



**HAL**  
open science

# Flots et couvertures par des cycles dans les graphes et les matroïdes

André Raspaud

► **To cite this version:**

André Raspaud. Flots et couvertures par des cycles dans les graphes et les matroïdes. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1985. Français. NNT : . tel-00316071

**HAL Id: tel-00316071**

**<https://theses.hal.science/tel-00316071>**

Submitted on 2 Sep 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

*présentée à*

**l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble**

*pour obtenir le grade de*  
**DOCTEUR DE 3<sup>ème</sup> CYCLE**  
**«Recherche opérationnelle»**

*par*

**André RASPAUD**



**FLOTS ET COUVERTURES PAR DES CYCLES DANS**

**LES GRAPHES ET LES MATROIDES.**



**Thèse soutenue le 5 novembre 1985 devant la commission d'examen.**

<b>C. BENZAKEN</b>	<b>Président</b>
<b>J. FONLUPT</b>	
<b>J.L. FOUQUET</b>	
<b>F. JAEGER</b>	<b>Examineurs</b>
<b>J.M. LABORDE</b>	
<b>C. PAYAN</b>	



**UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE**

**Année universitaire 1982-1983**

**Président de l'Université : M. TANCHE**

**MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.**

**(RANG A)**

**SAUF ENSEIGNANTS EN MEDECINE ET PHARMACIE**

**PROFESSEURS DE 1ère CLASSE**

<b>ARNAUD Paul</b>	<b>Chimie organique</b>
<b>ARVIEU Robert</b>	<b>Physique nucléaire I.S.N.</b>
<b>AUBERT Guy</b>	<b>Physique C.N.R.S.</b>
<b>AYANT Yves</b>	<b>Physique approfondie</b>
<b>BARBIER Marie-Jeanne</b>	<b>Electrochimie</b>
<b>BARBIER Jean-Claude</b>	<b>Physique expérimentale C.N.R.S. (labo de magnétisme)</b>
<b>BARJON Robert</b>	<b>Physique nucléaire I.S.N.</b>
<b>BARNOUD Fernand</b>	<b>Biosynthèse de la cellulose-Biologie</b>
<b>BARRA Jean-René</b>	<b>Statistiques - Mathématiques appliquées</b>
<b>BELORISKY Elie</b>	<b>Physique</b>
<b>BENZAKEN Claude (M.)</b>	<b>Mathématiques pures</b>
<b>BERNARD Alain</b>	<b>Mathématiques pures</b>
<b>BERTRANDIAS Françoise</b>	<b>Mathématiques pures</b>
<b>BERTRANDIAS Jean-Paul</b>	<b>Mathématiques pures</b>
<b>BILLET Jean</b>	<b>Géographie</b>
<b>BONNIER Jean-Marie</b>	<b>Chimie générale</b>
<b>BOUCHEZ Robert</b>	<b>Physique nucléaire I.S.N.</b>
<b>BRAVARD Yves</b>	<b>Géographie</b>
<b>CARLIER Georges</b>	<b>Biologie végétale</b>
<b>CAUQUIS Georges</b>	<b>Chimie organique</b>
<b>CHIBON Pierre</b>	<b>Biologie animale</b>
<b>COLIN DE VERDIERE Yves</b>	<b>Mathématiques pures</b>
<b>CRABBE Pierre (détaché)</b>	<b>C.E.R.M.O.</b>
<b>CYROT Michel</b>	<b>Physique du solide</b>
<b>DAUMAS Max</b>	<b>Géographie</b>
<b>DEBELMAS Jacques</b>	<b>Géologie générale</b>
<b>DEGRANGE Charles</b>	<b>Zoologie</b>
<b>DELOBEL Claude (M.)</b>	<b>M.I.A.G. Mathématiques appliquées</b>
<b>DEPORTES Charles</b>	<b>Chimie minérale</b>
<b>DESRE Pierre</b>	<b>Electrochimie</b>
<b>DOLIQUE Jean-Michel</b>	<b>Physique des plasmas</b>
<b>DUCROS Pierre</b>	<b>Cristallographie</b>
<b>FONTAINE Jean-Marc</b>	<b>Mathématiques pures</b>
<b>GAGNAIRE Didier</b>	<b>Chimie physique</b>

.../...

GASTINEL Noël	Analyse numérique - Mathématiques appliquées
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KAHANE André (détaché DAFCO)	Physique
KAHANE Josette	Physique
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
KUPTA Yvon	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Thermodynamique
LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires I.S.N.
LOUP Jean	Géographie
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAYNARD Roger	Physique du solide
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie (géologie)
MOZIERES Philippe	Spectrométrie - Physique
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (biologie végétale)
PAYAN Jean-Jacques (détaché)	Mathématiques pures
PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIAUX Jacques	Géologie
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
RICHARD Lucien	Biologie végétale
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
SENGEL Philippe	Biologie animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques pures
SOUTIF Michel	Physique
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEN Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VIALON Pierre	Géologie

#### PROFESSEURS DE 2<sup>ème</sup> CLASSE

ADIBA Michel	Mathématiques pures
ARMAND Gilbert	Géographie

.../...

AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
BEGUIN Claude (M.)	Chimie organique
BOEHLER Jean-Paul	Mécanique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKOVE Claude (M.)	Géologie
LE BRETON Alain	Mathématiques appliquées
LONGEQUEUE Nicole	Sciences nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physiques
LUNA Domingo	Mathématiques pures
MASCLE Georges	Géologie
NEMOZ Alain	Thermodynamique (CNRS - CRTBT)
OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude (détaché)	Physique du solide
PIBOULE Michel	Géologie
PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
ROBERT Gilles	Mathématiques pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
ROSSI André	Physiologie végétale
SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
SARROT REYNAUD Jean	Géologie
SAXOD Raymond	Biologie animale
SOUTIF Jeanne	Physique
SCHOOL Pierre-Claude	Mathématiques appliquées
STUTZ Pierre	Mécanique
SUBRA Robert	Chimie
VIDAL Michel	Chimie organique
VIVIAN Robert	Géographie



*Je remercie*

*Monsieur C. BENZAKEN, Professeur à l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble, qui me fait l'honneur de présider le Jury de cette thèse,*

*Monsieur J. FONLUPT, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble,*

*Monsieur J. L. FOUQUET, Chargé de Recherche au C.N.R.S.,*

*Monsieur F. JAEGER, Directeur de Recherche au C.N.R.S., à qui j'exprime toute ma reconnaissance pour m'avoir consacré beaucoup de temps et d'attention,*

*Monsieur J. M. LABORDE, Chargé de Recherche au C.N.R.S., Directeur du Laboratoire Structures Discrètes, qui m'a apporté un soutien bienveillant et efficace pendant toute la réalisation de ce travail,  
Monsieur C. PAYAN, Directeur de Recherche au C.N.R.S.,*

*d'avoir accepté de faire partie du Jury.*

*Je remercie les membres de l'équipe du Laboratoire Structures Discrètes pour leur sympathique accueil.*

*Je remercie les collègues et amis du Centre Universitaire de Tizi Ouzou pour l'aide aussi bien morale que matérielle qu'ils m'ont prodiguée lors de mon long séjour en Algérie.*

*Je remercie le Service de Reprographie pour l'excellente qualité du tirage.*



*A Saskia, Martin et Laurent.*



## TABLE DES MATIERES

	Pages
<b>INTRODUCTION</b> .....	3
<b>CHAPITRE 1: COUVERTURES DES GRAPHS PAR DES CYCLES</b> .....	7
1. Définitions et notations .....	9
1.1. Rappels sur les graphes .....	9
1.2. Graphes orientés .....	10
1.3. Flots .....	10
2. Couvertures par des cycles .....	11
2.1. Définitions .....	11
2.2. Lien avec le problème du postier chinois .....	12
2.3. Couvertures par des cycles et $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flots .....	14
2.4. Doubles couvertures .....	16
2.5. $k$ -flots et $\mathbb{Z}_k$ -flots .....	18
<b>CHAPITRE 2: COUVERTURE PAR DES CIRCUITS D'UN MATROÏDE RÉGULIER</b>	
<b>QUI ADMET UN <math>\mathbb{Z}_5</math>-FLOT NON-NUL</b> .....	21
1. Introduction .....	23
2. Matroïdes .....	23
3. Groupes de chaînes .....	24
4. Flots .....	27
5. Flots compatibles .....	30
6. Couverture par des circuits .....	36
<b>CHAPITRE 3: FLOTS DE FULKERSON, FLOTS DE PETERSEN</b> .....	49
1. Introduction .....	51
2. Définitions .....	51
3. Flot de Fulkerson .....	53
4. Flot de Petersen .....	56
5. Flots $h$ -homogènes .....	59
6. Couverture par des cycles et flot de Fulkerson .....	61

	2
7. Couverture par des cycles et flot de Petersen .....	66
<b><u>CHAPITRE 4: CONSTRUCTIONS LOCALES</u></b> .....	71
1. Introduction .....	73
2. Constructions locales .....	75
3. Construction de Mader .....	80
4. Propriété $P_{2 \times 2}$ .....	83
5. Constructions locales et propriété $P'_{2 \times 2}$ .....	86
6. Constructions T,V généralisées .....	92
<b><u>ANNEXE</u></b> .....	103
<b><u>BIBLIOGRAPHIE</u></b> .....	113

**INTRODUCTION**



## Introduction

Une couverture  $\mathcal{C}$  par des cycles d'un graphe sans isthme  $G=(V,E)$  est une famille de cycles (élémentaires) telle que chaque arête de  $G$  appartienne à au moins un cycle de  $\mathcal{C}$ . La longueur d'un cycle est le nombre d'arêtes qu'il contient. La longueur d'une couverture est la somme des longueurs des cycles qui la composent. Tout graphe sans isthme possède une couverture par des cycles. Etant donné un graphe sans isthme le problème se pose naturellement de trouver la plus petite longueur d'une telle couverture. C'est en 1978 que A. Itai et M. Rodeh ont les premiers formulé et apporté une réponse à ce problème en donnant une majoration de la longueur minimale d'une couverture. La majoration obtenue est fonction du nombre d'arêtes et du nombre de sommets du graphe considéré. Cette majoration a été améliorée depuis et la simplicité des résultats obtenus est des plus fascinantes.

Dans le chapitre 1 nous présentons ce problème et les résultats connus. Nous exposons le lien, mis en évidence par J. C. Bermond, B. Jackson et F. Jaeger en 1981, entre l'existence de flots non-nuls dans un graphe et majoration de la longueur minimale d'une couverture. Les résultats et conjectures connues, quant à l'existence de certains flots non-nuls dans les graphes, ont permis alors la formulation de résultats et de conjectures concernant ce problème de couverture de longueur minimale.

Dans le chapitre 2 nous présentons les propriétés élémentaires des flots non-nuls dans les matroïdes réguliers, issues pour la plupart de la théorie des groupes de chaînes développée par W.T.Tutte. Une généralisation aux matroïdes réguliers du problème de la couverture par des cycles de longueur minimale est proposée par M. Tarsi. Soit  $s(k)$ ,  $k \geq 2$ , le plus petit "s" tel que si un matroïde régulier défini sur un ensemble  $E$  admet un  $k$ -flot non-nul, il possède une couverture par des circuits de longueur inférieure ou égale à  $s \cdot |E|$  ( la validité de cette définition sera justifiée au chapitre 1). M. Tarsi donne une formule pour le calcul d'une majoration de  $s(k)$ . Nous améliorons la majoration obtenue pour  $s(5)$  par cette formule, sans pour cela atteindre la valeur de  $\frac{8}{5}$  proposée par une conjecture de F. Jaeger. Pour parvenir à ce résultat nous utiliserons la programmation linéaire.

L'existence de  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flots non-nuls particuliers dans un graphe permet de donner de nouvelles

majorations intéressantes pour la longueur minimale d'une couverture par des cycles. Deux conjectures impliquent l'existence dans tout graphe sans isthme de deux  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flots non-nuls particuliers. L'objet du chapitre 3 est le calcul des majorations qui découlent de leur existence. La définition de ces flots n'utilisant pas le concept d'orientation, nous ferons l'étude de ces deux  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flots non-nuls particuliers dans le cadre plus général des espaces binaires.

Dans le chapitre 4 nous proposons une approche constructive des problèmes d'existence de flots non-nuls dans un graphe. C'est à l'aide de la notion d'arbre maximal que l'on peut montrer qu'un graphe 4-arête-connexe admet un  $(\mathbb{Z}_2)^2$ -flot non-nul. On remarque que certains types de constructions locales préservent l'existence de deux arbres maximaux disjoints dans un graphe. C'est en introduisant de nouvelles constructions qui préservent des propriétés plus fortes que celle d'admettre un  $(\mathbb{Z}_2)^2$ -flot non-nul que nous montrons sans utiliser la notion d'arbre maximal qu'un graphe 4-arête-connexe admet un  $(\mathbb{Z}_2)^2$ -flot non-nul.

**CHAPITRE 1**  
**COUVERTURES DES GRAPHES**  
**PAR DES CYCLES**



## 1. Définitions et notations

### 1.1. Rappels sur les graphes :

Le cardinal d'un ensemble fini est noté  $|E|$ .

Un graphe  $G$  est un couple  $(V, E)$  où :

$V$  est un ensemble fini, non vide, appelé ensemble des *sommets* de  $G$  et  $E$  est un ensemble fini appelé ensemble d'*arêtes* de  $G$  tels qu'à toute arête  $e$  de  $G$  sont associés deux sommets de  $G$  (non nécessairement distincts) appelés *extrémités* de  $e$ .

On écrit  $G=(V, E)$ ,  $V(G)=V$ ,  $E(G)=E$ .

Si  $x$  et  $y$  sont deux sommets de  $G$ , l'ensemble des arêtes ayant pour extrémités  $x$  et  $y$  est noté  $[xy]_G$  ou  $[yx]_G$ . Si une arête  $e$  a pour extrémités  $x$  et  $y$ , on note  $e \in [xy]_G$ , on dit que  $e$  *relie*  $x$  et  $y$ . Une arête qui a ses deux extrémités confondues est appelée une *boucle*. Une arête  $e$  est dite *incidente* à  $x$  si  $x$  est une extrémité de  $e$ . Deux arêtes sont dites *adjacentes* si elles ont au moins une extrémité commune. Deux ou plusieurs arêtes sont dites *parallèles* si elles appartiennent au même ensemble  $[xy]_G$ .

Un graphe  $G'=(V', E')$  est un *sous-graphe* de  $G=(V, E)$  si  $V' \subseteq V$  et  $E' \subseteq E$ . Si  $E'$  est l'ensemble des arêtes de  $E$  dont les deux extrémités appartiennent à  $V'$  le graphe  $G'$  sera dit engendré par  $V'$  et noté  $G_{V'}$ . Si  $V=V'$  et  $E' \subseteq E$ ,  $G'$  est appelé le graphe *partiel* de  $G$  défini par  $E'$ .

Une *chaîne*  $\mu$  est une séquence alternée de sommets et d'arêtes distinctes de  $G$ , notée  $\mu = x_0 e_1 x_1 \dots x_{k-1} e_k x_k$ , commençant et finissant par des sommets telle que pour tout  $i \in [0, k-1]$  les sommets  $x_i$  et  $x_{i+1}$  sont les extrémités de l'arête  $e_{i+1}$ . Les sommets  $x_0$  et  $x_k$  sont appelés les *extrémités* de la chaîne. On dit que la chaîne  $\mu$  *relie*  $x_0$  et  $x_k$ . Si tous les sommets de  $\mu$  sont distincts on dit que  $\mu$  est une *chaîne élémentaire*. La *longueur* de la chaîne est le nombre d'arêtes qu'elle contient.

Un graphe  $G$  est dit *connexe* si pour toute paire  $x, y$  de sommets distincts de  $G$  il existe une chaîne d'extrémités  $x$  et  $y$ .

Il est facile de remarquer que la relation binaire  $\mathcal{R}$  définie dans l'ensemble des sommets d'un graphe  $G$  par :  $x \mathcal{R} y$  si et seulement si  $x=y$  ou si  $(x \neq y)$  il existe une chaîne reliant  $x$  et  $y$ , est une relation d'équivalence. Le sous-graphe de  $G$  engendré par une classe d'équivalence est appelé une *composante connexe* de  $G$ .

Pour toute partie  $S$  de  $V$  l'ensemble des arêtes ayant une extrémité exactement dans  $S$  est noté  $\omega_G(S)$ .

$\omega_G(S)$  est appelé le *cocycle* de  $G$  associé à  $S$ ;  $\omega_G(S)$  est un *k-cocycle* si  $|\omega_G(S)|=k$ . Un 1-cocycle est appelé un *isthme*.

Un graphe sera dit *k-arête-connexe* s'il est connexe et s'il n'admet aucun h-cocycle pour  $1 \leq h < k$ .

On appelle *degré* d'un sommet  $x$  de  $G$  le nombre  $d_G(x) = |\omega_G(\{x\})| + 2|[xx]_G|$ .

Un graphe est dit *p-régulier* si tous les sommets ont le même degré  $p$ .

Un *cycle* d'un graphe  $G$  est un sous-graphe connexe de  $G$  qui est 2-régulier.

La *longueur* d'un cycle est le nombre d'arêtes qu'il contient.

Un graphe connexe sans cycles est un *arbre*.

Pour les autres définitions et propriétés classiques des graphes on se reportera à [1].

## 1.2. Graphes orientés :

On appelle *orientation* d'un graphe  $G=(V,E)$  toute application  $O$  de  $E$  dans  $V \times V$  qui à toute arête  $e$  de  $G$  associe un couple  $O(e) = (x,y)$  où  $x,y$  sont les extrémités de  $e$ ,  $x$  étant alors appelé *extrémité initiale* et  $y$  *extrémité terminale* de  $e$  dans l'orientation  $O$ .

Un graphe  $G=(V,E)$ , muni d'une orientation sera dit un *graphe orienté*. Les arêtes sont alors appelés des *arcs*.

Soit  $G=(V,E)$  un graphe orienté et soit  $S \subseteq V$  on notera :

$\omega_G^+(S)$  l'ensemble des arcs ayant leur extrémité initiale dans  $S$  et leur extrémité terminale dans  $V(G)-S$ .

$\omega_G^-(S)$  l'ensemble des arcs ayant leur extrémité terminale dans  $S$  et leur extrémité initiale dans  $V(G)-S$ . On remarque que  $\omega_G^-(S) = \omega_G^+(V(G)-S)$ .

## 1.3. Flots :

Soit  $M$  un groupe abélien (noté additivement) et  $G=(V,E)$  un graphe orienté avec  $E \neq \emptyset$ . Un *M-flot* dans  $G$  est une application  $\phi$  de  $E$  dans  $M$  telle que pour tout  $S \subseteq V$  on ait :

$$\sum_{e \in \omega_G^+(S)} \Phi(e) - \sum_{e \in \omega_G^-(S)} \Phi(e) = 0$$

L'ensemble  $\sigma(\Phi) = \{e \in E : \Phi(e) \neq 0\}$  est appelé le *support* de  $\Phi$ .

Si  $\sigma(\Phi) = E$ , on dit que  $\Phi$  est un *M-flot non-nul*. Si un graphe  $G=(V,E)$  admet un M-flot non-nul pour une orientation donnée, alors pour toute orientation le graphe admet un M-flot non-nul. On dit qu'un graphe  $G=(V,E)$  admet un M-flot non-nul s'il admet un M-flot non-nul pour une orientation donnée. Pour une introduction détaillée aux problèmes de flots non-nuls dans les graphes consulter [2].

## 2. Couvertures par des cycles

Dans ce paragraphe nous présentons les différents résultats concernant le problème de la couverture des graphes par des cycles ainsi que les problèmes qui se posent. Nous donnons d'abord quelques définitions.

### 2.1. Définitions :

Etant donné un graphe  $G$ , une *couverture* de  $G$  par des cycles est une famille de cycles de  $G$ , notée  $\mathcal{C}$ , telle que chaque arête de  $G$  appartienne à au moins un cycle de  $\mathcal{C}$ . La *longueur de la couverture*  $\mathcal{C}$ , notée  $l(\mathcal{C})$ , est la somme des longueurs des cycles de  $\mathcal{C}$ .

#### Proposition 1.1. :

Un graphe possède une couverture par des cycles si et seulement si il n'a pas d'isthme.

Il suffit de remarquer qu'une arête est un isthme si et seulement si elle n'appartient à aucun cycle.

Dans l'analyse de systèmes d'irrigation par la méthode de Hardy Cross [3], il faut recouvrir toutes les arêtes d'un graphe par des cycles et cette couverture étant trouvée, une certaine fonction doit être calculée sur ces cycles. Comme l'effort de calcul dépend de la longueur de la couverture, il est intéressant de trouver une couverture de longueur minimale. Le problème de la couverture de longueur minimale est ainsi présenté en 1978 par Itai et Rodeh [4]. Dans ce même article les auteurs

prouvent que tout graphe sans isthme  $G=(V,E)$  possède une couverture par des cycles  $\mathcal{C}$  telle que :

$$l(\mathcal{C}) \leq |E| + 2|V|. \log |V| .$$

En 1981 Itai, Lipton, Papadimitriou et Rodeh [5] ont amélioré ce résultat en prouvant que tout graphe sans isthme  $G=(V,E)$  possède une couverture par des cycles  $\mathcal{C}$  telle que :

$$l(\mathcal{C}) \leq \min \{3|E| - 6, |E| + 6|V| - 7\} .$$

## 2.2. Lien avec le problème du postier chinois :

Soit  $G=(V,E)$  un graphe, un *chemin*  $p$  est une séquence alternée de sommets et d'arêtes (non nécessairement distinctes), noté  $p=x_0e_1x_1\dots\dots x_{k-1}e_kx_k$ , commençant et finissant par des sommets telle que pour tout  $i \in [0, k-1]$  les sommets  $x_i$  et  $x_{i+1}$  sont les extrémités de l'arête  $e_{i+1}$ . Les sommets  $x_0$  et  $x_k$  sont appelés les *extrémités* du chemin. On dit que le chemin  $p$  *relie*  $x_0$  et  $x_k$ . Si  $x_0=x_k$  le chemin sera dit *fermé*. La *longueur du chemin* est le nombre d'arêtes qu'il contient.

Le problème de la couverture de longueur minimale peut sembler à première vue équivalent au problème du postier chinois qui s'énonce de la façon suivante :

Soit  $G=(V,E)$  un graphe connexe, trouver un chemin fermé qui utilise chaque arête du graphe au moins une fois et de longueur totale minimale. Cela revient à chercher un graphe eulérien (i.e. un graphe connexe dont tout les sommets sont de degré pair) obtenu à partir de  $G$  en remplaçant chaque arête de  $G$  par une ou plusieurs arêtes parallèles et minimal pour le nombre d'arêtes relativement à cette propriété. Ce chemin est appelé le *parcours du postier chinois*, son nombre d'arêtes la longueur du parcours.

Si  $\mathcal{C}$  est une couverture par des cycles de  $G$  en remplaçant chaque arête  $e$  de  $G$  par  $n(e)$  arêtes parallèles, où  $n(e)$  est le nombre de cycles de  $\mathcal{C}$  auxquels appartient l'arête  $e$ , le graphe obtenu est un graphe eulérien dont  $G$  est un graphe partiel. Son nombre d'arêtes est :

$$\sum_{e \in E} n(e) = \sum_{C \in \mathcal{C}} |C| = l(\mathcal{C}) .$$

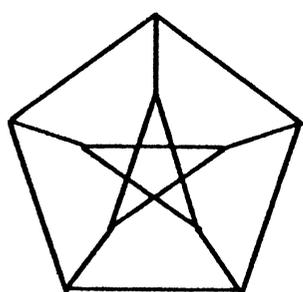
Ainsi toute couverture par des cycles du graphe  $G$  a une longueur supérieure ou égale à la longueur du parcours du postier chinois. Une majoration pour la longueur de la couverture minimale

est donc une majoration pour la longueur du parcours du postier chinois. Mais les deux problèmes ne sont pas équivalents, car une décomposition en cycles du parcours du postier chinois peut très bien contenir un cycle réduit à deux arêtes parallèles qui ne correspondent à aucun cycle du graphe. Itai et Rodeh [4] montrent que pour le graphe de Petersen (figure 1) une solution du problème du postier chinois est un graphe de 20 arêtes et que la longueur minimale d'une couverture par des cycles est 21.

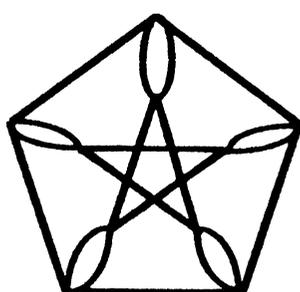
Mais pour ce qui est des graphes planaires Bermond, Jackson et Jaeger [6] ont prouvé qu'une telle situation ne peut se présenter.

**Proposition 1.2.** ([6],prop.2) :

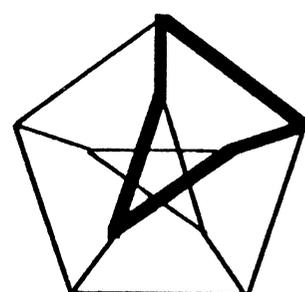
Pour tout graphe planaire sans isthme  $G$ , la longueur minimale d'une couverture par des cycles est égale à la longueur du parcours du postier chinois.



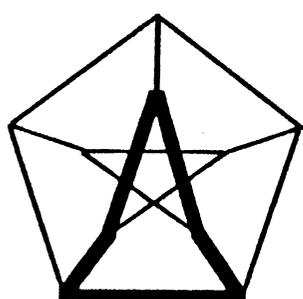
Graphe de Petersen



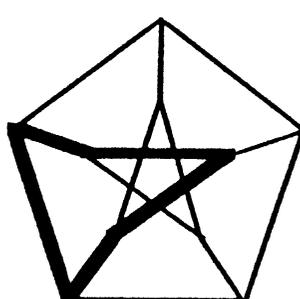
Parcours du postier chinois



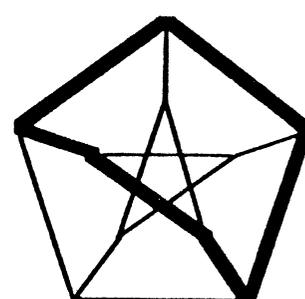
$C_1$



$C_2$



$C_3$



$C_4$

Cycles de la couverture de longueur 21

Figure 1

### 2.3. Couverture par des cycles et $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flots :

Soit  $k \geq 2$ . Pour tout entier  $a \in \mathbb{Z}$ , on note  $\bar{a}$  sa classe modulo  $k$ . Les éléments du groupe  $\mathbb{Z}_k$  seront donc notés  $0, 1, \dots, k-1$ .  $\mathbb{Z}_2$  désignera indifféremment le groupe abélien des classes modulo 2 et le corps à deux éléments  $\text{GF}(2)$ .

Si  $\Phi$  est un  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flot d'un graphe  $G=(V,E)$ , pour tout  $e \in E$  on a  $\Phi(e) = -\Phi(e)$ ; on peut donc écrire qu'une application  $\Phi: E \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^k$  est un  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flot de  $G$  si et seulement si pour tout  $S \subseteq V$  on a :

$$\sum_{e \in \omega_G(S)} \Phi(e) = \mathbf{0}$$

#### Proposition 1.3. :

Si  $\Phi$  est un  $\mathbb{Z}_2$ -flot d'un graphe  $G=(V,E)$ , il existe une partition de  $\sigma(\Phi)$  en cycles de  $G$ .

**démonstration** : Soit  $G'=(V',E')$  le sous-graphe de  $G$  tel que  $\sigma(\Phi) = E'$ ,  $V'$  étant constitué des extrémités des arêtes de  $E'$ . Chaque sommet de  $G'$  est de degré pair dans  $G'$  par définition du flot. Chaque composante connexe de  $G'$  est donc un graphe eulérien. Alors  $E'$  admet une partition en cycles. Ceci achève la démonstration.

**Remarque 1.4.**([6], § 2.2.4) : La proposition 1.3, simple dans son énoncé, nous donne un lien entre  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flots non-nuls et couvertures par des cycles. En effet soient  $\Phi$  un  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flot de  $G$  et  $\Phi_1, \dots, \Phi_k$  les  $\mathbb{Z}_2$ -flots de  $G$  tels que pour tout  $e \in E$ ,  $\Phi(e) = (\Phi_1(e), \dots, \Phi_k(e))$ ; on note  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$ . Alors  $\Phi$  est un flot non-nul si et seulement si :

$$\bigcup_{i \in [1,k]} \sigma(\Phi_i) = E.$$

Si  $C_i$  est un ensemble de cycles qui constituent une partition de  $\sigma(\Phi_i)$ , la famille de cycles obtenue en prenant tous les cycles des ensembles  $C_i$  est une couverture de  $G$  par des cycles de

longueur  $\sum_{i \in [1, k]} |\sigma(\Phi_i)|$ . Cette longueur est appelée la *longueur du flot*  $\Phi$  et on la note  $l(\Phi)$ .

Réciproquement si  $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$  est une couverture de  $G$  par des cycles, on note  $\Phi_i$  pour tout  $i \in [1, k]$  l'unique  $\mathbb{Z}_2$ -flot de  $G$  ayant pour support  $\sigma(\Phi_i) = C_i$ . Alors  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$  est un  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flot non-nul de  $G$  et on a :

$$l(\mathcal{C}) = \sum_{i \in [1, k]} |\sigma(\Phi_i)| = l(\Phi)$$

Ainsi le minimum de  $l(\mathcal{C})$  sur l'ensemble des couvertures d'un graphe par des cycles est égal au minimum de  $l(\Phi)$  sur l'ensemble des  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flots non-nuls de  $G$  pour  $k \geq 1$ .

**Proposition 1.5.** ([6]):

Si un graphe  $G=(V, E)$  admet un  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -flot non-nul, il possède une couverture par des cycles  $\mathcal{C}$  telle que :

$$l(\mathcal{C}) \leq \frac{4}{3}|E|.$$

**démonstration :** Soit  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$  un  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -flot non-nul de  $G=(V, E)$ . Alors on vérifie aisément que  $\Phi' = (\Phi_1, \Phi_1 + \Phi_2)$  et  $\Phi'' = (\Phi_2, \Phi_1 + \Phi_2)$  sont des  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -flots non-nuls de  $G$ . On a donc trois couvertures  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$  de  $G$  déterminées par  $\Phi, \Phi'$  et  $\Phi''$ . Dans  $\mathcal{P}(E)$ , ensemble des parties de  $E$ , on note  $\Delta$  la différence symétrique de deux sous-ensembles. Il est facile de voir que :

$$\sigma(\Phi_1 + \Phi_2) = \sigma(\Phi_1) \Delta \sigma(\Phi_2). \text{ Donc :}$$

$$l(\mathcal{C}_1) = |\sigma(\Phi_1)| + |\sigma(\Phi_2)|, \quad l(\mathcal{C}_2) = |\sigma(\Phi_1)| + |\sigma(\Phi_1) \Delta \sigma(\Phi_2)| \quad \text{et}$$

$$l(\mathcal{C}_3) = |\sigma(\Phi_2)| + |\sigma(\Phi_1) \Delta \sigma(\Phi_2)|. \text{ Soit :}$$

$$l(\mathcal{C}_1) + l(\mathcal{C}_2) + l(\mathcal{C}_3) = 2(|\sigma(\Phi_1)| + |\sigma(\Phi_2)| + |\sigma(\Phi_1) \Delta \sigma(\Phi_2)|). \text{ Mais :}$$

$$|\sigma(\Phi_1)| + |\sigma(\Phi_2)| + |\sigma(\Phi_1)\Delta\sigma(\Phi_2)| = 2|E|. \text{ Il s'ensuit que } l(\mathcal{C}_1) + l(\mathcal{C}_2) + l(\mathcal{C}_3) = 4|E|.$$

Alors il existe  $i \in [1,3]$  tel que :  $l(\mathcal{C}_i) \leq \frac{4}{3}|E|$ . Ceci achève la démonstration.

#### 2.4. Doubles couvertures :

Si  $G=(V,E)$  est un graphe planaire 2-connexe non réduit à une arête, représenté dans le plan le contour de chaque face est un cycle et chaque arête apparait sur deux contours de face exactement ([7],théorème 1.2.1). Les cycles ainsi déterminés constituent une couverture par des cycles  $\mathcal{C}$  de  $G$  et on a :  $l(\mathcal{C})=2|E|$ .

Une couverture d'un graphe  $G$  par des cycles est dite une double couverture si toute arête de  $G$  appartient à deux cycles exactement. Une conjecture a été proposée qui généralise le cas des graphes planaires : (la paternité de cette conjecture n'est pas établie [8].)

##### "Conjecture de la double couverture" 1.6.:

Tout graphe sans isthme possède une double couverture.

On dit qu'une double couverture d'un graphe  $G$  est  $k$ -coloriable s'il est possible de colorier les cycles de la couverture en  $k$  couleurs de façon que pour chaque arête les deux cycles contenant cette arête sont de couleur différente.

##### Proposition 1.7.([6] prop.2) :

Si un graphe  $G=(V,E)$  a une double couverture  $k$ -coloriable ( $k \geq 2$ ), il possède une couverture par des cycles  $\mathcal{C}$  telle que :

$$l(\mathcal{C}) \leq \frac{2(k-1)}{k}|E|.$$

démonstration : On note  $C_i = \{c_{i,1}, \dots, c_{i,r^i}\}$  l'ensemble des cycles coloriés avec la  $i^{\text{ème}}$  couleur pour tout  $i \in [1,k]$  et on note  $l(C_i) = \sum_{j \in [1,r^i]} l(c_{i,j})$ . Soit  $\mathcal{C}_i$  la famille des cycles obtenue à partir de la

double couverture en supprimant les cycles ayant la  $i^{\text{ème}}$  couleur. C'est une couverture de  $G$  par des cycles et :

$$l(\mathcal{C}_1) = l(C_2) + \dots + l(C_k)$$

$$l(\mathcal{C}_i) = l(C_1) + \dots + l(C_{i-1}) + l(C_{i+1}) + \dots + l(C_k) \quad \text{pour } i \in [2, k-1] \quad (1)$$

$$l(\mathcal{C}_k) = l(C_1) + \dots + l(C_{k-1}) .$$

On forme ainsi  $k$  couvertures de  $G$  par des cycles.  $\bigcup_{i \in [1, k]} C_i$  étant une double couverture on a :

$$l(C_1) + \dots + l(C_k) = 2|E| . \text{ Mais d'après (1) on peut écrire :}$$

$$\sum_{i \in [1, k]} l(\mathcal{C}_i) = (k-1) \sum_{i \in [1, k]} l(C_i) . \text{ Il s'ensuit que } \sum_{i \in [1, k]} l(\mathcal{C}_i) = 2(k-1)|E| .$$

Il existe donc  $j \in [1, k]$  tel que :

$$l(\mathcal{C}_j) \leq \frac{2(k-1)}{k} |E| . \text{ Ceci achève la démonstration.}$$

Une conjecture plus forte que la conjecture de la double couverture a été proposée dans [9].

