



HAL
open science

Séries chronologiques binaires avec récompenses : applications à la modélisation en climatologie

Mohamed Himdi

► **To cite this version:**

Mohamed Himdi. Séries chronologiques binaires avec récompenses : applications à la modélisation en climatologie. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1986. Français. NNT : . tel-00320012

HAL Id: tel-00320012

<https://theses.hal.science/tel-00320012>

Submitted on 10 Sep 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

Présentée à

**L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE, TECHNOLOGIQUE ET
MEDICALE DE GRENOBLE**

pour obtenir le grade de
docteur de 3ème cycle
"mathématiques appliquées"

par

Khalid EL HIMDI

SERIES CHRONOLOGIQUES BINAIRES AVEC RECOMPENSES.

Applications à la modélisation en climatologie.

Thèse soutenue le 5 juin 1986 devant la commission d'examen.

A. LE BRETON	Président
G. GREGOIRE	
S. MARTIN	Examineurs
J.L. SOLERE	



UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Année universitaire 1982-1983

Président de l'Université : M. TANCHE

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L'U.S.M.G.

(RANG A)

SAUF ENSEIGNANTS EN MEDECINE ET PHARMACIE

PROFESSEURS DE 1ère CLASSE

ARNAUD Paul	Chimie organique
ARVIEU Robert	Physique nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S.
AYANT Yves	Physique approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale C.N.R.S. (labo de magnétisme)
BARJON Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose-Biologie
BARRA Jean-René	Statistiques - Mathématiques appliquées
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude (M.)	Mathématiques pures
BERNARD Alain	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques pures
BILLET Jean	Géographie
BONNIER Jean-Marie	Chimie générale
BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire I.S.N.
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie végétale
CAUQUIS Georges	Chimie organique
CHIBON Pierre	Biologie animale
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques pures
CRABBE Pierre (détaché)	C.E.R.M.O.
CYROT Michel	Physique du solide
DAUMAS Max	Géographie
DEBELMAS Jacques	Géologie générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude (M.)	M.I.A.G. Mathématiques appliquées
DEPORTES Charles	Chimie minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques pures
GAGNAIRE Didier	Chimie physique

.../...

GASTINEL Noël	Analyse numérique - Mathématiques appliquées
GERBER Robert	Mathématiques pures
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
GIRAUD Pierre	Géologie
IDELMAN Simon	Physiologie animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques pures
JULLIEN Pierre	Mathématiques appliquées
KAHANE André (détaché DAFCO)	Physique
KAHANE Josette	Physique
KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques pures
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques appliquées
KUPTA Yvon	Mathématiques pures
LACAZE Albert	Thermodynamique
LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre	Mathématiques appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences nucléaires I.S.N.
LOUP Jean	Géographie
MACHE Régis	Physiologie végétale
MAYNARD Roger	Physique du solide
MICHEL Robert	Minéralogie et pétrographie (géologie)
MOZIERES Philippe	Spectrométrie - Physique
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (biologie végétale)
PAYAN Jean-Jacques (détaché)	Mathématiques pures
PEBAY PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIAUX Jacques	Géologie
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
RASSAT André	Chimie systématique
RENARD Michel	Thermodynamique
RICHARD Lucien	Biologie végétale
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
SENGEL Philippe	Biologie animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques pures
SOUTIF Michel	Physique
VAILLANT François	Zoologie
VALENTIN Jacques	Physique nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEN Bernard	Mathématiques appliquées
VAUQUOIS Bernard	Mathématiques appliquées
VIALON Pierre	Géologie

PROFESSEURS DE 2ème CLASSE

ADIBA Michel	Mathématiques pures
ARMAND Gilbert	Géographie

.../...

AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
BEGUIN Claude (M.)	Chimie organique
BOEHLER Jean-Paul	Mécanique
BOITET Christian	Mathématiques appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CHARDON Michel	Géographie
COHENADDAD Jean-Pierre	Physique
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
DOUCE Roland	Physiologie végétale
DUFRESNOY Alain	Mathématiques pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
GUITTON Jacques	Chimie
HACQUES Gérard	Mathématiques appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HICTER Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKOVE Claude (M.)	Géologie
LE BRETON Alain	Mathématiques appliquées
LONGEQUEUE Nicole	Sciences nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physiques
LUNA Domingo	Mathématiques pures
MASCLE Georges	Géologie
NEMOZ Alain	Thermodynamique (CNRS - CRTBT)
OUDET Bruno	Mathématiques appliquées
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude (M.)	Sciences nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude (détaché)	Physique du solide
PIBOULE Michel	Géologie
PIERRE Jean-Louis	Chimie organique
RAYNAUD Hervé	Mathématiques appliquées
ROBERT Gilles	Mathématiques pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie physique
ROSSI André	Physiologie végétale
SAKAROVITCH Michel	Mathématiques appliquées
SARROT REYNAUD Jean	Géologie
SAXOD Raymond	Biologie animale
SOUTIF Jeanne	Physique
SCHOOL Pierre-Claude	Mathématiques appliquées
STUTZ Pierre	Mécanique
SUBRA Robert	Chimie
VIDAL Michel	Chimie organique
VIVIAN Robert	Géographie



J'ai eu la chance d'avoir pour directeur de recherche Monsieur le professeur **A. Le Breton**. Je lui suis très reconnaissant de m'avoir si généreusement aidé et encouragé au cours de l'élaboration de ce travail. Je lui adresse mes plus vifs remerciements pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Monsieur G. Grégoire s'est, dès le début, vivement intéressé à ce travail. Les nombreuses discussions que nous avons eues ont été souvent déterminantes. Je l'en remercie tout particulièrement ainsi que d'avoir accepté de prendre part au jury.

Messieurs S. Martin et **J. L. Soler** ont bien voulu accepter de juger mon travail et prendre part au jury. Je les remercie pour leur lecture attentive et critique et je rends hommage à leurs qualités humaines.

Mes remerciements s'adressent aussi à tous ceux qui ont contribué à la réalisation matérielle de cette thèse et notamment **Nicole Munch** qui a habillé ce travail avec une frappe de grande qualité, **Anne-Marie Chapre** qui fut toujours prête à me prodiguer ses services et **Messieurs Iglesias and Co** qui ont effectué un tirage soigné de cette thèse.

Enfin, je tiens à formuler une pensée chaleureuse à **ma famille** et à tous **mes amis** qui m'ont témoigné patience et encouragement lors des moments les plus difficiles, sans oublier **mes ravissantes collègues** du bureau 36 à qui je souhaite beaucoup de courage... .



TABLE DES MATIERES

	pages
INTRODUCTION	0 - 1
CHAPITRE I : UN CADRE D'ETUDE POUR LES SERIES CHRONOLOGIQUES BINAIRES AVEC RECOMPENSES (J,X)	I - 1
<u>PARTIE A</u> : CARACTERISTIQUES DU PROCESSUS MARGINAL $J = (J_n ; n \in \mathbb{N}^*)$.	I - 3
1 - Lois des durées de séjours et suites de persistances des états.	I - 3
2 - Lois des durées de séjour résiduel, fonctions génératrices et Moments.	I - 5
3 - Lois de statistiques de comptage.	I - 8
<u>PARTIE B</u> : CARACTERISTIQUES CONDITIONNELLES DU PROCESSUS $X = (X_n ; n \in \mathbb{N}^*)$ SACHANT LE PROCESSUS $J = (J_n ; n \in \mathbb{N}^*)$.	I - 9
1 - Lois conditionnelles marginales de dimensions finies.	I - 9
2 - Lois des valeurs cumulées et maximum de la récompense sur des séjours.	I - 12
3 - Lois de la récompense au k-ième et au dernier instant d'une séquence et d'un séjour résiduel.	I - 13
4 - Moments conditionnels.	I - 19
5 - Cas particulier des processus de précipitation.	I - 20

<u>PARTIE C</u> : CARACTERISTIQUES DU PROCESSUS MARGINAL $X = (X_n ; n \in \mathbb{N}^*)$.	I - 22
1 - Lois marginales et caractéristiques du second ordre.	I - 22
2 - Lois des valeurs cumulées et maximum de la récompense sur des périodes.	I - 24
<u>PARTIE D</u> - ANNEXE : MELANGEANCE DE PROCESSUS ET LOIS ASYMPTOTIQUES.	I - 27
CHAPITRE II : SERIES CHRONOLOGIQUES BINAIRES AVEC RECOMPENCES EN DEPENDANCE MARKOVIENNE	II - 1
<u>PARTIE A</u> : SERIES CHRONOLOGIQUES BINAIRES AVEC RECOMPENCES EN DEPENDANCE MARKOVIENNE	II - 2
1 - Définition et premières propriétés	II - 2
2 - Caractéristiques conditionnelles du processus $X=(X_n ; n \in \mathbb{N}^*)$ sachant J	II - 7
3 - Caractéristiques du processus marginal $X=(X_n ; n \in \mathbb{N}^*)$	II - 10
4 - Comportement asymptotique des variables $S_n, S_x(n)$ et $M_x(n)$	II - 14
<u>PARTIE B</u> : SERIES CHRONOLOGIQUES BINAIRES AVEC RECOMPENCES INDEPENDANTES.	II - 19
1 - Définition et premières propriétés.	II - 19
2 - Caractéristiques du processus marginal $X = (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$.	II - 21
2.1. Lois marginales et moments.	II - 21
2.2. Lois des valeurs cumulées et maximum des récompenses sur des périodes.	II - 22

PARTIE C : CHAINES DE MARKOV BINAIRES D'ORDRE 1 AVEC RECOMPENSE. II - 25

- 1 - Définition et premières propriétés. II - 25
- 2 - Caractéristiques du processus $J = (J_n ; n \in \mathbb{N}^*)$. II - 26
- 3 - Caractéristiques du processus (J, X) . II - 30
- 4 - Caractéristiques du processus $X = (X_n ; n \in \mathbb{N}^*)$. II - 31
- 5 - Comportement asymptotique des variables $S_n ; S_X(n)$ et $M_X(n)$. II - 33

CHAPITRE III : SÉRIES CHRONOLOGIQUES BINAIRES AVEC RECOMPENSES RENOUVELEES III - 2

PARTIE A : SERIES CHRONOLOGIQUES BINAIRES AVEC RECOMPENSES RENOUVELEES III - 2

- 1 - Définition et premières propriétés III - 2
- 2 - Caractéristiques conditionnelles du processus marginal $(X_n ; n \in \mathbb{N})$ sachant $(J_n ; n \in \mathbb{N}^*)$ III - 8
- 3 - Caractéristiques du processus marginal $X=(X_n ; n \in \mathbb{N})$. III - 10

PARTIE B : UN CAS PARTICULIER DE SERIES CHRONOLOGIQUES BINAIRES AVEC RECOMPENSES RENOUVELEES. III - 13

- 1 - Caractéristiques du processus (J, X) . III - 13
- 2 - Comportement asymptotique des variables $S_X(n)$ et $M_X(n)$. III - 15

<u>PARTIE C</u> : PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT ALTERNE AVEC RECOMPENSES DECOMPOSABLES.	III -19
1 - Définition et premières propriétés.	III -19
2 - Caractéristiques du processus marginal $J = (J_n ; n \in \mathbb{N}^*)$	III -21
2.1. Définition et propriétés d'un processus de renouvellement alterné.	III -21
2.2. Lois des sommes partielles S_n .	III -23
3 - Caractéristiques du processus (J,X) .	III -26
4 - Caractéristiques du processus X de récompenses.	III -27
4.1. Lois de dimensions finies du processus $X = (X_n ; n \in \mathbb{N}^*)$.	III -27
4.2. Structure de covariance du processus $X = (X_n ; n \geq 1)$.	III -33
CHAPITRE IV : ESSAIS DE MODELISATION EN CLIMATOLOGIE	IV - 1
<u>PARTIE A</u> : MODELISATION DES DONNEES CLIMATOLOGIQUES CONCERNANT LE MOIS D'AVRIL A STRASBOURG	IV - 4
<u>PARTIE A1</u> - ETUDE DU PROCESSUS DE LA SUCCESSION DE JOURS SELON LEUR CARACTERE SEC OU HUMIDE	IV - 4
1 - Caractéristiques observées de séquences. Estimation des paramètres des modèles.	IV - 4
2 - Lois des durées de séquences.	IV - 5
3 - Lois du nombre de jours secs parmi k jours consécutifs.	IV - 6

PARTIE A2 - ETUDE DU PROCESSUS DES QUANTITES DE PRECIPITATIONS $X = (X_t ; t \geq 1)$ A STRASBOURG POUR LE MOIS D'AVRIL. IV -12

- 1 - Etude empirique des lois conditionnelles $H_1(k,.) ; 1 \leq k \leq 3$ IV -12
 - 1.1. Etude de la loi $H_1(1,.)$. IV -12
 - 1.2. Etude empirique de la loi $H_1(2,.)$. Ajustement. IV -15
 - 1.3. Etude empirique de la loi $H_1(3,.)$. Ajustement. IV -17
- 2 - Etude empirique de l'hypothèse $H_1(k,.) = H_1(2,.) ; k \geq 2$. IV -18
 - 2.1. Etude de la loi empirique $H_g(2,.)$ et ajustement. IV -19
 - 2.2. Etude de la loi empirique $H_g(3,.)$ et ajustement. IV -21
 - 2.3. Etude de l'hypothèse $H_1(k,.) = H_1(2,.) ; k \geq 2$. IV -22
- 3 - Etude de la loi de la quantité de précipitation au dernier jour d'une séquence humide. IV -24
 - 3.1. Etude empirique de la loi $H_1^d(.)$. IV -24
- 4 - Etude empirique de la loi du maximum. IV -26
 - 4.1. Lois empiriques et calculées de la variable $M_X(n)$. IV -27

PARTIE B - MODELISATION DE DONNEES CLIMATOLOGIQUES CONCERNANT LE MOIS DE JANVIER A LIMOGES. IV -29

PARTIE B1 : ETUDE DU PROCESSUS DE LA SUCCESSION DES JOURS SELON LEUR CARACTERE SEC OU HUMIDE. IV -29

- 1 - Caractéristiques observées des séquences Estimation des paramètres des trois modèles. IV -29
- 2 - Lois des durées de séquences. IV -30
- 3 - Lois du nombre de jours humides parmi k jours consécutifs. IV -31

<u>PARTIE B2</u> : ETUDE DU PROCESSUS DES QUANTITES DE PRECIPITATIONS $X = (X_t ; t \geq 1)$ A LIMOGES POUR LE MOIS DE JANVIER	IV -36
1 - Etude empirique des lois conditionnelles $H_1(k,.)$; $k = 1,2,3$ Ajustements par des lois gamma.	IV -36
2 - Etude empirique de l'hypothèse " $H_1(k,.) = H_1(3,.)$ pour $k \geq 3$ ".	IV -41
2.1. Etude des lois empiriques $\hat{H}_g(3,.)$ et $\hat{H}_g(4,.)$ Ajustements.	IV -41
2.2. Etude de l'hypothèse $H_1(k,.) = H_1(3,.)$; $k \geq 3$.	IV -43
3 - Etude de la quantité de précipitation au dernier jour d'une séquence humide.	IV -45
<u>ANNEXE 1</u> : MODELES PARTICULIERS DE PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT ALTERNE : DEFINITION ET ESTIMATION	A1 - 1
<u>ANNEXE 2</u> : METHODES D'ESTIMATION DES PARAMETRES D'UNE LOI GAMMA	A2 - 1
<u>ANNEXE 3</u> : PROGRAMMES.	A3 - 1
BIBLIOGRAPHIE	B1 - 1

INTRODUCTION

Dans ce travail nous proposons et étudions plusieurs classes de modèles de séries chronologiques binaires avec récompenses $(J, X) = \{(J_n, X_n) ; n \geq 1\}$, à valeurs dans $(0,1) \times \mathbb{R}_+$, susceptibles d'être utilisés pour la modélisation de divers phénomènes temporels et l'évaluation de risques associés à leur évolution.

L'objectif de départ de notre étude a été d'élaborer un modèle pour la succession des jours selon leur caractère sec ou humide et les quantités de précipitations relevées dans une station climatologique sur une période donnée de l'année. Une telle modélisation peut permettre, par exemple, d'évaluer des risques de développement de longues séquences sèches ou humides dont l'apparition conditionne le succès ou l'échec de certaines cultures. De même, en hydrologie, la détermination des risques de dépassement de certains seuils de quantités de précipitations doit permettre une meilleure gestion des barrages.

Notre travail s'inscrit dans le cadre d'une collaboration entre l'Equipe de Statistique du Laboratoire TIM3 et l'Equipe de Recherche en Climatologie N°30 du C.N.R.S. Il prolonge des études antérieures liées à la modélisation du seul processus de l'enchaînement des séquences sèches et humides à l'aide de séries chronologiques binaires $(J_n ; n \in \mathbb{N}^*)$ (cf. par exemple Galloy - Le Breton - Martin (1983)). Dans ces études, un seuil α de quantité de précipitation étant choisi, un jour est déclaré sec (resp. humide) s'il a été recueilli ce jour moins (resp. plus) de α mm de pluie. Définissant alors, pour une station donnée et un jour t , la variable J_t prenant la valeur 0 (resp. 1) si le jour t est sec (resp. humide) dans la station, des modèles ont été proposés pour le processus $(J_t ; t \in \mathcal{T})$ où \mathcal{T} est une période de l'année (un mois ou deux mois consécutifs).

Afin de modéliser plus complètement le phénomène climatologique concerné, nous avons été amenés à tenter de décrire conjointement avec le processus J , les valeurs observées de la variable climatologique " quantité de précipitation ". Pour ce faire, le cadre naturel d'étude est celui de séries chronologiques binaires avec récompenses $((J_t, X_t) ; t \geq 1)$, où la composante X_t représente la récompense ou la marque

associée à l'état J_t du phénomène au jour t . Nous avons été conduits à envisager différents modèles pour de tels processus, à les analyser et à mener des essais de modélisation pour des données réelles de précipitations. Notons que depuis longtemps, on trouve dans la littérature (en particulier anglo-saxonne) des articles traitant de ce sujet, (cf. notamment Neymann-Scott (1965), Katz (1974), Buishand (1977, 1978), Delleur-Chang-Kavvas (1982)).

Nous nous sommes efforcés, d'une part de donner une présentation unifiée des différents modèles déjà utilisés et, d'autre part, d'enrichir la classe des modèles possibles avec le souci de la commodité pour leur utilisation pratique.

Avant de préciser le plan de notre présentation, signalons que des modèles du type de ceux que nous avons étudiés (ou leurs généralisations immédiates dans le cas où J est un processus à nombre fini d'états, et/ou X est un processus de récompenses multidimensionnel) peuvent être utiles dans d'autres domaines d'application que celui de la modélisation de données de précipitations. Par exemple, dans le cadre de l'étude des performances de systèmes de production d'énergie solaire, de tels modèles peuvent représenter le processus d'entrée des irradiances ou des rapports d'insolation dans un site d'implantation, et permettre l'analyse des risques de non-satisfaction d'un utilisateur. De même, en théorie du risque, ces modèles sont susceptibles de représenter la succession des sinistres et leurs coûts, et d'autoriser l'évaluation de probabilités de ruine (cf. par exemple Janssen (1970, 1982) pour des études dans ce domaine).

Décrivons maintenant brièvement comment nous avons organisé la présentation de notre travail, renvoyant à chacun des chapitres pour une introduction plus détaillée.

Dans le Chapitre I, nous fixons un cadre d'étude pour les séries chronologiques binaires avec récompenses. Nous présentons d'abord les principales caractéristiques d'une série chronologique binaire $(J_n ; n \geq 1)$, notamment les différentes lois des durées de séjour et les suites de persistances pour les états alternatifs. Ensuite nous précisons les caractéristiques utiles du processus marginal X des récompenses conditionnellement au processus J , et en particulier la situation d'indépendance conditionnelle des récompenses sachant le processus J . Puis, nous nous intéressons aux caractéristiques importantes du processus marginal des récompenses. Enfin, une annexe est consacrée à quelques

outils probabilistes concernant la mélangeance de processus et l'étude du comportement asymptotique de certaines variables associées.

L'objet du Chapitre II est de donner une présentation unifiée des différents modèles rencontrés dans la littérature, en particulier ceux utilisés par Todorovic-Woolhiser (1972), par Katz (1977) et plus récemment par Delleur-Chang-Kavvas (1982), pour l'étude de la succession des quantités de précipitation. Nous introduisons d'abord la notion de séries chronologiques binaires avec récompenses en dépendance markovienne traduisant l'hypothèse selon laquelle " la loi de la récompense en un instant t , compte tenu du passé du processus, n'est fonction que des états du processus J aux instants $t-1$ et t ". Les grandes possibilités de calcul et la grande facilité d'utilisation qu'offre cette classe de modèles sont explicitées dans les deux cas particuliers où soit " la loi de la récompense X_t ne dépend que de J_t ", soit le processus binaire J est une chaîne de Markov d'ordre 1.

L'hypothèse de base pour les modèles du Chapitre II étant parfois trop simplificatrice pour rendre compte de manière satisfaisante de l'évolution du phénomène étudié, nous avons été amenés à envisager, dans le Chapitre III, une classe de modèles englobant la classe précédente. Nous proposons des modèles qui reposent sur l'hypothèse que " la loi de la récompense en un instant t , compte tenu du passé du processus, est fonction du temps qui s'est écoulé depuis le dernier changement d'état intervenu dans le processus J avant l'instant t ". Nous introduisons ainsi la notion de séries chronologiques binaires avec récompenses renouvelées. Ces processus se prêtent encore bien aux calculs et aux applications. Nous examinons des cas particuliers dont notamment celui où le processus binaire est lui même un processus de renouvellement alterné.

Dans le quatrième chapitre, nous menons, à l'aide du cadre d'investigation fourni par les chapitres II et III, une étude des séries de quantités de précipitations relevées dans deux stations climatologiques du réseau français pour deux mois de l'année. Ces deux essais permettent de cerner les possibilités d'utilisation des modèles envisagés dans les chapitres précédents.

Signalons que tous les calculs que nous avons effectués sur l'ordinateur HB 68 du centre interuniversitaire de calcul de Grenoble, ont été gracieusement financés par l'Equipe de Recherche N°30 du C.N.R.S.



CHAPITRE I.

UN CADRE D'ETUDE POUR LES SERIES CHRONOLOGIQUES BINAIRES AVEC RECOMPENSES (J, X)

On s'intéresse à des processus stochastiques à temps discret $(J, X) = \{(J_n, X_n) ; n \in \mathbb{N}^*\}$ à valeurs dans $\{0, 1\} \times \mathbb{R}_+$, en vue de la modélisation, pour une station climatologique, du phénomène de la succession des jours, à partir d'un premier jour ($n=1$), selon leur type (supposé appartenir à un ensemble de deux types, par exemple "type humide" = 1, "type sec" = 0) et la valeur mesurée d'une variable climatologique (supposée à valeurs réelles positives, par exemple "quantité de précipitation recueillie" ou "irradiation mesurée par unité de surface"). Un tel processus est appelé série chronologique binaire avec récompenses, la variable aléatoire X_n représentant la "récompense à l'instant n" de la série chronologique binaire J.

A un processus $(J, X) = \{(J_n, X_n) ; n \in \mathbb{N}^*\}$ du type considéré, on associe les variables aléatoires suivantes. Pour $i \in \{0, 1\}$ et $k \geq 1$:

- T_k^i "date de la k-ième entrée du processus $(J_n ; n \in \mathbb{N}^*)$ dans l'état i" représentant l'instant de la k-ième entrée du phénomène observé dans le type i ;
- D_k^i "durée du k-ième séjour du processus $(J_n ; n \in \mathbb{N}^*)$ dans l'état i" représentant la durée du k-ième séjour du phénomène observé dans le type i ;
- S_k^i (resp. M_k^i) "somme (resp. maximum) des récompenses (X_n) durant le k-ième séjour du processus $(J_n ; n \in \mathbb{N}^*)$ dans l'état i", représentant la valeur cumulée (resp. maximum) des récompenses observées au cours du k-ième séjour du phénomène dans le type i.

De façon précise, ces variables sont définies pour $i \in \{0,1\}$, par :

$$T^i_1 = \inf \{ n \geq 1 : J_n = i \},$$

$$D^i_1 = \inf \{ n > T^i_1 : J_n = 1-i \} - T^i_1,$$

$$T^i_k = \inf \{ n > T^i_{k-1} + D^i_{k-1} : J_n = i \} ; \quad k \geq 2,$$

$$D^i_k = \inf \{ n > T^i_k : J_n = 1-i \} - T^i_k ; \quad k \geq 2,$$

$$S^i_k = \sum_{j=0, D^i_{k-1}}^{T^i_k} X_{T^i_k + j} ;$$

$$M^i_k = \sup_k \{ X_{T^i_k + j} ; j = 0, \dots, D^i_k - 1 \} ; \quad k \geq 1.$$

Remarquons que pour $k \geq 2$ la suite d'instants $T^i_k, \dots, T^i_k + D^i_k - 1$ est une "séquence de type i de longueur D^i_k débutant à l'instant T^i_k " au sens que c'est une suite de D^i_k dates (dites de type i) consécutives au cours desquelles le processus J est constamment dans l'état i , immédiatement précédée et suivie par une date (dite de type $1-i$) où J est dans l'état alternatif $1-i$.

Il est clair que la loi d'un processus (J, X) est complètement définie par les lois marginales des vecteurs $(J_1, X_1), \dots, (J_n, X_n)$, $n \geq 1$. Celles-ci sont elles-mêmes entièrement déterminées par les lois des vecteurs (J_1, \dots, J_n) , $n \geq 1$ d'une part, et les lois conditionnelles des vecteurs (X_1, \dots, X_n) sachant (J_1, \dots, J_n) , $n \geq 1$ d'autre part.

Dans ce chapitre, nous précisons les caractéristiques essentielles pour la description d'un processus (J, X) , à travers l'analyse de ces différentes lois de dimensions finies. Nous supposons dans toute la suite de ce chapitre que le processus (J, X) est stationnaire au sens strict. Alors bien sûr, les deux processus marginaux sont eux-aussi stationnaires.

PARTIE A**CARACTERISTIQUES DU PROCESSUS MARGINAL**

$$J = (J_n ; n \in \mathbb{N}^*).$$

Nous présentons dans cette partie les éléments essentiels pour la description d'une série chronologique binaire.

1- Lois des durées de séjour et suites de persistance des états.

On définit "la probabilité p_n^i qu'une séquence de type i dure n instants" comme étant la probabilité qu'une suite de dates de type i soit de longueur exactement n conditionnellement au fait qu'elle débute à l'instant t :

$$(1) \quad p_n^i = P[J_{t+1} = \dots = J_{t+n} = i, J_{t+n+1} = 1-i / J_t = 1-i, J_{t+1} = i]; n \geq 1.$$

Notons que, compte tenu de la stationnarité du processus binaire J , cette probabilité conditionnelle est bien indépendante de l'instant t ; elle est en fait égale à :

$$p_n^i = P[D_1^i = n / T_1^i = 2]; n \geq 1, i = 0, 1$$

Définition 1-

On appelle loi (de la durée) des séquences de type i ou loi des durées de séjour dans l'état i la loi de probabilité $p^i = (p_n^i ; n \in \mathbb{N}^*)$ définie par (1).

On définit aussi "la persistance q_n^i de l'état i au n -ième instant d'une séquence de type i " (i.e. par exemple la persistance de la sécheresse au n -ième jour d'une séquence sèche), comme étant la probabilité que le

séjour dans l'état i dure strictement plus de n instants sachant qu'il a déjà duré n instants, à savoir :

$$(2) \quad q_n^i = P[J_{t+n+1} = i / J_t = 1-i, J_{t+1} = \dots = J_{t+n} = 1] ; n \geq 1, i = 0, 1.$$

Définition 2-

On appelle suite des persistances de l'état i la suite $q^i = (q_n^i ; n \in \mathbb{N}^*)$ définie par (2).

Les relations suivantes liant la suite $q^i = (q_n^i ; n \in \mathbb{N}^*)$ à la suite $p^i = (p_n^i ; n \in \mathbb{N}^*)$ sont évidentes :

$$q_n^i = \frac{\sum_{k \geq n+1} p_k^i}{\sum_{k \geq n} p_k^i} ; n \geq 1,$$

$$p_n^i = \begin{cases} 1 - q_1^i & \text{si } n = 1 \\ q_1^i \dots q_{n-1}^i (1 - q_n^i) & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Notons aussi que la loi p^i et la suite q^i peuvent être reliées à la suite $(Q_n^i ; n \in \mathbb{N}^*)$ où Q_n^i est "la probabilité qu'au cours de n instants consécutifs donnés, le processus binaire J soit dans l'état i " :

$$(3) \quad Q_n^i = P[J_t = \dots = J_{t+n-1} = i] ; n \geq 1, t \geq 1, i = 0, 1.$$

Pour tout entier $n \geq 1$ et pour $i \in \{0, 1\}$ on a les relations suivantes (cf. Essebbar (1984)) :

$$p_n^i = \frac{Q_n^i - 2Q_{n+1}^i + Q_{n+2}^i}{Q_n^i - Q_{n+1}^i} \quad \text{et} \quad q_n^i = \frac{Q_{n+1}^i - Q_{n+2}^i}{Q_n^i - Q_{n+1}^i} .$$

Remarque 1 : Si H_i désigne la fonction de répartition de la loi p^i , la persistance au n -ième instant peut s'écrire :

$$q_n^i = \frac{1 - H_i(n+1)}{1 - H_i(n)} ; \quad n \geq 1.$$

Ainsi, si la suite des persistances est croissante (resp. décroissante, resp. constante), on a :

$$\frac{1 - H_i(n+1)}{1 - H_i(n)} \leq \frac{1 - H_i(n+2)}{1 - H_i(n+1)} \quad (\text{resp. } \geq ; \text{ resp. } =),$$

et donc aussi :

$$\text{Log}[1 - H_i(n+1)] - \text{Log}[1 - H_i(n)] \leq \text{Log}[1 - H_i(n+2)] - \text{Log}[1 - H_i(n+1)] \\ (\text{resp. } \geq ; \text{ resp. } =),$$

et par suite, l'ensemble des points $\{(n, 1 - H_i(n)) ; n \in \mathbb{N}^*\}$ représenté sur papier semi-logarithmique a une courbure positive (resp. négative ; resp. est porté par une droite).

Les suites q^0 et q^1 des persistances sont des caractéristiques importantes d'un modèle de série chronologique binaire. L'allure de l'analogie empirique du nuage $\{(n, 1 - H_i(n)) ; n \geq 1\}$ correspondant à des séquences observées est déterminante quant au choix du type des lois des durées de séquences intéressantes dans le cadre d'une application.

2- Lois des durées de séjour résiduel, fonctions génératrices et moments.

On définit maintenant "la probabilité \hat{p}_n^i qu'un séjour résiduel dans l'état i dure n instants" par :

$$(4) \quad \hat{p}_n^i = P\{J_t = \dots = J_{t+n-1} = i, J_{t+n} = 1-i / J_t = i\} ; \quad n \geq 1, i=0,1,$$

probabilité qui, compte tenu de la stationnarité du processus J , est bien indépendante de t et est aussi donnée par :

$$\hat{p}_n^i = P[D_1^i = n / T_1^i = 1] ; \quad n \geq 1 .$$

Définition J -

On appelle "loi des durées de séjour résiduel dans l'état i "

la loi de probabilité $\hat{p}^i = (\hat{p}_n^i ; n \geq 1)$ définie par (4) .

Notons que si m^0 et m^1 désignent les espérances mathématiques (supposées finies) respectives des lois de temps de séjour p^0 et p^1 ,

J étant supposé stationnaire, on peut relier la loi $\hat{p}^i = (\hat{p}_n^i ; n \geq 1)$ aux deux suites $p^i = (p_n^i ; n \in \mathbb{N}^*)$ et $(Q_n^i ; n \in \mathbb{N}^*)$.

Pour $i \in \{0, 1\}$, on a (cf. Essebbar (1984)) :

$$(5) \quad \hat{p}_n^i = (1/m^i) \sum_{k \geq n} p_k^i ; \quad n \geq 1 ,$$

$$(6) \quad Q_n^i = (m^i / m^0 + m^i) \sum_{k \geq n} \hat{p}_k^i ; \quad n \geq 1 .$$

En particulier : $Q_1^i = m^i / (m^0 + m^i)$.

Notons \mathcal{P}^i et $\hat{\mathcal{P}}^i$ respectivement les fonctions génératrices des lois p^i et \hat{p}^i

$$\text{i.e.} \quad \mathcal{P}^i(t) = \sum_{n \geq 1} t^n p_n^i ; \quad \hat{\mathcal{P}}^i(t) = \sum_{n \geq 1} t^n \hat{p}_n^i , \quad -1 \leq t \leq 1 .$$

Alors, la relation (5) se traduit par la relation suivante :

$$\hat{\mathcal{P}}^i(t) = t (1 - \mathcal{P}^i(t)) / m^i (1-t) .$$

Désignons par $m^i_{[k]}$ le moment factoriel d'ordre k de la loi p^i lorsqu'il existe i.e.

$$m^i_{[k]} = \frac{d^k \varphi^i(t)}{dt^k} \Big|_{t=1} = \sum_{n \geq k} n(n-1)\dots(n-k+1) p_k^i.$$

On a bien sûr $m^i_{[1]} = m^i$.

De même, notons $\hat{m}^i_{[k]}$ le moment factoriel d'ordre k de la loi \hat{p}^i lorsqu'il existe. Alors on a la relation :

$$\hat{m}^i_{[k]} = (1/m^i) [m^i_{[k]} + (1/(k+1)) \cdot m^i_{[k+1]}]; \quad k \geq 1$$

lorsque ces moments existent.

Remarquons aussi que les probabilités de transition entre états pour des instants consécutifs s'expriment aisément en termes des espérances m^0 et m^1 : en effet, d'après (5) et (6) on a :

$$\begin{aligned} P [J_{t+1} = 1 / J_t = 1] &= P [J_{t+1} = 1, J_t = 1] / P [J_t = 1] \\ &= Q_2^1 / Q_1^1 = 1 - (1/m^1). \end{aligned}$$

Alors

$$(7) \quad p_{ij} = P [J_{t+1} = j / J_t = i] = \begin{cases} 1 - (1/m^1) & \text{si } j = 1 \\ 1/m^1 & \text{si } j = 1-i. \end{cases}$$

Remarquons enfin que si π désigne le vecteur ligne :

$$\pi = (P[J_t=0], P[J_t=1]) = (Q_1^0, Q_1^1) = (m^0 / (m^0 + m^1), m^1 / (m^0 + m^1))$$

et P la matrice 2×2

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix}$$

on a $\underline{\pi P} = \underline{\pi}$.

3-Lois de statistiques de comptage.

L'analyse statistique d'un modèle de processus binaire conduit à étudier les propriétés de certaines caractéristiques liées à l'observation du processus au cours d'une suite finie d'instantanés $1, 2, \dots, n$. Les statistiques les plus importantes tant du point de vue de l'estimation des paramètres d'un modèle que de la comparaison entre un modèle ajusté et les observations sont les statistiques de comptage du nombre d'instantanés passés dans l'état 1 sur n instantanés consécutifs, et du nombre de passages de l'état 1 à l'état j entre la date 1 et la date n .

Ces statistiques sont définies respectivement par :

$$S_n = \sum_{t=1}^n J_t \quad ; \quad n \geq 1$$

$$N_n^{ij} = \sum_{t=2}^n (-1)^{i+j} (J_{t-1} + i - 1) (J_t + j - 1) \quad ; \quad i, j = 0, 1 \quad ; \quad n \geq 2.$$

Nous serons donc en particulier amenés à préciser les lois de ces variables ou à proposer des méthodes pour leur calcul dans les modèles envisagés. Notons déjà que $P[S_n = n]$ et $P[S_n = 0]$ ne sont autres que les quantités Q_n^1 et Q_n^0 définies par (3), et que les caractéristiques du second ordre de la variable S_n sont données par :

- $E[S_n] = nQ_1^1 = m^1 / (m^1 + m^0)$
- $\text{var}(S_n) = nC_J(0) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)C_J(k)$,

le processus binaire $(J_n; n \in \mathbb{N}^*)$ étant stationnaire avec pour moyenne $Q_1^1 = m^1 / (m^0 + m^1)$ et pour fonction de covariance :

$$\begin{aligned} C_J(h) &= \text{Cov}(J_t, J_{t+h}) \\ &= Q_1^1 \{ P[J_{h+1} = 1 / J_1 = 1] - Q_1^1 \} \quad ; \quad h \geq 1. \end{aligned}$$

Nous décrirons aussi le comportement asymptotique de la suite de variables $\{S_n; n \geq 1\}$ sous certaines conditions de mélangeance du processus J (cf. Théorème 1 S D).

PARTIE B**CARACTERISTIQUES CONDITIONNELLES DU PROCESSUS
 $X = (X_n ; n \in \mathbb{N}^*)$ SACHANT LE PROCESSUS $J = (J_n ; n \in \mathbb{N}^*)$.**

Nous présentons ici les éléments principaux pour la description des propriétés probabilistes du processus des récompenses $X = (X_n ; n \in \mathbb{N}^*)$ conditionnellement au processus binaire J . Nous présentons notamment la situation d'indépendance conditionnelle des variables X_1, \dots, X_n sachant J_1, \dots, J_m ($m \geq n$) que nous rencontrerons plus loin dans les classes de processus (J, X) que nous envisagerons.

1 - Lois conditionnelles marginales de dimensions finies.

Nous définissons des lois de dimensions finies du processus X conditionnellement à des séjours particuliers du processus J dans l'un des deux états alternatifs.

Relativement aux séquences on introduit :

Définition 4 -

Pour $i \in \{0, 1\}$ on appelle "loi des valeurs de la récompense sur une séquence de type i de longueur n " la loi de probabilité sur \mathbb{R}_+^n définie par la fonction de répartition F_n^i où pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$:

$$F_n^i(x_1, \dots, x_n) = P[X_{t+1} \leq x_1, \dots, X_{t+n} \leq x_n / J_t = 1-i, J_{t+1} = \dots = J_{t+n} = i, J_{t+n+1} = 1-i].$$

Compte tenu de la stationnarité du processus (J, X) cette probabilité conditionnelle est bien indépendante de t .

Relativement aux séjours résiduels on pose :

Définition 5

Pour $\lambda \in \{0,1\}$, on appelle "loi des valeurs de la récompense sur un séjour résiduel dans le type I de longueur n" la loi de probabilité sur \mathbb{R}_+^n définie par la fonction de répartition F_n^λ où pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$:

$$F_n^\lambda(x_1, \dots, x_n) = P[X_t \leq x_1, \dots, X_{t+n-1} \leq x_n / J_t = \dots = J_{t+n-1} = 1, J_{t+n} = 1 - \lambda]$$

On a, pour $k \geq 2$,

$$F_n^\lambda(x_1, \dots, x_n) = \frac{P[X_k \leq x_1, \dots, X_{k+n-1} \leq x_n, J_k = \dots = J_{k+n-1} = 1, J_{k+n} = 1 - \lambda]}{P[J_k = \dots = J_{k+n-1} = 1, J_{k+n} = 1 - \lambda]}$$

$$= (1/Q_1^\lambda p_n^\lambda) \left\{ P[X_k \leq x_1, \dots, X_{k+n-1} \leq x_n / J_1 = \dots = J_{k+n-1} = 1, J_{k+n} = 1 - \lambda] \right.$$

$$\left. + \sum_{l=1}^{k-1} P[X_k \leq x_1, \dots, X_{k+n-1} \leq x_n / J_{k-l} = 1 - \lambda, J_{k-l+1} = \dots = J_{k+n-1} = 1, J_{k+n} = 1 - \lambda] \right.$$

$$\left. \cdot P[J_1 = \dots = J_{k+n-1} = 1, J_{k+n} = 1 - \lambda] \right\}$$

Or $P[J_1 = \dots = J_{k+n-1} = 1, J_{k+n} = 1 - \lambda] = Q_1^\lambda p_{n+k-1}^\lambda$

et $P[J_{k-l} = 1 - \lambda, J_{k-l+1} = \dots = J_{k+n-1} = 1, J_{k+n} = 1 - \lambda] = P[J_1 = 1 - \lambda, J_2 = 1] \cdot p_{n+1-l}^\lambda$

où $P[J_1 = 1 - \lambda, J_2 = 1] = Q_1^\lambda - Q_2^\lambda$.

Désignons, pour $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n-1$, par $F_{n,[k]}^{\lambda(\infty, \cdot)}$ la fonction de répartition :

$$F_{n,[k]}^{\lambda(\infty, \cdot)}(x_{k+1}, \dots, x_n) = \lim_{x_1 \rightarrow +\infty; l \leq k} F_n^\lambda(x_1, \dots, x_n); \quad (x_{k+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^{n-k}$$

utilisons une notation analogue concernant F_n^λ , et convenons que

$$F_{n,[0]}^{\lambda(\infty, \cdot)}(x_1, \dots, x_n) = F_n^\lambda(x_1, \dots, x_n)$$

Alors on a :

$$\begin{aligned} \hat{F}_n^l(x_1, \dots, x_n) &= (1/Q_1^l p_n^l) \left\{ (Q_1^l - Q_2^l) \sum_{l=1}^{k-1} p_{n+l-1}^l F_{n+l-1, [l-1]}^l(\infty, x_1, \dots, x_n) \right. \\ &\quad \left. + Q_1^l p_{n+k-1}^l F_{n+k-1, [k-1]}^l(\infty, x_1, \dots, x_n) \right\} \end{aligned}$$

Passant à la limite lorsque k tend vers $+\infty$, on obtient :

Lemme 1-

La fonction de répartition \hat{F}_n^l de "la loi des valeurs de la récompense sur un séjour résiduel dans le type l de longueur n " est donnée par :

$$\hat{F}_n^l(x_1, \dots, x_n) = (1/m^l p_n^l) \sum_{l=0}^{\infty} p_{n+l}^l F_{n+l, [l]}^l(\infty, x_1, \dots, x_n).$$

Les lois F_n^l , \hat{F}_n^l définies ci-dessus et d'autres lois liées, dans un cadre d'hypothèses a priori sur la liaison entre les variables décrivant le phénomène climatologique, prennent des formes particulièrement simples et adaptées aux calculs des probabilités et au traitement statistique lorsque la condition suivante d'indépendance conditionnelle est vérifiée.

Définition 6 -

On dit que le processus (J, X) vérifie la condition (I.C.) si pour tout $k \geq 2$, les variables aléatoires X_1, \dots, X_k sont indépendantes conditionnellement à J_1, \dots, J_k . i.e. pour $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_+^k$ et $(j_1, \dots, j_k) \in \{0, 1\}^k$ on a

$$P[X_1(x_1, \dots, X_k(x_k) / J_1=j_1, \dots, J_k=j_k)] = \prod_{l=1, k} P[X_l(x_l / J_l=j_l, \dots, J_k=j_k)]$$

Si de plus pour tout $l \geq 2$ et $k \geq 1$ on a pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $(j_1, \dots, j_k) \in \{0, 1\}^k$

$$P[X_l(x / J_l=j_l, \dots, J_k=j_k)] = P[X_l(x / J_l=j_l, \dots, J_l=j_l)],$$

on dit que le processus (J, X) vérifie la condition (I.C. π).

Alors on a pour $k \geq 2$, $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_+^k$, $(j_1, \dots, j_k) \in \{0, 1\}^k$

$$P[X_1(x_1, \dots, X_k(x_k) / J_1=j_1, \dots, J_k=j_k)] = \prod_{l=1, k} P[X_l(x_l / J_l=j_l, \dots, J_l=j_l)].$$

Remarque 2 -

Nous rencontrerons dans la suite trois types particuliers de dépendance où (I.C.x) sera vérifiée avec de plus :

• Soit (cf. chapitre II, S B) "X₁ ne dépend que de l'état à l'instant 1 du processus J" i.e. de façon précise :

$$P \{ X_1 \in x / J_1 = j_1, \dots, J_1 = j_1 \} = P \{ X_1 \in x / J_1 = j_1 \};$$

• Soit (cf. chapitre II, S C) "X₁ ne dépend que des états du processus J aux deux instants 1 et 1-1" i.e.

$$P \{ X_1 \in x / J_1 = j_1, \dots, J_{1-1} = j_{1-1}, J_1 = j_1 \} = P \{ X_1 \in x / J_{1-1} = j_{1-1}, J_1 = j_1 \};$$

• Soit (cf. chapitre III) "X₁ dépend de l'état J₁ et du temps écoulé jusqu'à l'instant 1 depuis le dernier changement d'état du processus J" i.e.

$$P \{ X_1 \in x / J_1 = j_1, \dots, J_1 = j_1 \} = P \{ X_1 \in x / J_1 = \dots = J_{1-k+1} = j_{1-k+1}, J_{1-k} = 1-1 \}$$

$$\text{si } j_1 = \dots = j_{1-k+1} = j_{1-k} \text{ pour } k \in \{1, \dots, 1-1\}.$$

2. Loïs des valeurs cumulées et maximum de la récompense sur des séjours.

L'étude de la distribution des valeurs cumulées et maximum de la récompense sur des séjours particuliers est intéressante pour les applications notamment en vue de l'appréciation de la qualité des ajustements des différents modèles (cf. Todorovic et Woolhiser (1974), Katz (1977) et Bulshand (1977)).

Relativement aux séquences (resp. aux séjours résiduels) on pose :

Définition 7-

Pour $l \in \{0, 1\}$ on appelle "loi de la valeur cumulée de la récompense sur une séquence de type l de longueur n" (resp. "sur un séjour résiduel dans le type l de longueur n") la loi de probabilité sur \mathbb{R}_+ définie par la fonction de répartition R_n^l (resp. \hat{R}_n^l) où pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$R_n^l(x) = P \left[\sum_{j=1, n} X_{t+j} \in x / J_t = 1-1, J_{t+1} = \dots = J_{t+n} = 1, J_{t+n+1} = 1-1 \right]$$

$$\text{(resp. } \hat{R}_n^l(x) = P \left[\sum_{j=0, n} X_{t+j} \in x / J_t = \dots = J_{t+n-1} = 1, J_{t+n} = 1-1 \right]).$$

Définition 8-

Pour $l \in \{0, 1\}$ on appelle "loi de la valeur maximum de la récompense sur une séquence de type l de longueur n" (resp. "sur un séjour résiduel dans le type l de longueur n") la loi de probabilité sur \mathbb{R}_+ , définie par la fonction de répartition U_n^l

(resp. \hat{U}_n^l) où pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, et $n \in \mathbb{N}^*$

$$U_n^l(x) = P\left[\text{Max}_{j=1, \dots, n} X_{t+j} \leq x \mid J_t = l-1, J_{t+1} = \dots = J_{t+n} = l, J_{t+n+1} = l-1 \right]$$

$$\text{(resp. } \hat{U}_n^l(x) = P\left[\text{Max}_{j=0, \dots, n-1} X_{t+j} \leq x \mid J_t = \dots = J_{t+n-1} = l, J_{t+n} = l-1 \right]).$$

Remarque 3-

Les lois R_n^l et \hat{R}_n^l (resp. U_n^l et \hat{U}_n^l) sont les images respectives des lois F_n^l et \hat{F}_n^l par l'application $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n$ (resp. $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \text{Max}_{i=1, \dots, n} (x_i)$). Sous la condition (I.C.), le calcul de ces lois sera particulièrement aisé.

Remarquons aussi que la loi conditionnelle de la variable

$$S_1^l = \sum_{j=0, \dots, D_1^l-1} X_{T_1^l+j}^l$$

sachant $J_1 = l, D_1^l = n$ (resp. $T_1^l = 2, D_1^l = n$) n'est autre que \hat{R}_n^l (resp. R_n^l).

De même, la loi conditionnelle de

$$M_1^l = \text{Sup} \{ X_{T_1^l+j}^l ; j = 0, \dots, D_1^l-1 \}$$

sachant $J_1 = l, D_1^l = n$ (resp. $T_1^l = 2, D_1^l = n$) est la loi \hat{U}_n^l (resp. U_n^l).

3- Lois de la récompense au k-ième et au dernier instant d'une séquence et d'un séjour résiduel.

Dans le cas de la modélisation de la succession des quantités de précipitations dans une station climatologique, il est utile de disposer de

la loi de la hauteur de précipitation au k-ième et au dernier jour d'une séquence humide.

Plus généralement, dans le cas d'un processus (J, X) , on pose :

Définition 9-

Pour $i \in \{0, 1\}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ on appelle "loi de la récompense au k-ième instant d'une séquence (resp. d'un séjour résiduel) de type i" la loi de probabilité sur \mathbb{R}_+ définie par la fonction de

répartition $H_i(k, \cdot)$ (resp. $\hat{H}_i(k, \cdot)$) où pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$H_i(k, x) = P\{X_t \leq x / J_{t-k} = 1-i, J_{t-k+1} = \dots = J_t = 1\}; \quad t \geq k+1$$

$$\text{(resp. } \hat{H}_i(k, x) = P\{X_t \leq x / J_{t-k+1} = \dots = J_t = 1\}; \quad t \geq k).$$

Notons qu'en particulier, la "loi de la récompense en une date de type i"

est définie par $\hat{H}_i(1, \cdot)$.

On a :

$$\begin{aligned} H_i(k, x) &= \sum_{l \geq k+2} P\{X_{k+l} \leq x, J_{k+l} = \dots = J_{l-1} = 1, J_l = 1-i / J_1 = 1-i, J_2 = \dots = J_{k+l} = 1\} \\ &= \sum_{l \geq 0} P\{X_{k+l} \leq x / J_1 = 1-i, J_2 = \dots = J_{k+l+1} = 1, J_{k+l+2} = 1-i\} \\ &\quad \cdot P\{J_{k+l+2} = 1-i, J_{k+l+1} = \dots = J_{k+l} = 1 / J_{k+l} = \dots = J_2 = 1, J_1 = 1-i\} \end{aligned}$$

où

$$P\{J_{k+l+2} = 1-i, J_{k+l+1} = \dots = J_{k+l} = 1 / J_{k+l} = \dots = J_2 = 1, J_1 = 1-i\}$$

$$= \frac{P\{J_{k+l+2} = 1-i, J_{k+l+1} = \dots = J_2 = 1 / J_2 = 1, J_1 = 1-i\}}{P\{J_{k+l} = \dots = J_2 = 1 / J_1 = 1-i, J_2 = 1\}} = p_{k+l}^i / m^i p_k^i.$$

De même on a :

$$\hat{H}_i(k, x) = \sum_{l \geq 0} P\{X_k \leq x / J_1 = \dots = J_{k+l} = 1, J_{k+l+1} = 1-i\} \cdot P\{J_{k+l+1} = 1-i, J_{k+l} = \dots = J_k = 1 / J_1 = \dots = J_k = 1\}$$

où le second facteur du terme général de cette somme s'écrit :

$$\frac{Q_{k+1}^i - Q_{k+1+1}^i}{Q_k^i} = \frac{\hat{p}_{k+1}^i}{\sum_{j \geq 1} \hat{p}_j^i}$$

Notons, pour $n \geq 2$, $1 \leq k \leq n$, $F_{n,k}^i(\infty, \cdot)$ (resp. $\hat{F}_{n,k}^i(\infty, \cdot)$) la fonction de répartition :

$$F_{n,k}^i(\infty, x_k) = \lim_{x_i \rightarrow +\infty; i \neq k} F_n^i(x_1, \dots, x_n); \quad x_k \in \mathbb{R}_+$$

$$\text{(resp. } \hat{F}_{n,k}^i(\infty, x_k) = \lim_{x_i \rightarrow +\infty; i \neq k} \hat{F}_n^i(x_1, \dots, x_n) \text{),}$$

de la k -ième loi marginale de la "loi des valeurs de la récompense sur une séquence (resp. un séjour résiduel) de type i de longueur n ". Alors on a montré :

Lemme 2-

La fonction de répartition $H_i(k, \cdot)$ (resp. $\hat{H}_i(k, \cdot)$) de "la loi de la récompense au k -ième instant d'une séquence (resp. d'un séjour résiduel) de type i " est donnée, pour $k \geq 1$, par :

$$H_i(k, x) = (1/m^i \cdot p_k^i) \sum_{l \geq 0} p_{k+1}^i F_{k+1,k}^i(\infty, x); \quad x \in \mathbb{R}_+$$

$$\text{(resp. } \hat{H}_i(k, x) = (1/\sum_{j \geq k} \hat{p}_j^i) \sum_{l \geq 0} \hat{p}_{k+1}^i \hat{F}_{k+1,k}^i(\infty, x); \quad x \in \mathbb{R}_+ \text{).}$$

On peut préciser les liens entre les lois $H_i(k, \cdot)$ et les lois $\hat{H}_i(k, \cdot)$ par le :

Lemme 3 -

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $l \in \{0,1\}$ on a

$$(8) \quad H_l(k, x) = \frac{Q_{k-1}^l}{Q_k} \wedge H_l(k-1, x) - \frac{Q_{k-1}^l - Q_k^l}{Q_k} H_l(k-1, x); \quad k \geq 2$$

$$(9) \quad H_l(1, x) = \sum_{l \geq 0} p_{k+1}^l \wedge H_l(k, x) + \sum_{l=1}^{k-1} p_1^l H_l(1, x); \quad k \geq 2$$

$$(10) \quad H_l(k, x) = (1/\sum_{l \geq k} p_1^l) \sum_{l \geq k} p_1^l H_l(1, x); \quad k \geq 1.$$

Preuve - Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $l \in \{0,1\}$ et $k \geq 2$ on a :

$$H_l(k, x) = P[X_k \leq x, J_1 = \dots = J_k = 1] / P[J_1 = \dots = J_k = 1]$$

où le dénominateur vaut Q_k^l , et le numérateur peut s'écrire :

$$\begin{aligned} & P[X_k \leq x, J_2 = \dots = J_k = 1] - P[X_k \leq x, J_1 = 1-l, J_2 = \dots = J_k = 1] \\ &= P[X_k \leq x / J_2 = \dots = J_k = 1] \cdot P[J_2 = \dots = J_k = 1] \\ &\quad - P[X_k \leq x / J_1 = 1-l, J_2 = \dots = J_k = 1] \cdot P[J_2 = \dots = J_k = 1, J_1 = 1-l]. \end{aligned}$$

On en tire la relation (8) puisque, (J, X) étant supposé stationnaire, on a les relations suivantes:

$$\begin{aligned} & P[X_k \leq x / J_k = \dots = J_2 = 1] = H_l(k-1, x); \\ & P[X_k \leq x / J_k = \dots = J_2 = 1, J_1 = 1-l] = H_l(k-1, x); \\ & P[J_2 = \dots = J_k = 1] = Q_{k-1}^l; \\ \text{et} \quad & P[J_k = \dots = J_2 = 1, J_1 = 1-l] = Q_{k-1}^l - Q_k^l; \end{aligned}$$

D'autre part, pour $k \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}
P[X_k \leq x, J_k = i] &= P[X_k \leq x, J_1 = \dots = J_k = i] \\
&+ \sum_{l=1, k-1} P[X_k \leq x, J_k = \dots = J_{k-l+1} = i, J_{k-l} = i-1] \\
&= Q_k^i \hat{H}_i(k, x) + \sum_{l=1, k-1} (Q_1^i - Q_{l+1}^i) H_i(k, x).
\end{aligned}$$

Alors, il vient :

$$\begin{aligned}
\hat{H}_i(1, x) &= P[X_k \leq x / J_k = i] \\
&= (Q_k^i / Q_1^i) \hat{H}_i(k, x) + \sum_{l=1}^{k-1} [(Q_1^i - Q_{l+1}^i) / Q_1^i] H_i(k, x)
\end{aligned}$$

d'où (9) puisque d'après (6) on a :

$$Q_k^i = Q_1^i \cdot \sum_{l=0}^{\infty} p_{k+1}^i \quad \text{et} \quad Q_1^i - Q_{l+1}^i = Q_1^i p_1^i.$$

En faisant tendre k vers $+\infty$ dans (9), la loi de la récompense X_n en un jour de type i , s'écrit :

$$\hat{H}_i(1, x) = \sum_{l=1}^{\infty} p_1^i H_i(l, x)$$

car $\sum_{l=1}^{\infty} p_{k+1}^i$ tend vers 0 lorsque k tend vers $+\infty$ et $H_i(k, \cdot)$ reste bornée

uniformément en k , par 1. On déduit alors, en substituant dans (9), à $H_i(1, x)$ l'expression donnée ci-dessus :

$$\sum_{l=1}^{\infty} p_k^i H_i(l, x) = \sum_{l=0}^{\infty} p_{k+1}^i \hat{H}_i(k, x) + \sum_{l=1}^{k-1} p_1^i H_i(l, x)$$

ce qui fournit l'expression (10) de $\hat{H}_i(k, \cdot)$ pour tout $k \geq 1$ \square .

