



**HAL**  
open science

# Le comportement d'hystérésis des solides et sa description par un schéma à mémoire discrète : le cas des aciers inoxydables

Sihui Han

► **To cite this version:**

Sihui Han. Le comportement d'hystérésis des solides et sa description par un schéma à mémoire discrète : le cas des aciers inoxydables. Physique [physics]. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1985. tel-00319507

**HAL Id: tel-00319507**

**<https://theses.hal.science/tel-00319507>**

Submitted on 8 Sep 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE  
ET  
L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE  
DE GRENOBLE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR D'ÉTAT ÈS-SCIENCES PHYSIQUES

par

**Sihui HAN**

S U J E T

**LE COMPORTEMENT D'HYSTERESIS DES SOLIDES ET  
SA DESCRIPTION PAR UN SCHEMA A MEMOIRE DISCRETE :  
LE CAS DES ACIERS INOXYDABLES**

---

Soutenue le 25 Janvier 1985 devant la Commission d'Examen

M. J.-M. PIERRARD	Président
M. P. GUELIN	Examineurs
M. E. KREML	
M. J. LEMAITRE	Rapporteurs extérieurs
M. F. LOUCHET	
M. A. PINEAU	Examineur
M. B. WACK	Rapporteur



A toi, sans qui rien de  
tout ceci n'aurait pu être.

献给你，

没有你

这一切将不会存在。



## AVANT - PROPOS

Le travail de recherche présenté dans cette thèse a été effectué à l'Institut de Mécanique de Grenoble et n'a pu être réalisé que grâce à l'aide continue et la collaboration des membres de l'équipe de Mécanique des Milieux Continus Solides.

Je tiens tout d'abord à dire toute ma gratitude à Monsieur WACK qui a assuré la direction de mes recherches et m'a apporté, avec beaucoup de patience et de bienveillance, son aide et son soutien le plus sûr tout au long de la réalisation de ce travail.

Pour sa cordialité, son originalité scientifique et ses précieux conseils, je tiens à adresser toute ma reconnaissance et mon admiration à Monsieur GUELIN qui a suivi en fait ce travail de très près et a constitué, avec Monsieur WACK, un encadrement idéal.

Il m'est particulièrement agréable d'exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur le Professeur PIERRARD qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du Jury. Il m'a en effet très bien accueilli, ainsi que mon épouse qui a pu venir faire un stage dans le laboratoire.

J'adresse tous mes remerciements également à Monsieur le Professeur LEMAITRE, qui m'a bien accueilli dans son laboratoire au début de mes études en France et m'a fait le grand plaisir d'être rapporteur extérieur.

Je remercie également Monsieur le Professeur LOUCHET qui a bien voulu être rapporteur extérieur et a ainsi manifesté son intérêt pour ce mémoire qui traite beaucoup de mécanique et très peu de métallurgie.

Monsieur le Professeur PINEAU et Monsieur le Professeur KREML m'ont fait l'honneur de bien vouloir participer au Jury malgré leurs emplois du temps très chargés, je les en remercie très vivement.

Je tiens à associer à ces remerciements, Monsieur TERRIEZ, Monsieur PEGON et Monsieur DUMAZ pour leur collaboration scientifique et amicale.

Pour la réalisation des expériences, j'ai pu bénéficier de la collaboration amicale de Monsieur ECHANTILLON, de Monsieur MARTIN et de Monsieur REVEILLET, qu'ils soient tous assurés de ma gratitude.

Mes remerciements vont aussi à mon épouse, Madame XU Jiaqin, qui a déposé tous les dessins d'essai présentés dans ce travail.

Enfin, il m'est agréable de remercier ici toutes les personnes qui ont contribué, directement ou indirectement, à la réalisation de ce travail : à tous, j'adresse mes remerciements les plus cordiaux.

## 前 言

本论文研究工作是在格雷诺尔力学研究所进行的，承蒙固体连续介质力学小组成员们的不断协助，本论文才得以实现。

首先，我要衷心地感谢指导我作研究工作的瓦克先生。在论文得以实现的整个过程中，他体现了很大的耐心和给予我许多的照顾，他的帮助和支持是最可靠的保证。

对于他所给予我的友谊，他所具有的科学独创精神，以及他所给予我的宝贵建议，我非常感谢和佩服格伦先生。事实上，他一直关心着我的工作进展；他和瓦克先生一道对我构成一理想的组合。

我特别乐意地向皮哈教授表示我衷心的感谢。他接受担任论文评阅委员会主席，对此我感到荣幸。的确，我受到了他很好地接待，我爱人也是为此，使她能来此实验室得以进修。

同样地，我非常感谢勒梅特教授。我刚到法学习时，是他接待我到他的实验室。他作为论文评阅委员会外部报告者，我感到非常高兴。

我同样要感谢卢锡教授，他乐意担任论文评阅委员会外部报告者，而且对我这一研究得很多的是力学，很少部分是冶金学方面的论文感兴趣。

使我感到十分荣幸的是：比乐教授，肯柏教授乐意来参加论文评审委员会，虽然他们的工作十分繁忙。在此，我谨向他们表示深切的谢意。

我同样要感谢秦叶先生、帕戈先生和杜马先生，感谢他们友好的科学研究协作。

在进行实验的过程中，我得到了谈高华的先生、马丁先生、黑威耶先生的友好协作。在此，我谨向他们表示感谢。

我也要感谢我的爱人，许家琴女士，是她整理了本论文工作中所有的实验曲线。

最后，我愿意在此向一切直接地或者间接地对此论文工作的实现有所贡献的人们表示感谢，谨接受我最友好的谢意。

韩思慧

TABLE DES MATIERES

=====

	Page
INTRODUCTION .....	8
I. RAPPEL SUR LE SCHEMA DE COMPORTEMENT A STRUCTURE HEREDITAIRE ET MEMOIRE DISCRETE .....	12
I.1. Propriétés thermomécaniques du schéma rhéologique uni- dimensionnel .....	14
I.2. Propriétés d'hystérésis pure dans le cas tridimensionnel ...	38
I.3. La forme complète de la loi constitutive .....	44
II. LE CADRE ET LES MOYENS DE L'ETUDE .....	50
II.1. La forme simplifiée du schéma de comportement pour les aciers inoxydables .....	52
II.2. Le dispositif expérimental .....	57
II.3. Les moyens numériques .....	66
III. LES PROPRIETES DU COMPORTEMENT D'HYSTERESIS PURE .....	72
III.1. La forme des courbes de charge des sollicitations cycli- ques .....	74
III.2. Petits cycles dans un cycle stabilisé .....	102
III.3. Aspect microstructural et remarques sur le comportement d'hystérésis pure .....	103
III.4. Forme du seuil limite.....	112
III.5. Extension de la signification du coefficient d'homothétie du comportement d'hystérésis pure .....	113
IV. LES PROPRIETES DU COMPORTEMENT D'ECROUISSAGE EN DEFORMATION ...	128
IV.1. Analyse des résultats expérimentaux .....	130
IV.2. Les phénomènes microstructuraux reliés à l'écrouissage en déformation .....	135
IV.3. Modélisation de l'écrouissage en déformation .....	143

V. IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS ET PROPRIETES DU SCHEMA DE COM- PORTEMENT .....	152
V.1. Rappel de la forme des fonctionnelles multivoques du schéma thermomécanique .....	154
V.2. Identification des coefficients du schéma de comportement.....	159
V.3. Influence des coefficients sur la forme des résultats .....	163
VI. LE ROCHET DE TORSION .....	184
VI.1. Rappel bibliographique des études concernant les effets secondaires de torsion .....	186
VI.2. Les explications théoriques des effets secondaires .....	187
VI.3. Analyse des résultats expérimentaux.....	191
VI.4. Modélisation du rochet axial de torsion et notion de contrainte de référence virtuelle .....	199
VI.5. Remarque relative à l'essai de traction-compression .....	209
VII. COMPARAISON GLOBALE DES RESULTATS THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX .....	212
VII.1. Le cas de l'acier inoxydable 316L .....	214
VII.2. Le cas de l'Inconel 718 .....	216
CONCLUSION .....	236
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES .....	238

## INTRODUCTION

L'étude du comportement des matériaux et en particulier des métaux, ne peut plus se ramener à l'étude d'un comportement quasi-élastique ou à une analyse limite en plasticité parfaite. En effet, à présent, l'ingénieur s'intéressera à des problèmes souvent caractérisés par la mise en jeu de sollicitations cycliques quelconques et d'écrouissage important. Les sollicitations cycliques de service sont généralement telles que la majeure partie des trajets réalisés durant la vie des structures intéresse la zone de transition entre élasticité et plasticité. Dans de telles conditions, la distinction entre élasticité et plasticité reste conventionnelle ou devient extrêmement délicate. Or cette distinction est souvent à la base de la définition de l'écrouissage ; parallèlement la définition des sources de chaleur associées aux irréversibilités internes n'est immédiate que dans le cas de la plasticité parfaite.

Dans le cadre de l'effort général effectué depuis quelques dizaines d'années par les scientifiques pour résoudre ce problème, un schéma de comportement thermomécanique a été proposé [1] : à la suite d'une analyse originale de résultats macroscopiques bien connus, la position privilégiée du phénomène d'hystérésis mécanique a été reconnue. Le parallèle avec les propriétés des modèles heuristiques à ressorts et patins a permis de décrire correctement le phénomène d'hystérésis pure, tant du point de vue mécanique que du point de vue thermodynamique. La décomposition de la puissance dissipée en différentes parts, associées aux phénomènes microstructuraux, complétée par l'hypothèse d'additivité de contraintes partielles, a permis d'associer la dissipation des phénomènes d'écrouissage à celle des phénomènes d'hystérésis pure.

Par comparaison avec les autres tentatives pour décrire le comportement des matériaux, il faut souligner l'aspect de schéma du modèle de comportement utilisé ici ; il est constitué de trois parties fortement liées, une équation multivoque où interviennent des fonctionnelles de mémoire discrète, constantes par morceaux, un critère d'inversion qui n'est autre que l'expression du deuxième principe de la thermodynamique, et un algorithme qui permet de définir à tout instant les valeurs actuelles des fonctionnelles en fonction de tous les instants d'inversion mémorisés au cours de l'histoire du matériau.

Les études précédentes avaient montré les possibilités du schéma thermomécanique en matière de description qualitative d'un grand nombre de phénomènes observés dans le comportement des matériaux : cycles stables répétitifs du comportement d'hystérésis pure, pic et pseudo-palier de la première courbe de charge des aciers ordinaires, consolidation et accommodation des aciers austénitiques, rochet visqueux, fluage et hésitation au fluage, relaxation, fatigue-relaxation.

Une étude de la validité de ce schéma thermomécanique, après avoir franchi le cap de la stricte cohérence théorique, ne peut s'effectuer que par comparaison avec l'expérience. En complément aux comparaisons expérimentales d'aspect globale déjà effectués, nous projetons essentiellement de vérifier la validité des hypothèses de base sur lesquelles s'appuie le schéma de comportement, en particulier les notions d'irréversibilité immédiate du comportement, de restauration des propriétés après inversion, de mémoire discrète des fonctionnelles qui interviennent dans le schéma. Ensuite, nous vérifierons d'une façon quantitative les possibilités du schéma de décrire le comportement réel de deux matériaux, un acier inoxydable type 316 L et un superalliage type Inconel 718.

Pour sérier les problèmes nous nous limiterons dans cette étude au comportement isotherme de matériaux homogènes et isotropes ; le comportement étudié à des vitesses de déformation de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-5} s^{-1}$  est supposé non visqueux. Afin de vérifier l'aspect prédictif du schéma nous distinguons les données expérimentales qui permettent d'identifier les coefficients du schéma, de celles qui permettent ensuite par prévision de contrôler la validité du schéma.

Le schéma thermomécanique se situe dans le cadre des descriptions phénoménologiques du comportement, il a donc l'ambition de décrire les aspects macroscopiques du comportement du matériau. Les aspects microstructuraux peuvent en principe être ignorés, mais, comme nous le verrons à propos de la définition de l'écrouissage, l'analyse des phénomènes microstructuraux mis en jeu est un guide précieux pour expliciter les formes des fonctionnelles du schéma de comportement. De plus, cette analyse permet aussi de confirmer sur le plan microscopique les propriétés mises en évidence sur le plan macroscopique : dans la mesure où il s'agit de la description du même matériau, les comportements macroscopiques et microscopiques ne peuvent jamais être contradictoires. La confirmation

des propriétés par une analyse à l'échelle microstructurale permet d'éviter l'écueil que la description macroscopique ne soit qu'un lissage de résultats expérimentaux.

Dans le premier chapitre, nous faisons un rappel du schéma thermomécanique sur lequel s'appuiera toute notre étude. Les moyens expérimentaux et numériques, qui nous ont permis d'obtenir les résultats présentés sont décrits dans le chapitre II ; de plus, on y justifie les limitations apportées à l'équation de comportement utilisé pour décrire ces résultats. Les propriétés du comportement d'hystérésis pure sont analysées en détail dans le chapitre III ; l'évolution des modules tangents aux courbes de charge y est étudié en détail. Les propriétés de l'Inconel 718 nous invitent à étendre l'étude des modèles heuristiques et à introduire en plus du coefficient d'homothétie de Masing, un coefficient de sens de la charge. L'évolution de l'écrouissage est décrit au chapitre IV ; sur la base d'une analyse des phénomènes microstructuraux, une description du durcissement de l'acier inoxydable 316 L et de la combinaison du durcissement et de l'adoucissement de l'Inconel 718 est donnée. Le sens physique attaché à chaque coefficient permet d'obtenir une identification de façon individuelle évitant ainsi l'utilisation d'une méthode statistique de minimisation d'une erreur globale (chapitre V). Le problème particulier du rochet axial à force axiale nulle est confirmée, de même que la notion de contrainte de référence virtuelle qu'il est nécessaire d'introduire pour décrire le rochet à force axiale non nulle. Enfin, le dernier chapitre fait le bilan de la comparaison des résultats expérimentaux avec les résultats donnés par le schéma après identification des coefficients.

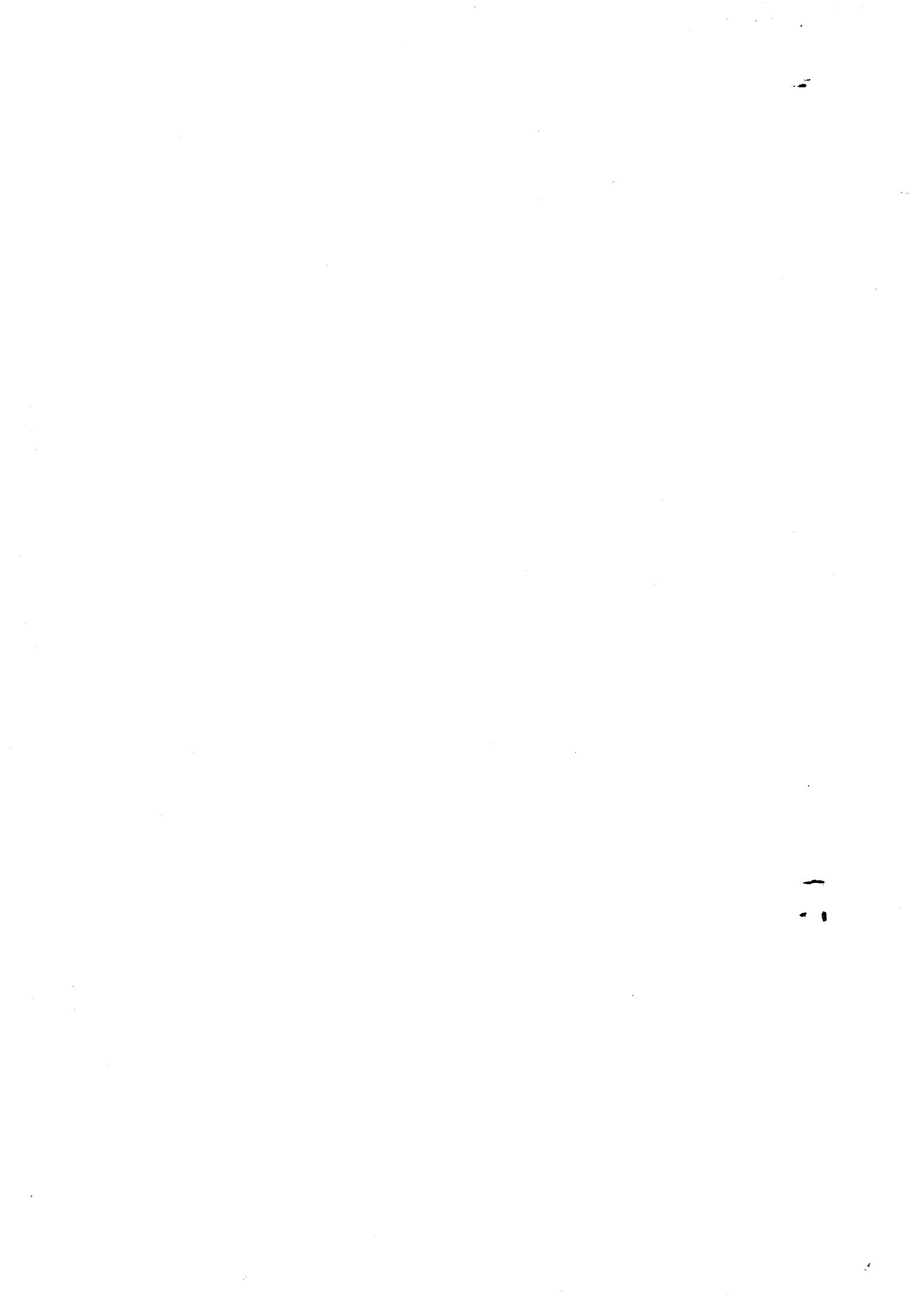


CHAPITRE I

=====

RAPPEL SUR LE SCHEMA DE COMPORTEMENT A STRUCTURE

HEREDITAIRE ET MEMOIRE DISCRETE



### I.1. Propriétés thermomécaniques du modèle rhéologique unidimensionnel

Ce paragraphe comporte deux parties. Nous rappelons d'abord la définition d'un modèle symbolique simple. Ce modèle est très commode pour étudier le sens physique des principes sur lesquels se base un schéma thermomécanique de l'hystérésis. L'étude du schéma non classique proposé par P. GUELIN [1,2] est faite dans la deuxième partie de ce paragraphe où l'on prépare l'introduction des principes de restauration et de quasi-reversibilité (cf. point 10 en fin de § I.1.2.).

#### I.1.1. Présentation d'un modèle rhéologique unidimensionnel

Pour représenter les propriétés non linéaires des corps, on utilise commodément des modèles rhéologiques unidimensionnels. Ces modèles apparaissent donc comme des outils heuristiques dans l'étude du comportement des matériaux anélastiques.

Prenons par exemple le modèle de Saint-Venant (Fig. I-1 (a)). Ce modèle est souvent utilisé dans l'étude du comportement élastoplastique parfait. Ce modèle est constitué d'un couple ressort-patin associé en série. Il est clair que le modèle est non linéaire, au moins à partir d'une certaine contrainte, du fait de son élément non linéaire, le patin.

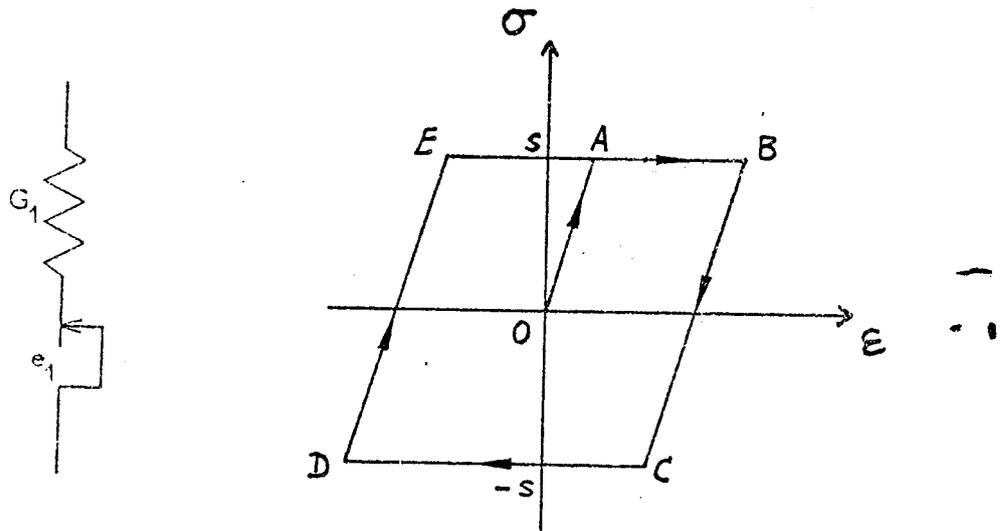


Fig. I.1 Modèle de Saint-Venant.

Lorsqu'on sollicite un tel modèle, le ressort se déforme d'abord

élastiquement, puis le patin glisse à contrainte constante  $s$ . Si l'on inverse le sens de la sollicitation, le ressort se détend, puis se comprime, le patin reste bloqué jusqu'à ce que la contrainte devienne  $-s$  ; alors le patin glisse de nouveau, mais en sens inverse et la contrainte reste constante, égale à  $-s$  (cf. Fig. I-1, (b)).

Un tel modèle est donc caractérisé par deux paramètres : le module (ou coefficient de rigidité) du ressort  $G$  et le seuil du patin  $s$ , mais on peut aussi définir le seuil par une déformation limite  $e = \frac{s}{G}$  au delà de laquelle le patin glisse.

On suppose que les coefficients caractéristiques du modèle :  $G$ ,  $s$  (ou  $e$ ) sont indépendants du temps et du sens de la sollicitation, c'est-à-dire qu'ils sont les mêmes pendant toute l'évolution et dans un sens ou dans l'autre : la ligne brisée BCD est alors homothétique de OAB dans le rapport  $-2$  (cf. Fig. I-1, (b)).

Pour représenter le plus fidèlement possible le comportement anélastique des corps réels, il est naturellement intéressant d'associer en parallèle une suite infinie de tels couples ressorts-patins associés en série (cf. Fig. I-2)[3].

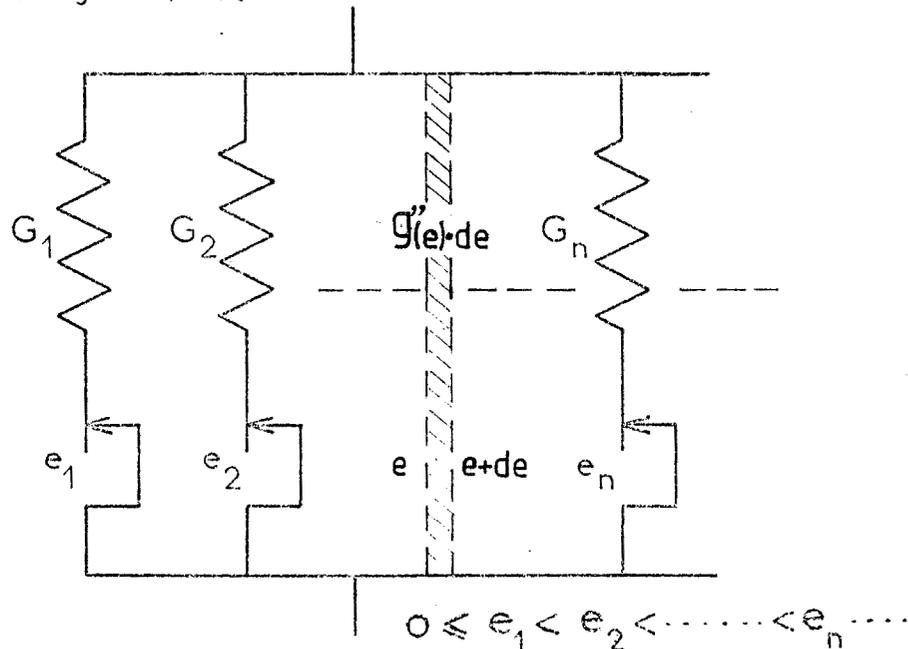


Fig. I.2 Modèle symbolique continuellement distribué.

Le modèle est caractérisé par une fonction de raideur  $g''(e)$ , telle que le produit  $g''(e)e$  représente le coefficient de rigidité des cou-

ples dont les déformations limites sont comprises entre  $e$  et  $e+de$ .

Pour une déformation donnée  $\mathcal{E}$  du modèle, on pose alors

$$1) \quad g'(\mathcal{E}) = \int_0^{\mathcal{E}} g''(e) de \quad (1, 1, 1)$$

quantité exprimant en  $\mathcal{E}$  la raideur des couples dont les déformations limites sont entre 0 et  $e = \mathcal{E}$ .

$$2) \quad g(\mathcal{E}) = \int_0^{\mathcal{E}} g'(e) de \quad (1, 1, 2)$$

quantité exprimant la variation de contrainte non élastique due à la déformation  $\mathcal{E}$ .

Naturellement, on a les conditions initiales :

$$\left. \begin{aligned} g'(0) &= 0 \\ g(0) &= 0 \end{aligned} \right\} (1, 1, 3)$$

#### I.1.2. Analyse des propriétés mécaniques du modèle sollicité

Considérons une première charge monotone (trajet OA ou OB de Fig. I-3). Supposons que l'on n'ait encore jamais sollicité le modèle. Tous les frotteurs n'ont jamais bougés et tous les ressorts sont détendus.

Lorsqu'on sollicite pour la première fois et de façon infinitésimale un tel modèle, aucun frotteur ne glisse. L'ensemble de ressorts se déforme élastiquement. La pente d'origine est donc

$$G_0 = \int_0^{\infty} g''(e) de = g'(\infty) \quad (1, 1, 4)$$

Pour une déformation  $\mathcal{E}$  finie, la contrainte correspondante du modèle s'obtient ainsi :

Les couples dont le seuil est dépassé ( $\mathcal{E} > e_i$ ) transmettent chacun une contrainte  $S_i = e_i G_i$ , soit pour l'ensemble de ces couples :

$$\sigma_{>} = \int_0^{\mathcal{E}} e g''(e) de \quad (1, 1, 5)$$

Les couples dont le seuil n'est pas dépassé ( $\mathcal{E} < e_i$ ) transmettent chacun une contrainte  $\mathcal{E} G_i$ , soit pour l'ensemble :

$$\sigma_{<} = \mathcal{E} \int_{\mathcal{E}}^{\infty} g''(e) de \quad (1, 1, 6)$$

La contrainte totale lors de la première charge est donc

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_{>} + \sigma_{<} \\ &= \int_0^{\mathcal{E}} e g''(e) de + \mathcal{E} \int_{\mathcal{E}}^{\infty} g''(e) de \end{aligned} \quad (1, 1, 7)$$

Après intégration et en tenant compte de (1, 1, 1) à (1, 1, 4), on a :

$$\sigma(\mathcal{E}) = G_0 \mathcal{E} - g(\mathcal{E}) \quad (1, 1, 8)$$

Cette relation montre la signification géométrique de  $g(\mathcal{E})$  (cf. Fig. I-3).

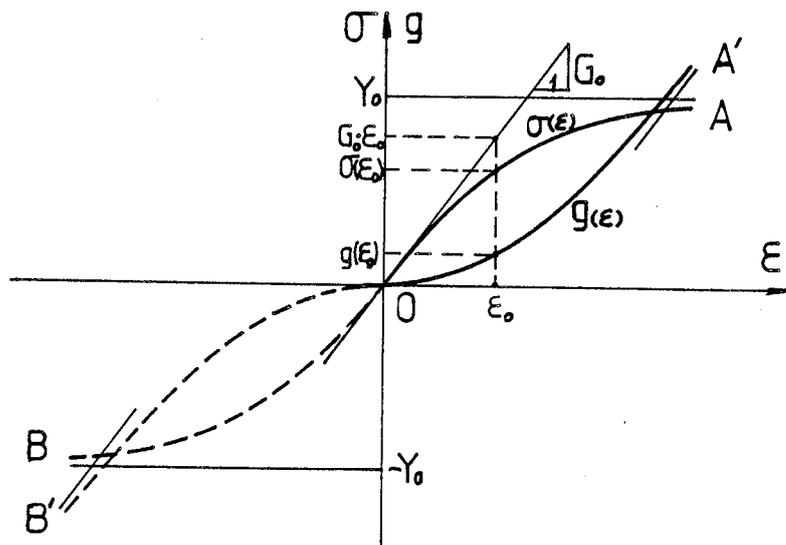


Fig. I.3 Signification géométrique de la fonction  $g(\mathcal{E})$ .

Compte tenu du sens physique de  $g''$  qui est positif, on a

$$g''(\mathcal{E}) = \sigma''(\mathcal{E}) > 0 \quad \text{si } \mathcal{E} > 0 \quad (1, 1, 9)$$

$$< 0 \quad \text{si } \mathcal{E} < 0$$

et  $\sigma(\mathcal{E})$  a donc toujours sa concavité tournée vers l'axe des déformations.

La courbe est symétrique par rapport à l'origine. Les fonctions  $\sigma(\varepsilon)$  et  $g(\varepsilon)$  sont donc des fonctions impaires.

Les rayons des courbures à l'origine sont infinis :

$$\sigma''(0) = g''(0) = 0$$

On a naturellement

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sigma(\varepsilon) = - \lim_{\varepsilon \rightarrow -\infty} \sigma(\varepsilon) = \gamma_0$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} g'(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow -\infty} g'(\varepsilon) = G_0$$

où  $\gamma_0$  peut s'interpréter comme un seuil de plasticité en traction simple.

Considérons le cas d'un chargement cyclique quelconque, tel que celui indiqué sur la figure I-4 :

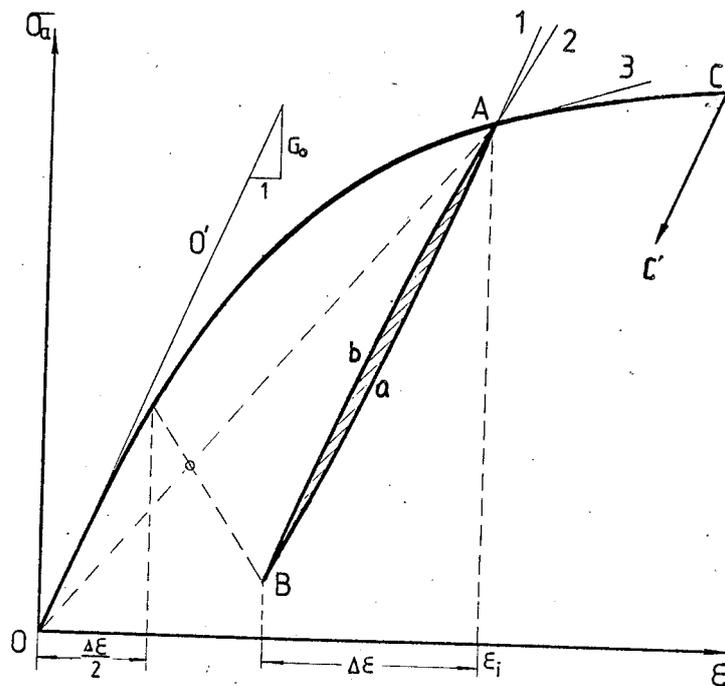


Fig. I.4 Représentation des propriétés du modèle symbolique.

Supposons que nous revenions en arrière au point A, appelé point d'inversion. A ce moment, tous les patins qui glissaient s'arrêtent et tous les ressorts commencent à se détendre. La pente à droite du point d'inversion A, notée par  $A^+$ , est donc de nouveau la pente à l'origine  $G_0$  :

$$\frac{d\sigma_{A^+}}{d\varepsilon} = \int_0^{\infty} g''(\varepsilon) d\varepsilon = G_0 \quad (1, 1, 10)$$

Tandis que la pente du point A juste avant l'inversion était

$$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{A_-} = G_0 - \int_0^{\varepsilon} g''(e) de \quad (1, 1, 11)$$

Si nous revenons continûment en arrière, les frotteurs se mettent à glisser successivement en sens inverse, dans le même ordre que lors du trajet de la première charge OA. Mais pour que le ième frotteur glisse, il faut que la déformation  $\varepsilon$  diminue de  $2e_i$ .

La diminution de contrainte pour les couples dont le seuil est dépassé ( $\varepsilon_A - \varepsilon > 2e_i$ ) est

$$\Delta\sigma_{>} = \int_0^{\frac{\varepsilon_A - \varepsilon}{2}} e g''(e) de \quad (1, 1, 12)$$

et pour les couples dont le seuil n'est pas dépassé :

$$\Delta\sigma_{<} = (\varepsilon_A - \varepsilon) \int_{\frac{\varepsilon_A - \varepsilon}{2}}^{\infty} g''(e) de \quad (1, 1, 13)$$

La diminution de contrainte totale depuis le point d'inversion A est alors

$$\sigma_A - \sigma = \Delta\sigma_{>} + \Delta\sigma_{<}$$

c'est-à-dire

$$\sigma - \sigma_A = - \int_0^{\frac{\varepsilon_A - \varepsilon}{2}} e g''(e) de - (\varepsilon_A - \varepsilon) \int_{\frac{\varepsilon_A - \varepsilon}{2}}^{\infty} g''(e) de \quad (1, 1, 14)$$

On obtient finalement

$$\sigma - \sigma_A = -G_0(\varepsilon_A - \varepsilon) + 2g\left(\frac{\varepsilon_A - \varepsilon}{2}\right) \quad (1, 1, 15)$$

Si l'on note la fonction (1, 1, 8) associée à la première charge par

$$\sigma_0(\varepsilon) = G_0\varepsilon - g(\varepsilon) \quad (1, 1, 16)$$

alors l'équation décrivant le trajet de décharge AB peut s'écrire :

$$\sigma - \sigma_A = -2\sigma_0\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_A}{-2}\right) \quad (1, 1, 17)$$

La courbe de retour est donc homothétique de la courbe de première charge dans le rapport - 2. C'est la règle de MASING [1,3]

Si l'on inverse à nouveau la sollicitation au point B, tous les ressorts se détendent et l'on retrouve encore la pente à l'origine  $G_0$  au voisinage à droite du point B :

$$\left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{B^+} = \int_0^\infty g''(e) de = G_0$$

Par la règle de MASING, le trajet BA est aussi homothétique de la première charge dans le rapport + 2. L'équation du trajet BA est :

$$\sigma - \sigma_B = 2 \cdot \sigma_0 \left( \frac{\sigma - \sigma_B}{2} \right) \quad (1.1.18)$$

A partir du point A, se mettent à glisser les frotteurs qui n'avaient pas encore bougé lors du trajet OA. Le modèle reprend la pente (1.1.11), de sorte que l'on retombe sur le trajet de la première charge OAC dont l'équation est :

$$\sigma = \sigma_0(\varepsilon)$$

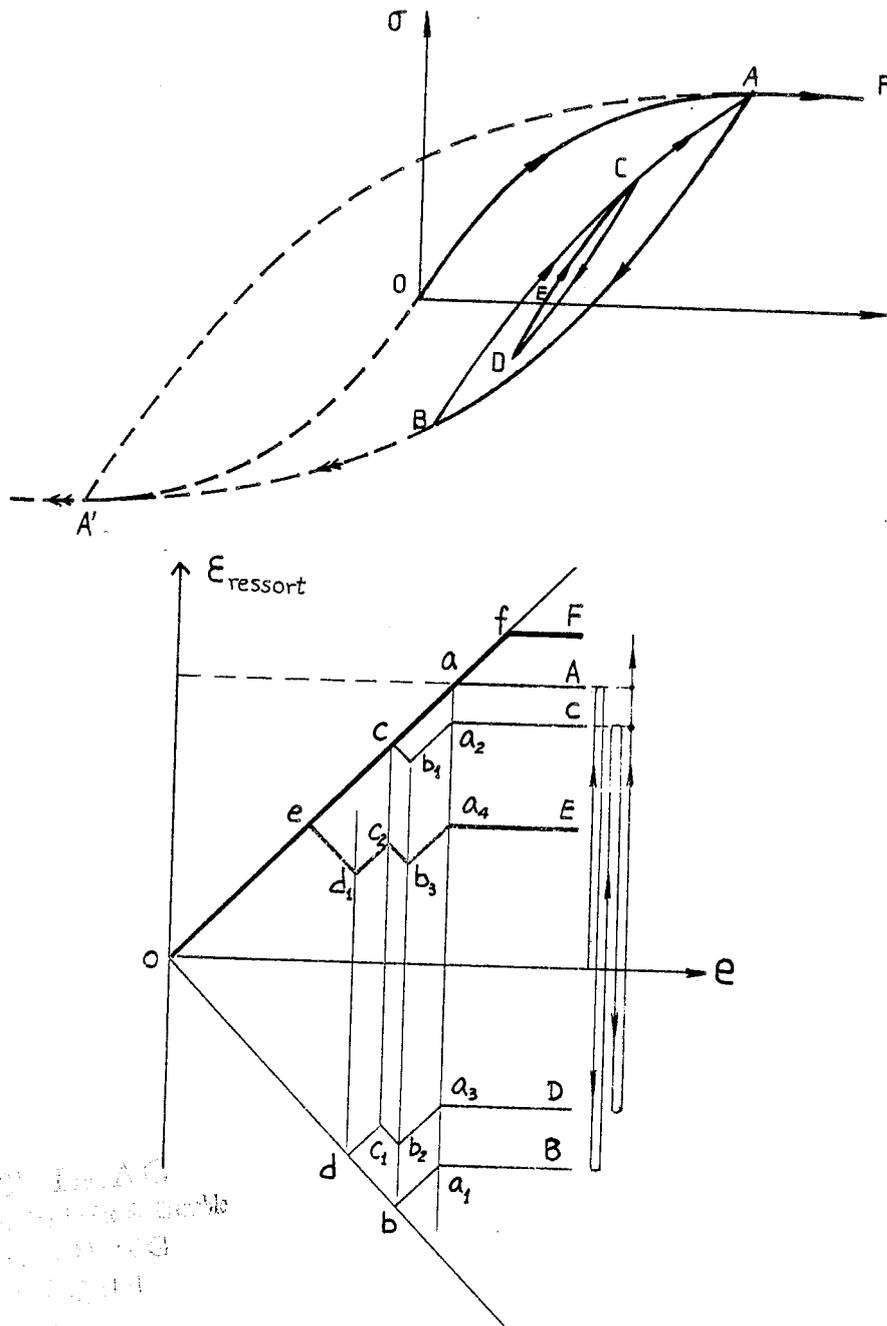
On peut écrire ainsi :

$$\sigma - \sigma_0 = 1 \cdot \sigma_0 \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{1} \right) \quad (1.1.19)$$

où  $\sigma_0, \varepsilon_0$  est l'état à l'origine :  $\sigma_0 = \varepsilon_0 = 0$ .

On peut aussi suivre à partir du point A une courbe homothétique de OC dans le rapport -2 jusqu'au point A', symétrique de A par rapport à l'origine. A partir de A', on retombe sur le trajet de la compression simple. Si l'on inverse la sollicitation en A', la pente initiale est encore  $G_0$  (figure I.5).

L'état du modèle, à un instant donné, peut être représenté par un diagramme topologique défini par VOGEL (1965) [4] à propos des systèmes dynamiques déferlants et mis en oeuvre par PERSOZ (1969)[3], en portant en abscisse le seuil  $e$  et en ordonnée la déformation du ressort correspondant (cf. Fig. I-5), on constate que l'état du modèle à tout instant peut être représenté par une ligne brisée.



INSTITUT IMAG  
 Mémoire de recherche n° 100/80  
 Centre de Recherche en Informatique  
 Université de Grenoble II  
 38030 ST-MARTIN D'HÈRES CEDEX  
 (France) 1984

Fig. I.5 Représentation topologique des états du modèle symbolique.

A l'état neutre, tous les points représentatifs des couples ressorts-patins sont alignés sur l'axe des abscisses. Par la suite, chaque point représentatif se déplace sur une verticale. Pour la première déformation  $\mathcal{E}_A$  les points pour lesquels  $e < \mathcal{E}_A$  se placent sur la première bissectrice, tandis que les autres ( $e > \mathcal{E}_A$ ) s'alignent sur l'horizontale. A la déformation  $\mathcal{E}_B$ . La ligne brisée OA subit une translation vers le bas, sauf les points près de l'origine pour lesquels le seuil  $-e$  est atteint, et ainsi de suite. On obtient donc les lignes brisées  $Oa_1A$ ,  $Oba_1B$ ,  $Ocb_1a_2C$ ,  $Odc_1b_2a_3D$  et  $Oed_1c_2b_3a_4E$  qui caractérisent les états du modèle au déformation  $\mathcal{E}_A$ ,  $\mathcal{E}_B$ ,  $\mathcal{E}_C$ ,  $\mathcal{E}_D$  et  $\mathcal{E}_E$  respectivement. A l'aide de ce diagramme, on voit que la ligne brisée  $Oe d_1 C_2 b_3 a_4 E$  conserve la mémoire des opérations antérieures. Dès qu'il y a la déformation  $\mathcal{E}_F$  qui est plus grande que les précédentes, elle les efface.

Cette analyse mécanique du modèle sollicité de façon cyclique nous conduit à noter alors les points suivants :

- 1) Il existe une restauration mécanique après chaque inversion de sollicitation. Les pentes au voisinage à droite des points d'inversion sont toujours la pente de l'origine  $G_0$ .
- 2) Les trajets cycliques sont homothétiques de la première charge dans le rapport  $\pm 2$ .
- 3) Le modèle est un système à mémoire discrète : les états d'inversion doivent être au moins temporairement mémorisés et peuvent être effacés après un certain trajet. Par exemple, si l'on prend le trajet  $OAaBbAC$  dans la figure I-4, l'état A ( $\sigma_A, \mathcal{E}_A$ ) est mémorisé le long du trajet  $AaBbA$  et effacé pendant que l'évolution continue le long de l'arc AC le long duquel le trajet  $AaBbA$  est entièrement oublié.
- 4) Les états d'inversion sont bien particuliers. Ils jouent un rôle très important pour la description de chacune des branches ou arc de branche : on les appellera "état de référence", et on les notera  $(R\sigma, R\mathcal{E})$  ou  $(\overset{K,\alpha}{R}\sigma, \overset{K,\alpha}{R}\mathcal{E})$  pour préciser que leur mise en oeuvre au temps actuel est liée le long de tout arc  $\alpha$  de branche K.
- 5) On est ainsi capable de décrire tous les trajets possible par branche ou arc de branche en introduisant les états de référence  $(R\sigma, R\mathcal{E})$  et le coefficient d'homothétie de MASING  $\omega$  à valeur 1 ou 2.

A partir de (1.1.16) à (1.1.19), on introduit la relation générale :

$$\sigma - R\sigma = \omega \sigma_0 \left( \frac{\mathcal{E} - \overset{K,\alpha}{R}\mathcal{E}}{\omega} \right) \quad (1.1.20)$$

où  $\omega = 1$  pour la première charge  
 $\omega = 2$  pour les autres branches

$R_{\sigma}^{\alpha}$ ,  $R_{\epsilon}^{\alpha}$  sont respectivement la contrainte et la déformation de référence au point d'inversion, constante par morceaux et valable le long de tout arc  $\alpha$  de branche  $k$ . Pour la première charge, l'état de référence est l'origine comme l'indique la relation (1.1.19).

Dans le cas de la fig. I - 6, on a donc

Les points considérés	$\omega$	$R_{\sigma}$	$R_{\epsilon}$	branche $k$	arc $\alpha$
$P \in OA$	1	0	0	1	1
$P \in AaB$	2	$\sigma_A$	$\epsilon_A$	2	1
$P \in BbA$	2	$\sigma_B$	$\epsilon_B$	3	1
$P \in AC$	1	0	0	3	2
$P \in C'CD$	2	$\sigma_C$	$\epsilon_C$	4	1
$P \in DdE$	2	$\sigma_D$	$\epsilon_D$	5	1
$P \in EeF$	2	$\sigma_E$	$\epsilon_E$	6	1
$P \in FfE$	2	$\sigma_F$	$\epsilon_F$	7	1
$P \in EgC$	2	$\sigma_D$	$\epsilon_D$	7	2
$P \in C'G$	1	0	0	7	3

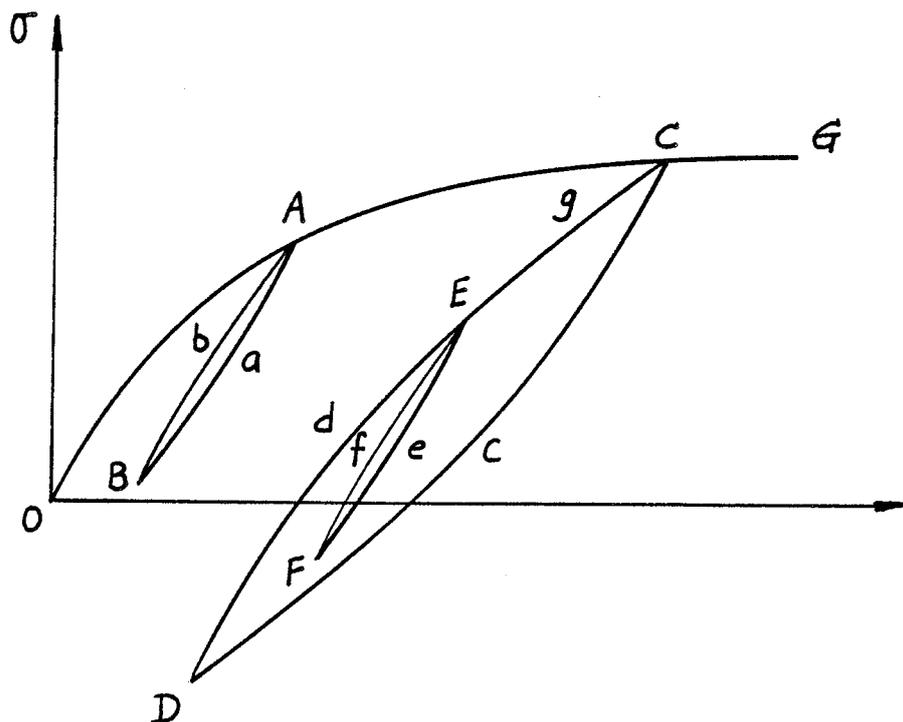


Fig. I.6 Les états de référence pour un chargement cyclique quelconque.

6) A partir de l'équation (1.1.20), on peut définir une loi de comportement unidimensionnelle sous la forme :

$$\dot{\sigma} = f(\sigma - {}_R\sigma, \dot{\epsilon}, \omega) \quad (1.1.21)$$

où l'on note  $\dot{\sigma} = \frac{d\sigma}{dt}$ ,  $\dot{\epsilon} = \frac{d\epsilon}{dt}$

et où  $f$  est une fonction de degré -1 par rapport au temps de sorte que les solutions de l'équation différentielle multivoque (1.1.21) sont indépendantes de la loi du temps de l'évolution.

On a 
$$\frac{\partial^2 f}{\partial \epsilon^2} = -g'' < 0$$

7) Par (1.1.20) et (1.1.21), on note que, pour être capable de décrire un tel type de comportement d'hystérésis, il faut

- (1) avoir une définition de la fonction  $\sigma_0(\epsilon) = G_0 - g(\epsilon)$  définissant la première charge
- (2) déterminer l'état de référence  $({}_R\sigma, {}_R\epsilon)$  et le coefficient de MASING  $\omega$ .

Evidemment, on ne peut pas utiliser indépendamment la règle de Masing (cf. Fig. I-7a) ou l'état de référence (cf. Fig. I-7b), qui ne traduit pas les propriétés du modèle.

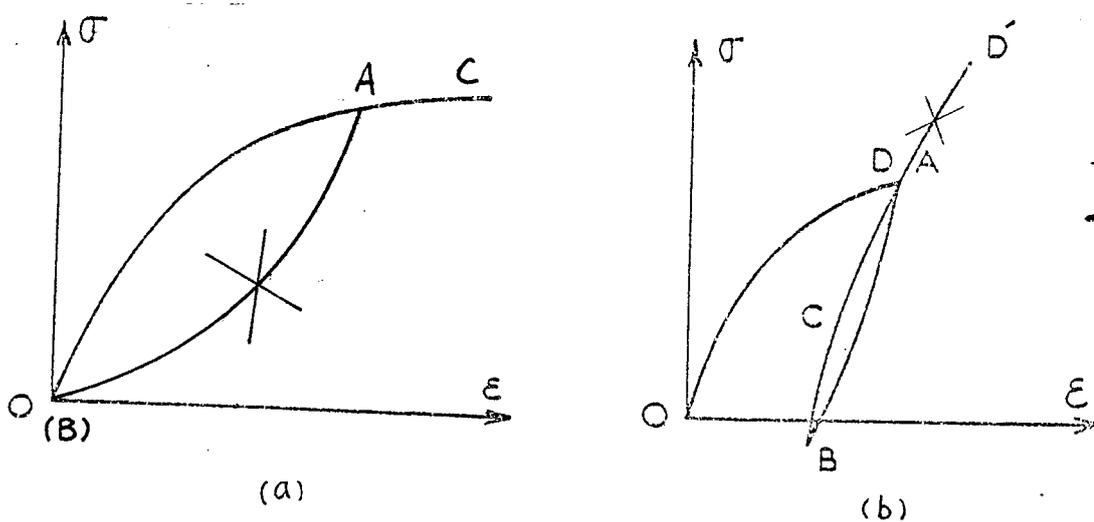


Fig. I.7 L'utilisation indépendante de la règle de Masing et de l'état de référence ne traduit pas les propriétés du modèle.

Il est donc nécessaire d'avoir un algorithme pour bien mettre en oeuvre simultanément la règle de Masing et l'état de référence à chaque instant de l'histoire du chargement du modèle.

8) Le comportement du modèle est non visqueux, sans endommagement, sans écrouissage, à accommodation immédiate, puisqu'on a supposé que toutes les caractéristiques du modèle :  $G_i$ ,  $S_i$  et  $e_i$  sont constants durant l'évolution.

9) Le module tangent à l'origine  $G_0$  est le même à droite des inversions, que ce soit en traction ou en compression. La courbe d'hystérésis est de plus symétrique par rapport à l'origine. Les sommets des cycles symétriques relativement à l'origine sont sur la courbe de première charge. Le rapport d'homothétie est  $\pm 2$ .

10) Finalement, le modèle, qui a le comportement d'hystérésis pure, possède les deux propriétés fondamentales suivantes :

- (1) Tous les trajets possibles sont irréversibles.
- (2) Il est toujours possible de ramener le modèle à son état initial, c'est-à-dire ramener la totalité des ressorts à n'avoir plus aucune tension et les frotteurs à leurs positions primitives. Pour atteindre cet état neutre, on doit effectuer un grand nombre de cycles presque symétriques, dont l'amplitude est lentement décroissante et tendant vers zéro (cf. Fig. I - 8)

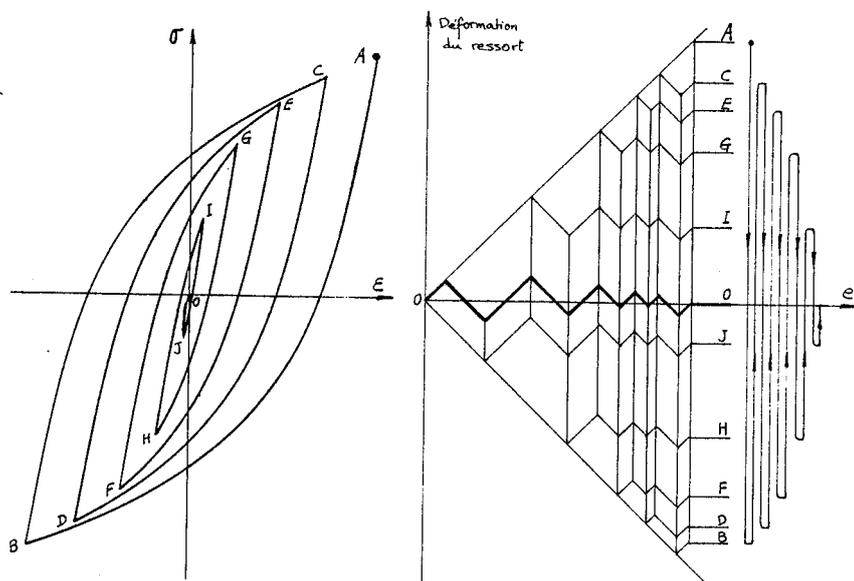


Fig. I.8 Cyclage fondamental du modèle avec retour à l'état neutre.

I.1.3. Propriété thermodynamique :

Introduisons d'abord les notations suivantes :

- $\mathcal{P}_e$  - La puissance des efforts extérieurs
- $\Pi$  - La puissance reversible
- $\Phi$  - La dissipation intrinsèque
- $\dot{E}$  - Le taux d'énergie interne
- $\dot{Q}$  - Le taux de la chaleur dissipée associée aux phénomènes irréversibles internes
- $\dot{I}$  - Le taux de la puissance dissipée autrement que sous forme de chaleur

On pose formellement

$$I = ToS$$

où  $To$  est la température considérée comme une constante

$S$  l'entropie

Considérons le schéma thermodynamique suivant :

(1) premier principe thermomécanique :

$$\mathcal{P}_e = \dot{E} + (-\dot{Q}) \quad (1.1.22)$$

(2) équation de GIBBS formelle :

$$\dot{E} = \dot{I} + \Pi \quad (1.1.23)$$

(3) Expression de la puissance des efforts extérieurs en une somme de deux puissances, l'une reversible  $\Pi$  et l'autre irréversible  $\Phi$  :

$$\mathcal{P}_e = \Pi + \Phi \quad (1.1.24)$$

Ce schéma (1.1.22) à (1.1.24) est un système de 3 équations reliant les six taux fondamentaux :  $\mathcal{P}_e$ ,  $\Pi$ ,  $\Phi$ ,  $\dot{E}$ ,  $\dot{Q}$  et  $\dot{I}$ . Si l'expression de 3 taux est connu ( $\mathcal{P}_e$ ,  $\Pi$ ,  $\dot{Q}$  par exemple), on peut déterminer les 3 autres taux thermodynamiques.

Par (1.1.22) - (1.1.23) - (1.1.24), on peut obtenir une forme "entropique" du bilan énergétique, équivalente au premier principe thermodynamique (1.1.22) :

$$\Phi = (-\dot{Q}) + \dot{I} \quad (1.1.25)$$

Le fait de se donner le chargement défini par la donnée  $\dot{\epsilon}$  (ou  $\dot{\epsilon}(t)$  ou  $\dot{\sigma}(t)$ ) permet de déterminer la puissance des efforts extérieurs  $\mathcal{P}_e$ .

En évolution dynamique :

$$\mathcal{P}_e + \mathcal{P}_i = \dot{K} \quad (1.1.26)$$

où  $\mathcal{P}_i$  la puissance des efforts intérieurs  
 $\dot{K}$  le taux d'énergie cinétique

Si l'on suppose que les évolutions sont quasi-statiques,  $\dot{K} = 0$ , et on a :

$$\mathcal{P}_e = -\mathcal{P}_i = \sigma \dot{\epsilon} \quad (1.1.27)$$

et il reste à définir 2 autres taux ( $\pi$  et  $\dot{Q}$  par exemple).

On suppose implicitement que l'évolution quasi-statique est isotherme à température  $T_0$ , adiabatique. Ces deux dernières hypothèses ne sont pas restrictives : le modèle symbolique peut être supposé doté d'une "chaleur spécifique" et d'un "coefficient de conduction" infinis.

Comme le remarque De Carbon [6], l'aire du cycle est infiniment petit ordre 4 lorsque l'amplitude de déformation tend vers 0 :

$$\lim_{\Delta \epsilon \rightarrow 0} S = O(\Delta \epsilon^4)$$

Considérons donc le petit cycle fait à droite du point d'inversion C (cf figure I.4). Comme le dégagement de chaleur  $\dot{Q}$  est l'aire du cycle fait dans l'intervalle  $[\epsilon_c - \Delta \epsilon, \epsilon_c]$ ,  $\dot{Q}$  est donc infiniment petit ordre 3 relativement à la puissance extérieure  $\mathcal{P}_e$  :

$$\lim_{\Delta \epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\dot{Q}}{\mathcal{P}_e} \right) = O(\Delta \epsilon^3) \quad (1.1.28)$$

c'est à dire que, au voisinage du point d'inversion C, il y a quasi-réversibilité [1] et que, au voisinage à droite du point d'inversion C, on a :

$$\pi = \sigma_c \cdot \dot{\epsilon} \quad (1.1.29)$$

La relation (1.1.29) est élémentaire et fondamentale pour l'interprétation de la thermodynamique des systèmes toujours irréversibles. La thermodynamique non classique, étroitement associée à la description héréditaire à mémoire discrète est en effet basée sur l'hypothèse fondamentale suivante (qui constitue un saut conceptuel essentiel) :

On suppose que l'utilisation de la contrainte de l'état de référence  $R\sigma$  est valable le long de tout arc  $\alpha$  de branche  $k$ . La puissance réversible figurant dans une équation du type de Gibbs est donc prise sous la forme :

$$\pi = R\sigma_{k,\alpha} \cdot \dot{\epsilon} \quad (1.1.30)$$

de sorte que  $\pi$  devient, comme les grandeurs  $R\sigma$  et  $\omega$ , une fonctionnelle du chargement imposé, constante par morceau, et valable le long de tout arc  $\alpha$  de branche  $k$ .

Ainsi par exemple, dans la figure I.4, dans le voisinage à droite du point d'inversion  $A$ , on a respectivement :

$$\pi_{A^+} = \sigma_{A^+} \cdot \dot{\epsilon} \quad \text{constant le long du trajet AB}$$

$$\pi_{B^+} = \sigma_{B^+} \cdot \dot{\epsilon} \quad \text{constant le long du trajet BA}$$

Au point d'origine 0, à l'état initial neutre, on a :

$$\pi_0 = 0 \quad \text{constant le long de la première charge.}$$

Cette relation n'est surprenante qu'à première vue. En effet, lorsqu'on sollicite pour la première fois un tel modèle, même avec une très petite force, le premier frotteur bouge immédiatement. Dès le début de la première charge, l'évolution est irréversible. Lors de la première charge, on sait en permanence que  $\pi$  sera révélé par inversion : mais cela n'implique pas son existence actuelle. Sans inverser le sens de sollicitation, il est impossible de faire exister  $\pi$ . C'est uniquement dans le cas où l'inversion devient effective que l'on obtient la restauration  $G_0$  avec le module tangent du début de décharge.

Il reste à donner l'expression d'un seul taux thermodynamique ( $\dot{Q}$ ). L'analyse de modèle symbolique simple conduit à l'expression :

$$-\dot{Q} = \frac{1}{\omega} (\sigma - R\sigma) \dot{\epsilon} - \frac{1}{\omega} (\epsilon - R\epsilon) \dot{\sigma} \quad (1.1.31)$$

La définition du schéma est alors complète.

Appliquons à présent le schéma thermodynamique (1.1.22) à (1.1.24) pour analyser les variations des six taux fondamentaux :  $\mathcal{P}_e$ ,  $\pi$ ,  $\phi$ ,  $\dot{\epsilon}$ ,  $\dot{Q}$  et  $\dot{i}$  dans les cas des modèles suivants :

- 1) modèle I : modèle qui possède une série de ressort-patin (figure I.9),
- 2) modèle II : modèle qui possède deux séries de ressorts-patins (figure I.10)
- 3) modèle III : modèle symbolique d'une suite infinie de ressorts-patins (figure I.11).

Comme le modèle possède les propriétés indépendantes de la vitesse de déformation, on peut supposer  $\dot{\epsilon}^2 = 1$  lors de l'étude des variations des six taux thermodynamiques.

Voyons d'abord les différents cas lors de la première charge :

- 1) cas du modèle I (figure I.9) :

C'est un comportement élastoplastique parfaite simple.

Le long du trajet OA, l'évolution est réversible strictement

On a donc :

$$\left. \begin{aligned} \pi &= \dot{\epsilon} = \mathcal{P}_e = \sigma \dot{\epsilon} \\ \phi &= \dot{i} = \dot{Q} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.32)$$

et

Le long du trajet AC, le comportement est la plastique parfaite. L'évolution est complètement irréversible, telle que :

$$\left. \begin{aligned} \phi &= -\dot{Q} = \mathcal{P}_e = \sigma \dot{\epsilon} \\ \pi &= \dot{i} = \dot{\epsilon} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.33)$$

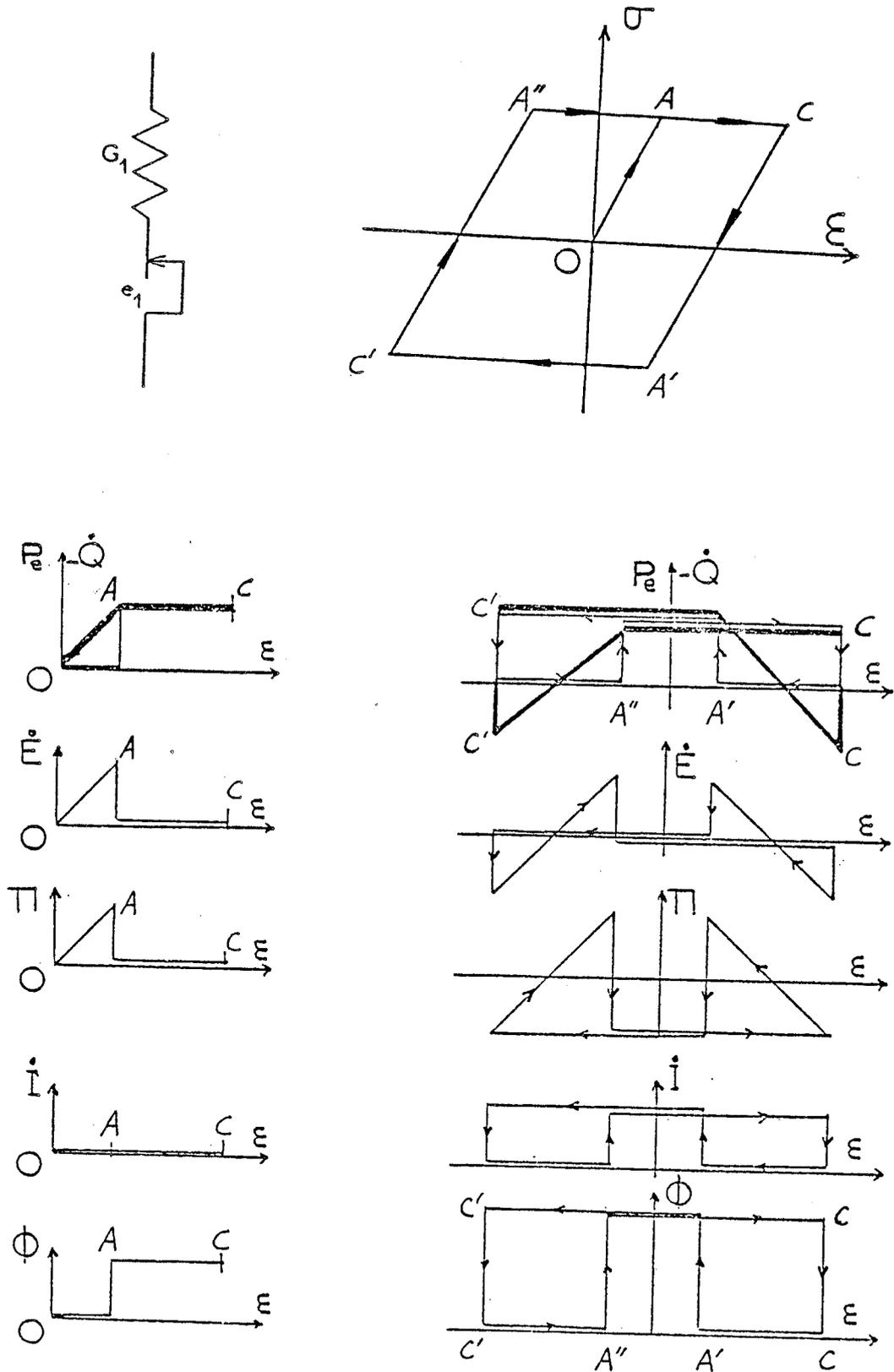


Fig. I. 9 Analyse du modèle à un couple ressort-patin.

2) Cas du modèle II (figure I.10) :

Le long du trajet AB, l'évolution est irréversible : en effet, le premier patin dissipe de la chaleur par frottement :

$$\left. \begin{aligned} -\dot{Q} &= -\dot{Q}_1 = e_1 G_1 \dot{\epsilon} \\ \dot{E} = \dot{I} &= \mathcal{P}_e + \dot{Q}_1, \Phi = \mathcal{P}_e, \pi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.1.34)$$

Le long du trajet BC, il y a irréversibilité plastique (1.1.27) : seul le trajet AB est intéressant.

3) Cas du modèle symbolique (figure I.11):

Le segment réversible OA n'existe plus, puisque dès le début de la sollicitation, le premier patin glisse. L'évolution est donc irréversible dès l'origine.

Par définition de  $\sigma_{>}$  et  $\sigma_{<}$  (1.1.5 à 1.1.7) et du point de vue thermodynamique, la puissance des efforts extérieurs est une somme :

$$\mathcal{P}_e = \sigma_{>} \dot{\epsilon} + \sigma_{<} \dot{\epsilon} \quad (1.1.35)$$

Le taux de l'énergie interne est le taux d'énergie stockée par les ressorts :

$$\dot{E} = \sigma_{<} \dot{\epsilon} \quad (1.1.36)$$

Le taux de la chaleur dissipée est le taux d'énergie dissipée par les frotteurs :

$$-\dot{Q} = \sigma_{>} \dot{\epsilon} \quad (1.1.37)$$

En remplaçant  $\sigma_{>}$  et  $\sigma_{<}$  par (1.1.5) et (1.1.6), après intégration et élimination de  $g$ , on obtient :

$$\dot{E} = \epsilon \dot{\sigma} \quad (1.1.38)$$

$$-\dot{Q} = \sigma \dot{\epsilon} - \epsilon \dot{\sigma} \quad (1.1.39)$$

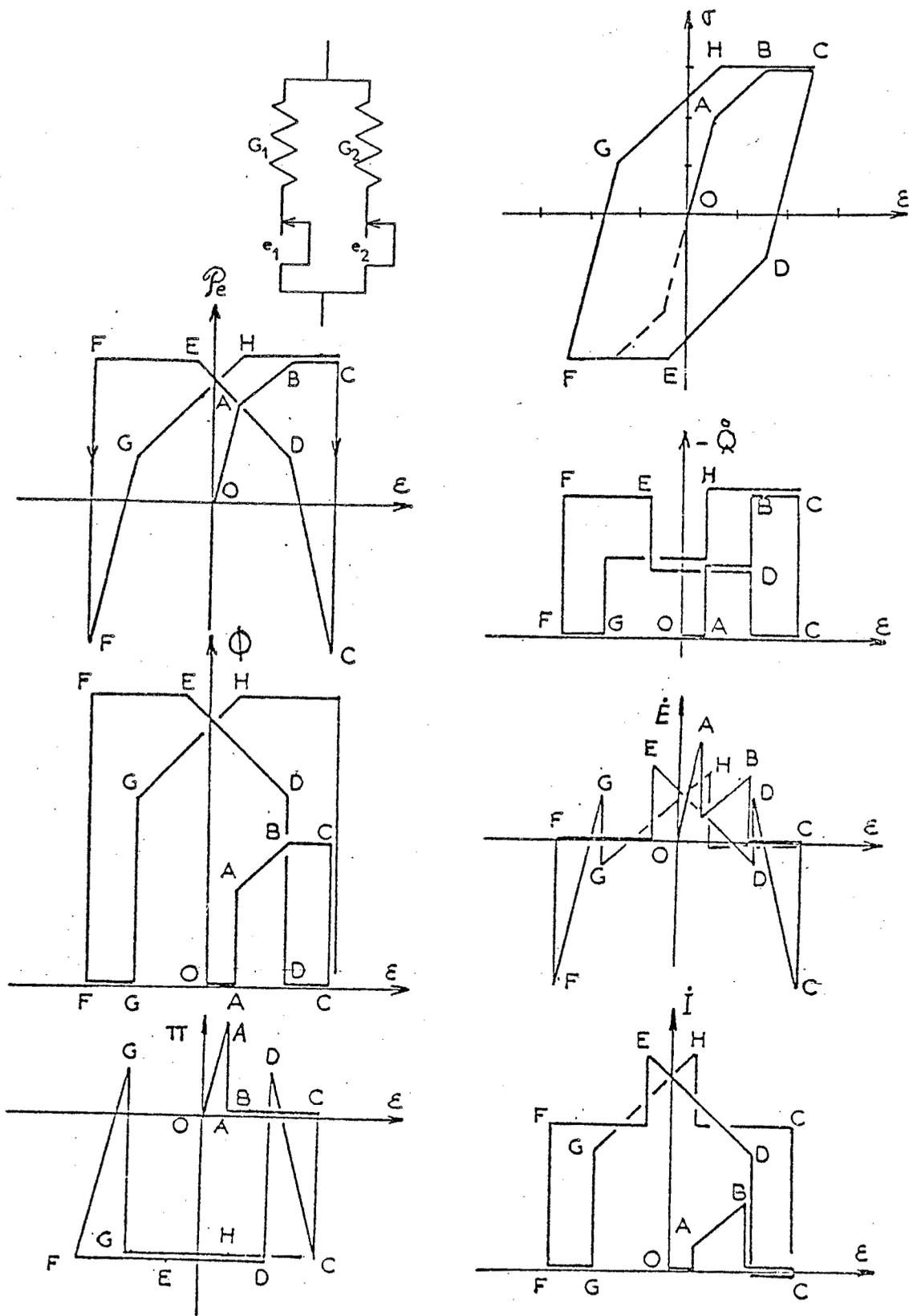


Fig. I.10 Analyse du modèle à deux couples ressort-patin.

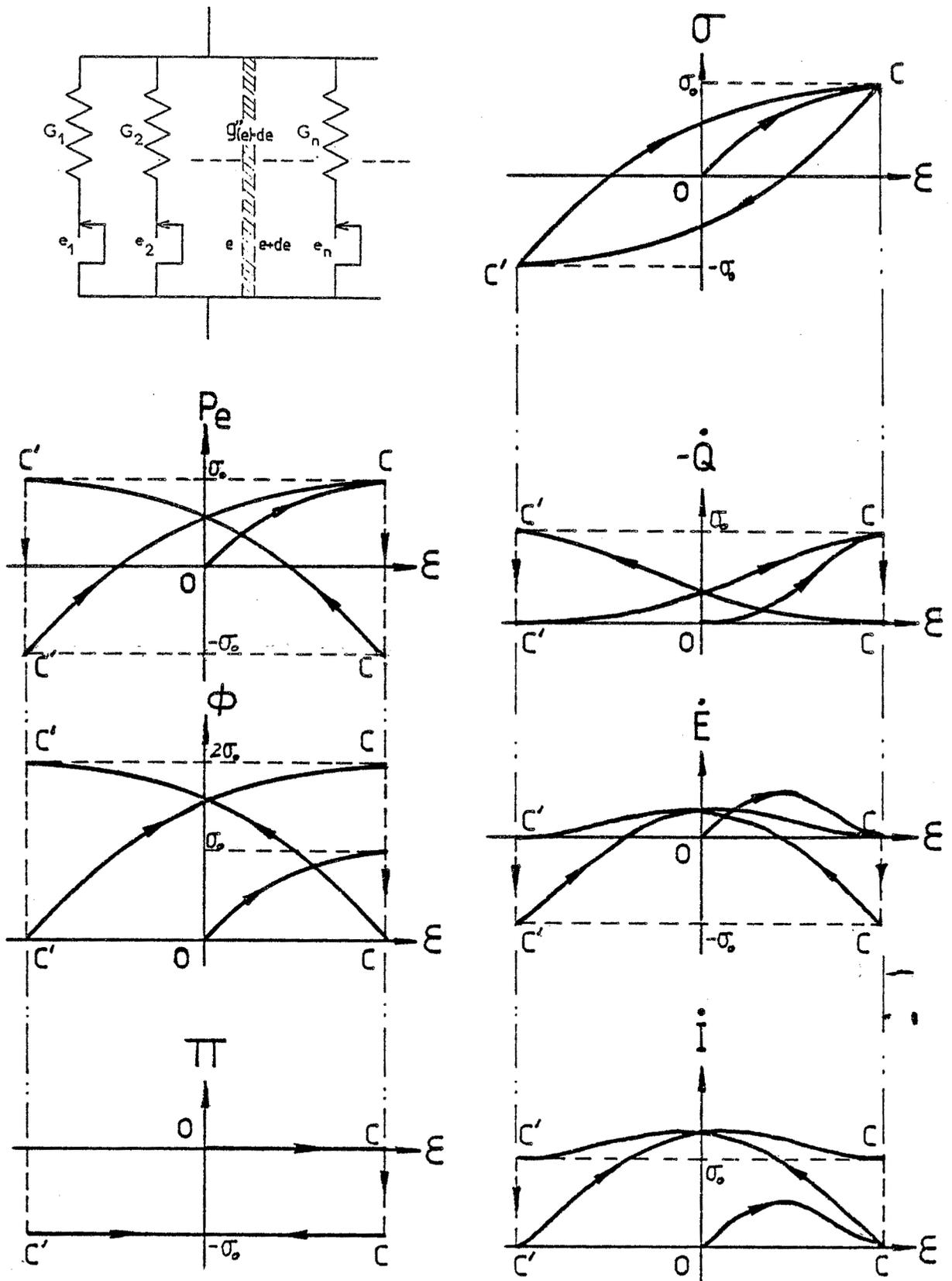


Fig. I.11 Analyse du modèle à une suite infinie de couples ressort-patin.  
(cas particulier  $\dot{\xi} = \pm 1$ )

Cette relation montre qu'il est facile de construire le graphique de  $-\dot{Q}$  et  $\dot{E}$  (cf figure I.12). Pour une déformation donnée  $\mathcal{E}$  on obtient en effet :

$$\Delta Q(\mathcal{E}) = \int_0^{\mathcal{E}} \sigma de - \int_0^{\mathcal{E}} e d\sigma$$

et

$$\Delta E(\mathcal{E}) = \int_0^{\mathcal{E}} e d\sigma$$

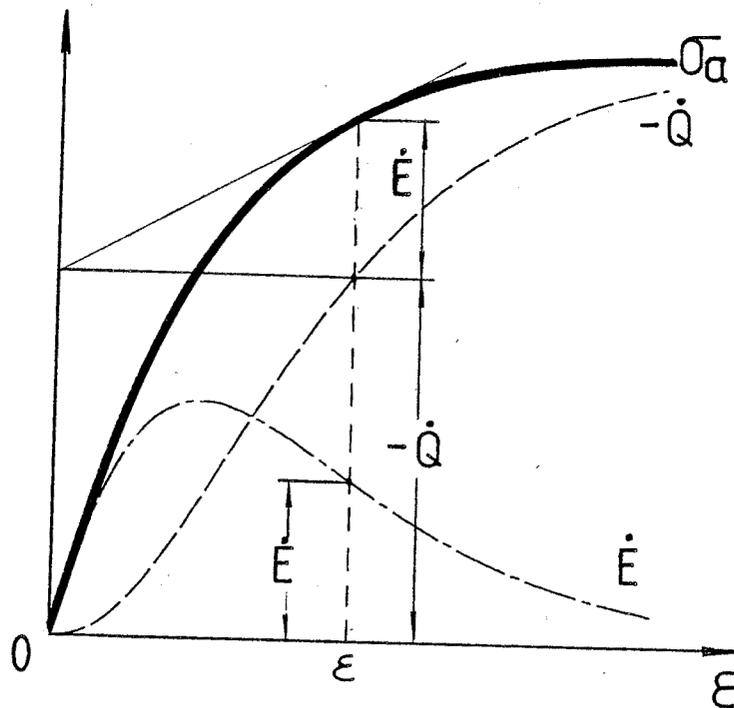


Fig. I.12 Détermination du graphique de  $-\dot{Q}$  et  $\dot{E}$  à partir de la courbe  $\sigma(\mathcal{E})$ .

Le long du trajet OC, on a donc :

$$\mathcal{P}_e = \phi = \dot{E} - \dot{Q} = \sigma \mathcal{E}$$

et

$$\pi = 0, \quad \dot{I} = \dot{E} = \mathcal{E} \dot{\sigma}$$

Passons maintenant aux cas de l'évolution cyclique :

1) Cas I : (figure I.9) :

Après le point d'inversion C, on obtient la restauration de

propriété des ressorts du modèle le long du trajet CA'. L'évolution est complètement réversible. On a alors (1.1.37). La seule différence est que le trajet CA' est deux fois plus long que celui de OA, (la règle de MASING donne  $\Delta \mathcal{E}_{CA'} = -2 \Delta \mathcal{E}_{OA}$ ).

2) Cas II : (figure I.10)

Par analogie et pour le trajet de AB et BC du cas II, on peut avoir respectivement (1.1.34) et (1.1.33). Bien entendu, on peut aussi, de façon semblable, décrire les trajets CD, DE, EF.

3) Cas du modèle symbolique (figure I.11) :

Le segment strictement réversible n'existe plus, puisque le premier frotteur glisse dès qu'il y a une inversion au point C. L'évolution est irréversible en permanence.

Au voisinage du point d'inversion, il y a la quasi-réversibilité  
On a :

$$\Phi_{C^+} = 0 \quad , \quad \dot{Q}_{C^+} = 0$$

et

$$\Pi_{C^+} = \mathcal{P}_e = \sigma_{C^+} \dot{\mathcal{E}}$$

Le long des trajets cycliques, par exemple, les trajets CC' et C' C, on a aussi :

$$\mathcal{P}_e = \sigma \dot{\mathcal{E}} = \sigma_{>} \dot{\mathcal{E}} + \sigma_{<} \dot{\mathcal{E}} = -\dot{Q} + \dot{\mathcal{E}}$$

On note bien entendu que les évolutions de  $\mathcal{P}_e$ ,  $-\dot{Q}$  et  $\dot{\mathcal{E}}$  sont discontinues de même que le sont celles des contraintes  $\sigma$  ou  $\sigma_{>}$  et  $\sigma_{<}$ .

Comme on pose

$$\Pi = {}_R\sigma \dot{\mathcal{E}}$$

et

$$\mathcal{P}_e = \sigma \dot{\mathcal{E}}$$

la dissipation intrinsèque est alors :

$$\Phi = \mathcal{P}_e - \Pi = (\sigma - {}_R\sigma) \dot{\mathcal{E}} \quad (1.1.40)$$

En résumé, pour  $\sigma(\mathcal{E})$ , on peut donc déterminer 3 taux fondamentaux  $\mathcal{P}_e$ ,  $\Pi$ ,  $\dot{Q}$ , les 3 autres  $\Phi$ ,  $\dot{\mathcal{E}}$  et  $\dot{\mathcal{I}}$  sont obtenus par (1.1.22)

à (1.1.24).

On peut aussi considérer que la donnée de  $\sigma(\varepsilon)$  détermine  $\mathcal{P}_e$ ,  $\Pi$  et  $\Phi$  par (1.1.40) et que les 3 autres taux  $\dot{\varepsilon}$ ,  $\dot{I}$ ,  $-\dot{Q}$  sont déterminés à partir de (1.1.22), (1.1.23) et (1.1.31).

On peut donc obtenir :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{\omega} [(\omega-1)\sigma + r\sigma] \dot{\varepsilon} + \frac{1}{\omega} (\varepsilon - r\varepsilon) \dot{\sigma} \quad (1.1.41)$$

$$\dot{I} = \frac{\omega-1}{\omega} (\sigma - r\sigma) \dot{\varepsilon} + \frac{1}{\omega} (\varepsilon - r\varepsilon) \dot{\sigma} \quad (1.1.42)$$

Ainsi, pour  $\sigma(\varepsilon)$  donné, la description thermodynamique (1.1.22) à (1.1.24), (1.1.40) à (1.1.42) nous donne donc une analyse thermodynamique complète.

Au terme de cette analyse, on note les points suivants :

- 1 - Du cas I au cas III, il y a passage d'un nombre fini à un nombre infini des couples ressort-frotteur, ce qui a pour effet de convertir les branches continues par morceaux en branches  $C^\infty$ .
- 2 - Lors de la première charge OAC du modèle I (modèle élastoplastique parfait)  $\dot{I}$  est toujours nul, puisque deux positions successives d'un unique frotteur ne sont pas discernables en terme d'ordre-désordre. Il n'y a pas création de désordre. La description peut être seulement effectuée en terme de chaleur et de travail. Lors du trajet A'C' et A"C" (fig.I-9), deux positions d'un même frotteur sont discernables en terme d'ordre si ces positions sont repérées par rapport à une inversion,  $I$  est donc non nul; dans ce cas, tout le travail des efforts extérieurs est transformé en chaleur; il en découle:

$$\Phi = 2\mathcal{P}_e = 2\dot{I} = -2\dot{Q}$$

exprime la symétrie des propriétés du frotteur, symétrie qui se manifeste par la présence du facteur 2.

- 3 - Si l'on considère le modèle symbolique comme une boîte noire, la seule source d'irréversibilité est la chaleur dégagée par cycle. Cette quantité de chaleur est équivalente au travail mécanique fourni pendant le cycle symétrique.

4 -  $I$  est bien une mesure de désordre. A l'état initial,  $I = \sigma = \varepsilon = 0$ , mais on voit que, dans la figure I.13, le retour en 0 où  $\sigma = \varepsilon = 0$  n'assure pas  $I = 0$ , puisque les positions des frotteurs ne sont plus les positions initiales. Pour ramener  $I$  à zéro, il faut effectuer le cyclage centré fondamental (cf figure I.8), qui ramène le modèle symbolique à l'état initial non seulement du point de vue mécanique, mais aussi du point de vue thermodynamique.

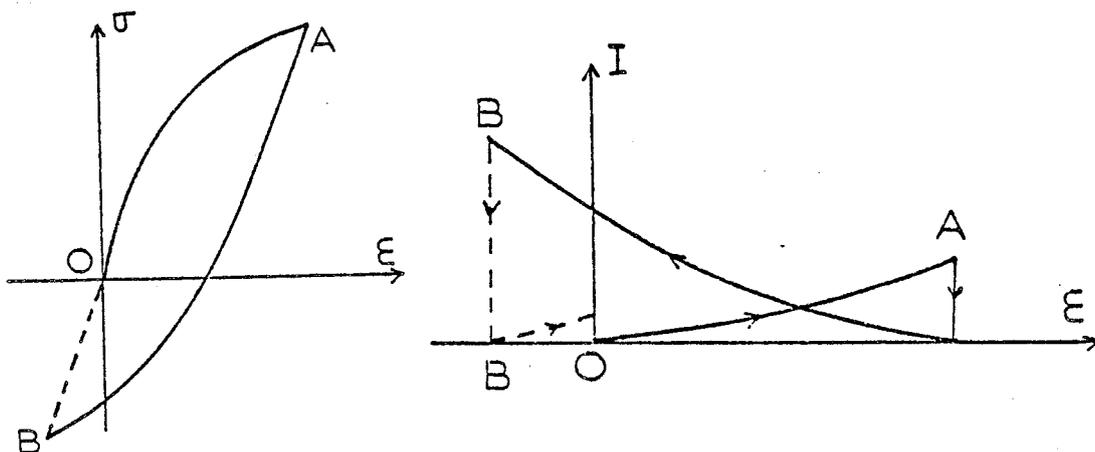


Fig. I-13 Retour à l'état initial où  $\sigma = \varepsilon = 0$  n'assure pas  $I = 0$

5 - La restauration des propriétés mécanique et thermodynamique du modèle au point d'inversion nous conduit à considérer que le modèle est un système ouvert, et qu'il reçoit un flux infini de néguentropie délivré en un temps infiniment court, de façon à compenser exactement la variation de  $I$  produite le long de la branche précédant l'inversion considérée (cf figure I.14). Cette interprétation est essentielle pour justifier la définition (1.2.6) de  $W$  ( $W = 0$  au voisinage à droite d'une inversion).

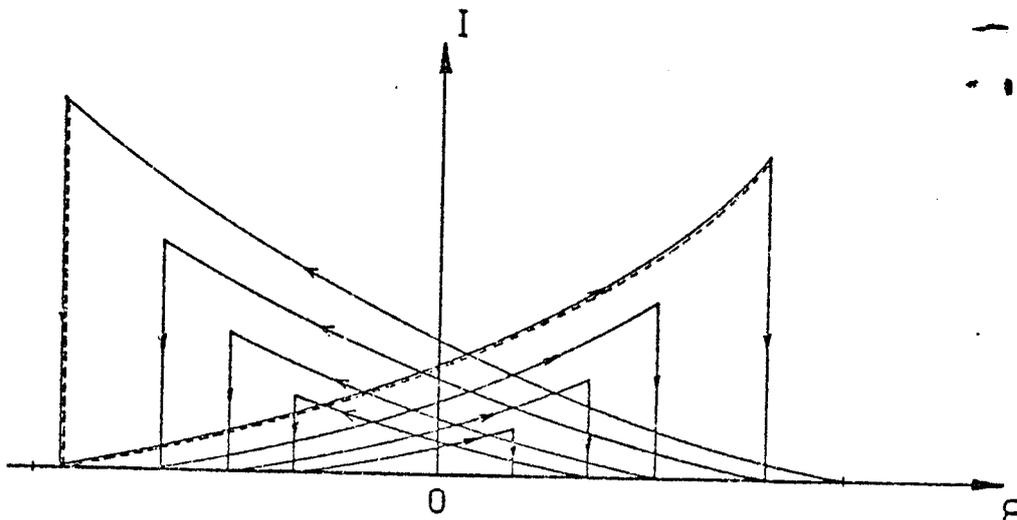


Fig. I-14 Axiome de restauration

## I.2. Propriétés d'hystérésis pure dans le cas tridimensionnel

Les bases d'une thermomécanique héréditaire à mémoire discrète ont été suggérées par l'analyse de l'hystérésis pure du modèle symbolique. Ce modèle rhéologique est et reste purement unidimensionnel, puisque toute tentative visant à imaginer un modèle symbolique analogue mais tridimensionnel se heurte à des difficultés insurmontables.

Il n'est donc pas question d'envisager la superposition simple des modèles unidimensionnels en une sorte de réseau développé dans différentes directions.

Il est en fait nécessaire d'introduire, pour le cas tridimensionnel, des hypothèses fondamentales qui sont seulement suggérées par l'analyse du modèle symbolique unidimensionnel.

### I.2.1. Hypothèses fondamentales

1) Le matériau doit être considéré comme un système ouvert thermomécanique vis-à-vis d'une mesure énergétique de désordre créé : à chaque état d'inversion le matériau reçoit en un temps infiniment court un flux de néguentropie infini qui compense exactement la variation de désordre  $I$  produite le long de la dernière branche du chargement. La restauration des propriétés thermomécaniques du matériau après l'état d'inversion est associée à ce flux de néguentropie infini. L'importance de ce principe de restauration est intimement lié au rôle joué par la définition des conditions non restrictives d'un état neutre ( $I = 0$ ) initial ( $\sigma = \epsilon = 0$ ). Cette définition est la clef de voûte de l'ensemble de la schématisation thermomécanique.

2) Ayant montré la quasi-réversibilité  $O(\Delta\epsilon^3)$  d'un petit cycle fait au voisinage à droite d'un état d'inversion, on suppose que la puissance réversible est constante par morceaux. Cette hypothèse est suggérée par le fait que toutes les branches du chargement sont irréversibles dès le début. Elle est compatible avec  $\sigma \equiv 0$ .

Ainsi, par extension de (1.1.29) on a dans le cas tridimensionnel :

$$\lim_{\Delta\epsilon \rightarrow 0} \left( \frac{\dot{Q}}{P_e} \right) = O(\Delta\epsilon^3) \quad (1.2.1)$$

et on pose :

$$\Pi = \text{tr}({}_R\sigma \mathcal{D}) \quad (1.2.2)$$

où  $\mathcal{D}$  est maintenant le tenseur taux de déformation et où  ${}_R\sigma$  est maintenant le tenseur de contrainte de Cauchy à l'état de référence que l'on va définir plus loin (cf § I.2.2).

3) En conservant la définition de l'énergie interne et de la chaleur dissipée, on admet l'extension tridimensionnelle de (1.1.31) et (1.1.41). On a :

$$-\dot{Q} = \frac{1}{\omega} \text{tr}[(\sigma - {}_R\sigma)\mathcal{D}] - \frac{1}{\omega} \text{tr}[(\varepsilon - {}_R\varepsilon)\dot{\sigma}] \quad (1.2.3)$$

$$\dot{E} = \frac{1}{\omega} \text{tr}[(\omega - 1)\sigma + {}_R\sigma]\mathcal{D} + \frac{1}{\omega} \text{tr}[(\varepsilon - {}_R\varepsilon)\dot{\sigma}] \quad (1.2.4)$$

Ces formules peuvent être interprétées graphiquement dans le cas unidimensionnel (cf (1.1.41) et (1.1.42)). Par exemple, la chaleur dégagée est l'aire hachurée (figure I.15), on retrouve bien que l'aire du cycle AA' mesure la chaleur dégagée pendant le cycle.

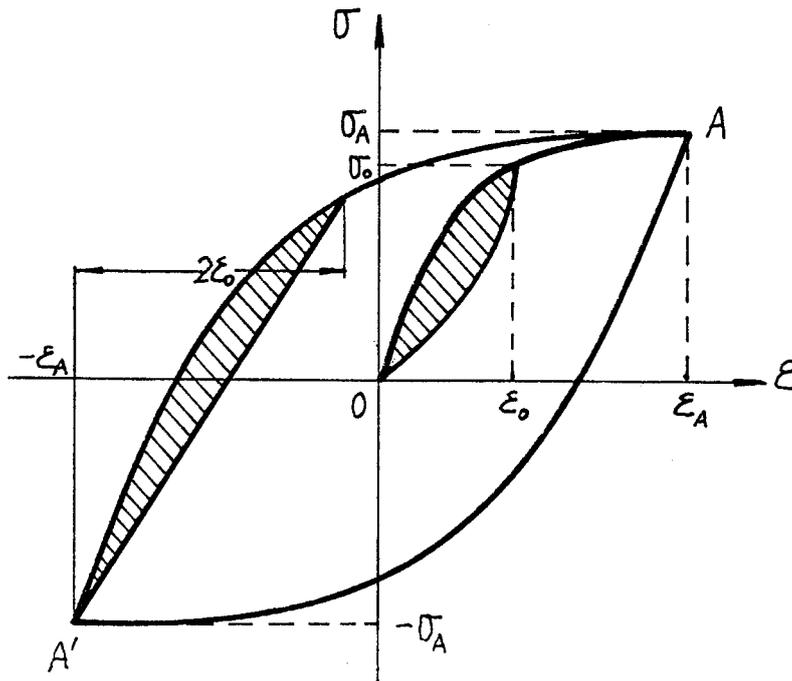


Fig. I-15 Représentation géométrique de la chaleur dissipée

Il existe encore les deux autres hypothèses que l'on va introduire dans § I.2.2. et § I.3.1.

### I.2.2. Description de l'hystérésis pure

Les propriétés du modèle symbolique nous suggèrent un schéma d'hystérésis pure tridimensionnel qui doit comporter :

- (1) une définition tensorielle de la correspondance entre  $\sigma$  et  $\mathcal{D}$  lors de la première charge du matériau
- (2) un critère d'inversion qui permet de détecter les états d'inversion à mémoriser
- (3) un algorithme qui conduit à la définition du coefficient de MASING et au choix de l'état de référence à prendre en compte parmi la suite des états d'inversion mémorisés.

Analogue au cas unidimensionnel (1.1.21), l'équation constitutive d'hystérésis pure est écrite sous la forme :

$$D\sigma = h(\sigma - R\sigma, \mathcal{D}, \omega) \quad (1.2.5)$$

où  $h$  est une fonction tensorielle isotrope de degrés moins un par rapport au temps, s'annulant avec le taux de déformation  $\mathcal{D}$ . Elle est donc indépendante de la loi d'évolution du temps.

$D$  est une dérivée objective.

Le tenseur de contrainte de Cauchy à l'état de référence  $R\sigma$  et le coefficient de MASING  $\omega$  sont les fonctionnelles dépendantes de l'histoire du chargement du matériau.

Pour définir le critère d'inversion, introduisons d'abord une fonction, dite fonction d'aide  $W_L$ , définie par sa forme différentielle :

$$\Delta W_L = \text{tr}[(\sigma - R\sigma) \cdot \mathcal{D}] \cdot dt \quad W(t_{T+}) = 0 \quad (1.2.6)$$

Cette fonction  $W_L$  est associée à la dissipation intrinsèque  $\phi$  par

$$dW_L = \phi dt \quad (1.2.7)$$

Le critère d'inversion est la conséquence directe du deuxième principe de la thermodynamique. Il est de la forme suivante :

Le tenseur de contrainte de Cauchy  $\sigma(t_i)$  est une contrainte d'inversion  $\sigma^i$ , si la variation virtuelle de la fonction d'aide  $\delta W_L$  est négative dans l'intervalle entre  $t_i$  et  $t_i + t$ .

On écrit donc :

$$\sigma(t_i) = \sigma^i \quad \text{si} \quad \delta W_L < 0 \quad \forall t \in ]t_i, t_i + \delta t]$$

C'est-à-dire que la contrainte de référence  ${}_R\sigma$ , pour l'évolution immédiatement à droite de l'inversion, est égale au tenseur de contrainte d'inversion.

Les propriétés de la fonction d'aide sont alors les suivantes :

i) toujours non négative :  $W_L = \int_{t_i}^t \text{tr}[(\sigma - {}_R\sigma) \cdot \mathcal{D}] dt \geq 0$

ii) non décroissante et continue par morceau :  $\dot{W}_L = \phi \geq 0$

Ces propriétés expriment, presque partout, le deuxième principe de la thermodynamique.

Dans le cas unidimensionnel traité au § I.1, pour une évolution cyclique quelconque telle que celle de la figure I-16, la variation de  $W_L$  est indiquée dans la figure I-17.

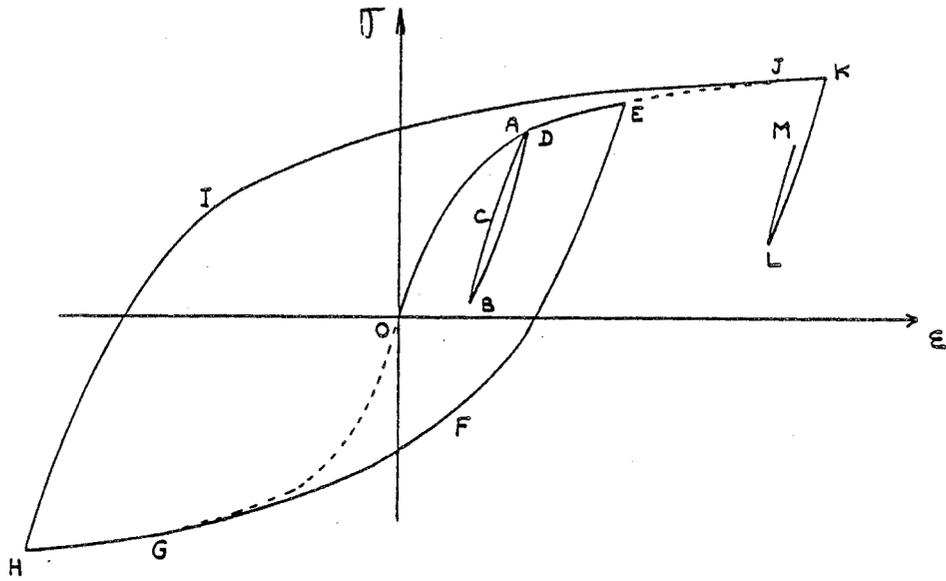


Fig. I.16 Trajet complexe.

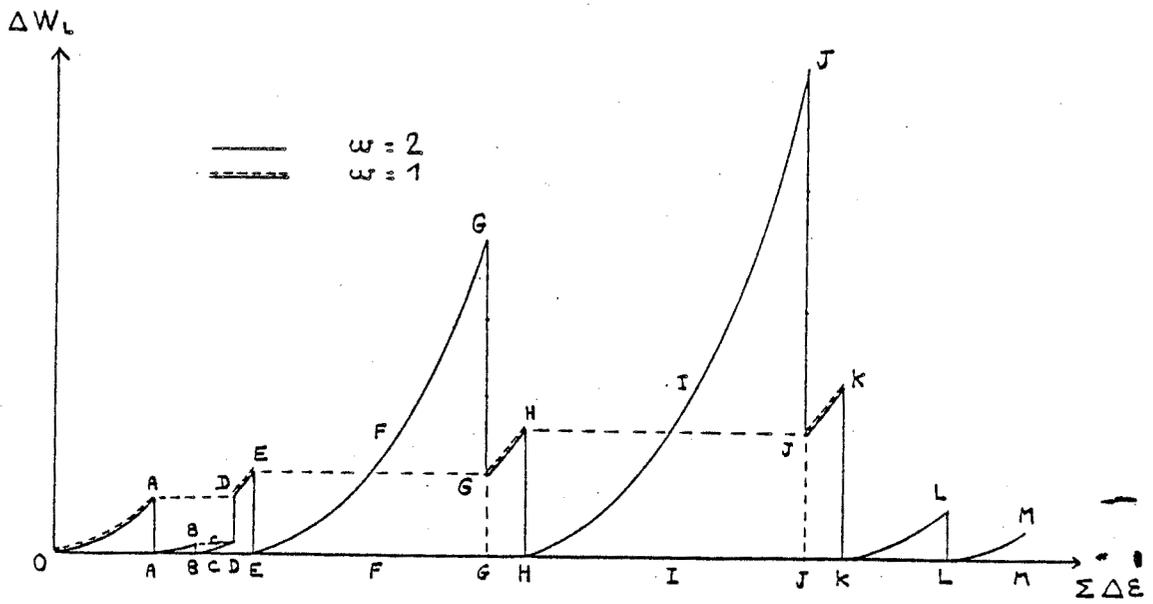


Fig. I.17 Variation de la fonction d'aide pour un trajet complexe.

Un algorithme  $\mathcal{A}$  est défini en utilisant le critère d'inversion et en introduisant une hypothèse supplémentaire : le trajet réel est associé à la valeur minimum possible du taux de la dissipation intrinsèque.

Par exemple pour le modèle symbolique, comme on peut supposer  $\dot{\epsilon} = \pm 1$ ,  $\frac{d\phi}{dt}$  vaut alors la pente  $\frac{d\sigma}{d\epsilon}$  du graphe  $\sigma(\epsilon)$ . Sur la branche  $k = 3$  de la figure I-4, au point A, l'ensemble des taux de la dissipation intrinsèque mémorisés est

$$\{\dot{\phi}_M(A)\} = \{\dot{\phi}_1(A), \dot{\phi}_2(A), \dot{\phi}_3(A)\}$$

avec 
$$\dot{\phi}_1(A) > \dot{\phi}_2(A) > \dot{\phi}_3(A)$$

et on a

$$\dot{\phi}_{A^+} = \dot{\phi}_3(A) = \min\{\dot{\phi}_M(A)\}$$

Cet algorithme  $\mathcal{A}$  détermine la contrainte  $\sigma^i$  de tous les états d'inversion de l'histoire du chargement du matériau et définit à chaque instant le tenseur de contrainte de référence  ${}_R\sigma$  et le coefficient de MASING  $\omega$ .

On écrit ainsi :

$$\mathcal{A}(\delta W_L, \dot{\phi} = \min\{\dot{\phi}_M\}) \Rightarrow [\sigma^i(\tau), \forall \tau \in [0, t]; {}_R\sigma(t); \omega(t)]$$

où  $\omega(t) = 1$  pour la première charge

$\omega(t) = 2$  pour les autres branches

${}_R\sigma(t)$  est choisi parmi la suite des états d'inversion mémorisés le long de l'histoire du chargement. Pour la première charge on a  ${}_R\sigma(t) = 0$ .