**Conjecture 1.8.** :

Tout graphe sans isthme possède une double couverture 5-coloriable.

Si un graphe sans isthme  $G=(V,E)$  possède une double couverture 5-coloriable, d'après la proposition 1.7. il possède une couverture  $\mathcal{C}$  de longueur inférieure ou égale à  $\frac{8}{5}|E|$ . D'où la conjecture proposée par Bermond, Jackson et Jaeger [6] :

**Conjecture 1.9.** :

Tout graphe sans isthme  $G=(V,E)$  possède une couverture par des cycles  $\mathcal{C}$  telle que :

$$l(\mathcal{C}) \leq \frac{8}{5} |E| .$$

**Théorème du 8-flot.** ([2], prop.9) : Tout graphe sans isthme admet un  $(\mathbb{Z}_2)^3$ -flot non-nul.

Bermond, Jackson et Jaeger en utilisant une autre preuve du théorème précédent que celle donnée dans [2] ont prouvé la meilleure majoration connue à ce jour pour la longueur minimale d'une couverture.

Indépendamment Tarsi a aussi démontré ce résultat [10].

Théorème 1.10. ([6],th.1;[10]):

Tout graphe sans isthme  $G=(V,E)$  possède une couverture par des cycles  $\mathcal{C}$  telle que :

$$l(\mathcal{C}) \leq \frac{5}{3}|E| .$$

## 2.5. $k$ -flots et $\mathbb{Z}_k$ -flots :

Soit  $G=(V,E)$  un graphe orienté et  $k \geq 2$ . Un  $\mathbb{Z}$ -flot de  $G$  à valeurs dans  $[1-k, k-1]$  est appelé un  $k$ -flot. La première proposition importante démontrée dans [2] est la suivante :

Proposition 1.11.([2],prop.1) :

Soit  $G=(V,E)$  un graphe. Pour tout  $k \geq 2$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

- Il existe un  $\mathbb{Z}_k$ -flot non-nul dans  $G$ .
- Pour tout groupe abélien  $M$  d'ordre  $k$ , il existe un  $M$ -flot non-nul dans  $G$ .
- Il existe un  $k$ -flot non-nul dans  $G$ .

Considérons un graphe orienté  $G=(V,E)$ . L'ensemble des  $\mathbb{Z}$ -flots de  $G$  constituent un groupe abélien : la somme de deux  $\mathbb{Z}$ -flots  $f$  et  $g$  de  $G$  étant le flot noté  $f+g$  défini par  $(f+g)(e) = f(e)+g(e)$  pour tout  $e \in E$ . D'après un résultat de W.T.Tutte ([11], prop.6.2), tout  $\mathbb{Z}$ -flot  $\varphi$  de  $G$  est une somme de 2-flots  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  ( $m \geq 1$ ) ayant la propriété suivante : pour tout  $i \in [1, m]$  et tout  $e \in E$

- $\varphi(e) = 0 \Rightarrow \varphi_i(e) = 0$
- $\varphi(e) > 0 \Rightarrow \varphi_i(e) \geq 0$  (1)
- $\varphi(e) < 0 \Rightarrow \varphi_i(e) \leq 0$ .

Donc si un graphe orienté  $G=(V,E)$  admet un  $k$ -flot  $\varphi$ , il existe  $m$  2-flots de  $G$  ( $m \geq 1$ ) notés  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$  vérifiant la propriété ci-dessus tels que  $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_m$ . Si  $\varphi$  est un  $k$ -flot non nul,

$$\bigcup_{i \in [1, m]} \sigma(\varphi_i) = E .$$

Le support d'un 2-flot est une réunion de cycles disjoints, si  $C_i$  est un ensemble de cycles qui constituent une partition de  $\sigma(\varphi_i)$ , la famille de cycles obtenue en prenant tous les cycles des ensembles  $C_i$  est une couverture  $\mathcal{C}$  de  $G$  par des cycles. Etant donné que  $\varphi = \varphi_1 + \dots + \varphi_m$  vérifie (1), chaque arête de  $G$  appartient à au moins un et au plus  $k-1$  supports de  $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ .

Donc  $|E| \leq l(\mathcal{C}) \leq (k-1)|E|$ . On note  $l_G$  la plus petite longueur d'une couverture de  $G$  par des cycles et on pose  $L_G = l_G/|E|$ .  $L(k)$  désigne l'ensemble de tous les nombres  $L_G$  où  $G$  est un graphe admettant un  $k$ -flot non-nul. D'après ce qui précède  $L(k) \subseteq [1, k-1]$ . On note  $s(k)$  la borne supérieure de cet ensemble.  $s(k)$  est le plus petit  $s$  tel que si  $G=(V,E)$  admet un  $k$ -flot non nul, alors  $G$  possède une couverture par des cycles  $\mathcal{C}$  telle que  $l(\mathcal{C}) \leq s|E|$ .

Tarsi dans le cadre plus général des matroïdes réguliers a démontré le résultat suivant :

**Théorème 1.12.** ([10] th.1) :

$$s(kt) \leq \frac{s(k)(kt-t) + s(t)(kt-k)}{kt-1} \quad \text{pour } k, t \geq 2$$

D'après la proposition 1.11., un graphe qui admet un  $k$ -flot non-nul admet un  $k'$ -flot non-nul pour tout  $k' \geq k$ . Donc  $s(k) \leq s(k')$  pour  $k \leq k'$ .

Nous appliquons maintenant la formule de Tarsi pour certaines valeurs de  $k$  et de  $t$ .

- $k=2$  : si  $G$  admet un  $\mathbb{Z}_2$ -flot non-nul, les composantes connexes de  $G$  sont alors des graphes eulériens qui sont des réunions de cycles disjoints. Donc  $s(2)=1$ .

- $k=t=2$  : la formule 1.12. nous donne  $s(4) \leq \frac{4}{3}$ .

- on a  $s(3) \leq s(4) \leq \frac{4}{3}$ . Un graphe 3-régulier biparti admet un 3-flot non-nul ([2], prop.2). Mais dans une couverture par des cycles d'un tel graphe, pour tout sommet il existe au moins une arête incidente qui sera couverte deux fois. Donc la longueur d'une couverture par des cycles est supérieure ou égale à  $\frac{4}{3}|E|$ . Finalement  $s(3)=s(4)=\frac{4}{3}$ .

- $k=2$  et  $t=3$ : la formule nous donne  $s(6) \leq \frac{5}{3}$ .

**Théorème du 6-flot.** : Tout graphe sans isthme admet un 6-flot non-nul .  
(Seymour [27])

Le théorème 1.10. est ainsi directement démontré en appliquant le théorème 1.12. et le théorème du 6-flot.

• on a  $s(5) \leq s(6) \leq \frac{5}{3}$  . Le cas de  $s(5)$  est très intéressant dans la mesure où aucun contre-exemple n'a été trouvé à la conjecture suivante due à W.T.Tutte [12] :

**Conjecture 1.14.** :

Tout graphe sans isthme admet un 5-flot non-nul.

Le graphe de Petersen a un 5-flot non-nul, et la longueur minimale d'une couverture par des cycles est 21. Le nombre d'arêtes de ce graphe étant égal à 15, on peut écrire :

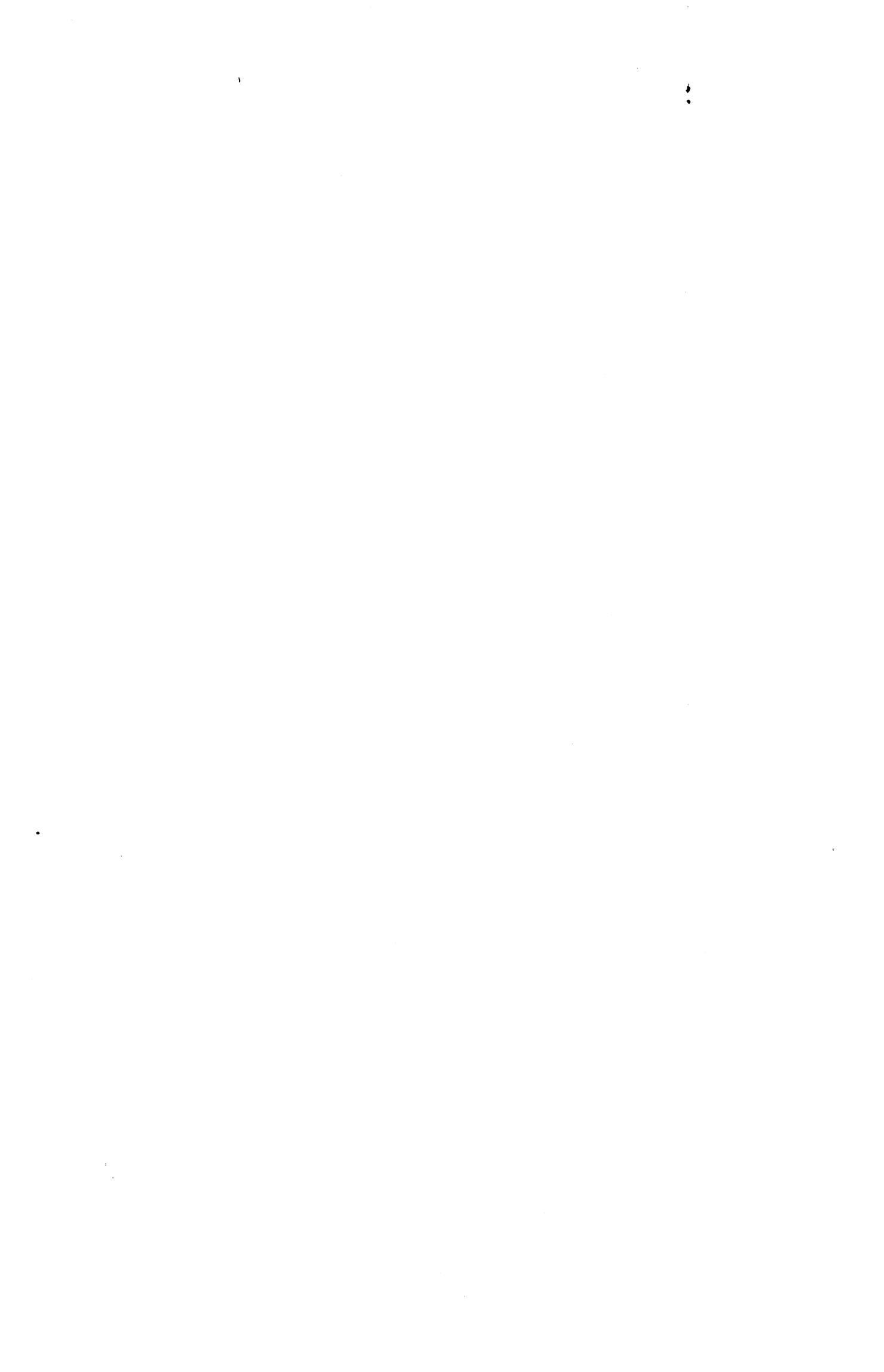
$$\frac{7}{5} \leq s(5) \leq \frac{5}{3} .$$

Un graphe  $G=(V,E)$  qui a une double couverture 5-coloriable possède une couverture par des cycles  $\mathcal{C}$  telle que  $l(\mathcal{C}) \leq \frac{8}{5}|E|$  . Il serait intéressant de pouvoir situer  $s(5)$  par rapport à  $\frac{8}{5}$ . F.Jaeger a conjecturé (communication privée) que  $s(5) = \frac{7}{5}$ . Nous montrons au chapitre suivant que  $s(5) \leq \frac{49}{30}$  . Cette étude sera faite dans le cadre plus général des matroïdes réguliers.

**CHAPITRE 2**

**COUVERTURE PAR DES CIRCUITS D'UN MATROIDE REGULIER  
QUI ADMET**

**UN  $\mathbb{Z}_5$ -FLOT NON-NUL**



## 1. Introduction :

Il est possible d'étendre aux matroïdes réguliers la notion de flot à valeurs dans un groupe abélien. Nous présentons ici quelques propriétés élémentaires des flots, ainsi qu'une application du théorème du flot compatible aux matroïdes réguliers. Le lien entre existence de flots non-nuls et majoration de la longueur minimale d'une couverture par des circuits a été établi par M. Tarsi. Nous améliorons la majoration proposée par M. Tarsi lorsque le matroïde régulier admet un 5-flot non-nul.

## 2. Matroïdes :

Nous commençons par rappeler quelques définitions et théorèmes. Pour les démonstrations ainsi que pour les autres définitions et propriétés classiques des matroïdes on peut se reporter par exemple à [13]

• Un *matroïde*  $M$  est une paire  $(E, J)$ , où  $E$  est un ensemble fini et  $J$  est une collection de sous-ensembles de  $E$  (appelés les ensembles *indépendants* de  $M$ ) qui réalisent les conditions suivantes :

1)  $\emptyset \in J$ .

2) Si  $X \in J$  et  $Y \subseteq X$  alors  $Y \in J$ .

3) Si  $U \in J$  et  $V \in J$  avec  $|U| = |V| + 1$  il existe  $x \in U - V$  tel que  $\forall U \setminus \{x\} \in J$ .

• Un sous-ensemble de  $E$  qui n'appartient pas à  $J$  est un ensemble *dépendant* (de  $M$ ).

• Une *base* de  $M$  est un ensemble indépendant et maximal pour l'inclusion pour cette propriété.

• Un *circuit* de  $M$  est un ensemble dépendant et minimal pour l'inclusion pour cette propriété; on note  $C(M)$  la collection des circuits de  $M$ .

• Soit  $J(M)$  l'ensemble des indépendants d'un matroïde  $M$  défini sur  $E$ ; alors  $J(M|T) = \{X : X \subseteq T, X \in J(M)\}$  est l'ensemble des indépendants d'un matroïde défini sur  $T$ , noté  $M|T$ , et appelé la *restriction* de  $M$  à  $T$ . Les circuits de  $M|T$  sont les circuits de  $M$  contenus dans  $T$ .

**Théorème 2.1** ([13], 1.2 th.5) :

Une collection  $C$  de sous-ensembles de  $E$  est l'ensemble des circuits d'un matroïde défini sur  $E$  si et seulement si les conditions suivantes sont réalisées :

1)  $\emptyset \notin C$

2) Si  $X \neq Y$  sont des éléments de  $C$  alors  $X \not\subseteq Y$ .

3) Si  $C_1$  et  $C_2$  sont des éléments distincts de  $C$  et  $z \in C_1 \cap C_2$ , alors il existe  $C_3 \in C$  tel que  $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - \{z\}$ .

- Les cycles d'un graphe  $G=(V,E)$  constituent les circuits d'un matroïde défini sur  $E$ .
- Deux matroïdes  $M_1$  et  $M_2$  définis sur  $E_1$  et  $E_2$  sont dits *isomorphes* s'il existe une bijection  $f: E_1 \rightarrow E_2$  qui préserve l'indépendance, c'est à dire que pour tout  $U \subseteq E_1$ ,  $U$  est indépendant dans  $M_1$  si et seulement si  $f(U)$  est indépendant dans  $M_2$ .

### Théorème 2.2:

Si  $\{ B_i ; i \in I \}$  est l'ensemble des bases d'un matroïde  $M$  défini sur  $E$  alors  $\{ E - B_i ; i \in I \}$  est l'ensemble des bases d'un matroïde  $M^*$  défini sur  $E$ .

Il est clair d'après ce résultat que  $(M^*)^* = M$ .

$M^*$  est appelé le *matroïde dual* de  $M$ , les circuits de  $M^*$  sont aussi appelés les *cocircuits* de  $M$ .

### 3. Groupes de chaines :

Soit  $A$  un anneau commutatif et intègre,  $E$  un ensemble fini, une *chaîne*  $f$  de  $E$  sur  $A$  est une application  $f : E \rightarrow A$ .

$\sigma(f) = \{ x \in E ; f(x) \neq 0 \}$  est appelé le *support* de  $f$ .

Si  $\sigma(f) = \emptyset$ , i.e. si  $f(x) = 0$  pour tout  $x \in E$ ,  $f$  est appelée la *chaîne nulle*.

La somme de deux chaines  $f$  et  $g$  de  $E$  sur  $A$  est la chaîne, notée  $f+g$ , définie par :  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$  pour tout  $x \in E$ .

Pour  $\lambda \in A$ , et  $f$  une chaîne de  $E$  sur  $A$ , le produit  $\lambda f$  est la chaîne définie par :  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$  pour tout  $x \in E$ .

Muni de ces deux lois l'ensemble des chaînes de  $E$  sur  $A$ , noté  $\mathcal{C}(E,A)$  est un  $A$ -module.

- Un *groupe de chaînes* de  $E$  sur  $A$  est un sous-ensemble de  $\mathcal{C}(E,A)$  stable pour l'addition et la multiplication par un élément de  $A$ .
- Une chaîne  $f$  d'un groupe de chaînes  $N$  est dite *élémentaire* si elle est non nulle et s'il n'existe pas de chaîne  $g$  de  $N$  telle que  $\sigma(g) \subsetneq \sigma(f)$ .

**Proposition 2.3.**(W.T.Tutte [17] prop.1.21.) :

Les supports des chaînes élémentaires d'un groupe de chaînes  $N$  de  $E$  sur  $A$  sont les circuits d'un matroïde défini sur  $E$ , que nous noterons  $M(N)$ .

démonstration :

L'ensemble  $\mathcal{S}$  des supports des chaînes élémentaires de  $N$  vérifie clairement les conditions 1 et 2 du théorème 2.1.. Il reste à vérifier la condition 3.

Soient  $S_1$  et  $S_2$  deux éléments distincts de  $\mathcal{S}$ , supports de chaînes élémentaires  $f$  et  $g$ . Soit  $e \in S_1 \cap S_2$ ; la chaîne  $h = g(e).f - f(e).g$  est telle que  $\sigma(h) \subseteq (S_1 \cup S_2) - \{e\}$  et  $\sigma(h) \neq \emptyset$  (sinon  $f$  et  $g$  auraient même support). Donc  $\sigma(h)$  contient un élément de  $\mathcal{S}$ . Ceci achève la démonstration.

• Si  $A = \mathbb{Z}$  une chaîne élémentaire  $f$  telle que pour tout  $x \in E$   $f(x) \in \{-1,0,1\}$  est dite une chaîne *primitive*. Un groupe de chaînes  $N$  de  $E$  sur  $\mathbb{Z}$  est *régulier* si à chaque chaîne élémentaire on peut associer une chaîne primitive de même support.

**Proposition 2.4.**([13],9.4.th.3):

Soit  $M=M(N)$  le matroïde associé à un groupe de chaînes  $N \subseteq \mathcal{C}(E,A)$ . Alors  $M^* = M(N^\perp)$ , où  $N^\perp$  est l'orthogonal de  $N$  relativement à la forme bilinéaire  $b: \mathcal{C}(E,A) \times \mathcal{C}(E,A) \rightarrow A$  définie par :

$$b(f,g) = \sum_{e \in E} f(e)g(e)$$

• On appelle *dendroïde* d'un groupe de chaînes  $N$  de  $E$  sur  $A$  un sous-ensemble  $D \subseteq E$ , tel que pour tout  $f \in N$  avec  $\sigma(f) \neq \emptyset$  on ait  $\sigma(f) \cap D \neq \emptyset$  et qui est minimal pour l'inclusion relativement à cette propriété.

Proposition 2.5. :

Si  $D \subseteq E$  est un dendroïde d'un groupe de chaînes régulier, pour tout  $a \in D$ , il existe une chaîne primitive unique  ${}_a J^D$  telle que  $\sigma({}_a J^D) \cap D = \{a\}$  et  ${}_a J^D(a) = 1$ .

Cette proposition est une conséquence directe des propositions 4.1 et 4.2 démontrées par W.T.Tutte dans [11].

Proposition 2.6.([11] prop.4.3.) :

Soit  $N$  un groupe de chaînes régulier, et soit  $D$  un dendroïde de  $N$ . Alors pour toute chaîne  $f$  de  $N$  on a :

$$f = \sum_{a \in D} f(a) {}_a J^D.$$

• Soit  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  et considérons un groupe de chaînes  $N$  régulier de  $E$  sur  $\mathbb{Z}$ . On note  $W$  la matrice ayant  $n$  colonnes et  $|P|$  lignes où  $P = \{f_1, \dots, f_k\}$  est l'ensemble des chaînes primitives de  $N$ ,

$$W = (a_{ij})_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq k}} \quad \text{avec } a_{ij} = f_i(e_j), \quad i \in [1, k], \quad j \in [1, n].$$

On dit qu'une matrice est *totalelement unimodulaire* si le déterminant de toute sous matrice carrée est 1, -1 ou 0.

On note  $W_D$  la matrice extraite de  $W$  ayant  $n$  colonnes dont les lignes correspondent aux chaînes  ${}_a J^D$ ,  $a \in D$ .  $W_D$  sera appelée la *matrice représentative de  $N$  associée au dendroïde  $D$* .

Proposition 2.7. :

La matrice  $W_D$  est totalelement unimodulaire .

Ceci est une conséquence directe des propositions 4.3 et 4.6 de [11] .

• Enfin un matroïde est dit *régulier* si il est isomorphe à un matroïde de la forme  $M(N)$ , où  $N$  est un groupe de chaînes régulier .

#### 4. Flots :

• Soit  $C = (C_i ; i \in [1, q])$  la collection des circuits d'un matroïde *binaire*  $M$  défini sur un ensemble  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ . On appelle *matrice des circuits* de  $M$  la matrice :

$$D = (\alpha_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{avec : } \alpha_{ij} = 1 \text{ si } e_j \in C_i \text{ et } \alpha_{ij} = 0 \text{ si } e_j \notin C_i$$

On définit de même  $D^*$ , la *matrice des cocircuits* de  $M$ , qui est la matrice des circuits de  $M^*$ .

S'il est possible d'affecter certains coefficients de  $D$  et  $D^*$  d'un signe négatif de façon que les nouvelles matrices obtenues  $W$  et  $W^*$  vérifient  $W \cdot W^* = 0$  (le produit étant calculé dans  $\mathbb{Z}$ ), on dit que  $M$  est un matroïde *orientable*. Le couple  $(W, W^*)$  est appelé une *orientation* de  $M$ .

**Théorème 2.8.** (Minty [15]):

Un matroïde binaire est orientable si et seulement si il est régulier.

**Remarque 2.9.**

Si un matroïde régulier a deux orientations  $(W, W^*)$  et  $(W', W'^*)$ , d'après une proposition démontrée par R.G.Bland et M.Las Vergnas ([14] Prop.6.2.) il existe un sous ensemble  $S$  de  $E$  tel que  $W'$  et  $W'^*$  peuvent être obtenues à partir de  $W, W^*$  en changeant les signes de tous les coefficients des colonnes correspondant aux éléments de  $S$ .

• Soit  $M$  un matroïde régulier défini sur  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ . Une application  $f : E \rightarrow A$  où  $A$  est un  $\mathbb{Z}$ -module est un *A-flot* dans  $M$  (relativement à une orientation  $(W, W^*)$ ) si  $W^*F = 0$ , où  $F$  est le vecteur de  $A^n$  ayant pour  $i^{\text{ème}}$  composante  $f(e_i)$  pour tout  $i \in [1, n]$  (le produit étant calculé dans  $A$ ). Dans la suite nous identifierons  $f$  et  $F$ .

L'ensemble  $\sigma(f) = \{e \in E ; f(e) \neq 0\}$  est appelé le *support* de  $f$ . Si  $\sigma(f) = E$ , on dit que le flot est non-nul.

Tous les groupes abéliens sont considérés comme des  $\mathbb{Z}$ -modules de la façon habituelle ([16] p.74).

Un  $\mathbb{Z}$ -flot  $f$  tel que  $0 \leq |f(e_i)| \leq k-1$  pour tout  $i \in [1, n]$  est appelé un  $k$ -flot.

• En utilisant la remarque 2.9. il est facile de voir que l'existence d'un A-flot non-nul dans un matroïde régulier est indépendante de l'orientation choisie. On dira qu'un matroïde régulier admet un A-flot non-nul, s'il admet un A-flot non-nul pour une de ses orientations. Soit  $f$  un  $\mathbb{Z}$ -flot dans un matroïde régulier  $M$  défini sur  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  relativement à une certaine orientation  $(W, W^*)$ . Notons  $S = \{e \in E : f(e) < 0\}$ , on obtient une nouvelle orientation  $(W', W'^*)$  en changeant le signe des coefficients de toutes les colonnes correspondant aux éléments de  $S$ . Alors l'application  $f' : E \rightarrow \mathbb{Z}$  avec  $f'(e_i) = |f(e_i)|$  pour tout  $i \in [1, n]$  est un  $\mathbb{Z}$ -flot relativement à la nouvelle orientation. Donc on peut toujours supposer que  $f$  prend des valeurs positives.

Proposition 2.10. :

Un matroïde régulier admet un  $\mathbb{Z}_k$ -flot non-nul si et seulement si il admet un  $k$ -klot non-nul.

démonstration :

Soit  $M$  un matroïde régulier défini sur  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$  muni d'une orientation  $(W, W^*)$ .

1. Supposons que  $M$  admette un  $k$ -flot non-nul, on note  $F$  le vecteur de  $\mathbb{Z}^n$  correspondant tel que  $W^*F = 0$  : on a  $0 < |F_i| \leq k-1$  pour tout  $i \in [1, n]$ . Soit  $\bar{F}$  le vecteur de  $(\mathbb{Z}_k)^n$  dont la  $i^{\text{ème}}$  composante est  $F_i \in \{1, \dots, k-1\}$ , classe de  $F_i$  modulo  $k$  pour tout  $i \in [1, n]$ . On a  $W^*\bar{F} = \mathbf{0}$ , où  $\mathbf{0}$  est le vecteur nul de  $(\mathbb{Z}_k)^m$  ( $m$  est le nombre de lignes de  $W^*$ ), donc  $\bar{F}$  est un  $\mathbb{Z}_k$ -flot non-nul de  $M$ .

2.  $M$  est un matroïde régulier, donc  $M = M(N)$  où  $N$  est un groupe de chaînes régulier de  $E$  sur  $\mathbb{Z}$ . Soit  $C$  un circuit de  $M$ , il existe une chaîne primitive de  $N$  telle que  $C = \sigma(f)$ . Dans la ligne correspondant à  $C$  dans la matrice des circuits de  $M$ , on donne un signe positif ou négatif aux coefficients selon que  $f$  est égale à  $\pm 1$  sur les éléments de  $E$  correspondants. La matrice obtenue est notée  $W$ . D'après la proposition 2.4.  $M^* = M(N^\perp)$ , on fait de même pour la matrice des cocircuits. La matrice obtenue est notée  $W^*$ .  $N$  et  $N^\perp$  étant orthogonaux, on a  $W^t W^* = 0$ .  $(W, W^*)$  est donc une orientation de  $M$ .

Comme l'existence d'un  $\mathbb{Z}_k$ -flot non-nul est indépendante de l'orientation choisie, on note  $F$  le vecteur de  $(\mathbb{Z}_k)^n$  associé au  $\mathbb{Z}_k$ -flot non-nul de  $M$  relativement à l'orientation  $(W, W^*)$  que l'on vient de définir. Il s'ensuit que  $W^*F=0$ , et les composantes de  $F_i$ , pour  $i \in [1, n]$ , sont non nulles.

Soit  $W^*_D$  la matrice associée à un dendroïde  $D$  de  $N^1$ .  $W^*_D$  est une matrice  $p \times n$  totalement unimodulaire où  $p = |D|$  (proposition 2.7. et [17] § 5.47).

On définit maintenant un vecteur  $F'$  de  $\mathbb{Z}^n$  dont la  $i^{\text{ème}}$  composante  $F'_i$  est égale à  $a_i \in \{1, \dots, k-1\}$  si  $a_i = F_i$ . Alors  $W^*_D F' = K$ , où  $K$  est un vecteur de  $\mathbb{Z}^p$  et les composantes  $K_i$  de  $K$  sont des multiples de  $k$  pour tout  $i \in [1, p]$ .

Considérons la matrice  $J^* = [W^*_D, I_p]$  où  $I_p$  est la matrice unité d'ordre  $p$ . On vérifie facilement que  $J^*$  est aussi une matrice totalement unimodulaire, elle est donc la matrice représentative d'un groupe de chaînes régulier  $N'$  défini sur un ensemble  $E' = E \cup \{e_{n+1}, \dots, e_{n+p}\}$  ([11] proposition 4.6), où  $e_{n+1}, \dots, e_{n+p}$  correspondent aux colonnes de  $I_p$ .

Soit  $F''$  le vecteur de  $\mathbb{Z}^{n+p}$  dont la  $i^{\text{ème}}$  composante  $F''_i$  est égale à  $F'_i$  si  $i \in [1, n]$  et à  $-K_{i-n}$  si  $i \in [n+1, n+p]$ . Alors  $J^* F'' = 0$  et  $F''$  définit un élément  $f''$  du groupe de chaînes  $N'^1$ , orthogonal de  $N'$ , qui est aussi régulier ([11] §5).

D'après une proposition de W.T.Tutte ([11] proposition 6.3) il existe une chaîne  $f$  dans  $N'^1$  telle que :

$$\begin{cases} f(e_i) \equiv F''_i \pmod{k} \\ |f(e_i)| < k \quad \text{pour tout } i \in [1, n+p] \end{cases}$$

Puisque  $F''_i \equiv 0 \pmod{k}$  pour tout  $i \in [n+1, n+p]$  et  $F''_i \not\equiv 0 \pmod{k}$  pour tout  $i \in [1, n]$ , la restriction de  $f$  à  $E$ , que l'on note  $f_E$ , est telle que  $W^*_D f_E = 0$  et  $f_E(e_i) \neq 0$  pour tout  $i \in [1, n]$ . Il est facile de vérifier que  $W^* f_E = 0$  (proposition 2.6). Donc  $f_E$  est un  $k$ -flot non-nul de  $M$ . Ceci achève la démonstration.

Remarque 2.11: Nous avons en fait montré qu'à partir d'un  $\mathbb{Z}_k$ -flot non-nul il est possible de remplacer chaque valeur  $a \in \mathbb{Z}_k$  du flot par un entier appartenant à  $a$  de façon à obtenir un  $k$ -flot non-nul.

Proposition 2.12 :

Si un matroïde régulier  $M$  admet un  $\mathbb{Z}_5$ -flot non-nul, il admet pour une certaine orientation un 5-flot non-nul à valeurs positives tel que le nombre d'éléments ayant pour valeur 2 ou 3 est supérieur ou égal au nombre d'éléments ayant pour valeur 1 ou 4.

démonstration :

On utilisera les notations de la proposition précédente :

$F$  est un  $\mathbb{Z}_5$ -flot non-nul,  $f$  est un 5-flot non-nul qui lui est associé comme ci-dessus. On peut écrire :

$$f^{-1}(\{-4, -1, 1, 4\}) = F^{-1}(\{1, 4\})$$

$$f^{-1}(\{-3, -2, 2, 3\}) = F^{-1}(\{2, 3\}) .$$

Si  $f$  est le flot à valeurs positives obtenu à partir de  $f$  en choisissant une orientation convenable , on a :  $f^{-1}(\{1, 4\}) = F^{-1}(\{1, 4\})$  et  $f^{-1}(\{2, 3\}) = F^{-1}(\{2, 3\})$ . Supposons que  $|F^{-1}(\{1, 4\})| > |F^{-1}(\{2, 3\})|$ . Pour tout automorphisme  $\Phi$  du groupe  $\mathbb{Z}_5$ ,  $\Phi \circ F$  est un  $\mathbb{Z}_5$ -flot non-nul de  $M$ . Soit l'automorphisme  $u : \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$  tel que  $u(h) = 2.h$  pour tout  $h \in \mathbb{Z}_5$ , alors  $g = u \circ F$  est un  $\mathbb{Z}_5$ -flot non nul tel que :  $|g^{-1}(\{1, 4\})| < |g^{-1}(\{2, 3\})|$  .

A partir de  $g$ , on obtient le 5-flot non-nul cherché (comme dans la démonstration de la proposition précédente). Ceci achève la démonstration .

## 5. Flots compatibles.

- Soit  $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  une matrice à coefficients réels. Pour  $i \in [1, m]$  la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $A$  est notée  $A^i$

et est considéré comme vecteur de  $\mathbb{R}^n$ . On appelle espace des lignes de la matrice A, noté  $\mathfrak{R}$ , le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  engendré par les vecteurs  $A^1, \dots, A^m$ . A chaque vecteur  $X=(x_1, \dots, x_n)$  de  $\mathfrak{R}$  on associe une chaîne  $f_X$  de  $\mathfrak{C}(E, \mathbb{R})$ , où  $E=\{e_1, \dots, e_n\}$ , définie par  $f_X(e_k)=x_k$  pour tout  $k \in [1, n]$ . On définit ainsi un groupe de chaînes sur E que l'on note  $\mathfrak{R}'$ . Un vecteur X de  $\mathfrak{R}$  est dit un vecteur élémentaire si  $f_X$  est une chaîne élémentaire de  $\mathfrak{R}'$ .