On pose maintenant :

Définition 10 -

Pour $l \in \{0,1\}$ on appelle "loi de la récompense au dernier instant d'une séquence de type l" la loi de probabilité sur \mathbb{R}_+ , définie par la fonction de répartition H_l^d , où pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$H_l^d(x) = P\{X_t \leq x / J_t = l, J_{t+1} = 1-l\}; \quad t \geq 1.$$

On a pour $k \geq 2$

$$\begin{aligned} H_l^d(x) &= P\{X_k \leq x, J_1 = \dots = J_k = l / J_k = l, J_{k+1} = 1-l\} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{k-1} P\{X_k \leq x, J_{k-1} = 1-l, J_{k-1+1} = \dots = J_k = l / J_k = l, J_{k+1} = 1-l\} \\ &= P\{X_k \leq x / J_1 = \dots = J_k = l, J_{k+1} = 1-l\} \cdot \frac{P\{J_1 = \dots = J_k = l, J_{k+1} = 1-l\}}{P\{J_k = l, J_{k+1} = 1-l\}} \\ &\quad + \sum_{l=1}^{k-1} P\{X_k \leq x / J_{k-1} = 1-l, J_{k-1+1} = \dots = J_k = l, J_{k+1} = 1-l\} \\ &\quad \cdot \frac{P\{J_{k-1} = 1-l, J_{k-1+1} = \dots = J_k = l, J_{k+1} = 1-l\}}{P\{J_k = l, J_{k+1} = 1-l\}}. \end{aligned}$$

D'une part on a :

$$\frac{P\{J_1 = \dots = J_k = l, J_{k+1} = 1-l\}}{P\{J_k = l, J_{k+1} = 1-l\}} = \frac{Q_k^l - Q_{k+1}^l}{Q_1^l - Q_2^l} = m^l \overset{\Delta}{p_k^l}$$

et pour $l \in \{1, 2, \dots, k-1\}$

$$P\{J_{k-1} = 1-l, J_{k-1+1} = \dots = J_k = l, J_{k+1} = 1-l\} = p_1^l P\{J_k = l, J_{k+1} = 1-l\}.$$

D'autre part on a par définition, pour $l \in \{1, 2, \dots, k-1\}$

$$\begin{aligned}
& P\{X_k \leq x / J_{k-1} = 1-i, J_{k-1+1} = \dots = J_k = i, J_{k+1} = 1-i\} \\
& = P\{X_{j+1} \leq x / J_1 = 1-i, J_2 = \dots = J_{j+1} = i, J_{j+2} = 1-i\} \\
& = F_{1,[1-i]}^i(\infty, x)
\end{aligned}$$

et

$$P\{X_k \leq x / J_1 = \dots = J_k = i, J_{k+1} = 1-i\} = \hat{F}_{k,[k-1]}^i(\infty, x).$$

En définitive on obtient pour tout $k \geq 2$:

$$H_i^d(x) = \sum_{l=1}^{k-1} p_l^i F_{1,[1-i]}^i(\infty, x) + m^i \hat{p}_k^i \hat{F}_{k,[k-1]}^i(\infty, x)$$

En passant à la limite quand k tend vers l'infini, on déduit le :

Lemme 4 -

La fonction de répartition H_i^d de la "loi de la récompense au dernier instant d'une séquence de type i " est donnée par :

$$H_i^d(x) = \sum_{l=1}^{\infty} p_l^i F_{1,[1-i]}^i(\infty, x)$$

4- Moments conditionnels.

Nous introduisons maintenant certains moments conditionnels de la récompense X_t sachant des séjours particuliers du processus J . Ces moments interviennent dans la détermination des caractéristiques de second ordre du processus X .

Pour $i \in \{0, 1\}$, on désigne par $\hat{\mu}_i^{(r)}(n)$ le moment conditionnel d'ordre r de la récompense X_t sachant qu'au cours des n derniers instants jusqu'à t , le processus binaire J est dans l'état i :

$$\begin{aligned}
\hat{\mu}_i^{(r)}(n) & = E\{X_t^r / J_{t-n+1} = \dots = J_t = i\} \\
& = \int x^r d\hat{H}_i(n, x) \quad ; \quad n \geq 1, t \geq n, r \geq 1.
\end{aligned}$$

On note $\hat{\sigma}_i^2(n)$ la variance $\hat{\sigma}_i^2(n) = \hat{\mu}_i^{(2)}(n) - \hat{\mu}_i^2(n)$ (avec la convention $\hat{\mu}_i(n) = \hat{\mu}_i^{(1)}(n)$). De même pour $i \in \{0, 1\}$ et $n \geq 1$, on note $\hat{\mu}_i^{(r)}(n)$ le moment conditionnel d'ordre r de la variable X_t sachant que t est le n -ième instant d'une séquence de type i :

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_i^{(r)}(n) &= E \{ X_t^r / J_{t-n} = i, J_{t-n+1} = \dots = J_t = i \}; t \geq n+1 \\ &= \int x^r dH_i(n, x). \end{aligned}$$

On note aussi $\sigma_i^2(n)$ la variance $\sigma_i^2(n) = \mu_i^{(2)}(n) - \mu_i^2(n)$ (avec la convention $\mu_i(n) = \mu_i^{(1)}(n)$). Dans la mesure où nous examinerons essentiellement des situations dans lesquelles la condition (I.C.) est satisfaite, nous n'introduirons pas ici les moments croisés conditionnels.

Notons que d'après (10), on a :

$$\hat{\mu}_i^{(r)}(n) = \frac{1}{\sum_{l \geq n} \hat{p}_l^i} \sum_{l \geq n} \hat{p}_l^i \mu_i^{(r)}(l).$$

5-Cas particulier des processus de précipitation.

Dans le cadre de la modélisation de la succession des quantités de précipitations journalières dans une station climatologique, on est amené à particulariser la notion de série chronologique binaire avec récompenses comme suit, dans la perspective où $J_t = 1$ (resp. $J_t = 0$) signifie que le jour t est un jour humide (resp. sec) :

Définition 11-

La série chronologique binaire avec récompenses (J, X) est dite "processus de précipitation" si la loi de la récompense en une date de type 0 est la loi de Dirac δ_0 en 0 i.e.

$$\hat{H}_0(1, x) = 1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+.$$

Alors on a bien sûr :

$$F_n^0 = \hat{F}_n^0 = \delta_0^{\otimes n} \quad ; \quad n \geq 1$$

$$R_n^0 = \hat{R}_n^0 = U_n^0 = \hat{U}_n^0 = \delta_0 \quad ; \quad n \geq 1$$

$$H_0^d(\cdot) = H_0(k, \cdot) = \hat{H}_0(k, \cdot) = \delta_0 \quad ; \quad k \geq 1$$

$$\mu_0^{(r)}(n) = \hat{\mu}_0^{(r)}(n) = 0 \quad ; \quad n \geq 1, r \geq 1.$$

PARTIE C**CARACTERISTIQUES DU PROCESSUS MARGINAL**

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_n ; n \in \mathbf{N}^*).$$

Nous fixons ici les notions principales concernant la structure du processus X et nous introduisons les lois de probabilité de deux variables associées à ce processus, que nous étudierons particulièrement dans la suite de ce travail pour des modèles spécifiques.

1 - Lois marginales et caractéristiques du second ordre.

Il est clair que la loi marginale de dimension finie du processus X correspondant aux composantes (X_1, \dots, X_n) se déduit des lois marginales conditionnelles de dimensions finies

$$P[X_1 \leq \cdot, \dots, X_n \leq \cdot / J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n] ; n \geq 1, (j_1, \dots, j_n) \in \{0, 1\}^n$$

et de la loi du vecteur (J_1, \dots, J_n) par :

$$P[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n] = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \{0, 1\}^n} P[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n / J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n] \cdot P[J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n]$$

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n.$$

En particulier, compte tenu de la relation (10) du Lemme 3 ci-dessus, la "loi de la récompense en un jour quelconque" est définie par la fonction de répartition

$$(11) \quad F_X(x) = P[X_t \leq x] = \frac{1}{m^1 + m^0} [m^0 \hat{H}_0(l, x) + m^1 \hat{H}_1(l, x)]$$

$$= \frac{m^0}{m^0 + m^1} \sum_{l \geq 1} p_l^0 \hat{H}_0(l, x) + \frac{m^1}{m^0 + m^1} \sum_{l \geq 1} p_l^1 \hat{H}_1(l, x)$$

De même, les caractéristiques du second ordre de X (moyenne, fonctions de covariance et de corrélation,...) sont calculables à partir des caractéristiques du second ordre conditionnelles de X sachant J et de la loi de J .

Nous désignerons par $\mu_X^{(r)}$ le moment d'ordre r , $r \geq 1$ (supposé fini) associé au processus $X = (X_n; n \in \mathbb{N}^*)$, i. e.

$$\mu_X^{(r)} = E[X_t^r]; \quad t \geq 1; r = 1, 2, \dots$$

Le moment d'ordre 1, $\mu_X^{(1)}$ sera noté simplement $\mu_X = E(X_t)$. La variance du processus X , supposée strictement positive, est notée σ_X^2 :

$$\sigma_X^2 = \text{var}(X_t) = \mu_X^{(2)} - \mu_X^2.$$

En vertu de (11), avec les notations introduites au paragraphe B.4 ci-dessus, on obtient immédiatement :

$$\begin{aligned} (12) \quad \mu_X^{(r)} &= m^0 / (m^0 + m^1) \hat{\mu}_0^{(r)}(1) + m^1 / (m^0 + m^1) \hat{\mu}_1^{(r)}(1) \\ &= \frac{m^0}{m^0 + m^1} \sum_{l \geq 1} \hat{p}_l^0 \mu_0^{(r)}(l) + \frac{m^1}{m^0 + m^1} \sum_{l \geq 1} \hat{p}_l^1 \mu_1^{(r)}(l). \end{aligned}$$

Enfin, nous noterons $C_X(\cdot)$ et $\rho_X(\cdot)$ respectivement la fonction de covariance et la fonction de corrélation du processus X :

$$C_X(h) = E[X_n X_{n+h}] - \mu_X^2; \quad h \geq 0, n \geq 1.$$

$$\rho_X(h) = C_X(h) / \sigma_X^2; \quad h \geq 0.$$

2- Lois des valeurs cumulées et maximum de la récompense sur des périodes.

Le climatologue attache un intérêt particulier à la distribution des valeurs cumulées ou maximales de certaines variables climatologiques (du type quantité de précipitation ou irradiation) sur des périodes fixées de l'année. L'étude de ces distributions fournit au "modélisateur" un moyen supplémentaire pour apprécier les aptitudes respectives de différents modèles à décrire une certaine réalité climatologique. On pose :

Définition 12-

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on appelle "loi des valeurs cumulées de la récompense sur une période de n dates consécutives", la loi de probabilité sur \mathbb{R}_+ définie par la fonction de répartition

~

H_n où pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\sim \quad H_n(x) = P \left[\sum_{t=t_0+1}^{t_0+n} X_t \leq x \right] ; t_0 \geq 0.$$

~

H_n est en particulier la fonction de répartition de la variable aléatoire :

$$S_X(n) = X_1 + \dots + X_n .$$

~
Pour les calculs de H_n , il sera commode d'introduire les lois conditionnelles de $S_X(n)$ sachant $J_i = 1, i=0,1$, de fonctions de répartition :

$$\sim \quad H_n^1(x) = P \left[\sum_{t=t_0+1}^{t_0+n} X_t \leq x / J_t = 1 \right] ; x \geq 0, t_0 \geq 1$$

dont nous verrons, dans les cas étudiés plus loin, qu'elles peuvent être obtenues récursivement.

Le calcul de la loi de $S_X(n)$ se déduit aisément de celui des deux suites

~
 $\{H_n^0(x); n \geq 1\}$ et $\{H_n^1(x); n \geq 1\}$ grâce à la relation évidente suivante :

$$\tilde{H}_n(x) = Q_1^0 \tilde{H}_n^0(x) + Q_1^1 \tilde{H}_n^1(x) ; \quad x \geq 0, n \geq 1$$

Notons que les moyennes et variances des variables $S_X(n)$, $n \geq 1$, sont données en fonction des caractéristiques du second ordre du processus X par :

$$E[S_X(n)] = n \cdot \mu_X ; \quad n \geq 1$$

$$\text{var}[S_X(n)] = n \cdot \sigma_X^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) C_X(k) ; \quad n \geq 1 .$$

Lorsque cela sera possible, nous préciserons le comportement asymptotique de la suite $\{S_X(n) ; n \in \mathbb{N}^*\}$. Pour ce faire, nous utiliserons le Théorème 1 énoncé dans l'annexe D. On pose maintenant :

Définition 13 -

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on appelle "loi de la valeur maximum de la récompense sur une période de n dates consécutives" la loi de probabilité sur \mathbb{R}_+ définie par la fonction de répartition \tilde{G}_n où pour $x \in \mathbb{R}_+$:

$$\tilde{G}_n(x) = P \left[\text{Max}_{t_0+1 \leq t \leq t_0+n} X_t \leq x \right] ; \quad t_0 \geq 0 .$$

\tilde{G}_n est en particulier la fonction de répartition de la variable aléatoire :

$$M_X(n) = \text{Max} \{ X_t ; 1 \leq t \leq n \}$$

Si \tilde{G}_n^i désigne la fonction de répartition de la loi conditionnelle de $M_X(n)$ sachant $J_1 = i$, $i=0,1$, i.e.

$$\tilde{G}_n^i(x) = P \left[\text{Max}(X_t ; t_0+1 \leq t \leq t_0+n) \leq x / J_{t_0} = i \right] ; \quad x \in \mathbb{R}_+, t_0 \geq 1,$$

alors on a la relation évidente :

$$\tilde{G}_n(x) = Q_1^0 \tilde{G}_n^0(x) + Q_1^1 \tilde{G}_n^1(x) ; n \geq 1, x \geq 0.$$

Le calcul de la loi de la variable aléatoire $M_X(n)$ repose donc sur celui des

deux lois conditionnelles \tilde{G}_n^0 et \tilde{G}_n^1 , qui, dans les modèles que nous rencontrerons, pourront être déterminées à l'aide d'algorithmes. Nous nous efforcerons aussi de préciser le comportement asymptotique de la suite $\{M_X(n), n \in \mathbb{N}^*\}$. Pour ce faire, nous utiliserons le Théorème 2 énoncé dans l'annexe D.

Remarque 4 -

Nous nous intéresserons également aux variables aléatoires $S_X^l(n)$ (resp $M_X^l(n)$), $l = 0, 1, n \geq 1$, définies par :

$$S_X^1(n) = \sum_{t=1, n} (J_t X_t) ; \quad S_X^0(n) = \sum_{t=1, n} (1 - J_t) X_t$$

$$\text{(resp. } M_X^1(n) = \max_{t=1, n} (J_t X_t); \quad M_X^0(n) = \max_{t=1, n} ((1 - J_t) X_t))$$

représentant la valeur cumulée (resp. maximum) de la récompense sur les dates de type 1 et 0 respectivement d'une période de n dates consécutives. Notons que :

$$S_X(n) = S_X^0(n) + S_X^1(n) \quad \text{et} \quad M_X(n) = \text{Max} (M_X^0, M_X^1(n))$$

Remarquons aussi que le processus (J, X) où $X = J_t X_t, t \geq 1$, est un processus de précipitation au sens de la Définition 11 puisque :

$$P[\tilde{J}_t = 0, \tilde{X}_t \leq x] = P[\tilde{J}_t = 0] \quad \text{pour tout } x \geq 0 ;$$

De plus, pour un processus de précipitation, on a bien sûr :

$$S_X(n) = S_X^1(n), \quad M_X(n) = M_X^1(n) \quad \text{et} \quad S_X^0(n) = M_X^0(n) = 0.$$

PARTIE D**ANNEXE : MELANGEANCE DE PROCESSUS ET LOIS ASYMPTOTIQUES.**

Nous présentons ici quelques résultats généraux utiles pour l'étude du comportement asymptotique des suites $(S_n ; n \in \mathbb{N}^*)$, $(S_X(n) ; n \in \mathbb{N}^*)$ et $(M_X(n) ; n \in \mathbb{N}^*)$.

Rappelons qu'un processus stationnaire $Y = (Y_t ; t \geq 1)$ est dit super-uniformément mélangeant ou Ψ -mélangeant (resp. uniformément mélangeant ou φ -mélangeant) si pour une suite de nombres réels positifs $\{\Psi(n) ; n \geq 1\}$ (resp. $\{\varphi(n) ; n \geq 1\}$) de limite nulle lorsque n tend vers l'infini, on a :

$$\sup_k \sup_{A \in \mathcal{F}_k, B \in \mathcal{F}^{k+n}} \frac{|P(A \cap B) - P(A)P(B)|}{P(A)P(B)} \leq \Psi(n) ; n \geq 1$$

(resp.

$$\sup_k \sup_{A \in \mathcal{F}_k, B \in \mathcal{F}^{k+n}} \frac{|P(A \cap B) - P(A)P(B)|}{P(A)} \leq \varphi(n) ; n \geq 1$$

où \mathcal{F}_k et \mathcal{F}^{k+n} désignent respectivement les tribus engendrées par les variables $(Y_t ; t \leq k)$ et les variables $(Y_t ; t \geq k+n)$. Notons qu'un processus Ψ -mélangeant est nécessairement φ -mélangeant (avec la même "fonction de mélangeance").

Définissons pour $n \geq 1$ la variable aléatoire $S_Y(n)$ par :

$$S_Y(n) = \sum_{t=1}^n Y_t$$

Enonçons un résultat dû à Ibragimov-Linnik (1971).

Théorème 1 -

Soit $Y = (Y_t ; t \geq 1)$ un processus du second ordre stationnaire φ -mélangeant. Alors :

(i) la suite $\{ (1/n) S_Y(n) ; n \geq 1 \}$ converge presque sûrement vers $E[Y_1]$.

(ii) si de plus la série $\sum_n \varphi^{1/2}(n)$ est convergente, et $\gamma^2 = C_Y(0) + 2 \sum_n C_Y(n) > 0$ où C_Y désigne la fonction de covariance de Y , la suite $\{(S_Y(n) - n E(Y_1)) / \gamma \sqrt{n} ; n \geq 1\}$ est asymptotiquement de loi gaussienne centrée et réduite.

Définissons pour $n \geq 1$ la variable aléatoire $M_Y(n)$ par :

$$M_Y(n) = \text{Sup} \{ Y_t ; 1 \leq t \leq n \}$$

et, étant donné (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels ($a_n > 0, n \geq 1$), posons :

$$V_n = [M_Y(n) - b_n] / a_n ; n \geq 1.$$

L'étude des lois limites des suites de variables aléatoires $(V_n ; n \geq 1)$ a fait l'objet de nombreux travaux. Notamment Gnedenko (1943) a montré que lorsque les variables aléatoires (Y_t) sont indépendantes et équidistribuées, trois types de lois limites sont possibles, dont la loi (dite loi de Gumbel) définie par la fonction de répartition :

$$\Lambda(x) = \exp(-e^{-x}) ; x \in \mathbb{R}.$$

Pour des processus Y stationnaires possédant certaines propriétés de mélangeance, d'autres auteurs ont montré que, sous certaines conditions, la loi limite de la suite $(V_n ; n \in \mathbb{N}^*)$ coïncide avec celle de la suite

analogue $\{V_n ; n \geq 1\}$ obtenue à partir d'un processus \tilde{Y} (dit processus indépendant associé à Y) de variables aléatoires indépendantes équidistribuées selon la loi de Y_1 .

Enonçons un résultat dû à Loynes (1964) :

Théorème 2 -

Soit $Y = (Y_t ; t \geq 1)$ un processus stationnaire φ -mélangeant, et $(a_n, n \geq 1)$, $(b_n, n \geq 1)$ deux suites de réels ($a_n > 0$). Supposons que :

- (i) la série $\sum_{n \geq 1} \varphi(n)$ est convergente ,
- (ii) pour tout $k \geq 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} P[Y_{k+1} > x / Y_1 > x] = 0$
- (iii) pour tout x , $\lim_{n \rightarrow +\infty} (P[Y_1 \leq a_n x + b_n])^n = \Phi(x)$

où Φ est une fonction de répartition non dégénérée. Alors la suite $(V_n ; n \geq 1)$ est asymptotiquement de loi Φ .

Pour d'autres énoncés, on pourra consulter Resnick-Neuts (1970), Fabens-Neuts (1970), O'Brien-Denzel (1975).

Von-Mises (1936) a fourni un critère permettant d'assurer qu'une loi de fonction de répartition G appartient au domaine d'attraction de la loi limite définie par Λ , i.e. que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G^n(a_n x + b_n) = \Lambda(x); \quad x \in \mathbb{R}$$

pour certaines suites $(a_n, n \geq 1)$ et $(b_n ; n \geq 1)$.

Critère de Von-Mises -

Supposons que G est une fonction de répartition vérifiant :

- (i) $G(x) < 1$ pour tout x
- (ii) Il existe x_0 tel que $G'(x)$ et $G''(x)$ existent pour tout $x \geq x_0$

(iii) si $g(x) = G'(x) / (1 - G(x))$ on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = 0$.

Alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G^n(u_n + x / n G'(u_n)) = \Lambda(x)$$

où u_n est la plus petite racine de l'équation $1 - G(x) = 1/n$; $n \geq 2$.

Remarque 5 -

La suite $(u_n ; n \geq 2)$ est appelée "suite des plus grandes valeurs caractéristiques de G" (cf. Gumbel (1958) page 82). Elle est monotone croissante et tend vers l'infini (cf. Von-Mises (1936) page 277).

La fonction g définie au point (iii) du critère précédent est connue sous le nom de "fonction d'intensité" associée à la fonction de répartition G (cf. Gumbel (1958) page 20).

Si on définit le "quotient critique" (cf. Gumbel (1958) page 119) par :

$$h(x) = - \frac{(G'(x))^2}{G''(x)(1-G(x))} ; \quad x \geq x_0$$

alors, pour vérifier la condition (iii) du critère de Von-Mises, il suffit de montrer que la fonction h définie ci-dessus tend vers 1 lorsque x tend vers l'infini.

A titre d'exemple d'application du critère de Von-Mises, et en vue d'utilisation dans des modèles particuliers des chapitres suivants, nous considérons le cas où la fonction de répartition G est définie par une combinaison convexe de k ($k \geq 1$) fonctions de répartition γ_i de lois gamma de paramètres (α_i, λ_i) , $i=1,2,\dots,k$ et de la loi de Dirac δ_0 .

On pose :

$$(13) \quad G(x) = \sum_{i=1}^k p_i \gamma_i(x) + p_{k+1} \delta_0(x); \quad x \geq 0$$

où $0 \leq p_{k+1} < 1$, pour $i \in \{1, \dots, k\}$, $p_i \in [0, 1]$ et $\sum_{i=1, k+1} p_i = 1$,

les fonctions de répartition $\gamma_i(\cdot)$ étant définies par les densités θ_i correspondantes :

$$\theta_i(x) = \frac{1}{\lambda_i^{\alpha_i} \Gamma(\alpha_i)} x^{\alpha_i - 1} e^{-x/\lambda_i}; \quad x \geq 0; \lambda_i > 0, \alpha_i > 0, i = 1, \dots, k.$$

On peut alors énoncer :

Lemme 5 -

Soit G la fonction de répartition définie par (13). Alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G^n(u_n + x/n | G(u_n)) = \exp(-e^{-x}); \quad x \in \mathbb{R}$$

où $(u_n; n \geq 2)$ est la suite des plus grandes valeurs caractéristiques de G .

Preuve - Il est clair que les conditions (i) et (ii) du critère de Von-Mises sont satisfaites. Montrons que la condition (iii) de ce critère est aussi vérifiée.

$$\text{Posons} \quad \lambda = \max_{i=1, \dots, k} (\lambda_i);$$

soit $j \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\lambda = \lambda_j$ et posons $\alpha = \alpha_j; \rho = \rho_j$;

De la règle de l'Hopital (cf. Gumbel (1958), page 118) et des règles classiques de croissance comparée des fonctions puissances et exponentielles, on déduit facilement que :

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-(\alpha-1)} e^{x/\lambda} (1-G(x)) = \frac{\rho}{\lambda^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)}$$

$$(15) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-(\alpha-1)} e^{x/\lambda} G'(x) = \frac{\rho}{\lambda^{\alpha} \Gamma(\alpha)}$$

$$(16) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-(\alpha-1)} e^{x/\lambda} G''(x) = -\frac{\rho}{\lambda^{\alpha+1} \Gamma(\alpha)}$$

Les égalités (14), (15), et (16) permettent d'obtenir la limite du quotient critique $h(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{(\rho/\lambda^\alpha \Gamma(\alpha))^2}{(\rho/\lambda^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)) (\rho/\lambda^{\alpha+1} \Gamma(\alpha))} = 1.$$

Ainsi, en vertu de la remarque 5, (iii) est vérifiée. \square

Notons que les constantes de normalisation $a_n = 1/n \cdot G'(u_n)$ et $b_n = u_n$ fournies par le critère de Von-Mises ne sont pas en général explicites. Le résultat suivant (cf. Feller (1966) page 246 et aussi Resnick-Neuts (1970)) est utile pour la détermination de constantes explicites :

Lemme 6 -

Soit $\{F_n ; n \geq 1\}$ une suite de fonctions de répartition telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(a_n x + b_n) = \Phi(x) ; \quad x \in \mathbb{R}$$

pour certaines suites $(a_n ; n \geq 1)$ et $(b_n ; n \geq 1)$ ($a_n > 0$), Φ étant une fonction de répartition non dégénérée. Si $(\alpha_n ; n \geq 1)$, $(\alpha_n > 0)$ et $(\beta_n ; n \geq 1)$ sont deux suites de nombres réels vérifiant les deux conditions suivantes :

$$(i) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n / a_n = 1$$

$$(ii) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (\beta_n - b_n) / a_n = 0,$$

$$\text{alors on a aussi } \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(\alpha_n x + \beta_n) = \Phi(x).$$

Dans le cas des lois du type défini par (13), on peut alors énoncer :

Lemme 7 -

Soit G la fonction de répartition définie par (13). Posons :
 $\lambda = \max_{i=1, \dots, k} \lambda_i$. Soit (α, ρ) un couple (α_j, ρ_j) tel que $\lambda_j = \lambda$.

Définissons :

$$\beta_n = \lambda \operatorname{Log} (n \rho / \lambda^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)) + \lambda(\alpha-1) \operatorname{Log} [\lambda \operatorname{Log} (n \rho / \lambda^{\alpha-1} \Gamma(\alpha))]; \quad n \geq 1.$$

Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} G^n(\lambda x + \beta_n) = \exp(-e^{-x}); \quad x \in \mathbb{R}.$

Preuve - En vertu du lemme 5, il suffit de montrer que les deux conditions (i) et (ii) du lemme 6 sont vérifiées pour les suites (α_n) , (β_n) et (a_n) , (b_n) où $\alpha_n = \lambda$, β_n , $n \geq 1$ est donnée dans l'énoncé et $a_n = 1/nG'(u_n)$, $b_n = u_n$; $n \geq 1$. Par définition de u_n , d'après (14) et (15) on a :

$$(14') \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (1/n) u_n^{-(\alpha-1)} e^{u_n/\lambda} = \rho / \lambda^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)$$

$$(15') \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^{-(\alpha-1)} e^{u_n/\lambda} G'(u_n) = \rho / \lambda^{\alpha} \Gamma(\alpha).$$

On déduit de (14') et (15') que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lambda$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n / a_n = 1$ et (i) est vérifiée.

D'autre part, pour $n \geq 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \beta_n - b_n &= \lambda [r_n + (\alpha-1) \operatorname{Log} (\lambda r_n) - (1/\lambda) u_n], \\ &= \lambda (\alpha-1) \operatorname{Log} (\lambda r_n / u_n) - \lambda [1/\lambda u_n^{-(\alpha-1)} \operatorname{Log} (u_n) - r_n] \end{aligned}$$

où $r_n = \operatorname{Log} (n \rho / \lambda^{\alpha-1} \Gamma(\alpha))$; $n \geq 1$.

D'après (14') on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n^{-(\alpha-1)} e^{u_n/\lambda}}{e^{r_n}} = 1$$

d'où aussi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [1/\lambda u_n - (\alpha-1) \text{Log}(u_n) - r_n] = 0 .$$

Puisque u_n tend vers l'infini, cette dernière égalité entraîne :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda r_n / u_n = 1 ;$$

par suite, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\beta_n - b_n) = 0 .$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lambda$, (ii) est aussi satisfaite et le Lemme 6 permet de

conclure . \square

CHAPITRE II.

SERIES CHRONOLOGIQUES BINAIRES AVEC RECOMPENSES EN DEPENDANCE MARKOVIENNE

Todorovic et Woolhiser (1971) ont proposé un modèle de processus (J, X) pour l'étude de la succession des quantités de précipitation dans une station climatologique. Dans ce modèle dit "processus de précipitation", le processus J est une chaîne de Markov binaire d'ordre 1 et, conditionnellement à la succession des états de la chaîne J , les variables X_t , $t=1,2,\dots$ sont indépendantes, équidistribuées selon δ_0 (loi de Dirac en 0) pour les instants t tels que $J_t=0$ (jour t sec), équidistribuées selon une loi F_1 pour les instants t tels que $J_t=1$ (jour t humide).

D'autres auteurs ont repris cette approche, sous d'autres hypothèses concernant le processus J , pour décrire la suite des précipitations dans diverses régions (cf. en particulier Bulshand (1977) et Delleur-Chang-kavvas (1982)).

D'autres travaux, notamment ceux de katz (1977), s'appuient sur des modèles, dit "processus à dépendance en chaîne", où J est une chaîne de Markov d'ordre 1 et, conditionnellement à J , les variables (X_t) sont indépendantes, la loi de X_t pouvant dépendre de l'état de J aux instants $t-1$ et t .

L'objet de ce chapitre est de donner une présentation unifiée de ces différents modèles et des possibilités de calcul qu'ils offrent. On introduit d'abord la notion de série chronologique binaire avec récompenses en dépendance markovienne, puis on examine des cas particuliers dont ceux rencontrés dans la littérature.

PARTIE A**SERIES CHRONOLOGIQUES BINAIRES AVEC RECOMPENSES EN
DEPENDANCE MARKOVIENNE.****1- Definition et premières propriétés.**

On pose :

Définition 1

On appelle "Série chronologique binaire avec récompenses en dépendance markovienne" un processus (J, X) tel que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) Pour tout $n \geq 3$, $(j_1, \dots, j_{n-2}, i, j) \in \{0, 1\}^n$ et $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1}$

$$\begin{aligned} P[X_n \leq x / J_1 = j_1, \dots, J_{n-2} = j_{n-2}, J_{n-1} = i, J_n = j, X_1 \leq x_1, \dots, X_{n-1} \leq x_{n-1}] \\ = P[X_2 \leq x / J_1 = i, J_2 = j, X_1 \leq x_1] \\ = P[X_2 \leq x / J_1 = i, J_2 = j] = F_{ij}(x) ; \quad x \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

(ii) Pour tout $n \geq 2$, $(j_1, \dots, j_{n-1}, j) \in \{0, 1\}^n$ et $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1}$

$$\begin{aligned} P[J_n = j / J_1 = j_1, \dots, J_{n-1} = j_{n-1}, X_1 \leq x_1, \dots, X_{n-1} \leq x_{n-1}] \\ = P[J_n = j / J_1 = j_1, \dots, J_{n-1} = j_{n-1}, X_1 \leq x_1] \end{aligned}$$

Remarque 1 -

Il est clair que la loi d'un tel processus (J, X) est entièrement définie à partir de la donnée des lois F_{ij} ; $i, j = 0, 1$, et de la loi conjointe de X_1 et du processus binaire J . En effet, pour $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ et $(j_1, j_2) \in \{0, 1\}^2$ on a :

$$\begin{aligned} P[X_2 \leq x_2, X_1 \leq x_1, J_2 = j_2, J_1 = j_1] \\ = P[X_2 \leq x_2 / X_1 \leq x_1, J_2 = j_2, J_1 = j_1] \cdot P[X_1 \leq x_1, J_2 = j_2, J_1 = j_1] \\ = F_{j_1 j_2}(x_2) \cdot P[X_1 \leq x_1, J_1 = j_1, J_2 = j_2], \end{aligned}$$

et plus généralement, pour $n \geq 3$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et $(j_1, \dots, j_n) \in \{0, 1\}^n$, on a :

$$\begin{aligned} & P [X_n \leq x_n, \dots, X_1 \leq x_1, J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n] \\ &= P [X_n \leq x_n / J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n, X_1 \leq x_1, \dots, X_{n-1} \leq x_{n-1}] \\ &\quad \cdot P [J_n = j_n / J_1 = j_1, \dots, J_{n-1} = j_{n-1}, X_1 \leq x_1, \dots, X_{n-1} \leq x_{n-1}] \\ &\quad \dots P [X_2 \leq x_2 / J_1 = j_1, J_2 = j_2, X_1 \leq x_1] \cdot P [X_1 \leq x_1, J_1 = j_1, J_2 = j_2] \end{aligned}$$

soit, compte tenu des deux conditions (I) et (II) :

$$\begin{aligned} (I) \quad & P [X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n, J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n] \\ &= P [X_1 \leq x_1, J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n] \cdot \prod_{k=2, n} F_{j_{k-1} j_k} (x_k) \end{aligned}$$

L'égalité (I) permet de démontrer la proposition suivante.

Proposition 1 -

Soit (J, X) une série chronologique binaire avec récompenses en dépendance markovienne. Alors :

(I) (J, X) vérifie la condition (I.C.) avec, pour $2 \leq k \leq n$, $(j_1, \dots, j_n) \in \{0, 1\}^n$:

$$P [X_k \leq x / J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n] = F_{j_{k-1} j_k} (x) ; \quad x \in \mathbb{R}_+$$

(II) (J, X) est un processus stationnaire si et seulement si J est stationnaire, et de plus pour tout $n \geq 1$ la loi conjointe des variables X_1, J_1, \dots, J_n est donnée par :

$$\begin{aligned} (2) \quad & P [X_1 \leq x, J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n] \\ &= \sum_{l=0, 1} F_{lj} (x) P [J_1 = l, J_2 = j_1, \dots, J_{n+1} = j_n] ; \\ & \quad x \in \mathbb{R}_+ ; (j_1, \dots, j_n) \in \{0, 1\}^n. \end{aligned}$$

Preuve - L'assertion (I) est une conséquence immédiate de l'égalité (1). Pour démontrer (II), déterminons la loi conjointe des n vecteurs aléatoires $(J_k, X_k), \dots, (J_{k+n-1}, X_{k+n-1})$ pour $k \geq 2$ et $n \geq 1$.

On a pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et $(j_1, \dots, j_n) \in \{0, 1\}^n$:

$$\begin{aligned}
 & P [X_k \leq x_1, J_k = j_1, \dots, X_{k+n-1} \leq x_n, J_{k+n-1} = j_n] \\
 &= \sum_{(i_1, \dots, i_{k-1})} P [X_k \leq x_1, \dots, X_{k+n-1} \leq x_n / J_1 = i_1, \dots, J_{k-1} = i_{k-1}, J_k = j_1, \dots, J_{k+n-1} = j_n] \\
 & \quad \cdot P [J_1 = i_1, \dots, J_{k-1} = i_{k-1}, J_k = j_1, \dots, J_{k+n-1} = j_n].
 \end{aligned}$$

D'après la Définition 1, la probabilité conditionnelle qui figure sous le signe somme est égale à :

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{y_1 \rightarrow +\infty} P [X_1 \leq y_1, \dots, X_{k-1} \leq y_{k-1}, X_k \leq x_1, \dots, X_{k+n-1} \leq x_n \\
 & \quad / J_1 = i_1, \dots, J_{k-1} = i_{k-1}, J_k = j_1, \dots, J_{k+n-1} = j_n] \\
 &= \lim_{y_1 \rightarrow +\infty} \prod_{l=2}^{k-1} F_{i_{l-1} i_l} (y_l) \cdot F_{i_{k-1} j_k} (x_1) \cdot \prod_{l=2}^n F_{j_{l-1} j_l} (x_l) \\
 & \quad \cdot P [X_1 \leq y_1 / J_1 = i_1, \dots, J_{k-1} = i_{k-1}, J_k = j_1, \dots, J_{k+n-1} = j_n] \\
 &= F_{i_{k-1} j_k} (x_1) \cdot \prod_{l=2, n} F_{j_{l-1} j_l} (x_l).
 \end{aligned}$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
 & P [X_k \leq x_1, \dots, X_{k+n-1} \leq x_n, J_k = j_1, \dots, J_{k+n-1} = j_n] \\
 &= \prod_{l=2, n} F_{j_{l-1} j_l} (x_l) \cdot \sum_{i=0, 1} F_{i j} (x_1) P [J_{k-1} = i, J_k = j_1, \dots, J_{k+n-1} = j_n].
 \end{aligned}$$

Alors, si le processus (J, X) est stationnaire, J est aussi stationnaire et on a nécessairement, en vertu de l'expression (1) de la loi conjointe des n vecteurs aléatoires $(J_1, X_1), \dots, (J_n, X_n)$:

$$P [X_1 \leq x, J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n] = \sum_{i=0, 1} F_{i j} (x) P [J_1 = i, J_2 = j_1, \dots, J_{n+1} = j_n]$$

Réciproquement, il est clair que si J est stationnaire, et si de plus la loi conjointe de X_1 et de J est donnée par (2), alors (J, X) est stationnaire

puisque, dans ce cas pour $k \geq 2$ et $n \geq 1$, la loi conjointe des vecteurs $(J_k, X_k), \dots, (J_{k+n-1}, X_{k+n-1})$ est identique à celle, donnée par (1), des vecteurs $(J_1, X_1), \dots, (J_n, X_n)$. \square

Remarquons qu'une série chronologique binaire avec récompenses en dépendance markovienne est un processus de précipitation si $F_{10} = F_{00} = \delta_0$.

Précisons maintenant l'expression (2) des probabilités conjointes pour les variables X_1, J_1, \dots, J_n , dans les cas particuliers où pour $n \geq 2$, $J_1 = \dots = J_n$ soit $J_1 = \dots = J_{n-1} \neq J_n$. Pour $j \in \{0, 1\}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, si (J, X) est stationnaire, on a :

$$P[X_1 \leq x, J_1 = j] = P[J_1 = 1-j, J_2 = j]F_{1-j,j}(x) + P[J_1 = J_2 = j]F_{jj}(x)$$

$$\text{où } P[J_1 = 1-j, J_2 = j] = Q_1^j - Q_2^j = Q_1^j \cdot \hat{p}_1^j$$

$$\text{et } P[J_1 = j, J_2 = j] = Q_2^j = Q_1^j (1 - \hat{p}_1^j).$$

Il vient donc

$$P[X_1 \leq x, J_1 = j] = Q_1^j \{ \hat{p}_1^j F_{1-j,j}(x) + (1 - \hat{p}_1^j) F_{jj}(x) \}.$$

Par suite, pour $j \in \{0, 1\}$, la "loi de la récompense en une date de type j" est donnée par la fonction de répartition

$$(3) \quad H_j(1, x) = P[X_1 \leq x / J_1 = j] = (1/m^j) F_{1-j,j}(x) + (1 - 1/m^j) F_{jj}(x);$$

Plus généralement, on a pour $n \geq 2$:

$$P[X_1 \leq x, J_1 = \dots = J_n = j] = (Q_n^j - Q_{n+1}^j) F_{1-j,j}(x) + Q_{n+1}^j F_{jj}(x).$$

Alors la "loi de la récompense au premier instant d'un séjour résiduel de type j de longueur supérieure à n",

i.e. la loi conditionnelle de X_1 sachant $J_1 = \dots = J_n = j$ est définie par la fonction de répartition :

$$(4) \quad P[X_1 \leq x / J_1 = \dots = J_n = j] = (1 / \sum_{k \geq n} \hat{p}_k^j) \{ \hat{p}_n^j F_{1-j,j}(x) + (\sum_{k \geq n+1} \hat{p}_k^j) \cdot F_{jj}(x) \}.$$

De même, pour $n \geq 1$ et $j \in \{0, 1\}$, on peut montrer à partir de (2) que "la loi de la récompense au premier instant d'un séjour résiduel de type j de longueur n " est donnée par la fonction de répartition :

$$(5) \quad P[X_1 \leq x / J_1 = \dots = J_n = j, J_{n+1} = 1-j] \\ = (1 / \sum_{k \geq n} \hat{p}_k^j) \{ \hat{p}_n^j F_{1-j,j}(x) + \sum_{k \geq n+1} \hat{p}_k^j \cdot F_{jj}(x) \} ; \quad x \geq 0.$$

En particulier, relativement à un séjour résiduel de longueur 1, on a :

$$(6) \quad P[X_1 \leq x / J_1 = j, J_2 = 1-j] = \hat{p}_1^j F_{1-j,j}(x) + (1 - \hat{p}_1^j) F_{jj}(x).$$

Remarque 2 -

Il résulte de la condition nécessaire et suffisante (ii) de la Proposition 1, que la loi d'une série chronologique binaire avec récompenses en dépendance markovienne stationnaire est entièrement définie à partir de la donnée des lois F_{ij} , $(i, j) \in \{0, 1\}^2$ et de la loi du processus binaire $J = (J_n ; n \in \mathbb{N}^*)$. Dans la suite, nous retiendrons des processus binaires du type renouvellement alterné (dont font partie les chaînes de Markov binaires d'ordre 1 et 2), ou DARMA (cf. Jacob-Lewis (1978 a - 1978 b)) pour définir complètement des lois de processus (J, X) . Ces modèles de séries chronologiques binaires ont en effet été utilisés avec succès pour la modélisation du phénomène climatologique de la succession des jours selon leur caractère sec ou humide dans une station de mesure. Leurs caractéristiques seront précisées plus loin.

2 - Caractéristiques conditionnelles du processus
 $X = (X_n : n \in \mathbb{N}^*)$ sachant J .

On suppose désormais que le processus (J, X) vérifie les deux conditions (i) et (ii) de la définition 1 et qu'en outre (J, X) est stationnaire.

On a :

Proposition 2 -

Pour $l \in \{0, 1\}$, la fonction de répartition de "la loi des valeurs de la récompense sur une séquence (resp. sur un séjour résiduel) de type l de longueur n " est donnée pour $n = 1$ par : $F_1^l = F_{1-l, l}$

(resp. $\hat{F}_1^l = p_1^l F_{1-l, l} + (1-p_1^l) F_{11}$), et pour $n \geq 2$ par :

$$F_n^l(x_1, \dots, x_n) = F_{1-l, l}(x_1) \cdot \prod_{k=2, n} F_{11}(x_k); \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$$

(resp.

$$\hat{F}_n^l(x_1, \dots, x_n) = (1/m^l p_n^l) [p_n^l F_{1-l, l}(x_1) + \sum_{k \geq n+1} p_k^l F_{11}(x_1)] \cdot \prod_{k=2, n} F_{11}(x_k);$$

$$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n).$$

Preuve - Pour $n=1$, les fonctions de répartition F_1^l et \hat{F}_1^l se déduisent immédiatement de la Définition 1 et de la relation (6) établie plus haut respectivement.

L'expression de F_n^l pour $n \geq 2$ se déduit du Lemme 2 du Chapitre 1 en remarquant qu'on a ici :

$$F_{n+1, l}^l = \begin{cases} F_{1-l, l} \otimes F_{11}^{\otimes (n-1)} & \text{si } l = 0 \\ F_{11}^{\otimes n} & \text{si } l \geq 1 \end{cases} \quad \square$$

Remarque 3 -

D'après la Proposition 2, il est clair que pour $i \in \{0, 1\}$, la fonction de répartition de la loi de la valeur cumulée de la récompense sur une séquence (resp. un séjour résiduel) de type i de longueur n s'écrit :

$$R_n^i = \begin{cases} F_{1-i,1} & \text{si } n=1 \\ F_{1-i,1} * F_{11}^{*(n-1)} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

(resp. $\hat{R}_n^i = \begin{cases} \hat{F}_1^i & \text{si } n=1 \\ \hat{F}_1^i * \hat{F}_{11}^{*(n-1)} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$).

De même, pour $i \in \{0, 1\}$, la fonction de répartition de la valeur maximum de la récompense sur une séquence (resp. sur un séjour résiduel) de type i de longueur n est donnée pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, par :

$$U_n^i(x) = \begin{cases} F_1^i(x) & \text{si } n=1 \\ F_{1-i,1}(x) \cdot F_{11}^{n-1}(x) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

(resp. $\hat{U}_n^i(x) = \begin{cases} \hat{F}_1^i(x) & \text{si } n=1 \\ \hat{F}_1^i(x) \cdot \hat{F}_{11}^{n-1}(x) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$).

D'autre part, pour $i \in \{0, 1\}$, la fonction de répartition $H_1(k, \cdot)$ (resp. $\hat{H}_1(k, \cdot)$), $k \geq 1$ de "la loi de la récompense au k -ième instant d'une séquence (resp. d'un séjour résiduel) de type i " est égale à $F_{1-i,1}$ (resp. donnée par (3)) pour $k=1$, et à F_{11} pour $k \geq 2$. Enfin, pour $i \in \{0, 1\}$, "la loi de la récompense au dernier instant d'une séquence de type i " étant la loi conditionnelle de la variable X_1 sachant $J_1 = i, J_2 = 1-i$, on a d'après (6) :

$$H_1^d(x) = p_1^i F_{1-i,1}(x) + (1-p_1^i) F_{11}(x) ; \quad x \geq 0.$$

On détermine maintenant les moments conditionnels d'ordre r du processus X sachant J . Pour $(i, j) \in \{0, 1\}^2$, on désigne par $\mu_{ij}^{(r)}$ le moment d'ordre r (supposé fini) de la récompense lors d'une date de type j précédée d'une date de type i , autrement dit, le moment d'ordre r associé à la fonction de répartition F_{ij} :

$$\begin{aligned}\mu_{ij}^{(r)} &= E[X_t^r / J_t = j, J_{t-1} = i] ; \quad t \geq 2 \\ &= \int x^r dF_{ij}(x) ; \quad r = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

La variance σ_{ij}^2 correspondante est alors donnée (avec la convention : $\mu_{ij} = \mu_{ij}^{(1)}$) par :

$$\sigma_{ij}^2 = \mu_{ij}^{(2)} - \mu_{ij}^2.$$

Avec les notations précédentes et celles du § B.4. Chapitre I, on peut alors énoncer :

Corollaire 1 -

Pour $r \geq 1$, on a les relations suivantes :

$$(i) \quad \hat{\mu}_i^{(r)(n)} = \begin{cases} (1/m^i) \cdot \mu_{1-1,1}^{(r)} + (1-1/m^i) \mu_{ii}^{(r)} & \text{si } n = 1 \\ \mu_{ii}^{(r)} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

$$(ii) \quad \mu_i^{(r)(n)} = \begin{cases} \mu_{1-1,1}^{(r)} & \text{si } n = 1 \\ \mu_{ii}^{(r)} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

En particulier, les variances $\hat{\sigma}_i^{2(n)}$ et $\sigma_i^{2(n)}$ sont données par :

$$\sigma_1^2(n) = \begin{cases} 1/m^i \cdot \sigma_{1-i,1}^2 + (1-1/m^i) \sigma_{11}^2 + 1/m^i (1-1/m^i) (\mu_{1-i,1} - \mu_{11})^2 & \text{si } n = 1 \\ \sigma_{11}^2 & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

et

$$\sigma_1^2(n) = \begin{cases} \sigma_{1-i,1}^2 & \text{si } n = 1 \\ \sigma_{11}^2 & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Preuve - L'assertion (i) pour $n = 1$ découle de (3). L'assertion (i) pour $n \geq 2$ et l'assertion (ii) pour $n \geq 1$ résultent du point (i) de la Proposition 1. Les deux dernières égalités sont des conséquences immédiates de (i) et (ii).

3- Caractéristiques du processus marginal $X = (X_n ; n \in \mathbb{N}^*)$.

On suppose encore (J, X) stationnaire. En vertu de l'égalité (11) du Chapitre I, de la Remarque 3, et des égalités (1) et (2) ci-dessus, les lois conjointes des récompenses sont données, pour $n \geq 1$, $t \geq 1$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, par :

$$(7) P[X_t \leq x_1, \dots, X_{t+n-1} \leq x_n] = \sum_{(j_1, \dots, j_{n+1}) \in \{0,1\}^{n+1}} P[J_1 = j_1, \dots, J_{n+1} = j_{n+1}] \prod_{j=1}^n F_{j,j}(x_j).$$

En particulier,

Proposition 3 -

La fonction de répartition de la récompense en un instant $t \geq 1$ quelconque s'écrit :

$$F_X(x) = P[X_t \leq x]$$

$$= 1/(m^0 + m^1) \{ F_{01}(x) + F_{10}(x) + (m^1 - 1) F_{11}(x) + (m^0 - 1) F_{00}(x) \}; x \geq 0.$$

Remarquons que pour $x_1 = \dots = x_n = x$ on a

$$(7') P[X_t \in x, \dots, X_{t+n-1} \in x] = \sum P[N_{n+1}^{00} = t, N_{n+1}^{01} = u, N_{n+1}^{10} = v] \\ \cdot [F_{00}(x)]^t [F_{01}(x)]^u [F_{10}(x)]^v [F_{11}(x)]^{n-t-u-v},$$

où la somme est prise pour tous les triplets (t, u, v) de l'ensemble $\{0, \dots, n\}^3$, et où, pour $(i, j) \in \{0, 1\}^2$, N_{n+1}^{ij} est la variable comptant le nombre de passages d'une date de type i à une date de type j entre les dates 1 et $n+1$.

Remarquons aussi que, faisant tendre x_2, \dots, x_{n+1} vers l'infini dans (7), on obtient la loi conjointe de X_t et X_{t+n-1} sous la forme :

$$(7'') P[X_t \in x, X_{t+n-1} \in y] = \sum_{(i, j, k, l) \in \{0, 1\}^4} P[J_1 = i, J_2 = j, J_n = k, J_{n+1} = l] F_{ij}(x) F_{kl}(y);$$

On s'intéresse maintenant au calcul des moments $\mu_X^{(r)} = E[X_t^r]$ à partir des moments d'ordre r , $\mu_{ij}^{(r)}$, associés aux lois F_{ij} , $(i, j) \in \{0, 1\}^2$, et de certains paramètres de la loi du processus binaire J .

D'après la relation (12) du chapitre I et la Proposition 3, on a :

$$(8) \quad \mu_X^{(r)} = \sum_{(i, j) \in \{0, 1\}^2} [m^1 / (m^0 + m^1)] p_{ij} \mu_{ij}^{(r)}; \quad r=1, 2, \dots$$

La variance σ_X^2 de X_t s'obtient alors à partir de $\mu_X^{(2)}$ et μ_X (avec la convention $\mu_X = \mu_X^{(1)}$) par :

$$(9) \quad \sigma_X^2 = \sum_{(i, j) \in \{0, 1\}^2} [m^1 / (m^0 + m^1)] p_{ij} \mu_{ij}^{(2)} - \mu_X^2.$$

Désignons par M_r la matrice carré d'ordre 2 de terme général donné par :

$$(M_r)_{ij} = p_{ij} \mu_{ij}^{(r)} \quad ; \quad (i, j) \in \{0, 1\}^2,$$

et par π le vecteur ligne des probabilités $Q_1^i = P[J_t = i] = m^i / (m^0 + m^1)$; $i \in \{0, 1\}$. Alors, d'après (8) et (9) on peut énoncer :

Corollaire 2 -

Les moyenne et variance de la récompense X_t sont données respectivement par :

$$(10) \quad \mu_X = \pi M_1 \mathbf{1}$$

$$(11) \quad \sigma_X^2 = \pi (M_2 - M_1 \mathbf{1} \pi M_1) \mathbf{1}$$

où $\mathbf{1}$ est le vecteur colonne de \mathbb{R}^2 de composantes égales à 1.

En ce qui concerne la structure de covariance du processus X des récompenses, on déduit immédiatement de l'égalité (7') :

Corollaire 3 -

On a pour $h \geq 1$

$$(12) \quad C_X(h) = \sum_{(i,j,k,l) \in \{0,1\}^4} P[J_1=i, J_2=j, J_{h+1}=k, J_{h+2}=l] \mu_{ij} \mu_{kl} - \mu_X^2,$$

où μ_X est donnée par (10).

