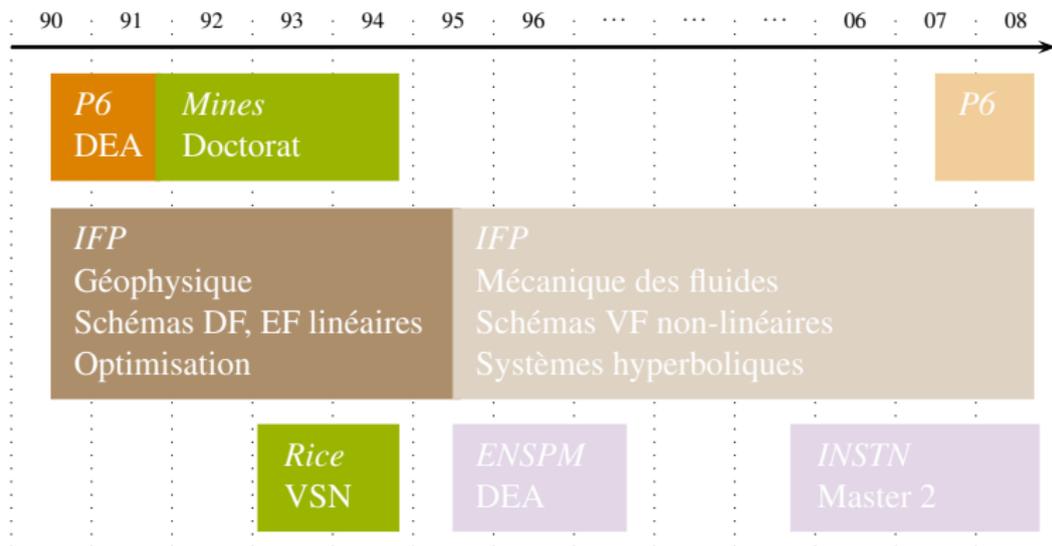


# Contributions à la simulation, à la modélisation et au contrôle des écoulements fluides

QUANG HUY TRAN

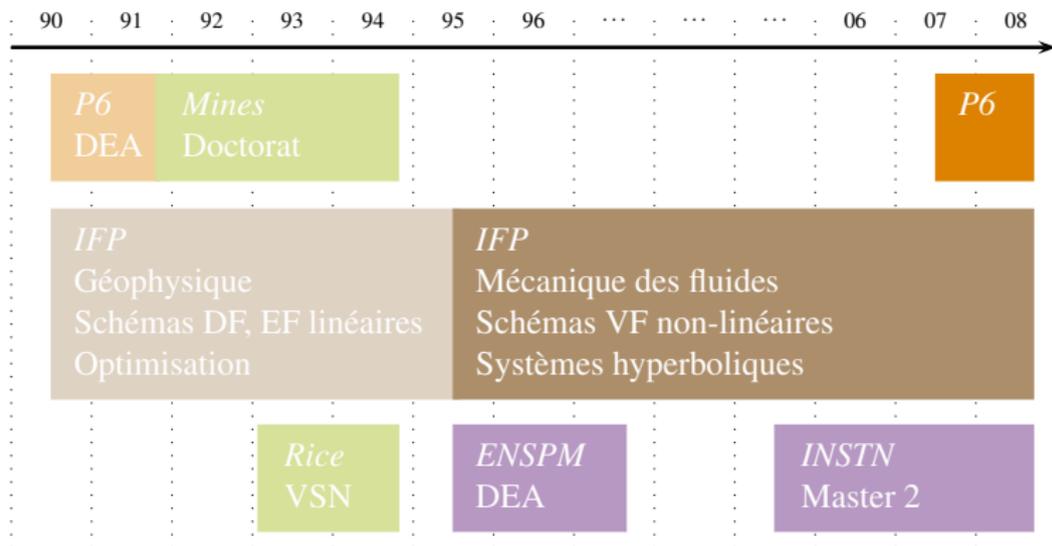
# Parcours

Thèse sous la direction d'Alain Bamberger sur la *propagation d'ondes acoustiques* et l'*inversion tomographique*



# Parcours

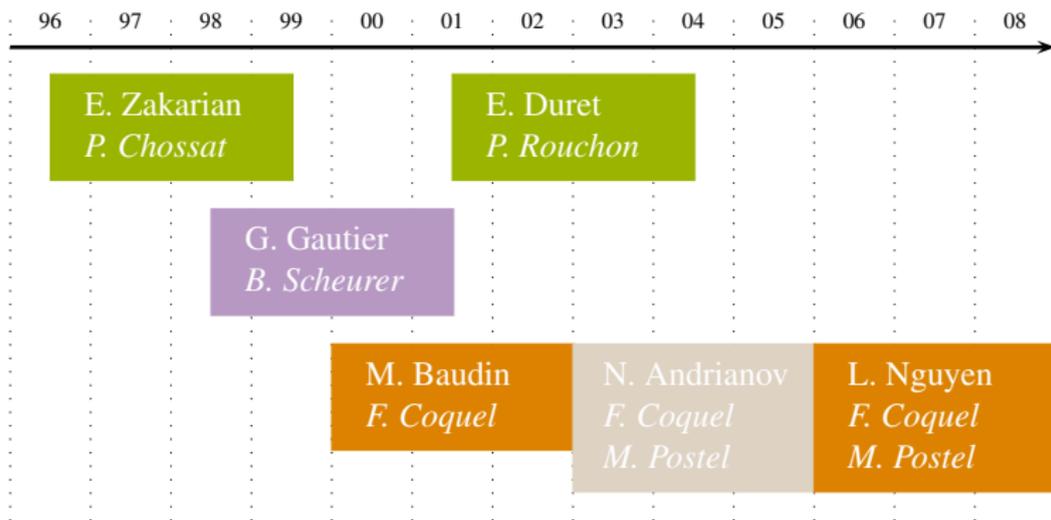
Ingénieur de recherche à l'IFP, département *Mathématiques Appliquées*.  
Enseignements à l'ENSPM et l'INSTN



# Encadrements

« Promoteur » de 5 thèses, 1 post-doctorat.

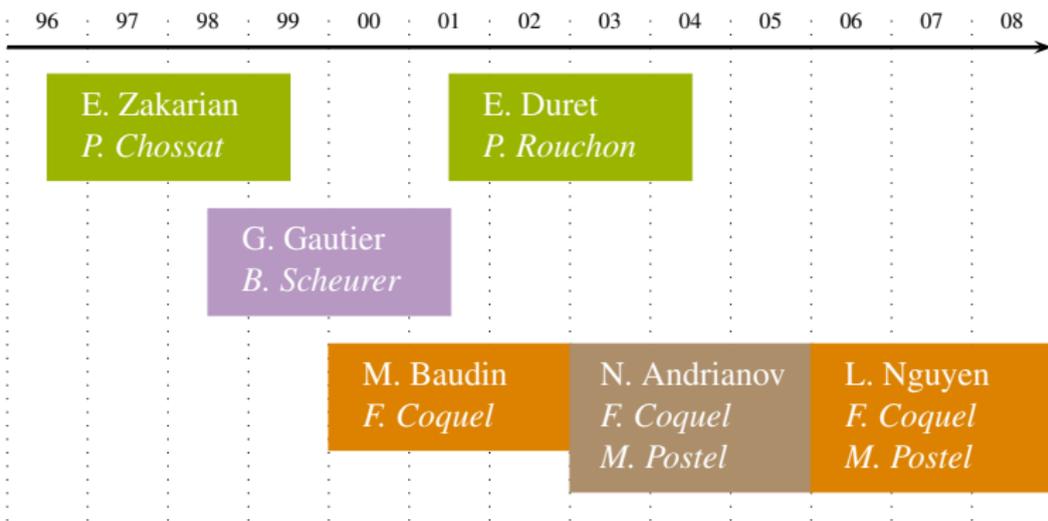
18 stagiaires



# Encadrements

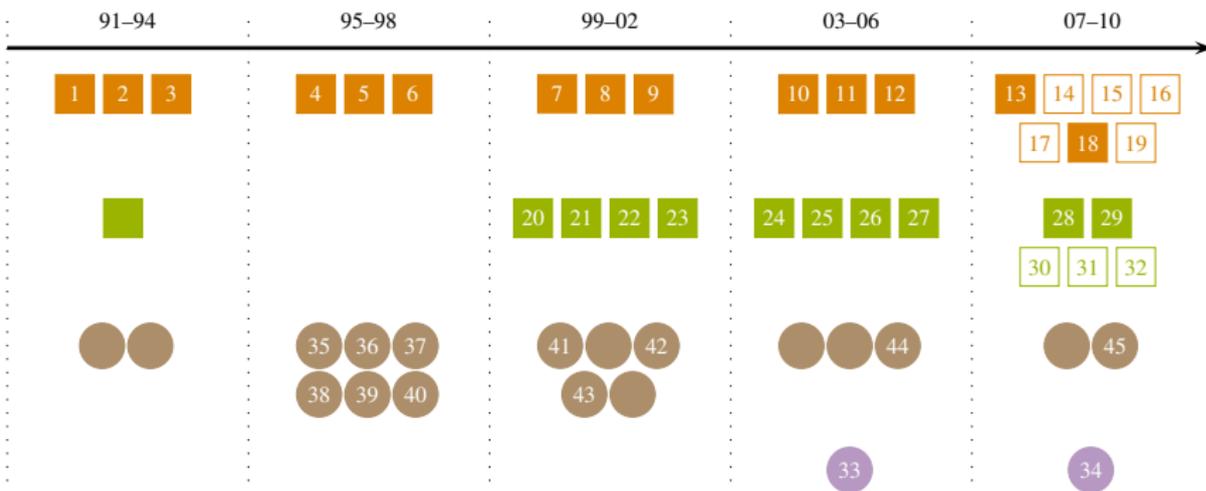
« Promoteur » de 5 thèses, 1 post-doctorat.

18 stagiaires



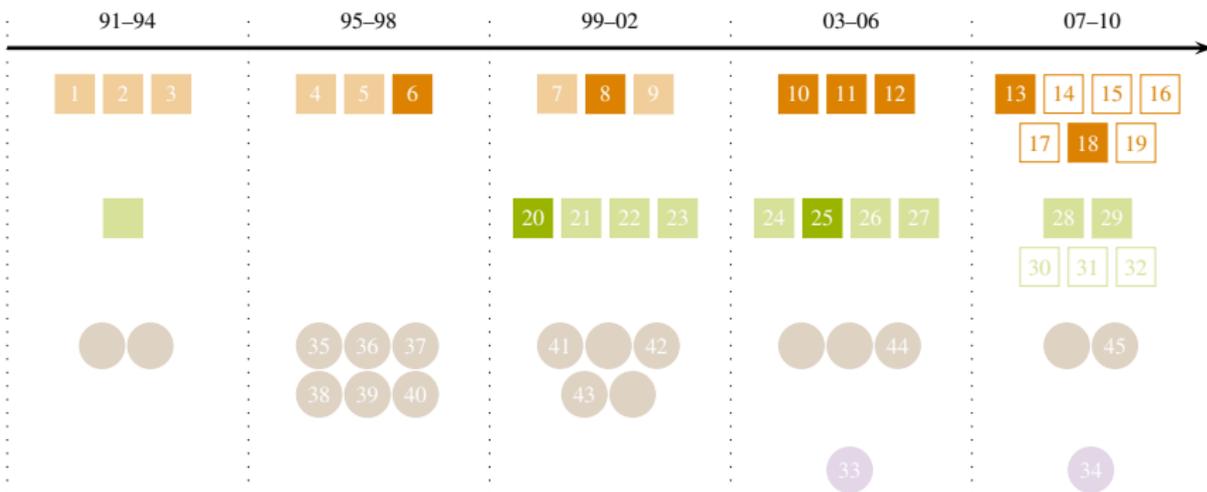
# Publications

14 **articles** dans revues, 10 **actes** de colloques,  
18 **rapports** internes, 2 brevets



# Publications du mémoire

14 articles dans revues, 10 actes de colloques,  
18 rapports, 2 brevets



# Écoulements fluides

## ■ TACITE

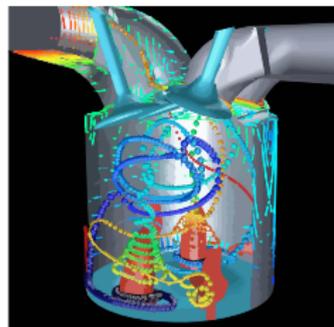
- 1-D, « grand » domaine
- polyphasique compositionnel
- plusieurs vitesses
- lois de fermeture non-standard
- maillage fixe ou adaptatif



Trans-Alaska (1300 km)

## ■ IFP-C3D

- 3-D, « petit » domaine
- multi-espèces réactifs
- une seule vitesse
- lois de fermeture standard
- maillage mobile et déformé

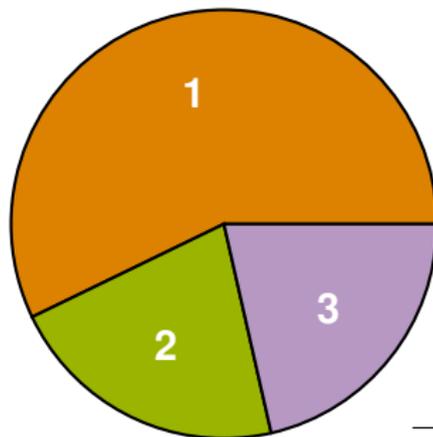


KIVA 3 © LANL

# Simulation, modélisation, contrôle

Simulation TACITE

Relaxation et adaptation dynamique



Simulation IFP-C3D

Advection multidimensionnelle

Modélisation TACITE

Analyse et contrôle

# Sommaire

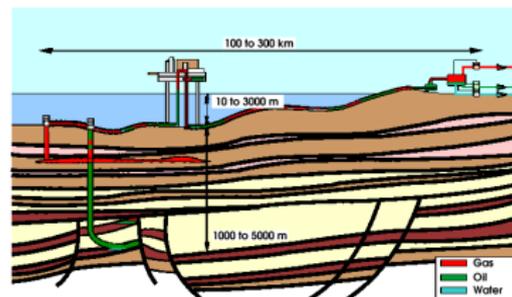
- 1 Simulation des écoulements en conduites par relaxation**
  - Plus sûr, plus vite
  - Relaxations en explicite
  - Relaxations en implicite sélectif
  - Adaptations dynamiques
- 2 Modélisations alternatives et applications au contrôle**
- 3 Phase convective pour la simulation des moteurs**

