

optimisation robuste de réseaux de télécommunications

Orange Labs –
Laboratoire Heudiasyc, UMR CNRS 6599,
Université de Technologie de Compiègne

Olivier Klopfenstein
thèse effectuée sous la direction de Dritan Nace (MdC - HDR)
02 juillet 2008



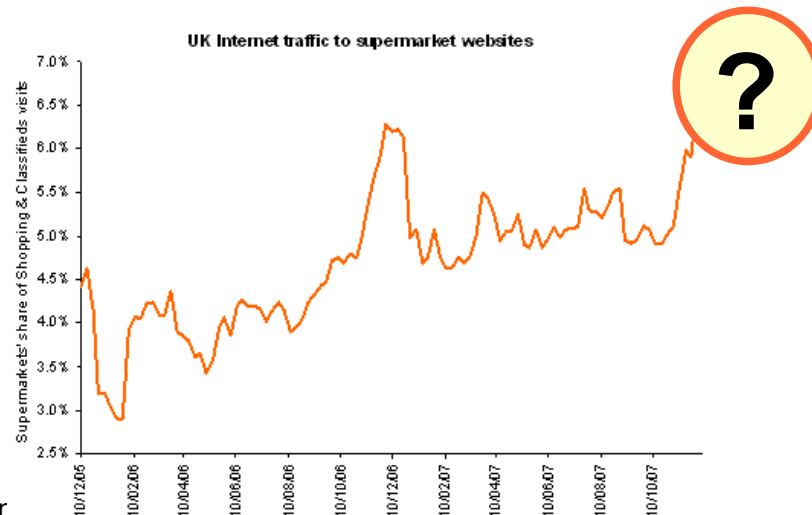
plan

- partie 1 introduction : positionnement des travaux
- partie 2 approches robustes pour les problèmes sous contraintes probabilistes
- partie 3 résolution optimale de problèmes combinatoires sous contraintes probabilistes
- partie 4 applications
- partie 5 conclusion et perspectives

introduction :
positionnement des
travaux

l'optimisation avec données incertaines

- motivations : présence fréquente de données incertaines
 - origines : prévisions, mesures imprécises, etc.
- en télécommunications : le **trafic** !
 - cf activités stratégiques (p. ex. planification de réseau)



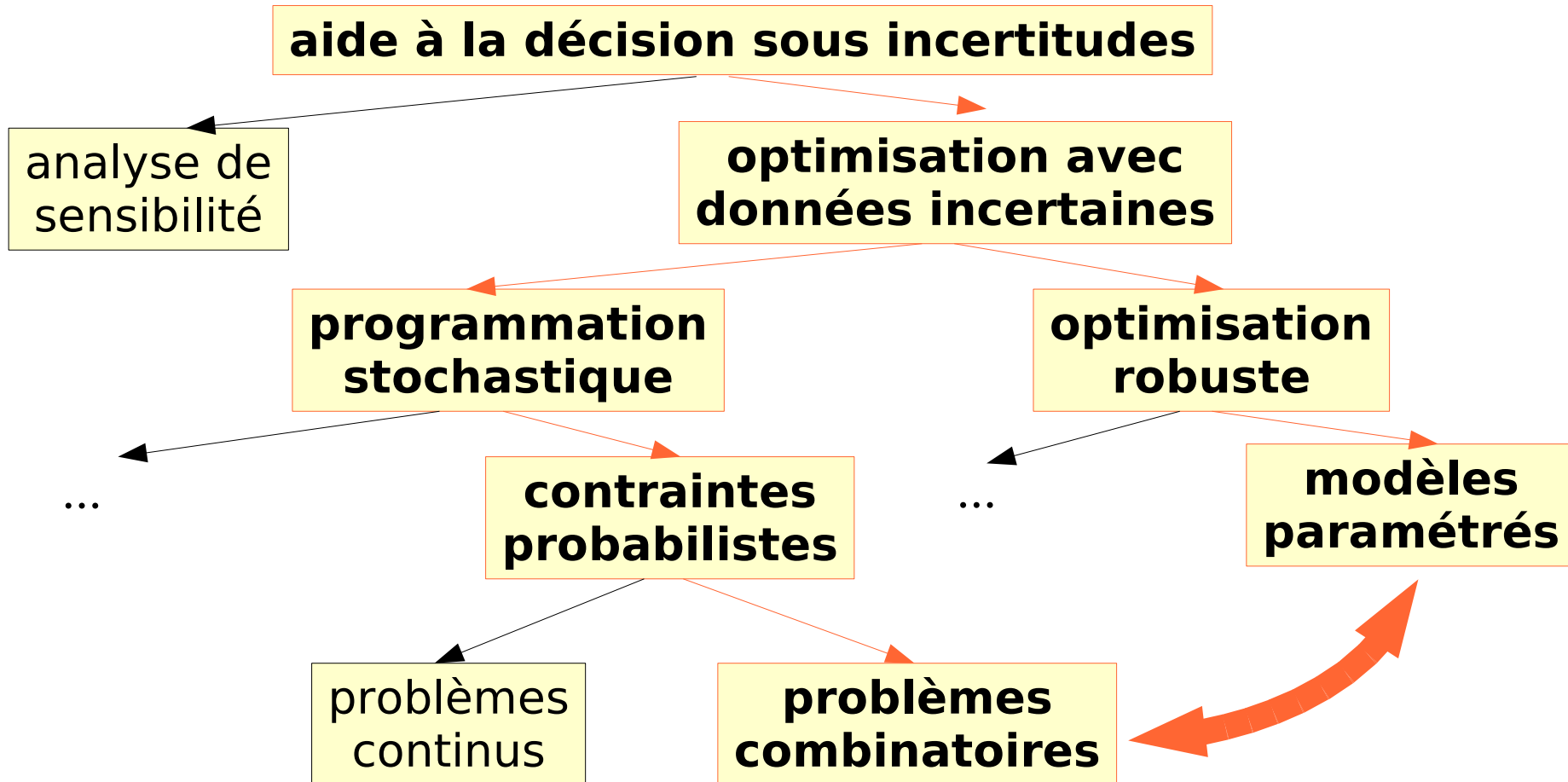
objet de la thèse

- **contraintes probabilistes** : trouver la meilleure décision réalisable avec une probabilité au moins $1-\varepsilon$
 - souvent très pertinent en pratique : gestion du risque
 - généralement très **difficile à résoudre** !
- **but** : traiter des problèmes de décision **combinatoires**
→ difficulté supplémentaire
 - état de l'art : très peu de choses !

objet de la thèse

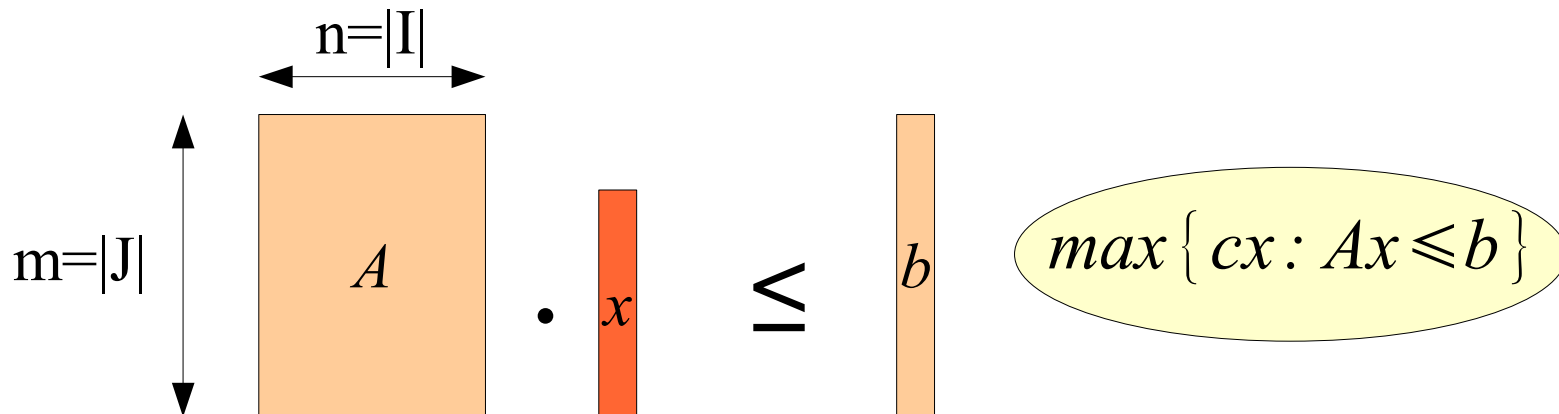
- **contraintes probabilistes** : trouver la meilleure décision réalisable avec une probabilité au moins $1-\varepsilon$
 - souvent très pertinent en pratique : gestion du risque
 - généralement très **difficile à résoudre** !
- **but** : traiter des problèmes de décision **combinatoires**
→ difficulté supplémentaire
 - état de l'art : très peu de choses !
- **optimisation robuste** : trouver la meilleure décision réalisable pour tout un ensemble d'événements donné
 - généralement plus **facile à mettre en oeuvre**
- **démarche** : tirer parti des avantages de l'optimisation robuste pour traiter des contraintes probabilistes

positionnement des travaux



quelques notations

- $x \rightarrow$ variable de décision, dans \mathbb{R}^n
 $\omega \rightarrow$ événement (aléas), dans Ω
- ensembles d'indices :
 $I = \{1, \dots, n\}$ (variables)
 $J = \{1, \dots, m\}$ (contraintes)
- problèmes linéaires :



approches robustes
pour les problèmes
sous contraintes
probabilistes

contraintes probabilistes et optimisation robuste

- problème d'optimisation classique : $\min_{x \in R^n} \{ f(x) \mid g(x) \geq 0 \}$

contraintes probabilistes et optimisation robuste

- problème d'optimisation classique : $\min_{x \in R^n} \{ f(x) \mid g(x) \geq 0 \}$

- problème sous contraintes probabilistes :

$$\min_{x \in R^n} \{ f(x) \mid P(g(x, \omega) \geq 0) \geq 1 - \varepsilon \}$$

- solution de coût minimal, réalisable avec proba. $1 - \varepsilon$

contraintes probabilistes et optimisation robuste

- problème d'optimisation classique : $\min_{x \in R^n} \{ f(x) \mid g(x) \geq 0 \}$

- problème sous contraintes probabilistes :

$$\min_{x \in R^n} \{ f(x) \mid P(g(x, \omega) \geq 0) \geq 1 - \varepsilon \}$$

- solution de coût minimal, réalisable avec proba. $1 - \varepsilon$

- reformulation robuste :

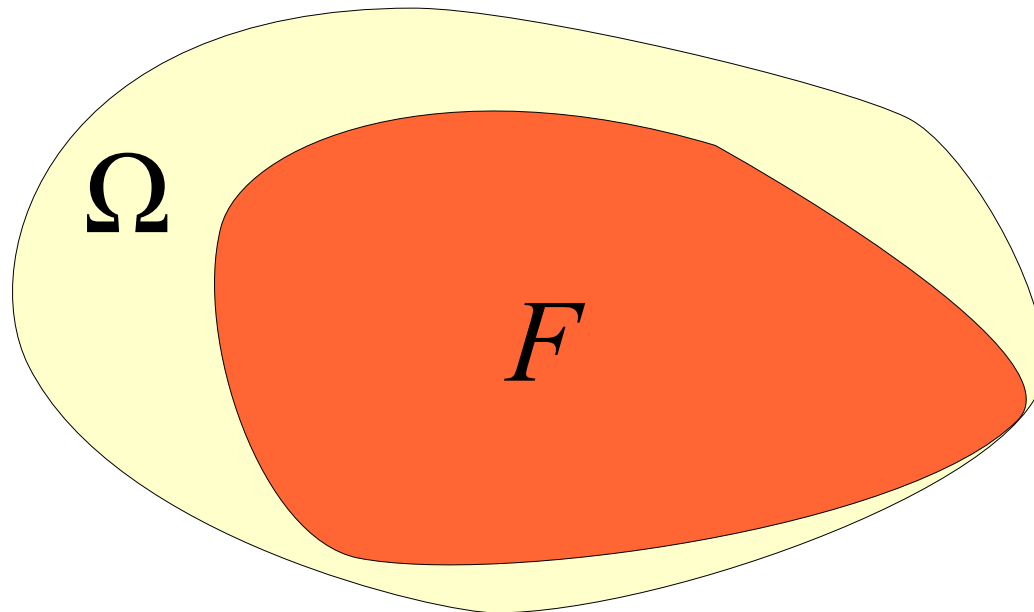
$$\min_{F \subseteq \Omega : P(F) \geq 1 - \varepsilon} \left\{ \min_{x \in R^n} \{ f(x) \mid \forall \omega \in F, g(x, \omega) \geq 0 \} \right\}$$

- notion de « problème robuste optimal »

- trouver le meilleur sous-ensemble F d'événements

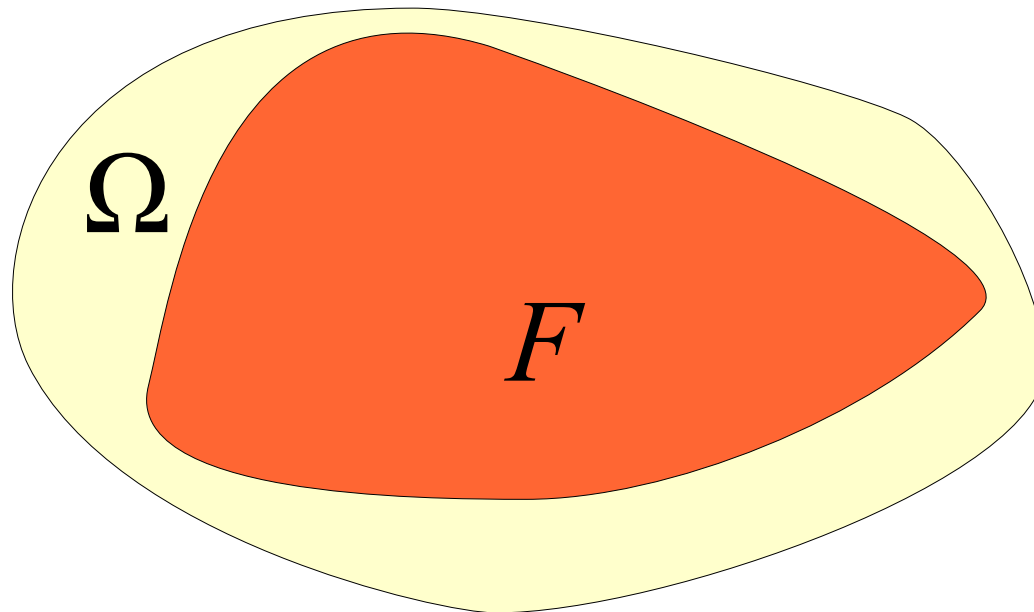
approches robustes pour les contraintes probabilistes

- trouver le meilleur sous-ensemble F d'événements :
 - $P(F) \geq 1 - \varepsilon$
 - résoudre le problème robuste associé à F
 - F de coût associé minimal



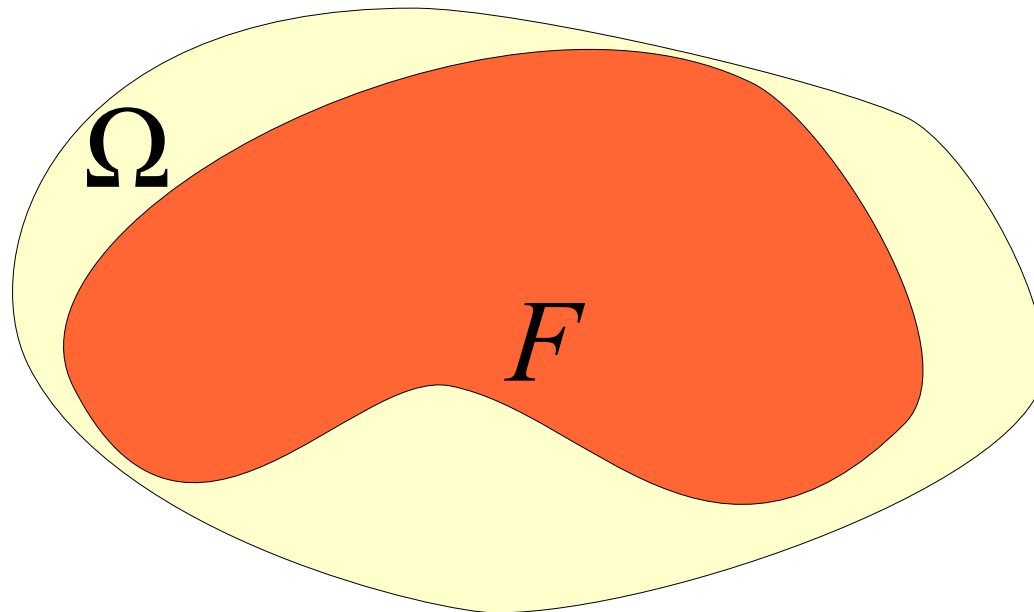
approches robustes pour les contraintes probabilistes

- trouver le meilleur sous-ensemble F d'événements :
 - $P(F) \geq 1 - \varepsilon$
 - résoudre le problème robuste associé à F
 - F de coût associé minimal



approches robustes pour les contraintes probabilistes

- trouver le meilleur sous-ensemble F d'événements :
 - $P(F) \geq 1 - \varepsilon$
 - résoudre le problème robuste associé à F
 - F de coût associé minimal

