



**HAL**  
open science

# Solutions formelles d'équations différentielles : le logiciel de calcul formel DESIR : étude théorique et réalisation

Evelyne Tournier

► **To cite this version:**

Evelyne Tournier. Solutions formelles d'équations différentielles : le logiciel de calcul formel DESIR : étude théorique et réalisation. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1987. tel-00323706

**HAL Id: tel-00323706**

**<https://theses.hal.science/tel-00323706>**

Submitted on 23 Sep 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THESE

Présentée à

**L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE, TECHNOLOGIQUE  
ET MEDICALE DE GRENOBLE**

pour obtenir le titre de  
docteur d'Etat es-Sciences Mathématiques

par

**Evelyne TOURNIER**

OOOOO

**SOLUTIONS FORMELLES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES**  
*LE LOGICIEL DE CALCUL FORMEL : DESIR*  
*ETUDE THEORIQUE ET REALISATION*

OOOOO

Thèse soutenue le 2 Avril 1987 devant la commission d'examen.

J.P. RAMIS

Président

Ch. BOITET  
J. DAVENPORT  
J. DELLA-DORA  
Ph. FLAJOLET  
D. LAZARD  
Y. SIRET

Examineurs



# **SOLUTIONS FORMELLES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES**

**LE LOGICIEL DE CALCUL FORMEL : DÉSIR**

**ÉTUDE THÉORIQUE ET RÉALISATION**



# UNIVERSITE SCIENTIFIQUE TECHNOLOGIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Président de l'Université :  
M. TANCHE

Année Universitaire 1986 - 1987

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE SCIENCES ET DE GEOGRAPHIE

### PROFESSEURS DE 1ère Classe

ARNAUD Paul	Chimie Organique
ARVIEU ROBERT	Physique Nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S
AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
AYANT Yves	Physique Approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARBIER Jean-Claude	Physique Expérimentale CNRS
BARJON Robert	Physique Nucléaire ISN
BARNOUD Fernand	Bochimie Macromoléculaire Végétale
BARRA Jean-René	Statistiques-Mathématiques Appliquées
BELORISKY Elie	Physique C.E.N.G- D.R.F.
BENZAKEN Claude	Mathématiques Pures
BERNARD Alain	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Pures
BILLET Jean	Géographie
BOELHER Jean-Paul	Mécanique
BONNIER Jane Marie	Chimie Générale
BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire ISN
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie Végétale
CAUQUIS Georges	Chimie Organique
CHIBON Pierre	Biologie Animale
COHEN ADDAD Jean-Pierre	Physique
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques Pures
CYROT Michel	Physique du Solide
DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude	Mathématiques Appliquées
DEPORTES Charles	Chimie Minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des Plasmas
DOUCE Rolland	Physiologie Végétale
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques Pures
GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique,
GIRAUD Pierre	Géologie
HICTER Pierre	Chimie
IDELMAN Simon	Physiologie Animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
KAHANE André, détaché	Physique
KAHANE Josette	Physique
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques Appliquées
KUPKA Yvon	Mathématiques Pures
LAJZEROWICZ Jeanine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques Appliquées
DE LEIRIS Joel	Biologie

LLIBOUTRY Louis  
 LOISEAUX Jean-Marie  
 MACHE Régis  
 MAYNARD Roger  
 MICHEL Robert  
 OMONT Alain  
 OZENDA Paul  
 PAYAN Jean-Jacques  
 PEBAY-PEYROULA Jean-Claude  
 PERRIAUX Jacques  
 PERRIER Guy  
 PIERRARD Jean-Marie  
 PIERRE Jean-Louis  
 RASSAT André  
 RENARD Michel  
 RINAUDO Marguerite  
 ROSSI André  
 SAKAROVITCH Michel  
 SAXOD Raimard  
 SENDEL Philippe  
 SERGERAERT Francis  
 SOUCHIER Bernard  
 SOUTIF Michel  
 STUTZ Pierre  
 VALENTIN Jacques  
 VAN CUTSEM Bernard  
 VIALON Pierre

Géophysique  
 Sciences Nucléaires I.S.N.  
 Physiologie Végétale  
 Physique du Solide  
 Minéralogie et Pétrographie (Géologie)  
 Astrophysique  
 Botanique (Biologie Végétale)  
 Mathématiques Pures  
 Physique  
 Géologie  
 Géophysique  
 Mécanique  
 Chimie Organique  
 Chimie Systématique  
 Thermodynamique  
 Chimie CERMAV  
 Biologie  
 Mathématiques Appliquées  
 Biologie Animale  
 Biologie Animale  
 Mathématiques Pures  
 Biologie  
 Physique  
 Mécanique  
 Physique Nucléaire I.S.N.  
 Mathématiques Appliquées  
 Géologie

#### PROFESSEURS de 2<sup>ème</sup> Classe

ADIBA Michel  
 ANTOINE Pierre  
 ARMAND Gilbert  
 BARET Paul  
 BECKER Pierre  
 BEGUIN Claude  
 BLANCHI J.Pierre  
 BOITET Christian  
 BORNAREL Jean  
 BRUANDET J.François  
 BRUN Gilbert  
 CASTAING Bernard  
 CERFF Rudiger  
 CHARDON Michel  
 CHIARAMELLA Yves  
 COURT Jean  
 DEMAILLY Jean-Pierre  
 DENEUVILLE Alain  
 DEPASSEL Roger  
 DERRIEN Jacques  
 DUFREYNOY Alain  
 GASPARD François  
 GAUTRON René  
 GENIES Eugène  
 GIDON Maurice  
 GIGNOUX Claude  
 GILLARD Roland  
 GIORNI Alain  
 GUIGO Maryse  
 GUMUCHAIN Hervé  
 GUITTON Jacques  
 HACQUES Gérard

Mathématiques Pures  
 Géologie  
 Géographie  
 Chimie  
 Physique  
 Chimie Organique  
 STAPS  
 Mathématiques Appliquées  
 Physique  
 Physique  
 Biologie  
 Physique  
 Biologie  
 Géographie  
 Mathématiques Appliquées  
 Chimie  
 Mathématiques Pures  
 Physique  
 Mécanique des Fluides  
 Physique  
 Mathématiques Pures  
 Physique  
 Chimie  
 Chimie  
 Géologie  
 Sciences Nucléaires  
 Mathématiques Pures  
 Sciences Nucléaires  
 Géographie  
 Géographie  
 Chimie  
 Mathématiques Appliquées

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE MEDECINE

### PROFESSEURS CLASSE EXEPTIONNELLE ET 1ère CLASSE

AMBLARD Pierre	Dermatologie	C.H.R.G.
AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie	C.H.R.G.
BEAUDOING André	Pédiatrie-Puericulture	C.H.R.G.
BEZEZ Henri	Orthopédie-Traumatologie	Hopital SUD
BONNET Jean-Louis	Ophthalmologie	C.H.R.G.
BOUCHET Yves	Anatomie	Faculté La Merci
	Chirurgie Générale et Digestive	C.H.R.G.
BUTEL Jean	Orthopédie-Traumatologie	C.H.R.G.
CHAMPETIER Jean	Anatomie-Topographique et Appliquée	C.H.R.G.
	O.R.L.	C.H.R.G.
CHARACHON Robert	Anatomie-Pathologique	C.H.R.G.
COUDERC Pierre	Pneumophtisiologique	C.H.R.G.
DELORMAS Pierre	Cardiologie	C.H.R.G.
DENIS Bernard	Pharmacologie	Faculté La Merci
GAVEND Michel	Hématologie	C.H.R.G.
HOLLARD Daniel	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
LATREILLE René	Bactériologie-Virologie	C.H.R.G.
	Gynécologie et Qbstétrique	C.H.R.G.
LE NOC Pierre	Médecine du Travail	C.H.R.G.
MALINAS Yves	Clinique Médicale et Maladies Infectieuses	C.H.R.G.
MALLION Jean-Michel	Histologie	Faculté La Merci
MICOUD Max	Pneumologie	C.H.R.G.
	Neurologie	C.H.R.G.
MOURIQUAND Claude	Hépto-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
PARAMELLE Bernard	Neurochirurgie	C.H.R.G.
PERRET Jean	Clinique Chirurgicale	C.H.R.G.
RACHAIL Michel	Anestésiologie	C.H.R.G.
DE ROUGEMONT Jacques	Physiologie	Faculté La Merci
SARRAZIN Roger	Biophysique	Faculté La Merci
STIEGLITZ Paul	Biochimie	Faculté La Merci
TANCHE Maurice		
VERAIN André		
VIGNAIS Pierre		

### PROFESSEURS 2ème CLASSE

BACHELOT Yvan	Endocrinologie	C.H.R.G.
BARGE Michel	Neurochirurgie	C.H.R.G.
BENABID Alim Louis	Biophysique	Faculté La Merci
BENSA Jean-Claude	Immunologie	Hopital Sud
BERNARD Pierre	Gynécologie-Obstétrique	C.H.R.G.
BESSARD Germain	Pharmacologie	ABIDJAN
BOLLA Michel	Radiothérapie	C.H.R.G.
BOST Michel	Pédiatrie	C.H.R.G.
BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie Adultes	Hopital Sud
BRAMBILLA Christian	Pneumologie	C.H.R.G.
CHAMBAZ Edmond	Biochimie	C.H.R.G.
CHIROSSEL Jean-Paul	Anatomie-Neurochirurgie	C.H.R.G.
COLOMB Maurice	Immunologie	Hopital Sud
COMET Michel	Biophysique	Faculté La Merci
CONTAMIN Charles	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
	Néphrologie	C.H.R.G.
CORDONNIER Daniel	Radiologie	C.H.R.G.
COULOMB Max	Radiologie	C.H.R.G.
CROUZET Guy	Médecine Interne et Toxicologie	C.H.R.G.
DEBRU Jean-Luc	Biostatistiques et Informatique Médicale	Faculté La Merci
DEMONGEOT Jacques		

HERBIN Jacky  
 HERAULT Jeanny  
 JARDON Pierre  
 JOSELEAU Jean-Paul  
 KERCKHOVE Claude  
 LEBRETON Alain  
 LONGEQUEUE Nicole  
 LUCAS Robert  
 LUNA Domingo  
 MANDARON Paul  
 MARTINEZ Francis  
 MASCLE Georges  
 NEMOZ Alain  
 OUDET Bruno  
 PELMONT Jean  
 PERRIN Claude  
 PFISTER Jean-Claude  
 PIBOULE Michel  
 RAYNAUD Hervé  
 RIEDIMANN Christine  
 ROBERT Gilles  
 ROBERT Jean-Bernard  
 SARROT-REYNAULD Jean  
 SAYETAT Françoise  
 SERVE Denis  
 STOECKEL Frédéric  
 SOUTIF Jeanne  
 SCHOLL Pierre-Claude  
 SUBRA Robert  
 VALLADE Marcel  
 VIDAL Michel  
 VIVIAN Robert  
 VOTTERO Philippe

Géographie  
 Physique  
 Chimie  
 Biochimie  
 Géologie  
 Mathématiques Appliquées  
 Sciences Nucléaires I.S.N.  
 Physique  
 Mathématiques Pures  
 Biologie  
 Mathématiques Appliquées  
 Géologie  
 Thermodynamique CNRS - CRTBT  
 Mathématiques Appliquées  
 Biochimie  
 Sciences Nucléaires I.S.N.  
 Physique du Solide  
 Géologie  
 Mathématiques Appliquées  
 Mathématiques Pures  
 Mathématiques Pures  
 Chimie Physique  
 Géologie  
 Physique  
 Chimie  
 Physique  
 Physique  
 Mathématiques Appliquées  
 Chimie  
 Physique  
 Chimie Organique  
 Géographie  
 Chimie

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L' IUT 1

### PROFESSEURS de 1<sup>ère</sup> Classe

BUISSON Roger	Physique IUT 1
DODU Jacques	Mécanique Appliquée IUT 1
NEGRE Robert	Génie Civil IUT 1

### PROFESSEURS de 2<sup>ème</sup> classe

BOUTHINON Michel	EEA. IUT 1
CHAMBON René	Génie Mécanique IUT 1
CHEHIKIAN Alain	EEA. IUT 1
CHENAVAS Jean	Physique IUT 1
CHOUTEAU Gérard	Physique IUT 1
CONTE René	Physique IUT 1
GOSSE Jean-Pierre	EEA.IUT 1
GROS Yves	Physique IUT 1
KUHN Gérard, (Détaché)	Physique IUT 1
MAZUER Jean	Physique IUT 1
MICHOULIER Jean	Physique IUT 1
MONLLOR Christian	EEA.IUT 1
NOUGARET Marcel	Automatique IUT 1
PEFFEN René	Métallurgie IUT 1
PERARD Jacques	EEA. IUT 1
PERRAUD Robert	Chimie IUT 1
TERRIEZ Jean-Michel	Génie Mécanique IUT 1
TOUZAIN Philippe	Chimie IUT 1
VINCENDON Marc	Chimie IUT 1

DUPRE Alain	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
DYON Jean-François	Chirurgie Infantile	C.H.R.G.
ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie	Faculté La Merci
FAURE Claude	Anatomie et Organogénèse	C.H.R.G.
FAURE Gilbert	Urologie	C.H.R.G.
FOURNET Jacques	Hépatogastro-Entérologie	C.H.R.G.
FRANCO Alain	Médecine Interne	C.H.R.G.
GIRARDET Pierre	Anesthésiologie	C.H.R.G.
GUIDICELLI Henri	Chirurgie Générale et Vasculaire	C.H.R.G.
GUIGNIER Michel	Thérapeutique et Réanimation Médicale	C.H.R.G.
HADJIAN Arthur	Biochimie	Faculté La Merci
HALIMI Serge	Endocrinologie et Maladies Métaboliques	C.H.R.G.
HOSTEIN Jean	Hépatogastro-Entérologie	C.H.R.G.
HUGONOT Robert	Médecine Interne	C.H.R.G.
JALBERT Pierre	Histologie-Cytogénétique	C.H.R.G.
JUNIEN-LAVILLAURROY Claude	O.R.L.	C.H.R.G.
KOLODIE Lucien	Hématologie Biologique	C.H.R.G.
LETOUBLON Christian	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
MACHECOURT Jacques	Cardiologie et Maladies Vasculaires	C.H.R.G.
MAGNIN Robert	Hygiène	C.H.R.G.
MASSOT Christian	Médecine Interne	C.H.R.G.
MOUILLON Michel	Ophthalmologie	C.H.R.G.
PELLAT Jacques	Neurologie	C.H.R.G.
PHELIP Xavier	Rhumatologie	C.H.R.G.
RACINET Claude	Gynécologie	C.H.R.G.
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie	C.H.R.G.
RAPHAEL Bernard	Stomatologie	C.H.R.G.
SCHAERER René	Cancérologie	C.H.R.G.
SEIGNEURIN Jean-Marie	Bactériologie-Virologie	Faculté La Merci
SELE Bernard	Cytogénétique	Faculté La Merci
SOTTO Jean-Jacques	Hématologie	C.H.R.G.
STOEBNER Pierre	Anatomie Pathologique	C.H.R.G.
VROUSOS Constantin	Radiothérapie	C.H.R.G.

#### MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT PHARMACIE

AGNIUS-DELORD Claudine	Physique	Faculté La Tronche
ALARY Josette	Chimie Analytique	Faculté La Tronche
BERIEL Hélène	Physiologie et Pharmacologie	Faculté La Tronche
BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie	Faculté Meylan
CUSSAC Max	Chimie Thérapeutique	Faculté La Tronche
DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie	Faculté La Tronche
JEANNIN Charles	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan
LATURAZE Jean	Biochimie	Faculté La Tronche
LUU DUC Cuong	Chimie Générale	Faculté La Tronche
MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognosie	Faculté La Tronche
MARZIN Daniel	Toxicologie	Faculté Meylan
RENAUDET Jacqueline	Bactériologie	Faculté La Tronche
ROCHAT Jacques	Hygiène et Hydrologie	Faculté La Tronche
SEIGLE-MURANDI Françoise	Botanique et Cryptogamie	Faculté Meylan
VERAIN Alice	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan



## REMERCIEMENTS

*En premier lieu, je voudrais rendre hommage à la mémoire du professeur N. GASTINEL. Précurseur en de nombreux domaines, il a su m'orienter vers le calcul formel dès le début de mes recherches.*

*Je tiens à remercier Monsieur J.P. RAMIS, professeur à l'Université de Strasbourg, qui a bien voulu me faire l'honneur de présider le jury de cette thèse. Ses recherches dans le domaine des équations différentielles ont joué un rôle déterminant dans ce projet. Qu'il me soit permis de lui exprimer toute ma gratitude pour l'intérêt qu'il porte à ces travaux depuis leurs débuts, et pour l'aide fondamentale qu'il nous a apportée.*

*Il est certain que ce travail doit beaucoup à Monsieur J. DELLA DORA, professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble. D'abord parce qu'il a eu l'initiative dès 1979 d'intéresser une équipe à l'utilisation des systèmes de Calcul Formel pour les équations différentielles. Ensuite, parce qu'il a su la guider et s'engager totalement pour mener à terme ce projet. Même dans les moments difficiles, nos conversations toujours passionnantes, parfois passionnées, ont été source de progrès. Son aide dans la rédaction de cette thèse a été considérable. Je lui exprime toute ma reconnaissance pour la confiance qu'il m'a accordée. Mes motifs de le remercier sont donc multiples, et je le fais de grand cœur.*

*L'intérêt de Monsieur D. LAZARD, professeur à l'Université de Paris 6, pour ce projet, ne s'est jamais démenti. En tant que Directeur du Greco de Calcul Formel, il a soutenu et encouragé ce travail, même si nos dépenses en calcul n'étaient pas toujours proportionnées au budget du Greco. Je le remercie pour ses critiques constructives qui ont permis d'optimiser certains algorithmes.*

*Sans Monsieur Y. SIRET, Directeur technique du CICG, la réalisation pratique de ce travail aurait rencontré des obstacles majeurs. Grâce à lui nous avons eu accès aux principaux systèmes de calcul formel, ses compétences et son expérience de LISP m'ont été d'un précieux secours. Pour son aide et tous les conseils qu'il m'a prodigués depuis mes débuts en calcul formel, je le remercie bien vivement.*

*Je remercie Monsieur Ph. FLAJOLET, Directeur de recherche à l'INRIA d'avoir accepté de participer à ce jury. Ses suggestions et ses encouragements, donnés lors de nos rencontres dans le cadre du Greco de calcul formel, m'ont fait regretter qu'une collaboration plus grande n'ait pu avoir lieu.*

*Monsieur J. DAVENPORT, professeur à l'Université de Bath en Grande Bretagne, suit depuis plusieurs années nos travaux avec intérêt. Notre collaboration a connu un moment intense et fructueux lors de son séjour dans notre équipe en 1982/1983. Ses conseils n'ont cependant pas cessé malgré la distance, aussi je tiens à le remercier pour son aide et le soutien actif qu'il nous a apportés.*

*Monsieur Ch. BOITET, professeur à l'Université Scientifique Technologique et Médicale de Grenoble, bien que non spécialiste en ce domaine, a eu la curiosité de lire cette thèse. Ses nombreuses remarques et suggestions ont largement contribué à améliorer la présentation du texte final. Je le remercie bien vivement d'avoir accepté de participer à ce jury.*

*Ce travail est d'abord le fruit d'une équipe.*

*Mes premiers remerciements iront à Claire DICRESCENZO. Depuis le début de ce projet, elle n'a ménagé ni son temps ni son travail dans sa si efficace et sympathique collaboration. Son soutien chaleureux et sa compréhension n'ont jamais fait défaut. Elle a patiemment supporté mes humeurs pendant la période de gestation de ce projet. Pour tout cela, je lui exprime ma plus vive reconnaissance et toute mon amitié.*

*Si, depuis quelque temps, j'ai l'impression d'être dans la même embarcation que Dominique DUVAL, notre sort s'était lié plus tôt. En effet, des points délicats de cette thèse dépendaient de l'avancement du travail sur les nombres algébriques. C'est dans un climat de confiance et d'amitié que les solutions à ces questions ont été élaborées. Un grand merci encore à Dominique pour tous ces problèmes d'arithmétique qu'elle m'a aidé à résoudre.*

*Aziz HILALI et Alain WAZNER ont été liés à l'avancement de ce logiciel, et leurs travaux récents sont encore riches de ressources à exploiter. Je les remercie pour cette bien sympathique participation.*

*Je voudrais remercier tous les autres membres de l'équipe et du laboratoire, anciens et nouveaux, permanents ou de passage, qui par leur présence et leur participation ont contribué à la dynamique de ce groupe et à son ambiance vivifiante.*

*Notre collaboration avec Strasbourg a été multiple. A l'aide fondamentale, il faut ajouter les réalisations pratiques. C'est Jean THOMANN qui, avec l'expertise du numéricien, a réalisé l'extension numérique du logiciel. Quant à l'extension graphique, elle a été réalisée avec succès par Françoise RICHARD. Eux aussi ont eu beaucoup de patience pour attendre nos solutions formelles ! Mais avec un brin de philosophie, et beaucoup d'ingéniosité pour rendre compatibles les incompatibilités du matériel, tout a fini par "tourner" à Strasbourg comme à Grenoble. Qu'ils croient à ma profonde reconnaissance.*

*Mes remerciements vont aussi à tous ceux dont les travaux nous ont été utiles, en particulier à Mr B. MALGRANGE et Mme A. DUVAL et à tous les étudiants qui par leur projets ou rapports, ont contribué à l'avancement de ce travail.*

*Ce travail n'est certainement pas étranger à mes activités d'enseignement, à ces richesses acquises au cours des diverses expériences, tout à fait passionnantes, d'enseignement de l'algorithmique que j'ai faites, en particulier avec Francis MARTINEZ.*

*La réalisation matérielle de ce document doit beaucoup à l'interlocuteur et expert T<sub>E</sub>X du CIGG, Claude GOUTORBE, pour l'aide qu'il m'a prodiguée dans l'utilisation de ce logiciel. Le lecteur pourra apprécier aussi le soin apporté par le service de reprographie de l'IMAG.*

*Que ceux qui ne sont pas cités ne se croient pas oubliés. Ils sont la face cachée de la raison, cette indispensable ambiance où l'être trouve sa lumière et sa force.*



*A la mémoire de mes parents*



## Table des Matières

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>5</b>
 <b>Première Partie</b> <b>SOLUTIONS FORMELLES</b> <b>D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES</b>	
<b>1 Système de calcul formel et équations différentielles</b> . . . . .	<b>11</b>
1.1 Systèmes de calcul formel et résolveurs d'équations différentielles . . . . .	11
1.1.1 Le résolveur d'EDO de MACSYMA . . . . .	12
1.1.1.1 Exemples en MACSYMA . . . . .	13
1.1.1.2 Les travaux de Lafferty [Lafferty 77] . . . . .	18
1.1.2 Les autres résolveurs d'EDO . . . . .	18
1.1.2.1 Le résolveur de Watanabe [Watanabe 70,77] . . . . .	18
1.1.2.2 Les autres systèmes . . . . .	19
1.2 Le résolveur DÉsir . . . . .	19
1.2.1 Exemple . . . . .	20
1.2.2 Les choix informatiques . . . . .	22
<b>2 Solutions formelles d'équations différentielles</b> <b>au voisinage de points singuliers réguliers</b> . . . . .	<b>23</b>
2.1 Exposé du problème . . . . .	23
2.2 Singularités d'un opérateur différentiel linéaire . . . . .	24
2.2.1 Classification des singularités et polygone de Newton . . . . .	26
2.3 Étude des solutions au voisinage de points singuliers réguliers . . . . .	30
2.3.1 Rappels théoriques sur les singularités régulières . . . . .	30
2.3.1.1 Étude du cas générique . . . . .	30
2.3.1.2 Étude des différents cas . . . . .	34
2.3.2 Étude détaillée de l'algorithme de FROBENIUS . . . . .	41
2.3.2.1 Notations préliminaires . . . . .	41
2.4 Détermination des solutions . . . . .	42
2.4.1 Étude des solutions (autres que celle associée à $\rho_0$ ) . . . . .	43
2.4.2 Étude du premier sous-groupe : $\rho_0 = \rho_1 = \dots = \rho_{i-1}$ . . . . .	45
2.4.3 Étude des solutions du second sous-groupe . . . . .	46
2.5 Algorithme de recherche des racines dont la différence est entière . . . . .	49

2.5.1	Méthode . . . . .	50
2.5.1.1	Détermination de la liste d'entiers $l$ ordonnée croissante . . . . .	50
2.5.1.2	Détermination de la liste $G$ . . . . .	52
2.5.1.3	Obtention de la liste finale. . . . .	54
2.5.2	Les algorithmes . . . . .	55
2.6	L'algorithme de FROBENIUS . . . . .	59
2.6.1	Résumé de la méthode . . . . .	59
2.6.2	Les algorithmes . . . . .	60
2.7	Quelques exemples traités par l'algorithme de FROBENIUS . . . . .	63
2.7.1	Un exemple classique: l'équation de Bessel . . . . .	63
2.7.2	Autres exemples . . . . .	65
<b>3</b>	<b>Solutions formelles d'équations différentielles au voisinage de points singuliers irréguliers . . . . .</b>	<b>71</b>
3.1	Notations et position du problème . . . . .	71
3.2	Polygone de Newton de $L$ . . . . .	72
3.3	Quelques lemmes techniques . . . . .	74
3.3.1	Expression de $(\partial + T_1)^i$ où $T_1 = \partial(\frac{a}{x^\lambda})$ . . . . .	74
3.3.2	Expression des $T_j$ . . . . .	75
3.3.3	Expression de l'opérateur $L(\lambda, a)$ . . . . .	76
3.3.4	Polygone de Newton de $L(\lambda_k, a)$ . . . . .	78
3.4	Description de la méthode . . . . .	79
3.5	Justification de la méthode . . . . .	81
3.5.1	Premier cas : la pente $\lambda$ est nulle . . . . .	82
3.5.2	Deuxième cas: la pente $\lambda$ est strictement positive . . . . .	82
3.5.2.1	$\bar{a}$ est racine simple de $c_\lambda$ . . . . .	82
3.5.2.2	$\bar{a}$ est racine d'ordre $p$ de $c_\lambda$ , ( $p < l$ ) . . . . .	84
3.5.2.3	$\bar{a}$ est racine d'ordre $l$ de $c_\lambda$ . . . . .	85
3.6	Les algorithmes . . . . .	87
3.7	Exemple traité par l'algorithme de Newton . . . . .	89
<b>4</b>	<b>Présentation générale du logiciel DÉsir . . . . .</b>	<b>93</b>
4.1	Organisation générale . . . . .	93
4.2	Les différents modules . . . . .	97
4.2.1	Le module central: FROBENIUS-NEWTON . . . . .	97
4.2.2	Le module de calcul avec les nombres algébriques: D5 . . . . .	97
4.2.3	Le module SYSDIF . . . . .	97
4.2.4	Le module des équations aux différences: EQDIFFERENCE . . . . .	99
4.2.5	Le module numérique: RESOMMATION . . . . .	99
4.2.6	Le module graphique: GRAPHEDO . . . . .	101
4.3	Un exemple complet traité par "DÉsir" . . . . .	103

4.3.1 Solutions en zéro . . . . .	103
4.3.2 Solutions à l'infini . . . . .	103
4.3.3 Interprétation numérique et graphique . . . . .	104

**Deuxième partie**  
**ÉQUATIONS aux DIFFÉRENCES LINÉAIRES**

<b>5 Quelques rappels sur les équations aux différences linéaires . . . . .</b>	<b>111</b>
5.1 Définitions et propriétés . . . . .	111
5.1.1 Équation aux différences . . . . .	111
5.1.2 Opérateurs aux différences . . . . .	112
5.1.3 Fonctions périodiques et sommation . . . . .	113
5.1.4 Représentation asymptotique . . . . .	114
5.1.5 Rappel sur la fonction Gamma et ses propriétés . . . . .	114
5.1.6 Les propriétés générales aux équations aux différences linéaires . . . . .	115
5.1.6.1 Points singuliers d'une équation aux différences linéaires . . . . .	115
5.1.6.2 Système fondamental de solutions . . . . .	116
5.2 Solutions d'une équation aux différences . . . . .	117
5.2.1 Le théorème de Poincaré . . . . .	117
5.2.2 Les méthodes de recherche des solutions . . . . .	119
<b>6 La méthode Della Dora-Wazner . . . . .</b>	<b>121</b>
6.1 Polygone de Newton d'un opérateur aux différences . . . . .	121
6.1.1 Quelques notations . . . . .	121
6.1.2 Le $\tau$ -polygone de Newton . . . . .	122
6.1.3 Le $\Delta_\tau$ -polygone de Newton . . . . .	123
6.2 Redressement d'une pente du $\tau$ -polygone . . . . .	124
6.2.1 Pour le côté de pente $p$ . . . . .	126
6.2.2 Cas des autres pentes . . . . .	126
6.3 Récurrence fondamentale . . . . .	127
6.3.1 Équation caractéristique relative au côté $[s_1, s_2]$ . . . . .	127
6.3.2 Itération fondamentale . . . . .	130
6.3.3 Description d'une étape du procédé . . . . .	132
6.3.3.1 Valuation des $\hat{b}_i$ . . . . .	134
6.3.3.2 Détermination du polynôme $P_0(\alpha)$ . . . . .	134
6.4 Opérateurs aux différences du type de Fuchs . . . . .	135
6.4.1 Définition des opérateurs fuchsien. . . . .	135
6.4.2 Recherche des solutions formelles d'un opérateur fuchsien . . . . .	136
6.4.2.1 Action d'un opérateur Fuchsien sur $t^\nu$ . . . . .	136
6.4.2.2 Action de $L$ sur une série formelle . . . . .	137