Finalement, la description d'hystérésis pure est définie par

$$\left. \begin{aligned} D_J \sigma &= h(\sigma - {}_R\sigma, \mathcal{D}, \omega) \\ \Delta W_L &= \text{tr}[(\sigma - {}_R\sigma) \cdot \mathcal{D}] \cdot dt \\ \sigma(t_i) &= \sigma^i \quad \text{si } \delta W_L < 0 \quad \forall t \in [t_i, t_i + \delta t] \end{aligned} \right\} (1.2.8)$$

$$\mathcal{A}(\delta W_L, \dot{\phi} = \min\{\dot{\phi}_M\}) \Rightarrow [\sigma^i(\tau), \forall \tau \in [0, t]; {}_R\sigma(t); \omega(t)]$$

Un tel type de comportement d'hystérésis pure a les propriétés générales suivantes :

- (1) Ses propriétés thermomécaniques sont indépendantes du taux de formation
- (2) Il n'y a pas d'écrouissage
- (3) Il y a accommodation thermomécanique immédiate
- (4) Il est toujours irréversible

- (5) Il existe une puissance réversible à mémoire discrète
- (6) La description est basée sur l'utilisation d'une suite discrète d'états de référence mémorisés. Cela implique la définition d'un critère (qui exprime, presque partout la non décroissance de la dissipation intrinsèque) et d'un algorithme (qui exprime la croissance minimum du taux de la dissipation intrinsèque).
- (7) Cette description est caractérisée par l'effet de rétroaction entre l'évolution actuelle et l'histoire passée sous la condition :

$$\Phi \geq 0, \quad \dot{\Phi} \geq 0, \quad \ddot{\Phi} \leq 0$$

### I.3 La forme complète de la loi constitutive

En matière de comportement réel il s'avère que bien des matériaux tels les métaux, exhibent simultanément les phénomènes d'hystérésis, les effets visqueux et les effets d'écrouissage en déformation. Pour définir le modèle qui décrit le comportement anélastique du matériau, il faut introduire une hypothèse additionnelle.

#### I.3.1. Hypothèse fondamentale concernant la modélisation du matériau réel

On suppose que le comportement du matériau anélastique résulte de l'addition et l'interaction des effets dissipatifs. La dissipation intrinsèque  $\Phi$  peut donc se décomposer en deux parties : une partie stationnaire  $\Phi_a$  et une partie non-stationnaire  $\Phi_e$  :

$$\Phi = \Phi_a + \Phi_e$$

La partie stationnaire  $\Phi_a$  correspond au comportement d'hystérésis pure. Cette partie est périodique en un sens large associé à la fréquence et à la modulation d'amplitude du taux de déformation défini périodique et modulée. La contribution  $\Phi_a$  est à mémoire discrète, et indépendante de la loi de temps de l'évolution du matériau.

La partie non-stationnaire  $\Phi_e$ , qui est à mémoire continue, se décompose en deux termes respectivement dépendante et indépendante de la loi de temps de l'évolution :

$$\Phi_e = \Phi_v + \Phi_g$$

où  $\Phi_v$  note la contribution dépendante de la loi du temps et associée à l'effet visqueux

$\Phi_g$  note la contribution indépendante de la loi du temps et associée à la sensibilité au changement de structure du matériau.

Nous envisageons donc l'analyse de la mise en jeu des différents phénomènes dissipatifs à partir de la somme :

$$\Phi = \Phi_a + \Phi_v + \Phi_g$$

de sorte que le tenseur contrainte de Cauchy est la somme des contributions :

$$\sigma = \sigma_a + \sigma_e = \sigma_a + \sigma_v + \sigma_g$$

Ainsi, lors d'une évolution infinitésimale, le taux du tenseur contrainte de Cauchy est la somme des termes :

$$D_J \sigma = D_J \sigma_a + D_J \sigma_v + D_J \sigma_g \quad (1.3.1)$$

La dérivée objective utilisée est la dérivée de Jaumann ; cette dérivée permet une prise en compte commode de l'influence de la rotation dans le cas des cinématiques rotationnelles.

Pour le cas unidimensionnel nous avons analysé la plartie stationnaire (cf. § I.2 et aussi § I.1). Dans les paragraphes suivants, toutes les quantités avec l'indice  $a$  sont traitées comme les quantités concernant le comportement d'hystérésis pure déjà évoqué (cf. § I.2). Pour obtenir la forme complète de la loi constitutive, il reste à définir le schéma du comportement non-stationnaire.

### I.3.2. Schéma du comportement de la partie non-stationnaire

En vue de décrire les termes non-stationnaires :  $\sigma_e = \sigma_v + \sigma_g$ , on introduit un paramètre, dit d'avancement de l'évolution du matériau, défini par le comportement d'hystérésis pure, sous la forme :

$$\psi(t) = \int_0^t \text{tr}[(\sigma_a - \kappa \sigma_a) \mathcal{D}(\tau)] d\tau \quad (1.3.2)$$

La figure I-18 présente l'allure des variations de  $\psi(t)$  dans le cas unidimensionnel cyclique quelconque. La fonction scalaire, de la dimension d'une énergie, est non décroissante, continue par morceaux.

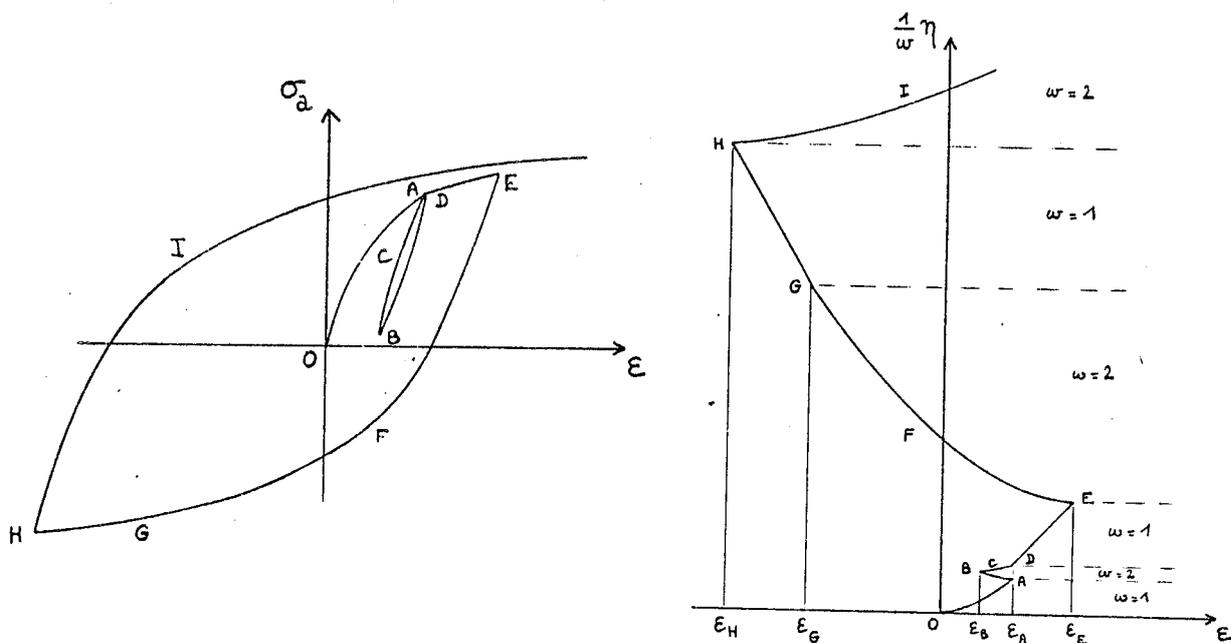


Fig. I.18 Variation du paramètre d'avancement de l'érouissage du matériau.

1) - Terme  $\sigma_V$  :

La contribution de contrainte  $\sigma_V$ , dépendant de la loi de temps de l'évolution, est la somme de deux contributions :  $\sigma_{Vm}$  et  $\sigma_{VH}$ , qui correspondent respectivement aux deux convolutions suivantes : l'une convole une fonction tensorielle avec une fonction mémoire scalaire décroissante  $\chi(t)$ , l'autre convole la même fonction, à un facteur scalaire près, avec la fonction de Heaviside  $H(t)$  qui joue le rôle d'une mémoire scalaire parfaite[7].

La fonction scalaire  $A_V(\gamma)$  permet de pondérer l'influence de la contribution visqueuse à mémoire parfaite.

Si  $f_V(\mathcal{D}(t))$  note la fonction tensorielle isotrope du taux de déformation, le terme  $\sigma_V$  est de la forme :

$$\sigma_V = \sigma_{Vm} + \sigma_{VH} = f_V(\mathcal{D}(t)) * \chi(t) + [A_V(\gamma) \cdot f_V(\mathcal{D}(t))] * H(t)$$

Le taux de  $\sigma_V$  est donc

$$D_J \sigma_V = \chi(0) \cdot f_V(\mathcal{D}(t)) + \int_{t_1}^t \chi'(t-\tau) f_V(\tau) d\tau + A_V(\gamma) f_V(t) \quad (1.3.3)$$

avec 
$$\begin{cases} t_1 = 0 & \forall t \leq t_c \\ t_1 = t - t_c & \forall t > t_c \end{cases}$$

où  $\chi$  est la fonction du temps intérieur  $t - \tau$ , à support borné par le temps caractéristique  $t_c$ .

2) Terme  $\sigma_g$  :

La forme du terme  $\sigma_g$  est analogue à celle de  $\sigma_v$ . Pour exprimer on remplace la fonction  $f_v(t)$  par une autre fonction  $f_g$  qui est une fonction tensorielle isotrope de  $D_J \sigma_g$  et  $\sigma_g - R \sigma_g$  ; elle est prise homogène de degré moins un par rapport au temps, de sorte que le terme  $\sigma_g$  est indépendant de la loi de temps de l'évolution. On introduit aussi une fonction mémoire scalaire décroissante  $\varphi(\eta)$  qui joue un rôle analogue à  $\chi(t)$  ; le paramètre d'évolution  $\eta$  joue le rôle de temps intérieur.

Le terme  $\sigma_g$  est alors la somme de deux contributions :  $\sigma_{gm}$  et  $\sigma_{gH}$ , qui correspondent respectivement aux deux convolutions mettant en jeu, l'une avec une fonction mémoire scalaire décroissante  $\varphi(\eta)$ , et l'autre la fonction de Heaviside  $H(\eta)$ .

Une fonction scalaire  $A_g(\eta)$  de la variable  $\eta$  donne la proportionnalité de l'effet de la mémoire décroissante par rapport à celui de la mémoire parfaite.

On pose donc :

$$\sigma_g = \sigma_{gm} + \sigma_{gH} = [f_g(D_J \sigma_g, \sigma_g - R \sigma_g) \frac{dt}{d\eta}] * \varphi(\eta) + [A_g(\eta) f_g(D_J \sigma_g, \sigma_g - R \sigma_g) \frac{dt}{d\eta}] * H(\eta)$$

Le taux du terme  $\sigma_g$  est alors

$$D_J \sigma_g = \varphi(0) \cdot f_g(D_J \sigma_g, \sigma_g - R \sigma_g) + \frac{d\eta}{dt} \int_{\eta_1}^{\eta} \varphi(\eta - x) f_g(x) \frac{dt}{dx} + A_g(\eta) f_g(D_J \sigma_g, \sigma_g - R \sigma_g) \quad (1.3.4)$$

avec 
$$\eta_1 = 0 \quad \forall \eta \leq \eta_c$$

$$\eta_1 = \eta - \eta_c \quad \forall \eta > \eta_c$$

où on note la fonction  $\varphi$  de variable intérieure  $\eta - x$ , à support borné par la valeur caractéristique  $\eta_c$ .

### 1.3.3. Forme de la loi constitutive

En remplaçant les différents termes par (1.2.5), (1.3.3) et (1.3.4), l'équation (1.3.1) représente une forme complète pour le schéma thermomécanique général. Mais il est impossible de distinguer les différents termes lors d'une évolution réelle.

Pour pallier provisoirement au manque d'indications détaillées concernant l'action et l'interaction des différents phénomènes, on introduit une hypothèse dont l'utilisation est assez simple. Cette hypothèse est la suivante : Dans les définitions (1.2.5) et (1.3.4) des taux  $D_j \sigma_a$  et  $D_j \sigma_g$ , les contraintes  $\sigma_a$  et  $\sigma_g$  sont remplacées par la contrainte totale  $\sigma$ .

A cette évolution réelle, pour laquelle  $\sigma_v$  et  $\sigma_g$  sont en général non nuls, on associe une évolution fictive, dite squelette, qui est définie par le terme  $\sigma_a$  d'hystérésis pure ; elle s'avère effectivement une bonne première approximation de la contrainte totale  $\sigma$ .

Pour l'évolution réelle, on suppose que les états d'inversion  $\sigma^i$ , les états de référence  ${}_R\sigma$ , le coefficient de Masing  $\omega$  et la valeur du paramètre  $\gamma$  sont déterminés par l'évolution squelette à chaque instant de l'histoire du chargement du matériau.

La loi constitutive complète prend alors la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 D_j \sigma &= h(\sigma - {}_R\sigma, \mathcal{D}, \omega) \\
 &+ \chi(0) \cdot f_v(\mathcal{D}) + \int_{t_i}^t \chi'(t-\tau) f_v(\tau) d\tau \\
 &+ A_v(\gamma) \cdot f_v(\mathcal{D}) \\
 &+ \varphi(0) f_g(D\sigma, \sigma - {}_R\sigma) + \frac{d\gamma}{dt} \int_{\gamma_i}^{\gamma} \varphi'(\gamma-x) f_g(x) \frac{dx}{d\gamma} \cdot dx \\
 &+ A_g(\gamma) \cdot f_g(D\sigma, \sigma - {}_R\sigma)
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l}
 (\sigma_a) \\
 (\sigma_{vm}) \\
 (\sigma_{vh}) \\
 (\sigma_{gm}) \\
 (\sigma_{gh})
 \end{array} \right\} (1.3.5)$$

$$\begin{aligned}
 D_j \sigma_a &= h(\sigma_a - {}_R\sigma_a, \mathcal{D}, \omega) \\
 \gamma &= \int_0^t \text{tr}[(\sigma_a - {}_R\sigma_a) \cdot \mathcal{D}] d\tau \\
 \Delta W_L &= \text{tr}[(\sigma_a - {}_R\sigma_a) \cdot \mathcal{D}] dt \\
 \sigma_a(t_i) &= \sigma_a^i ; \quad \sigma(t_i) = \sigma^i \quad \text{si } \Delta W_L < 0 \quad \forall t \in [t_i, t_i + dt] \\
 \mathcal{A}(\Delta W_L, \dot{\phi} = \min\{\dot{\phi}_m\}) &\Rightarrow [\sigma_a^i, \sigma^i \quad \forall \tau \in [0, t]; \sigma_a^p(t), {}_R\sigma(t), \omega(t)]
 \end{aligned}$$

Les figures I-19 représentent, par comparaison avec  $\sigma_a$ , les 4 combinaisons simples :  $\sigma_a + \sigma_{vm}$ ,  $\sigma_a + \sigma_{vh}$ ,  $\sigma_a + \sigma_{gm}$  et  $\sigma_a + \sigma_{gh}$ , qui correspondent aux propriétés élémentaires des matériaux réels. La partie  $\sigma_a$  prend en compte le phénomène d'hystérésis pure à accommodation immédiate et correspond au phénomène dissipatif du frottement solide. La partie  $\sigma_v$  correspond au phénomène de frottement visqueux et rend compte du fluage, de la relaxation et des autres influences du taux de déformation. La partie  $\sigma_g$  correspond au changement de structure du matériau et rend compte de l'effet d'écrouissage en déformation qui est indépendant de la loi de temps de l'évolution.

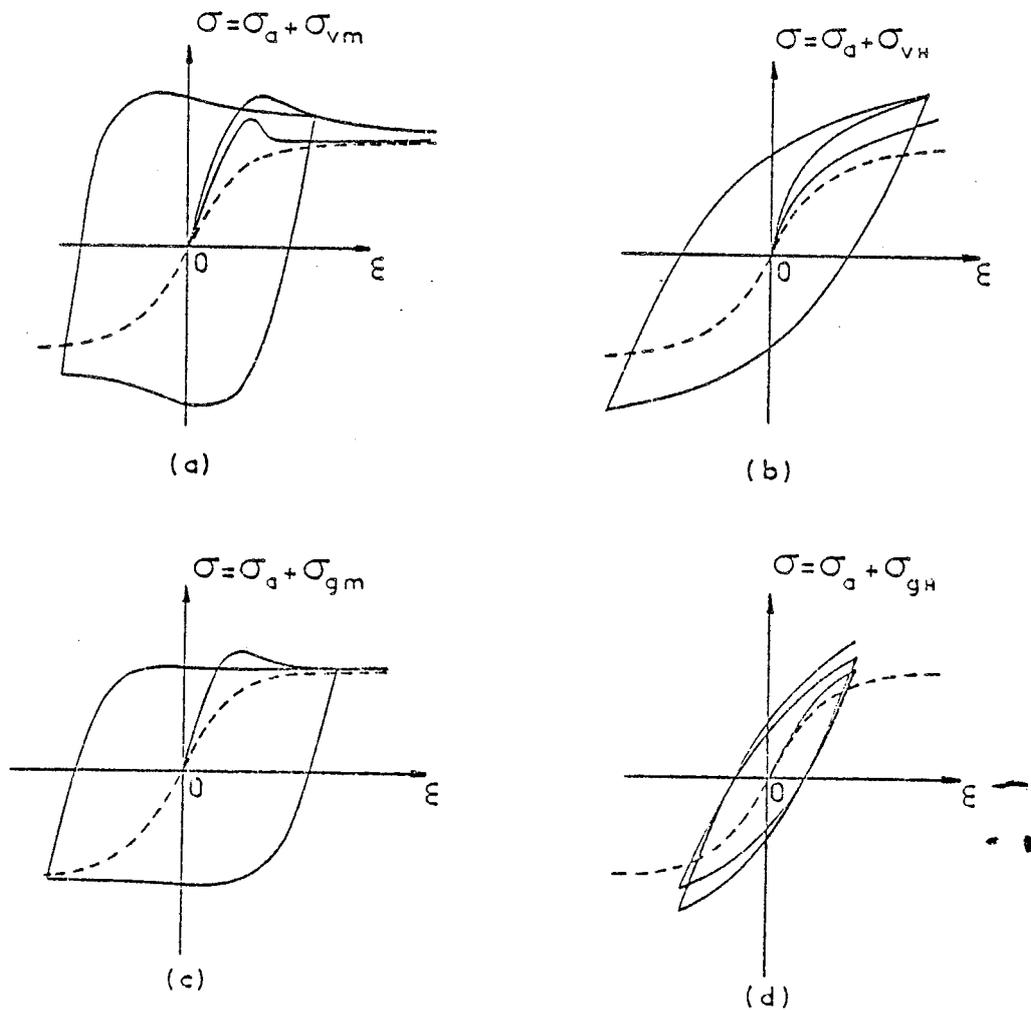
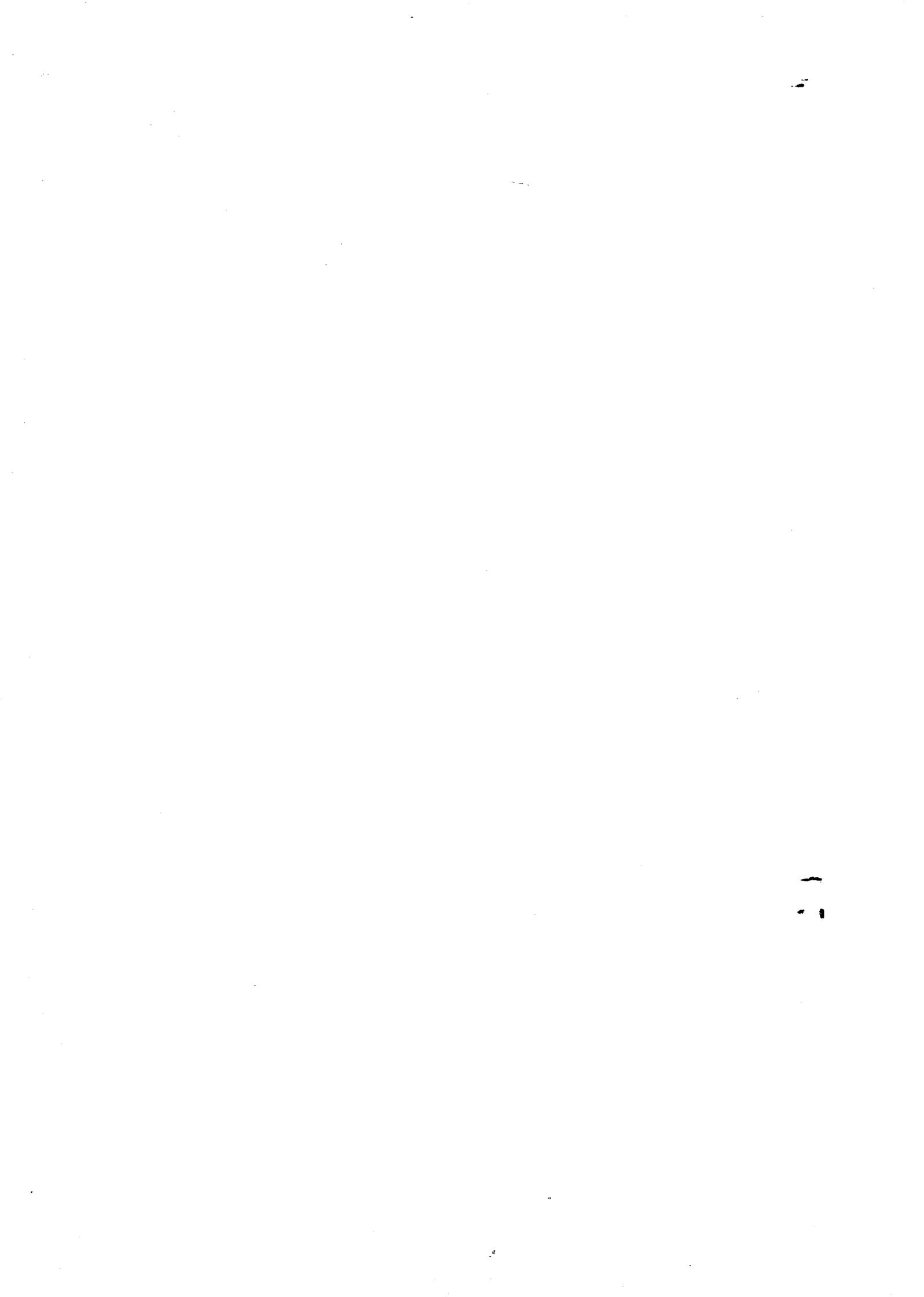


Fig. I.19 Quatre types simples de comportement d'écrouissage.

CHAPITRE II  
=====

LE CADRE ET LES MOYENS DE L'ETUDE



II.1. La forme simplifiée du modèle de comportement pour les aciers inoxydables :

Le but de notre travail est l'étude du comportement d'hystérésis pure et d'écrouissage en déformation à mémoire permanente. Les deux matériaux utilisés, l'acier inoxydable 316 L et l'Inconel 718, ne présentent effectivement pas d'effet d'écrouissage en déformation à mémoire évanescence comme l'acier ordinaire [8]. D'autre part, les essais ont été effectués à vitesse suffisamment lente, de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ , pour pouvoir considérer a priori que les effets visqueux sont négligeables. En fait, un contrôle de cette hypothèse par des essais de relaxation a montré que même à cette vitesse, les effets visqueux sont encore de l'ordre de 7 % (cf. § V.2). Des mesures de relaxation effectuées à des vitesses plus faibles de plusieurs ordres de grandeur mettent bien en évidence la diminution des effets visqueux lorsque la vitesse de déformation diminue (fig. II.1) : on constate qu'il faudrait effectuer des essais à une vitesse inférieure à  $10^{-7} \text{ s}^{-1}$  pour que les effets visqueux deviennent inférieurs à 1 %. Des résultats similaires avaient été obtenus par Krempf [57, 58] avec un acier inoxydable de type 304, ainsi avec d'autres matériaux.

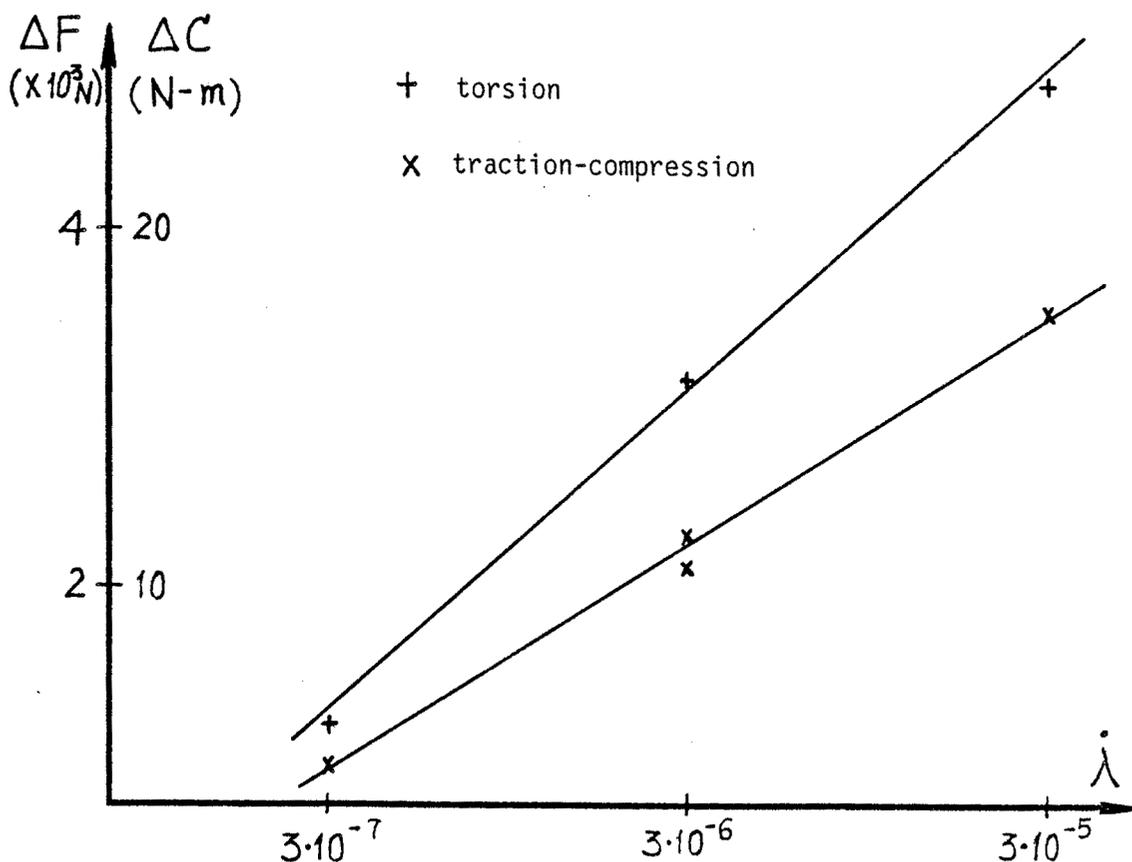


Fig. II.1. Essais de relaxation au cours des cycles stabilisés - Temps de maintien  $\Delta t = 300 \text{ s}$  - Acier inoxydable 316 L

L'analyse des résultats de la figure II.1, ou celle des résultats similaires de la figure 6 de [57], justifie en pratique l'hypothèse fondamentale de décomposition de la puissance dissipée, et corrélativement celle de la contrainte. En effet, si l'on se donne un critère de précision, il est toujours possible de définir une vitesse de déformation pour les essais telle que les effets de vitesse puissent être considérés comme négligeables, autorisant ainsi l'étude des seuls phénomènes d'hystérésis pure et d'écrouissage en déformation.

Mais une difficulté pratique apparaît donc quant à la durée nécessaire pour les essais. En effet, pour que les effets visqueux ne présentent par exemple qu'une influence de 1 %, il faudrait effectuer les essais à une vitesse de déformation de  $10^{-7} \text{ s}^{-1}$  ce qui conduit à des durées d'essai excessivement longues et en conséquence l'étude de la consolidation devient non réaliste.

Pour lever cette difficulté, nous avons effectué tous les essais à une vitesse de déformation constante et de faible valeur, compatible avec des essais cycliques, soit  $3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ . On peut alors considérer que les résultats obtenus constituent un corps d'informations valables pour étudier le comportement d'un matériau fictif non visqueux dont les propriétés correspondent au comportement de l'acier inoxydable 316 L et de l'Inconel 718 à la vitesse de déformation de  $3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$ .

Un tel comportement s'écrit sous la forme (cf. I.3.5):

$$\begin{aligned} D_J \sigma &= D_J \sigma_a + D_J \sigma_{gH} \\ &= h(\sigma - {}_R\sigma, \mathcal{D}, \omega) + A_g(\gamma) \cdot f_g(D_J \sigma, \sigma - {}_R\sigma) \end{aligned}$$

A) La contribution d'hystérésis pure  $D_J \sigma_a$  s'exprime à l'aide d'une fonction tensorielle de la forme [9] [7]:

$$\begin{aligned} D_J \sigma_a &= h(\sigma - {}_R\sigma, \mathcal{D}, \omega) \\ &= a_0 \cdot \mathbb{1} + a_1 \cdot \mathcal{D} + a_2 \cdot (\sigma_a - {}_R\sigma_a) \end{aligned} \quad (\text{II.1.1})$$

où  $h$  est une fonction tensorielle isotrope particulière, s'annulant avec  $\mathcal{D}$ , homogène de degré -1 par rapport au temps du fait du choix simple :

$$\begin{cases} a_0 = \alpha_0 E_1 + \alpha_3 \Delta \bar{M} + \alpha_5 \Delta \bar{N} \\ a_1 = \alpha_1 \\ a_2 = \alpha_2 E_1 + \alpha_4 \Delta \bar{M} + \alpha_6 \Delta \bar{N} \end{cases}$$

avec :

$$\Delta \bar{M} = \text{tr}[(\bar{\sigma}_a - {}_R\bar{\sigma}_a) \cdot \bar{\mathcal{D}}]$$

$$\Delta \bar{N} = \text{tr}[(\bar{\sigma}_a - {}_R\bar{\sigma}_a) \cdot (\bar{\sigma}_a - {}_R\bar{\sigma}_a) \cdot \bar{\mathcal{D}}]$$

$$E_1 = \text{tr} \bar{\mathcal{D}}$$

et les fonctions scalaires  $\alpha_i$  ( $i = 0, 1, \dots, 6$ ) sont des fonctions de  $\omega$  et des invariants  $S_{ai}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) du tenseur  $(\bar{\sigma}_a - {}_R\bar{\sigma}_a)$ .

Pour le cas des métaux, et en accord avec [10], [8] posons :

$$\alpha_i = 0 \quad i = 2, 3, 5, 6$$

$\alpha_0$  et  $\alpha_1$  sont deux coefficients pris constants. Ces deux coefficients ont un sens physique évident par les coefficients de LAME de l'élasticité infinitésimale ; on a :

$$\alpha_0 = \lambda \quad \text{et} \quad \alpha_1 = 2\mu$$

Si on choisit comme limite d'écoulement une surface de VON MISES, alors  $\alpha_4$  est défini par :

$$\alpha_4 = \frac{-\mu}{\Delta \Pi_{\bar{\sigma}_a}^{2-c} (\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a})^c}$$

où  $\Delta \Pi_{\bar{\sigma}_a}$  est le deuxième invariant du déviateur de contrainte  $(\bar{\sigma}_a - {}_R\bar{\sigma}_a)$  soit  $\Delta \Pi_{\bar{\sigma}_a}^2 = \frac{1}{2} \text{tr}[(\bar{\sigma}_a - {}_R\bar{\sigma}_a) \cdot (\bar{\sigma}_a - {}_R\bar{\sigma}_a)]$  et  $\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}$  est le seuil limite du 2ème invariant du déviateur de la contrainte d'hystérésis pure.

Finalement, la contribution d'hystérésis pure est prise sous la forme suivante pour l'acier inoxydable :

$$D_j \bar{\sigma}_a = \lambda E \mathbb{1} + 2\mu \bar{\mathcal{D}} + \alpha_4 \Delta \bar{M} (\bar{\sigma}_a - {}_R\bar{\sigma}_a) \quad (\text{II.1.2})$$

Dans le cas unidimensionnel, pour la première charge on a :

$$\dot{\bar{\sigma}}_a = 2\mu \left[ 1 - \left( \frac{\bar{\sigma}_a}{S_0} \right)^c \right] \dot{\bar{\epsilon}} \quad (\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a} = S_0) \quad (\text{II.1.3})$$

Le coefficient C caractérise la variation de la courbure dans la zone transitoire.

Dans le cas où  $C = 2$ , on obtient la solution bien connue de PRAGER en tangente hyperbolique :

$$\sigma = s_0 \operatorname{th}\left(\frac{2\mu}{s_0} \varepsilon\right) \quad \text{ou} \quad \operatorname{argth}\left(\frac{\sigma}{s_0}\right) = \frac{2\mu}{s_0} \varepsilon$$

Pour  $C < 2$ , on obtient une courbe de charge plus douce que la tangente hyperbolique.

Dans les travaux précédents, [10][8][11], la valeur de  $C$  avait été choisie dans l'intervalle 0 et 2, mais en toute rigueur, on peut prendre :

$$0 < C < \infty$$

Avec l'équation différentielle (II.1.3), on ne peut obtenir des solutions analytiques que pour des valeurs entières particulières de  $C$ , par exemple,  $C = 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16 \dots$  etc. Nous avons vu le cas  $C = 2$ ; pour la modélisation de l'Inconel 718, nous sommes amenés à utiliser  $C = 4$ . Pour cette valeur, il est aussi possible de trouver une solution analytique, on a :

$$\dot{\sigma}_a = 2\mu \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_a}{s_0} \right)^4 \right] \dot{\varepsilon}$$

En remarquant que :

$$\frac{1}{1-y^4} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-y^2} + \frac{1}{1+y^2} \right)$$

Il résulte :

$$\operatorname{argth} \frac{\sigma_a}{s_0} + \operatorname{arctg} \frac{\sigma_a}{s_0} = \frac{4\mu}{s_0} \varepsilon$$

La courbe de contrainte  $\sigma_a(\varepsilon)$  est alors la superposition des deux fonctions.

Au fur et à mesure que  $C$  devient plus grand, le rayon de courbure de la courbe  $\sigma_a(\varepsilon)$  devient de plus en plus petit. Dans le cas de  $C = \infty$ , la courbe de charge dégénère en deux droites brisées, en donnant le modèle classique élastoplastique parfait qui est équivalent à un modèle rhéologique d'un couple de ressort-patin en série.

Finalement, la contribution d'hystérésis pure est caractérisée par 4 coefficients scalaires dont les sens physiques sont indiqués sur la figure II.2

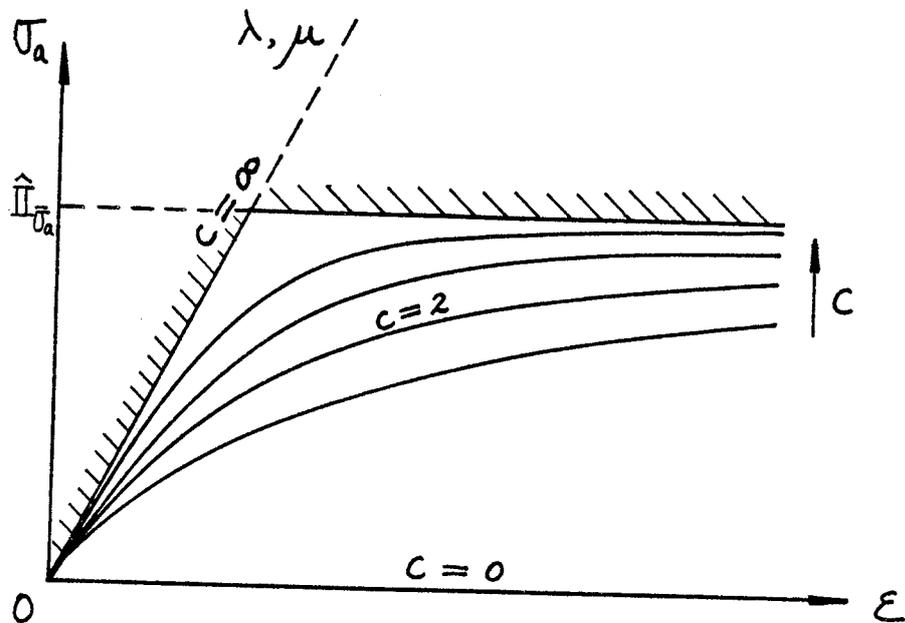


Fig. II.2 Sens physique des coefficients d'hystérésis pure.

B) La contribution d'écrouissage en déformation  $D_J \sigma_g$  est prise sous une forme analogue à la fonction tensorielle d'hystérésis pure (II.1.1) par :

$$f_g = D_J \sigma_g - g_0 \mathbb{1} - g_2 (\bar{\sigma}_g - {}_R \bar{\sigma}_g)$$

où  $f_g$  est une fonction tensorielle isotrope particulière de  $D_J \sigma_g$  et de  $\bar{\sigma}_g - {}_R \bar{\sigma}_g$ , rendue homogène de degré -1 par rapport au temps en posant :

$$g_0 = \gamma_0 E_1 + \gamma_3 \Delta \bar{M}_g + \gamma_5 \Delta \bar{N}_g$$

$$g_2 = \gamma_2 E_1 + \gamma_4 \Delta \bar{M}_g + \gamma_6 \Delta \bar{N}_g$$

où les fonctions scalaires  $\gamma_j$  dépendent du paramètre d'écrouissage  $\varphi$ ,  $\Delta \varphi$  et des invariants  $\Delta S_{ai}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) du tenseur  $(\bar{\sigma}_g - {}_R \bar{\sigma}_g)$  :

$$\gamma_j = \alpha_j (\Delta S_{ai}) \cdot \bar{\gamma}_j(\varphi, \Delta \varphi) \quad \begin{matrix} j = 0, 2, 3, 4, 5, 6 \\ i = 1, 2, 3 \end{matrix}$$

Une fonction scalaire  $A_g$  de la variable scalaire  $\varphi$  positive non décroissante permet de pondérer l'influence de la contribution d'écrouissage à mémoire permanente :

$$D_J \sigma_{gH} = A_g(\varphi) \cdot f_g(D_J \sigma_g, \bar{\sigma}_g - {}_R \bar{\sigma}_g)$$

Posons :

$$\gamma_j = 0 \quad j = 2, 3, 5, 6$$

$$\gamma_0 = \alpha_0$$

$$\gamma_4 = \alpha_4 \cdot \bar{\gamma}_4(\varphi, \Delta \varphi)$$

on a alors :

$$f_g = D_j \sigma_g - \lambda E_1 \mathbb{1} - \alpha_4 \bar{\gamma}_4(\gamma, \Delta\gamma) \Delta \bar{M} (\bar{\sigma}_g - \bar{\sigma}_g^r)$$

C) En faisant l'hypothèse que le coefficient de pondération  $A_g(\gamma)$  est toujours petit devant l'unité et avec l'hypothèse d'interaction en remplaçant les contraintes partielles par la contrainte réelle, on obtient l'équation constitutive sous une forme globale :

$$D_j \sigma = \lambda E \mathbb{1} + 2 \mu \mathcal{D} + \alpha_4^e \Delta \bar{M} (\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^r)$$

avec

$$\alpha_4^e = \alpha_4 \cdot (1 - A_g(\gamma) \cdot \bar{\gamma}_4(\gamma, \Delta\gamma))$$

En posant  $C_e = 1 - A_g(\gamma) \cdot \bar{\gamma}_4(\gamma, \Delta\gamma)$ , on a alors :

$$\alpha_4^e = - \frac{\mu}{\Delta \bar{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{2-c} (\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}} \omega)^c}$$

avec :

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}} = \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_0}}{C_e^{1/c}}$$

où  $C_e$  est le paramètre d'écrouissage fonction de  $\gamma$  et  $\Delta\gamma$ , sa forme sera explicitée dans le chapitre IV.

## II.2. Le dispositif expérimental

### II.2.1. Les matériaux

Nous utilisons deux sortes d'aciers inoxydables :

A) l'acier inoxydable austénitique 316 L.

Cet alliage à base de fer fait partie de la famille des aciers inoxydables à 12 % de nickel et 18 % de chrome ; du point de vue structural, il se rattache aux solutions solides cubiques à faces centrées [12]. Il est utilisé dans les constructions du Génie Nucléaire en raison de sa tenue à la corrosion et en fluage à la température d'emploi de 550° C, sa dénomination stricte est : "acier I.C.L.167 SPH".

La composition chimique du matériau testé est :

C = 0.020	Si = 0.48	Co = 0.14
Ni = 12.48	Mo = 2.40	N <sub>2</sub> = 0.07
Cr = 17.93	S = 0.002	Ta = 0.01
Mn = 1.78	P = 0.027	Fe = base
Cu = 0.36	B = 9 ppm	

Le matériau a subi un traitement d'hypertrempe par un maintien à 1100° C pendant 21 minutes, puis un refroidissement par immersion dans l'eau.

B) L'Inconel 718 :

L'Inconel 718 est un superalliage, à base de nickel et de fer, auquel on demande des propriétés mécaniques élevées à des températures d'emploi élevées, en vue de son utilisation dans l'industrie des propulseurs de l'aéronautique [13][14][15]. Cet alliage est constitué de trois phases principales :

- une matrice austénitique,
- une précipitation de composés intermétalliques de nickel due à la présence de titane et d'aluminium sous forme de nickelures  $\gamma'$  : Ni<sub>3</sub>Ti ou Ni<sub>3</sub>Al,
- une précipitation de carbures aux joints de grains.

La structure est aussi cubique à face centrée. Les propriétés mécaniques élevées sont dues à la présence des précipités  $\gamma'$  et justifie ainsi la terminologie habituellement utilisée d'alliage à durcissement structural.

La composition chimique du matériau testé est :

C = 0.035	Mn = 0.13	Si = 0.09
S = 0.002	P = 0.009	Cr = 18.25
Ni = 52.26	Mo = 3.06	Co = 0.25
Cu = 0.05	Al = 0.54	Ti = 1.02
Fe = 19.00	B = 0.039	Nb+Ta = 5.27

Pour obtenir le durcissement structural, l'alliage a subi un traitement thermique de trempe et de recuit :

- maintien à 955° C pendant 1 heure, puis un refroidissement à l'air,
- maintien à 720° C pendant 8 heures, puis un refroidissement à vitesse contrôlée de 50° C par heure jusqu'à 620° C suivi d'un maintien pendant 8 heures à cette température et enfin un refroidissement à l'air. La taille des précipités  $\gamma'$  obtenues est de 200 Å. La précipitation  $\gamma'$  n'a pas rompu la continuité du réseau cristallin entre la matrice et les précipités.

### II.2.2. Les éprouvettes

Les éprouvettes comportent la partie d'essai cylindrique, deux têtes d'amarrage et deux zones de raccordement continues. La partie cylindrique est un tube mince de longueur utile 30 mm, de diamètre intérieur 24 mm et extérieur 28 mm pour l'acier inoxydable 316 L (figure II.3) et de diamètre 16 mm et 18,6 mm pour l'inconel 718 (figure II.4).

Les têtes d'amarrage sont dessinées en fonction du dispositif d'amarrage conçu spécialement pour permettre un bon alignement des axes de la machine et de l'éprouvette et une absence de jeu à l'inversion des efforts. Le serrage de l'éprouvette est assuré par deux cales pentées prenant appui sur chacune des bases de l'éprouvette et quatre cales pentées prenant appui sur les méplats latéraux des deux têtes d'amarrage.

### II.2.3. La machine d'essai

Les essais sont effectués sur une presse de traction-compression et torsion alternée combinées M.T.S à deux vérins indépendants. Les capacités de la presse sont de  $\pm 100$  KN et de  $\pm 1200$  N-m. Sur chacune des deux voies, le signal d'asservissement peut être soit l'effort, soit le déplacement, soit une déformation. Le déplacement de chacun des vérins est contrôlé par une boucle d'asservissement électro-hydraulique commandée par un générateur de fonction.

La figure II.5 présente le schéma de fonctionnement de la machine d'essai.

### II.2.4. Les mesures

Les mesures essentielles sont la force et le couple fournis par le capteur de la presse M.T.S et les déformations fournies par les jauges collées sur chaque éprouvette. Les mesures accessoires sont le déplacement axial et la rotation de chacun des vérins et la température ambiante.

Chaque signal de mesure est conditionné entre  $\pm 10$  volts. Toutes les mesures sont ensuite acquises par un micro-processeur et enregistrées sur un disque souple, par l'intermédiaire d'un multiplexeur et d'un voltmètre numérique à 200.000 points. Le micro-processeur fournit de plus une échelle de temps à l'aide d'une horloge interne.

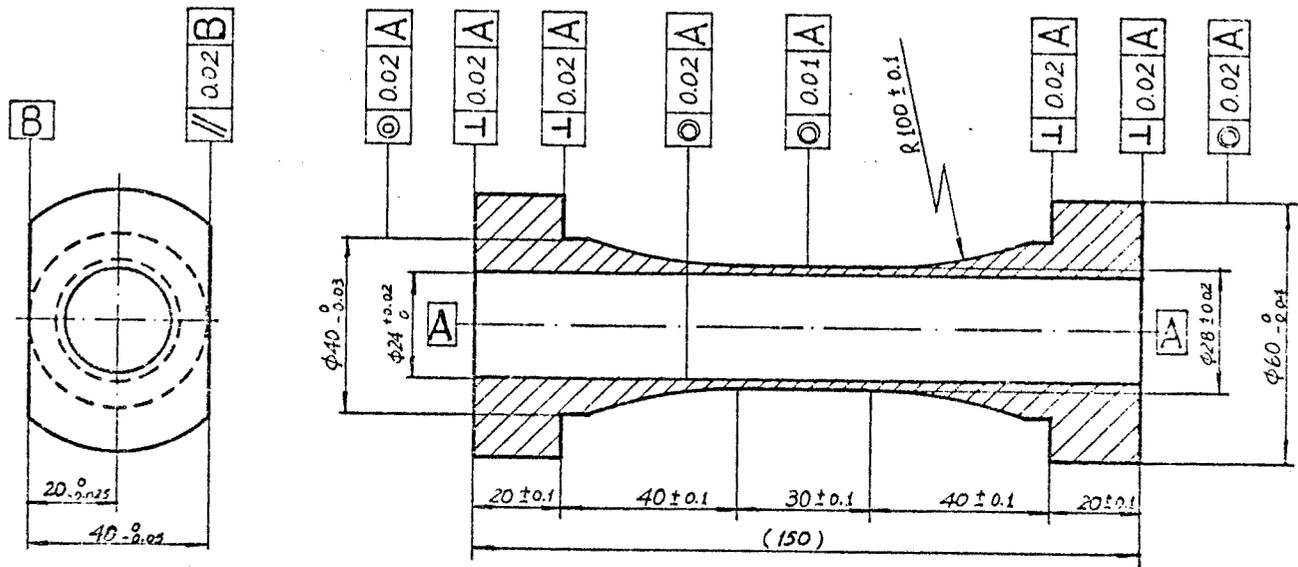


Fig. II.3 Epreuve en acier inoxydable 316 L.

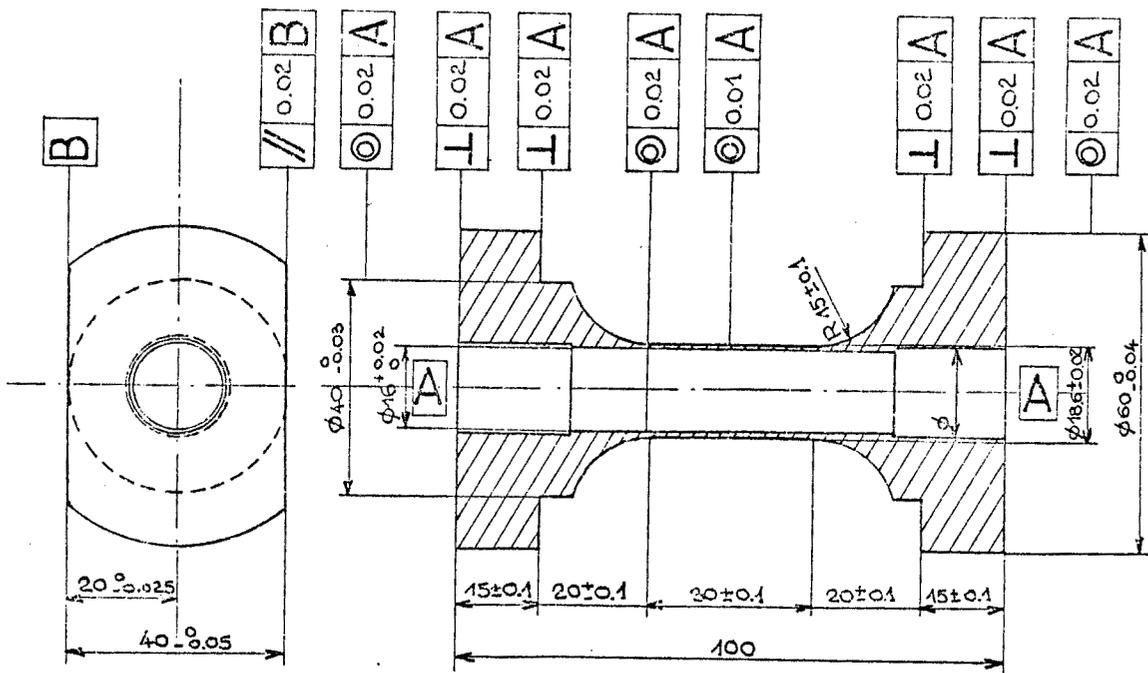


Fig. II.4 Epreuve en Inconel 718.

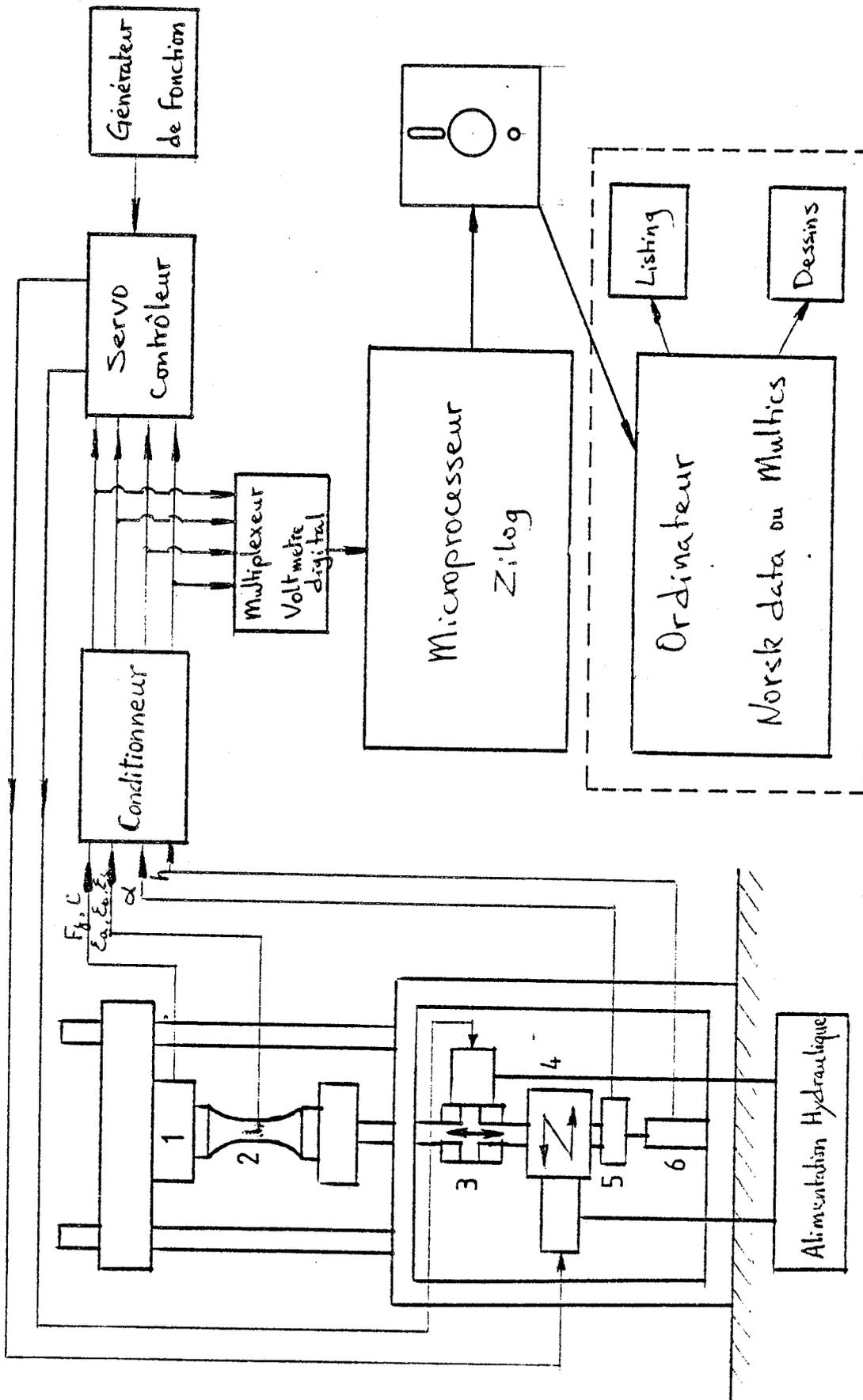


Fig. II.5 Schéma de fonctionnement du système d'essai

- 1. Capteur de charge, 2. Epruvette et jauges, 3. Vérin de traction,
- 4. Vérin de torsion, 5. Capteur rotatif, 6. Capteur axial.

Le plus grand soin a été apporté à l'utilisation des jauges de déformation. Elles sont collées sur l'éprouvette à l'aide d'une colle à polymérisation, sous charge statique contrôlée. Après collage la coïncidence entre l'axe de l'éprouvette et l'axe du support des jauges est contrôlé et éventuellement l'angle de mauvais alignement est mesuré pour être pris en compte dans le dépouillement. L'angle de mauvais alignement est défini à une précision de  $\pm 0.5 \times 10^{-3}$  ; le plus grand angle mesuré pour l'ensemble des éprouvettes utilisées est de  $12.10^{-3}$ .

Le facteur de jauge donné par le constructeur est défini avec une précision relative de  $\pm 0.5 \%$ , la valeur nominale proche de 2.0 dépend de l'orientation des jauges dans la rosette et du lot de fabrication, elle peut varier de quelques pourcent et sa valeur exacte est prise en compte dans le dépouillement.

Enfin, l'étalonnage de chaque ligne de mesure des jauges est obtenu par un créneau de résistance électrique à l'aide d'une résistance de précision, simulant une déformation de l'ordre de 1 %. Pour réduire l'influence des variations de la température, la salle d'essai est climatisée à  $\pm 1^\circ \text{C}$ , et les jauges, montées en quart du pont, sont autocompensées et adaptées à chaque métal.

L'ensemble des trois jauges d'une rosette est compris dans un rectangle dont la plus petite dimension  $h$  est parallèle à l'axe du cylindre de l'éprouvette. Le rapport  $h/l$ , où  $l$  est la longueur de la partie cylindrique de l'éprouvette, est respectivement de  $1/4$  et de  $1/8$  pour les éprouvettes d'acier inoxydable 316 L et d'inconel 718. Compte tenu de la zone de raccordement, on admet que les jauges mesurent les déformations dans une zone où celles-ci peuvent être considérées comme homogènes.

Les informations fournies par les jauges ne sont pas rigoureusement égales aux composantes du tenseur de déformation de Green-Lagrange (cf. [11] p.373). On montre facilement que le champ de déplacement proposé par Murnaghan [16] est le champ le plus général admissible pour la déformation d'un tube (ou d'une tige) de section circulaire et de longueur infinie [17], soit :

$$\begin{cases} p = p_0 + u(p_0, t) \\ \theta = \theta_0 + j_0 \tau(t) \\ \delta = \delta_0 + j_0 k(t) \end{cases}$$

où  $\rho_0, \theta_0, z_0$  et  $\rho, \theta, z$  sont les coordonnées cylindriques initiales et actuelles d'un point matériel ;  $u$  est le déplacement radial,  $\tau$  l'angle de torsion par unité de longueur et  $k$  la déformation axiale rapportée à l'unité de longueur initiale.

Avec ce champ de déplacement, les composantes du tenseur de Green-Lagrange sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{\rho\rho} = u'_{\rho_0} \left( 1 + \frac{1}{2} u'_{\rho_0} \right) \\ \gamma_{\theta\theta} = \frac{u}{\rho_0} \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{u}{\rho_0} \right) \\ \gamma_{zz} = k \left( 1 + \frac{1}{2} k \right) + \frac{1}{2} (\rho_0 \tau)^2 \left( 1 + \frac{u}{\rho_0} \right)^2 \\ \gamma_{\theta z} = \frac{1}{2} \rho \tau \left( 1 + \frac{u}{\rho_0} \right)^2 \end{array} \right.$$

et les déformations d'un élément de longueur linéaire orienté par rapport à l'axe du tube, sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda(0) = \sqrt{\left( 1 + \frac{u}{\rho_0} \right)^2 (\rho_0 \tau)^2 + (1+k)^2} - 1 \\ \lambda\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left( 1 + \frac{u}{\rho_0} \right)^2 (\rho_0 \tau + 1)^2 + (1+k)^2} - 1 \\ \lambda\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left( 1 + \frac{u}{\rho_0} \right)^2 (\rho_0 \tau - 1)^2 + (1+k)^2} - 1 \\ \lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{u}{\rho_0} \end{array} \right.$$

Les jauges ne mesurent que les allongements normaux. Compte tenu de l'orientation de la rosette, on connaît les trois valeurs de la déformation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_a = \lambda\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \lambda_b = \lambda(0) \\ \lambda_c = \lambda\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{array} \right.$$

La composante  $\lambda_{zz}$  correspond donc à une mesure directe ; mais pour connaître les deux autres composantes  $\lambda_{\theta\theta}$  et  $\lambda_{\theta z}$  il faut utiliser les relations du cercle de Mohr. Finalement, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{zz} = \lambda_b \\ \varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\lambda_a - \lambda_c}{\lambda_a + \lambda_c - 2\lambda_b} \right) \\ \lambda_{\theta z} = \sin(2\varphi) \sqrt{\left( \frac{\lambda_a - \lambda_c}{2} \right)^2 + \left( \lambda_b - \frac{\lambda_a + \lambda_c}{2} \right)^2} \\ \lambda_{\theta\theta} = \frac{\lambda_a + \lambda_c}{2} - \cos(2\varphi) \sqrt{\left( \frac{\lambda_a - \lambda_c}{2} \right)^2 + \left( \lambda_b - \frac{\lambda_a + \lambda_c}{2} \right)^2} \end{array} \right.$$

Dans le cas où on veut utiliser la correction de mauvais alignements des jauges en prenant en compte l'angle  $\alpha$  de la jauge b orienté par rapport à l'axe du tube, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_c = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{\lambda_a - \lambda_c}{\lambda_a + \lambda_c - \lambda_b} \right) + \alpha \\ \lambda_{\theta z} = \sin(2\varphi_c) \sqrt{\left( \frac{\lambda_a - \lambda_c}{2} \right)^2 + \left( \lambda_b - \frac{\lambda_a + \lambda_c}{2} \right)^2} \\ \lambda_{zz} = \frac{\lambda_a + \lambda_c}{2} + \cos(2\varphi_c) \sqrt{\left( \frac{\lambda_a - \lambda_c}{2} \right)^2 + \left( \lambda_b - \frac{\lambda_a + \lambda_c}{2} \right)^2} \\ \lambda_{\theta\theta} = \frac{\lambda_a + \lambda_c}{2} - \cos(2\varphi_c) \sqrt{\left( \frac{\lambda_a - \lambda_c}{2} \right)^2 + \left( \lambda_b - \frac{\lambda_a + \lambda_c}{2} \right)^2} \end{array} \right.$$

### II.2.5. Les conditions générales et la présentation des essais

Les essais s'effectuent dans une salle climatisée à la température ambiante maintenue constante à  $\pm 1^\circ \text{C}$ . Tous les essais sont contrôlés à vitesse de déformation constante de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$  en utilisant les fonctions rampes alternées du générateur de fonction.

La fréquence d'acquisition des données est de l'ordre de 2 à 5 secondes de façon que chaque courbe de charge soit définie par environ une centaine de points de mesure. Comme l'horloge du microprocesseur est indépendante de celle du générateur de fonction, les points d'inversion des sollicitations cycliques ne correspondent pas forcément à un point d'acquisition ; ceci explique le tracé légèrement tronqué des courbes expérimentales.

Nous montrons à titre d'exemple un certain nombre de résultats d'essais dans le texte. Des résultats complémentaires sont donnés dans [45].

Les résultats d'essai se présentent sous la forme d'un fichier digital de n enregistrements d'une dizaine de données :

$$t_i, F_{zi}, C_i, \lambda_{ai}, \lambda_{bi}, \lambda_{ci}, \dots \quad i = 1, n$$

Les résultats expérimentaux obtenus sont essentiellement caractérisés par les valeurs de la force axiale  $F_z$ , du couple  $C$  et des déformations  $\lambda_a$ ,  $\lambda_b$  et  $\lambda_c$ . On peut tracer directement les courbes reliant les charges et les déformations à partir des enregistrements expérimentaux. Comme la loi de comportement est exprimée en relations constitutives entre les contraintes et les déformations, on est conduit à transformer les valeurs de charges  $F_z$  et  $C$  en contraintes  $\sigma_{zz}$  et  $\sigma_{\theta z}$ .

#### A) Essai de traction-compression

Les champs de contrainte et de déformation sont homogènes, on calcule la contrainte axiale par :

$$\sigma_{zz} = \frac{F_z}{\Delta} = \frac{F_z}{2\pi [(R_e + u_e)^2 - (R_i + u_i)^2]}$$

Compte tenu de l'homogénéité de la déformation transversale :

$$\lambda_{\theta\theta} = \frac{u_e}{R_e} = \frac{u_i}{R_i}$$

On a finalement :

$$\sigma_{zz} = \frac{F_z}{\Delta_0 (1 + \lambda_{\theta\theta})^2}$$

où  $\Delta_0$  est la section de l'éprouvette à l'état initial :

$$\Delta_0 = 2\pi (R_e^2 - R_i^2)$$

Dans la suite, nous montrons toujours les courbes en contrainte  $\sigma_{zz}$  au lieu de  $F_z$  pour les essais de traction-compression.

#### B) Essai de torsion :

Par définition, le couple de torsion s'écrit :

$$C = \int_{R_i}^{R_e} 2\pi \sigma_{\theta z} p^2 dp$$

Comme il n'est pas possible d'estimer rigoureusement le champ de contrainte de cisaillement qui est en effet non homogène ([18]p 767), on est conduit à faire l'une des deux hypothèses extrêmes suivantes :

a) répartition homogène de la contrainte de cisaillement, on obtient alors une valeur qui a le sens d'une moyenne :

$$\langle \sigma_{\theta z} \rangle = \frac{3}{2\pi (R_e^3 - R_i^3)} \cdot C$$

b) répartition linéaire, en fonction du rayon, de la contrainte de cisaillement ; la valeur à la paroi extérieure est alors donnée par :

$$\sigma_{\theta z}^e = \frac{2 R_e}{\pi (R_e^4 - R_i^4)} \cdot C$$

Le rapport des deux valeurs extrêmes ne dépend que de la géométrie :

$$\frac{\sigma_{\theta z}^e}{\langle \sigma_{\theta z} \rangle} = \frac{4}{3} \frac{R_e (R_e^2 + R_e R_i + R_i^2)}{(R_e + R_i)(R_e^2 + R_i^2)}$$

Pour les deux types d'éprouvettes utilisées, l'écart entre les deux types de répartition est de 7,2 %. C'est pourquoi les résultats généraux des essais de torsion sont donnés avec le couple C de préférence à la contrainte de cisaillement  $\sigma_{\theta z}$ . Par contre, pour des interprétations très précises, comme la détermination des valeurs tangentes ou des valeurs limites, on sera amené à utiliser l'une ou l'autre hypothèse de répartition de  $\sigma_{\theta z}$ .

La durée des essais a été pratiquement toujours limitée par la durée de vie des jauges d'autant plus courte que la déformation est plus grande. L'incident le plus souvent rencontré est le décollement partiel de la jauge : dans ce cas, l'éprouvette est déformée plus que la jauge pour les déformations de compression, ce qui se traduit par une allure caractéristique des courbes de recharge dans la zone transitoire comme l'indiquent par exemple les derniers grands cycles enregistrés avec l'essai n° 213 (figure III.f).

### II.3. Les moyens numériques

La modélisation correcte d'un essai de torsion d'un tube, avec ou sans force axiale, exige de prendre en compte la non homogénéité du

champ de déformation ; le programme d'éléments finis unidimensionnels TUBE est utilisé à cet effet avec l'expression tensorielle de la loi du comportement. Pour les essais de traction-compression, le champ de déformation est homogène et dans ce cas, la résolution des quatre équations différentielles données par la loi du comportement tensorielle est obtenue par le programme TRAC qui met en oeuvre une méthode d'intégration de Runge-Kutta. Enfin, pour l'étude de la modélisation de l'érouissage en déformation, nous utilisons la dégénérescence unidimensionnelle de la loi de comportement dont les deux équations différentielles restantes sont intégrées dans le programme UND par la méthode de Runge-Kutta.

### II.3.1. Programme TUBE pour le cas général

La prise en compte de la cinématique rotationnelle (cf. [18] P.742) dans la loi du comportement utilisée (cf. § II.1) aboutit à un système de 4 équations scalaires pour les 4 composantes non nulles du tenseur de contrainte de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\sigma}_{pp} = (\lambda + 2\mu) d_{pp} + \lambda (d_{\theta\theta} + d_{zz}) + \alpha_4^e \Delta \bar{M} (\bar{\sigma}_{pp} - \bar{\sigma}_{pp}^r) \\ \dot{\sigma}_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu) d_{\theta\theta} + \lambda (d_{pp} + d_{zz}) + \alpha_4^e \Delta \bar{M} (\bar{\sigma}_{\theta\theta} - \bar{\sigma}_{\theta\theta}^r) + 2d_{\theta z} \sigma_{\theta z} \\ \dot{\sigma}_{zz} = (\lambda + 2\mu) d_{zz} + \lambda (d_{\theta\theta} + d_{pp}) + \alpha_4^e \Delta \bar{M} (\bar{\sigma}_{zz} - \bar{\sigma}_{zz}^r) - 2d_{\theta z} \sigma_{\theta z} \\ \dot{\sigma}_{\theta z} = 2\mu d_{\theta z} + \alpha_4^e \Delta \bar{M} (\bar{\sigma}_{\theta z} - \bar{\sigma}_{\theta z}^r) - d_{\theta z} [(\bar{\sigma}_{\theta\theta} - \bar{\sigma}_{\theta\theta}^r) - (\bar{\sigma}_{zz} - \bar{\sigma}_{zz}^r)] \end{array} \right.$$

avec :  $\Delta \bar{M} = \text{tr}[(\bar{\sigma} - \bar{\sigma}^r) \bar{\mathcal{D}}]$

$$\alpha_4^e = \frac{-\mu}{\Delta \Pi_{\bar{\sigma}}^e - c \left( \frac{\bar{\Pi}_{\bar{\sigma}} \omega}{C_{\bar{\sigma}}^e} \right) c}$$

Les composantes de la vitesse de déformation sont définies en  $u(\rho_0, t)$ ,  $k(t)$  et  $\tau(t)$  (cf § II.2.4). Les conditions aux limites sont définies par la pression exercée sur les parois du cylindre et la force axiale exercée aux extrémités du tube.

En utilisant le théorème des puissances virtuelles, les solutions numériques sont obtenues par une méthode d'éléments finis. Pour l'étude présentée ici, la pression appliquée aux parois cylindriques est prise nulle.

### II.3.2. Programme TRAC pour la traction-compression simple

On envisage un essai de traction-compression cyclique d'un tube en vitesse de déformation imposée :

$$d_{zz} = f(t) \quad , \quad \sigma_{pp} = \sigma_{\theta\theta} = 0$$

Donc, pour le tenseur contrainte réelle, toutes les composantes sont nulles, sauf  $\sigma_{zz}$ .

Comme :

$$d_{pp} = d_{\theta\theta} \quad \forall t$$

on a :

$$\frac{\dot{u}'_0}{1 + u'_0} = \frac{u/p_0}{1 + u/p_0}$$

On peut avoir une solution pour cette équation différentielle de la forme :

$$u(p_0, t) = p_0 \cdot v(t)$$

Finalement, le champs de déplacement est défini par :

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 [1 + v(t)] \\ z = z_0 [1 + k(t)] \\ \theta = \text{cte} \end{cases}$$

et le champ de vitesse de déformation devient :

$$d_{pp} = d_{\theta\theta} = \frac{\dot{v}}{1+v} \quad , \quad d_{zz} = \frac{\dot{k}}{1+k}$$

Pour l'évolution réelle, on a finalement deux équations différentielles :

$$\begin{cases} 0 = 2(\lambda + \mu) d_{pp} + \lambda d_{zz} - \frac{2}{9} \alpha_4^e (\Delta\sigma_{zz} - \Delta\sigma_{pp})^2 (d_{zz} - d_{pp}) \\ \dot{\sigma}_{zz} = (\lambda + 2\mu) d_{zz} + 2\lambda d_{pp} + \frac{4}{9} \alpha_4^e (\Delta\sigma_{zz} - \Delta\sigma_{pp})^2 (d_{zz} - d_{pp}) \end{cases}$$

avec :

$$\Delta\sigma_{zz} = \sigma_{zz} - {}_R\sigma_{zz}$$

$$\Delta\sigma_{pp} = \sigma_{pp} - {}_R\sigma_{pp}$$

La première équation permet de calculer  $\frac{\partial v}{\partial R}$ .

Pour l'évolution squelette, on a le tenseur contrainte :

$$\sigma^a = \begin{vmatrix} \sigma_{pp}^a & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}^a & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz}^a \end{vmatrix}$$

avec :

$$\sigma_{pp}^a = \sigma_{\theta\theta}^a$$

On a alors :

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_{pp}^a = 2(\lambda + \mu) d_{pp} + \lambda d_{zz} - \frac{2}{9} \alpha_4 (\Delta \sigma_{zz}^a - \Delta \sigma_{pp}^a)^2 (d_{zz} - d_{pp}) \\ \dot{\sigma}_{zz}^a = (\lambda + 2\mu) d_{zz} + 2\lambda d_{pp} + \frac{4}{9} \alpha_4 (\Delta \sigma_{zz}^a - \Delta \sigma_{pp}^a)^2 (d_{zz} - d_{pp}) \end{cases}$$

avec :

$$\Delta \sigma_{zz}^a = \sigma_{zz}^a - {}_R \sigma_{zz}^a$$

$$\Delta \sigma_{pp}^a = \sigma_{pp}^a - {}_R \sigma_{pp}^a$$

Après avoir remplacé  $d_{pp}$  par sa valeur obtenue par la 1ère équation, on obtient finalement un système de 4 équations différentielles à 4 inconnues :  $\sigma_{pp}^a$ ,  $\sigma_{zz}^a$ ,  $\sigma_{zz}$ ,  $v$  en fonction de  $k$ .

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{zz}^a}{\partial R} &= \frac{(3\lambda + 2\mu)(\mu + 3A_R)}{(\lambda + \mu + A_R)(1 + R)} \\ \frac{\partial v}{\partial R} &= \frac{-(\lambda - 2A_R)(1 + v)}{2(\lambda + \mu + A_R)(1 + R)} \\ \frac{\partial \sigma_{pp}^a}{\partial R} &= \frac{(3\lambda + 2\mu)(A_R - A_Q)}{(\lambda + \mu + A_R)(1 + R)} \\ \frac{\partial \sigma_{zz}^a}{\partial R} &= \frac{(3\lambda + 2\mu)(\mu + A_R + 2A_2)}{(\lambda + \mu + A_R)(1 + R)} \end{aligned} \right.$$

avec :

$$A_R = \frac{1}{9} \alpha_4^e (\sigma_{zz}^a - {}_R \sigma_{zz}^a)^2$$

$$A_Q = \frac{1}{9} \alpha_4 (\Delta \sigma_{zz}^a - \Delta \sigma_{pp}^a)^2$$

On vérifie que le système des équations donne bien les limites du comportement élastique tangent au voisinage du point d'inversion.

$$\lim_{t \rightarrow t^+} \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \varepsilon_{33}} = \lim_{t \rightarrow t^+} \frac{\partial \sigma_{33}^a}{\partial \varepsilon_{33}} = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \mu = E$$

$$\lim_{t \rightarrow t^+} \frac{\partial \varepsilon_{00}}{\partial \varepsilon_{33}} = \lim_{t \rightarrow t^+} \frac{\partial \varepsilon_{pp}}{\partial \varepsilon_{33}} = \frac{-\lambda}{2(\lambda + \mu)} = -\nu$$

où E et  $\nu$  sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson du comportement linéaire tangent.

### II.3.3. Programme UND pour le cas unidimensionnel

En séparant la partie isotrope et déviatoire des équations de comportement, l'expression unidimensionnelle de la loi s'écrit :

pour le comportement réel :

$$\dot{\sigma} = 2\mu \dot{\varepsilon} + \alpha_4^e \Delta M (\sigma - r\sigma)$$

pour le comportement squelette :

$$\dot{\sigma}_a = 2\mu \dot{\varepsilon} + \alpha_4 \Delta M_a (\sigma_a - r\sigma_a)$$

avec :  $\Delta M = 2(\sigma - r\sigma) \dot{\varepsilon}$

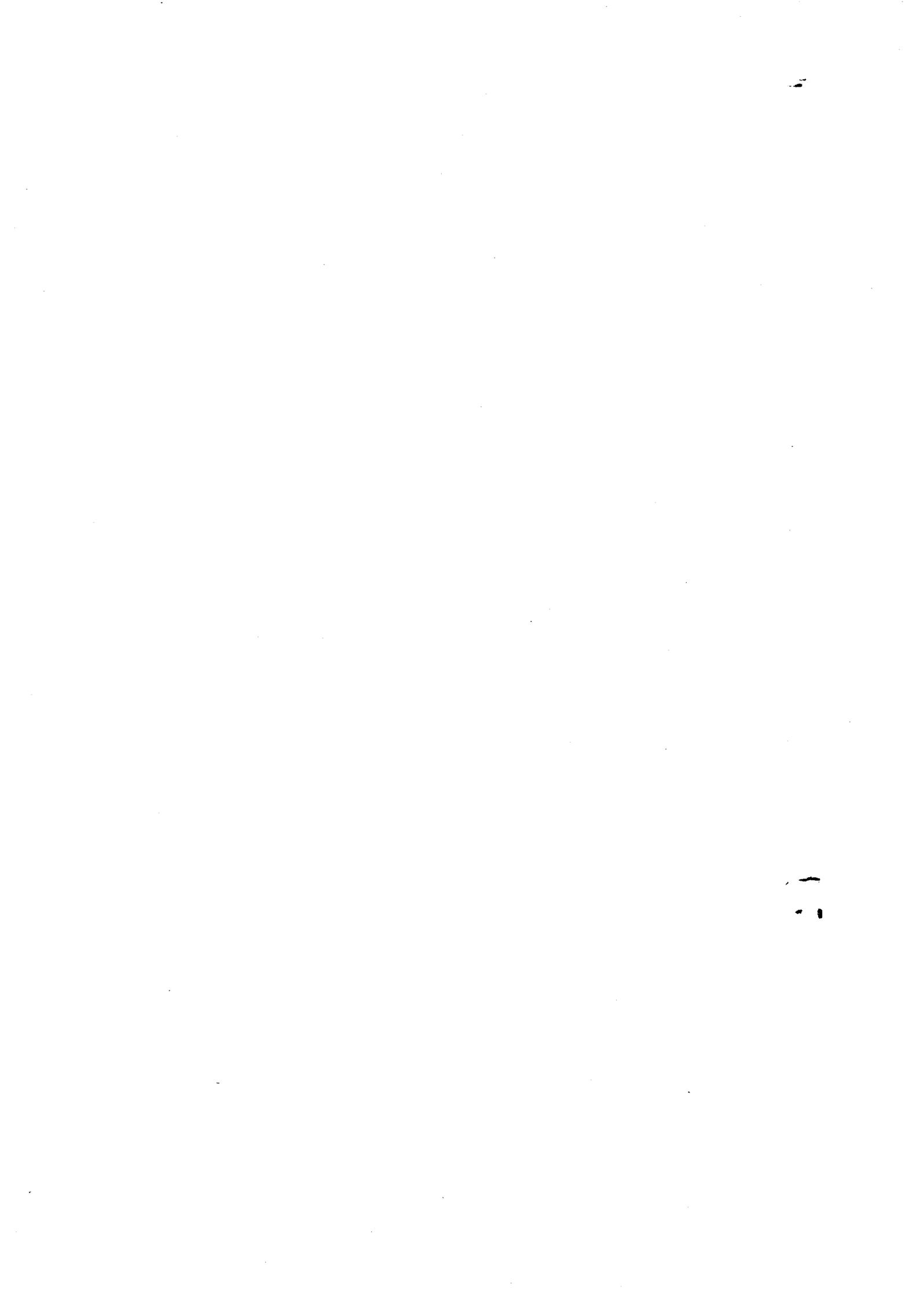
et :  $\Delta M_a = 2(\sigma_a - r\sigma_a) \dot{\varepsilon}$

$$\alpha_4^e = - \frac{\mu}{\sigma^{2-c} \left( \frac{S_0 \omega}{C_e^{1/c}} \right)^c}$$

$$\alpha_4 = - \frac{\mu}{\sigma_a^{2-c} (S_0 \omega)^c}$$

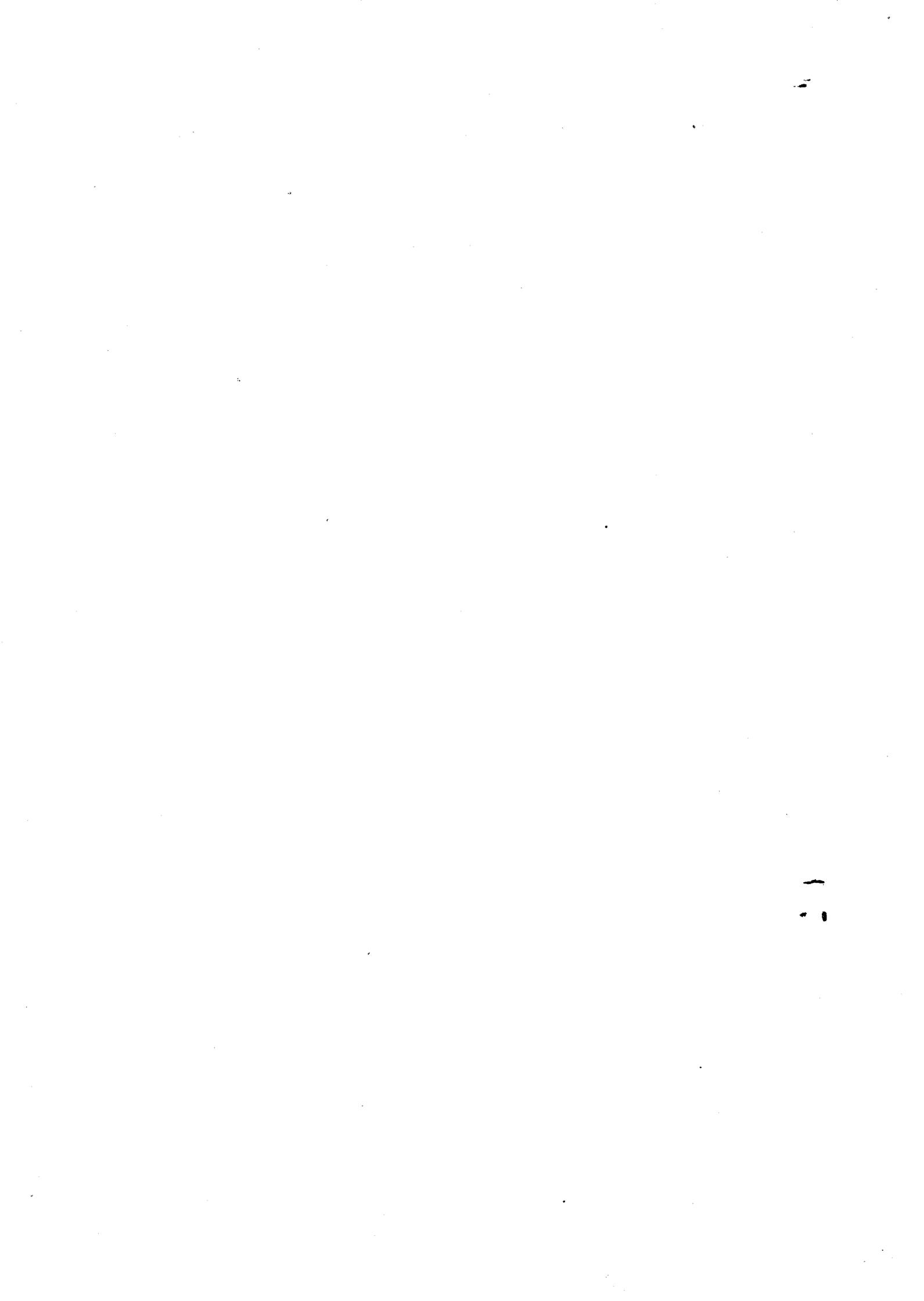
On obtient finalement un système de 2 équations différentielles à 2 inconnues  $\sigma$  et  $\sigma_a$  :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} = 2\mu \left[ 1 - \frac{(\sigma - r\sigma)^2}{\sigma^{2-c} \left( \frac{S_0 \omega}{C_e^{1/c}} \right)^c} \right] \\ \frac{\partial \sigma_a}{\partial \varepsilon} = 2\mu \left[ 1 - \frac{(\sigma_a - r\sigma_a)^2}{\sigma_a^{2-c} (S_0 \omega)^c} \right] \end{cases}$$



CHAPITRE III  
=====

LES PROPRIETES DU COMPORTEMENT D'HYSTERESIS PURE



Comme nous l'avons vu dans le chapitre I, le comportement d'hystérésis pure constitue la base du schéma utilisé. Dans ce chapitre nous essayons de vérifier si l'expérience n'est pas en contradiction avec les propriétés fondamentales du comportement d'hystérésis pure, qui concernent la notion de mémoire discrète, de chemin irréversible, de quasi-réversibilité après inversion et de restauration des propriétés après inversion. Pour cela, d'une part nous analysons en détail la forme des courbes de charge données par des sollicitations cycliques (§ 1) et la forme de petits cycles dans un cycle stabilisé (§ 2). D'autre part, nous essayons de donner, dans la mesure du possible, une explication de certaines propriétés à partir de l'analyse des phénomènes microstructuraux (§ 3). Enfin, les résultats obtenus avec l'Inconel 718 nous amènent à considérer une surface limite cylindrique de section non circulaire ; en conséquence, une certaine extension du coefficient d'homothétie de Masing est proposée (§ 4).

### III.1. La forme des courbes de charge des sollicitations cycliques

Le modèle prévoit que le comportement d'hystérésis pure peut être décrit dans le cas unidimensionnel, par une relation du type :

$$\sigma - r\sigma = \omega f\left(\frac{\lambda - r\lambda}{\omega}\right) \quad \text{ou} \quad \Delta\sigma = \omega f\left(\frac{\Delta\lambda}{\omega}\right)$$

où  $r\sigma$ ,  $r\epsilon$  est l'état de référence de la branche considérée.

La présence d'écrouissage en déformation a pour effet de faire évoluer lentement la fonction  $f$  au cours de la déformation. Comme on le verra dans ce qui suit, ceci rend un peu plus difficile la mise en évidence des propriétés d'hystérésis pure, à partir des résultats expérimentaux, dans un espace relatif en contrainte  $\Delta\sigma$  et/ou en déformation  $\Delta\lambda$ .

#### III.1.1. Essai de traction-compression simple

Considérons, à titre d'exemple, les résultats de l'essai n° 213 (acier inoxydable 316 L) de traction compression cyclique et symétrique (figure III.1) ; cet essai est contrôlé en déformation : 20 cycles à  $\pm 0.75$  % et quelques cycles à  $\pm 1,5$  %. L'état de référence de chaque branche est le dernier point d'inversion rencontré à l'exception évidemment de l'arc qui relie le dernier petit cycle avec le premier grand cycle. Toutes ces branches de charge ont été lissées par la méthode de spline sous tension (cf. [52], [53]) de façon à pouvoir déterminer la

tangente en tout point des courbes.

Sur la figure III.2, sont tracés les résultats de l'essai n° 213 d'une part en axes variation de contrainte  $\Delta\sigma_{33}$  en fonction de la variation de déformation  $\Delta\lambda_{33}$  et d'autre part en axes module tangent  $M_E$  en fonction de la même abscisse, où :

$$M_E = \frac{d(\Delta\sigma_{33})}{d(\Delta\lambda_{33})}$$

Les résultats lissés ainsi que les points expérimentaux des petits cycles sont représentés sur la figure III.3 ; enfin la figure III.4 représente les résultats dans l'intervalle [0, 0.2 %] qui sert souvent à définir le module d'élasticité.

L'examen de la figure III.4 montre que les courbes de charge de traction compression pour l'acier inoxydable 316 L ne présentent pas de partie linéaire près de l'origine : au début de la courbe  $M_E - \Delta\lambda_{33}$  le module tangent  $M_E$  varie comme le carré de  $\Delta\lambda_{33}$  avec une tangente à l'origine parallèle à l'axe des déformations. Toutes les branches indiquent, à une précision relative de l'ordre du pourcent, la même valeur du module à l'origine :

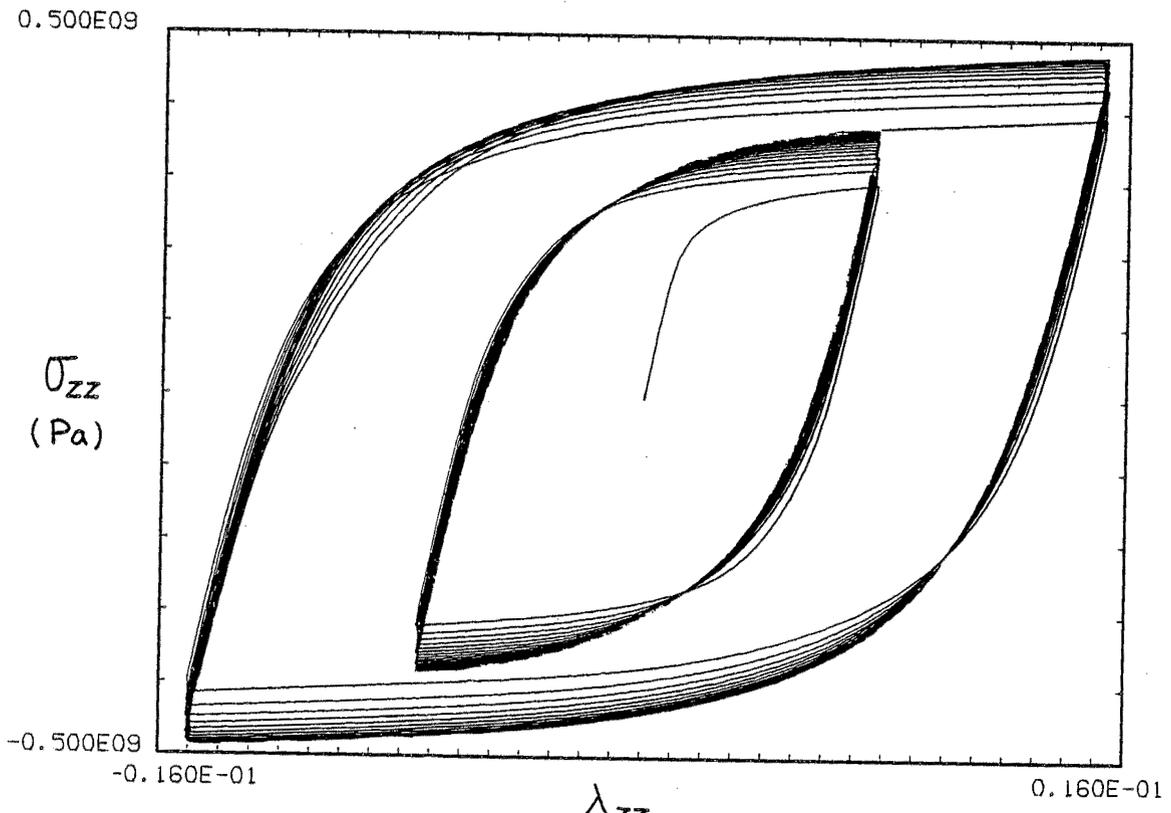
$$M_E(0) = E = 199 \text{ Gpa}$$

C'est la valeur du module d'Young  $E$  du comportement linéaire tangent à l'origine du modèle.

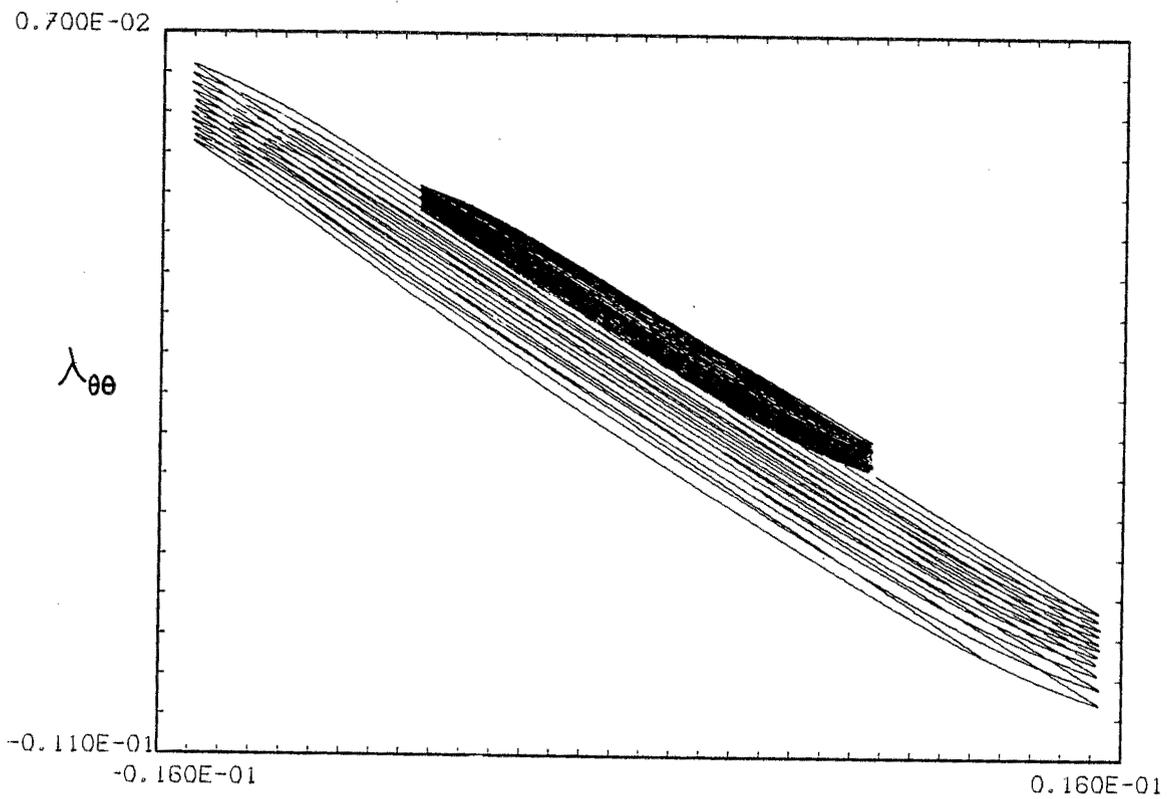
Cette valeur est systématiquement supérieure aux valeurs indiquées dans la littérature qui sont en général des modules sécants (cf. par exemple les résultats de la figure 3 de [20]). Or comme le montrent les résultats de la figure III.4, le module tangent varie rapidement et à 0,2 % il ne représente plus que 65 % du module tangent à l'origine.

La règle de Masing est bien mise en évidence par l'évolution de  $M_E$  pour la courbe de première charge : par une affinité de rapport 2 parallèlement à l'axe des déformations, la courbe de première charge rejoint le faisceau des autres courbes.

La présence d'écrouissage en déformation se traduit par un net élargissement du faisceau des courbes loin de l'origine dans l'espace  $\Delta\sigma$ ,  $\Delta\lambda$  et dans une moindre mesure dans l'espace  $M_E, \Delta\lambda$ .



$\lambda_{zz}$   
(a)



$\lambda_{zz}$   
(b)

Fig. III.1. Essai de traction-compression - Acier inoxydable 316 L (n° 213).

0.210E12

0.100E10

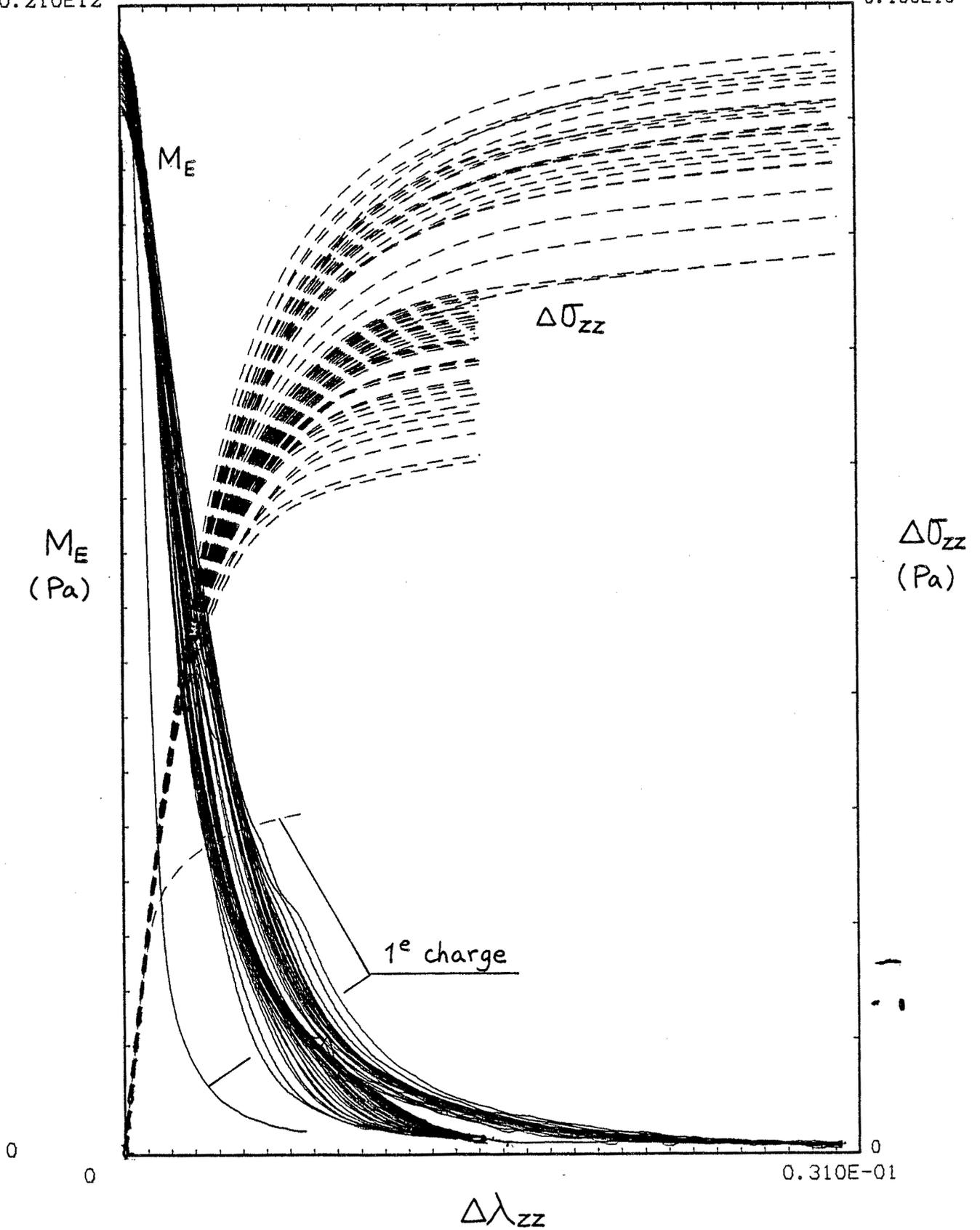


Fig. III.2. Variation du module  $M_E$  pour toutes les branches - Acier inoxydable 316 L (n° 213).

0.210E12

0.800E09

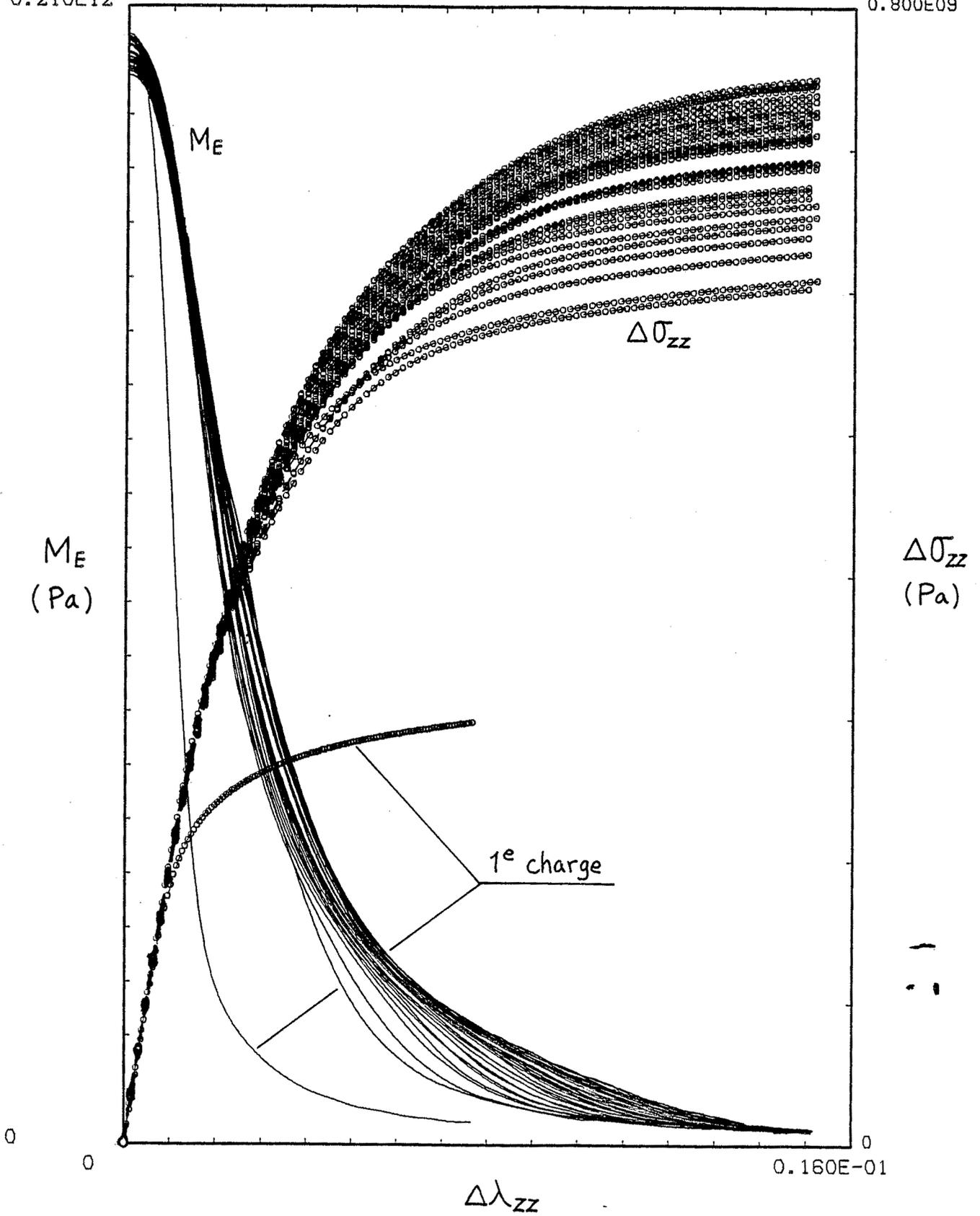


Fig. III.3. Variation du module  $M_E$  pour les premiers petits cycles  
-Acier inoxydable 316 L (n° 213).

