x}$  and  $e^{-\nu_p x}$  where  $\nu_p = \sqrt{k^2 + ((2p+1)\pi/W_0)^2}$ . The boundary conditions on the surfaces  $x = 0$  and  $x = u_0$  determine the coefficients and we obtain

$$-\chi v_{k,m,p}(x, y) = ikj_0 f_{S_{k,m}} \gamma_{m,p} \frac{\cosh(\nu_p x)}{\sinh(\nu_p u_0)} \frac{1}{\nu_p} \sin((2p+1)\pi y/W_0). \quad (16)$$

With the choice of the expansion (14), the boundary conditions on  $y = \pm W_0/2$  are satisfied by each term. Finally, we obtain the current density distribution

$$\begin{cases} j_{x_{k,m}}(x, y) = 2ikf_{S_{k,m}} j_0 \sqrt{\frac{\pi}{W_0}} \\ \quad \times \sum_{p=0}^{\infty} \left( \gamma_{m,p} \frac{\sinh(\nu_p x)}{\sinh(\nu_p u_0)} \sin((2p+1)\pi y/W_0) \right) \\ j_{y_{k,m}}(x, y) = 2ikf_{S_{k,m}} j_0 \sqrt{\frac{\pi}{W_0}} \\ \quad \times \sum_{p=0}^{\infty} \left( \gamma_{m,p} \frac{\cosh(\nu_p x)}{\sinh(\nu_p u_0)} \frac{(2p+1)\pi}{\nu_p W_0} \cos((2p+1)\pi y/W_0) \right) \end{cases} \quad (17)$$

The Fourier components  $j_{i_k}$  are obtained by summing equation (17) for  $m = 1, \dots, \infty$ .

## 5 Rough potential of a ribbon shaped wire

In this section, we combine the results of the two previous sections to compute the  $z$ -component of the rough magnetic field in the specific case of a flat rectangular wire ( $u_0 \ll W_0$ ). This simplification enables us to obtain

analytical results for a system that is widely used in experiments [8, 12, 16–19].

We do the calculation on the  $x$ -axis for  $x > W_0/2$  (and  $y = 0$ ). Since the wire is considered flat, we replace the volume current density  $\mathbf{j}$  by a surface current density  $\boldsymbol{\sigma} = \int \mathbf{j} dx$ . Then we can rewrite the  $c_{l_n}$  coefficients of equation (5) as

$$c_{l_n}(k) = -\frac{\mu_0}{2\pi} (-i)^n \int_0^{W_0/2} dy I_n(ky) \times [\sigma_{l,k}(y) + (-1)^n \sigma_{l,k}(-y)]. \quad (18)$$

We will first study the effect of wire edge fluctuations and give universal behaviors for the magnetic field roughness. We will then concentrate on the effect of the top surface roughness. We will compare the relative importance of the two effects and point out important consequences for the design of micro wires.

### 5.1 Effect of wire edge roughness

Let us first study the effect of wire edge fluctuations. Here we derive the same results as [13] in a different way. Note that, unlike the calculations in [13], the calculations presented here are only valid for distances from the wire larger than (or equal to)  $W_0/2$ . The expansion we use is nevertheless useful because it converges rapidly and permits the determination of the magnetic field roughness for any height larger than  $W_0/2$  after the calculation of a few parameters (the  $c_n$  coefficients).

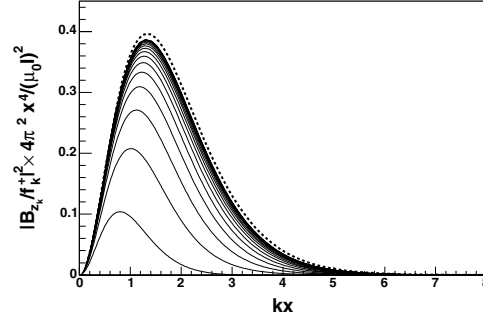
The distorted current flow has no component along the  $x$ -axis. The expression of the rough magnetic field is then given by the first sum of equation (6). Taking  $\varphi = 0$ , we can rearrange this sum using the equalities  $K_n(kr) = K_{-n}(kr)$  and  $c_{y-n} = (-1)^n c_{y_n}$  (see Eq. (18)), we then obtain

$$B_{z,k} = -k \sum_{n=0}^{\infty} (c_{y_{2n}}(k) + c_{y_{2n+2}}(k)) K_{2n+1}(kr). \quad (19)$$

Since only the  $c_{y_n}$  with even  $n$  contribute, we see from equation (18) that only the symmetric part of the current density participates to the magnetic field. This is what we expect from a simple symmetry argument. For the  $c_{y_{2n}}$  coefficients we obtain

$$c_{y_{2n}} = (-1)^{n+1} \frac{\mu_0 I}{\pi W_0} i k f_k^+ \times \int_0^{W_0/2} I_{2n}(ky) \frac{\cosh(ky)}{\cosh(kW_0/2)} dy. \quad (20)$$

As pointed out in the previous section, the sum over the angular momenta  $n$  in equation (19) converges rapidly with  $n$  if  $x \gg W_0$ . More precisely, the dominant term proportional to  $K_1(kx)$  gives the correct result within 10% as soon as  $x > 1.5W_0$ . As  $x$  approaches  $x = W_0/2$ , more and more terms contribute, for  $x = W_0/2$ , 20 terms have to be taken into account to reach the same accuracy.



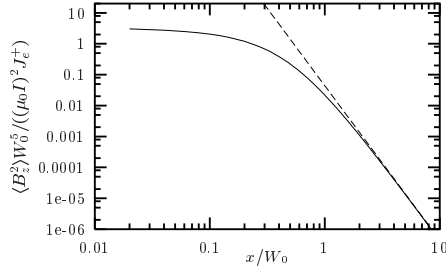
**Fig. 3.** Response function relating the magnetic field roughness  $|B_{z,k}|^2$  to the wire edge fluctuations  $|f_k^+|^2$  (see Eq. (21)). Plotted is the dimensionless quantity  $|B_{z,k}/f_k^+|^2 \times 4\pi^2 x^4 / (\mu_0 I)^2$  as a function of  $kx$  where  $x$  is the height above the center of the wire ( $y = 0$ ). The different curves correspond to different ratios  $x/W_0$  going from 0.5 to 4.7 in steps of 0.3. Small values of  $x/W_0$  correspond to lower curves. The curve corresponding to the limit given by equation (21) is also shown (dashed line).

We now derive the response function of the magnetic field to the wire edge fluctuation for  $x > W_0/2$  which we define as  $R(k, x) = |B_{z,k}/f_k^+|^2$ . As we already noticed in the previous section, far away from the wire ( $x \gg W_0$ ), only wave vectors  $k \ll 1/W_0$  are relevant. Then we can approximate the integral in equation (20) by expanding the integrand to zeroth order in  $ky$ . Keeping the dominant term in the series that defines the magnetic field, we obtain the following expression for the response function

$$R(k, x) \simeq \frac{(\mu_0 I)^2}{4\pi^2 x^4} (kx)^4 K_1^2(kx). \quad (21)$$

For a given height  $x$ , as  $k$  increases, this function increases from zero as  $k^2$ , peaks at  $k = 1.3/x$  and finally tends exponentially to zero. This behavior can be understood as follows. At low wave vectors, the angle between the direction of the distorted current flow and the  $z$ -axis tends to zero, thus the contribution of these components becomes negligible. At high wave vectors, fluctuations with a wave length shorter than the distance to the wire average to zero.

To check the validity of equation (21), we plot the dimensionless function  $R(k, x) / [(\mu_0 I)^2 / (4\pi^2 x^4)]$  for different ratios  $x/W_0$  in Figure 3. The limit function corresponds to a configuration where the distorted current flow is concentrated on the line  $x = y = 0$ . For a smaller distance from the wire, the finite width of the wire becomes important and  $R(k, x)$  differs from the expression (21). The amplitude is smaller and the peak is shifted to a lower frequency. These effects are due to the fact that as  $x$  decreases, the distance to the borders of the wire decreases less rapidly than the distance to the central part of the wire because of the finite width of the wire. Furthermore, because corrugations of high wave vector produce a current density localized near the wire border, their decrease in amplitude is more pronounced.



**Fig. 4.** Magnetic field fluctuations  $\langle B_z^2 \rangle$  as a function of the height above the wire ( $y = 0$ ). Plotted is the dimensionless quantity  $\langle B_z^2 \rangle W_0^5 / ((\mu_0 I)^2 J_e^+)$ , where  $\langle B_z^2 \rangle$  is the magnetic field roughness and  $J_e$  is the spectral density of the wire edges assumed to be white, as a function of  $x/W_0$  where  $x$  is the height above the wire [20]. Dashed line:  $1/x^5$  law given by equation (22).

Assuming a white power spectrum of the wire edge corrugations with a spectral density  $J_e^+$ , we can integrate the equation (21) over the whole spectral range [20]. We then find the following scaling law for the rms fluctuations of  $B_z$  with the atom-wire distance  $x$ :

$$\langle B_z^2 \rangle = J_e^+ \frac{(\mu_0 I)^2}{x^5} 0.044. \quad (22)$$

This expression is valid for  $x \gg W_0$ , the numerical factor has been found by a numerical integration of equation (21). Figure 4 shows that this expression is valid within 10% as soon as  $x > 2W_0$ . For smaller distances  $x$ , the fluctuations of magnetic field increase more slowly and tends to a constant. The points corresponding to  $x < W_0/2$  lie outside the range of the previous calculation and their values have been obtained by a numerical integration for each  $x$ . Note that here  $J_e^+$  is the spectral density of  $f^+$ . For edges with independent fluctuations,  $J_e^+ = J_e/2$  where  $J_e$  is the spectral density of each wire edge. The asymptotic behavior of  $\langle B_z^2 \rangle$  was first derived in [13].

## 5.2 Effect of top surface corrugation

We now consider the effect of corrugations of the top surface of the wire. As shown in equation (17), it induces both a current along the  $x$ - and  $y$ -direction. The surface current densities obtained by integration over  $x$  have remarkably simple forms. We find

$$\sigma_{y_{k,m}} = \sigma_{y_{k,m}}^{(1)} + \sigma_{y_{k,m}}^{(2)} \quad (23)$$

where

$$\begin{cases} \sigma_{y_{k,m}}^{(1)} = 2ik f_{S_{k,m}} j_0 \sqrt{\frac{\pi}{W_0}} \frac{2\pi m}{\kappa^2 W_0} \cos\left(\frac{2\pi m y}{W_0}\right) \\ \sigma_{y_{k,m}}^{(2)} = -2ik f_{S_{k,m}} j_0 \sqrt{\frac{\pi}{W_0}} \frac{2\pi m}{\kappa^2 W_0} (-1)^m \frac{\cosh(ky)}{\cosh(kW_0/2)} \end{cases} \quad (24)$$

and  $\kappa = \sqrt{k^2 + (2m\pi/W_0)^2}$ . In the calculation of  $\sigma_{x_{k,m}}$  the summation over  $p$  is not analytical. However, as we consider wires with  $u_0 \ll W_0$ , one can make the approximation  $(\cosh(\nu_p u_0) - 1)/\sinh(\nu_p u_0) \simeq \nu_p u_0$ . We then obtain

$$\sigma_{x_{k,m}} = ik f_{S_{k,m}} j_0 \sqrt{\frac{\pi}{W_0}} u_0 \sin(2m\pi y/W_0). \quad (25)$$

Comparing equation (25) and equation (24), we see that the current density along  $x$  is much smaller than the current density along  $y$  provide  $\kappa \ll 1/u_0$  (i.e. small wave vectors both along  $y$  and  $z$ ).

Within our flat wire approximation, where only distances from the wire  $x \gg u_0$  are considered, this is always the case. In the following we therefore only consider the effect of the current density along  $y$ . For  $x \geq W_0/2$ , the rough magnetic field is then given by equation (19).

Assuming a white power spectrum for the surface corrugation of spectral density  $J_S$ , we now derive some properties of the rough magnetic field [20]. For large distances above the wire ( $x \gg W_0$ ), only  $k$ -components much smaller than  $1/W_0$  are relevant. Then, as we have already shown, the  $c_{l_n}$  coefficients decrease rapidly with  $n$  and the dominant contribution is given by  $c_{y_0}$ . To lowest order in  $ky$ ,  $c_{y_0}$  is proportional to the total current  $\int_{-W_0/2}^{W_0/2} \sigma_y(y) dy$ . Thus, the only contribution comes from  $\sigma_{y_{k,m}}^{(2)}$ . Then, calculations similar to those presented in the previous section show that the contribution to  $\langle B_z^2 \rangle$  of the Fourier component  $m$  of  $f_{S_k}$  is

$$\langle B_{z,m}^2 \rangle = J_S \frac{W_0}{\pi u_0^2} \frac{1}{m^2} \frac{(\mu_0 I)^2}{x^5} 0.044 \quad (26)$$

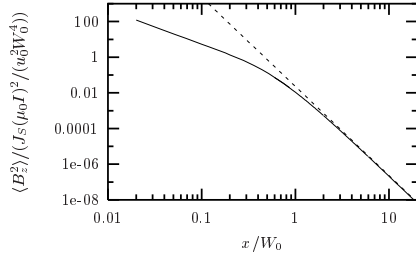
where  $J_S$  is the 2-dimensional spectral density of  $f_S$ . As expected it decreases with  $m$  as the contribution of rapidly oscillating terms averages to zero for large distances. Computing the sum over  $m > 0$  gives the scaling law for the rms fluctuation of  $B_z$  due to surface corrugation with atom-wire distance  $x$ :

$$\langle B_z^2 \rangle = J_S \frac{W_0}{u_0^2} \frac{\pi}{6} \frac{(\mu_0 I)^2}{x^5} 0.044 \quad (27)$$

In Figure 5 this expression is compared to numerical calculations based on equation (24). The terms  $\sigma_{y_{k,m}}^{(2)}$  contribute at least 90% of  $\langle B_z^2 \rangle$  as soon as  $x > W_0$ .

Comparing edge and surface corrugation, we see that for large distances, both effects scale in the same way (see Eqs. (22) and (27)). However, at short distances from the wire, the amplitude of the magnetic field roughness produced by surface corrugation does not saturate. Indeed, although the contribution of  $\sigma_{y_{k,m}}^{(2)}$  saturates in the same way as the effect of wire edge fluctuations, the contribution of  $\sigma_{y_{k,m}}^{(1)}$  to the current density diverges as one gets closer to the wire. Thus at small distances from the wire, we expect surface roughness to become the dominant source of magnetic field fluctuations.





**Fig. 5.** Longitudinal magnetic field fluctuations  $\langle B_z^2 \rangle$  produced by white noise top surface wire roughness as a function of  $x/W_0$  ( $y = 0$ ) [20]. Plotted is the dimensionless quantity  $\langle B_z^2 \rangle / (J_S (\mu_0 I)^2 / (u_0^2 W_0^4))$ . The dashed lines represents equation (27).

### 5.3 Consequences for micro wire traps

The scaling laws (22) and (27) are of major importance as they impose strong constraints in the use of micro traps. As mentioned in Section 2, high magnetic field gradients are achieved with small wires and short distances. But as the distance to the wire decreases, the roughness in the magnetic trapping potential increases. Imposing a maximal roughness  $\Delta B_{\max}$  tolerable in an experiment therefore directly determines the maximal transverse gradient accessible with a given realization of a micro wire.

More precisely, as mentioned in Section 2, the maximal current in a micro wire is limited by heat dissipation:  $I_{\max} = \xi W_0 u_0^{1/2}$  [14]. To analyze the scaling of the system, we consider the trap center at a distance comparable to the wire width  $x \simeq W_0$  and a wire height  $u_0$  small and constant. For a given fabrication technology, we expect the wire roughness to be independent of the wire dimensions  $W_0$  and  $u_0$  and we assume white noise spectral densities  $J_e$  and  $J_S$  for the edge and top surface corrugations [20]. Using the above expressions for  $x$  and  $I$  and equations (22) and (27), we obtain the following scaling laws

$$\begin{aligned} \langle B_{\text{edge}}^2 \rangle &= \frac{J_e \mu_0^2 \kappa^2 u_0}{W_0^3} \\ \langle B_{\text{surf}}^2 \rangle &= \frac{\pi J_S \mu_0^2 \kappa^2}{6 W_0^2 u_0} \end{aligned} \quad (28)$$

for the magnetic field fluctuations induced by the edge and the surface roughness respectively. Imposing magnetic field fluctuations smaller than  $\Delta B_{\max}$  determines a minimal wire width  $W_{0,\min}$  and the maximal transverse gradient  $\nabla B_{\max}$ . If the potential roughness is dominated by effects due to wire edge corrugation, we find:

$$\begin{aligned} W_{0,\min} &= \left( \frac{J_e \mu_0^2 \kappa^2 u_0 0.044}{\Delta B_{\max}^2} \right)^{1/3} \\ \nabla B_{\max} &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\mu_0 \kappa \sqrt{u_0} \Delta B_{\max}^2}{J_e 0.044} \right)^{1/3}. \end{aligned} \quad (29)$$

For a potential roughness dominated by effects due to wire top surface corrugation, we find:

$$\begin{aligned} W_{0,\min} &= \left( \frac{\pi J_S \mu_0^2 \kappa^2 0.044}{6 \Delta B_{\max}^2 u_0} \right)^{1/2} \\ \nabla B_{\max} &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{u_0 \Delta B_{\max}}{J_S \frac{\pi}{6} 0.044} \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (30)$$

As will be described in the following section, a micro wire fabricated by electroplating presents an edge roughness of  $J_e \simeq 0.1 \mu\text{m}^3$ . Assuming a wire without top surface roughness, a wire height of  $u_0 = 5 \mu\text{m}$ , a typical  $\xi = 3 \times 10^7 \text{ A m}^{-3/2}$  and imposing a maximal potential roughness of  $\Delta B_{\max} = 1 \text{ mG}$ , the wire width is limited to  $W_{0,\min} \simeq 700 \mu\text{m}$ , the maximal gradient will be  $\Delta B_{\max} \simeq 0.2 \text{ T/cm}$ .

## 6 Probing the rough magnetic potential with cold atoms

In a previous letter [11], we described measurements of the magnetic field roughness produced by a current carrying micro fabricated wire. The basic idea is to use the fact that the longitudinal density  $n(z)$  of atoms along the wire, is related to the longitudinal potential seen by the atoms through a Boltzmann factor:

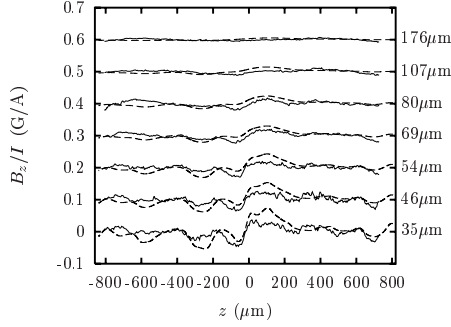
$$n(z) \propto e^{-V(z)/k_B T}. \quad (31)$$

As discussed in Section 2, the potential  $V(z)$  is proportional to the  $z$ -component of the magnetic field at the center of the trapping potential. Our typical thermal energy,  $1 \mu\text{K}$ , corresponds to a magnetic field of  $15 \text{ mG}$  for a  $^{87}\text{Rb}$  atom in the  $F = 2, m_F = 2$  state. Since longitudinal density variations of order 10% are easily visible in our experiment, we are sensitive to variations in the magnetic field at the mG level.

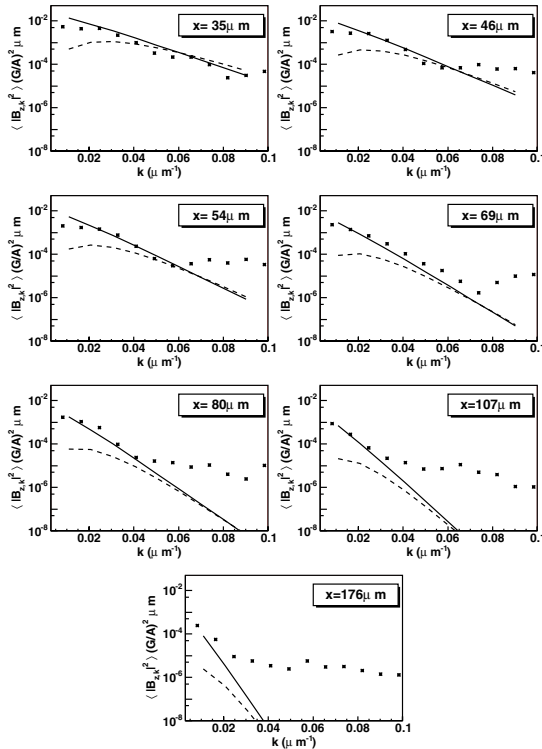
The micro wire we used to create the magnetic potential is a  $50 \mu\text{m}$  wide electroplated gold wire of  $4.5 \mu\text{m}$  height (see Fig. 2). The process of micro fabrication is the following: a silicon wafer is first covered by a  $200 \text{ nm}$  silicon dioxide layer using thermal oxidation. Next, seed layers of titanium ( $20 \text{ nm}$ ) and gold ( $200 \text{ nm}$ ) are evaporated. The wire pattern is imprinted on a  $6 \mu\text{m}$  thick photoresist using optical UV lithography. Gold is electroplated between the resist walls using the first gold layer as an electrode. The photoresist is then removed, as well as the gold and titanium seed layers. Finally the wire is covered with a  $10 \mu\text{m}$  layer of BCB resin and a  $200 \text{ nm}$  thick layer of evaporated gold. The gold surface acts as a mirror for a magneto-optical trap. The procedure for deducing the potential roughness from images of the atomic cloud is complex and we refer the reader to [11].

Figure 6 shows the measured longitudinal potential for various distances above the wire. We also show the power spectral density of these potentials in Figure 7. A region of  $1.6 \text{ mm}$  along the wire is explored by the atoms. To estimate the power spectral density of the potential roughness





**Fig. 6.** Rough magnetic field  $B_z(z)$  normalized to the current in the micro wire. Solid lines: magnetic field measured using cold atomic clouds. Dashed lines: magnetic field calculated from the measured corrugation of the edges of the wire. The different curves have been vertically shifted by 0.1 G/A from each other and heights above the wire are indicated on the right.



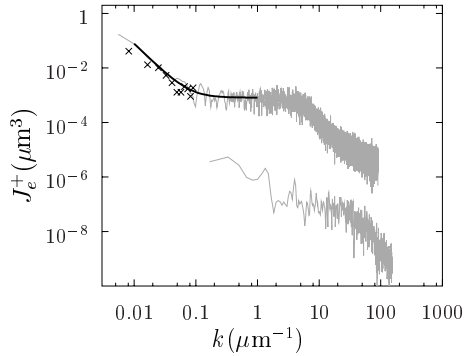
**Fig. 7.** Spectral density of the magnetic field roughness for different heights above the wire. The points represent experimental data. The curves result from the calculations detailed in the text. Solid curves: expected noise due to wire edge roughness. We used the power law fit to the spectral density of the wire border fluctuations. Dashed curves: expected noise due to top surface roughness.

we divide the total window in three smaller windows overlapping by 50% [21]. In each window, the Fourier transform of the potential is computed after multiplication with a Hamming window and the estimate of the spectral density is the average of the square of the Fourier transforms.

In Figure 7, a flat plateau is visible at the highest wave vectors (e.g.  $k > 0.07 \mu\text{m}^{-1}$  at  $46 \mu\text{m}$  and  $k > 0.04 \mu\text{m}^{-1}$  at  $80 \mu\text{m}$ ). The level of this plateau depends on experimental parameters such as the temperature and density of the atom cloud. On the other hand the spectral density at low wave vectors, i.e. in the region where it rises above the plateau, is independent of these parameters. This observation leads us to conclude that while the low wave vector part of the spectrum corresponds to a potential seen by the atoms, the plateau at high wave vectors is due to instrumental noise in our imaging system, such as fringes. We expect it to vary in a complex way with temperature and atom density. Qualitatively, smaller atom-wire distances, which are analyzed with higher temperature clouds, should result in higher plateaus. This tendency is indeed observed in Figure 7.

To measure the wire corrugations, we removed the atom chip from vacuum and etched off the gold mirror and the BCB layer. We analyzed the bare wire with scanning electron microscopy (SEM) and with atomic force microscopy (AFM) techniques. The function  $f$  describing the edge corrugation is extracted from SEM images such as Figure 2b. Rms deviations of the edges are as small as 200 nm, and we use a  $50 \mu\text{m} \times 50 \mu\text{m}$  field of view in order to have a sufficient resolution. We use 66 overlapping images to reconstruct both wire edges over the whole wire length of 2.8 mm. We identify no correlation between the two edges. The spectral density obtained for  $f^+ = (f_l + f_r)/2$  is plotted in Figure 8. We see two structures in the spectrum: first, we observe fluctuations with a correlation length of  $0.2 \mu\text{m}$  and 100 nm rms amplitude. It corresponds to the fluctuations seen in Figure 2b which are probably due to the electrodeposition process. Second, roughness with low wave vectors is present and raises significantly the power spectral density in the  $0.01\text{--}0.1 \mu\text{m}^{-1}$  range. For the spectral range  $0.01\text{--}1 \mu\text{m}^{-1}$ , the wire border fluctuations are well fitted by a power law  $J = 3.2 \times 10^{-6} k^{-2.15} + 8.2 \times 10^{-4} \mu\text{m}^3$  as seen in Figure 8. We use this expression to compute the spectra shown in Figure 7. As we measured  $f$  over the whole region explored by the atoms, we can not only compare the spectral densities of the magnetic field roughness but we also can compare the direct shape of the magnetic field  $B_z(z)$ . This is done in Figure 6 where the magnetic field, computed from  $f$  as described in the previous sections, is shown by dashed lines. We note that no adjustment has been applied to superimpose the two curves, the absolute position of the atoms with respect to the wire is known to the  $3 \mu\text{m}$  resolution of our imaging system.

