



**HAL**  
open science

## Contributions à la simulation, à la modélisation et au contrôle des écoulements fluides

Quang Huy Tran

► **To cite this version:**

Quang Huy Tran. Contributions à la simulation, à la modélisation et au contrôle des écoulements fluides. Mathématiques [math]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2008. tel-00319418

**HAL Id: tel-00319418**

**<https://theses.hal.science/tel-00319418>**

Submitted on 8 Sep 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

**CONTRIBUTIONS À LA SIMULATION,  
À LA MODÉLISATION ET AU CONTRÔLE  
DES ÉCOULEMENTS FLUIDES**

Mémoire présenté par  
**Quang Huy Tran**

en vue d'obtenir  
l'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

dans la spécialité  
Mathématiques Appliquées

soutenu le 3 septembre 2008 au Laboratoire Jacques-Louis Lions  
devant le jury composé de

|                  |                                    |                   |
|------------------|------------------------------------|-------------------|
| Thierry GALLOUËT | Université de Provence             | <i>Président</i>  |
| Roberto NATALINI | Consiglio Nazionale delle Ricerche | <i>Rapporteur</i> |
| Jean-Marc HÉRARD | Électricité de France              | <i>Rapporteur</i> |
| Rémi ABGRALL     | Université de Bordeaux I           | <i>Rapporteur</i> |
| Yvon MADAY       | Université Pierre et Marie Curie   | <i>Examineur</i>  |
| Pierre ROUCHON   | École des Mines de Paris           | <i>Examineur</i>  |
| Bruno SCHEURER   | Commissariat à l'Énergie Atomique  | <i>Examineur</i>  |
| Roland MASSON    | Institut Français du Pétrole       | <i>Examineur</i>  |



# Table des matières

|   |            |
|---|------------|
| <b>Remerciements</b>  | <b>vii</b> |
| <b>Avant-propos</b>   | <b>ix</b>  |
| <b>Abstract</b>   | <b>xi</b>  |
| <b>1 Curriculum vitae</b>   | <b>1</b>   |
| 1.1 Études et formation . . . . .   | 1          |
| 1.2 Expérience professionnelle . . . . .  | 1          |
| 1.3 Thèmes de recherche par domaines d'application . . . . .                                | 2          |
| 1.4 Responsabilités d'encadrement . . . . .   | 2          |
| 1.5 Activités d'enseignement . . . . .  | 2          |
| <b>2 Résumé des travaux</b>   | <b>3</b>   |
| 2.1 Travail de thèse . . . . .  | 3          |
| 2.2 Travaux présentés dans ce mémoire . . . . .   | 3          |
| 2.2.1 Simulation numérique de fluides . . . . .   | 3          |
| 2.2.2 Réduction de modèle et contrôle . . . . .   | 5          |
| 2.3 Travaux absents de ce mémoire . . . . .   | 6          |
| <b>3 Liste des publications</b>   | <b>7</b>   |
| 3.1 Articles dans des revues avec comité de lecture . . . . .                               | 7          |
| 3.2 Actes de colloques avec comité de lecture . . . . .                                     | 8          |
| 3.3 Brevets . . . . .   | 10         |
| 3.4 Rapports complémentaires . . . . .  | 10         |
| <b>4 Bibliographie générale</b>   | <b>11</b>  |
| 4.1 Habilitations et thèses IFP . . . . .   | 11         |
| 4.2 Modèles physiques . . . . .   | 12         |
| 4.3 Analyse mathématique . . . . .  | 13         |
| 4.4 Méthodes numériques . . . . .   | 14         |
| <b>5 Écoulements en conduite : des simulations plus rapides avec garantie de robustesse</b> | <b>19</b>  |
| 5.1 Position du problème . . . . .  | 19         |
| 5.1.1 Contexte industriel . . . . .   | 19         |

|          |   |    |
|----------|---|----|
| 5.1.2    | Défis scientifiques . . . . .   | 20 |
| 5.1.3    | Schéma actuel de TACITE . . . . .   | 21 |
| 5.1.4    | À la recherche d'un schéma idéal . . . . .  | 22 |
| 5.2      | Relaxation du modèle gaz-liquide . . . . .  | 23 |
| 5.2.1    | Modèle de départ . . . . .  | 23 |
| 5.2.2    | Schéma explicite et l'assurance de positivité . . . . .                             | 25 |
| 5.2.3    | Schéma implicite direct et le risque de non-positivité . . . . .                    | 27 |
| 5.2.4    | Schéma implicite ALE ou la positivité retrouvée . . . . .                           | 29 |
| 5.3      | Deux intermédiaires sur l'ordre 2 . . . . .   | 32 |
| 5.3.1    | Advection simultanée de plusieurs scalaires . . . . .                               | 32 |
| 5.3.2    | Énigme des $\theta$ -schémas . . . . .  | 34 |
| 5.4      | Relaxation du modèle compositionnel . . . . .                                       | 36 |
| 5.4.1    | Modèle de départ . . . . .  | 36 |
| 5.4.2    | Approche directe par constituant . . . . .  | 37 |
| 5.4.3    | Approche indirecte par phase . . . . .  | 39 |
| 5.5      | Adaptation dynamique de maillage . . . . .  | 42 |
| 5.5.1    | Multi-Résolution . . . . .  | 42 |
| 5.5.2    | Local Time-Stepping . . . . .   | 43 |
| <b>6</b> | <b>Écoulements en conduite : modèles alternatifs et contrôle du severe-slugging</b> |    |
|          | <b>45</b>   |    |
| 6.1      | Motivation . . . . .  | 45 |
| 6.1.1    | Quand les tuyaux s'engorgent . . . . .  | 45 |
| 6.1.2    | À la recherche de modèles... imparfaits . . . . .                                   | 46 |
| 6.1.3    | Vers de nouveaux régulateurs . . . . .  | 48 |
| 6.2      | Modèles généralistes . . . . .  | 48 |
| 6.2.1    | NPW, instantanément acoustique . . . . .  | 48 |
| 6.2.2    | CINEMA, passionnément incompressible . . . . .                                      | 52 |
| 6.2.3    | TFM, doublement fluide . . . . .  | 52 |
| 6.3      | Modèles dédiés . . . . .  | 53 |
| 6.3.1    | À la prédiction du severe-slugging . . . . .  | 54 |
| 6.3.2    | Au contrôle par gas-lift . . . . .  | 56 |
| 6.3.3    | Au contrôle par réinjection . . . . .   | 59 |
| <b>7</b> | <b>Moteurs à combustion : une étape convective plus précise en maillage déformé</b> |    |
|          | <b>63</b>   |    |
| 7.1      | Position du problème . . . . .  | 63 |
| 7.1.1    | De KIVA à IFP-C3D . . . . .   | 63 |
| 7.1.2    | Un DONOR seul ne fait pas le printemps . . . . .                                    | 64 |
| 7.1.3    | Vous avez dit... « multidimensionnel » ? . . . . .                                  | 66 |
| 7.2      | Advection linéaire comme une fin en soi . . . . .                                   | 67 |
| 7.2.1    | État de l'art . . . . .   | 67 |
| 7.2.2    | Nouveaux schémas en 1-D . . . . .   | 71 |
| 7.2.3    | Construction en 2-D et 3-D . . . . .  | 76 |
| 7.3      | Advection linéaire en tant que remaillage dans l'ALE . . . . .                      | 78 |
| 7.3.1    | Formalisme ALE en version différentielle . . . . .                                  | 79 |
| 7.3.2    | Stratégie d'intégration dans IFP-C3D . . . . .                                      | 80 |

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>8 Conclusion</b>   | <b>83</b>  |
| 8.1 Sur la simulation numérique . . . . .                             | 83         |
| 8.1.1 Des écoulements diphasiques . . . . .                           | 83         |
| 8.1.2 De l'advection multidimensionnelle . . . . .                    | 84         |
| 8.2 Sur la modélisation et le contrôle . . . . .                      | 84         |
| <b>A Articles du chapitre 5</b>                                       | <b>85</b>  |
| A.1 Méthodes de relaxation . . . . .                                  | 85         |
| A.2 Techniques d'adaptation dynamique . . . . .                       | 85         |
| <b>B Articles du chapitre 6</b>                                       | <b>355</b> |
| B.1 Modèles diphasiques alternatifs . . . . .                         | 355        |
| B.2 Application à l'étude et au contrôle du severe-slugging . . . . . | 355        |
| <b>C Articles du chapitre 7</b>                                       | <b>401</b> |
| C.1 Advection 2-D . . . . .   | 401        |
| C.2 Advection 3-D . . . . .   | 401        |



# Remerciements

CE MÉMOIRE n'aurait jamais vu le jour sans la contribution des nombreuses personnes avec qui j'ai eu le privilège et le plaisir de collaborer. Il aurait également eu peine à se matérialiser sans l'aide et la compréhension de mes collègues de l'IFP. Tout en leur exprimant collectivement ma gratitude, je tiens à mentionner et à remercier en particulier :

- Van Bui-Tran et Roland Masson, mes supérieurs hiérarchiques de l'IFP, qui m'ont constamment soutenu et qui ont créé toutes les conditions favorables nécessaires à la confection de cet ouvrage.
- Alain Bamberger, qui a guidé avec patience mes débuts dans la recherche et qui a assuré une grande partie de ma formation scientifique. C'est aussi grâce à lui que j'ai pu rencontrer d'autres personnalités, notamment Roland Glowinski, William W. Symes et Patrick Joly, avec qui j'ai également beaucoup appris.
- Roberto Natalini, Jean-Marc Hérard et Rémi Abgrall qui ont accepté la tâche de rapporter, ainsi que tous les rapporteurs « potentiels » qui n'ont pas hésité à me répondre favorablement.
- Yvon Maday, qui a toujours œuvré en faveur d'une collaboration plus étroite entre industriels et universitaires et qui me fait l'honneur de participer au jury.
- Thierry Gallouët, dont la lecture originale et pragmatique des schémas m'a souvent été d'une aide précieuse.
- Bruno Scheurer, qui m'a apporté avec enthousiasme non seulement son érudition, mais aussi son sens de l'analyse, ainsi que de chaleureux encouragements.
- Pierre Rouchon, qui par la justesse de ses intuitions a fait du contrôle un sujet beaucoup moins mystérieux que quand je l'apprenais sur les bancs de l'École...
- Frédéric Coquel, de qui j'ai toujours reçu d'excellents conseils et qui a joué un rôle très important dans mon cheminement « spirituel » vers l'HDR.
- Marie Postel, dont j'apprécie l'expertise et l'énergie tout autant que la gentillesse grâce à laquelle j'ai pu traverser sans encombre les méandres administratifs.

Je suis redevable à tous ceux qui ont relu et corrigé la première version du manuscrit, et en particulier à Emmanuel Duret de m'avoir aimablement fourni les illustrations.

Pour l'« aide alimentaire » qu'elles m'ont inconditionnellement prodiguée durant la période de rédaction, Sylvie et Françoise ont permis d'accélérer notablement la convergence de ce document. *Last but not least*, je ne saurai oublier Delphine et Laurent, mes *coachs* auto-proclamés, dont l'efficacité des causeries motivationnelles est, à ce jour, enfin démontrée!



# Avant-propos

AU FIL DES ANNÉES passées à l'Institut Français du Pétrole, j'ai été amené à m'intéresser à des problèmes variés provenant de plusieurs applications. Le point commun à toutes ces activités est la conception de méthodes « sophistiquées » pour la simulation numérique et le contrôle des phénomènes physiques.

Pour dégager un fil conducteur à l'exposé, j'ai retenu une partie des travaux réalisés dans le cadre de deux applications :

1. Les *écoulements dans les conduites* pétrolières, du projet TACITE de la Direction Mécanique Appliquée. Il s'agit d'écoulements polyphasiques compositionnels unidimensionnels soumis à des lois de fermeture complexes.
2. Les *moteurs à combustion* interne, du projet IFP-C3D de la Direction Techniques d'Applications Énergétiques. Il s'agit de la combustion du mélange multi-espèces à l'intérieur d'une chambre tridimensionnelle dont la frontière est soumise à un mouvement imposé.

Du point de vue du mathématicien appliqué, ces deux domaines apparemment déconnectés requièrent des compétences analogues. Ceci est d'autant plus vrai que les problèmes qui m'avaient été posés se sont révélés proches et complémentaires les uns des autres. Aussi, m'a-t-il semblé opportun de mettre en avant deux thèmes :

- A. La *simulation*, plus précisément l'approximation numérique de systèmes d'équations aux dérivées partielles qui sont des variantes de Euler et/ou de Navier-Stokes.
- B. La *modélisation*, plus précisément la réduction de modèle, qui conduit à un modèle moins complet certes, mais plus adapté aux besoins. Au premier rang de ces besoins est la mise au point de stratégies de **contrôle**.

Ce document s'organise en trois parties. La première, du chapitre 1 au chapitre 3, fournit les renseignements administratifs relatifs au dossier de demande d'habilitation, dont une rapide description de l'ensemble de mes travaux. Pour des raisons de commodité pratique, la bibliographie générale est expressément placée au chapitre 4, juste après la liste des publications.

La seconde partie, du chapitre 5 au chapitre 8, relate les efforts entrepris sur les thèmes A et B. C'est le rapport de synthèse proprement dit. Même si l'accent est mis sur l'évolution des idées et les motivations sous-jacentes, j'entre dans les détails quand cela s'avère nécessaire pour apporter un complément d'information par rapport aux articles. Dans les annexes A à C que constitue la troisième partie, on peut trouver le texte intégral des articles publiés ou soumis.



# Abstract

THIS DISSERTATION is submitted in fulfillment of the requirements for the French academic degree of *Habilitation à Diriger des Recherches*, which acknowledges the ability of its holders to conduct research and which entitles them to officially supervise PhD students. It is also a necessary (but not sufficient) condition to apply for a faculty position called *professeur des universités*.

## Outline of the manuscript

This document consists of three sections. The first section, from chapter 1 to chapter 3, provides information required by the registration file, such as a résumé and a brief description of my research activities. For numbering convenience, the general bibliography has been intentionally moved to chapter 4, immediately following the list of my publications.

The second section, from chapter 5 to chapter 8, is a summary of some research topics in which I have been involved over the past decade, either individually or through the PhD students I have been appointed to (co)supervise. According to the rules of the game, the HDR candidate must demonstrate mastery of the subjects he or she has chosen by presenting each of them in a cohesive way, and by highlighting the development of ideas, together with the underlying motivations. Although this is the line I strive to keep to, I sometimes feel the need to go into detail, especially when it comes to pointing out further insights not mentioned in the published papers.

The third and last section, from appendix A to appendix C, regroups the papers that I have issued previously in connection with the presentations in the second section. Most of them are offprints, while the latest ones are preprints.

## Overview of the research topics

At the *Institut Français du Pétrole*, a research and training center in transport energies, I have been interested in the design of “sophisticated” methods for the numerical simulation and the automatic control of various physical phenomena. In order for a consistent thread to emerge, I have selected three topics, each of which will be addressed in a separate chapter. These topics stem from two applications, namely:

1. *Fluid flows in pipelines*. These are one-dimensional two-phase multi-component flows, the particular feature of which is the highly complex and expensive closure laws.
2. *Reactive flows in combustion engines*. These are three-dimensional multi-species flows, the particular feature of which is the moving boundaries representing the piston.

From a mathematical standpoint, they roughly assume the same set of skills:

- A. Numerical methods for the approximation of PDE systems of conservation laws, which are variants of the Euler or Navier-Stokes equations.
- B. Analysis and simplification of models in view of specific needs, among which the design of effective control strategies.

### **Relaxation methods for the simulation of two-phase flow in pipelines**

In collaboration with Frédéric Coquel, we investigate alternative methods to the VFRoe scheme currently implemented in the TACITE code. The benefit of relaxation methods lies in the guarantee of positivity for the densities, notwithstanding the extreme complexity of the algebraic closure laws. The relaxation strategy can be readily transposed to different situations  $\langle 10, 11, 14, 15 \rangle$ , depending on whether we have: a basic gas-liquid model or a more realistic multi-component model; an explicit or hybrid explicit-implicit scheme; a direct Eulerian formulation or an indirect Arbitrary Lagrange-Euler formalism  $\langle 16, 18 \rangle$  to design the selectively implicit scheme.

Besides ensuring positivity, we also seek to significantly reduce the CPU time of simulation. In joint work with Marie Postel, we apply the latest techniques of dynamic mesh refinements  $\langle 12, 13 \rangle$  and local time-stepping  $\langle 17 \rangle$ . The difficulty lies in the adaptation of those techniques to the hybrid explicit-implicit setting.

### **Simplified models for the study and the control of severe-slugging**

The PDE model considered for simulations, called DFM (Drift-Flux Model), actually contains too much information for problems faced by engineers. It gives details about acoustic waves, which engineers are not interested in. We propose a series of alternative models  $\langle 6 \rangle$ , based on the NPW (No Pressure Wave) model. These are helpful to improve the understanding of the so-called *severe-slugging*, an undesirable gravity-induced phenomenon.

The simplified models enable us to study severe-slugging as a dynamic system with a Hopf bifurcation  $\langle 20 \rangle$ . Their structure also suggests “smart” control strategies in order to eliminate severe-slugging, such as the two-scale proportional-integral command recommended by Pierre Rouchon  $\langle 25 \rangle$ .

### **Linear advection for the simulation of multi-species flows in engines**

In collaboration with Bruno Scheurer, we propose alternative methods to the DONOR scheme currently implemented for the remap phase of the IFP-C3D code. Our objective is to improve accuracy, regardless of the extra time incurred and of the local conservativity of the scheme. The idea is to use the compact Iserles-Roe scheme known for its high-order capabilities in the 1-D case, and to extend it to the multi-dimensional case by following streamlines  $\langle 8, 19 \rangle$ . The 2-D case requires less effort than the 3-D variant.

Global conservation can be restored via mass repair, and integration into the overall ALE procedure is shown to be feasible.

## CHAPITRE 1

# Curriculum vitae



Quang Huy TRAN

Né le 3 juillet 1967, à Saigon (Vietnam)

Nationalité française

4, rue Henri Dunant  
92500 Rueil-Malmaison  
01 47 08 49 96  
<http://qhuy.tran.free.fr>

IFP — DTIMA  
1 et 4, avenue de Bois-Préau  
92852 Rueil-Malmaison Cedex  
01 47 52 74 22  
[Q-Huy.Tran@ifp.fr](mailto:Q-Huy.Tran@ifp.fr)

## 1.1 Études et formation

- 1991–1994 *École des Mines de Paris et Institut Français du Pétrole*, Thèse sur la « Résolution et l'étude de quelques problèmes de propagation d'ondes acoustiques en géophysique », direction Alain BAMBERGER
- 1990–1991 *Université Pierre et Marie Curie*, Diplôme d'Études Approfondies en « Analyse Numérique »
- 1987–1990 *École des Mines de Paris*, Ingénieur civil, option « Automatique »
- 1985–1987 *Lycée Kléber* (Strasbourg), Mathématiques Supérieures et Spéciales

## 1.2 Expérience professionnelle

- 1990–  
présent *Institut Français du Pétrole* (Rueil-Malmaison), Département Mathématiques Appliquées, Ingénieur de recherche
- Schémas numériques pour les équations différentielles et aux dérivées partielles
  - Algorithmes de contrôle et méthodes d'optimisation de processus déterministes
- 1993–1994 *Rice University* (Houston), Computational and Applied Mathematics Department, Coopérant du Service National

### 1.3 Thèmes de recherche par domaines d'application

- 1998–présent *Aérodynamique interne et calibration des moteurs* : (i) advection et dynamique des gaz en 3-D ; (ii) adaptation de maillage ; (iii) commande optimale
- 1994–présent *Écoulements polyphasiques dans les conduites pétrolières* : (i) systèmes hyperboliques en 1-D ; (ii) conception de modèles simplifiés ; (iii) contrôle par feedback
- 1991–1997 *Ondes acoustiques et élastiques en vue de l'inversion sismique* : (i) différences finies ; (ii) décomposition de domaines ; (iii) optimisation locale sous contraintes

### 1.4 Responsabilités d'encadrement

- 2005–2008 *Quang-Long Nguyen*, doctorant sous la direction d'Yvon MADAY, Frédéric COQUEL et Marie POSTEL : « Adaptation dynamique de maillage pour les écoulements diphasiques en conduites pétrolières. Application à la simulation des phénomènes de terrain-slugging et severe-slugging » ⟨58⟩
- 2003-2005 *Nikolay Andrianov*, post-doctorant co-encadré par Marie POSTEL : « Analyse Multi-Résolution pour la simulation des écoulements diphasiques dans les conduites avec changements de pentes »
- 2000–2003 *Michaël Baudin*, doctorant sous la direction de Benoît PERTHAME et Frédéric COQUEL : « Méthodes de relaxation pour la simulation des écoulements polyphasiques dans les conduites pétrolières » ⟨48⟩
- 1999–2004 *Emmanuel Duret*, ingénieur-doctorant sous la direction de Pierre ROUCHON : « Dynamique et contrôle des écoulements polyphasiques » ⟨51⟩
- 1998–2001 *Guillaume Gautier*, doctorant sous la direction de Bruno SCHEURER : « Méthodes numériques en maillage hybride mobile pour les écoulements multi-espèces réactifs dans les moteurs à combustion » ⟨52⟩
- 1996–1999 *Érich Zakarian*, doctorant sous la direction de Pascal CHOSSAT : « Modélisation et analyse des instabilités d'écoulements diphasiques dans les conduites pétrolières du type Pipeline-Riser » ⟨60⟩
- 1991–2007 *18 stagiaires* de fin d'études, tous sujets confondus

### 1.5 Activités d'enseignement

- 2005–présent *Institut National des Sciences et Techniques Nucléaires (Saclay)*, Master 2 Modélisation et Simulations, partie Fluides, « Systèmes Hyperboliques de Lois de Conservation »
- 1995–1997 *École Nationale Supérieure du Pétrole et des Moteurs (Rueil-Malmaison)*, DEA Méthodes Quantitatives pour les Géosciences, « Introduction aux Différences Finies et Éléments Finis »

## CHAPITRE 2

# Résumé des travaux

**A**VANT D'ENTRER dans le vif du sujet, j'aimerais présenter un aperçu de l'ensemble des travaux que j'ai réalisés depuis la thèse.

## 2.1 Travail de thèse

Effectué sous la direction d'Alain Bamberger et en parallèle avec mes activités d'ingénieur à l'IFP, mon travail de thèse porte sur trois problèmes issus de la géophysique :

- la résolution de l'équation des ondes acoustiques par des schémas aux différences finies  $\langle 4 \rangle$ , éventuellement combinés avec la décomposition de domaines  $\langle 5 \rangle$  ;
- l'utilisation de ces méthodes numériques pour étudier la propagation des ondes acoustiques en milieux aléatoires  $\langle 2, 3 \rangle$  ;
- l'optimisation sous contraintes par le Lagrangien augmenté pour l'inversion tomographique de données sismiques  $\langle 1 \rangle$ , dans le cadre d'un consortium de recherche animé par Patrick Lailly [55].

Au cours de ces années d'initiation, j'ai pu bénéficier des conseils de Roland Glowinski (University of Houston), William W. Symes (Rice University) et Patrick Joly (INRIA). Avec ce dernier, et à l'occasion de la thèse de Laurent Anné [46], j'ai pu prolonger ultérieurement le premier thème sur les schémas par de nouveaux résultats  $\langle 7 \rangle$ .

## 2.2 Travaux présentés dans ce mémoire

Après la thèse, je me suis progressivement orienté vers d'autres applications IFP.

### 2.2.1 Simulation numérique de fluides

#### Écoulements diphasiques dans les conduites

Tout d'abord, dans le domaine des écoulements polyphasiques à travers les conduites pétrolières, j'ai participé au développement du logiciel TACITE (Transient Analysis Code IFP Total Elf). Le rôle des « numériciens » dans cette équipe est d'analyser les difficultés liées au modèle et au schéma afin de proposer des remèdes en vue d'une implémentation directe dans le code. Une fois les aspects numériques de TACITE à peu près stabilisés, notamment grâce au schéma VFRoe [123, 137] de Thierry Gallouët (Université de Provence), j'ai eu la possibilité d'étudier, à titre de recherche exploratoire, des schémas « alternatifs » à ceux existant dans le code.

Dans ce but, une collaboration a été engagée avec Frédéric Coquel (Laboratoire Jacques-Louis Lions) sur le thème des méthodes de relaxation [86, 97, 117, 118, 131], concrétisée par la thèse de Michaël Baudin [48]. Il s'en est suivi plusieurs publications (10, 11, 14, 15) sur le contenu desquelles on reviendra plus en détails. L'intérêt porté à la relaxation réside essentiellement par la garantie de robustesse, et ce quelle que soit la complexité des lois de fermeture. Le souci de robustesse pour tous les types de schémas — qu'ils soient explicites, implicites ou sélectivement implicites — sera d'ailleurs le fil conducteur du chapitre 5.

Outre la robustesse, le gain en temps de calcul mérite aussi notre attention. C'est pourquoi, tout en s'appuyant sur les acquis de la relaxation, voire en les consolidant par de nouveaux éléments (16, 18), nous nous sommes engagés dans un axe parallèle, celui de l'adaptation dynamique de maillage [114, 115, 127, 139, 140]. Sous le co-encadrement de Marie Postel (Laboratoire Jacques-Louis Lions), des résultats très probants ont été obtenus pendant le stage de Nicole Poussineau (12), le post-doctorat de Nikolay Andrianov (13), et la thèse en cours de Quang Long Nguyen [58]. Le principal défi en la matière est pour nous de réussir le mariage entre les algorithmes connus et bien rodés en explicite et l'intégration temporelle hybride mi-explicite mi-implicite des schémas que nous utilisons.

### Écoulements réactifs dans les moteurs

Peu de temps après m'être familiarisé avec les écoulements en conduites, j'ai abordé ceux des moteurs à combustion interne. À la différence avec TACITE, il n'est pas question cette fois d'immersion dans IFP-C3D, nom du code développé par l'IFP sur la base de KIVA [61, 69, 74]. La mission qui m'est confiée consiste en une investigation amont des schémas d'advection multidimensionnelle permettant de préserver le mieux possible la précision et l'isotropie de la solution lors de la phase de *convection*, et ce sur des maillages souvent fortement déformés.

Bien que l'advection multidimensionnelle fasse l'objet d'une vaste littérature, il n'y a pas encore de schéma qui concilie tous les critères de stabilité, de conservativité et de précision comme c'est le cas en 1-D. Avec le soutien actif de Bruno Scheurer (CEA), les efforts consacrés à cette question ont abouti à un nouveau schéma 3-D (8, 19) sur la base d'un ancien schéma compact 1-D d'Iserles-Roe [130, 146]. Ce schéma est précis, mais ne se formule pas sous la forme conservative locale. Pour assurer la conservation globale, nous devons y ajouter d'autres ingrédients de plus fraîche date comme la réparation de masse de Shashkov [136, 148].

### Unité et complémentarité des deux sujets

Malgré des différences manifestes au niveau des caractéristiques et des enjeux, comme en témoigne le Tableau 2.1, les deux sujets de recherche en simulation présentent toutefois des similitudes et se regroupent naturellement en un seul « pôle de compétence » :

- Les modèles EDP dans les deux problèmes possèdent la même structure car ils reposent sur les lois fondamentales de la mécanique des fluides. En particulier, on peut faire l'équivalence abstraite entre *polyphasique* et *multi-espèce*. La théorie des systèmes paraboliques-hyperboliques est un outil indispensable pour ces modèles.
- Alors que la formulation ALE (Arbitrary Lagrange-Euler) est imposée par la structure même de IFP-C3D, et que les équations de TACITE se traitent traditionnellement en coordonnées eulériennes pures, il arrive (16) qu'on ait volontairement recours à cette formulation ALE pour fabriquer de nouveaux schémas dans TACITE.

- L'advection linéaire, qui constitue la troisième phase de la résolution de IFP-C3D et sur laquelle on se focalise dans le sujet des moteurs, est aussi une source d'inspiration pour affronter le cas non-linéaire de TACITE. D'ailleurs, la nouvelle procédure que nous proposons ⟨18⟩ pour la reconstruction non-linéaire au second ordre par limitation de pentes dans le transport simultané de plusieurs inconnues scalaires répond à la même difficulté rencontrée dans les deux cas.

|                            |                                       |   |
|----------------------------|---------------------------------------|---|
| <i>contexte métier</i>     | écoulement en conduite                | combustion moteur                       |
| <i>mélange</i>             | polyphasique                          | multi-espèce                            |
| <i>nom de code</i>         | TACITE                                | IFP-C3D                                 |
| <i>dimension spatiale</i>  | 1-D                                   | 3-D                                     |
| <i>difficulté</i>          | non-linéarité des lois de fermeture   | mobilité et déformation du maillage     |
| <i>robustesse</i>          | priorité 1                            | priorité 2                              |
| <i>précision</i>           | non prioritaire                       | priorité 1                              |
| <i>rapidité</i>            | priorité 2                            | non prioritaire                         |
| <i>conservativité</i>      | par construction                      | post-traitement                         |
| <i>techniques étudiées</i> | schémas de relaxation multirésolution | schémas Iserles-Roe réparation de masse |
| <i>chapitre</i>            | <b>5</b>                              | <b>7</b>                                |

TABLEAU 2.1 – Les deux sujets de recherche en simulation.

### 2.2.2 Réduction de modèle et contrôle

Toujours dans l'horizon des alternatives pour les écoulements en conduites, mais du côté des modèles cette fois, j'ai pu travailler sur des variantes du modèle EDP en place.

#### Réduire par nécessité

En se « débarassant » d'effets acoustiques présents dans le modèle d'origine mais qui sont accessoires, voire encombrants, pour l'ingénieur pétrolier, ces variantes ont pour vocation de répondre plus efficacement à des besoins spécifiques en simulation, en analyse et en contrôle.

À cette fin, et en liaison avec Henri Viviand (Principia), nous avons élaboré ⟨6⟩ le modèle NPW (No Pressure Waves). Le caractère mixte hyperbolique-parabolique de NPW sous de très faibles hypothèses [81, 82] le rend ainsi plus attrayant que son homologue DFM (Drift-Flux Model) de départ. À partir de NPW, il est possible de se livrer à des réductions encore plus drastiques, en allant par exemple vers des modèles algébro-différentiels sur des configurations géométriques particulières. Ce genre de modèles réduits a permis non seulement de simuler les tout premiers cas de *severe-slugging*<sup>1</sup> ⟨35, 36⟩, mais aussi d'examiner le phénomène de *severe-slugging* au moyen de la théorie des systèmes dynamiques [92–94]. C'est ce qui a été tenté lors de la thèse d'Érich Zakarian [60], dont les principaux résultats sont présentés dans ⟨20⟩.

1. cas d'opération particulièrement raide où la solution est périodique en temps, voir chapitre 6

### Réduire pour savoir contrôler

Sans aller jusqu'à cet extrême, d'autres modèles réduits dérivés de NPW nous placent en bonne posture pour nous attaquer à la recherche de stratégies de contrôle dans le but d'éliminer le phénomène de severe-slugging. Ce dernier est indésirable en raison de ses nombreuses nuisances vis-à-vis des installations et de la production. C'est l'objet de la thèse d'Emmanuel Duret [51], dans laquelle nous approfondissons avec Pierre Rouchon (École des Mines de Paris) deux pistes : contrôle par prélèvement et par réinjection. La lisibilité structurelle des modèles suggère des choix de contrôle judicieux et rend possible une analyse mathématique poussée permettant de prouver la stabilité des algorithmes de contrôle et de dimensionner correctement les dispositifs. Quant à leur validité, elle est démontrée a posteriori par expérimentation sur boucles d'essai. Les résultats, présentés dans ⟨25⟩, ont donné lieu au dépôt d'un brevet ⟨33⟩.

Contrepoids de la simulation, le contrôle oblige à adopter des réflexes différents. Autant en simulation, on est à l'affût de modèles prédictifs sophistiqués pour satisfaire le besoin légitime de précision, autant en contrôle, ce qui compte est l'intelligence de la commande à mettre en œuvre [99, 102], pour laquelle un modèle minimaliste, obtenu « à la hache » via des hypothèses dont la validité est a priori restreinte, suffit amplement.

## 2.3 Travaux absents de ce mémoire

Ce sont des travaux qui ne s'inscrivent pas dans la ligne directrice fixée.

La loi de fermeture hydrodynamique complète de TACITE a toujours été l'objet de débats entre numériciens et physiciens de l'équipe, en raison de son coût d'évaluation et surtout de ses singularités, responsables d'une grande partie des problèmes numériques. Avec Sandrine Decarre, puis Emmanuel Duret et Yannick Peysson, nous avons entrepris de mettre au point et de promouvoir une loi dite synthétique, qui se veut à la fois régulière, proche des données expérimentales et peu chère. Une autre approche utilisant les réseaux de neurones a aussi été menée en liaison avec (mais essentiellement par) Isabelle Rey-Fabret ⟨34⟩.

Dans le domaine des moteurs, faisant suite à la thèse d'Antoine Durand [50], celle de Guillaume Gautier [52] a étendu au cas des écoulements multi-espèces réactifs les travaux sur les méthodes numériques en maillage hybride non structuré, en tant qu'alternatives à celle officiellement implantée dans IFP-C3D (qui exige un maillage structuré).

Sous l'impulsion de Didier Granjeon [54] et Roland Masson [57], j'ai effectué une assez longue incursion en géologie, au début de la thèse de Véronique Gervais [53] sur les modèles stratigraphiques sous contrainte d'érosion. En marge de la contribution à la formulation mathématique du modèle ⟨9⟩, j'ai aussi transposé à ce problème les techniques de recherche d'invariants de Riemann pour le modèle NPW. Ces invariants sont utiles pour la vérification du code de calcul.

Plus récemment, dans sa thèse sur la commande optimale pour la calibration des moteurs de véhicules hybrides, Grégory Rousseau [59] a eu une idée fort innovante destinée à accélérer notablement le calcul de la trajectoire optimale par rapport aux approches classiques comme la méthode de tir ou la programmation dynamique. Dans certains cas particuliers, j'apporte des preuves de convergence de son algorithme ⟨32⟩.

## Liste des publications

### 3.1 Articles dans des revues avec comité de lecture

#### Parus

- ⟨1⟩ R. GLOWINSKI AND Q. H. TRAN, *Constrained optimization in reflection tomography : the augmented Lagrangian method*, East-West J. Numer. Math, 1 (1993), pp. 213–234.
- ⟨2⟩ Q. H. TRAN AND A. BAMBERGER, *Propagation and attenuation of a Ricker pulse in one-dimensional randomly heterogeneous media : a numerical study*, Wave Motion, 17 (1993), pp. 49–62.
- ⟨3⟩ Q. H. TRAN, L. JANNAUD, AND P. ADLER, *Coda spectral power and apparent attenuation factor of acoustic waves in 3-d random media*, J. Acoust. Soc. Am., 94 (1993), pp. 2397–2407.
- ⟨4⟩ L. ANNÉ, Q. H. TRAN, AND W. W. SYMES, *Dispersion and cost analysis of some finite difference schemes in one-parameter acoustic wave modeling*, Comput. Geosci., 1 (1997), pp. 1–33.
- ⟨5⟩ A. BAMBERGER, R. GLOWINSKI, AND Q. H. TRAN, *A domain decomposition method for the acoustic wave equation with discontinuous coefficients and grid change*, SIAM J. Numer. Anal., 34 (1997), pp. 603–639.
- ⟨6⟩ J.-M. MASELLA, Q. H. TRAN, D. FERRÉ, AND C. PAUCHON, *Transient simulation of two-phase flows in pipes*, Int. J. Multiphase Flow, 24 (1998), pp. 739–755.
- ⟨7⟩ L. ANNÉ, P. JOLY, AND Q. H. TRAN, *Construction and analysis of higher-order finite-difference schemes for the 1-d wave equation*, Comput. Geosci., 4 (2000), pp. 207–249.
- ⟨8⟩ Q. H. TRAN AND B. SCHEURER, *High-order monotonicity-preserving compact schemes for linear advection on 2-d irregular meshes*, J. Comput. Phys., 175 (2002), pp. 454–486.
- ⟨9⟩ R. EYMARD, T. GALLOUËT, D. GRANJEON, R. MASSON, AND Q. H. TRAN, *Multilithology stratigraphic model under maximum erosion rate constraint*, Internat. J. Numer. Methods. Eng., 60 (2004), pp. 527–548.
- ⟨10⟩ M. BAUDIN, C. BERTHON, F. COQUEL, R. MASSON, AND Q. H. TRAN, *A relaxation method for two-phase flow models with hydrodynamic closure law*, Numer. Math., 99 (2005), pp. 411–440.