# Contexte et enjeux

- Transport polyphasique
  - choix économique important dans le monde pétrolier
  - thème de recherche permanent en Mécanique Appliquée
- TACITE (1990–)
  - assistance aux pilotes dans les unités de contrôle
  - prédiction des obstacles à la production, tels le **slugging** ou les *hydrates*
  - conception et dimensionnement des équipements
- Tina (IFP), Olga (IFE)

- Impératifs
  - robuste
  - rapide
  - précis

Difficiles à atteindre, en partie pour des raisons de modèle



Champ offshore

# Modèle à flux de dérive (DFM)

## ■ Lois de conservation

$$\partial_t(\rho) + \partial_x(\rho v) = 0 \quad (1a)$$

$$\partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + P) = \rho S \quad (1b)$$

$$\partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho Y v + \sigma) = 0 \quad (1c)$$

## ■ Lois de fermeture **thermodynamique** et **hydrodynamique** exprimant

$$P(\mathbf{u}) = \rho Y(1 - Y)\phi^2(\mathbf{u}) + p(\mathbf{u}) \quad (2a)$$

$$\sigma(\mathbf{u}) = \rho Y(1 - Y)\phi(\mathbf{u}) \quad (2b)$$

en fonction de  $\mathbf{u} = (\rho, \rho v, \rho Y)$ , avec  $\phi(\mathbf{u}) = v_g - v_\ell$



## ■ Forme abstraite

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \rho \mathbf{s}(\mathbf{u}) \quad (3)$$

# Propriétés de DFM

- Agréable
  - Forme conservative, à l'inverse des modèles à 2 bilans d'impulsion
- Moins agréable
  - $P(\mathbf{u})$  et  $\sigma(\mathbf{u})$  sont fortement non-linéaires et extrêmement coûteuses
  - L'*hyperbolicité* n'est pas garantie, même si  $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{u})$  admet dans la plupart des cas 3 valeurs propres réelles distinctes  $\lambda_1(\mathbf{u})$ ,  $\lambda_2(\mathbf{u})$  et  $\lambda_3(\mathbf{u})$  à évaluer numériquement
- Encore moins agréable
  - Deux échelles de vitesses représentent deux types d'ondes différents

$$|\lambda_2(\mathbf{u})| \ll |\lambda_1(\mathbf{u})| \approx |\lambda_3(\mathbf{u})|$$

cinématique (matière)      acoustiques (pression)

ce qui pénalise le temps de calcul en explicite

- Pas d'*entropie*, donc pas d'analyse de stabilité non-linéaire

# Propriétés de DFM

- Agréable
  - Forme conservative, à l'inverse des modèles à 2 bilans d'impulsion
- Moins agréable
  - $P(\mathbf{u})$  et  $\sigma(\mathbf{u})$  sont fortement non-linéaires et extrêmement coûteuses
  - L'*hyperbolicité* n'est pas garantie, même si  $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{u})$  admet dans la plupart des cas 3 valeurs propres réelles distinctes  $\lambda_1(\mathbf{u})$ ,  $\lambda_2(\mathbf{u})$  et  $\lambda_3(\mathbf{u})$  à évaluer numériquement
- Encore moins agréable
  - Deux échelles de vitesses représentent deux types d'ondes différents

$$|\lambda_2(\mathbf{u})| \ll |\lambda_1(\mathbf{u})| \approx |\lambda_3(\mathbf{u})|$$

cinématique (matière)      acoustiques (pression)

ce qui pénalise le temps de calcul en explicite

- Pas d'*entropie*, donc pas d'analyse de stabilité non-linéaire

# Propriétés de DFM

- Agréable
  - Forme conservative, à l'inverse des modèles à 2 bilans d'impulsion
- Moins agréable
  - $P(\mathbf{u})$  et  $\sigma(\mathbf{u})$  sont fortement non-linéaires et extrêmement coûteuses
  - L'*hyperbolicité* n'est pas garantie, même si  $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{u})$  admet dans la plupart des cas 3 valeurs propres réelles distinctes  $\lambda_1(\mathbf{u})$ ,  $\lambda_2(\mathbf{u})$  et  $\lambda_3(\mathbf{u})$  à évaluer numériquement
- Encore moins agréable
  - Deux échelles de vitesses représentent deux types d'ondes différents

$$|\lambda_2(\mathbf{u})| \ll |\lambda_1(\mathbf{u})| \approx |\lambda_3(\mathbf{u})|$$

cinématique (matière)      acoustiques (pression)

ce qui pénalise le temps de calcul en explicite

- Pas d'*entropie*, donc pas d'analyse de stabilité non-linéaire

# Schéma actuel

## ■ Volume fini décentré

- VFRoe depuis 1996 (Masella, Faille et Gallouët [137])
- Intégration temporelle mixte : implicite par rapport aux ondes acoustiques, explicite par rapport à l'onde cinématique (Faille et Heintzé [123])
- Cette implication **sélective** est une/la réponse adéquate à la co-existence de deux types d'ondes

## ■ Fonctionnement

- Résultats très satisfaisants dans la majorité des cas courants
- Apparition de valeurs propres complexes provoquant l'arrêt d'exécution sur certains cas raides
- Relativement gourmand en temps calcul, à cause des procédures pour les éléments propres des matrices jacobiennes locales

# À la poursuite d'un schéma idéal

## ■ Assurer la positivité

### ■ En explicite

Relaxation à deux paramètres

$\langle 10, 15 \rangle$

Relaxation à un seul paramètre

$\langle 14 \rangle$

### ■ En implicite sélectif

Implication par l'approche

Euler direct  $\langle 11 \rangle$

Implication via le formalisme

Lagrange-projection  $\langle 16, 18 \rangle$

## ■ Accélérer le temps de calcul

### ■ Multi-résolution

Adaptation en espace pour

glissement nul  $\langle 12 \rangle$

Glissement quelconque  $\langle 13 \rangle$

### ■ Pas de temps local

Adaptation espace/temps  $\langle 17 \rangle$

Collaboration Laboratoire J. L. Lions

Équipe de Recherche Technologique

F. Coquel, M. Postel

N. Andrianov, M. Baudin, C. Berthon,

Q. L. Nguyen, N. Poussineau

*V. Martin, F. Daude, A. Fornel, L. Linise*

# À la poursuite d'un schéma idéal

## ■ Assurer la positivité

### ■ En explicite

Relaxation à deux paramètres

⟨10, 15⟩

Relaxation à un seul paramètre

⟨14⟩

### ■ En implicite sélectif

Implication par l'approche

Euler direct ⟨11⟩

Implication via le formalisme

Lagrange-projection ⟨16, 18⟩

## ■ Accélérer le temps de calcul

### ■ Multi-résolution

Adaptation en espace pour

glissement nul ⟨12⟩

Glissement quelconque ⟨13⟩

### ■ Pas de temps local

Adaptation espace/temps ⟨17⟩

Collaboration Laboratoire J. L. Lions

Équipe de Recherche Technologique

F. Coquel, M. Postel

N. Andrianov, M. Baudin, C. Berthon,

Q. L. Nguyen, N. Poussineau

*V. Martin, F. Daude, A. Fornel, L. Linise*

# Relaxation à deux paramètres

## ■ Système de départ

$$\partial_t(\rho) + \partial_x(\rho v) = 0 \quad (4a)$$

$$\partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + P) = \rho S \quad (4b)$$

$$\partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho Y v + \sigma) = 0 \quad (4c)$$

## ■ Système relaxé, pour $\lambda \geq 0$ ,

$$\partial_t(\rho)^\lambda + \partial_x(\rho v)^\lambda = 0 \quad (5a)$$

$$\partial_t(\rho v)^\lambda + \partial_x(\rho v^2 + \Pi)^\lambda = \rho^\lambda S(\mathbf{u}^\lambda) \quad (5b)$$

$$\partial_t(\rho \Pi)^\lambda + \partial_x(\rho \Pi v + a^2 v)^\lambda = \lambda \rho^\lambda [P(\mathbf{u}^\lambda) - \Pi^\lambda] \quad (5c)$$

$$\partial_t(\rho Y)^\lambda + \partial_x(\rho Y v + \Sigma)^\lambda = 0 \quad (5d)$$

$$\partial_t(\rho \Sigma)^\lambda + \partial_x(\rho \Sigma v + b^2 Y)^\lambda = \lambda \rho^\lambda [\sigma(\mathbf{u}^\lambda) - \Sigma^\lambda] \quad (5e)$$

Forme abstraite : 
$$\partial_t \mathbf{U}^\lambda + \partial_x \mathbb{F}(\mathbf{U}^\lambda) = \rho S(\mathbf{U}^\lambda) + \lambda [\mathbf{E} \mathbf{u}^\lambda - \mathbf{U}^\lambda]$$

# Propriétés du système relaxé

## Proposition (Baudin-Berthon-Coquel-Masson-T <10>)

*Le système relaxé (5a)–(5e) est toujours hyperbolique. Ses champs de valeurs propres, tous linéairement dégénérés, sont*

$$v - a\tau, v - b\tau, v, v + b\tau, v + a\tau, \quad (6)$$

avec  $\tau = \rho^{-1}$ .

## Théorème

*Le système relaxé constitue une « bonne » approximation du système de départ au voisinage de  $\lambda \rightarrow +\infty$  sous les conditions sous-caractéristiques*

$$a > \sqrt{-P_\tau(\mathbf{u}) + P_v^2(\mathbf{u})} \quad \text{et} \quad b > |\sigma_Y(\mathbf{u})| \quad (7)$$

Analyse asymptotique linéaire par Chapman-Enskog

# Schéma explicite *in fine*

- Flux de Godunov du système relaxé homogène ( $\lambda = 0$ ) sur l'arête  $i + 1/2$

$$\mathbb{H}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n; (a, b)_{i+1/2}^n) \quad (8)$$

- Flux numérique du système de départ

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{h}_{i+1/2}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathbf{h}_{i-1/2}(\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n)] + \Delta t \rho_i^n \mathbf{s}_i^n \quad (9)$$

avec

$$\mathbf{h}_{i+1/2}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) = \rho \mathbb{H}(\mathbf{E}\mathbf{u}_i^n, \mathbf{E}\mathbf{u}_{i+1}^n; (a, b)_{i+1/2}^n) \quad (10)$$

où

$$\mathbf{E}\mathbf{u} = (\rho, \rho v, \rho P(\mathbf{u}), \rho Y, \rho \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u})) \quad (11)$$

# Positivité au niveau discret

## Théorème (Baudin-Berthon-Coquel-Masson-T <10>)

Si, pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,

$$a_{i+1/2}^n > \frac{v_i^n - v_{i+1}^n + \sqrt{(v_i^n - v_{i+1}^n)^2 + 8 \min(\tau_i^n, \tau_{i+1}^n) |P_i^n - P_{i+1}^n|}}{4 \min(\tau_i^n, \tau_{i+1}^n)} \quad (12a)$$

$$b_{i+1/2}^n > \max\{|(\rho\phi)_i^n|, |(\rho\phi)_{i+1}^n|\} \quad (12b)$$

alors le schéma explicite de relaxation respecte la positivité globale

$$\rho_i^{n+1} > 0 \quad \text{et} \quad Y_i^{n+1} \in [0, 1] \quad (13)$$

sous une valeur inférieure à 1/2 pour la condition CFL.

Toute la démarche peut être transposée au cas du modèle **compositionnel**, avec des résultats de **positivité** analogues et des **gains** CPU notables <15>

# Positivité au niveau discret

## Théorème (Baudin-Berthon-Coquel-Masson-T <10>)

Si, pour tout  $i \in \mathbb{Z}$ ,

$$a_{i+1/2}^n > \frac{v_i^n - v_{i+1}^n + \sqrt{(v_i^n - v_{i+1}^n)^2 + 8 \min(\tau_i^n, \tau_{i+1}^n) |P_i^n - P_{i+1}^n|}}{4 \min(\tau_i^n, \tau_{i+1}^n)} \quad (12a)$$

$$b_{i+1/2}^n > \max\{|(\rho\phi)_i^n|, |(\rho\phi)_{i+1}^n|\} \quad (12b)$$

alors le schéma explicite de relaxation respecte la positivité globale

$$\rho_i^{n+1} > 0 \quad \text{et} \quad Y_i^{n+1} \in [0, 1] \quad (13)$$

sous une valeur inférieure à 1/2 pour la condition CFL.

Toute la démarche peut être transposée au cas du modèle **compositionnel**, avec des résultats de **positivité** analogues et des **gains** CPU notables <15>

## Relaxation à un seul paramètre (Born-Infeld)

- Système de départ, en posant  $q(\mathbf{u}) = \rho\phi(\mathbf{u})$ ,

$$\partial_t(\rho) + \partial_x(\rho v) = 0 \quad (14a)$$

$$\partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + P) = \rho S \quad (14b)$$

$$\partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho Y v + Y(1 - Y)q(\mathbf{u})) = 0 \quad (14c)$$

- Système relaxé

$$\partial_t(\rho)^\lambda + \partial_x(\rho v)^\lambda = 0 \quad (15a)$$

$$\partial_t(\rho v)^\lambda + \partial_x(\rho v^2 + \Pi)^\lambda = \rho^\lambda S(\mathbf{u}^\lambda) \quad (15b)$$

$$\partial_t(\rho \Pi)^\lambda + \partial_x(\rho \Pi v + a^2 v)^\lambda = \lambda \rho^\lambda [P(\mathbf{u}^\lambda) - \Pi^\lambda] \quad (15c)$$

$$\partial_t(\rho Y)^\lambda + \partial_x(\rho Y v + Y(1 - Y)Q)^\lambda = 0 \quad (15d)$$

$$\partial_t(\rho Q)^\lambda + \partial_x(\rho Q v)^\lambda + (Q^\lambda)^2 \partial_x Y^\lambda = \lambda \rho^\lambda [q(\mathbf{u}^\lambda) - Q^\lambda] \quad (15e)$$

# Propriétés du système relaxé

## Proposition (Baudin-Coquel-T <14>)

*Le système relaxé (15a)–(15e) est toujours hyperbolique. Ses champs de valeurs propres, tous linéairement dégénérés, sont*

$$v - a\tau, v + \min(w, z)\tau, v, v + \max(w, z)\tau, v + a\tau, \quad (16)$$

*avec  $w = (1 - Y)q$  et  $z = -Yq$ .*

## Théorème

*Le système relaxé constitue une « bonne » approximation du système de départ au voisinage de  $\lambda \rightarrow +\infty$  sous les conditions sous-caractéristiques*

$$a > \sqrt{-P_\tau(\mathbf{u}) + P_v^2(\mathbf{u})} \quad \text{et} \quad \sigma_Y(\mathbf{u}) \in [w(\mathbf{u}), z(\mathbf{u})] \quad (17)$$

Ainsi qu'un résultat de positivité au niveau discret

# Implicite, un « mal » nécessaire

## ■ Implicite

- Un schéma *explicite*

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{h}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathbf{h}(\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n)] \quad (18)$$

est soumis à la condition de **stabilité**

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \max_{i \in \mathbb{Z}} \max_k |\lambda_k(\mathbf{u}_i^n)| < \text{CFL}. \quad (19)$$

Tout petits pas de temps, régis par la vitesse des ondes acoustiques

- Un schéma *implicite*

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{h}(\mathbf{u}_i^{n+1}, \mathbf{u}_{i+1}^{n+1}) - \mathbf{h}(\mathbf{u}_{i-1}^{n+1}, \mathbf{u}_i^{n+1})] \quad (20)$$

n'est soumis à aucune condition CFL, mais recoupe tous les points du domaine, conduit à un système **coûteux**, et diffuse bien plus !