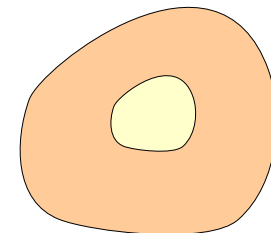
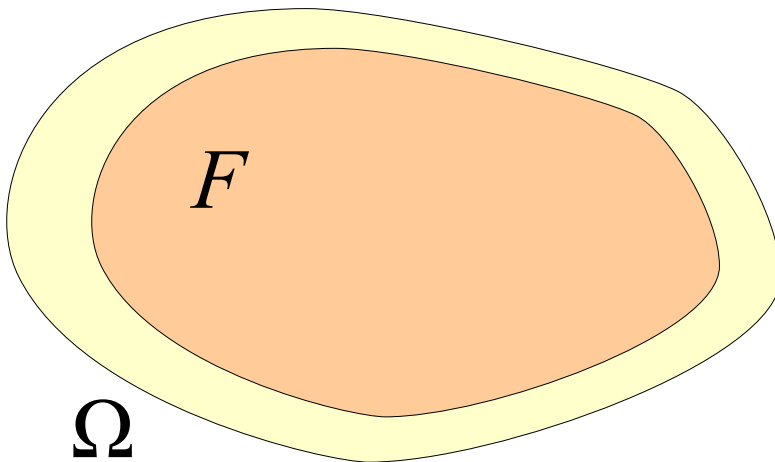


modèles robustes paramétrés

- modèle robuste « générique »
- existence d'un paramètre pour régler la robustesse

ensembles d'événements

ensembles de solutions robustes

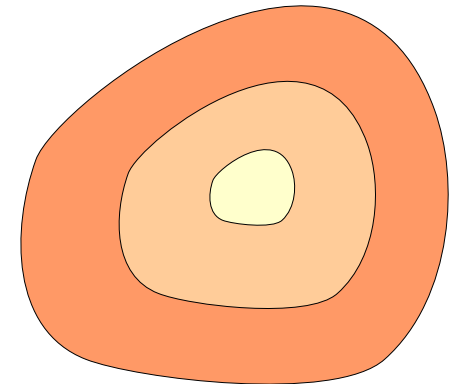
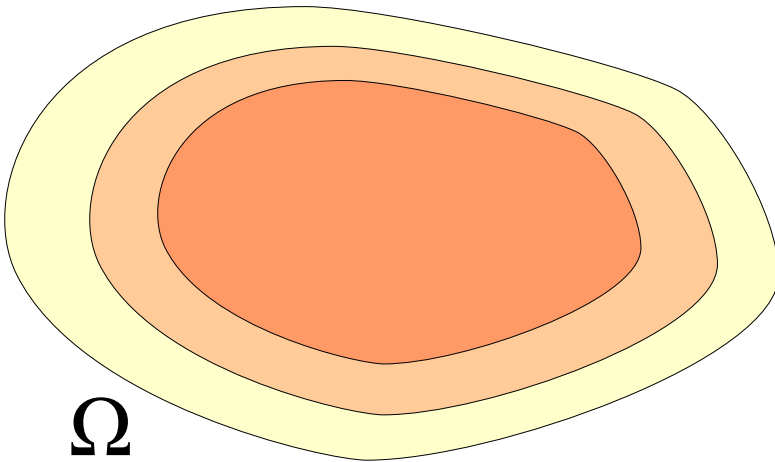


modèles robustes paramétrés

- modèle robuste « générique »
- existence d'un paramètre pour régler la robustesse

ensembles d'événements

ensembles de solutions robustes

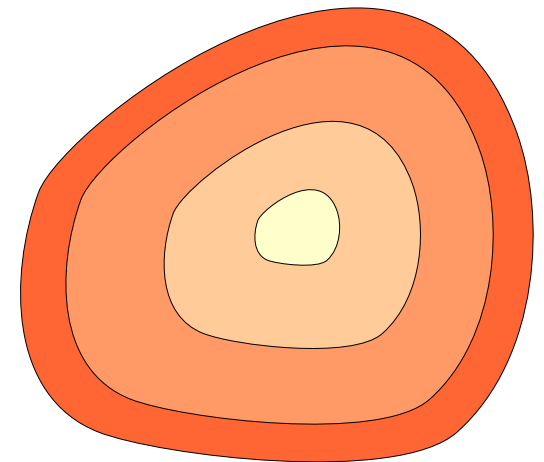
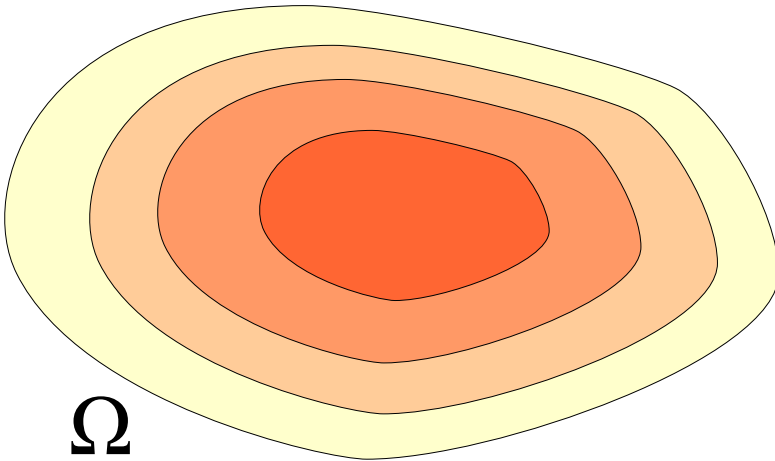


modèles robustes paramétrés

- modèle robuste « générique »
- existence d'un paramètre pour régler la robustesse

ensembles d'événements

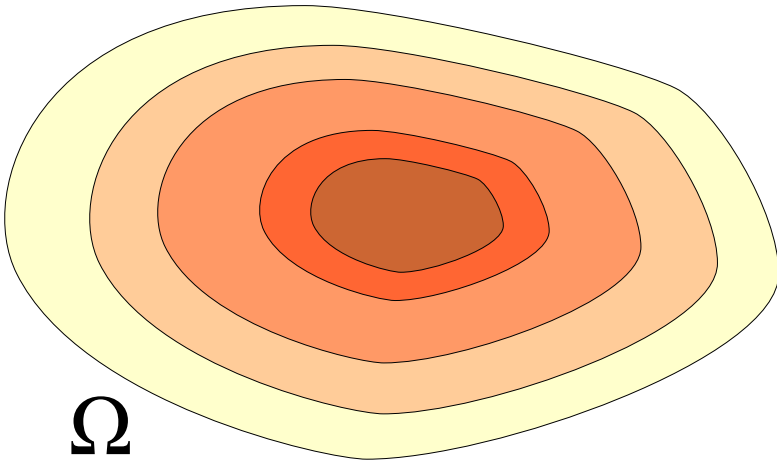
ensembles de solutions robustes



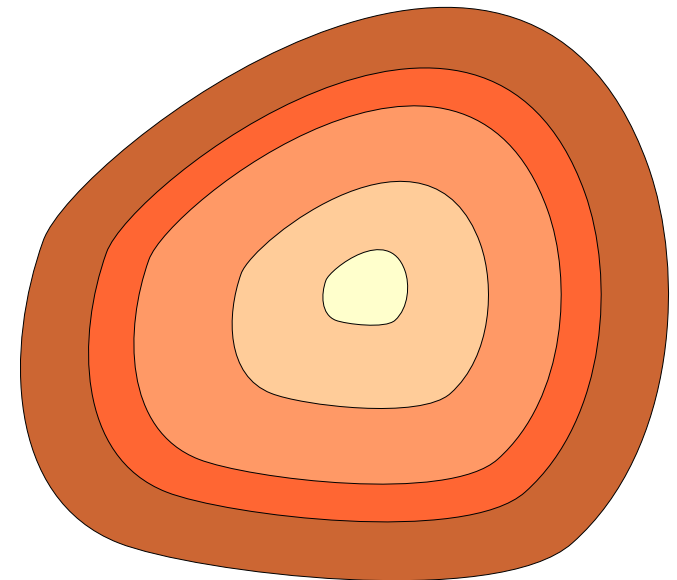
modèles robustes paramétrés

- modèle robuste « générique »
- existence d'un paramètre pour régler la robustesse

ensembles d'événements



ensembles de solutions robustes

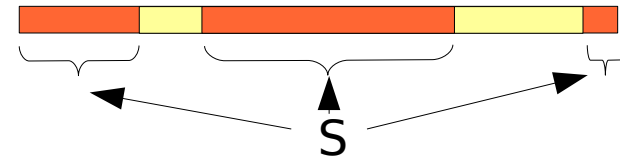


PLNE : modèle de Bertsimas et Sim

- principe :

- modélisation des incertitudes par **intervalles** : $A_{ji} \in [\underline{A}_{ji}, \overline{A}_{ji}]$
- au plus Γ coefficients d'une ligne prennent leur pire valeur

$$\sum_{i \in I} A_{ji} x_i \leq b_j$$



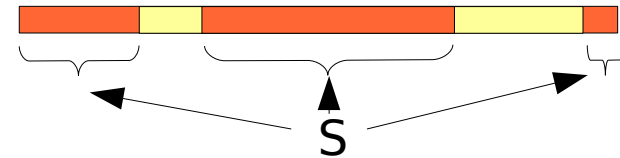
$$\forall S \subseteq I \text{ t.q. } |S| = \Gamma, \sum_{i \notin S} \underline{A}_{ji} x_i + \sum_{i \in S} \overline{A}_{ji} x_i \leq b_j$$

PLNE : modèle de Bertsimas et Sim

- principe :

- modélisation des incertitudes par **intervalles** : $A_{ji} \in [\underline{A}_{ji}, \overline{A}_{ji}]$
- au plus Γ coefficients d'une ligne prennent leur pire valeur

$$\sum_{i \in I} A_{ji} x_i \leq b_j$$



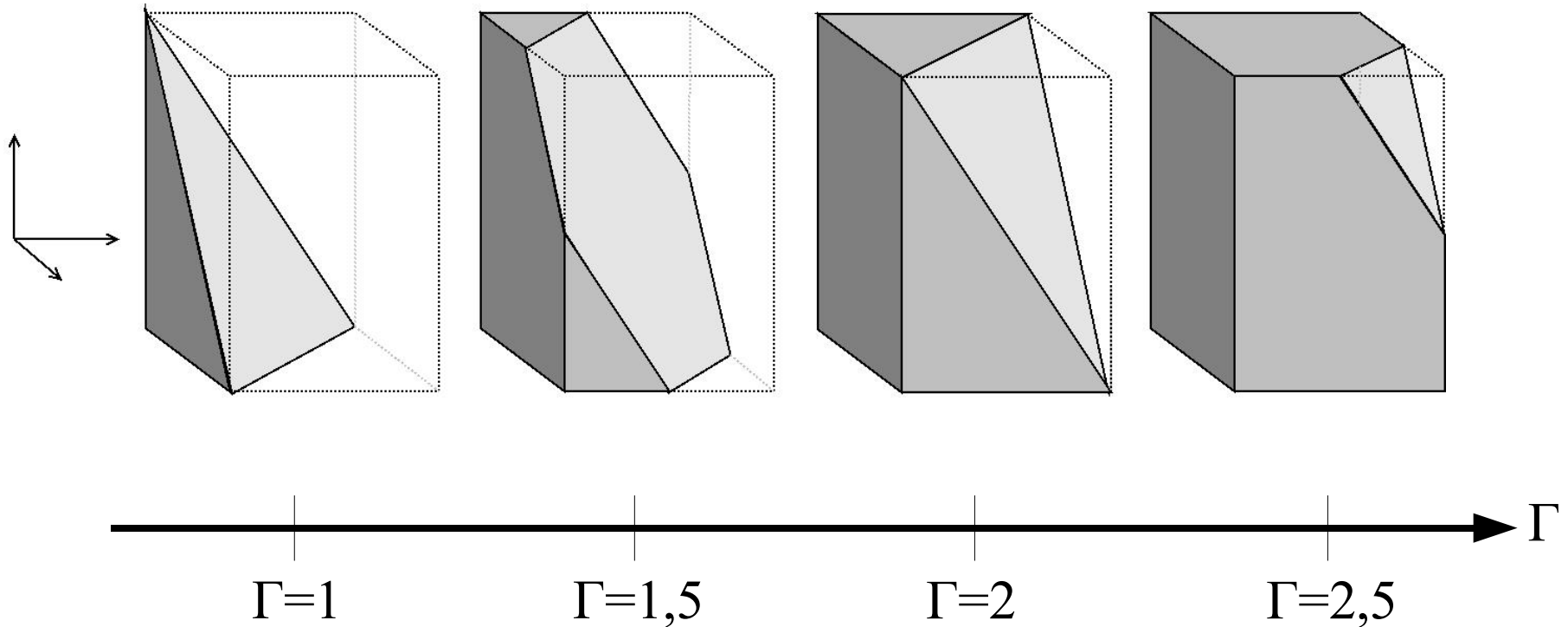
$$\forall S \subseteq I \text{ t.q. } |S| = \Gamma, \sum_{i \notin S} \underline{A}_{ji} x_i + \sum_{i \in S} \overline{A}_{ji} x_i \leq b_j$$

- avantages principaux :

- reformulation linéaire de taille polynomiale
- utilisable facilement avec des **variables entières** (PLNE)

illustration de l'impact du paramètre Γ

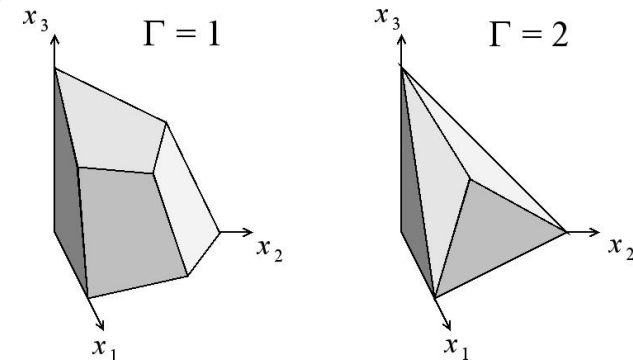
- évolution de l'ensemble des événements :



étude polyédrique du modèle de Bertsimas et Sim

$$P_j = \left\{ x \in \mathbb{N}^n \mid \forall S \subseteq I \text{ t.q. } |S| = \Gamma_j, \sum_{i \notin S} \underline{A}_{ji} x_i + \sum_{i \in S} \overline{A}_{ji} x_i \leq b_j \right\}$$

- on s'intéresse d'abord au polyèdre du **relâché continu** ($x \geq 0$):
 - si $b_j > 0$ (ou si $b_j < 0$ et $A_j \leq 0$), ce polyèdre est de dimension pleine
 - dans les deux cas ci-dessus, toutes les inégalités sont des facettes
 - un seul point extrême strictement positif



inégalités valides pour le polyèdre entier

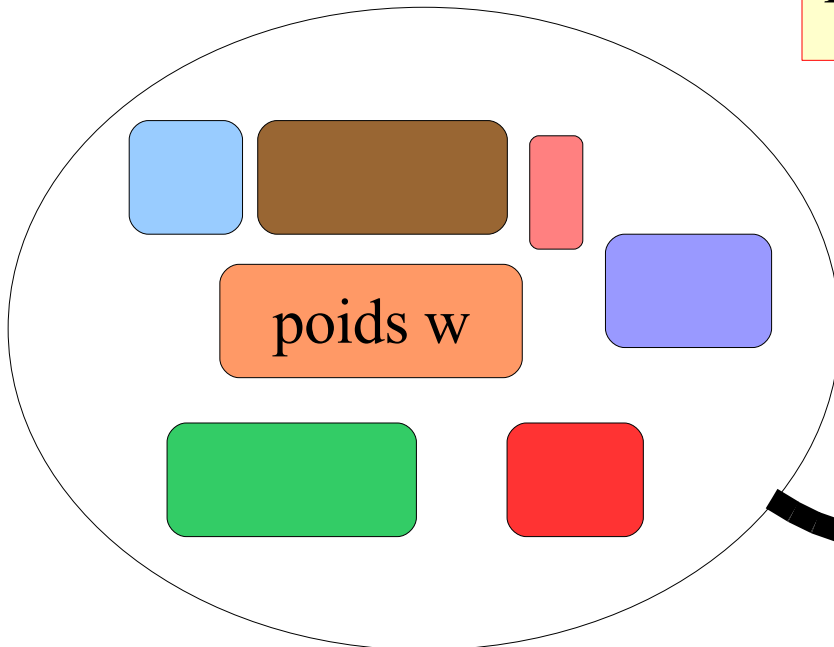
$$P_j = \left\{ x \in N^n \mid \forall S \subseteq I \text{ t.q. } |S| = \Gamma_j, \sum_{i \notin S} \underline{A}_{ji} x_i + \sum_{i \in S} \overline{A}_{ji} x_i \leq b_j \right\}$$

- dérivations d'inégalités valides pour le **cas général**
 - mais en pratique, souvent : faible
- étude spécifique du cas « **uniforme** » :
 - les coefficients $\{\underline{A}_{ji}\}$ sont tous égaux
 - les amplitudes de variations possibles sont toutes égales
 - dérivation d'inégalités valides : **faces propres, facettes**

