

UN SYSTÈME DYNAMIQUE D'ORDRE RÉDUIT BASÉ SUR UNE APPROCHE APR-POD POUR L'ÉTUDE DE L'INTERACTION ÉCOULEMENT TURBULENT-PARTICULES

N. Verdon

Université de La Rochelle, LEPTAB
Directeur de thèse : A. Hamdouni
Encadrant : C. Allery

Mercredi 19 décembre 2007

CONTEXTE DE L'ÉTUDE

- ▶ Contrôle actif de la qualité de l'air intérieur : dispersion de particules
 - ▶ Approche Lagrangienne \implies nécessite la connaissance de la vitesse du fluide à chaque pas de temps
 - ▶ DNS et LES : méthodes coûteuses
- ▶ Modèles d'ordre réduit : construction d'une base de l'écoulement
- ▶ **POD (Proper Orthogonal Decomposition)**
 - ▶ Base physique obtenue par des échantillonnages de l'écoulement
 - ▶ Problème : plus valide si les paramètres de contrôle changent
- ▶ **Méthode APR (A Priori Reduction)**
 - ▶ Méthode itérative : la base est améliorée à chaque itération

PLAN DE L'EXPOSÉ

- ▶ Approche POD-Système dynamique pour la dispersion de particules
- ▶ Approche APR-Système dynamique pour des équations modèles
- ▶ Résolution des équations de Navier-Stokes avec l'approche APR
- ▶ Conclusions

DÉCOMPOSITION ORTHOGONALE AUX VALEURS PROPRES

- ▶ Réduction de données : $u(x, t) = \sum_{k=1}^N a_k(t) \varphi_k(x)$ au sens de $L^2(\Omega)$
- ▶ On cherche la fonction ϕ qui représente le mieux le champ \mathbf{U} :

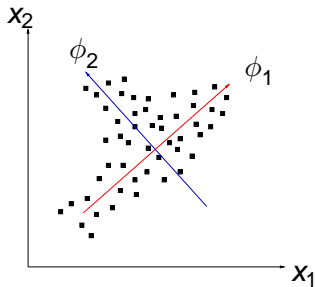
$$\max \langle (\mathbf{u}, \varphi)^2 \rangle \text{ avec } (\varphi, \varphi) = 1$$

où $\langle \cdot \rangle$ est un opérateur de moyenne statistique et (\cdot, \cdot) le produit scalaire

- ▶ Problème aux valeurs propres :

$$\int_{\Omega} R(x, x') \varphi(x') dx' = \lambda \varphi(x)$$

et $a_k(t) = (u(x, t), \varphi_k(x))$



SYSTÈME DYNAMIQUE D'ORDRE FAIBLE

- ▶ Caractéristique principale de la POD : optimalité énergétique, ie très peu de modes contiennent la quasi-totalité de l'énergie du système
- ▶ On considère l'approximation de la vitesse sur la base POD (avec N petit) :

$$u(\mathbf{x}, t) \approx \sum_{k=1}^N a_k(t) \varphi_k(\mathbf{x})$$

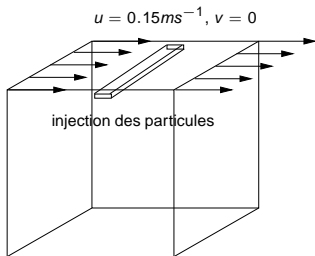
- ▶ On introduit cette expression dans les équations de Navier-Stokes et après projection de Galerkin sur les φ_i

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N C_{ijk} a_j a_k + \frac{1}{Re} \sum_{j=1}^N B_{ij} a_j + D_i$$

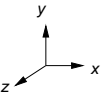
avec $C_{ijk} = (\varphi_i, \nabla \varphi_j \cdot \varphi_k)$, $B_{ij} = (\varphi_i, \Delta \varphi_j)$ et $D_i = - \int_{\Gamma} p \varphi_i \cdot \mathbf{n} dS$

APPLICATION À LA DISPERSION DE PARTICULES

CONFIGURATION ÉTUDIÉE



- ▶ $\mathcal{R}_e = 10000, N_p = 5000$
- ▶ échantillonnage par LES
- ▶ les particules sont injectées dans la partie haute de la cavité
- ▶ les particules se déposent sur les parois
- ▶ propriétés des particules :
 - ▶ Masse volumique : $\rho_p = 1000 \text{ kg/m}^3$
 - ▶ Diamètre : $d_p = 5 \mu\text{m}$



APPLICATION À LA DISPERSION DE PARTICULES

RÉSULTATS DE LA POD : ÉNERGIE ET RÉSIDU

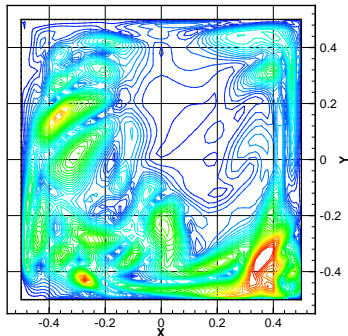
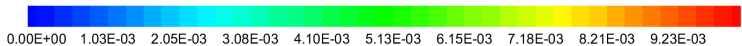
- ▶ POD effectuée sur le champ fluctuant avec 100 snapshot LES de l'écoulement résolu sur 10s

Mode n	λ_n	$100 \times E_c$	r_N
1	$4.61 \cdot 10^{-6}$	85.24	$2.31 \cdot 10^{-1}$
2	$6.76 \cdot 10^{-7}$	97.73	$5.33 \cdot 10^{-2}$
3	$9.94 \cdot 10^{-8}$	99.56	$1.44 \cdot 10^{-2}$
4	$1.90 \cdot 10^{-8}$	99.81	$3.95 \cdot 10^{-3}$