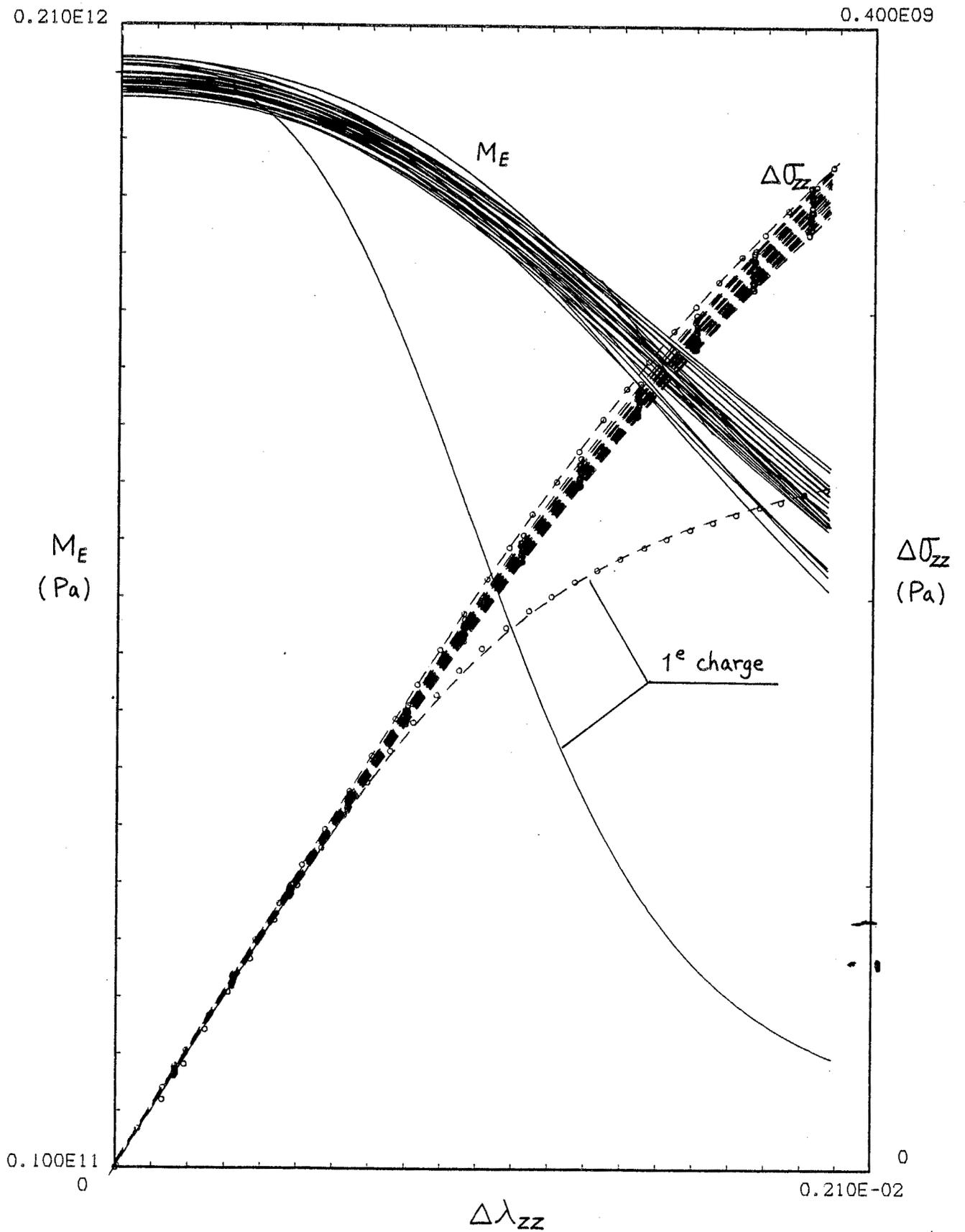


Fig. III.4. Variation du module  $M_E$  dans l'intervalle de déformation [0-0,2 %] - Acier inoxydable 316 L (n° 213).

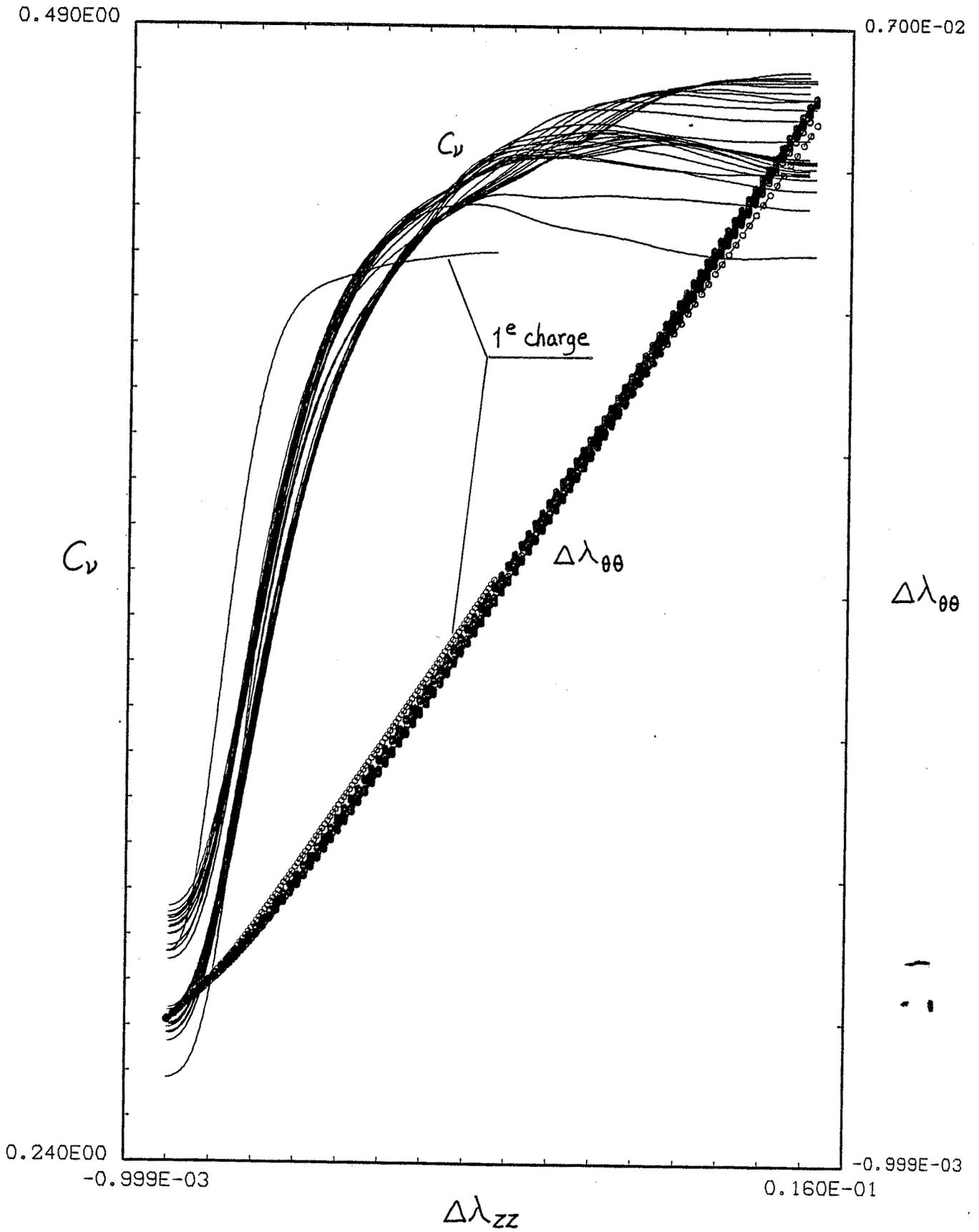


Fig. III.5. Variation du coefficient  $C_\gamma$  - Acier inoxydable 316 L (n° 213).

De la même façon, en représentant les résultats de l'essai dans les axes  $\Delta\lambda_{\theta\theta}, \Delta\lambda_{zz}$  et après lissage il est possible de déterminer le coefficient de Poisson du matériau et la variation du coefficient  $C_\nu$ , défini par :

$$C_\nu = - \frac{d(\Delta\lambda_{\theta\theta})}{d(\Delta\lambda_{zz})}$$

On constate (figure III.5) que le coefficient  $C_\nu$  varie d'une façon continue entre 0.27 - 0.29 près de l'origine et 0.45 - 0.48 sur le pseudo-palier plastique. Comme pour le module  $M_E$ , la variation du coefficient  $C_\nu$  admet une tangente à l'origine parallèle à l'axe de déformation  $\Delta\lambda_{zz}$ .

Considérons maintenant l'essai de traction-compression n° 302 avec l'Inconel 718 : l'essai comprend 20 petits cycles à  $\pm 1\%$  et 20 cycles à  $\pm 1,5\%$  de déformation axiale (figure III.6). Les courbes de charge sont beaucoup plus raides que dans l'essai précédent et semblent indiquer l'existence d'une partie linéaire près de l'origine. En fait, il n'en est rien : en effet, la représentation en axe  $\Delta\sigma_{zz}, \Delta\lambda_{zz}$  (figure III.7 et III.8) montre clairement que le module  $M_E$  varie d'une façon continue comme pour l'acier inoxydable mais avec une évolution moins rapide. Par contre, on constate une séparation très nette près de l'origine des courbes de variation du module  $M_E$ . Le groupe supérieur correspond aux branches de charge dont l'origine est en compression et le groupe inférieur à celles dont l'origine est en traction. Une explication possible est de considérer que le module du comportement tangent à l'origine n'est plus linéaire et varie avec la contrainte axiale  $\sigma_{zz}$  : lorsque le matériau est sous tension, le module d'Young à l'origine est plus faible et tend à augmenter lorsque la contrainte diminue et passe en compression ; ceci explique l'allure sinusoïdale du début des courbes  $M_E$  dont l'origine est en traction. Les deux groupes de courbes se rejoignent après une variation de déformation de 0.6 %, nécessaire pour diminuer la contrainte positive de sa valeur maximum, après inversion, à une valeur proche de zéro. Le phénomène n'a pas été décelé pour l'acier inoxydable puisque le niveau de contrainte atteint à la fin des cycles est environ 2,5 fois plus faible. Une tentative d'explication de ce résultat à partir des propriétés de la micro-structure sera proposée plus loin.

Le coefficient  $C_\nu$  donne des résultats similaires à ceux de l'acier inoxydable (figure III.9) mais pour l'Inconel 718, on constate l'existence de deux groupes de courbe nettement séparées (figure III.7) sauf dans la

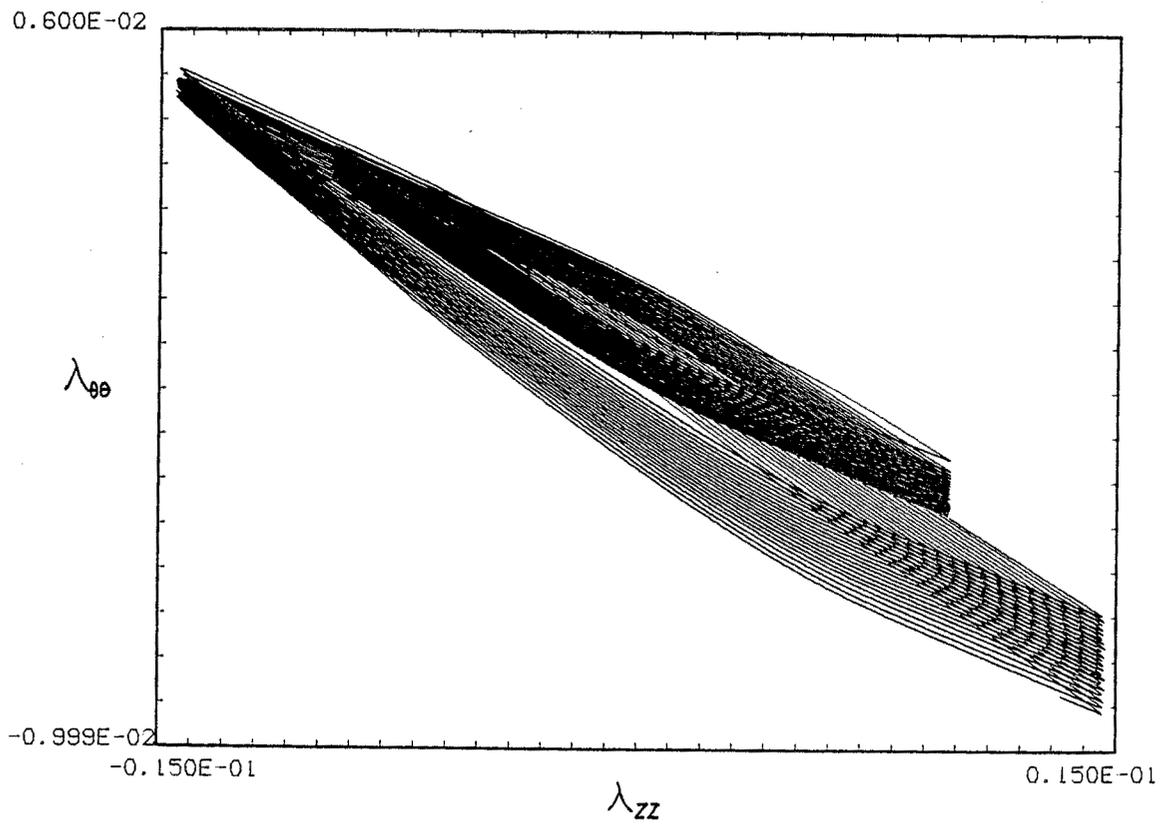
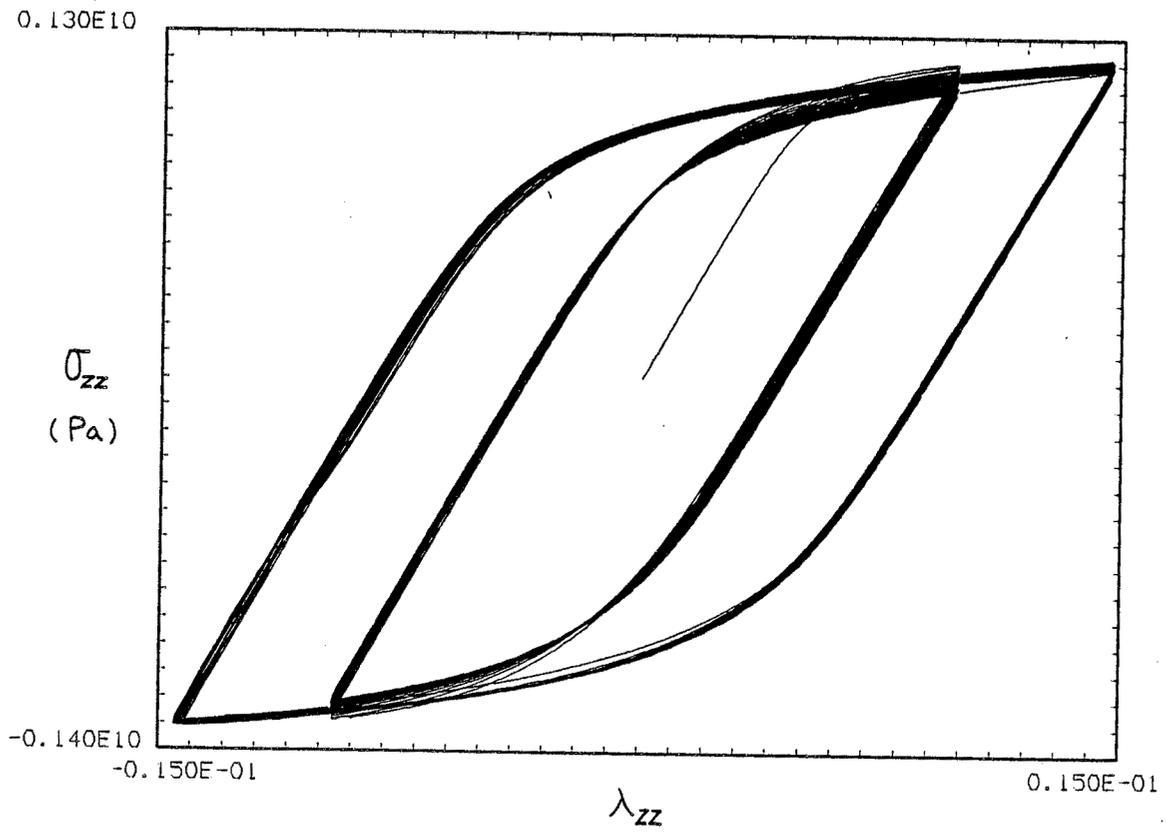


Fig. III.6. Essai de traction-compression - Inconel 718 (n° 302).

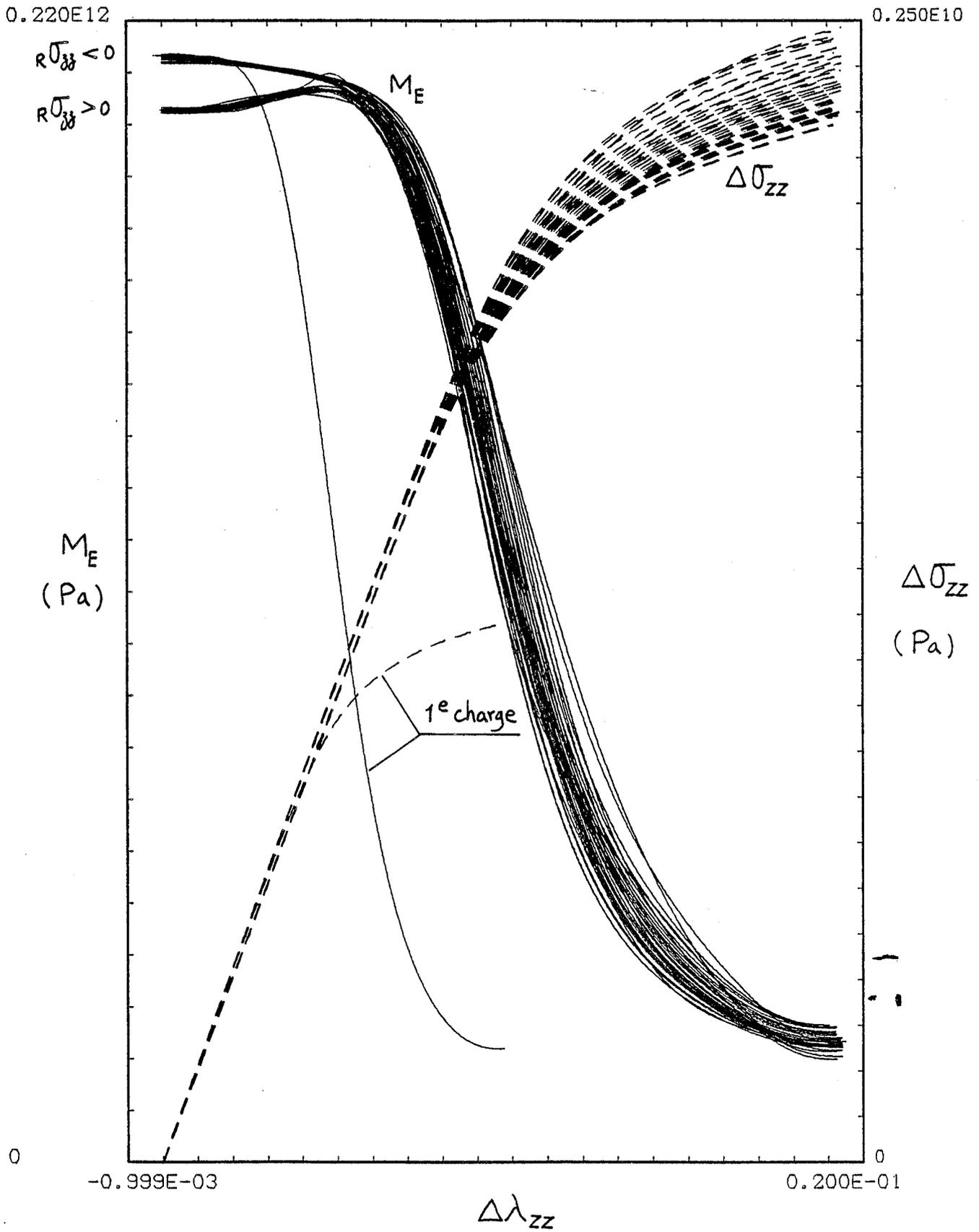


Fig. III.7. Variation du module  $M_E$  - Inconel 718 (n° 302).

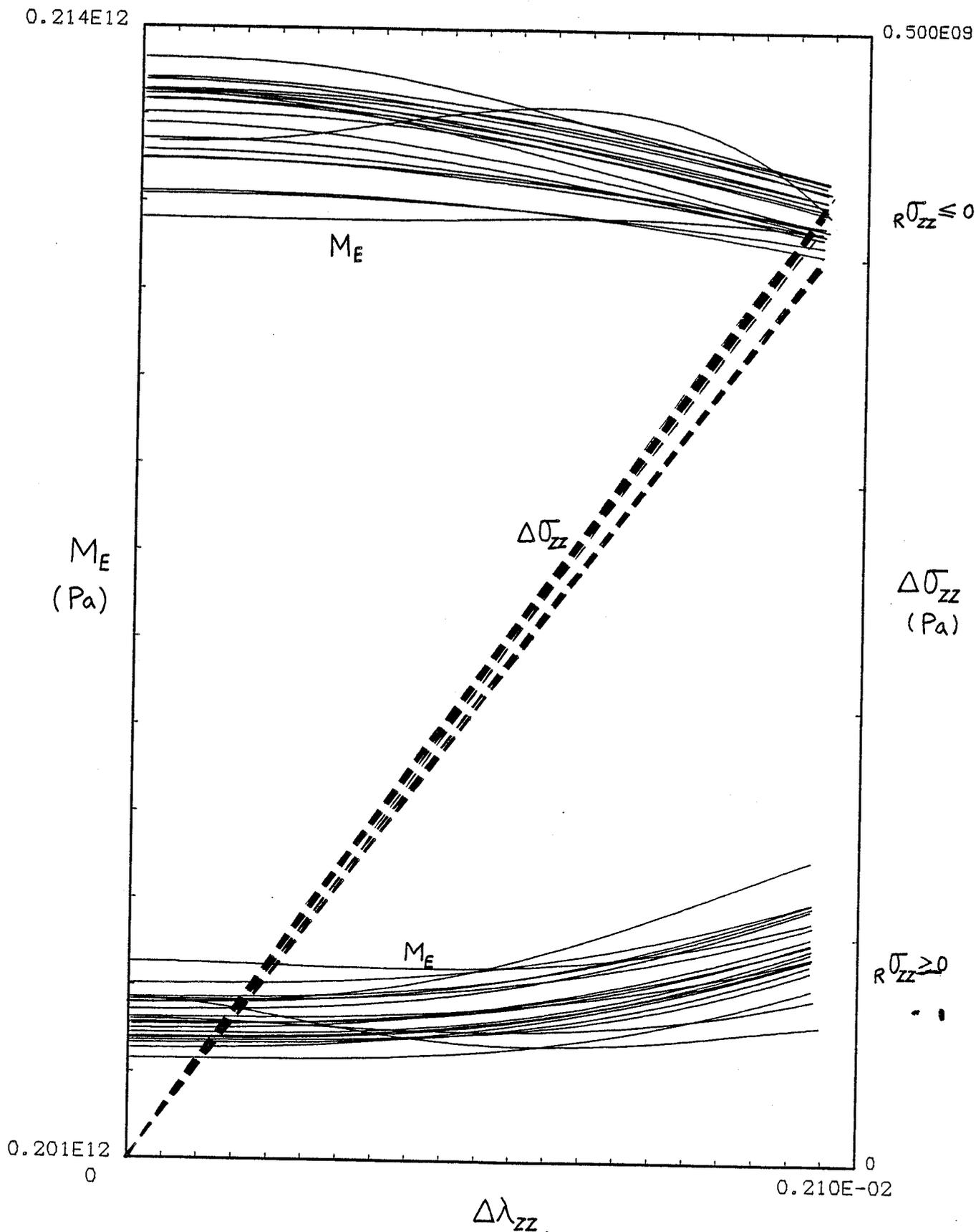


Fig. III.8. Variation du module  $M_E$  dans l'intervalle de déformation [0-0, 2 %] - Inconel 718 (n° 302).

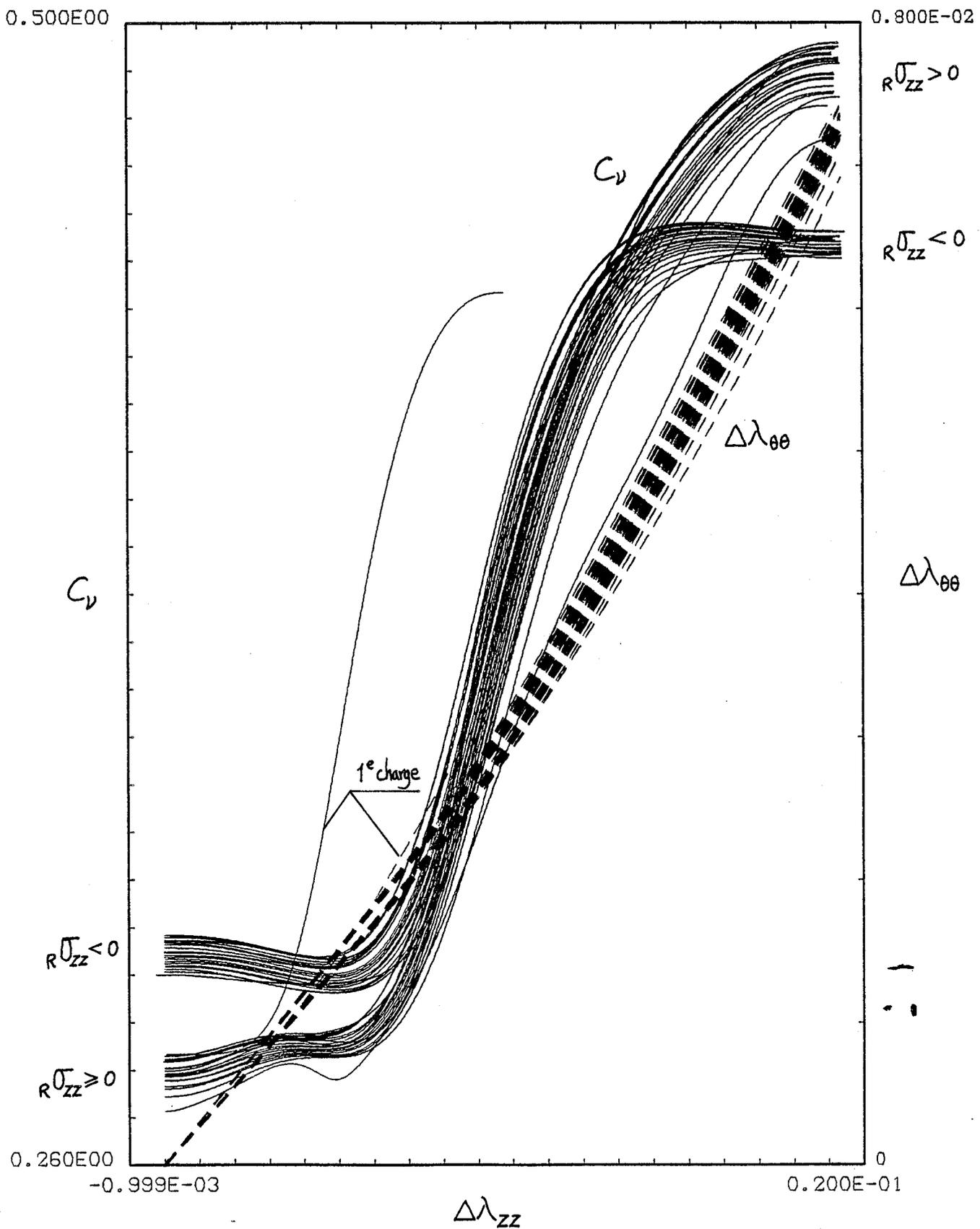


Fig. III.9. Variation du coefficient  $C_\gamma$  - Inconel 718 (n° 302).

portion centrale : pour les branches dont l'état de référence est en compression, le coefficient  $C_y$  varie de 0.305 à 0.45 et pour celles dont l'état de référence est en traction, le coefficient varie de 0,28 à 0,49. La courbe de lère charge se distingue des deux autres groupes et indique une variation de 0,28 à 0,45.

### III.1.2. Essai de torsion alternée à force axiale nulle.

Le dépouillement des essais de torsion alternée est moins simple que celui des essais de traction, en raison de l'état de contrainte non homogène de l'éprouvette : en début de charge, la contrainte  $\sigma_{\theta z}$  a une répartition linéaire en fonction du rayon et tend à s'homogénéiser au fur et à mesure que l'on approche du palier de plasticité [18]. Compte tenu du fait que nous voulons surtout étudier le début des branches de chargement et que d'autre part le modèle suggère qu'après inversion il y a restauration des propriétés, nous sommes conduits à prendre comme hypothèse physique raisonnable une répartition linéaire de  $\Delta\sigma_{\theta z}$  avec le rayon, et la variation de contrainte de cisaillement à la surface extérieure du tube est donnée en fonction de la variation du couple  $\Delta C$  par :

$$\Delta\sigma_{\theta z} = \frac{2 R_e}{\pi (R_e^4 - R_i^4)} \cdot \Delta C$$

Après lissage des courbes de charge, on est donc en mesure de définir un module tangent de cisaillement par :

$$M_u = \frac{1}{2} \cdot \frac{d(\Delta\sigma_{\theta z})}{d(\Delta\lambda_{\theta z})}$$

Pour illustrer le comportement de l'acier inoxydable, on a dépouillé l'essai n° 214 qui comprend des petits cycles et des grands cycles à  $\pm 0.43$  et  $\pm 0.86$  % respectivement (figure III.10). Comme pour les essais de traction, on constate que près de l'origine, le module tangent  $M_u$  a une répartition parabolique avec une tangente à l'origine parallèle à l'axe des déformations. Toutes les branches indiquent une même valeur du module à l'origine (figure III.11 et figure III.12).

Le comportement en torsion de l'Inconel 718 est illustré par l'essai n° 303 (figure III.13). On constate d'une part ici l'existence

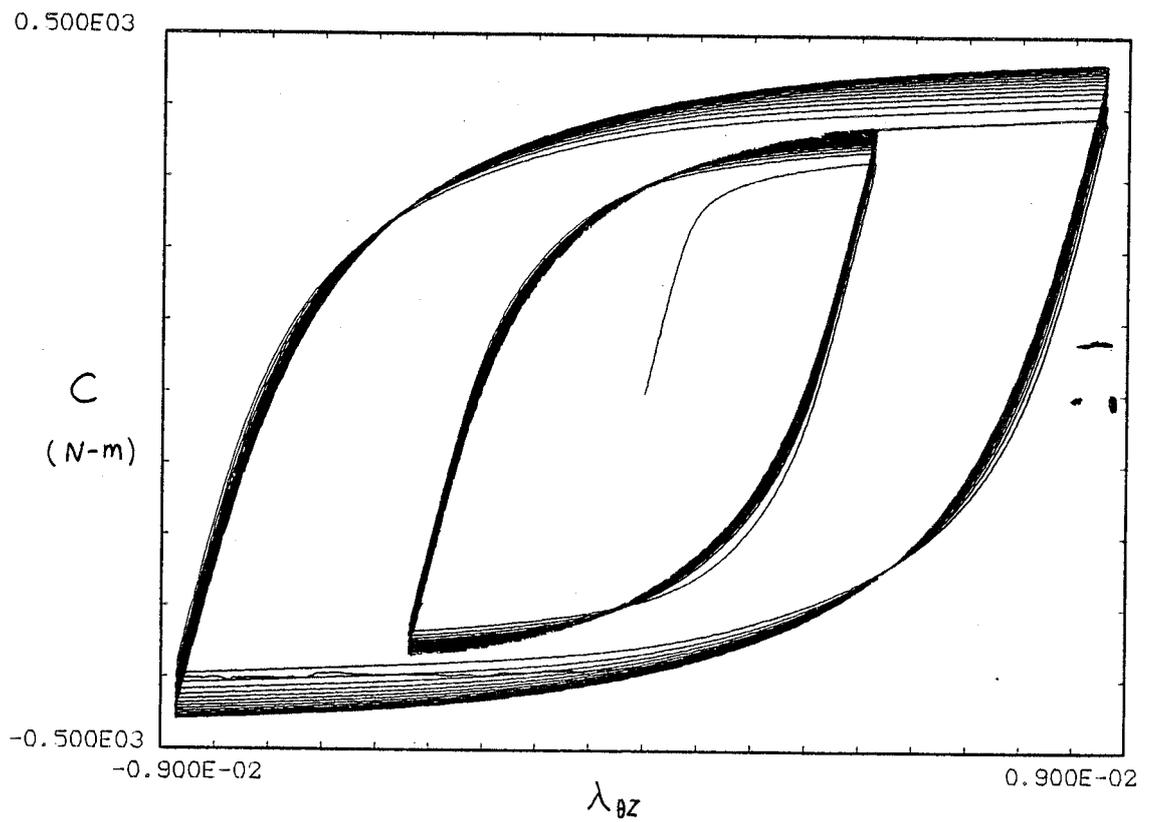
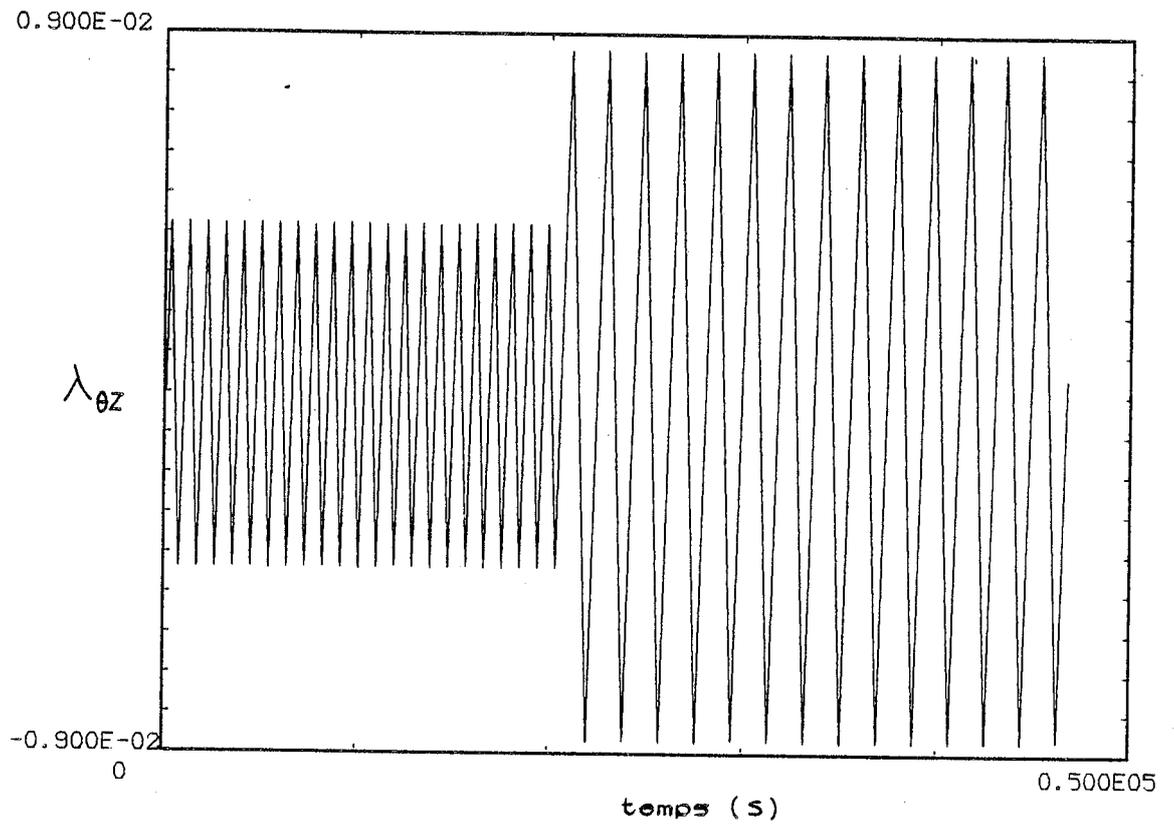


Fig. III.10. Essai de torsion alternée - Acier inoxydable 316 L (n° 214).

0.900E11

0.220E09

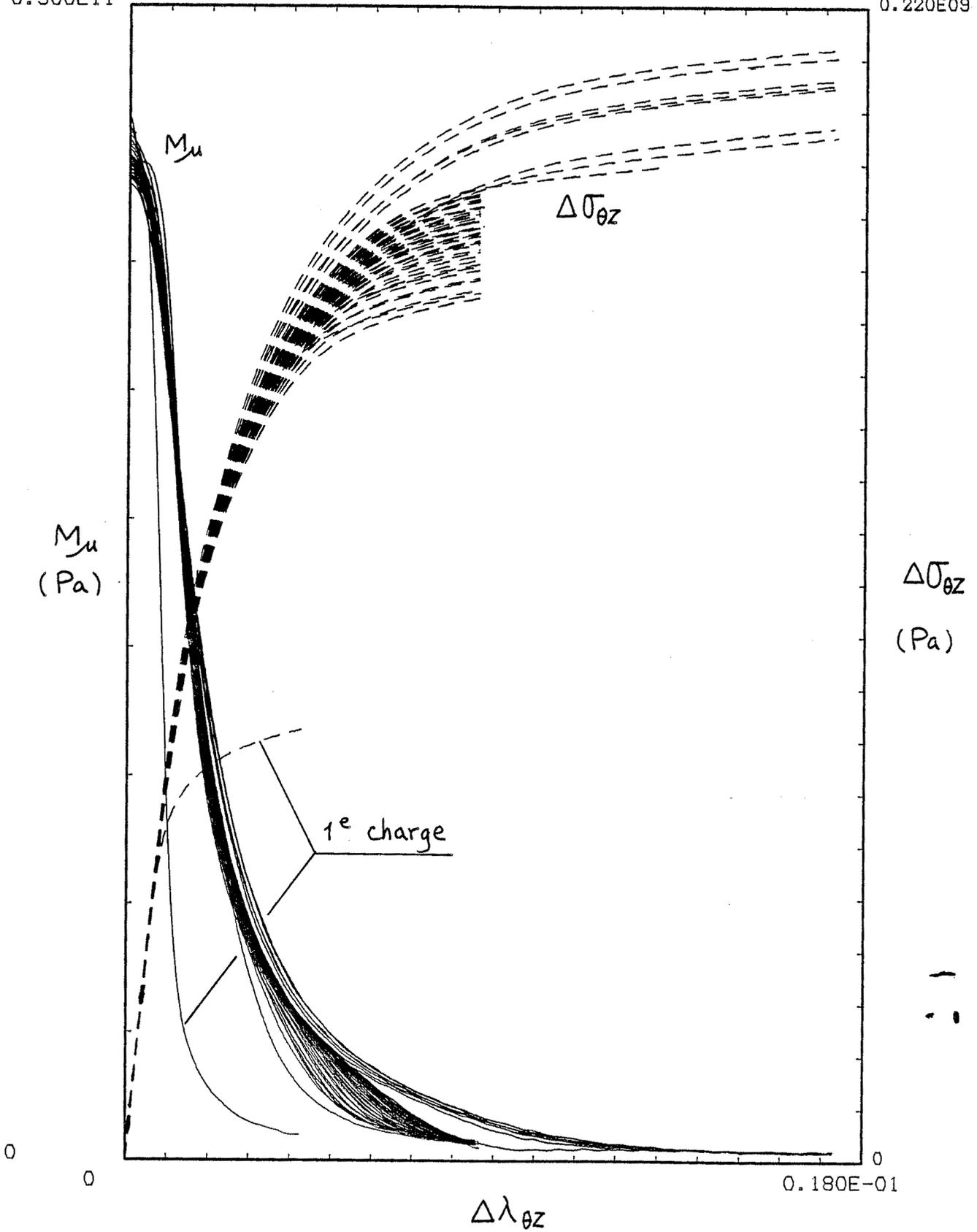


Fig. III.11. Variation du module  $M_u$  - Acier inoxydable 316 L (n° 214).

0.900E11

0.120E09

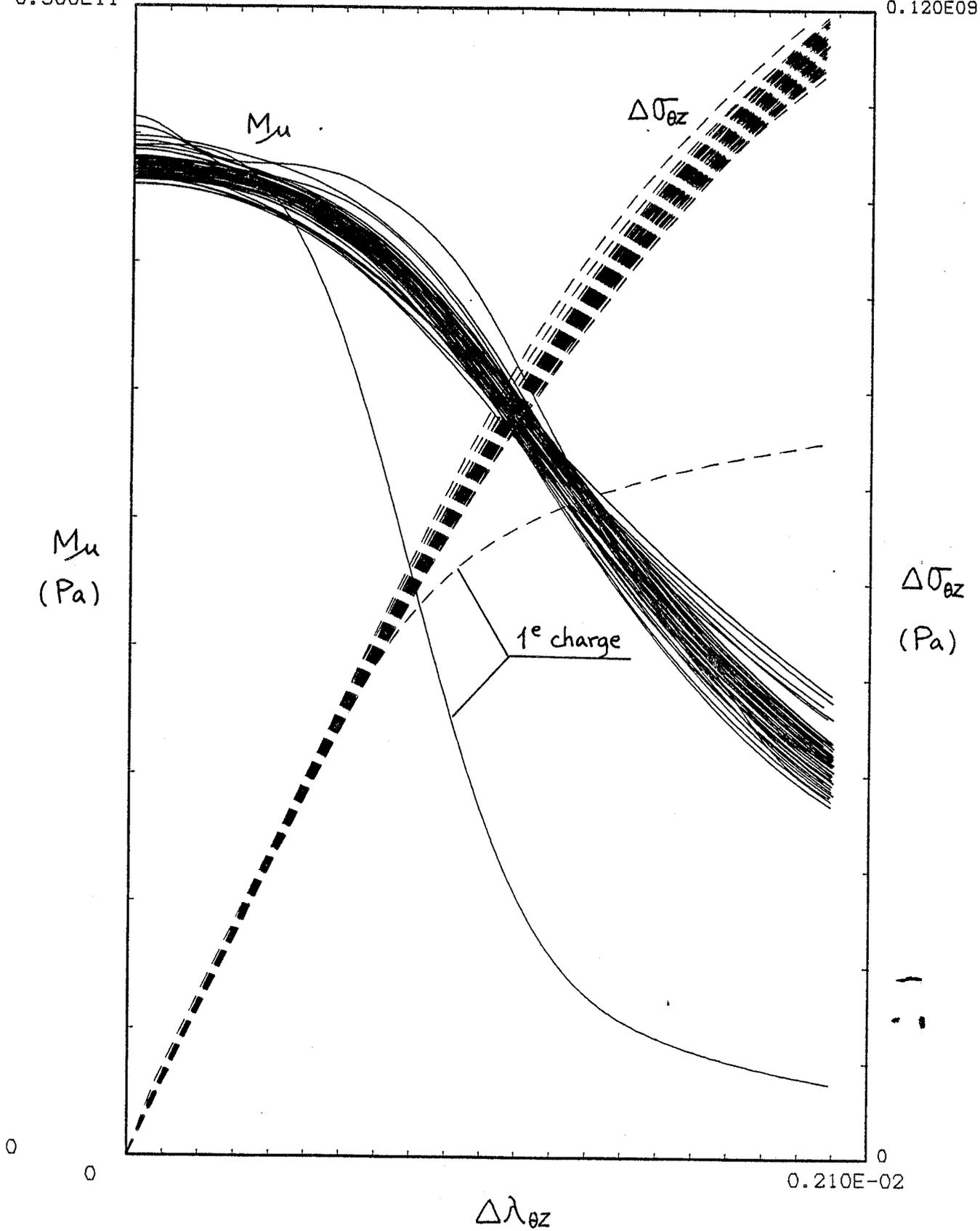


Fig. III.12. Variation du module  $M_u$  dans l'intervalle de déformation [0-0,2 %] - Acier inoxydable 316 L (n° 214).

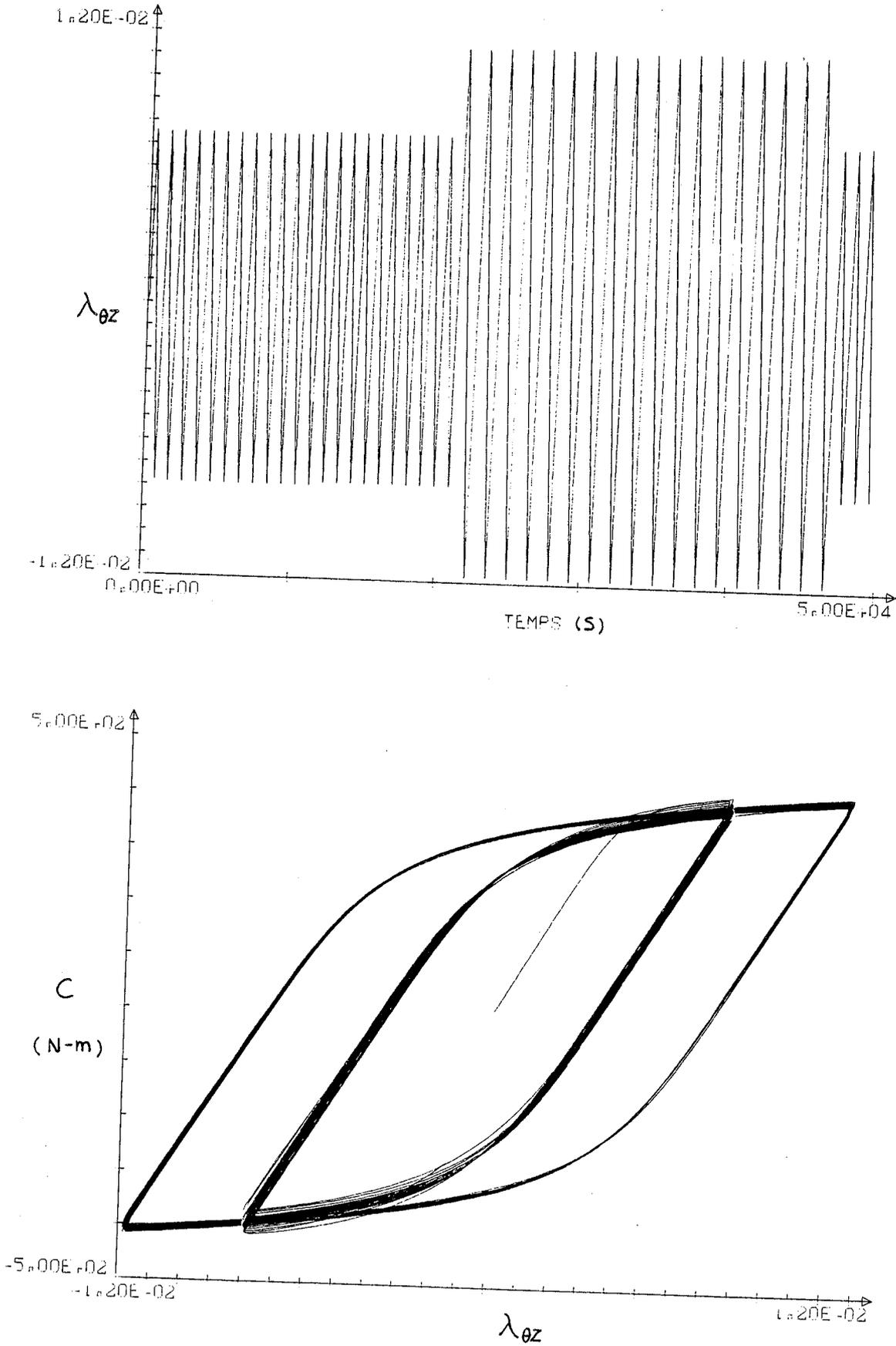


Fig. III.13. Essai de torsion alternée - L'inconel 718 (n° 303).

0.900E11

0.800E09

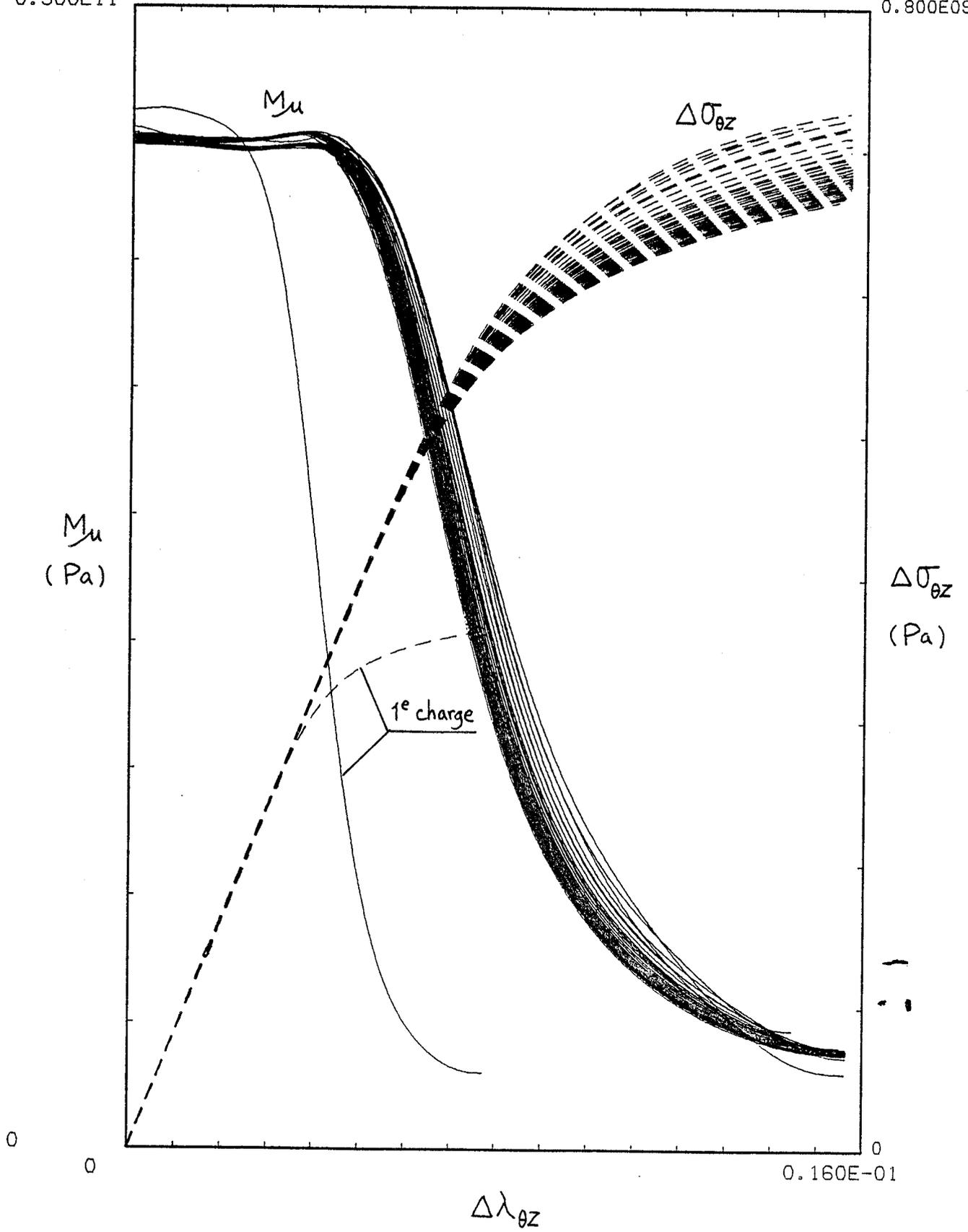


Fig. III.14. Variation du module  $M_u$  - Inconel 718 (n° 303).

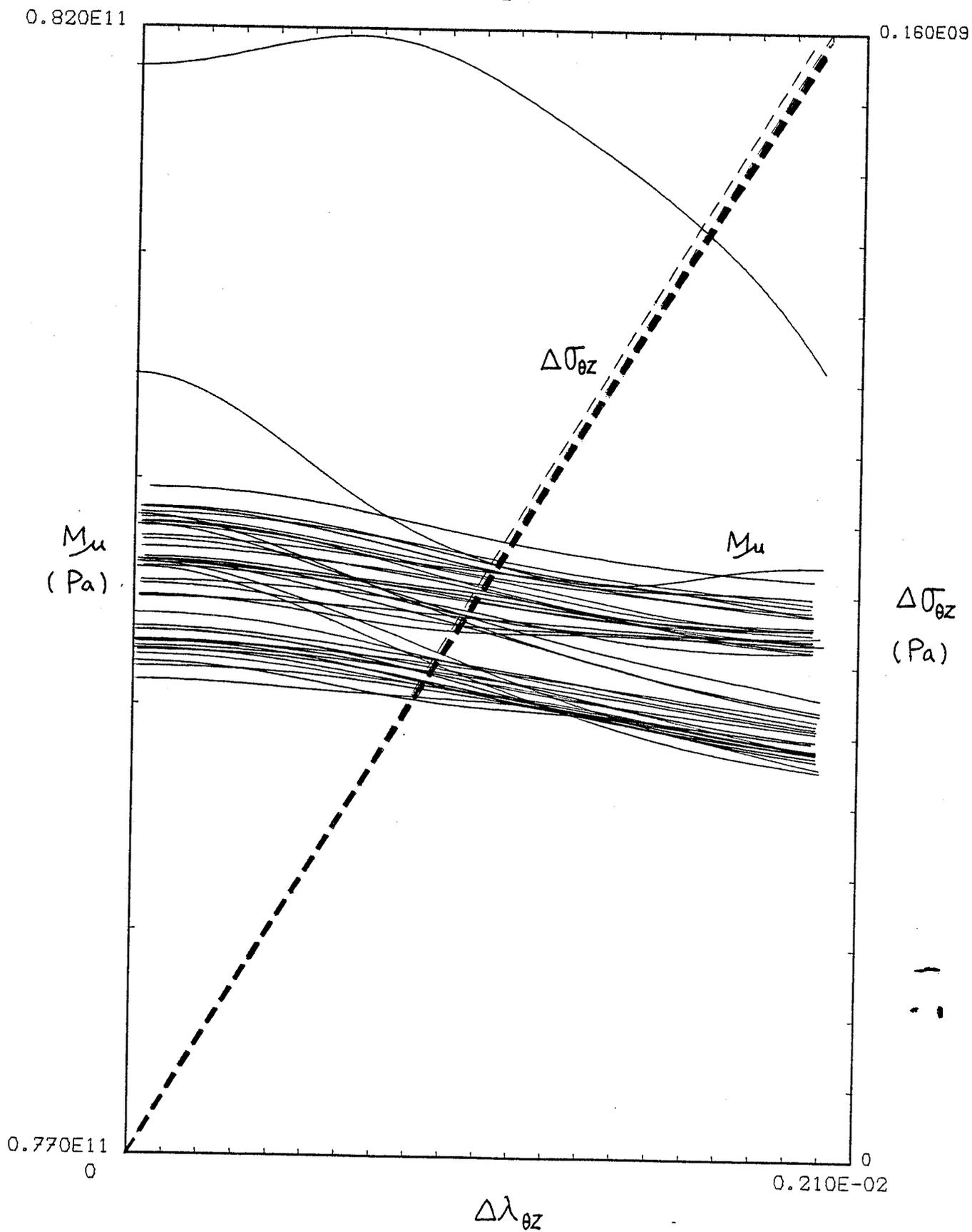


Fig. III.15. Variation du module  $M_{\mu}$  dans l'intervalle de déformation [0-0, 2 %] - Inconel 718 (n° 303).

d'un pseudo-palier pour le module tangent  $M_u$  et d'autre part que toutes les branches ont la même valeur à l'origine sauf la première charge qui indique une valeur supérieure (figure III.14 et figure III.15). En fait la variation du module  $M_u$  semble identique à celle du module  $M_E$  pour les branches dont l'état de référence est en traction. Pour la courbe de lère charge, la répartition semble identique, au rapport d'homothétie près, à celle de  $M_E$  pour les branches dont l'état de référence est en compression (figure III.14). On verra plus loin comment une analyse au niveau microstructural permet de proposer une explication globale de ces résultats.

### III.1.3. Essai de traction-compression et torsion combinées

Dans les exemples précédents, nous n'avons examiné que des cas où la sollicitation est simple. Pour contrôler la validité des propriétés du comportement d'hystérésis, nous allons traiter le cas du matériau soumis à des efforts de traction-compression et de torsion combinées.

Nous effectuons les trois types d'essais suivants :

a) D'abord la traction simple jusqu'à un certain niveau d'effort, ensuite la torsion alternée en gardant la force axiale constante. C'est le cas de l'essai n° 210.

b) D'abord la torsion simple jusqu'à un certain couple, ensuite la traction-compression cyclique en conservant l'effort du couple. C'est le cas de l'essai n° 220.

c) Des efforts de traction-compression et de torsion cyclique sont imposés simultanément sur l'éprouvette. C'est le cas de l'essai n° 216.

Considérons à titre d'exemple les résultats de l'essai n° 216 (acier inoxydable 316 L) de traction-compression et torsion cycliques combinées (figure III.16 et figure III.17). Cet essai est contrôlé en déformation symétrique. Pour les petits cycles, on a  $\pm 0.4$  % en traction-compression,  $\pm 0.3$  % en torsion, pour les grands cycles, on a  $\pm 0.6$  % en traction-compression,  $\pm 0.45$  % en torsion. On fait d'abord 29 petits cycles à la vitesse habituelle suivie de deux cycles à la vitesse de

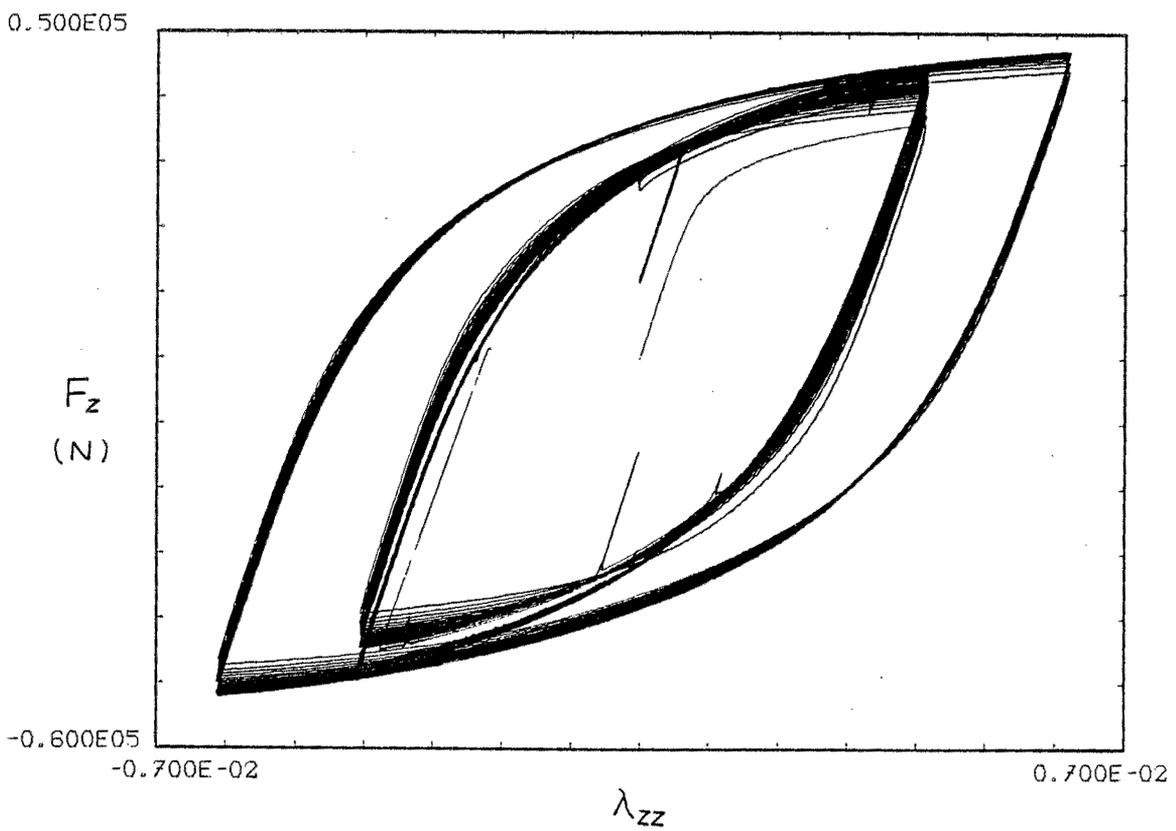
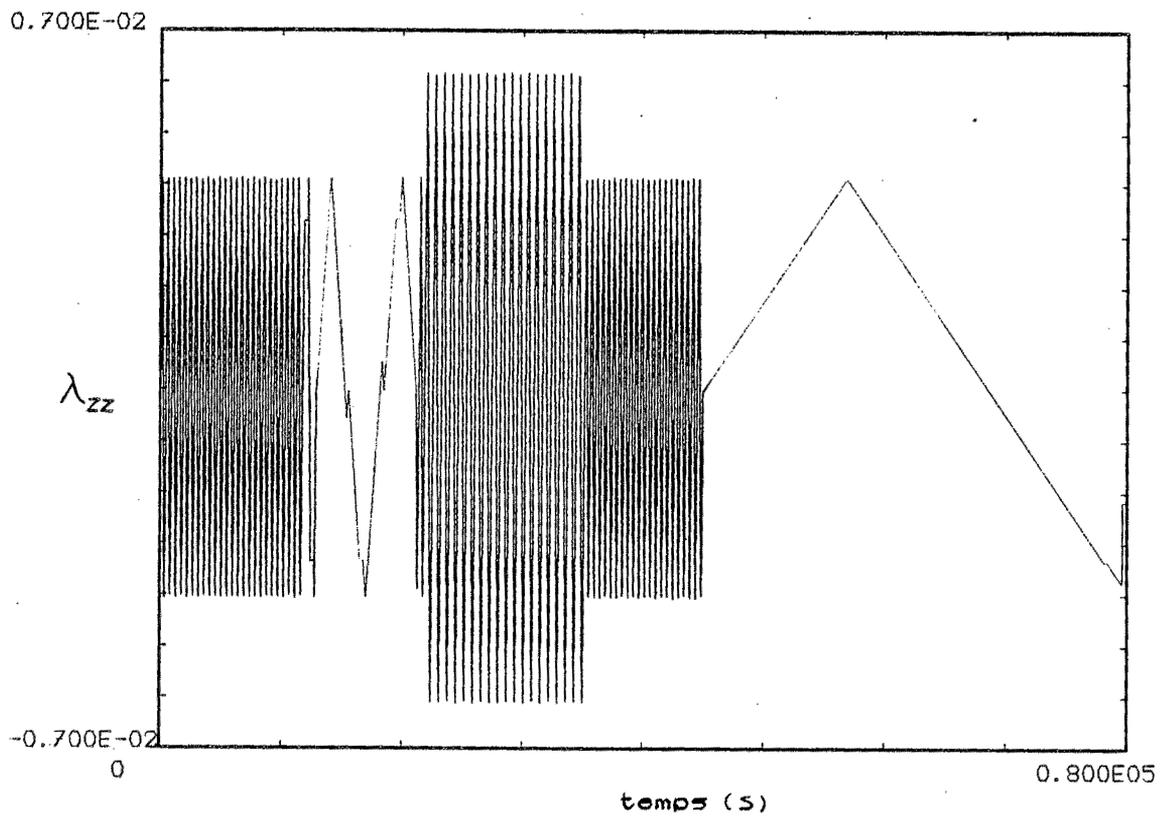


Fig. III.16. Essai de traction-torsion combinées - Direction axiale - Acier inoxydable 316 L (n° 216).

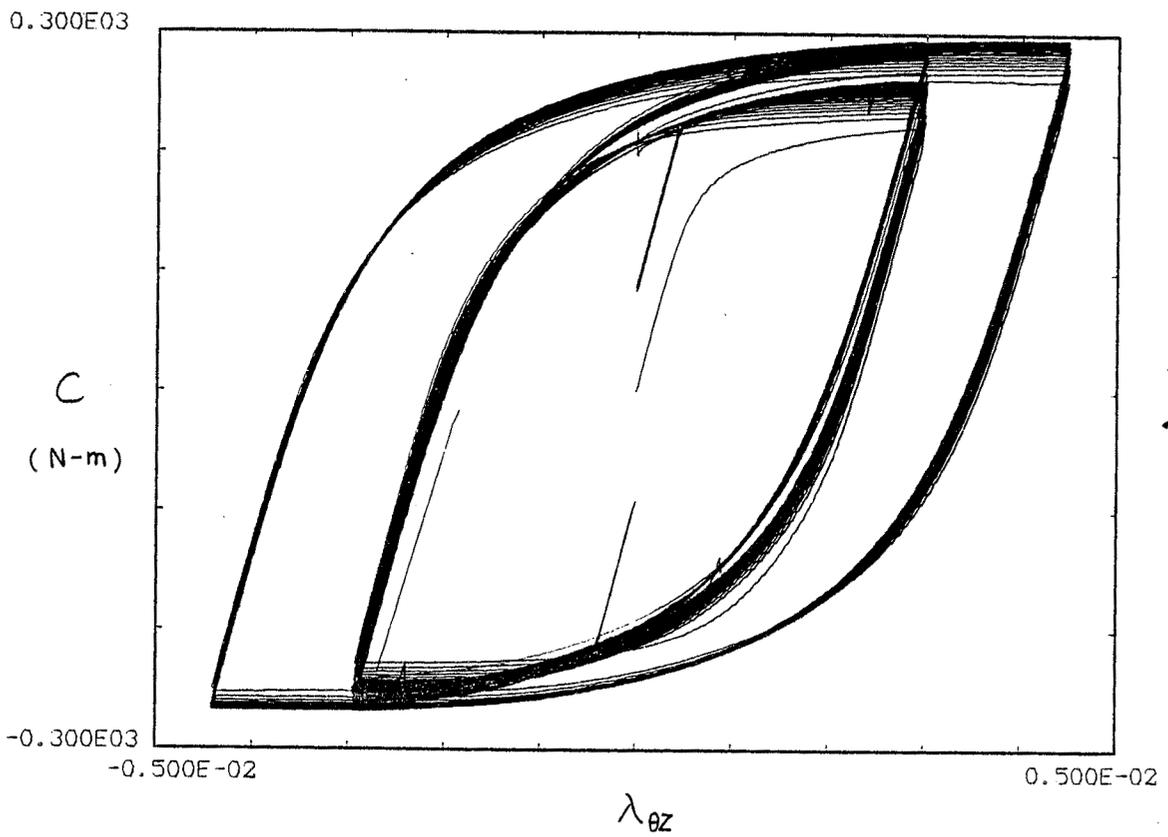
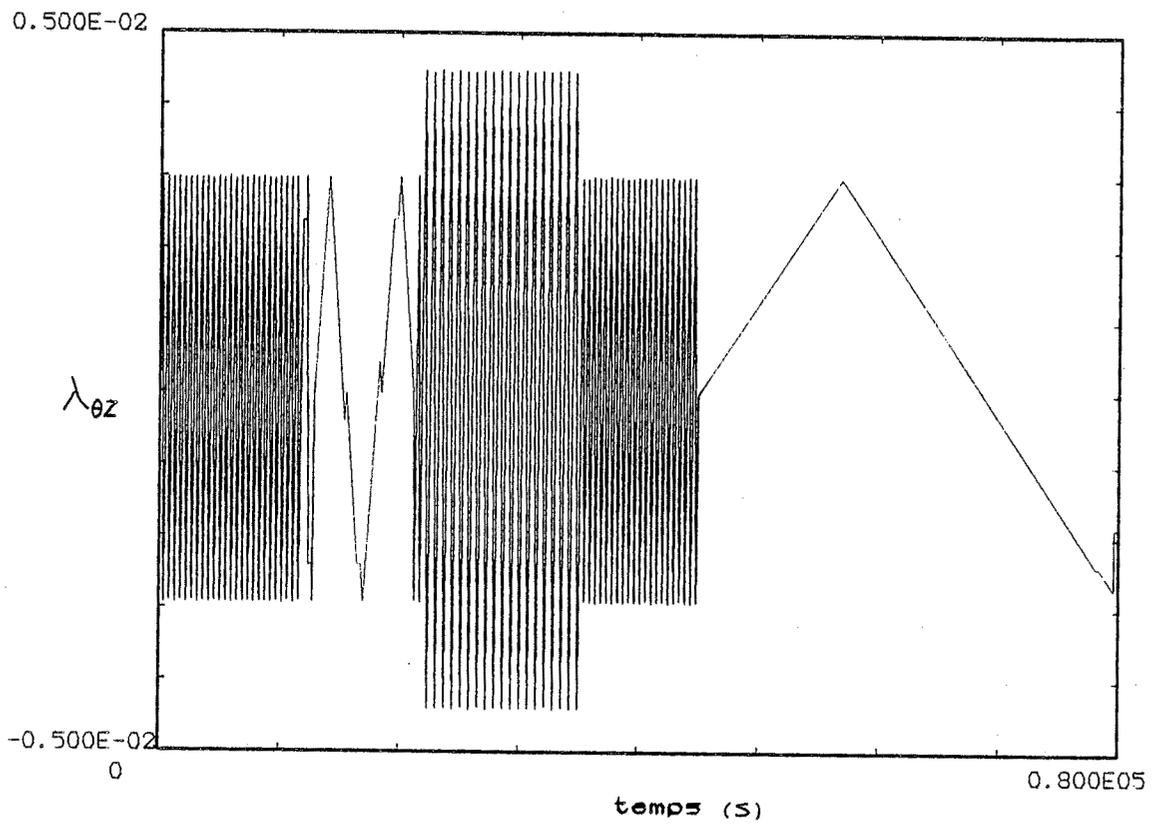


Fig. III.17. Essai de traction-torsion combinées - Direction de torsion - Acier inoxydable 316 L (n° 216).

0.210E12

0.600E09

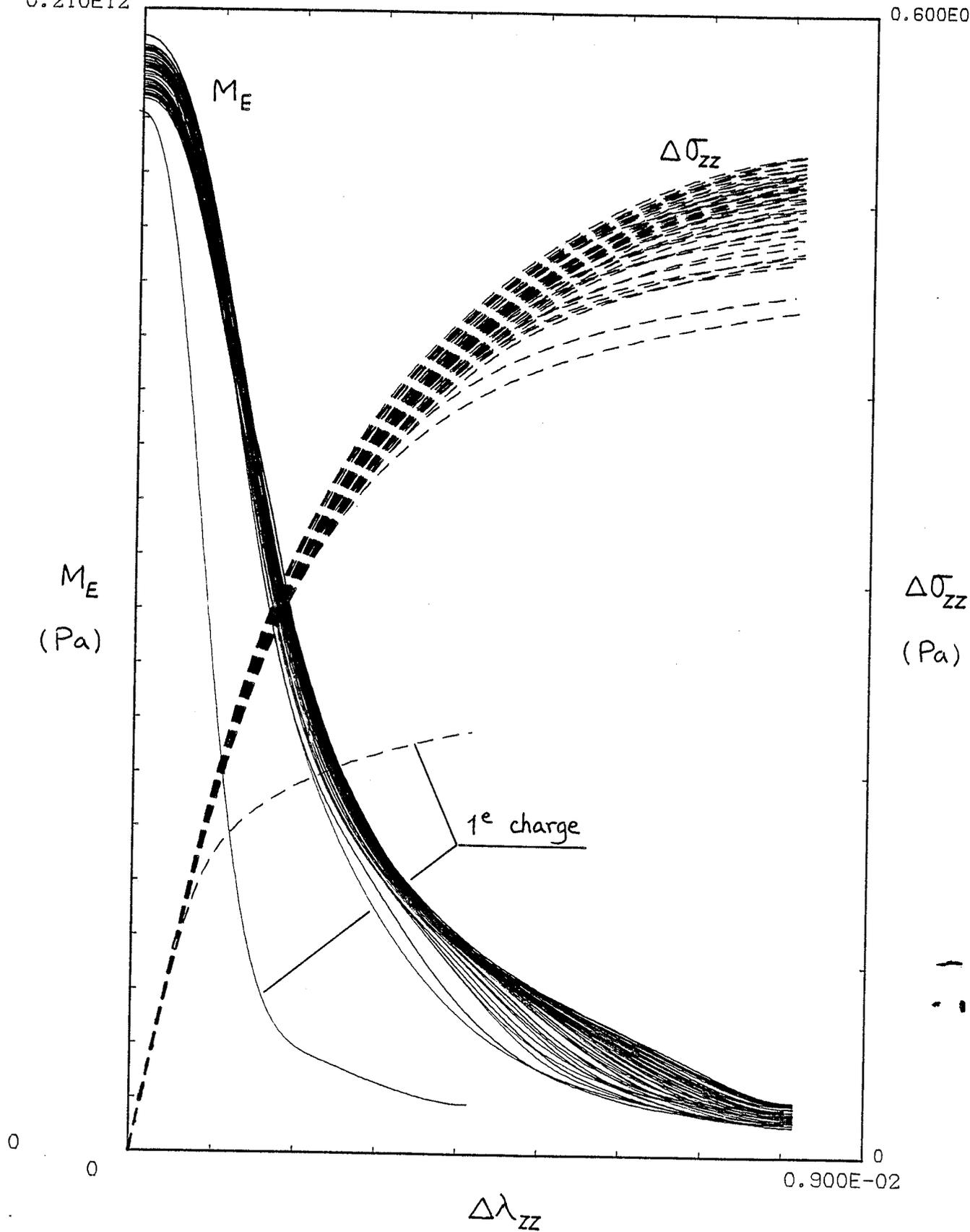


Fig. III.18. Variation du module  $M_E$  - Acier inoxydable 316 L (n° 216).

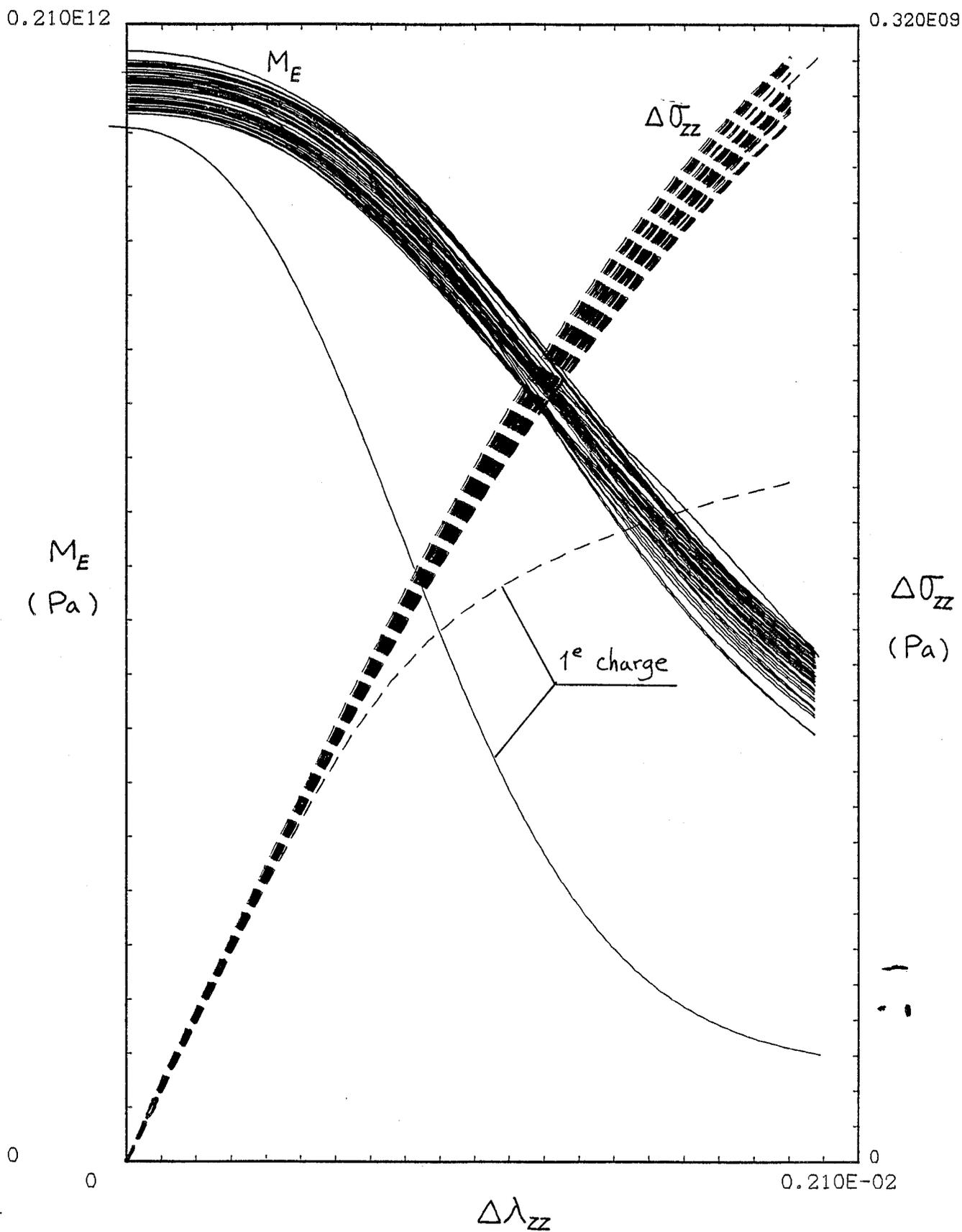


Fig. III.19. Variation du module  $M_E$  dans l'intervalle de déformation [0-0,2 %] - Acier inoxydable 316 L (n° 216).

0.570E00

0.400E-02

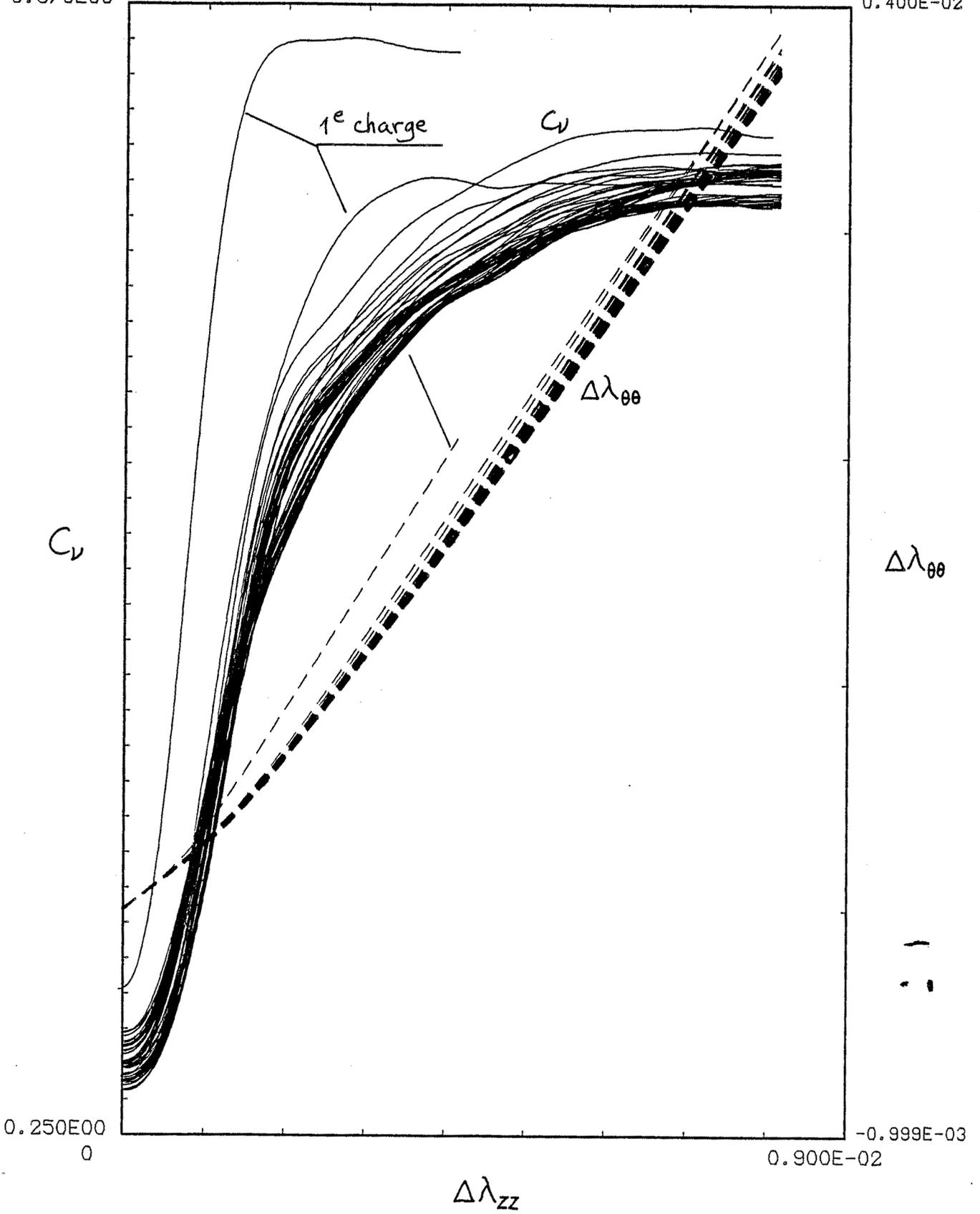


Fig. III.20. Variation du coefficient  $C_y$  -

316 L (n° 216).

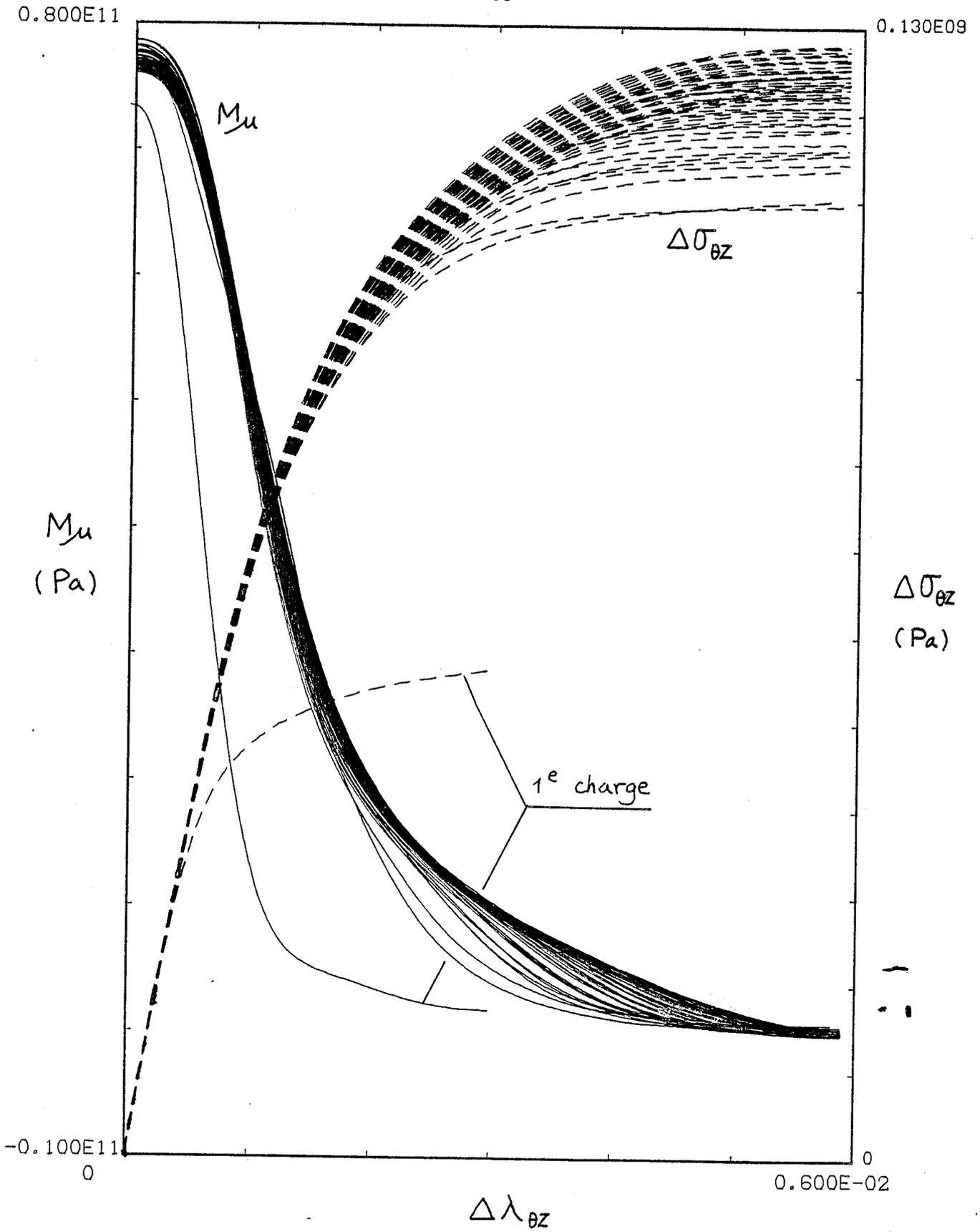


Fig. III.21. Variation du module  $M_u$  - Acier inoxydable 316 L (n° 216).

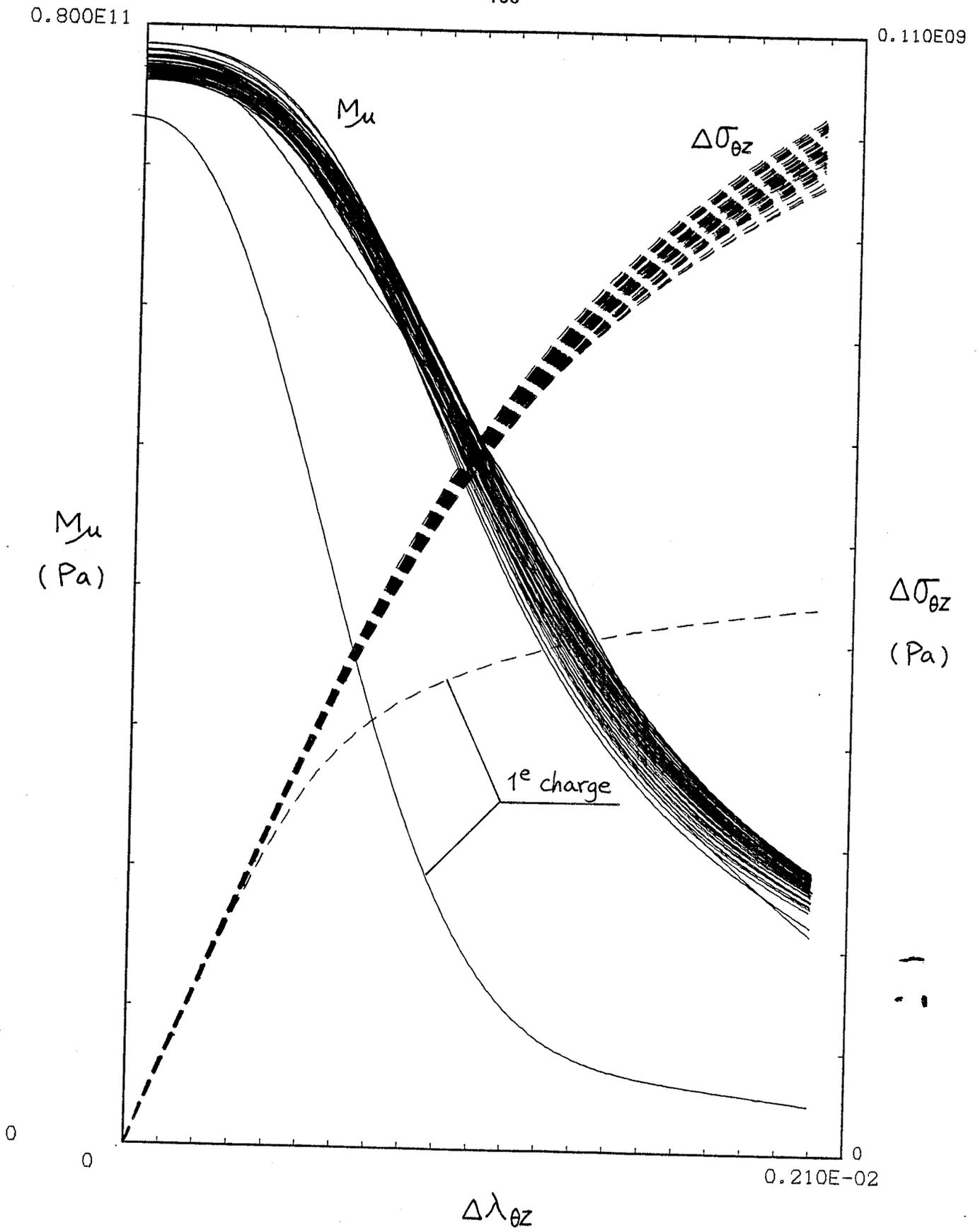


Fig. III.22. Variation du module  $M_u$  dans l'intervalle de déformation. [0-0,2 %] - Acier inoxydable 316 L (n° 216).

déformation  $3 \times 10^{-6}$ , ensuite 19 grands cycles, et enfin on revient à 21 petits cycles dont 1/2 cycle avec la vitesse de déformation  $3 \times 10^{-7}$ .

Les contraintes relatives  $\Delta \overline{\sigma}_{33}$  et  $\Delta \overline{\tau}_{\theta z}$  et les modules tangents  $M_E$ ,  $M_\mu$  ainsi que le coefficient  $C_\nu$ , sont obtenus comme précédemment. Sur les figures III.18 à III.20 sont présentés les résultats des premiers petits cycles de l'essai pour la partie de traction-compression et sur les figures III.21 à III.22 pour la partie de torsion.

On constate alors que, comme pour les exemples précédents, il n'existe pas de partie linéaire près de l'origine : les modules  $M_E$ ,  $M_\mu$  et le coefficient  $C_\nu$  varient d'une façon continue comme le carré des déformations  $\Delta \lambda_{33}$  ou  $\Delta \lambda_{\theta z}$  respectivement. A une précision relative de l'ordre du pourcent, on retrouve les mêmes valeurs à l'origine sauf la première charge qui est un peu différente.

Pour l'essai de traction simple, torsion alternée n° 210 et l'essai de torsion simple, traction-compression cyclique n° 220, on retrouve les mêmes propriétés qui sont évoquées dessus.[45]

#### III.1.4. Valeurs des coefficients élastiques

Finalement, en tenant compte des résultats obtenus avec les essais de traction-compression (n° 213, n° 215), les essais de torsion (n° 208, n° 214) et les essais combinés (n° 210, n° 216, n° 220), les valeurs des coefficients élastiques pour l'acier inoxydable 316 L sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} E = 199 \pm 2 \text{ (Gpa)} \\ \nu = 0,280 \pm 0.015 \\ \mu = 77,6 \pm 1.1 \text{ (Gpa)} \end{array} \right.$$

L'intervalle indiqué a été déterminé en tenant compte du nombre de branches de chaque essai. On constate que les valeurs de ces coefficients, qui sont déterminées indépendamment les uns des autres, ont bien le sens de coefficients élastiques tangents ; par exemple le coefficient de cisaillement est compatible avec la valeur définie par :

$$\mu^* = \frac{E}{2(1+\nu)} = 77,7 \text{ Gpa}$$

Pour l'Inconel 718, les coefficients élastiques ne peuvent pas être considérés comme constants dans l'intervalle de contrainte

exploré ; celui-ci est environ trois fois plus grand. A l'état neutre, le comportement tangent à l'origine est caractérisé par trois valeurs mesurées indépendamment les unes des autres :

$$\left\{ \begin{array}{l} E_0 = 212,7 \text{ Gpa} \\ \nu_0 = 0,28 \\ \mu_0 = 81,8 \text{ Gpa} \end{array} \right.$$

A une précision relative de 1,3 % ces mesures sont compatibles puisqu'on a :

$$\mu_0^* = \frac{E_0}{2(1+\nu_0)} = 82,9 \text{ Gpa}$$

Les valeurs sous état de contrainte élevée sont :

a) traction :  $\bar{\sigma}_{33} \simeq 1140 \text{ Mpa}$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_t = 202,7 \pm 0,5 \text{ (Gpa)} \\ \nu_t = 0,278 \pm 0,005 \end{array} \right.$$

b) compression :  $\bar{\sigma}_{33} \simeq -1250 \text{ Mpa}$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_c = 212,7 \pm 0,8 \text{ (Gpa)} \\ \nu_c = 0,305 \pm 0,005 \end{array} \right.$$

c) cisaillement :  $\bar{\sigma}_{03} \simeq \pm 700 \text{ Mpa}$

$$\mu_c = 79,5 \pm 0,4 \text{ (Gpa)}$$

L'intervalle d'erreur indiqué correspond à la dispersion des résultats donnés par l'ensemble des branches de chargement. Pour les valeurs à l'état neutre, on ne dispose que d'une mesure unique.

Une modélisation valable de la variation des coefficients élastiques de l'Inconel 718 ne peut être obtenu, compte tenu du peu de résultats macroscopiques dont on dispose, qu'en accord avec les phénomènes microstructuraux ; une proposition sera faite dans le paragraphe III.3.

### III.2. Petits cycles dans un cycle stabilisé

Les résultats analysés dans le paragraphe précédent sont influencés par l'érouissage en déformation. C'est pourquoi nous avons effectué quelques petits cycles décrits dans un cycle stabilisé ; ce chemin traduit

mieux les propriétés du comportement d'hystérésis pure.

Pour faire abstraction des problèmes de troncature, introduits par l'acquisition digitale des données, un enregistrement analogique d'un petit cycle a été effectué pour l'essai n° 213 avec l'acier inoxydable 316 L (figure III.23). On constate :

a) le petit cycle est fermé avec une surface finie, ce résultat est en conformité avec les variations de  $M_E$  (figure III.4).

b) à la fin du petit cycle lors de la traversée du cycle stabilisé, la branche CDE montre une très forte variation de la courbure et une tendance à un léger rebond au dessus du prolongement de la branche AB. A une précision relative de 1 % en contrainte, on peut considérer que la branche CDE est constituée de deux arcs CD et DE avec une discontinuité de la pente en D.

Ce résultat est confirmé par d'autres tracés de petits cycles dans un cycle stabilisé pour un essai de traction-compression et torsion combinées, avec les inconvénients d'une restitution digitale des données (figure III.24).

III.3. Aspect microstructural et remarques sur le comportement d'hystérésis pure.

Pour faciliter la comparaison entre les phénomènes macroscopiques et microscopiques, considérons d'abord le cas de l'acier inoxydable 316 L dont le comportement macroscopique est plus simple.

III.3.1. Irréversibilité immédiate de la déformation.

Les résultats expérimentaux indiquent que ce matériau manifeste des déformations irréversibles immédiatement après une inversion, soit après une variation de contrainte de l'ordre du Mpa, compte tenu de la précision de nos essais (figures III.4 et III.12).

Considérons maintenant le point de vue microstructural en vue de rechercher une explication de nos observations. Pour ce matériau polycristallin, le réseau cristallin de chaque grain a une orientation quelconque par rapport à la sollicitation. Il existe donc toujours un grain "sensible", compte tenu de sa forme et de l'orientation de son réseau, dans lequel une dislocation, existant à l'état initial, peut se désancrer

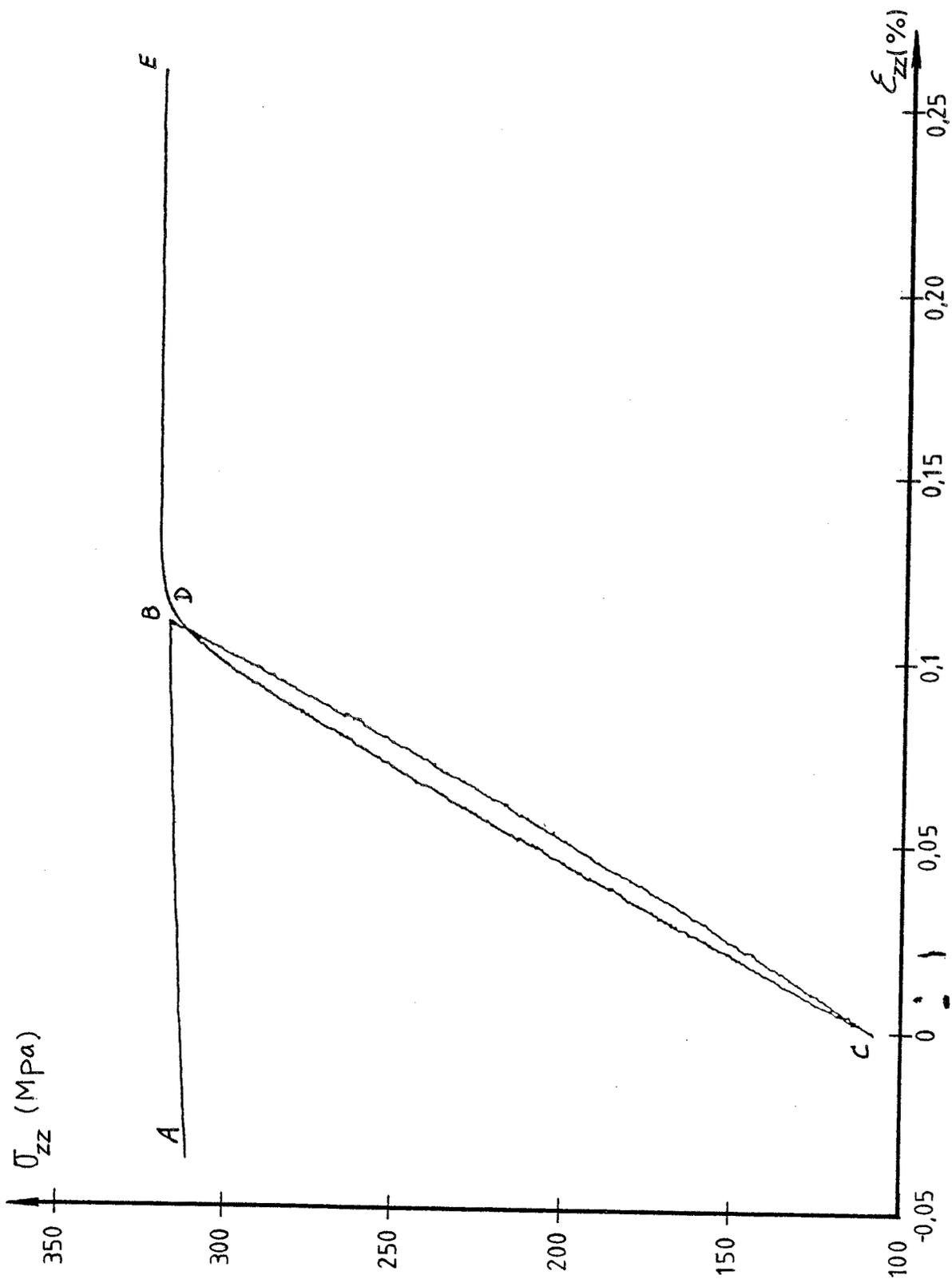


Fig. III.23. Petit cycle dans un cycle stabilisé de traction-compression - Acier inoxydable 316 L (n° 213).

