



HAL
open science

Adaptation de la méthode des éléments discrets à l'échelle de l'ouvrage en béton armé : une approche couplée éléments discrets/éléments finis

Emmanuel Frangin

► **To cite this version:**

Emmanuel Frangin. Adaptation de la méthode des éléments discrets à l'échelle de l'ouvrage en béton armé : une approche couplée éléments discrets/éléments finis. Matériaux. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2008. Français. NNT: . tel-00315502

HAL Id: tel-00315502

<https://theses.hal.science/tel-00315502>

Submitted on 28 Aug 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER - GRENOBLE I

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE JOSEPH FOURIER

Spécialité : « Modélisation et Expérimentation en Mécanique des Solides »

préparée au laboratoire SOLS, SOLIDES, STRUCTURES - RISQUES
dans le cadre de *l'École Doctorale « Mécanique et Énergétique »*

présentée par

Emmanuel FRANGIN

Le 7 juillet 2008

**Adaptation de la méthode des éléments discrets à
l'échelle de l'ouvrage en béton armé**

Une approche couplée éléments discrets/éléments finis

JURY

M. Alain	MILLARD	Professeur à l'École Polytechnique	Président
M. Ali	LIMAM	Professeur à l'INSA Lyon	Rapporteur
M. Frédéric	RAGUENEAU	Maître de Conférence à l'ENS Cachan	Rapporteur
M. Serguei	POTAPOV	Ingénieur EDF	Examineur
M. Laurent	DAUDEVILLE	Professeur à l'UJF Grenoble	Directeur de thèse
M. Philippe	MARIN	Maître de Conférence à l'INP Grenoble	Co-directeur

Remerciements

Tout arrive ! Il est l'heure pour moi de remercier tous ceux qui m'ont permis d'arriver au bout de cette thèse que ce soit les collègues du laboratoire et d'ailleurs par leur remarques qui m'ont fait progresser, ou les amis qui sont une source de bonheur intense et nécessaire.

Ce travail n'aurait pas vu le jour sans que Laurent Daudeville ne me propose chaleureusement de préparer une thèse dans le laboratoire 3S-R. C'est également toi Laurent qui m'a proposé de travailler avec Philippe Marin comme co-directeur. Une grande partie des avancées ont été obtenues grâce à ce travail en collaboration. Merci Philippe, ta disponibilité et tes remarques toujours pertinentes ont largement contribué à la réussite de ces recherches. Je t'en suis très reconnaissant.

Je remercie également les membres de mon jury de thèse, Alain Millard, Ali Limam, Frédéric Ragueneau, Serguei Potapov pour avoir accepté de passer de longues heures à lire puis à évaluer ce travail et à l'enrichir de vos commentaires.

Si ces quatre années resteront un souvenir positif, cela est dû aux nombreuses personnes qui se démènent pour faire vivre le laboratoire ou qui sont toujours disponibles pour une petite aventure. Merci aux collègues et amis de tous bords : montagnards, skieurs, cyclistes, squashers, coureurs, voyageurs, artistes, «constructivistes». Merci à la recherche française et aux universités grenobloises de faire sauter les frontières et d'accueillir tant d'étudiants venant d'horizons différents : Pologne, bien sur, mais aussi, Mexique, Vietnam, Taiwan, Grèce, Chine, Nouvelle-Zélande, République Tchèque, Iran, Algérie, Liban, Tunisie, Angleterre, Brésil, Bolivie, Mali, Roumanie, Inde, Italie, Espagne, ...

Car sans eux rien ne serait pareil, merci à Maman, Papa, Marie, Ahmad, Laïs, Lara, Claire, Cédric, Héloïse. Enfin, merci, Patrycja, pour ta présence, ton soutien et tes encouragements.

Le cadre général de ce travail concerne la prédiction des ouvrages en béton armé soumis à des charges dynamiques sévères de type impact. Le dimensionnement de ces structures sous de telles conditions doit être capable de modéliser de manière fiable et efficace le comportement discontinu local ainsi que la réponse globale de l'ouvrage. Localement, la méthode des éléments discrets est utilisée pour représenter correctement les phénomènes discontinus. Cette méthode a été validée sur des essais quasi-statiques et dynamiques réalisés sur des structures de béton et de béton armé.

Ce travail s'attache en particulier à développer le processus d'identification des paramètres locaux du modèle discret afin de le rendre plus prédictif. L'application de la méthode des éléments discrets sur des structures de grandes dimensions est limitée par le nombre d'éléments discrets nécessaire qui les rendent très peu efficaces. Pour garder la qualité de prédiction local et rendre cette méthode adaptée à l'échelle d'une structure, elle est couplée à la méthode des éléments finis dans les parties qui ne sont pas soumises à d'importantes discontinuités. Cette approche couplée permet des gains de temps importants, tant pour la modélisation que la pour la simulation.

La méthode multi-domaine couplée ED/EF proposée utilise une zone de recouvrement sur laquelle les relations de couplage cinématique sur les déplacements et les rotations sont assurées par multiplicateurs de Lagrange. L'énergie totale du modèle couplé est partagée par une combinaison linéaire des énergies de la partie discrète et de la partie continue.

Les réflexions d'ondes parasites liées à la différence de taille de discrétisation entre les deux approches sont atténuées par une méthode de relaxation. La validation de la méthode couplée porte sur des simulations d'impact sur des dalles en béton et en béton armé.

Mots clés : Méthode des éléments discrets, multi-domaine, dynamique transitoire, béton armé, impact, atténuation des ondes parasites.

The general framework of that study deals with prediction of reinforced concrete structure response under severe dynamic loads such as impacts due to natural hazards or human factors. A reliable and efficient design of structures under such loading needs to take into account local discontinuities due to impact as well as the global response of structure. Locally, the discrete element method (DEM) is used to analyze discontinuous phenomena. The 3D discrete element method has been validated by means of simulations of quasi-static and dynamic tests performed on plain and reinforced concrete structures.

This study has developed the identification process of the local parameters to have more reliable calibration parameters. The applications of DEM to large scale structures were limited due to computing costs. The number of elements increase reduces drastically computational efficiency. To improve that point, the region without any assumed damage is modelled by means of the finite element method. This method is applied on the remaining structure to reduce both times of computation and modelling. With this coupled method, different structural responses may be predicted such as the missile penetration, damage of the structure and global displacement or first natural frequencies.

The methodology for multi-scale simulation must take into account different potential problems. The variables can be different on the two domains and it is important to understand the relations that relate them. The two scale model might introduce spurious wave reflexions which are attenuated by a relaxation method or a damping method.

The starting point of our method uses a bridging sub-domain where the Hamiltonian is taken to be a linear combination of discrete and continuum Hamiltonians. Inside the overlapping domain, we enforce the relations between on one hand the discrete rotations and displacements and on the other hand the continuum displacements by Lagrange multipliers.

To validate the coupled approach, the method is applied on concrete slab and reinforced concrete slab under a localized impact.

Keywords: discrete element method, multi-scale method, dynamic response, concrete structure, impact, spurious waves.

Table des matières

Remerciements	i
Résumé	iii
Abstract	v
Table des matières	x
Table des figures	xv
Liste des tableaux	xvii
Liste des notations	xix
Chapitre 1 Introduction générale	1
1.1 Contexte de l'étude	1
1.2 Plan général	2
Chapitre 2 Données générales et bibliographiques	5
2.1 Introduction	5
2.2 Description de l'objectif du modèle	5
2.3 Références expérimentales d'impact	7
2.4 Échelles de modélisation	8
2.5 Le béton	9
2.5.1 Constituant	9
2.5.2 Comportement mécanique	10
2.5.2.1 Comportement quasi-statique	10
2.5.2.2 Comportement dynamique	11
2.5.3 Principe du béton armé	12

2.5.4	Impact sur dalle en béton armé	13
2.6	Outils numériques pour les simulations d'ouvrages	14
2.6.1	Méthodes continues	14
2.6.1.1	Éléments finis	14
2.6.1.2	Méthode sans maillage	15
2.6.2	Méthodes discrètes	16
2.7	Couplages ED/EF	17
2.8	Synthèse	20
Chapitre 3 Méthode des éléments discrets		21
3.1	Description de la méthode	21
3.1.1	Principe	22
3.1.2	Génération d'un modèle	24
3.1.3	Comportement des éléments discrets	28
3.1.3.1	Forme des éléments	28
3.1.3.2	Loi d'interaction entre grains sphériques	29
3.1.3.3	Calcul des forces normales et tangentielles	30
3.1.3.4	Mesure des déformations et des paramètres macroscopiques	31
3.1.3.5	Calcul des raideurs locales	33
3.1.3.6	Comportement non-linéaire entre deux éléments	36
3.1.4	Stabilité du schéma d'intégration	40
3.1.5	Faire du quasi-statique avec de l'explicite	40
3.1.6	Pas de temps critique en présence d'amortissement visqueux	42
3.2	Identification des paramètres locaux du modèle	44
3.2.1	Influence du type d'amortissement sur la réponse quasi-statique	44
3.2.2	Procédure d'identification des paramètres du modèle	44
3.2.3	Utilisation des paramètres statiques pour des applications dynamiques	45
Chapitre 4 Méthode de couplage		47
4.1	Quelques mots sur la méthode continue utilisée	47
4.2	Méthode du couplage	49
4.2.1	Description du modèle	49
4.2.2	Prise en compte des rotations discrètes	50
4.2.3	Équations locales	51
4.2.4	Algorithme	53
4.3	Optimisation du schéma numérique	55
4.4	Équivalence avec la méthode de pénalité	56

4.5	Procédure à deux pas de temps	57
4.6	Validation	58
4.6.1	Essais dynamiques	59
4.6.1.1	Traction	59
4.6.1.2	Flexion	60
4.6.2	Essais en quasi-statique	61
4.6.2.1	Traction	61
4.6.2.2	Flexion	63
4.6.2.3	Influence du maillage EF et bilan	63
4.7	Compléments d'analyse	65
4.7.1	Nécessité du couplage des rotations	65
4.7.2	Couplage des rotations et grands déplacements	66
4.7.3	Influence de β_{mini}	68
Chapitre 5 Propagation des ondes		71
5.1	Introduction : Présence d'ondes parasites	71
5.2	Méthodes d'atténuation des réflexions d'ondes	73
5.2.1	Influence des simplifications numériques	73
5.2.2	La relaxation	75
5.2.2.1	Description et équations	75
5.2.2.2	Équivalence relaxation et méthode de pénalité	75
5.2.2.3	Quantification de l'efficacité de la relaxation sur un exemple 1D	75
5.2.2.4	Caractéristiques comportementales de la relaxation	78
5.2.3	L'amortissement visqueux	81
5.2.4	Choix d'une méthode d'atténuation	84
Chapitre 6 Vers des applications d'impact sur ouvrage en béton armé		87
6.1	Le cas simplifié de la dalle en béton non armé	87
6.2	Modélisation des armatures	91
6.2.1	Nécessité de modéliser les armatures dans la partie éléments finis	91
6.2.2	Génération du désordre	93
6.2.2.1	Suppression et densification	93
6.2.2.2	Superposition	93
6.2.2.3	Choix de la méthode de désordre	93
6.2.3	Comportement des armatures	95
6.2.3.1	Lien Acier-Acier	95
6.2.3.2	Lien Béton-Acier	95
6.3	Modélisation d'impact sur dalle en béton armé	96
6.3.1	Description de l'ouvrage d'essai	96
6.3.1.1	Données géométriques	96

6.3.1.2	Description du modèle	97
6.3.2	Processus d'identification	100
6.3.3	Impact faiblement endommageant	102
6.3.4	Impact fortement non-linéaire	109
Chapitre 7	Conclusions et perspectives	113
7.1	Apports majeurs de ces travaux	113
7.1.1	Définition du modèle discret	113
7.1.2	Modèle de couplage	114
7.1.3	Couplage des rotations discrètes	114
7.1.4	Prise en compte des éventuelles réflexions d'ondes	114
7.1.5	Simulation d'impact	115
7.2	Développements à venir	115
7.2.1	Discrétisation du modèle discret	115
7.2.2	Modèle éléments finis non-linéaires	116
7.2.3	Comportement Acier-Béton	116
7.2.4	Couplage coque	116
7.2.5	Modélisation éléments finis du projectile	116
Bibliographie		118

Table des figures

2.1	Enceinte de protection et enceinte de confinement	6
2.2	Barrage du Monteynard	7
2.3	Fonction de chargement [Brara, 1999]	7
2.4	Échantillon de béton	10
2.5	Comportement en compression	11
2.6	Comportement en traction	11
2.7	Courbe compression cyclique	12
2.8	Résistance dynamique	12
2.9	Processus de perforation, essais Meppen [Jonas <i>et al.</i> , 1982]	13
2.10	Modélisation SPH [Leppanen, 2002]	15
2.11	Échelle de modélisation [D’addetta <i>et al.</i> , 2001]	16
2.12	Modélisation Arlequin d’une poutre console [Rateau, 2003]	18
2.13	Liaison entre méthode discrète et éléments finis, (a) et (b) [Belytschko et Xiao, 2003], (c) [Curtin et Miller, 2003]	18
2.14	Méthode combinée d’éléments finis et d’éléments discrets [Cundall <i>et al.</i> , 2003]	19
2.15	Méthode combinée d’éléments finis et d’éléments discrets [Owen <i>et al.</i> , 2005]	20
3.1	Visualisation d’un échantillon	22
3.2	Étapes fondamentales d’un cycle de la méthode	23
3.3	Modélisation micro [D’addetta <i>et al.</i> , 2006]	24
3.4	Procédure de désordre de L. Sibille: (a) génération ordonnée CFC, (b) génération du désordre par la méthode SDEC, (c) compactage par compression isotrope avec un angle de frottement nul [Sibille, 2006]	25
3.5	Procédure de désordre à partir d’un maillage: (a) ED positionné au milieu des cotés des tétraèdres, (b) positionnement sur les sommets, (c) sur les faces triangulaires, (d) au centre du tétraèdre, (e) dans les vides proches des sommets, (f) procédure de densification [Jerier <i>et al.</i> , 2008b]	26
3.6	Génération du désordre	27
3.7	Distribution de taille des éléments	28
3.8	Orientation des contacts	28
3.9	Quelques formes d’éléments discrets utilisées	29
3.10	Loi d’interaction élastique	30
3.11	Paramétrage d’une interaction [Hentz, 2003]	31
3.12	Évolution de la coordinence (trait pointillé) et du module d’Young en fonction du rayon d’interaction	32

3.13	Mesure des variations de l'échantillon	33
3.14	Identification des paramètres α , β et γ	35
3.15	Répétabilité de la procédure sur différents échantillons [Rousseau <i>et al.</i> , 2007]	36
3.16	Forme des fonctions seuils	37
3.17	Adoucissement [Hentz, 2003]	37
3.18	Plasticité des armatures	39
3.19	Modèle rhéologique pour la compaction	39
3.20	Évolution du pas de temps critique en fonction du schéma et de la valeur de l'amortissement	43
3.21	Influence du type d'amortissement	44
3.22	Courbe contrainte/déformation pour un essai de compression quasi-statique sur le béton Giga	46
3.23	Courbe contrainte/déformation pour un essai de traction quasi-statique sur le béton Giga	46
4.1	Zone de recouvrement et paramètres de recouvrement	49
4.2	Simulation 2D du comportement en rotation des éléments discrets	50
4.3	Organisation des matrices de couplage en sous-matrices	51
4.4	Échelle des pas de temps pour le multi-pas de temps	57
4.5	Description du modèle couplé ED/EF	58
4.6	Description d'un essai de traction dynamique	59
4.7	Évolution de la condition aux limites en force	59
4.8	Évolution des déplacements de deux points de la poutre	60
4.9	Évolution des déplacements de deux points de la poutre	61
4.10	Critère de convergence vers l'équilibre statique pour un essai de traction . . .	62
4.11	Comparaison théorie, méthode discrète et méthode couplée en traction	62
4.12	Représentation du déplacement longitudinal pour le modèle couplé en traction	62
4.13	Déplacement de la ligne moyenne pour un essai de flexion	63
4.14	Différence de modélisation des conditions aux limites entre le modèle discret et le modèle éléments finis	64
4.15	Comparaison théorie, maillage 12 couches et maillage 24 couches	64
4.16	Rotations de la ligne moyenne	66
4.17	Influence de la méthode de calcul des efforts intérieurs sur les rotations	67
5.1	Schéma du modèle 1D	72
5.2	Réflexions des ondes hautes fréquences sur l'interface entre une discrétisation fine et grossière (déplacement en fonction de la position)	73
5.3	Influence de la diagonalisation en fonction de la taille de la zone de recouvrement sur le pourcentage d'atténuation de l'énergie réfléchie	74
5.4	Description du modèle 1D avec deux couches de recouvrement	74
5.5	Influence du paramètre de relaxation (sans diagonalisation des matrices) sur le pourcentage d'atténuation de l'énergie réfléchie pour différentes tailles de la zone de recouvrement	76
5.6	Influence du paramètre de relaxation (avec des matrices diagonales) sur le pourcentage d'atténuation de l'énergie réfléchie pour différentes tailles de la zone de recouvrement	76
5.7	Étude de la propagation des ondes selon la méthode, multiplicateurs classiques (plein), matrices diagonales relaxées (pointillé)	77
5.8	Influence du pas de temps sur le choix du paramètre de relaxation en 3D . . .	80
5.9	Évolution du paramètre de relaxation optimal avec le pas de temps en 3D . .	80

5.10	Comportement de l'amortissement de Rayleigh, proportionnel à la masse et à la raideur [Paultre, 2004]	81
5.11	Description du modèle 1D avec recouvrement et 3 couches d'amortissement	82
5.12	Atténuation de l'énergie contenue dans la haute fréquence en utilisant une amortissement constant dans les différentes couches amorties	83
5.13	Pourcentage d'atténuation de l'énergie contenue dans la haute fréquence en utilisant une variation linéairement croissante de l'amortissement sur les différentes couches amorties	83
5.14	Pourcentage d'atténuation de l'énergie contenue dans la basse fréquence en utilisant une variation linéaire d'amortissement dans les différentes couche amortie	84
6.1	Description du modèle avec les différents sous-domaines et l'impacteur	88
6.2	Comparaison des déplacements entre le modèle discret et le modèle couplé avec 3 couches de recouvrement (courbe pointillée) (déplacement exprimé en 10^{-4} m et le temps en 10^{-3} s	89
6.3	Comparaison de l'endommagement entre le modèle discret et le modèle couplé avec 3 couches de recouvrement	90
6.4	Modélisation de l'armature dans la partie éléments finis	92
6.5	Répartition des éléments discrets dans l'épaisseur d'une dalle en béton armé	94
6.6	Description de la géométrie et des conditions aux limites	96
6.7	Discrétisation discrète	97
6.8	Définition des armatures	98
6.9	Vue en coupe de la discrétisation	98
6.10	Distribution de taille du modèle discret complet	99
6.11	Définition du maillage éléments finis	99
6.12	Courbes contrainte/déformation pour le modèle Meppen	101
6.13	État d'endommagement post-rupture	101
6.14	Courbe contrainte/déformation pour les armatures	101
6.15	Évolution du chargement au cours du temps	102
6.16	Localisation des points d'analyse des déplacements	102
6.17	Modélisation des conditions aux limites pour le modèle purement discret	103
6.18	Conditions aux limites discrètes avec un rayon de 4.5 fois supérieur au rayon moyen	104
6.19	Déplacement du point W5 au cours du temps pour différentes conditions aux limites	104
6.20	Comparaison entre les différents modèles de simulation	105
6.21	Comparaison des états d'endommagement en coupe à deux instants différents	106
6.22	Comparaison des états d'endommagement, vue de dessus en fin de simulation	106
6.23	Analyse modale éléments finis	107
6.24	Influence du nombre de couche de recouvrement	108
6.25	Influence du maillage EF	108
6.26	Déplacement du point W5 au cours du temps	109
6.27	Évolution comparée de l'endommagement au cours de la simulation	110
6.28	Comparaison des états d'endommagement, vue de dessus en fin de simulation	111

Liste des tableaux

2.1	Ordre de grandeur des propriétés mécaniques	11
3.1	Paramètres de calage des lois meso-macro	34
3.2	Taille des éprouvettes pour la reproductibilité du module d'Young et du coefficient de poisson	35
3.3	Ordre de grandeur des paramètres locaux	38
3.4	Procédure d'identification des paramètres locaux	45
4.1	Schéma d'intégration explicite implémenté pour les éléments finis	48
4.2	Schéma de la procédure à deux pas de temps	58
5.1	Données géométriques	72
5.2	Caractéristiques de la simulation	72
6.1	Comparaison des temps de simulation entre le modèle discret et le modèle éléments finis	90
6.2	Données expérimentales béton (Essai II)	100
6.3	Données expérimentales acier (Essai II)	100
6.4	Paramètres locaux des éléments béton	100
6.5	Paramètres locaux des éléments acier	100

Variables cinématiques

\vec{d}	vecteur des déplacements des ED
$\vec{\omega}$	vecteur des rotations des ED
\vec{u}	vecteur des déplacements nodaux des EF
\dot{d}	défini la dérivée temporelle de la fonction $d(t)$
\ddot{d}	défini la seconde dérivée temporelle de la fonction $d(t)$

Caractéristiques dynamiques

m_j	masse de l'ED j
J_j	moment d'inertie de l'ED j
M_i	masse du nœud EF i
$\vec{F}g_i$	vecteur force généralisée du nœud EF i
\vec{F}_j^{tot}	force totale appliquée à l'ED j
C_j^{tot}	moment des actions mécaniques appliqué à l'ED j

Paramètres locaux des interactions entre éléments discrets

ρ	masse volumique
E	module d'Young
ν	coefficient de poisson
Φ_i	angle de frottement interne
Φ_c	angle de frottement de contact
C_0	cohésion
T	résistance en traction
ζ	paramètre d'adoucissement
γ	rayon d'interaction

Méthode de couplage

\vec{dr}	vecteur des déplacements des ED de la zone de recouvrement
$\vec{\omega r}$	vecteur des rotations des ED de la zone de recouvrement
\vec{ur}	vecteur des déplacements nodaux des EF de la zone de recouvrement
\vec{d}_j	vecteur des trois composantes du déplacement de l'ED j
$\vec{\omega}_j$	vecteur des trois composantes de la rotation de l'ED j
\vec{u}_i	vecteur des trois composantes du déplacement du nœuds de l'EF i
n_f	nombre de nœud EF
n_d	nombre d'ED
n_{fr}	nombre de nœud EF dans la zone de recouvrement
n_{dr}	nombre d'ED dans la zone de recouvrement
α_i	paramètre de recouvrement pour le nœud EF i
β_j	paramètre de recouvrement pour l'ED j
$\vec{\lambda}^d$	multiplicateur de Lagrange relatif au couplage en déplacement
$\vec{\lambda}^\omega$	multiplicateur de Lagrange relatif au couplage en rotation
$\overline{\overline{k}}$	matrice des relations de couplage en déplacement
$\overline{\overline{h}}$	matrice des relations de couplage en rotation

Atténuation des ondes hautes fréquences

nr	nombre de couches EF dans la zone de recouvrement
r	paramètre de relaxation du couplage
nc	nombre de couches EF amortis
c	paramètre d'amortissement visqueux des ondes hautes fréquences

1.1 Contexte de l'étude

Lors de la conception d'ouvrages de génie civil, il est nécessaire de prendre en considération l'ensemble des facteurs pouvant mener à la ruine et de prédire leurs effets tant sur la structure elle-même que sur les conséquences qui pourraient s'ensuivre. Les expérimentations à l'échelle de l'ouvrage étant très limitées, il est souvent nécessaire d'avoir recours à la modélisation numérique. Ces modélisations doivent être en mesure de prédire le comportement de ces structures pour les différents cas de chargement qui sont susceptibles de se produire au cours de la durée de vie de l'ouvrage.

Parmi les nombreux cas de simulation à traiter, nous nous intéressons au comportement dynamique des ouvrages de protection en béton armé. Le type d'applications visées est la prédiction du comportement d'une structure soumise à un impact localisé. Nous entendons par ouvrage ou structure, tout type de construction de grande taille en béton armé. La prédiction porte sur deux aspects principaux : la capacité du modèle à prédire le comportement de la structure au niveau de l'impact et le comportement de l'ensemble de l'ouvrage. Localement, il ne s'agit pas seulement d'avoir un indicateur de l'état d'endommagement, mais aussi d'être en mesure de connaître l'étendue des zones fissurées, la profondeur de pénétration du projectile, voire sa vitesse résiduelle après perforation, ou encore d'estimer l'état des armatures, ou la vitesse des blocs qui se dissocient de l'ouvrage. En plus de cette réponse locale, la prédiction porte sur le comportement de l'ensemble de l'ouvrage (réponse globale). Pour savoir s'il y a des risques d'arrachement d'éléments fixés sur la structure, ou des risques de contact avec une autre structure, il est nécessaire de connaître les déplacements et les contraintes en tous points du modèle au cours de la simulation.

Ce travail s'appuie sur les compétences des équipes de recherches du laboratoire 3S-R autour des méthodes discrètes. Elles ont été largement développées pour modéliser les matériaux granulaires et elles sont aujourd'hui utilisées pour modéliser les milieux cohésifs tels que le

béton. Ces méthodes sont utilisées à l'échelle mésoscopique.

Les impacts sur des ouvrages conduisent à des phénomènes présentant de nombreuses discontinuités (fractures, détachements de blocs, contacts, ...). La modélisation de ces phénomènes est particulièrement complexe et l'utilisation de méthodes naturellement discontinues telles que la méthode des éléments discrets, s'avère très efficace. Mais ces approches ne sont pas adaptées pour modéliser une structure dans son ensemble. L'augmentation importante du nombre d'éléments rend la méthode inapplicable (taille du modèle, temps de simulation). La méthode aux éléments discrets doit donc être utilisée pour modéliser le comportement local non-linéaire et elle doit être couplée à une approche modélisant le comportement global. En considérant que suffisamment loin de la zone impactée, le comportement de la structure ne présente pas d'importantes discontinuités, l'utilisation d'une méthode continue est alors à privilégier. Ainsi, un couplage entre la méthode aux éléments discrets et la méthode aux éléments finis peut s'avérer être un développement innovant et performant.

L'objectif de ce travail est d'étudier la mise en place de cette approche multi-domaine où une partie de la structure, proche de l'impact, est modélisée par la méthode aux éléments discrets, tandis que le reste de la structure est modélisé par la méthode des éléments finis. Ce travail s'inscrit dans un travail de recherche visant à développer les méthodes numériques discrètes et la modélisation dynamique des ouvrages de génie civil. Dans ces thématiques, des travaux se déroulent en parallèle au sein de l'équipe Risque et Vulnérabilité et viennent compléter ce travail. Les développements de Wenjie Shiu [Shiu, 2008] concernent l'application des méthodes discrètes sous des impacts à hautes et très hautes vitesses sur des échantillons de béton armé. Ils valident ainsi l'utilisation de ces méthodes pour ce type de sollicitations dynamiques tant pour la définition de la géométrie discrète que pour l'élaboration des lois de comportement modélisant les phénomènes mis en jeu. Il montre l'aptitude de ces méthodes à prédire la taille des zones fissurées, la profondeur de pénétration ou les vitesses résiduelles. Les développements liés à la dynamique des ouvrages ont également conduit à un partenariat industriel avec EDF dans le cadre de la thèse de Jessica Rousseau, visant à appliquer les méthodes développées sur des cas industriels concrets avec le logiciel EUROPLEXUS. Au cours de ce partenariat, l'approche couplée pourra être comparée à des données expérimentales et appliquée à un problème industriel. Ces développements sur les méthodes numériques pour la modélisation des ouvrages en béton s'inscrivent en complément des activités de recherche sur le béton sous très fortes sollicitations (Essais «GIGA») qui permettent de comprendre les mécanismes mis en jeu sous des très fortes sollicitations quasi-statiques.

1.2 Plan général

Afin de démontrer la faisabilité et l'intérêt des approches multi-domaines couplées éléments discrets/éléments finis, nous proposons de rentrer dans les points clés de la méthode au travers de cinq chapitres.

Le premier chapitre présente le contexte de notre étude. Nous présentons les caractéristiques des modélisations envisagées et rappelons les données expérimentales nécessaires à la compréhension des phénomènes mis en jeu et devant être modélisés. Nous considérons les différents outils de simulation existant pour modéliser les impacts et les discontinuités dans les matériaux. Enfin une bibliographie sur les approches couplées existantes ou en cours de développement permet de définir les grands axes de l'élaboration de notre approche.

Le deuxième chapitre propose une revue des méthodes discrètes et décrit la méthode utilisée. Nos travaux sur les approches discrètes concernent en particulier la validation d'un processus d'identification des paramètres locaux du modèle discret en vue de représenter le comportement macroscopique du matériau.

Le chapitre 3 porte sur la description de la méthode de couplage. Différentes variantes permettant de simplifier le problème sont présentées. Cet ensemble est validé sur des essais de traction et de flexion en statique et en dynamique par comparaison entre l'approche éléments discrets classique et l'approche couplée.

Dès lors que sont abordés des phénomènes dynamiques avec des tailles de discrétisation différentes, le modèle risque de faire apparaître des phénomènes de réflexions des ondes hautes fréquences. Le chapitre 4 décrit ces phénomènes et tache d'apporter des solutions pour les minimiser afin de ne pas modifier la physique du problème qui nous intéresse.

Le chapitre 5 met en œuvre la méthode proposée sur des ouvrages en béton, puis en béton armé. Les points à améliorer et les limites de l'approche proposée sont également présentés dans ce chapitre.

Enfin nous réalisons une synthèse de ces travaux et évoquons des axes de développement à aborder pour prolonger cette étude.

2.1 Introduction

Effectuer des expérimentations en dynamique rapide à l'échelle des ouvrages présente des difficultés évidentes en terme de procédures, de mesures, d'encombrement et de coût. Le recours à des simulations numériques est donc une nécessité. De nombreuses méthodes numériques sont envisageables et ont été développées pour prédire le comportement des ouvrages sous diverses sollicitations. Le choix de la méthode doit être adapté aux phénomènes physiques à simuler. L'objectif de ce travail est de développer une méthode permettant d'évaluer la résistance d'un ouvrage à un impact et de prédire sa réponse dynamique. Pour cela, il nous faut, connaissant les principales caractéristiques de la structure et du projectile, choisir l'échelle de modélisation la plus adaptée à notre étude et développer un modèle numérique robuste et prédictif.

2.2 Description de l'objectif du modèle

La méthode développée vise à traiter des ouvrages de grandes tailles en béton armé. Si l'objectif final de ces développements est de modéliser des structures telles que l'enceinte de protection d'une centrale nucléaire ou un barrage hydraulique, l'état actuel des recherches visent en terme d'application à modéliser le comportement de dalle en béton armé impactée localement. Que ce soit pour des enceintes de protection d'une centrale nucléaire ou pour un barrage hydraulique, la fonction principale de ces ouvrages est d'assurer une fonction de protection et de sécurité. Il en résulte la nécessité d'être capable de déterminer avec précision leur résistance sous de nombreux cas de chargement dont les impacts et les explosions. La question de leur réalisation et de leur tenue dans le temps pose des questions économiques que les industriels doivent savoir chiffrer.

La taille de ces structures avoisine 50 m de diamètre pour une enceinte de confinement d'une centrale de type REP 1300 MWe (Figure 2.1) et 180 m de hauteur pour 2150 m de longueur pour le barrage hydraulique des Trois Gorges en Chine. Les conséquences de la rupture d'un ouvrage de ce type seraient dramatiques. Nous connaissons les conséquences de Tchernobyl dans le cas d'une centrale nucléaire, celles de la rupture du barrage de Malpasset qui provoqua 423 morts et disparus en 1959. Pour citer un exemple régional, les spécialistes estiment que la rupture du barrage du Monteynard (Figure 2.2) entraînerait dans les scénarios les plus défavorables une vague de 10 m sur Grenoble en moins d'une heure. Il est donc essentiel de savoir dimensionner ces ouvrages avec précision pour l'ensemble des phénomènes physiques susceptibles de se produire au cours de leur durée de vie.

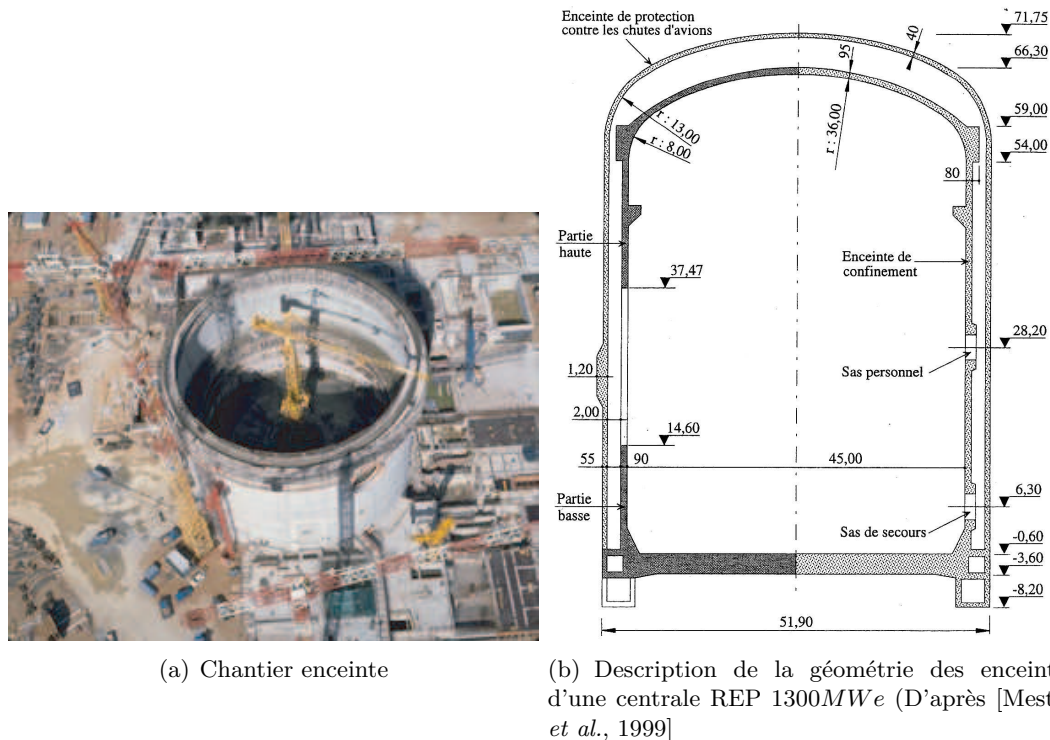


FIG. 2.1 – *Enceinte de protection et enceinte de confinement*

Les projectiles qui nous intéressent peuvent être divisés en deux catégories : ceux provenant d'une circonstance accidentelle : bloc rocheux, réacteur d'avion et ceux provenant d'une circonstance provoquée : chute d'avion, missile. Leurs caractéristiques principales sont leur masse, voire leur répartition de masse et la vitesse d'impact. Mais, pour représenter convenablement leur comportement, il est nécessaire soit de les modéliser complètement et de les intégrer au modèle, soit d'être capable de représenter leurs effets. Différents modèles représentant ces effets ont été développés. Un des plus utilisés est le modèle de Riera [Riera, 1980] qui transforme le modèle réel du projectile à une vitesse donnée en une fonction de répartition de forces surfaciques équivalentes évoluant durant l'impact. Cette fonction s'appelle la fonction de chargement (Figure 2.3). Cette approche a été reprise par de nombreux auteurs [Mestat *et al.*, 1999; Brara, 1999].

Dans le cas de projectiles très rapides et rigides, il est nécessaire de prendre en compte d'autres caractéristiques comme par exemple la forme du nez de l'impacteur [Shiu *et al.*, a1; Berriard *et al.*, 1978].

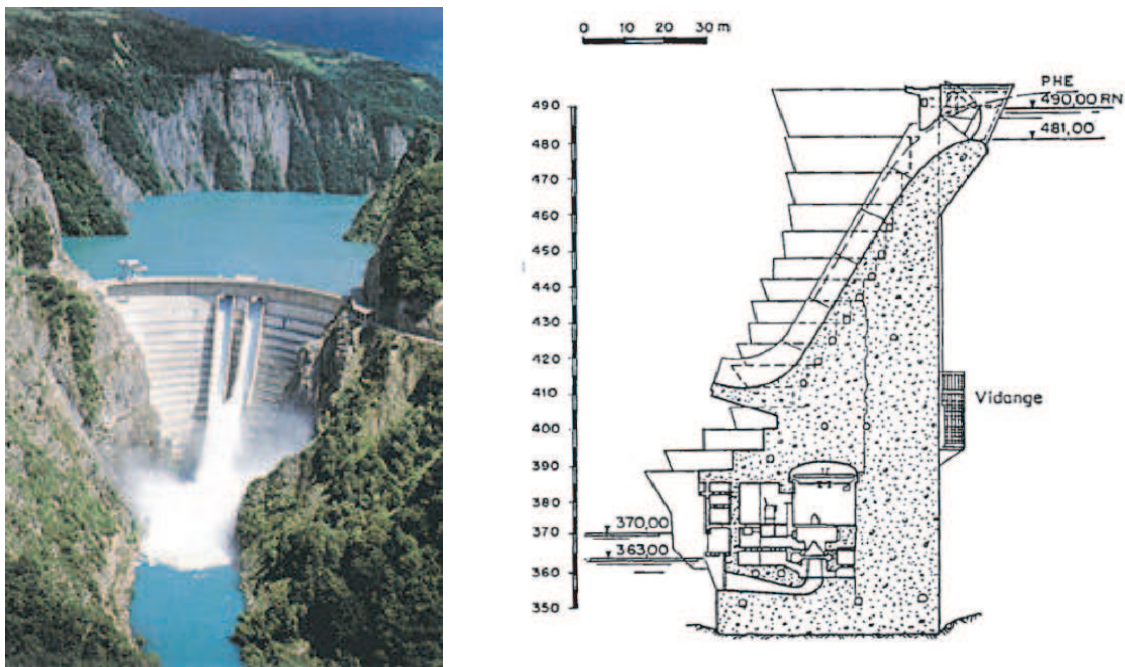


FIG. 2.2 – Barrage du Monteynard

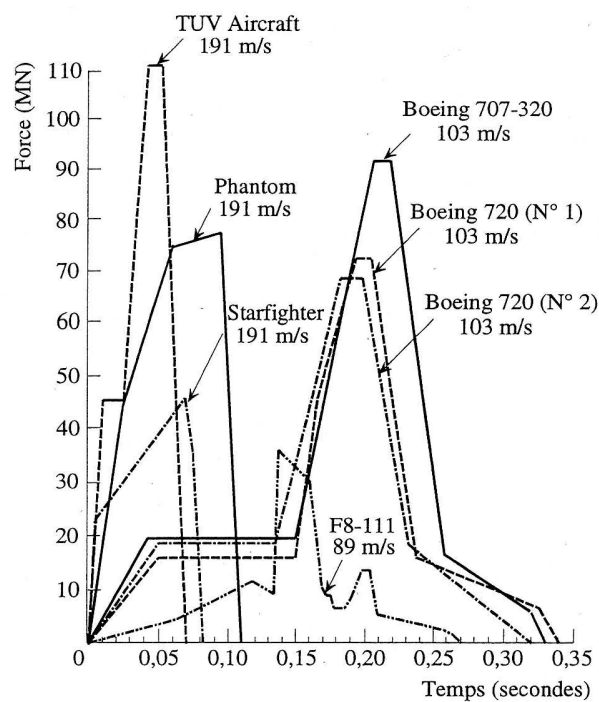


FIG. 2.3 – Fonction de chargement [Brara, 1999]

2.3 Références expérimentales d'impact

Le génie militaire a depuis toujours développé des expérimentations d'impact. Elles se sont fortement enrichies par les nombreuses expérimentations menées à partir des années 60 aux

États-Unis, puis en Europe fournissant de précieuses informations sur la réponse des structures sous impact.

Le développement de l'industrie nucléaire a nécessité la mise en place d'expérimentations plus poussées et surtout plus documentées, afin de comprendre le comportement du béton armé sous sollicitation dynamique. En 1968, aux États-Unis, les chercheurs se sont posés la question du comportement d'une enceinte de réacteur nucléaire soumis à une chute d'avion de type Boeing 720, volant à 103 m/s , soit 370 km/h . En Allemagne et en France des essais similaires ont été effectués en utilisant respectivement un avion militaire type Phantom RF-4E, volant à 215 m/s , soit 775 km/h et un avion de loisir de type Cessna 210 ou Lear Jet, volant à 100 m/s . Des campagnes d'essais ont également eu lieu sur le comportement de dalles de béton armé, en France, «essais CEA» [Berriaud *et al.*, 1978], et en Allemagne, «essais Meppen» [Jonas *et al.*, 1982]. Des formules empiriques sur la profondeur de pénétration du projectile, par exemple, ont ainsi été obtenues en fonction des différents impacts, plus ou moins lourds, plus ou moins rapides, plus ou moins pointus [Li *et al.*, 2005]. L'objectif de ces premières expérimentations était de fournir aux industriels une méthode de dimensionnement des bâtiments de réacteurs, en particulier l'épaisseur de béton nécessaire. Par la suite, les expérimentations ont continué à se développer allant jusqu'à la réalisation de l'impact d'un avion militaire type F-4 [Sugano *et al.*, 1993].

Les essais font apparaître différents phénomènes dans le comportement de ces ouvrages en béton armé : des phénomènes locaux liés à l'endommagement de la structure proche de l'impact, intégrité totale, écaillage, pénétration, fissuration, perforation, mais aussi des phénomènes globaux liés au comportement de l'ouvrage dans son ensemble, déplacements maximum, fréquences propres. L'observation de ces phénomènes dépend de l'échelle pour laquelle l'expérimentation est effectuée, il en va de même pour la modélisation.

2.4 Échelles de modélisation

La comparaison des fonctions de charge (Figure 2.3) d'un avion militaire (type Phantom) et d'un avion civil (type Boeing 720) montre deux comportements très différents. La rigidité élevée de l'avion militaire conduit à des forces très grandes sur un intervalle de temps faible, alors que les avions de ligne, bien plus déformables engendrent des forces plus faibles sur une durée plus longue. On parle de choc mou ou de choc dur. Pierre Kœchlin a approfondi cette notion et propose une classification des types de choc mou ou dur pour les différents essais réalisés [Kœchlin, 2007]. Il propose à partir des travaux de Riera [Riera, 1968] une limite entre choc dur et mou à partir des propriétés mécanique de la cible et du projectile :

$$\frac{\sigma_p}{\sigma_c} + \frac{\rho_p V_0^2}{\sigma_c} = 1 \quad (2.1)$$

avec σ_p , la contrainte de rupture du projectile, ρ_p , la masse volumique du projectile, V_0 , la vitesse du projectile et σ_c , la contrainte de rupture de la cible. Si le projectile a une résistance beaucoup plus grande que la cible, $\sigma_p > \sigma_c$ ou que la vitesse d'impact est importante $\rho_p V_0^2 > \sigma_c$, il s'agit d'un choc dur. Dans le cas contraire, le choc est un choc mou.

Nous nous basons sur ses travaux pour définir la notion de chocs mous et de chocs durs. Les phénomènes mis en jeu selon le type de choc ne sont pas les mêmes et influent en particulier sur le choix de l'échelle de modélisation de la structure.

Plus le temps d'impact est court (généralement choc dur), moins les ondes auront eu le temps de se propager dans la structure et plus les phénomènes locaux et globaux seront découplés. On entend par des phénomènes découplés que le comportement au voisinage de l'impact ne résulte pas du comportement de l'ensemble de la structure et réciproquement. Si l'ensemble des phénomènes d'endommagement est indépendant du comportement de l'ouvrage, comme c'est le cas pour les chocs durs, alors on peut se poser la question de l'utilité d'un modèle couplé local-global à l'échelle de la structure. Wenjie Shiu [Shiu, 2008] montre la pertinence d'un modèle découplé par la méthode des éléments discrets, en étudiant le comportement des impacts sur béton armé à l'échelle mésoscopique¹.

En revanche, plus le temps de l'impact est important, c'est à dire pour une structure plus souple ou un projectile moins rigide, plus les phénomènes sont couplés. Les ondes se propageront dans l'ouvrage, seront réfléchies en fonction de la géométrie et des conditions aux limites et viendront se superposer aux contraintes existantes dans la zone endommageable, modifiant ainsi le comportement local dans la zone de l'impact. Réciproquement, la réponse en déplacement en tout point de la structure ne peut pas être obtenue de manière fiable sans avoir une réponse précise du comportement dissipatif local. Il est alors nécessaire de modéliser l'ensemble de l'ouvrage, nous parlerons d'échelle macroscopique². Lors d'un choc mou, les retours d'ondes structurelles de flexion et de cisaillement jouent un rôle dans la fissuration et l'écaillage [Koechlin, 2007; Bailly, 2004]. Zukas [Zukas *et al.*, 1992] montre également que plus le chargement est lent, plus les phénomènes sont couplés et l'endommagement dépendant du comportement global.

Nous nous plaçons dans le cas d'applications où les comportements locaux et globaux sont couplés. Il est donc nécessaire de considérer les phénomènes d'endommagement et de vibration comme étant dépendants l'un de l'autre. La puissance de calcul aujourd'hui disponible permet ce type de simulation. La méthode développée doit donc prendre en compte ces deux aspects : précision du modèle dissipatif local et réponse dynamique à l'échelle de l'ouvrage. Pour répondre à ces deux points, l'approche proposée utilise deux domaines comportant une discrétisation différente ; localement une discrétisation fine permet d'avoir une réponse précise de la zone endommagée, tandis qu'une discrétisation plus grossière est appliquée à l'ensemble de la structure permettant d'avoir la réponse discrétisée de l'ouvrage.

2.5 Le béton

En 2008, faut-il encore présenter le matériau béton ? Bien qu'utilisé depuis des siècles, ce matériau, aujourd'hui indispensable à la construction des structures de génie civil, est toujours l'objet de nombreuses recherches. Celles-ci tendent, par la formulation ou par l'élaboration de nouveaux composites, à en améliorer les propriétés physiques. Nous présentons dans ce chapitre les principales caractéristiques mécaniques du béton et du béton armé.

2.5.1 Constituant

Le béton est constitué d'une pâte de ciment (ciment, eau) et de granulats (sable, gravillons, cailloux). Cette matrice cimentaire, ces agrégats et les pores formés par la réaction d'hydra-

1. Mésoscopique décrit une échelle intermédiaire entre l'échelle du granulat et de la structure

2. L'échelle macroscopique correspond à l'échelle global, l'ensemble de l'ouvrage

tation, constituent la microstructure du béton qui est à la base du comportement mécanique du béton.

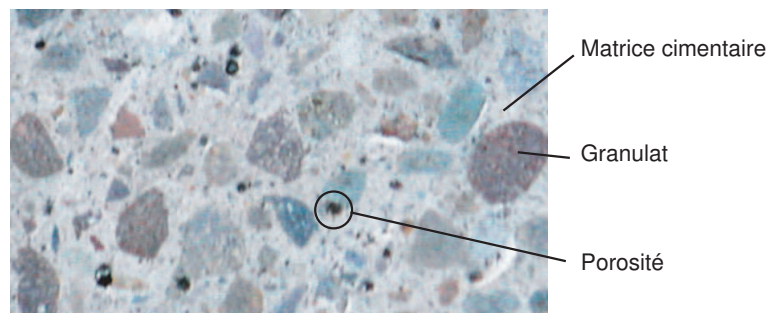


FIG. 2.4 – Échantillon de béton

2.5.2 Comportement mécanique

Bien qu'à l'échelle de la microstructure, le béton soit fortement hétérogène, il est possible de considérer un échantillon comme isotrope et homogène si ses dimensions sont grandes devant la taille des plus gros granulats³.

2.5.2.1 Comportement quasi-statique

Des essais quasi-statiques de compression et de traction jusqu'à la rupture permettent de tracer les courbes contraintes-déformations ([Fouré, 1986; Torrenti, 2002; Fouré, 2003]) qui caractérisent le comportement. Ils permettent de définir et de quantifier les grandeurs caractéristiques : les paramètres linéaires homogénéisés, module d'Young, E , coefficient de poisson, ν , et les paramètres à la rupture : résistance à la compression, σ_c , pourcentage de déformation à la rupture en compression, ϵ_c , résistance en traction et pourcentage de déformation à la rupture, σ_t en traction, ϵ_t .