**Théorème 2.13.** ([18], th.3.2.)

Soit  $A=(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$  une matrice réelle et soient  $b_j, c_j$  des nombres réels tels que  $b_j \leq c_j$  pour tout

$j \in [1, n]$ . Il existe un vecteur F de  $\mathbb{R}^n$  tel que :

$$\begin{cases} b_j \leq F_j \leq c_j & \text{pour tout } j \in [1, n] \text{ et} \\ AF = 0 \end{cases}$$

si et seulement si pour tout vecteur élémentaire  $K=(k_1, \dots, k_n)$  de l'espace des lignes  $\mathfrak{R}$  de A on a :

$$\sum_{k_j > 0} k_j c_j + \sum_{k_j < 0} k_j b_j \geq 0 .$$

On appelle  $b_j$  et  $c_j$  des capacités et F est appelé un flot compatible avec ces capacités .

• Nous allons appliquer ce théorème aux matroïdes réguliers.

Soit  $(W, W^*)$  une orientation d'un matroïde régulier M défini sur un ensemble  $E=\{e_1, \dots, e_n\}$ .

Nous raisonnons maintenant en termes de groupes de chaînes. On note  $N_{\mathbb{Z}}$  le groupe de chaînes engendré par les lignes de W dans  $\mathfrak{C}(E, \mathbb{Z})$ , et  $N_{\mathbb{R}}$  le groupe de chaînes engendré par les lignes de W dans  $\mathfrak{C}(E, \mathbb{R})$ . Les éléments de  $N_{\mathbb{Z}}$  seront appelés des chaînes entières et les éléments de  $N_{\mathbb{R}}$  des chaînes réelles. M étant un matroïde régulier  $M=M(N)$  où N est un groupe de chaînes régulier. L'orientation associée à N comme au 2 de la preuve de la proposition 2.10. est équivalente par changement de signe à  $(W, W^*)$ .

Si  $N$  est un groupe de chaînes de  $E$  sur  $A$  et  $S \subseteq E$ , on note  $R_S$  l'application de  $N$  dans  $A^E$  définie par ([19], II.1.):

$$\forall e \in E, \forall \Phi \in N \quad R_S[\Phi](e) = -\Phi(e) \text{ si } e \in S \text{ et } R_S[\Phi](e) = \Phi(e) \text{ si } e \notin S.$$

Alors  $R_S[N]$  est un groupe de chaînes de  $E$  sur  $A$  et  $R_S$  est un isomorphisme de groupes.  $R_S$  est appelé un changement de signe. On remarque que tout changement de signe conserve la régularité d'un groupe de chaînes ainsi que le matroïde associé.

Comme  $N_Z$  s'obtient à partir de  $N$  en changeant de signe sur un sous-ensemble  $S$  de  $E$ ,  $N_Z$  est régulier et  $M = M(N_Z)$ .

**Proposition 2.14.:**

Les chaînes élémentaires de  $N_R$  sont de la forme  $xf$ , où  $x \in \mathbb{R}^+$  et  $f$  est une chaîne primitive de  $N_Z$ .

**démonstration :** On montre d'abord que l'ensemble des supports des chaînes élémentaires de  $N_R$  est le même que l'ensemble des supports des chaînes élémentaires de  $N_Z$ .

1. Le support de toute chaîne élémentaire réelle contient le support non vide d'une chaîne entière. En effet, si ce n'est pas le cas, il existe une chaîne réelle  $\varphi$ , différente de la chaîne nulle, dont le support ne contient aucun support non vide de chaînes entières. Pour tout  $f \in N_Z$ ,  $[E - \sigma(\varphi)] \cap \sigma(f) \neq \emptyset$ . Donc  $E - \sigma(\varphi)$  contient un dendroïde  $D$  de  $N_Z$ . Soit  $W_D = [I_p, J]$  la matrice représentative de  $N_Z$  associée à  $D$ . On note  $h_1, \dots, h_p$  les chaînes correspondant aux lignes de  $W_D$ .

On a :

$$\varphi = \sum_{i \in [1, m]} x_i p_i \text{ où } x_i \in \mathbb{R} \text{ pour tout } i \in [1, m], \text{ où } m \text{ est le nombre de lignes de } W \text{ et } p_i \text{ est la chaîne}$$

primitive de  $N_Z$  associée à la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $W$ . Mais  $p_i = \sum_{j \in [1, p]} z_{ij} h_j$  où  $z_{ij} \in \mathbb{Z}$  pour tout  $j \in [1, p]$ . Il

s'ensuit que  $\varphi = \sum_{j \in [1, p]} y_j h_j$  où  $y_j \in \mathbb{R}$  pour tout  $j \in [1, p]$ .

Sans perte de généralité, on peut supposer que  $D = \{e_1, \dots, e_p\}$ . Comme  $D \subseteq E - \sigma(\varphi)$ , on a

$\varphi(e_j) = y_j = 0$  pour tout  $j \in [1, p]$ , alors  $\varphi$  est la chaîne nulle; ce qui est impossible par hypothèse.

Le support de toute chaîne élémentaire réelle contient donc le support d'une chaîne entière.

2. Le support de toute chaîne élémentaire entière est le support d'une chaîne élémentaire réelle.

Si ce n'est pas le cas, il existe une chaîne élémentaire  $f \in N_{\mathbb{Z}}$  dont le support n'est pas le support d'une chaîne élémentaire réelle. Mais  $f \in N_{\mathbb{R}}$ , donc il existe une chaîne élémentaire réelle  $\varphi$  telle que  $\sigma(\varphi) \subsetneq \sigma(f)$ . D'après 1)  $\sigma(\varphi)$  contient le support d'une chaîne élémentaire entière, ce qui est impossible car  $f$  est une chaîne élémentaire de  $N_{\mathbb{Z}}$ . Il reste à montrer (avec 1 et 2) la réciproque de 2.

3. Le support de toute chaîne élémentaire réelle est le support d'une chaîne élémentaire entière.

En effet, soit  $\varphi$  une chaîne élémentaire de  $N_{\mathbb{R}}$ , d'après 1 il existe une chaîne entière  $f$  de support non vide telle que  $\sigma(f) \subseteq \sigma(\varphi)$ , on en déduit qu'il existe une chaîne élémentaire entière  $f'$  telle que  $\sigma(f') \subseteq \sigma(\varphi)$ . Mais d'après 2  $\sigma(f')$  est le support d'une chaîne élémentaire réelle, donc  $\sigma(f') = \sigma(\varphi)$ .

2 et 3 impliquent que l'ensemble des supports des chaînes élémentaires de  $N_{\mathbb{R}}$  est le même que l'ensemble des supports des chaînes élémentaires de  $N_{\mathbb{Z}}$ .

On montre maintenant la proposition 2.14. Soit donc  $\varphi$  une chaîne élémentaire réelle, il existe une chaîne primitive entière  $f$  ayant le même support que  $\varphi$ . Soit  $e \in E$  tel que  $\varphi(e) \neq 0$  et  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $\varphi(e) = xf(e)$ ; on peut supposer  $x \in \mathbb{R}^+$  car sinon on prend la chaîne primitive  $-f$ . Si  $\varphi \neq xf$ ,  $\varphi' = \varphi - xf$  est une chaîne réelle différente de la chaîne nulle. Mais alors  $\sigma(\varphi') \subsetneq \sigma(\varphi)$ , ce qui est impossible car  $\varphi$  est une chaîne élémentaire. Ceci achève la démonstration.

**Proposition 2.15.:**

Soient  $(W, W^*)$  une orientation d'un matroïde régulier  $M$  avec :

$$W^* = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{et } b_j, c_j \text{ des éléments de } \mathbb{Z} \text{ avec } b_j \leq c_j \text{ pour tout } j \in [1, n].$$

Il existe un vecteur  $F$  de  $\mathbb{Z}^n$  tel que :

$$\Gamma \quad b_j \leq F_j \leq c_j \quad \text{pour tout } j \in [1, n] \text{ et}$$

$$L \quad W^* F = 0$$

si et seulement si :

$$\sum_{a_{ij}>0} c_j - \sum_{a_{ij}<0} b_j \geq 0 \text{ pour tout } i \in [1, m]$$

et

$$\sum_{a_{ij}<0} c_j - \sum_{a_{ij}>0} b_j \geq 0 \text{ pour tout } i \in [1, m] .$$

démonstration : On applique le théorème 2.13. à la matrice  $\begin{bmatrix} W^* \\ -W^* \end{bmatrix}$ . Les lignes de cette matrice

correspondent aux chaînes primitives de  $N_{\mathbb{Z}}^{\perp}$  (on utilise les notations et le résultat de la proposition précédente appliqués au matroïde dual  $M^*$ ). Tout vecteur élémentaire réel correspond, d'après la proposition 2.14., à une chaîne réelle  $\varphi = x f$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $f$  étant une chaîne primitive de  $N_{\mathbb{Z}}^{\perp}$ , donc représentée par une ligne de la matrice  $\begin{bmatrix} W^* \\ -W^* \end{bmatrix}$ . La condition du théorème 2.13. s'écrit :

$$\sum_{\varphi(e_j)>0} \varphi(e_j) c_j + \sum_{\varphi(e_j)<0} \varphi(e_j) b_j \geq 0 \text{ soit encore } \sum_{f(e_j)>0} f(e_j) c_j + \sum_{f(e_j)<0} f(e_j) b_j \geq 0 \text{ car } x \in \mathbb{R}^+ .$$

Si  $f$  correspond à une ligne  $i$  pour  $i \in [1, m]$ , la condition s'écrit :  $\sum_{a_{ij}>0} c_j - \sum_{a_{ij}<0} b_j \geq 0$ .

Si  $f$  correspond à une ligne  $i$  pour  $i \in [m+1, 2m]$ , la condition s'écrit :  $\sum_{a_{kj}<0} c_j - \sum_{a_{kj}>0} b_j \geq 0$  pour  $k=i-m$ .

Pour finir, soit maintenant  $D$  un dendroïde de  $N_{\mathbb{Z}}^{\perp}$ . Le vecteur  $F$  dont l'existence est prouvée par le théorème vérifie  $W^*_D F = 0$  et  $b_j \leq F_j \leq c_j$  pour tout  $j \in [1, n]$ . L'unimodularité de  $W^*_D$  et un théorème de Hoffman et Kruskal ([20], th.2) impliquent alors qu'il existe un vecteur  $F'$  à composantes entières tel que :  $W^*_D F' = 0$  et  $b_j \leq F'_j \leq c_j$  pour tout  $j \in [1, n]$ . Les lignes de  $W^*_D$  engendrant l'espace des lignes de  $W^*$ , il est clair que  $W^* F' = 0$ . Ceci achève la démonstration.

Proposition 2.16. :

Soit  $M$  un matroïde régulier défini sur un ensemble  $E$ , muni d'une orientation  $(W, W^*)$ .  $M$  admet un  $k$ -klot non-nul à valeurs positives (relativement à  $(W, W^*)$ ) si et seulement si  $M$  admet  $k-1$  2-flots  $C_1, \dots, C_{k-1}$  à valeurs positives (relativement à  $(W, W^*)$ ) tels que pour tout  $e \in E$  il existe au moins un  $j \in [1, k-1]$  avec  $C_j(e) = 1$ .

démonstration :

La condition est évidemment suffisante; en effet si  $C_1, \dots, C_{k-1}$  sont donnés  $C_1 + \dots + C_{k-1}$  est un  $k$ -flot non-nul à valeurs positives.

Pour la condition nécessaire on raisonne par récurrence sur  $k$ .

Pour  $k = 2$  la propriété est vraie. On suppose que la propriété est vraie pour  $k-1$ . Soit maintenant  $\Phi$  un  $k$ -flot non-nul de  $M$  à valeurs positives :  $\Phi$  est un vecteur de  $\mathbb{Z}^{[E]}$  tel que  $W^* \Phi = 0$ . D'abord nous prouvons qu'il existe un flot à valeurs entières compatible avec les capacités suivantes :

$$\begin{aligned} \lceil & \text{Si } \Phi_j = k-1 && c_j = b_j = 1 \\ \lfloor & \text{Si } \Phi_j \neq k-1 && c_j = 1 \text{ et } b_j = 0 . \end{aligned}$$

Soient  $a_{ij}$  les coefficients de la matrice  $W^* : W^* = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$

et  $w_{h,i}^+, w_{h,i}^-$  les nombres suivants définis pour tout  $i \in [1, m]$  et tout  $h \in [1, k-1]$  :

$$w_{h,i}^+ = |\{j \in [1, n] : \Phi_j = h, a_{ij} = +1\}|$$

$$w_{h,i}^- = |\{j \in [1, n] : \Phi_j = h, a_{ij} = -1\}| .$$

Alors nous avons pour tout  $i \in [1, m]$  :

$$\sum_{a_{ij} > 0} c_j - \sum_{a_{ij} < 0} b_j = w_{k-1,i}^+ - w_{k-1,i}^- + \sum_{h \in [1, k-2]} w_{h,i}^+ .$$

Etant donné que  $\Phi$  est un flot :

$$\sum_{h \in [1, k-1]} h \cdot w_{h,i}^+ = \sum_{h \in [1, k-1]} h \cdot w_{h,i}^- \quad \text{pour tout } i \in [1, m] .$$

Comme :

$$\sum_{h \in [1, k-1]} h \cdot w_{h,i}^- \geq (k-1)w_{k-1,i}^- \quad \text{et}$$

$$(k-1) \sum_{h \in [1, k-1]} w_{h,i}^+ \geq \sum_{h \in [1, k-1]} h \cdot w_{h,i}^+ \quad \text{il s'ensuit que :}$$

$$(k-1) \sum_{h \in [1, k-1]} w_{h,i}^+ \geq \sum_{h \in [1, k-1]} h \cdot w_{h,i}^+ = \sum_{h \in [1, k-1]} h \cdot w_{h,i}^- \geq (k-1) w_{k-1,i}^-$$

Ce qui permet d'écrire :

$$\sum_{h \in [1, k-1]} w_{h,i}^+ \geq w_{k-1,i}^-$$

Donc :  $\sum_{a_{ij} > 0} c_j - \sum_{a_{ij} < 0} b_j \geq 0$  pour tout  $i \in [1, m]$ .

Mutatis mutandis, on vérifie de même que  $\sum_{a_{ij} < 0} c_j - \sum_{a_{ij} > 0} b_j \geq 0$  pour tout  $i \in [1, m]$ .

D'après la proposition 2.15., il existe un flot compatible  $C_{k-1}$  à valeurs entières qui vaut 1 pour les éléments  $e_j$  de  $E$  tels que  $\Phi(e_j) = k-1$  et 0 ou 1 ailleurs. Soit  $\Phi' = \Phi - C_{k-1}$ ; il n'est pas difficile de voir que la restriction de  $\Phi'$  à  $\sigma(\Phi')$  est un  $(k-1)$ -flot non-nul à valeurs positives dans la restriction  $M_1 = M|_{\sigma(\Phi')}$  de  $M$  à  $\sigma(\Phi')$ . D'après l'hypothèse de récurrence il existe  $k-2$  2-flots dans  $M_1$ ,  $C'_1, \dots, C'_{k-2}$  à valeurs positives tels que pour tout  $e \in \sigma(\Phi')$  il existe au moins un  $j \in [1, k-2]$  avec  $C'_j(e) = 1$ . Alors pour tout  $j \in [1, k-2]$  on définit le 2-flot  $C_j$  dans  $M$  de la façon suivante :

$$\begin{cases} C_j(e) = C'_j(e) & \text{si } e \in \sigma(\Phi') \\ C_j(e) = 0 & \text{si } e \in E - \sigma(\Phi') \end{cases}$$

Alors  $C_1, \dots, C_{k-1}$  est la famille de 2-flots cherchée. Ceci achève la démonstration.

## 7. Couverture par des circuits :

Soit  $M$  un matroïde régulier défini sur  $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ .

• La *longueur* d'un circuit de  $M$  est le nombre d'éléments qu'il contient.

• Une *couverture* de  $M$  par des circuits est une famille  $\mathcal{C}$  de circuits telle que chaque élément de  $E$  appartienne à au moins un circuit de  $\mathcal{C}$ .

• La *longueur* de  $\mathcal{C}$ , notée  $l(\mathcal{C})$ , est la somme des longueurs des circuits de la couverture  $\mathcal{C}$ .

**Théorème 2.17:**

Si un matroïde régulier  $M$  défini sur un ensemble  $E$  admet un  $\mathbb{Z}_5$ -flot non-nul, il possède une couverture par des circuits  $\mathcal{C}$  telle que :

$$l(\mathcal{C}) \leq \frac{49}{30}|E| .$$

**démonstration :**

Si  $M$  admet un  $\mathbb{Z}_5$ -flot non-nul, d'après la proposition 2.10. il admet un 5-flot non-nul à valeurs positives pour une certaine orientation . D'après la proposition 2.16. le matroïde  $M$  admet (relativement à cette orientation) quatre 2-flots à valeurs positives  $C_1, C_2, C_3, C_4$  tels que pour tout  $e \in E$  il existe au moins un  $j \in [1,4]$  avec  $C_j(e) \neq 0$ . Deux éléments  $x$  et  $y$  de  $E$  seront dits de *même type* si et seulement si  $C_j(x) = C_j(y)$  pour tout  $j \in [1,4]$ . Cette relation d'équivalence définit sur  $E$  une partition en 15 classes que nous appellerons *types*.

On définit quatre  $\mathbb{Z}_2$ -flots  $C'_1, C'_2, C'_3, C'_4$  dans  $M$  en posant pour tout  $i \in [1,4]$ :

$C'_i(e) = 0$  si  $C_i(e) = 0$  et  $C'_i(e) = 1$  si  $C_i(e) = 1$ .  $C'_1, C'_2, C'_3, C'_4$  engendrent un espace vectoriel sur  $\mathbb{Z}_2$  que nous noterons  $\mathfrak{F}$  (on rappelle que  $\mathbb{Z}_2$  désigne indifféremment le groupe abélien des classes modulo 2 et le corps  $GF(2)$  à deux éléments) . Nous donnons la valeur sur les éléments de chaque type des 15 flots de  $\mathfrak{F}$  différents du flot nul (table I). En fait il est possible que certains types soient vides, ainsi certains flots peuvent apparaître plusieurs fois dans la table, c'est donc une liste où des répétitions peuvent se produire.

Le groupe abélien  $\mathbb{Z}_4$  est considéré comme un  $\mathbb{Z}$ -module à droite : le produit  $\alpha.z$  d'un élément

$\alpha \in \mathbb{Z}_4$  par un scalaire  $z \in \mathbb{Z}$  est égal à 0 si  $z = 0$ ,  $\sum_1 z \alpha$  si  $z > 0$  et  $\sum_1 -z (-\alpha)$  si  $z < 0$ .

Pour tout  $C_i, i \in [1,4]$  et tout  $\mathfrak{a} \in \mathbb{Z}_4$  on définit la chaîne  $\mathfrak{a}.C_i$  sur  $\mathbb{Z}_4$  par :

$\forall e \in E (\mathfrak{a}.C_i)(e) = \mathfrak{a}.C_i(e)$  . Alors  $\mathfrak{a}.C_i$  est un  $\mathbb{Z}_4$ -flot dans  $M$  ([19], Prop. 1) .

type	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	1+2	1+3	1+4	2+3	2+4	3+4	1+2+3	1+2+4	1+3+4	2+3+4	1+2+3+4
1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
2	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	1
3	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0
4	0	1	0	0	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1
5	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	0	0
6	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0
7	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1
8	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1
9	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0
10	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0
11	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1
12	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1	0
13	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	1
14	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	1
15	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	0

Dans la première ligne du tableau  $i+j+k$  signifie  $C'_i + C'_j + C'_k$ .

Table I

L'ensemble  $\{ \Phi \in \mathbb{Z}_4^E / \exists a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{Z}_4 : \Phi = \sum_{i \in \{1,4\}} a_i \cdot C_i \}$  est un groupe de chaînes de E sur

$\mathbb{Z}_4$  que nous noterons H.

Si  $f \in \mathfrak{X}$  et  $h \in H$ , on dit que  $(f, h)$  est un *bon couple* si et seulement si :  $\sigma(f) \cup \sigma(h) = E$ .

Pour chaque élément f de  $\mathfrak{X}$  on détermine tous les éléments de H qui constituent avec f un bon couple en étudiant les conditions sur les éléments  $a_i \in \mathbb{Z}_4$  qui assurent que si  $f(e) = 0$  pour  $e \in E$  alors  $(a_1 \cdot C_1 + a_2 \cdot C_2 + a_3 \cdot C_3 + a_4 \cdot C_4)(e) \neq 0$ .

Exemple : Pour  $f = C'_1$ , on doit avoir  $\sigma(f) \cup \sigma(h) = E$  avec  $h = a_1 \cdot C_1 + a_2 \cdot C_2 + a_3 \cdot C_3 + a_4 \cdot C_4$ . f est égale à zéro sur les types 1,2,3,4,5,6,7. Les valeurs de h sur ces types sont :

- sur le type 1, h a pour valeur  $a_4$
- sur le type 2, h a pour valeur  $a_3$
- sur le type 3, h a pour valeur  $a_3 + a_4$
- sur le type 4, h a pour valeur  $a_2$
- sur le type 5, h a pour valeur  $a_2 + a_4$
- sur le type 6, h a pour valeur  $a_2 + a_3$

sur le type 7, h a pour valeur  $a_2+a_3+a_4$ .

h devant être non nulle sur ces types nous avons les conditions suivantes sur les  $a_i$  :

$$a_4 \neq 0, a_3 \neq 0, a_3+a_4 \neq 0, a_2 \neq 0, a_2+a_4 \neq 0, a_2+a_3 \neq 0, a_2+a_3+a_4 \neq 0.$$

Si  $a_i = 2$  pour  $i \in [2,4]$ , les deux autres  $a_k$  pour  $k \in [2,4], k \neq i$ , ne peuvent être que tous les deux égaux à 1 ou tous les deux égaux à 3 car  $a_i+a_j \neq 0$  pour tout  $i,j \in [2,4], i \neq j$ . Mais alors  $a_2+a_3+a_4 = 0$ . Donc  $a_2, a_3, a_4$  ne peuvent avoir que la même valeur 1 ou la même valeur 3 (on ne peut avoir 1 et 3 en même temps car  $a_i+a_j \neq 0$  pour tout  $i,j \in [2,4], i \neq j$ ). Il s'ensuit que  $(a_1, 1, 1, 1)$  et  $(a_1, 3, 3, 3)$  où  $a_1$  décrit  $\mathbb{Z}_4$ , représentent les 8 solutions possibles (table II).

Sans répéter les bons couples qui ont la même paire de supports, on obtient au total 80 bons couples différents (voir annexe).

Soit  $(f,h)$  un bon couple, la restriction  $M|_{\sigma}(f)$  est un matroïde régulier qui admet un  $\mathbb{Z}_2$ -flot

type	$C_1$	$a_1.C_1 + a_2.C_2 + a_3.C_3 + a_4.C_4$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$h_5$	$h_6$	$h_7$	$h_8$
1	0	$a_4$	3	1	3	1	3	1	3	1
2	0	$a_3$	3	1	3	1	3	1	3	1
3	0	$a_3+a_4$	2	2	2	2	2	2	2	2
4	0	$a_2$	3	1	3	1	3	1	3	1
5	0	$a_2+a_4$	2	2	2	2	2	2	2	2
6	0	$a_2+a_3$	2	2	2	2	2	2	2	2
7	0	$a_2+a_3+a_4$	1	3	1	3	1	3	1	3
8	1	$a_1$	0	0	1	3	2	2	3	1
9	1	$a_1+a_4$	3	1	0	0	1	3	2	2
10	1	$a_1+a_3$	3	1	0	0	1	3	2	2
11	1	$a_1+a_3+a_4$	2	2	3	1	0	0	1	3
12	1	$a_1+a_2$	3	1	0	0	1	3	2	2
13	1	$a_1+a_2+a_4$	2	2	3	1	0	0	1	3
14	1	$a_1+a_2+a_3$	2	2	3	1	0	0	1	3
15	1	$a_1+a_2+a_3+a_4$	1	3	2	2	3	1	0	0

$$\begin{aligned}
 h_1 &= 0.C_1 + 3.C_2 + 3.C_3 + 3.C_4, & h_2 &= 0.C_1 + 1.C_2 + 1.C_3 + 1.C_4 \\
 h_3 &= 1.C_1 + 3.C_2 + 3.C_3 + 3.C_4, & h_4 &= 3.C_1 + 1.C_2 + 1.C_3 + 1.C_4 \\
 h_5 &= 2.C_1 + 3.C_2 + 3.C_3 + 3.C_4, & h_6 &= 2.C_1 + 1.C_2 + 1.C_3 + 1.C_4 \\
 h_7 &= 3.C_1 + 3.C_2 + 3.C_3 + 3.C_4, & h_8 &= 1.C_1 + 1.C_2 + 1.C_3 + 1.C_4
 \end{aligned}$$

table II

non-nul . Donc il existe une couverture  $\mathcal{C}_1$  de  $M|_{\sigma(f)}$  par des circuits avec  $l(\mathcal{C}_1) = |\sigma(f)|$  ([10] § 4) .

De même  $M|_{\sigma(h)}$  est un matroïde régulier qui admet un  $\mathbb{Z}_4$ -flot non-nul, donc il existe une couverture  $\mathcal{C}_2$  de  $M|_{\sigma(h)}$  par des circuits avec  $l(\mathcal{C}_2) \leq 4/3|\sigma(h)|$  ([10] § 4).

Les circuits de  $M|_{\sigma(f)}$  et  $M|_{\sigma(h)}$  sont des circuits de  $M$ . Puisque  $\sigma(f) \cup \sigma(h) = E$ ,  $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$  est une couverture de  $M$  par des circuits et :

$$l(\mathcal{C}) \leq l(\mathcal{C}_1) + l(\mathcal{C}_2) \leq |\sigma(f)| + 4/3|\sigma(h)|$$

$$\text{d'où } l(\mathcal{C}) \leq |\sigma(f) - \sigma(h)| + 7/3|\sigma(f) \cap \sigma(h)| + 4/3|\sigma(h) - \sigma(f)| \quad (1) .$$

On note  $A_1 = \sigma(f) - \sigma(h)$  ,  $A_2 = \sigma(f) \cap \sigma(h)$  ,  $A_3 = \sigma(h) - \sigma(f)$ .

Il est facile de voir que chaque bon couple obtenu par la construction précédente donne par (1) une majoration de la longueur d'une couverture de  $M$  par des circuits. Pour cela il suffit de connaître  $|A_1|$ ,  $|A_2|$ ,  $|A_3|$ . Pour un bon couple donné chaque sous-ensemble  $A_i$ ,  $i \in [1,3]$ , est une réunion de types. Nous construisons alors la liste suivante : pour chacun des 80 bons couples obtenus, on spécifie les types qui sont dans  $A_i$  pour  $i \in [1,3]$ .

Dans les tables III et IV :

- signifie : les éléments de ce type appartiennent à  $A_1$
- 0 signifie : les éléments de ce type appartiennent à  $A_2$
- + signifie : les éléments de ce type appartiennent à  $A_3$ .

**Table III** : 1<sup>ère</sup> sorte de bons couples . On remarque que:

- les éléments de trois types appartiennent à  $A_1$
- les éléments de cinq types appartiennent à  $A_2$
- les éléments de sept types appartiennent à  $A_3$ .

**Table IV** : 2<sup>ème</sup> sorte de bons couples . On remarque que:

- les éléments d'un type appartiennent à  $A_1$
- les éléments de sept types appartiennent à  $A_2$

- les éléments de sept types appartiennent à  $A_3$ .

type	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	+	+	+	+	+	0	0	+	+	+	+	+	0	0	+	+	0	0	0	0
2	+	+	+	+	0	0	+	+	+	+	0	0	+	+	0	0	+	+	0	0
3	+	+	+	+	0	-	0	-	+	+	0	-	0	-	-	0	0	-	+	+
4	+	+	0	0	+	+	+	+	0	0	+	+	+	+	0	0	0	0	+	+
5	+	+	0	-	+	+	0	-	-	0	+	+	0	-	0	-	+	+	-	0
6	+	+	0	-	0	-	+	+	-	0	0	-	+	+	+	+	-	0	0	-
7	+	+	-	0	-	0	-	0	0	-	-	0	-	0	+	+	+	+	+	+
8	0	0	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0	0	0	+	+	+	+	+	+
9	0	-	+	+	+	+	0	-	0	-	-	0	+	+	+	+	0	-	-	0
10	0	-	+	+	0	-	+	+	0	-	+	+	-	0	-	0	+	+	0	-
11	-	0	+	+	-	0	-	0	-	0	+	+	+	+	0	-	-	0	+	+
12	0	-	0	-	+	+	+	+	+	+	-	0	-	0	0	-	-	0	+	+
13	-	0	-	0	+	+	-	0	+	+	0	-	+	+	-	0	+	+	0	-
14	-	0	-	0	-	0	+	+	+	+	+	+	0	-	+	+	0	-	-	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Table III.

type	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	+	+	+	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	+	+	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-	-	-	0	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	+	+	+	0	0	0	0	0	0	0
5	0	-	-	-	+	+	+	+	+	-	-	0	-	+	+	+	+	+	+	+
6	+	+	+	+	0	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-	0	0	-	-
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	+	+	+	0	0	0
9	-	0	-	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	-	-	-	+	+	+
10	+	+	+	+	-	0	-	-	+	+	+	+	+	-	-	0	-	+	+	+
11	+	+	+	+	+	+	+	+	0	-	-	-	+	+	+	+	+	-	0	-
12	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	0	-	-	-	0	-	-	+	+	+
13	+	+	+	+	-	-	0	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	0
14	-	-	0	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	-	-	-
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	+	+

Table III (suite)

Type	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	+	+	+	+	+	+	-	0	+	+	+	+	-	0	+	+	0	-	-	0
2	+	+	+	+	-	0	+	+	+	+	-	0	+	+	-	0	+	+	0	-
3	+	+	+	+	0	0	0	0	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	+	+
4	+	+	-	0	+	+	+	+	-	0	+	+	+	+	0	-	-	0	+	+
5	+	+	0	0	+	+	0	0	0	0	+	+	0	0	0	0	+	+	0	0
6	+	+	0	0	0	0	+	+	0	0	0	0	+	+	+	+	0	0	0	0
7	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	+	+	+	+	+	+
8	-	0	+	+	+	+	+	+	0	-	0	-	0	-	+	+	+	+	+	+
9	0	0	+	+	+	+	0	0	0	0	0	0	+	+	+	+	0	0	0	0
10	0	0	+	+	0	0	+	+	0	0	+	+	0	0	0	0	+	+	0	0
11	0	0	+	+	0	0	0	0	0	0	+	+	+	+	0	0	0	0	+	+
12	0	0	0	0	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	+	+
13	0	0	0	0	+	+	0	0	+	+	0	0	+	+	0	0	+	+	0	0
14	0	0	0	0	0	0	+	+	+	+	+	+	0	0	+	+	0	0	0	0
15	0	-	0	-	0	-	0	-	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+

Table IV.

Type	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
1	+	+	+	+	0	0	-	0	0	0	0	-	0	-	0	0	0	0	0	-
2	0	0	0	-	+	+	+	+	0	0	-	0	0	0	0	-	0	0	-	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
4	0	0	-	0	0	0	0	-	+	+	+	+	0	0	-	0	-	0	0	0
5	0	0	0	0	+	+	+	+	0	0	0	0	+	+	+	+	+	+	+	+
6	+	+	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	+	+	+	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	-	0	0	0	-	0	0	0	-	0	0	+	+	+	+	0	-	0	0
9	0	0	0	0	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0	+	+	+	+
10	+	+	+	+	0	0	0	0	+	+	+	+	0	0	0	0	+	+	+	+
11	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0	+	+	+	+	0	0	0	0
12	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0	0	0	0	0	+	+	+	+
13	+	+	+	+	0	0	0	0	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0
14	0	0	0	0	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	0	0	0	0
15	-	0	0	0	-	0	0	0	-	0	0	0	-	0	0	0	+	+	+	+

Table IV (suite)

Maintenant en utilisant la programmation linéaire nous allons montrer qu'il existe une couverture  $\mathcal{C}$  de  $M$  par des circuits telle que  $l(\mathcal{C}) \leq 49/30 |E|$ , et que ce résultat est le meilleur que l'on puisse

obtenir par cette méthode .

Pour ce faire on définit la matrice :

$$A=(a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 15 \\ 1 \leq j \leq 80}} \text{ telle que :}$$

- $a_{ij} = 1$  si les éléments de type  $i$  appartiennent à l'ensemble  $A_1$  du  $j^{\text{ème}}$  bon couple de la liste précédente.
- $a_{ij} = 7/3$  si les éléments de type  $i$  appartiennent à l'ensemble  $A_2$  du  $j^{\text{ème}}$  bon couple de la liste précédente.
- $a_{ij} = 4/3$  si les éléments de type  $i$  appartiennent à l'ensemble  $A_3$  du  $j^{\text{ème}}$  bon couple de la liste précédente.

Soient  $y_i$  pour  $i \in [1,15]$  le nombre d'éléments de  $M$  de type  $i$  et  $Y=(y_1,y_2,\dots,y_{15})$ ,  $Y$  est donc un vecteur de  $\mathbb{N}^{15}$  tel que  $\sum_{i \in [1,15]} y_i = |E|$  . Pour  $j \in [1,80]$  la composante  $w_j$  de  $W = Y.A$  est une

majoration définie par (1) de la longueur d'une couverture par des circuits obtenue à partir du  $j^{\text{ème}}$  bon couple de la liste précédente.

Pour chaque  $|E| \in \mathbb{N}$ , on cherche le plus petit  $r$  tel que pour tout  $Y=(y_1,y_2,\dots,y_{15})$  ( $y_i \in \mathbb{N}$  pour  $i \in [1,15]$ ) avec  $\sum_{i \in [1,15]} y_i = |E|$ , on ait un indice  $k \in [1,80]$  pour lequel  $w_k \leq r \cdot |E|$ . On note ce nombre

$\rho_{|E|}$ . On pourra alors affirmer que  $M$  possède une couverture par des circuits  $\mathcal{C}$  avec  $l(\mathcal{C}) \leq \rho_{|E|} \cdot |E|$ .