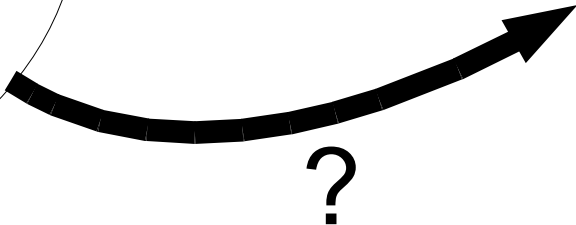
restriction à la programmation 0-1

- polyèdre du **sac-à-dos** : fondamental, puisqu'il représente toute contrainte linéaire d'un problème 0-1

$$K = \left\{ x \in \{0,1\}^n \mid \sum_{i \in I} w_i x_i \leq c \right\}$$



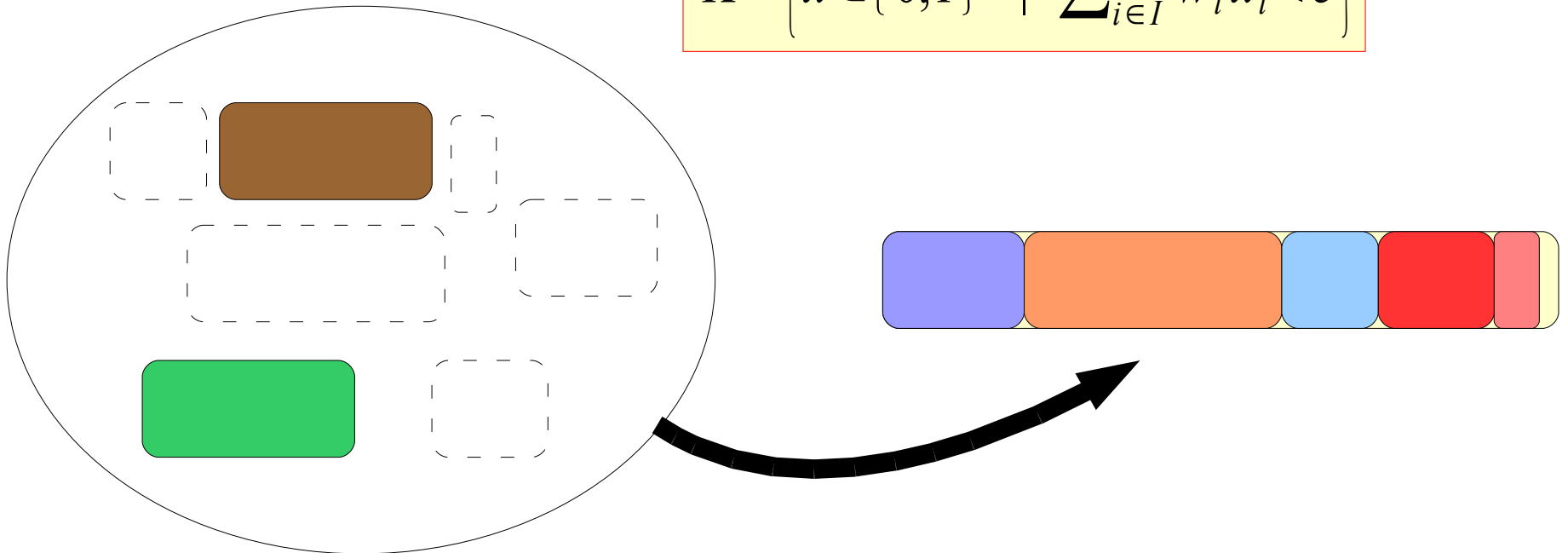
capacité c



restriction à la programmation 0-1

- polyèdre du **sac-à-dos** : fondamental, puisqu'il représente toute contrainte linéaire d'un problème 0-1

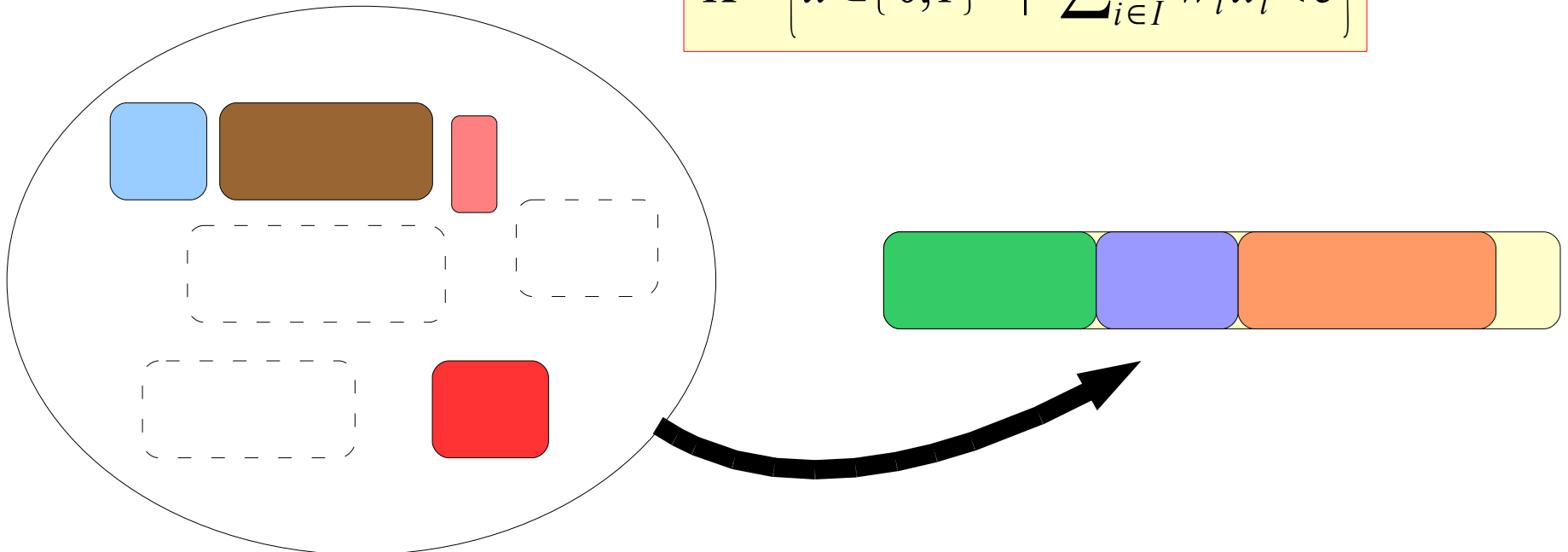
$$K = \left\{ x \in \{0,1\}^n \mid \sum_{i \in I} w_i x_i \leq c \right\}$$



restriction à la programmation 0-1

- polyèdre du **sac-à-dos** : fondamental, puisqu'il représente toute contrainte linéaire d'un problème 0-1

$$K = \left\{ x \in \{0,1\}^n \mid \sum_{i \in I} w_i x_i \leq c \right\}$$



restriction à la programmation 0-1

- polyèdre du **sac-à-dos robuste** : les poids w sont considérés incertains : $w_i \in [\underline{w}_i, \bar{w}_i]$

$$K = \left\{ x \in \{0,1\}^n \mid \forall S \subseteq I \text{ t.q. } |S| = \Gamma, \sum_{i \notin S} \underline{w}_i x_i + \sum_{i \in S} \bar{w}_i x_i \leq c \right\}$$

restriction à la programmation 0-1

- polyèdre du **sac-à-dos robuste** : les poids w sont considérés incertains : $w_i \in [\underline{w}_i, \overline{w}_i]$

$$K = \left\{ x \in \{0,1\}^n \mid \forall S \subseteq I \text{ t.q. } |S| = \Gamma, \sum_{i \notin S} \underline{w}_i x_i + \sum_{i \in S} \overline{w}_i x_i \leq c \right\}$$

- généralisation des concepts classiques de **couverture** et de **couverture étendue**
 - couverture robuste étendue
- les résultats classiques concernant les inégalités de couverture sont spécifiés dans le contexte robuste
 - conditions assurant l'obtention de **facettes**

aspects numériques

- le problème de **séparation** des inégalités de couverture robuste est étudié
 - NP-difficile
 - proposition d'un algorithme glouton
- tests numériques sur des instances de sac-à-dos
 - impact des couvertures robustes similaire à celui des couvertures dans le cas classique

approche robuste pour le sac-à-dos sous contrainte probabiliste

- problème nominal :

$$\begin{array}{ll} \max & px \\ \text{s.c.} & wx \leq c \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

approche robuste pour le sac-à-dos sous contrainte probabiliste

- problème nominal :

$$\begin{array}{ll} \max & px \\ \text{s.c.} & wx \leq c \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

- problème sous **contrainte probabiliste** (CCKP) :

$$\begin{array}{ll} \max & px \\ \text{s.c.} & P(wx \leq c) \geq 1 - \varepsilon \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

approche robuste pour le sac-à-dos sous contrainte probabiliste

- problème nominal :

$$\begin{aligned} \max \quad & px \\ \text{s.c.} \quad & wx \leq c \\ & x \in \{0,1\}^n \end{aligned}$$

- problème sous **contrainte probabiliste** (CCKP) :

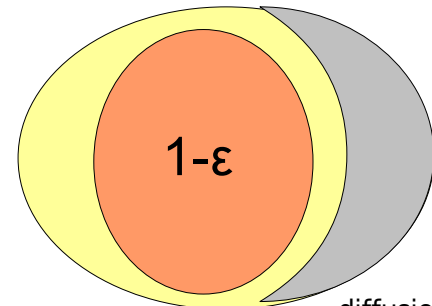
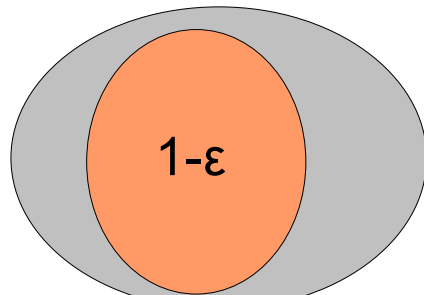
$$\begin{aligned} \max \quad & px \\ \text{s.c.} \quad & P(wx \leq c) \geq 1 - \varepsilon \\ & x \in \{0,1\}^n \end{aligned}$$

- problème **robuste** RKP(Γ) :

$$\begin{aligned} \max \quad & px \\ \text{s.c.} \quad & \sum_{i \notin S} \underline{w}_i x_i + \sum_{i \in S} \bar{w}_i x_i \leq c, \quad \forall S \subseteq I, |S| = \Gamma, \\ & x \in \{0,1\}^n \end{aligned}$$

motivations pour une approche itérative

- Proposition [Bertsimas et Sim, 2004] : Supposons que les v.a. sont indépendantes et symétriquement distribuées sur leurs supports. Si $\Gamma \geq 1/2 \cdot (n + \sqrt{-2n \ln(\varepsilon)})$ alors une solution réalisable de RKP(Γ) est aussi réalisable pour CCKP.
- on peut donc choisir Γ directement à partir de ε
- inconvénient : « trop » robuste

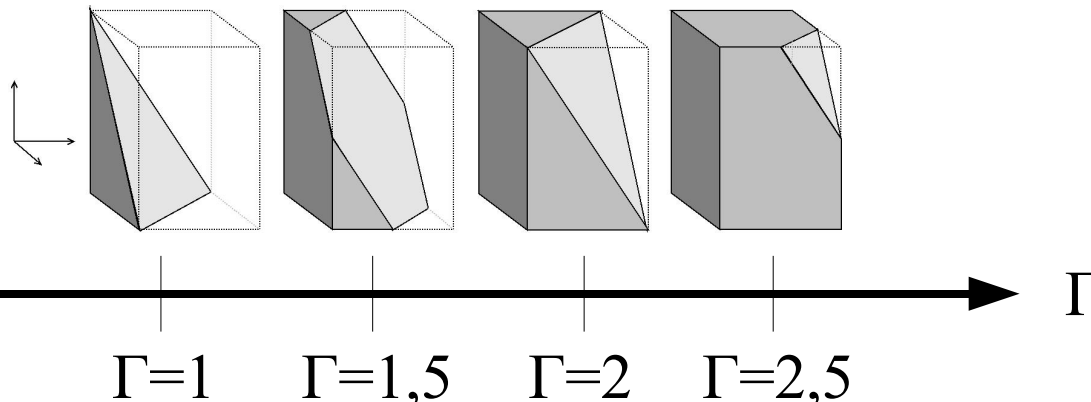
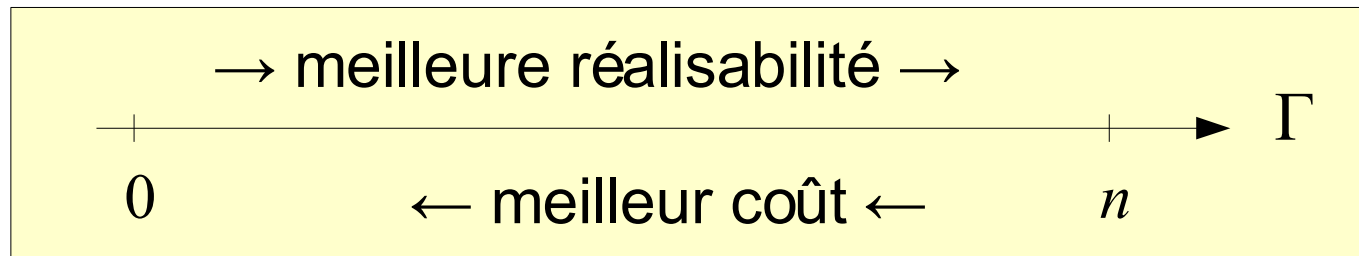


description de l'approche robuste itérative

- démarche :
 - s'appuyer sur le modèle robuste paramétré de B&S
 - faire augmenter le paramètre Γ progressivement
 - résoudre à chaque fois RKP
 - s'arrêter dès que la solution calculée est réalisable

description de l'approche robuste itérative

- démarche :
 - s'appuyer sur le modèle robuste paramétré de B&S
 - faire augmenter le paramètre Γ progressivement
 - résoudre à chaque fois RKP
 - s'arrêter dès que la solution calculée est réalisable



liens théoriques entre RKP et CCKP

- on montre qu'il existe un problème robuste RKP de la famille décrite par le modèle de B&S tel que **toute solution optimale de RKP est optimale pour CCKP**
- on ne sait pas déterminer facilement ce problème robuste en général
- cas particulier : lorsque les poids et les profits sont « **triés en ordre inverse** », alors on sait trouver facilement ce problème

algorithme de résolution de CCKP (1/2)

- algorithme :

1. Soit $\Gamma=0$.
2. Résoudre RKP(Γ), soit $x(\Gamma)$ la solution obtenue.
3. Tester si $x(\Gamma)$ est réalisable pour CCKP :

$$P\left(\sum_{i \in I} w_i x_i \leq c\right) \geq 1 - \varepsilon \quad ?$$

5. Si oui, STOP.
Sinon, « augmenter » Γ et retourner à l'étape 2.

- RKP(Γ) est NP-difficile au sens faible : il existe un algorithme **pseudo-polynomial** pour le résoudre en temps $O(n\Gamma c)$.

algorithme de résolution de CCKP (2/2)

- l'algorithme :
 - converge en temps pseudo-polynomial
 - fournit toujours une solution réalisable à CCKP
 - fournit une solution optimale si les poids et les profits sont « triés en ordre inverse »
- (propriétés qui rappellent celles de l'algorithme glouton usuel dans le cas classique)

généralisation à la programmation en nombres entiers sous contraintes probabilistes

- problème CCILP :

$$\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.c.} & P(Ax \leq b) \geq 1 - \varepsilon \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

généralisation à la programmation en nombres entiers sous contraintes probabilistes

- problème CCILP :

$$\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.c.} & P(Ax \leq b) \geq 1 - \varepsilon \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

- **nouveau problème robuste** RILP paramétré
 - pour toute ligne j : contrainte disjonctive

$$\sum_{i \in I} A_{ji} x_i \leq b_j$$



$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i \in I} \underline{A}_{ji} x_i + cste \leq b_j \\ \text{ou} \\ \sum_{i \in I} \overline{A}_{ji} x_i \leq b_j \end{array} \right.$$

(protection constante)

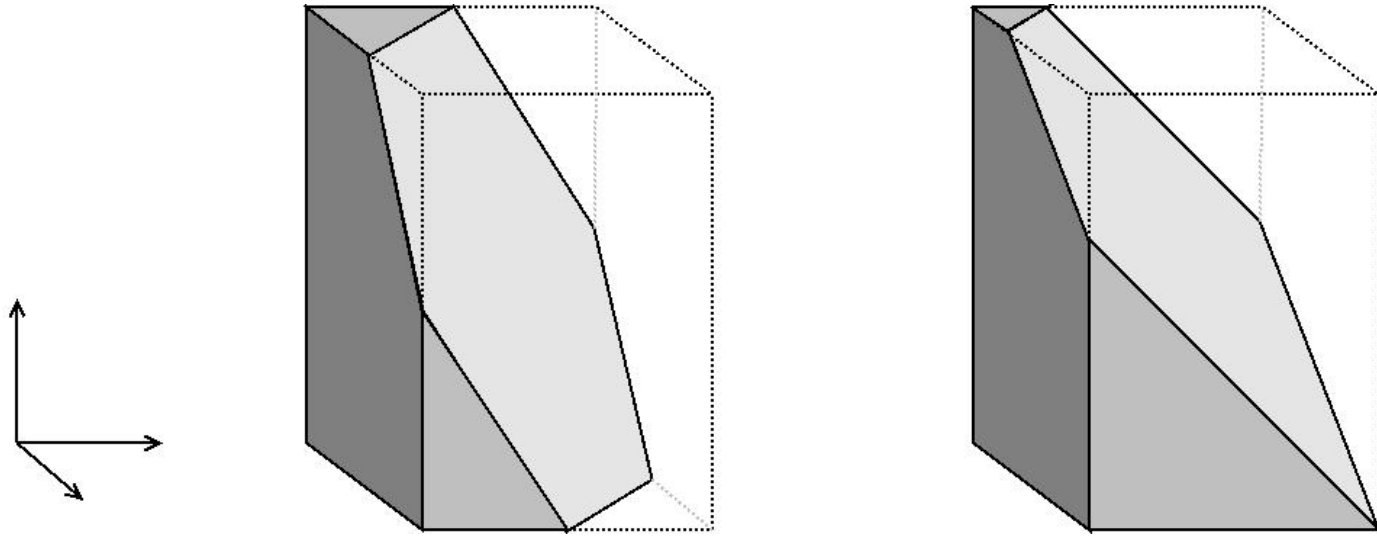
(pire cas)

propriétés du nouveau problème robuste

- on montre qu'il existe un problème robuste RILP de la famille décrite par le nouveau modèle, tel que **toute solution optimale de RKP est optimale pour CCKP**
 - hypothèses plus générales que pour le modèle de B&S
- comme pour B&S, on ne sait pas déterminer facilement ce problème robuste en général, sauf si les poids et les profits sont triés en ordre inverse
- modèle qualitativement très proche de celui de Bertsimas et Sim, mais avec une **complexité améliorée**

illustration : ensembles d'événements

- changement de l'inclinaison de la frontière



Bertsimas et Sim

nouveau modèle

algorithmes et tests numériques

- **approche itérative** similaire à celle déjà explicitée
 - résolution heuristique de chaque problème robuste
- tests numériques sur un grand nombre d'instances de sac-à-dos multi-dimensionnels
 - comparaison très favorable avec l'utilisation itérative du modèle de Bertsimas et Sim : **temps de calcul très réduits**
 - qualité de la solution : correcte, mais assez éloignée quand même de l'optimum

résolution optimale
de problèmes
combinatoires sous
contraintes
probabilistes

problème traité

- programme en nombres 0-1 sous contraintes probabilistes :

$$\begin{array}{ll} \max & cx \\ \text{s.c.} & P(A_j x \leq b_j) \geq 1 - \varepsilon_j \\ & x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