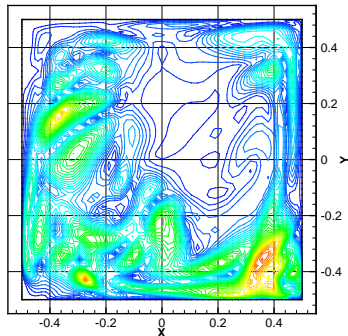
- ▶ La POD capture 99.8% de l'énergie fluctuante avec 4 modes seulement, que l'on conserve pour le SD

APPLICATION À LA DISPERSION DE PARTICULES

VALIDATION DU SYSTÈME DYNAMIQUE : VITESSE FLUCTUANTE À $t = 9s$, PLAN $z = 0$



LES



SD

APPLICATION À LA DISPERSION DE PARTICULES

RESULTATS : DISPERSION DE PARTICULES

- ▶ La dispersion de particules (5000 particules) a été calculée avec le système dynamique d'ordre faible sur une durée de 120s .
 - ▶ temps CPU POD : 41 heures (échantillon compris)
 - ▶ temps CPU LES : environ une semaine

CONCLUSIONS

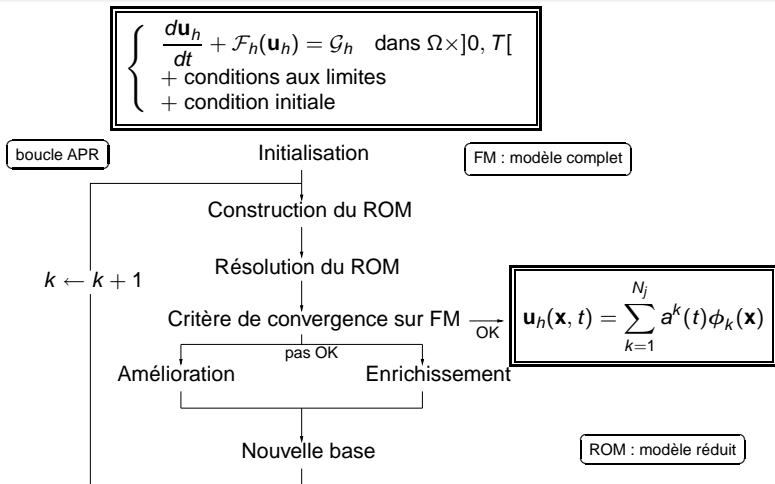
AVANTAGES

- ▶ La POD est une méthode de réduction de modèles efficace → peu de modes POD contiennent beaucoup d'informations
- ▶ L'approche POD-SD est très avantageuse en terme de temps de calcul

INCONVÉNIENTS

- ▶ Nécessite un échantillonnage coûteux
- ▶ Problème lorsque les paramètres de contrôle changent

ALGORITHME GÉNÉRAL : RYCKELYNCK 2002



INITIALISATION DE LA BASE

- ▶ La base APR est initialisée à l'aide d'un seul vecteur de base
- ▶ Ce vecteur de base initial peut être pris de façon arbitraire, en règle générale, on le choisit égal à la condition initiale du problème étudié, plus physique

CONSTRUCTION DU MODÈLE D'ORDRE RÉDUIT

- ▶ L'équation de transfert est écrite comme décomposition sur la base APR

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^{N_j} a^k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \right] + \mathcal{F}_h \left[\sum_{k=1}^{N_j} a^k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \right] = \mathcal{G}_h$$

- ▶ L'équation précédente est alors projetée sur la base APR

$$\left(\frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^{N_j} a^k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \right] + \mathcal{F}_h \left[\sum_{k=1}^{N_j} a^k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \right], \phi_n(\mathbf{x}) \right)_{L^2(\Omega)} = (\mathcal{G}_h, \phi_n(\mathbf{x}))_{L^2(\Omega)}$$

RÉSOLUTION DU SYSTÈME RÉDUIT

- ▶ La projection de Galerkin aboutit au système différentiel d'ordre faible suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} + f_h(\mathbf{a}(t), t) = g_h \\ \mathbf{a}(0) = \mathbf{a}_0 \end{cases}$$

- ▶ Il est résolu sur tout l'intervalle de temps $]0, T[$
- ▶ A chaque pas de temps, on calcule les résidus du modèle complet :

$$\begin{cases} \mathbf{R} : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^{N_j} a^k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \right] + \mathcal{F}_h \left[\sum_{k=1}^{N_j} a^k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \right] - \mathcal{G}_h \end{cases}$$

RÉSOLUTION DU SYSTÈME RÉDUIT

- ▶ La projection de Galerkin aboutit au système différentiel d'ordre faible suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} + f_h(\mathbf{a}(t), t) = g_h \\ \mathbf{a}(0) = \mathbf{a}_0 \end{cases}$$

- ▶ Il est résolu sur tout l'intervalle de temps $]0, T[$
- ▶ A chaque pas de temps, on calcule les résidus du modèle complet :

$$\begin{cases} \mathbf{R} : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^{N_j} a^k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \right] + \mathcal{F}_h \left[\sum_{k=1}^{N_j} a^k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \right] - \mathcal{G}_h \end{cases}$$

RÉSOLUTION DU SYSTÈME RÉDUIT

- ▶ La projection de Galerkin aboutit au système différentiel d'ordre faible suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} + f_h(\mathbf{a}(t), t) = g_h \\ \mathbf{a}(0) = \mathbf{a}_0 \end{cases}$$

- ▶ Il est résolu sur tout l'intervalle de temps $]0, T[$
- ▶ A chaque pas de temps, on calcule les résidus du modèle complet :

$$\begin{cases} \mathbf{R} : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\mathbf{x}, t) \mapsto \mathbf{R}(\mathbf{x}, t) = \frac{d}{dt} \left[\sum_{k=1}^{N_j} a^k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \right] + \mathcal{F}_h \left[\sum_{k=1}^{N_j} a^k(t) \phi_k(\mathbf{x}) \right] - \mathcal{G}_h \end{cases}$$