Pour tout vecteur  $Y$ ,  $S(Y)$  désignera la somme de ses composantes. Etant donné un vecteur  $Y=(y_1,y_2,\dots,y_{15})$  ( $y_i \in \mathbb{N}$  pour  $i \in [1,15]$ ) avec  $S(Y) > 0$ , on pose  $W=Y.A$  et  $\rho_Y = \min_k w_k / S(Y)$  ( $w_k$  pour  $k \in [1,80]$  sont les composantes du vecteur  $W$ ). On a  $\rho_Y \leq 7/3$ . En effet les coefficients de la matrice  $A$  sont inférieurs ou égaux à  $7/3$ , donc quel que soit  $Y=(y_1,y_2,\dots,y_{15})$  ( $y_i \in \mathbb{N}$  pour  $i \in [1,15]$ ) avec  $S(Y) > 0$ , on a pour tout  $k \in [1,80]$   $w_k = \sum_{i \in [1,15]} y_i a_{ik} \leq 7/3 \sum_{i \in [1,15]} y_i = 7/3 S(Y)$ . Ce qui implique

que  $\rho_Y \leq 7/3$ , donc que  $U_1 = \{ \rho_Y \mid Y \in \mathbb{N}^{15} \text{ avec } S(Y) > 0 \}$  est un ensemble majoré. On note  $\rho_1 = \sup U_1$ . Il est clair d'après ce qui précède que  $M$  possède une couverture par des circuits  $\mathcal{C}$  avec

$$I(\mathcal{E}) \leq p_1 \cdot |E|.$$

Pour  $X=(x_1, \dots, x_{15}) \in (\mathbb{Q}^+)^{15}$  avec  $S(X)=1$ , on pose  $W'=X.A$  et  $e'_X = \text{Min}_k w'_k$  ( $w'_k$  pour  $k \in [1, 80]$  sont les composantes du vecteur  $W'$ ). On a aussi  $e'_X \leq 7/3$ .

Soit  $U_2 = \{ e'_X \mid X \in (\mathbb{Q}^+)^{15} \text{ avec } S(X)=1 \}$  et  $e_2 = \text{Sup} U_2$ .

**Lemme 2.20.**:  $e_1 = e_2$ .

démonstration:

Soit  $Y \in \mathbb{N}^{15}$  avec  $S(Y) > 0$ . Si on pose  $X = 1/S(Y) \cdot Y$ , on a  $X \in (\mathbb{Q}^+)^{15}$  avec  $S(X)=1$ . Et de plus  $W' = 1/S(Y) \cdot W$  et  $e'_X = e_Y$ . Donc  $U_1 \subseteq U_2$ .

Inversement, soit  $X \in (\mathbb{Q}^+)^{15}$  avec  $S(X)=1$ , et  $d$  le produit des dénominateurs des  $x_i$  ( $i \in [1, 15]$ ). Alors le vecteur  $Y = d \cdot X$  appartient à  $\mathbb{N}^{15}$  et  $S(Y)=d$ . Si on pose  $W = Y.A$ , comme  $Y.A = dX.A = dW'$  on a  $e_Y = \text{Min}_k d w'_k / d = e'_X$ . Donc  $U_2 \subseteq U_1$ . Ceci achève la démonstration.

Nous allons déterminer  $e_2$ .

Soit  $X \in (\mathbb{Q}^+)^{15}$  avec  $S(X)=1$ . Posons  $V_X = \{ p \mid X.A \geq p \cdot \mathbf{1} \}$  où  $\mathbf{1}$  est le vecteur comportant 80 composantes égales à 1, il est facile de voir que  $e'_X = \text{Max } V_X$ .

Considérons maintenant l'ensemble :

$$U_3 = \{ p'' \in \mathbb{Q} \mid \exists X=(x_1, \dots, x_{15}) \in (\mathbb{Q}^+)^{15} \text{ avec } S(X)=1 \text{ et } X.A \geq p'' \cdot \mathbf{1} \} = \bigcup_{X \in (\mathbb{Q}^+)^{15} \text{ avec } S(X)=1} V_X.$$

$e_3 = \text{Max} U_3$  se trouve par la programmation linéaire. Mais il est immédiat que

$$e_3 = \text{Max} \{ \text{Max} V_X \mid X \in (\mathbb{Q}^+)^{15} \text{ avec } S(X)=1 \} = \text{Max} \{ e'_X \mid X \in (\mathbb{Q}^+)^{15} \text{ avec } S(X)=1 \}.$$

Donc  $e_3 = e_2$  et la borne supérieure  $e_2$  est en fait un maximum.

Nous sommes ramenés à résoudre le problème de programmation linéaire suivant :

$$\left( \begin{array}{l} y'.C \geq 0 \\ y' \geq 0 \\ \sum_{i \in [1,15]} y_i = 1 \\ \text{maximiser } z = y'.b \end{array} \right. \text{ avec } C = \begin{pmatrix} & & A \\ & & -1, -1, \dots, -1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$y' = (y_1, y_2, \dots, y_{15}, \rho)$

La solution optimale de ce problème donnée par un ordinateur utilisant la méthode du simplexe est  $^{496}/_{300}$ . Il est alors légitime de penser qu'en rajoutants des contraintes, on puisse diminuer le maximum de  $z$ , donc améliorer le résultat. Il en est une qu'il est possible d'introduire en tenant compte de la proposition 2.12.: on peut supposer que le nombre d'éléments  $n_1$  où le 5-flot a pour valeur 1 ou 4 est inférieur ou égal au nombre d'éléments  $n_2$  où le 5-flot a pour valeur 2 ou 3. Si nous supposons donc que  $n_1 \leq n_2$ , le problème s'écrit :

$$\left( \begin{array}{l} y'.C' \geq 0 \\ y' \geq 0 \\ \sum_{i \in [1,15]} y_i = 1 \\ \text{maximiser } z = y'.b \end{array} \right. \text{ avec } C' = \begin{pmatrix} & & A & \varepsilon_1 \\ & & & \varepsilon_{15} \\ & & -1, -1, \dots, -1, & 0 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$y' = (y_1, y_2, \dots, y_{15}, \rho)$

avec pour tout  $i \in [1,15]$   $\varepsilon_i = 1$  si le 5-flot a pour valeur 2 ou 3 sur les éléments du  $i^{\text{ème}}$  type et  $\varepsilon_i = -1$  autrement. Alors la condition que le produit de  $y'$  par la dernière colonne de  $C'$  soit positif ou nul est équivalente à la condition  $n_1 \leq n_2$ . La solution optimale de ce problème donnée par un ordinateur utilisant la méthode du simplexe est maintenant  $^{49}/_{30}$ . Ceci achève la démonstration.

**Remarque :** En supposant  $n_1 > n_2$ , on n'améliore pas la première solution  $^{496}/_{300}$ .

Nous allons donner à présent une preuve vérifiable à la main par le lecteur. Pour ce faire, nous devons considérer le problème dual du programme linéaire précédent.

La forme canonique du problème s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} y.C \geq c \\ y \geq 0 \\ \text{minimiser } w=y.d \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad C = \begin{pmatrix} & \epsilon_1 & 1 & -1 \\ A & \epsilon_{15} & 1 & -1 \\ -1, -1, \dots, -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c=(0, \dots, 0, 1, -1) \quad \text{et} \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

La forme canonique du problème dual s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} C.x \leq d \\ x \geq 0 \\ \text{maximiser } z = c.x \end{array} \right.$$

Par la dualité faible, le problème dual donne de façon simple une borne supérieure de  $\rho$ . Pour avoir une démonstration du résultat, il suffit d'écrire en partant d'une solution optimale du dual, notée  $x$ , que pour tout  $Y \geq 0$ , on a  $(Y.C).x = Y.(C.x) \leq Y.d$ .

Soit  $A_j$ , pour  $j \in [1, 80]$  le  $j^{\text{ème}}$  vecteur colonne de  $A$ . Soient  $\epsilon$  le vecteur de  $\mathbb{Q}^{15}$  dont la  $i^{\text{ème}}$  composante est égale à  $\epsilon_i$  pour  $i \in [1, 15]$  et  $\mathbf{1}$  le vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1.

Alors le problème dual s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j \in [1, 80]} x_j A_j + x_{81} \cdot \epsilon + (x_{82} - x_{83}) \cdot \mathbf{1} \leq 0 \\ \sum_{j \in [1, 80]} x_j \geq 1, \quad x_j \geq 0 \quad \text{pour tout } j \in [1, 83] \\ \text{maximiser } z = x_{82} - x_{83} \end{array} \right.$$

Un ordinateur utilisant la méthode du simplexe donne la solution optimale suivante :

$$x = (x_1, \dots, x_{83})$$

Soit  $I = \{ 1, 3, 6, 8, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 81 \}$ , alors  $x_i = 1/10$  pour tout  $i \in I$ ,  $x_i = 0$  pour tout  $i \in [1, 81] - I$  et  $z = x_{82} - x_{83} = -49/30$ .

Dans la table V nous donnons les colonnes de la matrice A correspondant aux vecteurs  $A_j$  pour  $j \in I - \{81\}$ . Dans la table VI nous donnons les bons couples associés à ces dix colonnes de A.

Soit  $Y = (y_1, y_2, \dots, y_{15}, e)$ . Maintenant, comme plus haut, si on remplace : + par  $4/3$ , - par 1 et 0 par  $7/3$ ; et si on note  $M_i$  la majoration de la longueur de la couverture par des circuits correspondants à la  $i^{\text{ème}}$  colonne de la table V, nous avons par un calcul simple:

$$(Y.C).x = 1/10 \sum_{i \in [1, 10]} M_i - e + 1/10(n_2 - n_1) - 49/30(n_1 + n_2).$$

(Y.C). $x \in Y.d$  s'écrit alors :

$$1/10 \sum_{i \in [1, 10]} M_i - e + 1/10(n_2 - n_1) - 49/30(n_1 + n_2) \leq -e$$

On en déduit immédiatement que :

$$\sum_{i \in [1, 10]} M_i \leq 49/3(n_1 + n_2) + (n_1 - n_2); \text{ mais } n_1 \leq n_2, \text{ donc } \sum_{i \in [1, 10]} M_i \leq 49/3|E|.$$

Il s'ensuit qu'il existe un  $i \in [1, 10]$  tel que :

$$M_i \leq 49/30|E|.$$

Ainsi nous avons une autre preuve, plus aisément vérifiable, qu'il existe une couverture par des circuits  $\mathcal{C}$  de M avec  $l(\mathcal{C}) \leq 49/30|E|$ ; et en utilisant la programmation linéaire nous avons établi que ce résultat est le meilleur que nous pouvons obtenir par cette méthode. Ceci achève la démonstration.

Val. du flot	type	1	3	6	8	9	11	13	15	17	19	
1	1	+	+	+	0	+	+	0	+	0	0	52/3
1	2	+	+	0	+	+	0	+	0	+	0	52/3
2	3	+	+	-	-	+	0	0	-	0	+	46/3
1	4	+	0	+	+	0	+	+	0	0	+	52/3
2	5	+	0	+	-	-	+	0	0	+	-	46/3
2	6	+	0	-	+	-	0	+	+	-	0	46/3
3	7	+	-	0	0	0	-	-	+	+	+	46/3
1	8	0	+	+	+	0	0	0	+	+	+	52/3
2	9	0	+	+	-	0	-	+	+	0	-	46/3
2	10	0	+	-	+	0	+	-	-	+	0	46/3
3	11	-	+	0	0	-	+	+	0	-	+	46/3
2	12	0	0	+	+	+	-	-	0	-	+	46/3
3	13	-	-	+	0	+	0	+	-	+	0	46/3
3	14	-	-	0	+	+	+	0	+	0	-	46/3
4	15	0	0	0	0	+	+	+	+	+	+	52/3

nous donnons  
la somme des coefficients  
sur chaque ligne.

Table V.

type	1 3 6 8 9 11 13 15 17 19																							
	$G_1$	$G_2$	$G_3$	$G_4$	$G_5$	$G_6$	$G_7$	$G_8$	$G_9$	$G_{10}$														
	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	f	h	f	h	f	h	f	h	f	h	f	h	f	h						
1	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	1	3	0	1	0	1	1	2	0	1	1	2	1	3
2	0	0	1	0	0	1	0	1	1	3	0	1	0	1	1	2	0	1	1	3	0	1	1	2
3	0	0	1	1	0	2	0	2	1	0	1	0	0	2	1	3	1	3	1	0	1	3	0	1
4	0	1	0	0	0	1	1	2	0	1	0	1	1	3	0	1	0	1	1	2	1	3	0	1
5	0	1	0	1	0	2	1	3	0	2	1	0	1	0	0	2	1	3	1	3	0	1	1	0
6	0	1	1	0	0	2	1	3	1	0	0	2	1	0	1	3	0	2	0	1	1	0	1	3
7	0	1	1	1	0	3	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	2	0	2	0	2
8	1	0	0	0	1	2	0	1	0	1	0	1	1	2	1	3	1	3	0	1	0	1	0	1
9	1	0	0	1	1	3	0	2	0	2	1	0	1	3	1	0	0	1	0	2	1	3	1	0
10	1	0	1	0	1	3	0	2	1	0	0	2	1	3	0	1	1	0	1	0	0	2	1	3
11	1	0	1	1	1	0	0	3	1	1	1	1	1	0	0	2	0	2	1	1	1	0	0	2
12	1	1	0	0	1	3	1	3	0	2	0	2	0	1	1	0	1	0	1	3	1	0	0	2
13	1	1	0	1	1	0	1	0	0	3	1	1	0	2	1	1	0	2	1	0	0	2	1	1
14	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	0	3	0	2	0	2	1	1	0	2	1	1	1	0
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	1	2	0	3	0	3	0	3	0	3	0	3

$$G_1 = (C_1, 2.C_1 + 1.C_2 + 1.C_3 + 1.C_4), G_2 = (C_2, 1.C_1 + 2.C_2 + 1.C_3 + 1.C_4)$$

$$G_3 = (C_3, 1.C_1 + 1.C_2 + 3.C_3 + 1.C_4), G_4 = (C_4, 1.C_1 + 1.C_2 + 1.C_3 + 3.C_4)$$

$$G_5 = (C_1 + C_2, 2.C_1 + 3.C_2 + 1.C_3 + 1.C_4), G_6 = (C_1 + C_3, 3.C_1 + 1.C_2 + 2.C_3 + 1.C_4)$$

$$G_7 = (C_1 + C_4, 3.C_1 + 1.C_2 + 1.C_3 + 2.C_4), G_8 = (C_2 + C_3, 1.C_1 + 2.C_2 + 3.C_3 + 1.C_4)$$

$$G_9 = (C_2 + C_4, 1.C_1 + 3.C_2 + 1.C_3 + 2.C_4), G_{10} = (C_3 + C_4, 1.C_1 + 1.C_2 + 2.C_3 + 3.C_4)$$

Table VI

**CHAPITRE 3**

**FLOTS DE FULKERSON  
FLOTS DE PETERSEN**



## 1. Introduction :

L'existence d'un  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flot non-nul  $\Phi$  dans un graphe  $G=(V,E)$  implique l'existence d'une couverture  $\mathcal{C}$  du graphe par des cycles telle que  $l(\mathcal{C})=l(\Phi)$  (chap.1. rem.1.4). Le théorème de Tarsi dans ce cas ([10] § 4.) permet de prouver l'existence d'une couverture  $\mathcal{C}$  du graphe  $G$  par des cycles telle que :

$$l(\mathcal{C}) \leq k2^{k-1}/2^{k-1} |E|.$$

Si  $G$  possède une double couverture  $k$ -coloriable,  $G$  admet un  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flot non-nul particulier, qui implique l'existence d'une couverture  $\mathcal{C}$  par des cycles telle que  $l(\mathcal{C}) \leq 2^{k-1}/k |E|$ . Ainsi l'existence de  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flots non-nuls particuliers donne de nouvelles majorations de la longueur minimale d'une couverture du graphe. Nous allons poursuivre cette démarche en étudiant deux  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flots non-nuls particuliers, dont l'existence dans tous les graphes sans isthme est conjecturée par Fulkerson et Jaeger.

## 2. Définitions :

- Un *espace binaire*  $\mathcal{F}$  défini sur un ensemble fini  $E$  est un sous espace vectoriel de  $(\mathbb{Z}_2)^E$ , espace vectoriel sur  $\mathbb{Z}_2$  des applications de  $E$  sur  $\mathbb{Z}_2$  (on rappelle que  $\mathbb{Z}_2$  désigne indifféremment le groupe abélien des classes modulo 2 et le corps à deux éléments  $GF(2)$ ). C'est en particulier un groupe de chaînes de  $E$  sur  $\mathbb{Z}_2$ . Ses éléments sont appelés des  $\mathbb{Z}_2$ -flots.

- Par définition un matroïde est binaire s'il est associé à un groupe de chaînes sur  $\mathbb{Z}_2$  ([17], §1.2). A tout espace binaire  $\mathcal{F}$  on peut donc associer un matroïde binaire noté  $M(\mathcal{F})$ , les circuits de  $M(\mathcal{F})$  étant les supports des chaînes élémentaires de  $\mathcal{F}$ . Réciproquement, étant donné un matroïde binaire défini sur  $E$ , l'espace vectoriel sur  $\mathbb{Z}_2$  engendré par les fonctions caractéristiques des circuits de  $M$  est un espace binaire  $\mathcal{F}_M$  défini sur  $E$ . On a :  $M=M(\mathcal{F}_M)$  et  $\mathcal{F}=\mathcal{F}_{M(\mathcal{F})}$ . L'espace

binaire  $\mathcal{F}$  et le matroïde binaire  $M$  sont dits associés si  $M=M(\mathcal{F})$  ou  $\mathcal{F}=\mathcal{F}_M$ .

- Soit  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties d'un ensemble fini  $E$ .  $\mathcal{P}(E)$  a une structure d'espace vectoriel sur  $\mathbb{Z}_2$  : l'addition de deux sous-ensembles étant la différence symétrique des ces deux sous-ensembles.

L'application  $\sigma: \begin{cases} \mathbb{Z}_2^E \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ \Phi \mapsto \sigma(\Phi) \end{cases}$ ,  $\sigma(\Phi)$  étant le support de  $\Phi$ , est un isomorphisme

d'espaces vectoriels.  $\sigma^{-1}$ , l'isomorphisme réciproque est l'application qui à  $A \in \mathcal{P}(E)$  associe  $\chi_A$  définie par :  $\chi_A(e)=1$  si  $e \in A$  et  $\chi_A(e)=0$  si  $e \notin A$ .

- Si  $\mathcal{F}$  est un espace binaire, on note  $\sigma(\mathcal{F})$  son image par  $\sigma$ .  $\sigma(\mathcal{F})$  est appelé l'espace des cycles de  $\mathcal{F}$ . Si  $C$  est un sous espace vectoriel de  $\mathcal{P}(E)$ , on lui associe l'espace binaire  $\sigma^{-1}(C)$ .

- Soient deux espaces binaires :  $\mathcal{F}$  défini sur  $E$  et  $\mathcal{F}'$  défini sur  $E'$ . On dit que ces deux espaces sont isomorphes s'il existe une bijection  $f: E' \rightarrow E$  telle que  $\mathcal{F}' = \{\varphi \circ f: \varphi \in \mathcal{F}\}$ .

- Soit  $G=(V,E)$  un graphe, l'ensemble des  $\mathbb{Z}_2$ -flots de  $G$  est un espace binaire défini sur  $E$  que l'on appelle espace des  $\mathbb{Z}_2$ -flots du graphe et que l'on note  $\mathcal{F}(G)$ . Un espace binaire sera dit graphique s'il est isomorphe à l'espace des  $\mathbb{Z}_2$ -flots d'un graphe. Le matroïde binaire associé est le matroïde défini sur  $E$  dont les circuits sont les cycles du graphe. Le sous-espace  $\sigma(\mathcal{F}(G))$  de  $\mathcal{P}(E)$  associé à l'espace des  $\mathbb{Z}_2$ -flots est appelé par abus de langage l'espace des cycles du graphe, on le note  $\mathcal{C}(G)$ .

- Soit  $\mathcal{F}$  un espace binaire défini sur  $E$  et  $\Phi$  un  $\mathbb{Z}_2$ -flot de  $\mathcal{F}$ , on appelle *longueur du flot* le nombre  $l(\Phi) = |\sigma(\Phi)|$ .

- Soient  $\Phi_i \in \mathcal{F}$  pour  $i \in [1,k]$ ,  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$  est appelé un  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flots de  $\mathcal{F}$ . Si pour tout  $e \in E$   $(\Phi_1(e), \dots, \Phi_k(e)) \neq (0, \dots, 0)$ , on dit que  $\Phi$  est un  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flot non-nul. Il est clair que dans ce cas  $E = \bigcup_{i \in [1,k]} \sigma(\Phi_i)$ . On dit alors que  $\Phi$  est un *flot couvrant*. La *longueur* de  $\Phi$  est par définition  $|\bigcup_{i \in [1,k]} \sigma(\Phi_i)|$ .

$$l(\Phi) = \sum_{i \in [1, k]} l(\Phi_i).$$

• On dit qu'un matroïde binaire  $M$  admet un *flot couvrant*, si son espace binaire associé admet un flot couvrant.

• Soient  $M$  un matroïde binaire et  $\mathcal{F}$  un espace binaire qui sont associés. Soit  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$  un  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flot non-nul de  $\mathcal{F}$ , le support de chaque  $\mathbb{Z}_2$ -flot  $\Phi_i$  pour  $i \in [1, k]$  est une réunion  $\mathcal{E}_i$  de circuits disjoints de  $M$ . La famille  $\mathcal{E}$  constituée de tous les circuits de tous les ensembles  $\mathcal{E}_i$  est une couverture de  $M$  par des circuits, de plus  $l(\mathcal{E}) = l(\Phi)$ . Donc si un espace binaire admet un flot couvrant, le matroïde binaire associé possède une couverture par des circuits ayant une longueur égale à la longueur du flot couvrant.

Réciproquement, soit  $\mathcal{E} = (C_1, \dots, C_k)$  une couverture de  $M$  par des circuits  $C_i$ . Alors si  $\Phi_i$  est le  $\mathbb{Z}_2$ -flot de l'espace binaire tel que  $\sigma(\Phi_i) = C_i$  pour tout  $i \in [1, k]$ , il est clair que  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_k)$  est un flot couvrant de  $\mathcal{F}$  de même longueur que  $\mathcal{E}$ . Comme dans [6] (§2.2) on peut conclure que le minimum de  $l(\mathcal{E})$  sur l'ensemble des couvertures par des circuits du matroïde binaire est égal au minimum de  $l(\Phi)$  sur l'ensemble des flots couvrants de  $\mathcal{F}$ .

### 3. Flot de Fulkerson :

Soit  $z = (z_1, \dots, z_k) \in (\mathbb{Z}_2)^k$ , on appelle poids de Hamming de  $z$  le nombre de composantes non nulles de  $z$ , et on le note  $w(z)$ . Donc  $w(z) = |\{i \in [1, k] : z_i = 1\}|$ . Un *flot de Fulkerson*  $\Phi$  dans un espace binaire  $\mathcal{F}$  défini sur un ensemble  $E$  est un  $(\mathbb{Z}_2)^6$ -flot non-nul tel que pour tout  $e \in E$   $w(\Phi(e)) = 4$ .

On dira qu'un matroïde binaire admet un flot de Fulkerson, si l'espace binaire associé admet un flot de Fulkerson.

On dit qu'un graphe  $G = (V, E)$  admet un flot de Fulkerson, si  $\mathcal{F}(G)$  l'espace binaire des  $\mathbb{Z}_2$ -flots du graphe admet un flot de Fulkerson. Il est équivalent de dire que le graphe admet un

$(\mathbb{Z}_2)^6$ -flot non-nul  $\varphi$  tel que pour tout  $e \in E$   $w(\varphi(e))=4$ .

La conjecture suivante et ses énoncés équivalents justifient l'intérêt porté au flot de Fulkerson. On rappelle d'abord quelques définitions.

- Soit  $G=(V,E)$  un graphe. Un ensemble  $F \subseteq E$  est un *couplage* si les arêtes de  $F$  sont deux à deux non adjacentes. On dit qu'un sommet  $v$  de  $G$  est *saturé* par le couplage  $F$  s'il existe une arête de  $F$  incidente à  $v$ . Un couplage est dit *parfait* s'il sature tous les sommets de  $G$ .

- On appelle *k*-facteur d'un graphe  $G=(V,E)$ , un graphe partiel  $H=(V,E')$  qui est *k*-régulier.

**Conjecture 3.1.**(Fulkerson [21]):

Tout graphe cubique sans isthme possède six couplages parfaits (non nécessairement différents) tels que chaque arête appartienne à exactement deux de ces couplages.

Il est clair que cette conjecture est vraie pour les graphes cubiques 3-arête-coloriables.

Maintenant si  $F_1, \dots, F_6$  désignent les 6 couplages parfaits,  $F_i^* = E - F_i$  pour tout  $i \in [1,6]$  est un 2-facteur du graphe et chaque arête du graphe appartient à 4 d'entre eux. Cette conjecture peut donc s'écrire :

**Conjecture 3.2.:**

Tout graphe cubique sans isthme possède six 2-facteurs (non nécessairement distincts) tels que chaque arête appartienne à quatre d'entre eux exactement.

Cette dernière conjecture est équivalente à la suivante.

**Conjecture 3.3.:**

Tout graphe cubique sans isthme admet un flot de Fulkerson.

**démonstration:** Il est facile de voir que 3.2. implique 3.3., en effet les six 2-facteurs définissent six  $\mathbb{Z}_2$ -flots ayant la propriété requise.

Montrons maintenant qu'un graphe cubique sans isthme  $G=(V,E)$  admettant un flot de Fulkerson admet six 2-facteurs tels que chaque arête appartienne à exactement quatre d'entre eux.

Soit  $\Phi=(\Phi_1, \dots, \Phi_6)$  le flot de Fulkerson de  $G$ . Les  $\Phi_i$  étant des  $\mathbb{Z}_2$ -flots, à chaque sommet de  $G$  sont incidentes 0 ou 2 arêtes de  $\sigma(\Phi_i)$ , pour  $i \in [1,6]$ . Supposons qu'il existe un sommet  $x$  de  $G$  tel qu'aucune des arêtes incidentes  $e_1, e_2, e_3$  n'appartienne à  $\sigma(\Phi_1)$  par exemple. Notons  $\chi_i$  la

fonction caractéristique à valeurs entières du support de  $\Phi_i$ , pour  $i \in [1,6]$  :

$$\begin{cases} \chi_i(e) = 0 & \text{si } e \notin \sigma(\Phi_i) \\ \chi_i(e) = 1 & \text{si } e \in \sigma(\Phi_i) \end{cases}$$

On a :

$$\sum_{i \in [1,6]} \chi_i(e_j) = 4, \text{ pour } j \in [1,3] \text{ et } \chi_i(e_j) = 0 \text{ pour } j \in [1,3] .$$

$$\text{Ainsi pour tout } j \in [1,3] \sum_{i \in [2,6]} \chi_i(e_j) = 4 \text{ et donc } \sum_{j \in [1,3]} \left( \sum_{i \in [2,6]} \chi_i(e_j) \right) = 12.$$

$$\text{Mais : } \sum_{j \in [1,3]} \left( \sum_{i \in [2,6]} \chi_i(e_j) \right) = \sum_{i \in [2,6]} \left( \sum_{j \in [1,3]} \chi_i(e_j) \right) \text{ et } \sum_{j \in [1,3]} \chi_i(e_j) \text{ est au plus égal à deux, donc cette somme}$$

ne peut être égale à 12. En conclusion, quel que soit le sommet  $x$  de  $G$ , il existe exactement deux arêtes incidentes à  $x$  appartenant à  $\sigma(\Phi_i)$ , et ceci pour tout  $i \in [1,6]$ . Alors les  $H_i = (V, \sigma(\Phi_i))$  pour  $i \in [1,6]$  sont les 2-facteurs cherchés. Ceci achève la démonstration.

La conjecture 3.3. est également équivalente à la suivante :

#### Conjecture 3.4.:

Tout graphe sans isthme admet un flot de Fulkerson.

démonstration: Il est clair que la conjecture 3.4. implique la conjecture 3.3. Pour la réciproque nous avons besoin de quelques définitions.

Soit un graphe  $G=(V,E)$ , on appelle *subdivision* d'une arête  $e \in [xy]_G$ , l'opération qui transforme le graphe  $G$  en le graphe  $H=(V \cup \{z\}, (E - \{e\}) \cup \{e_1, e_2\})$  où  $z$  est un nouveau sommet et  $e_1$  est une nouvelle arête qui relie  $x$  et  $z$  et  $e_2$  est une nouvelle arête qui relie  $y$  et  $z$ .

On dit qu'un graphe  $G'$  est une *subdivision* du graphe  $G$ , s'il peut être obtenu à partir de  $G$  par une succession de subdivisions d'arêtes de  $G$ .

Un *éclatement* du graphe  $G$  en un sommet  $x \in V$  est un graphe  $G'$  obtenu en remplaçant  $x$  par deux sommets distincts  $x_1$  et  $x_2$ ; chaque arête de  $G$  ayant pour extrémités  $x$  et  $v$  pour  $v \in V$ , étant remplacée par une arête ayant pour extrémités  $x_1, v$  ou  $x_2, v$  de façon que  $d_{G'}(x_1) = 2$ .

Un *éclatement* du graphe  $G$  est un graphe obtenu à partir de  $G$  par une succession d'éclatements de sommets.

Soit  $G$  un graphe connexe sans isthme, d'après une proposition de Fleischner ([22] Prop.1) il existe un éclatement  $G'$  de  $G$  connexe sans isthme dont les sommets ont des degrés inférieurs ou égaux à 3.

Si  $G'$  ne possède pas de sommets de degré 3,  $G'$  possède un  $\mathbb{Z}_2$ -flot non-nul, donc il possède un flot de Fulkerson; il en est de même pour  $G$ . Si  $G'$  possède des sommets de degré 3,  $G'$  est une subdivision d'un graphe cubique  $G''$ . Par hypothèse  $G''$  admet un flot de Fulkerson, il en est alors de même pour  $G'$  et donc pour  $G$ . Ceci achève la démonstration.

#### 4. Flot de Petersen :

Nous allons définir un autre type de flot dans les espaces binaires.

• Soient  $C_1, \dots, C_6$  une base de  $\mathcal{C}(P)$  l'espace des cycles du graphe de Petersen  $P=(V,E)$ . Pour  $i \in [1,6]$ , on désigne par  $\Phi_i$  le  $\mathbb{Z}_2$ -flot de  $P$  tel que  $\sigma(\Phi_i) = C_i$ . Il est clair que  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_6)$  est un  $(\mathbb{Z}_2)^6$ -flot non-nul de  $P$ . Notons  $\Phi(P)$  l'ensemble des valeurs prises par  $\Phi$  sur  $E$ . On dit qu'un espace binaire admet un flot de Petersen, s'il admet un  $(\mathbb{Z}_2)^6$ -flot non-nul prenant ses valeurs dans  $\Phi(P)$ . Nous donnons la liste des valeurs prises par  $\Phi$  dans le cas où  $C_1, \dots, C_6$  sont les cycles déterminés par les arêtes de  $E-T$ , où  $T$  est l'arbre de  $P$  dessiné en traits épais dans la figure 1.

	C1	C2	C3	C4	C5	C6
1	1	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0
5	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	1
7	0	0	1	0	0	1
8	0	1	0	0	1	0
9	0	0	0	1	0	1
10	0	1	1	0	0	0
11	0	0	0	1	1	0
12	1	1	1	1	1	0
13	1	1	0	1	1	1
14	1	0	0	1	0	1
15	1	1	1	0	0	0

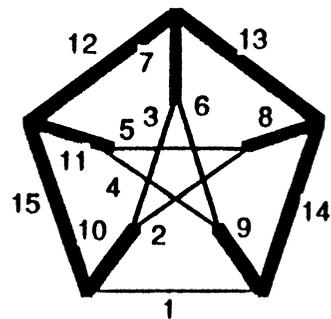


Figure 1

• On dit qu'un matroïde binaire  $M$  admet un flot de Petersen, si l'espace binaire associé  $\mathcal{F}_M$  admet un flot de Petersen.

• On dit qu'un graphe  $G=(V,E)$  admet un flot de Petersen si l'espace binaire  $\mathcal{F}(G)$  des  $\mathbb{Z}_2$ -flots de  $G$  admet un flot de Petersen. Il est équivalent de dire que  $G$  admet un  $(\mathbb{Z}_2)^6$ -flot non-nul prenant ses valeurs dans  $\Phi(P)$ .

**Remarque :**

Il est facile de montrer que la propriété d'admettre un flot de Petersen ne dépend pas de la base  $C_1, \dots, C_6$  initialement choisie.

Nous présentons maintenant la conjecture qui motive cette étude, mais nous commençons par donner quelques définitions et propriétés.

Soient  $G_1=(V_1,E_1)$  et  $G_2=(V_2,E_2)$  deux graphes. on dit que  $G_1 \succ G_2$  si et seulement si il existe une subdivision  $G'_2=(V'_2,E'_2)$  de  $G_2$  et une bijection  $f :E'_2 \rightarrow E_1$  telle que  $f(\mathcal{C}(G'_2)) \subseteq \mathcal{C}(G_1)$  ( $\mathcal{C}(G)$  désignant l'espace des cycles de  $G$ ).

**Proposition 3.5. :**

Soit  $B \subseteq (\mathbb{Z}_2)^k - \{0\}$ . Si  $G_1 \succ G_2$  et  $G_2$  admet un  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flot à valeurs dans  $B$ , alors il en est de même pour  $G_1$ .