- ⟨11⟩ M. BAUDIN, F. COQUEL, AND Q. H. TRAN, *A semi-implicit relaxation scheme for modelling two-phase flow in a pipeline*, SIAM J. Sci. Comput., 27 (2005), pp. 914–936.
- ⟨12⟩ F. COQUEL, M. POSTEL, N. POUSSINEAU, AND Q. H. TRAN, *Multiresolution technique and explicit-implicit scheme for multicomponent flows*, J. Numer. Math., 14 (2006), pp. 187–216.
- ⟨13⟩ N. ANDRIANOV, F. COQUEL, M. POSTEL, AND Q. H. TRAN, *A relaxation multi-resolution scheme for accelerating realistic two-phase flows calculations in pipelines*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 54 (2007), pp. 207–236.

### Soumis et à paraître

- ⟨14⟩ M. BAUDIN, F. COQUEL, AND Q. H. TRAN, *A relaxation method via the Born-Infeld system*, (2007). Soumis.
- ⟨15⟩ —, *A relaxation scheme for two-phase multi-component flows*, (2008). Soumis.
- ⟨16⟩ F. COQUEL, Q. L. NGUYEN, M. POSTEL, AND Q. H. TRAN, *Entropy-satisfying relaxation method with large time-steps for Euler IBVPs*, (2007). Soumis.
- ⟨17⟩ —, *Local Time Stepping applied to explicit-implicit schemes for hyperbolic systems*, (2007). Soumis.
- ⟨18⟩ Q. H. TRAN, *Second-order slope limiters for the simultaneous linear advection of (not so) independent variables*, Comm. Math. Sci., 6 (2008). À paraître.
- ⟨19⟩ Q. H. TRAN AND B. SCHEURER, *A high-order monotonicity-preserving scheme for linear scalar advection on 3-d irregular meshes*, Comm. Comput. Phys., (2007). Accepté.

## 3.2 Actes de colloques avec comité de lecture

### Parus

- ⟨20⟩ É. ZAKARIAN AND Q. H. TRAN, *A differential-algebraic model for two-phase flows instabilities in pipeline-riser systems*, in Proceedings of the ASME Pressure Vessels and Piping Conference, Boston, Massachusetts, August 1999, W. L. Cheng, A. Hulin, M. Souli, and S. Itoh, eds., vol. 396 of PVP, The American Society of Mechanical Engineers, 1999.
- ⟨21⟩ R. EYMARD, T. GALLOUËT, V. GERVAIS, D. GRANJEON, R. MASSON, AND Q. H. TRAN, *Multi-lithology stratigraphic model under maximum erosion rate constraint*, in Proceedings of the 3rd Symposium on Finite Volumes for Complex Applications, Porquerolles, June 2002, R. Herbin and D. Kröner, eds., vol. 3 of Finite Volumes for Complex Applications, London, 2002, Hermes Penton Science, pp. 521–528.
- ⟨22⟩ Q. H. TRAN, I. FAILLE, C. PAUCHON, AND F. WILLIEN, *The No Pressure Wave (NPW) model : Application to oil and gas transport*, in Proceedings of the 3rd Symposium on Finite Volumes for Complex Applications, Porquerolles, June 2002, R. Herbin and D. Kröner, eds., vol. 3 of Finite Volumes for Complex Applications, London, 2002, Hermes Penton Science, pp. 687–694.

- ⟨23⟩ Q. H. TRAN AND B. SCHEURER, *High-order monotonicity-preserving schemes for linear advection on 2-d irregular meshes*, in Proceedings of the 3rd Symposium on Finite Volumes for Complex Applications, Porquerolles, June 2002, R. Herbin and D. Kröner, eds., vol. 3 of Finite Volumes for Complex Applications, London, 2002, Hermes Penton Science, pp. 423–430.
- ⟨24⟩ M. BAUDIN, F. COQUEL, AND Q. H. TRAN, *A time semi-implicit relaxation scheme for two-phase flows in pipelines*, in Proceedings of the 5th European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications, Prague, August 2003, M. Feistauer, V. Dojelsí, P. Knobloch, and K. Najzar, eds., vol. 5, Berlin, 2004, Springer, pp. 102–111.
- ⟨25⟩ E. DURET, Y. PEYSSON, Q. H. TRAN, AND P. ROUCHON, *Active bypass to eliminate severe-slugging in multiphase production*, in Proceedings of the 4th North American Conference on Multiphase Technology, Banff, June 2004, J. Brill, ed., Cranfield, 2004, BHR Group Limited, pp. 205–223.
- ⟨26⟩ N. ANDRIANOV, F. COQUEL, M. POSTEL, AND Q. H. TRAN, *A linearly semi-implicit AMR method for 1-d gas-liquid flows*, in Proceedings of the 3rd International Conference on Computational Methods in Multiphase Flow, Portland, Maine, October 2005, A. A. Mammoli and C. A. Brebbia, eds., no. III in Computational Methods in Multiphase Flows, Berlin, 2005, WIT Press, pp. 295–304.
- ⟨27⟩ —, *Semi-implicit multiresolution for multiphase flows*, in Proceedings of the 6th European Conference on Numerical Mathematics and Advanced Applications, Santiago de Compostela, July 2005, A. Bermúdez de Castro, D. Gómez, P. Quintela, and P. Salgado, eds., vol. 6 of Numerical Mathematics and Advanced Applications, Berlin, 2006, Springer, pp. 814–821.
- ⟨28⟩ F. COQUEL, Q. L. NGUYEN, M. POSTEL, AND Q. H. TRAN, *Large time-step positivity-preserving method for multiphase flows*, in Proceedings of the 11th International Conference on Hyperbolic Problems : Theory, Numerics and Applications, Lyon, July 2006, S. Benzoni-Gavage and D. Serre, eds., Berlin, 2008, Springer-Verlag, pp. 849–856.
- ⟨29⟩ —, *Time-varying grids for gas dynamics*, in Proceedings of the 14th European Conference on Mathematics for Industry, Madrid, July 2006, L. L. Bonilla, M. Moscoso, G. Platero, and J. M. Vega, eds., vol. 12 of Mathematics in Industry, Berlin, 2008, Springer-Verlag, pp. 887–891.

### Soumis et à paraître

- ⟨30⟩ F. COQUEL, Q. L. NGUYEN, M. POSTEL, AND Q. H. TRAN, *Lagrange-projection scheme for two-phase flows : 1. Application to realistic test cases*, in Proceedings of the 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Zürich, July 2007.
- ⟨31⟩ —, *Lagrange-projection scheme for two-phase flows : 2. Boundary conditions and second-order enhancement*, in Proceedings of the 6th International Congress on Industrial and Applied Mathematics, Zürich, July 2007.
- ⟨32⟩ G. ROUSSEAU, Q. H. TRAN, AND D. SINOQUET, *SCOP : a Sequential Constraint-free Optimal control Problem algorithm*, in Proceedings of the 20th Chinese Control and Decision Conference, Yantai, July 2008.

### 3.3 Brevets

- ⟨33⟩ E. DURET AND Q. H. TRAN, *Method and device for neutralizing, by controlled gas injection, the formation of liquid slugs at the foot of a riser connected to a multiphase fluid transport pipe*, 2006. US7103521 (FR2822191, GB2374161, NO322033B).
- ⟨34⟩ I. REY-FABRET, V. HENRIOT, AND Q. H. TRAN, *Method for modelling hydrodynamic characteristics of multiphase flows using neuronal networks*, 2007. US7177787 (FR2848320, GB2412466).

### 3.4 Rapports complémentaires

- ⟨35⟩ C. BERGER, J. B. QUINCY, AND Q. H. TRAN, *Simulation des écoulements diphasiques gaz-liquide dans les conduites pétrolières*, Rapport IFP 42231, Institut Français du Pétrole, 1995.
- ⟨36⟩ Q. H. TRAN, *Simulation des instabilités hydrodynamiques dans les systèmes de pipeline-riser par couplage de deux modèles diphasiques*, Rapport IFP 42412, Institut Français du Pétrole, 1995.
- ⟨37⟩ Y. KÉROUANI AND Q. H. TRAN, *Amélioration du traitement numérique des câbles flexibles sous-marins en statique et dynamique*, Rapport IFP 43219, Institut Français du Pétrole, 1996.
- ⟨38⟩ S. PATAULT AND Q. H. TRAN, *Modèle et schéma numérique du code TACITE-NPW*, Rapport IFP 42415, Institut Français du Pétrole, 1996.
- ⟨39⟩ J. J. RABEYRIN AND Q. H. TRAN, *Problème de Sturm-Liouville pour le calcul de propagation des wormholes en fracturation acide*, Rapport IFP 43129, Institut Français du Pétrole, 1996.
- ⟨40⟩ Q. H. TRAN, *Schémas de type multidimensionnel en maillage déformé structuré pour l'advection scalaire linéaire I : CTU et Galerkin discontinus*, Rapport IFP 45163, Institut Français du Pétrole, 1998.
- ⟨41⟩ L. DOMINGOS, C. LORRET, E. DURET, AND Q. H. TRAN, *Logiciel TACITE : Étude d'un contrôle du severe-slugging*, Rapport IFP 54174, Institut Français du Pétrole, 2000.
- ⟨42⟩ Q. H. TRAN, *Schémas de type multidimensionnel en maillage déformé structuré pour l'advection scalaire linéaire II : Schémas compacts*, Rapport IFP 54078, Institut Français du Pétrole, 2000.
- ⟨43⟩ M. BAUDIN, F. DAUDE, AND Q. H. TRAN, *Schémas de relaxation explicite pour l'équation d'énergie dans TACITE*, Rapport IFP 56986, Institut Français du Pétrole, 2002.
- ⟨44⟩ Q. H. TRAN, *Schémas de type multidimensionnel en maillage déformé structuré pour l'advection scalaire linéaire IV : Passage en 3-D*, Rapport IFP 57295, Institut Français du Pétrole, 2003.
- ⟨45⟩ ———, *Schémas de type multidimensionnel en maillage déformé structuré pour l'advection scalaire linéaire VI : Intégration du schéma d'Iserles dans la phase transport d'un code d'écoulement fluide non-linéaire 1-D*, Rapport IFP 59638, Institut Français du Pétrole, 2007.

# Bibliographie générale

## 4.1 Habilitations et thèses IFP

- [46] L. ANNÉ, *Schémas d'ordre élevé pour l'équation des ondes en milieux hétérogènes*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1996.
- [47] B. ATFEH, *Méthode des lignes de courant appliquée à la modélisation des bassins*, Thèse de doctorat, Université de Provence, 2003.
- [48] M. BAUDIN, *Méthodes de relaxation pour la simulation des écoulements polyphasiques dans les conduites pétrolières*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2003.
- [49] S. BENZONI-GAVAGE, *Analyse Numérique des Modèles Hydrodynamiques d'Écoulements Diphasiques Instationnaires dans les Réseaux de Production Pétrolière*, thèse de doctorat, École Normale Supérieure de Lyon, 1991.
- [50] A. DURAND, *Modélisation des équations de l'hydrodynamique moteur sur maillage non structuré hybride*, Thèse de doctorat, École Centrale Paris, 1996.
- [51] E. DURET, *Dynamique et contrôle des écoulements polyphasiques*, Thèse de doctorat, École des Mines de Paris, 2005.
- [52] G. GAUTIER, *Méthodes numériques pour les écoulements multi-espèces réactifs : une étude unidimensionnelle*, Rapport IFP 53032, Institut Français du Pétrole, 2000.
- [53] V. GERVAIS, *Étude et simulation d'un modèle stratigraphique multi-lithologique sous contrainte de taux d'érosion maximal*, Thèse de doctorat, Université de Marne-la-Vallée, 2004.
- [54] D. GRANJEON, *Modélisation stratigraphique déterministe : Conception et applications d'un modèle diffusif 3-D multi-lithologique*, Thèse de doctorat, Université de Rennes, 1996.
- [55] P. LAILLY, *Inversion de données sismiques en exploration pétrolière*, Habilitation à diriger des recherches, Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2000.
- [56] J. M. MASELLA, *Quelques méthodes numériques pour les écoulements diphasiques bifluïdes en conduites pétrolières*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 1997.
- [57] R. MASSON, *Contributions à la simulation numérique des écoulements en milieu poreux et des modèles stratigraphiques*, Habilitation à diriger des recherches, Université de Marne-la-Vallée, 2006.

- [58] Q. L. NGUYEN, *Adaptation dynamique de maillage pour les écoulements diphasiques en conduites pétrolières. Application à la simulation des phénomènes de terrain-slugging et severe-slugging*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2008.
- [59] G. ROUSSEAU, *Commande optimale pour la calibration des moteurs de véhicules hybrides*, Thèse de doctorat, École des Mines de Paris, 2008.
- [60] É. ZAKARIAN, *Modélisation et analyse des instabilités d'écoulements diphasiques dans les conduites pétrolières du type pipeline-riser*, Thèse de doctorat, Université Paris 13, Institut Galilée, 2000.

## 4.2 Modèles physiques

- [61] A. A. AMSDEN, P. J. O'ROURKE, AND T. D. BUTLER, *KIVA-II : A computer program for chemically reactive flows with sprays*, Report LA-11560-MS, Los Alamos National Laboratory, 1989.
- [62] M. BORN AND L. INFELD, *Foundations of a new field theory*, Proc. Roy. Soc., 144 (1934), pp. 425–451.
- [63] V. BOUVIER, *Algorithmes de résolution compositionnelle dans TACITE*, Rapport IFP 42485, Institut Français du Pétrole, 1995.
- [64] V. DE HENAU AND G. D. RAITHBY, *A transient two-fluid model for the simulation of slug flow in pipelines : I. Theory*, Int. J. Multiphase Flow, 21 (1995), pp. 351–363.
- [65] J. FABRE, L. PÉRESSON, J. CORTEVILLE, M. BERNICOT, AND P. OZON, *Écoulements diphasiques instables dans les systèmes pipeline/riser*, Revue de l'Institut Français du Pétrole, 43 (1988), pp. 815–825.
- [66] W. T. HANCOX, R. L. FERCH, W. S. LIU, AND R. E. NIEMAN, *One-dimensional models for transient gas-liquid flows in ducts*, Int. J. Multiphase Flows, 6 (1980), pp. 25–40.
- [67] V. HENRIOT, E. DURET, É. HEINTZÉ, AND A. COURBOT, *Multiphase production control : Application to slug flow*, Oil and Gas Science and Technology, 57 (2002), pp. 87–98.
- [68] C. W. HIRT, A. A. AMSDEN, AND J. L. COOK, *An arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds*, J. Comput. Phys., 14 (1974), pp. 227–253.
- [69] M. J. HOLST, *Notes on the KIVA-II software and chemically reactive fluid mechanics*, Report UCRL-ID-112019, Lawrence Livermore National Laboratory, California, 1992.
- [70] A. V. JONES AND A. PROSPERETTI, *On the suitability of first-order differential models for two-phase flow prediction*, Int. J. Multiphase Flow, 11 (1985), pp. 133–148.
- [71] K. OHKAWA AND R. T. LAHEY, JR, *The analysis of CCFL using drift-flux models*, Nuclear Eng. Design, 61 (1980), pp. 245–255.
- [72] C. PAUCHON, H. DHULESIA, G. BINH-CIRLOT, AND J. FABRE, *TACITE : A transient tool for multiphase pipeline and well simulation*, SPE Annual Technical Conference and Exhibition, New Orleans, September 1994, 1994. SPE Paper 28545.

- [73] C. SARICA AND O. SHOHAM, *A simplified transient model for pipeline-riser systems*, Chem. Eng. Science, 46 (1991), pp. 2167–2179.
- [74] B. SCHEURER, *Introduction à l'analyse des écoulements réactifs dans le code KIVA*, Rapport IFP 38045, Institut Français du Pétrole, 1990.
- [75] H. B. STEWART AND B. WENDROFF, *Two-phase flow : Models and methods*, J. Comput. Phys., 56 (1984), pp. 363–409.
- [76] J. H. STUHMILLER, *The influence of interfacial pressure forces on the character of two-phase flow model equations*, Int. J. Multiphase Flow, 3 (1977), pp. 551–560.
- [77] Y. TAITEL, O. SHOHAM, AND J. P. BRILL, *Simplified transient solution and simulation of two-phase flow in pipelines*, Chem. Eng. Science, 44 (1989), pp. 1353–1359.
- [78] Y. TAITEL, S. VIERKANDT, O. SHOHAM, AND J. P. BRILL, *Severe slugging in a riser system : Experiments and modelling*, Int. J. Multiph. Flow, 16 (1990), pp. 57–68.
- [79] J. VIDAL, *Thermodynamique : méthodes appliquées au raffinage et au génie chimique*, Technip, Paris, 1973.
- [80] H. VIVIAND, *Étude des écoulements instationnaires à faible nombre de Mach avec application au bruit aérodynamique*, J. Mécanique, 9 (1970), pp. 573–599.
- [81] ———, *Analyse de modèles simplifiés d'écoulements diphasiques transitoires*, Rapport d'étude Principia IFP.RET.43.004.01, Principia Recherche Développement S.A., La Seyne-sur-Mer, 1994.
- [82] ———, *Modèles simplifiés d'écoulements dans les conduites pétrolières*, Rapport d'étude Principia IFP.RET.43.069.02, Principia Recherche Développement S.A., La Seyne-sur-Mer, 1996.
- [83] G. B. WHITHAM, *Linear and Nonlinear Waves*, vol. 258 of Pure and Applied Mathematics, Wiley-Interscience, New York, 1974.
- [84] N. ZUBER AND J. FINDLAY, *Average volumetric concentration in two-phase flow systems*, J. Heat Transfer, 87 (1965), pp. 453–458.

### 4.3 Analyse mathématique

- [85] F. BOUCHUT, *A reduced stability condition for nonlinear relaxation to conservation laws*, J. Hyp. Diff. Eq., 1 (1994), pp. 149–170.
- [86] G. Q. CHEN, C. D. LEVERMORE, AND T. P. LIU, *Hyperbolic conservation laws with stiff relaxation terms and entropy*, Comm. Pure Appl. Math., 47 (1994), pp. 787–830.
- [87] P. J. DAVIS, *Interpolation and Approximation*, Dover Publications, New York, 1975.
- [88] B. DESPRÉS AND R. LOUBÈRE, *Convergence of repair algorithms in 1-D*, Int. J. Finite Volumes. À paraître.
- [89] B. DESPRÉS AND C. MAZERAN, *Lagrangian gas dynamics in two-dimensions and Lagrangian systems*, Arch. Ration. Mech. Anal., 178 (2005), pp. 327–372.
- [90] F. DUBOIS AND P. LEFLOCH, *Boundary conditions for nonlinear hyperbolic systems of conservation laws*, J. Diff. Eq., 71 (1988), pp. 93–122.

- [91] M. GARAVELLO, R. NATALINI, B. PICCOLI, AND A. TERRACINA, *Conservation laws with discontinuous flux*, Networks and Heterogeneous Media, 2 (2007), pp. 159–179.
- [92] J. GUCKENHEIMER AND P. HOLMES, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, vol. 42 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [93] G. IOOSS AND M. ADELMAYER, *Topics in Bifurcation Theory and Applications*, vol. 3 of Advanced Series in Nonlinear Dynamics, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1992.
- [94] Y. A. KUZNETSOV, *Elements of Applied Bifurcation Theory*, vol. 112 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [95] T. P. LIU, *Hyperbolic conservation laws with relaxation*, Comm. Math. Phys., 108 (1987), pp. 153–175.
- [96] A. MAJDA AND R. L. PEGO, *Stable viscosity matrices for systems of conservation laws*, J. Diff. Eq., 56 (1985), pp. 229–262.
- [97] R. NATALINI, *Convergence to equilibrium for the relaxation approximations of conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math., 49 (1996), pp. 1–30.
- [98] R. OSSERMAN, *A Survey of Minimal Surfaces*, Dover Phoenix Editions, New York, 2002.
- [99] N. PETIT AND P. ROUCHON, *Flatness of heavy chain systems*, SIAM J. Control Optim., 40 (2001), pp. 475–495.
- [100] N. SEGUIN AND J. VOVELLE, *Analysis and approximation of a scalar conservation law with a flux function with discontinuous coefficient*, M3AS, 13 (2003), pp. 221–257.
- [101] D. SERRE, *Systèmes de Lois de Conservation. II : Structure Géométrique, Oscillation et Problèmes Mixtes*, Collection Fondations, Diderot Éditeur Arts et Sciences, Paris, 1996.
- [102] G. J. SILVA, A. DATTA, AND S. P. BHATTCHARYYA, *PID Controllers for Time-Delay Systems*, Control Engineering, Birkhäuser, Boston, 2005.

#### 4.4 Méthodes numériques

- [103] R. ABGRALL AND M. MEZINE, *Construction of second order accurate monotone and stable residual distribution schemes for unsteady flow problems*, J. Comput. Phys., 188 (2003), pp. 16–55.
- [104] J. B. BELL, C. N. DAWSON, AND G. R. SHUBIN, *An unsplit, higher order Godunov method for scalar conservation laws in multiple dimensions*, J. Comput. Phys., 74 (1988), pp. 1–24.
- [105] D. J. BENSON, *Momentum advection on a staggered mesh*, J. Comput. Phys., 100 (2003), pp. 143–162.
- [106] S. J. BILLETT AND E. F. TORO, *On WAF-type schemes for multidimensional hyperbolic conservation laws*, J. Comput. Phys., 130 (1997), pp. 1–24.

- [107] F. BOUCHUT, *Nonlinear Stability of Finite Volume Methods for Hyperbolic Conservation Laws and Well-Balanced Schemes for Sources*, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser, 2004.
- [108] P. CARGO AND A. Y. LEROUX, *Un schéma équilibre adapté au modèle d'atmosphère avec termes de gravité*, C. R. Acad. Sci., Sér. 1, Math., 318 (1994), pp. 73–76.
- [109] C. CHALONS, *Bilans d'entropie discrets dans l'approximation numérique des chocs non-classiques. Application aux équations de Navier-Stokes multi-pression 2-D et à quelques systèmes visco-capillaires*, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie, 2002.
- [110] J. J. CHATTOT AND S. MALLET, *A “box-scheme” for the Euler equations*, in Nonlinear Hyperbolic Problems, C. Carasso, P. A. Raviart, and D. Serre, eds., vol. 1270 of Lecture Notes in Mathematics, Berlin, 1987, Springer-Verlag, pp. 82–102.
- [111] P. G. CIARLET, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, vol. 4 of Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- [112] B. COCKBURN, S. HOU, AND C. W. SHU, *TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws IV : The multidimensional case*, Math. Comp., 54 (1990), pp. 545–581.
- [113] B. COCKBURN AND C. W. SHU, *TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws II : General framework*, Math. Comp., 52 (1989), pp. 411–435.
- [114] A. COHEN, N. DYN, S. M. KABER, AND M. POSTEL, *Multiresolution schemes on triangles for scalar conservation laws*, J. Comput. Phys., 161 (2000), pp. 264–286.
- [115] A. COHEN, S. M. KABER, S. MÜLLER, AND M. POSTEL, *Fully adaptive multi-resolution finite volume schemes for conservation laws*, Math. Comp., 72 (2003), pp. 183–225.
- [116] P. COLELLA, *Multidimensional upwind methods for hyperbolic conservation laws*, J. Comput. Phys., 87 (1990), pp. 171–200.
- [117] F. COQUEL, E. GODLEWSKI, B. PERTHAME, A. IN, AND P. RASCLE, *Some new Godunov and relaxation methods for two-phase flow problems*, in Godunov methods : Theory and Applications, Proceedings of the International Conference on Godunov methods in Oxford, 1999, New York, 2001, Kluwer Academic/Plenum Publishers, pp. 179–188.
- [118] F. COQUEL AND B. PERTHAME, *Relaxation of energy and approximate Riemann solvers for general pressure laws in fluid dynamics*, SIAM J. Numer. Anal., 35 (1998), pp. 2223–2249.
- [119] B. DESPRÉS AND F. LAGOUTIÈRE, *Un schéma non-linéaire anti-dissipatif pour l'équation d'advection linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. 1 : Math., 328 (1999), pp. 939–943.
- [120] ———, *Genuinely multi-dimensional non-dissipative finite-volume schemes for transport*, Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 17 (2007), pp. 321–328.
- [121] G. DHATT AND G. TOUZOT, *Une Présentation de la Méthode des Éléments Finis*, Collection Université de Compiègne, Maloine S. A. Éditeur, Paris, 1984.
- [122] S. EVJE AND T. FLÅTTEN, *Weakly implicit numerical schemes for a two-fluid model*, SIAM J. Sci. Comput., 26 (2005), pp. 1449–1484.

- [123] I. FAILLE AND É. HEINTZÉ, *A rough finite volume scheme for modeling two phase flow in a pipeline*, *Computers and Fluids*, 28 (1999), pp. 213–241.
- [124] T. GALLOUËT, J.-M. HÉRARD, AND N. SEGUIN, *A hybrid scheme to compute contact discontinuities in one-dimensional Euler systems*, *M2AN*, 36 (2003), pp. 1133–1156.
- [125] ———, *Numerical modelling of two-phase flows using the two-fluid two-pressure approach*, *M3AS*, 14 (2004), pp. 663–700.
- [126] E. GODLEWSKI AND P. A. RAVIART, *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, vol. 118 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [127] A. HARTEN, *Multiresolution algorithms for the numerical solutions of hyperbolic conservation laws*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 48 (1995), pp. 1305–1342.
- [128] A. HARTEN, P. D. LAX, AND B. VAN LEER, *On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws*, *SIAM Review*, 25 (1983), pp. 35–61.
- [129] M. E. HUBBARD AND P. L. ROE, *Compact high-resolution algorithms for time-dependent advection on unstructured grids*, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 33 (2000), pp. 711–736.
- [130] A. ISERLES, *Generalised leapfrog schemes*, *IMA J. Numer. Anal.*, 6 (1986), pp. 381–392.
- [131] S. JIN AND Z. P. XIN, *The relaxation schemes for systems of conservation laws in arbitrary space dimension*, *Comm. Pure Appl. Math.*, 48 (1995), pp. 235–276.
- [132] C. W. KIM, *Accurate multi-level schemes for advection*, *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 41 (2003), pp. 471–494.
- [133] B. LARROUTUROU, *How to preserve the mass fraction positivity when computing multi-component flows*, *J. Comput. Phys.*, 95 (1991), pp. 59–84.
- [134] R. J. LEVEQUE, *High-resolution conservative algorithms for advection in incompressible flow*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 33 (1996), pp. 627–665.
- [135] ———, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, vol. 31 of Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [136] R. LOUBÈRE AND M. SHASHKOV, *A subcell remapping method on staggered polygonal grids for arbitrary-lagrangian-eulerian methods*, *J. Comput. Phys.*, 209 (2005), pp. 105–138.
- [137] J. M. MASELLA, I. FAILLE, AND T. GALLOUËT, *On an approximate Godunov scheme*, *Int. J. Comput. Fluid Dynam.*, 12 (1999), pp. 133–149.
- [138] W. A. MULDER AND B. VAN LEER, *Experiments with implicit upwind methods for the Euler equations*, *J. Comput. Phys.*, 59 (1985), pp. 232–246.
- [139] S. MÜLLER, *Adaptive Multiscale Schemes for Conservation Laws*, vol. 27 of Lecture Notes on Computational Science and Engineering, Springer, Berlin, 2003.
- [140] S. MÜLLER AND Y. STIRIBA, *Fully adaptive multiscale schemes for conservation laws employing locally varying time stepping*, *J. Sci. Comput.*, 30 (2007), pp. 493–531.
- [141] S. OSHER AND R. SANDERS, *Numerical approximations to nonlinear conservation laws with locally varying time and space grids*, *Math. Comp.*, 41 (1983), pp. 321–336.

- 
- [142] S. OSHER AND F. SOLOMON, *Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws*, Math. Comp., 38 (1982), pp. 339–374.
- [143] H. PAILLÈRE, J. BOXHO, G. DEGREGZ, AND H. DECONINCK, *Multidimensional upwind residual distribution schemes for the convection-diffusion equation*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 23 (1996), pp. 923–936.
- [144] J. G. RICE AND R. J. SCHNIPKE, *A monotone streamline upwind finite element method for convection-dominated flows*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 48 (1985), pp. 313–327.
- [145] P. L. ROE, *Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes*, J. Comput. Phys., 43 (1981), pp. 357–372.
- [146] ———, *Linear bicharacteristic schemes without dissipation*, SIAM J. Sci. Comput., 19 (1998), pp. 1405–1427.
- [147] P. L. ROE AND D. SIDILKOVER, *Optimum positive linear schemes for advection in two and three dimensions*, SIAM J. Numer. Anal., 29 (1992), pp. 1542–1568.
- [148] M. SHASHKOV AND B. WENDROFF, *The repair paradigm and application to conservation laws*, J. Comput. Phys., 198 (2004), pp. 265–277.
- [149] P. K. SWEBY, *High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal., 21 (1984), pp. 995–1011.
- [150] M. TADI AND J. ROMATE, *An approximate Riemann solver for a two-phase flow model with numerically given slip relation*, Comput. Fluids, 27 (1998), pp. 455–477.
- [151] E. F. TORO, *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics : A Practical Introduction*, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [152] B. VAN LEER, *Towards the ultimate conservative difference scheme V : A second-order sequel to Godunov’s method*, J. Comput. Phys., 32 (1979), pp. 101–136.
- [153] ———, *Multidimensional explicit difference schemes for hyperbolic conservation laws*, in Computing Methods in Applied Sciences and Engineering VI, R. Glowinski and J. L. Lions, eds., Amsterdam, 1984, Elsevier Science Publishers, North-Holland, pp. 493–497.
- [154] W. B. VANDERHEYDEN AND B. A. KASHIWA, *Compatible fluxes for van Leer advection*, J. Comput. Phys., 146 (1998), pp. 1–28.



# Écoulements en conduite : des simulations plus rapides avec garantie de robustesse

LES TRAVAUX DONT rend compte ce chapitre concernent les articles ⟨10–18⟩. Ils ont été réalisés en collaboration avec Frédéric Coquel et Marie Postel, du Laboratoire Jacques-Louis Lions, dans le cadre des thèses de Michaël Baudin [48] et de Quang Long Nguyen [58], du post-doctorat de Nikolay Andrianov et du stage de Nicole Poussineau.

## 5.1 Position du problème

### 5.1.1 Contexte industriel

Une partie essentielle des réserves en hydrocarbures de la planète se situe en eaux profondes. En raison des coûts de fabrication et d’installation des pipelines, les compagnies pétrolières préfèrent utiliser une seule conduite pour acheminer le mélange d’hydrocarbures présents sous différentes phases (gaz, liquide, solide) depuis la plate-forme d’extraction jusqu’à l’unité de traitement, où les phases du mélange seront finalement séparées. Ce choix, dit *polyphasique*, rentabilise certes les gisements, mais requiert une bonne connaissance de la physique de ces écoulements.

En effet, le caractère polyphasique du mélange introduit des phénomènes thermodynamiques et hydrodynamiques fort complexes, souvent nuisibles à la production<sup>1</sup>. Aussi, la problématique du transport polyphasique est-elle de décrire avec finesse l’écoulement à l’intérieur des conduites en termes de débits, de pression, de température et de taux de présence de chaque phase. En complément aux études expérimentales ayant servi à générer d’énormes banques de données, les compagnies pétrolières sont fortement demandeuses en outils de simulation numérique capables d’assister les opérateurs à piloter le mélange et d’aider à mieux dimensionner les équipements.

C’est dans cet objectif que l’IFP développe et commercialise le code TACITE (Transient Analysis Code IFP Total Elf) depuis une quinzaine d’années. Dans ce secteur très pointu, son principal concurrent est OLGA, un code norvégien basé sur un modèle mathématique différent.

---

1. Nous en verrons un exemple spectaculaire au chapitre 6

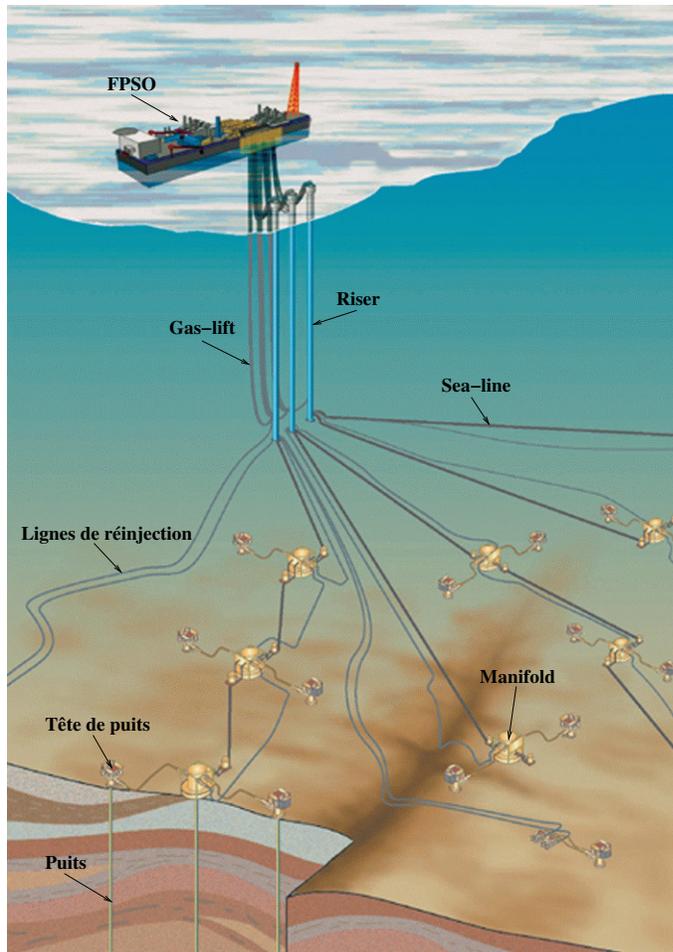


FIGURE 5.1 – Représentation d'un champ offshore.

### 5.1.2 Défis scientifiques

La conception des outils de simulation en la matière pose plusieurs défis aux spécialistes de l'analyse des modèles et de leur approximation numérique. Ces défis sont, dans un premier temps, liés aux trois exigences fondamentales que sont :

1. Une **robustesse** sans faille. Il n'est pas souhaitable que le code s'arrête inopinément, même sur des cas réputés « raides ». À supposer que le modèle utilisé ne contienne pas de pathologie inhérente, ce qui n'est pas évident en polyphasique, la satisfaction de cette exigence repose sur des propriétés de **stabilité** du schéma implémenté, laquelle dépend du respect de la **positivité** de certaines grandeurs physiques et du **principe du min-max** sur d'autres variables au cours des calculs.
2. Une **rapidité** d'exécution proche ou pas trop loin du *temps réel*. À cet égard, TACITE est pénalisé par le **coût CPU** élevé des appels aux lois de fermeture algébriques dont la complexité est censée refléter la réalité des données expérimentales. Minimiser le nombre de ces appels revêt donc une importance capitale.
3. Une **précision** accrue sur les ondes de transport, lesquelles sont les seules à intéresser

l'ingénieur. Cette exigence est à concilier avec celle de la robustesse : il est connu que la viscosité artificielle destinée à stabiliser les schémas détériore les fronts. Elle peut aussi entrer en conflit avec celle de la rapidité : pour être précis, on doit prendre des mailles suffisamment petites, mais pas trop...