UPDATE DE LA BASE

PHASE D'AMÉLIORATION (1)

- ▶ la résolution du modèle réduit fournit les coefficients temporels sur tout l'intervalle de temps :

$$\Psi = \{a(t_i), i = 1, \dots, M\}$$

- ▶ On effectue une décomposition de Karhunen-Loève sur ces coefficients temporels :

$$\mathbf{KV} = \lambda \mathbf{V}$$

- ▶ la matrice de corrélation est définie par :

$$K_{ij} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M a_i(t_k) a_j(t_k) \quad \text{pour } i, j = 1, \dots, N_j$$

UPDATE DE LA BASE

PHASE D'AMÉLIORATION (2)

- ▶ la résolution du problème conduit à N_j valeurs propres :

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{N_j}$$

- ▶ on ne conserve que les q premières, qui ont une contribution significative (critère de sélection η) :

$$\lambda_q > \eta \lambda_1 \quad \text{et} \quad \lambda_{q+1} < \eta \lambda_1$$

- ▶ on note $[V] \in \mathbb{R}^{N_j \times q}$ la matrice formée des q vecteurs propres \mathbf{V}_k associés aux valeurs propres λ_k
- ▶ la matrice améliorée $\tilde{\phi}$ à l'itération k s'écrit :

$$\tilde{\phi}_{ij} = \sum_{l=1}^n \phi_{il}^k V_{lj}$$

UPDATE DE LA BASE

PHASE D'ENRICHISSEMENT

- ▶ On évalue le critère de convergence suivant :

si on a $\|\mathbf{R}(t)\| < \varepsilon \forall t \in]0, T[$ alors l'algorithme s'arrête

- ▶ Si l'algorithme ne converge pas, on conserve le résidu $\mathbf{R}^+ = \mathbf{R}(t^+)$ tel que :

$$\forall t < t^+, \quad \|\mathbf{R}(t)\| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \|\mathbf{R}(t^+)\| = \|\mathbf{R}^+\| > \varepsilon$$

- ▶ On construit le sous-espace de Krylov d'ordre m correspondant à \mathbf{R}^+ :

$$\mathcal{K}^m = \{\mathbf{R}^+, \mathbf{J}\mathbf{R}^+, \mathbf{J}^2\mathbf{R}^+, \dots, \mathbf{J}^{m-1}\mathbf{R}^+\}$$

UPDATE DE LA BASE

BASE FINALE

- ▶ à l'itération $k + 1$, on a alors la base *updaté* suivante :

$$\phi^{k+1} = \{\tilde{\phi}, \mathcal{K}^m\}$$

- ▶ dans les exemples présentés ici, on n'a enrichi la base qu'avec le résidu, c'est-à-dire le sous espace de Krylov d'ordre 1 :

$$\phi^{k+1} = \{\tilde{\phi}, \mathbf{R}^+\}$$

CONVECTION-DIFFUSION 2D

FORMULATION DU PROBLÈME

- ▶ On considère l'équation de convection-diffusion 2D pour un scalaire θ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \theta = \Gamma \Delta \theta$$

- ▶ dans le domaine carré $0 \leq x, y \leq 2$ avec la solution analytique suivante ($\mathbf{V} = \alpha(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y)$ avec $\alpha = 0.8$ et $\Gamma = 0.01$) :

$$\theta(x, y, t) = \frac{1}{4t + 1} \exp \left[-\frac{(x - \alpha t - 0.5)^2}{(4t + 1)\Gamma} - \frac{(y - \alpha t - 0.5)^2}{(4t + 1)\Gamma} \right]$$

- ▶ Les conditions aux limites de Dirichlet et la condition initiale sont calculées à partir de cette solution analytique

CONVECTION-DIFFUSION 2D

PARAMÈTRES DE CALCUL

- ▶ pas de temps $\Delta t = 1.25 \cdot 10^{-4}$ s, problème résolu sur $T = 100\Delta t = 1.25 \cdot 10^{-2}$ s
- ▶ discrétisation spatiale 200×200
- ▶ le critère de convergence a été pris égal à $\epsilon = 10^{-7}$.
- ▶ le critère de sélection des modes propres pour la phase d'amélioration de la base APR a été pris égal à $\eta = 10^{-14}$.
- ▶ le mode APR initial a été pris égal à la condition initiale du problème traité. On a donc :

$$\phi^{init}(\mathbf{x}, y) = \theta_0(\mathbf{x}, y) = \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{\nu} - \frac{(y - y_0)^2}{\nu}\right)$$

- ▶ la solution APR est comparée au gradient biconjugué noté BiCG

CONVECTION-DIFFUSION 2D

PERFORMANCES

- ▶ on définit l'erreur en norme $L^2(\Omega)$ par :

$$\mathcal{E}_{L^2}(t) = \|\theta_{calc}(\mathbf{x}, t) - \theta_{an}(\mathbf{x}, t)\|_{L^2(\Omega)}$$

- ▶ ainsi que l'erreur en norme sup :

$$\mathcal{E}_{sup}(t) = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\theta_{calc}(\mathbf{x}, t) - \theta_{an}(\mathbf{x}, t)|$$

- ▶ les résultats obtenus sont regroupés sur le tableau suivant :

	temps CPU	$\mathcal{E}_{L^2}(t = T)$	$\mathcal{E}_{sup}(t = T)$
APR	5.21s	$5.68 \cdot 10^{-5}$	$1.02 \cdot 10^{-3}$
BiCG	8.63s	$5.68 \cdot 10^{-5}$	$1.02 \cdot 10^{-3}$