A different approach is possible to check consistency between the wire edge measurements and the potential roughness measured with cold atoms. As seen in equations (19) and (20),  $|B_{z,k}(x)|^2 = J_e^+ R(k, x)$ , where the response function  $R(k, x)$  does not depend on the wire edge

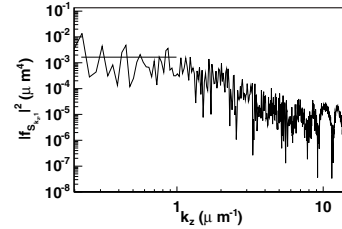


**Fig. 8.** Measured spectral density of the edge roughness of the electroplated wire (upper curve) and of the evaporated wire (lower curve). For the electroplated wire, the spectral density of  $f^+ = (f_l + f_r)/2$  is plotted. For the electroplated wire,  $J_f/2$  is plotted, where  $J_f$  is the spectral density of a single border of the wire, as expected for the spectral density of  $f^+$  for independent wire border fluctuations. The crosses indicate edge roughness for different  $k$  vectors reconstructed from the decay of the corresponding roughness measured with the atoms. The solid line is a polynomial fit to characterize the edge roughness in the region of interest.

roughness. We compute  $R(k, x)$  using the expansion (19) and for a given  $k$ -component, we deduce  $J_e^+$  by fitting the decay of  $|B_{z,k}(x)|^2$  with height (see Fig. 7). In Figure 8, the values of  $J_e^+$  obtained by such a procedure are compared to the function  $J_e^+$  measured with the electron microscope. We find good agreement.

The corrugation of the top surface of the wire is measured using an AFM and the observed power spectral density is plotted in Figure 9. The spectrum is flat for wave vectors smaller than  $1 \mu\text{m}^{-1}$  with a value  $J_S = 1.6 \times 10^{-3} \mu\text{m}^4$ . Unfortunately, we were not able to obtain the spectrum for very long wave vectors. For purposes of calculation, we shall simply assume that the spectral density below  $0.1 \mu\text{m}^{-1}$  has the same value as between  $0.1$  and  $1 \mu\text{m}^{-1}$ . The result of this calculation is plotted Figure 7 (dashed lines).

Our results indicate that the magnetic field roughness measured with cold atoms is explained by wire corrugation. At low wave vectors ( $k < 0.04 \mu\text{m}^{-1}$ ), it seems that the magnetic field roughness is primarily due to edge corrugations. The good agreement between the observed field and the calculation shown in Figure 6 are the strongest evidence for this conclusion. For wave vectors larger than about  $0.5 \mu\text{m}^{-1}$ , the corrugations of the top surface are expected to contribute as strongly as those of the edges. This wave vector regime however, is not being stringently tested by our data. Since we have no data on surface corrugation at wave vectors below  $0.1 \mu\text{m}^{-1}$ , it is possible that the contribution from this effect is larger than shown in Figure 7. The atom data in the figure however, indicate that the surface effect is not the dominant one although



**Fig. 9.** Power spectral density of the wire top surface roughness measured with an AFM. We plot the spectral density corresponding to the transverse mode  $m = 1$  ( $k_y = 2\pi/W_0$ ) which is the first one to contribute to magnetic field roughness. The horizontal line indicates the mean value for  $k_z$  ranging from  $0.2 \mu\text{m}^{-1}$  to  $1 \mu\text{m}^{-1}$ .

given our signal-to-noise it could be of comparable magnitude.

Figure 2b also suggests that there might be a grain structure in the bulk of the wires: we have no additional information on possible current deviations due to this effect, but the success of the model based on wire edge roughness seems to indicate, that it is not important in our system.

## 7 Improved fabrication process for micro wires

The fabrication technology described above limits us to atom wire separations greater than several tens of microns if we want to obtain a reasonably smooth potential. In order to improve the quality of our wire, we turn to a different micro fabrication process similar to [22]: the wire structures are patterned onto an oxidized silicon wafer using electron beam lithography. We use gold evaporation and a standard lift-off technique to obtain  $700 \text{ nm}$  square cross-section wires as shown in Figure 2c.

We extract the wire border roughness from SEM images and the obtained power spectral density is plotted in Figure 8 (lower curve). In the spectral range studied, the roughness is greatly reduced compared to the first fabrication process. This was expected as the grain size of evaporated gold is much smaller than of electroplated gold. Unfortunately, we do not have a quantitative measurement of the power spectral density in the  $0.01$ – $0.1 \mu\text{m}^{-1}$  range. Indeed, as we had to reduce the field of view to increase the resolution, it becomes very difficult to overlap hundreds of SEM pictures without adding spectral components due to stitching errors. We still hope to also have reduced the wire edge roughness in this frequency domain, as it has been demonstrated recently by the Heidelberg group [23] using similar wires.

Gold evaporation produces surfaces of optical quality at visible light. Thus the roughness of the top surface of the evaporated wire is expected to be much smaller than that of an electroplated wire.

## 8 Conclusion

Our goal in this paper has been to give a more detailed description of the work which led to our conclusion that wire corrugations can account for the magnetic field roughness typically observed in atom chip experiments. We wish to emphasize in this paper that great care must be taken to characterize the roughness of a micro fabricated wire. The ratio of the rms roughness to the wavelength of the imperfections is below  $10^{-4}$ . Thus a single microscope image cannot reveal the imperfections.

The model we use has already been suggested in reference [13]. Here we have given more details of the calculation as well as some physical arguments explaining the results. We have also extended the calculation to include the effects of corrugations of the top surface of the wire. The top surface corrugations become increasingly important as the distance to the wire decreases, while the effect due to wire edge roughness saturates.

Equations (22) and (27), giving the behavior of the magnetic field roughness due to edge and surface corrugation as a function of height, are important scaling laws that one should keep in mind in the design of atom chips. The requirements of small roughness and high transverse confinement impose a tradeoff in choosing a wire size for a given fabrication quality. We do not believe however that we are at the end of our progress in improving the fabrication technology. Thus sub-micron scale atom chips continue to hold out much promise for the manipulation of ultra cold atoms.

We thank David Hermann for help in calculations. This work was supported by the E.U. under grant (IST-2001-38863 and MRTN-CT-2003-505032), as well as by the DGA (03.34.033).

## References

1. R. Folman et al., Adv. At. Mol. Opt. Phys. **48**, 263 (2002) and references therein
2. T. Calarco et al., Phys. Rev. A **61**, 022304 (2000)
3. C. Henkel, S. Pötting, M. Wilkens, Appl. Phys. B **69**, 379 (1999)
4. C. Henkel, M. Wilkens, Europhys. Lett. **47**, 414 (1999)
5. M.P.A. Jones et al., Phys. Rev. Lett. **91**, 80401 (2003)
6. D. Harber, J. McGuirk, J. Obrecht, E. Cornell, J. Low Temp. Phys. **133**, 229 (2003)
7. J. Fortàgh et al., Phys. Rev. A **66**, 41604 (2002)
8. A.E. Leanhardt et al., Phys. Rev. Lett. **89**, 040401 (2002)
9. S. Kraft et al., J. Phys. B **35**, L469 (2002)
10. M.P.A. Jones et al., J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **37**, L15 (2004)
11. J. Estève et al., Phys. Rev. A **70**, 043629 (2004)
12. C. Vale et al., J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **37**, 2959 (2004)
13. D.-W. Wang, M. Lukin, E. Demler, Phys. Rev. Lett. **92**, 076802 (2004)
14. S. Groth et al., Appl. Phys. Lett. **85**, 2980 (2004)
15. G.B. Arfken, H.J. Weber, *Mathematical methods for physicists*, 4th edn. (Academic Press, San Diego, California, 1995), p. 519
16. Y. Lin, I. Teper, C. Chin, V. Vuletic, Phys. Rev. Lett. **92**, 050404 (2004)
17. W. Hänsel, P. Hommelhoff, T.W. Hänsch, J. Reichel, Nature **413**, 498 (2001)
18. D. Cassettari et al., Phys. Rev. Lett. **85**, 5483 (2000)
19. H. Ott et al., Phys. Rev. Lett. **87**, 230401 (2001)
20. The approximation of white spectral noise in edge or surface roughness is used to obtain simple scaling laws and to demonstrate the importance of the effect of wire corrugation as a whole. This approximation is of course to be used with caution, as the noise spectrum of micro wires strongly depends on material properties and fabrication technique.
21. P.D. Welch, IEEE Trans. Audio Electroac. **AU-15**, 70 (1967)
22. R. Folman et al., Phys. Rev. Lett. **84**, 04749 (2000)
23. P. Krüger, J. Schmiedmayer, private communication

## Roughness Suppression via Rapid Current Modulation on an Atom Chip

J.-B. Trebbia, C. L. Garrido Alzar, R. Cornelussen, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule

*Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique, CNRS, Univ Paris-Sud, Campus Polytechnique, RD128,  
91127 Palaiseau cedex, France*

(Received 29 January 2007; published 25 June 2007)

We present a method to suppress the roughness of the potential of a wire-based, magnetic atom guide: modulating the wire current at a few tens of kHz, the potential roughness, which is proportional to the wire current, averages to zero. Using ultracold  $^{87}\text{Rb}$  clouds, we show experimentally that modulation reduces the roughness by at least a factor five without measurable heating or atom loss. This roughness suppression results in a dramatic reduction of the damping of center-of-mass oscillations.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.98.263201](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.263201)

PACS numbers: 39.25.+k, 03.75.Be

Atom chips, devices which trap and guide atoms with microfabricated structures on a substrate, hold enormous promise for the applications of cold atoms and for the exploration of new physical regimes of degenerate gases [1,2]. For applications, their small size facilitates the design of a large variety of structures and functionalities [3–7]. For fundamental studies, the strong confinement possible on an atom chip permits, e.g., the study of low-dimensional gases. In particular, nearly one-dimensional (1D) gases have been studied in the weakly interacting regime on atom chips [8,9], and the attainment of the strongly interacting or Girardeau regime [10–14] on a chip is attracting significant experimental effort [15].

To exploit the full potential of these devices, atoms must often be close to the material structures they contain. This proximity, however, renders atom chips highly sensitive to defects [16,17] which produce roughness in the trapping potential. In the case of current carrying wires, most of these defects are due to the wires themselves [18–22]. Advances in fabrication procedures have steadily improved wire quality [23,24], but the roughness of the trapping potential remains a problem. For example, it is a serious hindrance for the attainment of the Girardeau regime, where the atoms need to be tightly confined in the transverse direction and weakly confined in the longitudinal direction.

In this Letter we demonstrate a method, first suggested in [18], which nearly eliminates the longitudinal potential roughness of a magnetic wire trap by rapid current modulation. This idea is reminiscent of the TOP trap [25] in the sense that the atoms see a time-averaged potential. The wire configuration here is such that the rough potential component rapidly oscillates and averages to zero. We compare the potential roughness for unmodulated (dc) and modulated (ac) guides (with the same current amplitudes) and demonstrate a reduction factor of at least 5 without noticeable atom loss or heating. This roughness suppression results in a significant reduction of the damping of the center-of-mass oscillations.

A simple atomic guide can be made by a current carrying wire and a homogeneous field  $B_{\text{bias}}$  perpendicular to the wire [1]: atoms are confined transversely and guided parallel to the wire. Atoms, of magnetic moment  $\mu$  in the low field seeking state, feel a potential proportional to the absolute value of the magnetic field. The guide is centered on a line where the transverse field vanishes and the longitudinal potential  $V(z)$  is given by  $\mu|B_z^0 + \delta B_z^w(z)|$ , where  $B_z^0$  is an external homogeneous field, typically of one Gauss, and  $\delta B_z^w(z)$  is the small, spatially fluctuating field (few mG) created by current flow deformations inside the microwires. Since  $|B_z^0| > \delta B_z^w(z)$  and  $\delta B_z^w(z)$  is proportional to the microwire current, current modulation around zero results in a longitudinal time-averaged potential in which the effect of  $\delta B_z^w(z)$  disappears. The instantaneous position of the guide is determined by both the wire current and the transverse bias field  $B_{\text{bias}}$ . If only the wire current is modulated, the atom experiences strong forces that eliminate the transverse confinement. One must therefore also modulate  $B_{\text{bias}}$ . In our experiment, this latter field is also produced by on-chip microwires whose low inductance permits high modulation frequencies.

We use a two layer atom chip as sketched in Fig. 1. The lower silicon wafer has an  $H$  structure of  $15\ \mu\text{m}$  thick

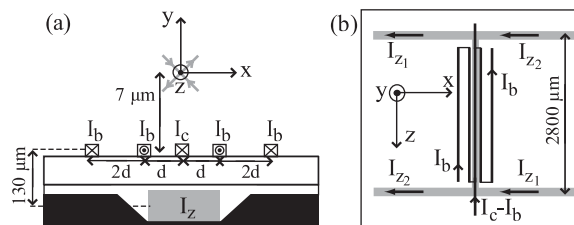


FIG. 1. Side (a) and top (b) views of the atom chip. The first wafer (dark gray) has  $15\ \mu\text{m}$  thick wires (gray). On the second wafer (white), a five-wire structure creates the atomic guide whose roughness is studied ( $d = 2.5\ \mu\text{m}$ ). Lengths are not to scale.

wires which carry the currents  $I_{z1}$  and  $I_{z2}$ . Atoms are initially loaded in an initial magnetic trap ( $Z$  trap) [1], which is created by setting  $I_{z1} = 3$  A,  $I_{z2} = 0$  A, and applying a transverse field (in the  $x$ - $y$  plane). After evaporative cooling, we have a few times  $10^4$  trapped  $^{87}\text{Rb}$  atoms in the  $|F = 2, m_F = 2\rangle$  state at a temperature of the order of  $1 \mu\text{K}$ . Next, we transfer the atomic cloud into a second trap (five-wire trap), where we perform the potential roughness measurements for both dc and ac cases. This five-wire trap is a combination of a transverse magnetic guide and a weak longitudinal confinement. The guide is realized with five parallel microwires ( $700 \times 700 \text{ nm}^2$  and  $2 \text{ mm}$  long in the  $z$  direction) deposited on the upper silicon wafer. The wire geometry is described in [24], and shown in Fig. 1. By applying the currents  $I_b = \pm 15$  mA in the two outer pairs of wires and  $I_c = \pm 13$  mA in the central wire, the resulting magnetic field vanishes on a line (parallel to the  $z$  axis),  $7 \mu\text{m}$  above the central wire. To prevent Majorana losses, we add a constant and homogenous longitudinal field  $B_z^0 = 1.8$  G. The weak longitudinal confinement is provided by the  $H$  structure on the lower chip with  $I_{z1} = I_{z2} = 0.4$  A (no current flows in the central wire of the  $H$ ).

First, we measured the roughness of the trapping potential for positive and negative dc currents. After the transfer to the five-wire trap, we wait 600 ms to let the sample thermalize in the presence of an evaporative knife leading to about  $5 \times 10^3$  atoms at around 280 nK. To ensure that the two dc traps have the same transverse position to within 500 nm, we compensate the transverse magnetic fields to within 0.1 G. Figures 2(a) and 2(b) show absorption images, averaged over 50 runs, of the trapped cloud at thermal equilibrium for the two dc traps. In both situations the cloud becomes fragmented, revealing the presence of potential roughness. Moreover, the density maxima and min-

ima are inverted when the currents are reversed, as previously observed in [18]. The time of flight (TOF) for imaging is 1.5 ms. This delay allows the atoms to leave the vicinity of the five-wire structure where diffraction of the imaging beam produces systematic errors in the atomic density profile. The 1.5 ms TOF of the atoms partially washes out the density modulation. This effect and the optical resolution contribute to a resolution function with a rms width of  $8 \mu\text{m}$  modeled by a Gaussian function. Convolution with this Gaussian gives a contrast reduction of 40% for a wavelength of  $60 \mu\text{m}$ , the typical spatial scale observed in Fig. 2. The 10% modulation in the figure is thus an underestimate of the actual potential roughness. This smearing does not affect the relative measurements we present below, except insofar as to reduce our signal to noise ratio.

To extract the potential  $V(z)$  along the guide center from the linear atomic density  $n(z)$ , we use the Maxwell-Boltzmann distribution  $V(z) = -k_B T \ln[n(z)/n_0]$ . This formula is valid because the transverse oscillation frequency is independent of  $z$  (to within 1% over the cloud extent) and provided that the phase space density is much smaller than unity. We deduce the temperature from the transverse velocity distribution measured by the standard TOF technique.

The longitudinal confinement, produced by the  $H$ -shaped wire, is expected to be harmonic within 6% over the extent of the cloud. A harmonic fit of  $V(z)$  gives  $\omega_{z,\text{dc}}/2\pi = 7.1$  Hz. Subtracting this potential from  $V(z)$ , we obtain the potential roughness plotted in Fig. 2(d) for both positive and negative dc currents. The observed rms roughness amplitudes are 39 and 22 nK for negative and positive currents, respectively. This asymmetry in the potential roughness may be due to residual transverse magnetic fields which change the trap location, or to residual noise in the imaging system.

We now turn to the study of the ac trap. Using phase-locked oscillators at a frequency  $\omega_m/2\pi = 30$  kHz, we produce the five-wire currents  $I_c(t) = I_c \cos(\omega_m t)$  and  $I_b(t) = I_b \cos(\omega_m t)$ , where  $I_c = 13$  mA and  $I_b = 15$  mA are the same currents as those used in the dc cases. The field  $B_z^0$  and the currents  $I_{z1}$  and  $I_{z2}$  are not modulated. Loading a thermal cloud in the ac trap, the fragmentation is no longer visible in the absorption image Fig. 2(c).

To give a more quantitative analysis, we begin with a theoretical description of the ac trap. Since  $\omega_m$  is much larger than all the characteristic frequencies associated with the atomic motion, the transverse and the longitudinal dynamics are described by the one cycle averaged potential  $\langle V(r, t) \rangle$ . Because  $B_z^0$  is large compared to any other magnetic field,  $\langle V(r, t) \rangle$  can be approximated by

$$\langle V(r, t) \rangle = \mu_B \langle |B_z(\mathbf{r}, t)| \rangle + \frac{\mu_B}{2B_z^0} \langle |\mathbf{B}_\perp^w(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})|^2 \rangle. \quad (1)$$

Here,  $\mu_B$  is the Bohr magneton,  $B_z(\mathbf{r}, t)$  is the longitudinal

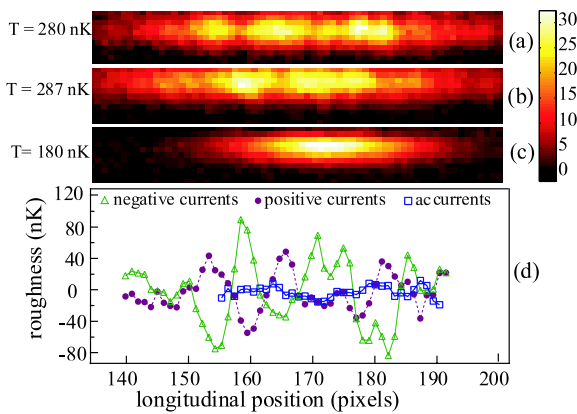


FIG. 2 (color online). Absorption images of a thermal cloud for negative dc (a), positive dc (b), and ac currents (c), respectively. Plotted is the number of atoms per pixel (pixel size is  $6 \times 6 \mu\text{m}^2$ ). In (d), the potential roughnesses are extracted from longitudinal profiles using the Maxwell-Boltzmann distribution.



magnetic field,  $\mathbf{B}_\perp^w(\mathbf{r}, t)$  is the transverse magnetic field of the five wires, and  $\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})$  denotes the transverse field created by the  $H$  wires plus any uncompensated, homogeneous, time-independent, transverse field. Since  $\delta B_z^w$  oscillates, its contribution to  $\langle |B_z(\mathbf{r}, t)| \rangle$  averages to zero.

The cross term  $\langle \mathbf{B}_\perp^w(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}_\perp(\mathbf{r}) \rangle$  vanishes, so that  $\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})$  only produces a position dependent energy shift  $\mu_B |\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})|^2 / 2B_z^0$ . It has a negligible effect on the transverse confinement since the confinement created by the five wires is very strong. On the other hand,  $|\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})|^2$  affects the weak longitudinal confinement. The length scale on which  $\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})$  varies is much larger than the cloud extent, because it is produced by elements located at least a millimeter away from the atomic cloud. It thus only contributes to a curvature without introducing additional roughness. The transverse magnetic field created by the  $H$ -shaped wire is  $\mathbf{B}_\perp(z) = B_H' z \mathbf{u}_y$ , where  $\mathbf{u}_y$  is the unit vector pointing along  $y$ . This field increases the longitudinal frequency according to  $\omega_{z,ac}^2 = \omega_{z,dc}^2 + \mu_B B_H'^2 / (mB_z^0)$ . On the other hand, the transverse frequency is reduced by  $\sqrt{2}$  compared to the dc case. This factor is confirmed by our transverse frequency measurements which give  $(1.2 \pm 0.2)$  kHz for the ac trap,  $(2.2 \pm 0.1)$  kHz and  $(2.1 \pm 0.1)$  kHz for dc negative and positive currents, respectively.

We extract the potential in the ac trap from the measured longitudinal profile for a sample at  $T = 180$  nK. From a harmonic fit we obtain a longitudinal frequency of 11.3 Hz, slightly larger than the one in the dc trap, as expected. In Fig. 2(d), we compare the measured roughness of the ac trap to those obtained in the dc traps. In the ac configuration, the roughness rms amplitude is reduced by a factor 4 and 7 with respect to the positive and negative dc cases. The residual apparent roughness in the ac case is consistent with the noise in the imaging system and so the mean reduction factor of 5 is a lower limit.

We also tested the reduction of the potential roughness by looking at the evolution of the longitudinal center-of-mass oscillations (CMO) as shown in Fig. 3. In a harmonic trap, the CMO of an atomic cloud are undamped. In the presence of a potential roughness, the oscillation period depends on the amplitude and the dephasing between trajectories of different particles results in a damping of the CMO. Figure 3 shows the dramatic contrast between the ac and dc traps. We fit the oscillations to the function  $Z(t) = Z_0 + Z_1 e^{-t^2/\tau^2} \cos(\omega t + \phi)$ , where  $Z_0$ ,  $Z_1$ ,  $\tau$ ,  $\omega$ , and  $\phi$  are fitting parameters. This function ensures the expected quadratic decrease of the oscillation amplitude at small times for a damping due to trajectory dephasing. The fitted damping time in the ac case,  $\tau = (1.9 \pm 0.1)$  s, is 10 times larger than its value in the dc case. In fact, the observed damping in the ac guide can be explained by the anharmonicity of the  $H$ -shaped wire confinement alone. Thus, the data are consistent with the absence of roughness.

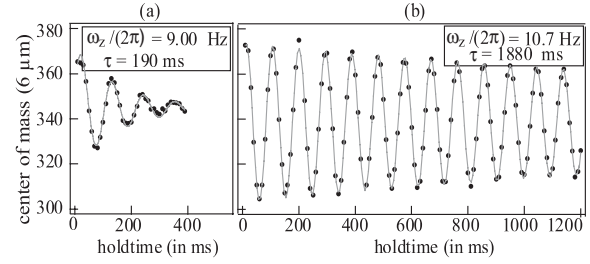


FIG. 3. Center-of-mass position vs time for negative dc current (a) and ac current (b) ( $\omega_m / 2\pi = 30$  kHz). The solid line is a fit to the function  $Z(t)$  given in the text. The dramatic increase in damping time in the ac trap illustrates the strong reduction of the roughness.

To estimate an upper bound on the ratio of the ac to dc roughness amplitudes, we performed one-dimensional classical Monte Carlo calculations for noninteracting atoms experiencing a rough potential superimposed on a harmonic confinement. The calculations are averaged over potential roughness realizations with the spectral density expected for a single wire having white noise border deformations [22,26]. We adjust the wire border noise in order to recover the measured damping time in the dc trap (it corresponds to an rms roughness of 80 nK). We find that the observed increase of the damping time by a factor 10 requires a reduction of the potential roughness by about 14. A drawback of the model is that it does not take into account atomic collisions, happening at a rate on the order of the damping time. However, as collisions are present in both the dc and ac configurations, we assume that the above roughness reduction deduced from the calculation is still relevant.

The modulation technique does not correct for all guide defects. By considering only the time-averaged potential we neglect the micromotion of the atoms [27] whose energy is responsible for a residual roughness. This roughness is  $10^{-8}$  times smaller than the one present in the dc guides for our experimental parameters. In fact, other imperfections are more important. First, the transverse component of the rough microwire field produces meanders of the guide equipotentials (displacement of about 2 nm) and a  $z$ -dependent modification of the transverse trapping frequency (approximately 0.3%). These two effects are not averaged out in the ac guide. Second, the rough longitudinal field  $\delta B_z^w$  appears in the expansion of  $\langle V(r, t) \rangle$  to orders that are neglected in Eq. (1). The resulting guide imperfections are 1 order of magnitude smaller than those produced by the transverse component of the rough field.

We also investigated the dependence of the trap lifetime on  $\omega_m$  as shown in Fig. 4. For modulation frequencies above 15 kHz, the lifetime of the sample is the same as in the dc case (10 s). For lower modulation frequencies, we observe a decrease in lifetime that we attribute to instabil-

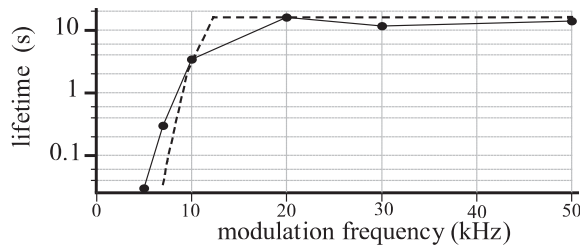


FIG. 4. Lifetime vs  $\omega_m$  in the ac trap (dots). The dashed line represents the result of Monte Carlo calculations with a transverse magnetic field of 150 mG for both  $x$  and  $y$  directions.

ities of the atomic trajectories in the modulated potential. For zero unmodulated transverse magnetic field  $\mathbf{B}_\perp(\mathbf{r})$ , the transverse atomic motion close to the guide center is governed by the Mathieu equation [27] and no instabilities are expected for  $\omega_m > 0.87\omega_{\perp,dc}$ , where  $0.87\omega_{\perp,dc}/2\pi = 1.82$  kHz, which is significantly below 15 kHz. We attribute this discrepancy to the presence of a nonvanishing transverse field. Classical trajectory Monte Carlo simulations, with fields of 150 mG in both  $x$  and  $y$  directions, reproduce well the measured lifetime as shown in Fig. 4 (dashed line). This value is of the same order as the accuracy of the residual transverse field compensation. Within the explored range of frequencies (up to 50 kHz), we have not identified any upper bound for the modulation frequency. The atomic spin should adiabatically follow the magnetic field orientation to avoid spin flip losses [28]. This condition is fulfilled provided that  $\omega_m/2\pi \ll \mu_B B_z^0/4\pi\hbar$ , where  $\mu_B B_z^0/4\pi\hbar \approx 1.3$  MHz is the Larmor frequency.