La courbe de compression (figure 2.5) présente trois phases distinctes : une phase de comportement élastique linéaire, une deuxième où la courbe prend une inflexion, le développement des micro-fissures limitant les contraintes maximales admissibles, enfin la dernière partie qui marque la propagation de macro-fissures et conduit à la rupture.

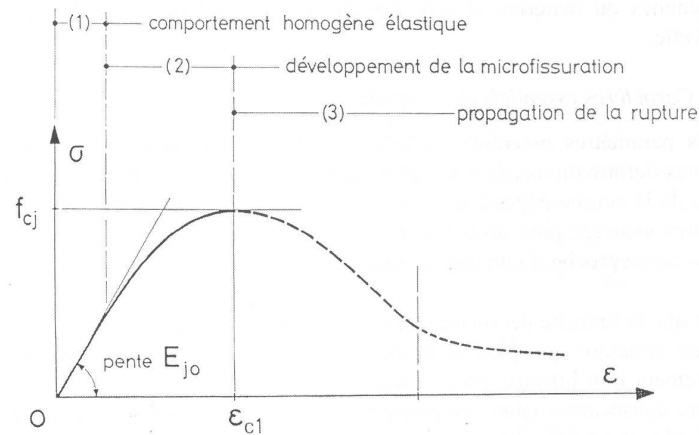
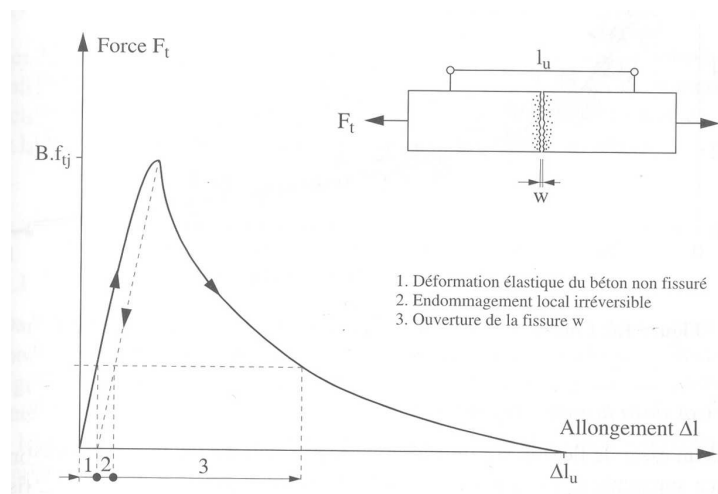
De même, la courbe de traction (figure 2.6) comporte les mêmes trois phases, mais les caractéristiques essentielles sont les valeurs atteintes pour la limite à la traction et la rupture fragile. Celles-ci sont beaucoup plus faibles que pour la compression (rapport 10).

Les ordres de grandeur des propriétés mécaniques du béton sont donnés dans le tableau 2.1.

Des essais cycliques de compression quasi-statique [Mazars, 1984] permettent de se faire une idée de l'évolution de la microstructure et des paramètres matériaux au cours d'un essai de traction ou de compression et en particulier la perte de la rigidité initiale (figure 2.7).

3. Un rapport 10 entre le plus gros granulat et les dimensions caractéristiques de l'échantillon est suffisant.

Caractéristiques Paramètres	Elastique		Compression		Traction	
	E (GPa)	ν	σ_c (Mpa)	ϵ_c $1e^{-3}$	σ_t (Mpa)	ϵ_t $1e^{-3}$
valeurs	20 - 80	0.2 - 0.3	20 - 800	1 - 5	2 - 8	0.1 - 0.5

TAB. 2.1 – *Ordre de grandeur des propriétés mécaniques*FIG. 2.5 – *Comportement en compression*FIG. 2.6 – *Comportement en traction*

2.5.2.2 Comportement dynamique

Pour nos applications, nous pouvons rappeler les principales caractéristiques du comportement du béton en dynamique. Les dispositifs expérimentaux d'essai en dynamique sont réalisés par des barres de Hopkinson [Hopkinson, 1914] avec un échantillon confiné ou non. Ces dispositifs permettent d'atteindre avec précision des taux de déformation de l'ordre de 10^3 s^{-1} [Gary et Zhao, 1996]. Il apparaît principalement une dépendance de la résistance en compression, mais aussi en traction en fonction du taux de déformation (Figure 2.8).

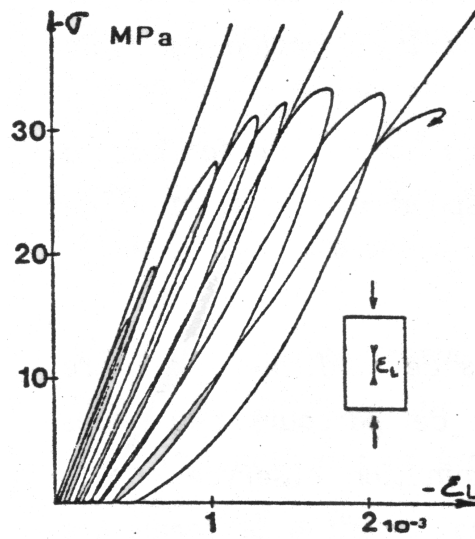
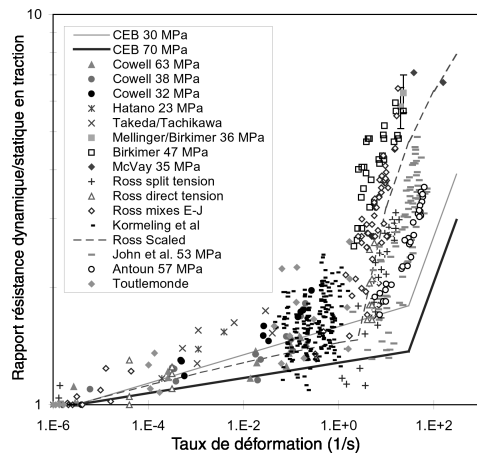
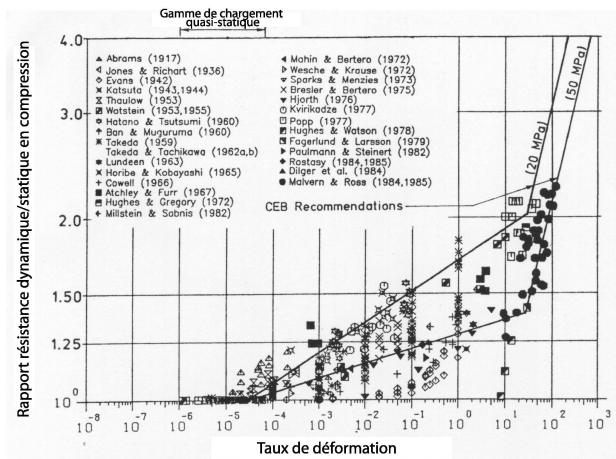


FIG. 2.7 – Courbe compression cyclique



(a) Evolution de la résistance en compression avec le taux de déformation [Bischoff et Perry, 1991]

(b) Evolution de la résistance en traction avec le taux de déformation [Malvar et Crawford, 1998]

FIG. 2.8 – Résistance dynamique

2.5.3 Principe du béton armé

Noyées dans le béton, les armatures ont pour fonction d'augmenter la résistance dans les parties de la structure susceptibles de travailler en traction. Elles n'empêchent pas le béton de se fissurer, mais l'adhérence entre le béton et l'acier permet aux armatures de reprendre une partie des efforts. Il en résulte que ce matériau composite a une limite à la traction non négligeable supérieure à celle de chacun de ses constituants pris indépendamment [Prat *et al.*, 1997].

2.5.4 Impact sur dalle en béton armé

Lors de l'analyse des essais d'impact sur dalle en béton armé, différents phénomènes sont mis en jeu (Figure 2.9) [Koechlin, 2007] :

- Endommagement en compression : Endommagement de la face avant, écrasement de l'impacteur, éventuellement rupture des aciers en face avant.
- Fissurations obliques : Apparition de fissures obliques par rapport à la vitesse du projectile.
- Compaction : Comportement du béton sous très fort confinement caractérisé par la fermeture des porosités.
- Pénétration : Avancée du projectile dans le matériau, écoulement du matériau autour du projectile.
- Écaillage : Rupture par blocs minces sur la face arrière.
- Fragmentation : Multiplication de la fissuration autour des fissures obliques.
- Perforation : Cône de béton en face arrière possédant une vitesse non nulle, rupture des aciers en face arrière.

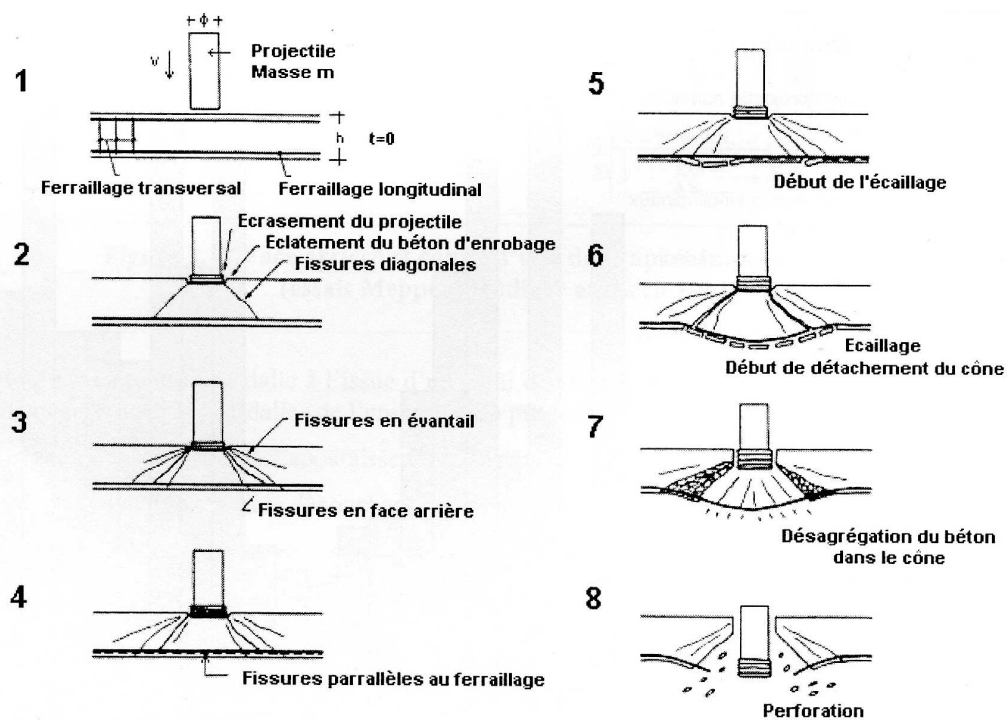


FIG. 2.9 – Processus de perforation, essais Meppen [Jonas et al., 1982]

Tous ces phénomènes sont non seulement très fortement non-linéaires, mais surtout ils se caractérisent par de très nombreuses discontinuités : apparition et propagation de fissures, fragmentation, vitesses résiduelles, écoulement, écaillage. La méthode de simulation retenue doit permettre de modéliser naturellement ces nombreux phénomènes discontinus.

2.6 Outils numériques pour les simulations d'ouvrages

Sur le plan analytique et théorique, de nombreuses études ont été menées depuis les années 1960. Parmi les difficultés rencontrées, le choix de l'échelle de simulation et l'adéquation de la méthode au problème posé sont particulièrement importants. Berriaud proposait de faire deux calculs l'un à l'échelle locale et le second sur la structure pour étudier indépendamment la perforation et les modes de vibration d'une structure sous impact, aujourd'hui les moyens existent pour n'effectuer qu'un seul calcul.

Beaucoup de méthodes différentes sont utilisées ; celles-ci peuvent se regrouper entre les approches dites «continues» et les approches dites «discontinues». Les méthodes les plus répandues sont les approches continues basées sur la méthode des Éléments Finis, avec une loi de comportement adaptée à la physique du problème. Pour des applications présentant de nombreux phénomènes discontinus une alternative est l'utilisation d'approches discontinues (Lattice Model ou Discrete Element Method) qui privilégie la prise en compte des très fortes non-linéarités et discontinuités mises en jeu par le comportement du béton armé sous impact.

2.6.1 Méthodes continues

Les approches continues sont les plus répandues dans le calcul d'ouvrage. Elles se sont développées pour une large gamme de sollicitations et pour différentes variétés de béton. Retenons que pour le cas d'impact, les méthodes proposées doivent permettre la simulation de discontinuité (fissuration et gestion du contact) et le détachement de matière. Parmi les méthodes continues, deux grandes catégories sont à distinguer : les méthodes à maillage fixe sur le domaine (méthode des éléments finis) et les méthodes à maillage ayant une topologie variable (méthode «sans maillage»).

2.6.1.1 Éléments finis

La méthode des éléments finis [Zienkiewicz et Taylor, 2000] fait appel à des lois de comportement spécifiques à un matériau et à la physique du problème à traiter. Les lois de comportement utilisables pour modéliser le comportement du béton à la rupture sont nombreuses, deux approches méritent d'être présentées :

- Approche continue de l'endommagement : l'ensemble des phénomènes non-linéaires est modélisé par une variable dite d'«endommagement» variant de 0 à 1 pour respectivement un matériau sain ou rompu [Georgin *et al.*, 2005; Mazars, 1984].
- Théorie de la plasticité : le comportement non-linéaire résulte de l'apparition de déformations plastiques qui suivent des lois d'écoulement définies par des critères en contrainte. Cette approche est basée sur les lois de la thermodynamique.

Ces lois ne peuvent pas répondre correctement au problème dès lors que les phénomènes tels que l'ouverture et la fermeture de fissure jouent un rôle prépondérant. Pour traiter cette question de discontinuité par ce type d'approche, plusieurs solutions ont été proposées [Wcesty *et al.*, 2006]:

- Dans le cas d'une vitesse d'impact très élevée, une solution est d'utiliser des approches

hydrodynamiques en représentation Eulérienne.

- Une autre approche consiste à implanter un processus d'érosion par exemple avec LS-DYNA [Teng *et al.*, 2007]. Cette méthode utilise un processus d'érosion consistant à retirer un élément fini du modèle lorsqu'un critère est atteint. Un critère généralement employé est un seuil de déformation plastique. Le processus de retrait d'éléments entraîne généralement un chargement discontinu, peu représentatif.
- Au lieu de faire disparaître un élément, une autre solution consiste à introduire une discontinuité sur l'interface reliant deux éléments finis [Ortiz et Pandolfi, 1999], couplée à un algorithme de maillage adaptatif; ces méthodes permettent de suivre l'évolution d'une fissure. Ces méthodes sont très dépendantes du maillage.
- Enfin des méthodes très développées aujourd'hui consistent à introduire une discontinuité en déplacement directement à l'intérieur des éléments finis (Strong Discontinuity Approach, X-FEM). La X-FEM (Extended Finite Element Method) [Daux *et al.*, 2000] semble très bien adaptée pour modéliser la propagation d'une fissure en quasi-statique. Pour sa mise en œuvre dans une simulation d'impact sur des ouvrages, il est nécessaire d'approfondir les questions d'amorçage de la fissure, de la gestion de l'ouverture et fermeture de nombreuses fissures, du décrochement de bloc et de sa mise en œuvre en dynamique rapide.

2.6.1.2 Méthode sans maillage

Dans les approches sans maillage, les nœuds ne sont pas liés à la structure. Ils peuvent ainsi mieux représenter l'apparition de discontinuités tout en conservant les mêmes lois de comportement et en ne nécessitant pas des techniques de maillage adaptatif. Une revue très complète de ces méthodes a été effectuée par [Fries et Matthies, 2004]. Deux grandes familles semblent particulièrement efficaces :

- Smooth Particle Hydrodynamics : il s'agit d'une méthode issue de la mécanique des fluides en référentiel Lagrangien. Cette méthode est aujourd'hui adaptée à la mécanique des solides [Hoover, 2006] et en particulier pour la simulation d'impact [Leppanen, 2006].
- Element-Free Galerkin : ces méthodes ont été développées pour stabiliser les méthodes SPH. Elles sont plus coûteuses en terme de calcul [Belytschko et Tabbara, 1996].

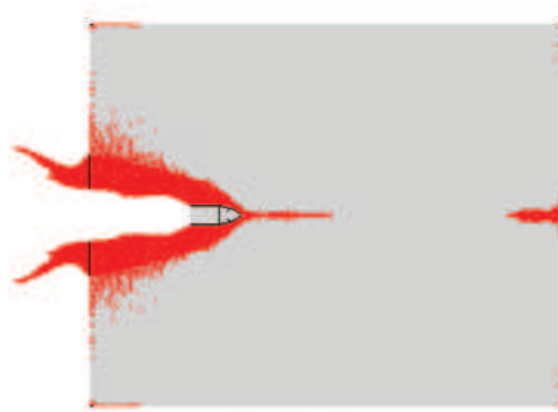


FIG. 2.10 – Modélisation SPH [Leppanen, 2002]

2.6.2 Méthodes discrètes

Les méthodes discrètes consistent en des assemblages d'éléments distincts, déformables ou non, reliés entre eux par des lois très simples qui permettent de représenter le comportement du matériau. Ces méthodes sont très répandues pour les matériaux granulaires, car elles représentent naturellement la cinématique de ces matériaux et leur comportement discontinu. Contrairement aux approches continues dont le comportement est imposé par la loi constitutive, le comportement d'un modèle discret résulte de l'interaction des différents éléments entre eux. Une loi constitutive complexe peut être ainsi obtenue par des lois simples à une échelle inférieure. La simulation par des modèles discrets consiste en la résolution d'un problème de dynamique. Contrairement aux approches continues qui sont fondées sur la mécanique des milieux continus, les méthodes discrètes se résolvent directement par l'application du principe fondamental de la dynamique à tous les éléments et pour chaque pas de temps.

Si ces méthodes ont initialement été développées pour les matériaux granulaires [Cundall, 1971; Cambou et Jean, 2001], certains auteurs se sont intéressés au développement des approches discrètes pour des matériaux cohésifs et en particulier pour les géomatériaux [Camborde *et al.*, 2000]. Ces matériaux peuvent être vus à l'échelle macroscopique comme homogènes et continus (Figure 2.11), mais leur comportement à la rupture résulte de phénomènes discontinus que les méthodes discrètes peuvent modéliser plus naturellement que les approches continues classiques.

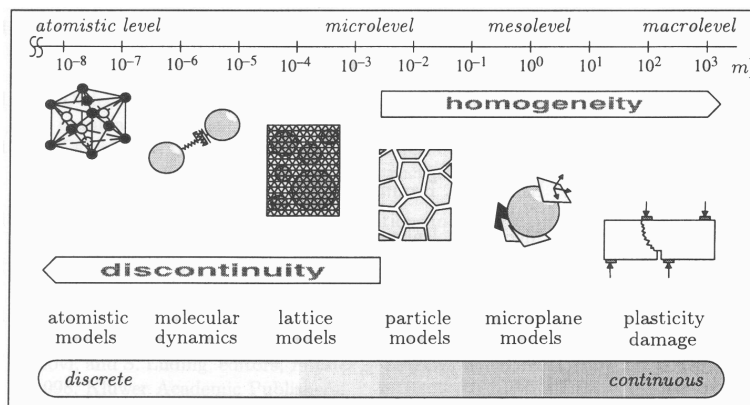


FIG. 2.11 – Échelle de modélisation [D'addetta et al., 2001]

Les expérimentations ont montré que le comportement du béton sous impact conduit à l'apparition de nombreuses fissures. Ces fissures se propagent et se rejoignent pour former des blocs de béton. Ainsi au cours de la simulation, de nouveaux contacts peuvent être créés. Tous ces phénomènes discontinus nous incitent à préférer l'emploi d'une méthode discrète. Les travaux précédents d'études de l'impact sur béton par la méthode des éléments discrets ont montré la validité de ces arguments [Camborde, 1999; Hentz, 2003; Cusatis et Pelessone, 2006; Sawamoto *et al.*, 1998].

Différentes méthodes discrètes existent et peuvent être utilisées [Cambou et Jean, 2001].

- Dynamique moléculaire: il s'agit de méthodes discrètes développées par les physiciens pour modéliser le comportement de la matière à l'échelle atomique [Rapaport, 1997].
- Méthode des éléments discrets: un ensemble d'éléments distincts sont en interaction

par des lois de contact ou de cohésion [Cundall, 1971; Cundall et Strack, 1979]. Les éléments discrets sont indéformables et la condition de contact s'exprime de manière «souple» avec une raideur équivalente. Les éléments peuvent s'interpénétrer.

- Méthode lattice : le modèle n'est pas représenté par un ensemble d'éléments volumiques mais par une répartition de points reliés entre eux par des lois d'interaction. La gestion du contact post-rupture est moins évidente à traiter. Des solutions sont proposées en définissant les cellules de Voronoï autour des points du modèle [Wœstyn *et al.*, 2006; Delaplace et Ibrahimbegovic, 2006; Cusatis et Pelessone, 2006].
- Dynamique des contacts : une autre approche qui se révèle efficace pour la modélisation de phénomènes quasi-statiques ou de dynamique peu rapide est la méthode dite de dynamique des contacts [Moreau, 1988; Jean, 2000]. Le contact est rigoureusement respecté (aucune interpénétration n'est autorisée). Il est géré séparément des équations de la dynamique qui pilotent le mouvement des éléments. La méthode de résolution de la dynamique est implicite.

Toutes ces méthodes continuent à faire l'objet de développements, tant sur le plan de la représentativité du modèle par l'introduction d'éléments avec des géométries plus réalistes, que sur celui de la performance des logiciels par des optimisations de code et leur parallélisation. Pour des applications en dynamique rapide, l'utilisation d'un algorithme explicite est nécessaire. Peu à peu, les méthodes dites «lattice» et «éléments discrets» tendent à se confondre, voire le sont déjà : avant rupture, «lattice», post-rupture «éléments discrets». Les détails de la méthode discrète que nous utilisons sont présentés dans le chapitre 3.

Si ces méthodes sont performantes sur des modèles de petites dimensions, elles sont difficiles à mettre en œuvre sur des structures de grandes tailles. Une partie pénalisante est la gestion des contacts à chaque itération. Des procédés performants existent pour améliorer cette étape du calcul [Munjiza, 2004], mais elle représente toujours une part importante dans le cycle de calcul. D'autre part, l'utilisation d'éléments sphériques discrétisés finement pour prédire le comportement local, conduit à l'échelle de l'ouvrage à un nombre très important d'éléments. Ces deux aspects montrent les limites d'un modèle uniquement éléments discrets à l'échelle de l'ouvrage. Une des possibilités pour rendre la modélisation de l'ouvrage réalisable passe par le couplage entre différentes méthodes de calcul adaptées aux phénomènes physiques mis en jeu dans chacune des parties du modèle.

2.7 Couplages ED/EF

La volonté d'effectuer des couplages entre les différentes méthodes de simulation se justifie pour diverses raisons : des modèles adaptés à l'objectif d'une simulation, des résultats de meilleure qualité et plus faciles à exploiter, des pas de temps optimisés. Par exemple, un système mécanique complexe peut être divisé en plusieurs sous-domaines modélisés grâce à la théorie la plus appropriée (coque, plaque, poutre, 3D). Une telle approche permet de réduire le nombre de degrés de liberté du modèle, et de diminuer le temps de calcul. La solution se révèle plus performante car elle permet à coût de calcul équivalent d'augmenter la discrétisation ou la richesse du comportement (figure 2.12). Tous les logiciels du commerce permettent ce type d'approche.

Ce type d'approche multi-échelle s'est largement répandu ces dernières années [Park et Liu, 2004]. Nous inscrivant dans ce cadre là, nous souhaitons obtenir à la fois la réponse en dépla-

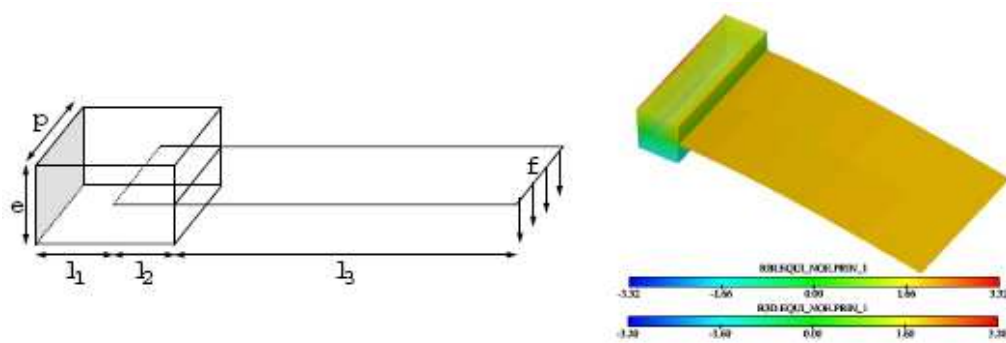


FIG. 2.12 – Modélisation Arlequin d'une poutre console [Rateau, 2003]

ement et la réponse vibratoire d'une structure, mais également l'endommagement localisé du matériau au niveau de l'impact. La partie précédente a permis de montrer que la méthode aux éléments discrets est très bien adaptée pour étudier le comportement discontinu local. En revanche elle n'est pas utilisable à l'échelle de la structure et elle doit être couplée avec une méthode efficace pour la résolution.

Les premiers à s'intéresser au couplage entre une méthode continue, MEF (Méthode des Éléments Finis) et une méthode discontinue (molecular dynamics) sont les physiciens qui les utilisent pour comprendre les mécanismes des matériaux à différentes échelles. Les nanophysiciens souhaitent comprendre les relations inter-atomiques [Broughton *et al.*, 1999; Liu *et al.*, 2005], le fonctionnement des dislocations [Curtin et Miller, 2003] et la propagation des fissures [Park *et al.*, 2003, 2005]. À l'échelle microscopique, les mécaniciens étudient la propagation de fissure [Xiao et Belytschko, 2004].

Dans les approches citées ci-dessus, deux aspects les différencient : l'échelle de modélisation et la méthode de couplage. L'échelle joue un rôle essentiellement dans la définition des potentiels selon qu'il faut prendre ou non en compte l'organisation des atomes et les lois interagissant entre eux. Afin d'assurer la continuité matérielle entre les deux domaines, les équations de couplage seront exprimées différemment selon que les modèles sont liés bord à bord, avec recouvrement ou avec un maillage progressif.

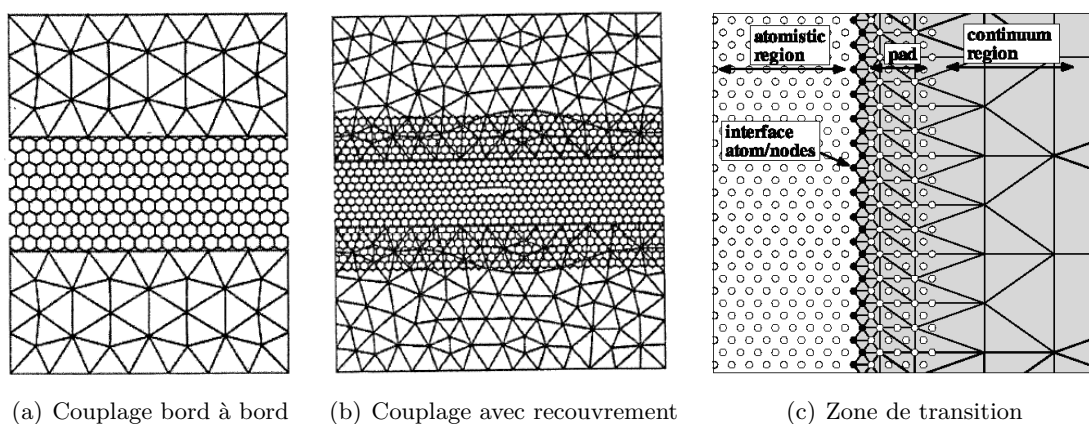


FIG. 2.13 – Liaison entre méthode discrète et éléments finis, (a) et (b) [Belytschko et Xiao, 2003], (c) [Curtin et Miller, 2003]

Si les couplages bord à bord par substitution sont les plus simples à réaliser, ils présentent cependant deux aspects négatifs : les frontières du modèle discret (les centres des éléments discrets) ne sont pas pour nos applications positionnées de manière ordonnée, le maillage doit donc être capable d'en tenir compte. D'autre part le traitement des problèmes dynamiques risque d'introduire des réflexions d'ondes hautes fréquences qui sont plus délicates à traiter sur un modèle bord à bord [Xiao et Belytschko, 2004].

Belytschko [Belytschko et Xiao, 2003] propose d'effectuer un couplage avec une zone de recouvrement entre les deux modèles (ED et EF) et de coupler les degrés de liberté dans la zone de recouvrement par des multiplicateurs de Lagrange. Une telle approche permet par des simplifications numériques d'atténuer les réflexions d'ondes hautes fréquences et d'assurer la continuité matérielle par l'introduction d'un paramètre de recouvrement qui permet de pondérer l'énergie totale de chacun des sous-domaines.

À l'échelle qui nous intéresse, le couplage ED/EF a principalement été utilisé en quasi-statique pour étudier la fracturation lorsque les échantillons sont de taille trop importante. Le couplage est alors réalisé bord à bord par substitution entre les ED maîtres et les nœuds EF esclaves [Cusatis *et al.*, 2006; N. Monteiro Azevedo, 2006].

Pour Cundall [Cundall *et al.*, 2003], l'objectif est très clairement de réduire le temps de calcul de la partie recherche de contact liée à la méthode aux éléments discrets ; pour cela, les auteurs introduisent des éléments finis dans leurs logiciels (PFC 2D, PFC 3D). Ils étudient différentes manières de coupler les deux méthodes avec, comme critère, le temps de résolution. Les difficultés rencontrées sont liées au choix des paramètres macroscopiques du modèle continu qui est construit sur une discrétisation identique à celle discrète. Les variations locales de raideur doivent être modélisées dans le modèle continu pour assurer la continuité matérielle. Le choix d'une même taille de discrétisation pour la partie éléments finis et pour la partie éléments discrets limite les problèmes de réflexion d'ondes hautes fréquences, mais limite aussi le gain de temps (Figure 2.14).

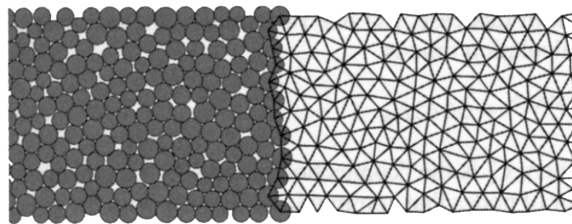


FIG. 2.14 – Méthode combinée d'éléments finis et d'éléments discrets [Cundall *et al.*, 2003]

Un point de vue opposé à celui privilégiant le comportement discret consiste à considérer initialement l'ensemble de la structure discrétisée par éléments finis et à transformer l'élément fini en élément discret de la forme de l'élément fini lorsqu'un critère de fissuration est atteint. Une fissure se propage alors suivant une direction donnée [Owen *et al.*, 2005; Munjiza, 2004] intra ou inter élément (Figure 2.15). La difficulté de ce type d'approche réside dans le choix du critère de transition et la dépendance de la réponse au maillage.

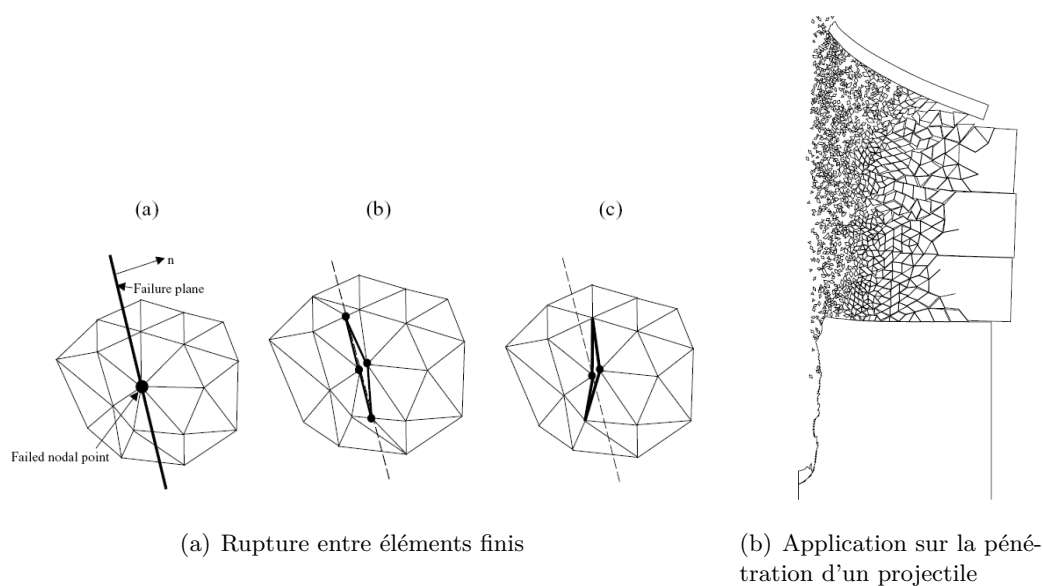


FIG. 2.15 – Méthode combinée d'éléments finis et d'éléments discrets [Owen et al., 2005]

2.8 Synthèse

L'objectif est de modéliser le comportement d'ouvrages de génie civil sous impact. Les impacts sur du béton armé mettent en jeu de nombreux phénomènes discontinus. La méthode des éléments discrets permet de prendre naturellement en compte ces discontinuités. Cette méthode ne pouvant être utilisée sur l'ensemble de l'ouvrage, elle est couplée à la méthode des éléments finis dans les parties ne présentant pas de comportement nécessitant la modélisation des discontinuités. Le modèle de la structure est donc divisé en deux parties. L'une proche de l'impact est soumise à de fortes non-linéarités et nombreuses discontinuités, elle est modélisée par la méthode des éléments discrets. L'autre domaine suffisamment loin de la zone impactée est modélisé par une approche continue (éléments finis).

Dans un premier temps, cette partition est réalisée *a priori* et dépend de nombreux paramètres comme la taille du projectile, l'épaisseur de la structure et les vitesses d'impact. Des indicateurs tels que le niveau de contrainte ou l'endommagement des éléments discrets proches de la zone de couplage permettent de valider *a posteriori* la taille de chacun des sous-domaines du modèle.

La validité de la méthode repose sur le choix de la méthode de couplage et l'aptitude des méthodes discrètes à modéliser le comportement du béton et du béton armé dans la gamme des sollicitations qui nous intéresse.

Méthode des éléments discrets

La méthode discrète utilisée est le résultat de nombreux travaux de recherche sur la modélisation de géomatériaux granulaires [Sibille, 2006; Salot, 2007] ou cohésifs [Shiu *et al.*, a1; Hentz, 2003; Camborde, 1999]. La description de la méthode qui suit est inspirée des références précédentes que le lecteur pourra consulter. Nous proposons de situer notre approche par rapport aux multiples descriptions : lattice model¹, dynamique moléculaire², éléments distincts³, puis de décrire les équations caractéristiques du modèle.

3.1 Description de la méthode

La méthode discrète utilisée est celle disponible dans le code de calcul SDEC [Donzé, 2001]. Il s'agit d'une méthode intermédiaire entre les modèles «Lattice» et la méthode des éléments distincts telle que Cundall l'a développée initialement [Cundall et Strack, 1979]. Le domaine est constitué d'un ensemble de points reliés entre voisins : les modèles Lattice considèrent le lien entre les nœuds comme étant une barre ou une poutre (ou un autre comportement), tandis que la méthode aux éléments discrets affecte un rayon à chacun des points et l'espace est ainsi constitué d'éléments sphériques (Figure 3.1). Les lois entre «points» voisins ou sphères en interaction peuvent être identiques entre les modèles de lattice ou les éléments discrets. Au-delà de la différence de représentation de l'espace entre ces deux approches, elles se différencient aussi par la méthode de recherche des contacts post-rupture.

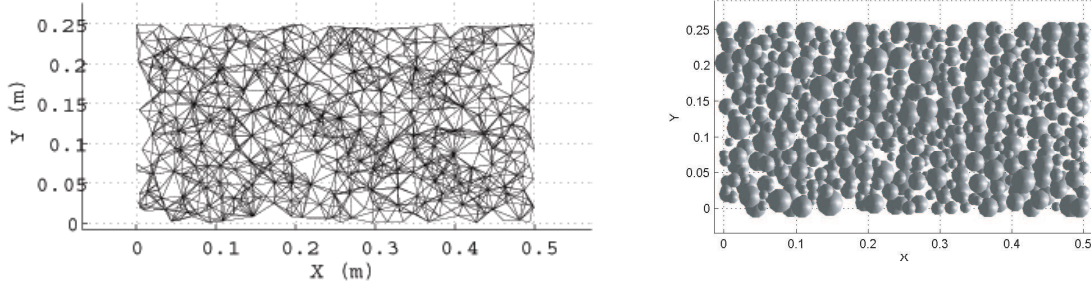
Ces méthodes ont été initialement introduites pour l'étude des matériaux granulaires et elles se

1. Assemblage de poutre [Schlangen et Garboczi, 1997; Prado et Van Mier, 2003]

2. Molécules en interaction dans un système en équilibre thermodynamique [Alder et Wainwright, 1959; Rapaport, 1997]

3. Définition d'après Cundall [Cundall et Hart, 1992] : cette appellation désigne un modèle permettant des déplacements et des rotations finis de corps discrets, y compris leur séparation et détectant les éventuels nouveaux contacts automatiquement au cours du calcul

sont aujourd'hui répandues à l'ensemble des géomatériaux qu'ils soient cohésifs ou non. Pour les matériaux cohésifs, des paramètres supplémentaires ont dû être ajoutés pour représenter correctement leur comportement comme la présence d'un effort de traction non nul et d'un critère de rupture en traction [Meguro et Hakuno, 1989; Potapov *et al.*, 1995; Potyondy *et al.*, 1996].



(a) Visualisation sous forme de lattice

(b) Visualisation sous forme d'éléments discrets sphérique

FIG. 3.1 – Visualisation d'un échantillon

3.1.1 Principe

Le milieu est représenté par un assemblage de sphères de différentes tailles réparties de manière désordonnée sur le domaine. Le caractère désordonné est fondamental pour représenter le caractère hétérogène qui est à l'origine de la fissuration, mais également pour assurer l'isotropie de la structure. Chaque élément est relié à ses plus proches voisins par des lois d'interaction. Les caractéristiques à l'instant t d'un élément discret sont sa position $\vec{d}_i(t)$, sa vitesse $\vec{v}_i(t)$ et sa vitesse angulaire $\vec{\omega}_i(t)$. Connaissant la position de tous les éléments à un instant donné, il est possible de déterminer les torseurs des actions mécaniques qui s'appliquent sur chacun des éléments. On en déduit par l'utilisation du principe fondamental de la dynamique (PFD) appliqué au centre de chacune des sphères, les accélérations (en déplacements et en rotations) des éléments. Enfin un schéma explicite aux différences finies centrées conduit aux nouvelles positions $\vec{d}_i(t + \Delta t)$, vitesses $\vec{v}_i(t + \Delta t)$ et vitesses angulaires $\vec{\omega}_i(t + \Delta t)$.

Par exemple, si on s'intéresse à l'élément i à l'instant t , i est supposé entourer de n voisins en interaction. Soit δ_{ij} le déplacement relatif entre les éléments i et j . Connaissant la loi d'interaction entre ces éléments, δ_{ij} induit des forces et des moments sur i . On en déduit \vec{d}_i et $\vec{\omega}_i$ respectivement l'accélération et l'accélération angulaire de i par le PFD :

$$\vec{d}_i(t) = \frac{1}{m_i} \left(\sum_{j=1}^n \overrightarrow{F_{j \rightarrow i}(\delta_{ij})} + \overrightarrow{F_{volumique}} \right) \quad (3.1)$$

De même pour les degrés de liberté en rotation :

$$\vec{\omega}_i(t) = \frac{1}{J_i} \sum_{j=1}^n \overrightarrow{C_{j \rightarrow i}(\delta_{ij})} \quad (3.2)$$

où m_i et J_i sont respectivement la masse et le moment d'inertie de l'élément i .

Pour simplifier les expressions, nous définissons les vecteurs «force» et «moment» totaux appliqués à l'élément i tel que :

$$\overrightarrow{F_i^{tot}} = \sum_{j=1}^n \overrightarrow{F_{j \rightarrow i}(\delta_{ij})} + \overrightarrow{F_{volumique}} \quad (3.3)$$

$$\overrightarrow{M_i^{tot}} = \sum_{j=1}^n \overrightarrow{C_{j \rightarrow i}(\delta_{ij})} \quad (3.4)$$

Le schéma d'intégration explicite en temps permet de passer de l'instant t au pas de temps suivant $t + \Delta t$. La discrétisation en temps est réalisée par la méthode des différences finies centrées de type «leap-frog» [Allen et Tildesley, 1987].

$$\overrightarrow{\ddot{d}_i(t)} = \frac{1}{\Delta t} \left(\overrightarrow{\dot{d}_i(t + \frac{\Delta t}{2})} - \overrightarrow{\dot{d}_i(t - \frac{\Delta t}{2})} \right) \quad (3.5)$$

$$\overrightarrow{\ddot{\omega}_i(t)} = \frac{1}{\Delta t} \left(\overrightarrow{\dot{\omega}_i(t + \frac{\Delta t}{2})} - \overrightarrow{\dot{\omega}_i(t - \frac{\Delta t}{2})} \right) \quad (3.6)$$

En utilisant le PFD (Eq. 3.1 et Eq. 3.2), on obtient :

$$\overrightarrow{\dot{d}_i(t + \frac{\Delta t}{2})} = \overrightarrow{\dot{d}_i(t - \frac{\Delta t}{2})} + \frac{\overrightarrow{F_i^{tot}(t)}}{m_i} \Delta t \quad (3.7)$$

$$\overrightarrow{\dot{\omega}_i(t + \frac{\Delta t}{2})} = \overrightarrow{\dot{\omega}_i(t - \frac{\Delta t}{2})} + \frac{\overrightarrow{M_i^{tot}(t)}}{J_i} \Delta t \quad (3.8)$$

D'où l'expression des nouvelles positions :

$$\overrightarrow{d_i(t + \Delta t)} = \overrightarrow{d_i(t)} + \overrightarrow{\dot{d}_i(t + \frac{\Delta t}{2})} \Delta t \quad (3.9)$$

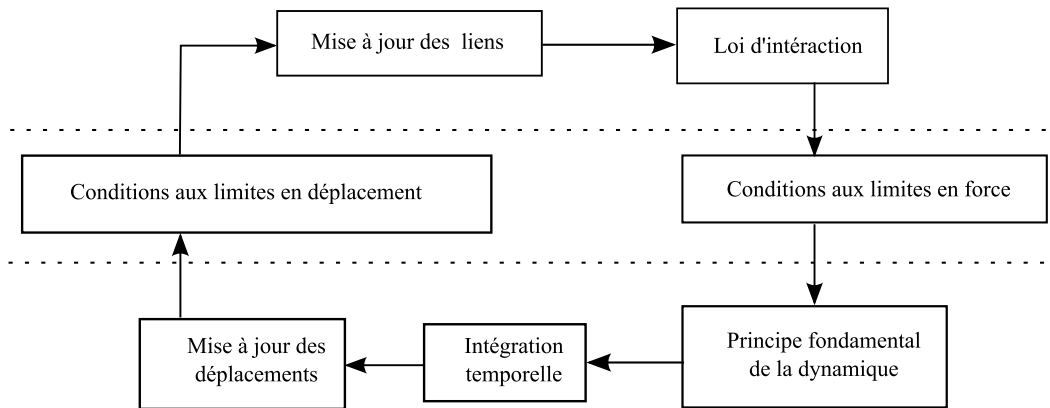


FIG. 3.2 – Étapes fondamentales d'un cycle de la méthode

Suite aux nouvelles positions, l'algorithme recherchera les éventuelles nouvelles interactions et les nouveaux déplacements relatifs entre deux éléments, etc ... La figure 3.2 décrit les grandes étapes de la méthode des éléments discrets.

Au-delà des qualités de l'algorithme d'intégration utilisé [Hart *et al.*, 1988], la qualité du modèle discret dépendra en particulier, des lois d'interaction et de la génération de la géométrie.

3.1.2 Génération d'un modèle

Le principe de la phase de génération du désordre est fondamental. C'est lui qui par la variabilité de positionnement des différents éléments, introduit l'isotropie des interactions et les hétérogénéités de la microstructure favorisant l'apparition et la propagation de fissures. Le désordre doit donc être représentatif des hétérogénéités naturelles du matériau à modéliser. Pour étudier le comportement micro-mécanique du béton, l'apparition et la propagation des fissures, une échelle représentative de la microstructure est nécessaire [Potyondy *et al.*, 1996; Zhong et Chang, 1999; Prado et Van Mier, 2003]. La figure 3.3 représente la microstructure composite du béton, les paramètres des lattices sont adaptés soit à la matrice, soit à un granulat, soit à l'interface entre matrice et agrégat [D'addetta *et al.*, 2006].

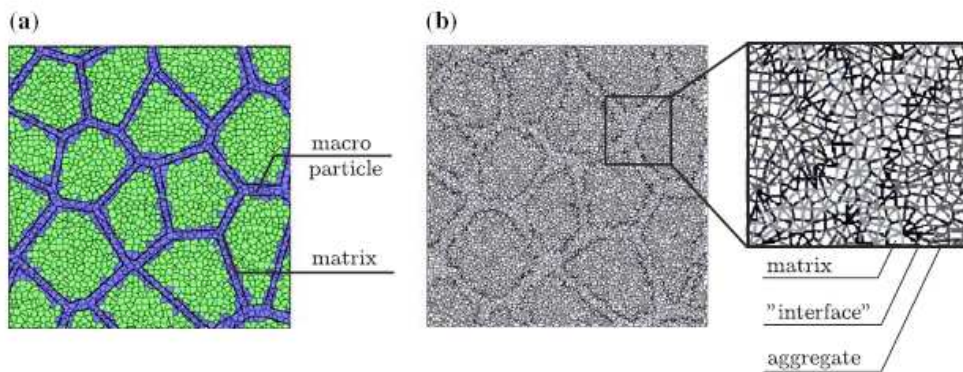


FIG. 3.3 – *Modélisation micro [D'addetta et al., 2006]*

Cette échelle de modélisation n'est pas envisageable pour nos applications. Nous choisissons une échelle intermédiaire entre l'échelle micro qui respecte les tailles caractéristiques des agrégats et l'échelle homogénéisée qui perd nécessairement le caractère hétérogène de la microstructure. Cette échelle permet une bonne représentation du comportement pour des coûts de simulation (nombre d'éléments, temps de recherche des contacts, taille mémoire virtuelle, etc) acceptables. Cette contrainte est nécessaire pour nos applications en vue de traiter des problèmes à l'échelle d'ouvrage de génie civil [Camborde, 1999; Magnier et Donzé, 1998; Hentz, 2003]. Nous parlons d'échelle de modélisation mésoscopique. La figure 3.1 représente un échantillon de tailles $0.5 \times 0.25 \times 0.25 \text{ m}^3$, discrétisé à l'échelle mésoscopique. À l'échelle mésoscopique, la taille des sphères est petite⁴ et supérieure à la taille des granulats du béton. D'autre part, le comportement du béton étant isotrope, il est nécessaire d'avoir un échantillon qui ne présente pas des directions privilégiées de contact. L'algorithme de désordre utilisé doit répondre à tous ces critères, en conduisant à un échantillon le plus dense possible.

L'ensemble des solutions permettant de générer le désordre est très large, cependant deux grandes familles peuvent se dégager, les méthodes géométriques qui construisent l'échantillon à partir de considérations géométriques et les méthodes dynamiques qui utilisent le cycle de la méthode des éléments discrets (Cf. Fig. 3.2).

– Méthode géométrique de Jodrey-Torry

Inspirée de l'algorithme proposé par [Jodrey et Tory, 1985], c'est la méthode initialement

4. Quelques milliers d'éléments donne des très bons résultats sur des essais simples. Pour une structure la taille en mémoire du problème est le critère prépondérant (environ 300 000)

implantée dans le code SDEC [Donzé, 2002]. Un premier échantillon de sphères de taille unique est généré sur un réseau cubique face centrée afin d'augmenter au maximum la compacité. Un facteur de réduction est appliquée aux sphères. Chacune d'entre elles se voit affectée d'un rayon final aléatoire en fonction de la distribution de taille souhaitée. Un processus itératif de grossissement et de remplacement des sphères est ensuite réalisé. Ce processus s'arrête soit lorsque les sphères ont atteint leur rayon imposé, soit lorsque la compacité de l'assemblage atteint une limite. Cette méthode a l'avantage d'être rapide à mettre en oeuvre pour des échantillons simples par rapport à des méthodes dynamiques, mais elle conduit à des échantillons assez lâches. En revanche, le processus converge difficilement et génère des temps de calcul important pour un grand nombre d'éléments. Lorsque certains éléments discrets sont fixés pour modéliser par exemple les armatures du béton armé, le processus itératif peut également ne pas converger, certains éléments oscillant entre deux positions limitées par les éléments discrets fixes.