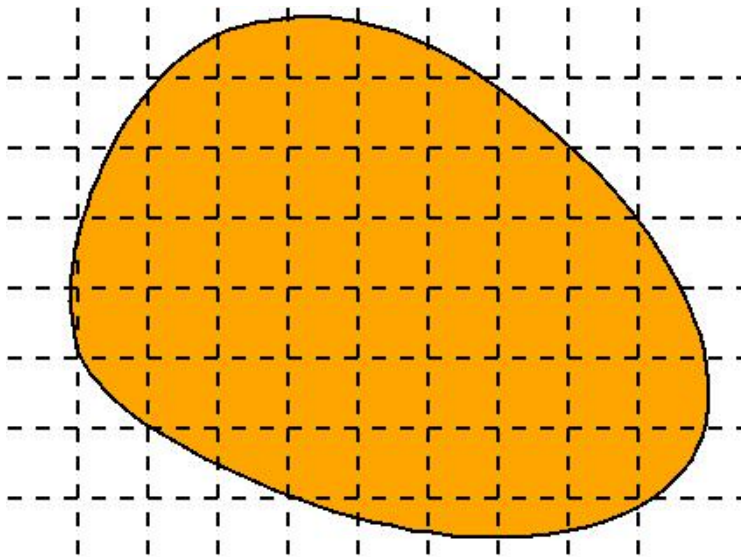
A : matrice de variables aléatoires

- contraintes probabilistes **séparées** par ligne
- on se focalise sur :

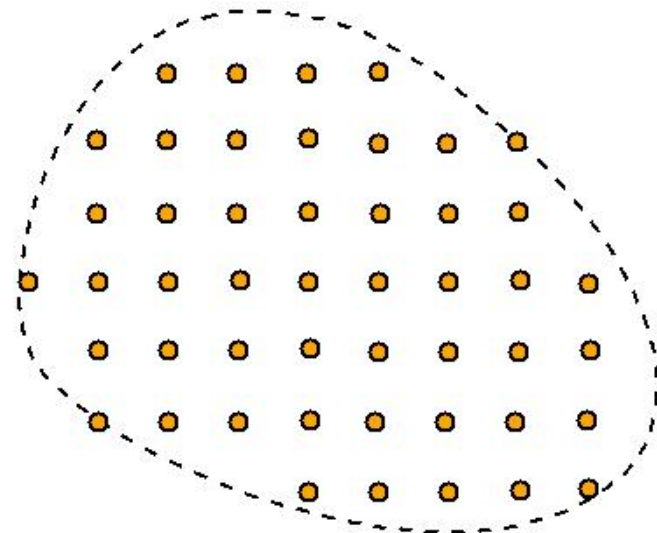
$$X_j = \left\{ x \in \{0,1\}^n \mid P(A_j x \leq b_j) \geq 1 - \varepsilon_j \right\}$$

ce qu'il faut se représenter

- ensemble des solutions :



relaxation continue



solutions entières

scénarios basiques

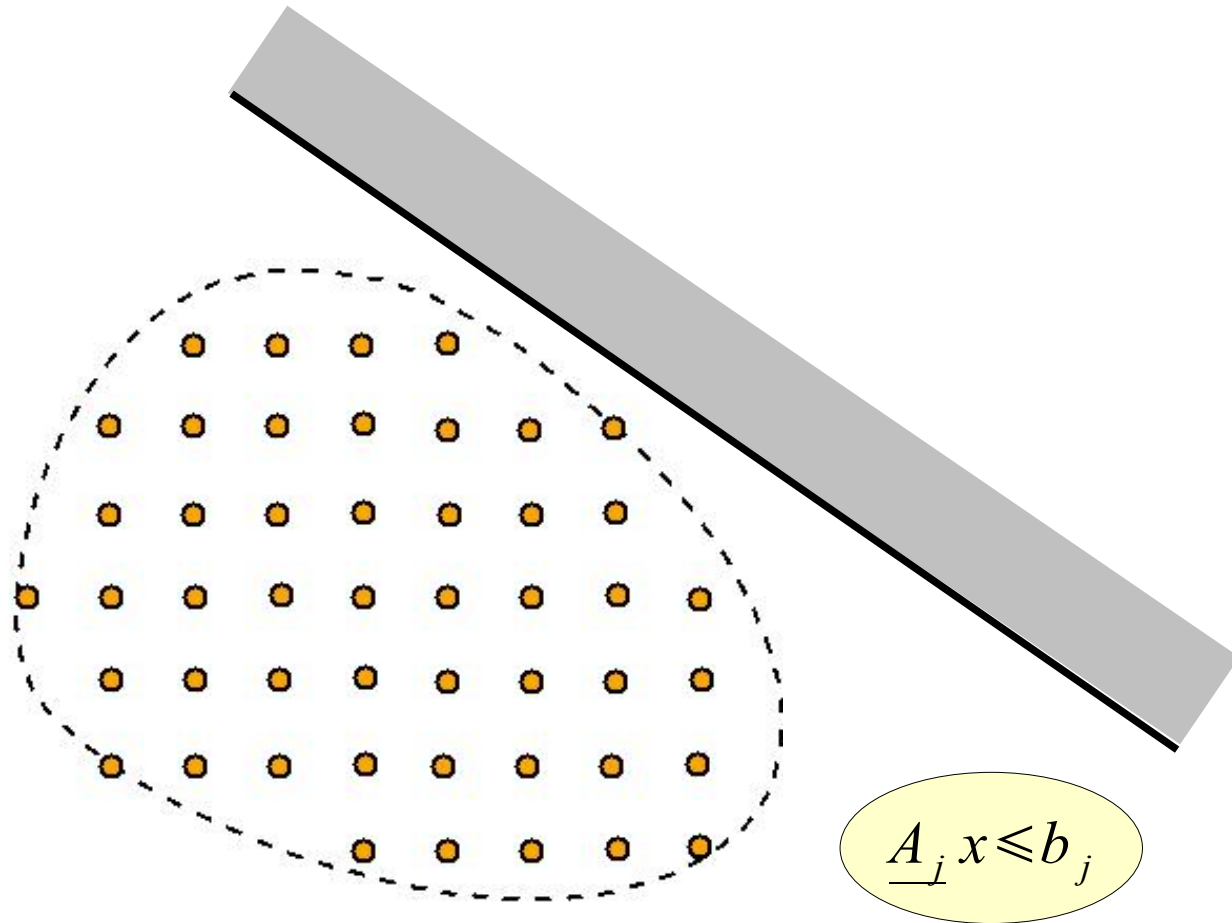
- $\underline{A}_j \in R^n$ est un **scénario basique** si :

$$\forall I_1 \subseteq I, I_1 \neq \emptyset : P\left(\sum_{i \in I_1} (A_{ji} - \underline{A}_{ji}) \leq 0\right) < 1 - \varepsilon_j$$

- un tel scénario existe toujours, et on sait en construire un facilement
- propriété : un scénario basique définit une **inégalité valide** pour X_j :

$$\forall x \in X_j : \underline{A}_j x \leq b_j$$

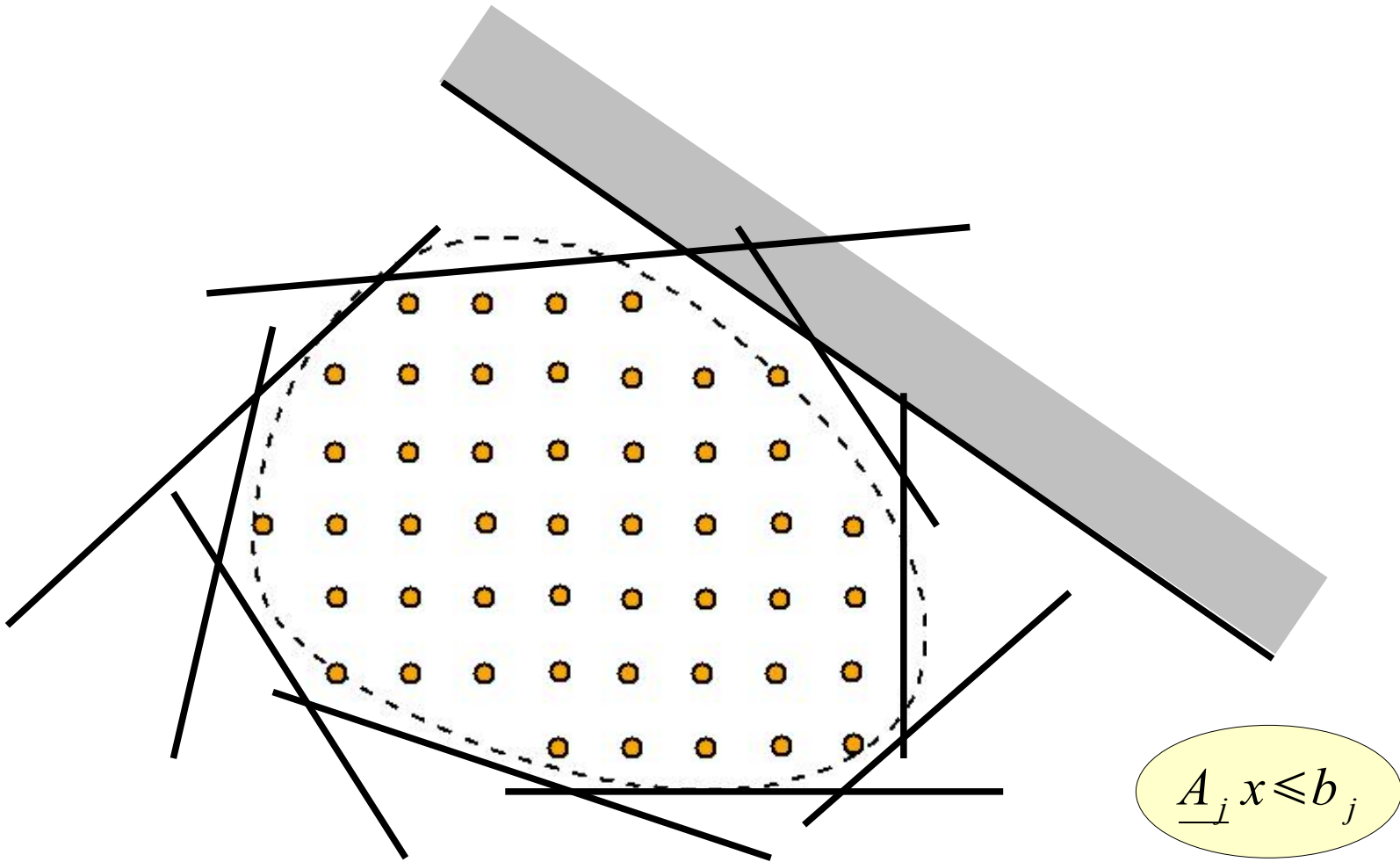
ce qu'il faut se représenter



inégalités valides

- à partir du scénario basique, on donne une **écriture linéaire** de X_j
- les inégalités sont **en nombre exponentiel**
 - en effet, elles traduisent une simple énumération des points 0-1

ce qu'il faut se représenter



impact du scénario basique (1)

- toute la construction repose sur le scénario basique
- ce scénario basique n'est pas unique
 - l'ensemble des scénarios basiques est un **polyèdre**

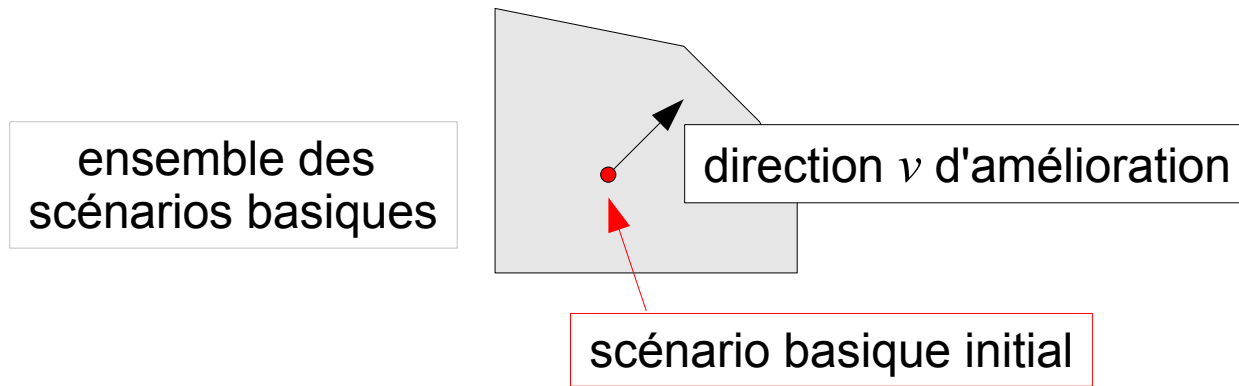
impact du scénario basique (1)

- toute la construction repose sur le scénario basique
- ce scénario basique n'est pas unique
 - l'ensemble des scénarios basiques est un **polyèdre**
- **impact** du scénario basique :

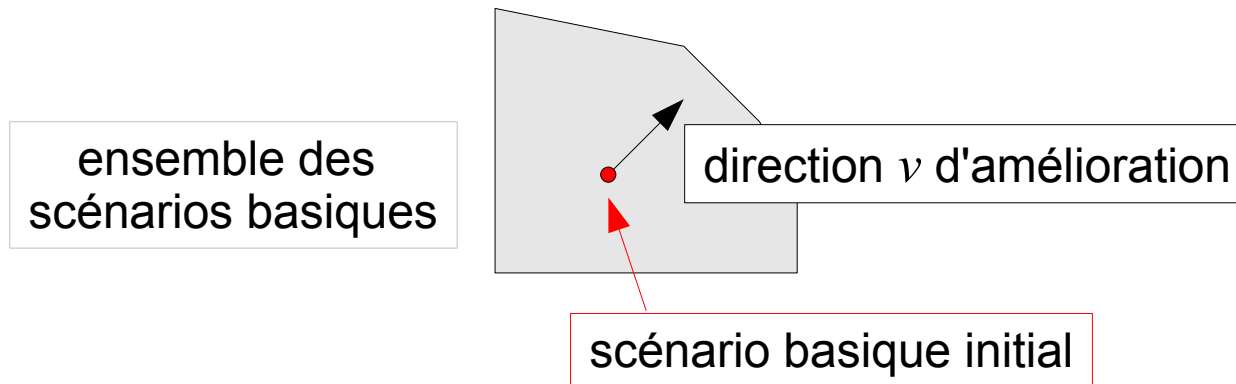
Proposition : Si $\underline{A}_j^1 \leq \underline{A}_j^2$, alors la relaxation associée à \underline{A}_j^2 est plus forte que celle associée à \underline{A}_j^1 .