# Implicite, un « mal » nécessaire

## ■ Implicite linéarisé

- On utilise un développement de Taylor

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{u}_i^{n+1}, \mathbf{u}_{i+1}^{n+1}) &= \mathbf{h}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) \\ &+ \partial_L \mathbf{h}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) \delta \mathbf{u}_i + \partial_R \mathbf{h}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) \delta \mathbf{u}_{i+1} \end{aligned} \quad (21)$$

ce qui revient à faire une itération de Newton

## ■ Implicite linéarisé partiel

- On modifie « astucieusement » les matrices  $\partial_L \mathbf{h}$  et  $\partial_R \mathbf{h}$  (Gallouët [FVCA 1996], Faille et Heintzé [123]) pour rendre certaines composantes explicites et plus précises
- Condition CFL basée sur la vitesse des ondes lentes dignes d'intérêt



Risque de non-positivité

## Implicite sélectif 1.0

Pour mettre en œuvre l'implicite linéarisé partiel, il suffit de savoir dériver le flux numérique par rapport à ses arguments. Possible grâce au

### **Théorème (Baudin-Coquel-T (11))**

*Si  $a > b > 0$  et si  $a$  est « suffisamment grand », alors le flux de Godunov correspondant au problème relaxé homogène peut s'interpréter comme un flux de Roe. En d'autres termes, il existe une matrice de Roe  $\mathcal{A}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$ , de taille  $5 \times 5$  et explicitement calculable, telle que*

$$\mathbb{H}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \frac{1}{2}[\mathbb{F}(\mathbf{U}_L) + \mathbb{F}(\mathbf{U}_R)] - \frac{1}{2}|\mathcal{A}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)|(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \quad (22)$$

# Implicite sélectif 2.0

## ■ Techniques existantes

- Le formalisme ALE (*Arbitrary Lagrange-Euler*), initialement introduit pour traiter les maillages mobiles, décompose chaque pas de temps en deux étapes

$$n \xrightarrow{\text{Lagrange}} n\ddagger \xrightarrow{\text{projection}} n+1$$

- Cette décomposition d'opérateurs constitue un moyen « naturel » pour séparer les ondes

## ■ Comment s'en servir ?

- Implication du bloc acoustique de l'étape Lagrange, explicitation du bloc cinématique de Lagrange et de l'étape projection
- Estimation du plus grand  $\Delta t$  autorisé pour garantir la **positivité**, calée sur une vitesse cinématique et faisant intervenir les conditions aux limites

# Implicite sélectif 2.0

## ■ Techniques existantes

- Le formalisme ALE (*Arbitrary Lagrange-Euler*), initialement introduit pour traiter les maillages mobiles, décompose chaque pas de temps en deux étapes

$$n \xrightarrow{\text{Lagrange}} n\ddagger \xrightarrow{\text{projection}} n+1$$

- Cette décomposition d'opérateurs constitue un moyen « naturel » pour séparer les ondes

## ■ Comment s'en servir ?

- Implication du bloc acoustique de l'étape Lagrange, explicitation du bloc cinématique de Lagrange et de l'étape projection
- Estimation du plus grand  $\Delta t$  autorisé pour garantir la **positivité**, calée sur une vitesse cinématique et faisant intervenir les conditions aux limites

# Décomposition ALE avec les équations

Dans le référentiel mobile  $\chi$  se déplaçant à la vitesse  $v - \mathbf{w}$ , le modèle relaxé s'écrit

$$\partial_t(J) + \partial_\chi(\mathbf{w}) - \partial_\chi(v) = 0 \quad (23a)$$

$$\partial_t(\rho J) + \partial_\chi(\rho \mathbf{w}) = 0 \quad (23b)$$

$$\partial_t(\rho v J) + \partial_\chi(\rho v \mathbf{w}) + \partial_\chi(\Pi) = \rho J S(\mathbf{u}) \quad (23c)$$

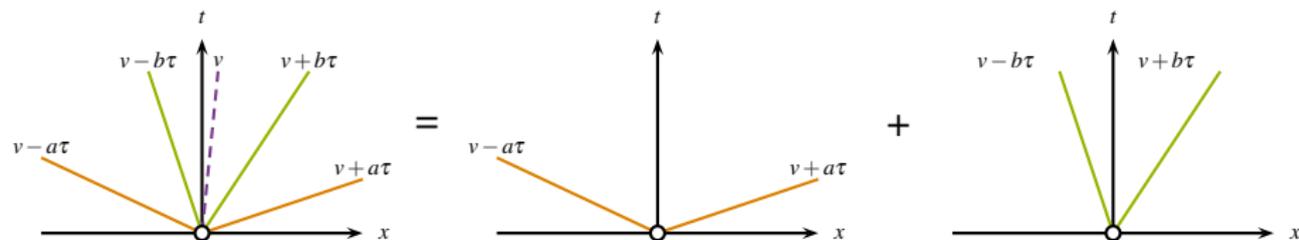
$$\partial_t(\rho \Pi J) + \partial_\chi(\rho \Pi \mathbf{w}) + \partial_\chi(a^2 u) = \lambda \rho J [P(\mathbf{u}) - \Pi] \quad (23d)$$

$$\partial_t(\rho Y J) + \partial_\chi(\rho Y \mathbf{w}) + \partial_\chi(\Sigma) = 0 \quad (23e)$$

$$\partial_t(\rho \Sigma J) + \underbrace{\partial_\chi(\rho \Sigma \mathbf{w})}_{\text{Euler}} + \underbrace{\partial_\chi(b^2 Y)}_{\text{Lagrange}} = \lambda \rho J [\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) - \Sigma] \quad (23f)$$

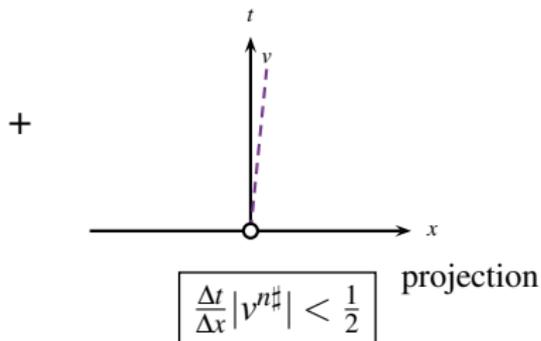
où  $J$  est le taux de déformation

# Décomposition ALE avec les... mains



Lagrange

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} |v^n \pm b\tau^n| < \frac{1}{2}$$



$$\frac{\Delta t}{\Delta x} |v^{n\#}| < \frac{1}{2}$$

projection

# Voyage au bout des calculs

## Théorème (Coquel-Nguyen-Postel-T <16>)

Le schéma résultant de l'enchaînement des deux étapes Lagrange-projection se présente sous forme **conservative**. Il est consistant et **positif** au sens

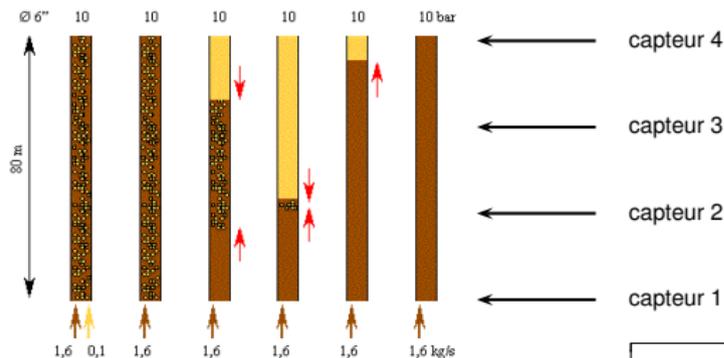
$$\rho_i^{n+1} > 0 \quad \text{et} \quad Y_i^{n+1} \in [0, 1] \quad (24)$$

dès que

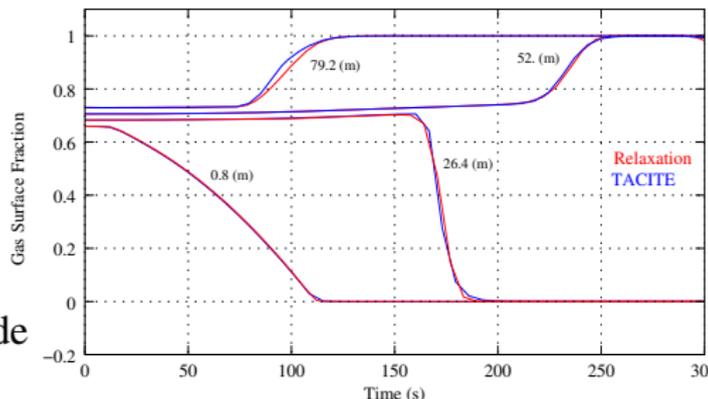
$$\frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{\mathcal{M}(\mathbf{u}^n, CL^n, d_t CL^n)} \quad (25)$$

où la borne  $\mathcal{M}(\mathbf{u}^n, CL^n, d_t CL^n)$  est **explicitement** calculable à l'instant  $n$  et correspond à une vitesse « lente ».

# Simulation typique



- Coupure de gaz à l'amont
- Chute de la colonne liquide
- Pénétration de gaz à l'aval
- Remontée de la colonne liquide



# Adapter le maillage à la solution

Ne raffiner que *là où il faut* et appeler *le moins possible* les modules correspondant aux lois de fermeture

## ■ En espace

- Technique de **Multi-Résolution** (Cohen-Kaber-Müller-Postel [115]) : hiérarchie dyadique de niveaux de grille et une analyse multi-échelle de la régularité
- Prédiction de l'évolution de la grille basée sur vitesse lente dans le cas du schéma implicite sélectif ⟨12, 13⟩

## ■ En espace et en temps

- Technique de **Pas de Temps Local** (Müller et Stiriba [140], Osher et Sanders [141]) : synchronisation à la fin de chaque macro-pas de temps
- Semi-implication ⟨17⟩

# Adapter le maillage à la solution

Ne raffiner que *là où il faut* et appeler *le moins possible* les modules correspondant aux lois de fermeture

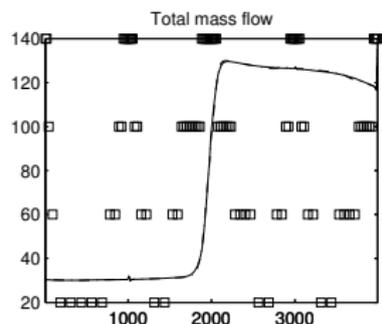
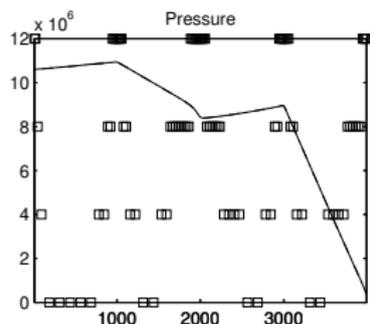
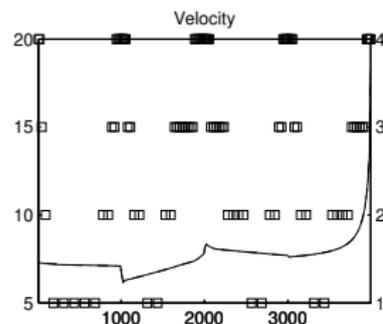
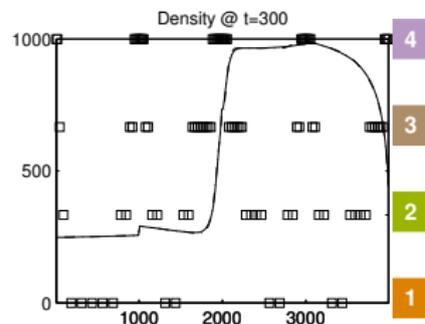
## ■ En espace

- Technique de **Multi-Résolution** (Cohen-Kaber-Müller-Postel [115]) : hiérarchie dyadique de niveaux de grille et une analyse multi-échelle de la régularité
- Prédiction de l'évolution de la grille basée sur vitesse lente dans le cas du schéma implicite sélectif ⟨12, 13⟩

## ■ En espace et en temps

- Technique de **Pas de Temps Local** (Müller et Stiriba [140], Osher et Sanders [141]) : synchronisation à la fin de chaque macro-pas de temps
- Semi-implication ⟨17⟩

# Conduite en W



# Performances

## ■ Rapport Uniforme/Multi-Résolution

$N$ ( $K$ )	Loi Zuber-Findlay		Loi synthétique	
	rCPU	rNbLoi	rCPU	rNbLoi
256 (5)	2.98	2.90	3.17	3.07
512 (6)	4.19	4.64	5.02	4.85
1024 (7)	5.47	6.99	7.48	7.13

## ■ Rapport Multi-Résolution/Pas de Temps Local

$N$ ( $K$ )	Loi Zuber-Findlay		Loi synthétique	
	rCPU	rNbLoi	rCPU	rNbLoi
256 (5)	6.61	11.67	10.41	10.82
512 (6)	7.77	18.79	16.13	17.06
1024 (7)	8.39	29.20	24.58	25.88

