



Étude théorique et expérimentale d'un réfrigérateur thermo-acoustique "compact".

Gaelle Poignand

► To cite this version:

Gaelle Poignand. Étude théorique et expérimentale d'un réfrigérateur thermo-acoustique "compact".. Acoustique [physics.class-ph]. Université du Maine, 2006. Français. NNT : . tel-00319014

HAL Id: tel-00319014

<https://theses.hal.science/tel-00319014>

Submitted on 5 Sep 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Académie de Nantes

ECOLE DOCTORALE DE L'UNIVERSITÉ DU MAIN
LE MANS, FRANCE

THÈSE DE DOCTORAT
Spécialité : ACOUSTIQUE

présentée par

Gaëlle POIGNAND

pour obtenir le titre de Docteur d'Université

**RÉFRIGÉRATEUR THERMOACOUSTIQUE :
ÉTUDE DU SYSTÈME COMPACT ET
DU COMPORTEMENT TRANSITOIRE**

Soutenance le 10 juillet 2006 devant le jury composé de

P. Blanc-Benon	Directeur de recherche, ECL, Lyon	rapporteur
J. C. Valière	Professeur, LEA, Poitiers	rapporteur
B. Gazengel	Maître de conférences, LAUM, Le Mans	examineur
D. Lasseux	Maître de conférences, TREFLE, Bordeaux	examineur
M. Bruneau	Professeur, LAUM, Le Mans	directeur de thèse
P. Lotton	Chargé de recherche, LAUM, Le Mans	directeur de thèse
H. Bailliet	Maître de conférences, LEA, Poitiers	invité
V. Gusev	Professeur, LPEC, Le Mans	invité

Remerciements

Ce travail a été effectué au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM, UMR-CNRS 6613) dans le cadre d'un contrat État-Région. Je remercie Sohbi Sahraoui, professeur, et Yves Aurégan, chercheur C.N.R.S., successivement directeur du LAUM, de m'avoir accueillie au sein de ce laboratoire.

Je remercie vivement M. Michel Bruneau, professeur émérite, et M. Pierrick Lotton, chargé de recherches du C.N.R.S., pour leur disponibilité et leurs nombreux conseils. Je les remercie de m'avoir fait profiter de leurs profondes connaissances et expériences et d'avoir pris le temps de relire ce manuscrit.

Merci à M. Philippe Blanc-Benon, directeur de recherche du C.N.R.S. à l'Ecole Centrale de Lyon, et à M. Jean-Christophe Valière, professeur au Laboratoire d'Études Aérodynamiques, d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce document ainsi qu'à Mme et MM. les membres du jury qui m'ont fait l'honneur de juger ce travail.

Je remercie particulièrement M. Jean-Christophe Valière qui a permis la réalisation des mesures V.I.P. au sein du Laboratoire d'Études Aérodynamiques.

Je remercie M. Bruno Gazengel, maître de conférences, M. James Blondeau, assistant ingénieur, M. Bertrand Leroux, ingénieur d'étude, pour l'aide qu'ils m'ont apporté pour la réalisation des mesures sur le banc V.L.D..

Je remercie les techniciens M. Stéphane Lebon, M. Patrick Collas, M. Alain Brunet et M. Eric Egon pour leurs participations aux différents aspects expérimentaux.

J'exprime ma reconnaissance à l'ensemble du personnel du laboratoire pour l'ambiance conviviale qui a régné. Merci aux doctorants que j'ai côtoyés et particulièrement à mes camarades de la salle informatique et de la cafét pour tous les moments passés ensemble. Je remercie également mes amis manceaux pour les soirées belotes, pizzas et "cantine".

Je tiens à exprimer ma plus profonde reconnaissance à ma famille pour leurs encouragements et leurs soutiens. Et enfin un grand merci à Aroune pour ses encouragements et pour toute l'aide qu'il m'a apportée quotidiennement.

Table des matières

Table des matières	3
Introduction	7
1 Champs acoustiques optimaux dans les réfrigérateurs thermoacoustiques	11
1.1 Présentation des machines thermoacoustiques	11
1.1.1 Historique	11
1.1.2 Principe physique de l'effet thermoacoustique	12
1.1.3 Réfrigérateurs thermoacoustiques classiques	15
1.2 Champs acoustiques optimaux pour le processus thermoacoustique	17
1.2.1 Onde quasi-plane en fluide visqueux entre deux plaques	17
1.2.2 Expressions des quantités thermoacoustiques d'intérêt en fonction de la vitesse particulaire, de la pression acoustique et de leur phase relative	22
1.2.3 Champs acoustiques optimaux pour les quantités thermoacoustiques d'intérêt .	26
1.2.4 Comparaison entre un réfrigérateur à ondes stationnaires et un réfrigérateur fonctionnant avec un champ acoustique optimal	29
1.3 Conclusion	34
2 Modèle de réfrigérateur compact à quatre sources	35
2.1 Champ acoustique dans le réfrigérateur compact à quatre sources décomposé en deux sous systèmes à une dimension	37
2.1.1 Champ acoustique dans un système à deux sources	37
2.1.2 Champ acoustique dans un système à quatre sources	40
2.2 Champ acoustique dans un système à quatre sources en fonction des vitesses des sources	41
2.2.1 Équation de propagation et forme de solution dans l'empilement	41
2.2.2 Équation du mouvement dans chaque cavité périphérique $\mathcal{D}_i$	44
2.2.3 Champ acoustique dans un réfrigérateur compact à quatre sources (les débits $U_{i=1,4}$ sont non nuls)	46
2.2.4 Champ acoustique dans un réfrigérateur compact à deux sources (les débits U_2 et U_4 sont nuls)	49
2.3 Champ acoustique en fonction des tensions électriques des haut-parleurs	51
2.3.1 Champ acoustique dans un réfrigérateur à deux sources en fonction des tensions électriques des haut-parleurs	52

2.3.2	Champ acoustique dans un réfrigérateur à quatre sources en fonction des tensions électriques des haut-parleurs	55
2.4	Conclusion	58
3	Étude expérimentale d'un réfrigérateur "compact" décimétrique à quatre sources	61
3.1	Maquette de réfrigérateur thermoacoustique compact	61
3.1.1	Dimensionnement de la maquette	62
3.1.2	Dispositifs de mesures	65
3.2	Réglage de la maquette et vérifications préliminaires	73
3.2.1	Réglage du système à deux haut-parleurs	74
3.2.2	Réglage du système à quatre haut-parleurs	75
3.2.3	Vérifications des mesures réalisées au vibromètre	75
3.2.4	Vérifications expérimentales de l'hypothèse "piston" retenue dans le modèle . .	76
3.3	Comparaison entre les champs de vitesses expérimentaux et théoriques dans la maquette sans empilement	79
3.3.1	Champs de vitesse particulaire en maquette à deux haut-parleurs actifs sans empilement	79
3.3.2	Champs de vitesse particulaire en maquette à trois haut-parleurs actifs sans empilement	80
3.4	Caractérisation de la maquette à son point de fonctionnement optimal théorique . . .	86
3.4.1	Champ de vitesse particulaire dans la cavité	86
3.4.2	Comportement thermique de la maquette à quatre haut-parleurs	90
3.5	Conclusion	96
3.5.1	Discussion	96
3.5.2	Perspectives	96
4	Régime transitoire dans un réfrigérateur thermoacoustique : évolution temporelle de la température dans l'empilement	101
4.1	Les mécanismes impliqués dans et autour de l'empilement : les équations de base pour le profil de température	102
4.2	Les solutions modales pour le profil de température	106
4.3	Résultats expérimentaux	107
4.4	Conclusion	111
	Conclusion	113
A	Paramètres de Thiele et Small	115
B	Plan du réfrigérateur à quatre sources	117
C	Les montages expérimentaux	121
D	Paramètres des mesures par V.I.P.	123

E Les équations de base et les solutions pour la différence de température entre les extrémités de l'empilement (transformée de Fourier)	125
Bibliographie	129

Introduction

La thermoacoustique est le domaine de l'acoustique qui concerne l'interaction entre les phénomènes thermiques et acoustiques au voisinage d'une paroi. L'effet thermoacoustique se traduit, en particulier, par la génération d'un flux hydrodynamique de chaleur dans la couche limite thermique, parallèlement à la surface d'une paroi, dont résulte un gradient de température le long de l'empilement. Les réfrigérateurs thermoacoustiques à ondes stationnaires exploitent cet effet dans une structure poreuse (constituant le coeur du processus thermoacoustique) disposée dans un résonateur excité à sa première fréquence de résonance par une source acoustique. Cet effet se traduit par une différence de température entre les extrémités de l'empilement. Des échangeurs de chaleur placés de part et d'autre de l'empilement de plaque permettent d'extraire la chaleur aux extrémités de l'empilement.

Durant ces vingt dernières années, les machines thermoacoustiques ont fait l'objet d'un intérêt croissant en raison des nombreuses applications envisageables et de certains de leurs avantages par rapport aux systèmes thermiques "classiques" : leur fabrication est peu onéreuse et simple, le fluide utilisé ne présente pas de danger pour l'environnement, et leur miniaturisation est envisageable.

Les bases théoriques des phénomènes thermoacoustiques ont été introduites par Rott ([53], [54], [55]), dans les années 1970. Par la suite, dans les années 1980, des prototypes de réfrigérateurs ont été réalisés et les études menées, notamment aux États-Unis, ont conduit à une description linéaire du processus thermoacoustique en régime établi (Wheatley [68], Swift [58]). Au cours des vingt dernières années, les études théoriques, numériques et expérimentales ont permis d'avoir une meilleure compréhension des phénomènes complexes qui peuvent prendre place, phénomènes liés aux effets non linéaires (courants redressés, génération d'harmoniques,...), aux effets de bords et aux discontinuités (turbulence...), etc. Depuis quelques années, la miniaturisation des réfrigérateurs thermoacoustiques, avec pour objectif l'évacuation de la chaleur des composants électroniques, ouvre la voie à des études nouvelles.

Une partie des recherches en thermoacoustique menées conjointement au Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (L.A.U.M.) et au Laboratoire de Mécanique des Fluides et d'Acoustique (L.M.F.A.) de l'Ecole Centrale de Lyon (E.C.L.), porte sur la miniaturisation des systèmes. Ces recherches ont notamment conduit à proposer récemment une nouvelle architecture de réfrigérateur, dit "compact", (ayant fait l'objet d'un dépôt de brevet [16]) qui doit permettre la réalisation d'un réfrigérateur de dimensions réduites sans réduction des performances. Parallèlement à ces recherches, des travaux concernant l'étude de phénomènes physiques tels que les effets de bords, les processus transitoires ou non linéaires qui prennent place dans les machines thermoacoustiques sont menés. En particulier, l'étude expérimentale de l'évolution transitoire de la température dans l'empilement de

plaques d'un réfrigérateur à ondes stationnaires a été réalisée au L.M.F.A. [20], bien qu'une modélisation analytique du comportement transitoire faisait encore défaut.

Le travail présenté dans ce mémoire porte, d'une part, sur l'étude analytique et expérimentale d'un réfrigérateur thermoacoustique compact et d'autre part, sur la modélisation analytique de l'évolution temporelle de la température dans l'empilement en régime transitoire. Ce travail poursuit et complète le travail expérimental et théorique débuté dans le cadre d'un sujet de thèse antérieure [35].

Dans le chapitre 1, après avoir rappelé les bases de la théorie linéaire de la thermoacoustique, les expressions analytiques classiques des quantités d'intérêt qui caractérisent le fonctionnement d'un réfrigérateur (le flux de chaleur thermoacoustique, le gradient de température et le coefficient de performance du processus), sont réécrites en dissociant les rôles joués par la pression acoustique, la vitesse particulière et la phase relative entre ces deux grandeurs, et en supposant que ces paramètres sont indépendants les uns des autres. Ainsi, différentes combinaisons de ces paramètres sont déterminées qui conduisent à des configurations optimales du champ acoustique, permettant de maximiser chacune des grandeurs thermoacoustiques d'intérêt. Cette étude permet en particulier de montrer que le champ acoustique existant dans le résonateur d'un réfrigérateur thermoacoustique à ondes stationnaires classique est proche mais différents d'un champ acoustique optimal.

Une nouvelle architecture, dite "compacte", de réfrigérateur thermoacoustique a été imaginé, qui offre l'avantage de pouvoir générer indépendamment les champs de pression acoustique et de vitesse particulière dans l'empilement à partir de quatre sources acoustiques de manière à optimiser le processus thermoacoustique [49]. Le champ acoustique dans l'empilement d'un tel réfrigérateur compact est étudié analytiquement au chapitre 2. Un modèle simple qui décrit le champ acoustique en supposant qu'il résulte de la superposition d'un champ de vitesse particulière et d'un champ de pression acoustique, créés indépendamment par chacune des paires de sources en vis-à-vis, est tout d'abord présenté. Un modèle qui décrit le champ acoustique dans l'empilement en fonction des vitesses des quatre sources puis en fonction de la tension électrique fournie aux haut-parleurs, est ensuite proposé.

Dans le chapitre 3, une maquette de réfrigérateur compact décimétrique est étudiée expérimentalement. Les champs de vitesse particulière théoriques et expérimentaux, obtenus à partir de mesures optiques, sont tout d'abord comparés pour différents points de fonctionnement. La maquette est ensuite caractérisée à son point de fonctionnement optimal : d'une part, le champ de vitesse particulière obtenu dans la maquette sans empilement est présenté et, d'autre part, des mesures de la température sont effectuées entre deux plaques de l'empilement en différents points. Les cartographies de température obtenues sont plus complexes que celles obtenues dans un système à ondes stationnaires classique, ce qui peut se traduire par des performances moindres du système ; des améliorations du système sont alors proposées.

L'objet du chapitre 4 concerne l'étude analytique du comportement en régime transitoire d'un réfrigérateur à ondes stationnaires classique. L'estimation des performances d'un tel système repose essentiellement sur la théorie linéaire en régime stationnaire de la thermoacoustique. Bien que cette théorie permettent d'éclairer largement les processus mis en jeu dans ces machines, elle recèle des limitations qui se traduisent par des désaccords entre les prédictions de la théorie linéaire et les performances expérimentales des machines. En particulier, les valeurs de la différence de température théoriques en régime établi sont surestimées par rapport à celle expérimentale [34, 20]. Cet écart est

certainement dû aux processus complexes d'échanges thermiques qui prennent place au niveau de l'empilement. Le modèle analytique présenté dans ce chapitre reste dans le cadre de la théorie linéaire et prend en compte les effets dus au flux de chaleur thermoacoustiquement induit et au flux de chaleur par conduction retour, mais aussi les effets dus aux fuites thermiques à travers les parois du résonateur et aux extrémités de l'empilement et ceux dus aux pertes visqueuses dans l'empilement. Cette étude analytique, qui s'appuie sur une étude expérimentale antérieure, effectuée au L.M.F.A. [20], permet de décrire et d'interpréter les rôles respectifs des différents phénomènes thermiques mis en jeu.

Chapitre 1

Champs acoustiques optimaux dans les réfrigérateurs thermoacoustiques

1.1 Présentation des machines thermoacoustiques

1.1.1 Historique

Les machines thermoacoustiques, comme toutes les machines thermiques cycliques, peuvent être séparées en deux catégories : les moteurs et les réfrigérateurs. Dans les moteurs thermoacoustiques, l'effet thermoacoustique se traduit par l'émission d'une onde acoustique dans un milieu où un fort gradient de température est maintenu. Au contraire, dans les réfrigérateurs thermoacoustiques, il se traduit par un flux de chaleur dont résulte un gradient de température dans un milieu où une onde acoustique est entretenue. L'émission d'une onde sonore dans un résonateur soumis à un gradient de température a initialement été observé par les souffleurs de verre. Ce phénomène a d'abord été étudié expérimentalement, par Byron Higgins [26], à la fin du 18^{ème} siècle, qui parvint à générer une onde acoustique dans un tube au moyen d'une flamme chauffant localement la paroi. Ces travaux ont ensuite été poursuivis en 1850 par Sondhaus [57] qui construisit une machine thermoacoustique appelé le tube de Sondhaus. En 1894, Lord Rayleigh fournit une explication qualitative [51] du fonctionnement du tube de Sondhaus en analysant la relation entre les oscillations de pression et de température. Cependant, ce n'est que dans les années soixante-dix qu'une analyse théorique linéaire est fournie par Rott ([53], [55]). Ces études ont abouti à la réalisation de moteurs thermoacoustiques à ondes stationnaires faisant usage de résonateurs quart d'onde ou demi-onde (Swift [59], [60] par exemple) et sur une idée de Ceperley [18], de moteurs thermoacoustiques à ondes progressives faisant usage de résonateurs annulaires (Yazaki et al. [71], Backhaus *et al.* [5], Job *et al.* [32], Penelet *et al.* [45], par exemple).

Il a fallu attendre 1975 pour que l'effet thermoacoustique inverse, c'est-à-dire le pompage de chaleur par une onde acoustique, soit observé par Merkli et Thomann [40] qui relèvent une diminution de la température des parois d'un résonateur acoustique aux niveaux des ventres de vitesses d'une onde stationnaire entretenue dans ce résonateur. En 1983, le premier réfrigérateur thermoacoustique, constitué d'un résonateur demi-onde excité par un haut-parleur électrodynamique à l'intérieur duquel

est placé un empilement de plaques parallèles est construit par Wheatley et al [68]. La théorie linéaire due à Rott ([53], [55]), est reprise par Swift[58] pour des amplitudes acoustiques faibles et une géométrie régulière de plaques. Par la suite, de nombreuses maquettes de réfrigérateurs, principalement à ondes stationnaires, ont vu le jour, comme par exemple celles de Høfler [28, 29], Garrett [21], Tijani [65, 64]... Des prototypes de réfrigérateurs couplés à un moteur thermoacoustique ont été réalisés (par exemple, le "beer-cooler" de Swift [58]), le moteur servant de source acoustique pour le réfrigérateur. Ce système réfrigérant prend l'énergie nécessaire à son fonctionnement à une source de chaleur.

Les réfrigérateurs thermoacoustiques présentent certains avantages sur les autres types de réfrigérateurs :

- leur fabrication est simple et ils fonctionnent sans partie mécanique mobile, ce qui les rendent fiables et robustes,
- ils sont écologiques puisqu'ils utilisent des gaz rares (comme l'hélium, l'argon, le néon...) qui sont non toxiques et ne dégradent pas l'environnement,
- un système couplé réfrigérateur-moteur peut fonctionner à partir d'énergie calorifique de récupération [33] (énergie autrement perdue) ou de l'énergie solaire [1, 2, 19],
- leur extrême miniaturisation est possible, en vue d'applications pour le refroidissement en microélectronique.

Ces qualités les rendent susceptibles d'applications dans des domaines très larges, notamment ceux de la réfrigération domestique, de la climatisation, de l'évacuation de la chaleur des composants électroniques... Aujourd'hui, de nombreuses études théoriques, expérimentales et numériques sont menées en vue de l'optimisation de l'efficacité des réfrigérateurs.

1.1.2 Principe physique de l'effet thermoacoustique

Le processus thermoacoustique trouve son origine dans l'interaction entre les ondes thermiques dans un fluide soumis à une onde acoustique et un matériau solide. Le matériau solide présentant une capacité calorifique et une conductivité thermique beaucoup plus élevées que celle du fluide, il impose sa température aux particules de fluide en contact direct avec lui et, par diffusion, perturbe les oscillations thermiques d'origine acoustique en son voisinage dans la couche limite thermique. Ainsi, au niveau de la paroi, le processus acoustique est isotherme, et la température du fluide est imposée à chaque instant par la température locale de la paroi. Au contraire, "loin" de la paroi, le processus thermoacoustique est adiabatique, la température acoustique évolue alors en phase avec la pression acoustique. Par suite, il existe une zone intermédiaire à l'intérieur de la couche limite thermique où les phénomènes sont polytropiques. Il existe un déphasage entre la pression et la température acoustique qui est en partie responsable du processus thermoacoustique.

Le transport de chaleur par les particules et le travail acoustique entrant en jeu dans le processus thermoacoustique sont présentés de façon schématisée sur la figure 1.1.b, en considérant une particule de fluide située au voisinage de la paroi. L'état de la particule fluctue sous l'effet du champ acoustique stationnaire sinusoïdal. Ainsi, au mouvement sinusoïdale de la particule sont associées des oscillations de la pression acoustique p et de la température τ en phase avec le déplacement particulaire ξ . Pour simplifier ici l'interprétation, le mouvement de la particule est considéré à profil angulaire (fig.

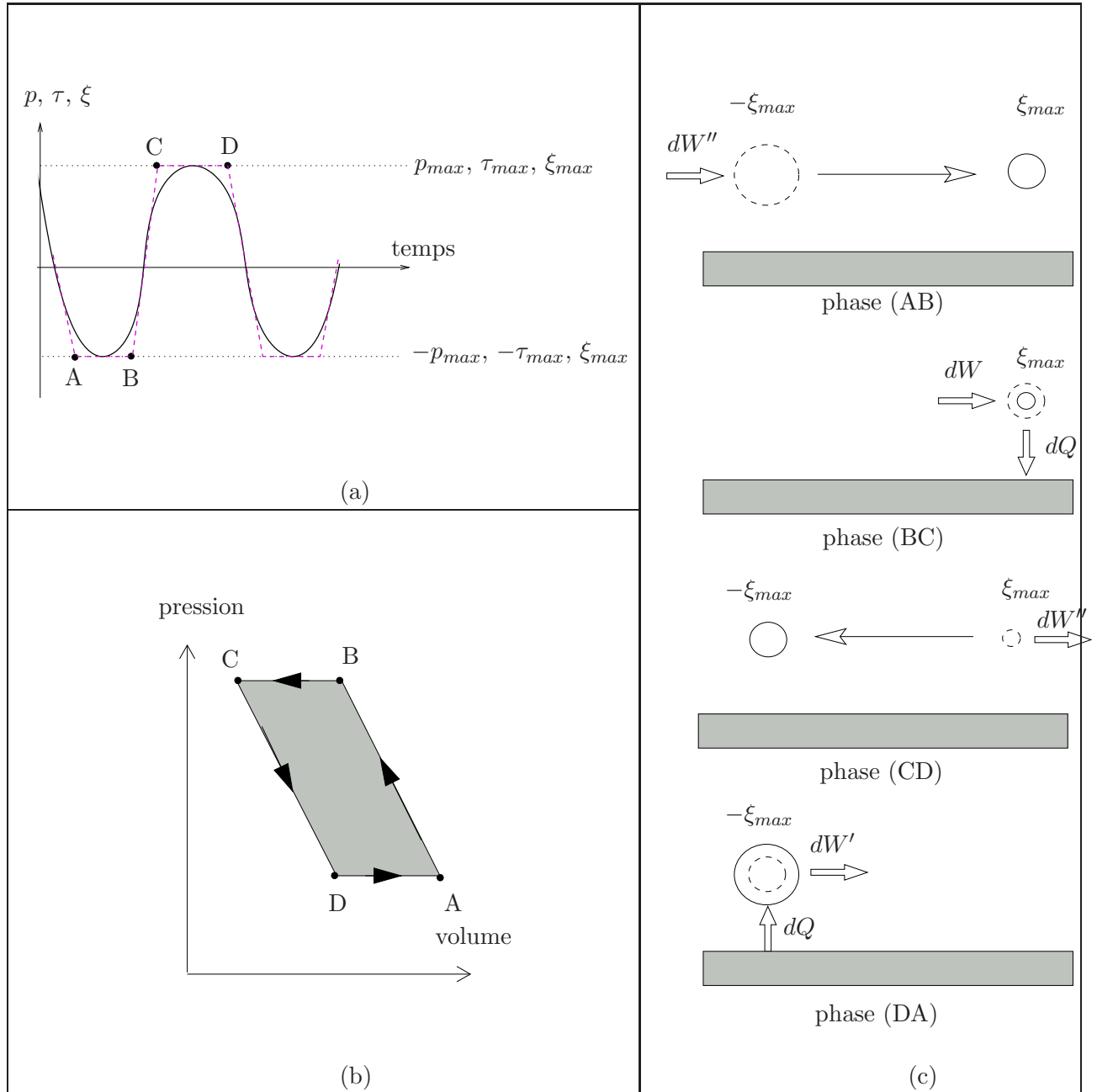


FIG. 1.1 – (a) Évolutions temporelles sinusoïdales (trait plein) et à profil angulaire (pointillés) de la pression p , de la température τ et du déplacement ξ acoustique pour une onde acoustique stationnaire. (b) Cycle du phénomène thermoacoustique. Les cercles en pointillés représentent les états initiaux des particules tandis que les cercles en traits pleins représentent les états finaux des particules lors des quatre phases du cycle. (c) Représentation du cycle thermoacoustique dans le cycle de Clapeyron.

1.1.a). Le cycle suivi par la particule se déroule suivant quatre phases thermodynamiques (fig. 1.1.b) : deux transformations adiabatiques réversibles (phases (AB) et (CD)) et deux transformations isobares irréversibles (phases (BC) et (DA)) (cycle de Brayton).

- Durant la phase (AB), la particule se déplace de la position $-\xi_{max}$ à la position ξ_{max} en subissant

une compression adiabatique. Par suite, sa température augmente conformément à la loi de Le Châtelier à savoir $\Delta T = \frac{P_0 T_0 \beta \chi_T}{\rho_0 C_p} \Delta P$.

- Au cours de la phase (BC), la particule est supposée pratiquement à l'arrêt en (ξ_{max}) et sa température est supérieure à celle de la partie de la plaque la plus proche. Un transfert de chaleur s'établit de la particule vers la plaque jusqu'à égalisation de leurs températures.

- Lors de la phase (CD), la particule se déplace de la position ξ_{max} à la position $-\xi_{max}$ et subit une détente adiabatique, de sorte que sa température s'abaisse.

- Enfin, lors de la phase (DA), la particule est supposée à l'arrêt approximativement en $-\xi_{max}$ et sa température est inférieure à celle de la partie de la plaque la plus proche. Un flux de chaleur s'établit alors de la plaque vers la particule : la particule absorbe de la chaleur à cet endroit de la plaque et retourne à son état initial.

Au cours d'un cycle acoustique, la particule a reçue une quantité de chaleur dQ durant sa phase de détente et a restitué une quantité de chaleur dQ durant sa phase de compression. Ainsi, la quantité de chaleur dQ a été transporté d'un endroit à un autre par la particule autour de sa position d'équilibre. Cette quantité de chaleur dQ cédée par la particule durant la phase (BC) est pompée par sa voisine (de droite sur la figure 1.1.b) une demie période plus tard pendant la phase (DA) du cycle de celle-ci. La plaque sert donc à emmagasiner temporairement de la chaleur. De proche en proche, une quantité de chaleur est transférée le long de la plaque et un gradient de température s'établit dans la plaque et dans le fluide. Ce gradient a deux conséquences :

- i. un transfert de chaleur dû à la conduction thermique apparaît dans la plaque mais aussi dans le fluide dans le sens opposé au transfert thermoacoustique de chaleur. Ce flux de chaleur retour est un des phénomènes limitant le processus thermoacoustique ;

- ii. l'augmentation du gradient moyen de température a pour effet de diminuer l'écart entre la température locale de la plaque et la température instantanée du fluide ce qui entraîne un affaiblissement des échanges thermiques entre la plaque et le fluide. Il existe une valeur critique $(\partial_x T)_{crit}$, pour laquelle la température de la particule de fluide est égale à celle de la paroi en tout point de son parcours (phases (AB) et (CD)), de sorte qu'il n'y a plus de transfert de chaleur entre le solide et le fluide.

Au cours d'un cycle acoustique, la particule absorbe un travail $dW - dW'$ puisque le travail dW reçu par la particule au cours des phases (AB) et (BC) n'est restitué qu'en partie (dW') au cours des phases (CD) et (DA), comme l'indique la représentation du cycle dans le diagramme de Clapeyron (1.1.c), du fait que la particule utilise une partie de cette énergie pour assurer le transfert de chaleur avec la paroi. Le travail absorbé est fourni par l'onde acoustique. Ce mode de fonctionnement est celui d'un réfrigérateur thermoacoustique.

A noter que si le gradient de température moyen est maintenu à une valeur supérieure au gradient critique, le sens des transferts de chaleur et le sens du cycle de la figure 1.1.c sont inversés. Un flux de chaleur s'écoule donc de la source chaude vers la source froide et le travail restitué par une particule de fluide est supérieur au travail qui lui a été fourni : une partie de la chaleur reçue de la source chaude est convertie en travail mécanique (i.e. en énergie acoustique) et l'autre partie est restituée à la source froide. Ce mode de fonctionnement est celui d'un moteur thermoacoustique.

1.1.3 Réfrigérateurs thermoacoustiques classiques

Les réfrigérateurs thermoacoustiques classiques (fig. 1.2) à ondes stationnaires sont constitués dans leur version la plus simple d'un résonateur rempli d'un fluide dans lequel est positionné un empilement de plaques (ou un matériau poreux équivalent) aux extrémités duquel sont positionnés des échangeurs de chaleurs. Le fluide est soumis à une onde acoustique générée par une source acoustique. Les ondes acoustiques dans l'empilement de plaques induisent des interactions thermiques entre le gaz et les plaques (dont le principe physique est rappelé au paragraphe 1.1.2) qui engendrent un flux de chaleur hydrodynamique, dont la valeur moyenne sur une période est notée $\overline{Q_{th}}$, le long des plaques. Ce flux de chaleur conduit à un gradient de température le long de l'empilement, noté $\frac{\partial T_0}{\partial x}$. L'efficacité du processus thermoacoustique est donnée par le coefficient de performance COP défini par

$$COP = \frac{\overline{Q_f}}{\overline{W}} < \frac{T_f}{T_c - T_f}, \quad (1.1)$$

où $\overline{W}$ représente la puissance acoustique fournie en moyenne sur une période par la source acoustique et où $\overline{Q_f}$ est le flux de chaleur extrait de l'échangeur froid en moyenne sur une période acoustique, donné par

$$\overline{Q_f} = \overline{Q_{th}} - \overline{Q_{cond}}, \quad (1.2)$$

$\overline{Q_{cond}}$ étant le flux de chaleur dû à la conduction thermique dans le fluide mais aussi dans les plaques de l'empilement.

Les réfrigérateurs thermoacoustiques sont généralement des systèmes à ondes stationnaires. La fréquence de fonctionnement est alors la fréquence de résonance du système couplé résonateur-source, qui est proche de la fréquence de résonance d'un résonateur quart d'onde ou demi-onde [7]. Ainsi, le champ acoustique est fixé par les conditions de résonance : l'amplitude de la vitesse particulaire dépend du niveau sonore dans la cavité et la phase relative entre la vitesse et la pression est fixée.

Le taux d'ondes stationnaires dans ce type de réfrigérateurs est cependant différent de 1 principalement à cause des pertes thermo-visqueuses sur les parois du résonateur et dans l'empilement. Plusieurs travaux traitent de l'influence du taux d'ondes stationnaires sur le processus thermoacoustique. Ainsi, selon une idée de Ceperley [18], une onde progressive peut être utilisée pour le processus thermoacoustique. L'intérêt d'utiliser une machine à ondes progressives (dans laquelle la vitesse acoustique et la pression particulaire sont en phase) réside dans le fait qu'elle peut utiliser un processus réversible de transfert de chaleur et par la même avoir un rendement plus important qu'une machine à ondes stationnaires. En 1990, Hofler [27] remarque que l'efficacité d'un réfrigérateur à ondes stationnaires est plus importante lorsqu'une composante progressive significative est générée dans le résonateur. Raspert et al. [50] s'intéresse à l'efficacité d'un réfrigérateur en fonction de l'inverse du taux d'ondes stationnaires et arrivent aux mêmes conclusions que Hofler. Backhaus et Swift [5] conçoivent un système "hybride" constitué d'un moteur annulaire à ondes progressives couplé à un résonateur, l'objectif étant d'augmenter le niveau de pression acoustique en réduisant l'amplitude de la vitesse acoustique afin de réduire les pertes dues à la dissipation visqueuse. Ainsi, le rendement de la machine est augmenté et peut atteindre 41 % de celui de Carnot en conservant la puissance acoustique qu'elle est capable de délivrer. Plus récemment, Petculescu et Wilen [46] ont étudié un système à ondes progressives constitué d'un tube résonant alimenté par deux haut-parleurs à ses extrémités dans lequel le taux d'ondes

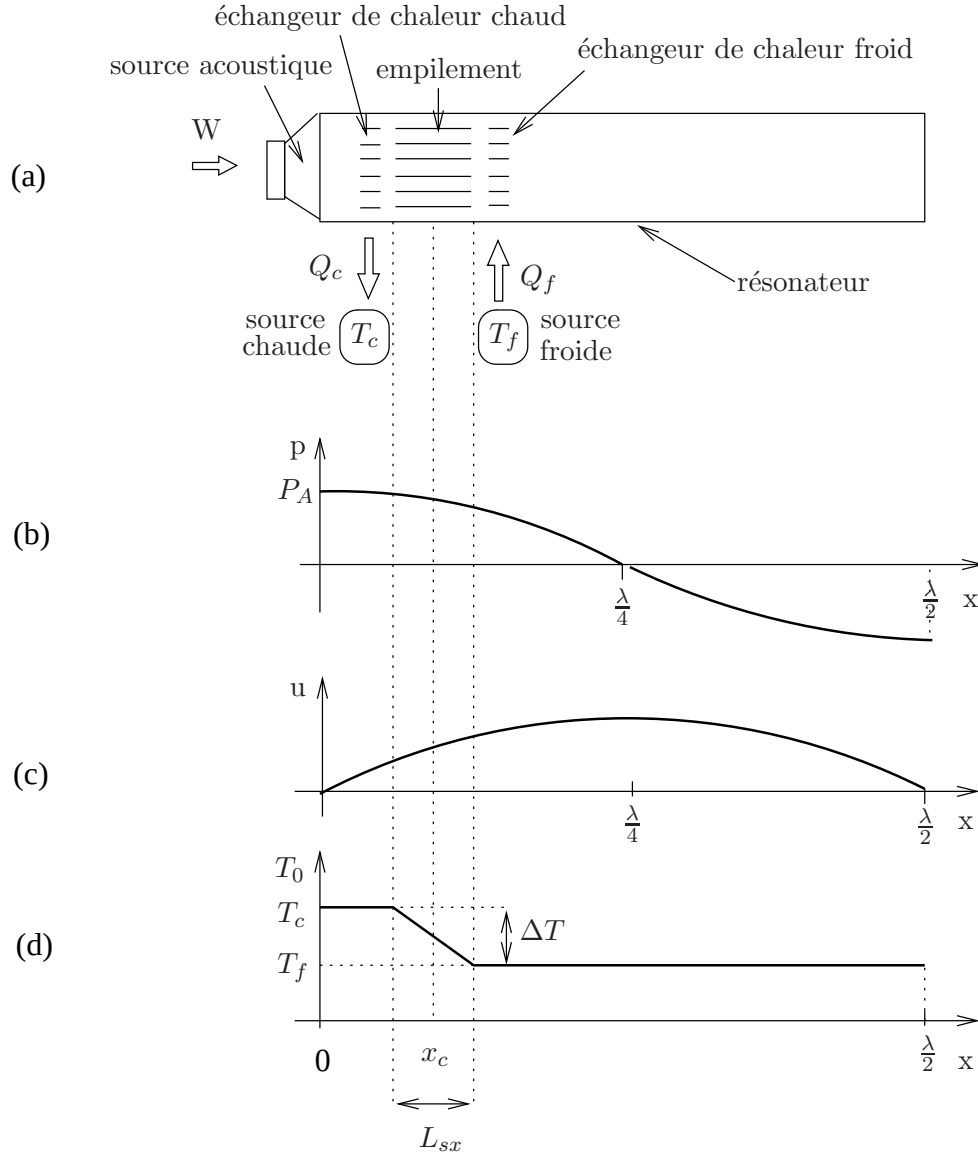


FIG. 1.2 – (a) Schéma d'un réfrigérateur thermoacoustique. Une source acoustique de puissance W entretient une onde stationnaire dans un résonateur (de longueur $L = \frac{\lambda}{2}$) muni d'un empilement de plaques (dont la coordonnée du centre est x_c) aux extrémités duquel se trouvent des échangeurs de chaleur. Par effet thermoacoustique, une différence de température ΔT apparaît aux extrémités de l'empilement de longueur L_{sx} . Les températures T_c et T_f sont celles des échangeurs de chaleur chaud et froid respectivement et Q_c et Q_f sont les quantités de chaleur échangées entre le fluide et les échangeurs de chaleurs chaud et froid. (b) Profil de la pression acoustique, (c) profil de la vitesse particulaire et (d) profil de la température moyenne dans le fluide selon l'axe du résonateur.

stationnaires peut être contrôlé. Toutes les machines conçues dans le cadre de ces études fonctionnent avec un taux d'ondes stationnaires plus ou moins contrôlé dans le but d'atteindre un optimum de fonctionnement, mais cet optimum n'est pas clairement défini dans la littérature.

En fait, selon l'application visée, l'une des trois quantités d'intérêt ($\overline{Q_{th}}$, $\frac{\partial T_0}{\partial x}$ ou COP) qui caractérisent le fonctionnement d'un réfrigérateur thermoacoustique doit être privilégiée. Les expressions analytiques de ces grandeurs sont disponibles dans la littérature, généralement dans le cas d'un fluide soumis à une onde stationnaire quasi-plane. Au terme des calculs analytiques présentés, ces expressions font apparaître comme variable la pression acoustique mais ne font plus intervenir ni l'amplitude de la vitesse particulaire, ni la phase entre la pression acoustique et la vitesse particulaire, ces deux grandeurs étant automatiquement fixées dès lors qu'un fonctionnement en ondes stationnaires est choisi.

Les expressions analytiques des quantités d'intérêt peuvent, telles qu'elles sont écrites dans une étape intermédiaire des calculs dans la littérature, être exprimées fonction de la pression acoustique, de la vitesse particulaire et de leur phase relative, considérées comme trois variables indépendantes, afin de déterminer les caractéristiques du champ acoustique optimal pour une application donnée. Cette étude présentée au paragraphe 1.2 poursuit et complète les travaux de Lihoreau et al. [35]. Dans un premier temps, les bases de la théorie linéaire de la thermoacoustique sont rappelées. Cette théorie, synthétisée par Swift [58] sur la base des travaux de Rott [55], décrit les grandeurs acoustiques dans l'empilement d'un réfrigérateur thermoacoustique. Après avoir présenté le système étudié ainsi que les hypothèses simplificatrices de la théorie linéaire, les équations fondamentales du processus thermoacoustique qui correspondent aux trois équations de base de la mécanique des fluides linéarisées et les conditions aux limites associées sont données au paragraphe 1.2.1. Le problème ainsi posé permet d'exprimer, dans un second temps, les grandeurs utiles pour décrire le comportement d'un réfrigérateur thermoacoustique, telles que le flux de chaleur thermoacoustique, le gradient de température et le coefficient de performance du processus. Ces expressions, classiques dans la littérature, sont réécrites ici en dissociant les rôles joués par la pression acoustique p , la vitesse particulaire u et la phase relative θ_{u-p} entre ces deux grandeurs, et en supposant que ces paramètres sont indépendants les uns des autres (§ 1.2.2). Ainsi, différentes combinaisons des paramètres p , u et θ_{u-p} sont déterminées qui permettent de maximiser les grandeurs thermoacoustiques d'intérêt (§ 1.2.3). Ces configurations du champ acoustique sont différentes de celles existant dans un résonateur demi-onde classique. C'est l'objet de la dernière partie que de comparer les performances obtenues dans le cas d'un champ acoustique optimal à celles d'un réfrigérateur à résonateur classique.

1.2 Champs acoustiques optimaux pour le processus thermoacoustique

1.2.1 Onde quasi-plane en fluide visqueux entre deux plaques

1.2.1.1 Système étudié et hypothèses simplificatrices retenues

La théorie linéaire classique du processus thermoacoustique est basée sur la description du comportement d'un fluide thermovisqueux compris entre deux plaques rigides parallèles et soumis à

une onde quasi-plane acoustique. Les deux plaques considérées font partie de l'empilement de plaques qui constitue le noyau thermoacoustique, et sont représentées sur la figure 1.3. Elles ont une épaisseur notée $2e_s$, une largeur L_{sy} , une longueur L_{sx} et sont espacées de $2h$. L'onde quasi-plane se propage suivant l'axe x donné sur la figure 1.3. Les variables acoustiques et thermodynamiques en usage pour

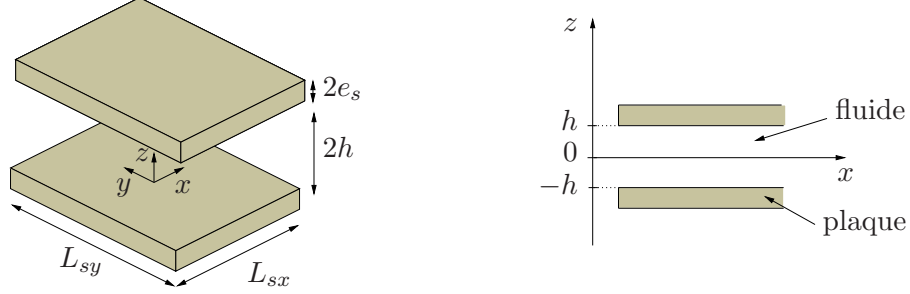


FIG. 1.3 – Vue de deux plaques de l'empilement. Les plaques ont une longueur L_{sx} suivant la direction x , une largeur L_{sy} suivant la direction y , une épaisseur $2e_s$ et sont espacées de $2h$.

la description du comportement du système sont la pression P , la vitesse particulaire $\vec{u}$, la masse volumique ρ , la température T , l'entropie massique S et la température du solide T_s . Dans le cadre d'une description linéaire, ces variables sont écrites sous la forme suivante, la dépendance temporelle étant par convention choisie en $e^{i\omega t}$,

$$P(x, y, z, t) = P_0 + p(x, y, z)e^{i\omega t}, \quad (1.3)$$

$$\vec{u}(x, y, z, t) = \vec{U}_0 + u_x(x, y, z)e^{i\omega t}\vec{e}_x + u_y(x, y, z)e^{i\omega t}\vec{e}_y + u_z(x, y, z)e^{i\omega t}\vec{e}_z, \quad (1.4)$$

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0 + \rho'(x, y, z)e^{i\omega t}, \quad (1.5)$$

$$T(x, y, z, t) = T_0 + \tau(x, y, z)e^{i\omega t}, \quad (1.6)$$

$$S(x, y, z, t) = S_0 + s(x, y, z)e^{i\omega t}, \quad (1.7)$$

$$T_s(x, y, z, t) = T_{0s} + \tau_s(x, y, z)e^{i\omega t}, \quad (1.8)$$

où les termes d'ordre 0, P_0 , $\vec{U}_0$, ρ_0 , T_0 , S_0 , T_{0s} sont constants dans le temps à l'échelle d'une période acoustique et les termes d'ordre 1, p , u , ρ' , τ , s , τ_s (facteur de $e^{i\omega t}$), en général complexes, sont de nature acoustique oscillant à la pulsation ω .

Les hypothèses simplificatrices admises et leurs conséquences sur l'expression des variables sont énoncées ci-dessous.

- Une onde sinusoïdale de fréquence $f = \omega/2\pi$ à caractère quasi plan est entretenue dans le fluide.
- La largeur des plaques L_{sy} est suffisamment grande pour que les effets de bord en $y = -\frac{L_{sy}}{2}$ et en $y = \frac{L_{sy}}{2}$ soient négligeables.
- Le domaine d'étude ne contient pas les sources extérieures de débit, de force et de chaleur.
- Les plaques sont supposées parfaitement rigides et à conduction thermique et capacité calorifique élevées en regard de celles du fluide. Ces hypothèses impliquent une vitesse particulaire nulle, une variation de température du fluide nulle au niveau de toute paroi et une variation de température nulle dans le solide (il n'est alors pas nécessaire de résoudre l'équation de Fourier dans le solide). Ces paramètres physiques présentent donc des variations importantes en fonction de la coordonnée z entre

chaque plaque.

- La vitesse d'entraînement des particules $\vec{U}_0$ est nulle.
- Le mouvement particulaire est laminaire.
- La différence de température entre les deux extrémités des plaques est suffisamment petite pour que les propriétés thermophysiques du fluide et des plaques soient supposées indépendantes de x .
- La température moyenne dans le fluide est égale à celle des plaques et est indépendante de y et de z ; ainsi $T_s(x, z) = T_{0s}(x) = T_0(x)$.
- L'hypothèse d'onde quasi plane est admise. Ainsi, dans l'équation de Navier-Stokes et l'équation de diffusion de la chaleur, la composante suivant z de la vitesse particulaire est supposée beaucoup plus petite que celle suivant x et les variations spatiales suivant z de la composante v_x de la vitesse particulaire et de l'écart instantané de température τ sont supposées beaucoup plus grandes que leurs variations suivant x .

Compte tenu des hypothèses précédentes, les variables retenues pour décrire le système s'écrivent

$$P(x, z, t) = P_0 + p(x, z)e^{i\omega t}, \quad (1.9)$$

$$\vec{u}(x, z, t) = u_x(x, z)e^{i\omega t}\vec{e}_x + u_z(x, z)e^{i\omega t}\vec{e}_z, \quad (1.10)$$

$$\rho(x, z, t) = \rho_0(x) + \rho'(x, z)e^{i\omega t}, \quad (1.11)$$

$$T(x, z, t) = T_0(x) + \tau(x, z)e^{i\omega t}, \quad (1.12)$$

$$S(x, z, t) = S_0(x) + s(x, z)e^{i\omega t}, \quad (1.13)$$

$$T_s(x, y, z, t) = T_0(x). \quad (1.14)$$

1.2.1.2 Équations fondamentales et conditions aux limites

Les équations fondamentales décrivant le mouvement acoustique dans l'empilement sont les trois équations de base de la mécanique des fluides linéaire.

i. L'équation de Navier-Stokes

L'équation de Navier-Stokes, qui relie entre-elles la vitesse particulaire u et la pression acoustique p , s'écrit

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p + \mu(\vec{\nabla})^2 \vec{u} + \left(\eta + \frac{\mu}{3}\right)\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}), \quad (1.15)$$

où μ et η désignent les coefficients de viscosité de cisaillement et de volume respectivement.

En première approximation, pour un mouvement harmonique, chacune des composantes de la vitesse particulaire fluctue en $e^{i(\omega t - k_x x)}$ suivant x (où k_x est le nombre d'onde acoustique), et en $e^{i(\omega t - (1+i)\frac{h \pm z}{\delta_v})}$ suivant z [53], où

$$\delta_v = \sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0 \omega}} \quad (1.16)$$

représente l'épaisseur des couches limites visqueuses. Les dérivées vérifient donc $\frac{\partial \vec{u}}{\partial x} \propto k_x$ et $\frac{\partial \vec{u}}{\partial z} \propto \frac{1}{\delta_v}$. Ainsi, puisque $\frac{1}{\delta_v} \gg k_x$ et que u_z est négligé ($u_z \ll u_x$), une analyse en ordre de grandeur classique de l'équation de Navier-Stokes [58] conduit à l'équation suivante (loi de Poiseuille) :

$$i\omega \rho_0 u_x - \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.17)$$

qui s'écrit aussi sous la forme

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + k_v^2 u_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.18)$$

avec $k_v = \sqrt{-\frac{i\omega\rho_0}{\mu}} = \sqrt{\frac{-2i}{\delta_v^2}} = \frac{-1+i}{\delta_v}$. Ce choix est pris pour que les ondes de diffusion visqueuse et thermique correspondent à des ondes qui diffusent dans le sens des z décroissants.

ii. L'équation de conservation de la masse

L'équation de conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_0 \vec{u}) = 0. \quad (1.19)$$

L'expression de la masse volumique en fonction des deux variables retenues ici : la température et la pression, donne à l'ordre 0 et à l'ordre 1

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial x} = -\rho_0 \alpha \frac{\partial T_0}{\partial x}, \quad \rho' = -\rho_0 \alpha \tau + \rho_0 \chi_t p, \quad (1.20)$$

où χ_t est le coefficient de compressibilité isotherme, α le coefficient de dilatation thermique à pression constante, conduit à la forme suivante pour la conservation de la masse

$$-i\omega\alpha\tau + i\omega\chi_t p - \alpha u_x \frac{\partial T_0}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

ou encore

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = i\omega\alpha\tau - i\omega\chi_t p + \alpha u_x \frac{\partial T_0}{\partial x} - \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (1.21)$$

iii. L'équation de diffusion de la chaleur dans le fluide

L'équation de propagation de la chaleur dans le fluide s'écrit

$$\rho_0 T_0 \frac{ds}{dt} = K \Delta \tau, \quad (1.22)$$

où K est la conductivité thermique du fluide.

L'expression de l'écart instantané d'entropie en fonction des variables τ et p retenues, s'écrit à l'ordre 0 $dS_0 = \frac{C_p}{T_0} dT_0$, ou encore

$$\frac{\partial S_0}{\partial x} = \frac{C_p}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x}, \quad (1.23)$$

et à l'ordre 1

$$s = \frac{C_p}{T_0} \tau - \frac{\alpha}{\rho_0} p, \quad (1.24)$$

où C_p est la capacité calorifique massique du fluide à pression constante.

L'équation de diffusion de la chaleur dans le fluide devient, en faisant usage des relations (1.23) et (1.24),

$$\rho_0 T_0 \left[i\omega \frac{C_p}{T_0} \tau - i\omega \frac{\alpha}{\rho_0} p + u_x \frac{C_p}{T_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} \right] = K \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}, \quad (1.25)$$

soit

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2} + k_h^2 \tau = \frac{-T_0 \alpha i\omega}{K} p + \frac{u_x \rho_0 C_p}{K} \frac{\partial T_0}{\partial x}, \quad (1.26)$$

avec $k_h = \sqrt{\frac{-i\omega\rho_0 C_p}{K}} = \frac{-1+i}{\delta_h}$ où

$$\delta_h = \sqrt{\frac{2K}{\rho_0 C_p \omega}} \quad (1.27)$$

représente l'épaisseur de couche limite thermique dans le fluide.

Ainsi, le problème posé comporte les équations fondamentales (1.18), (1.21) et (1.26) système d'équations auquel il faut joindre les conditions aux frontières fluide/paroi en $z = \pm h$ qui portent sur :

- la température, $T(x, \pm h) = T_s(x, \pm h)$ soit $\tau(\pm h) = 0$ puisque $\tau_s = 0$,
- la vitesse particulaire tangentielle, $u_x(x, \pm h) = 0$,
- la vitesse particulaire normale, $u_z(x, \pm h) = 0$.

L'ensemble des trois équations (1.18), (1.21) et (1.26) associé aux conditions aux frontières permet de connaître, dans un premier temps, les expressions de la vitesse particulaire u_x et de l'écart de température τ en fonction de la pression p et de sa dérivée par rapport à x et dans un second temps, les expressions des quantités thermoacoustiques d'intérêt.

1.2.1.3 Vitesse particulaire

La composante u_x de la vitesse particulaire, qui est solution de l'équation de Navier-Stokes (1.18) et qui vérifie la condition à l'interface entre le fluide et la paroi qui porte sur la vitesse particulaire tangentielle à la paroi, s'écrit

$$u_x(x, z) = \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p(x, z)}{\partial x} \left(1 - \frac{\cosh[(1+i)z/\delta_v]}{\cosh[(1+i)h/\delta_v]} \right). \quad (1.28)$$

Le profil de la vitesse particulaire entre deux plaques décrit par l'équation (1.28) a fait l'objet de vérifications expérimentales par les techniques de vélocimétrie par images de particules [12, 13, 14, 20], et de vélocimétrie laser Doppler [67, 41] et de vérifications numériques [37] confirmant les résultats de la théorie linéaire.

1.2.1.4 Écart de température

L'écart de température instantanée τ , qui est solution de l'équation de diffusion de la chaleur (1.26) et qui vérifie la condition à l'interface fluide/paroi pour la température s'écrit [58]

$$\begin{aligned} \tau(x, z) = \frac{T_0 \alpha}{\rho_0 C_p} p(x, z) & - \frac{1}{\rho_0 \omega^2} \left[1 - \frac{\sigma \cosh[(1+i)z/\delta_h]}{(\sigma-1) \cosh[(1+i)h/\delta_h]} \right] \frac{\partial p(x, z)}{\partial x} \frac{\partial T_0}{\partial x} \\ & - \left[\frac{T_0 \alpha}{\rho_0 C_p} p(x, z) + \frac{\partial p(x, z)}{\partial x} \frac{\partial T_0}{\partial x} \frac{1}{\rho_0 \omega^2 (\sigma-1)} \right] \frac{\cosh[(1+i)z/\delta_h]}{\cosh[(1+i)h/\delta_h]}, \end{aligned} \quad (1.29)$$

où

$$\sigma = \left(\frac{\delta_v}{\delta_h} \right)^2 = \frac{C_p \mu}{K} \quad (1.30)$$

est le nombre de Prandtl.

Bailly et Thierry [9] ont mesuré l'évolution temporelle des fluctuations de température d'une onde acoustique stationnaire dans un tube grâce à une micro-jonction thermoélectrique. Une méthode de mesure par fil froid de l'amplitude de l'écart instantané de température et de sa phase relative par

rapport à la pression acoustique dans les couches limites a également été développée par [11, 30, 31]. Les résultats obtenus présentent un bon accord avec la théorie linéaire classique pour un niveau sonore inférieur à 200 Pa . Cependant, une étude numérique ne conservant pas les hypothèses simplificatrices de la théorie linéaire généralement admises a montré que l'écart instantané de température subit une déformation non linéaire à fort nombre de Mach acoustique [37].

1.2.2 Expressions des quantités thermoacoustiques d'intérêt en fonction de la vitesse particulaire, de la pression acoustique et de leur phase relative

Afin d'exprimer les quantités thermoacoustiques d'intérêt en fonction de la pression acoustique, de la vitesse particulaire et de leur phase relative, les expressions (1.28) et (1.29) sont de nouveau écrites de manière à faire apparaître ces variables. L'expression (1.28) de la composante suivant x de la vitesse particulaire entre deux plaques de l'empilement est exprimée sous la forme

$$u_x(x, z) = \frac{u}{(1 - f_v)} \left(1 - \frac{\cosh[(1 + i)z/\delta_v]}{\cosh[(1 + i)h/\delta_v]} \right), \quad (1.31)$$

où

$$f_v = \frac{\tanh[(1 + i)h/\delta_v]}{(1 + i)h/\delta_v} \quad (1.32)$$

est une fonction qui prend en compte les effets de viscosité sur la vitesse particulaire et où

$$u = \frac{1}{h} \int_0^h u_x(x, z) dz = (1 - f_v) \frac{i}{\rho_0 \omega} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1.33)$$

est la valeur moyenne de la vitesse acoustique sur l'épaisseur de la couche de fluide comprise entre deux plaques.

Afin d'introduire la phase relative θ_{u-p} entre la vitesse particulaire et la pression acoustique,

$$\theta_{u-p} = \theta_u - \theta_p, \quad (1.34)$$

la vitesse particulaire moyenne est écrite

$$u = |u| e^{i\theta_{u-p}}, \quad (1.35)$$

et la pression p est considérée comme une fonction réelle et positive.