Sous un regard plus expert, on s'aperçoit que les défis posés par la simulation numérique des conduites constituent, dans un deuxième temps, la majorité des « verrous » que les recherches en analyse numérique n'ont, pour l'heure, pas encore réussi à lever complètement. Ce sont par exemple :

- Le traitement des conditions aux limites. Dans TACITE, les données sont injectées dans le domaine intérieur à travers les conditions d'entrée et de sortie, d'où l'importance de bien discrétiser celles-ci [90].
- L'intégration des termes sources qui, dans le modèle, représentent la pesanteur et le frottement de la paroi [107, 108].
- La résolution numérique des systèmes hyperboliques contenant des produits non-conservatifs, éventuellement résonants, qui apparaissent soit directement dans le modèle considéré, soit indirectement via un sur-modèle introduit pour prendre en compte les *changements de section* ou les *changements d'inclinaison*.

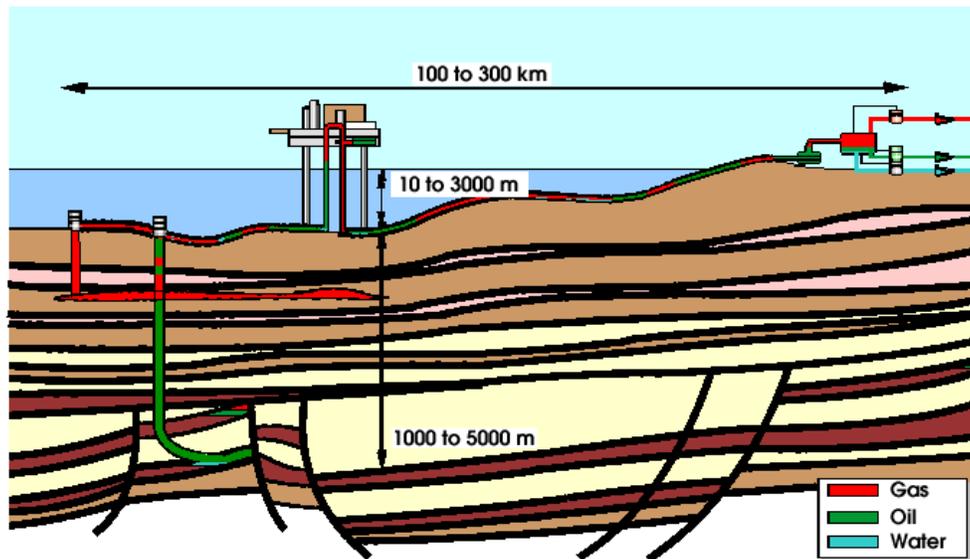


FIGURE 5.2 – De la mer à la terre.

### 5.1.3 Schéma actuel de TACITE

La méthode numérique actuellement en vigueur dans le code TACITE est un schéma de type VFRoe, initialement proposé par Masella et Gallouët [137], puis modifié par Faille et Heintzé [123]. Il est l'aboutissement d'une longue histoire, dont les étapes sont rappelées dans [48, pp. 26–28]. Une de ses spécificités est le caractère sélectivement implicite de son intégration temporelle : implicite par rapport aux *ondes de pression* (phénomènes acous-

tiques liés à la compressibilité et ayant peu d'intérêt pour le pétrolier), explicite par rapport aux *ondes de taux de vide* (phénomènes cinématiques liés au transport de la matière et qu'il faut capturer avec exactitude). Cette spécificité, qui fut une innovation majeure pour l'époque, vise à concilier les exigences de rapidité et la précision.

En s'inspirant de Roe [145] tout en se contentant d'une pseudo matrice de Roe, comme s'y livreront plus tard Tadi et Romate [150], puis Evje et Flåtten [122], VFRoe parvient à « stabiliser » les aspects numériques de TACITE, en ce sens qu'il fournit des résultats tout à fait satisfaisants dans la plupart des cas d'opération. Il donne lieu à des variantes qui s'appliquent à d'autres problèmes [124]. Néanmoins, force est de lui reconnaître quelques inconvénients :

- Malgré la semi-implication qui permet d'utiliser des pas de temps plus grands, il reste gourmand en temps de calcul, à cause des procédures numériques de calcul des valeurs propres et vecteurs propres des matrices jacobiniennes locales. Un *profiling* montre que ces calculs d'éléments propres occupent 41% du temps propre au schéma, soit 23% du temps total, tandis que les appels aux lois de fermeture représentent à eux seuls 45% de ce total.
- Dans des cas très difficiles, ces valeurs propres peuvent devenir complexes, ce qui signifie que le système cesse d'être hyperbolique et provoque l'arrêt de la simulation. Par ailleurs, il n'y a aucune certitude qui puisse être théoriquement établie quant à la positivité des densités des constituants ainsi qu'à l'absence d'oscillation dans les fractions massiques. Tout ce qu'on peut espérer en pratique est qu'en augmentant la viscosité artificielle, le test finira par « passer » !

#### 5.1.4 À la recherche d'un schéma idéal

Depuis 1999, dans le cadre d'une collaboration avec le *Laboratoire Jacques-Louis Lions*, a été engagée une réflexion en amont sur des schémas alternatifs qui pourraient un jour être mis en œuvre dans TACITE. Ces nouveaux schémas doivent impérativement :

1. Garantir, preuve sur papier si possible, la robustesse des simulations sous des conditions simples à expliciter. Par commodité, on usera désormais du vocable positivité pour désigner tous les aspects relatifs à cette exigence.
2. Accélérer notablement la rapidité des simulations, en s'autorisant au besoin des surcouches sophistiquées. Par habitude, on parlera dorénavant de **temps calcul** pour évoquer ce critère.
3. Maintenir une précision des résultats au moins équivalente à celle actuellement obtenue avec VFRoe, considérée comme déjà très satisfaisante (mais qu'il n'est pas interdit d'améliorer !)

Il va sans dire que, à un niveau moins urgent mais tout aussi capital, la réalisation de ces objectifs passe aussi par la conception de nouvelles techniques en vue de lever les « verrous » mentionnés plus haut, à savoir le traitement des conditions aux limites, l'intégration des termes source, et la discrétisation des produits non-conservatifs résonants.

L'objet de ce chapitre est de décrire la teneur des travaux entrepris dans ce contexte. Nous suivons l'ordre chronologique en commençant par les schémas de *relaxation*, étudiés essentiellement lors de la thèse de Baudin [48]. La possibilité de garantir la positivité étant la vertu première de la relaxation<sup>2</sup>, nous déclinons celle-ci en quelques variantes pour deux

2. qui en a bien d'autres, grâce à l'interprétation EDP qui la sous-tend

modèles principaux : le modèle *gaz-liquide*  $\langle 10 \rangle$ , où la notion de constituant n'apparaît pas explicitement car il y en a juste un par phase, et le modèle *compositionnel*  $\langle 15 \rangle$ , dans lequel chacune des deux phases peut comporter plusieurs constituants. Ainsi, l'objectif de la positivité est atteint, du moins dans une formulation explicite en temps.

Pour obtenir un schéma de relaxation avec une intégration temporelle de type sélectivement implicite, on peut bien entendu appliquer les recettes éprouvées du schéma VFRoe actuellement dans TACITE. Comme le montre  $\langle 11 \rangle$ , ceci est possible grâce à la reformulation du schéma explicite comme un schéma de Roe. Malheureusement, le prix à payer pour le gain en temps calcul est la perte théorique de la positivité. Même si ce risque ne se matérialise pas souvent sur les simulations, il est réel. Pour sortir de l'impasse, nous avons opté pour une autre technique d'implication sélective. En quittant le carcan eulérien, la nouvelle stratégie emprunte la voie de la formulation Lagrange-projection, et s'avérera finalement plus naturelle et plus riche en résultats  $\langle 16 \rangle$ . C'est l'objet de la première moitié de la thèse de Nguyen [58].

Pour satisfaire la deuxième exigence, celle du temps calcul, nous nous proposons d'examiner les méthodes d'adaptation dynamique de maillage. Dans un premier temps, il s'agit de la Multi-Résolution pour l'adaptation en espace uniquement. Après s'être familiarisés avec la MR (Multi-Résolution) sur un modèle simplifié  $\langle 12 \rangle$ , nous avons été en mesure de l'appliquer au cas d'un modèle gaz-liquide général  $\langle 13 \rangle$  avec d'excellents facteurs de gain. Dans un deuxième temps, on cherche à gagner encore plus par l'intermédiaire d'un raffinement dynamique espace-temps, connue sous le nom de *Local Time Stepping*. Cette nouvelle technique est plus difficile à maîtriser, mais a déjà produit de très bons résultats  $\langle 17 \rangle$ . Elle constitue l'objet de la seconde moitié de la thèse en cours de Nguyen.

## 5.2 Relaxation du modèle gaz-liquide

### 5.2.1 Modèle de départ

Pour des raisons historiques [72], la décision avait été prise de modéliser les écoulements 1-D de TACITE par des modèles à flux de dérive<sup>3</sup>, dont la particularité est de ne contenir qu'un seul bilan de quantité de mouvement totale pour plusieurs bilans de masse.

Considérons le cas particulier du modèle gaz-liquide

$$\partial_t(\rho_g R_g) + \partial_x(\rho_g R_g v_g) = 0 \quad (5.1a)$$

$$\partial_t(\rho_\ell R_\ell) + \partial_x(\rho_\ell R_\ell v_\ell) = 0 \quad (5.1b)$$

$$\partial_t(\rho_g R_g v_g + \rho_\ell R_\ell v_\ell) + \partial_x(\rho_g R_g v_g^2 + \rho_\ell R_\ell v_\ell^2 + p) = \rho S, \quad (5.1c)$$

où  $g$  se rapporte au gaz,  $\ell$  au liquide. Même si la signification des variables est expliquée en détails dans  $\langle 10 \rangle$ , nous rappelons que les notations non-conventionnelles  $R_g$  et  $R_\ell$  désignent les fractions surfaciques de gaz et de liquide : c'est le taux d'occupation par section qu'on constaterait en faisant une coupe transverse.

Ce modèle présente l'avantage d'être sous forme conservative, à la différence des modèles bifluïdes  $\langle 56 \rangle$  par exemple. Le prix à payer est la nécessité de fermer le système par des lois algébriques. En l'occurrence, en supposant la source  $S$  définie, il faut se donner

---

3. *Drift-Flux Model*, d'où l'abréviation DFM

— en plus de (5.1) — les fonctions

$$p = p(\rho_g R_g, \rho_\ell R_\ell) \quad (5.2a)$$

$$v_\ell - v_g = \phi(\rho_g R_g, \rho_\ell R_\ell, \rho_g R_g v_g + \rho_\ell R_\ell v_\ell) \quad (5.2b)$$

représentant la pression et le glissement. Ces lois, qui relèvent respectivement de la thermodynamique et de l'hydrodynamique, sont souvent empiriques et renferment les connaissances métier du physicien modélisateur. Cela étant, elles posent de sérieuses difficultés.

### Principales difficultés

La première concerne le coût d'évaluation élevé. Sauf dans de rares cas académiques, il n'y a pas d'expression algébrique concise pour calculer  $p$  et  $\phi$ , quoiqu'on dispose bien entendu d'une procédure de calcul, laquelle peut cependant contenir un grand nombre de procédures itératives et de tests pouvant rendre la valeur en sortie discontinue par rapport aux arguments d'entrée. Nous n'entrons pas dans le débat de la discontinuité éventuelle du flux par rapport aux variables conservatives, laquelle est bien plus épineuse que celle par rapport à la variable d'espace [91, 100] que nous rencontrons aussi pour les changements d'inclinaisons de la conduite. Toujours est-il qu'un appel aux fermetures coûte cher. Il l'est encore plus pour leurs dérivées, lorsqu'on n'a pas d'autre choix que les différences finies.

La deuxième difficulté est bien plus épineuse. Du point de vue mathématique, on ne sait rien dire de l'hyperbolicité du système (5.1) pour des lois de fermeture  $p, \phi$  quelconques. Or, l'hyperbolicité est une propriété essentielle dont il est préférable de s'assurer avant de concevoir un schéma de calcul transitoire. On peut la démontrer dans des cas simples, par exemple en glissement nul ( $\phi \equiv 0$ ) avec des hypothèses standard [126] sur la pression ou en glissement Zuber-Findlay [49, 84] avec des conditions plus restrictives sur la pression. Mais sur des cas raides, on peut aussi se retrouver avec des valeurs propres complexes pour la matrice jacobienne en plein milieu d'un calcul, ce qui ne manque pas de le terminer !

Quand bien même on se lance dans la recherche d'un schéma, une troisième difficulté nous attend au tournant. La forte non-linéarité des lois de fermeture interdit tout espoir d'employer les solveurs de Riemann classiques [128, 145] réputés être de bons compromis entre robustesse et précision. À ce titre, VFRoe est une tentative réussie pour préserver l'esprit de Roe et ne pas tomber dans les idéologies extrêmes que sont la dissipation pure (à la Rusanov) ou la dispersion pure (à la Lerat) et qui avaient été pendant un temps implémentées dans TACITE.

### Séparation des échelles de vitesses

Malgré ces difficultés, un calcul typique de TACITE se déroule généralement sans encombre avec le schéma actuel. A posteriori, on constate numériquement que le système (5.1) est hyperbolique dans la gamme des problèmes couramment pratiqués : la matrice jacobienne du flux admet bien, en chaque point du maillage, trois valeurs propres  $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$  distinctes. De surcroît, on a toujours

$$|\mu_2| \ll |\mu_1| \approx |\mu_3|. \quad (5.3)$$

Cette observation s'explique par la nature spécifique des problèmes d'acheminement dans les conduites. L'onde associée à  $\mu_2$  correspond en effet au transport de la matière.

Nous l'appelons onde cinématique ou onde de *taux de vide*. Dans toutes les simulations que doit traiter TACITE, l'onde cinématique est très lente par rapport aux ondes acoustiques associées à  $\mu_1$  et  $\mu_3$ , appelées encore ondes de *pression*. Cette séparation des échelles de vitesses d'ondes est une donnée du problème. Elle entraîne des temps de calcul prohibitifs en explicite. Mais elle est aussi à l'origine de beaucoup d'idées, notamment du schéma sélectivement implicite. Nous aurons l'occasion d'y revenir.

### 5.2.2 Schéma explicite et l'assurance de positivité

L'écriture (5.1) est la forme « physique » du modèle DFM gaz-liquide. Il est plus commode pour le numéricien de travailler avec la forme « mathématique » équivalente

$$\partial_t(\rho) + \partial_x(\rho v) = 0 \quad (5.4a)$$

$$\partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + P) = \rho S \quad (5.4b)$$

$$\partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho Y v - \sigma) = 0. \quad (5.4c)$$

avec

$$\rho = \rho_g R_g + \rho_\ell R_\ell, \quad \rho v = \rho_g R_g v_g + \rho_\ell R_\ell v_\ell, \quad \rho Y = \rho_g R_g. \quad (5.5)$$

Nous avons délibérément déplacé la conservation du gaz en dernière position. L'avantage de la forme (5.4) est évidemment sa ressemblance avec les équations d'Euler pour la dynamique des gaz, qui permet à son tour d'isoler les non-linéarités.

À l'aide des lois de fermeture, on peut calculer les grandeurs

$$\sigma = \rho Y(1 - Y)\phi \quad (5.6a)$$

$$P = p + \rho Y(1 - Y)\phi^2 \quad (5.6b)$$

en fonction de  $\mathbf{u} = (\rho, \rho v, \rho Y)$  et conférer au système (5.4) la forme abstraite

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{s}(\mathbf{u}). \quad (5.7)$$

avec  $\mathbf{s} = (0, \rho S, 0)$ . Par un changement de variables en coordonnées lagrangiennes, les quantités  $P$  et  $\sigma$  comme étant les véritables non-linéarités du problème.

### Modèle de relaxation

Dans  $\langle 10 \rangle$ , nous proposons de relaxer (5.4) par la suite de problèmes

$$\partial_t(\rho)^\lambda + \partial_x(\rho v)^\lambda = 0 \quad (5.8a)$$

$$\partial_t(\rho v)^\lambda + \partial_x(\rho v^2 + \Pi)^\lambda = \rho^\lambda S(\mathbf{u}^\lambda) \quad (5.8b)$$

$$\partial_t(\rho \Pi)^\lambda + \partial_x(\rho \Pi v + a^2 v)^\lambda = \lambda \rho^\lambda [P(\mathbf{u}^\lambda) - \Pi^\lambda] \quad (5.8c)$$

$$\partial_t(\rho Y)^\lambda + \partial_x(\rho Y v - \Sigma)^\lambda = 0 \quad (5.8d)$$

$$\partial_t(\rho \Sigma)^\lambda + \partial_x(\rho \Sigma v - b^2 Y)^\lambda = \lambda \rho^\lambda [\sigma(\mathbf{u}^\lambda) - \Sigma^\lambda] \quad (5.8e)$$

indités par  $\lambda > 0$ . Les nouvelles variables  $(\Pi, \Sigma)$  se substituent aux fonctions algébriques  $(P, \sigma)$  et « vivent leurs vies » par les équations d'évolution (5.8c) et (5.8e). C'est en cela qu'on dit qu'elles se sont affranchies des contraintes imposées par les non-linéarités. Lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$ , on retrouve formellement (5.4). Lorsque  $\lambda = 0$ , les deux blocs (5.8a)–(5.8c) et

(5.8d)–(5.8e) sont complètement découplés. On convient de les désigner respectivement par « bloc acoustique » et « bloc cinématique ».

Le modèle de relaxation (5.8) peut se mettre sous la forme abstraite

$$\partial_t \mathbb{U}^\lambda + \partial_x \mathbb{F}(\mathbb{U}^\lambda) = \lambda \mathbb{S}(\mathbb{U}^\lambda), \quad (5.9)$$

avec  $\mathbb{U} = (\rho, \rho v, \rho \Pi, \rho Y, \rho \Sigma)$ . À l'inverse du modèle de départ (5.4), la partie homogène ( $\lambda = 0$ ) de ce système est toujours hyperbolique. Par construction, ses valeurs propres

$$v - a\tau, v - b\tau, v, v + b\tau, v + a\tau, \quad (5.10)$$

avec  $\tau = \rho^{-1}$ , sont linéairement dégénérées, ce qui permet de résoudre à la main le problème de Riemann (10, Proposition 3). L'ordre (5.10) dans lequel nous avons rangé les valeurs propres est celui observé dans les simulations réelles, où

$$a \gg b. \quad (5.11)$$

Ceci est directement lié au phénomène (5.3) de séparation des valeurs propres acoustique-cinématique. Les constantes  $(a, b)$  du modèle (5.8) doivent par ailleurs être choisies de sorte à éviter toute instabilité dans la limite  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

### Réglage des constantes du modèles

Les paramètres de relaxation  $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$  sont en effet à notre bon vouloir. Pour assurer de la stabilité linéaire, on adopte la méthodologie de Whitham [83] qui fait intervenir les développements asymptotiques de Chapman-Enskog, et requiert que le système d'équilibre équivalent

$$\partial_t \mathbf{u}^\lambda + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}^\lambda) = \mathbf{s}(\mathbf{u}^\lambda) + \lambda^{-1} \partial_x \{ \mathbf{D}_{a,b}(\mathbf{u}^\lambda) \partial_x \mathbf{u}^\lambda \} \quad (5.12)$$

au premier ordre en  $\lambda^{-1}$  soit une approximation « dissipative » du système original (5.4). Notons qu'en l'occurrence, c'est la seule analyse de stabilité possible, le cadre d'analyse non-linéaire de Liu [95] et Chen et al. [86] nous étant inaccessible en l'absence d'une entropie connue, de même que le cadre simplifié proposé plus tard par Bouchut [85].

La recherche du domaine admissible pour  $(a, b)$  aboutit aux résultats énoncés par (10, Proposition 1, Proposition 2, Lemma 4, Figure 1). Ce qu'il faut en retenir est que dans le plan  $(a, b)$ , la « bonne » région est la réunion de deux domaines délimités chacun par une droite oblique et une hyperbole. Or, ces valeurs de  $(a, b)$  se sont révélées non-optimales en pratique et conduisent à des paramètres excessivement grands. Cela ne signifie pas que nous avons mal fait l'analyse de Chapman-Enskog. Il faut plutôt se souvenir que la positivité des valeurs propres de  $\mathbf{D}_{a,b}(\mathbf{u})$  est elle-même une condition heuristique en lieu et place de la « vraie » condition, due à Majda et Pego [96], qui stipule que les valeurs propres de la matrice

$$i\kappa \nabla \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \lambda^{-1} \kappa^2 \mathbf{D}_{a,b}(\mathbf{u}) \quad (5.13)$$

soient à partie réelle négative pour tout  $\kappa \in \mathbb{R}$ , avec  $i^2 = -1$ .

Aussi, on peut chercher des conditions heuristiques plus simples, permettant par exemple de « séparer » les blocs acoustique et cinématique. En ne demandant cette fois que la

positivité des éléments diagonaux de la matrice comme indépendants et en recommençant l'analyse, nous obtenons les conditions sous-caractéristiques de Whitham énoncées par (11, Theorem 2.3, Theorem 2.4), à savoir les inégalités découplées

$$a^2 > \{-P_\tau + P_v^2\}(\mathbf{u}) \quad \text{et} \quad b > |\sigma_Y|(\mathbf{u}), \quad (5.14)$$

où  $(P, \sigma)$  sont vues comme des fonctions de  $(\tau, Y, v)$ . Ces nouvelles bornes sont bien inférieures à celles de (10).

Au niveau discret, la mise à jour explicite d'ordre 1 sur un maillage régulier de pas  $\Delta x$  s'effectue par le schéma conservatif

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{h}(\mathbf{u}_i^n, \mathbf{u}_{i+1}^n) - \mathbf{h}(\mathbf{u}_{i-1}^n, \mathbf{u}_i^n)] + \Delta t \mathbf{s}_i^n, \quad (5.15)$$

lequel s'interprète comme la projection (par extraction de composantes) de

$$\mathbb{U}_i^{n+1} = \mathbb{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbb{H}(\mathbb{U}_i^n, \mathbb{U}_{i+1}^n) - \mathbb{H}(\mathbb{U}_{i-1}^n, \mathbb{U}_i^n)] + \Delta t \mathbb{S}_i^n \quad (5.16)$$

où  $\mathbb{H}$  est le flux de Godunov associé au problème de Riemann du système relaxé homogène. Les paramètres  $(a, b)$  sont pris localement par arête pour minimiser la diffusion. Le résultat très important est que si  $(a_{i+1/2}, b_{i+1/2})$  sont suffisamment grands, au sens de (10, Theorem 1, Corollary 1) et des renforcements (11, eqs. (2.28)–(2.30), §2.3.2), alors on est sûr d'avoir

$$\rho_i^{n+1} > 0, \quad Y_i^{n+1} \in [0, 1]. \quad (5.17)$$

Les bornes données par (10, Theorem 1, Corollary 1) et (11, eq. (2.29)) découlent d'une analyse fine du schéma discret en vue d'avoir (5.17), tandis que les mesures de sécurité (11, eq. (2.28)) sont destinées à imiter (5.14). Notons que la formule (10, eq. (64)) peut s'écrire beaucoup plus simplement comme

$$b_{i+1/2} \geq \max\{\rho_i^n |\phi_i^n|, \rho_{i+1}^n |\phi_{i+1}^n|\}. \quad (5.18)$$

### 5.2.3 Schéma implicite direct et le risque de non-positivité

Nous avons déjà évoqué la différence d'ordres de grandeur entre  $\lambda_1, \lambda_3$  d'une part et  $\lambda_2$  d'autre part pour les cas que doit traiter TACITE. Si la condition CFL du schéma explicite était calée sur la valeur  $\max\{|\lambda_1|, |\lambda_3|\}$  des ondes acoustiques, on tomberait sur de tout petits pas de temps, ce qui entraînerait des temps de calcul désastreux. On aimerait pouvoir simuler avec de grands pas de temps par une intégration temporelle implicite. Certes, l'implicite détériore la précision, mais ici celle des ondes acoustiques n'intéresse nullement le pétrolier. Seule lui importe celle de l'onde cinématique représentant le transport du mélange. De ce cahier des charges naît l'idée d'une implication sélective du schéma, qui ne laisserait explicite que l'onde en  $\lambda_2$ .

#### Heuristique d'implication sélective

A priori, on ne voit ni comment y parvenir, ni quel sens donner à cette discrimination, car dans un système non-linéaire, toutes les ondes sont couplées entre elles. En premier essai, nous reprenons une heuristique suggérée par Gallouët [123, 137] dans le cadre du

schéma VFRoe, que nous désignons aussi par l'implication sélective directe. Décrivons-la brièvement. Dans le schéma (totalem) implicite

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\mathbf{h}(\mathbf{u}_i^{n+1}, \mathbf{u}_{i+1}^{n+1}) - \mathbf{h}(\mathbf{u}_{i-1}^{n+1}, \mathbf{u}_i^{n+1})] + \Delta t s_i^{n+1}, \quad (5.19)$$

où le flux numérique  $\mathbf{h}$  est de type Roe<sup>4</sup>, c'est-à-dire

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R) = \frac{1}{2}[\mathbf{f}(\mathbf{u}_L) + \mathbf{f}(\mathbf{u}_R)] - \frac{1}{2}|A(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)|(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L), \quad (5.20)$$

on effectue la linéarisation

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}_L^{n+1}, \mathbf{u}_R^{n+1}) \approx \mathbf{h}(\mathbf{u}_L^n, \mathbf{u}_R^n) + \nabla_{\mathbf{u}_L} \mathbf{h} \cdot (\mathbf{u}_L^{n+1} - \mathbf{u}_L^n) + \nabla_{\mathbf{u}_R} \mathbf{h} \cdot (\mathbf{u}_R^{n+1} - \mathbf{u}_R^n) \quad (5.21)$$

avec les approximations à la Mulder et van Leer [138]

$$\nabla_{\mathbf{u}_L} \mathbf{h} \approx \frac{1}{2}[\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{u}_L^n) + |A(\mathbf{u}_L^n, \mathbf{u}_R^n)|] \quad (5.22a)$$

$$\nabla_{\mathbf{u}_R} \mathbf{h} \approx \frac{1}{2}[\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{u}_R^n) - |A(\mathbf{u}_L^n, \mathbf{u}_R^n)|], \quad (5.22b)$$

qui consistent à « geler » la matrice  $A(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)$  à l'instant  $n$ . L'implication sélective consiste à remplacer les matrices

$$\nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{u}_L^n), \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{u}_R^n), A(\mathbf{u}_L^n, \mathbf{u}_R^n) \quad (5.23)$$

par leurs homologues

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{u}_L^n), \tilde{\nabla}_{\mathbf{u}} \mathbf{f}(\mathbf{u}_R^n), \tilde{A}(\mathbf{u}_L^n, \mathbf{u}_R^n) \quad (5.24)$$

via une opération d'explicitation partielle consistant à annuler la contribution du champ  $\lambda_2$ . Plus précisément, si  $B$  est une matrice  $3 \times 3$  diagonalisable et

$$B = R\Lambda L, \quad \Lambda = \text{Diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad (5.25)$$

alors

$$\tilde{B} = R\tilde{\Lambda}L, \quad \tilde{\Lambda} = \text{Diag}(\lambda_1, 0, \lambda_3). \quad (5.26)$$

On peut vérifier que pour un système à flux linéaire  $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = A\mathbf{u}$ , la procédure est rigoureusement exacte : on obtient un schéma implicite sur les variables caractéristiques associées aux valeurs propres rapides et explicite sur les variables caractéristiques associées aux valeurs propres lentes. Par contre, pour un système non-linéaire, ce n'est qu'une heuristique car les matrices (5.23) n'ont a priori pas la même base de diagonalisation.

### Application à la relaxation

Pour appliquer l'heuristique précédente au schéma de relaxation, il faut pouvoir exprimer le flux du schéma de relaxation explicite sous la forme (5.20). L'effort de retranscription du flux de relaxation sous la forme

$$\mathbb{H}(\mathbb{U}_L, \mathbb{U}_R) = \frac{1}{2}[\mathbb{F}(\mathbb{U}_L) + \mathbb{F}(\mathbb{U}_R)] - \frac{1}{2}|\mathcal{A}(\mathbb{U}_L, \mathbb{U}_R)|(\mathbb{U}_R - \mathbb{U}_L) \quad (5.27)$$

sert au fond à contourner le problème de non-différentiabilité posé par le flux de Godunov  $\mathbb{H}(\mathbb{U}_L, \mathbb{U}_R)$  au moyen d'approximations par des formules analogues à (5.22).

4. mais sans nécessairement l'axiome sur la condition de saut  $\mathbf{f}(\mathbf{u}_R) - \mathbf{f}(\mathbf{u}_L) = A(\mathbf{u}_L, \mathbf{u}_R)(\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_L)$

Est-ce possible ? La réponse est affirmative. Mieux encore, on peut démontrer que la matrice  $\mathcal{A}(\cdot, \cdot)$  en question est une matrice de Roe, puis en fournir l'expression analytique (11, Lemma 3.1, Proposition 3.2, Theorem 3.3). Cette équivalence du flux de la relaxation avec celui d'un schéma de Roe est un résultat fondamental, dû au caractère linéairement dégénéré de tous les champs. Les matrices sont maintenant de taille  $5 \times 5$ . Dans l'opération d'explicitation partielle analogue à (5.26), nous annulons les 3 valeurs propres intermédiaires  $v - b\tau$ ,  $v$ ,  $v + b\tau$  et laissons intactes les 2 valeurs propres extrêmes  $v - a\tau$ ,  $v + a\tau$ .

Un dernier ingrédient s'avère nécessaire pour que fonctionne correctement le schéma de relaxation en implicite sélectif direct. Il s'agit de ce que nous avons appelé la **projection implicite**. Comme l'explique (11, §3.2.2), elle revient à remplacer l'une des lignes du bloc matriciel local par la linéarisation de

$$(\rho\Pi)_i^{n+1} = \{\rho P\}(\mathbf{u}_i^{n+1}). \quad (5.28)$$

Cet impératif avait en fait été constaté par Chalons [109] pour le calcul des états stationnaires sur un problème voisin. Dans notre cas, la projection implicite améliore également le calcul transitoire ainsi que la prise en compte des conditions limites. Certaines explications sont fournies à ce stade par Chalons [109] et nous-mêmes (11, §3.2.2), mais la plus limpide et convaincante des explications ne sera découverte que plus tard, quand nous abordons le modèle compositionnel de la section §5.4.2.

Le schéma de relaxation en implicite sélectif direct conduit à des gains en temps calcul assez importants comparés au schéma actuel de TACITE. Le facteur d'accélération varie de 3 à 20 selon le cas considéré, comme le montre une analyse détaillée à laquelle s'est livré Baudin [48]. De tels gains sont essentiellement dus à ce que dans la nouvelle méthode, on n'a pas besoin d'évaluer numériquement les éléments propres des matrices jacobiniennes. On en a besoin certes, pour l'opération d'explicitation partielle, mais dans le cas du système de relaxation, tous ces éléments sont connus par des formules algébriques explicites.

On peut soulever la question de savoir ce qu'est devenue la positivité après toutes ces manipulations. Il est honnête de dire que nous n'avons plus la garantie (5.17). Tout ce que nous pouvons espérer est que le risque de non-positivité, qui se produit d'ailleurs sur certains cas raides, est compensé par une plus grande dissipation liée à l'implicite. À moins de s'y prendre autrement pour faire de l'implicite sélectif...

#### 5.2.4 Schéma implicite ALE ou la positivité retrouvée

Une autre stratégie, vers laquelle nous nous sommes orientés pour rendre le schéma de relaxation implicite par rapport aux ondes acoustiques, repose sur un outil théorique qui avait été créé dans un but totalement différent.

##### Formalisme ALE du modèle de relaxation

Le formalisme ALE (Arbitrary Lagrangian-Eulerian) des équations de la mécanique des fluides avait été inventé [68] dans les années 60 afin d'ouvrir la voie au calcul numérique en maillage mobile. En reformulant les lois de la physique dans un repère qui se meut à une vitesse arbitraire quelconque, on met en évidence des termes spécifiques à la physique « intime » des particules, par opposition à ceux relatifs au déplacement du maillage. Cette séparation naturelle incite à découper par splitting chaque pas de temps en deux étapes :

(i) étape lagrangienne, où l'on suit les particules ; (ii) étape eulérienne, appelée encore étape convective ou projection, où l'on tient compte de l'influence du maillage.

Dans le cas du modèle de relaxation (5.8), le formalisme ALE s'écrit

$$\partial_t(J) + \partial_\chi(s) - \partial_\chi(v) = 0 \quad (5.29a)$$

$$\partial_t(\rho J) + \partial_\chi(\rho s) = 0 \quad (5.29b)$$

$$\partial_t(\rho v J) + \partial_\chi(\rho v s) + \partial_\chi(\Pi) = JS \quad (5.29c)$$

$$\partial_t(\rho \Pi J) + \partial_\chi(\rho \Pi s) + \partial_\chi(a^2 u) = \lambda \rho J [P(\mathbf{u}) - \Pi] \quad (5.29d)$$

$$\partial_t(\rho Y J) + \partial_\chi(\rho Y s) - \partial_\chi(\Sigma) = 0 \quad (5.29e)$$

$$\partial_t(\rho \Sigma J) + \underbrace{\partial_\chi(\rho \Sigma s)}_{\text{Euler}} - \underbrace{\partial_\chi(b^2 Y)}_{\text{Lagrange}} = \lambda \rho J [\sigma(\mathbf{u}) - \Sigma] \quad (5.29f)$$

où les notations sont semblables (mais pas identiques) à celles de (16, §3.3). Nous rappelons juste que  $J$  est le taux de déformation et  $s$  la vitesse relative. Si  $s \equiv 0$ , on est en coordonnées lagrangiennes. Si  $s \equiv v$ , comme nous allons le spécifier plus loin car notre problème ne contient évidemment pas de maillage mobile en soi, on retrouve formellement (5.8). Pour alléger les écritures, nous avons omis les exposants  $\lambda$  dans le système précédent.