The temporal modulation of the rough potential can lead to a heating [28]. In our trap, however, the expected heating rate is very small. This is confirmed by our measured heating rate of about 160 nK/s, which is close to the technical heating also observed in the dc trap. We have also loaded a Bose-Einstein condensate in the ac trap without noticeable fragmentation.

The method presented here will enable new experimental explorations on quantum gases using atom chips. We have already mentioned the study of a 1D Bose gas in the Girardeau regime. Note that the reduction of transverse trapping frequency by  $\sqrt{2}$  can be overcome by going closer to the wire. Second, the relative insensitivity of the time-averaged potential to residual transverse magnetic fields will enable us to revisit proposals of double well potentials in static magnetic fields, such as [19,24], which are very sensitive to residual magnetic fields. Finally, this method may also allow the study of atom dynamics in disordered

potentials [29–31] since the roughness strength can be tuned.

The authors thank A. Aspect, T. Schumm, and J. Estève for fruitful discussions. The Atom Optics group of Laboratoire Charles Fabry is a member of the IFRAF Institute. This work was supported by the EU under Grants No. MRTN-CT-2003-505032 and No. IP-CT-015714.

- [1] R. Folman *et al.*, *Adv. At. Mol. Opt. Phys.* **48**, 263 (2002), and references therein.
- [2] Special issue on Atom-Chips, edited by C. Henkel, J. Schmiedmayer, and C. Westbrook [*Eur. Phys. J. D* **35** 1 (2005)].
- [3] W. Hänsel, J. Reichel, P. Hommelhoff, and T. W. Hänsch, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 608 (2001).
- [4] A. Günther *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170405 (2005).
- [5] Y.-J. Wang *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 090405 (2005).
- [6] T. Schumm *et al.*, *Nature Phys.* **1**, 57 (2005).
- [7] P. Treutlein *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 203005 (2004).
- [8] J. Estève *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 130403 (2006).
- [9] J.-B. Trebbia, J. Estève, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 250403 (2006).
- [10] M. Girardeau, *J. Math. Phys. (N.Y.)* **1**, 516 (1960).
- [11] B. Laburthe Tolra *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 190401 (2004).
- [12] B. Parades *et al.*, *Nature (London)* **429**, 277 (2004).
- [13] H. Moritz, T. Stöferle, M. Köhl, and T. Esslinger, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 250402 (2003).
- [14] T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss, *Science* **305**, 1125 (2004).
- [15] J. Reichel and J. H. Thywissen, *J. Phys. IV (France)* **116**, 265 (2004).
- [16] B. V. Hall *et al.*, *J. Phys. B* **39**, 27 (2006).
- [17] C. D. J. Sinclair *et al.*, *Phys. Rev. A* **72**, 031603 (2005).
- [18] S. Kraft *et al.*, *J. Phys. B* **35**, L469 (2002).
- [19] M. A. Jones *et al.*, *J. Phys. B* **37**, L15 (2004).
- [20] A. E. Leanhardt *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 100404 (2003).
- [21] J. Estève *et al.*, *Phys. Rev. A* **70**, 043629 (2004).
- [22] D.-W. Wang, M. D. Lukin, and E. Demler, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 076802 (2004).
- [23] L. D. Pietra *et al.*, *J. Phys.: Conf. Ser.* **19**, 30 (2005).
- [24] J. Estève *et al.*, *Eur. Phys. J. D* **35**, 141 (2005).
- [25] W. Petrich, M. H. Anderson, J. R. Ensher, and E. A. Cornell, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3352 (1995).
- [26] T. Schumm *et al.*, *Eur. Phys. J. D* **32**, 171 (2005).
- [27] L. Landau and E. Lifshitz, *Mechanics, Course of Theoretical Physics* (MIR Editions, Moscow, 1982) 4th ed.
- [28] I. Bouchoule *et al.* (to be published).
- [29] D. Clément *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170409 (2005); D. Clément *et al.*, *New J. Phys.* **8**, 165 (2006).
- [30] T. Schulte *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 170411 (2005).
- [31] J. E. Lye *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 070401 (2005).

November 30, 2007

## Limitations of the modulation method to smooth a wire guide roughness

I. Bouchoule, J.-B. Trebbia, and C. L. Garrido Alzar  
*Laboratoire Charles Fabry de l'Institut d'Optique,  
 CNRS et Université Paris 11, 91127 Palaiseau Cedex, France*

It was recently demonstrated that wire guide roughness can be suppressed by modulating the wire currents [1] so that the atoms experience a time-averaged potential without roughness. We theoretically study the limitations of this technique. At low modulation frequency, we show that the longitudinal potential modulation produces a heating of the cloud and we compute the heating rate. We also give a quantum derivation of the rough conservative potential associated with the micro-motion of the atoms. At large modulation frequency, we compute the loss rate due to non adiabatic spin flip and show it presents resonances at multiple modulation frequencies. These studies show that the modulation technique works for a wide range of experimental parameters. We also give conditions to realise radio-frequency evaporative cooling in such a modulated trap.

PACS numbers: 39.35.+k,03.75.Be

### I. INTRODUCTION

Atom-chips are a very promising tool for cooling and manipulating cold atoms [2]. Diverse potentials, varying on the micron-scale, can be realized and very high transverse confinements are possible. Envisioned applications range from integrated guided atomic interferometry [3, 4, 5] to the study of low dimensional gases [6, 7, 8]. To take benefit of the chip technology, the atoms should be brought close to the current carrying wires. But the atoms then experience a rough potential due to wire imperfections [9, 10] and this used to constitute an important limitation of the atom-chip technology. However, a method to overcome this roughness problem, based on modulated currents, was recently demonstrated [1]. Due to the important envisioned applications of this method, a study of its limitations is crucial.

The method to suppress atomic wire guide roughness relies on the proportionality between the longitudinal potential roughness and the wire current [11]. Modulating the wire current around zero at a large modulation frequency, the atoms experience the time-averaged potential, exempt from roughness. The modulation frequency  $\omega$  must be large enough so that the atomic motion cannot follow the instantaneous potential. On the other hand,  $\omega$  should be small enough in order to prevent losses due to spin-flip transitions. In this paper, we present analysis that go beyond the time-averaged potential approach and we identify the limitations of this method, both for low and large  $\omega$ . We also investigate the possibility of using the radio-frequency evaporative cooling method in such a modulated trap.

In sec. II, we present the considered situation. In sec. III, we investigate the limitations of the method that arise at small modulation frequency. We show that the atomic cloud is submitted both to a heating and to a residual rough potential and we quantitatively study these phenomena. In sec. IV, we compute the expected spin flip losses due to the time modulation of the magnetic field

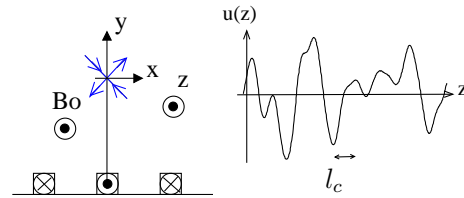


FIG. 1: A wire guide produced by three current carrying wires. Geometrical deformation of the wire produce a longitudinal potential roughness (of correlation length  $l_c$ ) proportional to the wire current as depicted in the graph.

orientation, that arise at large  $\omega$ . Finally, the last section gives some insights on the possibility of realizing radio-frequency evaporative cooling in the modulated guide.

### II. WIRE GUIDE

A wire guide is obtained combining a transverse quadrupolar field and an homogeneous longitudinal magnetic field  $B_0$ . The quadrupolar field can be realised using for example three current carrying wires as shown in Fig.1. Because of wire deformations [10, 12], the current density inside the wires acquire non zero transverse components. This produces a longitudinal rough magnetic field  $b_z$  proportional to the wire current, much smaller than the external field  $B_0$ . The method to effectively remove roughness consists in modulating the wire currents at a frequency  $\omega$  while the longitudinal field  $B_0$  is kept constant.



### III. EFFECT OF THE MODULATION ON THE LONGITUDINAL MOTION

Let us first assume the modulation frequency of the wire currents is small enough so that the atomic spin orientation can follow adiabatically the magnetic field orientation. The atoms are then subjected to the instantaneous potential  $\mu|\mathbf{B}|$ , where  $\mu$  is the atomic dipole moment. For  $B_0$  much larger than  $E/\mu$  where  $E$  is the typical transverse atomic energy, the instantaneous transverse potential is harmonic and proportional to the instantaneous wire currents. Since the oscillation frequency of this potential is modulated in time, the transverse classical dynamics is described by a Mathieu equation, which predicts stable motion as long as  $\omega > 0.87\omega_\perp$ , where  $\omega_\perp$  is the maximum instantaneous transverse oscillation frequency. This classical criteria is also predicted by quantum mechanics since the Wigner function evolves as a classical phase space distribution for a harmonic potential [13]. In this paper, we assume this stability condition is fulfilled and we focus on the longitudinal motion, assuming the longitudinal dynamics is decoupled from the transverse one. The longitudinal instantaneous potential is

$$V(z, t) = u(z) \cos(\omega t), \quad (1)$$

where  $u(z) = \mu b_z(z)$ , sketched in Fig.1, is produced by wire deformations. The idea of the method to smooth the roughness is that the longitudinal motion of the atoms does not have time to follow the time evolution of the potential. The atomic motion is then well described by the effect of the conservative potential  $\langle V(z, t) \rangle$ , where the time average is done over a modulation period. Since  $\langle V(z, t) \rangle = 0$ , the atoms do not experience any roughness. We study below the conditions on the modulation frequency  $\omega$  for such an approach to be valid.

As the Hamiltonian experienced by the atoms is periodic in time, we use the well known Floquet representation [14], briefly presented below for the situation considered here. A new quantum number  $n_F$  is introduced, which gives a relative number of modulation energy quanta. The Hamiltonian in this representation is time-independent and contains two contributions. The first one,

$$H_0 = \sum_{n_F=-\infty}^{\infty} (p^2/(2m) + \hbar\omega n_F) |n_F\rangle \langle n_F|, \quad (2)$$

does not couple different Floquet subspaces. The second one,

$$H_1 = \sum_{n_F=-\infty}^{\infty} u(z)/2 (|n_F\rangle \langle n_F + 1| + |n_F + 1\rangle \langle n_F|), \quad (3)$$

couples adjacent Floquet subspaces. If the state of the system in the Floquet representation is  $\sum_{n_F} |\psi_{n_F}\rangle(t) |n_F\rangle$ , where  $|\psi_{n_F}\rangle(t)$  gives the state of the

system in the manifold of Floquet number  $n_F$ , then the state of the system in the bare representation is  $\sum_{n_F} |\psi_{n_F}\rangle(t) e^{-in_F\omega t}$ . Expectation values of observables contain cross terms involving different Floquet numbers. However, as long as evolution on time scales much larger than  $1/\omega$  is considered, such cross terms (interference terms) average to zero and the different Floquet states can be interpreted as physically different states. A given state has an infinite number of Floquet expansions. In particular, it is possible to assume that the initial state is in the Floquet manifold of Floquet number  $n_F = 0$ .

Let us consider a state  $|p_0, n_F = 0\rangle$  of momentum  $p_0$  in the Floquet manifold  $n_F = 0$ . The modulated rough potential  $u$  is responsible for two different phenomena. First, it induces a change rate of the atomic energy. This irreversible evolution is due to the continuous nature of the rough potential Fourier decomposition: the state  $|p_0, n_F = 0\rangle$  is coupled to a continuum of momentum states of the adjacent Floquet subspaces  $n_F = \pm 1$  and this coupling to a continuum induces a departure rate from the initial state, associated to a rate of kinetic energy change. Second, the modulated potential is responsible for the well known adiabatic potential experienced by atoms in fast modulated fields [15]. We show that this adiabatic potential is due to processes of order two in  $u$  that couple the state  $|p_0, n_F = 0\rangle$  to the states  $|p_1, n_F = 0\rangle$  via the virtually populated intermediate states  $|q, n_F = \pm 1\rangle$ .

In the first sub-section, we investigate the first phenomenon and compute the associated heating rate for a cloud at thermal quasi-equilibrium. In the second sub-section, we derive the adiabatic potential experienced by the atoms. In both sections, we emphasize on the case where the potential roughness is that obtained at large distance from a flat wire having white noise border fluctuations.

#### A. Heating of the atomic cloud

Let us suppose the atom is initially in the state  $|p_0, n_F\rangle$  of momentum  $p_0$  in the Floquet manifold  $n_F = 0$ . As shown in Fig.2, this state is coupled by  $u$  to the continuum of momentum states in the Floquet manifold  $n_F = \pm 1$ , which leads to a decay of the initial state population. The momentum of the final states that fulfill energy conservation in the Floquet subspace  $n_F = -1$  are  $\pm\hbar q_+$  where  $q_+ = \sqrt{k_0^2 + 2m\omega/\hbar}$ ,  $k_0 = p_0/\hbar$  being the initial atomic wave vector. Decay towards these states involves the Fourier component  $\pm q_+ - k_0$  of  $u$  and increases the kinetic energy of the atom by  $\hbar\omega$ . If  $k_0^2 > 2m\omega/\hbar$ , there exist states in the Floquet subspace  $n_F = 1$  that have the same energy as the initial state. The momentum of those final states are  $\pm\hbar q_-$  where  $q_- = \sqrt{k_0^2 - 2m\omega/\hbar}$  and decay towards these states decreases the kinetic energy of the atom by  $\hbar\omega$ . A perturbative calculation, identical to that used to derive Fermi Golden rule, gives an

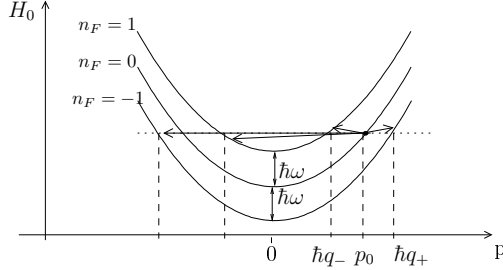


FIG. 2: Transitions responsible for a heating of the atomic cloud. The parabolas give the energy  $H_0$ , given in Eq. (2), versus the momentum  $p$  for different Floquet manifolds  $n_F$ . The state of momentum  $p_0$  in the Floquet manifold  $n_F = 0$  is coupled to different momentum states of the Floquet manifolds  $n_F = \pm 1$  by the rough potential  $u(z)$ .

energy exchange rate

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\pi\omega m}{2\hbar^2} [(S(-k_0 + q_+) + S(-k_0 - q_+))/q_+ - \Theta(|k_0| - \sqrt{2m\omega/\hbar})(S(-k_0 + q_-) + S(-k_0 - q_-))/q_-] \quad (4)$$

where  $S(q) = 1/(2\pi) \int e^{iqz} \langle u(0)u(z) \rangle dz$  is the spectral density of  $u$ , characterized by the correlation length  $l_c$ , and  $\Theta(x)$  is the Heaviside function that is zero for  $x < 0$  and 1 for  $x > 0$ . The derivation of Eq. (4) is detailed in the appendix A. As pointed out in the appendix, Eq. (4) is not valid for initial momentum very close to  $\sqrt{2m\hbar\omega}$ . However, the range of  $k_0$  for which the formula is not valid is in general very small and we ignore this in the following.

Apart from the rms amplitude of the roughness, which accounts only for a multiplicative factor in the rate of the energy change, three energy parameters enter into account:  $E_\omega = \hbar\omega$  is the energy quantum corresponding to the modulation frequency,  $E_m = ml_c^2\omega^2$  is about the kinetic energy of an atom that would travel over  $l_c$  during an oscillation period, and  $E_c = p_0^2/(2m)$  is the atomic kinetic energy. In the following, we consider two different limits for which we give simplified expressions for the energy change rate: the classical limit and the quantum low energy limit.

Let us first assume that  $E_\omega/E_c \ll 1$  and  $E_\omega E_m^{1/2}/E_c^{3/2} \ll 1$ . We show below that this two conditions ensures the validity of the classical behavior. The first inequality ensures that one can expand the quantity  $q_+$  and  $q_-$  in power of  $m\omega/(\hbar k_0^2)$ . The second inequality ensures that the spectral components  $S(-k_0 - q_\pm)$  are negligible compared to the two other ones and that the latter are well approximated using a Taylor expansion of  $S$ . The energy change rate then writes

$$\frac{dE}{dt} = - [2\omega^2/v_0^3 S(\omega/v_0) + S'(\omega/v_0)\omega^3/v_0^4] \pi/(2m), \quad (5)$$

where  $v_0 = \hbar k_0/m$  is the atomic velocity. This energy change rate does not depends on  $\hbar$  and is thus a classi-

cal result. It is obtained through a classical calculation of kinetic energy change computed after expanding the atomic trajectory to second order in  $u$ . Note that, using the classical expression  $E_c = mv_0^2/2$ , the two conditions  $E_\omega/E_c \ll 1$  and  $E_\omega E_m^{1/2}/E_c^{3/2} \ll 1$  are verified in the limit where  $\hbar$  goes to zero, as expected for the validity of classical physics.

Let us now consider the limit  $E_\omega/E_c \gg 1$  and  $E_c E_m^{1/2}/E_\omega^{3/2} \ll 1$ , that we denote the quantum low energy limit. The first inequality ensures that the Heaviside function in Eq. (4) is zero and that  $q_+$  can be replaced by  $\sqrt{2\hbar\omega}$  in the denominator. The second inequality ensures that this replacement is also valid for the argument of the  $S$  function. Then the energy change rate given in Eq. (4) reduces to

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\pi\sqrt{m\omega}}{\sqrt{2\hbar^3}} [S(-k_0 + \sqrt{2m\omega/\hbar}) + S(k_0 + \sqrt{2m\omega/\hbar})]. \quad (6)$$

This is a quantum result, sensitive to the fact that energy exchange between the atom and the oscillating potential involves the energy quanta  $\hbar\omega$ . In the limit where  $E_c \ll E_\omega^2/E_m$  ( $k_0 \ll 1/l_c$ ), it converges towards a finite value

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\pi\sqrt{2m\omega}}{\sqrt{\hbar^3}} S(\sqrt{2m\omega/\hbar}), \quad (7)$$

that does not depends on the initial momentum  $\hbar k_0/m$ .

Let us now consider a cloud initially at thermal equilibrium with a velocity distribution  $n(v_0)$ . The heating rate, obtained after averaging Eq. (5) over  $n(v_0)$ , is

$$k_B \frac{dT}{dt} = 2 \int_0^\infty n(v_0) \frac{dE}{dt} dv_0, \quad (8)$$

where  $k_B$  is the Boltzmann factor. Although the heating rate depends on the precise shape of the spectral density  $S$ , some general properties can be derived.

First, although the energy change rate may be negative for some velocities, we show below that  $dT/dt$  is always positive. For a longitudinally homogeneous gas, this positivity ensures the increase of the entropy, as required by the second law of thermodynamics in the absence of heat exchange with the cloud and without gaining information on the system. To demonstrate that  $dT/dt > 0$ , we perform a change of variables in the four integrals obtained by substituting Eq. (4) into Eq. (8) to find

$$k_B \frac{dT}{dt} = \pi\omega\sqrt{m}/\hbar \int_0^{Q_0} \frac{dq}{q} S(q) (n(\omega/q - \hbar q/(2m)) - n(\omega/q + \hbar q/(2m))) + \int_{Q_0}^\infty \frac{dq}{q} S(q) (n(\hbar q/(2m) - \omega/q) - n(\omega/q + \hbar q/(2m))) \quad (9)$$

where  $Q_0 = \sqrt{2m\omega/\hbar}$ . For a thermal equilibrium distribution,  $n(v)$  is a decreasing function of  $|v|$ . Furthermore, the spectral density is a positive function. We thus find that  $dT/dt > 0$  so that the effect of the potential roughness is always a heating of the cloud. Eq. (9) also shows

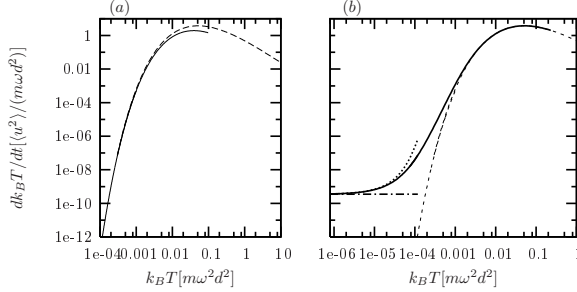


FIG. 3: Heating rate of a cloud as a function of its temperature, for a modulated rough potential whose spectral density is given by Eq. (11). Graph (a): classical predictions (dashed lines) and asymptotic behavior at low temperature given by Eq. (12) (solid line). Graph (b): exact result for  $\omega/(2\pi) = 200\hbar/(md^2)$  (solid line) compared with the quantum low energy prediction (dotted line), the asymptotic prediction of Eq. (13) (dashed dotted lines) and the classical result (dashes).

that the heating rate goes to zero at very large temperature, since  $n$  is then about flat over the explored velocities.

Second, for large enough temperatures one expects to recover the classical result and the heating rate should not depend on  $\hbar$ . Then the heating rate depends only on the four independent quantities  $\langle u^2 \rangle$ ,  $E_m$ ,  $\omega$  and  $k_B T$ . Since  $\langle u^2 \rangle$  enters only as a multiplicative factor in the heating rate, using dimensional analysis we show that  $k_B dT/dt$  is the product of  $\langle u^2 \rangle / (m\omega l_c^2)$  and a function of  $k_B T / E_m$ . As a consequence, if the function giving the heating rate versus  $T$  is known for a given value of  $\omega$  and  $E_m$ , then the heating rate is known for any value of  $T$ ,  $E_m$  and  $\omega$ .

Finally, at low enough temperatures, the heating rate is well estimated by substituting Eq. (6) into Eq. (8). One expects that the heating rate converges towards Eq. (7) when temperature becomes much smaller than  $\hbar\omega$  and  $\hbar^2/(ml_c^2)$ .

In the following, we give quantitative results in the case of a potential roughness obtained at large distance  $d$  from a flat wire whose borders have white noise fluctuations of spectral density  $J_f$ . In this condition, the spectral density of  $u$  is given by [9, 10]

$$S(k) = J_f \frac{(\mu_0 \mu I)^2}{4\pi^2} k^4 K_1(kd)^2 \quad (10)$$

where  $K_1$  is the modified Bessel function of the first kind. The typical correlation length of  $u$  is the distance above the wire  $d$  so that  $E_m = m\omega^2 d^2$ . The mean square of the rough potential is  $\langle u^2 \rangle \simeq 0.044(\mu\mu_0 I)^2 J_f / d^5$ . In the following we use  $\langle u^2 \rangle$  as a parameter instead of  $J_f$ . The spectral density of  $u$  then writes

$$S(k) = \alpha \langle u^2 \rangle d(kd)^4 K_1(kd)^2, \quad (11)$$

where  $\alpha \simeq 23$ .

We first study the heating rate predicted by classical physics. This classical heating rate is plotted in Fig.3(a) as a dashed line. The temperature and heating rate are scaled to  $E_m$  and  $\omega \langle u^2 \rangle / E_m$  respectively in the graph so that the curves corresponding to the classical predictions are independent of the problem parameters. We observe the expected decrease to zero of the heating rate at high temperatures. We also observe a rapid decrease of the heating rate as temperature decreases, for temperatures much smaller than  $E_m$ . The maximum heating rate is about  $2.1 \langle u^2 \rangle / (m\omega d^2)$  and is obtained for the temperature  $k_B T_M \simeq 0.07 E_m$ . For  $d = 5 \mu\text{m}$  and  $\omega/(2\pi) = 50 \text{ kHz}$ , which are parameters similar to that of the experiment presented in [1],  $T_M = 1.8 \text{ mK}$ . Typical cold atoms temperatures are much smaller than this value and it is thus of experimental interest to investigate in more detail the regime  $T \ll T_M$ .

The decrease of the heating rate for  $T \ll T_M$  is expected since then the atoms move on a distance much smaller than the correlation length of the rough potential during a modulation period. The atoms are then locally subjected to an oscillating force almost independent of  $z$  and the atomic motion can be decomposed into a fast micro-motion in phase with the modulation and a slow motion. The micro-motion being almost in phase with the excitation force, barely no energy exchange between the atom and the potential arises on a time scale larger than the modulation period. More quantitatively, we can derive an analytical expression of the heating rate in the regime where  $T \ll T_M$ , which shows the decrease of the heating rate as temperature decreases. For such low temperatures, as shown *a posteriori* below, wave vector of  $S$  that contribute to the heating rate are much larger than  $1/d$  so that we can replace the Bessel function  $K_1(x)$  in Eq. (11) by its asymptotic value at large  $x$ . We then find that the integrand in Eq. (8) is peaked around  $v_0 = 2^{1/3} (k_B T \sqrt{E_m})^{1/3} / m$  and the Laplace method gives the following approximation of the heating rate:

$$\frac{k_B dT}{dt} = \beta \frac{\omega \langle u^2 \rangle}{E_m} \left( \frac{E_m}{k_B T} \right)^{7/3} e^{-3(E_m / (2k_B T))^{1/3}} \quad (12)$$

where  $\beta \simeq 0.36$ . This asymptotic function is plotted in Fig.3 (a) (solid line). It coincides with the exact classical result within 20% as long as  $k_B T < 0.002 E_m$ . The above expression of  $v_0$  and Eq. (5) validate the expansion at large  $x$  of the Bessel function  $K_1(x)$  for  $T \ll T_M$ .

The limit of validity of the classical results described above is given by  $E_\omega / E_c \ll 1$  and  $E_\omega E_m^{1/2} / E_c^{3/2} \ll 1$ , where  $E_c \simeq mv_0^2$ ,  $v_0$  being the typical velocity involved in the heating process. Using the above value for  $v_0$ , the condition of validity of the classical regime reduces, for  $E_\omega \ll E_m$ , to  $k_B T \gg E_\omega$ . For  $\omega/(2\pi) = 50 \text{ kHz}$ , we find that the classical regime fails for temperatures  $T \ll 2 \mu\text{K}$ . At lower temperatures, quantum analysis is required to estimate the heating rate.