- on a donc intérêt à avoir un scénario basique aussi grand que possible

impact du scénario basique (2)



impact du scénario basique (2)

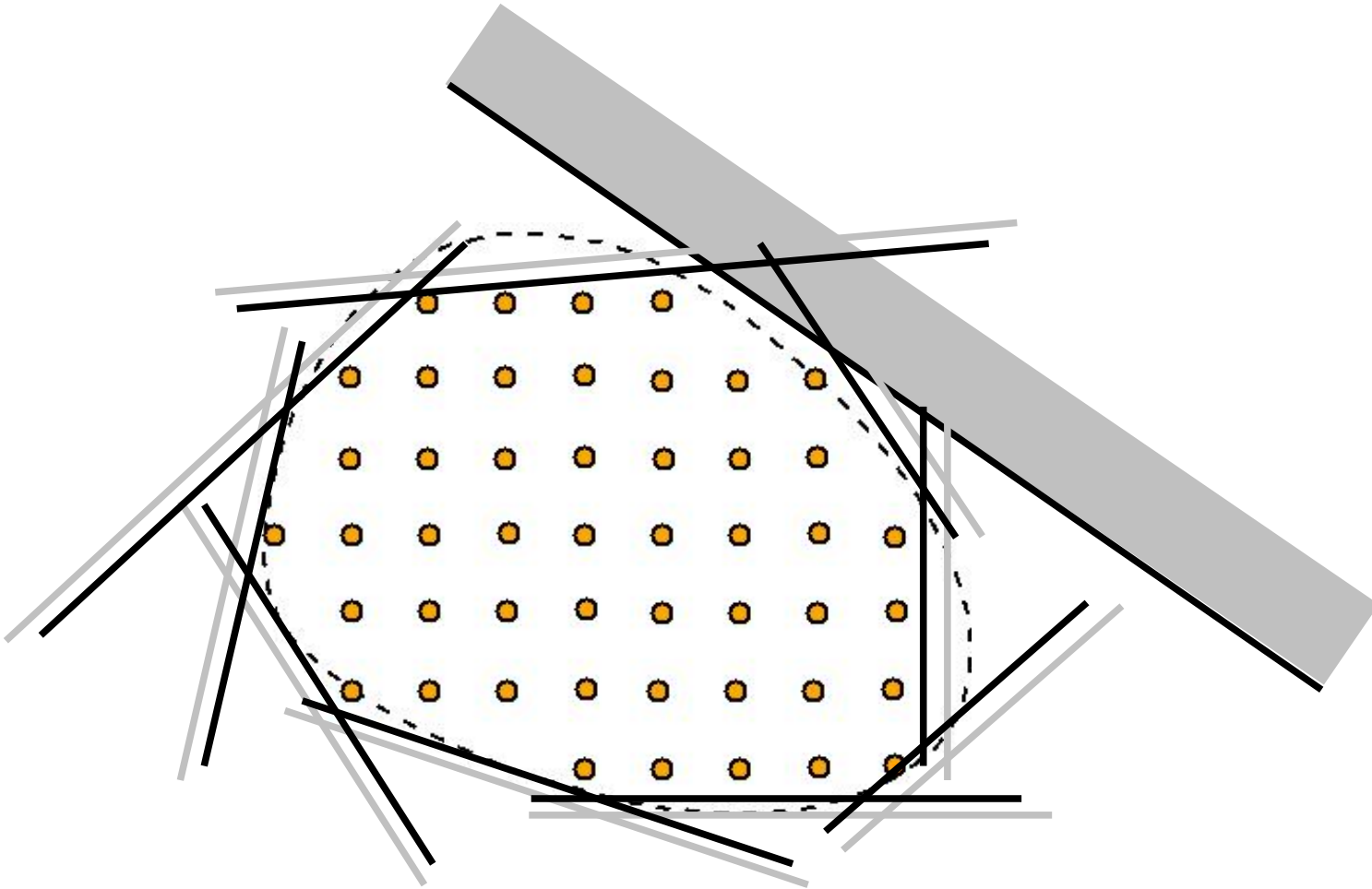


- pour une direction v d'amélioration, on peut augmenter le scénario basique \underline{A}_i :

$$\underline{A}_i \rightarrow \underline{A}_i + \lambda \cdot v$$

- caractérisation de l'augmentation maximale du scénario dans la direction v

ce qu'il faut se représenter



séparation des inégalités linéaires

- on définit un algorithme de type « branch and bound » pour la résolution
- séparation des inégalités linéaires :
 - définition d'un algorithme glouton (heuristique)

séparation des inégalités linéaires

- on définit un algorithme de type « branch and bound » pour la résolution
- séparation des inégalités linéaires :
 - définition d'un algorithme glouton (heuristique)
- plusieurs approches possibles pour le calcul de probabilités :
 - formules analytiques exactes
 - méthodes de Monte-Carlo
 - théorème de la limite centrale
 - ...

tests numériques

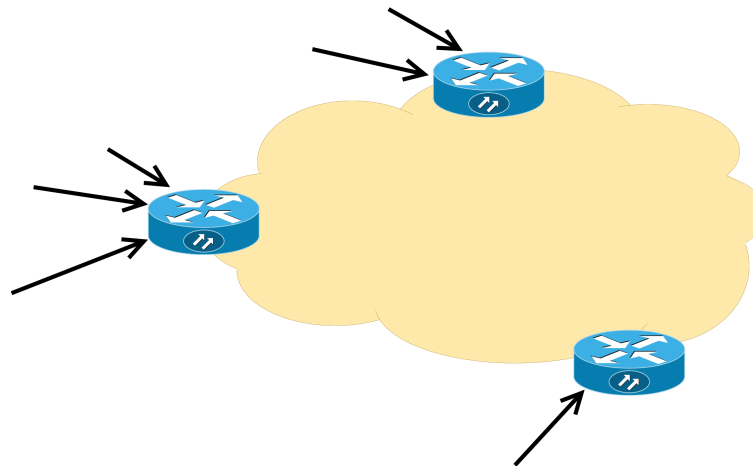
- tests numériques effectués :
 - sur des sac-à-dos multi-dimensionnels
 - sur des instances d'un problème de localisation
- validation de l'intérêt pratique de l'approche :
 - fournit en quelques secondes une solution optimale jusqu'à des **tailles moyennes** d'instance
 - au-delà, fournit des **solutions réalisables de bonne qualité** (quantifiable par une borne)
 - comparaison très favorable avec une approche classique par modèle équivalent déterministe

applications

application 1 : localisation de points de mesure

localisation de points de mesure

- technologie **NetFlow** : description détaillée du trafic (solution Cisco)
- déploiement et utilisation de NetFlow : seulement sur une partie des interfaces du réseau

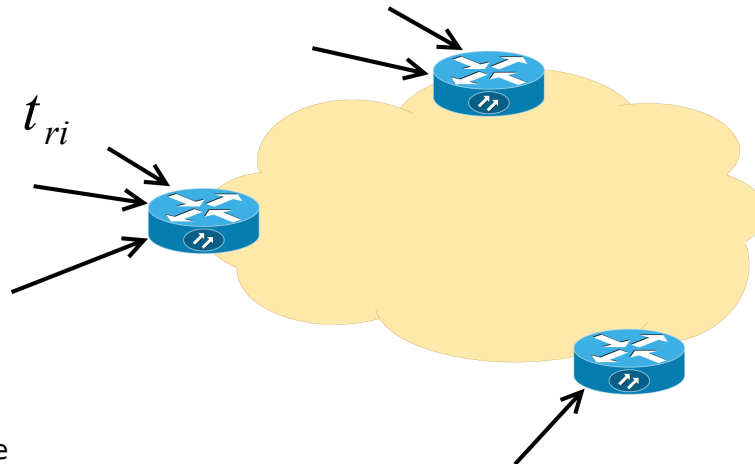


- problème : **comment sélectionner les interfaces ?**

identifier une proportion suffisante du trafic

- on veut identifier une **proportion α du trafic total** :
 - $x_{ri} \in \{0,1\}$: sélection de l'interface i du routeur r
 - t_{ri} : trafic sur l'interface (r,i)

$$\sum_{(r,i) \in RI} t_{ri} x_{ri} \geq \alpha \sum_{(r,i) \in RI} t_{ri}$$

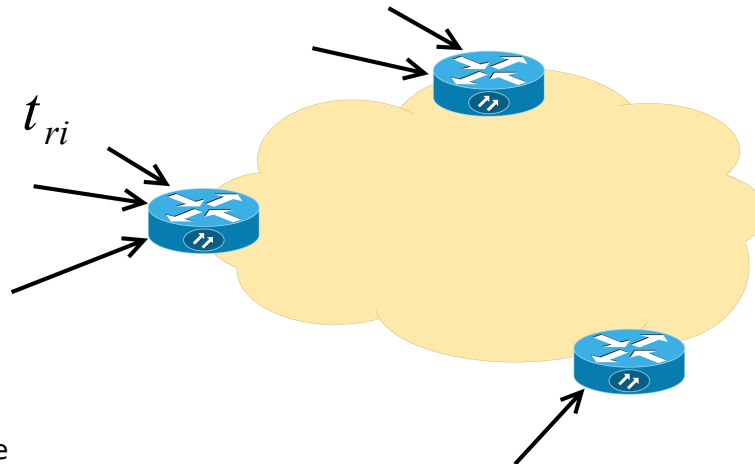


identifier une proportion suffisante du trafic

- on veut identifier une **proportion α** du trafic total :
 - $x_{ri} \in \{0,1\}$: sélection de l'interface i du routeur r
 - t_{ri} : trafic sur l'interface (r,i)

$$\sum_{(r,i) \in RI} t_{ri} x_{ri} \geq \alpha \sum_{(r,i) \in RI} t_{ri}$$

- difficulté : **variabilité** du trafic dans le temps



modélisation du trafic

- on construit une **caractérisation stochastique du trafic** :
 - à partir d'un **historique** de données
 - le trafic t_{ri} sur chaque interface (r,i) est une **variable aléatoire**
- version probabiliste du problème :

$$P\left(\sum_{(r,i)\in RI} t_{ri} x_{ri} \geq \alpha \sum_{(r,i)\in RI} t_{ri}\right) \geq 1 - \varepsilon$$

modélisation du trafic

- on construit une **caractérisation stochastique du trafic** :
 - à partir d'un **historique** de données
 - le trafic t_{ri} sur chaque interface (r,i) est une **variable aléatoire**
- version probabiliste du problème :

$$P\left(\sum_{(r,i)\in RI} t_{ri} x_{ri} \geq \alpha \sum_{(r,i)\in RI} t_{ri}\right) \geq 1 - \varepsilon$$

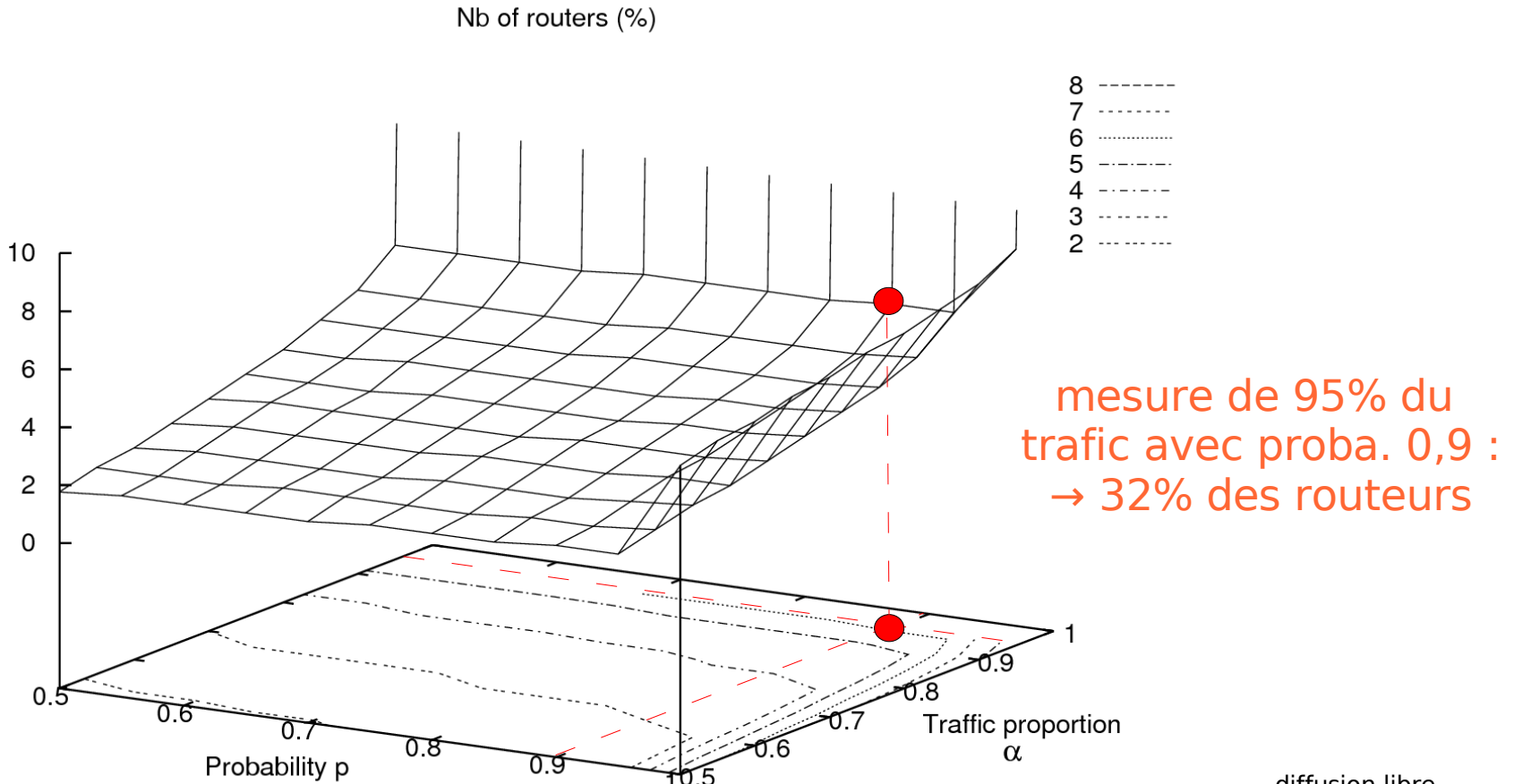
- on suppose n'avoir aucune information sur les trafics autre que les **bornes max, min et la moyenne**
 - pas d'hypothèse sur la distribution
 - recours à l'**inégalité de Hoeffding**

récupération de données

- données collectées sur un réseau IP de FT le 2 octobre 2006 :
 - toutes les 2 heures, on mesure pendant 10 minutes
 - 12 valeurs, dont on déduit les trafics min., max. et moyen pour chaque interface
- 566 interfaces (d'entrée) réparties sur 108 routeurs
- résolution : algorithme itératif basé sur le modèle de Bertsimas et Sim

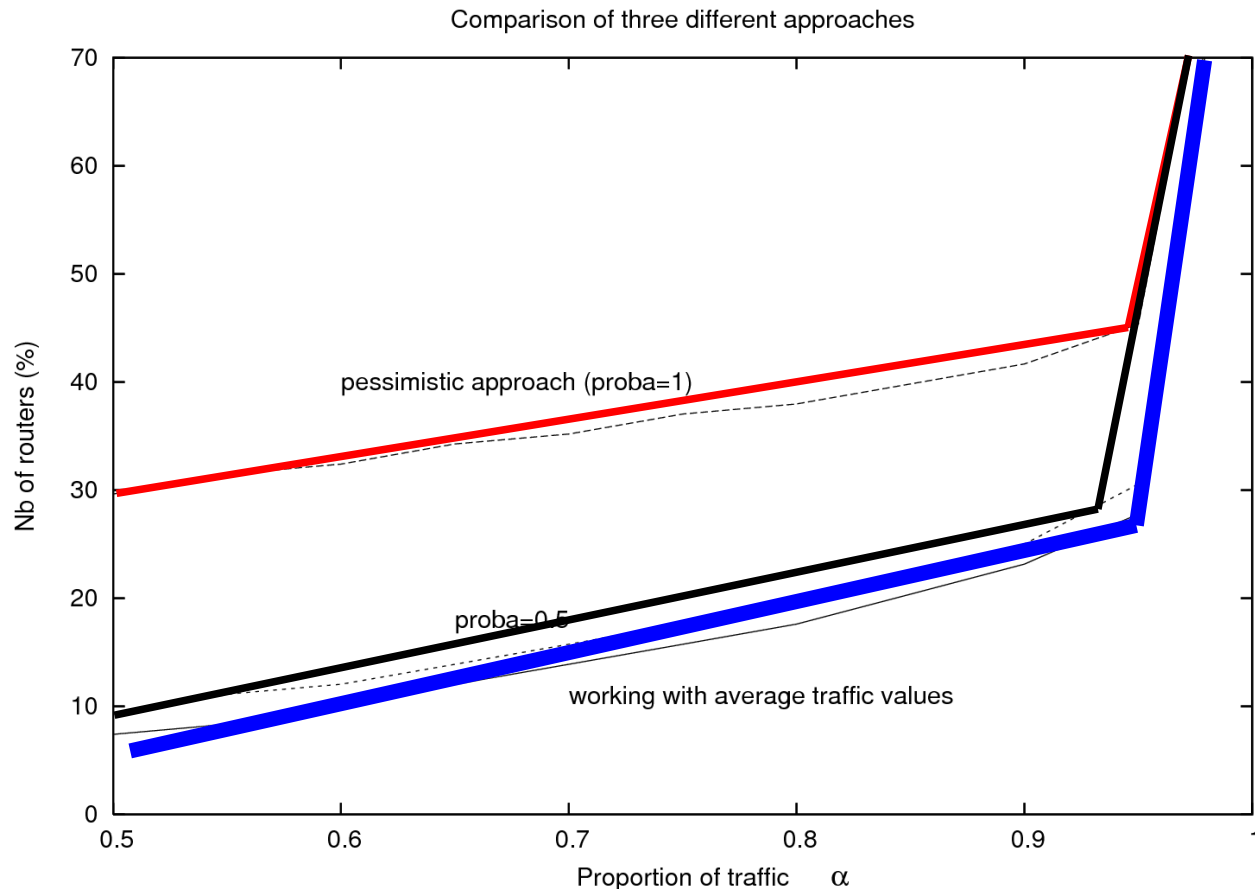
résultats

- objectif : minimiser le nombre de routeurs concernés par l'activation de NetFlow