### N'implicitons que ce qu'il faut

L'implicitation sélective consiste alors à traiter le bloc acoustique de l'étape lagrangienne, et uniquement celui-ci, en implicite. Autrement dit, la discrétisation de l'étape lagrangienne

$$\partial_t(J) - \partial_\chi(v) = 0 \quad (5.30a)$$

$$\partial_t(\rho J) = 0 \quad (5.30b)$$

$$\partial_t(\rho v J) + \partial_\chi(\Pi) = \rho JS \quad (5.30c)$$

$$\partial_t(\rho \Pi J) + \partial_\chi(a^2 u) = \lambda \rho J (P - \Pi) \quad (5.30d)$$

$$\partial_t(\rho Y J) - \partial_\chi(\Sigma) = 0 \quad (5.30e)$$

$$\partial_t(\rho \Sigma J) - \partial_\chi(b^2 Y) = \lambda \rho J (\sigma - \Sigma) \quad (5.30f)$$

entre  $t^n = n\Delta t$  et  $t^{n\sharp} = t^n + \Delta t$  se fait par des formules de type

- explicite en  $Y$

$$\rho_i^n \frac{Y_i^{n\sharp} - Y_i^n}{\Delta t} - \frac{\Sigma_{i+1/2}^n - \Sigma_{i-1/2}^n}{\Delta x} = 0 \quad (5.31)$$

- implicite en  $(\rho, v)$

$$\rho_i^n \frac{\tau_i^{n\sharp} - \tau_i^n}{\Delta t} - \frac{v_{i+1/2}^{n\sharp} - v_{i-1/2}^{n\sharp}}{\Delta x} = 0 \quad (5.32a)$$

$$\rho_i^n \frac{v_i^{n\sharp} - v_i^n}{\Delta t} + \frac{\Pi_{i+1/2}^{n\sharp} - \Pi_{i-1/2}^{n\sharp}}{\Delta x} = \rho_i^n S_i^{n\sharp} \quad (5.32b)$$

avec  $\tau = \rho^{-1}$ , et

$$\begin{aligned} \Pi_{i+1/2}^{n\sharp} &= \frac{\Pi_i^{n\sharp} + \Pi_{i+1}^{n\sharp}}{2} - a \frac{v_{i+1}^{n\sharp} - v_i^{n\sharp}}{2} \\ v_{i+1/2}^{n\sharp} &= \frac{v_i^{n\sharp} + v_{i+1}^{n\sharp}}{2} - \frac{\Pi_{i+1}^{n\sharp} - \Pi_i^{n\sharp}}{2a}. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Ces formules de mise à jour découlent de  $(\rho J)_i^{n\sharp} = (\rho J)_i^n$ , qui est la discrétisation de (5.30b), et de  $J_i^n = 1$ . Du système (5.30), nous n'avons gardé que la discrétisation des composantes qui nous intéressent. Après cette étape lagrangienne, on applique l'étape de projection entre  $t^{n\sharp}$  et  $t^{n+1}$  (avec  $s \equiv v$ )

$$\partial_t(J) + \partial_x(v) = 0 \quad (5.34a)$$

$$\partial_t(\mathbf{u}J) + \partial_x(\mathbf{u}v) = 0 \quad (5.34b)$$

dont la discrétisation (des composantes qui nous intéressent) est simplement

$$\frac{J_i^{n+1} - J_i^{n\sharp}}{\Delta t} + \frac{v_{i+1/2}^{n\sharp} - v_{i-1/2}^{n\sharp}}{\Delta x} = 0 \quad (5.35a)$$

$$\frac{(\mathbf{u}J)_i^{n+1} - (\mathbf{u}J)_i^{n\sharp}}{\Delta t} + \frac{(\mathbf{u}v)_{i+1/2}^{n\sharp} - (\mathbf{u}v)_{i-1/2}^{n\sharp}}{\Delta x} = 0 \quad (5.35b)$$

avec les valeurs décentrées

$$(\mathbf{u}v)_{i+1/2}^{n\sharp} = \mathbf{u}_i^{n\sharp}(v_{i+1/2}^{n\sharp})^+ + \mathbf{u}_{i+1}^{n\sharp}(v_{i+1/2}^{n\sharp})^-. \quad (5.36)$$

À vrai dire, l'idée d'impliciter l'étape lagrangienne et d'expliciter l'étape convective n'est pas absolument nouvelle. Plusieurs codes, notamment KIVA [61, 69, 74] pour les moteurs, le font déjà, sans toutefois la motivation liée à la séparation des échelles de vitesses d'ondes. Ici, compte tenu de la particularité du problème, nous faisons le pari supplémentaire de laisser explicite le bloc  $(Y, \Sigma)$ .

### Positivité et autres propriétés

La nouveauté sur laquelle nous aimerions insister est le contrôle de la positivité au moyen d'une estimation optimale de la CFL calée sur l'onde lente. À notre connaissance, ce genre de résultat n'a jamais été établi pour un schéma implicite sur des modèles de fluides, même unidimensionnels<sup>5</sup>, avec généralisation à l'ordre 2 en espace et en présence de conditions aux limites. Dans KIVA, qui est tridimensionnel, le pas de temps dans l'étape lagrangienne est évalué par une règle empirique et peut donc être très grand. Dans l'étape convective, il doit être divisé en plusieurs sous-cycles afin de respecter la condition CFL associée au transport.

L'article ⟨16⟩ traite le cas du glissement nul  $\phi \equiv 0$ . Nous y développons une théorie complète comprenant l'existence et l'unicité du problème discret, ainsi que les nombreuses propriétés dont jouit le schéma d'ordre 1 ainsi élaboré ⟨16, Theorem 4.1⟩. Non seulement on est assuré de la positivité de  $\rho_i^{n+1}$  et du principe du maximum local sur  $Y_i^{n+1}$  sous une condition CFL parfaitement calculable par la seule connaissance de la solution discrète à la date  $t^n$  ⟨16, eq. (4.19)⟩, mais on a encore l'inégalité d'entropie discrète ⟨16, eq. (4.22)⟩ pour un paramètre de relaxation  $a$  suffisamment grand.

À la différence avec ⟨10, 11⟩, nous préconisons dans cette nouvelle approche un paramètre  $a$  global. D'une part, l'expérience numérique sur des cas très raides montre que l'uniformité de  $a$  est indispensable pour la robustesse. D'autre part, cette uniformité de  $a$  facilite énormément l'analyse du schéma car elle réduit la phase lagrangienne — après le

5. Nous excluons les cas simplissimes comme l'advection scalaire linéaire !

changement de variable spatial  $dz = \rho dx$  — à deux équations d’advection scalaire linéaire de la forme

$$\partial_t \bar{w} + a \partial_z \bar{w} = 0, \quad \partial_t \hat{w} - a \partial_z \hat{w} = 0, \quad (5.37)$$

avec

$$\bar{w} = \Pi + av, \quad \hat{w} = \Pi - av. \quad (5.38)$$

Ces deux advections linéaires son recouplées par les conditions aux limites à l’entrée et à la sortie du domaine, comme le montre [\[16, Theorem 3.1\]](#). À partir des résultats obtenus par l’étude de la brique de base (5.37) en continu et en discret [\[16, §2\]](#), on remonte peu à peu vers ceux sur le schéma global. Au niveau de l’implémentation concrète, pour résoudre (5.37) en implicite avec les conditions aux limites, nous avons mis au point une procédure de double balayage [\[16, Lemma 2.1\]](#) extrêmement rapide.

### Autres aspects pratiques

La manière dont nous avons présenté la méthode dans [\[16\]](#) vise à atteindre les résultats théoriques le plus clairement possible. En pratique, dans l’étape lagrangienne nous implémentons une version algébriquement équivalente en utilisant les incréments

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{u}^{n\sharp} - \mathbf{u}^n. \quad (5.39)$$

Cette reformulation est en réalité plus avantageuse car elle procure d’autres options pour discrétiser temporellement les conditions aux limites et permet de passer à l’ordre 2 en espace par reconstruction limitée sans sacrifier les acquis précédents. On peut toujours réduire le noyau acoustique au système des deux advections symétriques (5.37), qu’il est toujours recommandé de résoudre avec la procédure de double balayage. Au moyen d’une estimation du pas de temps optimal (qui fait intervenir maintenant une inéquation du second degré), nous sommes à nouveau en mesure de garantir la positivité (sans l’inégalité entropique cette fois).

Passer « proprement » à l’ordre 2 est un défi difficile et passionnant. Son enjeu est de taille. Avoir un ordre 2 sain, robuste et préservant la positivité, qui est le rêve poursuivi par tout code industriel. Dans la prochaine section, nous apporterons quelques réflexions.

Comme pour l’autre méthode d’implication, on doit imposer la projection implicite linéarisée

$$\Pi_i^{n\sharp} - P_i^n \approx P_\tau(\tau_i^{n\sharp} - \tau_i^n) + P_v(v_i^{n\sharp} - v_i^n) + P_Y(Y_i^{n\sharp} - Y_i^n). \quad (5.40)$$

Pour le glissement nul,  $P_v = 0$ . C’est en sur-linéarisant  $P_\tau \approx -a^2$  que nous arrivons, par manipulations algébriques, au système d’advections symétriques (5.37) dans l’étape lagrangienne. Pour un glissement  $\phi$  quelconque, nous pouvons ignorer  $P_v$  pour pouvoir encore exploiter la structure (5.37). La contribution de  $P_Y$  dans (5.40) ne pose pas de difficulté, le calcul de  $Y_i^{n\sharp}$  étant par construction explicite. L’étude exhaustive de la méthode de relaxation implicite ALE pour un glissement quelconque fait aussi l’objet de la thèse de Nguyen [\[58\]](#).

## 5.3 Deux intermèdes sur l’ordre 2

### 5.3.1 Advection simultanée de plusieurs scalaires

Dans l’étape eulérienne de la méthode de relaxation via l’ALE, on doit transporter plusieurs grandeurs « indépendantes », comme le montre (5.34). Supposons, pour simplifier,

que  $J = 1$  et que la vitesse de transport imposée  $v$  soit uniforme. Alors, on a affaire au système découplé

$$\partial_t \Psi + v \partial_x \Psi = 0, \quad (5.41)$$

avec  $\Psi = (\rho, \rho v, \rho Y)$ . Posons  $\kappa = \rho Y$  et faisons l'hypothèse  $v > 0$ . Pour avoir l'ordre 2 en espace et en temps dans l'approximation du transport de  $(\rho, \kappa)$ , on applique sur chaque composante le schéma MUSCL standard [152]

$$\widehat{\rho}_i = \rho_i - \nu \left\{ \left[ \rho_i + \frac{1-\nu}{2} D_i^\rho \right] - \left[ \rho_{i-1} + \frac{1-\nu}{2} D_{i-1}^\rho \right] \right\} \quad (5.42a)$$

$$\widehat{\kappa}_i = \kappa_i - \nu \left\{ \left[ \kappa_i + \frac{1-\nu}{2} D_i^\kappa \right] - \left[ \kappa_{i-1} + \frac{1-\nu}{2} D_{i-1}^\kappa \right] \right\} \quad (5.42b)$$

avec  $\nu = v \Delta t / \Delta x$ . Il est bien connu, d'après Sweby [149], que si les pentes<sup>6</sup>  $(D^\rho, D^\kappa)$  sont bien choisies via un limiteur convenable

$$D_i^\rho = \widetilde{D}_i^\rho = \Lambda(\rho_i - \rho_{i-1}, \rho_{i+1} - \rho_i) \quad (5.43a)$$

$$D_i^\kappa = \widetilde{D}_i^\kappa = \Lambda(\kappa_i - \kappa_{i-1}, \kappa_{i+1} - \kappa_i), \quad (5.43b)$$

alors on est garanti du principe du maximum local

$$\min\{\rho_{i-1}, \rho_i\} \leq \widehat{\rho}_i \leq \max\{\rho_{i-1}, \rho_i\} \quad (5.44a)$$

$$\min\{\kappa_{i-1}, \kappa_i\} \leq \widehat{\kappa}_i \leq \max\{\kappa_{i-1}, \kappa_i\} \quad (5.44b)$$

sous la condition  $\nu < 1$ .

De (5.41), on a aussi le transport

$$\partial_t Y + v \partial_x Y = 0, \quad (5.45)$$

en foi de quoi on exige, cumulativement à (5.44), un principe du maximum local sur  $Y$ , à savoir

$$\min\{Y_{i-1}, Y_i\} \leq \widehat{Y}_i \leq \max\{Y_{i-1}, Y_i\}. \quad (5.46)$$

Dans le contexte de TACITE, le principe du maximum local sur les 3 variables  $\rho$ ,  $\kappa$  et  $Y$  est indispensable car les pétroliers sont pointilleux sur la qualité des résultats relatifs à ces grandeurs. Or, si l'on s'en tient aux limitations (5.43) comme si les  $(\rho, \kappa)$  étaient parfaitement indépendants, il n'y a aucune raison pour que  $\widehat{Y}_i = \widehat{\kappa}_i / \widehat{\rho}_i$  soit soumis à (5.46). La question qui se pose est de savoir comment les pentes  $(D^\rho, D^\kappa)$  doivent « se voir entre elles » de sorte à assurer (5.44) et (5.46) sous la même condition CFL ( $\lambda < 1$ ).

Ce problème est beaucoup moins évident qu'il n'y paraît. En effet, il ne suffit pas comme l'on pourrait le croire intuitivement de « limiter sur  $\rho$  et  $Y$  » pour que tout se passe bien. La raison en est, entre autres, que le min-max d'un produit n'est pas toujours le produit du min-max. Dans la littérature, une tentative de solution a été faite par VanderHeyden et Kashiwa [154] et portée à notre connaissance par Bruno Scheurer. Ces auteurs ont opté pour une démarche heuristique destinée à être rapidement transposée au cas multi-dimensionnel, si bien que les résultats ne sont pas toujours convaincants au vu

---

6. multipliées par  $\Delta x$

des oscillations qui subsistent. La solution que nous proposons dans (18) repose sur une analyse rigoureuse, le but étant d'imposer en plus

$$\widehat{\kappa}_i - \max\{Y_i, Y_{i-1}\}\widehat{\rho}_i \leq 0 \quad \text{et} \quad \widehat{\kappa}_i - \min\{Y_i, Y_{i-1}\}\widehat{\rho}_i \geq 0. \quad (5.47)$$

A priori, ces conditions sont non-locales car elles impliquent des grandeurs en  $i$  et en  $i-1$ . Le point clef de la méthode est de séparer chacune d'entre elles en deux conditions locales dont la réalisation simultanée est suffisante. Le miracle est que ces conditions suffisantes ne sont pas trop fortes et permettent de préserver une excellente raideur des fronts, comme l'attestent les simulations numériques. La formulation finale (18, Theorem 3.4) conduit à envisager  $(D_i^\rho, D_i^\kappa)$  comme l'unique solution d'un problème de minimisation quadratique

$$\min_{(D^\rho, D^\kappa) \in \mathcal{K}_i} \frac{1}{2} [(D^\rho - \widetilde{D}_i^\rho)^2 + (D^\kappa - \widetilde{D}_i^\kappa)^2], \quad (5.48)$$

sur un domaine convexe  $\mathcal{K}_i$  déterminé par 8 contraintes d'inégalités linéaires. Ces inégalités recourent les composantes  $\rho$  et  $\kappa$ . Quant à la solution, elle peut dans ce cas simple être explicitée « à la main » via une construction géométrique très instructive dans le plan  $(D^\rho, D^\kappa)$ . Le cas d'un champ de vitesse  $v$  variable en espace n'introduit pas de difficulté conceptuelle supplémentaire (18, Theorem 3.5).

En utilisant le même registre d'idées, on peut imposer encore le principe du maximum local à la différence  $\rho - \kappa$  (en plus de  $\rho$ ,  $\kappa$  et  $Y$ ), qui représente la densité de liquide. Plus largement, on dispose d'une méthodologie pour résoudre de façon satisfaisante le problème très général du transport simultané à l'ordre 2 de  $K$  variables principales

$$\partial_t \Psi_k + v \partial_x \Psi_k = 0, \quad k \in \{1, \dots, K\} \quad (5.49)$$

avec principe du maximum local non seulement sur les  $\Psi_k$ , mais aussi sur les variables de contrôle

$$E_q = E_q(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_K), \quad q \in \{1, \dots, Q\} \quad (5.50)$$

pourvu que chaque  $E_q$  soit une fraction rationnelle d'ordre 1 par rapport aux  $\Psi_k$ . Le champ d'application de la méthode dépasse de loin celui de TACITE. En simulation moteurs, par exemple, les  $\Psi_k$  représentent les espèces chimiques (CO, CO<sub>2</sub>, H<sub>2</sub>O, CH<sub>4</sub>...) tandis que les  $E_q$  sont des traceurs (C, O, H...) qui sont advectés, à titre de contrôle, par

$$\partial_t E_q + v \partial_x E_q = 0. \quad (5.51)$$

### 5.3.2 Énigme des $\theta$ -schémas

Nous avons affirmé plus haut que le principe de l'estimation du pas de temps optimal pour assurer la positivité de la densité dans l'étape lagrangienne n'est pas tributaire de l'ordre d'approximation. En effet, dans la version incrémentale de la méthode, les contributions éventuelles d'une reconstruction de pentes sont rejetées dans les résidus du second membre, laissant le premier membre avec la même structure matricielle<sup>7</sup>.

Dans cette rubrique, nous faisons part de quelques éléments de réflexion sur la manière de rendre l'étape lagrangienne plus « proche » de l'ordre 2. En guise de prototype, considérons le  $p$ -système

$$\partial_t \tau - \partial_m v = 0 \quad (5.52a)$$

$$\partial_t v + \partial_m p(\tau) = 0 \quad (5.52b)$$

7. mais cela ne nous autorise pas à faire « n'importe quoi » dans la reconstruction limitée

que nous discrétisons en espace par la relaxation standard avec le paramètre  $a$  uniforme, et en temps par un  $\theta$ -schéma. Cela donne

$$\frac{\tau_i^{n\sharp} - \tau_i^n}{\Delta t} - \frac{v_{i+1/2}^{n+\theta} - v_{i-1/2}^{n+\theta}}{\Delta m} = 0 \quad (5.53a)$$

$$\frac{v_i^{n\sharp} - v_i^n}{\Delta t} + \frac{\Pi_{i+1/2}^{n+\theta} - \Pi_{i-1/2}^{n+\theta}}{\Delta m} = 0, \quad (5.53b)$$

où

$$v_{i+1/2}^{n+\theta} = \frac{v_i^{n+\theta} + v_{i+1}^{n+\theta}}{2} - \frac{p_{i+1}^{n+\theta} - p_i^{n+\theta}}{2a} \quad (5.54a)$$

$$\Pi_{i+1/2}^{n+\theta} = \frac{p_i^{n+\theta} + p_{i+1}^{n+\theta}}{2} - a \frac{v_{i+1}^{n+\theta} - v_i^{n+\theta}}{2} \quad (5.54b)$$

avec la convention  $(\cdot)^{n+\theta} = (1-\theta)(\cdot)^n + \theta(\cdot)^{n\sharp}$ . Par développement limité, on montre que le système équivalent pour le schéma (5.53)–(5.54) est

$$\partial_t \tau - \partial_m v = \partial_m \left\{ \left[ (1-2\theta) \frac{\Delta t}{2} - \frac{\Delta m}{2a} \right] \partial_m p \right\} \quad (5.55a)$$

$$\partial_t v + \partial_m p = \partial_m \left\{ \left[ (1-2\theta) \frac{\Delta t}{2} p' + \frac{a\Delta m}{2} \right] \partial_m v \right\} \quad (5.55b)$$

en notant  $p' = d_\tau p$ .

Formellement, avoir l'ordre 2 revient à éliminer les termes d'ordre 1 aux seconds membres de (5.55). L'examen de (5.53) montre que nous devons procéder à une reconstruction sur  $(p, v)$  de type

$$p_{i+1/2}^L = p_i^n + \frac{1}{2}[1 - (1-2\theta)\mu]D_i^p \quad p_{i+1/2}^R = p_{i+1}^n - \frac{1}{2}[1 - (1-2\theta)\mu]D_{i+1}^p \quad (5.56a)$$

$$v_{i+1/2}^L = v_i^n + \frac{1}{2}[1 - (1-2\theta)\mu\varepsilon_i]D_i^v \quad v_{i+1/2}^R = v_{i+1}^n - \frac{1}{2}[1 - (1-2\theta)\mu\varepsilon_{i+1}]D_{i+1}^v \quad (5.56b)$$

avec

$$\mu = \frac{a\Delta t}{\Delta m}, \quad \varepsilon_i = -\frac{p'(\tau_i^n)}{a^2}. \quad (5.57)$$

En pratique, l'expérience montre que dans les crochets de (5.56), on ne peut pas sur-reconstruire en enlevant la diffusion jusqu'à  $1-2\theta$ . Il faut s'arrêter avant, à  $1-\theta$ . Ce désaccord entre l'équation équivalente et la « réalité » ne doit pas surprendre : au chapitre 7, §7.2.2, nous verrons un exemple de schéma instable (7.49) dont l'équation équivalente (7.51) a pourtant l'air tout à fait « sympathique ». Pour revenir au facteur  $1-\theta$ , nous pensons qu'il n'est pas complètement fortuit car il apparaît dans la condition de stabilité (entropique) du  $\theta$ -schéma pour les équations d'advection à vitesse  $\pm a$  en  $(\vec{w}, \overleftarrow{w})$  dont nous avons parlé. Cette condition est

$$\frac{a\Delta t}{\Delta m} < \frac{1}{1-\theta}. \quad (5.58)$$

Il y a encore beaucoup à dire (et à comprendre) sur l'ordre 2 pour les  $\theta$ -schémas...

Pour terminer, signalons que les reconstructions (5.56) font intervenir le coefficient correcteur  $\varepsilon_i$ . Parmi nos études actuelles, figure ce type de reconstruction qui assure formellement l'ordre 2 espace-temps sur la base de l'équation équivalente (dont il faut pourtant se méfier !) pour des systèmes plus généraux à l'intérieur du domaine et surtout aux bords par lesquels sont injectées les conditions aux limites de débits.

## 5.4 Relaxation du modèle compositionnel

### 5.4.1 Modèle de départ

Le modèle gaz-liquide (5.1) correspond à la situation où l'on a affaire à deux espèces, l'un occupant entièrement la phase gaz et l'autre occupant entièrement la phase liquide. Un modèle plus réaliste doit comprendre  $K \geq 2$  constituants, chacun étant présent dans les deux phases. Introduisons  $\xi_k$  (resp.  $\eta_k$ ) la fraction massique partielle du constituant  $k$  dans la phase gaz (resp. liquide). Dans la veine des modèles à flux de dérive considérés jusqu'à présent, le modèle diphasique compositionnel

$$\partial_t(\rho_g R_g \xi_k + \rho_\ell R_\ell \eta_k) + \partial_x(\rho_g R_g \xi_k v_g + \rho_\ell R_\ell \eta_k v_\ell) = 0, \quad k \in \{1, \dots, K\} \quad (5.59a)$$

$$\partial_t(\rho_g R_g v_g + \rho_\ell R_\ell v_\ell) + \partial_x(\rho_g R_g v_g^2 + \rho_\ell R_\ell v_\ell^2 + p) = \rho S \quad (5.59b)$$

traduit la conservation des  $K$  constituants et celle de l'impulsion totale. La pression et le glissement

$$p = p(\rho_g R_g \xi_k + \rho_\ell R_\ell \eta_k), \quad k \in \{1, \dots, K\} \quad (5.60a)$$

$$v_\ell - v_g = \phi(\rho_g R_g \xi_k + \rho_\ell R_\ell \eta_k, \rho_g R_g v_g + \rho_\ell R_\ell v_\ell) \quad (5.60b)$$

sont des lois de fermeture algébriques.

Cette écriture naturelle cache des non-linéarités très sévères. Si le glissement reste identique au cas gaz-liquide, ses véritables arguments étant toujours<sup>8</sup>  $(\rho_g R_g, \rho_\ell R_\ell, \rho_g R_g v_g + \rho_\ell R_\ell v_\ell)$ , la pression quant à elle peut atteindre un degré de non-linéarité angoissant car elle est assujettie aux règles thermodynamiques concernant les changements de phases et exhibe des singularités au voisinage des zones de transition monophasique-diphasique. On peut déjà avoir un avant-goût dans le cas de deux constituants [63, 79]. Usuellement, le nombre de constituants est de l'ordre de 10. Compte tenu du peu de savoir qu'on a sur le modèle diphasique, et face à ce modèle d'une complexité nettement supérieure, il est illusoire de vouloir se prononcer sur l'hyperbolicité.

Le système (5.59) est l'écriture « physique » du modèle. À l'instar du cas gaz-liquide, on peut poser

$$\rho = \rho_g R_g + \rho_\ell R_\ell, \quad \rho v = \rho_g R_g v_g + \rho_\ell R_\ell v_\ell, \quad \rho c_k = \rho_g R_g \xi_k + \rho_\ell R_\ell \eta_k \quad (5.61)$$

et chercher une écriture « mathématique » proche de la dynamique des gaz. Les calculs mènent à

$$\partial_t(\rho) + \partial_x(\rho v) = 0 \quad (5.62a)$$

$$\partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + P) = \rho S \quad (5.62b)$$

$$\partial_t(\rho c_k) + \partial_x(\rho c_k v + \sigma_k) = 0, \quad k \in \{1, \dots, K-1\} \quad (5.62c)$$

avec

$$\sigma_k = (\eta_k - \xi_k) \rho Y (1 - Y) \phi = (\eta_k - \xi_k) \sigma \quad (5.63a)$$

$$P = p + \rho Y (1 - Y) \phi^2, \quad (5.63b)$$

---

8. le modèle de dérive postule que l'hydrodynamique ne voit que les phases, et non pas la composition

en ayant introduit la fraction de  $Y$  définie par

$$\rho Y = \rho_g R_g. \quad (5.64)$$

Les lois de fermeture permettent de voir les quantités  $(P, \sigma_k)$  comme des fonctions de

$$\mathbf{u} = (\rho, \rho v, \{\rho c_k\}_{1 \leq k \leq K-1}) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{K-1}, \quad (5.65)$$

ce qui confère au système (5.62) la forme abstraite

$$\partial_t \mathbf{u} + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{s}(\mathbf{u}). \quad (5.66)$$

Notons qu'à cause de la relation

$$c_k = Y \xi_k + (1 - Y) \eta_k, \quad (5.67)$$

on peut encore écrire le bilan (5.62c) de l'espèce  $k$  sous la forme

$$\partial_t \{\rho Y \xi_k + \rho(1 - Y) \eta_k\} + \partial_x \{\rho Y \xi_k [v - (1 - Y) \phi] + \rho(1 - Y) \eta_k [v + Y \phi]\} = 0, \quad (5.68)$$

qui sera utile dans §5.4.3.

#### 5.4.2 Approche directe par constituant

Dans  $\langle 15 \rangle$ , nous proposons une relaxation directe de la forme mathématique (5.62). Bien que le modèle de relaxation

$$\partial_t(\rho) + \partial_x(\rho v) = 0 \quad (5.69a)$$

$$\partial_t(\rho v) + \partial_x(\rho v^2 + \Pi) = \rho S \quad (5.69b)$$

$$\partial_t(\rho \Pi) + \partial_x(\rho \Pi v + a^2 v) = \lambda \rho (P - \Pi) \quad (5.69c)$$

$$\partial_t(\rho c_k) + \partial_x(\rho c_k v + \Sigma_k) = 0, \quad (5.69d)$$

$$\partial_t(\rho \Sigma_k) + \partial_x(\rho \Sigma_k v + b^2 c_k) = \lambda \rho (\sigma_k - \Sigma_k) \quad k \in \{1, \dots, K-1\} \quad (5.69e)$$

comporte  $K-1$  blocs de type  $(c, \Sigma)$ , ceux-ci sont tous affectés d'un même paramètre  $b$ . Ce choix est d'abord justifié par le souci de simplicité. Nous n'avons pas jugé souhaitable d'augmenter le nombre de paramètres à régler avec le nombre d'espèces. Par ailleurs, le fait de prendre le même  $b$  pour tous les blocs cinématiques rend multiples les valeurs propres  $v \pm b\tau$  du système et écourte la discussion sur la position relative des ondes. La solution du problème de Riemann devient alors triviale à expliciter.

Mais l'argument le plus puissant en faveur de l'utilisation d'un  $b$  unique pour tous les blocs cinématiques est que ce choix assure une relation de consistance  $\langle 15, \text{Lemma 3.1} \rangle$  sur la fraction du dernier constituant  $K$  qu'on avait laissé de côté dans la formulation (5.69). Sans ce résultat de consistance, il est extrêmement plus ardu —pour ne pas dire impossible— de contrôler la positivité des fractions massiques dans l'état intermédiaire par  $\langle 15, \text{Theorem 3.3} \rangle$ , laquelle entraîne à son tour  $c_k \in [0, 1]$  pour la mise à jour. Il est intéressant de signaler que, malgré une plus grande complexité algébrique apparente, la borne inférieure pour  $b$ , indiquée par  $\langle 15, \text{Theorem 3.3} \rangle$ , est exactement la même que celle pour le modèle gaz-liquide de  $\langle 11 \rangle$ , mais nous avons pu cette fois simplifier notablement la démonstration!

Du côté de l'analyse de stabilité linéaire par développement asymptotique de Chapman-Enskog, nous restons dans la même perspective que pour le modèle gaz-liquide, à savoir que nous n'exigeons que la positivité des éléments diagonaux de la matrice  $\mathbf{D}_{a,b}(\mathbf{u})$  qui figure dans le système d'équilibre asymptotique (15, Theorem 3.1)

$$\partial_t \mathbf{u}^\lambda + \partial_x \mathbf{f}(\mathbf{u}^\lambda) = \mathbf{s}(\mathbf{u}^\lambda) + \lambda^{-1} \partial_x \{ \mathbf{D}_{a,b}(\mathbf{u}) \partial_x \mathbf{u}^\lambda \}. \quad (5.70)$$

Nous introduisons une approximation supplémentaire pour ne garder que les termes dominants dans les éléments diagonaux, ce qui conduit aux conditions sous-caractéristiques diagonales (15, Definition 3.2)

$$a^2 > \{-P_\tau + P_v^2\}(\mathbf{u}) \quad \text{et} \quad b > \max_{1 \leq k \leq K-1} |(\sigma_k)_{c_k}|(\mathbf{u}). \quad (5.71)$$

L'étude du modèle compositionnel a aussi été l'occasion pour nous d'enrichir notre compréhension de la relaxation, en particulier de son interaction avec l'implicite sous toutes ses formes. Nous avons pu trouver une manière naturelle de motiver l'implication de la projection (5.28). Il suffit en réalité de revenir aux variables du système original et d'écrire le schéma explicite sous la forme

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\vee \mathbb{H}(\bar{\bar{\mathbf{u}}}_i^n, \bar{\bar{\mathbf{u}}}_{i+1}^n) - \vee \mathbb{H}(\bar{\bar{\mathbf{u}}}_{i-1}^n, \bar{\bar{\mathbf{u}}}_i^n)], \quad (5.72)$$

à partir de quoi son homologue implicite s'impose naturellement comme (15, §4.1)

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\vee \mathbb{H}(\bar{\bar{\mathbf{u}}}_i^{n+1}, \bar{\bar{\mathbf{u}}}_{i+1}^{n+1}) - \vee \mathbb{H}(\bar{\bar{\mathbf{u}}}_{i-1}^{n+1}, \bar{\bar{\mathbf{u}}}_i^{n+1})]. \quad (5.73)$$

Les opérateurs  $\vee$  et  $\bar{\bar{\cdot}}$  représentent respectivement l'extraction des composantes d'origine (qui ne sont pas les variables introduites par la relaxation) et le relèvement des variables d'origine vers les variables de relaxation défini en (15, §3.1). En posant

$$\mathbb{U}_i^{n+1} = \bar{\bar{\mathbf{u}}}_i^{n+1}, \quad \mathbb{U}_i^n = \bar{\bar{\mathbf{u}}}_i^n, \quad (5.74)$$

on voit que le schéma (5.73) équivaut encore à

$$\vee \mathbb{U}_i^{n+1} = \vee \mathbb{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [\vee \mathbb{H}(\mathbb{U}_i^{n+1}, \mathbb{U}_{i+1}^{n+1}) - \vee \mathbb{H}(\mathbb{U}_{i-1}^{n+1}, \mathbb{U}_i^{n+1})] \quad (5.75a)$$

$$\mathbb{U}_i^{n+1} \in \quad , \quad (5.75b)$$

où la variété d'équilibre est caractérisée par

$$(\rho \Pi) = \rho P(\vee \mathbb{U}) \quad \text{et} \quad (\rho \Sigma_k) = \rho \sigma_k(\vee \mathbb{U}). \quad (5.76)$$

Cette interprétation signifie qu'en toute rigueur, il faudrait non seulement incorporer la mise à l'équilibre de  $\rho \Pi$  dans le système implicite, mais aussi celle de toutes les variables  $\rho \Sigma_k$ . L'avantage de cette approche réside dans la réduction par un facteur 2 de la taille des blocs du système (15, Proposition 4.2).

Le choix d'un même paramètre  $b$  pour tous les constituants  $k$  allège aussi l'implication sélective directe du schéma. Elle rend très facile la démonstration de l'inversibilité de la matrice des vecteurs propres à droite (15, Lemma 4.1). Ces hypothèses expriment que les densités intermédiaires sont positives, ce qui équivaut à ce que les ondes du modèle

relaxé sont ordonnées dans l'ordre « naturel », situations pour lesquelles nous donnons une condition suffisante (15, Theorem 3.2) et dont nous cherchons à établir le lien avec la condition de Whitham (15, Appendix). À titre de curiosité mathématique, nous donnons également une démonstration originale de l'équivalence entre la méthode proposée et une méthode de Roe. La nouveauté de cette démonstration est qu'elle passe par l'interprétation d'Osher-Solomon [142] du schéma de Godunov dans le cas où tous les champs sont linéairement dégénérés (15, Theorem 4.2).

Le modèle de relaxation (5.69) se prête également bien à l'implicite sélectif via le formalisme ALE. Dans la phase lagrangienne, on n'implicite que le bloc acoustique  $(\tau, v, \Pi)$  avec la projection implicite

$$\Pi^{n\sharp} - P^n \approx P_\tau(\tau^{n\sharp} - \tau^n) + P_v(v^{n\sharp} - v^n) + \sum_{k=1}^{K-1} P_{c_k}(c_k^{n\sharp} - c_k^n) \quad (5.77)$$

maille par maille, les accroissements en  $c_k$  étant connus grâce au traitement explicite des blocs  $(c_k, \Sigma_k)$ .

### 5.4.3 Approche indirecte par phase

L'approche directe par constituant est celle de la « droiture ». Il existe une voie alternative, celle de la « ruse ». Elle prend racine dans des modèles compositionnels plus sophistiqués où les bilans de masse sont écrits par constituant et par phase et où l'on doit tenir compte, pour ce faire, des termes d'échanges. C'est pourquoi cette approche indirecte est encore désignée par « relaxation chimique ».

#### Où l'on coupe tout en deux

Dans ces modèles sophistiqués, la conservation totale (5.68) du constituant  $k$  est scindée en deux lois individuelles

$$\partial_t(\rho Y \xi_k) + \partial_x(\rho Y \xi_k(v - (1 - Y)\phi)) = \lambda q_k \quad (5.78a)$$

$$\partial_t(\rho(1 - Y)\eta_k) + \partial_x(\rho(1 - Y)\eta_k(v + Y\phi)) = -\lambda q_k. \quad (5.78b)$$

La physique exigerait qu'on sache modéliser les termes d'échange algébriques  $q_k$ , mais ici on n'en a guère besoin. Ceux-ci ont un temps caractéristique très rapide, ce qui justifie le facteur  $\lambda$  destiné à être très grand. L'idée est d'utiliser ce  $\lambda$  comme paramètre de relaxation. Écrivons d'abord le modèle de relaxation en question.

Il va sans dire qu'on a encore la conservation de la masse totale (5.62a). En sommant sur  $k$  toutes les équations de type (5.78a), on obtient

$$\partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho Y v - \sigma) = -\lambda q, \quad q = q_1 + \dots + q_K, \quad (5.79)$$

si bien que pour  $\lambda = 0$ , on a virtuellement la conservation de la phase gaz<sup>9</sup>. Cela nous amène à récupérer le modèle de relaxation gaz-liquide (5.8) auquel on adjoint, pour chaque constituant  $k \in \{1, \dots, K - 1\}$ , le couple d'équations

$$\partial_t(\rho Y \xi_k) + \partial_x(\xi_k(\rho Y v - \Sigma)) = 0 \quad (5.80a)$$

$$\partial_t(\rho(1 - Y)\eta_k) + \partial_x(\eta_k(\rho(1 - Y)v + \Sigma)) = 0. \quad (5.80b)$$

9. ce qui n'a pas de sens physiquement mais est valide hors équilibre, dans le système relaxé

Si l'on combine (5.80) avec (5.8d), que nous reproduisons ci-dessous

$$\partial_t(\rho Y) + \partial_x(\rho Y v - \Sigma) = 0, \quad (5.81)$$

il vient que

$$\partial_t \xi_k + \left( v - \frac{\Sigma}{\rho Y} \right) \partial_x \xi_k = 0 \quad (5.82a)$$

$$\partial_t \eta_k + \left( v + \frac{\Sigma}{\rho(1-Y)} \right) \partial_x \eta_k = 0. \quad (5.82b)$$

Ainsi, le tour de force que réussit ce modèle de relaxation est un découplage judicieux entre (5.8) et (5.80) : le bloc gaz-liquide en ressort comme un « noyau » autour duquel gravitent  $2(K-1)$  équations de transport sur les fractions partielles. Remarquons aussi que la formulation (5.80), une fois discrétisée à l'ordre 1 en explicite, équivaut parfaitement au décentrage à la Larrouturou (133) des fractions  $(\xi_k, \eta_k)$  suivant le signe des vitesses phasiques

$$\left( v - \frac{\Sigma}{\rho Y} \right)_{i+1/2}^\downarrow \quad \text{et} \quad \left( v + \frac{\Sigma}{\rho(1-Y)} \right)_{i+1/2}^\downarrow \quad (5.83)$$

où  $\downarrow$  représente la valeur en  $(x - x_{i+1/2})/t = 0$  de la solution du problème de Riemann en chaque arête. À bien y regarder, on n'a pas à calculer explicitement les vitesses (5.83), seuls

$$(\rho Y v - \Sigma)_{i+1/2}^\downarrow \quad \text{et} \quad (\rho(1-Y)v + \Sigma)_{i+1/2}^\downarrow \quad (5.84)$$

suffisent pour mettre à jour les variables conservatives de (5.80).