Les lois des variables $S_X(n)$ et $M_X(n)$ introduites dans le chapitre I.C. s'obtiennent immédiatement à partir de (7) et (7') respectivement :

Corollaire 4 -

On a, pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}_+$,

$$(1) \quad \begin{aligned} \tilde{H}_n(x) &= P[S_X(n) \leq x] \\ &= \sum_{0 \leq t+u+v \leq n} P[N_{n+1}^{00} = t, N_{n+1}^{01} = u, N_{n+1}^{10} = v] \\ &\quad (F_{00}^{*t} * F_{01}^{*u} * F_{10}^{*v} * F_{11}^{*(n-t-u-v)})(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad \tilde{G}_n(x) &= P[M_X(n) \leq x] \\
 &= \sum_{\substack{0 \leq t+u+v \leq n \\ 0 \leq k+l \leq n}} P[N_{n+1}^{00} = t, N_{n+1}^{01} = u, N_{n+1}^{10} = v] \\
 &\quad F_{00}^t(x) F_{01}^u(x) F_{10}^v(x) F_{11}^{n-t-u-v}(x).
 \end{aligned}$$

De même, pour les variables $S_X^i(n)$ et $\mu_X^i(n)$, on peut énoncer :

Corollaire 5 -

On a, pour $n \geq 1, x \in \mathbb{R}_+, i \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad P[S_X^i(n) \leq x] &= \sum_{\substack{(k,l) \in \{0, \dots, n\}^2 \\ 0 \leq k+l \leq n}} P[N_{n+1}^{1-i,i} = k, N_{n+1}^{i,i} = l] (F_{1-i,i}^{*k} * F_{i,i}^{*l})(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(ii)} \quad P[M_X^i(n) \leq x] &= \sum_{\substack{(k,l) \in \{0, \dots, n\}^2 \\ 0 \leq k+l \leq n}} P[N_{n+1}^{1-i,i} = k, N_{n+1}^{i,i} = l] F_{1-i,i}^k(x) F_{i,i}^l(x).
 \end{aligned}$$

Preuve - On a (avec la convention : $x / 0 = +\infty$)

$$\begin{aligned}
 &P[J_1 X_1 \leq x_1, \dots, J_n X_n \leq x_n] \\
 &= \sum_{(j_1, \dots, j_n)} P[J_1 X_1 \leq x_1, \dots, J_n X_n \leq x_n, J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n] \\
 &= \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_{n+1})} P[X_2 \leq \frac{x_1}{j_2}, \dots, X_{n+1} \leq \frac{x_n}{j_{n+1}}; J_1 = j_1, \dots, J_{n+1} = j_{n+1}] \\
 &= \sum_{(j_1, \dots, j_{n+1}) \in \{0, 1\}^{n+1}} P[J_1 = j_1, \dots, J_{n+1} = j_{n+1}] \prod_{l=1}^n F_{j_l, j_{l+1}}(x_l / j_{l+1}).
 \end{aligned}$$

Alors

$$P[S_X^1(n) \leq x] = \sum_{\substack{(t,u,v) \in \{0, \dots, n\}^3 \\ 0 \leq t+u+v \leq n}} P[N_{n+1}^{00} = t, N_{n+1}^{01} = u, N_{n+1}^{10} = v] \cdot (\delta_0^{*t} * F_{01}^{*u} * \delta_0^{*v} * F_{11}^{*(n-u-t-v)})(x)$$

soit

$$P[S_X^1(n) \leq x] = \sum_{\substack{(k,l) \in \{0, \dots, n\}^2 \\ 0 \leq k+l \leq n}} P[N_{n+1}^{01} = k, N_{n+1}^{11} = l] (F_{01}^{*k} * F_{11}^{*l})(x).$$

Les autres résultats annoncés s'obtiennent de la même manière. \square

Le calcul de ces différentes lois repose sur celui des lois conjointes des variables N_n^{ij} . Pour certaines classes de lois de processus J , on dispose de formules explicites ou d'algorithmes itératifs (cf. Kedem (1980) dans le cas des chaînes de Markov ; voir aussi S C plus loin).

Remarquons que dans le cas d'un processus de précipitation avec récompenses en dépendance markovienne, la loi de $S_X(n) = S_X^1(n)$ (resp. $M_X(n) = M_X^1(n)$) est donnée par l'égalité (i) (resp. (ii)) du Corollaire 5 pour $i = 1$.

4 - Comportement asymptotique des variables S_n , $S_X(n)$ et $M_X(n)$

Nous envisageons ici l'étude de la convergence presque sûre des suites $\{(1/n) S_n ; n \geq 1\}$ et $\{(1/n) S_X(n) ; n \geq 1\}$, et des lois asymptotiques des suites $\{S_n ; n \geq 1\}$, $\{S_X(n) ; n \geq 1\}$ et $\{M_X(n) ; n \geq 1\}$.

Énonçons un résultat préliminaire :

Lemme 1 -

Soit (J, X) une série chronologique binaire avec récompenses en dépendance markovienne stationnaire. Supposons que J est un processus Ψ -mélangeant. Alors le processus X des récompenses est Ψ -mélangeant.

Preuve - Soit $k \geq 1, m \geq 1$ et $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_+^k, (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}_+^m$. D'après (7) on a pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 & P [X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k, X_{k+n+1} \leq y_1, \dots, X_{k+n+m} \leq y_m] \\
 &= \lim_{\substack{x_{k+j} \rightarrow +\infty \\ j=1, \dots, n}} \sum_{(i_1, \dots, i_{k+n+m+1})} P [J_1 = i_1, \dots, J_{k+n+m+1} = i_{k+n+m+1}] \left(\prod_{l=1}^{k+n+1} F_{i_l, i_{l+1}}(x_l) \right) \\
 & \quad \cdot F_{i_{k+n}, i_{k+n+1}}(x_{k+n}) \cdot \prod_{u=1, m} F_{i_{k+n+u}, i_{k+n+u+1}}(y_u), \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_{k+n+m+1}} P [J_1 = i_1, \dots, J_{k+n+m+1} = i_{k+n+m+1}] \prod_{l=1}^k F_{i_l, i_{l+1}}(x_l) \prod_{u=1}^m F_{i_{k+n+u}, i_{k+n+u+1}}(y_u) \\
 &= \sum_{(i_1, \dots, i_{k+1})} \sum_{(j_1, \dots, j_{n+1})} P [J_1 = i_1, \dots, J_{k+1} = i_{k+1}, J_{k+n+1} = j_1, \dots, J_{k+n+m+1} = j_{m+1}] \\
 & \quad \prod_{l=1, k} F_{i_l, i_{l+1}}(x_l) \prod_{r=1, m} F_{j_r, j_{r+1}}(y_r).
 \end{aligned}$$

Comme par hypothèse on a pour tout (i_1, \dots, i_{k+1}) et (j_1, \dots, j_{n+1}) :

$$\begin{aligned}
 & P [J_1 = i_1, \dots, J_{k+1} = i_{k+1}] \cdot P [J_{k+n+1} = j_1, \dots, J_{k+n+m+1} = j_{m+1}] (1 - \Psi(n)) \\
 & \leq P [J_1 = i_1, \dots, J_{k+1} = i_{k+1}, J_{k+n+1} = j_1, \dots, J_{k+n+m+1} = j_{m+1}] \\
 & \leq P [J_1 = i_1, \dots, J_{k+1} = i_{k+1}] \cdot P [J_{k+n+1} = j_1, \dots, J_{k+n+m+1} = j_{m+1}] (1 + \Psi(n)),
 \end{aligned}$$

on déduit facilement le résultat annoncé. \square

Remarque 4 -

L'hypothèse de Ψ -mélangeance du processus binaire J est par exemple vérifiée dans le cas où J est k -dépendant (notamment si J est un processus de type DMA (cf. Jacob-Lewis (1978a-1978b)) ou lorsque J est une chaîne de Markov d'ordre 1 (cf. SC) ou encore lorsque J est un processus DARMA (1,1) (cf. Bousseboua 1983). Dans ces cas particuliers la fonction de mélangeance Ψ est telle que la série $\sum_{n \geq 1} \Psi^{1/2}(n)$ est convergente.

En vertu du Théorème 1 du chapitre I, on peut énoncer :

Proposition 4 -

Soit (J, X) un processus vérifiant les hypothèses du lemme 1. Alors :

(i) la suite $\{(1/n)S_n ; n \geq 1\}$ (resp. $\{(1/n)S_X(n) ; n \geq 1\}$) converge presque sûrement vers $m^1/(m^0 + m^1)$ (resp. $\mu_X = \sum_{i,j} [m^1/(m^0 + m^1)] p_{ij} \mu_{ij}$)

(ii) Si de plus la série $\sum_n \Psi^{1/2}(n)$ est convergente et

$$\delta^2 = C_J(0) + 2 \sum_{n \geq 1} C_J(n) > 0 \quad (\text{resp. } \gamma^2 = \sigma_X^2 + 2 \sum_{h \geq 1} C_X(h) > 0)$$

où C_J est la fonction de covariance de J (resp. σ_X^2 et $C_X(h)$ sont données par (9) et (12)), la suite $\{ [S_n - n \cdot m^1 / (m^0 + m^1)] / \delta \sqrt{n} ; n \geq 1 \}$ (resp. $\{ (S_X(n) - n \mu_X) / \gamma \sqrt{n} \}$) est asymptotiquement de loi gaussienne centrée et réduite.

De même, lorsque J est Ψ -mélangeant, le Lemme 1 ci-dessus et le Théorème 2 du chapitre I permettent de préciser le comportement asymptotique de la suite $\{M_X(n) ; n \geq 1\}$ lorsque la loi F_X donnée dans la Proposition 3 appartient au domaine d'attraction d'une certaine loi de probabilité. L'étude de la loi asymptotique de cette suite repose en particulier sur le résultat préliminaire suivant :

Lemme 2 -

Soit (J, X) une série chronologique binaire avec récompenses en dépendance markovienne stationnaire. Supposons que J est un processus Ψ -mélangeant. Alors pour tout $k \geq 1$ on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P[X_{k+1} > x / X_1 > x] = 0$$

Preuve - Pour tout $k \geq 2$ on a :

$$P[X_{k+1} > x, X_1 > x] = \sum_{(i,j,r,s) \in \{0,1\}^4} P[J_1 = i, J_2 = j, J_{k+1} = r, J_{k+2} = s] \cdot (1 - F_{ij}(x))(1 - F_{rs}(x)).$$

Or J étant supposé Ψ -mélangeant, on a pour $(i,j,r,s) \in \{0,1\}^4$

$$P[J_1 = i, J_2 = j, J_{k+1} = r, J_{k+2} = s] \\ \leq (1 + \Psi(k-1)) P[J_1 = i, J_2 = j] P[J_{k+1} = r, J_{k+2} = s],$$

et par suite, on a :

$$P[X_1 > x, X_{k+1} > x] \\ \leq (1 + \Psi(k-1)) \cdot \left\{ \sum_{(i,j)} Q_{ij}^1 P_{ij} (1 - F_{ij}(x)) \right\} \cdot \left\{ \sum_{(r,s)} Q_{rs}^r P_{rs} (1 - F_{rs}(x)) \right\} \\ \leq (1 + \Psi(k-1)) \cdot P[X_1 > x] P[X_{k+1} > x]$$

$$\text{soit : } P[X_{k+1} > x / X_1 > x] \leq (1 + \Psi(k-1)) P[X_{k+1} > x]$$

d'où le résultat annoncé pour $k \geq 2$, puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} P[X_{k+1} \leq x] = 1$.

Si $k = 1$, on peut bien sûr écrire, pour tout $x \geq 0$

$$P[X_2 > x / X_1 > x] = \sum_{i,j} P[X_2 > x, J_1 = i, J_2 = j / X_1 > x] \\ = \sum_{i,j} (1 - F_{ij}(x)) P[X_1 > x, J_1 = i, J_2 = j] / (P[X_1 > x]) \\ \leq \sum_{i,j} (1 - F_{ij}(x))$$

d'où le résultat puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{ij}(x) = 1$, $(i,j) \in \{0,1\}^2$. \square

Dans le cadre de la modélisation de processus décrivant la succession des quantités journalières de précipitations dans une station climatologique, de nombreux auteurs (cf. par exemple Neyman-Scott (1967), Ison-Feyerherm-Bark (1971) et Katz (1977.a, 1977.b)), ont choisi les lois F_{ij} de la variable X_n en un jour n de type i (jour n humide) précédé par un jour de type j ($i = 0, 1$), dans la famille des lois gamma.

Si on suppose que les fonctions de répartition F_{ij} ; $(i,j) \in \{0,1\}$ sont celles de quatre lois gamma ou que F_{01} et F_{11} sont des lois gamma et $F_{00} = F_{10} = \delta_0$, d'après le Lemme 5 du Chapitre I, la fonction de répartition de la récompense en un instant $t \geq 1$ quelconque :

$$(13) \quad F_X(x) = P[X_t \leq x] = \sum_{ij} [m^i / (m^0 + m^1)] p_{ij} F_{ij}(x); \quad x \geq 0,$$

appartient au domaine d'attraction de la loi de Gumbel définie par la fonction de répartition Λ .

Alors le Lemme 2 précédent, et le Théorème 2 du Chapitre I permettent d'énoncer :

Proposition 5 -

Soit (J,X) un processus vérifiant les hypothèses du Lemme 2 avec de plus $\sum_n \Psi(n) < \infty$. Supposons que les lois F_{ij} sont des lois gamma ou la loi δ_0 , l'une au moins étant non dégénérée.

Alors on a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P[M_X(n) \leq u_n + x / n F'_X(u_n)] = \exp(-e^{-x}); \quad x \in \mathbb{R}$$

où (u_n) désigne la suite des plus grandes valeurs caractéristiques de F_X donnée par (13).

Remarquons que le Lemme 7 du Chapitre I fournit d'autres constantes de normalisation explicites.

PARTIE B**SERIES CHRONOLOGIQUES BINAIRES AVEC RECOMPENSES
INDEPENDANTES.**

On s'intéresse dans cette partie à une classe particulière de série chronologiques binaires avec récompense (J, X) qui contient des modèles particuliers utilisés par divers auteurs (cf. Todorovic-Woolhiser (1971, 1975) ; Buishand (1977, 1978) ; Kavvas-Delleur-Chang (1982)) pour décrire la suite de précipitations journalières dans différentes stations de mesure.

1 - Définition et premières propriétés.

On pose :

Définition 2 -

On appelle "**Série chronologique binaire avec récompenses indépendantes**" un processus (J, X) tel que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) pour tout $n \geq 2$, $(j_1, \dots, j_{n-1}, j) \in \{0, 1\}^n$ et $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1}$
- $$P [X_n \leq x / J_1 = j_1, \dots, J_{n-1} = j_{n-1}, J_n = j, X_1 \leq x_1, \dots, X_{n-1} \leq x_{n-1}]$$
- $$= P [X_n \leq x / J_n = j]$$
- $$= P [X_1 \leq x / J_1 = j] = F_j(x); \quad x \in \mathbb{R}_+$$
- (ii) pour tout $n \geq 2$, $(j_1, \dots, j_{n-1}, j) \in \{0, 1\}^n$ et $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1}$
- $$P [J_n = j / J_1 = j_1, \dots, J_{n-1} = j_{n-1}, X_1 \leq x_1, \dots, X_{n-1} \leq x_{n-1}]$$
- $$= P [J_n = j / J_1 = j_1, \dots, J_{n-1} = j_{n-1}].$$

Remarque 5 -

Il découle immédiatement de cette définition qu'une série chronologique binaire avec récompenses indépendantes est une "série chronologique binaire avec récompenses en dépendance markovienne" pour laquelle les lois conditionnelles F_{ij} ne dépendent pas de i , i.e.

$$F_{ij}(x) = F_j(x) ; \quad (i,j) \in \{0,1\}^2, \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

La loi d'une telle série chronologique est entièrement définie à partir de la donnée des deux lois F_0 et F_1 et de la loi du processus binaire J puisque :

$$P[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n, J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n] = P[J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n] \prod_{k=1}^n F_{j_k}(x_k).$$

Le processus (J, X) vérifie la condition (I.C.*_n) avec :

$$\begin{aligned} P[X_n \leq x / J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n] \\ = P[X_n \leq x / J_n = j_n] = F_{j_n}(x). \end{aligned}$$

Il résulte de l'assertion (ii) de la Proposition 1 qu'une "série chronologique binaire avec récompenses indépendantes" est stationnaire si et seulement si le processus binaire J est stationnaire, ce que l'on supposera désormais. La loi des valeurs de la récompense sur une séquence ou sur un séjour résiduel de type i de longueur n est donnée, pour tout $n \geq 1$ et $i \in \{0,1\}$, par :

$$\hat{F}_n^i = F_n^i = F_i^{\otimes n}.$$

De même

$$R_n^i = \hat{R}_n^i = F_i^{*n}, \quad U_n^i = \hat{U}_n^i = F_i^n$$

et

$$H_i(k, \cdot) = \hat{H}_i(k, \cdot) = H_i^d(\cdot) = F_i(\cdot).$$

2 - Caractéristiques du processus marginal $X = (X_n ; n \in \mathbb{N}^*)$

2.1 - Lois marginales et moments.

On déduit immédiatement des résultats du paragraphe A.3. que :

$$P[X_t \in x_1, \dots, X_{t+n-1} \in x_n] = \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \{0,1\}^n} P[J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n] \prod_{l=1, n} F_{j_l}(x_l)$$

et en particulier :

$$F_X(x) = 1/(m^0 + m^1) (m^0 F_0(x) + m^1 F_1(x)).$$

De même, désignant par $\mu_j^{(r)}$ (resp. σ_j^2) le moment d'ordre r (resp. la variance) de la loi F_j i.e. $\mu_j^{(r)} = \int x^r dF_j(x)$ (resp. $\sigma_j^2 = \mu_j^{(2)} - \mu_j^2$), on a (avec la convention que : $\mu_j = \mu_j^{(1)}$),

$$(14) \quad \mu_X^{(r)} = 1/(m^0 + m^1) (m^0 \mu_0^{(r)} + m^1 \mu_1^{(r)})$$

$$(15) \quad \sigma_X^2 = \sum_{l=0,1} [m^l/(m^0+m^1)] \sigma_l^2 + [m^0 \cdot m^1 / (m^0+m^1)^2] \cdot (\mu_0 - \mu_1)^2.$$

Enfin on a, pour $h \geq 1$:

$$C_X(h) = \sum_{(j,l) \in \{0,1\}^2} P[J_1 = j, J_{h+1} = l] \mu_j \mu_l - \mu_X^2$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{j=0,1} \{ P[J_1 = j, J_{h+1} = j] \mu_j^2 + (P[J_1 = j] - P[J_1 = j, J_{h+1} = j]) \mu_j \mu_{1-j} \\ &\quad - (P[J_1 = j] \mu_j^2) - P[J_1 = j] P[J_1 = 1-j] \mu_j \mu_{1-j} \} \\ &= \sum_{j=0,1} \{ (P[J_1 = j, J_{h+1} = j] - (P[J_1 = j])^2) \mu_j^2 \\ &\quad + P[J_1 = j] (1 - P[J_{h+1} = j / J_1 = j]) - P[J_1 = 1-j] \} \mu_j \mu_{1-j} \} \\ &= \sum_{j=0,1} \{ P[J_1 = j, J_{h+1} = j] - (P[J_1 = j])^2 \} (\mu_j^2 - \mu_j \mu_{1-j}) \end{aligned}$$

où

$$P[J_1 = j, J_{h+1} = j] - (P[J_1 = j])^2 = C_j(h) \text{ pour } j = 0 \text{ ou } 1.$$

En définitive, il vient :

$$(16) \quad C_X(h) = (\mu_0 - \mu_1)^2 C_J(h) \quad \text{pour } h \geq 1.$$

2.2. - Lois des valeurs cumulées et maximum des récompenses sur des périodes.

L'assertion (i) du Corollaire 4 conduit à :

$$\begin{aligned} \sim \\ H_n(x) &= P[S_X(n) \leq x] \\ &= \sum_{(t,u,v) \in \{0, \dots, n\}^3} P[N_{n+1}^{00} = t, N_{n+1}^{01} = u, N_{n+1}^{10} = v] (F_0^{*(t+v)} * F_1^{*(n-t-v)})(x) \\ &= \sum_{k=0, n} P[N_{n+1}^{11} + N_{n+1}^{01} = k] (F_1^{*k} * F_0^{*(n-k)})(x) \end{aligned}$$

soit

$$\bullet \quad \sim \quad H_n(x) = \sum_{k=0}^n P[S_n = k] (F_1^{*k} * F_0^{*(n-k)})(x)$$

$$\text{où } S_n = J_1 + J_2 + \dots + J_n.$$

De la même manière, les assertions (ii) du Corollaire 4 et (i) et (ii) du Corollaire 5 mènent à :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \sim \quad G_n(x) &= \sum_{k=0}^n P[S_n = k] F_1^{k(x)} F_0^{n-k}(x) \\ \bullet \quad P[S_X^1(n) \leq x] &= \sum_{k=0, n} P[S_n = k] F_1^{*k}(x) \\ \bullet \quad P[S_X^0(n) \leq x] &= \sum_{k=0, n} P[S_n = k] F_0^{*(n-k)}(x) \end{aligned}$$

- $P[M_X^1(n) \leq x] = \sum_{k=0, n} P[S_n = k] F_1^k(x)$
- $P[M_X^0(n) \leq x] = \sum_{k=0, n} P[S_n = k] F_0^{n-k}(x)$

Le calcul de ces différentes lois repose donc ici sur celui de la loi des variables S_n pour lequel on dispose de formules explicites ou d'algorithmes notamment dans le cas où J est markovien ou de type DARMA (cf. par exemple Bousseboua (1983)), ou encore de type renouvellement alterné (cf. Essebbar (1984)). Dans le cas particulier où J est une chaîne de Markov binaire d'ordre 1, on dispose aussi d'un algorithme itératif direct pour le calcul des lois de $S_X(n)$, $M_X(n)$, $S_X^1(n)$ et $M_X^1(n)$; $i = 0, 1$ (cf. Proposition 8, § C. ci-après).

En ce qui concerne les moments des variables $S_X(n)$, on obtient à partir de (14), (15) et (16) :

- $E[S_X(n)] = [n / (m^0 + m^1)] (m^0 \mu_0 + m^1 \mu_1)$

$$\text{var}(S_X(n)) = n / (m^0 + m^1) \{ m^0 \sigma_0^2 + m^1 \sigma_1^2 + (m^0 m^1 / (m^0 + m^1)) (\mu_0 - \mu_1)^2 \}$$

$$+ 2 (\mu_0 - \mu_1)^2 \sum_{k=1, n-1} (n-k) C_J(k),$$

ou encore :

- $\text{var}[S_X(n)] = [n / (m^0 + m^1)] \{ m^0 \sigma_0^2 + m^1 \sigma_1^2 \} + (\mu_0 - \mu_1)^2 \text{var}(S_n)$.

Lorsque le processus J est Ψ -mélangeant, les propriétés asymptotiques contenues dans la Proposition 4 du paragraphe A se traduisent ici par :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1/n) S_X(n) = \mu_X = 1 / (m^0 + m^1) (m^0 \mu_0 + m^1 \mu_1)$ p. s.

- si de plus $\sum_n \Psi^{1/2}(n) < +\infty$ et

$$\sigma^2 = 1 / (m^0 + m^1) \{ m^0 \sigma_0^2 + m^1 \sigma_1^2 \} + (\mu_0 - \mu_1)^2 [C_J(0) + 2 \sum_n C_J(n)] > 0,$$

la suite $\{(S_X(n) - n \mu_X) / \sigma \sqrt{n} ; n \geq 1\}$ est asymptotiquement de loi gaussienne centrée et réduite.

Enfin, dans le cas particulier où F_0 et F_1 sont soit des lois gamma soit la loi δ_0 , l'une au moins étant dégénérée, la Proposition 5 et le Lemme 7 du Chapitre I permettent de préciser la loi asymptotique de la suite $\{M_X(n) ; n \geq 1\}$ lorsque J est Ψ -mélangeant avec $\sum_n \Psi(n) < +\infty$.

PARTIE C**CHAINES DE MARKOV BINAIRES D'ORDRE 1 AVEC RECOMPENSES.**

Nous nous proposons d'étudier dans cette partie un modèle de série chronologique binaire avec récompenses en dépendance markovienne qui s'inscrit aussi dans le cadre de la théorie générale des processus dits "de renouvellement markovien" (cf. R. Pyke (1961) et Cinlar (1975) par exemple), et des "suites de variables aléatoires définies sur une chaîne de Markov" (cf. par exemple Resnick-Nents (1970), Fabens-Nents (1970) et Denzel-O'Brien (1975)). R. Katz (1977.a, 1977.b) est le premier à avoir proposé et étudié un processus (J, X) de ce type, en vue de la modélisation des précipitations journalières relevées dans une station de mesure. Nous faisons ici une présentation complète du modèle de "chaîne de Markov binaire d'ordre 1 avec récompenses".

1 - Définition et premières propriétés.

On pose :

Définition 3 -

On appelle "**chaîne de Markov binaire d'ordre 1 avec récompenses**" un processus (J, X) tel que la condition suivante est vérifiée :

$$\begin{aligned} & \text{pour tout } n \geq 2, (x_1, \dots, x_{n-1}, x) \in \mathbb{R}_+^n, (j_1, \dots, j, j) \in \{0, 1\}^n \\ P [J_n = j, X_n \{x \} / J_1 = j_1, \dots, J_{n-1} = i, X_1 \{x_1, \dots, x_{n-1}\} \{x_{n-1}\}] \\ & = P [J_n = j, X_n \{x \} / J_1 = j_1, \dots, J_{n-1} = i] \\ & = P [J_2 = j, X_2 \{x \} / J_1 = i] = Q_{ij}(x). \end{aligned}$$

Notons que dans la littérature traitant des processus de renouvellement markovien, la famille $Q(x) = ((Q_{ij}(x)))$ est appelé "**noyau de transition semi-markovien**" (cf. par exemple Resnick-Nents (1970)).

La loi d'un tel processus (J, X) est définie par :

$$P[X_k \leq x_k, J_k = j_k; k = 1, \dots, n] = P[X_1 \leq x_1, J_1 = j_1] \prod_{k=2, \dots, n} Q_{j_{k-1} j_k}(x_k);$$

pour $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $(j_1, \dots, j_n) \in \{0, 1\}^n$, $n \geq 2$.

Il résulte immédiatement de la Définition 3 :

Lemme 3 -

Soit (J, X) une chaîne de Markov d'ordre 1 avec récompenses et posons :

$$(17) \quad p_{ij} = \lim_{x \rightarrow +\infty} Q_{ij}(x) \quad ; (i, j) \in \{0, 1\}^2.$$

Alors (J, X) est une série chronologique binaire avec récompenses en dépendance markovienne telle que

(i) les fonctions de répartition F_{ij} sont données pour $(i, j) \in \{0, 1\}^2$, par :

$$F_{ij}(x) = Q_{ij}(x) / p_{ij} \quad ; x \in \mathbb{R}_+$$

(ii) pour tout $n \geq 2$, $(j_1, \dots, i, j) \in \{0, 1\}^n$ et $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1}$

$$\begin{aligned} P[J_n = j / J_1 = j_1, \dots, J_{n-1} = i, X_1 \leq x_1] \\ = P[J_n = j / J_{n-1} = i] = p_{ij}. \end{aligned}$$

Avant de préciser les principales propriétés du processus (J, X) , nous énonçons quelques propriétés du processus binaire J .

2 - Caractéristiques du processus $J = (J_n; n \in \mathbb{N}^*)$

D'après le Lemme 3, le processus J est une chaîne de Markov binaire d'ordre 1, homogène, de matrice de transition $P = ((p_{ij}))$ donnée par (17).

Nous supposons désormais que $p_{ij} > 0$ pour tout $(i, j) \in \{0, 1\}^2$. Alors J est ergodique et J est stationnaire si et seulement si la distribution de J_1 est donnée par le vecteur ligne $\pi = (\pi_0, \pi_1)$ tel que $\pi P = \pi$ i.e :

$$(18) \quad \pi_1 = P_{01} / (P_{01} + P_{10}) = m^1 / (m^0 + m^1)$$

où $m^0 = 1/p_{01}$ et $m^1 = 1/p_{10}$ sont les espérances mathématiques respectives des lois p^0 et p^1 .

J est un processus de renouvellement alterné avec pour lois des durées de séjour p^0 et p^1 des lois géométriques de paramètres respectifs p_{01} et p_{10} (cf. Chapitre III).

Notons que les lois de séjours résiduels \hat{p}^0 et \hat{p}^1 coïncident avec les lois des temps de séjour p^0 et p^1 correspondantes, et que les suites de persistances des états alternatifs 0 et 1 sont constantes égales à p_{00} et p_{11} respectivement. Rappelons que si $p^{(k)}$ désigne la matrice des probabilités de transition en k étapes de la chaîne J i.e.

$$p_{ij}^{(k)} = P [J_{t+k} = j / J_t = i]; \quad (i, j) \in \{0, 1\}^2, k \geq 1, t \geq 1,$$

alors (cf. Feller (1968)) on a :

$$p^{(k)} = \mathbf{1} \pi + d^k (\mathbf{I} - \mathbf{1} \pi); \quad k = 0, 1, \dots,$$

où $d = p_{11} - p_{01} = 1 - (m^0 + m^1) / (m^0 m^1)$, avec $|d| < 1$.

L'énoncé suivant découle immédiatement de cette égalité :

Corollaire 6 -

Soit J une chaîne de Markov binaire ergodique stationnaire. Alors

(i) la fonction de covariance de J est donnée par :

$$C_J(h) = m^0 m^1 / (m^0 + m^1)^2 \cdot d^h; \quad h \in \mathbb{N}$$

(ii) J est Ψ -mélangeant avec $\Psi(n) = d^n$; $n \geq 1$.

Nous terminons ce paragraphe par un algorithme permettant le calcul de la loi conjointe des variables de comptage N_n^{ij} intervenant dans le calcul des lois des variables $S_X(n)$, $M_X(n)$, $S_X^i(n)$ et $M_X^i(n)$; $i = 0, 1$.

Notons que la loi de N_n^{ij} peut en fait être déterminée directement grâce à la formule de Whittle (cf. Théorème 2.1, Billingsley (1960)).

Rappelons que pour tout $n \geq 2$, $(i,j) \in \{0,1\}^2$:

$$\begin{aligned} N_n^{ij} &= \text{Card} \{t \in \{1,2,\dots,n-1\} : J_t = i, J_{t+1} = j\} \\ &= \sum_{t=2}^n (-1)^{i+j} (J_{t-1} + i - 1) (J_t + j - 1) \end{aligned}$$

et notons que, pour tout $n \geq 2$, $(i,j) \in \{0,1\}^2$, on a :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i,j} N_n^{ij} = \sum_i N_n^{i0} = \sum_j N_n^{0j} = n-1 \\ \sum_j N_n^{ij} - \sum_j N_n^{j1} = \delta_{i0} - \delta_{i1} \end{array} \right.$$

En vertu de (19), la loi conjointe des quatre variables N_n^{ij} ; $i,j=0,1$ est fournie par celle des trois variables N_n^{01} , N_n^{10} , et N_n^{11} .

Pour tout $n \geq 2$, on désigne par W_n la loi conjointe de ces trois variables, i.e.

$$W_n(p,q,r) = P \{ N_n^{01} = p, N_n^{10} = q, N_n^{11} = r \} ; (p,q,r) \in \{0,\dots,n-1\}^3$$

pour des triplets (p,q,r) tels que : $0 \leq p+q+r \leq n$ et $p-q \in \{-1,0,1\}$.

Pour de tels triplets, posons, pour tout $n \geq 2$ et $i \in \{0,1\}$:

$$(20) \quad W_n^i(p,q,r) = P \{ N_n^{01} = p, N_n^{10} = q, N_n^{11} = r / J_1 = i \}.$$

On a alors pour tout $n \geq 2$:

$$W_n(p,q,r) = 1/(m^0 + m^1) \{ m^0 W_n^0(p,q,r) + m^1 W_n^1(p,q,r) \}$$

Le calcul de la loi conjointe W_n des variables N_n^{01} , N_n^{10} , N_n^{11} repose ainsi sur celui des deux suites $\{W_n^0(p,q,r) ; n \geq 2, (p,q,r) \in \{0,\dots,n-1\}^3\}$. Et $\{W_n^1(p,q,r) ; n \geq 2, (p,q,r) \in \{0,\dots,n-1\}^3\}$. Le calcul de ces deux dernières suites peut être effectué grâce à l'algorithme suivant.

Proposition 6 -

Les suites $\{W_n^i(p,q,r) ; n \geq 2 ; (p,q,r) \in \{0, \dots, n-1\}^3, i=0,1\}$, définies par (20) vérifient :

- Pour $n = 2$:

$$W_2^0(1,0,0) = p_{01} ; W_2^0(0,0,0) = W_2^0(0,1,0) = p_{00} ; W_2^0(0,0,1) = 0 \\ W_2^1(0,1,0) = p_{10} ; W_2^1(0,0,1) = p_{11} ; W_2^1(0,0,0) = W_2^1(1,0,0) = 0 ;$$

- Pour $n \geq 3$

$$W_n^0(p,q,r) = p_{00} W_{n-1}^0(p,q,r) + p_{01} W_{n-1}^1(p-1,q,r)$$

$$W_n^1(p,q,r) = p_{10} W_{n-1}^0(p,q-1,r) + p_{11} W_{n-1}^1(p,q,r-1) ;$$

pour tout $(p,q,r) \in \{0, \dots, n-1\}^3$ tel que $0 \leq p+q+r \leq n$ et $p-q \in \{-1, 0, 1\}$.

Preuve - Les résultats correspondant au cas $n=2$ s'obtiennent immédiatement. Pour $n \geq 3$, on a par définition :

$$N_n^{01} = \sum_{t=2,n} (1-J_{t-1}) J_t ; N_n^{10} = \sum_{t=2,n} (1-J_t) J_{t-1} \text{ et } N_n^{11} = \sum_{t=2,n} J_{t-1} J_t,$$

et pour tout $(p,q,r) \in \{0, \dots, n-1\}^3$, on peut écrire :

$$W_n^0(p,q,r) = p_{00} P[N_n^{01} = p, N_n^{10} = q, N_n^{11} = r / J_1 = 0, J_2 = 0] \\ + p_{01} P[N_n^{01} = p, N_n^{10} = q, N_n^{11} = r / J_1 = 0, J_2 = 1].$$

Or J est une chaîne de Markov d'ordre 1 stationnaire. On a donc :

$$P[N_n^{01} = p, N_n^{10} = q, N_n^{11} = r / J_1 = 0, J_2 = 0] \\ = P[\sum_{t=3,n} (1-J_{t-1}) J_t = p, \sum_{t=3,n} (1-J_t) J_{t-1} = q, \sum_{t=3,n} J_{t-1} J_t = r / J_t = 0] \\ = W_{n-1}^0(p,q,r),$$

et

$$P[N_n^{01} = p, N_n^{10} = q, N_n^{11} = r / J_1 = 0, J_2 = 1] = W_{n-1}^1(p-1,q,r)$$

d'où la première relation de récurrence de la proposition. La deuxième s'obtient de manière analogue. \square

3 - Caractéristiques du processus (J,X).

On déduit immédiatement de la Proposition 1 et du Lemme 3

Corollaire 7 -

Soit (J,X) une chaîne de Markov binaire d'ordre 1 avec récompense. Alors :

(i) le processus (J,X) vérifie la condition (I.C.*₁) avec, pour $2 \leq k \leq n$, $(j_1, \dots, j_n) \in \{0,1\}^n$:

$$P [X_k \leq x / J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n] = F_{j_{k-1} j_k}^{j_k}(x) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}_+$$

(ii) (J,X) est stationnaire si et seulement si le processus J est stationnaire, et si de plus, pour $j \in \{0,1\}$, la loi conditionnelle de la variable X_1 sachant $J_1 = j$ est donnée par :

$$P [X_1 \leq x / J_1 = j] = \hat{F}_j(x) = p_{jj} F_{jj}(x) + (1-p_{jj}) F_{1-j, j}(x) \quad ; \quad x \in \mathbb{R}_+$$

Ainsi dans le cas stationnaire, la loi du processus (J,X) est entièrement définie par la donnée $(p_{ii}, F_{ii}, F_{1-i, i} ; i = 0, 1)$.

Compte tenu de la Proposition 2 et de la Remarque 3, la loi des valeurs de la récompense sur une séquence (resp. sur un séjour résiduel) de type i de longueur n est alors donnée par $F_n^i = F_{1-i, i} \otimes F_{ii}^{\otimes(n-1)}$ si $n \geq 2$ et $F_1^i = F_{1-i, i}$

(resp. $\hat{F}_n^i = \hat{F}_1^i \otimes F_{ii}^{\otimes(n-1)}$ où $\hat{F}_1^i = \hat{F}_i$). Les lois $R_n^i, \hat{R}_n^i, U_n^i$ et \hat{U}_n^i s'en déduisent immédiatement.

Considérons maintenant les deux suites de vecteurs aléatoires $\{(D_k^0, S_k^0) ; k \geq 1\}$ et $\{(D_k^1, S_k^1) ; k \geq 1\}$ introduites au chapitre I. La propriété (I.C.*₁) et le fait que J soit un processus de renouvellement alterné de lois de temps de séjours géométriques permettent d'établir facilement le résultat suivant.

Proposition 7 -

Pour $i \in \{0, 1\}$, conditionnellement à $J_1 = i$, les vecteurs aléatoires $\{(D_k^0, S_k^0); k \geq 1\}$ sont deux familles indépendantes de vecteurs aléatoires indépendants. De plus, pour $k \geq 2$, la loi conditionnelle de D_k^0 sachant $J_1 = i$ est la loi $p^0 = \text{geom}(p_{01})$, la loi conditionnelle de S_k^0 sachant $D_k^0 = n$ et $J_1 = i$ est la loi $R_n^0 = F_{10} * F_{00}^{*(n-1)}$, la loi conditionnelle de D_k^1 sachant $J_1 = i$ est la loi $p^1 = \text{geom}(p_{10})$, la loi de S_k^1 sachant $D_k^1 = n$ et $J_1 = i$ est la loi $R_n^1 = F_{01} * F_{11}^{*(n-1)}$. Enfin, pour $k=1$, la loi conditionnelle de D_1^1 sachant $J_1 = 1-i$ (resp. $J_1 = i$) est la loi $\hat{p}^1 = \text{geom}(p_{1,1-i})$ (resp. $\hat{p}^1 = \text{geom}(p_{1,1-i})$) et celle de S_1^1 sachant $D_1^1 = n, J_1 = 1-i$ (resp. $D_1^1 = n, J_1 = i$) est la loi

$$R_n^1 = F_{1-i,1} * F_{11}^{*(n-1)} \text{ (resp. } \hat{R}_n^1 = \hat{F}_1 * F_{11}^{*(n-1)} \text{)}.$$

4 - Caractéristiques du processus $X = (X_n; n \in \mathbb{N}^*)$.

On suppose désormais (J, X) stationnaire et en particulier J ergodique stationnaire. Les résultats précédents et ceux du paragraphe A.3. fournissent immédiatement les caractéristiques du processus X des récompenses. Par exemple :

$$\bullet P[X_t \in x_1, \dots, X_{t+n-1} \in x_n] = \sum_{(j_1, \dots, j_{n+1})} Q_1^{j_1} \prod_{l=1}^n p_{j_l j_{l+1}} F_{j_l j_{l+1}}(x_l);$$

$$\bullet \sigma_X^2 = \pi.(M_2 - M_1 \pi M_1). 1$$

$$\bullet C_X(h) = \pi.M_1 (p^{(h-1)} - 1 \pi) M_1 1$$

$$= \pi.M_1 (I - 1 \pi) M_1 1 d^{h-1} ; h=1,2,\dots$$

~ ~

Le calcul des lois H_n et G_n peut être effectué à l'aide des formules des Corollaires 4 et 5 par l'intermédiaire de l'algorithme fourni dans la Proposition 6 pour le calcul itératif des lois conjointes des variables N_n^{ij} .

Toutefois, nous proposons un algorithme direct pour effectuer ce calcul :

Proposition 8 -

Soit (J, X) une chaîne de Markov binaire d'ordre 1 avec récompenses. On a alors

$$\tilde{H}_n^i(x) = Q^0_i \tilde{H}_n^0(x) + Q^1_i \tilde{H}_n^1(x) \quad (\text{resp. } \tilde{G}_n^i(x) = Q^0_i \tilde{G}_n^0(x) + Q^1_i \tilde{G}_n^1(x))$$

avec pour $x \in \mathbb{R}_+$, $i = 0, 1$:

$$\tilde{H}_n^i(x) = p_{11} F_{11} * \tilde{H}_{n-1}^i(x) + p_{1,1-1} F_{1,1-1} * \tilde{H}_{n-1}^{i-1}(x); \quad n \geq 1$$

$$(\text{resp. } \tilde{G}_n^i(x) = p_{11} F_{11}(x) \tilde{G}_{n-1}^i(x) + p_{1,1-1} F_{1,1-1}(x) \tilde{G}_{n-1}^{i-1}(x); \quad n \geq 1)$$

$$\text{et } \tilde{H}_0^i(x) = \tilde{G}_0^i(x) = 1.$$

Preuve - Il suffit bien sûr de montrer que pour $n \geq 2$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et $i \in \{0, 1\}$:

$$\begin{aligned} P[X_2 \in x_1, \dots, X_{n+1} \in x_n / J_1 = i] \\ = p_{11} F_{11}(x_1) P[X_2 \in x_2, \dots, X_n \in x_n / J_1 = i] \\ + p_{1,1-1} F_{1,1-1}(x_1) P[X_2 \in x_2, \dots, X_n \in x_n / J_1 = i-1]. \end{aligned}$$

Or, d'après (7), on a

$$\begin{aligned} P[X_2 \in x_1, \dots, X_{n+1} \in x_n, J_1 = i] \\ = \sum_{j=i, i-1} Q^i_j p_{1j} F_{1j}(x_1) P[X_3 \in x_2, \dots, X_{n+1} \in x_n / J_1 = i, J_2 = j] \end{aligned}$$

et par suite, utilisant la stationnarité de (J, X) , on a :

$$P[X_2 \in x_1, \dots, X_{n+1} \in x_n / J_1 = i] = \sum_{j=0,1} p_{1j} F_{1j}(x_1) P[X_2 \in x_2, \dots, X_n \in x_n / J_1 = j].$$

Cette dernière égalité permet alors de déduire les expressions de \tilde{H}_n^i et

\tilde{G}_n^i données dans la proposition. \square

En ce qui concerne les moments des variables $S_X(n)$; $n \geq 1$, on a ici :

$$\bullet E[S_X(n)] = n / (m^0 + m^1) \sum_{(i,j) \in \{0,1\}^2} m^1 p_{ij} \mu_{ij}$$

et

$$\begin{aligned} \bullet \text{var}[S_X(n)] &= n \sigma_X^2 + 2 \sum_{k=1, n-1} (n-k) C_X(k) \\ &= n \sigma_X^2 + 2 \left[\sum_{k=1, n-1} (n-k) d^{k-1} \right] \pi M_1 (I - 1 \pi) M_1 1, \\ &= n \sigma_X^2 + [2 / (1 - d)] [n - (1 - d^n) / (1 - d)] \pi M_1 (I - 1 \pi) M_1 1. \end{aligned}$$

5 - Comportement asymptotique des variables S_n , $S_X(n)$ et $M_X(n)$.

D'après le Corollaire 6, J est un processus Ψ -mélangeant avec $\Psi(n) = d^n$ ($|d| < 1$), et en particulier $\sum_{n \geq 1} \Psi^{1/2}(n) < +\infty$. On peut alors appliquer la Proposition 4 pour obtenir la convergence presque sûre des suites $\{(1/n) S_n ; n \geq 1\}$ et $\{(1/n) S_X(n) ; n \geq 1\}$ vers $m^1 / (m^0 + m^1)$ et $\mu_X = \sum_{i,j} [m^1 / (m^0 + m^1)] p_{ij} \mu_{ij}$ respectivement, et la normalité asymptotique de ces suites, avec ici :

$$\delta^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1/n) \cdot \text{var}(S_n) = m^0 m^1 / (m^0 + m^1)^2 \cdot [(1+d) / (1-d)]$$

et

$$\sigma^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1/n) \cdot \text{var}(S_X(n)) = \sigma_X^2 + 2 / (1-d) \pi M_1 (I - 1 \pi) M_1 1.$$

De même, dans le cas particulier où les fonctions de répartition F_{ij} sont soit des lois gamma soit la loi δ_0 , l'une au moins étant non dégénérée, la Proposition 5 et le Lemme 7 du Chapitre I permettent de préciser la loi asymptotique de la suite $\{M_X(n) ; n \geq 1\}$.



CHAPITRE III .

SERIES CHRONOLOGIQUES BINAIRES AVEC RECOMPENSES RENOUVELEES .

La classe de modèles des "Séries chronologiques binaires avec récompenses en dépendance markovienne" que nous avons étudiée précédemment est intéressante pour les applications (notamment en climatologie) dans la mesure où elle offre de grandes possibilités de calcul et une grande facilité d'utilisation.

Toutefois, l'hypothèse de base selon laquelle "la loi de la récompense en un instant t , compte tenu du passé du processus", n'est fonction que des types aux instants t et $t-1$, est parfois trop simplificatrice pour rendre compte de manière satisfaisante de l'évolution du phénomène étudié.

Nous sommes donc amenés à envisager une classe de modèles englobant la classe précédente, fondée sur des hypothèses moins strictes de dépendance entre les états successifs du processus (J,X) , modèles offrant encore des possibilités de calcul intéressantes pour les applications. Nous proposons des modèles qui reposent sur l'hypothèse que la "loi de la récompense en un instant t , compte tenu du passé du processus", est fonction du temps qui s'est écoulé depuis le dernier changement de type intervenu avant l'instant t .

Nous introduisons d'abord la notion de séries chronologiques binaires avec récompenses renouvelées, puis nous examinerons des cas particuliers dont celui où le processus des types est lui-même un processus de renouvellement alterné.

Partie A**SERIES CHRONOLOGIQUES BINAIRES
AVEC RECOMPENSES RENOUVELÉES****1 - Définition et premières propriétés.**

Nous posons :

Définition 1 -

On appelle série chronologique binaire avec récompenses renouvelées un processus (J, X) tel que les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) Pour tout $n \geq 2$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et tout $(j_1, \dots, j_n) \in \{0, 1\}^n$, on a :

$$\begin{aligned} P [X_n \leq x_n / J_1 = j_1, X_1 \leq x_1, \dots, J_{n-1} = j_{n-1}, X_{n-1} \leq x_{n-1}, J_n = j_n] \\ = P [X_n \leq x_n / J_{n-k} = 1 - j_n, J_{n-k+1} = \dots = J_n = j_n] \\ = H_j^n(k, x_n) \\ \text{si } j_n = \dots = j_{n-k+1} \neq j_{n-k} \text{ pour un } k \in \{1, 2, \dots, n-1\} \end{aligned}$$

(ii) Pour $n \geq 2$, $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1}$ et tout $(j_1, \dots, j_n) \in \{0, 1\}^n$, on a :

$$\begin{aligned} P [J_n = j_n / J_1 = j_1, X_1 \leq x_1, \dots, J_{n-1} = j_{n-1}, X_{n-1} \leq x_{n-1}] \\ = P [J_n = j_n / J_1 = \dots = J_k = j_1, J_{k+1} = 1 - j_1, \dots, J_{n-1} = j_{n-1} ; X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k] \\ \text{si } j_1 = \dots = j_k \neq j_{k+1} \text{ pour un } k \in \{1, \dots, n-1\}. \end{aligned}$$

Remarque 1 -

a - Pour $i \in \{0, 1\}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, $H_i(k, \cdot)$ est la fonction de répartition de "la loi de la récompense au k -ième instant d'une séquence de type i ".

b - La loi du processus (J, X) est complètement définie par la donnée des lois $H_j(k, \cdot)$ pour tout $j \in \{0, 1\}$ et $k \geq 1$, et des probabilités conjointes :

$$P [X_1 \in x_1, \dots, X_k \in x_k, J_1 = \dots = J_k = j, J_{k+1} = 1-j, J_{k+2} = j_{k+2}, \dots, J_n = j_n]$$

pour $1 \leq k \leq n-1, n \geq 2, j \in \{0, 1\}, (j_{k+2}, \dots, j_n) \in \{0, 1\}^{n-k-1}$ et $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_+^k$.

En effet, d'une part, pour tout $n \geq 1, i \in \{0, 1\}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ on a

$$\begin{aligned} & P [X_1 \in x_1, \dots, X_n \in x_n, J_1 = \dots = J_n = i] \\ &= \sum_{l \geq n} P [X_1 \in x_1, \dots, X_n \in x_n, J_1 = \dots = J_l = i, J_{l+1} = 1-i] \\ (i) \quad &= \sum_{l \geq n} \lim_{x_j \rightarrow +\infty; n < j \leq l} P [X_1 \in x_1, \dots, X_l \in x_l, J_1 = \dots = J_l = i, J_{l+1} = 1-i]. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $n \geq 2$ et $j \in \{0, 1\}$, d'après la condition (i), on a

$$\begin{aligned} (i') \quad & P [X_1 \in x_1, \dots, X_{n-1} \in x_{n-1}, X_n \in x_n, J_1 = \dots = J_{n-1} = j, J_n = 1-j] \\ &= H_{1-j}(1, x_n) \cdot P [X_1 \in x_1, \dots, X_{n-1} \in x_{n-1}, J_1 = \dots = J_{n-1} = j, J_n = 1-j]. \end{aligned}$$

Enfin, pour $n \geq 3, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, j \in \{0, 1\}, k \in \{1, \dots, n-2\}, (j_{k+2}, \dots, j_n) \in \{0, 1\}^{n-k-1}$, on a d'après (i) et (ii)

$$\begin{aligned} (i'') \quad & P [X_1 \in x_1, \dots, X_k \in x_k, X_{k+1} \in x_{k+1}, \dots, X_n \in x_n, J_1 = \dots = J_k = j, J_{k+1} = 1-j, \dots, J_n = j_n] \\ &= P [X_1 \in x_1, \dots, X_k \in x_k, J_1 = \dots = J_k = j, J_{k+1} = 1-j, J_{k+2} = j_{k+2}, \dots, J_n = j_n] \\ &\quad \cdot P [X_{k+1} \in x_{k+1}, \dots, X_n \in x_n / J_k = j, J_{k+1} = 1-j, J_{k+2} = j_{k+2}, \dots, J_n = j_n]. \end{aligned}$$

Notons que si pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$ on a : $J_n = \dots = J_{n-k+1} = j_{n-k}$, la loi conditionnelle des variables X_1, \dots, X_n sachant $J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n$ s'écrit aussi, en vertu de (i), de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
& P [X_1 \{ x_1, \dots, X_n \{ x_n / J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n \} \\
& = P [X_1 \{ x_1, \dots, X_{n-k} \{ x_{n-k} / J_1 = j_1, \dots, J_{n-k} = 1-j_n, J_{n-k+1} = \dots = J_n = j_n \} \\
& \quad \cdot \prod_{u=n-k+1}^n P [X_u \{ x_u / J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n \}] ;
\end{aligned}$$

de plus, pour tout $u \in \{n-k+1, \dots, n\}$ on a :

$$P [X_u \{ x_u / J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n \}] = P [X_u \{ x_u / J_{n-k} = 1-j_n, J_{n-k+1} = \dots = J_u = j_u \}] .$$

Il résulte donc que le processus (J, X) vérifie la propriété d'indépendance conditionnelle suivante :

Lemme 1 -

Pour tout $t \geq 2$, $m \geq 1$, $k \in \{1, \dots, t-1\}$, tout $i \in \{0, 1\}$ et tout $(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}_+^m$, on a :

$$\begin{aligned}
& P [X_t \{ x_1, \dots, X_{t+n-1} \{ x_n / J_{t-k} = 1-i, J_{t-k+1} = \dots = J_{t+n-1} = 1 \} \\
& = \prod_{j=1}^n P [X_{t+j-1} \{ x_j / J_{t-k} = 1-i, J_{t-k+1} = \dots = J_{t+j-1} \} \\
& = \prod_{j=1}^n H_1 (k+j-1, x_j) .
\end{aligned}$$

Ce lemme traduit le fait que les variables $(X_{t+j-1}, j=1, \dots, n)$ sont conditionnellement indépendantes sachant que l'instant $(t+j-1)$ est le $(k+j-1)$ -ième instant d'une séquence de type i .

Les relations (1), (1'), (1'') et le lemme 1 permettent de démontrer :

Proposition 1 -

Une série chronologique binaire avec récompenses renouvelées (J, X) est stationnaire si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) Le processus binaire $J = (J_n ; n \in \mathbb{N}^*)$ est stationnaire.

(ii) Pour tout $n \geq 2$, tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$ et $(j_1, \dots, j_n) \in \{0, 1\}^n$ tel que $j_1 = \dots = j_k \neq j_{k+1}$ et tout $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_+^k$, on a :

$$P [X_1 \in x_1, \dots, X_k \in x_k, J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n] \\ = \sum_{u=0}^{\infty} P [J_1 = 1-j_1, J_2 = \dots = J_{u+k+1} = j_1, J_{u+k+2} = 1-j_1, \dots, J_{u+n+1} = j_n] \prod_{l=1}^k H_j(u+1, x_l).$$

Dans ces conditions, pour $n \geq 1$ et $i \in \{0, 1\}$, la loi des valeurs de la récompense sur une séquence (resp. sur séjour résiduel) de type i est donnée par :

$$(3) \quad F_n^i(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n H_i(k, x_k)$$

(resp.

$$(3') \quad \hat{F}_n^i(x_1, \dots, x_n) = 1 / (m^i p_n^i) \sum_{u=0}^{\infty} p_{u+k}^i H_i(u+1, x_1) \dots H_i(u+n, x_n).$$

On a aussi

$$(4) \quad P [X_1 \in x_1, \dots, X_n \in x_n / J_1 = \dots = J_n = 1] \\ = (1 / \sum_{u \geq n} p_u^1) \sum_{u=0}^{\infty} p_{u+n}^1 H_1(u+1, x_1) \dots H_1(u+n, x_n) ; (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n.$$

Preuve - Supposons que le processus (J, X) est stationnaire. Alors bien sûr, les deux processus marginaux sont eux aussi stationnaires.