6.4.2.3 Discussion des différentes solutions . . . . .	138
<b>7 La méthode de Pincherle-Ramis . . . . .</b>	<b>141</b>
7.1 La transformée formelle de Pincherle . . . . .	141
7.1.1 Notations . . . . .	142
7.1.2 L'action de $M_{k,p}$ sur la transformée de Pincherle. . . . .	142
7.2 Dictionnaire de la transformée de Pincherle . . . . .	144
7.3 Polygone de Newton d'un opérateur différentiel . . . . .	145
7.4 Liens entre les polygones de Newton . . . . .	148
7.5 Le calcul de Galbrun . . . . .	151
7.6 La méthode de Ramis . . . . .	153
7.7 aperçu sur la théorie de Ramis-Malgrange . . . . .	157
7.8 Les fonctions $\Gamma$ généralisées . . . . .	160
<b>8 Applications des méthodes Della Dora-Wazner et Ramis . . . . .</b>	<b>163</b>
8.1 Introduction . . . . .	163
8.1.1 Cas de la pente $\lambda_1 = 1$ . . . . .	164
8.1.2 Cas de la pente $\lambda_2 = 2$ . . . . .	166
8.2 La méthode Della Dora-Wazner. . . . .	168
8.2.1 Étude de la première équation récurrente. . . . .	168
8.2.2 Étude de la deuxième équation récurrente. . . . .	174
8.3 La méthode de Pincherle-Ramis . . . . .	178
<b>Annexe La méthode de Boole . . . . .</b>	<b>187</b>
A.1 Introduction . . . . .	187
A.2 Les opérateurs $\pi$ et $\rho$ de Boole . . . . .	188
A.2.1 Les séries de faculté . . . . .	189
A.3 La méthode de Boole-Frobenius . . . . .	190
A.3.1 Les différentes étapes de la méthode . . . . .	190
A.3.2 Recherche des solutions sous forme de séries formelles . . . . .	192
A.3.2.1 Solutions appartenant à $GF_1(x)$ . . . . .	192
A.3.2.2 Solutions appartenant à $GF_2(x)$ . . . . .	193
A.4 Polygone d'une équation aux différences et classification . . . . .	193
A.4.1 Le polygone de Newton . . . . .	193
A.4.2 Équations normales régulières et irrégulières . . . . .	195
A.4.2.1 Recherche des solutions dans $GF_1(x)$ . . . . .	195
A.4.2.2 Recherche des solutions dans $GF_2(x)$ . . . . .	196
<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>199</b>

## INTRODUCTION

Le sujet de cette thèse se rattache au **calcul formel**, discipline qui n'est pas récente. En effet, dès le début des années 1960, de nombreux logiciels permettant de faire du calcul algébrique ont été proposés. Ils sont maintenant classés parmi la première génération des systèmes de calcul formel.

Entre les années 1960 et 1970, plusieurs de ces logiciels de calcul formel se sont ensuite généralisés pour devenir de véritables systèmes de calcul formel. Ce sont les systèmes dits de la deuxième génération. Ils continuent à se développer, et sont encore très largement utilisés (REDUCE, MACSYMA, MAPLE, SMP, muMATH...). Longtemps cependant, leurs possibilités, voire même leur existence, ont été méconnues. Cette situation a récemment changé.

Ces systèmes ont eu la réputation d'être difficiles d'accès et très coûteux d'utilisation. Ce n'est plus vrai aujourd'hui, grâce aux progrès technologiques.

Les recherches en calcul formel de ces vingt dernières années ont surtout été marquées par des résultats en algorithmique, et ce au moins jusqu'à l'apparition du premier système de calcul formel de la troisième génération (SCRATCHPAD 2) vers 1980. Ces recherches ont connu diverses étapes du point de vue des algorithmes fondamentaux:

- les méthodes modulaires (pour le calcul du pgcd, du résultant,...)
- les méthodes p-adiques (pour la factorisation, le pgcd,...)
- les méthodes heuristiques (pour la factorisation,...)

Ces méthodes, comme les questions fondamentales de la représentation des données et de la simplification, sont maintenant considérées comme des connaissances de base nécessaires pour le calcul formel.

D'autres domaines du calcul formel ont également beaucoup progressé, comme celui de l'intégration formelle par exemple. Parallèlement, et durant

cette même période, on ne peut pas dire que les équations différentielles aient donné lieu à des réalisations aussi riches. On peut, certes, s'en étonner. L'expérience nous a cependant montré la très grande complexité de ce sujet.

C'est dans un contexte grenoblois particulièrement riche de tous les systèmes de calcul formel et de personnes en ayant la connaissance et la pratique, que J. Della Dora, qui s'était déjà intéressé à la question de la réduction formelle des équations différentielles à singularités irrégulières [Malgrange B. 80], et qui connaissait les travaux récents de J.P. Ramis, fut à l'origine de cet ambitieux projet de "résolveur"<sup>\*\*</sup> d'équations différentielles linéaires.

Cette thèse rapporte la contribution à ce domaine de l'équipe de calcul formel du laboratoire TIM3 qui a travaillé en collaboration avec l'équipe de recherche de J.P. Ramis à l'IRMA de Strasbourg, et avec le groupe IAO du centre de calcul du CNRS de Strasbourg.

Depuis plus de huit ans, de nombreux travaux ont contribué à l'avancement et à la réalisation de ce projet. Rappelons, à Grenoble, les thèses de troisième cycle de [Hilali A. 82], [Najid\_Zejli H. 85] et [Chaffy C. 84], la thèse de [Ozello P. 87], [Wazner A. (prévue fin 87)], les thèses d'État de [Duval D. 87] et [Hillali A. (prévue fin 87)], et les nombreux rapports de DEA ou projets d'ingénieurs dont on ne mentionnera que les principaux: [Pigouche O., Wazner A. 82], [Zejli H. 83], [Ozello P. 84], [Roch J.L. 86], [Siebert F. 86], [Senechaud P. 86], et, à Strasbourg, la thèse d'État de [Duval A. 84] et la thèse de F. Richard, en cours d'achèvement.

La thèse se compose de deux parties. La **première partie** est essentiellement consacrée à l'étude des solutions formelles des équations différentielles linéaires, qui nous a conduit ensuite à l'étude des équations aux différences linéaires, étude qui fait l'objet de la deuxième partie.

Le **Chapitre 1** présente tout d'abord ce qui existe du point de vue des équations différentielles dans les systèmes actuels de calcul formel. Nous montrons ensuite quel a été notre objectif en ce domaine, avant de préciser les choix informatiques que nous avons retenus pour la réalisation effective du projet.

Le **Chapitre 2** et le **Chapitre 3** présentent l'étude détaillée des méthodes et algorithmes utilisés pour la détermination des solutions au voisinage de points singuliers réguliers et irréguliers.

---

<sup>\*\*</sup> Néologisme utilisé pour "logiciel de résolution", ou bien pour la traduction du mot anglais "solver"

Le **Chapitre 4** concerne la présentation générale du logiciel DESIR, son contexte de réalisation et ses extensions.

Cette première partie nous a conduit à une étude plus approfondie des équations aux différences linéaires, qui est exposée dans la **deuxième partie**.

Le **Chapitre 5** rappelle quelques définitions et propriétés des équations aux différences linéaires. Il est suivi d'une présentation de deux méthodes que nous avons étudiées: la méthode Della Dora\_Wazner au **Chapitre 6**, la méthode Pincherle\_Ramis au **Chapitre 7**. La méthode de Boole est présentée en **Annexe**, car, après l'avoir étudiée, nous l'avons complètement abandonnée au profit des deux autres méthodes plus constructives.

Dans le **Chapitre 8** nous faisons une étude comparative des méthodes Della Dora\_Wazner et Ramis\_Pincherle sur des exemples du second ordre.

Bien sûr, ce travail n'est qu'une contribution à l'étude des solutions formelles d'équations différentielles linéaires. Cependant, l'étude théorique a été suivie de la réalisation complète d'un résolveur formel, effectivement disponible, ce qui permet d'utiliser en pratique toute la puissance des méthodes mathématiques étudiées, pour résoudre de réels et difficiles problèmes scientifiques. A ce logiciel formel sont ajoutées une extension numérique et une extension graphique qui permettent une interprétation complète des résultats.

*Remarque préliminaire:*

Tous les exemples présentés dans cette thèse ont été traités sur Bull DPS8 sous le système Multics, à l'exception de l'exemple graphique qui lui a été traité sur IBM 3081K sous le système VM/MVS.



**Première partie**

**ÉTUDE**

**DES SOLUTIONS FORMELLES**

**DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES**



## Chapitre 1

### SYSTÈMES DE CALCUL FORMEL

ET

### ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Dans ce chapitre, nous montrerons ce que les systèmes de calcul formel offrent à l'utilisateur dans le domaine des équations différentielles linéaires. Nous montrerons ensuite quelles sont les améliorations que nous avons voulu faire en ce domaine, et quels sont les choix informatiques que nous avons retenus.

#### 1.1 SYSTÈMES DE CALCUL FORMEL ET RÉSOLVEURS D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES .

Un scientifique découvrant un système de calcul formel a souvent plaisir à le "mettre à l'épreuve" devant ces "fameuses intégrales" dont la solution n'est ni évidente ni immédiate. Il est, en général, agréablement surpris de la rapidité avec laquelle il obtient la solution, et aussi des solutions qu'il obtient tant l'intégration formelle a fait de grands progrès ces dernières années.

S'il décide alors, de mettre ces systèmes à l'épreuve avec les équations différentielles, même avec les systèmes de calcul formel les plus puissants, il n'aura pas la même satisfaction. En effet, la plupart des systèmes sont très pauvres en ce domaine, sauf pour MACSYMA, dont on parlera plus en détail.

Et en ce qui concerne plus précisément la question des solutions formelles, les systèmes sont pratiquement démunis. Pourtant, les recherches algorithm-

miques sur le sujet sont riches (on en trouvera un résumé intéressant dans [Singer 86]). Malheureusement, l'implantation des algorithmes n'a pas toujours été faite; ou, quand elle l'a été, les programmes sont souvent restés peu connus et non distribués.

Un certain nombre de résolveurs d'équations différentielles ont cependant été écrits, et nous en ferons un bref historique.

Tout d'abord, nous allons voir ce que MACSYMA, le système de calcul formel probablement le plus riche actuellement en ce domaine, permet de faire.

### 1.1.1 Le résolveur d'EDO de MACSYMA

Montrons sur divers exemples ce que permet le résolveur d'EDO\* de ce système. Pour la lisibilité, on notera que les lignes frappées par l'utilisateur sont étiquetées par ( $c_i$ ) et se termine par un “ ; ” ou un “ \$ ”. Le résultat d'une commande est étiqueté par ( $d_i$ ). Les symboles “%e, %i, %pi” signifient  $e, i, \pi$  et le symbole “%”, employé seul, signifie l'expression précédente.

Avant d'appeler *ode*, la commande générale de résolution des équations différentielles, il faut préciser la dépendance des variables, ce qui se fait par la commande:

*depends(y, x)*

qui signifie: la fonction  $y$  dépend de la variable  $x$ . Pour écrire l'équation différentielle, on utilise l'opérateur *diff* de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \text{diff}(y, x) & \text{ signifie } \frac{\partial y}{\partial x} \\ \text{diff}(y, x, 2) & \text{ signifie } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \end{aligned}$$

Ensuite, *ode* peut être appelé par la commande:

*ode (équation différentielle, fonction, variable);*

A ce moment, on peut avoir des informations diverses sur le chargement de certains fichiers qui sont dans la bibliothèque *Share*, et des informations sur les différentes méthodes essayées. Pour enfin connaître la méthode qui a permis d'obtenir le résultat, il faut utiliser la commande: *method*;

En ce qui concerne les équations d'ordre 2, il faut appeler la commande *ode* avec le paramètre supplémentaire *series* si l'on veut la solution sous forme de séries.

---

\* EDO est utilisé pour “équation différentielle ordinaire”

### 1.1.1.1 Exemples en MACSYMA

Dans ces exemples, %k1 et %k2 sont des constantes, et %%n est le nom d'une variable de type entier. D'autres notations sont précisées dans le commentaire qui suit ces exemples.

#### Premier exemple

```
depends(y,x)$
```

```
Time= 16 msec.
```

```
(c6) /* Exemples d'equations differentielles d'ordre 2*/
```

```
/* exemple1: equation de Bessel ou n=1 */
```

```
eq3:x^2*diff(y,x,2)+x*diff(y,x)+x^2*y=0;
```

```
Time= 66 msec.
```

```
(d6)
```

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + x^2 y = 0$$

```
(c7) /* Pour la solution sous closed form*/
```

```
ode(eq3,y,x);
```

```
Totaltime= 47266 msec. Gctime= 4483 msec.
```

```
(d7)
```

$$y = \%k2 y_0(x) + \%k1 j_0(x)$$

```
(c8) method;
```

```
Time= 0 msec.
```

```
(d8)      bessel
```

```
(c9) odetutor:true$
```

```
.....
```

```
(c11) /* Pour la solution en serie */
```

```
ode(eq3,y,x,series);
```

```
TRYING      series
```

```
DIAGNOSIS: TYPE: singular      equal      ROOTS: R1= 0      R2= 0
```

Chapitre 1

SINGULARITIES: [0, inf]

Time= 12566 msec.

$$(d11) \quad [y = \%k2 (\log(x) \frac{\sqrt[4]{x^{2n}}}{n!}) > \frac{(-1)^n x^{2n}}{4 n!}]$$

$$\frac{\sqrt[4]{x^{2n}}}{n!} \text{harm}(1, n) \frac{(-1)^n x^{2n}}{4 n!} + \%k1 \frac{\sqrt[4]{x^{2n}}}{n!} \frac{(-1)^n x^{2n}}{4 n!}]$$

Deuxième exemple

(c12) /\* exemple2: equation de Bessel generale \*/

eq4:x^2\*diff(y,x,2)+x\*diff(y,x)+(x^2-n^2)\*y=0;

Time= 100 msec.

$$(d12) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) y = 0$$

(c13) odetutor:true\$

Time= 0 msec.