Par ailleurs, en faisant usage de la relation (1.33) sous la forme $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{i\rho_0\omega u}{1-f_v}$, l'expression (1.29) de l'écart de température instantanée τ entre deux plaques de l'empilement est écrite [58] :

$$\begin{aligned} \tau(z) = & \frac{T_0\alpha}{\rho_0 C_p} p \left[1 - \frac{\cosh[(1 + i)z/\delta_h]}{\cosh[(1 + i)h/\delta_h]} \right] \\ & + i \frac{u}{(1 - f_v)\omega} \frac{\partial T_0}{\partial x} \left[1 - \frac{\sigma \cosh[(1 + i)z/\delta_v]}{(\sigma - 1)\cosh[(1 + i)h/\delta_v]} + \frac{\cosh[(1 + i)z/\delta_h]}{(\sigma - 1)\cosh[(1 + i)h/\delta_h]} \right]. \end{aligned} \quad (1.36)$$

1.2.2.1 Expression du flux de chaleur thermoacoustique

Le flux de chaleur instantané q_{th} qui traverse l'unité de surface par unité de temps dans la direction x s'écrit [58]

$$q_{th} = \rho_0 T_0 s u_x \quad (1.37)$$

et l'expression de sa valeur moyenne sur une période est donnée par

$$\overline{q_{th}} = \frac{1}{2} \rho_0 T_0 \Re(su_x^*), \quad (1.38)$$

où $\Re()$ est la partie réelle de l'expression entre parenthèses et où la notation $*$ représente le complexe conjugué. Le report dans cette relation de l'expression (1.24) de l'entropie massique donne

$$\overline{q_{th}} = \frac{1}{2} \rho_0 C_p \Re(\tau u_x^*) - \frac{1}{2} T_0 \alpha \Re(p u_x^*). \quad (1.39)$$

Dans le cadre de la théorie linéaire classique, où le champ acoustique est considéré comme étant stationnaire (la pression acoustique p et la vitesse particulaire u_x sont en quadrature de phase), le second terme du second membre de la relation (1.39) s'annule. Cette hypothèse simplificatrice n'est pas retenue ici.

Le flux total de chaleur $\overline{Q_{th}}$ en moyenne sur une période dans la direction x entre deux plaques de l'empilement,

$$\overline{Q_{th}} = 2 \int_0^{L_{sy}} \int_0^h \overline{q_{th}} dy dz, \quad (1.40)$$

peut s'écrire, en faisant usage des expressions (1.33) de la vitesse moyennée sur l'épaisseur d'une couche de fluide et (1.36) de l'écart instantané de température, et en négligeant dans l'intégrale les variations de p et de τ suivant z [22]

$$\overline{Q_{th}} = \frac{L_{sy} h T_0 \alpha}{(1 + \sigma)} \Re \left[p u^* \frac{f_v^* - f_h}{(1 - f_v^*)} \right] + \frac{L_{sy} h}{(1 - \sigma^2)} \frac{C_p \rho_0}{\omega} |u|^2 \Im \left[\frac{f_h + \sigma f_v^*}{(1 - f_v)(1 - f_v^*)} \right] \frac{\partial T_0}{\partial x}, \quad (1.41)$$

où $\Im()$ représente la partie imaginaire de l'expression entre parenthèses.

Dans cette relation, la fonction

$$f_h = \frac{\tanh[(1 + i)h/\delta_h]}{(1 + i)h/\delta_h}, \quad (1.42)$$

qui prend en compte les effets de dissipation thermique, peut être écrite sous la forme $f_h \approx \frac{\delta_h}{2h}(1 - i)$ en faisant usage de l'approximation dite de "couche limite", valide lorsque l'épaisseur h d'une couche de fluide est supérieure ou égale à deux épaisseurs de couche limite thermique, $h \geq 2\delta_h$, qui permet alors d'écrire $\tanh[(1 + i)\frac{h}{\delta_h}] \approx 1$ [58]. Ainsi, la relation (1.41) devient

$$\begin{aligned} \overline{Q_{th}} &= \frac{\delta_h L_{sy}}{2(1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2})} \left[\frac{T_0 \alpha}{(1 + \sigma)} \Re \left(p u^* \left[(-1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h} \sqrt{\sigma}) + i(1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h}) \right] \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1 - \sigma \sqrt{\sigma})}{(1 - \sigma^2)} \frac{C_p \rho_0}{\omega} |u|^2 \frac{\partial T_0}{\partial x} \right], \end{aligned} \quad (1.43)$$

soit encore, en faisant usage des expressions (1.34) de la phase θ_{u-p} entre la vitesse particulaire et la pression acoustique et (1.33) du module de la vitesse particulaire $|u|$,

$$\begin{aligned} \overline{Q_{th}} &= \frac{\delta_h L_{sy}}{2(1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2})} \left[\frac{T_0 \alpha p |u|}{(1 + \sigma)} \left((-1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h} \sqrt{\sigma}) \cos \theta_{u-p} + (1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h}) \sin \theta_{u-p} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(1 - \sigma \sqrt{\sigma})}{(1 - \sigma^2)} \frac{C_p \rho_0}{\omega} |u|^2 \frac{\partial T_0}{\partial x} \right]. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Dans cette relation, qui est équivalente à l'équation (12) de la référence [68], le flux hydrodynamique de chaleur est composé de deux termes. Le premier de ces termes, proportionnel à $p|u|$, équivaut au flux de chaleur thermoacoustique en l'absence de gradient de température et le deuxième de ces termes, proportionnel à $|u|^2$, traduit les effets de la conductivité thermique acoustiquement induite [45] qui se traduit par un flux de chaleur qui s'oppose au flux précédent et qui contribue à la diminution du coefficient de performance du processus thermoacoustique.

1.2.2.2 Expression du gradient de température

Une estimation de la valeur supérieure du gradient de température $\frac{\partial T_0}{\partial x}$ qu'il est possible d'atteindre en régime stationnaire peut être obtenue en supposant l'absence d'échangeurs de chaleur aux extrémités de l'empilement de plaques. Dans ces conditions, le flux de chaleur $\overline{Q_f}$ extrait de l'échangeur froid est nul et, en négligeant l'ensemble des pertes de chaleur dans le système, le flux de chaleur thermoacoustique $\overline{Q_{th}}$ dans le fluide est entièrement compensé par le flux de chaleur $\overline{Q_{cond}}$ s'écoulant dans le sens inverse par conduction dans les plaques et le fluide [68, 4], qui s'écrit :

$$\overline{Q_{cond}} = -2L_{sy}[Kh + K_s e_s] \frac{\partial T_0}{\partial x}, \quad (1.45)$$

où K_s est la conductivité thermique des plaques de l'empilement.

En reportant les expressions (1.44) et (1.45) du flux de chaleur thermoacoustique et du flux de chaleur par conduction retour dans la relation (1.2), l'expression du gradient de température prend la forme [4]

$$\frac{\partial T_0}{\partial x} = \frac{\delta_h T_0 \alpha}{4(1+\sigma)(1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2})} \frac{\Re \left[pu^* \left[(-1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h} \sqrt{\sigma}) + i(1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h}) \right] \right]}{[Kh + K_s e_s] + \frac{\delta_h}{4} \frac{1 - \sigma \sqrt{\sigma}}{(1 - \sigma^2)(1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2})} \frac{C_p \rho_0}{\omega} |u|^2}. \quad (1.46)$$

Cette expression peut être écrite de façon à faire apparaître le module de la vitesse particulaire $|u|$ et la phase θ_{u-p} :

$$\boxed{\frac{\partial T_0}{\partial x} = \frac{\delta_h T_0 \alpha p |u|}{4(1+\sigma)(1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2})} \frac{\left[(-1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h} \sqrt{\sigma}) \cos \theta_{u-p} + (1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h}) \sin \theta_{u-p} \right]}{[Kh + K_s e_s] + \frac{\delta_h}{4} \frac{1 - \sigma \sqrt{\sigma}}{(1 - \sigma^2)(1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2})} \frac{C_p \rho_0}{\omega} |u|^2}. \quad (1.47)}$$

1.2.2.3 Expression du coefficient de performance

La puissance acoustique $\overline{W}$ fournie en moyenne sur une période par la source acoustique correspond à la puissance acoustique dissipée dans l'empilement de plaques qui est la différence de l'intensité

acoustique moyenne $\overline{pu}$ entre les deux extrémités (notées "droite" et "gauche") de l'empilement [58]

$$\overline{W} = 2L_{sy}h \left[(\overline{pu})_{droite} - (\overline{pu})_{gauche} \right], \quad (1.48)$$

$$\approx 2L_{sx}L_{sy}h \frac{d}{dx}(\overline{pu}), \quad (1.49)$$

$$\approx L_{sx}L_{sz}h \Re \left[p \frac{du^*}{dx} + \frac{dp}{dx} u^* \right]. \quad (1.50)$$

Le terme du^*/dx est obtenu en introduisant dans l'équation de conservation de la masse (1.21) moyennée suivant l'épaisseur de la couche de fluide, la valeur moyenne sur une tranche de fluide de la vitesse particulière donnée par la relation (1.33), et celle de l'écart instantané de température (1.29) qui s'écrit

$$\begin{aligned} \langle \tau \rangle &= \frac{1}{h} \int_0^h \tau(x, z) dz \\ &= \frac{T_0 \alpha}{\rho_0 C_p} p [1 - f_h] + \frac{i}{\omega} \frac{u}{(1 - f_v)} \frac{\partial T_0}{\partial x} \left[1 + \frac{f_h - \sigma f_v}{(\sigma - 1)} \right]. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Ainsi, le terme du^*/dx s'écrit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{i\omega}{\rho_0 c_0^2} \left[1 + (\gamma - 1)f_h \right] p + \frac{\alpha u}{(1 - \sigma)} \frac{f_h - f_v}{(1 - f_v)} \frac{\partial T_0}{\partial x}, \quad (1.52)$$

en notant que $\frac{T_0 \alpha}{C_p} = \frac{(\gamma - 1)}{c_0^2}$, où γ est le rapport des capacités calorifiques à pression constante et à volume constant, et que la valeur moyenne du terme $\partial_z u_z$ égale à $\frac{1}{2h} [u_z(-h) - u_z(h)]$ s'annule car $u_z(-h) = u_z(h) = 0$.

Finalement, en reportant la relation (1.52) dans l'expression de la puissance acoustique, il vient

$$\overline{W} = L_{sx}L_{sy}h \left(-\frac{\omega(\gamma - 1)}{\rho_0 c_0^2} |p|^2 \Im[f_h^*] + \frac{\alpha}{(1 - \sigma)} \frac{\partial T_0}{\partial x} \Re \left[pu^* \frac{f_h^* - f_v^*}{(1 - f_v^*)} \right] + \omega \rho_0 |u|^2 \Im \left[\frac{1}{(1 - f_v)} \right] \right), \quad (1.53)$$

soit encore en admettant l'hypothèse dite de "couche limite",

$$\begin{aligned} \overline{W} &= \frac{L_{sx}L_{sy}\delta h}{2} \left(-\frac{\omega(\gamma - 1)}{\rho_0 c_0^2} |p|^2 + \alpha \frac{\partial T_0}{\partial x} \Re \left[pu^* \frac{(1 - \frac{\delta_v}{h}) + i}{(1 + \sqrt{\sigma})(1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2})} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{\sigma}\omega\rho_0|u|^2}{1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2}} \right). \end{aligned} \quad (1.54)$$

La puissance acoustique peut être exprimée, de façon à faire apparaître les expressions de la pression acoustique p , du module de la vitesse particulière $|u|$ (éq. 1.35), et de la phase θ_{u-p} entre la vitesse particulière et la pression acoustique (éq. 1.34), sous la forme

$$\begin{aligned} \overline{W} &= \frac{L_{sx}L_{sy}\delta h}{2} \left(-\frac{\omega(\gamma - 1)}{\rho_0 c_0^2} |p|^2 + \alpha p |u| \frac{\partial T_0}{\partial x} \left[\frac{(1 - \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h} + \sqrt{\sigma}\frac{\delta_v}{h}) \cos \theta_{u-p} + (1 - \sqrt{\sigma}) \sin \theta_{u-p}}{(1 - \sigma)(1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2})} \right] \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sqrt{\sigma}\omega\rho_0|u|^2}{1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2}} \right). \end{aligned} \quad (1.55)$$

Par ailleurs, une estimation de la valeur supérieure de la quantité de chaleur $\overline{Q_f}$ qu'il est possible d'extraire à l'échangeur froid peut être obtenue en supposant que le flux de chaleur $\overline{Q_{cond}}$ par conduction retour le long des plaques de l'empilement est négligeable (c'est-à-dire quand $\overline{Q_{cond}} = 0$ dans la relation (1.2)). Ainsi, le flux de chaleur $\overline{Q_f}$ est égal au flux de chaleur thermoacoustique $\overline{Q_{th}}$. La valeur supérieure du coefficient de performance est alors égale au rapport entre les expressions (1.44) et (1.55) du flux de chaleur thermoacoustique et de la puissance acoustique consommée par la machine. Elle s'écrit, en faisant apparaître les modules de la pression acoustique et de la vitesse particulière, ainsi que leur phase relative,

$$COP = \frac{\frac{T_0 \alpha p |u|}{(1+\sigma)} \left((-1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h} \sqrt{\sigma}) \cos \theta_{u-p} + (1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h}) \sin \theta_{u-p} \right) - \frac{(1-\sigma\sqrt{\sigma})}{(1-\sigma^2)} \frac{C_p \rho_0}{\omega} |u|^2 \frac{\partial T_0}{\partial x}}{L_{sx} \left[-\frac{\omega(\gamma-1)}{\rho_0 c_0^2} |p|^2 \left(1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2} \right) + \alpha \frac{\partial T_0}{\partial x} p |u| \left(\frac{(1-\frac{\delta_v}{h}) \cos \theta_{u-p} + \sin \theta_{u-p}}{1+\sqrt{\sigma}} - \sqrt{\sigma} \omega p_0 |u|^2 \right) \right]} \quad (1.56)$$

1.2.3 Champs acoustiques optimaux pour les quantités thermoacoustiques d'intérêt

Les valeurs optimales des grandeurs p , $|u|$ et θ_{u-p} qui conduisent aux valeurs maximales de chaque quantité d'intérêt peuvent facilement être obtenues à partir des relations (1.44), (1.47) et (1.56). Les expressions de ces valeurs optimales sont respectivement données ci-dessous pour maximiser le gradient de température $\frac{\partial T_0}{\partial x}$, le flux de chaleur $\overline{Q_{th}}$ et le coefficient de performance COP .

1.2.3.1 Champ acoustique optimal pour le gradient de température

L'expression (1.47) du gradient de température, obtenue dans le cadre de la théorie linéaire, met en évidence qu'un niveau de pression acoustique aussi élevé que possible est requis pour maximiser le gradient de température. Par contre, une valeur optimale de l'amplitude de la vitesse particulière (qui est différente de sa valeur maximale) et une valeur optimale de la phase θ_{u-p} peuvent être trouvées qui maximisent le gradient de température. L'expression (1.47) du gradient de température $\frac{\partial T_0}{\partial x}$ est le produit de deux fonctions, l'une dépendant uniquement de la variable $|u|$ et l'autre dépendant uniquement de la variable θ_{u-p} . Ainsi, après avoir dérivé le gradient de température indépendamment par rapport aux variables $|u|$ et θ_{u-p} , la valeur maximale du gradient de température est obtenue lorsque ces variables sont données simultanément par :

$$|u|_{opt} = \sqrt{\frac{4\omega (Kh + K_s e_s) (1 - \sigma^2) (1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2})}{\delta_h \rho_0 C_p (1 - \sigma \sqrt{\sigma})}}, \quad (1.57)$$

et

$$\theta_{u-p_{opt}} = \arctan \left[-\frac{1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h}}{1 - \sqrt{\sigma} + \frac{\delta_v}{h} \sqrt{\sigma}} \right] + n\pi. \quad (1.58)$$

Ces valeurs optimales dépendent de la fréquence, de la forme et des dimensions de l'empilement, ainsi que des propriétés physiques et thermiques des plaques de l'empilement et du fluide.

Pour un fluide non visqueux ($\sigma = 0$, $\delta_v = 0$), la phase θ_{u-p} optimale vaut $\theta_{u-p} = -\frac{\pi}{4}$ ou $\theta_{u-p} = \frac{3\pi}{4}$. Pour un fluide visqueux, la phase optimale est proche, mais reste différente de la phase θ_r d'une onde

stationnaire pure ($\theta_r = \pm \frac{\pi}{2}$).

A titre d'exemple, la figure 1.4 donne le gradient de température théorique dans l'empilement, normalisé par sa valeur maximale, en fonction de l'amplitude de la vitesse particulaire et de la phase de celle-ci, normalisées par leurs valeurs optimales, pour des valeurs données des paramètres physiques et thermiques de l'empilement (Tab. 1.1). Comme attendu, la valeur maximale du gradient de température est obtenue quand l'amplitude et la phase de la vitesse atteignent leurs valeurs optimales simultanément.

Fluide	air
Fréquence de l'onde	$f = 160 \text{ Hz}$
Pression statique du fluide	$P_0 = 1.013 * 10^5 \text{ Pa}$
Température du fluide	$T_0 = 295 \text{ K}$
Empilement de plaques	P.V.C.
Longueur des plaques	$L_{sx} = 19 * 10^{-2} \text{ m}$
Largeur des plaques	$L_{sy} = 19 * 10^{-2} \text{ m}$
Épaisseur des plaques	$2e_s \approx 2 \text{ mm}$
Espacement entre deux plaques	$2h \approx 610 \text{ }\mu\text{m}$
Masse volumique	$\rho_s = 1400 \text{ kg.m}^{-3}$
Conductivité thermique	$K_s = 0.19 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Capacité calorifique	$C_s = 2300 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

TAB. 1.1 – Paramètres géométriques et thermo-physiques du réfrigérateur thermoacoustique.

1.2.3.2 Champ acoustique optimal pour le flux de chaleur thermoacoustique

L'expression (1.44) du flux de chaleur thermoacoustique montre qu'à la mise en route du système, quand le gradient de température (et donc le terme limitant) est nul, le flux de chaleur thermoacoustique est directement proportionnel à la vitesse particulaire. En revanche, en régime établi, le terme limitant, proportionnel au gradient de température et au carré de la vitesse particulaire, est non nul, ce qui conduit à l'existence d'une vitesse optimale qui maximise le flux de chaleur thermoacoustique. Dans les deux cas (régime transitoire et régime établi), une valeur optimale de la phase θ_{u-p} existe. La substitution de l'expression (1.47) du gradient de température dans l'expression (1.44) du flux de chaleur conduit à l'expression suivante

$$\overline{Q_{th}} = \frac{\delta_h L_{sx} T_0 \alpha p |u|}{2(1 + \sigma)(1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2})} \frac{(Kh + K_s e_s) \left[(-1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h} \sqrt{\sigma}) \cos \theta_{u-p} + (1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h}) \sin \theta_{u-p} \right]}{[Kh + K_s e_s] + \frac{\delta_h}{4} \frac{1 - \sigma \sqrt{\sigma}}{(1 - \sigma^2)(1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2})} \frac{C_p \rho_0}{\omega} |u|^2}. \quad (1.59)$$

Après avoir dérivé l'expression (1.59) indépendamment par rapport à la vitesse particulaire $|u|$ et à la phase θ_{u-p} , la valeur optimale $|u|_{opt}$ de l'amplitude de la vitesse particulaire et la valeur optimale $\theta_{u-p_{opt}}$ de la phase θ_{u-p} sont données par les mêmes relations que celles obtenues précédemment. Les

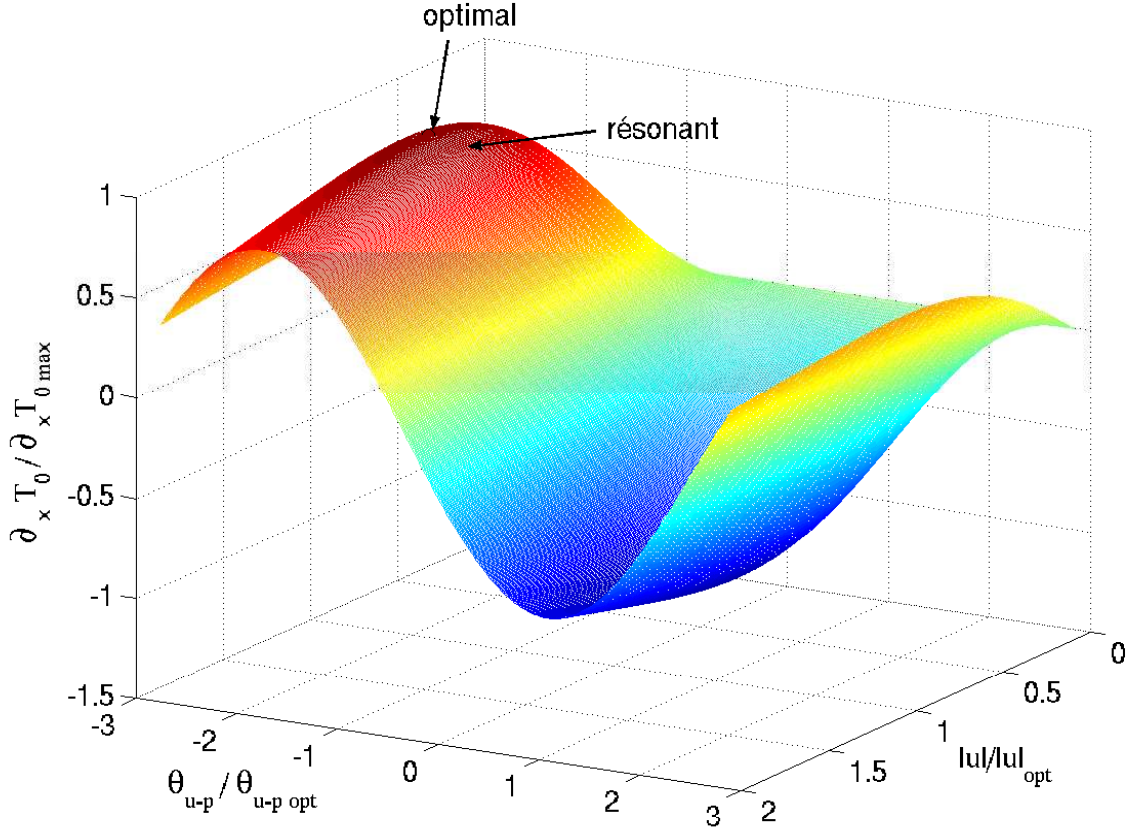


FIG. 1.4 – Gradient de température normalisé en fonction de l’amplitude de la vitesse particulaire (normalisée par sa valeur optimale donnée par la relation (1.57)) et de la phase θ_{u-p} entre la vitesse particulaire et la pression acoustique (normalisée par sa valeur optimale donnée par la relation (1.58)). Les paramètres géométriques et thermo-physiques utilisés sont donnés dans la table 1.1.

mêmes résultats que ceux de la figure 1.4 sont obtenus lorsque le flux de chaleur thermoacoustique théorique, normalisé par sa valeur maximale, est représenté en fonction de l’amplitude et de la phase de la vitesse particulaire, normalisées par leurs valeurs optimales.

1.2.3.3 Champ acoustique optimal pour le coefficient de performance

En raison de son expression (1.56), le champ acoustique optimal pour le coefficient de performance ne peut pas être obtenu aussi facilement que ceux obtenus pour le flux de chaleur et le gradient de température. C’est pourquoi, les résultats sont donnés ici sous la forme d’un exemple plutôt que d’effectuer le calcul de l’optimisation du *COP*. Cet exemple est présenté sur la figure 1.5 qui montre le coefficient de performance théorique en fonction de l’amplitude (normalisée par sa valeur optimale (1.57)) et de la phase (normalisée par sa valeur optimale (1.58)) de la vitesse particulaire dans l’empilement de plaques, en considérant les données du tableau 1.1. Dans cet exemple, le "drive ratio", égal au rapport entre la pression acoustique à l’entrée du résonateur et la pression statique, est ajusté à 1.5% et le gradient de température est choisi de manière à ce que la différence de température soit de $20K$ entre les extrémités de l’empilement ($\partial_x T = 100 \text{ K.m}^{-1}$), ce qui correspond approximativement

à la température de fonctionnement d'un réfrigérateur domestique classique. La valeur maximale du coefficient de performance est obtenue pour des valeurs de l'amplitude et de la phase de la vitesse particulière légèrement différentes des valeurs données par les équations (1.57) et (1.58).

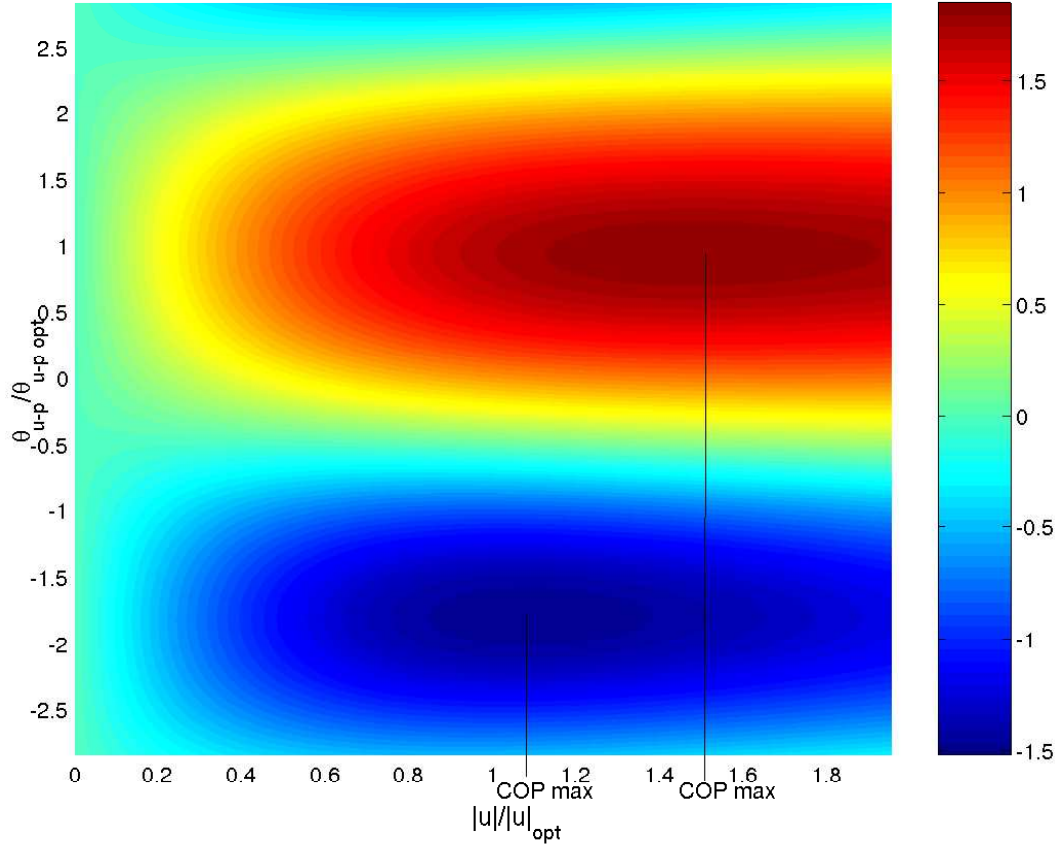


FIG. 1.5 – Coefficient de performance en fonction de l'amplitude de la vitesse particulière (normalisée par sa valeur optimale donnée par la relation (1.57)) et de la phase θ_{u-p} entre la vitesse particulière et la pression acoustique (normalisée par sa valeur optimale donnée par la relation (1.58)) pour un "drive ratio" fixé à 1.5% et pour un gradient de température fixé à $\partial_x T = 100 \text{ K.m}^{-1}$. Les paramètres géométriques et thermo-physiques utilisés sont donnés dans le tableau 1.1.

1.2.4 Comparaison entre un réfrigérateur à ondes stationnaires et un réfrigérateur fonctionnant avec un champ acoustique optimal

Afin d'évaluer l'amélioration apportée par l'utilisation d'un champ acoustique optimal par rapport au champ acoustique correspondant à une onde stationnaire, une comparaison théorique entre les performances obtenues avec un réfrigérateur thermoacoustique résonant classique et celles obtenues avec un réfrigérateur qui fonctionnerait à l'optimum est présentée dans ce paragraphe.

Un réfrigérateur thermoacoustique classique fait usage d'une onde acoustique stationnaire entretenue dans un résonateur ici considéré comme demi-onde (fig. 1.2). En supposant que l'empilement de plaques présent dans le résonateur ne perturbe pas le champ acoustique stationnaire, le champ de

pression acoustique s'écrit en première approximation

$$p = P_A \cos(k_0 x), \quad (1.60)$$

où $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$. La correction de longueur due au couplage entre le résonateur et la source acoustique est négligée ici [7].

Le report de cette expression de la pression acoustique dans l'équation (1.33) conduit à l'expression suivante de la valeur moyenne u_r de la vitesse particulaire entre deux plaques successives de l'empilement (suivant z variant de $-h$ à h) dans un réfrigérateur à onde stationnaire

$$u_r = -i(1 - f_v) \left(1 + \frac{e_s}{h}\right) \frac{P_A}{\rho_0 c_0} \sin(k_0 x_c), \quad (1.61)$$

où x_c est la coordonnée du centre de l'empilement dans le résonateur (fig. 1.2). Cette expression devient, en admettant l'approximation dite de "couche limite",

$$u_r = \left[\frac{\delta_v}{2h} + i \left(\frac{\delta_v}{2h} - 1 \right) \right] \left(1 + \frac{e_s}{h}\right) \frac{P_A}{\rho_0 c_0} \sin(k_0 x_c). \quad (1.62)$$

La phase relative θ_{u-pr} entre la vitesse et la pression acoustique est proche (mais différente) de $-\frac{\pi}{2}$ pour $0 \leq x_c \leq \frac{\lambda}{4}$ ($\theta_{u-pr} = \arctan(1 - \frac{\delta_v}{2h})$) et proche (mais différente) de $\frac{\pi}{2}$ pour $\frac{\lambda}{4} \leq x_c \leq \frac{\lambda}{2}$ (car $\theta_{u-pr} = \arctan(1 - \frac{\delta_v}{2h}) - \pi$). Ainsi, pour un réfrigérateur thermoacoustique classique, les expressions du flux de chaleur thermoacoustique (1.44), du gradient de température (1.47) et du coefficient de performance (1.56) s'écrivent respectivement :

$$\begin{aligned} \overline{Q_{th}^s}(x_c) &= \frac{\delta_h L_{sy} P_A^2}{4\rho_0 c_0} \left(1 + \frac{e_s}{h}\right) \left[-\frac{1 - \sigma\sqrt{\sigma}}{1 - \sigma^2} \left(1 + \frac{e_s}{h}\right) \frac{C_p}{\omega c_0} \frac{\partial T_0}{\partial x} (1 - \cos(2k_0 x_c)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha T_0 \sin(2k_0 x_c)}{(1 + \sigma) \sqrt{1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2}}} \left((-1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h} \sqrt{\sigma}) \cos(\theta_{u-pr}) + (1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h}) \sin(\theta_{u-pr}) \right) \right] \end{aligned} \quad (1.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT_0^s}{dx} &= \frac{\delta_h \alpha T_0 P_A^2 (1 + \frac{e_s}{h}) \sin(2k_0 x_c)}{8(1 + \sigma) \rho_0 c_0 \sqrt{1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2}}} \\ &\quad \frac{(-1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h} \sqrt{\sigma}) \cos(\theta_{u-pr}) + (1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h}) \sin(\theta_{u-pr})}{[Kh + K_s e_s] + \frac{\delta_h}{8} \frac{1 - \sigma\sqrt{\sigma}}{1 - \sigma^2} \frac{C_p P_A^2}{\omega \rho_0 c_0^2} (1 + \frac{e_s}{h})^2 (1 - \cos(2k_0 x_c))}, \end{aligned} \quad (1.64)$$

$$\begin{aligned} COP^s &= \frac{1 + \frac{e_s}{h}}{L_{sz}} \left\{ \frac{\alpha T_0}{1 + \sigma} \sin(2k_0 x_c) \left((-1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h} \sqrt{\sigma}) \cos(\theta_{u-pr}) + (1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h}) \sin(\theta_{u-pr}) \right) \right. \\ &\quad - \frac{1 - \sigma\sqrt{\sigma}}{1 - \sigma^2} \frac{C_p}{\omega c_0} \left(1 + \frac{e_s}{h}\right) \sqrt{1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2}} \frac{\partial T_0}{\partial x} (1 - \cos(2k_0 x_c)) \left. \right\} \\ &\quad \left\{ -\frac{\omega}{c_0} \sqrt{1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2}} \left[\cos(2k_0 x_c) \left(\gamma - 1 - \left(1 + \frac{e_s}{h}\right)^2 \sqrt{\sigma} \right) + \left(\gamma - 1 + \left(1 + \frac{e_s}{h}\right)^2 \sqrt{\sigma} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \frac{e_s}{h}\right) \frac{\alpha}{1 + \sqrt{\sigma}} \left[\left(1 - \frac{\delta_v}{h}\right) \cos \theta_{u-pr} + \sin \theta_{u-pr} \right] \frac{\partial T_0}{\partial x} \sin(2k_0 x_c) \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (1.65)$$

où l'exposant s fait référence au champ d'onde stationnaire.

La comparaison entre le gradient de température dans le cas d'un système à ondes stationnaires calculé à partir de la formule précédente et mesuré présente un bon accord dans des études expérimentales [4] et numériques [70] à faible nombre de Mach (inférieur à 1.5%). En revanche, d'autres études

ont montrées qu'il pouvait y avoir un facteur d'environ 3 entre les deux ([20], [34], [47]). Partant de ces résultats, l'expression de la différence de température a été modifiée par D. Marx *et coll.* [37] (en utilisant des résultats de simulations) pour prendre en compte d'une part la variation de la température moyenne dans la direction perpendiculaire aux plaques qui est négligée dans la théorie linéaire et d'autre part, la répartition des flux conductifs retours dans le solide et le fluide qui est mal estimée dans la théorie linéaire. A faible nombre de Mach, un bon accord est obtenu entre l'expression de la différence de température calculée à partir de cette expression modifiée et celle calculée numériquement en ne retenant pas les hypothèses de la théorie linéaire (alors que la théorie linéaire surestime la différence de température). Cependant, pour les forts nombres de Mach (supérieur à 2%), un désaccord apparaît du fait de la présence de non-linéarités dus à la déformation de l'écart instantané de la température.

La comparaison entre le comportement d'un réfrigérateur thermoacoustique à résonateur demi-onde classique et celui d'un réfrigérateur dans lequel la pression acoustique et la vitesse particulaire peuvent être contrôlées indépendamment se limite ici au comportement du gradient de température (la méthode pouvant être facilement extrapolée aux autres quantités thermoacoustiques d'intérêt). L'influence sur le gradient de température de la valeur de la vitesse particulaire au niveau de l'empilement peut-être étudiée à partir de la figure 1.6 qui représente l'évolution du gradient de température en fonction du drive ratio dans les deux cas suivants :

- premièrement, l'empilement est positionné dans un champ acoustique tel que l'amplitude de la vitesse particulaire est fixe et correspond à la valeur optimale $|u| = |u|_{opt}$, l'amplitude de la vitesse particulaire étant alors considérée comme indépendante de la pression acoustique p ,
- deuxièmement, l'empilement est situé à une position fixe $x = \frac{\lambda}{8}$ dans un résonateur à onde stationnaire, l'amplitude de la vitesse particulaire étant alors égale à $|u| = |u|_r$ (qui varie avec l'amplitude de la pression acoustique) existant à cette position dans le résonateur.

Dans les deux cas, la phase de la vitesse particulaire est fixée à sa valeur correspondant au cas de l'onde stationnaire ($\theta_{u-p} = \theta_{u-p_r} = \arctan\left(1 - \frac{2h}{\delta_v}\right)$). Pour une pression acoustique donnée, les valeurs du gradient de température obtenues pour $|u| = |u|_{opt}$ sont toujours plus importantes que celles obtenues pour $|u| = |u|_r$ (résonateur demi-onde), excepté quand la vitesse particulaire $|u|_r$ dans l'empilement se trouve être égale à la valeur optimale $|u|_{opt}$ (elles sont alors égales). Puisque le gradient de température est directement proportionnel à l'amplitude de la pression acoustique (1.47), un niveau de pression acoustique le plus élevé possible est alors généré dans les réfrigérateurs classiques à ondes stationnaires. Dans ces conditions, la vitesse particulaire $|u|_r$ au niveau de l'empilement positionné en $x = \frac{\lambda}{8}$ dans le résonateur est plus grande que la vitesse particulaire optimale $|u|_{opt}$. Néanmoins, en rapprochant le centre de l'empilement vers la source acoustique ($x_c < \frac{\lambda}{4}$ sur la figure 1.6) dans un résonateur demi-longueur d'onde, la pression acoustique augmente au niveau de l'empilement et la vitesse particulaire $|u|_r$ diminue, se rapprochant alors de sa valeur optimale $|u|_{opt}$. Ces deux effets conjugués favorisent le processus thermoacoustique. La coordonnée normalisée $\eta_u = \frac{x_u}{\lambda}$ correspondant à la position dans le résonateur pour laquelle la vitesse $|u|_r = |u|_{opt}$ est représentée sur la figure 1.7 (ligne en pointillé) en fonction du "drive ratio" (pour les faibles valeurs de la pression acoustique, cette coordonnée n'existe pas puisque la valeur de la vitesse $|u|_r$ ne peut pas atteindre celle de $|u|_{opt}$ quelque soit la position dans le résonateur). Cependant, la position pour laquelle $|u|_r = |u|_{opt}$ ne correspond pas

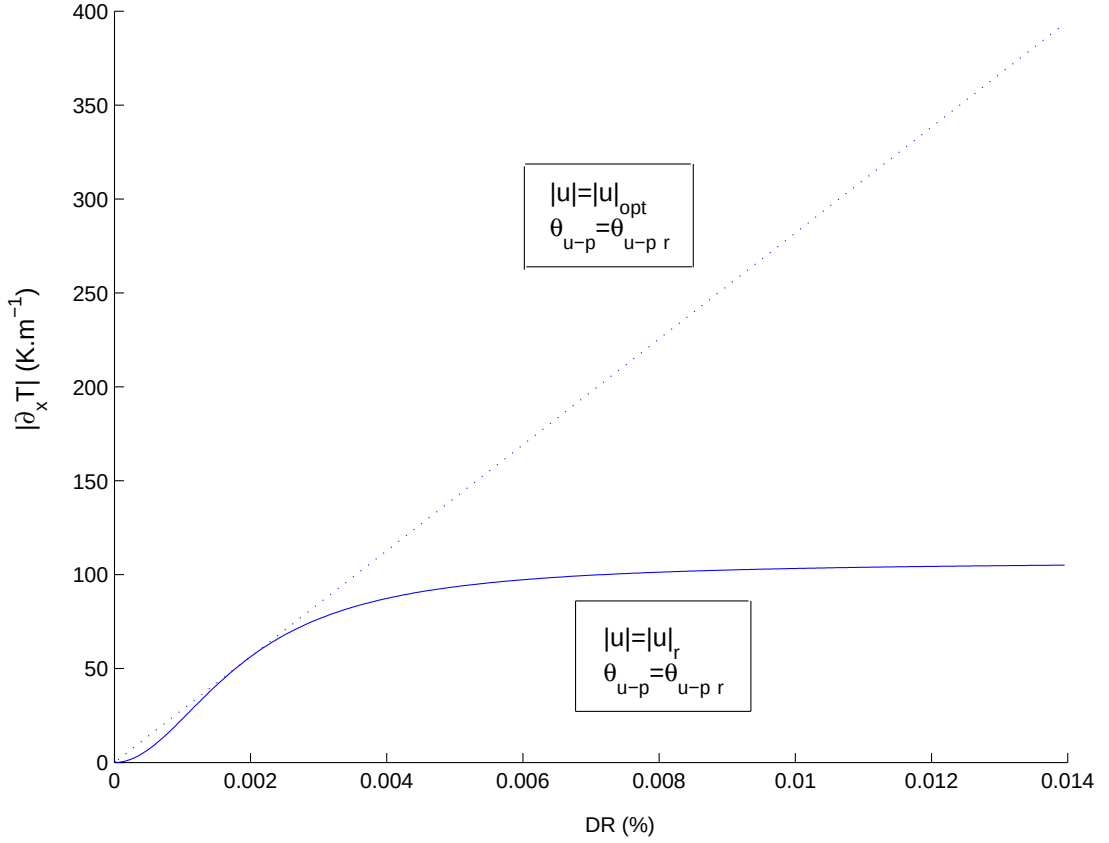


FIG. 1.6 – Gradient de température le long de l’empilement en fonction du drive ratio pour les paramètres géométriques et thermo-physiques donnés par la table 1.1. Ligne continue : l’empilement est positionné dans un résonateur demi-onde en $x = \frac{\lambda}{8}$; l’amplitude de la vitesse particulaire (qui dépend du niveau de pression acoustique) et sa phase sont celles qui existent dans un réfrigérateur à ondes stationnaires ($|u| = |u|_r$ et $\theta_{u-p} = \theta_{u-p r}$). Tirets : l’empilement est positionné dans un champ acoustique tel que l’amplitude de la vitesse particulaire est fixée à sa valeur optimale (et ne dépend donc pas de la pression acoustique) et la phase relative est celle existant dans un réfrigérateur à ondes stationnaires ($|u| = |u|_{opt}$ et $\theta_{u-p} = \theta_{u-p r}$).

nécessairement à la position ”la meilleure”, en terme de gradient de température, dans le résonateur. Cette position ”la meilleure” est obtenue en annulant la dérivée de l’expression (1.64) par rapport à la coordonnée x_c . Il en résulte que la position optimale $(x_c)_{opt}$ du centre du stack dans un résonateur s’écrit

$$(x_c)_{opt} = \frac{1}{2k_0} \arccos \left(\frac{\frac{\delta_h}{8} \frac{1-\sigma\sqrt{\sigma}}{1-\sigma^2} \frac{C_p P_A^2}{\omega \rho_0 c_0^2} \left(1 + \frac{e_s}{h}\right)^2}{[Kh + K_s e_s] + \frac{\delta_h}{8} \frac{1-\sigma\sqrt{\sigma}}{1-\sigma^2} \frac{C_p P_A^2}{\omega \rho_0 c_0^2} \left(1 + \frac{e_s}{h}\right)^2} \right). \quad (1.66)$$

Pour le réfrigérateur à ondes stationnaires dont les paramètres sont donnés dans le tableau 1.1, la coordonnée normalisée optimale $\frac{x_c}{\lambda}$ du centre de l’empilement dans un résonateur est représentée sur la figure 1.7 (ligne continue) en fonction du ”drive ratio”. La position optimale $(x_c)_{opt}$ tend vers 0 lorsque le ”drive ratio” augmente (c’est-à-dire que le centre de l’empilement doit être proche de la

source acoustique, près de la valeur maximale de la pression acoustique de l'onde stationnaire). Cette particularité a déjà été observée d'une part expérimentalement [68] et d'autre part analytiquement [4, 66]. Pour des forts niveaux de pression acoustique, c'est-à-dire pour des "drive ratios" supérieurs

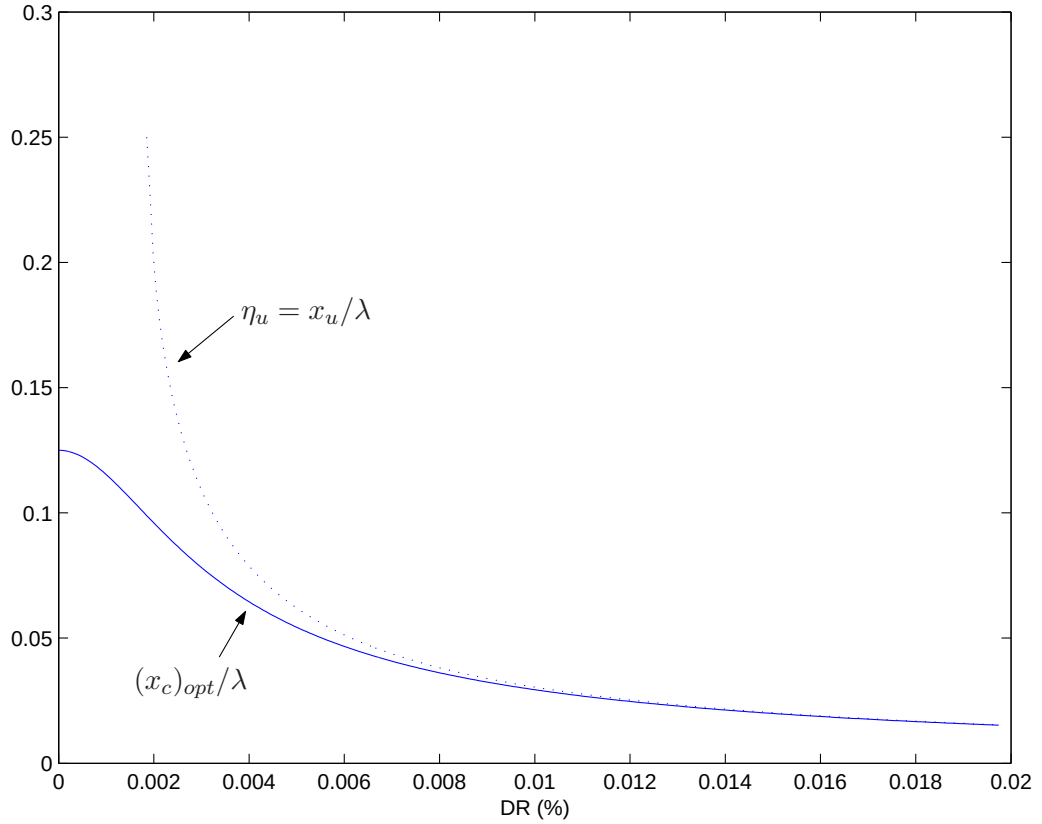


FIG. 1.7 – Tirets : coordonnée normalisée η_u , correspondant à la position du centre de l'empilement dans le résonateur demi-onde (1.1) pour laquelle la vitesse particulaire u_r est égale à la valeur optimale $|u|_{opt}$ en fonction du drive ratio ; Ligne continue : coordonnée optimale normalisée $\frac{(x_c)_{opt}}{\lambda}$ du centre de l'empilement (1.1) pour laquelle la différence de température est maximale en fonction du "drive ratio".

à 1%, la valeur de l'amplitude de la vitesse particulaire $|u|_r$ peut être égale à la valeur de la vitesse particulaire $|u|_{opt}$ quand la coordonnée du centre de l'empilement est proche de sa valeur optimale $(x_c)_{opt}$. Ce résultat montre qu'un réfrigérateur demi-onde classique fonctionne près de l'optimum en terme d'amplitude de la vitesse particulaire quand un "drive ratio" important est atteint. En revanche, à faible "drive ratio", ce qui peut être le cas par exemple lors de la miniaturisation des réfrigérateurs classiques, la figure 1.7 montre que la valeur de la vitesse u_r ne peut pas atteindre la valeur de la vitesse optimale $|u|_{opt}$. Ce résultat peut être utile pour la conception de tels réfrigérateurs thermoacoustiques. Toutefois, pour toutes les valeurs de la pression acoustique dans un réfrigérateur à ondes stationnaires classique, des améliorations peuvent être obtenues en ajustant la valeur de la phase relative entre la vitesse particulaire et la pression acoustique à sa valeur optimale. C'est ce que montrent les flèches sur la figure 1.4 qui repèrent les gradients de température lorsque l'empilement de plaques est positionné d'une part dans le champ acoustique optimal pour le gradient de température ($|u| = |u|_{opt}$,

$\theta_{u-p} = \theta_{u-p_{opt}}$) et d'autre part à la position "la meilleure" ($x_c = (x_c)_{opt}$, $|u| = |u|_r$ et $\theta_{u-p} = \theta_{u-p_r}$) dans un résonateur demi-onde, pour les paramètres géométriques et thermo-physiques donnés par la table 1.1. Pour cette figure, le drive ratio est égal à 1.5%, et la vitesse $|u|_r$ est alors approximativement égale à la valeur de la vitesse particulaire $|u|_{opt}$. Par contre, la phase θ_{u-p_r} est différente de la phase optimale $\theta_{u-p_{opt}}$. De ce fait le gradient de température obtenu le long de l'empilement du résonateur est inférieur au gradient de température optimal.

1.3 Conclusion

L'existence d'un champ acoustique optimal pour les réfrigérateurs thermoacoustiques a été démontrée, et des valeurs optimales des grandeurs p , $|u|$ et θ_{u-p} qui conduisent à des valeurs optimales de $\overline{Q_{th}}$ et de $\frac{\partial T_x}{\partial x}$ ont été établies. Ce champ acoustique optimal peut être différent de celui existant dans un réfrigérateur à ondes stationnaires classique, même si ces réfrigérateurs fonctionnent près de l'optimum en terme d'amplitude de la vitesse particulaire lorsqu'un "drive ratio" élevé est atteint. En particulier, des améliorations seraient obtenues dans un réfrigérateur classique en ajustant la phase relative entre la pression acoustique et la vitesse particulaire à sa valeur optimale (qui est différente de $\frac{\pi}{2}$). La possibilité de travailler aux champs acoustiques optimum permettrait d'envisager des performances supérieures à celles des systèmes résonants classiques. Encore faut il pouvoir créer un champ de pression acoustique et un champ de vitesse particulaire de façon indépendante afin de pouvoir contrôler indépendamment l'amplitude de la pression acoustique et de la vitesse particulaire et leur phase relative. Un dispositif thermoacoustique a été imaginé [16] dont le principe est de générer ce champ acoustique optimal dans l'empilement. L'étude de ce type de réfrigérateur dit réfrigérateur "compact" fait l'objet des deux chapitres suivants.

Chapitre 2

Modèle de réfrigérateur compact à quatre sources

Un réfrigérateur thermoacoustique classique est constitué, dans sa version la plus simple, d'une source acoustique couplée à un résonateur muni d'un empilement de plaques (stack) et d'échangeurs de chaleur. Ce système couplé fonctionne à sa première fréquence de résonance, le résonateur présentant alors un comportement proche de celui d'un résonateur demi onde ou d'un résonateur quart d'onde [7]. Le fonctionnement à la résonance permet d'obtenir, au niveau de l'empilement placé entre un ventre de pression et un ventre de vitesse particulière, des amplitudes de pression acoustique et de vitesse particulière, ainsi qu'une phase relative entre ces deux grandeurs, relativement favorables au processus thermoacoustique, bien que différentes de celles correspondant à la configuration optimale définie au chapitre 1.

Par ailleurs, l'utilisation d'un résonateur implique la présence d'un "volume perdu", correspondant au volume non occupé par l'empilement de plaques (cœur du processus thermoacoustique). Dans le cadre de la miniaturisation des systèmes thermoacoustiques, ce volume perdu constitue une limite au gain de place recherché. Afin de pallier cet inconvénient propre aux systèmes résonants classiques cités (champ acoustique fixé par la condition de résonance, encombrement du volume du résonateur), une nouvelle architecture de réfrigérateur thermoacoustique a été proposée à l'occasion de travaux antérieurs du L.A.U.M. et du L.M.F.A. [16]. Pour ce réfrigérateur, qualifié de "compact", le résonateur est remplacé par une cavité dont les dimensions intérieures sont ramenées à celles de l'empilement de plaques et dans laquelle les champs de pression acoustique et de vitesse particulière sont créés indépendamment par des haut-parleurs (entre deux et quatre) placés et alimentés de manière à optimiser le processus thermoacoustique. Par ailleurs, la fréquence de fonctionnement n'étant pas imposée par les caractéristiques géométriques du dispositif, ce système présente également l'avantage de pouvoir fonctionner à basse fréquence. Ainsi, la miniaturisation d'un tel système compact n'entraîne pas nécessairement une augmentation de la fréquence de fonctionnement, ce qui permet de ne pas avoir à faire impérativement usage de procédés de micro-fabrication coûteux pour la réalisation du stack (la fréquence pouvant être choisie, pour une part, en fonction de la distance entre deux plaques successives de l'empilement utilisé).

Un réfrigérateur compact à quatre sources met en jeu quatre haut-parleurs placés sur quatre

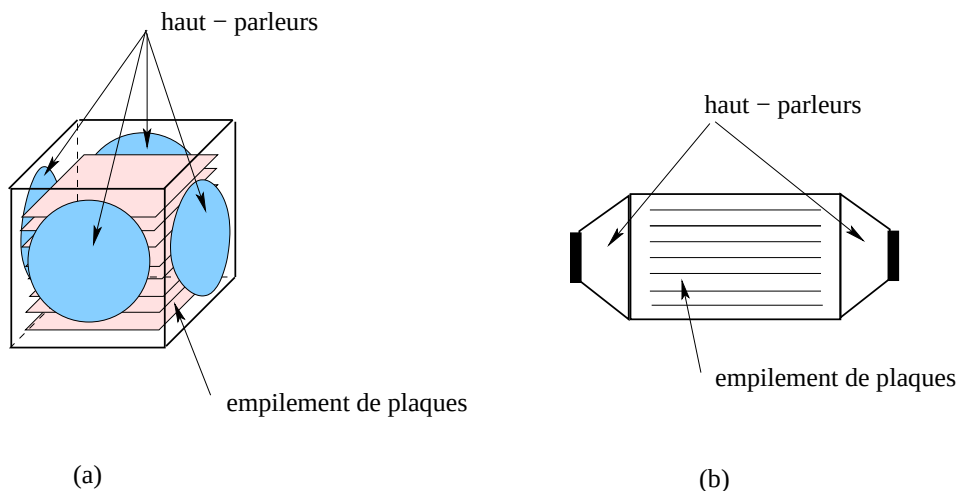


FIG. 2.1 – (a) Schéma de base d'un réfrigérateur thermoacoustique à 4 sources. (b) Schéma de base d'un réfrigérateur thermoacoustique à 2 sources.

faces d'une cavité parallélépipédique rectangle, face à face deux à deux (fig. 2.1.a). Les quatre sources sont alimentées par des tensions électriques dont la fréquence est telle que la longueur d'onde reste grande par rapport aux dimensions du système afin d'assurer un champ acoustique aussi uniforme que possible dans la cavité (typiquement, les dimensions du système ne doivent pas excéder le dixième de la longueur d'onde). Une paire de source en vis-à-vis a pour rôle de générer la pression acoustique tandis que l'autre paire a pour rôle de générer le déplacement particulaire. Les sources gérant la pression sont alimentées en phase, les sources gérant le déplacement sont alimentées en opposition de phase. La phase relative entre sources de pression et sources de débit peut être réglée par l'expérimentateur, voire contrôlée par asservissement. Le stack occupe presque tout le volume de la cavité et doit être composé de plaques parallèles de manière à être ouvert sur quatre de ses côtés (ce qui exclut l'utilisation d'enroulement ou de réseaux de canaux simples).

Un réfrigérateur compact à deux sources est un cas particulier du système à quatre sources. Ce système met en jeu deux haut-parleurs placés sur deux faces en vis-à-vis d'une petite cavité. L'emploi de deux sources permet de gérer la pression acoustique, le déplacement particulaire et, dans une certaine limite, leurs phases respectives. Pour cela, les sources sont alimentées en opposition de phase, ce qui confère un mouvement d'ensemble à la colonne de gaz contenue dans la cavité, mais l'une d'entre elles est alimentée par une tension d'amplitude supérieure, ce qui implique un déplacement plus important de sa membrane, cette différence de déplacement des membranes engendrant un effet de compression. Par rapport au système à quatre sources, le choix de la géométrie du stack reste ici ouvert.

Une étude simplifiée [35], développée dans le cadre de travaux antérieurs, qui décrit le champ acoustique dans l'empilement d'un réfrigérateur compact en supposant qu'il résulte de la superposition d'un champ de vitesse particulaire et d'un champ de pression acoustique, créés indépendamment par chacune des paires de sources en vis-à-vis, est rappelée au paragraphe 2.1. Un modèle plus précis est ensuite présenté qui décrit les champs de pression acoustique et de vitesse particulaire en tous points de l'empilement en fonction des débits acoustiques de l'ensemble des sources (§2.2), puis en fonction des tensions d'excitation appliquées à ces sources, permettant ainsi de mettre en évidence le couplage

entre ces sources (§2.3).

2.1 Champ acoustique dans le réfrigérateur compact à quatre sources décomposé en deux sous systèmes à une dimension

Dans ce paragraphe, l'étude du comportement acoustique d'un réfrigérateur "compact" à deux sources est tout d'abord présenté. Les résultats obtenus dans le cas d'un réfrigérateur à deux sources sont ensuite étendus au cas d'un réfrigérateur à quatre sources en faisant usage du principe de superposition.