Soit $(j_1, \dots, j_n) \in \{0, 1\}^n$ tel que pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$: $j_1 = \dots = j_k = i$, $j_{k+1} = 1-i$.

On peut écrire, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$:

$$\begin{aligned} & P [X_t \leq x_1, \dots, X_{t+n-1} \leq x_n, J_t = \dots = J_{t+k-1} = i, J_{t+k} = 1-i, J_{t+k+1} = j_{k+2}, \dots, J_{t+n-1} = j_n] \\ & = P [X_t \leq x_1, \dots, X_{t+k-1} \leq x_k, J_t = \dots = J_{t+k-1} = i, J_{t+k} = 1-i, \dots, J_{t+n-1} = j_n] \\ & \quad \cdot P [X_{t+k} \leq x_{k+1}, \dots, X_{t+n-1} \leq x_n / J_{t+k-1} = i, J_{t+k} = 1-i, \dots, J_{t+n-1} = j_n], \end{aligned}$$

où, d'après ce qui précède, il est aisé de vérifier que le second terme du produit ne dépend pas de l'instant t . Le premier terme se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & P [X_t \leq x_1, \dots, X_{t+k-1} \leq x_k, J_t = \dots = J_{t+k-1} = i, J_{t+k} = 1-i, \dots, J_{t+n-1} = j_n] \\ & = P [X_t \leq x_1, \dots, X_{t+k-1} \leq x_k, J_1 = \dots = J_{t+k-1} = i, J_{t+k} = 1-i, \dots, J_{t+n-1} = j_n] \\ & \quad + \sum_{u=1}^{t-1} P [J_{t-u} = 1-i, J_{t-u+1} = \dots = J_{t+k-1} = i, J_{t+k} = 1-i, \dots, J_{t+n-1} = j_n] \prod_{j=0}^{k-1} H_j(u+j, x_{j+1}) \end{aligned}$$

Le processus (J, X) étant supposé stationnaire, on a nécessairement pour tout $t \geq 2$

$$\begin{aligned} & P [X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k, J_1 = \dots = J_k = i, J_{k+1} = 1-i, J_{k+2} = j_{k+2} = \dots = J_n = j_n] \\ & = \sum_{u=1}^{t-1} P [J_1 = 1-i, J_2 = \dots = J_{u+k} = i, J_{u+k+1} = 1-i, \dots, J_{u+n} = j_n] \\ & \quad \cdot H_i(u, x_1) \dots H_i(k+u-1, x_k) \\ & + P [X_t \leq x_1, \dots, X_{t+k-1} \leq x_k, J_1 = \dots = J_{t+k-1} = i, J_{t+k} = 1-i, \dots, J_{t+n-1} = j_n]. \end{aligned}$$

Alors en passant à la limite lorsque t tend vers l'infini, nous déduisons l'expression de la probabilité conjointe donnée en (ii), puisque pour tout $t \geq 2$, la probabilité

$$P [X_t \leq x_1, \dots, X_{t+k-1} \leq x_k, J_1 = \dots = J_{t+k-1} = i, J_{t+k} = 1-i, \dots, J_{t+n-1} = j_n]$$

peut être majorée par la quantité Q_{t+k-1}^i qui tend vers zéro lorsque t tend vers l'infini.

La relation (3) est une conséquence immédiate du Lemme 1.

D'après (ii), on a en particulier, pour tout $k \geq 1$, tout $i \in \{0,1\}$ et tout $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_+^k$:

$$\begin{aligned}
 & P [X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k, J_1 = \dots = J_k = i, J_{k+1} = 1-i] \\
 &= \sum_{u=0}^{\infty} P [J_1 = 1-i, J_2 = \dots = J_{u+k+1} = i, J_{u+k+2} = 1-i] \prod_{j=1}^k H_i(u+j, x_j) \\
 &= (Q_1^i - Q_2^i) \sum_{u=0}^{\infty} p_{u+k}^i \cdot H_i(u+1, x_1) \dots H_i(u+k, x_k).
 \end{aligned}$$

Par suite on a :

$$\begin{aligned}
 \hat{F}_k^i(x_1, \dots, x_k) &= (Q_1^i - Q_2^i) / (Q_k^i - Q_{k+1}^i) \sum_{u \geq 0} p_{u+k}^i H_i(u+1, x_1) \dots H_i(u+k, x_k) \\
 &= (1 / m^i p_k^i) \cdot \sum_{u \geq 0} p_{u+k}^i H_i(u+1, x_1) \dots H_i(u+k, x_k)
 \end{aligned}$$

ce qui démontre la relation (3'). La relation (4) se déduit sans difficulté des relations (1) et (3').

Réciproquement, on montre que si les deux conditions (i) et (ii) sont vérifiées alors (J, X) est stationnaire, en vérifiant, par des calculs analogues à ceux qui viennent d'être effectués, que la loi conditionnelle du vecteur (X_t, \dots, X_{t+n-1}) sachant que $J_t = j_1, \dots, J_{t+n-1} = j_n$ est, pour tout $n \geq 2$ et tout $(j_1, \dots, j_n) \in \{0,1\}^n$, indépendante de t ($t \geq 2$). On utilise notamment la propriété d'indépendance conditionnelle énoncée dans le Lemme 1 et la relation (5). \square

Remarque 2 -

a- Il résulte de la Remarque 1-b et de la condition nécessaire et suffisante (i)-(ii) de la Proposition 1, que la loi d'une série chronologique binaire avec récompenses renouvelées stationnaire (J, X) est entièrement définie à partir de la donnée de la loi du processus stationnaire J et des lois $H_i(k, \cdot)$ pour tout $k \geq 1$ et tout $i \in \{0,1\}$.

Les processus binaires J que l'on peut envisager pour définir la loi de (J, X) peuvent par exemple être choisis dans la famille des processus de

renouvellement alterné (cf. partie C §2), ou dans la famille des processus DARMA.

b- Soit (J, X) une série chronologique binaire avec récompenses renouvelées stationnaire, telle que pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $i \in \{0, 1\}$ on ait :

$$(6) \quad H_i(k, x) = H_i(2, x) \quad \text{si } k \geq 2.$$

Alors on peut vérifier simplement que, pour $n \geq 2$, $(j_1, \dots, j_n) \in \{0, 1\}^n$ et tout $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, on a :

$$\begin{aligned} P \{ J_n = j_n / J_1 = j_1, X_1 \leq x_1, \dots, J_{n-1} = j_{n-1}, X_{n-1} \leq x_{n-1} \} \\ = P \{ J_n = j_n / J_{n-1} = j_{n-1}, \dots, J_1 = j_1, X_1 \leq x_1 \}. \end{aligned}$$

Ainsi, une série chronologique binaire avec récompenses renouvelées, stationnaire, telle que (6) est vérifiée est une série chronologique binaire avec récompenses en dépendance markovienne stationnaire correspondant à des lois F_{ij} ; $i, j=0, 1$ données par :

$$F_{ij}(x) = \begin{cases} H_j(2, x) & \text{si } i = j \\ H_j(1, x) & \text{si } i = 1-j \end{cases} ; x \geq 0.$$

Il est donc possible de retrouver plusieurs résultats établis dans le chapitre II à partir de ceux du présent chapitre.

2- Caractéristiques conditionnelles du processus marginal $(X_n : n \in \mathbb{N}^*)$ sachant $(J_n : n \in \mathbb{N}^*)$.

Supposons que (J, X) vérifie les deux conditions (i) et (ii) de la définition 1, et qu'en outre, (J, X) est stationnaire.

La Remarque 3 du chapitre I et les égalités (3) et (3') ci-dessus permettent alors d'énoncer :

Corollaire 1-

Pour $i \in \{0, 1\}$, la fonction de répartition de la loi de la valeur cumulée de la récompense sur une séquence (resp. un séjour résiduel) de type i de longueur n s'écrit :

$$R_n^i(x) = \sum_{l=1}^n H_i(l, x) \quad ; \quad x \geq 0,$$

(resp.
$$R_n^i(x) = 1 / (m^i p_n^i) \sum_{j \geq 0} p_{j+n}^i \sum_{l=1}^n H_i(j+1, x); \quad x \geq 0, n \geq 1$$
).

En outre, pour $i \in \{0, 1\}$, la fonction de répartition de la valeur maximum de la récompense sur une séquence (resp. sur un séjour résiduel) de type i , de longueur n est donnée, par :

$$U_n^i(x) = \prod_{k=1}^n H_i(k, x) \quad ; \quad x \geq 0, n \geq 1$$

(resp.
$$U_n^i(x) = (1 / m^i p_n^i) \sum_{j \geq 0} p_{j+n}^i \prod_{l=1}^n H_i(j+1, x); \quad x \geq 0, n \geq 1$$
).

Il résulte aussi de (3') que, pour tout $i \in \{0, 1\}$, $n \geq 1$ et $k \in \{1, \dots, n\}$, "la loi de la récompense au k -ième instant d'un séjour résiduel de type i de longueur n " est définie par la fonction de répartition

$$P [X_k \leq x / J_1 = \dots = J_n = i, J_{n+1} = 1-i]$$

$$= 1 / (m^i p_n^i) \cdot \sum_{j=0}^{\infty} p_{n+j}^i H_i(j+k, x); \quad x \in \mathbb{R}_+$$

De même, d'après (4), "la loi de la récompense au k -ième instant d'un séjour résiduel de type i de longueur supérieure à n " est donnée par la fonction de répartition :

$$P\{X_k \leq x / J_1 = \dots = J_n = i\} = (1 / \sum_{j \geq n} \hat{p}_j^i) \sum_{j \geq 0} \hat{p}_{n+j}^i H_i(j+k, x) ; x \geq 0, 1 \leq k \leq n.$$

En particulier, pour $k = n$, on a :

$$\begin{aligned} \hat{H}_i(n, x) &= P\{X_n \leq x / J_1 = \dots = J_n = i\} \\ &= (1 / \sum_{j \geq n} \hat{p}_j^i) \cdot \sum_{j \geq n} \hat{p}_j^i H_i(j, x) ; x \geq 0, n \geq 1, i = 0, 1. \end{aligned}$$

Rappelons que les fonctions de répartition $\hat{H}_i(k, \cdot)$, $k \geq 1$, $i = 0, 1$, peuvent aussi être obtenues grâce à la relation (8) du lemme 3 du chapitre I. En outre, d'après la relation (3) et le Lemme 4 du chapitre I, la "loi de la récompense au dernier instant d'une séquence de type I" s'écrit :

$$H_i^d(x) = \sum_{l \geq 1} \hat{p}_l^i H_i(l, x) ; x \geq 0, i = 0, 1.$$

Remarquons enfin qu'une série chronologique binaire avec récompenses renouvelées est un processus de précipitation si la loi de la récompense en une date de type 0 est la loi de Dirac δ_0 en 0 :

$$\hat{H}_0(1, x) = 1 ; x \geq 0.$$

3 - Caractéristiques du processus marginal $X = (X_n, n \in \mathbb{N}^*)$

Soit (J, X) une série chronologique binaire avec récompenses renouvelées que l'on suppose stationnaire.

Le calcul des lois marginales de dimensions finies du processus marginal X à partir de la loi du processus binaire J et des lois conditionnelles de dimensions finies de X sachant J ne conduit à des expressions utilisables que dans des situations particulières. Nous proposons, dans la suite, lorsque la loi du processus binaire J est spécifiée, des algorithmes permettant le calcul de ces lois marginales et des lois des variables $S_X(n)$, $M_X(n)$, $S_X^i(n)$ et $M_X^i(n)$ ($i = 0, 1$).

Signalons (cf. Chapitre I) que la "loi de la récompense en un instant quelconque" est ici définie par la fonction de répartition :

$$F_X(x) = P[X_t \leq x] = 1 / (m^0 + m^1) \cdot [m^0 \hat{H}_0(1, x) + m^1 \hat{H}_1(1, x)] \\ = 1 / (m^0 + m^1) [m^0 \sum_{l \geq 1} p_l^0 \hat{H}_0(1, x) + m^1 \sum_{l \geq 1} p_l^1 \hat{H}_1(1, x)]; x \geq 0.$$

Les moments d'ordre r , $\mu_X^{(r)} = E[X_t^r]$ sont donnés par :

$$\mu_X^{(r)} = 1 / (m^0 + m^1) [m^0 \hat{\mu}_0^{(r)}(1) + m^1 \hat{\mu}_1^{(r)}(1)]$$

où pour $i \in \{0, 1\}$

$$\hat{\mu}_i^{(r)}(1) = \sum_{k \geq 1} p_k^i \mu_i^{(r)}(k).$$

En ce qui concerne la variance $\sigma_X^2 = \mu_X^{(2)} - \mu_X^2$, on a

$$\sigma_X^2 = \sum_{i=0}^1 [m^i / (m^0 + m^1)] \hat{\mu}_i^{(2)}(1) - (\sum_{i=0}^1 [m^i / (m^0 + m^1)] \hat{\mu}_i(1))^2 \\ = [1 / (m^0 + m^1)] \{ \sum_{i=0,1} m^i \hat{\mu}_i^{(2)}(1) \\ - (1 / (m^0 + m^1)) \sum_{i=0,1} [(m^i)^2 \hat{\mu}_i^2(1) + (m^i m^{1-i}) \hat{\mu}_i(1) \hat{\mu}_{1-i}(1)] \}$$

Or

$$\hat{\mu}_i^{(2)}(1) = \hat{\sigma}_i^2(1) + \hat{\mu}_i^2(1),$$

alors

$$\begin{aligned} \sigma^2_X &= \sum_{i=0,1} \{ [m^i / (m^0 + m^1)] \hat{\sigma}^2_{j(1)} + [m^i / (m^0 + m^1)] (\hat{\mu}^2_{j(1)} - [m^i / (m^0 + m^1)] \hat{\mu}^2_{j(1)}) \\ &\quad - [m^i m^{1-i} / (m^0 + m^1)^2] \hat{\mu}_i(1) \hat{\mu}_{1-i}(1) \} \\ &= 1 / (m^0 + m^1) \{ \sum_{i=0,1} m^i \hat{\sigma}^2_{j(1)} + [1 / (m^0 + m^1)] \sum_{i=0,1} m^i m^{1-i} \hat{\mu}_i(1) (\hat{\mu}_i(1) - \hat{\mu}_{1-i}(1)) \} \end{aligned}$$

et par suite,

$$(7) \sigma^2_X = [1 / (m^0 + m^1)] \sum_{i=0,1} m^i \hat{\sigma}^2_{j(1)} + [m^0 m^1 / (m^0 + m^1)^2] (\hat{\mu}_0(1) - \hat{\mu}_1(1))^2.$$

Enfin, la fonction de covariance du processus X s'écrit :

$$\begin{aligned} (8) \quad C_X(h) &= E [X_n X_{n+h}] - \mu^2_X \\ &= \sum_{i=0}^1 [m^i / (m^0 + m^1)] E [X_1 X_{h+1} / J_1 = i] - \mu^2_X \end{aligned}$$

où

$$(8') E [X_1 X_{h+1} / J_1 = i] = \sum_{j_1} \hat{p}_1^i E [X_1 X_{h+1} / J_1 = \dots = J_1 = i, J_{1+1} = 1 - i]$$

les moments croisés conditionnels qui figurent sous le signe somme pouvant être calculés grace à des récurrences dans le cas particulier où le processus J est un processus de renouvellement alterné stationnaire comme nous le verrons dans la partie C de ce chapitre.

PARTIE B**UN CAS PARTICULIER DE SERIES CHRONOLOGIQUES
BINAIRES AVEC RECOMPENSES RENOUVELEES.**

Comme nous l'avons vu dans la Remarque 1.b., si la série chronologique binaire avec récompense renouvelées (J, X) vérifie l'égalité (6) alors (J, X) est une série chronologique binaire avec récompenses en dépendance markovienne. Dans les applications en climatologie traitant du problème de la modélisation des séries de quantités journalières de précipitation, il se trouve que lorsque cette hypothèse supplémentaire est acceptable, le phénomène est bien représenté par une chaîne de Markov binaire d'ordre 1 avec récompenses (cf. Chapitre IV. A). Lorsque cette hypothèse doit être rejetée, on est souvent dans des situations où la loi de la quantité de précipitation en un jour t , compte tenu du passé du phénomène, n'est fonction que des types des jours $t, t-1, t-2, \dots, t-k_0+1$ pour un certain entier $k_0 \geq 3$.

Dans le cadre des séries chronologiques binaires avec récompenses renouvelées, cette hypothèse se traduit par la condition suivante :

$$(9) \quad H_i(k, \cdot) = H_i(k_0, \cdot) \text{ pour } k \geq k_0.$$

Nous examinerons ici le cas où $k_0 = 3$ que nous rencontrerons dans les applications du Chapitre IV.

1- Caractéristiques du processus (J, X) .

On suppose donc que (J, X) est une série chronologique binaire avec récompenses renouvelées telle que (9) est satisfaite pour $k_0 = 3$.

On peut aisément vérifier que pour tout $n \geq 2$, $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et tout $(j_1, \dots, j_n) \in \{0, 1\}^n$, on a :

$$\begin{aligned} P \{ J_n = j_n / J_1 = j_1, \dots, J_{n-1} = j_{n-1} ; X_1 \in x_1, \dots, X_{n-1} \in x_{n-1} \} \\ = P \{ J_n = j_n / J_1 = j_1, \dots, J_{n-1} = j_{n-1} ; X_1 \in x_1, X_2 \in x_2 \}. \end{aligned}$$

La loi de (J,X) est alors complètement définie par la donnée des lois $H_i(1,.)$, $H_i(2,.)$ et $H_i(3,.)$; $i=0,1$, et de la loi conjointe de (X_1, X_2) et du processus binaire J , i.e. des probabilités conjointes $P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n]$ pour tout $n \geq 1$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2$ et tout $(j_1, \dots, j_n) \in \{0,1\}^n$.

En effet, pour $n \geq 1$, $(j_1, \dots, j_n) \in \{0,1\}^n$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, on a :

$$(10) \quad P[X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n, J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n] \\ = P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n] \cdot \prod_{i=3, n} F_{j_{i-2} j_{i-1} j_i}(x_i);$$

où, pour $x \geq 0$ et $(i,j,k) \in \{0,1\}^3$:

$$(11) \quad F_{ijk}(x) = \begin{cases} H_k(1, x) & \text{si } k = 1-j \\ H_k(2, x) & \text{si } k = j = 1-i \\ H_k(3, x) & \text{si } k = j = i \end{cases}$$

L'égalité (10) et la Proposition 1 permettent de montrer :

Proposition 2 :

Soit (J,X) une série chronologique binaire avec récompenses renouvelées vérifiant (9) avec $k_0=3$. Alors :

(i) (J,X) vérifie la condition (I.C.) avec, pour $3 \leq k \leq n$, $(j_1, \dots, j_n) \in \{0,1\}^n$:

$$P[X_k \leq x / J_1 = j_1, J_2 = j_2, \dots, J_n = j_n] = F_{j_{k-2} j_{k-1} j_k}(x); \quad x \in \mathbb{R}_+$$

(ii) (J,X) est un processus stationnaire si et seulement si J est stationnaire, et de plus, pour tout $n \geq 1$, la loi conjointe des variables $X_1, X_2, J_1, \dots, J_n$ est donnée par :

$$P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, J_1 = j_1, \dots, J_n = j_n] \\ = \sum_{(i,j) \in \{0,1\}^2} P[J_1 = i, J_2 = j, J_3 = j_1, J_4 = j_2, \dots, J_{n+2} = j_n] F_{ijj_1}(x_1) F_{jj_1 j_2}(x_2); \\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2, (j_1, \dots, j_n) \in \{0,1\}^n.$$

Preuve - L'assertion (i) est une conséquence immédiate de l'égalité (10). L'assertion (ii) peut être déduite de la Proposition 1 : ainsi, par exemple, dans le cas où $j_1 = \dots = j_k \neq j_{k+1}$, $3 \leq k \leq n-1$, faisant tendre x_3, \dots, x_k vers l'infini dans l'égalité figurant au point (ii) de la dite proposition, et tenant compte de ce que $H_j(1, x) = H_j(3, x)$ pour $1 \geq 3$ et tout $j \in \{0, 1\}$, on obtient l'expression de la loi conjointe de $(X_1, X_2, J_1, \dots, J_n)$ donnée ci-dessus. \square

Remarque 3 -

a- Ces propriétés d'une telle série chronologique binaire avec récompenses renouvelées permettent évidemment, comme dans la partie A du Chapitre II, de préciser diverses caractéristiques du processus (J, X) , les expressions des différentes lois conditionnelles étudiées dans le paragraphe 2, prenant ici une forme simplifiée.

Signalons, qu'en vertu de (10) et de la proposition 2, on a l'expression suivante, analogue à l'égalité (7) du Chapitre II, de la loi de dimension finie du processus marginal $X = (X_n; n \in \mathbb{N}^*)$:

$$\begin{aligned}
 (12) \quad & P [X_t \leq x_1, \dots, X_{t+n-1} \leq x_n] \\
 & = \sum_{(j_1, \dots, j_{n+2}) \in \{0, 1\}^{n+2}} P [J_1 = j_1, \dots, J_{n+2} = j_{n+2}] \cdot \prod_{l=1}^n F_{j_l, j_{l+1}, j_{l+2}}(x_l); \\
 & \quad t \geq 1, n \geq 1, (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n.
 \end{aligned}$$

Cette expression permet de préciser, dans l'esprit du paragraphe 3 du Chapitre II, plusieurs autres caractéristiques du processus X notamment les lois des variables $S_X(n), M_X(n), \dots$.

b- Il est clair que l'on peut conduire une étude similaire pour un processus tel que la condition (9) est satisfaite pour un certain $k_0 \geq 3$.

2- Comportement asymptotique des variables $S_X(n)$ et $M_X(n)$

Le résultat suivant permet d'aborder l'étude du comportement asymptotique des variables $S_X(n)$ et $M_X(n)$ pour des processus (J, X) du type envisagé :

Lemme 2 -

Soit (J, X) une série chronologique binaire avec récompenses renouvelées stationnaire vérifiant la condition (9) avec $k_0=3$.

Supposons que J est Ψ -mélangeant. Alors

- (i) le processus $X = (X_n; n \in \mathbb{N}^*)$ est Ψ -mélangeant.
 (ii) pour $k \geq 1$, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P[X_{k+1} > x / X_1 > x] = 0.$$

Preuve - Soit $k \geq 1, m \geq 1$ et $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_+^k, (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}_+^m$. D'après (12), on a pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} & P[X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k, X_{k+n+1} \leq y_1, \dots, X_{k+n+m} \leq y_m] \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_{k+n+m+2})} P[J_1 = i_1, \dots, J_{k+n+m+2} = i_{k+n+m+2}] \cdot \prod_{l=1}^k F_{i_l, i_{l+1}, i_{l+2}}(x_l) \\ & \quad \cdot \prod_{r=1}^m F_{i_{k+n+r}, i_{k+n+r+1}, i_{k+n+r+2}}(y_r) \\ &= \sum_{(i_1, \dots, i_{k+2})} \sum_{(j_1, \dots, j_{m+2})} P[J_1 = i_1, \dots, J_{k+2} = i_{k+2}, J_{k+n+1} = j_1, \dots, J_{k+n+m+2} = j_{m+2}] \\ & \quad \cdot \prod_{l=1}^k F_{i_l, i_{l+1}, i_{l+2}}(x_l) \cdot \prod_{r=1}^m F_{j_r, j_{r+1}, j_{r+2}}(y_r). \end{aligned}$$

Comme par l'hypothèse, pour (i_1, \dots, i_{k+2}) et (j_1, \dots, j_{m+2}) , on a

$$\begin{aligned} & P[J_1 = i_1, \dots, J_{k+2} = i_{k+2}] \cdot P[J_{k+n+1} = j_1, \dots, J_{k+n+m+2} = j_{m+2}] (1 - \Psi(n)) \\ & \leq P[J_1 = i_1, \dots, J_{k+2} = i_{k+2}, J_{k+n+1} = j_1, \dots, J_{k+n+m+2} = j_{m+2}] \\ & \leq (1 + \Psi(n)) P[J_1 = i_1, \dots, J_{k+2} = i_{k+2}] \cdot P[J_{k+n+1} = j_1, \dots, J_{k+n+m+2} = j_{m+2}] \end{aligned}$$

l'assertion (i) s'obtient facilement.

Pour démontrer (ii), on écrit, pour tout $k \geq 3$:

$$\begin{aligned}
 & P [X_{k+1} > x, X_1 > x] \\
 & = \sum_{(j_1, j_2, j_3, j_1, j_2, j_3) \in \{0,1\}^6} P [J_1 = j_1, J_2 = j_2, J_3 = j_3, J_{k+1} = j_1, J_{k+2} = j_2, J_{k+3} = j_3] \\
 & \quad \cdot (1 - F_{j_1 j_2 j_3}(x)) (1 - F_{j_1 j_2 j_3}(x)).
 \end{aligned}$$

Compte tenu de l'hypothèse de Ψ -mélangeance du processus J , pour tout (j_1, j_2, j_3) et (j_1, j_2, j_3) , on a :

$$\begin{aligned}
 & P [J_1 = j_1, J_2 = j_2, J_3 = j_3, J_{k+1} = j_1, J_{k+2} = j_2, J_{k+3} = j_3] \\
 & \ll (1 + \Psi(k-2)) P [J_1 = j_1, J_2 = j_2, J_3 = j_3] \cdot P [J_{k+1} = j_1, J_{k+2} = j_2, J_{k+3} = j_3]
 \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}
 & P [X_{k+1} > x, X_1 > x] \ll (1 + \Psi(k-2)) \left\{ \sum_{(j_1, j_2, j_3)} P [J_1 = j_1, J_2 = j_2, J_3 = j_3] (1 - F_{j_1 j_2 j_3}(x)) \right\} \\
 & \quad \cdot \left\{ \sum_{(j_1, j_2, j_3)} P [J_{k+1} = j_1, J_{k+2} = j_2, J_{k+3} = j_3] (1 - F_{j_1 j_2 j_3}(x)) \right\} \\
 & = (1 + \Psi(k-2)) P [X_1 > x] P [X_{k+1} > x]
 \end{aligned}$$

soit :

$$P [X_{k+1} > x / X_1 > x] \ll (1 + \Psi(k-2)) P [X_{k+1} > x]$$

d'où le résultat annoncé pour $k \geq 3$. Enfin, il est facile de vérifier que l'assertion est vraie pour $k = 1$ et $k = 2$. \square

Remarque 4 -

Les assertions (i) et (ii) sont en fait encore valables si (9) est satisfaite avec $k_0 \geq 3$.

En vertu du Théorème 1 du Chapitre I, nous pouvons maintenant énoncer :

Proposition 3 -

Soit (J, X) un processus vérifiant les hypothèses du Lemme 2. Alors :

- (i) la suite $\{(1/n) S_n; n \geq 1\}$ (resp. $\{(1/n) S_X(n); n \geq 1\}$) converge presque sûrement vers $m^0/(m^0+m^1)$ (resp. $\mu_X = [1/(m^0+m^1)](m^0 \hat{\mu}_0(1) + m^1 \hat{\mu}_1(1))$).
- (ii) si de plus $\sum_n \Psi^{1/2}(n) < +\infty$ et $\delta^2 = C_J(0) + 2 \sum_n C_J(n) > 0$ (resp. $\gamma^2 = \sigma_X^2 + 2 \sum_n C_X(h) > 0$) où C_J est la fonction de covariance de J (resp. σ_X^2 et $C_X(h)$ sont données par (7) et (8)), la suite $\{(S_n - n.(m^1/(m^0+m^1)))/(\delta\sqrt{n}); n \geq 1\}$ (resp. $\{(S_X(n) - n\mu_X)/(\gamma\sqrt{n}); n \geq 1\}$) est asymptotiquement de loi gaussienne centrée et réduite.

De même, le Lemme 2 ci-dessus et le Théorème 2 du chapitre I permettent de préciser le comportement asymptotique de la suite $\{M_X(n); n \geq 1\}$.

Dans la cas particulier où les lois $H_i(k, \cdot); 1 \leq k \leq 3$ appartiennent à la famille des lois gamma, le Lemme 5 et le Théorème 2 du Chapitre I permettent d'énoncer:

Proposition 4 -

Soit (J, X) un processus vérifiant les hypothèses du Lemme 2 avec de plus $\sum_n \Psi(n) < \infty$. Supposons que les lois $H_i(k, \cdot); 1 \leq k \leq 3, i \in \{0, 1\}$ sont des lois gamma. Alors on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P [M_X(n) \leq u_n + x / n F'_X(u_n)] = \exp(-e^{-x}); x \in \mathbb{R}$$

où (u_n) est la suite des plus grandes valeurs caractéristiques de F_X .

Remarque 5 -

La Proposition 4 reste valable lorsque (9) est satisfaite avec $k > 3$.

Partie C**PROCESSUS DE RENOUVELLEMENT ALTERNÉ
AVEC RÉCOMPENSES DÉCOMPOSABLES .**

Nous étudions dans cette partie la classe des séries chronologiques binaires avec récompenses renouvelées (J,X) telles que le processus marginal J est un processus de renouvellement alterné.

1- Définition et premières propriétés.

Nous posons :

Définition 2-

On dit que le processus (J,X) est un processus de renouvellement alterné avec récompenses décomposables si la condition (i) de la Définition 1 est vérifiée, et si de plus, pour $n \geq 3$, $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}_+^{n-1}$, on a :

$$\begin{aligned} P [J_n = j_{n-1} / J_1 = j_1, \dots, J_{n-1} = j_{n-1}, X_1 \in x_1, \dots, X_{n-1} \in x_{n-1}] \\ = P [J_n = j_{n-1} / J_1 = j_1, \dots, J_{n-1} = j_{n-1}] \\ = P [J_n = j_{n-1} / J_{n-k-1} = 1-j_{n-1}, J_{n-k} = \dots = J_{n-1} = j_{n-1}] = q_k^{j_{n-1}} \end{aligned}$$

pour $(j_1, \dots, j_{n-1}) \in \{0,1\}^{n-1}$ tel que $j_{n-1} = \dots = j_{n-k} \neq j_{n-k-1}$; $k \in \{1, \dots, n-2\}$.

Remarque 6 -

a- Le processus (J, X) au sens de la définition précédente est tel que le processus marginal J est un processus de renouvellement alterné (cf. § 2). De plus, on peut vérifier à l'aide de la Définition 2 que, pour $n \geq 3$, $k \in \{1, \dots, n-2\}$, $(j, j_{k+2}, \dots, j_n) \in \{0,1\}^{n-k}$ et $(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_+^k$:

$$\begin{aligned} P [X_1 \in x_1, \dots, X_k \in x_k / J_1 = \dots = J_k = j, J_{k+1} = 1-j, J_{k+2} = j_{k+2}, \dots, J_n = j_n] \\ = P [X_1 \in x_1, \dots, X_k \in x_k / J_1 = \dots = J_k = j, J_{k+1} = 1-j]. \end{aligned}$$

b- D'après cette première remarque et la remarque 1.b., il est clair que la loi d'un processus de renouvellement alterné binaire (R.A.) avec récompenses décomposables (J,X) est complètement définie par la donnée :

- des suites $\{ H_i(k, \cdot) ; k \geq 1 \} ; i=0,1$, des fonctions de répartition des récompenses aux k-lèmes instants d'une séquence de type i.

- des paramètres du processus de R.A. $(J_n ; n \geq 1)$ (cf. S2).

- et des probabilités conjointes :

$P [X_1 \in x_1, \dots, X_k \in x_k, J_1, \dots, J_k = i, J_{k+1} = 1-i] ; (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}_+^k$,
pour $i \in \{0,1\}$ et $k \geq 1$.

En vertu de ces remarques, du Lemme 1 et de la Proposition 1, on peut énoncer :

Corollaire 2 -

Soit (J,X) un processus de R.A. avec récompenses décomposables. Alors, (J,X) est stationnaire si et seulement si le processus binaire J est stationnaire, et si de plus, pour $n \geq 1, i \in \{0,1\}$, la loi conditionnelle des variables X_1, \dots, X_n sachant $J_1 = \dots = J_n = i, J_{n+1} = 1-i$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
 & P [X_1 \in x_1, \dots, X_n \in x_n / J_1 = \dots = J_n = i, J_{n+1} = 1-i] \\
 (13) \quad & = \hat{F}_n^i(x_1, \dots, x_n) = (1 / m^i p_n^i) \sum_{j \geq 0} p_{n+j}^i H_i(j+1, x_1) \dots H_i(j+n, x_n) ; \\
 & (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n .
 \end{aligned}$$

Dans ce cas on a de plus, pour $n \geq 1$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$:

$$(14) \quad \hat{F}_n^i(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n H_i(k, x_k)$$

et $P [X_t \in x_1, \dots, X_{t+n-1} \in x_n / J_t = \dots = J_{t+n-1} = i]$

$$(15) \quad = (1 / \sum_{k \geq n} \hat{p}_k^i) \sum_{k \geq 0} \hat{p}_{n+k}^i H_i(k+1, x_1) \dots H_i(k+n, x_n) .$$

Remarque 7 -

D'après le Corollaire 2 et d'après les conditions de stationnarité d'un processus de R.A. (cf. S2) la loi du processus (J, X) est définie par la donnée des lois $H_i(k, \cdot)$, pour $i \in \{0, 1\}$ et $k \geq 1$ et des lois des durées de séquences p^0 et p^1 associées au processus J . Remarquons aussi qu'un processus de R.A. avec récompenses décomposables est un processus de précipitation si pour $k \geq 1$, $H_0(k, \cdot) = \delta_0$. Dans les applications que nous présentons dans le Chapitre IV, nous considérons les cas particuliers où les lois $H_i(k, \cdot)$ sont des lois gamma, et où les lois p^0 et p^1 sont soit des lois binomiales négatives translatés, soit des lois géométriques.

2- Caractéristiques du processus marginal $J = (J_n ; n \in \mathbb{N}^*)$

Dans ce paragraphe, nous présentons brièvement la classe des séries chronologiques binaires de type renouvellement alterné qui a déjà été utilisée avec succès par divers auteurs pour la modélisation des séquences climatiques (cf. Green (1964), Buishand (1977), Galloy - Le Breton - Martin (1982), Essebar (1984)).

2.1- Définition et propriétés d'un processus de renouvellement alterné

La dernière égalité de la Définition 2 assure que le processus marginal J est un processus de renouvellement alterné au sens de la définition suivante, les lois $p^i ; i \in \{0, 1\}$ étant associées aux suites de persistances $q^i ; i \in \{0, 1\}$ intervenant dans la définition 2.

Soit $Q_1^i \in [0, 1]$, et $\tilde{p}^i = (\tilde{p}_n^i ; n \geq 1)$, $p^i = (p_n^i ; n \geq 1)$, $i = 0, 1$, quatre lois de probabilités sur \mathbb{N}^* .

Définition 3-

La série chronologique binaire $J = (J_n ; n \in \mathbb{N}^*)$ est dite processus de renouvellement alterné de paramètres $(Q_1^i, p^i, \tilde{p}^i ; i=0, 1)$ si $P[J_1=1] = Q_1^1$, et pour $i \in \{0, 1\}$, conditionnellement à $J_1=i$, les durées de séjour $(D_k^i ; k \geq 1)$ (resp. $(D_k^{1-i} ; k \geq 1)$) sont

indépendantes de loi \tilde{p}^i pour $k=1$, de même loi p^i pour $k \geq 2$ (resp. de même loi p^{i-1} pour $k \geq 1$), les suites $(D_k^0; k \geq 1)$ et $(D_k^1; k \geq 1)$ étant de plus indépendantes entre elles.

Lemme 3 -

Supposons que p^0 et p^1 admettent des moments d'ordre 1, m^0 et m^1 . Le processus de renouvellement alterné $(J_t; t \in \mathbb{N}^*)$ de paramètres

$(Q^i_1, p^i, \tilde{p}^i; i=0,1)$ est stationnaire si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$(i) \quad Q^1_1 = m^1 / (m^0 + m^1)$$

$$(ii) \quad \tilde{p}^i_k = p^i_k = (1/m^i) \sum_{l=0}^{\infty} p^i_{k+l}; \quad i \geq 1, i=0,1.$$

Selon la terminologie usuelle, la loi p^i (resp. \tilde{p}^i) est alors la loi des durées de séquences de type i (resp. la loi des durées de séjour résiduel dans le type i). Nous dirons que la série chronologique J est un processus de renouvellement alterné binaire stationnaire de paramètres p^0 et p^1 , et noterons $J \sim \text{R.A. } (p^0, p^1)$. Le calcul de la fonction de covariance d'un processus R.A. (p^0, p^1) ,

$$C_J(h) = Q^1_1 \{ P\{J_{t+h} = 1 / J_t = 1\} - Q^1_1 \}; \quad h \geq 1, t \geq 1$$

repose sur la détermination des probabilités de transitions

$$p_{11}^{(h)} = P\{J_{h+1} = 1 / J_1 = 1\}; \quad h \geq 0$$

qui peuvent être calculées par des récurrences en fonction de p^0 et p^1 (cf. Bousseboua (1982)). Notons que la famille $\{p_{11}^{(h)}; h \geq 0\}$ admet (cf. Grégoire (1982)) comme fonction génératrice :

$$\mathcal{P}(s) = \frac{1}{(1-s)} - \frac{s}{m^1(1-s)^2} \cdot \frac{(1-\mathcal{P}^0(s))(1-\mathcal{P}^1(s))}{1 - \mathcal{P}^0(s)\mathcal{P}^1(s)}; \quad -1 \leq s \leq +1,$$

où, pour $i \in \{0,1\}$, $\mathcal{P}^i(\cdot)$ désigne la fonction génératrice de p^i .

Remarque 8 -

Si $(J_n ; n \in \mathbb{N}^*)$ est une chaîne de Markov binaire d'ordre 1 stationnaire de probabilités de transition p_{ij} , alors on peut vérifier simplement que, conditionnellement à $J_1 = i$, les variables aléatoires durées de séjours D_n^i (resp. D_n^0) dans l'état 1 (resp. 0) sont indépendantes entre elles et sont équidistribuées selon la loi géométrique de paramètre p_{i0} (resp. p_{01}) et que de plus, les suites $(D_n^0 ; n \geq 1)$ et $(D_n^1 ; n \geq 1)$ sont indépendantes entre elles. La chaîne $(J_n ; n \geq 1)$ est alors un processus R.A. stationnaire correspondant à des lois de durées de séjours géométriques, les lois de séjours résiduels coïncidant avec les lois p^i ;

$$\text{i.e. } \hat{p}^i = p^i = \text{Geom}(p_{i,1-i}) ; i = 0,1.$$

De même, on peut vérifier qu'une chaîne de Markov binaire d'ordre 2 est un processus de R.A. correspondant à des lois de séjours p^i ; $i = 0,1$ dont les expressions sont rappelées en Annexe I du Chapitre IV.

2.2 - Lois des sommes partielles S_n

La détermination des caractéristiques essentielles du processus des récompenses que nous présentons dans le paragraphe 4 repose en particulier sur des algorithmes faisant intervenir des lois conditionnelles de S_n sachant $J_1 = i$ ou sachant $J_1 = i, J_2 = j$ pour tout $(i,j) \in \{0,1\}^2$. Nous donnons ci-après un algorithme (cf. Buishand (1977), Essebbar (1984)) permettant le calcul de ces lois conditionnelles et par suite celui de la loi de S_n .

Posons, pour $i \in \{0,1\}, n \geq 1$ et $k \in \{0, \dots, n\}$

$$(16) \quad R_n^i(k) = P[S_n = k / J_1 = i, J_2 = 1-i]$$

et

$$(17) \quad R_n^{ii}(k) = P[S_n = k / J_1 = i, J_2 = i].$$

On a évidemment

$$\begin{aligned} R_n^{ii}(k) &= (P[S_n = k, J_1 = i] - P[S_n = k, J_1 = i, J_2 = 1-i]) / P[J_1 = i, J_2 = i] \\ &= (Q_1^i / Q_2^i) P[S_n = k / J_1 = i] - [(Q_1^i - Q_2^i) / Q_2^i] R_n^i(k) \end{aligned}$$

soit pour $i \in \{0, 1\}$ et $k \in \{0, \dots, n\}$

$$(17') \quad R_n^{ii}(k) = m^i / (m^i - 1) \cdot [\tilde{R}_n^i(k) - (1/m^i) R_n^i(k)]$$

où, pour $i = 0, 1$

$$(18) \quad \tilde{R}_n^i(k) = P[S_n = k / J_1 = 1]$$

Lemme 4 -

Les suites $\{R_n^i(k) ; 0 \leq k \leq n ; n \geq 1\}$; $i=0, 1$, définies par (16) vérifient :

- pour $n = 1$: $R_1^i(1) = \delta_{11}$; $R_1^i(0) = 1 - \delta_{11}$,
- pour $n \geq 2$: $R_n^i(0) = R_n^i(n) = 0$

$$R_n^0(n-1) = m^1 \hat{p}_{n-1}^1 ; \quad R_n^1(1) = m^0 \hat{p}_{n-1}^0$$

$$R_n^0(1) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2 \\ m^0 \hat{p}_1^1 \hat{p}_{n-2}^0 & \text{si } n \geq 3 \end{cases} ; \quad R_n^1(n-1) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2 \\ m^1 \hat{p}_1^0 \hat{p}_{n-2}^1 & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

- pour $n \geq 3$:

$$R_n^0(k) = \sum_{j=1}^k \hat{p}_j^1 R_{n-j}^1(k-j+1) \quad \text{si } 1 \leq k \leq n-2$$

$$R_n^1(k) = \sum_{j=1}^{n-k} \hat{p}_j^0 R_{n-j}^0(k-1) \quad \text{si } 2 \leq k \leq n-1$$

Le lemme suivant permet de relier les suites $\{\tilde{R}_n^i(k) ; n \geq 1, 0 \leq k \leq n\}$ définies par (18) aux suites $\{R_n^i(k) ; n \geq 1, 0 \leq k \leq n\}$; $i = 0, 1$:

Lemme 5 -

On a :

- pour $n = 1$: $\tilde{R}_1^0(0) = 1 - \delta_{11}$; $\tilde{R}_1^1(1) = \delta_{11}$,

- pour $n \geq 2$: $\tilde{R}_n^0(n) = \tilde{R}_n^1(0) = 0$

$$\tilde{R}_n^0(0) = \sum_{j \geq n} \hat{p}_j^0 ; \quad \tilde{R}_n^1(n) = \sum_{j \geq n} \hat{p}_j^1$$

$$\tilde{R}_n^0(n-1) = (m^1/m^0) \hat{p}_{n-1}^1 ; \quad \tilde{R}_n^1(1) = (m^0/m^1) \hat{p}_{n-1}^0$$

- pour $n \geq 3$ et $1 \leq k \leq n-1$:

$$\tilde{R}_n^0(k) = \sum_{j=1}^{n-k} \hat{p}_j^0 R_{n-j+1}^0(k) ; \quad \tilde{R}_n^1(k) = \sum_{j=1}^k \hat{p}_j^1 R_{n-j+1}^1(k-j+1).$$

Nous pouvons alors faire le calcul des suites $\{R_n^{ii}(k) ; 0 \leq k \leq n, n \geq 1\}$ à partir de l'égalité (17') et des Lemmes 4 et 5 :

$$R_n^{ii}(k) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n-k} \hat{p}_{j+1}^0 R_{n-j+1}^0(k) & \text{si } i = 0 \text{ et } 0 \leq k \leq n-1 \\ \sum_{j=1}^{k-1} \hat{p}_{j+1}^1 R_{n-j+1}^1(k) & \text{si } i = 1 \text{ et } 2 \leq k \leq n ; \end{cases}$$

et faire aussi le calcul des probabilités $P[S_n = k]$; $k = 0, \dots, n$ par :

$$P[S_n = k] = 1/(m^0 + m^1) \{ m^0 \tilde{R}_n^0(k) + m^1 \tilde{R}_n^1(k) \}.$$

Notons que la variance de S_n peut être calculée numériquement soit à partir des valeurs des probabilités $P [S_n = k] ; 0 \leq k \leq n$, soit à partir des valeurs de $C_j(h) ; h \geq 1$ qui sont, comme on l'a vu précédemment, calculables par récurrences. Nous disposons toutefois, du résultat asymptotique suivant (cf. Buishand (1977)), utile dans les applications (cf. Chapitre IV) :

$$(19) \quad \text{Var} (S_n) = n \cdot [(m^1)^2 m^0_2 + (m^0)^2 m^1_2] / (m^0 + m^1)^3 \\ + (m^1 m^0_2 - m^0 m^1_2)^2 / 2 (m^0 + m^1)^4 \\ - [(m^1)^2 m^0_3 + (m^0)^2 m^1_3] / 3 (m^0 + m^1)^3 \\ + [2 m^0 m^1 + (m^0 m^1)^2] / 6 (m^0 + m^1)^2 + o(1),$$

où m^i_k est le moment centré d'ordre k (i.e. la variance si $k = 2$) de la loi p^i .

Remarque 9 -

Dans le cas où J est une chaîne de Markov d'ordre 1 stationnaire, le calcul de la loi de S_n ainsi que celui des suites $\{R^i_n(k) ; n \geq 1, 0 \leq k \leq n\} ; i=0,1$, repose uniquement sur celui des suites $\{R^i_n(k) ; n \geq 1, 0 \leq k \leq n\}$.

En effet, nous avons dans ce cas, pour $n \geq 2, 2 \leq k \leq n$ et $i \in \{0,1\}$:

$$R^{ii}_n(k) = P [S_n = k / J_1 = i, J_2 = i] = P [S_{n-1} = k-1 / J_1 = i] = \tilde{R}^i_{n-1}(k-1)$$

et

$$R_n^i(k) = \tilde{R}_{n-1}^{i-1}(k-1);$$

Les suites $\{\tilde{R}_n^i(k) ; n \geq 1, 0 \leq k \leq n\}$ se calculent facilement par les récurrences suivantes (cf. Bousseboua (1983)) :

$$\tilde{R}_n^i(k) = ((m^1-1)/m^1) \tilde{R}_{n-1}^i(k-1) + (1/m^1) \tilde{R}_{n-1}^{i-1}(k-1); n \geq 2, i=0,1, 1 \leq k \leq n-1$$

3- Caractéristiques du processus (J,X)

Pour un processus de renouvellement alterné avec récompenses décomposables stationnaire (J,X), les différentes lois conditionnelles étudiées dans le paragraphe 2.A. sont données par les mêmes expressions obtenues dans un cadre plus général. Le fait que le processus binaire J soit

de renouvellement alterné permet d'énoncer un résultat analogue à celui donné dans la Proposition 7 du Chapitre II.B, et qui concerne les deux suites de vecteurs aléatoires $\{(D_k^0, S_k^0); k \geq 1\}$ et $\{(D_k^1, S_k^1); k \geq 1\}$.

Proposition 5 -

Pour $i \in \{0, 1\}$, conditionnellement à $J_1 = i$, les vecteurs aléatoires $\{(D_k^0, S_k^0); k \geq 1\}$ et $\{(D_k^1, S_k^1); k \geq 1\}$ sont deux familles indépendantes de vecteurs aléatoires indépendants. De plus, pour $k \geq 2$, la loi conditionnelle de D_k^0 sachant $J_1 = i$ est la loi p^0 , la loi conditionnelle de S_k^0 sachant $D_k^0 = n$ et $J_1 = i$ est la loi $R_n^0(0) = \ast_{l=1, n} H_0(l, \cdot)$, la loi conditionnelle de D_k^1 sachant $J_1 = i$ est la loi p^1 , la loi de S_k^1 sachant $D_k^1 = n$ et $J_1 = i$ est la loi $R_n^1(\cdot) = \ast_{l=1, n} H_1(l, \cdot)$. Enfin, pour $k = 1$, la loi conditionnelle de D_1^i sachant $J_1 = 1 - i$ (resp. $J_1 = i$) est la loi p^i (resp. \hat{p}^i) et celle de S_1^i sachant $D_1^i = n, J_1 = 1 - i$ (resp. $D_1^i = n, J_1 = i$) est la loi $R_n^i(\cdot) = \ast_{l=1, n} H_i(l, \cdot)$

(resp. $\hat{R}_n^i(\cdot) = (1 / m^i p_n^i) \sum_{j \geq 0} p_{j+n}^i \ast_{l=1, n} H_i(j+l, \cdot)$).

Notons qu'en vertu de la Remarque 2-b, comme une chaîne de Markov d'ordre 1 est un processus de renouvellement alterné binaire de lois de séjours géométriques, le résultat précédent est en fait une généralisation de la Proposition 7 du chapitre II.

4 - Caractéristiques du processus X de récompenses.

Soit (J, X) un processus de renouvellement alterné binaire avec récompenses décomposables stationnaire. Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'étude de la loi et de la structure de covariance du processus marginal des récompenses.

4-1 Lois de dimensions finies du processus $X = (X_n; n \in \mathbf{N}^*)$.

Pour $i \in \{0, 1\}$ et $n \geq 1$, on pose :

$$(20) \quad G_n^i(x_1, \dots, x_n) = P[X_2 \in x_1, \dots, X_{n+1} \in x_n / J_1 = i]; \quad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n.$$

La fonction de répartition G_n de (X_t, \dots, X_{t+n-1}) s'écrit alors :

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = 1 / (m^0 + m^1) [m^0 G_n^0(x_1, \dots, x_n) + m^1 G_n^1(x_1, \dots, x_n)].$$

D'autre part, désignons par $G_{n,[k]}^i$ la fonction de répartition de la loi conditionnelle des variables X_2, \dots, X_{n+1} sachant $J_1 = i, S_{n+1} = k$, i.e. pour $i \in \{0, 1\}, n \geq 1, k \in \{0, \dots, n+1\}$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$.

$$(21) \quad G_{n,[k]}^i(x_1, \dots, x_n) = P[X_2 \leq x_1, \dots, X_{n+1} \leq x_n / J_1 = i, S_{n+1} = k].$$

Alors, la suite $\{G_n^i(\cdot); n \geq 1\}$ est reliée à la suite $\{G_{n,[k]}^i(\cdot); n \geq 1, 0 \leq k \leq n+1\}$ par la relation :

$$(22) \quad G_n^i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0, n+1}^{\sim} R_{n+1}^i(k) \cdot G_{n,[k]}^i(x_1, \dots, x_n);$$

$i=0, 1; (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$

et la détermination des probabilités $G_n(x_1, \dots, x_n), n \geq 1$ passe par le calcul des suites $\{G_{n,[k]}^i(\cdot); n \geq 1, 0 \leq k \leq n+1\}$ définies par (21). Le calcul de celles-ci repose sur le calcul intermédiaire des deux suites $\{G_{n,[k]}^{01}(\cdot); n \geq 1, 0 \leq k \leq n+1\}$ et $\{G_{n,[k]}^{10}(\cdot); n \geq 1, 0 \leq k \leq n+1\}$ où, pour $i \in \{0, 1\}$:

$$(23) \quad G_{n,[k]}^{i, 1-i}(x_1, \dots, x_n) = P[X_2 \leq x_1, \dots, X_{n+1} \leq x_n / J_1 = i, J_2 = 1-i, S_{n+1} = k].$$

Lemme 6 -

Pour $i \in \{0, 1\}$, les suites $\{G_{n,[k]}^{i, 1-i}(\cdot); n \geq 1, 0 \leq k \leq n+1\}$ vérifient :

• Pour $n \geq 1$:

$$G_{n,[0]}^{i, 1-i}(x_1, \dots, x_n) = G_{n,[n+1]}^{i, 1-i}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$G_{n,[n]}^{01}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1, n} H_1(j, x_j) ; \quad G_{n,[1]}^{10}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1, n} H_0(j, x_j).$$

• Pour $n \geq 2$:

$$G_{n,[k]}^{01}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{R_{n+1}^0(k)} \sum_{l=1}^n p_1^l R_{n-l+1}^l(k-l+1) \cdot \prod_{j=1}^l H_1(j, x_j) \cdot G_{n-l,[k-l+1]}^{10}(x_{l+1}, \dots, x_n)$$

si $1 \leq k \leq n-1$

$$G_{n,[k]}^{10}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{R_{n+1}^1(k)} \sum_{l=1}^{n-k+1} p_1^0 R_{n-l+1}^1(k-l) \cdot \prod_{j=1}^l H_0(j, x_j) \cdot G_{n-l,[k-l]}^{01}(x_{l+1}, \dots, x_n)$$

si $2 \leq k \leq n$.