CONVECTION-DIFFUSION 2D

EVOLUTION AVEC SYSTÈME DYNAMIQUE

- ▶ Une fois la base APR obtenue (de taille N), le système dynamique réduit s'écrit :

$$\frac{da_i}{dt} = \sum_{j=1}^N (\phi_n, -\mathbf{v} \cdot \nabla \phi_m + \nu \Delta \phi_m) a_j \quad \text{pour } i = 1, \dots, N$$

- ▶ Il est résolu sur l'intervalle de temps $10T$. L'erreur obtenue est la suivante :

temps t	T	$2T$	$3T$	$4T$	$5T$	$6T$	$7T$	$8T$	$9T$	$10T$
$\mathcal{E}_{sup} (\times 10^{-3})$	1.02	1.88	2.49	3.1	4.24	7.06	13.9	25.8	43.2	66.9

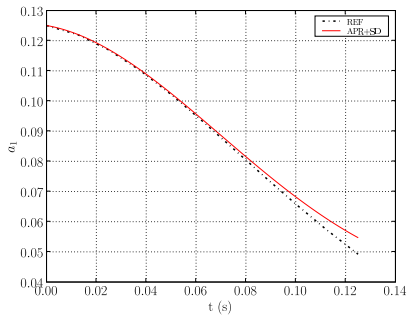
- ▶ les coefficients obtenus par le SD sont comparés aux coefficients de référence obtenus par projection de la solution analytique sur la base APR :

$$a_k^{REF}(t) = (\theta_{an}, \phi_k) = \int_{\Omega} \theta_{an}(\mathbf{x}, t) \phi_k(\mathbf{x}) \, d\Omega$$

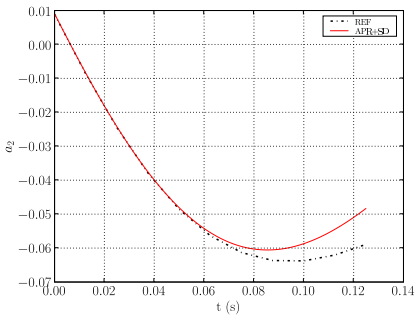
CONVECTION-DIFFUSION 2D

COEFFICIENTS DU SYSTÈME DYNAMIQUE

Mode 1



Mode 2



CONVECTION-DIFFUSION 2D

CORRECTION DU SYSTÈME DYNAMIQUE

- ▶ le système dynamique introduit des erreurs à long terme ($\mathcal{E}_{sup}(t = 10T) = 6.9 \times 10^{-2}$)
- ▶ on constate sur l'évolution des coefficients temporels qu'on s'éloigne de la solution de référence vers $t \approx 5T$
- ▶ on décide de corriger la solution en utilisant la méthode APR
- ▶ Démarche temporelle adoptée :
 - ▶ on fait l'APR sur une période T
 - ▶ on résout le système dynamique de T à βT
 - ▶ on utilise à nouveau la méthode APR sur une période T pour modifier la base

CONVECTION-DIFFUSION 2D

APPROCHE APR-SD : RÉSULTATS

Erreur de $t = 16T$ à $t = 21T$

	$t = 16T$		$t = 20T$		$t = 21T$	
	\mathcal{E}_{L2}	\mathcal{E}_{sup}	\mathcal{E}_{L2}	\mathcal{E}_{sup}	\mathcal{E}_{L2}	\mathcal{E}_{sup}
BiCG	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$
APR $\varepsilon = 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$16.7 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$29.0 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$26.9 \cdot 10^{-3}$
APR $\varepsilon = 10^{-8}$	$6.0 \cdot 10^{-4}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$9.4 \cdot 10^{-4}$	$12.9 \cdot 10^{-3}$	$8.2 \cdot 10^{-4}$	$9.9 \cdot 10^{-3}$

CONVECTION-DIFFUSION 2D

APPROCHE APR-SD : RÉSULTATS

Erreur de $t = 16T$ à $t = 21T$

	$t = 16T$		$t = 20T$		$t = 21T$	
	\mathcal{E}_{L2}	\mathcal{E}_{sup}	\mathcal{E}_{L2}	\mathcal{E}_{sup}	\mathcal{E}_{L2}	\mathcal{E}_{sup}
BiCG	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$
APR $\varepsilon = 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$16.7 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$29.0 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$26.9 \cdot 10^{-3}$
APR $\varepsilon = 10^{-8}$	$6.0 \cdot 10^{-4}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$9.4 \cdot 10^{-4}$	$12.9 \cdot 10^{-3}$	$8.2 \cdot 10^{-4}$	$9.9 \cdot 10^{-3}$

CONVECTION-DIFFUSION 2D

APPROCHE APR-SD : RÉSULTATS

Erreur de $t = 16T$ à $t = 21T$

	$t = 16T$		$t = 20T$		$t = 21T$	
	\mathcal{E}_{L2}	\mathcal{E}_{sup}	\mathcal{E}_{L2}	\mathcal{E}_{sup}	\mathcal{E}_{L2}	\mathcal{E}_{sup}
BiCG	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$
APR $\varepsilon = 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$16.7 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$29.0 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$26.9 \cdot 10^{-3}$
APR $\varepsilon = 10^{-8}$	$6.0 \cdot 10^{-4}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$9.4 \cdot 10^{-4}$	$12.9 \cdot 10^{-3}$	$8.2 \cdot 10^{-4}$	$9.9 \cdot 10^{-3}$

CONVECTION-DIFFUSION 2D

APPROCHE APR-SD : RÉSULTATS

Erreur de $t = 16T$ à $t = 21T$

	$t = 16T$		$t = 20T$		$t = 21T$	
	\mathcal{E}_{L2}	\mathcal{E}_{sup}	\mathcal{E}_{L2}	\mathcal{E}_{sup}	\mathcal{E}_{L2}	\mathcal{E}_{sup}
BICG	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$
APR $\varepsilon = 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$16.7 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$29.0 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$26.9 \cdot 10^{-3}$
APR $\varepsilon = 10^{-8}$	$6.0 \cdot 10^{-4}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$9.4 \cdot 10^{-4}$	$12.9 \cdot 10^{-3}$	$8.2 \cdot 10^{-4}$	$9.9 \cdot 10^{-3}$