# Sommaire

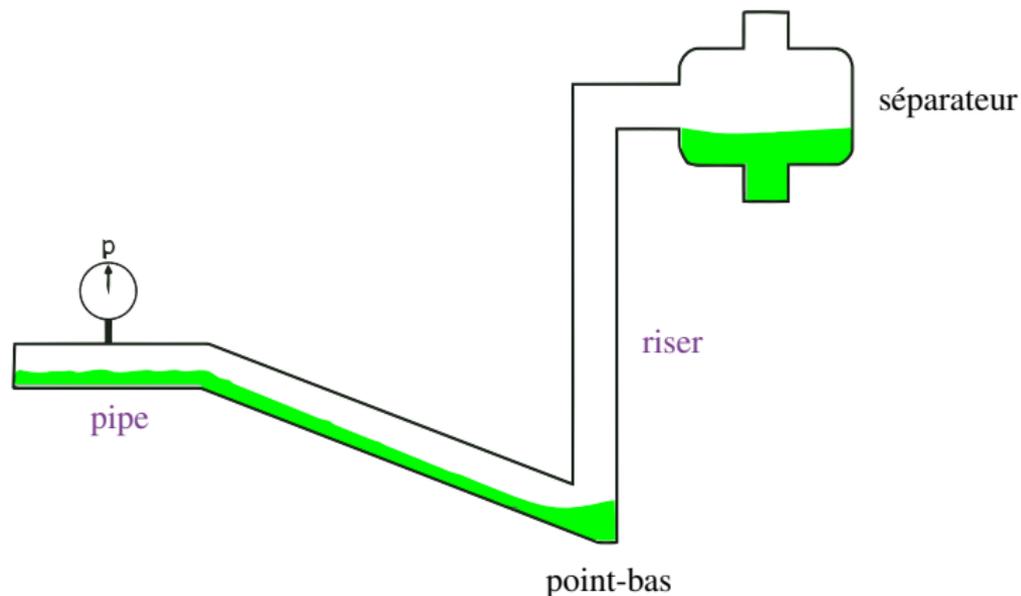
## 1 Simulation des écoulements en conduites par relaxation

## 2 Modélisations alternatives et applications au contrôle

- Moins riche, moins encombrant
- Modèles généralistes
- Modèles dédiés

## 3 Phase convective pour la simulation des moteurs

# Configuration pipe-riser



Sous certaines conditions sur les débits d'entrée, il apparaît une solution *périodique*, appelée **severe slugging**, au lieu d'une solution stationnaire

## Exemple numérique



Simulation du severe-slugging par  
la méthode de relaxation

# Actions contre le severe-slugging

## ■ Prédiction

- Techniques de **simulation** numérique, d'expérimentation sur boucles d'essai pour la confection des *cartes d'écoulement* dans le plan des débits d'entrée
- Analyse du phénomène en tant que système dynamique  $\Rightarrow$  DFM ne s'y prête pas bien

## ■ Élimination

- Dispositifs ingénieux mais empiriques pour éviter la surpression au point-bas
- Techniques de **contrôle** automatique  $\Rightarrow$  la synthèse des *lois de commande* est difficile avec DFM

## ■ Alter-modèles

- Systèmes EDP plus « sobres » qui ignorent les ondes de pression
- Systèmes algèbro-différentiels avec petit nombre de variables

# Actions contre le severe-slugging

## ■ Prédiction

- Techniques de **simulation** numérique, d'expérimentation sur boucles d'essai pour la confection des *cartes d'écoulement* dans le plan des débits d'entrée
- Analyse du phénomène en tant que système dynamique  $\Rightarrow$  DFM ne s'y prête pas bien

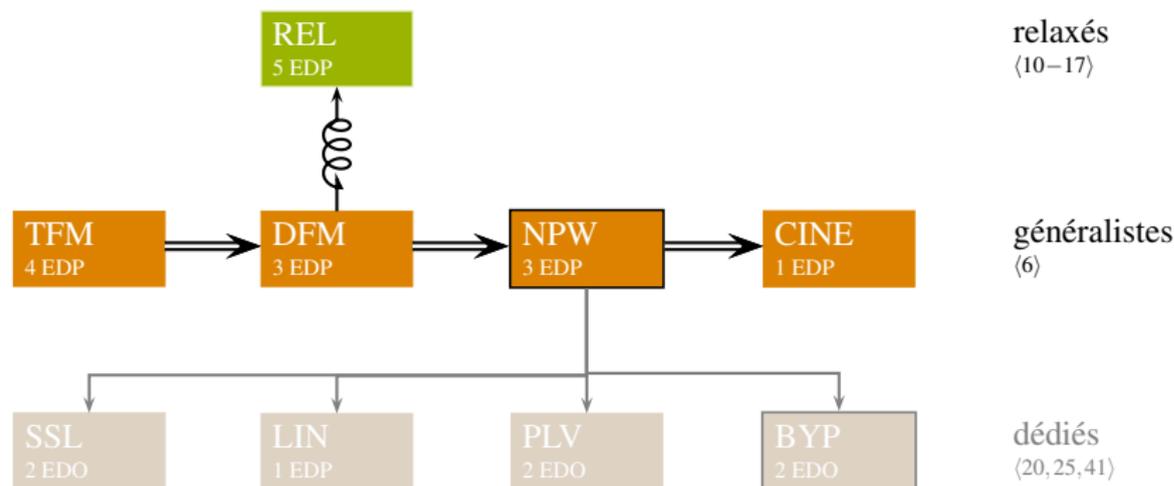
## ■ Élimination

- Dispositifs ingénieux mais empiriques pour éviter la surpression au point-bas
- Techniques de **contrôle** automatique  $\Rightarrow$  la synthèse des *lois de commande* est difficile avec DFM

## ■ Alter-modèles

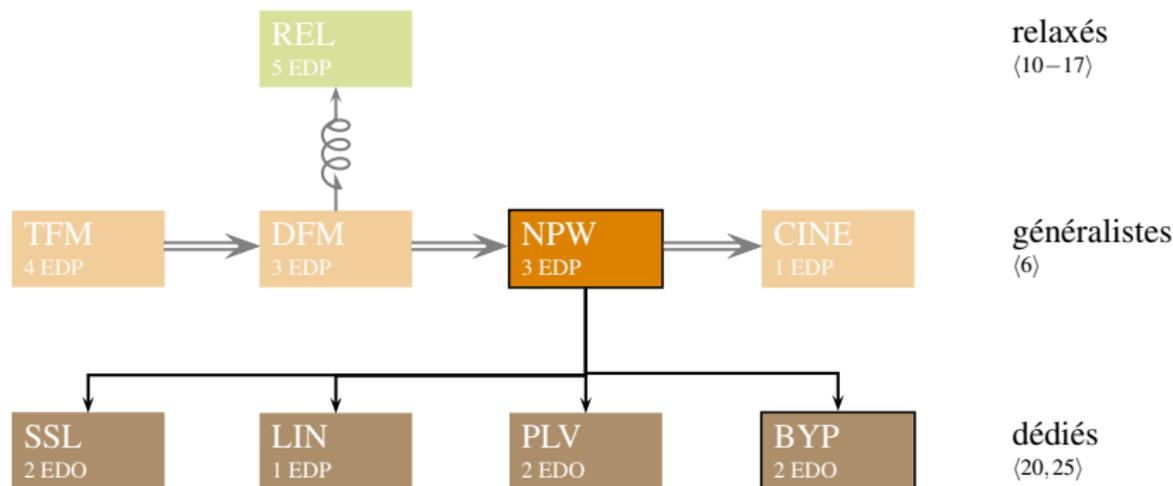
- Systèmes EDP plus « sobres » qui ignorent les ondes de pression
- Systèmes algèbro-différentiels avec petit nombre de variables

# À la recherche de modèles imparfaits



- ⟨6⟩ J. M. Masella, D. Ferré, C. Pauchon,  
A. Bamberger, H. Viviland, S. Patault, I. Faille, F. Willien

# À la recherche de modèles imparfaits



⟨20, 25⟩ E. Zakarian, E. Duret, P. Rouchon, Y. Peysson,  
P. Chossat, L. Domingos, C. Lorret

# DFM (Drift-Flux Model)

## ■ 3 lois de conservation

$$\partial_t(\rho_g R_g) + \partial_x(\rho_g R_g v_g) = 0 \quad (26a)$$

$$\partial_t(\rho_\ell R_\ell) + \partial_x(\rho_\ell R_\ell v_\ell) = 0 \quad (26b)$$

$$\partial_t(\rho_g R_g v_g + \rho_\ell R_\ell v_\ell) + \partial_x(\rho_g R_g v_g^2 + \rho_\ell R_\ell v_\ell^2 + p) = \rho S \quad (26c)$$

## ■ 3 lois de fermeture **thermodynamiques**

$$R_\ell + R_g = 1 \quad (27a)$$

$$\rho_g = \rho_g(p) \quad (27b)$$

$$\rho_\ell = \rho_\ell(p) \quad (27c)$$

## ■ 1 loi de fermeture **hydrodynamique**

$$v_g - v_\ell = \phi(\rho_g R_g, \rho_\ell R_\ell, \rho_g R_g v_g + \rho_\ell R_\ell v_\ell) \quad (28)$$

# NPW (No Pressure Wave)

- 2 lois de conservation, 1 bilan hydrostatatique



$$\partial_t(\rho_g R_g) + \partial_x(\rho_g U_g) = 0 \quad (29a)$$

$$\partial_t(\rho_\ell R_\ell) + \partial_x(\rho_\ell U_\ell) = 0 \quad (29b)$$

$$\partial_x(p) = \rho S \quad (29c)$$

- 3 lois de fermeture **thermodynamiques**

$$R_\ell + R_g = 1 \quad (30a)$$

$$\rho_g = \rho_g(p) \quad (30b)$$

$$\rho_\ell = \rho_\ell(p) \quad (30c)$$

- 1 loi de fermeture **hydrodynamique**

$$U_g = \Psi(R_g, p, U_s) \quad (31)$$

# Propriétés de NPW

## Théorème (Masella-T-Ferré-Pauchon ⟨6⟩)

*Le modèle NPW est de type hyperbolique-parabolique, au sens où il admet*

- *une valeur caractéristique finie*

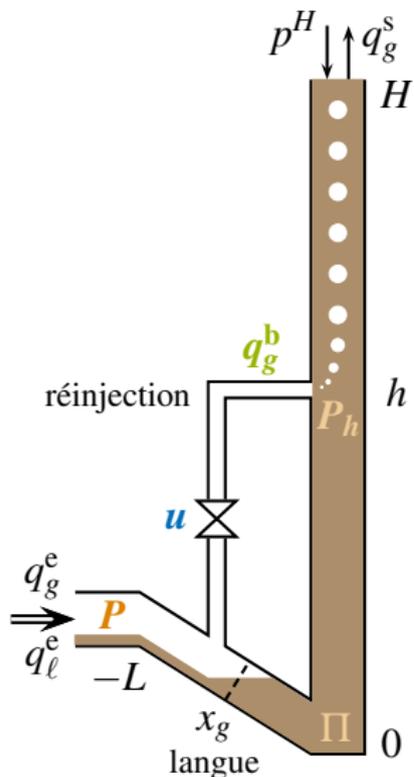
$$\lambda = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial R_g} \right)_{|p, U_s} \quad (32)$$

*vis-à-vis de laquelle il est hyperbolique en temps ;*

- *une valeur caractéristique infinie, double algébriquement, pour laquelle il n'y a en général qu'une seule relation de compatibilité géométrique  $\partial_x p = \rho S$ .*

La valeur propre (32) correspond précisément à l'onde cinématique lente.

# Modèle BYP



$$d_t \mathbf{P}(t) = \alpha [q_g^e - q_g^b(t)] \quad \leftarrow \int_{-L}^{x_g} (29a)$$

$$d_t \Pi(t) = \beta [q_g^b(t) - q_g^s(t)] \quad \leftarrow \int_h^H (29a)$$

$$0 = q_g^s(t) - q_g^b(t - T(h)) \quad \diamond$$

$$0 = \Pi(t) - P(t) + x_g(t) \rho_\ell^0 \mathbf{g} \sin \theta \quad \leftarrow \int_{x_g}^0 (29c)$$

$$0 = P_h(t) - \Pi(t) + h \rho_\ell^0 \mathbf{g} \quad \leftarrow \int_0^h (29c)$$

$$q_g^b(t) = \gamma u(t) \sqrt{P_h(t) [P(t) - P_h(t)]^+}$$

$$u(t) \in [0, 1]$$

$$\alpha = \frac{a_g^2}{L}, \quad \beta = \mathbf{g} \left( 1 - \frac{a_g^2 \rho_\ell^0}{p^H} \right), \quad T(h) = \frac{H-h}{v_\infty}$$

# Stratégie de contrôle

- Observation de deux dynamiques :  $\Pi$  est plus rapide que  $P$

$$\beta \approx 20\alpha \gg \alpha \quad (34)$$

- À partir des mesures de  $(P, \Pi)$ , commande à **double échelle**

$$q_g^b(t) = \frac{K_P}{\alpha} [P(t) - P^\bullet(t)] \quad \text{proportionnel} \quad (35a)$$

$$d_t P^\bullet(t) = K_I [\Delta(t) - \Delta^\bullet] \quad \text{intégral} \quad (35b)$$

avec

$$\Delta(t) = \Pi(t) - P(t) = x_g(t) \rho_\ell^0 g \sin \theta, \quad \Delta^\bullet = x_g^\bullet \rho_\ell^0 g \sin \theta \quad (36)$$

- La commande proportionnelle *rapide* sert à stabiliser tout de suite l'écoulement, tandis que la commande intégrale *lente* sert à faire converger la position  $x_g(t)$  vers  $x_g^\bullet$

# Stabilité en boucle fermée

## Théorème (Duret-T-Peysson-Rouchon <25>)

Une condition suffisante pour que la commande proposée soit stable est que

$$K_I < \frac{\alpha}{\beta T(h)} \quad (37)$$

Ce résultat repose sur l'étude d'un système différentiel à **retard** de la forme

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_P & -K_I \\ K_P(1 - \frac{\beta}{\alpha}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \eta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\alpha} K_P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t - T(h)) \\ \eta(t - T(h)) \end{bmatrix} \quad (38)$$

pour lequel on peut exhiber une fonction de **Lyapunov** sous la condition indiquée