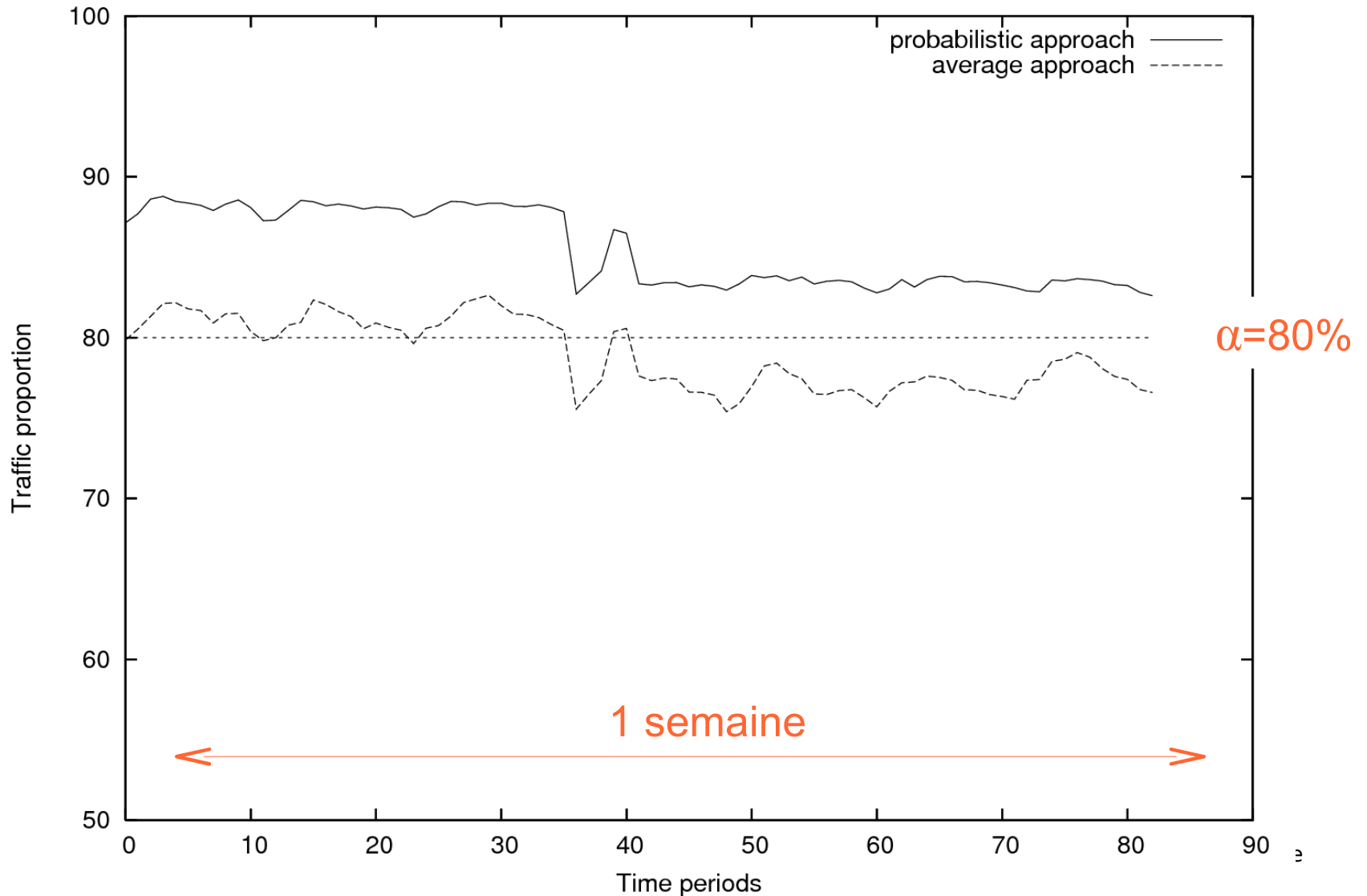


de l'utilisation des valeurs moyennes (1)

- comparaison avec une approche naïve, où on travaille avec les valeurs moyennes de trafic



de l'utilisation des valeurs moyennes (2)

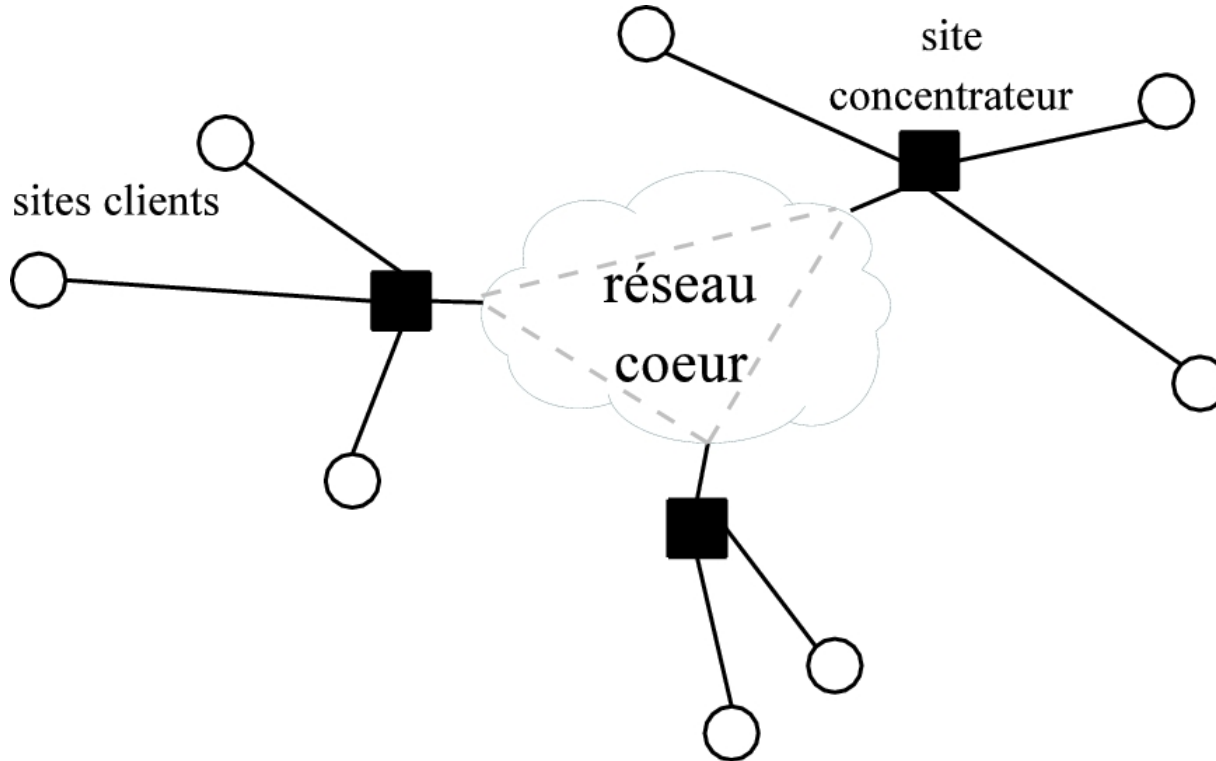


conclusion

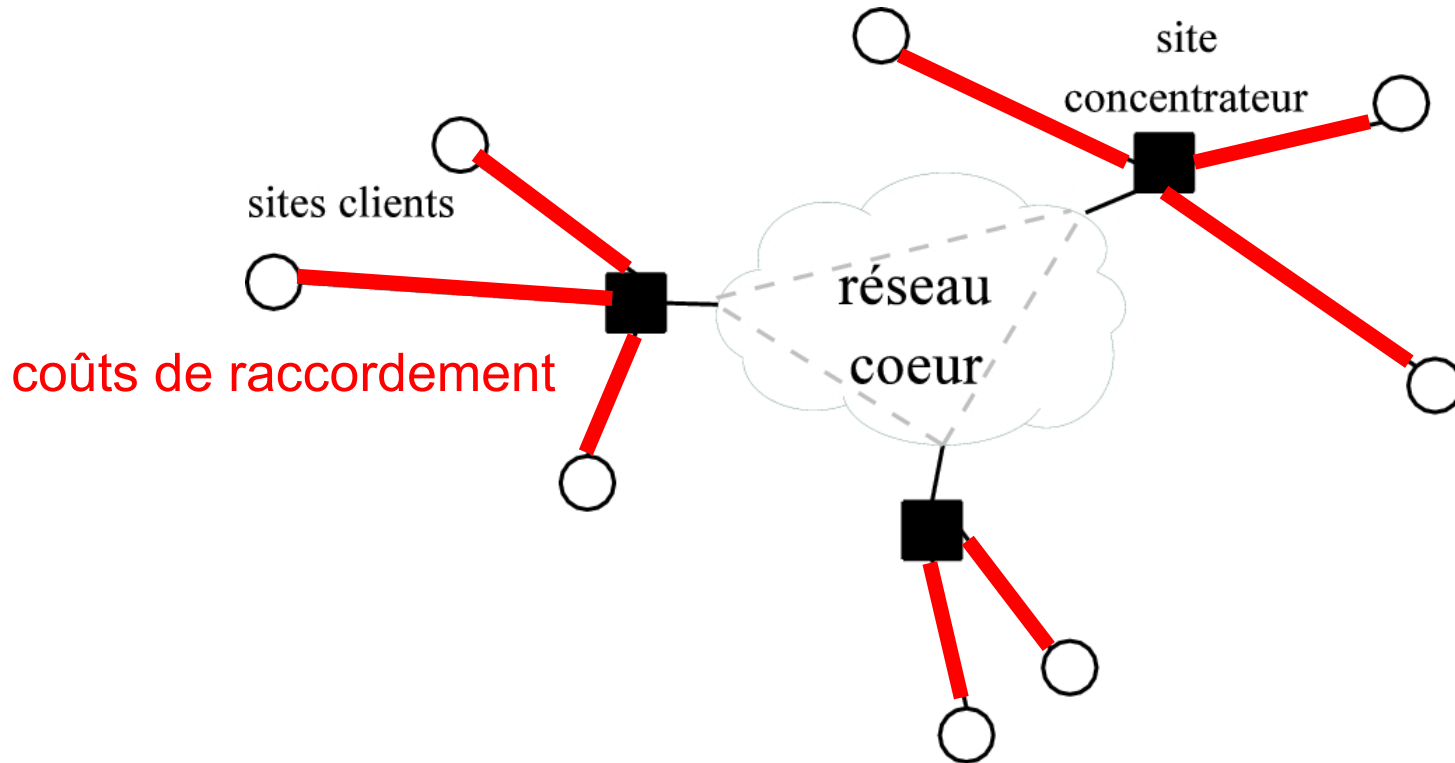
- l'approche itérative fonctionne très efficacement (moins de 15 secondes)
- solution opérationnelle satisfaisante
 - bien meilleur que ce qu'on obtient avec des valeurs moyennes de trafic