2.1.1 Champ acoustique dans un système à deux sources

2.1.1.1 Le système étudié et les hypothèses

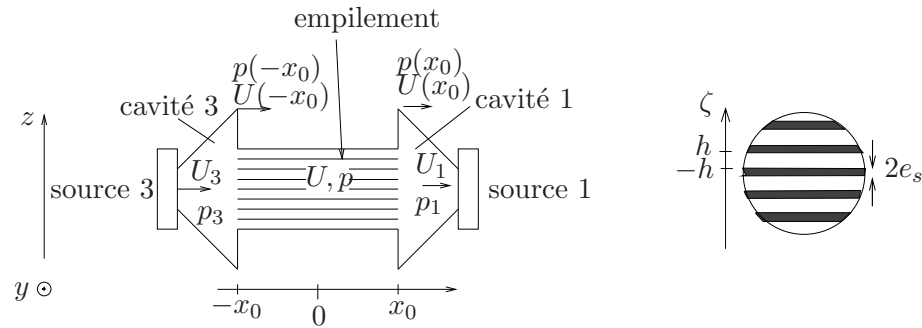


FIG. 2.2 – Représentation schématique d'un réfrigérateur thermoacoustique à deux sources - Notations. Les quantités p_1 , p_3 et p représentent respectivement les pressions acoustiques dans la cavité 1, dans la cavité 3 et dans le domaine de l'empilement. Les quantités U_1 , U_3 et U représentent respectivement les débits acoustiques de la source 1, de la source 3 et le débit dans le domaine de l'empilement. Les paramètres $p(x_0)$, $U(x_0)$, $p(-x_0)$, $U(-x_0)$ représentent la pression et le débit acoustique à l'interface "cavité 1 - empilement" et à l'interface "empilement - cavité 3" respectivement. La vue de droite représente une coupe de l'empilement de plaques. La longueur de l'empilement est $2x_0$, l'épaisseur des plaques $2e_s$ et l'espace entre les plaques $2h$.

Le système étudié dans ce paragraphe est un réfrigérateur compact à deux sources (figure 2.2). Il est constitué d'un tube cylindrique de rayon r_t (section $S_t = \pi r_t^2$), contenant un empilement de plaques parallèles de longueur $2x_0$. L'épaisseur des plaques est notée $2e_s$ et la distance entre les plaques est notée $2h$. La section et le volume de fluide utiles dans le domaine de l'empilement sont alors respectivement notés $S_s = S_t(\frac{h}{h+e_s})$ et $V_s = 2x_0 S_s$. La coordonnée locale, entre les faces de deux plaques consécutives en regard l'une de l'autre, dont l'origine est située au centre de la couche de gaz entre ces deux plaques, est notée ζ (les coordonnées des deux plaques sont $\zeta = \pm h$). Le fluide contenu dans ce tube est le siège d'un champ de pression acoustique créé par deux sources acoustiques situées en x_0 et $-x_0$. Les sources sont repérées à l'aide d'indices impairs (1 et 3 respectivement) pour que les notations concordent avec celles du système à quatre sources étudié au paragraphe 2.1.2. Le champ acoustique sinusoïdal entrete nu à la fréquence $f = \omega/2\pi$ est à caractère quasi plan. Les plaques considérées parfaitement

rigides, à conduction thermique et à capacité calorifique nettement supérieures à celle du fluide utilisé, imposent une vitesse particulière et une variation de température nulles au niveau de toute paroi. Ces quantités présentent donc des variations importantes en fonction de la coordonnée transversale ζ dans la lame de fluide comprise entre chaque plaque. Cependant, le problème est ramené à une dimension (x) en prenant les moyennes de ces quantités sur la section transversale (suivant ζ) comme présenté dans la chapitre précédent (§1.2.1).

2.1.1.2 Champ de pression dans les cavités de part et d'autre de l'empilement

Les deux volumes, notés V_1 et V_3 , compris entre le diaphragme d'un haut-parleur et l'entrée du tube cylindrique comportant l'empilement de plaques, sont considérés comme des "petites cavités" ($\sqrt[3]{V_{1,3}} \ll \lambda$) à l'intérieur desquelles la pression acoustique est uniforme. La pression acoustique $p_{i=1,3}$ dans ces "petites cavités" s'écrit, en négligeant les facteurs dissipatifs [15],

$$p_1 = \frac{\rho_0 c_0^2}{i\omega V_1} [U(x_0) - U_1], \quad (2.1)$$

$$p_3 = \frac{\rho_0 c_0^2}{i\omega V_3} [U_3 - U(-x_0)], \quad (2.2)$$

où U_1, U_3 sont les débits acoustiques des sources 1 et 3, et où $U(x_0), U(-x_0)$ sont les débits acoustiques à chaque extrémité de l'empilement.

2.1.1.3 Champ acoustique dans l'empilement

Les équations qui régissent la propagation dans l'empilement sont celles données au chapitre 1 (équ. 1.18, 1.21, 1.26) dans lesquelles le gradient de température $\frac{\partial T_0}{\partial x}$ le long de l'empilement est considéré comme étant nul [6] :

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial \zeta^2} + k_v^2 u_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.3a)$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = i\omega\alpha\tau - i\omega\chi_t p - \frac{\partial u_z}{\partial \zeta}, \quad (2.3b)$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \zeta^2} + k_h^2 \tau = -\frac{T_0 \alpha i\omega}{K} p. \quad (2.3c)$$

Les conditions aux frontières fluide/paroi $\forall x \in [-x_0, x_0], \zeta = \pm h$ s'écrivent :

$$u_x(x, \zeta = \pm h) = 0, \quad (2.4a)$$

$$\tau(x, \zeta = \pm h) = 0. \quad (2.4b)$$

La vitesse u_x et l'écart de température τ , qui sont solutions des équations différentielles (2.3a) et (2.3c) et qui vérifient les conditions aux limites (2.4a) et (2.4b), s'écrivent respectivement, en moyenne sur une section d'un pore de l'empilement :

$$\langle u_x \rangle_\zeta = -\frac{1}{i\omega\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} (1 - f_v), \quad (2.5a)$$

$$\langle \tau \rangle_\zeta = \frac{T_0 \alpha}{\rho_0 C_p} p (1 - f_h), \quad (2.5b)$$

où les fonctions f_v et f_h sont définies par les relations (1.32) et (1.42).

La valeur moyenne de la loi de conservation de la masse (2.3b) calculée suivant ζ variant de $-h$ à h s'écrit

$$i\omega(-\alpha < \tau >_{\zeta} + \chi_t p) + \partial_x < u_x >_{\zeta} + < \partial_z u_z >_{\zeta} = 0. \quad (2.6)$$

Le report dans cette relation des expressions (2.5a) et (2.5b) des valeurs moyennes de u_x et de τ conduit à l'équation de propagation pour la pression acoustique

$$\partial_{xx}^2 p + k^2 p = 0, \quad (2.7)$$

où le nombre d'onde complexe k est donné par

$$k^2 = k_0^2 \left[\frac{1 + (\gamma - 1)f_h}{1 - f_v} \right], \quad (2.8)$$

avec $k_0 = \omega/c_0$.

La solution de cette équation de propagation peut s'écrire sous la forme

$$p(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx). \quad (2.9)$$

Le report de cette forme de solution dans les expressions des conditions aux limites :

$$p(x_0) = p_1, \text{ en } x=x_0, \quad (2.10)$$

$$p(-x_0) = p_3, \text{ en } x=-x_0, \quad (2.11)$$

permet de déterminer les constantes A et B . Ainsi, la pression acoustique et la vitesse particulaire moyenne sur une section le long de l'empilement s'écrivent respectivement :

$$p(x) = \frac{\rho_0 c_0^2}{i\omega} \left[\frac{(U_3 - U_1) \cos(kx)}{(V_1 + V_3) \cos(kx_0) + [1 + (\gamma - 1)f_h] V_s \frac{\sin(kx_0)}{kx_0}} - \frac{(U_3 + U_1) \sin(kx)}{[1 + (\gamma - 1)f_h] V_s \frac{\cos(kx_0)}{kx_0} + (V_1 + V_3) \sin(kx_0)} \right], \quad (2.12)$$

$$\text{et} \quad < u_x >_{\zeta} = \frac{1}{S_s} \left[\frac{(U_3 + U_1)/2 \cos(kx)}{\cos(kx_0) - \frac{(V_1 + V_3)k_0^2 x_0}{(1-f_v)V_s k} \sin(kx_0)} + \frac{(U_3 - U_1)/2 \sin(kx)}{\frac{(V_1 + V_3)k_0^2 x_0}{(1-f_v)V_s k} \cos(kx_0) + \sin(kx_0)} \right]. \quad (2.13)$$

En effectuant un développement limité à l'ordre 1 des fonctions trigonométriques ($\cos(kx) \sim 1$, $\sin(kx) \sim kx$, $\cos(kx_0) \sim 1$, $\sin(kx_0) \sim kx_0$), les expressions de la pression acoustique et de la vitesse particulaire, en première approximation, prennent alors les formes suivantes pour les fréquences les plus basses :

$$p = \frac{\rho_0 c_0^2}{i\omega} \frac{U_3 - U_1}{V_1 + V_3 + [1 + (\gamma - 1)f_h] V_s}, \quad (2.14)$$

$$\text{et} \quad < u >_{\zeta} = \frac{1}{S_s} \left[\frac{(U_3 + U_1)/2}{1 - \frac{(V_1 + V_3)k_0^2 x_0^2}{(1-f_v)V_s}} \right]. \quad (2.15)$$

La pression acoustique p est proportionnelle à la somme des débits U_3 et $(-U_1)$ entrant dans la cavité. Le facteur $V_1 + V_3$ représente le volume de fluide total hors du domaine de l'empilement et

le facteur $[1 + (\gamma - 1)f_h]V_s$ représente le volume de fluide contenu dans l'empilement, corrigé par un facteur réactif et dissipatif d'origine thermique. La pression dans l'empilement est donc inversement proportionnelle au volume de fluide total équivalent contenu dans le système.

La vitesse particulaire u est proportionnelle à la demi-différence des débits U_3 et $-U_1$ entrant dans la cavité.

Ce modèle permet également la description du champ acoustique dans l'empilement d'un réfrigérateur à quatre sources lorsque l'hypothèse d'uniformité du champ de pression et de vitesse dans l'empilement est retenue. C'est l'objet du paragraphe suivant.

2.1.2 Champ acoustique dans un système à quatre sources

Le système étudié dans ce paragraphe est un réfrigérateur compact à 4 sources (fig. 2.3). Il est constitué d'une "petite" cavité parallélépipédique, dont les dimensions des côtés $L_x = 2x_0$, $L_y = 2y_0$, $L_z = 2z_0$ sont très inférieures à la longueur d'onde considérée (tout en restant très supérieures à l'épaisseur des couches limites thermovisqueuses), remplie d'un empilement de plaques, parallèles au plan (x, y) de surface $4x_0y_0$. L'épaisseur de chaque plaque est $2e_s$ et la distance entre les plaques est $2h$. Le volume de fluide utile dans l'empilement est alors $V_s = 8x_0y_0z_0\frac{h}{h+e_s}$. Les volumes compris entre l'empilement et les diaphragmes des sources $i = 1, 4$ sont respectivement notées $V_{i=1,4}$. Le fluide contenu dans cette cavité est le siège d'un champ de pression acoustique créé par quatre sources acoustiques repérées par les indices i de 1 à 4 dans le sens trigonométrique. Les sources sont caractérisées par leurs vitesses, orientées dans le sens des axes, notées $u_{i=1,3}$ pour les sources situées respectivement en $x_0 + \epsilon_1$ et en $-x_0 - \epsilon_3$ de surface $S_y = 4y_0z_0$ et $u_{i=2,4}$ pour les sources situées respectivement en $y_0 + \epsilon_2$ et en $-y_0 - \epsilon_4$ de surface $S_x = 4x_0z_0$; les débits associés sont notés $U_{i=1,3} = S_y u_{i=1,3}$ et $U_{i=2,4} = S_x u_{i=2,4}$. L'origine des coordonnées est prise au centre de la cavité. La vitesse particulaire et la pression acoustique dans la cavité peuvent être exprimées en toute première approximation à partir des relations (2.14) et (2.15) en supposant que les champs acoustiques créés par les couples de sources en vis-à-vis sont indépendants :

$$p_x = \frac{\rho_0 c_0^2}{i\omega} \frac{U_3 - U_1}{V_1 + V_3 + [1 + (\gamma - 1)f_h]V_s}, \quad U_x = \frac{(U_1 + U_3)/2}{1 - \frac{(V_1 + V_3)k_0^2 x_0^2}{(1-f_v)V_s}}, \quad (2.16)$$

$$p_y = \frac{\rho_0 c_0^2}{i\omega} \frac{U_4 - U_2}{V_2 + V_4 + [1 + (\gamma - 1)f_h]V_s}, \quad U_y = \frac{(U_2 + U_4)/2}{1 - \frac{(V_2 + V_4)k_0^2 y_0^2}{(1-f_v)V_s}}. \quad (2.17)$$

Choisissant de créer la vitesse particulaire suivant l'axe x , les sources 1 et 3 sont alimentées électriquement en opposition de phase ($\frac{U_3}{|U_3|} = \frac{U_1}{|U_1|}$, $p_x \approx 0$), la pression étant alors créée par les sources 2 et 4 alimentées en phase ($\frac{U_4}{|U_4|} = -\frac{U_2}{|U_2|}$, $U_y \approx 0$). Le champ acoustique dans l'empilement prend alors la forme approchée suivante,

$$p = \frac{\rho_0 c_0^2}{i\omega} \frac{2U_2}{V_2 + V_4 + [1 + (\gamma - 1)f_h]V_s}, \quad (2.18)$$

$$\langle u_x \rangle_\zeta = \frac{1}{S_y} \frac{U_1}{1 - \frac{(V_1 + V_3)k_0^2 x_0^2}{(1-f_v)V_s}}, \quad (2.19)$$

$$\langle u_y \rangle_\zeta = 0. \quad (2.20)$$

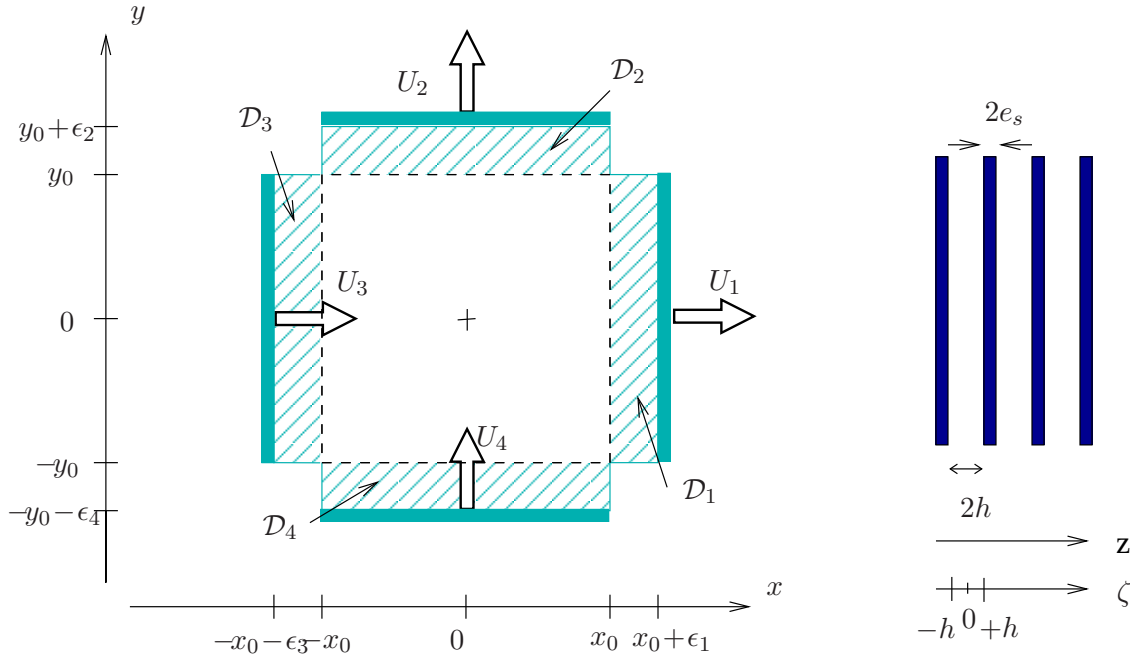


FIG. 2.3 – Réfrigérateur à quatre sources. Les quantités $U_{i=1,4}$ représentent les débits acoustiques des sources 1 à 4 situées en $\pm(x_0 + \epsilon)$ et en $\pm(y_0 + \epsilon)$ orientés dans le sens des axes. La vue de droite représente une coupe de l'empilement.

Dans ce modèle très simplifié, la pression acoustique et la vitesse particulaire sont indépendantes l'une de l'autre : le champ de pression acoustique est créé par les haut-parleurs 2 et 4 et le champ de vitesse particulaire suivant x par les haut-parleurs 1 et 3.

L'objet du paragraphe suivant est de modéliser un système à quatre sources avec empilement de plaques en prenant en compte l'effet de chaque source sur le champ de pression acoustique et sur les composantes suivant x et y du champ de vitesse particulaire, de telle sorte que ces deux champs acoustiques ne sont plus supposés totalement indépendants l'un de l'autre. En d'autres termes, la contribution de chaque couple de haut-parleurs à chaque couple de champs est retenue avec le poids de chacun d'eux.

2.2 Champ acoustique dans un système à quatre sources en fonction des vitesses des sources

2.2.1 Équation de propagation et forme de solution dans l'empilement

2.2.1.1 Équations fondamentales

Le système considéré (fig. 2.3) et les notations utilisées sont celles du paragraphe 2.1.2.

Les équations fondamentales gouvernant le comportement du fluide dans l'empilement sont les équations de base de l'acoustique linéaire. Les hypothèses retenues étant celles du paragraphe 1.2.1.1, l'équation de Navier-Stokes (1.18), l'équation de conservation de la masse (1.21) et l'équation de diffusion de la chaleur dans le fluide (1.26) s'écrivent respectivement, compte tenu du fait que le

gradient de température $\frac{\partial T_0}{\partial x}$ est considéré comme nul ici et que la composante u_y de la vitesse n'est pas négligeable,

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial \zeta^2} + k_v^2 u_x = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (2.21a)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial \zeta^2} + k_v^2 u_y = \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (2.21b)$$

$$i\omega(-\alpha\tau + \chi_t p) + \partial_x u_x + \partial_y u_y + \partial_z u_z = 0, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \zeta^2} + k_h^2 \tau = -i\omega \frac{T_0 \alpha}{\kappa} p. \quad (2.23)$$

Les conditions aux frontières fluide/paroi $x \in [-x_0, x_0], \forall y \in [-y_0, y_0], \zeta = \pm h$ s'écrivent :

$$u_x(x, y, \zeta = \pm h) = 0, \quad (2.24a)$$

$$u_y(x, y, \zeta = \pm h) = 0, \quad (2.24b)$$

$$\tau(x, y, \zeta = \pm h) = 0. \quad (2.24c)$$

A ces conditions aux frontières s'ajoutent les conditions aux interfaces $x = \pm x_0$ et $y = \pm y_0$ présentées en détail plus loin au paragraphe 2.2.2.

L'ensemble des quatre équations (2.21a), (2.21b), (2.22), (2.23), associé aux conditions aux frontières (2.24), permet d'exprimer une équation de propagation suivant x et y dans le domaine de l'empilement, dont une solution est recherchée sous une forme adaptée au problème; c'est l'objet du paragraphe suivant.

2.2.1.2 Équation de propagation complexe dans l'empilement et forme de solution retenue

Les solutions des équations différentielles (2.21a) et (2.21b), dont le second membre est indépendant de la variable ζ , qui vérifient les conditions aux limites (2.24a) et (2.24b), s'écrivent respectivement :

$$u_x(x, y, \zeta) = -\frac{\partial_x p}{i\omega \rho_0} \left(1 - \frac{\cos[(1-i)\zeta/\delta_v]}{\cos[(1-i)h/\delta_v]}\right), \quad (2.25a)$$

$$u_y(x, y, \zeta) = -\frac{\partial_y p}{i\omega \rho_0} \left(1 - \frac{\cos[(1-i)\zeta/\delta_v]}{\cos[(1-i)h/\delta_v]}\right). \quad (2.25b)$$

Les valeurs moyennes $\langle u_x \rangle_\zeta$ et $\langle u_y \rangle_\zeta$ des vitesses u_x, u_y suivant ζ variant de $-h$ à h s'écrivent, en négligeant dans l'intégrale les variations de p suivant ζ [22],

$$\langle u_x \rangle_\zeta = -\frac{\partial_x p}{i\omega \rho_0} (1 - f_v), \quad (2.26a)$$

$$\langle u_y \rangle_\zeta = -\frac{\partial_y p}{i\omega \rho_0} (1 - f_v), \quad (2.26b)$$

où la fonction f_v est définie par la relation (1.32).

La solution de l'équation différentielle (2.23) qui satisfait à la condition à la limite (2.24c) s'écrit :

$$\tau(\zeta) = \frac{T_0 \alpha}{\rho_0 C_p} p \left[1 - \frac{\cos[(1-i)\zeta/\delta_h]}{\cos[(1-i)h/\delta_h]} \right], \quad (2.27)$$

et l'expression de sa valeur moyenne sur l'épaisseur d'une couche de fluide est donnée par (en négligeant dans l'intégrale les variations de p suivant ζ [22])

$$\langle \tau \rangle_\zeta = \frac{T_0 \alpha}{\rho_0 C_p} p (1 - f_h), \quad (2.28)$$

où la fonction f_h est définie par la relation (1.42).

Pour caractériser le champ acoustique primaire qui est à l'origine du processus thermoacoustique dans l'empilement, la valeur moyenne de la loi de conservation de la masse (2.22) est calculée suivant z , plus précisément suivant ζ variant de $-h$ à h ,

$$i\omega(-\alpha \langle \tau \rangle_\zeta + \chi_t p) + \partial_x \langle u_x \rangle_\zeta + \partial_y \langle u_y \rangle_\zeta + \langle \partial_z u_z \rangle_\zeta = 0, \quad (2.29)$$

la valeur moyenne $\langle p \rangle_\zeta$ de la pression acoustique p étant la pression acoustique p elle-même du fait qu'elle ne dépend pratiquement pas de la coordonnée ζ dans l'empilement. Le facteur $\langle \partial_z u_z \rangle_\zeta = \frac{1}{2h} [u_z(-h) - u_z(h)]$ s'annule car $u_z(-h) = u_z(h) = 0$, d'où

$$i\omega(-\alpha \langle \tau \rangle_\zeta + \chi_t p) + \partial_x \langle u_x \rangle_\zeta + \partial_y \langle u_y \rangle_\zeta = 0. \quad (2.30)$$

Le report dans cette équation des expressions (2.26a), (2.26b) et (2.28) des valeurs moyennes de u_x , u_y , et τ donne l'équation de propagation pour la pression acoustique dans l'empilement de plaques en régime harmonique

$$\partial_{xx}^2 p + \partial_{yy}^2 p + k^2 p = 0, \quad x \in [-x_0, x_0], y \in [-y_0, y_0], \quad (2.31)$$

où le nombre d'onde k est donné par

$$k = k_0 \sqrt{\frac{1 + (\gamma - 1)f_h}{(1 - f_v)}}. \quad (2.32)$$

La pression acoustique p dans la cavité peut donc être écrite sous la forme suivante, quelque soit $x \in [-x_0, x_0]$ et $y \in [-y_0, y_0]$ (le facteur $e^{i\omega t}$ est omis) :

$$p(x, y) = A \cos(k_x x + \phi_x) \cos(k_y y + \phi_y), \quad (2.33)$$

soit, en développant les fonctions trigonométriques (l'intérêt de ce développement apparaît dans le paragraphe 2.2.3) :

$$\begin{aligned} p(x, y) &= A \cos(k_x x) \cos(\phi_x) \cos(k_y y) \cos(\phi_y) \\ &+ A \sin(k_x x) \sin(\phi_x) \sin(k_y y) \sin(\phi_y) \\ &- A \cos(k_x x) \cos(\phi_x) \sin(k_y y) \sin(\phi_y) \\ &- A \sin(k_x x) \sin(\phi_x) \cos(k_y y) \cos(\phi_y), \end{aligned} \quad (2.34)$$

où A désigne l'amplitude en pression de l'onde acoustique, k_x , k_y les nombres d'ondes complexes reliés par la relation de dispersion $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, et ϕ_x , ϕ_y des facteurs de phases. Les paramètres A , k_x , k_y , ϕ_x , ϕ_y sont les constantes d'intégration du problème.

L'objectif des paragraphes suivants est d'exprimer le champ de pression acoustique dans l'empilement. Pour cela, les constantes d'intégration A , k_x , k_y , ϕ_x et ϕ_y sont déterminées en fonction des vitesses moyennes des quatre sources, compte tenu des conditions aux interfaces entre l'empilement et les cavités périphériques $\mathcal{D}_{i=1,4}$ de volume $V_{i=1,4}$ situées entre l'empilement et les sources. La recherche des expressions de ces cinq constantes d'intégration nécessite d'écrire les expressions des champs de pression acoustique dans chacun de ces domaines $\mathcal{D}_i$, qui dépendent chacun d'eux de deux constantes d'intégration (ce qui porte à treize le nombre d'équations à écrire).

2.2.2 Équation du mouvement dans chaque cavité périphérique $\mathcal{D}_i$

Dans ce qui suit, l'expression de la pression acoustique, qui doit être déterminée pour chaque cavité périphérique, est donnée dans le domaine $\mathcal{D}_1$. L'expression de la pression acoustique dans les autres domaines peut facilement être extrapolée à partir des résultats obtenus dans le domaine 1.

Dans le domaine $\mathcal{D}_1$ (défini par $x \in [x_0, x_0 + \epsilon_1]$, $y \in [-y_0, y_0]$, $z \in [-z_0, z_0]$), les effets dissipatifs sont négligés ($f_{v,h} \approx 0$, $k \approx k_0$), les parois latérales en $y = \pm y_0$ n'ont pas d'existence réelle (il n'y a donc pas de conditions particulières sur ces parois) et seule la valeur moyenne de la vitesse sur la section du haut-parleur est prise en compte. Dans le domaine $\mathcal{D}_1$, seule la propagation suivant l'axe x est considérée et les variations suivant y sont négligées à l'interface $x = x_0$; de la sorte, la pression acoustique p_1 dans cette cavité périphérique $\mathcal{D}_1$ est solution de l'équation de propagation hors des sources :

$$\partial_{xx}^2 p_1 + k_0^2 p_1 = 0, \quad x \in [x_0, x_0 + \epsilon_1], y \in [-y_0, y_0], \quad (2.35)$$

et satisfait aux conditions aux interfaces suivantes, quel que soit $y \in [-y_0, y_0]$:

$$p_1(x_0) = p(x_0, y), \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} &\approx A \cos(k_x x_0 + \phi_x) \cos(\phi_y), \\ \partial_x p_1(x_0) &= \frac{h}{h + e_s} (1 - f_v) \partial_x p(x_0, y), \\ &\approx -A \frac{h}{h + e_s} (1 - f_v) k_x \sin(k_x x_0 + \phi_x) \cos(\phi_y), \end{aligned} \quad (2.37)$$

à l'interface entre la cavité périphérique et l'empilement, et

$$\langle \partial_x p_1(x_0 + \epsilon_1) \rangle_{yz} = -i\omega \rho_0 \frac{U_1}{S_y} = -i\omega \rho_0 \langle u_1 \rangle_{yz}, \quad (2.38)$$

au niveau de la source 1, où U_1 et $\langle u_1 \rangle_{yz}$ désignent respectivement le débit et la vitesse suivant x de la source 1 moyennés dans le plan (y, z) .

La solution de l'équation de propagation (2.35) peut s'écrire sous la forme :

$$p_1(x) = A_1 e^{-ik_0(x-(x_0+\epsilon_1))} + B_1 e^{ik_0(x-(x_0+\epsilon_1))}. \quad (2.39)$$

Le report de cette solution pour la pression acoustique dans le milieu $\mathcal{D}_1$ dans les conditions aux interfaces (2.36), (2.37), (2.38), conduit au système d'équations suivant,

$$\begin{bmatrix} e^{ik_0\epsilon_1} & e^{-ik_0\epsilon_1} & -\cos(k_x x_0 + \phi_x) \\ -ie^{ik_0\epsilon_1} & ie^{-ik_0\epsilon_1} & \frac{h}{h+e_s}(1-f_v)\frac{k_x}{k_0}\sin(k_x x_0 + \phi_x) \\ -i & i & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} A_1 k_0 \cos(\phi_y) \\ B_1 k_0 \cos(\phi_y) \\ A k_0 \cos(\phi_y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i\rho_0\omega\frac{U_1}{S_y} \end{pmatrix}. \quad (2.40)$$

Ces trois équations relient entre elles sept constantes d'intégration, les cinq qui sont liées au champ acoustique dans l'empilement ($A, k_x, k_y, \phi_x, \phi_y$) et celles qui sont liées au champ acoustique dans le domaine $\mathcal{D}_1$ (A_1 et B_1).

Deux cas doivent être développés suivant que le débit U_1 est nul ou non.

i. Cas où le débit U_1 est non nul

Dans le cas où le débit U_1 est non nul, la résolution du système permet d'exprimer A_1 et B_1 (c'est-à-dire le champ de pression acoustique dans le domaine $\mathcal{D}_1$) et donne une relation entre les constantes d'intégration A, k_x, ϕ_x, ϕ_y en fonction de la vitesse moyenne $\langle u_1 \rangle_{yz}$, pour un déterminant non nul ($\frac{h}{h+e_s} \frac{k_x}{k_0} (1-f_v) \sin(k_x x_0 + \phi_x) \cos(k_0 \epsilon_1) + \sin(k_0 \epsilon_1) \cos(k_x x_0 + \phi_x) \neq 0$) :

$$A_1 k_0 \cos(\phi_y) = \frac{i\omega \rho_0 U_1 e^{-ik_0 \epsilon_1} \left[\cos(k_x x_0 + \phi_x) - i \frac{h}{h+e_s} \frac{k_x}{k_0} (1-f_v) \sin(k_x x_0 + \phi_x) \right]}{2S_y \left[\frac{h}{h+e_s} \frac{k_x}{k_0} (1-f_v) \sin(k_x x_0 + \phi_x) \cos(k_0 \epsilon_1) + \sin(k_0 \epsilon_1) \cos(k_x x_0 + \phi_x) \right]}, \quad (2.41)$$

$$B_1 k_0 \cos(\phi_y) = \frac{i\omega \rho_0 U_1 e^{ik_0 \epsilon_1} \left[\cos(k_x x_0 + \phi_x) + i \frac{h}{h+e_s} \frac{k_x}{k_0} (1-f_v) \sin(k_x x_0 + \phi_x) \right]}{2S_y \left[\frac{h}{h+e_s} \frac{k_x}{k_0} (1-f_v) \sin(k_x x_0 + \phi_x) \cos(k_0 \epsilon_1) + \sin(k_0 \epsilon_1) \cos(k_x x_0 + \phi_x) \right]}, \quad (2.42)$$

$$Ak_0 \cos(\phi_y) = \frac{i\omega \rho_0 U_1}{S_y \left(\frac{h}{h+e_s} \frac{k_x}{k_0} (1-f_v) \sin(k_x x_0 + \phi_x) \cos(k_0 \epsilon_1) + \sin(k_0 \epsilon_1) \cos(k_x x_0 + \phi_x) \right)}. \quad (2.43)$$

Les expressions de A_1 et B_1 en fonction de A , qui découlent de ces relations, reportées dans l'expression (2.39) du champ de pression acoustique dans le domaine $\mathcal{D}_1$, donnent :

$$p_1(x) = A \left(\cos(k_x x_0 + \phi_x) \cos(k_0(x - x_0)) - \frac{h}{h+e_s} \frac{k_x}{k_0} (1-f_v) \sin(k_x x_0 + \phi_x) \sin(k_0(x - x_0)) \right) \quad (2.44)$$

Les relations (2.41) et (2.42) permettent d'exprimer le champ de pression acoustique p_1 , ce qui sort de l'objectif du propos immédiat. Seule l'équation (2.43) est donc utile pour la suite.

ii. Cas où le débit U_1 est nul

Dans le cas où le débit U_1 est nul (c'est-à-dire si la source située en $x = x_0 + \epsilon_1$ est remplacée par une paroi rigide), le système (2.40), qui devient

$$2A_1 \cos(k_0 \epsilon_1) - A \cos(k_x x_0 + \phi_x) = 0, \quad (2.45)$$

$$2A_1 \sin(k_0 \epsilon_1) + A \frac{h}{h+e_s} \frac{k_x}{k_0} (1-f_v) \sin(k_x x_0 + \phi_x) = 0, \quad (2.46)$$

$$A_1 = B_1, \quad (2.47)$$

admet une solution non nulle, si le déterminant du système $\frac{h}{h+e_s} \frac{k_x}{k_0} (1-f_v) \sin(k_x x_0 + \phi_x) \cos(k_0 \epsilon_1) + \sin(k_0 \epsilon_1) \cos(k_x x_0 + \phi_x)$ est nul, soit si

$$\phi_x = -\arctan \left[\frac{\tan(k_0 \epsilon_1)}{\frac{h}{h+e_s} \frac{k_x}{k_0} (1-f_v)} \right] - k_x x_0. \quad (2.48)$$

C'est la relation utile par la suite pour calculer le champ dans l'empilement. Par ailleurs, compte tenu de cette relation, la résolution du système d'équations (2.45) à (2.47) donne

$$A_1 = B_1 = \frac{A}{2\sqrt{\cos(k_0\epsilon_1)^2 + \left(\frac{\sin(k_0\epsilon_1)}{\frac{h}{h+e_s}k_x(1-f_v)}\right)^2}}.$$

Par suite, si $\langle u_1 \rangle_{yz} = 0$, le champ de pression acoustique dans le domaine $\mathcal{D}_1$, est donc égal à :

$$p_1(x) = A \frac{\cos(k_0(x - x_0 - \epsilon_1))}{\sqrt{\cos(k_0\epsilon_1)^2 + \left(\frac{\sin(k_0\epsilon_1)}{\frac{h}{h+e_s}k_x(1-f_v)}\right)^2}}. \quad (2.49)$$

$$(2.50)$$

Afin de déterminer le champ de pression acoustique dans l'empilement, il est nécessaire d'envisager les configurations possibles suivant que telle ou telle paroi est parfaitement rigide ($U_i = 0$) ou comporte une source ($U_i \neq 0$). Seules les configurations suivantes, où :

- les débits U_2 et U_4 sont nuls,
- tous les débits $U_{i=1,4}$ sont non nuls,

qui correspondent à des configurations expérimentales sont étudiées dans ce qui suit.

2.2.3 Champ acoustique dans un réfrigérateur compact à quatre sources (les débits $U_{i=1,4}$ sont non nuls)

La relation (2.43) peut être réécrite en effectuant un développement limité des fonctions trigonométriques

$$A \cos(\phi_y) \left[\cos(\phi_x) \left(\frac{h}{h+e_s} (1-f_v) k_x^2 x_0 + k_0^2 \epsilon_1 \right) + \sin(\phi_x) k_x \left(\frac{h}{h+e_s} (1-f_v) - k_0^2 \epsilon_1 x_0 \right) \right] \approx i\omega \rho_0 \frac{U_1}{S_y}, \quad (2.51)$$

$$\text{soit } A \cos(\phi_y) \left[\cos(\phi_x) \left((1-f_v) k_x^2 \frac{V_s}{2} + k_0^2 V_1 \right) + \sin(\phi_x) k_x S_y \frac{h}{h+e_s} (1-f_v) \left(1 - \frac{V_1 k_0^2 x_0^2}{(1-f_v) V_s} \right) \right] \approx i\omega \rho_0 U_1, \quad (2.52)$$

en remarquant que $V_s = 2x_0 S_y \frac{h}{h+e_s}$ et $V_1 = 2x_0 \epsilon_1$.

De la même manière que pour obtenir la relation (2.52), si les débits U_2 , U_3 , U_4 sont non nuls, la résolution du problème dans les cavités périphériques $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ donne trois autres relations entre les constantes d'intégration A , k_x , k_y , ϕ_x et ϕ_y :

$$A \cos(\phi_x) \left[\cos(\phi_y) \left((1-f_v) k_y^2 \frac{V_s}{2} + k_0^2 V_2 \right) + \sin(\phi_y) k_y S_x \frac{h}{h+e_s} (1-f_v) \left(1 - \frac{V_2 k_0^2 y_0^2}{(1-f_v) V_s} \right) \right] \approx i\omega \rho_0 U_2, \quad (2.53)$$

$$A \cos(\phi_y) \left[-\cos(\phi_x) \left((1-f_v) k_x^2 \frac{V_s}{2} + k_0^2 V_3 \right) + \sin(\phi_x) k_x S_y \frac{h}{h+e_s} (1-f_v) \left(1 - \frac{V_3 k_0^2 x_0^2}{(1-f_v) V_s} \right) \right] \approx i\omega \rho_0 U_3, \quad (2.54)$$

$$A \cos(\phi_x) \left[-\cos(\phi_y) \left((1-f_v) k_y^2 \frac{V_s}{2} + k_0^2 V_4 \right) + \sin(\phi_y) k_y S_x \frac{h}{h+e_s} (1-f_v) \left(1 - \frac{V_4 k_0^2 y_0^2}{(1-f_v) V_s} \right) \right] \approx i\omega \rho_0 U_4. \quad (2.55)$$

La soustraction et l'addition des couples de relations (2.52, 2.54) et (2.53, 2.55) donnent

$$A \cos(\phi_x) \cos(\phi_y) [(1 - f_v)k_x^2 V_s + k_0^2(V_1 + V_3)] \approx i\omega\rho_0 (U_1 - U_3), \quad (2.56)$$

$$A \cos(\phi_x) \cos(\phi_y) [(1 - f_v)k_y^2 V_s + k_0^2(V_2 + V_4)] \approx i\omega\rho_0 (U_2 - U_4), \quad (2.57)$$

$$2A \sin(\phi_x) \cos(\phi_y) k_x S_y \frac{h}{h + e_s} (1 - f_v) [1 - \frac{(V_1 + V_3)k_0^2 x_0^2}{(1 - f_v)V_s}] \approx i\omega\rho_0 (U_1 + U_3), \quad (2.58)$$

$$2A \cos(\phi_x) \sin(\phi_y) k_y S_x \frac{h}{h + e_s} (1 - f_v) [1 - \frac{(V_2 + V_4)k_0^2 y_0^2}{(1 - f_v)V_s}] \approx i\omega\rho_0 (U_2 + U_4). \quad (2.59)$$

Aux quatre expressions (2.56), (2.57), (2.58), (2.59) précédentes qui relient les 5 constantes d'intégration A , k_x , k_y , ϕ_x et ϕ_y aux débits $U_{i=1,4}$ des sources, est associée la relation de dispersion

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2. \quad (2.60)$$

qui permet de fermer le système à résoudre. Les solutions de ce système s'écrivent

$$k_x = k \sqrt{\frac{d_i}{d_i + d_p} \left(1 + \frac{V_2 + V_4}{V_s [1 + (\gamma - 1)f_h]} \right) - \frac{d_p}{d_i + d_p} \frac{V_1 + V_3}{V_s [1 + (\gamma - 1)f_h]}}, \quad (2.61)$$

$$k_y = k \sqrt{\frac{d_p}{d_i + d_p} \left(1 + \frac{V_1 + V_3}{V_s [1 + (\gamma - 1)f_h]} \right) - \frac{d_i}{d_i + d_p} \frac{V_2 + V_4}{V_s [1 + (\gamma - 1)f_h]}}, \quad (2.62)$$

$$\tan(\phi_x) = - \frac{\sigma_i}{2\sqrt{d_i + d_p} \sqrt{d_i \left(1 + \frac{V_2 + V_4}{V_s [1 + (\gamma - 1)f_h]} \right) - d_p \frac{V_1 + V_3}{V_s [1 + (\gamma - 1)f_h]}}, \quad (2.63)$$

$$\tan(\phi_y) = - \frac{\sigma_p}{2\sqrt{d_i + d_p} \sqrt{d_p \left(1 + \frac{V_1 + V_3}{V_s [1 + (\gamma - 1)f_h]} \right) - d_i \frac{V_2 + V_4}{V_s [1 + (\gamma - 1)f_h]}}, \quad (2.64)$$

$$A \cos(\phi_x) \cos(\phi_y) = -i\rho_0\omega (d_i + d_p), \quad (2.65)$$

où les paramètres d_i , d_p , σ_i et σ_p , définis par

$$d_i = \frac{U_3 - U_1}{k_0^2((\sum_{i=1,4} V_i) + V_s [1 + (\gamma - 1)f_h])}, \quad d_p = \frac{U_4 - U_2}{k_0^2((\sum_{i=1,4} V_i) + V_s [1 + (\gamma - 1)f_h])}, \quad (2.66)$$

$$\sigma_i = \frac{U_3 + U_1}{k S_y \frac{h}{h + e_s} (1 - f_v) [1 - \frac{(V_1 + V_3)k_0^2 x_0^2}{(1 - f_v)V_s}]}, \quad \sigma_p = \frac{U_4 + U_2}{k S_x \frac{h}{h + e_s} (1 - f_v) [1 - \frac{(V_2 + V_4)k_0^2 y_0^2}{(1 - f_v)V_s}]}, \quad (2.67)$$

sont proportionnels respectivement à la différence et à la somme des débits des sources d'indices impairs (indices i) ou pairs (indices p).

Le champ acoustique dans l'empilement est totalement défini en reportant les relations (2.62) à (2.65) dans les expressions (2.34), (2.26.a) et (2.26.b) de la pression acoustique et des composantes u_x et u_y de la vitesse particulaire. Le champ acoustique s'écrit alors, en effectuant un développement

limité des fonctions trigonométriques,

$$p(x, y) \approx A \cos(\phi_x) \cos(\phi_y) - A \cos(\phi_x) \sin(\phi_y) k_y y - A \sin(\phi_x) \cos(\phi_y) k_x x, \\ \approx -i\omega\rho_0 \left(d_i + d_p + \frac{1}{2} [\sigma_i k_x + \sigma_p k_y] \right), \quad (2.68)$$

$$\langle u_x \rangle_\zeta \approx (1-f_v) \frac{Ak_x}{i\omega\rho_0} [\sin(\phi_x) \cos(\phi_y) + \cos(\phi_x) \cos(\phi_y) k_x x - \sin(\phi_x) \sin(\phi_y) k_y y], \\ \approx (1-f_v) \left[\frac{\sigma_i k}{2} - \left[d_i \left(1 + \frac{V_2 + V_4}{V_s [1 + (\gamma - 1) f_h]} \right) - d_p \frac{V_1 + V_3}{V_s [1 + (\gamma - 1) f_h]} \right] k^2 x + \frac{\sigma_i \sigma_p}{4(d_i + d_p)} k^2 y \right], \quad (2.69)$$

$$\langle u_y \rangle_\zeta \approx (1-f_v) \frac{Ak_y}{i\omega\rho_0} [\cos(\phi_x) \sin(\phi_y) - \sin(\phi_x) \sin(\phi_y) k_x x + \cos(\phi_x) \cos(\phi_y) k_y y], \\ \approx (1-f_v) \left[\frac{\sigma_p k}{2} - \left[d_p \left(1 + \frac{V_1 + V_3}{V_s [1 + (\gamma - 1) f_h]} \right) - d_i \frac{V_2 + V_4}{V_s [1 + (\gamma - 1) f_h]} \right] k^2 y + \frac{\sigma_i \sigma_p}{4(d_i + d_p)} k^2 x \right]. \quad (2.70)$$

La notion de dépendance entre les champs de pression acoustique et de vitesse particulaire apparaît dans ce modèle (contrairement au modèle du paragraphe 2.1) puisque les expressions des composantes de la vitesse dépendent des vitesses des quatre sources et des deux coordonnées x et y .

Cas particulier du réfrigérateur thermoacoustique compact à 4 sources

Dans le cas particulier correspondant au réfrigérateur thermoacoustique compact à 4 sources

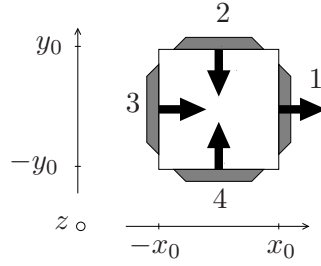


FIG. 2.4 – Configuration pour laquelle les sources 2 et 4 vibrent en opposition de phase et les sources 1 et 3 vibrent en phase

représenté sur la figure 2.4, où les sources 2 et 4 vibrent en opposition de phase avec une même amplitude ($\frac{U_2}{|U_2|} = -\frac{U_4}{|U_4|}$, $\sigma_p \sim 0$), afin de créer un champ de pression acoustique, et les sources 1 et 3 vibrent en phase avec une même amplitude ($\frac{U_1}{|U_1|} = \frac{U_3}{|U_3|}$, $d_i \sim 0$), afin de créer un champ de vitesse particulaire suivant l'axe x , les constantes d'intégration prennent la forme :

$$k_x \sim k \sqrt{-\frac{V_1 + V_3}{V_s [1 + (\gamma - 1) f_h]}}, \quad (2.71)$$

$$k_y \sim k \sqrt{1 + \frac{V_1 + V_3}{V_s [1 + (\gamma - 1) f_h]}}, \quad (2.72)$$

$$\tan(\phi_x) \sim -\frac{\sigma_i}{2d_p \sqrt{-\frac{V_1 + V_3}{V_s [1 + (\gamma - 1) f_h]}}, \quad (2.73)$$

$$\tan(\phi_y) \sim 0, \quad (2.74)$$

$$A \cos(\phi_x) \sim -i\omega\rho_0 d_p, \quad (2.75)$$

et l'expression de la pression acoustique (2.34), compte tenu des relations (2.71) à (2.75), se réduit à

$$p(x, y) \approx -i\omega\rho_0 \left(d_p + \frac{\sigma_i k x}{2} \right) \quad (2.76)$$

$$\approx \frac{i\omega\rho_0}{k_0^2} \frac{2U_2}{\left(\sum_{i=1,4} V_i \right) + V_s [1 + (\gamma - 1)f_h]} - \frac{i\omega\rho_0}{\frac{h}{h+e_s}(1-f_v)} \frac{U_1}{S_y \left[1 - \frac{(V_1+V_3)k_0^2 y_0^2}{(1-f_v)V_s} \right]} x. \quad (2.77)$$

La vitesse particulière s'écrit, en faisant usage des équations (2.26.a) et (2.26.b)

$$\langle u_x \rangle_\zeta \approx (1-f_v) \left[\frac{\sigma_i k}{2} + d_p \frac{V_1 + V_3}{V_s [1 + (\gamma - 1)f_h]} k^2 x \right], \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} &\approx \frac{h+e_s}{h} \frac{U_1}{S_y \left[1 - \frac{(V_1+V_3)k_0^2 y_0^2}{(1-f_v)V_s} \right]} - \frac{2U_2 \frac{V_1+V_3}{V_s}}{\left(\sum_{i=1,4} V_i \right) + V_s [1 + (\gamma - 1)f_h]} y, \\ \langle u_y \rangle_\zeta &\approx -(1-f_v) d_p \left(1 + \frac{V_1 + V_3}{V_s [1 + (\gamma - 1)f_h]} \right) k^2 y, \\ &\approx \frac{2U_2 (V_1 + V_3 + V_s [1 + (\gamma - 1)f_h])}{V_s \left(\sum_{i=1,4} V_i \right) + V_s [1 + (\gamma - 1)f_h]} y. \end{aligned} \quad (2.79)$$

2.2.4 Champ acoustique dans un réfrigérateur compact à deux sources (les débits U_2 et U_4 sont nuls)

De la même manière que pour obtenir la relation (2.48), si les débits U_2 et U_4 sont nuls, la résolution du problème dans les cavités périphériques $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_4$ conduit aux relations

$$\phi_y = -\arctan \left[\frac{\tan(k_0 \epsilon_2)}{\frac{h}{h+e_s} \frac{k_y}{k_0} (1-f_v)} \right] - k_y y_0 \approx -\frac{k_0 \epsilon_2}{\frac{h}{h+e_s} \frac{k_y}{k_0} (1-f_v)} - k_y y_0, \quad (2.80)$$

$$\phi_y = \arctan \left[\frac{\tan(k_0 \epsilon_4)}{\frac{h}{h+e_s} \frac{k_y}{k_0} (1-f_v)} \right] + k_y y_0 \approx \frac{k_0 \epsilon_4}{\frac{h}{h+e_s} \frac{k_y}{k_0} (1-f_v)} + k_y y_0 \quad (2.81)$$

Compte-tenu de ces relations, il vient

$$k_y \sim k_0 \sqrt{-\frac{\epsilon_2 + \epsilon_4}{2y_0 \frac{h}{h+e_s} (1-f_v)}} = k \sqrt{-\frac{V_2 + V_4}{V_s [1 + (\gamma - 1)f_h]}}, \quad (2.82a)$$

$$\phi_y \sim \frac{k_0^2 (\epsilon_4 - \epsilon_2)}{2 \frac{h}{h+e_s} (1-f_v) k} \sqrt{-\frac{V_s [1 + (\gamma - 1)f_h]}{V_2 + V_4}}. \quad (2.82b)$$

La résolution du système constitué des relations (2.82a) et (2.82b) qui relient les constantes d'intégration ϕ_y et k_y dans le cas où les débits U_2 et U_4 sont nuls, et des relations (2.56) et (2.58) qui relient les constantes d'intégrations aux débits U_1 , et U_3 des sources 1 et 3, et enfin de la relation de dispersion $k^2 = k_x^2 + k_y^2$, permet de déterminer les expressions des 5 constantes d'intégration A , k_x , k_y , ϕ_x , ϕ_y en fonction des débits des sources 1 et 3. Ce système admet comme solution, en reprenant

les expressions (2.66), (2.67) des constantes d_i et σ_i

$$k_x = k \sqrt{1 + \frac{V_2 + V_4}{V_s [1 + (\gamma - 1) f_h]}}, k_y \sim k \sqrt{-\frac{V_2 + V_4}{V_s [1 + (\gamma - 1) f_h]}} \quad (2.83)$$

$$\tan(\phi_x) = \frac{\sigma_i}{2d_i \sqrt{1 + \frac{V_2 + V_4}{V_s [1 + (\gamma - 1) f_h]}}}, \quad (2.84)$$

$$\phi_y \sim \frac{k_0^2 (\epsilon_4 - \epsilon_2)}{2 \frac{h}{h+e_s} (1 - f_v) k} \sqrt{-\frac{V_s [1 + (\gamma - 1) f_h]}{V_2 + V_4}}, \quad (2.85)$$

$$A \cos(\phi_x) \cos(\phi_y) = -i \rho_0 \omega d_i. \quad (2.86)$$

Par conséquent, si $U_2 = U_4 = 0$, les expressions de la pression acoustique (2.34) et de la vitesse particulaire (2.26) dans l'empilement s'écrivent

$$p(x, y) \approx -i \omega \rho_0 \left(d_i + \frac{\sigma_i}{2} k x \right), \quad (2.87)$$

$$\approx -i \omega \rho_0 \left(\frac{U_3 - U_1}{k_0^2 \left(\left(\sum_{i=1,4} V_i \right) + V_s [1 + (\gamma - 1) f_h] \right)} + \frac{U_3 + U_1}{2 S_y \frac{h}{h+e_s} (1 - f_v) \left[1 - \frac{(V_1 + V_3) k_0^2 x_0^2}{(1 - f_v) V_s} \right]} x \right),$$

$$\langle u_x \rangle_\zeta \approx (1 - f_v) \frac{\sigma_i}{2} k - (1 - f_v) d_i \left(1 + \frac{V_2 + V_4}{V_s [1 + (\gamma - 1) f_h]} \right) k^2 x, \quad (2.88)$$

$$\approx \frac{h + e_s}{h} \frac{U_3 + U_1}{2 S_y \left[1 - \frac{(V_1 + V_3) k_0^2 x_0^2}{(1 - f_v) V_s} \right]} - \frac{U_3 - U_1}{V_s} \frac{V_2 + V_4 + V_s [1 + (\gamma - 1) f_h]}{\left(\sum_{i=1,4} V_i \right) + V_s [1 + (\gamma - 1) f_h]} x,$$

$$\langle u_y \rangle_\zeta \approx (1 - f_v) d_i \frac{V_2 + V_4}{V_s [1 + (\gamma - 1) f_h]} k^2 y, \quad (2.89)$$

$$\approx \frac{(U_3 - U_1) \frac{V_2 + V_4}{V_s}}{\left(\sum_{i=1,4} V_i \right) + V_s [1 + (\gamma - 1) f_h]} y.$$

Cas particuliers : les sources 1 et 3 vibrent en phase ou en opposition de phase

Dans le cas particulier (configuration de la figure 2.5.a), où les sources 1 et 3 vibrent en phase,



FIG. 2.5 – Configuration pour laquelle les sources 1 et 3 vibrent en phase (a) et en opposition de phase (b).

($\frac{U_1}{|U_1|} = \frac{U_3}{|U_3|}$, $d_i \sim 0$) afin de créer un champ de vitesse particulaire suivant x . La pression acoustique

et la vitesse particulière dans l'empilement sont alors de la forme,

$$\begin{aligned}
 p &\approx -i\omega\rho_0\frac{\sigma_i}{2}kx \approx -i\omega\rho_0\frac{U_1}{S_y\frac{h}{h+e_s}(1-f_v)[1-\frac{(V_1+V_3)k_0^2x_0^2}{(1-f_v)V_s}]}, \\
 <u_x>_\zeta &\approx (1-f_v)\frac{\sigma_i}{2}k \approx \frac{h+e_s}{h}\frac{U_1}{S_y[1-\frac{(V_1+V_3)k_0^2x_0^2}{(1-f_v)V_s}]}, \\
 <u_y>_\zeta &\approx 0.
 \end{aligned} \tag{2.90}$$

Dans la configuration de la figure 2.5.b, les sources 1 et 3 vibrent en opposition de phase ($\frac{U_1}{|U_1|} = -\frac{U_3}{|U_3|}$, $\sigma_i \sim 0$) afin de générer un champ de pression acoustique. La pression acoustique et la vitesse particulière dans l'empilement sont alors de la forme,

$$\begin{aligned}
 p &\approx -i\omega\rho_0d_i \approx \frac{i\omega\rho_0}{k_0^2} \frac{2U_1}{(\sum_{i=1,4} V_i) + V_s[1 + (\gamma - 1)f_h]}, \\
 <u_x>_\zeta &\approx -(1-f_v)d_i \left(1 + \frac{V_2 + V_4}{V_s[1 + (\gamma - 1)f_h]}\right) k^2x \\
 &\approx \frac{2U_1}{V_s} \frac{V_2 + V_4 + V_s[1 + (\gamma - 1)f_h]}{(\sum_{i=1,4} V_i) + V_s[1 + (\gamma - 1)f_h]}x, \\
 <u_y>_\zeta &\approx (1-f_v)d_i \frac{V_2 + V_4}{V_s[1 + (\gamma - 1)f_h]} k^2y \\
 &\approx -\frac{2U_1\frac{V_2+V_4}{V_s}}{(\sum_{i=1,4} V_i) + V_s[1 + (\gamma - 1)f_h]}y.
 \end{aligned} \tag{2.91}$$

2.3 Champ acoustique en fonction des tensions électriques des haut-parleurs

Les modèles mis en place précédemment mettent en jeu les vitesses des membranes des différents haut-parleurs. Ces données d'entrée sont accessibles à l'expérience (mesures par vibrométrie laser). Cependant, les paramètres de contrôle sur lesquels peut jouer l'utilisateur sont les tensions d'excitation fournies aux haut-parleurs. L'influence de la variation d'une tension fournie à un haut-parleur sur la vitesse de membrane de ce haut-parleur, ainsi que sur la vitesse des membranes des autres haut-parleurs, doit être correctement décrite. C'est l'objet du modèle présenté dans ce paragraphe. Dans un premier temps, l'étude du cas simple d'un réfrigérateur à deux sources est proposée, suivie dans un second temps de celle d'un réfrigérateur à quatre sources. Ce dernier s'avère être un système plus complexe du fait notamment du couplage entre les paires de sources en vis-à-vis.