### Où les vitesses de phase ne sont plus cohérentes

Les choses ne sont plus si accommodantes en implicite. Pour former la matrice de Roe équivalente, on a besoin de toutes les vitesses caractéristiques du problème de Riemann. Suivant le cas, le calcul de ces valeurs propres peut faire intervenir les vitesses phasiques lagrangiennes

$$\frac{\Sigma_{i+1/2}^*}{Y_{i+1/2}^*} \quad \text{et} \quad -\frac{\Sigma_{i+1/2}^*}{1 - Y_{i+1/2}^*}, \quad (5.85)$$

où \* désigne l'état intermédiaire qui apparaît dans la solution de Riemann du bloc  $(Y, \Sigma)$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \Sigma_{i+1/2}^* &= \frac{\sigma_i^n + \sigma_{i+1}^n}{2} + b \frac{Y_{i+1}^n - Y_i^n}{2} \\ Y_{i+1/2}^* &= \frac{Y_i^n + Y_{i+1}^n}{2} + \frac{\sigma_{i+1}^n - \sigma_i^n}{2b}. \end{aligned} \quad (5.86)$$

Or, c'est là que le bât blesse : les quotients (5.85) peuvent ne pas être bornés, et de toute façon, leur mise en œuvre se heurte au problème de division par zéro au voisinage des états monophasiques. Cet accroc est au fond dû à une certaine incompatibilité entre la relaxation (5.8d)–(5.8e) pour (5.4c) et les équations supplémentaires (5.78). En coordonnées lagrangiennes, cela équivaut à dire que la relaxation à la Jin-Xin (131)

$$\partial_t Y - \partial_m \Sigma = 0 \quad (5.87a)$$

$$\partial_t \Sigma - b^2 \partial_m Y = \lambda(\sigma - \Sigma) \quad (5.87b)$$

pour

$$\partial_t Y - \partial_m \sigma = 0 \quad (5.88)$$

n'est pas bien adaptée à l'ajout d'équations de type

$$\partial_t(Y\xi) - \partial_m(\xi\sigma) = 0 \quad (5.89a)$$

$$\partial_t((1-Y)\eta) + \partial_m(\eta\sigma) = 0. \quad (5.89b)$$

### Born-Infeld, sauveurs inattendus

Pour remédier à cette difficulté, l'article [\[14\]](#) met en avant une nouvelle manière de relaxer (5.88) qui, par construction, rend trivial le calcul des vitesses phasiques lagrangiennes (5.85) de l'état intermédiaire et garantit qu'elles restent bornées. C'est ce que nous appelons la relaxation de Born-Infeld. Au niveau le plus élémentaire, cette nouvelle méthode consiste à relaxer la loi de conservation scalaire

$$\partial_t u + \partial_x(u(1-u)g(u)) = 0, \quad g \in \mathcal{C}^1([0, 1]; \mathbb{R}), \quad (5.90)$$

par le système dit de Born-Infeld<sup>10</sup> [\[62, 101\]](#)

$$\partial_t W^\lambda + Z^\lambda \partial_x W^\lambda = \lambda[w(U(W^\lambda, Z^\lambda)) - W^\lambda] \quad (5.91a)$$

$$\partial_t Z^\lambda + W^\lambda \partial_x Z^\lambda = \lambda[z(U(W^\lambda, Z^\lambda)) - Z^\lambda], \quad (5.91b)$$

dans lequel  $(W, Z)$  représentent les valeurs relaxées des vitesses phasiques

$$(w(u), z(u)) = ((1-u)g(u), -ug(u)) \quad (5.92)$$

et  $U(W, Z) = Z/(Z - W)$  est une « reconstitution » de  $u$ . Les champs du système (5.91) sont tous linéairement dégénérés. La solution du problème de Riemann associé est extrêmement facile à résoudre et fournit par construction des vitesses  $(W^*, Z^*)$  bornées et calculables pour l'état intermédiaire [\[14, Theorem 2.2\]](#) ainsi qu'un flux numérique vérifiant une agréable propriété de signe [\[14, Theorem 2.2\]](#).

Un autre attrait de cette relaxation est qu'elle ne fait pas intervenir de « bouton » à ajuster et qu'elle paraît très naturelle, chaque variable ayant une signification physique intrinsèque. Alors que le système de Born-Infeld est surtout connu en physique quantique, son utilisation pour la relaxation mène à de nombreuses et élégantes propriétés. On apprécie notamment la condition sous-caractéristique à la Whitham [\[14, Theorem 2.5\]](#)

$$f'(u) \in [w(u), z(u)] \quad (5.93)$$

et la monotonie du flux numérique [\[14, Theorem 2.6\]](#). Le lecteur partagera sans doute l'étonnement contemplatif des auteurs en constatant que la plupart des lois de glissement habituelles vérifient — souvent de justesse — la condition de Whitham transposée heuristiquement à un système [\[14, §3.2\]](#). Enfin, il est possible, du moins dans un cadre formel abstrait, de généraliser [\[14, Appendix A\]](#) la relaxation de Born-Infeld à une équation scalaire  $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$  quelconque, où le flux  $f$  n'est pas nécessairement de la forme  $f(u) = u(1-u)g(u)$ .

---

10. pour  $\lambda = 0$

## 5.5 Adaptation dynamique de maillage

L'implicitation sélective nous a permis de travailler avec des pas de temps beaucoup plus grands. Pour réduire davantage le temps calcul, nous essayons de tirer profit d'une autre particularité des écoulements en conduites. En effet, dans un cas test typique, le domaine de calcul est très long, tandis que les zones où se manifestent les singularités dignes d'un effort de précision sont très localisées. La solution étant régulière dans la majorité des portions, cela fait de notre problème un bon « candidat » pour l'adaptation dynamique de maillage. Les règles du jeu sont simples : il s'agit de faire aussi bien en terme de précision des résultats, tout en gagnant beaucoup en temps via une diminution drastique du nombre d'appels au schéma et aux lois de fermeture.

### 5.5.1 Multi-Résolution

Dans un premier temps, nous n'étudions que l'adaptation dynamique en espace, le pas de temps étant le même pour toutes les mailles et calé sur la plus petite d'entre elles. De nombreux travaux existent déjà pour les systèmes hyperboliques dans le cas d'un schéma explicite. Nous nous sommes appuyés sur la philosophie *fully adaptive* de Cohen et al. [115], qui fait appel à une analyse multi-échelle pour déterminer l'indice de régularité locale de la solution. Cet indice sert ensuite à décider du niveau de grille à attribuer au sein d'une hiérarchie dyadique.

Dans le cas d'un schéma explicite avec  $CFL < 1$ , la prédiction de l'arbre<sup>11</sup> d'un pas de temps à l'autre se fait par raffinement local préventif autour des singularités au pas de temps courant. La difficulté réside dans l'adaptation de cette méthode au cas d'un schéma avec intégration temporelle hybride. Comme le montre une étude préliminaire sur l'atténuation dans un système linéaire à vitesses séparées (12, §2.2, Fig. 1), le schéma sélectivement implicite amortit considérablement les hautes fréquences, et ce à des valeurs de CFL usuellement choisies dans TACITE. Par conséquent, les ondes rapides vont être représentées uniquement sur les niveaux grossiers, ce qui nous permet de régler la prédiction de l'arbre sur la propagation des singularités apparaissant au niveau fin.

Le travail publié dans (12) étant notre première prise de contact avec la MR, nous nous y sommes restreints au glissement nul (qui possède de nombreuses propriétés, dont l'hyperbolicité) et aux problèmes de Riemann. Les résultats encourageants obtenus nous ont amenés à appliquer la MR aux cas réalistes de TACITE. Ce nouveau travail fait l'objet de l'article (13), où nous prenons en compte les conditions aux limites et l'inclinaison variable de la conduite.

L'algorithme de prédiction de l'arbre (13, Algorithm 5.1) et la surcouche de gestion générale (13, Algorithm 5.2) demeurent fondamentalement inchangés. Il convient toutefois de modifier l'évaluation des flux à l'ordre 2 pour ne pas violer le principe du maximum en sortie de l'opérateur raffinement (13, §5.2.1) et d'incorporer l'angle  $\theta(x)$  comme composante du vecteur solution afin d'assurer un raffinement automatique au voisinage des points de changement d'inclinaison (13, §5.2.2). Ce traitement de l'inclinaison a permis de reproduire avec succès un cas de *severe slugging* (voir chapitre 6) sous un régime hydrodynamique régi par la loi de glissement de Zuber-Findlay modifiée (38).

---

11. qui indique le niveau de grille pour chaque maille à un instant donné

### 5.5.2 Local Time-Stepping

Poussant jusqu'au bout la logique de réduction du temps calcul, on se donne maintenant la possibilité de travailler avec des pas de temps variables selon la maille. Là encore, de solides travaux existent dans le cas d'un schéma explicite pour un système hyperbolique. Notre référence est l'article fondateur de Müller et Stiriba [140]. Le principe général consiste à définir d'abord un macro pas de temps, adapté au niveau le plus grossier en espace. Ce macro pas de temps est ensuite divisé en micro pas de temps, de tailles éventuellement inégales, adaptés à chaque niveau plus fin. On introduit une notion de synchronisation des mailles, pour laquelle il est nécessaire d'envisager des zones de transition entre deux régions ayant des niveaux de grille différents. Dans ces zones de transition, usage sera fait de certaines idées de raccordement de Osher et Sanders [141].

À la différence des travaux  $\langle 12, 13 \rangle$  en MR, qui sont exclusivement associés à l'implicite sélectif direct, celui présenté dans  $\langle 17 \rangle$  utilise l'implicite sélectif via le formalisme ALE. Ce changement est motivé par le désir d'assurer la positivité au schéma de base en uniforme. Une autre différence importante avec  $\langle 12, 13 \rangle$  est que cette fois, l'implicite requiert des modifications assez conséquentes, si bien que le schéma final s'éloigne notablement de sa version explicite de départ. Ces modifications sont dues à ce que nous souhaitons, comme toujours, caler la CFL sur la vitesse de l'onde lente (alors que Müller et Stiriba proposent aussi une version implicite « prête à consommer » si l'on accepte de caler la CFL sur l'onde la plus rapide).

En tant que première incursion en LTS avec l'implicite sélectif, l'article  $\langle 17 \rangle$  s'attaque, pour simplifier, au glissement nul. Au niveau le plus global, se trouve l'algorithme de gestion  $\langle 17, \text{Algorithm 5.1} \rangle$ . Les mailles à la frontière de la zone de transition doivent subir un traitement spécial, comme l'indique  $\langle 17, \text{Algorithm 5.5} \rangle$ . Les facteurs d'accélération obtenus sont très spectaculaires  $\langle 17, \text{Table 1} \rangle$ , et sont fortement corrélés avec le nombre d'appels aux lois de fermeture. Des travaux sont en cours pour le cas d'un glissement quelconque.



# Écoulements en conduite : modèles alternatifs et contrôle du severe-slugging

CE CHAPITRE APPORTE des compléments d'information aux publications (6,20,25). Démarrés sous l'impulsion d'Alain Bamberger et de Christian Pauchon, les travaux ont été réalisés avec la collaboration d'Henri Viviand (Principia), puis poursuivis dans le cadre des thèses d'Érich Zakarian [60], sous la direction de Pascal Chossat (Institut Non-Linéaire de Nice), et d'Emmanuel Duret [51], sous la direction de Pierre Rouchon (École des Mines de Paris).

## 6.1 Motivation

### 6.1.1 Quand les tuyaux s'engorgent

En régime stationnaire, les débits massiques sont constants en espace et en temps. En particulier, la production est parfaitement régulière en sortie de ligne, ce qui permet de dimensionner de façon optimale les équipements. Or, dans certaines configurations liées aux variations topographiques plus ou moins accidentées du sol ou en présence d'un tronçon ascendant à l'approche du séparateur, il est impossible d'observer un écoulement diphasique stationnaire. Certes, la solution stationnaire existe en tant qu'objet mathématique calculable, mais elle n'est pas stable.

En effet, on sent intuitivement que le liquide étant plus lourd aurait tendance à s'accumuler dans les points-bas et bloquerait<sup>1</sup> ainsi le passage du gaz. Le gaz est alors comprimé jusqu'au moment où sa pression dépasse celle due au poids de la colonne liquide en aval, à la suite de quoi une longue poche de liquide est évacuée violemment par le gaz en expansion. Sous de telles conditions, on observe un mouvement cyclique : le liquide, après avoir obstrué le gaz, se trouve expulsé par celui-ci et finalement retombe au point-bas pour bloquer à nouveau le gaz.

Ce phénomène est répertorié par les pétroliers sous la dénomination de *slugging*, en français « bouchonnage ». On en distingue deux types : le *terrain-slugging*, dû au relief du terrain, et le *severe-slugging*, dû à l'ajout d'un tronçon vertical en fin de ligne appelé *riser*. Le *slugging* est considéré comme hautement indésirable : les arrivées brutales et répétitives

---

1. Nous employons ici le conditionnel car cela dépend encore de la valeur des débits imposés à l'entrée

de liquide peuvent endommager les installations, réduire les capacités de production, voire tuer le réservoir. Il est donc capital de prédire son apparition et de l'éviter. Prédire son apparition fait appel à la simulation, tandis que l'art de l'éviter relève de l'automatique.

Pour formaliser l'intuition esquissée plus haut, on divise habituellement le cycle d'un severe-slugging en 4 phases, conformément à la Figure 6.1. Dans la phase 1, le niveau liquide monte dans le riser, tandis que la pression dans le pipeline augmente progressivement. L'augmentation de pression se poursuit dans la phase 2, où le liquide se déverse dans le séparateur en sortie. Au-delà d'une certaine pression critique, la langue de gaz dans le pipeline pénètre dans le riser. C'est le *blow-out*, la phase 3, après quoi la pression chute rapidement et une partie résiduelle du liquide retombe par la paroi pendant la phase 4 pour recommencer un nouveau cycle.

### 6.1.2 À la recherche de modèles... imparfaits

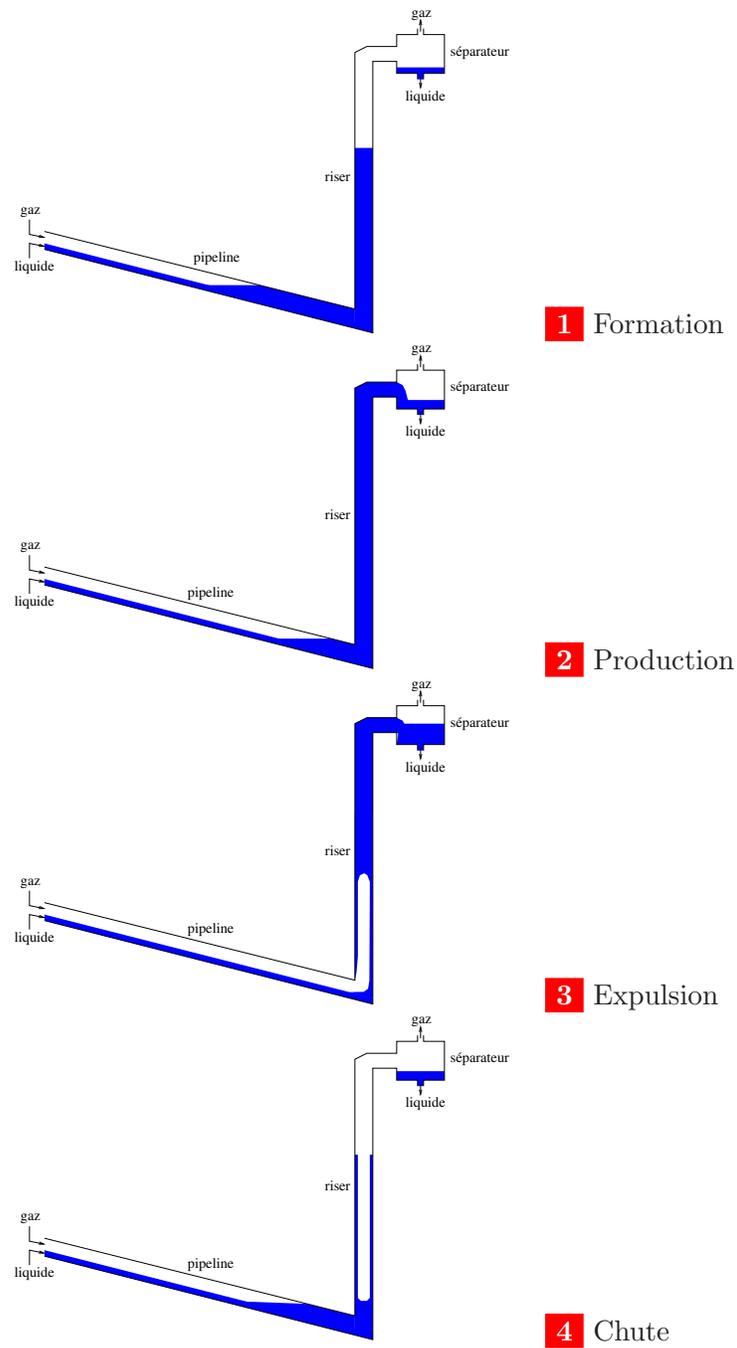
On peut bien entendu simuler le severe-slugging au moyen de TACITE ou d'un autre code. Mais la simulation seule ne suffit pas. Sur le terrain, il faut des remèdes concrets pour éviter ce fléau. Au rayon des actions pour lutter contre le severe-slugging, des trésors d'ingéniosité ont été déployés. Des dix techniques passées en revue par Duret [51, pp. 4–7], citons les plus populaires en usage pratique :

- Le *gas-lift*. C'est la méthode la plus répandue actuellement. Elle consiste à injecter au voisinage du pied du riser un mélange de gaz et d'émulsifiants, dans le but d'alléger le poids de la colonne liquide.
- La *contrôle de vannes en tête de riser*. Le principe de cette méthode est de garder constant le débit total en jouant sur l'ouverture d'une vanne placée en tête de riser. Pour contourner la difficulté de mesurer la vitesse moyenne de l'écoulement, paramètre principal du régulateur, on peut remplacer la vanne par un petit séparateur commandé, permettant ainsi de mesurer chaque débit individuellement.
- Le *pompage polyphasique*. C'est aussi une des méthodes préconisées par l'IFP [67], comme le gas-lift. Elle consiste à installer une pompe soit au pied, soit en tête du riser, toujours dans le but d'alléger la colonne liquide.

L'étude mathématique de ces techniques n'est pas aisée avec le modèle DFM de TACITE, essentiellement parce que c'est un modèle qui contient trop d'informations par rapport à notre objectif : comme nous l'avons déjà expliqué au chapitre 5, DFM possède en général trois ondes, dont deux représentent les effets acoustiques n'ayant pas d'intérêt pour l'ingénieur pétrolier. En la matière, qui peut le plus ne peut pas forcément le moins. Quitte à faire preuve de plus d'audace dans les approximations, on préfère des modèles moins riches, mais plus maniables. Ce peut être par exemple des systèmes EDP plus sobres, qui ignoreraient d'une certaine façon la propagation des ondes de pression tout en revendiquant un usage polyvalent. Mais ce peut être aussi des systèmes algébro-différentiels avec un petit nombre de variables, dédiés à un usage spécifique.

Du côté des modèles EDP généralistes, de nombreux travaux ont été consacrés à la discussion de leurs propriétés mathématiques par rapport aux phénomènes physiques à représenter. Au cœur de cette discussion est la distinction<sup>2</sup> entre les ondes de *taux de vide* (cinématiques) qui se propagent à des vitesses de l'ordre des vitesses matérielles des fluides, et les ondes de *pression* (acoustiques) qui sont liées à la compressibilité des fluides et qui

2. leitmotiv qui revient tout au long des chapitres 5 et 6

FIGURE 6.1 – Les quatre phases d'un cycle de *severe-slugging*.

se propagent à des vitesses de l'ordre des vitesses du son de chaque phase. Citons à titre d'exemple la contribution de Hancox et al. [66] et la synthèse de Stewart et Wendroff [75].

Du côté des modèles dédiés, abondants aussi sont les modèles proposés pour la configuration pipeline-riser, en vue de l'étude du severe-slugging. Ce que nous entendons par *pipeline* ou *pipe* dans ce chapitre est un tronçon quasi-horizontale et en général assez long, par opposition au *riser* court et vertical déjà défini. Le tout premier sur lequel nous avons été amenés à travailler [35, 36] est celui de Fabre et al. [65], qui couple un riser EDP et un pipeline algébrique. Nous avons également connaissance de ceux de Taitel et al. [78], ainsi que Sarica et Shoham [73]. Pour des raisons de dispositif expérimental de référence, ils ne sont pas complètement adaptés aux applications que nous souhaitons aborder.

### 6.1.3 Vers de nouveaux régulateurs

En lançant la thèse de Zakarian [60] en 1997, puis celle de Duret [51] en 2001, nous avons pour objectifs :

1. D'entreprendre une étude systématique de stabilité du slugging en fonctions de tous les paramètres physiques du problème, et ce à l'aide des outils dont dispose la théorie des systèmes dynamiques. Cette étude doit déboucher sur le tracé des cartes d'écoulement ou de bifurcation permettant de prédire l'apparition du severe-slugging.
2. De développer de nouvelles méthodes de contrôle capables d'éliminer totalement le severe slugging sans réduction de la capacité de production, avec une garantie de stabilité basée sur une analyse mathématique rigoureuse. Les autres aspects (facilité et coût de mise en œuvre et de maintenance) sont moins prioritaires.

La clé du succès de ces travaux réside dans la pertinence des modèles réduits qui ont été établis sur la base des travaux initiés dans [6]. Ces modèles ont permis d'obtenir des cartes d'écoulement [20] en accord avec l'expérience.

Pour le deuxième objectif, nous apportons [51] deux contributions originales : un régulateur par prélèvement de gaz, et un deuxième régulateur, plus sophistiqué, qui réinjecte le gaz prélevé dans le riser. C'est ce dernier, qui a fait l'objet d'une publication [25], que nous allons présenter. La technique est directement inspirée du *self-lifting*, mais nous y ajoutons une vanne commandée dans l'espoir de surmonter les insuffisances constatées chez les techniques existantes. La synthèse des lois de commande exploitent au mieux la structure de double dynamique présente dans le système d'équations.

## 6.2 Modèles généralistes

L'article [6] compare, d'un point de vue théorique et numérique, les trois modèles diphasiques qui ont été étudiés à l'IFP. Ce sont les modèles TFM (Two-Fluid Model), DFM (Drift-Flux Model) et NPW (No Pressure Wave). Le modèle DFM a été évoqué au chapitre 5. Dans ce chapitre, nous insistons sur l'apport de NPW.

### 6.2.1 NPW, instantanément acoustique

La séparation des échelles de vitesses entre l'onde cinématique et les ondes acoustiques dans DFM s'exprime très simplement en disant que dans les problèmes que nous avons à considérer, le *nombre de Mach* caractéristique est très faible (de l'ordre de  $10^{-2}$ ).

En aérodynamique monophasique, on sait que l'écoulement autour d'un corps en milieu non-borné tend vers celui d'un fluide incompressible lorsque le nombre de Mach tend vers zéro<sup>3</sup>. L'approximation incompressible fait disparaître les ondes de pression et rend le problème de type hyperbolique-elliptique [80] au lieu de purement hyperbolique. Il est tentant d'essayer d'étendre cette approche aux écoulements diphasiques qui nous préoccupent.

### Modèle limite

L'analyse que nous avons développée [81] s'appuie sur le développement de la solution par rapport au nombre de Mach et vise à tirer directement les conséquences de l'hypothèse centrale de très faible nombre de Mach. On commence par adimensionner les équations (5.1) de DFM. En y injectant le développement par rapport au nombre de Mach, on est amené à préciser d'autres hypothèses auxquelles correspondent diverses situations physiques possibles. Toujours est-il que par passage à la limite sous l'hypothèse d'un écoulement transitoire à « basse » fréquence, on obtient le modèle EDP

$$\partial_t(\rho_g R_g) + \partial_x(\rho_g R_g v_g) = 0 \quad (6.1a)$$

$$\partial_t(\rho_\ell R_\ell) + \partial_x(\rho_\ell R_\ell v_\ell) = 0 \quad (6.1b)$$

$$\partial_x(p) = \rho S, \quad (6.1c)$$

muni des lois thermodynamiques

$$\rho_g = \rho_g(p), \quad \rho_\ell = \rho_\ell(p), \quad (6.2)$$

et de la même loi de fermeture hydrodynamique que pour le modèle DFM du chapitre 5, mais à laquelle nous allons donner la forme (6.3) qui s'avérera mieux adaptée.

Pour le moment, observons que ce résultat final revient à négliger les termes d'inertie dans le bilan de la quantité de mouvement totale (5.1c), en laissant les deux équations de continuité intactes. L'équation (6.1c) constitue l'*approximation hydrostatique* du mélange, supposé désormais en « équilibre » par compensation entre les forces extérieures  $S$  et les efforts intérieurs  $\partial_x p$ . La forme de (6.1c) est conforme à notre attente. En effet, nous avons observé sur les simulations numériques avec DFM que dans le bilan initial (5.1c) de quantité de mouvement, les termes prépondérants sont précisément ceux qui subsistent dans (6.1c). À titre anecdotique, cet état de fait a engendré des difficultés d'intégration du terme source par splitting dans DFM. Vouloir traiter ce terme source en même temps que le gradient de pression, quitte à opter pour un schéma totalement implicite, fut aussi une motivation (forte et pragmatique) pour envisager (6.1).

### Caractère parabolique-hyperbolique

À l'inverse de DFM, dont l'hyperbolicité est incertaine pour une loi de glissement quelconque (cf. §5.2.1), le nouveau modèle (6.1) possède toujours 3 valeurs propres réelles, l'une finie et les deux autres infinies, quelle que soit la loi de glissement. Comme on va le voir ci-dessous, tout se passe comme si l'on avait « envoyé à l'infini » les vitesses des ondes de pression. Le nouveau modèle (6.1), qui ne rend donc plus compte de leur propagation finie, est appelé No Pressure Wave (NPW).

3. sous réserve que les effets thermiques restent négligeables

Pour mieux préciser les propriétés remarquables de NPW, introduisons quelques notations. Alors que dans DFM, les variables mathématiques naturelles sont  $(\rho, Y, v)$  comme le montre la réécriture (5.4), le jeu de variables qui s'impose pour NPW est  $(R_g, p, U_s)$ , où  $U_s = R_g v_g + R_\ell v_\ell$  est la vitesse superficielle totale. Alors que dans DFM, la loi de glissement s'exprime sous la forme (5.2b), dans NPW on l'écrira sous la forme

$$U_g = \Psi(R_g, p, U_s) \quad (6.3)$$

où  $U_g = R_g v_g$  désigne la vitesse superficielle de gaz. La formulation en variables  $(R_g, p, U_s)$  présente un double intérêt : d'une part, elle reste valable lorsque les deux phases sont incompressibles ; d'autre part, l'expression de la valeur propre finie y est particulièrement simple :

$$\lambda = \left( \frac{\partial \Psi}{\partial R_g} \right)_{|p, U_s}. \quad (6.4)$$

Cette valeur propre finie représente l'onde cinématique de matière. Elle est associée [82] à la relation de compatibilité

$$(\partial_t R_g + \lambda \partial_x R_g) + \beta(\partial_t p + \lambda \partial_x p) = \left( \beta \lambda + \nu \frac{\partial \Psi}{\partial U_s} - \frac{\rho'_g}{\rho_g} U_g - \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right) \rho S \quad (6.5)$$

dans laquelle

$$\kappa = R_g \frac{\rho'_g}{\rho_g} + R_\ell \frac{\rho'_\ell}{\rho_\ell}, \quad \nu = U_g \frac{\rho'_g}{\rho_g} + U_\ell \frac{\rho'_\ell}{\rho_\ell}, \quad (6.6)$$

et

$$\beta = \frac{\rho'_g}{\rho_g} - \kappa \frac{\partial \Psi}{\partial U_s}, \quad (6.7)$$

où  $\rho'_g$  et  $\rho'_\ell$  sont les dérivées par rapport à  $p$  des fonctions introduites en (6.2).

Le cas de la valeur propre  $\infty$  est plus délicat. Elle est double, algébriquement. Géométriquement, elle est en général simple, car il n'y a que la relation de compatibilité

$$\partial_x p = \rho S \quad (6.8)$$

qui lui soit associée. Néanmoins, il y a une deuxième relation de compatibilité indépendante de la première si et seulement si  $\kappa = 0$ , à savoir

$$\partial_x U_s = -\nu \rho S, \quad (6.9)$$

qui provient de la relation générale

$$\partial_x U_s + \kappa \partial_t p = -\nu \rho S. \quad (6.10)$$

En résumé, le système est de type hyperbolique-parabolique si  $\kappa \neq 0$ , et de type hyperbolique si  $\kappa = 0$ , mais il ne possède un caractère hyperbolique par rapport au temps que pour la valeur propre finie (6.4).

Signalons que les relations de Rankine-Hugoniot pour un choc se propageant à vitesse finie dans NPW sont

$$[[p]] = 0, \quad [[U_s]] = 0, \quad (6.11)$$

ce qui met en valeur le rôle des variables  $(p, U_s)$ .

Sur la base des **box-schemes** de Chattot et Malet [110], nous avons proposé et mis en œuvre avec succès [38] une méthode de résolution numérique totalement implicite. Les problèmes traités ont montré que, conformément à la théorie, NPW donne des résultats très voisins de ceux de DFM pour des phénomènes transitoires pas trop rapides.

### Invariant de Riemann et lois de fermeture

On peut s'interroger sur les conditions pour lesquelles la relation de compatibilité (6.5) pourrait s'interpréter, dans le cas non-trivial  $\beta \neq 0$ , comme la propagation<sup>4</sup> d'un invariant de Riemann  $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}(R_g, p)$  le long d'une caractéristique, à savoir

$$\partial_t \mathfrak{J} + \lambda \partial_x \mathfrak{J} = \mu S. \quad (6.12)$$

Les calculs montrent qu'une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un tel  $\mathfrak{J}$  est que la loi de glissement (6.3) soit de la forme

$$\Psi(R_g, p, U_s) = \Psi_0(R_g, p)U_s + \Psi_1(R_g, p). \quad (6.13)$$

La coïncidence est saisissante entre ce résultat à motivation purement mathématique et la pratique des expérimentateurs, car les lois de type (6.13) sont justement celles étudiées par Ohkawa et Lahey [71] dans le cadre des écoulements à contre-courant ( $U_g U_\ell < 0$ ) et pour la prévision des points de *flooding* ( $\lambda = 0$ ).

Citons quelques exemples importants des lois de type (6.13).

- La loi du régime *dispersé* à bulles

$$U_g = R_g \left[ U_s + 1.53 \sqrt[4]{g\sigma/\rho_\ell} \sin \theta \right]. \quad (6.14)$$

- La loi de Zuber-Findlay [84] du régime *intermittent* à poches

$$U_g = R_g \left[ (1.05 + 0.15 \sin^2 \theta) U_s + 0.35 \sqrt{gD} \sin \theta \right]. \quad (6.15)$$

- La loi de Zuber-Findlay *modifiée* (IFP)

$$U_g = R_g \left[ (1 + 0.2 R_\ell \sin^2 \theta) U_s + 0.35 R_\ell \sqrt{gD} \sin \theta \right]. \quad (6.16)$$

On peut aller encore plus loin dans l'étude de l'invariant de Riemann  $\mathfrak{J}$  en cherchant sous quelles conditions il reste constant le long d'une caractéristique, c'est-à-dire qu'on a  $\mu = 0$  dans (6.12) pour  $S \neq 0$ . On démontre qu'une condition nécessaire et suffisante pour cela est que

1. L'invariant  $\mathfrak{J}$  doit vérifier l'équation implicite

$$\rho_g(p)R_g - \mathfrak{J}\rho_\ell(p)R_\ell = \Gamma(\mathfrak{J}), \quad (6.17)$$

où  $\Gamma(\mathfrak{J})$  est une fonction arbitraire. Dans ce cas, en considérant les débits surfaciques

$$q_g = \rho_g R_g, \quad q_\ell = \rho_\ell R_\ell, \quad (6.18)$$

on peut encore voir  $\mathfrak{J}$  comme une fonction de  $(q_g, q_\ell)$ .

2. La fermeture (6.13) doit être de la forme

$$U_g = \frac{\mathfrak{J}\rho_\ell(p)}{\mathfrak{J}\rho_\ell(p) + \rho_g(p)} U_s + \frac{\Xi(\mathfrak{J})}{\mathfrak{J}\rho_\ell(p) + \rho_g(p)}, \quad (6.19)$$

où  $\Xi(\mathfrak{J})$  est une autre fonction arbitraire.

C'est le cas des régimes dispersé (6.14) et intermittent (6.15). Ce type de lois de fermeture (6.19) sera d'un grand secours pour l'établissement des modèles dédiés au contrôle du severe-slugging par gas-lift en §6.3.2.

4. avec une éventuelle amplification ou atténuation

### 6.2.2 CINEMA, passionnément incompressible

Sous l'hypothèse des deux phases incompressibles, c'est-à-dire que les lois thermodynamiques (6.2) ne dépendent pas de  $p$ , il se produit des simplifications supplémentaires qui conduisent à

$$\partial_t R_g + \partial_x \Psi(R_g, p, U_s) = 0 \quad (6.20a)$$

$$\partial_x U_s = 0 \quad (6.20b)$$

$$\partial_x p = \rho S. \quad (6.20c)$$

Si l'on suppose encore que la loi de glissement  $\Psi$  ne dépend pas explicitement de  $p$ , alors la dernière équation (6.20c) est indépendante des deux premières. Quant à la première équation (6.20a), elle devient

$$\partial_t R_g + \partial_x \Psi(R_g, U_s(t)) = 0, \quad (6.21)$$

où  $U_s(t)$  est connu en fonction des conditions aux limites. Ce modèle, dit *cinématique*, est très dépouillé mais néanmoins physiquement significatif. La solution de ce modèle se ramène à la résolution de la seule loi de conservation scalaire pour la masse de gaz. Conjugué avec la fermeture de Zuber-Findlay modifiée (6.16), il conduit à la forme développée

$$\partial_t R_g + U_s \partial_x R_g + [\gamma U_s + \delta] \partial_x R_g (1 - R_g) = 0, \quad (6.22)$$

avec  $\gamma = 0.2 \sin^2 \theta$  et  $\delta = 0.35 \sqrt{gD} \sin \theta$ . Il s'agit, à un changement de variable près, d'une équation de Burgers à  $t$  fixé. C'est un prototype rêvé, sur lequel nous n'avons pas manqué de tester de nouvelles idées : conditions aux limites, schémas de relaxation (Born-Infeld, §5.4.3), traitement des changements de l'inclinaison  $\theta$ .

Notre modèle cinématique partage des similitudes avec celui de Jones et Prosperetti [70], qui est un système hyperbolique ayant deux ondes cinématiques correspondant au transport des deux phases supposées aussi incompressibles. Plus lointain dans l'analogie est le modèle de Taitel et al. [77], dont seule la phase liquide est incompressible, la phase gazeuse étant quasi-stationnaire. Les termes d'inertie sont négligés dans les deux équations de quantité de mouvement, qui deviennent alors des fermetures.

### 6.2.3 TFM, doublement fluide

Dans sa thèse, Masella [56] a étudié des modèles bifluides dans lesquels on néglige la tension superficielle. Ce modèle est appelé Two-Fluid Model (TFM). Bien qu'il aille dans le sens d'une complexification du modèle de base DFM, plutôt que d'une réduction, nous avons tenu à le mentionner, d'une part parce qu'il constitue une alternative comme une autre à DFM, et d'autre part parce qu'en lui se réincarnent certaines thématiques déjà vues pour DFM.