– **Grossissement dynamique** [Potyondy *et al.*, 1996]

Comme son nom l'indique cette méthode utilise le cycle de calcul dynamique de la méthode des éléments discrets pour modifier les positions des éléments. À partir, d'un assemblage cubique face centrée, le rayon de l'ensemble des sphères est réduit d'un facteur donné. Chacune d'elle connaît son diamètre final et à chaque itération du cycle dynamique elles grossissent d'un facteur imposé jusqu'à atteindre leur taille finale. De par l'utilisation du cycle de la méthode des éléments discrets, les éléments peuvent s'interpénétrer.

– **Optimisation des méthodes précédentes**

Une manière efficace d'augmenter la compacité des échantillons consiste à compacter le volume pour atteindre le volume souhaité. Selon les angles de frottement utilisés, l'échantillon sera plus ou moins dense [Sibille, 2006; Thornton et Antony, 2000]. Des taux de compaction élevés sont obtenus par une phase de compaction en utilisant des angles de frottement inter-granulaire nuls. Cette méthode permet d'atteindre des compacités de l'ordre de 0,6.

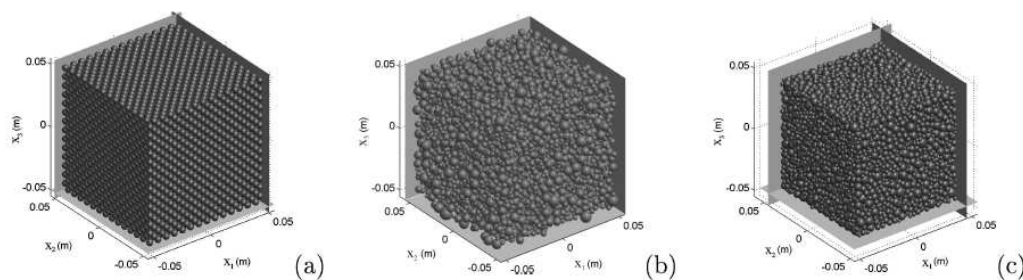


FIG. 3.4 – Procédure de désordre de L. Sibille : (a) génération ordonnée CFC, (b) génération du désordre par la méthode SDEC, (c) compactage par compression isotrope avec un angle de frottement nul [Sibille, 2006]

– **Méthode géométrique de Jean-François Jerier**, basée sur un maillage tétraédrique [Jerier *et al.*, 2008b]

Jean-François Jerier propose une méthode géométrique permettant de remplir un volume quelconque par des sphères. Le désordre généré sert ensuite pour étudier le comportement local de la compaction des poudres lors de l'élaboration de pièces métalliques frittées. Le désordre est obtenu à partir d'un maillage non régulier tétraédrique où les sphères sont placées sur chacune des mailles. Tout d'abord, des éléments sont placés

sur les arêtes des tétraèdres, puis sur les sommets, ensuite sur les faces triangulaires et enfin dans le vide proche des sommets. Les rayons des sphères sont affectés en fonction de leur position et du rapport de taille des éléments. Ensuite, si la compacité obtenue n'est pas suffisante, la méthode construit un maillage de Delaunay à partir des centres des sphères et place de nouveaux éléments à l'intérieur des tétraèdres de Delaunay (Fig. 3.5). La compacité est de l'ordre de 0.6 sans interpénétration, les temps de simulation sont intéressants et l'échantillon présente une bonne isotropie.

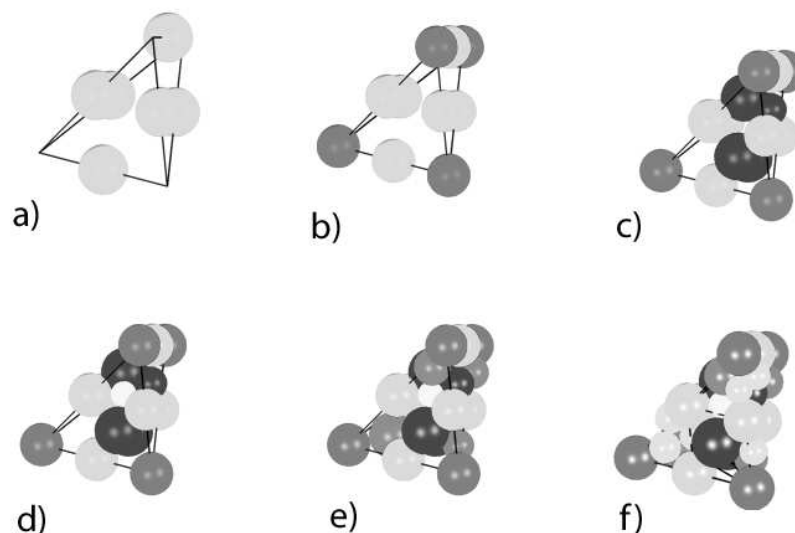


FIG. 3.5 – Procédure de désordre à partir d'un maillage: (a) ED positionné au milieu des cotés des tétraèdres, (b) positionnement sur les sommets, (c) sur les faces triangulaires, (d) au centre du tétraèdre, (e) dans les vides proches des sommets, (f) procédure de densification [Jerier et al., 2008b]

La méthode proposée par Jerier présente de nombreux avantages pour nos applications : le domaine étant construit à partir d'un maillage effectué sur des logiciels libres, il est possible d'obtenir des géométries beaucoup plus complexes que celles obtenues par compaction et qui nécessitent la présence d'éléments frontières pour limiter le domaine. Pour des applications sur des ouvrages, la géométrie n'est pas toujours simple d'où l'intérêt d'utiliser un modéleur géométrique pour définir les volumes que les algorithmes de maillage utiliseront. Par ailleurs notre modèle doit prendre en considération la présence d'armatures en acier, celles-ci étant représentées dans le modèle discret par des sphères de diamètre égal à celui des armatures et placées de manière fidèle à la réalité de la structure.

La génération de modèle comportant des armatures peut se faire de différentes manières :

- Une première approche consiste à se placer au plus près de la géométrie réelle [Jerier et al., 2008a]. Pour cela, un pré-modèle discret est obtenu en ne respectant que les dimensions de la structure. Les éléments de renfort sont ensuite ajoutés au modèle.

Les éléments de béton en interpénétration sont supprimés. Puis l'étape de densification est effectuée en ajoutant des éléments sur l'ensemble du domaine. Cette approche peut conduire à des porosités fortes autour des armatures si la discrétisation lors de l'étape de densification ne permet pas l'utilisation d'éléments discrets suffisamment petits.

- Une deuxième solution considère que l'armature joue un rôle jusqu'au pic de contrainte et qu'après la rupture, son comportement n'a pas beaucoup d'influence. Dans ce cas, les éléments des armatures peuvent être mis en superposition sur les éléments discrets obtenus par un pré-modèle ne prenant pas en compte les armatures. Le principal avantage de cette méthode est que la génération du domaine initial n'est pas perturbée par les armatures. En contre partie, le comportement post-pic n'est pas modélisé idéalement.

Cette étape de génération du désordre bien que fondamentale pour obtenir des résultats quantitatifs avec la méthode aux éléments discrets, n'a pas fait l'objet d'une étude particulièrement détaillée. Les avantages de la méthode de Jerier sont nécessaires pour la génération d'échantillons de grandes tailles et de formes complexes et cette méthode conduit à des échantillons ayant une discrétisation satisfaisante en terme d'isotropie, de compacité et d'homogénéité. Le point à approfondir serait certainement la répartition des tailles qui n'est actuellement pas optimale.

Les figures 3.6, 3.7, 3.8 présentent la mise en œuvre de la méthode sur un échantillon de taille $0.8 \times 0.25 \times 0.25 \text{ m}^3$ comportant 5000 éléments, obtenue en 53 minutes sur un Pentium 4 à 3.4 GHz. La compacité obtenue est de 0.5 pour des diamètres d'éléments compris entre 8 mm et 32 mm (Rapport de taille de 4). La figure 3.8 trace la répartition des contacts dans les plans de normale x, y et z, la forme circulaire montre le caractère isotrope.

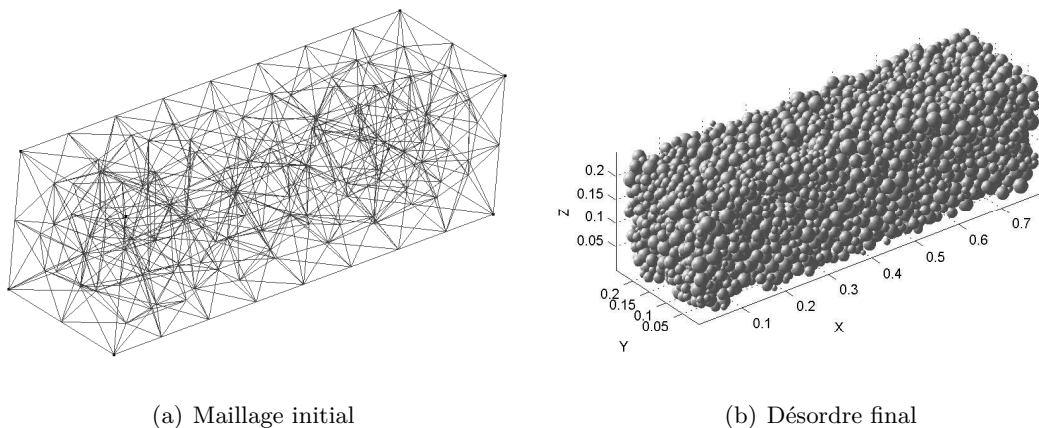


FIG. 3.6 – Génération du désordre

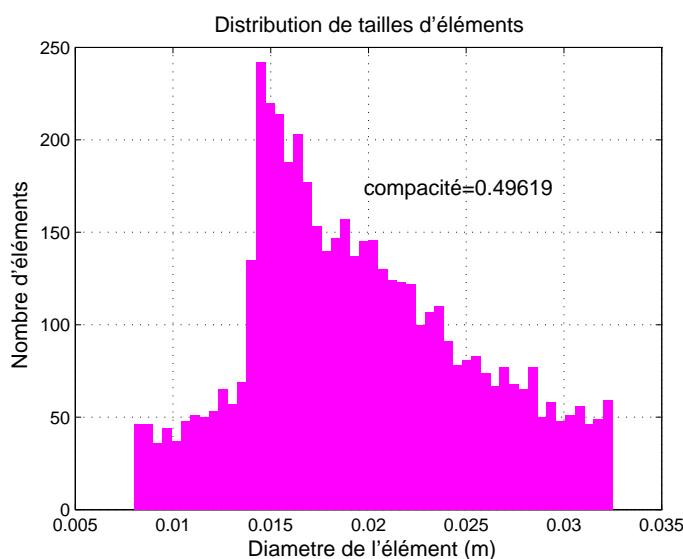


FIG. 3.7 – *Distribution de taille des éléments*

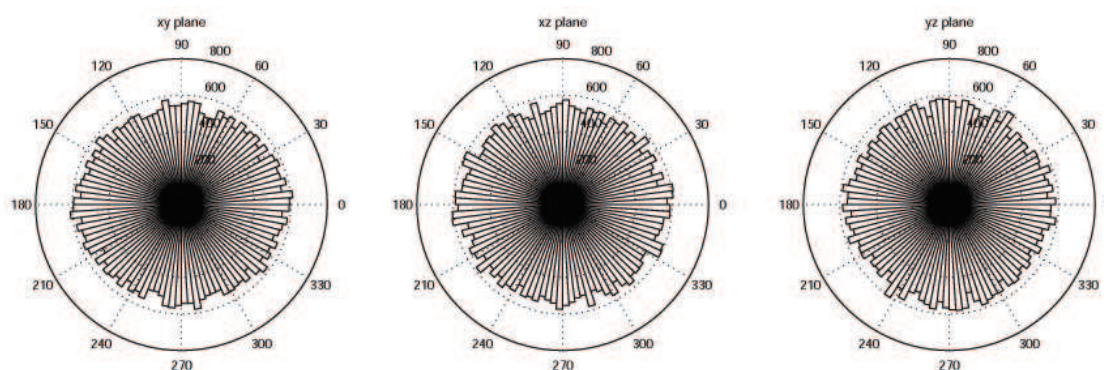


FIG. 3.8 – *Orientation des contacts*

3.1.3 Comportement des éléments discrets

3.1.3.1 Forme des éléments

Les éléments discrets sphériques sont les éléments les plus répandus dans les modélisations par éléments discrets, et cela pour plusieurs raisons, la simplicité de la programmation et la rapidité des simulations. En considérant des sphères, les équations de la dynamique sont beaucoup plus simples que pour des éléments non sphériques (ellipse, polyèdres). Ensuite les nombreuses étapes de recherche des contacts sont également très efficaces pour des sphères. Ces raisons justifient l'intérêt porté par la communauté scientifique sur cette géométrie particulière d'éléments discrets. Toutefois, cette approche ne fait pas l'unanimité pour des raisons de représentativité de la physique du problème. Les granulats de béton n'étant pas sphériques, leur contact n'est pas unique, encore moins ponctuel. Le rôle de la rotation des éléments n'est pas facilement pris en compte avec des éléments sphériques [Cundall, 1989; Hentz, 2003; Kuhn et Bagi, 2002]. Le comportement en rotation des éléments fait l'objet de nombreuses études et il est parfois nécessaire d'ajouter des modifications dans la manière de les modéliser pour

que le modèle soit plus représentatif du comportement réel. Deux possibilités ont été envisagées, soit jouer sur la forme des éléments par l'utilisation de clusters d'éléments sphériques [Combe, 2001; Salot, 2007], ou bien ajouter une loi spécifique sur les rotations, la «LTM», Loi de Transfert de Moment. Elle permet la prise en compte d'une raideur en rotation entre les éléments en interaction (lien de comportement : poutre) [Iwashita et Oda, 2000; Plassiard, 2007]. D'autres approches plus complexes remplacent les éléments sphériques par des éléments elliptiques ou polyédriques [Azéma, 2007]. Ces remarques sont valables quelle que soit la simulation, mais elles sont surtout nécessaires pour étudier ce qui se passe dans les zones fortement cisailées et les bandes de localisation.

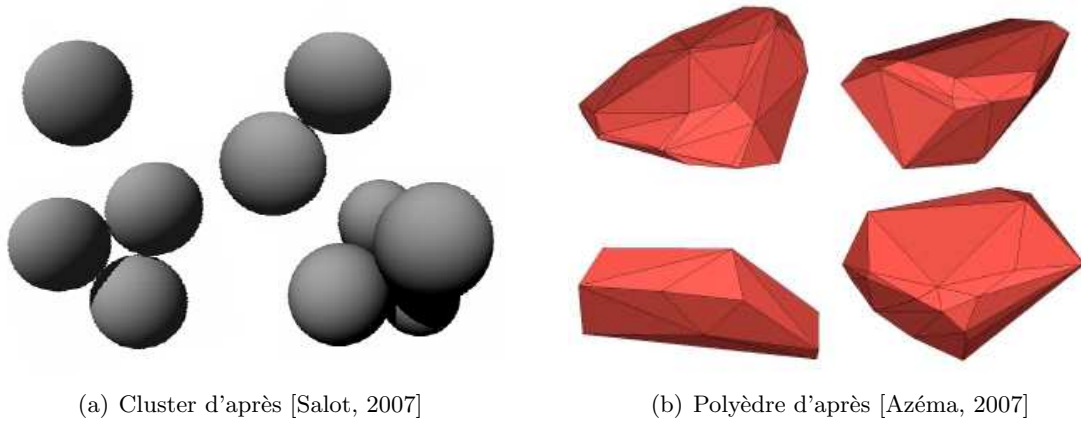


FIG. 3.9 – Quelques formes d'éléments discrets utilisées

3.1.3.2 Loi d'interaction entre grains sphériques

Considérons deux grains en interaction, la loi inter-granulaire (ou mésoscopique) la plus simple consiste à relier les centres de ces grains par des ressorts linéaires selon les directions normales et tangentielles, respectivement k_n et k_s [Cundall, 1971].

Contrairement aux modèles continus qui imposent à chaque élément un comportement macroscopique constant sur le domaine, les modèles discrets utilisent des lois d'interaction locales. Ces lois locales dépendent du rayon des éléments en interaction et conduisent localement à des différences de raideur et des hétérogénéités matérielles. Le comportement macroscopique est obtenu grâce à un nombre élevé d'éléments interagissants. Ce changement d'échelle méso-macro permet d'obtenir des comportements complexes globaux (nécessitant en continu des lois de comportement non-linéaires) à partir de lois simples à l'échelle méso.

Les lois d'interaction proposées par Cundall servent de point de départ [Cundall et Strack, 1979; Bardet, 1997]. Elles caractérisent la liaison entre grains par des ressorts linéaires fragiles, un ressort de raideur k_n est utilisé pour représenter la raideur normale et un ressort de raideur k_s représente la raideur tangentielle. Pour pouvoir représenter des grands déplacements, les déplacements sont incrémentés à partir des forces sur chacun des pas de temps.

D'après la théorie de Hertz, il semblerait préférable de prendre des ressorts non-linéaires, la surface de contact entre deux sphères augmente de manière non proportionnelle avec l'interpénétration. Toutefois, Cundall [Cundall, 1988] a montré que les résultats restent similaires

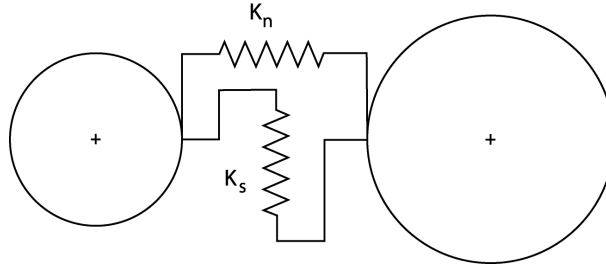


FIG. 3.10 – Loi d'interaction élastique

à l'échelle macro et le gain de temps dû à l'utilisation de ressort linéaire conduit à privilégier cette solution.

Pour modéliser les milieux cohésifs, deux types d'interaction doivent être envisagés : pour modéliser le contact, l'«interaction contact» et pour modéliser la cohésion, l'«interaction lien». Initialement, la structure est cohésive et modélisée par des interactions de type lien. Au cours de la simulation, la structure est amenée à s'endommager et des interactions liens vont rompre. De nouvelles interactions contacts peuvent apparaître au cours de la simulation si deux éléments initialement non liés ou ayant rompus, rentrent en contact.

Le comportement global dépend nécessairement du nombre de liens entre éléments. L'analyse d'un échantillon après la phase de désordre montre que le nombre moyen d'interactions naturelles (en contact ou en interpénétration) à l'intérieur de l'échantillon est très faible (quelques interactions par élément). Un nombre aussi faible n'est pas envisageable pour représenter correctement le comportement d'un matériau cohésif. Dans l'approche SDEC, un rayon d'interaction γ virtuel est utilisé pour augmenter le nombre de coordinence des éléments et ainsi le nombre initial des interactions liens.

Soit deux éléments a et b distants de D_{ab} , les éléments a et b de rayon r_a et r_b et de rayon d'interaction γ_a et γ_b , sont en interaction si :

$$\gamma_a r_a + \gamma_b r_b \geq D_{ab} \quad (3.10)$$

Cette modification est réalisée sur les interactions de type lien. Un rayon d'interaction égal à 1 est utilisé pour les interactions de type contact.

3.1.3.3 Calcul des forces normales et tangentielles

Considérons deux éléments a et b définis sur la figure 3.11. La distance D_{ab} est telle que les deux éléments sont en interaction. L'action mécanique de l'élément b sur l'élément a s'exprime au point P_a par une résultante et un moment nul, soit $\vec{F}_{b \rightarrow a}$ cet effort. Celui-ci se décompose dans le repère local de l'interaction par :

$$\vec{F}_{b \rightarrow a} = \vec{F}_n + \vec{F}_s \quad (3.11)$$

avec \vec{F}_n et \vec{F}_s les composantes dans la direction normale et tangentielle.

L'effort normal s'écrit :

$$\vec{F}_n = -K_n (D_{ab} - D_{ab}^{init}) \vec{n} \quad (3.12)$$

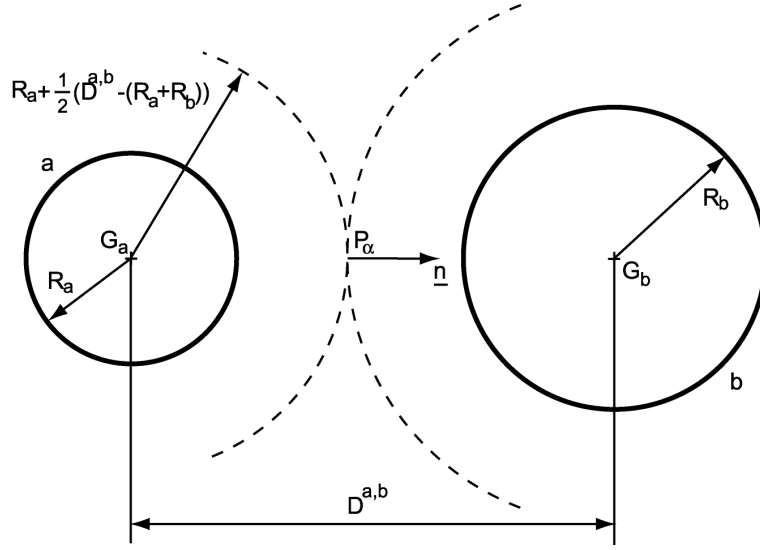


FIG. 3.11 – Paramétrage d'une interaction [Hentz, 2003]

où D_{ab}^{init} est la valeur de D_{ab} lors de la création du lien.

L'effort tangentiel est calculé en deux temps et prend en compte le mouvement des éléments en contact [Hart *et al.*, 1988]:

$$\overrightarrow{F_s}(t) = \overrightarrow{\Delta F_s} + \overrightarrow{F_s^{rot2}} \quad (3.13)$$

L'effort tangentiel est la somme d'une partie liée à l'incrément d'effort tangentiel $\overrightarrow{\Delta F_s}$ (Eq. 3.14) et d'une partie liée à la rotation des éléments $\overrightarrow{F_s^{rot2}}$ (Eq. 3.17):

$$\overrightarrow{\Delta F_s} = -K_s \overrightarrow{\Delta U_s} \quad (3.14)$$

$$\overrightarrow{\Delta U_s} = \Delta t \overrightarrow{V_{glissement}} \quad (3.15)$$

$$V_{glissement} = \overrightarrow{V(P_\alpha \in b/a)} - (\overrightarrow{V(P_\alpha \in b/a)} \cdot \vec{n}) \vec{n} \quad (3.16)$$

$$\overrightarrow{F_s^{rot2}} = \overrightarrow{F_s^{rot1}} - \overrightarrow{F_s^{rot1}} \wedge \Delta t \vec{\Omega} \quad (3.17)$$

$$\overrightarrow{F_s^{rot1}} = \overrightarrow{F_s}(t - \Delta t) - \overrightarrow{F_s}(t - \Delta t) \wedge \vec{n}(t - \Delta t) \wedge \vec{n}(t) \quad (3.18)$$

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} (\vec{\Omega}(a/R) + \vec{\Omega}(b/R)) \quad (3.19)$$

Ces expressions sont données pour les interactions de type lien. Elles restent valables pour les contacts à condition de rajouter une borne sur la force normale qui ne doit pas devenir négative⁵.

3.1.3.4 Mesure des déformations et des paramètres macroscopiques

Afin de pouvoir régler les lois d'interaction pour pouvoir représenter le comportement macroscopique, les mesures de déformation du domaine doivent être effectuées avec précision.

5. F_n est positive en compression, négative en traction avec notre définition du vecteur \vec{n}

Hentz a du développer une méthode de correction en énergie [Hentz *et al.*, 2002] pour avoir une procédure «reproductible». Ne parvenant pas à justifier cette approche, nous nous sommes intéressés à améliorer la méthode d'identification pour que celle-ci ne fasse pas appel à une correction *a posteriori*. L'option retenue pour notre étude est d'optimiser la procédure ; en amont en imposant un nombre de coordinence égal à 12 en moyenne à l'intérieur de l'échantillon et en aval en améliorant la mesure des déformations pour limiter les incertitudes, et ainsi améliorer la reproductibilité.

La mesure de la coordinence s'effectue sans prendre en compte les frontières de l'échantillon qui ont nécessairement moins de contacts et apportent beaucoup d'incertitudes. Cette coordinence est imposée à 12 et est obtenue en choisissant le rayon d'interaction γ qui convient. Le choix de 12 correspond au nombre de coordinence maximum dans un échantillon ordonné (cubique face centré). Le choix d'une valeur différente entraînerait un jeu de paramètres différent. Les essais pour différentes valeurs de coordinence montrent l'importance d'avoir une coordinence fixée et identique pour tous les modèles, une incertitude sur la coordinence se répercute directement sur les paramètres macroscopiques (E et ν). La figure 3.12 donne l'évolution de la coordinence moyenne et du module d'Young en fonction du rayon d'interaction pour l'échantillon défini sur la figure 3.6.

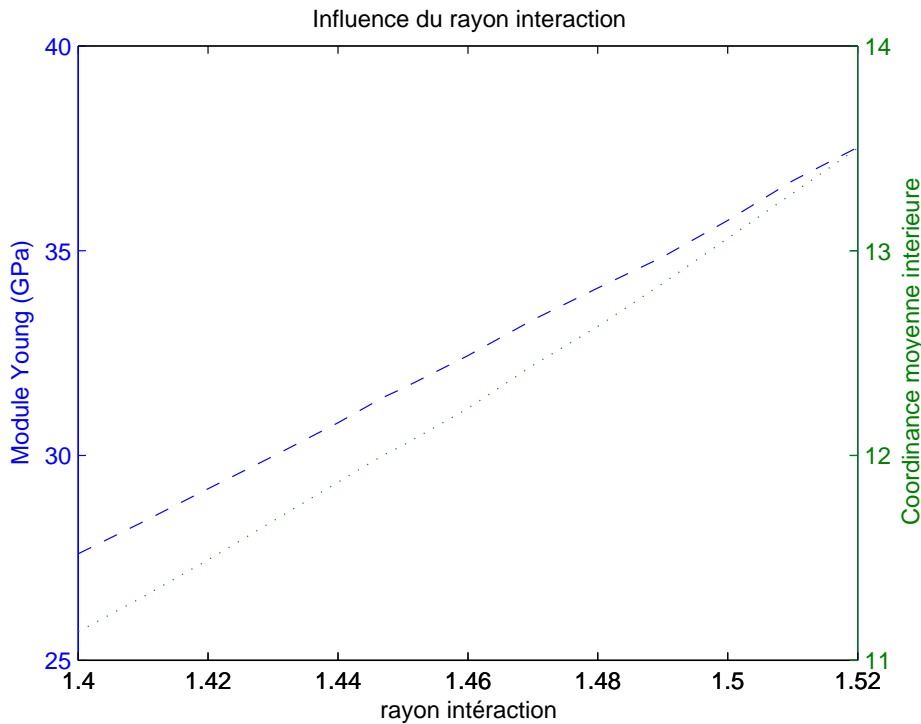


FIG. 3.12 – Évolution de la coordinence (trait pointillé) et du module d'Young en fonction du rayon d'interaction

La mesure des paramètres macroscopiques s'effectue par des essais simples élastiques uniaxiaux (Figure 3.13). Les essais quasi-statiques de traction ou compression sont obtenus en pilotant directement les éléments de l'échantillon (sans plateaux extérieurs) avec des vitesses suffisamment lentes pour considérer que l'échantillon reste dans un état proche de l'équilibre. La taille de la zone pilotée correspond à 4 fois le rayon moyen des éléments de l'échantillon. Le pilotage en déplacement tient compte de la position de l'élément piloté dans le déplacement

imposé. Les forces de traction/compression N appliquées à l'échantillon sont obtenues par sommation des réactions sur les éléments à déplacement imposé.

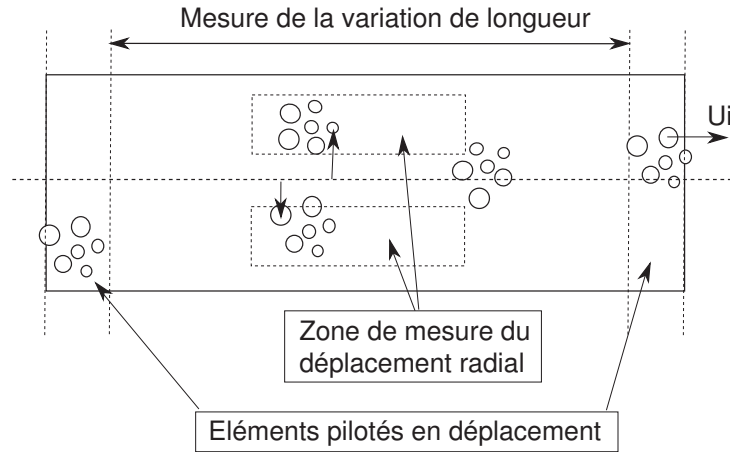


FIG. 3.13 – *Mesure des variations de l'échantillon*

La mesure des déformations longitudinales, ϵ_L , est effectuée à partir des allongements de l'échantillon sans prendre en considération les zones pilotées. La mesure des déformations transversales, ϵ_T , est difficile à obtenir avec précision, la solution retenue est d'effectuer une moyenne sur les éléments en supprimant ceux proches de l'axe moyen et proches des surfaces de l'échantillon, ces éléments présentant trop d'incertitude.

Le module d'Young et le coefficient de poisson sont obtenus classiquement avec :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_L} = \frac{N}{S\epsilon_L} \quad (3.20)$$

$$\nu = \frac{\epsilon_T}{\epsilon_L} \quad (3.21)$$

où S est la section théorique de l'échantillon.

Des essais sur différents échantillons de même taille avec des désordres différents ont montré la pertinence de cette approche (Figure 3.15).

3.1.3.5 Calcul des raideurs locales

La procédure de mesure des grandeurs macroscopiques (E, ν) étant connue, nous sommes en mesure d'étudier le comportement macroscopique du modèle en fonction des paramètres méso (K_n, K_s). L'objectif est de définir une loi de changement d'échelle permettant de piloter l'essai à partir de (E, ν).

Des études adimensionnelles [Huang, 1999] montrent que le comportement macroscopique d'un échantillon de sphères reliées par des raideurs normales et tangentielles dépend du rapport $\frac{K_s}{K_n}$. Les méthodes d'homogénéisation permettent d'obtenir des formules de passage du modèle méso à l'échelle macro dans des situations particulières. Celles-ci sont obtenues pour des échantillons ordonnés avec des éléments de taille unique [Cambou *et al.*, 1995; Liao *et al.*, 1997]. L'idée retenue dans SDEC [Donzé, 2001; Hentz, 2003] est de s'inspirer de ces formules pour définir une nouvelle relation tenant compte des diamètres variables des éléments et du désordre.

Modèle de Voigt [Chang et Liao, 1994; Cambou *et al.*, 1995] (N est le nombre de contact dans le volume)

$$\begin{cases} E &= \frac{4Nr^2}{3} K_n \frac{2+3\frac{K_s}{K_n}}{4+\frac{K_s}{K_n}} \\ \nu &= \frac{1-\frac{K_s}{K_n}}{4+\frac{K_s}{K_n}} \end{cases} \quad \nu \in [0; \frac{1}{4}] \quad (3.22)$$

Modèle de la meilleure approximation [Liao *et al.*, 1997] (N est le nombre de contact dans le volume)

$$\begin{cases} E &= \frac{20Nr^2}{3} K_n \frac{\frac{K_s}{K_n}}{2+3\frac{K_s}{K_n}} \\ \nu &= \frac{1-\frac{K_s}{K_n}}{2+3\frac{K_s}{K_n}} \end{cases} \quad \nu \in [0; \frac{1}{2}] \quad (3.23)$$

Approche SDEC [Hentz, 2003]

$$\begin{cases} E &= \frac{D_{ab}^{init}}{S_{int}} K_n \frac{\beta+\gamma\frac{K_s}{K_n}}{\alpha+\frac{K_s}{K_n}} \\ \nu &= \frac{1-\frac{K_s}{K_n}}{\alpha+\frac{K_s}{K_n}} \end{cases} \quad \nu \in [0; \frac{1}{\alpha}] \quad (3.24)$$

où D_{ab}^{init} est la distance initiale entre les éléments a et b en interaction, S_{int} est leur surface d'interaction définit par :

$$S_{int} = \pi (\min(r_a, r_b))^2 \quad (3.25)$$

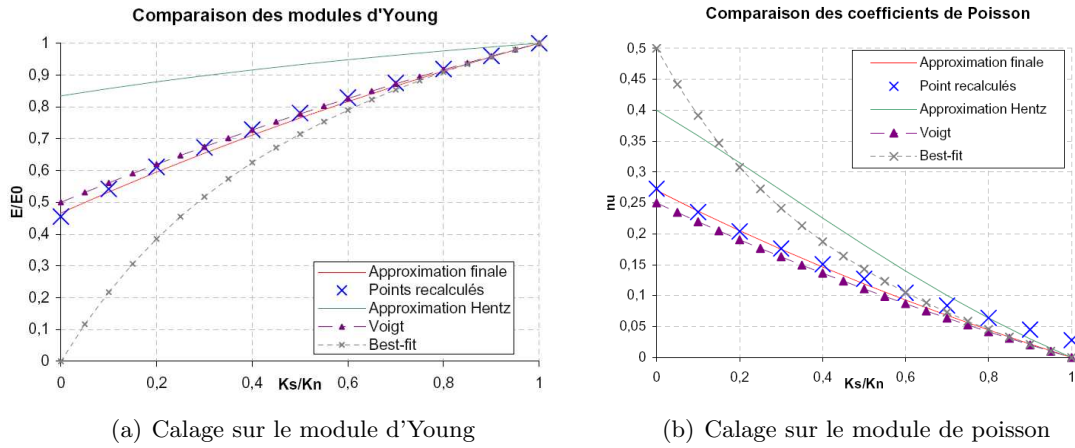
Pour caler le modèle, un module d'Young de référence E_0 obtenue lorsque $\frac{K_s}{K_n} = 1$ est défini, il permet d'avoir un rapport $\frac{E}{E_0}$ dépendant uniquement du rapport $\frac{K_s}{K_n}$. Le coefficient de poisson dépend quant à lui directement du rapport $\frac{K_s}{K_n}$. α , β et γ doivent être tels que les courbes $\frac{E}{E_0} = f(\frac{K_s}{K_n})$ et $\nu = f(\frac{K_s}{K_n})$ soient les plus proches des points obtenus sur l'échantillon numérique (Figure 3.14). La figure montre que les valeurs proposées par Hentz doivent être corrigées.

Les paramètres α , β et γ optimisés sont obtenus par itérations successives. La meilleure approximation de ces paramètres conduit aux valeurs présentées sur le tableau 3.1.

α	β	γ
3.7	2.198	3.79

TAB. 3.1 – Paramètres de calage des lois meso-macro

L'inversion de cette formule donne l'expression des raideurs entre éléments en fonction des variables macroscopiques.

FIG. 3.14 – Identification des paramètres α , β et γ

$$\begin{cases} K_n = E_{ab} \frac{S_{int}}{D_{ab}^{int}} \frac{1+\alpha}{\beta(1+\nu_{ab})+\gamma(1-\alpha\nu_{ab})} \\ K_s = K_n \frac{1-\alpha\nu_{ab}}{1+\nu_{ab}} \end{cases} \quad (3.26)$$

avec $E_{ab} = 2 \frac{E_a E_b}{E_a + E_b}$ et $\nu_{ab} = 2 \frac{\nu_a \nu_b}{\nu_a + \nu_b}$ le module d'Young et le coefficient de poisson de l'interaction $a b$, exprimés en fonction des modules d'Young et coefficient de poisson affectés à chacun des éléments de l'interaction.

Nous avons testé la fiabilité de cette loi d'identification des paramètres méso sur différents échantillons de géométries différentes (Tableau 3.2). Les résultats sont présentés sur la figure 3.15 pour différentes valeurs du module d'Young et du coefficient de poisson. Celle-ci montre des incertitudes de l'ordre de 6 % sur le module d'Young et de 8 % sur le coefficient de poisson.

Numéro éprouvette	Longueur (m)	Largeur (m)	Hauteur (m)
1 à 10	0.5	0.25	0.25
11	0.5	0.4	0.25
12	0.25	0.25	0.5
13	0.25	0.25	0.25
14	0.4	0.4	0.4
15	0.6	0.6	0.6

TAB. 3.2 – Taille des éprouvettes pour la reproductibilité du module d'Young et du coefficient de poisson

Les lois de changement d'échelle proposées que nous avons développé, permettent de s'assurer de la bonne représentation du comportement linéaire de l'échantillon modélisé par éléments discrets.

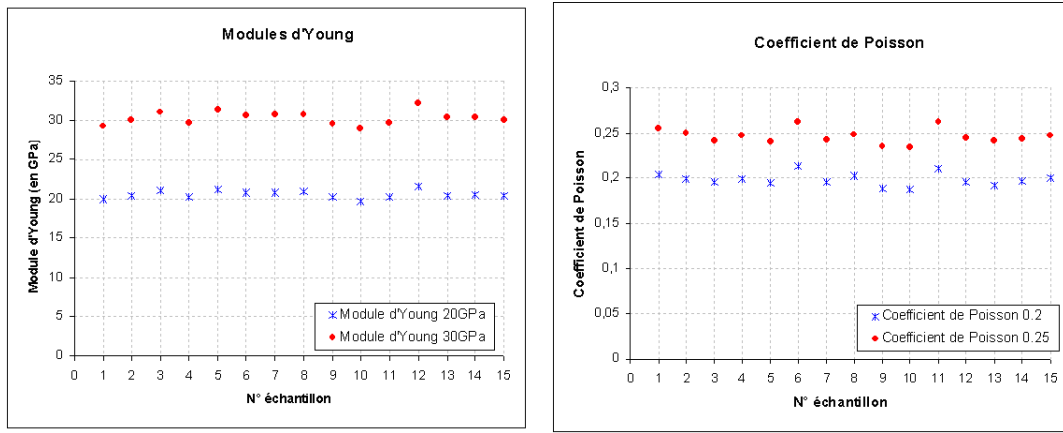


FIG. 3.15 – Répétabilité de la procédure sur différents échantillons [Rousseau et al., 2007]

3.1.3.6 Comportement non-linéaire entre deux éléments

Classiquement, le comportement non-linéaire suit le critère de Mohr-Coulomb [Curran *et al.*, 1993; Hentz, 2003; Sawamoto *et al.*, 1998; Camborde, 1999] qui s'exprime à l'aide des deux fonctions seuils $f_1(F_n, F_s)$ et $f_2(F_n, F_s)$. Ces fonctions sont définies par l'intermédiaire de trois paramètres locaux : Φ_i est l'angle de frottement interne, C_0 , la cohésion et T la résistance en traction.

$$f_1(F_n, F_s) = F_s - \tan(\Phi_i)F_n - S_{int}C_0 = 0 \quad (3.27)$$

Pour tenir compte de la rupture en traction, on définit une deuxième fonction seuil :

$$f_2(F_n, F_s) = S_{int}T - F_n = 0 \quad (3.28)$$

La combinaison de ces deux seuils définit la fonction seuil des interactions liens cohésifs.

Pour les interactions contacts, ces lois restent valables avec $T = 0$ et $C_0 = 0$ et on note Φ_c l'angle de frottement de contact (Figure 3.16).

Le comportement de la liaison dépend du critère atteint :

- Soit le critère en cisaillement est atteint : $f_1(F_n, F_s) > 0$, alors F_s est limitée à sa valeur maximale ; pour F_n donnée, $F_s = \tan(\Phi_i)F_n - S_{int}C_0$.
- Soit le critère en traction est atteint : $f_2(F_n, F_s) > 0$, alors F_n est corrigée en prenant en compte un adoucissement local [Hentz, 2003].

Le paramètre d'adoucissement ζ pilote l'atténuation de la force F_n lorsque la limite en traction est atteinte.

$$F_n = \frac{K_n}{\zeta}(D_{ab} - D^{max}) \quad \zeta > 0 \quad (3.29)$$

$$D^{max} = D^{init} + (1 + \zeta) \frac{S_{int}T}{K_n} \quad (3.30)$$

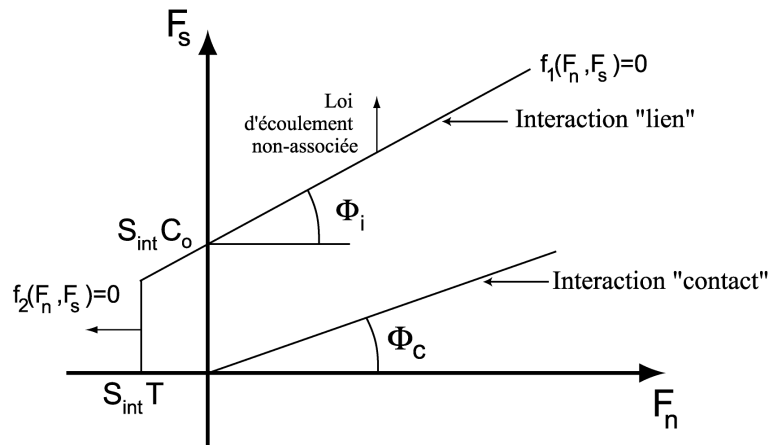


FIG. 3.16 – Forme des fonctions seuils

Un déchargement d'un lien ayant un comportement adoucissant prend en compte les déformations irréversibles.

$$F_n = -K_n(D_{ab} - D^{corrigé}) \quad (3.31)$$

$$D^{corrigé} = \left(1 + \frac{1}{\zeta}\right) D^{bifurcation} - \frac{1}{\zeta} D^{max} \quad (3.32)$$

où $D^{bifurcation}$ est la distance inter-élément atteinte avant la décharge. La liaison casse lorsque $D_{ab} > D^{max}$.

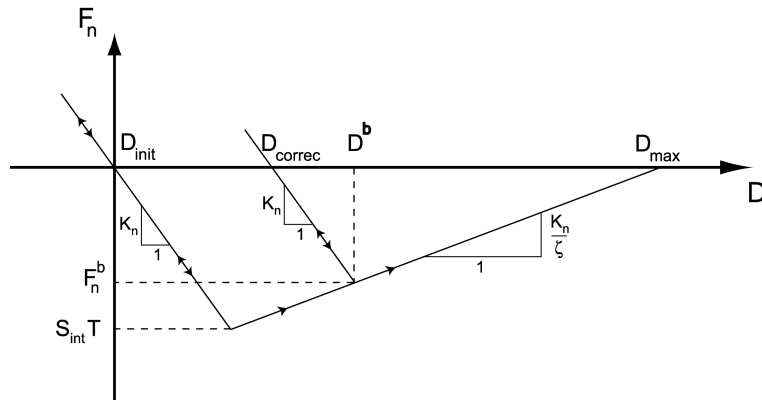


FIG. 3.17 – Adoucissement [Hentz, 2003]

La définition du comportement non-linéaire nous a permis d'introduire l'ensemble des paramètres locaux pilotant le comportement des interactions de type lien entre éléments discrets. Ces paramètres sont rappelés dans le tableau 3.3. En fonction du béton à modéliser, les paramètres locaux varient. Nous présentons un ordre de grandeur de ces variations pour un béton standard. Généralement, les angles de frottement sont de l'ordre de 15° , les rayons d'interaction sont imposés par la coordinence à respecter. T , C_0 et ζ sont obtenus par des essais de traction et de compression.

ρ	E	ν	T	C_0	ζ	Φ_i	Φ_c	γ
$kg.m^{-3}$	GPa		MPa	MPa		$^\circ$	$^\circ$	
2500	25 – 40	0.2 – 0.25	1 – 5	1 – 5	1 – 100	0 – 30	0 – 30	1 – 2

TAB. 3.3 – *Ordre de grandeur des paramètres locaux*

L'ensemble du processus d'identification sera présenté par la suite (Cf. section 3.2).

Remarques complémentaires :

– Corrections pour modéliser la plasticité des armatures

Il est clair que des modifications doivent être apportées à ce modèle pour représenter le comportement des armatures. Par exemple, l'adoucissement conduit à une localisation des déformations importantes. Appliquée ainsi sur une ligne d'élément, seule la première interaction qui atteint la limite est adoucie et conduira à la rupture de l'armature. Il est donc nécessaire de modifier cette loi de manière à rendre les déformations homogènes sur l'ensemble de l'armature. D'autre part, les armatures ont un comportement plastique. Pour répondre à ces deux remarques, nous proposons d'utiliser les mêmes paramètres que précédemment, mais de modifier la loi d'adoucissement pour que F_n ne diminue pas (Figure 3.18).

$$F_n = \frac{-K_n}{\zeta} (D_{ab} + D^{max}) \quad \zeta > 0 \quad (3.33)$$

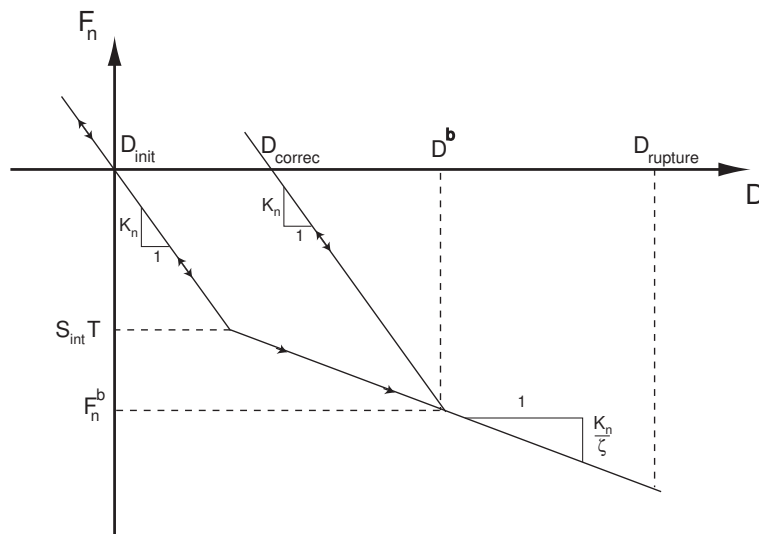
$$D^{max} = D^{init} + (1 + \zeta) \frac{S_{int} T}{K_n} \quad (3.34)$$

Si ζ est petit, alors F_n augmente fortement et si ζ est grand alors F_n devient quasiment constant égal au palier de plasticité. Dans la pratique, nous choisissons $\zeta \approx 200$.

Enfin, la rupture des éléments d'armature est pilotée en déformation sur chacune des interactions. La déformation des armatures peut atteindre plusieurs % de déformation.

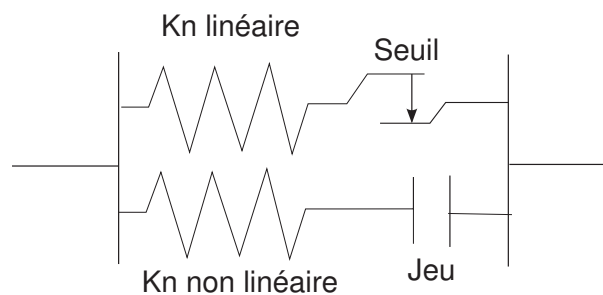
$$\epsilon_{max} = \frac{D^{rupture} - D^{init}}{D^{init}} \quad (3.35)$$

$$\text{Soit } D^{rupture} = D^{init} (\epsilon_{max} + 1) \quad (3.36)$$

FIG. 3.18 – *Plasticité des armatures*

– Comportement sous conditions extrêmes, modélisation de la compaction

Pour les sollicitations extrêmes, mettant en jeu des phénomènes de compaction, deux approches ont été proposées récemment. Shiu [Shiu *et al.*, a2] propose d'utiliser une raideur normale définie par trois pentes de plus en plus raides en fonction de l'interpénétration. Une autre approche est proposée par Philippe Marin [Daudeville *et al.*, 2007]. Le modèle rhéologique équivalent est défini sur la figure 3.19. Le principe est d'ajouter en parallèle au modèle présenté précédemment, une raideur non-linéaire. Celle-ci est associée à un jeu ne prenant effet que pour des fortes interpénétrations.