For the parameters chosen above ( $d = 5 \mu\text{m}$  and  $\omega/(2\pi) = 50 \text{ kHz}$ ),  $E_m / E_\omega = 10^4$  and the heating

rate is exponentially small at temperatures smaller than a micro-Kelvin when classical physics fails (the term  $e^{-3(E_m/(2k_B T))^{1/3}}$  in Eq. (12) is  $3 \times 10^{-31}$  for  $T = 1 \mu\text{K}$ ). Thus, in order to investigate the heating rate beyond the classical approximation, we consider a different situation for which  $E_m/E_\omega$  is only equal to 200. This would correspond, for the same distance  $d = 5 \mu\text{m}$ , to a modulation frequency of only 1 kHz. The exact heating rate, which is computed by substituting Eq. (4) into Eq. (8), is plotted in Fig.3 (b). This calculation shows that the classical result is valid up to a factor of 2 as long as  $k_B T > 0.2E_\omega$ . At smaller temperatures, the classical result underestimates the heating rate. At temperature much smaller than  $E_\omega^{3/2}/\sqrt{E_m}$ , the heating rate is well approximated by the predictions in the low energy quantum limit where Eq. (6) is valid. This prediction is represented as a dotted line in the graph. At temperatures much smaller than  $E_\omega^2/E_m$  (i.e. for  $k_B T \ll \hbar^2/(md^2)$ ), the heating rate converges towards Eq. (7). Assuming  $E_m/E_\omega \gg 1$ , then the expansion of  $S$  at large wave vector can be used and Eq. (7) gives

$$k_B dT/dt = \zeta \langle u^2 \rangle / \hbar (m\omega d^2 / \hbar)^2 e^{-2\sqrt{m\omega d^2 / \hbar}} \quad (13)$$

where  $\zeta \simeq 4.0$ . This asymptotic value is plotted in Fig.3 as dashed-dotted lines. The heating rate is equal to this limit up to a factor of 2 as soon as  $k_B T < 0.2E_\omega^2/E_m$ .

The heating of the atomic cloud can easily be made small enough experimentally to have no noticeable effects. Let us for example consider the situation, similar to the experiment in [1], where  $d = 5 \mu\text{m}$  and  $\sqrt{\langle u^2 \rangle} = 50 \text{ nK}$ . If the modulation frequency is as low as 1 kHz, then the maximum heating rate is  $3 \mu\text{K/s}$  and is obtained for a temperature of 700 nK. Thus, for such a low modulation frequency, the heating may be a problem in experiments. However, as soon as the modulation frequency is increased to 50 kHz, as in [1], the maximum heating rate is only of 64 nK/s and is obtained at a large temperature of 1.8 mK. At lower temperature, the exponential decrease of the heating rate shown in Eq. (12) rapidly decreases the heating rate to completely negligible values.

### B. Effective remaining potential

In this subsection, we show that Raman processes (of second order in  $u$ ), in which adjacent Floquet states are virtually populated, are responsible for the effective potential

$$V_{ad} = (\partial_z u)^2 / (4m\omega^2). \quad (14)$$

This potential is a well known classical result [15] that corresponds to the kinetic energy of the micro-motion of the atom. At large oscillation frequency, the micro-motion has an amplitude  $\xi \simeq -\partial_z u / (m\omega^2) \cos(\omega t)$  much smaller than the correlation length of  $u$ . It is in phase

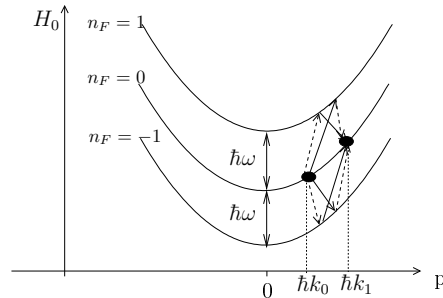


FIG. 4: Raman transitions responsible for the adiabatic potential of Eq. (14). The second order coupling between two momentum states of wave vector  $k_0$  and  $k_1$  is sketched. The coupling produced by two Fourier components of  $u$  of wave vector  $q$  and  $q' = k_1 - q - k_0$  are represented as dashed and solid arrows respectively.

with the excitation force and has a kinetic energy  $V_{ad}$ . In this limit, since the micro-motion is in phase with the excitation force, the energy transfer between the atom and the potential, averaged over a modulation period, vanishes. Energy conservation then shows that the slow motion of the atom is subjected to an effective rough potential  $V_{ad}$ . It is well known that this effective potential, due to the fast atomic micro-motion, is responsible for the confinement in rapidly modulated Paul traps. A quantum derivation of  $V_{ad}$  has already been done in [13] using a secular approximation. Here we give an alternative derivation based on the Floquet representation.

Let us compute the effective coupling between the states  $|k_0\rangle$  and  $|k_1\rangle$  of momentum  $\hbar k_0$  and  $\hbar k_1$  respectively, both being in the Floquet subspace  $n_F = 0$ . For this purpose, we first investigate the effect of a given pair of Fourier components of  $u$  that couple the two previous states. Their wave vectors are  $q$  and  $q' = k_1 - k_0 - q$ . Four processes are involved in the effective coupling between  $|k_0\rangle$  and  $|k_1\rangle$ , as sketched in Fig.4 and the effective coupling is the sum of the four amplitudes. The precise effective coupling between two “ground” states coupled via an intermediate level has been investigated in [16]. The authors show that the effective coupling is  $V_1 V_2 / \Delta$  where  $V_1$  and  $V_2$  are the coupling to the intermediate state and  $\Delta$  is the difference between the energy of the intermediate state and the mean energy of the two “ground” states. Using this result, we find that the effective coupling associated with each process is

$$v_{\text{eff}} = u_q u_{q'} / (4(\hbar^2(k_0 + \kappa)^2) / (2m) \pm \hbar\omega - E_0), \quad (15)$$

where  $\kappa$  is  $q$  or  $q'$  depending on the process and  $E_0 =$

$\hbar^2(k_0^2 + k_1^2)/(4m)$ . Adding the four amplitudes, we find

$$V_{\text{eff}} = \frac{u_q u_{q'}}{4} \left( \frac{\hbar^2(k_0 + q)^2/m - 2E_0}{(\hbar^2(k_0 + q)^2/(2m) - E_0)^2 - \hbar^2\omega^2} + \frac{\hbar^2(k_0 + q')^2/m - 2E_0}{(\hbar^2(k_0 + q')^2/(2m) - E_0)^2 - \hbar^2\omega^2} \right). \quad (16)$$

Assuming that the kinetic energies of the final, initial and intermediate states are all much smaller than  $\hbar\omega$ , the denominator can be simplified to  $\hbar^2\omega^2$  and we obtain

$$V_{\text{eff}} = \frac{u_q u_{q'} q q'}{2m\omega^2}. \quad (17)$$

Doing the sum over the pairs  $(q, q')$ , we find that the coupling between the momentum states is that realised by the potential of Eq. (14).

An alternative way to derive the adiabatic potential is to use a dressed Floquet representation. As shown in appendix B, calculations are more straightforward in this representation and no detailed knowledge on the effective coupling corresponding to a transition through a virtually populated state is required.

The residual roughness given in Eq. (14) constitutes a limitation of the modulation method. It scales as  $\langle u^2 \rangle / (ml_c^2\omega^2)$  where  $l_c$  is the typical correlation length of  $u$ . Thus it is much smaller than the initial roughness amplitude as soon as  $u_{rms} \ll ml_c^2\omega^2$ . In the case where the roughness potential spectral density is that obtained at large distance  $d$  from a wire having white noise border fluctuations of spectral density  $J_f$ , we obtain a mean value

$$\langle V_{\text{eff}} \rangle = 0.048 J_f \frac{(\mu_0 \mu I)^2}{m\omega^2 d^7} = 1.1 \langle u^2 \rangle / (m\omega^2 d^2). \quad (18)$$

If the wire edges deformations have a gaussian probability distribution, then the roughness of the remaining potential is simply  $\sqrt{\langle V_{\text{eff}}^2 \rangle} - \langle V_{\text{eff}} \rangle^2 = \sqrt{2} \langle V_{\text{eff}} \rangle$ . For  $d = 5 \mu\text{m}$ ,  $\omega/(2\pi) = 50 \text{ kHz}$  and  $\langle u^2 \rangle/k_B = 500 \text{ nK}$ , the roughness of the effective remaining potential is as small as  $0.09 \text{ nK}$ .

#### IV. LOSSES DUE TO SPIN-FLIP TRANSITIONS

All the previous analysis assume the atomic spin can adiabatically follow the direction of the instantaneous field when the current is modulated. In this section, we investigate the conditions on the modulation frequency for this adiabatic following condition to be valid. Non adiabaticity induces losses via spin-flip transitions to the untrapped states. Intuitively, we expect that the losses are small for a modulation frequency much smaller than the Larmor frequency. In the following we compute this loss rate, following calculations made in [17] for the DC-case.

Let us consider a spin-one atom in the modulated guide described in section II with  $\omega \gg \omega_\perp$ . We choose a coordinate system whose origin is at the quadrupole field

center and of axis  $x$  and  $y$  at  $45^\circ$  with the quadrupole axis as depicted in Fig.1. We assume the atomic magnetic moment is  $\mu\mathbf{J}/\hbar$  where  $\mathbf{J}$  is the atomic spin angular momentum of components  $J_x, J_y$  and  $J_z$  along  $x, y$  and  $z$  respectively. We note  $|\pm 1\rangle$  and  $|0\rangle$  the eigenstates of  $J_z$  of eigenvalues  $\pm\hbar$  and  $0$ , respectively.

The magnetic field direction depends on the position and on time. We apply a spatially and time dependent spin rotation  $\mathcal{R}(t, x, y)$  so that  $\mathcal{R}|1\rangle$  points along the instantaneous local magnetic field direction. In such a representation, the Hamiltonian is

$$H = \mathcal{R}^{-1} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \mathcal{R} + U J_z / \hbar + i\hbar \frac{d\mathcal{R}^{-1}}{dt} \mathcal{R} \quad (19)$$

where

$$U = \mu B_0 + m\omega_\perp^2 \cos^2(\omega t)(x^2 + y^2)/2. \quad (20)$$

Here we assume  $m\omega_\perp^2(x^2 + y^2) \ll \mu B_0$  so that the harmonic approximation is valid. We also neglect the effect gravity. This later assumption is relevant as soon as  $g \ll l_\perp \omega_\perp^2$  where  $l_\perp = \sqrt{\hbar/(m\omega_\perp)}$  is the harmonic oscillator length. This condition ensures that the time-averaged potential is barely affected by the gravity and that the acceleration of the atoms over the spatial extension of the trapped state has a negligible effect.

We choose the rotation  $\mathcal{R}$  as a product of a rotation along  $x$  and a rotation along  $y$ . To first order in  $x$  and  $y$ ,  $\mathcal{R}$  is

$$\mathcal{R} = 1 + i\theta_x J_x / \hbar + i\theta_y J_y / \hbar. \quad (21)$$

where the angles of the rotations along  $x$  and  $y$  are  $\theta_x = -b'x \cos(\omega t)/B_0$  and  $\theta_y = b'y \cos(\omega t)/B_0$  respectively. Here  $b' = \omega_\perp \sqrt{2mB_0}/\mu$  is the quadrupole gradient at maximum current. Calculation to first order in  $\theta_x, \theta_y$  gives

$$\mathcal{R}^{-1} \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \mathcal{R} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V_k \quad (22)$$

where

$$V_k = \frac{\sqrt{2}b' \cos(\omega t)}{B_0} (p_x - ip_y)|0\rangle\langle 1| + h.c. \quad (23)$$

and  $h.c.$  stands for hermitian conjugate. Here, we ignore the state  $|-1\rangle$ , which is relevant for low enough coupling (see below). The term  $V_k$ , due to the fact that  $\mathcal{R}$  depends on the position, is responsible for spin-flip losses in time independent ioffe magnetic traps [17]. Within the approximations made, the position dependence of  $\mathcal{R}$  has no effect on the Hamiltonian within the spin state  $|1\rangle$  manifold: the Coriolis coupling analysed in [20], that corresponds to a rotation frequency proportional to  $b'^2$ , is not seen in this calculation.

Similar calculations give

$$i\hbar \frac{d\mathcal{R}^{-1}}{dt} \mathcal{R} = \frac{\hbar\omega b'}{\sqrt{2}B_0} \sin(\omega t)(x - iy)|0\rangle\langle 1| + h.c. \quad (24)$$

This term, due to the time modulation of the local spin orientation, may also produce spin-flip losses in modulated traps. The condition  $\omega \gg \omega_\perp$  ensures that the term of Eq. (24) has an effect much larger than the term of Eq. (23) and we neglect the latter in the following.

As in the previous section, we use the Floquet representation. The Hamiltonian  $H$  in the manifold of spin state  $|1\rangle$  is decomposed into the term

$$H_0 = \sum_{n_F=-\infty}^{\infty} (p^2/2m + m\omega_\perp^2(x^2 + y^2)/4 + n_F\hbar\omega) |1, n_F\rangle \langle 1, n_F| \quad (25)$$

and the term

$$H_2 = m\omega_\perp^2(x^2 + y^2)/4 \left( \sum_{n_F=-\infty}^{\infty} |1, n_F + 2\rangle \langle 1, n_F| + h.c. \right) \quad (26)$$

that couples the Floquet state to the Floquet states  $n_F \pm 2$ . Here,  $|1, n_F\rangle$  is the state vector of an atom in the spin state  $|1\rangle$  with the Floquet number  $n_F$ . The term  $H_2$  is due to the part of Eq. (19) that is proportional to  $\cos(2\omega t)$ . Since we assumed  $\omega \gg \omega_\perp$ , the effect of  $H_2$  is weak and can be treated perturbatively.

We will compute the loss rate of an atom initially in the spin state  $|1\rangle$  of Floquet number  $n_F = 0$  and in the ground state  $\phi_0$  of  $H_0$ . The term of Eq. (24) couples this trapped state to the untrapped spin states  $|0\rangle$  of Floquet numbers  $n_F = \pm 1$ . The energy spectrum of the spin state  $|0\rangle$ , which is unaffected by the magnetic field, is a continuum. Coupling to this continuum leads to a departure rate from the initial state, provided the Markov approximation is fulfilled [18]. This approximation also ensures that the state  $|-1\rangle$  can be neglected. We will show below that losses to the Floquet manifold  $n_F = +1$  are much larger than losses to the Floquet manifold  $n_F = -1$ . Thus, we consider in the following the final states in the manifold  $n_F = +1$ . Since  $i\hbar \frac{d\mathcal{R}^{-1}}{dt} \mathcal{R}$  does not affect the longitudinal motion, we concentrate on the transverse degrees of freedom and normalise  $\phi_0$  to  $\iint dx dy |\phi_0|^2 = 1$ . In addition, because  $i\hbar \frac{d\mathcal{R}^{-1}}{dt} \mathcal{R} \phi_0$  is, up to a phase factor  $e^{i\theta}$ , invariant under rotation of angle  $\theta$  in the  $xy$  plane, the losses to spin 0 states are isotropic in the  $xy$  plane. It is thus sufficient to compute the departure rate towards a plane wave travelling in the  $x$  direction. The final state wave vector is

$$k_f = \sqrt{2m(\mu B_0 + \hbar\omega_\perp/\sqrt{2} - \hbar\omega)/\hbar}, \quad (27)$$

and the Fermi Golden rule gives the departure rate

$$\Gamma_0 = \sqrt{2}\pi \frac{\omega^2}{m\mu B_0 \omega_\perp} \hbar k_f^2 e^{-\sqrt{2}\hbar k_f^2/(m\omega_\perp)}. \quad (28)$$

The departure decreases exponentially with the bias field  $B_0$ , as for a usual time independent ioffe trap [17]. However, in the modulated trap, an additional exponential factor in  $\omega/\omega_\perp$  reflects the fact that the Floquet level is

increased by one while the spin is flipped. This transition is associated with the ‘‘emission’’ of a quantum of energy  $\hbar\omega$ , given to the oscillating magnetic field. Equation (28) also shows that the departure rate goes to zero for a modulation frequency very close to the frequency  $\mu B_0/\hbar + \omega_\perp/\sqrt{2}$ , *i.e.* for vanishing  $k_f$ . This cancellation is due to the fact that the coupling term of Eq. (24) is odd in  $x$  whereas the initial state is even and the final state, whose wave vector is vanishing, is flat. The departure rate towards the Floquet state  $n_F = -1$  is identical to Eq. (28),  $\omega$  being replaced by  $-\omega$ . Since we assumed  $\omega \gg \omega_\perp$ , the loss rate towards the Floquet state  $n_F = -1$  is negligible compared to Eq. (28).

The condition  $\omega \gg \omega_\perp$  and Eq. (28) show that the loss rate is exponentially small when  $\omega$  reaches  $\omega_1 = (\mu B_0/\hbar + \omega_\perp/\sqrt{2})/3$ , the value for which the initial state has the same energy as the untrapped state of Floquet number  $n_F = 3$  and of vanishing momentum. For modulation frequencies smaller than  $\omega_1$ , second order processes resonantly couple the initial state to the untrapped state  $|0\rangle$  of Floquet number  $n_F = 3$ . In these processes, represented in Fig.5, the term  $H_2$  of Eq. (26) first transfers the atoms in the virtually populated intermediate trapped state  $|1\rangle$  of Floquet number  $n_F = 2$  before the term  $i\hbar \frac{d\mathcal{R}^{-1}}{dt} \mathcal{R}$  realizes the transfer to the untrapped state  $|0\rangle$  of Floquet number  $n_F = 3$ . Although  $H_2$  is weak, the loss rate associated with the second order processes is much larger than the exponentially small  $\Gamma_0$ .

More generally, for a given modulation frequency, losses are dominated by transitions towards untrapped states of Floquet number  $n_F = 2n + 1$  where  $n = E((\mu B_0/\hbar + \omega_\perp/\sqrt{2})/(2\omega) - 1/2)$ , the function  $E(x)$  being the integer part of  $x$ . Those transitions correspond to processes where the atoms is first brought to the intermediate state  $|1\rangle$  of Floquet number  $n_F = 2n$  by  $n$  transitions produced by the term  $H_2$  and is then transferred to the untrapped state  $|0\rangle$  of Floquet number  $n_F = 2n + 1$  by the term  $i\hbar d\mathcal{R}^{-1}/dt \mathcal{R}$  of Eq. (24). Perturbation theory gives an effective coupling between the state  $|1\rangle$  of Floquet number  $n_F = 0$  and the states  $|0\rangle$  of Floquet number  $n_F = 2n + 1$  which is

$$U_n = -i \frac{\hbar\omega b'(x - iy)}{n! \sqrt{2} B_0} (m\omega_\perp^2(x^2 + y^2)/(16\hbar\omega))^n. \quad (29)$$

The eigenstates of  $H_0$  in the virtual intermediate states do not appear because, since we assumed  $\omega \gg \omega_\perp$ , the energy difference between the intermediate states is negligible and a resummation is possible.

The departure rate from the initial state towards the Floquet state  $n_F = 2n + 1$  is computed from  $U_n$  using the Fermi Golden Rule. As for the calculation of  $\Gamma_0$ , it is sufficient to compute the departure rate in the  $x$  direction and we obtain

$$\Gamma_n = \frac{m\omega^2 b'^2}{8\hbar B_0^2} \frac{(m\omega_\perp^2)^{2n}}{n!(16\hbar\omega)^{2n}} \left| \iint dx dy (x - iy) e^{ik_f x} \phi_0(x, y) (x^2 + y^2)^n \right|^2 \quad (30)$$

where  $k_f = \sqrt{2m(\mu B_0 + \hbar\omega_\perp/\sqrt{2} - (2n + 1)\hbar\omega)/\hbar}$  is

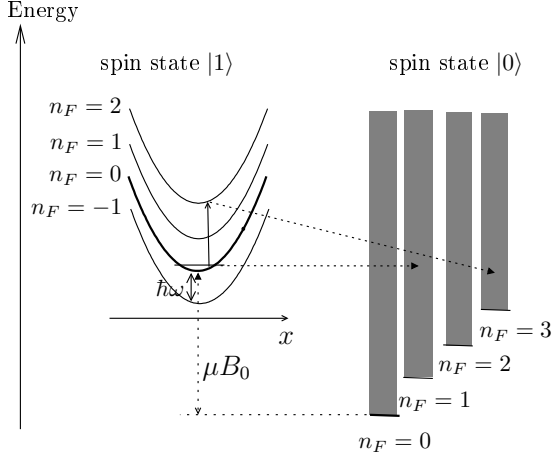


FIG. 5: Transitions responsible for spin flip losses. For the spin state  $|1\rangle$ , the potential energy term of Eq. (25) is represented as well as the energy of the ground state in the  $n_F = 0$  manifold. For the spin state  $|0\rangle$ , we represented, for each Floquet manifold  $n_F$ , the whole energy spectrum, which is a semi-continuum starting at an energy  $n_F \hbar \omega$ . The transitions induced by the term of Eq. (24) are shown as dotted arrows whereas transitions due to the term  $H_2$  of Eq. (26) are shown as solid lines. The initial state is the spin state  $|1\rangle$  of Floquet number  $n_F = 0$ . For the two final Floquet states  $n_F = 1$  and  $n_F = 3$ , only the dominant processes are sketched, whose amplitude are  $U_0$  and  $U_1$  respectively, where  $U_n$  is given in Eq. (29). In this picture, the odd Floquet state of  $|0\rangle$  the closest to resonance corresponds to  $n_F = 3$  and losses are dominated by  $\Gamma_1$ , where  $\Gamma_n$  is given in Eq. (30).

the wave vector of the final state. Using the gaussian expression for the ground state  $\phi_0(x, y)$  in Eq. (30), we can show that  $\Gamma_n$  is the product of a polynomial in  $k_f$  and of the exponential factor  $e^{-\sqrt{2} \hbar k_f^2 / (m \omega_\perp)}$ . The minima of the polynomial correspond to destructive interferences between the amplitude probabilities of paths having different intermediate vibrational states. Since  $\hbar k_f^2 / m$  is reduced by  $4\omega$  when increasing  $n$  by one and since we assumed  $\omega \gg \omega_\perp$ , the exponential factor ensures, as stated above, that the total loss rate is dominated by the departure towards the highest Floquet subspace.

Figure 6 gives the departure rate of the trapped ground state as a function of  $\omega$  for  $\mu B_0 = 50 \hbar \omega_\perp$ . We observe several peaks that reflect the resonance behavior at integer values of  $(\mu B_0 + \omega_\perp / \sqrt{2} - \omega) / (2\omega)$ . The height of the resonances goes down with the integer  $n$  as expected since the order of the transition increases with  $n$ . We verify that the loss rate is dominated by the losses towards the Floquet state of highest odd Floquet number, as expected. Between two resonances, we observe the expected exponential decrease of the loss rate. We observe a structure in the loss rate for losses to Floquet state larger than one, as expected.

The lifetime of a thermal Maxwell-Boltzmann distri-

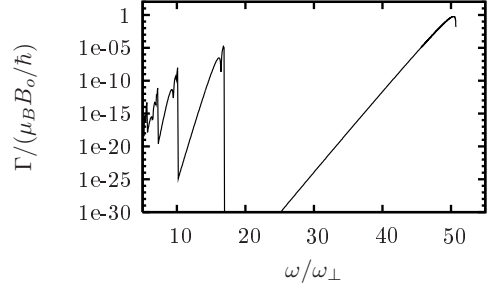


FIG. 6: Loss rate from the vibrational ground state versus the modulation frequency. The longitudinal magnetic field and the quadrupole gradient are chosen so that  $\mu B_0 / (\hbar \omega_\perp) = 50$ .

bution is obtained after averaging the loss rate over the thermal distribution. In this calculation,  $\phi_0$  in Eq. (30) is replaced by the eigenstate  $\phi_i(x) \phi_j(y)$ , where  $i$  and  $j$  denotes the vibrational level. Neglecting changes of the final energy  $\hbar^2 k_f^2 / (2m)$  across the thermal distribution, we can compute the departure rate  $\Gamma_0$  for a Maxwell-Boltzmann distribution. More precisely, writing Eq. (30) as a fourth integral and using properties of Wigner functions we find, for temperatures  $k_B T \gg \hbar \omega_\perp$ ,

$$\Gamma_0 = \frac{\pi^3}{2} \omega_\perp \frac{\hbar^3 \omega_\perp \omega^2}{(k_B T)^3} e^{-(\mu B_0 - \hbar \omega) / (k_B T)}. \quad (31)$$

Because of the crude approximation that the final energy does not depend on the initial state, this result is only valid up to a factor of the order of unity.

Experimentally, spin flip losses can easily be avoided by properly choosing the modulation frequency. For example, let us assume the transverse oscillation frequency of the instantaneous trap at maximum current is  $\omega_\perp / (2\pi) = 50$  kHz and the longitudinal magnetic field fulfills  $B_0 = 50 \hbar \omega_\perp / \mu$ . If  $\mu = \mu_B$  where  $\mu_B$  is the Bohr magneton, this corresponds to  $B_0 = 1.8$  G and the Larmor frequency  $\mu B_0 / \hbar$  is 2.5 MHz. In these conditions, the loss rate is dominated the term  $\Gamma_0$  of Eq. (28) as long as the oscillation frequency is larger than 0.84 MHz and, in this frequency range, it is smaller than  $1 \text{ s}^{-1}$  as soon as  $\omega < 2.2$  MHz. For  $\omega < 0.84$  MHz, losses become dominated by transitions towards states of higher Floquet number and the loss rate is peaked at modulation frequencies close to integer values of  $\mu B_0 / (2 \hbar \omega) + \omega_\perp / (2 \sqrt{2} \omega) - 1/2$ . In particular, loss rate goes up to about  $25 \text{ s}^{-1}$  for a modulation frequency close to 0.8 MHz. Thus, the vicinity of this resonance should be avoided experimentally. Resonances of higher order are less problematic since the maximum loss rate they induce is smaller than  $0.1 \text{ s}^{-1}$ .

## V. RADIO-FREQUENCY EVAPORATION IN THE MODULATED GUIDE

In this section we present general considerations on forced evaporation in a modulated guide. Since evapo-



rative cooling is most efficiently realised in a 3D trap, longitudinal confinement is required. A 3D trap can be obtained from the modulated guide of section II by applying a  $z$ -dependent constant longitudinal field  $B_0(z)$ . Here, we consider evaporation in the transverse plane ( $xy$ ) at a given  $z$  position and denote as  $B_0$  the longitudinal magnetic field. For this purpose, in addition to the previous trapping potential, we apply a weak radio frequency magnetic field polarized in the  $x$ -direction, of frequency  $\omega_{RF}$  and of amplitude  $B_{RF}$ . We consider here an atom of magnetic moment  $\mu\mathbf{J}/\hbar$ , where  $\mathbf{J}$  is the atomic spin angular momentum.