2.3.1 Champ acoustique dans un réfrigérateur à deux sources en fonction des tensions électriques des haut-parleurs

2.3.1.1 Système étudié et circuit analogique équivalent

Le système étudié, représenté sur la figure 2.2, est constitué d'une cavité remplie d'un empilement de plaques. Le volume de fluide dans cette cavité est noté V_s . La cavité est munie de deux haut-parleurs en vis-à-vis, numérotés 1 et 3. Les volumes V_1 et V_3 compris entre les haut-parleurs 1 et 3 et l'entrée de la cavité sont considérés égaux, et les volumes V_2 et V_4 sont considérés ici nuls.

La figure 2.6 donne une représentation électrique équivalente au système étudié, faisant usage d'une analogie électro-acoustique de type impédance. Le comportement des haut-parleurs est décrit à l'aide d'un schéma électrique équivalent, faisant usage des paramètres de Thiele et Small de ces haut-parleurs [63, 56]. Sur le schéma électrique équivalent de la figure 2.6, la source de tension p_{gi} représente l'équivalent acoustique de la tension électrique V_{ei} fournie au haut-parleur

$$p_{gi=1;3} = V_{ei} \left[\frac{Bl_i}{S_{di}(R_{ei} + j\omega L_{ei})} \right] \quad (2.92)$$

où R_{ei} est la résistance de la bobine, L_{ei} l'inductance de la bobine, Bl_i le facteur de force et S_{di} la surface émissive du haut-parleur i , et l'impédance Z_{gi} représente l'équivalent acoustique de l'impédance électrique de la bobine mobile et de l'impédance mécanique de l'équipage mobile du haut-parleur i :

$$Z_{gi=1;3} = \frac{R_{aei}}{j\omega C_{aei} R_{aei} + 1} + j\omega M_{asi} + \frac{1}{j\omega C_{asi}} + R_{asi}, \quad (2.93)$$

où $R_{aei} = \frac{Bl_i^2}{S_{di}^2 R_{ei}}$, $C_{aei} = L_{ei} \frac{S_{di}^2}{Bl_i^2}$, $R_{asi} = \frac{R_{msi}}{S_{di}^2}$, $M_{asi} = \frac{M_{msi}}{S_{di}^2}$, et $C_{asi} = C_{msi} S_{di}^2$ avec M_{msi} sa masse mobile totale, C_{msi} la souplesse de ses suspensions et R_{msi} sa résistance mécanique.

Enfin, les quadripôles Q_{cx} et Q_e traduisent le comportement acoustique respectivement des cavités situées entre les membranes des haut-parleurs et l'entrée de l'empilement, et de l'empilement.

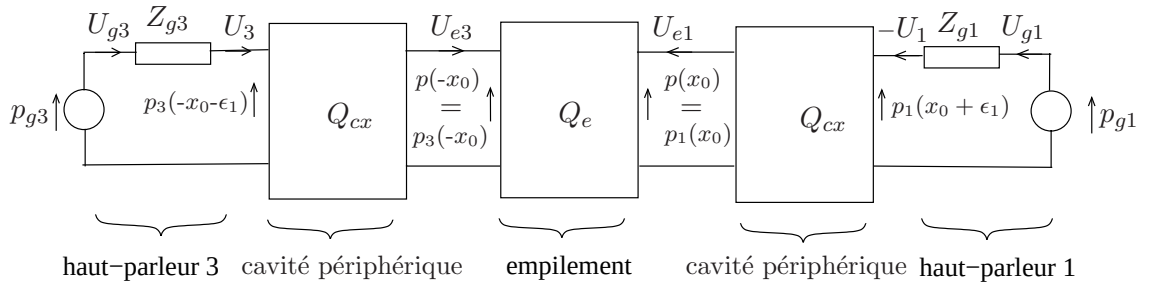


FIG. 2.6 – Circuit électrique équivalent au système à deux sources représenté sur la figure 2.2.

2.3.1.2 Matrices de transfert des haut-parleurs, des cavités périphériques et de l'empilement

Dans ce qui suit, les matrices de transfert des haut-parleurs, des cavités situées entre les sources et l'empilement, et de l'empilement sont données.

– Chaque haut-parleur est modélisé par un générateur de Thévenin équivalent de tension interne $p_{gi=1;3}$ et d'impédance interne $Z_{gi=1;3}$ (voir annexe A). Les matrices de transfert des haut-parleurs 1 et 3 s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} p_{gi} \\ U_{gi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & Z_{gi} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_i \\ U_{gi} \end{pmatrix}, \quad (2.94)$$

avec $U_{gi=1,3}$ les débits des sources, orientées vers l'entrée de l'empilement ($U_{g1} = -U_1$ et $U_{g3} = U_3$).

– Le quadripôle Q_{cx} représentant la propagation dans la cavité périphérique entre les points de coordonnées $x = x_0$ et $x = x_0 + \epsilon_1$ est obtenu en remarquant que, d'une part, la pression acoustique (2.44), au premier ordre, est telle que

$$p_1(x_0) \approx p_1(x_0 + \epsilon_1) = p_1 \approx A \cos \phi_x \cos \phi_y \approx p(x_0), \quad (2.95)$$

et que, d'autre part, la relation (2.43) devient en faisant usage des relations (2.36) et (2.37)

$$U_{g1} = -U_1 = -(1 - f_v) \frac{h}{h + e_s} S_y \cos(k_0 \epsilon_1) \partial_x p(x_0) - \frac{1}{i\omega \rho_0} k_0 S_y \sin(k_0 \epsilon_1) p_1, \quad (2.96)$$

$$= \cos(k_0 \epsilon_1) U_{e1} - \frac{1}{i\omega \rho_0} k_0 S_y \sin(k_0 \epsilon_1) p_1 \quad (2.97)$$

$$\approx U_{e1} + \frac{i\omega V_1}{\rho_0 c_0^2} p_1, \quad (2.98)$$

avec $U_{e1} = -\frac{h}{h+e_s} S_y <u_x>_\zeta(x_0)$ le débit en $x = x_0$ entrant dans l'empilement.

Par suite, il vient

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ U_{g1} \end{pmatrix} = Q_{cx} \begin{pmatrix} p(x_0) \\ U_{e1} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{i\omega V_1}{\rho_0 c_0^2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ U_{e1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{Z_{cx}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ U_{e1} \end{pmatrix}, \quad (2.99)$$

en posant $Z_{cx} = \frac{\rho_0 c_0^2}{i\omega V_1} = \frac{1}{i\omega C_c}$ où $C_{cx} = \frac{V_1}{\rho_0 c_0^2}$ est la souplesse acoustique de la cavité 1.

Cette relation peut également être étendue à la cavité périphérique 3, ce qui donne

$$\begin{pmatrix} U_{g1} \\ U_{g3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{Z_{cx}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{Z_{cx}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_{e1} \\ U_{e3} \end{pmatrix}. \quad (2.100)$$

– La matrice impédance Q_e , représentant la propagation dans l'empilement de plaques entre les points de coordonnées $x = -x_0$ et $x = x_0$, relie les pressions acoustiques aux débits à l'entrée de l'empilement. Les pressions acoustiques p_1 et p_3 et les débits U_{e1} et U_{e2} entrants dans l'empilement aux points de coordonnées $x = x_0$ et $x = -x_0$, sont donnés par les relations (2.87) et (2.88)

$$\begin{pmatrix} p(x_0) \\ p(-x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_3 \end{pmatrix} = -i\omega \rho_0 \begin{pmatrix} \frac{kx_0}{2} & 1 \\ -\frac{kx_0}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i \\ d_i \end{pmatrix}, \quad (2.101)$$

et

$$\begin{pmatrix} -\frac{h}{h+e_s} S_y <u_x>_\zeta(x_0) \\ \frac{h}{h+e_s} S_y <u_x>_\zeta(-x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} \\ U_{e3} \end{pmatrix} = (1 - f_v) S_y \frac{h}{h + e_s} \begin{pmatrix} -\frac{k}{2} & k^2 x_0 \\ \frac{k}{2} & k^2 x_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i \\ d_i \end{pmatrix}. \quad (2.102)$$

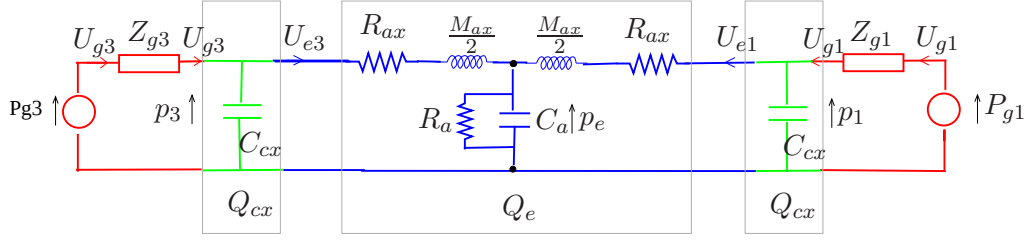


FIG. 2.7 – Circuit électrique équivalent au système à 2 sources représenté sur la figure (2.2).

La multiplication de la matrice (2.101) et de l'inverse de la matrice (2.102) conduit à la matrice impédance associée à la propagation dans l'empilement, qui s'écrit

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_3 \end{pmatrix} = \frac{-i\omega\rho_0}{(1-f_v)\frac{h}{h+e_s}S_y} \begin{pmatrix} \frac{1-k^2x_0^2}{2k^2x_0} & \frac{1+k^2x_0^2}{2k^2x_0} \\ \frac{1+k^2x_0^2}{2k^2x_0} & \frac{1-k^2x_0^2}{2k^2x_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{e1} \\ U_{e3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{1x} + Z_s & Z_s \\ Z_s & Z_{1x} + Z_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{e1} \\ U_{e3} \end{pmatrix}, \quad (2.103)$$

en posant $Z_s = \frac{-i\omega\rho_0}{(1-f_v)\frac{h}{h+e_s}S_y} \frac{1+k^2x_0^2}{2k^2x_0}$ et $Z_{1x} = \frac{i\omega\rho_0}{1-f_v} \frac{x_0}{\frac{h}{h+e_s}S_y} = i\omega \frac{M_{ax}}{2}$ avec $M_{ax} = \frac{2\rho_0x_0}{\frac{h}{h+e_s}S_y(1-f_v)}$ la masse acoustique du fluide dans l'empilement. Aux basses fréquences, en faisant usage de la relation (2.32) et comme $V_s = 2\frac{h}{h+e_s}x_0s_y$, $Z_s \approx \frac{-i\omega\rho_0}{(1-f_v)k^2} \frac{1+k^2x_0^2}{2\frac{h}{h+e_s}x_0s_y} \approx \frac{-i\omega\rho_0}{V_s k_0^2 [1+(\gamma-1)f_h]} \simeq \frac{1}{i\omega C_a}$ avec $C_a = \frac{V_s [1+(\gamma-1)f_h]}{\rho_0 c_0^2}$ la souplesse acoustique du volume du fluide compris dans l'empilement.

Finalement, le schéma électrique global équivalent au système à deux sources prend alors la forme présentée sur la figure 2.7, aux basses fréquences.

2.3.1.3 Champ acoustique en fonction des tensions d'alimentation

Les relations (2.100) et (2.103) permettent de relier les pressions p_i aux débits U_{gi} des sources, comme suit

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(Z_s + Z_{1x})Z_{cx} + (2Z_s + Z_{1x} + Z_{cx})Z_{1x}}{(Z_{1x} + Z_{cx})(2Z_s + Z_{1x} + Z_{cx})} & \frac{Z_s Z_{cx}^2}{(Z_{1x} + Z_{cx})(2Z_s + Z_{1x} + Z_{cx})} \\ \frac{Z_s Z_{cx}^2}{(Z_{1x} + Z_{cx})(2Z_s + Z_{1x} + Z_{cx})} & \frac{(Z_s + Z_{1x})Z_{cx} + (2Z_s + Z_{1x} + Z_{cx})Z_{1x}}{(Z_{1x} + Z_{cx})(2Z_s + Z_{1x} + Z_{cx})} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{g1} \\ U_{g3} \end{pmatrix}. \quad (2.104)$$

En reportant cette expression dans les relations (2.94), il vient

$$\begin{pmatrix} p_{g1} \\ p_{g3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{g1} + Z_{eqx1} & Z_{eqx2} \\ Z_{eqx2} & Z_{g3} + Z_{eqx1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{g1} \\ U_{g3} \end{pmatrix}, \quad (2.105)$$

avec $Z_{eqx1} = \frac{Z_{cx}Z_{1x}(2Z_s + Z_{cx} + Z_{1x}) + Z_s Z_{cx}^2}{(2Z_s + Z_{1x} + Z_{cx})(Z_{1x} + Z_{cx})}$ et $Z_{eqx2} = \frac{Z_s Z_{cx}^2}{(2Z_s + Z_{1x} + Z_{cx})(Z_{1x} + Z_{cx})}$.

Ainsi, la seule connaissance des tensions d'alimentation V_{e1} et V_{e3} (contenues dans les expressions de p_{g1} et p_{g3} respectivement, éq. (2.92)) permet de déterminer les débits des sources $U_1 = -U_{g1}$ et $U_3 = U_{g3}$, qui sont les grandeurs d'entrée du modèle du champ acoustique dans l'empilement (éq. (2.87) et (2.88)). Par ailleurs, l'utilisation du schéma électrique équivalent de la figure 2.7 permet d'exprimer directement la pression acoustique dans l'empilement p_e et les débits aux extrémités de l'empilement $U_{ei=1,3}$ en fonction des tensions électriques $V_{ei=1,3}$.

2.3.2 Champ acoustique dans un réfrigérateur à quatre sources en fonction des tensions électriques des haut-parleurs

2.3.2.1 Système étudié et circuit analogique équivalent

Le système étudié, représenté sur la figure 2.3, est constitué d'une cavité remplie d'un empilement de plaques. La cavité est munie de quatre haut-parleurs numérotés de 1 à 4. Les volumes compris entre les haut-parleurs et l'entrée de l'empilement sont considérés tels que $V_1 = V_3$ et $V_2 = V_4$.

La figure 2.8 donne une représentation électrique équivalente au système étudié, faisant usage d'une analogie électro-acoustique de type impédance.

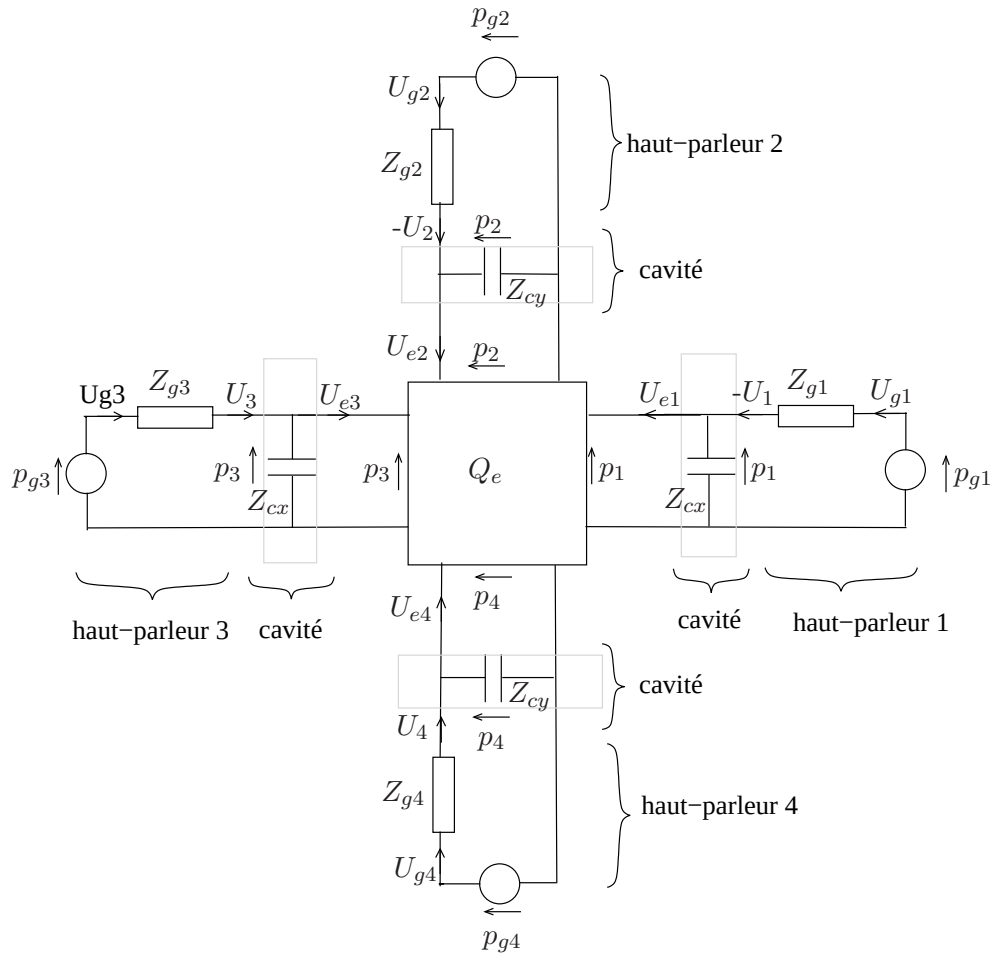


FIG. 2.8 – Circuit électrique équivalent au système à quatre sources représenté sur la figure (2.3).

2.3.2.2 Matrices de transfert des haut-parleurs, des cavités périphériques et de l'empilement

Dans ce qui suit, les matrices de transfert des haut-parleurs, des cavités situées entre les sources et l'empilement, et de l'empilement sont données.

La modélisation des haut-parleurs et des cavités périphériques est identique à celle effectuée précédemment au paragraphe 2.3.1.3. Les relations (2.94) et (2.100) obtenues pour le système à deux sources deviennent dans le cas d'un système à quatre sources :

$$p_{gi=1,4} = p_i + Z_{gi}U_{gi}, \quad (2.106)$$

$$U_{gi=1,3} = \frac{1}{Z_{cx}}p_i + U_{ei}, \text{ et } U_{gi=2,4} = \frac{1}{Z_{cy}}p_i + U_{ei}, \quad (2.107)$$

où $Z_{cy} = \frac{\rho_0 c_0^2}{i\omega V_2} = \frac{1}{i\omega C_{cy}}$ avec $C_{cy} = \frac{V_2}{\rho_0 c_0^2}$ et où les débits U_{gi} des sources sont orientés vers l'entrée de l'empilement ($U_{gi=1,2} = -U_i$ et $U_{gi=3,4} = U_i$).

La matrice impédance Q_e , représentant la propagation dans l'empilement de plaques entre les points de coordonnées $x = \pm x_0$ et $y = \pm y_0$, relie les pressions acoustiques aux débits à l'entrée de l'empilement. Les pressions acoustiques p_i et les débits U_{ei} entrants dans l'empilement aux points de coordonnées $x = \pm x_0$ et $y = \pm y_0$, sont donnés par les relations (2.68, 2.69 et 2.70)

$$\begin{pmatrix} p(x_0) \\ p(-x_0) \\ p(y_0) \\ p(-y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_3 \\ p_2 \\ p_4 \end{pmatrix} = -i\omega\rho_0 \begin{pmatrix} \frac{kx_0}{2} & 1 & 0 & 1 \\ -\frac{kx_0}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{ky_0}{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{ky_0}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i \\ d_i \\ \sigma_p \\ d_p \end{pmatrix} \quad (2.108)$$

et

$$\begin{pmatrix} -S_y \langle u_x \rangle_\zeta(x_0) \\ S_y \langle u_x \rangle_\zeta(-x_0) \\ -S_x \langle u_y \rangle_\zeta(y_0) \\ S_x \langle u_y \rangle_\zeta(-y_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{e1} \\ U_{e3} \\ U_{e2} \\ U_{e4} \end{pmatrix} \quad (2.109)$$

$$= (1 - f_v) \frac{h}{h + e_s} \begin{pmatrix} -\frac{kS_y}{2} & k^2 x_0 S_y \left(1 + \frac{2V_2}{V_s[1+(\gamma-1)f_h]}\right) & 0 & -k^2 x_0 S_y \frac{2V_1}{V_s[1+(\gamma-1)f_h]} \\ \frac{kS_y}{2} & k^2 x_0 S_y \left(1 + \frac{2V_2}{V_s[1+(\gamma-1)f_h]}\right) & 0 & -k^2 x_0 S_y \frac{2V_1}{V_s[1+(\gamma-1)f_h]} \\ 0 & -k^2 y_0 S_x \frac{2V_2}{V_s[1+(\gamma-1)f_h]} & -\frac{kS_x}{2} & k^2 y_0 S_x \left(1 + \frac{2V_1}{V_s[1+(\gamma-1)f_h]}\right) \\ 0 & -k^2 y_0 S_x \frac{2V_2}{V_s[1+(\gamma-1)f_h]} & \frac{kS_x}{2} & k^2 y_0 S_x \left(1 + \frac{2V_1}{V_s[1+(\gamma-1)f_h]}\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_i \\ d_i \\ \sigma_p \\ d_p \end{pmatrix} \quad (2.110)$$

La multiplication de la matrice (2.108) et de l'inverse de la matrice (2.110) conduit à la matrice impédance qui relie les pressions acoustiques $p_{i=1,4}$ aux débits $U_{ei=1,4}$ entrants dans l'empilement

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_3 \\ p_2 \\ p_4 \end{pmatrix} = \frac{-i\omega\rho_0}{(1 - f_v) \frac{h}{h + e_s}} \begin{pmatrix} \frac{1-k^2 x_0^2}{2k^2 x_0 S_y} & \frac{1+k^2 x_0^2}{2k^2 x_0 S_y} & \frac{1}{2k^2 y_0 S_x} & \frac{1}{2k^2 y_0 S_x} \\ \frac{1+k^2 x_0^2}{2k^2 x_0 S_y} & \frac{1-k^2 x_0^2}{2k^2 x_0 S_y} & \frac{1}{2k^2 y_0 S_x} & \frac{1}{2k^2 y_0 S_x} \\ \frac{1}{2k^2 x_0 S_y} & \frac{1}{2k^2 x_0 S_y} & \frac{1-k^2 y_0^2}{2k^2 y_0 S_x} & \frac{1+k^2 y_0^2}{2k^2 y_0 S_x} \\ \frac{1}{2k^2 x_0 S_y} & \frac{1}{2k^2 x_0 S_y} & \frac{1+k^2 y_0^2}{2k^2 y_0 S_x} & \frac{1-k^2 y_0^2}{2k^2 y_0 S_x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{e1} \\ U_{e3} \\ U_{e2} \\ U_{e4} \end{pmatrix} \quad (2.111)$$

$$= \begin{pmatrix} Z_{sx} + Z_{1x} & Z_{sx} & Z_s & Z_s \\ Z_{sx} & Z_{sx} + Z_{1x} & Z_s & Z_s \\ Z_s & Z_s & Z_{sy} + Z_{1y} & Z_{sy} \\ Z_s & Z_s & Z_{sy} & Z_{sy} + Z_{1y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{e1} \\ U_{e3} \\ U_{e2} \\ U_{e4} \end{pmatrix}, \quad (2.112)$$

où $Z_{sx} = \frac{-i\omega\rho_0}{V_s k_0^2 [1+(\gamma-1)f_h]} (1 + k^2 x_0^2)$, $Z_{sy} = \frac{-i\omega\rho_0}{V_s k_0^2 [1+(\gamma-1)f_h]} (1 + k^2 y_0^2)$, $Z_s = \frac{-i\omega\rho_0}{V_s k_0^2 [1+(\gamma-1)f_h]}$, $Z_{1x} = \frac{i\omega\rho_0}{1-f_v} \frac{x_0}{\frac{h}{h+e_s} S_y} = i\omega \frac{M_{ax}}{2}$, $Z_{1y} = \frac{i\omega\rho_0}{1-f_v} \frac{y_0}{\frac{h}{h+e_s} S_x} = i\omega \frac{M_{ay}}{2}$ avec $M_{ax} = \frac{2\rho_0 x_0}{(1-f_v)S_y}$ et $M_{ay} = \frac{2\rho_0 y_0}{(1-f_v)S_x}$.

Aux basses fréquences, $Z_{sx} \approx Z_{sy} \approx Z_s \approx \frac{-i\omega\rho_0}{V_s k_0^2 [1+(\gamma-1)f_h]} \simeq \frac{1}{i\omega C_a}$ avec $C_a = \frac{V_s [1+(\gamma-1)f_h]}{\rho_0 c_0^2}$, ainsi la matrice impédance Q_e devient

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_3 \\ p_2 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_s + Z_{1x} & Z_s & Z_s & Z_s \\ Z_s & Z_s + Z_{1x} & Z_s & Z_s \\ Z_s & Z_s & Z_s + Z_{1y} & Z_s \\ Z_s & Z_s & Z_s & Z_s + Z_{1y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{e1} \\ U_{e3} \\ U_{e2} \\ U_{e4} \end{pmatrix}. \quad (2.113)$$

Finalement, le schéma électrique global équivalent au système à quatre sources prend alors la forme

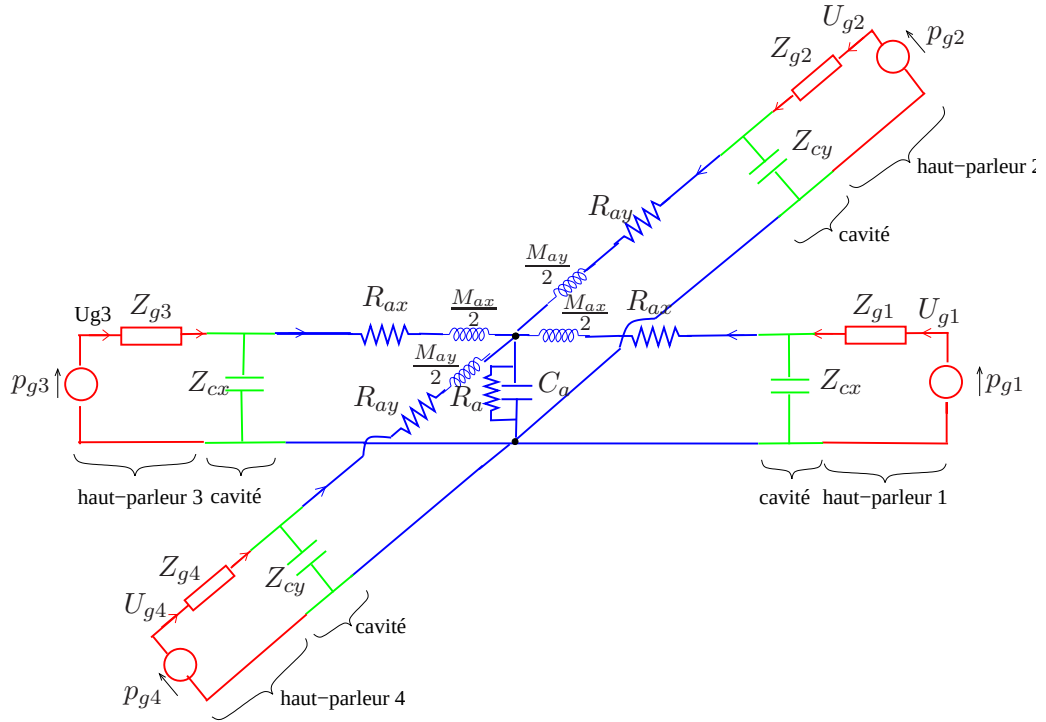


FIG. 2.9 – Circuit électrique équivalent au système à quatre sources représenté sur la figure (2.3).

présentée sur la figure 2.9, aux basses fréquences.

2.3.2.3 Champ acoustique en fonction des tensions d'alimentation

Les paramètres recherchés sont solutions du système obtenu en combinant d'abord les relations (2.106), (2.107) et (2.113) pour obtenir les tensions p_{gi} en fonction des débits U_{gi} . Ce système s'écrit

$$\begin{pmatrix} p_{g1} \\ p_{g3} \\ p_{g2} \\ p_{g4} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{g1} + Z_{eqx1} & Z_{eqx2} & Z_{couplage} & Z_{couplage} \\ Z_{eqx2} & Z_{g3} + Z_{eqx1} & Z_{couplage} & Z_{couplage} \\ Z_{couplage} & Z_{couplage} & Z_{g3} + Z_{eqy1} & Z_{eqy2} \\ Z_{couplage} & Z_{couplage} & Z_{eqy2} & Z_{g4} + Z_{eqy1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_{g1} \\ U_{g3} \\ U_{g2} \\ U_{g4} \end{pmatrix}, \quad (2.114)$$

$$\begin{aligned}
\text{avec } Z_{eq1} &= \frac{Z_{cx}}{Z_{cx}+Z_{1x}} \frac{2Z_s Z_{1x} (Z_{cx}+Z_{cy}+Z_{1x}+Z_{1y}) + (Z_{cy}+Z_{1y})(Z_s Z_{cx}+Z_{1x}(Z_{cx}+Z_{1x}))}{2Z_s (Z_{cx}+Z_{cy}+Z_{1x}+Z_{1y}) + (Z_{cx}+Z_{1x})(Z_{cy}+Z_{1y})}, \\
Z_{eqy1} &= \frac{Z_{cx}}{Z_{cx}+Z_{1x}} \frac{2Z_s Z_{1y} (Z_{cx}+Z_{cy}+Z_{1x}+Z_{1y}) + (Z_{cx}+Z_{1x})(Z_s Z_{cy}+Z_{1y}(Z_{cy}+Z_{1y}))}{2Z_s (Z_{cx}+Z_{cy}+Z_{1x}+Z_{1y}) + (Z_{cx}+Z_{1x})(Z_{cy}+Z_{1y})}, \\
Z_{eqx2} &= \frac{Z_{cy}+Z_{1y}}{Z_{cx}+Z_{1x}} \frac{Z_s Z_{cx}^2}{2Z_s (Z_{cx}+Z_{cy}+Z_{1x}+Z_{1y}) + (Z_{cx}+Z_{1x})(Z_{cy}+Z_{1y})}, \\
Z_{eqy2} &= \frac{Z_{cx}+Z_{1x}}{Z_{cy}+Z_{1y}} \frac{Z_s Z_{cy}^2}{2Z_s (Z_{cx}+Z_{cy}+Z_{1x}+Z_{1y}) + (Z_{cx}+Z_{1x})(Z_{cy}+Z_{1y})}, \\
Z_{couplage} &= \frac{Z_s Z_{cx} Z_{cy}}{2Z_s (Z_{cx}+Z_{cy}+Z_{1x}+Z_{1y}) + (Z_{cx}+Z_{1x})(Z_{cy}+Z_{1y})}.
\end{aligned}$$

Cette matrice d'ordre 4 est constituée de 4 sous-matrices d'ordre 2. Deux de ces sous-matrices s'identifient à la matrice (2.105) obtenue lors de l'étude du cas simple d'un réfrigérateur à deux sources, en considérant les volumes V_2 et V_4 nuls. Quant aux deux autres, elles traduisent le couplage entre les paires de sources en vis-à-vis.

La connaissance des tensions d'alimentation $V_{ei=1,4}$ (contenues dans les expressions des $P_{gi=1,4}$, éq. (2.92)) permet de déterminer les débits des sources $U_{i=1,4}$, qui sont les grandeurs d'entrée du modèle du champ acoustique dans l'empilement (éq. (2.68), (2.69) et (2.70)). Par ailleurs, l'utilisation du schéma électrique équivalent de la figure 2.8 permet d'exprimer directement la pression acoustique dans l'empilement p_e et les débits aux extrémités de l'empilement $U_{ei=1,4}$ en fonction des tensions électriques $V_{i=1,4}$.

2.3.2.4 Couplage entre les différentes sources

Dans la configuration optimale, lorsque les sources 2 et 4 vibrent en opposition de phase afin de créer un champ de pression acoustique ($U_{g2} = U_{g4}$), et les sources 1 et 3 vibrent en phase pour créer un champ de vitesse particulaire suivant l'axe y ($U_{g1} = -U_{g3}$), la solution du problème devient :

$$p_{g1} = \left(Z_{g1} + \frac{Z_{cx} Z_{1x}}{Z_{cx} + Z_{1x}} \right) U_{g1} + \left(\frac{2Z_s Z_{cx} Z_{cy}}{2Z_s (Z_{cx} + Z_{cy} + Z_{1x} + Z_{1y}) + (Z_{cx} + Z_{1x})(Z_{cy} + Z_{1y})} \right) U_{g2}, \quad (2.115a)$$

$$p_{g3} = \left(-Z_{g3} - \frac{Z_{cx} Z_{1x}}{Z_{cx} + Z_{1x}} \right) U_{g1} + \left(\frac{2Z_s Z_{cx} Z_{cy}}{2Z_s (Z_{cx} + Z_{cy} + Z_{1x} + Z_{1y}) + (Z_{cx} + Z_{1x})(Z_{cy} + Z_{1y})} \right) U_{g2}, \quad (2.115b)$$

$$p_{g2} = \left(Z_{g2} + \frac{Z_{cy} [2Z_s (Z_{cx} + Z_{1x}) + Z_{1y} (2Z_s + Z_{cx} + Z_{1x})]}{2Z_s (Z_{cx} + Z_{cy} + Z_{1x} + Z_{1y}) + (Z_{cx} + Z_{1x})(Z_{cy} + Z_{1y})} \right) U_{g2}, \quad (2.115c)$$

$$p_{g4} = \left(Z_{g4} + \frac{Z_{cy} [2Z_s (Z_{cx} + Z_{1x}) + Z_{1y} (2Z_s + Z_{cx} + Z_{1x})]}{2Z_s (Z_{cx} + Z_{cy} + Z_{1x} + Z_{1y}) + (Z_{cx} + Z_{1x})(Z_{cy} + Z_{1y})} \right) U_{g2}. \quad (2.115d)$$

Pour les sources 2 et 4 qui génèrent la pression acoustique, les pressions p_{g2} et p_{g4} sont identiques au cas à deux haut-parleurs (si les volumes V_2 et V_4 étaient nuls). Les haut-parleurs de pression ne sont donc pas influencés par les haut-parleurs de vitesse.

Pour les sources 1 et 3 qui génèrent la vitesse particulaire, les expressions des pressions p_{g1} et p_{g3} sont la somme des expressions obtenues dans le cas d'un système à deux haut-parleurs et d'un terme supplémentaire qui prennent en compte le couplage avec les sources de pression.

Ce comportement est à prendre en compte pour le réglage des systèmes à quatre sources.

2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, le réfrigérateur compact à quatre sources a été étudié analytiquement. Un modèle décrivant le champ acoustique dans l'empilement en fonction des vitesses des sources a été présenté.

Puis, un modèle électroacoustique donnant le champ acoustique en fonction des tensions des sources a été proposé. Ces modèles permettent, en particulier, de mettre en évidence le couplage entre les sources. Dans le réfrigérateur à quatre sources, les vitesses des sources de vitesse sont fonction entre autre des vitesses des sources de pression. Par contre, les sources de pression ne sont pas influencées par les sources de vitesse. Après avoir effectué l'étude analytique du comportement acoustique du système compact, ainsi que celle de son comportement thermique idéal (chapitre 1), l'étude expérimentale reste à être menée. Ceci fait l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Étude expérimentale d'un réfrigérateur “compact” décimétrique à quatre sources

L'existence d'un champ acoustique optimal a été démontrée au paragraphe 1.2.3 qui permet de maximiser les quantités thermoacoustiques d'intérêt telles que le flux de chaleur thermoacoustique Q_{th} , la différence de température ΔT entre les deux extrémités de l'empilement de plaques et le coefficient de performance COP . Ce champ acoustique optimal ne pouvant être généré dans un réfrigérateur classique à ondes stationnaires (§1.2.4), une architecture originale de réfrigérateur thermoacoustique a été proposée [16], dont le principe est exposé dans l'introduction du chapitre 2. Il s'agit d'un système dit “compact” à quatre sources qui, en plus de pouvoir générer le champ acoustique optimal, offre la possibilité d'être extrêmement miniaturisable.

Le comportement acoustique d'un tel réfrigérateur est décrit par un modèle analytique présenté au paragraphe 2.2, conduisant au schéma électrique équivalent présenté au paragraphe 2.3.

La caractérisation expérimentale d'un réfrigérateur thermoacoustique compact est l'objet de ce chapitre. Bien que l'objectif visé à terme soit la miniaturisation des systèmes réfrigérants thermoacoustiques, l'étude expérimentale est effectuée ici sur un système décimétrique, qui permet de s'affranchir des problèmes liés à la fabrication et à la manipulation des systèmes miniatures. La maquette décimétrique réalisée et le dispositif de mesure utilisé pour cette étude sont présentés au paragraphe 3.1. La procédure de réglage de la maquette à un point de fonctionnement donné est décrite au paragraphe 3.2. La comparaison entre les champs de vitesses particulières obtenus par la mesure et ceux issus du modèle analytique du chapitre 2 est effectuée au paragraphe 3.3 pour différents points de fonctionnement. Enfin, le paragraphe 3.4 est consacré à la caractérisation, en termes de champs de vitesse particulière et de température, de la maquette à son point de fonctionnement optimal théorique.

3.1 Maquette de réfrigérateur thermoacoustique compact

La maquette de réfrigérateur thermoacoustique réalisée pour cette étude est présentée sur la figure 3.1. Cette maquette est constituée d'une cavité cubique, aux parois rigides et transparentes (autorisant

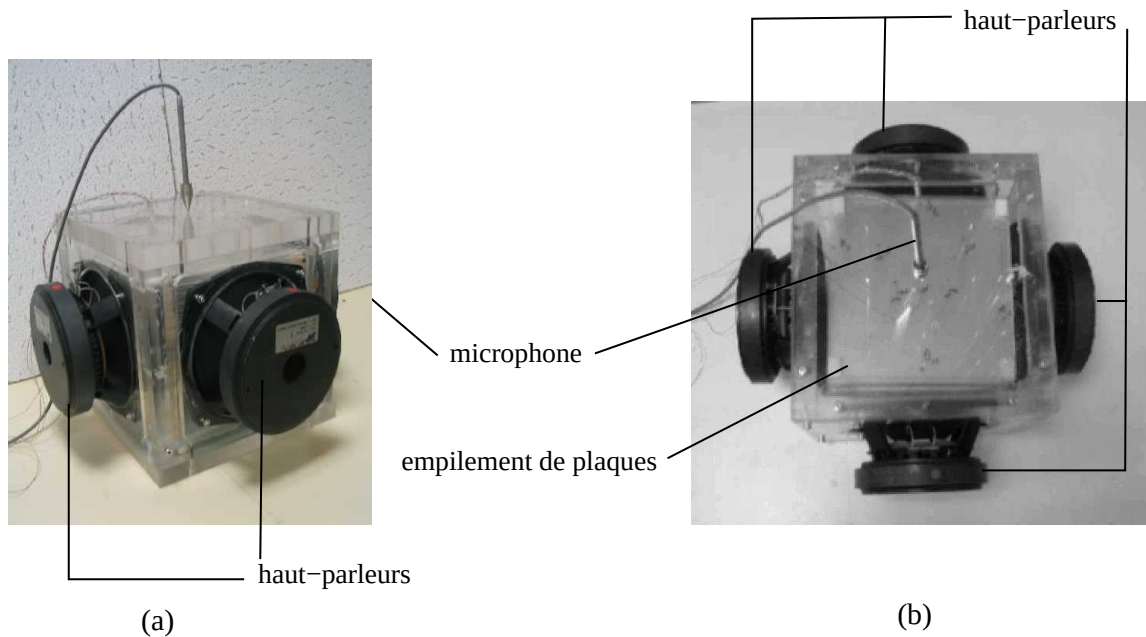


FIG. 3.1 – Photographies de coté (a) et du-dessus (b) de la maquette.

ainsi des mesures optiques à l'intérieur de la cavité), à l'intérieur de laquelle est disposé un empilement de plaques. Des haut-parleurs peuvent être fixés ou non sur les parois latérales (démontables), ce qui permet l'étude d'un système comportant de un à quatre haut-parleurs. Les contraintes et les choix ayant guidé la réalisation de cette maquette sont discutés dans les paragraphes qui suivent.

3.1.1 Dimensionnement de la maquette

3.1.1.1 Cahier des charges

Contraintes liées à la géométrie de la cavité

La condition de champ acoustique uniforme dans la cavité impose aux dimensions de la cavité d'être inférieures à la longueur d'onde ($\sqrt[3]{V} \ll \lambda$). De plus, pour que le champ de vitesse particulaire soit uniforme, les parois de la cavité en vis-à-vis suivant l'axe des sources de vitesse doivent vibrer en piston. Cette contrainte impose à la surface de ces parois d'être inférieure ou équivalente à celle de la membrane des haut-parleurs de vitesse.

Par ailleurs, le niveau de pression dans la cavité, en première approche, pour un débit acoustique donné, est d'autant plus élevé que le volume de la cavité est petit. Ainsi, le volume de la cavité et donc la surface des parois doivent être les plus petits possibles. Cependant, la différence de température aux extrémités de l'empilement augmente en fonction de la longueur de l'empilement et le flux de chaleur est proportionnel à la surface aux extrémités de l'empilement. Un compromis doit donc être fait entre ces différentes grandeurs pour choisir les dimensions de la cavité.

Contraintes liées au choix des haut-parleurs

Les haut-parleurs électrodynamiques doivent permettre de satisfaire les contraintes énumérées ci-dessous.

- La pression acoustique doit être la plus importante possible dans la cavité, cette pression étant directement proportionnelle, pour un volume de cavité donné, au débit généré par les haut-parleurs chargés de créer la pression acoustique. Ces derniers doivent préférentiellement émettre à une fréquence proche de leur fréquence de résonance, avoir un facteur de qualité élevé, et présenter une puissance maximale admissible et une efficacité importantes.

- La vitesse particulaire générée dans la cavité doit être égale à la vitesse optimale définie au paragraphe 1.2.3. Le déplacement correspondant des membranes des haut-parleurs chargés de créer le champ de vitesse particulaire doit alors être inférieur à l'excursion maximale admissible par l'équipage mobile de ces haut-parleurs.

- Enfin, pour répondre à des contraintes liées au réglage et au contrôle du système, les haut-parleurs doivent posséder une ouverture arrière permettant de mesurer la vitesse au centre de la membrane (au niveau du cache noyau) à l'aide d'un vibromètre laser.

Contraintes liées au dimensionnement de l'empilement

Dans les réfrigérateurs thermoacoustiques compacts, l'empilement de plaques doit former un cube qui occupe la totalité de l'espace de la cavité et qui doit être composé de plaques parallèles de manière à être ouvert sur quatre de ses côtés. La capacité calorifique et la conductivité thermique des plaques doivent être supérieures à celles du fluide utilisé, de telle sorte que les parois du stack jouent alors le rôle de thermostat. Cependant, la conductivité thermique des plaques de l'empilement doit rester "relativement faible" de manière à minimiser le flux de chaleur "retour" par conduction.

Par ailleurs, l'épaisseur des plaques doit être supérieure au double de l'épaisseur de couche limite thermique dans le solide $\delta_{hs} = \sqrt{\frac{2K_s}{\rho_s C_s \omega}}$.

3.1.1.2 Choix des différents éléments de la maquette

Les haut-parleurs sont les premiers éléments du réfrigérateur sélectionnés du fait qu'ils conditionnent les dimensions de la cavité. Ensuite, la fréquence de fonctionnement du système puis les caractéristiques de l'empilement de plaques sont fixées.

Choix des haut-parleurs électrodynamiques et dimensionnement de la cavité

Compte tenu des contraintes sur les haut-parleurs, et bien que les haut-parleurs chargés de générer la pression acoustique et ceux chargés de générer la vitesse particulaire peuvent être différents (les contraintes à satisfaire étant différentes), le choix s'est porté sur un même modèle de haut-parleur électrodynamique pour ces différentes sources. Il s'agit de haut-parleurs électrodynamiques (P.H.L Audio, modèle SP 1590) de puissance nominale 130 W, de diamètre 17 cm qui possèdent une ouverture à l'arrière. Leur fréquence de résonance propre est d'environ 160 Hz et le déplacement maximal de leur membrane est de 2.5 mm. Pour simplifier la réalisation mécanique des parois de la cavité, le coté d'une paroi est choisi supérieur au diamètre d'un haut-parleur de façon à ce que le haut-parleur puisse être fixé sur une paroi. L'arête de la cavité est alors fixée à $2x_0 = 2y_0 = 2z_0 = 19$ cm de manière à ce

que le volume de la cavité soit le plus petit possible pour maximiser le niveau de pression. L'hypothèse de champ de vitesse particulière uniforme n'est alors pas valable puisque la section du haut-parleur n'occupe qu'une partie de la surface de la paroi. Des mesures permettant de quantifier l'influence de cette géométrie sur les champs de vitesse particulière générés sont présentées au paragraphe 3.2.4.

Détermination de la fréquence de fonctionnement

La fréquence de fonctionnement du système est déterminée expérimentalement, dans le cas où la cavité ne comporte pas d'empilement. La pression acoustique générée par les deux haut-parleurs 1 et 3, réglés en générateurs de pression acoustique (la phase $\theta_{V_{e1}-V_{e3}}$ entre les tensions électriques fournies aux haut-parleurs 1 et 3 valant 0°), est mesurée en paroi, au centre de la paroi supérieure ($x=0$, $y=0$, $z=z_0$) en fonction de la fréquence (figure 3.2). Comme attendu dans le cas d'un haut-parleur qui émet dans une charge constituée d'un espace clos [52], la fréquence de résonance du système mesurée ici à 160 Hz (figure 3.2) est proche de la fréquence de résonance des haut-parleurs placés en écran infini et en basse fréquence dans le voisinage d'intérêt ici (approximativement $50 - 200\text{ Hz}$), le niveau de pression reste à peu près indépendant de la fréquence.

On constate, sur la figure 3.2, que la fréquence de fonctionnement choisie doit être inférieure à environ 200 Hz . Les niveaux sonores les plus élevés peuvent être obtenus aux plus basses fréquences (au-dessous de 50 Hz) ou au voisinage immédiat de 160 Hz .

La fréquence de fonctionnement retenue est 160 Hz car, d'une part, l'épaisseur des couches limites (1.27) est plus petite qu'aux fréquences inférieures, ce qui permet d'augmenter le nombre de plaques de l'empilement et, d'autre part, le gradient de température (éq. 1.47) augmente avec la fréquence (lorsque la pression acoustique, la vitesse particulière et le rapport $\frac{\delta_v}{h}$ sont fixés). A cette fréquence, l'hypothèse de "petite" cavité est vérifiée, la longueur d'onde λ étant grande par rapport aux dimensions du système : $\lambda/2x_0 \sim 10$.

Sur la figure 3.2, la pression acoustique mesurée en paroi est comparée à celle théorique calculée à partir des expressions (2.91). Un pic vers 160 Hz qui correspond à la fréquence de résonance du haut-parleur n'est pas décrit par le modèle. Hormis ce pic, le niveau de pression acoustique expérimental et ceux théoriques sont pratiquement identiques tant que l'approximation de "petite cavité" est valide, c'est-à-dire jusqu'à environ 1000 Hz . Au delà de cette fréquence, les minima et les maxima de pression acoustique qui correspondent aux différents modes de propagation dans la cavité ne sont pas prédit par le modèle.

Choix des caractéristiques de l'empilement de plaques

Deux empilements de plaques, d'arêtes 18 cm , notés A et B sont utilisés (voir le tableau 3.1) dans les différentes expériences. Ils sont constitués de feuilles en P.V.C, dont les caractéristiques thermophysiques d'intérêt sont données dans le tableau (3.1), d'épaisseurs différentes, superposées de manière régulière et maintenues par des cales.

Les feuilles de P.V.C. sont espacées de $h = 610\text{ }\mu\text{m}$ par des plots constitués de scotch double face. Cet espacement correspond environ à quatre épaisseurs de couche limite thermique, $h \approx 4\delta_h$ (éq. 1.27) pour l'air et pour une fréquence de 160 Hz , ce qui permet d'optimiser le gradient de température [58] qui est le paramètre thermoacoustique mesuré dans les expériences présentées au paragraphe 3.4.2.

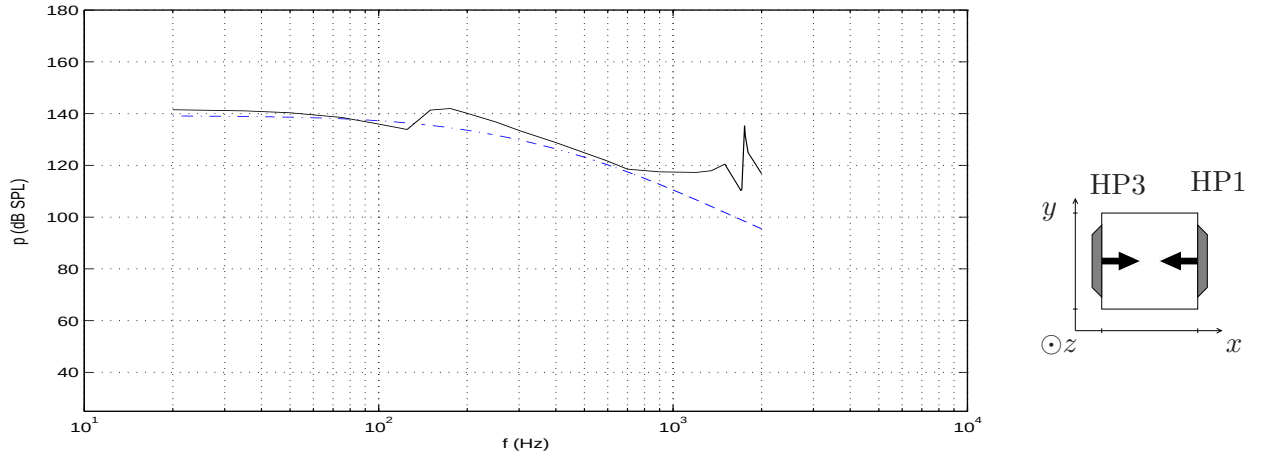


FIG. 3.2 – Niveau de pression acoustique dans la cavité, mesuré en paroi (ligne continue), et fourni par un modèle théorique (— —) en fonction de la fréquence lorsque le système comporte deux haut-parleurs (1 et 3) réglés en “générateurs de pression” ($\theta_{V_{e1}-V_{e3}} = 0^\circ$, $V_{e1} \approx V_{e3} \approx 3.6 V_{rms}$).

En ce qui concerne le choix de l’épaisseur des plaques, un compromis doit être fait entre la différence de température entre les extrémités de l’empilement qu’il est possible d’obtenir et la rigidité des plaques. En effet, la réduction de l’épaisseur des plaques implique la diminution de la surface transversale dans le solide à travers laquelle s’écoule le flux de chaleur par conduction retour et donc une augmentation de la différence de température aux extrémités de l’empilement. Cependant, plus l’épaisseur des plaques est faible, moins les plaques sont rigides.

Les feuilles de l’empilement B ont une épaisseur de $2 e_s = 100 \mu m \approx 10 \delta_{hs}$ (pour une fréquence de $160 Hz$) et sont flexibles ce qui ne permet pas d’assurer une géométrie régulière de l’empilement (les feuilles ne sont pas parallèles) et par conséquent d’effectuer des mesures V.L.D. dans le plan compris entre deux plaques consécutives de l’empilement. Tandis que les plaques de l’empilement A ont une épaisseur de $2 e_s = 2 mm \approx 185 \delta_{hs}$ pour une fréquence de $160 Hz$ et sont peu flexibles. Elles peuvent donc être utilisées dans les expériences V.L.D..

L’amplitude $|u|_{opt}$ de la vitesse particulière optimale, définie par la relation (1.57), vaut $0.5 m.s^{-1}$ pour l’empilement A et $1.5 m.s^{-1}$ pour l’empilement B ce qui correspond à des valeurs des amplitudes des déplacements optimaux respectivement égales à $0.5 mm$ et $1.5 mm$ pour une fréquence de $160 Hz$. Ces déplacements restent nettement inférieurs à l’excursion maximale admissible par les membranes des haut-parleurs de vitesse (égale à $2.5 mm$).

Les plans de réalisation de la maquette sont donnés en annexe B et les caractéristiques géométriques et thermo-physiques de la maquette et celles des empilements choisies sont récapitulées dans la table 3.1.

3.1.2 Dispositifs de mesures

Différentes mesures sont réalisées qui permettent, d’une part, le réglage de la maquette en différents points de fonctionnement, d’autre part, la vérification expérimentale de certaines hypothèses

Fréquence de l'onde	$f = 160 \text{ Hz}$
Longueur d'onde	$\lambda = 2.15 \text{ m}$
Pulsation de l'onde	$\omega = 2\pi/\lambda = 2.9 \text{ s}^{-1}$
Arête de la cavité	$2x_0 = 2y_0 = 2z_0 = 19 \text{ cm} \approx 1/11 \lambda$
Pression statique du fluide	$P_0 = 1.013 * 10^5 \text{ Pa}$
Température du fluide	$T_0 = 295 \text{ K}$
Célérité des ondes acoustiques	$c_0 = 344 \text{ m.s}^{-1}$
Coefficient polytropique du fluide	$\gamma = 1.4$
Masse volumique du fluide	$\rho_0 = 1.2 \text{ kg.m}^3$
Capacité calorifique du fluide	$C_p = 1004 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Viscosité de cisaillement du fluide	$\mu = 1.8 * 10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$
Conductivité thermique du fluide	$K = \rho_0 c_p v / P_r = 0.026 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Épaisseur de couche limite visqueuse dans le fluide	$\delta_v = \sqrt{\frac{2\mu}{\rho_0 \omega}} \approx 172 \text{ }\mu\text{m}$
Épaisseur de couche limite thermique dans le fluide	$\delta_h = \sqrt{\frac{2K}{\rho_0 C_p \omega}} \approx 206 \text{ }\mu\text{m}$

	empilement A	empilement B
Masse volumique	$\rho_s = 1400 \text{ kg.m}^{-3}$	$\rho_s = 1400 \text{ kg.m}^{-3}$
Conductivité thermique	$K_s = 0.15 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$K_s = 0.19 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Capacité calorifique	$C_s = 2300 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$C_s = 2300 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$
Épaisseur de couche limite thermique	$\delta_{hs} = \sqrt{\frac{2K_s}{\rho_s C_s \omega}} \approx 9.6 \text{ }\mu\text{m}$	$\delta_{hs} = \sqrt{\frac{2K_s}{\rho_s C_s \omega}} \approx 10.8 \text{ }\mu\text{m}$
Épaisseur des plaques	$2e_s \approx 100 \text{ }\mu\text{m} \approx 10 \delta_{hs}$	$2e_s \approx 2 \text{ mm} \approx 185 \delta_{hs}$
Espacement entre deux plaques successives	$2h \approx 610 \text{ }\mu\text{m} \approx 3 \delta_h$	$2h \approx 610 \text{ }\mu\text{m} \approx 3 \delta_h$

TAB. 3.1 – Caractéristiques de l'onde acoustique, de la cavité, du fluide (air) et des empilements de plaques en P.V.C..

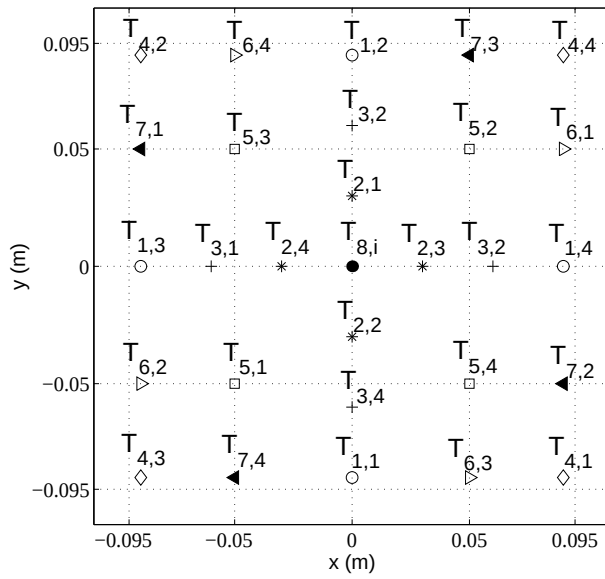
simplificatrices, et enfin la caractérisation de la maquette, en particulier à son point de fonctionnement optimal. Les moyens expérimentaux mis en oeuvre à ces fins sont décrits ci-dessous.