FIG. 3.19 – *Modèle rhéologique pour la compaction*

Un impact sur ouvrage en béton armé peut localement mettre en œuvre des phénomènes de compaction. Ceux-ci deviennent non négligeables pour des structures épaisses devant le diamètre du projectile. Dans un premier temps, nous ne tenons pas compte de ce phénomène dans nos applications, le but étant de valider une approche couplée entre éléments finis et éléments discrets et non d'améliorer la qualité de prédiction de l'endommagement local de la structure. D'autre part, nos applications concernent des structures plutôt minces. Les essais «Tonnello» de chute de blocs rocheux sur dalle mince permettent [Delhomme, 2005] d'estimer la part d'énergie dissipée par compaction. Celle-ci est de l'ordre de 5% de l'énergie incidente.

– Affectation des masses aux éléments discrets

Les masses des éléments sont initialement obtenues à partir du produit de la masse volumique avec le volume des sphères. Elles sont ensuite corrigées pour tenir compte de la porosité du modèle. Notons c , la compacité du modèle, la masse de l'élément i est calculée de la manière suivante :

$$m_i = \frac{\rho}{c} V_i = \frac{\rho}{c} \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (3.37)$$

3.1.4 Stabilité du schéma d'intégration

La condition de convergence d'un schéma explicite dépend du pas de temps Δt entre chaque itération. Celui-ci est calculé avant chaque itération. La condition de stabilité s'écrit dans le cas général [Bathe et Wilson, 1976; Geradin et Dixen, 1994] par la condition de Courant [Courant *et al.*, 1928] :

$$\Delta t_{critique} < \frac{2}{\omega} \quad (3.38)$$

où ω est la plus grande pulsation propre du système. Celle-ci est cependant difficile à mesurer pour un modèle aux éléments discrets explicite (pas d'assemblage des matrices de rigidité et de masse). La solution retenue dans SDEC est de calculer une pulsation équivalente par éléments discrets en prenant en compte toutes les interactions auxquelles ils sont soumis.

$$\Delta t_{critique} < \frac{1}{p} \max_{\text{éléments}} \left(\sqrt{\frac{m}{K_{eq}}} \right) \quad (3.39)$$

où m est la masse et K_{eq} la raideur équivalente obtenue par projection des raideurs des liens de l'élément dans le repère général. p est un paramètre de pondération pour corriger les approximations ($p < 1$).

3.1.5 Faire du quasi-statique avec de l'explicite

Un code explicite est *a priori* utilisé pour effectuer des calculs en régime transitoire. Il permet d'avoir un schéma d'intégration simple, ne nécessitant pas d'assemblage de matrices, conduisant à une résolution efficace. La stabilité dépend du pas de temps qui doit rester très faible pour assurer la convergence. Son utilisation se justifie complètement en dynamique rapide. En revanche, pour effectuer des calculs statiques, le nombre de pas de temps devient prohibitif et leur utilisation n'est généralement pas indiquée.

Toutefois, afin de régler les paramètres de notre modèle en vue d'effectuer des calculs dynamiques, il est nécessaire d'effectuer des essais simples en quasi-statique. Il n'est pas possible

pour des raisons de temps de calcul d'effectuer des simulations à des vitesses de chargement de l'ordre de grandeur de celles utilisées lors des expérimentations⁶, le pas de temps étant imposé par le modèle quel que soit le chargement. Il faut donc avoir recours à un artifice numérique permettant d'amortir les effets dynamiques afin de pouvoir considérer que le modèle est à chaque itération dans une configuration proche de l'équilibre. Deux possibilités ont été envisagées, la première est d'utiliser classiquement un paramètre d'amortissement visqueux, la deuxième est l'utilisation d'un amortissement local en effort (ou amortissement dynamique), cette méthode a été proposée par Cundall [Cundall, 1997].

– **Amortissement visqueux global**[Cundall et Strack, 1983]

La source de dissipation est obtenue en atténuant la vitesse de chaque élément. Cela revient à placer un amortisseur par rapport au repère global de la structure. Cette solution est bien adaptée dans le cas général mais est à proscrire dans le cas de mouvement de corps rigide ou d'écoulement à régime permanent. L'amortissement critique de ce type d'approche dépend des caractéristiques des éléments (diamètre, masse, raideurs).

– **Amortissement visqueux local**[Iwashita et Oda, 2000; D'addetta *et al.*, 2001]

La source de dissipation est obtenue en atténuant la vitesse relative entre deux éléments en interaction. Cela revient à placer un amortisseur en parallèle au ressort normal. Cette solution est bien adaptée à condition que l'amortissement représente la physique du comportement inter-granulaire, ce qui est difficile et pas très approprié pour les matériaux cohésifs. C'est pourtant le seul qui peut avoir un sens physique.

– **Amortissement type Cundall** [Cundall, 1997]

Il s'agit d'un amortissement non-visqueux s'appliquant à chaque élément. Il est défini par l'ajout d'un torseur amortissement, résultant du torseur équivalent à l'ensemble des actions mécaniques s'appliquant sur l'élément. Le signe des éléments du torseur est fonction du signe des vitesses et vitesses de rotation au pas de temps considéré. Il joue un rôle sur les phénomènes dynamiques et ne modifie théoriquement pas la solution finale, tout en étant indépendant des paramètres du modèle. La résultante et le moment au centre de la sphère du torseur amortissement s'expriment par :

$$F_i^a = -\lambda^a |F_i| \text{sign}(\dot{x}_i) \quad (3.40)$$

$$C_i^a = -\lambda^a |M_i| \text{sign}(\dot{\omega}_i) \quad (3.41)$$

avec $\lambda^a \in [0,1]$ sans dimension et *sign* renvoyant le signe de la variable.

Pour les différents cas d'amortissement traités (visqueux global et dynamique), il s'agira de vérifier que l'on atteint bien l'état d'équilibre statique qui est unique. Il est également nécessaire de contrôler que lors de la simulation la somme des efforts extérieurs est nulle, ce qui assurera le caractère quasi-statique de l'essai. On définit pour cela le coefficient d'équilibre $coef_{eq}$ qui est l'écart entre les efforts qui s'appliquent à chaque extrémité de l'échantillon (Eq. 3.42). L'échantillon a évolué dans des états de sollicitation quasi-statique si au cours de la simulations $coef_{eq}$ est resté proche de 0.

$$coef_{eq} = 100 \frac{F_{top} + F_{base}}{F_{top}} \quad (3.42)$$

6. Par exemple, la phase de chargement des essais «Giga» [Gabet, 2006] durent environ 10 minutes pour une vitesse de chargement de 0.015 mm.s^{-1} à comparer à un pas de temps de l'ordre de 10^{-6} s !!

D'autre part, contrairement à l'amortissement dynamique de Cundall, l'amortissement visqueux peut avoir une influence sur le pas de temps du système. En effet, si on néglige l'effet de la fonction *sign* pour le troisième type d'amortissement, il consiste uniquement à l'ajout d'une force et n'aura donc pas d'effet sur la solution libre de l'équation différentielle du second ordre $m \ddot{X} + c \dot{X} + k X = F$ qui gère le pas de temps. Ce n'est pas le cas de l'amortissement visqueux qui dépend de la vitesse et donc des temps caractéristiques du modèle.

3.1.6 Pas de temps critique en présence d'amortissement visqueux

Pour décrire l'évolution du pas de temps avec l'amortissement visqueux, intéressons-nous à l'équation du mouvement $1D$: $m \ddot{X} + c \dot{X} + k X = 0$, pour trois schémas d'intégration qui se différencient par le calcul de la vitesse. Le premier, le plus simple à implanter et le plus économique en terme de résolution, calcule la vitesse entre les pas de temps $t - \Delta t$ et t :

$$\ddot{X}(t) = \frac{X(t+\Delta t) - 2X(t) + X(t-\Delta t)}{\Delta t^2} \quad (3.43)$$

$$\dot{X}(t) = \frac{X(t) - X(t-\Delta t)}{\Delta t} \quad (3.44)$$

Avec cette discrétisation, l'équation du mouvement devient :

$$m X(t + \Delta t) + (k \Delta t^2 + c \Delta t - 2 m)X(t) + (m - c \Delta t)X(t - \Delta t) = 0 \quad (3.45)$$

D'après les travaux de [Celia et Gray, 1992; Schwartz, 2003], pour une discrétisation temporelle du type $a X(t + \Delta t) + b X(t) + c X(t - \Delta t) = 0$, le schéma est stable si les racines de l'équation caractéristique sont de module inférieur à 1. Nous avons appliqué ce raisonnement aux différents schémas d'intégration proposés.

Ainsi après calcul, ce schéma conduit au pas de temps Δt suivant :

$$\Delta t = \frac{1}{k}(-c + \sqrt{c^2 + 4 k m}) \quad (3.46)$$

Le second schéma est le schéma centré :

$$\ddot{X}(t) = \frac{X(t+\Delta t) - 2X(t) + X(t-\Delta t)}{\Delta t^2} \quad (3.47)$$

$$\dot{X}(t) = \frac{X(t+\Delta t) - X(t-\Delta t)}{2\Delta t} \quad (3.48)$$

Cette discrétisation temporelle conduit à :

$$(m + c \frac{\Delta t}{2}) X(t + \Delta t) + (k \Delta t^2 - 2 m)X(t) + (m - c \frac{\Delta t}{2})X(t - \Delta t) = 0 \quad (3.49)$$

Les calculs des racines de l'équation caractéristique mènent au pas de temps critique :

$$\Delta t = \frac{1}{2k}(c + \sqrt{c^2 + 8 k m}) \quad (3.50)$$

Le dernier schéma est le schéma décentré à droite :

$$\ddot{X} = \frac{X(t+\Delta t) - 2X(t) + X(t-\Delta t)}{\Delta t^2} \quad (3.51)$$

$$\dot{X} = \frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t} \quad (3.52)$$

Cette discrétisation temporelle conduit à :

$$(m + c \Delta t) X(t + \Delta t) + (k \Delta t^2 - c \Delta t - 2m)X(t) + (m)X(t - \Delta t) = 0 \quad (3.53)$$

Par le calcul, on obtient alors le pas de temps critique :

$$\Delta t = \frac{1}{k} (c + \sqrt{c^2 + 4km}) \quad (3.54)$$

La courbe 3.20 montre l'évolution du pas de temps critique en fonction de l'amortissement pour chacun des schémas d'intégration temporelle. Le pas de temps critique de chacun de ces schémas évolue avec l'amortissement visqueux. En particulier, le schéma qui nous intéresse, décentré à gauche pour rester explicite⁷, a un pas de temps décroissant avec l'amortissement. Ce type d'amortissement dégrade le pas de temps. Le calcul du pas temps implémenté ne prenant pas en compte la valeur de l'amortissement utilisée, il est nécessaire d'utiliser un facteur de réduction du pas de temps critique.

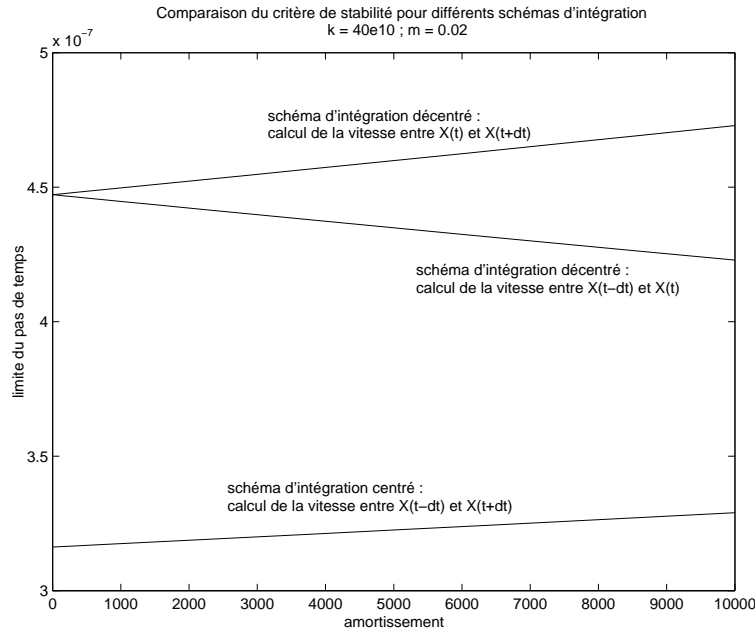


FIG. 3.20 – Évolution du pas de temps critique en fonction du schéma et de la valeur de l'amortissement

7. Pour le calcul de $d(t + \Delta t)$, le «leap-frog» utilise la valeur de la vitesse à $t + \frac{\Delta t}{2}$

3.2 Identification des paramètres locaux du modèle

3.2.1 Influence du type d'amortissement sur la réponse quasi-statique

Nous avons présenté différentes solutions d'amortissement pour valider l'identification par des essais quasi-statiques. Par la suite, nous utilisons l'échantillon généré précédemment (Figure 3.6).

La figure 3.21 montre la réponse en déplacement d'un élément discret pour un chargement piloté en déplacement et présenté par la courbe «déplacement piloté». Les trois autres courbes correspondent aux différents modèles d'amortissement : amortissement visqueux global, amortissement dynamique, amortissement combinant amortissement visqueux et amortissement dynamique. La figure (b) montre que la réponse statique du modèle est identique. Ainsi quelle que soit la méthode d'amortissement choisie les résultats statiques sont fiables et cela même lors de l'utilisation de l'amortissement dynamique qui ne comporte que peu de sens physique. On remarque aussi que le coefficient d'équilibre (Eq. 3.42) tend dans les trois situations vers 0, donc vers une sollicitation quasi-statique.

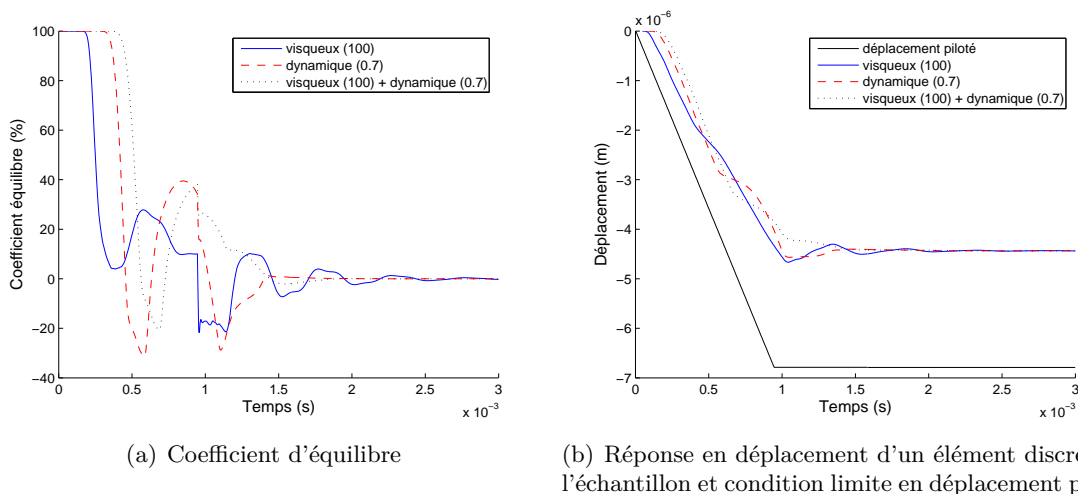


FIG. 3.21 – Influence du type d'amortissement

Il est clair que d'autres paramètres tels que la vitesse de déplacement, la taille de l'échantillon ou les paramètres matériaux jouent également un rôle important sur le coefficient d'équilibre et la réponse d'une simulation. Hentz [Hentz, 2003] présente de manière détaillée l'influence de ces différents paramètres. Pour ce qui nous intéresse, nous retiendrons que le coefficient d'équilibre est un moyen de vérifier si l'essai peut être considéré comme quasi-statique ou non. Le coefficient d'équilibre doit rester faible (inférieur à 10%) durant la simulation.

3.2.2 Procédure d'identification des paramètres du modèle

Soit un modèle généré par l'une des méthodes présentées précédemment. La procédure d'identification des paramètres du modèle en fonction des données expérimentales est décrite sur le tableau 3.4.

Cette procédure est appliquée à la génération et à l'identification des échantillons de béton pour les essais «GIGA» développés au laboratoire. La méthode d'identification permet de reproduire de manière satisfaisante le comportement uniaxial en compression (Figure 3.22) et en traction (Figure 3.23) [Rousseau *et al.*, 2007]. Chacune des courbes ci-dessous compare l'évolution des déformations axiales et radiales (numériques et expérimentales) en fonction de la contrainte axiale.

- 1 Affectation des paramètres ρ , E , ν du modèle aux valeurs expérimentales.
Paramètres fixés : ρ , E , ν
- 2 Affectation des rayons d'interaction des différents matériaux pour obtenir une coordinence interne égale à 12 sur l'ensemble du modèle.
Paramètre fixé : γ
- 3 Découpe d'un échantillon représentatif (élancement environ 2, 4000 éléments)
- 4 Simulation d'un essai de traction quasi-statique uniaxial. Par itération, on détermine les valeurs de T et ζ afin de représenter la limite à la traction σ_t et l'énergie de rupture G_f .
Paramètres fixés : T , ζ
- 5 Simulation d'un essai de compression quasi-statique uniaxial. Par itération, on détermine les valeurs de C_0 et Φ_i afin de représenter la limite à la compression σ_c et l'allure de la courbe.
Paramètres fixés : C_0 , Φ_i

TAB. 3.4 – Procédure d'identification des paramètres locaux

3.2.3 Utilisation des paramètres statiques pour des applications dynamiques

Bien que la procédure d'identification des paramètres du modèle soit effectuée sur des simulations quasi-statiques, les applications visées sont des applications d'impact, donc de dynamique. On sait également que les expérimentations sur des échantillons de béton ont montré une dépendance de la résistance en traction et en compression au taux de déformation [Prat *et al.*, 1997]. La figure 2.8 du chapitre précédent montre que pour des vitesses de déformations importantes ($\dot{\epsilon} > 10^0 \text{ s}^{-1}$) les résistances varient de manière non négligeable.

Cependant dans le cas de choc mou, les taux de déformation peuvent être estimés de l'ordre de 10^{-1} s^{-1} dans le cas d'un avion militaire et sont plus faibles pour un avion civil [Koechlin, 2007]. Dans ces conditions, l'erreur sur la limite à la rupture en compression est d'environ 25 %, en revanche elle est sous estimée en traction (environ 50 %). Enfin, Donzé et Hentz montrent par des simulations aux éléments discrets d'essais aux barres de Hopkinson que ces phénomènes semblent être des effets intrinsèques au matériau [Donzé *et al.*, 1999; Hentz *et al.*, 2004] et que des essais simulés aux barres de Hopkinson par la méthode aux éléments discrets modélise naturellement l'augmentation de la résistance en compression en fonction du taux de déformation.

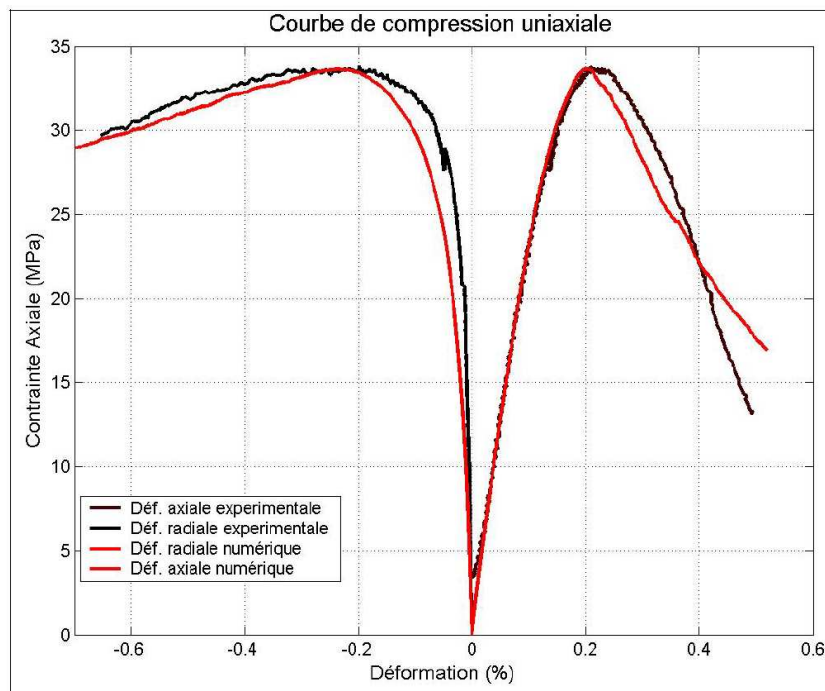


FIG. 3.22 – Courbe contrainte/déformation pour un essai de compression quasi-statique sur le béton Giga

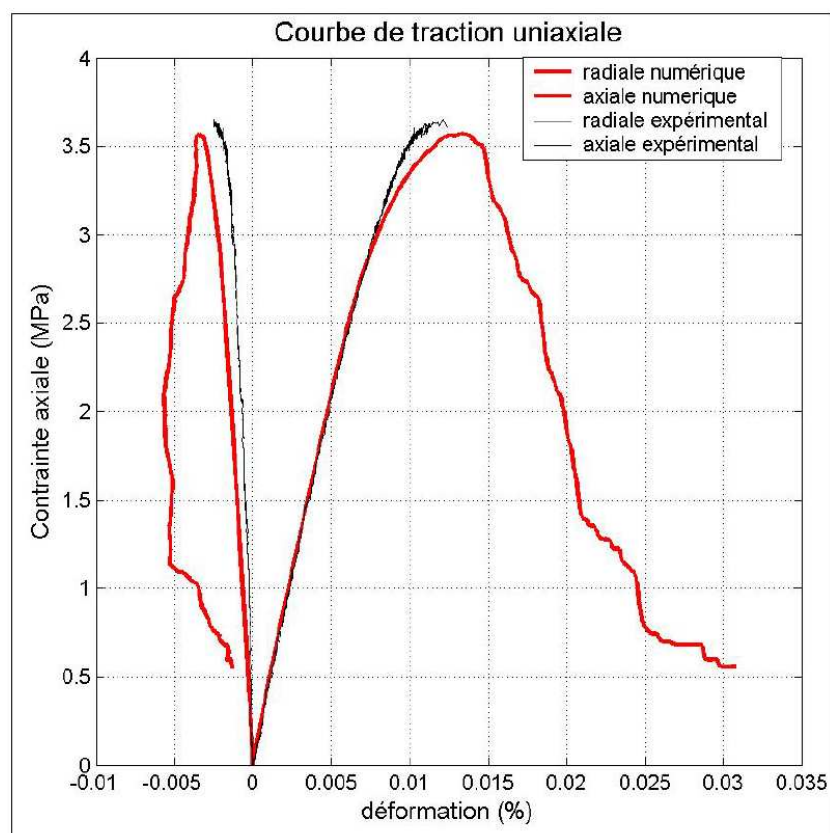


FIG. 3.23 – Courbe contrainte/déformation pour un essai de traction quasi-statique sur le béton Giga

Les chapitres précédents ont permis de discuter des avantages que peut apporter une méthode couplée entre une approche discontinue et une approche continue. Les principes généraux de la méthode aux éléments discrets étant présentés, nous proposons maintenant de rentrer dans les détails de la méthode de couplage implémentée. Le choix retenu est celui d'une approche multi-domaine, utilisant des éléments discrets au voisinage de l'impact, et des éléments finis loin de l'impact. La transition entre les deux domaines est réalisée par une zone de recouvrement.

4.1 Quelques mots sur la méthode continue utilisée

Ce travail s'inscrit dans le développement d'outils numériques pour la simulation des structures. Le point essentiel est de vérifier la faisabilité d'une approche couplée, les critères de validité étant de conserver la qualité de la prédiction de l'état d'endommagement du modèle aux éléments discrets, tout en rendant possible le calcul sur un exemple de structure de grande taille. Cette étude de faisabilité est réalisée avec des éléments finis 3D linéaires. L'utilisation d'éléments linéaires est une hypothèse forte provisoire. On pourra vérifier *a posteriori* si elle est respectée. Il s'agit d'une première approche, d'autres travaux sont actuellement en cours pour utiliser des éléments finis non-linéaires et des éléments finis de type coque.

Les éléments finis utilisés sont des éléments volumiques à comportement matériel linéaire et soumis à des perturbations supposées rester dans le domaine des petites perturbations. Afin de les rendre performants pour un problème explicite, les masses sont réparties aux noeuds et les matrices raideurs locales sont stockées. Les approches sous-intégrées (matrices raideurs réduites) implémentées produisent des modes en sablier (Houglass) et ne sont donc pas utilisées.

La taille de la discrétisation des éléments finis est supérieure à la taille de la discrétisation

des éléments discrets. Plus elle est grande, plus le gain de temps est important. Avec la méthode de couplage implémentée, la discrétisation éléments finis doit assurer que le nombre d'éléments discrets dans la zone de couplage reste supérieur à celui des nœuds éléments finis. La taille des éléments finis reste bien inférieure à la taille du volume élémentaire représentatif du modèle discret. Le critère pilotant la taille maximale des éléments est lié à la gamme des fréquences que l'on souhaite représenter.

Les paramètres matériaux utilisés dans le modèle aux éléments finis sont ceux provenant des essais de compression simple réalisés avec des éléments discrets (cf. chapitre 3). L'algorithme décrivant la méthode des éléments finis implémentée est détaillée sur la table 4.1.

- 1 Lire le fichier de maillage
 - Construire la table des éléments $elmt(j,i)$ (élément j , ddl i)
- 2 Initialisation et conditions initiales
 - Déterminer le pas de temps
 - Condition de Courant, Friedrichs and Lewy (1928)

$$\Delta t = \frac{2}{\omega_{max}} \leq \min \frac{longueur_{element}}{célérité_{element}}$$
 - Récupérer les données $x(0)$ et $\dot{x}(0)$
 - Boucle sur tous les ddl
 - Calcul de $x(-\Delta t) = x(0) - \Delta t \dot{x}(0)$
 - Calcul de \bar{K}, \bar{M}, C
 - $U_0 = 0$ et $U_1 = x(0) - x(-\Delta t)$
- 3 Calcul du second membre
 - Récupérer les forces
 - Initialisation

$$fe[12] = 0, U_1 = X_{actuelle} - X_{initiale}, U_0 = X_{précédente} - X_{initiale}$$
 - Boucle sur les éléments j
 - $fe = KeUe_1$
 - Boucle sur les ddl i de l'élément j

$$F(elmt(j,i))_+ = -fe(i) + \frac{2}{\Delta t^2} U_1(elmt(j,i)) - (\frac{M}{\Delta t^2} + \frac{C}{2\Delta t}) U_0(elmt(j,i))$$
- 4 Mise à jour des forces
 - Boucle sur les conditions aux limites en forces
- 5 Calcul des déplacements au pas de temps suivant
 - Boucle sur les éléments j
 - $U_2 = 0$
 - Boucle sur les ddl i de l'élément j

$$U_2(elmt(j,i))_+ = (\frac{M}{\Delta t^2} + \frac{C}{2\Delta t})^{-1} F(elmt(j,i))$$
- 6 Mise à jour des déplacements
 - $X_{suivante} = U_2 + X_{initiale}$
 - Boucle sur les conditions aux limites en déplacement
 - $X_{précédente} = X_{actuelle}$
 - $X_{actuelle} = X_{suivante}$
- 8 Tant que $itération \leq nombre_{itération}$
 - $Itération = itération + 1$
 - Retour à l'étape 3

TAB. 4.1 – Schéma d'intégration explicite implémenté pour les éléments finis

4.2 Méthode du couplage

4.2.1 Description du modèle

La méthode par recouvrement permet d'effectuer une pondération de l'énergie contenue dans la partie ED et EF afin de conserver sur l'ensemble du domaine des propriétés matérielles constantes. Pour faire cela, l'énergie totale H (Hamiltonien) du système est une combinaison linéaire de l'énergie totale discrète H_{ED} et de l'énergie totale continue H_{EF} . Des paramètres de recouvrement, α et β , sont introduits respectivement sur les nœuds EF et les centres des ED. Ils varient linéairement entre 0 et 1 le long du recouvrement. Ces paramètres de recouvrement sont constants dans l'épaisseur. Ces paramètres sont équivalents à ceux utilisés par Xiao [Xiao et Belytschko, 2004]. Ils permettent d'assurer de façon continue la partition énergétique entre les domaines modélisés par éléments finis et par éléments discrets. La figure 4.1 présente un zoom sur la transition entre les deux approches et définit les paramètres de recouvrement α et β .

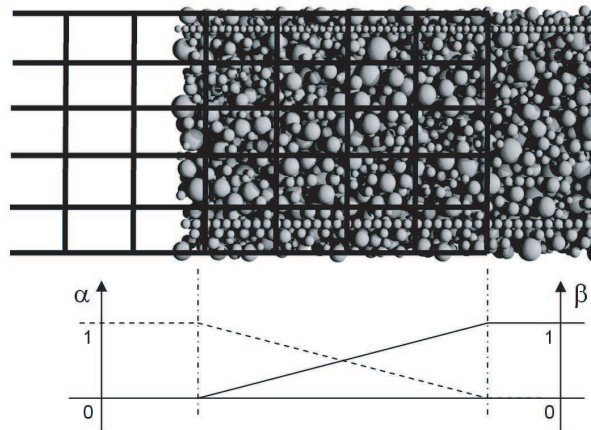


FIG. 4.1 – Zone de recouvrement et paramètres de recouvrement

La taille de la zone de recouvrement est définie par le paramètre n_r , le nombre de couches d'éléments finis de recouvrement à utiliser. Pour un maillage donné, plus n_r est grand plus la zone de recouvrement est grande. La figure 4.1 montre la variation des paramètres de recouvrement sur un exemple où $n_r = 4$. Les éléments discrets de la cinquième couche ne sont pas utilisés ($\beta = 0$).

L'énergie totale du système H s'écrit :

$$H = \alpha H_{EF} + \beta H_{ED} \quad (4.1)$$

$$H_{EF} = E_{cEF} + E_{pEF} \quad (4.2)$$

$$H_{ED} = E_{cED} + E_{pED} \quad (4.3)$$

E_c et E_p sont respectivement l'énergie cinétique et l'énergie potentielle des sous parties éléments discrets ou éléments finis. H est une fonction des degrés de liberté du modèle. Ceux-ci sont différents entre les deux approches : pour les éléments finis, trois déplacements, et pour

les éléments discrets, les trois déplacements et les trois rotations. H est donc défini par les déplacements des éléments finis et des éléments discrets et par les rotations discrètes. Contrairement au couplage type «Molecular Dynamics» avec des éléments finis [Xiao et Belytschko, 2004], notre modèle de couplage doit tenir compte des rotations des éléments discrets. Aussi les rotations des éléments discrets de la zone de recouvrement n'ont pas de raison de rester libres. Il est donc nécessaire de déterminer une équivalence aux rotations discrètes dans les degrés de liberté de l'approche continue afin de pouvoir écrire des relations de couplage fiables.

4.2.2 Prise en compte des rotations discrètes

Le modèle discret a trois degrés de liberté de plus par nœud que le modèle éléments finis. Si les déplacements des éléments discrets sont naturellement liés aux déplacements des éléments finis, il est également nécessaire de coupler les rotations discrètes aux degrés de liberté des éléments finis. Dans l'hypothèse de petites perturbations (HPP), les expérimentations en 2D [Calvetti *et al.*, 1997] et les simulations montrent que les rotations des éléments discrets correspondent au vecteur rotation des éléments finis (figure 4.2), égal à la partie antisymétrique du gradient de la transformation. La figure 4.2 est obtenue lors la modélisation en 2D d'un essai de flexion parabolique. Ce type de sollicitation conduit à une partie antisymétrique linéaire le long de la ligne moyenne. La figure compare la partie antisymétrique aux rotations des éléments discrets, elle confirme leur équivalence.

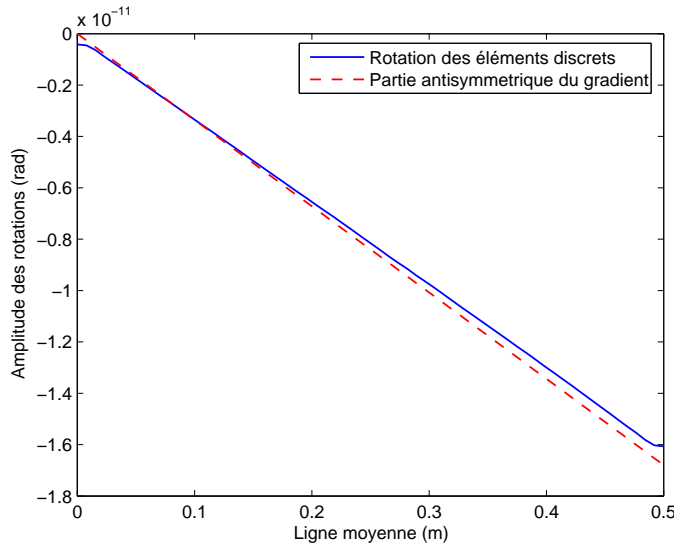


FIG. 4.2 – Simulation 2D du comportement en rotation des éléments discrets

Pour une approche continue en petites perturbations, le déplacement d'un point N dans le voisinage de M s'exprime par :

$$\vec{U}(N) \cong \vec{U}(M) + \bar{\epsilon}(M) \overrightarrow{MN} + \bar{\omega}(M) \overrightarrow{MN} \quad (4.4)$$

$$\text{Avec } \bar{\omega}(M) = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{grad}}(\vec{U}(M)) - \overline{\text{grad}}^T(\vec{U}(M)) \right) \quad (4.5)$$

Le déplacement s'écrit comme la somme de la translation de corps rigide, de la partie due à la déformation et à la rotation. Introduisons le vecteur de rotation $\vec{\Omega}$ qui est l'équivalent des rotations discrètes pour le modèle continu :

$$\vec{\Omega}(M) \wedge \overrightarrow{MN} = \overline{\omega}(M) \overrightarrow{MN} \quad (4.6)$$

Ayant ainsi établi un équivalent aux rotations des éléments discrets dans le modèle éléments finis, nous sommes en mesure d'exprimer les relations de couplage en rotation, Eq. 4.8 et 4.10.

4.2.3 Équations locales

Dans la zone de recouvrement, les degrés de liberté des éléments discrets sont reliés aux degrés de liberté des éléments finis par les relations cinématiques de couplage, définies par les équations (4.7) et (4.8). Ces relations linéaires peuvent être exprimées au niveau des nœuds des éléments discrets sous la forme (4.9) et (4.10).

$$\vec{dr} = \overline{k} \cdot \vec{ur} \quad (4.7)$$

$$\vec{\omega r} = \overline{h} \cdot \vec{ur} \quad (4.8)$$

$$\forall j \leq n_{dr} \quad \vec{d}_j = \sum_{i=1}^{n_{fr}} \overline{k_{ji}} \vec{u}_i \quad (4.9)$$

$$\forall j \leq n_{dr} \quad \vec{\omega}_j = \sum_{i=1}^{n_{fr}} \overline{h_{ji}} \vec{u}_i \quad (4.10)$$

Les matrices de couplage \overline{k} et \overline{h} sont structurées en sous-matrices $\overline{k_{ji}}$, $\overline{h_{ji}}$ relatives au nœud de l'élément fini i et à l'élément discret j (Figure 4.3).

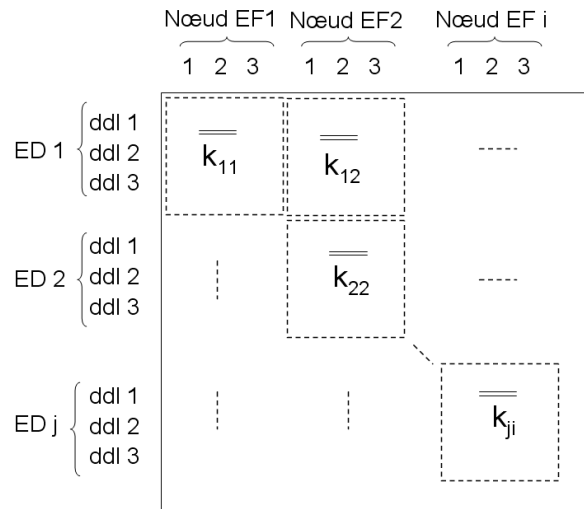


FIG. 4.3 – Organisation des matrices de couplage en sous-matrices

Plusieurs méthodes de couplage sont proposées dans la littérature.

- Ben Dhia [BenDhia et Rateau, 2004] propose avec la méthode «Arlequin», une formulation variationnelle du couplage. Les différences sur chacun des sous domaines sont projetées sur l'espace des fonctions de forme du modèle grossier. La formulation est définie en fonction des déplacements et des déformations de chacun des domaines. L'adaptation de la formulation à la méthode des éléments discrets (Champs de déplacement discontinu, pas de champs de déformation) n'est pas triviale. Nous pouvons proposer de l'approcher en remplaçant les intégrales de la formulation par des sommes discrètes et en projetant que les différences entre les déplacements (et non pas celles entre les déformations difficiles à expliciter en discret). Nous avons programmé cette version en 1D, mais les résultats obtenus n'ont pas été améliorés.
- Une autre approche proposée par Xiao [Xiao et Belytschko, 2004] est quant à elle adaptée aux approches discrètes car elle permet de coupler la dynamique moléculaire avec une approche continue. En revanche, elle est développée pour une échelle atomique et elle ne tient pas compte des rotations du domaine discret. Ils proposent de minimiser l'énergie totale sur chacun des sous-domaines avec prise en compte des équations de couplage avec des multiplicateurs de Lagrange.

La solution retenue pour notre approche est également de minimiser l'énergie totale H sur chaque domaine et d'introduire les relations de couplage en déplacement et rotation par l'utilisation de multiplicateurs de Lagrange. L'utilisation de multiplicateurs de Lagrange est très rigoureuse. Les relations de couplage seront vérifiées à chaque itération. Les multiplicateurs de Lagrange relatifs aux équations de couplage des déplacements sont définis par le vecteur $\vec{\lambda}^d$. Ceux relatifs aux équations de couplage des rotations sont définis par $\vec{\lambda}^\omega$. Ainsi la solution est obtenue en minimisant l'expression (4.11). Cette minimisation conduit aux équations locales.

$$Hg\left(\vec{d}, \vec{\omega}, \vec{u}, \vec{\lambda}^d, \vec{\lambda}^\omega\right) = H\left(\vec{d}, \vec{\omega}, \vec{u}\right) + \vec{\lambda}^d \left(\vec{d}\vec{r} - \bar{k} \vec{u}\vec{r}\right) + \vec{\lambda}^\omega \left(\vec{\omega}\vec{r} - \bar{h} \vec{u}\vec{r}\right) \quad (4.11)$$

- équations locales d'un nœud ED j :

$$m_j \vec{d}_j = \vec{F}_j^{tot} \quad (4.12)$$

$$J_j \vec{\omega}_j = \vec{C}_j^{tot} \quad (4.13)$$

- équations locales d'un nœud EF i :

$$M_i \vec{u}_i = \vec{F}g_i \quad (4.14)$$

- équations locales dans la zone de recouvrement :

$$\forall j \leq n_{dr} \quad \beta_j m_j \vec{d}_j = \beta_j \vec{F}_j^{tot} + \vec{\lambda}_j^d \quad (4.15)$$

$$\forall j \leq n_{dr} \quad \beta_j J_j \vec{\omega}_j = \beta_j \vec{C}_j^{tot} + \vec{\lambda}_j^\omega \quad (4.16)$$

$$\forall i \leq n_{fr} \quad \alpha_i M_i \vec{u}_i = \alpha_i \vec{F}g_i - \sum_{l=1}^{n_{dr}} \bar{k}_{li}^T \vec{\lambda}_l^d - \sum_{l=1}^{n_{dr}} \bar{h}_{li}^T \vec{\lambda}_l^\omega \quad (4.17)$$

4.2.4 Algorithme

La discrétisation en temps est réalisée par la méthode des différences finies centrées.

$$U(t + \Delta t) = U(t) + \Delta t \dot{U}(t + \frac{\Delta t}{2}) \quad (4.18)$$

$$\dot{U}(t + \frac{\Delta t}{2}) = \dot{U}(t - \frac{\Delta t}{2}) + \Delta t \ddot{U}(t) \quad (4.19)$$

$$U(t + \Delta t) = 2U(t) - U(t - \Delta t) + \Delta t^2 \ddot{U}(t) \quad (4.20)$$

Les degrés de liberté au pas de temps $n + 1$ s'expriment donc par les expressions :

$$\vec{d}_j(t + \Delta t) = 2 \vec{d}_j(t) - \vec{d}_j(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{m_j} \left(\overrightarrow{F}_j^{tot}(t) + \frac{\vec{\lambda}_j^d(t)}{\beta_j} \right) \quad (4.21)$$

$$\vec{\omega}_j(t + \Delta t) = 2 \vec{\omega}_j(t) - \vec{\omega}_j(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{J_j} \left(\overrightarrow{C}_j^{tot}(t) + \frac{\vec{\lambda}_j^\omega(t)}{\beta_j} \right) \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \vec{u}_i(t + \Delta t) &= 2 \vec{u}_i(t) - \vec{u}_i(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{M_i} \overrightarrow{F}g_i(t) - \\ &\frac{\Delta t^2}{\alpha_i M_i} \left(\sum_{l=1}^{n_{dr}} \overline{k}_{li}^T \vec{\lambda}_l^d(t) + \sum_{l=1}^{n_{dr}} \overline{h}_{li}^T \vec{\lambda}_l^\omega(t) \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

Les multiplicateurs à t n'étant pas connus, les équations précédentes ne sont pas suffisantes pour la résolution. Pour y parvenir, on utilise les conditions de couplage à $t + \Delta t$:

$$\vec{d}_j(t + \Delta t) - \sum_{i=1}^{n_{fr}} \overline{k}_{ji} \vec{u}_i(t + \Delta t) = 0 \quad (4.24)$$

$$\vec{\omega}_j(t + \Delta t) - \sum_{i=1}^{n_{fr}} \overline{h}_{ji} \vec{u}_i(t + \Delta t) = 0 \quad (4.25)$$

En développant les expressions précédentes avec les relations 4.21, 4.22 et 4.23, on obtient une relation supplémentaire sur les multiplicateurs de Lagrange.

Adoptons quelques définitions pour simplifier les expressions :

- Dans un premier temps, une valeur approchée des degrés de liberté à $t + \Delta t$ et notée avec des « $\tilde{}$ » est déterminée sans prendre en considération les multiplicateurs de Lagrange :

$$\vec{d}_j(t + \Delta t) = 2 \vec{d}_j(t) - \vec{d}_j(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{m_j} \overrightarrow{F}_j^{tot} \quad (4.26)$$

$$\vec{\omega}_j(t + \Delta t) = 2 \vec{\omega}_j(t) - \vec{\omega}_j(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{J_j} \overrightarrow{C}_j^{tot} \quad (4.27)$$

$$\vec{u}_i(t + \Delta t) = 2 \vec{u}_i(t) - \vec{u}_i(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{M_i} \overrightarrow{F}g_i \quad (4.28)$$

- Définissons également \vec{g}_j^d et \vec{g}_j^ω les résidus intermédiaires des relations de couplage entre les degrés de liberté approchés :

$$\vec{g}_j^d = \vec{d}_j(t + \Delta t) - \sum_{i=1}^{n_{fr}} \overline{k_{ji}} \vec{u}_i(t + \Delta t) \quad (4.29)$$

$$\vec{g}_j^\omega = \vec{\omega}_j(t + \Delta t) - \sum_{i=1}^{n_{fr}} \overline{h_{ji}} \vec{u}_i(t + \Delta t) \quad (4.30)$$

En introduisant ces expressions dans les équations de couplage à $t + \Delta t$ (4.24, 4.25), on obtient les relations sur les multiplicateurs de Lagrange ci-dessous. Les résidus étant connus, il est possible d'en déduire les valeurs de $\vec{\lambda}_l^d$ et $\vec{\lambda}_l^\omega$.

$$\vec{g}_j^d = \Delta t^2 \left(\frac{\vec{\lambda}_j^d}{\beta_j m_j} + \sum_{i=1}^{n_{fr}} \overline{k_{ji}} \left(\sum_{l=1}^{n_{dr}} \frac{\overline{k_{li}}^T \vec{\lambda}_l^d + \overline{h_{li}}^T \vec{\lambda}_l^\omega}{\alpha_i M_i} \right) \right) \quad (4.31)$$

$$(4.32)$$

$$\vec{g}_j^\omega = \Delta t^2 \left(\frac{\vec{\lambda}_j^\omega}{\beta_j J_j} + \sum_{i=1}^{n_{fr}} \overline{h_{ji}} \left(\sum_{l=1}^{n_{dr}} \frac{\overline{k_{li}}^T \vec{\lambda}_l^d + \overline{h_{li}}^T \vec{\lambda}_l^\omega}{\alpha_i M_i} \right) \right) \quad (4.33)$$

Ces expressions s'écrivent sous forme matricielle :

$$\vec{g}^d = \Delta t^2 \left(\overline{A} \vec{\lambda}^d + \overline{B} \vec{\lambda}^\omega \right) \quad (4.34)$$

$$\vec{g}^\omega = \Delta t^2 \left(\overline{C} \vec{\lambda}^d + \overline{D} \vec{\lambda}^\omega \right) \quad (4.35)$$

avec (4.36)

$$\overline{A}_{jl} = \frac{1}{\beta_j m_j} \overline{I} d_{33} \delta_{jl} + \sum_{p=1}^{n_{fr}} \frac{\overline{k_{jp}} \overline{k_{lp}}^T}{\alpha_p M_p} \quad (4.37)$$

$$\overline{B}_{jl} = \sum_{p=1}^{n_{fr}} \frac{\overline{k_{jp}} \overline{h_{lp}}^T}{\alpha_p M_p} \quad (4.38)$$

$$\overline{C}_{jl} = \sum_{p=1}^{n_{fr}} \frac{\overline{h_{jp}} \overline{k_{lp}}^T}{\alpha_p M_p} \quad (4.39)$$

$$\overline{D}_{jl} = \frac{1}{\beta_j J_j} \overline{I} d_{33} \delta_{jl} + \sum_{p=1}^{n_{fr}} \frac{\overline{h_{jp}} \overline{h_{lp}}^T}{\alpha_p M_p} \quad (4.40)$$

Les matrices \overline{A} , \overline{B} , \overline{C} et \overline{D} étant non-singulières, les multiplicateurs s'expriment donc par :

$$\vec{\lambda}_l^d = \frac{1}{\Delta t^2} \left(\overline{B}^{-1} \overline{A} - \overline{D}^{-1} \overline{C} \right)^{-1} \left(\overline{B}^{-1} \vec{g}^d - \overline{D}^{-1} \vec{g}^\omega \right) \quad (4.41)$$

$$\vec{\lambda}_l^\omega = \frac{1}{\Delta t^2} \left(\overline{A}^{-1} \overline{B} - \overline{C}^{-1} \overline{D} \right)^{-1} \left(\overline{A}^{-1} \vec{g}^d - \overline{C}^{-1} \vec{g}^\omega \right) \quad (4.42)$$

La résolution de ce système matriciel permet de calculer les multiplicateurs de Lagrange et ensuite les déplacements et les rotations à $t + \Delta t$ en utilisant les relations [4.21], [4.22], [4.23].

Les valeurs des matrices \overline{A} , \overline{B} , \overline{C} et \overline{D} ne varient pas au cours de la simulation, mais les résidus sont différents à chaque itération. Même si l'inversion des matrices et certains produits de

matrices peuvent être réalisés une fois et stockés, la résolution complète, c'est à dire le produit des matrices avec les résidus doit être effectué à chaque itération. Cet aspect n'est pas très bon pour optimiser le temps de calcul.

Une autre possibilité consiste à analyser les particularités de ces matrices afin de proposer des simplifications opportunes n'affectant pas le résultat de la simulation.

4.3 Optimisation du schéma numérique

Un regard attentif sur les matrices décrites précédemment montre certaines particularités qui méritent d'être exploitées. La taille des éléments discrets est petite devant la discrétisation éléments finis, il en résulte que les masses éléments discrets sont également inférieures aux masses des noeuds éléments finis. En ne tenant pas compte des paramètres de recouvrement, les termes $\frac{1}{\beta_j m_j}$ sont grands devant $\frac{\overline{k_{jp}} \overline{k_{lp}}}{\alpha_p M_p}$. Ce raisonnement est valable tant que $\alpha_p M_p$ ne tend pas vers 0 (cf. section 4.7.3 la remarque sur la limitation des valeurs minimales de α_i et β_j), mais il est étendu à tout le domaine indépendamment de cette condition pour les nécessités de calcul.