Let us first give simple predictions, that rely only on the fact that, because of the modulation at  $2\omega$  of the trapping potential, the atomic Larmor frequency is modulated in time. The modulation amplitude  $\delta\Omega$  increases, in the transverse plane, with the distance  $r$  from the trap center according to  $\delta\Omega = \mu b'^2 r^2 / (4\hbar B_0)$ . Considering only the internal atomic dynamics at a given position, the modulation of the Larmor frequency is equivalent, within the rotating wave approximation, to a frequency modulation of the radio-frequency field. In this picture, the radio frequency spectrum consists of a carrier at the frequency  $\omega_{RF}$  and side-bands spaced by  $2\omega$ , the relative amplitude of the  $n^{\text{th}}$  sideband with respect to the carrier being  $J_n(\mu(b'r)^2 / (8B_0\hbar\omega))$ , where  $J_n$  is the Bessel function of the first kind. Thus, for a given frequency of the applied RF field, the coupling to the untrapped state is resonant for the positions  $r_n$  such that

$$\omega_{RF} = \mu B_0 / \hbar + \mu b'^2 r_n^2 / (4B_0) - 2n\omega, \quad (32)$$

where  $n$  is a integer. The coupling between the spin states close to a resonance position  $r_n$  is

$$V_n = V_0 J_n(\mu(b'r)^2 / (8B_0\hbar\omega)) \quad (33)$$

where  $V_0$  is the coupling produced by the radio-frequency field in the absence of modulation. Such a shell structure of the spin flip transition resonances is characteristic of AC magnetic traps. For example, the same behavior is expected in TOP traps [19], where the Larmor frequency is also modulated in time.

In the following, we verify the statements made above by a more rigorous derivation. As in the previous section, we consider the representation in which the spin up state points along the local instantaneous magnetic field. The RF field produces a term in the Hamiltonian experienced by the atoms which is, to first order in the angles  $\theta_x = -b'x \cos(\omega t) / B_0$  and  $\theta_y = b'y \cos(\omega t) / B_0$ ,

$$H_{RF} = \mu B_{RF} \cos(\omega_{RF} t) J_x - \mu B_{RF} b' y / B_0 \cos(\omega_m t) \cos(\omega_{RF} t) J_z. \quad (34)$$

The right hand side is divided in two terms. The first term (first line) corresponds to the usual coupling between the spin states in the presence of the RF field. The second term (second line) appears due to the time dependence of  $\mathcal{R}$ . As in the previous section, in the following we consider the case of a spin one state and we

restrict ourself to the two spin states  $|1\rangle$  and  $|0\rangle$ . We then have  $H_{RF_1} = H_{RF_1} + H_{RF_2}$ , where

$$H_{RF_1} = \mu B_{RF} \cos(\omega_{RF} t) (|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|) / \sqrt{2} \quad (35)$$

and

$$H_{RF_2} = -\frac{\mu B_{RF} b' y}{B_0} \cos(\omega_m t) \cos(\omega_{RF} t) |1\rangle\langle 1|. \quad (36)$$

To analyze the effects of the RF field, we use the Floquet representation where two quantum number are used: the Floquet number  $n_F$  associated to the modulation frequency  $\omega$  and  $N_{RF}$ , the number of radio-frequency photons. We consider an atom in the trapped spin  $|1\rangle$  state, with  $N_{RF}$  radio frequency (RF) photons. Because  $B_{RF}$  is weak, we only consider transitions involving a single RF photon and we only consider transitions to the quasi-resonant states where the spin is 0 and the number of RF photons is  $(N_{RF} - 1)$ .

Let us suppose the initial trapped state is in the  $n_F = 0$  manifold. The term  $H_{RF_1}$  couples the initial state to the spin 0 state in the manifold  $|N_{RF} - 1, n_F = 0\rangle$ . This transition is resonant for the position  $r_0$  given by Eq. (32) and the coupling to the spin 0 state is  $\mu B_{RF} / \sqrt{2}$ . The initial state can also be transferred to the spin 0 state in the  $|N_{RF} - 1, n_F = \pm 2\rangle$  manifolds by higher order processes. These transitions, resonant for the position  $r_{\pm 1}$  given by Eq. (32), can occur via two kind of processes, represented in Fig.7 in the case where the final state lies in the manifold  $n_F = 2$ . In the first process,  $H_2$  of Eq. (26) couples the initial state to the spin 1 state in the manifold  $|N_{RF}, n_F = \pm 2\rangle$ , which is then transferred by the term  $H_{RF_1}$  to the spin 0 final state (process a). In the second kind of processes (process b), the transfer from the spin state 1 to the spin state 0 is ensured by the term  $i\hbar \frac{d\mathcal{R}^{-1}}{dt} \mathcal{R}$  of the Hamiltonian (see Eq. (24)), and the term  $H_{RF_2}$  of the radio-frequency coupling is involved. In the case where  $\omega \ll \mu B_0 / \hbar$ , the process (b) have a negligible amplitude and only the process (a) is important.

In a more general way, the initial state can be transferred to the final state of odd Floquet number  $n_F = 2n$ , the transitions being resonant at the positions  $r_n$  given by Eq. (32). The dominant processes involve the first term  $H_{RF}$  given in Eq. (32) and the term  $H_2$  to order  $n$ . The effective coupling between the trapped state and the spin 0 state of Floquet number  $2n$ , computed to lowest order in  $H_2$ , is

$$V_{n,eff} = \frac{(-1)^n}{n!} \left( \frac{\mu b'^2 r^2}{16B_0\hbar\omega} \right)^{|n|} \frac{\mu B_{RF}}{\sqrt{2}}. \quad (37)$$

We recover here the result of Eq. (33), in the limit considered here where  $\hbar\omega \gg \mu b'^2 r^2 / (8B_0)$ . Thus the simple description in terms of frequency modulation of the Larmor frequency is sufficient to describe the physics.

In conclusion, we have shown that the radio-frequency field is resonant for different trap locations, whose potential energy differ by  $2\hbar\omega/k_B$ . For a modulation frequency



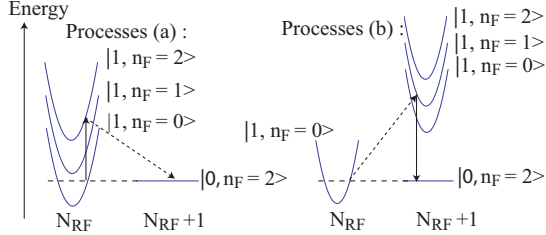


FIG. 7: Processes involved in the transition from the trapped state  $|1, n_F = 0, N_{RF}\rangle$  to the untrapped state  $|0, n_F = 2, N_{RF} - 1\rangle$ . The process (a) involves the Hamiltonian  $H_2$  of Eq. (26) (solid line) and the term  $H_{RF_1}$  of Eq. (35) (dashed line). The process (b) involves the term  $H_{RF_2}$  of Eq. (36) (dashed line) and the term  $i\hbar\partial\mathcal{R}^{-1}/\partial t\mathcal{R}$  of Eq. (24) (solid line). For  $\omega \ll \mu B_0$ , the process (a) is the dominant one.

of 50 kHz, the potential energy difference between two resonances is  $3 \mu\text{K}$ . For a temperature of the order of  $3 \mu\text{K}$  or higher, some resonances are present inside the atomic cloud and induce spin-flip losses. To overcome this problem, a precooling stage in a static trap down to temperatures smaller than  $3 \mu\text{K}$  is required. For clouds whose temperature is smaller than  $3 \mu\text{K}$ , the evaporation process in the modulated guide involves only one radio-frequency knife, so that the evaporative cooling is similar to that realised in a trap made by DC currents. Choosing the frequency of the radio frequency field so that the transition involved in the cooling process is the transition that does not change the Floquet number is interesting for two reasons. First, as shown in Eq. (37), the coupling between the trapped and the untrapped state of this transition is larger than that of higher order transitions that change the Floquet number. Second, this coupling is homogeneous and is thus constant when  $\omega_{RF}$  is chirped.

## VI. CONCLUSION

The careful study of the limitations of the modulation technique to smooth wire guide roughness performed in this article show that this technique is very robust and accepts a wide range of modulation frequencies. More precisely, on one side, we have shown that the unwanted effects of the modulation on the longitudinal motion are negligible for realistic parameters as soon as modulation frequency is larger than 10 kHz: both the heating of the cloud and the remaining effective roughness are very small. On the other side, the calculation of the losses due to spin flip transitions shows that, for realistic parameters, these losses are negligible as soon as the modulation frequency is smaller than a few hundred of kHz.

The modulation technique is thus a very promising tools that should enable to fully take advantage of atom chips devices. In particular, the study of one-dimensional gases in the strong interaction regime on

an atom chip can be considered.

## VII. ACKNOWLEDGMENT

The authors thank K. Mølmer for helpful discussions. The Atom Optic group of Laboratoire Charles Fabry is part of the IFRAF insitute. This work was supported by the EU under the grants No MRTN-CT-2003-505032 and IP-CT-015714.

## APPENDIX A: DERIVATION OF THE ENERGY CHANGE RATE

The derivation of the heating rate follows that of the Fermi Golden rule. For the calculation, we assume a quantification box of size  $L$  and periodic boundary conditions. We assume the atom is initially in the state of momentum  $p_0$  in the Floquet subspace  $n_F = 0$ . For simplicity we consider only the transitions towards the Floquet state  $n_F = -1$ . After a time  $t$  much smaller than the departure rate, the change in kinetic energy  $\Delta E$  can be deduced from perturbation theory and we obtain

$$\Delta E = \sum_q |u_q|^2 f(q, t). \quad (\text{A1})$$

Here  $u_q = \int dz u(z) e^{iqz}/L$  is the Fourier component of wave vector  $q$  of  $u(z)$  and

$$f(q, t) = (\epsilon - \hbar\omega) \frac{\sin^2(\epsilon t/2)}{\epsilon^2}, \quad (\text{A2})$$

where  $\epsilon = \hbar\omega + \hbar^2 q^2/(2m) + \hbar p_0 q/m$  is the energy change associated to the transition involving the Fourier component of  $u$  of wave vector  $q$ . The terms  $u_q$  are complex random numbers without correlation between them and of mean square value  $\langle |u_q|^2 \rangle = S(q)L/(2\pi)$  where  $S(q) = 1/(2\pi) \int dz e^{iqz} \langle u(z)u(0) \rangle$  is the spectral density of  $u$ . For a large enough quantification box, the term  $f(q)$  barely changes between adjacent Fourier components and one can replace  $\sum_q |u_q|^2 f(q)$  by  $\int dq S(q) f(q)$  in Eq. (A1). For a time  $t$  large enough so that the function  $(\epsilon - \hbar\omega)S(q(\epsilon))$  is about constant on the interval  $\epsilon \in [-\hbar/t, \hbar/t]$ , the term  $\sin(\epsilon t/2)/\epsilon^2$  can be replaced by the distribution  $t\delta(\epsilon)\pi/2$ . We then recover the first term of Eq. (4). The previous condition on  $t$  and the condition that  $t$  is much smaller than the departure rate  $\Gamma$  can be fulfilled simultaneously only if the function  $(\epsilon - \hbar\omega)S(q(\epsilon))$  is about constant on the interval  $\epsilon \in [-\Gamma, \Gamma]$ . This is the condition of the Markovian approximation. This condition is fulfilled provided that both  $S(q)$  and its correlation length are small enough.

The calculation is similar for losses towards the Floquet manifold  $n_F = 1$  and one finally recover Eq. (4). The Markovian condition for the transition towards the Floquet manifold  $n_F = 1$  is not fulfilled for initial momentum very close to  $\sqrt{2m\hbar\omega}$  since the atoms are then

sensitive to the fact that the continuum is not infinite for  $\epsilon < 0$ . Similar non Markovian situations have been studied, for example, in photonic band gap materials [21] and oscillatory behavior and decay towards a non vanishing population of the initial state are expected.

## APPENDIX B: ADIABATIC POTENTIAL IN THE DRESSED STATE REPRESENTATION

In this appendix, we rederive the adiabatic potential given Eq. (14) using a dressed representation, where a local z-dependent unitary transformation  $\mathcal{O}(z)$  is applied to the Floquet states so that the resulting dressed states  $|n\rangle(z)$  are eigenstates of the potential energy part of the Floquet Hamiltonian (term  $\hbar\omega n_F$  of  $H_0$  given in Eq. (2) and term  $H_2$  of Eq. (3)). By symmetry, the energy of the dressed states  $|n\rangle(z)$  is  $n\hbar\omega$ , as that of the bare Floquet states. Using the properties of the Bessel functions ( $J_{k+1}(x) + J_{k-1}(x)x/(2k) = J_k(x)$  and  $\sum_n J_n(x)^2 = 1$ , we show that the decomposition of  $|n\rangle(z)$  in the undressed Floquet basis ( $|k\rangle_0$ ) is

$$|n\rangle(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(u(z)/\omega)|n+k\rangle_0 = \mathcal{O}(z)|n\rangle_0. \quad (\text{B1})$$

This well known result has been used in several other situations [22]. In the dressed state representation, the state of the system is  $\tilde{\psi} = \mathcal{O}^{-1}\psi_0$  where  $\psi_0$  is the state of the system in the undressed representation and the

momentum operator,  $\tilde{p} = \mathcal{O}^{-1}p\mathcal{O}$ , writes

$$\tilde{p} = p - \sum_{n,k} \langle k, z | i\hbar\partial_z | n, z \rangle |k\rangle\langle n| \quad (\text{B2})$$

where  $p = -i\hbar\partial_z$  is the momentum operator that preserves the Floquet number and  $\partial_z$  is a short notation for  $\partial/\partial z$ . Thus, in the dressed state representation, the Hamiltonian is decomposed into three terms:

$$\tilde{H}_0 = p^2/2m - n_F\hbar\omega \quad (\text{B3})$$

that does not couple different Floquet states,

$$\tilde{H}_1 = -\hbar/(2m) \left( p \sum_{n_1, n_2} |n_1\rangle\langle n_1| i\partial_z |n_2\rangle\langle n_2| + \sum_{n_1, n_2} |n_1\rangle\langle n_1| i\partial_z |n_2\rangle\langle n_2| p \right), \quad (\text{B4})$$

and

$$\tilde{H}_2 = -\hbar^2/(2m) \sum_{n_1, n_2, n_3} |n_1\rangle\langle n_2| \langle n_1 | \partial_z | n_3 \rangle \langle n_3 | \partial_z | n_2 \rangle. \quad (\text{B5})$$

Since  $J'_k = (J_{k-1} - J_{k+1})/2$  and  $\sum_k J_k J_{k+n} = \delta_n$ ,  $\tilde{H}_1$  couples adjacent Floquet states. This term is responsible for the heating of the cloud. On the other hand,  $\tilde{H}_2$  contain a term  $\tilde{H}_{2,ad}$  that does not change the Floquet number. Using the above properties of the Bessel function, we find that  $\tilde{H}_{2,ad}$  is just the adiabatic potential of Eq. (14).

- 
- [1] J.-B. Trebbia, C. L. G. Alzar, R. Cornelussen, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule, *quant-ph/0701207* (2007).  
 [2] R. Folman, P. Krüger, J. Schmiedmayer, J. Denschlag, and C. Henkel, *Adv. Atom. Mol. Opt. Phys.* **48**, 263 (2002), and references therein.  
 [3] Y.-J. Wang, D. Z. Anderson, V. M. Bright, E. A. Cornell, Q. Diot, T. Kishimoto, M. Prentiss, R. A. Saravanan, S. R. Segal, and S. Wu, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 090405 (2005).  
 [4] T. Schumm, S. Hofferberth, L. M. Andersson, S. Wildermuth, S. Groth, I. Bar-Joseph, J. Schmiedmayer, and P. Krüger, *Nat. Phys.* (2005).  
 [5] A. Günther, S. Kraft, C. Zimmermann, and J. Fortágh, *cond-mat/0603631* (2007).  
 [6] J. Estève, J.-B. Trebbia, T. Schumm, A. Aspect, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 130403 (2006).  
 [7] J.-B. Trebbia, J. Esteve, C. I. Westbrook, and I. Bouchoule, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 250403 (2006).  
 [8] J. Reichel and J. H. Thywissen, *J. Phys. IV* **116**, 265 (2004).  
 [9] D. Wang, M. Lukin, and E. Demler, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 076802 (2004).  
 [10] J. Estève, C. Auffibal, T. Schumm, C. Figl, D. Mailly, I. Bouchoule, C. I. Westbrook, and A. Aspect, *Phys. Rev. A* **70**, 043629 (2004).  
 [11] S. Kraft, A. Günther, H. Ott, D. Wharam, C. Zimmermann, and J. Fortágh, *J. Phys. B* **35**, L469 (2002).  
 [12] T. Schumm, J. Esteve, C. Figl, J. Trebbia, C. Auffibal, D. Mailly, I. Bouchoule, C. Westbrook, and A. Aspect, *Eur. Phys. J. D* **32**, 171 (2005).  
 [13] R. J. Cook, D. G. Shankland, and A. L. Wells, *Phys. Rev. A* **31**, 564 (1985).  
 [14] J. H. Shirley, *Phys. Rev.* **138**, B979 (1965).  
 [15] E. Landau and E. Lifschitz, *Mechanics* (Mir, Moscow, 1980), chap. 5.  
 [16] E. Brion, L. H. Pedersen, and K. Mølmer, *quant-ph/0610056* (2006).  
 [17] C. V. Sukumar and D. M. Brink, *Phys. Rev. A* **56**, 2451 (1997).  
 [18] G. M. Moy, J. J. Hope and C. M. Savage, *Phys. Rev. A* **59**, 667 (1999).  
 [19] J. L. Martin *et al.*, *J. Phys. B* **33**, 3919 (1999).  
 [20] T.-L. Ho and V. B. Shenoy, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2595 (1996).  
 [21] S. John and T. Quang, *Phys. Rev. A* **50**, 1764 (1994).  
 [22] A. Eckardt *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 200401 (2005) ; S. Haroche *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **24**, 861 - 864 (1970).

PHYSICAL REVIEW A 75, 031606(R) (2007)

## Interaction-induced crossover versus finite-size condensation in a weakly interacting trapped one-dimensional Bose gas

I. Bouchoule,<sup>1</sup> K. V. Kheruntsyan,<sup>2</sup> and G. V. Shlyapnikov<sup>3,4</sup><sup>1</sup>Laboratoire Charles Fabry, UMR 8501 du CNRS, 91 403 Orsay Cedex, France<sup>2</sup>ARC Centre of Excellence for Quantum-Atom Optics, School of Physical Sciences, University of Queensland, Brisbane, Queensland 4072, Australia<sup>3</sup>Laboratoire de Physique Theorique et Modeles Statistiques, Université Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France<sup>4</sup>Van der Waals-Zeeman Institute, University of Amsterdam, 1018 XE Amsterdam, The Netherlands

(Received 8 December 2006; published 28 March 2007)

We discuss the transition from a fully decoherent to a (quasi)condensate regime in a harmonically trapped weakly interacting one-dimensional (1D) Bose gas. By using analytic approaches and verifying them against exact numerical solutions, we find a characteristic crossover temperature and crossover atom number that depend on the interaction strength and the trap frequency. We then identify the conditions for observing either an interaction-induced crossover scenario or else a finite-size Bose-Einstein condensation phenomenon characteristic of an ideal trapped 1D gas.

DOI: [10.1103/PhysRevA.75.031606](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.75.031606)

PACS number(s): 03.75.Hh, 05.30.Jp, 05.70.Ce

One-dimensional (1D) Bose gases are remarkably rich physical systems exhibiting properties not encountered in 2D or 3D [1–3]. Here we study the 1D model of bosons interacting via a repulsive  $\delta$ -function potential, which plays a fundamentally important role in quantum many-body physics. The reason is that the model is exactly solvable [2,3] and it is now experimentally realizable with ultracold alkali-metal atoms in highly anisotropic trapping potentials (see Ref. [4] for a review). This means there are unique opportunities for accurate tests of theory that were previously unavailable, in turn leading to the development of fundamental knowledge of interacting many-body systems in low dimensions.

In this paper, we analyze the properties of the 1D Bose gas in the weakly interacting regime, where the dimensionless interaction parameter  $\gamma = mg/(n\hbar^2)$  is small,  $n$  being the linear density,  $m$  the atom mass, and  $g$  the 1D coupling constant. This is opposite to Girardeau's regime of "fermionization" [1] achieved in the limit of strong interactions and the subject of many recent studies [5]. Our motivation for the study of the weakly interacting regime is to reveal the nature of the transition to a Bose-condensed state in a harmonically trapped system.

For a uniform weakly interacting 1D Bose gas, one has a smooth interaction-induced crossover to a quasicondensate which is a Bose-condensed state with a fluctuating phase. This occurs when the temperature  $T$  becomes smaller than  $T_d\sqrt{\gamma}$  [6–9], where  $T_d = \hbar^2 n^2 / 2m$  is the temperature of quantum degeneracy (in energy units,  $k_B = 1$ ). For a harmonically trapped 1D gas with weak interactions a similar crossover scenario is expected [7]. However, due to the presence of the trapping potential the interaction-induced crossover enters into a competition with Bose-Einstein condensation (BEC) predicted to occur in the ideal gas limit [10] as a macroscopic occupation of the ground state. For a given atom number  $N$ , this condensation phenomenon occurs at temperature  $T_C = N\hbar\omega / \ln(2N)$ . It is a purely finite-size effect and disappears in the thermodynamic limit [11] where  $N$  tends to infinity while the peak density  $n_0$  is kept constant (this implies

that the trap oscillation frequency  $\omega$  tends to zero in such a way that  $N\omega = \text{const}$ ). The interaction-induced crossover to a quasicondensate, on the other hand, persists in the thermodynamic limit.

Thus, for sufficiently weak confinement one expects to observe an interaction-induced crossover to a quasicondensate, rather than a finite-size BEC. The situation is reversed for strong confinement. Here, we identify the parameters of the interaction-induced crossover and find the conditions that enable the realization of either of these two competing scenarios.

We start by briefly reviewing the physics of a uniform 1D Bose gas in the thermodynamic limit, in the case of very weak interactions  $\gamma \ll 1$ . For  $T \ll T_d\sqrt{\gamma}$ , the gas is in the quasicondensate (Gross-Pitaevskii) regime where the density fluctuations are suppressed and the gas is coherent on a distance scale smaller than the phase coherence length: Glauber's local pair correlation function is reduced below the ideal gas level of 2 and is close to 1 [6–9]. In this regime the chemical potential is positive and well approximated by  $\mu \approx gn$ . For  $T \gg T_d\sqrt{\gamma}$ , the gas is in the fully decoherent regime: interactions between the atoms have a small effect on the equation of state and the local pair correlation is close to that of an ideal Bose gas [6]. This regime contains the quantum decoherent domain  $T_d\sqrt{\gamma} \ll T \ll T_d$ . In the decoherent regime, the chemical potential  $\mu$  is negative and the equation of state is well approximated by that of the ideal Bose gas:

$$n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk/(2\pi)}{e^{(\hbar^2 k^2 / 2m - \mu)/T} - 1} = \sqrt{\frac{mT}{2\pi\hbar^2}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{j\mu T}}{j^{1/2}}. \quad (1)$$

The crossover between the decoherent and the quasicondensate regimes ( $T \sim T_d\sqrt{\gamma}$ ) corresponds to the density of the order of  $n_{\text{co}} = (mT^2/\hbar^2 g)^{1/3}$ . Using the crossover density  $n_{\text{co}}$  is convenient for analyzing the properties of the gas at a constant temperature and varying  $n$ . In this sense, the quantum decoherent regime corresponds to  $n_d \ll n \ll t^{1/6} n_d \approx n_{\text{co}}$ , where  $t = T/T_d \gamma^2 = 2\hbar^2 T/mg^2$  is a dimensionless temperature param-

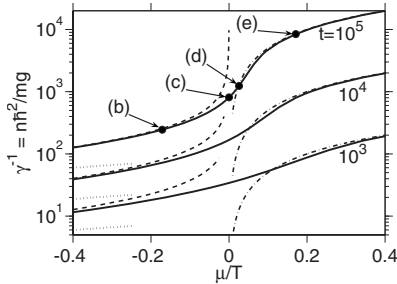


FIG. 1. Equation of state of the uniform weakly interacting 1D Bose gas for three different values of the temperature parameter  $t = 2T\hbar^2/mg^2$ . The exact numerical result (solid line) is compared with the behavior in the quasicondensate regime (dash-dotted lines) and with the ideal Bose gas result of Eq. (1) (dashed lines). The straight dotted lines correspond to the classical (Boltzmann) ideal gas.

eter which is independent of the density and is large, and  $n_d = \sqrt{mT}/\hbar$  is the density of quantum degeneracy at a given  $T$ . The width of the quantum decoherent region in terms of densities increases with  $t$ .

In Fig. 1 we illustrate the properties of the weakly interacting uniform gas by plotting the linear density as a function of the chemical potential for three different values of the temperature parameter  $t$ . The exact numerical results [6] based on the finite-temperature solution [3] to the Lieb-Liniger model [2] are compared both with the ideal Bose gas equation of state (1) in the region of  $\mu < 0$  and with the quasicondensate equation of state corresponding to  $\mu \approx gn > 0$ . For a given temperature, the crossover from the decoherent regime to the quasicondensate corresponds to  $\mu$  going from negative to positive. We obtain  $n(\mu=0, T) \approx 0.6n_{co}$  within 20% accuracy as long as  $t > 10^3$ . Note that values of  $t$  as high as  $10^3$  are required to ensure that the gas is highly degenerate at the crossover.