# Maquette S4L, sans contrôleur



Apparition du severe-slugging  
en boucle ouverte

# Maquette S4L, avec contrôleur



Disparition du severe-slugging  
en boucle fermée

# Sommaire

- 1 Simulation des écoulements en conduites par relaxation**
- 2 Modélisations alternatives et applications au contrôle**
- 3 Phase convective pour la simulation des moteurs**
  - Pour un schéma multidimensionnel
  - Advection par Iserles-Roe modifié
  - Intégration dans ALE

# De KIVA à IFP-C3D

- Maillage
  - Non-structuré (hexaèdres et tétraèdres) pour s'adapter à la géométrie du moteur
  - Mobile et très déformé à cause du déplacement imposé par le piston
- Schéma
  - Formalisme ALE pour prendre en compte la mobilité
  - Dissipation numérique trop **importante** de DONOR dans la phase advective



Injection directe dans un  
moteur à essence

© Département Modélisation et Simulation Véhicules

# Aux confins du multi-dimensionnel

- Améliorer la précision sous la seule contrainte de la monotonie
  - Comparaison des schémas existant pour l'advection comme fin en soi
  - Conception du schéma d'Iserles-Roe modifié en 2-D  $\langle 8 \rangle$
- Intégrer dans IFP-C3D pour les variables aux nœuds
  - Passage en 3-D et réparation de masse  $\langle 19 \rangle$
- Advection simultanée de plusieurs scalaires
  - Limiteurs de pentes pour assurer principe du min-max sur variables principales et variables de contrôle  $\langle 18 \rangle$

## Collaboration CEA-IFP

B. Scheurer

*A. Torres, M. Zolver, A. Benkenida,  
J. Bohbot, N. Gillet, A. Michel*

# Aux confins du multi-dimensionnel

- Améliorer la précision sous la seule contrainte de la monotonie
  - Comparaison des schémas existant pour l'advection comme fin en soi
  - Conception du schéma d'Iserles-Roe modifié en 2-D  $\langle 8 \rangle$
- Intégrer dans IFP-C3D pour les variables aux nœuds
  - Passage en 3-D et réparation de masse  $\langle 19 \rangle$
- Advection simultanée de plusieurs scalaires
  - Limiteurs de pentes pour assurer principe du min-max sur variables principales et variables de contrôle  $\langle 18 \rangle$

## Collaboration CEA-IFP

B. Scheurer

*A. Torres, M. Zolver, A. Benkenida,  
J. Bohbot, N. Gillet, A. Michel*

## Schéma d'Iserles-Roe en 1-D

Pour discrétiser

$$\partial_t \Psi + u \partial_x \Psi = 0, \quad u > 0, \quad (39)$$

on considère les schémas

- I1 (Iserles [130])

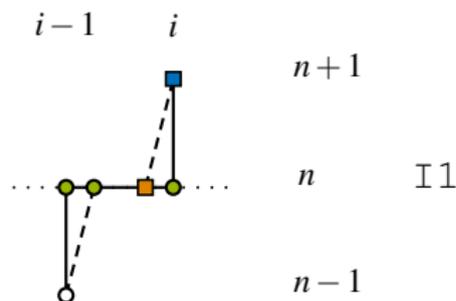
$$\Psi_i^{n+1} = \Psi_i^{n-1} + (1 - 2\lambda)(\Psi_i^n - \Psi_{i-1}^n) \quad (40)$$

- I2 (Roe [146])

$$\begin{aligned} \Psi_i^{n+1} &= \Psi_i^{n-2} + 2(1 - 3\lambda)(\Psi_i^n - \Psi_{i-1}^{n-1}) \\ &\quad + \frac{(1 - 3\lambda)(1 - 2\lambda)}{1 + \lambda}(\Psi_{i-1}^n - \Psi_i^{n-1}) \end{aligned} \quad (41)$$

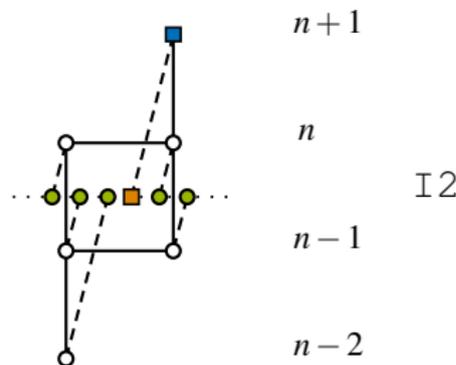
qui sont **non-dissipatifs**, avec  $\lambda = \frac{u\Delta t}{\Delta x} \in [0, 1]$

# Précis au départ



Interpolation *quadratique*,  
équivalente à

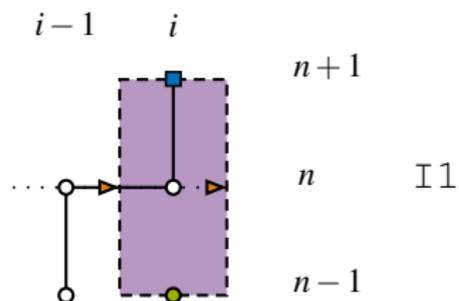
$$\begin{aligned} \partial_t \Psi + u \partial_x \Psi \\ = \frac{u \Delta x^2}{12} (1 - 2\lambda)(1 - \lambda) \partial_{xxx} \Psi \end{aligned}$$



Interpolation *quartique*,  
équivalente à

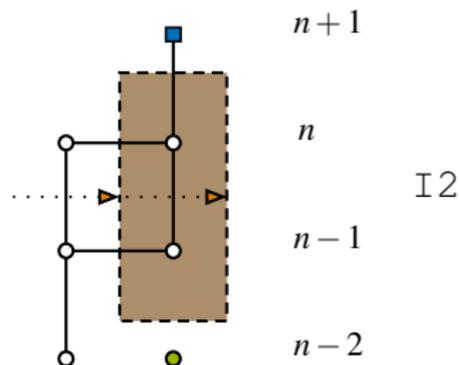
$$\begin{aligned} \partial_t \Psi + u \partial_x \Psi \\ = \frac{u \Delta x^4}{720} \lambda (1 - \lambda^2)(1 - 2\lambda)(1 - 3\lambda) \partial_{xxxxx} \Psi \end{aligned}$$

# Conservatifs en passant



Bilan intégral au sens des volumes-finis sur

$$[i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}] \times [n - 1, n + 1]$$

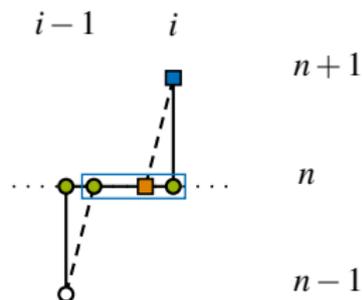


Bilan intégral au sens des volumes-finis sur

$$[i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}] \times [n - \frac{1}{2} - \kappa, n - \frac{1}{2} + \kappa]$$

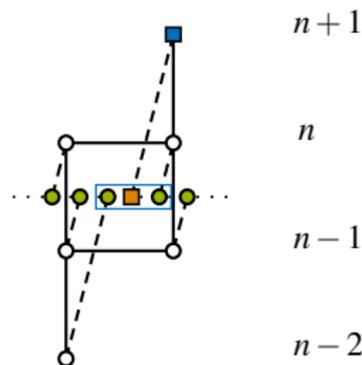
avec  $\kappa = \frac{6\lambda}{1 + \lambda}$ .

# Monotones à l'arrivée



I1

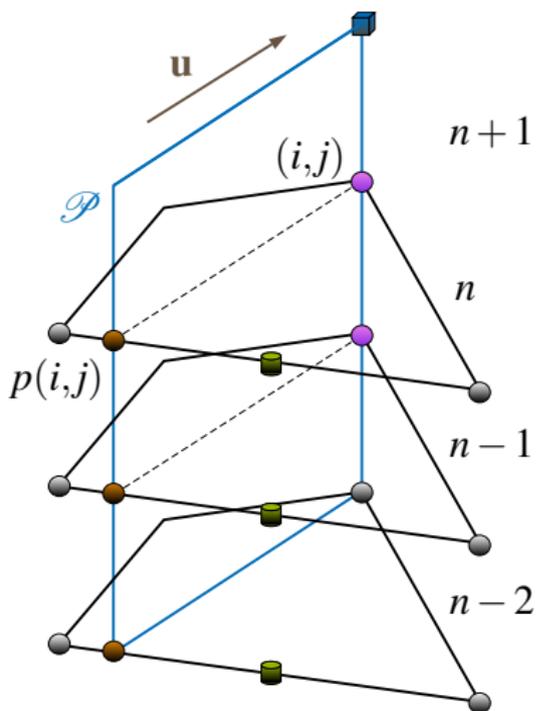
$$\widehat{\Psi}_i^{n+1} := \begin{cases} \Pi_{[\Psi_{i-1}^{n-1}, \Psi_i^n]}(\Psi_i^{n+1}) & \text{si } 0 < \lambda < \frac{1}{2} \\ \Pi_{[\Psi_{i-1}^n, \Psi_{i-1}^{n-1}]}(\Psi_i^{n+1}) & \text{si } \frac{1}{2} < \lambda < 1 \end{cases}$$



I2

$$\widehat{\Psi}_i^{n+1} := \begin{cases} \Pi_{[\Psi_{i-1}^{n-2}, \Psi_i^n]}(\Psi_i^{n+1}) & \text{si } 0 < \lambda < \frac{1}{3} \\ \Pi_{[\Psi_{i-1}^{n-1}, \Psi_{i-1}^{n-2}]}(\Psi_i^{n+1}) & \text{si } \frac{1}{3} < \lambda < \frac{1}{2} \end{cases}$$

# Multi-D = 1-D !



Le long d'une **ligne de courant**, l'équation d'advection multi-D

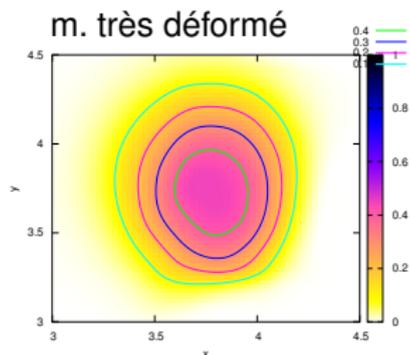
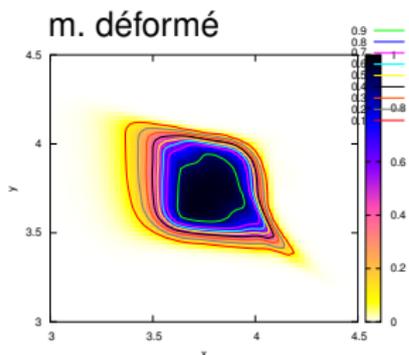
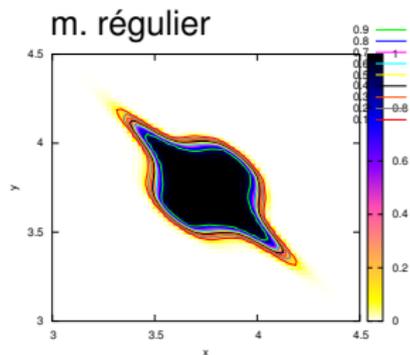
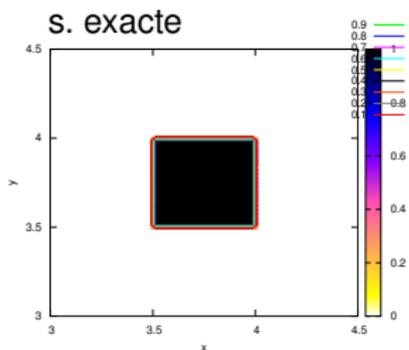
$$\partial_t \Psi + \mathbf{u} \cdot \nabla \Psi = 0$$

prend la forme 1-D

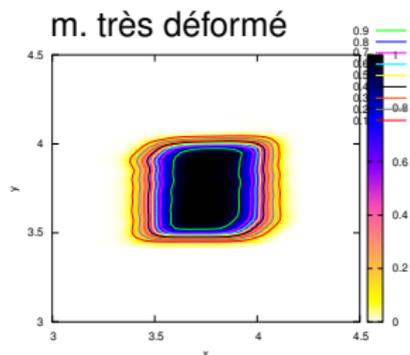
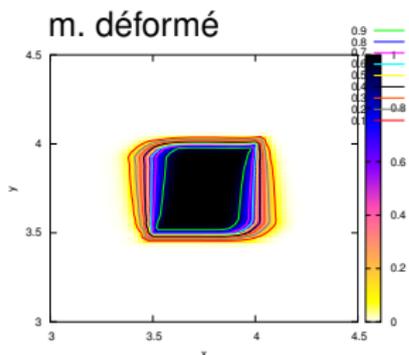
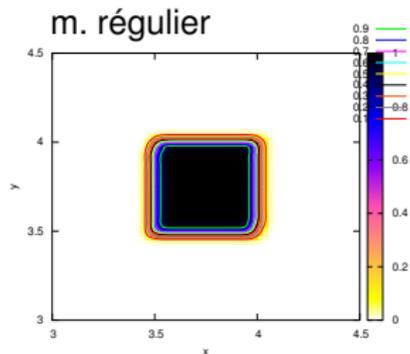
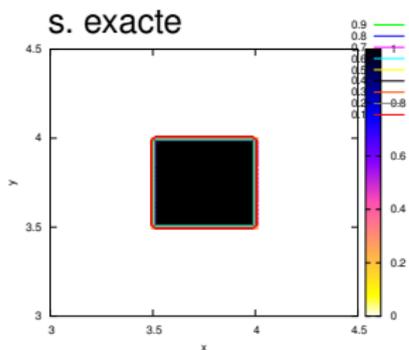
$$\partial_t \Psi + \|\mathbf{u}\| \partial_s \Psi = 0.$$

La **compacité** spatiale des *stencils* de  $\mathbb{I}1$  et  $\mathbb{I}2$  permet une transposition « facile ».