CONVECTION-DIFFUSION 2D

APPROCHE APR-SD : RÉSULTATS

Erreur de $t = 16T$ à $t = 21T$

	$t = 16T$		$t = 20T$		$t = 21T$	
	\mathcal{E}_{L2}	\mathcal{E}_{sup}	\mathcal{E}_{L2}	\mathcal{E}_{sup}	\mathcal{E}_{L2}	\mathcal{E}_{sup}
BiCG	$3.1 \cdot 10^{-4}$	$4.2 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$4.1 \cdot 10^{-3}$	$3.2 \cdot 10^{-4}$	$4.0 \cdot 10^{-3}$
APR $\varepsilon = 10^{-7}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$	$16.7 \cdot 10^{-3}$	$2.4 \cdot 10^{-3}$	$29.0 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$	$26.9 \cdot 10^{-3}$
APR $\varepsilon = 10^{-8}$	$6.0 \cdot 10^{-4}$	$7.3 \cdot 10^{-3}$	$9.4 \cdot 10^{-4}$	$12.9 \cdot 10^{-3}$	$8.2 \cdot 10^{-4}$	$9.9 \cdot 10^{-3}$

- Temps de calcul : APR ($\varepsilon = 10^{-7}$) 76.5s, ($\varepsilon = 10^{-8}$) 129.8s, BiCG 170.2s

CONVECTION DIFFUSION 2D

CONCLUSIONS

- ▶ la méthode APR apporte un gain de temps *substantiel* : environ 1.5 fois plus rapide
- ▶ la méthode APR ne dégrade pas la solution en terme de précision
- ▶ le système dynamique permet un gain de temps supplémentaire, mais introduit des erreurs
- ▶ la procédure APR-SD corrige les erreurs induites par le SD

EQUATIONS DE BURGERS 1D ET 2D

INTRODUCTION

- ▶ L'équation de Burgers s'écrit de manière générale :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} = 0 \\ + \text{conditions aux limites} \\ + \text{condition initiale} \end{array} \right.$$

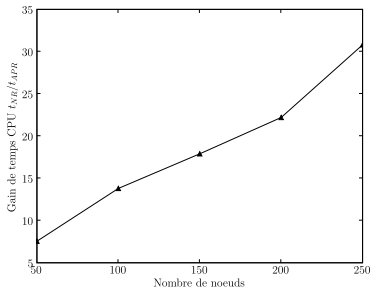
- ▶ Cas traités :

- ▶ équations de Burgers 1D & 2D
- ▶ discrétisation en différences finies
- ▶ performances comparées avec la méthode de Newton-Raphson

EQUATIONS DE BURGERS 1D ET 2D

RÉSULTATS POUR L'ÉQUATION 1D

► Gain de temps

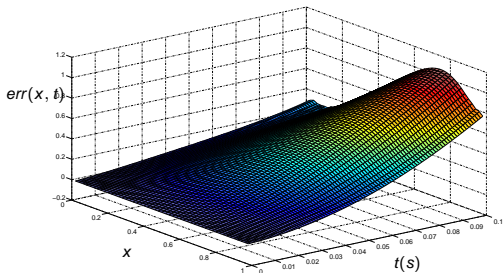


► jusqu'à 30 fois plus rapide

EQUATIONS DE BURGERS 1D ET 2D

RÉSULTATS POUR L'ÉQUATION 1D

- ▶ Erreur : l'erreur maximale vaut $\approx 1.1\%$ à $t = T = 0.1\text{s}$ pour $x \approx 0.7$



- ▶ même ordre de grandeur que Newton-Raphson

INTRODUCTION

- ▶ on rappelle les équations de Navier-Stokes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} \text{ sur } \partial\Omega \\ + \text{conditions initiales} \end{array} \right.$$

- ▶ Problème de la condition inf-sup ou LBB (notamment en EF) lié à la nature du problème mixte des équations

DISCRÉTISATION TEMPORELLE

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - B(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}, p^n, p^{n+1}) + C(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n-1}) = 0 \\ \mathbf{u}^{n+1}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g} \\ \operatorname{div} \mathbf{u}^{n+1} = 0 \end{cases}$$

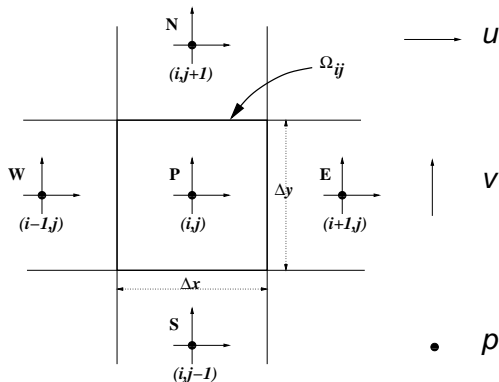
- où $B(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}, p^n, p^{n+1})$ est le terme linéaire et $C(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n-1})$ est le terme convectif définis par :

$$B(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1}, p^n, p^{n+1}) = \nu \Delta \left(\frac{\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n}{2} \right) + \frac{1}{\rho} \nabla \left(\frac{p^{n+1} + p^n}{2} \right)$$

$$C(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n-1}) = \frac{3}{2} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^n - \frac{1}{2} (\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n-1}$$