Preuve - Les égalités de la première partie du Lemme se démontrent facilement en utilisant la propriété d'indépendance conditionnelle sur des séjours particuliers. Pour $n \geq 2$ et $k \in \{1, \dots, n-1\}$, on peut écrire :

$$G_{n,[k]}^{01}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{l=1}^n P[X_2 \leq x_1, \dots, X_{n+1} \leq x_n / J_1=0, J_2=\dots=J_{l+1}=1, J_{l+2}=0, S_{n+1}=k] \cdot P[D_1^l=1 / J_1=0, J_2=1, S_{n+1}=k]$$

où, pour $l \in \{1, \dots, k\}$

$$P[D_1^l=1 / J_1=0, J_2=1, S_{n+1}=k] = \frac{p_1^l P[S_{n+1}=k / J_1=0, J_2=\dots=J_{l+1}=1, J_{l+2}=0]}{P[S_{n+1}=k / J_1=0, J_2=1]}$$

J étant un processus de renouvellement alterné stationnaire, on a :

$$\begin{aligned} P[S_{n+1}=k / J_1=0, J_2=\dots=J_{l+1}=1, J_{l+2}=0] &= P[J_{l+1} + \dots + J_{n-1} = k-l+1 / J_{l+1}=1, J_{l+2}=0] \\ &= R_{n-l+1}^1(k-l+1), \end{aligned}$$

et, par définition, on a :

$$P[S_{n+1}=k / J_1=0, J_2=1] = R_{n+1}^0(k).$$

D'autre part, d'après le Lemme 1, le premier terme du produit sous le signe somme peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 & P [X_2 \{x_1, \dots, X_{l+1} \{x_l / J_1 = 0, J_2 = \dots = J_{l+1} = 1 \} \\
 & \cdot P [X_{l+2} \{x_{l+1}, \dots, X_{n+1} \{x_n / J_{l+1} = 0, J_{l+2} = 1, J_{l+1} + \dots + J_{n+1} = k-l+1 \} \\
 & = \prod_{j=1}^l H_1(j, x_j) \cdot G^{01}_{n-l, [k-l+1]}(x_{l+1}, \dots, x_n).
 \end{aligned}$$

Cela entraîne l'expression de $G^{01}_{n, [k]}(x_1, \dots, x_n)$ pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$.
 L'expression de $G^{10}_{n, [k]}(\cdot)$; $2 \leq k \leq n$; $n \geq 2$ s'obtient de manière analogue. \square

Nous pouvons maintenant donner un algorithme pour le calcul des suites $\{ G^i_{n, [k]}(\cdot); n \geq 1, 0 \leq k \leq n+1 \}$:

Proposition 6 -

Pour $i \in \{0, 1\}$, et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, les suites $\{G^i_{n, [k]}(\cdot); 0 \leq k \leq n+1; n \geq 1\}$ définies par (21) vérifient :

• Pour $n \geq 1$:

$$G^0_{n, [n+1]}(x_1, \dots, x_n) = G^1_{n, [0]}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$G^0_{n, [n]}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1, n} H_1(j, x_j) ; G^1_{n, [1]}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{j=1, n} H_0(j, x_j)$$

$$G^0_{n, [0]}(x_1, \dots, x_n) = (1 / \sum_{j \geq n+1} \hat{p}^0_j) \cdot \sum_{j \geq 1} \hat{p}^0_{j+n} H_0(j+1, x_1) \dots H_0(j+n, x_n)$$

$$G^1_{n, [n+1]}(x_1, \dots, x_n) = (1 / \sum_{j \geq n+1} \hat{p}^1_j) \cdot \sum_{j \geq 1} \hat{p}^1_{j+n} H_1(j+1, x_1) \dots H_1(j+n, x_n)$$

• Pour $n \geq 2$:

$$G^0_{n, [k]}(x_1, \dots, x_n)$$

$$\begin{aligned}
 & = \frac{1}{R^0_{n+1}(k)} \sum_{l=1, n-k+1} \hat{p}^0_l R^0_{n-l+2}(k) F^0_l(\infty, x_1, \dots, x_{l-1}) G^{01}_{n-l+1, [k]}(x_1, \dots, x_n); \\
 & \text{pour } 1 \leq k \leq n-1
 \end{aligned}$$

$$G_{n,[k]}^1(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\tilde{R}_{n+1}^1(k)} \sum_{l=1, k}^{\wedge} p_{l-1}^1 R_{n-l+2}^1(k) \hat{F}_l^1(\infty, x_1, \dots, x_{l-1}) \cdot G_{n-l+1, [k-l+1]}^0(x_1, \dots, x_n) \quad \text{pour } 2 \leq k \leq n,$$

où $\hat{F}_n^1(\infty, x_1, \dots, x_{n-1}) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \hat{F}_n^1(y, x_1, \dots, x_{n-1})$; $l=0, 1$, avec la convention :

$$\hat{F}_n^1(\infty, x_1, \dots, x_{n-1}) = 1 \quad \text{pour } n=1.$$

Preuve - La proposition 6 se démontre à l'aide d'arguments analogues à ceux utilisés dans la preuve du Lemme 6.

Remarque 10 -

Les algorithmes que nous venons de présenter, offrent notamment la possibilité de calculer les lois des variables aléatoires $S_X(n)$, $M_X(n)$, $S_X^1(n)$ et $M_X^1(n)$ ($i=0, 1$). Ainsi, si on pose pour $i \in \{0, 1\}$ et $n \geq 1$:

$$\tilde{G}_{n,[k]}^i(x) = P[\text{Max}_{t=2, \dots, n+1} (X_t) \leq x / J_1 = i, S_{n+1} = k]; x \geq 0, 0 \leq k \leq n+1$$

et

$$\tilde{G}_{n,[k]}^{i, i-1}(x) = P[\text{Max}_{t=2, \dots, n+1} (X_t) \leq x / J_1 = i, J_2 = i-1, S_{n+1} = k]$$

un algorithme de calcul des deux suites $\{\tilde{G}_{n,[k]}^i(x); n \geq 1, 0 \leq k \leq n+1\}$, $i=0, 1$, et donc de la suite $\{G_n(x); n \geq 1\}$, se déduit du Lemme 6 et de la Proposition 5 en posant $x_1 = \dots = x_n = x$.

De même, prenant les images des différentes lois par la transformation $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \dots + x_n$, on dispose d'un algorithme de calcul de la suite

$\{\tilde{H}_n(x), n \geq 1\}$ des fonctions de répartition des variables cumulées $S_X(n)$; $n \geq 1$, dans lequel les produits sont remplacés par des produits de convolution. Le calcul des lois des variables $S_X^0(n)$ et $M_X^0(n)$ (resp. $S_X^1(n)$ et $M_X^1(n)$) se ramène à celui des variables $S_X(n)$ et $M_X(n)$ en remplaçant $H_1(k, \cdot)$; $k \geq 1$ (resp. $H_0(k, \cdot)$) par la loi de Dirac δ_0 en 0.

Remarquons enfin que dans le cas où pour un $k_0 \geq 2$ on a : $H_i(k, \cdot) = H_i(k_0, \cdot)$ pour $k \geq k_0$, des simplifications intéressantes peuvent s'opérer, dans le calcul itératif des différentes caractéristiques du processus X et des différentes lois associées. Ainsi, par exemple, dans le cas où $H_i(k, \cdot) = H_i(2, x)$; $k \geq 2$, on peut donner l'algorithme spécifique suivant pour

le calcul des suites $\{\tilde{G}_{n,[k]}^i(x); n \geq 1; 0 \leq k \leq n+1\}$ définies au début de la

Remarque 10 et des suites $\{\tilde{H}_{n,[k]}^i(x); n \geq 1; 0 \leq k \leq n+1\}$ définies, pour $i \in \{0, 1\}$ par :

$$\tilde{H}_{n,[k]}^i(x) = P \left[\sum_{t=2}^{n+1} X_t \leq x \mid J_1 = i, S_{n+1} = k \right]; \quad n \geq 1.$$

Proposition 7 -

Soit (J, X) un processus de renouvellement alterné avec récompenses décomposables stationnaire. On suppose que (J, X) vérifie (6).

Alors les suites $\{\tilde{G}_{n,[k]}^i(x); n \geq 1, 0 \leq k \leq n+1\}$ et $\{\tilde{H}_{n,[k]}^i(x); n \geq 1, 0 \leq k \leq n+1\}$ et définies plus haut vérifient, pour $i \in \{0, 1\}$:

- si $n = 1$: $\tilde{G}_{1,[1]}^1(x) = \tilde{H}_{1,[1]}^1(x) = H_{1-1}(1, x)$;
- si $n \geq 1$: $\tilde{G}_{n,[n+1]}^0(x) = \tilde{H}_{n,[n+1]}^0(x) = \tilde{G}_{n,[0]}^1(x) = \tilde{H}_{n,[0]}^1(x) = 0$.
 $\tilde{G}_{n,[0]}^0(x) = H_0^n(2, x)$; $\tilde{G}_{n,[n+1]}^1(x) = H_1^n(2, x)$
 $\tilde{H}_{n,[0]}^0(x) = H_0^{*n}(2, x)$; $\tilde{H}_{n,[n+1]}^1(x) = H_1^{*n}(2, x)$.

• pour $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n$ on a :

$$\tilde{G}_{n,[k]}^i(x) = (1/R_{n+1}^i(k)) \{ ((m^1-1)/m^1) R_{n+1}^{1i}(k) \cdot H_i(2, x) \cdot \tilde{G}_{n-1,[k-1]}^i(x) + (1/m^1) R_{n+1}^i(k) \cdot H_{1-i}(1, x) \cdot \tilde{G}_{n-1,[k-1]}^{1-i}(x) \}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{n,[k]}^i(x) = & (1 / \tilde{R}_{n+1}^i(k)) \{ ((m^i-1)/m^i) \tilde{R}_{n+1}^{ii}(k) \cdot H_i(2,.) * \tilde{H}_{n-1,[k-i]}^i(x) \\ & + (1/m^i) \tilde{R}_{n+1}^i(k) H_{1-i}(1,.) * \tilde{H}_{n-1,[k-i]}^{1-i}(x) \} . \end{aligned}$$

Remarque 11 -

Dans le cas particulier où J est une chaîne de Markov d'ordre 1, on peut retrouver les relations données dans la Proposition 8 du chapitre II. C en tenant compte de la remarque 8 et des relations :

$$\tilde{H}_n^i(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \tilde{R}_{n+1}^i(k) \tilde{H}_{n,[k]}^i(x); \quad i=0,1$$

et

$$\tilde{G}_n^i(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \tilde{R}_{n+1}^i(k) \tilde{G}_{n,[k]}^i(x) .$$

4-2. Structure de Covariance du processus $X = (X_n ; n \geq 1)$

Les algorithmes de calcul des lois de dimensions finies du processus marginal X que nous avons développés dans le paragraphe précédent ne conduisent pas à des algorithmes simples pour le calcul des probabilités conjointes des variables X_1 et X_n , $n \geq 2$ qui interviennent dans l'expression de la fonction de covariance C_X du processus X.

La méthode que nous proposons ci-après pour le calcul de ces probabilités repose sur le calcul intermédiaire des probabilités conditionnelles suivantes :

$$P [X_n \in y / J_1 = \dots = J_1 = 1, J_{1+i} = 1-i] ; i \in \{1, 2, \dots, n-2\} ; n \geq 3, i=0,1 ; y \geq 0 .$$

Lemme 7 -

Soit (J, X) un processus de renouvellement alterné avec récompenses décomposables stationnaire. Alors, pour $i \in \{0, 1\}$ et $y \geq 0$ on a :

- pour $n = 3$

$$P[X_3 \leq y / J_1 = 1, J_2 = 1-i] = p_1^{1-i} H_1(1, y) + m^{1-i} \overset{\wedge}{p_2}^{1-i} H_{1-i}(2, y).$$

- pour $n \geq 4$ et $i \in \{1, \dots, n-2\}$, on a (avec la convention $\sum_{j=1}^0 \alpha_j = 0$)

$$P[X_n \leq y / J_1 = \dots = J_i = 1, J_{i+1} = 1-i]$$

$$= \sum_{k=1}^{n-i-2} p_k^{1-i} T^{1-i}_{n-k-i+1}(y) + p_{n-i-1}^{1-i} H_i(1, y) + m^{1-i} \overset{\wedge}{p_{n-1}}^{1-i} H_{1-i}(n-1, y)$$

où, pour $n \geq 3$ et $i \in \{0, 1\}$

$$T^{1-i}_n(y) = P[X_n \leq y / J_1 = 1-i, J_2 = 1]; \quad y \geq 0.$$

La suite $\{T^{1-i}_n(y); n \geq 3\}$ est fournie par l'algorithme :

- pour $n = 3$ on a

$$T_3^{1-i}(y) = p_1^i H_{1-i}(1, y) + m^i \overset{\wedge}{p_2}^i H_i(2, y).$$

- pour $n \geq 4$

$$T^{1-i}_n(y) = \sum_{l=1}^{n-3} p_l^i T^i_{n-l}(y) + p_{n-2}^i H_{1-i}(1, y) + m^i \overset{\wedge}{p_{n-1}}^i H_i(n-1, y)$$

Preuve - Pour $n = 3$, on a :

$$P[X_3 \leq y / J_1 = 1, J_2 = 1-i]$$

$$= P[X_3 \leq y / J_1 = 1, J_2 = 1-i, J_3 = 1] \cdot P[J_3 = 1 / J_2 = 1-i, J_1 = 1]$$

$$+ P[X_3 \leq y / J_1 = 1, J_2 = J_3 = 1-i] \cdot P[J_3 = 1-i / J_2 = 1-i, J_1 = 1]$$

$$= p_1^{1-i} H_1(1, y) + (1-p_1^{1-i}) H_{1-i}(2, y)$$

d'où le résultat pour $n = 3$, puisque : $1-p_1^{1-i} = m^{1-i} \overset{\wedge}{p_2}^{1-i}$.

Pour $n \geq 4$ et $1 \in \{1, \dots, n-2\}$, on peut écrire, J étant un processus R. A. (p^0, p^1) :

$$\begin{aligned} & P [X_n \leq y / J_1 = \dots = J_1 = 1, J_{1+1} = 1-1] \\ &= \sum_{k \geq 1} p_k^{1-i} P [X_n \leq y / J_1 = 1, D_1^i = 1, D^{1-i}_1 = k] \\ &= \sum_{k=1}^{n-1-2} p_k^{1-i} P [X_n \leq y / J_1 = \dots = J_1 = 1, J_{1+1} = \dots = J_{1+k} = 1-1, J_{1+k+1} = 1] \\ &\quad + p_{n-1-1}^{1-i} H_1(1, y) + \sum_{k \geq n-1} p_k^{1-i} H_{1-i}(n-1, y) \end{aligned}$$

où, d'après la condition (i) de la Définition 1, si $1 \leq k \leq n-1-2$:

$$\begin{aligned} & P [X_n \leq y / J_1 = \dots = J_1 = 1, J_{1+1} = \dots = J_{1+k} = 1-1, J_{1+k+1} = 1] \\ &= P [X_n \leq y / J_{1+k} = 1-1, J_{1+k+1} = 1] = T^{1-i}_{n-k-1+1}(y). \end{aligned}$$

Cela prouve les deux premières parties du Lemme. La preuve de l'algorithme de calcul de la suite $\{T^{1-i}_n(y) ; n \geq 3\}$ utilise des arguments de même nature. \square

On peut alors énoncer :

Proposition 8 -

Sous les hypothèses du Lemme 7, on a :

$$P [X_1 \leq x, X_n \leq y] = (m^0 + m^1)^{-1} \sum_{i=0,1} m^i P [X_1 \leq x, X_n \leq y / J_1 = i] ; n \geq 2$$

avec, pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ et $i \in \{0, 1\}$:

- si $n = 2$

$$\begin{aligned} & P [X_1 \leq 1, X_2 \leq y / J_1 = 1] \\ &= (1/m^1) \cdot H_{1-1}(1, y) \sum_{j \geq 1} p_j^1 H_1(j, x) + \sum_{j \geq 1} p_{j+1}^1 H_1(j, x) H_1(j+1, y). \end{aligned}$$

- pour $n \geq 3$

$$\begin{aligned}
 P[X_1 \leq x, X_n \leq y / J_1 = 1] &= \sum_{j \geq 0} \hat{p}_{j+n}^1 H_1(j+1, x) H_1(j+n, y) \\
 &\quad + (1/m^1) \left\{ H_{1-1}(1, y) \sum_{j \geq 0} \hat{p}_{j+n-1}^1 H_1(j+1, x) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{l=1}^{n-2} \left(\sum_{j \geq 0} \hat{p}_{j+1}^1 H_1(j+1, x) \right) \cdot P[X_n \leq y / J_1 = \dots = J_l = 1, J_{l+1} = 1-l] \right\}
 \end{aligned}$$

Les probabilités $P[X_n \leq y / J_1 = \dots = J_l = 1, J_{l+1} = 1-l]$ étant données par le Lemme 7.

Preuve - Pour $l \in \{0, 1\}$, $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$ on a, si $n = 2$:

$$\begin{aligned}
 P[X_1 \leq x, X_2 \leq y / J_1 = 1] &= (1/m^1) P[X_1 \leq x, X_2 \leq y / J_1 = 1, J_2 = 1-l] \\
 &\quad + (1 - (1/m^1)) P[X_1 \leq x, X_2 \leq y / J_1 = J_2 = 1].
 \end{aligned}$$

D'après la propriété d'indépendance conditionnelle et d'après les égalités (13) et (15) on a :

$$P[X_1 \leq x, X_2 \leq y / J_1 = 1, J_2 = 1-l] = H_{1-1}(1, y) \cdot \sum_{j \geq 0} \hat{p}_{j+1}^1 H_1(j+1, x)$$

et

$$P[X_1 \leq x, X_2 \leq y / J_1 = J_2 = 1] = (1/\sum_{j \geq 0} \hat{p}_j^1) \sum_{j \geq 0} \hat{p}_{j+2}^1 H_1(j+1, x) H_1(j+2, y),$$

d'où le résultat annoncé pour $n = 2$.

Pour $n \geq 3$, on a :

$$\begin{aligned}
 P[X_1 \leq x, X_n \leq y / J_1 = 1] &= \sum_{l \geq 0} \hat{p}_l^1 P[X_1 \leq x, X_n \leq y / J_1 = \dots = J_l = 1, J_{l+1} = 1-l] \\
 &= \sum_{l=1, n-2} \hat{p}_l^1 P[X_1 \leq x, X_n \leq y / J_1 = \dots = J_l = 1, J_{l+1} = 1-l] \\
 &\quad + \hat{p}_{n-1}^1 P[X_1 \leq x / J_1 = \dots = J_{n-1} = 1, J_n = 1-l] \cdot H_{1-1}(1, y) \\
 &\quad + \sum_{l \geq n} \hat{p}_l^1 P[X_1 \leq x, X_n \leq y / J_1 = \dots = J_l = 1, J_{l+1} = 1-l]
 \end{aligned}$$

où pour $l \in \{1, \dots, n-2\}$, d'après l'égalité (13) :

$$\begin{aligned} P[X_1 \leq x, X_n \leq y / J_1 = \dots = J_l = i, J_{l+1} = 1-i] \\ = P[X_1 \leq x / J_1 = \dots = J_l = i, J_{l+1} = 1-i] P[X_n \leq y / J_1 = \dots = J_l = i, J_{l+1} = 1-i] \\ = (1/m^l \hat{p}_1^l) \sum_{j \geq 0} p_{j+1}^l H_i(j+1, x) \cdot P[X_n \leq y / J_1 = \dots = J_l = i, J_{l+1} = 1-i] \end{aligned}$$

et pour $l \geq n$ on a :

$$\begin{aligned} P[X_1 \leq x, X_n \leq y / J_1 = \dots = J_l = i, J_{l+1} = 1-i] = \lim_{x_l \rightarrow +\infty} \hat{F}_1^l(x, x_2, \dots, x_{n-1}, y, \dots, x_l) \\ = (1/m^l \hat{p}_1^l) \sum_{j \geq 0} p_{j+1}^l H_i(j+1, x) H_i(j+n, y). \end{aligned}$$

La dernière partie de la proposition se déduit facilement de ces dernières expressions \square .

On déduit immédiatement du Lemme 7 et de la Proposition 8 :

Corollaire 3 -

Soit (J, X) un processus de renouvellement alterné binaire avec récompenses décomposables stationnaire. Alors, la fonction de covariance C_X du processus marginal X est donnée par :

$$C_X(h) = 1/(m^0 + m^1) \sum_{i=0,1} m^i E[X_1 X_{h+1} / J_1 = i] - \mu_X^2 ; h \geq 1$$

avec, pour $i \in \{0, 1\}$

$$E[X_1 X_2 / J_1 = i] = (1/m^i) \mu_{1-i}(1) \sum_{k \geq 1} p_k^i \mu_i(k) + \sum_{k \geq 1} \hat{p}_{k+1}^i \mu_i(k) \mu_i(k+1)$$

$$E[X_1 X_{h+1} / J_1 = i] = \sum_{k \geq 1} \hat{p}_{k+h}^i \mu_i(k) \mu_i(h) + (1/m^i) \mu_{1-i}(1) \sum_{k \geq 0} p_{k+h}^i \mu_i(k+1)$$

$$+ (1/m^i) \sum_{l=1}^{h-1} \left(\sum_{k \geq 0} p_{k+1}^i \mu_i(k+1) \right) \cdot E[X_{h+1} / J_1 = \dots = J_l = i, J_{l+1} = 1-i] ; h \geq 2,$$

où pour tout $i \in \{0, 1\}$ et $h \geq 2$, les moments conditionnels

$E[X_{h+1} / J_1 = \dots = J_l = i, J_{l+1} = 1-i] ; 1 \leq l \leq h-1$, s'obtiennent à partir du Lemme 7.



CHAPITRE IV

ESSAIS DE MODELISATION EN CLIMATOLOGIE .

Dans ce chapitre, nous présentons des essais de modélisation des suites de précipitations journalières observées dans deux stations climatologiques françaises à l'aide de processus de précipitation issus de la famille des processus de renouvellement alternés binaires avec récompenses décomposables.

Un seuil α de quantité de précipitation étant choisi, un jour est déclaré sec (resp. humide) s'il a été recueilli ce jour moins (resp. plus) de α mm de pluie. On définit alors, pour une station donnée et un jour t , la variable J_t prenant la valeur 0 (resp. 1) si le jour t est sec (resp. humide) dans la station, et la récompense X_t égale à la quantité de précipitation mesurée le jour t si $J_t = 1$ et égale à 0 si $J_t = 0$.

Chacun des deux essais de modélisation comprend deux parties :

Dans la première partie, nous cherchons à ajuster un modèle de séries chronologiques binaire au processus $(J_t ; t \in \mathcal{C})$ correspondant aux données climatologiques concernant une période $\mathcal{C} = \{1, 2, \dots, T\}$ de l'année pour plusieurs années consécutives. Nous faisons l'hypothèse que pour N années d'observations, le phénomène se reproduit, sur cette période, d'une année à l'autre, dans des conditions d'homogénéité et de renouvellement. Extrayant des données concernant l'ensemble des années, les séquences climatologiques sèches ou humides débutant dans la période considérée et les mettant bout à bout, on construit alors une trajectoire de longueur environ $N.T$ dont on admet qu'elle est l'observation d'une série chronologique obéissant, sur une longue durée, aux "règles" valables pour le phénomène sur la période \mathcal{C} considérée. Pour modéliser cette série chronologique, nous considérons trois modèles particuliers de processus de renouvellement alternés binaires : les deux premiers sont les modèles markoviens d'ordre 1 et 2 (dit Modèle 1 et Modèle 2 respectivement), le troisième modèle (dit Modèle 3) est basé sur la famille des distributions binômiales négatives translatées (B.N.T). Une étude comparative des ajustements correspondant des distributions observées des séquences climatologiques et des nombres de jours secs sur \mathcal{C} , permet de retenir le modèle le plus apte à rendre compte du phénomène climatologique.

La deuxième partie des essais concerne l'étude des séries de quantités de précipitations journalières mesurées dans la station sur la même période \mathcal{C} de l'année pour les N années consécutives d'observation. Nous faisons l'hypothèse a priori d'homogénéité et d'indépendance des quantités observées au k-ième jour des différentes séquences humides. Une étude descriptive des équivalents empiriques des lois $H_1(k,.)$ nous conduit à envisager des ajustements par des lois gamma dont on estime les paramètres à l'aide de la méthode des moments et de la méthode de Thom qui est une méthode de M.V. approchée (cf. Annexe 2). Nous comparons ensuite les distributions observées de la quantité de précipitation au dernier jour d'une séquence humide, du maximum de précipitation sur des périodes... aux lois théoriques calculées dans le cadre du modèle choisi de processus de renouvellement alterné binaire avec récompenses décomposables.

Présentation des données et de quelques outils informatiques.

Nous étudions les séries de précipitations quotidiennes enregistrées à la station météorologiques de Strasbourg d'une part (cf. parties A.1 et A.2) et à celle de Limoges d'autre part (cf. parties B.1 et B.2). Pour ces deux stations, nous disposons d'une série complète de l'année 1949 à 1977.

Dans le cadre des deux essais, nous avons fixé le seuil de α à 1 mm (dans la plupart des cas, les jours pour lesquels la hauteur d'eau recueillie est inférieure à ce seuil sont en fait des jours sans précipitation). L'étude faite en A.1 et A.2 concerne la période du mois d'Avril, et celle faite en B.1 et B.2 concerne la période du mois de Janvier. Pour ces deux périodes de l'année, le dénombrement des séquences sèches et humides s'est effectué en attribuant à chaque période les séquences qui y ont débuté sur l'ensemble des N = 29 années d'observations disponibles. Un programme informatique (binaire.pascal, cf. Annexe 3) que nous avons mis au point permet de dénombrer systématiquement, à partir de ces séries de valeurs quotidiennes, les séquences de jours consécutifs au cours desquels la variable climatologique est supérieure (resp. inférieure) au seuil α , et de décrire leur distribution empirique en fonction de leur longueur. Ce même programme nous fournit aussi les différentes valeurs estimées des paramètres des trois modèles considérés, ainsi que les lois théoriques correspondantes (cf. Annexe 1 pour un rappel concernant les modèles 1, 2 et 3 et l'estimation de leurs paramètres).

Un deuxième programme (continu.pascal, cf. Annexe 3) permet d'extraire de la série complète des quantités de précipitations journalières, les différents échantillons correspondant aux 1^{er}, 2^e, ..., jours de séquences humides.

Il permet par ailleurs de calculer les différentes caractéristiques empiriques de ces échantillons (moyenne, variance,...), les différentes lois empiriques et les valeurs estimées des paramètres des lois gamma que nous ajustons. (Les méthodes d'estimation que nous utilisons sont décrites en Annexe 2).

Avertissement :

Lorsqu'il s'agira de tests d'adéquation du Chi-2, plutôt que de fixer un niveau de signification et d'indiquer la valeur correspondante de la séparatrice du test, nous donnerons systématiquement la valeur maximum des niveaux de signification qui conduiraient à l'acceptation de l'hypothèse nulle au vu de l'échantillon observé.

***PARTIE A - MODELISATION DES DONNEES CLIMATOLOGIQUES
CONCERNANT LE MOIS D'AVRIL A STRASBOURG.***

Partie A1

**ETUDE DU PROCESSUS DE LA SUCCESSION DES JOURS
SELON LEUR CARACTERE SEC OU HUMIDE .**

En 1. nous faisons l'ajustement des trois modèles rappelés en Annexe I aux données disponibles. En 2. nous comparons les lois de probabilité empiriques des séquences aux lois p^0 et p^1 calculées dans le cadre des trois modèles. Enfin, en 3. nous comparons les moments observés des nombres de jours secs parmi k jours consécutifs aux moments calculés pour les valeurs estimées des paramètres dans chacun des modèles.

**1 - Caractéristiques observées des séquences.
Estimation des paramètres des modèles.**

Dans le Tableau 1 ci-dessous, nous portons en seconde ligne les valeurs empiriques observées des caractéristiques de moyenne et variance des séquences sèches et pluvieuses observées, puis en 3^e, 4^e et 5^e lignes, nous donnons les valeurs des estimations des paramètres des lois de séjour p^0 et p^1 respectivement pour les trois modèles :

	SEQUENCES HUMIDES	SEQUENCES SECHES
Moyenne et variance	$m1= 1.783$ $var1= 1.330$	$m0= 4.353$ $var0= 16.346$
MODELE 1	$q1= 0.439$	$q0= 0.770$
MODELE 2	$qh1= 0.442$ $qh2= 0.435$	$qs1= 0.728$ $qs2= 0.783$
MODELE 3	$h1=0.783$, $d1=0.699$ $d1/h1=0.893$	$h0=3.353$, $d0=3.875$ $d0/h0=1.156$

Tableau A1. 1 - Moyenne et variance empiriques observées et estimations des paramètres des lois p^0 et p^1 .

On peut remarquer que les valeurs estimées du rapport d/h obtenues pour les séquences sèches et humides sont assez voisines de 1. Ceci correspond, pour le mois d'Avril étudié, à une faible évolution de la persistance.

2 - Lois des durées de séquences.

Dans le Tableau 2 (resp. 3) nous portons respectivement en 2^é et 3^é colonne le nombre de séquences sèches (resp. humides) et les fréquences relatives correspondantes en fonction de la longueur des dites séquences. Ces fréquences sont à comparer aux valeurs des probabilités théoriques calculées dans le cadre des trois modèles envisagés. Nous pouvons constater sur ces deux tableaux, que les valeurs calculées sont très voisines entre elles, (cf. colonnes 4, 5 et 6).

Longueur de seq. seches	Nombre de sequences N=136	Frequence relative	MODELE 1 q= 0.770	MODELE 2 q1= 0.73 q2= 0.78	MODELE 3 h= 3.353 d= 3.875
1	37	0.272	0.230	0.272	0.254
2	27	0.199	0.177	0.158	0.175
3	13	0.096	0.136	0.124	0.129
4	15	0.110	0.105	0.097	0.098
5	6	0.044	0.081	0.076	0.075
6	9	0.066	0.062	0.059	0.058
7	2	0.015	0.048	0.046	0.045
8	8	0.059	0.037	0.036	0.035
9	6	0.044	0.028	0.028	0.028
10	0	0.000	0.022	0.022	0.022
11	2	0.015	0.017	0.017	0.017
12	2	0.015	0.013	0.014	0.013
13	1	0.007	0.010	0.011	0.010
14	2	0.015	0.008	0.008	0.008
15	0	0.000	0.006	0.007	0.006
16	4	0.029	0.005	0.005	0.005
17	1	0.007	0.004	0.004	0.004
18	1	0.007	0.003	0.003	0.003

Tableau A1. 2 - Distribution empirique des séquences sèches et probabilités théoriques calculées .

Longueur de seq. humide	Nombre de sequences N=138	Frequence relative	MODELE 1 q= 0.439	MODELE 2 q1= 0.44 q2= 0.44	MODELE 3 h= 0.783 d= 0.699
1	77	0.558	0.561	0.558	0.552
2	35	0.254	0.246	0.250	0.254
3	15	0.109	0.108	0.109	0.111
4	3	0.022	0.047	0.047	0.047
5	6	0.043	0.021	0.021	0.020
6	2	0.014	0.009	0.009	0.008

Tableau A1. 3 - Distribution empirique des séquences humides et probabilités théoriques calculées .

Afin de faciliter la comparaison des trois modèles, nous reproduisons des graphiques représentant les distributions observées et les lois théoriques correspondantes. Nous représentons sur papier semi-Logarithmique les ensembles des points de coordonnées $(n, 1 - \hat{H}^i(n))$ et $(n, 1 - H^i(n))$ pour $i = 0, 1$, où \hat{H}^i (resp. H^i) désigne la fonction de répartition observée relative à l'état i (resp. associée à la loi p^i estimée). Nous constatons sur la figure 1.a et 1.b, que l'ensemble des points $(n, 1 - \hat{H}^i(n))$ est pratiquement aligné suivant la droite d'ajustement obtenue à partir du modèle géométrique. Cette même droite est d'ailleurs quasiment confondue avec les graphes obtenus dans le cadre des deux autres modèles. D'autre part, les ajustements obtenus sur les figures 2. a et 2. b (distribution des séquences sèches) sont assez semblables. Ces similitudes notées sur les quatre figures sont bien sûr à rapprocher du fait que les paramètres d_0/h_0 et d_1/h_1 sont très voisins de 1 et que les paramètres estimés q_1 et q_2 du modèle markovien d'ordre 2 sont très voisins (cf. Tableau 1).

3- Loi du nombre de jours secs parmi k jours consécutifs.

On étudie ici la loi de la variable de comptage $S_k^0 = k - (J_1 + \dots + J_n)$ du nombre de jours secs parmi k jours consécutifs. Nous utilisons l'algorithme présenté au Chapitre III pour calculer la loi de cette variable pour $k=10, 15$ et 30 jours, et pour un processus J de R.A. stationnaire basé respectivement sur des lois de séjours du type géométrique (Modèle 1) et du type B.N.T. (Modèle 3) correspondants aux paramètres estimés (cf. §1.). Nous comparons les valeurs des probabilités $P[S_k^0 = m]$; $m = 0, 1, \dots, k$, aux valeurs des fréquences observées correspondantes. Le Tableau 4 ci-dessous fournit les résultats relatifs à une période de $k = 10$ jours.

m	FREQ. RELATIVE OBSERVEE	MODELE 1 $P[S_k^0 = m]$	MODELE 3 $P[S_k^0 = m]$
0	0.097	0.073	0.078
1	0.133	0.166	0.154
2	0.218	0.220	0.208
3	0.241	0.212	0.210
4	0.161	0.159	0.164
5	0.084	0.096	0.104
6	0.034	0.047	0.053
7	0.034	0.018	0.021
8	0.003	5.67E-3	6.30E-3
9	0.000	1.24E-3	1.25E-3
10	0.000	1.56E-4	1.23E-4

Tableau A1. 4 - Distributions empiriques et calculées de S_{10}^0 .

Il montre d'une part, que les valeurs des probabilités $P[S^1_{10} = m]$ calculées pour les valeurs estimées des paramètres dans les Modèles 1 et 3 sont voisines et d'autre part, que ces deux distributions théoriques fournissent des ajustements satisfaisants des fréquences observées. Il est donc indifférent d'utiliser l'un ou l'autre de ces deux modèles pour représenter la distribution de la statistique S^0_k . Signalons que les résultats obtenus pour $k = 15$ et $k = 30$ conduisent aux mêmes remarques. Pour compléter cette étude, nous comparons maintenant les moments observés des variables S^0_{10} , S^0_{15} et S^0_{30} aux moments calculés selon la relation (19) du Chapitre III.

	MOYENNE EMPIRIQUE	MODELE 1	MODELE 2	MODELE 3
S^0_{10}	7.207	7.075	7.020	7.008
S^0_{15}	10.724	10.612	10.530	10.510
S^0_{30}	21.621	21.225	21.062	21.040

Tableau A1.5 - Valeurs observées et calculées des moyennes des variables S^0_{10} , S^0_{15} et S^0_{30} .

	ECART-TYPE EMPIRIQUE	MODELE 1	MODELE 2	MODELE 3
S^0_{10}	1.793	1.662	1.707	1.698
S^0_{15}	2.208	2.026	2.084	2.073
S^0_{30}	3.380	2.950	2.978	3.130

Tableau A1.6 - Valeurs empiriques et calculées des écarts-types des variables S^0_{10} , S^0_{15} et S^0_{30} .

Là encore, les résultats obtenus dans le cadre des trois modèles sont assez semblables.

Commentaire :

Les trois modèles que nous avons utilisés fournissent des ajustements très voisins et satisfaisants des différentes caractéristiques des données observées. Le modèle Markovien d'ordre 1 (Modèle 1) contenant le moins de paramètres, nous semble donc pouvoir être retenu pour la suite de cette étude.

MOIS D'AVRIL

1949 1977

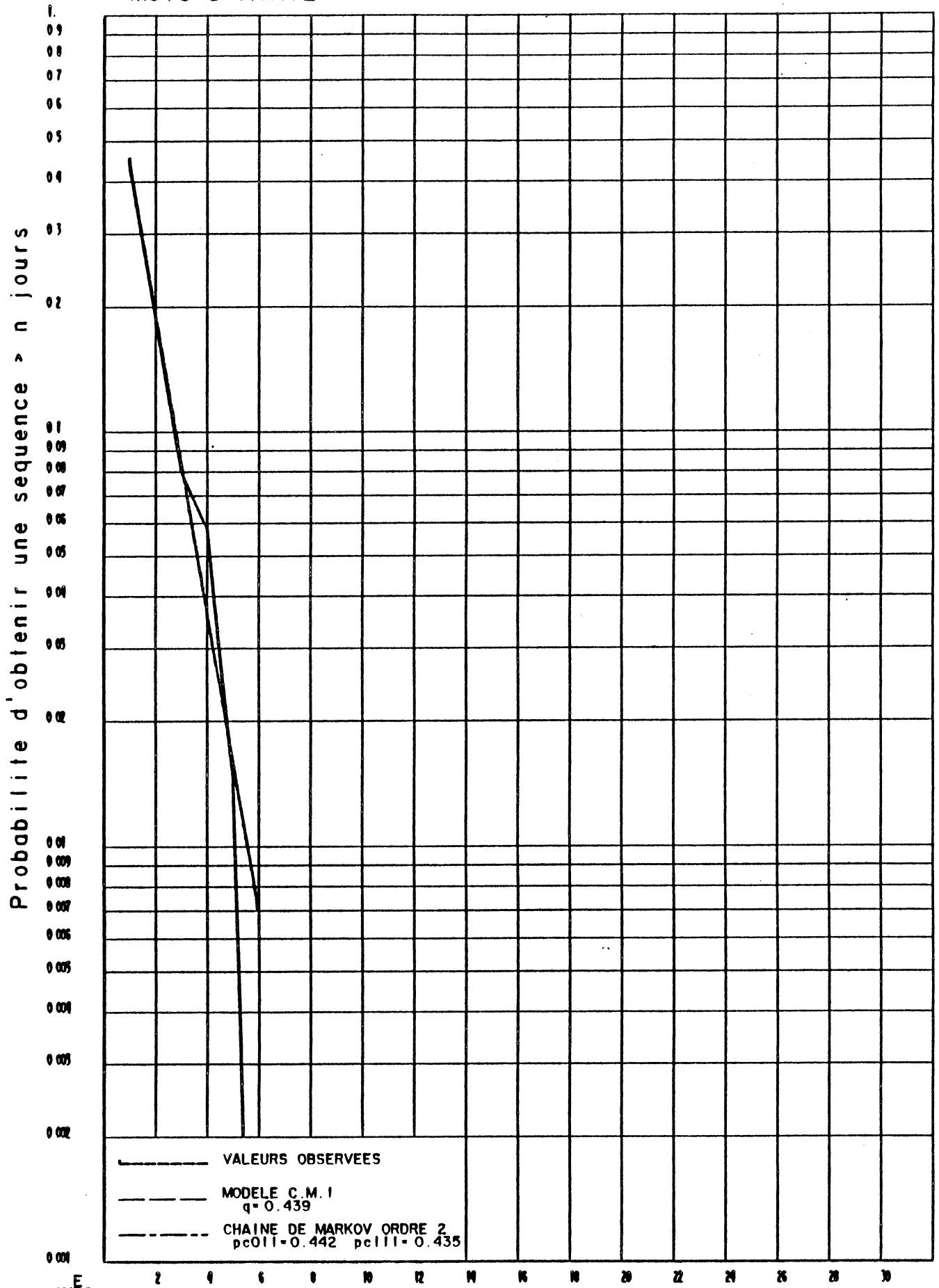


Figure A1.1.a - Fréquences observées et probabilités calculées (Modèles 1 et 2) d'une séquence humide supérieure à n jours.

STRASBOURG

IV - 9

MOIS D'AVRIL

1949 1977

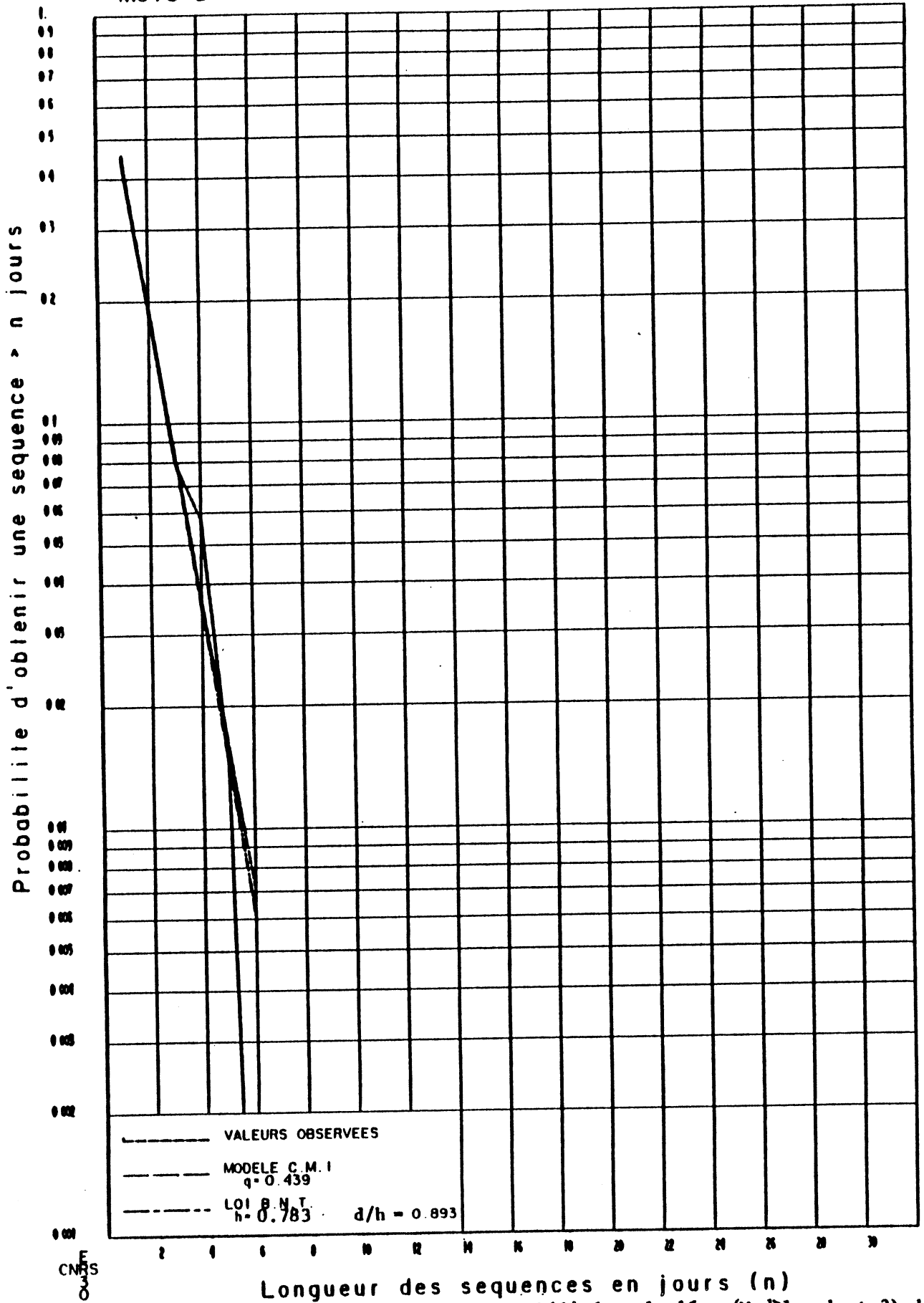


Figure A1.1.b - Fréquences observées et probabilités calculées (Modèles 1 et 3) d'une séquence humide supérieure à n jours.

STRASBOURG

IV - 10

MOIS D'AVRIL

1949 1977

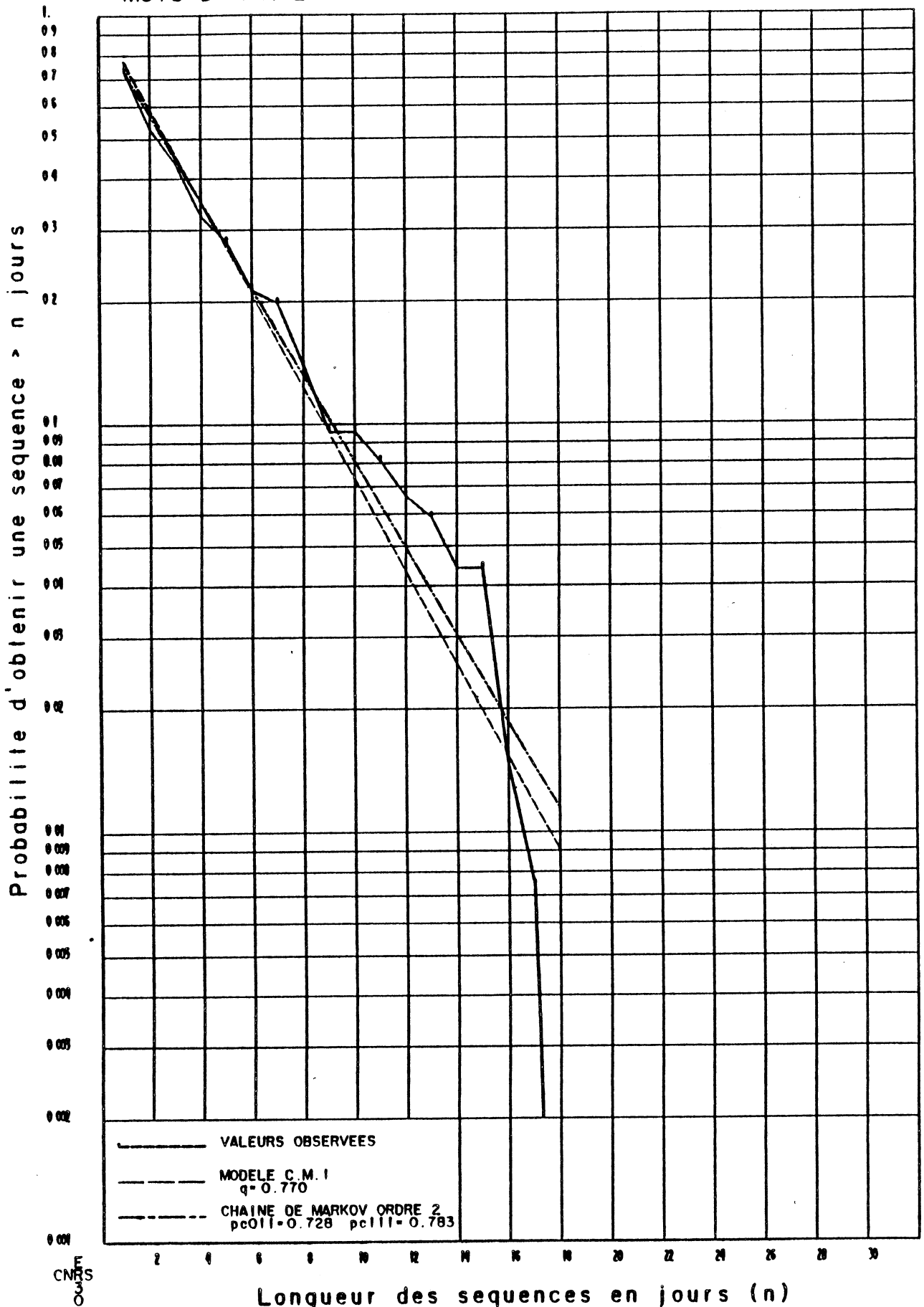


Figure A1.2.a - Fréquences observées et probabilités calculées (Modèles 1 et 2) d'une séquence sèche supérieure à n jours.

STRASBOURG

IV - 11

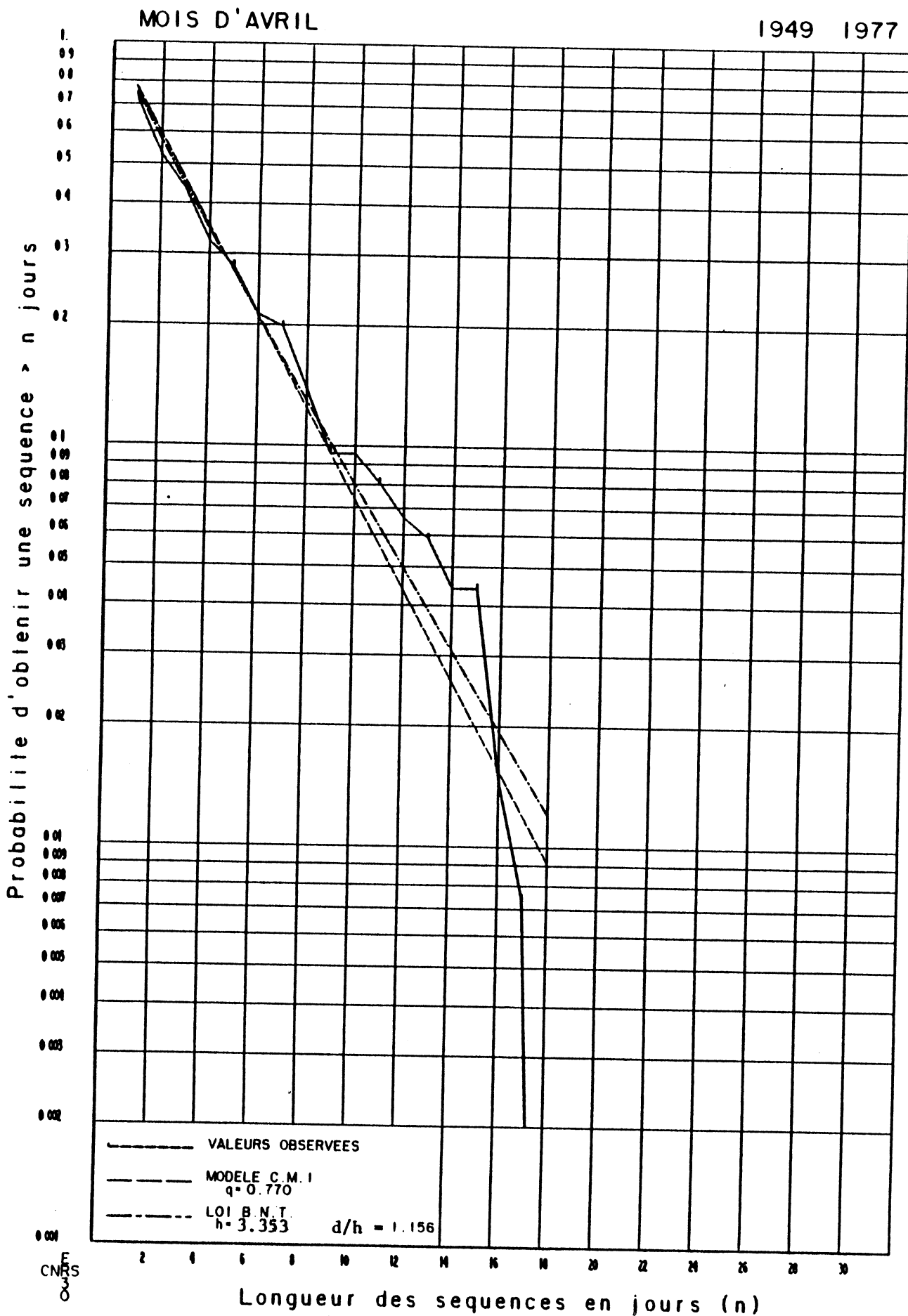


Figure A1.2.b - Fréquences observées et probabilités calculées (modèles 1 et 3) d'une séquence sèche supérieure à n jours.

Partie A 2

ETUDE DU PROCESSUS DES QUANTITES DE PRECIPITATIONS $X = (X_t; t \geq 1)$ A STRASBOURG POUR LE MOIS D'AVRIL.

Le premier paragraphe de cette deuxième partie est consacré à l'étude des équivalents empiriques des lois conditionnelles $\{H_1(k, \cdot); 1 \leq k \leq 3\}$; cette étude nous conduit en particulier à envisager des ajustements de ces trois lois par des lois $\gamma(\alpha(k), \beta(k))$ pour $k = 1, 2, 3$. Le deuxième paragraphe concerne l'étude empirique de l'hypothèse " $H_1(k, \cdot) = H_1(2, \cdot); k \geq 2$ ". Pour juger de la validité cette hypothèse, nous effectuons différents tests d'homogénéité. Enfin, en vue de confronter le modèle considéré à la réalité des données, nous comparons en 3. et 4. respectivement, les distributions observées de la quantité de précipitation au dernier jour d'une séquence humide et du maximum de précipitation sur des périodes de 5, 10, et 20 jours, aux lois théoriques calculées dans le cadre de ce modèle.

1 - Etude empirique des lois conditionnelles $H_1(k, \cdot); 1 \leq k \leq 3$

On désigne par $H_1^{n(k)}(k, \cdot)$ la (fonction de répartition de la) loi empirique associée à un échantillon $(x_1^k, \dots, x_{n(k)}^k)$ de taille $n(k)$ de "quantités de précipitations observées pour les k -ièmes jours de $n(k)$ séquences humides".

Pour tout $k \geq 1$, on notera par \bar{x}^k et σ^k respectivement la moyenne et l'écart type de l'échantillon $(x_1^k, x_2^k, \dots, x_{n(k)}^k)$.

1.1 - Etude de la loi $H_1(1, \cdot)$.

On dispose d'un échantillon de taille $n(1) = 138$. Les caractéristiques de moyenne et écart-type de cet échantillon sont les suivantes :

$$\bar{x}^1 = 3.347 \quad ; \quad \sigma^1 = 3.35 \quad (\text{en mm}).$$

Nous représentons dans la Figure 1, l'histogramme des fréquences associé à $H_1^{n(1)}(1,.)$. La forme de cet histogramme nous suggère d'envisager un ajustement par une loi de la famille des lois gamma (cf. Annexe 2). Les estimations obtenues des paramètres $\alpha(1)$ et $\beta(1)$ de la loi $H_1(1,.)$ sont portées dans le tableau suivant :

METHODES D'ESTIMATION DES PARAMETRES.	ESTIMATION DE $\alpha(1)$	ESTIMATION DE $\beta(1)$
METHODE DES MOMENTS	$\hat{\alpha}_M(1) = 0.997$	$\hat{\beta}_M(1) = 33.555$
METHODE DE THOM	$\hat{\alpha}_T(1) = 1.132$	$\hat{\beta}_T(1) = 29.573$

Tableau A2. 1 - Estimation des paramètres $\alpha(1)$, $\beta(1)$.

Outre l'histogramme associé à $H_1^{n(1)}(1,.)$, la Figure 1 montre le graphe de la densité de la loi $\gamma(\hat{\alpha}_T(1), \hat{\beta}_T(1))$.

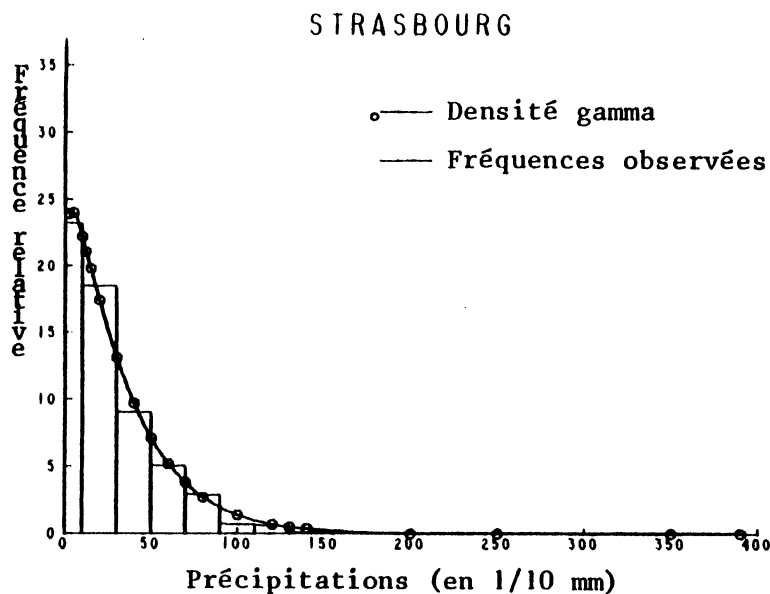


Figure A2. 1 - Histogramme associé à $H_1^{n(1)}(1,.)$ et densité d'une loi gamma de paramètres $\hat{\alpha}_T(1)$, $\hat{\beta}_T(1)$.