(c14) ode(eq4,y,x);

TRYING ode2

Is n an integer? Type Y or N.  
y;

TTime= 3450 msec.

$$(d14) \quad y = \%k2 y_n(x) + \%k1 y_n(x)$$

(c15) method;



Chapitre 1

TRYING series

DIAGNOSIS: ORDINARY POINT

Totaltime= 36150 msec. GCtime= 5083 msec.

$$\begin{aligned}
 & \text{inf} \quad n-1 \quad n+2 \quad 2 \quad \%n \\
 & \text{====} \text{ fff}(-\frac{\quad}{2}, \%n) \text{ fff}(\frac{\quad}{2}, \%n) x \\
 (d21) [y = \%k2 x > \frac{\quad}{\quad} \\
 & \text{====} \quad \text{fff}(\frac{\quad}{2}, \%n) \%n! \\
 & \%n = 0 \\
 & \text{inf} \quad n \quad n+1 \quad 2 \quad \%n \\
 & \text{====} \quad \text{fff}(-\frac{\quad}{2}, \%n) \text{ fff}(\frac{\quad}{2}, \%n) x \\
 + \%k1 > \frac{\quad}{\quad} \\
 & \text{====} \quad \text{fff}(\frac{\quad}{2}, \%n) \%n! \\
 & \%n = 0
 \end{aligned}$$

Voyons maintenant un exemple où MACSYMA ne peut pas résoudre du tout l'équation. Il s'agit d'équations d'ordre 2 non standard ou d'ordre > 2. Prenons un exemple d'ordre 4.

Quatrième exemple

(c26) /\* Equation differentielle d'ordre 4 \*/

eq6: x^10\*diff(y,x,4)+(5\*x^7)/2\*diff(y,x,3)+x^4\*diff(y,x,2)+2\*x^2\*(x+1)\*diff(y,x)+(x+1)\*y=0;

Time= 283 msec.

$$(d26) x^{10} \frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{5 x^7}{2} \frac{d^3 y}{dx^3} + x^4 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2 x^2 (x+1) \frac{dy}{dx} + (x+1)y = 0$$

(c27) series(eq6,y,x);

gc:

.....

707916 msec. (98816 msec.)  
 Interrupt (h for help):quit;

Commentaire sur les exemples:

Dans le premier exemple: Bessel avec  $n = 1$ , on obtient bien la solution complète avec les *log* et où  $harm(exp, n)$  est la somme partielle de la série harmonique

$$harm(exp, n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{exp + k}$$

Dans le deuxième exemple: Bessel général, on n'obtient pas la solution avec les *log*. Dans la solution,  $fff(exp, n)$  vaut:

$$fff(exp, n) = exp(exp + 1)(exp + 2) \dots (exp + n - 1)$$

$$\text{avec } n \geq 1 \text{ et } fff(exp, 0) = 1$$

Dans le troisième exemple avec l'équation de Legendre, il n'y a pas de problème car dans ce cas les points sont "ordinaires".

Dans les exemples suivants, l'impossibilité totale ou partielle de déterminer les solutions provient, soit de la nature des racines de l'équation caractéristique, soit de points singuliers irréguliers, soit encore de l'ordre supérieur à 2. Tous ces cas ne sont pas traités par le module *series* de MACSYMA.

Les auteurs du module d'EDO le définissent comme un "pot pourri de résolveurs" d'équations différentielles ordinaires. Si la commande *ode* est appelée de façon standard, l'appel des algorithmes correspondant aux diverses méthodes de résolution, se fait de manière heuristique. Mais l'utilisateur peut aussi intervenir en apportant des informations complémentaires, ou en imposant une méthode spécifique.

Pour les équations du premier ordre, *ode* fait appel à *ode2*, qui contient presque toutes les méthodes connues allant des méthodes de base (Bernoulli, linéaire, ...) jusqu'aux méthodes plus spécifiques (transformée de Laplace, Riccati, ...). Les algorithmes utilisés par *ode2* viennent essentiellement du module d'intégration indéfinie [Golden 77].

Pour les équations du second ordre, si les méthodes de *ode2* ne permettent pas d'obtenir une solution, *ode* fait appel à une méthode de la transformée de Laplace. Si aucune de ces méthodes ne permet d'obtenir une solution, alors *ode* fait appel au module *series* qui donne une solution sous forme de séries, seulement dans le cas où l'équation différentielle est d'ordre 2 avec des points singuliers réguliers, et où les racines de l'équation caractéristique ne sont pas complexes.

En ce qui concerne ces méthodes plus spécifiques qui donnent une solution sous forme de séries de puissance, elles ont été développées par [Lafferty 77].

## Chapitre 1

### 1.1.1.2 Les travaux de Lafferty [Lafferty 77]

En 1977, Lafferty a proposé une extension au résolveur d'EDO de MACSYMA, en donnant la possibilité d'obtenir des solutions sous formes de séries de puissances. Il précise que ce qu'il a apporté de différent et de nouveau par rapport à ce qui existait alors est le fait qu'avec son extension, le résolveur va essayer de donner une solution "complète" sous forme de série infinie, plutôt qu'une approximation. Son but était que, si *ode* ne reconnaissait pas une forme particulière, il essaye automatiquement de donner une solution sous forme de série. Ces algorithmes qui utilisent la méthode de Frobenius, ont été réalisés dans le cas de points singuliers réguliers, et pour l'ordre 2. Une restriction est faite aussi pour le cas des racines complexes de l'équation caractéristique.

Dans la conclusion de cet article, Lafferty met en évidence à la fois le grand intérêt et les difficultés d'une généralisation à une équation d'ordre quelconque. En particulier, cela demande "que l'on puisse calculer les  $n$  racines d'une équation d'ordre  $n$ , que l'on puisse générer  $n$  solutions, même dans les cas particuliers où les racines sont multiples ou bien elles diffèrent d'un entier. La généralisation devant aussi tenir compte du cas des singularités irrégulières". Cette généralisation n'a pas été poursuivie par l'équipe MACSYMA.

### 1.1.2 Les autres résolveurs d'EDO

#### 1.1.2.1 Le résolveur de Watanabe [Watanabe 70,77]

Au moment où Lafferty développait *series* en MACSYMA, Watanabe proposait aussi une implantation de l'algorithme de Frobenius dans le cas de points singuliers réguliers. Ce travail a été fait dans un contexte informatique très différent. En effet, ce résolveur est écrit en FORTRAN, plus exactement dans le langage L qui est un langage de manipulation d'expressions symboliques défini à ce propos par Watanabe. Il est probable et regrettable que ce choix informatique n'ait pas été favorable à la diffusion de ce système. Les cas difficiles ont été bien analysés et plus largement pris en compte dans l'implantation de Watanabe que dans celle de MACSYMA. En particulier le cas des racines de l'équation caractéristique qui diffèrent d'un entier. Watanabe a proposé un critère pour déterminer ce cas. Ce critère n'étant pas totalement satisfaisant, nous l'avons abandonné au profit d'un meilleur algorithme proposé par D. Duval et réalisable grâce à la possibilité de travailler avec les nombres algébriques. Cela permet de venir à bout de ce cas difficile.

Signalons que, ces dernières années, Watanabe a largement contribué à la réalisation d'un résolveur d'équations différentielles d'ordre 2 dans REDUCE [Watanabe 81,84].

### 1.1.2.2 Les autres systèmes

Parmi les principaux systèmes, citons principalement:

- *Le système TAYLOR [Norman 73, 75, 76]*

Le système TAYLOR a été développé par A. Norman vers 1970. La méthode des séries de Taylor pour résoudre les équations différentielles a été étudiée par [Barton, Willers et Zahar, 1972a] et [Norman 1973]. Ils ont montré qu'elle était sûre et efficace [Barton, *et al.* 1972b]. Les algorithmes qu'ils présentent dans ces articles sont seulement applicables aux ensembles d'équations *explicites*. [Norman 1976] a présenté un algorithme permettant le développement des solutions d'un ensemble ordinaire d'équations différentielles en séries de puissances.

- *Le système EULE [Schmidt 76]*

C'est un système qui permet la recherche automatique des solutions d'équations différentielles du premier ordre et du premier degré. Cela se fait par une recherche *heuristique*.

La réalisation et la sélection des méthodes d'EULE sont basées sur une analyse détaillée du travail de [Kamke 1961], qui est représentatif de l'état des connaissances en ce domaine.

L'efficacité d'EULE peut se mesurer par le fait qu'il résout 90% de la collection d'équations différentielles du premier ordre de Kamke, et 95% des équations de [Murphy 1960].

EULE fait suite à plusieurs programmes heuristiques, essentiellement les programmes SAINT [Slage 61], SIN [Moses J. 67] et WANDERER [Wang P. 71].

- *Le résolveur d'EDO du système NEWSPEAK*

NEWSPEAK est un projet de système de calcul formel fortement typé qui a débuté au début des années 80 à l'Université de Berkeley sous la direction de R. Fateman. Ce projet s'annonçait très prometteur, mais a dû être abandonné vers 1985. C'est [Williamson 84] qui a décrit l'implantation des solutions en série de Taylor des équations différentielles ordinaires dans NEWSPEAK.

## 1.2 LE RÉsOLVEUR DÉsir .

DÉsir est un logiciel développé dans le système de calcul formel REDUCE. Nous allons montrer quelques exemples de ses possibilités, et en particulier en reprenant un exemple que MACSYMA n'a pas pu résoudre. Cet

## Chapitre 1

exemple, comme ceux des chapitres suivants, ont été traités sur l'ordinateur Bull DPS8 avec le système Multics. Pour aider à la lisibilité de ces exemples, on note que l'on trouvera:

- l'appel du logiciel qui se fait par la commande `codedesir()`;
- le dialogue interactif pour l'introduction des données,
- l'impression des solutions de l'équation différentielle avec le nombre de termes demandés.

### 1.2.1 Exemple

Reprenons l'exemple d'ordre 4 où MACSYMA ne donne pas de solution, et aucun diagnostic après une dizaine de minutes !

```
codedesir();
```

```
***** INTRODUCTION DES DONNEES *****
```

```
Est-ce un systeme que vous voulez traiter ? (oui / non)
non;
```

```
L' equation est de la forme
```

$$a(1,0)(x)d^0 + a(1,1)(x)d^1 + \dots + a(1,n)(x)d^n = 0$$

```
ordre de l'equation ?
```

```
4;
```

```
Donner les coefficients a(1,j)(x)
x+1; 2*x**2*(x+1); x**4; 5*x**7/2; x**10;
```

```
a(1,0) = x + 1
```

```
a(1,1) = 2*x2*(x + 1)
```

```
a(1,2) = x4
```

```
a(1,3) = 5/2*x7
```

```
a(1,4) = x10
```

```
correction ? ( oui; / non; )
```

```
non;
```

```
nombre de termes desires pour la solution ?
```

```
4;
```

LES 4 SOLUTIONS CALCULEES SONT DANS LE TABLEAU

soldif(1,j) avec j = 1,...4

=====  
SOLUTION No 1  
=====

$$e \left( \frac{\sqrt{x} + \sqrt{6}x}{\sqrt{x}x} \right)^{-4} x$$

$$* (-1330595/96 * \sqrt{x} * \sqrt{6})^{(-1)} x$$

$$- 173/2 * \sqrt{x} * \sqrt{6}^{(-1)} + 174069763/4608 x^2 + 9173/16 x + 1)$$

=====  
SOLUTION No 2  
=====

$$e \left( \frac{\sqrt{x} - \sqrt{6}x}{\sqrt{x}x} \right)^{-4} x$$

$$* (1330595/96 * \sqrt{x} * \sqrt{6})^{(-1)} x$$

$$+ 173/2 * \sqrt{x} * \sqrt{6}^{(-1)} + 174069763/4608 x^2 + 9173/16 x + 1)$$

=====  
SOLUTION No 3  
=====

$$x \left( \frac{1}{54} \right) \left( \frac{(2x + 3)}{(3x)^2} \right)^{10} x^4 * (863316799848061/1338925209984 x^4$$

$$- 48578095525/344373768 x^3 + 7318955/236196 x^2 - 1333/243 x + 1)$$

INSTITUT IMAG

Informatique, Mathématiques Appliquées de Grenoble

CNRS - INPG - USMG

MÉDIATHÈQUE

B.P. 68

38402 ST-MARTIN-D'ÈRES CEDEX

21

F.A.C.

Tél. (7) 51 46.36

## Chapitre 1

=====  
SOLUTION No 4  
=====

$$\begin{aligned} & \frac{(13/27) \left( (-32x + 3)/(12x^2) \right)^{14}}{x^e * x^{14}} \\ & * (90412648939865456/10460353203x^4 + 10833178373456/43046721x^3 \\ & + 353835104/59049x^2 + 25336/243x + 1) \end{aligned}$$

### 1.2.2 Les choix informatiques

Au moment de choisir un système de calcul formel, nous n'avions que 2 possibilités MACSYMA ou REDUCE. Comme nous l'avons vu, seul MACSYMA bénéficiait alors des travaux de Lafferty dans le domaine des EDO, travaux qui n'avaient pas été continués par l'équipe MACSYMA. Mais nous nous sommes trouvés face à des difficultés majeures: difficulté d'accès au source, difficulté à faire des extensions au système, et complexité d'un système pas toujours bien défini.

REDUCE, système moins riche que MACSYMA, comportait cependant tous les outils de calcul formel qui nous étaient nécessaires. Notre longue expérience de ce système nous a permis de bien cerner ses possibilités. Par ailleurs, A.C. Hearn, l'auteur de REDUCE, a toujours eu une politique de développement de ce système très largement ouverte. Rappelons, par exemple, que le module d'intégration a été développé par J. Davenport, et la factorisation par A. Norman, pour ne citer qu'eux. Aussi, le logiciel que nous avons développé, pourra être distribué avec le système REDUCE, que nous avons retenu pour implanter notre résolveur d'équations différentielles.

## Chapitre 2

# SOLUTIONS FORMELLES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

## AU VOISINAGE DE POINTS SINGULIERS RÉGULIERS

### 2.1 EXPOSÉ DU PROBLÈME .

Dans ce chapitre, nous allons présenter les développements récents concernant l'intégration formelle des équations différentielles linéaires homogènes dans le plan complexe.

Pour nous, le problème sera de déterminer un système fondamental de solutions formelles au voisinage d'une singularité, pour des équations de la forme:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)y = 0 \quad (1)$$

où nous supposerons toujours que les  $a_i$  sont des polynômes à coefficients complexes.

Naturellement, posé ainsi, le problème est considérable et a déjà fait l'objet d'innombrables études. Depuis les premiers travaux de Kummer et Gauss en 1811, de nombreux mathématiciens ont étudié les solutions de ces équations dans  $\mathbb{C}$ . Parmi eux, citons les noms de Cauchy (1835-1840), Weierstrass (1856), Riemann (1857), avant les travaux fondamentaux de Fuchs (1865), Frobenius (1873), Poincaré (1881), Birkhoff (1909), pour ne citer que les plus importants. Récemment, ces études ont été reprises par J. Deligne (1976), B. Malgrange (1980) et J.P. Ramis (1981), du point de vue théorique.