We now turn to the analysis of a harmonically trapped 1D gas and find the crossover temperature  $T_{co}$  and crossover atom number  $N_{co}$  around which the gas enters the quasicondensate regime. For small trap frequencies  $\omega$ , the density profile of the gas can be described using the local density approximation (LDA) [7]. In this treatment, the 1D density  $n(z)$  as a function of the distance  $z$  from the trap center is calculated using the uniform gas equation of state in which the chemical potential  $\mu$  is replaced by its local value  $\mu(z) = \mu_0 - m\omega^2 z^2/2$ , where  $\mu_0$  is the global chemical potential. Within the LDA, the uniform results remain relevant and imply, in particular, that the gas enters the quasicondensate regime in the trap center once  $\mu_0$  changes sign. In addition, as long as the peak density  $n_0 = n(0)$  satisfies the condition  $n_0 \ll n_{co}$  the entire gas is in the decoherent regime and the equation of state is well approximated by Eq. (1) in which  $n$  and  $\mu$  are replaced by  $n(z)$  and  $\mu(z)$ . Integrating  $n(z)$  over  $z$  and taking the sum over  $j$  gives a relation between the total atom number and  $\mu_0$ :

$$N = -\frac{T}{\hbar\omega} \ln(1 - e^{\mu_0/T}) \quad (\mu_0 < 0). \quad (2)$$

As mentioned above, for very large values of  $t$  the crossover to the quasicondensate occurs under conditions where the gas is highly degenerate in the center, with  $n_0 \gg n_d = \sqrt{mT}/\hbar$ . Assuming that this is the case and taking into account that the degeneracy condition is equivalent to  $|\mu_0|/T \ll 1$ , Eq. (2) can be rewritten as

$$N \approx \frac{T}{\hbar\omega} \ln\left(\frac{T}{|\mu_0|}\right). \quad (3)$$

Under these conditions, as Eq. (1) reduces to  $n \approx \sqrt{mT^2/2\hbar^2}|\mu|$  for  $|\mu| \ll T$ , the density profile develops a sharp central peak which is well approximated by

$$n(z) \approx \sqrt{\frac{mT^2}{2\hbar^2}} \frac{1}{\sqrt{|\mu_0| + m\omega^2 z^2/2}}, \quad (4)$$

and extends up to distances  $|z| \leq R_T = \sqrt{2T/m\omega^2}$ .

The analysis made above is valid as long as  $n_0 \ll n_{co}$ . Using Eq. (4) and the expression for  $n_{co}$ , the condition  $n_0 \ll n_{co}$  can be rewritten as

$$|\mu_0| \gg m^{1/3}(gT/\hbar)^{2/3}. \quad (5)$$

Using Eq. (3) to relate  $\mu_0$  to the total atom number, Eq. (5) leads to the condition that the gas is in the decoherent regime as long as  $N \ll N_{co}$ , where

$$N_{co} \approx \frac{T}{\hbar\omega} \ln\left(\frac{\hbar^2 T}{mg^2}\right)^{1/3} = \frac{T}{3\hbar\omega} \ln\left(\frac{t}{2}\right) \quad (6)$$

is the characteristic atom number at the crossover. As we mentioned earlier, one should have  $t \gg 10^3$  for obtaining a highly degenerate gas at the crossover. Under this condition, Eq. (6) can be approximately inverted to yield, for a given  $N$ , a crossover temperature

$$T_{co} \approx \frac{N\hbar\omega}{\ln(N\hbar^3\omega/mg^2)^{1/3}}. \quad (7)$$

We emphasize that our results are obtained within the LDA, which is valid if the characteristic correlation length  $l_c$  of density-density fluctuations is much smaller than the typical length scale  $L$  of density variations. The correlation length is  $l_c \approx \hbar/\sqrt{m|\mu_0|}$  in both the quantum decoherent and quasicondensate regimes [6,7]. Approaching the crossover from the decoherent regime we replace  $|\mu_0|$  by the right-hand side of Eq. (5), while approaching it from the quasicondensate regime we use  $\mu_0 \approx gn_{co}$ . In both cases, one obtains  $l_c \approx \hbar^{4/3}/(m^2gT_{co})^{1/3}$ . The length scale  $L$  can be estimated as the distance from the trap center where the density is halved compared to the peak density  $n_0$ . Approaching the crossover from the decoherent side, Eq. (4) gives  $L \approx \sqrt{|\mu_0|/m\omega^2} \approx (gT_{co}/m\hbar\omega^3)^{1/3}$ . On the quasicondensate side, we use the Thomas-Fermi parabola and obtain  $L \approx \sqrt{2n_{co}g/m\omega^2}$ , which gives approximately the same result. One then easily sees that the condition of validity of the LDA,  $l_c \ll L$ , is reduced to

$$\omega \ll \omega_{co} \equiv (mg^2T^2/\hbar^5)^{1/3}. \quad (8)$$

If this inequality is not satisfied then the LDA breaks down and one has to take into account the discrete structure of the trap energy levels. In this case, analytic approaches

INTERACTION-INDUCED CROSSOVER VERSUS FINITE-...

PHYSICAL REVIEW A 75, 031606(R) (2007)

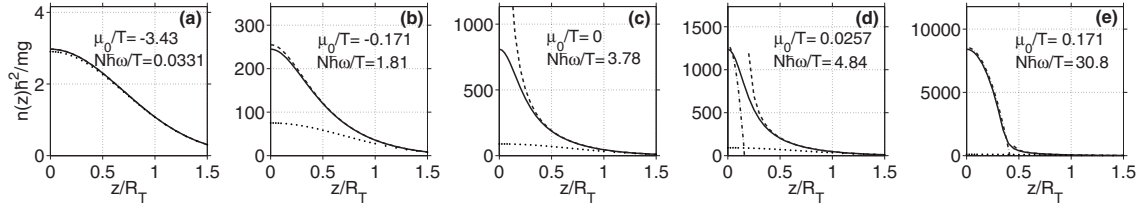


FIG. 2. Density profiles of a 1D Bose gas in a harmonic trapping potential for five different values of the ratio  $\mu_0/T$  and a fixed value of the temperature parameter  $t=2\hbar^2T/mg^2=10^5$ . The exact numerical solution (solid line) is compared with the ideal Bose gas distribution (dashed line), classical Boltzmann distribution (dotted line), and Thomas-Fermi distribution in the Gross-Pitaevskii regime (dash-dotted line). The resulting values of the dimensionless ratio  $N\hbar\omega/T$ , following the exact solutions, are also shown. The distance from the trap center  $z$  is in units of  $R_T=(2T/m\omega^2)^{1/2}$ . All calculations are done within the LDA using the equation of state for the homogeneous gas shown in Fig. 1, with  $\mu_0$  and  $n(0)$  in (b)–(e) being the same as  $\mu$  and  $n$  indicated by the points (b)–(e) in Fig. 1.

incorporating both the finite-size effects and small but finite interaction strength are absent in the vicinity of the transition to a quasicondensate, and we adopt the ideal gas treatment of Ref. [10]. For a fixed temperature, this treatment predicts a finite-size BEC at a critical atom number  $N_C=T/(\hbar\omega)\ln(2T/\hbar\omega)$ . It is clear that the finite-size BEC phenomenon will prevail the interaction-induced crossover scenario if  $N_C < N_{co}$ . In fact, the opposite inequality,  $N_C > N_{co}$ , is equivalent to that of Eq. (8), which makes our analysis self-consistent and implies that the condition of validity of the LDA,  $\omega \ll \omega_{co}$ , serves as the simultaneous criterion for observing the interaction-induced crossover, while the opposite condition corresponds to finite-size condensation. At a constant  $N$ , the criterion for observing the interaction-induced crossover can be obtained from Eq. (8) by replacing  $T$  with  $N\hbar\omega/\ln(2N)$ . The opposite criterion leading to the finite-size BEC has been previously found in Ref. [12] from the condition  $gn_0 \ll \hbar\omega$ .

In the following, we analyze the properties of the interaction-induced crossover, subject to inequality (8). Since  $t \gg 10^3$  in the regime of interest, Eq. (6) written as  $T_{co}=3N\hbar\omega/\ln(t_{co}/2)$  shows that the crossover temperature is lower than the characteristic temperature of quantum degeneracy of a harmonically trapped gas  $N\hbar\omega$ . Thus,  $T_{co}$  represents a more accurate and lower estimate of the crossover temperature to the quasicondensate regime compared to the inequality  $T \ll N\hbar\omega$  given in Ref. [12]. For extremely large values of  $t$ , the present treatment identifies an intermediate temperature interval  $T_{co} \ll T \ll N\hbar\omega$  which accommodates the decoherent quantum regime. Here the gas is degenerate and is well described within the ideal Bose gas approach.

Figure 2 shows density profiles for different values of the chemical potential at a fixed temperature parameter  $t=2\hbar^2T/mg^2=10^5$ . Figure 2(e) corresponds to the quasicondensate regime. Figure 2(c) shows the density profile at the crossover, and we find that the corresponding atom number  $N \approx 3.78T/\hbar\omega$  is in good agreement with the value  $N_{co} \approx 3.61T/\hbar\omega$  predicted by Eq. (6). The decoherent regime is clearly seen in Figs. 2(a) and 2(b). Although the inequality  $T_{co} \ll N\hbar\omega$  is barely satisfied, the features of the quantum decoherent regime are seen in Fig. 2(b): the density profile is described to better than 10% by the ideal Bose gas approach and differs strongly from the classical Boltzmann distribution.

To provide a better connection with experimentally measurable quantities we plot in Fig. 3 the peak density  $n_0$  versus  $N\hbar\omega/T$  for three different values of the temperature parameter  $t$ . In all cases we give the comparison with the classical Boltzmann gas, the ideal Bose gas, and the quasicondensate predictions. The ideal Bose gas prediction connects the Boltzmann behavior  $n_0=N\omega\sqrt{m/2\pi T}$  to the degenerate behavior  $n_0=(\sqrt{mT}/\hbar)\exp(N\hbar\omega/2T)$ , whereas in the quasicondensate regime  $n_0$  scales proportionally to  $N^{2/3}$ . The scaling of the peak density  $n_0$  as a function of  $N$  and the sequence of changes between power laws and an exponential can serve as a signature of the transitions between different regimes. This includes the quantum decoherent regime, which becomes more pronounced when increasing the parameter  $t$  and is already seen for  $t=10^5$ .

The sufficient condition for realizing the 1D regime in a harmonically trapped, weakly interacting gas is  $T \ll \hbar\omega_{\perp}$ , where  $\omega_{\perp}$  is the transverse oscillation frequency. If the oscillator length  $l_{\perp}=\sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$  is much larger than the 3D scattering length  $a$ , the 1D coupling is given by  $g \approx 2\hbar^2 a/m l_{\perp}^2$  [13]. The condition for the interaction-induced crossover,  $\omega \ll \omega_{co}$ , can then be rewritten as

$$\omega \ll \omega_{\perp}(T/\hbar\omega_{\perp})^{2/3}(a/l_{\perp})^{2/3}. \quad (9)$$

Taking  $\omega_{\perp}/2\pi$  in the range from 1 to 30 kHz and  $T \approx 0.2\hbar\omega_{\perp}$  ( $T$  is ranging from 10 to 300 nK), one can see that for most of the alkali-metal atoms with typical scattering

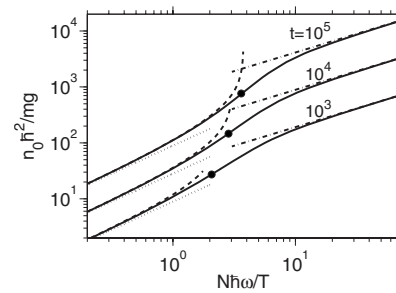


FIG. 3. Peak density  $n_0$  (in units of  $mg/\hbar^2$ ) of a trapped gas versus  $N\hbar\omega/T$  for three values of  $t=2\hbar^2T/mg^2$ . The three black dots show the respective crossover values of  $N_{co}\hbar\omega/T$  from Eq. (6). The different lines are as in Fig. 1.



lengths in the range of a few nanometers, the inequality (9) is well satisfied with  $\omega$  of a few hertz commonly used in practice. Thus, the conditions for realizing the interaction-induced crossover are relatively easy to satisfy, unless the scattering length is extremely small ( $a < 0.1$  nm). On the other hand, the condition to observe the quantum decoherent regime before the interaction-induced crossover is more demanding as it requires, in addition to Eq. (9), a very large value of the parameter  $t$ . Rewriting the 1D inequality  $T \ll \hbar\omega_{\perp}$  as  $a \ll l_{\perp}/\sqrt{2t}$  we immediately see that even at  $t=10^5$ , where one only starts to see the features of this regime, one needs to use light atoms (large  $l_{\perp}$ ) and/or a very small scattering length in order to satisfy  $a \ll 2 \times 10^{-3} l_{\perp}$ .

A favorable system for satisfying these conditions is a 1D gas of  $^7\text{Li}$  atoms in the  $F=1$ ,  $m=-1$  hyperfine state, where the scattering length can be tuned from very large to extremely small values using an open-channel-dominated Feshbach resonance [14]. By taking, for example,  $\omega/2\pi \approx 4$  Hz,  $\omega_{\perp}/2\pi \approx 4$  kHz,  $T \approx 0.2\hbar\omega_{\perp}$  (40 nK), and varying  $a$  from 20 to 0.2 nm, one can increase  $t$  from 60 to  $6 \times 10^5$  and see how a direct interaction-induced crossover from a classical gas to a quasicondensate regime transforms to accommodate the intermediate quantum decoherent regime. The same system can also be used to observe the finite-size BEC scenario, which requires the inequality opposite to Eq. (9) and hence a reduction of the scattering length to  $a \approx 0.01$  nm.

In conclusion, we have identified the conditions for real-

izing either a finite-size BEC phenomenon or an interaction-induced crossover to a coherent, quasicondensate state in a harmonically trapped 1D Bose gas. In the latter case, we distinguish between a direct crossover from the classical decoherent regime and a crossover through the intermediate quantum decoherent regime. Furthermore, one can expect that the physics of the interaction-induced crossover remains approximately valid for  $T \sim \hbar\omega_{\perp}$ , where the gas is no longer in the 1D regime but is near the 3D-1D boundary. This conjecture is supported by the results of recent experiments [15,16]. In Ref. [15] a gas at  $T \approx 2\hbar\omega_{\perp}$  was produced with a density profile well described within a degenerate ideal gas approach. This means that the crossover to a quasicondensate was likely to involve the features of the decoherent quantum regime. Finally, we note that the interaction-induced crossover through a well-pronounced decoherent quantum regime would be easier to produce in a quartic or boxlike potential [17].

The authors acknowledge stimulating discussions with P. Drummond, D. Gangardt, and C. Salomon. This work was supported by the IFRAF Institute. K.K. acknowledges support from the ARC. I.B. and G.S. acknowledge support from the ANR (Grants No. NT05-2-42103 and No. 05-Nano-008-02). G.S. also acknowledges the Netherlands's FOM program on quantum gases. LPTMS is mixed research unit no. 8626 of CNRS and Université Paris-Sud.

- 
- [1] M. D. Girardeau, *J. Math. Phys.* **1**, 516 (1960).  
 [2] E. H. Lieb and W. Liniger, *Phys. Rev.* **130**, 1605 (1963).  
 [3] C. N. Yang and C. P. Yang, *J. Math. Phys.* **10**, 1115 (1969).  
 [4] D. S. Petrov, D. M. Gangardt, and G. V. Shlyapnikov, *J. Phys. IV* **116**, 5 (2004); Y. Castin, *ibid.* **116**, 89 (2004).  
 [5] H. Moritz *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 250402 (2003); B. Laburthe Tolra *et al.*, *ibid.* **92**, 190401 (2004); T. Kinoshita, T. Wenger, and D. S. Weiss, *ibid.* **95**, 190406 (2005); B. Paredes *et al.*, *Nature (London)* **429**, 277 (2004).  
 [6] K. V. Kheruntsyan *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 040403 (2003).  
 [7] K. V. Kheruntsyan *et al.*, *Phys. Rev. A* **71**, 053615 (2005).  
 [8] Y. Castin *et al.*, *J. Mod. Opt.* **47**, 2671 (2000).  
 [9] C. Mora and Y. Castin, *Phys. Rev. A* **67**, 053615 (2003).  
 [10] W. Ketterle and N. J. van Druten, *Phys. Rev. A* **54**, 656 (1996).  
 [11] V. Bagnato and D. Kleppner, *Phys. Rev. A* **44**, 7439 (1991).  
 [12] D. S. Petrov, G. V. Shlyapnikov, and J. T. M. Walraven, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 3745 (2000).  
 [13] M. Olshanii, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 938 (1998).  
 [14] F. Schreck, *Ann. Phys. (Paris)* **28**, 1 (2003); L. Khaykovich *et al.*, *Science* **296**, 1290 (2002); V. A. Yurovsky, *Phys. Rev. A* **73**, 052709 (2006).  
 [15] J. Esteve *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 130403 (2006).  
 [16] J.-B. Trebbia *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **97**, 250403 (2006); here, the observed quasicondensate formation could not be explained by a BEC-like transition within the Hartree-Fock theory.  
 [17] T. P. Meyrath *et al.*, *Phys. Rev. A* **71**, 041604(R) (2005).

## Observations of Density Fluctuations in an Elongated Bose Gas: Ideal Gas and Quasicondensate Regimes

J. Esteve,<sup>1,2</sup> J.-B. Trebbia,<sup>1</sup> T. Schumm,<sup>1</sup> A. Aspect,<sup>1</sup> C. I. Westbrook,<sup>1</sup> and I. Bouchoule<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Charles Fabry, CNRS et Université Paris Sud 11, 91403 Orsay Cedex, France

<sup>2</sup>Laboratoire de Photonique et de Nanostructures, CNRS, 91460 Marcoussis, France

(Received 11 October 2005; published 6 April 2006)

We report *in situ* measurements of density fluctuations in a quasi-one-dimensional <sup>87</sup>Rb Bose gas at thermal equilibrium in an elongated harmonic trap. We observe an excess of fluctuations compared to the shot-noise level expected for uncorrelated atoms. At low atomic density, the measured excess is in good agreement with the expected “bunching” for an ideal Bose gas. At high density, the measured fluctuations are strongly reduced compared to the ideal gas case. We attribute this reduction to repulsive interatomic interactions. The data are compared with a calculation for an interacting Bose gas in the quasicondensate regime.

DOI: 10.1103/PhysRevLett.96.130403

PACS numbers: 03.75.Hh, 05.30.Jp

In a classical gas, the mean square fluctuation of the number of particles within a small volume is equal to the number of particles (we shall call this fluctuation “shot noise”). On the other hand, because of quantum effects, the fluctuations in a noncondensed Bose gas are larger than the shot-noise contribution [1]. For photons, the well-known Hanbury Brown–Twiss or “photon bunching” effect is an illustration of this phenomenon [2]. Analogous studies have been undertaken to measure correlations between bosonic atoms released from a trap after a time of flight [3–6]. However, bunching in the density distribution of trapped cold atoms at thermal equilibrium has not been yet directly observed.

Density fluctuations of a cold atomic sample can be measured by absorption imaging as proposed in [7,8] and recently shown in [5,9]. When using this method, one necessarily integrates the density distribution over one direction, and this integration can mask the bunching effect whose correlation length is of the order of the de Broglie wavelength. A one-dimensional (1D) gas, i.e., a gas in an anisotropic confining potential with a temperature lower than or of order of the zero point energy in two directions, allows one to avoid this integration, and is thus a very favorable experimental geometry.

Additionally, atoms in 1D do not Bose condense [10]. One can therefore achieve a high degree of quantum degeneracy without condensation, which enhances the bunching effect for an ideal gas. When one considers the effect of interactions between atoms, two additional regimes can appear: the Tonks-Girardeau regime and the quasicondensate regime [11]. Starting from an ideal gas, as one increases density at fixed temperature  $T$ , the 1D interacting Bose gas passes smoothly to the quasicondensate regime. The linear density scale for this crossover is given by  $n_T = [m(k_B T)^2 / \hbar^2 g]^{1/3}$ , where  $g$  is the effective 1D coupling constant and  $m$  the atomic mass [12,13]. Density fluctuations are suppressed by a factor  $(n/n_T)^{3/2}$  compared to the ideal gas [see Eq. (4) below], although

phase fluctuations remain [14–18]. We emphasize that this crossover occurs in the dense, weakly interacting limit which is the opposite of the Tonks-Girardeau regime.

To measure the density fluctuations of a trapped Bose gas as a function of its density, we acquire a large number of images of different trapped samples under identical conditions. We have access to both the ideal Bose gas limit, in which we observe the expected excess fluctuations compared to shot noise, as well as the quasicondensate regime in which repulsive interactions suppress the density fluctuations.

Our measurements are conducted in a highly anisotropic magnetic trap created by an atom chip. We use three current carrying wires forming an H pattern [19] and an external uniform magnetic field to magnetically trap the <sup>87</sup>Rb atoms in the  $|F=2, m_F=2\rangle$  state (see Fig. 1). Adjusting the currents in the wires and the external magnetic field, we can tune the longitudinal frequency between 7 and 20 Hz while keeping the transverse frequency  $\omega_{\perp}/(2\pi)$  at a value close to 2.85 kHz. Using evaporative cooling, we obtain a cold sample at thermal equilibrium in the trap. Temperatures as low as  $1.4\hbar\omega_{\perp}/k_B$  are accessible

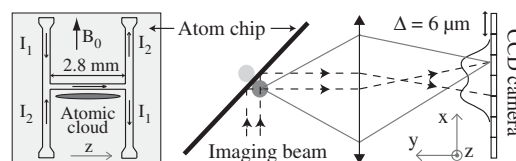


FIG. 1. Schematic of the experimental setup. Left: drawing of the wires constituting the atom chip. We keep  $I_1 + I_2 = 3$  A and adjust  $I_1 - I_2$  between 0.3 and 1 A to vary the confinement along  $z$ . The uniform field  $B_0$  is approximately 40 G, we also add a small field ( $\leq 1$  G) along  $z$ . Right: optical imaging system. We image the cloud and its reflection on the atom chip onto a CCD camera. In the radial direction, the unresolved cloud images cover approximately five pixels whose size in the object plane is  $\Delta = 6 \mu\text{m}$ .

with an atom number of  $5 \times 10^3$ . The atomic cloud has a typical length of  $100 \mu\text{m}$  along the  $z$  axis and a transverse radius of  $300 \text{ nm}$ .

As shown in Fig. 1, *in situ* absorption images are taken using a probe beam perpendicular to the  $z$  axis and reflecting on the chip surface at  $45^\circ$ . The light, resonant with the closed transition  $|F = 2\rangle \rightarrow |F' = 3\rangle$  of the D2 line is switched on for  $150 \mu\text{s}$  with an intensity of one tenth of the saturation intensity. Two images are recorded with a CCD camera whose pixel size  $\Delta \times \Delta$  in the object plane is  $6.0 \times 6.0 \mu\text{m}^2$ . The first image is taken while the trapping field is still on. The second image is used for normalization and is taken in the absence of atoms  $200 \text{ ms}$  later. During the first image, the cloud expands radially to about  $5 \mu\text{m}$  because of the heating due to photon scattering by the atoms. The size of the cloud's image is even larger due to resolution of the optical system (about  $10 \mu\text{m}$ ) and because the cloud and its image in the mirror at the atom chip surface are not resolved. Five pixels along the transverse direction  $x$  are needed to include 95% of the signal.

We denote by  $N_i^{\text{ph}}(x, z)$  the number of photons detected in the pixel at position  $(x, z)$  for the image  $i$  ( $i = 1, 2$ ). We need to convert this measurement into an atom number  $N(z)$  detected between  $z$  and  $z + \Delta$ . Normally, one simply computes an absorption per pixel  $\ln(N_2^{\text{ph}}/N_1^{\text{ph}})$  and sums over  $x$ :

$$N(z) = \sum_x \ln[N_2^{\text{ph}}(x, z)/N_1^{\text{ph}}(x, z)]\Delta^2/\sigma_e, \quad (1)$$

where  $\sigma_e$  is the absorption cross section of a single atom. When the sample is optically thick and the atomic density varies on a scale smaller than the optical resolution or the pixel size, Eq. (1) does not hold since the logarithm cannot be linearized. In that case, Eq. (1) underestimates the atom number and the error increases with optical thickness. Furthermore, in our geometry, optical rays cross the atomic cloud twice since the cloud image and its reflection in the atom chip surface are not resolved.

We partially correct for these effects by using in Eq. (1) an effective cross section  $\sigma_e$  determined as follows. We compare the measured atom number using the *in situ* procedure described above with the measured atom number after allowing the cloud to expand and to leave the vicinity of the chip surface. In this case, Eq. (1) is valid and the atomic cross section  $\sigma_0 = 3\lambda^2/(2\pi)$  well known. We then obtain for the effective cross section  $\sigma_e = 0.8\sigma_0$ . Although this effective cross section depends on the atomic density, we have checked that for the total atom number between  $2 \times 10^3$  and  $9 \times 10^3$  the measured value varies by only 10%. Taking into account the uncertainty on the value of  $\sigma_0$ , we estimate the total error on the measured atom number  $N(z)$  to be less than 20%.

To measure the variance of the atom number in a pixel, we acquire a large number of images (typically 300) taken in the same experimental conditions. To remove technical noise from our measurement, the following procedure is

used to extract the variance. For each image, we form the quantity  $\delta N(z)^2 = [N(z) - \bar{N}(z)]^2$ , where the mean value  $\bar{N}(z)$  is normalized to contain the same total atom number as the current image. We thus correct for shot to shot total atom number fluctuations. The average is performed only over  $p = 21$  images which bracket the current image so that long term drifts of the experiment do not contribute to the variance. We have checked that the results are independent of  $p$ , varying  $p$  between 5 and 21 [20]. A large contribution to  $\delta N(z)^2$ , irrelevant to our study, is the photon shot noise of the absorption measurement. To precisely correct for this noise, we subtract the quantity  $\sum_x [1/N_1^{\text{ph}}(x, z) + 1/N_2^{\text{ph}}(x, z)](\Delta^2\sigma_e)^2$  from  $\delta N(z)^2$  for each image. We typically detect  $10^4$  photons per pixel corresponding to a contribution to  $\delta N^2$  of about 50. To convert the camera signal into a detected photon number, we use a gain for each pixel that we determine by measuring the photon shot noise of images without atoms as explained in [21]. The corrected  $\delta N(z)^2$  obtained for all images are then binned according to the value of  $\bar{N}(z)$ , rather than of  $z$  itself. This gives the variance of the atom number  $\langle \delta N(z)^2 \rangle$  as a function of the mean atom number per pixel. Since more pixels have a small atom number, the statistical uncertainty on the estimate of the variance decreases with the average atom number (see Figs. 2 and 3).