3.1.2.1 Mesures de vitesse de vibration des membranes

La vitesse de vibration au centre des membranes des haut-parleurs est mesurée à l'aide d'un vibromètre laser (Polytec O.F.V. 3001) par un trou situé à l'arrière du moteur du haut-parleur. Ce trou permet par ailleurs le refroidissement de la bobine mobile, en favorisant les déplacements d'air autour de cette bobine lorsque la membrane est en mouvement.

3.1.2.2 Mesures de température

La température est mesurée en différents points sur une plaque de l'empilement par des thermocouples de type T (cuivre-constantan). Chaque jonction de thermocouple est prise en sandwich dans une feuille de cuivre repliée sur elle même afin d'améliorer le contact thermique avec la plaque, ainsi



(a)

	x (m)	y(m)		x(m)	y(m)
$T_{1,1} \circ$	0	-0.09	$T_{5,1} \square$	-0.05	-0.05
$T_{1,2} \circ$	0	0.09	$T_{5,2} \square$	0.05	0.05
$T_{1,3} \circ$	-0.09	0	$T_{5,3} \square$	-0.05	0.05
$T_{1,4} \circ$	0.09	0	$T_{5,4} \square$	0.05	-0.05
$T_{2,1} *$	0	0.03	$T_{6,1} \triangleright$	0.09	0.05
$T_{2,2} *$	0	-0.03	$T_{6,2} \triangleright$	-0.09	-0.05
$T_{2,3} *$	0.03	0	$T_{6,3} \triangleright$	0.05	-0.09
$T_{2,4} *$	-0.03	0	$T_{6,4} \triangleright$	-0.05	0.09
$T_{3,1} +$	-0.06	0	$T_{7,1} \blacktriangleleft$	-0.09	0.05
$T_{3,2} +$	0.06	0	$T_{7,2} \blacktriangleleft$	0.09	-0.05
$T_{3,3} +$	0	0.06	$T_{7,3} \blacktriangleleft$	0.05	0.09
$T_{3,4} +$	0	-0.06	$T_{7,4} \blacktriangleleft$	-0.05	-0.09
$T_{4,1} \diamond$	0.09	-0.09	$T_{8,1} \bullet$	0	0
$T_{4,2} \diamond$	-0.09	0.09	$T_{8,2} \bullet$	0	0
$T_{4,3} \diamond$	-0.09	-0.09	$T_{8,3} \bullet$	0	0
$T_{4,4} \diamond$	0.09	0.09	$T_{8,4} \bullet$	0	0

(b)

FIG. 3.3 – (a) Cartographie de la température. (b) Coordonnées des 29 points de mesures.

que le temps de réponse. La mesure de température n'est donc pas ponctuelle mais moyennée sur une petite surface correspondant au sandwich de cuivre de côtés 5 mm. Selon les mesures effectuées, le nombre et la position des thermocouples sont modifiés.

Les signaux issus des différents thermocouples sont connectés à une carte d'acquisition qui permet la visualisation en temps réel et l'enregistrement de l'évolution de 8 signaux simultanément. Cependant, une cartographie de la température en 29 points (fig. 3.3.a) est obtenue avec une plaque instrumentée par 8 thermocouples (dont un au centre) en effectuant quatre mesures, en tournant l'empilement d'un quart de tour et en faisant l'hypothèse que les quatre mesures s'effectuent dans des conditions expérimentales identiques. Les coordonnées des températures ainsi mesurées, notées $T_{i,j}$ avec $i = 1, 8$ le numéro du thermocouple et $j = 1, 4$ le numéro de la mesure, sont indiquées dans le tableau 3.3.b.

3.1.2.3 Mesures de pression acoustique

Le capteur de pression acoustique utilisé est un microphone 1/4" B&K monté sur une sonde de diamètre 2 mm et de longueur 25 mm. La pression acoustique est relevée à l'intérieur de la cavité en présence ou non d'un empilement de plaques, l'extrémité de la sonde affleurant la paroi interne de la face supérieure la cavité.

3.1.2.4 Mesures de vitesse particulaire

La connaissance du champ acoustique nécessite non seulement de mesurer la pression acoustique mais encore la vitesse particulaire. Le plus souvent, elle est effectuée de façon indirecte et intrusive par

relevés de pression associés à un modèle de propagation de l'onde acoustique. En fait, trois méthodes permettent de mesurer la vitesse particulaire acoustique directement : la technique du fil chaud, la Vélocimétrie à Images de Particules (V.I.P.) et la Vélocimétrie Laser à effet Doppler (V.L.D.). Ces techniques sont faiblement intrusives.

La V.I.P. et la V.L.D. sont les deux méthodes qui ont été mises en oeuvre pour mesurer le champ acoustique dans la cavité avec deux à quatre haut-parleurs sans empilement de plaques. Ce sont deux méthodes de mesures optiques complémentaires puisque la V.I.P. permet d'avoir accès au champ spatial de vitesse acoustique à un instant donné et la V.L.D. à l'évolution temporelle de la vitesse acoustique en un point de l'espace. Le principe de la V.I.P. et de la V.L.D. sont rappelés ci-dessous.

3.1.2.4.a Principe de mesures de vitesses particulières par Vélocimétrie à Images de Particules

La Vélocimétrie à Images de Particules (V.I.P.) est une technique de mesure de la vitesse qui permet d'obtenir un champ de vitesse bidimensionnel en un instant donné. Elle est basée sur la mesure du déplacement de microparticules, en suspension dans le fluide, dont la masse volumique est proche de celle du fluide. Une source laser pulsée génère deux impulsions lumineuses, décalées dans le temps d'un intervalle dt , qui illuminent une tranche du fluide. Le paramètre dt est choisi en fonction des amplitudes des vitesses rencontrées dans le fluide. Un système de prise de vue synchronisé avec les impulsions laser permet d'enregistrer les positions des particules pour chacune des deux impulsions lumineuses. Après leur enregistrement, les deux images sont analysées : chacune des deux images est divisée en fenêtres d'interrogations entre lesquelles des fonctions d'intercorrélation des densités optiques sont calculées. Ces fonctions présentent un pic intense dont la position par rapport au centre donne accès à la direction et à l'amplitude des déplacements des particules dans la fenêtre d'interrogation. La taille des fenêtres (en pixels) est fixée par l'utilisateur et détermine le nombre total de vecteurs qui seront calculés pour un couple d'images, un vecteur étant calculé pour chaque fenêtre d'interrogation.

Description du dispositif expérimental

Les mesures par V.I.P. ont été réalisées au Laboratoire d'Étude Aérodynamique de Poitiers (figure C.1).

Les traceurs utilisés sont des particules de glycérine de diamètre $100 \mu\text{m}$. Ces particules sont introduites dans la cavité en ouvrant sa face supérieure. Deux lasers Nd-Yag, de longueur d'onde 532 nm , produisent une nappe laser d'environ 1 mm d'épaisseur. L'acquisition des images des particules est effectuée grâce à une caméra CCD (Charged Coupled Device) de type flowmaster 3, de résolution $1024 * 1280$ à 12 couples d'images par seconde. Les deux images enregistrées sont corrélées en utilisant des fenêtres d'interrogations de 32×32 pixels (soit $3.6 \text{ mm} \times 3.6 \text{ mm}$) avec un recouvrement entre deux images adjacentes de 50% afin de ne pas perdre d'information entre chaque fenêtre d'interrogation. Le délai dt entre les deux flash lasers est ajusté selon l'amplitude u_{ac} de la vitesse mesurée pour que sa valeur vérifie la relation ([41], [67])

$$\frac{1}{2} \frac{d_{pix}}{u_{ac}} < \Delta t < 12\% T_{ac} \quad (3.1)$$

où $d_{pix} = 1.1 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ est la largeur d'un pixel vu par la caméra et T_{ac} la période acoustique.

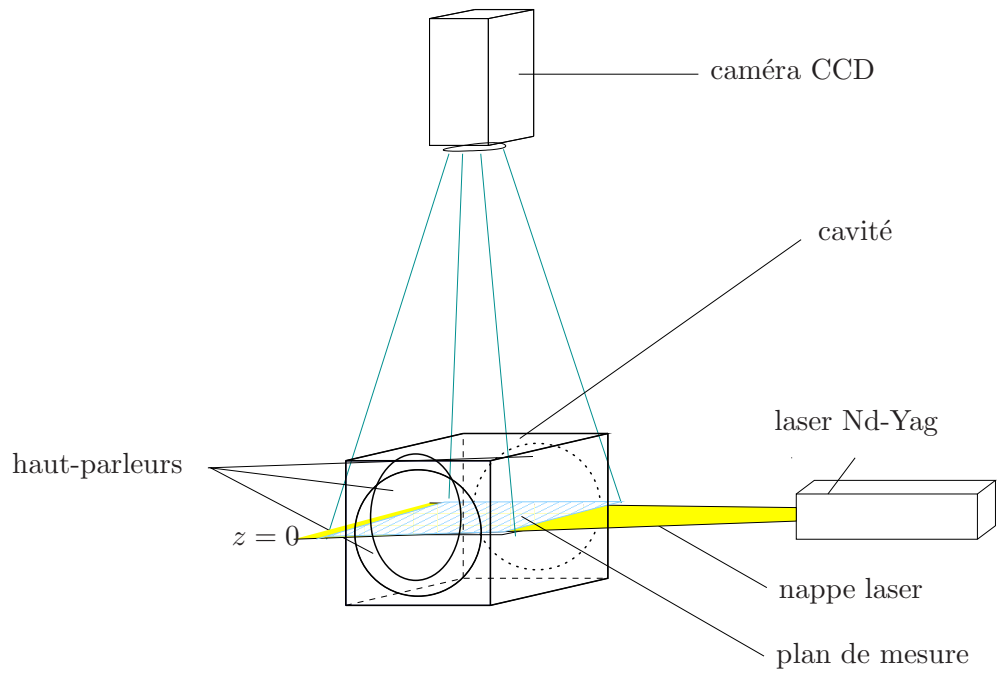
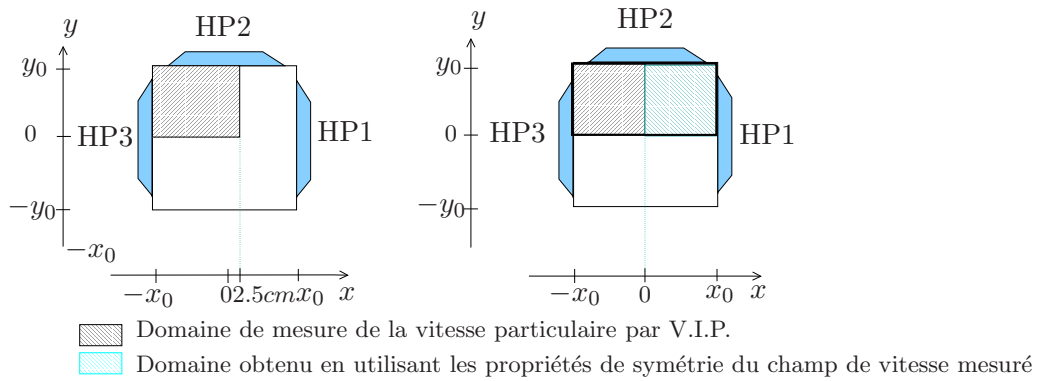


FIG. 3.4 – Montage expérimental du dispositif de mesure de vitesse particulaire par V.I.P.

FIG. 3.5 – Domaine d'estimation de la vitesse particulaire dans le plan $z = 0$.

Les mesures sont synchronisées par rapport à la tension électrique d'alimentation d'un haut-parleur. La synchronisation permet d'une part de faire des moyennes de phase et d'autre part de mesurer le champ de vitesse à différents instants du cycle acoustique afin de reconstruire l'évolution temporelle du champ de vitesse au cours d'un cycle. Pour chaque mesure, les tensions d'alimentation des haut-parleurs, le nombre de champs de vitesses instantanées moyennés, le délais entre chaque instant de mesure et le nombre de mesures par période sont indiqués dans les tableaux D.1 et D.2 en annexe D.

Le champ de vitesse particulaire est mesuré dans le plan $z=0$ (fig. 3.5). Les mesures sont effectuées lorsque la cavité est au maximum munie de trois haut-parleurs, puisqu'une face (celle située dans le plan $y=-y_0$) est laissée totalement transparente pour permettre le passage de la nappe laser. Dans le plan $y=y_0$, la paroi est parfaitement rigide ou est munie d'un haut-parleur. La caméra a un objectif de 50 mm de focale ce qui permet de mesurer au total un champ de vitesse d'environ $14\text{ cm} \times 12\text{ cm}$, lorsque la caméra est éloignée de la cavité aussi loin que le permet le dispositif expérimental (environ

90 cm). La surface sur laquelle le champ de vitesse est mesuré dans la cavité s'étend sur $12\text{ cm} \times 9.5\text{ cm}$ et a pour coordonnée $x \in [-x_0 = -95\text{ mm}, x_1 = +25\text{ mm}]$, $y \in [0, y_0]$, $z = 0$ (fig. 3.5). Les propriétés de symétrie du système permettent de connaître la forme du champ en $x \in [0, x_0]$ à partir du champ de vitesse mesuré en tout point $x \in [-x_0, 0]$ ce qui permet d'avoir accès au champ de vitesse total suivant x ; les résultats sont alors présentés sur le domaine $x \in [-x_0, x_0]$ et $y \in [y_0, 0]$.

Les champs de vitesses expérimentaux sont comparés à ceux théoriques obtenus avec le modèle présenté dans le paragraphe 2.2 qui a comme paramètres d'entrée les vitesses $u_{i=1..4}$ des sources (moyennées sur la surface des sources). Il est donc nécessaire d'obtenir par la mesure la vitesse moyenne de chacune des sources, car c'est ce paramètre qui est la donnée d'entrée du calcul. Pour obtenir les vitesses u_3 et u_2 , les vitesses $u_x(x = -x_0)$ mesurées par V.I.P. à proximité du haut-parleur 3 (moyennée suivant l'axe y) et $u_y(y = y_0)$ à proximité du haut-parleur 2 (moyennée suivant l'axe x) sont mesurées aux différents instants d'une période et ajustées, en utilisant la méthode des moindres carrées, avec une courbe d'équation :

$$u = u_{ac} \sin(2\pi ft + \theta_{ac}) + u_{moy}, \quad (3.2)$$

de manière à en déduire respectivement la valeur moyenne sur une période u_{moy} , l'amplitude u_{ac} , la phase θ_{ac} de la composante u de la vitesse. La vitesse de la source 1 est considérée égale à celle de la source 3, comme vérifié par vibrométrie laser du fait qu'elle ne peut pas résulter d'une mesure de vitesse par V.I.P. (le champ de vitesse n'étant pas mesuré à proximité de la source 1).

3.1.2.4.b Principe de mesures de vitesses particulières par Vélocimétrie Laser à effet Doppler

La vélocimétrie Laser à effet Doppler est une technique très employée depuis 1964 [72] pour mesurer des vitesses d'écoulement de différentes natures : écoulements laminaires, turbulents, hautes températures... En 1976, Taylor [62] a pour la première fois appliqué cette technique à la mesure de vitesses particulières acoustiques, mais cette technique reste aujourd'hui encore peu utilisée dans le domaine de l'acoustique. Elle possède pourtant de nombreux avantages : elle est faiblement intrusive, elle présente une excellente résolution spatiale due au petit volume de mesure et une grande dynamique en amplitude et en fréquence.

Le Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine a développé un banc de mesure qui a notamment permis, dans le domaine de la thermoacoustique, de caractériser le champ de vitesse à l'intérieur d'un réfrigérateur [6] et de mesurer la puissance acoustique en un point quelconque du résonateur [8] (lorsque la mesure est complétée par une mesure de la pression acoustique).

Le principe de base du système de mesure par Vélocimétrie Laser à effet Doppler est illustré sur la figure 3.6. Un faisceau laser est scindé en deux parties parfaitement cohérentes spatialement et temporellement, d'égale puissance grâce à un séparateur. Ces deux faisceaux laser convergent vers un petit volume ellipsoïdal, appelé volume de mesure, constitué de franges d'interférences. La distance i entre deux franges lumineuses ou sombres est donnée par

$$i = \frac{\lambda}{2\sin(\theta/2)}, \quad (3.3)$$

et ne dépend que de l'angle θ séparant les deux faisceaux et de la longueur d'onde λ émise par le faisceau. Ainsi, lorsqu'une particule réfléchissante, animée d'une vitesse constante $\vec{u}$, traverse le volume

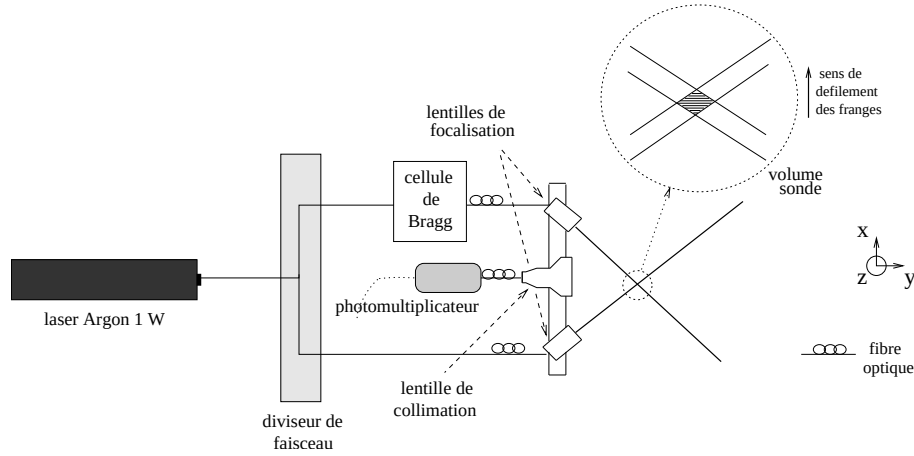


FIG. 3.6 – Principe de fonctionnement du système de mesure par vélocimétrie laser à effet Doppler. Schéma adapté de [48].

de mesure, elle diffuse de la lumière dans toutes les directions de l'espace, lumière dont l'intensité varie à la fréquence Doppler

$$f_D = \frac{u_x}{i}, \quad (3.4)$$

où u_x est l'amplitude de la projection de la vitesse $\vec{u}$ sur l'axe Ox . La lentille de collimation focalise la lumière vers le photomultiplicateur qui effectue la transduction de l'intensité lumineuse en volts. Le sens de la vitesse d'une particule qui traverse le volume de mesure est discriminé en faisant défiler les franges d'interférences. Pour ce faire, la fréquence optique de l'un des deux faisceaux laser est décalée à l'aide d'une cellule de Bragg, dispositif acousto-optique excité à une fréquence $f_B = 10\text{ MHz}$. Le signal analogique en sortie du photomultiplicateur, appelé signal Doppler, est de la forme

$$s(t) = A(t) \left[M + \cos \left(2\pi f_B t + 2\pi \frac{x(t)}{i} + \theta_0 \right) \right], \quad (3.5)$$

où θ_0 est la phase aléatoire qui dépend de la date d'apparition de la particule dans le volume sonde, et $x(t)$ est le déplacement de la particule lié à la vitesse u_x par la relation :

$$x(t) = \int_{t_q}^t u_x(\tau) d(\tau) + x(t_q), \quad (3.6)$$

avec t_q la date d'apparition de la particule dans le volume de mesure.

Le signal Doppler prend la forme d'une sinusoïde à modulation de fréquence sinusoïdale de fréquence porteuse f_B , modulée en amplitude par une fonction $A(t)$ approximativement gaussienne et modulée en fréquence par la vitesse de la particule. Le facteur M traduit l'existence d'une composante continue du signal qui est éliminée au moyen d'un filtre passe-haut. Lorsque une particule est soumise à un champ acoustique sinusoïdal de fréquence f_{ac} connue, sa vitesse particulière dans la direction Ox s'écrit

$$u_x(t) = u_{ec} + u_{ac} \cos(2\pi f_{ac} t + \theta_{ac}), \quad (3.7)$$

où u_{ac} , f_{ac} , θ_{ac} désignent respectivement l'amplitude, la fréquence et la phase de la vitesse particulière. Le terme u_{ec} rend compte des phénomènes de convection locale et de la présence éventuelle d'un

écoulement à vitesse constante se superposant au mouvement acoustique. La position de la particule à l'instant t est alors donnée par

$$x(t) = u_{ec}(t - t_0) + \frac{u_{ac}}{2\pi f_{ac}} \sin(2\pi f_{ac}t + \theta_{ac}). \quad (3.8)$$

Le signal Doppler décrit par l'équation (3.5) devient :

$$s(t) = A(t) \left[M + \cos \left(2\pi f_B t + 2\pi \frac{u_{ec}(t - t_0)}{i} + \frac{u_{ac}}{i f_{ac}} \sin(2\pi f_{ac}t + \theta_{ac}) + \theta_0 \right) \right]. \quad (3.9)$$

L'analyse de la loi de fréquence instantanée du signal permet une estimation de la vitesse particulaire u_x de la particule.

Description du dispositif expérimental

Le banc V.L.D. du Laboratoire d'Acoustique de l'Université du Mans (figure C.2) permet, pour le moment, la mesure d'une seule composante de la vitesse particulaire. L'ensemencement de la cavité est réalisé à l'aide d'un dispositif commercial qui génère un aérosol de micro-gouttelettes d'eau (de $1\mu m$ de diamètre) produites en chauffant un mélange d'eau et d'alcool. La source optique est un laser à argon de longueur d'onde optique $\lambda = 514.5 nm$, les deux faisceaux lasers formant un angle de $\theta = 30^\circ$, l'interfrange i vaut approximativement $1 \mu m$. La dimension du volume de mesure dans la direction perpendiculaire aux franges est de l'ordre de $0.1 mm$. La loi de fréquence instantanée du signal Doppler en sortie du photomultiplicateur est analysée, dans le domaine de Fourier, au moyen d'un analyseur de bouffées ("Burst Spectrum Analyser") qui réalise en temps réel des transformées de Fourier à court terme (FFT) permettant d'obtenir une estimation de la vitesse particulaire.

Les mesures sont effectuées avec trois puis quatre haut-parleurs pour 25 points de mesure dans le plan $z = 0$ de la cavité, les faisceaux lasers traversants la face $z = -z_0$ (sans haut-parleur) de la cavité.

Un exemple de résultat de mesure pour une position quelconque est présenté sur la figure 3.7. La courbe 3.7.a présente les données "temps - composante de la vitesse suivant l'axe x " (+) recueillies lorsque les particules d'ensemencement traversent le volume de mesure et ramenées sur une période acoustique, ce qui permet de reconstruire la forme temporelle du signal de vitesse. Les points de mesures sont alors ajustés en utilisant la méthode des moindres carrés avec une courbe d'équation :

$$u_x = u_{ac} \sin(2\pi f t + \theta_{ac}) + u_{moy}, \quad (3.10)$$

où u_{ac} , θ_{ac} et u_{moy} sont respectivement l'amplitude, la phase et la valeur moyenne au cours d'une période acoustique de la composante u_x de la vitesse mesurée (fig. 3.7.a). Ensuite, le réfrigérateur est tourné de 90° et une nouvelle mesure est faite au même point afin d'avoir également accès à l'amplitude, la phase et la valeur moyenne de la composante u_y de la vitesse (fig. 3.7.b).

Connaissant les vitesses particulières u_x et u_y en un point en fonction du temps, les évolutions temporelles des déplacements particuliers ξ_x et ξ_y au cours d'une période, tracées sur les figures 3.7.c et 3.7.d et la courbe paramétrique d'équation $\xi_x(t)$, $\xi_y(t)$ fonction du temps (figure 3.7.e) sont déterminées. La courbe paramétrique représente les positions successives des particules qui ont traversé le volume de mesure au cours d'un cycle acoustique, courbe qui peut être assimilée à celle de la trajectoire d'une particule, lorsque le champ acoustique est considéré uniforme dans le volume dans

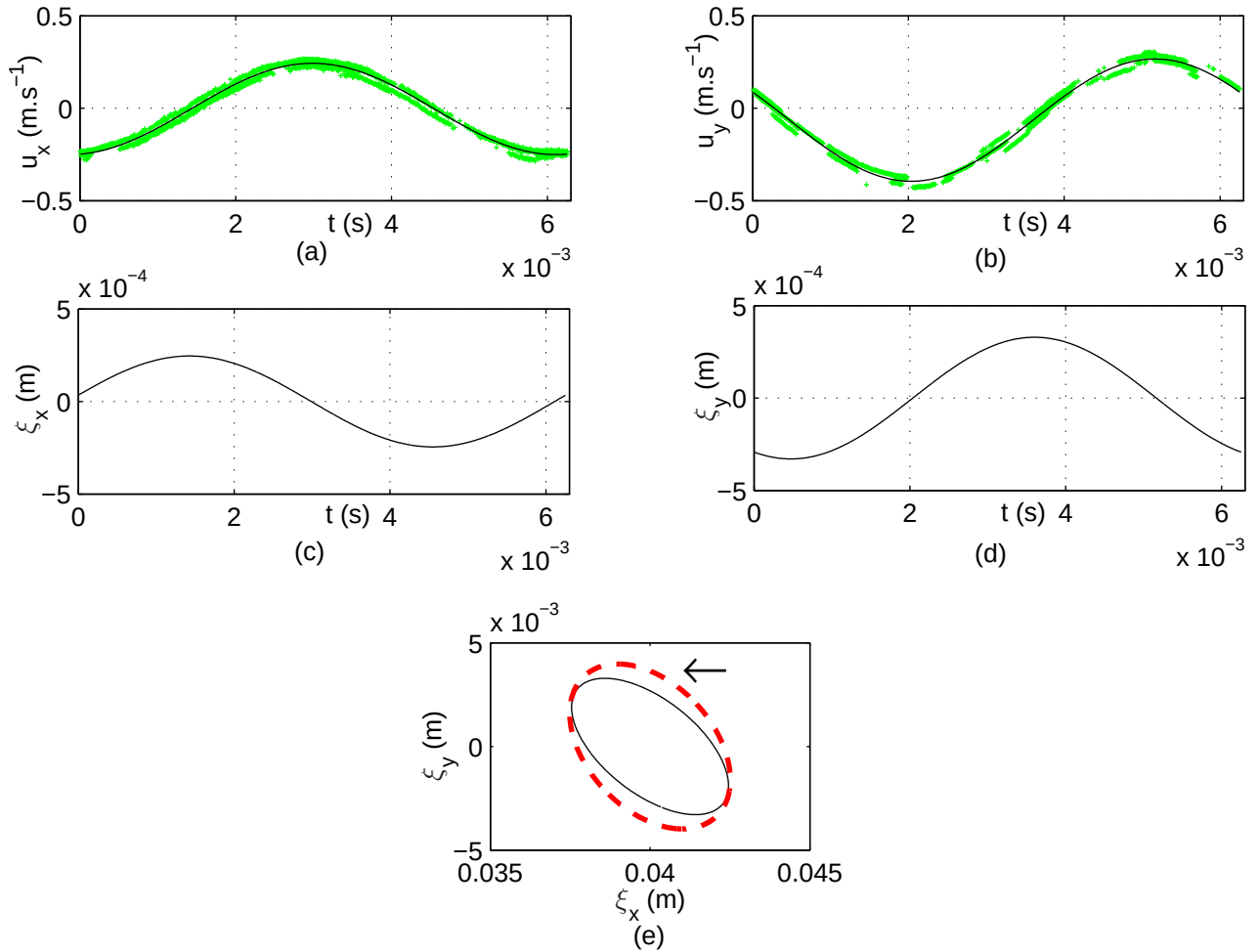


FIG. 3.7 – Exemple de résultat de mesure par V.L.D. en un point. Données issues du traitement du signal Doppler par le B.S.A. (+) et résultat du post-traitement (-) pour les composantes u_x (a) et u_y (b) de la vitesse particulière. Déplacements particuliers ξ_x (c) et ξ_y (d) associés aux vitesses particulières u_x et u_y . (e) Courbe paramétrique d'équation $\xi_x(t)$, $\xi_y(t)$ à la position $[0,0.04\text{m}]$. La flèche indique le sens dans lequel s'effectue le déplacement particulier.

lequel les particules, traversant le volume de mesure, se déplacent au cours d'un cycle acoustique. Les trajectoires des particules peuvent également être obtenues, de la même manière, à partir des champs de vitesse mesurés par V.I.P..

3.2 Réglage de la maquette et vérifications préliminaires

Différentes configurations du champ acoustique dans l'empilement sont étudiées, auxquelles correspondent différents réglages des tensions appliquées aux haut-parleurs. Le modèle électroacoustique présenté au paragraphe 2.3 (qui donne le champ acoustique dans l'empilement en fonction des tensions électriques fournies aux haut-parleurs) met en évidence l'existence de couplages entre les paires de sources en vis-à-vis qui rendent difficile le réglage des sources dans les configurations expérimentales

étudiées. Dans ce qui suit, les protocoles suivis pour régler le réfrigérateur à deux et à quatre sources sont successivement présentés.

3.2.1 Réglage du système à deux haut-parleurs

La projection des vitesses des membranes étant choisie positive dans le sens des axes, les membranes des haut-parleurs vibrent en phase (configuration de la figure 3.8.a) lorsque les haut-parleurs sont alimentés avec des tensions électriques en opposition de phase, et elles vibrent en opposition de phase (configuration de la figure 3.8.b) lorsque les haut-parleurs sont alimentés avec des tensions électriques en phase. Par suite, deux haut-parleurs en vis-à-vis, de caractéristiques identiques et dont les déplacements des membranes sont égaux en amplitude, génèrent une vitesse particulière si leurs déplacements sont en phase (figure 3.8.b), et une pression acoustique si leurs déplacements sont en opposition de phase (figure 3.8.a).

Dans le cas de la maquette à deux haut-parleurs en vis-à-vis, le protocole utilisé pour régler les

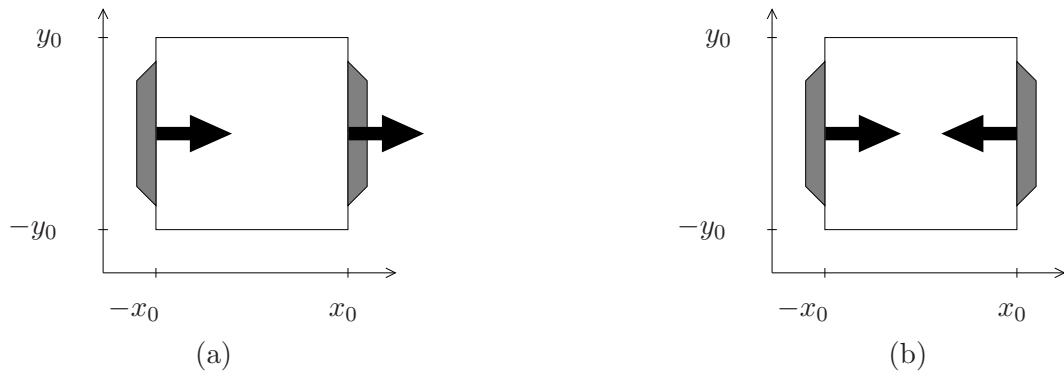


FIG. 3.8 – Configuration dans laquelle les membranes des haut-parleurs vibrent en phase (a) et en opposition de phase (b).

haut-parleurs en générateurs de vitesse particulière est le suivant : la tension d'alimentation d'un haut-parleur est réglée pour obtenir une vitesse de vibration donnée (mesurée par vibrométrie laser), puis l'amplitude et la phase de la tension d'alimentation du deuxième haut-parleur sont ajustées afin que la pression acoustique mesurée par un microphone, affleurant à la paroi, au centre de la face supérieure $z = z_0$, soit nulle. Pour régler les haut-parleurs en générateurs de pression acoustique, les haut-parleurs sont d'abord réglés en générateurs de vitesse particulière, puis la tension d'alimentation d'un haut-parleur est déphasée de 180° , parce qu'il est plus facile d'effectuer le réglage par mesure d'un zéro de pression acoustique que par mesure d'un maximum.

Dans ces configurations, les amplitudes des tensions d'alimentation des haut-parleurs en vis-à-vis sont différentes mais très proches, puisqu'il existe une légère dispersion entre les caractéristiques des différents haut-parleurs ; c'est pourquoi, pour plus de clarté, la tension d'alimentation d'un seul des deux haut-parleurs sera précisée dans la suite du document.

	$V_{e1} (V_{rms})$	$V_{e3} (V_{rms})$	$V_{e2} (V_{rms})$	$V_{e4} (V_{rms})$	$\theta_{V_{e1}-V_{e2}} (^{\circ})$	$\theta_{V_{e1}-V_{e3}} (^{\circ})$	$\theta_{V_{e1}-V_{e4}} (^{\circ})$
expérience	19.1	6.5	19.3	19.8	-92	-86	-92
théorie	18.2	7.9	20.8	20.8	-85	-88	-83

TAB. 3.2 – Tensions expérimentales et théoriques appliquées aux sources pour obtenir le champ acoustique optimal et un niveau sonore de 150 *dB SPL*.

3.2.2 Réglage du système à quatre haut-parleurs

A la fréquence de fonctionnement choisie égale à 160 *Hz*, l'amplitude $|u_{opt}|$ et la phase par rapport à la pression acoustique $\theta_{u-p_{opt}}$ de la vitesse particulière qui maximise la différence de température aux extrémités de l'empilement B valent respectivement 1.5 *m.s*⁻¹ et -63° , selon les équations (1.57) et (1.58). Les membranes des haut-parleurs générant le champ de vitesse particulière doivent être réglées de manière à obtenir cette vitesse. Les membranes des haut-parleurs créant le champ de pression acoustique sont, quant à elles, réglées à leurs déplacements linéaires maximum afin de générer un niveau de pression maximum dans la cavité. Dans les expériences présentées dans ce chapitre, le déplacement maximal des membranes des haut-parleurs créant la pression vaut 1 *mm*, ce qui se traduit par un niveau de 150 *dB SPL* dans la cavité lorsque les quatre haut-parleurs sont alimentés.

Les valeurs théoriques (calculées à partir du modèle du paragraphe 2.3.2) des tensions appliquées aux sources pour atteindre ces vitesses sont données dans le tableau 3.2. Ces tensions sont appliquées aux haut-parleurs comme configuration de départ puis les tensions des sources de vitesse sont ajustées en amplitude et en phase par tâtonnement successifs jusqu'à atteindre la vitesse souhaitée. Les valeurs expérimentales obtenues en appliquant ce protocole sont reportés dans le tableau 3.2. Il y a un assez bon accord entre les tensions électriques théoriques et expérimentales.

3.2.3 Vérifications des mesures réalisées au vibromètre

La membrane des haut-parleurs choisis est un cône tronqué de hauteur 2.5 *cm* dont la base présente un rayon de 5.5 *cm* et dont le sommet est fermé par un dôme de rayon 3.5 *cm*. Des mesures, ayant pour but de vérifier que la vitesse de vibration mesurée par vibromètre laser au centre du dôme du haut-parleur est bien représentative de la vitesse de vibration de tout le diaphragme, sont réalisées. Pour cela, la vitesse de vibration de la membrane d'un haut-parleur encastré dans un écran plan est mesurée pour quatre positions le long du rayon de la membrane par vibromètre laser en fonction de la fréquence pour une tension d'alimentation du haut-parleur fixe (fig. 3.9). Cette même amplitude de vitesse est représentée sur la figure 3.10 pour la fréquence de fonctionnement retenue $f = 160$ *Hz* en fonction de la tension d'alimentation. Il apparaît que la membrane se déforme pour des fréquences supérieures à 600 *Hz* (qui doit correspondre à la fréquence de résonance des suspensions du haut-parleur puisque seule la vitesse près des suspensions admet une résonance à cette fréquence). Pour la fréquence $f = 160$ *Hz*, la membrane du haut-parleur vibre en piston puisque sa vitesse est identique en tout point. De plus, sa vitesse varie linéairement en fonction de la tension d'alimentation. Finalement, il s'avère que la vitesse de vibration au centre du dôme est représentative de la vitesse de vibration

de l'ensemble de la membrane, dans les conditions d'utilisation des haut-parleurs correspondant aux expériences présentées dans la suite de ce document (160 Hz , tensions d'alimentation variant de 0 à 20 V_{rms}). Cette expérience a été reproduite dans le cas où le haut-parleur est chargé par la cavité : le changement d'impédance de charge entre le rayonnement direct et la petite cavité ne perturbe pas le mode de fonctionnement en piston des haut-parleurs.

3.2.4 Vérifications expérimentales de l'hypothèse "piston" retenue dans le modèle

Le modèle du paragraphe 2.2 donne le champ de vitesse dans l'empilement en fonction des débits des sources en supposant que les vitesses des sources sont uniformes sur la section des sources. Dans ce paragraphe, la validité de cette hypothèse est vérifiée expérimentalement.

Il est acquis que la membrane du haut-parleur vibre en piston à la fréquence retenue. Pour avoir un aperçu plus précis du champ de vitesse sur la totalité d'une des faces de la cavité de côté 19 cm (et non plus seulement au niveau de la membrane du haut-parleur de rayon 5.5 cm), la projection du champ de vitesse dans le plan (x, y) à proximité du haut-parleur 3 (en $x = -x_0$) est mesuré par V.L.D. dans la configuration de la figure 3.11 mettant en jeu trois haut-parleurs, les haut-parleurs 2 et 4 étant passifs (qu'ils soient à circuit ouvert ou fermé ne change pas en pratique leur comportement vibratoire).

La figure 3.11.a représente les amplitudes efficaces et les valeurs moyennes sur une période acoustique des composantes u_x et u_y de la vitesse particulière à l'intersection des plans $z = 0$ et $x = -x_0$, en fonction de la position suivant l'axe y (de $y = 0$, centre de la membrane du haut-parleur 3, à $y = y_0$, coordonnée du plan dans lequel se situe le haut-parleur 2). La figure 3.11.b représente le déphasage entre ces composantes u_x et u_y en fonction de la position suivant l'axe y . Ces mesures permettent de vérifier qu'il n'y a pas d'écoulement moyen au niveau des haut-parleurs puisque les moyennes au cours d'une période acoustique des composantes des vitesses sont quasi nulles. De plus, ces mesures confirment que la composante suivant x de la vitesse $u(x = -x_0, y, z = 0)$ reste à peu près indépendante de la coordonnée y et que la composante suivant y , nulle au centre de la membrane du haut-parleur 3, devient non négligeable en se rapprochant du haut-parleur 2.

La figure 3.12.a représente les amplitudes efficaces et les valeurs moyennes sur une période acoustique (ici nulles) des composantes u_x et u_y de la vitesse acoustique à l'intersection des plans $y = 0$ et $x = -x_0$, en fonction de la position suivant l'axe z (de $z = 0$, centre de la membrane du haut-parleur 3, à $z = z_0$, coordonnée de la face supérieure). La composante suivant x de la vitesse $u(x = -x_0, y = 0, z)$ décroît en se rapprochant de la paroi supérieure. L'hypothèse retenue dans le modèle analytique (§ 2.2) selon laquelle la source 3 vibre en piston n'est pas vérifiée, car la vitesse u_x n'est pas uniforme, le haut-parleur n'occupant qu'une partie de la surface $x = -x_0 - \epsilon$. Les conséquences de cette hypothèse sur la prédiction des champs de vitesse acoustique dans la cavité sont considérées dans le paragraphe suivant où les champs de vitesses expérimentaux et théoriques sont comparés afin de valider le modèle analytique.

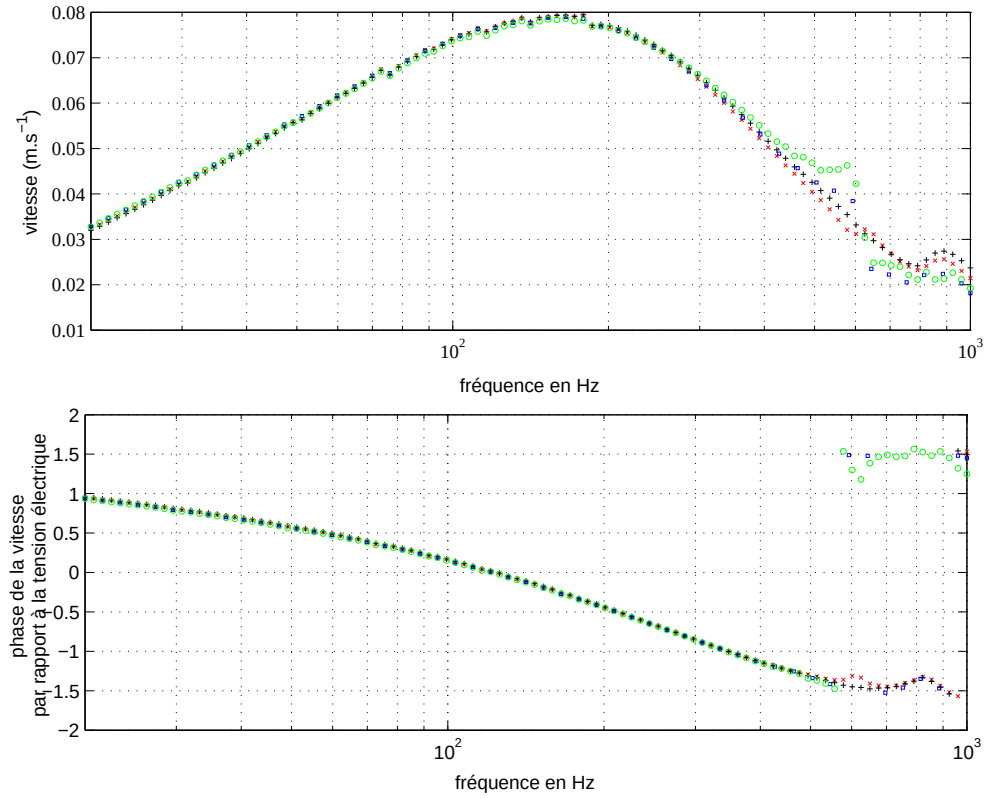


FIG. 3.9 – Amplitude et phase par rapport à la tension électrique d’alimentation de la vitesse mesurée en différents points de la membrane d’un haut-parleur de rayon $R = 5.5 \text{ cm}$ (au centre de la membrane ($\times$) et à différentes distances du centre 1.5 cm ($+$), 4 cm ($\square$) et 5.5 cm ($\circ$) sur un même rayon) en fonction de la fréquence. Le haut-parleur est fixé dans un écran plan. La tension électrique d’alimentation est choisie faible pour éviter un comportement non linéaire du haut-parleur.

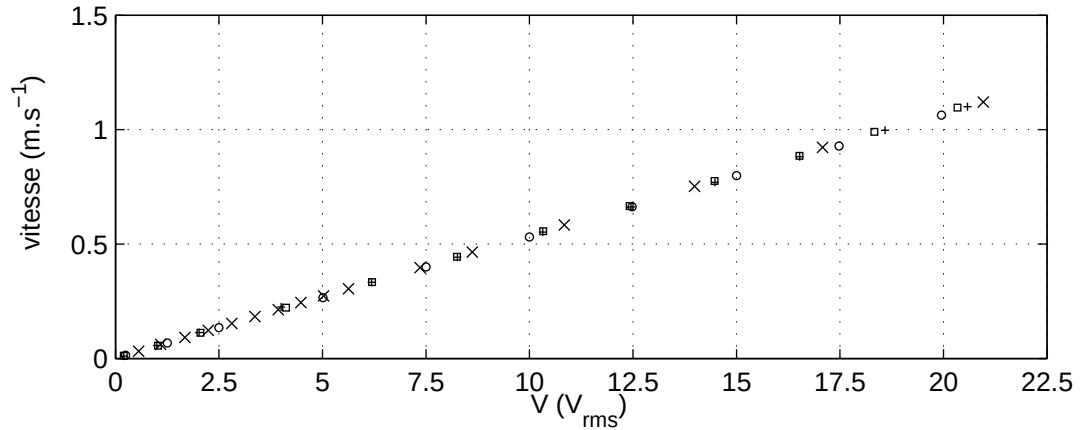


FIG. 3.10 – Amplitude de la vitesse mesurée en différents points de la membrane d’un haut-parleur (au centre de la membrane ($\times$) et à différentes distances du centre 1.5 cm ($+$), 4 cm ($\square$) et 5.5 cm ($\circ$) sur un même rayon) en fonction de la tension électrique d’alimentation pour une fréquence de 160 Hz . Le haut-parleur est encastré dans un écran plan.

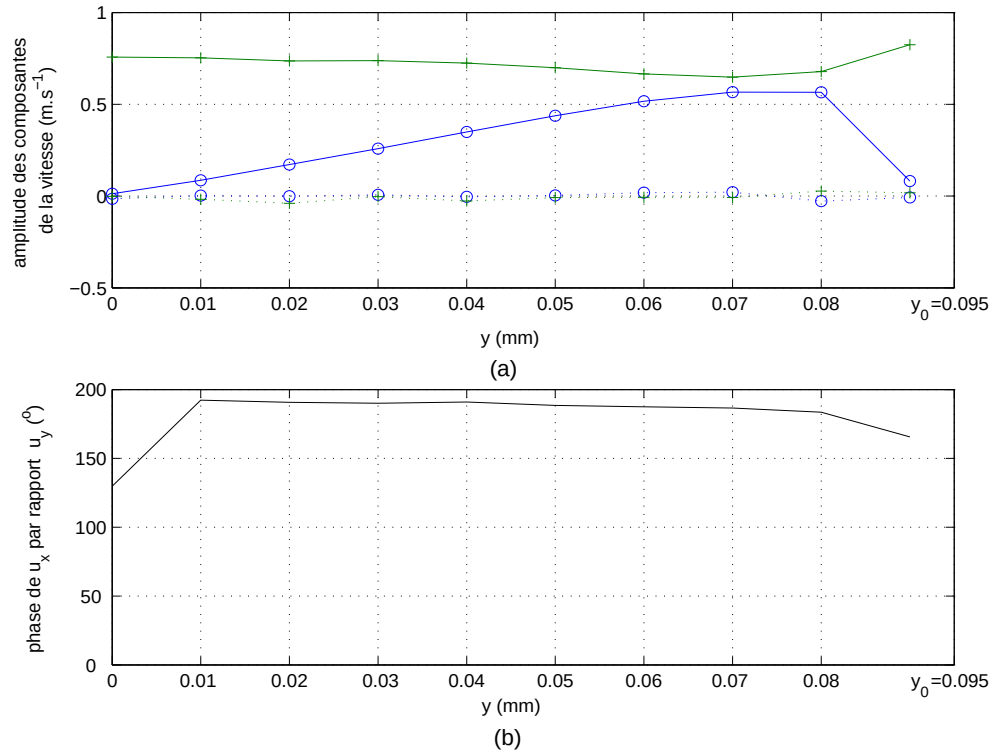


FIG. 3.11 – Mesures par V.L.D. des composantes suivant x et y de la vitesse particulaire mesurées à l'intersection des plans $x = -x_0$ et $z = 0$ en fonction de la position suivant l'axe y pour $V_{e3} = 20 V_{rms}$ (les haut-parleurs 2 et 4 étant passifs). (a) — Amplitudes efficaces des composantes u_x (+), et u_y (o) de la vitesse particulaire. Valeurs moyennes sur une période acoustique des composantes u_x (+), et u_y (o) de la vitesse particulaire. (b) — Déphasage de u_x par rapport à u_y .

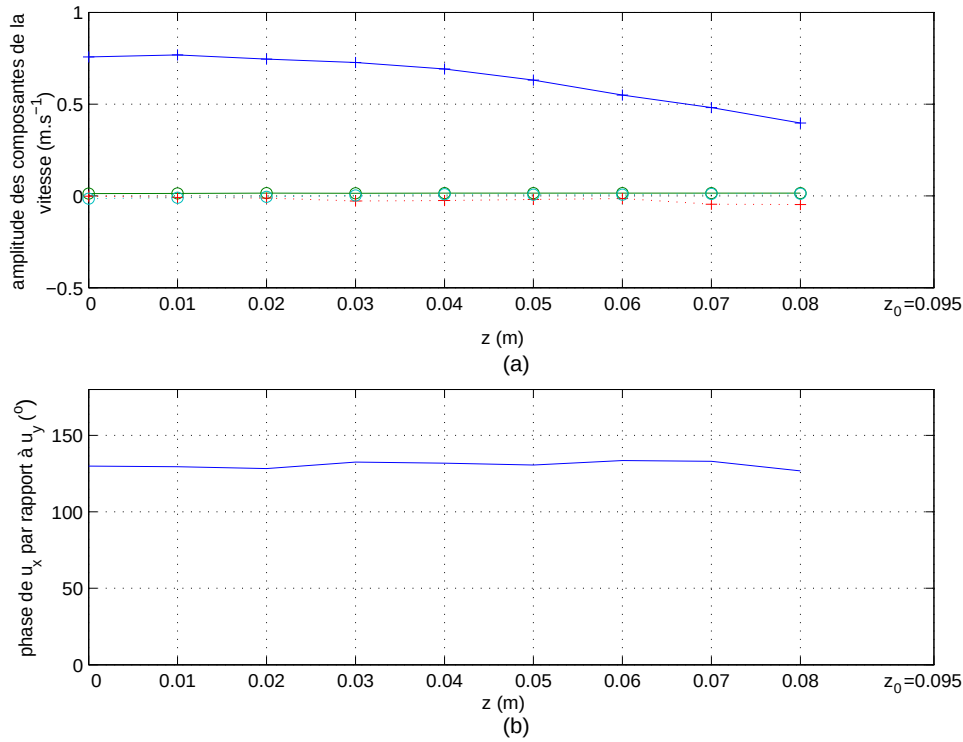


FIG. 3.12 – Mesures par V.L.D. des composantes suivant x et y de la vitesse particulaire mesurées à l'intersection des plans $x = -x_0$ et $y = 0$ en fonction de la position suivant l'axe z pour $V_{e3} = 20 V_{rms}$ (les haut-parleurs 2 et 4 étant passifs). (a) — Amplitudes efficaces des composantes u_x (+), et u_y (o) de la vitesse particulaire. Valeurs moyennes sur une période acoustique des composantes u_x (+), et u_y (o) de la vitesse particulaire. (b) — Déphasage de u_x par rapport à u_y .

3.3 Comparaison entre les champs de vitesses expérimentaux et théoriques dans la maquette sans empilement

L'objectif des mesures présentées dans ce paragraphe est de valider les modèles analytiques du comportement d'un réfrigérateur thermoacoustique à quatre sources présentés dans les paragraphes 2.2 et 2.3 dans différentes configurations du système. Pour cela, les champs de vitesses acoustiques dans le système sans empilement mesurés par V.I.P et calculés sont comparés entre eux. Dans un premier temps, le système comporte deux haut-parleurs actifs (1 et 3) et deux parois latérales rigides puis, dans un second temps, le système comporte trois haut-parleurs actifs.

3.3.1 Champs de vitesse particulaire en maquette à deux haut-parleurs actifs sans empilement

Les mesures du champ de vitesse par V.I.P. sont effectuées dans les configurations des figures 3.8.a et 3.8.b, c'est-à-dire lorsque les haut-parleurs 1 et 3 sont réglés en générateur de vitesse particulaire (la phase relative θ_{v1-v3} entre les vitesses de vibrations des haut-parleurs 1 et 3 valant 0°) et en générateurs de pression acoustique ($\theta_{v1-v3} = 180^\circ$), pour des forts niveaux de tension d'alimentation des haut-parleurs 1 et 3 ($V_{e1} \approx V_{e3} \approx 15 V_{rms}$). Pour ces tensions, les vitesses de vibration des membranes des haut-parleurs expérimentales et théoriques (calculées à partir du modèle du paragraphe 2.3.1) sont alors approximativement égales à 1.1 m.s^{-1} pour $\theta_{v1-v3} = 0^\circ$ et 1 m.s^{-1} pour $\theta_{v1-v3} = 180^\circ$.

Les champs de vitesse particulaire instantanée en deux instants du cycle acoustique (qui correspondent à deux instants t_1 et t_2 , reportés sur le haut de la figure 3.13, pour lesquels l'amplitude de la vitesse de vibration de la membrane 3 est proche de son maximum) mesurés par V.I.P. d'une part, calculés à partir des expressions (2.90) et (2.91) d'autre part, et la différence de ces deux champs sont représentés sur la figure 3.13, lorsque les haut-parleurs sont générateurs de vitesse particulaire, et sur la figure 3.14, lorsque les haut-parleurs sont sources de pression acoustique. La comparaison des champs de vitesse théoriques et expérimentaux à proximité des haut-parleurs corrobore les résultats présentés sur la figure 3.11 puisque des différences apparaissent dans les "coins" du fait que la vitesse u_x n'est pas uniforme sur la surface $x = -x_0 - \epsilon$ comme supposé par le modèle. Au centre de la cavité, l'accord entre les résultats analytiques et expérimentaux est satisfaisant.

Les figures 3.15 et 3.16 représentent les vitesses particulières instantanées u_x en fonction de la position le long de l'axe x , à l'intersection des plans $y = 0$ et $z = 0$ (issus des mêmes mesures que les champs de vitesse des figures 3.13 et 3.14 pour $\theta_{v1-v3} = 0^\circ$ et pour $\theta_{v1-v3} = 180^\circ$), mesurées par V.I.P. et calculés à partir des expressions (2.90) et (2.91) pour huit instants différents du cycle acoustique. Lorsque les haut-parleurs fonctionnent en générateurs de vitesse particulaire ($\theta_{v1-v3} = 0^\circ$), l'amplitude de la vitesse particulaire dans la cavité n'est pas tout à fait uniforme (contrairement à la vitesse obtenue avec le modèle à l'ordre le plus bas) : elle diminue au voisinage du centre de la cavité. L'écart entre l'amplitude de la vitesse théorique et expérimentale au centre de la cavité atteint au maximum 15% de la l'amplitude de la vitesse théorique. Lorsque les haut-parleurs fonctionnent en générateurs de pression acoustique ($\theta_{v1-v3} = 180^\circ$), la vitesse particulaire s'annule au centre de la cavité dans le plan $x = 0$ de la cavité, le champ de vitesse étant symétrique (comme l'indique la théorie).

3.3.2 Champs de vitesse particulière en maquette à trois haut-parleurs actifs sans empilement

Le champ de vitesse acoustique, dans le plan $z = 0$, est mesuré par V.I.P. dans la configuration optimale sans empilement de plaques, lorsque la cavité comporte trois haut-parleurs (les haut-parleurs 1, 2 et 3), la face 4 située dans le plan $y = -y_0$ étant totalement transparente pour permettre le passage de la nappe laser. Dans cette configuration, les haut-parleurs 1 et 3 génèrent de la vitesse particulière et seul le haut-parleur 2 se charge de générer la pression acoustique ($V_{e1} \approx 7.5 V_{rms}$, $V_{e2} = 21.1 V_{rms}$, $V_{e3} \approx 9.5 V_{rms}$, $\theta_{V_{e1}-V_{e2}} = 153^\circ$ et $\theta_{V_{e1}-V_{e3}} = 175^\circ$). L'évolution temporelle, théorique et expérimentale, du champ de vitesse acoustique, dans le plan $z = 0$, est représentée sur la figure 3.17, pour 12 instants d'une période acoustique. La vitesse particulière est surestimée par le modèle dans les coins de coordonnée $x = x_0$, $y = \pm y_0$, et $x = -x_0$, $y = \pm y_0$. L'évolution temporelle de la composante u_y de la vitesse (moyennée suivant l'axe x), mesurée à proximité du haut-parleur 2, et de la composante u_x (moyennée suivant l'axe y), mesurée à proximité du haut-parleur 3, sont représentées sur la figure 3.18. Le déphasage $\theta_{u_x-u_y}$ entre ces deux composantes de la vitesse (mesuré à -150°) implique un déphasage θ_{u_x-p} , entre la vitesse particulière suivant x et la pression acoustique dans la cavité égale à -60° proche du déphasage $\theta_{u-p_{opt}}$ optimal.