Une question se pose alors:

*Pourquoi cet intérêt pour l'étude d'équations telles que (1) ?*

L'intérêt théorique est évident, l'intérêt pratique est grand. En effet, il suffit de citer quelques applications des équations différentielles linéaires:

- la génération de nombreuses fonctions spéciales [Bateman ];
- solutions par séparation des variables des problèmes aux dérivées partielles [Morse Fishbach ] ;
- étude et calcul de groupes de Galois différentiels (utile en particulier en théorie des nombres);
- solution de problèmes de valeurs propres ( problème de Sturm Liouville);
- etc.

*Que peut-on apporter de nouveau à un tel domaine ?*

C'est de pouvoir, générer sans erreurs les solutions formelles de ces équations. L'objet de ce chapitre est de présenter cette réalisation qui a été possible grâce à l'utilisation des techniques de calcul formel. Avant de présenter les travaux théoriques d'où sont issus les algorithmes du résolveur d'EDO, nous devons faire quelques rappels à propos des singularités d'un opérateur différentiel linéaire.

## 2.2 SINGULARITÉS D'UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE .

Soit un opérateur de la forme:

$$L = \sum_{i=0}^n a_i(x) \frac{d^i}{dx^i}$$

où les  $a_i(x)$  appartiennent à l'anneau  $\mathbf{C}[x]$  des polynômes en une indéterminée sur le corps  $\mathbf{C}$ .

On sait que les singularités des solutions de l'équation  $L\varphi = 0$  sont localisées:

- aux racines de  $a_n(x) = 0$
- ou éventuellement à l'infini.

Si  $\alpha$  est racine de  $a_n$ , par une translation de la forme  $x \rightarrow x - \alpha$ , on peut se ramener à une singularité à l'origine pour les zéros à distance finie. De la même manière, la singularité à l'infini peut être ramenée en zéro par le changement  $x \rightarrow \frac{1}{x}$ .

Afin d'étudier les solutions asymptotiques (formelles) en une singularité, nous devons donc tout d'abord déterminer une racine  $\alpha$  de  $a_n$ . Nous devons introduire, au cours de cette étude, des nombres complexes définis comme racines de certains polynômes. Par exemple, les racines de  $a_n(x)$  peuvent être des singularités de l'équation (1).

Il n'est pas possible, en général, de déterminer *exactement* une racine d'une équation, car, quelque soit la méthode numérique utilisée (Newton, Birstow,...), elle conduit à une approximation. Mais alors, une valeur approchée d'une racine de  $a_n(x)$  est un point ordinaire pour l'équation (1), et on perd ainsi toute l'information sur la singularité. Nous reviendrons sur cette question au paragraphe 4. Pour mettre en évidence les racines des polynômes, nous introduisons les notations suivantes :

- $K$  désigne un corps contenu dans  $\mathbf{C}$  et contenant tous les coefficients des polynômes  $a_i(x)$ ,  $0 \leq i \leq n$ .
- Si  $P_1(x)$  est un polynôme à coefficients dans  $K$ , et si  $\alpha_1$  est une racine de  $P_1(x)$  dans  $\mathbf{C}$ ,  $K(\alpha_1)$  désigne le plus petit sous-corps de  $\mathbf{C}$  contenant  $K$  et  $\alpha_1$ .
- L'expression  $K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ , où chaque  $\alpha_i$  est racine d'un polynôme  $P_i(x)$  à coefficients dans  $K(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1})$ , est définie par récurrence sur  $K$ . C'est le plus petit sous-corps de  $\mathbf{C}$  contenant  $K, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ .

Maintenant, pour qu'il soit possible de calculer *exactement*, il faut supposer que les coefficients des polynômes  $a_n(x)$  sont dans un corps  $K$ , ( $K$  contenu dans  $\mathbf{C}$ , et contenant le corps  $\mathbf{Q}$  des rationnels), sur lequel il est possible de calculer *exactement*. Nous entendons par cela la possibilité de représenter les éléments de  $K$  sans ambiguïté à partir d'un nombre fini de symboles, et de traduire les opérations élémentaires ( $+, -, *, /$ ) de  $K$  par des algorithmes. Nous appellerons un tel corps un *corps calculable*. On voit que  $K$  doit être dénombrable, et donc que les corps  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{R}$  ne sont pas calculables. Par contre, le corps  $\mathbf{Q}$  l'est, ainsi que toute extension "explicitement de type fini" de  $\mathbf{Q}$  [Davenport 1981].

On peut procéder de la manière suivante:

- On factorise  $a_n(x)$  sur  $\mathbf{Z}$ ;
- Soit  $\hat{a}_n(x)$  le facteur irréductible de  $a_n$ , dont  $\alpha$  est racine.

Il faut maintenant travailler dans l'extension  $\mathbb{Q}(\alpha)$  de  $\mathbb{Q}$  par une racine de  $\hat{a}_n$ . Dans le corps  $\mathbb{Q}(\alpha)$ , les opérations arithmétiques élémentaires sont évidentes. Le problème se réduit à utiliser une règle de réécriture définie par  $\hat{a}_n(\alpha) = 0$ . Plus précisément, si on note:

$$\hat{a}_n(\alpha) = a_0^n + a_1^n \alpha + \dots + a_m^n \alpha^m$$

on utilise la règle:

$$\alpha^m = -\frac{1}{a_m^n} (a_0^n + \dots + a_{m-1}^n \alpha^{m-1})$$

En fait, dans la pratique, il est inutile de factoriser  $a_n(x)$ .

Nous ne développerons pas plus ici cette question du travail dans une extension de  $\mathbb{Q}$ , mais nous renvoyons aux travaux récents [Duval, Dicrescenzo 84,85] dont nous avons repris et utilisé les résultats, comme on le verra dans la présentation des algorithmes.

Etant alors placé dans  $\mathbb{Q}(\alpha)$  il est possible de parler de la translation  $x \rightarrow x - \alpha$  qui va ramener la singularité à l'origine. La conséquence de cette translation est que nous allons travailler avec un opérateur appartenant à  $\mathbb{Q}(\alpha)[x][\frac{d}{dx}]$ .

Afin de simplifier la suite de l'exposé, on supposera que cette translation est faite, c'est à dire que 0 est racine de  $a_n(x) = 0$ , et qu'il existe au moins un indice  $j$  tel que  $a_j(0)$  soit non nul.

Le problème qui se pose alors est de déterminer *la nature de la singularité*. Pour cela, nous utiliserons le polygone de Newton de  $L$  en zéro, dont nous allons rappeler la définition.

*Remarque:* La théorie que nous exposons ayant un caractère purement local, il est possible de la développer pour des opérateurs différentiels à coefficients dans l'algèbre  $\mathbb{C}[[x]]$ .

### 2.2.1 Classification des singularités et polygone de Newton

Soit  $L$  l'opérateur différentiel

$$L = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial^i \quad \text{ou} \quad \partial = \frac{d}{dx} \quad (1')$$

Avant de définir le polygone de Newton de  $L$  en zéro, nous avons besoin d'introduire quelques notations, que nous donnerons dans le cadre des opérateurs à coefficients dans l'algèbre  $\mathbb{C}[[x]]$ .

**- la valuation**

Introduisons sur le corps des fractions  $\mathbf{C}((x))$  de  $\mathbf{C}[[x]]$  la valuation  $v$  :

$$v : \mathbf{C}((x)) \longrightarrow \mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$$

$$f \longrightarrow \text{ord}_0(f)$$

qui à  $f$  associe son ordre en zéro.

*Exemple:*

Si  $f : a_{-n}x^{-n} + a_{-n+1}x^{-n+1} + \dots$  avec  $a_{-n} \neq 0$  alors  $v(f) = -n$

On doit à Fuchs le résultat classique suivant:

**Théorème.** *Une condition nécessaire et suffisante pour que 0 soit une singularité régulière pour  $L$  de forme (1') est que:*

$$v(a_i(x)) - i \geq v(a_n(x)) - n \quad \forall i = 0, 1, \dots, n - 1$$

**- le polygone de Newton**

On peut introduire le polygone de Newton de la manière suivante.

Soit l'opérateur

$$L = \sum_{i=0}^n a_i(x) \partial^i \quad \text{avec} \quad \partial = \frac{d}{dx}$$

où  $a_i(x)$  appartient à  $\mathbf{C}[x]$ , que nous noterons:

$$a_i(x) = \sum_{j=0}^{n_i} b_{ij} x^j$$

Notons aussi  $B(L)$  l'ensemble des paires d'indices  $(i, j)$  telles que  $b_{ij} \neq 0$ .  
A chaque monôme  $x^j \partial^i$  on associe un point de  $\mathbf{Z}^2$

$$x^j \partial^i \longrightarrow (i, j - i) \quad \text{si} \quad b_{ij} \neq 0$$

Si maintenant on introduit

$$QT(\alpha, \beta) = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, x \leq \alpha, y \geq \beta\}$$

## Chapitre 2

et on forme

$$S(L) = \bigcup_{(i,j) \in B(L)} QT(i, j-i)$$

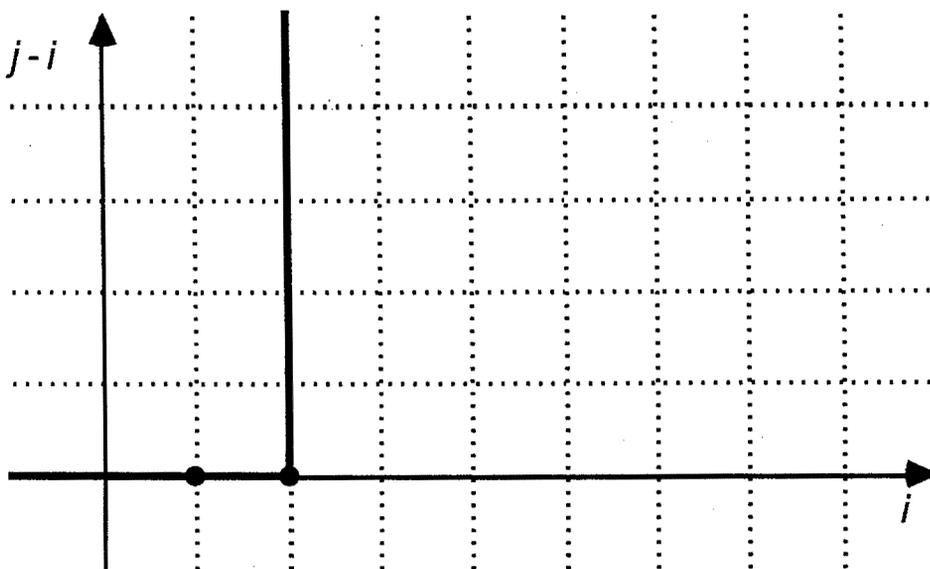
alors le polygone de Newton de  $L$  est l'enveloppe convexe inférieure de  $S(L)$ .

Donnons quelques exemples.

### Exemple 1

$$L = x^2 \partial^2 + x \partial + 1$$

On trace le polygone de Newton de  $L$ , soit

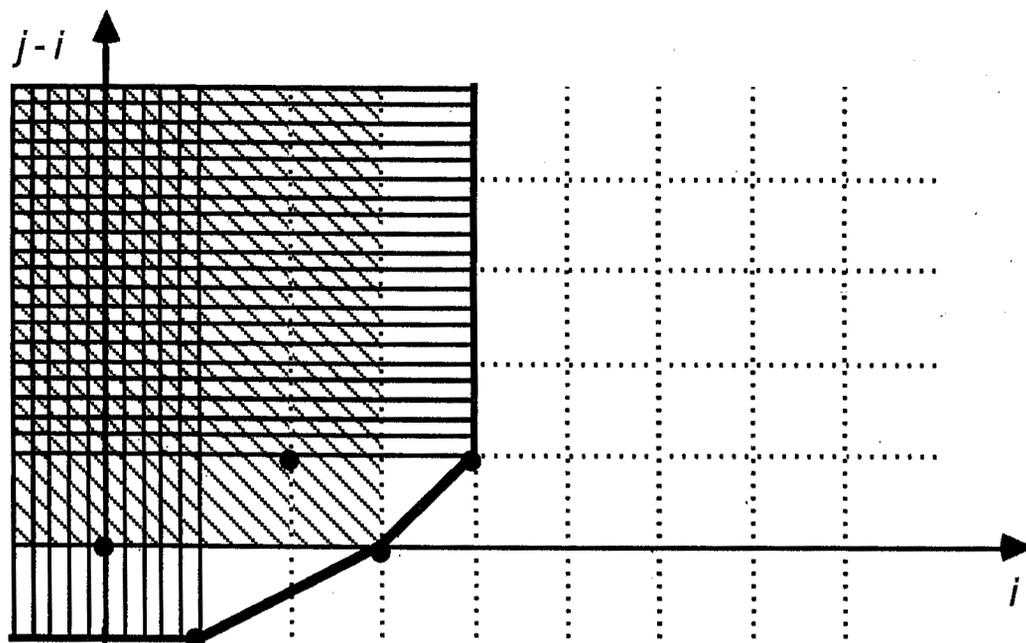


Dans cet exemple,  $L$  possède une singularité régulière à l'origine. Par contre, ce n'est pas le cas de l'exemple suivant.

### Exemple 2

$$L = x^5 \partial^4 + x^3 \partial^3 + 2x^3 \partial^2 + \partial + 1$$

dont le polygone de Newton est:



Dans cet exemple  $L$ , ne possède pas de singularité régulière à l'origine.

On voit que la condition de Fuchs se traduit par le fait que le polygone de Newton doit avoir *une seule pente nulle*. Nous conviendrons alors de la définition suivante:

**- singularité régulière**

**Définition.** *L'origine est une singularité régulière pour  $L$ , si le polygone de Newton de  $L$  possède une unique pente nulle. Sinon, on dira que la singularité est irrégulière.*

*Remarque:* Cette définition intègre le théorème classique de Fuchs (théorème précédent) sur la condition nécessaire et suffisante pour qu'une singularité soit régulière au sens classique du terme [ Ince 1956].

Ayant cette définition, nous allons maintenant décrire les algorithmes d'obtention des solutions formelles.

## 2.3 ÉTUDE DES SOLUTIONS AU VOISINAGE DE POINTS SINGULIERS RÉGULIERS .

Pour l'étude des solutions formelles d'une équation différentielle au voisinage des points singuliers, nous distinguerons le cas des points singuliers *réguliers* et les points singuliers *irréguliers*. On commencera donc par le cas des singularités régulières. D'ailleurs, après diverses transformations que l'on étudiera, on "ramènera" le cas des singularités irrégulières à celui des singularités régulières.

### 2.3.1 Rappels théoriques sur les singularités régulières

Nous commencerons par un rappel de résultats théoriques assez connus, en particulier la méthode de Frobenius. Ces résultats n'ont cependant pas ou très peu été exploités jusqu'alors, comme nous l'avons montré dans le chapitre 1. Aussi, après ce rappel, nous présenterons en détail, comment nous avons exploité pratiquement ces résultats.