**démonstration :**

Soit  $G'_2=(V'_2,E'_2)$  une subdivision de  $G_2$  et  $f :E'_2 \rightarrow E_1$  une bijection telles que  $f(\mathcal{C}(G'_2)) \subseteq \mathcal{C}(G_1)$ . Si  $G_2$  admet un  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flot à valeurs dans  $B$ , il en est de même de  $G'_2$ . Soit  $\Phi=(\Phi_1, \dots, \Phi_k)$  un  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flot à valeurs dans  $B$  de  $G'_2$ . Alors pour tout  $i \in [1,k]$   $f(\sigma(\Phi_i))$  est le support d'un  $\mathbb{Z}_2$ -flot de  $G_1$ , noté  $\Phi'_i$ . Pour tout  $e \in E_1$  et tout  $i \in [1,k]$ ,  $\Phi'_i(e) = \Phi_i(f^{-1}(e))$ . Donc  $\Phi'=(\Phi'_1, \dots, \Phi'_k)$  est un  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flot de  $G_1$  qui prend ses valeurs dans  $B$ . Ceci achève la démonstration.

On peut montrer que la relation  $\succ$  définie plus haut est une relation de préordre dans la classe des graphes.

- On note :
- $K_1^1$  le graphe ayant un sommet et une arête (une boucle).
  - $K_2^3$  le graphe ayant deux sommets et trois arêtes reliant ces deux sommets

( $\theta$ -graphe).

- $P$  le graphe de Petersen.

F.Jaeger dans [23] a proposé la conjecture suivante :

Conjecture 3.6. :

Pour tout graphe sans isthme  $G$  on a :  $K_1^1 \in G$  ou  $K_2^3 \in G$  ou  $P \in G$ .

En utilisant la proposition 3.5. on peut démontrer que cette conjecture est équivalente à la suivante (F.Jaeger, communication personnelle):

Conjecture 3.7.:

Tout graphe sans isthme admet un flot de Petersen.

Remarque 3.8.:

- Si  $K_1^1 \in G$ ,  $G$  admet un  $\mathbb{Z}_2$ -flot non-nul.
- Si  $K_2^3 \in G$ ,  $G$  admet un  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -flot non-nul .

Dans les deux cas il est facile de voir que  $G$  admet un flot de Petersen.

Nous allons montrer que la conjecture 3.7 implique la conjecture suivante :

Conjecture 3.9.:

Tout graphe sans isthme  $G=(V,E)$  possède une couverture par des cycles  $\mathcal{C}$  telle que :

$$1(\mathcal{C}) \leq 7/5 |E| .$$

Remarque 3.10.:

Ce résultat serait le meilleur possible comme le montre le graphe de Petersen.

### 5. Flots h-homogènes :

Soit  $\mathcal{F}$  un espace binaire défini sur  $E=\{e_1, \dots, e_n\}$ , et  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  des  $\mathbb{Z}_2$ -flots de  $\mathcal{F}$  tels que  $\Phi=(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$  soit un  $(\mathbb{Z}_2)^k$ -flot non-nul.

• Si  $A \subseteq (\mathbb{Z}_2)^k - \{0\}$  et  $\Phi(E) \subseteq A$ , on dira que  $\Phi$  est un A-flot. On pose  $|A|=m$  et  $A=\{a_1, \dots, a_m\}$  où  $a_i=(a_{i1}, \dots, a_{ik})$  pour tout  $i \in [1, m]$ . Pour tout  $j \in [1, k]$ , on note  $\varphi'_j$  l'application de  $A$  dans  $\mathbb{Z}_2$  définie par :  $\varphi'_j(a_h)=a_{hj}$  pour  $h \in [1, m]$ . Les  $\varphi'_j$  sont des chaînes de  $A$  sur  $\mathbb{Z}_2$  qui engendrent un groupe de chaînes  $F_A$ ;  $F_A$  est un espace binaire.

• Soit  $\Phi=(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$  un A-flot de  $\mathcal{F}$ . On appelle *vecteur poids* de  $\Phi$ , le vecteur de  $\mathbb{Z}^n$  ayant pour composantes dans la base canonique  $w(\Phi(e_i))$  pour  $i \in [1, m]$  où  $w((\Phi(e_i)))$  désigne le poids de Hamming du k-uple  $\Phi(e_i)=(\varphi_1(e_i), \dots, \varphi_k(e_i))$ . Ce vecteur est noté  $w_\Phi$ . La longueur du A-flot  $\Phi$  peut alors s'écrire de la façon suivante :  $l(\Phi)=\mathbf{1}_{|E|} \cdot w_\Phi$  où  $\mathbf{1}_{|E|}$  est le vecteur de  $\mathbb{Z}^n$ , dont toutes les composantes sont égales à 1 et où le produit  $x \cdot y$  désigne le produit scalaire habituel de  $\mathbb{Q}^n$ .

• On dit qu'une famille  $\Phi_1, \dots, \Phi_q$  de  $q$   $(\mathbb{Z}_2)^r$ -flots non-nuls de  $\mathcal{F}$  ( $r \geq 1$ ) est *h-homogène* si :

$$w_{\Phi_1} + \dots + w_{\Phi_q} = h \cdot \mathbf{1}_{|E|}.$$

• Si un espace binaire  $\mathcal{F}$  possède une famille de flots h-homogène, on dit que  $\mathcal{F}$  est un espace binaire h-homogène.

#### Proposition 3.11.

Si une famille  $\Phi_1, \dots, \Phi_q$  de  $q$   $(\mathbb{Z}_2)^r$ -flots non-nuls de  $\mathcal{F}$  est h-homogène et telle que

$$l(\Phi_i)=L \text{ pour tout } i \in [1, q], \text{ on a : } h = L/|E|.$$

démonstration : On a  $\mathbf{1}_{|E|} \cdot (w_{\Phi_1} + \dots + w_{\Phi_q}) = \mathbf{1}_{|E|} \cdot (h \cdot \mathbf{1}_{|E|})$ , donc  $q \cdot L = h \cdot q |E|$  et  $h = L/|E|$ .

Ceci achève la démonstration.

Proposition 3.12.:

Soit un espace binaire  $\mathcal{F}$  admettant un A-flot,  $A \subseteq (\mathbb{Z}_2)^k - \{0\}$ . Si  $F_A$  est h-homogène,  $\mathcal{F}$  admet un flot couvrant  $\Phi$  tel que  $l(\Phi) \leq h \cdot |E|$ .

démonstration :

Soit  $\psi$  un A-flot de  $\mathcal{F}$ . Pour tout  $a \in A$  posons  $y_a = |\psi^{-1}(a)|$ . On a  $\sum_{a \in A} y_a = |E| = Y \cdot \mathbf{1}_{|A|}$  où  $Y$  est le

vecteur de  $\mathbb{Z}^{|A|}$  ayant pour composantes  $y_a$  pour tout  $a \in A$  et  $\mathbf{1}_{|A|}$  est le vecteur de  $\mathbb{Z}^{|A|}$  ayant toutes ses composantes égales à 1.  $F_A$  étant h-homogène, il existe  $q$   $(\mathbb{Z}_2)^r$ -flots non-nuls  $\Phi_1, \dots, \Phi_q$  de  $F_A$  tels que  $w_{\Phi_1} + \dots + w_{\Phi_q} = h \cdot q \cdot \mathbf{1}_{|A|}$ . Pour tout  $i \in [1, q]$   $\Phi_i \circ \psi: E \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^r$  est un  $(\mathbb{Z}_2)^r$ -flot de  $\mathcal{F}$ . En effet  $\Phi_i \circ \psi = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ , où les  $\mu_s$  pour  $s \in [1, r]$  sont des combinaisons linéaires d'applications de la forme  $\varphi'_j \circ \psi$  pour  $j \in [1, k]$ . Il est facile de voir que ces applications sont égales aux composantes de  $\psi$ , c'est à dire que  $\psi = (\varphi'_1 \circ \psi, \dots, \varphi'_k \circ \psi)$ ; ce sont donc des  $\mathbb{Z}_2$ -flots de  $\mathcal{F}$ . De plus  $\Phi_i \circ \psi$  pour  $i \in [1, q]$  sont des flots couvrants, car les  $\Phi_i$  sont des  $(\mathbb{Z}_2)^r$ -flots non-nuls.

Alors  $\sum_{i \in [1, q]} l(\Phi_i \circ \psi) = \sum_{i \in [1, q]} w_{\Phi_i \circ \psi} \cdot |E|$ , et  $w_{\Phi_i \circ \psi}(e) = w_{\Phi_i}(\psi(e))$  pour tout  $e \in E$ . On a donc :

$$w_{\Phi_i \circ \psi} \cdot |E| = \sum_{e \in E} w_{\Phi_i}(\psi(e)) = \sum_{a \in A} y_a w_{\Phi_i}(a) = Y \cdot w_{\Phi_i}. \text{ Il s'ensuit que :}$$

$$\sum_{i \in [1, q]} l(\Phi_i \circ \psi) = \sum_{i \in [1, q]} Y \cdot w_{\Phi_i} = Y \cdot (\sum_{i \in [1, q]} w_{\Phi_i}) = Y \cdot (h \cdot q \cdot \mathbf{1}_{|A|}) = (h \cdot q) \cdot Y \cdot \mathbf{1}_{|A|} = h \cdot q \cdot |E|.$$

Il existe donc  $i \in [1, q]$  tel que  $l(\Phi_i \circ \psi) \leq h \cdot |E|$ . Ceci achève la démonstration.

## 6. Couverture par des cycles et flot de Fulkerson :

Nous allons prouver dans ce paragraphe la proposition suivante :

### Proposition 3.13.

Si un matroïde binaire  $M$  défini sur un ensemble  $E$  admet un flot de Fulkerson, il possède une couverture par des circuits  $\mathcal{C}$  telle que :

$$l(\mathcal{C}) \leq 2^{2/15}|E|.$$

**démonstration** : Soient  $E=\{e_1, \dots, e_n\}$  l'ensemble des éléments sur lequel est défini le matroïde binaire,  $\mathcal{F}_M$  l'espace binaire associé et  $\Phi$  le flot de Fulkerson de  $\mathcal{F}_M$ . On pose  $A=\{z \in (\mathbb{Z}_2)^6 : w(z)=4\}$ ; alors  $|A|=15$  et  $\Phi$  est un  $A$ -flot.  $F_A$  contient  $2^5-1=31$  éléments différents du flot nul, dont nous donnons la liste (table I). Les éléments de  $A$  sont notés  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{15}$ . En conservant les notations du paragraphe précédent, pour prouver la proposition il suffit de montrer que  $F_A$  est  $2^{2/15}$ -homogène, en effet on aura alors prouvé que  $\mathcal{F}_M$  admet un flot couvrant  $\Phi$  tel que  $l(\Phi) \leq 2^{2/15}|E|$  et par ce fait que le matroïde binaire  $M$  possède une couverture par des circuits  $\mathcal{C}$  de longueur  $l(\mathcal{C}) \leq 2^{2/15}|E|$ .

Pour prouver l'existence de  $q$   $(\mathbb{Z}_2)^r$ -flots non-nuls  $\Phi_1, \dots, \Phi_q$  tels que  $w_{\Phi_1} + \dots + w_{\Phi_q} = 2^{2/15} \cdot q \cdot |A|$  nous utilisons le graphe de Petersen.

On note  $P=(V,E)$  le graphe de Petersen avec  $E=\{e_1, \dots, e_{15}\}$ .  $P$  a exactement six couplages parfaits et ils sont tels que deux couplages quelconques s'intersectent exactement en une arête (Figure 1).

On note  $F_i$  pour  $i \in [1,6]$  ces couplages parfaits de  $P$ , alors les ensembles d'arêtes  $E-F_i$  pour  $i \in [1,6]$  sont des 2-facteurs qui sont chacun réunion de deux cycles disjoints de longueur 5, et chaque arête de  $P$  appartient à exactement 4 de ces six 2-facteurs. Nous noterons  $\Phi_i$ , pour  $i \in [1,6]$ , le  $\mathbb{Z}_2$ -flot tel que  $\sigma(\Phi_i) = E - F_i$ ;  $\Phi_1, \dots, \Phi_6$  engendrent un groupe de chaînes qui est isomorphe à



$F_A$ . Mais les six 2-facteurs engendrent un sous espace de  $\mathcal{C}(P)$  qui est l'ensemble des éléments de  $\mathcal{C}(P)$  constitués d'un nombre pair d'arêtes, que l'on note  $\mathcal{C}(P)_e$ . En effet ces six 2-facteurs appartiennent à  $\mathcal{C}(P)_e$ . De plus si dans le  $\mathbb{Z}_2$ -espace vectoriel  $\mathcal{P}(E)$ , on note  $\langle E \rangle$  le sous espace vectoriel engendré par le vecteur  $E$  de  $\mathcal{P}(E)$  et si le  $\mathbb{Z}_2$ -espace vectoriel  $\mathcal{P}(E)$  est muni du produit scalaire habituel, on peut écrire :

$\mathcal{C}(P)_e = \mathcal{C}(P) \cap \langle E \rangle^\perp$ . On remarque d'autre part que  $\dim \langle E \rangle^\perp = \dim \mathcal{P}(E) - 1$ ,  $\langle E \rangle^\perp$  est un hyperplan. Cet hyperplan ne contient pas  $\mathcal{C}(P)$ , car le graphe de Petersen contient des cycles de longueur impaire. Donc  $\dim \mathcal{C}(P) \cap \langle E \rangle^\perp = \dim \mathcal{C}(P) - 1$  et  $\dim \mathcal{C}(P)_e = 5$ .

Comme les six 2-facteurs engendrent un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}(P)_e$  de dimension 5, ils engendrent  $\mathcal{C}(P)_e$ .  $F_A$  est un sous-espace isomorphe à  $\sigma^{-1}(\mathcal{C}(P)_e)$ , l'espace binaire associé à  $\mathcal{C}(P)_e$ . On veut donc montrer que  $\sigma^{-1}(\mathcal{C}(P)_e)$  est  $h$ -homogène avec le plus petit  $h$  possible. La plus petite longueur d'une couverture de  $P$  par des cycles est 21. Mais la plus petite longueur d'une couverture de  $P$  par des éléments de  $\mathcal{C}(P)_e$  est 22. Il est donc légitime de chercher une famille de couvertures de  $P$  par des cycles de  $\mathcal{C}(P)_e$ , ayant toute la même longueur égale à 22 qui définisse une famille de flots  $h$ -homogène. On aura alors  $h = \frac{22}{15}$  d'après la proposition 3.11.

**Proposition 3.14:**

Une couverture de  $P$  par des cycles de  $\mathcal{C}(P)_e$  de longueur 22 est composée de deux cycles de longueur 8 et un de longueur 6.

**démonstration :**

En effet la longueur des cycles de  $\mathcal{C}(P)_e$  est 6, 8 ou 10. Mais  $22=8+8+6$  ou  $22=10+6+6$  sont les seules partitions de 22 utilisant ces 3 nombres. Le deuxième cas n'est pas possible car le 2-facteur qui appartiendrait à la couverture s'écrit  $E-F_i$  ( $F_i$  couplage parfait) pour un  $i \in [1,6]$  et  $|F_i|=5$ ; de plus pour tout cycle  $C$  de  $P$  on a :  $|C \cap F_i| \equiv 0 \pmod{2}$ . La couverture doit alors être complétée par deux cycles

de longueur 6. Mais on ne peut pas couvrir les arêtes de  $F_i$  par deux tels cycles : il n'existe pas de cycle de longueur 6 contenant 4 arêtes d'un couplage parfait. Ceci achève la démonstration.

**Remarque 3.15.** : l'existence de couverture de  $P$  par des cycles de  $\mathcal{C}(P)_e$  est claire d'après ce qui suit.

Soit une couverture  $C=(C_1,C_2,C_3)$  de  $P$  par des cycles de  $\mathcal{C}(P)_e$  de longueur 22, et pour  $i \in [1,3]$   $\varphi_i$  le  $\mathbb{Z}_2$ -flot de  $P$  tel que  $\sigma(\varphi_i)=C_i$ . On note  $\Phi=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ . Soit l'application  $w:E \rightarrow \{1,2,3\}$  définie pour tout  $e \in E$  par  $w(e)=w_\Phi(e)$ .  $w$  est appelée *fonction de poids*.  $w^{-1}(\{1,3\})=\sigma(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)$  est un cycle de  $\mathcal{C}(P)_e$ , c'est donc soit un cycle de longueur 6 ou 8 soit un 2-facteur.

Si  $w^{-1}(\{1,3\})$  est un cycle de longueur 6, il reste 9 arêtes de  $P$  telles que  $w_\Phi(e)=2$ . On aurait alors  $w_\Phi \cdot 1_{|E|} \geq 6 \cdot 1 + 9 \cdot 2 = 24$ , ce qui n'est pas possible car  $l(\Phi)=22$ .

Si  $w^{-1}(\{1,3\})$  est un cycle de longueur 8, il reste 7 arêtes  $e$  de  $P$  telles que  $w_\Phi(e)=2$ . On a alors  $22 = w_\Phi \cdot 1_{|E|} = (8 - |w^{-1}(\{3\})|) \cdot 1 + |w^{-1}(\{3\})| \cdot 3 + 7 \cdot 2 = 22 + 2 |w^{-1}(\{3\})|$ . On ne peut avoir  $l(\Phi)=22$  que si  $w^{-1}(\{3\}) = \emptyset$ . Dans ce cas  $(\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$  constitue une double couverture 4-coloriable de  $P$ . Mais alors  $(\Phi_2 + \Phi_3, \Phi_1 + \Phi_3, \Phi_1 + \Phi_2)$  est une double couverture 3-coloriable de  $P$  et  $(\Phi_2 + \Phi_3, \Phi_1 + \Phi_3)$  est un  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -flot non-nul de  $P$ . Ce qui est impossible car  $P$  n'est pas 3-arête-coloriable ([2], prop.2).

$w^{-1}(\{1,3\})$  est donc un 2-facteur. Il s'ensuit que  $w^{-1}(\{2\})$  est un couplage parfait de  $P$ . De plus  $22 = w_\Phi \cdot 1_{|E|} = (10 - |w^{-1}(\{3\})|) \cdot 1 + |w^{-1}(\{3\})| \cdot 3 + 5 \cdot 2 = 20 + 2 |w^{-1}(\{3\})|$ , donc  $w^{-1}(\{3\})$  est réduit à un singleton (figure 2).

Réciproquement, supposons que nous avons une application  $w : E \rightarrow \{1,2,3\}$  telle que  $w^{-1}(\{1,3\})=E-F_i$ ,  $w^{-1}(\{3\})=\{e\}$  et  $w^{-1}(\{2\})=F_i$  pour un  $i \in [1,6]$  et une arête  $e$  de  $E-F_i$ ,  $F_i$  étant un couplage parfait de  $P$ . Alors on vérifie aisément que  $w$  est la fonction poids d'un unique  $(\mathbb{Z}_2)^3$ -flot



$$\sum_{i \in [1,60]} w_{\phi_i}(e), \text{ pour tout } e \in E.$$

Si  $e \in E$ ,  $e$  appartient à quatre 2-facteurs différents. Donc il y a quatre fonctions poids  $w$  telles que  $w(e)=3$  et  $9 \times 4$  fonctions poids telles que  $w(e)=1$ . L'arête  $e$  appartient à deux couplages parfaits.

Pour chaque couplage il y a dix fonctions poids telles que  $w(e)=2$ , donc il y a  $2 \times 10$  fonctions poids telles que  $w(e)=2$ . Il s'ensuit que pour chaque arête  $e$  de  $E$  on a :

$$\sum_{i \in [1,60]} w_{\phi_i}(e) = 3 \times 4 + 9 \times 4 + 2 \times 20 = 88. \text{ Donc } \sum_{i \in [1,60]} w_{\phi_i} = 22/15 \cdot 60 \cdot |E|.$$

On en déduit que  $\sigma^{-1}(\mathcal{C}(P)_e)$  (donc  $F_A$ ) est  $22/15$ -homogène. Ceci achève la démonstration de la proposition 3.13..

## 7. Couverture par des cycles et flot de Petersen:

Nous faisons le même travail que dans le paragraphe précédent pour le flot de Petersen.

### Proposition 3.16.:

Si un matroïde binaire  $M$  défini sur un ensemble  $E$  admet un flot de Petersen, il possède une couverture par des circuits  $\mathcal{C}$  telle que :

$$l(\mathcal{C}) \leq 7/5 |E|.$$

démonstration : Soient  $\mathcal{F}_M$  l'espace binaire associé à  $M$  et  $\Phi$  le flot de Petersen de  $\mathcal{F}_M$ . Nous utiliserons les notations du paragraphe précédent. Il faut donc montrer que  $F_A$  est  $7/5$ -homogène.

Mais  $F_A$  est isomorphe à  $\mathcal{F}(P)$ . Nous nous placerons donc dans l'espace des cycles de  $P$ . Etant donné que la longueur minimale d'une couverture par des cycles de  $P$  est 21, il est légitime de chercher une famille de flots couvrants de même longueur 21 qui soit  $h$ -homogène. On aura alors d'après la proposition 3.12.  $h = 7/5$ . Pour prouver la proposition il suffit donc de trouver une famille

de flots couvrants de l'espace des  $\mathbb{Z}_2$ -flots de  $P$  de même longueur 21 qui soit  $h$ -homogène.

Considérons les deux couvertures  $C_1$  et  $C_2$  de  $P$  de longueur 21, représentées figure 4, et les fonctions poids des flots couvrants associés. A partir de ces deux couvertures nous allons construire la famille de flots couvrants dont nous avons besoin pour prouver la proposition.

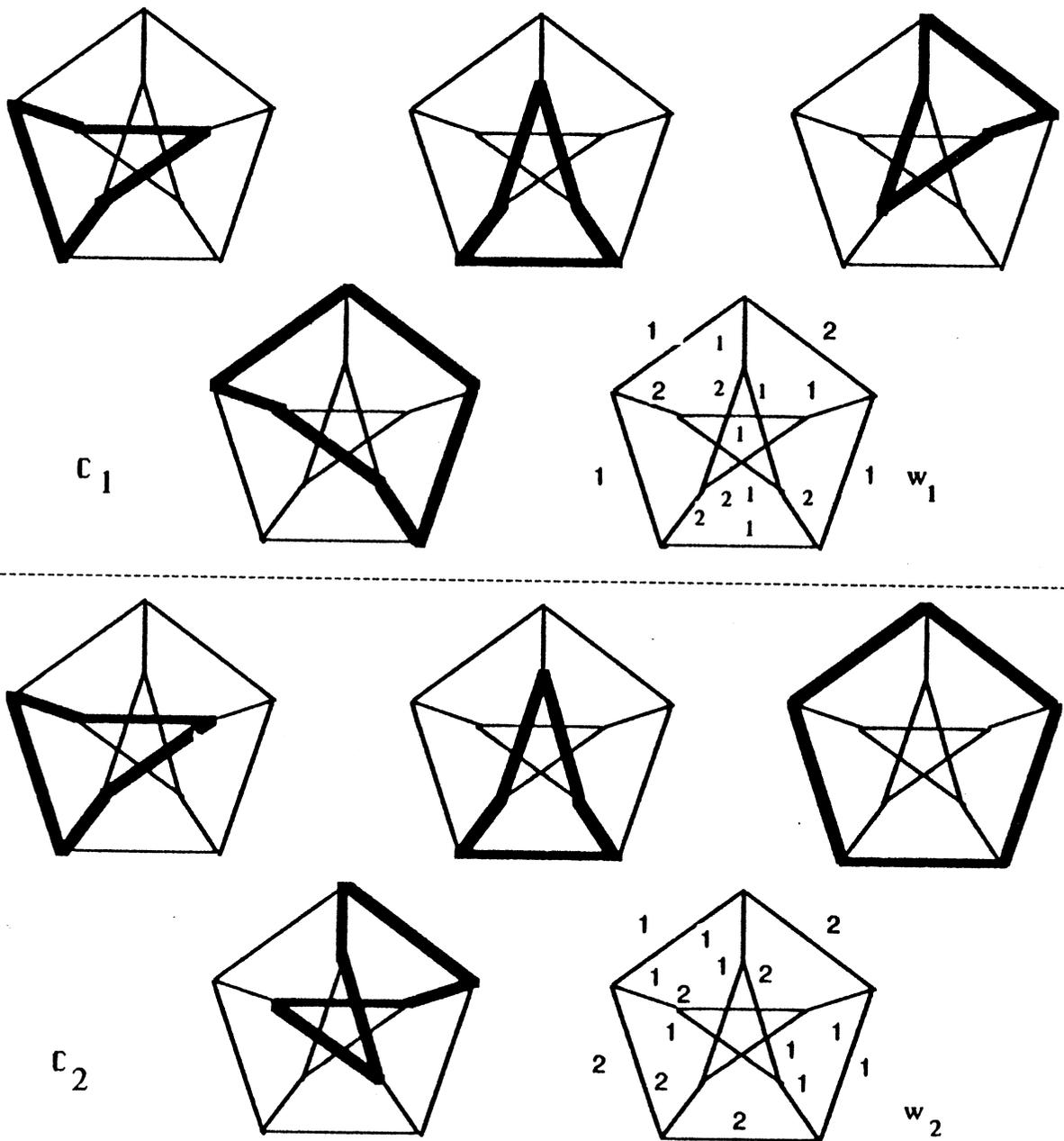


Figure 4

En déplaçant dans le sens des aiguilles d'une montre les cycles de la couverture  $C_1$  par une

rotation d'angle  $2\pi/5$  et de centre  $O$ , centre du cercle circonscrit au pentagone (figure 5), on obtient une autre couverture de  $P$  de longueur 21.

En répétant cette rotation, on obtient cinq couvertures différentes  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_4, \mathcal{C}_5, \mathcal{C}_6$  de longueur 21. Ces couvertures utilisent chaque arête du pentagone six fois, chaque arête de l'étoile sept fois et chaque arête du couplage parfait (noté en traits épais dans la figure 5) huit fois.

En déplaçant de même les cycles de la couverture  $\mathcal{C}_2$ , on obtient cinq couvertures différentes  $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_7, \mathcal{C}_8, \mathcal{C}_9, \mathcal{C}_{10}$  de longueur 21 qui utilisent chaque arête du pentagone huit fois, chaque arête de l'étoile sept fois et chaque arête du couplage parfait six fois. Soient  $\Phi_1, \dots, \Phi_{10}$  les flots couvrants associés à ces dix couvertures de  $P$ .

- Si  $e$  est une arête qui appartient au pentagone on a :  $\sum_{i \in [1,10]} w_{\Phi_i}(e) = 6+8 = 14$

- Si  $e$  est une arête qui appartient à l'étoile on a :  $\sum_{i \in [1,10]} w_{\Phi_i}(e) = 7+7 = 14$

- Si  $e$  est une arête qui appartient au couplage parfait on a :  $\sum_{i \in [1,10]} w_{\Phi_i}(e) = 8+6 = 14$

Pour finir on a donc :

- $l(\Phi_i) = 21$  pour tout  $i \in [1,10]$

- $\sum_{i \in [1,10]} w_{\Phi_i} = 7/5 \cdot 10 \cdot 1_{|E|}$ . Donc  $\mathcal{F}(P)$  est  $7/5$ -homogène, et il en est de même pour  $F_A$ .

Ceci achève la démonstration.

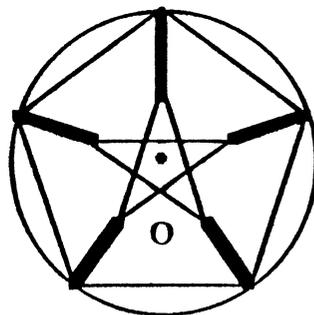


Figure 5

**Remarque 3.17.:**

Appliquées aux graphes les propositions 3.13 et 3.16 donnent les propositions suivantes :

- Si un graphe  $G=(V,E)$  admet un flot de Fulkerson, il possède une couverture par des cycles  $\mathcal{C}$  telle que :  $l(\mathcal{C}) \leq \frac{22}{15}|E|$  .
- Si un graphe  $G=(V,E)$  admet un flot de Petersen, il possède une couverture par des cycles  $\mathcal{C}$  telle que :  $l(\mathcal{C}) \leq \frac{7}{5}|E|$  .



**CHAPITRE 4**  
**CONSTRUCTIONS LOCALES**



## 1. Introduction :

Nous nous proposons de présenter une approche constructive des problèmes d'existence de flots non-nuls dans les graphes. Nous ferons cette approche dans le cas particulier des  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -flots non-nuls. On rappelle les principaux résultats quant à l'existence de ces flots prouvés dans [2].

Sauf mention contraire, les graphes considérés dans ce chapitre sont sans boucles.

Si  $G=(V,E)$  est un graphe qui admet deux arbres maximaux (i.e. couvrant tous les sommets) dont les ensembles d'arêtes sont disjoints, on dit que  $G$  contient deux arbres maximaux disjoints.  $G$  est alors évidemment connexe. Si  $G$  contient deux arbres maximaux disjoints dont les ensembles d'arêtes partitionnent  $E$ , on dit que  $G$  est constitué de deux arbres maximaux disjoints.

### Proposition 4.1.:

Un graphe  $G=(V,E)$  qui contient deux arbres maximaux disjoints admet un  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -flot non-nul.

démonstration : Soit  $A_1=(V,T_1)$  et  $A_2=(V,T_2)$  deux arbres maximaux disjoints de  $G$  : on note

$T_1^* = E - T_1$  et  $T_2^* = E - T_2$ ; étant donné une arête  $e \in T_1^*$ , il existe un unique cycle  $C_e$  tel que  $e \in E(C_e) \subseteq \{e\} \cup T_1$ . Soit  $\Phi_e$  le  $\mathbb{Z}_2$ -flot de  $G$  tel que  $\sigma(\Phi_e) = E(C_e)$ .  $\Phi_{T_1} = \sum_{e \in T_1^*} \Phi_e$  est un  $\mathbb{Z}_2$ -flot de

$G$ . De la même façon on peut définir un  $\mathbb{Z}_2$ -flot  $\Phi_{T_2} = \sum_{e \in T_2^*} \Phi_e$ . On a  $T_1^* \subseteq \sigma(\Phi_{T_1})$  et

$T_2^* \subseteq \sigma(\Phi_{T_2})$ , de plus  $T_1^* \cup T_2^* = E$ . Il est alors clair que  $\Phi = (\Phi_{T_1}, \Phi_{T_2})$  est un  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -flot non-nul de  $G$ . Ceci achève la démonstration.

### Proposition 4.2.:

Tout graphe 4-arête-connexe admet un  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -flot non-nul.

F.Jaeger et S.Kundu ont indépendamment démontré que tout graphe 4-arête-connexe contient deux arbres maximaux disjoints. Le premier ([2], prop.8) se place dans le cadre plus général des matroïdes et utilise un théorème de J.R.Edmonds. Le second utilise un théorème démontré indépendamment par W.T.Tutte [24] et Nash-Williams [25]. La proposition 4.2. est alors une conséquence directe de la proposition 4.1.. Nous donnons ci-dessous un léger renforcement de la

proposition 4.2., que nous prouvons de manière analogue à la démonstration de Kundu de la propriété utilisée pour démontrer la proposition 4.2..

**Proposition 4.3.:**

Si  $G=(V,E)$  est un graphe 4-arête-connexe, quelles que soient les arêtes  $e$  et  $f$  de  $E$ , le graphe  $G'=(V,E-\{e,f\})$  contient deux arbres maximaux disjoints.

Pour la preuve nous avons besoin du théorème démontré par Nash-Williams et W.T.Tutte.

Soient  $G=(V,E)$  un graphe et  $P=\{P_1, \dots, P_m\}$  une partition de l'ensemble des sommets de  $G$ .

Soient  $v_i, i \in [1,m]$ , les sommets d'un graphe  $G_P=(V_P, E_P)$  tel que le nombre d'arêtes d'extrémités  $v_i, v_j$  soit égal au nombre d'arêtes de  $G$  ayant une extrémité dans  $P_i$  et l'autre dans  $P_j$ , et ce pour tout  $i, j \in [1,m], i \neq j$ . On peut imaginer  $G_P$  obtenu en contractant dans le graphe  $G$  chaque ensemble  $P_i$  en un seul sommet  $v_i$ , puis en supprimant les boucles.

**Théorème 4.4. (Nash-Williams [25], W.T.Tutte [25]):**

Un graphe contient  $k$  arbres maximaux disjoints si et seulement si  $|E_P| \geq k(|P|-1)$  pour toute partition  $P$  de  $V$ .

**démonstration de la proposition 4.3.:** Soit  $P=\{P_1, \dots, P_m\}$  une partition de  $V$  ( $m \geq 2$ ), considérons le graphe  $G_P$ . Quel que soit  $i \in [1,m]$  on a  $d_{G_P}(v_i) \geq 4$ , car  $|\omega_G(P_i)| \geq 4$  puisque le graphe  $G$  est 4-arête-connexe. Il s'ensuit que  $2|E_P| = \sum_{i \in [1,m]} d_{G_P}(v_i) \geq 4|P|$ , soit  $|E_P| \geq 2|P|$ .

Quelles que soient les arêtes  $e, f$  de  $E$ , pour la partition  $P$  de  $V$  le nouveau graphe  $G'_P=(V_P, E'_P)$  obtenu à partir de  $G'=(V,E-\{e,f\})$  est tel que  $|E'_P| \geq |E_P|-2$ . Donc  $|E'_P| \geq 2(|P|-1)$ ; d'après le théorème 4.4.  $G'$  contient deux arbres maximaux disjoints. Ceci achève la démonstration.

Cette proposition peut être facilement généralisée en la proposition suivante :

**Proposition 4.5.:**

Soit  $k \in \mathbb{N}-\{0\}$ . Si  $G=(V,E)$  est un graphe  $2k$ -arête-connexe, quelles que soient les arêtes

$e_1, \dots, e_k$  de  $E$ , le graphe  $G'=(V, E-\{e_1, \dots, e_k\})$  contient  $k$  arbres maximaux deux à deux disjoints.

Des propositions 4.1. et 4.3. on déduit immédiatement :

**Proposition 4.6.:**

Si  $G=(V, E)$  est un graphe 4-arête-connexe, quelles que soient les arêtes  $e, f$  de  $E$ ,  $G'=(V, E-\{e, f\})$  admet un  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -flot non-nul.