Data shown in Fig. 2 correspond to atom clouds of sufficiently low density so that effect of interatomic interactions is expected to be small. The three data sets correspond to three different temperatures, the trapping frequencies are 2.85 kHz and 7.5 Hz. We deduce the temperature and the chemical potential of the sample by fitting the mean longitudinal profile  $\bar{N}(z)$  of the cloud to the profile of an ideal Bose gas (see inset of Fig. 2). For the "hot" sample where bunching gives negligible contribution to  $\delta N^2$  [see Eq. (3)], we observe atomic shot-noise fluctuations; i.e., the atom number variance increases linearly with the mean atom number. The fact that we recover the linear behavior expected for shot noise increases our confidence in the procedure described in the previous two paragraphs. The slope  $\kappa$  is only 0.17 and differs from the expected value of 1. We attribute this reduction to the fact that our pixel size is not much bigger than the resolution of our optical imaging system, thus one atom is spread out on more than one pixel. When the pixel size is small enough compared to the optical resolution and in the case of weak optical thickness, the expected slope is simply approximated by  $\kappa \simeq \Delta/(2\sqrt{\pi}\delta)$ , where  $\delta$  is the rms width of the optical response which we suppose Gaussian. From the measured slope, we deduce  $\delta = 10 \mu\text{m}$  in good agreement with the smallest cloud image we have observed ( $8 \mu\text{m}$ ).

For "cold" samples, we see an excess in the atom number variance compared to shot noise. We attribute this excess to bunching due to the bosonic nature of the atoms. In a local density approximation, the fluctuations of a radially trapped Bose gas with longitudinal density  $n(z)$  are [22]



$$\langle n(z)n(z') \rangle - \langle n(z) \rangle^2 = \langle n(z) \rangle \delta(z - z') + \frac{1}{\lambda_{\text{dB}}^2} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{e^{\beta\mu(i+j)} e^{-\pi(z-z')^2(1/i+1/j)/\lambda_{\text{dB}}^2}}{\sqrt{ij}} [1 - e^{-\beta\hbar\omega_{\perp}(i+j)}]^2, \quad (2)$$

where  $\mu$  is the local chemical potential,  $\beta = 1/(k_B T)$ ,  $\lambda_{\text{dB}} = \sqrt{2\pi\hbar^2/(mk_B T)}$  is the de Broglie thermal wavelength, and  $\langle \cdot \rangle$  denotes an ensemble average. The first term on the right-hand side corresponds to shot noise, and the second term to bunching. For a nondegenerate gas ( $n\lambda_{\text{dB}} \ll 1$ ), one can keep only the term  $i = j = 1$ . The bunching term reduces to  $\langle n(z) \rangle^2 \exp[-2\pi(z-z')^2/\lambda_{\text{dB}}^2] \tanh^2(\beta\hbar\omega_{\perp}/2)$  and one recovers the well-known Gaussian decay of the correlations. The reduction factor  $\tanh^2(\beta\hbar\omega_{\perp}/2)$  is due to the integration over the transverse states. In our experiment, the pixel size is always much bigger than the correlation length. In which case, integrating over the pixel size  $\Delta$ , we have

$$\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \langle N \rangle + \langle N \rangle^2 \frac{\lambda_{\text{dB}}}{\sqrt{2}\Delta} \tanh^2(\beta\hbar\omega_{\perp}/2). \quad (3)$$

The coefficient of  $\langle N \rangle^2$  is the inverse of the number of elementary phase space cells occupied by the  $N$  atoms.

To compare Eq. (3) to our data we must correct for the optical resolution as was done for the shot noise. Furthermore, atoms diffuse about  $5 \mu\text{m}$  during the imaging pulse because of photon scattering. This diffusion modifies the correlation function, but since the diffusion distance is smaller than the resolution,  $10 \mu\text{m}$ , and since its effect is averaged over the duration of the pulse, its contribution is negligible. We thus simply multiply the computed atom number variance by the factor  $\kappa$ .

Figure 2 shows that the value calculated from Eq. (3) (dotted line) underestimates the observed atom number variance. In fact, for the coldest sample, we estimate  $n(0)\lambda_{\text{dB}} \approx 10$ , and thus the gas is highly degenerate. In this situation replacing the Bose-Einstein occupation numbers by their Maxwell-Boltzmann approximations is not valid, meaning that many terms of the sum in Eq. (2) have to be taken into account. The prediction from the entire sum is shown as a dot-dashed line and is in better agreement with the data.

In the experiment we are also able to access the quasi-condensate regime in which interparticle interactions are not negligible, and the ideal gas theory discussed above fails. Figure 3 shows the results of two experimental runs using denser clouds. For these data, the trapping frequencies are  $2.85 \text{ kHz}$  and  $10.5 \text{ Hz}$ . The insets show the mean longitudinal cloud profiles and a fit to the wings of the profiles to an ideal Bose gas profile. One can see from these insets that, unlike the conditions of Fig. 2, an ideal gas model does not describe the density profile in the center. We employ the same procedure to determine the variance versus the mean atom number. As in Fig. 2 we plot our experimental results along with the ideal Bose gas prediction based on the temperature determined from the fit to the wings in the insets. For small mean value  $\bar{N}(z)$ , the measured fluctuations follow the ideal gas curve (dot-dashed

line) but they are dramatically reduced when the atom number is large.

The theory for a weakly interacting uniform 1D Bose gas permits an analytical prediction for the density fluctuations in the limit  $n \gg n_T$ . In this limit, the gas enters the Gross-Pitaevskii regime and density fluctuations are given in the Bogoliubov approximation by [12,13]

$$\langle \delta n(z) \delta n(z') \rangle = \frac{\langle n \rangle}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(z-z')} \left( \frac{k^2}{k^2 + 4\xi^{-2}} \right)^{1/2} (1 + 2n_k), \quad (4)$$

where  $n_k$  is the Bose thermal occupation factor of the mode  $k$  with energy  $\epsilon_k = \sqrt{k^2(k^2 + 4\xi^{-2})} \times \hbar^2/(2m)$  and  $\xi = \hbar/\sqrt{mng}$  is the healing length. For 200 atoms per pixel, the healing length is about  $0.3 \mu\text{m}$  in our experiment [23]. The term proportional to  $n_k$  describes the contribution of thermal fluctuations while the other is due to vacuum fluctuations. Since the pixel size is much bigger than the healing length, we probe only long wavelength fluctuations for which thermal fluctuations dominate at the temperatures we consider. Using  $k \ll 1/\xi$  and  $n_k \approx k_B T/\epsilon_k$ , we obtain for the atom number variance in a pixel

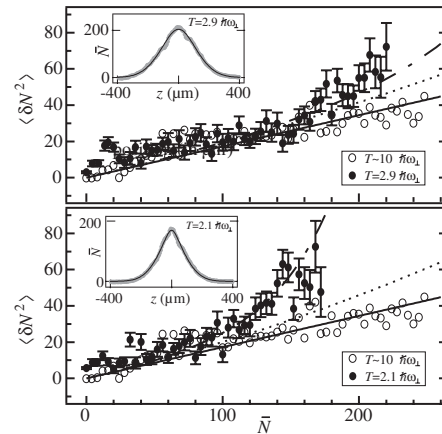


FIG. 2. Atom number variance as a function of the mean atom number per pixel. Open circles correspond to a hot cloud ( $k_B T \approx 10\hbar\omega_{\perp}$ ,  $\omega_{\perp} = 2\pi \times 2.85 \text{ kHz}$ ) for which fluctuations are given by the shot noise (black line). The solid circles correspond to cold clouds. Error bars show the standard deviation of the mean of  $\langle \delta N^2 \rangle$ . The fluctuations in excess of shot noise are due to bosonic bunching. The dot-dashed line is the prediction for an ideal Bose gas while the dotted line uses the Maxwell-Boltzmann approximation [see Eq. (3)]. The insets show the longitudinal profile of the two cold clouds from which we deduce the temperature and the chemical potential used for the calculations.

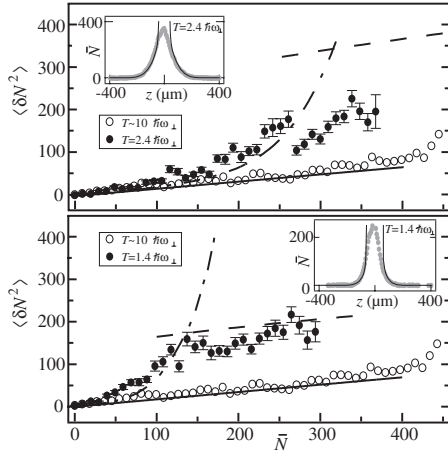


FIG. 3. We plot the same quantities as in Fig. 2. Dot-dashed lines are the predictions for an ideal Bose gas [deduced from Eq. (2)], whereas the dashed lines show the results of Eq. (6). The temperature of the sample is deduced by fitting the wings of the longitudinal profile to an ideal Bose gas profile as shown in the insets. The solid lines gives the atomic shot-noise level.

$$\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = \Delta \frac{k_B T}{g}. \quad (5)$$

This formula can also be deduced from thermodynamic considerations: for a gas at thermal equilibrium, the atom number variance in a given volume is given by

$$\langle N^2 \rangle - \langle N \rangle^2 = k_B T (\partial N / \partial \mu)_T. \quad (6)$$

For a quasicondensate with chemical potential  $gn$ , Eqs. (5) and (6) coincide.

The calculation leading to Eq. (5) holds in a true 1D situation in which case the effective coupling constant is  $g = 2\hbar\omega_{\perp}a$ , where  $a$  is the scattering length of the atomic interaction. The validity condition for the 1D calculation is  $n \ll 1/a$  (equivalently  $\mu \ll \hbar\omega_{\perp}$ ). In our experiment however, the value of  $na$  is as high as 0.7 and thus one cannot neglect dependence of the transverse profile on the local density. On the other hand, the thermodynamic approach is valid and, supposing  $\mu(N)$  is known, Eq. (6) permits a very simple calculation. We use the approximate formula  $\mu(N) = \hbar\omega_{\perp}\sqrt{1 + 4Na/\Delta}$  valid in the quasicondensate regime [24]. This formula connects the purely 1D regime with that in which the transverse profile is Thomas-Fermi. The results of this analysis, confirmed by a full 3D Bogoliubov calculation, are plotted in Fig. 3 (dashed line). Equation (5) predicts a constant value for the atom number variance and underestimate it by 50% for the maximal density reached in our experiment ( $\bar{N} = 400$ ).

We compare this calculation in the quasicondensate regime with our data. From Fig. 3 we see that the calculation agrees well with the measurements for  $k_B T = 1.4\hbar\omega_{\perp}$  but less so for  $k_B T = 2.4\hbar\omega_{\perp}$ . The one-dimensional theory predicts that the quasicondensate approximation is valid in

the limit  $n \gg n_T$ , which corresponds to  $\langle N \rangle \gg 100(140)$  for  $k_B T = 1.4\hbar\omega_{\perp}$  ( $k_B T = 2.4\hbar\omega_{\perp}$ ). The disagreement between the calculation and our data for  $k_B T = 2.4\hbar\omega_{\perp}$  suggests that perhaps we did not achieve a high enough density to be fully in the quasicondensate approximation. In addition the one-dimensional calculation of  $n_T$  is unreliable for such high ratio  $k_B T / \hbar\omega_{\perp}$  and underestimates the value at which the cross over appears. This is also the case for the data of Fig. 2 where the naive estimate of  $n_T$  corresponds to  $\langle N \rangle = 160$  for  $k_B T = 2.9\hbar\omega_{\perp}$  and  $\langle N \rangle = 130$  for  $k_B T = 2.1\hbar\omega_{\perp}$ .

Exploitation of the 1D geometry to avoid averaging the fluctuations in the imaging direction can be applied to other situations. A Bose gas in the strong coupling regime, or an elongated Fermi gas should show sub-shot-noise fluctuations due to antibunching.

This work has been supported by the EU under Grants No. IST-2001-38863, No. MRTN-CT-2003-505032, and No. IP-CT-015714, by the DGA (03.34033) and by the French research ministry ‘‘AC nano’’ program. We thank D. Maillly from the LPN (Marcoussis, France) for helping us to microfabricate the chip.

- [1] L. D. Landau and E. M. Lifschitz, *Statistical Physics, Part I* (Pergamon, Oxford, 1980), Chap. 12.
- [2] R. H. Brown and R. Q. Twiss, *Nature (London)* **177**, 27 (1956).
- [3] M. Yasuda and F. Shimizu, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3090 (1996).
- [4] M. Schellekens *et al.*, *Science* **310**, 648 (2005).
- [5] S. Fölling *et al.*, *Nature (London)* **434**, 481 (2005).
- [6] A. Öttl *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **95**, 090404 (2005).
- [7] J. Grondalski, P. M. Alsing, and I. H. Deutsch, *Opt. Express* **5**, 249 (1999).
- [8] E. Altman, E. Demler, and M. D. Lukin, *Phys. Rev. A* **70**, 013603 (2004).
- [9] M. Greiner *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 110401 (2005).
- [10] P. C. Hohenberg, *Phys. Rev.* **158**, 383 (1967).
- [11] K. V. Kheruntsyan *et al.*, *Phys. Rev. A* **71**, 053615 (2005).
- [12] C. Mora and Y. Castin, *Phys. Rev. A* **67**, 053615 (2003).
- [13] K. V. Kheruntsyan *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 040403 (2003).
- [14] S. Dettmer *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 160406 (2001).
- [15] S. Richard *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 010405 (2003).
- [16] D. Hellweg *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **91**, 010406 (2003).
- [17] M. Hugbart *et al.*, *Eur. Phys. J. D* **35**, 155 (2005).
- [18] I. Shvarchuck *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 270404 (2002).
- [19] J. Reichel, *Appl. Phys. B* **74**, 469 (2002).
- [20] We actually form the quantity  $\delta N(z)^2 = [N(z) - \bar{N}(z)]^2 \times p/(p-1)$  to take into account the underestimation of the variance due to the finite number of images.
- [21] Y. Jiang *et al.*, *Eur. Phys. J. D* **22**, 521 (2003).
- [22] M. Naraschewski and R. J. Glauber, *Phys. Rev. A* **59**, 4595 (1999).
- [23] The phase correlation length  $l_c = \hbar^2 n / (mk_B T)$  is about  $1 \mu\text{m}$  for  $k_B T = 1.4\hbar\omega_{\perp}$  confirming that we are in the quasicondensate regime.
- [24] F. Gerbier, *Europhys. Lett.* **66**, 771 (2004).

## Experimental Evidence for the Breakdown of a Hartree-Fock Approach in a Weakly Interacting Bose Gas

J.-B. Trebbia,<sup>1</sup> J. Esteve,<sup>1,2</sup> C. I. Westbrook,<sup>1</sup> and I. Bouchoule<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire Charles Fabry, CNRS et Université Paris 11, 91403 Orsay CEDEX, France

<sup>2</sup>Laboratoire de Photonique et de Nanostructures, CNRS, 91460 Marcoussis, France

(Received 30 June 2006; published 22 December 2006)

We investigate the physics underlying the presence of a quasicondensate in a nearly one dimensional, weakly interacting trapped atomic Bose gas. We show that a Hartree-Fock (mean-field) approach fails to predict the existence of the quasicondensate in the center of the cloud: the quasicondensate is generated by interaction-induced correlations between atoms and not by a saturation of the excited states. Numerical calculations based on Bogoliubov theory give an estimate of the crossover density in agreement with experimental results.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.97.250403](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.250403)

PACS numbers: 03.75.Hh, 05.30.Jp

Since the first observation of the Bose-Einstein condensation in dilute atomic gases, self-consistent mean-field approaches (see e.g. [1,2]) have successfully described most experimental results. A good example is the critical temperature at which the condensate appears [3–5]. However, the approximate treatment made in these theories about particle correlations cannot capture all the subtle aspects of the many body problem and the success of these theories relies on the weakness of interactions in dilute atomic gases [ $\rho a^3 \ll 1$  where  $\rho$  is the atomic density and  $a$  the scattering length for three-dimensional (3D) gases] and also on the absence of large fluctuations (Ginzburg criterion) [6]. In a 3D Bose gas, this latter criterion is not fulfilled for temperatures very close to the critical temperature [4] and deviations from the mean-field theories are expected. For a given atomic density, the critical temperature is calculated to be slightly shifted towards a larger value as compared to the mean-field prediction [7–9] but this discrepancy is still beyond the precision of current cold atom experiments [3,10].

In mean-field theory, a Bose gas above condensation is described by a Hartree-Fock (HF) single fluid in which atomic interactions are taken into account only via a mean-field potential  $V_{\text{mf}} = 2g\rho$  [11,12], where  $g$  is the coupling constant and  $\rho$  the atomic density. Interaction-induced atomic correlations are neglected and the gas is modeled as a group of noninteracting bosons that experience the self-consistent potential  $V_{\text{mf}}$ . As for an ideal Bose gas, the two-particle correlation function at zero distance  $g^{(2)}(0)$  is 2 (bunching effect) [6]. This HF single fluid description holds until the excited state population saturates, which is the onset of Bose condensation.

In this Letter, we present measurements of density profiles of a degenerate Bose gas in a situation where the trap is very elongated and the temperature of the cloud is close to the transverse ground state energy. For sufficiently low temperatures and high densities, we observe the presence of a quasicondensate [13] at the center of the cloud. Using the above HF theory, we show that a gas with the same

temperature and chemical potential as the experimental data is not Bose condensed. Thus, a mean-field approach does not account for our results and the quasicondensate regime is not reached via the usual saturation of the excited states. We emphasize that this failure of mean-field theory happens in a situation where the gas is far from the strong interaction regime, which in one dimension (1D), corresponds to the Tonks-Girardeau gas limit [13–15], and where mean-field theory also fails. To our knowledge, this is the first demonstration of the breakdown of a Hartree-Fock approach in the weakly interacting limit.

We attribute this failure of the mean-field theory to the nearly 1D character of the gas. It is well known that a 1D homogeneous ideal Bose gas does not experience Bose-Einstein condensation in the thermodynamic limit. On the other hand, in the presence of repulsive interactions in the weakly interacting regime, as the linear density increases one expects a smooth crossover from an ideal gas regime where  $g^{(2)}(0) \simeq 2$  to a quasicondensate regime where  $g^{(2)}(0) \simeq 1$  [14,16,17]. The HF approach fails to describe this crossover: as for an ideal gas, the thermal fluid does not saturate and  $g^{(2)}(0) = 2$  for any density. The above results also hold for a 1D harmonically trapped gas at the thermodynamic limit: no saturation of excited states occurs for an ideal gas [18] and the gas smoothly enters the quasicondensate regime when the peak density increases [13,19].

In the experiment presented here, the gas is neither purely 1D nor at the thermodynamic limit: a few transverse modes of the trap are populated and a condensation phenomenon due to finite size effects might be expected [20]. However, we will show that, as in the scenario discussed above, the gas undergoes a smooth crossover to the quasicondensate regime without saturation of the excited states. An estimation of the crossover density using a three-dimensional Bogoliubov calculation is in agreement with experimental data.

The experimental setup is the same as [21]. Using a Z-shaped wire on an atom chip [22], we produce an anisotropic trap, with a transverse frequency of

$\omega_{\perp}/(2\pi) = 2.75$  kHz and a longitudinal frequency of  $\omega_z/(2\pi) = 15.7$  Hz. By evaporative cooling, we obtain a few thousand  $^{87}\text{Rb}$  atoms in the  $|F = 2, m_F = -2\rangle$  state at a temperature of a few times  $\hbar\omega_{\perp}/k_B$ . Current-flow deformations inside the microwire, located  $150\ \mu\text{m}$  below the atoms, produce a roughness on the longitudinal potential [23]. The observed atomic profiles are smooth (see Fig. 1), which shows that this roughness is small and we neglect it in the following.

The longitudinal profile of the trapped gases are recorded using *in situ* absorption imaging as in [21]. The probe beam intensity is about 20% of the saturation intensity and the number of atoms contained in a pixel of a CCD camera is deduced from the formula  $N_{\text{at}} = (\Delta^2/\sigma) \times \ln(I_2/I_1)$ , where  $\Delta = 6.0\ \mu\text{m}$  is the pixel size,  $\sigma$  the effective cross section, and  $I_1$  and  $I_2$  the probe beam intensity, respectively, with and without atoms. The longitudinal profiles are obtained by summing the contribution of the pixels in the transverse direction. However, when the optical density is large and the density varies on a scale smaller than the pixel size the above formula underestimates the real atomic density [21]. In our case, the peak optical density at resonance is about 1.5, and this effect cannot be ignored. To circumvent this problem, we decrease the absorption cross section by detuning the probe laser beam from the  $F = 2 \rightarrow F' = 3$  transition by  $\delta = 9$  MHz. We have checked that for larger detunings, the normalized profile remains identical to within 5%. For the detuning  $\delta$ , the lens effect due to the real part of the atomic refractive index is calculated to be small enough so that all the refracted light is collected by our optical system and the profile is preserved.

To get an absolute measurement of the linear density, we need the effective absorption cross section  $\sigma$ . We find  $\sigma$  by comparing the total absorption of *in situ* images taken with a detuning  $\delta$  with the total number of atoms measured on images taken at resonance after a time of flight long enough (5 ms) that the optical density is much smaller than 1. In these latter images, the probe beam is  $\sigma^+$  polarized and the magnetic field is pointing along the probe beam propagation direction so that the absorption cross section is  $3\lambda^2/2\pi$ . We obtain for the *in situ* images taken at

a detuning  $\delta$ , an effective absorption cross section  $(0.24 \pm 0.04) \times 3\lambda^2/2\pi$ . For samples as cold as that in Fig. 1(a), the longitudinal profile is expected to be unaffected by the time of flight and we checked that the profile is in agreement with that obtained from *in situ* detuned images within 5%.

Averaging over 30 measured profiles, we obtain a relative accuracy of about 5% for the linear density. A systematic error of about 20% is possible due to the uncertainty in the absorption cross section.

In Fig. 1, we plot the longitudinal density profiles of clouds at thermal equilibrium for different final evaporating knives obtained from *in situ* images. We have compared the density profiles with the expected quasicondensate density profile with the same peak density. This is obtained using the equation of state of the longitudinally homogeneous gas  $\mu = \hbar\omega_{\perp}\sqrt{1 + 4na}$  [24], and the local chemical potential  $\mu(z) = \mu_0 - 1/2m\omega_z^2 z^2$ , where  $n$  is the linear atomic density, and  $\mu_0$  the chemical potential at the center of the cloud. For the two colder clouds [graphs (a) and (b)] in Fig. 1, we observe a good agreement between the central part of the experimental curves (circles) and the quasicondensate profile (short dashed lines) which indicates that the gas has entered the quasicondensate regime. In [21], we observed the inhibition of density fluctuations expected in this regime.

For a given atomic density profile, we extract the temperature and chemical potential of the data from a fit to an ideal Bose gas distribution. For cold clouds, the ideal Bose gas model should fail in the central part of the cloud where interactions are not negligible. We therefore fit only the wings of the profile by excluding a number of pixels  $N_{\text{ex}}$  on either side of the center of the profile. We fit the longitudinal atomic distribution with only the chemical potential  $\mu_0$  as a free parameter for different trial temperatures  $T$ . As seen in Fig. 2,  $\mu_0(T, N_{\text{ex}})$  is approximately linear in  $N_{\text{ex}}$  for  $N_{\text{ex}} > 10$ . The cloud's temperature is the one for which  $\mu_0(T, N_{\text{ex}})$  is independent of  $N_{\text{ex}}$ . The fluctuations around the straight line for  $N_{\text{ex}} > 10$ , seen in Fig. 2, is mainly due to the potential roughness. These fluctuations contribute for about 5% to the uncertainty of  $T$  and  $\mu_0$ . The determination of  $\mu_0$ , however, is primarily limited by the uncer-

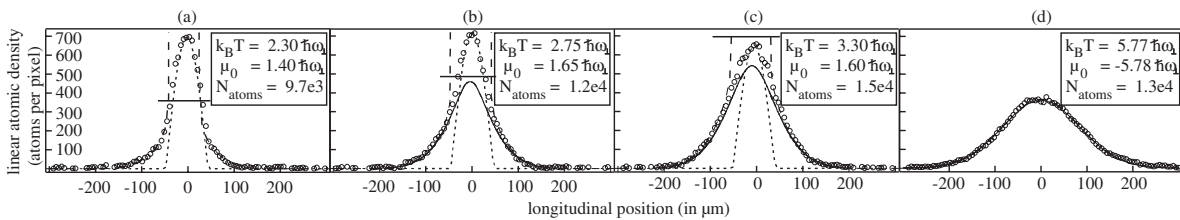


FIG. 1. *In situ* longitudinal distributions for different temperatures (circles). Long dashed lines: ideal Bose gas profile at the shown temperature  $T$  and chemical potential  $\mu_0$  obtained from a fit to the wings. Solid lines: profiles obtained in the Hartree-Fock approximation for the same  $T$  and  $\mu_0$ . Short dashed lines: quasicondensate profiles with the same peak density as the experimental data. Horizontal solid lines: crossover density estimated using a Bogoliubov calculation (see text).



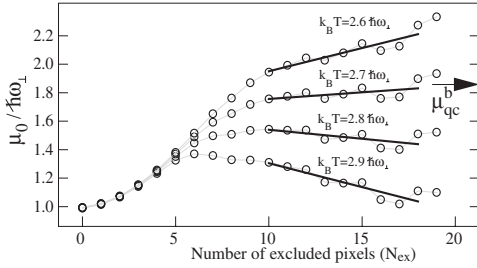


FIG. 2. Chemical potential  $\mu_0$ , obtained by fitting the wings of profile (b) to an ideal Bose gas distribution, as a function of the number of excluded pixels  $N_{\text{ex}}$  on either side of the distribution, for four different trial temperatures. The arrow indicates  $\mu_{\text{qc}} = \hbar\omega_{\perp}\sqrt{1+4n_0a}$ , which is the chemical potential found from the measured peak linear density  $n_0$ .

tainty in the total atom number. For profile (b), we find  $T_b = (2.75 \pm 0.05)\hbar\omega_{\perp}/k_B$  and  $\mu_0^b = (1.65 \pm 0.5)\hbar\omega_{\perp}$ . For the profile (a), the chemical potential and the temperature are not very accurate because the wings are too small. This profile is not analyzed in the following.