#### 2.3.1.1 Étude du cas générique

Soit  $L$  appartenant à  $\mathbf{C}[x][\partial]$ , nous supposons que cet opérateur possède une *singularité à l'origine*. Nous avons montré qu'il était toujours possible de se ramener à ce cas par une translation de l'origine. Écrivons  $L$  sous la forme canonique suivante:

$$L = x^n R_0(x) \partial^n + x^{n-1} R_1(x) \partial^{n-1} + \dots + R_n(x)$$

$$\text{avec } R_i(x) \in \mathbf{C}[x] \text{ et } R_0(0) \neq 0$$

Si l'on note

$$R_i(x) = \sum_{j=0}^{m_i} r_j^i x^j$$

le nombre  $m$  défini par  $m = \max(m_i, i = 0, 1, \dots, n)$  est canoniquement associé à l'opérateur  $L$ . Il aura un rôle important dans la suite.

#### Première étape:

Étudions maintenant l'action de  $L$  sur un élément de la forme  $x^\lambda$  avec  $\lambda$  appartenant à  $\mathbf{C}$ . On peut écrire:

$$L(x^\lambda) = x^\lambda \left( [\lambda]_n R_0(x) + [\lambda]_{n-1} R_1(x) + \dots + [\lambda]_1 R_{n-1}(x) + [\lambda]_0 R_n(x) \right)$$

*Étude des solutions au voisinage de points singuliers réguliers*

$$\text{avec } [\lambda]_i = \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - i + 1)$$

$$[\lambda]_0 = 1 \quad \text{par convention}$$

que nous présenterons sous la forme:

$$L(x^\lambda) = x^\lambda f(x, \lambda)$$

où  $f(x, \lambda)$  est un polynôme en  $x$  et  $\lambda$  que l'on écrira sous la forme:

$$f(x, \lambda) = \sum_{j=0}^m f_j(\lambda) x^j$$

Avec la notation prise pour  $R_i(x)$

$$R_i(x) = \sum_{j=0}^{m_i} r_j^i x^j \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Il est alors facile de déduire que

$$f_j(\lambda) = \sum_{i=0}^n [\lambda]_i r_j^{n-i}$$

**Deuxième étape:** l'algorithme de FROBENIUS dans le cas générique

Dans ce cas l'algorithme de FROBENIUS consiste seulement à rechercher des solutions sous la forme:

$$y = x^\lambda \sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i \quad \text{avec } g_0 \neq 0$$

En appliquant l'opérateur  $L$  à cette solution, on obtient:

$$\begin{aligned} L(y) &= \sum_{i=0}^{+\infty} g_i L(x^{\lambda+i}) \\ &= \sum_{i=0}^{+\infty} g_i f(x, \lambda+i) x^{\lambda+i} \\ &= x^\lambda \sum_{i=0}^{+\infty} \left( g_i \left( \sum_{j=0}^m f_j(\lambda+i) x^j \right) \right) \\ &= x^\lambda \left( \sum_{m=0}^{+\infty} \left( \sum_{\nu=0}^m g_\nu f_{m-\nu}(\lambda+\nu) \right) x^m \right) \end{aligned}$$

## Chapitre 2

ce qui donne, en ordonnant les résultats:

$$L(x^\lambda \sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i) = x^\lambda \sum_{j=0}^{+\infty} h_j(\lambda) x^j$$

où nous avons introduit

$$\begin{aligned} h_0(\lambda) &= f_0(\lambda)g_0 \\ h_1(\lambda) &= f_1(\lambda)g_0 + f_0(\lambda+1)g_1 \\ h_2(\lambda) &= f_2(\lambda)g_0 + f_1(\lambda+1)g_1 + f_0(\lambda+2)g_2 \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \\ h_{m-1}(\lambda) &= f_{m-1}(\lambda)g_0 + \dots + f_0(\lambda+m-1)g_{m-1} \end{aligned} \tag{2-a}$$

et l'ensemble infini d'équations:

$$h_i(\lambda) = f_m(\lambda+i-m)g_{i-m} + \dots + f_0(\lambda+i)g_i \quad \text{pour } i \geq m \tag{3-a}$$

Alors,  $y$  sera solution formelle de  $L(y) = 0$  si et seulement si on peut choisir tous les  $h_i$  tels que  $h_i(\lambda) = 0$ . En particulier, cela se traduit par:

1) le système triangulaire des conditions initiales

$$h_0(\lambda) = \dots = h_{m-1}(\lambda) = 0 \tag{2-b}$$

2) une équation récurrente linéaire d'ordre  $m$

$$f_m(\lambda+i-m)g_{i-m} + \dots + f_0(\lambda+i)g_i = 0 \quad i \geq m \tag{3-b}$$

C'est une *équation récurrente* à coefficients polynômiaux *associée* à l'équation différentielle. Elle joue un rôle fondamental dans l'étude du comportement asymptotique des coefficients  $g_i$  de la série formelle, comme nous l'expliquerons ultérieurement.

*Qu'est ce que cela signifie ?*

Imposer  $h_1(\lambda) = 0$  conduit à prendre pour valeur de  $g_1$  la valeur suivante:

$$g_1 = -g_0 \frac{f_1(\lambda)}{f_0(\lambda+1)}$$

et plus généralement on peut déterminer formellement  $g_1, g_2, \dots, g_{m-1}$  par des opérations rationnelles dans  $K$  où  $K = \mathbb{Q}(\lambda)$ . Les  $g_i$  ainsi obtenus appartiennent à  $\mathbb{Q}(\lambda, g_0)$ , et il reste à imposer  $h_0(\lambda) = 0$ .

Avec l'équation récurrente (3-b), on détermine tous les  $g_i$  pour  $i \geq m$  qui sont aussi des fractions rationnelles appartenant à  $\mathbb{Q}(\lambda, g_0)$ .

*Remarque:* On notera que  $\lambda$  étant pour le moment une indéterminée, on peut toujours déterminer ainsi les  $g_i$ , pour  $i \geq 1$ . C'est à dire que les divers  $f_0(\lambda + i)$ , pour  $i$  entier, sont des polynômes en  $\lambda$  non identiquement nuls. Il reste alors

$$L(x^\lambda \sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i) = g_0 f_0(\lambda)$$

Pour que nous ayons une solution, il ne reste plus qu'à choisir  $\lambda$  tel que

$$f_0(\lambda) = 0$$

**Définition.**  $f_0(\lambda) = 0$  s'appelle l'équation indicelle de l'opérateur différentiel  $L$  (en la singularité 0).

Nous sommes donc conduits à faire une étude \*\* plus précise des racines de l'équation indicelle. Pour cela, nous lui appliquons les transformations suivantes:

- 1) une décomposition sans carré de  $f_0$ :

$$f_0(\lambda) = f_0^1(\lambda)(f_0^2(\lambda))^2 \dots (f_0^k(\lambda))^k$$

rappelons que dans cette décomposition nous avons  $\text{pgcd}(f_0^i, f_0^j) = 1$  et que les racines de  $f_0^i$  sont simples.

- 2) une décomposition en produits d'éléments irréductibles de  $f_0^i$

$$f_0^i(\lambda) = h_1^i(\lambda) \dots h_{n_i}^i(\lambda)$$

Faisons aussi quelques remarques élémentaires d'algèbre qui nous seront utiles. Soit  $\lambda$  une racine d'un  $h_j^i$  ( $i \leq k; j \leq n_i$ ) et supposons qu'il existe un entier  $\nu$  non nul et positif tel que

$$f_0(\lambda + \nu) = 0$$

---

\*\* Cette étude sera reprise et détaillée dans le paragraphe 4 où nous reprendrons les transformations 1) et 2) et ferons quelques remarques d'algèbre.

Il est évident qu'il existe alors un facteur  $h_q^p$  tel que:

$$h_q^p(\lambda + \nu) = 0$$

Cependant, on peut assurer que  $h_q^p$  est différent de  $h_j^i$ .

Nous allons maintenant étudier en détail les différents cas qui correspondent aux diverses caractérisations des racines de l'équation indicelle.

### 2.3.1.2 Étude des différents cas

#### Premier cas: racines simples (cas générique)

Soit  $\lambda$  une racine d'un  $h_j^1$  (donc une racine simple de  $f_0$ ) telle que  $\lambda + \nu$  ne soit pas racine de  $f_0$ , pour tout entier  $\nu$  positif. La méthode décrite précédemment permet de déterminer les  $g_i(\lambda)$ . On peut remarquer que:

$$Q[x]/(h_j^1)$$

étant un corps, les  $g_i$  apparaîtront comme étant des polynômes en  $\lambda$  de degré strictement inférieur à  $\deg(h_j^1)$ . Naturellement, ce calcul est indépendant de la racine  $\lambda$  de  $h_j^1$  que nous avons choisie. Il suffit de le faire *une fois pour toutes, pour toutes les racines de  $h_j^1$* .

En effet supposons que  $h_j^1(\alpha) = 0$  et  $h_q^p(\alpha + n) = 0$  pour  $n, p, q$  convenables. Alors,  $h_q^p$  étant irréductible, il en est de même de  $h_q^p(\alpha + n) = \tau(\alpha)$ . Comme  $h_j^1$  et  $\tau$  ont même racine  $\alpha$ , ils sont égaux ce qui est impossible.

Donc, à chaque facteur irréductible  $h_j^1$  on fait correspondre un ensemble de  $\deg(h_j^1)$  solutions indépendantes, soit:

$$h_j^1(\lambda) = 0 \longrightarrow (x^\lambda \sum_{i=0}^{+\infty} g_i(\lambda) x^i)$$

L'indépendance des solutions provient trivialement du fait que les  $x^\alpha$  sont distincts.

Pour simplifier ces notations, nous introduisons la définition suivante:

**Définition.** Un polynôme irréductible  $\tau$  facteur de  $f_0$  est simple si

- 1-  $\tau$  est un facteur de  $f_0^1$ , c'est à dire que les racines de  $\tau$  sont simples pour  $f_0$ .

2- il n'existe pas de polynôme irréductible  $\mu$  facteur de  $f_0$  qui se déduise de  $\tau$  par une translation entière.

*Remarque:* La deuxième condition repose sur la remarque que, si  $\tau$  et  $\mu$  sont irréductibles, et s'il existe une racine  $\lambda$  de  $\tau$  et un entier  $\nu$  positif tels que

$$\tau(\lambda) = \mu(\lambda + \nu) = 0$$

alors, si  $\lambda'$  est une autre racine de  $\tau$ , on a  $\mu(\lambda' + \nu) = 0$ . En effet,  $\mu(x + \nu)$  est un polynôme irréductible, de même que  $\mu(x - \nu)$ , et il a une racine en commun avec  $\tau$ , donc toutes les autres sont communes.

### Conclusion

Si  $h_1^1, \dots, h_p^1$  sont des polynômes simples, on peut leur associer:

$$\begin{aligned} h_1^1 &\longrightarrow \text{deg}(h_1^1) \text{ solutions indépendantes} \\ h_2^1 &\longrightarrow \text{deg}(h_2^1) \text{ solutions indépendantes} \\ &\dots \\ &\dots \\ &\dots \\ h_p^1 &\longrightarrow \text{deg}(h_p^1) \text{ solutions indépendantes} \end{aligned}$$

Toutes les solutions ainsi formées sont linéairement indépendantes.

### Deuxième cas : racines multiples

On suppose l'existence d'un polynôme irréductible  $\tau$  facteur de  $f_0$  tel que  $\tau^m$  soit facteur de  $f_0$ . Donc, si  $\bar{\lambda}$  est racine de  $f_0$ , elle l'est d'ordre  $m$ . On suppose aussi qu'aucune racine de  $f_0$  ne diffère des racines de  $\tau$  d'un entier positif. On génère immédiatement  $\partial^0(h_j^i)$  solutions indépendantes de l'opérateur différentiel, par la méthode exposée dans le 1er cas. Cependant, on ne peut évidemment pas en générer d'autres. Aussi, pour obtenir les solutions complémentaires, on remarque que, si

$$\begin{aligned} L(x^\lambda \sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i) &= L(x^\lambda \varphi(x)) \\ &= g_0 f_0(\lambda) x^\lambda \end{aligned}$$

alors nous pouvons écrire formellement

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (L(x^\lambda \varphi(x))) = L(x^\lambda \log x \varphi(x) + x^\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}(x))$$

## Chapitre 2

En dérivant le second membre, on obtient:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}(L(x^\lambda \varphi(x))) = g_0 \frac{\partial f_0(\lambda)}{\partial \lambda} + x^\lambda \log x f_0(\lambda) g_0$$

D'où, de manière générale, avec les notations précédentes:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m}(L(x^\lambda \varphi(x))) &= L(x^\lambda \log^m x \varphi(x) + C_1^m x^\lambda \log^{m-1} x \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \dots + x^\lambda \frac{\partial^m \varphi}{\partial \lambda^m}) \\ &= g_0(x^\lambda \log^m x f_0(\lambda) + C_1^m x^\lambda \log^{m-1} x \frac{\partial f_0}{\partial \lambda} + \dots \\ &\quad \dots + x^\lambda \frac{\partial^m f_0}{\partial \lambda^m}) \end{aligned}$$

Donc, en remarquant que les  $\frac{\partial^i f_0}{\partial \lambda^m}$  s'annulent pour  $0 \leq i \leq m$ , nous obtenons, pour une racine  $\bar{\lambda}$  de  $\tau$ , les solutions linéairement indépendantes suivantes:

$$\begin{aligned} x^{\bar{\lambda}} \varphi(x, \bar{\lambda}) &= x^{\bar{\lambda}} \sum_{i=0}^{+\infty} g_i(\bar{\lambda}) x^i \\ x^{\bar{\lambda}} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(x, \bar{\lambda}) + \varphi(x, \bar{\lambda}) \log x \right) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x^{\bar{\lambda}} \left( \frac{\partial^m}{\partial \lambda^m} \varphi(x, \bar{\lambda}) + C_1^m \frac{\partial^{m-1}}{\partial \lambda^{m-1}} \varphi(x, \bar{\lambda}) \log x + \dots + \varphi(x, \bar{\lambda}) \log^m x \right) \end{aligned}$$

Comme nous savons générer les  $\varphi(x, \lambda)$ , nous pouvons facilement dériver les  $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda}$ .

### Troisième cas: racines différant d'un entier

Nous supposons, dans ce cas, que les racines considérées sont simples. Il existe donc un polynôme irréductible  $\tau$  facteur de  $f_0$  et un entier  $\nu$  positif tel que  $\tau(x - \nu)$  (ou  $\tau(x + \nu)$ ) soit aussi un facteur de  $f_0$ , comme nous l'avons vu dans l'étude du premier cas. Donc  $f_0$  s'écrit

$$f_0(\lambda) = \tau(\lambda) \tau(\lambda - \nu) \bar{f}_0(\lambda)$$

avec  $\tau$  irréductible et  $\nu \in \mathbf{N}^+$ .