La figure 3.19 représente les trajectoires expérimentales et théoriques des particules aux différents points de mesures. Ces trajectoires sont obtenues en traçant les déplacements des particules ξ_x et ξ_y , en chaque point, en fonction du temps. Quelques différences entre les vitesses théoriques et expérimentales sont observées notamment à proximité des sources. En effet, la composante tangentielle de la vitesse à proximité des sources est constante en théorie alors que, expérimentalement, elle est pratiquement nulle à proximité du centre de la membrane et augmente en s'éloignant du centre de la membrane. Par contre, comme prévu par la théorie, la composante u_y de la vitesse particulière décroît suivant l'axe y et la composante u_x de la vitesse particulière est uniforme suivant l'axe x .

Finalement, la comparaison entre les champs de vitesse particulière théoriques et expérimentaux montre qu'il y a un accord satisfaisant hormis dans des zones limitées situées aux coins de la cavité. Cette différence est due à l'hypothèse de vitesse uniforme sur la totalité des sections situées en $x = \pm x_0 \pm \epsilon$ et en $y = \pm y_0 \pm \epsilon$ retenu dans le modèle analytique qui n'est pas vérifié expérimentalement.

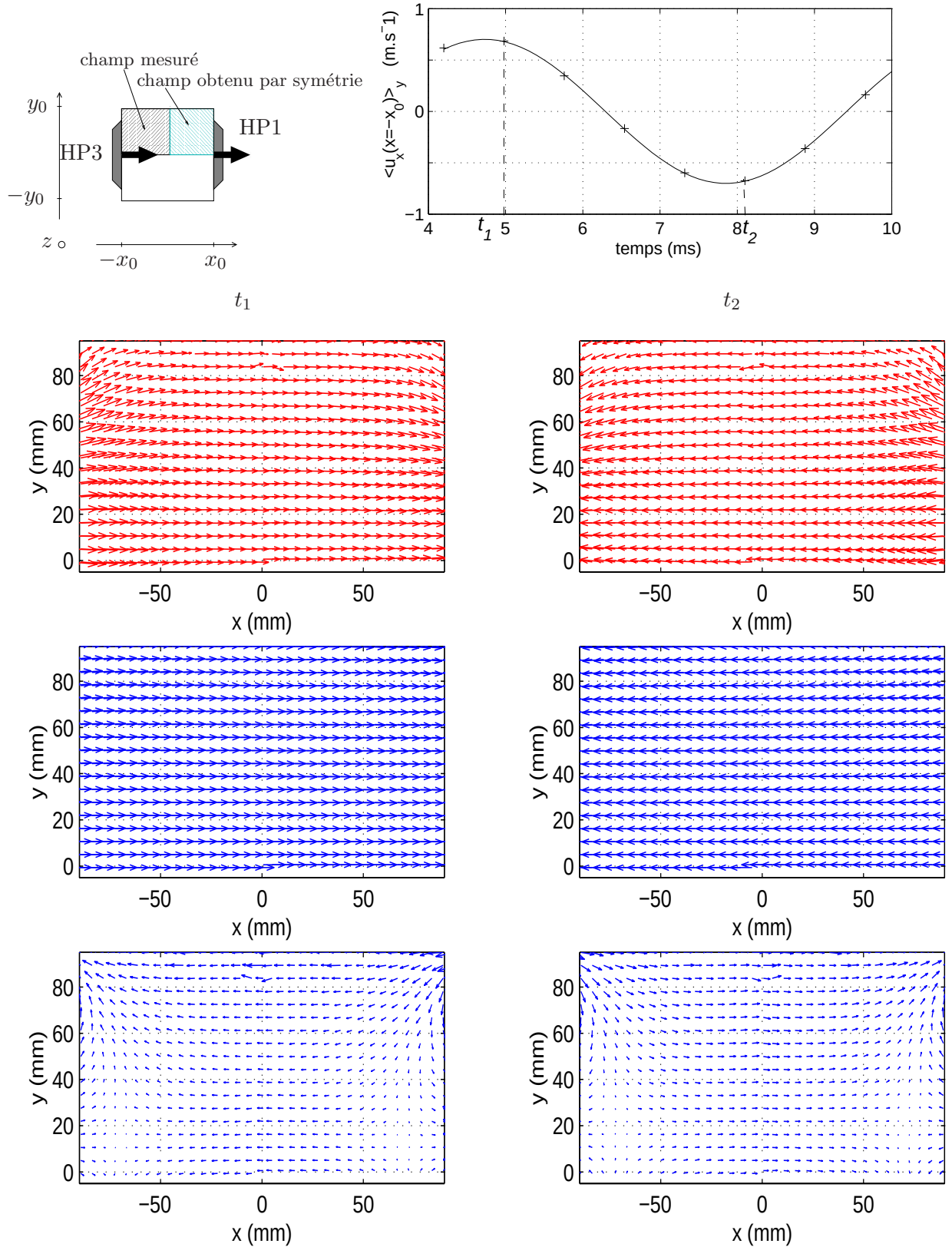


FIG. 3.13 – Champs de vitesse particulière dans la cavité sans empilement mesurés par V.I.P. (champs du haut), calculés (champs au centre) et la différence entre les champs expérimentaux et théoriques (champs du bas), lorsque les haut-parleurs 1 et 3 sont générateurs de vitesse particulière pour des forts niveaux de tension électrique d’alimentation ($\theta_{V_{e1}-V_{e3}} = 180^\circ$, $V_{e1} \approx V_{e3} \approx 15V_{rms}$), en deux instants t_1 et t_2 du cycle acoustique (reportés sur la courbe expérimentale du haut), pour lesquelles l’amplitude de la vitesse $\langle u_x(x = -x_0) \rangle_y$, moyennée suivant y , à proximité du haut-parleur 3 est proche d’un maximum et d’un minimum.

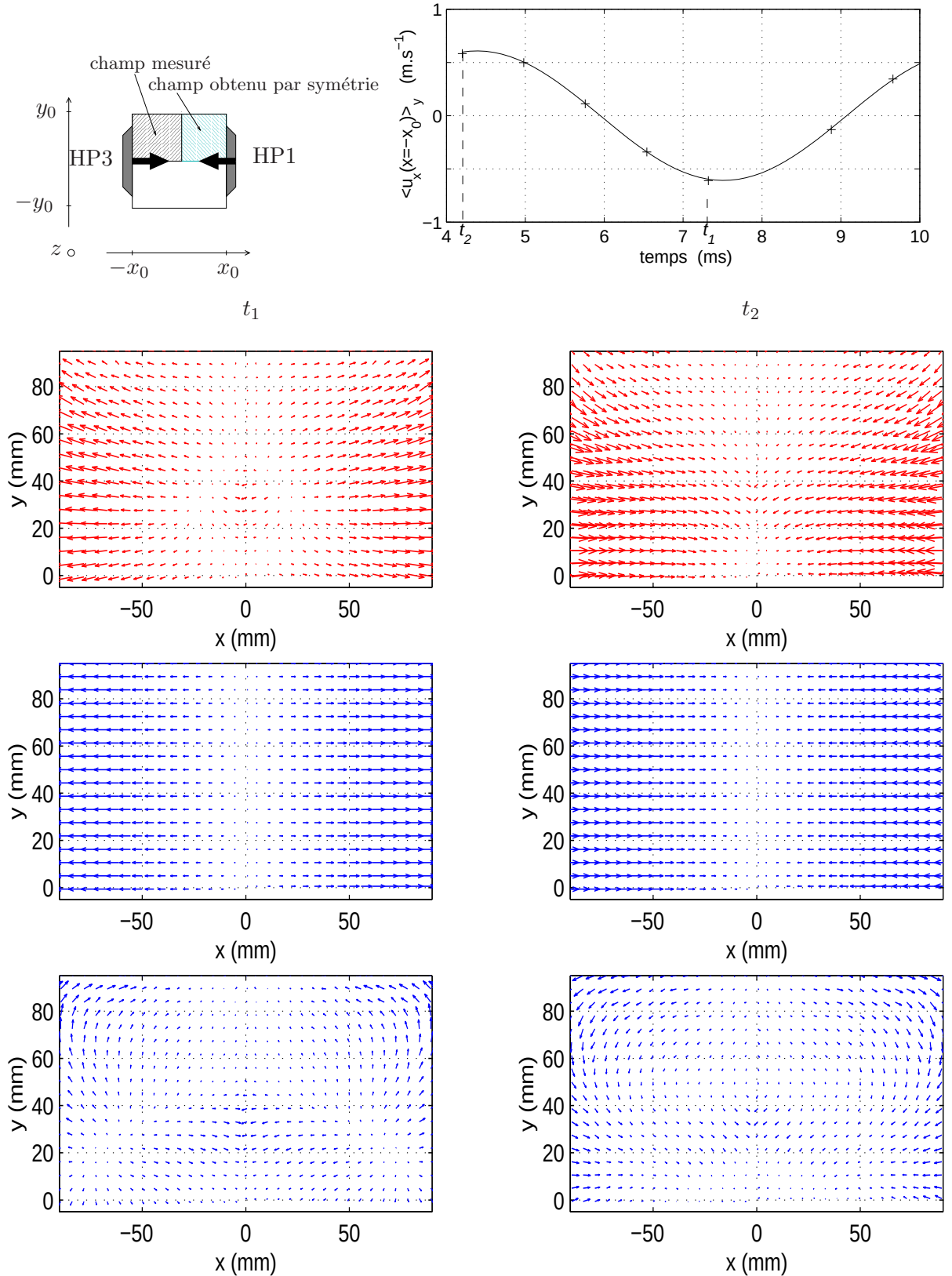


FIG. 3.14 – Champs de vitesse particulière dans la cavité sans empilement mesurés par V.I.P. (champs du haut), calculés (champs au centre) et la différence entre les champs expérimentaux et théoriques (champs du bas), lorsque les haut-parleurs 1 et 3 sont sources de pression acoustique, pour des forts niveaux de tension électrique d'alimentation ($\theta_{V_{e1}-V_{e3}} = 0^\circ$, $V_{e1} \approx V_{e3} \approx 15 V_{rms}$), en deux instants t_1 et t_2 du cycle acoustique (reportés sur la courbe expérimentale du haut) pour lesquelles l'amplitude de la vitesse $\langle u_x(x = -x_0) \rangle_y$, moyennée suivant y , à proximité du haut-parleur 3, est proche d'un maximum et d'un minimum.

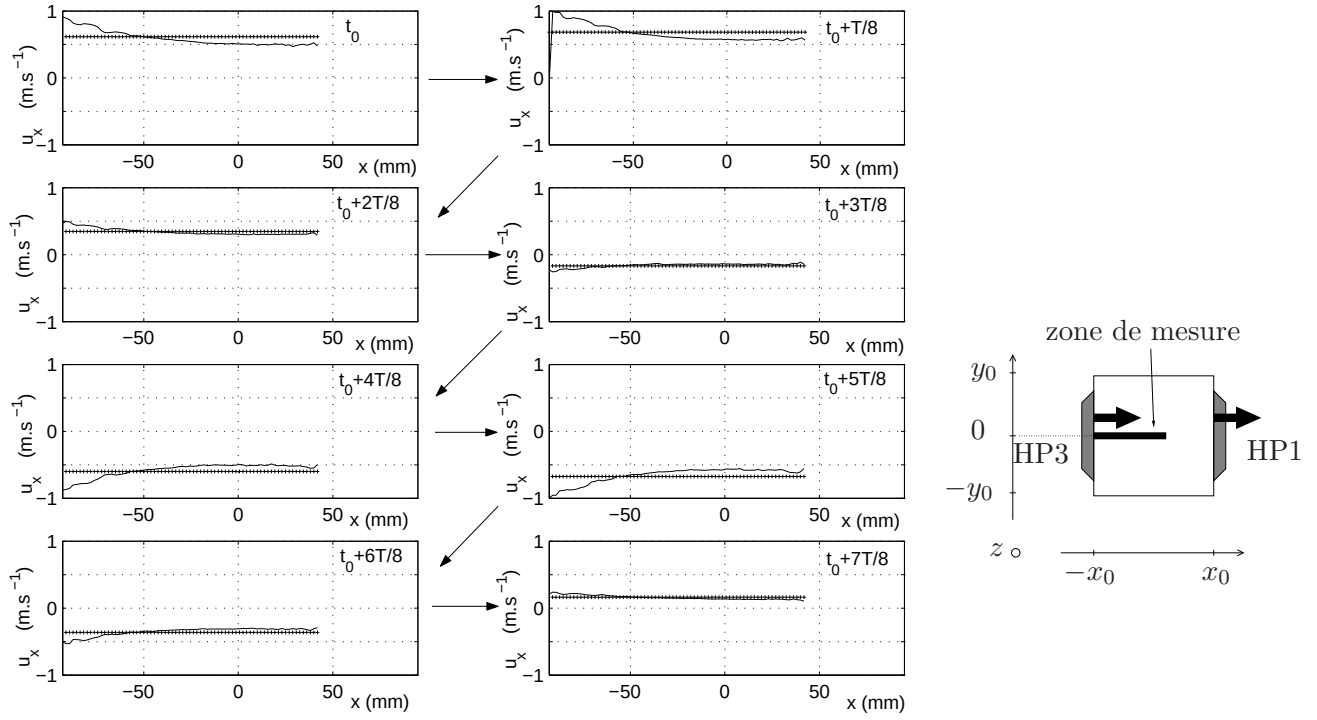


FIG. 3.15 – Évolution temporelle du profil de vitesse acoustique $u_x(x, y = 0)$, à l'intersection des plans $z = 0$ et $y = 0$, en fonction de la position le long de l'axe x , mesurée par V.I.P.(-) et calculée (+) au cours d'un cycle acoustique dans la cavité sans empilement, lorsque les haut-parleurs 1 et 3 sont sources de vitesse particulière, pour des forts niveaux de la tension électrique d'alimentation ($\theta_{V_{e1}-V_{e3}} = 180^\circ$, $V_{e1} \approx V_{e3} \approx 15V_{rms}$). Le cycle acoustique est décomposé en 8 phases équiréparties (de $t = t_0$ à $t = t_0 + \frac{7T}{8}$, avec T la période acoustique).

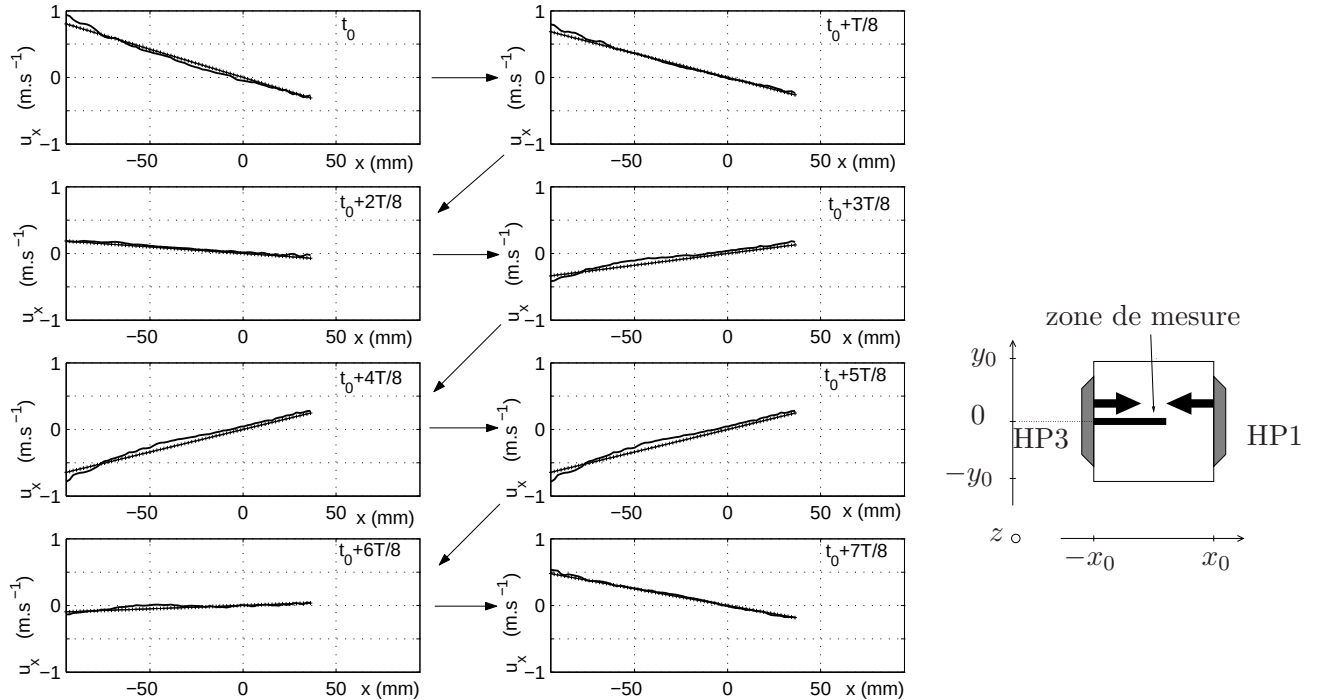


FIG. 3.16 – Évolution temporelle du profil de vitesse acoustique $u_x(x, y = 0)$, à l'intersection des plans $z = 0$ et $y = 0$, en fonction de la position le long de l'axe x , mesurée par V.I.P.(-) et calculée (+) au cours d'un cycle acoustique dans la cavité sans empilement, lorsque les haut-parleurs 1 et 3 sont sources de pression acoustique, pour des forts niveaux de la tension électrique d'alimentation ($\theta_{V_{e1}-V_{e3}} = 0^\circ$, $V_{e1} \approx V_{e3} \approx 15V_{rms}$). Le cycle acoustique est décomposé en 8 phases équiréparties (de $t = t_0$ à $t = t_0 + \frac{7T}{8}$, avec T la période acoustique).

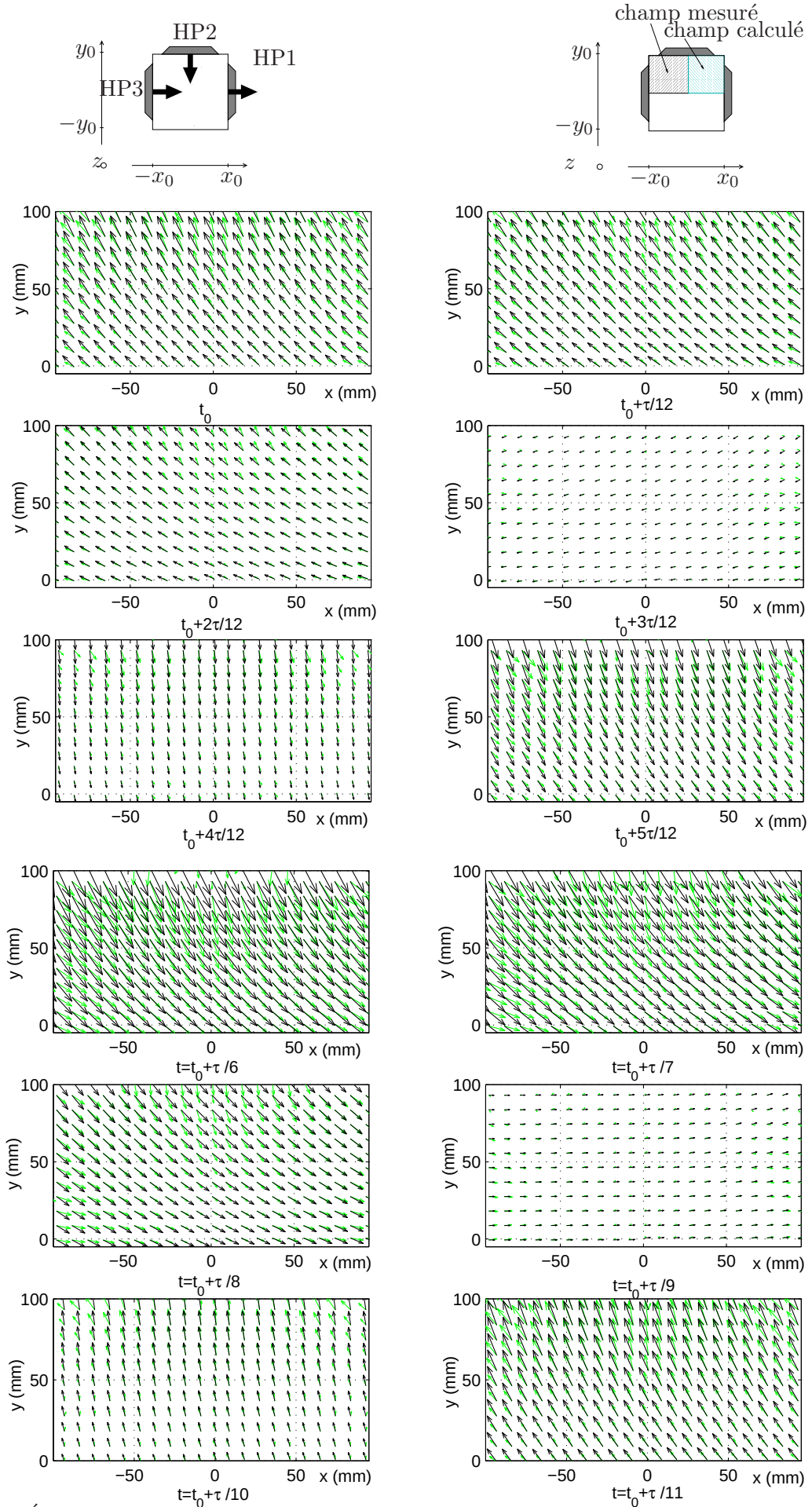


FIG. 3.17 – Évolution temporelle du champ de vitesse acoustique mesuré par V.I.P. (clair) et calculé (foncé) dans la cavité sans empilement pour $V_{e1} \approx 7.5 V_{rms}$, $V_{e2} = 21.1 V_{rms}$, $V_{e3} \approx 9.5 V_{rms}$, $\theta_{V_{e1}-V_{e2}} = 153^\circ$ et $\theta_{V_{e1}-V_{e3}} = 175^\circ$.

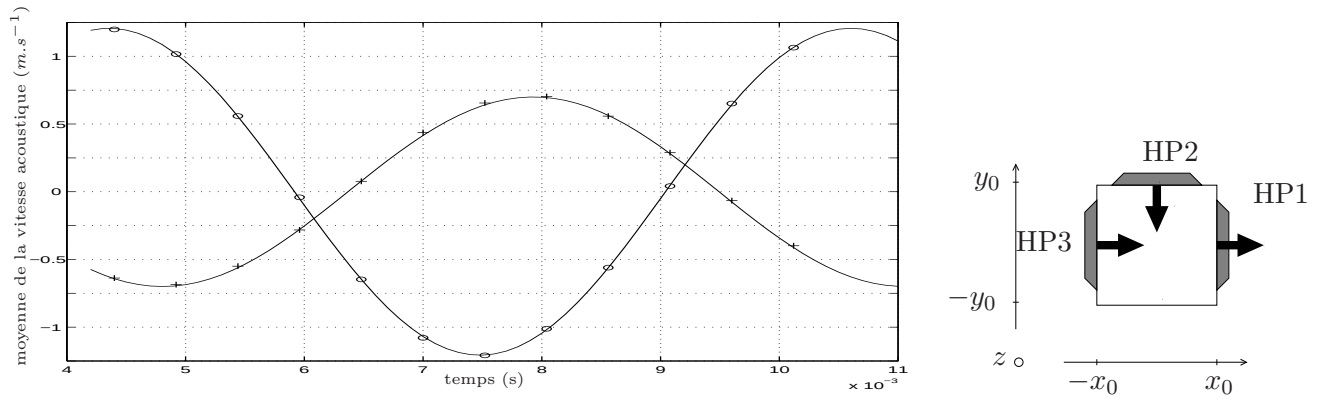


FIG. 3.18 – Évolution temporelle de la valeur moyenne suivant y de la composante u_x de la vitesse particulaire à l'intersection des plans $x = -x_0$ et $z = 0$ (+) et de la valeur moyenne suivant x de la composante u_y de la vitesse particulaire à l'intersection des plans $y = y_0$ et $z = 0$ (o) mesurées par V.I.P. dans la cavité sans empilement pour $V_{e1} \approx 7.5 V_{rms}$, $V_{e2} = 21.1 V_{rms}$, $V_{e3} \approx 9.5 V_{rms}$, $\theta_{V_{e1}-V_{e2}} = 153^\circ$ et $\theta_{V_{e1}-V_{e3}} = 175^\circ$.

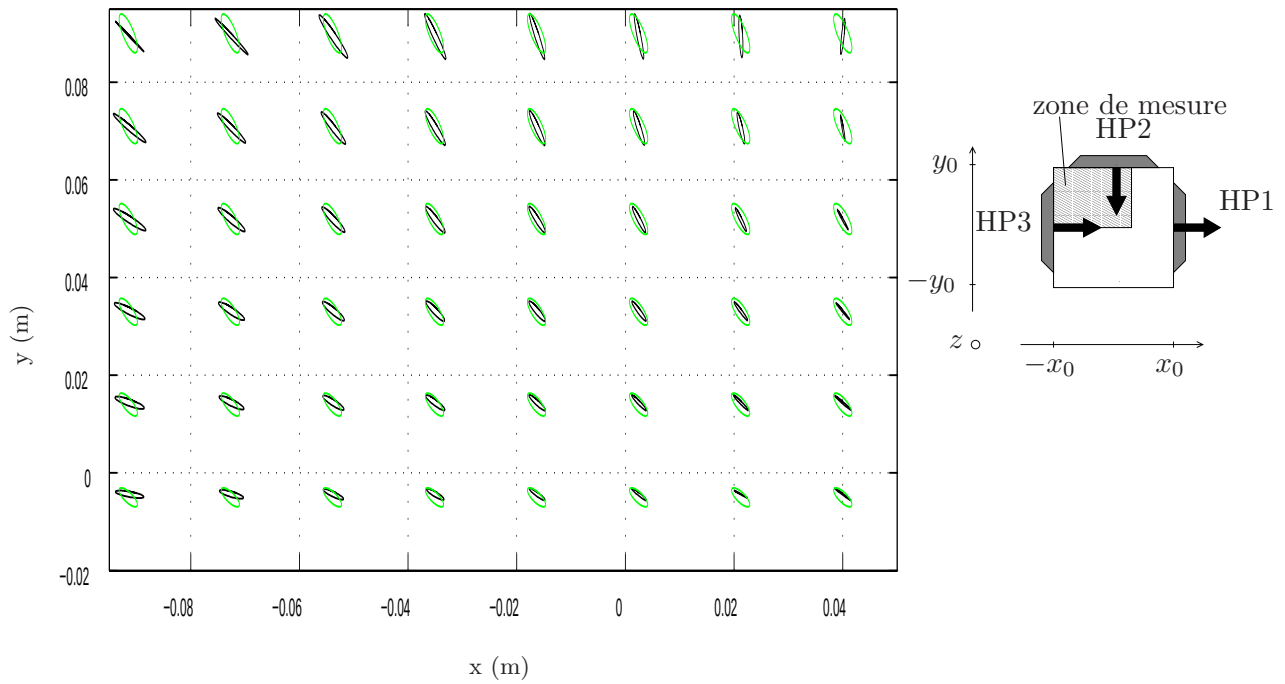


FIG. 3.19 – Évolution temporelle du déplacement acoustique mesuré (foncé) dans la cavité sans empilement par V.I.P. et calculé (clair) pour $V_{e1} \approx 7.5 V_{rms}$, $V_{e2} = 21.1 V_{rms}$, $V_{e3} \approx 9.5 V_{rms}$, $\theta_{V_{e1}-V_{e2}} = 153^\circ$ et $\theta_{V_{e1}-V_{e3}} = 175^\circ$.

3.4 Caractérisation de la maquette à son point de fonctionnement optimal théorique

Un des avantages du système compact est de pouvoir gérer indépendamment la pression acoustique, la vitesse particulaire et leur phase relative dans l'empilement de plaques. Ainsi, ce système permet de se placer au point de fonctionnement optimal (§1.2.3) devant conduire à un écart de température maximal entre les extrémités de l'empilement. Ce point de fonctionnement est caractérisé par une vitesse optimale u_{opt} (donnée par la relation (1.57)) et une phase optimale $\theta_{u-p_{opt}}$ (donnée par la relation (1.58)) entre la pression acoustique et la vitesse particulaire dans l'empilement. Pour une fréquence de 160 Hz et compte tenu des paramètres géométriques et thermophysiques de la maquette étudiée (tab. 3.1), ces grandeurs valent $\theta_{u-p_{opt}} = -63^\circ$ et $u_{opt} = 1.5 \text{ m.s}^{-1}$.

Les objectifs des mesures présentées dans ce paragraphe sont, d'une part, de déterminer expérimentalement le champ de vitesse particulaire et le déplacement particulaire dans la configuration optimale et, d'autre part, d'étudier le comportement thermique du système (en terme d'évolution de la température en différents points de l'empilement) à différents points de fonctionnement de la maquette.

3.4.1 Champ de vitesse particulaire dans la cavité

Contrairement à la V.I.P., qui ne peut être utilisée lorsque la maquette comporte plus de trois haut-parleurs (deux faces devant rester totalement transparentes, l'une pour le passage de la nappe laser, l'autre pour la prise de vue par la caméra), la V.L.D. permet le fonctionnement de la maquette avec quatre haut-parleurs (le laser traversant la face supérieure transparente). C'est donc cette technique qui est utilisée pour caractériser la champ de vitesse particulaire à l'intérieur de la cavité, lorsque la maquette compact à quatre sources fonctionne en configuration optimale. Les mesures présentées au paragraphe 3.4.1.1 concernent le cas où la cavité ne comporte pas d'empilement, les tentatives de mesures entre deux plaques s'étant soldées par un échec (§3.4.1.2).

3.4.1.1 Champ de vitesse particulaire dans la cavité sans empilement de plaques

La maquette est réglée de telle sorte que les haut-parleurs 2 et 4 sont sources de pression acoustique et les haut-parleurs 1 et 3 sont sources de vitesse particulaire (réglage qui conduit aux tensions électriques appliquées aux haut-parleurs suivantes $V_{e1} \approx 19 V_{rms}$, $V_{e3} \approx 6.5 V_{rms}$, $V_{e2} \approx V_{e4} \approx 19 V_{rms}$, $\theta_{V_{e1}-V_{e2}} = -92^\circ$, $\theta_{V_{e1}-V_{e3}} = 86^\circ$ et $\theta_{V_{e1}-V_{e4}} = -92^\circ$). Sur la figure 3.20 sont représentées les vitesses de vibrations des membranes des haut-parleurs mesurées par vibrométrie laser et les vitesses particulières à 2.5 cm des membranes mesurées par V.L.D. pour les haut-parleurs 1 et 3 (fig. 3.20.a) et pour les haut-parleurs 2 et 4 (fig. 3.20.b). Les amplitudes et les phases des vitesses de vibrations des membranes des haut-parleurs 1 et 3 créant la vitesse particulaire et les vitesses particulières à 2.5 cm de ces haut-parleurs sont approximativement égales, la vitesse particulaire étant indépendante de la coordonnée x . Par contre, les amplitudes des vitesses de vibration des membranes des haut-parleurs mesurées à proximité des haut-parleurs 2 et 4 sont supérieures aux vitesses mesurées à 2.5 cm de ces haut-parleurs

puisque la composante u_y de la vitesse diminue pour s'annuler dans le plan $y = 0$, comme l'indique le modèle.

Dans cette configuration optimale, la composante u_y de la vitesse près des haut-parleurs 2 et 4, sources de pression acoustique, est supérieure tout en restant du même ordre de grandeurs à la composante u_x de la vitesse dans la cavité, et donc à la vitesse optimale. La figure 3.21 représente l'évolution temporelle théorique et expérimentale des déplacements particuliers en quelques points du plan $z = 0$ au cours d'une période acoustique. Ces déplacements sont obtenus à partir des mesures des composantes u_x et u_y de la vitesse particulière en différents points du plan $z = 0$ par V.L.D. Les deux composantes de la vitesse étant du même ordre de grandeurs et leur déphasage non nul, les trajectoires des particules ne sont pas rectilignes (contrairement au cas d'un système thermoacoustique classique résonant) mais elliptiques. Ce comportement en vitesse révélé par l'expérience est correctement décrit par le modèle théorique hormis dans les "coins" de la cavité (§3.3).

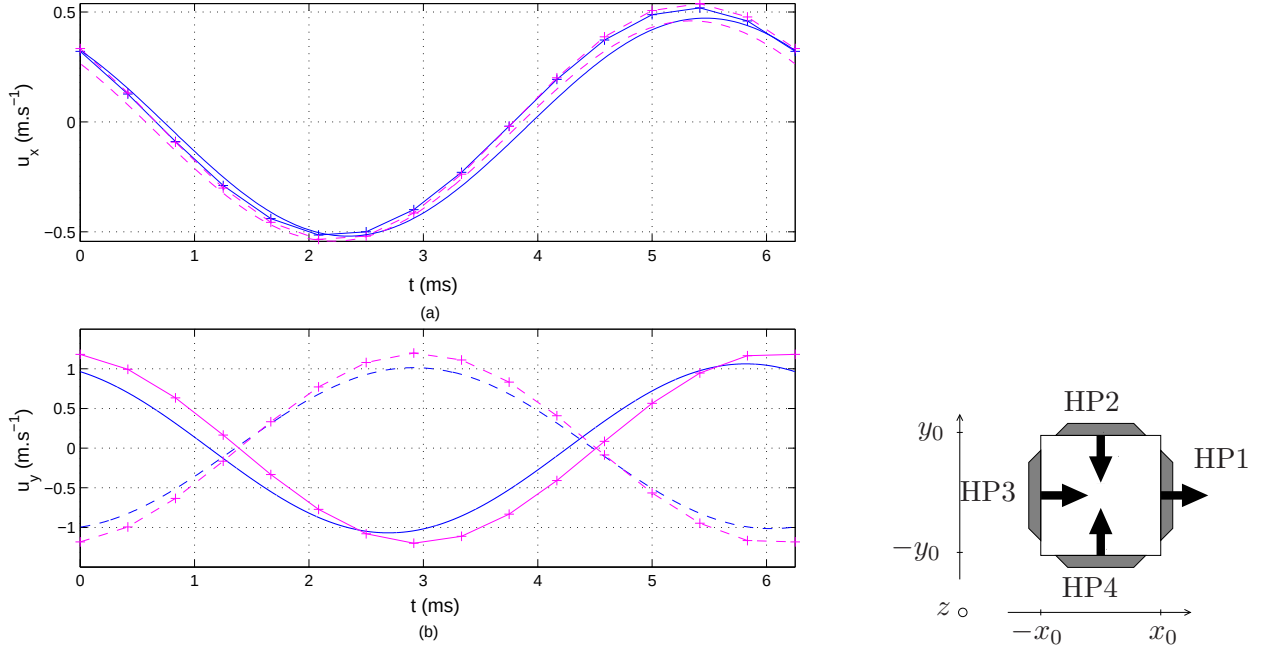


FIG. 3.20 – Vitesses dans la cavité excitée par quatre haut-parleurs sans empilement de plaques mesurées par V.L.D. à 2.5 cm des membranes de chaque haut-parleur et (+) vitesses de vibration des membranes des haut-parleurs mesurées par vibrométrie laser (a) pour les haut-parleurs 1 (-), 3 (- -) créant le champ de vitesse particulaire et (b) pour les haut-parleurs 2 (-) et 4 (- -) générant le champ de pression acoustique.

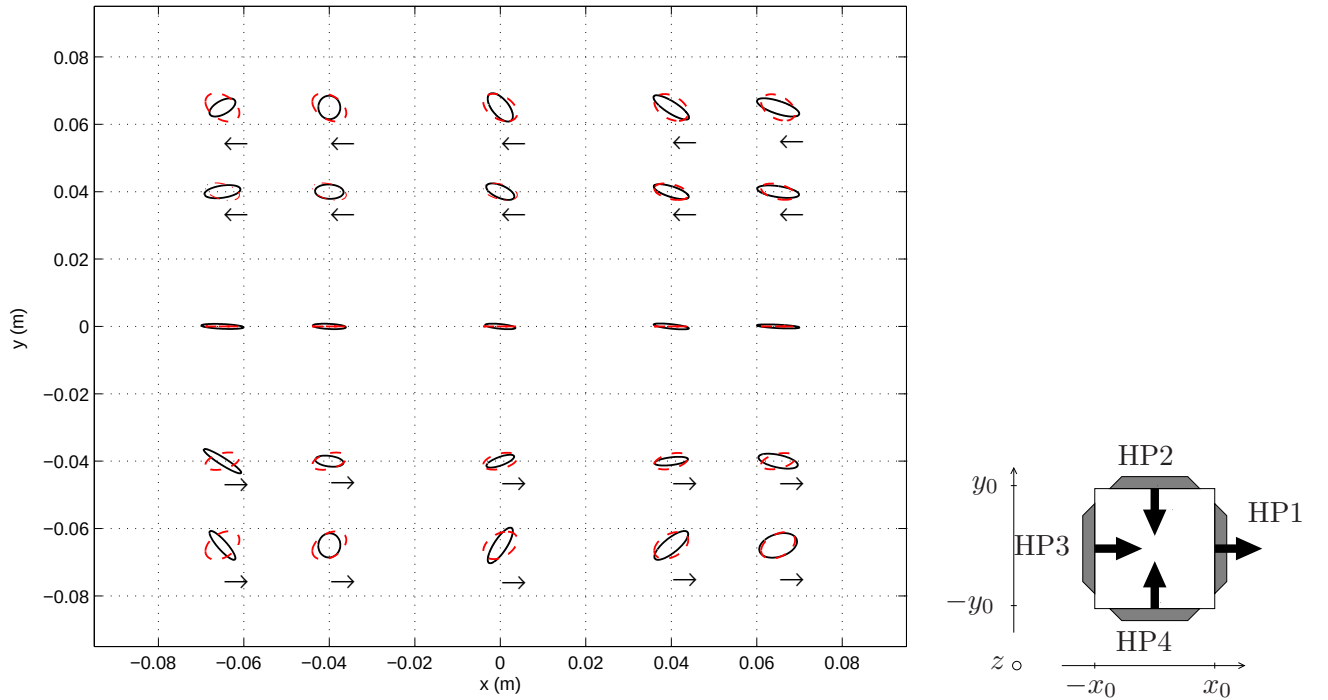


FIG. 3.21 – Évolution temporelle des déplacements particuliers dans la cavité sans empilement au cours d'une période acoustique pour la configuration à quatre haut-parleurs, mesuré (-) par V.L.D. et théorique (- -). Les flèches indiquent le sens dans lequel s'effectue le déplacement particulaire.

3.4.1.2 Champ de vitesse particulaire entre deux plaques de l'empilement

Champ de vitesse particulaire expérimental entre deux plaques de l'empilement

Des essais de mesures du champ de vitesse par V.L.D. entre deux plaques situées au centre de l'empilement ont été réalisés. Ces mesures s'avèrent intéressantes car l'amplitude et la phase des composantes de la vitesse particulaire entre deux plaques de l'empilement, données par les relations (2.25a) et (2.25b), ne sont pas uniformes mais varient en fonction de la coordonnée ζ (coordonnée locale entre les faces en regard l'une de l'autre de deux plaques consécutives de l'empilement). La viscosité, qui apparaît dans le dernier facteur des équations (2.25a) et (2.25b), est à l'origine de ces variations. Ce facteur est considéré égal à 1 dans le cas où la cavité ne comporte pas d'empilement de plaques.

Le dispositif expérimental utilisé pour mesurer le champ de vitesse particulaire est celui présenté précédemment mis à part pour l'ensemencement qui est introduit directement entre les deux plaques de l'empilement par un tuyau de diamètre 5 mm dont une extrémité est maintenue entre les plaques et l'autre extrémité (qui traverse la face $z = z_0$) sert à introduire l'ensemencement. La densité d'ensemencement diminuant rapidement entre les plaques, l'ensemencement est introduit entre les plaques de façon continue.

Deux configurations de mesures ont été testées avec l'empilement B (Tab. 3.1) pour différents espacements (0.6 mm, 1.2 mm et 2.4 mm) entre les deux plaques entre lesquelles est effectuée la mesure. Dans la première configuration, présentée sur la figure 3.22.a, les faisceaux laser traversent la paroi

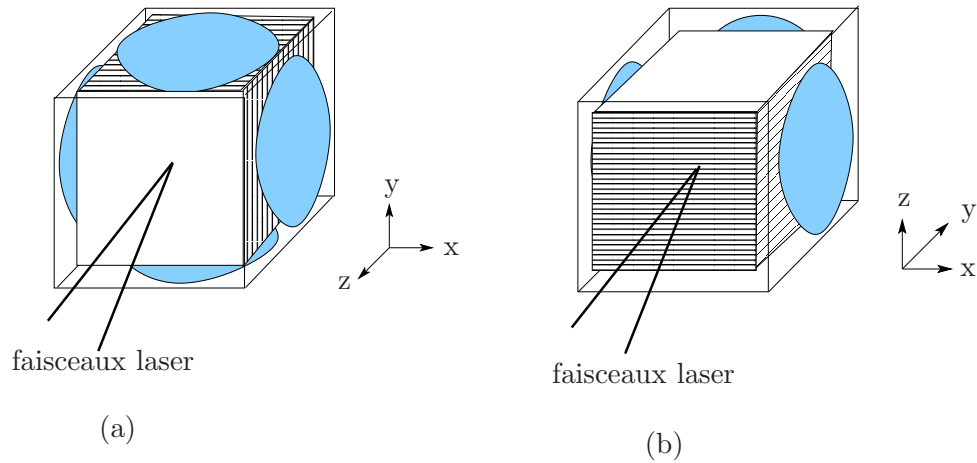


FIG. 3.22 – Configurations de mesures des vitesses particulières par V.L.D. entre deux plaques de l'empilement, lorsque les faisceaux traversent (a) ou non (b) des plaques de l'empilement.

située en $z = z_0$ et plusieurs plaques de l'empilement. Cette configuration autorise la mesure des deux composantes u_x et u_y de la vitesse particulaire dans la cavité à quatre haut-parleurs. Dans la seconde configuration (fig. 3.22.b), les faisceaux laser traversent la paroi située en $y = -y_0$, de sorte que la cavité comporte au plus trois haut-parleurs et que seule la composante u_x de la vitesse peut être mesurée.

Lors des mesures dans la configuration de la figure 3.22.a, aucun signal Doppler n'a été détecté par le photomultiplicateur. Ceci peut s'expliquer par le fait que la lumière diffusée par les particules qui traversent le volume de mesure est noyée dans la lumière des multiples réflexions des faisceaux

sur les plaques. Dans la configuration de la figure 3.22.b, seuls quelques points de mesures ont pu être traités pour un espacement entre les plaques égales à 2.4 mm. Pour les espacements inférieurs, des difficultés ont été rencontrées en raison des réflexions des faisceaux sur une des deux plaques lorsque les plaques et les faisceaux laser ne sont pas parfaitement parallèles. Par ailleurs, l'ensemencement en se condensant forme des gouttelettes sur les parois des plaques qui obstrue l'espacement entre les plaques, et ne permet plus le passage des faisceaux laser.

Les mesures de la vitesse particulaire entre deux plaques de l'empilement par V.L.D. n'ont pas donné satisfaction. Des améliorations doivent être apportées au dispositif expérimental pour permettre cette mesure. Par exemple, une autre méthode d'ensemencement peut être utilisée. Une méthode [20], pour maintenir dans la cavité un ensemencement en particules constant et uniforme, consiste à ajouter deux tubes capillaires à la cavité : l'un permettant d'introduire de manière continue de la fumée et l'autre placé à l'extrémité de la cavité afin éviter toute surpression due à l'introduction de masse. De plus, la fumée peut être filtrée par plusieurs couches de grilles Nylon avant d'être introduite dans la cavité.

Le profil de la vitesse particulaire entre deux plaques a déjà fait l'objet de vérifications expérimentales par mesures optiques [12, 13, 14, 20, 67, 41] et de vérifications numériques [37] confirmant les résultats de la théorie linéaire. Par ailleurs, le modèle analytique du champ de vitesse particulaire, présenté au chapitre 2, ayant été confirmé dans le cas de la cavité sans empilement, il peut être utilisé pour prévoir le champ de vitesse particulaire théorique entre deux plaques de l'empilement. C'est l'objet du paragraphe suivant.

3.4.1.3 Champ de vitesse particulaire théorique entre deux plaques de l'empilement

Les trajectoires théoriques des particules au cours d'une période obtenues à partir des expressions (2.26a) et (2.26b) des amplitudes des composantes u_x et u_y de la vitesse particulaire dans la configuration optimale sont représentées sur la figure 3.23. Les cercles représentent les positions des particules correspondants au maximum et au minimum de la variation de température τ donnée par la relation (1.29) (avec $\Delta T_0 = 0$). Ces positions donnent une idée qualitative de la façon dont les échanges de chaleur entre le fluide et les plaques de l'empilement s'effectuent lorsque le gradient de température ΔT_0 est nul, c'est-à-dire aux premiers instants du régime transitoire. Ainsi, on peut s'attendre à ce que les échanges de chaleur dus au phénomène thermoacoustique ne s'effectuent pas de telle sorte que le gradient de température s'instaure de façon privilégié le long de l'axe x (axes des sources de vitesses), mais qu'au contraire le champ de température obtenu dans l'empilement en régime établi présente un caractère bidimensionnel. Les cartographies des températures relevées expérimentalement sont présentées au paragraphe §3.4.2.4.

3.4.2 Comportement thermique de la maquette à quatre haut-parleurs

Les quantités thermiques d'intérêt permettant la description du comportement d'un système thermoacoustique sont principalement le flux de chaleur thermoacoustique extrait à la source froide, et le gradient de température atteint en régime établi le long de l'empilement. Le système ne comportant pas d'échangeur de chaleur, seul le gradient de température le long de l'empilement fait l'objet d'une

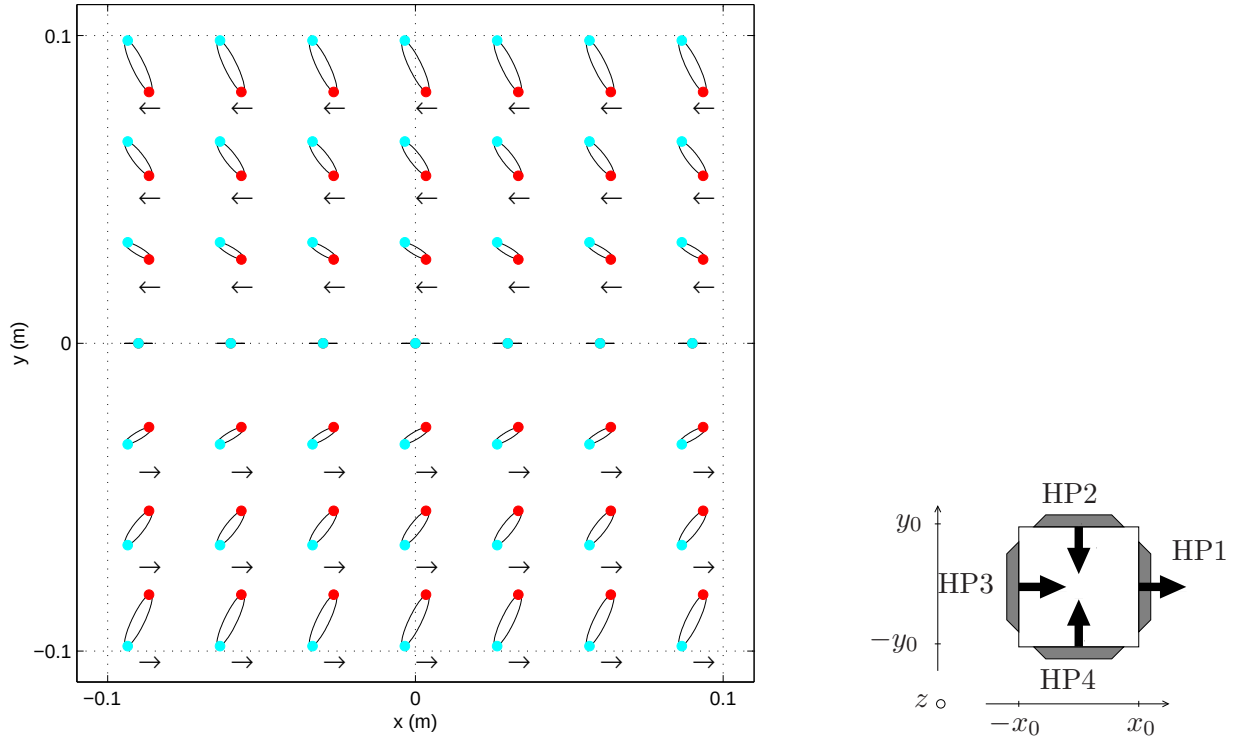


FIG. 3.23 – Évolution temporelle théorique des déplacements particuliers dans la cavité avec empilement au cours d’une période acoustique pour la configuration à quatre haut-parleurs (-). Les cercles représentent les maxima (●) et les minima (●) de l’amplitude de la fluctuation de température. Les flèches indiquent le sens dans lequel s’effectue le déplacement particulier.

étude expérimentale. L’écart de température atteint entre les extrémités de l’empilement suivant l’axe x (correspondant à l’axe de vitesse), ainsi que les cartographies de la température dans un plan (x,y) de l’empilement sont mesurés dans différentes configurations expérimentales. Enfin, l’évolution temporelle de la température dans l’empilement est étudiée dans la configuration optimale.

3.4.2.1 Écart de température en fonction de la pression acoustique

La maquette est réglée dans la configuration optimale ($u_x = 1.5 \text{ m.s}^{-1}$ et $\theta_{u-p_{opt}} = -63^\circ$ pour la fréquence de fonctionnement égale 160 Hz). L’empilement B (voir le tableau 3.1), dont l’épaisseur des plaques est de 2 mm , est utilisé. La différence de température expérimentale entre les extrémités de l’empilement suivant l’axe des sources de vitesse (normalisée par la valeur maximale obtenue) et la différence de température obtenue théoriquement (normalisée par la valeur maximale obtenue) à partir de l’expression (1.57) sont reportées sur la figure 3.24 pour différents niveaux sonores dans la cavité.

Expérimentalement et théoriquement, la différence de température croît linéairement en fonction du niveau sonore. La valeur optimale pour la pression acoustique, dans le cadre de la théorie linéaire, étant la valeur la plus élevée possible (éq. 1.57). Les résultats théoriques étant systématiquement plus élevés que les résultats expérimentaux (d’un facteur 4 environ), les écarts de température sont normalisés

sur la figure 3.24 par leur valeurs maximales respectives $\Delta T_{M \text{ théo}} = 32^\circ$ et $\Delta T_{M \text{ exp}} = 7.5^\circ$, obtenues pour un niveau sonore de 150 dB SPL . Cet écart systématique a déjà été remarqué dans le cas d'un

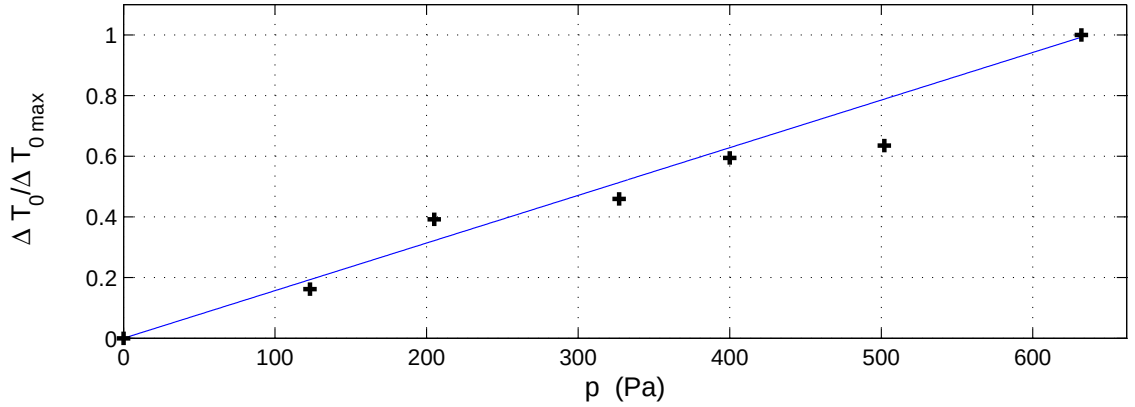


FIG. 3.24 – Différences de température normalisées par leur valeur maximale mesurées (+) et calculées (ligne continue) en fonction du niveau sonore dans la cavité dans la configuration optimale. La valeur maximale de la différence de température mesurée est de 7.5° et celle théorique est de 32° . Les caractéristiques géométriques et thermo-physiques du réfrigérateur et de l'empilement B sont données dans la table 3.1.

réfrigérateur classique à onde stationnaire [34] et une étude numérique récente propose une explication pour cet écart [37].

3.4.2.2 Écart de température en fonction de la phase θ_{u-p}

La maquette est réglée de telle sorte que l'amplitude de la composante u_x (le long de l'axe des sources créant le champ de vitesse particulaire) soit l'amplitude optimale ($u_{opt} = 1.5 \text{ m.s}^{-1}$ pour une fréquence de 160 Hz) et que le niveau sonore dans la cavité soit de 150 dB SPL .

La différence de température entre les extrémités de l'empilement suivant l'axe x des sources de vitesse est alors mesuré pour différentes valeurs de la phase θ_{u-p} entre la vitesse particulaire et la pression acoustique.

Les résultats expérimentaux normalisés par la différence de température maximale obtenue ($\Delta T_{M \text{ exp}} = 7.5^\circ$) ainsi que les résultats théoriques, obtenus à partir de l'expression (1.57), normalisés par la différence de température théorique maximale ($\Delta T_{M \text{ théo}} = 32^\circ$) sont reportés sur la figure 3.25. Il y a un bon accord entre les résultats expérimentaux et théoriques, qui mettent en évidence l'existence d'une phase optimale qui conduit à une différence de température maximale. La phase optimale expérimentale $\theta_{u-p \text{ opt}} = -63^\circ$ correspond à la valeur théorique donnée par la relation (1.58).

Le cas qui correspondrait à l'utilisation de l'empilement dans un résonateur à onde stationnaire ($\theta_{u-p} = \pm 90^\circ$) conduirait à une différence de température entre les extrémités de l'empilement inférieure de 10% environ théoriquement et de 2% pour $\theta_{u-p} = 90^\circ$ et de 28% pour $\theta_{u-p} = -90^\circ$ expérimentalement.

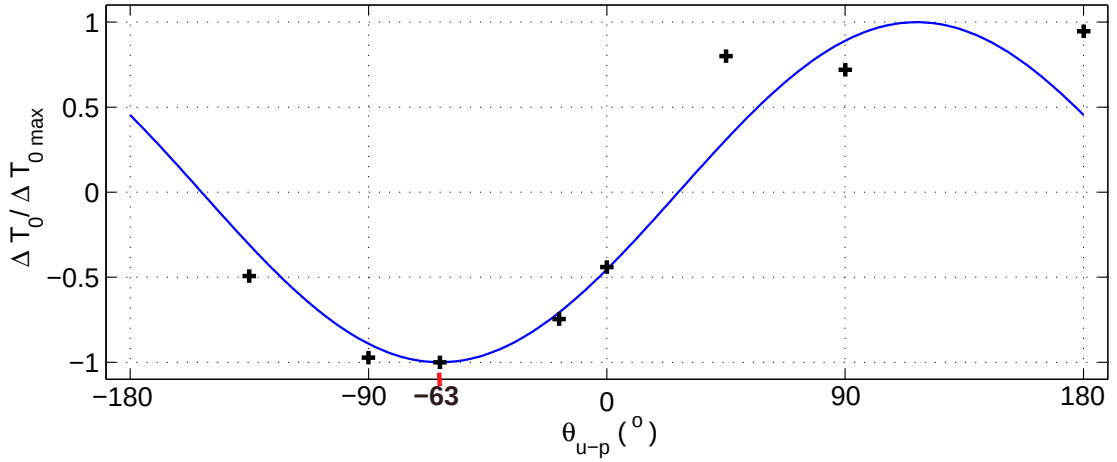


FIG. 3.25 – Différences de température normalisées par leur valeur maximale mesurées (+) et calculées (ligne continue) en fonction de la phase θ_{u-p} entre la vitesse particulaire et la pression acoustique. La valeur maximale de la différence de température mesurée est de 7.5° et celle théorique est de 32° . Les caractéristiques géométriques et thermo-physiques du réfrigérateur et de l'empilement B sont données dans la table 3.1.