## 2. Constructions locales :

Nous présentons dans ce paragraphe des constructions qui "préservent" dans un graphe l'existence de deux arbres maximaux disjoints. Dans la suite tous les graphes sont considérés sans boucles.

Soit  $G=(V, E)$  un graphe; on définit les constructions suivantes :

• **Construction I:** Etant donné deux sommets distincts  $x$  et  $y$  de  $G$  ajouter une arête au graphe ayant pour extrémités ces sommets. Le nouveau graphe obtenu est un graphe  $G'=(V, E')$  tel que  $E \not\subset E'$  avec  $|E'|=|E| + 1$  puisque  $|[xy]_{G'}| = |[xy]_G| + 1$  (figure 1).

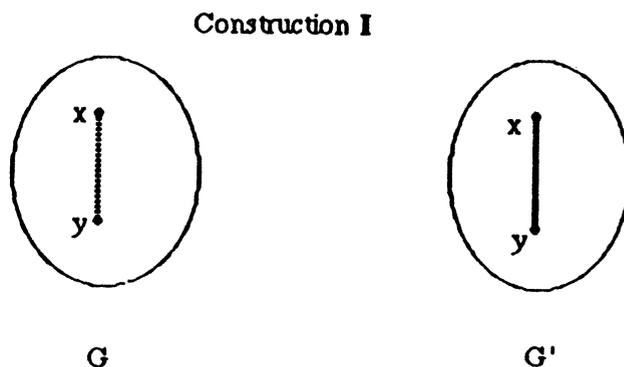


Figure 1

• **Construction T** : subdiviser une arête  $e \in [uv]_G$  en deux arêtes  $e_1, e_2$  adjacentes en un nouveau sommet  $z$  et ajouter une arête reliant  $z$  à un sommet quelconque  $y$  de  $G$ . Le nouveau graphe obtenu est le graphe  $G' = (V \cup \{z\}, (E - \{e\}) \cup \{e_1, e_2, f\})$ ,  $f$  étant l'arête reliant  $y$  et  $z$  (figure 2).

Construction T

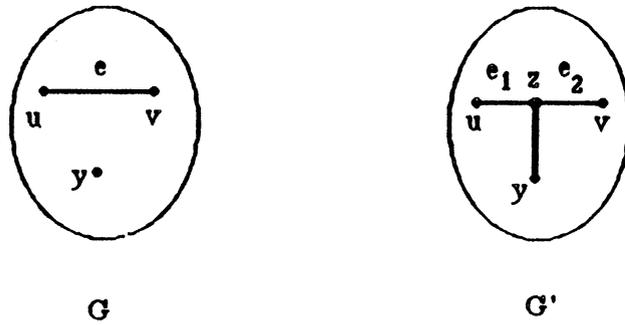


Figure 2

• **Construction V** : soient  $x$  et  $y$  deux sommets de  $G$  (non nécessairement distincts). On introduit un nouveau sommet  $v$  et deux nouvelles arêtes :  $e_1$  d'extrémités  $v, x$  et  $e_2$  d'extrémités  $v, y$  (figure 3).

Construction V

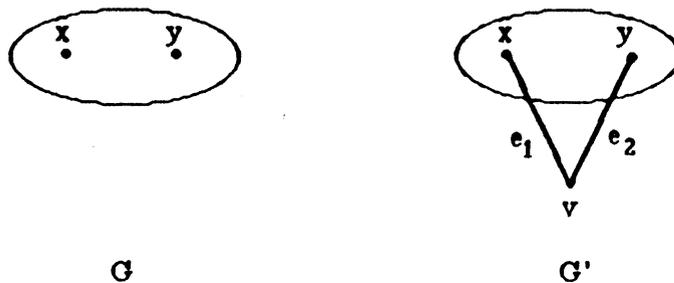


Figure 3

Soit  $K_2^2$  le graphe sans boucles ayant deux sommets et deux arêtes (figure 4).

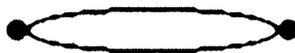


Figure 4

Un graphe est dit *V.T-constructible* (resp. *I.T.V-constructible*) s'il peut être obtenu à partir de  $K_2^2$  par une succession de constructions de type V, T (resp. I, T, V).

**Lemme 4.7.:**

(i) Si  $G=(V,E)$  contient deux arbres maximaux disjoints, tout graphe  $G'$  obtenu à partir de  $G$  par un construction de type **I**, **T** ou **V** a la même propriété.

(ii) Si  $G=(V,E)$  est constitué de deux arbres maximaux disjoints, tout graphe  $G'$  obtenu à partir de  $G$  par une construction de type **V** ou **T** a la même propriété.

**démonstration :**

(i) Soit  $G=(V,E)$  un graphe contenant deux arbres maximaux disjoints  $A_1=(V,T_1)$  et  $A_2=(V,T_2)$ ,

on a  $T_1 \cup T_2 \subseteq E$  et  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ .

a) Si  $G'$  est obtenu à partir de  $G$  par une construction de type **I**,  $A_1$  et  $A_2$  sont encore deux arbres maximaux disjoints de  $G'$ .

b) Si  $G'$  est obtenu à partir de  $G$  par une construction de type **V** introduisant un nouveau sommet  $x$  et deux nouvelles arêtes  $e, f$ , alors  $A'_1=(V \cup \{x\}, T_1 \cup \{e\})$  et  $A'_2=(V \cup \{x\}, T_2 \cup \{f\})$  sont deux arbres maximaux disjoints de  $G'$ .

c) Si  $G'$  est obtenu à partir de  $G$  par une construction de type **T**,  $e$  étant l'arête subdivisée en deux arêtes  $e_1$  et  $e_2$  adjacentes en un nouveau sommet  $z$ ,  $f$  étant la nouvelle arête ajoutée, deux cas sont à examiner :

1.  $e \notin T_1 \cup T_2$ , alors  $A'_1=(V \cup \{z\}, T_1 \cup \{e_1\})$  et  $A'_2=(V \cup \{z\}, T_2 \cup \{e_2\})$  sont deux arbres maximaux disjoints de  $G'$ .

2.  $e \in T_1$ , alors  $A'_1=(V \cup \{z\}, (T_1 - \{e\}) \cup \{e_1, e_2\})$  et  $A'_2=(V \cup \{z\}, T_2 \cup \{f\})$  sont deux arbres maximaux disjoints de  $G'$ . Si  $e \in T_2$  le raisonnement est le même.

Ceci achève la démonstration de (i).

(ii) Si  $G=(V,E)$  est constitué de deux arbres maximaux disjoints,  $G'=(V',E')$  contient deux arbres maximaux disjoints d'après (i). De plus  $|E|=2(|V|-1)$ . Donc  $|E'|=2(|V'|-1)$  puisque  $|E'|=|E|+2$  et  $|V'|=|V|+1$ . Ce qui implique que  $G'$  est constitué de deux arbres maximaux disjoints.

Ceci achève la démonstration de (ii).

**Proposition 4.8.:**

Un graphe est **V.T**-constructible si et seulement si il est constitué de deux arbres maximaux disjoints.

démonstration :

• Il est facile de voir que  $K_2^2$  est constitué de deux arbres maximaux disjoints; en utilisant le lemme précédent il est immédiat qu'un graphe construit à partir de  $K_2^2$  par une succession de constructions de type V,T est constitué de deux arbres maximaux disjoints. Un graphe V.T-constructible est donc constitué de deux arbres maximaux disjoints.

• Pour la réciproque nous ferons un raisonnement par récurrence sur le nombre de sommets du graphe.  $K_2^2$  est V.T-constructible. Soit  $G=(V,E)$  un graphe constitué de deux arbres maximaux disjoints  $A_1=(V,T_1)$  et  $A_2=(V,T_2)$ , où  $T_1 \cup T_2 = E$  et  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$ , tel que tout graphe  $G'=(V',E')$  constitué de deux arbres maximaux disjoints avec  $|V'| < |V|$  soit V.T-constructible.

On note  $|E|=m$  et  $|V|=n$ , comme  $|E|=|T_1|+|T_2|$  on a  $m=2(n-1)$ . Mais  $2m = \sum_{x \in V} d_G(x)$ , d'où

$$\sum_{x \in V} d_G(x) = 4n - 4.$$

Il s'ensuit qu'il existe au moins un sommet  $x$  de  $V$  tel que  $d_G(x) \leq 3$ . Il est clair que  $G$  n'admet pas de sommet de degré 0 ou 1. Il reste alors deux possibilités à examiner.

• Il existe  $x \in V$  tel que  $d_G(x) = 2$ . Alors une arête de  $E$  incidente à  $x$ , soit  $e$ , appartient à  $T_1$  et l'autre arête incidente, soit  $f$ , appartient à  $T_2$  (figure 5).  $G'=(V-\{x\}, E-\{e,f\})$  est alors constitué de deux arbres maximaux disjoints  $A'_1=(V-\{x\}, T_1-\{e\})$  et  $A'_2=(V-\{x\}, T_2-\{f\})$ .

Donc  $G'$  est V.T-constructible, d'après la minimalité de  $G$ . Alors il en est de même de  $G$ , la dernière construction étant de type V (on ajoute le sommet  $x$  à  $G'$  et les deux arêtes  $e, f$ ).

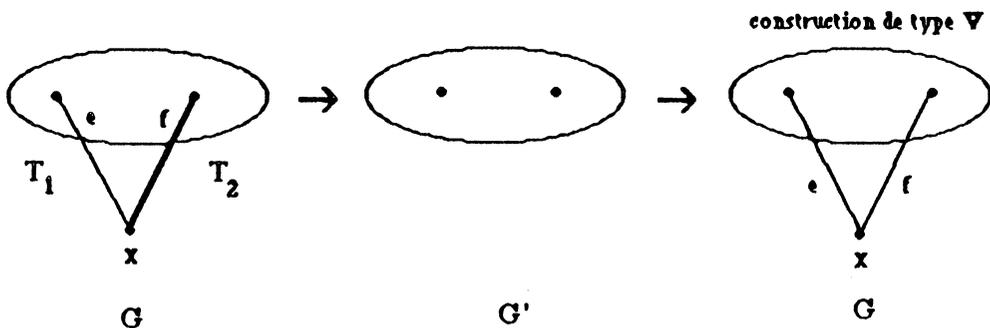


Figure 5

• Il existe  $x \in V$  tel que  $d_G(x) = 3$ . Deux arêtes  $e$  et  $f$  incidentes à  $x$  appartiennent, disons, à  $T_1$  et l'autre arête  $g$  incidente à  $x$  appartient à  $T_2$ . Soit  $G' = (V', E')$ , le graphe tel que  $V' = V - \{x\}$  et  $E' = (E - \{e, f, g\}) \cup \{h\}$  où  $h$  est une arête ayant pour extrémités les extrémités de  $e$  et  $f$  différentes de  $x$ .

Alors  $G'$  est constitué de deux arbres maximaux disjoints  $A'_1 = (V - \{x\}, (T_1 - \{e, f\}) \cup \{h\})$  et  $A'_2 = (V - \{x\}, T_2 - \{g\})$ . Il est donc  $V.T$ -constructible d'après la minimalité de  $G$ .  $G$  est alors obtenu à partir de  $G'$  par une construction de type  $T$ . On subdivise l'arête  $h$  en deux arêtes  $e, f$  adjacentes au nouveau sommet  $x$ ,  $g$  est l'arête ajoutée (figure 6).

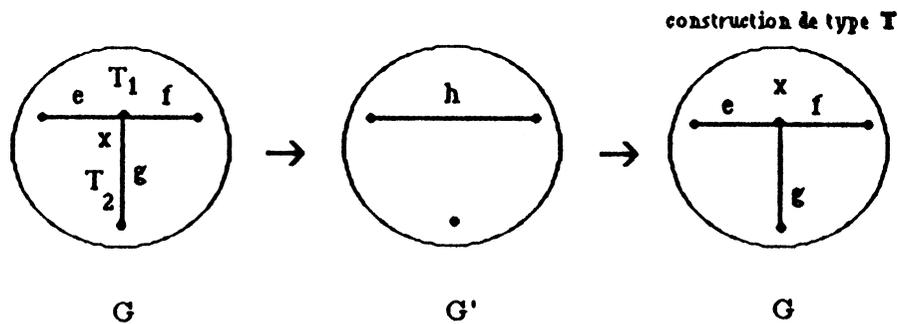


Figure 6

$G$  est donc  $V.T$ -constructible. Ceci achève la démonstration.

**Proposition 4.9.:**

Un graphe est  $I.T.V$ -constructible si et seulement si il contient deux arbres maximaux disjoints.

**démonstration :**

1. Soit  $G = (V, E)$  un graphe qui contient deux arbres maximaux disjoints. Il admet donc un graphe partiel  $G' = (V, E')$  ( $E' \subseteq E$ ) constitué de deux arbres maximaux disjoints. D'après la proposition 4.8.,  $G'$  est  $V.T$ -constructible. Comme on peut obtenir  $G$  à partir de  $G'$  par une succession de constructions de type  $I$ ,  $G$  est  $I.T.V$ -constructible.

2.  $K_2^2$  contient deux arbres maximaux disjoints, il est alors immédiat d'après le lemme 4.7. qu'un graphe  $I.T.V$ -constructible contient deux arbres maximaux disjoints.

**Proposition 4.10.:** Tout graphe  $I.T.V$ -constructible admet un  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ -flot non-nul.

C'est une conséquence directe des propositions 4.1. et 4.9. On déduit des propositions 4.3. et

4.9. que tout graphe 4-arête-connexe est I.T.V-constructible.

Nous donnons ci-dessous une démonstration directe de la proposition 4.10. qui ne fait pas appel à la notion d'arbre maximal.

### 3. Construction de Mader :

On appelle construction de Mader la construction suivante. Soit  $G=(V,E)$  un graphe .

Construction  $O_m$  ([26], p.156) : choisir  $m$  arêtes différentes  $e_i$  ( $i \in [1,m]$ ) de  $E(G)$ , pour tout  $i \in [1,m]$  subdiviser  $e_i$  en deux arêtes  $e'_i$  et  $e''_i$  adjacentes à un nouveau sommet  $x_i$ , et identifier  $x_1, \dots, x_m$  en un nouveau sommet  $z \in V(G)$ .

On note  $K_2^k$  le graphe ayant deux sommets et  $k$  arêtes parallèles ( $k \geq 2$ ).

Un graphe que l'on peut obtenir à partir de  $K_2^{2k}$  ( $k \geq 1$ ) par une succession de constructions de types I et  $O_k$  est dit  $M_k$ -constructible.

Théorème 4.11.(Mader [26]):

Un graphe est  $M_k$ -constructible si et seulement si il est  $2k$ -arête-connexe.

Nous voulons montrer directement à l'aide de ce théorème la proposition 4.3.

Proposition 4.12. :

Si un graphe  $G=(V,E)$  contient deux arbres maximaux disjoints, tout graphe  $G'=(V',E')$  obtenu à partir de  $G$  par une construction de type  $O_2$  contient deux arbres maximaux disjoints.

démonstration : On remarque d'abord qu'un graphe  $G=(V,E)$  contient deux arbres maximaux disjoints si et seulement si il existe une partition  $\{E_1, E_2\}$  de  $E$  telle que les deux graphes  $G_1=(V, E_1)$  et  $G_2=(V, E_2)$  soient connexes.

Soient  $e, f$  les deux arêtes sur lesquelles la construction de type  $O_2$  a été effectuée et  $u$  le nouveau sommet créé (figure 1).

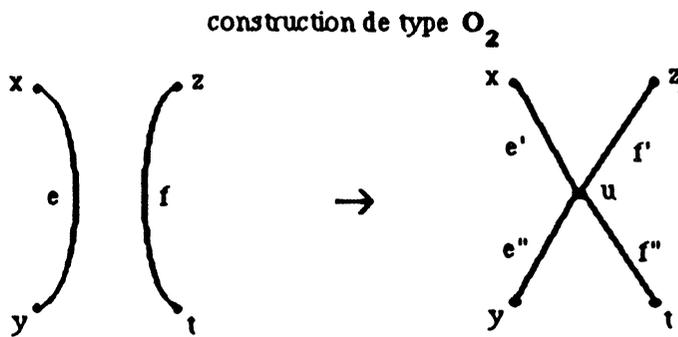


Figure 1

L'ensemble  $\{x,y\}$  des extrémités de  $e$  et l'ensemble  $\{z,t\}$  des extrémités de  $f$  ont une intersection qui peut être de cardinal 0, 1 ou 2: dans tous les cas le raisonnement reste inchangé.

Par hypothèse  $E$  admet une partition  $\{E_1, E_2\}$  telle que les deux graphes  $G_1=(V, E_1)$  et  $G_2=(V, E_2)$  sont connexes. Nous considérerons deux cas à la symétrie près des rôles de  $E_1$  et  $E_2$ .

1. Si  $e \in E_1, f \in E_2$ . Posons  $E'_1=(E_1-\{e\}) \cup \{e', e''\}$ ,  $E'_2=(E_2-\{f\}) \cup \{f', f''\}$ .  $\{E'_1, E'_2\}$  est une partition de  $E'$ , et les graphes  $G'_1=(V', E'_1)$  et  $G'_2=(V', E'_2)$  sont évidemment connexes. Donc  $G'$  contient deux arbres maximaux disjoints.

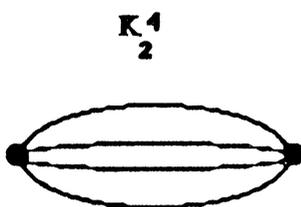
2. Si  $e \in E_1, f \in E_1$ . Si  $(V, E_1-\{f\})$  est un graphe connexe on peut remplacer  $E_1$  par  $E_1-\{f\}$ ,  $E_2$  par  $E_2 \cup \{f\}$  et appliquer la preuve du cas 1 ci-dessus. Sinon on peut supposer sans perte de généralité que  $z, x$  et  $y$  sont dans la même composante connexe de  $(V, E_1-\{f\})$ . Posons alors  $E'_1=(E_1-\{e, f\}) \cup \{e', e'', f'\}$  et  $E'_2=E_2 \cup \{f''\}$ . Il est clair que  $\{E'_1, E'_2\}$  est une partition de  $E'$  et que les graphes  $G'_1=(V', E'_1)$  et  $G'_2=(V', E'_2)$  sont connexes. Donc  $G'$  contient deux arbres maximaux disjoints. Ceci achève la démonstration.

Proposition 4.13.:

Si  $G=(V, E)$  est un graphe  $M_2$ -constructible, quelles que soient les arêtes  $e, f$  de  $E$ ,  $G'=(V, E-\{e, f\})$  contient deux arbres maximaux disjoints.

démonstration : On le montre par récurrence sur  $|V|+|E|$ .

La propriété est vraie pour  $K_2^4$  :



Soit  $G=(V,E)$  un graphe  $M_2$ -constructible. On suppose que la propriété est vraie pour tout graphe  $M_2$ -constructible  $G_1=(V_1,E_1)$  tel que  $|V_1|+|E_1|<|V|+|E|$ . Soient  $e,f$  deux arêtes quelconques de  $E$ . On doit alors considérer les cinq cas suivants :

1. 1a) La dernière construction qui a permis de construire  $G$  est de type I et correspond à l'addition d'une arête  $g$  différente de  $e$  et  $f$ . Alors  $G''=(V,E-\{g\})$  est  $M_2$ -constructible et d'après la minimalité de  $G$ ,  $G'''=(V,E-\{e,f,g\})$  contient deux arbres maximaux disjoints. Il en est donc de même pour  $G'=(V,E-\{e,f\})$ .

1. 1b) La dernière construction qui a permis de construire  $G$  est de type I et correspond à l'addition de l'arête  $e$ . Alors  $G''=(V,E-\{e\})$  est  $M_2$ -constructible et d'après la minimalité de  $G$ ,  $G''$  a la propriété requise, ce qui implique que  $G'=(V,E-\{e,f\})$  contient deux arbres maximaux disjoints.

2. 2a) La dernière construction qui a permis de construire  $G$  est de type  $O_2$  pour deux arêtes d'un graphe  $M_2$ -constructible  $G''=(V'',E'')$  et cette construction ne crée ni  $e$ , ni  $f$ . Alors  $\{e,f\}\subseteq E''\cap E$  et d'après la minimalité de  $G$ ,  $G'''=(V'',E''-\{e,f\})$  contient deux arbres maximaux disjoints.  $G'$  est obtenu à partir de  $G'''$  par une construction de type  $O_2$ , et d'après la proposition 4.12.  $G'$  contient deux arbres maximaux disjoints.

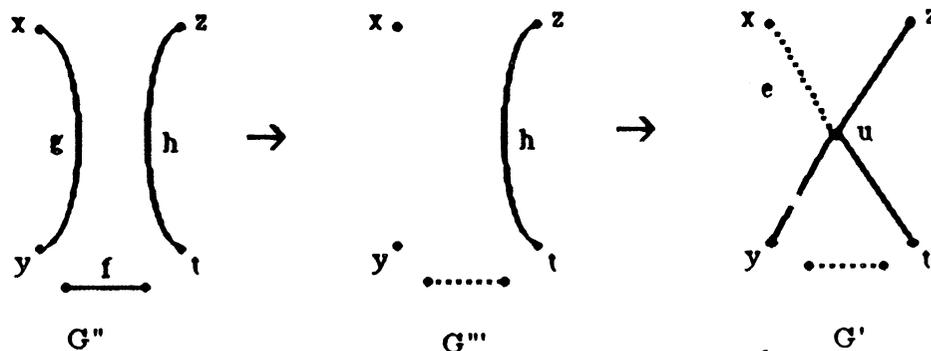


Figure 2

2.2b) La dernière construction qui a permis de construire  $G$  est de type  $O_2$  pour deux arêtes d'un

graphe  $M_2$ -constructible  $G''=(V'',E'')$  et cette construction crée  $e$  (figure 2).

On note  $g, h$  les deux arêtes de  $G''=(V'',E'')$  sur lesquelles est effectuée la construction de type  $O_2$  et  $u$  est le sommet créé. Alors d'après la minimalité de  $G$ ,  $G'''=(V'',E''-\{g,f\})$  contient deux arbres maximaux disjoints.  $G'$  s'obtient à partir de  $G'''$  par une construction de type  $T$  permettant de construire le sommet  $u$  par subdivision de l'arête  $h$  en les arêtes d'extrémités  $u,z$  et  $u,t$ , l'arête d'extrémités  $y,u$  étant l'arête ajoutée (voir figure 2). D'après le lemme 4.7.  $G'$  contient deux arbres maximaux disjoints.

2. 2c) La dernière construction qui a permis de construire  $G$  est de type  $O_2$  pour deux arêtes d'un graphe  $M_2$ -constructible  $G''=(V'',E'')$  et cette construction crée les deux arêtes  $e$  et  $f$  (figure 3).

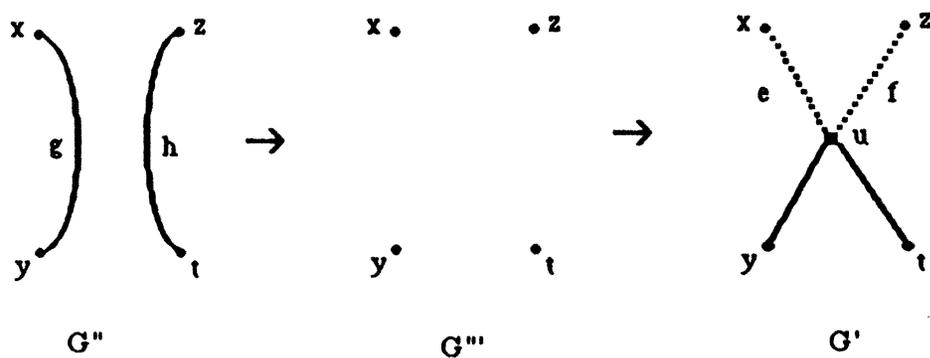


Figure 3

On note  $g, h$  les deux arêtes de  $G''=(V'',E'')$  sur lesquelles est effectuée la construction de type  $O_2$  et  $u$  est le sommet créé. Alors d'après la minimalité de  $G$ ,  $G'''=(V'',E''-\{g,h\})$  contient deux arbres maximaux disjoints. D'autre part  $G'$  s'obtient à partir de  $G'''$  par une construction de type  $V$ , permettant de créer le sommet  $u$  et les arêtes d'extrémités  $y,u$  et  $t,u$  (voir figure 3). D'après le lemme 4.7. le graphe  $G'$  contient deux arbres maximaux disjoints. Ceci achève la démonstration.

Le théorème 4.11. et la proposition 4.13. donnent donc une autre démonstration de la proposition 4.3..

#### 4. Propriétés $P_{2 \times 2}$ :

Soit  $G=(V,E)$  un graphe, on rappelle que les ensembles  $\mathbb{Z}_2^E$  et  $\mathbb{Z}_2^V$  sont des espaces

vectoriels sur  $\mathbb{Z}_2$  ( $\mathbb{Z}_2$  désigne indifféremment le groupe abélien des classes modulo 2 et le corps à deux éléments  $GF(2)$ ). On note  $\delta_G$  l'application de  $\mathbb{Z}_2^E$  dans  $\mathbb{Z}_2^V$  qui à  $f \in \mathbb{Z}_2^E$  associe l'application  $\delta_G f$  de  $\mathbb{Z}_2^V$  définie par :  $(\delta_G f)(x) = \sum_{e \in \omega_G(\{x\})} f(e)$  pour tout  $x \in V(G)$ . Il est facile de vérifier que

$\delta_G$  est une application linéaire.  $\delta_G$  est appelé *opération bord* et  $\delta_G f$  le *bord de f*.

Si  $f$  est une application de  $E$  dans  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , on peut écrire  $f = (f_1, f_2)$  où  $f_1$  et  $f_2$  sont deux applications de  $E$  dans  $\mathbb{Z}_2$ . Le couple  $(\delta_G f_1, \delta_G f_2)$  d'applications de  $V$  dans  $\mathbb{Z}_2$  définit une application de  $V$  dans  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  que l'on notera aussi  $\delta_G f$ .

On dit qu'un graphe  $G=(V,E)$  a la *propriété  $P_{2 \times 2}$* , si quelle que soit l'application  $g:V \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  telle que  $\sum_{x \in V} g(x) = (0,0)$ , il existe une application  $f:E \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  telle que  $\delta_G f = g$  et  $f(e) \neq (0,0)$  pour

tout  $e \in E$ .  $f$  et  $g$  sont appelées des *valuations*. On dit que  $g$  est une *valuation des sommets de somme nulle* et que  $f$  est une *valuation non-nulle des arêtes*.

**Lemme 4.14.:**

Si  $A=(V,T)$  est un arbre, quelle que soit la valuation  $g$ , de somme nulle, des sommets de  $A$  dans  $\mathbb{Z}_2$ , il existe une valuation des arêtes de  $A$  dans  $\mathbb{Z}_2$  telle que  $\delta_A f = g$ .

**démonstration :** Soit  $\delta_A : \mathbb{Z}_2^T \rightarrow \mathbb{Z}_2^V$ , alors  $\text{Im} \delta_A \subseteq H$  où  $H$  est le sous espace vectoriel des valuations des sommets de somme nulle.  $\text{Ker} \delta_A = \{0\}$ , car un arbre n'admet que le flot partout nul. Comme  $\dim(\text{Im} \delta_A) = \dim \mathbb{Z}_2^T - \dim(\text{Ker} \delta_A)$ , si  $|V|=n$   $\dim \mathbb{Z}_2^T = n-1$  donc on a  $\dim(\text{Im} \delta_A) = n-1$ . Mais  $\mathbb{Z}_2^V$  est isomorphe à  $(\mathbb{Z}_2)^n$ , et il est facile de voir que  $H$  est isomorphe au noyau d'une forme linéaire de  $(\mathbb{Z}_2)^n$ . Donc  $\dim H = n-1$ . On en déduit que  $\text{Im} \delta_A = H$  et  $\delta_A$  est un isomorphisme de  $\mathbb{Z}_2^T$  sur  $H$ . Ceci achève la démonstration.

**Proposition 4.15.:**

Un graphe  $G=(V,E)$  qui contient deux arbres maximaux disjoints a la propriété  $P_{2 \times 2}$ .

démonstration : Soit  $g=(g_1, g_2)$  une valuation des sommets de  $G$  dans  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  de somme nulle;  $G=(V, E)$  avec  $T_1 \cup T_2 \subseteq E$ ,  $T_1 \cap T_2 = \emptyset$  où  $T_1$  et  $T_2$  sont les ensembles d'arêtes des arbres maximaux  $A_1=(V, T_1)$  et  $A_2=(V, T_2)$ . On pose  $T_1^* = E - T_1$  et  $T_2^* = E - T_2$ . On considère la valuation  $f_1$  des arêtes de  $G$  dans  $\mathbb{Z}_2$  telle que  $f_1(e)=1$  si  $e \in T_1^*$  et  $f_1(e)=0$  si  $e \in T_1$ . Il existe une valuation  $h_1$  des arêtes de  $T_1$  telle que  $\delta_{A_1} h_1 = g_1 + \delta_G f_1$  ( $g_1$  et  $\delta_G f_1$  sont de somme nulle donc aussi leur somme). On définit la valuation  $h'_1$  des arêtes de  $G$  dans  $\mathbb{Z}_2$  par :

$$\begin{cases} h'_1(e) = h_1(e), & \text{si } e \in T_1 \\ h'_1(e) = 0 & \text{si } e \in T_1^*. \end{cases}$$

Alors  $\delta_G h'_1 = \delta_{A_1} h_1 = g_1 + \delta_G f_1$ . Donc  $\delta_G (f_1 + h'_1) = g_1$  et  $(f_1 + h'_1)(e) = 1$  si  $e \in T_1^*$ .

De même on construit les valuations  $f_2$  et  $h'_2$  des arêtes de  $G$  dans  $\mathbb{Z}_2$  telles que :

$$\delta_G (f_2 + h'_2) = g_2 \text{ et } (f_2 + h'_2)(e) = 1 \text{ si } e \in T_2^*.$$

Ainsi  $f=(f_1 + h'_1, f_2 + h'_2)$  est une valuation des arêtes de  $G$  dans  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  telle que  $f(e) \neq (0, 0)$

pour tout  $e \in E$  et  $\delta_G f = g$ . Ceci achève la démonstration.

#### Remarques 4.16.

1. la valuation  $f$  a la propriété suivante :

- pour tout  $e \in T_1^*$   $f(e) = (1, 1)$  ou  $f(e) = (1, 0)$
- pour tout  $e \in T_2^*$   $f(e) = (1, 1)$  ou  $f(e) = (0, 1)$ .

On a en fait démontré une propriété plus forte : il existe deux sous-ensembles  $E_1$  et  $E_2$  de  $E$  tels que  $E_1 \cup E_2 = E$ ,  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$  et pour toute valuation  $g$  de somme nulle des sommets de  $G$  dans  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , il existe une valuation non-nulle  $f$  des arêtes de  $G$  dans  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  ayant la propriété suivante :

$\delta_G f = g$  et la restriction de  $f$  à  $E_1$  prend ses valeurs dans  $\{(1, 1), (1, 0)\}$  et la restriction de  $f$  à  $E_2$

prend ses valeurs dans  $\{(1,1),(0,1)\}$  ( on peut prendre  $E_1=T_1^*-T_2^*$  et  $E_2=T_2^*$ ).

2. Un graphe 4-arête-connexe contient deux arbres maximaux disjoints, donc a la propriété  $P_{2 \times 2}$ . Dans la suite de ce chapitre nous cherchons une démonstration constructive de ce résultat, ainsi que de la proposition 4.15..

### 5.Constructions locales et propriété $P'_{2 \times 2}$ :

Nous allons prouver qu'une propriété plus "forte" issue de la remarque précédente est préservée par les constructions de type I,T et V.

On dit qu'un graphe  $G=(V,E)$  a la *propriété  $P'_{2 \times 2}$*  pour les sous-ensembles  $E_1$  et  $E_2$  tels que  $E_1 \cup E_2 = E$ ,  $E_1 \cap E_2 = \emptyset$  si pour toute valuation  $g$  de somme nulle des sommets de  $G$  dans  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ , il existe une valuation non-nulle  $f$  des arêtes de  $G$  dans  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  avec  $\delta_G f = g$  vérifiant les conditions suivantes :

- la restriction de  $f$  à  $E_1$  prend ses valeurs dans  $\{(1,1),(1,0)\}$
- la restriction de  $f$  à  $E_2$  prend ses valeurs dans  $\{(1,1),(0,1)\}$ .

#### Proposition 4.17.

Si un graphe  $G=(V,E)$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$ , tout graphe  $G'$  obtenu à partir de  $G$  par une construction de type I a la propriété  $P'_{2 \times 2}$ .

démonstration : Soit  $a$  l'arête d'extrémités  $x$  et  $y$  ajoutée à  $G$ ; il existe une partition  $\{E_1, E_2\}$  de  $E$  pour laquelle le graphe  $G$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$ . Nous montrons que  $G'=(V, E \cup \{a\})$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$  pour la partition  $\{E_1 \cup \{a\}, E_2\}$  de  $E \cup \{a\}$ .

Soit  $g'$  une valuation des sommets de  $G'$  de somme nulle. On définit la valuation  $g$  des sommets de  $G$  telle que :

$$\lceil g(v)=g'(v) \quad \text{si } v \in V - \{x,y\}$$

$$\lfloor g(v)=g'(v)+(1,1) \quad \text{si } v \in \{x,y\}. \text{ Alors } \sum_{x \in V} g(x)=(0,0) ; \text{ il existe donc une valuation } f \text{ des}$$

arêtes de  $G$  telle que  $\delta_G f=g$  et  $f(E_1) \subseteq \{(1,1),(1,0)\}$  et  $f(E_2) \subseteq \{(1,1),(0,1)\}$ .

On définit la valuation  $f'$  des arêtes de  $G'$  de la façon suivante :

$$f'(e)=f(e) \text{ si } e \in E \text{ et } f'(a)=(1,1).$$

Il est facile de voir que  $\delta_{G'} f'=g'$  et  $f'(E_1 \cup \{a\}) \subseteq \{(1,1),(1,0)\}$  et  $f'(E_2) \subseteq \{(1,1),(0,1)\}$ .