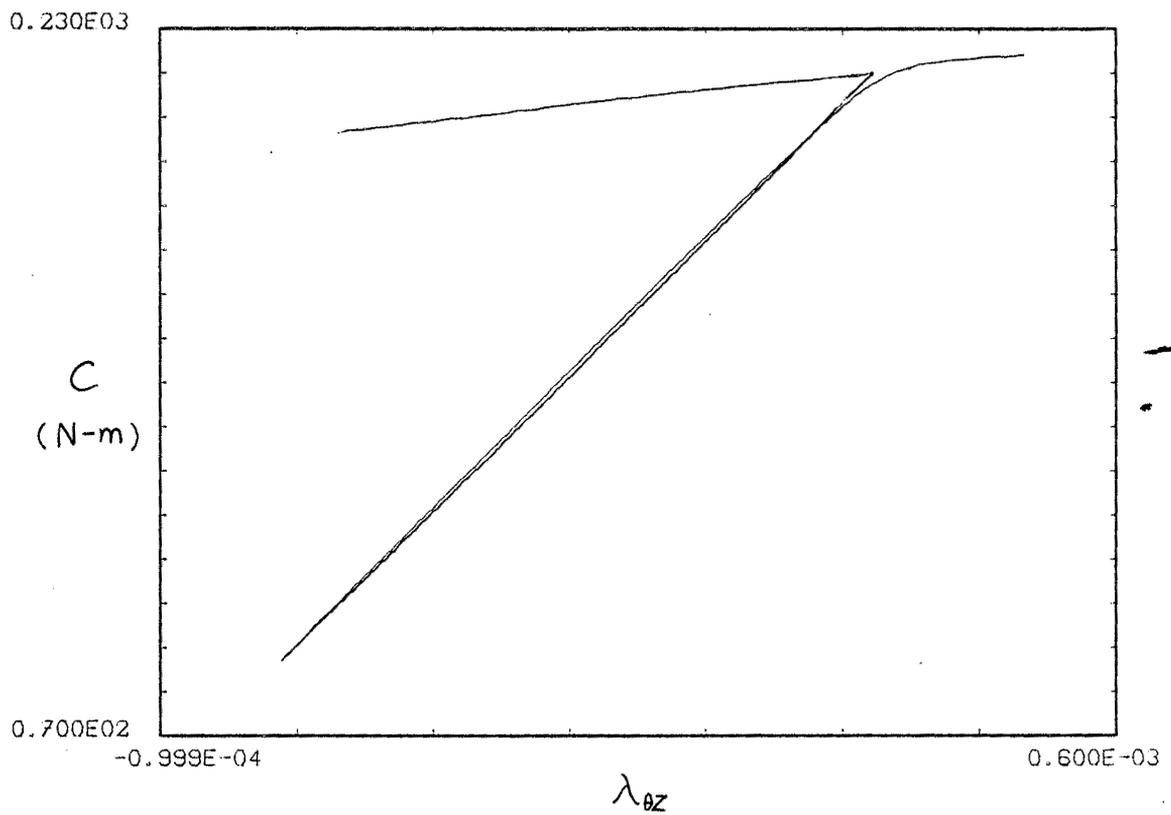
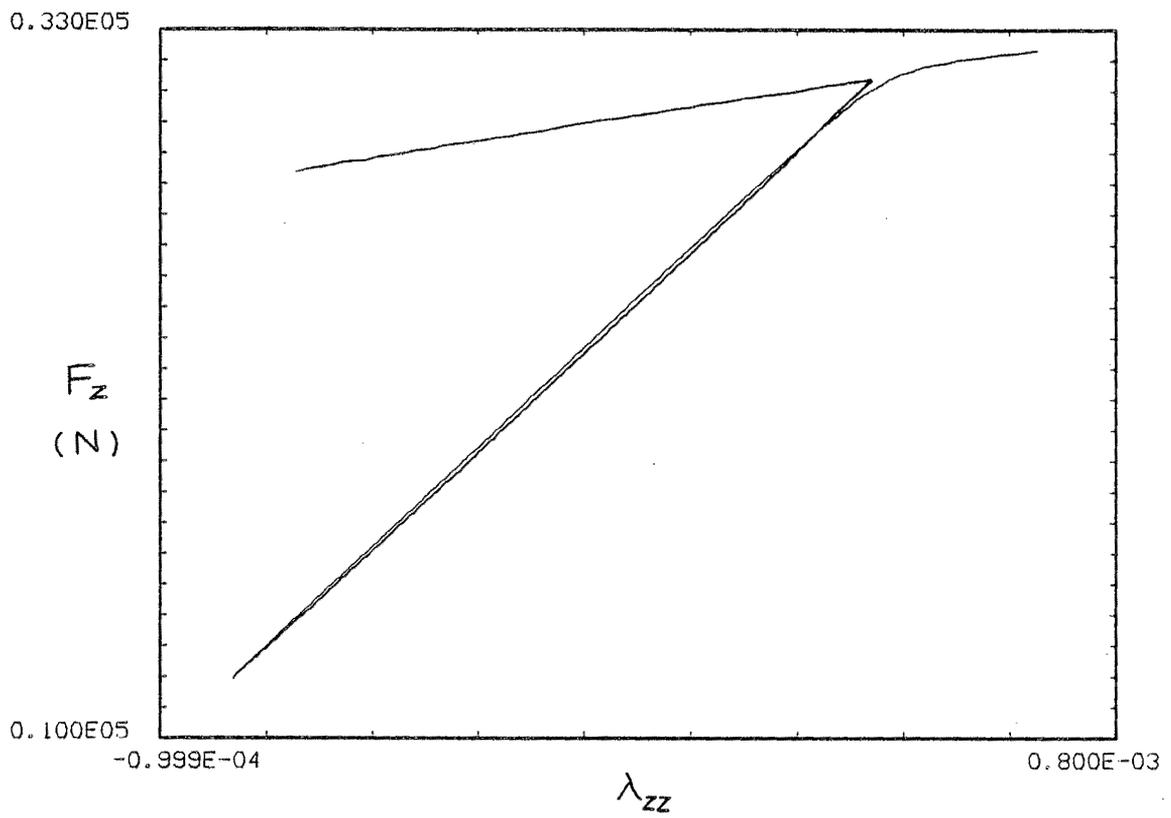


Fig. III.24. Petit cycle dans un cycle stabilisé de traction-compression et torsion alternée - Acier inoxydable 316 L (n° 216).

pour une très faible variation de la sollicitation et donner alors lieu à une déformation irréversible. Au fur et à mesure que la sollicitation augmente, d'autres dislocations préexistantes se désancrent dans d'autres grains, puis de nouvelles boucles de dislocations peuvent se créer, par le mécanisme des sources de Franck-Read [19] par exemple : la progressivité de ce phénomène se traduit par la courbe de charge arrondie que l'on constate sur le plan macroscopique. En toute rigueur, on pourrait concevoir l'existence d'un seuil de contrainte en dessous duquel un polycristal aurait un comportement strictement réversible, les déformations étant dues uniquement à la déformabilité du polycristal lui-même et à la variation de courbure de certaines lignes de dislocations en l'absence totale de désancrage. Mais la valeur de ce seuil est sans commune mesure avec le niveau du critère de "plasticité" utilisé dans les lois élastoplastiques classiques [20, 21].

Il y a quinze ans, Vellaikal [22] affirmait déjà très nettement dans l'introduction de son article :

"It is well known that high sensitivity stresses measurements or dislocation etch-pit techniques can detect small plastic strains well below the macroscopic yield stress in many metals and alloys".

De nombreuses mesures ont été effectuées sur le cuivre, qui pour nous, présente l'intérêt d'avoir une structure cubique face centrée comme l'acier inoxydable 316 L ; pour des monocristaux ou des polycristaux de cuivre, ainsi que pour des solutions solides d'aluminium dans le cuivre, divers auteurs ont pu mettre en évidence des mouvements irréversibles de dislocations à partir d'une contrainte de flexion d'une dizaine de  $\text{g/mm}^2$ , soit environ  $1/10$  Mpa [23, 24, 25, 22]. Cette valeur est de l'ordre du millième de la résistance limite. Enfin, citons Argan et Brydges [26] qui définissent, pour le monocristal de cuivre, une limite élastique à  $7 \text{ g/mm}^2$  et une contrainte de multiplication, au delà de laquelle les dislocations se multiplient, de l'ordre de  $20 \text{ g/mm}^2$ , soit respectivement environ 0.1 et 0.2 Mpa.

Tous ces résultats sont actuellement confirmés par l'observation dynamique du mouvement des dislocations sous microscope électronique. A titre d'exemple, on peut se reporter aux observations de Fujita et de ses collaborateurs [27, 28].

### III.3.2. Comportement élastique tangent

Après chaque inversion, le module tangent aux courbes de charge est le même, à une précision relative de l'ordre du pourcent, quelque soit l'amplitude du cycle : il faut donc considérer cette constante comme une caractéristique intrinsèque du matériau. Dans le cas de l'acier inoxydable 316 L, cette constance se maintient malgré une variation relative de 40 % de la contrainte en fin de cycle due à la consolidation.

Du point de vue microstructural, on peut confirmer ce caractère intrinsèque et même préciser que ce module tangent est le module de déformation du polycristal à l'état initial défini par sa structure, ses imperfections et défauts et son réseau de dislocation.

Considérons ce qui se passe autour d'une inversion. Juste avant l'inversion, il existe une certaine dynamique des dislocations avec en particulier des dislocations qui se désancrent dans une zone d'un joint de grain, traversant le grain et s'empilent soit sur des barrières dans le grain, soit sur une zone opposée du joint. Lorsque la sollicitation s'inverse, toute cette dynamique a tendance à s'inverser et les dislocations ont tendance à repartir en sens contraire [27]. Donc, pendant un court instant, la vitesse des dislocations s'annule et la rigidité du polycristal est celle qu'il possède en l'absence de desancrage de dislocation. Or, entre l'état initial et, par exemple, un état consolidé de 40 %, la structure de dislocation immobile a fortement varié et la densité de dislocation passe de  $10^9$  cm/cm<sup>3</sup> à environ  $10^{12}$  cm/cm<sup>3</sup>. Malgré cette nette augmentation de la densité de dislocation, il faut donc admettre que la rigidité du polycristal en l'absence de desancrage est inchangé.

En utilisant le point de vue et les approximations classiques en théorie des dislocations [19], il est possible de comparer la déformation purement élastique  $\epsilon_e$  d'un assemblage cristallin avec celle  $\epsilon_d$  due aux mouvements des dislocations dans le même assemblage cristallin. Dans le cas par exemple d'une sollicitation de traction  $\sigma$ , la déformation totale s'écrit :

$$\epsilon = \left( \frac{1}{2(1+\nu)} + \frac{1}{12} \rho l^2 \right) \frac{\sigma}{\mu}$$

où  $\rho$  est la densité des dislocations et  $l$  la longueur moyenne des dislocations mobiles. En admettant que les points d'ancrage des dislocations mobiles dans un plan sont les intersections de ce plan et des dislocations forêts et que le nombre des dislocations mobiles est négligeable devant les forêts, on peut supposer que le produit  $\rho l^2$  est approximativement une constante de valeur unitaire : au fur et à mesure que l'écroutissage aug-

mente le nombre des dislocations forêts augmente et en conséquence leur distance mutuelle diminue. Ceci expliquerait donc pourquoi le module apparent du polycristal, en l'absence de désancrage, reste constant malgré l'augmentation de la densité des dislocations. L'intérêt d'analyses microstructurales et de la détermination effective de la densité et de la longueur des dislocations se justifie pleinement au vu des approximations utilisées dans cette tentative d'explication.

### III.3.3. Mémoire discrète

La mémoire discrète se manifeste d'une part par le fait que toutes les courbes de charge se ramènent à une courbe unique en prenant l'état de référence  $\sigma^R$ ,  $\lambda^R$  comme origine et en négligeant les modifications apportées par l'écrouissage en déformation. D'autre part, au cours d'un essai avec un petit cycle décrit dans un grand cycle stabilisé, la branche de recharge est constituée de deux arcs nettement distincts. Rappelons que ces caractéristiques découlent directement de celles du modèle heuristique à ressorts et frotteurs que nous avons analysé dans le chapitre I.

Il est évident que cette mémoire discrète introduite dans la description macroscopique du comportement, doit se manifester au niveau microstructural. Quel est alors le support physique de cette mémoire discrète ? A la suite de quel phénomène cette mémoire peut-elle s'inscrire dans la microstructure ?

Une explication satisfaisante semble pouvoir être donnée à partir des mécanismes qui régissent les dislocations. Elle consisterait en un strict parallèle entre notre modèle heuristique à ressorts et frotteurs et les mécanismes individuels de déplacement et de création de dislocations caractérisés chacun par un seuil d'activation. Ici, il faut comprendre mécanisme au sens large, c'est à dire aussi bien les mécanismes de type différent qu'un même type de mécanisme mais de position ou d'orientation différente dans le polycristal. Ce parallèle entre les niveaux macroscopique et microscopique s'appuie sur de récents travaux en particulier de Mughrabi [29] et de Holste et Burmeister [30] qui se réfèrent au mémoire original de Masing [31]. Mughrabi considère un modèle "composite" comprenant d'une part des parois à forte densité de dislocation et d'autre part des canaux à faible densité, chaque partie étant caractérisée par son seuil pour l'activation des dislocations. Ce modèle ([29] figure 4) est identique à notre modèle à deux couples de ressort et frotteur (figure I.12). Holste et Burmeister [30] considèrent un modèle constitué de volumes élémentaires ("half macroscopic volume") dont les caractéristiques sont continuellement distribuées.

Le support de la mémoire serait donc fourni par les mécanismes de dislocation activées et non activées. Dans le cas d'un petit cycle décrit dans un grand cycle stabilisé au cours par exemple d'un essai de traction-compression, on aurait la succession des étapes suivantes (figure III.23).

Jusqu'à l'inversion B, de nombreux mécanismes de déplacement et de création de dislocations se sont progressivement activés, le mécanisme le plus énergétique ayant un seuil  $S_{max}$ . A l'inversion, tous ces mécanismes s'arrêtent et ont tendance ensuite à s'activer en sens contraire en commençant par ceux de niveau le plus faible. Jusqu'au point C, il n'y a que les mécanismes de niveau inférieur à  $S_{min}$  qui ont été activés ; à l'inversion C, ils s'arrêtent et ont ensuite tendance à repartir dans l'ordre croissant et dans le même sens qu'au cours de la sollicitation initiale. Au fur et à mesure qu'on se rapproche de B on efface la mémoire des déformations irréversibles produites le long de BC entre les seuils 0 et  $S_{min}$ . En B toute la mémoire du chemin BC est effacée et le matériau se retrouve à l'état où il se trouvait avant l'inversion B. Si on poursuit la déformation, le matériau voit s'activer des mécanismes d'énergie supérieure à  $S_{max}$  comme si on avait prolongé directement le chemin AB sans décrire le petit cycle : à la traversée B, les mécanismes en activation sautent brusquement de  $S_{min}$  à  $S_{max}$ . Ce saut est comparable, au niveau macroscopique, au saut de l'état de référence ou de la puissance réversible.

Compte tenu de la puissance des observations au niveau microscopique disponibles actuellement, il devrait être possible de vérifier et de confirmer expérimentalement le changement de mécanisme au cours de la traversée d'une branche de chargement, par observation *in situ* sous microscope électronique.

#### III.3.4. Cas de l'Inconel 718

Les résultats obtenus avec l'Inconel 718 sont plus compliqués qu'avec l'acier inoxydable 316 L : d'une part les coefficients élastiques ne sont pas constants et semblent dépendre de l'état de contrainte et d'autre part la variation des modules tangents près de l'origine n'a pas toujours l'allure parabolique de l'acier inoxydable 316 L.

La dépendance des modules tangents à l'origine par rapport à l'état de contrainte est bien connue par les acousticiens qui ont mis en évidence des variations de la vitesse de transmission des ondes sous divers états de contrainte : pression, traction ou compression [32],[33] et expliquent les résultats obtenus par une dépendance des divers modules élastique en fonction de la contrainte. L'origine de ce phénomène peut s'expliquer intuitivement à partir de l'équilibre entre les forces d'attraction et de répulsion qui s'exercent entre deux atomes [34]. Si on considère deux atomes  $A_1$  et  $A_2$  et que l'on étudie l'évolution de la force exercée l'un sur l'autre en fonction de leur distance  $d$  on obtient le diagramme classique suivant (figure III.25) [34]:

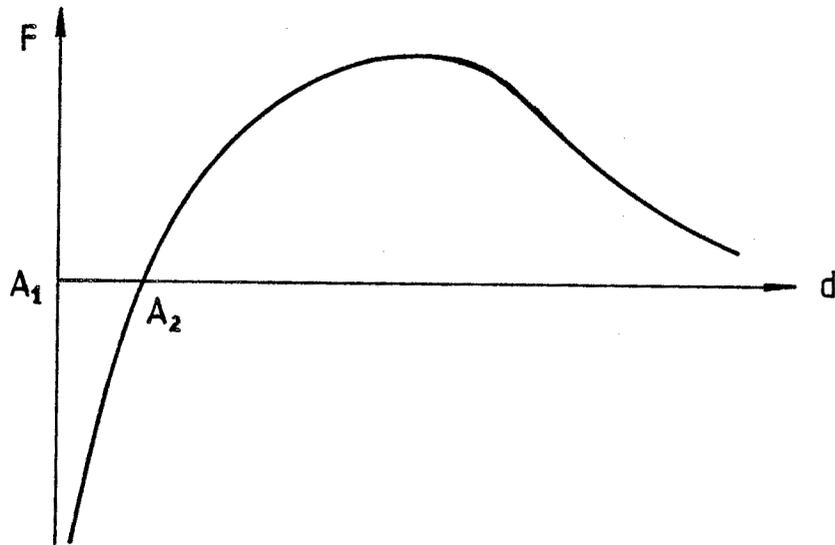


Fig. III.25. Diagramme classique de l'évolution de la force d'interaction entre deux atomes.

Si on veut éloigner les atomes de leur état d'équilibre, il faut exercer une force de traction qui augmente avec  $d$  et passe par un maximum. Par contre, si on veut rapprocher les deux atomes il faut exercer une force de compression qui augmente régulièrement lorsque  $d$  diminue. La rigidité du système des deux atomes est proportionnelle à la pente de la courbe  $F(d)$ .

Pour l'acier inoxydable 316 L, compte tenu de la précision de nos essais, l'intervalle de contrainte exploré n'est pas assez important pour mettre en évidence une variation du module. Par contre pour l'Inconel 718, le niveau de contrainte est trois fois plus élevé

et une variation du module est constatée.

L'explication de la forme de certaines courbes de  $M_E$  et  $M_u$  près de l'origine peut alors s'expliquer aisément. Lorsqu'une inversion a lieu dans un état de contrainte de traction élevé, le module tangent est faible. Après inversion, la contrainte diminue et la rigidité du matériau est le résultat de deux phénomènes qui s'opposent : diminution de la rigidité due aux mouvements des dislocations et augmentation de la rigidité due à l'augmentation de celle du cristal par diminution de contrainte ; la combinaison de ces deux phénomènes donne la forme caractéristique sinusoïdale des courbes de la figure III.7 et de la figure III.8. Lorsque l'inversion se produit pour un état de contrainte en compression et que la contrainte augmente, les deux phénomènes jouent dans le même sens et donnent une allure parabolique à la courbe  $M_E$  ou  $M_u$  comme pour l'acier inoxydable 316 L. Lorsque le phénomène de diminution de la rigidité due aux mouvements de dislocation est prépondérant les deux faisceaux de courbe se rejoignent. Dans le cadre de cette explication, le pseudo-plateau de la courbe  $M_u$  (figure III.14) doit être interprété comme une partie sinusoïdale très aplatie ; cette courbe rejoint bien la courbe affine dans un rapport 2 de la courbe de lère charge pour un état de contrainte proche de zéro.

Pour modéliser la variation des modules élastiques, considérons les coefficients de Lamé, pour lesquels le modèle théorique prévoit une variation possible en fonction des invariants de la contrainte. On dispose des 4 résultats suivants :

état	contrainte (Mpa)	E (Gpa) (mesuré)	$\nu$ (mesuré)	$\mu$ (Gpa)		$\lambda$ (Gpa)
				mesuré	calculé	(calculé)
A	= 0	212,7	0,283	81,8	82,9	108,1
B	= + 1140	202,7	0,278	/	79,3	99,3
C	= - 1250	212,7	0,305	/	81,5	127,5
D	= $\pm$ 700	/	/	79,5	/	/

Une variation du coefficient  $\lambda$  en fonction du seul premier invariant  $I_1$  de la contrainte est suffisant pour modéliser les résultats dont on dispose :

$$\lambda = \lambda_0 e^{-\left(\frac{I_{\sigma}}{P_0}\right)^{n_0}} \quad (\text{III.3.1})$$

Avec  $\lambda_0 = 108,1$  Gpa,  $P_0 = 2.40.10^3$  Mpa et  $n_0 = 3$ , on obtient alors :

état	A	B	C
$\lambda$ (Gpa)	108,1	97,1	124,5

Il nous paraît inutile de compliquer plus la formule (III.3.1) pour obtenir un meilleur accord avec l'expérience du fait du petit nombre de points expérimentaux disponibles.

La variation du coefficient  $\mu$  est plus complexe : la valeur maximum a lieu pour  $I_{\sigma} = \Pi_{\sigma} = 0$  et elle est très proche de celle obtenue en compression. On admettra que  $\mu$  varie avec  $\Pi_{\sigma}$  entre la valeur pour  $\Pi_{\sigma} = 0$  et une valeur extrême qui dépend de la phase  $\xi$ , soit :

$$\mu = \mu_0 - c_1 \Pi_{\sigma} (1 + \cos 3\xi)^{n_1} \quad (\text{III.3.2})$$

Avec les quatre valeurs dont on dispose, une bonne approximation est obtenue avec :

$$\mu_0 = 81,8 \text{ GPa} \quad , \quad c_1 = 10/3 \quad , \quad n_1 = 1/6$$

#### III.4. Forme du seuil limite

Pour l'acier inoxydable 316 L on peut admettre un seuil de Von Mises. On a en effet :

$$\begin{aligned} Y_0 &= \hat{\Pi}_{\sigma_a}(0) \quad , \quad Z_0 = \hat{\Pi}_{\sigma_a}\left(\frac{\pi}{3}\right) \quad , \quad S_0 = \hat{\Pi}_{\sigma_a}\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ \text{et} \quad Y_0 &= 300 \text{ Mpa} \quad , \quad Z_0 = 306 \text{ Mpa} \quad , \quad \sqrt{3}S_0 = 294 \text{ Mpa} \end{aligned}$$

avec  $Y_0$ ,  $Z_0$  et  $S_0$  les contraintes limites respectivement en traction, compression et torsion. Pour un angle de phase de  $0$ ,  $\frac{\pi}{6}$  et  $\frac{\pi}{3}$  la valeur limite du second invariant est le même à une précision relative de 2 %.

Par contre, le seuil de Von Mises est une approximation trop grossière pour l'Inconel 718, on a :

$$Y_0 = 1150 \text{ Mpa} \quad , \quad Z_0 = 1250 \text{ Mpa} \quad , \quad \sqrt{3}S_0 = 1170 \text{ Mpa}$$

et l'écart relatif maximum de la limite du 2ème invariant est de 10 %.

Compte tenu du peu de différence entre les valeurs limites pour la traction et le cisaillement, un seuil non cylindrique à section circulaire ne suffit pas pour modéliser ces résultats. Par contre, un seuil cylindrique à section non circulaire est acceptable, tel que :

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}(\xi) = \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}(0) \cdot [1 + C_2(1 - \cos 3\xi)^{n_2}]$$

où  $\xi$  est la phase définie par :

$$\cos 3\xi = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\text{III}_{\bar{\sigma}_a}}{\text{II}_{\bar{\sigma}_a}^{3/2}}$$

et  $\text{II}_{\bar{\sigma}_a}$ ,  $\text{III}_{\bar{\sigma}_a}$  sont respectivement les 2ème et 3ème invariant du déviateur de contrainte. Les trois coefficients  $\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}(0)$ ,  $C_2$  et  $n_2$  sont définis directement par les trois valeurs limites précédentes.

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}(0) = \frac{Y_0}{\sqrt{3}} ; \quad C_2 = \frac{\sqrt{3}S_0 - Y_0}{Y_0} ; \quad 2^{n_2} = \frac{Z_0 - Y_0}{\sqrt{3}S_0 - Y_0}$$

et on a :

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}(0) = 659.2 , \quad C_2 = 0.0256 , \quad n_2 = 1.33$$

L'expression mathématique de ce seuil est comparable au critère conique proposé par Stutz pour les sols [9] : en effet, la forme d'une section de ce critère à  $\text{I}_{\bar{\sigma}_a}$  donné est identique à la forme que nous proposons.

III.5. Extension de la signification du coefficient d'homothétie du comportement d'hystérésis pure.

Le modèle heuristique étudié dans le chapitre I possédait un seuil limite identique en charge et en décharge. Pour modéliser le comportement de l'Inconel 718 il nous faut proposer un modèle heuristique plus général ; comme nous le verrons, il possède toutes les propriétés fondamentales du comportement d'hystérésis pure et reste évidemment dans le cadre de la thermomécanique développée par Guélin [1].

Considérons un modèle rhéologique heuristique ayant les caractéristiques suivantes :

- les seuils en traction et en compression sont différents,

- pour des raisons de continuité, le module à l'origine doit être identique en traction ou en compression.

Considérons d'abord le modèle constitué d'un couple ressort-patin associé en série, dont le module du ressort est  $G$  et les seuils du patin sont  $S^+$  pour la traction et  $S^-$  pour la compression. Les seuils en déformation sont :  $e^+ = \frac{S^+}{G}$  pour la traction et  $e^- = \frac{S^-}{G}$  pour la compression (figure III.26).

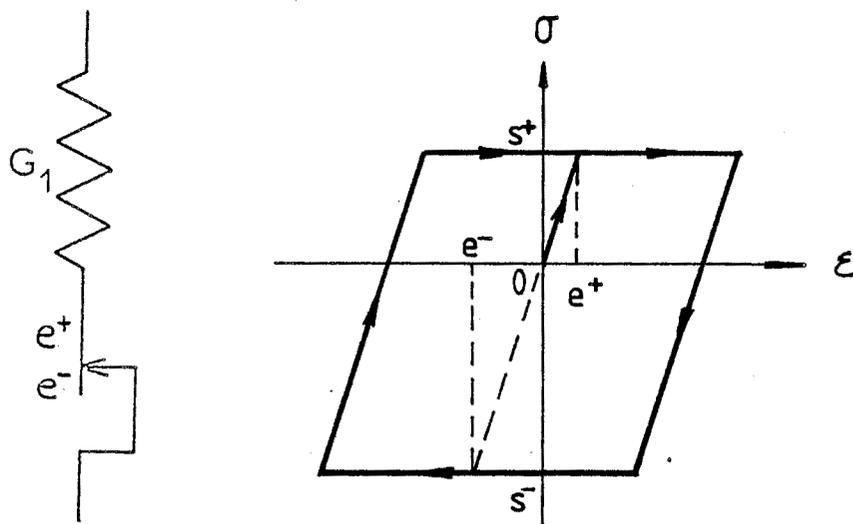
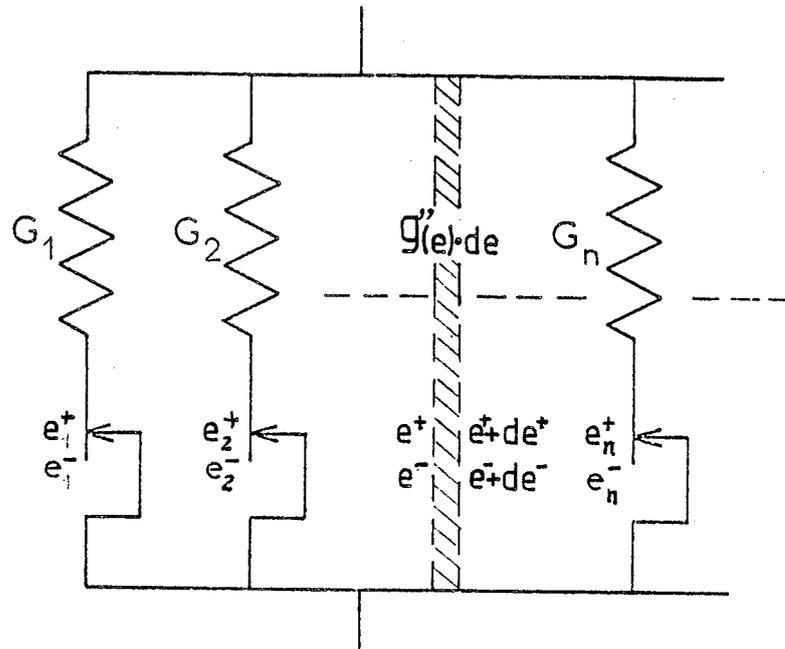


Fig. III.26. Modèle élastoplastique parfait à deux seuils limites différents.

Considérons maintenant un modèle symbolique d'une suite infinie de ressorts-patins (figure III.27). Les modules des ressorts sont  $G_i$  les seuils du patin en traction  $S_i^+$  et en compression  $S_i^-$ . On définit les seuils par les déformations en traction  $e_i^+ = \frac{S_i^+}{G}$  et en compression  $e_i^- = \frac{S_i^-}{G}$ .

Par analogie avec le § I.1, les propriétés thermomécaniques d'un tel modèle rhéologique peuvent être analysées.



$$0 \leq e_1^+ < e_2^+ < \dots < e_n^+ \dots \quad 0 \leq e_1^- < e_2^- < \dots < e_n^- \dots$$

Fig. III.27. Modèle symbolique, continuellement distribué, à deux seuils limites différents.

Le modèle est caractérisé par deux fonctions de raideur :  $g^{+''}(e)$  pour la traction et  $g^{-''}(e)$  pour la compression. Comme chaque couple de ressort-patin a même rigidité, qu'il soit sollicité en traction ou en compression, on a :

$$g^{+''}(e^+) de^+ = g^{-''}(e^-) de^-$$

Le module à l'origine est donc bien continu puisque :

$$G_0 = \int_0^{\infty} g^{+''}(e^+) de^+ = \int_0^{\infty} g^{-''}(e^-) de^-$$

Nous faisons l'hypothèse que le rapport des seuils de chaque couple est le même, ce qui assure une similitude entre les fonctions  $g^+$  et  $g^-$ , soit  $\hat{\omega}$  ce facteur de similitude.

Mais il faut bien remarquer que cette hypothèse n'est pas une nécessité mais seulement une commodité pratique.

On montre facilement que les courbes de première charge en traction et en compression s'expriment respectivement par :

$$\begin{cases} \sigma^+(\varepsilon) = G_0 \varepsilon - g^+(\varepsilon) \\ \sigma^-(\varepsilon) = G_0 \varepsilon - g^-(\varepsilon) \end{cases}$$

Compte tenu de la similitude, les fonctions et leurs dérivées s'expriment facilement l'une en fonction de l'autre :

$$\begin{cases} g^{-''}(\varepsilon) = \frac{1}{\hat{\omega}} g^{+''}\left(\frac{\varepsilon}{\hat{\omega}}\right) \\ g^{-'}(\varepsilon) = g^{+'}\left(\frac{\varepsilon}{\hat{\omega}}\right) \\ g^-(\varepsilon) = \hat{\omega} g^+\left(\frac{\varepsilon}{\hat{\omega}}\right) \end{cases}$$

On en déduit :

$$\sigma_0^-(\varepsilon) = G_0 \varepsilon - \hat{\omega} g^+\left(\frac{\varepsilon}{\hat{\omega}}\right) = \hat{\omega} \sigma_0^+\left(\frac{\varepsilon}{\hat{\omega}}\right)$$

Le facteur de similitude  $\hat{\omega}$  a donc une signification physique évidente : c'est le rapport des seuils de contrainte en compression et en traction :

$$\hat{\omega} = \frac{\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sigma_0^-(\varepsilon)}{\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sigma_0^+(\varepsilon)} = \frac{Z_0}{\gamma_0}$$

Quelque soit le sens de la première charge, on trouve pour les autres branches de chargement :

$$\sigma -_R \sigma = (1 + \hat{\omega}) \left[ G_0 \frac{\varepsilon - R\varepsilon}{1 + \hat{\omega}} - g^+\left(\frac{\varepsilon - R\varepsilon}{1 + \hat{\omega}}\right) \right]$$

ou

$$\sigma -_R \sigma = (1 + \hat{\omega}) \sigma_0^+\left(\frac{\varepsilon - R\varepsilon}{1 + \hat{\omega}}\right)$$

On constate donc que toutes les branches peuvent s'exprimer à partir de la courbe de première charge en traction  $\sigma_0^+$  en introduisant le coefficient d'homothétie  $\omega$  :

$$\sigma -_R \sigma = \omega \sigma_0^+\left(\frac{\varepsilon - R\varepsilon}{\omega}\right)$$

Le coefficient d'homothétie peut prendre une des trois valeurs :

- pour la première charge en traction :  $\omega = 1$
- pour la première charge en compression :  $\omega = \hat{\omega}$
- pour les autres branches :  $\omega = 1 + \hat{\omega}$

Ce modèle possède les mêmes propriétés fondamentales que le modèle évoqué dans § I.1.

- un "petit cycle" se referme strictement puisqu'il est constitué de deux arcs identiques de coefficient d'homothétie  $1 + \hat{\omega}$ ,
- il y a effacement de la mémoire après un "petit cycle".

Considérons un trajet OAA' dans la figure III.30. La courbe de la première charge en traction est  $\sigma_0^+(\varepsilon)$ . Après l'inversion A, la courbe devient :

$$\sigma - \sigma_A = (1 + \hat{\omega}) \sigma_0^+ \left( \frac{\varepsilon - \varepsilon_A}{1 + \hat{\omega}} \right)$$

Pour  $\varepsilon_{A'} = -\hat{\omega} \varepsilon_A$ , on a :

$$\sigma_{A'} = -\hat{\omega} \sigma_0^+(\varepsilon_A)$$

On retrouve donc la courbe de la première charge en compression en A', homothétique du point A\* symétrique de A par rapport à l'origine.

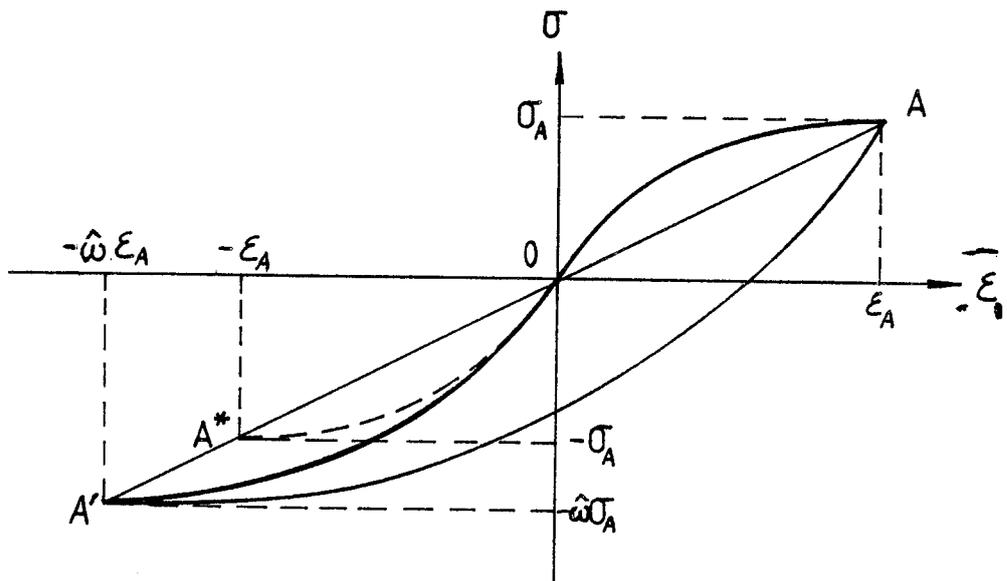


Fig. III.28. Représentation graphique du facteur similitude  $\hat{\omega}$ .

On vérifie aussi que la fonction d'aide corrigée (cf § 1.2) prend la même valeur en A et en A'. Si on garde la convention :

$$W_c = \frac{2}{\omega^2} W$$

on a alors :

a) pour le trajet 0a+A avec  $\omega = 1$  :

$$W_{0A} = \int_0^{\varepsilon_A} \sigma_0^+(\varepsilon) d\varepsilon \quad \text{et} \quad W_c = 2 W_{0A}$$

b) pour le trajet AbA' avec  $\omega = 1 + \hat{\omega}$

$$W_{AA'} = \int_0^{(1+\hat{\omega})\varepsilon_A} (1+\hat{\omega}) \sigma_0\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_A}{1+\hat{\omega}}\right) d\varepsilon = (1+\hat{\omega}) W_{0A}$$

et

$$W_c = \frac{2}{(1+\hat{\omega})^2} W_{AA'} = 2 W_{0A}$$

c) pour le trajet 0aA' avec  $\omega = \hat{\omega}$

$$W_{0A'} = \int_0^{-\hat{\omega}\varepsilon_A} \hat{\omega} \sigma_0\left(\frac{\varepsilon}{R}\right) d\varepsilon = \hat{\omega} W_{0A}$$

et

$$W_c = \frac{2}{\hat{\omega}^2} W_{0A'} = 2 W_{0A}$$

L'état de ce modèle peut être représenté par un diagramme topologique, comparable à celui de la figure I.5 et défini dans les axes : déformation  $\varepsilon_r$  du ressort et celle  $e$  du seuil du patin. Tous les points représentatifs des couples de ressort et de patin se déplacent sur des lignes parallèles entre elles, mais à la différence du premier modèle, celles-ci ne sont plus parallèles à l'axe de la déformation des ressorts, leur pente est :

$$\frac{\Delta \varepsilon_r}{\Delta e} = \frac{1+\hat{\omega}}{1-\hat{\omega}}$$

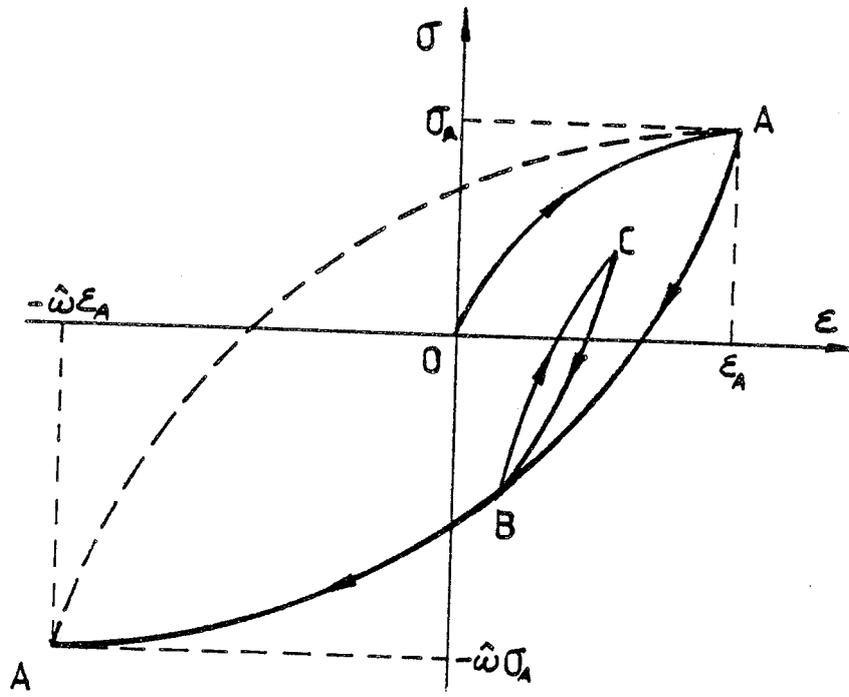
A titre d'exemple, on trouve sur la figure III.29b le diagramme topologique du chemin de sollicitation défini sur la figure III.29a.

L'extension tridimensionnelle n'est pas aussi évidente que dans le cas habituel où  $\hat{\omega} = 1$ . Le facteur de similitude  $\hat{\omega}$  est pris comme une fonction de l'angle de phase  $\xi$  dans l'espace des contraintes, il est défini comme dans le modèle unidimensionnel par un rapport de contrainte par rapport à une référence.

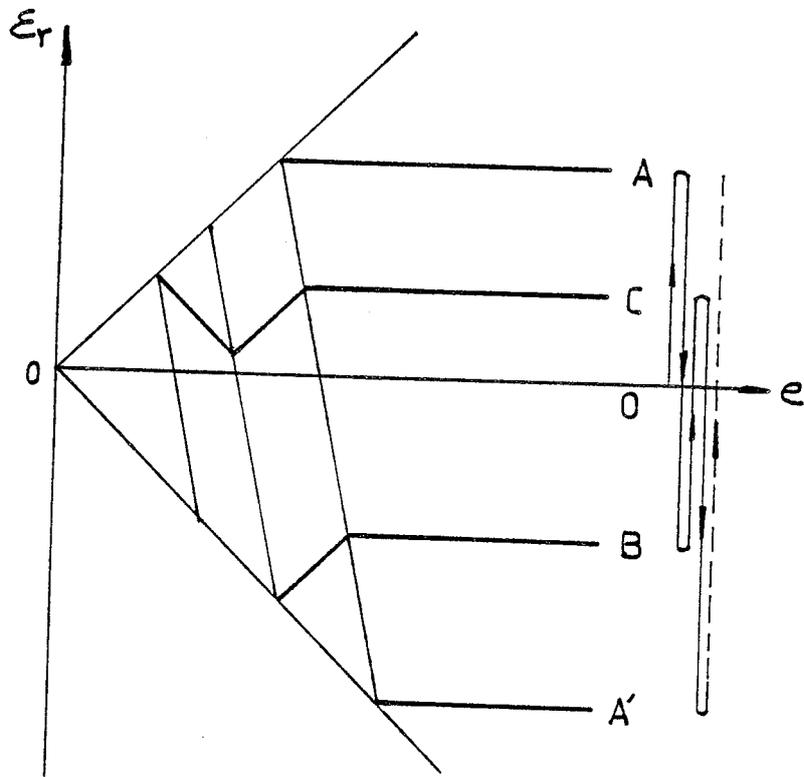
Considérons donc un seuil non circulaire, soit  $\hat{\Pi}_{\hat{\sigma}}(0)$  et  $\hat{\Pi}_{\hat{\sigma}}(\xi)$  les valeurs limites du second invariant pour les angles de phase 0 et

$\xi$ , on pose :

$$\hat{\omega}(\xi) = \frac{\hat{\Pi}_{\hat{\sigma}}(\xi)}{\hat{\Pi}_{\hat{\sigma}}(0)}$$



(a)



(b)

Fig. III.29. Représentation topologique des états du modèle à deux seuils limites différents.

En supposant que l'angle de phase varie en fonction du temps soit :

$$\xi = \xi(t)$$

Le coefficient d'homothétie est défini à tout instant par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(\xi) = \hat{\omega}(\xi) \quad \text{pour un arc de première charge} \\ \omega(\xi) = \hat{\omega}(\xi) + \hat{\omega}(\xi + \pi) \quad \text{pour les autres arcs.} \end{array} \right.$$

L'énergie corrigée qui règle les tests de l'algorithme du schéma de comportement est défini par :

$$W_c = \int_{t_i}^t \frac{2}{\omega^2(\xi(\tau))} dW(\tau)$$

Ces nouvelles définitions englobent évidemment le cas particulier du seuil à section circulaire pour lequel le facteur de similitude  $\hat{\omega}$  est égal à l'unité. Le fonctionnement a priori de la partie algorithmique du schéma (cf § I) est conservé, mais n'élimine pas l'intérêt d'une vérification expérimentale ultérieure dans le cas de chargements très complexes.

Pour compléter le schéma, il est nécessaire de définir les taux des variables thermodynamiques et en particulier, le taux de chaleur dissipé.

i) Considérons le modèle II à deux couples de ressort et de patin. Pour la 1ère charge dans le sens de la traction OABC (figure III.30), l'indicatrice de  $-\dot{Q}$ , notée  $-\dot{Q}_0^+(\mathcal{E})$  est Oa a<sub>1</sub> b b<sub>1</sub> c, pour la première charge dans le sens de la compression O A' B' C' D', l'indicatrice de chaleur dissipée, notée  $-\dot{Q}_0^-(\mathcal{E})$ , est O a' a<sub>1</sub>' b' b<sub>1</sub>' c' (cf I.1.3). Les deux indicatrices sont homothétiques dans le rapport  $\hat{\omega}$ . Considérons maintenant la décharge C D E C', effectuée après la première sollicitation de traction : à partir du point D, le premier patin glisse dans le sens négatif et dissipe donc en chaleur une puissance identique à celle dissipée le long du chemin A' B'. De même, le long de E F, le modèle dissipe en chaleur la même puissance que le long de B' C'. L'indicatrice de chaleur dissipée est donc affine parallèlement à l'axe des déformations

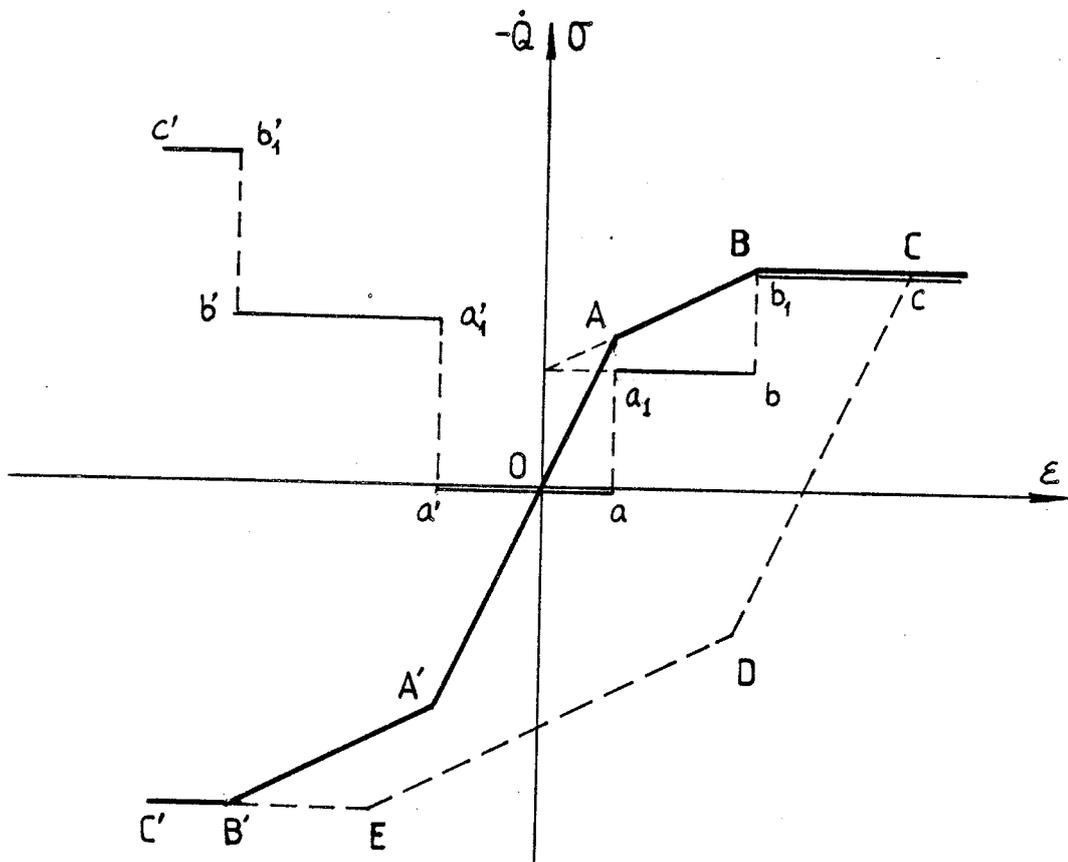
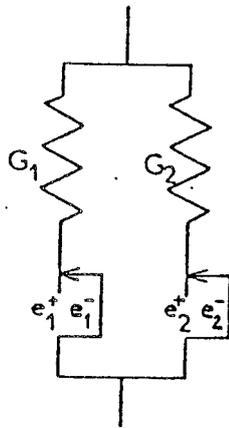


Fig. III. 30 - Analyse du module à deux couples ressort-patin

de l'indicatrice  $-\dot{Q}_0^-$  dans le rapport  $1 + \hat{\omega}$ . Pour la recharge C'D'E'C effectuée soit après le chemin O A B C D E C' ou le chemin O A' B' C', on montre de même que l'indicatrice de chaleur dissipée est l'affine de l'indicatrice  $-\dot{Q}_0^+$  dans le rapport  $1 + \hat{\omega}$ .

On constate donc que l'indicatrice de chaleur dissipée dépend du sens de la charge, aussi bien pour la lère charge que pour les autres charges. Ceci est une conséquence de l'origine différente de branches symétriques et donc de la valeur différente de la puissance réversible. Cette différence n'apparaît pas dans l'expression formelle de la courbe de charge puisque celle-ci s'exprime en variation par rapport à l'état de référence.

ii) Pour le modèle continuellement distribué défini par la fonction  $f(\mathcal{E})$  tel que :

$$\sigma_0^+(\mathcal{E}) = f(\mathcal{E}) \quad \text{et} \quad \sigma_0^-(\mathcal{E}) = \hat{\omega} f\left(\frac{\mathcal{E}}{\hat{\omega}}\right)$$

on a pour les deux courbes de première charge, compte tenu de I.1.31 :

$$\begin{aligned} \frac{-\dot{Q}_0^+(\mathcal{E})}{\dot{\mathcal{E}}} &= f(\mathcal{E}) - \frac{\partial f(\mathcal{E})}{\partial \mathcal{E}} \cdot \mathcal{E} \\ \frac{-\dot{Q}_0^-(\mathcal{E})}{\dot{\mathcal{E}}} &= \hat{\omega} f\left(\frac{\mathcal{E}}{\hat{\omega}}\right) - \hat{\omega} \frac{\partial f\left(\frac{\mathcal{E}}{\hat{\omega}}\right)}{\partial \mathcal{E}} \cdot \frac{\mathcal{E}}{\hat{\omega}} \\ &= -\hat{\omega} \dot{Q}_0^+\left(\frac{\mathcal{E}}{\hat{\omega}}\right) / \dot{\mathcal{E}} \end{aligned}$$

Pour les courbes de seconde charge on a :

$$-\dot{Q}_1^+(\Delta^+\mathcal{E}) = -\dot{Q}_0^+\left(\frac{\Delta^+\mathcal{E}}{1+\hat{\omega}}\right)$$

$$-\dot{Q}_1^-(\Delta^-\mathcal{E}) = -\dot{Q}_0^-\left(\frac{\Delta^-\mathcal{E}}{1+\hat{\omega}}\right)$$

avec  $\Delta^+\mathcal{E} \geq 0$  et  $\Delta^-\mathcal{E} \leq 0$

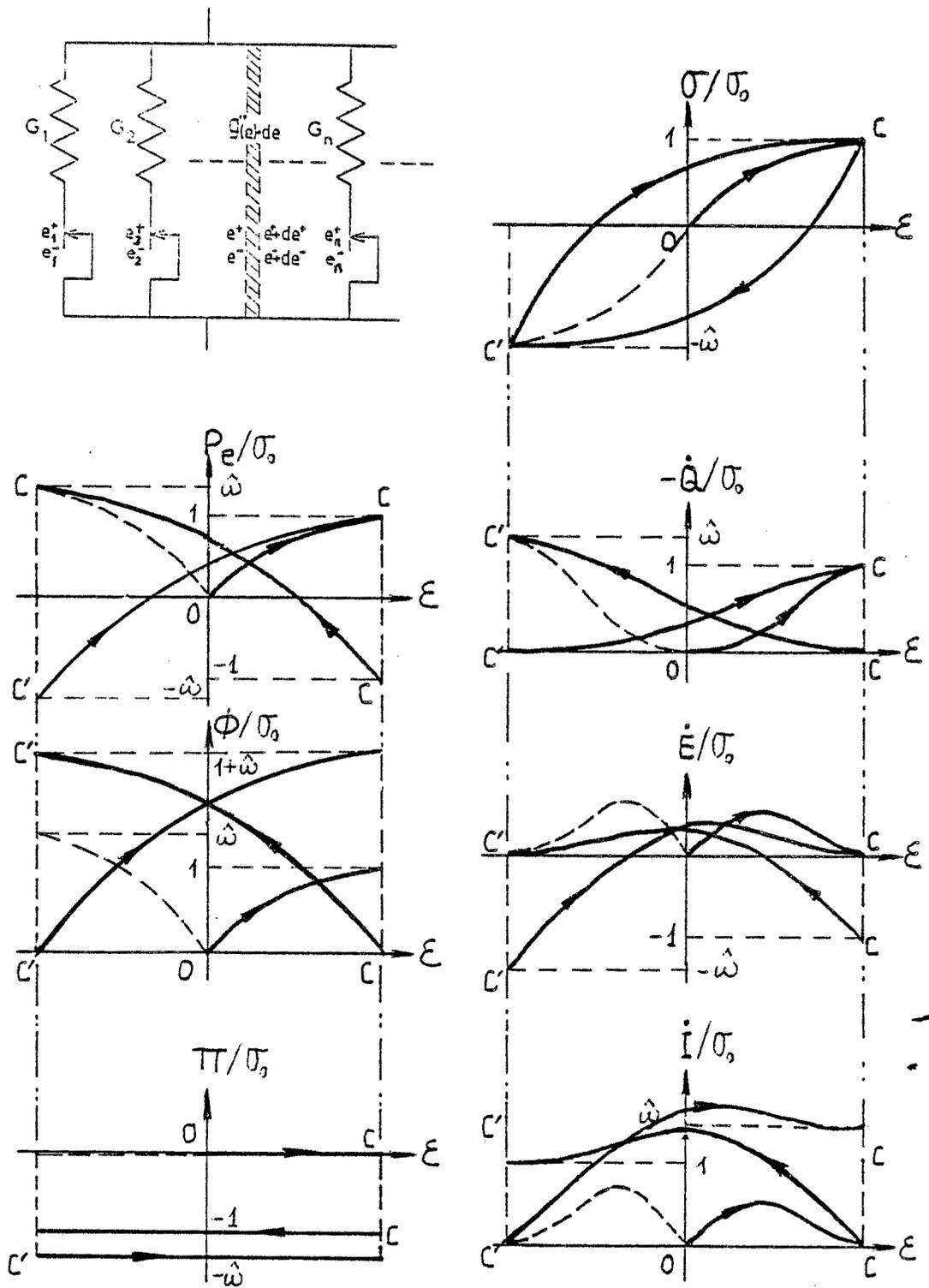


Fig. III.31 - Analyse du module à une suite infinie de couples ressort-patin - Cas particulier  $\dot{\epsilon} = \pm 1$

Les autres taux thermodynamiques se déduisent à partir des relations habituelles (cf. ch. I) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi = r \sigma \mathcal{D} \\ \mathcal{P}_e = \phi + \pi \\ \mathcal{P}_e = \dot{E} + (-\dot{Q}) \\ \dot{I} = \dot{E} - \pi \end{array} \right.$$

A titre d'exemple, on trouvera sur la figure III.30 les indicatrices des taux thermodynamiques pour une sollicitation cyclique symétrique  $\pm \mathcal{E}_i$ ; pour bien mettre en évidence les propriétés de ces taux, on prend  $\hat{\omega} = \pm 1$  et la valeur de  $\mathcal{E}_i$  est choisie telle que  $\sigma_0^+(\mathcal{E}_i)$  et  $\sigma_0^-(\mathcal{E}_i)$  atteignent la valeur asymptotique (fig. III.31).

Comme il fallait s'y attendre, seules les indicatrices  $\phi_i^+$  et  $\phi_i^-$  sont identiques; les indicatrices  $\mathcal{P}_{ei}^+$  et  $\mathcal{P}_{ei}^-$  sont identiques à un décalage près, égal à la différence des deux valeurs asymptotiques  $\sigma_0^+(\mathcal{E}_i)$ ,  $\sigma_0^-(\mathcal{E}_i)$ . Lorsque  $\hat{\omega}$  est égal à 1, on retrouve bien la figure 6 de [21].

iii) Les expressions formelles du taux de chaleur dissipée exprimées avec la fonction  $\Delta\sigma(\Delta\mathcal{E})$  ne dépendent pas seulement du coefficient d'homothétie de Masing  $\omega$ , mais aussi du sens de la charge. En effet, dans le cas d'une branche de deuxième charge, il existe une indicatrice différente suivant le sens de la charge, alors que la fonction  $\Delta^1\sigma(\Delta^1\mathcal{E})$  est la même.

Introduisons les notations  $\Delta^+$  et  $\Delta^-$  pour les branches de deuxième charge suivant qu'elles sont respectivement dans le sens positif (traction) ou négatif (compression). Pour une branche de deuxième charge dans le sens positif, la propriété d'affinité des indicatrices s'écrit :

$$- \frac{dQ^+(\Delta^+\mathcal{E})}{d\Delta^+\mathcal{E}} = \sigma_0^+\left(\frac{\Delta^+\mathcal{E}}{1+\hat{\omega}}\right) - \frac{\Delta^+\mathcal{E}}{1+\hat{\omega}} \frac{d\sigma_0^+\left(\frac{\Delta^+\mathcal{E}}{1+\hat{\omega}}\right)}{d\Delta^+\mathcal{E}}$$

Compte tenu de :

$$\Delta\sigma^+(\Delta\mathcal{E}^+) = (1+\hat{\omega}) \sigma_0^+\left(\frac{\Delta^+\mathcal{E}}{1+\hat{\omega}}\right)$$

on obtient finalement :

$$\frac{dQ^+(\Delta^+\mathcal{E})}{d\Delta^+\mathcal{E}} = \frac{1}{1+\hat{\omega}} \Delta^+\sigma(\Delta^+\mathcal{E}) - \frac{\Delta^+\mathcal{E}}{1+\hat{\omega}} \frac{d\Delta^+\sigma(\Delta^+\mathcal{E})}{d\Delta^+\mathcal{E}}$$

ou

$$-\dot{Q}^+(\Delta^+\mathcal{E}) = \frac{1}{1+\hat{\omega}} \left[ \Delta^+\sigma(\Delta^+\mathcal{E}) \frac{d\Delta^+\mathcal{E}}{dt} - \Delta^+\mathcal{E} \frac{d\Delta^+\sigma(\Delta^+\mathcal{E})}{dt} \right]$$

Pour une branche de deuxième charge dans le sens négatif, on a :

$$-\frac{dQ^-(\Delta^-\mathcal{E})}{d\Delta^-\mathcal{E}} = \sigma_o^-\left(\frac{\Delta^-\mathcal{E}}{1+\hat{\omega}}\right) - \frac{\Delta^-\mathcal{E}}{1+\hat{\omega}} \frac{d\sigma_o^-\left(\frac{\Delta^-\mathcal{E}}{1+\hat{\omega}}\right)}{d\Delta^-\mathcal{E}}$$

Compte tenu de :

$$\Delta^-\sigma(\Delta^-\mathcal{E}) = (1+\hat{\omega}) \sigma_o^+\left(\frac{\Delta^-\mathcal{E}}{1+\hat{\omega}}\right)$$

et de :

$$\sigma_o^-(\mathcal{E}) = \omega \sigma_o^+\left(\frac{\mathcal{E}}{\omega}\right)$$

on a :

$$\sigma_o^-\left(\frac{\Delta^-\mathcal{E}}{1+\hat{\omega}}\right) = \frac{\hat{\omega}}{1+\hat{\omega}} \Delta^-\sigma^-\left(\frac{\Delta^-\mathcal{E}}{\hat{\omega}}\right)$$

On obtient finalement :

$$-\frac{dQ^-(\Delta^-\mathcal{E})}{d\Delta^-\mathcal{E}} = \frac{\hat{\omega}}{1+\hat{\omega}} \Delta^-\sigma^-\left(\frac{\Delta^-\mathcal{E}}{\hat{\omega}}\right) - \frac{\Delta^-\mathcal{E}}{1+\hat{\omega}} \frac{d\Delta^-\sigma^-\left(\frac{\Delta^-\mathcal{E}}{\hat{\omega}}\right)}{d\Delta^-\mathcal{E}}$$

ou

$$-\dot{Q}^-(\Delta^-\mathcal{E}) = \frac{\hat{\omega}}{1+\hat{\omega}} \left[ \Delta^-\sigma^-\left(\frac{\Delta^-\mathcal{E}}{\hat{\omega}}\right) \frac{d\Delta^-\mathcal{E}}{dt} - \frac{\Delta^-\mathcal{E}}{\hat{\omega}} \frac{d\Delta^-\sigma^-\left(\frac{\Delta^-\mathcal{E}}{\hat{\omega}}\right)}{dt} \right]$$

Une expression formelle générale du taux de chaleur dissipée peut être établie, à partir de l'expression de la courbe de charge  $\Delta\sigma(\Delta\mathcal{E})$  de la branche considérée et dans la mesure où on introduit en plus du coefficient d'homothétie de Masing  $\omega$ , un coefficient de sens de la charge  $\Omega$ ,

$$-\dot{Q}(\mathcal{E}-r\mathcal{E}) = \frac{\Omega}{\omega} \left\{ \left[ \sigma\left(\frac{\mathcal{E}-r\mathcal{E}}{\Omega}\right) - r\sigma \right] \dot{\mathcal{E}} - \frac{\mathcal{E}-r\mathcal{E}}{\Omega} \dot{\sigma}\left(\frac{\mathcal{E}-r\mathcal{E}}{\Omega}\right) \right\}$$

pour une branche de première charge :

$$\omega = \Omega = 1$$

pour une branche de deuxième charge :

$$\omega = 1 + \hat{\omega}$$

et  $\Omega = 1$  pour le sens positif

$\Omega = \hat{\omega}$  pour le sens négatif

Comme le coefficient d'homothétie de Masing, le coefficient de sens de la charge est constant par morceau.

Pour le modèle heuristique symétrique ( $\hat{\omega} = \Omega = 1$  quelque soit le sens de la charge), l'expression de  $-\dot{Q}$  est bien identique à celle (26) de [5] ou (19) de [21]. Remarquons enfin que la définition du sens de la charge nécessite d'introduire une norme : il est toujours possible de choisir la valeur la plus petite comme norme de telle sorte que la valeur de  $\Omega$  soit toujours supérieure ou égale à l'unité.

Une expression tridimensionnelle de la chaleur dissipée peut être tentée par extension de l'expression générale obtenue pour le modèle heuristique. Une difficulté nouvelle apparaît avec la définition du coefficient du sens de la charge  $\Omega$ . Si le matériau est caractérisé par un seuil limite convexe il est toujours possible d'associer à chaque point M (figure III.31) d'une trajectoire OM le point D, de phase  $\xi_D$ , intersection du seuil avec la tangente orientée à la trajectoire. Une expression formelle de la chaleur dissipée, exprimée en fonction de la courbe de charge de la branche considérée, pourrait être :

$$-\dot{Q}(\mathcal{E}-R\mathcal{E}) = \frac{\Omega}{\omega} \left\{ \text{tr} \left[ \left( \sigma \left( \frac{\mathcal{E}-R\mathcal{E}}{\Omega} \right) - R \sigma \right) \dot{\mathcal{D}} \right] - \text{tr} \left[ \frac{\mathcal{E}-R\mathcal{E}}{\Omega} \dot{\sigma} \left( \frac{\mathcal{E}-R\mathcal{E}}{\Omega} \right) \right] \right\}$$

avec pour les branches de première charge :  $\omega = \Omega = 1$

et pour les branches de deuxième charge :  $\omega = \hat{\omega}(\xi) + \hat{\omega}(\xi + \pi)$

$$\Omega = \hat{\omega}(\xi_D)$$

L'expression proposée doit être considérée comme une première tentative d'expression de la chaleur dissipée par un matériau dont les courbes de charge dépendent de la phase ; elle a le mérite uniquement de donner d'une part les expressions correctes pour le cas de la dégénérescence unidimensionnelle (cas du modèle heuristique) et d'autre part de donner les valeurs correctes de  $-\dot{Q}$  lorsque le point matériel est sur le seuil et que  $\dot{\sigma}$  est nul. En conclusion, on peut affirmer la nécessité de disposer de résultats expérimentaux de microcalorimétrie pour confirmer une expression tridimensionnelle correcte de la chaleur dissipée. Cette équation ne représente qu'un aspect du problème général de l'extension tridimensionnelle des schémas thermomécaniques à mémoire discrète [59].

Cette extension appelle immédiatement quelques remarques. D'une part la définition de  $\hat{\omega}(\xi)$ , à partir des invariants du tenseur de contrainte met bien en évidence le caractère constitutif de la chaleur dissipée par le matériau qui s'exprime sous forme de multiplication d'une trace des tenseurs mécanistes ( $\sigma$  et  $\epsilon$ ) par un coefficient fonction des invariants du tenseur de contrainte. D'autre part, l'aspect arbitraire de l'extension tridimensionnelle, à partir de l'expression exacte obtenue pour le modèle heuristique, met aussi en évidence le caractère constitutif de  $-\dot{Q}$ .

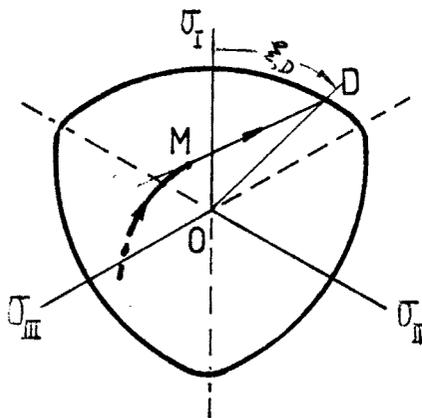


Fig. III.31

CHAPITRE IV

=====

LES PROPRIETES DU COMPORTEMENT D'ECROUISSAGE EN DEFORMATION



Rappelons que le schéma que nous proposons pour décrire le comportement, à faible vitesse de déformation, de l'acier inoxydable 316 L et de l'Inconel 718 comprend l'hystérésis pure qui constitue la base du schéma auquel s'ajoute une partie d'écrouissage en déformation. L'analyse des résultats relatifs à la première partie a été faite au chapitre précédent. Dans le présent chapitre, nous nous proposons d'étudier les résultats macroscopiques qui sont reliés à la deuxième partie.

Pour cela, nous analysons d'abord les résultats expérimentaux que nous avons obtenus avec les deux matériaux étudiés (§ 1), l'analyse est complétée par des résultats extraits de la littérature. Pour conforter les hypothèses que nous serons amenés à faire en vue de la modélisation, nous tenterons de décrire les principaux phénomènes microstructuraux reliés aux manifestations macroscopiques de l'écrouissage en déformation (§ 2). Enfin, nous proposons une modélisation de l'écrouissage en déformation, sur la base des résultats macroscopiques et en liaison avec les phénomènes microstructuraux essentiels (§ 3).

#### IV.1. Analyse des résultats expérimentaux

Au sens restreint classique, l'écrouissage désigne la variation du seuil de plasticité sous chargement dépassant le domaine d'élasticité. Cette définition classique n'est pas compatible avec notre schéma de comportement. Nous utilisons ce terme dans un sens plus large : l'écrouissage est un processus de modification des propriétés physiques sous l'action de sollicitations mécaniques générant des déformations irréversibles[50].

Pour analyser les propriétés d'écrouissage des métaux, deux types d'essai peuvent être envisagés : soit un cyclage contrôlé en amplitude de déformation et à vitesse de déformation constante ; soit un cyclage contrôlé en contrainte et à vitesse de contrainte constante. Compte tenu du fait que nous ne disposons pas de moyens pour la détermination exacte de la contrainte (cf § II.2.5), et que notre but est l'étude de l'écrouissage en déformation, il est beaucoup plus valable d'utiliser la première solution et de solliciter le matériau en déformation imposée ; on enregistre l'évolution du chargement et ensuite on essaye de déterminer la contrainte le mieux possible. C'est pourquoi, dans ce travail, nous utilisons toujours ce type d'essai qui nous permet, de plus, de mieux comparer nos résultats

avec ceux de la littérature qui comportent des aspects microstructuraux [12, 13, 35].

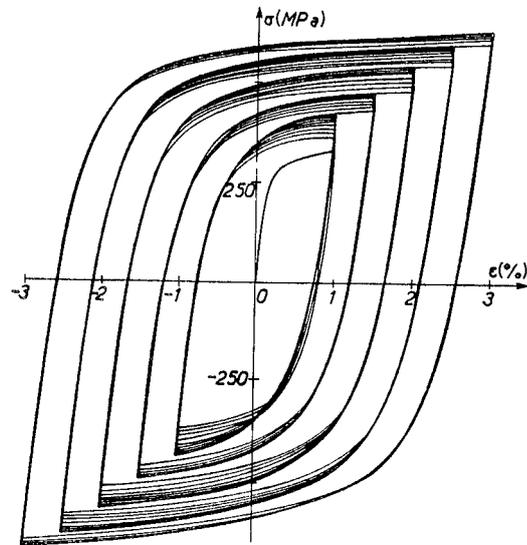
Pour la mise en évidence de l'effet d'écrouissage en déformation, nous avons effectué des essais de fatigue oligocyclique, caractérisés par quelques dizaines de cycles de sollicitation et une amplitude de déformation suffisamment grande pour que le cycle se termine sur le pseudo-palier de plasticité. Les phases d'endommagement et de rupture ultime du matériau ne sont pas prises en considération.

Nous avons analysé, dans le chapitre précédent, la forme des courbes de charge données par des sollicitations cycliques, à savoir les essais de traction (figure III.1), de torsion (figure III.10) pour l'acier inoxydable 316 L et les essais de traction (figure III.6), de torsion (figure III.13) pour l'Inconel 718. Nous reprenons l'analyse de ces essais, en considérant ici l'influence de l'écrouissage en déformation.

On constate, d'une façon classique [36], que les courbes de charge-déformation prennent la forme d'une boucle d'hystérésis ouverte qui se stabilise et se ferme au bout d'un certain nombre de cycles, au cours desquels le matériau s'adapte aux sollicitations cycliques. Cette accommodation en fatigue se produit de deux manières : pour l'acier inoxydable 316 L il y a durcissement et pour l'Inconel il y a adoucissement. On note bien aussi qu'au début du cyclage, la boucle d'hystérésis évolue rapidement et un écrouissage important est observé ; cependant après un certain nombre de cycles, l'écrouissage n'évolue plus, bien avant la rupture : l'état de saturation [35] (ou l'état stabilisé [12]) est atteint. Si on augmente l'amplitude de déformation imposée, la boucle d'hystérésis évolue de nouveau et l'écrouissage tend vers un autre état de saturation.

Nos résultats sont comparables à divers résultats publiés dans la littérature, par exemple ceux de Chaboche et Rousselier (fig. IV.1) [20], de Pineau et Petrequin (figure IV.2) [12].

L'effet de l'écrouissage est bien mis en évidence par une représentation des résultats dans les axes  $|\sigma^i(N)|$ ,  $N$  ou  $\sigma^i(N)$  est la contrainte à l'extrémité du  $N$ ème cycle juste avant l'inversion.



a - Test with increasing levels.

Fig. IV.1. Exemple d'essai de traction-compression à amplitudes de déformation croissantes - Acier inoxydable 316 L [20]

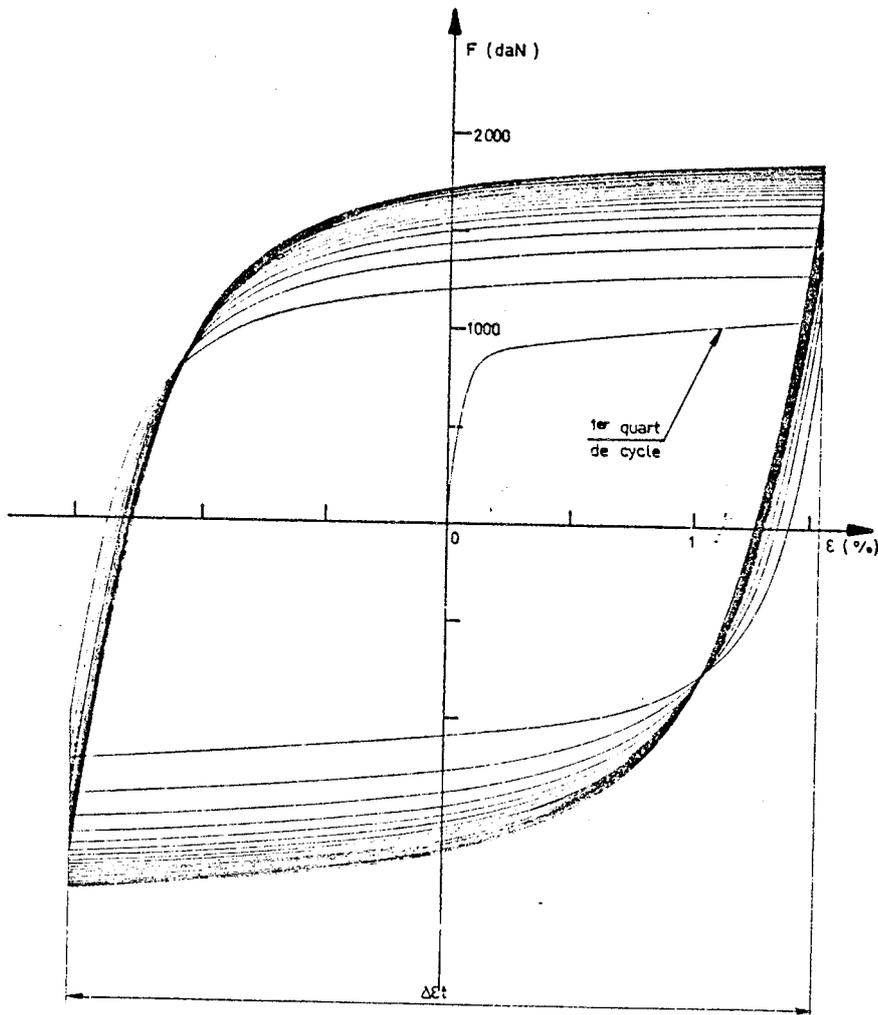


Fig. IV.2. Exemple d'essai de traction-compression à grande amplitude unique - Acier inoxydable 316 L [12]

Pour les essais décrits dans le chapitre précédent, les résultats sont présentés sur les figures IV.3 et 4, dans le cas de l'acier inoxydable 316 L et sur les figures IV.5 et 6 dans le cas de l'Inconel 718.

Dans le cas des essais de traction-compression, on constate que la différence entre la traction et la compression reste de l'ordre de 1 % pendant tout le processus d'écrouissage pour l'essai sur l'acier inoxydable 316 L (figure IV.3) ; pour l'Inconel 718, la différence est de l'ordre de 10 % et reste constante pendant l'écrouissage (figure IV.5) comme pour l'acier inoxydable 316 L. La forme des seuils proposés dans le chapitre précédent pour le comportement d'hystérésis pure peut donc être conservée pour décrire les états écrouis du matériau ; dans la modélisation de l'écrouissage, il sera suffisant de ne faire varier que le rayon moyen du seuil cylindrique.

Dans le cas des essais de torsion cyclique, on constate que les résultats expérimentaux ne montrent aucune différence suivant le sens de la torsion, comme il fallait s'y attendre ; ceci est le cas aussi bien pour l'acier inoxydable 316 L (figure IV.4) que pour l'Inconel 718 (figure IV.6).

La comparaison de nos résultats avec ceux de la littérature n'est pas évidente, dans la mesure où les auteurs sont souvent plus intéressés par la détermination d'un nombre de cycles à la rupture que pour l'évolution des premiers cycles ; de ce fait, ils utilisent une représentation en  $\log N$  comme par exemple Clavel [13] (figure IV.7) pour l'Inconel 718 à la température ambiante. Ce genre de représentation interdit en particulier la détermination de la valeur  $\hat{\sigma}_a$  du seuil pour l'état non écroui par extrapolation à  $N = 0$  du faisceau des courbes à différentes amplitudes de déformation (cf § V.2).

Pour chaque valeur de l'amplitude de déformation, la contrainte en fin de cycle tend vers une valeur limite  $\sigma^s$ , souvent appelée dans la littérature contrainte de saturation [35] ou contrainte stabilisée [12] :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma^i(\Delta\lambda, N) = \sigma^s(\Delta\lambda) \quad (\text{IV-1-1})$$

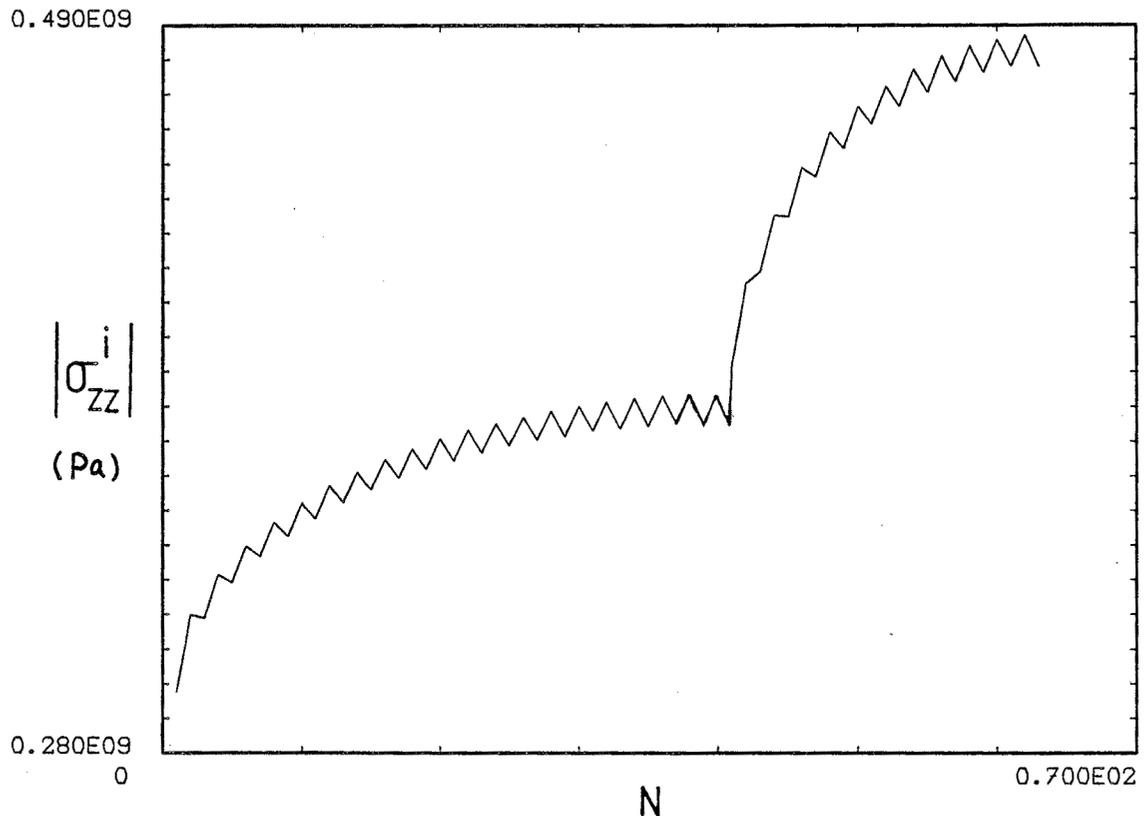


Fig. IV.3. Courbe de consolidation de l'essai de traction-compression Acier inoxydable 316 L (n° 213).

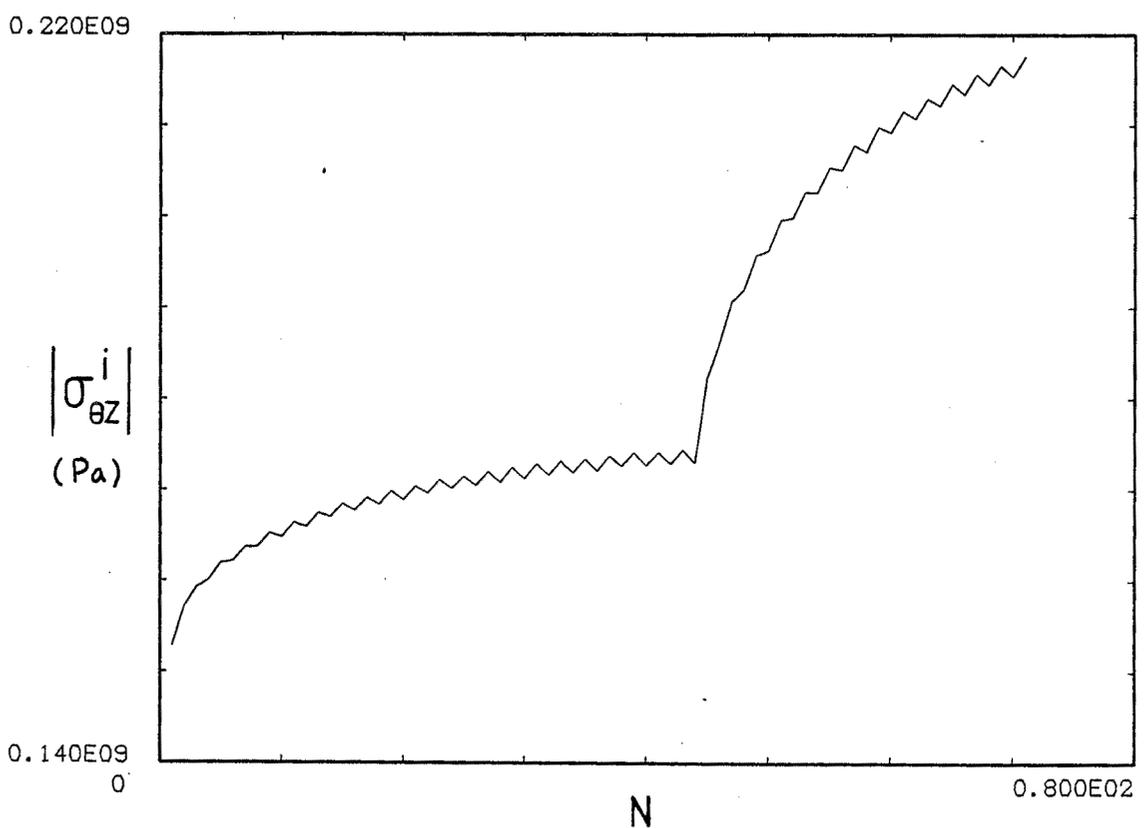


Fig. IV.4. Courbe de consolidation de l'essai de torsion - Acier inoxydable 316 L (n° 214).

La courbe d'écrouissage cyclique [12], ou de saturation,  $\sigma^s(\Delta\lambda)$  est considérée comme une caractéristique de chaque matériau, aussi bien par les mécaniciens [20], que par les métallurgistes [12]. Ceci peut être vérifié en partie par comparaison entre les résultats de deux de nos essais.

Considérons par exemple l'essai 215 (figure IV.8) pour lequel l'amplitude de déformation est contrôlée directement par  $\Delta\lambda_{\text{zz}} = 3.0 \%$ . Si l'on compare le niveau de la contrainte de saturation avec l'essai n° 213 (figure IV.3) où l'amplitude de déformation est contrôlée d'abord par  $\Delta\lambda_{\text{zz}} = 1.5 \%$  et après 20 cycles par  $\Delta\lambda_{\text{zz}} = 3.0 \%$ . On constate que le niveau de la contrainte de saturation est pratiquement le même (figure IV.9).

Compte tenu des limites imposées par l'utilisation des jauges de déformation, nous n'avons obtenu que des résultats qui définissent le début de la courbe de saturation. Nous compléterons ces résultats, afin de pouvoir définir entièrement la courbe de saturation, pour ceux obtenus par Pineau et Petrequin [12] avec l'acier inoxydable 316 L (figure IV.10) et par Clavel [13] avec l'Inconel 718 (figure IV.11).

Enfin, il faut mentionner que la plupart des résultats connus ne concernent que des essais à amplitude de déformation croissante. Pour le cas de l'amplitude de déformation décroissante, les résultats expérimentaux indiquent qu'il existe nettement une irréversibilité d'écrouissage après la diminution de l'amplitude de déformation. Prenons par exemple l'essai de traction-compression, torsion combinées n° 216 (figures III.16 et III.17) dont les courbes d'écrouissage cyclique pour la partie de traction-compression et de torsion sont présentées respectivement dans les figures IV.12 a et b. La courbe d'écrouissage d'un matériau ne peut donc pas être considérée comme strictement intrinsèque ; elle caractérise aussi un type de chemin.

#### IV.2. Les phénomènes microstructuraux liés à l'écrouissage en déformation

Avant de proposer une modélisation macroscopique de l'écrouissage en déformation, il nous paraît nécessaire de rappeler ici l'essentiel des phénomènes microstructuraux liés à l'écrouissage en déformation.

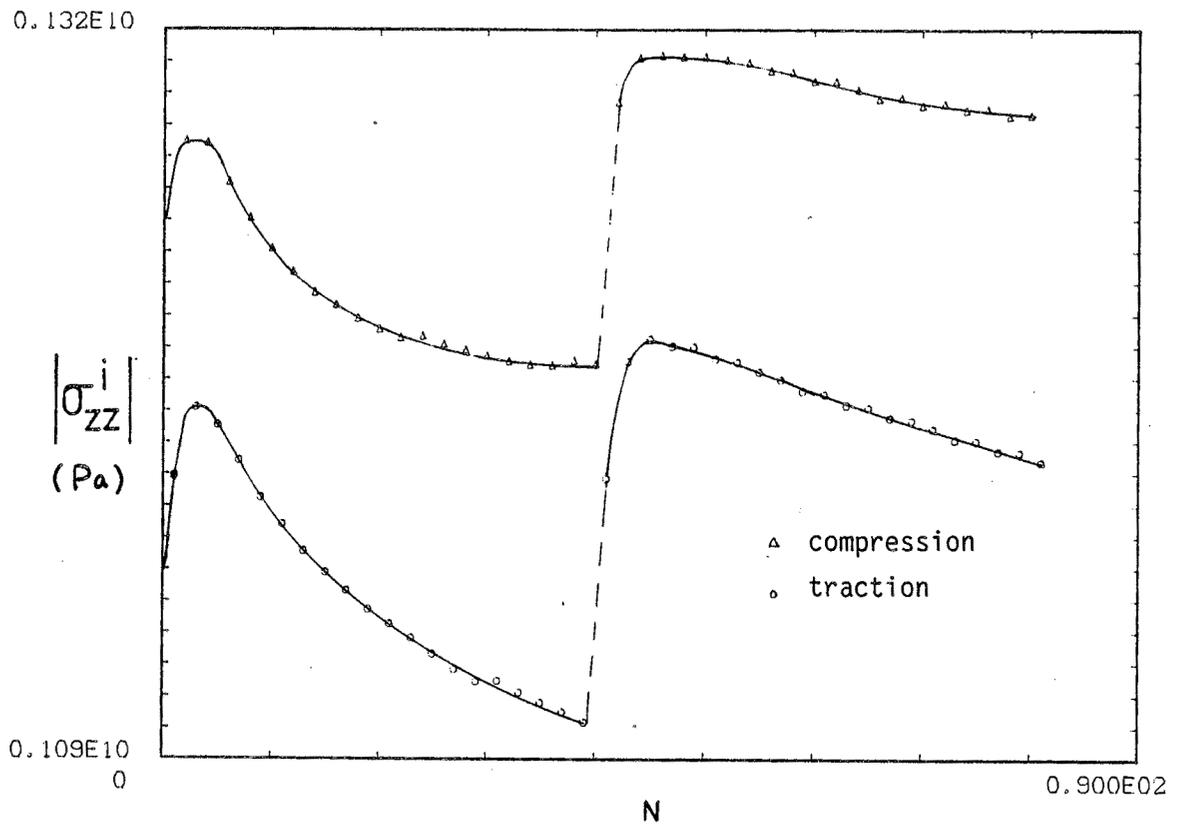


Fig. IV.5. Courbe de consolidation de l'essai de traction-compression Inconel 718 (n° 302).

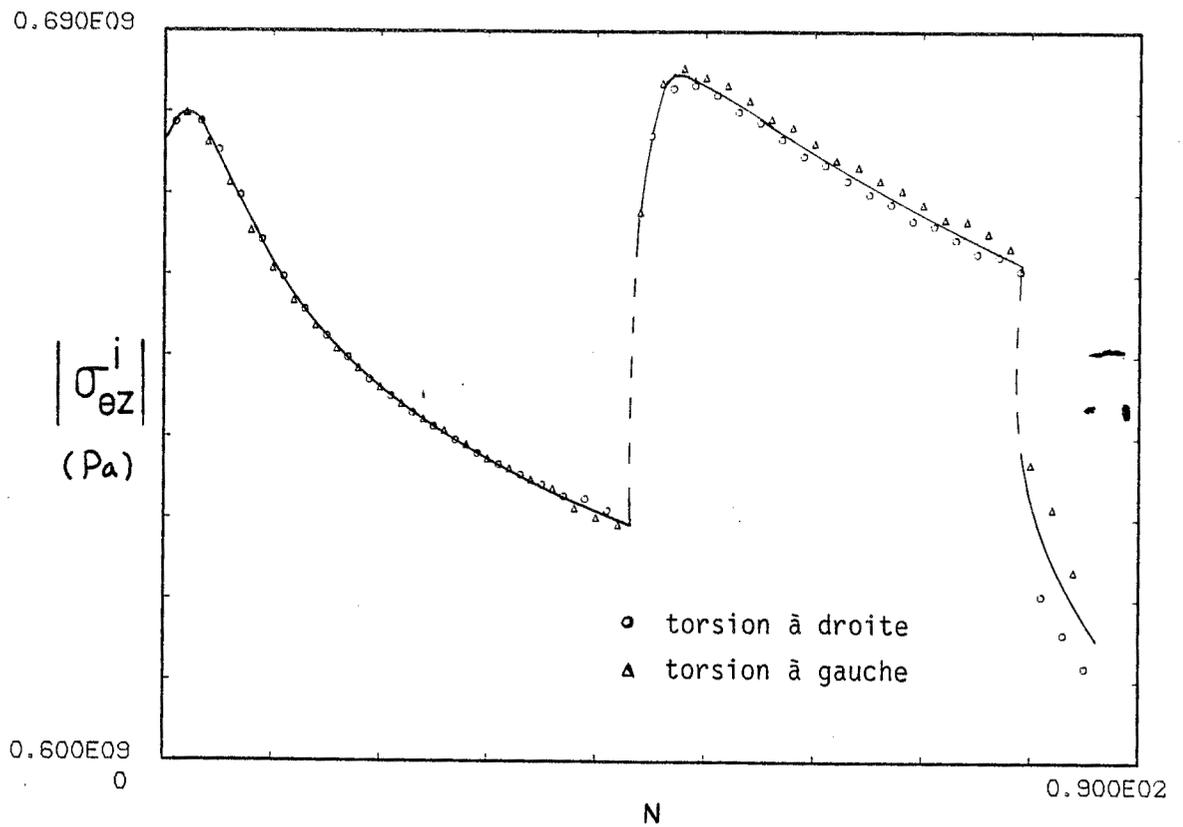


Fig. IV.6. Courbe de consolidation de l'essai de torsion - Inconel 718 (n° 303).

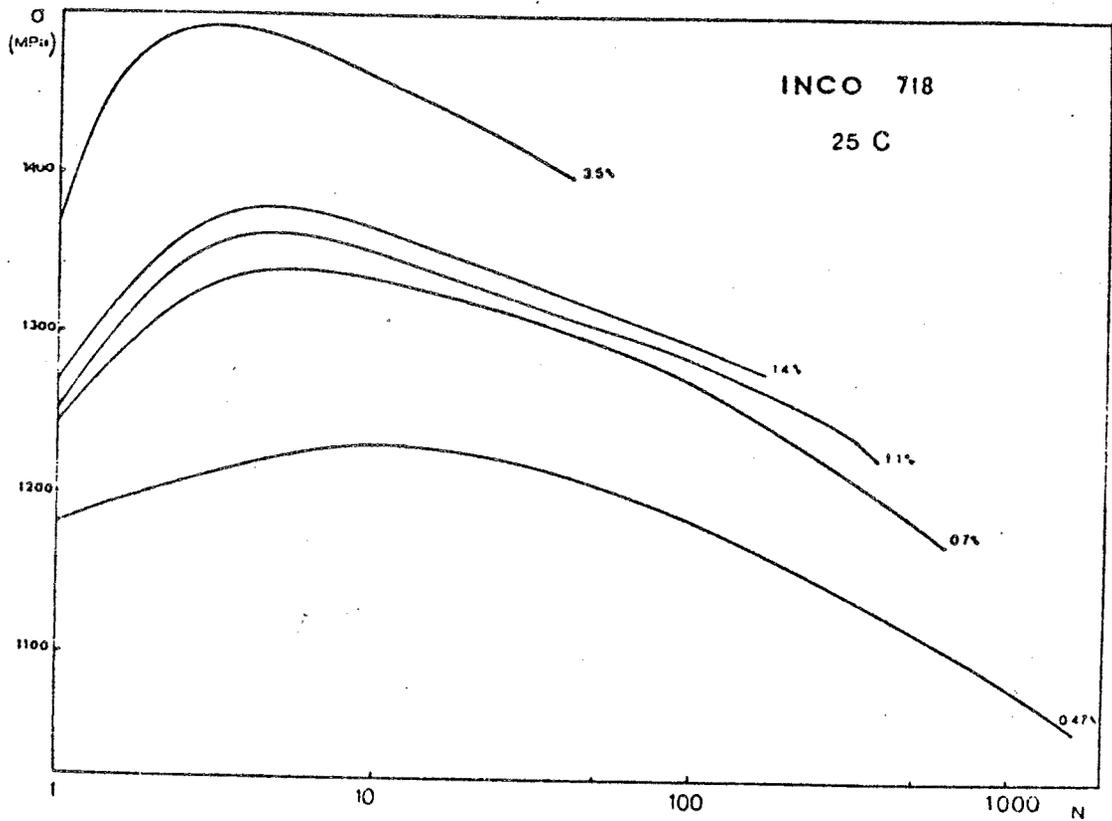


Fig. IV.7. Evolution de la contrainte aux extrémités en fonction du nombre de cycles - Essai de traction-compression - 718 [13]

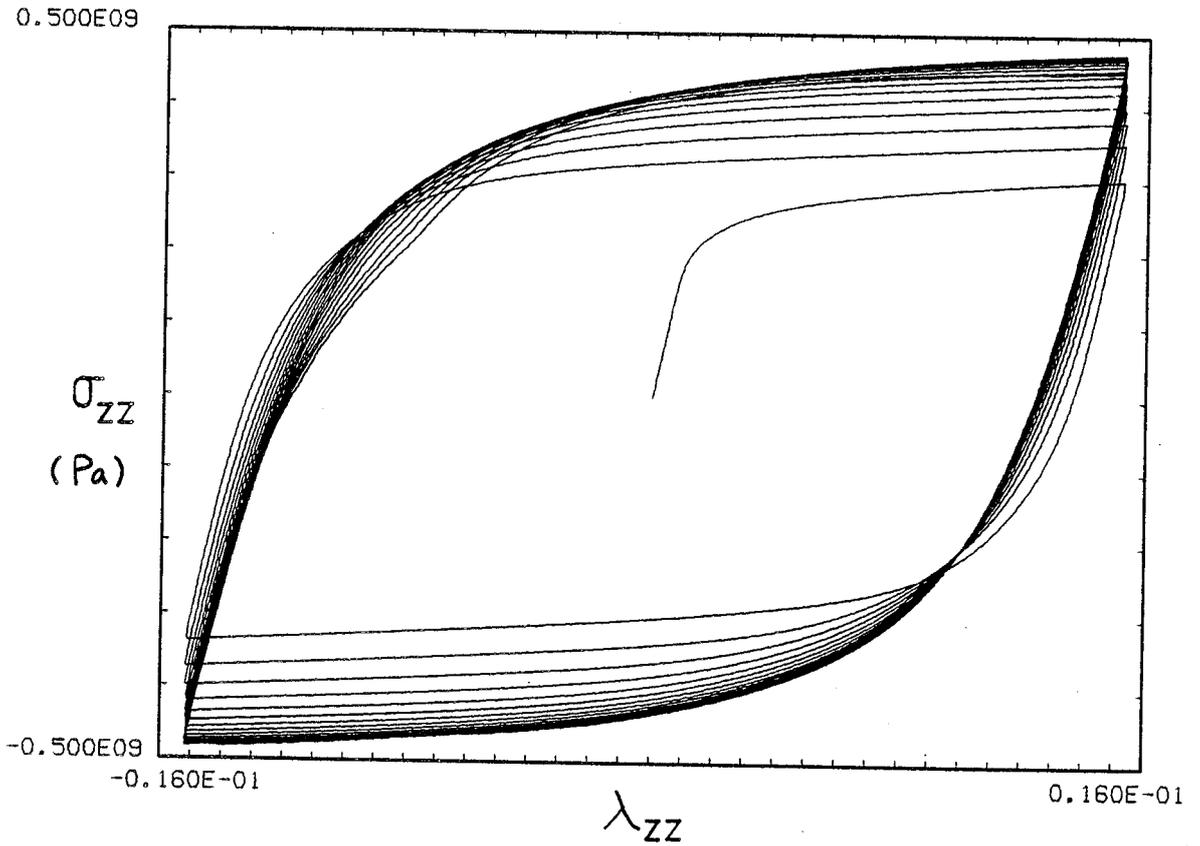


Fig. IV.8. Essai de traction-compression - Acier inoxydable 316 L (n° 215).