# Transport avec DONOR reconstruit



# Transport avec Iserles-Roe modifié



# Développements ultérieurs

- On continue à « jouer »
  - Généraliser le schéma Iserles-Roe modifié au cas d'un champ de vitesse variable en espace et en temps
  - Étendre la méthode au cas 3-D, les points auxiliaires étant toujours placés au milieu des arêtes
- On ne « joue » plus
  - Transporter la variable vitesse  $\mathbf{v}$ , qui est localisée aux nœuds du maillage, par la forme advective

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbb{J}^{-1} \mathbf{w}) \cdot \mathbf{grad}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = 0 \quad (42)$$

- Appliquer éventuellement la procédure de réparation de la masse (Shashkov et Wendroff [148]) pour conserver le produit  $\rho \mathbf{v}$

# Conclusion

- Relaxation et adaptation dynamique pour TACITE
  - Contrôle de la **positivité** pour un schéma à grand pas de temps, à l'ordre 1 ou 2 en espace, en présence de conditions aux limites
  - Maîtrise des outils d'adaptation dynamique
- Modélisation TACITE et contrôle du severe-slugging
  - NPW cohabite mieux avec la fermeture hydrodynamique que DFM et donne naissance à des modèles dédiés plus **opérationnels**
  - Il n'est point besoin d'un modèle précis pour concevoir une commande efficace
- Advection multi-dimensionnelle dans IFP-C3D
  - Transposition d'un schéma 1-D performant pour les variables aux nœuds, en maillage **quelconque**
  - Il est des situations où la conservativité n'est plus un « dogme »

# Sommaire

**4** Relaxation

**5** Modélisation

**6** Advection

**7** Private jokes

# En coordonnées lagrangiennes

## ■ Système de départ

$$\partial_t \tau - \partial_m v = 0 \quad (43a)$$

$$\partial_t v + \partial_m P = S \quad (43b)$$

$$\partial_t Y + \partial_m \sigma = 0 \quad (43c)$$

avec  $\tau = \rho^{-1}$  et  $dm = \rho dx - \rho v dt$

## ■ Système relaxé

$$\partial_t \tau^\lambda - \partial_m v^\lambda = 0 \quad (44a)$$

$$\partial_t v^\lambda + \partial_m \Pi^\lambda = S(\mathbf{v}^\lambda) \quad (44b)$$

$$\partial_t \Pi^\lambda + \partial_m a^2 v^\lambda = \lambda [P(\mathbf{v}^\lambda) - \Pi^\lambda] \quad (44c)$$

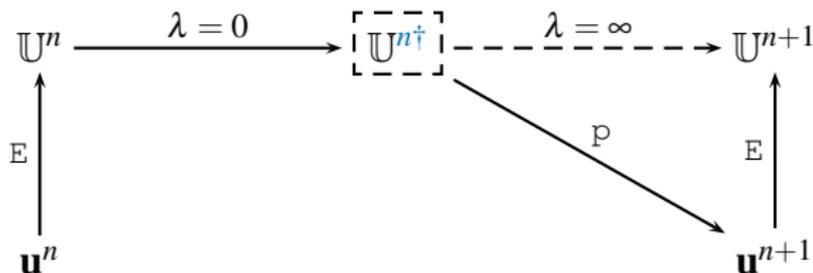
$$\partial_t Y^\lambda + \partial_m \Sigma^\lambda = 0 \quad (44d)$$

$$\partial_t \Sigma^\lambda + \partial_m b^2 Y^\lambda = \lambda [\sigma(\mathbf{v}^\lambda) - \Sigma^\lambda] \quad (44e)$$

où  $\mathbf{v} = (\tau, v, Y)$

# Schéma explicite

- De l'instant  $n$  à l'instant  $n + 1$



avec

$$\mathbf{u}^n = \rho^n(1, v^n, Y^n) \quad (45a)$$

$$\mathbb{U}^n = \rho^n(1, v^n, \mathbf{P}(\mathbf{u}^n), Y^n, \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}^n)) \quad (45b)$$

$$\mathbb{U}^{n\dagger} = \rho^{n+1}(1, v^{n+1}, \Pi^{n\dagger}, Y^{n+1}, \Sigma^{n\dagger}) \quad (45c)$$

$$\mathbf{u}^{n+1} = \rho^{n+1}(1, v^{n+1}, Y^{n+1}) \quad (45d)$$

# Généralisation au modèle compositionnel

- Système de départ,  $k \in \{1, 2, \dots, K-1\}$

$$\partial_t(\rho) + \partial_x(\rho v) = 0 \quad (46a)$$

$$\partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + P) = \rho S \quad (46b)$$

$$\partial_t(\rho c_k) + \partial_x(\rho c_k v + \sigma_k) = 0 \quad (46c)$$

avec  $\sigma_k = (\xi_k - \eta_k) \rho Y(1 - Y)\phi$

- Système relaxé

$$\partial_t(\rho) + \partial_x(\rho v) = 0 \quad (47a)$$

$$\partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + \Pi) = \rho S \quad (47b)$$

$$\partial_t(\rho \Pi) + \partial_x(\rho \Pi v + a^2 v) = \lambda \rho [P(\mathbf{u}) - \Pi] \quad (47c)$$

$$\partial_t(\rho c_k) + \partial_x(\rho c_k v + \Sigma_k) = 0, \quad (47d)$$

$$\partial_t(\rho \Sigma_k) + \partial_x(\rho \Sigma_k v + b^2 c_k) = \lambda \rho [\sigma_k(\mathbf{u}) - \Sigma_k] \quad (47e)$$

On utilise le même  $b$  pour tous les constituants  $k \in \{1, 2, \dots, K-1\}$ .

# Généralisation au modèle compositionnel

- Système de départ,  $k \in \{1, 2, \dots, K-1\}$

$$\partial_t(\rho) + \partial_x(\rho v) = 0 \quad (46a)$$

$$\partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + P) = \rho S \quad (46b)$$

$$\partial_t(\rho c_k) + \partial_x(\rho c_k v + \sigma_k) = 0 \quad (46c)$$

avec  $\sigma_k = (\xi_k - \eta_k) \rho Y(1 - Y)\phi$

- Système relaxé

$$\partial_t(\rho) + \partial_x(\rho v) = 0 \quad (47a)$$

$$\partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + \Pi) = \rho S \quad (47b)$$

$$\partial_t(\rho \Pi) + \partial_x(\rho \Pi v + a^2 v) = \lambda \rho [P(\mathbf{u}) - \Pi] \quad (47c)$$

$$\partial_t(\rho c_k) + \partial_x(\rho c_k v + \Sigma_k) = 0, \quad (47d)$$

$$\partial_t(\rho \Sigma_k) + \partial_x(\rho \Sigma_k v + b^2 c_k) = \lambda \rho [\sigma_k(\mathbf{u}) - \Sigma_k] \quad (47e)$$

On utilise le même  $b$  pour tous les constituants  $k \in \{1, 2, \dots, K-1\}$ .

# Réglage des paramètres en compositionnel

- Condition *sous-caractéristique* de Whitham

$$a > \sqrt{-P_\tau(\mathbf{u}) + P_v^2(\mathbf{u})} \quad \text{et} \quad b > \max_{1 \leq k \leq K-1} |(\sigma_k)_{c_k}|(\mathbf{u}) \quad (48)$$

pour la **stabilité linéaire** asymptotique

- Théorème (Baudin-Coquel-T <15>) garantissant la **positivité globale**

$$\rho_i^{n+1} > 0 \quad \text{et} \quad (c_k)_i^{n+1} \in [0, 1] \quad (49)$$

pour  $k \in \{1, 2, \dots, K-1, K\}$  si CFL  $\leq 1/2$  en explicite et

$$a_{i+1/2}^n > \frac{v_i^n - v_{i+1}^n + \sqrt{(v_i^n - v_{i+1}^n)^2 + 8 \min(\tau_i^n, \tau_{i+1}^n) |P_i^n - P_{i+1}^n|}}{4 \min(\tau_i^n, \tau_{i+1}^n)} \quad (50a)$$

$$b_{i+1/2}^n > \max\{ |(\rho\phi)_i^n|, |(\rho\phi)_{i+1}^n| \} \quad (50b)$$

# Réglage des paramètres en compositionnel

- Condition *sous-caractéristique* de Whitham

$$a > \sqrt{-P_\tau(\mathbf{u}) + P_v^2(\mathbf{u})} \quad \text{et} \quad b > \max_{1 \leq k \leq K-1} |(\sigma_k)_{c_k}|(\mathbf{u}) \quad (48)$$

pour la **stabilité linéaire** asymptotique

- Théorème (Baudin-Coquel-T <15>) garantissant la **positivité globale**

$$\rho_i^{n+1} > 0 \quad \text{et} \quad (c_k)_i^{n+1} \in [0, 1] \quad (49)$$

pour  $k \in \{1, 2, \dots, K-1, K\}$  si CFL  $\leq 1/2$  en explicite et

$$a_{i+1/2}^n > \frac{v_i^n - v_{i+1}^n + \sqrt{(v_i^n - v_{i+1}^n)^2 + 8 \min(\tau_i^n, \tau_{i+1}^n) |P_i^n - P_{i+1}^n|}}{4 \min(\tau_i^n, \tau_{i+1}^n)} \quad (50a)$$

$$b_{i+1/2}^n > \max\{ |(\rho\phi)_i^n|, |(\rho\phi)_{i+1}^n| \} \quad (50b)$$

# En coordonnées lagrangiennes

## ■ Équation de départ

$$\partial_t Y + \partial_m \sigma = \partial_t Y + \partial_m Y(1 - Y)q = 0 \quad (51)$$

## ■ Relaxation avec paramètre (Jin-Xin [131])

$$\partial_t Y^\lambda + \partial_m \Sigma^\lambda = 0 \quad (52a)$$

$$\partial_t \Sigma^\lambda + \partial_m b^2 Y^\lambda = \lambda[\sigma - \Sigma^\lambda] \quad (52b)$$

## ■ Relaxation sans paramètre (Baudin-Coquel-T [14])

$$\partial_t Y^\lambda + \partial_m Y^\lambda(1 - Y^\lambda)Q^\lambda = 0 \quad (53a)$$

$$\partial_t Q^\lambda + (Q^\lambda)^2 \partial_m Y^\lambda = \lambda[q - Q^\lambda] \quad (53b)$$

# Variables caractéristiques

## ■ Jin-Xin

$$\partial_t(\Sigma + bY)^\lambda + b\partial_m(\Sigma + bY)^\lambda = \lambda[\sigma - \Sigma^\lambda] \quad (54a)$$

$$\partial_t(\Sigma - bY)^\lambda - b\partial_m(\Sigma - bY)^\lambda = \lambda[\sigma - \Sigma^\lambda] \quad (54b)$$

## ■ Born-Infeld

$$\partial_t W^\lambda + Z^\lambda \partial_m W^\lambda = \lambda[\mathbf{w} - W^\lambda] \quad (55a)$$

$$\partial_t Z^\lambda + W^\lambda \partial_m Z^\lambda = \lambda[\mathbf{z} - Z^\lambda] \quad (55b)$$

où les variables

$$W = (1 - Y)Q \quad \mathbf{w} = (1 - Y)\mathbf{q} \quad (56a)$$

$$Z = -YQ \quad \mathbf{z} = -Y\mathbf{q} \quad (56b)$$

représentent des vitesses de phase, car

$$\partial_t Y + \partial_m(Y\mathbf{w}) = \partial_t(1 - Y) + \partial_m((1 - Y)\mathbf{z}) = 0 \quad (57)$$

# Stabilité et positivité

- Condition *sous-caractéristique* de Whitham

$$a > \sqrt{-P_\tau(\mathbf{u}) + P_v^2(\mathbf{u})} \quad \text{et} \quad \sigma_Y(\mathbf{u}) \in [w(\mathbf{u}), z(\mathbf{u})] \quad (58)$$

à comparer avec  $\sigma_Y(\mathbf{u}) \in [-b, b]$ . Seule une **classe** de lois de fermeture hydro est éligible pour la relaxation de Born-Infeld.

- Théorème (Baudin-Coquel-T (14)) garantissant la *positivité globale*

$$\rho_i^{n+1} > 0 \quad \text{et} \quad Y_i^{n+1} \in [0, 1] \quad (59)$$

pour **toute** loi de fermeture hydro si  $\text{CFL} \leq 1/2$  en explicite et

$$a_{i+1/2}^n > \frac{v_i^n - v_{i+1}^n + \sqrt{(v_i^n - v_{i+1}^n)^2 + 8 \min(\tau_i^n, \tau_{i+1}^n) |P_i^n - P_{i+1}^n|}}{4 \min(\tau_i^n, \tau_{i+1}^n)} \quad (60)$$

# Stabilité et positivité

- Condition *sous-caractéristique* de Whitham

$$a > \sqrt{-P_\tau(\mathbf{u}) + P_v^2(\mathbf{u})} \quad \text{et} \quad \sigma_Y(\mathbf{u}) \in [w(\mathbf{u}), z(\mathbf{u})] \quad (58)$$

à comparer avec  $\sigma_Y(\mathbf{u}) \in [-b, b]$ . Seule une **classe** de lois de fermeture hydro est éligible pour la relaxation de Born-Infeld.