Désignons par $\Gamma_{\hat{\alpha}(1), \hat{\beta}(1)}(a, b)$ la probabilité "théorique", de l'intervalle $[a, b]$. Le Tableau 2 permet alors de comparer les valeurs de ces probabilités calculées aux valeurs des fréquences relatives correspondantes.

INTERVALLE	NOMBRE OBSERV. PAR INTERVALLE	FREQUENCE RELATIVE	PROBA. EST. MOMENTS	PROBA. EST. THOM
[0, 5 [15	0.109	0.1393	0.1148
[5, 7 [5	0.036	0.0504	0.0475
[7, 10 [12	0.087	0.0703	0.0686
[10, 15 [11	0.080	0.1042	0.1051
[15, 25 [33	0.239	0.1674	0.1739
[25, 30 [7	0.051	0.0668	0.0703
[30, 40 [13	0.094	0.1072	0.1129
[40, 50 [12	0.087	0.0796	0.0833
[50, 70 [14	0.101	0.1031	0.1055
[70, 90 [8	0.058	0.0568	0.0558
[90, 390]	8	0.058	0.0698	0.0608

Tableau A2. 2 - Comparaison des fréquences observées $H_1^{n(1)}(1,.)$ aux probabilités calculées.

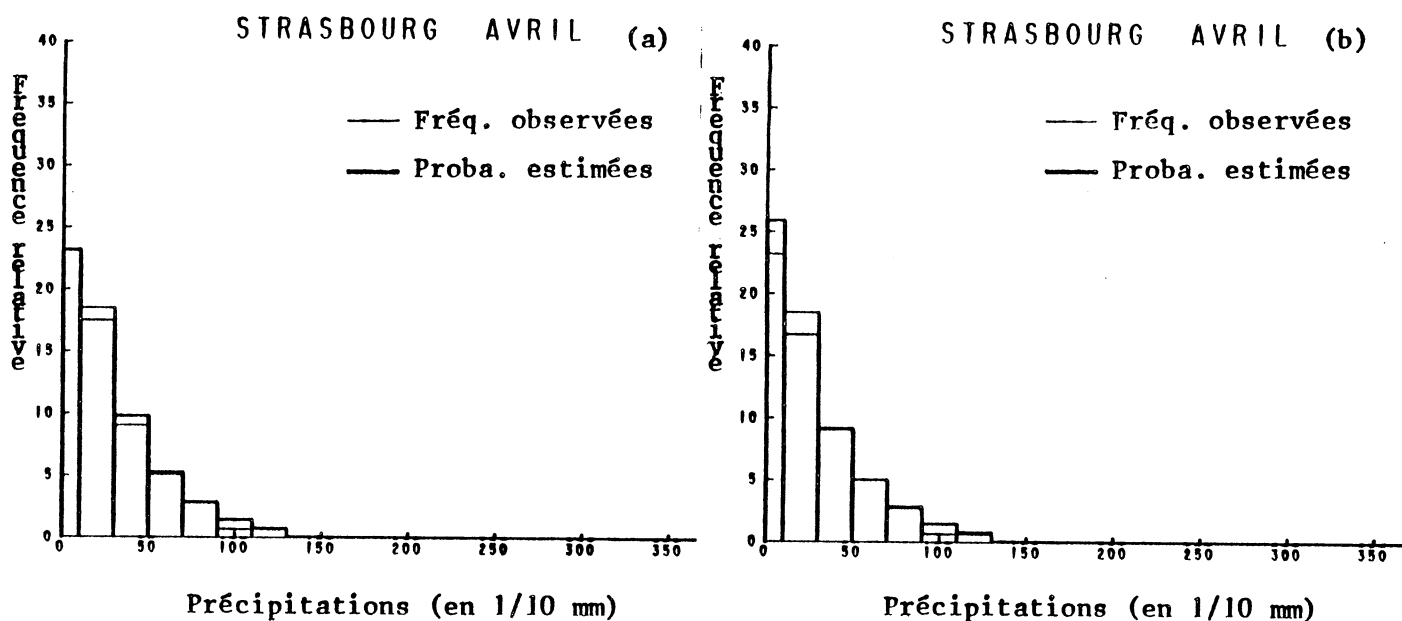


Figure A2.2 - Histogramme de fréquences $H_1^{n(1)}(1,.)$ et histogrammes des probabilités estimées par la méthode de Thom (a) et par la méthode des moments (b).

Un examen de ce tableau, (et des Figures 2.(a) et 2.(b), qui représentent les histogrammes de $H_1^{n(1)}(1,.)$ et les histogrammes "théoriques" obtenus par les deux méthodes d'estimation considérées) montre que, globalement, les fréquences relatives observées sont mieux ajustées pour les valeurs estimées des paramètres par la méthode de Thom que pour celles obtenues par la méthode des moments.

Le test du Chi-2 le confirme :

METHODES D'ESTIMATION DES PARAMETRES $\alpha(1), \beta(1)$	VALEUR DE LA STAT. DU TEST : $\chi^2_{obs.}$	P $(\chi^2_8 > \chi^2_{obs.})$
METHODE DES MOMENTS	8.187	0.45
METHODE DE THOM	6.567	0.56

Tableau A2.3 - Test l'hypothèse " $H_1(1,.)$ est une loi gamma ".
(cf. colonne 1 du Tableau 2 pour le découpage en classes.)

1.2 - Etude empirique de la loi $H_1(2,.)$. Ajustement.

On dispose d'un échantillon de taille $n(2) = 61$. Les caractéristiques de moyenne et écart-type correspondantes sont les suivantes :

$$\bar{x}^2 = 4.601 \quad ; \quad \sigma^2 = 6.163$$

La forme de l'histogramme des fréquences $H_1^{n(2)}(2,.)$, (cf. Figures 3) nous conduit encore à envisager l'hypothèse que la loi $H_1(2,.)$ est une loi $\gamma(\alpha(2), \beta(2))$. Les valeurs estimées des paramètres par la méthode des moments et la méthode de Thom sont données dans le tableau suivant :

METHODES D'ESTIMATION DES PARAMETRES $\alpha(2), \beta(2)$	ESTIMATION DE $\alpha(2)$	ESTIMATION DE $\beta(2)$
METHODE DES MOMENTS	$\hat{\alpha}_m(2) = 0.558$	$\hat{\beta}_m(2) = 82.533$
METHODE DE THOM	$\hat{\alpha}_T(2) = 0.870$	$\hat{\beta}_T(2) = 52.903$

Tableau A2.4 - Estimation des paramètres $\alpha(2), \beta(2)$.

Dans le Tableau 5 sont portés respectivement en colonne 2 et 3, le nombre d'observations x^2_i par classes, et la fréquence relative correspondante. Dans les deux dernières colonnes, on trouve les probabilités théoriques calculées à partir des estimations de $\alpha(2)$ et $\beta(2)$ par les deux méthodes utilisées.

INTERVALLE	NOMBRE OBSERV. PAR INTERVALLE	FREQUENCE RELATIVE	PROBA. EST. MOMENTS	PROBA. EST. THOM
[0, 5 [6	0.098	0.2238	0.1290
[5, 7 [5	0.082	0.0452	0.0409
[7, 10 [4	0.066	0.0564	0.0559
[10, 15 [6	0.098	0.0757	0.0823
[15, 25 [8	0.131	0.1128	0.1346
[25, 30 [5	0.082	0.0436	0.0558
[30, 40 [2	0.033	0.0731	0.0941
[40, 50 [6	0.098	0.0578	0.0753
[50, 70 [8	0.131	0.0853	0.1099
[70, 90 [3	0.049	0.0588	0.0725
[90, 390]	8	0.131	0.1582	0.1467

Tableau A2.5 - Fréquences relatives $H_j^{n(2)}(z_j)$ et probabilités calculées.

Nous représentons sur les Figures 3.(a) et 3.(b) les trois histogrammes associés à ces différentes lois observées et estimées.

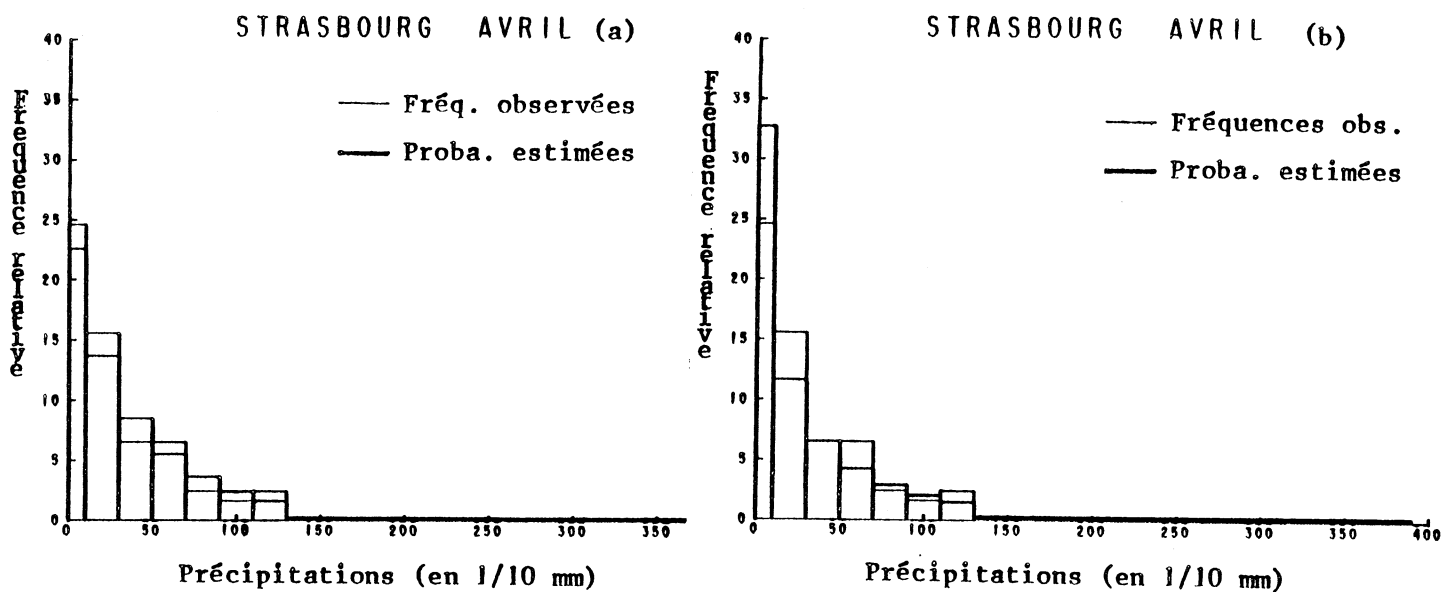


Figure A2.3 - Histogrammes des fréquences observées comparé à ceux obtenus à partir d'une loi gamma de paramètres estimés par la méthode de Thom (a), et à partir de la méthode des moments (b).

Ces figures permettent de constater une assez bonne adéquation par la loi gamma de paramètres estimés par la méthode de Thom. Par contre, les écarts entre les valeurs des fréquences relatives et les valeurs des probabilités estimées par la méthode des moments sont relativement grandes.

Les tests du Chi-2, résumés dans le tableau ci-dessous, permettent une appréciation de tels ajustements.

METHODES D'ESTIMATION DES PARAMETRES $\alpha(2), \beta(2)$	VALEUR DE LA STAT. DU TEST : $\chi^2_{obs.}$	$P[\chi^2_3 > \chi^2_{obs.}]$
METHODE DES MOMENTS	7.445	0.08
METHODE DE THOM	2.112	0.30

Tableau A2.6 - Test de l'hypothèse " $H_1(2, .)$ est une loi gamma".
(* Pour calculer la valeur $\chi^2_{obs.}$, nous utilisons le regroupement par classes indiqué sur la colonne 2 du Tableau 5).

1.3 - Etude empirique de la loi $H_1(3, .)$. Ajustement.

On dispose cette fois d'un échantillon de taille $n(3) = 26$, de moyenne et écart-type :

$$\bar{x}^3 = 5.462 \quad \text{et} \quad \sigma^3 = 7.251$$

Les deux méthodes d'estimation du paramètre ($\alpha(3), \beta(3)$) de la loi gamma censée représenter ces observations conduisent aux valeurs données dans le Tableau 7 ci-dessous :

METHODES D'ESTIMATION DES PARAMETRES $\alpha(3), \beta(3)$	ESTIMATION DE $\alpha(3)$	ESTIMATION DE $\beta(3)$
METHODE DES MOMENTS	$\hat{\alpha}_m(3) = 0.567$	$\hat{\beta}_m(3) = 96.205$
METHODE DE THOM	$\hat{\alpha}_T(3) = 0.720$	$\hat{\beta}_T(3) = 75.798$

Tableau A2.7 - Estimations des paramètres $\alpha(3), \beta(3)$ de la loi $H_1(3, .)$.

L'analogie des Tableaux 2 et 5 est ici le suivant :

INTERVALLE	NOMBRE OBSERV. PAR INTERVALLE	FREQUENCE RELATIVE	PROBA. EST. MOMENTS	PROBA. EST. THOM
[0, 7 [5	0.192	0.2426	0.1877
[7, 10 [2	0.077	0.0521	0.0515
[10, 25 [5	0.192	0.1778	0.1892
[25, 40 [4	0.154	0.1429	0.1294
[40, 50 [2	0.077	0.0577	0.0664
[50, 70 [3	0.115	0.0875	0.1012
[70, 90 [1	0.038	0.0626	0.0714
[90, 390]	4	0.154	0.1934	0.1952

Tableau A2.8 - Fréquences relatives $H_1^{n(3)}(3, .)$ et probabilités théoriques.

La Figure 4.(a) (resp. 4.(b)) permet la comparaison de l'histogramme associé à la loi empirique $H_1^{n(3)}(3,.)$, et celui obtenu à partir d'une distribution gamma de paramètres $\hat{\alpha}_T(3)$, $\hat{\beta}_T(3)$ (resp. $\hat{\alpha}_m(3)$, $\hat{\beta}_m(3)$). Les écarts entre les deux distributions sont assez importants sur la Figure 4.(b) ; par contre, l'ajustement de la loi empirique par la loi théorique dans la Figure 4.(a) semble assez satisfaisant.

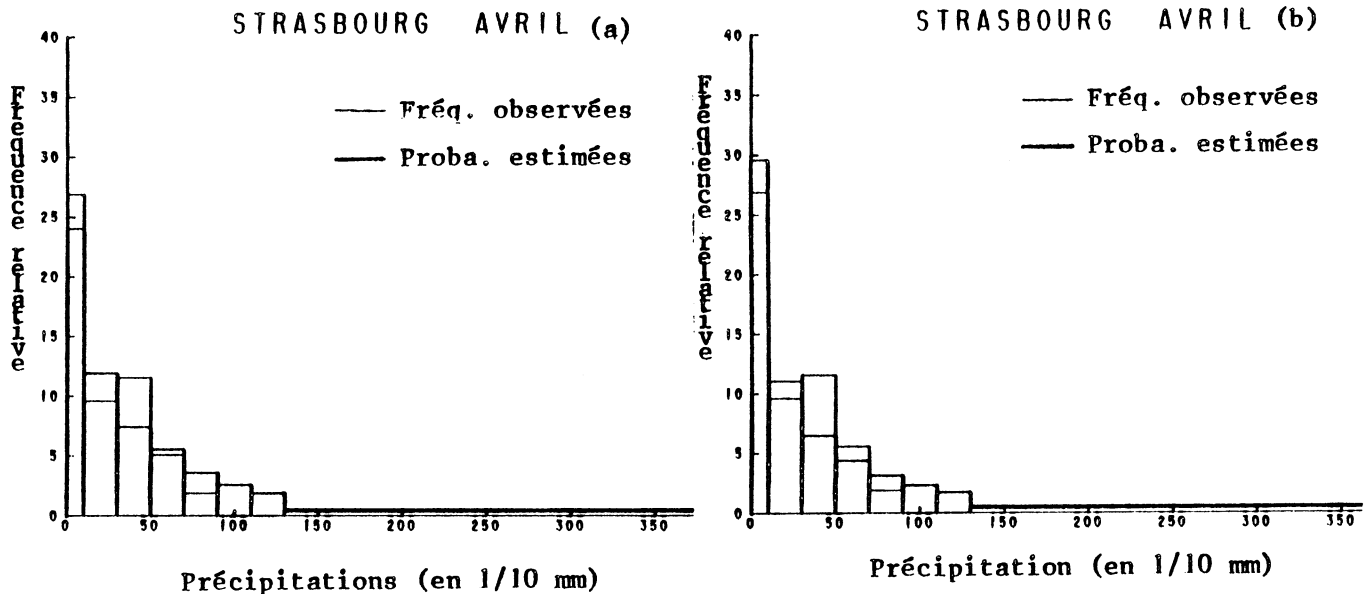


Figure A2. 4 - Histogramme des fréquences $H_1^{n(3)}(3,.)$ et histogramme des probabilités estimées par la méthode de Thom (a), et par celle des moments (b) .

Toutefois, il convient de remarquer, qu'étant donné la petite taille de l'échantillon $(x_1^3, \dots, x_{n(3)}^3)$, la validité d'un tel ajustement ne peut être réellement testée.

2 - Etude empirique de l'hypothèse $H_1(k,.) = H_1(2,.)$; $k \geq 2$.

La comparaison des résultats des paragraphes 1.2 et 1.3 ci-dessus (cf. en particulier les valeurs \bar{x}^2 , \bar{x}^3 , σ^2 , σ^3 et les tableaux 4 et 7) invite à s'interroger sur l'hypothèse que les échantillons $(x_1^k, \dots, x_{n(k)}^k)$, pour tout entier $k \geq 2$, sont des échantillons issus d'une même loi $H_1(2,.)$.

A

2.1 - Etude de la loi empirique $H_g(2,.)$ et ajustement.

On suppose que les échantillons $(x^2_{1, \dots, x^2_{n(2)}}, (x^3_{1, \dots, x^3_{n(3)}}, \dots,$ sont des échantillons indépendants tirés selon la même loi $H_1(2,.)$. On dispose alors d'un échantillon global de taille $n(1) + n(2) + \dots = 108$, et on note $\hat{H}_g(2,.)$ la loi empirique correspondante. Le calcul de la moyenne et de l'écart type associé à ces 108 observations conduit aux valeurs suivantes:

$$\bar{x}^{(2)} = 4.610 \quad ; \quad \sigma^{(2)} = 6.414.$$

Ici encore, envisageons l'hypothèse selon laquelle la loi $H_1(2,.)$ est une loi gamma de paramètres $\alpha(2), \beta(2)$. Les estimations par les deux méthodes envisagées sont les suivantes :

METHODES D'ESTIMATION DES PARAMETRES $\alpha(2), \beta(2)$	ESTIMATION DE $\alpha(2)$	ESTIMATION DE $\beta(2)$
METHODE DES MOMENTS	$\tilde{\alpha}_m(2) = 0.517$	$\tilde{\beta}_m(2) = 89.245$
METHODE DE THOM	$\tilde{\alpha}_T(2) = 0.803$	$\tilde{\beta}_T(2) = 57.441$

Tableau A2.9-Estimation des paramètres $\tilde{\alpha}(2), \tilde{\beta}(2)$ associés à la loi $H_1(2,.)$.

Notons que ces valeurs sont, comme les caractéristiques de moyenne et variance, très voisines de celles rencontrées lors de l'étude de la loi $H_1(2,.)$ (cf. Tableau 4).

Le Tableau 10 ci-dessous est l'analogue des Tableaux 2, 5 et 8.

INTERVALLE	NOMBRE OBSERV. PAR INTERVALLE	FREQUENCE RELATIVE	PROBA. EST. MOMENTS	PROBA. EST. THOM
[0, 10[29	0.2685	0.3013	0.2477
[10, 30[33	0.3055	0.2248	0.2660
[30, 50[15	0.1388	0.1247	0.1622
[50, 70[11	0.1018	0.0815	0.1054
[70, 90[6	0.0555	0.0565	0.0703
[90, 110[3	0.0277	0.0405	0.0474
[110, 130[3	0.0277	0.0296	0.0323
[130, 390]	8	0.0741	0.0887	0.0709

Tableau A2.10 - Loi empirique $\hat{H}_g(2,.)$ et probabilités estimées.

Il montre une bonne adéquation de la loi empirique $H_g(2,.)$ à la loi gamma de paramètres $\tilde{\alpha}_T(2)$, $\tilde{\beta}_T(2)$. Un test du Chi-2 (cf. Tableau 11) vient confirmer cette appréciation.

METHODES D'ESTIMATION DES PARAMETRES $\tilde{\alpha}(2), \tilde{\beta}(2)$	VALEUR DE LA STAT. DU TEST : $\chi^2_{obs.}$	$P(\chi^2 > \chi^2_{obs.})$
METHODE DES MOMENTS	17.943	0.025
METHODE DE THOM	9.124	0.32

Tableau A2. 11 - Test de l'hypothèse " La loi $H_1(2, .)$ est une loi gamma ". (* La valeur $\chi^2_{obs.}$ est obtenue à partir du découpage en classes de la colonne 2 du Tableau 10).

Par ailleurs, nous représentons sur la Figure 5 ci-dessous les deux histogrammes des fréquences observées (trait fin) et des probabilités calculées à partir de la méthode d'estimation de Thom. Nous traçons aussi la courbe de densité de la loi gamma correspondante. Nous constatons encore que l'ajustement de la loi $H_1(2,.)$ par la loi gamma de paramètres $\tilde{\alpha}_T(2)$ et $\tilde{\beta}_T(2)$ est très satisfaisant.

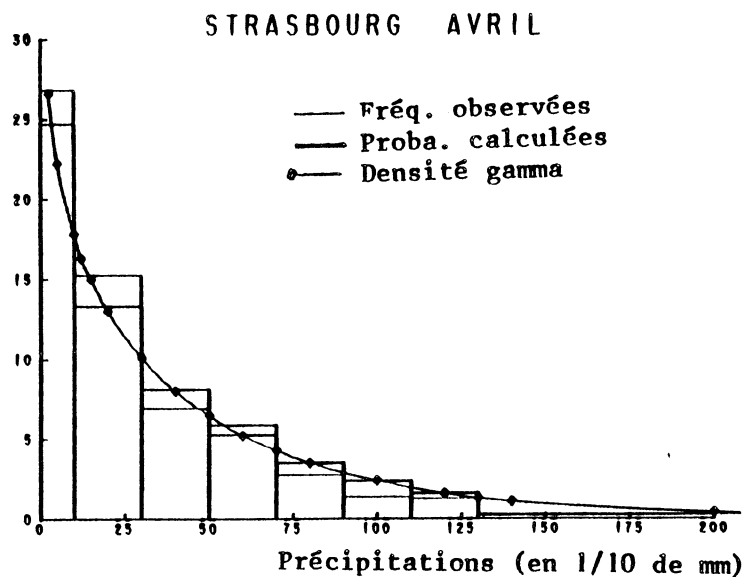


Figure A2.5 - Comparaison de l'histogramme de $\hat{H}_g(2,.)$ et celui des probabilités estimées (méthode de Thom).

A

2.2 - Etude de la loi empirique $H_g(3,.)$. Ajustement.

Supposons maintenant que les échantillons $(x^3_1, x^3_2, \dots, x^3_{n(3)})$, $(x^4_1, x^4_2, \dots, x^4_{n(4)})$, ..., sont des échantillons indépendants tirés selon la même loi $H_1(3,.)$ conditionnelle de la v.a. X_j sachant que j est un k^e jour humide pour $k \geq 3$. Nous disposons alors d'un échantillon global de taille $n(3) + n(4) + \dots = 47$, et on note $\hat{H}_g(3,.)$ la loi empirique correspondante. L'estimation des paramètres de la loi $H_1(3,.)$ supposée appartenir à la famille des lois gamma, fournit les valeurs suivantes :

METHODES D'ESTIMATION DES PARAMETRES	ESTIMATION DE (3)	ESTIMATION DE (3)
METHODE DES MOMENTS	(3) = 0.472	(3) = 97.920
METHODE DE THOM	(3) = 0.731	(3) = 63.209

Tableau A2. 12 - Estimation des paramètres $\tilde{\alpha}(3)$ et $\tilde{\beta}(3)$ de la loi $H_1(3,.)$

Il est à noter que ces valeurs sont très voisines de celles des estimations des paramètres $\alpha(3)$ et $\beta(3)$ résumées dans le Tableau 7. Le Tableau 13 ci-dessous permet alors de comparer les fréquences par classes observées, aux probabilités théoriques calculées à partir de l'une ou l'autre des deux méthodes d'estimation des paramètres.

INTERVALLE	NOMBRE OBSERV. PAR INTERVALLE	FREQUENCE RELATIVE	PROBA. EST. MOMENTS	PROBA. EST. THOM
[0, 10[14	0.2978	0.3593	0.2737
[10, 30[14	0.2978	0.2155	0.2581
[30, 50[7	0.1489	0.1178	0.1535
[50, 70[3	0.0639	0.0776	0.1114
[70, 90[3	0.0639	0.0538	0.0673
[90, 110[1	0.0213	0.0389	0.0462
[110, 130[0	0.0000	0.0288	0.0324
[130, 390]	5	0.1064	0.0913	0.0757

Tableau A2. 13 - Comparaison des fréquences observées $\hat{H}_g(3,.)$ aux probabilités théoriques calculées.

Enfin, la Figure 6 représente l'histogramme des fréquences relatives observées et celui des probabilités calculées à partir de la méthode de Thom. Là encore, l'ajustement est assez satisfaisant.

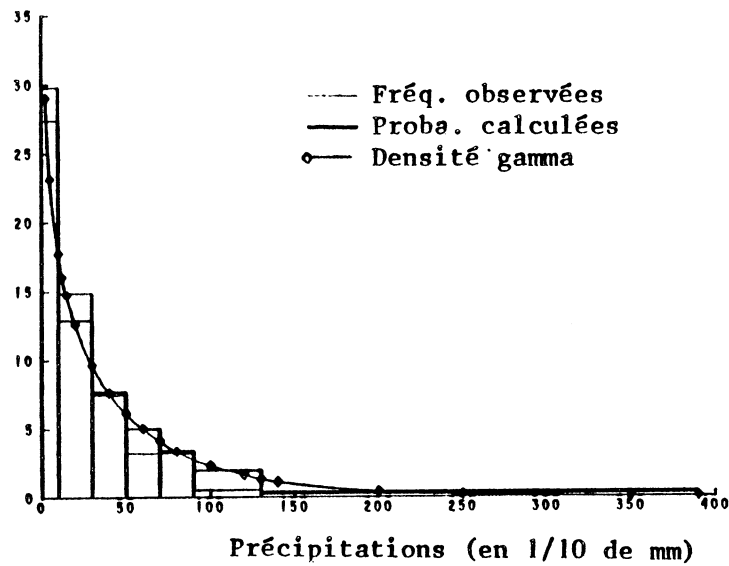


Figure A2.6 - Histogrammes observées et calculés (Thom) ; densité gamma.

Les résultats du test du Chi-2, résumés dans le tableau ci-dessous permettent d'accepter l'hypothèse que $H_1(3,.)$ est une loi gamma.

METHODES D'ESTIMATION DES PARAMETRES (1), (1)	VALEUR DE LA STAT. DU TEST : χ_{obs}^2	$P(\chi_k^2 > \chi_{obs}^2)$	d. d. l.
METHODE DES MOMENTS	2.655	0.10	2
METHODE DE THOM	1.642	0.45	3

Tableau A2.14 - Test de l'hypothèse " La loi $H_1(3,.)$ est une loi gamma ".
(cf. Tableau 13 pour le découpages en classes).

2.3 - Etude de l'hypothèse $H_1(k,.) = H_1(2,.)$; $k \geq 2$.

Compte tenu des résultats précédents, il semble raisonnable d'admettre l'idée que les lois $H_1(k,.)$ sont toutes identiques pour $k \geq 2$. Pour mieux juger de cette hypothèse, nous envisageons maintenant différents tests.

a) *Test d'égalité des deux lois $H_1(2,.)$ et $H_1(3,.)$ au vu des échantillons $(x^2_1, x^2_2, \dots, x^2_{n(2)})$ et $(x^3_1, \dots, x^3_{n(3)})$.*

Il s'agit de tester l'homogénéité des deux échantillons $(x^2_1, \dots, x^2_{n(2)})$ et $(x^3_1, \dots, x^3_{n(3)})$. Les données nécessaires au test sont résumées dans le tableau suivant :

Classes	[0, 10[[10, 30[[30, 50[[50, 70[[70, 90[[90, 110[[110, 390]	Total
Echan. 1 de loi H (2,..)	15	19	8	3	3	2	6	61
Echan. 2 de loi H (3,..)	7	5	6	3	1	0	4	26
Total	22	24	14	11	4	2	10	87
Frequencies	0.2529	0.276	0.2874		0.1839			

Tableau A2. 15 - Tableau des contingences associé aux échantillons $(x^2_{1,\dots,x^2_{n(2)}})$ et $(x^3_{1,\dots,x^3_{n(3)}})$.

La valeur de la statistique de test associé au tableau de contingences 2 x 4 ci-dessus est : $\chi^2_{\text{obs}} = 1.437$.

Comme : $\text{Prob} [\chi^2_3 > 1.424] = 0.70$, on est amené à accepter l'hypothèse d'égalité des deux lois $H_1(2,.)$ et $H_1(3,.)$.

b) *Test d'égalité des lois $H_1(2,.)$ et $H_1(3,.)$ au vu des échantillons $(x^2_{1,\dots,x^2_{n(2)}})$ et $((x^3_{1,\dots,x^3_{n(3)}}); (x^4_{1,\dots,x^4_{n(4)}}); \dots)$.*

Il s'agit ici de tester l'homogénéité des deux échantillons cités ci-dessus, sous l'hypothèse à priori de l'homogénéité des échantillons $(x^k_{1,\dots,x^k_{n(k)}})$ pour $k \geq 3$. Le tableau de contingences 2 x 5 ci-dessous permet de calculer la valeur de la statistique de test du chi-2.

Classes	[0, 10[[10, 30[[30, 50[[50, 70[[70, 90[[90, 390]	N
Echan. 1 de loi H (2,..)	15	19	8	8	3	8	61
Echan. 2 de loi H (3,..)	14	14	7	3	3	6	47
Total	29	33	15	11	6	14	108
Frequencies	0.2685	0.3055	0.1389	0.1574		0.1296	

Tableau A2. 16 - Tableau de contingences associé aux échantillons $(x^2_{1,\dots,x^2_{n(2)}})$ et $((x^3_{1,\dots,x^3_{n(3)}}); (x^4_{1,\dots,x^4_{n(4)}}); \dots)$.

La valeur de la statistique de test est : $\chi^2_{\text{obs}} = 0.8491$.

Comme $\text{Prob} [\chi^2_4 > 0.8491] \approx 0.80$, on peut admettre l'idée d'homogénéité des lois $H_1(k, \cdot)$ pour $k \geq 2$.

3 - Etude de la loi de la quantité de précipitation au dernier jour d'une séquence humide.

Nous envisageons ici une étude complémentaires en vue de confronter le modèle considéré à la réalité des données.

3.1 - Etude empirique de la loi $H_1^d(\cdot)$.

Rappelons d'abord que la loi de la quantité de précipitation au dernier jour d'une séquence humide est la combinaison convexe des lois $H_1(k, \cdot)$; $k \geq 2$ (cf. Lemme 4 du Chap. I) :

$$H_1^d(x) = P [X_t \leq x / J_t = 1, J_{t+1} = 0] = \sum_{k \geq 1} p^1_k H_1(k, x) \quad ; x \geq 0$$

où $p^1 = (p^1_k ; k \geq 1)$ désigne la loi des temps de séjour dans l'état humide. En particulier, si les lois $H_1(k, \cdot)$ sont identiques à $H_1(2, \cdot)$ pour $k \geq 2$, la loi du dernier jour s'écrit simplement :

$$H_1^d(x) = p^1_1 H_1(1, x) + (1 - p^1_1) H_1(2, x) \quad ; x \geq 0.$$

Les données climatologiques qui serviront de base à cette étude empirique de la loi $H_1^d(\cdot)$ sont constituées par les quantités de précipitation en un jour k (appartenant à la période étudiée) précédant un jour sec. Dans le Tableau 17 ci-dessous, nous portons en colonne 2 les valeurs des caractéristiques de moyenne et écart-type de cet échantillon, que nous comparerons d'une part aux valeurs théoriques correspondantes qui sont calculées à partir de la combinaison convexe :

$$(1) \quad p^1_1(q) \Gamma(\hat{\alpha}_T(1), \hat{\beta}_T(1); \cdot) + (1 - p^1_1(q)) \Gamma(\hat{\alpha}_T(2), \hat{\beta}_T(2); \cdot),$$

puis à celles obtenues à partir de la combinaison de lois empiriques :

$$(2) \quad p^1_1 \hat{H}_1^{n(1)}(1, \cdot) + (1 - p^1_1) \hat{H}_g(2, \cdot).$$

Dans l'expression (1), $p^1(\hat{q})$ désigne la loi de probabilité géométrique de paramètre q qui est donné par (cf. étude faite en A1) $p^1_1(\hat{q}) = 0.561$; et dans (2), \hat{p}^1_1 désigne la fréquence relative des séquences humides de longueur égale à 1. Celle-ci est égale à : 0.558.

	Valeurs observées associées à $H_1^d(\cdot)$	Valeurs calculées selon (1)	Valeurs calculées selon (2)
Moyenne	3.361	3.903	3.901
Ecart-type	3.469	4.145	4.936

Tableau A2. 17 - Moyennes et écart-types observés et calculés à partir des deux combinaisons convexes (1) et (2).

D'après ce tableau, on peut dire que les écarts entre les moyennes et écart-types obtenus empiriquement et calculés dans le cadre du modèle de processus de renouvellement alterné avec récompenses décomposables, de lois associées au processus binaire J du type géométrique, et de lois $H_1(1, \cdot)$ et $H_1(k, \cdot)$; $k \geq 2$ de type gamma, sont assez faibles. La dernière colonne de ce même tableau étant donnée à titre indicatif seulement.

D'autre part, dans les colonnes 2 et 3 du Tableau 18, nous portons respectivement, le nombre d'observations par classes et la fréquence $\hat{H}_1^d(\cdot)$ correspondante. La colonne 4 fournit les probabilités théoriques estimées par la combinaison convexe des lois gamma donnée plus haut. Enfin, à titre indicatif, nous portons en dernière colonne les probabilités calculées selon :

$$\hat{p}^1_1 H_1^{n(1)}(1, \cdot) + (1 - \hat{p}^1_1) \hat{H}_g(2, \cdot)$$

INTERVALLE	Nbre obs. par int.	Fréquence relative	Proba. calculées selon (1)	Proba. calculées selon (2)
[0. 10 [34	0.246	0.2368	0.2482
[10. 15 [15	0.109	0.0948	0.0983
[15. 25 [18	0.130	0.1554	0.1901
[25. 40 [21	0.152	0.1602	0.1313
[40. 50 [11	0.080	0.0783	0.0856
[50. 70 [17	0.123	0.1054	0.1021
[70. 90 [14	0.101	0.0622	0.0571
[90. 390]	8	0.058	0.1012	0.0850

Tableau A2. 18 - Fréquences observées $\hat{H}_1^d(\cdot)$ et probabilités calculées.

L'ajustement semble assez satisfaisant.

Nous avons représenté sur la Figure 7, l'histogramme associé à la loi empirique au dernier jour et celui obtenu à partir des valeurs "théoriques" données dans la colonne 4 du Tableau 18. Pour avoir une idée de l'écart entre ces deux histogrammes nous avons calculé la valeur de la statistique du χ^2 . Il est raisonnable de comparer cette valeur à une valeur extraite de la table du Chi-2 à $8-5-1 = 3$ d.d.l. ; comme $\text{Prob}[\chi^2_3 > 7.2] > 0.05$, nous sommes amenés à accepter, au niveau de signification $\alpha=0.05$, l'hypothèse d'adéquation de la loi empirique à une loi :

$$p^1 \Gamma(\alpha(1), \beta(1); \cdot) + (1-p^1) \Gamma(\alpha(2), \beta(2); \cdot)$$

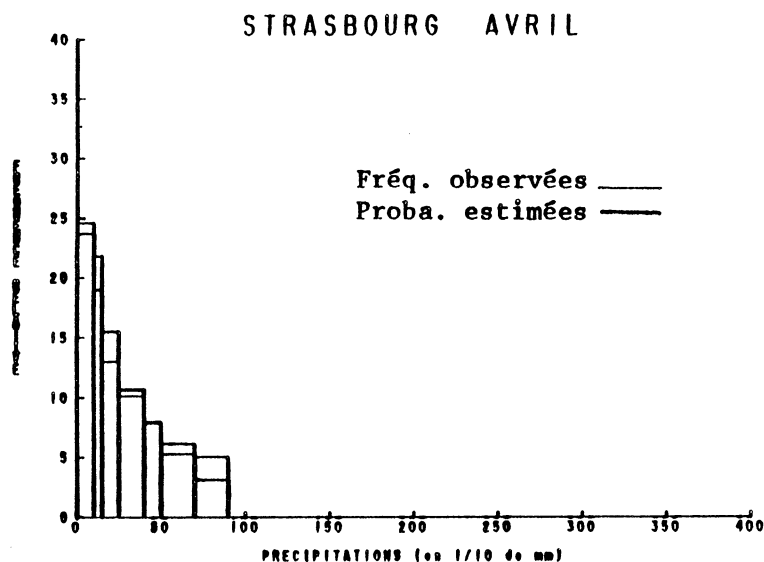


Figure A2.7 - Histogramme des fréquences observées (loi empirique au dernier jour) et loi obtenue selon l'expression :

$$p^1_{j_1}(\hat{q}) \Gamma(\hat{\alpha}_T(1), \hat{\beta}_T(1)) + (1 - p^1_{j_1}(\hat{q})) \Gamma(\hat{\alpha}_T(2), \hat{\beta}_T(2)).$$

4 - Etude empirique de la loi du maximum.

Compte tenu de l'étude faite aux paragraphes précédents, du processus des quantités de précipitations conditionnellement au processus de la succession des jours, nous admettons ici l'hypothèse que les lois $H_1(k, \cdot)$ pour $k \geq 2$ sont identiques à une même loi $H_1(2, \cdot)$ prise dans la famille des lois gamma, et nous envisageons l'étude du processus des quantités de précipitation $X = \{X_t ; t \geq 1\}$ à travers l'étude de la loi d'une variable apparentée : celle de la quantité maximale de précipitation sur différentes périodes.

4.1 - Lois empiriques et calculées de la variable $M_X(n)$.

Désignons par $\hat{G}_n(\cdot)$ la (fonction de répartition) loi empirique associée à un échantillon (y_1, \dots, y_N) de taille N , de quantités de précipitation maximales observées sur une période de n jours consécutifs. Un programme informatique nous permet d'extraire un tel échantillon à partir de la série totale des précipitations et de calculer la distribution empirique $\hat{G}_n(\cdot)$ correspondante pour des périodes de $n = 5, 10$ et 20 jours consécutifs du mois d'Avril.

Pour calculer la loi exacte (estimée) de la variable $M_X(n)$ pour les valeurs de n données ci-dessus, nous utilisons l'algorithme donné par la Proposition 8 du chapitre II où nous remplaçons les paramètres p^0 et p^1 par leurs valeurs estimées (cf. A1. Tableaux 1,2) et où les lois $H_1(1, \cdot)$ et $H_1(2, \cdot)$ sont les lois gamma de paramètres respectifs $(\hat{\alpha}_T(1), \hat{\beta}_T(1))$ et $(\tilde{\alpha}_T(2), \tilde{\beta}_T(2))$ (cf. Tableaux I et 9), les lois $H_0(k, \cdot)$ étant des lois de Dirac δ_0 en 0. (signalons que l'utilisation de l'algorithme de la Proposition 7 du Ch. III conduit à des résultats identiques).

Ce calcul permet de comparer la valeur observées de la loi $\hat{G}_n(\cdot)$ aux valeurs calculées de la loi de la variable $M_X(n)$. Les résultats obtenus correspondant aux valeurs $n=5, 10$ et 20 sont portés dans les Tableaux 19.a, 19.b, et 19.c ci-dessous.

Outre ces trois tableaux, nous représentons sur les Figures 8.(a) et 8.(b), les fonctions de répartitions empiriques et théoriques de $M_X(n)$, pour les valeurs de $n=5$ et $n=10$. La confrontation des lois observées et calculées dans le cadre du modèle particulier de processus de renouvellement alterné avec récompenses décomposables montre encore que celui-ci représente assez bien la réalité observée.

Intervalles	Nbre d'obs. par intervalle	Freq. Relatives Observées	Proba. Calculées
[0, 10 [22	0.17187	0.23804
[10, 30 [33	0.25781	0.23183
[30, 50 [25	0.19531	0.17857
[50, 70 [18	0.14062	0.12712
[70, 90 [11	0.08594	0.09632
[90, 110 [4	0.03125	0.03547
[110, 130 [4	0.03125	0.02879
[130, 390 [11	0.08594	0.06505
	N=128		

Tableau A2. 19.a - Lois empiriques et calculées de la variable $M_X(5)$.

Intervalles	Nbre d'obs. par intervalle	Freq. Relatives Observées	Proba. Calculées
[0, 10 [10	0.12346	0.11971
[10, 30 [12	0.14815	0.17724
[30, 50 [18	0.22221	0.18088
[50, 70 [16	0.19753	0.15737
[70, 90 [9	0.11111	0.12272
[90, 110 [3	0.03704	0.06237
[110, 130 [3	0.03704	0.05264
[130, 390 [10	0.12346	0.12545
	N= 81		

Tableau A2. 19.b - Lois empiriques et calculées de la variable $M_X(10)$.

Intervalles	Nbre d'obs. par intervalle	Freq. Relatives Observées	Proba. Calculées
[0, 10 [4	0.07018	0.04239
[10, 30 [6	0.10526	0.12093
[30, 50 [13	0.22807	0.16837
[50, 70 [10	0.17544	0.17553
[70, 90 [8	0.14035	0.15319
[90, 110 [3	0.05263	0.08285
[110, 130 [3	0.05263	0.07259
[130, 390 [10	0.17544	0.18185
	N= 57		

Tableau A2. 19.c - Lois empiriques et calculées de la variable $M_X(20)$.

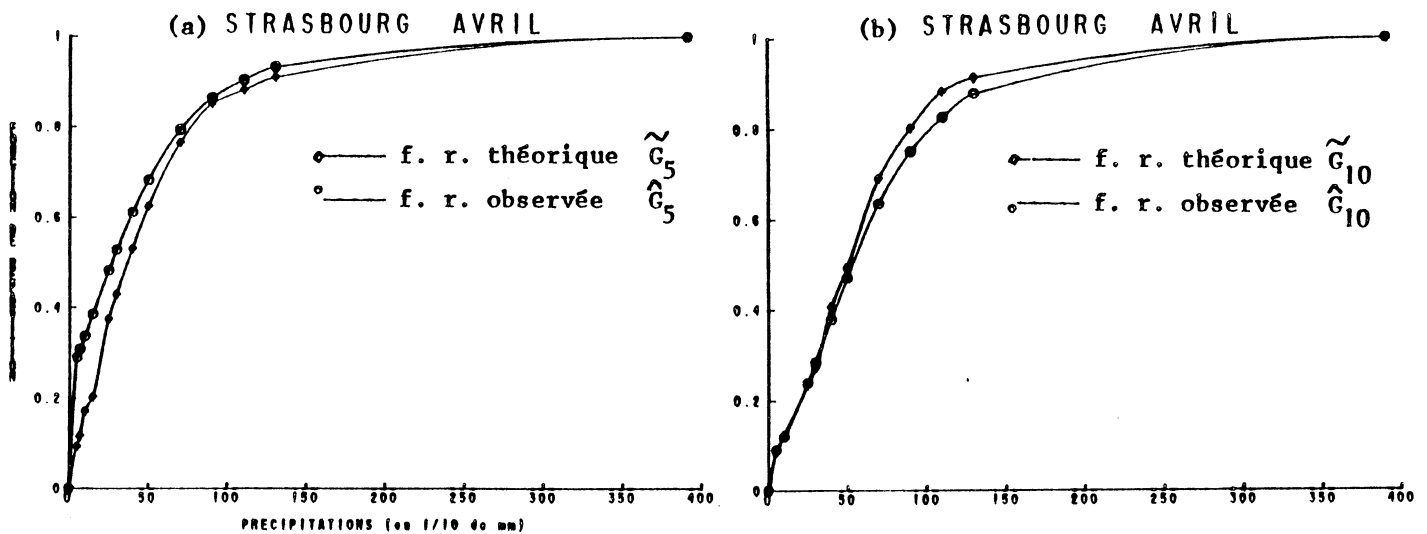


Figure A2.8 - Répartitions empiriques et théoriques de $M_X(n)$; $n = 5, 10$.

**PARTIE B- MODELISATION DE DONNEES CLIMATOLOGIQUES
CONCERNANT LE MOIS DE JANVIER A LIMOGES.**

PARTIE B1

**ETUDE DU PROCESSUS DE LA SUCCESSION DES JOURS
SELON LEUR CARACTERE SEC OU HUMIDE .**

Nous utilisons ici les données climatologiques prélevées à Limoges pour la période du mois de Janvier de l'année 1949 à 1977. Nous menons une étude analogue à celle effectuée dans la partie A1.

**1 - Caractéristiques observées des séquences.
Estimation des paramètres des trois modèles.**

L'analogue du Tableau 1. A1 est ici le suivant :

	SEQUENCES HUMIDES	SEQUENCES SECHES
Moyenne et variance	$m1= 2.314$ $var1= 3.316$	$m0= 3.891$ $var0= 15.131$
MODELE 1	$q1= 0.568$	$q0= 0.743$
MODELE 2	$qh1= 0.550$ $qh2= 0.582$	$qs1= 0.653$ $qs2= 0.774$
MODELE 3	$h1=1.314$, $d1=1.523$ $d1/h1=1.159$	$h0=2.891$, $d0=4.234$ $d0/h0=1.464$

Tableau B1. 1 - Moyennes et variances empiriques des séquences sèches et humides observées. Valeurs estimées des paramètres des lois p^0 et p^1 .

On peut remarquer que, les paramètres $qh1$ et $qh2$ de la loi de séjour p^1 estimés dans le modèle markovien d'ordre 2 sont très voisins du paramètre $q1$ du modèle markovien d'ordre 1. En outre, la valeur du rapport $d1/h1$ est relativement proche de 1. Par conséquent l'ajustement des séquences humides peut être effectué de manière satisfaisante dans chacun des trois modèles considérés. Par contre, en ce qui concerne les séquences sèches, la valeur du paramètre $d0/h0$ est notablement supérieure à 1. La persistance est donc croissante. Le modèle 1 n'est à priori pas en mesure de traduire correctement cette caractéristique importante.

2 - Lois des durées de séquences.

Les valeurs estimées des différents paramètres des trois modèles de renouvellement que nous avons considérés permettent de comparer les lois p^0 et p^1 calculées dans le cadre de chacun de ces trois modèles, aux distributions observées des séquences sèches et humides.

Dans le Tableau B1.2 (resp. B1.3) nous portons respectivement en 2-ième et 3-ième colonne le nombre de séquences sèches (resp. humides) et les fréquences relatives correspondantes en fonction de la longueur de ces séquences.

Longueur de seq. seches	Nombre de sequences N=147	Frequence relative	MODELE 1 q= 0.743	MODELE 2 q1= 0.65 q2= 0.77	MODELE 3 h= 2.891 d= 4.234
1	51	0.347	0.257	0.347	0.323
2	28	0.190	0.191	0.148	0.178
3	18	0.122	0.142	0.114	0.121
4	4	0.027	0.105	0.088	0.088
5	8	0.054	0.078	0.068	0.065
6	8	0.054	0.058	0.053	0.050
7	7	0.048	0.043	0.041	0.038
8	6	0.041	0.032	0.032	0.029
9	6	0.041	0.024	0.025	0.023
10	3	0.020	0.018	0.019	0.018
11	0	0.000	0.013	0.015	0.014
12	1	0.007	0.010	0.011	0.011
13	3	0.020	0.007	0.009	0.009
14	0	0.000	0.005	0.007	0.007
15	0	0.000	0.004	0.005	0.005
16	0	0.000	0.003	0.004	0.004
17	0	0.000	0.002	0.003	0.003
18	2	0.014	0.002	0.002	0.003
19	1	0.007	0.001	0.002	0.002
20	1	0.007	0.000	0.001	0.002

Tableau B1. 2 - Distribution empirique des séquences sèches et probabilités théoriques calculées.

Longueur de seq. humide	Nombre de sequences N=140	Frequence relative	MODELE 1 q= 0.568	MODELE 2 q1= 0.55 q2= 0.58	MODELE 3 h= 1.314 d= 1.523
1	63	0.450	0.432	0.450	0.450
2	34	0.243	0.245	0.230	0.234
3	19	0.136	0.139	0.134	0.132
4	7	0.050	0.079	0.078	0.076
5	8	0.057	0.045	0.045	0.044
6	2	0.014	0.026	0.026	0.026
7	3	0.021	0.014	0.015	0.015
8	3	0.021	0.008	0.009	0.009
9	0	0.000	0.005	0.005	0.005
10	0	0.000	0.003	0.003	0.003
11	1	0.007	0.002	0.002	0.002

Tableau B1. 3 - Distribution empirique des séquences humides probabilités théoriques calculées.

Ces deux tableaux montrent que, globalement, les modèles 2 et 3 réalisent un meilleur ajustement que le modèle markovien d'ordre 1. On peut aussi noter que les probabilités correspondant aux modèles 2 et 3 sont très voisines entre elles surtout celles relatives aux séquences sèches. Les ajustements graphiques (cf. Figures 1.a et 1.b) des distributions observées des séquences sèches par les probabilités théoriques correspondant à ces deux modèles, traduisent très bien cette similitude.

3 - Loi du nombre de jours humides parmi k jours consécutifs.

Nous portons sur la 2^é colonne des Tableaux 4 et 5 suivants les fréquences relatives observées du nombre de jours humides $S_k^1 = \sum_{t=1,k} J_t$ pour les périodes du mois de Janvier de k=10 et 15 jours sur les 29 années d'observation. En 3^é, 4^é et 5^é colonne, nous portons les probabilités $P[S_k^1 = m]$; $m=0,1,\dots,k$ correspondantes qui sont calculées respectivement dans le cadre des modèles 1,2 et 3. Ces deux tableaux permettent de noter que les fréquences observées sont bien représentées par les probabilités théoriques calculées dans le Modèle 3.

Nous comparons par ailleurs, (cf. Tableaux 6 et 7) les caractéristiques de moyennes et écart-types observées et calculées dans chaque modèle et pour des périodes différentes (k=10,15,30). Là encore, les résultats obtenus dans les modèles 2 et 3 sont satisfaisants.

m	Freq. Rel. Observée	MODELE 1	MODELE 2	MODELE 3
0	0.0923	0.0433	0.0600	0.0758
1	0.0575	0.0995	0.1069	0.0934
2	0.1380	0.1535	0.1470	0.1437
3	0.1954	0.1827	0.1676	0.1761
4	0.1610	0.1780	0.1635	0.1642
5	0.1150	0.1454	0.1386	0.1304
6	0.1030	0.1003	0.1021	0.1031
7	0.0571	0.0579	0.0646	0.0544
8	0.0231	0.0272	0.0338	0.0331
9	0.0571	0.0098	0.0132	0.0229
10	0.0001	0.0023	0.0028	0.0032

Tableau B1.4-Distributions empiriques et calculées de la variable de S_{10}^1 .

m	Freq. Rel. Observée	MODELE 1	MODELE 2	MODELE 3
0	0.03	0.0098	0.0167	0.0270
1	0.02	0.0324	0.0416	0.0324
2	0.09	0.0669	0.0731	0.0887
3	0.09	0.1055	0.1044	0.1021
4	0.10	0.1368	0.1282	0.1158
5	0.16	0.1516	0.1389	0.1474
6	0.14	0.1464	0.1354	0.1346
7	0.09	0.1248	0.1187	0.1087
8	0.12	0.0942	0.0935	0.1044
9	0.07	0.0630	0.0667	0.0674
10	0.03	0.0372	0.0432	0.0329
11	0.03	0.0191	0.0243	0.0342
12	0.03	0.0083	0.0115	0.0115
13	0.00	0.0038	0.0043	0.0045
14	0.00	0.0008	0.0013	0.0013
15	0.00	0.0001	0.0002	0.0002

Tableau B1.5 - Distributions empiriques et calculées de la variable S_{15}^1

	MOYENNE EMPIRIQUE	MODELE 1	MODELE 2	MODELE 3
S_{10}^1	3.862	3.701	3.800	3.806
S_{15}^1	5.793	5.621	5.660	5.693
S_{30}^1	11.586	11.220	11.320	11.380

Tableau B1.6 - Valeurs empiriques et calculées des moyennes de la variable "nombre de jours humides parmi k jours consécutifs" (k=10,15,30).

	ECART-TYPE EMPIRIQUE	MODELE 1	MODELE 2	MODELE 3
S_{10}^1	2.359	2.001	2.120	2.120
S_{15}^1	2.863	2.460	2.630	2.730
S_{30}^1	3.700	3.500	3.750	3.760

Tableau B1.7 - Ecart-types observés et calculés de la variable "nombre de jours humides parmi k jours consécutifs" avec k = 10,15,30.

COMMENTAIRE :

Compte tenu des résultats présentés précédemment, en particulier ceux contenus dans les tableaux 4,5,6 et 7, le Modèle 3, basé sur les lois B.N.T., permet de mieux représenter différentes caractéristiques importantes des données observées .

Ce modèle sera retenu pour la suite de ce deuxième essai de modélisation .