*Étude des solutions au voisinage de points singuliers réguliers*

Considérons le système d'équations formé par la partie triangulaire (2-a), et l'équation récurrente (3-a).

Soit  $\bar{\lambda}$  une racine simple de  $\tau(\lambda)$ , alors  $\bar{\lambda} + \nu$  est racine de  $\tau(\lambda - \nu)$  et donc de  $f_0$ . Et on a

$$\Re(\bar{\lambda}) < \Re(\bar{\lambda} + \nu).$$

Voyons ce qui se passe avec les substitutions suivantes:

- Substituons  $\lambda$  par  $\bar{\lambda}$  dans la partie triangulaire (2-a), et considérons l'équation donnant  $g_\nu$ , c'est à dire

$$g_\nu f_0(\lambda + \nu) + g_{\nu-1} f_1(\lambda + \nu - 1) + \dots + g_{\nu-\theta} f_\theta(\lambda + \nu - \theta) = 0$$

$$\text{avec } \theta > \nu \implies g_{\nu-\theta} = 0$$

Après substitution, elle devient

$$g_\nu \times 0 = -g_{\nu-1} f_1(\bar{\lambda} + \nu - 1) + \dots$$

Or, en général, le second membre de cette dernière relation n'est pas nul, et il est impossible de déterminer  $g_\nu$ , et donc on ne peut pas déterminer directement cette solution.

- Par contre, si nous substituons  $\lambda$  par  $\bar{\lambda} + \nu$  dans (2-a), nous obtenons un système où tous les  $f_0(\lambda + \nu + j)$  sont non nuls. On remarque aussi que, si il y a plusieurs racines dont la différence est un entier, alors seule celle qui a la plus grande partie réelle nous donnera directement une solution. Et la série solution s'écrira

$$x^{\bar{\lambda} + \nu} \sum_{i=0}^{+\infty} g_i(\bar{\lambda}) x^i$$

On vient donc de voir que, par cette méthode, il est impossible d'associer une solution de  $L$  à une racine de  $\tau$ , car si  $\tau(\bar{\lambda}) = 0$  alors  $f_0(\bar{\lambda} + \nu) = 0$ . Comment donc trouver une autre solution ?

On sait résoudre ce problème grâce à une remarque de Kronecker. En effet, toutes ces solutions sont définies au facteur multiplicatif  $g_0$  près. Remplaçons  $g_0$  par

$$g_0 \prod_{i=1}^{\nu} f_0(\lambda + i)$$

## Chapitre 2

Dans cette expression, on peut prendre  $g_0 = 1$ . Regardons alors ce que deviennent les équations du système (2-a).

$$\begin{aligned}
 f_0(\lambda) \prod_{i=1}^{\nu} f_0(\lambda + i) &= 0 \\
 f_1(\lambda) \prod_{i=1}^{\nu} f_0(\lambda + i) + f_0(\lambda + 1)g_1 &= 0 \\
 \dots \dots \dots & \\
 f_{\theta-1}(\lambda) \prod_{i=1}^{\nu} f_0(\lambda + i) + f_{\theta-2}(\lambda + 1)g_1 + \dots + f_0(\lambda + \theta - 1)g_{\theta-1} &= 0
 \end{aligned} \tag{4}$$

Étudions ce dernier système avec les transformations suivantes.

- En substituant  $\lambda$  par  $\bar{\lambda}$ , on trouve successivement

$$g_0 = 0, g_1 = 0, \dots, g_{\nu-1} = 0$$

et pour l'équation qui permet de déterminer  $g_{\nu}$ , nous avons

$$\underbrace{f_{\nu}(\lambda) \prod_{i=1}^{\nu} f_0(\lambda + i) + \sum_{i=1}^{\nu-1} f_{\nu-i}(\lambda + i)g_i}_{=0 \text{ car } g_0, \dots, g_{\nu-1} = 0} + \underbrace{f_0(\lambda + \nu)g_{\nu}}_{=0} = 0$$

donc  $g_{\nu}$  est indéterminé.

Dans ce cas, l'équation récurrente (3-a) s'écrit

$$g_{\nu+1}f_0(\lambda + \nu + 1) + g_{\nu}f_1(\lambda + \nu) = 0$$

donc on a

$$g_{\nu+1} = -\frac{f_1(\lambda + \nu)}{f_0(\lambda + \nu + 1)} \tag{5-a}$$

et en substituant  $\lambda$  par  $\bar{\lambda}$  dans cette dernière expression, on détermine la valeur de  $g_{\nu+1}$ .

- Si maintenant on substitue  $\lambda$  par  $\bar{\lambda} + \nu$ , la deuxième équation de (2-a) nous donne

$$f_1(\bar{\lambda} + \nu)g_0 + f_0(\bar{\lambda} + \nu + 1)g_1 = 0$$

d'où

$$g_1 = -g_0 \frac{f_1(\bar{\lambda} + \nu)}{f_0(\bar{\lambda} + \nu + 1)} \tag{5-b}$$

*Étude des solutions au voisinage de points singuliers réguliers*

D'après les formules (5-a) et (5-b), on voit bien que l'on retrouve la *même solution*. Voyons quelle méthode nous avons utilisée.

**Méthode:**

En remarquant que

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left( L(x^\lambda \sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i) \right) \Big|_{\lambda=\bar{\lambda}} = 0$$

On peut écrire

$$L \left( \log(x) x^\lambda \sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i + x^\lambda \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{g_i}{\partial \lambda} \right) \Big|_{\lambda=\bar{\lambda}} = 0$$

En reprenant la formule due à Kronecker

$$g_0(\lambda) = \prod_{i=1}^{\nu} f_0(\lambda + i)$$

et en la dérivant

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_0(\lambda)}{\partial \lambda} &= \frac{\partial f_0(\lambda + 1)}{\partial \lambda} f_0(\lambda + 2) \dots f_0(\lambda + \nu) + \\ & f_0(\lambda + 1) \frac{\partial f_0(\lambda + 2)}{\partial \lambda} \dots f_0(\lambda + \nu) + \dots \\ & \underbrace{f_0(\lambda + 1) \dots \frac{\partial f_0(\lambda + \nu)}{\partial \lambda}}_{\neq 0 \text{ pour } \lambda = \bar{\lambda}} \end{aligned}$$

on déduit que :

$$\frac{\partial g_0(\bar{\lambda})}{\partial \lambda} \neq 0$$

De même, en dérivant les équations du système (4), on a pour la première équation

$$\frac{\partial g_1(\lambda)}{\partial \lambda} f_0(\lambda + 1) + f_1(\lambda) \frac{\partial g_0(\lambda)}{\partial \lambda} = 0$$

D'où

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\bar{\lambda}} &= - \frac{f_1(\bar{\lambda})}{f_0(\bar{\lambda} + 1)} \left( f_0(\bar{\lambda} + 1) \dots f_0(\bar{\lambda} + \nu - 1) \frac{\partial f_0(\bar{\lambda} + \nu)}{\partial \lambda} \right) \\ &= - f_1(\bar{\lambda}) f_0(\bar{\lambda} + 2) \dots f_0(\bar{\lambda} + \nu - 1) \frac{\partial f_0(\bar{\lambda} + \nu)}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

## Chapitre 2

On fait de même pour les équations suivantes de (4). Pour résumer, nous avons les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} g_0 &= 0, \text{ et } g_1 = g_2 \dots = g_{\nu-1} = 0 \\ \frac{\partial g_i}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\bar{\lambda}} &\neq 0 \quad i = 0, 1, \dots, \nu - 1 \\ g_\nu f_0(\lambda + \nu) + g_{\nu-1} f_0(\lambda + \nu - 1) &= 0 \end{aligned}$$

La solution va donc s'exprimer sous la forme:

$$x^{\bar{\lambda}} \log(x) \left( g_\nu x^\nu + g_{\nu+1} x^{\nu+1} + \dots \right) \Big|_{\lambda=\bar{\lambda}} + x^{\bar{\lambda}} \left( \frac{\partial g_0}{\partial \lambda} + x \frac{\partial g_1}{\partial \lambda} + \dots \right) \Big|_{\lambda=\bar{\lambda}}$$

qui peut encore s'écrire

$$x^{\bar{\lambda}+\nu} \log(x) \left( g_\nu + g_{\nu+1} x + \dots \right) \Big|_{\lambda=\bar{\lambda}} + x^{\bar{\lambda}} \left( \frac{\partial g_0}{\partial \lambda} + x \frac{\partial g_1}{\partial \lambda} + \dots \right) \Big|_{\lambda=\bar{\lambda}} \quad (6)$$

Soulignons ici le rôle fondamental du calcul formel. En effet, tout le raisonnement repose dans ce cas sur des expressions formelles. C'est à la fin seulement qu'une évaluation numérique est faite, en substituant  $\lambda$  par  $\bar{\lambda}$ .

### Exemple

$$L = x^2 \partial^2 - x \partial + x$$

L'équation indicelle dans ce cas est  $f_0(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda$ , dont les racines sont 0 et 2. Les 2 solutions que l'on trouve sont:

1<sup>ière</sup> solution :

$$x^2 \left( 24 \left( 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{24}x^2 \right) - \dots \right)$$

2<sup>ième</sup> solution :

$$\left( -2 - 2x + \frac{4}{9}x^3 - \frac{1}{72}x^4 + \dots \right) + x^2 \log(x) \left( 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{24}x^2 - \dots \right)$$

On remarque que, dans la deuxième solution, on retrouve bien la série solution de la première solution, multipliée par le facteur  $x^{\bar{\lambda}+\nu} \log(x)$ , soit ici  $x^2 \log(x)$ .

### Quatrième cas: cas mixte

C'est le cas où il existe une racine multiple  $\bar{\lambda}$  de  $f_0$  et un entier  $\nu$  tel que  $\bar{\lambda} + \nu$  soit aussi racine multiple de  $f_0$ . Il existe donc un polynôme irréductible  $\tau$  facteur de  $f_0$  tel que :

$$f_0(x) = \tau(x)^s \tau(x + \nu)^t \hat{f}_0$$

Ce cas se traite en combinant les méthodes exposées dans les cas 2 et 3, mais il conduit à une combinatoire délicate que nous détaillerons dans la deuxième section du paragraphe suivant. Comme on le verra plus loin, ce cas a été pris en compte dans l'implantation de ces algorithmes.

### **Conclusion**

En faisant ce rappel, nous avons mis en évidence ce qui nous permettra de construire un algorithme et d'implanter la méthode classique de Frobenius. Mais un algorithme qui suivrait les étapes de cette présentation ne serait pas optimal. En effet, il n'est pas utile de factoriser le polynôme  $f_0$ , il faut seulement connaître la multiplicité d'une racine, et, si deux racines diffèrent d'un entier, la méthode de factorisation est inutile. Nous reviendrons sur cette dernière question, en montrant les algorithmes utilisés. Un point important, sur lequel il sera nécessaire de revenir, est aussi la détermination *exacte* des racines. Cela n'étant en général pas possible, il faudra travailler dans une extension de  $\mathbb{Q}$ .

### **2.3.2 Étude détaillée de l'algorithme de FROBENIUS**

Nous avons montré précédemment, que dans le *cas générique*, c'est à dire dans le cas où toutes les racines de l'équation indicelle  $f_0(\lambda)$  sont distinctes et ne diffèrent pas entre elles d'un entier, nous pouvons déterminer  $n$  solutions linéairement indépendantes de  $L$  qui en forment un *système fondamental*.

Nous allons maintenant nous situer dans le *cas général*, c'est à dire le cas où les racines de l'équation indicelle peuvent être multiples ou diffèrent l'une de l'autre d'un entier. Alors on montrera, d'une part comment on détermine les solutions, et d'autre part que les solutions déterminées forment un *système complet* de solutions formelles pour l'équation  $L(y) = 0$ .

**Remarque:** L'étude qui va suivre se situe dans le cas où la détermination "exacte" des racines est possible.

#### **2.3.2.1 Notations préliminaires**

Nous allons classer les racines de l'équation indicelle qui peuvent être multiples et différer entre elles d'un entier. On les ordonne dans un tableau de la façon suivante.

- Les éléments de deux lignes différentes ne peuvent être congrues modulo un entier.

- Sur chaque ligne, on ordonne par partie réelle décroissante les racines de l'équation indicelle qui diffèrent entre elles d'un entier. Soit donc le tableau  $T$ :

$$T = \begin{array}{c} \left| \begin{array}{cccccc} \rho_0 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{\alpha-1} \\ \rho_\alpha & \rho_{\alpha+1} & \dots & \rho_{\beta-1} \\ \rho_\beta & \dots & & & \\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & & \end{array} \right| \end{array}$$

avec les propriétés, pour la première ligne par exemple :

$$\Re(\rho_0) \geq \Re(\rho_1) \geq \dots \geq \Re(\rho_{\alpha-1})$$

$$\rho_j - \rho_i \in \mathbf{N} \quad \text{pour } j \leq i \quad \text{et } 0 \leq i, j \leq \alpha - 1$$

Nous procédons maintenant à un éclatement de ce tableau en distinguant les racines de multiplicité différente, ce qui donne pour la première ligne:

$$\begin{array}{ll} \rho_0 = \rho_1 = \dots = \rho_{i-1} & \text{racines de multiplicité } i \\ \rho_i = \rho_{i+1} = \dots = \rho_{j-1} & \text{racines de multiplicité } j - i \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ \rho_\nu = \rho_{\nu+1} = \dots = \rho_{\alpha-1} & \text{racines de multiplicité } \alpha - \nu \end{array}$$

et nous faisons de même pour les lignes suivantes. Nous noterons  $\omega$  la valeur  $\omega = \rho_0 - \rho_{\alpha-1}$ , cela pour la première ligne et de même pour les suivantes. Nous allons montrer maintenant comment traiter cette première ligne afin de déterminer les solutions. Les autres lignes du tableau  $T$  pourront être traitées de la même façon.

## 2.4 DÉTERMINATION DES SOLUTIONS .

Nous pouvons déterminer les solutions associées aux racines dont la partie réelle est maximale, c'est-à-dire qu'elle est associée à  $\rho_0$  pour la première ligne (*cas générique*). Mais ce sont les seules que nous pouvons calculer ainsi. Dans les deux autres cas, cette méthode doit être modifiée, car:

- soit on est dans le premier des sous-groupes de la ligne, tel que  $\rho_0 = \dots = \rho_{i-1}$  pour la première ligne, auquel cas on a toujours la même expression pour la solution.

- soit on est dans un sous-groupe différent du premier, par exemple  $\rho_i = \dots = \rho_{j-1}$  pour la première ligne, mais dans ce cas les dénominateurs des  $g_i$  sont tous nuls à partir d'un certain rang.

### 2.4.1 Étude des solutions (autres que celle associée à $\rho_0$ )

Nous ferons cette étude pour la première ligne du tableau  $T$ . Pour déterminer les autres solutions de la première ligne, (c'est-à-dire sauf celle associée à  $\rho_0$ , racine de partie réelle maximum), nous distinguerons le premier sous-groupe des suivants.