DISCRÉTISATION SPATIALE

- ▶ méthode des Volumes Finis
- ▶ schéma colocalisé



EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

CALCUL DES FLUX INTERMÉDIAIRES

- ▶ Problème souvent rencontré pour les schémas colocalisés \implies mauvais couplage entre la vitesse et la pression
- ▶ Origine : approximation simpliste des flux : $\int_{\partial\Omega_{ij}^e} u \, dS \approx \frac{u_{ij} + u_{i+1j}}{2} \Delta y$
- ▶ Modification proposée : on adopte un calcul des flux inspiré par Patankar¹, repris par Perić *et al.*²

$$\tilde{F}_e^u = \frac{\tilde{u}_{i+1j} + \tilde{u}_{ij}}{2} \Delta y - \beta \Delta y (p_{i+1j}^n - p_{ij}^n)$$

où \tilde{u} est calculé suivant une approche décalée pour recoupler la vitesse et la pression

¹ Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, 1980

² Comparison of finite-volume numerical methods with staggered and collocated grids, 1988

EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

DÉCOUPLAGE VITESSE-PRESSION

Choix d'une méthode de projection : algorithme de Van Kahn .

1. Résolution de l'équation de quantité de mouvement pour $\tilde{\mathbf{u}}$:

$$\frac{\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} - \nu \Delta \left(\frac{\tilde{\mathbf{u}}^n + \mathbf{u}^n}{2} \right) + C(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n-1}) + \frac{1}{\rho} \nabla p^n = 0$$

+ CL de Dirichlet : $\tilde{\mathbf{u}}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}$

2. L'équation de Poisson pour la correction de pression \tilde{p} :

$$\Delta \tilde{p} = \frac{2}{\Delta t} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{u}}$$

+ CL de Neumann : $\nabla \tilde{p} \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} = 0$

3. La vitesse est alors corrigée suivant l'expression (3) où la divergence nulle est assurée par la résolution de l'équation de Poisson :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} = -\frac{1}{2\rho} \nabla \tilde{p}$$

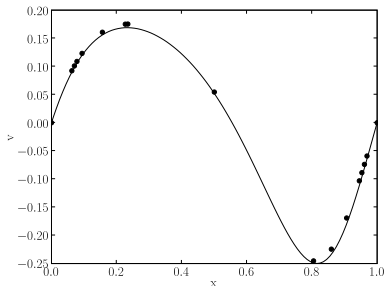
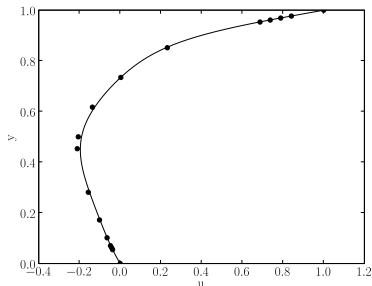
EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

IMPORTANCE DU DÉCOUPLAGE VITESSE PRESSION

- ▶ Le problème de la cavité a été traité de façon couplée pour deux nombres de Reynolds :

● *Ghia et al. (1982)*
 — code couplé

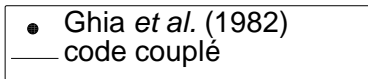
- ▶ $Re = 100$



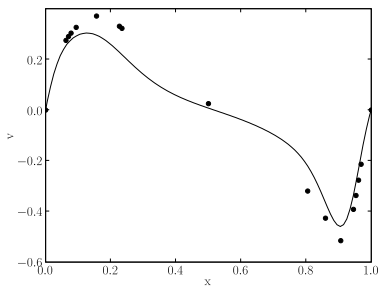
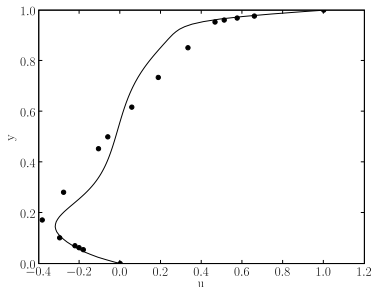
EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

IMPORTANCE DU DÉCOUPLAGE VITESSE PRESSION

- ▶ Le problème de la cavité a été traité de façon couplée pour deux nombres de Reynolds :



- ▶ $Re = 1000$

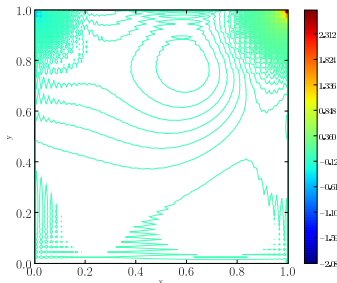


EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

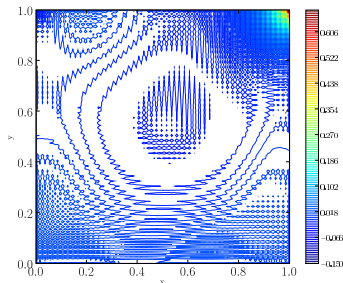
IMPORTANCE DU DÉCOUPLAGE VITESSE PRESSION

- ▶ Isolignes de pression :

$Re = 100$



$Re = 1000$

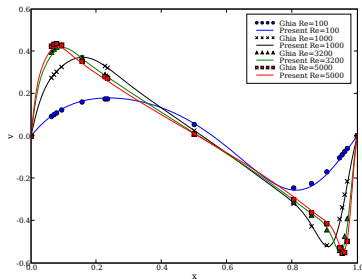
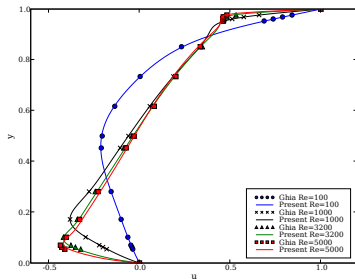


- ▶ Le modèle couplé ne permet pas de prévoir l'écoulement même pour des nombres de Reynolds faibles

EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

RÉSULTATS STATIONNAIRES (1)