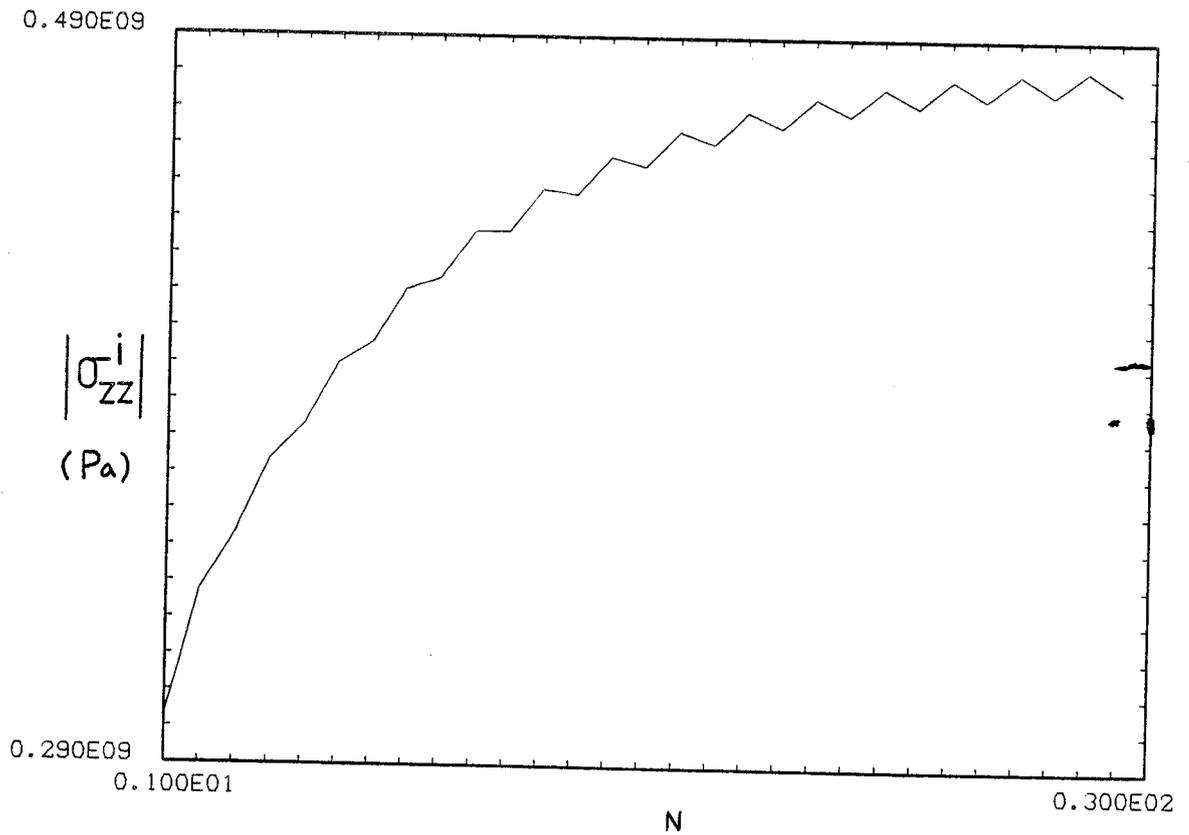


Fig. IV.9. Courbe de consolidation - Acier inoxydable 316 L (n° 215).

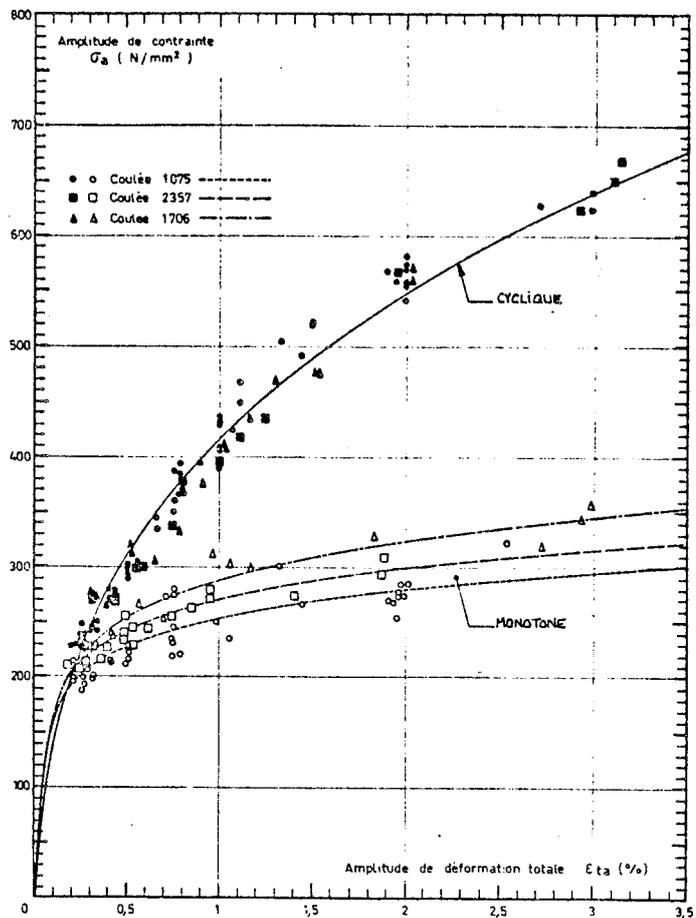


Fig. IV.10. Un exemple de courbe d'écroutissage - Acier inoxydable 316 L [ 12 ]

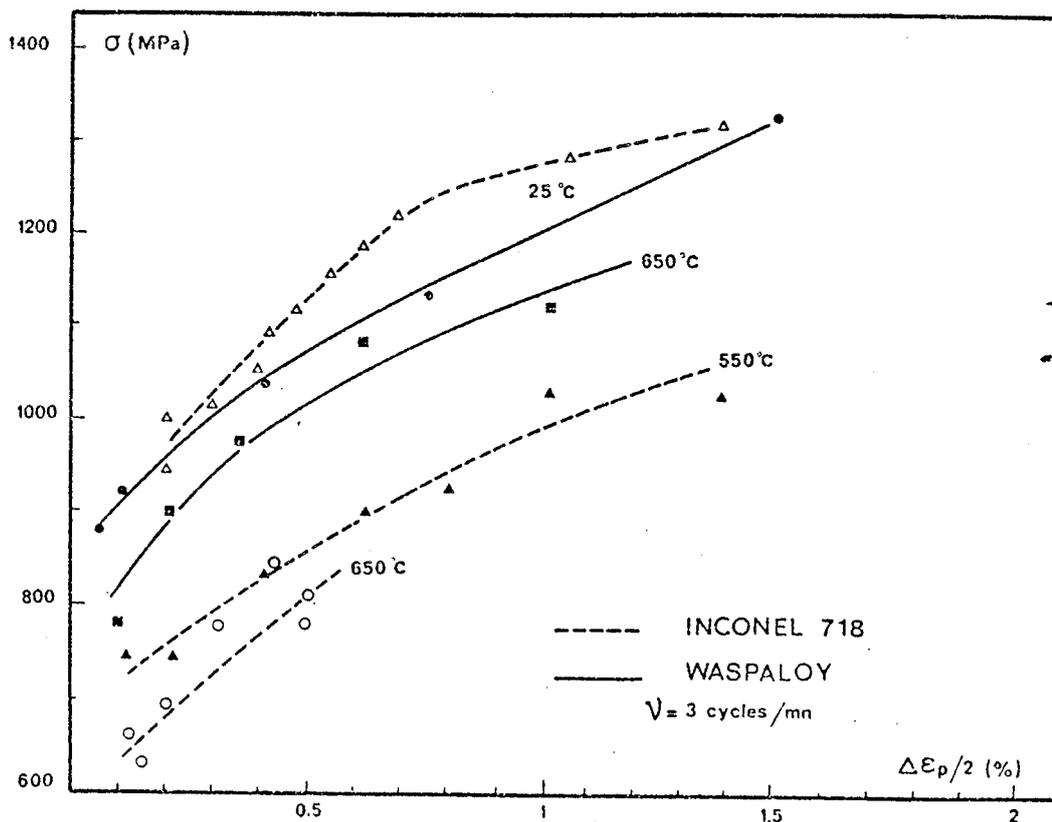


Fig. IV.11. Un exemple de courbe d'écroutissage - L'Inconel 718 - à différentes températures [ 13 ]

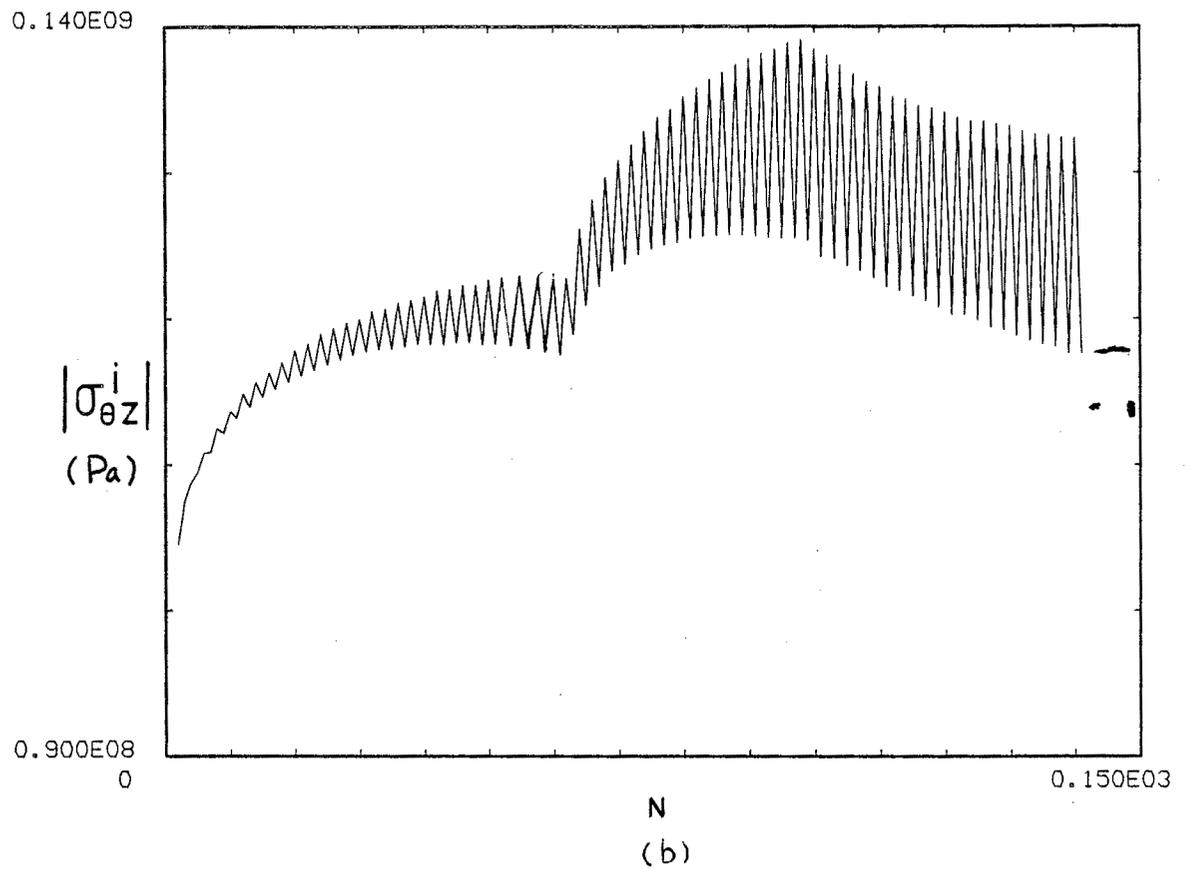
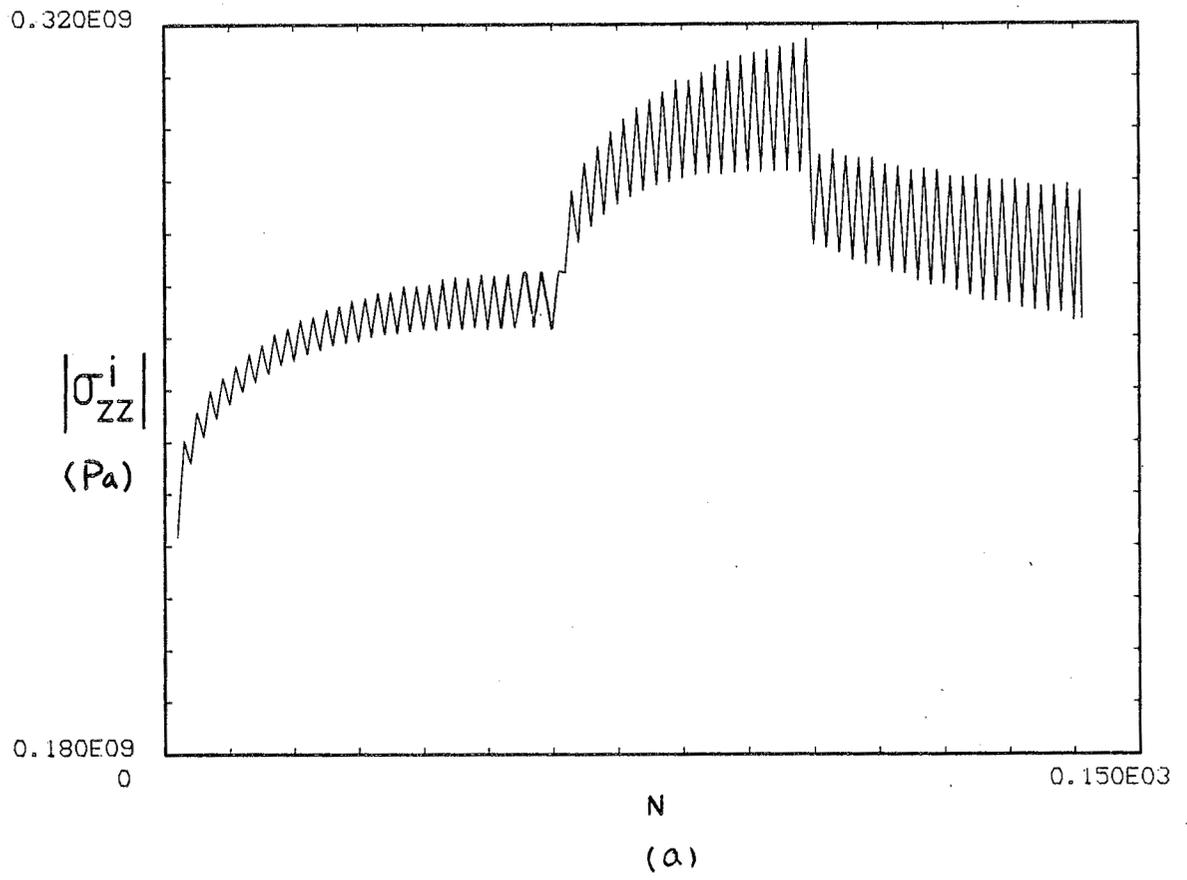


Fig. IV.12. Courbe de consolidation de l'essai de traction-compression et torsion cycliques combinées -Acier inoxydable 316L(n°216)

Ne nous considérant pas compétents dans ce domaine, nous renvoyons le lecteur pour plus de détail à nos sources d'information, les plus récents étant l'article de Pineau et Petrequin [12] et ceux de Magnin et al [35].

Pour sérier les problèmes, considérons d'abord le cas de l'acier inoxydable 316 L. Les phénomènes microstructuraux mis en jeu au cours de l'écrouissage cyclique sont essentiellement liés aux mouvements de dislocation et éventuellement à du micromaclage ; rappelons que nous ne considérons ici que le cas de la température ambiante et d'amplitudes de déformation de quelque pourcent.

Au fur et à mesure du cyclage, la déformation se localise en considérant une échelle au niveau du grain de polycristal : les dislocations mises en mouvement vont s'empiler pour former des figures bien définies, d'abord planaires puis cellulaires au fur et à mesure que la déformation et le nombre de cycles augmentent. Les cellules qui sont finalement créées définissent des sous-grains dans chaque grain du polycristal. Les frontières de ces cellules, joints de grain ou de sous-grains, sont caractérisées par une épaisseur ou une densité de dislocation ; celle-ci a tendance à augmenter avec la déformation et le nombre de cycles. On constate donc qu'au fur et à mesure que l'essai cyclique se poursuit, les dislocations mobiles vont rencontrer de plus en plus d'obstacles qui freinent leur mouvement ; une énergie de plus en plus grande est nécessaire pour déplacer les dislocations : ceci se traduit sur le plan macroscopique pour le durcissement (ou consolidation) du matériau. Pour une amplitude de déformation donnée, et après un nombre suffisant de cycles, la structure des obstacles se stabilise. Le matériau est dans l'état saturé.

Si maintenant on augmente l'amplitude de déformation, la structure des obstacles va de nouveau évoluer et tendre vers un état plus dense avec des cellules plus petites et/ou des joints plus épais. L'évolution de cette structure stable avec l'amplitude de déformation est directement liée à la courbe d'écrouissage cyclique ou courbe de saturation mentionnée plus haut. Parallèlement à la création de figures de dislocation, du micromaclage peut aussi se produire dans les grains et participer au processus de déformation. Dans le cas d'un processus monotone d'augmentation du nombre de cycles et de l'amplitude de déformation, qui donne

lieu à un durcissement continu du matériau, on conçoit qu'il puisse exister un état de durcissement maximum, au delà duquel une augmentation de l'amplitude de déformation ne crée plus d'obstacles supplémentaires. De plus, les métallurgistes admettent, en première approximation, qu'un état de saturation donné correspond à une amplitude de déformation donnée, indépendamment du chemin suivi (un grand pas ou plusieurs petits pas successifs), dans la mesure où le processus est toujours croissant.

Considérons maintenant le cas où l'on diminue l'amplitude de déformation à la valeur  $\Delta\lambda_m$ , après avoir atteint un état stable d'obstacles, correspondant à des cycles d'amplitude  $\Delta\lambda_M$ . La structure des obstacles a alors tendance à se réduire pour tendre vers celle qui aurait existé si on avait d'abord effectué des cycles d'amplitude  $\Delta\lambda_m$ , mais on n'atteindra pas exactement cet état : en effet, le matériau garde une trace des obstacles denses produits précédemment et en particulier il garde la trace de tout le micromaclage produit.

Le cas de l'Inconel 718 est plus complexe en raison de la présence des précipités dans la matrice austénitique. Ces précipités sont des obstacles importants pour le mouvement des dislocations, ce qui se traduit par le durcissement de ce matériau, sa résistance initiale étant environ trois fois plus élevée que celle de l'acier inoxydable 316 L. Au cours de la déformation les dislocations vont petit à petit cisailer ces précipités ; lorsqu'un précipité est cisailé, d'autres dislocations vont pouvoir suivre ce chemin qui a été ouvert et se déplacer plus facilement : le matériau s'est adouci ou déconsolidé.

Dans la matrice austénitique, des phénomènes identiques à ceux que nous venons de décrire pour l'acier inoxydable 316 L se produisent ; ces phénomènes ont tendance à durcir le matériau.

Finalement, dans le cas de l'Inconel 718, le phénomène d'adoucissement et celui de durcissement sont en compétition : au début des cycles c'est le phénomène de durcissement par création d'obstacles qui est prépondérant, mais après quelques cycles, le phénomène d'adoucissement par cisaillement de précipité prédomine.

Dans le cas où il y a diminution de l'amplitude de la déformation, un adoucissement assez rapide a lieu ; en effet, la structure des obstacles aux dislocations mobiles de la matrice austénitique a alors tendance à diminuer d'importance et donne lieu à un adoucissement qui s'ajoute à celui du comportement des précipités.

#### IV.3. Modélisation de l'écrouissage en déformation

Après l'analyse de nos résultats expérimentaux et une étude des phénomènes microstructuraux qui les expliquent, nous pouvons proposer des hypothèses valables pour la modélisation. Nous envisageons d'abord le cas d'acier inoxydable 316 L qui est plus simple.

L'hypothèse essentielle est l'existence d'un état de saturation, caractéristique du matériau et spécifié par la fonction d'écrouissage cyclique. Habituellement, cette fonction est donnée en axes : composante de contrainte à l'extrémité du cycle, amplitude d'une composante de déformation ; sous cette forme elle ne peut que caractériser un comportement unidimensionnel. Pour décrire un comportement tridimensionnel, il est nécessaire de définir cette fonction en quantités invariantes ; d'autre part l'évolution de la contrainte en fin de cycle peut être définie d'une façon plus générale par l'évolution du seuil actuel  $\hat{\Pi}_{\sigma_a}$ . Pour cela, nous proposons de représenter l'état de saturation par la fonction  $\hat{\Pi}_{\sigma}^{\Delta}(\Delta\gamma_c)$  où  $\Delta\gamma_c$  est l'amplitude du paramètre d'écrouissage corrigé et  $\hat{\Pi}_{\sigma}^{\Delta}$  la valeur atteinte par le seuil limite après un nombre suffisant de cycles d'amplitude  $\Delta\gamma_c$ . Rappelons que le paramètre d'avancement de l'écrouissage  $\gamma$  est défini à partir de l'évolution d'hystérésis pure et représente la dissipation intrinsèque cumulée :

$$\gamma = \int_0^t \phi d\tau = \int_0^t \text{tr}[(\sigma_a - \sigma_a^R) \mathcal{D}] d\tau$$

et :

$$\gamma_c = \frac{2}{\omega^2} \gamma$$

L'utilisation du paramètre d'écrouissage corrigé  $\gamma_c$  plutôt que celui du paramètre  $\gamma$  lui-même est un choix guidé uniquement par des considérations opérationnelles. Seule une analyse plus détaillée que celle dont nous disposons actuellement, pourrait confirmer ou

infirmier ce choix. Une conséquence de ce choix est que la dissipation le long de la courbe de lère-charge est identique à celle de la branche de décharge ou de recharge.

Pour une amplitude de cycle donné, l'amplitude du paramètre d'écrouissage corrigé est défini par la différence du paramètre entre deux inversions consécutives :

$$\Delta \gamma_c = \gamma_c^i - \gamma_c^{i-1}$$

La définition de  $\Delta \gamma_c$  suppose donc l'existence de l'état d'inversion. Il faut donc compléter notre définition pour décrire la courbe de lère charge ou des arcs de lère charge (arcs reliant un dernier petit cycle au premier grand cycle qui le suit). On suppose, pour la courbe de lère charge, que  $\Delta \gamma_c$  varie d'une façon continue :

$$\Delta \gamma_c = \frac{2}{\omega^2} \int_0^t d\gamma$$

Ceci correspond bien aux phénomènes microstructuraux : tant que la lère inversion n'a pas eu lieu, le matériau ignore à quelle amplitude de cycle il est soumis. De même, le long de l'arc qui relie le dernier cycle d'amplitude de  $\Delta \gamma_{c1}$  au 1er cycle d'amplitude  $\Delta \gamma_{c2}$  tel que  $\Delta \gamma_{c2} > \Delta \gamma_{c1}$  le paramètre  $\Delta \gamma_c$  varie d'une façon continue :

$$\Delta \gamma_c = \Delta \gamma_{c1} + \frac{2}{\omega^2} \int_{t_1}^t d\gamma \quad t_1 < t < t_2$$

$$\text{avec : } \Delta \gamma_{c2} = \Delta \gamma_{c1} + \frac{2}{\omega^2} \int_{t_1}^{t_2} d\gamma$$

La fonction de saturation d'écrouissage  $\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}^s(\Delta \gamma_c)$  est prise sous la forme :

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^s(\Delta \gamma_c) = \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}}{[1 - \gamma_2(1 - e^{-\frac{\Delta \gamma_c}{a_2 \gamma_n}})]^{\gamma_c}} \quad (\text{IV.3.1})$$

Cette fonction est caractérisée par 2 coefficients :  $\gamma_2$  et  $a_2$  ayant les sens physiques suivants :

- 1)  $\gamma_2$  caractérise le seuil limite d'écrouissage :

$$\lim_{\Delta \gamma_c \rightarrow \infty} \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}^s(\Delta \gamma_c) = \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}}{(1 - \gamma_2)^{\gamma_c}} \quad (\text{IV.3.2})$$

2)  $a_2$  caractérise la pente initiale de la courbe :

$$\lim_{\Delta y_c \rightarrow 0} \frac{\partial \hat{\Pi}_{\sigma}^A}{\partial (\Delta y_c)} = \frac{\hat{\Pi}_{\sigma_a}}{y_n} \cdot \frac{\gamma_2}{a_2 c} \quad (IV.3.3)$$

où  $y_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{y_0^2}{E}$  est une norme du paramètre  $y_c$ .

Quelque soit  $\Delta y_c$  on a toujours :

$$\hat{\Pi}_{\sigma_a} \leq \hat{\Pi}_{\sigma}^A(\Delta y_c) \leq \frac{\hat{\Pi}_{\sigma_a}}{(1 - \gamma_2)^{1/2}}$$

La deuxième hypothèse concerne la façon dont le point représentatif du matériau évolue vers un état de saturation. En comportement unidimensionnel et pour une amplitude de déformation donnée, cette évolution est donnée par la fonction  $\sigma^i(N)$  où  $N$  est le nombre de cycles. Comme précédemment, nous proposons une généralisation en utilisant le paramètre d'écrouissage corrigé  $y_c$  comme paramètre d'avancement. De plus, comme il s'agit de pouvoir décrire n'importe quel type de cycle, il est nécessaire de prendre en compte des valeurs originelles. Soit  $y_{co}$  et  $\hat{\Pi}_{\sigma}^o$  la valeur du paramètre d'avancement d'écrouissage et la valeur du seuil limite à l'instant où la sollicitation définit une nouvelle amplitude de cycle  $\Delta y_c$ . On suppose que pour les nouveaux cycles  $\Delta y_c$  le point représentatif de l'état du matériau évolue avec le paramètre  $y_c - y_{co}$  du seuil  $\hat{\Pi}_{\sigma}^o$  vers la valeur  $\hat{\Pi}_{\sigma}^A(\Delta y_c)$ . Comme pour la fonction de saturation, nous choisissons une évolution exponentielle :

$$\hat{\Pi}_{\sigma}(y - y_{co}) = \frac{\hat{\Pi}_{\sigma}^o}{\left[1 - \gamma_1 \left(1 - e^{-\frac{y_c - y_{co}}{a_1 y_n}}\right)\right]^{1/2}} \quad (IV.3.4)$$

Cette fonction est caractérisée par deux paramètres  $\gamma_1$  et  $a_1$ , mais il existe seulement un coefficient indépendant puisque cette fonction doit être compatible avec la relation (4.3.1) par la première hypothèse :

$$\lim_{(y_c - y_{co}) \rightarrow \infty} \hat{\Pi}_{\sigma}(y_c - y_{co}, \Delta y_c) = \hat{\Pi}_{\sigma}^A(\Delta y_c)$$

Le coefficient  $\gamma_1$  est défini alors par :

$$\gamma_1 = 1 - \left( \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^o}{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^s} \right)^c$$

La fonction d'érouissage cyclique  $\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}(\gamma_c - \gamma_{c0})$  est caractérisée donc par un seul coefficient  $a_1$ , qui donne une mesure de la vitesse d'érouissage pour atteindre l'état de saturation à  $\Delta\gamma_c$  donné :

$$\lim_{\gamma_c \rightarrow \gamma_{c0}} \frac{\partial \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}}{\partial \gamma_c} = \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}a}}{\gamma_n} \cdot \frac{\gamma_1}{a_1 c} \quad (\text{IV.3.5})$$

Pour prendre en compte l'irréversibilité de l'érouissage, on suppose enfin que si la valeur initiale  $\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^o$  est au dessus de la courbe de saturation, le point représentatif de l'état du matériau ne peut parcourir qu'une proportion  $\beta$  du chemin qui le sépare de l'état de saturation ; la valeur de  $\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^s$  est remplacée par  $\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\beta s}$  :

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\beta s} = \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^o (\Delta\gamma_c) - \beta \left[ \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^o - \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^s (\Delta\gamma_c) \right]$$

Finalement, pour l'érouissage en déformation, on a la modélisation (cf. § II.1) :

$$\alpha_4^e = - \frac{u}{\Delta \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{s-c} (\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}} \omega)^c} \quad (\text{IV.3.6})$$

avec :

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}} = \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}a}}{C_e^{1/c}}$$

où :

$$C_e = \left\{ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^o}{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^s} \right)^c \right] \cdot \left( 1 - e^{-\frac{\gamma_c - \gamma_{c0}}{a_1 \gamma_n}} \right) \right\} \cdot \left( \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}a}}{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^o} \right)^c$$

$$\Delta\gamma_c^i = \gamma_c^i - \gamma_c^{i-1} ; \quad \gamma_c^0 = 0$$

$$\text{si } \Delta\gamma_c^{i+1} \neq \Delta\gamma_c^i \text{ à } t=t_0, \text{ alors } \gamma_{c0} = \gamma_c(t_0), \quad \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^o = \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}(t_0)$$

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^s (\Delta\gamma_c) = \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}a}}{\left[ 1 - \gamma_2 \left( 1 - e^{-\frac{\Delta\gamma_c}{a_2 \gamma_n}} \right) \right]^{1/c}}$$

$$\text{si } \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^o > \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^s, \text{ alors } \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^s \rightarrow \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\beta s} = \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^o - \beta (\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^o - \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^s)$$

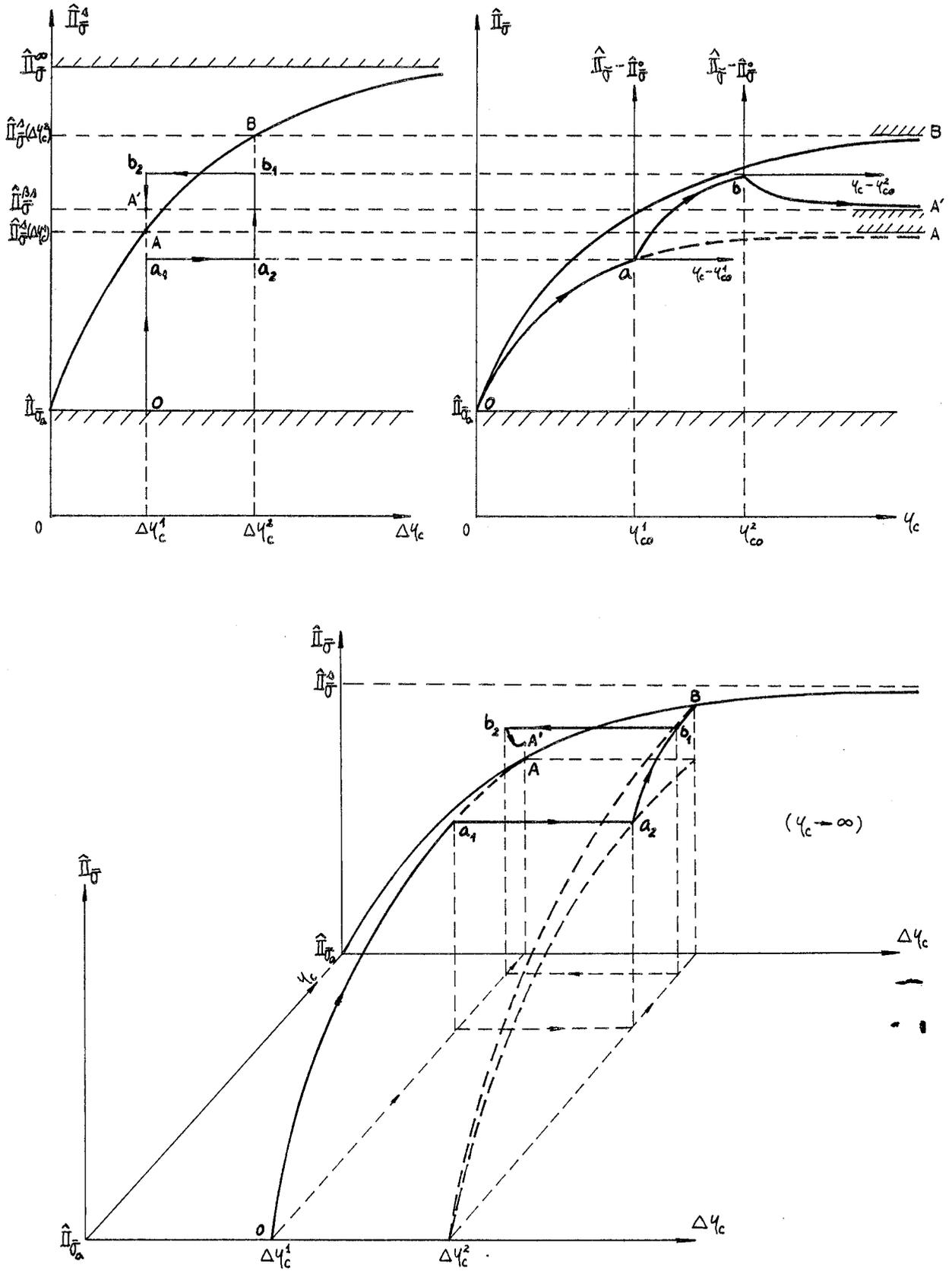


Fig.IV.13. Représentation graphique du modèle d'écroutissement en déformation.

Ainsi, les valeurs de  $\hat{\Pi}_{\sigma}^s$ ,  $\hat{\Pi}_{\sigma}^o$  sont des fonctionnelles de  $\Delta\gamma_c$  imposées, constantes par morceaux. Elles doivent être mémorisées le long du trajet du chargement à  $\Delta\gamma_c$  donné et peuvent être effacées dès qu'il y a le changement de  $\Delta\gamma_c$ . La figure IV.13 donne une présentation schématique de la modélisation de l'écrouissage en déformation.

La modélisation de l'écrouissage que nous proposons ici (IV.3.6) est plus générale que l'ancienne modélisation, utilisée dans [8][10][11] et vérifiée uniquement pour un très petit nombre de cycles.

L'écrouissage de l'Inconel 718 est plus compliqué que celui de l'acier inoxydable 316 L. Comme nous l'avons vu au paragraphe précédant deux phénomènes sont mis en jeu :

- le phénomène de durcissement qui prend place dans la matrice austénitique et est comparable à celui qui se produit avec l'acier inoxydable 316 L.
- le phénomène d'adoucissement par cisaillement des précipités.

En accord avec l'hypothèse générale d'additivité de contribution des contraintes, une proposition admissible consisterait à considérer que la contribution de contrainte d'écrouissage en déformation se scinde en deux parties :

$$\sigma_{gH} = \sigma_{dur.} + \sigma_{ad.}$$

décrivant respectivement le phénomène de durcissement et celui d'adoucissement.

Pour expliciter ces deux termes, on peut admettre les mêmes hypothèses que celles faites pour décrire le durcissement de l'acier inoxydable 316 L : il existe pour chaque phénomène un état de saturation vers lequel tend le matériau lorsque le nombre de cycles augmente. Pour l'Inconel 718, cet état doit être défini dans l'espace  $\hat{\Pi}_{\sigma}^s$ ,  $\Delta\gamma_c$ ,  $\xi$  puisque le seuil du matériau est un cylindre de section non circulaire.

Pour des cycles d'amplitude croissante, les expressions formelles sont conservées, mais les grandeurs  $\hat{\Pi}_{\sigma_a}$ ,  $\hat{\Pi}_{\sigma}^o$  et  $\hat{\Pi}_{\sigma}^s$  sont ici les valeurs pour  $\xi = 0$  et le coefficient d'homothétie  $\omega$  est fonction de  $\xi$ . On a :

$$\alpha_4^e = - \frac{u}{\Delta \Pi_{\sigma_a}^{2-c} (\hat{\Pi}_{\sigma}^o(0) \cdot \omega)^c} \cdot C_e$$

avec 
$$\omega = \hat{\omega}(\xi) = \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}(\xi)}{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}(0)}$$

$$C_e = \left[ 1 - \gamma_1 \left( 1 - e^{-\frac{\gamma_c - \gamma_0}{a_1 \gamma_n}} \right) - \gamma_1^* \left( 1 - e^{-\frac{\gamma_c - \gamma_0}{a_1^* \gamma_n}} \right) \right] \cdot \left( \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}}{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}} \right)^c$$

$$\gamma_1 = 1 - \left( \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}}{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^A} \right)^c \quad \text{et} \quad \gamma_1^* = 1 - \left( \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}}{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{A*}} \right)^c$$

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^A = \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a} \left[ 1 - \gamma_2 \left( 1 - e^{-\frac{\Delta \gamma_c}{a_2 \gamma_n}} \right) \right]^{-\frac{1}{c}}$$

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{A*} = \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a} \left[ 1 - \gamma_2^* \left( 1 - e^{-\frac{\Delta \gamma_c}{a_2^* \gamma_n}} \right) \right]^{-\frac{1}{c}}$$

et par définition :

$$\gamma_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \gamma_2^* \leq 0$$

Dans le cas de cycles d'amplitude décroissante, nous admettons pour le phénomène de durcissement une évolution identique à celle de l'acier inoxydable 316 L, qui traduit la renversabilité partielle de la structure des dislocations immobiles :

si 
$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^A > \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^A(\Delta \gamma_c)$$

alors 
$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^A \Rightarrow \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^o - \beta (\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^o - \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^A)$$

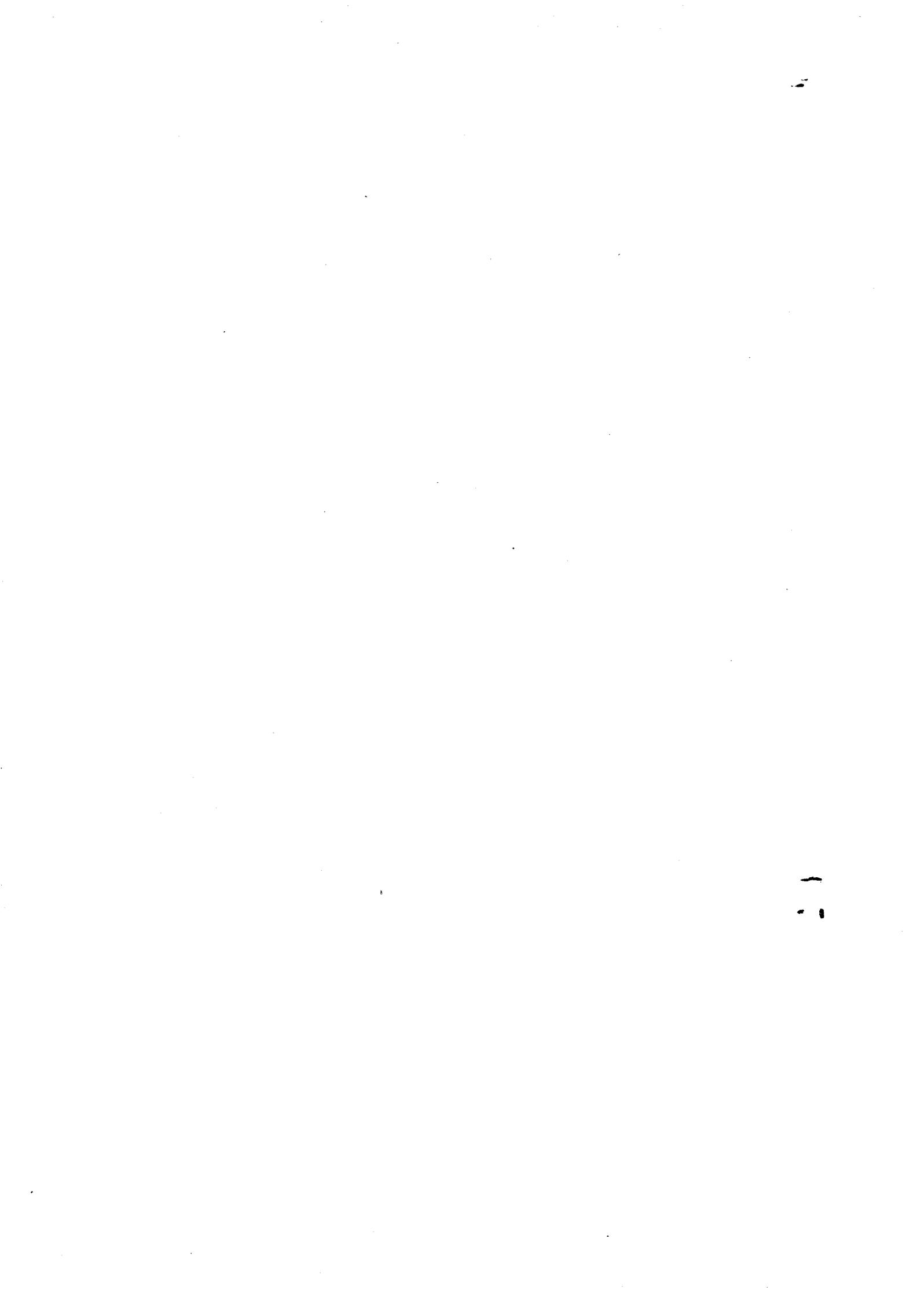
Par contre, compte tenu de la non-renversabilité du phénomène de cisaillement des précipités, on suppose que  $\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{A*}$  ne peut que diminuer si l'amplitude des cycles  $\Delta \gamma_c$  augmente, ou reste constante si  $\Delta \gamma_c$  diminue ; la condition formelle est identique à celle du phénomène de durcissement en prenant  $\beta^* = 0$ .

Finalement, l'érouissage de l'Inconel 718 peut être défini par un groupe de sept coefficients scalaires :

- pour le phénomène de durcissement :  $a_1, a_2, \gamma_2, \beta$
- pour le phénomène d'adoucissement :  $a_1^*, a_2^*, \gamma_2^*$

Le sens physique des coefficients est le même que celui défini pour l'acier inoxydable 316 L.

Remarquons que cette proposition doit être considérée simplement comme une première tentative pour décrire l'érouissage de matériaux comme l'Inconel 718. Ainsi qu'on le verra par la suite, cette proposition est suffisante pour simuler le petit nombre d'essais expérimentaux dont nous disposons. La comparaison avec une gamme plus variée de chemins est nécessaire pour bien définir une proposition à caractère plus définitif.



CHAPITRE V

=====

IDENTIFICATION DES COEFFICIENTS ET PROPRIETES

DU SCHEMA DE COMPORTEMENT



Les résultats expérimentaux à l'échelle macroscopique, complétés par les explications des phénomènes microstructuraux mis en jeu, ont permis de préciser la forme des fonctionnelles multivoques qui interviennent dans le schéma thermomécanique ; ces résultats sont rappelés dans le premier paragraphe. Pour achever la modélisation du comportement, il s'agit maintenant d'identifier les coefficients qui interviennent dans les fonctionnelles ; le sens physique attaché à presque tous les coefficients permet d'obtenir une identification individuelle directe (§ 2), évitant ainsi les méthodes statistiques de minimisation d'une erreur globale [4]. Les propriétés du modèle identifié et l'étude de l'influence des principaux coefficients sont mises en évidence (§ 3).

V.1. Rappel de la forme des fonctionnelles multivoques du schéma thermomécanique.

Le schéma de comportement pour l'acier inoxydable 316 L se résume par :

a) coefficient d'homothétie de Masing : pour les arcs de 1ère charge  $\omega = 1$ , pour les autres arcs  $\omega = 2$ .

b) Comportement d'hystérésis pure :

$$D_J \sigma_a = \alpha_0 E_1 \mathbb{1} + \alpha_1 \mathcal{D} + \alpha_4 \Delta \bar{M} \cdot (\bar{\sigma}_a - R \bar{\sigma}_a)$$

$$\text{avec } \alpha_4 = \frac{-\alpha_1/2}{\Delta \Pi_{\bar{\sigma}}^{2-c} (\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a} \cdot \omega)^c}$$

$$\gamma = \int_0^t \text{tr}[(\sigma_a - R \sigma_a) \mathcal{D}] dt ; \quad \gamma_c = \frac{2}{\omega^2} \gamma$$

$$dW_L = \text{tr}[(\sigma_a - R \sigma_a) \mathcal{D}] dt$$

$$\text{si } \delta W < 0 \quad \forall t \in ]t_i, t_i + dt]$$

$$\text{alors } \sigma_a(t_i) = \sigma_a^i, \quad \sigma(t_i) = \sigma^i, \quad \gamma = \gamma^i \text{ et } W_L = 0$$

$$\mathcal{A}(\text{histoire}) \Rightarrow [\sigma_a^i, \sigma^i, \gamma^i, R \sigma_a(t), R \sigma(t), \omega(t)]$$

c) Comportement réel :

$$D_J \sigma = \alpha_0 E_1 \mathbb{1} + \alpha_1 \mathcal{D} + \alpha_4^e \Delta \bar{M} \cdot (\bar{\sigma} - {}_R \bar{\sigma})$$

avec

$$\alpha_4^e = \frac{-\alpha_1/2}{\Delta \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{2-c} (\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}} \omega)^c}$$

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}} = \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}}{c_e^{1/2}}$$

$$c_e = [1 - \gamma_1 (1 - e^{-\frac{\gamma_c - \gamma_{c0}}{a_1 \gamma_n}})] \left( \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}}{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^0} \right)^c$$

$$\gamma_1 = 1 - \left( \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^0}{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\beta \Delta}} \right)^c$$

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\beta \Delta} = \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a} [1 - \gamma_2 (1 - e^{-\frac{\Delta \gamma_c}{a_2 \gamma_n}})]^{-1/2}$$

$$\Delta \gamma_c^i = \gamma_c^i - \gamma_c^{i-1} ; \gamma_c^0 = 0$$

$$\Delta \gamma_c^{i+1} \neq \Delta \gamma_c^i \Rightarrow$$

$$t = t_0, \gamma_{c0} = \gamma_c(t_0), \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^0 = \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}(t_0)$$

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\beta \Delta} = \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^0 - \beta (\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^0 - \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\beta \Delta})$$

$$\text{Si } \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^0 > \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\beta \Delta} \text{ alors } \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\beta \Delta} = \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\beta \Delta}$$

Les résultats expérimentaux ont montré qu'à une précision relative de l'ordre du pourcent, on peut considérer que les coefficients  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  et  $\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}$  sont des constantes :

$$\alpha_0 = \lambda_0$$

$$\alpha_1 = z \mu_0$$

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a} = S_0 = \frac{\gamma_0}{\sqrt{3}} = \frac{z_0}{\sqrt{3}}$$

où  $\lambda_0$  et  $\mu_0$  ont le sens des coefficients de Lamé de l'élasticité linéaire et  $S_0$  est la limite du seuil de Misès en cisaillement simple.

Le schéma de comportement de l'Inconel 718 est identique à celui de l'acier inoxydable 316 L, avec les différences suivantes :

a) coefficient d'homothétie.

Compte tenu que le seuil n'a pas une section circulaire, le coefficient de Masing ne prend pas les valeurs 1 ou 2 mais les valeurs suivantes :

pour les arcs de lère charge :

$$\omega = \hat{\omega}(\xi) = \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}(\xi)}{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}(0)} = \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}(\xi)}{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}(0)}$$

pour les autres arcs :

$$\omega = \hat{\omega}(\xi) + \hat{\omega}(\xi + \pi) = \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}(\xi) + \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}(\xi + \pi)}{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}(0)} = \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}(\xi) + \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}(\xi + \pi)}{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}(0)}$$

b) Comportement d'hystérésis pure.

Les résultats expérimentaux ont mis en évidence une nette dépendance des trois coefficients  $\alpha_0, \alpha_1, \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}$  avec l'état de contrainte, défini par les valeurs de ses trois invariants  $I_{\bar{\sigma}}, II_{\bar{\sigma}}, III_{\bar{\sigma}}$ .

$$\alpha_0 = \lambda_0 e^{-\left(\frac{I_{\bar{\sigma}}}{P_0}\right)^{n_0}}$$

$$\alpha_1 = 2[\mu_0 - c_1 II_{\bar{\sigma}} (1 + \cos 3\xi)^{n_1}]$$

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}(\xi) = \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}(0) [1 + c_2 (1 - \cos 3\xi)^{n_2}]$$

où 
$$\cos 3\xi = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{III_{\bar{\sigma}_a}}{II_{\bar{\sigma}_a}^{3/2}}$$

c) Comportement réel :

Compte tenu de la présence des deux phénomènes d'écrouissage, la fonction  $C_e(\gamma_c, \Delta\gamma_c)$  comprend deux termes :

$$C_e = \left[ 1 - \gamma_1 \left( 1 - e^{-\frac{\gamma_c - \gamma_{ce}}{a_1 \gamma_n}} \right) - \gamma_1^* \left( 1 - e^{-\frac{\gamma_c - \gamma_{ce}}{a_1^* \gamma_n}} \right) \right] \left( \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}}{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^0} \right)^c$$

$$\gamma_1 = 1 - \left( \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^0}{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^A} \right)^c \quad \text{et} \quad \gamma_1^* = 1 - \left( \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^0}{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{A*}} \right)^c$$

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^A = \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a} \left[ 1 - \gamma_2 \left( 1 - e^{-\frac{\Delta\gamma_c}{a_2 \gamma_n}} \right) \right]^{-1/c}$$

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{A*} = \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a} \left[ 1 - \gamma_2^* \left( 1 - e^{-\frac{\Delta\gamma_c}{a_2^* \gamma_n}} \right) \right]^{-1/c}$$

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\beta A} = \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^0 - \beta (\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^0 - \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^A)$$

$$\text{Si } \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^0 > \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^A \quad \text{alors} \quad \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^A = \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\beta A}$$

$$\text{Si } \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^0 < \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{A*} \quad \text{alors} \quad \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{A*} = \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^0$$

Le schéma constitutif du modèle de comportement dans le cas de l'acier inoxydable 316 L a huit coefficients à valeurs scalaires :  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}$ ,  $c$  pour le comportement d'hystérésis pure et  $\gamma_2$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\beta$  pour l'écrouissage en déformation. Le sens physique attaché à chacun des coefficients est indiqué sur la figure V.1 et peut être résumé ainsi [37] :

- $\lambda$  et  $\mu$  ont le sens des coefficients de LAME et définissant le comportement linéaire tangent à l'origine.
- $\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}$  est le seuil limité du 2ème invariant du déviateur de la contrainte d'hystérésis pure.
- $c$  caractérise la variation de la courbure de la zone de transition.

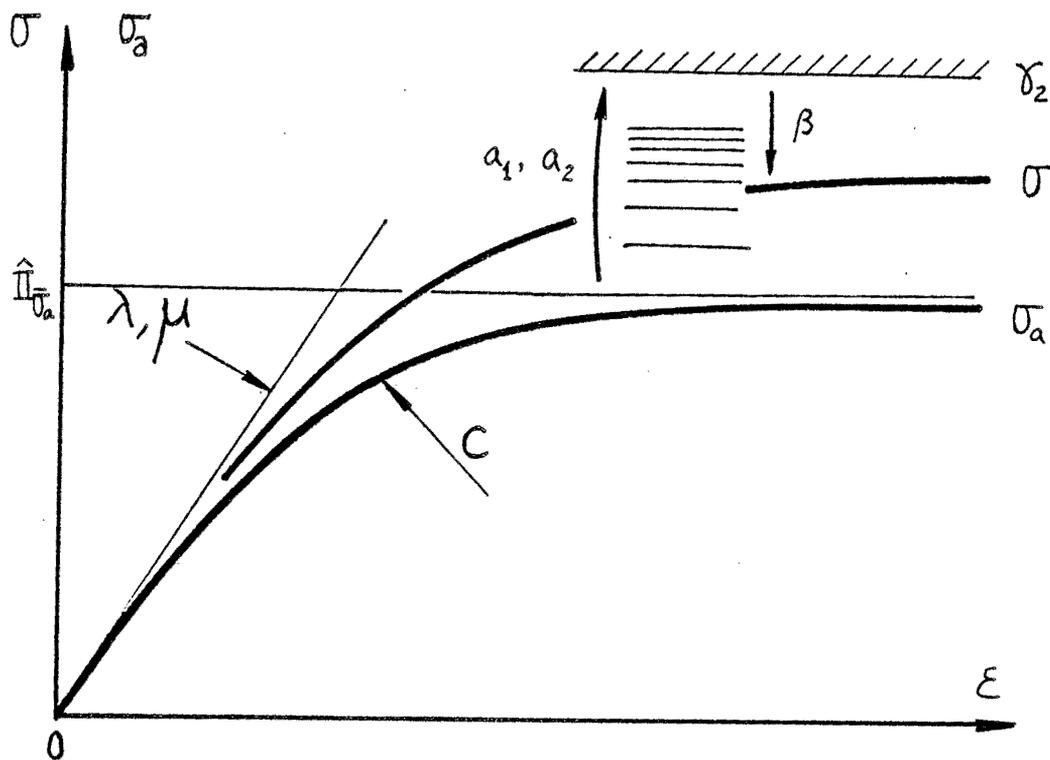


Fig. V.1. Représentation du sens physique des coefficients du modèle.

- $\gamma_2$  définit le seuil limite de saturation de l'écrouissage.
- $a_1$  donne une mesure du nombre de cycles nécessaires pour atteindre le niveau de saturation, pour une amplitude de déformation donnée.
- $a_2$  donne une mesure de vitesse de consolidation pour atteindre le seuil limite de saturation de l'écrouissage.
- $\beta$  caractérise la renversabilité partielle de l'écrouissage, lorsque l'amplitude de sollicitation diminue.

Dans le cas de l'Inconel 718, le sens physique des coefficients est évidemment le même que pour l'acier inoxydable 316 L. Mais en raison d'une part de la variation de certains coefficients avec l'état de contrainte et d'autre part de l'existence de deux phénomènes d'écrouissage, un plus grand nombre de constantes scalaires est introduit :

pour le comportement d'hystérésis pure

$$\begin{array}{l} \alpha_0 \longrightarrow \lambda_0, C_0, n_0 \\ \alpha_1 \longrightarrow \mu_0, C_1, n_1 \\ \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a} \longrightarrow \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}(0), C_2, n_2 \end{array}$$

pour la fonction d'écrouissage  $C_e$ :

$$\begin{array}{l} \text{durcissement} \longrightarrow a_1, a_2, \gamma_2, \beta \\ \text{adoucissement} \longrightarrow a_1^*, a_2^*, \gamma_2^* \end{array}$$

## V.2. Identification des coefficients du modèle de comportement

Compte tenu du sens physique attaché à chacun des coefficients du modèle de comportement (§1), l'identification de ces coefficients peut être directe et donc relativement aisée. Considérons d'abord le cas de l'acier inoxydable 316 L.

### 1) Les coefficients $\lambda$ et $\mu$

Ils sont définis directement par la détermination des pentes des courbes  $(\sigma, \epsilon)$  ou  $(E, \epsilon)$  au voisinage des points d'inversion des essais cycliques (cf § III). A partir d'essai de traction-compression cyclique, on a obtenu les valeurs du module d'Young  $E$  et du coefficient de Poisson  $\nu$  avec lesquels on calcule, par les formules classiques de l'élasticité, les valeurs des coefficients  $\lambda$  et  $\mu$ . Bien entendu, on peut aussi directement déterminer le module de cisaillement  $\mu$  à partir de l'essai de torsion et on a vu que ces deux méthodes donnent le même résultat. On a finalement :

$$\begin{array}{ll} \lambda = 99.0 \text{ Gpa} & \text{et } \mu = 77.7 \text{ Gpa} \\ \text{ou } E = 199 \text{ Gpa} & \text{et } \nu = 0,28 \end{array}$$

### 2) Le seuil limite

Il est déterminé par des essais radiaux dans le plan déviatoire. Considérons par exemple l'essai de torsion alternée et symétrique, contrôlé en déformation. La déformation contrôlée doit être suffisamment grande pour que l'évolution d'hystérésis pure se termine largement sur le pseudo-palier de plasticité.

Soit  $\sigma^i$  ( $i = 1, n$ ) les contraintes de cisaillement au ième point d'inversion :

$$\sigma^i = \sigma(t_i) = \sigma^i(\gamma_c^i, \Delta\gamma_c^i)$$

où  $\sigma^i$  est calculé avec l'hypothèse du champs de contrainte homogène, puisqu'on est près du pseudo-palier de plasticité.

Dans le cas de l'évolution symétrique, et comme le paramètre d'écrouissage est défini par le comportement d'hystérésis pure, on a toujours :

$$\Delta\gamma_c^1 = \Delta\gamma_c^i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \frac{2}{\omega^2} \text{tr}[(\sigma_a - R\sigma_a)\dot{\mathcal{D}}] \quad (i=2, n) \quad \forall \Delta\gamma_c^1$$

où  $\Delta\gamma_c^1$  désigne la valeur pour la 1ère charge et  $\Delta\gamma_c^i$  pour les autres branches.

Il en résulte que :

$$\frac{\gamma_c}{\Delta\gamma_c^i} = i \quad (i = 1, n) \quad \forall \Delta\gamma_c^1$$

On est ainsi ramené à tracer alors une courbe de  $\sigma^i(i)$  qui décrit la contrainte d'extrémité  $\sigma^i$  en fonction du numéro du point d'inversion, comme nous l'avons fait dans les figures IV.3 ~ IV.6. En extrapolant pour  $\gamma_c = 0$ , avec le lissage de spline sous tension (cf. [52], [53]), on obtient la valeur de  $S_0$ . Comme on le constate sur les figures (fig. V.2-V.3), les deux premiers points sont particuliers car ils sont liés au premier quart de cycle ; c'est pourquoi ils n'ont pas été pris en compte dans l'extrapolation. Pour les essais n° 206, n° 207, n° 208 et n° 214, en utilisant les résultats des cycles de la première amplitude de déformation, on obtient :  $S_0 = 162 \pm 6$  (MPa)

De la même façon, en utilisant les résultats d'essai de traction-compression cyclique symétrique, on peut déterminer la contrainte limite en traction  $\gamma_0$  ou en compression  $Z_0$ . Prenons par exemple l'essai n° 213 on peut obtenir les valeurs de  $\gamma_0$  et de  $Z_0$  après lissage et extrapolation

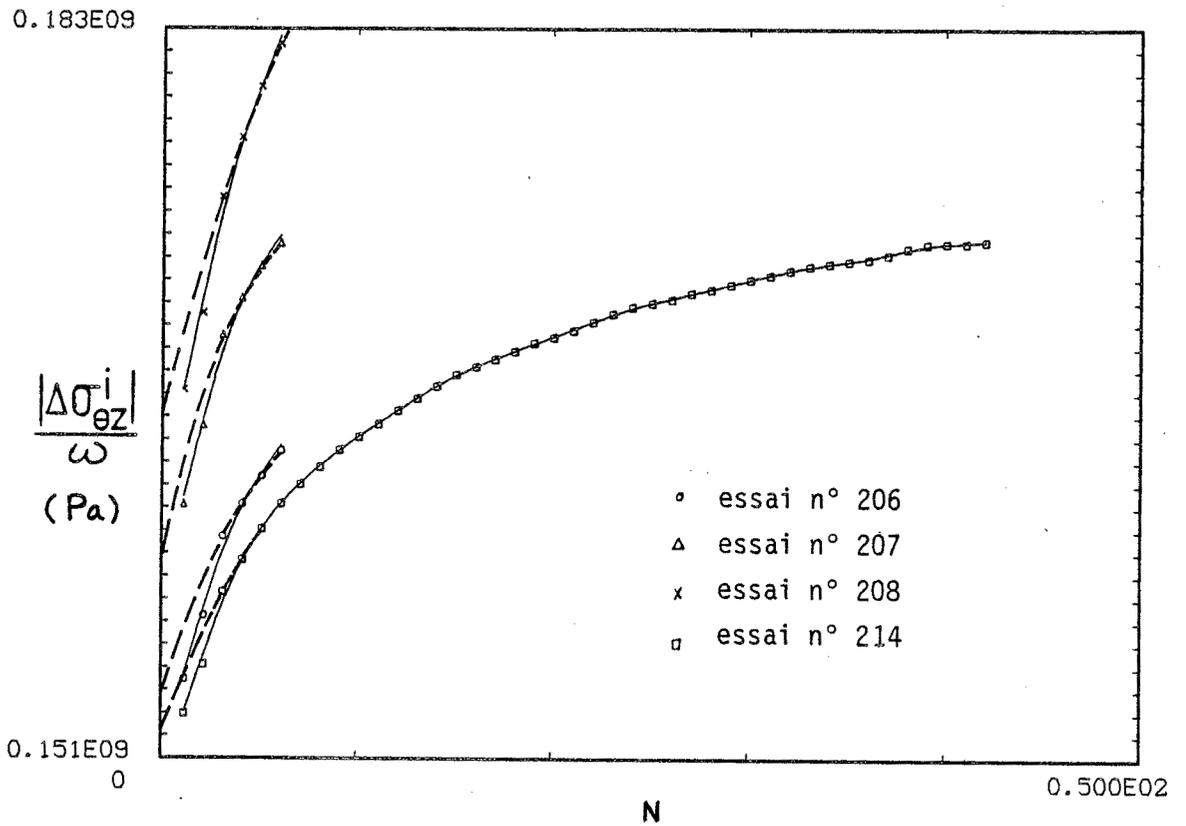


Fig. V.2. Extrapolation de  $S_o$  - Essais de torsion alternée - Acier inoxydable 316 L

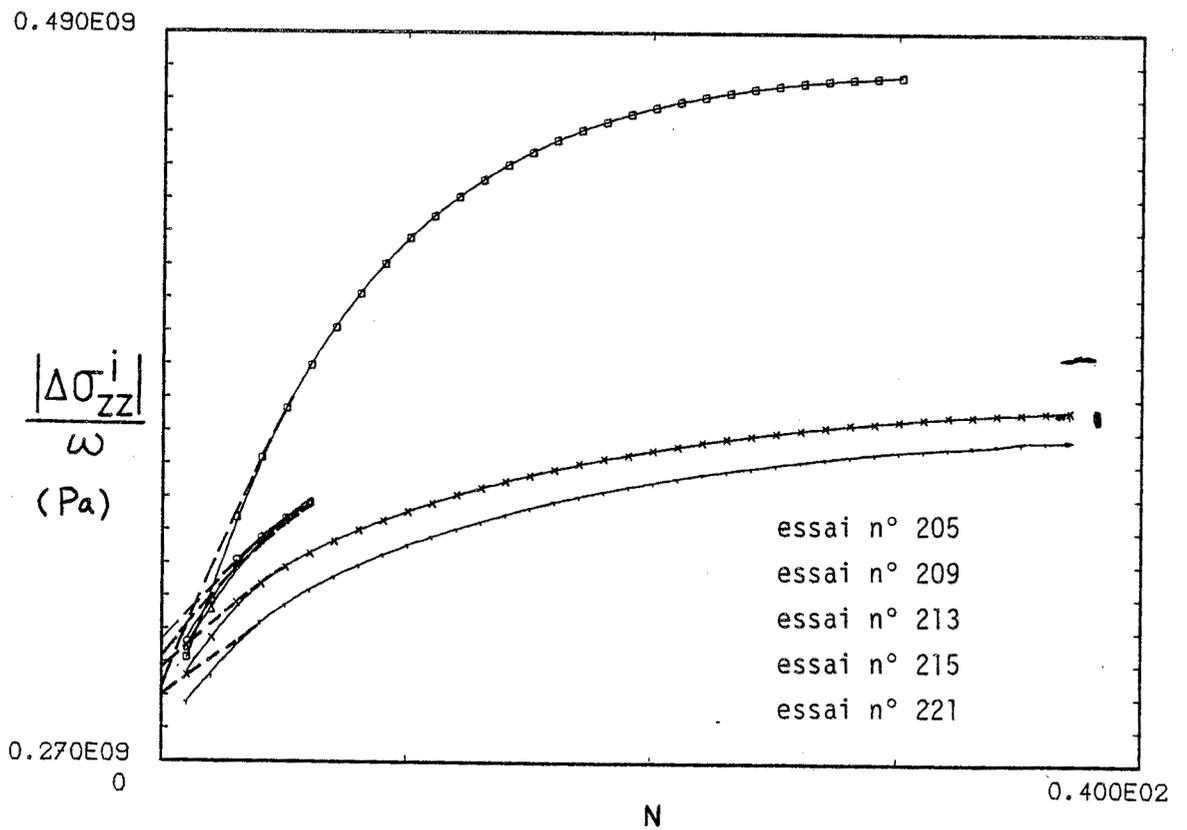


Fig. V.3. Extrapolation de  $Y_o$  - Essais de traction-compression - Acier inoxydable 316 L.

pour la valeur  $\gamma_c = 0$ .

On note que la différence entre la traction et la compression est de l'ordre de 3% et que la limite de Von Misès est bien valable pour l'acier inoxydable 316 L, à la même précision relative.

Si on admet la limite de Von Misès, on peut donc tracer une courbe :

$$\gamma_i = z_i = \frac{|\sigma^i - \sigma^{i-1}|}{\omega}$$

en fonction du nombre de cycles.

Avec tous les résultats d'essais de traction-compression n° 205, n° 209, n° 213, n° 215 et n° 221, on obtient (figure V.3) :

$$\gamma_0 = z_0 = 300 \pm 9 \text{ (Mpa)}$$

Cette valeur est compatible avec celle trouvée avec les essais de torsion, on retiendra finalement pour la valeur moyenne :

$$\langle S_0 \rangle = \left\langle \frac{\gamma_0}{\sqrt{3}} \right\rangle = \left\langle \frac{z_0}{\sqrt{3}} \right\rangle = 170 \pm 6 \text{ (Mpa)}$$

### 3) Le coefficient de courbure C

C'est le seul coefficient pour lequel on ne dispose pas de méthode de détermination quantitative immédiate. Il est choisi par itérations de façon à ajuster au mieux la forme des courbes dans la zone intermédiaire entre la partie quasi-linéaire après inversion et le pseudo-palier plastique. Rappelons que le rayon de courbure diminue quand C augmente.

Enfin, il faut noter que la courbe de lère charge montre toujours une courbure plus faible que les branches ultérieures, ce que le modèle ne traduit pas. Ce fait est classique [10]. Une solution consisterait à faire dépendre C de  $\omega$  comme le suggère le résultat de la figure (V.11) ; mais cela nous paraît prématuré : une analyse plus détaillée des phénomènes micro-structuraux mis en jeu semble nécessaire pour étayer une proposition valable.

### 4) Le coefficient $a_1$

Il est à déterminer comme  $\hat{\Pi}_{\sigma_a}$  à partir de la courbe de consolida-

tion cyclique à  $\Delta y_c$  constant. Après lissage de la courbe des points expérimentaux, outre la valeur de  $\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}$  déjà utilisée, on peut obtenir aussi une valeur de la pente à l'origine (figure V.4) :

$$P_1 = \left. \frac{\partial \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}}{\partial y_c} \right|_{y_c=0}$$

et une valeur asymptotique pour le niveau de saturation :

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^s = \lim_{y_c \rightarrow \infty} \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}} \left( \frac{y_c}{\Delta y_c^i} \right)$$

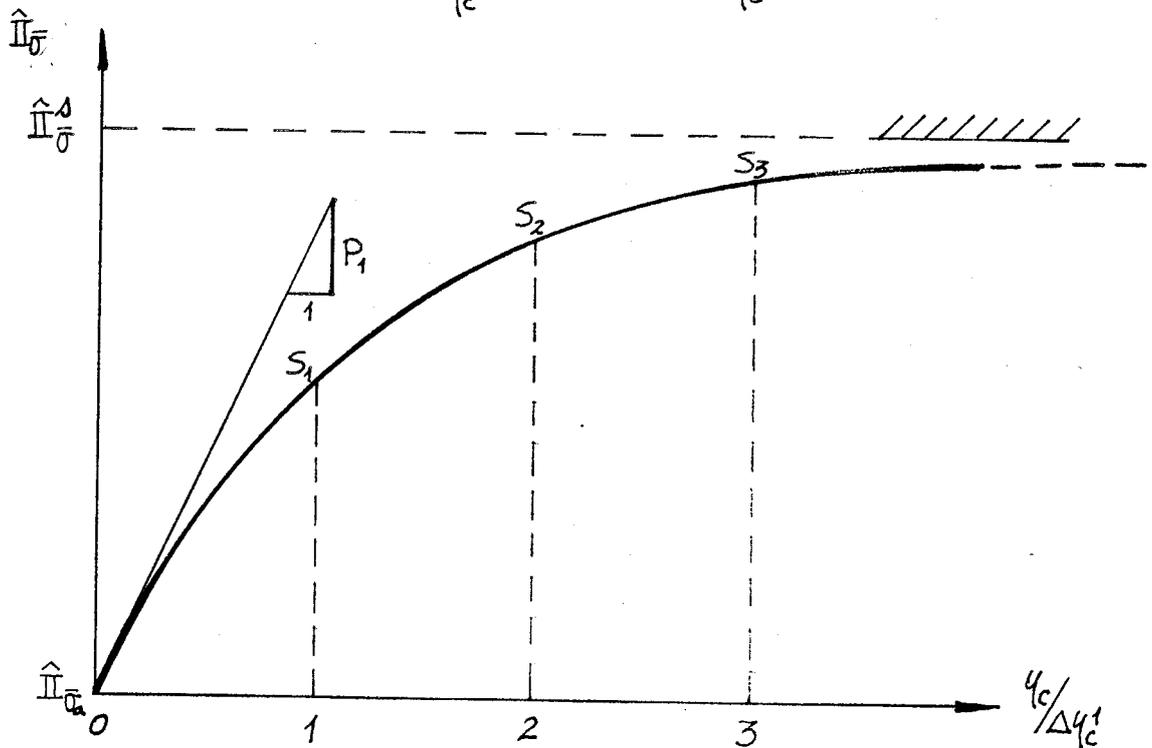


Fig. V.4. Détermination du coefficient  $a_1$ .

Par (IV.3.5), on a :

$$P_1 = \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}}{y_n} \cdot \frac{\gamma_1}{a_1 c} \cdot \Delta y_c$$

on peut alors déterminer :

$$a_1 = \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}}{y_n} \cdot \frac{\gamma_1}{P_1 \cdot c} \cdot \Delta y_c$$

(V.2.1)

où

$$\gamma_1 = 1 - \left( \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}^{\Delta}}{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\Delta}} \right)^c$$

On trouve :

$$a_1 = 220$$

5) Les coefficients  $a_2$  et  $\gamma_2$

Ils sont à déterminer à partir de la courbe d'érouissage cyclique, contrôlés avec différentes amplitudes de déformation soit directement soit par paliers croissants. Les nombres de cycles doivent être suffisants pour la détermination du niveau de saturation. On obtient alors des valeurs de saturation  $S_1^{\Delta}$ ,  $S_2^{\Delta}$ ,  $S_3^{\Delta}$ , ... etc, avec lesquelles une courbe  $\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\Delta}(\Delta\gamma_c)$  peut être tracée et on définit une valeur de la pente à l'origine (figure V.5) :

$$P_2 = \left. \frac{\partial \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\Delta}}{\partial (\Delta\gamma_c)} \right|_{\Delta\gamma_c=0}$$

et une valeur asymptotique :

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\infty} = \lim_{\Delta\gamma_c \rightarrow \infty} \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\Delta}(\Delta\gamma_c)$$

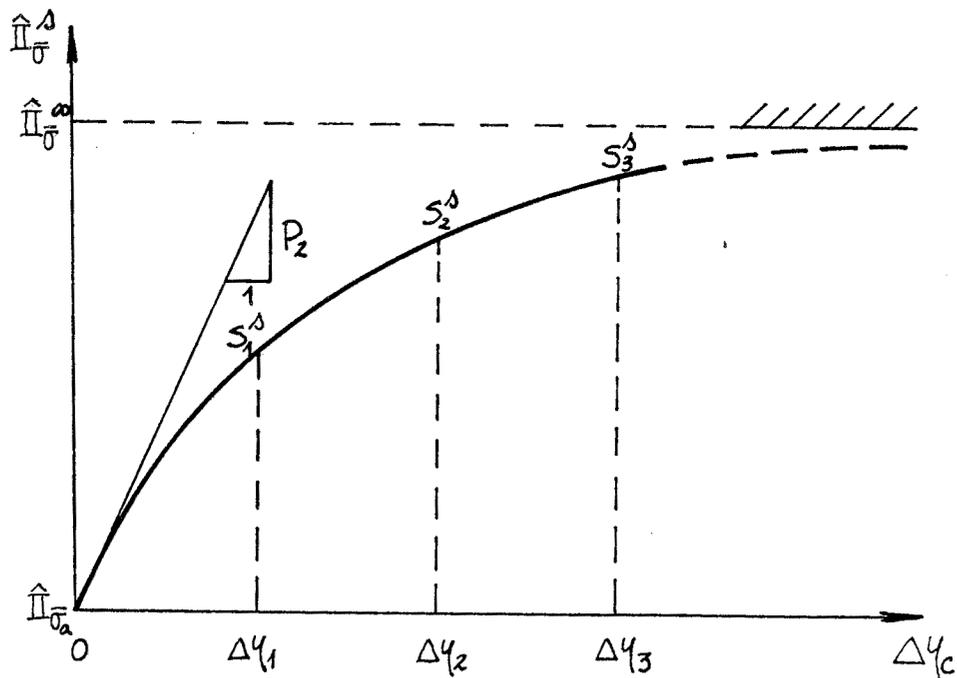


Fig. V.5. Détermination des coefficients  $a_2$  et  $\gamma_2$

La valeur asymptotique  $\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\infty}$  est une estimation approximative obtenue à partir du début de la courbe, bien déterminée, et certains résultats de la littérature. En effet, les limitations en amplitude de déformation, imposées par l'utilisation des jauges ne nous permettent pas d'explorer la courbe d'écrouissage jusqu'au niveau de saturation. L'intérêt d'introduire cette estimation est de montrer les possibilités de la méthode proposée; il est évident qu'aucune détermination concernant les caractéristiques précises de l'acier inoxydable 316 L ne peut être effectuée au delà du dernier niveau de  $\Delta\gamma_c$  mesuré.

Par (IV.3.2) et (IV.3.3) on a :

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\infty} = \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}}{(1 - \gamma_2)^{1/c}}$$

et

$$P_2 = \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}}{\gamma_n} \cdot \frac{\gamma_2}{a_2 \cdot c} \cdot \Delta\gamma_c$$

On obtient donc :

$$\gamma_2 = 1 - \left( \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}}{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\infty}} \right)^c \quad (V.2.2)$$

et

$$a_2 = \frac{\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}_a}}{\gamma_n} \cdot \frac{\gamma_2}{P_2 \cdot c} \cdot \Delta\gamma_c \quad (V.2.3)$$

On trouve, en prenant  $\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\infty} = 700 \text{ MPa}$  :

$$a_2 = 34$$

$$\gamma_2 = 0.57$$

6) Le coefficient  $\beta$

Il est déterminé par un essai cyclique contrôlé en déformation par paliers décroissants et par comparaison avec l'essai contrôlé en déformation monotone. Il faut avoir suffisamment de nombre de cycles pour déterminer le niveau de saturation. On obtient alors deux niveaux différents de saturation pour <sup>un</sup> même  $\Delta\gamma_c$  donné (figure V.6) : soit  $\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\Delta}$  pour l'amplitude de déformation croissante et  $\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\Delta\Delta}$  pour celle décroissante,

on peut définir alors le coefficient  $\beta$  par :

$$\beta = \frac{\hat{\Pi}_{\sigma}^{\circ} - \hat{\Pi}_{\sigma}^{\beta\Delta}}{\hat{\Pi}_{\sigma}^{\circ} - \hat{\Pi}_{\sigma}^{\Delta}}$$

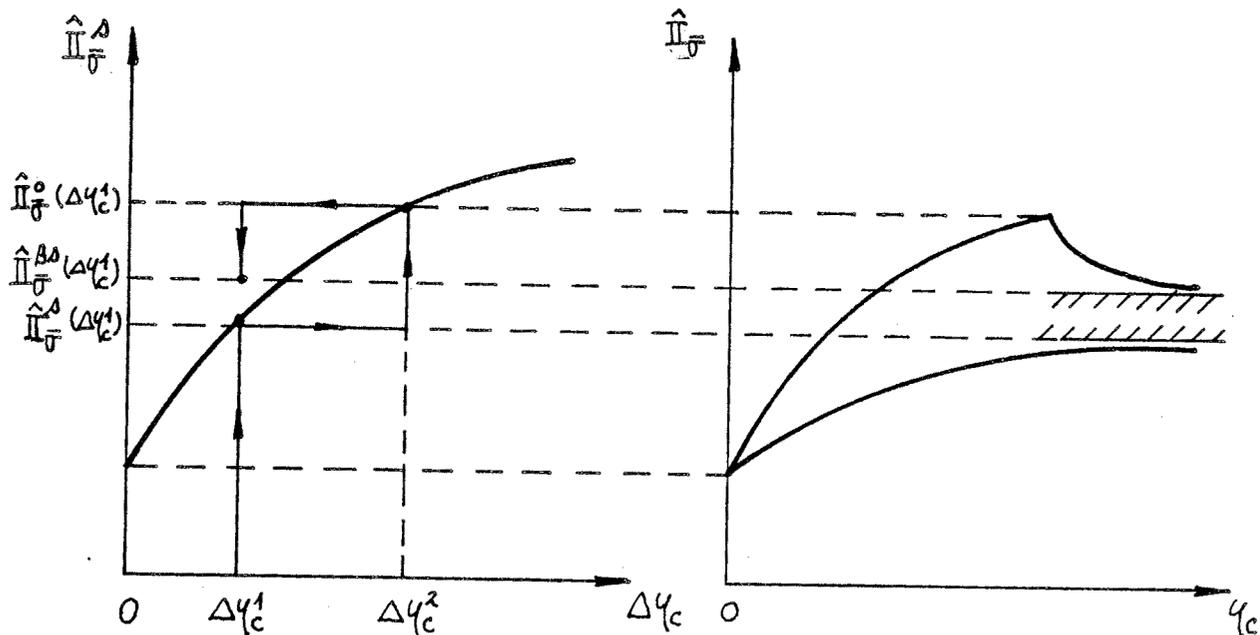


Fig. V.6. Détermination du coefficient  $\beta$ .

Nous ne disposons que d'un point expérimental  $\hat{\Pi}_{\sigma}^{\beta\Delta}$ ,  $\Delta\gamma_c$  pour la détermination de  $\beta$  ; les résultats de l'essai n° 216 donnent une valeur :  $\beta = 0.5$ .

D'autres essais avaient été prévus pour mieux définir  $\beta$ , mais les jauges de déformation se sont soit décollées, soit rompues avant d'avoir pu terminer la série des petits cycles.

Comme on peut le constater par l'examen des formules  $\nabla.2.1$  à  $\nabla.2.3$ , certains coefficients ont une influence couplée sur les caractéristiques du comportement : ainsi, la pente de la courbe d'érouissage dépend des trois coefficients  $c$ ,  $\gamma_2$  et  $a_2$ . Ceci indique de respecter un certain ordre dans la détermination des coefficients et par exemple les coefficients  $a_1$  et  $a_2$  doivent être identifiés après les coefficients  $c$  et  $\gamma_2$  ;  $\gamma_2$  doit être identifié après le coefficient  $c$ . De plus, si des corrections sont à apporter à un groupe de valeurs identifiées, il faudra

tenir compte du couplage pour définir les nouvelles valeurs : ainsi pour améliorer la courbure dans la zone de transition, une modification du coefficient C nécessite de modifier  $a_1$ ,  $a_2$  et  $\chi_2$  par les formules 5.2.1 à 5.2.3 si on ne veut pas modifier aussi les valeurs des pentes initiales  $P_1$  et  $P_2$  et la valeur limite  $\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}^{\infty}$ .

L'identification des coefficients de l'Inconel 718 procède de la même méthode générale ; elle est complétée sur une étude de la variation des coefficients en fonction des invariants de la contrainte.

a) Coefficient élastique :

Compte tenu de nos résultats à l'échelle macroscopique et des phénomènes microstructuraux mis en jeu, on admet que le module  $\lambda$  varie avec le premier invariant de l'état de contrainte et que le module de cisaillement  $\mu$  varie avec les deuxième et troisième invariants de la contrainte (§ III.3.4). On rappelle :

$$\lambda = \lambda_0 e^{-\left(\frac{I_{II}}{P_0}\right)^{n_0}} \quad (5.3.1)$$

avec  $\lambda_0 = 108,1 \text{ Gpa}$  ;  $P_0 = 2,40 \cdot 10^3 \text{ Mpa}$  ;  $n_0 = 3$

et  $\mu = \mu_0 - C_1 \Pi_{\bar{\sigma}} (1 + \cos 3\xi)^{n_1}$  (5.3.2)

avec  $\mu_0 = 81,8 \text{ Gpa}$  ;  $C_1 = \frac{1}{3} \cdot 10$  ;  $n_1 = \frac{1}{6}$

Pour les deux modules on ne dispose que de trois points expérimentaux qui permettent de définir formellement les trois constantes de chacune des formules. Il faudrait disposer de points expérimentaux supplémentaires pour contrôler la validité de la forme proposée pour les coefficients.

b) Forme de seuil

On rappelle (§ III.4) que les résultats expérimentaux sont bien représentés par un seuil de la forme :

$$\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}(\xi) = \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}(0) [1 + C_2 (1 - \cos 3\xi)^{n_2}]$$

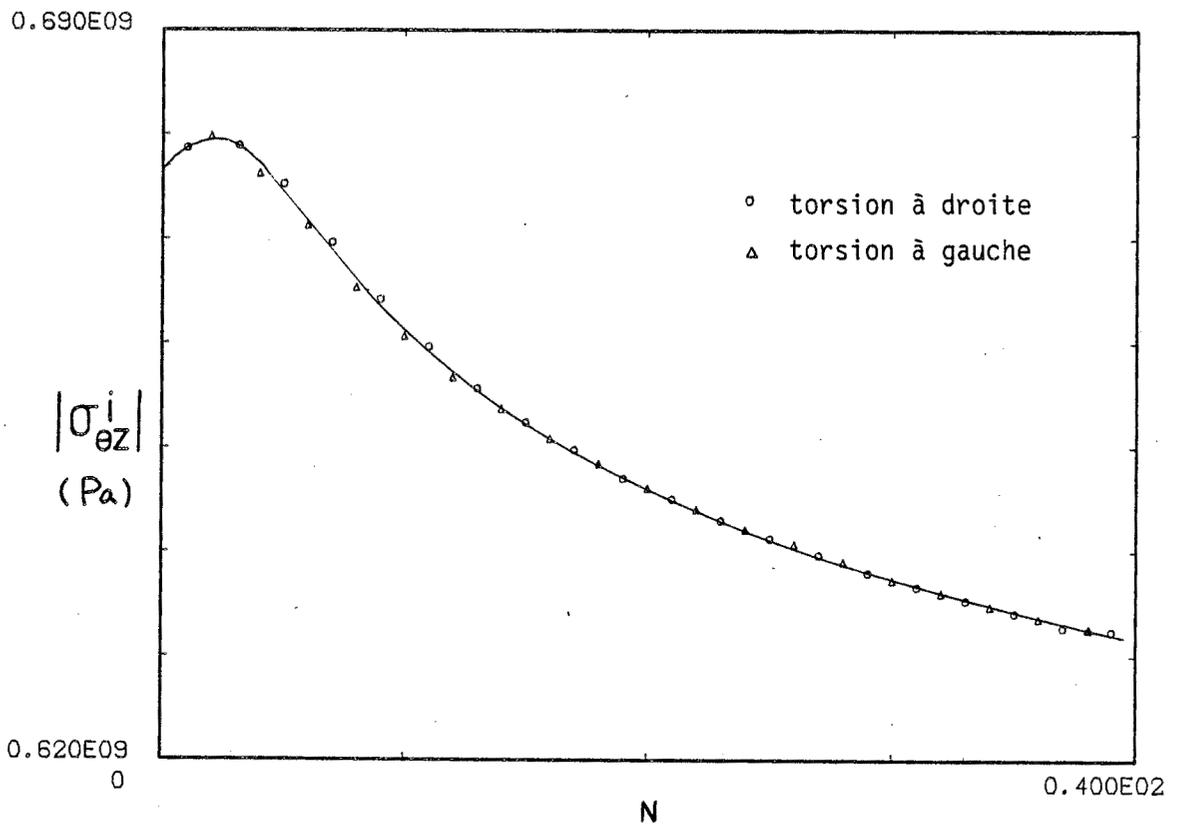


Fig. V.8. Courbe de consolidation de l'Inconel 718 pour la torsion.

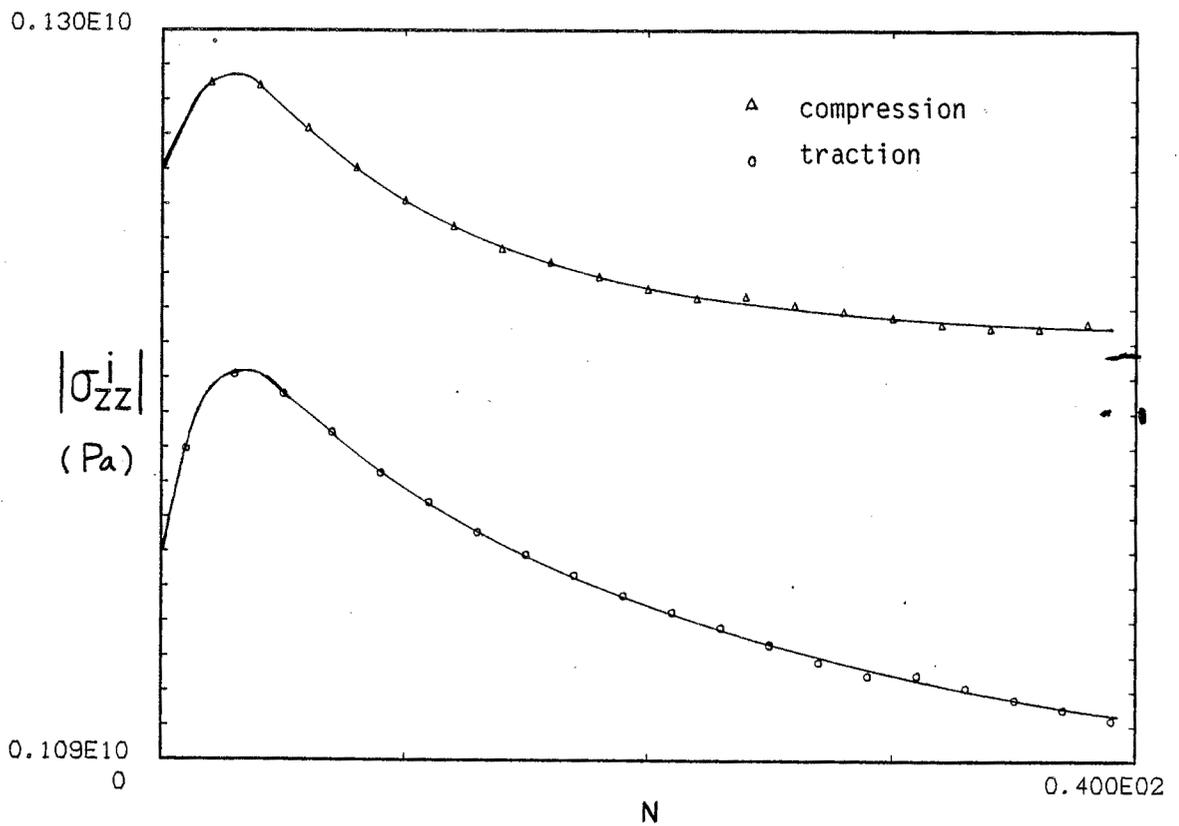


Fig. V.7. Courbes de consolidation de l'Inconel 718 pour la traction et pour la compression.

avec  $\hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}(0) = 675,5 \text{ Mpa}$  ;  $C_2 = 0,0174$  ;  $n_2 = 2,47$

Comme précédemment, ces trois constantes sont définies uniquement par trois points expérimentaux.

C) Coefficient de courbure

Après itération, la valeur retenue du coefficient est 4 ; cette valeur est bien en accord avec la variation lente des modules tangents (§ III.1).

d) Les coefficients de l'écroutissage

La forme de la fonction  $C_e$  retenue, à partir d'un raisonnement sur les phénomènes microstructuraux mis en jeu, comprend sept constantes à définir. D'une part, compte tenu du petit nombre d'essais disponibles, certains coefficients sont mal déterminés. D'autre part, les résultats macroscopiques ne permettent pas de séparer l'influence du durcissement et de l'adoucissement et introduit ainsi un autre type d'indétermination ; celle-ci ne pourra être levée ultérieurement que par des informations quantitatives fournies par une analyse des phénomènes microstructuraux.

On ne dispose ici que d'essais à amplitude de déformation croissante, donc le coefficient  $\beta$  ne peut pas être déterminé.

En première approximation, on admet que les constantes  $a_2$  et  $a_2^*$  ont même valeur ; celle-ci est définie d'une façon précise par l'équation (5.2.3) et on a :

$$a_2 = a_2^* = 32$$

Pour le niveau de saturation, on a choisi arbitrairement pour  $\gamma_2$  une valeur supérieure de 50% à celle de l'acier inoxydable 316 L ; par ajustement des courbes de consolidation on peut alors définir  $\gamma_2^*$ , on a :

$$\gamma_2 = 0,9 \quad \gamma_2^* = - 2,3$$

La détermination de  $a_1$  et  $a_1^*$  est donnée par la position et la hauteur du maximum des courbes de consolidation ; on trouve après itération :

$$a_1 = 5 \quad a_1^* = 50$$

### V.3. Influence des coefficients sur la forme des résultats

A cette étape de la modélisation, il est intéressant de mettre en évidence l'influence sur les résultats d'une variation de certains coefficients autour de leur valeur identifiée.

#### A) Acier inoxydable 316 L

Les valeurs identifiées des coefficients du schéma thermomécanique (§ V.1) sont :

$$\begin{aligned} \lambda &= 99.0 \text{ Gpa} & \mu &= 77.7 \text{ Gpa} & \hat{\Pi}_{\sigma_a} &= 170 \text{ Mpa} & C &= 1. \\ a_1 &= 220 & a_2 &= 34 & \gamma_2 &= 0.57 & \beta &= 0.5 \end{aligned}$$

Pour ce matériau, on étudie l'influence des coefficients  $C$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  et  $\gamma_2$  ; pour cela on utilise la sollicitation de l'essai n° 205 (figure V.9). La simulation numérique avec les coefficients identifiés est présentée dans la figure V.10. Pour chaque coefficient de valeur identifiée  $X$  on compare les résultats pour les valeurs  $nX$  et  $X/n$  où  $n$  est un nombre choisi en fonction de la sensibilité de chaque coefficient (figure V.11 ~ V.14).

Le couplage de l'influence des coefficients  $C$  et  $\gamma_2$  est bien mis en évidence pour les figures V.11 et V.12.

#### b) Inconel 718

Les valeurs identifiées des coefficients sont :

$$\begin{aligned} C &= 4.0 & \lambda_0 &= 108.1 \text{ Gpa}, & P_0 &= 2.40 \cdot 10^3 \text{ Mpa}, & n_0 &= 3 \\ \mu_0 &= 81.8 \text{ Gpa}, & C_1 &= \frac{1}{3} \cdot 10, & n_1 &= \frac{1}{6} \\ \hat{\Pi}_{\bar{\sigma}}(0) &= 675.5 \text{ Mpa}, & C_2 &= 0.0174, & n_2 &= 2.47 \\ a_1 &= 5 & a_1^* &= 50 \\ a_2 &= a_2^* = 32 \\ \gamma_2 &= 0.9 & \gamma_2^* &= - 2.3 \end{aligned}$$

L'influence de la plupart des coefficients est la même que dans le cas de l'acier inoxydable 316 L. C'est pourquoi nous n'étudions ici que l'influence des coefficients  $a_1$  et  $a_1^*$  sur la combinaison du durcissement et de l'adoucissement au cours des évolutions cycliques. La simulation numérique, avec les coefficients identifiés, est présentée dans la figure V.15. On compare ensuite les résultats obtenus avec les couples de valeurs suivantes des coefficients  $a_1$  et  $a_1^*$ , définies à partir des valeurs identifiées :

Figure V.16 (a)  $2a_1$  et  $a_1^*$ , (b)  $\frac{a_1}{2}$  et  $a_1^*$

Figure V.17 (a)  $a_1$  et  $2a_1^*$ , (b)  $a_1$  et  $\frac{a_1^*}{2}$

Figure V.18 (&)  $2a_1$  et  $2a_1^*$ , (b)  $\frac{a_1}{2}$  et  $\frac{a_1^*}{2}$

Pour chacune des figures, les lignes pointillées correspondent à l'évolution obtenue avec les valeurs identifiées des coefficients.

L'analyse de l'influence des coefficients sur la forme des résultats met en évidence que les formulations proposées et utilisées dans le schéma de comportement rendent compte aussi bien du durcissement de l'acier inoxydable 316 L que de la combinaison de durcissement et d'adoucissement de l'Inconel 718.

Les propriétés de la formulation d'écrouissage en déformation que nous proposons se manifestent aussi par les simulations d'évolution par paliers d'amplitude constante de déformation où la saturation est atteinte à chaque palier : à titre d'exemple, on trouve sur les figures V.19 et V.20 respectivement une simulation avec cinq paliers croissants et une simulation avec trois paliers croissants suivis de deux paliers décroissants ; ces deux exemples ne concernent que le cas du durcissement.

Dans tout ce qui précède, nous n'avons envisagé que des cas de sollicitations symétriques. L'expérience montre, dans le cas simple de la consolidation de l'acier inoxydable 316 L, que pour des cycles dissymétriques contrôlés en déformation, l'écrouissage est dissymétrique et ce d'autant plus que le cycle est plus dissymétrique (figure V.21). Si on introduit la notion de contrainte moyenne macroscopique d'un cycle, c'est à dire la moyenne entre deux valeurs extrêmes consécutives, on peut résumer le comportement en disant que le matériau évolue dans le sens de la diminution de la contrainte moyenne macroscopique du cycle.

La formulation de l'écrouissage utilisée ne permet pas de rendre compte de cette dissymétrie de l'écrouissage (figure V.22). Ceci ne doit pas nous étonner puisque la notion de contrainte moyenne du cycle et le "phénomène" de son évolution ne sont pas pris en compte. Une analyse des phénomènes microstructuraux mis en jeu sera nécessaire pour bien modéliser ce phénomène ; l'ampleur de notre sujet ne nous a pas permis de l'aborder.

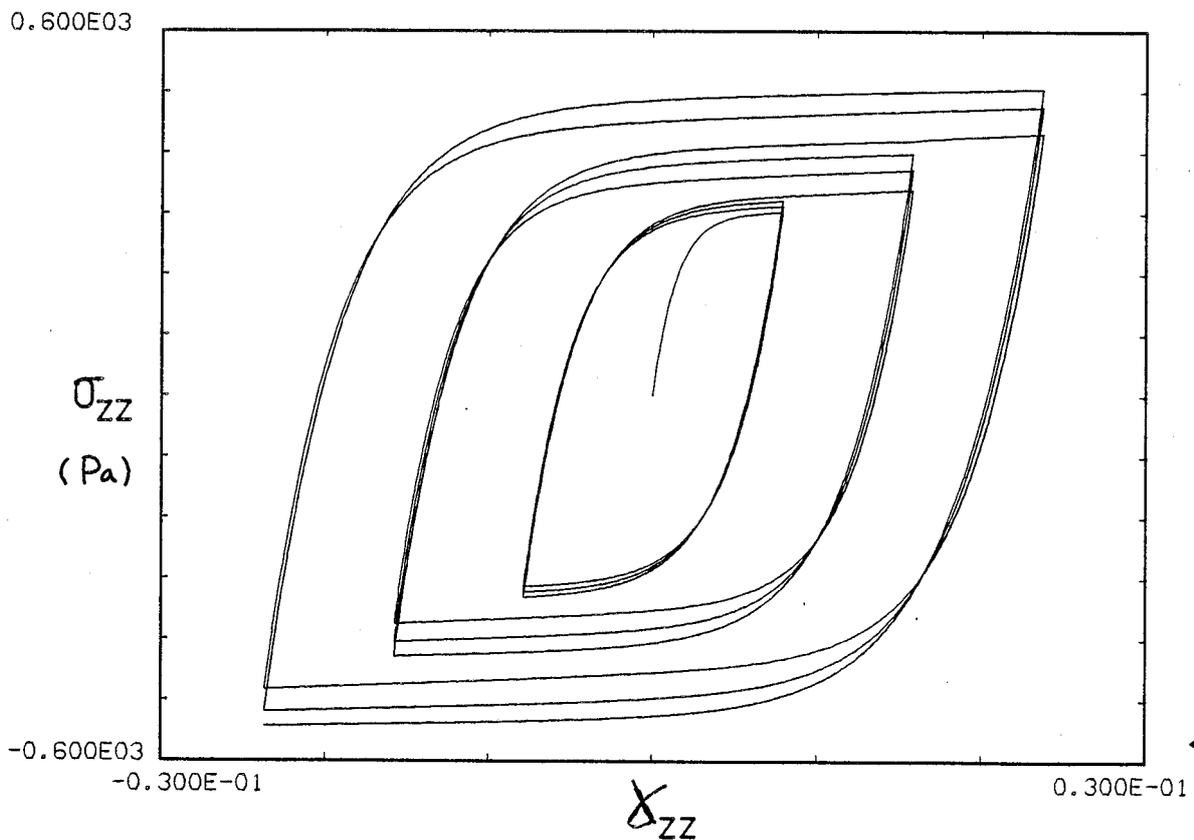


Fig. V.10 Simulation de l'essai n° 205 avec les valeurs identifiées des coefficients.