Le modèle TFM contient deux bilans de quantité de mouvement, un pour chaque phase. Si l'on désigne par  $p$  la pression commune à l'interface, il s'écrit sous la forme

$$\partial_t(\rho_g R_g) + \partial_x(\rho_g R_g v_g) = 0 \quad (6.23a)$$

$$\partial_t(\rho_\ell R_\ell) + \partial_x(\rho_\ell R_\ell v_\ell) = 0 \quad (6.23b)$$

$$\partial_t(\rho_g R_g v_g) + \partial_x(\rho_g R_g v_g^2 + R_g \Delta p_g) + R_g \partial_x p = S_g \quad (6.23c)$$

$$\partial_t(\rho_\ell R_\ell v_\ell) + \partial_x(\rho_\ell R_\ell v_\ell^2 + R_\ell \Delta p_\ell) + R_\ell \partial_x p = S_\ell. \quad (6.23d)$$

Il n'est plus nécessaire de compléter le système par une loi de glissement de type (5.2b). Par contre, il est indispensable de connaître les écarts  $(\Delta p_g, \Delta p_\ell)$  entre les pressions de chaque phase et la pression interfaciale. C'est par ce biais que reviennent les lois de fermeture hydrodynamique empiriques.

À titre d'exemple, Stuhmiller [76] recommande

$$\Delta p_g = 0, \quad \Delta p_\ell = \frac{1}{4} \rho_\ell (v_g - v_\ell)^2 \quad (6.24)$$

pour le régime dispersé. En régime stratifié, ce sont les formules de De Henau et Raithby [64]

$$\Delta p_g = -\rho_g \left[ \frac{1}{2} \cos \frac{\omega}{2} + \frac{1}{3\pi R_g} \sin^3 \frac{\omega}{2} \right] gD \cos \theta \quad (6.25a)$$

$$\Delta p_\ell = -\rho_\ell \left[ \frac{1}{2} \cos \frac{\omega}{2} - \frac{1}{3\pi R_\ell} \sin^3 \frac{\omega}{2} \right] gD \cos \theta \quad (6.25b)$$

qui entrent en vigueur, et dans lesquelles l'équation implicite

$$\omega - \sin \omega = 2\pi R_\ell \quad (6.26)$$

définit l'angle mouillé  $\omega$ . Pour ces deux types de fermeture, on peut démontrer l'hyperbolicité de (6.23) sous la condition

$$|v_g - v_\ell| \ll c_m, \quad (6.27)$$

où  $c_m$  représente une certaine vitesse du son dans le mélange. On ne sait pas conclure dans le cas d'une fermeture quelconque en  $(\Delta p_g, \Delta p_\ell)$ . Quand bien même le système est hyperbolique, sa résolution numérique se heurte à un obstacle supplémentaire, qui est la forme non-conservative de (6.23). Hormis le schéma de Masella [56], un autre exemple de schéma pour le bifluide est celui de Gallouët et al. [125].

De façon similaire à DFM, les simulations montrent que pour des écoulements à faible Mach, les termes d'inertie dans les bilans de quantité de mouvement sont de plusieurs ordres de grandeur inférieurs au gradient de pression et à la source. Négligeons ces termes d'inertie. Par addition des équations (6.23c)–(6.23d), il vient

$$\partial_x p = S_g + S_\ell = \rho S. \quad (6.28)$$

Si l'on retranche (6.23d) multiplié par  $R_g$  à (6.23c) multiplié par  $R_\ell$ , de sorte à éliminer le terme différentiel  $\partial_x p$ , on obtient

$$0 = S_g R_\ell - S_\ell R_g. \quad (6.29)$$

Ainsi, on retombe sur le modèle NPW, dans lequel la relation algébrique (6.29) fait maintenant office de loi de fermeture hydrodynamique. C'est ce qu'on appelle le *régime stratifié*.

### 6.3 Modèles dédiés

Le modèle NPW est un lieu de passage incontournable pour qui veut créer des mini-modèles plus adaptés à l'étude de tel ou tel aspect du severe-slugging.

### 6.3.1 À la prédiction du severe-slugging

Il existe d'énormes banques de données expérimentales concernant le severe-slugging. On y trouve, entre autres, des cartes d'écoulement pour prédire l'apparition du severe-slugging en fonction des deux débits ou des deux vitesses imposées à l'entrée du pipeline. Mais la confection de ces cartes, fût-elle par des campagnes d'essais ou par des simulations avec TACITE, a toujours été coûteuse. Une des raisons qui explique ce coût est que le nombre de paramètres adimensionnés qui influencent les régions de severe-slugging est assez grand.

#### Systèmes algébro-différentiels vs. EDP

On souhaite accélérer le tracé des cartes d'écoulement pour la prédiction au moyen d'un calcul symbolique sur la base d'un modèle différentiel ou algébro-différentiel, car on espère pouvoir, au passage, profiter des outils de théorie des systèmes dynamiques pour l'analyse du phénomène.

Pour obtenir un système algébro-différentiel, nous intégrons les équations de NPW en espace, sur tout le domaine  $x \in [0, H]$  du riser. L'intégration des deux équations de continuité donne

$$\frac{dm_g}{dt} = \rho_g(p^0)U_g^0 - \rho_g(p^H)U_g^H, \quad \frac{dm_\ell}{dt} = \rho_\ell(p^0)U_\ell^0 - \rho_\ell(p^H)U_\ell^H, \quad (6.30)$$

après avoir défini les masses totales

$$m_g(t) = \int_0^H (\rho_g R_g)(x, t) dx, \quad m_\ell(t) = \int_0^H (\rho_\ell R_\ell)(x, t) dx. \quad (6.31)$$

Les indices supérieurs 0 et  $H$  dans (6.30) désignent les valeurs prises en  $x = 0$  et en  $x = H$ . L'intégration de l'équilibre hydrostatique  $\partial_x p = S$ , où l'on néglige le frottement dans  $S$ , conduit à

$$0 = p^H - p^0 + \mathbf{g}(m_g + m_\ell), \quad (6.32)$$

où  $\mathbf{g}$  est la constante de gravité. Les vitesses superficielles  $U_g^{0,H}$  et  $U_\ell^{0,H}$  font bien entendu appel à la loi de glissement

$$U_g^0 = \Psi(R_g^0, p^0, U_s^0), \quad U_g^H = \Psi(R_g^H, p^H, U_s^H), \quad (6.33)$$

et la pression  $p^H$  est connue en tant que condition limite du riser. Mais que faire pour les nouvelles variables  $(m_g, m_\ell)$ ? Le plus simple est d'approcher les formules de définition (6.31) par les demi-sommes

$$m_g = \frac{H}{2} [\rho_g(p^0)R_g^0 + \rho_g(p^H)R_g^H], \quad m_\ell = \frac{H}{2} [\rho_\ell(p^0)R_\ell^0 + \rho_\ell(p^H)R_\ell^H]. \quad (6.34)$$

Au bout du compte, on aboutit à deux équations différentielles, complétées par des relations algébriques.

Ce nouveau modèle de riser constitue une nouveauté par rapport à celui de Fabre et al. [65], lequel conservait encore un caractère EDP. Par contre, pour ce qui est du modèle de pipe, nous utilisons la même modélisation que ces auteurs. Autrement dit, on se donne un taux de vide  $R_g^F > 0$  caractéristique de l'écoulement supposé stratifié dans le pipe. Ce

taux de vide dépend de la valeur du débit de gaz  $q_g^I$  imposé à l'entrée du pipe. On ajoute au système l'équation

$$\frac{dp^0}{dt} = \frac{a_g^2}{LR_g^P(q_g^I)} [q_g^I - \rho_g(P^0)U_g^0] \quad (6.35)$$

récupérée de [65], dans laquelle  $L$  est la longueur du pipe et  $a_g$  la vitesse du son dans le gaz, supposée constante. Au final, en rassemblant toutes les équations du riser et du pipe, on arrive au système algébro-différentiel [60, pp. 151], dont la forme abstraite est

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t); \varphi) \quad (6.36a)$$

$$0 = \mathbf{G}(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t); \varphi), \quad (6.36b)$$

avec

$$\mathbf{X} = (m_g, m_\ell, p^0) \in \mathbb{R}^3 \quad (6.37a)$$

$$\mathbf{Y} = (U_g^0, R_g^0, R_g^H, U_s^H) \in \mathbb{R}^4 \quad (6.37b)$$

$$\varphi = \text{paramètres} \quad (6.37c)$$

### Frontière de stabilité par analyse linéaire

Comme  $\nabla_{\mathbf{Y}}\mathbf{G}$  est singulier, le système (6.36) n'est pas d'index 1, c'est-à-dire qu'on ne peut pas extraire  $\mathbf{Y}$  de (6.36b) en fonction de  $\mathbf{X}$  pour l'insérer dans (6.36a). On ne peut donc pas, du moins à ce stade, appliquer les théorèmes généraux sur les systèmes algébro-différentiels.

Heureusement, au moyen de manipulations spécifiques au système considéré, dont une dérivation de (6.32) par rapport au temps, on peut transformer (6.36) en un système réduit dont la forme abstraite est

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t); \varphi) \quad (6.38a)$$

$$0 = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t); \varphi), \quad (6.38b)$$

avec

$$\mathbf{x} = (m_g, m_\ell) \in \mathbb{R}^2 \quad (6.39a)$$

$$\mathbf{y} = (U_g^0, R_g^0, R_g^H) \in \mathbb{R}^3 \quad (6.39b)$$

Ces manipulations sont relativement lourdes mais restent explicitables et programmables dans MAPLE. Le nouveau système (6.38) est maintenant d'index 1. On peut lui appliquer l'analyse linéaire locale en calculant les valeurs propres  $z \in \mathbb{C}$  définies comme racines de

$$0 = \begin{vmatrix} \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{f} - z\mathbf{I}_2 & \nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{f} \\ \nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{g} & \nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{g} \end{vmatrix}, \quad (6.40)$$

la matrice étant évaluée sur les solutions stationnaires de (6.38). Si  $\Re z < 0$ , alors ce stationnaire est stable. La frontière de la région de stabilité est donnée par  $\Re z = 0$ .

### Période, amplitude et bifurcation par analyse non-linéaire

En s'efforçant d'extraire vraiment les variables algébriques  $\mathbf{y}$  en fonction des variables différentielles  $\mathbf{x}$  à partir de (6.38b), on se ramène à un système purement différentiel à deux variables

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(t) = \mathbf{h}(\mathbf{x}(t); \boldsymbol{\wp}). \quad (6.41)$$

Les calculs sont très fastidieux mais restent toujours programmables. On a l'embarras du choix en ce qui concerne l'outil d'analyse non-linéaire. Nous avons opté pour la méthode de réduction sur la variété centrale et la mise sous forme normale [92]. Rappelons que si pour l'état stationnaire critique  $(\bar{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\wp}) = (0, 0, \boldsymbol{\wp}_c)$ , alors la forme normale d'ordre 3 associée au système (6.38) est

$$\frac{dx_1}{dt}(t) = -\omega x_2 + (ax_1 - bx_2)(x_1^2 + x_2^2) \quad (6.42a)$$

$$\frac{dx_2}{dt}(t) = \omega x_1 + (bx_1 + ax_2)(x_1^2 + x_2^2), \quad (6.42b)$$

où  $(a, b)$  dépendent des dérivées successives de  $(h_1, h_2)$  en  $(0, 0, \boldsymbol{\wp}_c)$ , et où nous avons écrit  $(x_1, x_2)$  à la place de  $(m_g - \bar{m}_g, m_\ell - \bar{m}_\ell)$ . La forme normale permet de connaître la période et l'amplitude des oscillations qui prennent naissance. En poussant l'analyse non-linéaire par forme normale, on peut démontrer [60, §5.3.3.4, pp. 175] que le phénomène de severe-slugging, dans la modélisation considérée, correspond à une bifurcation de Hopf.

Nous ne détaillons pas plus l'analyse du système dynamique, car ce n'est qu'une simple application des outils déjà existants. Notre propos est avant tout de montrer qu'il est possible de s'y ramener via une réduction de modèle appropriée. Signalons enfin que le modèle algébro-différentiel réduit (6.36) se prête aussi bien à la discrétisation numérique, ce qui produit des résultats de « simulation » du severe-slugging, comme en témoignent les résultats présentés dans (20).

### 6.3.2 Au contrôle par gas-lift

Le premier contact que nous avons eu avec le contrôle (41) a été la mise au point d'un modèle de riser très épuré à partir duquel on peut tout de suite « deviner » la commande à imposer pour éviter l'apparition du severe-slugging. Comme c'est souvent le cas en automatique, il s'agit d'un modèle linéarisé autour de la solution stationnaire. Ce qui permet à notre entreprise de réussir est que le modèle perturbé repose sur le modèle de base NPW dans lequel nous avons fait des hypothèses convenables pour assurer l'existence d'un invariant de Riemann de type (6.19)–(6.17).

#### Modèle linéarisé tangent du riser

Le riser est toujours représenté par le domaine  $x \in [0, H]$ . Pour toute grandeur  $G$ , on note  $\bar{G}$  sa valeur stationnaire et  $G^b$  la perturbation correspondante, si bien que

$$G(t, x) = \bar{G}(x) + G^b(t, x) \quad (6.43)$$

pour tout  $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times [0, H]$ . En stationnaire, la solution du modèle NPW (6.1) vérifie

$$\frac{d}{dx}(\overline{\rho_g U_g}) = 0, \quad \frac{d}{dx}(\overline{\rho_\ell U_\ell}) = 0, \quad \frac{d}{dx}\bar{p} = \bar{S}. \quad (6.44)$$

Les débits (par unité de section)

$$q_g = \rho_g U_g, \quad q_\ell = \rho_\ell U_\ell \quad (6.45)$$

ont alors pour valeurs stationnaires

$$\overline{q}_g(x) = q_g^0, \quad \overline{q}_\ell(x) = q_\ell^0, \quad (6.46)$$

c'est-à-dire celles imposées à l'entrée.

On fait deux hypothèses supplémentaires. La première est que la loi de glissement est de type (6.19)–(6.17), si bien qu'il existe un invariant de Riemann  $\mathfrak{J}$  vérifiant

$$\partial_t \mathfrak{J} + \lambda \partial_x \mathfrak{J} = 0. \quad (6.47)$$

Cette hypothèse généralise celle faite par Fabre et al. [65] et qui stipule le régime intermittent (6.15) dans le riser. La valeur stationnaire de cet invariant est  $\overline{\mathfrak{J}}(x) = \mathfrak{J}^0$ , tandis que sa perturbation obéit, en régime linéarisé, à

$$\partial_t \mathfrak{J}^b + \overline{\lambda}(x) \partial_x \mathfrak{J}^b = 0. \quad (6.48)$$

C'est une équation d'advection linéaire dont la solution vaut

$$\mathfrak{J}^b(t, x) = \mathfrak{J}_{x=0}^b(t - \overline{T}(x)), \quad \text{avec } \overline{T}(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\overline{\lambda}(\xi)}, \quad (6.49)$$

pour des temps suffisamment grands  $t > \overline{T}(x)$ , et en supposant donné l'invariant  $\mathfrak{J}$  au bord  $x = 0$  en fonction du temps. C'est ce que nous avons noté  $\mathfrak{J}_{x=0}^b(\cdot)$ .

La deuxième hypothèse est que nous pouvons négliger le frottement de la paroi, si bien que la source

$$\rho S = \mathfrak{g}(\rho_g R_g + \rho_\ell R_\ell) \quad (6.50)$$

ne voit que la pesanteur. En d'autres termes, elle ne fait intervenir que les deux variables thermodynamiques. En prenant justement  $(p, \mathfrak{J})$  comme arguments de  $\rho S$ , on linéarise  $\partial_x p = \rho S$  par

$$\partial_x p^b = \overline{(\rho S)_p} p^b + \overline{(\rho S)_\mathfrak{J}} \mathfrak{J}^b \quad (6.51)$$

avec

$$\overline{(\rho S)_p} = \partial_p (\rho S)|_{\mathfrak{J}}(\overline{p}, \overline{\mathfrak{J}}), \quad \overline{(\rho S)_\mathfrak{J}} = \partial_{\mathfrak{J}} (\rho S)|_p(\overline{p}, \overline{\mathfrak{J}}). \quad (6.52)$$

Finalement, avec l'aide de (6.49), on transforme (6.51) en

$$\partial_x p^b(t, x) - \overline{(\rho S)_p}(x) p^b(t, x) = \overline{(\rho S)_\mathfrak{J}} \mathfrak{J}_{x=0}^b(t - \overline{T}(x)), \quad (6.53)$$

qui est une équation différentielle linéaire en  $p^b$  avec second-membre, à  $t$  fixé.

### Relation entrée-sortie et commande

La résolution de l'équation différentielle (6.53) par « variation de la constante », ce qui conduit à

$$p^b(t, x) = \overline{Q}(x) \left\{ \int_0^x \overline{(\rho S)_p}(\chi) \overline{Q}^{-1}(\chi) \mathfrak{J}_{x=0}^b(t - \overline{T}(\chi)) d\chi + p^b(t, 0) \right\}, \quad (6.54)$$

avec

$$\overline{Q}(\chi) = \exp \left( \int_0^\chi \overline{(\rho S)_p}(\xi) d\xi \right). \quad (6.55)$$

Après le changement de variables  $\varsigma = \overline{T}(\chi)$  et l'introduction de fonctions composées auxiliaires, on arrive à la forme

$$p^b(t, x) = \overline{Q}(x) \left\{ \int_0^{\overline{T}(x)} \overline{N}(\varsigma) J_{x=0}^b(t - \varsigma) d\varsigma + p^b(t, 0) \right\}, \quad (6.56)$$

qui se condense par l'intermédiaire d'un produit de convolution comme

$$p^b(t, x) = \overline{Q}(x) \left\{ [\mathcal{N}_x \star \mathfrak{J}_{x=0}^b](t) + p^b(t, 0) \right\}, \quad (6.57)$$

en ayant posé

$$\mathcal{N}_x(\varsigma) = \mathbf{1}_{[0, \overline{T}(x)]}(\varsigma) \overline{N}(\varsigma) \quad (6.58)$$

avec l'aide de la fonction caractéristique  $\mathbf{1}$ . En spécialisant  $x = H$ , on obtient

$$p^b(t, H) = \overline{Q}(H) \left\{ [\mathcal{N}_H \star \mathfrak{J}_{x=0}^b](t) + p^b(t, 0) \right\}. \quad (6.59)$$

Or, dans un dispositif de riser, la pression en sortie  $x = H$  est toujours maintenue à une valeur constante, avec ou sans severe-slugging. Par conséquent,  $p^b(t, H) = 0$  et à partir de (6.59), on déduit la relation entrée-sortie

$$p^b(t, 0) = -[\mathcal{N}_H \star \mathfrak{J}_{x=0}^b](t). \quad (6.60)$$

Si l'on veut éviter le severe-slugging, il faut se débrouiller pour que la perturbation  $p^b(t, 0)$  de la pression en bas du riser ne s'amplifie pas. La formule (6.60) suggère d'agir sur le scalaire  $\mathfrak{J}_{x=0}^b$ , qui apparaît alors comme la seule grandeur qui compte dans le système.

Ce principe « esthétique » étant formulé, on est vite confronté au problème de sa mise en œuvre pratique. En effet, il est impossible de mesurer par des appareils la grandeur abstraite qu'est l'invariant de Riemann  $\mathfrak{J}$ , même si l'on connaît son expression exacte. Concrètement, on ne peut agir que sur le débit de gaz en bas du riser. C'est ici que se produit un miracle : en effet, on a vu suite à l'équation (6.17) que l'invariant de Riemann  $\mathfrak{J}$  peut également être considéré comme une fonction des débits  $(q_g, q_\ell)$ . En linéarisant

$$\mathfrak{J}(R_g, p) = \mathcal{J}(q_g, q_\ell), \quad (6.61)$$

on a immédiatement

$$\mathfrak{J}^b = \mathcal{J}_{q_g}(q_g^0, q_\ell^0) q_g^b + \mathcal{J}_{q_\ell}(q_g^0, q_\ell^0) q_\ell^b. \quad (6.62)$$

Le débit infinitésimal de gaz qu'on doit injecter pour maintenir  $\mathfrak{J}_{x=0}^b = 0$  est donc

$$q_g^b(t, x=0) = -\frac{\mathcal{J}_{q_\ell}(q_g^0, q_\ell^0)}{\mathcal{J}_{q_g}(q_g^0, q_\ell^0)} q_\ell^b(t, x=0) \quad (6.63)$$

la variation de débit de liquide  $q_\ell^b(t, x=0)$  étant supposée connue par mesures. Quand le second-membre devient négatif, cela revient à demander qu'on aspire du gaz de la colonne,

ce qui est inenvisageable ! De même, on ne peut pas agir de façon « instantanée » comme l'exige (6.63). C'est pourquoi on se contente de l'heuristique

$$q_g^b(t, x = 0) = \max \left\{ 0, -\frac{\mathcal{I}_{q_\ell}^0}{\mathcal{I}_{q_g}^0} q_\ell^b(t - \Delta t, x = 0) \right\}. \quad (6.64)$$

Les essais numériques <41> utilisant TACITE montrent que cette stratégie donne des résultats tout à fait satisfaisants.

### 6.3.3 Au contrôle par réinjection

Une alternative — qu'on espère plus efficace — au *gas-lift* est le *bypass*. Comme l'illustrent les Figures <25, Fig. 6, Fig. 7>, on veut prélever du gaz dans le pipe, avant le point bas, pour le réinjecter dans le riser. En instaurant une sorte de *gas-lift* « auto-alimenté », ceci aura comme effet bénéfique non seulement d'alléger la pression au point bas. Nous préconisons un *active bypass*, dans lequel la quantité de gaz à prélever est ajustée automatiquement en fonction de l'état du système. Une autre contrainte technologique qu'on s'impose est qu'on ne souhaite mesurer que des pressions. À nouveau, il est indispensable de disposer d'un modèle réduit adapté.

#### Modèle à retard

Comme pour le modèle de prédiction en §6.3.1, on introduit les masses totales de gaz et de liquide dans le domaine, mais cette fois, on distingue pour chaque phase la masse en bas  $B$  (en-dessous du point de réinjection) et celle en haut  $T$  (au-dessus du point de réinjection), si bien qu'on a les quatre grandeurs

$$m_g^B, m_g^T, m_\ell^B, m_\ell^T \quad (6.65)$$

à faire évoluer en temps. On distingue maintenant aussi deux pressions ponctuelles

$$\Pi, P \quad (6.66)$$

dans le pipe. Le premier correspond au point bas du riser, le second correspond au point de prélèvement dans le pipe, en amont du point où  $\Pi$  est défini, comme l'indique la Figure <25, Fig. 7>. La position  $x_g$  de la langue de gaz par rapport au point bas (considéré comme origine des abscisses  $x$ ) fait également partie des variables d'évolution du système.

Les opérations standard comme les bilans de conservation de masse, l'application des relations thermodynamiques idéalisées, et l'intégration de la perte de charge  $\partial_x p = S$  conduisent facilement aux équations <25, eqs. (1)–(7)>. La partie qui contient vraiment une difficulté de modélisation se trouve entre le point de réinjection  $l_I$  et le sommet  $l_R$  du riser : dans cette zone diphasique mélangée, on ne sait pas quoi prédire finement le régime d'écoulement.

Sur la base d'observations physiques assez grossières, on décide d'y écrire le modèle NPW <25, eq. (9)> avec une fermeture de type dispersé simpliste

$$v_g = C_\infty, \quad (6.67)$$

ce qui revient à décréter que les bulles de gaz montent toutes à la même vitesse constante  $C_\infty$ . Du coup, la masse de gaz

$$w_g = \rho_g R_g \quad (6.68)$$

devient un invariant de Riemann (25, eq. (10)) se propageant à cette vitesse constante, ce qui permet de déterminer  $w_g(t, x)$  par une formule simple faisant intervenir un retard (25, eq. (11)). Cette résolution explicite est la clef de voûte du modèle réduit, car elle permet ensuite de dérouler les transformations algébriques jusqu'à la forme modifiée (25, eq. (22)), dans laquelle les deux seules variables différentielles sont à présent  $P$  et  $\Pi$ . Ainsi, par rapport au modèle de prédiction en §6.3.1, la particularité de ce nouveau système algébro-différentiel est qu'il contient des termes retardés de

$$t_R = \frac{l_R - l_I}{C_\infty}. \quad (6.69)$$

Ce décalage est le temps que met une bulle de gaz pour monter du point de réinjection jusqu'au sommet du riser.

Le moins qu'on puisse penser de l'hypothèse de fermeture (6.67) est qu'elle est... améliorable. Certes, sous l'effet d'une expansion, les bulles de gaz ne vont pas à vitesse constante. Mais il faut voir (6.67) comme une approximation d'ordre 0 qui donne une tendance générale du comportement du système, pour le calcul de laquelle on n'affronte le système EDP de NPW que de façon détournée.

### Commande à double échelle

Par ouverture de la vanne dont la loi de comportement (25, eq. (8)) est imposée par les fabriquant, on souhaite maintenir la langue de gaz  $x_g(t)$  à une position de référence  $x_g^\bullet$ . En terme de pression, cela revient à demander que l'écart de pression

$$\Delta(t) = \Pi(t) - P(t) \quad (6.70)$$

soit maintenu à la valeur de référence  $\Delta^\bullet$ , fonction de la position de référence  $x_g^\bullet$  pour la langue de gaz. Or, dans le problème qui nous occupe, les ordres de grandeurs sont tels que  $\Pi$ , la pression au pied du riser varie beaucoup plus rapidement que  $P$ , la pression au point de prélèvement. Cette différence de dynamique est due au fait que dans les équations différentielles

$$\frac{dP}{dt}(t) = \alpha [q_g^I(t) - q_g^B(t)] \quad (6.71a)$$

$$\frac{d\Pi}{dt}(t) = \beta [q_g^B(t - t_R) - q_g^B(t)] \quad (6.71b)$$

du modèle (25, eq. (25)), les coefficients  $(\alpha, \beta)$  sont dans des gammes de valeurs différentes, c'est-à-dire

$$\beta \approx 20\alpha \gg \alpha. \quad (6.72)$$

C'est sur la base de cette observation fondamentale que nous proposons la stratégie de commande à double échelle suivante. On commence par faire converger  $P$  rapidement vers une certaine consigne  $P^\bullet$ , ce qui permet de stabiliser l'écoulement. Ensuite, on modifie lentement le seuil de la consigne  $P^\bullet$  afin d'assurer la convergence de  $\Delta$  vers  $\Delta^\bullet$ . Les détails de ce couple de commandes de type proportionnel-intégral sont donnés par (25, eq. (26), eq. (30)), dont nous reproduisons ici le noyau dur

$$q_g^B = \frac{K_P}{\alpha} [P(t) - P^\bullet(t)] \quad (6.73a)$$

$$\frac{dP^\bullet}{dt} = K_I [\Delta(t) - \Delta^\bullet]. \quad (6.73b)$$

Ces commandes font intervenir deux constantes positives ( $K_P, K_I$ ) pour le réglage des régulateurs.

### Réglage des gains et stabilité

En boucle fermée, la structure du système prend la forme abstraite

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_P & -K_I \\ K_P(1 - \frac{\beta}{\alpha}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\beta}{\alpha} K_P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t - t_R) \\ y(t - t_R) \end{bmatrix} \quad (6.74)$$

avec le changement de variables

$$x(t) = P(t) - P^\bullet(t) - \frac{\alpha}{K_P} q_g^I, \quad y(t) = \Delta(t) - \Delta^\bullet. \quad (6.75)$$

On démontre de deux manières [51, §5.3.2] qu'une condition suffisante de stabilité pour le système (6.75) est que

$$K_I < \frac{\alpha}{\beta t_R}. \quad (6.76)$$

Autrement dit, il faut que la commande « lente » soit vraiment lente !

### Validation expérimentale

Une maquette expérimentale, du nom de S<sup>4</sup>L (Small Size Severe Slugging Loop) a été construite (25, Fig. 9), sur laquelle on peut modifier la position des points de prélèvement et de réinjection. Le réservoir de gaz, en bas à gauche, a pour unique but de simuler un très long pipeline, préalable essentiel pour produire du severe-slugging. Comme le montre l'exemple (25, Fig. 12), le contrôle proposé à partir du modèle réduit simpliste parvient dans la grande majorité des cas à éliminer complètement le severe-slugging.



# Moteurs à combustion : une étape convective plus précise en maillage déformé

PAR RAPPORT AUX articles (8, 19), ce chapitre apporte une vision plus complète du contexte, ainsi que quelques résultats supplémentaires. Ce travail a été réalisé en liaison avec Bruno Scheurer (CEA).

## 7.1 Position du problème

### 7.1.1 De KIVA à IFP-C3D

Dans le cycle de conception d'un nouveau moteur à combustion, la modélisation et la simulation numérique de son aérodynamique interne occupe une place prépondérante. Le code « maison » développé par l'IFP pour servir cette activité porte le nom d'IFP-C3D. Ce dernier résout les équations de Navier-Stokes pour les écoulements turbulents et réactifs multi-espèces, avec injection de gouttelettes, tout en étant capable de prendre en compte les géométries complexes mobiles.

La structure de l'algorithme de résolution, ainsi que les briques de base d'IFP-C3D, reposent en fait sur KIVA [61, 69, 74], un logiciel développé par le *Los Alamos National Laboratory* à la fin des années 80 et réputé pour la puissance et la généricité de sa méthode de résolution. Afin de s'affranchir de la contrainte d'un maillage structuré, d'incorporer d'autres effets physiques au programme de calcul, de modifier un solveur ou plusieurs recettes numériques locales, ou de paralléliser l'exécution, les équipes IFP ont peu à peu, sur presque deux décennies, fait évoluer KIVA vers IFP-C3D, en passant par différentes étapes comme KIVA-MB, K-IFP...

Au cours de cette longue évolution, l'essence de la méthode de résolution est toutefois demeurée inchangée. Cette méthode puise en effet sa force dans la décomposition ALE (Arbitrary Lagrange-Euler) des équations de départ, ce qui permet d'introduire un *splitting* naturel des différents termes et de considérer la mobilité du maillage — correspondant aux mouvements du piston — comme une des étapes de ce processus de *splitting*. Concrètement, du point de vue algorithmique, chaque itération en temps effectuée par IFP-C3D est divisée en trois phases :

- A. La phase *chimique*. On traite les termes sources d'ordre 0 (réactions chimiques, transferts) en intégrant des équations différentielles.

- B. La phase *acoustique*. On traite les termes d'ordre 1 ou 2 (partie hyperbolique contenant les ondes acoustiques et partie parabolique) selon un schéma de type volume-fini.
- C. La phase *convective*. On traite les termes de transport eulérien (mouvements imposés au maillage) en résolvant un problème d'advection linéaire à vitesse connue. Selon la coutume, on parle encore de phase de *remaillage*, de *projection*.

Le contenu détaillé de chacune de ces phases est décrit dans divers manuels [61, 69, 74]. Ce qui nous préoccupe dans ce chapitre concerne la phase C. Mais auparavant, signalons que les phases A et B sont habituellement discrétisées en implicite, tandis que la phase C est toujours en explicite. La similitude entre cette stratégie et la méthode de Lagrange-projection au chapitre 5 signifie qu'en fait, KIVA pratiquait déjà l'implicitation sélective sans le dire... explicitement. Mais à la différence du Lagrange-projection pour TACITE, il n'y a aucune estimation théorique pour le pas de temps garantissant la stabilité et la positivité du schéma. D'ailleurs, la stabilité de la phase C dans IFP-C3D nécessite la division du pas de temps courant en plusieurs sous-pas suffisamment petits.

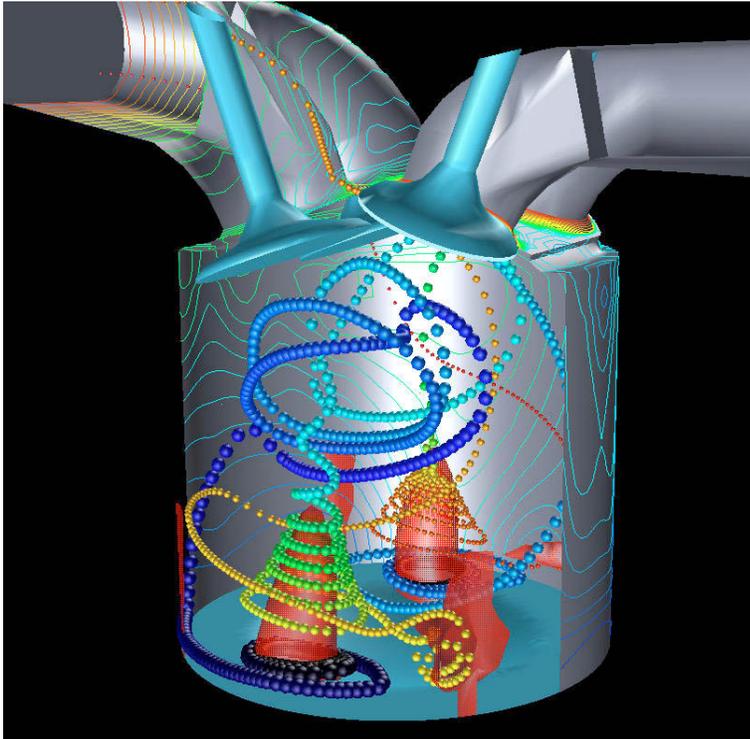


FIGURE 7.1 – Utilisation de KIVA pour l'étude de l'allumage d'un moteur diesel.

### 7.1.2 Un DONOR seul ne fait pas le printemps

Une autre différence entre IFP-C3D et TACITE est la dimension spatiale : le fait d'être en 3-D s'avère plus épineux qu'en 1-D, plus particulièrement dans la phase C où l'on a affaire à plusieurs équations scalaires de transport. En effet, alors que l'advection scalaire linéaire 1-D peut être résolue de façon très satisfaisante par des techniques éprouvées combinant

décentrage et reconstruction non-linéaire [149, 152], il n'en est pas de même en 2-D et 3-D, où la quête d'un schéma « parfait » est encore ouverte.