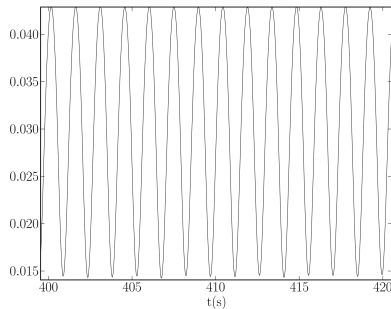
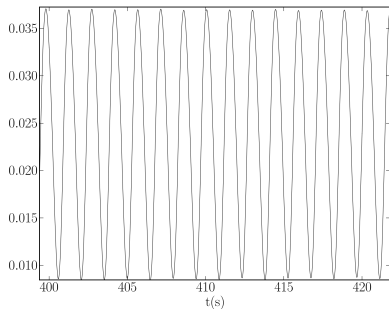
- Pour un nombre de Reynolds valant 100, 1000, 3200 et 5000



- Le modèle découplé utilisé permet de prévoir les différentes solutions stationnaires

EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

RÉSULTATS INSTATIONNAIRES : $Re = 10000$



- On retrouve une évolution périodique, période $T \approx 1.4s$, OK avec la littérature (Bruneau & Saad 2006)

EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

RÉSULTATS INSTATIONNAIRES : $Re = 10000$

EQUATIONS DE NAVIER-STOKES

RÉSULTATS INSTATIONNAIRES : $Re = 10000$

- ▶ Le modèle permet de prévoir la solution instationnaire à $Re = 10000$

APPROCHE APR POUR NAVIER-STOKES

PROBLÉMATIQUE

PROBLÈME MODÈLE LINÉAIRE

Trouver $u \in V_0$ tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{du}{dt} \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \text{tr}(T \nabla \mathbf{u} \nabla \varphi) \, dx + \int_{\Omega} p \nabla \cdot \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in V \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} \, \psi \, dx \quad \forall \psi \in W \\ V = \{H_0^1(\Omega)\}^d, \, d = 2, 3 \text{ et } V_0 = \{v \in V \text{ tq } \text{div } v = 0\} \\ W = \{p \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} p \, dx = 0\} \end{array} \right.$$

- ▶ Application de la POD directe \rightarrow base $(\varphi_n)_{n=1, \dots, N}$ telle que $\varphi_i \in V_0 \quad \forall i = 1, \dots, N \Rightarrow$ le terme $\int_{\Omega} p \nabla \cdot \varphi \, dx = 0 \Rightarrow$ pas de problème de convergence
- ▶ Approche APR : à chaque itération **avant convergence**, $\text{div } \varphi_i \neq 0$
- ▶ **Le problème est bien posé si la condition Inf-Sup est vérifiée (problème similaire en éléments finis)**

APPROCHE APR POUR NAVIER-STOKES

IDÉES

- ▶ Idée 1 : écrire l'algorithme APR sur les grandeurs (u,p) couplées
- ▶ Idée 2 : adapter l'algorithme APR au schéma de découplage vitesse-pression

DANS LA SUITE DE L'ÉTUDE, C'EST L'IDÉE 2 QUI A ÉTÉ ADOPTÉE

ATTENTION ! DANS CE CAS LES BASES OBTENUES NE SONT PLUS PHYSIQUES ! (BASES POUR \tilde{u} ET \tilde{p})

APPROCHE APR POUR NAVIER-STOKES

MISE EN ŒUVRE

1. Initialisation \implies bases initiales pour la vitesse et la pression sont les conditions initiales respectives

2. On cherche $\tilde{\mathbf{u}}$ sous la forme : $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=1}^{N^u} \tilde{a}_l(t) \phi_l^u(\mathbf{x})$

on résout donc l'équation de conservation de la quantité de mouvement réduite :

$$\sum_{l=1}^{N^u} \left(\frac{1}{\Delta t} \phi_l^u - \frac{\nu}{2} \Delta \phi_l^u, \phi_m^u \right) \tilde{a}_l = \left(S^u(\mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n-1}, p^n), \phi_m^u \right)$$

3. La vitesse doit alors être corrigée à l'aide de \tilde{p} que l'on cherche sous la forme : $\tilde{p}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=1}^{N^p} \tilde{b}_l(t) \phi_l^p(\mathbf{x})$

On résout donc l'équation de Poisson réduite :

$$\sum_{l=1}^{N^p} \left(\Delta \phi_l^p(\mathbf{x}), \phi_m^p(\mathbf{x}) \right) \tilde{b}_l = \left(S^p(\tilde{\mathbf{u}}), \phi_m^p(\mathbf{x}) \right)$$

4. On corrige vitesse et pression suivant les relations : $\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}}{\Delta t} = -\frac{1}{2\rho} \nabla \tilde{p}$ et $p^{n+1} = p^n + \tilde{p}$

5. Les bases respectives pour la vitesse estimée et la correction de pression sont *updatées* suivant la procédure APR déjà expliquée

APPROCHE APR POUR NAVIER-STOKES

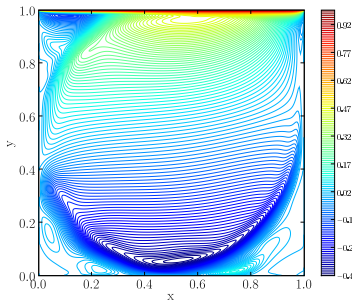
PARAMÈTRES DE CALCUL

- ▶ domaine discrétisé en 250×250 cellules de contrôle,
- ▶ pas de temps égal à $\Delta t = 10^{-3}$ s et solution calculée sur $T = 100\Delta t = 0.1$ s,
- ▶ critère de convergence pour la vitesse $\varepsilon_{\mathbf{u}} = 5 \cdot 10^{-7}$ et pour la pression $\varepsilon_p = 10^{-4}$,
- ▶ coefficients de sélection pour l'amélioration de la base de vitesse $\eta_{\mathbf{u}} = 10^{-8}$ et de la base de pression $\eta_p = 10^{-4}$.