Another method to deduce the chemical potential is to use the peak atomic density and the formula  $\mu = \hbar\omega_{\perp}\sqrt{1+4n_0a}$ , assuming the gas is well inside the quasi-condensate regime at the center of the cloud. For graph (b), we obtain  $\mu_{\text{qc}}^b = (1.8 \pm 0.2)\hbar\omega_{\perp}$ , which is consistent with the value obtained from fits of the wings of the distribution.

We now compare the experimental density profiles with the longitudinal atomic density  $n(z)$  given by the Hartree-Fock theory for the same temperature and chemical potential. To do the calculation, we also assume the relative population of the ground state is negligible (no Bose-Einstein condensation) and the quantization of the longitudinal eigenstates is irrelevant. In this so-called local density approximation (LDA), the linear atomic density  $n(z)$  is identical to the linear atomic density  $n_h(\mu(z), T)$  of a thermal Bose gas trapped in the radial direction and longitudinally untrapped at a chemical potential  $\mu(z) = \mu_0 - m\omega_z^2 z^2/2$ .

To obtain  $n_h(\mu, T)$ , we need to compute the self-consistent three-dimensional atomic density  $\rho$  which is the thermodynamic distribution of independent bosons that experience the self-consistent HF Hamiltonian [11,12]

$$H_{\text{HF}} = \frac{p_z^2}{2m} + H_{\text{kin}} + H_{\text{harm}} + 2g\rho(r), \quad (1)$$

where  $H_{\text{kin}}$  is the transverse kinetic energy term,  $H_{\text{harm}}$  the transverse harmonic potential,  $r$  is the radial coordinate, and  $g = 4\pi\hbar^2 a/m$  where  $a$  is the  $^{87}\text{Rb}$  scattering length. The simplest approach to obtain  $\rho(r)$  is to use an iterative method, starting from  $\rho(r) = 0$ . For each iteration, we numerically diagonalize the transverse part of  $H_{\text{HF}}$  to deduce the new thermal atomic density distribution. When the interactions become too strong (linear density

larger than 320 atoms per pixels for the temperature  $T_b$ ) this algorithm does not converge. In this case, we use a more time consuming method based on a minimization algorithm. We use the trial function  $\rho_{\text{trial}}(r) = \sum c_{2p} H_{2p}(r) \times e^{-r^2/2r_0^2}$  where  $H_{2p}(r)$  are Hermite polynomials, and  $0 \leq p \leq 3$ . We find  $r_0$  and the four  $c_{2p}$  coefficients by minimizing  $\xi = \int_0^{\infty} r(\rho'_{\text{trial}}(r) - \rho_{\text{trial}}(r))^2 dr / \int_0^{\infty} r\rho_{\text{trial}}^2(r) dr$ , where  $\rho'_{\text{trial}}(r)$  is the thermodynamic equilibrium atomic density for  $H_{\text{HF}}[\rho_{\text{trial}}(r)]$ . We find  $\xi$  less than  $10^{-4}$  meaning that our 5 parameter model describes the transverse Hartree-Fock profile well. The linear density  $n_h = \int 2\pi r \rho_{\text{trial}}(r) dr$  is identical to  $n'_h = \int 2\pi r \rho'_{\text{trial}}(r) dr$  within 0.5%. In the domain where both methods are valid, we also check that they give the same result.

Figure 1 compares the longitudinal profiles obtained with the HF calculation with the experimental data and the ideal gas profile for the graphs (b), (c), and (d). The HF profile for the hottest cloud [graph (d)] is in agreement with data and identical within 1% to the ideal Bose gas prediction. For the slightly colder cloud of graph (c), the HF avoids the divergence in the ideal gas model, although it underestimates the peak density by approximately 20%. For the even colder cloud of graph (b), the discrepancy between the HF profile and the experimental data is even larger (35% at the center).

To validate our Hartree-Fock calculations we check *a posteriori* the local density approximation (LDA). The LDA is valid if the population difference between adjacent energy states is negligible. This criterion is met if the absolute value of  $\mu_{\text{eff}} = \mu_0 - \varepsilon_0(\mu)$  is much larger than  $\Delta E$ , where  $\varepsilon_0(\mu)$  is the ground state energy and  $\Delta E$  the energy gap between the ground state and the first excited longitudinal state. For the temperature of the graph (b), as long as  $\mu_0 < 2.0\hbar\omega_{\perp}$ ,  $|\mu_{\text{eff}}/\Delta E|$  is larger than 15 (see Fig. 3), and for the chemical potential  $\mu_0^b = 1.65\hbar\omega_{\perp}$  deduced from the data  $|\mu_{\text{eff}}/\Delta E| \approx 25$ . For such a large value of  $|\mu_{\text{eff}}/\Delta E|$ , the LDA is expected to be valid.

For this ratio  $\mu_{\text{eff}}/\Delta E$ , we can quantify the error made in the density profile due to the LDA. From the HF calculation, we obtain the energies  $E_n(\mu, T)$  of the transverse eigenstates. Assuming the transverse motion adiabatically

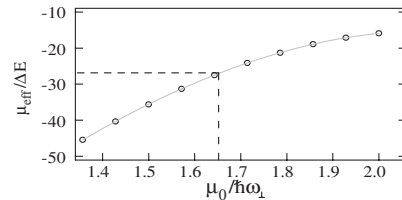


FIG. 3. Ratio between the effective chemical potential and  $\Delta E$ , the energy splitting between the ground state and the first excited state as a function of the chemical potential for the temperature of profile (b). The dashed lines correspond to the measured chemical potential.

follows the longitudinal one, we obtain an effective longitudinal Hamiltonian with a potential  $V_n(z) = E_n(\mu_0 - m\omega_z^2 z^2/2, T)$  for each transverse mode. Diagonalization of each effective longitudinal Hamiltonian and summation of the resulting thermal profiles gives the expected longitudinal density profile. We find agreement with the profile obtained from the LDA within 5%. This procedure also confirms the LDA for the HF calculations corresponding to the graphs (c) and (d).

In the case of profile (b), where the gas is in the quasicondensate regime at the center, the Hartree-Fock calculation predicts a population of the ground state  $N_0 \approx k_B T / (\varepsilon_0 - \mu_0) = 0.0035 N_{\text{tot}}$ . Therefore, the Hartree-Fock approach does not predict a saturation of the excited states and fails to explain the presence of the quasicondensate at the center of the cloud. The local density approximation criterion  $|\mu_{\text{eff}}| = |\mu_0 - \varepsilon_0(\mu)| \gg \Delta E$  also implies a small relative ground state population.

The failure of the Hartree-Fock approach for our experimental parameters is due to the large density fluctuations this theory predicts in a dense, nearly 1D gas. When density fluctuations become too large, pair interactions induce correlations in position between particles which are not taken into account in the Hartree-Fock theory. These correlations reduce the interacting energy by decreasing density fluctuations: the gas enters the quasicondensate regime.

We now estimate the crossover density  $n_{\text{co}}$  at which the gas enters the quasicondensate regime. For this purpose, we assume the gas is in the quasicondensate regime and use the Bogoliubov theory to compute density fluctuations. We find *a posteriori* the validity domain of the quasicondensate regime, which requires that density fluctuations  $\delta\rho$  be small compared to the mean density  $\rho$ . More precisely, we define  $n_{\text{co}}$  as the density for which the Bogoliubov calculation yields  $\iint (\delta\rho(r))^2 / (\rho(r)n_{\text{co}}) d^2r = 1$ . We indicate this crossover density in Fig. 1. We find that  $n_{\text{co}}$  is close to the density above which the experimental profiles agree with the quasicondensate profile.

In conclusion, we have been able to reach a situation where a quasicondensate is experimentally observed but a HF approach fails to explain its presence. As for purely one dimensional systems, the passage towards quasicondensate in our experiment is a smooth crossover driven by interactions. The profiles that we observe require a more involved theory able to interpolate between the classical and the quasicondensate regime. A quantum Monte Carlo calculation that gives the exact solution of the many body problem [5,9] should reproduce the experimental data. In fact, since temperatures are larger than interaction energy, quantum fluctuations of long wavelength excitations should be negligible and a simpler classical field calculation should be sufficient [25,26]. Finally, the refined mean-field theory proposed in [27], where the coupling constant

$g$  is modified to take into account correlations between atoms, may explain our profiles.

We thank A. Aspect and L. Sanchez-Palencia for careful reading of this Letter, and D. Mailly from the LPN (Marcoussis, France) for help in microfabrication. The atom optics group is member of l'Institut Francilien de la Recherche sur les Atomes Froids. This work has been supported by the EU under Grants No. MRTN-CT-2003-505032 and No. IP-CT-015714.

- 
- [1] A. Griffin, Phys. Rev. B **53**, 9341 (1996).
  - [2] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, J. Low Temp. Phys. **109**, 309 (1997).
  - [3] F. Gerbier *et al.*, Phys. Rev. Lett. **92**, 030405 (2004).
  - [4] S. Giorgini, L. P. Pitaevskii, and S. Stringari, Phys. Rev. A **54**, R4633 (1996).
  - [5] M. Holzmann, W. Krauth, and M. Naraschewski, Phys. Rev. A **59**, 2956 (1999).
  - [6] L. Landau and E. Lifschitz, in *Statistical Physics* (Pergamon, Oxford, 1980), Pt. I, Chap. 14.
  - [7] M. Holzmann, G. Baym, J.-P. Blaizot, and F. Laloë, Phys. Rev. Lett. **87**, 120403 (2001).
  - [8] P. Arnold and G. Moore, Phys. Rev. Lett. **87**, 120401 (2001).
  - [9] V. A. Kashurnikov, N. V. Prokofév, and B. V. Svistunov, Phys. Rev. Lett. **87**, 120402 (2001).
  - [10] P. Arnold and B. Tomášik, Phys. Rev. A **64**, 053609 (2001).
  - [11] Y. Castin, in *Coherent Atomic Matter Waves*, edited by R. Kaiser, C. Westbrook, and F. David (Springer, Berlin, 2001), pp. 32–36.
  - [12] P. Öhberg and S. Stenholm, J. Phys. B **30**, 2749 (1997).
  - [13] D. Petrov, G. Shlyapnikov, and J. Walraven, Phys. Rev. Lett. **85**, 3745 (2000).
  - [14] K. V. Kheruntsyan, D. M. Gangardt, P. D. Drummond, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. Lett. **91**, 040403 (2003).
  - [15] E. H. Lieb and W. Liniger, Phys. Rev. **130**, 1605 (1963).
  - [16] C. Mora and Y. Castin, Phys. Rev. A **67**, 053615 (2003).
  - [17] Y. Castin *et al.*, J. Mod. Opt. **47**, 2671 (2000).
  - [18] V. Bagnato and D. Kleppner, Phys. Rev. A **44**, 7439 (1991).
  - [19] K. V. Kheruntsyan, D. M. Gangardt, P. D. Drummond, and G. V. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **71**, 053615 (2005).
  - [20] W. Ketterle and N. J. van Druten, Phys. Rev. A **54**, 656 (1996).
  - [21] J. Estève *et al.*, Phys. Rev. Lett. **96**, 130403 (2006).
  - [22] J. Reichel, W. Hänsel, and T. W. Hänsch, Phys. Rev. Lett. **83**, 3398 (1999).
  - [23] J. Esteve *et al.*, Phys. Rev. A **70**, 043629 (2004).
  - [24] F. Gerbier, Europhys. Lett. **66**, 771 (2004).
  - [25] K. Góral, M. Gadjia, and K. Rzazewski, Phys. Rev. A **66**, 051602 (2002).
  - [26] M. J. Davis and P. B. Blakie, Phys. Rev. Lett. **96**, 060404 (2006).
  - [27] U. Al Khawaja *et al.*, Phys. Rev. A **66**, 013615 (2002).



Troisième partie

Renseignements administratifs





# Chapitre 9

## Curriculum Vitae

### Isabelle Bouchoule

Adresse : Institut d'Optique  
campus polytechnique, RD 128  
91127 Palaiseau Cedex  
Tel. : 01 64 53 33 38  
mel : isabelle.bouchoule@institutoptique.fr  
URL : <http://atomoptic.iota.u-psud.fr/>  
Naissance : 10 Janvier 1973

---

#### Positions

2005 - : CR1 à l'Institut d'Optique  
2004 - 2001 : CR2 à l'Institut d'Optique, groupe d'Optique atomique.  
2000-2001 : Boursière Marie-Curie à l'université d'Aarhus, Danemark  
1997 - 2000 : Allocataire Monitrice à l'Université de Paris VI.  
1993 - 1997 : Élève à l'ENS Paris.

---

#### Formation

2000 : Thèse soutenue en Octobre 2000 à Paris VI, devant le jury composé de M. Girard, M. Grangier, M. Cohen-Tannoudji, M. Salomon, M. Simon et M. Shlyapnikov.  
1997 : Agrégation de physique, option physique (reçue 3ième).  
1996 : DEA de physique quantique de l'Université de Paris VI.  
1993-1995 : Magistère de physique de l'ENS Ulm

---

#### Activités de recherche :

Toutes mes activités de recherche concernent le domaine des atomes froids. J'ai travaillé pendant ma thèse sur le refroidissement d'atomes de Césium dans un réseau lumineux. Lors

de mon postdoc, j'ai étudié, en théorie, des méthodes de compression du spin collectif d'une assemblée d'atomes. Depuis mon entrée au CNRS, je travaille sur une expérience de puce à atomes dans laquelle des atomes ultra-froids de Rubidium sont confinés dans des pièges magnétiques réalisés par des micro-fils déposés sur un substrat. J'ai étudié, en théorie, le rôle des interactions entre atomes dans un laser à atomes guidé et dans une séparatrice à atomes. Sur le plan expérimental, nous avons étudié la transition vers un quasi-condensat dans un gaz de Bose allongé. Nous avons aussi étudié la rugosité du potentiel réalisé par un micro-fil et nous avons mis au point une méthode pour s'en affranchir.

---

### Activités d'enseignement

- 2004 : Cours sur le piégeage magnétique à l'école prédoctorale des Houches intitulée "REFROIDISSEMENT par LASER et APPLICATIONS".
  - 2001-2003 : Pendant deux ans, j'ai fait le cours/TD d'optique de la préparation à l'agrégation de chimie de Montrouge (ENS) (10 h).
  - 1997 - 2000 : Monitrice à l'Université de Paris VI. J'ai eu la responsabilité de TD et de TP de deux de physique première année.
- 

### Gestion de la recherche

- 2002-2005 : Gestion de l'AC nanoscience intitulée "puce Josephson" (écriture du projet de recherche et des rapports d'activités).
  - 2002-2005 : Gestion de la bourse de la DGA intitulée "source atomique cohérente intégrée" (écriture du projet de recherche et des rapports d'activités).
  - 2006 : Demande de financement réalisé auprès de l'Institut Francilien des Atomes Froids (demande accordée)
  - 2006 : "Principal Investigator" de l'équipe de l'Institut d'Optique dans une demande de financement adressée à l'ESF (demande Euroquam intitulée MIG)
- 

### Collaborations internationales

- Collaboration avec Klaus Mølmer, de l'université d'Aarhus au Danemark : étude de l'effet des interactions entre atomes dans un laser à atomes guidé.
  - Collaboration avec Karen Kheruntsyan, de l'université de Brisbane en Australie sur les propriétés des gaz unidimensionnels en interaction.
- 

### Tâches collectives

- Organisation des séminaires généraux de l'Institut d'Optique.
-

# Chapitre 10

## Encadrement d'étudiants

Durant mes activités postdoctorales, j'ai encadré le travail de plusieurs étudiants. J'ai proposé des sujets de stage et j'ai encadré des étudiants de Matser. J'ai aussi travaillé avec plusieurs étudiants en thèse. J'ai participé à l'encadrement de leur travail et j'ai corrigé leur manuscrit de thèse. Les citations font références à la liste de publication donnée en section 6.

### Étudiants en thèse

- **Christine Aussibal. Taux d'encadrement 50%.** Christine Aussibal a commencé sa thèse un an avant mon arrivée au laboratoire. J'ai participé à l'encadrement de son travail, qui a consisté essentiellement à construire l'expérience. Sa thèse est disponible sur <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00004429>.
- **Jérôme Estève. Taux d'encadrement 60%.** J'ai eu la chance de travailler avec Jérôme Estève, étudiant en thèse qui a commencé sa thèse un an avant mon arrivée au laboratoire. Nous avons étudié la rugosité des micro-pièges magnétiques[7-8] et nous avons cherché à observer des oscillations de Josephson entre deux condensats couplés[5]. J'ai corrigé sa thèse (<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00011309>) et je pense que notre collaboration a été fructueuse pour tous les deux. J. Estève est resté ensuite en postdoc un an au laboratoire et nous avons fait ensemble les études sur les fluctuations de densité dans les gaz quasi-unidimensionnels[4]. Il est actuellement en postdoc à Heidelberg en Allemagne.
- **Thorsten Schumm. Taux d'encadrement 60% de son travail fait à l'Institut d'Optique.** T. Schumm a fait une thèse en cotutelle entre notre laboratoire et le laboratoire de J. Schmiedmayer à Heidelberg. J'ai travaillé avec lui lorsqu'il était en France sur l'étude de la rugosité des micro-pièges magnétiques[7-8] et sur la réalisation d'un double puits de potentiel[5]. J'ai corrigé sa thèse (<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00129501>). T. Schumm travaille actuellement dans le laboratoire de J. Schmiedmayer à Vienne.
- **Nicolas Withloch. Taux d'encadrement 100% de son travail fait à l'Institut d'Optique.** Nicolas Withlock, étudiant en thèse à l'université de Glasgow a passé

deux mois dans notre laboratoire et nous avons fait ensemble une étude théorique sur les fluctuations de phase relative entre deux condensats couplés[9].

- **Christina Figl. Taux d'encadrement 60% de son travail fait à l'Institut d'Optique.** J'ai travaillé avec Christina Figl, étudiante en thèse à Hannovre qui est venue passer deux mois dans notre laboratoire. Nous avons fait ensemble les études de rugosité du potentiel d'un micro-piège magnétique[7-8].
- **Jean-Baptiste Trebbia. Taux d'encadrement 80%.** J'ai encadré toute la thèse de Jean-Baptiste Trebbia, qui est actuellement en phase de rédaction. Ensemble nous avons étudié la transition vers un quasi-condensat dans un gaz quasi-unidimensionnel[3-4]. Nous avons aussi mis au point une méthode pour supprimer la rugosité du potentiel dans les micro-pièges magnétiques[1].

### Étudiants en master

- **Zoltan Kurutz. Taux d'encadrement 100%.** J'ai encadré le stage de DEA de Zoltan Kurutz, du DEA de physique quantique. Nous avons étudié l'effet des interactions entre atomes dans un interféromètre à atomes.
- **Emmanuelle Gouillard. Taux d'encadrement 50%.** J'ai participé à l'encadrement du stage de master d'E.Gouillard, qui a consisté à monter une diode laser en cavité étendue.
- **Thibault Peyronel. Taux d'encadrement 100%.** J'encadre cette année le stage de Master 2 (option physique quantique) de Thibault Peyronel. Il fait des calculs de fluctuations de densité atomique près de la transition de Kosterlitz-Thaules dans les gaz bi-dimensionnels.

# Chapitre 11

## Liste de publication

### Publications dans des revues à comité de lecture

#### Travaux post-doctoraux

1. I. Bouchoule, J.-B. Trebbia and C. Garrido-Alzar, accepted in PRA :”Limitation of the modulation method to smooth wire guide roughness” (arXiv :0707.0602)
2. J.-B. Trebbia, C. L. Garrido Alzar, R. Cornelussen, C. I. Westbrook, I. Bouchoule, Phys. Rev. Lett. **98**, 263201 (2007) :”Roughness suppression in an AC atom chip”
3. I. Bouchoule, K. Kheruntsyan and G. Shlyapnikov, Phys. Rev. A **75**, 031606 :”Crossover to a quasi-condensate in a weakly interacting trapped Bose gas”
4. J.B. Trebbia, J. Estève, A. Aspect, C.W. Westbrook and I. Bouchoule, Phys. Rev. Lett. **97**, p.250403 (2006) :”Experimental evidence for the failure of a mean field approach in an elongated Bose gas in the 1D weakly interacting limit”
5. J. Estève, J-B. Trebbia, T. Schumm, A. Aspect, C. I. Westbrook and I. Bouchoule, Phys. Rev. Lett. **96**, 130403 (2006) :”Observations of Density Fluctuations in an Elongated Bose Gas : Ideal Gas and Quasicondensate Regimes”
6. Jerome Esteve, Thorsten Schumm, Jean-Baptiste Trebbia, Isabelle Bouchoule, Alain Aspect, Christopher Westbrook, physics/0503112, Eur. Phys. J D **35**, 141 (2005) : “Realizing a stable magnetic double-well potential on an atom chip”
7. I. Bouchoule, Eur. Phys. J D **35**, 147 (2005) : ”Modulational instabilities in Josephson oscillations of elongated coupled condensates”
8. Thorsten Schumm, Jerome Esteve, Cristina Figl, J.B. Trebbia, Christine Aussibal, Dominique Maily, Isabelle Bouchoule, Christopher Westbrook and Alain Aspect, Eur. Phys. J. D **32**, p.171-180 (2005) :”Atom chips in the real world : the effects of wire corrugation”.
9. Jerome Esteve, Christine Aussibal, Thorsten Schumm, Cristina Figl, Dominique Maily, Isabelle Bouchoule, Christopher Westbrook and Alain Aspect, Phys. Rev. A,**70**,p. 043629 (2004) : “The role of wire imperfections in micro magnetic traps for atoms”

10. Nicholas K. Whitlock and Bouchoule I. , Phys. Rev. A 68, 053609 (2003) :” Relative phase fluctuations of two coupled one-dimensional condensates “
11. I. Bouchoule and K. Moelmer, Phys. Rev. A 67, 011603 (2003) : ”interaction-induced phase fluctuations in a guided atom laser”
12. I. Bouchoule and K. Moelmer, Phys. Rev. A 66, 043811 (2002) : "Preparation of spin squeezed atomic states by optical phase shift measurement"
13. Isabelle Bouchoule and Klaus Moelmer, Phys. Rev. A 65, 041803 (2002) : " Spin squeezing of atoms by the dipole interaction in virtually excited Rydberg states"

### Travaux pré-doctoraux

13. I. Bouchoule, M. Morinaga, C. Salomon, and D. S. Petrov, Phys. Rev. A 65, 033402 (2002) : "Cesium gas strongly confined in one dimension : Sideband cooling and collisional properties"
14. Morinaga M., Bouchoule I., Karam J.C. and Salomon C., *Phys.Rev.Lett.*, **83**, 4037 (1999) : "Manipulation of motional quantum state of neutral atoms"
15. Bouchoule I.,Morinaga M.,Perrin H., Kuhn A.,Salomon C., Phys.Rev.A **59** ,Rapid Communication, 1999 : "Neutral Atoms prepared in Fock states of a one-dimensional harmonic potential"
16. H. Perrin, A. Kuhn, I. Bouchoule, T. Pfau and C. Salomon, *Europhys.let.*,**46**, 141-147 (1999) : "Raman cooling of spin polarized cesium atoms in a crossed dipole trap"
17. Perrin H.,Kuhn A.,Bouchoule I. and Salomon C., *Europhys.Lett.*, **42**(4),pp.395-400 (1998) : " Sideband cooling of neutral atoms in a far-detuned optical lattice"
18. Ben Dahan M., Peik E., Bouchoule I., Castin Y. and Salomon C.,*Ann.Phys.Fr.* 23,1998 : "Quantum transport with cold atoms : Bloch oscillations in an optical potential"
19. Peik E., Ben Dahan M., Bouchoule I., Castin Y., Salomon C., *Appl.Phys.B.*,65,685(1997) : " Bloch oscillations and accelerator for cold atoms"
20. Peik E., Ben Dahan M., Bouchoule I., Castin Y., Salomon C., *Phys.Rev.A.*,55,2989(1997) : " Bloch oscillations of atoms, adiabatic rapid passage, and monokinetic atomic beams"

### Participation à des conférences

1. International Joint Conference “Control of quantum correlations in tailored matter : Common perspectives of mesoscopic systems and quantum gases”, Schloss Reisingburg, Germany October 3 - 7, 2007, présentation d’un poster : “Roughness suppression via rapid current modulation on an atom chip”
2. EPS conference on Bose-Einstein Condensation, Sant Feliu de Guixols, Spain, 10 - 15 Septembre 2005, présentation d’un poster : “Density fluctuations in an elongated Bose gas : from ideal gas to quasi-condensate.”

3. Informal Meeting on Atom Chips and Low-dimensional Quantum Gases, Fevrier 2005, San Sebastian. Papier invité : "Towards Josephson oscillations of BEC on a chip"
4. Quantum Limited Atom Optics, Mars 2004, Hannover. Papier invité : "Origin of the magnetic potential roughness produced by a current carrying micro-wire".
5. DAMOP, Mai 2003. Présentation d'un papier : " Interaction induced phase fluctuations in a guided atom laser"
6. EURESCO Quantum Optics, San Feliu, September 2002. Présentation d'un poster : "Spin squeezing by phase shift measurement. Effect of scattering"
7. 15<sup>th</sup> International Conference On Laser Spectroscopy, 2001, Salt Lake City, USA. Présentation d'un poster : "Spin Squeezing of Atoms by Rydberg Blockade"
8. Fundamental on Quantum Optics, January 2000, Kuthai, Autriche. Présentation d'un poster : "Study of the collisionnal propoerties of a gas strongly confined in one direction"
9. ICSSUR 1999 : 6<sup>th</sup> conference on Squeezed States and Uncertainty Relations, Mai 1999, Naples. PApier invité : "Cesium atoms prepared in squeezed states of motion in a harmonic potential"
10. Quantum Control of Atomic Motion 2, MAy 1998, Albuquerque, USA. Présentation d'un poster : "Neutral atoms in Fock states of a harmonic potential"
11. Young Atomic Optician, Bures-sur-Yvette 1999. Présentation d'un papier : "Sideband cooling of Cesium atoms to the ground state of motion"
12. Fundamental on Quantum Optics, Janvier 1997, Kuhtai, Autriche. Présentation d'un poster : "Josephson oscilations of a Bose-Einstein condensate"