MOIS DE JANVIER

1949 1977

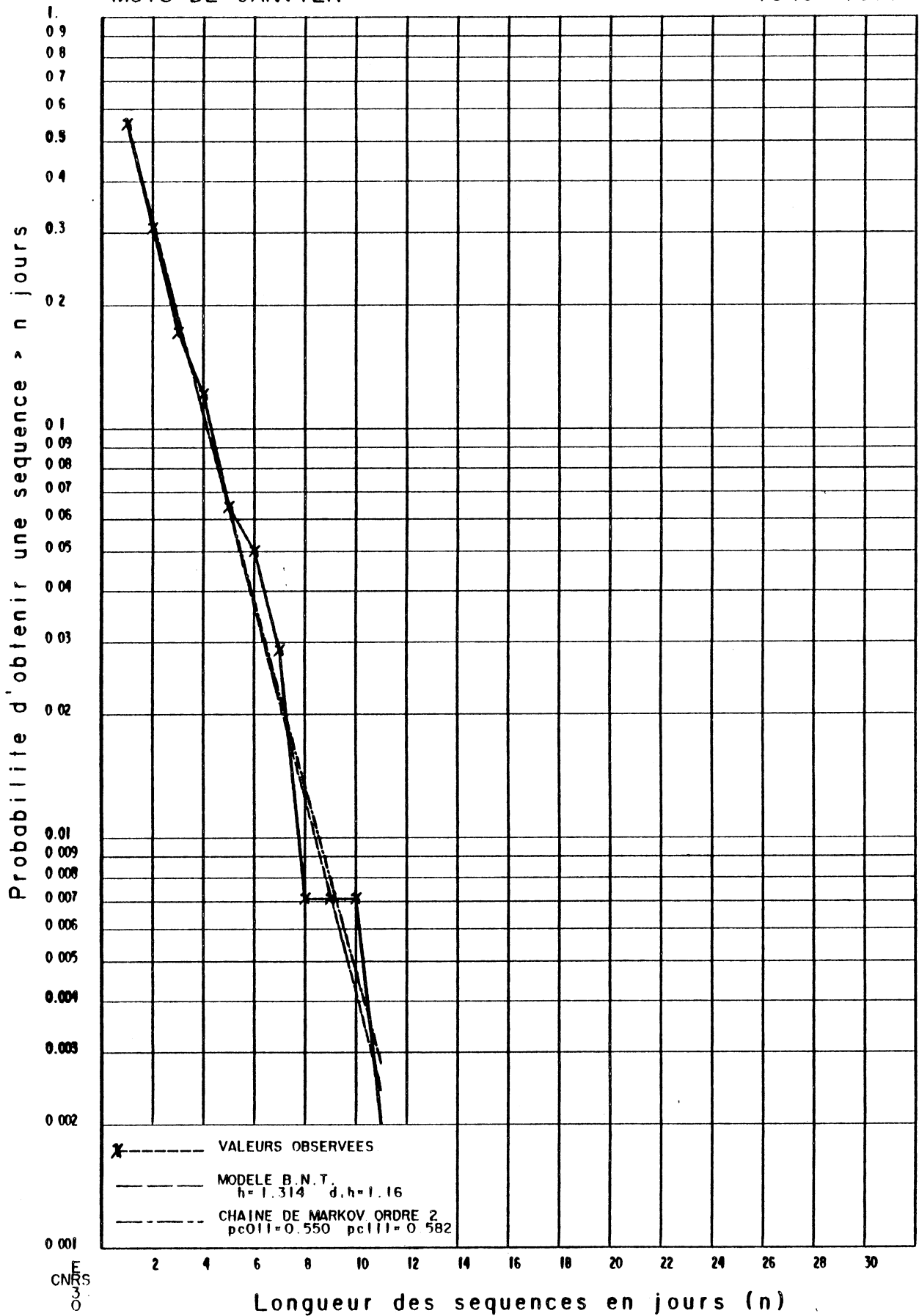


Figure B1.1.a - Séquences débutant au cours d'un mois : fréquences observées et probabilités calculées d'une séquence humide supérieure à n jours (seuil 1mm).

MOIS DE JANVIER

1949 1977

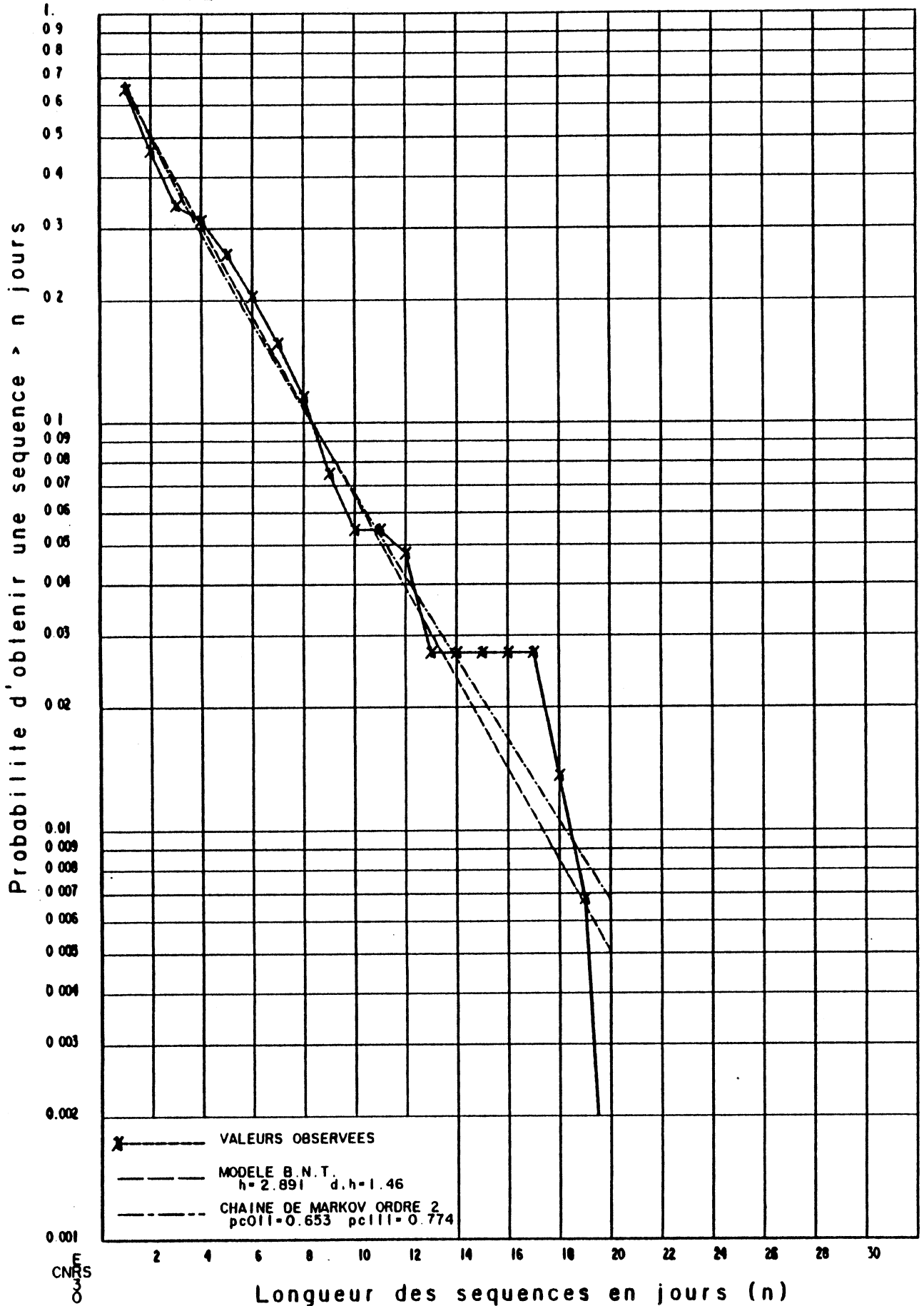


Figure B1.1.b - Séquences débutant au cours du mois : fréquences observées et probabilités calculées d'une séquence sèche supérieure à n jours.

E
 CNRS
 3
 0

PARTIE B2**ETUDE DU PROCESSUS DES QUANTITES DE PRECIPITATIONS
 $X=(X_t ; t)1$ A LIMOGES POUR LE MOIS DE JANVIER .**

L'étude empirique des lois $H_1(k,.)$ pour $1 \leq k \leq 3$ que nous faisons en 1., conduit à des ajustements par des lois gamma. En 2. nous menons une étude de l'hypothèse $H_0 : H_1(k,.) = H_1(3,.) ; k \geq 3$. Sous cette hypothèse, nous comparons en 3. la loi des quantités de précipitation au dernier jour d'une séquence humide, à la loi théorique correspondante.

1- Etude empirique des lois conditionnelles $H_1(k,.) ; k=1,2,3.$ **Ajustements par des Lois gamma.**

Les notations sont identiques à celles de la partie A2. Remarquons que la plus longue séquence humide observée sur cette période a pour longueur 11 (cf. Tableau B1.3).

Les différentes tailles, moyennes et écart-types des différents échantillons $(x^k_1, \dots, x^k_{n(k)}) ; k=1, \dots, 11$, sont portés dans le tableau suivant:

k	Tailles des échantillons : n(k)	Moyennes empiriques	Ecart-types
1	140	4.116	4.519
2	77	6.439	6.753
3	43	5.514	4.278
4	24	5.479	4.445
5	17	6.176	5.327
6	9	7.277	4.625
7	7	8.068	6.596
8	4	12.350	7.829
9	1	14.100	0.000
10	1	4.700	0.000
11	1	6.000	0.000

Tableau B2. 1- Tailles des échantillons $(x^k_1, \dots, x^k_{n(k)}) ; k=1, \dots, 11$. Moyennes et écart-types empiriques associés.

Ce tableau montre que les échantillons étudiés sont de taille $n(k)$ très faible lorsque $k \geq 4$. C'est pourquoi, nous nous limitons ici à l'étude des trois lois conditionnelles $H_1(k,.) ; 1 \leq k \leq 3$, pour lesquelles les tailles des échantillons sont relativement grandes.

Les formes des histogrammes des fréquences observées associés aux lois empiriques $H_1^{n(k)}(k,.) ; k=1,2,3$ nous suggèrent d'envisager là encore, des

ajustements de ces lois par des lois $\gamma(\alpha(k), \beta(k))$. Les valeurs estimées $(\hat{\alpha}_m(k), \hat{\beta}_m(k))$ et $(\hat{\alpha}_T(k), \hat{\beta}_T(k))$; $k=1,2,3$, obtenus par la méthode des moments et celle de Thom respectivement, sont portées dans le tableau suivant :

INDICE k	ESTIMATEURS DE ALPHA		ESTIMATEURS DE BETA	
	ESTIM. MOM.	ESTIM. THOM	ESTIM. MOM.	ESTIM. THOM
1	0.829	0.947	49.629	43.469
2	0.909	0.803	70.833	80.201
3	1.661	1.409	33.200	39.123

Tableau B2. 2 - Valeurs estimées des paramètres $\alpha(k), \beta(k)$; $k=1,2,3$ par la méthode des moments et celle de Thom.

Nous constatons que les valeurs des estimateurs des paramètres de formes $\alpha(1)$ et $\alpha(2)$ sont voisins de la valeur 1. Ceci pourrait nous amener à envisager dans ces cas, des ajustements par des lois exponentielles de paramètres respectifs $\beta(1)$ et $\beta(2)$. Par contre, les estimateurs $\hat{\alpha}_m(3)$ et $\hat{\alpha}_T(3)$ du paramètre $\alpha(3)$ sont assez différents 1, et une adéquation des données $(x^3_1, \dots, x^3_{n(3)})$ par une loi exponentielle n'est, a priori pas envisageable.

Les calculs, pour chaque échantillon $(x^k_1, \dots, x^k_{n(k)})$ ($k=1,2,3$), des fréquences relatives observées pour l'intervalle $[a,b[$ et des probabilités théoriques $\Gamma_{\hat{\alpha}(k), \hat{\beta}(k)}([a,b[)$ correspondant aux valeurs estimées des paramètres $(\alpha(k), \beta(k))$ par les méthodes considérées, nous conduisent aux Tableaux 3.a, 3.b et 3.c suivants qui sont les analogues des Tableaux 2, 5 et 8 de la partie A2.

INTERVALLE	NOMBRE OBSERV. PAR INTERVALLE	FREQUENCE RELATIVE	PROBABILITES ESTIMEES MOM.	PROBABILITES ESTIMEES THOM
[0, 10 [31	0.221	0.2589	0.227
[10, 15 [12	0.086	0.0878	0.089
[15, 25 [20	0.143	0.1396	0.146
[25, 35 [19	0.136	0.1063	0.114
[35, 50 [22	0.157	0.1172	0.127
[50, 60 [7	0.050	0.0578	0.062
[60, 80 [7	0.050	0.0826	0.082
[80, 105 [9	0.064	0.0628	0.064
[105, 120 [5	0.036	0.0242	0.024
[120, 200 [6	0.043	0.0522	0.048
[200, 290 [1	0.007	0.0101	0.008
[290, 390 [1	0.007	1.61E-3	9.93E-4
[390, 540]	0	0.000	2.24E-4	1.11E-4

Tableau B2.3. a - Comparaison des fréquences observées $H_1^{n(1)}(1, .)$ aux probabilités calculées (Méthodes des moments et de Thom).

INTERVALLES	NOMBRE OBSERV. PAR INTERVALLE	FREQUENCE RELATIVE	PROBA. ESTI. METH. MOMENTS	PROBA. ESTI. METH. THOM
[0, 10 [16	0.208	0.1637	0.1917
[10, 15 [7	0.091	0.0654	0.0665
[15, 25 [8	0.104	0.1128	0.1106
[25, 35 [5	0.065	0.0943	0.0899
[35, 50 [5	0.065	0.1151	0.1079
[50, 60 [3	0.039	0.0627	0.0584
[60, 80 [9	0.117	0.0996	0.0927
[80, 105 [7	0.091	0.0885	0.0829
[105, 120 [5	0.065	0.0392	0.0372
[120, 200 [7	0.091	0.1095	0.1077
[200, 290 [4	0.052	0.0361	0.0388
[290, 390 [1	0.013	0.0103	0.0125
[390, 540 [0	0.000	2.86E-3	4.027E-4

Tableau B2.3.b - Comparaison des fréquences relatives $H_1^{n(2)}(2, .)$ aux probabilités calculées.

INTERVALLE	NOMBRE OBSERV. PAR INTERVALLE	FREQUENCE RELATIVE	PROBABILITES ESTIMEES MOM.	PROBABILITES ESTIMEES THOM
[0, 10[3	0.070	0.0756	0.083
[10, 15[4	0.093	0.0598	0.085
[15, 25[6	0.140	0.1299	0.132
[25, 35[4	0.093	0.1262	0.122
[35, 50[6	0.140	0.1632	0.152
[50, 60[4	0.093	0.0891	0.082
[60, 80[6	0.140	0.1331	0.124
[80, 105[4	0.093	0.1024	0.098
[105, 120[1	0.023	0.0382	0.038
[120, 200[5	0.116	0.0722	0.079
[200, 540[0	0.000	0.0107	0.013

Tableau B2.3.c - Comparaison des fréquences relatives $H_1^{n(3)}(3, .)$ aux probabilités calculées.

Un examen de ces tableaux (et des Figures 1,2 et 3 qui représentent les histogrammes de $H_1^{n(k)}$ pour $k = 1, 2$ et 3 et les histogrammes "théoriques" obtenus par les méthodes d'estimations considérées) montre que les fréquences observées (cf. colonnes 3) sont, dans l'ensemble, bien représentées par les probabilités calculées correspondantes (cf. colonnes 4 et 5).

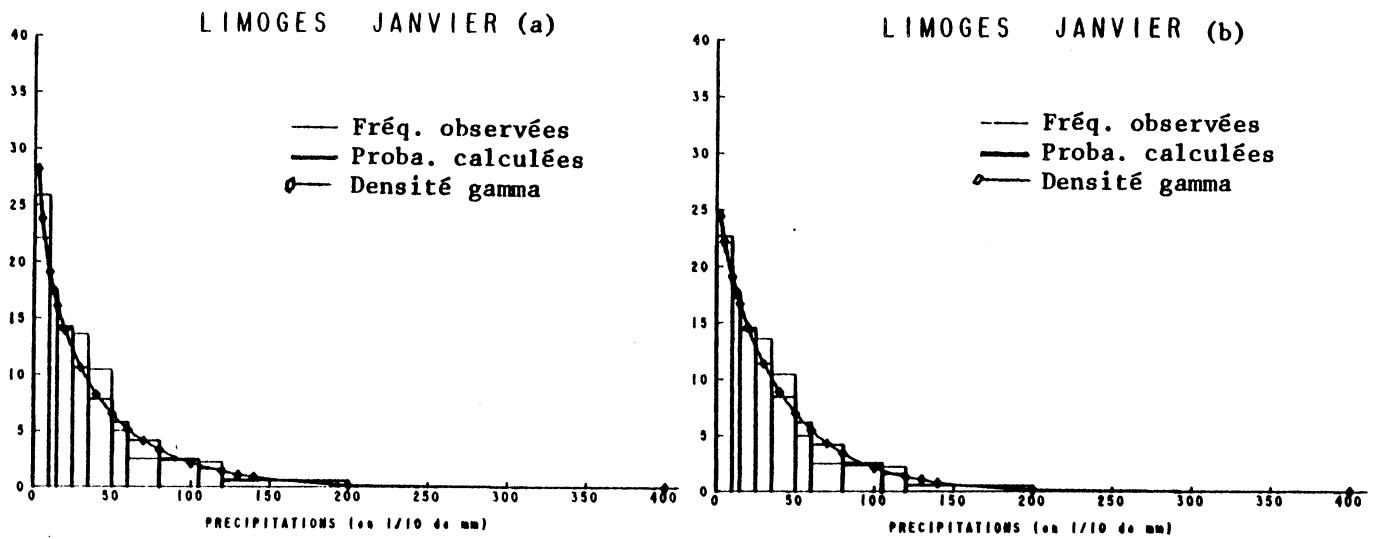


Figure B2.1- Histogramme des fréquences $H_1^{n(1)}(1,.)$ et histogrammes des probabilités estimées (méthode des moments(a) ; méthode de Thom(b)).

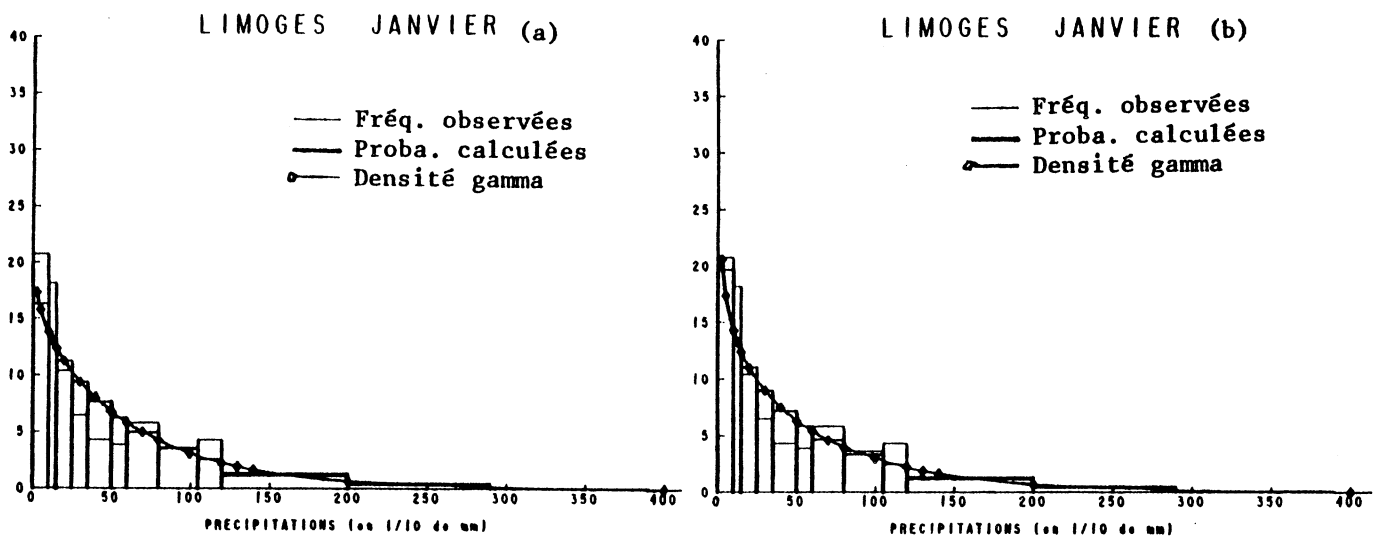


Figure B2.2- Histogramme des fréquences $H_1^{n(2)}(2,.)$ et histogrammes des probabilités estimées (méthode des moments(a) ; méthode de Thom(b)).

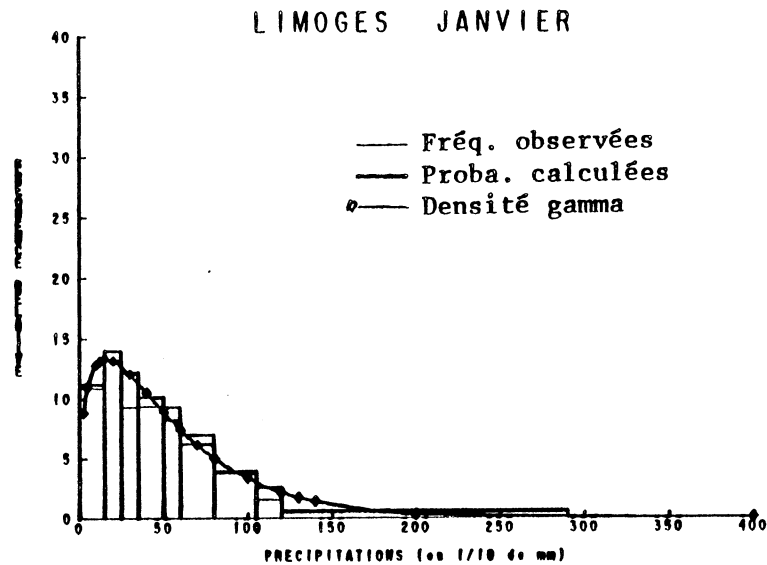


Figure B2.3- Histogramme des fréquences $H_1^{n(3)}(3,.)$ et histogrammes des probabilités estimées (méthode de Thom).

Pour mieux juger de la qualité de ces ajustements, nous utilisons un test du Chi-2 des hypothèses :

$$H_0(k) : "H_1(k,.) \text{ est une loi gamma}"; k = 1, 2, 3 .$$

k	Méthodes d'est. de $\alpha(k), \beta(k); k=1,2,3$	Valeur observée de la stat. du test .	$P[\chi_r^2 > \chi_{\alpha, r}^2]$	d. d. l. r
1	Moments	6.666	0.43	8
	Thom	4.485	0.30	8
2	Moments	5.523	0.47	6
	Thom	4.482	0.40	6
3	Moments	1.986	0.76	4
	Thom	1.539	0.71	4

Tableau B2.4-Tests de l'hypothèse $H_0(k)$: " $H_1(k,.)$ est une loi gamma"; $1 \leq k \leq 3$.
(cf. Tableau 3 pour les découpages en classes)

D'après ce tableau, il apparaît que l'hypothèse que la loi $H_1(k,.)$, pour $k=1,2$ et 3, suit une loi gamma est largement acceptée. Dans les trois cas, la plus petite valeur de la statistique observée χ_{obs}^2 est obtenue à partir de l'estimation par la méthode de Thom. On retiendra ainsi pour lois d'ajustement, les lois gamma de paramètres $(\hat{\alpha}_T(k), \hat{\beta}_T(k))$; $k = 1, 2, 3$.

2 - Etude empirique de l'hypothèse " $H_1(k,.) = H_1(3,.)$ pour $k \geq 3$ "

Le Tableau 1 permet de noter une assez faible variation des valeurs observées des moyennes et écart-types \bar{x}^k et σ^k associées aux échantillons $(x_1^k, \dots, x_{n(k)}^k)$ pour $k \geq 3$. On peut remarquer, en particulier que les valeurs des moyennes empiriques \bar{x}^3 et \bar{x}^4 (resp. les écart-types σ^3 et σ^4) sont très voisines. Cela invite à s'interroger sur l'hypothèse que les échantillons $(x_1^k, \dots, x_{n(k)}^k)$ pour $k=3,4,\dots$, sont des échantillons issus d'une même loi.

Nous commençons par l'étude de la loi empirique $\hat{H}_g(3,.)$ (resp. $\hat{H}_g(4,.)$) associée aux échantillons $(x_1^k, \dots, x_{n(k)}^k)$; $k \geq 3$ (resp. $k \geq 4$), considérés comme échantillons indépendants selon une même loi $H_1(3,.)$ (resp. $H_1(4,.)$). Cette étude nous conduira en particulier comme dans le paragraphe précédent, à des ajustements satisfaisants par des lois gamma.

2.1 - Etude des lois empiriques $\hat{H}_g(3,.)$ et $\hat{H}_g(4,.)$. Ajustements.

Nous disposons de deux échantillons $(x_1^3, \dots, x_{n(3)}^3)$, $(x_1^4, \dots, x_{n(4)}^4), \dots$, et $(x_1^4, \dots, x_{n(4)}^4)$, $(x_1^5, \dots, x_{n(5)}^5), \dots$, de lois empiriques respectives $\hat{H}_g(3,.)$ et $\hat{H}_g(4,.)$ dont les caractéristiques essentielles sont portées dans le tableau suivant :

Indice k	Taille de l'échantillon : $ng(k)$	Moyennes empiriques Associées à $\hat{H}_g(k,.)$	Ecart-types Associés à $\hat{H}_g(k,.)$
3	107	6.2010	5.1914
4	64	6.6636	5.4103

Tableau B2.5 - Tailles des échantillons globaux associés aux lois $\hat{H}_g(k,.)$; $k=3,4$. Moyennes et écart-types associés.

On voit que les valeurs observées portées dans ce tableau sont relativement proches de celles données dans le Tableau 1 correspondant aux lois empiriques $H_1^{n(3)}(3,.)$ et $H_1^{n(4)}(4,.)$.

L'estimation des paramètres respectifs $(\tilde{\alpha}(3), \tilde{\beta}(3))$ et $(\tilde{\alpha}(4), \tilde{\beta}(4))$ des lois $H_1(3,.)$ et $H_1(4,.)$ supposées appartenir à la famille des lois gamma, conduit aux valeurs suivantes :

$H_g(k..)$	ESTIMATEURS DE ALPHA		ESTIMATEURS DE BETA	
	ESTIM. MOM.	ESTIM. THOM	ESTIM. MOM.	ESTIM. THOM
3	1.483	1.391	41.990	40.892
4	1.512	1.437	43.980	41.520

Tableau B2.6 - Estimation des paramètres ($\tilde{\alpha}(3), \tilde{\beta}(3)$) et ($\tilde{\alpha}(4), \tilde{\beta}(4)$).

Ces valeurs sont, comme les moyennes et écart-types observés, assez proches des valeurs estimées des paramètres ($\alpha(3), \beta(3)$) portées en 3-ième ligne du Tableau 2 ci-dessus. Elles permettent alors de comparer les probabilités théoriques, correspondant aux deux méthodes d'estimation utilisées, aux valeurs des fréquences relatives $\hat{H}_g(3,.)$ et $\hat{H}_g(4,.)$.

Les Tableaux 7 et 8 ci-dessous montrent, que ces fréquences relatives sont assez bien représentées par les probabilités théoriques estimées par la méthode des moments et celle de Thom. En outre, les valeurs portées dans ces deux Tableaux sont assez voisines de celles données dans le Tableau 3.c.

INTERVALLE	NOMBRE OBSERV. PAR INTERVALLE	FREQUENCE RELATIVE $\hat{H}_g(3,.)$	PROBA. EST. MOMENTS	PROBA. EST. THOM
[0, 10 [7	0.0654	0.0784	0.0999
[10, 15 [8	0.0750	0.0552	0.0641
[15, 25 [15	0.1400	0.1155	0.1280
[25, 35 [6	0.0560	0.1111	0.1178
[35, 50 [13	0.1215	0.1466	0.1493
[50, 60 [6	0.0560	0.0823	0.0812
[60, 80 [13	0.1215	0.1297	0.1241
[80, 105 [15	0.1400	0.1091	0.1002
[105, 120 [4	0.0374	0.0445	0.0396
[120, 200 [16	0.1495	0.1007	0.0853
[200, 290 [3	0.0280	0.0192	0.0148
[290, 390 [0	0.0000	0.0027	0.0019
[390, 540 [1	0.0093	0.0003	0.0002

Tableau B2.7 - Comparaison des fréquences relatives $\hat{H}_g(3,.)$ aux probabilités estimées.

INTERVALLE	NOMBRE OBSERV. PAR INTERVALLE	FREQUENCE RELATIVE	PROBA. EST. MOMENTS	PROBA. EST. THOM
[0, 10 [4	0.0625	0.0695	0.0894
[10, 15 [2	0.0312	0.0506	0.0601
[15, 25 [9	0.1406	0.1083	0.1229
[25, 35 [4	0.0625	0.1065	0.1157
[35, 50 [7	0.1093	0.1437	0.1497
[50, 60 [2	0.0312	0.0824	0.0828
[60, 80 [11	0.1720	0.1329	0.1286
[80, 105 [7	0.1093	0.1153	0.1061
[105, 120 [3	0.0471	0.0484	0.0426
[120, 200 [11	0.1720	0.1149	0.0943
[200, 290 [3	0.0471	0.0243	0.0173
[290, 390 [0	0.0000	0.0039	0.0023
[390, 540]	1	0.0156	0.0005	0.0002

Tableau B2.8- Comparaison des fréquences relatives $\hat{H}_g(4,.)$ aux probabilités estimées.

Il ressort de l'étude empirique que nous venons de mener que les deux échantillons globaux, de tailles respectives $n_g(3) = 107$ et $n_g(4) = 64$, obtenus respectivement en "regroupant" les observations $(x^k_1, \dots, x^k_{n(k)})$ pour $k \geq 3$ et $k \geq 4$, semblent avoir des distributions relativement proches. Cette similarité est en effet remarquable lorsqu'on compare les résultats donnés dans les deux tableaux 5 et 6, puis ceux des tableaux 7 et 8. Nous sommes donc amenés à admettre l'idée que les lois conditionnelles $H_1(k, .)$ pour $k \geq 3$, sont toutes identiques, hypothèse que nous testons dans le paragraphe suivant.

2.2 - Etude de l'hypothèse $H_1(k,.) = H_1(3,.) ; k \geq 3$.

Nous envisageons ici différents tests d'homogénéité pour juger du bien fondé de l'hypothèse selon laquelle les lois $H_1(k,.)$ sont identiques à partir du 3-ième jour d'une séquence humide.

a) - Test d'égalité des deux lois $H_1(3,.)$ et $H_1(4,.)$ au vu des échantillons $(x^3_1, \dots, x^3_{n(3)})$ et $(x^4_1, \dots, x^4_{n(4)})$.

Il s'agit ici de tester l'homogénéité des deux échantillons $(x^3_1, \dots, x^3_{n(3)})$ et $(x^4_1, \dots, x^4_{n(4)})$. Les données nécessaires au test du χ^2 se présentent sous la forme :

Classes	[0, 25[[25, 35[[35, 50[[50, 80[[80, 105[[105, 120[[120, 540]	N
Echan. 1 de loi H (3..)	13	4	6	10	4	1	5	43
Echan. 2 de loi H (4..)	5	3	3	2	4	2	5	24
Total	18	7	9	12	8	3	10	67
Frequences	0.2686	0.2388		0.2985		0.1940		

Tableau B2.9 - Table des contingences associée aux échantillons $(x^3_1, \dots, x^3_{n(3)})$ et $(x^4_1, \dots, x^4_{n(4)})$.

Pour calculer la valeur observée χ^2_{obs} de la statistique du test, on opère des regroupements pour les intervalles d'effectifs trop faible.

La valeur χ^2_{obs} associée au tableau de contingences 2 x 4 ci-dessus est :

$$\chi^2_{obs} = 2.675.$$

D'après la table du Chi-2 à 3 d.d.l., on a : $0.40 < P[\chi^2_3 > 2.675] < 0.50$.

Ce test nous conduit donc à accepter l'hypothèse d'égalité des deux lois $H_1(3, .)$ et $H_1(4, .)$.

b) - Test d'égalité des deux lois $H_1(3, .)$ et $H_1(4, .)$ au vu des échantillons :

$$(x^3_1, \dots, x^3_{n(3)}) \text{ et } ((x^4_1, \dots, x^4_{n(4)}), (x^5_1, \dots, x^5_{n(5)}), \dots).$$

Nous testons maintenant l'homogénéité des deux échantillons cités ci-dessus, sous l'hypothèse à priori de l'homogénéité des échantillons $(x^k_1, \dots, x^k_{n(k)})$ pour $k \geq 4$. Les données se présentent comme suit :

Classes	[0, 15[[15, 25[[25, 50[[50, 80[[80, 105[[105, 120[[120, 540]	N
Echan. 1 de loi H (3..)	7	6	10	10	4	1	5	43
Echan. 2 de loi H (4..)	6	9	11	13	7	3	15	64
Total	13	15	21	23	11	4	20	107
Frequences	0.1215	0.1402	0.1962	0.2115	0.1402		0.1869	

Tableau B2.10 - Tableau des contingences associé aux échantillons $(x^3_1, \dots, x^3_{n(3)})$ et $((x^4_1, \dots, x^4_{n(4)}), (x^5_1, \dots, x^5_{n(5)}), \dots)$.

La valeur de la statistique observée du test est : $\chi^2_{\text{obs.}} = 3.8156$.
 Comme : $0.50 < P[\chi^2_5 > 3.816] < 0.60$, on peut admettre l'idée
 d'homogénéité des lois $H_1(k, .)$ pour $k \geq 3$.

3 - Etude de la loi de la quantité de précipitation au dernier jour d'une séquence humide .

L'étude entreprise aux paragraphes 1. et 2. des lois conditionnelles $H_1(k, .)$; $k=1,2,3$, nous a conduit à retenir l'hypothèse d'égalité des lois $H_1(3, .), H_1(4, .), \dots$, à une même loi $\gamma(\tilde{\alpha}_m(3), \tilde{\beta}_m(3))$; les lois $H_1(1, .)$ et $H_1(2, .)$ étant prises égales respectivement aux lois $\gamma(\hat{\alpha}_T(1), \hat{\beta}_T(1))$ et $\gamma(\hat{\alpha}_T(2), \hat{\beta}_T(2))$.

Nous envisageons dans ces conditions une étude analogue à celle faite dans la partie A2, de la loi $H^d_1(.)$ de la quantité de précipitation au dernier jour d'une séquence humide.

Sous l'hypothèse : $H_1(k, .) = H_1(3, .)$; $k \geq 3$, cette loi s'écrit :

$$H^d_1(x) = p^1_1 H_1(1, x) + p^1_2 H_1(2, x) + (\sum_{k \geq 3} p^1_k) H_1(3, x) ; x \geq 0.$$

Désignons par \hat{H}^d_1 la fonction de répartition des quantités de précipitations observées en un jour précédant un jour sec . En vue de confronter le modèle retenu à la réalité des données, nous comparons cette distribution observée, d'une part à la combinaison convexe :

$$(3) \quad p^1_1(\hat{h}, \hat{d}) \Gamma(\hat{\alpha}_T(1), \hat{\beta}_T(1), .) + p^1_2(\hat{h}, \hat{d}) \Gamma(\hat{\alpha}_T(2), \hat{\beta}_T(2), .) \\ + (1 - p^1_1(\hat{h}, \hat{d}) - p^1_2(\hat{h}, \hat{d})) \Gamma(\tilde{\alpha}_m(3), \tilde{\beta}_m(3), .)$$

et d'autre part, à la suivante :

$$(3') \quad p^1_1(\hat{h}, \hat{d}) \Gamma(\hat{\alpha}_T(1), \hat{\beta}_T(1), .) + p^1_2(\hat{h}, \hat{d}) \Gamma(\hat{\alpha}_T(2), \hat{\beta}_T(2), .) \\ + (1 - p^1_1(\hat{h}, \hat{d}) - p^1_2(\hat{h}, \hat{d})) \Gamma(\hat{\alpha}_T(3), \hat{\beta}_T(3), .),$$

où $p^1_1(\hat{h}, \hat{d})$ et $p^1_2(\hat{h}, \hat{d})$ sont égales à (cf. dernière colonne du Tableau B1.3) :
 $p^1_1(\hat{h}, \hat{d}) = 0.450$ et $p^1_2(\hat{h}, \hat{d}) = 0.234$.

Nous comparons ensuite, à titre indicatif, $\hat{H}_1^d(.)$ à la combinaison convexe de lois empiriques :

$$(4) \quad \hat{p}_1^1 H_1^{n(1)}(1,.) + \hat{p}_2^1 H_1^{n(2)}(2,.) + (1 - \hat{p}_1^1 - \hat{p}_2^1) H_g(3,.) ,$$

avec : $\hat{p}_1^1 = 0.450$ et $\hat{p}_2^1 = 0.243$.

Nous portons dans la seconde colonne du tableau suivant, les valeurs observées des moyennes et des écart-types associés à la loi $H_1^d(.)$. Ces valeurs sont à comparer aux caractéristiques correspondantes calculées selon les combinaisons convexes (3) et (3') des lois d'ajustement.

	Loi observée	Comb. conv. (3)	Comb. conv. (3')	Comb. conv. (4)
Moyennes	4.5078	5.3272	5.1013	5.1120
Ecart-types	5.1914	5.3030	5.1921	5.3432

Tableau B2.11 - Comparaisons des moyennes et écart-types observés et calculés selon les combinaisons convexes (3), (3') et (4).

Ce tableau permet de noter des écarts assez sensibles entre la moyenne observée de $H_1^d(.)$ et les moyennes calculées selon les combinaisons (3), (3') et (4). Par contre, les valeurs observées et calculées des écart-types sont très voisines.

En outre, l'analogie ici du Tableau A2.18 montre que les probabilités calculées respectivement selon (3), (3') et (4) sont dans l'ensemble assez proches, et que les probabilités calculées selon (3') permettent une meilleure représentation des fréquences relatives portées en 3^e colonne de ce tableau.

Classes	Nbre obser. par classes	Freq.rela. observees	Proba.calc. selon (3)	Proba.calc selon (3')	Proba.calc. selon (4)
[0. 10 [26	0.1860	0.1718	0.1742	0.1701
[10. 15 [14	0.1000	0.0731	0.0823	0.0838
[15. 25 [26	0.1863	0.1281	0.1331	0.1326
[25. 35 [11	0.0790	0.1074	0.1106	0.0942
[35. 50 [22	0.1569	0.1287	0.1300	0.1237
[50. 60 [3	0.0211	0.0676	0.0673	0.0492
[60. 80 [18	0.1289	0.0996	0.0975	0.0882
[80. 105[7	0.0500	0.0827	0.0790	0.0939
[105. 120[0	0.0000	0.0336	0.0315	0.0435
[120. 200[10	0.0714	0.0785	0.0719	0.0874
[200. 290[2	0.0142	0.0187	0.0641	0.0244
[290. 390[1	0.0071	0.0042	0.0051	0.0063
[390. 540]	0	0.0000	0.0022	0.0027	0.0029

Tableau B2.12 - Fréquences observées $H_1^d(\cdot)$ et probabilités calculées selon (3), (3') et (4).



**ANNEXE I - MODELES PARTICULIERS DE PROCESSUS DE
RENOUVELLEMENT ALTERNE :
DEFINITION ET ESTIMATION .**

Nous faisons ici une brève description des principales caractéristiques des trois modèles que nous avons utilisés dans les applications du Chapitre VI .

I. CHAINE DE MARKOV D'ORDRE 1: MODELE I-

Il s'agit du modèle particulier de processus de renouvellement alterné qui correspond au cas de persistances constantes , i.e.

$$q_n^i = q^i ; \text{ pour tout } n \geq 1 ; i = 0,1$$

La loi de probabilité $(p_n^0 ; n \geq 1)$ (resp. $(p_n^1 ; n \geq 1)$) censée représenter la durée d'une séquence sèche (resp. pluvieuse) n'est autre que celle du temps d'attente du premier succès dans une suite d'épreuves indépendantes de Bernoulli de même paramètre $1-q^i$ i.e une loi géométrique :

$$p_n^i = (1 - q^i) \cdot (q^i)^{n-1} ; n \geq 1 .$$

La méthode du maximum de vraisemblance (M.V.) conduit à estimer le paramètre q^i d'une telle loi, au vu de l'observation d'un échantillon $x_1^i, x_2^i, \dots, x_k^i$ de longueurs de séquences correspondant à l'état i , par :

$$\hat{q}^i = 1 - (1/\bar{x}^i)$$

où \bar{x}^i désigne la moyenne empirique $(1/k) \sum_{j=1}^k x_j^i$.

2. CHAÎNE DE MARKOV D'ORDRE 2 : MODELE 2 -

Il s'agit du modèle particulier de processus de renouvellement alterné qui correspond au cas de persistances de la sécheresse et de la pluviosité constantes à partir du deuxième jour des séquences, i.e.

$$q_n^i = q_2^i ; n \geq 2.$$

La loi p^i est donc paramétrée par le couple (q_1^i, q_2^i) :

$$p_n^i = \begin{cases} 1 - q_1^i & \text{si } n = 1 \\ q_1^i \cdot (1 - q_2^i) \cdot (q_2^i)^{n-2} & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

La méthode du M.V. conduit à estimer les deux paramètres q_1^i et q_2^i d'une telle loi, au vu de l'observation (x_1^i, \dots, x_k^i) de longueurs de séquences correspondant à un état donné par :

$$\hat{q}_1^i = k_2^i / k \quad ; \quad \hat{q}_2^i = 1 - k_2^i / (k \cdot \bar{x}^i - k)$$

où k_2^i désigne le nombre de séquences de longueur supérieure ou égale à 2.

3. MODELE BASE SUR DES LOIS B.N.T : MODELE 3 -

Un tel modèle correspond au cas où les lois de séjours $(p_n^i ; n \geq 1)$; $i=0,1$, appartiennent à la famille des lois Binômiales Négatives Translatées (B.N.T.).

Etant donné h et d deux paramètres réels positifs, la loi $(p_n ; n \geq 1)$ sur \mathbf{N}^* est dite B.N.T.(h,d) si :

$$p_n = (1 + d)^{-h/d} \cdot \frac{(h/d)_{n-1}}{(n-1)!} \cdot [d / (1 + d)]^{n-1} ; n \geq 1,$$

où, pour a réel et n entier, on a posé :

$$(a)_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ (a+n-1)(a+n-2)\dots(a+1)a & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Dans le cadre de ce modèle, on montre (cf. Le Breton-Martin (1979)) que si $d/h > 1$ (resp. $d/h < 1$), la suite $(q_n ; n \geq 1)$ des persistances est monotone croissante (resp. décroissante) de limite $d/(d+1)$, et si $d/h = 1$, cette même suite est constante égale à $d/(d+1)$.

La méthode du M.V. conduit à estimer le paramètre h de la loi B.N.T. par :

$\hat{h} = \bar{x} - 1$, mais ne fournit pas d'estimation facilement calculable pour d .
On choisira donc d'estimer (h, d) par la méthode des moments :

$$\hat{h} = \bar{x} - 1 \quad \text{et} \quad \hat{d} = [s^2 / (\bar{x} - 1)] - 1$$

où s^2 désigne la variance empirique de l'échantillon x_1, \dots, x_k , i.e.

$$s^2 = (1/k) \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2$$



ANNEXE 2- METHODES D'ESTIMATION DES PARAMETRES D'UNE LOI GAMMA .

1 - Loi gamma : Définition et propriétés.

On appelle loi gamma de paramètre α et β et on note $\gamma(\alpha, \beta)$, la loi de probabilité concentrée sur $]0, +\infty[$ définie par la densité $f(\alpha, \beta)$:

$$(1) \quad f_{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} ; \quad x > 0, \alpha > 0, \beta > 0,$$

où Γ désigne la fonction gamma : $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx ; \alpha > 0$.

Les paramètres α et β de cette loi sont des paramètres de forme et d'échelle respectivement.

Pour $\alpha=1$, $\gamma(1, \beta)$ est la loi exponentielle de paramètre β . Dans le cas où α est un entier positif, $\gamma(\alpha, \beta)$ est une loi d'Erlang. Enfin, rappelons qu'une loi gamma de paramètres $\alpha = n/2$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et $\beta = 2$ est la loi du chi-2 à n degrés de liberté.

La fonction génératrice de la loi $\gamma(\alpha, \beta)$ est :

$$\varphi_{\alpha, \beta}(t) = (1 - \beta t)^{-\alpha} ; \quad t < 1/\beta.$$

Les moments non centrés d'ordre r , ν_r , de cette loi sont donnés par :

$$(2) \quad \nu_r = \beta^r \cdot \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+r-1) ; \quad r \geq 1.$$

En particulier, la moyenne et la variance sont respectivement :

$$(2') \quad \nu_1 = \alpha \beta$$

$$(2'') \quad \sigma^2 = \nu_2 - \nu_1^2 = \alpha \beta^2.$$

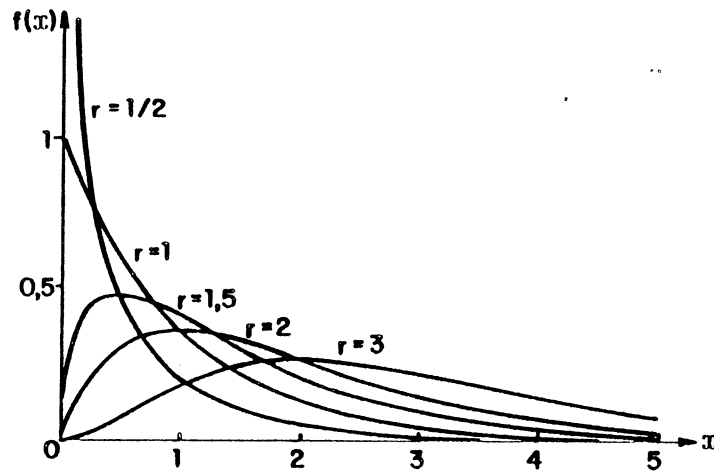


Figure 1 - Courbes de densité de lois gamma de paramètres $\alpha=r$, $\beta=1$.

2 - Estimation des paramètres α et β .

Soit (x_1, \dots, x_n) la réalisation d'un échantillon (X_1, \dots, X_n) de n variables aléatoires indépendantes de même loi $\gamma(\alpha, \beta)$. Nous cherchons à estimer, au vu de cette réalisation, les paramètres α et β .

2.1 - Méthode de moments.

Les estimateurs $\hat{\alpha}_m$ et $\hat{\beta}_m$ des paramètres α et β , fournis par la méthode des moments sont solutions du système :

$$\begin{cases} \alpha \cdot \beta = (1/n) \cdot \sum_{i=1, n} x_i \\ \alpha \cdot \beta^2 \cdot (\alpha + 1) = (1/n) \cdot \sum_{i=1, n} x_i^2 \end{cases}$$

soit :

$$(3) \quad \begin{cases} \hat{\alpha}_m = (\bar{x})^2 / s^2 \\ \hat{\beta}_m = s^2 / \bar{x} \end{cases}$$

où \bar{x} (resp. s^2) désigne la moyenne (resp. la variance) empirique de l'échantillon (x_1, \dots, x_n) i.e.

$$\bar{x} = (1/n) \sum_{i=1, n} x_i \quad ; \quad s^2 = (1/n) \sum_{i=1, n} (x_i - \bar{x})^2.$$

Notons que l'estimateur \bar{x} du paramètre $\alpha\beta$ est un estimateur sans biais convergent, de même que s^2 est un estimateur sans biais convergent de la variance $\sigma^2 = \alpha\beta^2$.

2.2 - Estimation par la méthode du maximum de vraisemblance - Méthode de Thom.

D'après l'expression (1) de la densité $f_{(\alpha,\beta)}$, la fonction Log-vraisemblance associée à la réalisation (x_1, \dots, x_n) s'écrit :

$$(4) L_{(\alpha,\beta)}(x_1, \dots, x_n) = -n [\alpha \text{Log } \beta + \text{Log } \Gamma(\alpha)] + (\alpha-1) \sum_{i=1}^n \text{Log } x_i - (1/\beta) \sum_{i=1}^n x_i$$

Les estimateurs $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ du maximum de vraisemblance des paramètres α et β sont alors solutions du système d'équations de vraisemblance suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \alpha} L_{(\alpha,\beta)}(x_1, \dots, x_n) = -n \left[\text{Log } \beta + \frac{d}{d\alpha} \text{Log } \Gamma(\alpha) \right] + \sum_{i=1}^n \text{Log}(x_i) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} L_{(\alpha,\beta)}(x_1, \dots, x_n) = -(n\alpha)/\beta + (1/\beta^2) \sum_{i=1}^n x_i = 0 \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} (\bar{x}/\beta) - \alpha = 0 \\ \text{Log } \beta + \Psi(\alpha) - (1/n) \sum_{i=1}^n \text{Log}(x_i) = 0 \end{cases}$$

où $\Psi(\alpha) = (d/d\alpha) \text{Log } \Gamma(\alpha)$, (Ψ est appelée fonction digamma).

En substituant \bar{x}/α à β dans la deuxième équation du système précédent, on obtient l'équation suivante :

$$\text{Log}(\bar{x}/\alpha) + \Psi(\alpha) - (1/n) \sum_{i=1}^n \text{Log}(x_i) = 0$$

soit :

$$(5) \quad \text{Log}(\alpha) - \Psi(\alpha) = \text{Log}(\bar{x}) - (1/n) \sum_{i=1}^n \text{Log}(x_i).$$

La résolution de cette dernière équation nécessite le recours à des méthodes de résolution approchée.

La méthode de Thom que nous décrivons maintenant, fournit une racine

approchée, que nous noterons α_T , de l'équation (5). Cette méthode est basée sur la représentation suivante de la fonction digamma Ψ (cf. Thom (1958)) :

$$(6) \quad \Psi(\alpha) = \text{Log} \alpha - (1/2\alpha) - \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} B_k / (2k\alpha^{2k}) + R_m ; \alpha > 0$$

où $(B_k ; k \geq 1)$ est la suite des nombres de Bernoulli (i.e. $B_1 = 1/6, B_2 = 1/30$, etc...), et R_m est un reste d'ordre m borné pour $\alpha \geq 1$ par le rapport $B_{m+1} / ((2m+2)\alpha^{2m+2})$. Par exemple, pour $m=1$ et $\alpha = 1$, on a :

$$|R_m| < 0.00833.$$

Ainsi, (6) fournit pour $m=1$, une assez bonne approximation de la fonction digamma Ψ :

$$(7) \quad \Psi(\alpha) \approx \text{Log} \alpha - 1/(2\alpha) - 1/(12\alpha^2)$$

En substituant dans (5) $\Psi(\alpha)$ par son expression approchée donnée par (7), nous obtenons l'équation du second degré suivante :

$$12 \left[\text{Log}(\bar{x}) - (1/n) \sum_{i=1}^n \text{Log}(x_i) \right] \alpha^2 - 6\alpha - 1 = 0$$

d'où nous tirons la racine positive α_T :

$$(8.a) \quad \alpha_T = \left[1 + \left[1 + (4.A)/3 \right]^{1/2} \right] / 4.A ,$$

où $A = \text{Log}(\bar{x}) - (1/n) \sum \text{Log} x_i$.

$\hat{\alpha}_T$ est l'estimateur de Thom du paramètre de forme α . L'estimateur $\hat{\beta}_T$ du paramètre β est donné par :

$$(8.b) \quad \hat{\beta}_T = \bar{x} / \hat{\alpha}_T.$$

Pour d'autres procédures itératives pour la résolution de l'équation (5), on pourra consulter Choi-Wette(1969), Johnson-Kotz (1970) et Ison-Feyerherm-Bark (1971).

3 - Variances et covariance des estimateurs des paramètres α et β .

3.1 - Variances et covariance des estimateurs des moments.

La linéarisation des expressions $\hat{\alpha}_m$ et $\hat{\beta}_m$ donnés en (3) conduit aux formes approchées suivantes de la variance et la covariance de ces deux estimateurs, (cf. Thom (1958) et Buishand (1978))

$$(9.a) \quad \text{var}(\hat{\alpha}_m) \approx (2\alpha/n)(\alpha+1)$$

$$(9.b) \quad \text{var}(\hat{\beta}_m) \approx (\beta^2/n)(2+3/\alpha)$$

$$(9.c) \quad \text{Cov}(\hat{\alpha}_m, \hat{\beta}_m) \approx (2\beta/n)(\alpha+1).$$

On pourra grâce à ces relations donner des estimations des variances et

covariance de $\hat{\alpha}_m$ et $\hat{\beta}_m$ en remplaçant dans ces trois expressions α, β par leurs estimateurs respectifs.

3.2 - Variances et covariance des estimateurs de Thom

Le calcul des dérivées secondes de la fonction Log-vraisemblance

$L(\alpha, \beta)$ permet de déduire la matrice de covariance asymptotique de

l'estimateur $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ de M.V. du paramètre (α, β) . On obtient ainsi les résultats suivants (cf. Thom (1958) et Bulshand (1978)) :

$$(10.a) \quad \text{var}(\hat{\alpha}) \approx \alpha / [n (\alpha \Psi'(\alpha) - 1)]$$

$$(10.b) \quad \text{var}(\hat{\beta}) \approx \beta^2 \Psi'(\alpha) / [n (\alpha \Psi'(\alpha) - 1)]$$

$$(10.c) \quad \text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \approx \beta / [n (\alpha \Psi'(\alpha) - 1)]$$

où Ψ' est la fonction trigamma (dérivée seconde de la fonction $\text{Log } \Gamma(\cdot)$).

En utilisant l'approximation :

$$\Psi'(\alpha) \approx 1/\alpha + 1/(2\alpha^2) + 1/(6\alpha^3)$$

nous obtenons les expressions suivantes des variances des estimateurs de Thom :

$$(10.a') \quad \text{var}(\hat{\alpha}_T) \approx 6 \alpha^3 / n$$

$$(10.b') \quad \text{var}(\hat{\beta}_T) \approx 3 \beta^2 \alpha / n.$$

ANNEXE 3 - PROGRAMMES.

Nous listons ci-après les principaux programmes que nous avons utilisés dans les applications traitées au Chapitre IV.

Le premier, nommé binaire.pascal, permet de dénombrer les séquences sèches et humides à partir des données brutes et de comparer leurs distributions aux lois théoriques calculées dans chacun des trois modèles 1, 2 et 3. Il permet aussi le calcul des différentes caractéristiques observées et estimées (moments d'ordres 1, 2 et 3, variance de S_n , ...).

Le deuxième programme appelé continue.pascal, permet d'extraire des mêmes données, les différents échantillons $(x^k_1, \dots, x^k_{n(k)})$; $k \geq 1$ étudiés dans les parties A2 et B2, et de calculer leurs répartitions respectives. Il fournit aussi, à partir de ces observations les différentes valeurs estimées des paramètres des lois $\gamma(\alpha(k), \beta(k))$ par les deux méthodes d'estimation utilisées, ainsi que les répartitions des lois empiriques $\hat{H}_g(k, \cdot)$, $k = 2, 3, 4, \dots$, $\hat{H}^d_1(\cdot), \dots$.