Aussi les matrices $\overline{\overline{B}}$ et $\overline{\overline{C}}$ ont des valeurs faibles par rapport respectivement à $\overline{\overline{A}}$ et $\overline{\overline{D}}$. Elles seront volontairement omises dans les calculs.

Les multiplicateurs sont alors approximatés par :

$$\overrightarrow{\lambda^d} = \frac{1}{\Delta t^2} \overline{\overline{A}}^{-1} \overrightarrow{g^d} \quad (4.43)$$

$$\overrightarrow{\lambda^\omega} = \frac{1}{\Delta t^2} \overline{\overline{D}}^{-1} \overrightarrow{g^\omega} \quad (4.44)$$

Le même raisonnement peut être porté sur les termes diagonaux des matrices $\overline{\overline{A}}$ et $\overline{\overline{D}}$ par rapport aux autres valeurs de ces matrices. Nous utilisons la simplification proposée par Belytschko et Xiao [Xiao et Belytschko, 2004] pour leur approche couplée avec la mécanique moléculaire. Les matrices $\overline{\overline{A}}$ et $\overline{\overline{D}}$ sont remplacées par des matrices diagonales, dont le terme diagonal est obtenu en sommant les termes de la ligne correspondante. Cette opération est réalisée aussi bien pour les déplacements sur $\overline{\overline{A}}$ que pour les rotations sur $\overline{\overline{D}}$. Cette simplification procure deux avantages, un gain de temps par l'utilisation des matrices diagonales et également une légère amélioration des résultats en terme d'atténuation des ondes réfléchies parasites provenant de la variation de la taille de discrétisation entre le modèle éléments discrets et le modèle éléments finis (cf. Chapitre Propagation).

En plus de l'argument quantitatif sur les valeurs prédominantes, nous démontrons ci-dessous que les simplifications présentées reviennent à transformer la méthode par multiplicateurs de Lagrange initialement proposée en une méthode particulière de pénalité. La méthode proposée a l'avantage de définir automatiquement la valeur du coefficient de pénalité adapté à chacune des équations de couplage entre les degrés de liberté des deux modèles.

4.4 Équivalence avec la méthode de pénalité

L'équivalence de la méthode proposée utilisant la diagonalisation des matrices des multiplicateurs $\overline{\overline{A}}$ et $\overline{\overline{D}}$ et négligeant les matrices $\overline{\overline{B}}$ et $\overline{\overline{C}}$ avec la méthode de pénalité est démontrée sur les équations en déplacement et en rotation d'un nœud discret.

Les simplifications précédentes conduisent à avoir des matrices $\overline{\overline{A}}$ et $\overline{\overline{D}}$ uniquement constituées de sous-matrices $\overline{\overline{A}}_{jj}$, respectivement $\overline{\overline{D}}_{jj}$, diagonales. N'ayant pas de valeur propre nulle, elles sont inversibles. En utilisant les relations (4.43) et (4.44), la mise à jour des degrés de liberté des éléments discrets est obtenue avec les équations suivantes :

$$\vec{d}_j(t + \Delta t) = 2 \vec{d}_j(t) - \vec{d}_j(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{m_j} \left(\overrightarrow{F}_j^{tot} + \frac{\overline{\overline{A}}_{jj}^{-1} \vec{g}_j^d}{\Delta t^2 \beta_j} \right) \quad (4.45)$$

$$\vec{\omega}_j(t + \Delta t) = 2 \vec{\omega}_j(t) - \vec{\omega}_j(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{J_j} \left(\overrightarrow{C}_j^{tot} + \frac{\overline{\overline{D}}_{jj}^{-1} \vec{g}_j^{\omega}}{\Delta t^2 \beta_j} \right) \quad (4.46)$$

La méthode de pénalité écrite sous sa forme générale, revient à minimiser l'expression suivante :

$$H(\vec{d}, \vec{\omega}, \vec{u}) + (\vec{dr} - \vec{k} \vec{ur})^T \overline{\overline{p}}^d (\vec{dr} - \vec{k} \vec{ur}) + (\vec{\omega r} - \vec{h} \vec{ur})^T \overline{\overline{p}}^{\omega} (\vec{\omega r} - \vec{h} \vec{ur}) \quad (4.47)$$

où $\overline{\overline{p}}^d$ et $\overline{\overline{p}}^{\omega}$ sont dans le cas général deux matrices symétriques définies positives. Dans notre approche, nous considérons ces matrices comme des matrices diagonales.

Dans la plupart des cas, la méthode de pénalité fait intervenir un unique paramètre qu'il est souvent difficile de régler (suffisamment grand et n'entraînant pas de problème de stabilité numérique). Notre approche ne nécessite pas de se poser ce genre de question étant donnée que les paramètres de pénalité sont déterminés automatiquement.

La minimisation de l'équation (4.47) conduit aux équations locales. Elles s'écrivent pour un nœud élément discret par :

$$\beta_j m_j \vec{d}_j = \beta_j \overrightarrow{F}_j^{tot} + \overline{\overline{p}}_{jj}^d \left(\vec{d}_j - \sum_{i=1}^{n_{fr}} \overline{\overline{k}}_{ji} \vec{u}_i \right) \quad (4.48)$$

$$\beta_j J_j \vec{\omega}_j = \beta_j \overrightarrow{C}_j^{tot} + \overline{\overline{p}}_{jj}^{\omega} \left(\vec{\omega}_j - \sum_{i=1}^{n_{fr}} \overline{\overline{h}}_{ji} \vec{u}_i \right) \quad (4.49)$$

En utilisant le schéma aux différences centrées, on obtient :

$$\vec{d}_j(t + \Delta t) = 2 \vec{d}_j(t) - \vec{d}_j(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{m_j} \left(\overrightarrow{F}_j^{tot} + \frac{\overline{\overline{p}}_{jj}^d \left(\vec{d}_j - \sum_{i=1}^{n_{fr}} \overline{\overline{k}}_{ji} \vec{u}_i \right)}{\beta_j} \right) \quad (4.50)$$

$$\vec{\omega}_j(t + \Delta t) = 2 \vec{\omega}_j(t) - \vec{\omega}_j(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{J_j} \left(\overrightarrow{C}_j^{tot} + \frac{\overline{\overline{p}}_{jj}^{\omega} \left(\vec{\omega}_j - \sum_{i=1}^{n_{fr}} \overline{\overline{h}}_{ji} \vec{u}_i \right)}{\beta_j} \right) \quad (4.51)$$

Or avec nos notations, les expressions $(\vec{d}_j - \sum_{i=1}^{n_{fr}} \overline{\overline{k_{ji}}} \vec{u}_i)$ et $(\vec{\omega}_j - \sum_{i=1}^{n_{fr}} \overline{\overline{h_{ji}}} \vec{u}_i)$ sont égales à respectivement \vec{g}_j^d et \vec{g}_j^ω .

Et en choisissant :

$$\overline{\overline{p_{jj}^d}} = \frac{\overline{\overline{A_{jj}}}^{-1}}{\Delta t^2} \quad (4.52)$$

$$\overline{\overline{p_{jj}^\omega}} = \frac{\overline{\overline{D_{jj}}}^{-1}}{\Delta t^2} \quad (4.53)$$

Les équations en déplacement (4.45) et (4.50) deviennent équivalentes. De même pour les rotations, les équations (4.46) et (4.51) sont identiques.

La méthode proposée est donc équivalente à une méthode de pénalité pour laquelle, les coefficients de pénalité sont calculés de manière automatique pour l'ensemble des équations de couplage entre les degrés de liberté de la zone de couplage.

4.5 Procédure à deux pas de temps

L'approche multi-domaine proposée présente l'avantage de dépendre de deux pas de temps critiques différents. La condition de Courant sur les éléments discrets conduit à un pas de temps très petit (discrétisation fine). Par contre sur les éléments finis, la condition de Courant est moins pénalisante (discrétisation plus grossière). Il est donc opportun et facilement réalisable de partager le travail en deux pas de temps. Un petit δt qui régit le comportement des éléments discrets et un plus grand Δt qui pilote les éléments finis. Les deux pas de temps sont reliés par l'équation 4.54.

$$\Delta t = n \delta t \text{ avec } n \text{ entier} \quad (4.54)$$

La structure d'ensemble de cet algorithme multi-pas de temps est présentée sur la table 4.2 et le partage des échelles de temps sur la figure 4.4.

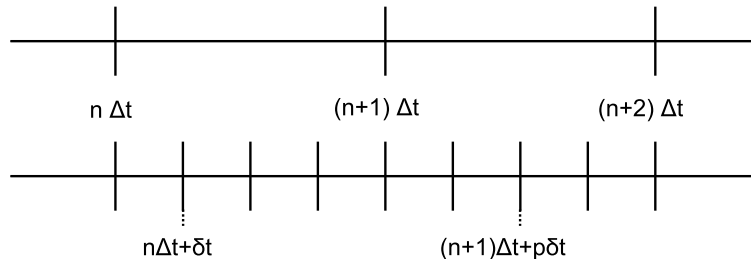


FIG. 4.4 – Échelle des pas de temps pour le multi-pas de temps

- 1 Initialiser les degrés de liberté
- 2 Calculer les déplacements des noeuds éléments finis à Δt
- 3 Calculer les déplacements et rotations des éléments discrets à δt
- 4 Calculer les vitesses de déplacement et de rotation des éléments discrets δt
- 5 Calculer les multiplicateurs de Lagrange en déplacement et en rotation
- 6 Mettre à jour les degrés de liberté des éléments discrets au pas de temps δt suivant
- 7 Répéter les étapes 3 à 6 jusqu'au pas de temps Δt suivant
- 8 Répéter les étapes 2 à 7 jusqu'à la fin de la simulation

TAB. 4.2 – Schéma de la procédure à deux pas de temps

4.6 Validation

Afin de valider les équations et la programmation de la méthode couplée, différentes séries de tests sont effectuées. Celles-ci sont effectuées pour des petits déplacements et des petites déformations car la partie éléments finis proposée doit rester élastique. Les essais sont effectués sur une poutre de dimensions : $0.8 \times 0.25 \times 0.25$ m.

Un essai de traction simple élastique effectué sur le modèle discret, permet de déterminer les propriétés macroscopiques à imposer aux éléments finis. Le module de Young de la poutre est de 35 MPa et le coefficient de poisson est de $0,22$. Nous sommes, dès lors, en mesure de lancer des essais comparables entre la méthode des éléments discrets classiques et la méthode couplée proposée.

La figure 4.5 propose une description du modèle couplé. Il s'agit d'un modèle 3D où seul le plan médian est représenté. Le décalage suivant z entre les éléments discrets et les éléments finis est présent sur la figure simplement pour permettre la visualisation du domaine de recouvrement.

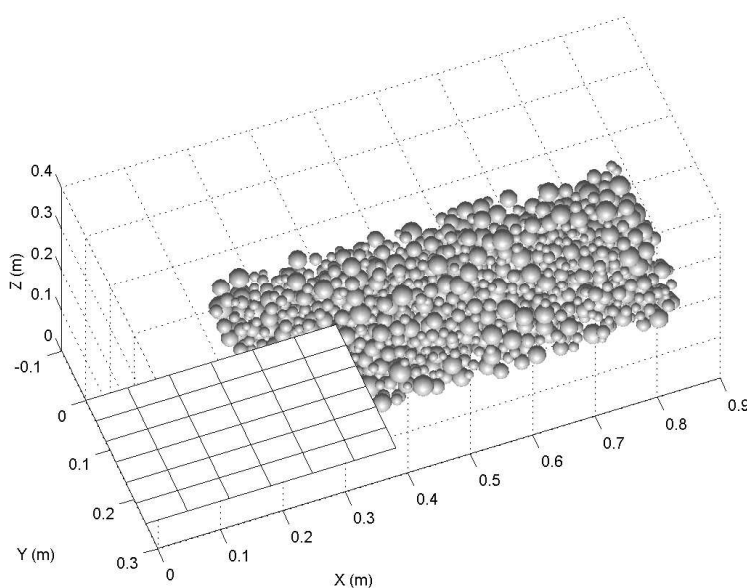


FIG. 4.5 – Description du modèle couplé ED/EF

Le modèle couplé est testé pour des applications en dynamique, puis pour des applications en statique utilisant un amortissement visqueux global.

4.6.1 Essais dynamiques

4.6.1.1 Traction

Le test le plus simple consiste à vérifier le comportement du modèle lors d'une sollicitation de traction dynamique. Soit la poutre de dimension $0.8 \times 0.25 \times 0.25$ m, le bord gauche ($x = 0$) est encastré, une répartition de force est imposée sur le bord droit ($x = 0.8$). La figure 4.6 présente les conditions aux limites du modèle. La figure 4.5 montre la discrétisation du domaine pour le modèle couplé.



FIG. 4.6 – Description d'un essai de traction dynamique

Afin de s'affranchir des phénomènes hautes-fréquences, la répartition de force imposée suit une loi sinusoïdale de basse fréquence (Figure 4.7), puis reste constante.

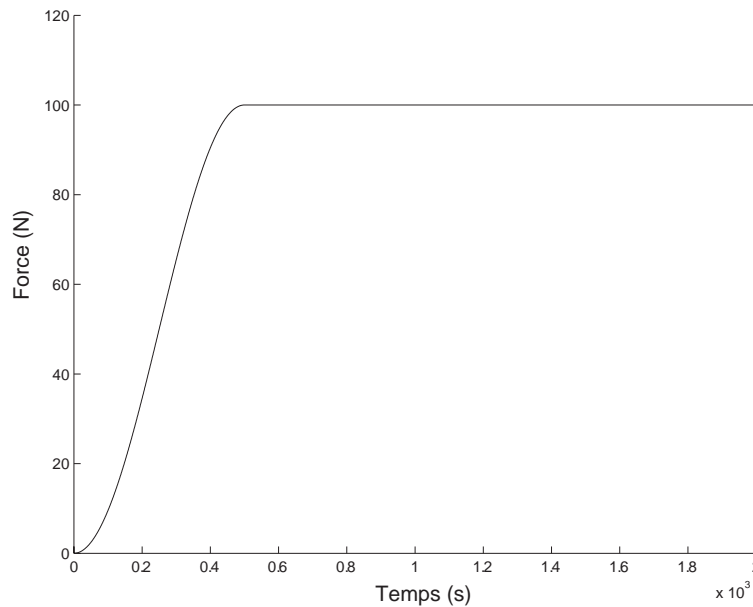


FIG. 4.7 – Évolution de la condition aux limites en force

Nous nous intéressons à la réponse en déplacement dans le temps de deux centres d'éléments discrets de la ligne moyenne pour le cas éléments discrets et pour le cas couplé ; l'un de ces

éléments est situé à l'abscisse $x = 0.33m$, il est dans la zone de recouvrement, le deuxième élément est situé $x = 0.69m$, il est dans la zone purement discrète.

La figure 4.8 montre des résultats tout à fait similaires entre le modèle discret (pointillé) et le modèle couplé (traits pleins). Des écarts sont visibles sur les pics, plus importants pour le modèle discret (environ 11%) mais aussi des temps d'aller-retour d'ondes dans la poutre plus court pour le modèle couplé (environ 5%). Les éléments de la zone de recouvrement présentent un comportement identique à ceux des éléments discrets hors du recouvrement. Cette figure ne présente pas la réponse des éléments finis car ils ont le même comportement que les éléments discrets qui leur sont proches.

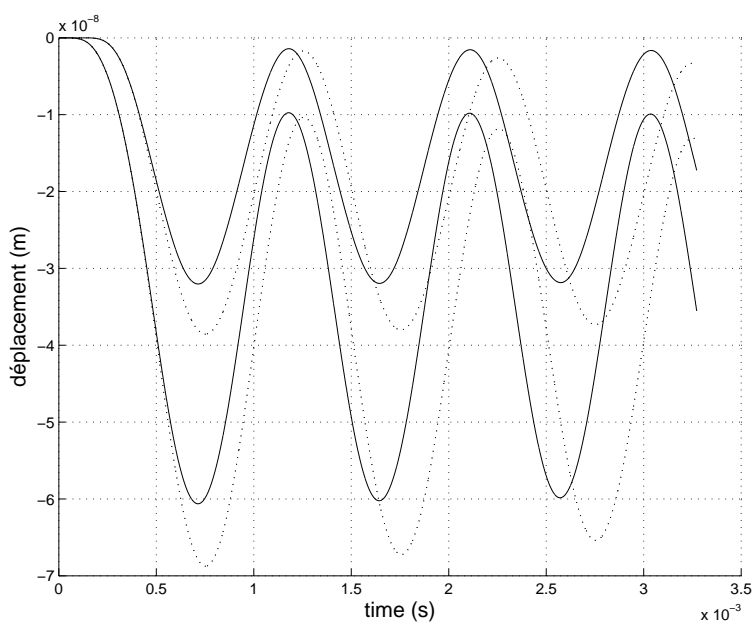


FIG. 4.8 – Évolution des déplacements de deux points de la poutre

4.6.1.2 Flexion

Des essais similaires sont réalisés en flexion sur le même échantillon. L'objectif est de comparer les déplacements en différents points de la poutre. Que ce soit pour la traction ou la flexion dynamique, le nombre de couches d'éléments finis et la discrétisation éléments finis ne change pas fondamentalement le résultat.

Les essais présentés utilisent un maillage avec 6 couches d'éléments finis. Le résultat avec un maillage deux fois plus fin réduit de moitié les écarts. Mais l'objectif n'est pas d'avoir un maillage éléments finis très fin.

La figure 4.9 compare le déplacement radial pour deux éléments discrets (les mêmes que pour la traction dynamique) de la ligne moyenne de la poutre. Il apparaît clairement que les amplitudes sont très bien représentées (seulement 5% d'erreur sur le premier pic). De même pour les temps d'aller/retour des ondes dans la poutre, l'écart reste très faible.

Les résultats en dynamique tendent à montrer la concordance des réponses du modèle couplé par rapport à celles du modèle discret, même si des petits décalages se font sentir allant

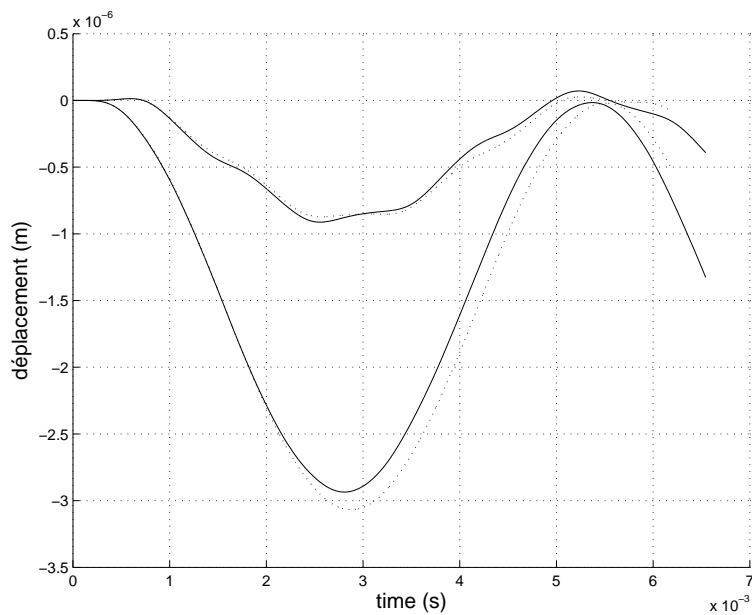


FIG. 4.9 – Évolution des déplacements de deux points de la poutre

dans le sens d'une légère augmentation de raideur du modèle couplé. Des applications en quasi-statique nous permettront de vérifier si ce décalage conduit à des réponses statiques satisfaisantes.

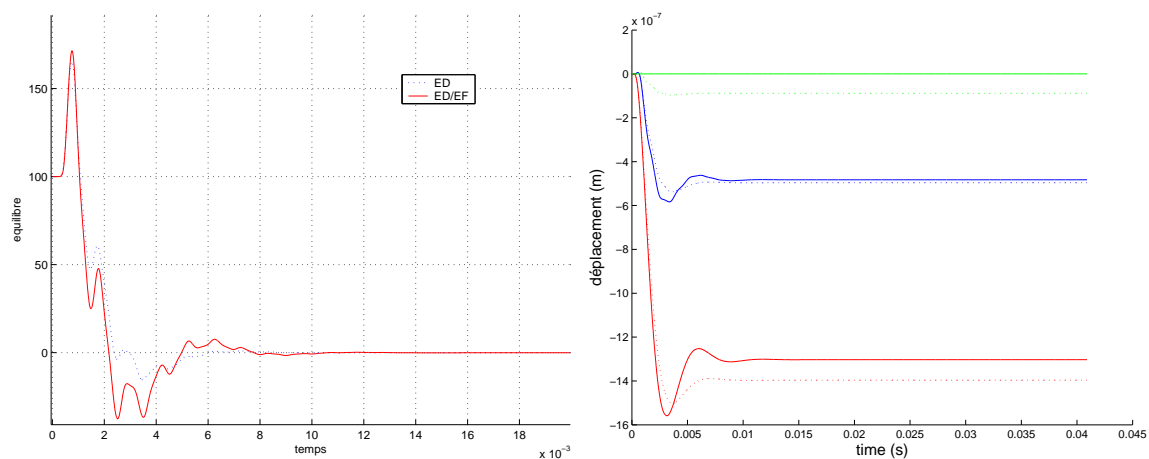
4.6.2 Essais en quasi-statique

Pour réaliser des essais en statique, nous utilisons un amortissement réalisé de manière similaire entre les deux approches par un paramètre de viscosité atténuant les vitesses des degrés de liberté des éléments discrets et des éléments finis. Cela revient à considérer qu'un amortisseur est placé entre chaque degré de liberté et le repère global.

La convergence est considérée atteinte lorsque : les degrés de liberté n'évoluent plus, l'énergie cinétique totale devient quasiment nulle et le coefficient d'équilibre en force est nul (Figure 4.10). Les valeurs d'amortissement étant différentes, le chemin pour atteindre l'équilibre entre les deux approches est différent, mais l'état statique est unique. Pour s'en convaincre, nous avons fait varier les paramètres d'amortissement et les pas de temps (Chapitre 3 section 3.1.6).

4.6.2.1 Traction

En traction, la figure 4.11 compare la réponse théorique des poutres aux réponses quasi-statiques pour le modèle discret et le modèle couplé. Les écarts visibles dans la partie uniquement discrète sont dus à ce que les éléments discrets sont désordonnés et plus ou moins éloignés de la ligne moyenne. Les courbes montrent que les incertitudes de calcul restent très faibles. L'état déformé d'une coupe de la structure est présenté sur la figure 4.12, le déplacement axial est représenté par la position verticale.



(a) Équilibre des forces extérieures à droite et à gauche et (b) Déplacement au cours du temps d'éléments discrets

FIG. 4.10 – Critère de convergence vers l'équilibre statique pour un essai de traction

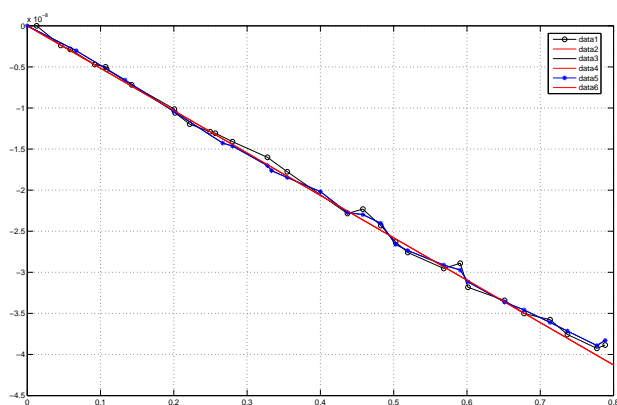


FIG. 4.11 – Comparaison théorie, méthode discrète et méthode couplée en traction

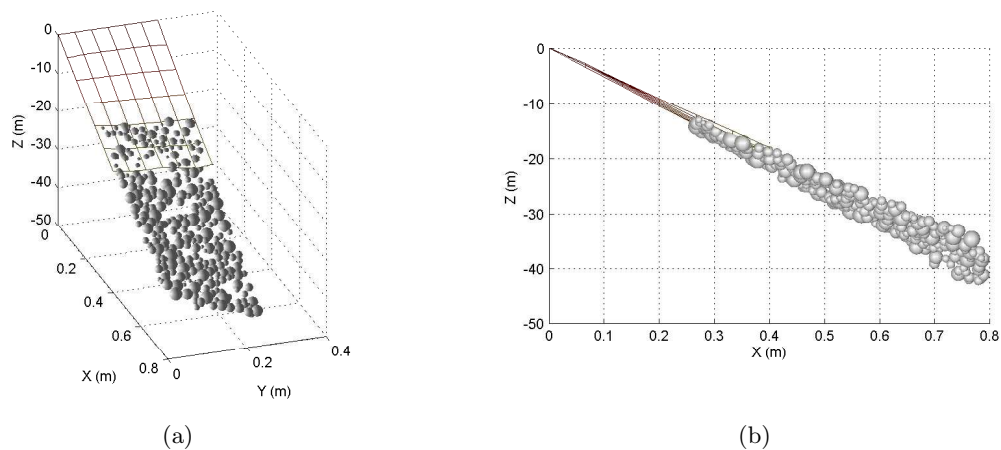


FIG. 4.12 – Représentation du déplacement longitudinal pour le modèle couplé en traction

4.6.2.2 Flexion

En flexion, la figure 4.13 compare les réponses entre la théorie des poutres (Hypothèse de Bernoulli), le modèle discret et le modèle couplé. Le modèle discret est légèrement éloigné de la réponse théorique, un écart de l'ordre de 10 %. Avec le modèle couplé, cet écart est beaucoup plus faible.

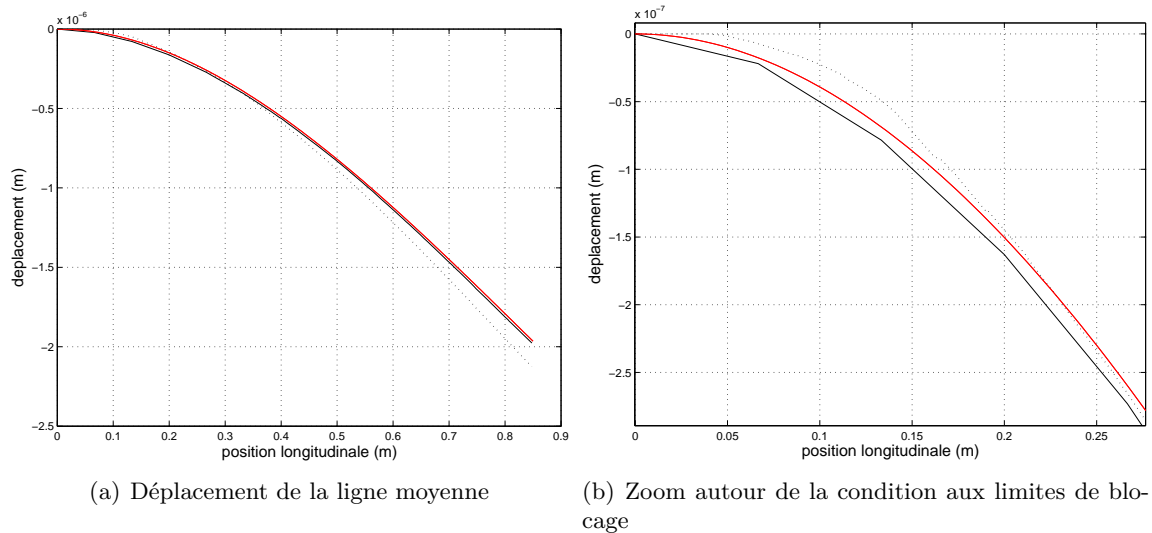


FIG. 4.13 – Déplacement de la ligne moyenne pour un essai de flexion

Une des explications provient des conditions aux limites en déplacement imposées aux éléments discrets. Selon l'épaisseur de la couche d'éléments discrets bloqués, la réponse est plus ou moins raide. La figure 4.14 montre les deux modèles, discret (b) et éléments finis (a). Si les conditions aux limites éléments finis peuvent être pilotées par les nœuds présents sur la frontière du domaine, avec les éléments discrets, il faut piloter les éléments discrets sur une certaine épaisseur (ici 3 fois le rayon moyen). Ces conditions modifient la taille effective de l'échantillon et influencent la raideur du modèle.

4.6.2.3 Influence du maillage EF et bilan

La méthode des éléments finis implémentée est testée sur un essai de flexion simple. L'objectif est de voir le bon fonctionnement de la méthode et d'avoir une idée de l'évolution de la solution entre deux maillages différents. Soit un essai de flexion piloté en force sur une des extrémités tandis que l'autre est encastree. On souhaite vérifier que la réponse du modèle éléments finis converge bien vers la solution théorique.

La figure 4.15 montre que les deux solutions éléments finis ont un comportement équivalent. Un léger écart montre l'influence de la taille de discrétisation. La simulation fine en éléments finis peut être approchée à la solution théorique de la mécanique des milieux continus, plus satisfaisante dans cette étude que la réponse de la théorie des poutres vu l'élanement du modèle (élanement d'environ 3).

Ces quelques exemples confirment que la méthode de couplage fonctionne sur des cas simples. Les écarts observés entre les courbes discrètes et les courbes du modèle couplé restent relati-

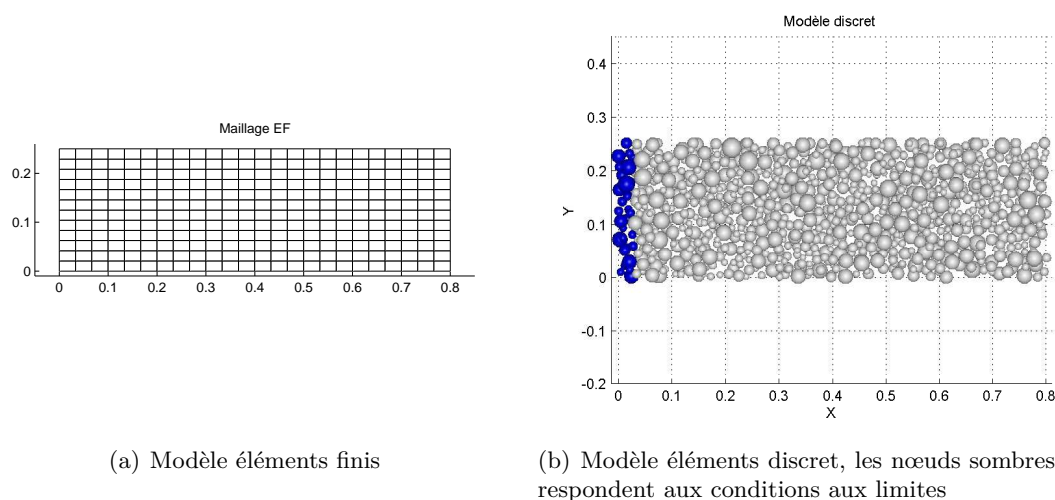


FIG. 4.14 – *Différence de modélisation des conditions aux limites entre le modèle discret et le modèle éléments finis*

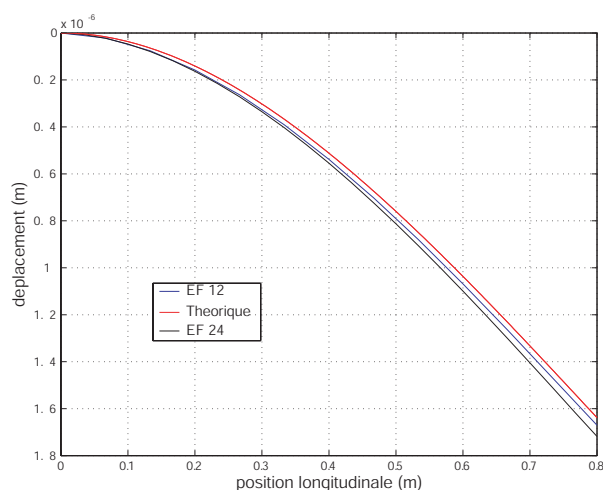


FIG. 4.15 – *Comparaison théorie, maillage 12 couches et maillage 24 couches*

vement faibles. Ces applications permettent d’avoir une idée sur la précision des résultats du modèle couplé. Sur les exemples précédents, le pourcentage d’erreur sur les pics et les célérité des ondes sont de l’ordre de 5% à 10%, du même ordre de grandeur que les écarts entre les deux modèles éléments finis. Ces écarts sont observés toujours dans le même sens, des amplitudes plus faibles pour le modèle couplé et des célérités plus grandes. Ces différences vont dans le sens d’un modèle éléments finis légèrement plus raide que le modèle couplé, même si le module d’Young et la masse volumique ont été calés sur un essai de traction.

Il reste à mettre en œuvre la méthode couplée sur des applications plus complexes tant géométriquement que matériellement (présence d’armatures), avec des chargements et des conditions aux limites plus sévères et représentatives de simulations d’impact (Chapitre 6).

4.7 Compléments d'analyse

4.7.1 Nécessité du couplage des rotations

En toute logique, il n'y a pas de raison de ne pas coupler les rotations des éléments discrets aux éléments finis. Si celles-ci n'étaient pas couplées, nous serions en présence de mobilités non-physiques liées aux rotations des éléments discrets de la zone de couplage. Mais essayons de quantifier l'apport de ce couplage des rotations discrètes.

Pour mesurer la nécessité de coupler les rotations, nous avons réalisé des essais en statique d'une poutre en flexion parabolique. La structure étudiée est une poutre élastique linéaire de dimensions $0.25 \times 0.25 \times 1.25 \text{ m}$, encadrée à l'une de ses extrémités. Le coefficient de poisson du matériau utilisé est nul.

Les surfaces latérales sont libres. Sur l'extrémité de gauche ($z = 0$), on impose un encastrement. Sur celle de droite ($z = l$), on impose le déplacement suivant :

$$U_x(x, y, l) = 0 \quad (4.55)$$

$$U_y(x, y, l) = \frac{A l^2}{2} \quad (4.56)$$

$$U_z(x, y, l) = A l \left(y - \frac{h}{2} \right) \quad (4.57)$$

où A est une constante.

La solution analytique du problème en déplacement est la suivante :

$$U_x(x, y, z) = 0 \quad (4.58)$$

$$U_y(x, y, z) = \frac{A z^2}{2} \quad (4.59)$$

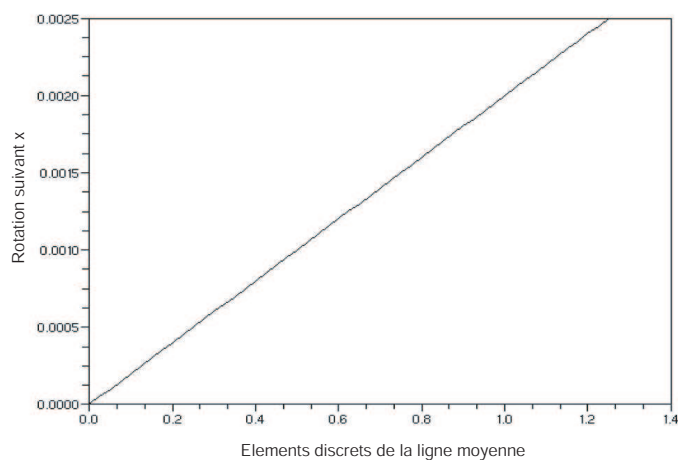
$$U_z(x, y, z) = A z \left(y - \frac{h}{2} \right) \quad (4.60)$$

Ce champ vérifie les conditions aux limites et les équations d'équilibre. L'intérêt de ce problème est que le vecteur rotation suivant $\vec{\omega}$, lié à la partie antisymétrique du gradient de déplacement, est linéaire par rapport à z .

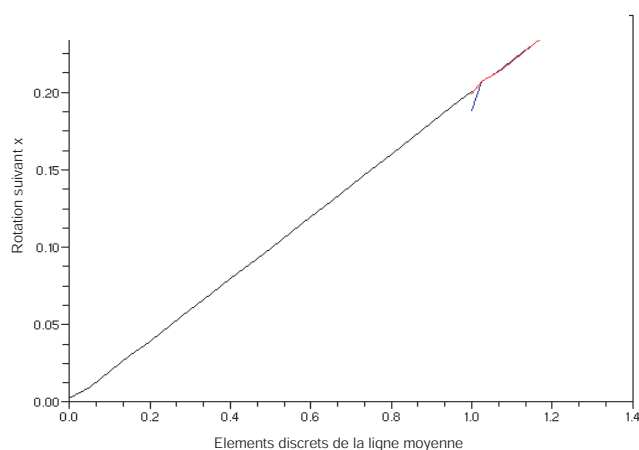
$$\omega_x(x, y, z) = A z \quad (4.61)$$

Pour limiter le nombre de paramètres extérieurs, les résultats ont été effectués sur des éléments discrets ordonnés. La figure 4.16 montre l'évolution des rotations le long de la poutre pour un modèle discret (a) et pour un modèle couplé (b) avec ou sans couplage des rotations.

La figure 4.16 démontre l'intérêt du couplage des rotations qui assure la continuité de la rotation. Les résultats sont du même ordre de grandeur lorsque l'on utilise une zone de recouvrement. Notons toutefois que cette comparaison est présentée sur le comportement en rotation des éléments. Si l'on s'intéresse au comportement en déplacement des éléments, l'influence du couplage ou non des rotations a bien moins d'influence. Les déplacements sont très bien vérifiés avec ou sans couplage des rotations. Les plus grands écarts sur les rotations par rapport à la rotation théorique sont de l'ordre de 5% alors que l'écart sur les déplacements par rapport aux déplacements théoriques est inférieur à 0.5% et ceci quel que soit le nombre de couches de recouvrement.



(a) Modèle discret



(b) Modèle couplé avec couplage (rouge), sans (bleu) des rotations

FIG. 4.16 – *Rotations de la ligne moyenne*

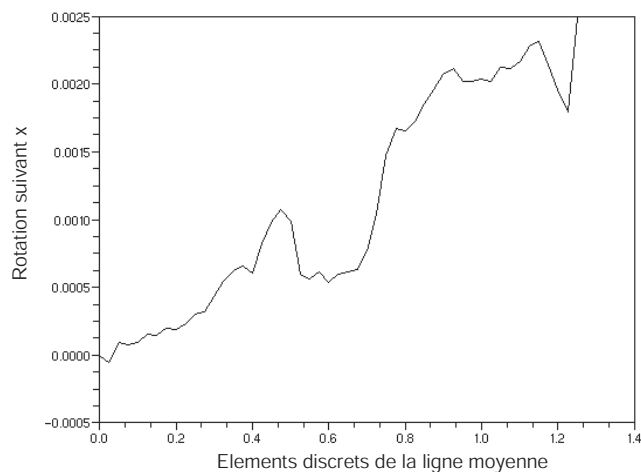
4.7.2 Couplage des rotations et grands déplacements

Un des inconvénients de notre méthode de couplage des rotations des éléments discrets de la zone de recouvrement avec la partie antisymétrique du gradient des déplacements éléments finis est l'utilisation de l'hypothèse des petites perturbations.

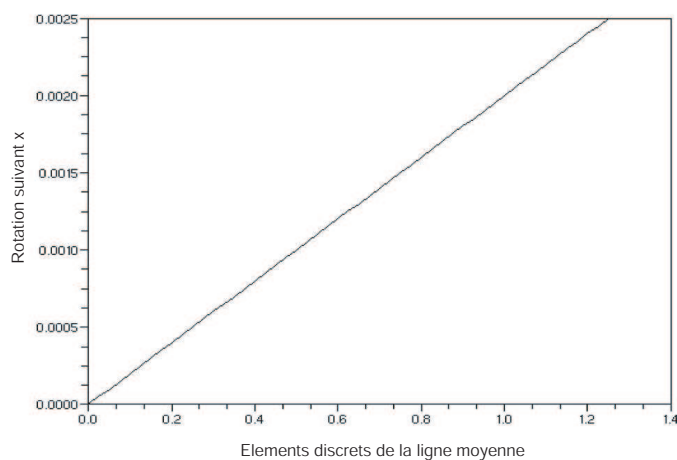
Les éléments discrets utilisés sont programmés pour des grands déplacements. C'est pourquoi les vitesses de rotations sont les inconnues du problème et les rotations ne sont pas calculées. Le calcul des efforts de liaisons entre deux éléments discrets utilise la rotation relative des deux éléments discrets en interaction et est réalisé de façon incrémentale à partir des vitesses de rotations.

Dans la zone de recouvrement, les vitesses de rotations des éléments discrets peuvent être intégrées pour obtenir les rotations discrètes nécessaires au couplage entre les éléments finis et les éléments discrets. Les résultats obtenus sur un essai en statique de la poutre en flexion montrent que la rotation est alors très mal calculée. Les erreurs dues à la discrétisation temporelle s'accumulent avec les pas de temps successifs (Figure 4.17 (a)).

Pour corriger ces erreurs, il est nécessaire de calculer les efforts intérieurs directement à partir de la rotation. Cependant, cette approche n'est valable que pour des petites rotations. Les erreurs dues à la discrétisation temporelle sur la rotation influent alors directement sur les efforts intérieurs qui corrigeront alors automatiquement ces erreurs (système asservi). Les rotations obtenues sont alors correctes (Figure 4.17 (b)). L'implantation du couplage de la rotation dans la zone de recouvrement nécessite donc un calcul des efforts entre les éléments discrets dans cette zone à partir de la rotation et non plus à partir de l'incrément de rotation.



(a) Rotation en fonction de la position de l'ED sur la ligne moyenne



(b) Rotation en fonction de la position de l'ED sur la ligne moyenne

FIG. 4.17 – Influence de la méthode de calcul des efforts intérieurs sur les rotations

Vu les limites numériques du couplage des rotations et étant donné que les écarts entre les calculs couplant les rotations et ceux ne les couplant pas sont très faibles en terme de déplacement, on peut s'interroger sur la nécessité de coupler ou non les rotations. Cette interrogation est d'autant plus légitime lorsque l'on s'intéressera à des éléments finis qui auront un comportement de grands déplacements pour lequel la méthode actuellement développée n'est pas applicable.

4.7.3 Influence de β_{mini}

Certains paramètres introduits dans la méthode, jouent des rôles importants. C'est le cas des paramètres de recouvrement α et β qui peuvent influencer de manière non négligeable le pas de temps critique du modèle. Rappelons la forme du pas de temps critique :

$$\Delta t_{critique} = \sqrt{\frac{M}{K}} \quad (4.62)$$

En prenant en compte les paramètres de recouvrement β_j associés aux éléments discrets de la zone de recouvrement, on peut définir M^* , la masse corrigée du paramètre de recouvrement et K^* , la raideur entre deux éléments discrets (i , et j), corrigées des paramètres recouvrement affectés à chacun des éléments.

$$M_j^* = \beta_j M \quad (4.63)$$

$$K_{ij}^* = \frac{\beta_i + \beta_j}{2} K \quad (4.64)$$

$$\text{Avec } 0 < \beta < 1$$

Imaginons alors le cas d'un petit élément i proche de la frontière extérieure de la zone de recouvrement et lié à un élément beaucoup plus volumineux situé plus à l'intérieur de la zone de recouvrement (avec un rayon d'interaction de l'ordre de 1.5, ils peuvent être assez éloignés). Dans ces conditions :

$$\begin{cases} \beta_i \rightarrow 0 \\ \beta_j > \beta_j \end{cases} \quad (4.65)$$

$$\Delta t_{critique}^* = \sqrt{\frac{M^*}{K^*}} = \sqrt{\frac{2\beta_i M}{\beta_i + \beta_j K}} < \Delta t_{critique} \quad (4.66)$$

On voit dans ces conditions que le pas de temps lié à un élément discret peut diminuer très fortement en fonction de la position de l'élément dans la zone de recouvrement.

De plus, la valeur $\beta = 0$ n'est pas acceptable car celle-ci conduirait à un pas de temps nul. Autrement dit, il faut se fixer une valeur minimale de β ne limitant pas trop le pas de temps et ne modifiant pas les réponses. Les simulations montrent qu'une valeur de 0,01 répond bien

à ces critères. Appliqué sur quelques éléments de la zone de recouvrement, ce choix ne modifie pas significativement le pas de temps critique du modèle. Le problème ne se pose pas avec les éléments finis puisque le pas de temps de la partie continue est largement plus grand que celui de la partie discrète. Le même critère est cependant retenu $\alpha_{mini} = 0,01$, il peut être nécessaire dans une approche multi-pas de temps.

5.1 Introduction : Présence d'ondes parasites

En dynamique transitoire, la réponse dynamique du modèle est fortement dépendante de la discrétisation et cela quelle que soit la méthode de résolution discrète ou continue considérée. Ce problème bien qu'il ne soit pas tout le temps pris en considération est bien connu des physiciens et mécaniciens (pour la MEF [Belytschko *et al.*, 1983], pour la MED [Toomey et Bean, 1999]).

Dans notre approche, la taille de la discrétisation est plus grossière dans le domaine des éléments finis que dans le domaine des éléments discrets. Or la densité du maillage ou la densité des éléments discrets définit la gamme de fréquence que peut contenir ou représenter le modèle. La fréquence la plus haute admissible par un maillage est appelée la fréquence de coupure. Les simulations montrent qu'une longueur d'onde λ , quatre à cinq fois supérieure à la taille caractéristique du maillage conduit à un signal quasiment inchangé par la discrétisation¹. La fréquence de coupure peut être approchée par :

$$f_{coupure} = \frac{c}{2\pi\lambda} \quad (5.1)$$

$$\text{Avec } \lambda \approx 5 d_{discrétisation} \quad (5.2)$$

$$\text{D'où } f_{coupure} \approx \frac{c}{10 \pi d_{discrétisation}} \quad (5.3)$$

où λ est la longueur d'onde du signal, c la célérité des ondes dans le matériau, $d_{discrétisation}$ la taille caractéristique de la discrétisation et $f_{coupure}$ la fréquence de coupure de la discrétisation.

1. Il est difficile de formuler une définition de la fréquence de coupure très précise. La simulation montre que la frontière entre une onde qui est transmise à une onde qui est réfléchie, est très progressive. Le signal se dégrade progressivement lorsque la fréquence est trop importante pour être représentée correctement avec la discrétisation donnée

Le passage de la discrétisation fine à la discrétisation grossière d'un signal contenant une large gamme de fréquence entraîne la réflexion des ondes hautes fréquences au niveau de l'interface, si celles-ci sont supérieures à la fréquence de coupure de la zone éléments finis. La zone de recouvrement est alors vue comme un mur pour ces fréquences élevées.



FIG. 5.1 – Schéma du modèle 1D

La figure 5.2 montre un exemple de cette réflexion d'ondes parasites par l'interface sur un exemple 1D. Il s'agit d'une barre de 6 m, sollicitée en traction (Figure 5.1). Elle est modélisée sur sa moitié droite par un maillage d'éléments discrets régulier fin de 600 éléments et sur la partie gauche par un maillage d'éléments finis régulier grossier contenant 120 éléments (Tab. 5.1). Une sollicitation en déplacement combinant basses et hautes fréquences est imposée sur l'élément discret à l'extrémité droite. Les propriétés matérielles de cette essai ne représentent pas un matériau physique, ce qui explique les très basses fréquences (Tab. 5.2). Les mêmes phénomènes auraient pu être obtenus avec un matériau réaliste pour d'autres caractéristiques dynamiques. Cet application est reprise tout au long de ce chapitre.

Caractéristiques	Partie éléments finis	Partie éléments discrets
Nombre d'éléments	120	600
Taille de discrétisation (m)	0.025	0.005
Fréquence de coupure (Hz)	0.2	1

TAB. 5.1 – Données géométriques

Nombre de couches de recouvrement	0
Basse fréquence	0.16666 Hz
Haute fréquence	6 Hz
Pas de temps critique	0.0001
Pas de temps utilisé	0.005

TAB. 5.2 – Caractéristiques de la simulation

La haute fréquence étant largement supérieure à la fréquence de coupure des éléments discrets, on observe sur la figure 5.2 (a) que le signal hautes fréquences est légèrement perturbé. Toutefois la propagation dans la partie discrète ne modifie pas de manière significative la forme de l'onde. En revanche, la réflexion de la haute fréquence est totale au niveau de la transition entre les éléments discrets et les éléments finis ou plus généralement entre la transition d'une discrétisation fine à une discrétisation grossière. Les basses fréquences sont transmises sans difficulté de la partie éléments discrets à la partie éléments finis. La même réponse serait obtenue en utilisant uniquement des éléments discrets fins puis grossiers ou des éléments finis allant d'une discrétisation fine à grossière, de manière progressive ou non.