- Théorème (Baudin-Coquel-T (14)) garantissant la *positivité globale*

$$\rho_i^{n+1} > 0 \quad \text{et} \quad Y_i^{n+1} \in [0, 1] \quad (59)$$

pour **toute** loi de fermeture hydro si  $\text{CFL} \leq 1/2$  en explicite et

$$a_{i+1/2}^n > \frac{v_i^n - v_{i+1}^n + \sqrt{(v_i^n - v_{i+1}^n)^2 + 8 \min(\tau_i^n, \tau_{i+1}^n) |P_i^n - P_{i+1}^n|}}{4 \min(\tau_i^n, \tau_{i+1}^n)} \quad (60)$$

# Schéma implicite

Le schéma explicite

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbb{P}\mathbb{H}(\mathbf{E}\mathbf{u}_i^n, \mathbf{E}\mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathbb{P}\mathbb{H}(\mathbf{E}\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{E}\mathbf{u}_i^n)] + \Delta t \rho_i^n \mathbf{s}_i^n \quad (61)$$

s'implicite en

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbb{P}\mathbb{H}(\mathbf{E}\mathbf{u}_i^{n+1}, \mathbf{E}\mathbf{u}_{i+1}^{n+1}) - \mathbb{P}\mathbb{H}(\mathbf{E}\mathbf{u}_{i-1}^{n+1}, \mathbf{E}\mathbf{u}_i^{n+1})] + \Delta t \rho_i^{n+1} \mathbf{s}_i^{n+1} \quad (62)$$

c'est-à-dire, en posant  $\mathbb{U} = \mathbf{E}\mathbf{u}$ ,

$$\mathbb{P}\mathbb{U}_i^{n+1} = \mathbb{P} \left\{ \mathbb{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbb{H}(\mathbb{U}_i^{n+1}, \mathbb{U}_{i+1}^{n+1}) - \mathbb{H}(\mathbb{U}_{i-1}^{n+1}, \mathbb{U}_i^{n+1})] + \Delta t \rho_i^{n+1} \mathbb{S}_i^{n+1} \right\}$$

$$\mathbb{\Pi}_i^{n+1} = P(\mathbb{P}\mathbb{U}_i^{n+1})$$

$$\mathbb{\Sigma}_i^{n+1} = \sigma(\mathbb{P}\mathbb{U}_i^{n+1})$$

# Interprétation comme flux de Roe

## Théorème (Baudin-Coquel-T (11))

Si  $a > b > 0$  et si  $a$  est « suffisamment grand », alors il existe une matrice de Roe  $\mathcal{A}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)$ , de taille  $5 \times 5$  et explicitement calculable, telle que le flux de Godunov correspondant au problème relaxé homogène s'écrit

$$\mathbb{H}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) = \frac{1}{2}[\mathbb{F}(\mathbf{U}_L) + \mathbb{F}(\mathbf{U}_R)] - \frac{1}{2}|\mathcal{A}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)|(\mathbf{U}_R - \mathbf{U}_L) \quad (63)$$

Conséquence pratique

$$\partial_L \mathbb{H}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) \approx \frac{1}{2}[\nabla \mathbb{F}(\mathbf{U}_L) + |\mathcal{A}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)|] \quad (64a)$$

$$\partial_R \mathbb{H}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R) \approx \frac{1}{2}[\nabla \mathbb{F}(\mathbf{U}_R) - |\mathcal{A}(\mathbf{U}_L, \mathbf{U}_R)|] \quad (64b)$$

# Modification semi-implicite

- Schéma linéairement implicite

$$\mathbb{H}(\mathbf{U}_i^{n+1}, \mathbf{U}_{i+1}^{n+1}) = \mathbb{H}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n) + \partial_L \mathbb{H}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n) \delta \mathbf{U}_i + \partial_R \mathbb{H}(\mathbf{U}_i^n, \mathbf{U}_{i+1}^n) \delta \mathbf{U}_{i+1}$$

- Au lieu de

$$\partial_L \mathbb{H}(\mathbf{U}_L^n, \mathbf{U}_R^n) \approx \frac{1}{2} [\nabla \mathbb{F}(\mathbf{U}_L^n) + |\mathcal{A}(\mathbf{U}_L^n, \mathbf{U}_R^n)|] \quad (65a)$$

$$\partial_R \mathbb{H}(\mathbf{U}_L^n, \mathbf{U}_R^n) \approx \frac{1}{2} [\nabla \mathbb{F}(\mathbf{U}_R^n) - |\mathcal{A}(\mathbf{U}_L^n, \mathbf{U}_R^n)|] \quad (65b)$$

on utilise

$$\partial_L \mathbb{H}(\mathbf{U}_L^n, \mathbf{U}_R^n) \approx \frac{1}{2} [\tilde{\nabla} \mathbb{F}(\mathbf{U}_L^n) + |\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{U}_L^n, \mathbf{U}_R^n)|] \quad (66a)$$

$$\partial_R \mathbb{H}(\mathbf{U}_L^n, \mathbf{U}_R^n) \approx \frac{1}{2} [\tilde{\nabla} \mathbb{F}(\mathbf{U}_R^n) - |\tilde{\mathcal{A}}(\mathbf{U}_L^n, \mathbf{U}_R^n)|] \quad (66b)$$

- L'opération  $\tilde{\cdot}$  consiste à annuler les composantes *lentes* d'une matrice

$$M = L \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5) R \Rightarrow \tilde{M} = L \text{Diag}(\lambda_1, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{0}, \lambda_5) R$$

# Phase Lagrange

$$\partial_t(J) - \partial_\chi(v) = 0 \quad (67a)$$

$$\partial_t(\rho J) = 0 \quad (67b)$$

$$\partial_t(\rho v J) + \partial_\chi(\Pi) = \rho J S \quad (67c)$$

$$\partial_t(\rho \Pi J) + \partial_\chi(a^2 u) = \lambda \rho J [P - \Pi] \quad (67d)$$

$$\partial_t(\rho Y J) + \partial_\chi(\Sigma) = 0 \quad (67e)$$

$$\partial_t(\rho \Sigma J) + \partial_\chi(b^2 Y) = \lambda \rho J [\sigma - \Sigma] \quad (67f)$$

discretisation

$$\rho_i^n \frac{\tau_i^{n\sharp} - \tau_i^n}{\Delta t} - \frac{v_{i+1/2}^{n\sharp} - v_{i-1/2}^{n\sharp}}{\Delta x} = 0 \quad (68a)$$

$$\rho_i^n \frac{v_i^{n\sharp} - v_i^n}{\Delta t} + \frac{\Pi_{i+1/2}^{n\sharp} - \Pi_{i-1/2}^{n\sharp}}{\Delta x} = \rho_i^n S_i^{n\sharp} \quad (68b)$$

$$\rho_i^n \frac{Y_i^{n\sharp} - Y_i^n}{\Delta t} + \frac{\Sigma_{i+1/2}^{n\sharp} - \Sigma_{i-1/2}^{n\sharp}}{\Delta x} = 0 \quad (68c)$$

# Phase Euler (projection)

Forme conservative, avec  $w = v$ ,

$$\partial_t(J) + \partial_\chi(\mathbf{v}) = 0 \quad (69a)$$

$$\partial_t(\mathbb{U}J) + \partial_\chi(\mathbb{U}\mathbf{v}) = 0 \quad (69b)$$

discrétiser

$$\frac{J_i^{n+1} - J_i^{n\sharp}}{\Delta t} + \frac{v_{i+1/2}^{n\sharp} - v_{i-1/2}^{n\sharp}}{\Delta x} = 0 \quad (70a)$$

$$\frac{(\mathbf{u}J)_i^{n+1} - (\mathbf{u}J)_i^{n\sharp}}{\Delta t} + \frac{(\mathbf{u}v)_{i+1/2}^{n\sharp} - (\mathbf{u}v)_{i-1/2}^{n\sharp}}{\Delta x} = 0 \quad (70b)$$

$$\text{avec } (\mathbf{u}v)_{i+1/2}^{n\sharp} = \mathbf{u}_i^{n\sharp} (v_{i+1/2}^{n\sharp})^+ + \mathbf{u}_{i+1}^{n\sharp} (v_{i+1/2}^{n\sharp})^-$$

Forme advective

$$\partial_t \mathbb{U} + \frac{\mathbf{v}}{J} \partial_\chi \mathbb{U} = 0 \quad (71)$$

# Le secret de la positivité

- Dans l'étape Lagrange, pour que  $\tau_i^{n\sharp} > 0$ ,

$$1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} [v_{i+1/2}^{n\sharp} - v_{i-1/2}^{n\sharp}] > 0 \quad (72)$$

- Dans l'étape projection, pour que  $\mathbf{u}_i^{n+1}$  soit combinaison convexe de  $\mathbf{u}_{i-1}^{n\sharp}$ ,  $\mathbf{u}_i^{n\sharp}$  et  $\mathbf{u}_{i+1}^{n\sharp}$ ,

$$1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} [(v_{i+1/2}^{n\sharp})^- - (v_{i-1/2}^{n\sharp})^+] \geq 0 \quad (73)$$

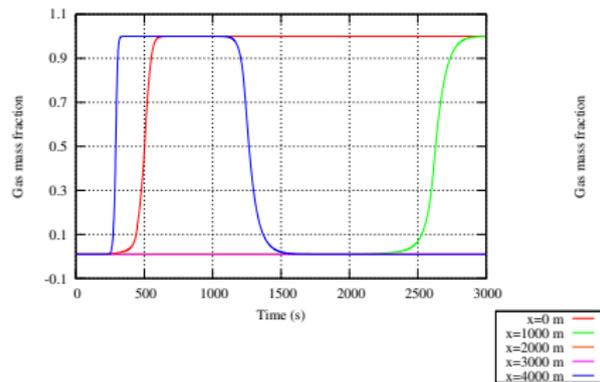
- Condition suffisante

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} |v_{i+1/2}^{n\sharp}| < \frac{1}{2} \quad (74)$$

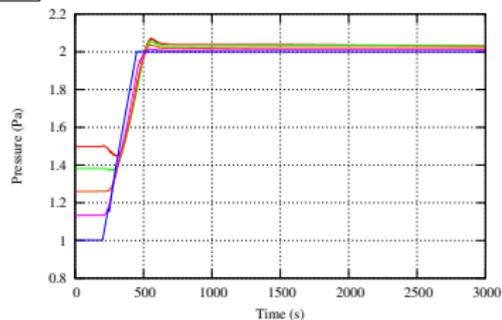
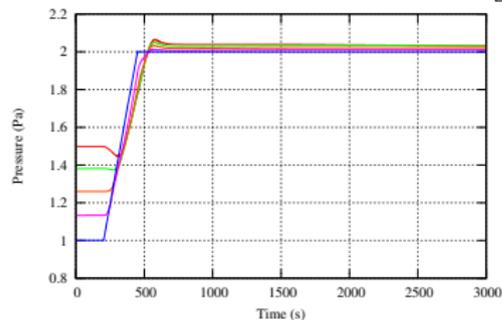
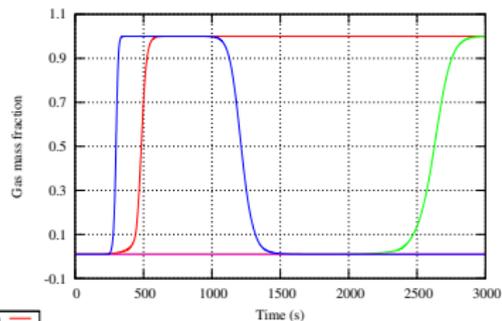
où la difficulté vient de ce que  $v_{i+1/2}^{n\sharp}$  dépend de  $\Delta t$

# Fraction massique de gaz et pression

## implicite sélectif 1.0

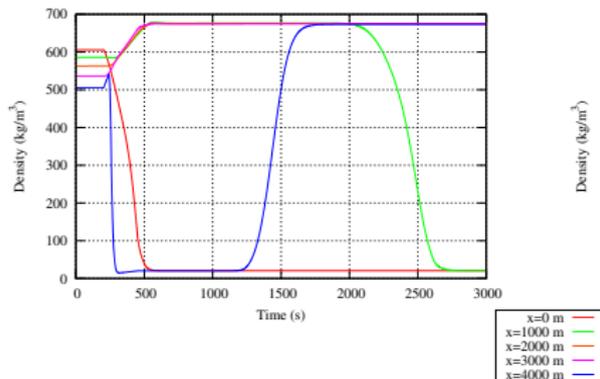


## implicite sélectif 2.0

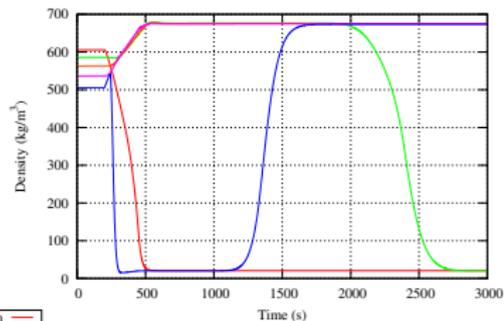
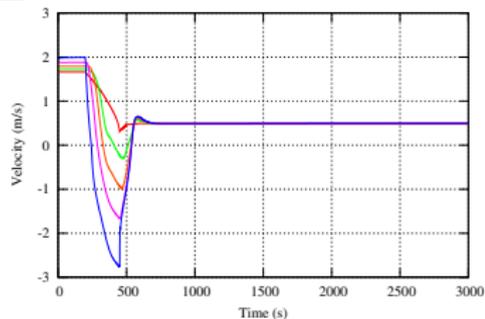
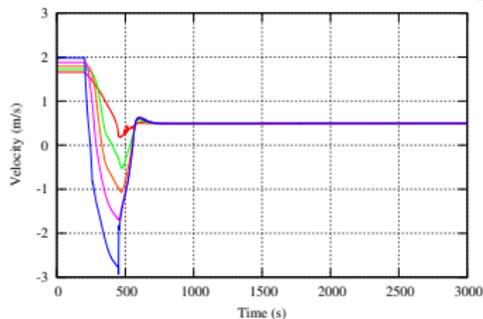
 $Y$  $P$

# Densité totale et vitesse moyenne

## implicite sélectif 1.0



## implicite sélectif 2.0

 $\rho$  $v$

# Exemple typique



Simulation avec relaxation et  
multi-résolution

# Conclusion de la partie 1

## ■ Acquis

- Contrôle de la **positivité** pour un schéma à grand pas de temps, à l'ordre 1 ou 2 en espace, en présence de conditions aux limites
- Maîtrise et généralisation au cas implicite des outils d'adaptation dynamique

## ■ À approfondir

- Schémas d'équilibre traitant simultanément termes sources et changements de section
- Reconstruction d'ordre 2 **espace-temps** préservant la positivité pour le schéma implicite sélectif via Lagrange-projection
- Conditions aux limites d'ordre 2 pour mieux prendre en compte le *scénario* des simulations

# Sommaire

**4** Relaxation

**5** Modélisation

**6** Advection

**7** Private jokes

# TFM (Two-Fluid Model)

- 4 lois de conservation

$$\partial_t(\rho_g R_g) + \partial_x(\rho_g R_g v_g) = 0 \quad (75a)$$

$$\partial_t(\rho_\ell R_\ell) + \partial_x(\rho_\ell R_\ell v_\ell) = 0 \quad (75b)$$

$$\partial_t(\rho_g R_g v_g) + \partial_x(\rho_g R_g v_g^2 + R_g \Delta p_g) + R_g \partial_x p_i = \rho_g S_g \quad (75c)$$

$$\partial_t(\rho_\ell R_\ell v_\ell) + \partial_x(\rho_\ell R_\ell v_\ell^2 + R_\ell \Delta p_\ell) + R_\ell \partial_x p_i = \rho_\ell S_\ell \quad (75d)$$

- 3 lois de fermeture **thermodynamiques**

$$R_\ell + R_g = 1 \quad (76a)$$

$$\rho_g = \rho_g(p_i) \quad (76b)$$

$$\rho_\ell = \rho_\ell(p_i) \quad (76c)$$

- 2 lois de fermeture **hydrodynamiques** donnant  $\Delta p_\ell$  et  $\Delta p_g$

# Genèse de NPW

- Observation numérique dans DFM

$$\partial_t(\rho_g R_g v_g + \rho_\ell R_\ell v_\ell) + \partial_x(\rho_g R_g v_g^2 + \rho_\ell R_\ell v_\ell^2 + p) = \rho S$$

# Genèse de NPW

- Observation numérique dans DFM

$$\partial_t(\rho_g R_g v_g + \rho_\ell R_\ell v_\ell) + \partial_x(\rho_g R_g v_g^2 + \rho_\ell R_\ell v_\ell^2 + p) = \rho S$$

# Genèse de NPW

## ■ Observation numérique dans DFM

$$\partial_t(\rho_g R_g v_g + \rho_\ell R_\ell v_\ell) + \partial_x(\rho_g R_g v_g^2 + \rho_\ell R_\ell v_\ell^2 + p) = \rho S$$

## ■ Établissement théorique

- sous l'hypothèse de très **faible nombre de Mach**, par développement asymptotique
- sous l'hypothèse d'un écoulement transitoire à « basse » fréquence, par passage à la limite

# Propriétés de NPW

## Théorème (Viviand [82])

La relation de compatibilité associée à la valeur propre finie  $\lambda$  de NPW peut s'interpréter comme le transport d'un **invariant de Riemann**

$$\partial_t \mathcal{J}(R_g, p) + \lambda \partial_x \mathcal{J}(R_g, p) = \mu S \quad (77)$$

si et seulement si la loi de fermeture est de type **Zuber-Findlay**, à savoir

$$\Psi(R_g, p, U_s) = \Psi_0(R_g, p) U_s + \Psi_1(R_g, p). \quad (78)$$

On peut même préciser les conditions sous lesquelles ce transport est exact ( $\mu = 0$ ).