Ceci achève la démonstration.

**Proposition 4.18. :**

Si un graphe  $G=(V,E)$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$ , tout graphe  $G'$  obtenu à partir de  $G$  par une construction de type  $V$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$ .

**démonstration :** On se donne une partition  $\{E_1, E_2\}$  de  $E$  pour laquelle le graphe  $G$  a la propriété

$P'_{2 \times 2}$ . Soit  $x$  le nouveau sommet introduit par la construction de type  $V$  (figure 1),  $x$  et  $y$  les

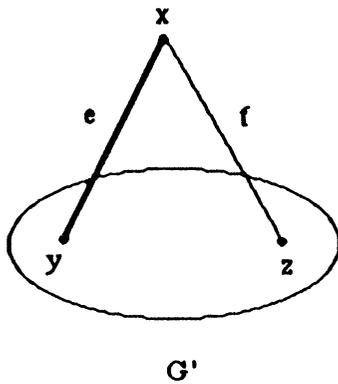


Figure 1

extrémités de la nouvelle arête  $e$  et  $x, z$  les extrémités de la nouvelle arête  $f$  ( $y$  et  $z$  peuvent être confondus).

On démontre que  $G'$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$  pour  $E'_1 = E_1 \cup \{e\}$  et  $E'_2 = E_2 \cup \{f\}$ . Soit  $g'$  une valuation des sommets de  $G'$  de somme nulle. Il y a quatre cas à étudier.

• Si  $g'(x)=(0,0)$  alors l'application  $g:V \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  définie par

$$\begin{cases} \top & g(v)=g'(v) \text{ si } v \in V - \{y,z\} \\ | & g(y)=g'(y) + (1,1) \\ \perp & g(z)=g'(z) + (1,1) \end{cases}$$

est telle que  $\sum_{v \in V} g(v) = (0,0)$ . Il existe alors une valuation  $h: E \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

telle que  $\delta_G h = g$  et  $h(E_1) \subseteq \{(1,1), (1,0)\}$  et  $h(E_2) \subseteq \{(1,1), (0,1)\}$ . On définit

$h': EU\{e,f\} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  telle que :

$$\begin{cases} \top & h'(a)=h(a) \text{ pour tout } a \in E \\ | & h'(e) = (1,1) \\ \perp & h'(f) = (1,1) \end{cases}$$

$$| \quad h'(e) = (1,1)$$

$\perp \quad h'(f) = (1,1)$ . On a  $\delta_G h' = g'$  et  $h'(E'_1) \subseteq \{(1,1), (1,0)\}$  et  $h'(E'_2) \subseteq \{(1,1), (0,1)\}$ .

$h'$  est la valuation cherchée.

• Si  $g'(x)=(1,1)$  alors l'application  $g:V \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  définie par

$$\begin{cases} \top & g(v)=g'(v) \text{ si } v \in V - \{y,z\} \\ | & g(y)=g'(y) + (1,0) \\ \perp & g(z)=g'(z) + (0,1) \end{cases}$$

$$| \quad g(y)=g'(y) + (1,0)$$

$\perp \quad g(z)=g'(z) + (0,1)$  est telle que  $\sum_{v \in V} g(v) = (0,0)$ . Il existe alors une valuation  $h: E \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

telle que  $\delta_G h = g$  et  $h(E_1) \subseteq \{(1,1), (1,0)\}$  et  $h(E_2) \subseteq \{(1,1), (0,1)\}$ . On définit

$h': EU\{e,f\} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  telle que :

$$\begin{cases} \top & h'(a)=h(a) \text{ pour tout } a \in E \\ | & h'(e) = (1,0) \\ \perp & h'(f) = (0,1) \end{cases}$$

$$| \quad h'(e) = (1,0)$$

$\perp \quad h'(f) = (0,1)$ . On a  $\delta_G h' = g'$  et  $h'(E'_1) \subseteq \{(1,1), (1,0)\}$  et  $h'(E'_2) \subseteq \{(1,1), (0,1)\}$ .

$h'$  est la valuation cherchée.

• Si  $g'(x)=(0,1)$  alors l'application  $g:V \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  définie par

$$\begin{cases} \top & g(v)=g'(v) \text{ si } v \in V - \{y,z\} \\ | & g(y)=g'(y) + (1,0) \\ \perp & g(z)=g'(z) + (1,1) \end{cases}$$

$$| \quad g(y)=g'(y) + (1,0)$$

$$\perp \quad g(z)=g'(z) + (1,1)$$

est telle que  $\sum_{v \in V} g(v) = (0,0)$ . Il existe alors une valuation  $h: E \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  telle que  $\delta_G h = g$  et

$h(E_1) \subseteq \{(1,1), (1,0)\}$  et  $h(E_2) \subseteq \{(1,1), (0,1)\}$ .

On définit  $h': EU\{e,f\} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  telle que :

$$\begin{cases} \top & h'(a)=h(a) \text{ pour tout } a \in E \\ \mid & h'(e)= (1,0) \\ \perp & h'(f)= (1,1) \end{cases}$$

$$\perp h'(f)= (1,1) .$$

On a  $\delta_G \cdot h' = g'$  et  $h'(E'_1) \subseteq \{(1,1), (1,0)\}$  et  $h'(E'_2) \subseteq \{(1,1), (0,1)\}$ .

$h'$  est la valuation cherchée.

• Si  $g'(x)=(1,0)$  alors l'application  $g: V \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  définie par

$$\begin{cases} \top & g(v)=g'(v) \text{ si } v \in V - \{y,z\} \\ \mid & g(y)=g'(y)+ (1,1) \\ \perp & g(z)=g'(z)+ (0,1) \end{cases}$$

$$\mid g(y)=g'(y)+ (1,1)$$

$\perp g(z)=g'(z)+ (0,1)$  est telle que  $\sum_{v \in V} g(v) = (0,0)$ . Il existe alors une valuation  $h: E \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

telle que  $\delta_G h = g$  et  $h(E_1) \subseteq \{(1,1), (1,0)\}$  et  $h(E_2) \subseteq \{(1,1), (0,1)\}$ . On définit

$h': EU\{e,f\} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  telle que :

$$\begin{cases} \top & h'(a)=h(a) \text{ pour tout } a \in E \\ \mid & h'(e)= (1,1) \\ \perp & h'(f)= (0,1) \end{cases}$$

$$\mid h'(e)= (1,1)$$

$\perp h'(f)= (0,1)$  . On a  $\delta_G \cdot h' = g'$  et  $h'(E'_1) \subseteq \{(1,1), (1,0)\}$  et  $h'(E'_2) \subseteq \{(1,1), (0,1)\}$ .

$h'$  est la valuation cherchée. Ceci achève la démonstration.

#### Proposition 4.19. :

Si un graphe  $G=(V,E)$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$ , tout graphe  $G'$  obtenu à partir de  $G$  par une construction de type  $T$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$ .

**démonstration** : On se donne une partition  $\{E_1, E_2\}$  de  $E$  pour laquelle  $G$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$ . Soit  $e$  l'arête que l'on subdivise et  $x, y, z, t$  les sommets des arêtes obtenues par la construction de type  $T$  (figure 2).

On suppose que  $e \in E_1$  et nous allons montrer que  $G'$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$  pour les ensembles  $E'_1 = (E_1 - \{e\}) \cup \{e', e''\}$  et  $E'_2 = E_2 \cup \{h\}$  (les notations sont celles de la figure 2).

Soit  $g'$  une valuation des sommets de  $G'$  de somme nulle. Nous étudions successivement les cas correspondant aux différentes valeurs possibles de  $g'(t)$ .

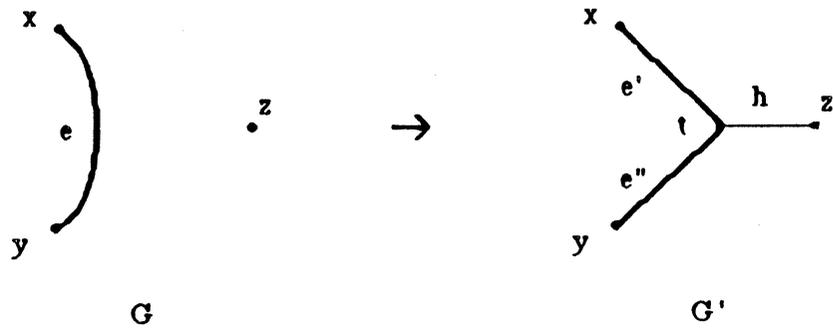


Figure 2

1.  $g'(t) = (0, 0)$ .

On considère la valuation  $g$  des sommets de  $G$  telle que :

$$\begin{cases} g(x) = g'(x) + (0, 1) \\ g(z) = g'(z) + (0, 1) \end{cases}$$

et  $g(v) = g'(v)$  pour tout  $v \in V - \{x, z\}$ . On a  $\sum_{v \in V} g(v) = (0, 0)$ . Il existe alors une

valuation  $f: E \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  telle que  $\delta_G f = g$  et  $f(E_1) \subseteq \{(1, 1), (1, 0)\}$  et  $f(E_2) \subseteq \{(1, 1), (0, 1)\}$ . On

définit  $f': (E - \{e\}) \cup \{e', e'', h\} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  telle que :

$$\begin{cases} f'(a) = f(a) \text{ pour tout } a \in E - \{e\} \\ f'(e') = f(e) + (0, 1) \\ f'(e'') = f(e) \\ f'(h) = (0, 1) \end{cases}$$

On a  $\delta_{G'} f' = g'$ .

De plus  $f'(\{e', e''\}) \subseteq \{(1, 1), (1, 0)\}$  car  $f(e) \in f(E_1) \subseteq \{(1, 1), (1, 0)\}$  et  $f'(h) = (0, 1)$ . Donc

$f'(E'_1) \subseteq \{(1, 1), (1, 0)\}$  et  $f'(E'_2) \subseteq \{(1, 1), (0, 1)\}$ .

$f'$  est la valuation cherchée.

2.  $g'(t) \in \{(1, 1), (0, 1)\}$ .

On considère la valuation  $g$  des sommets de  $G$  telle que :

$$\begin{cases} g(v) = g'(v) \text{ pour tout } v \in V - \{z\} \\ g(z) = g'(z) + g'(t) \end{cases}$$

On a  $\sum_{v \in V} g(v) = (0, 0)$ . Il existe alors une valuation  $f: E \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  telle que

$\delta_G f = g$  et  $f(E_1) \subseteq \{(1,1), (1,0)\}$  et  $f(E_2) \subseteq \{(1,1), (0,1)\}$ . On définit

$f: (E - \{e\}) \cup \{e', e'', h\} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  telle que :

$$\begin{aligned} \lceil f(a) &= f(a) \text{ pour tout } a \in E - \{e\} \\ | f(e') &= f(e) \\ | f(e'') &= f(e) \\ \lfloor f(h) &= g'(t) . \text{ On a } \delta_G f = g'. \end{aligned}$$

De plus  $f(\{e', e''\}) \subseteq \{(1,1), (1,0)\}$  car  $f(e) \in f(E_1) \subseteq \{(1,1), (1,0)\}$ , et  $f(h) \in \{(1,1), (0,1)\}$ .

Donc  $f(E'_1) \subseteq \{(1,1), (1,0)\}$  et  $f(E'_2) \subseteq \{(1,1), (0,1)\}$ .

$f$  est la valuation cherchée.

$$3. g'(t) = (1, 0).$$

On considère la valuation  $g$  des sommets de  $G$  telle que :

$$\begin{aligned} \lceil g(x) &= g'(x) + (0, 1) \\ \lfloor g(z) &= g'(z) + (1, 1) \text{ et } g(v) = g'(v) \text{ pour tout } v \in V - \{x, z\}. \text{ On a } \sum_{v \in V} g(v) = (0, 0). \text{ Il existe alors une} \end{aligned}$$

valuation  $f: E \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  telle que  $\delta_G f = g$  et  $f(E_1) \subseteq \{(1,1), (1,0)\}$  et  $f(E_2) \subseteq \{(1,1), (0,1)\}$ . On

définit  $f: (E - \{e\}) \cup \{e', e'', h\} \rightarrow \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  telle que :

$$\begin{aligned} \lceil f(a) &= f(a) \text{ pour tout } a \in E - \{e\} \\ | f(e') &= f(e) + (0, 1) \\ | f(e'') &= f(e) \\ \lfloor f(h) &= (1, 1) . \text{ On a } \delta_G f = g'. \end{aligned}$$

De plus  $f(\{e', e''\}) \subseteq \{(1,1), (1,0)\}$  car  $f(e) \in f(E_1) \subseteq \{(1,1), (1,0)\}$ , et  $f(h) = (1, 1)$ . Donc

$f(E'_1) \subseteq \{(1,1), (1,0)\}$  et  $f(E'_2) \subseteq \{(1,1), (0,1)\}$ .

$f$  est la valuation cherchée.

Ceci achève la démonstration.

Il est facile de voir que  $K_2^2$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$  pour l'unique partition non triviale des arêtes.

On en déduit donc des propositions 4.17., 4.18. et 4.19. le résultat suivant :

**Proposition 4.20.:**

Tout graphe I.T.V-constructible a la propriété  $P'_{2 \times 2}$ .

D'après la proposition 4.9., nous avons par la proposition 4.20. une démonstration constructive de la proposition suivante ( voir remarque 4.16.):

Proposition 4.21.:

Si un graphe  $G=(V,E)$  contient deux arbres maximaux disjoints alors  $G$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$ .

Nous voulons de même une démonstration constructive de la proposition suivante :

Proposition 4.22.:

Si  $G=(V,E)$  est un graphe 4-arête-connexe, quelles que soient les arêtes  $e$  et  $f$  de  $E$ , le graphe  $G'=(V,E-\{e,f\})$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$ .

Nous avons besoin pour ce faire d'introduire de nouvelles constructions. Ceci est l'objet du paragraphe suivant.

## 6. Constructions T,V généralisées :

Insertion : Soient deux graphes  $G_1=(V_1,E_1)$  et  $G_2=(V_2,E_2)$  avec  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ , et  $x \in V_1$  avec  $d_{G_1}(x)=m$ ,  $e_i$  pour  $i \in [1,m]$  désignant les arêtes incidentes à  $x$ , d'extrémités  $x, x_i$  ( les  $x_i$  ne sont pas forcément distincts). Soient  $y_1, \dots, y_m$   $m$  sommets de  $G_2$  ( les  $y_i$  ne sont pas forcément distincts).

On construit alors le graphe  $G'=(V',E')$  tel que  $V'=(V_1 - \{x\}) \cup V_2$  et  $E'=(E_1 - \{e_1, \dots, e_m\}) \cup E_2 \cup \{f_1, \dots, f_m\}$  où les  $f_i$  pour  $i \in [1,m]$  sont de nouvelles arêtes d'extrémités  $x_i, y_i$ . On dit que l'on a réalisé une *insertion en  $x$*  et que le graphe  $G'$  est obtenu en *insérant le graphe  $G_2$  dans le graphe  $G_1$  au sommet  $x$*  (figure 1).

Nous définissons maintenant deux constructions qui généralisent les constructions T et V.

Construction  $V_g$  : Soient  $G$  et  $H$  deux graphes. On considère le graphe  $G'$  obtenu à partir de  $G$  par une construction de type V, on appelle  $v$  le nouveau sommet ainsi créé. Si on insère le graphe  $H$

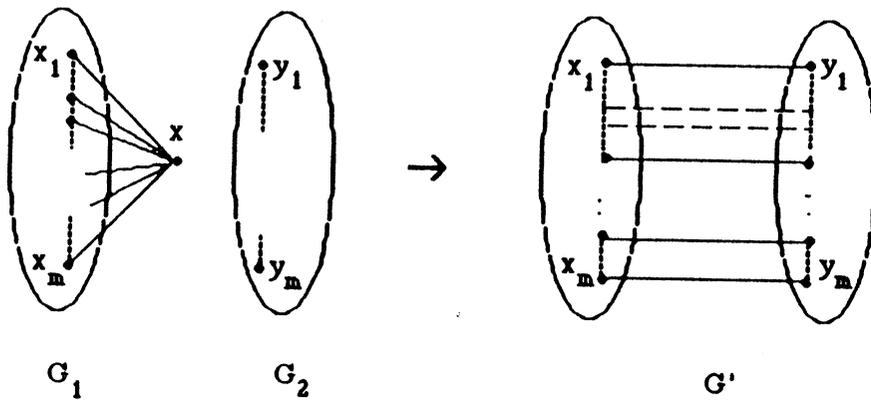


Figure 1

dans le graphe  $G'$  au sommet  $v$ , le nouveau graphe  $G''$  obtenu est dit obtenu à partir de  $G$  et  $H$  par une construction de type  $V_g$  (figure 2).

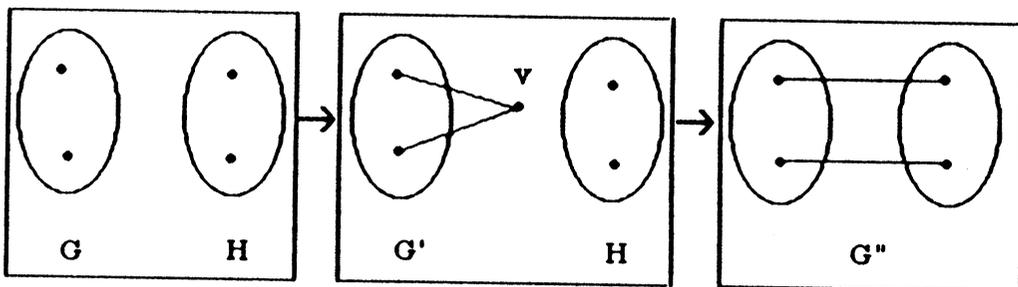


Figure 2

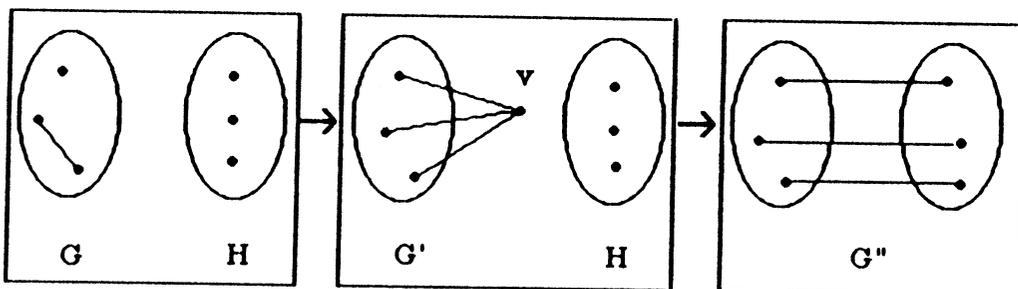


Figure 3

**Construction  $T_g$**  : Soient  $G$  et  $H$  deux graphes. On considère le graphe  $G'$  obtenu à partir de  $G$  par une construction de type  $T$ , on appelle  $v$  le nouveau sommet ainsi créé. Si on insère le graphe  $H$  dans le graphe  $G'$  au sommet  $v$ , le nouveau graphe  $G''$  obtenu est dit obtenu à partir de  $G$  et  $H$  par une construction de type  $T_g$  (figure 3).

**Remarque :**

Les constructions  $V$  et  $T$  sont considérés comme cas particulier des constructions  $V_g$  et  $T_g$ .

Un graphe  $G=(V,E)$  est dit  $I.T_g.V_g$ -constructible, s'il peut être obtenu à partir de copies de  $K_2^2$  par une succession de constructions de type  $I, T_g, V_g$  (chaque construction ne porte que sur des graphes précédemment construits). Voir exemple figure 4.

**Proposition 4.23.:**

Si  $G_1$  et  $G_2$  sont deux graphes ayant la propriété  $P'_{2 \times 2}$ , alors le graphe  $G'=(E',V')$  obtenu en insérant  $G_2$  en un sommet quelconque de  $G_1$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$ .

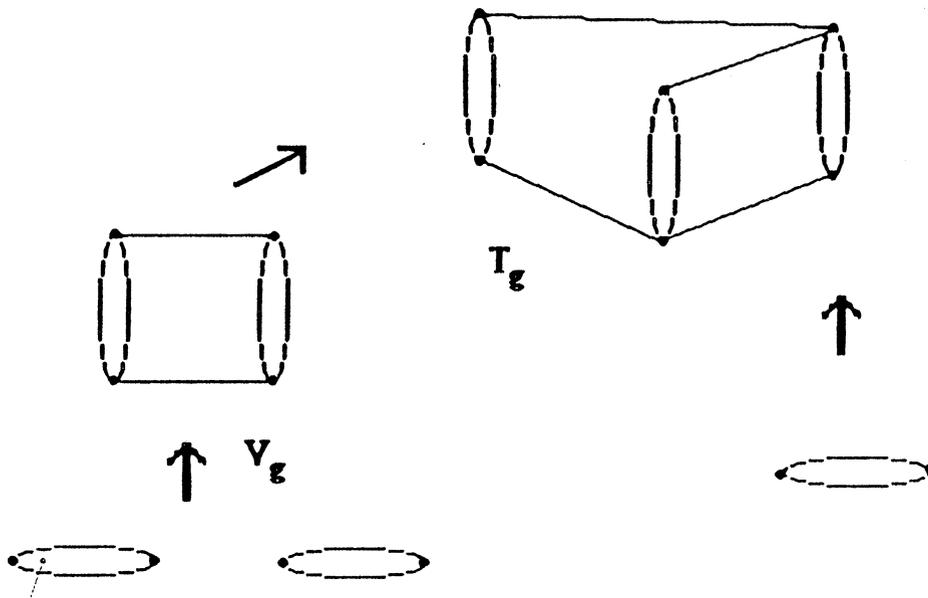


Figure 4

**démonstration :** Soient  $G_1=(V_1,E_1)$  et  $G_2=(V_2,E_2)$  deux graphes ayant la propriété  $P'_{2 \times 2}$  et  $x$  un sommet quelconque de  $G_1$  où  $G_2$  est inséré. On suppose que  $d_{G_1}(x)=m$ , et on note  $e_i$  pour

$i \in [1, m]$  les arêtes adjacentes en  $x$ , d'extrémités  $x, x_i$ . Soient  $y_1, \dots, y_m$  les  $m$  sommets de  $G_2$  utilisés dans la réalisation de l'insertion (figure 5). Supposons que  $G_1$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$  pour la partition  $\{E_{1,1}, E_{1,2}\}$  de  $E_1$  et que  $G_2$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$  pour la partition  $\{E_{2,1}, E_{2,2}\}$  de  $E_2$ . Supposons que  $e_i \in E_{1,1}$  pour  $i \in [1, p]$  ( $1 \leq p < m$ ) et  $e_i \in E_{1,2}$  pour  $i \in [p+1, m]$ . Nous allons montrer que  $G'$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$  pour les ensembles :  $E'_1 = (E_{1,1} - \{e_1, \dots, e_p\}) \cup \{e'_1, \dots, e'_p\} \cup E_{2,1}$  et  $E'_2 = (E_{1,2} - \{e_{p+1}, \dots, e_m\}) \cup \{e'_{p+1}, \dots, e'_m\} \cup E_{2,2}$ , où  $e'_1, \dots, e'_m$  désignent les nouvelles arêtes d'extrémités  $x_i, y_i, i \in [1, m]$  créés dans la réalisation de l'insertion.

Soit  $w$  une valuation de somme nulle des sommets de  $G'$ . La valuation  $w_1$  des sommets de  $G_1$  telle que  $w_1(x) = \sum_{v \in V_2} w(v)$  et  $w_1(y) = w(y)$  pour tout  $y \in V_1 - \{x\}$  est de somme nulle sur  $V_1$ :

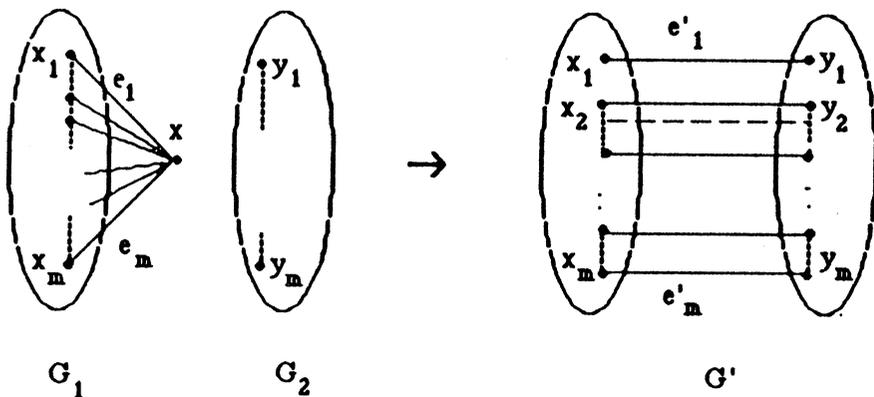


Figure 5

$\sum_{v \in V_1} w_1(v) = (0, 0)$ ; on en déduit qu'il existe une valuation  $f$  des arêtes de  $G_1$  telle que  $\delta_{G_1} f = w_1$ ,

$f(E_{1,1}) \subseteq \{(1, 1), (1, 0)\}$  et  $f(E_{1,2}) \subseteq \{(1, 1), (0, 1)\}$ . De plus  $\sum_{i \in [1, m]} f(e_i) = w_1(x) = \sum_{v \in V_2} w(v)$ .

Donc la valuation  $w_2$  des sommets de  $G_2$  telle que  $w_2(v) = w(v)$  si  $v \in V_2 - \{y_1, \dots, y_m\}$  et  $w_2(y_i) = w(y_i) + f(e_i)$  vérifie :  $\sum_{v \in V_2} w_2(v) = (0, 0)$ ; il existe alors une valuation  $f'$  des arêtes de  $G_2$  telle que

$\delta_{G_2} f' = w_2$ , et  $f'(E_{2,1}) \subseteq \{(1, 1), (1, 0)\}$  et  $f'(E_{2,2}) \subseteq \{(1, 1), (0, 1)\}$ . On définit maintenant une valuation  $f'$  des arêtes de  $G'$  comme suit :

- ⌈  $f'(e)=f(e)$  pour tout  $e \in E_1 - \{e_1, \dots, e_m\}$
- |  $f'(e_i)=f(e_i)$  pour tout  $i \in [1, m]$
- ⌋  $f'(e)=f(e)$  pour tout  $e \in E_2$ .

Il est facile de voir que  $\delta_G \cdot f' = w$  et que  $f'(E_1) \subseteq \{(1,1), (1,0)\}$  et  $f'(E_2) \subseteq \{(1,1), (0,1)\}$ .  $f'$  est la valuation cherchée. Ceci achève la démonstration.

**Proposition 4.24.:** Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes ayant la propriété  $P'_{2 \times 2}$ .

- (i) Tout graphe obtenu à partir de  $G_1$  et  $G_2$  par une construction de type  $V_g$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$ .
- (ii) Tout graphe obtenu à partir de  $G_1$  et  $G_2$  par une construction de type  $T_g$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$ .

**démonstration :**

(i) Sans perte de généralité, on suppose que c'est le graphe  $G_2$  qui est inséré dans le graphe  $G'_1$  obtenu à partir de  $G_1$  par une construction de type  $V$ . Le graphe  $G'_1$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$  d'après la proposition 4.18., on conclut immédiatement grace à la proposition 4.23.

(ii) Sans perte de généralité, on suppose que c'est le graphe  $G_2$  qui est inséré dans le graphe  $G'_1$  obtenu à partir de  $G_1$  par une construction de type  $T$ . Le graphe  $G'_1$  a la propriété  $P'_{2 \times 2}$  d'après la proposition 4.19., on conclut immédiatement grace à la proposition 4.23. Ceci achève la démonstration.

Des propositions 4.17., 4.24. on déduit :

**Proposition 4.25.:**

Tout graphe  $I.T_g.V_g$ -constructible a la propriété  $P'_{2 \times 2}$ .

Nous rappelons maintenant un théorème de Mader ([26] lemme 9) qui sera utilisé dans la suite. Nous devons d'abord donner quelques définitions.

Soient  $G=(V,E)$  un graphe et  $x,y$  deux sommets de  $G$ , on note  $\lambda(x,y ; G)$  le nombre maximal de chaînes élémentaires 2 à 2 disjointes ( pour les arêtes) d'extrémités  $x$  et  $y$ .

On dit qu'un sommet  $x$  est *voisin* d'un sommet  $y$  s'il existe une arête  $e$  de  $E(G)$  reliant  $x$  et  $y$ .

L' ensemble des sommets voisins d'un sommet  $x$  de  $G$  est appelé le *voisinage* de  $x$ , on le note

$N(x;G)$ .

Soient  $h \in [zx]_G$  et  $k \in [zy]_G$  avec  $x \neq y$ , on note  $G^{hk}$  le graphe obtenu à partir de  $G'=(V,E-\{h,k\})$  en ajoutant une nouvelle arête  $e$  d'extrémités  $x,y$ . Cette construction est appelée une *fusion au sommet*  $z$ . On dit que les arêtes  $h$  et  $k$  ont été *fondues* en  $e$  (figure 6).

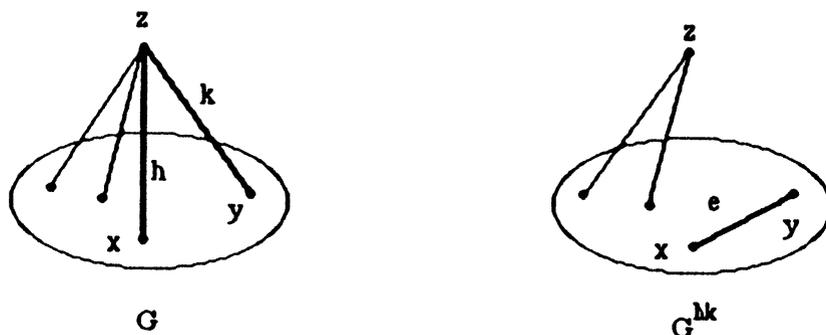


Figure 6

Si pour toute paire de sommets distincts  $x,y$  de  $V-\{z\}$   $\lambda(x,y ; G) = \lambda(x,y ; G^{hk})$ , on dit que la fusion de  $h$  et  $k$  est *admissible*.

**Théorème 4.26.**([26], lemme 9) :

Soit un sommet  $z$  d'un graphe  $G=(V,E)$ , qui n'est pas un sommet d'articulation, tel que  $d_G(z)=4$ . Si  $|N(z;G)| \geq 2$ , le graphe admet une fusion admissible en  $z$ .

**Remarque 4.27 :**

Après la fusion admissible des arêtes  $h$  et  $k$ ,  $d_{G^{hk}}(z)=2$ ; deux cas se présentent à nous :

1.  $|N(z;G^{hk})|=2$ , on peut réaliser une nouvelle fusion au sommet  $z$  et enlever le sommet  $z$ . Le nouveau graphe  $G'$  alors obtenu vérifie :

pour tout  $x,y \in V-\{z\}$ ,  $\lambda(x,y ; G') = \lambda(x,y ; G)$ .

2.  $|N(z;G^{hk})|=1$ (figure 7), le nouveau graphe  $G'$  obtenu en supprimant  $z$  et les arêtes incidentes à  $z$  vérifie également :

pour tout  $x,y \in V-\{z\}$ ,  $\lambda(x,y ; G') = \lambda(x,y ; G)$ .

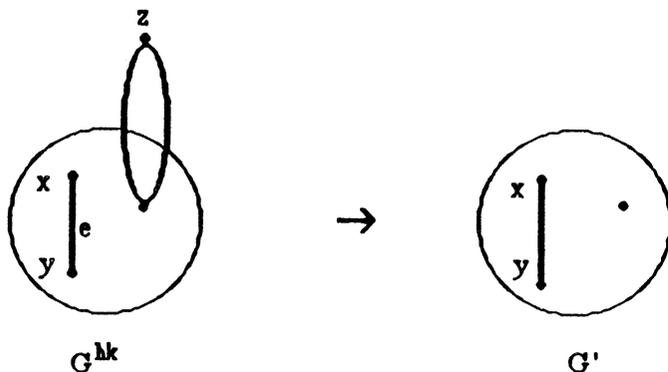


Figure 7

Corollaire 4.28.

Soit  $G$  un graphe 4-arête-connexe et  $z$  un sommet de  $G$  de degré 4 tel que  $|N(z;G)| \geq 2$ . Il est possible en ajoutant au plus deux arêtes  $e_1, e_2$  au graphe  $G_{V-\{z\}}$  d'obtenir un graphe 4-arête-connexe tel que les extrémités des arêtes  $e_1$  et  $e_2$  soient des sommets de  $N(z;G)$ .

démonstration :

On rappelle qu'un graphe  $G=(V,E)$  est  $k$ -arête-connexe si et seulement si pour toute paire  $\{x,y\}$  de sommets distincts de  $V$ ,  $\lambda(x,y;G) \geq k$ . Le sommet  $z$  étant de degré 4, il ne peut être un sommet d'articulation, car le graphe est 4-arête-connexe. On peut donc appliquer le théorème 4.26 et la remarque 4.27. Deux cas se présentent :

• 1<sup>er</sup> cas de la remarque 4.27: le nouveau graphe  $G'$  obtenu est le graphe  $G_{V-\{z\}}$  auquel on a ajouté deux arêtes  $e_1, e_2$ . L'ensemble des extrémités de ces arêtes est l'ensemble  $N(z;G)$ .

• 2<sup>ème</sup> cas de la remarque 4.27: le nouveau graphe  $G'$  obtenu est le graphe  $G_{V-\{z\}}$  auquel on a ajouté une arête et les extrémités de cette arête appartiennent à  $N(z;G)$ .

Dans les deux cas le graphe obtenu est 4-arête-connexe. Ceci achève la démonstration.

Nous démontrons maintenant le résultat qui permet de prouver la proposition 4.22. sans utiliser la notion d'arbres maximaux, grâce à la proposition 4.25.

Proposition 4.29.:

Si  $G=(V,E)$  est un graphe 4-arête-connexe, quelles que soient les arêtes  $e$  et  $f$  de  $E$ , le graphe  $G'=(V,E-\{e,f\})$  est un graphe  $I.T_g.V_g$ -constructible.