Pour être rigoureux, nous allons introduire quelques notations. Comme il sera établi plus loin, dans la phase C, on doit résoudre des équations de la forme abstraite

$$\partial_t(\mathbb{J}) + \nabla(\mathbf{s}) = \mathbb{O} \quad (7.1a)$$

$$\partial_t(J) + \operatorname{div}(J\mathbb{J}^{-1}\mathbf{s}) = 0 \quad (7.1b)$$

$$\partial_t(\Psi J) + \operatorname{div}(\Psi J\mathbb{J}^{-1}\mathbf{s}) = 0 \quad (7.1c)$$

où  $\mathbb{J}$  est une matrice carrée d'ordre  $d$  égal à la dimension spatiale,  $J$  un scalaire censé être le déterminant de  $\mathbb{J}$ ,  $\mathbf{s}$  le déplacement imposé du maillage et  $\Psi$  la grandeur scalaire pour laquelle on souhaite effectuer le transport. Par exemple,  $\Psi$  peut être la densité totale  $\rho$ , une densité partielle  $\rho\alpha$ , l'énergie totale  $\rho E$  ou n'importe quelle composante de la quantité de mouvement  $\rho\mathbf{v}$ . On convient de parler de convection pour (7.1c), mais d'advection pour le résultat de l'élimination entre (7.1c) et (7.1b), à savoir

$$\partial_t\Psi + (\mathbb{J}^{-1}\mathbf{s}) \cdot \mathbf{grad}\Psi = 0. \quad (7.2)$$

Le schéma actuellement en place dans IFP-C3D traite la convection (7.1) par une procédure de type *découplage directionnel* : à travers chaque face du maillage, on cherche à évaluer un « flux normal » advecté

$$f = \Psi(\mathbb{J}^{-1}\mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} \quad (7.3)$$

en considérant un problème de Riemann 1-D avec les valeurs gauche/droite prises de part et d'autre de la face. Ceci donne lieu à un décentrage amont sur  $\Psi$  appelé DONOR, dont l'avantage est la simplicité. Regardons de plus près ce schéma DONOR dans un cas de référence 2-D simplissime, celui où la vitesse

$$\mathbf{u} = \mathbb{J}^{-1}\mathbf{s} \quad (7.4)$$

est uniforme en temps et en espace, à composantes positives, c'est-à-dire

$$\mathbf{u} = (u, v) \in \mathbb{R}_x^+ \times \mathbb{R}_y^+, \quad (7.5)$$

et où le maillage est composé de rectangles réguliers de taille  $\Delta x \times \Delta y$ . Dans ce cas, la mise à jour de la variable s'écrit

$$\Psi_{i,j}^{n+1} = \Psi_{i,j}^n - \lambda[\Psi_{i+1/2,j} - \Psi_{i-1/2,j}] - \mu[\Psi_{i,j+1/2} - \Psi_{i,j-1/2}] \quad (7.6)$$

avec

$$\lambda = \frac{u\Delta t}{\Delta x}, \quad \mu = \frac{v\Delta t}{\Delta y}, \quad (7.7)$$

et

$$\Psi_{i+1/2,j} = \Psi_{i,j}^n, \quad \Psi_{i,j+1/2} = \Psi_{i,j}^n. \quad (7.8)$$

C'est en fait (7.8) qui constitue la définition de DONOR, l'équation (7.6) n'étant qu'une formule générique. Par analogie avec le cas 1-D, on peut tenter d'accroître la précision en passant à l'ordre 2 par reconstruction limitée, à savoir en prenant

$$\Psi_{i+1/2,j} = \Psi_{i,j}^n + \frac{1}{2}(1 - \lambda)A_{i,j}^n, \quad (7.9a)$$

$$\Psi_{i,j+1/2} = \Psi_{i,j}^n + \frac{1}{2}(1 - \mu)B_{i,j}^n, \quad (7.9b)$$

les pentes corrigées  $A \approx \Delta x \partial_x \Psi$  et  $B \approx \Delta y \partial_y \Psi$  étant

$$A_{i,j}^n = \Lambda(\Psi_{i,j}^n - \Psi_{i-1,j}^n; \Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i,j}^n) \quad (7.10a)$$

$$B_{i,j}^n = \Lambda(\Psi_{i,j}^n - \Psi_{i,j-1}^n; \Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j}^n), \quad (7.10b)$$

où  $\Lambda$  désigne un limiteur à définir. Quoi qu'il en soit, DONOR conduit à des imprécisions importantes qui se manifestent par un « étalement » excessif de la solution calculée. Cette dissipation s'accroît davantage en maillage irrégulier et prend des proportions désastreuses en maillage très déformé. Malheureusement, en simulation moteurs, les maillages sont la plupart du temps très déformés.

### 7.1.3 Vous avez dit... « multidimensionnel » ?

Une des causes de cette trop grande dissipation est le choix délibéré de ne considérer que la propagation dans la direction normale à chaque face. À l'instar de Colella [116] ou de LeVeque [134], on aimerait plaider pour une approche moins rudimentaire qui tiendrait compte de la propagation non-normale au voisinage de chaque face. Par abus de langage, on qualifie une telle approche de « vraiment multidimensionnelle ».

Une approche multidimensionnelle n'aurait pas qu'un intérêt purement scientifique : les enjeux économiques des simulations sont tels que les ingénieurs motoristes ont unanimement souhaité une meilleure précision des calculs de la phase C. Dès 1997, la question a été soulevée par ceux-ci de chercher un schéma qui remplirait les conditions suivantes :

1. Améliorer notablement la précision des résultats, en diminuant le plus possible la dissipation numérique sur tous les types de maillage, y compris les plus déformés. C'est l'aspect le plus prioritaire.
2. Préserver la monotonie des variables transportées  $\Psi$ , c'est-à-dire ne pas introduire d'oscillations artéfactuelles dans le résultat et respecter les bornes « naturelles » de ces variables.
3. Assurer la conservation globale des variables de masses  $\Psi J$ . Cet aspect, moins prioritaire, peut être réalisé par une procédure de post-traitement.
4. On ne s'impose aucune restriction concernant le prix à payer en temps de calcul. Ceci est raisonnable dans la mesure où le coût de la phase C ne représente, pour le moment, qu'une part très faible par rapport au reste du code.
5. Par contre, il est exigé que la nouvelle méthode fonctionne aussi bien en maillage structuré cartésien que non-structuré hybride, car les ingénieurs souhaitent aller vers des maillages mélangeant hexaèdres et tétraèdres.

Ce cahier des charges nous incite à nous concentrer sur la forme advective (7.2) plutôt que la forme convective (7.1). Il suggère de commencer par la recherche d'un bon schéma pour l'advection « pure »<sup>1</sup>

$$\partial_t \Psi + \mathbf{u} \cdot \mathbf{grad} \Psi = 0, \quad (7.11)$$

sans trop nous soucier dans un premier temps ni de son origine, ni de la conservation de  $\Psi J$ , ni du cortège de tracasseries qu'occasionnerait son intégration ultérieure dans le code. Dans un deuxième temps seulement, on s'attaquera aux aspects directement en rapport avec l'intégration au code existant.

1. appelée encore *équation de la couleur* par LeVeque [135]

## 7.2 Advection linéaire comme une fin en soi

### 7.2.1 État de l'art

S'agissant de schéma multidimensionnel pour l'advection pure à vitesse uniforme, la littérature abonde en travaux appartenant à des écoles fort variées. Toute une première partie de ce travail (40, 42) a d'ailleurs été consacrée à la bibliographie des schémas existants. Sans prétendre à l'exhaustivité, passons rapidement en revue ceux qui ont le plus retenu notre attention. Les schémas sont tous explicites en temps et naturellement assujettie à une restriction CFL que nous ne détaillons pas.

#### Schémas de type WAF (Weighted Average Flux)

Historiquement, le schéma CTU (Corner Transport Upwind) de Colella [116] est le premier à incorporer une information de flux issue d'une propagation autre que normale. Dans le cas de référence 2-D rectangulaire, ce schéma prend la forme (7.6), avec

$$\Psi_{i+1/2,j} = \Psi_{i,j}^n - \frac{1}{2}\mu(\Psi_{i,j}^n - \Psi_{i,j-1}^n) =: \Psi_{i+1/2,j}^I \quad (7.12a)$$

$$\Psi_{i,j+1/2} = \Psi_{i,j}^n - \frac{1}{2}\lambda(\Psi_{i,j}^n - \Psi_{i-1,j}^n) =: \Psi_{i,j+1/2}^I \quad (7.12b)$$

si bien qu'au final, la mise à jour (7.6) devient

$$\Psi_{i,j}^{n+1} = (1 - \lambda)(1 - \mu)\Psi_{i,j}^n + \lambda(1 - \mu)\Psi_{i-1,j}^n + (1 - \lambda)\mu\Psi_{i,j-1}^n + \lambda\mu\Psi_{i-1,j-1}^n. \quad (7.13)$$

Le second membre n'est autre que la moyenne sur la cellule  $(i, j)$  après la translation de vecteur  $\mathbf{u}\Delta t$  de la fonction constante par cellules associée aux valeurs  $\Psi_{i,j}^n$ . Grâce à la présence du terme de coin  $\Psi_{i-1,j-1}^n$ , lequel justifie le nom du schéma, l'erreur de troncature, ne contient désormais plus de dérivée en  $\partial_{xy}\Psi$ , quoique toujours d'ordre 1.

À vrai dire, ce qu'a proposé Colella [116] est directement une version d'ordre 2 de (7.12), celui-ci étant un socle de base d'ordre 1 commun à tous les schémas de ce type. Il y a en effet plusieurs versions d'ordre 2 possibles. Celle de Colella se présente comme

$$\Psi_{i+1/2,j}^C = \Psi_{i+1/2,j}^I + \frac{1}{2}(1 - \lambda)A_{i,j}^n \quad (7.14a)$$

$$\Psi_{i,j+1/2}^C = \Psi_{i,j+1/2}^I + \frac{1}{2}(1 - \mu)B_{i,j}^n, \quad (7.14b)$$

les pentes corrigées  $A$  et  $B$  étant les mêmes qu'en (7.10). Celle de LeVeque [134] est plus sophistiquée, à savoir

$$\Psi_{i+1/2,j}^{LV} = \Psi_{i+1/2,j}^C - \frac{1}{2}\mu(1 - \mu)[B_{i,j}^n - B_{i,j-1}^n] \quad (7.15a)$$

$$\Psi_{i,j+1/2}^{LV} = \Psi_{i,j+1/2}^C - \frac{1}{2}\lambda(1 - \lambda)[A_{i,j}^n - A_{i,j-1}^n]. \quad (7.15b)$$

Ces deux versions, conçues à partir de motivations différentes, peuvent être vues comme des approximations d'une version exacte à la Godunov qu'on obtient par moyennage de la fonction affine par morceaux après translation  $\mathbf{u}\Delta t$ , et qui s'écrit

$$\Psi_{i+1/2,j}^G = \Psi_{i+1/2,j}^C - \mu\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\lambda\right)[A_{i,j}^n - A_{i,j-1}^n] - \mu\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\mu\right)[B_{i,j}^n - B_{i,j-1}^n] \quad (7.16a)$$

$$\Psi_{i,j+1/2}^G = \Psi_{i,j+1/2}^C - \lambda\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\mu\right)[B_{i,j}^n - B_{i,j-1}^n] - \lambda\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\lambda\right)[A_{i,j}^n - A_{i,j-1}^n]. \quad (7.16b)$$

En 3-D, van Leer [153] en propose une version simplifiée dans l'esprit de Colella. Pour revenir au 2-D, signalons qu'on peut fabriquer toute une famille d'approximations du schéma de Godunov contenant les versions de Colella et de LeVeque : il s'agit de la catégorie WAF (Weighted Average Flux), étudiée par Toro [151] puis Billett [106]. À l'inverse, on peut chercher à faire mieux que la version Godunov : c'est la gageure de Bell et al. [104], qui considèrent en 2-D des fonctions non pas affines, mais Q1 par morceaux. Le résultat est

$$\Psi_{i+1/2,j}^B = \Psi_{i+1/2,j}^{\text{ex}} + \frac{1}{2}\mu\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\mu\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\mu\right)\lambda\right](C_{i,j}^n - C_{i,j-1}^n) \quad (7.17a)$$

$$\Psi_{i,j+1/2}^B = \Psi_{i,j+1/2}^{\text{ex}} + \frac{1}{2}\lambda\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\lambda\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lambda\right)\mu\right](C_{i,j}^n - C_{i,j-1}^n), \quad (7.17b)$$

dans lequel  $C \approx \Delta x \Delta y \partial_{xy}$  doit être reconstruit via un mécanisme extrêmement difficile et coûteux afin de respecter le principe du maximum sur  $\Psi$ .

Les schémas présentés plus haut sont faciles à comprendre et à écrire en maillage rectangulaire régulier. Malheureusement, dès que le maillage devient irrégulier, même si conceptuellement cela reste possible, ils sont très lourds à coder, et encore plus à écrire sur papier : en 2-D, on y arrive encore (40), mais en 3-D on y renonce vite !

### Schémas de type RD (Residual Distributions)

Si dans la forme générique (7.6) du cas de référence, on prend

$$\Psi_{i+1/2,j}^N = \Psi_{i,j}^n - \frac{1}{2\lambda} \min(\lambda, \mu)(\Psi_{i,j}^n - \Psi_{i,j-1}^n) \quad (7.18a)$$

$$\Psi_{i,j+1/2}^N = \Psi_{i,j}^n - \frac{1}{2\mu} \min(\lambda, \mu)(\Psi_{i,j}^n - \Psi_{i-1,j}^n) \quad (7.18b)$$

alors le schéma obtenu est connu sous le nom de N-scheme (Narrow). Introduit initialement par Rice et Schnipke [144], ce schéma tient son nom de l'observation suivante : avec (7.18) la mise à jour finale (7.6) devient

– si  $0 < \lambda < \mu$

$$\Psi_{i,j}^{n+1} = \Psi_{i,j}^n - \lambda(\Psi_{i,j-1}^n - \Psi_{i-1,j-1}^n) - \mu(\Psi_{i,j}^n - \Psi_{i,j-1}^n); \quad (7.19)$$

– si  $0 < \mu < \lambda$

$$\Psi_{i,j}^{n+1} = \Psi_{i,j}^n - \lambda(\Psi_{i,j}^n - \Psi_{i-1,j}^n) - \mu(\Psi_{i-1,j}^n - \Psi_{i-1,j-1}^n). \quad (7.20)$$

En comparant les formules (7.19) et (7.20) à

$$\Psi_{i,j}^{n+1} = \Psi_{i,j}^n - \lambda(\Psi_{i,j}^n - \Psi_{i-1,j}^n) - \mu(\Psi_{i,j}^n - \Psi_{i,j-1}^n) \quad (7.21)$$

du schéma DONOR d'ordre 1, on s'aperçoit que le stencil du nouveau schéma (7.18) est toujours supporté par le triangle qui contient la ligne de champ issue de  $(i, j)$ . Ce triangle, qui suit le plus près et le plus longtemps possible la direction du vecteur vitesse, donne lieu à la molécule la plus étroite, contrairement au triangle correspondant à DONOR qui intersecte la ligne de champ de la plus abrupte des manières.

Roe et Sidilkover [147] ont établi que le N-scheme est optimal au sens suivant : parmi tous les schémas linéaires positifs à stencil rectangulaire en 2-D, c'est celui qui minimise la diffusion dans la direction transverse. De surcroît, on peut interpréter le N-scheme comme

un schéma de type RD (Residual Distribution), ce qui permet de l'étendre facilement à un maillage déformé quelconque [103, 143]. Parmi les schémas de type RD, il en est un très important que nous allons expliciter pour l'exemple de référence : c'est le S\*-scheme, lequel revient à prendre

– si  $0 < \lambda < \mu$

$$\Psi_{i+1/2,j}^{S^*} = \Psi_{i+1/2,j}^N - \frac{1}{2\lambda} \Lambda((\mu - \lambda)(\Psi_{i,j}^n - \Psi_{i,j-1}^n); -\lambda(\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i,j-1}^n)) \quad (7.22a)$$

$$\Psi_{i,j+1/2}^{S^*} = \Psi_{i,j+1/2}^N \quad (7.22b)$$

– si  $0 < \mu < \lambda$

$$\Psi_{i+1/2,j}^{S^*} = \Psi_{i+1/2,j}^N \quad (7.23a)$$

$$\Psi_{i,j+1/2}^{S^*} = \Psi_{i,j+1/2}^N - \frac{1}{2\mu} \Lambda((\lambda - \mu)(\Psi_{i,j}^n - \Psi_{i-1,j}^n); -\mu(\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i-1,j}^n)) \quad (7.23b)$$

Dans (7.22) et (7.23),  $\Lambda$  désigne un limiteur standard. Lorsque  $\Lambda = \text{minmod}$ , ce schéma porte le nom de PSI.

Au prix de deux points supplémentaires dans le stencil, S\* possède l'avantage par rapport à N de préserver, en plus de la positivité, la solution stationnaire exacte. La lettre S dans S\* et PSI est l'initiale de Second-order, mais il convient de faire très attention à ce vocable : l'ordre 2 n'a lieu qu'en stationnaire, comme c'est le cas avec la plupart des schémas de type RD. À l'époque où nous nous y intéressions, c'était bien l'ordre 2 en transitoire qui apparaissait comme la difficulté « insurmontable ». Comme Hubbard et Roe [129] le montreront plus tard, pour disposer d'un schéma d'ordre 2 en transitoire, il faut avoir recours à de savants mécanismes d'hybridation entre PSI (ordre 1, positif) et un équivalent de Lax-Wendroff (ordre 2, non positif). Abgrall et Mézine [103] se sont également attaqués à ce problème.

### Schémas de type VOFIRE (VOLUMES FINIS avec REconstruction)

Une autre stratégie pour lutter contre la dissipation consiste à la décomposer en deux parties : longitudinale (parallèlement à  $\mathbf{u}$ ) et transversale (orthogonalement à  $\mathbf{u}$ ), et de les combattre séparément. Vis-à-vis de la diffusion transversale, qui constitue la spécificité du multidimensionnel, l'idée de Després et Lagoutière [119, 120] est de découper chaque maille selon les lignes de courant traversant certains sommets, et de reconstruire une fonction constante par sous-maille de sorte à avoir le plus grand écart possible entre les nouvelles valeurs sous des contraintes de conservation et de monotonie imposées par les mailles voisines. Une fois cette phase dite de reconstruction transverse effectuée, on procède à la phase de reconstruction longitudinale en appliquant son schéma favori aux problèmes localement 1-D qui se posent.

Afin de généraliser la reconstruction transverse de VOFIRE (VOLUMES FINIS avec REconstruction) à toutes les configurations de maillage, les auteurs proposent une version entièrement algébrique de la méthode. Appliquée aux rectangles réguliers du cas de référence, cette version algébrique conduit finalement à un schéma sous la forme générique

(7.6), avec

$$\Psi_{i+1/2,j}^T = \Psi_{i,j}^n + \frac{1}{\lambda} \min\text{mod}(\lambda(\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i,j}^n); -\mu(\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j}^n)) \quad (7.24a)$$

$$\Psi_{i,j+1/2}^T = \Psi_{i,j}^n - \frac{1}{\mu} \min\text{mod}(\lambda(\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i,j}^n); -\mu(\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j}^n)) \quad (7.24b)$$

lorsqu'aucune reconstruction longitudinale n'est appliquée. On notera au passage que la relation  $\lambda\Psi_{i+1/2,j}^T + \mu\Psi_{i,j+1/2}^T = (\lambda + \mu)\Psi_{i,j}^n$  traduit la conservation non pas de la masse dans la cellule rectangulaire, mais du flux sortant de celle-ci.

La présence d'accroissements de  $\Psi$  selon des directions différentes dans le second-membre de (7.24) fait naturellement repenser aux schémas de type RD. Remarquons que le stencil de VOFIRE est maintenant de 7 points au lieu de 5 pour  $S^*$ , mais à la différence avec l'ordre 1 de Colella (7.12), le terme de coin  $\Psi_{i-1,j-1}^n$  n'en fait pas partie. En activant la reconstruction longitudinale, on obtient les flux complets

$$\begin{aligned} \Psi_{i+1/2,j}^{\text{DL}} &= \Psi_{i+1/2,j}^T + \frac{1}{\lambda + \mu} \min\text{mod}(\lambda(\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i+1/2,j}^T); (1 - \lambda - \mu)(\Psi_{i,j}^n - \Psi_{i-1/2,j}^T)) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda + \mu} \min\text{mod}(\mu(\Psi_{i+1,j}^n - \Psi_{i+1/2,j}^T); (1 - \lambda - \mu)(\Psi_{i,j}^n - \Psi_{i,j-1/2}^T)) \\ \Psi_{i,j+1/2}^{\text{DL}} &= \Psi_{i,j+1/2}^T + \frac{1}{\lambda + \mu} \min\text{mod}(\lambda(\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j+1/2}^T); (1 - \lambda - \mu)(\Psi_{i,j}^n - \Psi_{i-1/2,j}^T)) \\ &\quad + \frac{1}{\lambda + \mu} \min\text{mod}(\mu(\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j+1/2}^T); (1 - \lambda - \mu)(\Psi_{i,j}^n - \Psi_{i,j-1/2}^T)) \end{aligned}$$

qui donnent lieu à un stencil étendu (à 12 points) contenant le coin.

On peut déplorer le comportement « non-optimal » suivant de VOFIRE : dans les formules (7.24), le  $\min\text{mod}$  s'annule dès que  $\Psi_{i+1,j} - \Psi_{i,j}$  et  $\Psi_{i,j+1}^n - \Psi_{i,j}^n$  sont de même signe, afin d'anticiper un extremum local en  $(i, j)$ . Or, ces deux quantités peuvent avoir le même signe sans qu'il y ait extremum local pour beaucoup de fonctions, par exemple pour

$$\Psi(x, y) = \frac{x - x_i}{\Delta x} + \frac{y - y_j}{\Delta y}. \quad (7.26)$$

Ces fonctions sont donc injustement privées de reconstruction transverse. Mais cette critique vaut aussi pour les schémas de type RD.

### Schémas de type GD (Galerkin Discontinu)

Si les schémas VOFIRE sont relativement de fraîche date, les schémas de type Galerkin Discontinu, mis au point par Cockburn et al. [112, 113], sont parmi les tout premiers qui nous ont séduits mais que nous avons écartés après une courte période d'essai. Certes, la précision est garantie par construction dans ce type de schémas. Par contre, la question de monotonie s'avère plus complexe.

Pour se faire une idée de la méthode GD, reprenons le cas de référence et décrétons que sur chaque maille rectangulaire centrée en  $(x_i, y_j)$ , la fonction  $\Psi$  est Q1, c'est-à-dire

$$\Psi(x, y; t) = \Psi_{i,j}^{00}(t) + \Psi_{i,j}^{10}(t) \frac{x - x_i}{\Delta x} + \Psi_{i,j}^{01}(t) \frac{y - y_j}{\Delta y} + \Psi_{i,j}^{11}(t) \frac{(x - x_i)(y - y_j)}{\Delta x \Delta y}. \quad (7.27)$$

Alors, après déroulement de la méthode et simplification des calculs, on montre que l'évolution des coefficients dans (7.27) est régie par le système

$$\frac{d}{dt}\Psi_{i,j}^{00} + \frac{u}{\Delta x}[d_{i,j}^0 - d_{i-1,j}^0] + \frac{v}{\Delta y}[h_{i,j}^0 - h_{i,j-1}^0] = 0 \quad (7.28a)$$

$$\frac{d}{dt}\Psi_{i,j}^{10} + 6\frac{u}{\Delta x}[d_{i,j}^0 + d_{i-1,j}^0 - 2\Psi_{i,j}^{00}] + \frac{v}{\Delta y}[h_{i,j}^1 - h_{i,j-1}^1] = 0 \quad (7.28b)$$

$$\frac{d}{dt}\Psi_{i,j}^{01} + 6\frac{u}{\Delta x}[h_{i,j}^0 + h_{i,j-1}^0 - 2\Psi_{i,j}^{00}] + \frac{u}{\Delta y}[d_{i,j}^1 - d_{i,j-1}^1] = 0 \quad (7.28c)$$

$$\frac{d}{dt}\Psi_{i,j}^{11} + 6\frac{u}{\Delta x}[d_{i,j}^1 + d_{i-1,j}^1 - 2\Psi_{i,j}^{01}] + 6\frac{u}{\Delta y}[h_{i,j}^1 + h_{i,j-1}^1 - 2\Psi_{i,j}^{10}] = 0 \quad (7.28d)$$

avec

$$d_{i,j}^\zeta = \Psi_{i,j}^{0\zeta} + \frac{1}{2}\Psi_{i,j}^{1\zeta}, \quad h_{i,j}^\xi = \Psi_{i,j}^{\xi 0} + \frac{1}{2}\Psi_{i,j}^{\xi 1}. \quad (7.29)$$

On dispose ainsi de 4 équations différentielles par cellule. Chacune de celles-ci fait intervenir les degrés de liberté des nœuds voisins gauche et bas. L'intégration temporelle de (7.28) se fait par méthode de type Runge-Kutta d'ordre élevé, de préférence explicite pour éviter un stockage trop lourd des états intermédiaires. Certains intégrateurs assurent la stabilité  $L^\infty$  sous condition CFL et moyennant des limitations appropriées en espace, d'autres non.

Quand le maillage devient déformé et/ou non-structuré, il n'est pas facile de garantir la positivité du schéma global. Par ailleurs, même si nous avons stipulé dans le cahier des charges qu'il n'y a aucune restriction concernant le coût en temps calcul, force est de constater la lourdeur de mise en œuvre et d'exécution des méthodes GD comparée aux autres schémas.

## 7.2.2 Nouveaux schémas en 1-D

La conclusion que nous tirons de l'étude bibliographique est qu'aucune des familles de schémas multidimensionnels existant dans la littérature à la fin des années 90 ne convient. Aussi, nous sommes-nous attachés à élaborer une nouvelle famille à partir d'une classe de schémas 1-D qui ont la particularité d'être à la fois d'ordres élevés et compacts en espace. Notre intuition est que la compacité du stencil est un atout permettant d'espérer une généralisation facile en 2-D et 3-D.

### Précis au départ

En 1-D, Iserles [130] a étudié des schémas d'ordre élevé pour des applications physiques où l'on accepte la dispersion sur les résultats numériques. Pour l'équation

$$\partial_t \Psi + u \partial_x \Psi = 0, \quad u > 0, \quad (7.30)$$

considérons le schéma

$$\{I1\} \quad \Psi_i^{n+1} = \Psi_i^{n-1} + (1 - 2\lambda)(\Psi_i^n - \Psi_{i-1}^n) \quad (7.31)$$

avec  $\lambda = u\Delta t/\Delta x$ . Ce schéma à deux niveaux en temps est d'ordre 2 et non-dissipatif, comme l'atteste son équation équivalente

$$\partial_t \Psi + u \partial_x \Psi = \frac{u\Delta x^2}{12}(1 - 2\lambda)(1 - \lambda)\partial_{xxx} \Psi. \quad (7.32)$$

On peut donner trois interprétations à I1. Tout d'abord, au sens des différences finies, c'est une discrétisation centrée de (7.30) au point  $(i - \frac{1}{2}, n)$ , dans laquelle on approche

$$\begin{aligned} \partial_t \Psi & \text{ par } \frac{\Psi_i^{n+1} - \Psi_i^n}{2\Delta t} + \frac{\Psi_{i-1}^n - \Psi_{i-1}^{n-1}}{2\Delta t}, \\ \partial_x \Psi & \text{ par } \frac{\Psi_i^n - \Psi_{i-1}^n}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Ensuite,  $\Psi_i^{n+1}$  dans (7.31) peut être aussi vu comme le résultat de l'interpolation quadratique de type Lagrange au point  $(i - \lambda, n)$  en partant des valeurs

$$\Psi_{i-1}^n \text{ en } (i - 1, n), \quad \Psi_{i-1}^{n-1} \text{ en } (i - 1 + \lambda, n), \quad \Psi_i^n \text{ en } (i, n). \quad (7.33)$$

On voit que les abscisses en question sont celles des intersections de la droite  $t = n\Delta t$  avec les droites caractéristiques issues des quatre points du stencil  $\langle 8, \text{Fig. 1} \rangle$ . Enfin, étant donnée la conservation globale

$$\Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Psi_i^{n+1} = \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Psi_i^{n-1}, \quad (7.34)$$

on peut se demander s'il est possible de mettre I1 sous une forme localement conservative. La réponse est affirmative. On vérifie aisément que

$$\Psi_i^{n+1} = \Psi_i^{n-1} - 2\lambda(\Psi_{i+1/2}^* - \Psi_{i-1/2}^*), \quad (7.35)$$

avec le flux décentré et corrigé

$$\Psi_{i+1/2}^* = \Psi_i^n - \frac{1}{2\lambda}(\Psi_i^n - \Psi_i^{n-1}). \quad (7.36)$$

On peut également obtenir la formule (7.35) en intégrant (7.30) sur le volume de contrôle  $[i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}] \times [n - 1, n + 1]$ , dont la hauteur est de  $2\Delta t$ , et en décidant d'attribuer le flux aux arêtes par

$$(u\Psi)_{i+1/2}^n \approx (u\Psi)_i^n + \frac{\Delta x}{2} \partial_x (u\Psi)|_i^n = (u\Psi)_i^n - \frac{\Delta x}{2} \partial_t \Psi|_i^n \quad (7.37a)$$

$$\approx (u\Psi)_i^n - \frac{\Delta x}{2\Delta t} (\Psi_i^n - \Psi_i^{n-1}). \quad (7.37b)$$

Pour atteindre une meilleure précision tout en veillant à la compacité spatiale, Roe [146] propose le schéma

$$\{I2\} \quad \Psi_i^{n+1} = \Psi_i^{n-2} + 2(1 - 3\lambda)(\Psi_i^n - \Psi_{i-1}^{n-1}) + \frac{(1 - 3\lambda)(1 - 2\lambda)}{1 + \lambda} (\Psi_{i-1}^n - \Psi_i^{n-1}). \quad (7.38)$$

Ce schéma à trois niveaux de temps est d'ordre 4 et non-dissipatif, ainsi que le certifie l'équation équivalente

$$\partial_t \Psi + u \partial_x \Psi = \frac{u \Delta x^4}{720} \lambda (1 - \lambda^2) (1 - 2\lambda) (1 - 3\lambda) \partial_{xxxx} \Psi. \quad (7.39)$$

Comme pour I1, on peut donner à I2 trois interprétations. La première est la discrétisation centrée au sens des différences finies de (7.30) au point  $(i - \frac{1}{2}, n - \frac{1}{2})$ , en remplaçant

$$\begin{aligned} \partial_t \Psi & \text{ par } \alpha \left[ \frac{\Psi_i^n - \Psi_i^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{\Psi_{i-1}^n - \Psi_{i-1}^{n-1}}{2\Delta t} \right] + (1 - \alpha) \left[ \frac{\Psi_i^{n+1} - \Psi_i^n}{2\Delta t} + \frac{\Psi_{i-1}^{n+1} - \Psi_{i-1}^n}{2\Delta t} \right] \\ \partial_x \Psi & \text{ par } \frac{\Psi_i^n - \Psi_{i-1}^n}{2\Delta x} + \frac{\Psi_i^{n-1} - \Psi_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x}, \end{aligned}$$

avec la « meilleure » constante  $\alpha$  au sens de l'ordre d'approximation, en l'occurrence

$$\alpha = \frac{5\lambda - 1}{6\lambda}. \quad (7.40)$$

La deuxième interprétation consiste à dire que  $\Psi_i^{n+1}$  donné par (7.38) est le résultat de l'interpolation de Lagrange au point  $(i - \frac{3}{2}\lambda, n - \frac{1}{2})$  par le polynôme de degré 4 qui prend les valeurs  $\langle 19, \text{Fig. 1} \rangle$

$$\begin{aligned} \Psi_{i-1}^n & \text{ en } (i - 1 - \frac{1}{2}\lambda, n - \frac{1}{2}) & \Psi_i^n & \text{ en } (i - \frac{1}{2}\lambda, n - \frac{1}{2}) \\ \Psi_{i-1}^{n-1} & \text{ en } (i - 1 + \frac{1}{2}\lambda, n - \frac{1}{2}) & \Psi_i^{n-1} & \text{ en } (i + \frac{1}{2}\lambda, n - \frac{1}{2}). \end{aligned} \quad (7.41)$$

La troisième interprétation repose sur la transformation algébrique de (7.38) en

$$\Psi_i^{n-1/2+\kappa} = \Psi_i^{n-1/2-\kappa} - 2\kappa\lambda(\Psi_{i+1/2}^{**} - \Psi_{i-1/2}^{**}), \quad (7.42)$$

dans laquelle

$$\kappa = \frac{6\lambda}{1 + \lambda} \quad (7.43a)$$

$$\Psi_i^{n-1/2+\kappa} = \Psi_i^{n+1} - \left(\frac{3}{2} - \kappa\right) (\Psi_i^n - \Psi_i^{n-1}) \quad (7.43b)$$

$$\Psi_i^{n-1/2-\kappa} = \Psi_i^{n-2} + \left(\frac{3}{2} - \kappa\right) (\Psi_i^n - \Psi_i^{n-1}) \quad (7.43c)$$

$$\Psi_{i+1/2}^{**} = \frac{1}{2}(\Psi_i^n + \Psi_i^{n-1}) - \frac{1}{2\lambda}(\Psi_i^n - \Psi_i^{n-1}) + \frac{1 + \lambda}{12\lambda^2}(\Psi_i^n - 2\Psi_i^{n-1} + \Psi_i^{n-2}). \quad (7.43d)$$

Il s'agit donc d'un bilan sur le volume de contrôle  $[i - \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2}] \times [n - \frac{1}{2} - \kappa, n - \frac{1}{2} + \kappa]$ , dont la hauteur vaut cette fois

$$2\kappa\Delta t = \frac{12\lambda}{1 + \lambda}\Delta t \quad (7.44)$$

et non pas  $3\Delta t$  comme on pourrait le croire. Quant au flux (7.43d), compte tenu du fait que  $\partial_t \Psi = -u\partial_x \Psi$ , il peut être relu comme

$$\Psi_{i+1/2}^{**} \approx \Psi_i^{n-1/2} + \frac{\Delta x}{2}\partial_x \Psi|_i^{n-1/2} + \frac{2(1 + \lambda)}{3} \times \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2 \partial_{xx} \Psi|_i^{n-1/2} \quad (7.45)$$

à un terme d'ordre 2 près. Autrement dit, c'est le flux décentré  $\Psi_i^{n-1/2}$  corrigé par une reconstruction quadratique. Le bilan (7.42) n'est pas standard, au vu de (7.43b) et (7.43c). Il a le mérite d'exister pour exprimer localement la conservativité qu'on constate globalement par sommation de (7.38), à savoir

$$\Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Psi_i^{n+1} = \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Psi_i^{n-2} + 2 \left(\frac{3}{2} - \kappa\right) \left( \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Psi_i^n - \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Psi_i^{n-1} \right) \quad (7.46)$$

qu'on peut encore remettre sous la forme

$$\Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Psi_i^{n-1/2+\kappa} = \Delta x \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Psi_i^{n-1/2-\kappa}. \quad (7.47)$$

### Monotones à l'arrivée

Pour chacun des schémas I1 et I2, les deux premières interprétations sont classiques, tandis que la troisième — orientée volumes finis — est à notre connaissance nouvelle et n'a jamais été publiée, y compris dans nos papiers (8, 19). Les bilans (7.35) et (7.42) font en réalité partie des résultats de calcul obtenus lors de nos premiers efforts pour rendre I1 et I2 monotones via un limiteur sur le flux local, et ce dans le but d'imposer par construction la conservativité. En observant (7.36), on peut effectivement songer à une hybridation de type

$$\Psi_{i+1/2}^* = \Psi_i^n - \frac{1}{2\lambda} \Upsilon(\Psi_i^n - \Psi_i^{n-1}, \dots) \quad (7.48)$$

avec un certain limiteur  $\Upsilon$  dont les arguments supplémentaires notés ... seraient des incréments en  $\Psi$  à introduire. Malheureusement, une telle tentative est vouée à l'échec, car elle fait dégénérer I1 vers le schéma de base

$$\{\text{I0}\} \quad \Psi_i^{n+1} = \Psi_i^{n-1} - 2\lambda(\Psi_i^n - \Psi_{i-1}^n) \quad (7.49)$$

quand  $\Upsilon \equiv 0$ . Or, ce dernier n'est pas stable au sens de Fourier. Pour le voir, il suffit de poser  $\hat{\Phi}^n = \Psi^{n-1}$  et de vérifier que, pour tout nombre d'onde  $k \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ ,  $\lambda > 0$  et  $i^2 = -1$ , la matrice d'amplification qui figure au second-membre de la transformée semi-fréquentielle de (7.49)

$$\begin{bmatrix} \widehat{\Psi} \\ \widehat{\Phi} \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} -2\lambda(1 - e^{ik\Delta x}) & e^{ik\Delta x} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\Psi} \\ \widehat{\Phi} \end{bmatrix}^n \quad (7.50)$$

a toujours une valeur propre de module strictement supérieur à 1. L'instabilité due au mode parasite correspondant se confirme numériquement sur une donnée initiale discontinue. Le schéma I0 est à ce titre un exemple remarquable et peu connu de schéma instable dont l'équation équivalente

$$\partial_t \Psi + u \partial_x \Psi = \frac{u \Delta x}{2} \partial_{xx} \Psi \quad (7.51)$$

est pourtant de type diffusif! Expliquons ce paradoxe en examinant les conditions de validité des calculs qui mènent à l'équation équivalente. D'une part, il faut que la solution  $\Psi$  soit régulière. D'autre part, il faut que  $\Delta x$  soit suffisamment petit devant une certaine longueur caractéristique  $\ell$  associée à  $\Psi$ . Or, les solutions discontinues contiennent des hautes fréquences qui se manifestent par des longueurs caractéristiques aussi petites qu'on veut, ce qui met en défaut l'analyse par équation équivalente.