Cette propriété est exploitée dans la conception d'un modèle de contrôle du severe-slugging par *gas-lift*.

# CINE (Cinématique)

## ■ Hypothèses supplémentaires

- les deux phases sont **incompressibles**, i.e.,

$$\rho_g(p) = \rho_g^0 \quad \text{et} \quad \rho_\ell(p) = \rho_\ell^0 \quad (79)$$

- la fermeture hydrodynamique ne dépend pas de  $p$ , c'est-à-dire

$$U_g = \Psi(R_g, U_s) \quad (80)$$

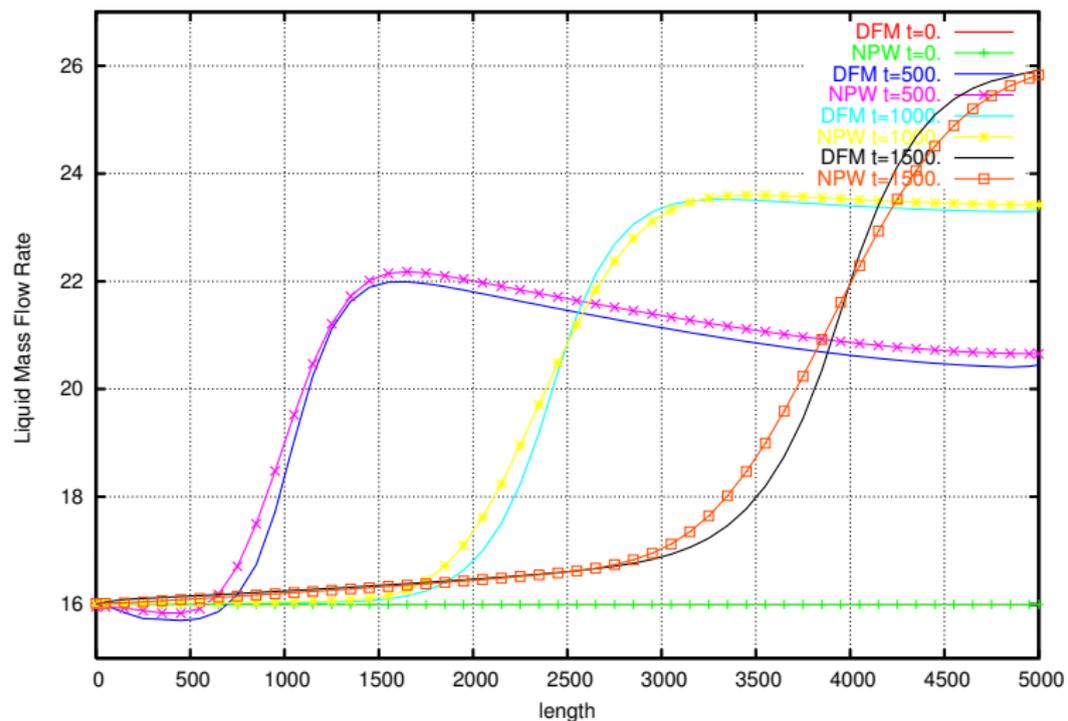
- Alors, le modèle NPW se réduit à 1 loi de conservation et 2 bilans hydrostatiques

$$\partial_t R_g + \partial_x \Psi(R_g, U_s) = 0 \quad (81a)$$

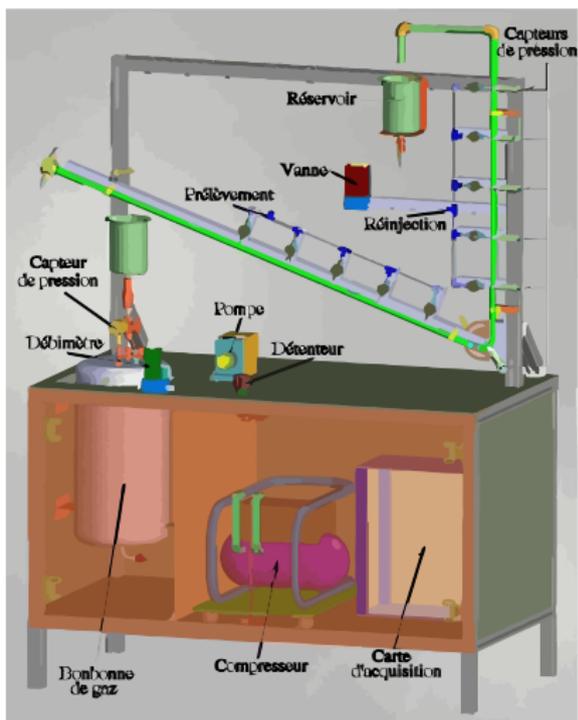
$$\partial_x U_s = 0 \quad (81b)$$

$$\partial_x p = \rho S \quad (81c)$$

# Comparaison NPW et DFM



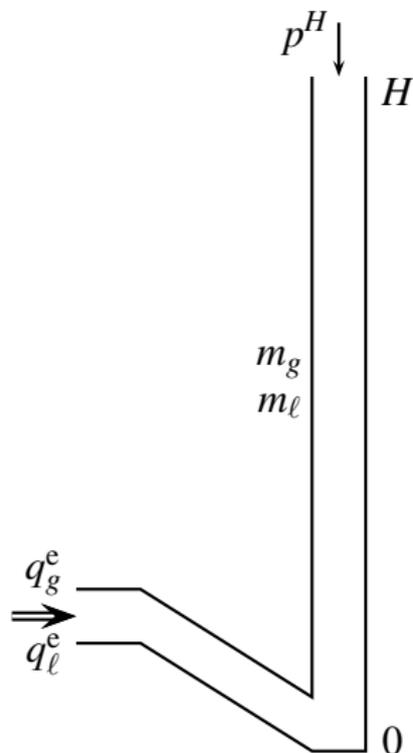
# Maquette S4L



Small  
Size  
Severe  
Slugging  
Loop

© IFP

## Modèle SSL



$$d_t m_g = \rho_g(p^0) U_g^0 - \rho_g(p^H) U_g^H \quad \leftarrow$$

$$d_t m_l = \rho_l(p^0) U_l^0 - \rho_l(p^H) U_l^H \quad \leftarrow$$

$$d_t p^0 = \frac{a_g^2}{LR_g^p(q_g^e)} [q_g^e - \rho_g(p^0) U_g^0]$$

$$0 = q_l^e - \rho_l(p^0) U_l^0$$

$$0 = p^H - p^0 + g(m_g + m_l) \quad \leftarrow$$

$$0 = U_g^0 - \Psi(R_g^0, p^0, U_g^0 + U_l^0)$$

$$0 = U_g^H - \Psi(R_g^H, p^H, U_g^H + U_l^H)$$

$$0 = m_g - \frac{H}{2} [\rho_g(p^0) R_g^0 + \rho_g(p^H) R_g^H] \quad \diamond$$

$$0 = m_l - \frac{H}{2} [\rho_l(p^0) R_l^0 + \rho_l(p^H) R_l^H] \quad \diamond$$

# Formes abstraites de SSL

## ■ Première version

$$d_t \mathbf{X}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t); \wp) \quad (83a)$$

$$0 = \mathbf{G}(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t); \wp) \quad (83b)$$

avec

$$\mathbf{X} = (m_g, m_\ell, p^0) \in \mathbb{R}^3 \quad (84a)$$

$$\mathbf{Y} = (R_g^0, U_g^0, U_\ell^0, R_g^H, U_g^H, U_\ell^H) \in \mathbb{R}^6 \quad (84b)$$

$$\wp = (q_g^e, q_\ell^e, p^H, L, H, R_g^P, a_g^2 \dots) \in \text{paramètres} \quad (84c)$$

La frontière des régions d'occurrence peut être déterminée très **rapidement** comme l'ensemble des paramètres  $\wp$  pour lesquels

$$\begin{vmatrix} \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{F} - z \mathbf{I} & \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{F} \\ \nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{G} & \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{G} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \operatorname{Re} z = 0$$

# Formes abstraites de SSL

- Seconde version, après réduction d'index par **élimination** de  $p^0$ ,

$$d_t \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t); \wp) \quad (85a)$$

$$0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t); \wp) \quad (85b)$$

où  $\nabla_{\mathbf{y}} \mathbf{g}$  est **inversible**, avec

$$\mathbf{x} = (m_g, m_\ell) \in \mathbb{R}^2 \quad (86a)$$

$$\mathbf{y} = (R_g^0, U_g^0, U_\ell^0, R_g^H, U_g^H, U_\ell^H) \in \mathbb{R}^6 \quad (86b)$$

## Théorème (Zakarian-T <20>)

*Dans la modélisation considérée, le severe-slugging correspond à une bifurcation de Hopf supercritique (cycle limite stable) par rapport à chacun des débits d'entrée  $q_g^e$  et  $q_\ell^e$ .*

# Conclusion de la partie 2

## ■ Sur la modélisation

- NPW cohabite mieux avec la fermeture hydrodynamique que DFM, au sens où il possède de meilleures propriétés
- L'abondance de modèles ne nuit pas, mais à chaque modèle son usage

## ■ Sur le contrôle

- Il n'est point besoin d'un modèle précis pour concevoir une commande efficace

# Sommaire

**4** Relaxation

**5** Modélisation

**6** Advection

**7** Private jokes

# ALE multidimensionnel

Dans le référentiel mobile  $\boldsymbol{\chi}$  se déplaçant à la vitesse  $\mathbf{v} - \mathbf{w}$ , le modèle relaxé s'écrit

$$\partial_t(\mathbb{J}) + \nabla_{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{w}) - \nabla_{\boldsymbol{\chi}}(\mathbf{v}) = \mathbb{O} \quad (87a)$$

$$\partial_t(J) + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\chi}}(J\mathbb{J}^{-1}\mathbf{w}) - \operatorname{div}_{\boldsymbol{\chi}}(J\mathbb{J}^{-1}\mathbf{v}) = 0 \quad (87b)$$

$$\partial_t(\rho J) + \operatorname{div}_{\boldsymbol{\chi}}(\rho J\mathbb{J}^{-1}\mathbf{w}) = 0 \quad (87c)$$

$$\partial_t(\rho \mathbf{v} J) + \mathbf{div}_{\boldsymbol{\chi}}(\rho \mathbf{v} \otimes J\mathbb{J}^{-1}\mathbf{w}) + \mathbf{div}_{\boldsymbol{\chi}}(\rho J\mathbb{J}^{-T}) = \rho \mathbf{J} \mathbf{S} \quad (87d)$$

$$\partial_t(\rho Y J) + \underbrace{\operatorname{div}_{\boldsymbol{\chi}}(\rho Y J\mathbb{J}^{-1}\mathbf{w})}_{\text{phase C}} + \underbrace{\operatorname{div}_{\boldsymbol{\chi}}(\rho J\mathbb{J}^{-T})}_{\text{phase B}} = 0 \quad (87e)$$

où  $\mathbb{J} = \nabla_{\boldsymbol{\chi}} \mathbf{x}$  et  $J = \det \mathbb{J}$

# Phase C

Notation

$$\Psi = (\rho, \rho \mathbf{v}, \rho Y, \dots) \quad (88)$$

Forme conservative

$$\partial_t(\mathbb{J}) + \nabla_{\mathbf{x}}(\mathbf{w}) = 0 \quad (89a)$$

$$\partial_t(J) + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(J\mathbb{J}^{-1}\mathbf{w}) = 0 \quad (89b)$$

$$\partial_t(\Psi J) + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\Psi J\mathbb{J}^{-1}\mathbf{w}) = 0 \quad (89c)$$

Forme advective

$$\partial_t \Psi + (\mathbb{J}^{-1}\mathbf{w}) \cdot \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} \Psi = 0 \quad (90)$$

# Conclusion de la partie 3

## ■ Acquis

- Le schéma « multi-dimensionnel » est en réalité un schéma 1-D appliqué le long d'une ligne de courant
- Transposition réussie pour les variables aux nœuds, en maillage **quelconque**, à la différence de Kim [132]

## ■ En cours

- Schéma d'advection multi-dimensionnelle pour les variables aux mailles, mutation de VOFIRE (Després et Lagoutière [120])
- Préservation d'un principe min-max de nature 1-D non seulement sur chacune des variables transportés, mais aussi sur certaines des combinaisons des variables

# Sommaire

**4** Relaxation

**5** Modélisation

**6** Advection

**7** Private jokes

# Cabinet du Professeur Whitham



- La relaxation me rend nerveux, Docteur. . .
- Restez positif et méditez sur le sens de la condition *sous-caractéristique* !

# Les bijoux de la Compressibilité



– Je suis enfin convaincu de l'intérêt de NPW, Milou !

# Téléportation



Le *meilleur* schéma d'advection :

- conservativité
- ordre élevé
- principe du min-max et inégalité d'entropie
- le tout en maillage 4-D déformé quelconque