Pour alléger le texte, nous dirons qu'un graphe  $G=(V,E)$  a la *propriété requise*, si quelles que soient les arêtes  $e$  et  $f$  de  $E$ , le graphe  $G'=(V,E-\{e,f\})$  est un graphe  $I.T_g.V_g$ -constructible.

démonstration : On rappelle qu'un graphe  $G=(V,E)$   $k$ -arête-connexe est  $k$ -arête-connexe minimal, si quelle que soit l'arête  $e \in E$ ,  $G'=(V,E-\{e\})$  n'est pas  $k$ -arête-connexe.

Nous démontrons la proposition 4.29. par récurrence.

Le graphe  $K_2^4$  a la propriété requise.

Soit  $G=(V,E)$  un graphe 4-arête-connexe tel que tout graphe  $G'=(V',E')$  4-arête-connexe avec  $|V'|+|E'| < |V|+|E|$  ait la propriété requise.

- Si  $G$  n'est pas 4-arête-connexe minimal, il existe  $a \in E$  tel que  $G''_1=(V,E-\{a\})$  est 4-arête-connexe; d'après la minimalité de  $G$ , pour tout  $e,f \in E-\{a\}$ ,  $G'''_1=(V,E-\{e,f,a\})$  est  $I.T_g.V_g$ -constructible. On en déduit que pour tout  $e,f \in E-\{a\}$ ,  $G'''_1=(V,E-\{e,f\})$ ,  $G'''_2=(V,E-\{e,a\})$ ,  $G'''_3=(V,E-\{a,f\})$  sont  $I.T_g.V_g$ -constructibles. En effet  $G'''_i$ , pour  $i \in [1,3]$  est obtenu à partir de  $G''_1$  par une construction de type I. Il est immédiat alors que pour tout  $e,f \in E$ ,  $G'=(V,E-\{e,f\})$  est  $I.T_g.V_g$ -constructible.

- Si  $G$  est 4-arête-connexe minimal et si  $e,f$  sont deux arêtes de  $G$ , l'arête  $e$  appartient à un cocycle de cardinalité 4 :  $e \in \omega_G(A)$ ,  $A \subseteq V$  et  $|\omega_G(A)|=4$ .

On pose  $A^* = E-A$ . Notons  $G_{A^*+a^*}$  (resp.  $G_{A^*+a}$ ) le graphe obtenu à partir de  $G$  en contractant le sous-ensemble  $A^*$  (resp.  $A$ ) en un seul sommet  $a^*$  (resp.  $a$ ).  $G_{A^*+a^*}$  et  $G_{A^*+a}$  sont des graphes 4-arête-connexes (figure 8).

Plusieurs cas se présentent à nous :

1°.  $A^*=\{z\}$ , on a  $d_G(z)=4$

1.a)  $|N(z;G)|=1$ :  $z$  n'a qu'un seul sommet voisin  $x$ , on a  $e \in [xz]_G$ .  $G_A=(A,E_A)$  est 4-arête-connexe; d'après la minimalité de  $G$ , il a la propriété requise et donc  $G'_A=(A,E_A-\{f\})$  est  $I.T_g.V_g$ -constructible. Comme  $G'=(V,E-\{e,f\})$  s'obtient à partir de  $G'_A$  par une construction de

type V, suivie éventuellement d'une construction de type I,  $G'$  est  $I.T_g.V_g$ -constructible.

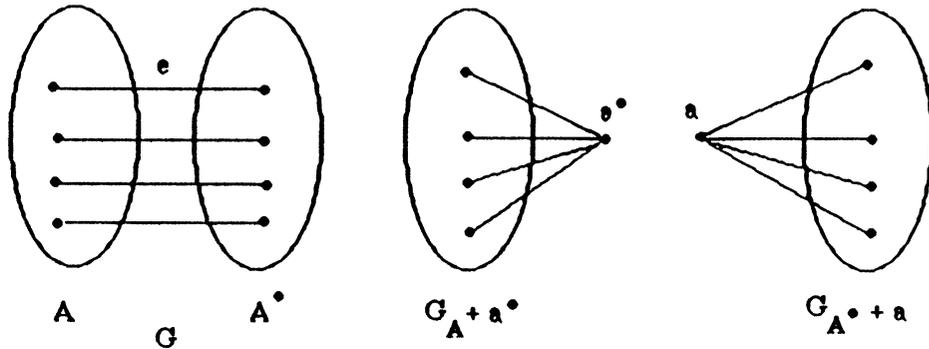


Figure 8

1.b)  $|N(z;G)| \geq 2$ . On alors deux situations possibles selon que  $f \in \omega_G(\{z\})$  ou non.

1.b.1.  $f \in \omega_G(\{z\})$ .

On sait qu'en ajoutant au plus deux arêtes à  $G_{V-\{z\}}$  on obtient un graphe  $G_1$  4-arête-connexe (corollaire 4.28.). Par minimalité de  $G$ ,  $G_1$  qui est 4-arête-connexe a la propriété requise. Donc  $G_{V-\{z\}}$  est  $I.T_g.V_g$ -constructible. On reconstruit alors  $G'=(V,E-\{e,f\})$  à partir de  $G_{V-\{z\}}$  par une construction de type V.  $G'$  est donc  $I.T_g.V_g$ -constructible.

1.b.2.  $f \notin \omega_G(\{z\})$ .

On sait qu'en ajoutant au plus deux arêtes à  $G_{V-\{z\}}$  on obtient un graphe  $G_1$  4-arête-connexe (corollaire 4.28.) Nous devons alors étudier les deux cas de la remarque 4.27.:

• 1<sup>er</sup> cas de la remarque 4.27

Le graphe  $G_1=(V_1,E_1)$  est obtenu en ajoutant deux arêtes, notées  $e_1,e_2$ , au graphe  $G_{V-\{z\}}$ . On suppose sans perte de généralité que  $e_2$  relie les extrémités de deux arêtes de  $\omega_G(\{z\})-\{e\}$ . Par minimalité de  $G$ ,  $G_1$  qui est 4-arête-connexe a la propriété requise. Donc  $G'_1=(V_1,E_1-\{e_1,f\})$  est  $I.T_g.V_g$ -constructible. On reconstruit alors  $G'=(V,E-\{e,f\})$  par une construction de type T où  $e_2$  est l'arête subdivisée. Dans ce cas  $G'$  est  $I.T_g.V_g$ -constructible.

• 2<sup>ème</sup> cas de la remarque 4.27.

Le graphe  $G_1=(V_1,E_1)$  est obtenu en ajoutant une arête, notée  $e_1$ , au graphe  $G_{V-\{z\}}$ . Par minimalité de  $G$ ,  $G_1$  qui est 4-arête-connexe a la propriété requise et  $G'_1=(V_1,E_1-\{e_1,f\})$  est  $I.T_g.V_g$ -constructible. On reconstruit  $G'=(V,E-\{e,f\})$  par une construction de type  $V$  et une construction de type  $I$ . Dans ce cas  $G'$  est  $I.T_g.V_g$ -constructible.

2°. Si  $|A| \neq 1$  et  $|A^*| \neq 1$

D'après le corollaire 4.28., en ajoutant au plus deux arêtes à  $G_A$  (resp.  $G_{A^*}$ ), on obtient un graphe 4-arête-connexe. Par minimalité de  $G$ , ce graphe qui est 4-arête-connexe a la propriété requise. Donc  $G_A$  (resp.  $G_{A^*}$ ) est  $I.T_g.V_g$ -constructible. On suppose sans perte de généralité que  $f$  appartient à  $E(G_{A+a^*})$ .

On remarque alors que  $G'=(V,E-\{e,f\})$  s'obtient par insertion de  $G_{A^*}$  dans le graphe  $G^*=(A \cup \{a^*\}, E(G_{A+a^*})-\{e,f\})$  au sommet  $a^*$ . On peut donc prouver comme dans le cas 1 que  $G'=(V,E-\{e,f\})$  est  $I.T_g.V_g$ -constructible en remplaçant les constructions de type  $V$  et  $T$  apparaissant dans la démonstration qui créent le sommet  $z$  par des constructions de type  $T_g$  et  $V_g$  qui insèrent le graphe  $G_{A^*}$ . Ceci achève la démonstration.



**ANNEXE**



type	$C_1$	$a_1$	$C_1+a_2$	$C_2+a_3$	$C_3+a_4$	$C_4$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$h_5$	$h_6$	$h_7$	$h_8$
1	0		$a_4$				3	1	3	1	3	1	3	1
2	0		$a_3$				3	1	3	1	3	1	3	1
3	0		$a_3+a_4$				2	2	2	2	2	2	2	2
4	0		$a_2$				3	1	3	1	3	1	3	1
5	0		$a_2+a_4$				2	2	2	2	2	2	2	2
6	0		$a_2+a_3$				2	2	2	2	2	2	2	2
7	0		$a_2+a_3+a_4$				1	3	1	3	1	3	1	3
8	1		$a_1$				0	0	1	3	2	2	3	1
9	1		$a_1+a_4$				3	1	0	0	1	3	2	2
10	1		$a_1+a_3$				3	1	0	0	1	3	2	2
11	1		$a_1+a_3+a_4$				2	2	3	1	0	0	1	3
12	1		$a_1+a_2$				3	1	0	0	1	3	2	2
13	1		$a_1+a_2+a_4$				2	2	3	1	0	0	1	3
14	1		$a_1+a_2+a_3$				2	2	3	1	0	0	1	3
15	1		$a_1+a_2+a_3+a_4$				1	3	2	2	3	1	0	0

type	$C_2$	$a_1$	$C_1+a_2$	$C_2+a_3$	$C_3+a_4$	$C_4$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$h_5$	$h_6$	$h_7$	$h_8$
1	0		$a_4$				1	3	1	3	1	3	1	3
2	0		$a_3$				1	3	1	3	1	3	1	3
3	0		$a_3+a_4$				2	2	2	2	2	2	2	2
4	1		$a_2$				0	0	1	1	2	2	3	3
5	1		$a_2+a_4$				1	3	2	0	3	1	0	2
6	1		$a_2+a_3$				1	3	2	0	3	1	0	2
7	1		$a_2+a_3+a_4$				2	2	3	3	0	0	1	1
8	0		$a_1$				1	3	1	3	1	3	1	3
9	0		$a_1+a_4$				2	2	2	2	2	2	2	2
10	0		$a_1+a_3$				2	2	2	2	2	2	2	2
11	0		$a_1+a_3+a_4$				3	1	3	1	3	1	3	1
12	1		$a_1+a_2$				1	3	2	0	3	1	0	2
13	1		$a_1+a_2+a_4$				2	2	3	3	0	0	1	1
14	1		$a_1+a_2+a_3$				2	2	3	3	0	0	1	1
15	1		$a_1+a_2+a_3+a_4$				3	1	0	2	1	3	2	0

type	$C_3$	$a_1.C_1 + a_2.C_2 + a_3.C_3 + a_4.C_4$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$h_5$	$h_6$	$h_7$	$h_8$
1	0	$a_4$	1	3	1	3	1	3	1	3
2	1	$a_3$	0	0	1	1	2	2	3	3
3	1	$a_3 + a_4$	1	3	2	0	3	1	0	2
4	0	$a_2$	1	3	1	3	1	3	1	3
5	0	$a_2 + a_4$	2	2	2	2	2	2	2	2
6	1	$a_2 + a_3$	1	3	2	0	3	1	0	2
7	1	$a_2 + a_3 + a_4$	2	2	3	3	0	0	1	1
8	0	$a_1$	1	3	1	3	1	3	1	3
9	0	$a_1 + a_4$	2	2	2	2	2	2	2	2
10	1	$a_1 + a_3$	1	3	2	0	3	1	0	2
11	1	$a_1 + a_3 + a_4$	2	2	3	3	0	0	1	1
12	0	$a_1 + a_2$	2	2	2	2	2	2	2	2
13	0	$a_1 + a_2 + a_4$	3	1	3	1	3	1	3	1
14	1	$a_1 + a_2 + a_3$	2	2	3	3	0	0	1	1
15	1	$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$	3	1	0	2	1	3	2	0

type	$C_4$	$a_1.C_1 + a_2.C_2 + a_3.C_3 + a_4.C_4$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$h_5$	$h_6$	$h_7$	$h_8$
1	1	$a_4$	0	0	1	1	2	2	3	3
2	0	$a_3$	1	3	1	3	1	3	1	3
3	1	$a_3 + a_4$	1	3	2	0	3	1	0	2
4	0	$a_2$	1	3	1	3	1	3	1	3
5	1	$a_2 + a_4$	1	3	2	0	3	1	0	2
6	0	$a_2 + a_3$	2	2	2	2	2	2	2	2
7	1	$a_2 + a_3 + a_4$	2	2	3	3	0	0	1	1
8	0	$a_1$	1	3	1	3	1	3	1	3
9	1	$a_1 + a_4$	1	3	2	0	3	1	0	2
10	0	$a_1 + a_3$	2	2	2	2	2	2	2	2
11	1	$a_1 + a_3 + a_4$	2	2	3	3	0	0	1	1
12	0	$a_1 + a_2$	2	2	2	2	2	2	2	2
13	1	$a_1 + a_2 + a_4$	2	2	3	3	0	0	1	1
14	0	$a_1 + a_2 + a_3$	3	1	3	1	3	1	3	1
15	1	$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$	3	1	0	2	1	3	2	0

type	$C_{12}$	$a_1$	$C_{1+a_2}$	$C_{2+a_3}$	$C_{3+a_4}$	$C_4$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$h_5$	$h_6$	$h_7$	$h_8$
1	0		$a_4$				1	3	1	3	1	3	1	3
2	0		$a_3$				1	3	1	3	1	3	1	3
3	0		$a_3+a_4$				2	2	2	2	2	2	2	2
4	1		$a_2$				1	3	0	2	3	1	2	0
5	1		$a_2+a_4$				2	2	1	1	0	0	3	3
6	1		$a_2+a_3$				2	2	1	1	0	0	3	3
7	1		$a_2+a_3+a_4$				3	1	2	0	1	3	0	2
8	1		$a_1$				0	0	1	1	2	2	3	3
9	1		$a_1+a_4$				1	3	2	0	3	1	0	2
10	1		$a_1+a_3$				1	3	2	0	3	1	0	2
11	1		$a_1+a_3+a_4$				2	2	3	3	0	0	1	1
12	0		$a_1+a_2$				1	3	1	3	1	3	1	3
13	0		$a_1+a_2+a_4$				2	2	2	2	2	2	2	2
14	0		$a_1+a_2+a_3$				2	2	2	2	2	2	2	2
15	0		$a_1+a_2+a_3+a_4$				3	1	3	1	3	1	3	1

type	$C_{13}$	$a_1$	$C_{1+a_2}$	$C_{2+a_3}$	$C_{3+a_4}$	$C_4$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$h_5$	$h_6$	$h_7$	$h_8$
1	0		$a_4$				1	3	1	3	1	3	1	3
2	1		$a_3$				1	3	0	2	3	1	2	0
3	1		$a_3+a_4$				2	2	1	1	0	0	3	3
4	0		$a_2$				1	3	1	3	1	3	1	3
5	0		$a_2+a_4$				2	2	2	2	2	2	2	2
6	1		$a_2+a_3$				2	2	1	1	0	0	3	3
7	1		$a_2+a_3+a_4$				3	1	2	0	1	3	0	2
8	1		$a_1$				0	0	1	1	2	2	3	3
9	1		$a_1+a_4$				1	3	2	0	3	1	0	2
10	0		$a_1+a_3$				1	3	1	3	1	3	1	3
11	0		$a_1+a_3+a_4$				2	2	2	2	2	2	2	2
12	1		$a_1+a_2$				1	3	2	0	3	1	0	2
13	1		$a_1+a_2+a_4$				2	2	3	3	0	0	1	1
14	0		$a_1+a_2+a_3$				2	2	2	2	2	2	2	2
15	0		$a_1+a_2+a_3+a_4$				3	1	3	1	3	1	3	1

$C'_{ij}$  signifie  $C'_i+C'_j$

(type)	$C_{14}$	$a_1.C_1+a_2.C_2+a_3.C_3+a_4.C_4$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$h_5$	$h_6$	$h_7$	$h_8$
1	1	$a_4$	1	3	0	2	3	1	2	0
2	0	$a_3$	1	3	1	3	1	3	1	3
3	1	$a_3+a_4$	2	2	1	1	0	0	3	3
4	0	$a_2$	1	3	1	3	1	3	1	3
5	1	$a_2+a_4$	2	2	1	1	0	0	3	3
6	0	$a_2+a_3$	2	2	2	2	2	2	2	2
7	1	$a_2+a_3+a_4$	3	1	2	0	1	3	0	2
8	1	$a_1$	0	0	1	1	2	2	3	3
9	0	$a_1+a_4$	1	3	1	3	1	3	1	3
10	1	$a_1+a_3$	1	3	2	0	3	1	0	2
11	0	$a_1+a_3+a_4$	2	2	2	2	2	2	2	2
12	1	$a_1+a_2$	1	3	2	0	3	1	0	2
13	0	$a_1+a_2+a_4$	2	2	2	2	2	2	2	2
14	1	$a_1+a_2+a_3$	2	2	3	3	0	0	1	1
15	0	$a_1+a_2+a_3+a_4$	3	1	3	1	3	1	3	1

(type)	$C_{23}$	$a_1.C_1+a_2.C_2+a_3.C_3+a_4.C_4$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$h_5$	$h_6$	$h_7$	$h_8$
1	0	$a_4$	1	3	1	3	1	3	1	3
2	1	$a_3$	1	3	0	2	3	1	2	0
3	1	$a_3+a_4$	2	2	1	1	0	0	3	3
4	1	$a_2$	0	0	1	1	2	2	3	3
5	1	$a_2+a_4$	1	3	2	0	3	1	0	2
6	0	$a_2+a_3$	1	3	1	3	1	3	1	3
7	0	$a_2+a_3+a_4$	2	2	2	2	2	2	2	2
8	0	$a_1$	1	3	1	3	1	3	1	3
9	0	$a_1+a_4$	2	2	2	2	2	2	2	2
10	1	$a_1+a_3$	2	2	1	1	0	0	3	3
11	1	$a_1+a_3+a_4$	3	1	2	0	1	3	0	2
12	1	$a_1+a_2$	1	3	2	0	3	1	0	2
13	1	$a_1+a_2+a_4$	2	2	3	3	0	0	1	1
14	0	$a_1+a_2+a_3$	2	2	2	2	2	2	2	2
15	0	$a_1+a_2+a_3+a_4$	3	1	3	1	3	1	3	1

$C_{ij}$  signifie  $C_i+C_j$

type	$C_2$	$a_1$	$C_1+a_2$	$C_2+a_3$	$C_3+a_4$	$C_4$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$h_5$	$h_6$	$h_7$	$h_8$
1	1		$a_4$				1	3	0	2	3	1	2	0
2	0		$a_3$				1	3	1	3	1	3	1	3
3	1		$a_3+a_4$				2	2	1	1	0	0	3	3
4	1		$a_2$				0	0	1	1	2	2	3	3
5	0		$a_2+a_4$				1	3	1	3	1	3	1	3
6	1		$a_2+a_3$				1	3	2	0	3	1	0	2
7	0		$a_2+a_3+a_4$				2	2	2	2	2	2	2	2
8	0		$a_1$				1	3	1	3	1	3	1	3
9	1		$a_1+a_4$				2	2	1	1	0	0	3	3
10	0		$a_1+a_3$				2	2	2	2	2	2	2	2
11	1		$a_1+a_3+a_4$				3	1	2	0	1	3	0	2
12	1		$a_1+a_2$				1	3	2	0	3	1	0	2
13	0		$a_1+a_2+a_4$				2	2	2	2	2	2	2	2
14	1		$a_1+a_2+a_3$				2	2	3	3	0	0	1	1
15	0		$a_1+a_2+a_3+a_4$				3	1	3	1	3	1	3	1

type	$C_3$	$a_1$	$C_1+a_2$	$C_2+a_3$	$C_3+a_4$	$C_4$	$h_1$	$h_2$	$h_3$	$h_4$	$h_5$	$h_6$	$h_7$	$h_8$
1	1		$a_4$				1	3	0	2	3	1	2	0
2	1		$a_3$				0	0	1	1	2	2	3	3
3	0		$a_3+a_4$				1	3	1	3	1	3	1	3
4	0		$a_2$				1	3	1	3	1	3	1	3
5	1		$a_2+a_4$				2	2	1	1	0	0	3	3
6	1		$a_2+a_3$				1	3	2	0	3	1	0	2
7	0		$a_2+a_3+a_4$				2	2	2	2	2	2	2	2
8	0		$a_1$				1	3	1	3	1	3	1	3
9	1		$a_1+a_4$				2	2	1	1	0	0	3	3
10	1		$a_1+a_3$				1	3	2	0	3	1	0	2
11	0		$a_1+a_3+a_4$				2	2	2	2	2	2	2	2
12	0		$a_1+a_2$				2	2	2	2	2	2	2	2
13	1		$a_1+a_2+a_4$				3	1	2	0	1	3	0	2
14	1		$a_1+a_2+a_3$				2	2	3	3	0	0	1	1
15	0		$a_1+a_2+a_3+a_4$				3	1	3	1	3	1	3	1

$C'_{ij}$  signifie  $C'_i+C'_j$

type	C	123	h <sub>1</sub>	h <sub>2</sub>	h <sub>3</sub>	h <sub>4</sub>	h <sub>5</sub>	h <sub>6</sub>	h <sub>7</sub>	h <sub>8</sub>	h <sub>9</sub>	h <sub>10</sub>	h <sub>11</sub>	h <sub>12</sub>	h <sub>13</sub>	h <sub>14</sub>	h <sub>15</sub>	h <sub>16</sub>
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3
2	1	1	0	1	1	3	2	3	3	3	0	3	3	1	2	1	1	1
3	1	2	1	2	2	0	3	0	0	2	3	2	2	0	1	0	0	0
4	1	1	1	0	1	3	3	2	3	3	3	0	3	1	1	2	1	1
5	1	2	2	1	2	0	0	3	0	2	2	3	2	0	0	1	0	0
6	0	2	1	1	2	2	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3	2	2
7	0	3	2	2	3	3	2	2	3	1	2	2	1	1	2	2	1	1
8	1	1	1	1	0	3	3	3	2	3	3	3	0	1	1	1	1	2
9	1	2	2	2	1	0	0	0	3	2	2	2	3	0	0	0	0	0
10	0	2	1	2	1	2	1	2	1	2	3	2	2	3	2	2	3	3
11	0	3	2	3	2	3	2	3	2	1	2	1	1	2	2	1	2	2
12	0	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3	3
13	0	3	3	2	2	3	3	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	2
14	1	3	2	2	2	1	0	0	0	1	2	2	2	3	0	0	0	0
15	1	0	3	3	3	2	1	1	1	0	1	1	1	2	3	3	3	3

type	C	124	h <sub>1</sub>	h <sub>2</sub>	h <sub>3</sub>	h <sub>4</sub>	h <sub>5</sub>	h <sub>6</sub>	h <sub>7</sub>	h <sub>8</sub>	h <sub>9</sub>	h <sub>10</sub>	h <sub>11</sub>	h <sub>12</sub>	h <sub>13</sub>	h <sub>14</sub>	h <sub>15</sub>	h <sub>16</sub>
1	1	1	0	1	1	3	2	3	3	3	0	3	3	1	2	1	1	1
2	0	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
3	1	2	1	2	2	0	3	0	0	2	3	2	2	0	1	0	0	0
4	1	1	1	0	1	3	3	2	3	3	3	0	3	2	1	2	1	1
5	0	2	1	1	2	2	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3	2	2
6	1	2	2	1	2	0	0	3	0	2	2	3	2	0	0	1	0	0
7	0	3	2	2	3	3	2	2	3	1	2	2	1	1	2	2	1	1
8	1	1	1	1	0	3	3	3	2	3	3	3	0	1	1	1	1	2
9	0	2	1	2	1	2	1	2	1	2	3	2	3	2	3	2	3	3
10	1	2	2	2	1	0	0	0	3	2	2	2	3	0	0	0	0	1
11	0	3	2	3	2	3	2	3	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2
12	0	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3	3
13	1	3	2	2	2	1	0	0	0	1	2	2	2	3	0	0	0	0
14	0	3	3	2	2	3	3	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	2
15	1	0	3	3	3	2	1	1	1	0	1	1	1	2	3	3	3	3

C<sub>ijk</sub> signifie C<sub>i</sub>+C<sub>j</sub>+C<sub>k</sub>

type	C <sub>134</sub>	h <sub>1</sub>	h <sub>2</sub>	h <sub>3</sub>	h <sub>4</sub>	h <sub>5</sub>	h <sub>6</sub>	h <sub>7</sub>	h <sub>8</sub>	h <sub>9</sub>	h <sub>10</sub>	h <sub>11</sub>	h <sub>12</sub>	h <sub>13</sub>	h <sub>14</sub>	h <sub>15</sub>	h <sub>16</sub>
1	1	1	0	1	1	3	2	3	3	3	0	3	3	1	2	1	1
2	1	1	1	0	1	3	3	2	3	3	3	0	3	1	1	2	1
3	0	2	1	1	2	2	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3	2
4	0	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3
5	1	2	1	2	2	0	3	0	0	2	3	2	2	0	1	0	0
6	1	2	2	1	2	0	0	3	0	2	2	3	2	0	0	1	0
7	0	3	2	2	3	3	2	2	3	1	2	2	1	1	2	2	1
8	1	1	1	1	0	3	3	3	2	3	3	3	0	1	1	1	2
9	0	2	1	2	1	2	1	2	1	2	3	2	3	2	3	2	3
10	0	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3
11	1	3	2	2	2	1	0	0	0	0	1	2	2	3	0	0	0
12	1	2	2	2	1	0	0	0	3	2	2	2	1	2	1	2	1
13	0	3	2	3	2	3	2	3	2	1	2	2	1	2	2	1	2
14	0	3	3	2	2	3	3	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
15	1	0	3	3	3	2	1	1	1	0	1	1	1	2	3	3	3

type	C <sub>234</sub>	h <sub>1</sub>	h <sub>2</sub>	h <sub>3</sub>	h <sub>4</sub>	h <sub>5</sub>	h <sub>6</sub>	h <sub>7</sub>	h <sub>8</sub>	h <sub>9</sub>	h <sub>10</sub>	h <sub>11</sub>	h <sub>12</sub>	h <sub>13</sub>	h <sub>14</sub>	h <sub>15</sub>	h <sub>16</sub>
1	1	1	0	1	1	3	2	3	3	3	0	3	3	1	2	1	1
2	1	1	1	0	1	3	3	2	3	3	3	0	3	1	1	2	1
3	0	2	1	1	2	2	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3	2
4	1	1	1	1	0	3	3	3	2	3	3	3	0	1	1	1	2
5	0	2	1	2	1	2	1	2	1	2	3	2	3	2	3	2	3
6	0	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3
7	1	3	2	2	2	1	0	0	0	1	2	2	2	3	0	0	0
8	0	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3
9	1	2	1	2	2	0	3	0	0	2	3	2	2	0	1	0	0
10	1	2	2	1	2	0	0	3	0	2	2	3	2	0	0	1	0
11	0	3	2	2	3	3	2	2	3	1	2	2	1	1	2	2	1
12	1	2	2	2	1	0	0	0	3	2	2	2	3	0	0	0	1
13	0	3	2	3	2	3	2	3	2	1	2	1	2	1	2	1	2
14	0	3	3	2	2	3	3	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
15	1	0	3	3	3	2	1	1	1	0	1	1	1	2	3	3	3

C<sub>ijk</sub> signifie C<sub>i</sub>+C<sub>j</sub>+C<sub>k</sub>

type	C'	h <sub>1</sub>	h <sub>2</sub>	h <sub>3</sub>	h <sub>4</sub>	h <sub>5</sub>	h <sub>6</sub>	h <sub>7</sub>	h <sub>8</sub>	h <sub>9</sub>	h <sub>10</sub>	h <sub>11</sub>	h <sub>12</sub>	h <sub>13</sub>	h <sub>14</sub>	h <sub>15</sub>	h <sub>16</sub>
1	1	0	1	1	1	2	1	1	1	0	3	3	3	2	3	3	3
2	1	1	0	1	1	1	2	1	1	3	0	3	3	3	2	3	3
3	0	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3	2	2	1	1	2	2
4	1	1	1	0	1	1	1	2	1	3	3	0	3	3	3	2	3
5	0	1	2	1	2	3	2	3	2	3	2	3	2	1	2	1	2
6	0	2	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3	2	2	1	1	2
7	1	2	2	2	3	0	0	0	3	2	2	2	1	0	0	0	1
8	1	1	1	1	0	1	1	1	2	3	3	3	0	3	3	3	2
9	0	1	2	2	1	3	2	2	3	3	2	2	3	1	2	2	1
10	0	2	2	1	2	1	2	3	2	3	2	3	2	2	1	2	1
11	1	2	2	3	2	0	0	3	3	0	2	2	1	0	0	1	0
12	0	2	2	1	1	2	2	3	3	2	2	3	3	2	2	1	1
13	1	2	3	2	2	0	3	0	0	2	1	2	2	0	1	0	0
14	1	3	2	2	2	3	0	0	0	1	2	2	2	1	0	0	0
15	0	3	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3

C' 1234 signifie C'<sub>1</sub>+C'<sub>2</sub>+C'<sub>3</sub>+C'<sub>4</sub>

**BIBLIOGRAPHIE**



**Bibliographie**

- [1] C. Berge  
Graphes et Hypergraphes, Dunod, Paris, 1974.
- [2] F. Jaeger  
Flows and generalized coloring theorems in graphs.  
J. Combinatorial Theory Ser B (26) 1979 - 205-216.
- [3] H. Cross  
Analysis of flow in networks of conduits or conductors.  
Bull. N°286, Univ. of Illinois Engineering Experimental Station. Urbana, [1]  
(1936).
- [4] A. Itai and M. Rodeh  
Covering a graph by circuits.  
Automata, Languages, and Programming, Lecture Notes in Computer Science,  
N°62, Springer, Berlin, 1978 pp.289-299.
- [5] A. Itai, R. J. Lipton, C. H. Papadimitriou, and M. Rodeh  
Covering graphs by simple circuits.  
Siam J. Comput 10 (4) (1981), 746-754.
- [6] J.C. Bermond, B. Jackson, F. Jaeger  
Shortest coverings of graphs with cycles.  
J. Combinatorial Theory Ser B(35) 1983 297-308.
- [7] O. Ore  
The four-color problem.  
Academic Press, New York, 1967.
- [8] F. Jaeger  
A survey of the cycle double cover conjecture.  
Conference "Cycles in graphs 82", Simon Fraser University.

- [9] M. Preissmann  
"Sur les colorations des arêtes des graphes cubiques" Thèse de Doctorat de 3<sup>ème</sup> cycle, Chap. 1, Grenoble 8 mai 1981.
- [10] M. Tarsi  
Nowhere zero flow and short circuit covering in regular matroids.  
preprint.
- [11] W.T. Tutte  
A class of abelian groups.  
Canad. J. Math 8 (1956) 13-28.
- [12] W. T. Tutte  
A contribution to the theory of chromatic polynomials.  
Canad. J. Math 5 (1954) 80-91.
- [13] D.J.A. Welsh  
"Matroid theory".  
Academic Press (London) 1976.
- [14] R.G.Bland , M. Las Vergnas  
Orientability of Matroids.  
J. Combinatorial theory Ser B(24) 1978 94-123.
- [15] G.J. Minty  
On the axiomatic foundations of the theories of directed linear graphs, electrical networks and networks programming.  
J. Math. and Mech. 15 (3) (1966) 485-520.
- [16] S. Lang  
"Algebra"  
Addison Wesley (New York ) 1967.
- [17] W.T. Tutte  
Lectures on matroids.  
J. Res. Nat. Bur. Standarts Sect. B. 69 B(1965), 1.47.

- [18] D.R. Fulkerson  
Networks, frames and blocking systems.  
Mathematics of the decision sciences (Lectures in Applied Math.) Amer. Math. Soc.  
11(1968) 303-335.
- [19] D.K. Arrowsmith and F. Jaeger  
On the enumeration of chains in regular chain groups.  
J. Combinatorial theory. Ser B(32) 1982. 75-90.
- [20] A.J. Hoffmann, J.B. Kruskal ;  
Integral boundary points of convex polyhedra.  
Ann. of Math. Studies, 38, Princeton, 1956, 223.
- [21] D. R. Fulkerson  
Blocking and anti-blocking pairs of polyhedra.  
Math. Prog. 1 (1971) 168-194.
- [22] H. Fleischner  
Eine gemeinsame Basis für die Theorie der Eulerschen Graphen und den Satz von Petersen.  
Monat. Math. Phys. 81 (1976), 267-278.
- [23] F. Jaeger  
On graphic-minimal spaces.  
Annals of Discrete Math., 8 (1980), 123-126.
- [24] W. T. Tutte  
On the problem of decomposing a graph into  $n$  connected factors.  
J. London Math. Soc. 36 (1961), 221-230.
- [25] C. St. J. A. Nash-Williams  
Edge-disjoint spanning trees of finite graphs.  
J. London Math. Soc. 36 (1961), 445-450.
- [26] W. Mader  
A reduction method for edge-connectivity in graphs.  
"Advances in Graph Theory", Annals of Discrete Math. N°3 (1978), 145-164.

[27] P. D. Seymour

Nowhere-zero 6-flows.

J. Combin. Theory Ser. B 30 (1981), 130-135.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT 3ème CYCLE, DOCTORAT-INGENIEUR, DOCTORAT USMG

Vu les dispositions de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu les dispositions de l'arrêté du 5 juillet 1984,

Vu les rapports de M. .. *François JAEGER* .....

M. ....

M. .... *R.A.S.P.A.U.D. .... André* ..... est autorisé  
à présenter une thèse en vue de l'obtention du .. *grade de Docteur de 3ème cycle* .....

01 OCT. 1985

Grenoble, le .....

Le Président de l'Université Scientifique  
et Médicale



*M. Tanche*  
M. TANCHE