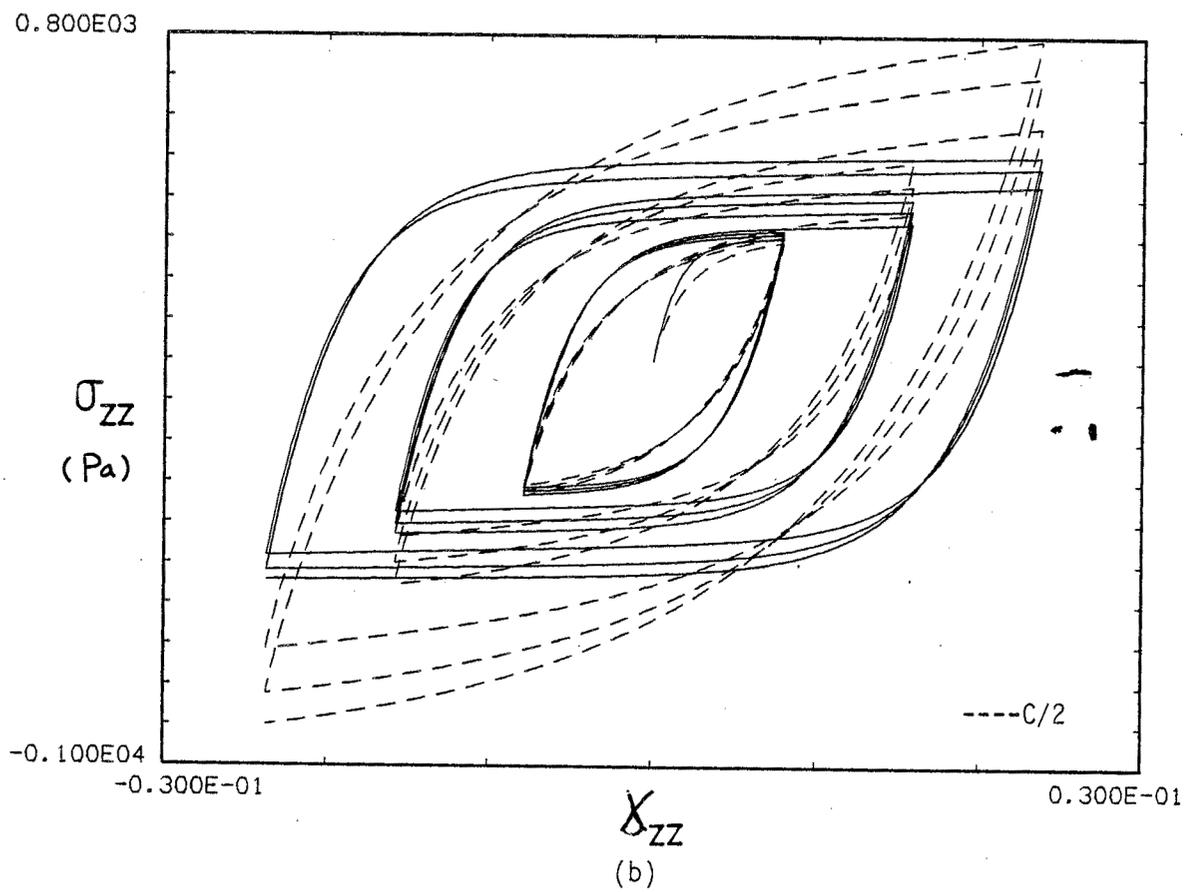
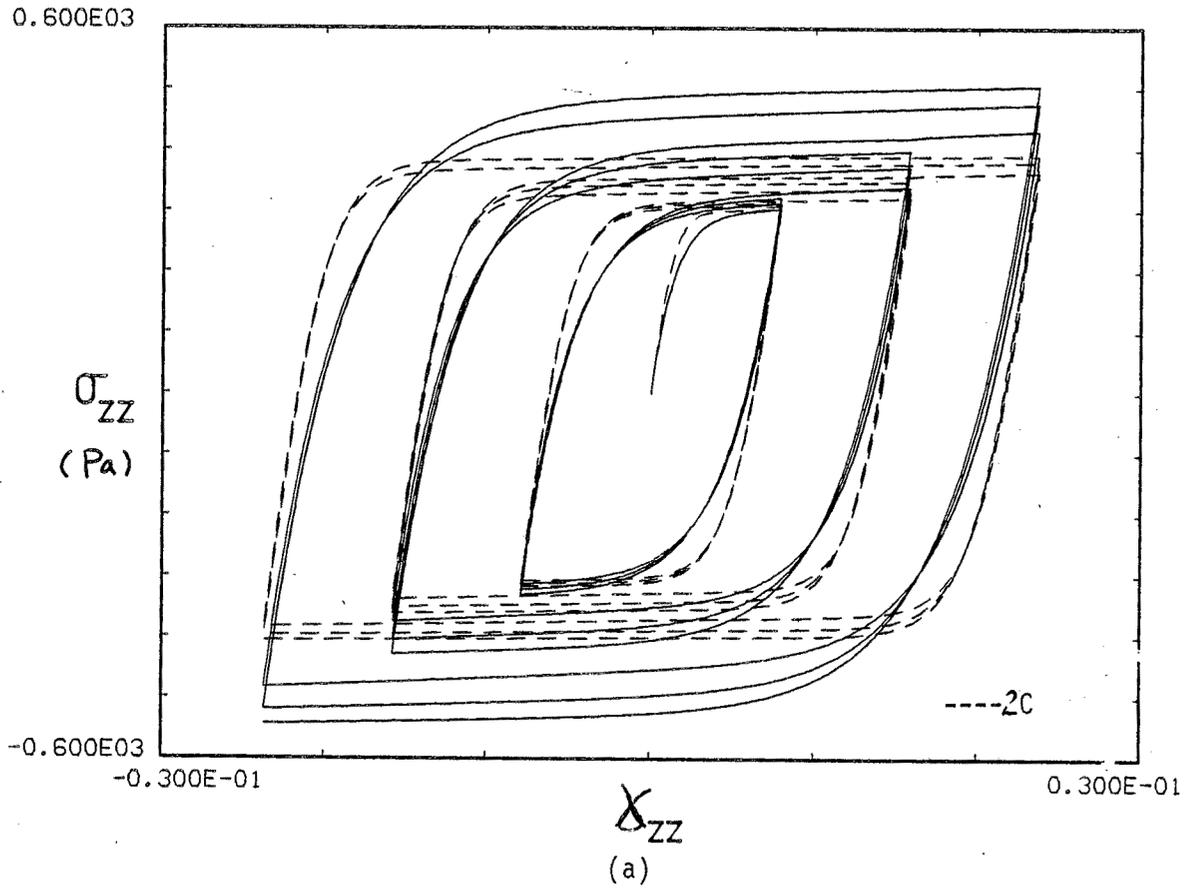


Fig. V.11 Simulation de l'essai n° 205 - Influence du coefficient  $C$ .

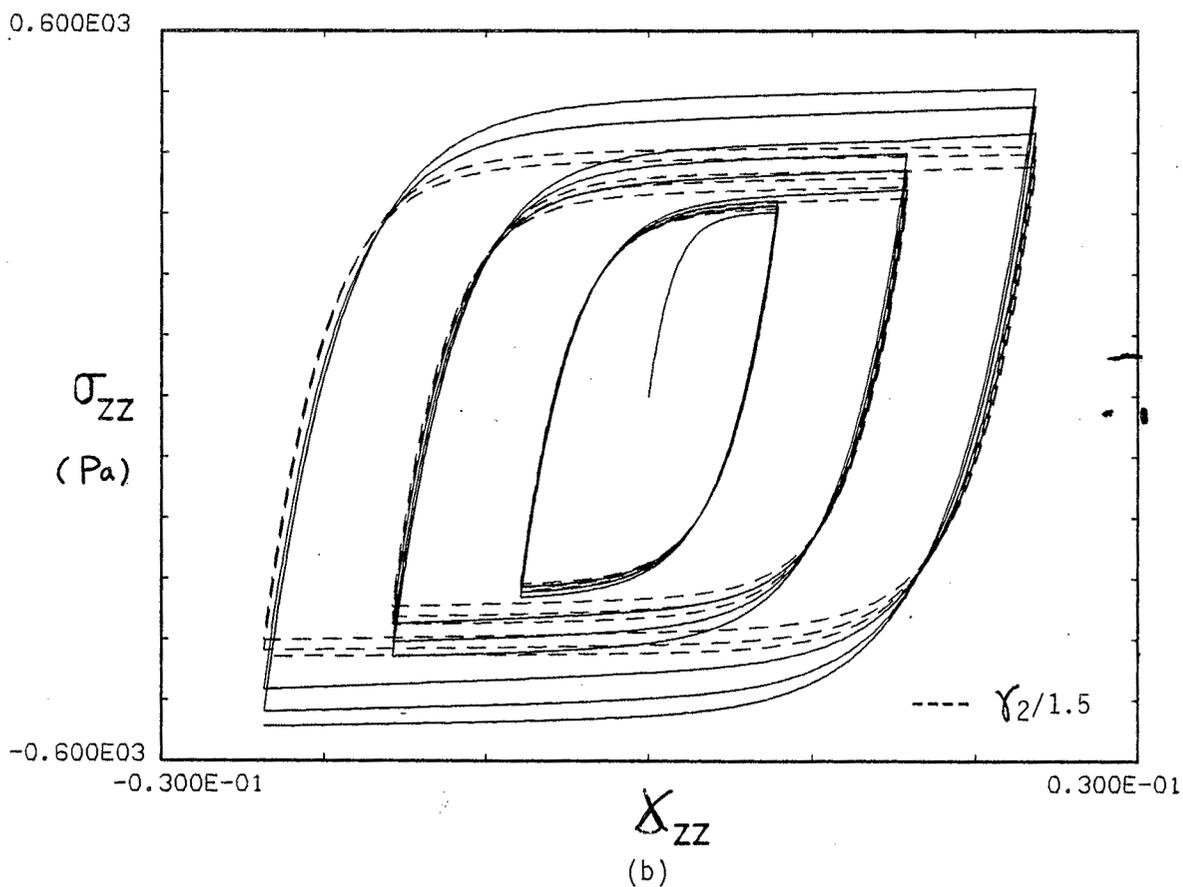
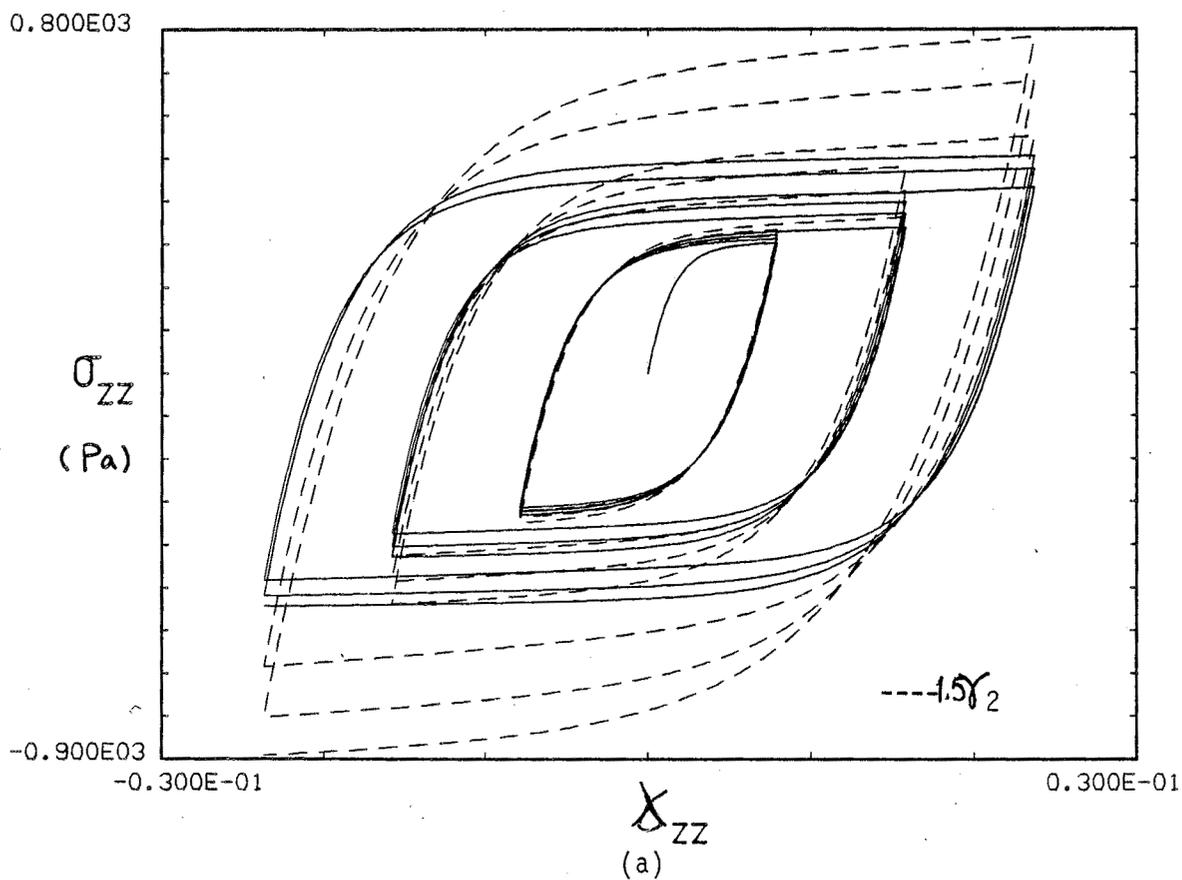


Fig. V.12 Simulation de l'essai n° 205 - Influence du coefficient  $\gamma_2$

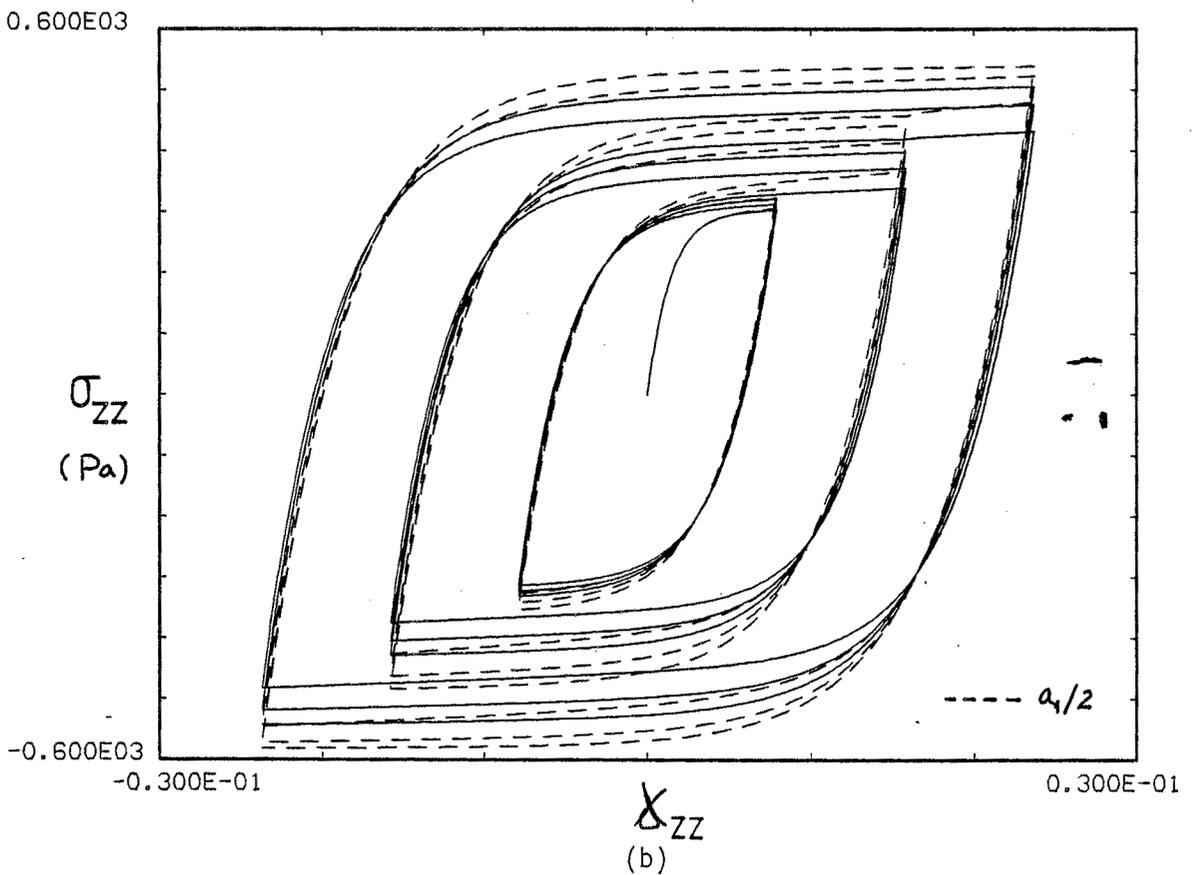
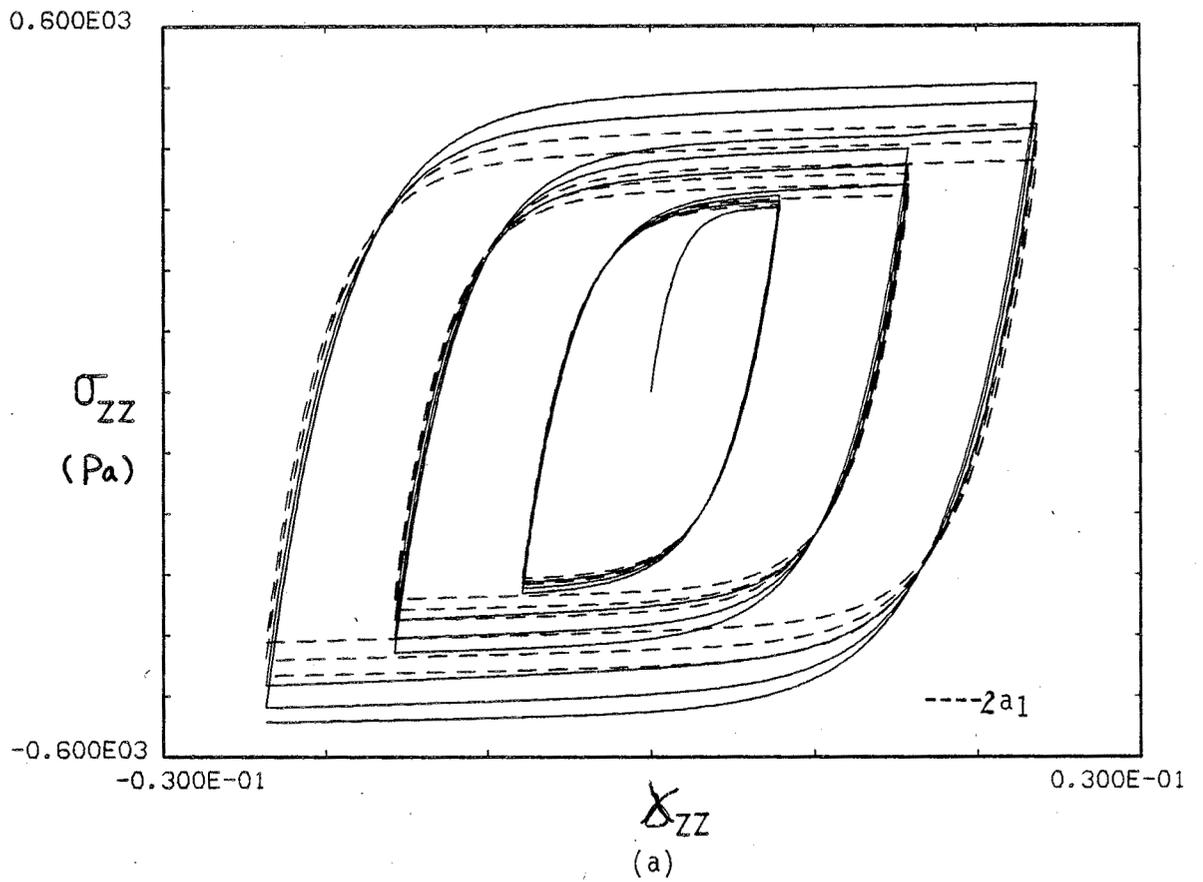


Fig. V.13 Simulation de l'essai n° 205 - Influence du coefficient  $a_1$ .

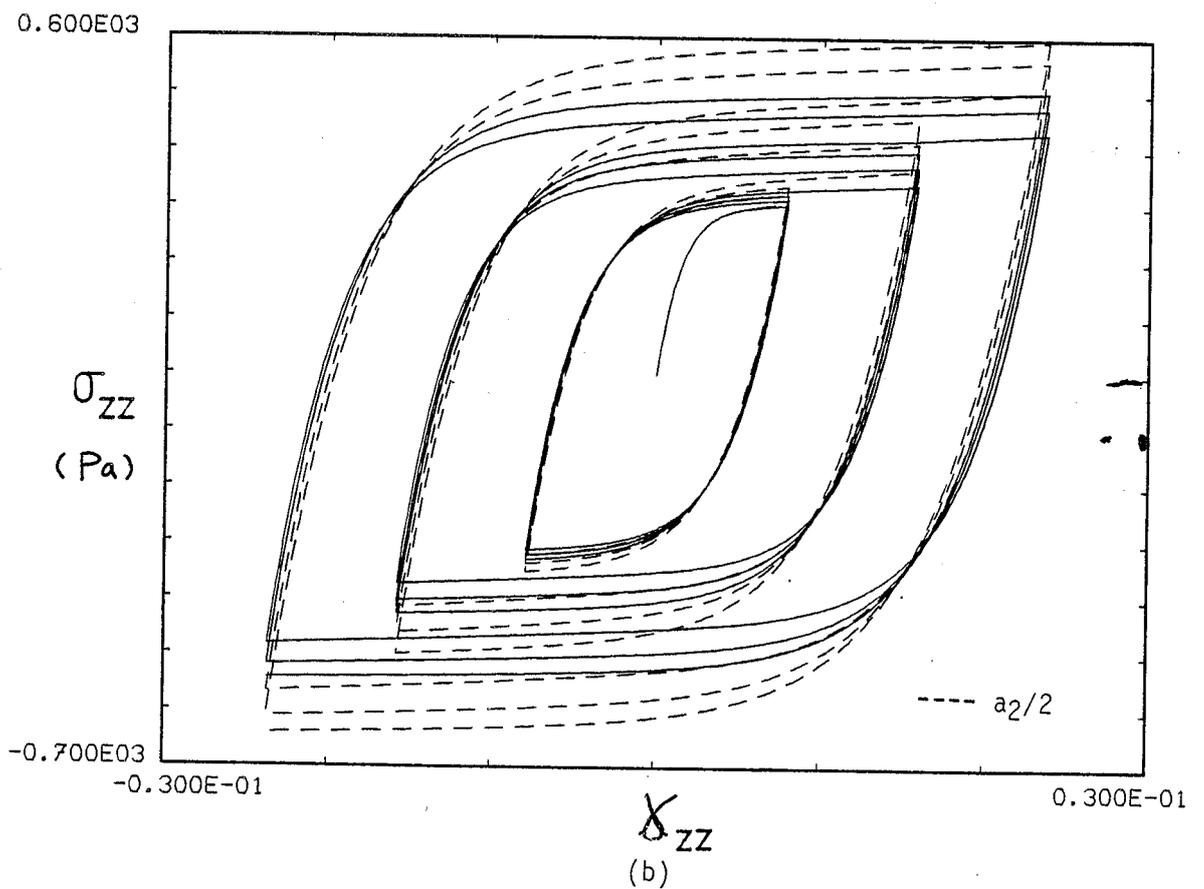
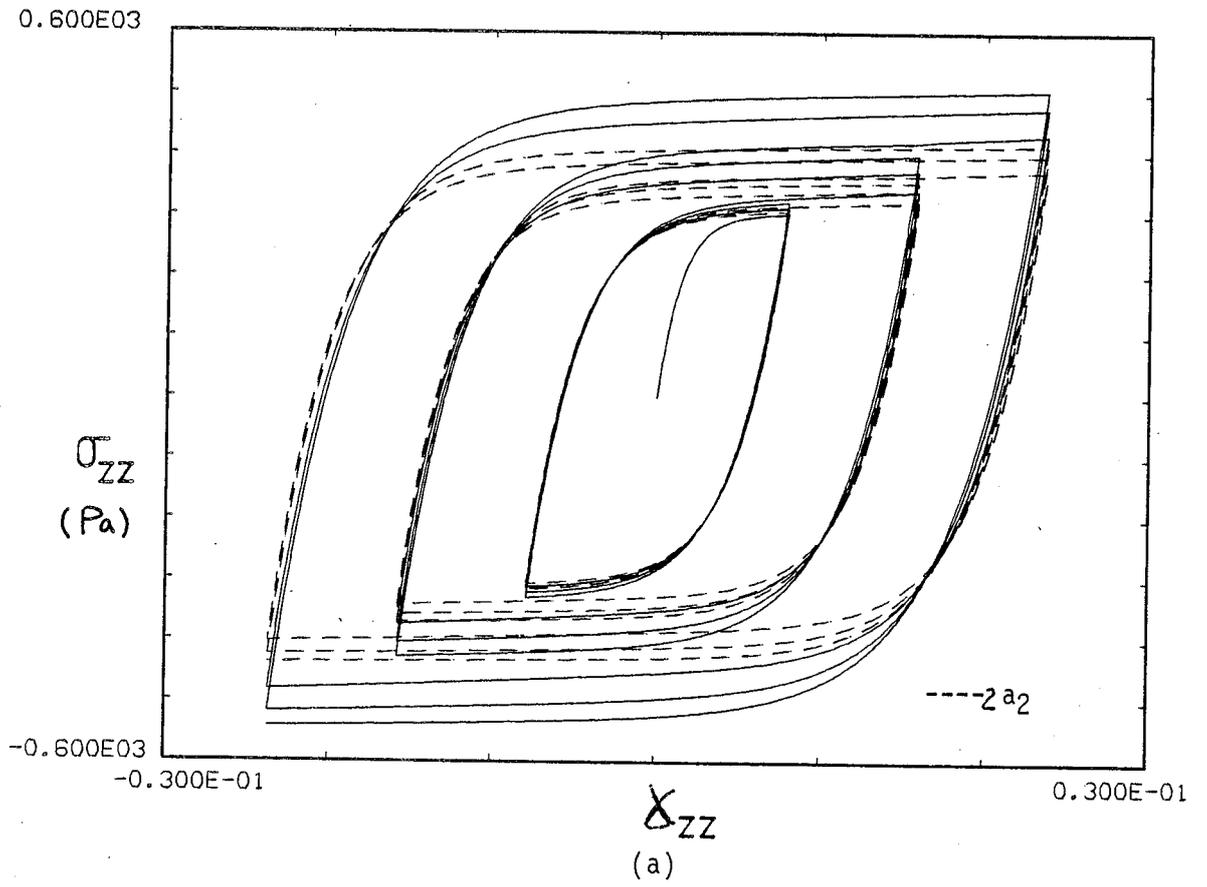


Fig. V.14 Simulation de l'essai n° 205 - Influence du coefficient  $a_2$ .

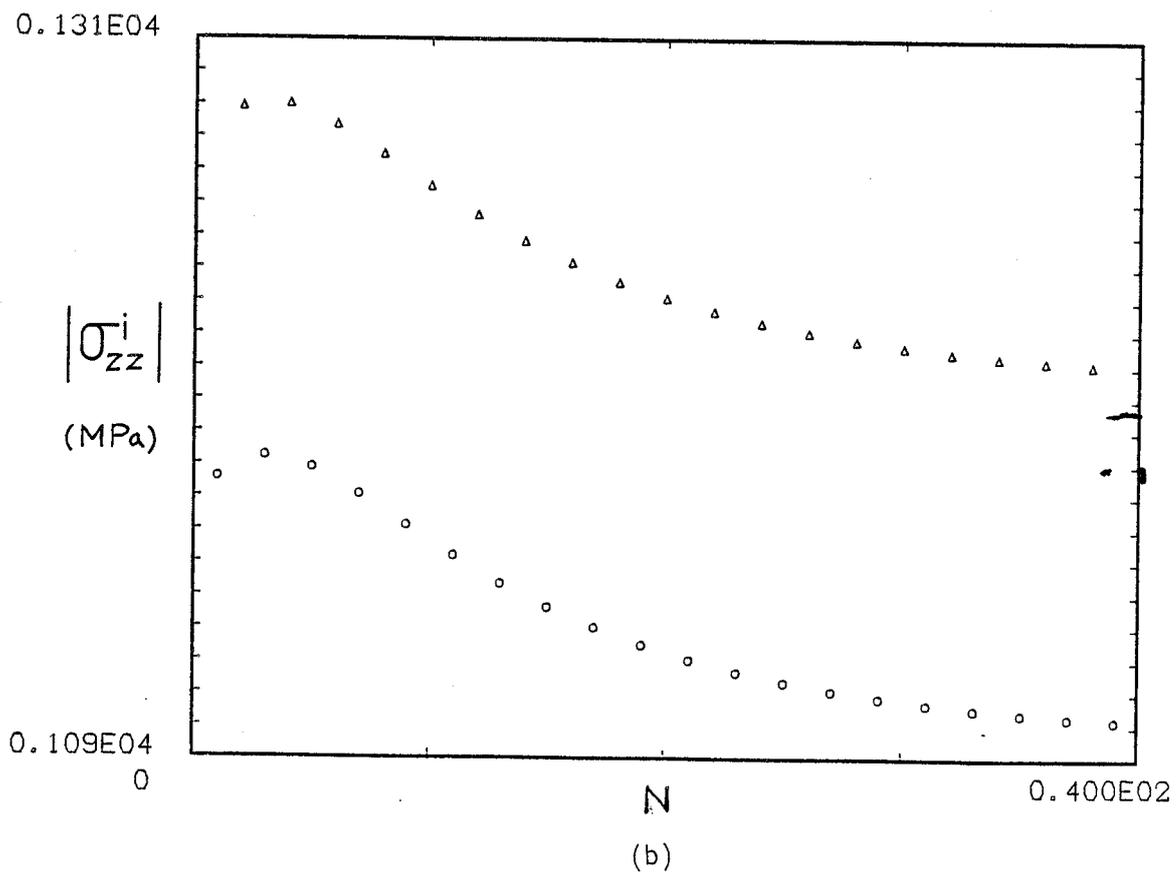
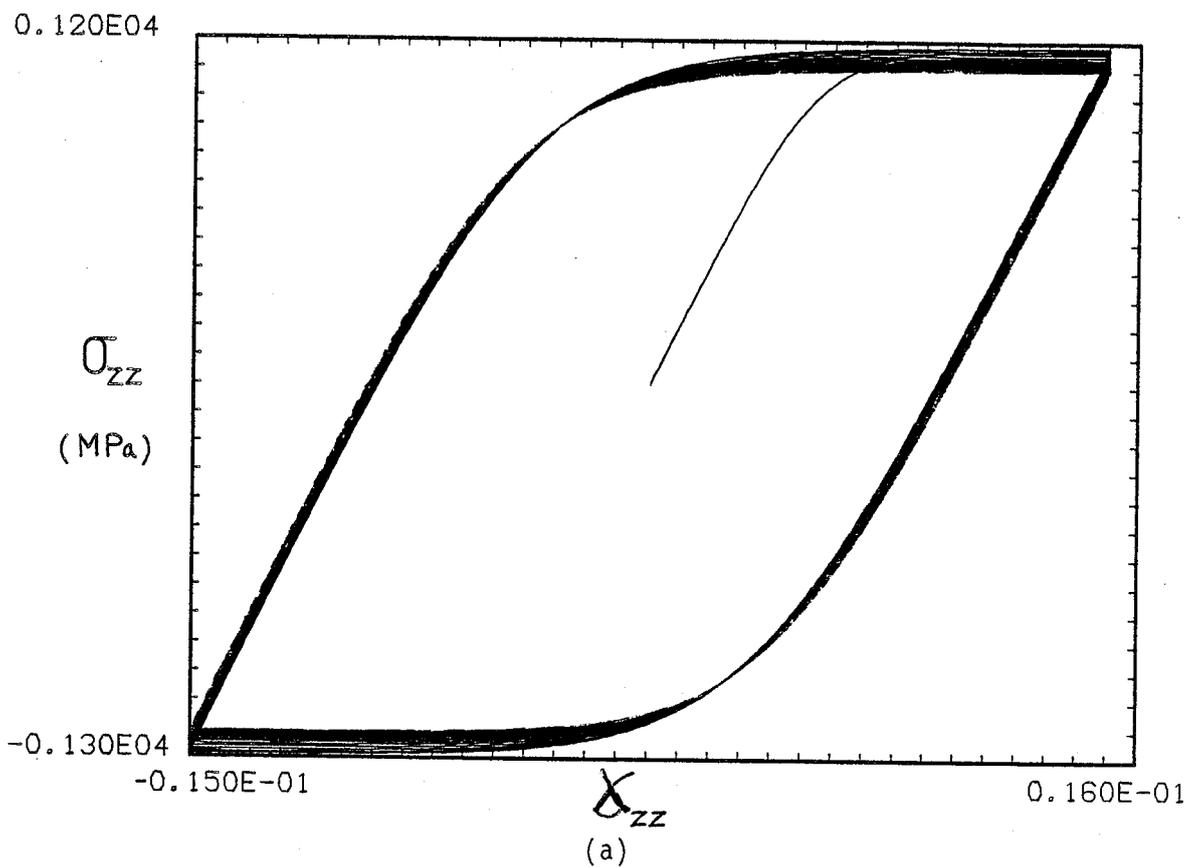


Fig. V.15 Simulation d'un essai de traction-compression - Inconel 718.

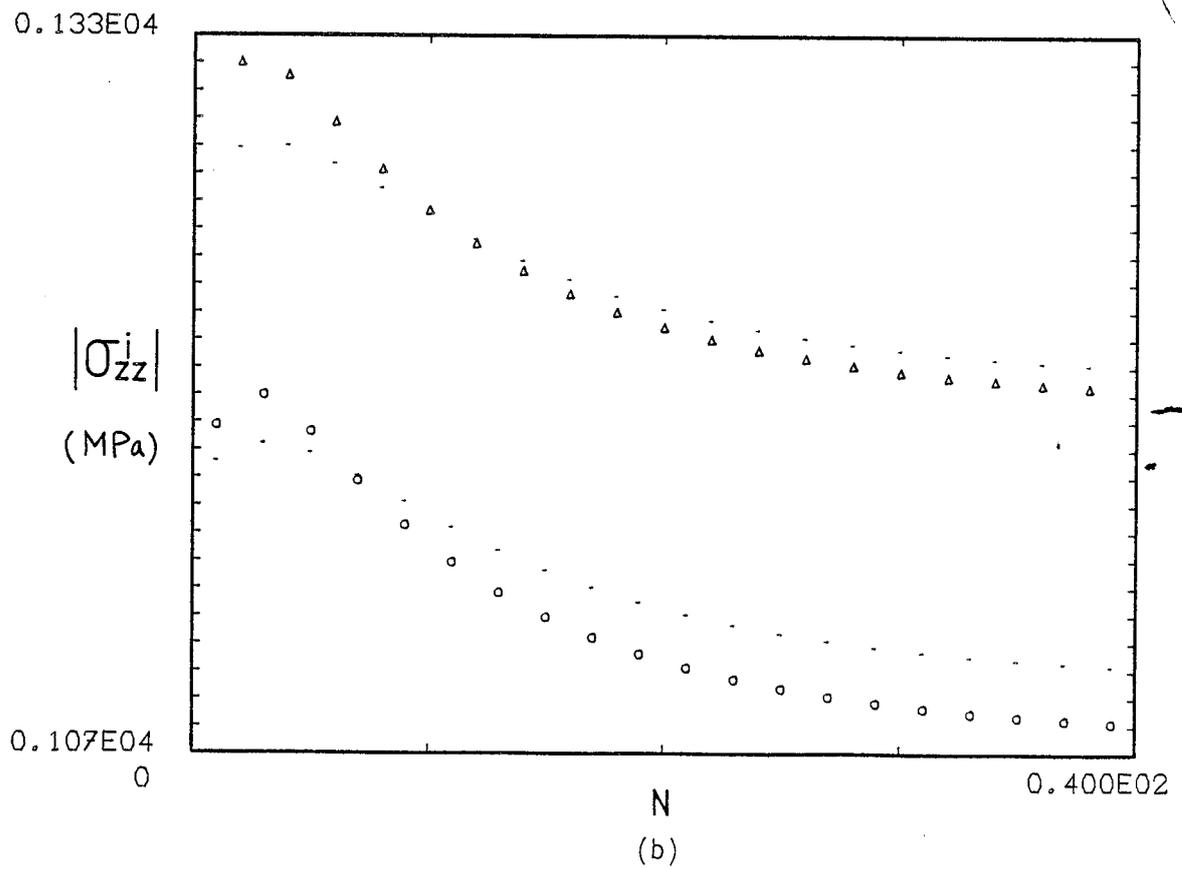
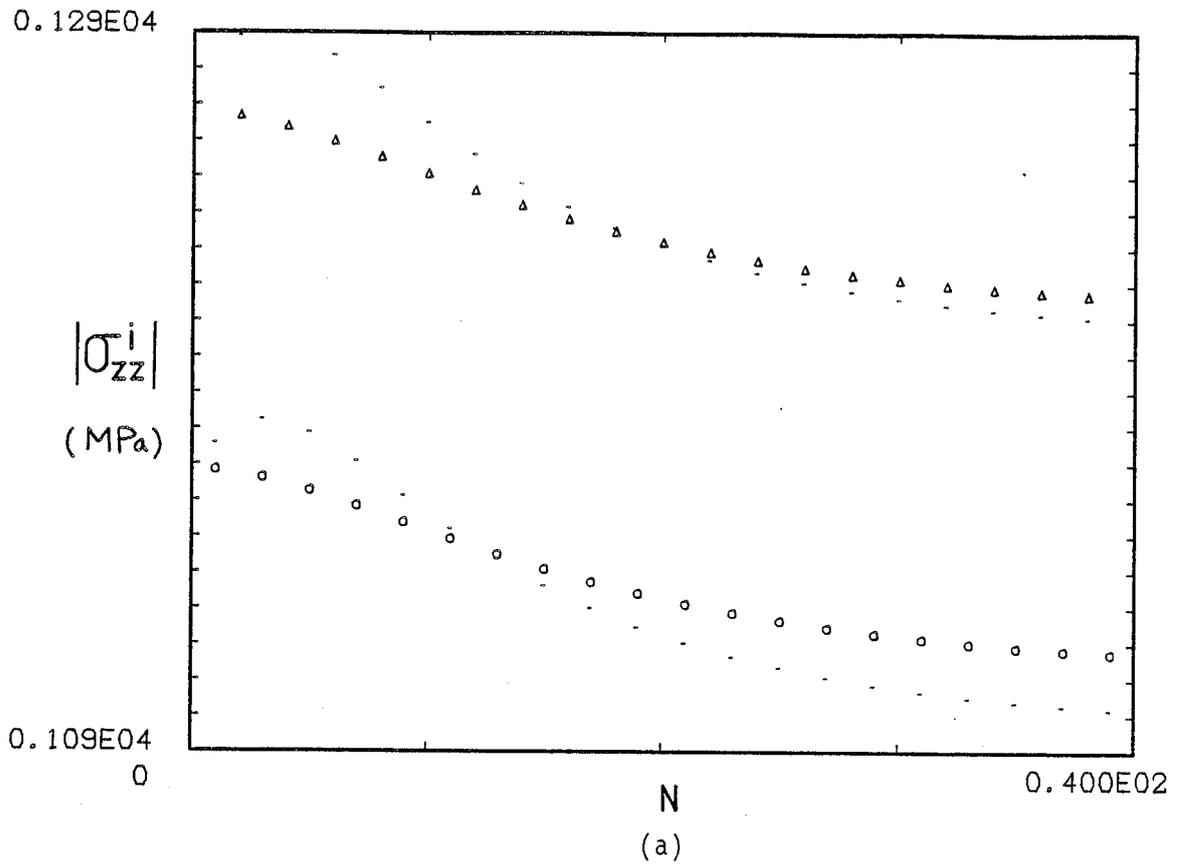


Fig. V.16 Influence du coefficient  $a_1$  - Inconel 718.  
(a)  $2a_1$  et  $a_1^*$ , (b)  $a_1/2$  et  $a_1^*$

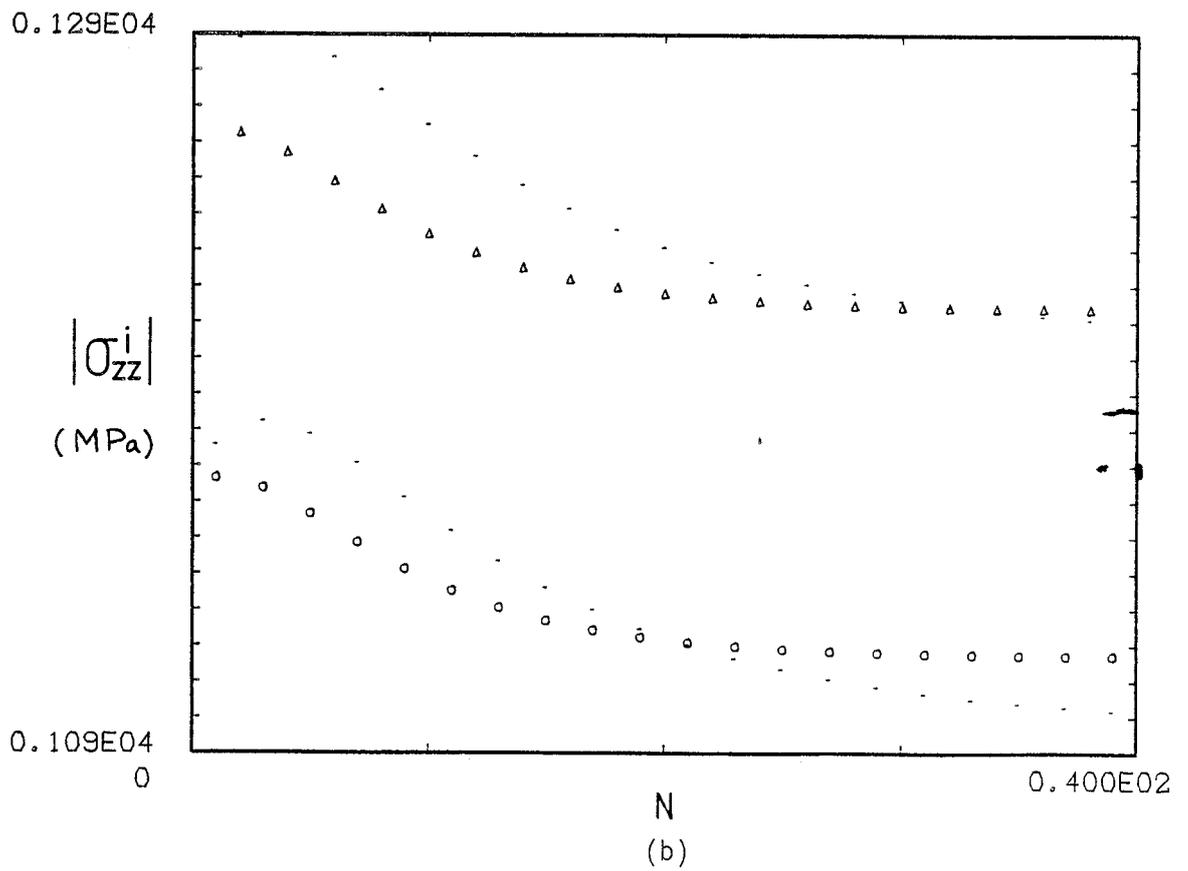
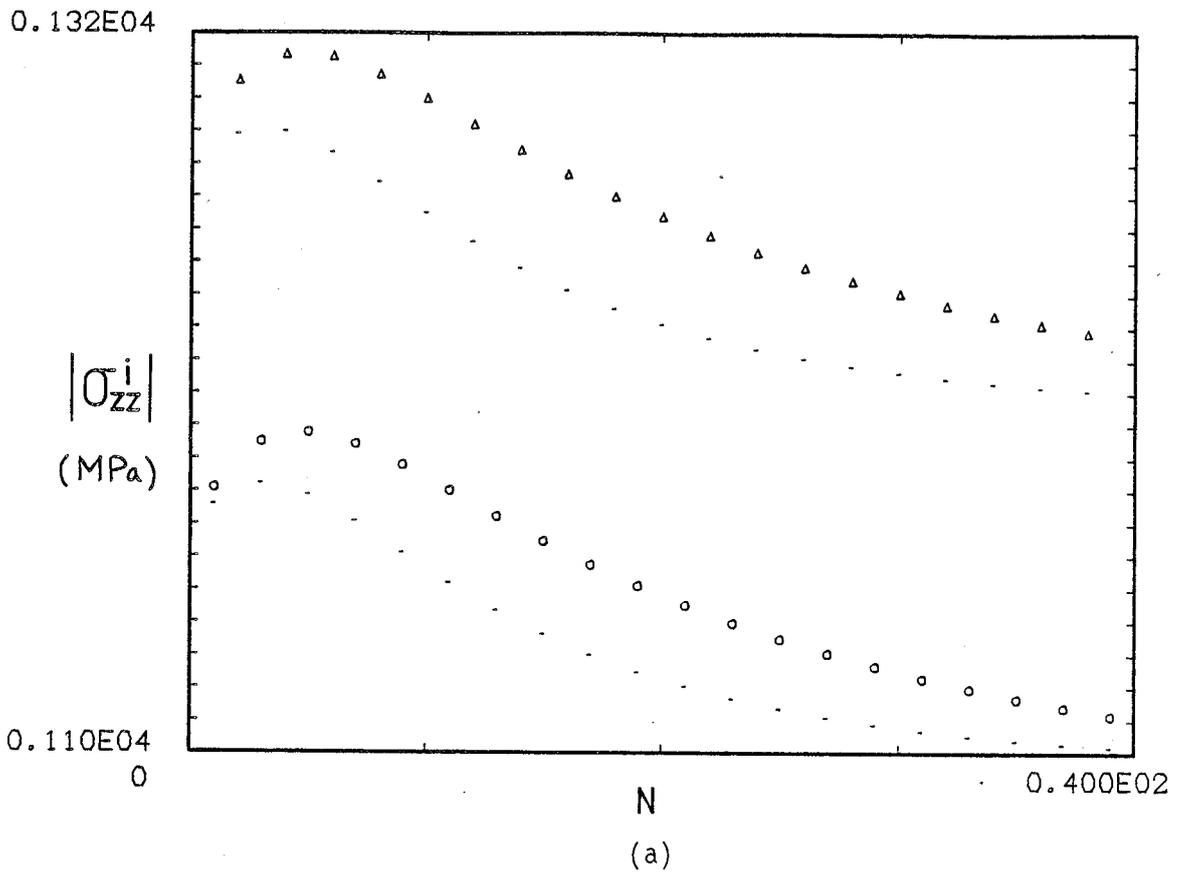


Fig. V.17 Influence du coefficient  $a_1$  - Inconel 718  
(a)  $a_1$  et  $2a_1^*$ , (b)  $a_1$  et  $a_1^*/2$

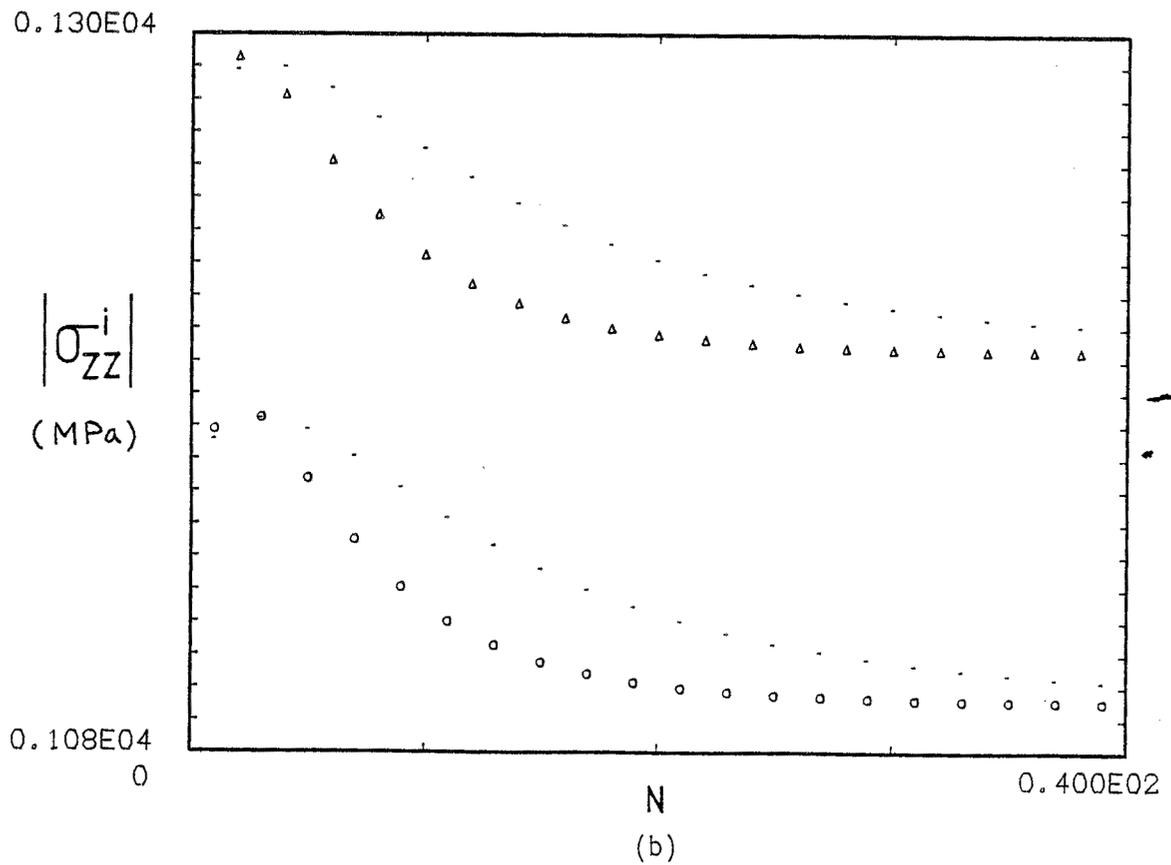
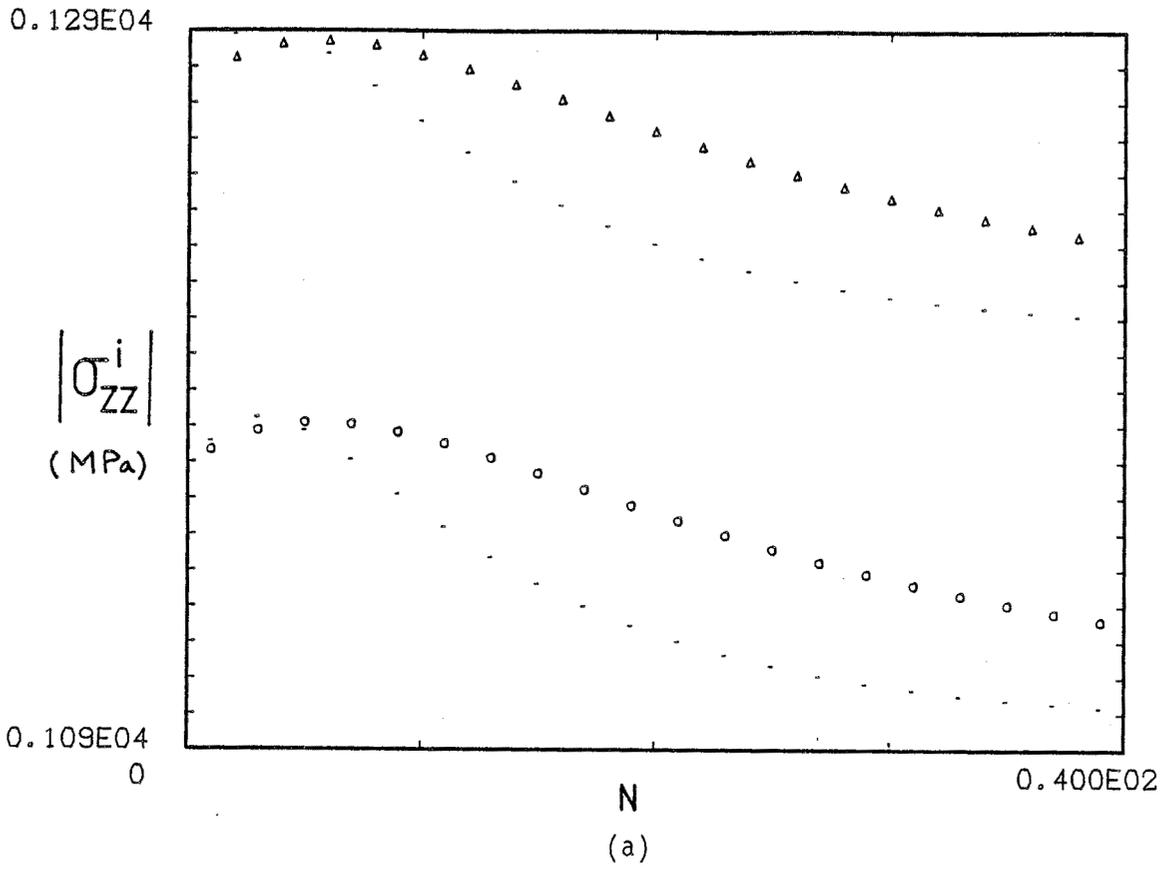


Fig. V.18 Influence du coefficient  $a_1$  et  $a_1^*$  - Inconel 718  
(a)  $2a_1$  et  $2a_1^*$ , (b)  $a_1/2$  et  $a_1^*/2$

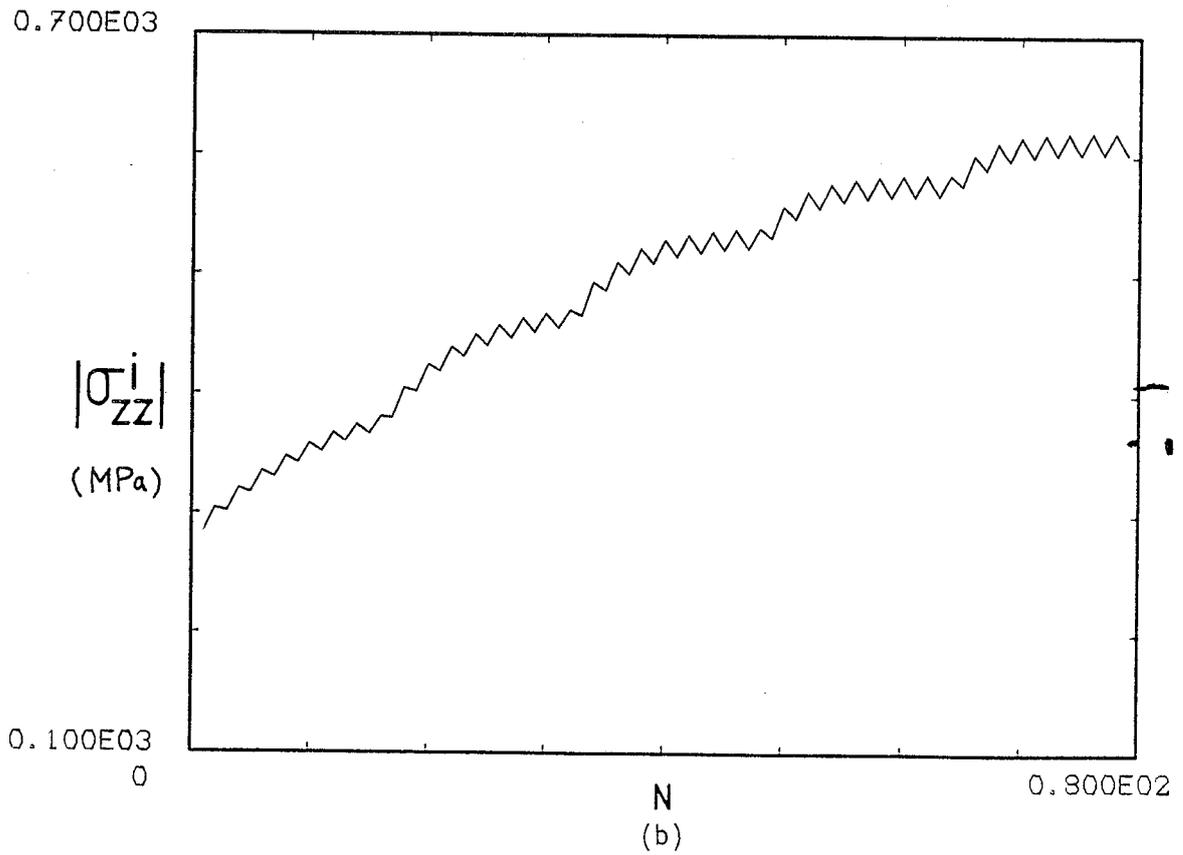
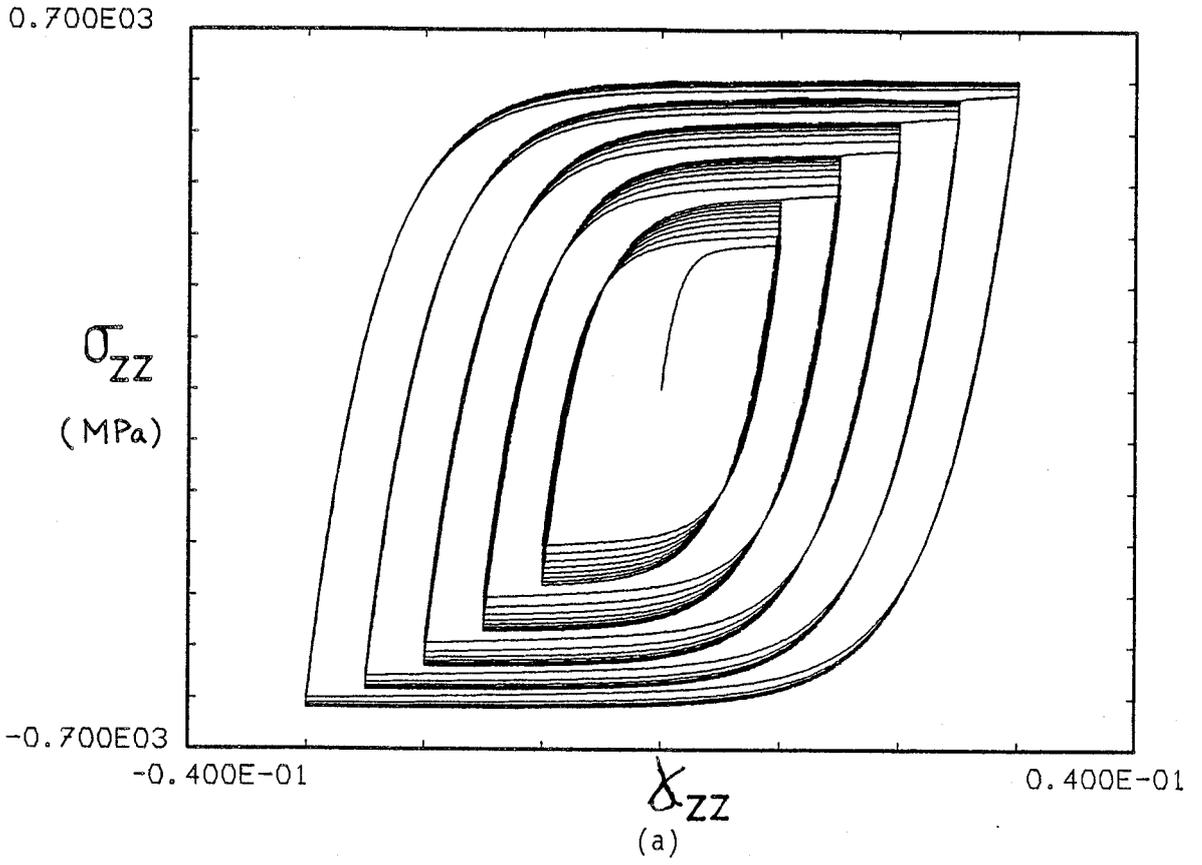


Fig. V.19 Exemple A de simulation de la consolidation de l'acier inoxydable 316 L - Paliers de déformation croissants.

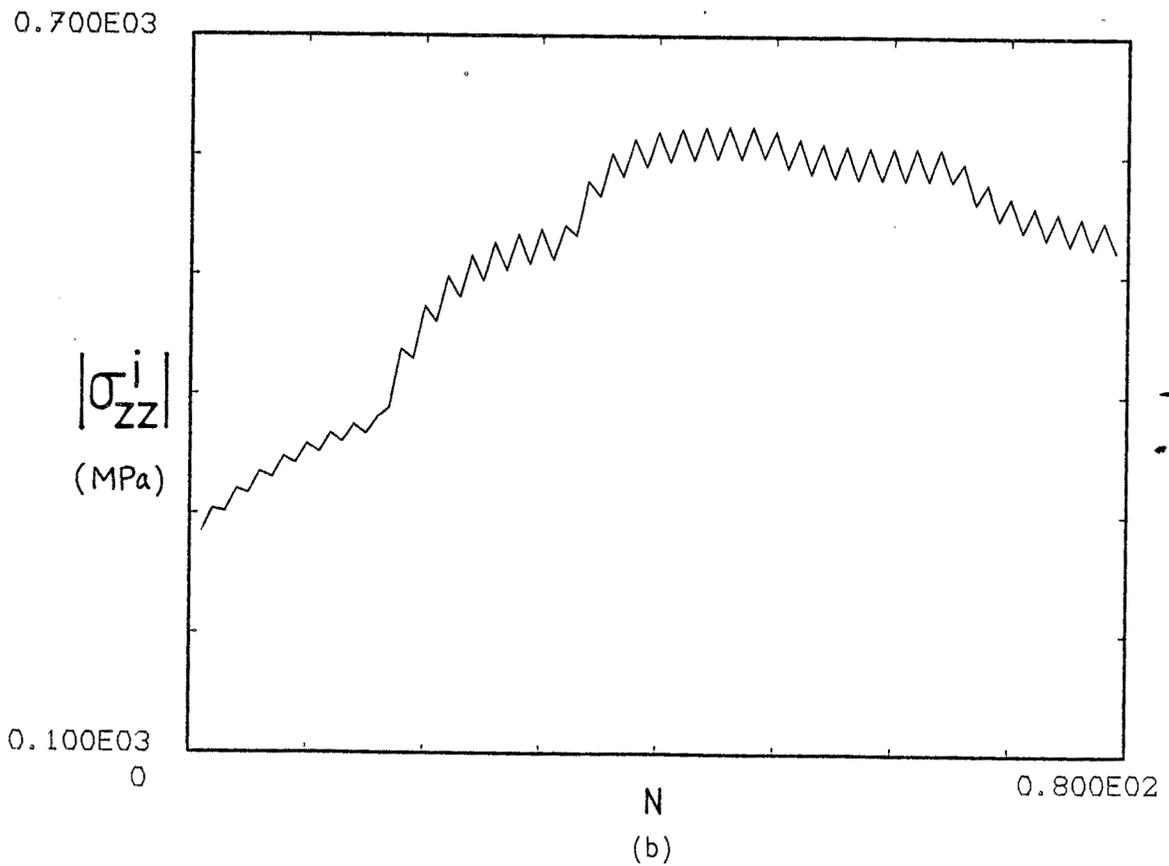
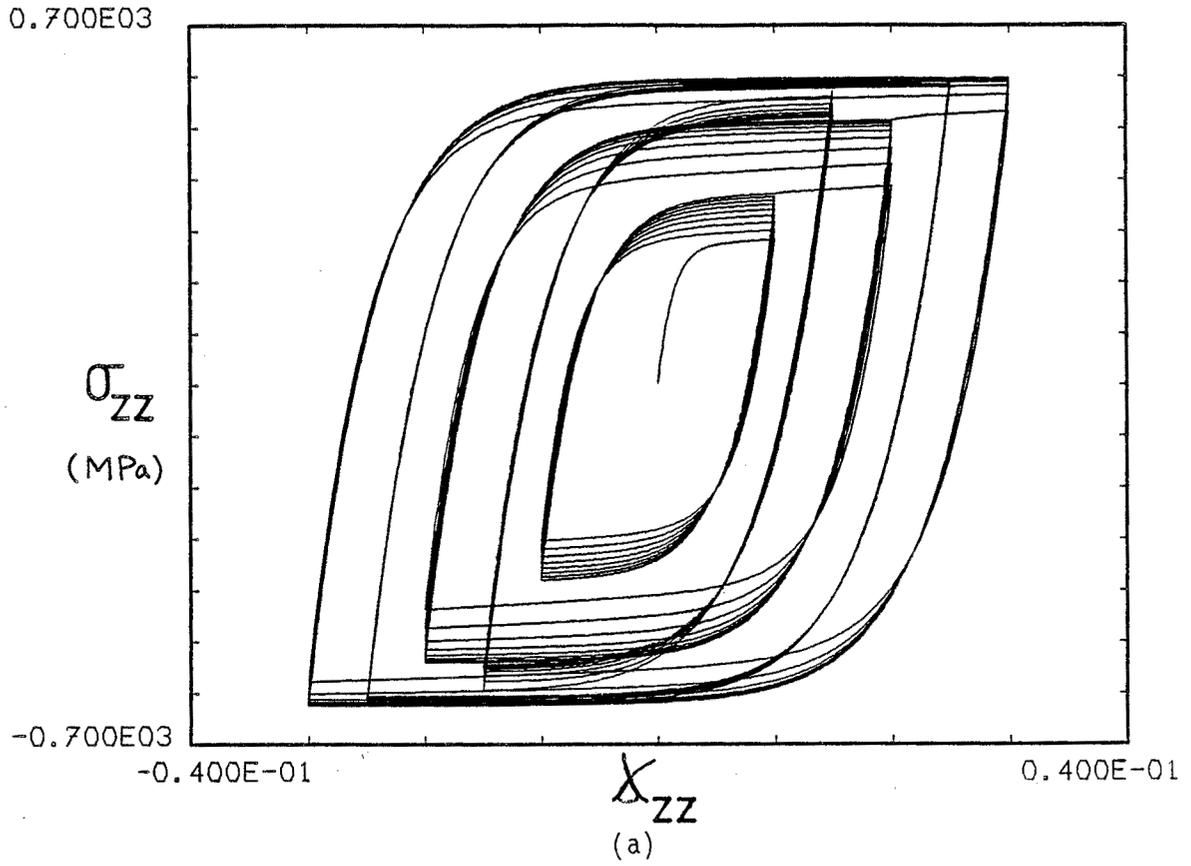


Fig. V.20 Exemple B de simulation de la consolidation de l'acier inoxydable 316 L - paliers de déformation croissants puis décroissants.

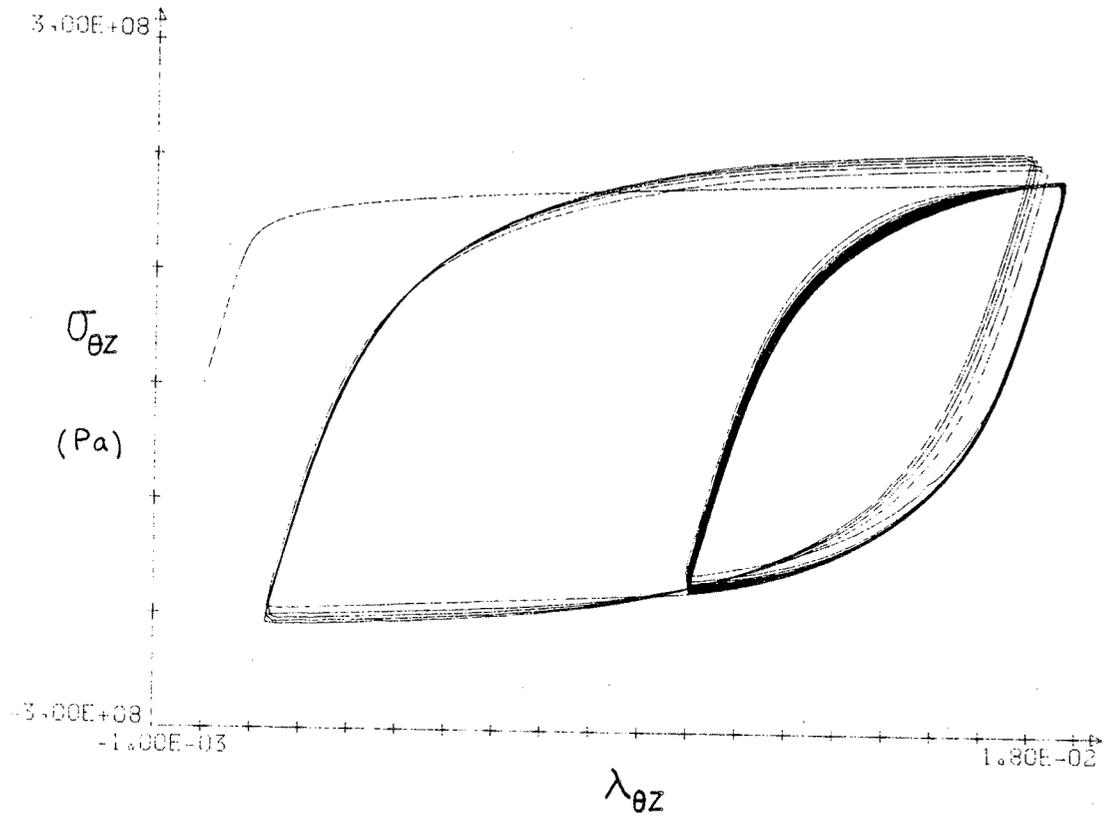


Fig. V.21 Essai de torsion - Acier inoxydable 316 L (n° 218).

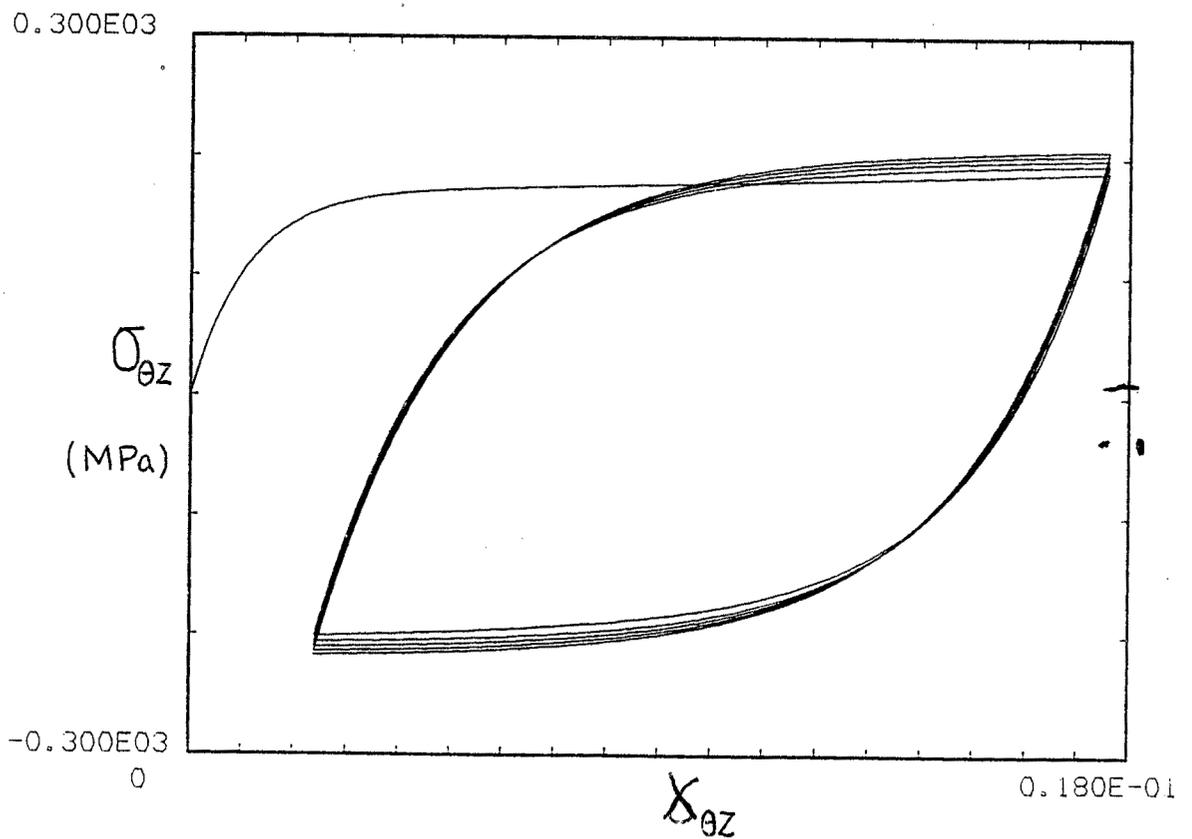
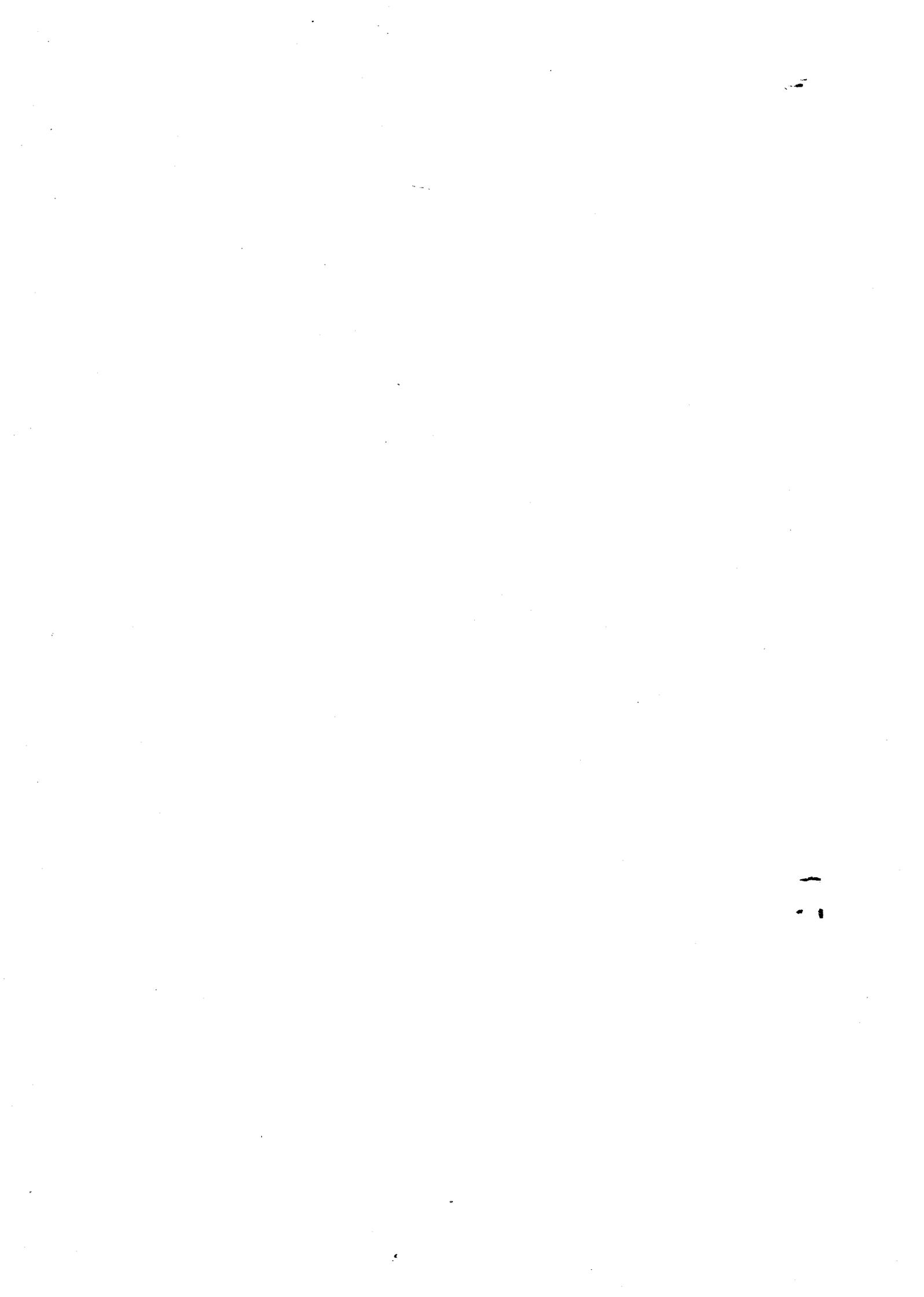


Fig. V.22 Exemple C de simulation de la consolidation de l'acier inoxydable 316 L - Cycles dissymétriques.

CHAPITRE VI

LE ROCHET DE TORSION



L'essai de torsion est souvent utilisé pour identifier les lois du comportement tensorielles des matériaux à forte résistance, tels les métaux. On sait depuis Poynting (1909) que la torsion d'un tube ou d'une tige s'accompagne d'effets secondaires (allongement axial, rétrécissement radial, variation de volume). Il est bien connu

des ingénieurs que les phénomènes de rochet présentent un danger potentiel pour les structures. Pour obtenir une bonne identification du modèle du comportement dans le cas de torsion, il est nécessaire de prendre en compte ces effets secondaires et de distinguer les effets secondaires "géométriques" associés aux non linéarités de la géométrie de l'éprouvette et les effets secondaires associés directement à la non linéarité de la loi de comportement tensorielle.

Dans ce chapitre, on analyse d'abord les travaux expérimentaux effectués depuis Poynting jusqu'à présent, et on rappellera les études théoriques qui y sont attachées.

On présente ensuite les résultats expérimentaux que nous avons obtenus, ainsi que les explications théoriques et la modélisation par le schéma de comportement.

## VI.1. Rappel bibliographique des études concernant les effets secondaires de torsion.

### VI.1.1. Les travaux expérimentaux

En 1909 et 1912, Poynting [38][39] a effectué les premiers essais de torsion simple sur des cordes à piano, des fils de cuivre, de laiton ; l'extrémité des fils est libre en déformation. Il a mis en évidence :

- a) l'existence d'un allongement axial, d'un rétrécissement radial et d'une augmentation de volume,
- b) l'allongement axial de torsion est proportionnel au carré de l'angle de torsion,

Des essais systématiques du même type ont été effectués par Foux en 1962 et ont confirmé les résultats de Poynting (figure VI.1) [40] ; Foux a bien mis en évidence des difficultés de ce type d'essai

et en particulier la nécessité d'un conditionnement des fils soit par une prétension, soit par un chauffage.

En 1945, Rivlin [41] a fait des essais de torsion à extrémités bloquées en déformation avec des éprouvettes en caoutchouc. Il a constaté que la sollicitation de torsion était accompagnée par une contrainte normale de compression, variant comme le carré de la déformation de torsion (figure VI.2).

Les effets secondaires mesurés par Poynting, Foux et Rivlin sont des effets essentiellement réversibles. En 1947, Swift [42] a fait des essais de torsion à force axiale nulle dans le cas de grandes déformations cycliques sur les matériaux suivants : laiton 70-30, inox, aluminium, cuivre-nickel, cuivre, acier doux, acier à 0,5 % carbon etc. Il a mesuré pour la première fois un allongement axial irréversible, qui se cumule au cours du chargement cyclique (figure VI.3) : il s'agit d'un phénomène secondaire de rochet.

En 1965, Ronay [43] a fait des essais simulaires de fatigue en torsion avec un grand nombre de cycles à différentes températures et différentes charges axiales sur un matériau d'aluminium. Ronay a mesuré aussi un rochet axial, même en l'absence de force axiale (figure VI.4).

## VI.2. Les explications théoriques des effets secondaires

Les explications théoriques pour modéliser les effets secondaires sont les suivantes :

a) Explication de Rivlin [41] :

Soit  $W$  la fonction d'énergie de déformation pour le matériau élastique :

$$W = W(I_{\mathcal{E}}, II_{\mathcal{E}}, III_{\mathcal{E}})$$

Le matériau caoutchouc peut être considéré comme incompressible :

$$III_{\mathcal{E}} = 1 \quad \text{et} \quad W = W(I_{\mathcal{E}}, II_{\mathcal{E}})$$

et Rivlin considère la forme de Moonay (1943) :

$$W = C_1(I_{\mathcal{E}} - 3) + C_2(II_{\mathcal{E}} - 3)$$

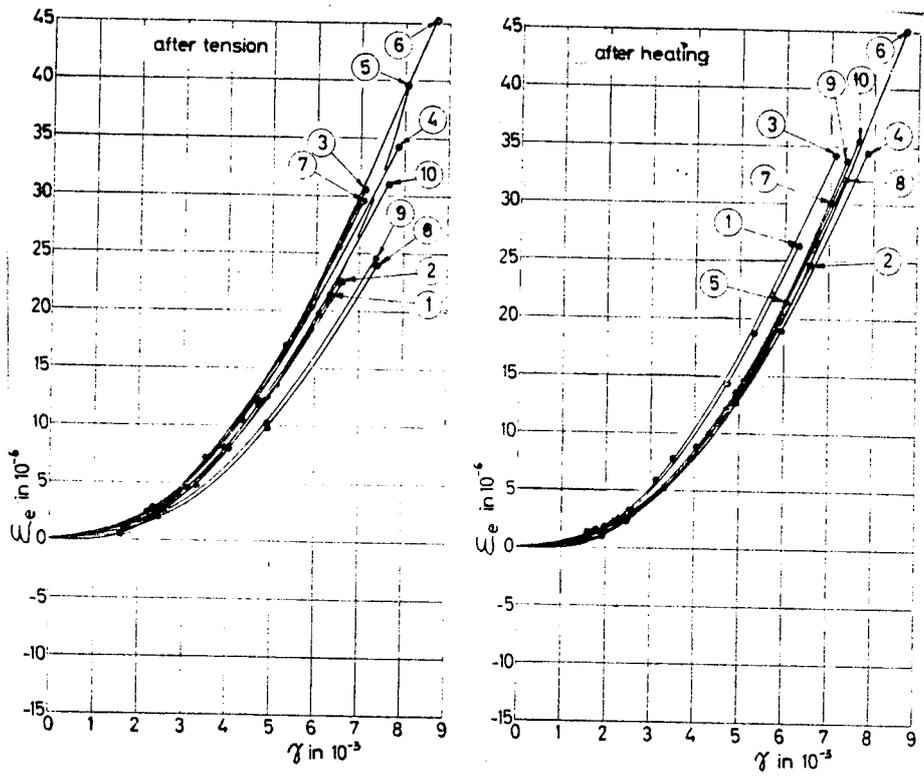


Fig. VI.1 Allongement axial mesuré par Foux [40].

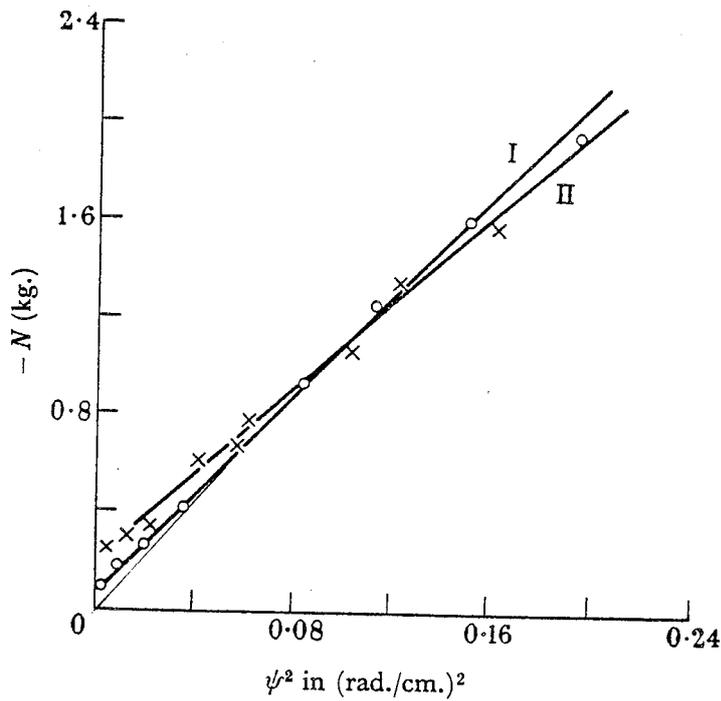


Fig. VI.2 Force de compression axiale mesurée par Rivlin [41].

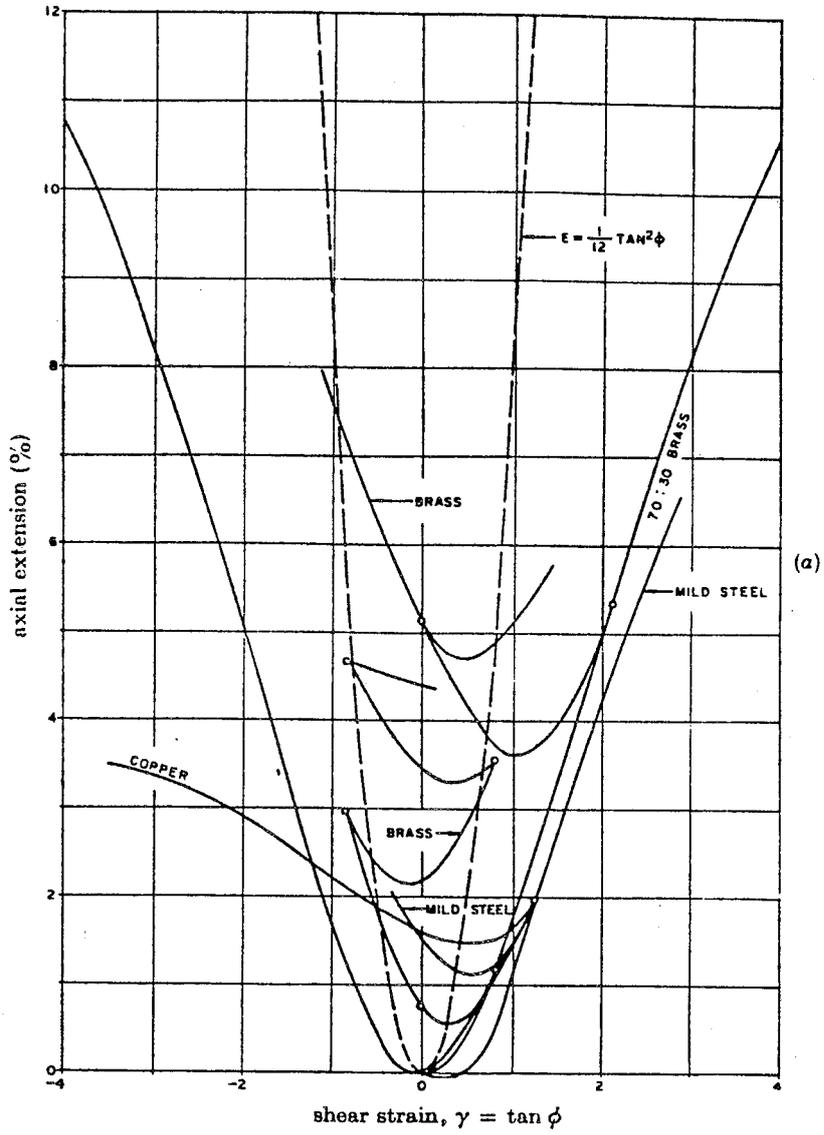


Fig. VI.3 Rocher de torsion mesuré par Swift [42].

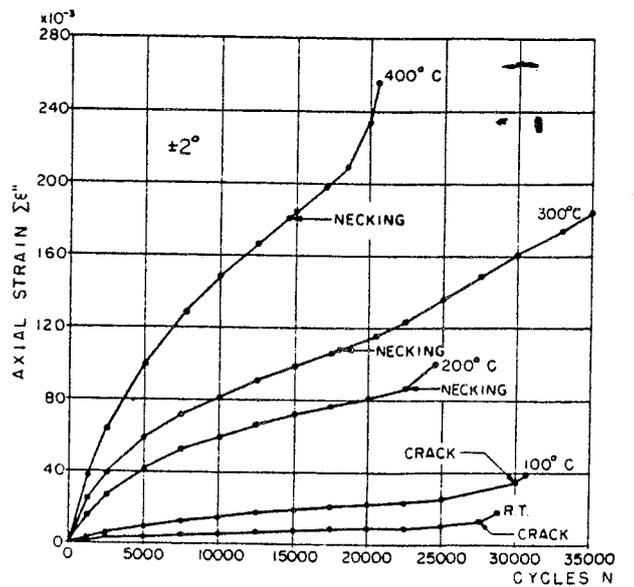
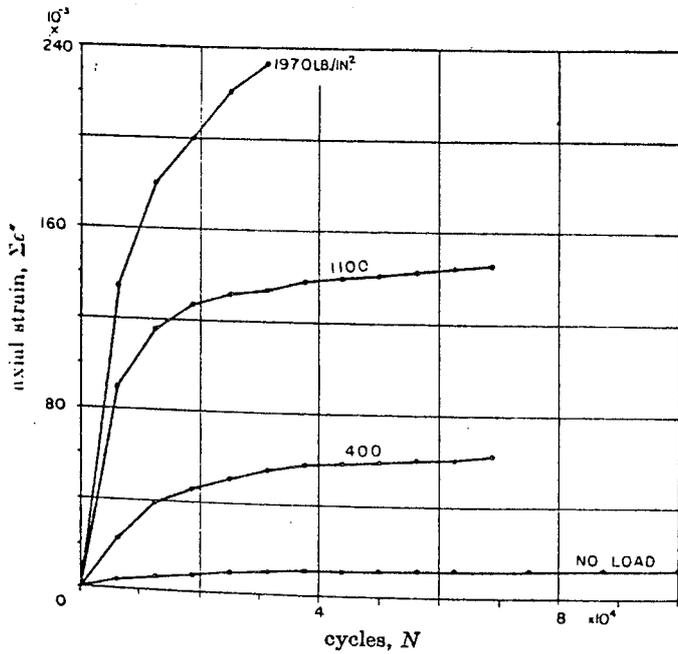


Fig. VI.4 Allongement axial mesuré par Ronay [43].

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constants du matériau.

Avec cette forme d'énergie, Rivlin a obtenu que la torsion d'une tige en caoutchouc dont le rayon  $R$ , s'accompagne d'une compression  $N$  qui est proportionnelle au carré de l'angle de torsion par unité de longueur  $\tau$  :

$$N = -\pi R^4 (0.5 C_1 + C_2) \tau^2$$

b) Explication de Murnaghan [45] et Rivlin [44] :

Il a défini une fonction d'énergie en déformation, qui est une fonction en série des invariants  $I_{\mathcal{E}}$ ,  $II_{\mathcal{E}}$ ,  $III_{\mathcal{E}}$  des déformations infinitésimales :

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \dots$$

où  $\Phi_0$  est constante,  $\Phi_1$  une fonction de  $I_{\mathcal{E}}$ , proportionnelle à  $\mathcal{E}$ ,  $\Phi_2$  une fonction de  $II_{\mathcal{E}}$  et de  $I_{\mathcal{E}}^2$  proportionnelle à  $\mathcal{E}^2$ ,  $\Phi_3$  une fonction de  $III_{\mathcal{E}}$ ,  $I_{\mathcal{E}} \cdot II_{\mathcal{E}}$  et  $I_{\mathcal{E}}^3$  proportionnelle à  $\mathcal{E}^3$ .

En calculant  $\Phi$ , au premier ordre, on introduit deux coefficients phénoménologiques  $\lambda$  et  $\mu$ . Au deuxième ordre, on introduit trois coefficients supplémentaires :  $l$ ,  $m$ ,  $n$ ; dans ce cas, Murnaghan montre que pour la torsion d'un tube à force axiale nulle, les trois composantes diagonales de la matrice de déformation sont proportionnelles au carré de la déformation de torsion.

c) Explication de Freudenthal et Gou [46] :

Ils ont défini un potentiel plastique particulier :

$$f = f(II_{\bar{\mathcal{E}}}, III_{\bar{\mathcal{E}}})$$

En définissant la partie plastique de la déformation totale par :

$$d\mathcal{E}_p = \frac{\partial f}{\partial \mathcal{E}_j} d\lambda$$

ils ont obtenu que la déformation axiale  $\mathcal{E}_{33}$  est proportionnelle au carré de la déformation de cisaillement  $\mathcal{E}_{03}$  :

$$\mathcal{E}_{33} = \frac{1}{9} h \mathcal{E}_{03}^2$$

où h est une constante du matériau.

Toutes les explications théoriques utilisées ci-dessus introduisent les effets secondaires de la torsion essentiellement comme une conséquence de la non-linéarité de la loi de comportement.

### VI.3. Analyse des résultats expérimentaux

Le rochet axial de torsion pour l'acier inoxydable 316 L a été déterminé en premier lieu au cours d'essai de torsion symétrique, contrôlés en déformation de cisaillement et à force axiale nulle à petit nombre de cycle d'amplitude variable. Les essais n° 206 (figure VI.5) et n° 207 (figure VI.6) sont identiques et comportent trois cycles de trois amplitudes de déformation  $\pm 0.45$ ,  $\pm 0.90$  et  $\pm 1.35$  %. L'essai n° 208 (fig. VI.7) comporte trois cycles d'amplitude  $\pm 0.55$ , trois cycles d'amplitude  $\pm 1.1$  % et neuf cycles d'amplitude  $\pm 1.65$  %.

On constate que la déformation axiale est décomposée en une partie réversible et une partie irréversible qui constitue le rochet proprement dit. La partie réversible est théoriquement égale au double du carré de la déformation de torsion, comme nous le verrons au paragraphe suivant; on constate que les mesures indiquent une valeur systématiquement supérieure de l'ordre de 15 % :

ESSAI	$\lambda_{\theta z}$	$2 \lambda_{\theta z}^2$	$\lambda_{zz}^{rev.}$
n° 206	0,9.10 <sup>-2</sup> 1,35.10 <sup>-2</sup>	1,6.10 <sup>-4</sup> 3,7.10 <sup>-4</sup>	1,9.10 <sup>-4</sup> 4,2.10 <sup>-4</sup>
n° 207	0,9.10 <sup>-2</sup> 1,35.10 <sup>-2</sup>	1,6.10 <sup>-4</sup> 3,7.10 <sup>-4</sup>	1,9.10 <sup>-4</sup> 4,2.10 <sup>-4</sup>
n° 208	1,1.10 <sup>-2</sup> 1,65.10 <sup>-2</sup>	2,4.10 <sup>-4</sup> 5,5.10 <sup>-4</sup>	2,9.10 <sup>-4</sup> 6,8.10 <sup>-4</sup>

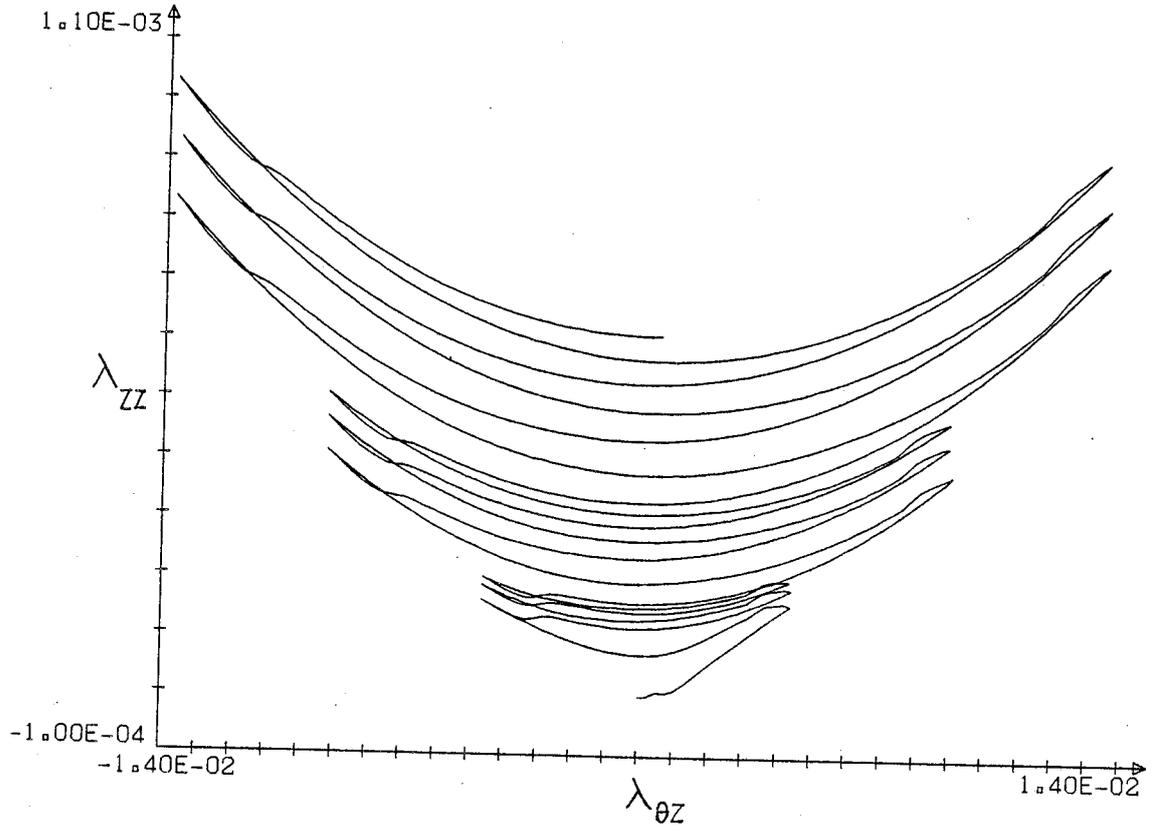


Fig. VI.5 Rochet de torsion - Acier inoxydable 316 L - essai n° 206.

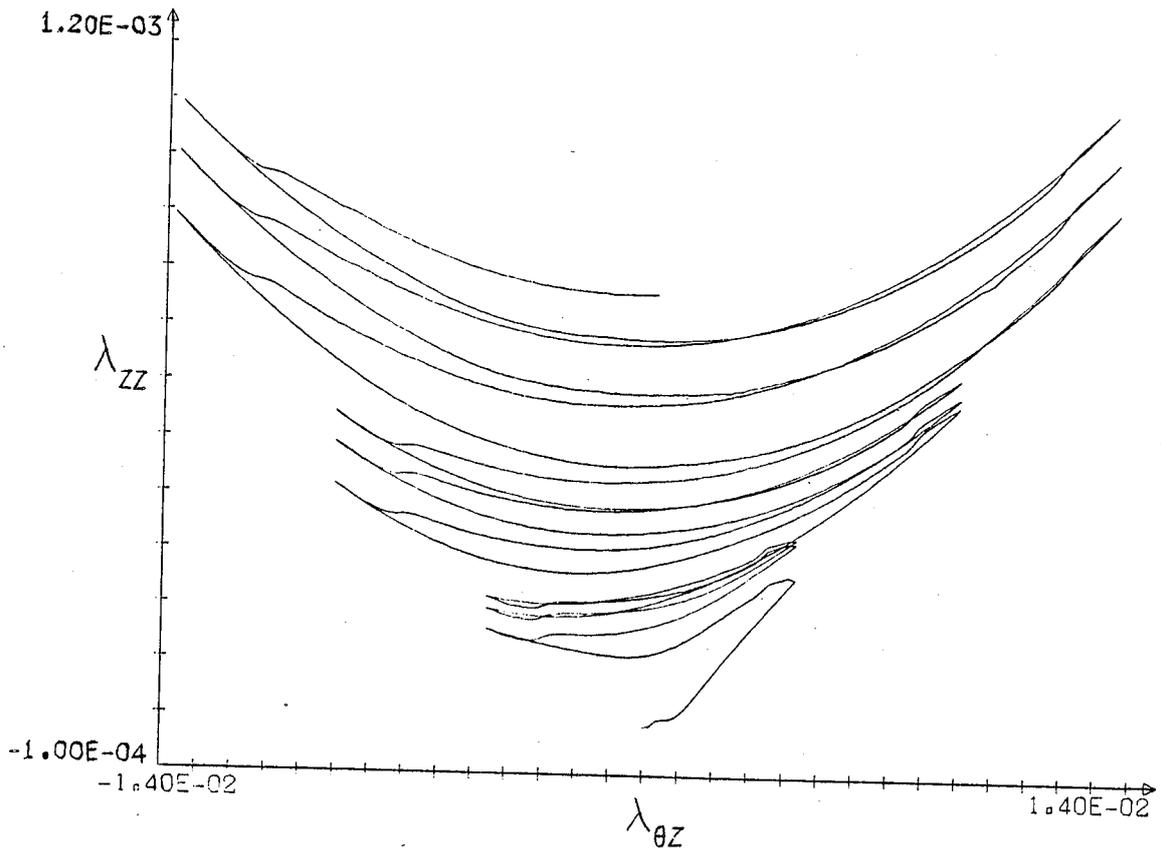


Fig. VI.6 Rochet de torsion - Acier inoxydable 316 L - essai n° 207.

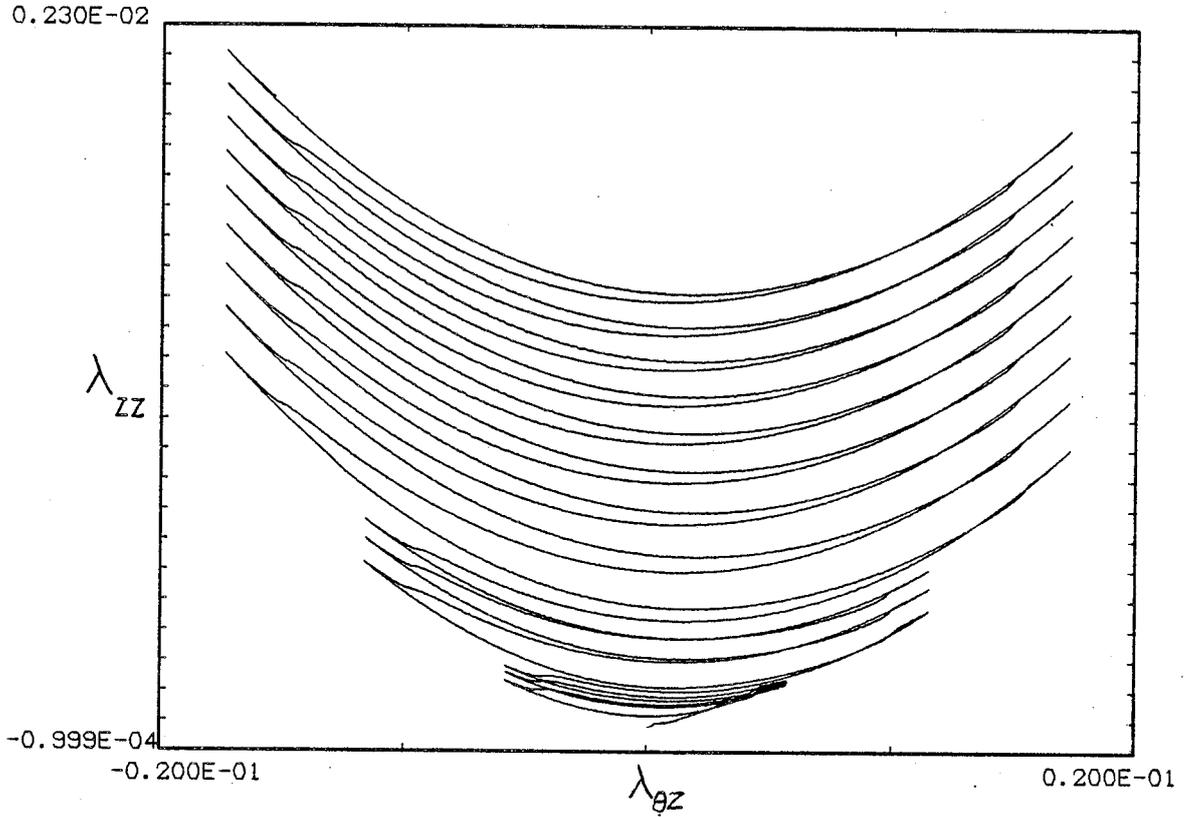


Fig. VI.7 Rochet de torsion - Acier inoxydable 316 L - essai n° 208.