application 2 : dimensionnement de réseau d'accès

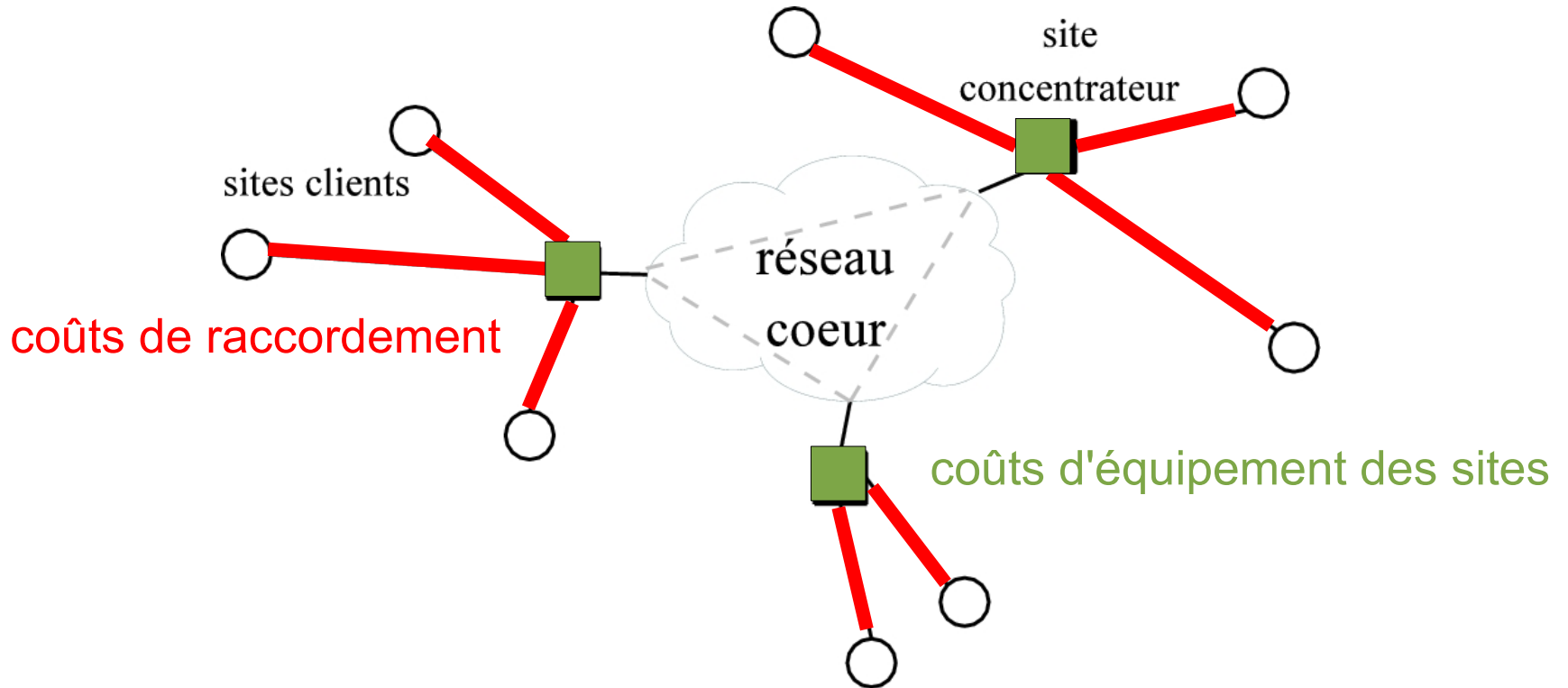
problème étudié



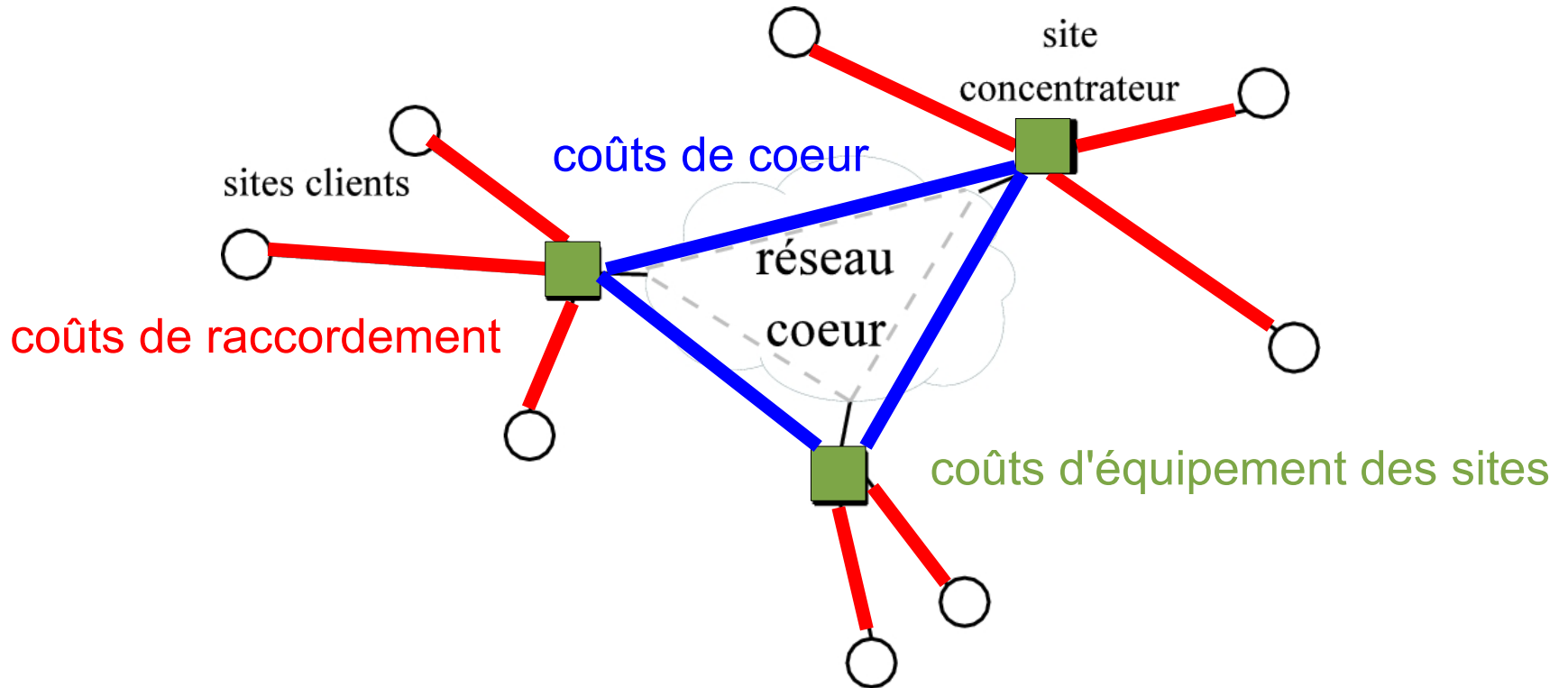
problème étudié



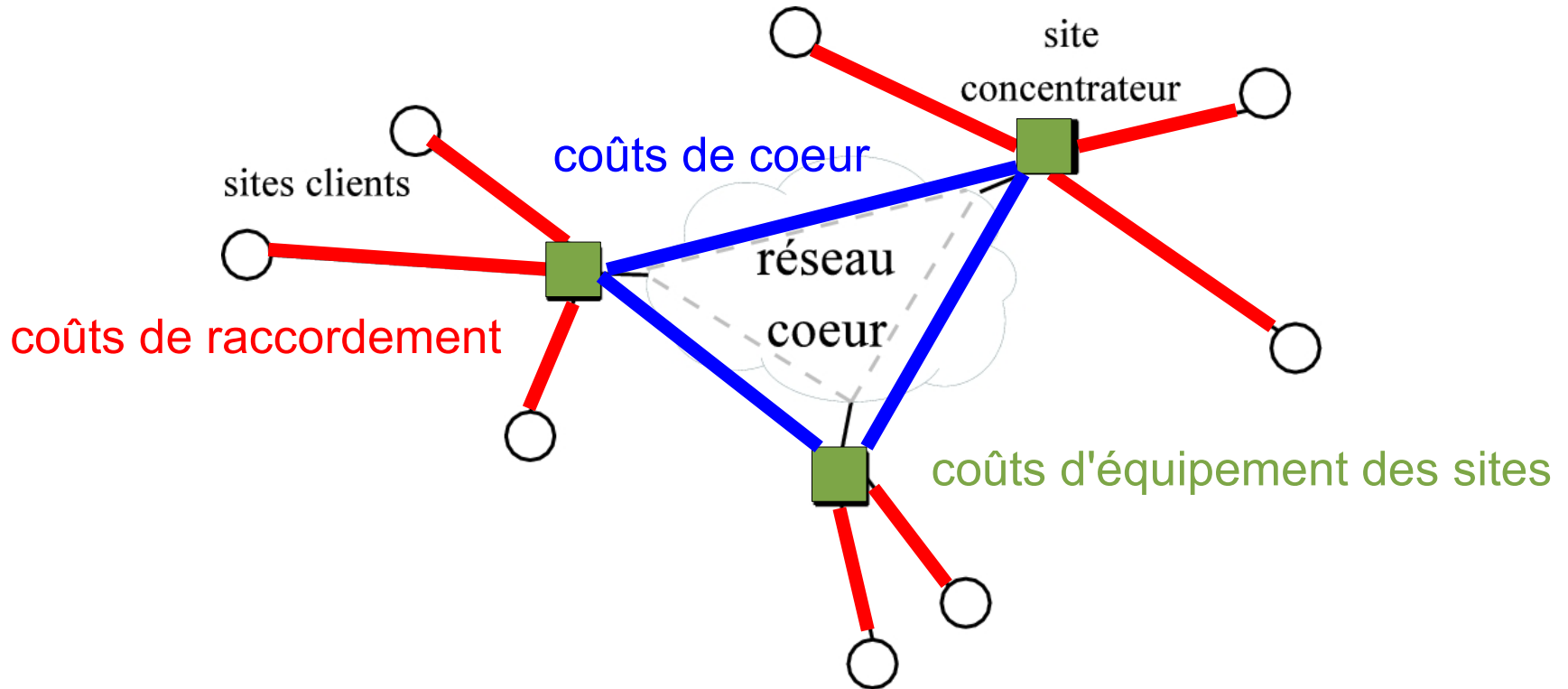
problème étudié



problème étudié

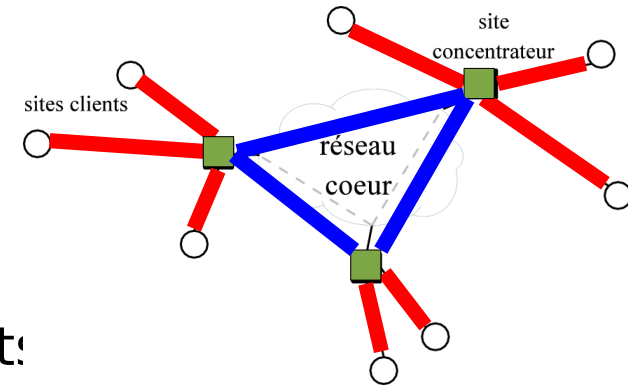


problème étudié



- décision : dimensionnement des sites de concentration
- modèle de type « **localisation de hub** »

modèle



- variables 0-1 (choix des raccordements: (nb de cartes, etc.)
- prévisions de trafics incertaines :
 - modélisations **gaussiennes** (cf théorème de la limite centrale)

- coûts : optimisation en moyenne

$$\min E \left[\sum_{(i,k) \in I^2} A_{ik} x_{ik} + \sum_{k \in I} (c_k^a y_k^a + c_k^b y_k^b) + \sum_{(k,l) \in I^2} B_{kl} z_{kl} \right]$$

- dimensionnement des sites : contraintes probabilistes
 - utilisation du modèle équivalent déterministe classique

aspects algorithmiques

- modèle déterministe initial déjà très dur à résoudre à l'optimum
 - relaxation extrêmement faible
 - donc encore moins d'espoir pour le modèle avec incertitudes
- approche choisie : **recuit simulé**
- taille de l'instance testée :
 - nb de sites clients : 276
 - nb de sites concentrateurs potentiels : 85
 - nb de liens de raccordements possibles : 42556

bilan

- méthodologie qui permet de dimensionner :
 - pour un scénario attendu (moyenne)
 - en tenant compte de possibles variations dans la réalité
- maîtrise de la probabilité de réalisabilité du dimensionnement choisi
- temps de calcul d'environ 30 minutes

conclusions et
perspectives

apports du travail réalisé

- étude théorique et algorithmique du **lien entre optimisation robuste et contraintes probabilistes**
 - approches itératives : simple, souple et très efficace
- **étude polyédrique** du modèle robuste de Bertsimas et Sim, très intéressant en pratique
- nouvelle approche de **résolution optimale** pour les programmes linéaires 0-1 sous contraintes probabilistes
 - concept de scénario basique
- introduction de contraintes probabilistes dans des **applications aux télécommunications**

perspectives

- études polyédriques de problèmes robustes spécifiques
- amélioration des heuristiques robustes itératives
 - algorithmes d'approximation ?
- améliorations de la base algorithmique pour une résolution optimale
 - choix du (des) scénario(s) basique(s), algorithme de séparation des inégalités...
 - extensions pour les nombres entiers généraux ?
- nombreuses études numériques à mener, nombreuses applications
 - contraintes probabilistes : encore rares !

publications

- O. Klopfenstein et D. Nace, A robust approach to the chance-constrained knapsack problem, à paraître dans *Operations Research Letters*
 - O. Klopfenstein, Solving chance-constrained combinatorial problems to optimality, à paraître dans *Computational Optimization and Applications*
 - O. Klopfenstein, Tractable algorithms for chance-constrained combinatorial problems, soumis à *RAIRO-OR*
- M. Bouhtou et O. Klopfenstein, Robust optimization for selecting NetFlow points of measurement in an IP network, actes du congrès Globecom 2007
 - O. Klopfenstein, Access network dimensioning with uncertain trafic forecasts, actes du congrès Networks 2008
 - D. Nace et O. Klopfenstein, The robust flight level assignment problem, actes du congrès ICRAT 2008

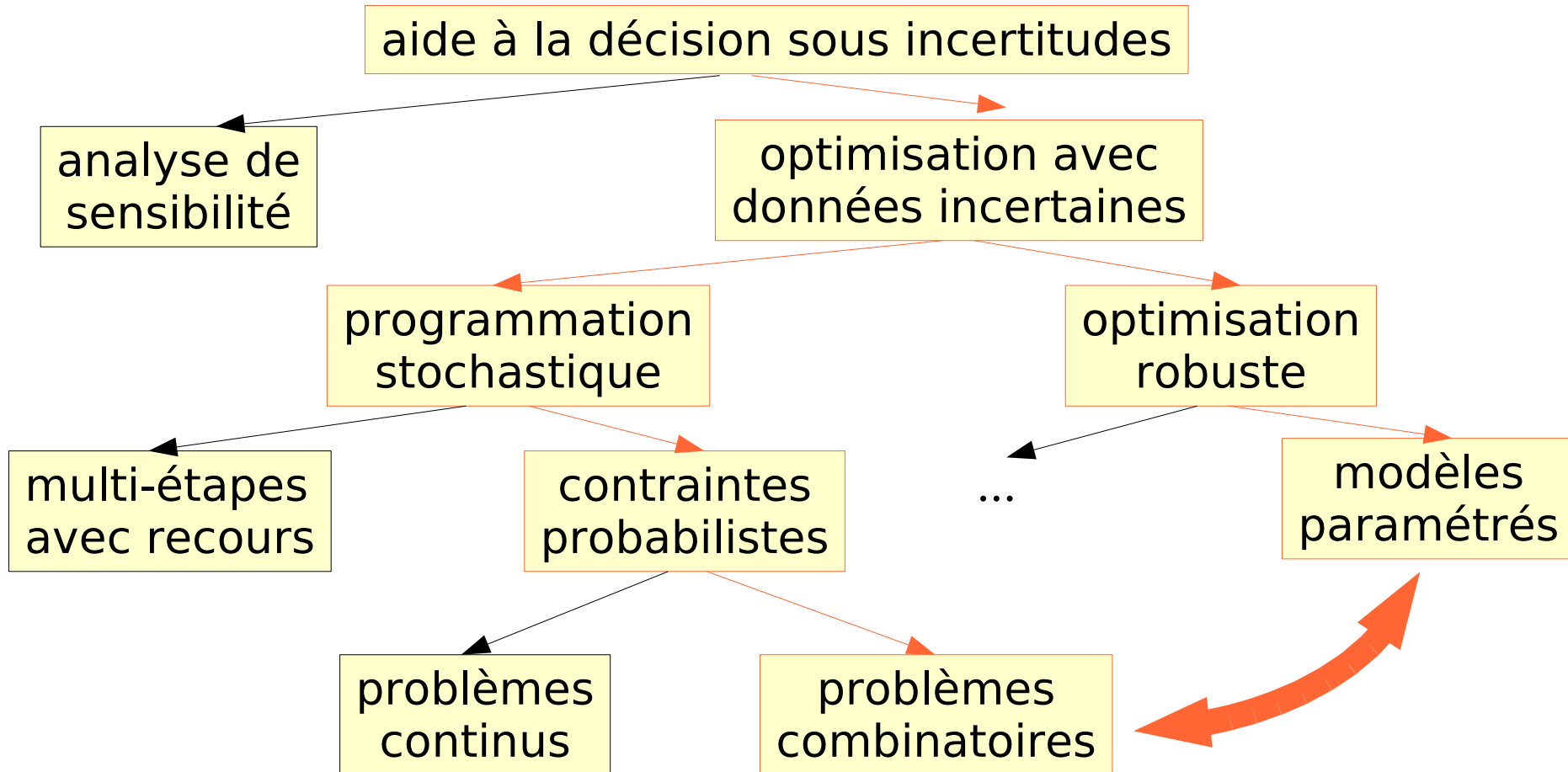
merci





annexes



positionnement et objet principal de la thèse



propriétés de chaque famille de méthodes

	opt. robuste	contraintes probabilistes
prise en compte de proba.	non	oui
résolution		
réalisabilité	100%	$1-\varepsilon$

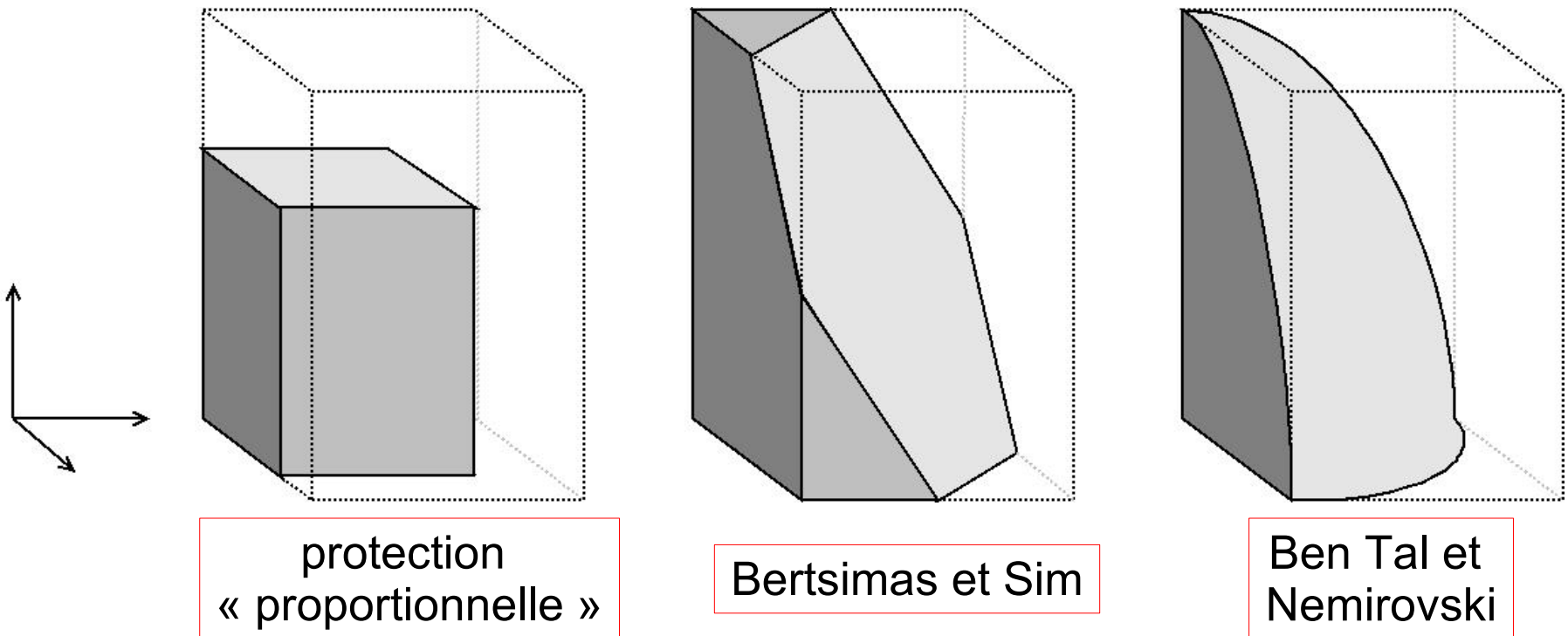
- les contraintes probabilistes sont très pertinentes en pratique
- l'optimisation robuste est plus facile à mettre en oeuvre
- donc on va essayer de tirer parti des avantages de l'optimisation robuste pour traiter des contraintes probabilistes

propriétés d'un ensemble robuste optimal

- Lemme : Supposons que le problème sous contraintes probabilistes a une solution optimale. Alors il existe x' tel que : $F = \{ \omega \mid g(x', \omega) \geq 0 \}$ est une solution optimale de la reformulation robuste.
- indication sur la forme des F ensembles optimaux
- cas de la programmation linéaire : s'intéresser aux ensembles d'événements **polyédriques**

cas de la programmation linéaire

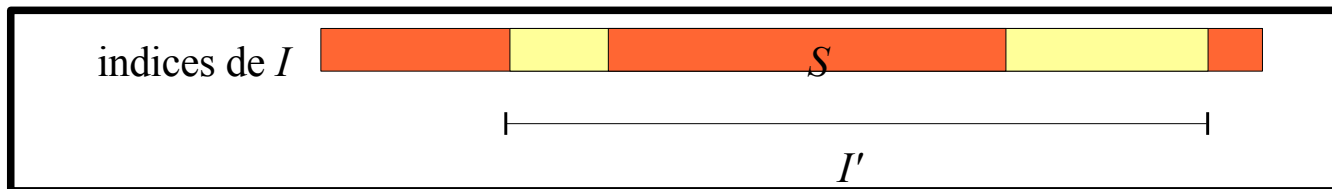
- résultat de Bertsimas, Pachamanova et Sim : relation entre terme de protection et ensemble d'événements



liens théoriques entre RKP et CCKP (1/2)

- on introduit la famille suivante de problèmes robustes, paramétrées par Γ et $I' \subseteq I$:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i \in I} p_i x_i \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in I' \setminus S} \underline{w}_i x_i + \sum_{i \in S} \bar{w}_i x_i + \sum_{i \notin I'} \bar{w}_i x_i \leq c, \quad \forall S \subseteq I' \text{ s.t. } |S| = \Gamma \\ & x \in \{0, 1\}^n. \end{aligned}$$



liens théoriques entre RKP et CCKP (2/2)

- Théorème : Supposons que pour tout i , $\bar{w}_i - \underline{w}_i = \delta > 0$ et que $\{\underline{w}_i / \delta\}_{i \in I}$ et c/δ sont des entiers. Alors il existe $I' \subseteq I$ et Γ tels que toute solution optimale de RKP(I', Γ) est une solution optimale de CCKP.

- Cas particulier « **ordonné** » :

Théorème : Supposons que :

- les poids et les profits sont triés :
- pour tout i , $\bar{w}_i - \underline{w}_i = \delta > 0$
- $\{\underline{w}_i / \delta\}_{i \in I}$ et c/δ sont des entiers
- les v.a. $\{(w_i - \underline{w}_i) / \delta\}_{i \in I}$ sont i.i.d.

Alors il existe Γ tel que toute solution optimale de RKP est optimale pour CCKP.

propriétés du nouveau problème robuste

- on note, pour tout $I' \subseteq I$:

$$\Delta_j(I', \gamma_j, x) = \sum_{i \notin I'} \delta_{ji} x_i + \min \left\{ \sum_{i \in I'} \delta_{ji} x_i, \gamma_j \cdot \sum_{i \in I'} \delta_{ji} \right\}$$

- problème RILP(I', γ)

- Théorème : Il existe $I' \subseteq I$ et $\gamma \in [0, 1]^m$ tels que toute solution optimale de RILP(I', γ) est optimale pour CCILP.