3.4.2.3 Écart de température en fonction de la vitesse particulaire u_x

La maquette est réglée de telle sorte que la phase θ_{u-p} entre la vitesse particulaire et la pression acoustique soit optimale ($\theta_{u-p_{opt}} = -63^{\circ}$ pour une fréquence de 160 Hz) et que le niveau sonore dans la cavité soit de 150 *dB SPL*. L'écart de température entre les extrémités de l'empilement suivant l'axe x des sources de vitesse est alors mesuré pour différentes valeurs de l'amplitude de la composante u_x le long de l'axe des sources de vitesse.

La figure 3.26 représente les résultats expérimentaux normalisés par la différence de température maximale obtenue ($\Delta T_{M \text{ exp}} = 7.5^{\circ}$) ainsi que les résultats théoriques, obtenus à partir de l'expression (1.57), normalisés par la différence de température théorique maximale ($\Delta T_{M \text{ théo}} = 32^{\circ}$). Un accord satisfaisant est obtenu entre les résultats expérimentaux et théoriques, qui mettent en évidence l'existence d'une vitesse optimale qui conduit à une différence de température maximale. La vitesse optimale $u_x = 1.5 \text{ m.s}^{-1}$ correspond à la valeur optimale théorique.

3.4.2.4 Cartographies de la température

Dans ce paragraphe, des mesures de la température entre deux plaques de l'empilement en différents points d'un plan (x,y) sont présentées dans le cas où l'amplitude de la vitesse le long des sources de vitesse est optimale et le niveau sonore dans la cavité est d'environ 150 *dB SPL*. Les cartographies de la température sont obtenues en utilisant la méthode décrite au paragraphe 3.1.2.2, qui permet à l'aide de 8 thermocouples fixés sur une plaque d'obtenir 28 points de mesures, dont les coordonnées sont données dans le tableau 3.3.b.

Sur la figure 3.27 sont représentées les cartographies des écarts de températures par rapport à la température T_0 au repos, atteints en régime établi (1500 s après la mise en fonctionnement des

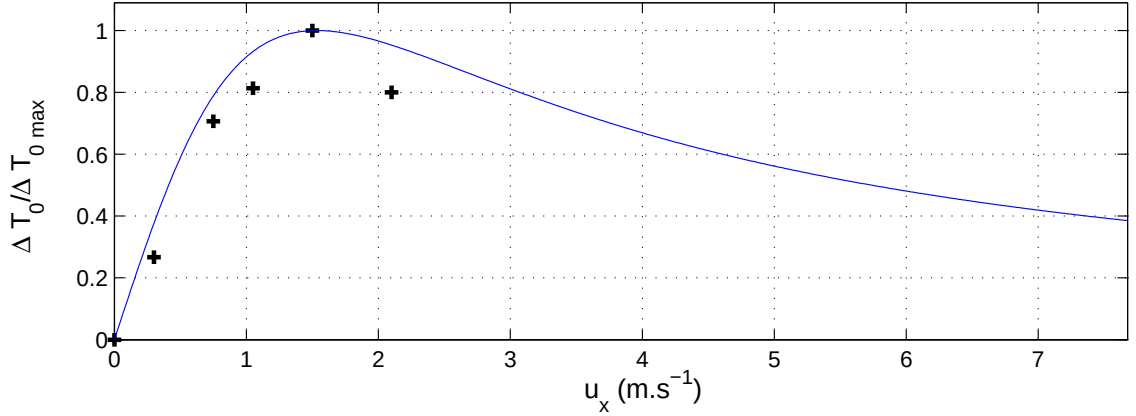


FIG. 3.26 – Différences de température normalisées par leur valeur maximale mesurées (+) et calculées (ligne continue) en fonction de la vitesse particulaire u_x . La valeur maximale de la différence de température mesurée est de 7.5 ° et celle théorique est de 32 °. Les caractéristiques géométriques et thermo-physiques du réfrigérateur et de l'empilement B sont données dans la table 3.1.

haut-parleurs) pour des valeurs de la phase θ_{u-p} égales à 45°, 90°, 180°, 270° et $\theta_{u-p_{opt}}$. Les flèches le long de l'axe des sources de vitesse représentent la direction dans laquelle s'établit le gradient de température le long de cet axe. Comme prévu par le modèle, la direction du flux de chaleur le long des sources de vitesse, qui dépend de la phase entre la vitesse particulaire et la pression acoustique, est dirigé suivant les y croissants pour θ_{u-p} valant 45°, 90° et 180° ou décroissants pour θ_{u-p} valant 270° et $\theta_{u-p_{opt}}$. Par ailleurs, l'écart de température maximal mesuré est bien obtenu pour la phase θ_{u-p} optimale, ce qui a déjà été remarqué au paragraphe 3.4.2.2.

Les flèches foncées de la figure 3.27 représentent la direction dans laquelle s'établit l'écart de température le plus important. Pour les phases $\theta_{u-p_{opt}}$, 45° et 180°, le point le plus froid n'est pas positionné suivant l'axe des sources de vitesse mais plus ou moins incliné dans le voisinage des sources de pression. Ainsi, bien qu'une différence de température significative s'établit le long de l'axe des sources de vitesse, la différence de température la plus importante peut s'établir suivant une ligne diagonale, différente pour chaque valeur de la phase θ_{u-p} . La position optimale des échangeurs de chaleur peut alors ne pas être celle attendue a priori, c'est-à-dire aux extrémités de l'empilement suivant l'axe des sources de vitesse.

Par ailleurs, la température n'est pas uniforme aux extrémités de l'empilement suivant l'axe des sources de vitesse, la température diminuant pour des positions s'écartant de la position centrale $y = 0$. En conséquence, les échanges de chaleur entre les extrémités de l'empilement et les échangeurs de chaleur nécessairement placés en regard de ces extrémités seront probablement inférieurs à ceux qui existeraient si la température était en tous points celle du point $y = 0$.

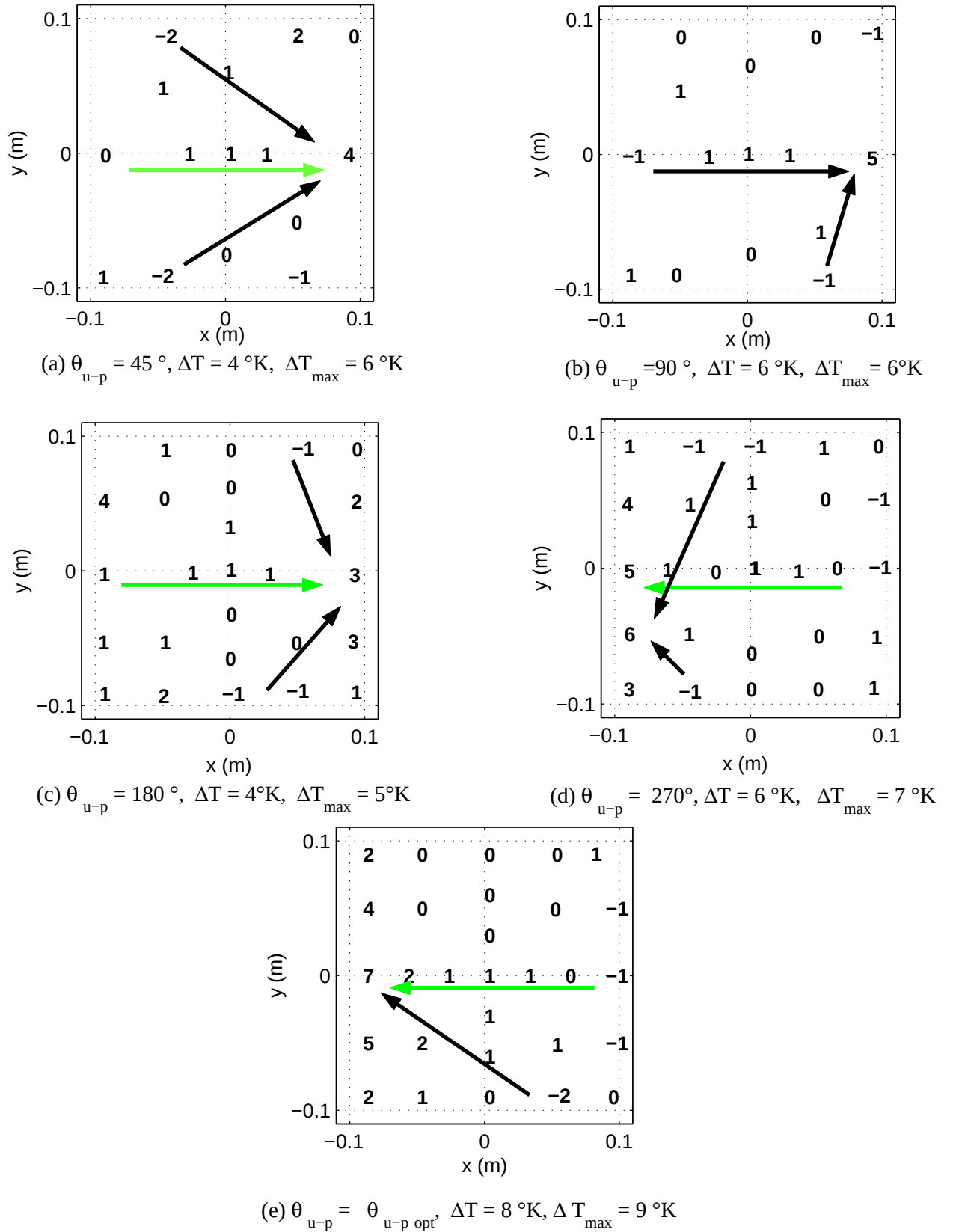


FIG. 3.27 – Cartographie de l'écart de température au temps $t = 1500$ s par rapport au temps initial pour des valeurs de la phase θ_{u-p} entre la vitesse particulière et la pression acoustique égales à (a) 45° , (b) 90° , (c) 180° , (d) 270° et (e) $\theta_{u-p \text{ opt}} = -63^\circ$. Les caractéristiques géométriques et thermo-physiques du réfrigérateur et de l'empilement B sont données dans la table 3.1.

3.5 Conclusion

3.5.1 Discussion

La caractérisation de la maquette à son point de fonctionnement optimal a montré que du fait du caractère bidimensionnel du champ de vitesse particulaire, les champs de température dans un réfrigérateur thermoacoustique compact sont plus complexes que ceux obtenus dans un réfrigérateur à ondes stationnaires et de nature à perturber le comportement thermique du système. Dans la perspective d'améliorer les performances ce système, il convient donc d'éviter le caractère bidimensionnel du champ de vitesse particulaire dans l'empilement.

Par ailleurs, un inconvénient supplémentaire des systèmes compacts à quatre sources, dont il n'a pas été fait mention dans ce document, est le nombre de sources utilisées qui peut avoir pour conséquence de diminuer le coefficient de performance global du réfrigérateur défini comme étant le rapport entre le flux de chaleur Q_f extrait de l'échangeur froid et la puissance électrique $\mathcal{P}_{el}$ consommée :

$$COP_{tot} = \frac{Q_f}{\mathcal{P}_{el}}. \quad (3.11)$$

En effet, la puissance électrique consommée par un système compact qui met en jeu quatre sources peut être plus importante que celle consommée par un système classique à onde stationnaire qui implique une seule source. Aussi, bien que le coefficient de performance COP relatif à l'empilement d'un système compact peut être optimal et peut donc être supérieur à celui d'un système résonant, il est possible que le coefficient de performance COP_{tot} global d'un système classique soit supérieur à celui d'un système compact.

Dans ce qui suit, une première proposition est faite pour obtenir des déplacements des particules rectilignes suivant l'axe des sources de vitesse et une seconde pour améliorer le coefficient de performance global.

3.5.2 Perspectives

3.5.2.1 Proposition pour obtenir des déplacements rectilignes dans un système compact

Une solution pour obtenir des trajectoires des particules rectilignes et non plus ellipsoïdales dans un réfrigérateur compact à quatre sources, et donc des champs de température moins complexes, est par exemple d'imposer à la composante u_y de la vitesse particulaire d'être inférieure à la composante u_x , c'est-à-dire d'imposer à la vitesse $\langle u_2 \rangle_{xz}$ des sources de pression d'être inférieure à celle de la vitesse optimale $|u_{opt}|$ d'un rapport a , $\langle u_2 \rangle_{xz} = \frac{|u_{opt}|}{a}$ avec $a > 1$. Cette solution conduit à diminuer le niveau sonore dans la cavité et donc les performances du système, puisque la pression acoustique est proportionnel à la vitesse $\langle u_2 \rangle_{xz}$.

Cependant, la pression acoustique dans un système compact à quatre sources, qui s'écrit au premier ordre (équ. 2.77), en supposant que la somme des volumes compris entre les membranes des haut-parleurs et l'entrée de l'empilement est très inférieure au volume de la cavité ($\sum_{i=1,4} V_i \ll V_s[1 + (\gamma - 1)f_h]$)

$$p \approx \frac{i\omega\rho_0}{k_0^2} \frac{2\langle u_2 \rangle_{xz}}{L_y \frac{h}{h+e_s} [1 + (\gamma - 1)f_h]}, \quad (3.12)$$

peut être maintenue, en réduisant simultanément l'amplitude de la vitesse $\langle u_2 \rangle_{xz}$ et la distance L_y entre les sources de pression.

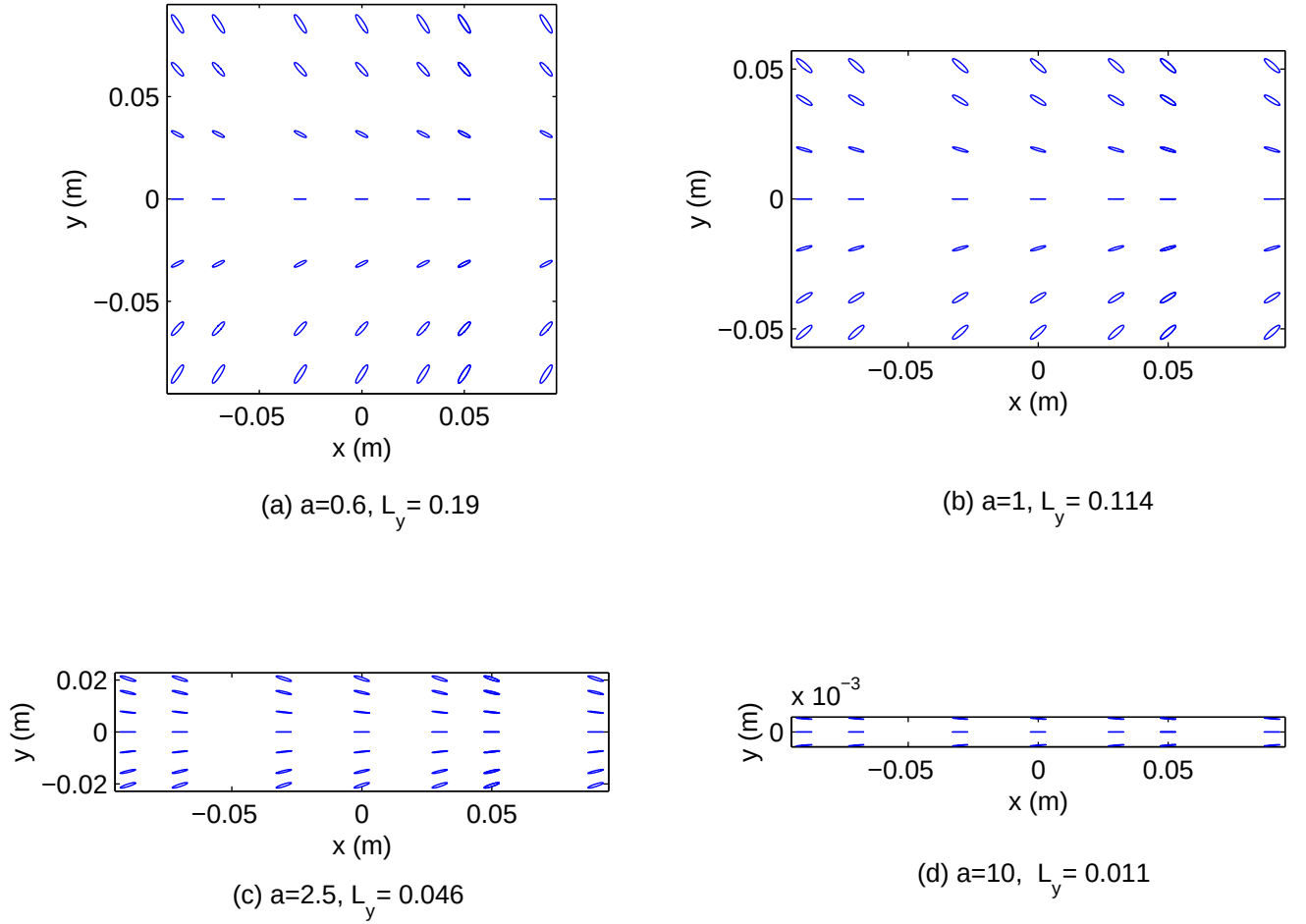


FIG. 3.28 – Déplacement des particules pour des valeurs de a égales à (a) 0.6, (b) 1, (c) 2.5, (d) 10.

Dans le cas du réfrigérateur compact étudié précédemment, en configuration optimale et pour un niveau sonore de 150 *dB SPL*, le rapport a entre les vitesses $|u_{opt}|$ et $\langle u_2 \rangle_{xz}$ vaut $1.5/2.5 \approx 0.6$ (voir §3.2.2). La figure 3.28 représente les déplacements des particules dans la cavité pour des valeurs du facteur a égales à 0.6 (qui correspond au cas de la configuration optimale), 1, 2.5 et 10. Pour chacune de ces valeurs, la largeur L_y est calculée pour que le niveau sonore dans la cavité soit égal à 150 *dB SPL*. Au vu de la figure 3.28, les déplacements des particules deviennent quasi rectilignes pour un facteur a supérieur à 2.5, ce qui correspond à une amplitude de la vitesse $\langle u_2 \rangle_{xz}$ égale à $\frac{u_{opt}}{a} \approx 0.6 \text{ m.s}^{-1}$ et une distance L_y valant 4.6 *cm*.

Dans un système compact tel que $\langle u_2 \rangle_{xz} = \frac{|u_{opt}|}{a}$, les valeurs maximales du flux de chaleur thermoacoustique (éq. 1.44) et du gradient de température le long de l'axe x (éq. 1.47) sont obtenues en reportant dans ces expressions les valeurs optimales (1.57) et (1.58) de l'amplitude et de la phase par rapport à la pression acoustique de la vitesse particulaire. Ces expressions s'écrivent, en supposant que la somme des volumes compris entre les membranes des haut-parleurs et l'entrée de l'empilement

est inférieur au volume de la cavité ($\sum_{i=1,4} V_i \ll V_s[1 + (\gamma - 1)f_h]$),

$$\overline{Q_{th}} \approx -\frac{2}{\frac{h}{h+e_s}[1 + (\gamma - 1)f_h]} \frac{T_0\alpha[Kh + K_s e_s]}{a} \frac{c_0^2}{C_p} \frac{1 - \sigma^2}{1 - \sigma\sqrt{\sigma}} \sqrt{\frac{2(1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2})}{1 + \sigma}}, \quad (3.13)$$

$$\frac{dT_0}{dx}_{opt} \approx \frac{T_0\alpha}{aL_y \frac{h}{h+e_s}[1 + (\gamma - 1)f_h]} \frac{c_0^2}{C_p} \frac{1 - \sigma^2}{1 - \sigma\sqrt{\sigma}} \sqrt{\frac{2(1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2})}{1 + \sigma}}, \quad (3.14)$$

ce qui correspond à un écart de température aux extrémités du stack de longueur L_x égal à

$$\Delta T_{opt} \approx \frac{T_0\alpha}{a} \frac{L_x}{L_y \frac{h}{h+e_s}[1 + (\gamma - 1)f_h]} \frac{c_0^2}{C_p} \frac{1 - \sigma^2}{1 - \sigma\sqrt{\sigma}} \sqrt{\frac{2(1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2})}{1 + \sigma}}. \quad (3.15)$$

En configuration optimale ($|u| = |u_{opt}|$) et ($\theta_{u-p} = \theta_{u-p_{opt}}$) et pour une valeur de a fixée, le flux de chaleur thermoacoustique ne dépend pas des longueurs L_x et L_y . Par contre, la différence de température optimale est proportionnelle à la distance L_x entre les sources de vitesses et inversement proportionnel à la distance L_y entre les sources de pressions et ne dépend ni de la fréquence, ni des caractéristiques du stack (pour un rapport $\frac{\delta_v}{h}$ fixé). Par conséquent, pour obtenir un flux de chaleur unidimensionnel et une différence de température qui s'établit le long des sources de vitesse, le système compact doit être rectangulaire ($L_y \ll L_x$). Par ailleurs, lorsque la longueur L_y diminue (les vitesses u_2 et u_{opt} restant fixes), le flux de chaleur thermoacoustique garde la même valeur tandis que la différence de température augmente. Ce résultat est intéressant dans le cadre de la miniaturisation des réfrigérateurs thermoacoustiques pour refroidir des composants électroniques.

3.5.2.2 Proposition pour augmenter le coefficient de performance global d'un système compact

Le coefficient de performance global d'un système compact à quatre sources peut être plus faible que celui d'un réfrigérateur classique en raison du nombre de sources utilisées par le système. Une manière d'augmenter le coefficient de performance global est donc de diminuer le nombre de sources. A cette fin, il est possible d'une part de créer le champ de pression acoustique avec un seul haut-parleur et d'autre part d'utiliser un haut-parleur passif en regard d'un haut-parleur actif générant la vitesse particulière, le système fonctionnant alors avec deux haut-parleurs actifs et un haut-parleur passif.

En considérant la configuration à trois haut-parleurs, où la source 2 crée un champ de pression acoustique, et les sources 1 et 3 génèrent un champ de vitesse particulière suivant l'axe x ($U_{g1} = -U_{g3}$), les relations (2.115) entre les tensions d'alimentation des haut-parleurs et les vitesses des sources pour un système à quatre sources, deviennent pour un système à trois sources :

$$p_{g1} = \left(Z_{g1} + \frac{Z_{cx}Z_{1x}}{Z_{cx} + Z_{1x}} \right) U_{g1} + \left(\frac{2Z_s Z_{cx} Z_{cy}}{2Z_s(Z_{cx} + Z_{cy} + Z_{1x} + Z_{1y}) + (Z_{cx} + Z_{1x})(Z_{cy} + Z_{1y})} \right) \frac{U_{g2}}{2}, \quad (3.16)$$

$$p_{g3} = \left(-Z_{g3} - \frac{Z_{cx}Z_{1x}}{Z_{cx} + Z_{1x}} \right) U_{g1} + \left(\frac{2Z_s Z_{cx} Z_{cy}}{2Z_s(Z_{cx} + Z_{cy} + Z_{1x} + Z_{1y}) + (Z_{cx} + Z_{1x})(Z_{cy} + Z_{1y})} \right) \frac{U_{g2}}{2}, \quad (3.17)$$

$$p_{g2} = \left(Z_{g2} + \frac{Z_{cy}[2Z_s(Z_{cx} + Z_{1x}) + Z_{1y}(2Z_s + Z_{cx} + Z_{1x})]}{2Z_s(Z_{cx} + Z_{cy} + Z_{1x} + Z_{1y}) + (Z_{cx} + Z_{1x})(Z_{cy} + Z_{1y})} \right) \frac{U_{g2}}{2}. \quad (3.18)$$

Ces relations montrent que le haut-parleur 2 ne peut pas être passif puisque que si sa tension d'alimentation (proportionnel à p_{g2}) est nulle alors le débit U_{g2} et donc la pression acoustique dans la cavité sont nulles. Dans ce cas, le haut-parleur passif est nécessairement un haut-parleur générant de

la vitesse particulière. A supposer que le haut-parleur 1 soit passif (c'est-à-dire $p_{g1} = 0$), l'impédance Z_{g1} doit être égale, en considérant la relation (3.18) dans laquelle on suppose en première approche que les effets des impédances Z_{1x} , Z_{1y} , Z_{cx} et Z_{cy} sont négligeables, à

$$Z_{g1} = Z_s \frac{U_{g2}}{U_{g3}} \approx Z_s \left| \frac{U_{g2}}{U_{g3}} \right| e^{i(\theta_{U_2-U_3})} \approx Z_s \left| \frac{U_{g2}}{U_{g3}} \right| \cos(\theta_{U_{g2}-U_{g3}}) + i Z_s \left| \frac{U_{g2}}{U_{g3}} \right| \sin(\theta_{U_2-U_3}). \quad (3.19)$$

L'impédance Z_{g2} est équivalente à une capacité $C_2 = C_a \left| \frac{U_{g3}}{U_{g2}} \right| \frac{1}{\cos(\theta_{U_{g2}-U_{g3}})}$ en série avec une résistance $R_2 = \frac{1}{\omega C_a} \left| \frac{U_{g2}}{U_{g3}} \right| \sin(\theta_{U_{g2}-U_{g3}})$. Le signe de C_2 et de R_2 dépend de la phase $\theta_{U_{g2}-U_{g3}}$. En configuration optimale, $\theta_{U_{g2}-U_{g3}}$ vaut 297° , la capacité C_2 est alors positive tandis que la résistance R_2 est négative. Cette résistance doit être synthétisable par procédé actif de manière à rendre le coefficient de réflexion au niveau du haut-parleur passif supérieur à 1, [36] par exemple. Ces travaux sont en cours d'étude.

Chapitre 4

Régime transitoire dans un réfrigérateur thermoacoustique : évolution temporelle de la température dans l'empilement

L'estimation des performances des systèmes thermoacoustiques repose essentiellement sur la théorie linéaire en régime stationnaire de la thermoacoustique, établie depuis plus d'une décennie, qui éclaire largement les processus mis en jeu dans ces machines, mais dont les résultats ne permettent pas de traduire réellement ceux qui résultent de l'observation en laboratoire. En particulier, la valeur théorique de la différence de température ΔT obtenue, en régime permanent, entre les deux extrémités de l'empilement peut être estimée à partir de la théorie linéaire classique de la thermoacoustique (équ. 1.47), en faisant l'hypothèse qu'en régime établi, le flux de chaleur créé par le processus thermoacoustique le long de l'empilement est entièrement compensé par le flux de chaleur dû à la conduction thermique retour dans les plaques de l'empilement et dans le fluide compris entre ces plaques. La valeur théorique obtenue est généralement surestimée, et son expression doit alors être corrigée d'un coefficient phénoménologique pour correspondre aux résultats expérimentaux [34]. Les causes de cette différence doivent certainement être recherchées dans les processus complexes d'échanges thermiques qui prennent place au niveau de l'empilement d'un système thermoacoustique.

Des investigations sont poursuivies dans diverses directions pour tenter d'améliorer la modélisation en usage : citons plus particulièrement celles qui introduisent les effets non linéaires associés aux niveaux sonores élevés, les effets de bord qui sont à l'origine de mouvements particuliers complexes (turbulences) et de non linéarités thermiques, les conséquences des gradients thermiques non uniformes et de leur évolution dans le temps [3, 23, 24, 25, 37, 38, 39, 42, 47, 69]. L'objet de l'étude présentée dans ce chapitre entre dans le cadre de ces investigations destinées à approfondir la compréhension des phénomènes observés et porte plus particulièrement sur l'interprétation théorique du comportement en régime transitoire des réfrigérateurs thermoacoustiques. En effet, bien que le comportement transitoire d'un système thermoacoustique ait été étudié pour quelques situations particulières (en particulier,

un modèle simple a été développé pour calculer le gradient de température dans un "stack court" [43] et le régime transitoire a été abordé en utilisant l'approximation de "tube étroit", afin d'interpréter théoriquement la singularité de la température moyenne à l'extrémité fermée du tube [10]), et bien que des données expérimentales et numériques sur le régime transitoire soient disponibles dans la littérature [20, 47, 38, 39], la modélisation analytique globale des transferts de chaleurs durant le régime transitoire (jusqu'au régime établi) fait toujours défaut aujourd'hui. Ainsi, l'étude théorique du régime transitoire, et la comparaison avec les données expérimentales et numériques disponibles dans la littérature, devraient apporter des éléments de réponse quant aux différences observées entre théorie et expérience.

Ce chapitre a pour objectif de proposer une telle modélisation analytique. Cette modélisation, qui reste dans le cadre de la théorie linéaire, inclue les effets du flux de chaleur thermoacoustique le long de l'empilement de plaques, du flux de chaleur par conduction retour dans les plaques de l'empilement et dans le fluide, des pertes thermiques à travers les parois du tube, de l'échauffement dû aux frottements visqueux dans l'empilement, et des pertes thermiques à chacune des extrémités de l'empilement, en supposant les approximations classiques pour de tels problèmes thermiques afin d'éviter des formes de solutions analytiques trop complexes. Les résultats obtenus, qui s'appuient sur une étude expérimentale antérieure effectuée au L.M.F.A. [20], ne concernent pas seulement la différence de température ΔT entre les extrémités de l'empilement, mais également l'évolution temporelle de la température en tous points de l'empilement.

4.1 Les mécanismes impliqués dans et autour de l'empilement : les équations de base pour le profil de température

Soit le réfrigérateur thermoacoustique classique (à ondes stationnaires) représenté sur la figure 4.1. La cavité thermoacoustique est un guide d'onde fermé cylindrique (de rayon R et de longueur $L + x_0$) séparée en trois parties. Deux de ces parties sont des tubes "larges" cylindriques, un s'étendant du haut-parleur à l'entrée de l'empilement (tube numéro 1) et l'autre de la sortie de l'empilement à l'extrémité fermée du résonateur (tube numéro 3). Ces deux parties sont séparées par l'empilement de plaques, de longueur l , qui constitue la troisième région (région 2, $x \in (0, l)$). L'épaisseur des plaques est notée $2e_s$ et la distance entre les plaques est notée $2h$. La coordonnée locale, entre les faces de deux plaques consécutives en regard l'une de l'autre, dont l'origine est située au centre de la couche de gaz entre ces deux plaques, est notée ζ (les coordonnées des deux plaques sont $\zeta = \pm h$).

Les coordonnées axiales des extrémités de l'empilement sont désignées par $x = 0$ et $x = l$, la coordonnée x_s du centre de l'empilement est alors donnée par $x_s = l/2$.

Le fluide considéré est un fluide de Stokes (les déformations sont proportionnelles aux contraintes et le flux de chaleur est proportionnel au gradient de la température), homogène et au repos, et le mouvement acoustique est supposé être linéaire. Les hypothèses simplificatrices généralement admises en thermoacoustiques, rappelées au paragraphe 1.2.1.1 du chapitre 1, sont prises en compte ici (en particulier, la température des plaques quelque soit la coordonnée x dans l'empilement est supposée être égale à la température moyenne du gaz T_0 aux mêmes coordonnées).

En supposant que l'empilement ne perturbe pas l'onde stationnaire, la pression acoustique dans le

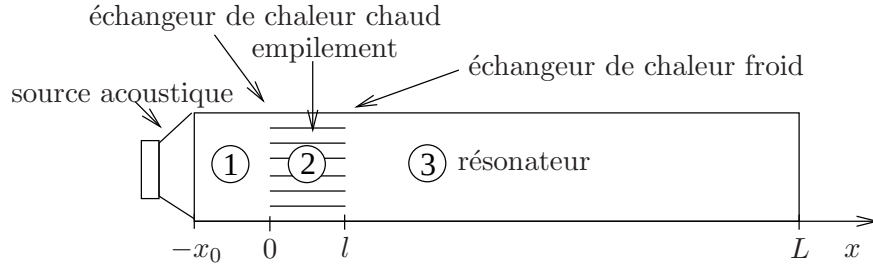


FIG. 4.1 – Résonateur thermoacoustique cylindrique : cavité large cylindrique (régions 1 et 3) et la région de l'empilement (région 2, $x \in (0, l)$)

résonateur demi-onde peut être écrite (le facteur $e^{i\omega t}$ est omis) sous la forme :

$$p(x) = P_A \cos(k(x + x_0)), \quad (4.1)$$

où $-x_0$ est la position du haut-parleur et $k = \omega/c_0$. La composante u_x suivant l'axe x de la vitesse particulaire entre deux plaques de l'empilement, fonction du gradient de la pression acoustique, est donnée par [58]

$$u_x(x, \zeta) = \frac{i}{\rho_0 \omega} \left(\frac{h + e_s}{h} \right) \frac{\partial p(x)}{\partial x} \left(1 - \frac{\cosh[(1+i)\zeta/\delta_v]}{\cosh[(1+i)h/\delta_v]} \right). \quad (4.2)$$

Le comportement thermique transitoire d'un réfrigérateur thermoacoustique est considéré ici comme l'effet résultant de la superposition de cinq phénomènes de transport de chaleur détaillés ci dessous :

i- le flux de chaleur hydrodynamique du à l'effet thermoacoustique et responsable d'un gradient de température le long de l'empilement, qui s'écrit, par unité de surface et en moyenne sur une période acoustique [58],

$$\overline{Q_{th}}(x, t) = q(x) + r(x) \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x}, \quad (4.3)$$

où $\theta(x, t) = T_0 - T_\infty$ est la différence de température entre la température moyenne dans l'empilement T_0 et la température ambiante à l'extérieur du résonateur T_∞ , et où les coefficients $q(x)$ et $r(x)$ sont donnés respectivement par

$$q(x) = -\frac{\delta_h}{2h\rho_0 c_0} P_A^2 \left(\frac{h + e_s}{h} \right) \frac{(1 + \sqrt{\sigma} - \frac{\delta_v}{h}) \alpha T_0}{(1 + \sigma) \sqrt{1 - \frac{\delta_v}{h} + \frac{\delta_v^2}{2h^2}}} \cos(k(x + x_0)) \sin(k(x + x_0)), \quad (4.4)$$

$$r(x) = \frac{\delta_h}{2h\rho_0 c_0} P_A^2 \left(\frac{h + e_s}{h} \right)^2 \frac{C_p}{\omega c_0} \frac{1 - \sigma \sqrt{\sigma}}{1 - \sigma^2} \sin(k(x + x_0))^2, \quad (4.5)$$

en supposant que $\alpha T_0 \cong 1$ ne dépend pas significativement du temps dans l'expression de $q(x)$,

ii- les fuites thermiques à travers les parois du résonateur, qui s'écrivent, par unité de surface [17, 44],

$$Q_L = -h_L \theta(x), \quad (4.6)$$

avec h_L un coefficient d'échange thermique empirique,

iii- la quantité de chaleur générée par les pertes visqueuses dans l'empilement, qui s'écrit par unité de volume et en moyenne sur une période acoustique T ,

$$\overline{Q_v} = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{1}{T} \int_0^T \mu \left(\frac{\partial v_x(x, \zeta, t)}{\partial \zeta} \right)^2 dt d\zeta, \quad (4.7)$$

où v_x est la partie réelle de u_x , et qui devient, en reportant la solution (4.2) de la vitesse particulière,

$$\overline{Q_v} = \frac{\mu}{4h\delta_v} \frac{P_A^2}{\rho_0^2 c_0^2} \left(\frac{h + e_s}{h} \right)^2 \frac{\sinh(2h/\delta_v) - \sin(2h/\delta_v)}{|\cosh[(1+i)h/\delta_v]|} \sin(k(x+x_0))^2, \quad (4.8)$$

iv- le flux de chaleur par conduction retour dans les plaques de l'empilement et dans le fluide qui s'écrit, par unité de surface,

$$Q_c = -K_{eq} \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad (4.9a)$$

$$\text{où} \quad K_{eq} = \frac{2hK + 2e_s K_s}{2(h + e_s)}, \quad (4.9b)$$

v- les pertes thermiques aux extrémités de l'empilement (en $x = 0$ et en $x = l$ respectivement) qui s'écrivent, par unité de surface,

$$Q_{0,l} = -h_{e0,l} \theta(x), \quad x = 0, l, \quad (4.10)$$

où $h_{e0,l}$ désigne un coefficient d'échange thermique empirique.

Finalement, en considérant un élément de l'empilement de longueur dx , le bilan énergétique du système est régi par l'équation de diffusion de la chaleur suivante, dans l'intervalle $x \in (0, l)$:

$$2(h\rho_0 C_p + e_s \rho_s C_s) \frac{\partial \theta}{\partial t} = 2(h + e_s) \left(-\frac{\partial \overline{Q_{th}}}{\partial x} + \frac{\partial Q_c}{\partial x} + \overline{Q_v} + s_L Q_L \right), \quad (4.11)$$

s_L étant un facteur qui dépend de la forme latérale du résonateur.

En faisant usage des relations (4.3) à (4.9), l'équation (4.11) s'écrit simplement

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{2(h + e_s)}{2(h\rho_0 C_p + e_s \rho_s C_s)} \left[(-K_{eq} - r(x)) \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{\partial r(x)}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} - s_L h_L \theta + \left(\overline{Q_v} - \frac{\partial q(x)}{\partial x} \right) \right]. \quad (4.12)$$

En introduisant la fonction

$$g(x) = -\frac{2(h + e_s)}{2(h\rho_0 C_p + e_s \rho_s C_s)} (K_{eq} + r(x)), \quad (4.13)$$

et les notations suivantes

$$\zeta_L = \frac{2(h + e_s)}{2(h\rho_0 C_p + e_s \rho_s C_s)} s_L h_L, \quad (4.14)$$

et

$$q_v = \frac{2h}{2(h\rho_0 C_p + e_s \rho_s C_s)} \left(\overline{Q_v} - \frac{\partial q(x)}{\partial x} \right), \quad (4.15)$$

l'équation (4.12) peut être écrite comme suit :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[g(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] - \zeta_L \theta + q_v. \quad (4.16)$$

Le changement de variable suivant,

$$\xi = \int_0^x \frac{g(0)}{g(u)} du \quad (4.17)$$

permet d'écrire

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[g(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] = \frac{g(0)^2}{g(x)} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}, \quad (4.18)$$

soit encore, en supposant que $g(x)$ ne dépend pas significativement des variations spatiales, $g(x) \approx g(0)$, (cas d'un stack petit devant la longueur d'onde $l \ll \frac{2\pi}{\omega}$),

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[g(x) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] = g \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}. \quad (4.19)$$

Finalement, l'équation (4.16) devient, pour $x \in (0, l)$,

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = g \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \zeta_L \theta + q_v. \quad (4.20)$$

Le premier terme du second membre de l'équation (4.20) représente l'effet du flux de chaleur par conduction retour à l'intérieur de l'empilement auquel s'ajoute celui de la conductivité thermique acoustiquement induite (équ. (4.13)), le second terme correspond aux pertes de chaleur à travers la paroi latérale du tube (équ. (4.14)) et le troisième terme correspond à la chaleur générée par les pertes visqueuses à l'intérieur de l'empilement et par l'effet du à la partie non uniforme du processus thermoacoustique le long de l'empilement (équ. (4.15)).

A cette équation de diffusion thermique sont associées les conditions de continuité des flux de chaleur aux extrémités de l'empilement qui s'écrivent

$$-K_{eq} \frac{\partial \theta}{\partial x} + h_{e0} \theta = \overline{Q_{th}}(0), \quad x = 0, \quad t > 0, \quad (4.21a)$$

$$K_{eq} \frac{\partial \theta}{\partial x} + h_{el} \theta = -\overline{Q_{th}}(l), \quad x = l, \quad t > 0, \quad (4.21b)$$

et qui expriment le fait que le flux de chaleur thermoacoustique $\overline{Q_{th}}$ qui traverse la surface d'une extrémité de l'empilement est compensé, d'une part, par le flux de chaleur retour $K_{eq} \frac{\partial \theta}{\partial x}$ dans l'empilement et, d'autre part, par les pertes thermiques $h_{e0,l}$ vers le résonateur à cette extrémité, et la condition initiale

$$\theta(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in (0, l), \quad t = 0, \quad (4.22)$$

où $\varphi(x)$ représente la distribution spatiale de température dans l'empilement à l'instant $t = 0$.

En résumé, le problème se réduit au système d'équations suivant

$$\frac{1}{g} \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \alpha \theta + \beta, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (4.23a)$$

$$-\frac{\partial \theta}{\partial x} + \eta_0 \theta = q_0, \quad x = 0, \quad t > 0, \quad (4.23b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} + \eta_l \theta = -q_l, \quad x = l, \quad t > 0, \quad (4.23c)$$

auquel s'ajoute l'équation (4.22), avec $\alpha = \zeta_l/g$, $\beta = q_v/g$, $\eta_{0,l} = h_{e0,l}/[K_{eq} + r]$, $q_0 = q(0)/[K_{eq} + r]$ et $q_l = q(l)/[K_{eq} + r]$, K_{eq} étant donné par l'équation (4.9.b), $q(0)$ et $q(l)$ étant donnés par l'équation (4.4).

La solution de ce problème, permettant la description de l'évolution temporelle de la distribution de la température le long de l'axe x dans l'empilement, est recherchée à l'aide d'un développement sur la base des fonctions propres du problème aux valeurs propres associé. Le détail de ce calcul est présenté dans le paragraphe suivant.

4.2 Les solutions modales pour le profil de température

Le problème aux valeurs propres associé au problème posé ci-dessus prend la forme du système d'équations suivant :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_m^2\right) \psi_m(x) = 0, \quad x \in (0, l), \quad (4.24a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \eta_0\right) \psi_m(x) = 0, \quad x = 0, \quad (4.24b)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \eta_l\right) \psi_m(x) = 0, \quad x = l. \quad (4.24c)$$

Ce système d'équations possède une solution explicite ([44], p. 513)

$$\psi_m(x) = N^{-1} [k_m \cos(k_m x) + \eta_0 \sin(k_m x)], \quad (4.25a)$$

avec N défini par

$$N^2 = \frac{1}{2} \left[(k_m^2 + \eta_0^2) \left(l + \frac{\eta_l}{k_m^2 + \eta_0^2} \right) + \eta_0 \right], \quad (4.25b)$$

de sorte que les fonctions propres soient normalisées,

$$\int_0^l \psi_{m_1} \psi_{m_2} dx = \delta_{m_1 m_2}, \quad (4.25c)$$

et avec les valeurs propres k_m solutions de l'équation

$$\tan(k_m l) = \frac{k_m(\eta_0 + \eta_l)}{k_m^2 - \eta_0 \eta_l}. \quad (4.25d)$$

Afin de déterminer l'évolution temporelle du profil spatial de la température, le développement suivant est introduit

$$\theta = \sum_{m=0}^{\infty} C_m(t) \psi_m(x), \quad (4.26)$$

où les coefficients du développement $C_m(t)$ sont donnés par

$$C_m(t) = \int_0^l \psi_m(x) \theta(x, t) dx, \quad (4.27a)$$

notés dans la suite

$$C_m(t) = \langle \psi_m | \theta \rangle. \quad (4.27b)$$

Les fonctions $\langle \psi_m | \theta \rangle$ sont déterminées en multipliant l'équation de diffusion (4.23.a) par les fonctions propres ψ_m et en l'intégrant sur l'intervalle $(0, l)$. Il vient

$$\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \langle \psi_m | \theta \rangle = \left\langle \psi_m \left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \theta \right. \right\rangle - \alpha \langle \psi_m | \theta \rangle + \langle \psi_m | \beta \rangle \quad (4.28a)$$

soit encore en utilisant le théorème de Green,

$$\left[\frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} + \alpha \right] \langle \psi_m | \theta \rangle = \left\langle \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_m \mid \theta \right\rangle - \left[\psi_m \frac{\partial}{\partial x} \theta - \theta \frac{\partial}{\partial x} \psi_m \right]_0^l + \langle \psi_m | \beta \rangle. \quad (4.28b)$$

Ainsi, compte tenu de l'équation (4.24.a), les coefficients $C_m(t)$ sont solutions de

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + g(k_m^2 + \alpha) \right] C_m(t) = f_m(t), \quad (4.29a)$$

où

$$f_m(t) = g[q_l \psi_m(l) - q_0 \psi_m(0) + \langle \psi_m | \beta \rangle]. \quad (4.29b)$$

Compte tenu de la condition initiale (4.22), la solution de l'équation (4.29a) est donnée par

$$C_m(t) = e^{-g(k_m^2 + \alpha)t} \left[\langle \psi_m | \varphi(x) \rangle + \int_0^t e^{+g(k_m^2 + \alpha)t_0} f_m(t_0) dt_0 \right]. \quad (4.30)$$

Finalement, en supposant que la fonction $f_m(t_0)$ ne dépend pas significativement du temps et que la condition initiale (4.29.c) est ici nulle, la solution pour le profil de température est alors donnée par

$$\theta = \sum_m (q_l \psi_m(l) - q_0 \psi_m(0) + \langle \psi_m | \beta \rangle) \left[\frac{1 - e^{-g(k_m^2 + \alpha)t}}{k_m^2 + \alpha} \right] \psi_m(x). \quad (4.31)$$

Remarque :

Dans la formulation présentée précédemment (éq. 4.23.a à 4.23.d), les flux de chaleurs allant des régions 1 et 3 du résonateur à travers les extrémités $x = 0$ et $x = l$ de l'empilement dépendent seulement de la différence de température θ (en faisant usage des coefficients d'échange de chaleur, (4.23.b) et (4.23.c)). Une autre approche basée sur un modèle classique pour ces échanges de chaleurs qui inclut d'une part le processus de diffusion dans les régions ($i = 1, i = 3$) du résonateur thermoacoustique et d'autre part les flux de chaleur entre chacune des extrémités de l'empilement et les échangeurs de chaleur (positionnés respectivement en $x = 0$ et en $x = l$), est présentée en annexe E. Une solution analytique appropriée pour la différence de température θ est obtenue dans le domaine de Fourier. La solution dans le domaine temporel peut alors être exprimée en utilisant le théorème de Cauchy dans le plan complexe (méthode des résidus) mais pour obtenir l'expression analytique des pôles, il est nécessaire de faire des approximations appropriées, à savoir de négliger les pertes de chaleur à travers les extrémités de l'empilement. En d'autres termes, la solution est formellement analytique, bien que ces valeurs ne peuvent être obtenues qu'à partir de calculs numériques (qui sont en dehors du sujet de ce chapitre). Les résultats analytiques obtenus pour la différence de température ΔT entre les extrémités de l'empilement quand les pertes de chaleurs sont négligées aux extrémités de l'empilement sont discutés dans l'annexe E.

4.3 Résultats expérimentaux

Des relevés expérimentaux des températures aux extrémités de l'empilement d'un réfrigérateur thermoacoustique lors de la mise en route du système ont été réalisés lors d'une étude antérieure menée à l'E.C.L. [20]. Le dispositif expérimental utilisé est celui présenté sur la figure 4.2. Il s'agit d'un système simplifié composé de trois éléments principaux : un résonateur (tube cylindrique), une source acoustique (haut-parleur) et un empilement de plaques qui est le siège de l'effet thermoacoustique proprement dit. Une maquette complète de réfrigérateur thermoacoustique devrait comporter

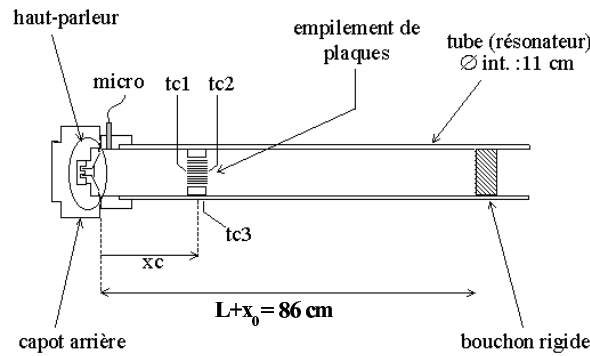


FIG. 4.2 – Schéma du système thermoacoustique étudié.

des échangeurs de chaleur aux extrémités de l'empilement de plaques. Le résonateur est un tube cylindrique en Plexiglas de longueur $L + x_0 = 86 \text{ cm}$ et de 11 cm de diamètre intérieur. Le fluide de travail qui remplit le résonateur est de l'air à pression et à température ambiantes ($P_m = 10^5 \text{ Pa}$). La fréquence de fonctionnement est $f = 200 \text{ Hz}$, le résonateur fonctionnant alors en demi-onde.

L'empilement est constitué de feuilles parallèles en PVC de 0.1 mm d'épaisseur, régulièrement espacées de 1.0 mm . La longueur de l'empilement est de 40 mm et son aire transversale de $67 \times 67 \text{ mm}^2$. Les températures aux extrémités de l'empilement de plaques sont mesurées grâce à deux thermocouples de type J ($\varnothing 127 \mu\text{m}$), désignés par $tc1$ et $tc2$ sur la figure 4.2, dont les soudures sont collées aux deux extrémités d'une plaque dans la zone centrale de l'empilement. Un troisième thermocouple collé sur la surface extérieure du résonateur, désigné par $tc3$ sur la figure 4.2, permet de contrôler la température ambiante.

Les résultats expérimentaux sont représentés sur la figure 4.3, pour différentes positions de l'empilement de plaques dans le résonateur, pour une pression acoustique de 1500 Pa . Sur cette figure, les courbes du haut représentent les évolutions temporelles de la température à chaque extrémité de l'empilement et de la température ambiante et les courbes du bas donnent l'évolution temporelle de la différence de température entre les extrémités de l'empilement. Au temps $t = 120 \text{ s}$, le haut-parleur est mis sous tension.

L'observation des courbes expérimentales d'évolution temporelle de la température aux extrémités des plaques d'un empilement montre la coexistence de plusieurs phénomènes en compétition : le phénomène thermoacoustique et un second phénomène (ou la concomitance de différents phénomènes) qui vient contrecarrer l'effet du premier. L'effet de chacun de ces phénomènes dépend de la position de l'empilement dans le résonateur.

L'effet thermoacoustique est maximal pour une position x_c du centre de l'empilement comprise entre un noeud de vitesse et un noeud de pression, la valeur exacte dépendant du niveau de pression acoustique crête P_A dans le résonateur. Pour une valeur de $P_A = 1500 \text{ Pa}$, cette position vaut $x_c = 8.5 \text{ cm}$ (équ. 1.66). Les relevés de température correspondant à cette position de l'empilement sont présentés sur la figure 4.3.a. Une extrémité des plaques s'échauffe au-dessus de la température ambiante, tandis que l'autre extrémité se refroidit. Cependant, une fois le régime stationnaire atteint, ces deux extrémités s'échauffent lentement, alors que la valeur de la différence de température ΔT

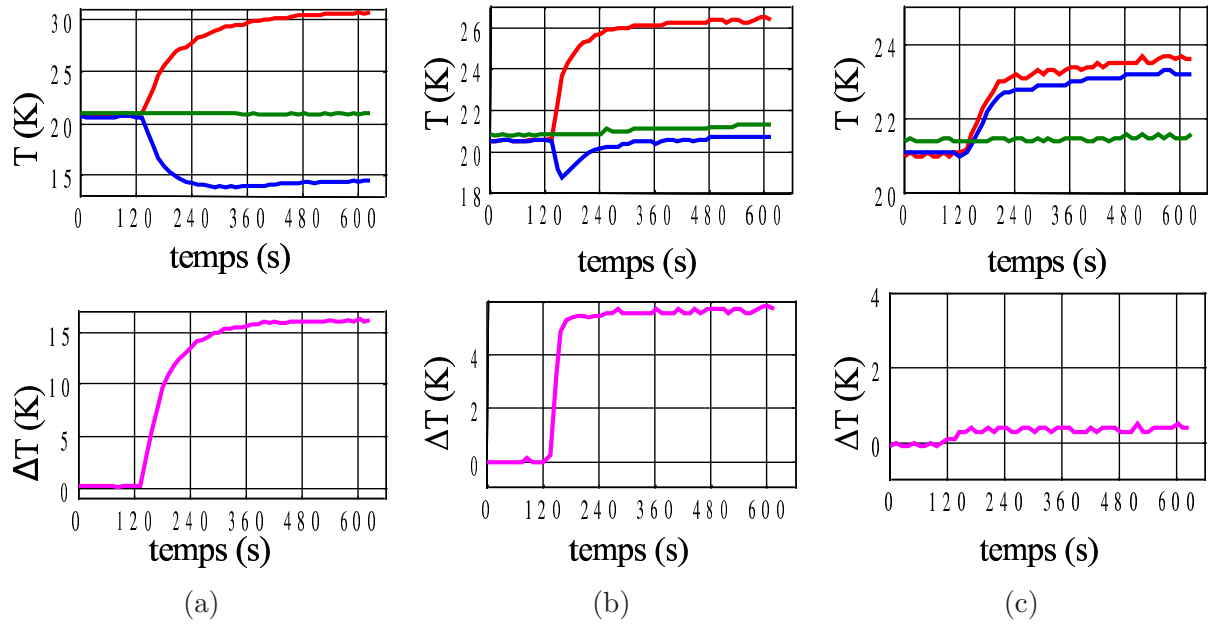


FIG. 4.3 – Évolution temporelle de la température mesurée aux extrémités de l'empilement et de la température extérieure (courbe du haut) et de la différence de température entre les deux extrémités (courbe du bas), à différentes positions du centre de l'empilement dans le résonateur (a) $x_c = 8.5 \text{ cm}$, (b) $x_c = 25.5 \text{ cm}$ et (c) $x_c = 43 \text{ cm}$.

reste constante.

La figure 4.3.c correspond au cas où le centre de l'empilement est placé au milieu du résonateur ($x_c = \frac{L+x_0}{2} = 43 \text{ cm}$). Dans ces conditions, l'effet thermoacoustique est nul, cette position correspondant à un noeud de pression. La différence de température ΔT mesurée entre les extrémités des plaques est effectivement nulle (aux erreurs de mesure près) mais les deux extrémités des plaques s'échauffent.

La figure 4.3.b correspond à une situation intermédiaire entre les deux précédentes qui met clairement en évidence la compétition entre le phénomène thermoacoustique et d'autres phénomènes. Ainsi, dans les premières secondes qui suivent la mise en marche du haut-parleur, un côté de l'empilement de plaques s'échauffe, tandis que l'autre se refroidit. Puis la tendance s'inverse : l'extrémité froide se réchauffe lentement, tant et si bien qu'elle retrouve sa température initiale, l'effet thermoacoustique à l'extrémité "froide" des plaques étant alors annulé.