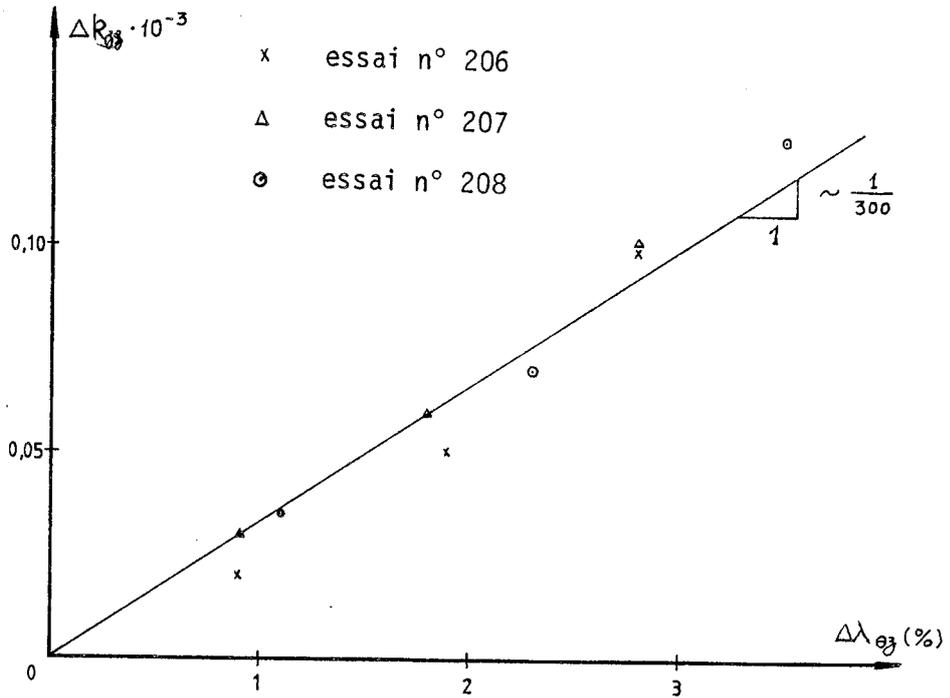


Fig. VI.8 Rochet de torsion en fonction de l'amplitude de déformation de cisaillement.

Il faut noter la remarquable reproductibilité des essais n° 206 et n° 207.

Le rochet axial de torsion par cycle  $\Delta k$  a été mesuré pour la déformation de cisaillement nulle et son évolution en fonction de l'amplitude de déformation de torsion  $\Delta \lambda_{\theta_j}$  est montrée sur la figure VI.8. On constate que le rochet par cycle  $\Delta k$  est quasi proportionnel à l'amplitude du cycle, le rapport moyen étant :

$$\frac{\Delta k}{\Delta \lambda_{\theta_j}} \approx \frac{1}{300} / \text{cycle}$$

L'essai n° 214 à grand nombre de cycles (figure VI.9) met en évidence une diminution du rochet par cycle avec le nombre de cycles ; une stabilisation s'établit vers le 10ème cycle. Pour les derniers grands cycles, le rochet par cycle est de  $0,13 \cdot 10^{-4}$  pour une amplitude de déformation de 0,87 %, soit un coefficient de proportionalité de  $0,75 \cdot 10^{-3} / \text{cycle}$  nettement plus faible que la valeur moyenne trouvée précédemment. Par contre la partie réversible de la déformation axiale est identique à celle trouvée précédemment : pour les grands cycles, elle est de  $1,7 \cdot 10^{-4}$ , alors que la valeur de  $\frac{1}{2} \lambda_{\theta_j}^2$  est égale à  $1,5 \cdot 10^{-4}$ .

Des essais de torsion ont aussi été effectués sur une platine de torsion conçue spécialement pour imposer à l'éprouvette tubulaire une torsion cyclique à force axiale nulle [47]. Deux essais ont été effectués avec l'acier inoxydable 316 L (figure VI.10 - VI.11). Les principaux résultats sont regroupés sur le tableau suivant :

ESSAI	$\langle \lambda_{\theta_j}^i \rangle$	$\frac{1}{2} \langle \lambda_{\theta_j}^i \rangle^2$	$\lambda_{\theta_j}^{\text{rev.}} / \text{cycle}$	$\Delta k / \text{cycle}$	$\Delta k / \Delta \lambda_{\theta_j}^i$
n° 217	$0,96 \cdot 10^{-2}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$	$0,16 \cdot 10^{-4}$	$0,8 \cdot 10^{-3}$
n° 219	$0,55 \cdot 10^{-2}$ $0,98 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$0,23 \cdot 10^{-4}$	$1,2 \cdot 10^{-3}$

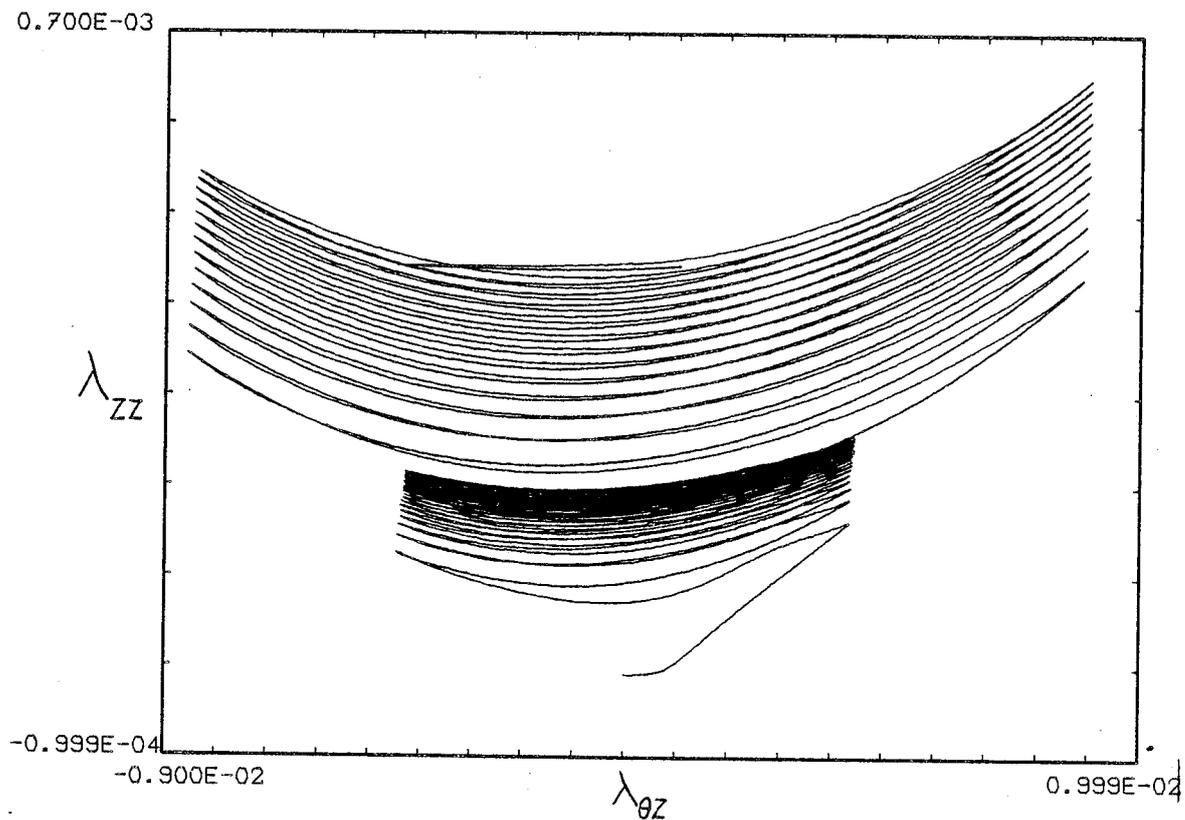


Fig. VI.9 Rochet de torsion - Acier inoxydable 316 L - essai n° 214.

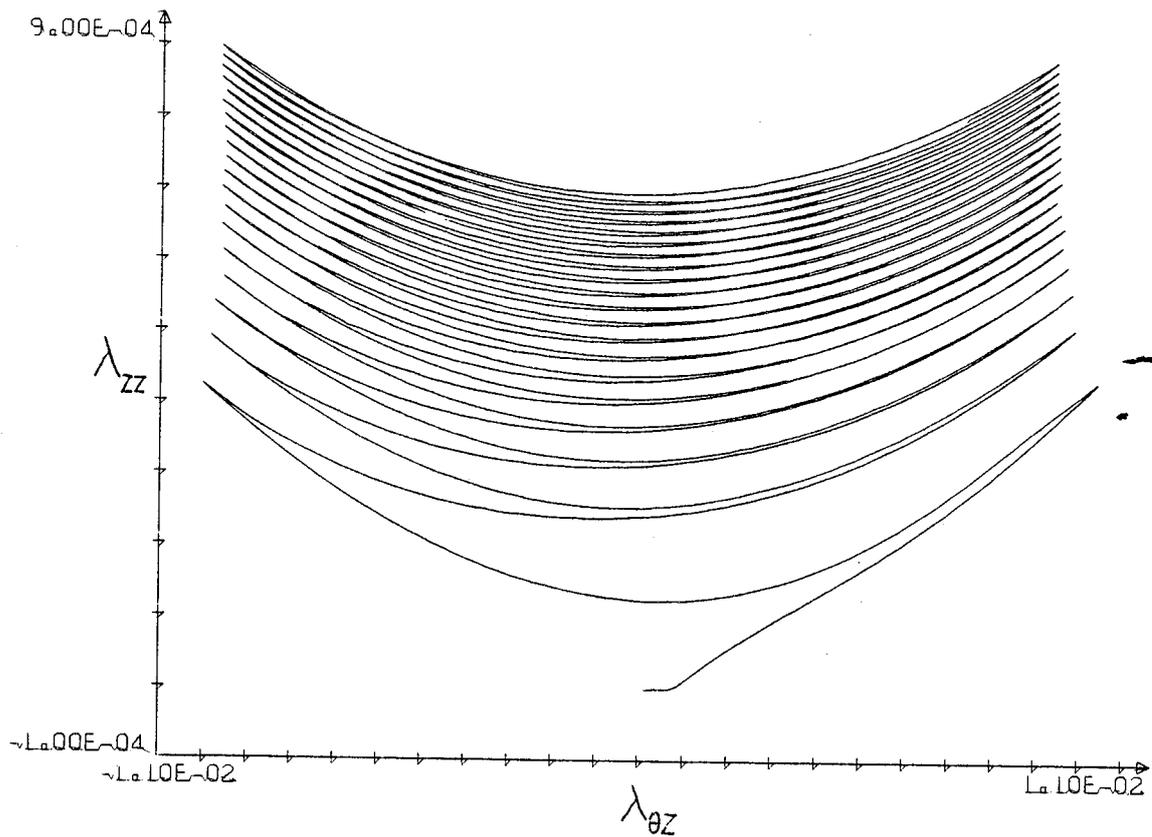


Fig. VI.10 Rochet de torsion - Acier inoxydable 316 L - essai n° 217.

La partie réversible de la déformation axiale correspond bien à la valeur de  $\frac{1}{2} \lambda_{03}^2$  ; le rochet lui-même est du même ordre de grandeur que celui trouvé avec l'essai n° 214.

L'ensemble de ces résultats, obtenus avec le même matériau et des éprouvettes taillées d'une façon identique, montre bien la difficulté de mesurer correctement des effets secondaires. La partie réversible de la déformation axiale donne des résultats corrects : on constate une erreur moyenne systématique par excès de l'ordre de 12 % par rapport à la valeur de  $\frac{1}{2} \lambda_{03}^2$  . Ce résultat constitue un indice de bon fonctionnement des jauges de déformation.

La partie irréversible de la déformation axiale, qui représente le rochet axial proprement dit, met en évidence deux familles de résultats. Les résultats de rochet des essais n° 206, n° 207 et n° 208 sont homogènes et indiquent en moyenne une proportionalité entre l'accroissement du rochet par cycle  $\Delta k$  avec l'amplitude de la déformation de cisaillement, le coefficient de proportionalité est identique à celui trouvé avec des essais préliminaires publiés dans [11] .

Les résultats des essais n° 214 et n° 217, n° 219 indiquent un coefficient de proportionalité de l'ordre de  $1.10^{-3}$ . Ce résultat pourrait s'expliquer, pour les essais n° 217 et n° 219, par les caractéristiques de la platine de torsion : l'extrémité libre de l'éprouvette est attachée à un croisillon libre en déplacement axial et muni de trois guides, en principe sans frottement. Mais en pratique, le frottement est d'environ 20 N et s'oppose toujours au déplacement axial de l'éprouvette ; cette valeur est indépendante de la valeur du couple appliqué [47]. La contrainte normale correspondante est égale à 0,12 Mpa. Cette valeur est à comparer à la contrainte moyenne de compression nécessaire pour empêcher le déplacement axial ; nous ne disposons pas de solution analytique approchée pour le cas du comportement réel, mais les résultats de [13] indiquent que la contrainte de 0,12 Mpa serait de l'ordre de 1/10 de la contrainte moyenne nécessaire pour s'opposer au rochet axial. Les résultats de l'essai n° 214 peuvent probablement s'expliquer par la même cause, car on a constaté après essai que la force axiale était en moyenne égale à - 50 N alors que pour les autres essais, la force moyenne est toujours dans l'intervalle  $\pm 10$  N avec des fluctuations du même ordre.

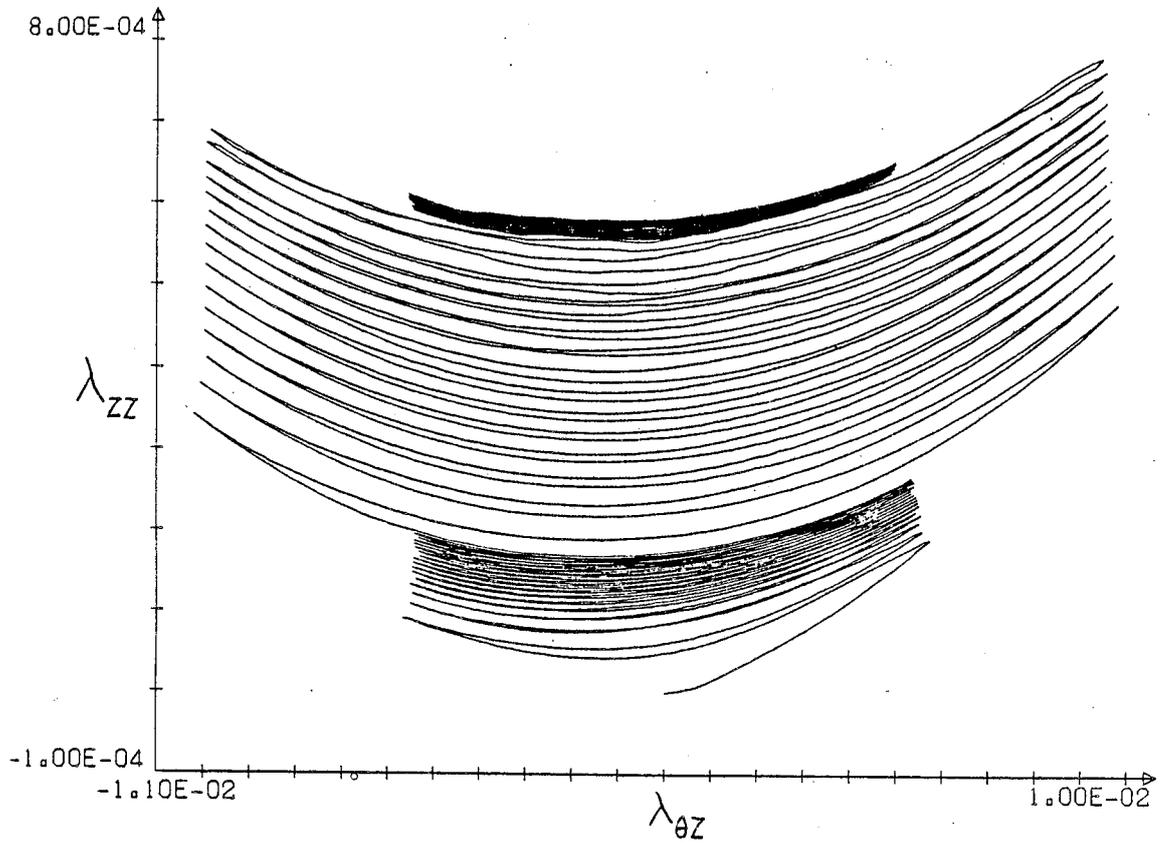


Fig. VI.11 Rochet de torsion - Acier inoxydable 316 L - essai n° 219.

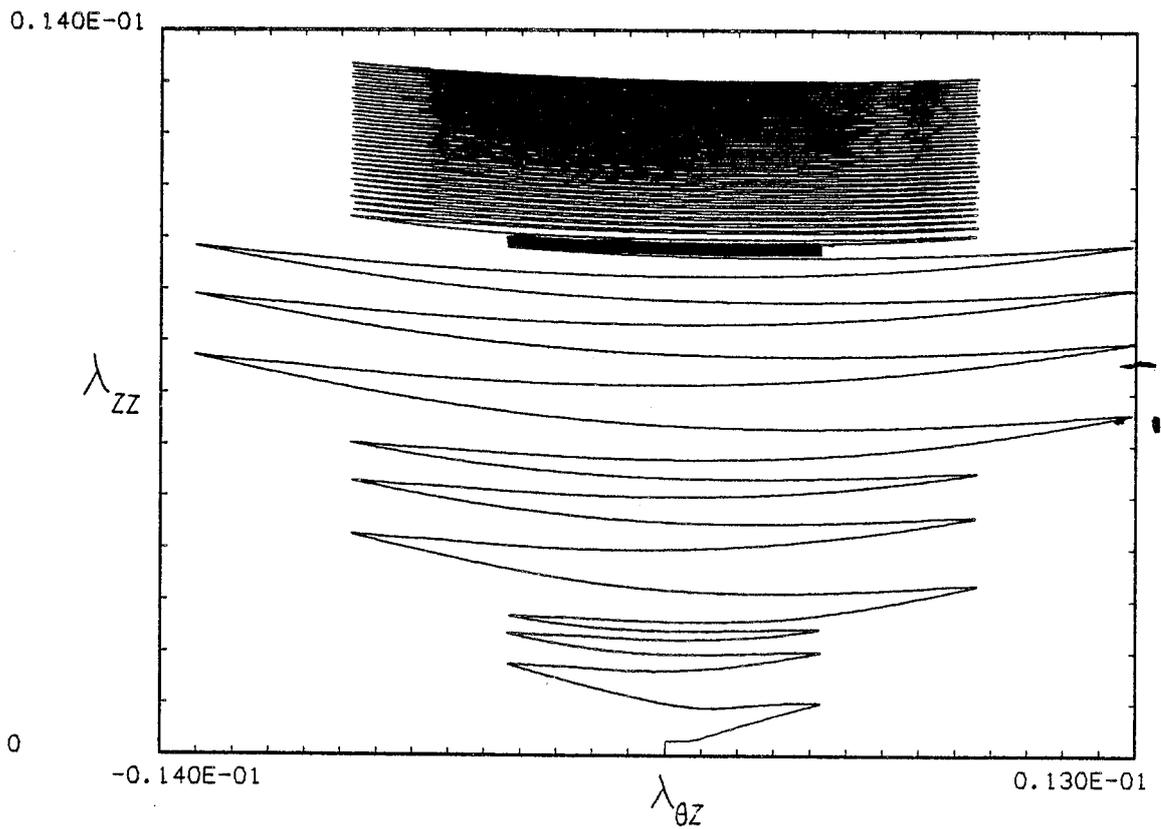


Fig. VI.12 Rochet de torsion - Acier inoxydable 316 L - essai n° 210.

L'ensemble de ces résultats met bien en évidence l'existence d'un rochet axial qui accompagne la torsion à force axiale nulle ; ceci a été confirmé récemment par [54][55]. La valeur de ce rochet axial n'est pas aisée à déterminer : pour l'acier inoxydable 316 L, et pour des cycles symétriques d'amplitudes croissantes, le rochet axial par cycle est de l'ordre de  $\frac{1}{300}$  de l'amplitude de la déformation de torsion.

L'analyse des résultats de rochet appelle plusieurs remarques :

a) pour la première amplitude de cycle, le rochet par cycle diminue nettement au cours des 5 premiers cycles, ce qui se constate bien par comparaison des essais n° 217 et n° 219 (figure VI.10 et VI.11). De plus, le rochet au cours du premier 1/4 de cycle est en général toujours très important par rapport au rochet des autres cycles.

b) Lorsque l'amplitude des cycles décroît, le rochet semble être nettement inférieur à ce qu'il serait pour la même amplitude, contrôlée dans un ordre croissant (figure VI.11).

Lorsque la force axiale n'est pas nulle, le rochet axial est nettement plus important. Les essais n° 210 et n° 203 ont été effectués avec une force axiale constante respective de 8,16 KN et de 17.5 KN correspondant, respectivement à une contrainte axiale moyenne de 50 Mpa et de 107 Mpa. L'évolution du rochet moyen par cycle est représenté sur la figure VI.14. A amplitude de déformation identique, le rochet axial, pour une contrainte axiale moyenne de 50 Mpa, est multiplié par un facteur 15 par rapport au rochet à force axiale nulle ; pour une contrainte moyenne de 107 Mpa, le facteur de multiplication serait de 70, mais ce résultat n'est peut être pas sûr, car il fait partie des essais préliminaires.

Pour l'Inconel 718, nous ne disposons que d'un essai de torsion, le rochet moyen par cycle  $\Delta R$ , pour une amplitude de déformation  $\Delta \lambda_{\theta z} = 2,4 \%$  est égal à environ  $0,5 \cdot 10^{-5}$  ; le rapport  $\Delta R / \Delta \lambda_{\theta z}$  est égal à  $2,1 \cdot 10^{-4}$  (fig. VII.15). On constate donc que le rochet de l'Inconel à force axiale nulle est d'un ordre de grandeur plus petit que celui de l'acier inoxydable 316 L.

La partie réversible du rochet est donné dans le tableau suivant :

$\lambda_{\theta z}$	$2 \lambda_{\theta z}^2$	$\lambda_{\theta z}^{rev.}$
0,83	$1,38 \cdot 10^{-4}$	$1,5 \cdot 10^{-4}$
1,2 %	$2,90 \cdot 10^{-4}$	$3,2 \cdot 10^{-4}$

Ces résultats sont tout à fait comparables à ceux obtenus avec l'acier inoxydable 316 L.

A titre de comparaison, on peut mentionner un résultat de rochet obtenu sur une éprouvette en acier de traitement au chrome molybdène (Norme Afnor 35 CD4u) (figure VI.16). Pour les grands cycles, par exemple, la partie réversible du rochet mesuré est  $2,1 \cdot 10^{-4}$ , alors que la valeur théorique  $2\lambda_{\theta z}^2$  est égale à  $1,9 \cdot 10^{-4}$ ; ce résultat est comparable aux précédents. La partie de rochet proprement indiquée une variation  $\Delta k$  égale à  $0,4 \cdot 10^{-4}$ /cycle et le rapport  $\Delta R / \Delta \lambda_{\theta z}$  est égal à  $2 \cdot 10^{-3}$ , valeur qui est du même ordre de grandeur que celle obtenue avec l'acier inoxydable 316 L.

#### VI.4. Modélisation du rochet axial de torsion et notion de contrainte de référence virtuelle

Rappelons que pour un tube cylindrique de section circulaire et de longueur infinie, on peut montrer par un raisonnement sur les symétries que le champs de déplacement proposé par Murnaghan [16] est le champs le plus général admissible qui conserve la forme cylindrique à section circulaire [17]. En coordonnées cylindriques, ce champs s'écrit :

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 + u(\rho_0, t) \\ \theta = \theta_0 + \zeta_0 \tau(t) \\ \zeta = \zeta_0 + \zeta_0 k \end{cases}$$

où  $\rho_0, \theta_0, \zeta_0$  et  $\rho, \theta, \zeta$  sont les coordonnées cylindriques du point matériel respectivement à l'instant initial et à l'instant actuel;  $\tau(t)$  est l'angle de torsion par unité de longueur,  $u$  le déplacement radial et  $k$  la déformation axiale.

Pour prendre en compte les rotations finies qui existent dans une cinématique de torsion ( $\tau(t) \neq 0$ ) on utilise la dérivée de Jaumann dans le premier membre de l'équation de comportement (cf. § II.1). On a

$$D_J \sigma = \dot{\sigma} - \mathcal{R} \sigma + \sigma \mathcal{R} \equiv \dot{\sigma} + J$$

La matrice des composantes du tenseur  $J$  représenté dans le repère orthonormé associé au point actuel est :

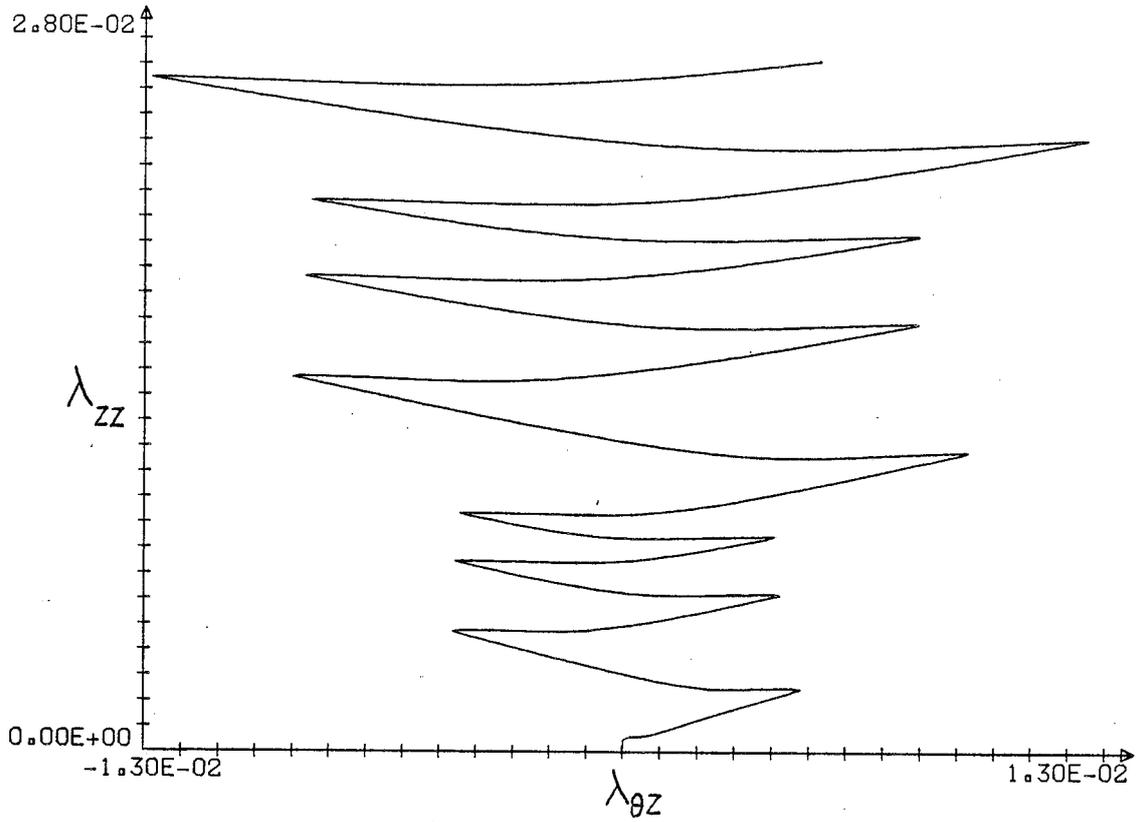


Fig. VI.13 Rochet de torsion - Acier inoxydable 316 L - essai n° 203.

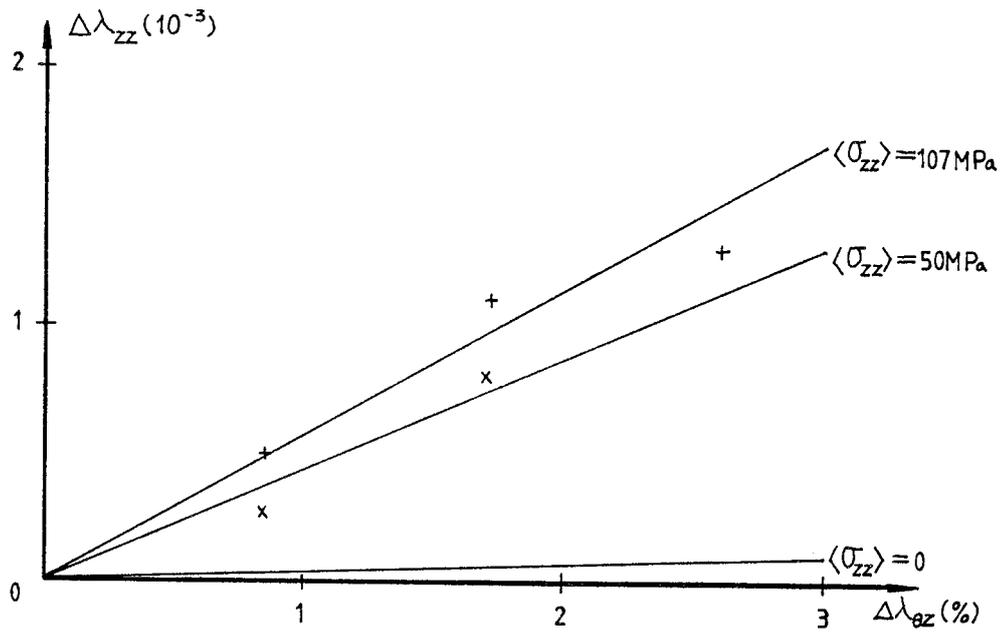


Fig. VI.14 Rochet de torsion en fonction de la force axiale constante.

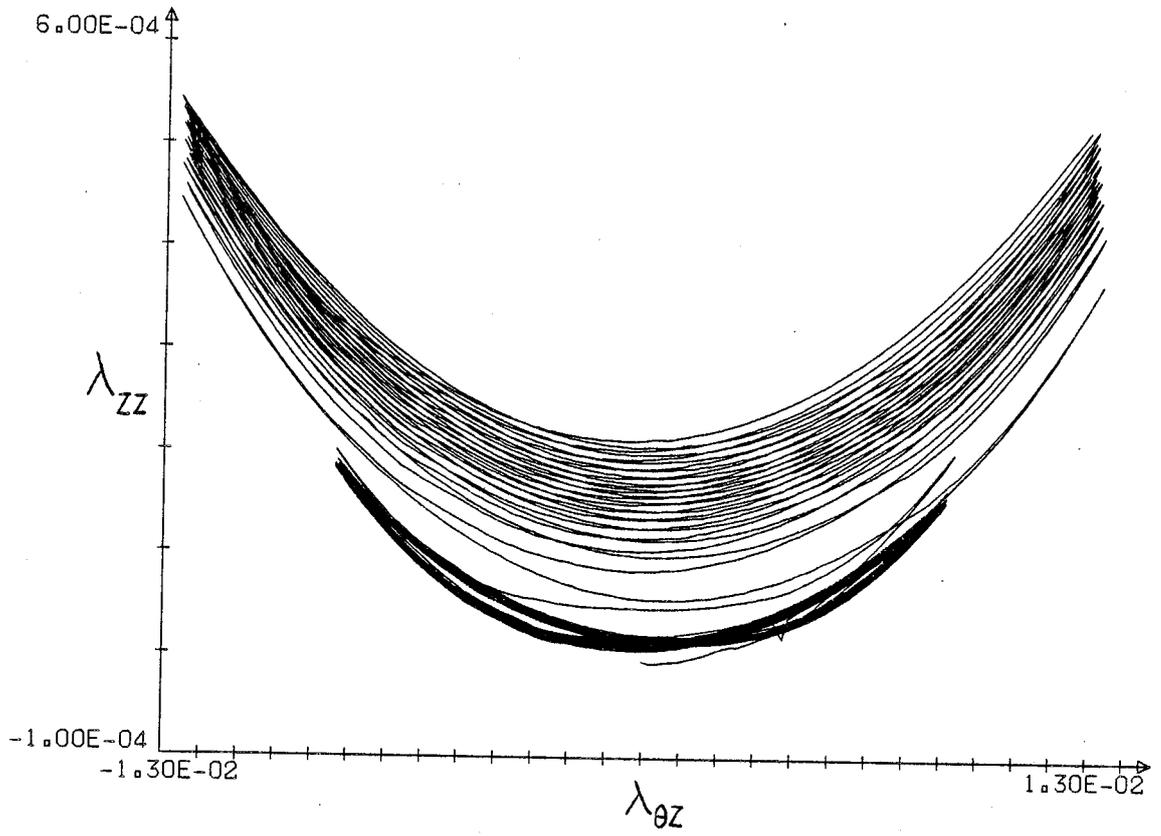


Fig. VI.15 Rochet de torsion - Inconel 718 - essai n° 303.

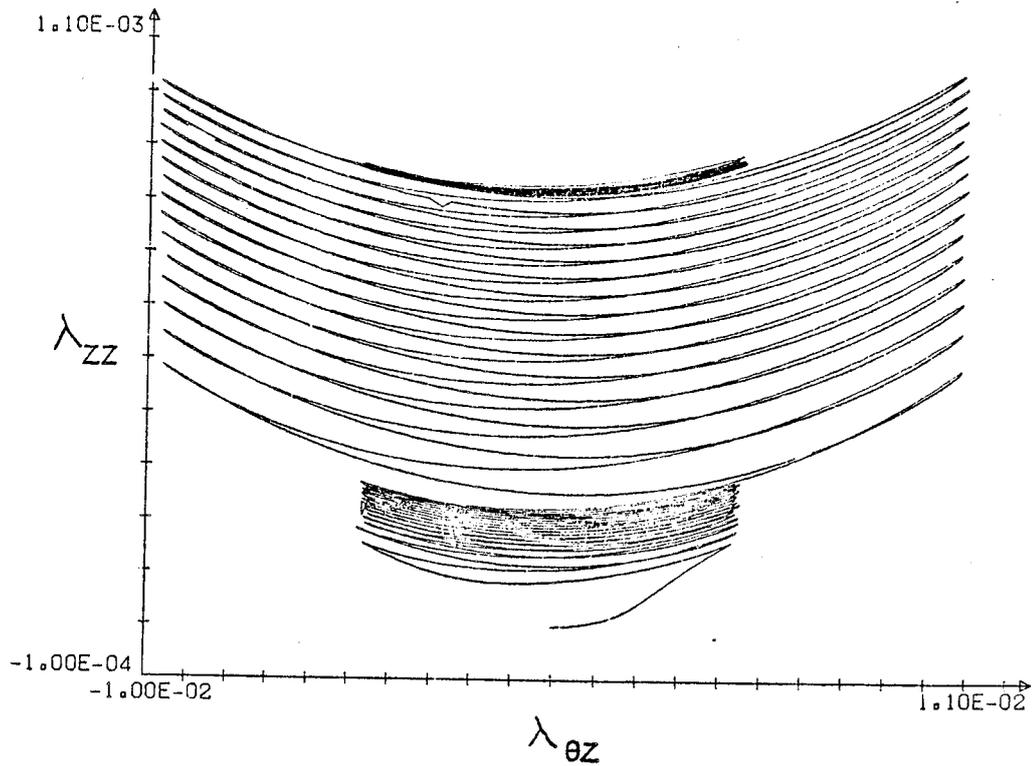


Fig. VI.16 Rochet de torsion - 35CD4u - essai n° 405.

$$J = d_{\theta z} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sigma_{\theta z} & \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\theta z} \\ 0 & \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{zz} & 2\sigma_{\theta z} \end{vmatrix}$$

La présence de ces termes explique que les grandeurs  $u$  et  $k$  ne sont pas nulles, même si la condition intégrale de force nulle sur une section normale à l'axe du tube est satisfaite. En conséquence, la torsion d'un tube à force axiale nulle s'accompagne d'une déformation axiale et d'un déplacement radial.

Ceci est bien mis en évidence pour l'équation de comportement quasi-linéaire à deux coefficients phénoménologiques :

$$D_J \sigma = \lambda E_1 \mathbb{1} + \mu \mathcal{D}$$

La solution analytique, qu'il est possible d'obtenir dans le cas de petite déformation, donne une variation de  $u$  et  $k$  en fonction du carré de l'angle de torsion  $\tau$  ; de plus dans ce cas, le signe de ces grandeurs est indépendant des coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  : la déformation axiale  $k$  est toujours un allongement et le déplacement radial est toujours un rétrécissement [18]. On a :

$$k = \frac{1}{8} (R_e^2 + R_i^2) \tau^2$$

où  $R_e$  et  $R_i$  sont respectivement les rayons initiaux intérieur et extérieur du tube.

Dans le cas de la torsion à extrémité bloquée, il se développe une force de compression au cours de la torsion. La solution analytique, semblable au cas précédant, donne :

$$F_z = -\frac{\pi}{8} E (R_e^4 - R_i^4) \tau^2$$

ou  $\langle \sigma_{zz} \rangle = -\frac{1}{8} E (R_e^2 + R_i^2) \tau^2$

Dans le cas de l'équation de comportement avec un seuil de plasticité :

$$D_J \sigma = \lambda E_1 \mathbb{1} + \mu \mathcal{D} + \alpha_4 \bar{M} \bar{\sigma}$$

on montre que l'évolution des grandeurs  $k$  ou  $F_j$  devient linéaire en fonction de  $\tau$ , dès qu'on s'éloigne du comportement linéaire tangent à l'origine [18]. Dans le cas d'un tube mince, on montre qu'en première approximation, une solution analytique pour  $k$  dans le cas où  $\alpha_4$  est une constante est de la forme :

$$k = \frac{1}{4} \cdot \frac{R_e^2 + R_i^2}{R_m^2} \cdot \frac{S_0^2}{\mu^2} \cdot \text{Lg} \left[ \text{ch} \left( \frac{\mu}{S_0} R_m \tau \right) \right]$$

où  $R_m$  est le rayon moyen et  $S_0$  la contrainte limite en cisaillement simple [48].

Enfin, dans le cas général, avec la prise en compte de sollicitation cyclique, on a :

$$D_j \Delta \sigma = \alpha_0 E_1 \mathbb{1} + \alpha_1 \mathcal{D} + \alpha_4 \Delta \bar{M} \cdot \Delta \bar{\sigma}$$

avec  $\Delta \sigma = \sigma - R \sigma$  où  $R \sigma$  est la contrainte de référence actuelle. On montre alors que la déformation axiale se cumule et donne lieu à l'effet de rochet [37].

Rappelons que les mesures obtenues par les jauges de déformation sont comparables aux composantes  $\gamma_{ij}$  du tenseur de déformation de Green-Lagrange rapporté à la configuration initiale. En première approximation, ces composantes sont identiques à celles  $\epsilon_{ij}$  du tenseur de déformation infinitésimale :

$$\epsilon_{pp} = \frac{\partial u}{\partial p_0}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{p_0}, \quad \epsilon_{zz} = k, \quad \epsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} p_0 \tau$$

à l'exception de la composante  $\gamma_{zz}$  pour laquelle on a :

$$\gamma_{zz} \simeq \epsilon_{zz} + 2 \epsilon_{\theta z}^2$$

Les résultats expérimentaux des essais de torsion confirment bien toutes ces propriétés :

- a) la partie réversible de la déformation axiale est égale au double du carré de la déformation de torsion, à une précision relative de l'ordre de 10 %.
- b) la partie irréversible de la déformation axiale est un allongement qui se cumule après chaque inversion.
- c) chaque branche de la partie irréversible de la déformation axiale a une évolution dont l'allure est  $\text{Lg}(\text{ch})$ .

Dans le cas de la torsion à force axiale nulle, nous avons montré à l'aide d'essais préliminaires, que le schéma de comportement rend assez bien compte du rochet axial [11] : le schéma surestime le rochet dans la proportion de 5 à 3. Nous reviendrons plus en détail sur cette comparaison dans le chapitre suivant.

Par contre, pour les essais de torsion à force axiale non nulle, le schéma sous-estime le rochet dans une très forte proportion. Les résultats de simulation des premiers cycles de l'essai n° 203 sont indiqués sur la figure VI.17, où on a tracé l'évolution de la vitesse de déformation axiale  $d_{33}$  et de la partie irréversible de la déformation axiale  $k$  en fonction du temps. Ces résultats sont à comparer avec les résultats expérimentaux de la figure VI.13. On constate que pour le premier quart de cycle, le schéma donne une déformation axiale légèrement inférieure à la valeur expérimentale ; par contre, pour les branches suivantes, la valeur théorique est inférieure à la réalité de plus d'un ordre de grandeur.

Ce résultat anormal est du à l'application stricte du critère d'inversion. Rappelons qu'il a été obtenu, pour le cas tridimensionnel, par extension du critère unidimensionnel du modèle heuristique ; le critère d'inversion du modèle heuristique n'est pas en cause, par contre il est très probable qu'il faille remettre en cause son extension tridimensionnelle telle qu'elle a été définie au chapitre I, comme cela est suggéré par [50][51].

Considérons la dissipation intrinsèque qui s'écrit :

$$\begin{aligned}\Phi &= \text{tr}[(\sigma - r\sigma)\mathcal{D}] \\ &= \Delta\sigma_{pp}d_{pp} + \Delta\sigma_{\theta\theta}d_{\theta\theta} + \Delta\sigma_{33}d_{33} + 2\Delta\sigma_{\theta 3}d_{\theta 3} \\ &= \Phi_{pp} + \Phi_{\theta\theta} + \Phi_{33} + \Phi_{\theta 3}\end{aligned}$$

Dans le cas d'un essai du même type que les essais n° 203 ou n° 210, le long de la branche, constitué par l'arc  $\dot{F}_{33} = \text{cte} \neq 0$  suivi de l'arc  $d_{\theta 3} = \text{cte} \neq 0$ , la contrainte de référence est nulle et

les termes  $\Phi_{pp}$ ,  $\Phi_{\theta\theta}$  et  $\Phi_{\beta\beta}$  sont de valeur finie, du même ordre que  $\langle \sigma_{\beta\beta} \rangle \cdot d_{\beta\beta}$ . Par contre, pour la branche suivante après la première inversion au temps  $t_i$ , en utilisant strictement le critère d'inversion, la contrainte d'inversion a la structure suivante :

$${}_R \sigma(t_i^+) = \begin{vmatrix} \sigma_{pp}(t_i) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\theta\theta}(t_i) & \sigma_{\theta\beta}(t_i) \\ 0 & \sigma_{\theta\beta}(t_i) & \sigma_{\beta\beta}(t_i) \end{vmatrix}$$

avec  $\sigma_{\beta\beta}(t_i) = \sigma_0$ , valeur contrôlée.

Il en découle que la dissipation des termes diagonaux s'annule et reste nulle après la première inversion, ce qui est absurde. Cette difficulté est cachée dans le cas où  $F_3$  (ou  $\sigma_0$ ) est nul.

En fait, il faut prendre en compte la différence d'évolution entre d'une part les termes  $\Phi_{pp}$ ,  $\Phi_{\theta\theta}$ ,  $\Phi_{\beta\beta}$  et d'autre part le terme  $\Phi_{\theta\beta}$ . Ceci est bien mis en évidence par l'évolution virtuelle (sans changement d'état de référence) autour de la première inversion : le terme  $\Phi_{\theta\beta}$  s'annule à l'inversion et devient négatif, alors que les termes  $\Phi_{pp}$ ,  $\Phi_{\theta\theta}$ ,  $\Phi_{\beta\beta}$  s'annulent mais restent positifs après inversion.

En conclusion, ainsi que cela avait été suggéré par [51] et comme les résultats expérimentaux que nous avons obtenus le confirment le critère d'inversion exprimant la non-décroissance de la dissipation intrinsèque doit être définie uniquement sur  $\Phi_{\theta\beta}$  pour des essais à force axiale constante et torsion cyclique : il y a inversion si l'accroissement virtuel (sans changement d'état de référence) de la fonction d'aide définie sur le terme  $\Phi_{\theta\beta}$  est négatif au temps  $t_i$  :

$$\delta W_{\theta\beta} = \Phi_{\theta\beta} \cdot \delta t < 0$$

Alors, après inversion, la contrainte de référence a la structure suivante :

$${}_R \sigma(t_i^+) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta\beta}(t_i) \\ 0 & \sigma_{\theta\beta}(t_i) & 0 \end{vmatrix}$$

et la dissipation intrinsèque s'écrit :

$$\Phi = \sigma_{pp} d_{pp} + \sigma_{\theta\theta} d_{\theta\theta} + \sigma_{zz} d_{zz} + 2[\sigma_{\theta z} - \sigma_{\theta z}(t_i)] d_{\theta z}$$

de sorte que les termes diagonaux  $\Phi_{pp}$ ,  $\Phi_{\theta\theta}$  et  $\Phi_{zz}$  continuent à participer à la dissipation du matériau, comme on s'y attend du point de vue physique.

La conséquence fondamentale est que la contrainte de référence est virtuelle, dans le sens où il s'agit d'un état de contrainte jamais traversé par le matériau. Dans le cas de la torsion à force axiale constante, comme par exemple l'essai n° 203, on a :

$${}^R\sigma_{ij} = 0 \quad \forall i \text{ et } j \quad \text{sauf} \quad {}^R\sigma_{\theta z}(t_i^+) = \sigma_{\theta z}(t_i)$$

Avec la prise en compte d'un état de contrainte de référence virtuelle, les résultats théoriques sont du même ordre de grandeur que la réalité (fig. VII.18).

Enfin, dans le cas de la torsion cyclique avec la force axiale constante, la puissance réversible après inversion s'écrit :

$$\Pi = 2 \sigma_{\theta z}(t_i) d_{\theta z}$$

et met en évidence le fait que le flux de négentropie reçu par le matériau ne concerne que la composante "contrôlée" par la sollicitation, ceci suggère la possibilité d'une généralisation à d'autre type de sollicitations.

Compte tenu du fait que la présence des composantes diagonales non nulles de  $J$  explique l'existence du rochet axial de torsion lorsque la force axiale est nulle, des simulations numériques ont été faites pour analyser l'influence de  $J$  dans le cas de la torsion à différentes forces axiales constantes. Considérons par exemple les premiers cycles de l'essai de torsion n° 203, avec la force axiale  $F_z = 0,817$  KN qui donne une contrainte moyenne  $\langle \sigma_{zz} \rangle \approx 50$  Mpa. Cet essai a été simulé et le rochet axial par cycle a été déterminé de deux façons, avec ou sans les termes de Jaumann. Pour mettre en évidence la variation de l'influence des termes de Jaumann avec la force axiale, on a aussi effectué des simulations théoriques pour des forces axiales telles que  $\langle \sigma_{zz} \rangle = 5, 2.5, 1.25,$

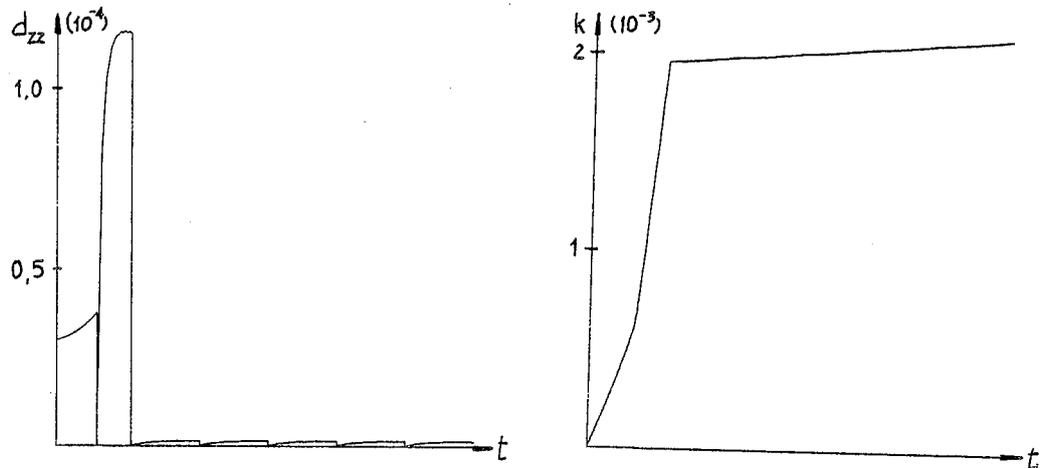


Fig. VI.17 Rochet calculé avec l'état de référence réellement traversé.

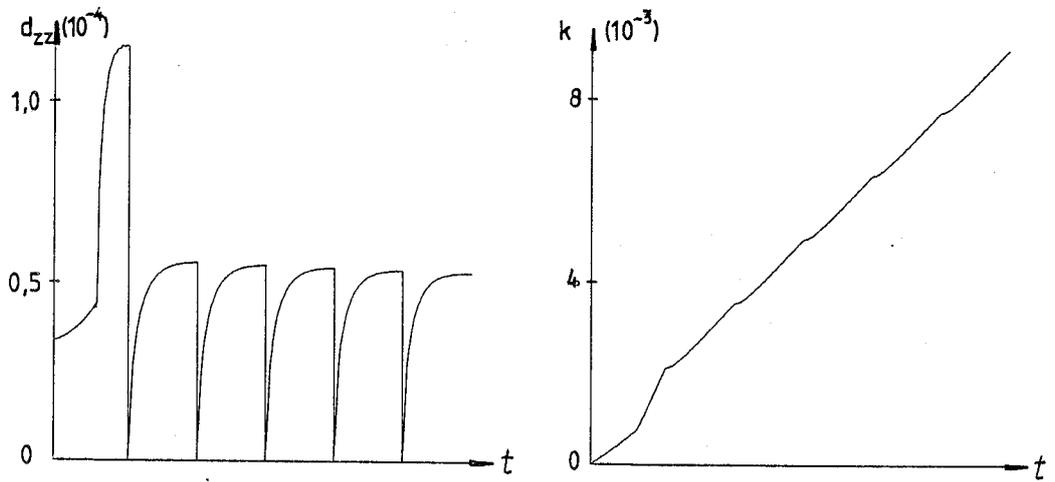


Fig. VI.18 Rochet calculé avec l'état de référence virtuel.

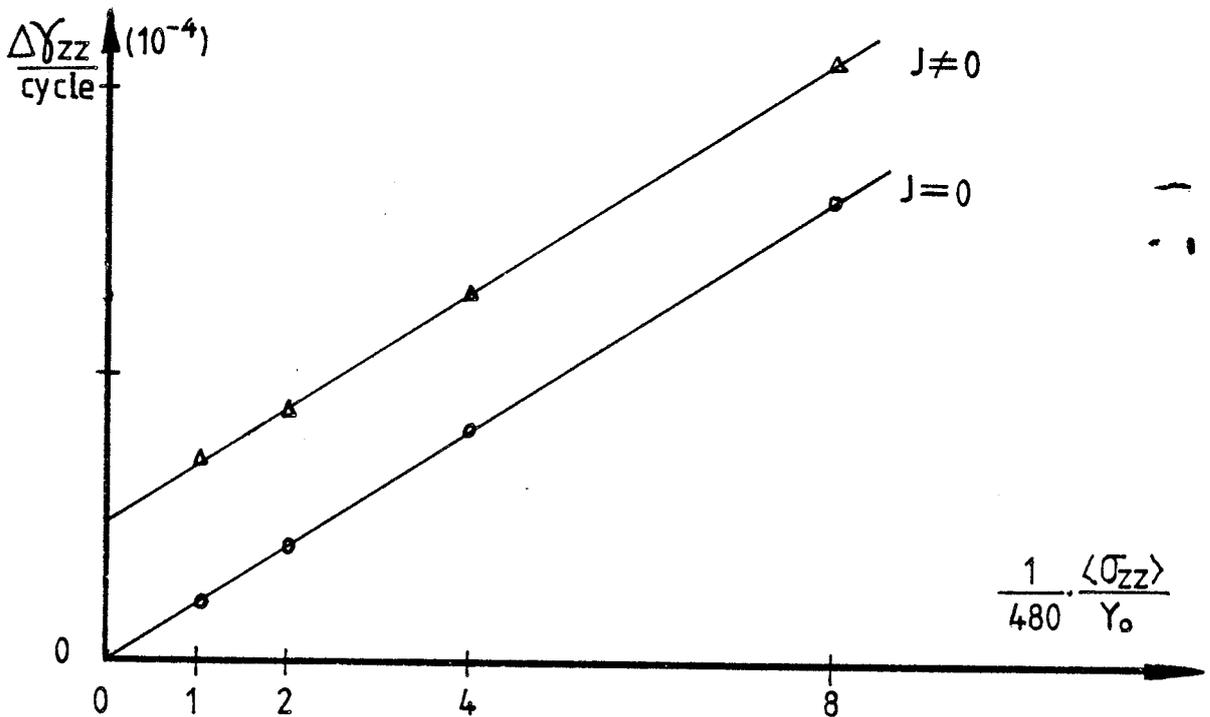


Fig. VI.19 L'influence de la dérivée de Jaumann pour le calcul du rochet.

0.625 Mpa respectivement. Dans chaque cas, on calcule  $\Delta \gamma_{33}$  par cycle avec ou sans les termes de Jaumann. Les principaux résultats sont regroupés dans le tableau suivant et à la figure VI.19 :

$F_3$ (KN)	$\sigma_{33}$ (Mpa)	$\frac{\langle \sigma_{33} \rangle}{\%}$	$\Delta \gamma_{33}$ ( $10^{-4}/\text{cycle}$ )		R
			J = 0	J $\neq$ 0	
0.0102	0.625	1/480	0.202	0.704	0.29
0.0204	1.25	1/240	0.405	0.900	0.45
0.0408	2.50	1/120	0.800	1.30	0.62
0.0816	5.00	1/60	1.63	2.11	0.77
0.816	50.0	1/6	16.2	16.6	0.98

On constate que pour les petites valeurs de  $\langle \sigma_{33} \rangle$  le rochet varie linéairement avec  $\langle \sigma_{33} \rangle$  et que le décalage entre les deux cas (J = 0 et J  $\neq$  0) est constant et égal à  $1.25 \cdot 10^{-4}$  ; cette valeur est égale au rochet par cycle pour la force axiale nulle. Le rapport R a une variation du type hyperbolique avec  $\langle \sigma_{33} \rangle$  ; pour les faibles valeurs de  $\langle \sigma_{33} \rangle$  on a :

$$R = \frac{a \langle \sigma_{33} \rangle}{a \langle \sigma_{33} \rangle + b}$$

avec, dans notre cas,  $a = 3.36 \cdot 10^{-5} \text{ Mpa}^{-1}$  et  $b = 1,25 \cdot 10^{-4}$ . Pour une contrainte axiale moyenne égale au 1/6 du seuil limite d'hystérésis pure, le fait de négliger les termes de Jaumann n'introduit qu'une erreur de 2 % sur la détermination du rochet axial. On peut donc envisager, pour des forces axiales supérieures à cette valeur, de modéliser la torsion du tube en cinématique homogène dans le cas du tube mince.

### VI.5. Remarque relative à l'essai de traction-compression

Comme l'indiquent les résultats montrés au chapitre III, un phénomène de rochet est mesuré au cours de l'essai de traction-compression cyclique : le graphe  $\lambda_{\theta\theta}$ ,  $\lambda_{\delta\delta}$  décrit une boucle d'hystérésis ouverte qui se déplace vers les  $\lambda_{\theta\theta}$  négatifs. A titre d'exemple, ceci est illustré pour l'acier inoxydable 316 L par l'essai n° 213 (figure III.1) et pour l'Inconel 718 par l'essai n° 302 (figure III.6). Tous les autres essais de traction-compression ont systématiquement indiqué un rochet de la composante  $\lambda_{\theta\theta}$  dans le sens de la diminution.

Le rochet par cycle indique en première approximation une évolution en fonction du carré de l'amplitude de la déformation axiale  $\Delta\lambda_{\delta\delta}$ , on a :

$$\begin{aligned} \text{pour l'acier inoxydable 316 L : } & \left\langle \frac{\Delta\lambda_{\theta\theta}}{\Delta\lambda_{\delta\delta}^2} \right\rangle \sim \frac{2}{10} \\ \text{pour l'Inconel 718 : } & \left\langle \frac{\Delta\lambda_{\theta\theta}}{\Delta\lambda_{\delta\delta}^2} \right\rangle \sim \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Pour une amplitude de déformation axiale de  $\pm 0.5\%$ , le rochet par cycle est égal à  $2 \cdot 10^{-5}$  et  $1 \cdot 10^{-5}$  pour l'acier inoxydable 316 L et l'Inconel 718 respectivement.

Pour certains essais, on constate une dissymétrie de ce rochet (ex fig. III.6) ; dans ce cas c'est toujours l'extrémité du cycle côté traction qui se déplace plus rapidement que l'autre. Ceci pourrait s'expliquer par une légère dissymétrie du chargement de l'éprouvette caractéristique de la machine d'essai.

Pour vérifier <sup>que</sup> ce rochet <sup>peut</sup> s'expliquer par une non homogénéité de déformation dans la partie cylindrique, nous avons effectué un essai de contrôle de l'essai n° 213 (cf. fig VI.20) avec une éprouvette dont la partie cylindrique a une longueur de 60 mm, alors que pour toutes les autres éprouvettes, cette longueur est de 30 mm. On constate que le rochet est légèrement inférieur : pour les petits cycles le rochet par cycle est inférieur de 10 %, alors que pour les grands cycles, il est inférieur de 20 %.

Cet essai ne permet donc pas de trancher et de savoir si le rochet est du à une imperfection de l'homogénéité de l'essai de traction-compression ou si ce rochet est un phénomène de couplage entre le comportement et la géométrie homogène de traction-compression.

Le modèle de comportement n'explique pas ce phénomène, qui reste donc un problème ouvert : des essais plus systématiques avec différentes longueurs de la partie cylindrique et des moyens de mesure complémentaires à celles fournies par les jauges sont nécessaires pour obtenir des informations supplémentaires.

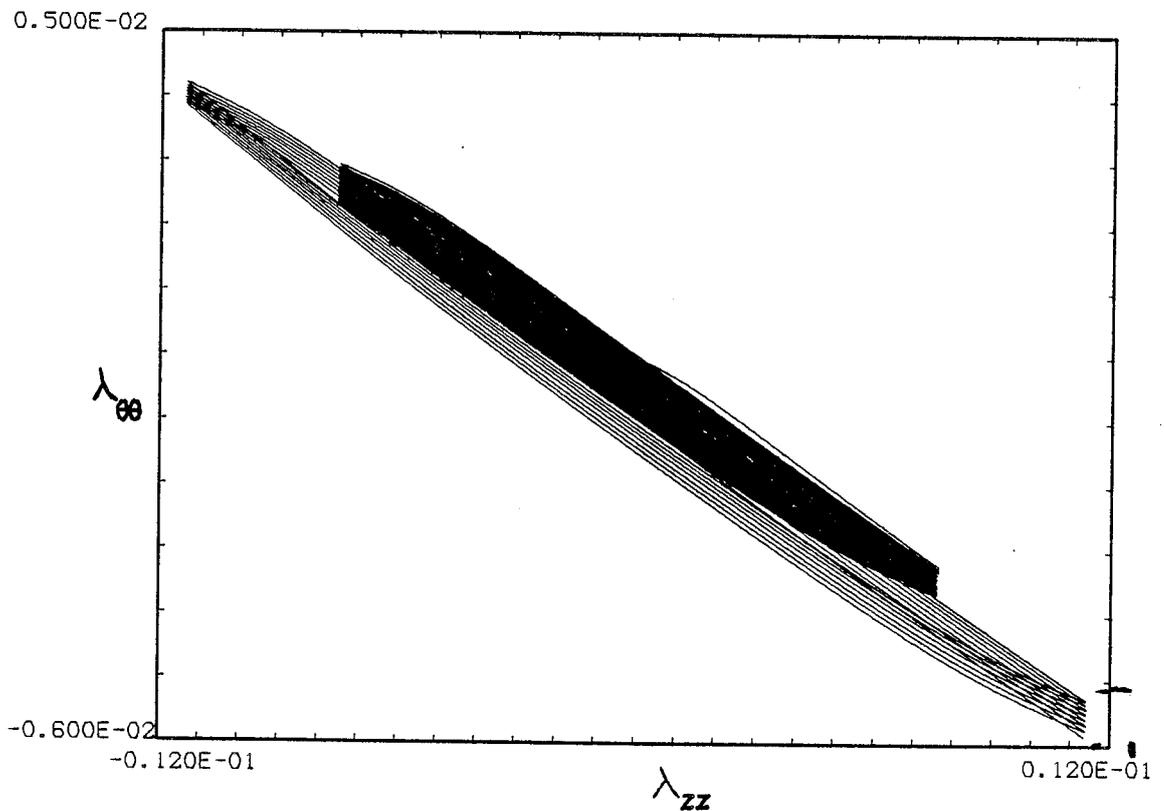


Fig. VI.20 Essai de traction-compression - Evolution de la déformation tangentielle - Eprouvette de longueur utile 60 mm - Acier inoxydable 316 L (n° 221).



CHAPITRE VII

COMPARAISON GLOBALE DES RESULTATS  
THEORIQUES ET EXPERIMENTAUX



La bonne qualité d'une comparaison entre des résultats expérimentaux et une simulation théorique peut se constater à différents niveaux, du moins dans le cas du schéma que nous utilisons et pour lequel les coefficients ont un sens physique simple. La comparaison du premier niveau concerne les coefficients pour lesquels une détermination directe est possible : il s'agit de vérifier que les valeurs identifiées sont indépendantes des chemins de sollicitations. Le deuxième niveau concerne la comparaison de graphes, comme  $\sigma_{33} - \gamma_{33}$  ou  $\gamma_{00} - \gamma_{33}$ , sur un chemin d'identification ; à ce niveau, on constate essentiellement la souplesse du modèle à s'adapter à la réalité. Enfin, au troisième niveau, il s'agit, après identification complète de tous les coefficients, de vérifier si les prévisions du modèle sur un chemin de sollicitation de contrôle, le plus différent des chemins d'identification, correspond bien aux résultats expérimentaux.

#### VII.1. Le cas de l'acier inoxydable 316 L

Rappelons d'une part que le comportement élastique tangent à l'origine a été analysé au chapitre III. On a constaté que tous les essais, essais de traction-compression, essais de torsion et essais combinés, permettent de définir un couple unique de coefficients qui caractérise un comportement tangent, linéaire dans la gamme de contrainte du matériau.

D'autre part, les essais de traction-compression et de torsion alternée ont montré qu'un seuil à section circulaire de Mises permet de bien rendre compte du comportement asymptotique.

La nouvelle proposition pour décrire le comportement d'écrouissage en déformation satisfait aux exigences du deuxième niveau de comparaison. Les coefficients ont été identifiés avec les essais de traction-compression : essai 215 à un palier de déformation  $\pm 1,5 \%$  et essai 213 à deux paliers croissants  $\pm 0,75 \%$  et  $\pm 1,5 \%$ . On constate :

- a) les graphes  $\sigma_{33} - \gamma_{33}$  donnés par le schéma (fig. VII.1

et VII.4) sont une bonne simulation des résultats expérimentaux  $\sigma_{33} - \lambda_{33}$  (figure IV.8 et III.1 respectivement).

b) en particulier, les graphes  $\sigma_{33}^i - N$  mettent bien en évidence la bonne simulation de l'écroutissage, tant pour la pente initiale que pour le niveau final atteint (figures VII.2 et VII.5 à comparer respectivement aux figures IV.9 et IV.3).

c) Par contre, comme déjà signalé au chapitre IV, le graphe  $\gamma_{\theta\theta} - \gamma_{33}$  (figure VII.3b) ne correspond au graphe  $\lambda_{\theta\theta} - \lambda_{33}$  que pour le premier cycle : en effet, le schéma ne donne pas le rochet de la composante  $\theta\theta$  qui a été mesurée. Des essais plus systématiques sont nécessaires pour confirmer si ce rochet est dû à la longueur finie de l'éprouvette ou s'il s'agit d'une propriété intrinsèque de l'essai de traction.

Pour comparer d'une façon plus précise les résultats de la simulation avec ceux de l'expérience, on a déterminé pour l'essai 213 la variation du module  $M_E$  en fonction de  $\gamma_{33}$  (figure VII.6a, à comparer avec la figure III.2) : on constate que le module  $M_E$  varie beaucoup plus rapidement près de l'origine des branches que ne l'indique la réalité. Pour obtenir, dans ces axes de représentation, un résultat plus proche de la réalité près de l'origine, il faudrait augmenter la valeur de  $C$  (figure VII.6 b) mais dans ce cas, le graphe  $\sigma_{33} - \gamma_{33}$  serait mal représenté dans la zone intermédiaire. Ce résultat met en évidence une certaine rigidité du modèle : on ne dispose que d'un seul coefficient  $C$  pour ajuster la forme d'une courbe entre la tangente à l'origine et la valeur asymptotique.

Après l'identification de tous les coefficients du schéma avec les chemins de traction-compression, des prévisions de chemin de torsion alternée ont été effectuées.

L'évolution de l'écroutissage de l'essai n°214, à deux paliers de déformation, a été simulé par le programme UND; on constate que le schéma reproduit bien l'évolution de l'écroutissage à un décalage systématique près (fig. VII.7 et 8). Ce décalage s'explique essentiellement par la dispersion constatée sur la valeur mesurée du seuil  $\hat{\Pi}_{\sigma_a}$  du comportement squelette (fig. V.2) : le décalage est légèrement supérieur à la différence entre la valeur moyenne de  $\hat{\Pi}_{\sigma_a}$  et celle mesurée avec l'essai n°214.

La simulation de l'essai n°208 a d'abord été effectuée par le programme UND et indique le même niveau d'érouissage que l'expérience ( fig. VII-9 ); ce resultat confirme donc que le schéma a tendance à sous estimer l'érouissage le long de chemins de torsion alternée après identification sur des chemins de traction-compression. Pour décrire le rochet, l'essai n°208 a aussi été simulé par le programme TUBE. En comparant la contrainte moyenne en fin de cycle, on vérifie d'abord que les effets principaux donnés par le programme simplifié UND correspondent bien au résultat du programme TUBE (fig.VII.10). La simulation du rochet (fig.VII.11 à comparer à fig.VI-7) confirme la surestimation du schéma par rapport à la réalité déjà constatée au cours des essais préliminaires [11]; pour l'essai n°208 le rochet est surestimé dans un rapport de 5/2 environ.

L'essai n° 210 a été simulé par le programme TUBE. La variation du couple est bien représentée par le modèle (figure VII.12 a et b). Par contre, le rochet axial est surestimé dans une plus grande proportion que pour l'essai n° 208 (figures VII.13 a et b).

Comme pour les essais de traction-compression, on note la position particulière de la courbe de lère charge des essais de torsion. La variation de la courbure dans la zone intermédiaire est plus rapide pour la courbe de lère charge que pour les autres courbes ; cette différence n'est pas reproduite par la simulation théorique. Une analyse des phénomènes mis en jeu à l'échelle de la microstructure sera nécessaire pour valider une description de ce phénomène macroscopique.

## VII.2. Le cas de l'Inconel 718

L'analyse du comportement tangent à l'origine a mis en évidence une non linéarité. Le petit nombre d'essais obtenus avec ce matériau a permis d'identifier les coefficients du comportement tangent, mais aucun contrôle de validité n'a pu être établi.

La simulation de l'essai n° 302 de traction-compression est bonne : la forme du graphe  $\bar{\sigma}_{33} - \lambda_{33}$  est bien reproduite (figure s VII.14 a et b), ainsi que l'évolution de l'érouissage (figures VII.15 a

et b). La variation du module tangent  $M_E$  donne bien la séparation des modules le long des branches en traction et en compression (figures VII.16 a et b) ; la valeur initiale de  $M_E$  pour la courbe de première charge est légèrement sous-estimée. Comme pour l'acier inoxydable 316 L, on constate l'existence d'un rochet sur la composante tangentielle  $\theta\theta$  ; celui-ci n'est pas simulé par le schéma (figures VII.17 a et b).

Comme pour l'acier inoxydable 316 L, la prévision de la torsion a été effectuée avec le programme UND et le programme TUBE. La forme des cycles  $\sigma_{33}-\lambda_{33}$  est bien reproduite par le programme UND (fig.VII-18) ; le pic de l'évolution de l'érouissage est bien restituée, mais la valeur finale est un peu surestimée (fig.VII-19). Le programme TUBE indique des effets principaux identiques à celui du programme UND (fig.VII-10). Nous ne disposons que d'une mesure du rochet pour l'Inconel 718, qui indique des valeurs plus faibles d'un ordre de grandeur au moins par rapport à l'acier inoxydable 316 L. Le modèle théorique par contre indique un rochet du même ordre de grandeur, de sorte que la comparaison apparait très mauvaise. Avant d'analyser plus en détail cette comparaison il faudrait disposer d'un plus grand nombre de résultats expérimentaux.

-----

En conclusion, la bonne prévision obtenue pour les essais de torsion justifie a posteriori le choix des variables d'énergie dissipée pour caractériser l'évolution du matériau : l'énergie totale cumulée  $\psi_c$  utilisé comme temps interne pour l'évolution de l'érouissage et l'énergie par cycle  $\Delta\psi_c$  pour caractériser l'amplitude du cycle. Le choix de la variable corrigée plutôt que celle de la variable elle-même  $\psi$  ou  $\Delta\psi$  a été fait par raison de commodité (l'érouissage le long du 1er quart de cycle est le même que celui du demi-cycle) mais ne peut pas être justifié strictement.

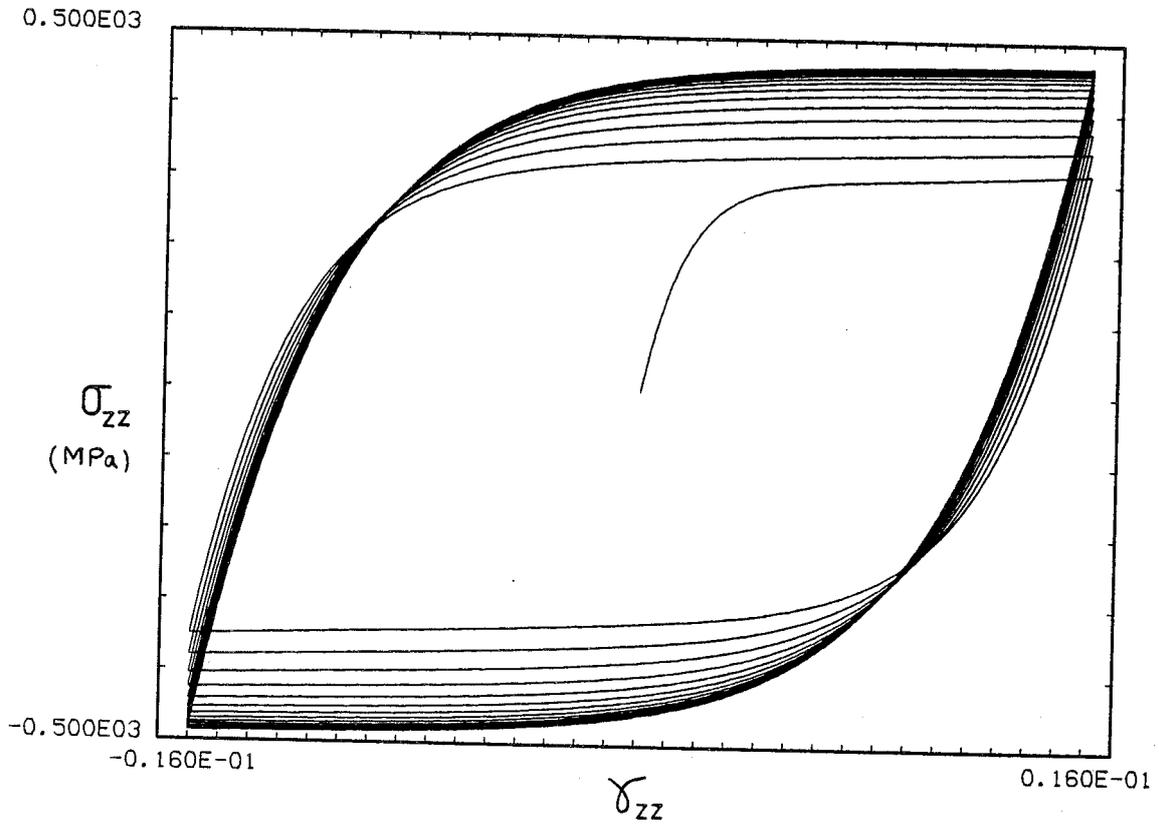


Fig. VII.1 Simulation de l'essai n° 215 - Acier inoxydable 316 L.

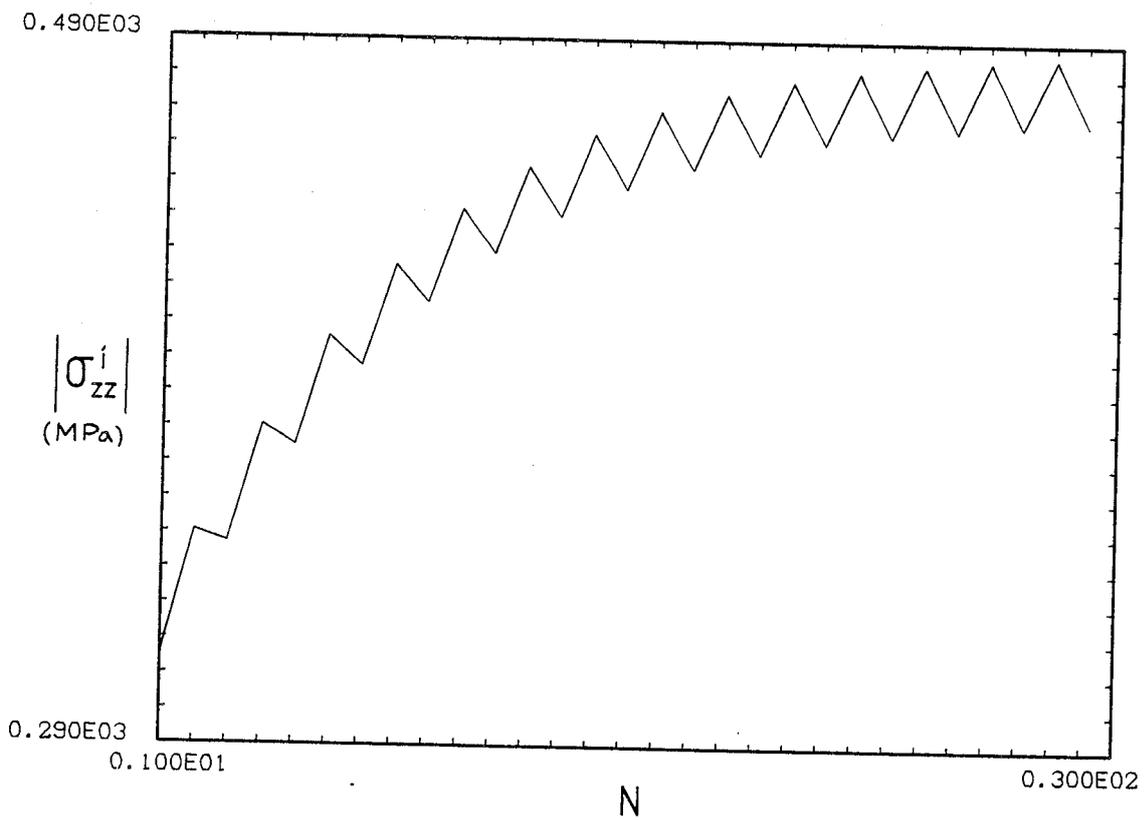


Fig. VII.2 Simulation de l'essai n° 215 - Courbe de consolidation - Acier inoxydable 316 L.

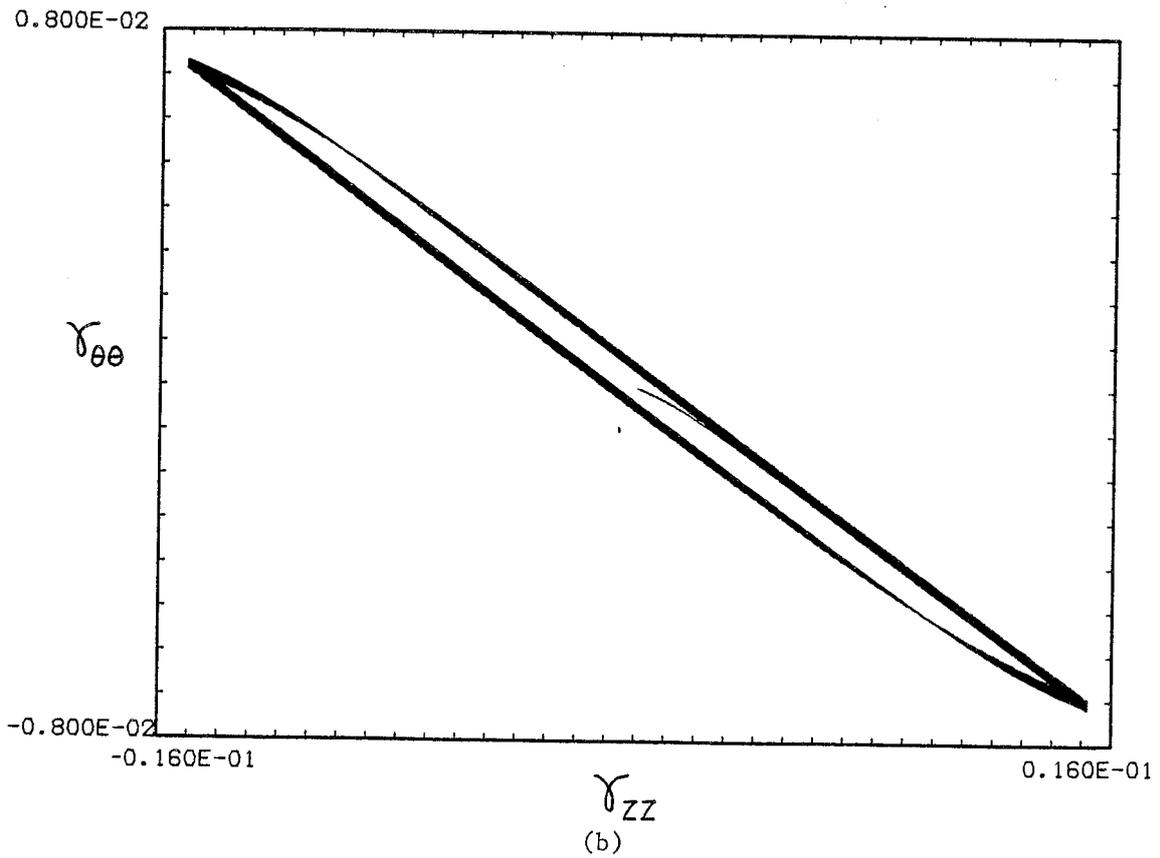
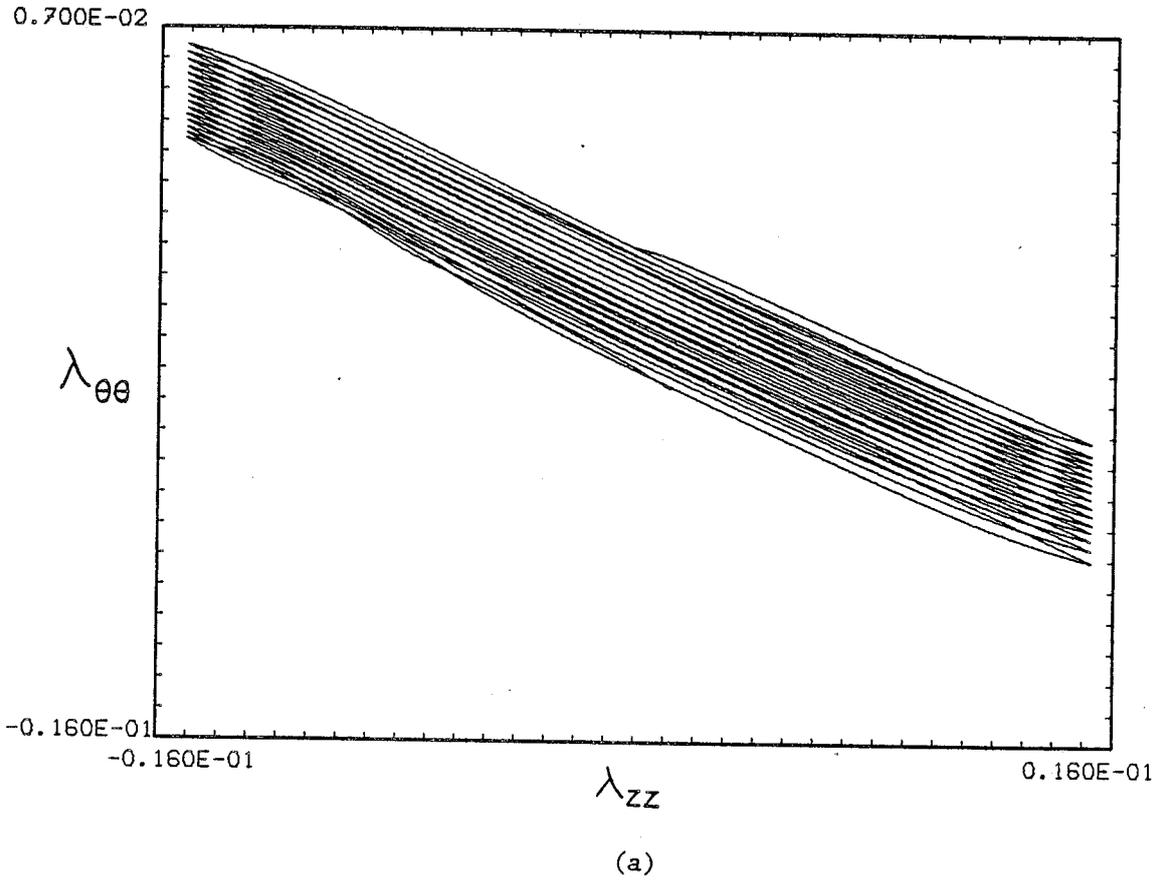


Fig. VII.3 Essai de traction-compression - Evolution de la déformation tangentielle - Acier inoxydable 316 L (n° 215) a) expérience, b) simulation.

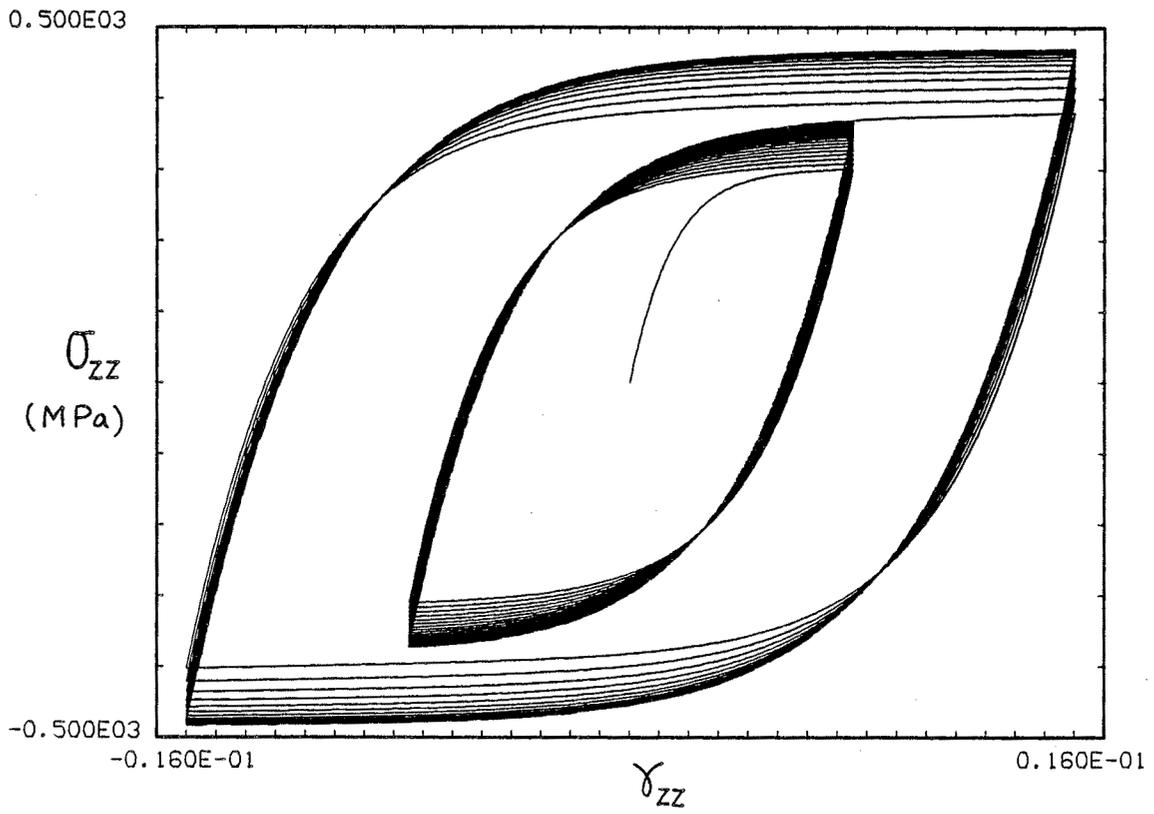


Fig. VII.4 Simulation de l'essai n° 213 - Acier inoxydable 316 L.

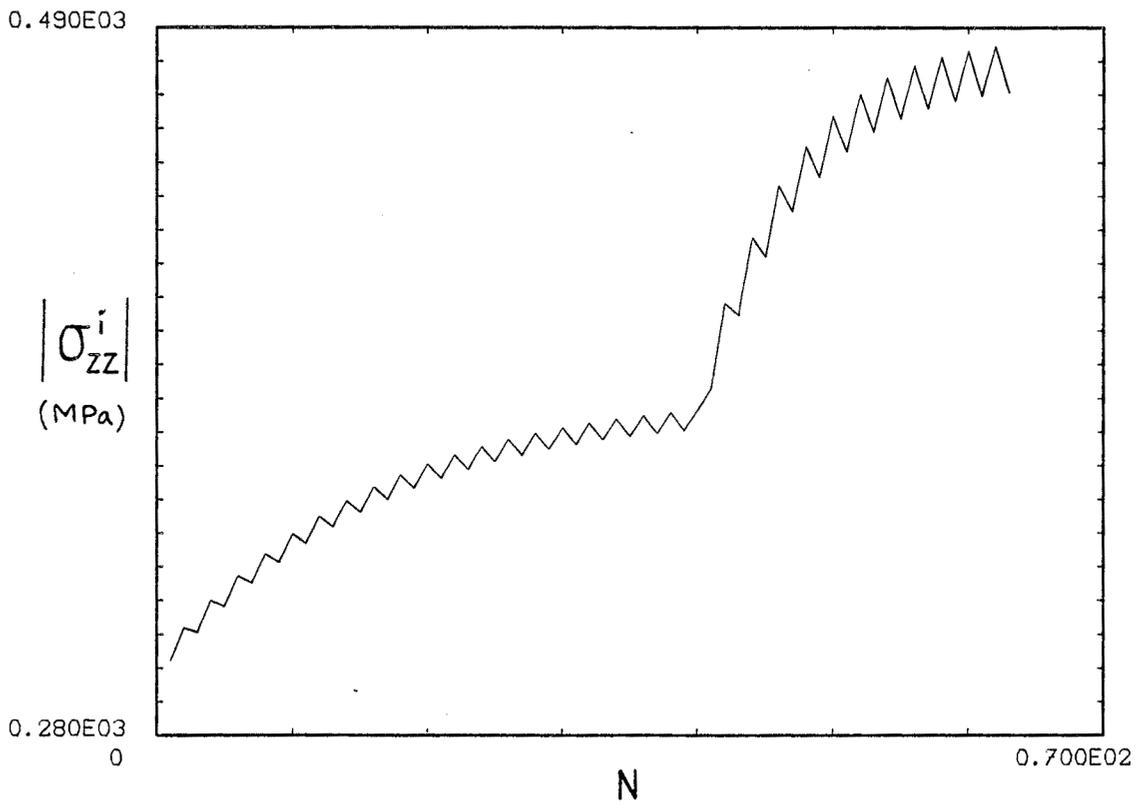


Fig. VII.5 Simulation de l'essai n° 213 - Courbe de consolidation - Acier inoxydable 316 L.

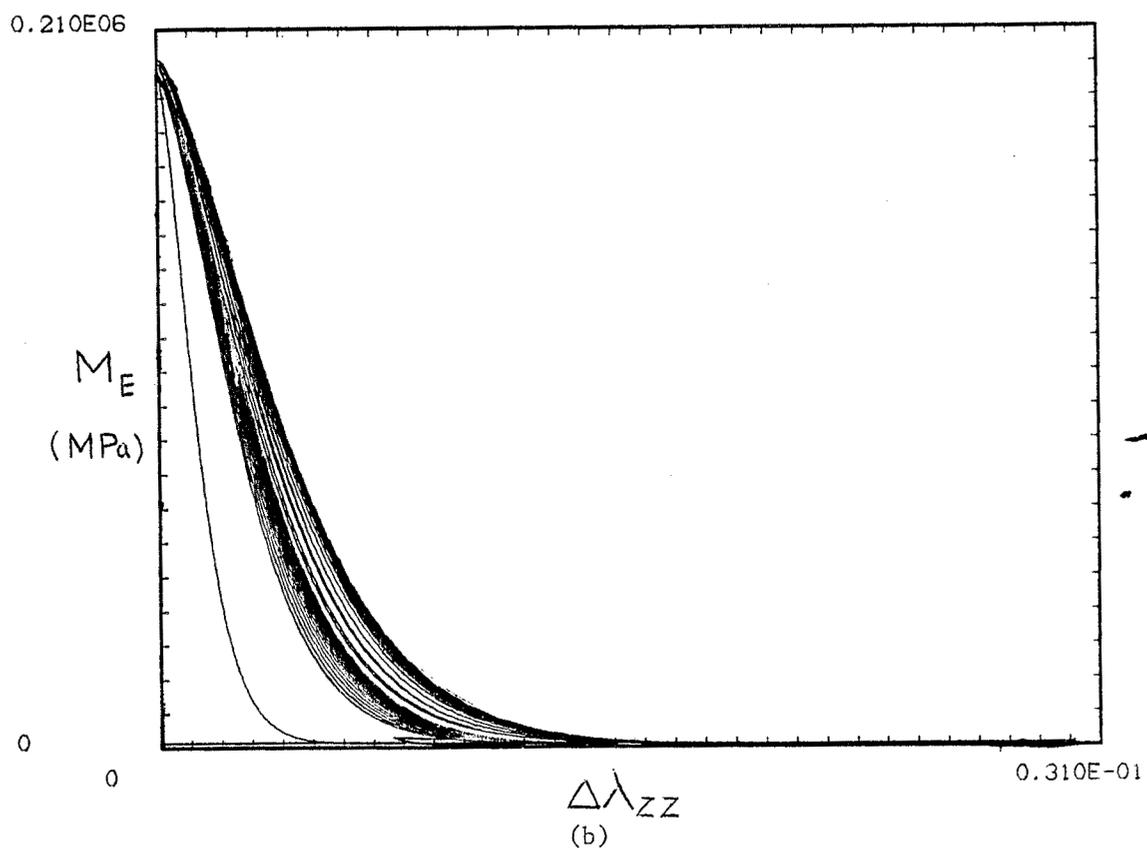
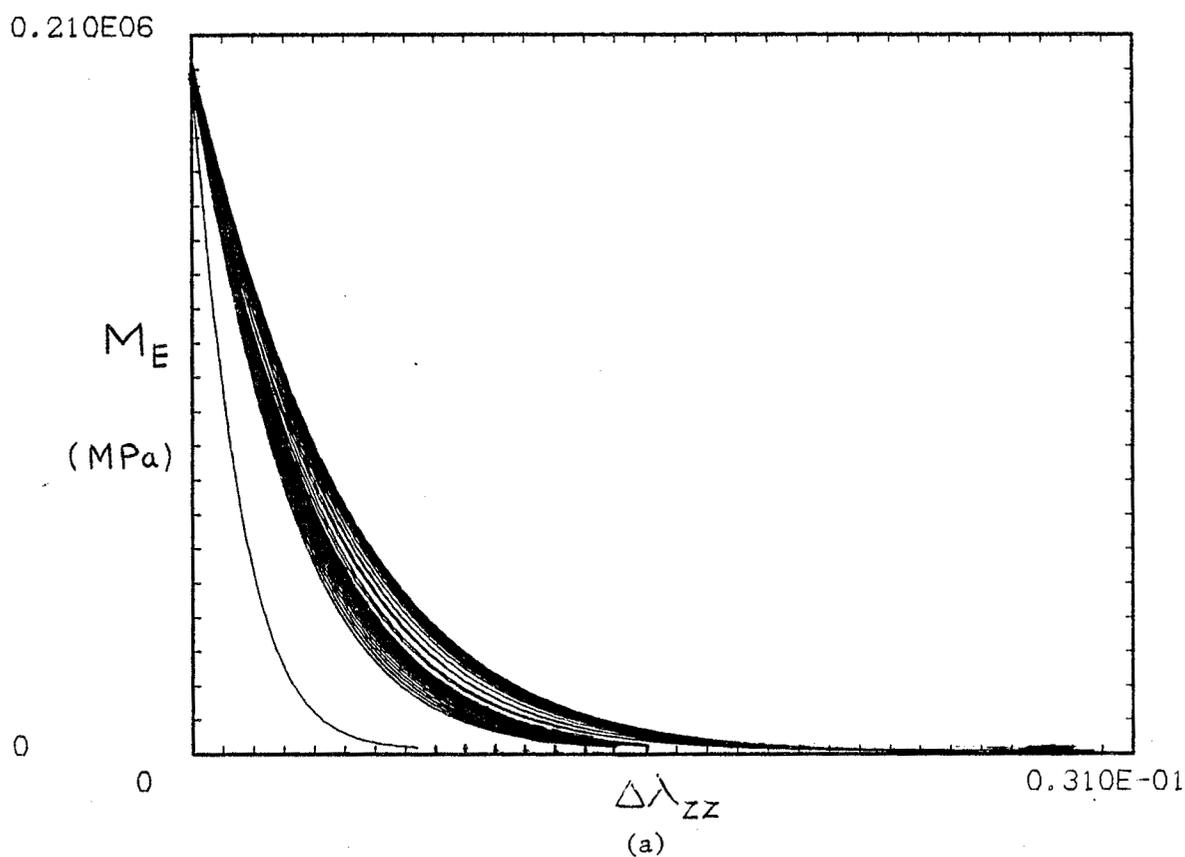


Fig. VII.6 Simulation de l'essai n° 213 - Evolution du module tangent - Acier inoxydable 316 L. a) valeur de C identifiée : C = 1.0 b) valeur de C modifiée : C = 1.5.

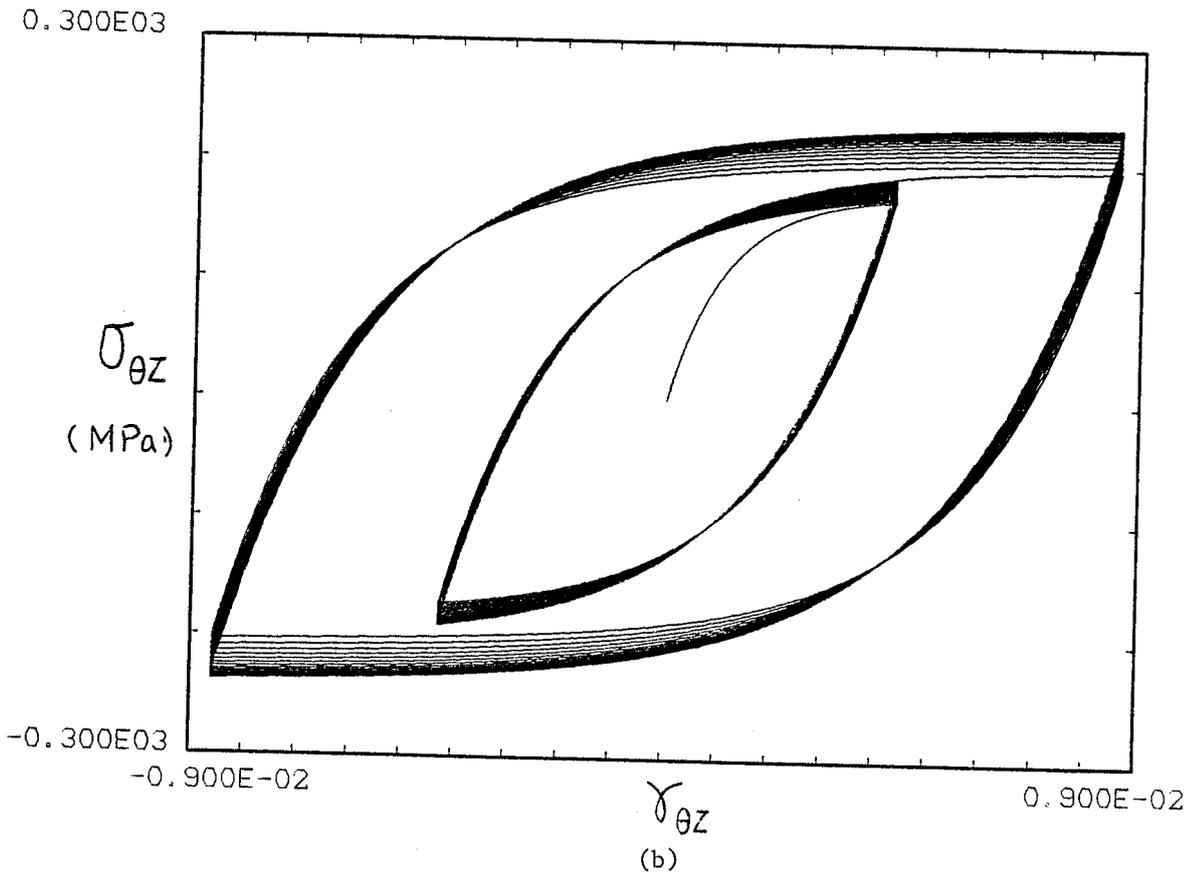
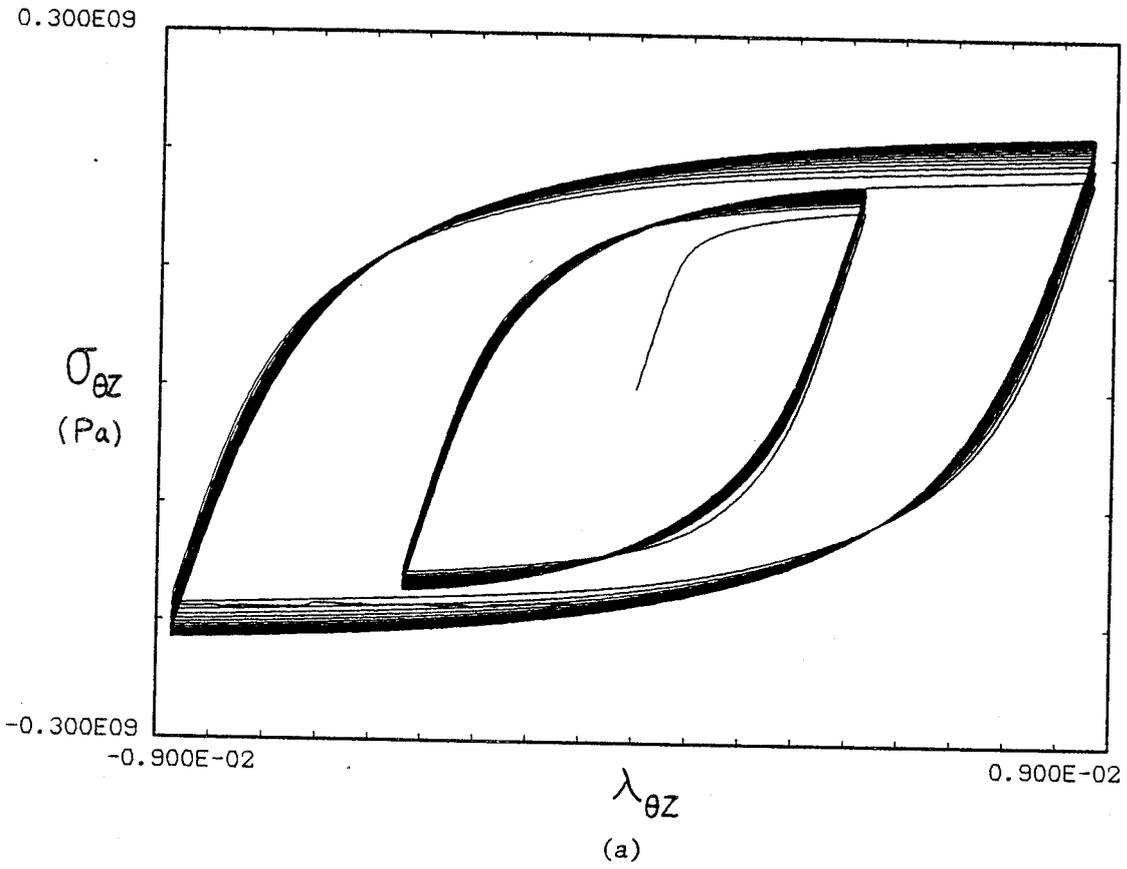


Fig. VII.7 Essai de torsion - Acier inoxydable 316 L (n° 214) a) expérience, b) simulation (programme UND).