- modèle qualitativement très proche de celui de Bertsimas et Sim, mais avec une **complexité améliorée**

inégalités valides : cas général

- Proposition : On note : $\alpha = \min_{i \in I, \underline{A}_{ji} \neq 0} \frac{\delta_{ji}}{\underline{A}_{ji}}$ ($\alpha > 0$).

(i) Si $\underline{A}_{ji} \in \mathbb{N}^n$ et si $\alpha \leq 1$, alors l'inégalité suivante est valide pour P_j :

$$\sum_{i \in I} \underline{A}_{ji} x_i \leq \left\lfloor \frac{n b_j}{n + \alpha \Gamma_j} \right\rfloor$$

(ii) Si $(-\underline{A}_{ji}) \in \mathbb{N}^n$ et si $\alpha \leq 1$, alors l'inégalité suivante est valide pour P_j :

$$\sum_{i \in I} \underline{A}_{ji} x_i \leq \left\lfloor \frac{n b_j}{n - \alpha \Gamma_j} \right\rfloor$$

cas des coefficients uniformes (1/2)

- inégalités précédentes : très générales... et donc faibles !
- cas particulier : coefficients et variations uniformes

- Théorème : Supposons que $b_j > 0$, et que pour tout i : $A_{ji} = 1$ et $\delta_{ji} = \alpha > 0$. On note : $\bar{x} = \lfloor b_j / (n + \alpha \Gamma_j) \rfloor$, $\Delta = (n + \alpha \Gamma_j) \bar{x} - b_j$, et :

$$Q = \begin{cases} \lfloor \Delta \rfloor & \text{si } \Delta \leq n - \Gamma_j \\ \left\lfloor \frac{\Delta + \alpha(n - \Gamma_j)}{1 + \alpha} \right\rfloor & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors l'inégalité $\sum_{i \in I} x_i \leq n \bar{x} - Q$ définit une face propre de P_j . C'est une facette si $Q \notin \{0, n\}$.

généralisation à la programmation en nombres entiers sous contraintes probabilistes

- problème CCILP :

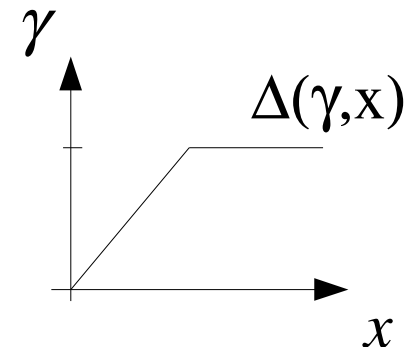
$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ \text{s.c.} \quad & P(Ax \leq b) \geq 1 - \varepsilon \\ & x \in \{0,1\}^n \end{aligned}$$

- **nouveau problème robuste** RILP paramétré par $\gamma \in [0,1]^m$
 - pour toute ligne j :

$$\underline{A}_j \cdot x + \Delta_j(\gamma_j, x) \leq b_j$$

avec le terme de protection :

$$\Delta_j(\gamma_j, x) = \min \left\{ \sum_{i \in I} \delta_{ji} x_i, \gamma_j \cdot \sum_{i \in I} \delta_{ji} \right\}$$



diffusion libre

cas des coefficients uniformes (2/2)

- ce résultat s'applique aux cas où les coefficients sont strictement positifs
- on donne le même type de résultats pour les cas :
 - des coefficients strictement négatifs
 - des coefficients nuls

hypothèses stochastiques

- on suppose que tous les trafics sont indépendants.
 - pas forcément réalisé en pratique
 - on vérifiera a posteriori que l'approche est pertinente
- on suppose n'avoir aucune information sur les trafics autre que les bornes max, min et la moyenne.
 - pas d'hypothèse sur la distribution
 - inégalité de Hoeffding :

$$P\left(\sum_{(r,i)} t_{ri} x_{ri} \geq \alpha \sum_{(r,i)} t_{ri}\right) \geq 1 - \exp\left(\frac{2 E[T]^2}{\sum_{(r,i)} (\alpha - x_{ri})^2 \delta_{ri}^2}\right)$$

un cas particulier

- cas particulier : lorsque les $\{A_{ji} - \underline{A}_{ji}\}_{i \in I}$ sont indépendantes et identiquement distribuées
- exemple : $A_{ji} = \mu_{ji} + \varphi$, où $\mu_{ji} \in \mathbb{R}$ et φ est une v.a.
- dans ce cas :
 - il suffit de pré-calculer n coefficients $D_j(I_1)$ pour tous les avoir,
 - on sait **séparer en temps polynomial** les inégalités linéaires,
 - le scénario basique est augmenté en temps polynomial en un scénario non-dominé.
- généralisation possible quand les $\{A_{ji} - \underline{A}_{ji}\}_{i \in I}$ sont indépendantes et suivent un petit nombre de lois

modèle probabiliste

- garantie probabiliste site par site :

$$\forall k \in I: \begin{cases} P\left(N_a y_k^a \geq \sum_{i \in I} \max\left\{\left\lceil \sum_{i \in I} t_{ij} / K_a \right\rceil, \left\lceil \sum_{i \in I} t_{ji} / K_a \right\rceil\right\} \cdot x_{ik}\right) \geq 1 - \varepsilon_a \\ P\left(K_b r_k \geq \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in I} t_{ij} [1 - x_{jk}]\right) \cdot x_{ik}\right) \geq 1 - \varepsilon_b \\ P\left(K_b r_k \geq \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in I} t_{ji} [1 - x_{jk}]\right) \cdot x_{ik}\right) \geq 1 - \varepsilon_b \end{cases}$$

- nouvelle variable aléatoire

– nb de ports requis en accès pour le client i

$$s_i = \max\left\{\left\lceil \sum_{i \in I} t_{ij} / K_a \right\rceil, \left\lceil \sum_{i \in I} t_{ji} / K_a \right\rceil\right\}$$

modèle déterministe équivalent

- si on suppose les trafics **stochastiquement indépendants** :

- trafic t_{ij} de moyenne μ_{ij} et de variance σ_{ij}^2
- exemple de contrainte déterministe équivalente :

$$K_b r_k \geq \sum_{(i,j) \in I^2} \mu_{ij} [1 - x_{jk}] x_{ik} + \Phi^{-1}(1 - \varepsilon_b) \cdot \sqrt{\sum_{(i,j) \in I^2} \sigma_{ij}^2 (1 - x_{jk}) x_{ik}}$$

- **corrélations** : deux approches possibles

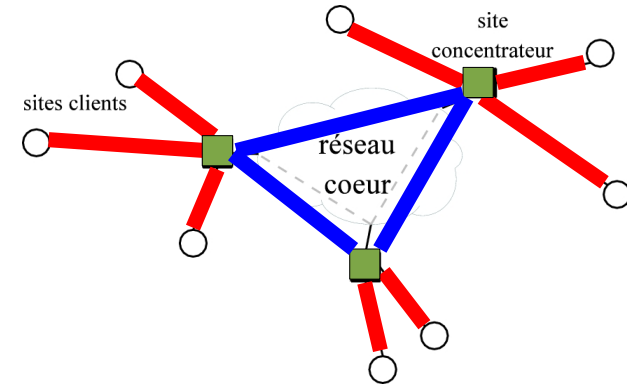
- covariances connues : équivalent déterministe encore possible
- corrélations fortes : $\forall (i, j) \in I^2, t_{ij} = \mu_{ij} + \sigma_{ij} \cdot \varphi$

passage aux trafics stochastiques (1)

- prévisions : trafic = scalaire
- hypothèse : ces prévisions sont optimistes
 - prévision = valeur maximale du trafic : \bar{t}_{ij}
- remplacement par des distributions gaussiennes
 - caractérisées par la moyenne du trafic : $\mu_{ij} = \alpha \cdot \bar{t}_{ij}$
 - variance choisie de telle sorte que la proba. $P(t_{ij} \geq \bar{t}_{ij})$ soit « très faible » :

$$\sigma_{ij} = (\bar{t}_{ij} - \mu_{ij}) / 3$$

modèle



variables :

raccordement du client i au site k : $x_{ik} \in \{0,1\}$
site k , nb de cartes côté accès : $y_k^a \in \mathbb{N}$
site k , nb de cartes côté coeur : $y_k^b \in \mathbb{N}$
trafic entre les sites k et l : $z_{kl} \geq 0$

objectif :

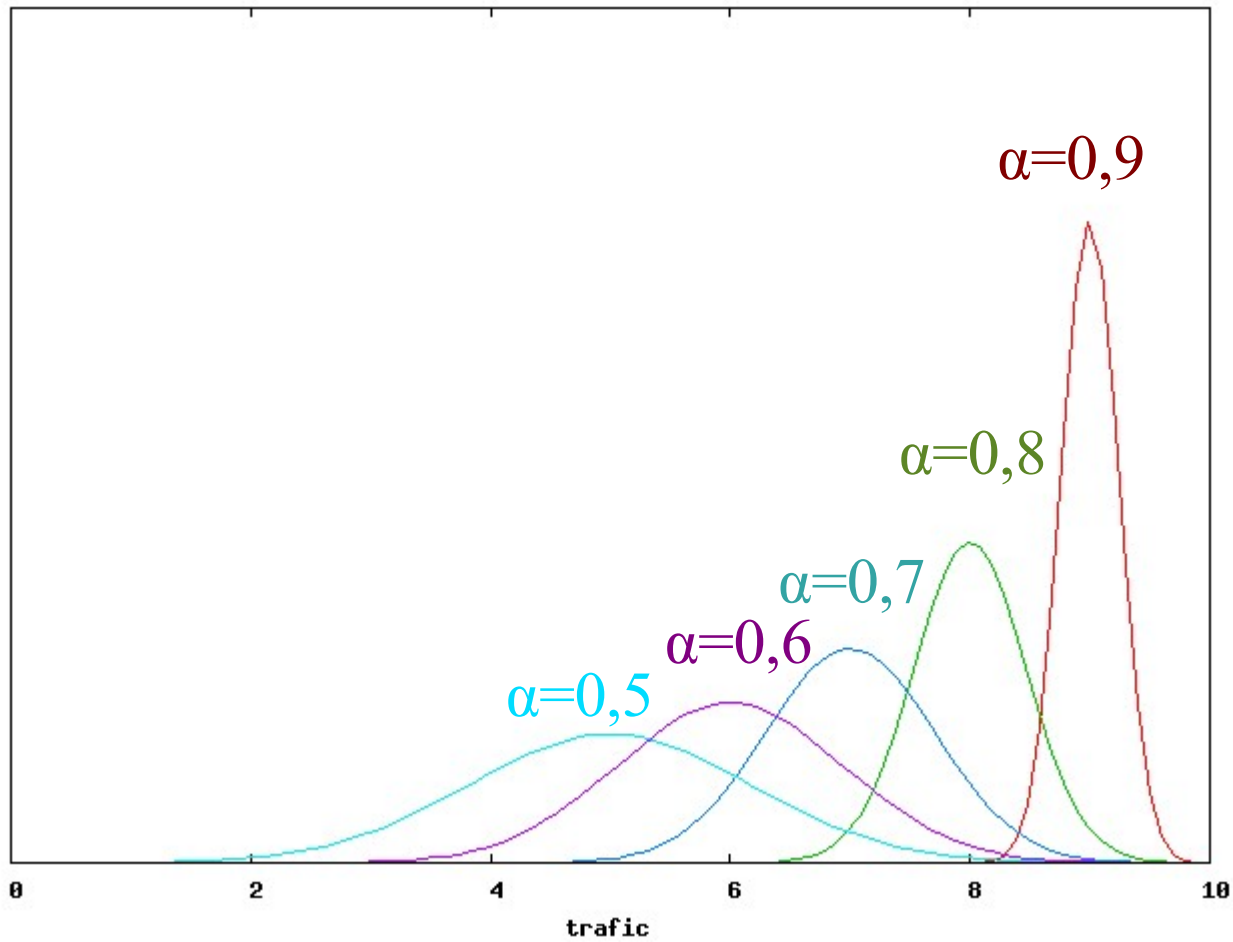
$$\text{minimiser : } \sum_{(i,k) \in I^2} A_{ik} x_{ik} + \sum_{k \in I} (c_k^a y_k^a + c_k^b y_k^b) + \sum_{(k,l) \in I^2} B_{kl} z_{kl}$$

raccordement

site de concentration

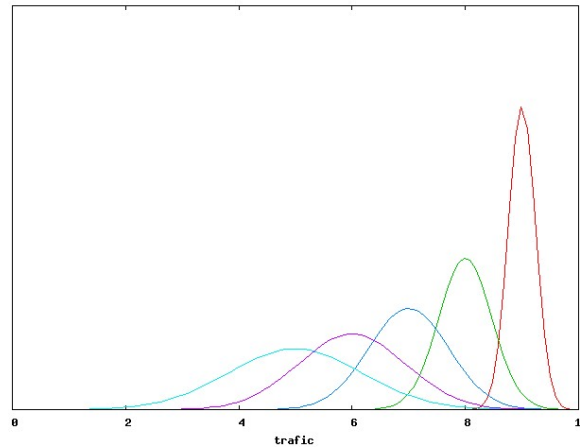
coûts de coeur

passage aux trafics stochastiques (2)



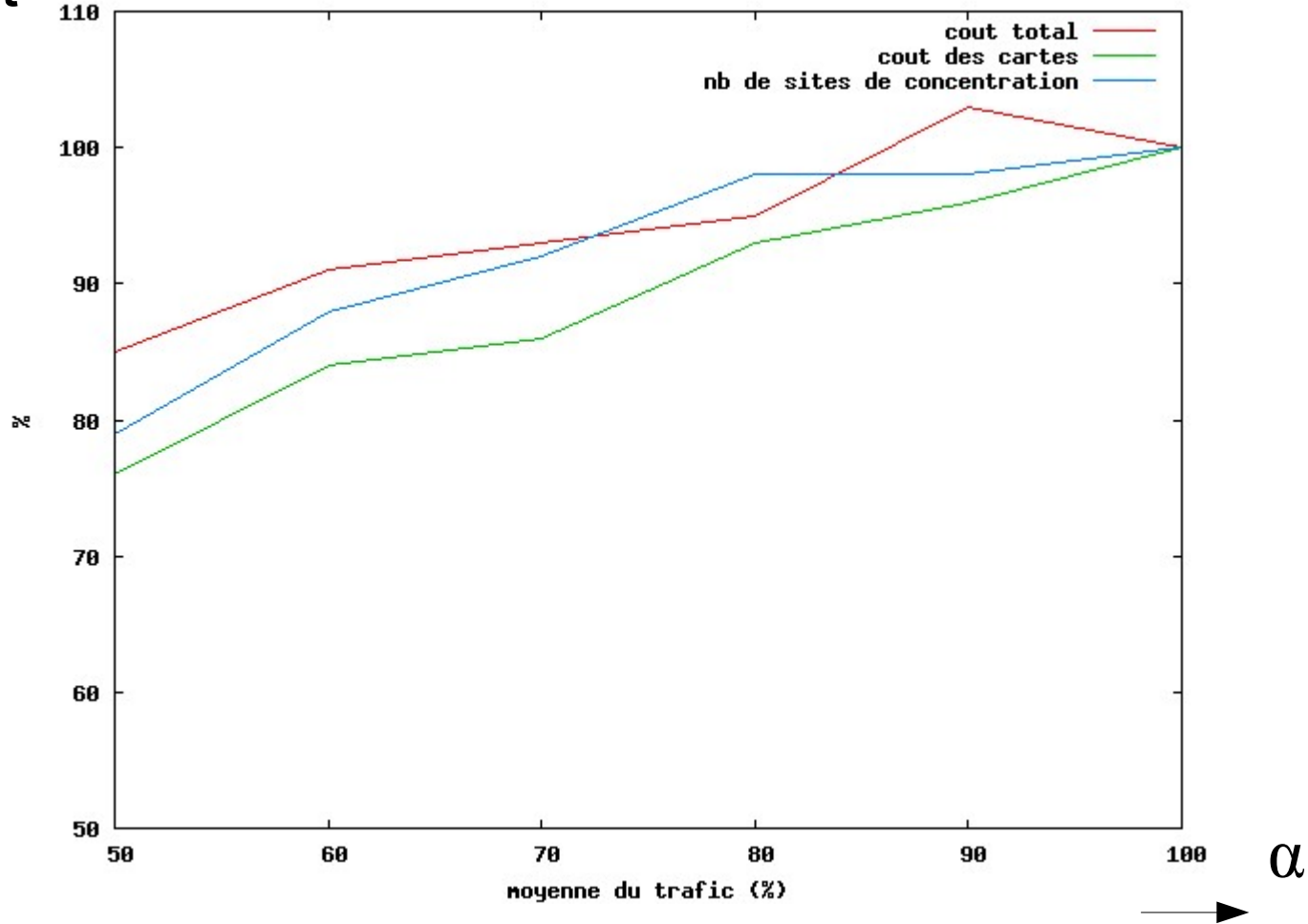
description des données (1)

- taille de l'instance testée :
 - nb de sites clients : 276
 - nb de sites concentrateurs potentiels : 85
 - nb de liens de raccordements possibles : 42556
- modélisation de l'incertitude :
 - les prévisions de trafic (scalaires) sont **optimistes** = valeur maximale attendue
 - on remplace les prévisions scalaires par des gaussiennes
 - paramètre ajustable : valeur moyenne du trafic



résultats avec $\varepsilon=0,1$

coût



α

diffusion libre