Le modèle analytique présenté au paragraphe suivant permet de décrire et d'interpréter les comportements transitoires décrits ci-dessous. A titre d'exemple, les résultats expérimentaux issus du modèle analytique sont reportés sur la figure 4.4.a correspondant au cas où le centre x_c de l'empilement est placé à 25.5 cm du haut-parleur dans le résonateur et ajustées de manière à ce que le temps $t = 120 \text{ s}$ du cas expérimental corresponde au cas $t = 0 \text{ s}$ théorique. Cette position de l'empilement ne correspond pas à celle optimale qui conduit à une différence maximale de température entre les extrémités de l'empilement, mais présente l'avantage de mettre clairement en évidence la compétition entre le phénomène thermoacoustique et les autres phénomènes pris en compte dans le modèle. La bonne concordance entre ces résultats théoriques et expérimentaux autorise à avancer l'explication suivante du comportement transitoire issue de l'analyse des différents paramètres du modèle et de leurs effets

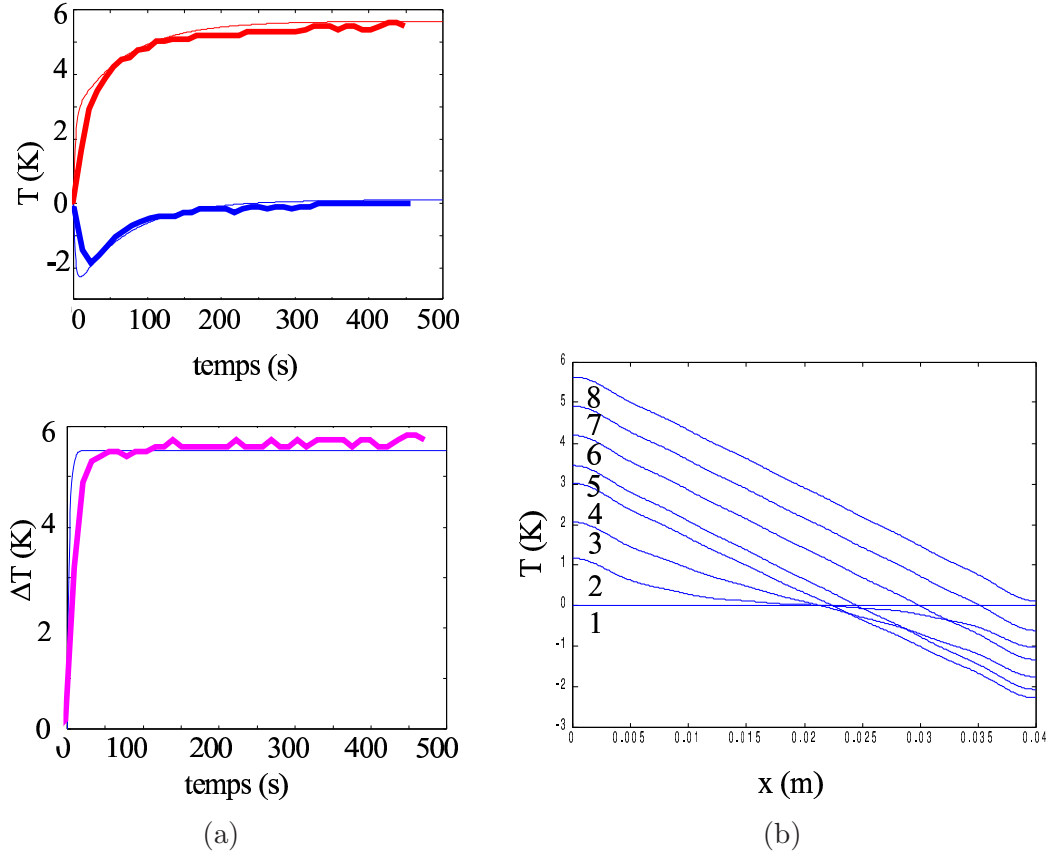


FIG. 4.4 – (a) Évolution temporelle de la température mesurée aux extrémités de l’empilement théoriques (traits fins) et expérimentales (traits gras) pour une position du centre de l’empilement égale à $x_c = 25.5$ cm. (b) Évolution temporelle de la distribution de température le long de l’empilement, pour une position du centre de l’empilement égale à $x_c = 25.5$ cm à différents instants (1) $t=0$ s, (2) $t=1$ s, (3) $t=3$ s, (4) $t=10$ s, (5) $t=20$ s, (6) $t=50$ s, (7) $t=100$ s, (8) $t=500$ s, issu de [20].

sur les profils de température.

Dans les premières secondes qui suivent la mise en marche du haut-parleur, une extrémité de l’empilement de plaques s’échauffe, tandis que l’autre se refroidit (figure 4.4.a) ; c’est l’effet thermoacoustique attendu. Après quelques secondes, la différence de température entre les extrémités de l’empilement tend vers sa valeur limite (figure 4.4.a), l’effet thermoacoustique étant compensé par la conduction thermique retour dans les plaques et dans le fluide. Cependant, dans le même temps, l’extrémité froide se réchauffe lentement, tant et si bien qu’elle retrouve sa température initiale (figure 4.4.a) ; c’est l’effet des frottements visqueux aux interfaces fluide/parois, d’autant plus importants que la vitesse particulaire est grande, qui se superpose au processus thermoacoustique et entraîne un échauffement des plaques (l’extrémité chaude de l’empilement subissant elle aussi cet échauffement). Enfin, l’échauffement global de l’empilement tend à son tour vers une valeur limite (figure 4.4.a) ; c’est l’effet des pertes thermiques à travers les parois du résonateur et aux extrémités de l’empilement.

L’accord entre les résultats expérimentaux et ceux issus du modèle analytique est obtenu en ajustant les coefficients d’échange thermique h_l et $h_{e_{0,l}}$, apparaissant dans les équations 4.6 et 4.10. Les

valeurs obtenues sont du même ordre de grandeurs que ceux donnés dans la littérature pour ces grandeurs [61] (ici $h_L = 17$ et $h_{e0,l} = 30$). Le modèle analytique ainsi ajusté permet également de décrire l'évolution temporelle de la distribution de la température le long de l'empilement (figure 4.4.b). Le haut parleur est mis en marche à l'instant $t = 0$. La distribution de température présente un profil quasi linéaire quelques secondes après la mise en marche du haut-parleur ($t = 10$ s). L'incurvation du profil de température à ses extrémités est une conséquence de la prise en compte des fuites thermiques aux extrémités de l'empilement. Par la suite, le profil de température conserve sa forme, mais l'ensemble de l'empilement subit un échauffement dû aux pertes visqueuses.

4.4 Conclusion

Après ajustement des coefficients d'échange thermique h_L et $h_{e0,l}$, dont les valeurs pour le système étudié sont inaccessibles à l'expérience (seuls les ordres de grandeurs sont connus et respectés ici), le modèle analytique présenté permet de décrire et d'interpréter le comportement transitoire d'un réfrigérateur thermoacoustique. En particulier, les rôles respectifs des différents phénomènes physiques mis en jeu, tels que le flux de chaleur thermoacoustique, le flux de chaleur par conduction retour dans l'empilement, les pertes thermiques à travers le système et les pertes visqueuses dans l'empilement, sont clairement identifiés.

Conclusion

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse s'inscrit dans le cadre d'une partie des recherches en thermoacoustique menées au L.A.U.M. visant à miniaturiser les systèmes thermoacoustiques. Une idée nouvelle a conduit à la réalisation d'un réfrigérateur de faible encombrement, dit "compact", puisque ces dimensions intérieures sont ramenées à celles de l'empilement, ce qui permet de gagner un ordre de grandeur sur les dimensions d'un réfrigérateur thermoacoustique à ondes stationnaires classique. Ce type de réfrigérateur offre la possibilité de créer indépendamment les champs de pression acoustique et de vitesse particulaire dans l'empilement de manière à optimiser le processus thermoacoustique, ce qui permet d'envisager des performances supérieures à celles des systèmes classiques.

L'objectif de cette thèse a été d'étudier analytiquement et expérimentalement ce nouveau type de réfrigérateur thermoacoustique. Ainsi, une étude analytique a permis de mettre en évidence l'existence d'un champ acoustique optimal en terme de pression acoustique, de vitesse particulaire et de phase relative entre ces deux grandeurs qui conduit à optimiser chacune des quantités thermoacoustiques qui caractérisent le fonctionnement d'un réfrigérateur (le flux de chaleur thermoacoustique, le gradient de température et le coefficient de performance du processus). Des résultats expérimentaux obtenus à partir d'une maquette décimétrique de réfrigérateur thermoacoustique à quatre sources ont confirmé l'existence d'un champ acoustique optimal qui conduit à une différence de température maximale. La caractérisation expérimentale de la maquette à ce point de fonctionnement a montré un comportement à deux dimensions du champ de vitesse particulaire dans l'empilement de plaques. Ce comportement est prédit par un modèle analytique qui décrit le champ acoustique dans la cavité en fonction des tensions électriques fournies aux sources. Par suite, les cartographies de température sont plus complexes que celles obtenues dans un réfrigérateur thermoacoustique classique. Cette complexité pouvant se traduire par une diminution des performances du système, des améliorations du système ont été proposées. Par ailleurs, la modélisation du comportement transitoire d'un réfrigérateur thermoacoustique a été présentée. Les résultats théoriques obtenus, en accord avec ceux expérimentaux, permettent de quantifier et d'interpréter la contribution des différents phénomènes thermiques mis en jeu.

Les résultats expérimentaux concernant la caractérisation du système compact à quatre sources, sont d'un grand intérêt mais appellent d'autres séries de mesures complémentaires. En particulier, des améliorations doivent être apportées au dispositif expérimental, en vue d'effectuer des mesures du champ de vitesse particulaire par Vélocimétrie Laser Doppler entre deux plaques de l'empilement et autour de l'empilement. Ces mesures permettraient d'avoir accès aux profils de vitesse entre deux plaques et aux écoulements en bords de plaques, afin d'évaluer l'influence des effets des écoulements sur le processus thermoacoustique et sur le transfert de chaleur de l'empilement vers les échangeurs

de chaleurs et apporteraient des informations supplémentaires par rapport à des mesures V.I.P.. Par ailleurs, la caractérisation thermique de la maquette s'est réduite à des mesures de température en différents points de l'empilement. Ces mesures pourraient être complétées par des mesures du flux de chaleur à l'aide de capteurs spécifiques. A cet égard, des fluxmètres, en cours de développement au L.A.U.M., donneraient accès à de nouvelles données expérimentales et par la suite, conduiraient à une meilleure compréhension des phénomènes thermiques qui prennent place dans l'empilement. Enfin, l'étude expérimentale d'un système complet nécessiterait la mise en place d'échangeurs de chaleur de part et d'autre de l'empilement. Un tel ajout permettrait d'avoir accès au coefficient de performance d'une machine réelle, mais supposerait des études supplémentaires concernant notamment le positionnement d'échangeurs de chaleur dans un tel système.

L'un des objectifs de recherches à terme est de concevoir des systèmes miniatures. L'étude expérimentale présentée dans ce mémoire a été effectuée sur une maquette de réfrigérateur décimétrique. Cependant, deux maquettes centimétriques de réfrigérateur compact à quatre sources ont également été réalisées et instrumentées au L.A.U.M.. Ces réfrigérateurs, d'arête 4 cm, comportent quatre sources, électrodynamiques pour l'un et piézoélectriques pour l'autre. L'empilement de plaques est constitué de feuilles de kapton, dont l'une, située au centre de l'empilement, est instrumentée par 16 micro-thermocouples. L'étude expérimentale a mis en évidence un certains nombres de problèmes liés essentiellement aux sources. En particulier, dans le cas des sources piézoélectriques, pour obtenir des déplacements importants, les sources doivent fonctionner à leur première fréquence de résonance, ce qui impose aux sources d'être parfaitement appareillées. Par ailleurs, pour les sources électrodynamiques, un échauffement global du stack est observé dû à l'échauffement de la bobine des sources.

En outre, parallèlement à ces travaux de thèse, des études sont effectuées au L.A.U.M. afin de mettre au point des techniques de fabrication MEMS (Micro-Electro-Mechanical Systems) pour concevoir des systèmes thermoacoustiques à ondes stationnaires miniaturisés à l'extrême. En particulier, en vue d'équiper un réfrigérateur micrométrique, un micro-stack en silicium a été réalisé et des micro-capteurs thermiques ainsi que des microphones miniatures sont en cours de développement.

Ce mémoire a essentiellement porté sur les réfrigérateurs "compacts" mais d'autres architectures de réfrigérateurs sont envisageables. Par exemple, pour extraire de la chaleur des cartes électroniques, un réfrigérateur planaire semble avoir une géométrie plus adaptée à l'application souhaitée puisque sa forme est compatible avec celle de l'élément à refroidir. Actuellement, une maquette décimétrique d'un réfrigérateur à ondes stationnaires de section rectangulaire dont la dimension transversale est faible devant la longueur du résonateur est étudié au L.A.U.M.. La miniaturisation d'un tel système, à ondes stationnaires ou compact, semble prometteuse pour la réfrigération de l'électronique.

Annexe A

Paramètres de Thiele et Small

Le haut-parleur électrodynamique est un transducteur électroacoustique constitué d'une membrane (diaphragme) solidaire d'une bobine mobile dans un champ magnétique radial. Thiele et Small ont développé un modèle électroacoustique de haut-parleurs électrodynamiques à un degré de liberté. C'est un modèle basse fréquence (la longueur d'onde en flexion de la membrane est très grande devant son diamètre) où la membrane est assimilée à un piston plan (déplacement instantané identique en tout point) et où les caractéristiques de la bobine sont considérées indépendantes de la fréquence. Le haut-parleur peut être représenté par le schéma électrique équivalent de la figure (A.1) où les sept paramètres suivants dépendent du haut-parleur modélisé :

- la résistance de la bobine R_e ,
- l'inductance de la bobine L_e ,
- le facteur de force Bl ,
- la masse mobile totale M_{ms} ,
- la souplesse des suspensions C_{ms} ,
- la résistance mécanique R_{ms} ,
- la surface émissive S_d .

Dans le schéma électrique de la figure (A.1), le paramètre R_g représente la résistance interne de

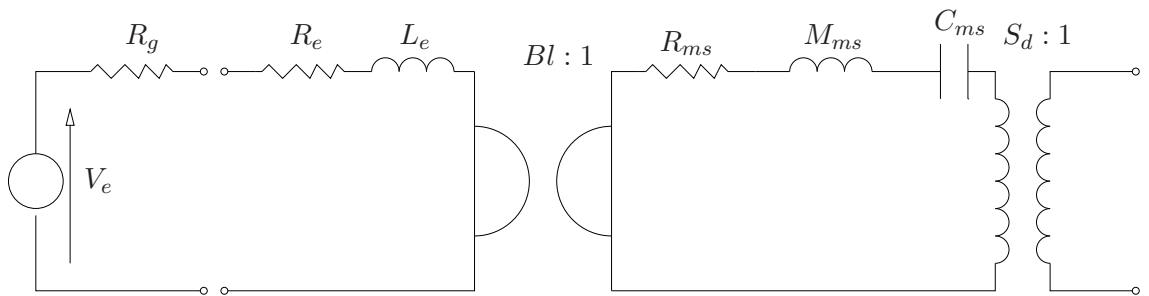


FIG. A.1 – Schéma électrique équivalent du haut-parleur électrodynamique.

l'amplificateur. En ramenant les parties électriques et mécaniques du côté acoustique, le schéma

électrique de la figure (A.1) peut également être représenté par celui de la figure (A.2) où

$$p_g = V_e \left[\frac{Bl}{S_d(R_g + R_e + j\omega L_e)} \right], \quad (A.1)$$

$$R_{ae} = \frac{Bl^2}{S_d^2(R_g + R_e)}, \quad C_{ae} = L_e \frac{S_d^2}{Bl^2}, \quad R_{as} = \frac{R_{ms}}{S_d^2}, \quad M_{as} = \frac{M_{ms}}{S_d^2}, \quad C_{as} = C_{ms} S_d^2.$$

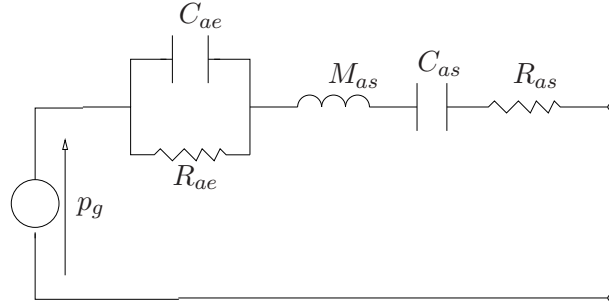


FIG. A.2 – Schéma électrique équivalent du haut-parleur électrodynamique dans le domaine acoustique.

De plus, en posant

$$Z_g = \frac{R_{ae}}{j\omega C_{ae} R_{ae} + 1} + j\omega M_{as} + \frac{1}{j\omega C_{as}} + R_{as}, \quad (A.2)$$

la description du haut-parleur se réduit à une impédance acoustique en série avec un générateur de pression équivalente (figure A.3).

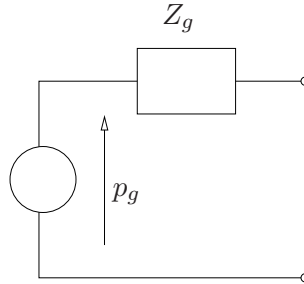


FIG. A.3 – Schéma électrique équivalent du haut-parleur électrodynamique tel que présenté dans le paragraphe 2.3.

Les valeurs des différents paramètres mesurées pour les deux haut-parleurs utilisés sont données dans le tableau suivant :

paramètres	H.P. 1	H.P. 2	H.P. 3	H.P. 4
f_s (Hz)	143	141	131	143
R_e (ohm)	11.7	11.4	11.7	11.5
L_e (H)	$1.39 \cdot 10^{-4}$	1.3910^{-4}	1.3910^{-4}	$1.39 \cdot 10^{-4}$
Bl (N.A ⁻¹)	11.7	11.4	11.5	11.6
C_{ms} (m.N ⁻¹)	$118 \cdot 10^{-6}$	11410^{-6}	14310^{-6}	11010^{-6}
M_{ms} (kg)	$11.2 \cdot 10^{-3}$	$11 \cdot 10^{-3}$	$11.0 \cdot 10^{-3}$	$11 \cdot 10^{-3}$
S_d (m ²)	$145 \cdot 10^{-4}$	$145 \cdot 10^{-4}$	$145 \cdot 10^{-4}$	$145 \cdot 10^{-4}$

Annexe B

Plan du réfrigérateur à quatre sources

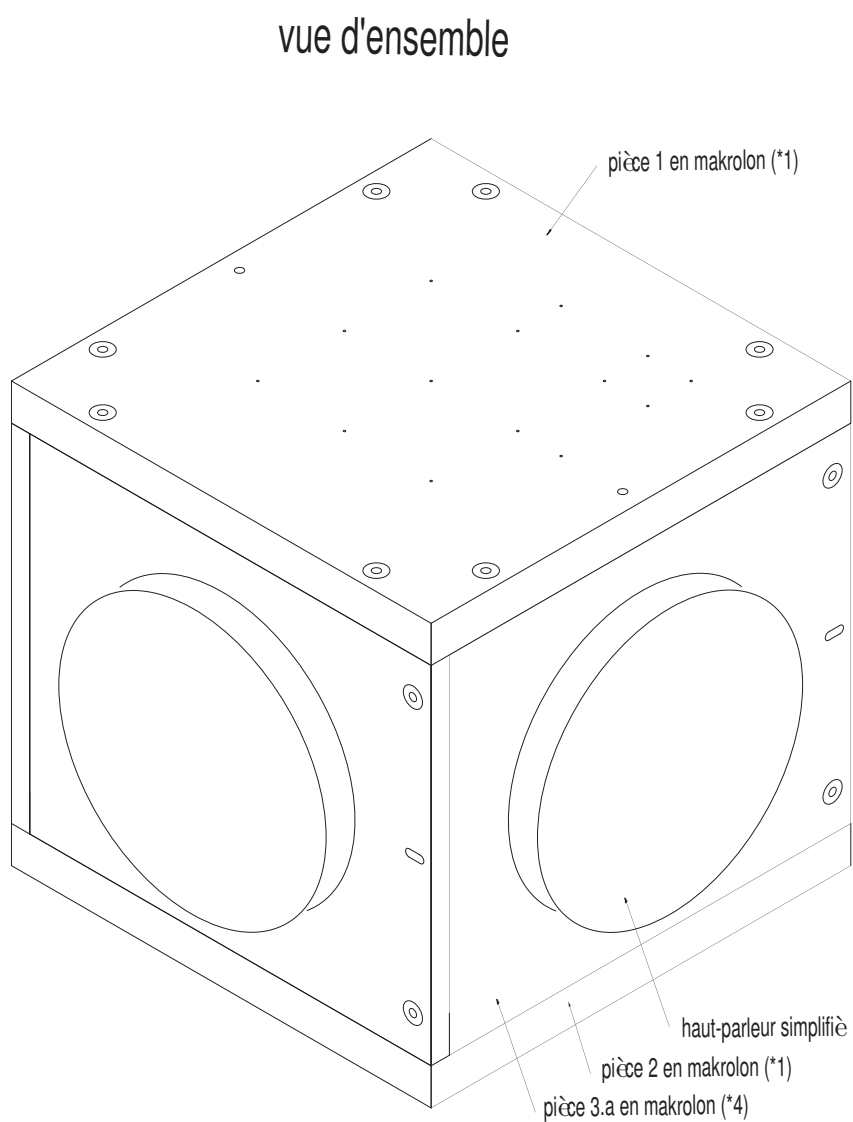


FIG. B.1 – Vue d'ensemble du réfrigérateur à quatre sources.

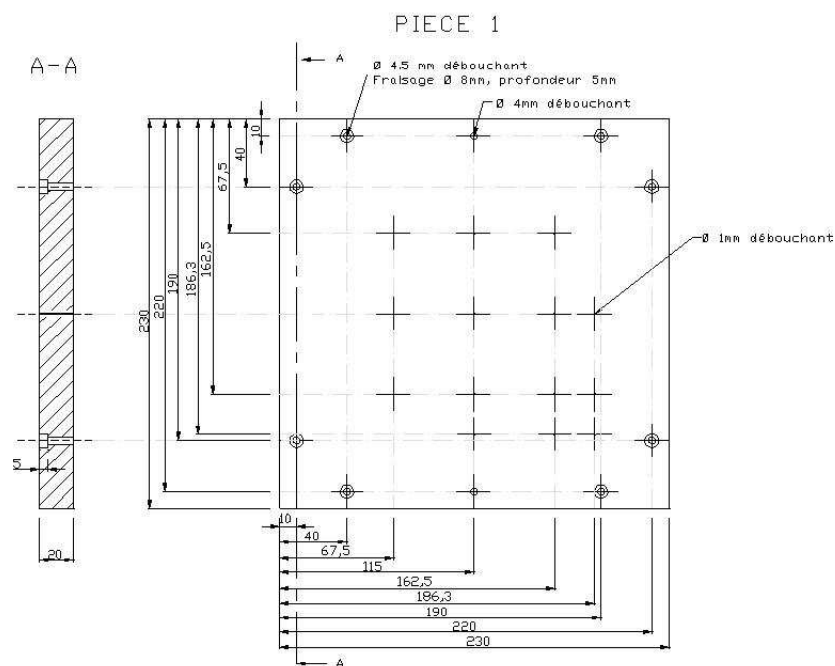


FIG. B.2 – Vue de la pièce 1.

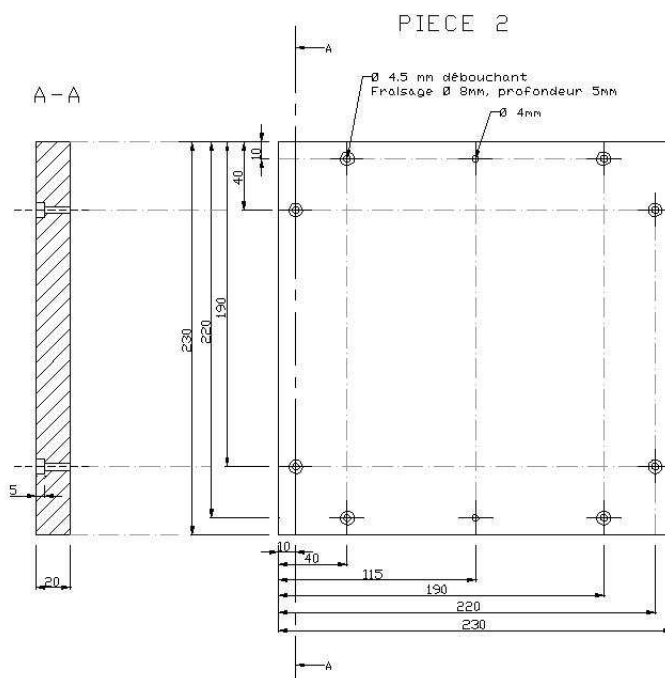
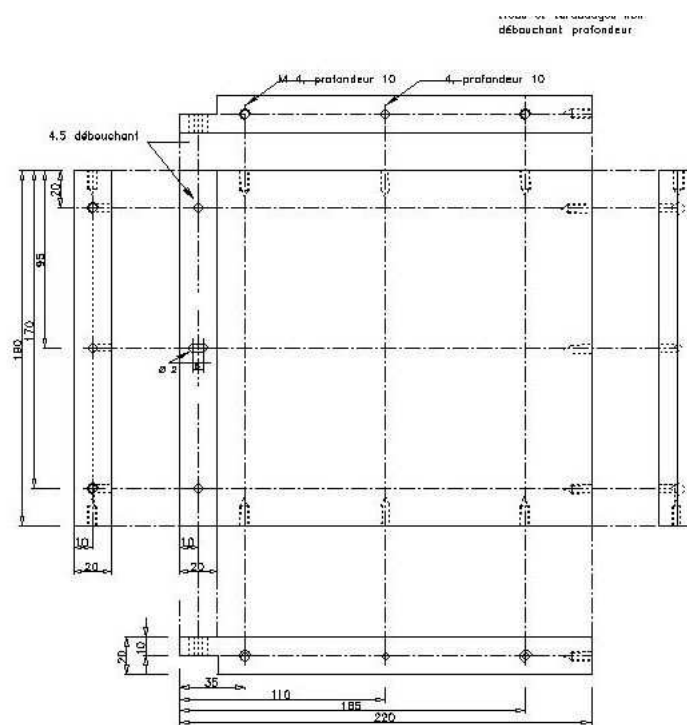
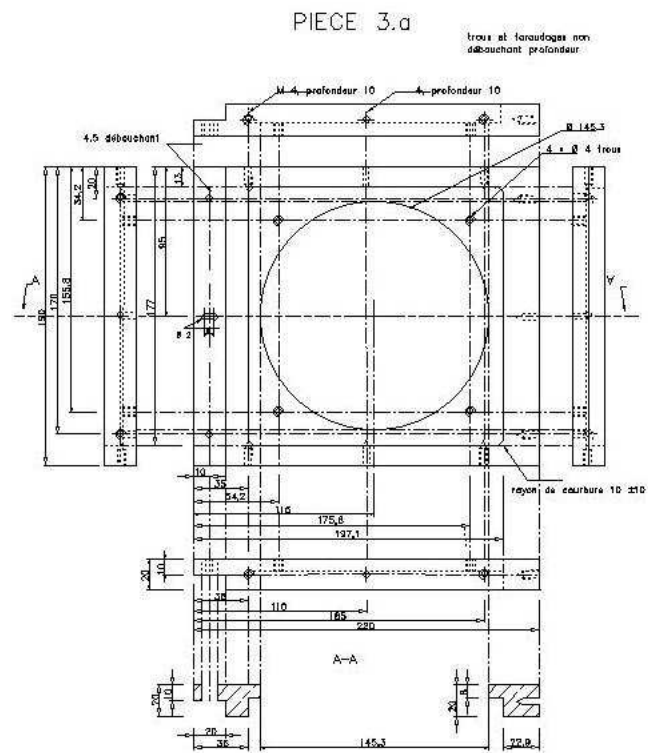


FIG. B.3 – Vue de la pièce 2.



Annexe C

Les montages expérimentaux

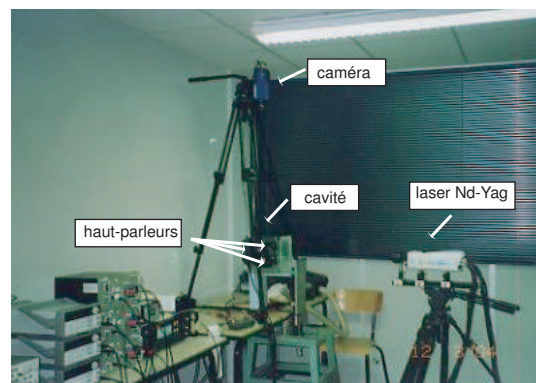


FIG. C.1 – Montage expérimental de mesure de la vitesse particulaire par P.I.V.. Le plan de mesure est illuminé par un laser Nd-Yag à impulsion. Les images du plan de mesure sont capturées par une caméra CCD puis post-traitée.

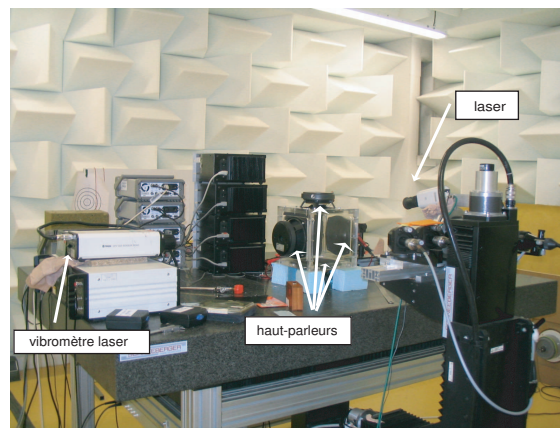


FIG. C.2 – Montage expérimental de mesure de la vitesse particulaire par L.D.V.. Deux faisceaux laser cohérents convergent vers un point de l'espace, nommé volume de mesure. Une particule d'ensemencement traversant ce volume, diffuse de la lumière, dont l'intensité est fonction de sa vitesse, qui est recueillie par une lentille de réception.

Annexe D

Paramètres des mesures par V.I.P.

V_{e1} (V_{rms})	V_{e3} (V_{rms})	$\theta_{V_{e1}-V_{e3}}$ ($^{\circ}$)	temps initial (ms)	délais entre chaque boucle (ms)	nombre de boucles	Δt (μs)	nombre d'images	figure
14,3	15,2	180	4,2	0,8	8	500	100	3.13,3.15
14,3	15,2	0	4,2	0,8	8	500	100	3.14,3.16

TAB. D.1 – Configurations des mesures du champ de vitesses particulières par V.I.P. lorsque la cavité comporte deux hauts-parleurs en vis-à-vis.

V_{e1} (V_{rms})	V_{e3} (V_{rms})	V_{e2} (V_{rms})	$\theta_{V_{e1}-V_{e2}}$ ($^{\circ}$)	$\theta_{V_{e1}-V_{e3}}$ ($^{\circ}$)	temps initial (ms)	délais entre chaque boucle (ms)	nombre de boucles	Δt (μs)	nombre d'images	figure
7,5	9,5	21,1	175	153	4,4	0,5	12	550	100	3.17

TAB. D.2 – Configuration des mesures du champ de vitesses particulière par V.I.P. lorsque la cavité comporte trois hauts-parleurs.

Annexe E

Les équations de base et les solutions pour la différence de température entre les extrémités de l'empilement (transformée de Fourier)

Dans le problème présenté au paragraphe 4.2 (défini par le système d'équations (4.23.a) à (4.23.d)), le transfert de chaleur vers les régions (1) et (3) du résonateur à travers les extrémités $x = 0$ et $x = l$ de l'empilement est supposé dépendre uniquement de la différence de température θ (impliquant un coefficient d'échange de chaleur empirique, équations (4.23.b) à (4.23.c)). Ici, une autre approche est proposée pour modéliser ces transferts de chaleur qui inclut d'une part le processus de diffusion dans les régions $i = 1, 3$ du résonateur thermoacoustique, et d'autre part le flux de chaleur à chaque extrémités de l'empilement et les échangeurs de chaleur (positionnés en $x = 0$ et en $x = l$ respectivement). Ainsi, les équations (4.23.b) et (4.23.c) sont remplacées par le système d'équations

$$-K_{eq} \frac{\partial \theta(0)}{\partial x} + K_1 \frac{\partial \theta_1(0)}{\partial x} - \left(q(0) + r(0) \frac{\partial \theta(0)}{\partial x} \right) = C_0 \frac{\partial \theta_c}{\partial t}, \quad x = 0, \quad t > 0, \quad (\text{E.1a})$$

$$K_{eq} \frac{\partial \theta(l)}{\partial x} - K_3 \frac{\partial \theta_3(l)}{\partial x} + \left(q(l) + r(l) \frac{\partial \theta(l)}{\partial x} \right) = C_l \frac{\partial \theta_h}{\partial t}, \quad x = l, \quad t > 0, \quad (\text{E.1b})$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial t} = g_1 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} - \zeta_1 \theta_1, \quad x \leq 0, \quad t > 0, \quad (\text{E.1c})$$

$$\frac{\partial \theta_3}{\partial t} = g_3 \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial x^2} - \zeta_3 \theta_3, \quad x \geq l, \quad t > 0, \quad (\text{E.1d})$$

où $\theta(0)$, $\theta(l)$, $\theta_1(0)$, $\theta_3(l)$, θ_h et θ_c désignent les différences de température ($T_0 - T_\infty$) entre la température moyenne T_0 dans le résonateur thermoacoustique et T_∞ la température ambiante à l'extérieur du résonateur respectivement aux extrémités de l'empilement $x = 0$ et $x = l$, à l'extrémité $x = 0$ de la région 1 du résonateur et à l'extrémité $x = l$ de la région 3, et à l'échangeur de chaleur chaud et froid, où C_0 et C_l sont les des échangeurs de chaleurs respectivement en $x = 0$ et $x = l$, et K_1 et K_3 les conductivités thermiques du fluide (les autres notations ayant déjà été introduites dans

le texte), avec les conditions aux interfaces

$$\theta(0) = \theta_1(0) = \theta_c \quad \text{et} \quad \theta(l) = \theta_3(l) = \theta_h, \quad (\text{E.2a})$$

tandis que les équations (4.23.a) et (4.23.d) reste valide :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = g \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \zeta_L \theta + q_v, \quad x \in (0, l), \quad t > 0, \quad (\text{E.2b})$$

$$\theta(x, 0) = 0, \quad x \in (0, l), \quad t = 0. \quad (\text{E.2c})$$

Pour déterminer la solution analytique pour la différence de température θ dans l'empilement qui convient, ce système d'équation est exprimé dans le domaine de Fourier, en posant

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\theta}(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (\text{E.3})$$

il vient alors,

$$-i\omega C_0 \hat{\theta}_c = -(K_{eq} + r(0)) \frac{\partial \hat{\theta}(0)}{\partial x} + K_1 \frac{\partial \hat{\theta}_1(0)}{\partial x} + \hat{q}(0), \quad x = 0, \quad (\text{E.4a})$$

$$-i\omega C_l \hat{\theta}_h = (K_{eq} + r(l)) \frac{\partial \hat{\theta}(l)}{\partial x} + K_3 \frac{\partial \hat{\theta}_3(l)}{\partial x} + \hat{q}(l), \quad x = l, \quad (\text{E.4b})$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\theta}_1}{\partial x^2} - k_1^2 \hat{\theta}_1 = 0, \quad x \leq 0, \quad (\text{E.4c})$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\theta}_3}{\partial x^2} - k_3^2 \hat{\theta}_3 = 0, \quad x \geq l, \quad (\text{E.4d})$$

$$\frac{\partial^2 \hat{\theta}}{\partial x^2} - k^2 \hat{\theta} = -\beta, \quad x \in (0, l), \quad (\text{E.4e})$$

$$\hat{\theta}(0) = \hat{\theta}_1(0) = \hat{\theta}_c \quad \text{et} \quad \hat{\theta}(l) = \hat{\theta}_3(l) = \hat{\theta}_h, \quad (\text{E.4f})$$

où

$$k_i^2 = \frac{-i\omega + \zeta_i}{g_i}, \quad i = 1, 2 \quad \text{et} \quad k^2 = \frac{-i\omega + \zeta_L}{g}, \quad (\text{E.4g})$$

$\hat{q}(x = 0, l)$ étant donné par

$$\hat{q}(x = 0, l) = \frac{Q_0}{2\pi} \frac{1}{-i\omega} \quad \text{où} \quad q(x = 0, l; t) = -Q_0 H(t), \quad (\text{E.4h})$$

$H(t)$ désignant la fonction de Heaviside.

Les solutions sont exprimées sous la forme

$$\hat{\theta} = \hat{A} e^{-kx} + \hat{B} e^{k(x-l)} + \beta/k^2, \quad (\text{E.5a})$$

$$\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_h e^{k_1 x}, \quad (\text{E.5b})$$

$$\hat{\theta}_3 = \hat{\theta}_h e^{-k_3(x-l)}. \quad (\text{E.5c})$$

Donc, les différences de température $\hat{\theta}_h$, $\hat{\theta}_c$ et les constantes d'intégration $\hat{A}$ et $\hat{B}$ obéissent aux systèmes d'équation suivant, dans le domaine de Fourier :

$$(-i\omega C_0 - k_1 K_1) \hat{\theta}_c = -k (K_{eq} + r(0)) \left(-\hat{A} + \hat{B} e^{-kl} \right) - \hat{q}(0), \quad (\text{E.6a})$$

$$(-i\omega C_l - k_3 K_3) \hat{\theta}_h = k (K_{eq} + r(l)) \left(-\hat{A} e^{-kl} + \hat{B} \right) + \hat{q}(l), \quad (\text{E.6b})$$

$$\hat{A} + \hat{B} e^{-kl} + \beta/k^2 = \hat{\theta}_c, \quad (\text{E.6c})$$

$$\hat{A} e^{-kl} + \hat{B} + \beta/k^2 = \hat{\theta}_h, \quad (\text{E.6d})$$

En supposant que $C_0 = C_l = C$, $k_1 = k_3 = k_t$, $K_1 = K_3 = K_t$, $g_1 = g_3 = g_t$ et $\hat{q}(0) = \hat{q}(l) = \hat{q}$, ces dernières équations pouvant être réduites en

$$\hat{\theta}_h - \hat{\theta}_c = (1 - e^{-kl}) (-\hat{A} + \hat{B}), \quad (\text{E.7a})$$

$$\hat{\theta}_h + \hat{\theta}_c = (1 - e^{-kl}) (\hat{A} + \hat{B}) + 2\beta/k^2, \quad (\text{E.7b})$$

$$(-i\omega C - k_t K_t) (\hat{\theta}_h - \hat{\theta}_c) = k K_{eq} (-\hat{A} + \hat{B}) (1 + e^{-kl}) + 2\hat{q}, \quad (\text{E.7c})$$

$$(-i\omega C - k_t K_t) (\hat{\theta}_h + \hat{\theta}_c) = k K_{eq} (\hat{A} + \hat{B}) (1 - e^{-kl}), \quad (\text{E.7d})$$

conduisant aux expressions des paramètres $\hat{\theta}_h$, $\hat{\theta}_c$, $\hat{A}$ et $\hat{B}$, et donc aux solutions dans le domaine fréquentiel.

Il est à remarquer que la différence de température $\hat{\theta}_h - \hat{\theta}_c$ est donnée par

$$\hat{\theta}_h - \hat{\theta}_c = S(\omega) \hat{q}, \quad (\text{E.8a})$$

avec

$$S(\omega) = \frac{2}{-i\omega C - k_t K_t - \frac{(K_{eq} + r)}{l} \frac{kl}{1 - e^{-kl}} (1 + e^{-kl})}. \quad (\text{E.8b})$$

En utilisant les notations suivantes

$$\Omega = \frac{\omega l^2}{g}, \quad \Omega_{eq} = \frac{\zeta_L l^2}{g}, \quad \lambda_{eq} = -\frac{K_{eq} l}{gC}, \quad \Omega_t = \frac{\zeta_t l^2}{g_t}, \quad \lambda_t = -\frac{K_t l}{gC}, \quad (\text{E.9})$$

la fonction de transfert est donnée par

$$S(\Omega) = \frac{\frac{2l^2}{gC} (1 - e^{-\sqrt{-i\Omega + \Omega_{eq}}})}{(-i\Omega + \lambda_t \sqrt{-i\Omega + \Omega_t}) (1 - e^{-\sqrt{-i\Omega + \Omega_{eq}}}) + \lambda_{eq} \sqrt{-i\Omega + \Omega_{eq}} (1 + e^{-\sqrt{-i\Omega + \Omega_{eq}}})}. \quad (\text{E.10})$$

En introduisant l'équation (E.4.b), la solution dans le domaine temporelle s'écrit

$$\theta_h(t) - \theta_c(t) = -2 \frac{Q_0}{2\pi} \frac{l}{gC} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\overline{S}(\Omega)}{-i\Omega} e^{-i\Omega\tau} d\Omega \quad (\text{E.11})$$

avec $\tau = \frac{qt}{l^2}$ et $\overline{S}(\Omega) = \frac{gC}{2l^2} S(\Omega)$, et peut être exprimée en utilisant le théorème de Cauchy dans le plan complexe (par la méthode des résidus), mais pour avoir des expressions analytiques des pôles simplifiables, il est nécessaire d'utiliser des approximations appropriées, à savoir négliger les pertes de chaleur à travers les extrémités du stack (i.e. $C = 0$ et $\Omega_t = 0$). En d'autres termes, la solution est formellement analytique, bien que le calcul de sa valeur exacte implique inévitablement des calculs numériques (qui sont en dehors du sujet de ce papier). Les résultats analytiques obtenus pour la différence de température $\Delta T = T_h - T_c$ entre les extrémités de l'empilement quand les pertes sont négligées aux extrémités de l'empilement sont données ci-dessous (et discutées dans le paragraphe 4.3) en supposant $C = 0$ et $\Omega_t = 0$, la différence de température entre les extrémités de l'empilement $\Delta T(t > 0)$ est donnée par

$$\Delta T(t > 0) = Q_0 \frac{l}{g} \frac{h + e_s}{h\rho_0 C_p + e_s \rho_s C_s} H(t) \left[\frac{2(1 - e^{-\sqrt{\Omega_{eq}}})}{\sqrt{\Omega_{eq}} (1 + e^{-\sqrt{\Omega_{eq}}})} - 8 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-[(2n+1)^2 \pi^2 + \Omega_{eq}] \frac{t}{l^2 g}}}{(2n+1)^2 \pi^2 + \Omega_{eq}} \right]. \quad (\text{E.12})$$

En supposant que $\sqrt{-\Omega_{eq}} \ll 1$ (les pertes de chaleur à travers les parois latérales de la cavité sont faibles),

$$\frac{2 \left(1 - e^{-\sqrt{\Omega_{eq}}}\right)}{\sqrt{\Omega_{eq}} \left(1 + e^{-\sqrt{\Omega_{eq}}}\right)} = \frac{\tan\left(\frac{1}{2}\sqrt{-\Omega_{eq}}\right)}{\frac{1}{2}\sqrt{-\Omega_{eq}}} \cong 1$$

et un calcul montre que cette relation (E.12) est égale à la différence $\theta(l, t) - \theta(0, t)$, obtenue à partir de l'équation (4.31), quand l'échauffement visqueux est négligé dans l'empilement ($\beta = 0$).

Bibliographie

- [1] J. A. Adeff and T. J. Hofler. Design and construction of a solar-powered, thermoacoustically driven, thermoacoustic refrigerator. *J. Acoust. Soc. Am.*, 107(6) :L37–L42, 2000.
- [2] J. A. Adeff and T. J. Hofler. Performance improvements for the solar-powered, thermoacoustically driven, thermoacoustic refrigerator. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108(5) :2554–2555, 2000.
- [3] A. A. Atchley, H.E. Bass, and T. J. Hofler. Acoustically generated temperature gradients in short plates. pages 603–608, 2002. *Frontiers of nonlinear acoustics : 12 th ISNA*, edited by M. F. Hamilton and D. T. Blackstock, Elseviers, New-York.
- [4] A. A. Atchley, T. J. Hofler, M. L. Muzzerall, and M. D. Kite. Acoustically generated temperature gradients in short plates. *J. Acoust. Soc. Am.*, 88(1) :251–263, 1990.
- [5] S. Backhaus and G. W. Swift. A thermoacoustic - Stirling heat engines : Detailed study. *J. Acoust. Soc. Am.*, 107(6) :3148–3166, 2000.
- [6] H. Bailliet. Machines thermoacoustiques : études analytiques et expérimentales de couplages et d’effets non linéaires acoustiques. Thèse de doctorat, Université du Maine, France, 1998.
- [7] H. Bailliet, P. Lotton, M. Bruneau, and V. Gusev. Coupling between electrodynamic loudspeakers and thermoacoustic cavities. *Acta Acustica*, 86 :363–373, 1999.
- [8] H. Bailliet, P. Lotton, M. Bruneau, V. Gusev, J. C. Valière, and B. Gazengel. Acoustic power flow measurement in a thermoacoustic resonator by means of Laser Doppler Anemometry and microphonie measurement. *Applied Acoustics*, 60 :1–11, 2000.
- [9] Y. Bailly and L. Thiery. Analyse simultanée des fluctuations acoustiques de température et de pression dans un tuyau sonore. Actes du Congrès Annuel de la Société Françaises des Thermiciens, Arcachon, Mai, 1999.
- [10] L. Bauwens. Thermoacoustics : Transient regimes and singular temperature profiles. *Physics of fluids*, 10(4) :808–818, 1998.
- [11] A. Berson, I.S. Paek, L. Mongeau, and P. Blanc-Benon. Mesures par anémométrie fil chaud, des fluctuations de température et de vitesse à l’intérieur d’un réfrigérateur thermoacoustique. Congrès Français d’Acoustique, Tours, Avril, 2006.
- [12] Ph. Blanc-Benon. High amplitude effects in thermoacoustic refrigerators. 16th Inter. Symp. on Nonlinear Acoustics (ISNA 16), Moscou, August, 2002.
- [13] Ph. Blanc-Benon. Particule Image Velocimetry and temperature measurements in thermoacoustics stacks. First International Workshop on Thermoacoustics, Hertogenbosh, April, 2001.

- [14] Ph. Blanc-Benon, E. Besnoin, and O. Knio. Experimental and computational visualization of the flow field in a thermoacoustic stack. *Comptes Rendus Mécanique*, 331(1) :17–24, 2003.
- [15] M. Bruneau. Manuel d’acoustique fondamentale. Ed. Hermès, Paris, 1998.
- [16] M. Bruneau, P. Blanc-benon, S. Durand, E. Gaviot, V. Gusev, and P. Lotton. Réfrigérateur thermoacoustique compact. Brevet n° 03 05982, France, 19 mai 2003.
- [17] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger. *Conduction of heat in solids*. Clarendon Press Oxford, 2nd edition, 1997.
- [18] P. H. Ceperley. A pistonless Stirling engine - the traveling wave heat engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 66(5) :1508–1513, 1979.
- [19] R. L. Chen and S. L. Garrett. A large solar heat-driven thermoacoustic cooler. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108(5) :2554, 2000.
- [20] S. Duffourd. Réfrigérateur thermoacoustique : études analytiques et expérimentales en vue d’une miniaturisation. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, France, 2001.
- [21] S. L. Garrett, J.A. Adeff, and J.A. Hoffer. Thermoacoustic refrigerator for space applications. *J. Thermophysics and Heat Transfer, Brighton*, 7(4) :595–599, 1993.
- [22] C. Guinanvarc’h, J.-N. Durocher, M. Bruneau, and A.-M. Bruneau. Improved formulation of the acoustic transfer admittance of cylindrical cavities. *Acta Acustica*, 92(3) :345–354, 2006.
- [23] V. Gusev, P. Lotton, H. Bailliet, S. Job, and M. Bruneau. Relaxation-time approximation for analytical evaluation of temperature field in thermoacoustic stack. *J. Sound Vib.*, 235(5) :711–726, 2000.
- [24] V. Gusev, P. Lotton, H. Bailliet, S. Job, and M. Bruneau. Thermal wave harmonics generation in the hydrodynamical heat transport in thermoacoustics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 109(1) :84–90, 2001.
- [25] M. F. Hamilton, Y. A. Ilinkii, and E. A. Zabolostkaya. Nonlinear two-dimensional model for thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.*, 111 :2076–2086, 2002.
- [26] B. Higgins. *Nicholson’s jour.*, J1 :130, 1802.
- [27] T. J. Hoffer. Performance of a short parallel-plate thermoacoustic stack with arbitrary plate spacing. *J. Acoust. Soc. Am.*, 88, 1990.
- [28] T. J. Hoffer. Effective heat transfer between a thermoacoustic heat exchanger and a stack. *J. Acoust. Soc. Am.*, 94(3) :1772, 1993.
- [29] T. J. Hoffer and J. A. Adeff. Development of a miniature thermoacoustic refrigerator. *J. Acoust. Soc. Am.*, 108(5) :2554, 2000.
- [30] G. Huelsz and E. Ramos. On the phase difference of the temperature and pressure waves in the thermoacoustic effect. *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 22(1) :71–80, 1995.
- [31] G. Huelsz and E. Ramos. Temperature measurements inside oscillatory boundary layer produced by acoustic waves. *J. Acoust. Soc. Am.*, 103(3) :1532–1537, 1997.
- [32] S. Job. études théoriques et expérimentales d’un générateur thermoacoustique annulaire à ondes progressives. Thèse de doctorat, Université du Maine, France. 2001.

- [33] R. A. Johnson, S. L. Garrett, and R. M. Keolian. Thermoacoustic cooling for surface combatants. *Naval Engineers Journal*, 112(4) :335–345, 2000.
- [34] Y.T. Kim, S. J. Suh, and M. G. Kim. Linear resonant duct thermoacoustic refrigerator having regenerator stack. Proc. 16th International Congress on Acoustics and 135th Meeting Acoustical Society of America, Seattle, Washington, USA, June, 1998.
- [35] B. Lihoreau. Réfrigérateur thermoacoustique "compact" : modélisation, conception, évaluation. Thèse de doctorat, Université du Maine, France, 2002.
- [36] H. Lissek. Les matériaux acoustiques à propriétés acoustiques variables. Thèse de doctorat, Université du Maine, France, 2002.
- [37] D. Marx. Simulation numérique d'un réfrigérateur thermoacoustique. Thèse de doctorat, Ecole Centrale de Lyon, France, 2003.
- [38] D. Marx and Ph. Blanc-Benon. Numerical simulation of stack-heat exchangers coupling in a thermoacoustic refrigerator. *A.I.A.A. Journal*, 42(7) :1338–1347, 2004.
- [39] D. Marx and Ph. Blanc-Benon. Numerical simulation of the temperature difference between the extremities of a thermoacoustic stack plates. *Cryogenics*, 45(1) :163–172, 2005.
- [40] P. Merkli and H. Thomann. Thermoacoustic effects in a resonance tube. *J. Fluid. Mech*, 68(3) :567–575, 1975.
- [41] S. Moreau, R. Boucheron, J.-C. Valière, and H. Bailliet. Mesures L.D.V. et P.I.V. dans les couches limites acoustiques. *Congrès Francophone de Vélocimétrie Laser*, septembre, 2004.
- [42] G. Mozurkewich. Time-average temperature distribution in a thermoacoustic stack. *J. Acoust. Soc. Am.*, 103(1) :380–388, 1998.
- [43] R.T. Muehleisen and A.A. Atchley. Simple model for temperature gradient formation in a short stack. *J. Acoust. Soc. Am.*, 103(5) :2840, 1998.
- [44] N. Ozisik. *Heat conduction*. J. Wiley and sons Inc., 2nd edition, 1993.
- [45] G. Penelet. Etude théorique et expérimentale des processus non linéaires de saturation dans un générateur d'ondes thermoacoustique annulaire. Thèse de doctorat, Université du Maine, France. 2005.
- [46] G. Petculescu and L. A. Wilen. Alternative-geometry traveling-wave thermoacoustic devices. First International Workshop on Thermoacoustics, Hertogenbosh, April, 2001.
- [47] A. Piccolo and G. Cannistraro. Convection heat transport along a thermoacoustic couple in the transient regime. *Int. J. Thermal Sciences*, 41 :1067–1075, 2002.
- [48] S. Poggi. Contribution au développement d'un banc de mesure de la vitesse particulaire acoustique par Vélocimétrie Laser Doppler (V.L.D.) : évaluation des résultats et applications. Thèse de doctorat, Université du Maine, France. 2000.
- [49] G. Poignand, B. Lihoreau, P. Lotton, E. Gaviot, M. Bruneau, and V. Gusev. Optimal acoustic fields in compact thermoacoustic refrigerators. *Applied Acoustics*, à paraître.
- [50] R. Raspet, J. Brewster, and H. E. Bass. A new approximation method for thermoacoustic calculations. *J. Acoust. Soc. Am.*, 103(5) :2395–2402, 1998.

- [51] J.W.S. Rayleigh. *The theory of sound*. Dover, New York, 2nd edition, 1945.
- [52] M. Rossi. *Electroacoustique*. Presses polytechniques romandes, 1986.
- [53] N. Rott. Damped and thermally driven acoustic oscillations in wide and narrow tubes. *Z. Angew. Math. Phys.*, 20 :230–243, 1969.
- [54] N. Rott. Thermally driven acoustic oscillations, part III : Second-order heat flux. *Z. Angew. Math. Phys.*, 26 :43–49, 1975.
- [55] N. Rott. Thermoacoustics. *Advances in Applied Mechanics*, 20 :135–175, 1980.
- [56] R. Small. Vented-box loudspeaker systems, part I : Small-signal analysis. *J. Audio Eng. Soc.*, 21(5) :363–444, 1973.
- [57] C. Sondhauss. Ueber die schallschwingungen der luft in erhitzten glas-röhren und in gedeckten pfeifen von ungleicher weite. *Ann. Phys.*, 79(1), 1850.
- [58] G. W. Swift. Thermoacoustic engines. *J. Acoust. Soc. Am.*, 84(4) :1145–1180, 1988.
- [59] G. W. Swift. Analysis and performance of a large thermoacoustic engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 92(3) :1551–1563, 1992.
- [60] G. W. Swift. Thermoacoustic engines and refrigerators. *Physics Today*, 48(7) :22–28, 1995.
- [61] J. Taine and J.P. Petit. *Transfert thermiques, mécanique des fluides anisothermes*. Ed. Dunod, 2nd édition, 1998.
- [62] K. J. Taylor. Absolute measurement of acoustic particle velocity. *J. Acoust. Soc. Am.*, 59(3) :691–694, 1976.
- [63] A. Thiele. Loudspeakers in vented boxes : parts I and II. *J. Audio Eng. Soc.*, 19(5) :382–392, 1971.
- [64] M. E. H. Tijani, J. C. H. Zeegers, and A. T. A. M. de Waele. Construction and performance of a thermoacoustic refrigerator. *Cryogenics*, 42 :59–66, 2001.
- [65] M. E. H. Tijani, J. C. H. Zeegers, and A. T. A. M. de Waele. Design of a thermoacoustic refrigerator. *Cryogenics*, 42 :49–57, 2001.
- [66] M. E. H. Tijani, J. C. H. Zeegers, and A. T. A. M. de Waele. The optimal stack spacing for thermoacoustic refrigeration. *J. Acoust. Soc. Am.*, 112(1) :128–133, 2002.
- [67] J.-Ch. Valière, R. Boucheron, H. Bailliet, and G. Poignand. Using Particle Image Velocimetry in acoustics : Application to the measurement of acoustic boundary layer. *soumis à J. Acoust. Soc. Am.*
- [68] J. Wheatley, T. Hofler, G. W. Swift, and A. Migliori. An intrinsically irreversible thermoacoustic heat engine. *J. Acoust. Soc. Am.*, 74(1) :153–170, 1983.
- [69] A.S. Worlikar and O.M. Knio. Numerical simulation of a thermoacoustic refrigerator. part II : stratified flow around the stack. *J. Comp. Phys*, 144 :299–324, 1998.
- [70] A.S. Worlikar and O.M. Knio. Numerical study of oscillatory flow and heat transfer in a loaded thermoacoustic stack. *Num. Heat Transf., part A : Applications*, 35 :49–65, 1999.

-
- [71] T. Yazaki, A. Iwata, T. Maekawa, and A. Tominaga. Travelling wave thermoacoustic engine in a looped tube. *Phys. Rev. Lett.*, 81 :3128–3132, 1998.
 - [72] H. Yeh and H. Z. Cummins. Localized fluid flow measurements with a He-Ne laser spectrometer. *Appl. Phys. Lett.*, 4 :176–178, 1964.