Les deux programmes précédents utilisent trois procédures baptisées respectivement tronc, soleil et parcourt. Celles-ci permettent l'acquisition des données brutes telles qu'elles sont présentées dans la page ci-contre. Par ailleurs, ces programmes utilisent deux fichiers de lectures : dans l'un sont stockées les valeurs journalières de précipitation; ces valeurs se terminent par une valeur fictive (-1). L'autre fichier (moisetudie) contient, entre autres, le code du mois étudié (par exemple : 41 est le code du mois d'Avril, 101 est celui du mois d'Octobre, etc..).

Un troisième programme appelé proba.pascal, écrit à partir de l'algorithme donné dans la Proposition 8 du Chapitre II, permet le calcul de la loi théorique de la variable du maximum $M_X(n)$ pour $n \geq 1$. Les valeurs d'entrées utilisées sont facilement repérables dans le corps de ce programme.

Le dernier programme (Altbl.pascal) que nous listons permet le calcul des probabilités $P[\sum_{t=1, n} J_t = k]$; $n \geq 1$, $k = 0, \dots, n$ lorsque J est un processus de R. A. binaire stationnaire.

0219Strasbourg										19491977 1949precip jour (0.1 mm)						
021949 11	117	23	0	4	0	2	0	7	3	0	4	1	0	64	45	
021949 12	9	14	3	0	10	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
021949 21	5	0	0	0	0	0	0	1	5	0	0	16	0	0	0	
021949 22	0	0	0	0	0	0	4	0	2	0	0	11	0			
021949 31	18	0	5	0	0	0	0	0	22	62	1	0	0	46	0	
021949 32	13	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
021949 41	0	0	0	43	24	13	26	18	8	0	0	0	0	0	0	
021949 42	0	0	0	0	0	0	0	0	0	109	6	0	0	96	29	
021949 51	0	0	0	63	97	32	0	0	0	0	5	6	32	0	0	
021949 52	6	7	38	0	80	0	0	0	32	0	12	0	0	55	20	40
021949 61	0	24	18	44	6	0	0	0	96	0	0	0	0	0	0	
021949 62	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
021949 71	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
021949 72	60	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	0
021949 81	0	32	114	0	0	2	0	0	0	0	106	0	0	0	0	
021949 82	0	0	0	0	0	0	0	150	7	0	0	6	8	190	0	0
021949 91	47	9	0	0	0	0	100	0	0	0	0	38	27	10	8	
021949 92	22	6	2	13	34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
021949101	0	0	0	0	0	0	0	0	78	0	0	0	0	0	0	
021949102	0	31	0	0	0	36	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0
021949111	0	0	0	0	0	0	34	97	0	17	0	74	37	40	11	
021949112	5	0	0	14	12	37	21	0	0	0	89	0	0	0	0	
021949121	0	14	17	11	29	76	0	50	101	45	8	15	0	0	51	
021949122	3	39	4	12	0	95	9	0	0	0	4	0	0	2	3	0
.....																
.....																
021977 62	0	50	84	3	53	183	55	0	34	164	76	0	10	51	135	
021977 71	0	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	179	48	0	
021977 72	0	0	3	0	24	0	0	0	17	122	43	26	68	40	16	58
021977 81	0	0	0	0	0	0	36	85	7	2	0	0	9	3	0	
021977 82	37	216	4	48	39	13	0	34	3	68	57	24	0	4	0	0
021977 91	0	30	3	0	0	0	0	156	0	0	0	0	0	0	0	
021977 92	0	0	0	0	0	0	0	0	1	7	0	0	1	11	0	
021977101	26	39	0	0	1	0	20	2	19	17	0	0	0	5	2	
021977102	2	1	1	2	4	0	9	0	85	184	11	42	7	0	0	16
021977111	0	8	159	15	0	0	0	5	0	0	0	72	89	83	101	
021977112	30	35	5	8	37	68	6	2	102	19	5	3	2	0	0	
021977121	0	0	0	0	0	15	7	133	53	4	10	97	0	0	0	
021977122	0	0	0	0	0	0	10	32	57	0	9	27	2	1	30	0

-1

Quantités journalières de précipitations mesurées à Strasbourg de 1949 à 1977 telles qu'elles sont présentées dans le fichier de lecture des deux programmes binaire et continue.

Binaire . Pascal

```

program binaire ;
const
max = 50 ; alfa = 10 ; nseq = 160 ; code = 999999 ;
type
list1 = array [1..max] of real ;
list4 = array [1..4, 1..max] of real ;
tab = array [1..3] of real ;
var
pnfini : boolean ;
annee1,annee2,nh,ns,x,y,n2,i,l,nbm,mois,compt, obsmin,moisavant : integer ;
kh2, ks2, sh, ss, vh, vs, mh, ms, qh0, qh1, qh2, h1, h0, d1, d0, qs0, qs1, qs2,
sd, mh3, ms3 : real ;
mhg1, mhg2, mhg3, msg1, msg2, msg3, mhsg1, mhsg2, mhsg3, mssg1, mssg2, mssg3, mh
b1, mhb2, mhb3, msb1, msb2, msb3 : real ;
humide, sec, prh0, prh1, prh2, prs0, prs1, prs2, pluie, btemps : list1 ;
frh, frs : list4 ;
xh, xs, t1, sigmal, sigmag, sigmasg, sigmab : tab ;
f, g, h : text ;
function puiss (n : integer ; z : real) : real ;
begin
if n = 0 then puiss := 1
else puiss := z * puiss (n - 1, z)
end ;
procedure moyvar (var m, v, m3, s, k2 : real ; var n : integer ; etat : list1) ;
var j, k : integer ;
begin
k2 := 0 ; m := 0 ; v := 0 ; m3 := 0 ; s := 0 ;
k := max ; while etat [k] = 0 do k := k - 1 ; n := k ;
for j := 1 to n do
begin
s := s + etat [j] ;
m3 := m3 + (puiss (3, j)) * etat [j] ;
m := m + j * etat [j] ; v := v + sqr (j) * etat [j]
end ;
v := v / s ; m3 := m3 / s ;
m := m / s ; m3 := m3 - (3 * m * v) + (2 * puiss (3, m)) ;
v := v - sqr (m) ; k2 := s - etat [1]
end ;
{ moyvar }
procedure calcvars (var sigma : tab ; var m1, m0, v1, v0, m13, m03 : real ; t :
tab) ;
var j : integer ;
a, b, c, d : real ;
begin
a := ((v0 * sqr (m1)) + (v1 * sqr (m0))) / ((m0 + m1) * sqr (m0 + m1)) ;
b := (sqr ((m1 * v0) - (m0 * v1))) / (2 * (sqr (m0 + m1)) * (sqr (m0 + m1))) ;
c := ((m03 * sqr (m1)) + (m13 * sqr (m0))) / (3 * (m0 + m1) * sqr (m0 + m1)) ;
d := ((2 * m0 * m1) + (sqr (m0 * m1))) / (6 * sqr (m0 + m1)) ;
for j := 1 to 3 do
sigma [j] := a * t [j] + b - c + d ;
end ;
{ calcvars }
procedure geom (var pr : list1 ; var m1, m2, m3 : real ; var q : real ; m : real
; n : integer) ;
var j : integer ;
begin
m1 := 0 ; m2 := 0 ; m3 := 0 ;
q := 1 - 1 / m ;
for j := 1 to n do
begin
pr [j] := (1 - q) * puiss (j - 1, q) ;
m1 := m1 + j * pr [j] ; m2 := m2 + sqr (j) * pr [j] ;

```

```

m3 := m3 + j * sqr (j) * pr [j]
end ;
m3 := m3 - (3 * m1 * m2) + (2 * m1 * sqr (m1)) ;
m2 := m2 - sqr (m1)
end ;
{ Geom }
procedure semigeom (var q1, q2 : real ; var petat : list1 ; var m1, m2, m3 : real ;
s, k2, m : real ; n : integer) ;
var j : integer ;
begin
m1 := 0 ; m2 := 0 ; m3 := 0 ;
q1 := k2 / s ; q2 := 1 - k2 / (s * m - s) ;
petat [1] := 1 - q1 ;
for j := 2 to n do petat [j] := q1 * (1 - q2) * puiss (j - 2, q2) ;
for j := 1 to n do
begin
m1 := m1 + j * petat [j] ; m2 := m2 + sqr (j) * petat [j] ;
m3 := m3 + j * sqr (j) * petat [j]
end ;
m3 := m3 - (3 * m1 * m2) + (2 * m1 * sqr (m1)) ;
m2 := m2 - sqr (m1)
end ;
{ sgeom }
procedure bnt (var proba : list1 ; var h4, d : real ; var m1, m2, m3 : real ; m,
v, s : real ; n : integer) ;
var j : integer ;
begin
m1 := 0 ; m2 := 0 ; m3 := 0 ;
h4 := m - 1 ; d := v / (m - 1) - 1 ;
proba [1] := exp ((-h4 / d) * ln (d + 1)) ;
for j := 2 to n do proba [j] := proba [j - 1] * ((h4 + d * (j - 2)) / ((j - 1) *
(d + 1))) ;
for j := 1 to n do
begin
m1 := m1 + j * proba [j] ; m2 := m2 + sqr (j) * proba [j] ;
m3 := m3 + j * sqr (j) * proba [j]
end ;
m3 := m3 - (3 * m1 * m2) + (2 * m1 * sqr (m1)) ; m2 := m2 - sqr (m1)
end ;
{ bnt }
procedure initialise ;
var k, j : integer ;
begin
for k := 1 to max do
begin
humide [k] := 0 ; sec [k] := 0 ;
pluie [k] := 0 ; btemps [k] := 0 ;
for j := 1 to 4 do
begin
frh [j, k] := 0 ; frs [j, k] := 0
end ;
end ;
end ;
{ initialise }
procedure tronc (var z : integer) ;
begin
if z > code then z := z - 1000 * trunc (z / 1000)
else read (f, z)
end ;
{ tronc }
procedure soleil (var z : integer) ;
var u1 : real ;
begin
{ soleil }
read (f, z) ;
if z > 1000 then

```

Binaire . Pascal

```

begin
tronc (x) ; u1 := z - 10 * trunc (z / 10) ;
if u1 = 1 then pnfini := false ;
read (f, z)
end
end ;                               { soleil }
procedure debutseq ;
var j : integer ;
begin                               { while compt }
for j := 1 to 12 do read (f, x) ;
read (f, y) ;
read (f, x) ;
while (x < 1000) do
begin                               { while 1000 }
y := x ; read (f, x)
end ;                               { while x<1000 }
tronc (x) ; pnfini := true ; read (f, x) ;
while ((x > alfa) = (y > alfa)) and (x <> -1)) do
begin                               { x=y }
read (f, x) ;
if x > 1000 then
begin
tronc (x) ;
read (f, x)
end
end ;                               { x=y }
end ;                               { debutseq }
procedure parcourt (var pl, bt, hu, se : list1) ;
var
m, li : integer ; t : boolean ;
begin                               { parcourt }
li := 1 ;
while ((pnfini = true) and (x <> -1)) do
begin                               { while }
t := (x > alfa) ; m := 1 ;
if t = true then
pl [1] := pl [1] + 1
else bt [1] := bt [1] + 1 ;
soleil (x) ;
while ((x > alfa) = t) and (x <> -1)) do
begin
m := m + 1 ;
if t = true then
pl [m] := pl [m] + 1
else bt [m] := bt [m] + 1 ;
soleil (x)
end ;
if x <> -1 then
begin
if (t = true) then
begin
hu [m] := hu [m] + 1 ; li := li + 1 ;
end
else se [m] := se [m] + 1
end
end
end ;                               { while pnfini=true }
end ;                               { parcourt }
begin                               { principa }
fconnect (f, 'vfile_strasbourg') ; fconnect (g, 'vfile_moisetudie') ;
fconnect (h, 'vfile_result') ; reset (f) ; reset (g) ; rewrite (h) ;

```


Binaire . Pascal

```

for i := 1 to 3 do read (g, t1 [i]) ; readln (g) ;
read (g, mois, annee1, annee2) ; initialise ;
nbm := annee2 - annee1 + 1 ;
writeln (h, 'PERIODE      ', annee1 : 4, '-', annee2 : 4, ' STATION : STRASBOURG'
) ;
writeln (h) ;
writeln (h, 'MOIS ETUDIE:', trunc (mois / 10) : 3) ;
readln (f) ; read (f, x) ;
tronc (x) ;
if mois = 11 then
begin
read (f, y) ;
read (f, x) ;
while ((x > alfa) = (y > alfa)) do
begin
read (f, x) ;
if x > 1000 then
begin
tronc (x) ;
read (f, x)
end
end ;
pnfini := true ;
parcourt (pluie, btemps, humide, sec) ;
nbm := nbm - 1 ; moisavant := 122
end
else moisavant := mois - 9 ;
while x <> moisavant do
begin
readln (f) ; read (f, x) ; tronc (x) ;
end ;
for compt := 1 to nbm do
begin
{ while compt }
debutseq ;
parcourt (pluie, btemps, humide, sec) ;
while ((x < 1000) and (x <> -1)) do read (f, x) ;
if x <> -1 then tronc (x) ;
while ((x <> moisavant) and (x <> -1)) do
begin
readln (f) ; read (f, x) ; if x <> -1 then tronc (x)
end ;
end ;
{ while compt<nmb+1 }
writeln (h) ; writeln (h) ;
moyvar (mh, vh, mh3, sh, kh2, nh, humide) ;
geom (prh0, mhg1, mhg2, mhg3, qh0, mh, nh) ;
semigeom (qh1, qh2, prh1, mhsg1, mhsg2, mhsg3, sh, kh2, mh, nh) ;
bnt (prh2, h1, d1, mhb1, mhb2, mhb3, mh, vh, sh, nh) ;
moyvar (ms, vs, ms3, ss, ks2, ns, sec) ;
geom (prs0, msg1, msg2, msg3, qs0, ms, ns) ;
semigeom (qs1, qs2, prs1, mssg1, mssg2, mssg3, ss, ks2, ms, ns) ;
bnt (prs2, h0, d0, msb1, msb2, msb3, ms, vs, ss, ns) ;
calcvars (sigmal, mh, ms, vh, vs, mh3, ms3, t1) ;
calcvars (sigmag, mhg1, msg1, mhg2, msg2, mhg3, msg3, t1) ;
calcvars (sigmasg, mhsg1, mssg1, mhsg2, mssg2, mhsg3, mssg3, t1) ;
calcvars (sigmab, mhb1, msb1, mhb2, msb2, mhb3, msb3, t1) ;
l := nh ; while pluie [1] < 20 do l := l - 1 ; obsmin := l ;
writeln (h, ' ETUDE DE LA DISTRIBUTION MENSUELLE DES SEQUENCES') ;
writeln (h, ' HUMIDES ET SECHES DEBUTANTS') ; writeln (h) ; writeln (h) ;
writeln (h, '* Moyenne et variance observees *') ;
writeln (h, '* Estimation des parametres des lois de sejour *') ;

```

Binaire . Pascal

```

writeln (h) ; writeln (h) ;
writeln (h, '-----') ;
;
writeln (h, ' | SEQUENCES HUMIDES | SEQUENCES SECHES |') ;
;
writeln (h, '-----|-----|-----|') ;
;
writeln (h, ' | Moyenne et | m1=', mh : 6 : 3, ' | m0=', ms : 6
: 3, ' |') ;
writeln (h, ' | variance | var1=', vh : 6 : 3, ' | var0=', vs : 7
: 3, ' |') ;
writeln (h, '-----|-----|-----|') ;
;
writeln (h, ' | MODELE1 | q1=', qh0 : 6 : 3, ' | q0=', qs0 :
6 : 3, ' |') ;
writeln (h, '-----|-----|-----|') ;
;
writeln (h, ' | MODELE2 | qh1=', qh1 : 6 : 3, ' | qs1=', qs1 :
6 : 3, ' |') ;
writeln (h, ' | | qh2=', qh2 : 6 : 3, ' | qs2=', qs2 :
6 : 3, ' |') ;
writeln (h, '-----|-----|-----|') ;
;
writeln (h, ' | BNT(h,d) | h1=', h1 : 5 : 3, ' , d1=', d1 : 5 : 3, ' | h0='
, h0 : 5 : 3, ' , d0=', d0 : 5 : 3, ' |') ;
writeln (h, ' | | d1/h1=', d1 / h1 : 5 : 3, ' | d0/h
0=', d0 / h0 : 5 : 3, ' |') ;
writeln (h, '-----') ;
writeln (h) ; writeln (h) ;
writeln (h, ' *****') ;
writeln (h, ' * LOIS DE SEJOURS *') ;
writeln (h, ' * OBSERVEES ET CALCULEES *') ;
writeln (h, ' *****') ;
writeln (h) ; writeln (h) ;
writeln (h, '-----') ;
;
writeln (h, ' | Longueur de | Nombre de | Frequence | Loi Geom(q) | Loi Sgeom | L
oi BNT(h,d) |') ;
writeln (h, ' | seq. humide | sequence | relative | q=', qh0 : 7 : 3, ' | q1=
', qh1 : 6 : 2, ' | h=', h1 : 7 : 3, ' |') ;
writeln (h, ' | | N=', trunc (sh) : 2, ' | |
| q2=', qh2 : 6 : 2, ' | d=', d1 : 7 : 3, ' |') ;
writeln (h, '-----|-----|-----|-----|-----|') ;
;
for i := 1 to nh do
writeln (h, ' | ', i : 3, ' | ', trunc (humide [i]) : 3, ' | ', h
umide [i] / sh : 6 : 3, ' | ', prh0 [i] : 6 : 3, ' | ', prh1 [i] : 6
: 3, ' | ', prh2 [i] : 6 : 3, ' |') ;
writeln (h, '-----') ;
;
writeln (h) ; writeln (h) ;

writeln (h, '-----') ;
;
writeln (h, ' | Longueur de | Nombre de | Frequence | Loi Geom(q) | Loi Sgeom | L
oi BNT(h,d) |') ;
writeln (h, ' | seq. seches | sequence | relative | q=', qs0 : 7 : 3, ' | q1=
', qs1 : 6 : 2, ' | h=', h0 : 7 : 3, ' |') ;
writeln (h, ' | | N=', trunc (ss) : 2, ' | |
| q2=', qs2 : 6 : 2, ' | d=', d0 : 7 : 3, ' |') ;

```

Binaire . Pascal

```

writeln (h, '|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
-----|') ;
for i := 1 to ns do
writeln (h, '|', i : 3, '|', trunc (sec [i]) : 3, '|', sec
[i] / ss : 6 : 3, '|', prs0 [i] : 6 : 3, '|', prs1 [i] : 6 : 3, '|',
|', prs2 [i] : 6 : 3, '|') ;
writeln (h, '-----
-----') ;
writeln (h) ;
writeln (h) ;
writeln (h, 'LA VARIANCE ASYMPTOTIQUE OBSERVEE DE S1(k) pour i=0,1 et k=10,15,30
est:') ;
writeln (h) ;
for i := 1 to 3 do
writeln (h, 'valeur de var(sk) :', sigma1 [i] : 9 : 4) ;
writeln (h) ; writeln (h) ;
writeln (h, 'LES VALEURS DE LA VARIANCE ASYMPTOTIQUE DE S1,n') ;
writeln (h, 'POUR n=10,15,30 CALCULEES A PARTIR DES TROIS MODELES') ;
writeln (h, ' SONT DONNEES PAR :') ;
writeln (h) ;
writeln (h, 'POUR LA LOI GEOMETRIQUE DE PARAMETRE q :') ;
writeln (h) ;
for i := 1 to 3 do writeln (h, 'valeur de var(Sn) :', sigmag [i] : 8 : 4) ;
writeln (h) ; writeln (h, 'POUR LA LOI SEMIGEOM. DE PARAMETRES q1,q2 :') ;
writeln (h) ; for i := 1 to 3 do
writeln (h, 'valeur de vars(Sn) :', sigmasg [i] : 8 : 4) ;
writeln (h) ; writeln (h, 'POUR LA LOI BINOMIALE NEGATIVE TRANSLATEE DE PARAM. h
,d:') ;
writeln (h) ; for i := 1 to 3 do
writeln (h, 'valeur de var(Sn) :', sigmab [i] : 8 : 4) ;
fclose (h)
end.

```

Continue . Pascal

```

program continue ;
const nbint = 20 ; max = 50 ; code = 999999 ; alfa = 10 ; nseq = 160 ;
type
list1 = array [1..max] of real ;
list11 = array [1..max] of integer ;
list2 = array [1..nbint] of integer ;
list3 = array [1..max, 1..nbint] of real ;
var
pnfini : boolean ;
annee1, annee2, nh, ns, x, y, r, bd, n2, i, l, nbm, mois, compt, indice, obsmin,
moisavant, obs20 : integer ;
kh2, ks2, sh, ss, vh, vs, mh, ms, qh0, qh1, qh2, h1, h0, d1, d0, qs0, qs1, qs2,
sd, momderj, varderj : real ;
nbsup2, nbsup3, ag1, ag2, mg2, mg3, varg2, varg3, mg22, mg23, alpham2, alpham3,
betam2, betam3, alphas2, betat2, betat3, alphas3, nbsup4, mg4, mg24, varg4, alph
am4, betam4, alphas4, betat4, ag4 : real ;
humide, sec, prh0, prh1, prh2, prs0, prs1, prs2, pluie, btemps, nuh1, nuh2, varh
, sigma, alpham, alphas, betam, betat, a : list1 ;
b : list11 ;
djour, freqint : list3 ; u : list2 ;
f, g, h : text ;
procedure initialise ;
var k, j : integer ;
begin
for k := 1 to max do
begin
humide [k] := 0 ; sec [k] := 0 ;
alpham [k] := 0 ; alphas [k] := 0 ;
betat [k] := 0 ; betam [k] := 0 ;
nuh1 [k] := 0 ; nuh2 [k] := 0 ; a [k] := 0 ;
pluie [k] := 0 ; btemps [k] := 0 ;
b [k] := 1 ;
for j := 1 to indice do
begin
freqint [k, j] := 0 ; djour [k, j] := 0
end ;
nbsup2 := 0 ; ag2 := 0 ; ag1 := 0 ; mg22 := 0 ; mg23 := 0 ; mg2 := 0 ; mg3 := 0
;
mg4 := 0 ; mg24 := 0 ; ag4 := 0 ; alpham4 := 0 ; betam4 := 0 ;
alphas4 := 0 ; varg4 := 0 ; betat4 := 0 ;
alpham2 := 0 ; betam2 := 0 ; alphas2 := 0 ; betat2 := 0 ; alpham3 := 0 ; betam3
:= 0 ; alphas3 := 0 ; betat3 := 0 ;
varg2 := 0 ; varg3 := 0 ;
momderj := 0 ; bd := 1 ; sd := 0 ; varderj := 0
end ;
end ;
{ initialise }
procedure placer (var bt1, z : integer ; v : list2) ;
var cond : boolean ; j : integer ;
begin
{ procedure placer }
j := 1 ; cond := false ;
while ((j <= indice) and (not cond)) do
begin
if ((z < v [j + 1]) and (z >= v [j])) then
begin
cond := true ; bt1 := j
end
else j := j + 1
end
{ while }
{ placer }
end ;
procedure tronc (var z : integer) ;

```

Continue . Pascal

```

begin
if z > code then z := z - 1000 * trunc (z / 1000)
else read (f, z)
end ;
procedure soleil (var z : integer) ;
var u1 : real ;
begin
read (f, z) ;
if z > 1000 then
begin
tronc (x) ; u1 := z - 10 * trunc (z / 10) ;
if u1 = 1 then pnfini := false ;
read (f, z)
end
end ;
procedure debutseq ;
var j : integer ;
begin
for j := 1 to 12 do read (f, x) ;
read (f, y) ;
read (f, x) ;
while (x < 1000) do
begin
y := x ; read (f, x)
end ;
tronc (x) ; pnfini := true ; read (f, x) ;
while (((x > alfa) = (y > alfa)) and (x <> -1)) do
begin
read (f, x) ;
if x > 1000 then
begin
tronc (x) ;
read (f, x)
end
end ;
end ;
procedure parcourt (var pl, bt, hu, se, nu1, nu2, ap : list1 ; var freq, dernier
: list3 ; var mom, vard, nug2, nug22, apgl : real) ;
var
m, li : integer ; t : boolean ;
begin
li := 1 ;
while ((pnfini = true) and (x <> -1)) do
begin
t := (x > alfa) ; m := 1 ;
if t = true then
begin
pl [1] := pl [1] + 1 ;
nu1 [1] := nu1 [1] + x - 10 ; nu2 [1] := sqr (x - 10) + nu2 [1] ;
ap [1] := ap [1] + ln (x - 10) ; placer (b [1], x, u) ;
freq [1, b [1]] := freq [1, b [1]] + 1
end
else bt [1] := bt [1] + 1 ; r := x - 10 ;
soleil (x) ;
while (((x > alfa) = t) and (x <> -1)) do
begin
m := m + 1 ;
if t = true then
begin
pl [m] := pl [m] + 1 ;

```

Continue . Pascal

```

nu1 [m] := nu1 [m] + x - 10 ;
nu2 [m] := nu2 [m] + sqr (x - 10) ;
ap [m] := ap [m] + ln (x - 10) ;
nug2 := nug2 + x - 10 ; nug22 := nug22 + sqr (x - 10) ;

apg1 := apg1 + ln (x - 10) ; placer (b [m], x, u) ;
placer (b [m], x, u) ; freq [m, b [m]] := freq [m, b [m]] + 1 ;
end
else bt [m] := bt [m] + 1 ; r := x - 10 ;
soleil (x)
end ;
if x <> -1 then
begin
if (t = true) then
begin
hu [m] := hu [m] + 1 ; l1 := l1 + 1 ;
placer (bd, r, u);
dernier [1, bd] := dernier [1, bd] + 1 ;
mom := mom + r ; vard := vard + sqr (r)
end
else se [m] := se [m] + 1
end
end
end ;
begin
{ while pnfini=true }
{ parcourt }
{ principa }
fconnect (f, 'vfile_ strasbourg') ; fconnect (g, 'vfile_ moisetudie1') ;
fconnect (h, 'vfile_ resultat1') ; reset (f) ; reset (g) ; rewrite (h) ;
readln (g, indice) ;
for i := 1 to indice do read (g, u [i]) ; readln (g) ;
read (g, mois, annee1, annee2) ; initialise ;
nbm := annee2 - annee1 + 1 ;
writeln (h, 'PERIODE      ', annee1 : 4, '-', annee2 : 4, ' STATION : STRASBOURG'
) ;
writeln (h) ;
writeln (h, 'MOIS ETUDIE:', trunc (mois / 10) : 3) ;
readln (f) ; read (f, x) ;
tronc (x) ;
if mois = 11 then
begin
read (f, y) ;
read (f, x) ;
while ((x > alfa) = (y > alfa)) do
begin
read (f, x) ;
if x > 1000 then
begin
tronc (x) ;
read (f, x)
end
end ;
pnfini := true ;
parcourt (pluie, btemps, humide, sec, nuh1, nuh2, a, freqint, djour, momderj, va
rderj, mg2, mg22, ag1) ;
nbm := nbm - 1 ; moisavant := 122
end
else moisavant := mois - 9 ;
while x <> moisavant do
begin
readln (f) ; read (f, x) ; tronc (x) ;
end ;

```

```

for compt := 1 to nbm do
begin
    { while compt }
    debutseq ;
    parcourt (pluie, btemps, humide, sec, nuh1, nuh2, a, freqint, djour, momderj, va
rderj, mg2, mg22, ag1) ;
    while ((x < 1000) and (x <> -1)) do read (f, x) ;
    if x <> -1 then tronc (x) ;
    while ((x <> moisavant) and (x <> -1)) do
begin
    readln (f) ; read (f, x) ; if x <> -1 then tronc (x)
end ;
end ;
    { while compt<nmb+1 }
    l := max ; while pluie [1] = 0 do l := l - 1 ;
    obsmin := l ;
    for i := 1 to indice - 1 do sd := sd + djour [1, i] ;
    momderj := momderj / sd ; varderj := (varderj / sd) - sqr (momderj) ;
    for i := 2 to obsmin do nbsup2 := nbsup2 + pluie [i] ; nbsup3 := nbsup2 - pluie
[2] ;
    nbsup4 := nbsup3 - pluie [3] ;
    for i := 3 to obsmin do
begin
    { for i>=3 }
    mg3 := mg3 + nuh1 [i] ;
    mg23 := mg23 + nuh2 [i] ; ag2 := ag2 + a [i]
    { for i>=3 }
end ;
    for i := 4 to obsmin do
begin
    mg4 := mg4 + nuh1 [i] ; mg24 := mg24 + nuh2 [i] ; ag4 := ag4 + a [i]
end ;
    mg24 := mg24 / nbsup4 ; mg4 := mg4 / nbsup4 ; varg4 := mg24 - sqr (mg4) ;
    mg23 := mg23 / nbsup3 ; mg22 := mg22 / nbsup2 ;
    mg2 := mg2 / nbsup2 ; mg3 := mg3 / nbsup3 ;
    varg2 := mg22 - sqr (mg2) ; varg3 := mg23 - sqr (mg3) ;
    if (varg2 <> 0) and (varg3 <> 0) then
begin
    alphas2 := sqr (mg2) / varg2 ; betam2 := mg2 / alphas2 ;
    alphas3 := sqr (mg3) / varg3 ; betam3 := mg3 / alphas3 ;
    alphas4 := sqr (mg4) / varg4 ; betam4 := mg4 / alphas4 ;
end ;
    ag1 := ln (mg2) - (ag1 / nbsup2) ; ag2 := ln (mg3) - (ag2 / nbsup3) ;
    ag4 := ln (mg4) - (ag4 / nbsup4) ;
    if (ag1 <> 0) and (ag2 <> 0) then
begin
    alphas2 := (1 + sqrt (1 + (4 * ag1 / 3))) / (4 * ag1) ;
    alphas3 := (1 + sqrt (1 + (4 * ag2 / 3))) / (4 * ag2) ;
end ;
    if (alphas2 <> 0) and (alphas3 <> 0) then
begin
    betat2 := mg2 / alphas2 ; betat3 := mg3 / alphas3 ;
end ;
    alphas4 := (1 + sqrt (1 + (4 * ag4 / 3))) / (4 * ag4) ; betat4 := mg4 / alphas4 ;
    for i := 1 to obsmin do
begin
    nuh1 [i] := nuh1 [i] / pluie [i] ;
    nuh2 [i] := nuh2 [i] / pluie [i] ;
    a [i] := ln (nuh1 [i]) - a [i] / pluie [i] ;
    varh [i] := nuh2 [i] - sqr (nuh1 [i]) ;
    sigma [i] := sqrt (varh [i]) ;
    if varh [i] <> 0 then
begin
    alphas [i] := sqrt (nuh1 [i]) / varh [i] ; betam [i] := nuh1 [i] / alphas [i] ;

```

Continue. Pascal

```

end ;
if a [i] <> 0 then
alphan [i] := (1 + sqrt (1 + (4 * a [i] / 3))) / (4 * a [i]) ;
if alphan [i] <> 0 then
betan [i] := nuh1 [i] / alphan [i]
end ;
writeln (h) ;
writeln (h, '          a) DENOMBREMENT  DES OBSERVATIONS  DU TYPE X(n) SACHANT QUE'
) ;
writeln (h, '          LE JOUR n EST LE kieme JOUR D UNE SEQUENCE HUMIDE') ;
writeln (h) ;
l := max ; while pluie [l] = 0 do l := l - 1 ; n2 := l ;
writeln (h, '-----') ;
writeln (h, ' | n est le keme jour | Nombre observat. |') ;
writeln (h, ' | d une seq. humide | X(n) |') ;
writeln (h, ' |-----|-----|') ;
for i := 1 to n2 do
writeln (h, ' |          , i : 5, '          |          , trunc (pluie [i]) : 8, '          |'
) ;
writeln (h, '-----') ;
writeln (h) ; writeln (h) ;
l := max ; while pluie [l] < 20 do l := l - 1 ; obs20 := l ;
writeln (h, '          b) CALCUL DES MOYENNES ET VARIANCES EMPIRIQUES') ;
writeln (h, '          ASSOCIEES AUX LOIS H1(k,..)') ;
writeln (h) ;
writeln (h) ;
writeln (h, '-----') ;
-----') ;
writeln (h, ' |   INDICE k   | MOYENNE EMPIRIQUE | VARIANCE EMPIRIQUE | ECART
TYPE |') ;
writeln (h, ' |   | ASSOCIEE A H1(k,..) | ASSOCIEE A H1(k,..) | ASS
OCIEE |') ; writeln (h, ' |-----|-----|-----|
-----|') ;
for i := 1 to obsmin do
writeln (h, ' |          , i : 3, '          |          , nuh1 [i] : 8 : 3, '          |          '
, varh [i] : 8 : 3, '          |          , sigma [i] : 8 : 3, '          |') ;
writeln (h, '-----') ;
-----') ;
writeln (h) ; writeln (h) ;
writeln (h, '          c) CALCUL DES FREQUENCES RELATIVES PAR INTERVALLES') ;
writeln (h, '          ASOCIEES AUX LOIS H1(k,..)') ;
writeln (h) ;
for i := 1 to obsmin do
begin
writeln (h, '-----') ;
writeln (h, ' |   INTERVALLE   | NOMBRE OBSERV.   | FREQUENCE
|') ;
writeln (h, ' |   | PAR INTERVALLE | RELATIVE |') ;
writeln (h, ' |-----|-----|-----|') ;
l := 1 ;
while l <= indice - 1 do
begin
writeln (h, ' |   [, u [l] - 10 : 3, ', ', u [l + 1] - 10 : 3, '[   |   ' , tru
nc (freqint [i, l]) : 3, '          |          , freqint [i, l] / pluie [i] : 8 : 3, '
|') ;
l := l + 1
end ;
writeln (h, '-----') ;
writeln (h)
end ;
writeln (h) ; writeln (h) ;

```


Continue . Pascal

```

writeln (h, '    ETUDE DE LA LOI DU DERNIER JOUR') ;
writeln (h) ; writeln (h) ;
writeln (h, '-----') ;
writeln (h, ' |   INTERVALLE   |   NOMBRE OBSERV.   |   FREQUENCE   |') ;
writeln (h, ' |                   |   PAR INTERVALLE   |   RELATIVE   |') ;
writeln (h, ' |-----|-----|-----|') ;
l := 1 ;
while l <= indice - 1 do
begin
writeln (h, ' |   [, u [1] - 10 : 3, ',', u [1 + 1] - 10 : 3, ' |   ', tru
nc (djour [1, 1]) : 3, '   |   ', djour [1, 1] / pluie [1] : 8 : 3, '
|') ;
l := l + 1
end ;
writeln (h, '-----') ;
writeln (h) ; writeln (h) ;
writeln (h, '-----') ;
writeln (h, ' |   MOYENNE   |   VARIANCE   |   ECART TYPE   |') ;
writeln (h, ' |-----|-----|-----|') ;
writeln (h, ' |   ', momderj : 8 : 3, '   |   ', varderj : 8 : 3, '   |   ', sqrt (var
derj) : 8 : 3, '   |') ;
writeln (h, '-----') ;
writeln (h) ; writeln (h) ;
writeln (h, '    ESTIMATION DES PARAMETRES ALFA ET BETA PAR :') ;
writeln (h, '        * LA METHODE DES MOMENTS .') ;
writeln (h, '        * LA METHODE DE THOM .') ;
writeln (h) ; writeln (h) ;
writeln (h, '-----') ;
---') ;
writeln (h, ' |   INDICE k   |   ESTIMATEURS DE ALPHA   |   ESTIMATEURS DE BETA
|') ;
writeln (h, ' |                   |-----|-----|
--|') ;
writeln (h, ' |                   | ESTIM.MOM. | ESTIM.THOM | ESTIM.MOM. | ESTIM.THOM
|') ;
writeln (h, ' |-----|-----|-----|-----|
--|') ;
for i := 1 to obsmin do
writeln (h, ' |   ', i : 3, '   |   ', alpham [i] : 8 : 3, '   |   ', alphas [i
] : 8 : 3, '   |   ', betam [i] : 8 : 3, '   |   ', betas [i] : 8 : 3, '   |') ;
writeln (h, '-----') ;
---') ;
writeln (h) ; writeln (h) ;
writeln (h, 'Nbres observations >=2 :', trunc (nbsup2) : 3) ;
writeln (h, 'Nbres observations >=3 :', trunc (nbsup3) : 3) ;
writeln (h, 'Nbres observations >=4 :', trunc (nbsup4) : 3) ;
writeln (h) ; writeln (h) ;
writeln (h, '    ETUDE EMPIRIQUE DE Hg(2,.)') ;
writeln (h) ; writeln (h) ;
writeln (h, '-----') ;
writeln (h, ' |   MOYENNE   |   VARIANCE   |   ECART TYPE   |') ;
writeln (h, ' |-----|-----|-----|') ;
writeln (h, ' |   ', mg2 : 8 : 3, '   |   ', varg2 : 8 : 3, '   |   ', sqrt (varg2) :
8 : 3, '   |') ;
writeln (h, '-----') ;
writeln (h) ; writeln (h) ;
writeln (h, '    ETUDE EMPIRIQUE DE Hg(3,.)') ;
writeln (h) ; writeln (h) ;
writeln (h, '-----') ;
writeln (h, ' |   MOYENNE   |   VARIANCE   |   ECART TYPE   |') ;

```

Continue . Pascal

```

writeln (h, '-----|') ;
writeln (h, '|', mg3 : 8 : 3, ' | ', varg3 : 8 : 3, ' | ', sqrt (varg3) :
8 : 3, ' |') ;
writeln (h, '-----') ;
writeln (h) ; writeln (h) ;
writeln (h, '    ETUDE EMPIRIQUE DE Hg(4,..)  ') ;
writeln (h) ; writeln (h) ;
writeln (h, '-----') ;
writeln (h, '|    MOYENNE    |    VARIANCE    |    ECART TYPE    |') ;
writeln (h, '|-----|-----|-----|') ;
writeln (h, '|', mg4 : 8 : 3, ' | ', varg4 : 8 : 3, ' | ', sqrt (varg4) :
8 : 3, ' |') ;
writeln (h, '-----') ;
writeln (h) ; writeln (h) ;
writeln (h, '    ESTIMATION DES PARAMETRES ALFA ET BETA PAR :') ;
writeln (h, '        * LA METHODE DES MOMENTS .') ;
writeln (h, '        * LA METHODE DE THOM .') ;
writeln (h) ; writeln (h) ;
writeln (h, '-----') ;
writeln (h, '|    Hg(k,..)    |    ESTIMATEURS DE ALPHA    |    ESTIMATEURS DE BETA
|') ;
writeln (h, '|-----|-----|') ;
writeln (h, '|-----|-----|-----|') ;
writeln (h, '|    ESTIM.MOM. | ESTIM.THOM | ESTIM.MOM. | ESTIM.THOM
|') ;
writeln (h, '|-----|-----|-----|') ;
writeln (h, '|-----|') ;
i := 2 ;
writeln (h, '|', i : 3, ' | ', alphas : 8 : 3, ' | ', alphas : 8
: 3, ' | ', betas : 8 : 3, ' | ', betas : 8 : 3, ' |') ;
i := 3 ;
writeln (h, '|', i : 3, ' | ', alphas : 8 : 3, ' | ', alphas : 8
: 3, ' | ', betas : 8 : 3, ' | ', betas : 8 : 3, ' |') ;
i := 4 ;
writeln (h, '|', i : 3, ' | ', alphas : 8 : 3, ' | ', alphas : 8
: 3, ' | ', betas : 8 : 3, ' | ', betas : 8 : 3, ' |') ;
writeln (h, '-----') ;
writeln (h, '---') ;
fclose (h)
end.

```

Proba. Pascal

```

program proba ;
var
x,s,z,l, f11, f01, p01, p10, q1, q0 : real ;
n,nx, k1 : integer ;
f, g : text ;
procedure a (k : integer ; var y,f0,f1 : real ; var a1 : real) ; forward ;
function b (k : integer ; var y,f0,f1 : real) : real ;
var
b1 : real ;
begin
if k = 0 then b := 1
else
begin
a (k - 1, y,f0,f1, b1) ;
b := p10 * b1 + (1 - p10) * f1 * b (k - 1, y,f0,f1)
end
end ;
procedure a ;
begin
if k = 0 then a1 := 1
else
begin
a (k - 1, y,f0,f1, a1) ;
a1 := (1 - p01) * a1 + p01 * f0 * b (k - 1, y,f0,f1)
end
end ;
begin
fconnect (f, 'vfile_ transition') ; reset (f) ;
fconnect (g, 'vfile_ calcul') ; rewrite (g) ;
readln (f, p01, p10, n) ; readln(f,x,f01,f11);
q1 := p01 / (p10 + p01) ; q0 := p10 / (p01 + p10) ;
while x<1000 do
begin
a (n, x,f01,f11, 1) ;
writeln (g, 'VALEUR DE A(',n:2,',',trunc (x) : 3, ')=P[Mn<=',trunc (x) : 3, '/J1
=0] EST :', 1 : 10 : 6) ;
writeln (g) ; s := b (n, x,f01,f11) ;
writeln (g, 'VALEUR DE B(',n:2,',',trunc (x) : 3, ')=P[Mn<=',trunc (x) : 3, '/
J1=1] EST :', s : 10 : 6) ;
writeln (g) ; z := q0 * 1 + q1 * s ;
writeln (g, 'VALEUR DE P[Mn<=',trunc (x) : 3, '] EST :', z : 10 : 6) ;
read(f,x);readln(f,f01,f11);
end ;
fclose (g)
end.

```

Altbl . Pascal

```

PROGRAM ALTB1 ;
CONST U=32; V=32;
TYPE
TAB=ARRAY[1..U] OF REAL;TAB1=ARRAY[0..U] OF REAL;
VAR
N1,I,J,K,N,M:INTEGER ;
HO,H1,DO,D1,TOT :REAL; S :TAB1 ;
PO,P1,PTO,PT1 :TAB ;RO,R1,RTO,RT1 :ARRAY[1..U,0..V] OF REAL ;
f,g :TEXT;
PROCEDURE CALCUL(VAR P,PT:TAB;H,D:REAL;C:INTEGER);
VAR I,J:INTEGER;
BEGIN {PROCEDURE CALCUL}
P[1]:=EXP((-H/D)*LN(D+1)); PT[1]:=1/(H+1);
FOR I:=2 TO C DO PT[I]:=0;
FOR I:=2 TO C DO
BEGIN
P[I]:=P[I-1]*((H+D*(I-2))/((I-1)*(D+1)));
FOR J:=1 TO I-1 DO
BEGIN
PT[I]:=PT[I]+P[J]
END;
PT[I]:=PT[1]*(1-PT[I])
END;
END; {PROCEDURE CALCUL}
BEGIN {P.P.}
FCONNECT(f,'vfile_val');FCONNECT(g,'vfile_res');
RESET(f);REWRITE(g);
READLN(f,N1);
FOR I:=1 TO N1 DO
BEGIN
FOR J:=0 TO N1 DO
BEGIN
R1[I,J]:=0; RO[I,J]:=0;
RTO[I,J]:=0; RT1[I,J]:=0
END
END;
RTO[1,0]:=1;RO[1,0]:=1;
RT1[1,1]:=1;R1[1,1]:=1;RO[2,1]:=1;R1[2,1]:=1;
READLN(f,HO,DO);READLN(f,H1,D1);
CALCUL(PO,PTO,HO,DO,N1);writeln(g);
CALCUL(P1,PT1,H1,D1,N1);writeln(g);
FOR I:=3 TO N1 DO
BEGIN
R1[I,1]:=PTO[I-1]*(HO+1);R1[I,I-1]:=PO[1]*PT1[I-2]/PT1[1];
RO[I,1]:=P1[1]*PTO[I-2]/PTO[1];
RO[I,I-1]:=PT1[I-1]*(H1+1)
END;
FOR N:=4 TO N1 DO
BEGIN
FOR M:=2 TO N-2 DO
BEGIN
FOR J:=1 TO N-M DO
BEGIN
R1[N,M]:=R1[N,M]+PO[J]*RO[N-J,M-1]
END;
FOR J:=1 TO M DO
BEGIN
RO[N,M]:=RO[N,M]+P1[J]*R1[N-J,M-J+1]
END
END
END

```

```

END;      {FOR N=4 TO N1}
FOR I:=2 TO N1 DO
BEGIN
FOR J:=1 TO I-1 DO
BEGIN
RT1[I,I]:=RT1[I,I]+PT1[J];RTO[I,0]:=RTO[I,0]+PTO[J]
END;
RTO[I,0]:=1-RTO[I,0];
RT1[I,I]:=1-RT1[I,I];RTO[I,I-1]:=PT1[I-1]*(H1+1)/(HO+1);
RT1[I,1]:=PTO[I-1]*(HO+1)/(H1+1)
END;
FOR N:=3 TO N1 DO
BEGIN
FOR M:=2 TO N-1 DO
BEGIN
FOR J:=1 TO M DO RT1[N,M]:=RT1[N,M]+PT1[J]*R1[N-J+1,M-J+1]
END;
FOR M:=1 TO N-2 DO
BEGIN
FOR J:=1 TO N-M DO RTO[N,M]:=RTO[N,M]+PTO[J]*RO[N-J+1,M]
END;
END;
FOR K:=0 TO N1 DO
BEGIN
S[K]:=(1/(HO+H1+2))*((HO+1)*RTO[N1,K]+(H1+1)*RT1[N1,K]);
WRITELN(g,'POUR UNE VALEUR DE M=',K:3,'P[Sn=m]=' ,S[K]:8:4)
END;
TOT:=0;
for K:=0 TO N1 DO TOT:=TOT + S[K];
writeln(g);writeln(g,'VERIF TOT=',TOT:8:4);
FCLOSE(f)
END.

```

BIBLIOGRAPHIE .

- BERGER, A., GOOSSENS, C.H.R. (1982).** Persistence of wet and dry spells in Belgium, Scientific report 1983/3, Université Catholique de Louvain, Belgique.
- BERGER, A., GOOSSENS, C.H.R. (1983).** Persistence of wet and dry spells at UCCLE (Belgium). *Journal of Climatology*, vol. 3, 21-34.
- BILLINGSLEY, P. (1961).** Statistical methods in Markov Chains. *Ann. Math. Statist.*, V. 32, 12-40.
- BILLINGSLEY, P. (1968).** Convergence of Probability Measures. Wiley, New York.
- BOUSSEBOUA, M. (1983).** Etude de quelques modèles de séries chronologiques binaires. Thèse de 3-ème cycle Mathématiques Appliquées Université de Grenoble I.
- BUISHAND, T.A. - (1977).** Stochastic modelling of daily rainfall sequences. *Commun. Agric. Univ. Wageningen*. 77-3, the Netherlands.
- BUISHAND, T.A. - (1978).** Some remarks on the use of daily rainfall Models. *Journal of Hydrology*, vol. 36, 295-308. Printed in the Netherlands.
- CHANG, T.J., DELLEUR, J.W., KAVVAS, M.L. - (1982).** Stochastic daily precipitations modeling and daily streamflow transfer processes. Technical report n°146, Purdue University Water Resources Research Center.
- CHANG, T.J., DELLEUR, J.W., KAVVAS, M.L. - (1983a).** Daily precipitations modeling by the mixture of discrete autoregressive moving-average processes and exponential distributions. Preprint, Purdue University Water Resources Research Center.

- CHANG, T.J., DELLEUR, J.W., KAVVAS, M.L. - (1983b).** Multi-state discrete ARMA models and multi-state run lengths for the daily precipitation sequences. Preprint, Purdue University Water Resources Research Center.
- CHOI, S.C., WETT, R. - (1969).** Maximum likelihood estimation of the parameters of the gamma distribution and their bias. *Technometrics*, Vol. 11, 683-690.
- CINLAR, E. - (1975).** Markov renewal theory : A Survey. *Management science*, Vol. 21, No. 7, 727-752.
- DENZEL, G.E., O'BRIEN, G.L. - (1975).** Limit theorems for extreme values of chain-dependent processes. *The annals of Probability* Vol. 3, No. 5, 773-779.
- ESSEBBAR, B. - (1984).** Séries chronologiques vectorielles à composantes binaires. Application en climatologie. Thèse de 3-ième cycle. Mathématiques appliquées. Univ. Grenoble I.
- FABENS, A.J. AND NEUTS, M. F. (1970).** The limiting distribution of the maximum term in a sequence of random variables defined on a Markov chain. *J. Appl. Probability*, V. 7, 754-760.
- FELLER, W. (1968).** An Introduction to Probability Theory and Its Applications, V. I, third edition. Wiley, New York.
- GABRIEL, K.R. - (1959).** The distribution of the number of successes in a sequence of dependent trials. *Biometrika*, Vol 46, p. 454-460.
- GALLOY, E. - (1982).** Contribution à l'étude de la sécheresse. Thèse de 3-eme cycle, Laboratoire de géographie physique. Grenoble.
- GALLOY, E., LE BRETON, A., MARTIN, S. - (1982).** Analyse des séquences de jours secs consécutifs, Application à 31 postes du réseau météorologiques français, *La météorologie*, VI^e série, n° 28, 5-24.

- GALLOY, E., LE BRETON, A., MARTIN, S. - (1983).** A model for weather cycles based on daily rainfall occurrence, Lectures Notes in Biomathematics n° 49, 303-318.
- GNEDENKO, B.V. (1943).** Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. Ann. Math., V. 44, 423-453.
- GREEN, J.R. - (1964).** A model for rainfall occurrence. J. of the Roy. Stat. Soc. B. 26, p. 345-353.
- GREGOIRE, G. - (1982).** Processus de renouvellement et généralisations. Une présentation en vue des applications. Rapport de recherche, Laboratoire IMAG.
- GUMBEL, E.J. (1958).** Statistics of Extremes. Columbia Univ. Press.
- HELGRET, H.J. (1970).** On sums of random variables defined on a two states Markov chain. J. Appl. Prob. 7, 761-765.
- IBRAGIMOV, I.A. (1962).** Some limit theorems for stationary processes. Theor. Probability Appl., V. 7, 349-382.
- ISON, N.T., FEYERHERM, A.M., AND BARK, L.D. (1971).** Wet period precipitation and the gamma distribution. J. Appl. Meteorology, V.10, 658-665.
- JACOBS, P.A., LEWIS, P.A.W. - (1978a).** Discrete time series generated by mixture I : correlationnal and runs properties. J. R. Statist. Soc. B. 40, n° 1, p. 94-105.
- JACOBS, P.A., LEWIS, P.A.W. - (1978b).** Discrete time series generated by mixture II : asymptotique properties. J. R. Statist. Soc. B. 40, n° 2, p. 222-228.
- JANSSEN, J. - (1970).** Les processus (J-X). Cahiers du C.E.R.O., N° 11, 181-214.
- JANSSEN, J. - (1982).** Modèles de risque semi-markoviens. Cahiers du C.E.R.O., Vol. 24, N°^s 2-3-4. Université libre de Bruxelles - Institut de Statistique.

- JOHNSON, N.L., KOTZ, S. - (1970).** Distribution in statistics. Continuous univariate distributions I. Wiley, 300 p.
- KATZ, R.W. - (1974).** Computing probabilities associated with the Markov chain model for precipitation, *J. Appl. Meteorology*, 13, 953.
- KATZ, R.W. - (1977a).** Precipitation as a chain-dependent process. *J. Appl. Meteorology*, V.16, N.7, 671-676.
- KATZ, R.W. - (1977b).** An application of chain-dependent processes to meteorology. *J. Appl. Probab.* 14, 598-603.
- KEDEM, B. - (1977).** Counting the number of 0-1 stationary series having the same likelihood. *Discrete mathematics*, 18, p. 285-289.
- KEDEM, B. - (1980).** Binary time series. *Lecture Notes In pure and applied mathematics*. Vol. 52.
- KEMENY, J.G. AND SNELL, J.L. (1960).** Finite Markov Chains. Van Nostrand, Princeton.
- LE BRETON, A. MARTIN, S. - (1979).** Un modèle pour l'étude des séquences climatologiques. *Séminaire de statistique, Laboratoire IMAG*, p. 3-34.
- LOYNES, R.M. (1965).** Extreme values in uniformly mixing stationary stochastic processes. *Ann. Math. Statist.*, V. 36, 993-999.
- MISES, R. VON (1936).** La distribution de la plus grande de n valeurs. Reprinted in *Selected Papers*, V. 2, 271-294. American Mathematical Society, Providence (1954).
- NEYMAN, J. AND SCOTT, E.L. (1967).** Some outstanding problems relating to rain modification. *Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, V. 5, 293-326.
- O'BRIEN, G.L. (1974).** Limit theorems for sums of chain-dependent processes. *J. Appl. Probab.* 11, 582-587.

- PYKE, R. (1961).** Markov renewal processes : definitions and preliminary properties. *Ann. Math. Statist.*, V. 32, 1231-1242.
- RESNICK, S. I. AND NEUTS, M.F. (1970).** Limit laws for maxima of a sequence of random variables defined on a Markov chain. *Advances in Appl. Probability*, V. 2, 323-340.
- THOM, H.C.S. (1958).** A note on the gamma distribution. *Monthly Weather Review*, Vol. 86, n° 4, 117-122.
- TODOROVIC, P., WOOLHISER, D.A. (1975).** A stochastic model of n-day precipitation, *J. Appl. Meteorology*, Vol. 14, 17-24.
- WEISS, L.L. - (1964).** Sequences of wet and dry days described by a Markov Chain Probability model, *Mont. Wea. Rev.*, 92, 160.
- WOOLHISER, D.A., ROVEY, E., TODOROVIC, P. (1972).** Temporal and spacial variation of parameters for the distribution of N-day precipitation. *Proceedings of the second International Symposium in Hydrology*, Fort collins, Colorado, 605-614. .



AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT 3^{ème} CYCLE, DOCTORAT-INGENIEUR, DOCTORAT USMG

Vu les dispositions de l'arrêté du 16 avril 1974,

Vu les dispositions de l'arrêté du 5 juillet 1984,

Vu les rapports de M. ...A...Le..Bretan.....

M.

M.*E.L.H.I.M.D.I...Khalid*..... est autorisé
à présenter une thèse en vue de l'obtention du *grade...de D.D.C.T.F.U.R...3^è cycle*
en...M.a.thématiques..Appliquées.....

14 MAI 1988

Grenoble, le

Le Président de l'Université Scientifique
et Médicale



[Handwritten signature]

M. TANCHE

D. CORDARY

Vice-Président