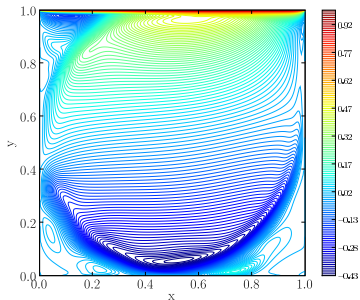
APPROCHE APR POUR NAVIER-STOKES

RÉSULTATS (1) : COMPOSANTE HORIZONTALE DE LA VITESSE

► Au temps $t = 0.1s$



APR

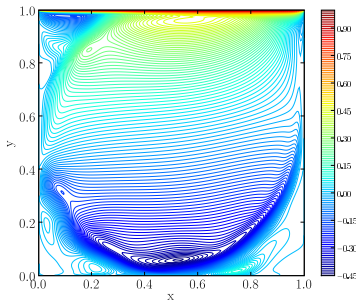


REF

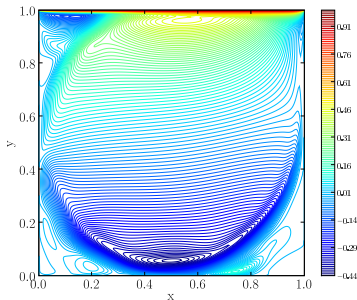
APPROCHE APR POUR NAVIER-STOKES

RÉSULTATS (1) : COMPOSANTE HORIZONTALE DE LA VITESSE

► Au temps $t = 0.3s$



APR

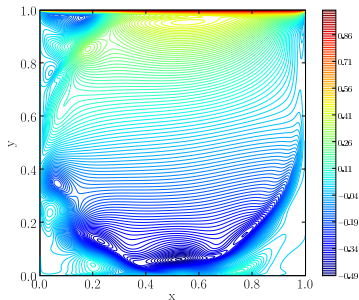


REF

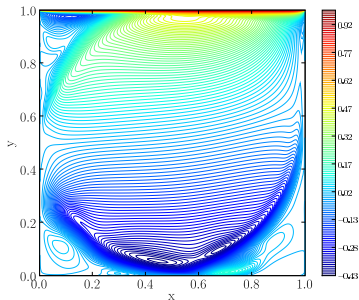
APPROCHE APR POUR NAVIER-STOKES

RÉSULTATS (1) : COMPOSANTE HORIZONTALE DE LA VITESSE

► Au temps $t = 1.0s$



APR



REF

APPROCHE APR POUR NAVIER-STOKES

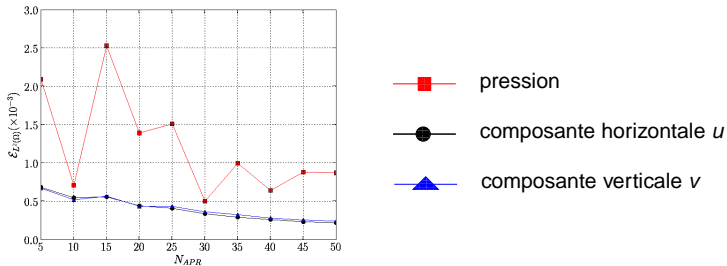
RÉSULTATS (1) : COMPOSANTE HORIZONTALE DE LA VITESSE

- ▶ La méthode APR donne de bons résultats jusqu'à $t = 0.3s$
- ▶ Au delà, la solution se dégrade
- ▶ Problème de convergence de l'algorithme : influence du nombre d'itérations APR à tester

APPROCHE APR POUR NAVIER-STOKES

RÉSULTATS (2) : ERREUR SUR LA VITESSE ET PRESSION

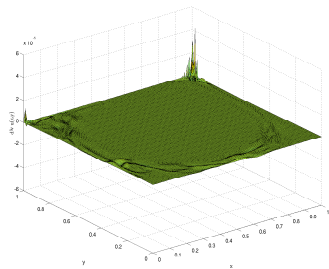
► Evolution des erreurs sur les composantes de la vitesse et la pression en norme $L^2(\Omega)$:



APPROCHE APR POUR NAVIER-STOKES

RÉSULTATS (3) : DIVERGENCE DE VITESSE ET TEMPS CPU

- ▶ l'erreur est plus importante sur la pression



- ▶ valeur max $\approx 5 \cdot 10^{-5}$

- ▶ pics de la divergence dans les coins dus à la mauvaise estimation de la pression

- ▶ temps CPU pour 0.1 s : BiCG \rightarrow **1600s** vs **170s** \leftarrow APR!!

CONCLUSIONS

- ▶ Le temps de calcul est considérablement réduit avec les modèles d'ordre réduit
- ▶ L'approche POD-particules a donné de bons résultats qualitativement
- ▶ La méthode APR s'affranchit du temps de calcul nécessaire pour l'échantillonnage
- ▶ La méthode APR s'avère très efficace pour *recadrer* la base quand le système dynamique diverge
- ▶ La méthode APR donne de bons résultats pour les équations de Navier-Stokes : précision du calcul limitée par l'erreur sur la pression
- ▶ Les temps de calcul nécessaires à la résolution des équations de Navier-Stokes par la méthode APR s'avèrent prometteurs ($\times 10$ plus rapide !)

PERSPECTIVES

- ▶ Construction d'une base réduite vérifiant la condition Inf-Sup
 - ▶ Thèse de Rozza (2005) : démonstrations sur le cas des équations de Stokes

- ▶ Extension du code en 3D

- ▶ Couplage de la méthode APR avec la MAN
 - ▶ Intérêt : évolution de la base en fonction des paramètres
 - ▶ Application au contrôle actif