Pour revenir à nos applications d'impact et afin de ne pas modifier la physique du modèle dans la zone discrète, il est nécessaire de développer une méthode qui puisse supprimer ces ondes parasites.

Il n'est pas évident de quantifier expérimentalement la gamme de fréquence mise en jeu par un impact sur une structure. Cependant, il est clair que plus le choc est «dur», plus on tend vers un temps d'impact petit et des forces de contact importantes, plus on se rapproche d'un

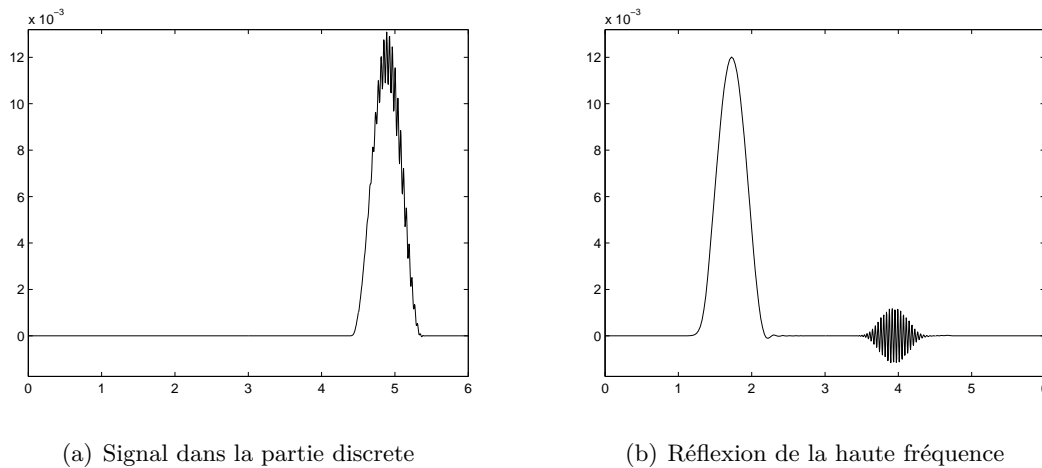


FIG. 5.2 – *Réflexions des ondes hautes fréquences sur l'interface entre une discrétisation fine et grossière (déplacement en fonction de la position)*

chargement en dirac qui contient une gamme de fréquence infinie. Autrement dit, pour pouvoir traiter l'ensemble des simulations d'impact, il est nécessaire de prendre en considération la probabilité de présence d'ondes très hautes fréquences qui ne pourront pas être représentées dans la zone éléments finis. La limite de la gamme de fréquence vient alors de la taille de discrétisation de la partie éléments discrets.

Des essais expérimentaux d'impacts à vitesse moyenne sur des structures en béton armé ont été réalisés récemment [Zineddin et Krauthammer, 2007]. Les courbes présentées dans cet article permettent d'avoir une estimation des hautes fréquences mises en jeu par l'impact. Celles-ci sont de l'ordre du kilohertz. Pour être en mesure de représenter correctement une fréquence du kilohertz dans le béton dont la célérité est de $c = 3500 m.s^{-1}$, la taille de discrétisation doit être de l'ordre de 30 cm. Si cette condition n'est pas respectée, il est alors préférable d'atténuer les ondes hautes fréquences.

5.2 Méthodes d'atténuation des réflexions d'ondes

5.2.1 Influence des simplifications numériques

Avec la méthode Lagrangienne proposée dans le chapitre 4, les conditions de couplage sur les degrés de liberté sont rigoureusement respectées, c'est-à-dire que les degrés de liberté des éléments discrets sont complètement définis à partir des degrés de liberté des éléments finis, et donc dépendent de la discrétisation grossière. Ce couplage conduit à une réflexion complète des ondes hautes fréquences.

L'utilisation des matrices diagonales présentée en 4.3, a pour intérêt de réduire le temps de simulation. Cette simplification [Xiao et Belytschko, 2004] réduit également très légèrement les ondes réfléchies (figure 5.3), mais cette réduction de l'ordre de 35 % est insuffisante.

La courbe 5.3 ainsi que les différentes courbes de ce chapitre sont obtenues à partir du modèle de couplage 1D décrit précédemment. Le pourcentage d'atténuation de l'énergie contenue dans

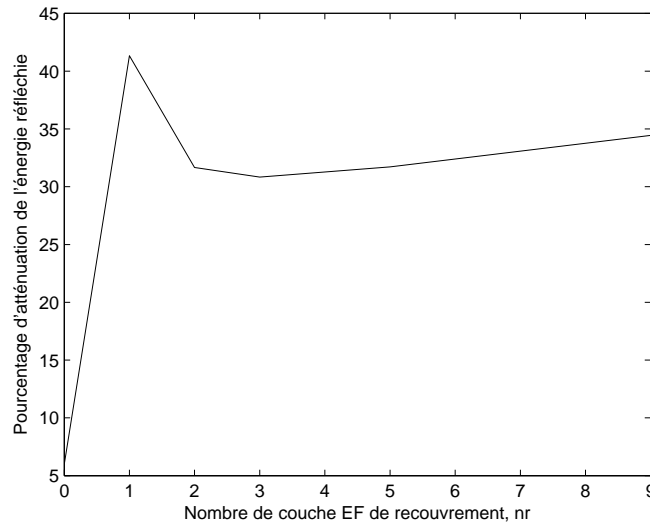


FIG. 5.3 – Influence de la diagonalisation en fonction de la taille de la zone de recouvrement sur le pourcentage d'atténuation de l'énergie réfléchie

la haute fréquence est obtenue par l'équation 5.4.

$$\%_{atténuation} = \frac{E_{HF} - E_{réfléchiée}}{E_{HF}} * 100 \quad (5.4)$$

où E_{HF} est l'énergie de la haute fréquence mesurée par différence entre l'énergie discrète avant le passage de l'onde dans la zone de transition et l'énergie de la partie continue après le passage de l'onde dans la zone de transition. L'énergie $E_{réfléchiée}$ est l'énergie mesurée dans la partie discrète après le passage de l'onde. Il ne reste alors dans cette zone que la partie provenant des ondes réfléchies par l'interface. Si E_{HF} est constant, $E_{réfléchiée}$ dépend du mode de couplage. Par exemple sur la figure 5.3 on compare l'influence de la diagonalisation des matrices liées aux multiplicateurs en fonction du nombre de couches d'éléments finis de recouvrement (Figure 5.4). $n_r = 0$ correspond à un raccordement bord à bord.

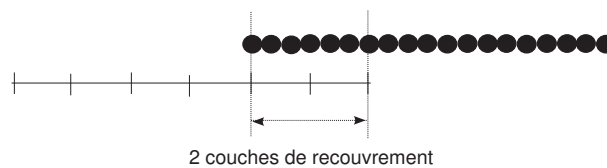


FIG. 5.4 – Description du modèle 1D avec deux couches de recouvrement

5.2.2 La relaxation

5.2.2.1 Description et équations

Afin d'atténuer fortement les ondes parasites, nous proposons de relâcher les conditions cinématiques en limitant l'effet des multiplicateurs de Lagrange par l'introduction d'un paramètre de relaxation, r . La correction utilisée lors de la mise à jour des degrés de liberté n'est plus proportionnelle à λ , mais à $\frac{\lambda}{r}$.

$$\vec{d}_j(t + \Delta t) = 2 \vec{d}_j(t) - \vec{d}_j(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{m_j} \left(\vec{F}_j^{tot} + \frac{\vec{\lambda}_j^d}{\beta_j r} \right) \quad (5.5)$$

$$\vec{\omega}_j(t + \Delta t) = 2 \vec{\omega}_j(t) - \vec{\omega}_j(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{J_j} \left(\vec{C}_j^{tot} + \frac{\vec{\lambda}_j^\omega}{\beta_j r} \right) \quad (5.6)$$

$$\vec{u}_i(t + \Delta t) = 2 \vec{u}_i(t) - \vec{u}_i(t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{M_i} \left(\vec{F}g_i + \sum_{l=1}^{n_{dr}} \frac{\vec{k}_{li}^T \vec{\lambda}_l^d + \vec{h}_{li}^T \vec{\lambda}_l^\omega}{\alpha_i r} \right) \quad (5.7)$$

En ajoutant ainsi un peu de liberté sur les relations de couplage, les ondes réfléchies sont atténuées. Les figures 5.5 et 5.6 montrent de manière quantitative pour un problème 1D l'influence de la relaxation sur le pourcentage d'atténuation de l'énergie contenue dans l'onde réfléchie. Avec l'algorithme lagrangien rigoureux, l'énergie contenue dans la haute fréquence est complètement réfléchie.

Avec une méthode combinant la diagonalisation de la matrice des multiplicateurs de Lagrange et en utilisant un paramètre de relaxation, cette énergie réfléchie est quasiment annulée.

5.2.2.2 Équivalence relaxation et méthode de pénalité

La relaxation ne remet pas en cause l'équivalence de la méthode par rapport à la méthode de pénalité. En effet, il suffit de faire varier le coefficient de pénalité en fonction du facteur utilisé par la relaxation pour réduire les multiplicateurs de Lagrange.

5.2.2.3 Quantification de l'efficacité de la relaxation sur un exemple 1D

La figure 5.3 est établie en utilisant une matrice diagonale non relaxée. L'atténuation de l'énergie réfléchie provient alors uniquement de l'écriture sous forme diagonale des matrices. Cette simplification permet d'atténuer de près de 40 % l'énergie réfléchie par l'interface. Cette atténuation varie légèrement en fonction de la taille de la zone de recouvrement.

Les figures 5.5 et 5.6 montrent l'influence du paramètre de relaxation pour différentes tailles de la zone de recouvrement. La première est obtenue en considérant les matrices des multiplicateurs complètes, la seconde est obtenue avec des matrices diagonalisées. L'utilisation de deux couches de recouvrement permet d'atténuer de plus de 80 % l'énergie contenue dans l'onde réfléchie par l'interface.

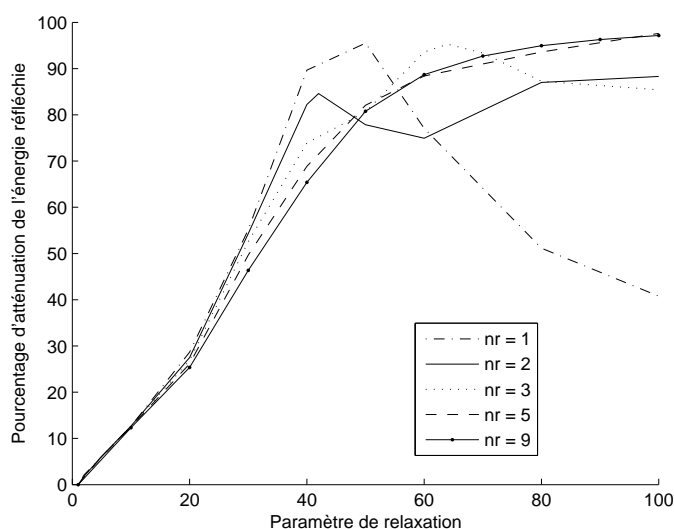


FIG. 5.5 – Influence du paramètre de relaxation (sans diagonalisation des matrices) sur le pourcentage d'atténuation de l'énergie réfléchie pour différentes tailles de la zone de recouvrement

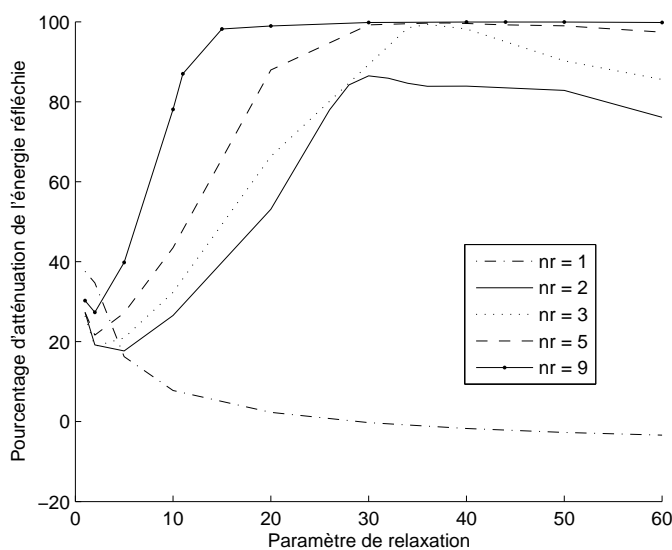
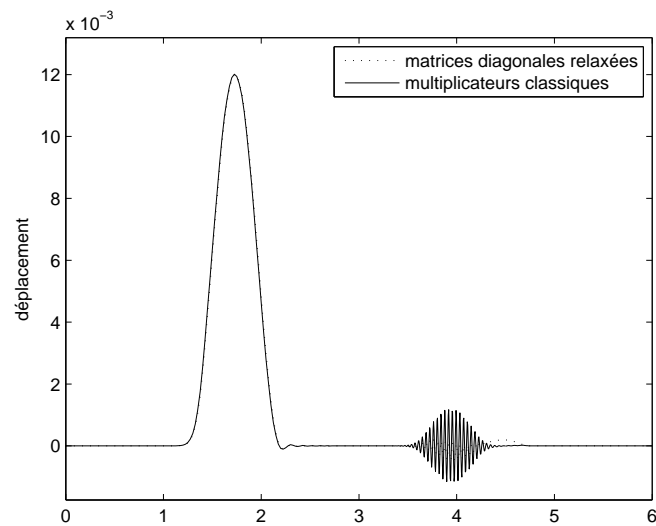
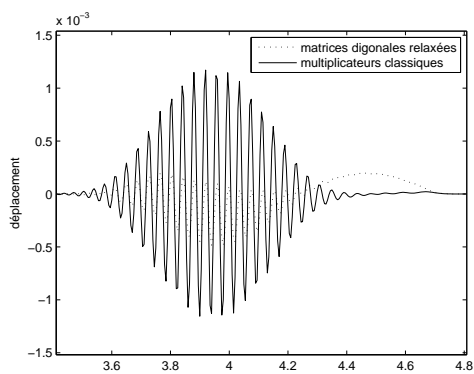


FIG. 5.6 – Influence du paramètre de relaxation (avec des matrices diagonales) sur le pourcentage d'atténuation de l'énergie réfléchie pour différentes tailles de la zone de recouvrement

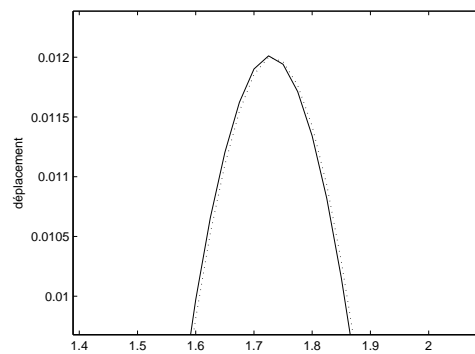
La figure 5.7 compare la propagation des ondes entre l'approche avec multiplicateur de Lagrange rigoureuse (trait plein) et la méthode utilisant une matrice diagonale et un paramètre de relaxation égal à 35 pour trois couches éléments finis de recouvrement (pointillé). On peut noter que l'onde transmise est quasiment inchangée ($< 1\%$ de perte au niveau de l'énergie transmise) et que l'onde réfléchie est très fortement atténuée.



(a) Ondes transmises et réfléchies



(b) Onde HF réfléchié



(c) Onde BF transmise

FIG. 5.7 – Étude de la propagation des ondes selon la méthode, multiplicateurs classiques (plein), matrices diagonales relaxées (pointillé)

5.2.2.4 Caractéristiques comportementales de la relaxation

Sur les tests précédents 1D, des paramètres peuvent influencer sur la valeur du paramètre $r_{optimal}$, comme par exemple :

- Les paramètres matériaux ou encore le rapport $\frac{E}{\rho}$ caractéristique de la célérité des ondes
- Le rapport $\frac{\Delta t}{\Delta t_{critique}}$ du problème
- La validité du modèle 1D pour une étude 3D

Concernant l'influence du matériau

Dans l'expression à minimiser le hamiltonien est défini comme la somme des énergies potentielles et cinétiques. L'énergie cinétique peut s'exprimer sous la forme $Ec = \rho Ec^*$ et l'énergie potentielle sous la forme $Ep = E Ep^*$ avec Ec^* et Ep^* indépendants respectivement de la masse volumique ρ et du module d'Young E .

De la même façon :

$$\left(\vec{dr} - \bar{k} \vec{ur}\right)^T \frac{\overline{A^d}^{-1}}{r \alpha^2 \Delta t_{critique}^2} \left(\vec{dr} - \bar{k} \vec{ur}\right) \quad (5.8)$$

devient

$$\frac{\rho}{r \alpha^2 \Delta t_{critique}^2} g(\vec{u}_{EF}, \vec{u}_{ED}) \quad (5.9)$$

où la fonction $g(\vec{u}_{EF}, \vec{u}_{ED})$ est fonction des degrés de liberté du modèle, indépendante de E et de ρ . Pour le montrer il suffit de regarder la forme de l'expression des matrices $\overline{A^d}$ (Eq. 4.37) et $\overline{A^\omega}$ (Eq. 4.40).

Le problème revient donc à minimiser :

$$\left(\rho(Ec^* + \frac{E}{\rho} Ep^* + \frac{1}{r \alpha^2 \Delta t_{critique}^2} g(\vec{u}_{EF}, \vec{u}_{ED})) \right) \quad (5.10)$$

Pour les valeurs de $\frac{E}{\rho}$ différentes, la fréquence de coupure et le pas de temps critique varient. Bien entendu les tests à réaliser concernant la réflexion d'ondes hautes fréquences varient dans le même rapport que la fréquence de coupure. On peut se ramener à un problème indépendant de E et ρ avec un changement de variable en posant :

$$T = kt \quad \text{avec} \quad k = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (5.11)$$

Les sollicitations de basses fréquences et de hautes fréquences à appliquer sont alors les mêmes.

Ec^* varie en fonction de la vitesse au carré.

$$V = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dT} \frac{dT}{dt} = k \frac{du}{dT} = k \hat{V} \quad (5.12)$$

Il faut donc minimiser :

$$\rho \left(k^2 \hat{E}c^* + \frac{E}{\rho} \hat{E}p^* + \frac{k^2}{r \alpha^2 \Delta T_{critique}^2} g(\overrightarrow{u_{EF}}, \overrightarrow{u_{ED}}) \right) \quad (5.13)$$

Soit à minimiser :

$$\rho k^2 \left(\hat{E}c^* + \hat{E}p^* + \frac{1}{r \alpha^2 \Delta T_{critique}^2} g(\overrightarrow{u_{EF}}, \overrightarrow{u_{ED}}) \right) \quad (5.14)$$

Le problème est donc indépendant des propriétés du matériau.

Concernant le rapport $\frac{\Delta t}{\Delta t_{critique}}$ du problème

La méthode avec relaxation et matrices diagonales revient à minimiser une expression de la forme :

$$\begin{aligned} H + \left(\overrightarrow{dr} - \overline{\overline{k}} \overrightarrow{ur} \right)^T \frac{\overline{\overline{A^d}}^{-1}}{r \Delta t^2} \left(\overrightarrow{dr} - \overline{\overline{k}} \overrightarrow{ur} \right) \\ + \left(\overrightarrow{\omega r} - \overline{\overline{h}} \overrightarrow{ur} \right)^T \frac{\overline{\overline{A^\omega}}^{-1}}{r \Delta t^2} \left(\overrightarrow{\omega r} - \overline{\overline{h}} \overrightarrow{ur} \right) \end{aligned} \quad (5.15)$$

Si on se ramène à $\Delta t_{critique}$ en définissant $\alpha = \frac{\Delta t}{\Delta t_{critique}}$, cette expression devient :

$$\begin{aligned} H + \left(\overrightarrow{dr} - \overline{\overline{k}} \overrightarrow{ur} \right)^T \frac{\overline{\overline{A^d}}^{-1}}{r \alpha^2 \Delta t_{critique}^2} \left(\overrightarrow{dr} - \overline{\overline{k}} \overrightarrow{ur} \right) \\ + \left(\overrightarrow{\omega r} - \overline{\overline{h}} \overrightarrow{ur} \right)^T \frac{\overline{\overline{A^\omega}}^{-1}}{r \alpha^2 \Delta t_{critique}^2} \left(\overrightarrow{\omega r} - \overline{\overline{h}} \overrightarrow{ur} \right) \end{aligned} \quad (5.16)$$

L'expression à minimiser contient un terme en $r\alpha^2$. Le paramètre de relaxation optimal $r_{optimal}$ doit donc varier en fonction de α^2 :

$$r_{optimal} = \frac{r_{critique}}{\alpha^2} \quad (5.17)$$

Des simulations en 3D ont été réalisées sur une poutre discrétisée sur une moitié par éléments finis et sur l'autre par des éléments discrets ordonnés. Une superposition d'une onde basse et d'une onde haute fréquence est imposée en déplacement sur une des extrémités, nous étudions comme précédemment la réflexion des ondes hautes fréquences.

Les simulations 3D (Figures 5.8 et 5.9) permettent de retrouver les résultats théoriques de l'évolution du paramètre de relaxation optimal avec le pas de temps du modèle. L'écart par rapport au pas de temps critique implique une modification de la relaxation aux carrés. Les simulations montrent par ailleurs que la relaxation est plus efficace pour des pas de temps proches du pas de temps critique. Cela peut s'expliquer par le fait qu'entre deux instants $t1$ et $t2$, l'algorithme passera plus souvent dans la boucle relaxation, il aura pour effet de rattraper les écarts, donc de limiter les mobilités introduites par la relaxation. L'algorithme tend vers une résolution par multiplicateur complète. Un effet d'atténuation plus important est également observé sur la basse fréquence lorsque l'on s'éloigne fortement du pas de temps critique.

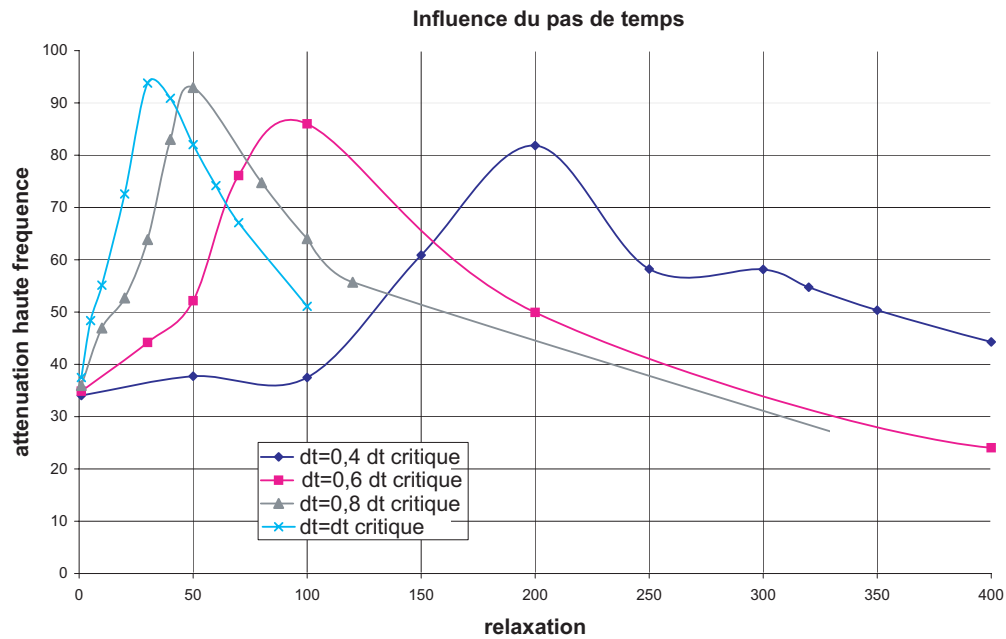


FIG. 5.8 – Influence du pas de temps sur le choix du paramètre de relaxation en 3D

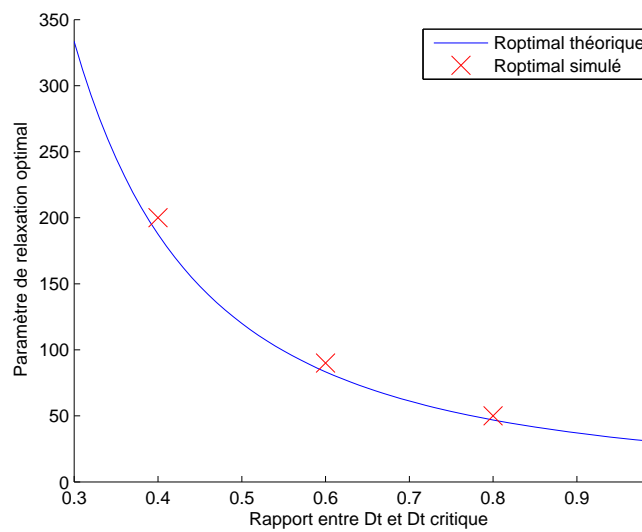


FIG. 5.9 – Évolution du paramètre de relaxation optimal avec le pas de temps en 3D

La méthode est efficace quand le pas de temps choisi est proche du pas de temps critique. Or pour un rendement optimal du modèle (rapide et précis), il faut choisir un pas de temps le plus grand possible en restant strictement inférieur au pas de temps critique.

Concernant la validation en 3D

S'il est possible de regarder le comportement en 1D de la relaxation, les études en 3D sont plus complexes à analyser. Quelques simulations 3D présentées précédemment ont pu être réalisées sur des échantillons ordonnés pour limiter les réflexions parasites dues à la distribution de taille des éléments et aux réflexions sur les surfaces de l'échantillon.

Une seconde difficulté est à prendre en compte et concerne le calcul du pas de temps, le choix effectué par SDEC est de faire un calcul approché du pas de temps critique. Le choix consiste à avoir un ordre d'idée du pas de temps en calculant des raideurs équivalentes sur les différents axes du repère général. Ensuite pour s'affranchir de cette approximation, un facteur de réduction du pas de temps est appliqué, celui-ci est généralement de l'ordre de 0.2 à 0.5. Il est ainsi difficile de connaître par avance le pas de temps critique du modèle et donc difficile de savoir la valeur de la relaxation à utiliser.

D'autre part, ces calculs ont été réalisés en première approche avec des rotations bloquées. Des études complémentaires sont nécessaires pour une utilisation rigoureuse de cette méthode sur des applications d'impacts.

Enfin les résultats en 1D ont été effectués dans des configurations d'essai spécifique. En particulier, des paramètres comme le rapport de taille entre les maillages et le rapport entre la haute fréquence et la basse fréquence ont certainement une influence qui serait à étudier.

5.2.3 L'amortissement visqueux

Une autre approche plus classique pour atténuer les réflexions d'ondes hautes fréquences est d'utiliser de l'amortissement visqueux. Cette méthode est couramment utilisée pour la modélisation d'un espace semi-infini [Liu et Jerry, 2003]. Lord Rayleigh a montré que selon le type d'amortissement choisi, celui-ci peut avoir plus ou moins d'influence sur les hautes ou les basses fréquences.

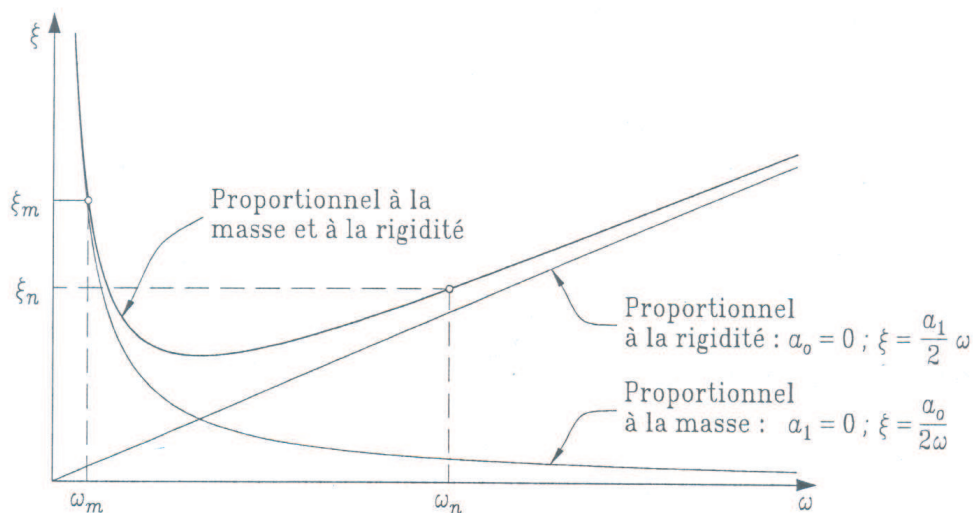


FIG. 5.10 – Comportement de l'amortissement de Rayleigh, proportionnel à la masse et à la raideur [Paultre, 2004]

La figure 5.10 montre la relation entre le taux d'amortissement ξ et la fréquence pour un amortissement de type Rayleigh.

Soit un amortissement du type :

$$\overline{C} = a_0 \overline{M} + a_1 \overline{K} \quad (5.18)$$

Pour atténuer les hautes fréquences et avoir peu d'influence sur les basses fréquences, il faut choisir un amortissement proportionnel à la rigidité ($a_0 = 0$).

Il suffit alors de placer quelques couches d'amortissement sur les éléments discrets avant ou dans la zone de recouvrement pour pouvoir atténuer les hautes fréquences. Les basses fréquences ne sont alors pas modifiées et sont transmises par la zone de recouvrement à la partie modélisée par éléments finis.

La méthode a été testée sur le modèle 1D (Figure 5.11) pour une zone de recouvrement égale à 2. Dans ces simulations, le paramètre de relaxation est égale à 1, les multiplicateurs ne sont donc pas sous-estimés et les matrices de couplage sont diagonalisées comme présentées dans la méthode de couplage (Chapitre 4, section 4.3).

La taille des couches d'amortissement correspond à la taille des couches d'éléments finis pour avoir une comparaison de coût de cette méthode par rapport à l'approche relaxée. Un nombre de couches d'amortissement supérieur au nombre de couches de recouvrement signifie que certaines couches amorties ne sont pas couplées comme présenté sur la figure 5.11 possédant trois couches d'amortissement pour deux couches de recouvrement. Les résultats sont donnés en fonction du rapport entre l'amortissement utilisé et l'amortissement critique du système, l'amortissement restant constant entre les simulations.

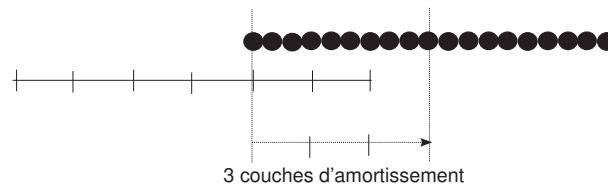


FIG. 5.11 – Description du modèle 1D avec recouvrement et 3 couches d'amortissement

Les résultats sont présentés sur les figures 5.12, 5.13. Deux possibilités ont été envisagées concernant la valeur de l'amortissement à utiliser : soit une valeur constante (Figure 5.12), soit une valeur progressivement croissante en fonction de la position de l'élément discret dans la zone de recouvrement (Figure 5.13). Plus un élément discret est proche de la partie éléments finis, plus le paramètre d'amortissement est élevé. Sur la figure 5.13, la valeur d'amortissement correspond à la valeur maximale de l'amortissement appliquée sur la couche la plus proche des éléments finis, cette valeur décroît linéairement jusqu'à atteindre 0.

Les deux approches, amortissement constant ou amortissement linéairement variable montrent des possibilités d'atténuation très importantes de l'onde réfléchie haute fréquence. La solution avec un amortissement variable en particulier présente sur un domaine de coefficient d'amortissement assez étendu, des atténuations quasiment complètes. L'influence sur les basses fréquences est réduite et reste inférieure à quelques pour cent (Figure 5.14).

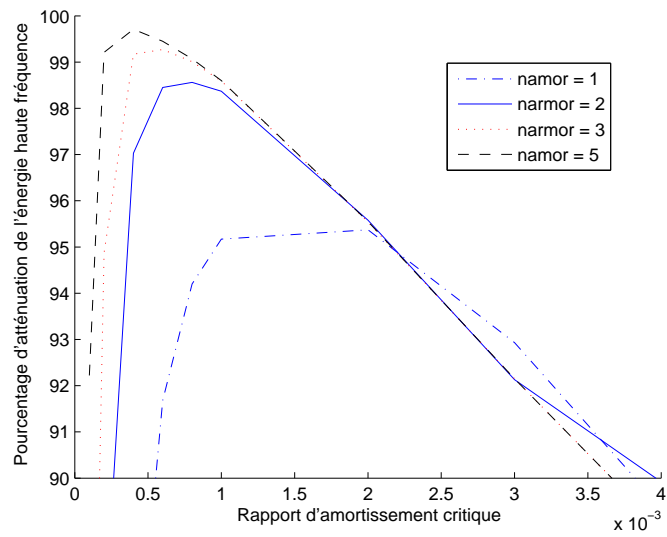


FIG. 5.12 – Atténuation de l'énergie contenue dans la haute fréquence en utilisant une amortissement constant dans les différentes couches amorties

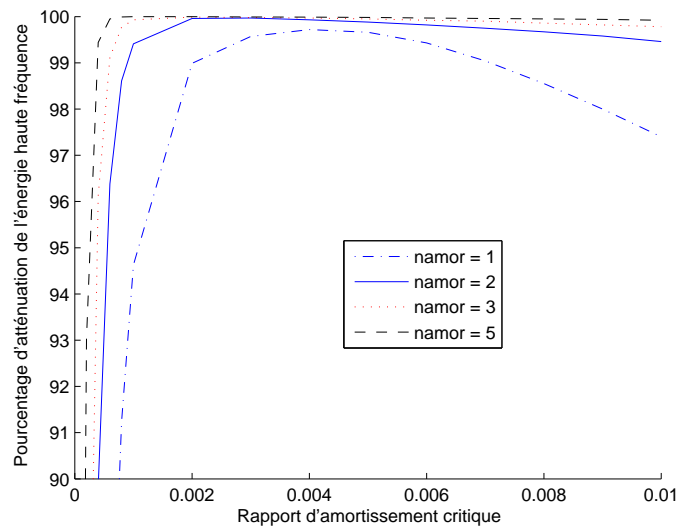


FIG. 5.13 – Pourcentage d'atténuation de l'énergie contenue dans la haute fréquence en utilisant une variation linéaire croissante de l'amortissement sur les différentes couches amorties

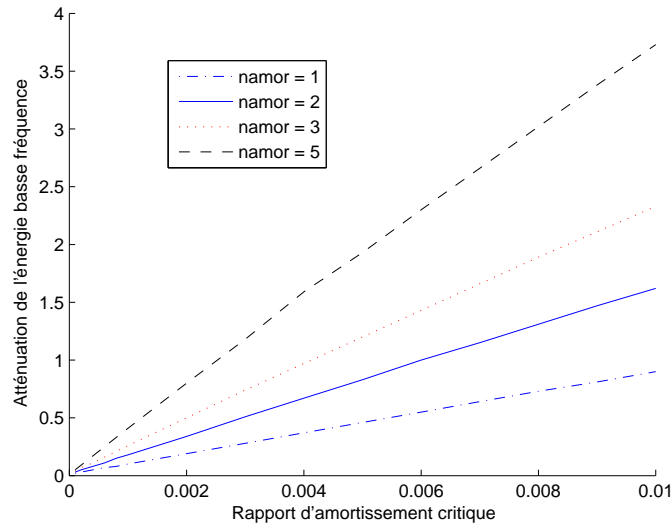


FIG. 5.14 – *Pourcentage d'atténuation de l'énergie contenue dans la basse fréquence en utilisant une variation linéaire d'amortissement dans les différentes couche amortie*

Plusieurs points peuvent être commentés :

- La valeur du coefficient a_1 reste une inconnue du problème, même si une valeur de référence peut être calculée dans le cas 1D par rapport à l'amortissement critique d'une élément.
- On a montré que l'amortissement visqueux réduisait le pas de temps.
- L'utilisation d'une variation progressive de l'amortissement avec les couches amorties permet d'améliorer l'atténuation et donne des résultats très intéressants.
- Si le problème se résout facilement en 1D avec des éléments de même raideur, l'extension au 3D avec des éléments discrets désordonnés demande des études complémentaires.
- Pour un modèle 3D, un amortissement est nécessaire au niveau des translations, mais également au niveau des rotations. Il est nécessaire de définir une relation entre les amortissements à affecter à chacun des degrés de liberté, celle-ci doit être approfondie.

5.2.4 Choix d'une méthode d'atténuation

Les deux approches ont montré de grands potentiels pour atténuer les ondes hautes fréquences réfléchies, mais elles s'avèrent complexes à utiliser dans le cas 3D. En effet, tout d'abord, la répartition de la taille des éléments discrets conduit à une dispersion des ondes. D'autre part, les méthodes proposées dépendent des pas de temps utilisés qui ne sont pas calculés avec précision en 3D. Enfin, en fonction de la taille de discrétisation de la partie éléments finis, les phénomènes de réflexion hautes fréquence peuvent être plus ou moins marqués. Si la taille du domaine le permet, un maillage éléments finis de l'ordre 30 cm permet de limiter fortement ces phénomènes, car cette taille conduit à une fréquence de coupure supérieure au kilohertz.

La méthode de relaxation ayant été étudiée de manière plus approfondie (1D et 3D) que la méthode d'amortissement et les tests étudiés avec la relaxation ou avec l'amortissement montrant des résultats semblables, nous utiliserons si cela est nécessaire une méthode de

relaxation.

Vers des applications d'impact sur ouvrage en béton armé

Dans les chapitres précédents, la méthode générale a été validée et des outils spécifiques pour limiter les réflexions d'ondes ont été présentés. L'objectif de ce dernier chapitre est d'étudier la mise en œuvre de la méthode sur des ouvrages de grandes tailles pour montrer l'intérêt de la méthode.

6.1 Le cas simplifié de la dalle en béton non armé

Avant de s'attaquer au problème complexe de la structure réelle en béton armé, intéressons-nous à la mise en œuvre de la méthode sur une application plus simple de l'impact sur une dalle non armée. Il s'agit d'un problème simplifié car pour que la dalle résiste, le chargement ne doit pas être sévère, mais il nous permettra tout de même d'avoir une idée sur le comportement du modèle et d'étudier le gain en temps de calcul.

La structure est une dalle de béton de dimensions : $2,5 \times 2 \times 0,3 \text{ m}^3$. Elle est impactée par un bloc de béton cubique de côté $0,2 \text{ m}$. La figure 6.1 décrit la discrétisation du domaine et la taille des différents sous-domaines. La zone de recouvrement est définie par trois couches éléments finis. Le modèle éléments finis est constitué d'éléments hexaédriques avec cinq couches d'éléments dans l'épaisseur. L'objectif de cette étude est de voir pour le cas d'une structure simple sans armature si le modèle couplé conduit à des résultats sensiblement identiques entre l'approche couplée et l'approche uniquement discrète.

Les résultats observés portent sur les déplacements et la réponse en endommagement au voisinage de la zone impactée. La figure 6.2 présente la comparaison entre les déplacements à différentes localisations entre le modèle couplé et le modèle purement discret. Les points d'analyse au voisinage de l'impact conduisent à des réponses très proches. Les sous-figures (a) et (b) comparent le déplacement à l'intérieur du domaine discret. La sous-figure (c) compare le déplacement d'un élément discret de la zone de recouvrement entre les deux approches.

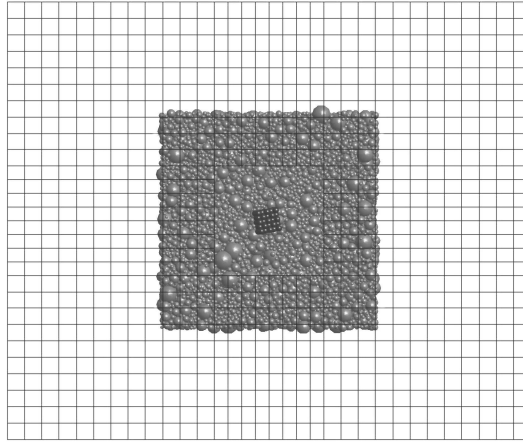


FIG. 6.1 – Description du modèle avec les différents sous-domaines et l'impacteur

Les plus grosses différences sont obtenues sur la sous-figure (d) qui compare la réponse entre un point discret et un nœud éléments finis voisin au delà de la zone de recouvrement. Les différences en terme d'amplitude de déplacement restent satisfaisantes et sont du même ordre de grandeur que celles que l'on observe entre différentes discrétisations.

Le deuxième aspect qui nous intéresse est de voir si l'état d'endommagement dans la zone impactée est identique entre les deux approches. Dans la figure 6.3, l'endommagement est vu comme le rapport entre le nombre de liens cassés sur le nombre de liens initiaux par éléments. Plus un élément discret est sombre, plus l'endommagement est important. Le noir correspond à un endommagement complet et à un élément indépendant des autres éléments. Dans cet exemple, il apparaît que l'endommagement reste très localisé et n'atteint pas la zone de recouvrement ($x = 0.3$). D'autre part, les états d'endommagement à deux instants $T_1 = 2,5 \cdot 10^{-5} s$ et $T_2 = 1 \cdot 10^{-4} s$ sont identiques entre les deux modèles.

Cette première étude permet également de répondre à une des questions majeures qui a conduit à l'élaboration de ces travaux : comment rendre accessible les méthodes discrètes à l'échelle d'une structure. La comparaison des temps de calcul présentée sur le tableau 6.1 montre un gain de temps supérieur à 10 et confirme l'intérêt de l'approche. Avec l'approche couplée, le temps de simulation dépend pratiquement que du nombre d'éléments discrets utilisés, le temps de calcul des éléments finis étant très faible grâce à l'absence de recherche de contacts, à l'utilisation d'un maillage plus grossier (le nombre éléments finis est petit devant le nombre éléments discrets) et à la possibilité d'avoir moins de passage dans la boucle éléments finis grâce au schéma à deux pas de temps.

De plus, la mesure du temps telle que présentée ici ne tient pas compte du temps gagné lors de la modélisation. En effet, une des difficultés de la mise en œuvre des approches discrètes concerne la génération de l'échantillon (géométrie, désordre). Cette étape devient plus rapide avec l'approche couplée grâce à l'utilisation de logiciels de maillage. La géométrie à modéliser en éléments discrets est plus petite et donc plus rapide à générer et un échantillon peut servir pour différentes simulations.

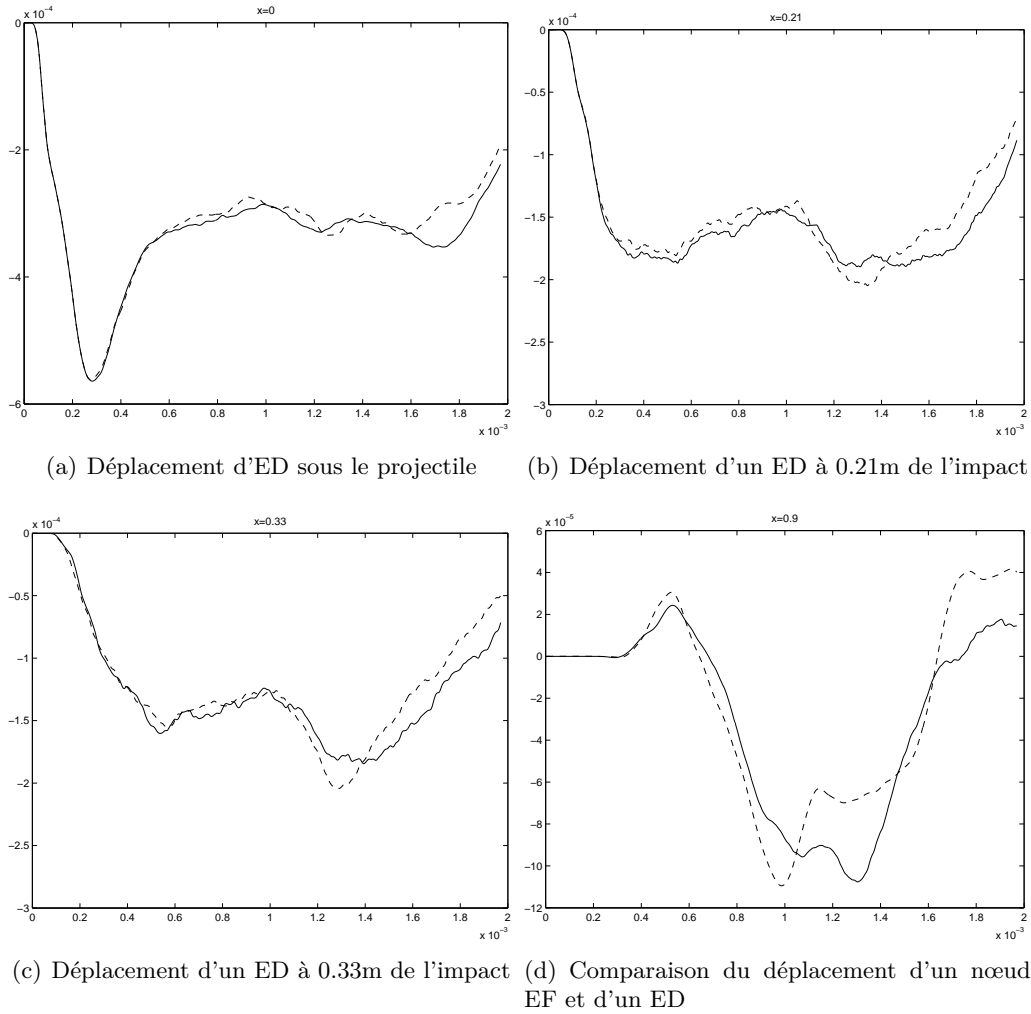


FIG. 6.2 – Comparaison des déplacements entre le modèle discret et le modèle couplé avec 3 couches de recouvrement (courbe pointillée) (déplacement exprimé en $10^{-4}m$ et le temps en $10^{-3} s$)

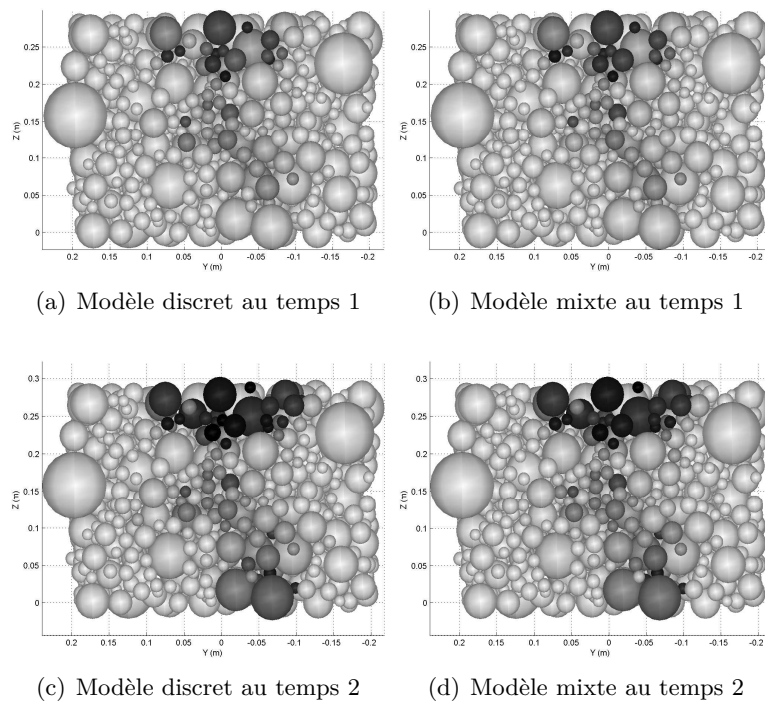


FIG. 6.3 – Comparaison de l'endommagement entre le modèle discret et le modèle couplé avec 3 couches de recouvrement

Modèle	ED seul	Approche couplée
Nombre d'ED	120808	6588
Nombre de nœud EF	X	5935
Nombre de couche EF (nr=3)	X	3
Nombre de pas de temps	100000	100000
Temps de simulation	42h50mn	3h39mn

TAB. 6.1 – Comparaison des temps de simulation entre le modèle discret et le modèle éléments finis

6.2 Modélisation des armatures

La modélisation des armatures utilisée initialement est inspirée de la thèse de Hentz et correspond à ce qui se fait généralement dans les travaux sur les éléments discrets [Meguro et Hakuno, 1989; Kusano *et al.*, 1992; Shiu, 2008; Magnier et Donzé, 1998]. Quelques approches différentes existent, par exemple [Cusatis et Pelessone, 2006] proposent d'utiliser un maillage éléments finis poutre pour les armatures.