On peut persévérer dans cette voie en réarrangeant le flux (7.36) comme

$$\Psi_{i+1/2}^* = \Psi_i^{n-1} + \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) (\Psi_i^n - \Psi_i^{n-1}), \quad (7.52)$$

puis en cherchant une limitation de la forme

$$\Psi_{i+1/2}^* = \Psi_i^{n-1} + \left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) \Upsilon(\Psi_i^n - \Psi_i^{n-1}, \dots), \quad (7.53)$$

ce qui a au moins l'avantage de faire dégénérer I1 vers le schéma upwind de pas double

$$\Psi_i^{n+1} = \Psi_i^{n-1} - 2\lambda(\Psi_i^{n-1} - \Psi_{i-1}^{n-1}) \quad (7.54)$$

dont on sait prédire la stabilité. La difficulté cette fois est du côté des arguments supplémentaires à fournir au limiteur  $\Upsilon$ . Il ne nous a pas été possible de mettre  $\Psi_i^n - \Psi_i^{n-1}$  en compétition avec d'autres différences en  $\Psi$  de sorte à pouvoir effectuer correctement une analyse incrémentale à la Sweby [149].

Aussi, avons-nous décidé de renoncer à imposer la conservativité locale. Nous nous contentons de prescrire la monotonie via un procédé de troncature directe. L'idée maîtresse sur laquelle nous aimerions insister est que, pour ne pas détériorer la précision, il est essentiel de choisir judicieusement l'intervalle sur lequel on projette la valeur de  $\Psi_i^{n+1}$  calculée par I1 ou I2. Le choix que nous avons fait est motivé par la propriété de propagation le long des caractéristiques. Elle consiste à prendre comme intervalle de troncature celui constitué par les valeurs de  $\Psi$  aux deux points qui passent le plus près mais de part et d'autre du pied de la caractéristique issue de  $(i, n + 1)$ . Ces deux points forment ce que nous appelons la **bounding box**, laquelle est symbolisée par un rectangle sur les graphiques (8, Fig. 1) et (19, Fig. 1). Algébriquement, si l'on note  $\Pi$  l'opérateur de projection, cette étape de troncature revient à affecter

– pour I1

$$\Psi_i^{n+1} := \begin{cases} \Pi_{|\Psi_{i-1}^{n-1}, \Psi_i^n|}(\Psi_i^{n+1}) & \text{si } 0 < \lambda < \frac{1}{2} \\ \Pi_{|\Psi_{i-1}^n, \Psi_{i-1}^{n-1}|}(\Psi_i^{n+1}) & \text{si } \frac{1}{2} < \lambda < 1 \end{cases} \quad (7.55)$$

– pour I2

$$\Psi_i^{n+1} := \begin{cases} \Pi_{|\Psi_{i-1}^{n-2}, \Psi_i^n|}(\Psi_i^{n+1}) & \text{si } 0 < \lambda < \frac{1}{3} \\ \Pi_{|\Psi_{i-1}^{n-1}, \Psi_{i-1}^{n-2}|}(\Psi_i^{n+1}) & \text{si } \frac{1}{3} < \lambda < \frac{1}{2} \end{cases} \quad (7.56)$$

Les essais numériques corroborent notre réflexion et confirment que ce choix d'intervalle est optimal en terme de raideur de front. Toujours dans le souci d'obtenir la meilleure précision possible après troncature, il a été constaté qu'on doit opérer, pour de très petites valeurs de  $\lambda$ , un changement dans la mise à jour initiale par les formules (8, Eq. (8)) et (19, Eq. (6)). L'explication que nous avançons est qu'il faut, dans l'esprit de la méthode, utiliser les points les plus proches du pied de la caractéristique issue de  $(i, n + 1)$ .

On peut démontrer que le processus de troncature locale (7.55)–(7.56) préserve la monotonie globale de  $\Psi$  (8, Theorem 2.1, Appendix).

### Conservatifs a posteriori

À défaut de conservativité locale, on peut s'assurer de la conservation globale par post-traitement, à la fin de chaque pas de temps, en appliquant l'algorithme de réparation de masse de Shashkov [136, 148]. Cette technique peut être perçue comme un « impôt au prorata » : on augmente ou diminue la valeur locale de  $\Psi_i^{n+1}$  proportionnellement à ce que la cellule  $i$  est capable de recevoir ou de donner, le taux de proportionnalité étant fixé de manière globale et collective.

Pour mesurer ce que la cellule  $i$  est capable de recevoir ou de donner, l'algorithme a besoin de bornes a priori qui encadrent  $\Psi_i^{n+1}$ . De la valeur de ces bornes dépend la précision du résultat final. Comme l'on a déjà pris les bornes (7.55) et (7.56) pour l'étape de

troncature, il est tout à fait naturel de les réutiliser ici, en invoquant la même justification heuristique basée sur la finesse de la bounding box. À cet égard, on peut dire la technique de Shashkov se « branche » bien avec les modifications que nous avons apportées aux schémas I1 et I2.

Le *repair paradigm* peut sembler « artisanal » à première vue, alors que finalement il est bien plus abouti que les pratiques de *Robin Hood*<sup>2</sup> ou de *Jolly Roger*<sup>3</sup> en vogue dans la communauté CFD. À l’heure actuelle, il est cependant encore sujet à controverse. Ses détracteurs lui reprochent notamment de ne pas être soutenu par une formulation EDP qui lui donnerait un sens physique. Il souffre aussi et surtout de résister à l’analyse mathématique. On ne sait par exemple pas ce que devient l’ordre de convergence théorique, même si une partie de la question a été abordée récemment avec succès par Després et Loubère [88].

### 7.2.3 Construction en 2-D et 3-D

Kim [132] a proposé une généralisation de I1 et I2 au cas d’un maillage rectangulaire régulier 2-D. Les schémas de Kim héritent de la symétrie centrale et de la réversibilité du stencil : par exemple, sa version 2-D de I1 fait intervenir les 3 couples de points

$$\begin{aligned} (i, j; n+1) & \text{ et } (i-1, j-1; n-1) \\ (i, j; n) & \text{ et } (i-1, j-1; n) \\ (i-1, j; n) & \text{ et } (i, j-1; n) \end{aligned}$$

et la formule pour  $\Psi_{i,j}^{n+1}$  peut être explicitée facilement. Le défaut des schémas de Kim est que, par leur mode de fabrication même, ils ne peuvent pas être transposés à un maillage non-rectangulaire quelconque.

La direction dans laquelle nous sommes partis, antérieurement à la parution de l’article de Kim, est tout autre. Notre crédo est qu’il faut se ramener à un problème 1-D, puisque la transformation de l’équation de la couleur (7.11) en

$$\partial_t \Psi + \|\mathbf{u}\| \partial_s \Psi = 0, \quad (7.57)$$

où  $s$  est l’abscisse curviligne le long d’une ligne de champ, montre que la nature « ultime » de l’advection est unidimensionnelle. L’établissement de (7.57), ainsi que son exploitation en vue d’appliquer ce que nous savons déjà faire en 1-D, constituent l’essentiel du contenu de l’article ⟨8⟩. Nous attirons l’attention du lecteur sur le diagramme ⟨8, Fig. 15⟩, une des clefs de la construction. Suivre les lignes de courant n’est en soi pas novateur : des travaux existent déjà sur de telles méthodes, comme celui d’Atfeh [47]. Le défi est de pouvoir y appliquer un schéma d’ordre élevé. À cette fin, la compacité spatiale de celui-ci est notre alliée, mais quelques ingrédients supplémentaires ne sont pas superflus.

#### Parents et auxiliaires

Esquissons la construction pour le cas de référence d’un maillage rectangulaire régulier, le cas général étant décrit dans ⟨8⟩. Avec les mêmes notations qu’avant et sous l’hypothèse

---

2. qui prend aux riches pour donner aux pauvres  
3. *joli rouge*, couleur de certains pavillons de corsaires

$0 < \lambda < \mu$ , la ligne de courant issue de  $(i, j)$  coupe l'arête joignant  $(i-1, j-1)$  et  $(i, j-1)$  en

$$p(i, j) = \left( i - \frac{\lambda}{\mu}, j - 1 \right). \quad (7.58)$$

Ce point est appelé **point parent** de  $(i, j)$ . Si nous connaissions exactement la valeur de  $\Psi$  en ce point, il suffirait alors de « dérouler la mécanique » des schémas 1-D précédents avec les identifications

$$\begin{aligned} i &\leftarrow (i, j) \\ i - 1 &\leftarrow p(i, j) \\ u &\leftarrow \|\mathbf{u}\| = \sqrt{u^2 + v^2} \\ \Delta x &\leftarrow \Delta y \sqrt{1 + (u/v)^2}. \end{aligned}$$

L'intérêt de cette construction est qu'elle nous ramène à un problème 1-D indépendamment du caractère structuré ou non-structuré du maillage. Le point parent est toujours bien défini en triangle ou en quadrilatère, et de plus, la condition CFL ne s'en trouve aucunement diminuée. Par l'intermédiaire de cette construction, on peut d'ailleurs retomber sur le N-scheme (7.19) en appliquant le schéma upwind standard entre  $(i, j)$  et  $p(i, j)$ , à savoir

$$\Psi_{i,j}^{n+1} = \Psi_{i,j}^n - \frac{\|\mathbf{u}\|\Delta t}{\Delta y \sqrt{1 + (u/v)^2}} (\Psi_{i,j}^n - \Psi_{p(i,j)}^n), \quad (7.59)$$

avec l'interpolation linéaire

$$\Psi_{p(i,j)} \approx \frac{\lambda}{\mu} \Psi_{i-1,j-1} + \left( 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \Psi_{i,j-1}. \quad (7.60)$$

L'ennui avec l'interpolation linéaire (7.60) est qu'elle ne suffit pas pour maintenir la précision à un niveau comparable à celui des schémas d'Iserles-Roe en 1-D. Il nous faut au moins l'interpolation quadratique

$$\Psi_{p(i,j)} \approx \frac{\lambda}{\mu} \left( \frac{2\lambda}{\mu} - 1 \right) \Psi_{i-1,j-1} + \frac{4\lambda}{\mu} \left( 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \Psi_{i-1/2,j-1} + \left( 1 - \frac{\lambda}{\mu} \right) \left( 1 - \frac{2\lambda}{\mu} \right) \Psi_{i,j-1}, \quad (7.61)$$

ce qui oblige à introduire les milieux des arêtes  $(i-1/2, j)$  et  $(i, j-1/2)$ . En ces **points auxiliaires**,  $\Psi$  doit être défini et mis à jour comme pour les points aux sommets. Autrement dit, nous devons déterminer aussi leurs parents  $p(i+1/2, j)$  et  $p(i, j+1/2)$ . L'introduction des points auxiliaires multiplie presque par 3 le nombre d'inconnues, et divise par 2 la plus petite distance, donc la valeur de la CFL. Le coût s'en trouve multiplié au moins par 6. C'est le prix que nous devons payer. Il est légèrement inférieur à celui des schémas de type Galerkin Discontinuu.

Signalons enfin que l'interpolation quadratique n'étant pas monotone, il est indispensable, pour garantir la monotonie du résultat final, d'instaurer une procédure de troncature analogue à celle pour la mise à jour. Plus précisément,

$$\Psi_{p(i,j)} := \begin{cases} \Pi_{|\Psi_{i-1,j-1}, \Psi_{i-1/2,j-1}|}(\Psi_{p(i,j)}) & \text{si } 2\lambda > \mu \\ \Pi_{|\Psi_{i-1/2,j-1}, \Psi_{i,j-1}|}(\Psi_{p(i,j)}) & \text{si } 2\lambda < \mu. \end{cases} \quad (7.62)$$

### Intersection et interpolation monotone

En 3-D, quel que soit le type de maillage, les inconnues principales sont situées aux nœuds, et les points auxiliaires sont toujours aux milieux des arêtes. Cela multiplie presque par 4 le nombre d'inconnues pour un maillage hexaédrique. L'esprit de la méthode reste identique, mais surgissent des complications non-triviales, auxquelles l'article (19) offre des remèdes.

La première des complications est la détermination des points parents, pour laquelle on est confronté — dans le cas d'une maille hexaédrique — à l'exercice de trouver l'intersection d'une droite et d'un quadrangle non-plan. On le représente par une surface isoparamétrique qui fait intervenir les fonctions de base des éléments finis Q1 [111,121]. Il est connu que cette surface, bien que non-minimale [98], a la propriété agréable d'être réglée. Notre découverte<sup>4</sup> est que le calcul des 4 coordonnées barycentriques normalisées du point d'intersection peut se faire très simplement, sans qu'on n'ait jamais besoin de faire intervenir explicitement les 2 paramètres de référence. Moyennant une projection des vecteurs d'aire des 4 triangles sur la droite, tout se passe comme si l'on avait affaire à une face plane (44, Annexe A).

La seconde complication concerne l'interpolation et sa troncature monotone. On sait [87] que l'interpolation de Lagrange n'est pas définie pour des fonctions réelles en 2-D, mais ici on n'a besoin d'interpoler que pour l'intérieur de la face. Comme l'on dispose des coordonnées barycentriques normalisées du point d'intersection, il est naturel d'avoir recours aux fonctions d'éléments finis. Les formules que nous proposons (19, Eqs. (55)–(56)) correspondent aux éléments de type Q2-serendipity [111], qui s'imposent parce qu'on a les 8 degrés de liberté les caractérisant. Puis, afin de rendre cette interpolation monotone, nous mettons au point une procédure de troncature étoffée (19, Eqs. (57)–(61)) qui repose également sur le principe de la « primauté accordée aux deux plus proches valeurs ». Bien entendu, cette procédure dégénère bien vers la troncature déjà vue sur une arête lorsque le point d'intersection s'y trouve.

## 7.3 Advection linéaire en tant que remaillage dans l'ALE

La marche à suivre pour généraliser le schéma précédent au cas d'un champ de vitesse  $\mathbf{u}(t, \mathbf{x})$  variable en espace et en temps est exposée dans (8, 19). L'article (8) traite de la forme advective (7.11) en 2-D, tandis que dans sa suite (19), afin de mettre en exergue la souplesse de la méthode préconisée, nous présentons sa généralisation 3-D pour la forme convective

$$\partial_t \Psi + \text{div}(\Psi \mathbf{u}) = 0. \quad (7.63)$$

Nous renvoyons également le lecteur à (8, 19) pour les commentaires sur les résultats numériques ainsi que les mesures d'ordre de convergence et de temps CPU.

Le pari d'avoir envisagé l'advection comme une fin en soi et d'avoir relégué au second plan les soucis liés à son intégration dans IFP-C3D nous a permis de concocter assez rapidement un schéma original d'advection multidimensionnel<sup>5</sup>. La performance de ce nouveau schéma, en terme de précision, nous donne pleinement satisfaction. Sur des cas raides où le maillage est extrêmement déformé, elle devance même de façon spectaculaire celles des schémas classiques. Le risque que nous encourons toutefois est que ce nouveau schéma, qui n'a aucune interprétation en terme de bilan local de conservation, soit incompatible avec l'environnement ALE déjà en place.

4. mais sans doute n'est-ce que la redécouverte de quelque joyau bien gardé en géométrie

5. du moins pour les variables localisées aux nœuds

### 7.3.1 Formalisme ALE en version différentielle

La première difficulté qui nous attend est que, dans la phase C, la véritable équation de transport à résoudre n'est ni la forme advective (7.11) ni la forme convective (7.63), mais une subtile unification des deux. Ce phénomène n'est pas clairement visible dans les documents [61, 69, 74] qui présentent le formalisme ALE via des bilans intégraux. En nous inspirant des calculs de Després et Mazeran [89], nous allons tâcher de voir l'ALE sous un angle exclusivement différentiel.

Introduit dans les années 60 et formalisé rigoureusement par Hirt et al. [68] au début des années 70, l'ALE fait intervenir un référentiel mobile  $\chi$  qui se déplace à la vitesse  $\mathbf{v} - \mathbf{s}$  par rapport au laboratoire  $\mathbf{x}$ . Si les particules se meuvent à la vitesse  $\mathbf{v}$  dans le laboratoire, alors leur vitesse relative par rapport à la grille mobile, vue du laboratoire, est  $\mathbf{s}$ . On définit la matrice de déformation

$$\mathbb{J} = \nabla_{\chi} \mathbf{x} \quad (7.64)$$

ainsi que son déterminant

$$J = \det \mathbb{J}. \quad (7.65)$$

Soit, à titre d'exemple simplifié, le modèle isotherme qui s'écrit en eulérien

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho) + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{v}) + \mathbf{div}_{\mathbf{x}}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v} + p \mathbb{I}) &= \mathbf{0} \\ \partial_t(\rho Y) + \operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\rho Y \mathbf{v}) &= 0, \end{aligned} \quad (7.66)$$

et dans lequel la pression est donnée par

$$p = p(\rho, Y) \quad (7.67)$$

avec l'hypothèse d'hyperbolicité

$$\partial_{\rho} p|_Y > 0. \quad (7.68)$$

On peut alors démontrer que dans le référentiel mobile, le système (7.66) devient

$$\begin{aligned} \partial_t(\mathbb{J})|_{\chi} + \nabla_{\chi}(\mathbf{s})|_t - \nabla_{\chi}(\mathbf{v})|_t &= \mathbb{0} \\ \partial_t(J)|_{\chi} + \operatorname{div}_{\chi}(J \mathbb{J}^{-1} \mathbf{s})|_t - \operatorname{div}_{\chi}(J \mathbb{J}^{-1} \mathbf{v})|_t &= 0 \\ \partial_t(\rho J)|_{\chi} + \operatorname{div}_{\chi}(\rho J \mathbb{J}^{-1} \mathbf{s})|_t &= 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{v} J)|_{\chi} + \mathbf{div}_{\chi}(\rho \mathbf{v} \otimes J \mathbb{J}^{-1} \mathbf{s})|_t + \mathbf{div}_{\chi}(p J \mathbb{J}^{-T})|_t &= \mathbf{0} \\ \partial_t(\rho Y J)|_{\chi} + \underbrace{\operatorname{div}_{\chi}(\rho Y J \mathbb{J}^{-1} \mathbf{s})|_t}_{\text{phase C}} + \underbrace{\phantom{\operatorname{div}_{\chi}(\rho Y J \mathbb{J}^{-1} \mathbf{s})|_t}}_{\text{phase B}} &= 0 \end{aligned} \quad (7.69)$$

dans lequel le scalaire  $J$  et la matrice  $\mathbb{J}$  doivent maintenant être vus comme des variables à part entière.

La phase C consiste à résoudre, sur une durée égale à  $\Delta t$ , le système

$$\begin{aligned} \partial_t(\mathbb{J})|_{\chi} + \nabla_{\chi}(\mathbf{s})|_t &= \mathbb{0} \\ \partial_t(J)|_{\chi} + \operatorname{div}_{\chi}(J \mathbb{J}^{-1} \mathbf{s})|_t &= 0 \\ \partial_t(\rho J)|_{\chi} + \operatorname{div}_{\chi}(\rho J \mathbb{J}^{-1} \mathbf{s})|_t &= 0 \\ \partial_t(\rho \mathbf{v} J)|_{\chi} + \mathbf{div}_{\chi}(\rho \mathbf{v} \otimes J \mathbb{J}^{-1} \mathbf{s})|_t &= \mathbf{0} \\ \partial_t(\rho Y J)|_{\chi} + \operatorname{div}_{\chi}(\rho Y J \mathbb{J}^{-1} \mathbf{s})|_t &= 0, \end{aligned} \quad (7.70)$$

qui laisse voir que chaque composante  $\Psi = \rho, \rho\mathbf{v}, \rho Y$  est indépendante des autres, mais que toutes obéissent à la même règle

$$\partial_t(\mathbb{J})|_{\chi} + \nabla|_{\chi}(\mathbf{s})|_t = \mathbb{O} \quad (7.71a)$$

$$\partial_t(J)|_{\chi} + \operatorname{div}|_{\chi}(J\mathbb{J}^{-1}\mathbf{s})|_t = 0 \quad (7.71b)$$

$$\partial_t(\Psi J)|_{\chi} + \operatorname{div}|_{\chi}(\Psi J\mathbb{J}^{-1}\mathbf{s})|_t = 0 \quad (7.71c)$$

déjà ébauchée en (7.1). De cette règle, nous déduisons

- soit la forme advective

$$\partial_t\Psi|_{\chi} + (\mathbb{J}^{-1}\mathbf{s}) \cdot \mathbf{grad}_{\chi}\Psi|_t = 0 \quad (7.72)$$

sur  $\Psi$ , par combinaison entre (7.71b) et (7.71c) ;

- soit la forme convective

$$\partial_t\Phi|_{\chi} + \operatorname{div}_{\chi}(\Phi\mathbb{J}^{-1}\mathbf{s})|_t = 0 \quad (7.73)$$

sur  $\Phi := \Psi J$ .

Ces deux équations répondent à ce que nous avons soulevé comme première difficulté : on peut soit appliquer la version advective du nouveau schéma à  $\Psi$  et chercher à conserver  $\Psi J$  via la réparation de masse, soit appliquer sa version convective à  $\Phi$ .

Notons que la vitesse qui apparaît dans les deux cas est  $\mathbf{u} = \mathbb{J}^{-1}\mathbf{s}$ , et non pas  $\mathbf{s}$ . Par conséquent,  $\mathbb{J}$  doit être aussi mis à jour par (7.71a) à chaque sous-cycle de cette phase C. Cela signifie-t-il qu'on doit stocker non seulement le déterminant  $J$  mais aussi toute la matrice  $\mathbb{J}$ ? À l'heure où nous écrivons ces lignes, la réponse n'est pas encore définitive. A priori, on peut légitimement penser qu'en vertu de la propriété de changement de variables

$$J\mathbb{J}^{-1}\mathbf{n}_{\chi}d\sigma_{\chi} = \mathbf{n}_{\mathbf{x}}d\sigma_{\mathbf{x}}, \quad (7.74)$$

où  $\mathbf{n}$  désigne la normale unitaire sortante et  $d\sigma$  l'élément d'aire, l'intégrale du flux  $\Psi J\mathbb{J}^{-1}\mathbf{s}$  sur un  $\chi$ -volume de contrôle se ramène à celle de  $\Psi\mathbf{s}$  sur un  $\mathbf{x}$ -volume de contrôle et fait disparaître  $J\mathbb{J}^{-1}$ . Certes, mais comme le schéma d'advection qu'on veut utiliser n'est pas basé sur le bilan intégral et ne contient pas la notion de flux numérique, la relation (7.74) semble perdre quelque peu de son utilité.

### 7.3.2 Stratégie d'intégration dans IFP-C3D

L'obligation éventuelle de stocker et d'actualiser  $\mathbb{J}$  n'étant pas une difficulté d'ordre mathématique mais juste un surcoût d'ordre informatique, nous en faisons momentanément abstraction pour décrire ci-après les choix arrêtés pour l'implémentation du nouveau schéma d'advection dans le code existant. Le but de cette description, absente des articles (8, 19), est de démontrer la faisabilité de l'intégration.

#### Règles du jeu

De KIVA, IFP-C3D a gardé l'héritage du maillage décalé. Avec le modèle d'écoulement considéré plus haut, les variables volumiques  $J, \mathbb{J}$  et les variables thermodynamiques  $\rho, Y$  sont localisées aux centres des mailles, notées  $c$ , tandis que la variable de vitesse  $\mathbf{v}$  est située aux sommets, notées  $s$ . En sortie de la phase B, on connaît le champ de vitesse  $\mathbf{s}$  aux sommets.

On découpe le pas de temps  $\Delta t$  en  $N$  sous-cycles de sorte qu'avec le pas fractionnaire  $\Delta\tau = \Delta t/N$ , on respecte toutes les conditions CFL liées à l'advection. Pour toute grandeur  $\Psi$  censée être transportée par (7.71), on désigne par  $\Psi^{n,k} = \Psi^{n+k\Delta\tau}$  sa valeur au  $k$ -ème sous-cycle. La question est de savoir comment utiliser le nouveau schéma pour passer de  $\Psi^{n,k}$  à  $\Psi^{n,k+1}$ .

### Mise à jour des volumes

Le calcul de  $J_c^{n,k+1}$  et  $\mathbb{J}_c^{n,k+1}$  par (7.71a) et (7.71b) ne pose aucun problème particulier. On procède par intégration sur la maille  $c$ .

Le problème est de pouvoir ensuite donner un sens à la vitesse de transport  $\mathbf{u} = \mathbb{J}^{-1}\mathbf{s}$ , qui est le produit de deux grandeurs décalées. On peut par exemple interpoler les  $\mathbf{s}_s$  pour avoir  $\mathbf{s}_c$ , ce qui permettrait de définir  $\mathbf{u}_c^{n,k}$ .

### Transport de la vitesse aux nœuds

De façon analogue, la quantité de mouvement  $\rho\mathbf{v}$  est mal définie car elle est le produit de deux variables localisées à des endroits différents. Une façon de s'en sortir est de remarquer que, au niveau continu, si  $\rho$  et  $\rho\mathbf{v}$  sont transportés par (7.71) à la même vitesse  $\mathbb{J}^{-1}\mathbf{s}$ , alors il en est de même pour  $\mathbf{v}$ . Comme  $\mathbf{v}$  est bien positionné aux nœuds, on peut appliquer le nouveau schéma pour transporter  $\mathbf{v}_s$ . Mais au moment de réparer la masse par le paradigme de Shashkov, il est essentiel de décréter que la bonne notion de masse associée à  $\mathbf{v}_s$  est une somme consistante de  $\int \rho\mathbf{v}J$ , autrement dit

$$\sum_s \mathbf{v}_s^{n,k+1} \sum_{c \in K(s)} \rho_c^{n,k+1} J_c^{n,k+1} |c \cap V(s)|_{\mathcal{X}}^n, \quad (7.75)$$

où  $K(s)$  est l'ensemble des mailles ayant  $s$  comme sommet,  $V(s)$  le volume de contrôle bâti autour de  $s$ , et  $|\cdot|_{\mathcal{X}}$  la mesure de volume dans le référentiel  $\mathcal{X}$ . La définition de la somme (7.75) se retrouve, à son tour, conditionnée par celle de  $\rho_c^{n,k+1}$  dont on va maintenant s'occuper.

### Transport des densités aux mailles

L'idée est de fabriquer des valeurs aux sommets à partir de celles aux centres des mailles, de les transporter par le nouveau schéma, puis de revenir aux mailles par moyenne. Si le maillage est structuré, l'algorithme HIS (Half-Index Shifting) de Benson [105] fournit de très bons résultats. Si le maillage n'est pas structuré, nous utilisons l'algorithme de *scatter-gather* proposé par Loubère et Shashkov [136].

Bien entendu, après l'enchaînement *scatter* (mailles vers sommets), transport (avec troncature mais sans réparation) et *gather* (sommets vers mailles), il ne faut pas oublier la réparation globale des masses pondérées

$$\sum_c \rho_c^{n,k+1} J_c^{n,k+1} |c|_{\mathcal{X}}^n \quad \text{et} \quad \sum_c \rho_c^{n,k+1} Y_c^{n,k+1} J_c^{n,k+1} |c|_{\mathcal{X}}^n \quad (7.76)$$

dans lesquelles  $J_c^{n,k+1}$  est connu.



# Conclusion

AU TERME DE ces 3 chapitres techniques, le moment est venu de dresser un bilan général des travaux et d'envisager les suites à donner. Je ne prétends ni à l'objectivité dans l'évaluation de ce qui a été réalisé, ni à l'exhaustivité dans la vision des perspectives.

## 8.1 Sur la simulation numérique

### 8.1.1 Des écoulements diphasiques

La relaxation s'est imposée comme une réponse parfaitement adéquate au besoin de robustesse des simulations basées sur le modèle DFM. En parvenant à assurer la positivité des densités et des fractions, aussi bien en explicite qu'en implicite sélectif, aussi bien en gaz-liquide qu'en compositionnel, et ce de façon quasiment transparente vis-à-vis des lois de fermeture, nous pensons avoir apporté une innovation au vaste domaine que constitue l'approximation numérique des systèmes diphasiques.

Il reste cependant beaucoup à faire. Parmi les défis à relever, la priorité absolue va à la prise en compte « propre » des termes sources, qui représente la pesanteur et les frottements de la paroi et dont l'ordre de grandeur est important. Cette prise en compte doit bien entendu permettre de préserver les estimations sur le pas de temps et sur les paramètres de relaxation en vue d'assurer la positivité, sans quoi nos premières victoires perdraient de leur superbe. Le traitement actuel des sources est assez standard (splitting ordre 2) et produit des résultats parfaitement acceptables, mais j'aimerais reprendre, en y mettant plus d'obstination, l'exploration (laissée en suspens) des schémas d'équilibre et *asymptotic preserving*, qui font l'objet d'une intense recherche dans la communauté [107, 108].

Vient en deuxième priorité la transposition de ces schémas de relaxation à l'ordre élevé<sup>1</sup>, ou plus modestement au second ordre en temps et en espace, non seulement à l'intérieur du domaine mais aussi à ses bords. En effet, dans les problèmes de pipeline, les données sont injectées par les conditions aux limites. À cet égard, nous avons les idées assez claires, qui seront mises en place et publiées après une étude systématique. Pour le domaine intérieur, et par goût personnel, je suis davantage attiré par la conception des schémas qui sont d'ordre 2 espace-temps par un ajustement judicieux de pentes plutôt que par un découplage impliquant un Runge-Kutta en temps. Là encore, nous avons quelques idées qu'il importe d'approfondir et de rendre compatibles avec les schémas d'équilibre.

Dans un registre proche de celui des termes sources, mais seulement en troisième position, je suis tenté de regrouper tous les aspects se traduisant par l'émergence de termes

---

1. tout en sauvegardant la garantie de positivité

« non-conservatifs » au sein d'un système plus grand, par exemple les changements d'inclinaison de la conduite ou les variations de la section. Cette catégorie de problèmes s'avère ardue par la présence de la résonance dans le système au niveau continu. Mais quand bien même on se trouve loin de la résonance, il me semble difficile de trouver un schéma ou un couplage qui concilierait plusieurs types de termes sources et plusieurs types de produits non-conservatifs.

Parallèlement aux trois axes prioritaires que je viens d'énumérer et qui concernent exclusivement le schéma de base en maillage uniforme, il est aussi important de mener à bien le volet adaptation dynamique afin de tirer une conclusion sur les gains qu'on peut raisonnablement espérer. Jusqu'à présent, ces gains sont très spectaculaires. Mais il faut qu'ils continuent à l'être jusqu'au bout, si l'on veut convaincre les « mécaniciens » d'adopter ces nouvelles techniques.

### 8.1.2 De l'advection multidimensionnelle

Le sujet est officiellement « clos » : le schéma que nous proposons est en cours d'intégration dans le code IFP-C3D est en cours pour les variables aux nœuds. Tout en acceptant volontiers les critiques concernant la non-conservativité locale, je maintiens la confiance placée dans la réparation de la masse, au vu de la précision des résultats obtenus et même si aucune analyse théorique n'a été possible.

Cela étant, j'aimerais un jour avoir l'occasion de revisiter les schémas de type Residual Distribution, car beaucoup de progrès ont été accomplis depuis. Cet intérêt pour les schémas RD vient de l'intuition (déjà dévoilée) qu'en maillage très déformé, seul un schéma compact pourra « garder la tête haute », quitte à devoir récupérer les informations sur plusieurs niveaux temporels. Je souhaiterais également pouvoir faire plus ample connaissance avec les schémas multidimensionnels à la Després, dans lesquels on a une notion de flux par sommet et non pas par arête (en 2-D), et qui me paraissent prometteurs.

## 8.2 Sur la modélisation et le contrôle

Le processus de réduction de modèle que nous avons présenté a une portée très générale. On peut l'appliquer à beaucoup d'autres systèmes analogues. Ce qui personnellement m'a le plus frappé est que les stratégies de commande conçues sur la base de ces approximations peu fiables au premier abord fonctionnent à merveille expérimentalement : les réponses sont en très bon accord avec les calculs prédictifs.

Outre le contrôle du severe-slugging, je m'intéresse aussi au contrôle optimal des véhicules hybrides, qui n'occupe pour le moment qu'une petite partie de mes activités. Je souhaiterais l'élargir, en m'appuyant sur ce que je connais le mieux, c'est-à-dire les équations différentielles et les équations aux dérivées partielles, qui reviennent au grand galop par le biais du principe du maximum de Pontryagin et de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. Un jour ou l'autre, il faudra bien les discrétiser au moyen d'un bon schéma numérique !

## Articles du chapitre 5

### A.1 Méthodes de relaxation

- ⟨10⟩ M. BAUDIN, C. BERTHON, F. COQUEL, R. MASSON, AND Q. H. TRAN, *A relaxation method for two-phase flow models with hydrodynamic closure law*, Numer. Math., 99 (2005), pp. 411–440.
- ⟨11⟩ M. BAUDIN, F. COQUEL, AND Q. H. TRAN, *A semi-implicit relaxation scheme for modelling two-phase flow in a pipeline*, SIAM J. Sci. Comput., 27 (2005), pp. 914–936.
- ⟨14⟩ ———, *A relaxation method via the Born-Infeld system*, (2007). Soumis.
- ⟨15⟩ ———, *A relaxation scheme for two-phase multi-component flows*, (2008). Soumis.
- ⟨16⟩ F. COQUEL, Q. L. NGUYEN, M. POSTEL, AND Q. H. TRAN, *Entropy-satisfying relaxation method with large time-steps for Euler IBVPs*, (2007). Soumis.
- ⟨18⟩ Q. H. TRAN, *Second-order slope limiters for the simultaneous linear advection of (not so) independent variables*, Comm. Math. Sci., 6 (2008). À paraître.

### A.2 Techniques d'adaptation dynamique

- ⟨12⟩ F. COQUEL, M. POSTEL, N. POUSSINEAU, AND Q. H. TRAN, *Multiresolution technique and explicit-implicit scheme for multicomponent flows*, J. Numer. Math., 14 (2006), pp. 187–216.
- ⟨13⟩ N. ANDRIANOV, F. COQUEL, M. POSTEL, AND Q. H. TRAN, *A relaxation multi-resolution scheme for accelerating realistic two-phase flows calculations in pipelines*, Int. J. Numer. Meth. Fluids, 54 (2007), pp. 207–236.
- ⟨17⟩ F. COQUEL, Q. L. NGUYEN, M. POSTEL, AND Q. H. TRAN, *Local Time Stepping applied to explicit-implicit schemes for hyperbolic systems*, (2007). Soumis.





## Articles du chapitre 6

### B.1 Modèles diphasiques alternatifs

- ⟨6⟩ J.-M. MASELLA, Q. H. TRAN, D. FERRÉ, AND C. PAUCHON, *Transient simulation of two-phase flows in pipes*, Int. J. Multiphase Flow, 24 (1998), pp. 739–755.

### B.2 Application à l'étude et au contrôle du severe-slugging

- ⟨20⟩ É. ZAKARIAN AND Q. H. TRAN, *A differential-algebraic model for two-phase flows instabilities in pipeline-riser systems*, in Proceedings of the ASME Pressure Vessels and Piping Conference, Boston, Massachusetts, August 1999, W. L. Cheng, A. Hulin, M. Souli, and S. Itoh, eds., vol. 396 of PVP, The American Society of Mechanical Engineers, 1999.
- ⟨25⟩ E. DURET, Y. PEYSSON, Q. H. TRAN, AND P. ROUCHON, *Active bypass to eliminate severe-slugging in multiphase production*, in Proceedings of the 4th North American Conference on Multiphase Technology, Banff, June 2004, J. Brill, ed., Cranfield, 2004, BHR Group Limited, pp. 205–223.



## Articles du chapitre 7

### C.1 Advection 2-D

- ⟨8⟩ Q. H. TRAN AND B. SCHEURER, *High-order monotonicity-preserving compact schemes for linear advection on 2-d irregular meshes*, J. Comput. Phys., 175 (2002), pp. 454–486.

### C.2 Advection 3-D

- ⟨19⟩ Q. H. TRAN AND B. SCHEURER, *A high-order monotonicity-preserving scheme for linear scalar advection on 3-d irregular meshes*, Comm. Comput. Phys., (2007).  
Accepté.