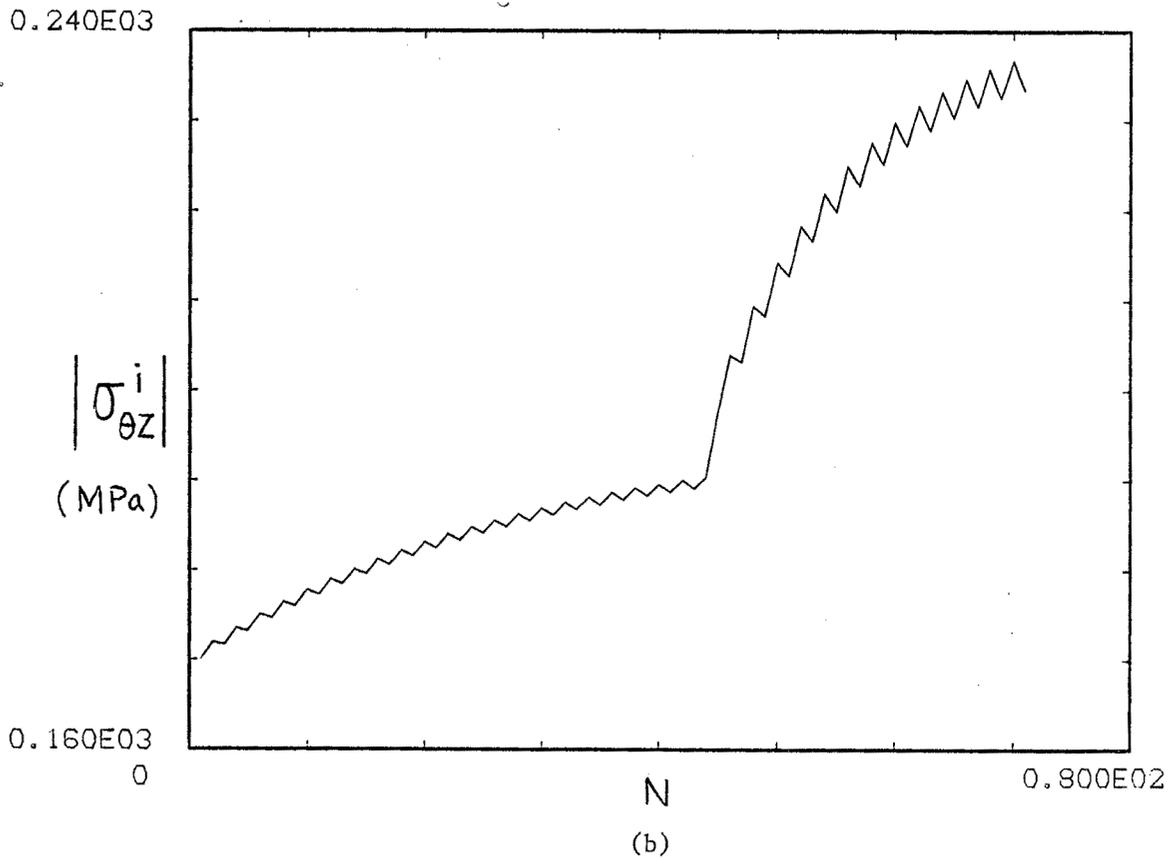
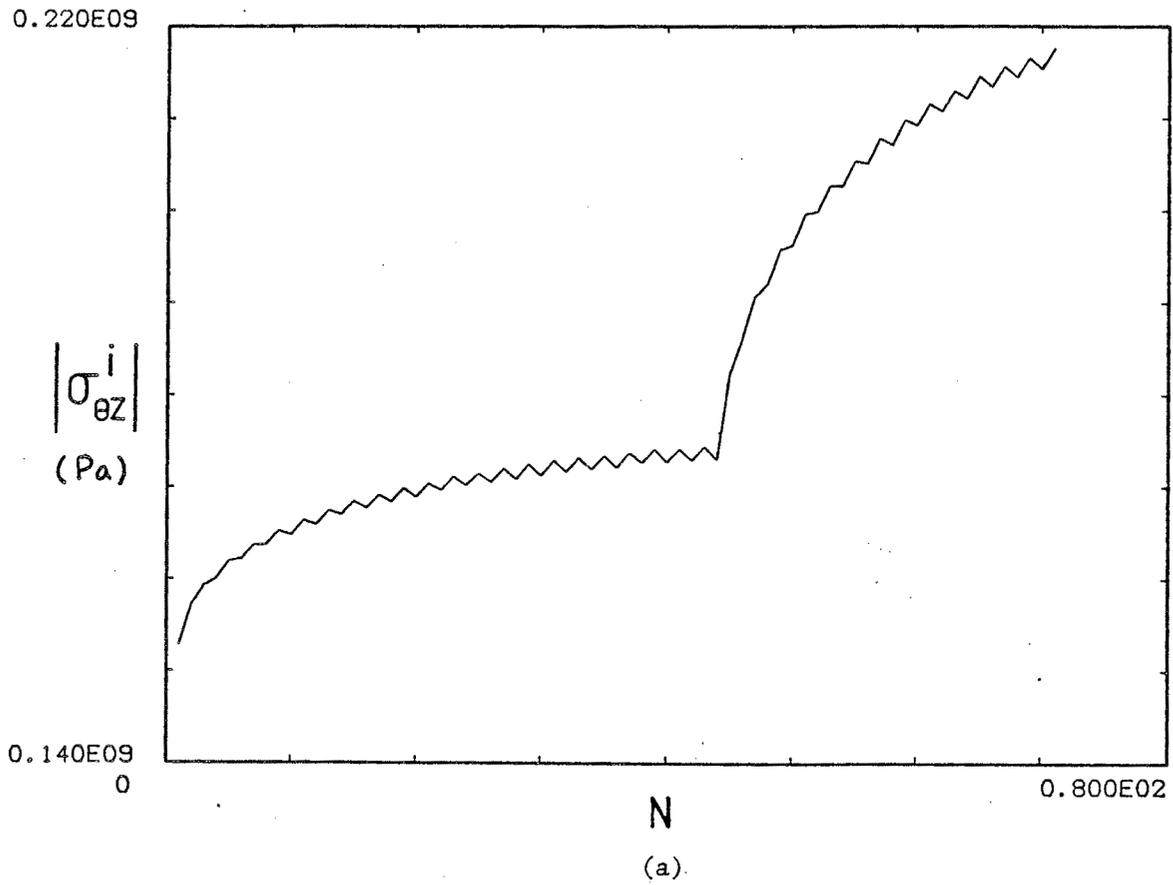


Fig. VII.8 Essai de torsion - Courbe de consolidation - Acier inoxydable 316 L (n° 214). a) Expérience, b) simulation (programme UND).

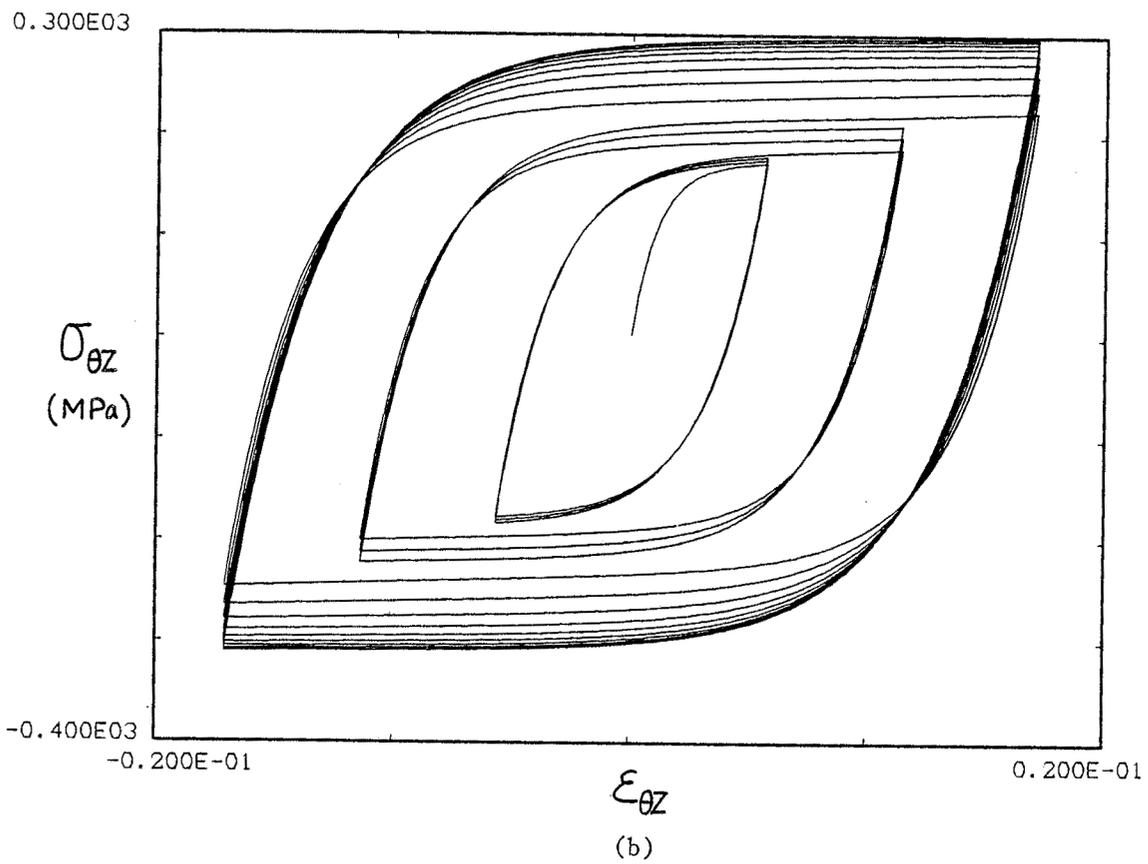
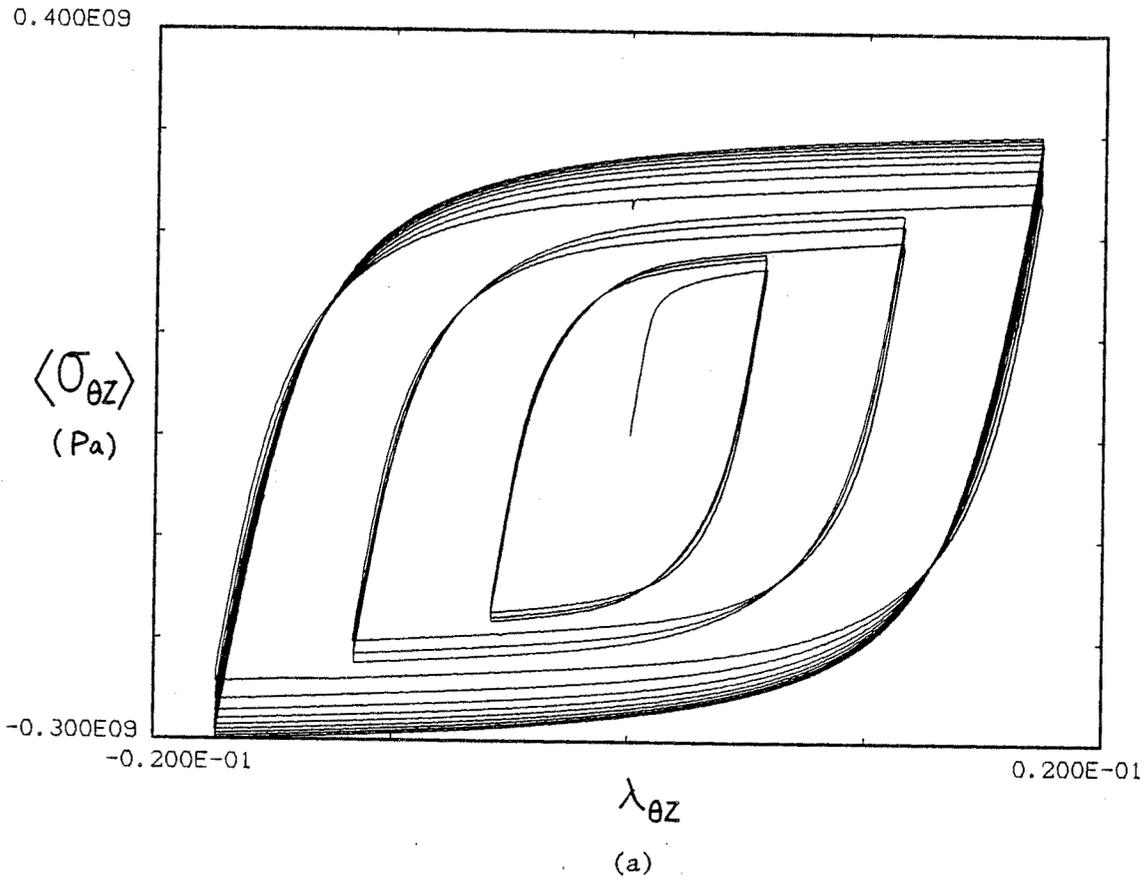


Fig. VII.9 Essai de torsion - Acier inoxydable 316 L (n° 208).  
a) expérience, b) simulation (programme UND).

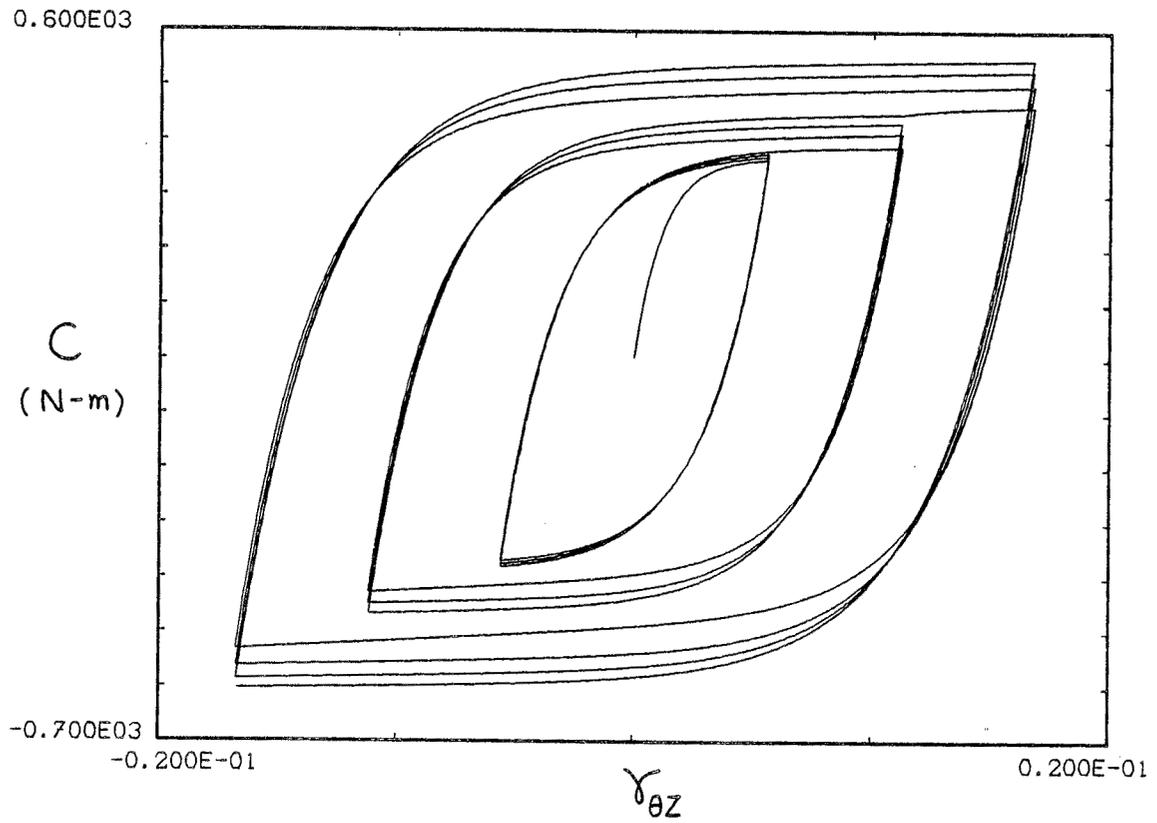


Fig. VII.10 Simulation de l'essai n° 208 (programme TUBE) - Acier inoxydable 316 L.

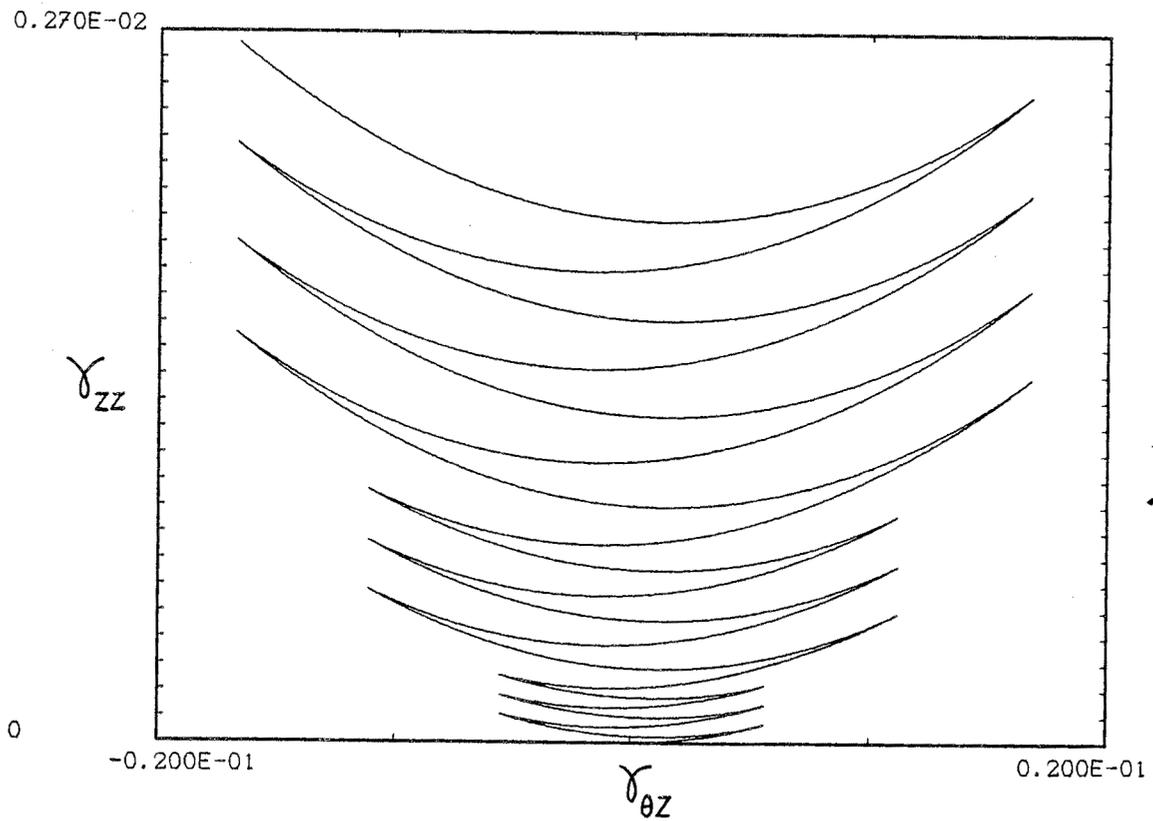


Fig. VII.11 Simulation de l'essai n° 208 (programme TUBE) - Rochet axial Acier inoxydable 316 L.

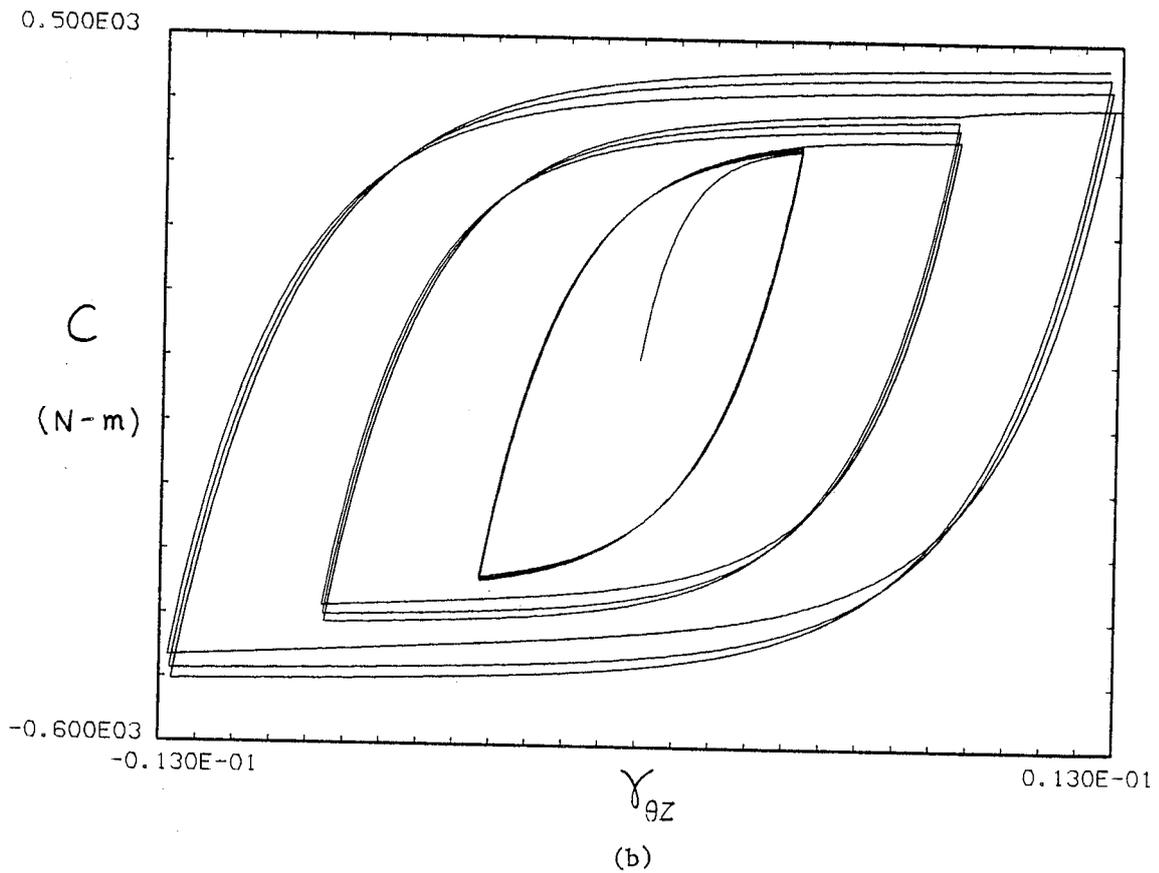
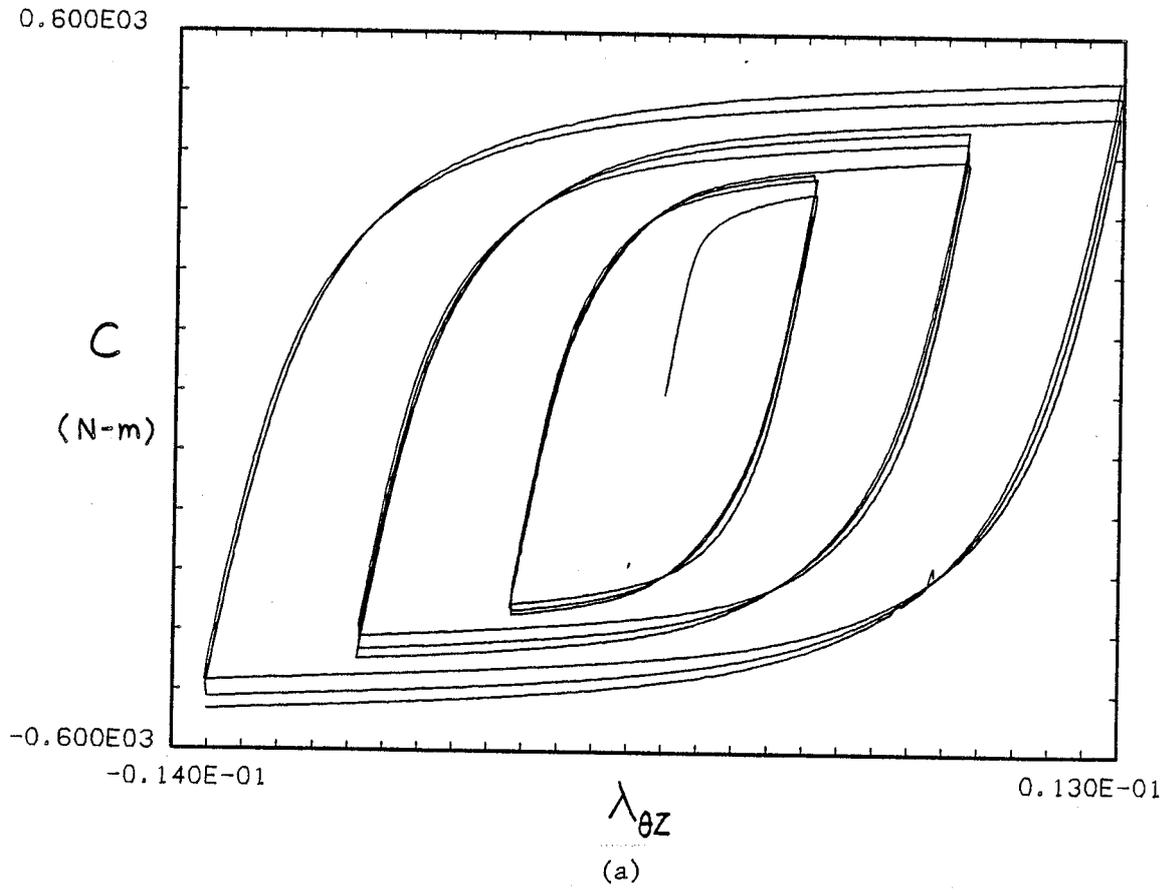


Fig. VII.12 Essai de torsion à force axiale non nulle - Acier inoxydable 316 L (n° 210) a) expérience, b) simulation (programme TUBE).

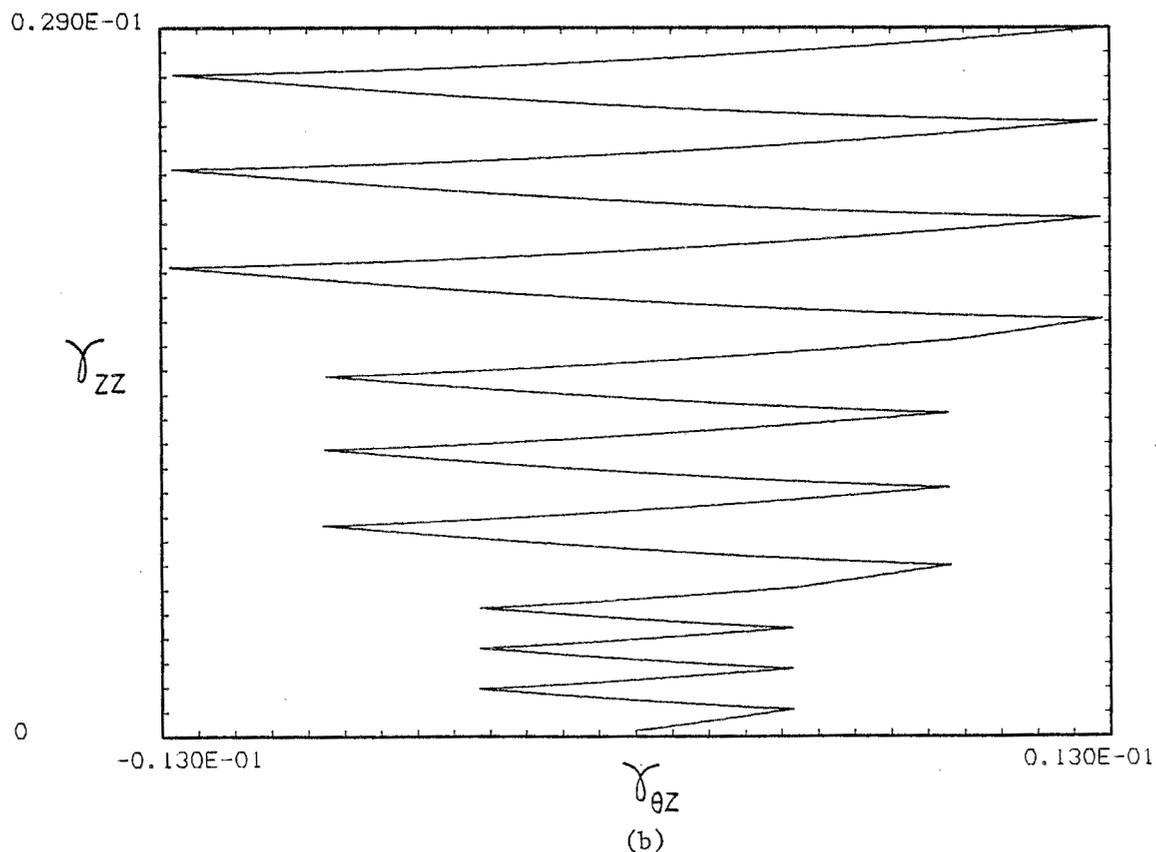
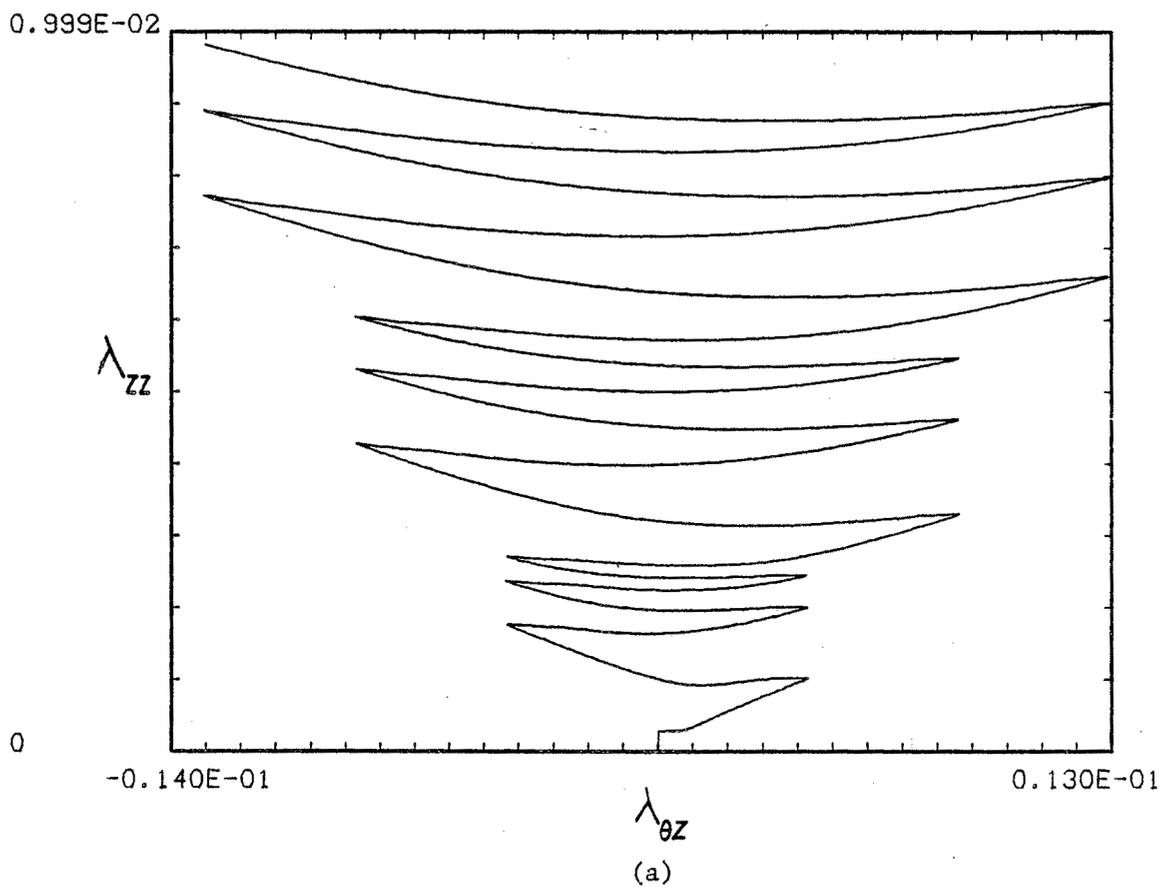


Fig. VII.13 Essai de torsion à force axiale non nulle - Rochet axial - Acier inoxydable 316 L (n° 210) a) expérience, b) simulation (programme TUBE).

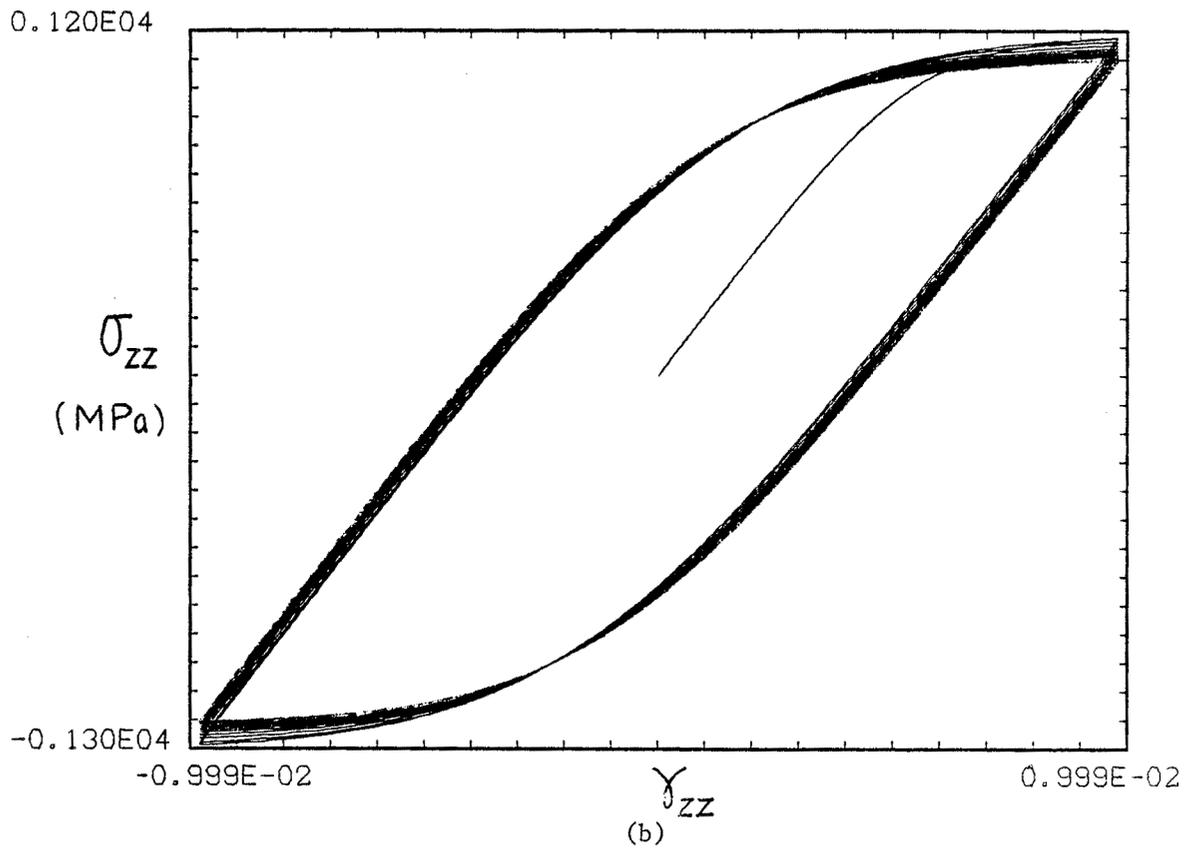
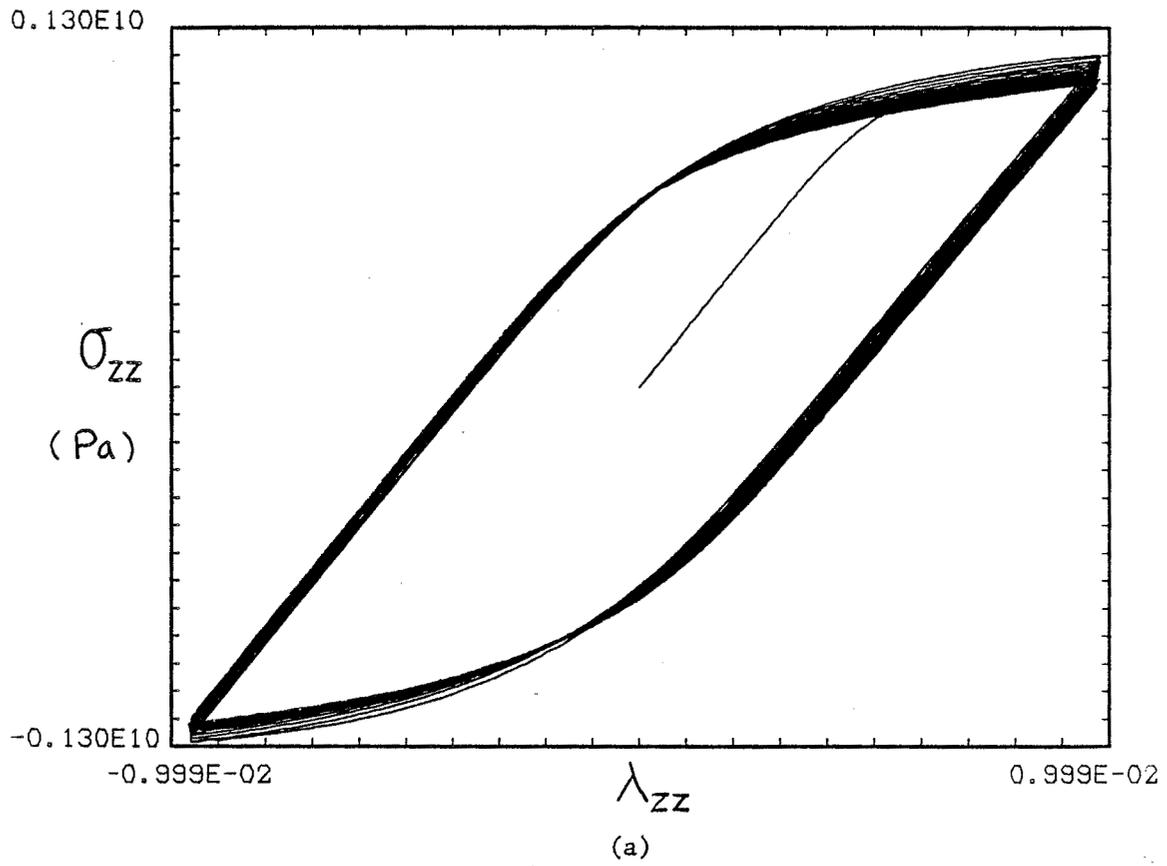


Fig. VII.14 Essai de traction-compression - Inconel 718 (n° 302).  
a) expérience, b) simulation.

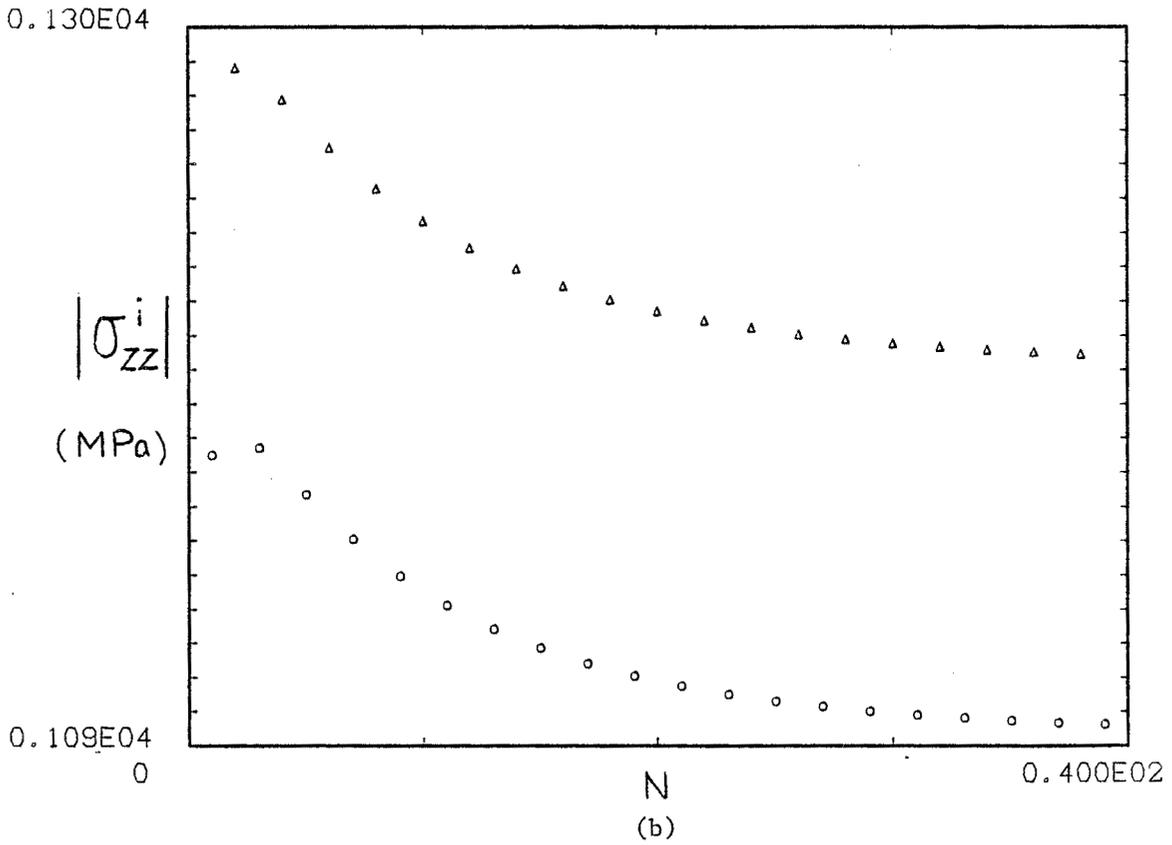
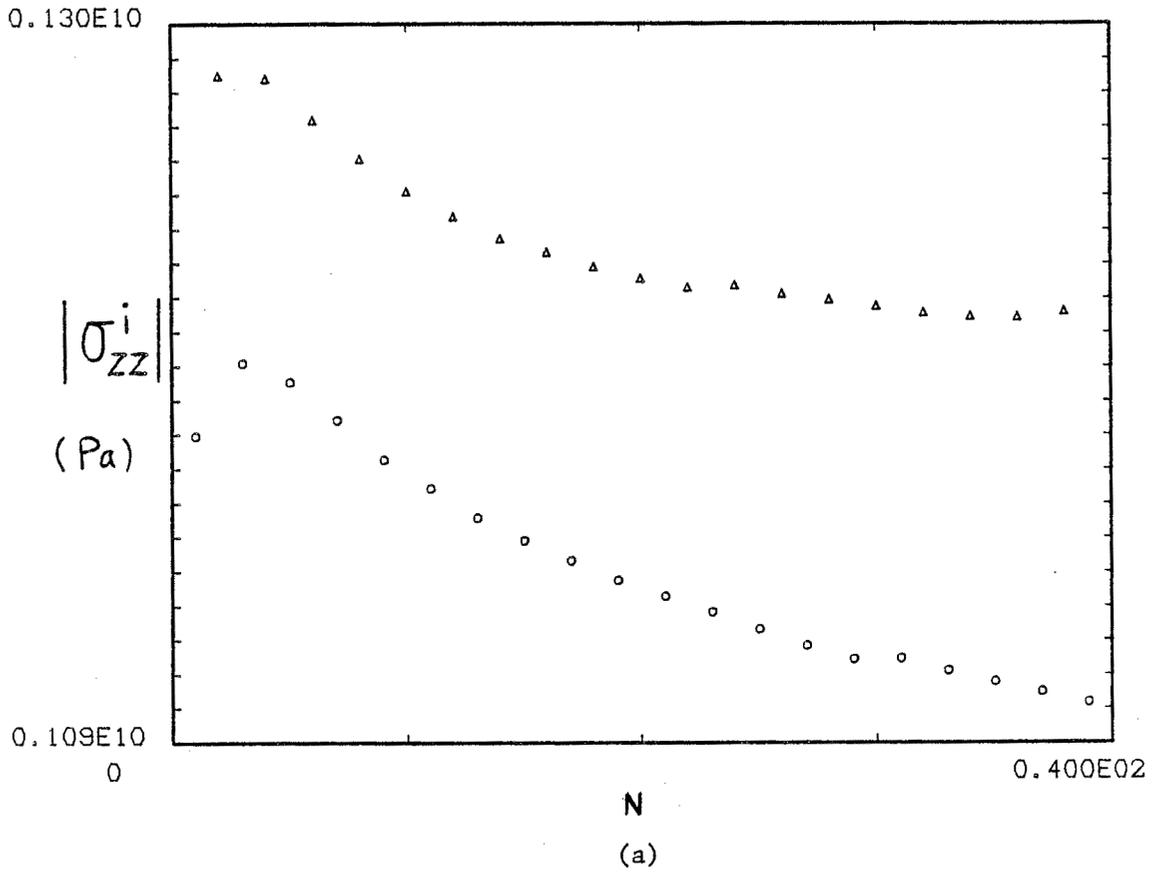


Fig. VII.15 Essai de traction-compression - Courbe de consolidation - Inconel 718 (n° 302). a) Expérience, b) simulation.

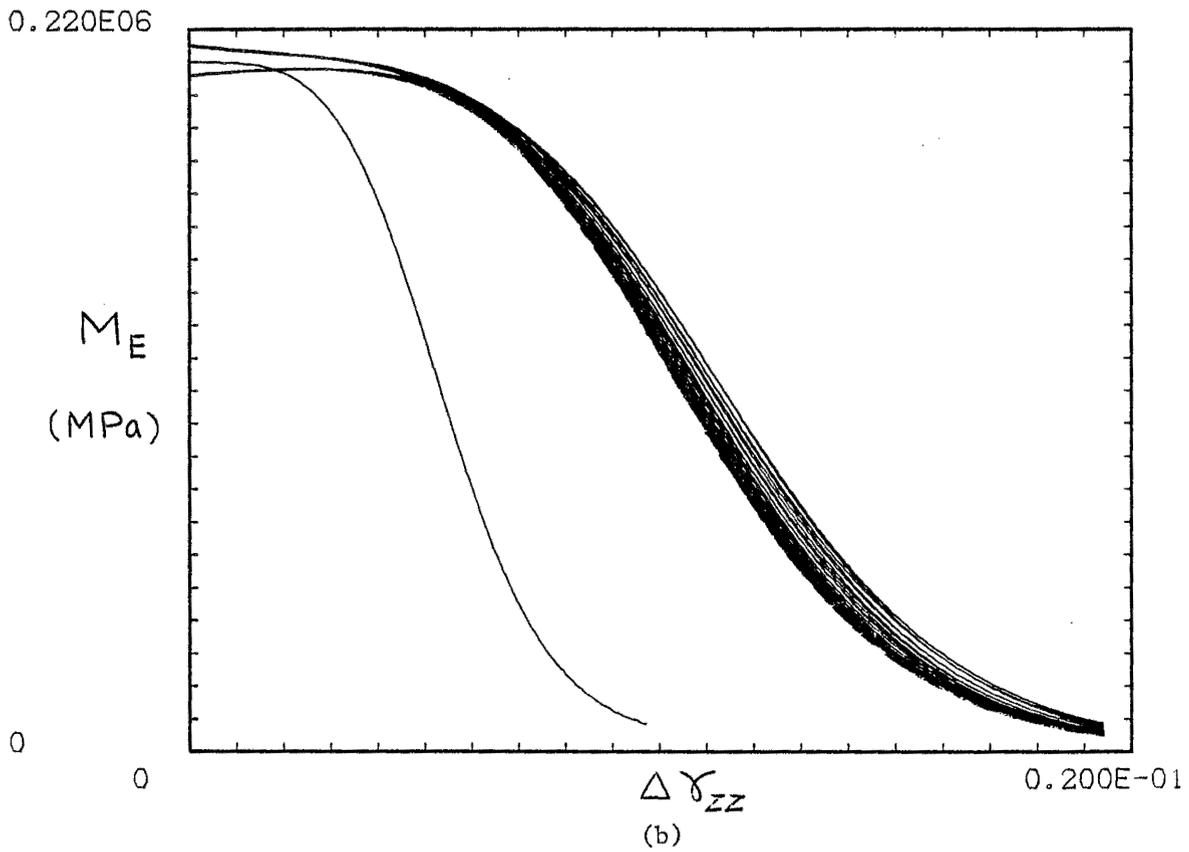
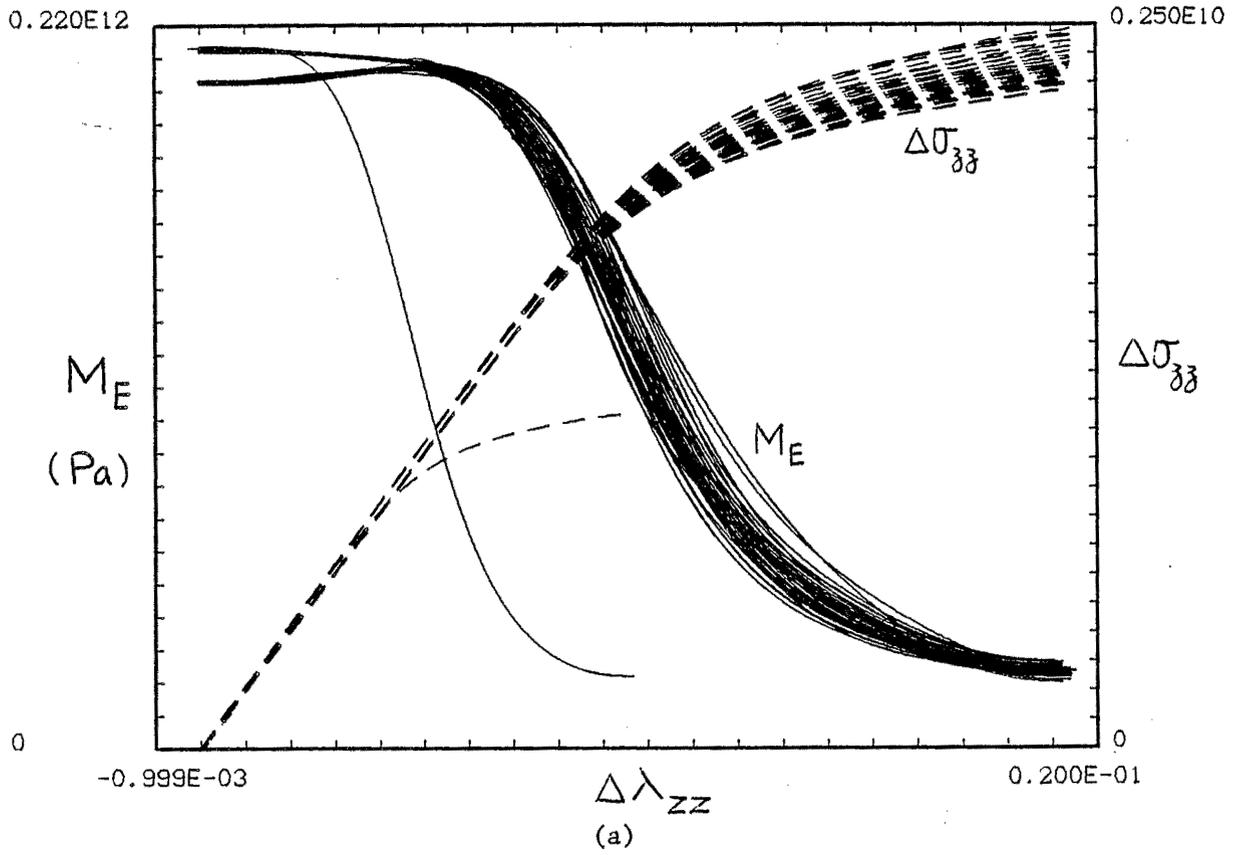


Fig. VII.16 Essai de traction-compression - Evolution du module tangent Inconel 718 (n° 302). a) expérience, b) simulation.

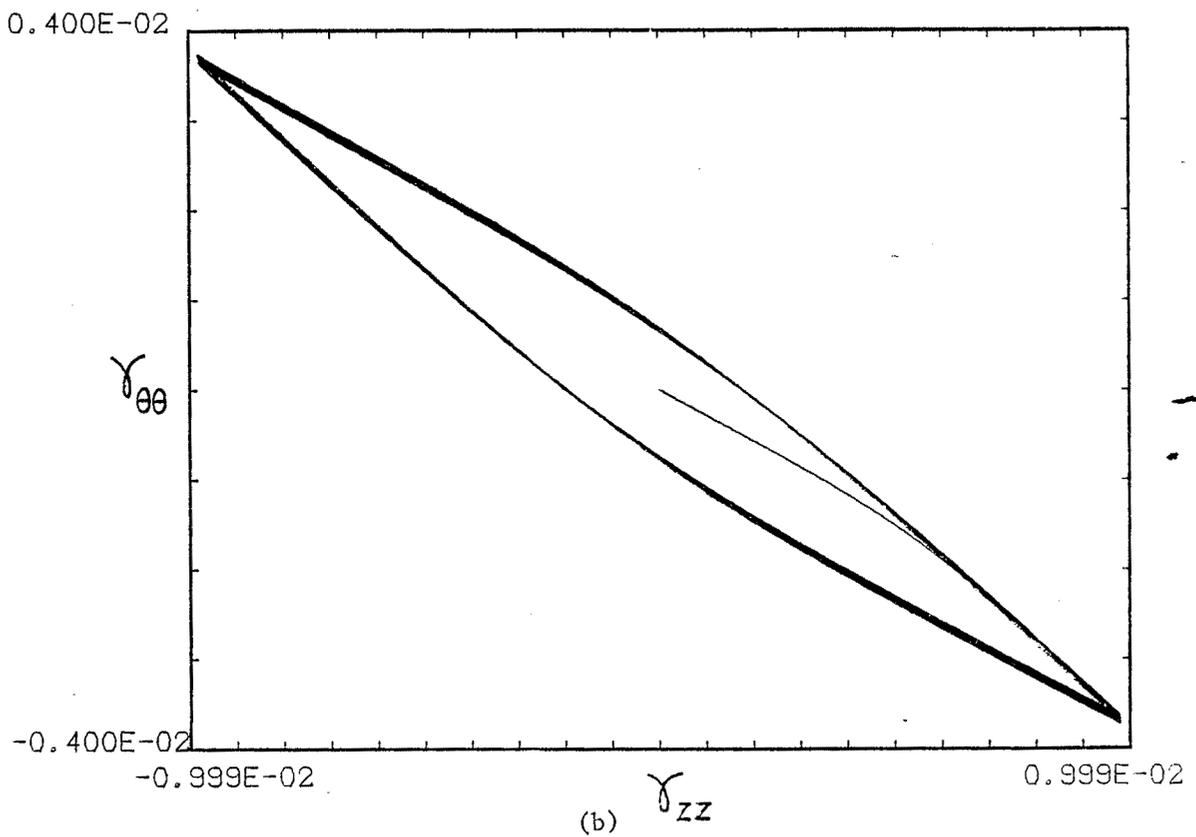
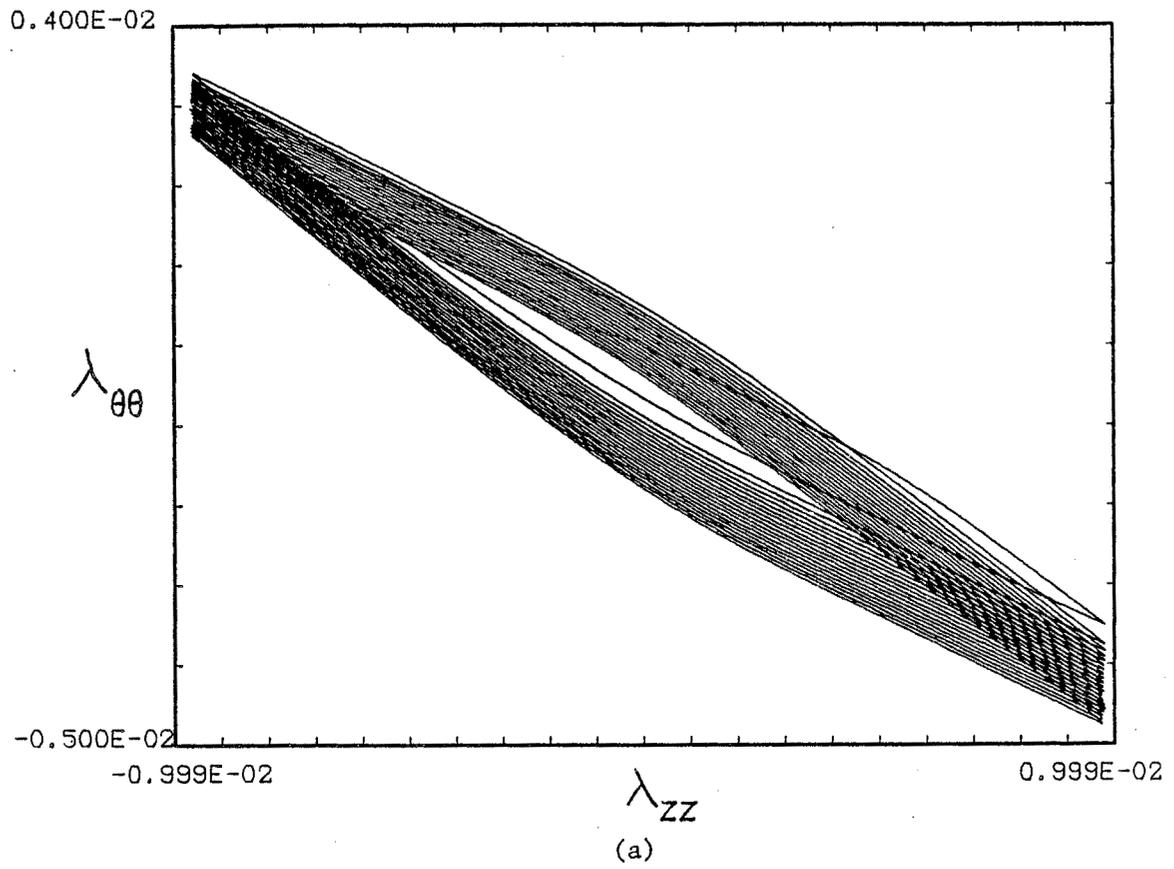


Fig. VII.17 Essai de traction-compression - Evolution de la déformation tangentielle - Inconel 718 (n° 302). a) expérience, b) simulation.

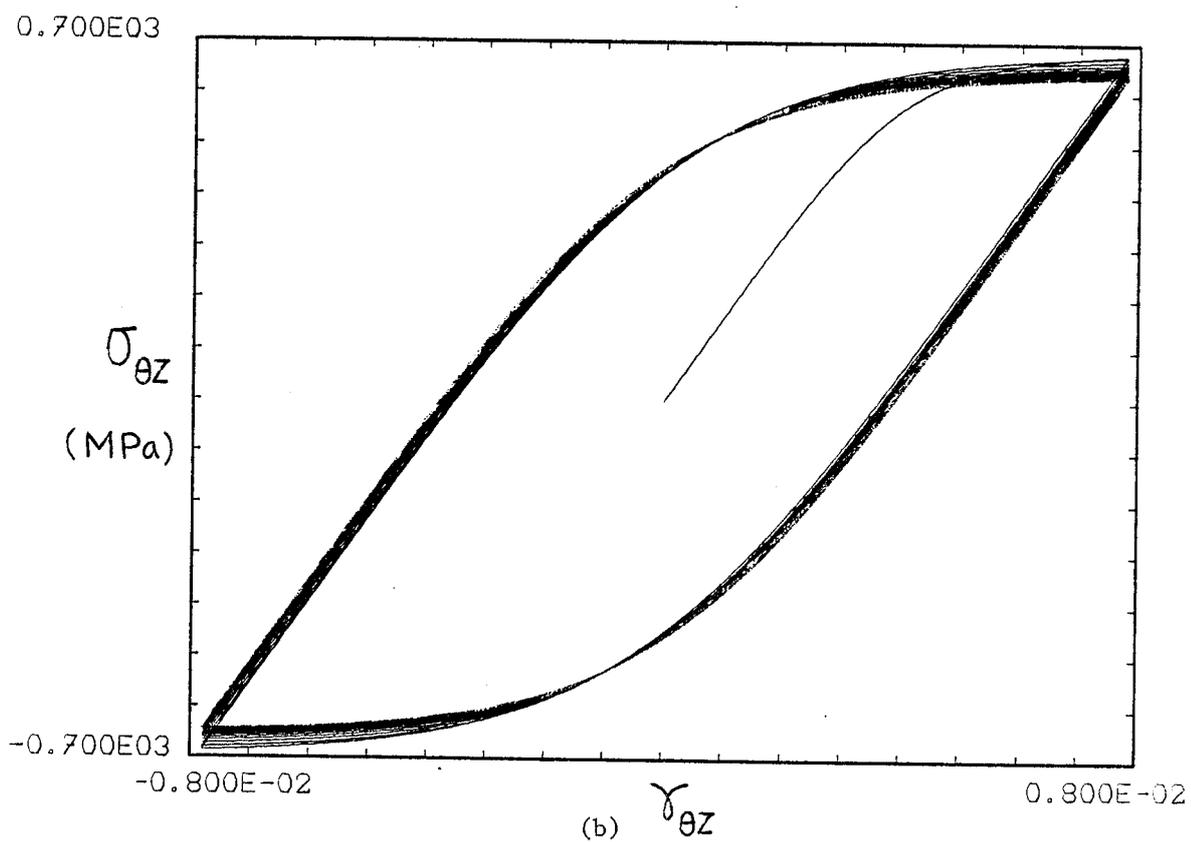
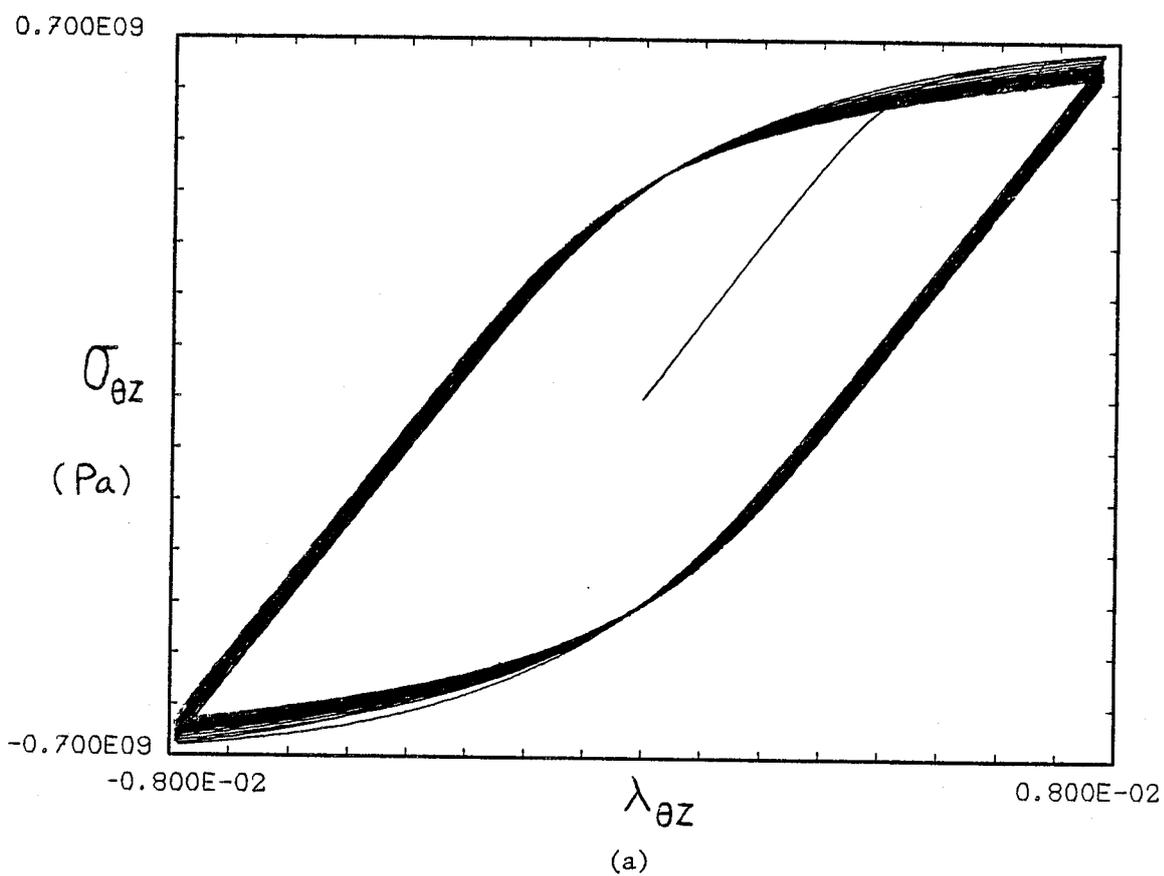


Fig. VII.18 Essai de torsion - Inconel 718 (n° 303). a) expérience, b) simulation (programme UND).

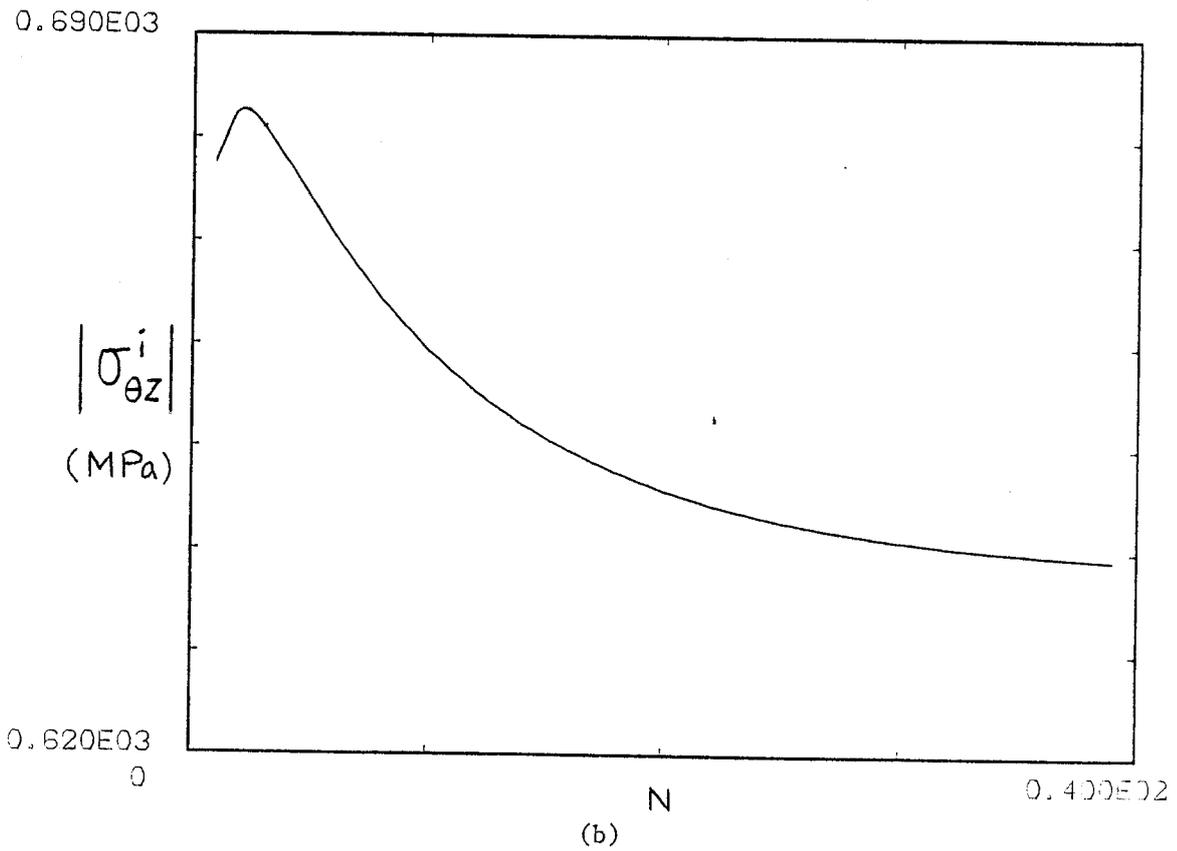
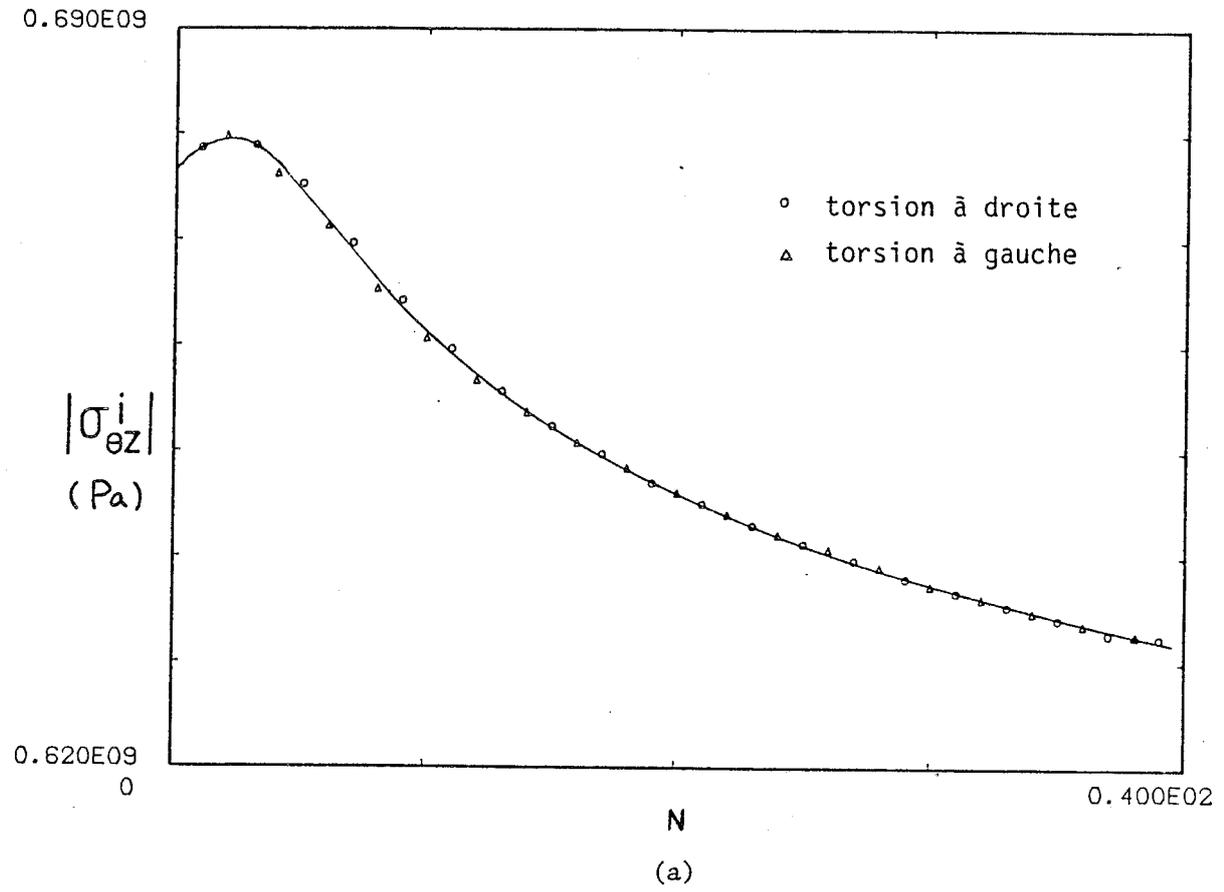
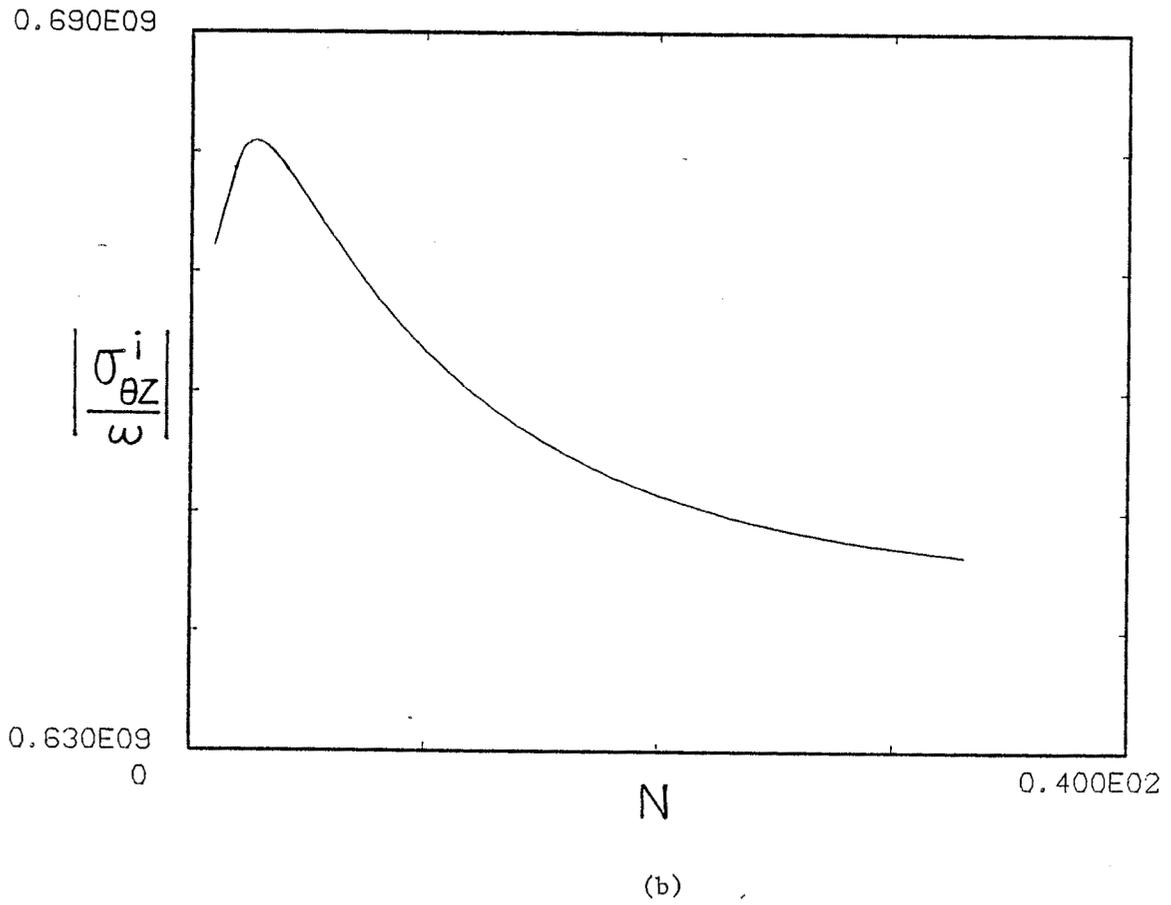
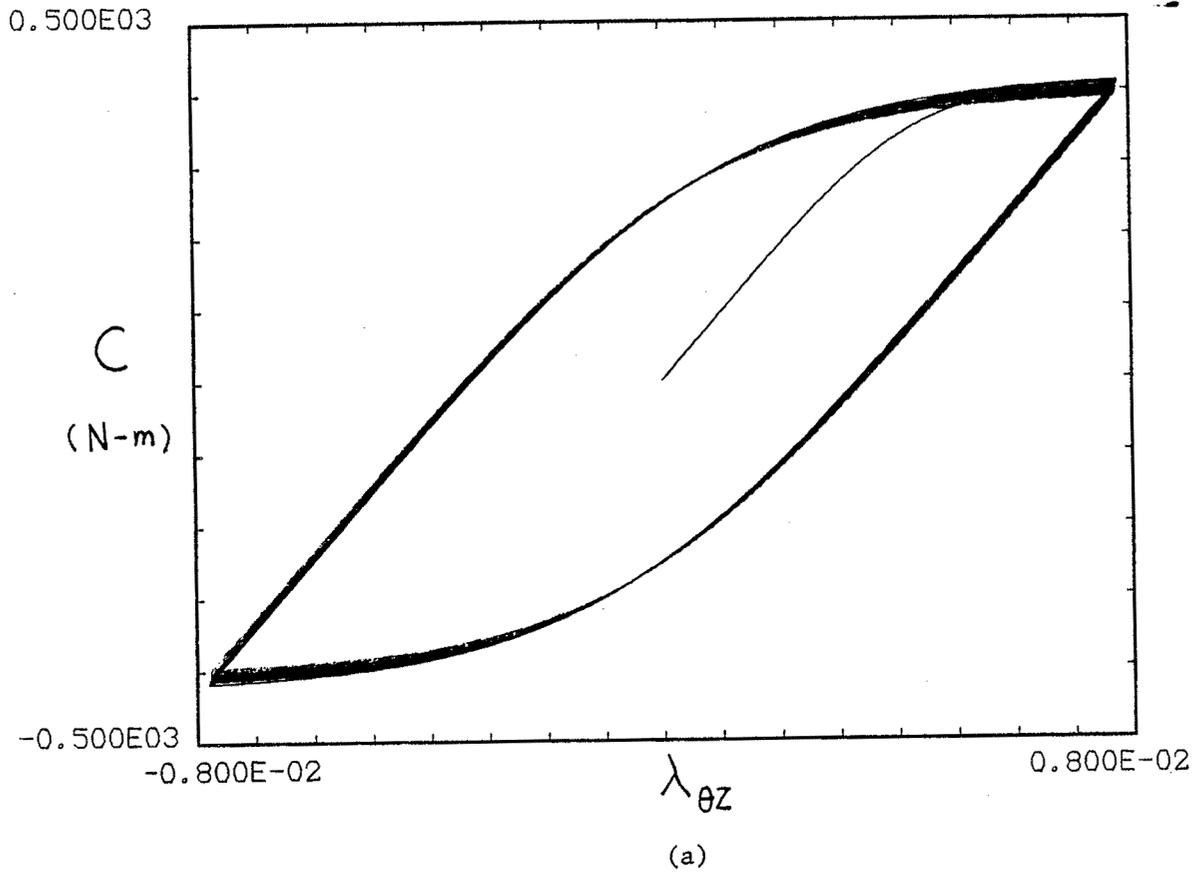


Fig. VII.19 Essai de torsion - Courbe de consolidation - Inconel 718 (n° 303). a) expérience, b) simulation (programme UND).



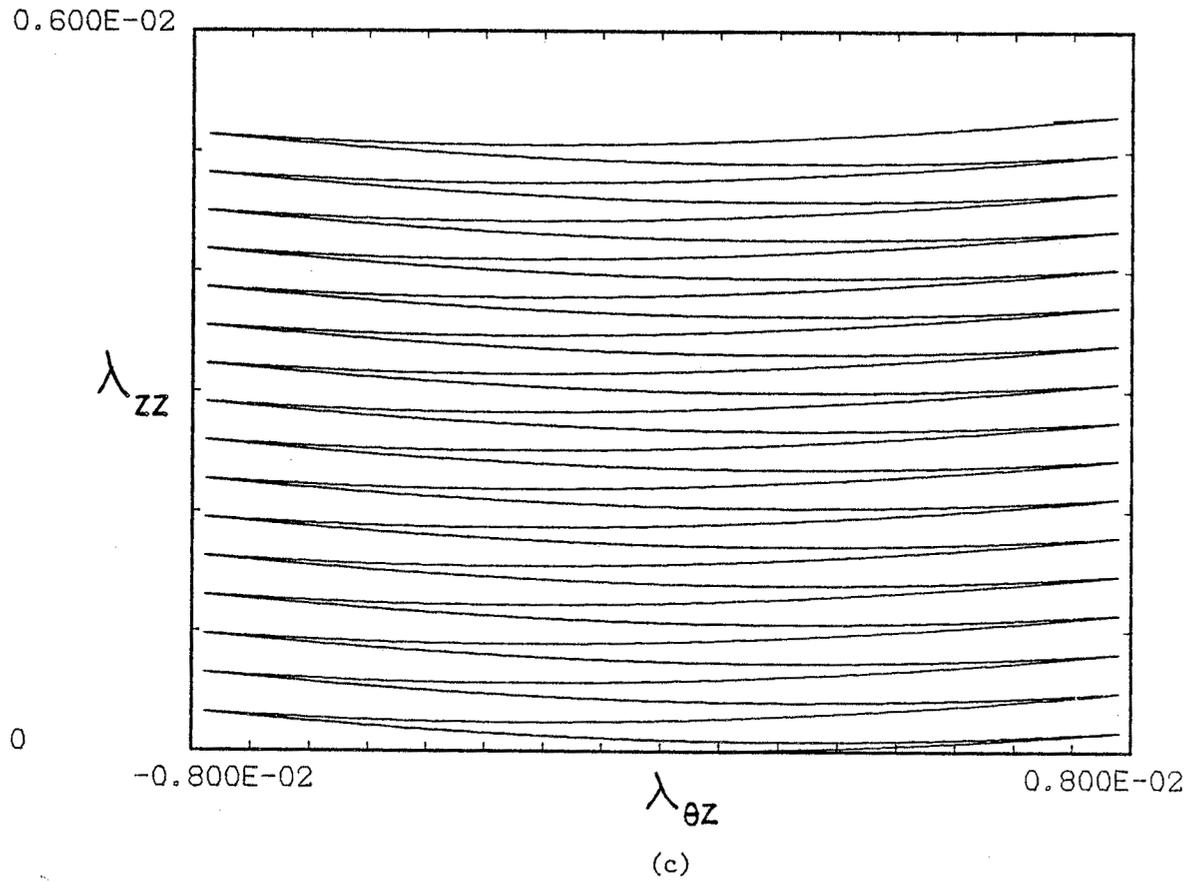


Fig. VII.20 Simulation de l'essai n° 303 (programme TUBE) - Inconel 718  
a) résultat principal b) courbe de consolidation c) rochet axial.

### CONCLUSION

Les analyses des résultats expérimentaux montrent le bien-fondé du schéma de comportement à structure héréditaire et à mémoire discrète. Le schéma essentiel est celui d'hystérésis pure, auquel est associé le concept important de mémoire discrète et de puissance réversible :

$$\Pi = \text{tr}(\mathbf{R} \mathbf{\sigma} \mathbf{D})$$

Les résultats importants obtenus et à signaler sont :

1) il n'existe pas de discontinuité dans le graphe contrainte-déformation, au moins jusqu'à l'ordre deux ; la déformation comporte une partie irréversible dès le début de chaque branche, ce qui est confirmé par une analyse des phénomènes microstructuraux.

2) il y a restauration des propriétés du matériau après inversion, le comportement linéaire tangent étant identique à lui-même quelque soit l'évolution de l'écrouissage.

3) sur la base d'une analyse des phénomènes microstructuraux mis en jeu, une description satisfaisante des phénomènes d'écrouissage en déformation est obtenue.

4) il a été reconnu que les valeurs 1 ou 2 du coefficient d'homothétie de Masing correspondent à un cas particulier ; une extension du sens de ce coefficient et l'introduction d'un coefficient de sens de la charge sont nécessaires pour décrire le comportement de matériaux manifestant une dissymétrie en fonction du sens de la charge.

5) Les résultats expérimentaux relatifs au rochet axial de torsion justifient la notion de contrainte de référence virtuelle et la décomposition de la fonction d'aide du critère d'inversion.

6) la bonne prévision des effets principaux des essais de torsion justifie le choix des variables d'énergie dissipée pour caractériser l'évolution de l'écrouissage du matériau.

Les explications partielles des phénomènes macroscopiques que nous avons obtenus à partir de l'analyse des phénomènes microstructuraux mis en jeu montrent la voie pour une recherche bien fondée du comportement des métaux, et plus généralement des matériaux. Du point de vue des applications, le comportement doit être décrit à l'échelle macroscopique dans le cadre de la mécanique des milieux continus et de la thermodynamique. D'autre part, pour être bien fondée, cette description doit être fortement guidée par les phénomènes microstructuraux mis en jeu. Dans ces conditions, il sera possible d'aborder plus sûrement les questions liées à l'ensemble des phénomènes d'écrouissage et de la température variable.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

=====

- (1) GUELIN P.  
"Remarque sur l'hystérésis mécanique - 1. Les bases d'un schéma thermomécanique à structure héréditaire". J. de Mécanique, vol 19 n° 2, 1980, pp 217-247.
- (2) BOISSERIE J.M., GUELIN P.  
"Remarks on the tensorial formulation of constitutive laws describing mechanical hysteresis". 4th SMIRT, L 1/9, 1977, pp 1-15.
- (3) PERSOZ B.  
"Modèles non linéaires". La Rhéologie, Paris, 1969, pp 23-71.
- (4) VOGEL T.  
"Théorie des systèmes évolutifs". Gauthier-Villars, Paris, 1965.
- (5) BOISSERIE J.M., GUELIN P.  
"Order, heat, intrinsic dissipation and inelastic analysis". 5th SMIRT, L 1/6, 1979, pp 1-10.
- (6) DE CARBON C.  
"Déformation des solides". C.R.A.S. Paris, vol 205, série A, 1942.
- (7) GUELIN P., STUTZ P.  
"Une nouvelle classe de loi de comportement décrivant les grandes déformations viscoélastoplastiques". Arch. Mech. Stos. Vol 29, n° 1 1977, pp 13-24.
- (8) FAVIER D.  
"Contribution à l'étude et à l'identification d'une loi de comportement à structure héréditaire : le cas de l'acier à palier". Thèse de docteur ingénieur, Grenoble 1981.
- (9) STUTZ P.  
"Contribution à l'étude de la loi rhéologique des milieux pulvérulents". Thèse d'Etat, Grenoble, 1971.
- (10) TERRIEZ J.M.  
"Sur un schéma à mémoire discrète du comportement des contenus irréversibles". Thèse d'état, Grenoble, 1980.

- (11) ELLEUCH M.N., HAN S., WACK B.  
"Expérimental verification of a discrete memory constitutive model for 316 stainless steel". 7th SMIRT, L 10/3, 1983, pp 369-376.
- (12) PINEAU A., PETREQUIN P.  
"La fatigue plastique oligocyclique", dans "La fatigue des matériaux et des structures", edit. Bathias C. et Baillon J.P., Maloine, Paris, 1980, p 107-161.
- (13) CLAVEL M.  
"Fatigue plastique et fissuration de deux alliages base nickel durcis par des précipités cohérents, Etude comparative des mécanismes". 1980 Thèse de docteur ingénieur.
- (14) CLAVEL M., LEVAILLANT C., PINEAU A.  
"Influence of micromechanisms of cyclic deformation at elevated temperature on fatigue behavior". Journée d'Automne SFM, 1979.
- (15) FOURNIER D., PINEAU A.  
"Low cycle fatigue behavior of Inconel 718 at 298 K and 823 K". Metallurgical Transaction A, vol 8A, 1977, pp 1095-1105.
- (16) MURNAGHAN F.D.  
"Finite deformation of an elastic solid". John Wiley and Sons, New-York 1951.
- (17) WACK B.  
"Torsion d'un tube (ou d'une tige), remarques concernant le champ de déplacement et l'équilibre local". Note I.M.G., 09.04.1984.
- (18) WACK B.  
"Second and third-order effects in the torsion of circular tubes and rods". J. de mécanique, vol 20, n° 4, 1981, pp 737-787.
- (19) ADDA Y., DUPOUY J.M., PHILIBERT J., QUERE Y.  
"Elements de métallurgie physique", 1978, edit. Commissariat à l'Energie Atomique.
- (20) CHABOCHE J.L., ROUSSELIER G.  
"On the plastic and viscoplastic constitutive equations", P. I et II ASME vol 59, edit. Baylac G., 1982, pp 33-55.

- (21) WACK B., TERRIEZ J.M., GUELIN P.  
"A hereditary type, discrete memory, constitutive equation with applications to simple geometries". Acta Mechanica 50. p9-p37, 1983.
- (22) VELLAIKAL G.  
"Some observation on microyielding in copper polycrystals". Acta Metallurgica, Vol 17, 1969, pp 1145-1154.
- (23) YOUNG F.W.  
"Elastic-plastic transition in copper crystals as determined by an etch-pit technique". J. of Applied Physics, vol 32, n° 10, 1961, pp 1815-1820.
- (24) YOUNG F.W.  
"On the yield stress of copper crystals". J. of Applied Physics vol 33, n° 3, 1962, pp 963-969.
- (25) TINDER R.F., WASHBURN J.  
"The initiation of plastic flow in copper". Acta Metallurgica, vol 12 1964, pp 129-137.
- (26) ARGON A.S., BRYDGES W.T.  
"Deformation of Copper in easy glide". The Philosophical Magazine, vol 18, n° 154, 1968, pp 817-837.
- (27) FUJITA H.  
"In situ deformation by high voltage electron microscopy". 9th Intl. Cong. on Electron Microscopy. Vol III, Toronto, 1978, pp 355-366.
- (28) FUJITA H.  
"Behaviors of individual dislocation in Cu-9 at % Al alloys under reverse stress". J. of the Physical Society of Japan, vol 38, n° 5, 1975, pp 1342-1348.
- (29) MUGHRABI H.  
"Dislocation wall and cell structures and two long-range internal stresses in deformed metal crystals". Acta Metall. Vol 31, n° 9 1983, pp 1367-1379.

- (30) HOLSTE C., BURMEISTER H.J.  
"Change of long range stresses in cyclic deformation". Phys. Stat. Sol (a), vol 57, 1980, pp 269-280.
- (31) MASING G.  
"On Heyn's hardening theory of metals due to inner elastic stresses Wirss. Veroff. Siemens-Konzern 3, 1923, pp 231-239.
- (32) LAZARUS D.  
"The variation of the adiabatic elastic constants of KCl, NaCl, CuZn, Cu and Al with pressure to 10 000 Bars". Physical Review vol 76, n° 4, 1949, pp 545-553.
- (33) TAKAHASHI S. et al  
"Change of the ultrasonic characteristic with stress in some steels and aluminium alloys". J. of Materials Science, vol 13, 1978, p 843-850.
- (34) KITTEL C.  
"Introduction to solid state physics". John Wiley & Sons, Inc. 1976, p 86-98.
- (35) MAGNIN T., DRIVER J., LEPINOUX J., KUBIN L.P.  
"Aspects microstructuraux de la déformation cyclique dans les métaux et alliage C.C et C.F.C". Part I et II, Revue Phys. Appl. vol 19, 1984, p 467-502.
- (36) RABBE P.  
"Mécanisme et mécanique de la fatigue" dans "la fatigue des matériaux et des structures" edit. Bathias C. et Bailon J.P, Maloine Paris, 1980, p 1-29.
- (37) WACK B., TERRIEZ J.M., GUELIN P.  
"Torsion cyclique et effet du second ordre dans une description à structure héréditaire du continu anélastique". J. de Mécanique théorique et appliquée, num. Spécial, 1982, p 61-72.
- (38) POYNTING J.H.  
"On pressure perpendicular to the shear planes in finite pure shears and on the lengthening of loaded wires when twisted". Proc. Roy. Soc. London, Serie A, vol 82, p 546-559 (1909).

- (39) POYNTING J.H.  
"On the changes in the dimensions of a steel wire when twisted, and on the pressure of distortional waves in steel". Proc. Roy Soc. London, series A, vol 86, p 534-561 (1912).
- (40) FOUX A.  
"An experimental investigation of the Poynting effect" Proc. Intl. Sympos. Second order effects Haifa, pp 228-251 (1962).
- (41) RIVLIN R.S., SAUNDERS D.W.  
"Large elastic deformation of isotropic materials VII experiments on the deformation of rubber". Phil trans. Roy. Soc. London, April (1951) p 276-280.
- (42) SWIFT H.W.  
"Length changes in metals under torsional overstrain". Engineering, April 4, p 253-257 (1947).
- (43) RONAY M.  
"On second order strain accumulation in aluminium in reversed cyclic torsion at elevated temperatures". J. Solids Structures V3, pp 167-176 (1967).
- (44) RIVLIN R.S.  
"The solution of problems in second order elasticity theory". J. Arch. Rational Mech. Anal. 2, p 53-81 (1953).
- (45) XU J.  
Rapport du stage 83 - 84, I.M.G.
- (46) FREUDENTHAL J.M., GOU P.F.  
"Second order effects in the theory of plasticity". Acta Mechanica 8, pp 34-52. (1969).
- (47) SIEPENKOTTER  
Rapport de fin d'études, Fachhochschule Munster et I.U.T 1 de Grenoble, 1984.
- (48) TOURABI A.  
Rapport D.E.A 83-84 I.N.P.G.

- (49) CHABOCHE J.L., LEMAITRE J., MARQUIS D, SAVALLE S.  
"Discussion on problems of models identification". IUTAM symposium  
Senlis, France, may 1980, p 37-p51.
- (50) GUELIN P.  
"Remarque sur l'hystérésis mécanique : 2. Ecrouissage, stabilité".  
Note personnelle, 1980.
- (51) GUELIN P.  
"Sur une extension, héréditaire à mémoire discrète, de l'équation de  
GIBBS. I - Réalité et virtualité". Note personnelle.
- (52) LAURENT P.J.  
"Approximation et optimisation", Hermann, Paris (1972)
- (53) PRUESS S.  
"Alternatives to the exponential spline in tension", Maths. of  
Comp., vol. 33, 1273-1281 (1979)
- (54) MARQUIS D.  
"Etude comparative de lois de comportement". Rapport interne G.R.E.C.O  
"Grandes déformations et endommagement", le 9.12.1983.
- (55) CHABOCHE J.L.  
"Etude comparative de lois de comportement". Ra-  
port interne G.R.E.C.O  
"Grandes déformations et endommagement". Le 18.01.1984.
- (56) HAN S., WACK B.  
"Phenomenological description of the strain hardening (or softening)  
of stainless steel". A paraître , 8th S.M.I.R.T.
- (57) KUJAWSKI D., KREML E.  
"The rate (time)-dependent behavior of Ti-7Al-2Cb-1Ta titanium alloy  
at room temperature under quasi-static monotonic and cyclic loading".  
J. of Applied Mechanics Vol 48, March 1981, p 55-p 63.
- (58) KUJAWSKI D., <sup>KALLIANPUR V.L.</sup> KREML E.  
"An experimental study of uniaxial creep, cyclic creep and relaxation  
of AISI type 304 stainless steel at room temperature". J. Mech. Phys.  
solids, Vol 28, pp 129-148. (1980)

- (59) GUELIN P., NOWACKI W.K., PEGON P.  
"Etude des schémas thermomécaniques à mémoire discrète : bases  
physiques et formalisme". Vème Symposium franco-polonais, Rydzyna,  
1984, soumis à Arch. Mech.

THESE de DOCTORAT ès-SCIENCES PHYSIQUES

*Titre de l'ouvrage :*

**LE COMPORTEMENT D'HYSTÉRÉSIS DES SOLIDES  
ET SA DESCRIPTION**

**PAR UN SCHÉMA A MEMOIRE DISCRETE :**  
le cas des aciers inoxydables

*Nom de l'auteur :* Sihui HAN

*Établissement :* Université Scientifique et Médicale de Grenoble

**RÉSUMÉ**

Le comportement d'un acier inoxydable 316 L et d'un Inconel 718 est étudié dans le cadre d'un schéma thermomécanique à mémoire discrète constitué d'une équation multivoque d'un critère d'inversion et d'un algorithme. Les propriétés du comportement d'hystérésis pure sont analysées en détail. En particulier on étudie les modules tangents aux courbes de charge. On met ainsi en évidence la restauration des propriétés du matériau après inversion et la non-existence d'une discontinuité élastique-plastique dans les branches du graphe contrainte-déformation. Sur la base d'une analyse microstructurale une description satisfaisante de l'écroutissage en déformation est obtenue. Une extension du coefficient d'homothétie de Masing est proposée dans le cas d'un seuil non-circulaire ; cette extension met bien en évidence la caractère thermomécanique du schéma du comportement. Les résultats expérimentaux du rochet axial de torsion confirment la notion de contrainte de référence virtuelle. Le choix des variables d'énergie dissipée intrinsèque comme paramètre d'évolution de l'écroutissage est justifié. Enfin le rôle d'une analyse des phénomènes microstructuraux est bien mis en évidence lors des choix effectués pour une bonne description phénoménologique du comportement à l'échelle macroscopique.

**MOTS-CLÉS**

Hystérésis ; Thermodynamique ; Écroutissage ; Effets du second ordre ; Alliages métalliques ; Traction et torsion.