Les armatures sont modélisées par une ligne d'éléments sphériques de diamètre égal au diamètre réel de l'armature. Les masses sont corrigées pour représenter la masse d'un volume cylindrique d'une portion d'armature de diamètre $2r$ et de hauteur $2r$. Les armatures jouent un rôle fondamental dans le comportement du béton armé, c'est pourquoi leur modélisation nécessite une attention particulière.

Plusieurs questions doivent être soulevées telles que le choix de l'algorithme de génération du désordre, la nécessité de la présence des armatures dans la zone éléments finis.

6.2.1 Nécessité de modéliser les armatures dans la partie éléments finis

Les armatures n'ont une influence qu'à partir du moment où le matériau devient fortement non linéaire. Tant qu'il reste dans la zone élastique, ce qui est le cas dans la partie éléments finis pour les applications que nous envisageons, il n'est pas nécessaire de modéliser les armatures avec précision. Leur présence doit donc être assurée dans la partie discrète du modèle, mais elle n'est pas nécessaire dans la partie éléments finis.

Enfin il est pertinent de se demander comment se comporte le modèle au niveau de l'extrémité des armatures. Soit une poutre modélisée par l'approche couplée et contenant une armature (Figure 6.4 a et b). La figure 6.4 (c) compare la répartition des contraintes axiales pour un essai de traction sur une ligne de nœuds éléments finis coaxiale à l'armature. Les résultats sont comparés entre un modèle où l'armature est constitué d'éléments béton et un modèle où l'armature est en acier. La modélisation de l'armature est présente dans la zone discrète mais ne se prolonge pas dans la partie continue. Les deux modèles avec une armature en béton et avec une armature en acier ont exactement la même discrétisation. Le passage d'une armature béton à une armature en acier permet de voir l'influence de l'armature dans le comportement local au niveau de la zone de recouvrement et des effets sur les contraintes de l'arrêt de la modélisation de l'armature.

Logiquement, la figure 6.4 montre localement une augmentation de contraintes de l'ordre de 10% de la contrainte axiale au niveau des nœuds des éléments finis par rapport à la contrainte axiale des nœuds des éléments finis de la réponse «homogénéisée» (loin de la zone de recouvrement). Nous expliquons ces faibles augmentations par un phénomène de régularisation dans les éléments finis. Notons également que grâce aux paramètres de recouvrement la contribution dans l'énergie totale des éléments de l'armature ont de moins en moins d'effets plus les éléments sont proches des éléments finis. Les écarts sur les contraintes loin de la zone de recouvrement entre les deux réponses proviennent des variations de raideurs de l'échantillon piloté en déplacement selon que l'armature est en acier ou en béton.

Ces essais de traction sur un échantillon armé montrent que l'absence de modélisation des

armatures dans la partie continue ne conduit pas à des localisations de contraintes (Figure 6.4). Au contraire, le couplage assure une régularisation du domaine qui permet de passer progressivement de la partie discrète hétérogène à la partie continue homogène. Le comportement d'un élément discret étant fonction des éléments finis qui l'entoure. Cette régularisation conduit à perdre les effets locaux des armatures au profit d'un comportement moyen à l'échelle de la taille des éléments finis.

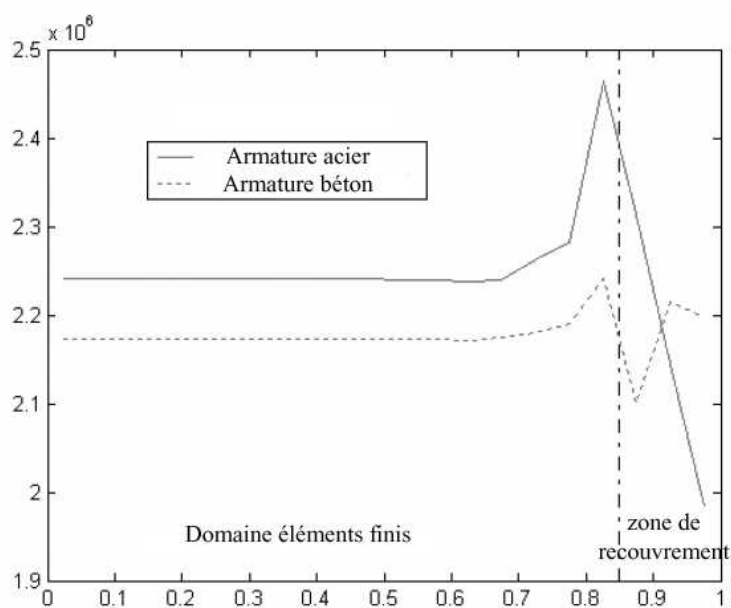
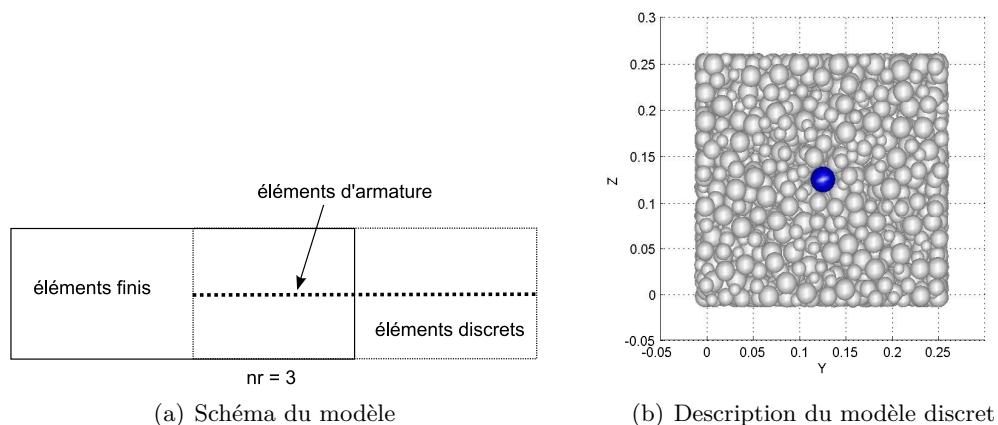


FIG. 6.4 – Modélisation de l'armature dans la partie éléments finis

Ainsi, il n'est pas nécessaire de modéliser les armatures dans la zone continue. Pour assurer correctement les continuités des propriétés matériaux entre l'approche discrète et l'approche continue, il est nécessaire de prendre un module de Young et une masse volumique représentative du modèle discret avec les armatures. Le module de Young équivalent au béton armé, est obtenu à partir d'un essai de traction sur un échantillon de béton armé découpé dans la partie discrète de la structure. La masse volumique équivalente est calculée en connaissant la masse des éléments de l'armature et le volume du modèle. Notons tout de même qu'il n'est pas possible d'assurer exactement la continuité matérielle à cause du caractère hétérogène du modèle discret (les petits éléments ont moins de contact que les gros).

6.2.2 Génération du désordre

6.2.2.1 Suppression et densification

L'algorithme de génération du désordre doit pouvoir prendre en compte la présence d'armatures. L'approche géométrique proposée par Jerier [Jerier *et al.*, 2008a], contient une procédure particulière utilisable pour les échantillons armés. Cette procédure consiste dans un premier temps à réaliser l'échantillon sans prendre en compte les armatures. Puis, celles-ci sont insérées dans le modèle, l'algorithme supprime alors tous les éléments béton en interaction avec une armature, puis une phase de densification est réalisée autour de l'armature.

Il n'est pas possible ou du moins pas prévu avec cet algorithme de piloter avec précision la compacité autour des armatures. Cependant, nous avons vu précédemment que le point essentiel du modèle était le respect du nombre de coordinence par éléments qui est réglé avec précision par l'intermédiaire des rayons d'interaction qui sont propres à chacun des matériaux. Cette coordinence n'est cependant pas toujours facile à obtenir. Si la taille des éléments béton autour des éléments acier est du même ordre de grandeur que la taille des éléments acier, alors il est possible d'atteindre une coordinence correcte pour chacun des matériaux. En revanche, si la discrétisation du béton est grossière (limitée par le nombre d'éléments du modèle), alors que la taille des aciers est fine (taille réelle des armatures), ce qui est le cas lors de la génération d'un ouvrage, il devient complexe de régler la coordinence des éléments acier. Dans le modèle actuel, le rayon d'interaction maximum est de 2, limité afin ne pas prendre en compte au niveau des éléments discrets représentant l'acier plus d'un voisin de chaque côté de l'élément de l'armature. Dans cette situation, la coordinence des acier chute, le rayon d'interaction ne permet plus de «comblent les porosités».

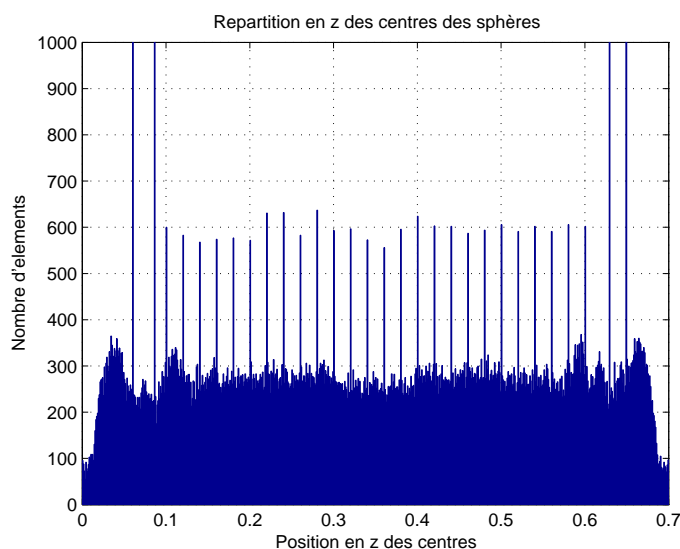
6.2.2.2 Superposition

Pour la modélisation d'ouvrages de grandes tailles, il peut alors être opportun de modifier la génération du désordre au profit d'une approche permettant d'avoir une compacité plus forte autour des armatures. La solution mise en œuvre consiste à superposer les éléments «acier» aux éléments «béton». La discrétisation des éléments «béton» est obtenue par l'utilisation de l'algorithme de Jerier à partir d'un maillage tétraédrique.

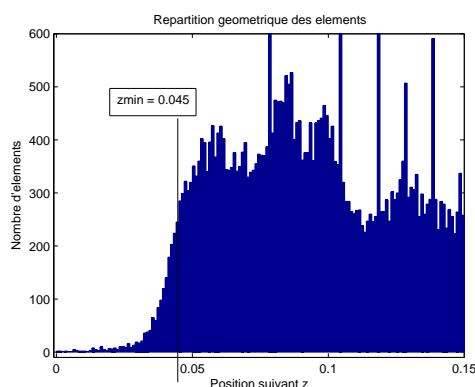
6.2.2.3 Choix de la méthode de désordre

La figure 6.5 présente la répartition dans l'épaisseur d'une dalle en béton armé en fonction de la méthode d'obtention du désordre. Dans le premier cas (figure 6.5 b), le réarrangement des éléments conduit à un échantillon contenant peu d'éléments sur les bords en raison de la position des armatures proche des frontières et ne permettant pas de réarranger correctement les éléments. La deuxième solution, consistant à superposer les éléments, conduit à une répartition plus homogène dans l'épaisseur. Le manque d'éléments sur les bords est plus limité (Figure 6.5 a et c).

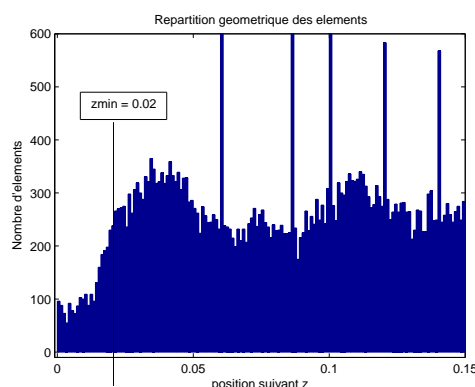
Les figures 6.5 montrent que les faces avant et arrières de l'échantillon sont caractérisées par une porosité très importante, résultant d'une méthode de génération du désordre qui pourrait être optimisée vers une meilleure prise en compte des bords de l'échantillon.



(a) Génération en superposant les éléments acier aux éléments béton



(b) Génération en utilisant un processus de réorganisation autour des armatures - Zoom



(c) Génération en superposant les éléments acier aux éléments béton - Zoom

FIG. 6.5 – Répartition des éléments discrets dans l'épaisseur d'une dalle en béton armé

Le manque d'éléments sur les faces avant et arrière conduit à sous évaluer la raideur de la dalle en flexion. Le processus d'identification défini précédemment est basé sur une étude du comportement en traction et compression. Pour ces cas de chargements uniaxiaux, l'épaisseur de la dalle intervient de manière linéaire. Alors que pour un chargement de flexion (comme pour les impacts) l'épaisseur intervient au cube dans l'expression des déplacements; d'où l'importance de savoir modéliser correctement cette dimension.

Dans le cas où le désordre est obtenu après suppression et densification (figure 6.5 (b)), l'épaisseur est sous évaluée de 13% (en considérant que le nombre d'éléments est représentatif pour $z_{min} = 0.045$ pour une dalle de 0.7 m). Si les éléments d'armature sont superposés aux éléments béton (figure 6.5 (c)), l'incertitude sur l'épaisseur est alors limitée à 5% ($z_{min} = 0.02$). Ces incertitudes influent directement sur la précision du comportement en flexion.

Ces remarques sur le comportement en flexion sont visibles lors de l'étude de structure mince (dalle) car la discrétisation dans l'épaisseur reste limitée à une vingtaine d'éléments en raison de la taille de la structure à étudier. En revanche, lors des simulations de validation du

couplage (Chapitre 4, section 4.6), les échantillons n'ont pas conduit à une sous évaluation importante de la raideur en flexion.

Étant donné que nous souhaitons modéliser des structures complètes en éléments discrets pour pouvoir comparer la réponse discrète à la réponse du modèle couplé, nous sommes limités en terme de discrétisation. Ceci conduit à des incertitudes importantes avec la première méthode de génération du désordre (suppression et densification), c'est pourquoi nous utilisons la méthode de superposition en étant bien conscient des limites lors de la rupture des liens acier-béton. Après rupture d'une interaction lien entre un élément discret d'acier et un élément discret de béton, les éléments sont directement en interpénétration. Cela conduit à la création d'une interaction de type contact introduisant des forces importantes.

6.2.3 Comportement des armatures

6.2.3.1 Lien Acier-Acier

Le comportement d'une armature, considérée seule, s'apparente au comportement d'une poutre extrêmement élancée. Autant le comportement en traction peut-être représenté fidèlement par le modèle discret de sphère, autant le comportement en flexion ne peut pas être facilement pris en compte. Toutefois, dans le béton armé, le rôle d'une armature est de reprendre les efforts de traction et la modélisation en traction est suffisante dans la majorité des applications et le modèle proposé est satisfaisant. La prise en compte de la Loi de Transfert de Moment peut être ajoutée pour prendre en compte la flexion.

La flexion ayant peu d'influence, nous n'avons considéré que le comportement en traction des armatures. Celui-ci est élastique plastique¹. La rupture d'un lien acier-acier est pilotée par une déformation maximale admissible qui est de l'ordre de quelques pour cent. Une courbe contrainte-déformation pour une armature est présentée dans la section suivante.

6.2.3.2 Lien Béton-Acier

Des essais d'arrachement ont été effectués en partenariat avec l'IUT de Génie Civil de Grenoble pour comprendre les mécanismes et pouvoir adapter les lois d'interaction. Ces améliorations sont en cours de développement [Rousseau *et al.*, 2007] et ne sont pas pour l'instant utilisées pour les applications présentées.

Dans l'approche utilisée, les interactions de type lien entre les éléments discrets béton et acier sont affectées des propriétés du béton à la fois pour les grandeurs macroscopiques (E , ν) et pour les paramètres à la rupture (C_0 , T , ς , Φ_i). Cette méthode a été appliquée à la modélisation d'impact de bloc rocheux sur dalle en béton armé [Hentz *et al.*, 2005]. Cette étude confirme que ces choix permettent de représenter correctement le comportement sous impact.

1. Une légère pente positive limite la localisation des déformations

6.3 Modélisation d'impact sur dalle en béton armé

6.3.1 Description de l'ouvrage d'essai

6.3.1.1 Données géométriques

Les outils nécessaires à la modélisation d'un ouvrage ont été présentés et peuvent être appliqués. Nous nous intéressons à une dalle en béton armé. La géométrie est issue des essais Meppen [Jonas *et al.*, 1982; Koechlin, 2007] réalisés dans le début des années 80 pour étudier le comportement d'ouvrages soumis à des chocs mous.

Remarques préliminaires

Les résultats des essais ont montré que quelle que soit la sévérité des essais d'impact, la structure Meppen a un comportement non-linéaire dans sa globalité. Autrement dit la taille du domaine éléments finis est très petite et donc pas adaptée à ce type d'impact. C'est pourquoi la taille du projectile pour la simulation est réduite afin de pouvoir placer les éléments finis sur un domaine quasi-linéaire. Dans cette situation, il n'est pas possible de comparer les résultats simulés avec les expérimentations. Nous comparons le modèle entre une approche que nous considérerons théorique qui provient d'un calcul uniquement discret avec un calcul couplé.

La taille de la dalle en béton armé est de $6.5 \times 6 \times 0.7 \text{ m}^3$. Les conditions aux limites normalement constituées par des appuis cylindriques et par des câbles de précontraintes sont approchées par des appuis linéiques tels que décrit sur la figure 6.6.

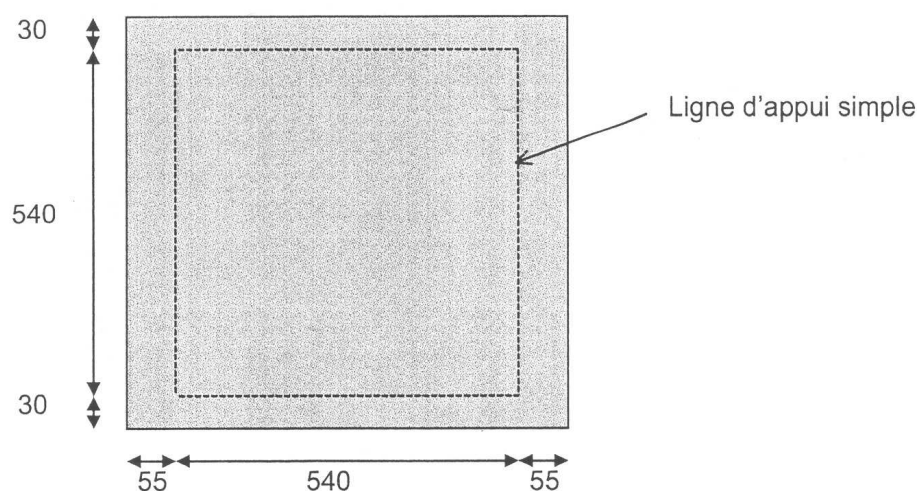


FIG. 6.6 – Description de la géométrie et des conditions aux limites

Le projectile est un cylindre fermé qui flambe au cours de l'impact. Une approche de Riera permet de passer du projectile réel à un effort imposé sur le modèle. Dans le modèle discret, cet effort est imposé à un plateau d'éléments discrets rajouté dans le modèle et en contact avec la dalle. Deux cas d'études sont proposés par la suite soit en utilisant un projectile ayant les dimensions de celui utilisé lors des essais Meppen (diamètre de 0.8 m), soit avec un

projectile de dimensions plus petites (diamètre de 0.4 m) permettant de localiser davantage les endommagements.

6.3.1.2 Description du modèle

Le modèle discret est réalisé pour modéliser l'ensemble de la structure. Le modèle discret complet est constitué de 184 748 éléments en béton, de 66 308 éléments en acier (Figure 6.8) et de 349 éléments pour le «plateau» permettant d'appliquer les charges équivalentes à l'impact. Soit un modèle de 251 405 éléments discrets (Figure 6.7). Le modèle mixte est obtenu en effectuant une coupe cylindrique de diamètre 5 m dans le premier modèle. Cette méthode permet de s'assurer que la discrétisation est identique dans les deux approches et que les éléments discrets occupent la même place. Le modèle mixte est composé de 75 300 éléments discrets béton, de 27 517 éléments acier, 349 éléments du plateau, soit 103 166 et le modèle éléments finis est composé de 4928 tétraèdres et 6 352 nœuds.

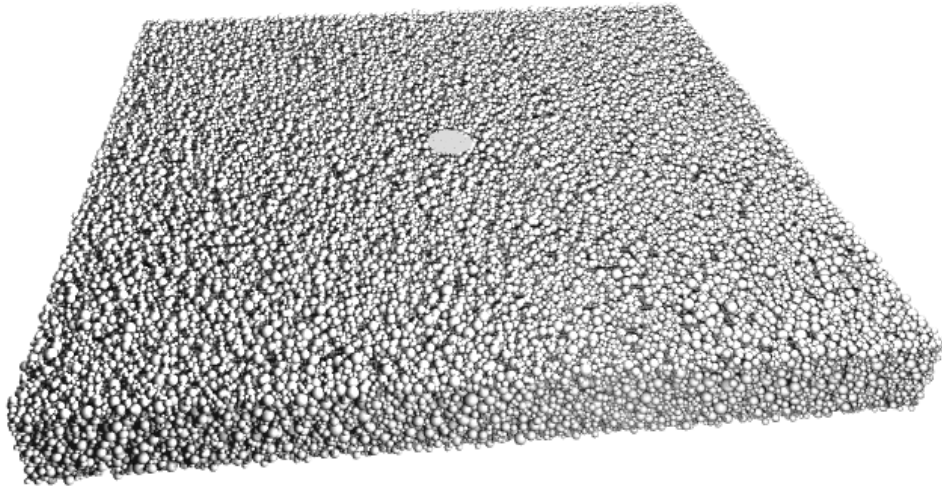
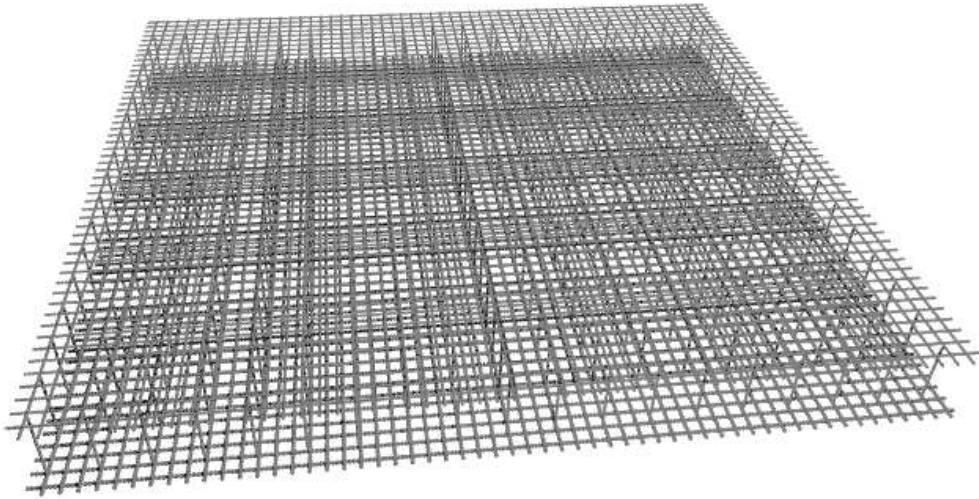
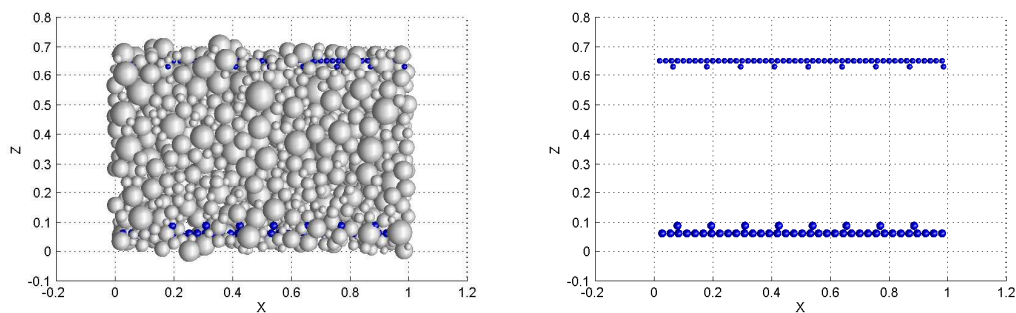


FIG. 6.7 – *Discrétisation discrète*

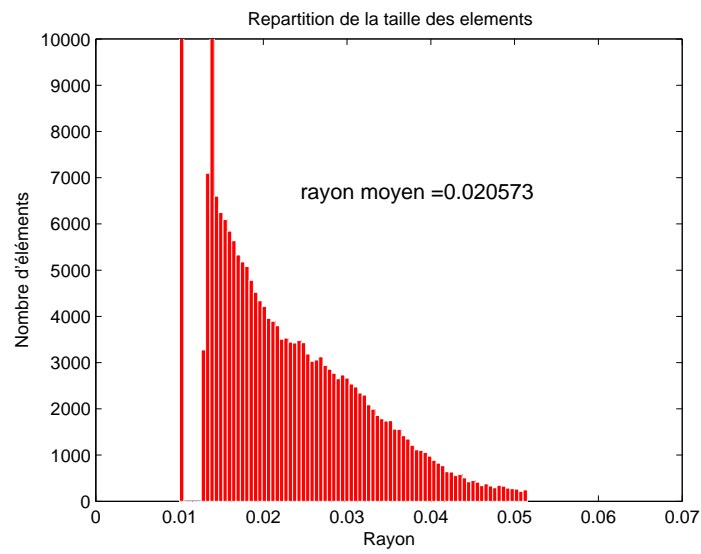
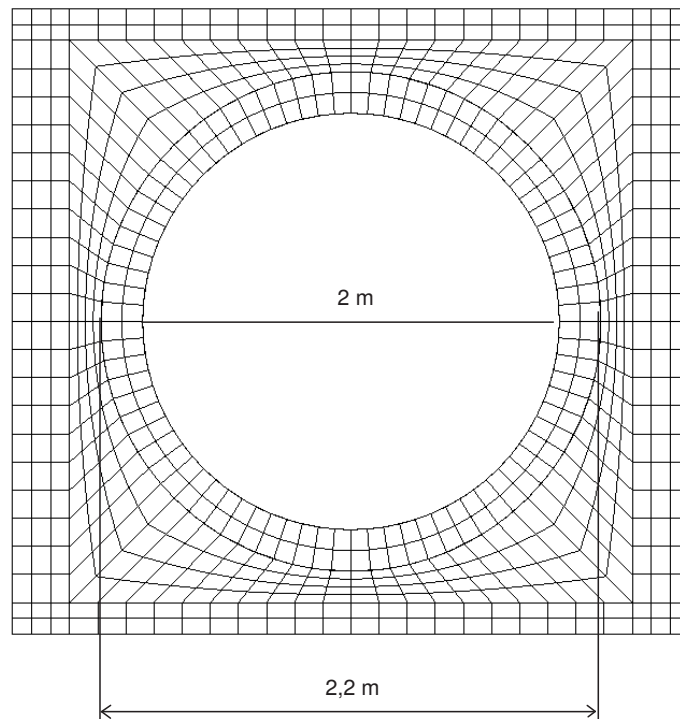
La figure 6.9 permet de se rendre compte de la taille de la discrétisation dans l'épaisseur de la dalle. La distribution des tailles des éléments discrets est présentée sur la figure 6.10. Elle conduit à un rayon moyen d'environ 20 cm pour une compacité moyenne de 0,55. Le modèle continu et le maillage éléments finis sont définis par la figure 6.11. La taille de la zone endommagée est difficile à prévoir *a priori* mais des outils sont cependant faciles à mettre en place pour vérifier nos hypothèses, ceux-ci sont le comportement des éléments discrets proches de la zone de recouvrement où le niveau de contrainte atteint dans les éléments finis. La zone de recouvrement est définie sauf mention contraire par deux couches de recouvrement.

FIG. 6.8 – *Définition des armatures*

(a) Zoom sur la discrétisation dans l'épaisseur du modèle discret

(b) Vue des armatures

FIG. 6.9 – *Vue en coupe de la discrétisation*

FIG. 6.10 – *Distribution de taille du modèle discret complet*FIG. 6.11 – *Définition du maillage éléments finis*

6.3.2 Processus d'identification

L'identification des paramètres locaux s'effectue ensuite à l'aide du processus défini précédemment. Tout d'abord, les rayons d'interaction des éléments béton et acier sont réglés afin d'obtenir une coordinence de 12 pour l'ensemble de l'ouvrage. Un échantillon représentatif est découpé dans le modèle discret. Ses dimensions sont de $1,5 \times 0,7 \times 0,7 \text{ m}^3$ pour un nombre d'éléments de 6 873.

Ensuite, les essais simples de traction et de compression sont effectués en affectant aux armatures les propriétés du béton (sauf le rayon d'interaction). Ces essais permettent de régler correctement les paramètres discrets (Tables 6.2, 6.3) afin de retrouver les propriétés macroscopiques de la rupture.

ρ	E	ν	f_c	f_t	ϵ_c
$kg.m^{-3}$	GPa		MPa	MPa	%
2500	30	0.2	38	5.3	0.2

TAB. 6.2 – Données expérimentales béton (Essai II)

ρ	E	ν	σ_e	σ_p	ϵ_{max}
$kg.m^{-3}$	GPa		MPa	MPa	%
7600	210	0.2	422	505	7

TAB. 6.3 – Données expérimentales acier (Essai II)

ρ	E	ν	T	C_0	ς	Φ_i	Φ_c	γ
$kg.m^{-3}$	GPa		MPa	MPa		°	°	γ
2500	30	0.25	3.3	4	42	15	15	1.5

TAB. 6.4 – Paramètres locaux des éléments béton

ρ	E	ν	T	C_0	ς	Φ_i	Φ_c	γ	ϵ_{max}
$kg.m^{-3}$	GPa		MPa	MPa		°	°	γ	
7800	170	0.25	400	4	120	15	15	1.1	7

TAB. 6.5 – Paramètres locaux des éléments acier

Pour le béton armé, l'identification des paramètres du béton est réalisée en affectant aux éléments acier les propriétés du béton. On obtient ainsi les courbes contraintes/déformations pour des simulations de compression et de traction quasi-statiques (6.12). Le comportement très ductile en compression est lié à la rupture pilotée en déformation sur les liens entre les éléments acier de 7%. Ces essais quasi-statiques sont menés jusqu'à la rupture dont les états d'endommagement sont présentés sur la figure 6.13.

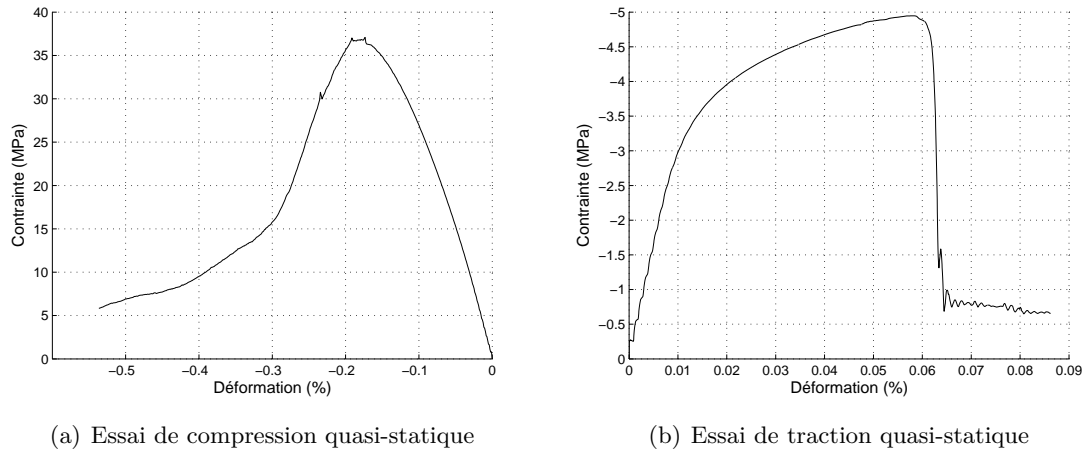


FIG. 6.12 – Courbes contrainte/déformation pour le modèle Meppen

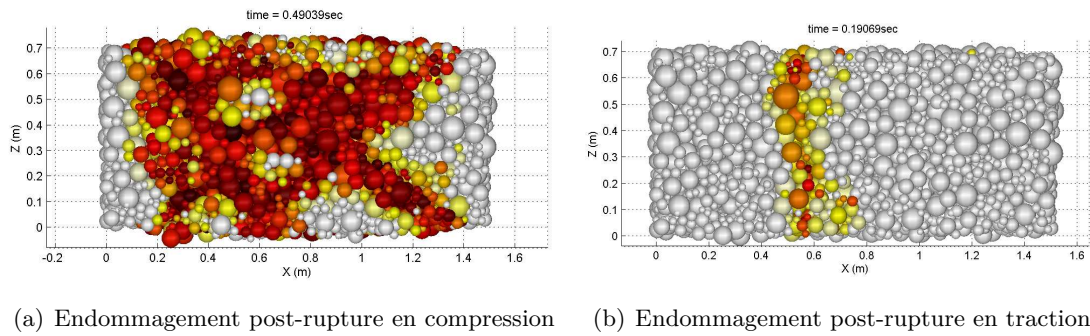


FIG. 6.13 – État d'endommagement post-rupture

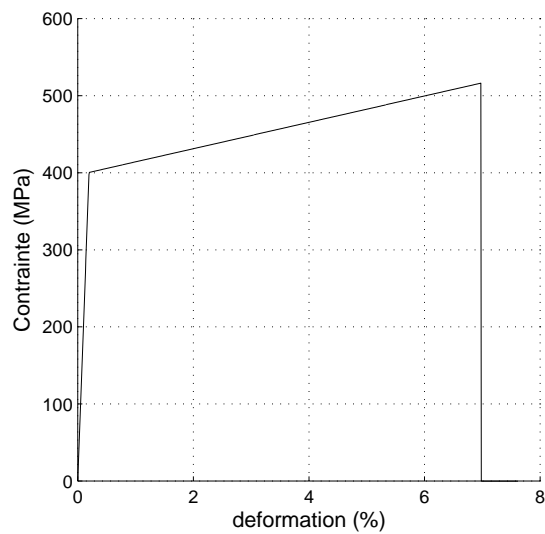


FIG. 6.14 – Courbe contrainte/déformation pour les armatures

6.3.3 Impact faiblement endommageant

Dans un premier, nous souhaitons comparer les réponses entre le modèle discret et l'approche couplée pour un impact conduisant à un endommagement modéré. Le diamètre du plateau piloté en force est de 0.8 m . L'intensité de la force sur le plateau est présentée sur la figure 6.15, elle est répartie de manière homogène sur l'ensemble des éléments du plateau.

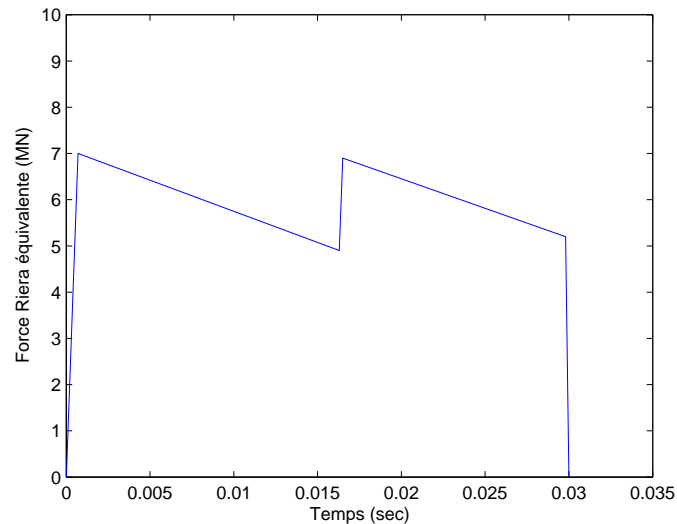


FIG. 6.15 – Évolution du chargement au cours du temps

L'ensemble des paramètres du modèle est maintenant défini, nous sommes en mesure de comparer les simulations. Nous proposons de comparer le déplacement d'un point proche de l'impact défini dans les essais Meppen par le point W5 (Figure 6.16) au cours du temps et pour les différentes approches, le modèle purement discret et le modèle mixte ED/EF.

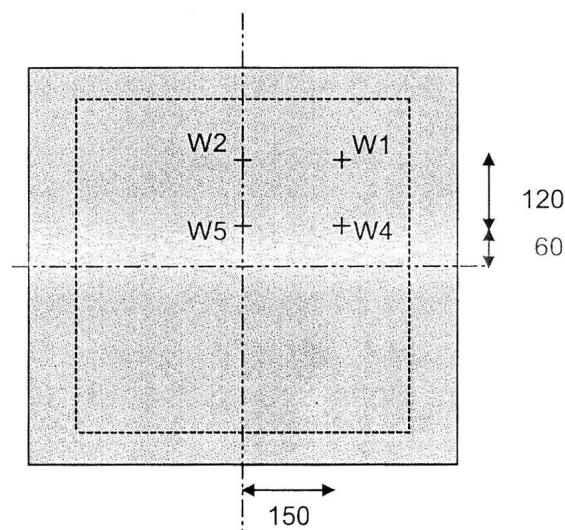


FIG. 6.16 – Localisation des points d'analyse des déplacements

Pour être en mesure de connaître l'origine des différents écarts, il est nécessaire de savoir quantifier certains phénomènes.

Influence des conditions aux limites du modèle discret

Pour pouvoir comparer la réponse d'un modèle discret avec le modèle éléments finis, il faut s'assurer que la modélisation des conditions aux limites entre les deux approches est équivalente. En fonction des résultats, on pourra choisir de mettre une couche d'éléments finis au niveau des appuis pour s'assurer de l'équivalence (Figure 6.17). Si cette couche est suffisamment petite, elle n'influera pas la réponse.

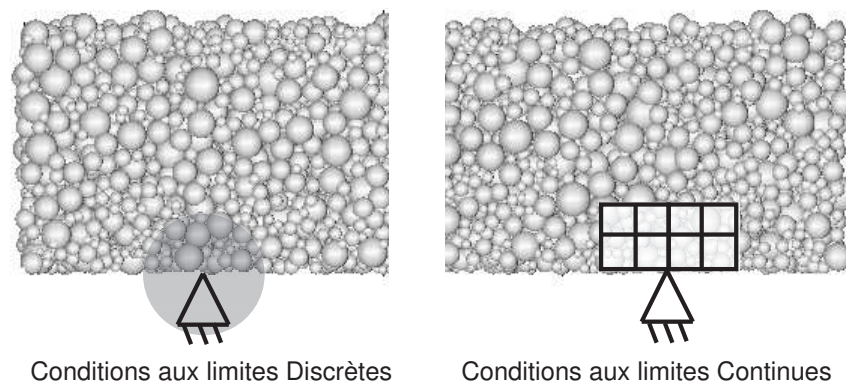


FIG. 6.17 – Modélisation des conditions aux limites pour le modèle purement discret

La figure 6.19 compare un modèle purement discret avec des conditions aux limites pilotées directement sur les éléments discrets avec un modèle quasi-purement discret avec des conditions pilotées en éléments finis (le rapport entre le volume du discret et le volume des éléments finis est inférieur à 50). Les différentes modélisations des conditions d'appuis sont représentées sur la figure 6.17. Pour le pilotage directement sur les éléments discrets, tous les éléments discrets dont le centre est compris dans un cylindre centré sur la position des conditions aux limites théoriques sont bloqués. Le rayon du cylindre est choisi par itération en faisant varier le facteur entre le rayon du cylindre et le rayon moyen de l'échantillon. Si ce rayon est trop faible, peu de liens doivent reprendre les réactions d'appui ce qui conduit à la rupture des éléments discrets bloqués. S'il est trop grand, nous changeons les conditions aux limites d'un comportement linéique vers un comportement surfacique. Un rayon de 4.5 fois le rayon moyen semble bien adapté (Figure 6.18).

Une source d'erreurs entre le modèle couplé et le modèle discret peut provenir du fait que les éléments finis restent linéaires alors que les éléments discrets peuvent s'endommager. Aussi il est préférable de conserver des conditions aux limites en éléments finis pour tous les cas de chargement. Pour un cas faiblement endommageant, la figure 6.19 montre que pour les deux cas de conditions aux limites, les réponses sont quasiment identiques. Pour la suite et sauf mention contraire, nous conservons des conditions aux limites modélisées par éléments finis et bien que cela revienne à un modèle très légèrement couplé, nous considérons que cette approche est la réponse du modèle purement discret.

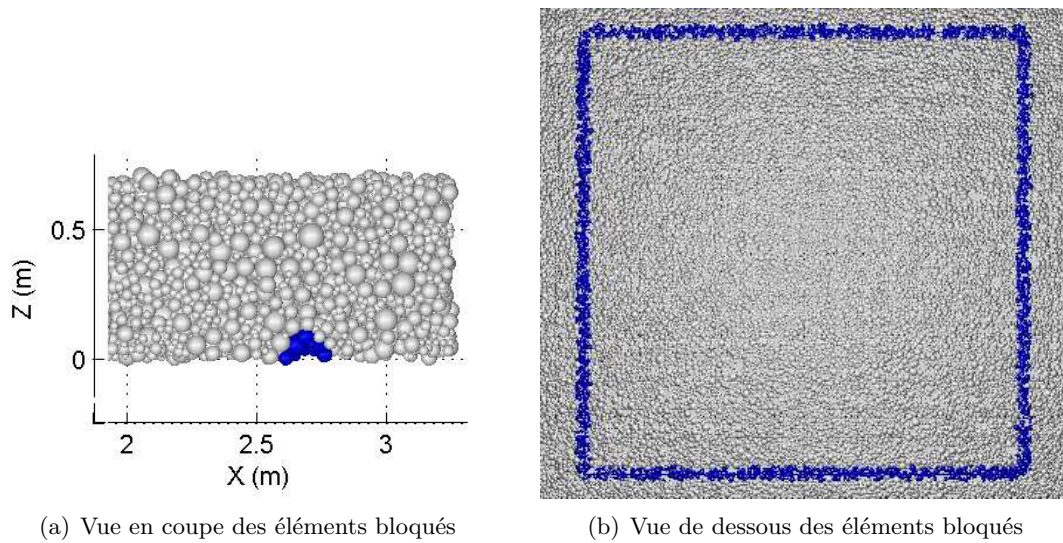


FIG. 6.18 – Conditions aux limites discrètes avec un rayon de 4.5 fois supérieur au rayon moyen

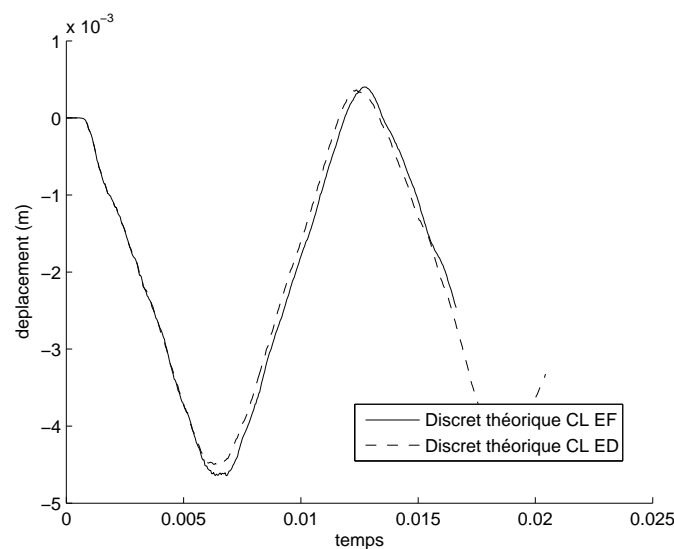


FIG. 6.19 – Déplacement du point W5 au cours du temps pour différentes conditions aux limites

Modèle discret équivalent

Dans le cas général, tous éléments discrets peuvent avoir un comportement non-linéaire. Pour pouvoir comparer notre approche couplée avec le modèle discret, il serait préférable d'utiliser un modèle discret qui a les mêmes propriétés que le modèle couplé. Ainsi les éléments discrets du modèle uniquement discret qui se trouve coïncider dans l'approche couplée avec des éléments finis, doivent avoir un comportement linéaire car les éléments finis ont un comportement linéaire. Aussi nous appelons modèle discret équivalent, l'approche purement discrète où la partie représentée dans le modèle couplé par des éléments finis, est modélisée par des éléments discrets à comportement linéaire (les interactions sont modélisées par des ressorts linéaires).

Même si les tailles du modèle couplé sont adaptées au chargement (partie éléments finis suffisamment éloignée de l'impact), le modèle discret équivalent est nécessaire car le comportement non-linéaire des éléments discrets peut provenir de différents phénomènes : des conditions aux limites trop petites, une porosité localement trop importante ou des conditions de chargement conduisant à un endommagement diffus. Si ces phénomènes ont lieu dans la partie représentée avec le modèle couplé par des éléments finis, seul le modèle discret équivalent permettra de comparer la méthode discrète et la méthode de couplage.

Résultats comparés des différents modèles

La figure 6.20 présente le déplacement du point W5 au cours du temps pour les différents modèles présentés précédemment. Les écarts entre l'approche couplée et le modèle purement discret se limitent à quelques pour-cents. Le modèle discret équivalent montre la présence très limitée de non-linéarités au delà de la zone de recouvrement.

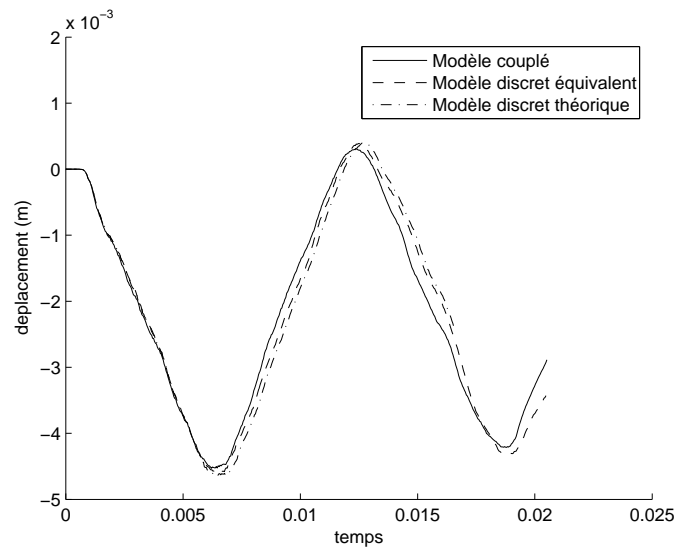
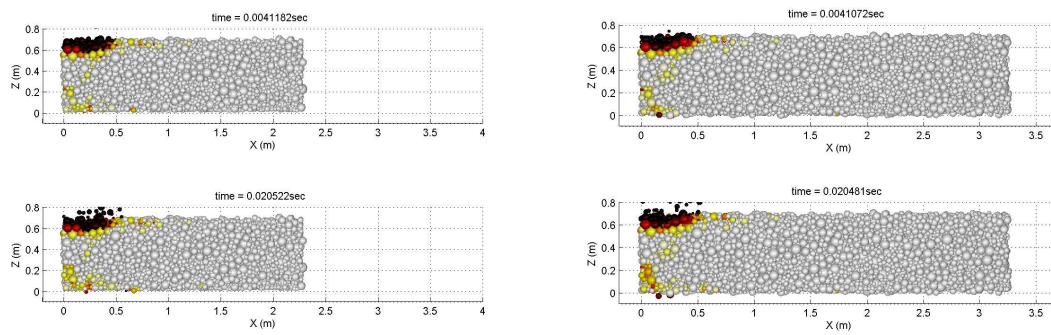


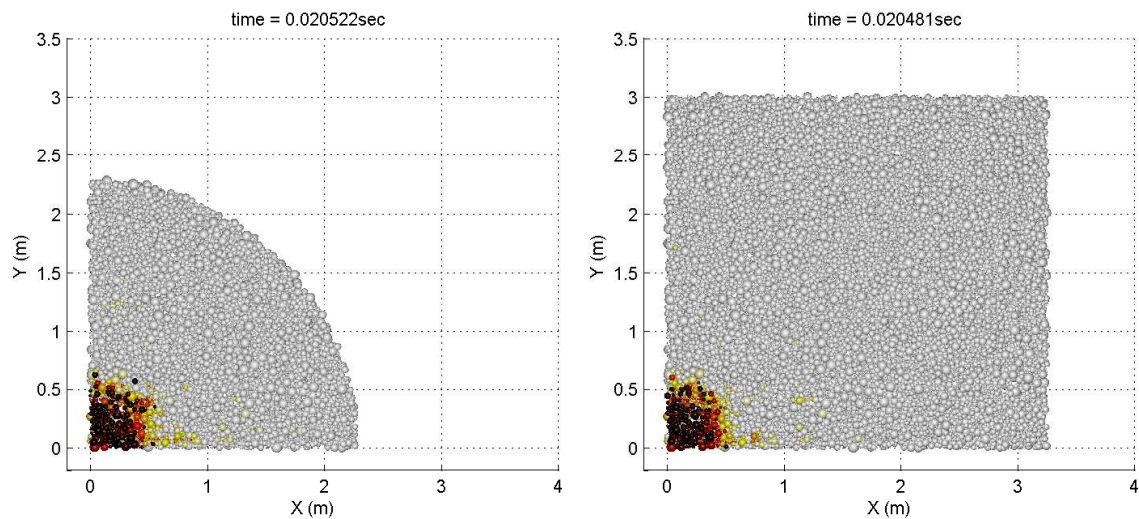
FIG. 6.20 – Comparaison entre les différents modèles de simulation

La figure 6.21 compare les états d'endommagement pour l'approche couplée et le modèle discret équivalent à deux instants différents dans une vue en coupe passant par le centre de l'impact. La figure 6.22 présente une vue de dessus de l'état d'endommagement final. Les états d'endommagement de ces deux modèles sont identiques.



(a) Réponse en endommagement pour le modèle couplé (b) Réponse en endommagement pour le modèle discret équivalent

FIG. 6.21 – Comparaison des états d'endommagement en coupe à deux instants différents



(a) Réponse en endommagement pour le modèle couplé (b) Réponse en endommagement pour le modèle discret équivalent

FIG. 6.22 – Comparaison des états d'endommagement, vue de dessus en fin de simulation

Une estimation des premières fréquences propres est obtenue par une analyse modale effectuée sur le logiciel I-deas (Figure 6.23). Les deux premières fréquences propres sont de 72 Hz et 160 Hz (sans armatures). Ces valeurs sont à comparer aux valeurs des différents modèles. La première fréquence propre peut être estimée avec la réponse en déplacement d'un point par exemple W5 (Figure 6.20). Les modèles couplés et purement discrets estiment la première fréquence de l'ordre de 77 Hz. Ces valeurs sont à prendre avec précaution car elles sont obtenues alors que le chargement est encore présent et avec une fréquence calculée sur une seule période.

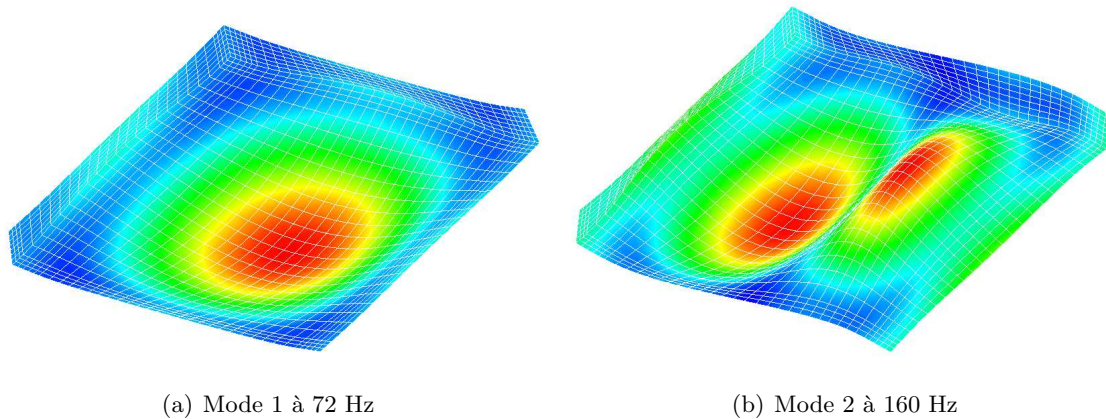


FIG. 6.23 – *Analyse modale éléments finis*

Études complémentaires

Les simulations précédentes utilisent deux couches d'éléments finis pour définir la taille de la zone de recouvrement. Si les cas de test du modèle couplé ne semblent pas montrer une grande dépendance du modèle aux nombres de couche de recouvrement à partir du moment que tous les éléments finis contiennent suffisamment d'éléments discrets, il est cependant possible de vérifier ce résultat sur cet exemple d'impact. La figure 6.24 compare la réponse du modèle entre deux approches couplées, la précédente avec deux couches de recouvrement et une approche avec un couplage sur une seule couche. Les écarts sont effectivement mineurs.

De même, nous pouvons nous intéresser à la dépendance de la réponse à la taille du maillage éléments finis. La figure 6.25 compare la réponse du point W5 pour trois maillages différents. Le maillage intermédiaire correspond au maillage présenté sur la figure 6.11. Les deux autres maillages sont environ 50% plus fin ou 50% plus grossier.

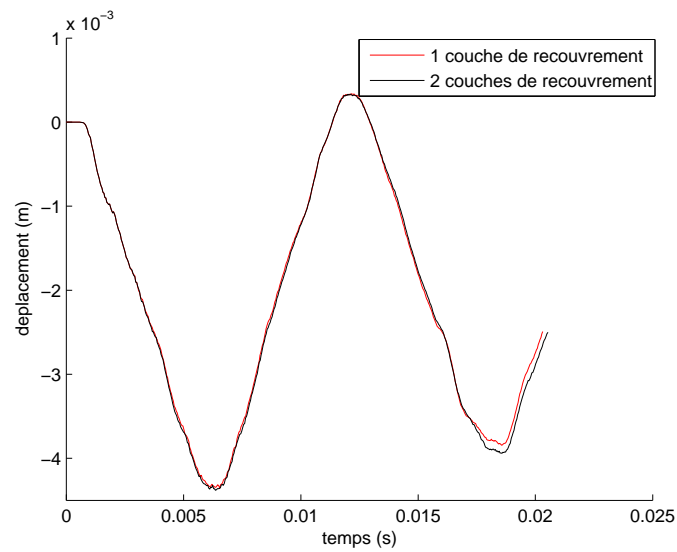


FIG. 6.24 – Influence du nombre de couche de recouvrement

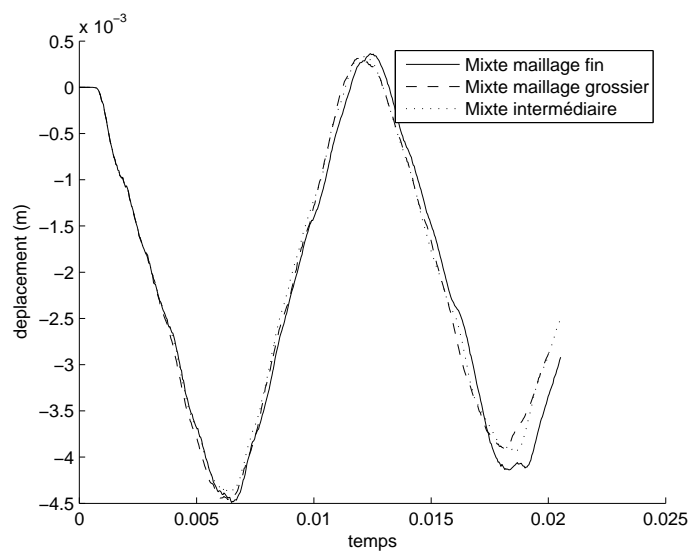


FIG. 6.25 – Influence du maillage EF

6.3.4 Impact fortement non-linéaire

Si le cas d'impact précédent présente des résultats de simulation très satisfaisant, la sollicitation d'impact appliquée est peu sévère et n'aboutit pas à la perforation de la dalle de béton armé. Intéressons-nous donc à la simulation d'impact plus sévère. Pour que la taille de notre modèle éléments finis soit suffisamment représentative des approches couplées envisagées, nous choisissons de diminuer la taille de l'impact au diamètre de $0,4\text{ m}$ au lieu de $0,8\text{ m}$ précédemment. D'autre part, l'intensité de la force est augmentée d'un facteur 2.25. Ces conditions permettent un endommagement important et assez localisé. Le reste du modèle est inchangé.

Comme précédemment, les résultats sont comparés entre les différentes approches. Nous nous intéressons au déplacement du point W5 au cours du temps (Figure 6.26) et de l'évolution de l'état d'endommagement à différents instant (Figures 6.27 et 6.28).

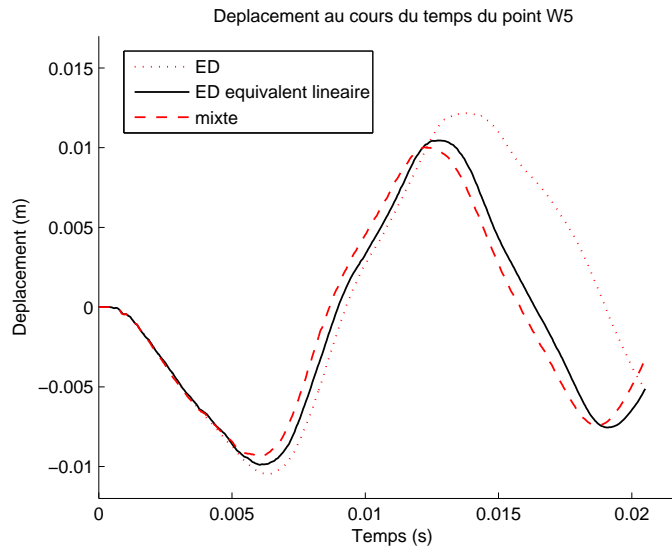


FIG. 6.26 – *Déplacement du point W5 au cours du temps*

Les différences de réponse en déplacement (Figure 6.26) entre l'approche purement discrète et l'approche discrète équivalente montrent que pour cette application, des phénomènes non-linéaires ont lieu au-delà de la zone de recouvrement. Le modèle couplé doit alors être comparé au modèle discret équivalent. Il faudra pour s'affranchir de ce modèle développer une méthode de couplage avec des éléments finis non-linéaires. Cependant la comparaison entre le modèle discret équivalent et le modèle couplé montre que pour ces cas de très fortes discontinuités amenant la perforation de la structure, le modèle couplé présente des résultats entièrement en accord avec la réponse discrète. Ainsi le couplage ne modifie pas la réponse d'une approche uniquement constituée d'éléments discrets.

De même, les comparaisons de l'évolution des états d'endommagement (Figures 6.27 et 6.28) montrent que l'ouvrage a le même comportement quel que soit le modèle utilisé. Cette étude valide donc l'aptitude de la méthode couplée à étendre l'utilisation des éléments discrets à l'échelle des ouvrages.

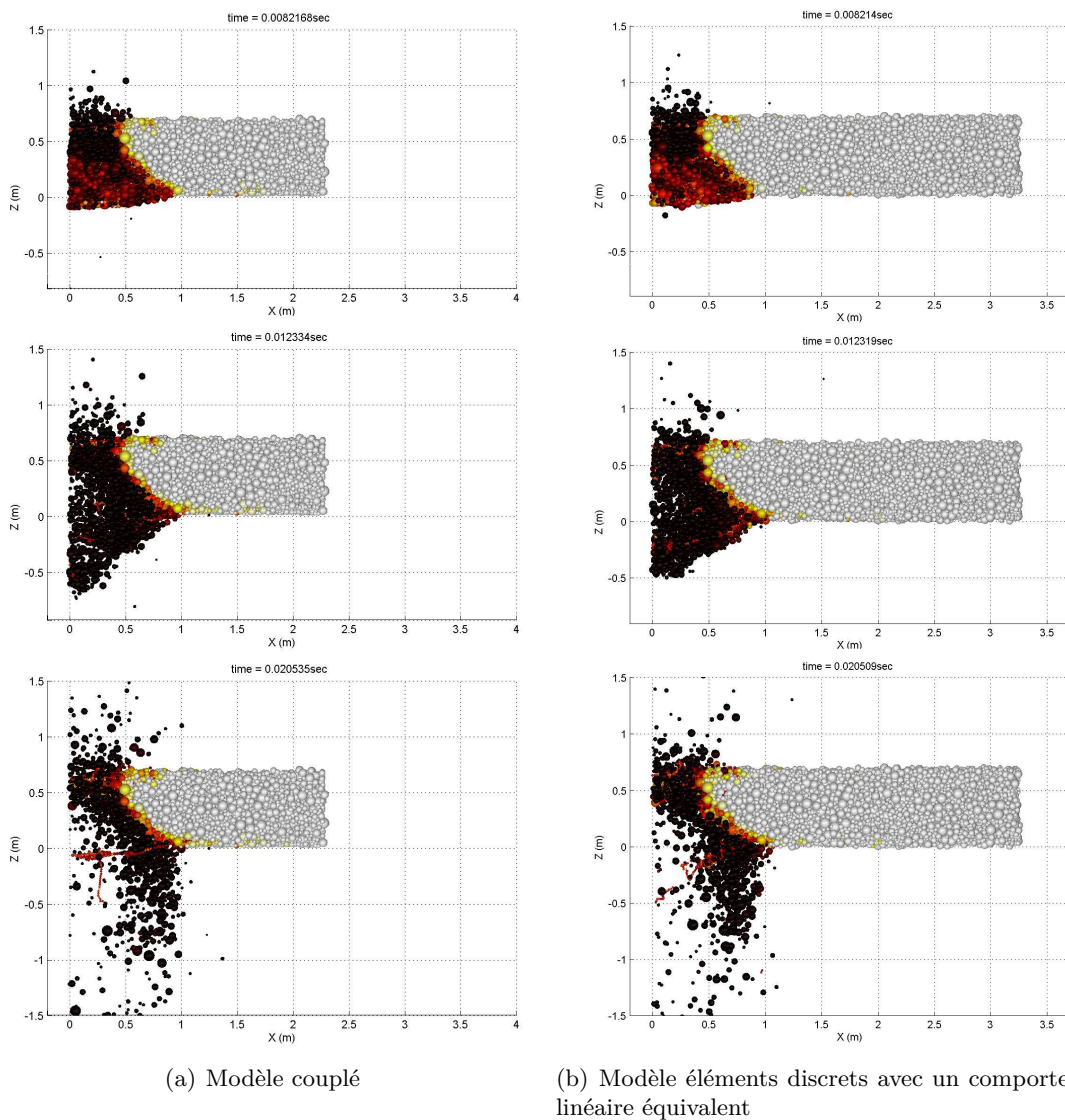
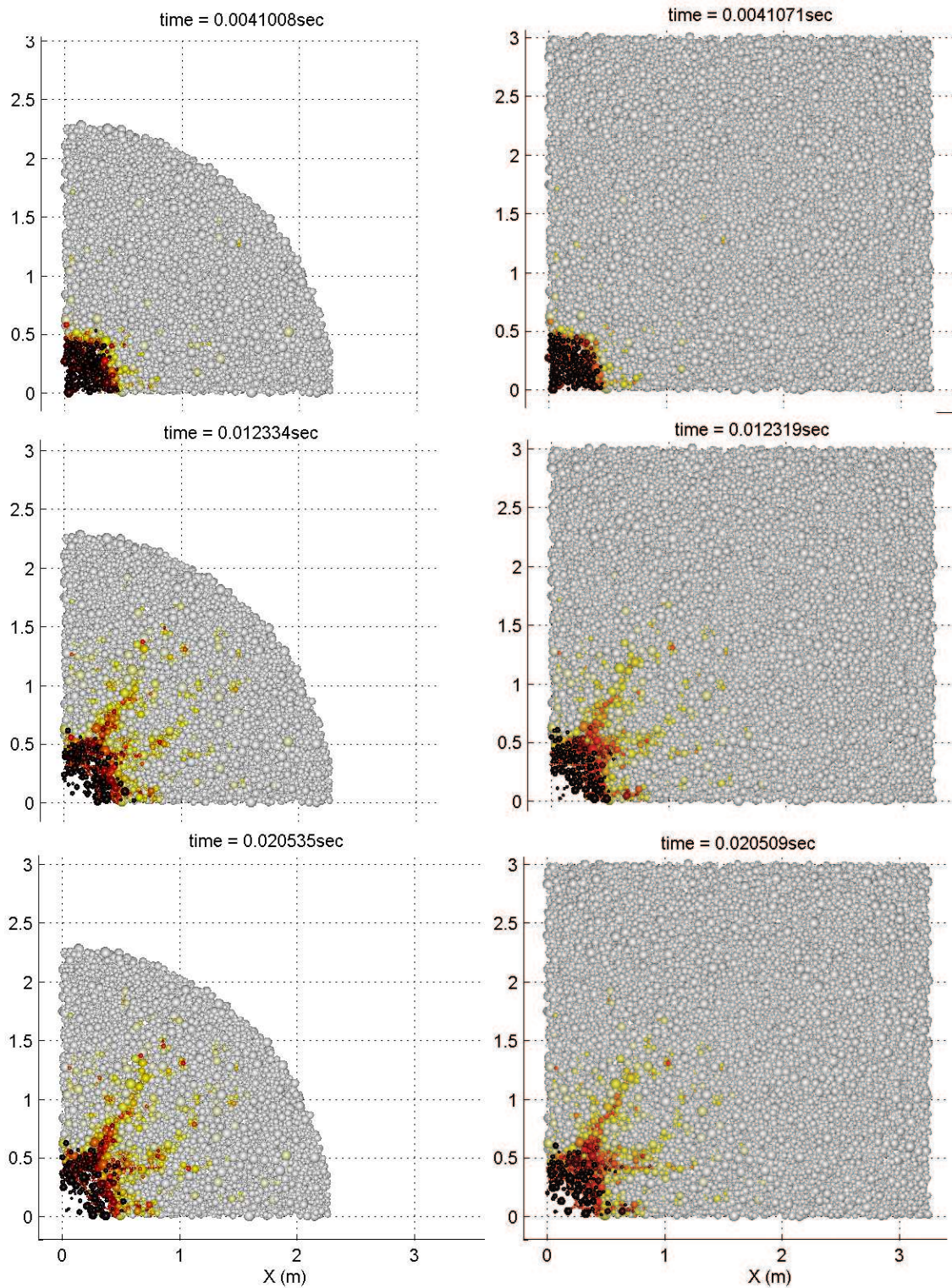


FIG. 6.27 – Évolution comparée de l'endommagement au cours de la simulation



(a) Réponse en endommagement pour le modèle couplé

(b) Réponse en endommagement pour le modèle discret équivalent

FIG. 6.28 – Comparaison des états d'endommagement, vue de dessus en fin de simulation

Conclusions et perspectives

Les recherches actuelles sur la modélisation des matériaux cohésifs par des méthodes discrètes (éléments discrets, lattice, ...) montrent bien la pertinence de ces approches pour modéliser et comprendre le comportement à la rupture des matériaux cohésifs. Rendre ces méthodes applicables à l'échelle de l'ouvrage est un des axes de développement. Ce développement est nécessaire pour améliorer la simulation des structures présentant des zones fortement sollicitées présentant des phénomènes discontinus qui seront très bien modélisées par ces approches. Ces applications démarrées en interne au laboratoire 3S-R sont aujourd'hui soutenues par des acteurs industriels qui nous permettent de poursuivre ces développements et nous permettrons certainement d'interagir autour d'applications plus concrètes.

Je propose de revenir dans cette partie sur les avancées majeures de ces travaux, puis de proposer des développements nécessaires à une utilisation industrielle.

7.1 Apports majeurs de ces travaux

7.1.1 Définition du modèle discret

Concernant le modèle discret, deux points sont fondamentaux afin de prédire un comportement représentatif de l'expérimentation. La **fiabilité du processus d'identification**, elle passe par la définition d'une grandeur constante qui est le nombre de contact moyen par éléments discrets internes, coordinence interne fixée à 12 et par la mesure de déformations fiables et reproductibles. Le deuxième point est la **qualité de la génération du désordre**. Les nouveaux outils disponibles utilisant un mailleur tétraédrique semblent répondre aux besoins et permettent la prise en compte de géométries complexes nécessaire à la définition d'un ouvrage en béton armé. Toutefois, le comportement en flexion dépend fortement de la distribution des éléments dans l'épaisseur et cette étape n'est pas optimisée pour des struc-

tures minces de grandes tailles. Une solution dans ces conditions consiste à superposer les armatures sur la discrétisation désordonnée du béton. Cette approche permet de réduire les incertitudes sur l'épaisseur réelle du modèle. En revanche, elle est limitée dans la représentation du comportement post-rupture.

7.1.2 Modèle de couplage

La méthode de couplage utilise une zone de recouvrement sur laquelle l'énergie totale est pondérée entre chacun des modèles éléments discrets et éléments finis. Les relations de couplage en déplacements et en rotations sont introduites par une méthode de pénalité dont les coefficients sont adaptés à chacun des degrés de liberté. Les coefficients de pénalités sont calculés à partir d'une méthode lagrangienne classique avec multiplicateurs de Lagrange, méthode qui sera ensuite simplifiée. Cette approche permet également de découpler les équations de couplage liées aux degrés de liberté de la zone de recouvrement.

7.1.3 Couplage des rotations discrètes

Bien que les rotations discrètes doivent être couplées aux degrés de liberté des éléments finis et en particulier à la partie antisymétrique du gradient de la transformation, il apparaît que la prise ou non en compte de ce couplage des rotations n'a que peu d'influence sur la réponse en déplacement du modèle couplé. D'autre part, si les couplages en rotation sont envisageables sous l'hypothèse des petites perturbations, il n'en est pas de même dès lors que l'on s'intéresse à un couplage avec des éléments finis présentant de grands déplacements.

7.1.4 Prise en compte des éventuelles réflexions d'ondes

Une partie du travail présenté concerne les méthodes d'atténuation des ondes de hautes fréquences supérieures à la fréquence de coupure de la discrétisation des éléments finis. Deux approches sont proposées :

- l'une utilisant les équations liées à la méthode de couplage par pénalité. La réduction des coefficients de pénalité (ou des multiplicateurs de Lagrange) permet de réduire fortement les ondes réfléchies. Cette relaxation des coefficients de pénalité permet d'atténuer les hautes fréquences.
- la deuxième approche consiste à utiliser un amortissement visqueux de Rayleigh proportionnel à la raideur. Ce type d'amortissement présente une forte atténuation des hautes fréquences et modifie peu les basses fréquences du signal. En utilisant une amortissement progressif sur les couches discrètes de la zone de recouvrement, il est possible d'atteindre des taux d'atténuation très importants.

L'utilité de ces méthodes pour nos applications d'impact est discutable, tant par la difficulté de régler les paramètres d'atténuation avec le modèle discret désordonné (relaxation ou amortissement), que par la difficulté à connaître correctement le contenu fréquentiel des impacts sur structure.

7.1.5 Simulation d'impact

Les applications d'impact sur un ouvrage en béton ou en béton armé sont traitées par comparaison entre un modèle théorique constitué uniquement d'éléments discrets et le modèle couplé. De cette manière, nous comparons des données comparables avec le minimum de paramètres inconnus. Cette approche nous permet également de valider les avantages de la méthode de couplage. La méthode de couplage proposée ne modifie pas de manière significative la réponse du modèle purement discret considérée par les précédentes études comme représentative du comportement des structures. Elle permet également un gain de temps très important par : un nombre de degrés de liberté réduit, un plus faible nombre d'éléments discrets limitant les lourdes étapes de recherche des contacts, la facilité de l'obtention de la géométrie grâce à des outils robustes (logiciel de maillage) et une approche à deux échelles de pas de temps adaptées aux deux méthodes.

Les études d'impact sur dalle ont montré que l'approche couplée permet d'obtenir les mêmes résultats qu'un modèle uniquement constitué d'éléments discrets. Ainsi ce travail démontre l'aptitude de la méthode couplée à étendre l'utilisation des éléments discrets à l'échelle des ouvrages sans perdre d'informations sur les déplacements ou les états d'endommagement au cours du temps.

En vue d'applications concrètes sur des ouvrages réels avec des comparaisons expérimentales, l'utilisation de la méthode couplée ne présente pas de difficultés. Les limites proviennent de la définition des approches discrètes pour représenter correctement le comportement en flexion de structures minces de grandes dimensions. Mais quelles que soient les applications traitées, les incertitudes ajoutées par le couplage avec les éléments finis restent faibles tant que la taille de la zone endommagée est respectée.

7.2 Développements à venir

Nous avons montré que la méthode couplée permet de modéliser le comportement d'ouvrages de génie civil. Ce travail est une étape nécessaire au déploiement de ces méthodes et à leur application sur des applications concrètes et utiles aux ingénieurs. Certains points doivent être améliorés, certains sont en cours de développement, d'autres le seront certainement dans les prochaines années.

7.2.1 Discrétisation du modèle discret

La distribution des éléments dans le volume à modéliser joue un rôle majeur et présente des difficultés lors de la présence d'éléments fixes comme c'est le cas des armatures. L'idéal serait d'avoir des discrétisations équivalentes entre les armatures et les éléments de béton, mais cette solution conduit souvent à un nombre d'éléments discrets trop important. La solution proposée superposant les armatures au béton mérite d'être étudiée plus en détail afin de représenter correctement les nouveaux contacts après rupture.

7.2.2 Modèle éléments finis non-linéaires

Certes le caractère fortement discontinu résultant de l'impact est présent uniquement au voisinage de l'impact, cependant les éléments finis même éloignés de l'impact peuvent être soumis à un comportement non-linéaire. Par exemple, les régions proches des conditions aux limites sont généralement soumises à des non-linéarités matérielles. Or cette région doit être modélisée avec précision pour représenter correctement la réponse en déplacement et la réponse vibratoire de l'ouvrage. De plus, le modèle éléments finis actuel est valable sous l'hypothèse des petites perturbations, il doit être étendu aux grandes transformations. La prise en compte des non-linéarités matérielles et géométries dans le modèle éléments finis est nécessaire.

7.2.3 Comportement Acier-Béton

La définition des interfaces acier-béton ne fait pas l'objet d'une étude très détaillée. Des études sur la modélisation du comportement acier-béton à partir des résultats d'essais d'arrachement permettront de proposer un modèle d'interaction spécifique. Les travaux en cours de Jessica Rousseau montrent d'excellentes correspondances expériences/simulations et permettront une meilleure représentation du comportement des armatures dans un ouvrage.

7.2.4 Couplage coque

Pour les structures minces (type dalle), l'approche éléments finis 3D fonctionne. Cependant les gains seraient optimum en utilisant une approche coque largement répandue pour ces structures. Il est alors nécessaire de redéfinir la stratégie de couplage, en particulier dans la prise en compte des rotations.

7.2.5 Modélisation éléments finis du projectile

Les simulations présentées utilisent des conditions aux limites en force estimées par une approche de Riera. Il est dommage d'utiliser une méthode couplée éléments finis éléments discrets et de ne pas être en mesure de modéliser le projectile. Plusieurs options peuvent être envisagées. Une première possibilité est la modélisation d'un projectile rigide. Cette option adaptée pour les très grandes vitesses ne permet pas de modéliser la variation des charges dans le temps. Une deuxième possibilité est la modélisation du projectile en éléments discrets. La prise en compte des contacts est alors automatique, mais il est très difficile de définir le modèle discret qui permettra de représenter les fonctions de chargement. La troisième possibilité et la plus satisfaisante serait de développer les recherches de contact entre éléments finis et éléments discrets pour être en mesure de modéliser le projectile en éléments finis.

Bibliographie

- ALDER, B. J. et WAINWRIGHT, T. E. (1959). Studies in molecular dynamics. i. general method. *J. Chem. Phys.*, 31(2):459–466.
- ALLEN, M. P. et TILDESLEY, D. J. (1987). *Computer Simulation of Liquids*. Oxford University Press, USA.
- AZÉMA, E. (2007). *Étude numérique des matériaux granulaires à grains polyédriques : rhéologie quasi-statique, dynamique vibratoire, application au procédé de bourrage du ballast*. Thèse de doctorat, Université Montpellier 2.
- BAILLY, P. (2004). *Comportement Dynamique des bétons et génie parasismique*, chapitre Modèles de comportement. Hermes-Lavoisier.
- BARDET, J.-P. (1997). Introduction to computational granular mechanics. *In Actes Du Colloque CISM*, Udine.
- BATHE, K. et WILSON, E. (1976). *Numerical Methods in Finite Element Analysis*. Englewood cliffs: Prentice-Hall.
- BELYTSCHKO, T., HUGHES, T. et BATHE, K.-J. (1983). *Computational Methods for Transient Analysis*, volume 1. North-Holland.
- BELYTSCHKO, T. et TABBARA, M. (1996). Dynamic fracture using element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39:923–938.
- BELYTSCHKO, T. et XIAO, S. (2003). Coupling methods for continua model with molecular dynamics. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 1:115–126.
- BENDHIA, H. et RATEAU, G. (2004). The arlequin method as flexible engineering design tool. *Int. J. Num. Meth. Eng.*
- BERRIAUD, C., SOKOLOVSKY, A., GUERAUD, R., DULAC, J. et LABROT, R. (1978). Local behavior of reinforced concrete walls under missile impact. *Nuclear Engineering and Design*, 45:457–469.
- BISCHOFF, P. et PERRY, S. (1991). Compressive behaviour of concrete at high strain rates. *Materials and structures*, 24:425–450.
- BRARA, A. (1999). *Etude Expérimentale de la Traction Dynamique Du Béton Par Écaillage*. Thèse de doctorat, Université de Metz, in french.
- BROUGHTON, J., ABRAHAM, F., BERNSTEIN, N. et KAXIRAS, E. (1999). Concurrent coupling of length scales: Methodology and application. *Physical review B*, 60(4).

- CALVETTI, F., COMBE, G. et LANIER, J. (1997). Experimental micromechanical analysis of a 2d granular material: Relation between structure evolution and loading path. *Mechanics of cohesive-frictional Materials*, 2(2):121–163.
- CAMBORDE, F. (1999). *Modélisation Du Comportement Dynamique Du Béton - Application Aux Problèmes D'impacts et D'explosions*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Nantes, in french.
- CAMBORDE, F., MARIOTTI, F. et DONZÉ, F. (2000). Numerical study of rock and concrete behaviour by discrete element modelling. *Computers and geotechnics*, 27(4):225–247.
- CAMBOU, B., DUBUJET, P., EMERIAULT, F. et SIDOROFF, F. (1995). Homogenization for granular materials. *Eur. J. Mech., A/Solids*, 14, n°2:255–276.
- CAMBOU, B. et JEAN, M. (2001). *Micromécanique Des Matériaux Granulaires*, chapitre Simulation numérique discrète. Hermes Sciences, Paris.
- CELIA, M. et GRAY, W. (1992). *Numerical methods for differential equations: fundamental concepts for scientific and engineering applications*. Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- CHANG, C. S. et LIAO, C. L. (1994). Estimates of elastic modulus for media of randomly packed granules. *Applied Mechanics review*, 47(1, part 2):197–206.
- COMBE, G. (2001). *Origine géométrique du comportement quasi-statique des assemblages granulaires denses: étude par simulation numérique*. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris.
- COURANT, R., FRIEDRICHS, K. et LEWY, H. (1928). Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Math. Ann.*, 100.
- CUNDALL, P. (1971). A computer model for simulating progressive large scale movements of blocky rock systems. In *Proceedings of the Symposium of the International Society of Rock Mechanics*, pages 132–150, Nancy, France.
- CUNDALL, P. (1988). Formulation of a three-dimensional distinct element model - part i: A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks. *International journal of rock mechanics Min. Sci. geomech. Abstr.*, 25(3):107–116.
- CUNDALL, P. (1989). Numerical experiments on localization in frictional materials. *ingenieur-archiv*, 59:148–159.
- CUNDALL, P. (1997). *Analytical and Computational Methods in Engineering Rock*, chapitre 4, distinct element models of rock and soil structure, pages 129–163. Allen and Unwin Eds, E.T. London.
- CUNDALL, P., RUEST, M., GUEST, A. et CHITOMBO, G. (2003). Evaluation of schemes to improve the efficiency of a complete model of blasting and rock fracture. In KONIETZKY, H., éditeur: *Numerical Modeling in Micromechanics Via Particle Methods*, pages 107–115, Germany. Balkema.
- CUNDALL, P. et STRACK, O. (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique*, 29(1):47–65.
- CUNDALL, P. et STRACK, O. (1983). Modeling of microscopic mechanisms in granular material. *Mechanics of granular materials: new models and constitutive relations*, pages 137–149.
- CUNDALL, P. A. et HART, R. D. (1992). Numerical modelling of discontinua. *Engineering computations*, 9:101–113.
- CURRAN, D., SEAMAN, L., COOPER, T. et SHOCKEY, D. (1993). Micromechanical model for comminution and granular flow of brittle material under high strain rate. application to penetration of ceramic targets. *international journal of Impact Engineering*, 13(1):53–83.
- CURTIN, W. et MILLER, R. (2003). Atomistic/continuum coupling in computational materials science. *Modelling Simul. Mater. Sci. Eng.*, 11:33–68.

- CUSATIS, G., BAZANT, Z. P. et CEDOLIN, L. (2006). Confinement-shear lattice csl model for fracture propagation in concrete. *Comput.Methods Appl. Mech. Engrg.*
- CUSATIS, G. et PELESSONE, D. (2006). Mesolevel simulation of reinforced concrete structures under impact loadings. In *Proceedings of the EURO-C 2006 Conference on Computational Modelling of Concrete Structures*, Mayrhofen, Tyrol, Austria.
- D'ADDETTA, G., KUN, F. et RAMM, E. (2006). A microstructure-based simulation environment on the basis of an interface enhanced particle model. *Granular Matter*, 8:159–174.
- D'ADDETTA, G., KUN, F., RAMM, E. et HERRMANN, H. (2001). From solids to granulates - discrete element simulations of fracture and fragmentation processes in geomaterials. *Lecture Note in Physics*, 568:231–258.
- DAUDEVILLE, L., DONZE, F., MARIN, P., ROUSSEAU, J. et FRANGIN, E. (2007). Approche discrète de la modélisation du comportement du béton sous fort confinement. Rapport technique, Laboratoire 3S-r.
- DAUX, C., MOËS, N., DOLBOW, J., SUKUMAR, N. et BELYTSCHKO, T. (2000). Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 48:1741–1760.
- DELAPLACE, A. et IBRAHIMBEGOVIC, A. (2006). Performance of time-stepping schemes for discrete models in fracture dynamics analysis. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65:1527–1544.
- DELHOMME, F. (2005). *Etude du comportement sous impact d'une structure âr-blocs en béton armé*. Thèse de doctorat, Université de Savoie.
- DONZÉ, F.-V. (2001). *SDEC (Spherical Discrete Element Code), Version 2.00*. www.geonum.com, France, isrn geonum-nst-2001-03-fr édition.
- DONZÉ, F. V. (2002). Packing spherical discrete elements of unequal size. In *The 15th Engineering Mechanics Division Conference*, Columbia University in the city of New York. ASCE.
- DONZÉ, F. V., MAGNIER, S. A., DAUDEVILLE, L., MARIOTTI, C. et DAVENNE, L. (1999). Numerical study of compressive behaviour of concrete at high strain rates. *Journal of engineering mechanics*, 125(10):1154–1163.
- FOURÉ, B. (1986). *Granulats et bétons légers. Bilan de 10 ans de recherches*. Presses de l'ENPC.
- FOURÉ, B. (2003). Déformations limites des armatures tendues et du béton comprimé pour le calcul sismique des structures. In *VI Colloque national de l'Association Française de génie Para-Sismique*, pages 67–74. AFPS.
- FRIES, T.-P. et MATTHIES, H.-G. (2004). Classification and overview of meshfree methods. Rapport technique, Institute of Scientific Computing, Technical University of Brunswick, Germany.
- GABET, T. (2006). *Comportement triaxial du béton sous fortes contraintes: Influence du trajet de chargement*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier.
- GARY, G. et ZHAO, H. (1996). Measurements of the dynamic behaviour of concrete under impact loading. In *Proceedings of 2nd ISIE'96*, Beijing, China.
- GEORGIN, J., HAIDAR, K., PIJAUDIER-CABOT, G. et REYNOUARD, J.-M. (2005). *Comportement mécanique du béton*, chapitre 3, Modélisation du comportement macroscopique du béton. Hermes-Science.
- GERADIN, M. et DIXEN, D. (1994). *Mechanical Vibrations*, chapitre 7, Direct Time Integration Methods. John Wiley.
- HART, R., CUNDALL, P. et LEMOS, J. (1988). Formulation of a three-dimensional distinct element model - part 2: Mechanical calculations for motion and interaction of a system

- composed of many polyhedral blocks. *International journal of rock mechanics Min. Sci. and geomec. abstr.*, 25:117–125.
- HENTZ, S. (2003). *Modélisation d'une Structure en Béton Armé Soumise à un Choc par la méthode des Éléments Discrets*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier.
- HENTZ, S., DAUDEVILLE, L. et DONZÉ, F. (2002). Discrete element modelling of concrete and identification of the constitutive behaviour. *In The 15th Engineering Mechanics Division Conference*, New York. ASCE.
- HENTZ, S., DAUDEVILLE, L. et DONZÉ, F. (2004). Discrete element modelling of concrete submitted to dynamic loading at high strain rates. *Computers and Structures*, 82:2509–2524.
- HENTZ, S., DONZE, F. et DAUDEVILLE, L. (2005). Discrete element modelling of a reinforced concrete structure submitted to a rock impact. *Italian Geotechnical Journal*, 4:83–94.
- HOOVER, W. G. (2006). *Smooth Particle Applied Mechanics*. World Scientific Pub Co Inc.
- HOPKINSON, B. (1914). A method of measuring the pressure in the deformation of high explosives or by the impact of bullets. *Philosophic Transactions of the Royal Society*, A213:437–452.
- HUANG, H. (1999). *Discrete Element Modeling of Tool-Rock Interaction*. Thèse de doctorat, University of Minnesota.
- IWASHITA, K. et ODA, M. (2000). Micro-deformation mechanism of shear banding process based on modified distinct element method. *Powder Technology*, 109:192–205.
- JEAN, M. (2000). *Simulation Numérique Discrète Des Matériaux Granulaires*, chapitre 4, pages 1–150. Hermes.
- JERIER, J.-F., DONZE, V. F., IMBAULT, D. et DOREMUS, P. (2008a). A geometric algorithm for discrete element method to generate composite materials. *Discrete Element Group for Hazard Mitigation - Annual Report*, 4:1–8.
- JERIER, J.-F., IMBAULT, D., DONZE, V. F. et DOREMUS, P. (2008b). A geometric algorithm based on tetrahedral mesh to generate dense polydisperse sphere packing. *en soumission*.
- JODREY, W. et TORY, E. (1985). Computer simulation of close random packing of equal spheres. *Physical review A*, 32(4):2347–2351.
- JONAS, W., RÜDIGER, E., GRIES, M., RIECH, H. et RÜTZEL, H. (1982). Kinetische grenztragfähigkeit von stahlbetonplatten. Rapport technique RS 162, Hochtief AG.
- KOECHLIN, P. (2007). *Modélisation de comportement membrane-flexion et critère de perforation pour l'analyse de structures minces en béton armé sous choc mou*. Thèse de doctorat, Université Paris VI.
- KOZICKI, J. et DONZÉ, F. (2008). Applying an open-source software for numerical simulations using finite element or discrete modelling methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, submitted:xx–xx.
- KUHN, M. R. et BAGI, K. (2002). Particle rotations in granular materials. *In 15th ASCE Engineering Mechanics Conference*, Columbia University, New-York, NY. ASCE.
- KUSANO, N., AOYAGI, T., AIZAWA, J., UENO, H., MORIKAWA, H. et KOBAYASHI, N. (1992). Impulsive local damage analyses of concrete structure by the distinct element method. *Nuclear engineering and design*, 138:105–110.
- LEPPANEN, J. (2002). *Dynamic Behaviour Concrete Structures subjected to Blast and Fragment Impacts*. Thèse de doctorat, Chalmers University of technology.
- LEPPANEN, J. (2006). Concrete subjected to projectile and fragment impacts: Modelling of crack softening and strain rate dependency in tension. *Int. J. of Impact Engng.*, 32:1828–1841.

- LI, Q., REID, S., WEN, H. et TELFORD, A. (2005). Local impact effects of hard missiles on concrete targets. *Int. J. of Impact Engng.*
- LIAO, C.-L., CHANG, T.-P., YOUNG, D.-H. et CHANG, C. S. (1997). Stress-strain relationship for granular materials based on the hypothesis of best fit. *Int. j. Solids Structures*, 34(31-32):4087–4100.
- LIU, G. R. et JERRY, S. S. Q. (2003). A non-reflecting boundary for analyzing wave propagation using the finite element method. *Finite Elem. Anal. Des.*, 39(5-6):403–417.
- LIU, W., PARK, H., QIAN, D., KARPOV, E., KADOWAKI, H. et WAGNER, G. (2005). Bridging scale methods for nanomechanics and materials. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*
- MAGNIER, S. A. et DONZÉ, F.-V. (1998). Numerical simulations of impacts using a discrete element method. *Mechanics of cohesive-frictional materials*, 3:257–276.
- MALVAR, L. J. et CRAWFORD, J. E. (1998). Dynamic increase factors for concrete. *In 28th Department of Defense Explosives Safety Seminar*, Orlando, FL.
- MAZARS, J. (1984). Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. Mémoire de D.E.A., thèse de doctorat d'état de l'université Paris VI, in french.
- MEGURO, K. et HAKUNO, M. (1989). Fracture analyses of concrete structures by the modified distinct element method. *Structural engineering/earthquake engineering*, 6(2):283–294.
- MESTAT, P., PRAT, M., BISCH, P., MILLARD, A. et PIJAUDIER-CABOT, G. (1999). *Ouvrages En Interaction*. Hermes, AFPC — Emploi des Eléments Finis en Génie Civil.
- MOREAU, J.-J. (1988). *Non Smooth Mechanics and Applications, Vol. 302 Collection CISM, Moreau J.J. and Panagiotopoulos P.D.*, chapitre Unilateral Contact and Dry Friction in Finite Freedom Dynamics, pages 1–82. Springer.
- MUNJIZA, A. (2004). *The Combined Finite-Discrete Element Method*. John Wiley.
- N. MONTEIRO AZEVEDO, J. L. (2006). Hybrid discrete element/finite element method for fracture analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*
- ORTIZ, M. et PANDOLFI, A. (1999). Finite-deformation irreversible cohesive elements for three-dimensional crack-propagation analysis. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 44:1267–1282.
- OWEN, D., PIRES, F., de SOUZA NETO, E. et FENG, Y. (2005). Continuous/discrete strategies for the modelling of fracturing solids. *Nato science series sub III Computer and systems sciences*, 194:230–266.
- PARK, H., KARPOV, E., KLEIN, P. et LIU, W. (2003). The bridging scale for two-dimensional atomistic/continuum coupling. *Philosophical Magazine*.
- PARK, H., KARPOV, E., KLEIN, P. et LIU, W. (2005). Three-dimensional bridging scale analysis of dynamic fracture. *Journal of Computational Physics*, 207:588–609.
- PARK, H. et LIU, W. (2004). An introduction and tutorial on multi-scale analysis in solids. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193:1733–1772.
- PAULTRE, P. (2004). *Dynamique des structures: Application aux ouvrages de génie civil*. Hermes.
- PLASSIARD, J.-P. (2007). *Modélisation par la méthode des éléments discrets d'impacts de blocs rocheux sur structures de protection type merlons*. Thèse de doctorat, université Joseph Fourier, Grenoble.
- POTAPOV, A. A., CAMPBELL, C. S. et HOPKINS, M. A. (1995). A two-dimensional dynamic simulation of solid fracture part II: Examples. *International journal of modern physics C*, 6(3):399–425.
- POTYONDY, D., CUNDALL, P. et LEE, C. (1996). Modelling rock using bonded assemblies of circular particles. *Rock Mechanics*, pages 1937–1944.

- PRADO, E. et VAN MIER, J. (2003). Effect of particle structure on mode I fracture process in concrete. *Engineering Fracture Mechanics*, 70:1793–1807.
- PRAT, M., BISCH, P., MILLARD, A., MESTAT, P. et PIJAUDIER-CABOT, G. (1997). *Calcul Des Ouvrages Généraux de Construction*. Hermes, AFPC Emploi Des Eléments Finis En Génie Civil.
- RAPAPORT, D. C. (1997). *The art of molecular dynamics simulation*. Cambridge university press.
- RATEAU, G. (2003). *Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles: Applications à des problèmes de jonction et de fissuration de structures élancées*. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Paris.
- RIERA, J. (1968). On the stress analysis of structures subjected to aircraft impact forces. *nuclear engineering and design*, 8:415–426.
- RIERA, J. (1980). A critical reappraisal of nuclear power plant safety against accidental aircraft impact. *nuclear engineering and design*, 57.
- ROUSSEAU, J., FRANGIN, E., MARIN, P. et DAUDEVILLE, L. (2007). Some aspects of de/fe combined method: Model identification and combined method. In *COMPLAS 07*, Barcelona.
- SALOT, C. (2007). *Modélisation du Comportement Mécanique d'un Matériau Granulaire Composite par la Méthode des Éléments Discrets*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.
- SAWAMOTO, Y., TSUBOTA, H., KASAI, Y., KOSHIBA, N. et MORIKAWA, H. (1998). Analytical studies on local damage to reinforced concrete structures under impact loading by discrete element method. *Nuclear Engineering and Design*, 179:157–177.
- SCHLANGEN, E. et GARBOCZI, E. (1997). Fracture simulations of concrete using lattice models: Computational aspects. *Engineering fracture mechanics*, 57(2/3):31–332.
- SCHWARTZ, J.-M. (2003). *Calcul Rapide de Forces et de Déformations Mécaniques Non-Linéaires et Visco-Elastiques pour la Simulation de Chirurgie*. Thèse de doctorat, Université de Laval.
- SHIU, W. (2008). *xxx*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique Grenoble, Grenoble.
- SHIU, W., DONZÉ, F. V. et DAUDEVILLE, L. (a1). Penetration prediction of missiles with different nose shapes by the discrete element numerical approach. *Computer and Structures*, x(x):xx–xx.
- SHIU, W., DONZÉ, F. V. et DAUDEVILLE, L. (a2). Compaction process in concrete during missile impact: a dem analysis. *en soumission*, x(x):xx–xx.
- SIBILLE, L. (2006). *Modélisation discrètes de la rupture dans les milieux granulaires*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique Grenoble, Grenoble.
- SUGANO, T., TSUBOTA, H., KASAI, Y., KASHIKA, N., ORUI, S., von RISEMANN, W., BICKEL, D. et PARK, M. (1993). Full scale aircraft impact test for evaluation of impact force. *Nuclear Engineering and Design*, 140:379–385.
- TENG, T., CHU, Y., CHANG, F., SHEN, B. et CHENG, D. (2007). Development and validation of numerical model of steel fiber reinforced concrete for high-velocity impact. *Computational Materials Science*.
- THORNTON, C. et ANTONY, S. J. (2000). Quasi-static shear deformation of a soft particle system. *Powder Technology*, 109:179–191.
- TOOMEY, A. et BEAN, C. J. (1999). Numerical simulation of seismic waves using a discrete particle scheme. *Géophys. J. Int.*, 141:595–604.
- TORRENTI, J. (2002). *Propriétés des bétons*. Hermès.

- WÆSTYN, S., DELAPLACE, A. et KÆCHLIN, P. (2006). Analyse de la rupture dynamique du béton par un modèle discret. *Revue Européenne de Génie Civil*, 10:1281–1308.
- XIAO, S. et BELYTSCHKO, T. (2004). A bridging domain method for coupling continua with molecular dynamics. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 193:1645–1669.
- ZHONG, X. et CHANG, C. (1999). Micromechanical modeling for behavior of cementitious granular materials. *Journal of engineering mechanics*, 125(11):1280–1285.
- ZIENKIEWICZ, O. et TAYLOR, R. (2000). *The Finite Element Method*. Butterworth Heinemann, Oxford, MA.
- ZINEDDIN, M. et KRAUTHAMMER, T. (2007). Dynamic response and behavior of reinforced concrete slabs under impact loading. *Int. J. of impact engineering*.
- ZUKAS, J. A., NICHOLAS, T., SWIFT, H. F., GRESZCUK, L. B. et CURRAN, D. R. (1992). *Impact dynamics*. Krieger Publishing Company, Florida.