Pour cela, l'idée est de remplacer  $g_0$  par

$$g_0 \prod_{i=1}^{\omega} f_0(\lambda + i) \quad \text{avec} \quad \omega = \rho_0 - \rho_{\alpha-1}.$$

Dans ce cas, les formules deviennent

$$L(x^\lambda \sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i) = g_0 \prod_{i=0}^{\omega} f_0(\lambda + i) x^\lambda$$

en choisissant les  $g_m$  de la façon suivante:

$$g_m(\lambda) = \frac{-g_0 \prod_{i=1}^{\omega} f_0(\lambda + i)}{\prod_{j=1}^m f_0(\lambda + j)} D_m(\lambda)$$

$D_m$  étant le déterminant suivant:

$$D_m(\lambda) = \begin{vmatrix} f_0(\lambda + 1) & \dots & \dots & 0 & f_1(\lambda) \\ f_1(\lambda + 1) & f_0(\lambda + 2) & \dots & 0 & f_2(\lambda) \\ \vdots & \ddots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \ddots & 0 & \dots \\ f_{m-2}(\lambda + 1) & \dots & \dots & f_0(\lambda + m - 1) & f_{m-1}(\lambda) \\ f_{m-1}(\lambda + 1) & \dots & \dots & f_1(\lambda + m - 1) & f_m(\lambda) \end{vmatrix}$$

Par cette substitution de  $g_0$ , nous éliminons les ennuis dus aux dénominateurs des  $g_m$ , c'est-à-dire le fait qu'ils soient nuls à partir d'un certain rang. Regardons maintenant de façon plus détaillée les diverses valeurs de ces  $g_m$ .

Chapitre 2

Pour  $m < \omega$   $g_1(\lambda) = -g_0 f_0(\lambda + 2) \dots f_0(\lambda + \omega) D_1(\lambda)$

$g_2(\lambda) = -g_0 f_0(\lambda + 3) \dots f_0(\lambda + \omega) D_2(\omega)$

...

...

...

Pour  $m = \omega$   $g_\omega(\lambda) = -g_0 D_\omega(\lambda)$

$g_{\omega+1}(\lambda) = \frac{-g_0}{f_0(\lambda + \omega + 1)} D_{\omega+1}(\lambda)$

$g_{\omega+2}(\lambda) = \frac{-g_0}{f_0(\lambda + \omega + 1) f_0(\lambda + \omega + 2)} D_{\omega+2}(\lambda)$

...

...

De façon générale, pour  $m > \omega$

$$g_m(\lambda) = \frac{-g_0}{\prod_{j=\omega+1}^m f_0(\lambda + j)} D_m(\lambda).$$

Voyons maintenant quelle solution nous obtenons pour chacun des  $\rho_i$ .  
Commençons par  $\lambda = \rho_1$ . Nous pouvons alors déterminer tous les  $g_i(\rho_1)$  et nous pouvons de plus annuler la première équation

$$g_0 \prod_{i=0}^{\omega} f_0(\lambda + i).$$

Donc, nous pouvons déterminer la solution suivante:

$$x^{\rho_1} \sum_{i=0}^{+\infty} g_i(\rho_1) x^i$$

Mais par définition,  $\rho_1 = \rho_0$ , donc cette solution s'écrit:

$$x^{\rho_0} \sum_{i=0}^{+\infty} g_i(\rho_0) x^i.$$

Or la solution associée à  $\rho_0$  est justement:

$$x^{\rho_0} \sum_{i=0}^{+\infty} g_i(\rho_0) x^i$$

et elle est *unique à une constante multiplicative près*. Nous venons donc de retrouver la solution d'où nous sommes partis. Le même raisonnement est valable pour  $\rho_i \dots \rho_\nu$ .

Comment résoudre cette difficulté ?

On remarque qu'on peut écrire formellement:

$$\underbrace{\frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} \left( L(x^\lambda \sum_{i=0}^{+\infty} g_i(\lambda) x^i) \right)}_{\parallel} = \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} \left( g_0 \prod_{i=0}^{\omega} f_0(\lambda + i) x^\lambda \right)$$

$$L \left( \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} \left( x^\lambda \sum_{i=0}^{+\infty} g_i(\lambda) x^i \right) \right)$$

En notant  $F(\lambda) = \prod_{i=0}^{\omega} f_0(\lambda + i)$ , la formule précédente devient:

$$\frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} (g_0 F(\lambda) x^\lambda) = g_0 \left( F^{(s)}(\lambda) x^\lambda + \lambda (\log x) F^{(s-1)}(\lambda) x^\lambda + \dots \right. \\ \left. + \lambda(\lambda - 1) \dots (\lambda - s + 1) F(\lambda) x^\lambda \right)$$

Nous allons maintenant étudier les différents sous-groupes.

### 2.4.2 Étude du premier sous-groupe : $\rho_0 = \rho_1 = \dots = \rho_{i-1}$

Dans ce cas,  $\rho_0$  est racine d'ordre  $i$  de  $F(\lambda)$ , donc on a:

$$\left. \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} (F(\lambda) x^\lambda) \right|_{\lambda=\rho_0} = 0 \quad \text{pour } s = 0, 1, \dots, i-1$$

ce qui entraîne

$$L \left( \left. \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} \left( x^\lambda \sum_{i=0}^{+\infty} g_i(\lambda) x^i \right) \right|_{\lambda=\rho_0} \right) = 0 \quad \text{pour } s = 0, 1, \dots, i-1$$

Cela montre que *les séries formelles*

$$\left. \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} \left( x^\lambda \sum_{i=0}^{+\infty} g_i(\lambda) x^i \right) \right|_{\lambda=\rho_0}, \quad s = 0, 1, \dots \quad (7)$$

## Chapitre 2

sont solutions de  $L(y) = 0$ .

En notant  $g(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{+\infty} g_i(\lambda)x^i$ , la formule (7) s'écrit

$$\frac{\partial^s}{\partial \lambda^s}(x^\lambda g(x, \lambda)) = x^\lambda \sum_{j=0}^s C_n^j (\log x)^j g^{(s-j)}(x, \lambda)$$

avec  $C_n^j$  coefficient binomial.

Nous avons

$$g^{(k)}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\partial^k g_i(\lambda)}{\partial \lambda^k} x^i$$

Si nous convenons de noter

$$w_i(x, \lambda) = x^\lambda g^{(i)}(x, \lambda)$$

nous pouvons mettre en évidence  $i$  solutions de l'équation  $L(y) = 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} W_0 = w_0(x, \rho_0) \\ W_1 = w_0(x, \rho_0) \log x + w_1(x, \rho_0) \\ \dots \\ \dots \\ W_{i-1} = w_0(x, \rho_0)(\log x)^{i-1} + C_{i-1}^1 w_1(x, \rho_0)(\log x)^{i-2} + \dots \\ \dots + w_{i-1}(x, \rho_0) \end{array} \right. \quad (8)$$

Ces solutions sont maintenant *linéairement indépendantes*, à cause de la présence des termes logarithmiques de puissances différentes.

Il faut maintenant montrer comment on détermine les solutions du second sous-groupe. Le même processus pourra ensuite s'appliquer aux autres sous-groupes.

### 2.4.3 Étude des solutions du second sous-groupe

Ce sous-groupe est le suivant:

$$\rho_i = \rho_{i+1} = \dots = \rho_{j-1}$$

Toutes les racines de ce sous-groupe diffèrent des racines du sous-groupe précédent:  $(\rho_0 = \rho_1 = \dots = \rho_{i-1})$  d'un entier positif qui est  $\nu_{i0} = \rho_0 - \rho_i$ . Comme nous avons  $\nu_{i0} = \rho_0 - \rho_i \leq \omega = \rho_{\alpha-1} - \rho_0$ , cela nous montre que  $f_0(\lambda + \nu_{i0})$  est un facteur du produit  $\prod_{i=1}^{\omega} f_0(\lambda + i)$ .

Si nous remarquons que:

- $f_0(\lambda + \nu_{i0}) = f_0(\lambda + \rho_0 - \rho_i)$  s'annule pour  $\lambda = \rho_i$ , donc avec une multiplicité  $i$
- $f_0(\lambda)$  s'annule pour  $\lambda = \rho_i$  avec la multiplicité  $j - i$

nous en déduisons que  $\rho_i$  est racine de  $\prod_{j=0}^{\omega} f_0(\lambda + j)g_0$  avec la multiplicité  $i + (j - i) = j$ .

En dérivant formellement de la même façon, il vient

$$L\left(\frac{\partial^s}{\partial \lambda^s}(x^\lambda \sum_{i=0}^{+\infty} g_i(\lambda)x^i)\right)\Bigg|_{\lambda=\rho_i} = 0 \quad \text{pour } s = 0, 1, \dots, j - 1$$

Etudions les solutions formelles ainsi formées.

Notons les points suivants:

- 1) Si  $j = 0, 1, \dots, \rho_0 - \rho_{i-1}$ , nous avons  $g_j(\rho_i) = 0$ . En effet:

$$g_1(\rho_i) = \underbrace{-g_0 f_0(\rho_i + 2) f_0(\rho_i + 3) \dots f_0(\rho_i + \omega)}_{=0} D_1(\rho_i)$$

car dans ce produit se trouve  $f_0(\rho_i + \rho_0 - \rho_i)$

$$g_{\rho_0 - \rho_{i-1}}(\rho_i) = \underbrace{-g_0 f_0(\rho_i + \rho_0 - \rho_i) \dots f_0(\rho_i + \omega)}_{=0} D_{\rho_0 - \rho_{i-1}}(\rho_i)$$

- 2) Pour  $j = 0, 1, \dots, \rho_0 - \rho_{i-1}$ ,  $\rho_i$  est racine de multiplicité  $i$ , (car  $f_0(\rho_i + \rho_0 - \rho_i) = f_0(\rho_0)$ ,  $\rho_0$  de multiplicité  $i$ ).

- 3) On déduit des deux remarques précédentes que:

$$\frac{\partial^s}{\partial \lambda^s}(x^\lambda \sum_{j=0}^{\rho_0 - \rho_{i-1}} g_j(\lambda)x^j)\Bigg|_{\lambda=\rho_i} = 0 \quad \text{pour } s = 0, 1, \dots, i - 1 \quad (9)$$

Etudions maintenant ces solutions formelles pour les diverses valeurs de  $s$ .

- 4) Cas  $s = 0$  : Considérons tout d'abord ce cas. Avec la notation de la formule (6), nous aurons comme solution:

$$x^{\rho_i} \sum_{j=\rho_0-\rho_i}^{+\infty} g_j(\rho_i) x^j$$

En développant cette somme, on voit que:

$$x^{\rho_i} (x^{\rho_0-\rho_i} g_{\rho_0-\rho_i}(\rho_i) \dots) = x^{\rho_0} g_{\rho_0-\rho_i}(\rho_i) + x^{\rho_0+1} g_{\rho_0-\rho_i+1}(\rho_i) + \dots$$

ce qui s'écrit:

$$x^{\rho_0} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} g_{\rho_0-\rho_i+j}(\rho_i) x^j \right)$$

Nous faisons la même remarque que dans l'étude du premier sous-groupe  $\rho_0, \dots, \rho_{i-1}$ : nous avons retrouvé la solution

$$x^{\rho_0} \sum_{i=0}^{+\infty} g_i(\rho_0) x^i$$

à une constante multiplicative près.

- 5) Cas  $s \leq i-1$ : D'après la remarque précédente, on voit que la solution:

$$\left. \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} \left( x^\lambda \sum_{i=0}^{+\infty} g_i(\lambda) x^i \right) \right|_{\lambda=\rho_i}$$

est combinaison linéaire de  $W_0, \dots, W_s$ . Nous n'avons donc jusqu'à présent rien ajouté.

- 6) Cas  $s \geq i$ : Considérons alors:

$$\left. \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} \left( x^\lambda \sum_{j=0}^{+\infty} g_j(\lambda) x^j \right) \right|_{\lambda=\rho_i} =$$

$$w_0(x, \rho_i) (\log x)^i + i w_1(x, \rho_i) (\log x)^{i-1} + \dots + w_i(x, \rho_i)$$

*Algorithme de recherche des racines dont la différence est entière*

D'après ce nous avons vu au 5),  $w_r(x, \rho_i)$  est combinaison linéaire de  $w_0(x, \rho_0), \dots, w_r(x, \rho_0)$ . Le terme  $w_i(x, \rho_i)$  n'est pas identiquement nul, puisque:

$$\left. \frac{\partial^i}{\partial \lambda^i} (g_0(\lambda)) \right|_{\lambda=\rho_i} \neq 0$$

Ce que nous venons de dire pour  $s = i$ , est également vrai pour  $i \leq s \leq j-1$ , aussi nous venons de mettre en évidence  $j-i$  solutions formelles de l'équation  $L(y) = 0$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} W_i = w_0(x, \rho_i)(\log x)^i + iw_1(x, \rho_i)(\log x)^{i-1} + \dots \\ \quad \dots + w_i(x, \rho_i) \\ \dots \\ \dots \\ W_{j-1} = w_0(x, \rho_i)(\log x)^{j-1} + \dots + w_{j-1}(x, \rho_i) \end{array} \right. \quad (10)$$

Puisque  $w_i(x, \rho_i) \neq 0$  et que  $W_{i+r}$  comporte le terme:

$$w_i(x, \rho_i)(\log x)^r$$

les solutions  $W_i, \dots, W_{j-1}$  sont *linéairement indépendantes*.

Il reste à démontrer que  $W_i, \dots, W_{j-1}$  sont linéairement indépendantes de  $W_1, \dots, W_{i-1}$ . Il n'y a pas de difficultés à cela, et nous renvoyons à [Ince 1956] pour la démonstration.

Cette série de remarques achève donc la détermination d'un **système complet de solutions formelles** pour l'équation  $L(y) = 0$ .

Passons maintenant aux algorithmes de base et à l'algorithme de Frobenius.

## **2.5 ALGORITHME DE RECHERCHE DES RACINES DONT LA DIFFÉRENCE EST ENTIÈRE .**

*Problème:*

Étant donnée  $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ , si  $\alpha$  est racine de  $f$ , existe-t-il un entier  $n > 0$  tel que:

$$f(\alpha - n) = 0.$$

*Remarque:*

Si  $\alpha$  est racine de  $f(x)$ , on sait déterminer une liste finie  $l$  d'entiers strictement positifs, parmi lesquels se trouvent tous les entiers  $n$  tels que  $\alpha - n$  soit racine de  $f(x)$ .

### 2.5.1 Méthode

Cette méthode a été proposée par Dominique Duval, et son implantation a été réalisée en utilisant le logiciel D5 [Dicrescenzo C. Duval D. 85], qui permet de travailler avec les nombres algébriques. Travailler avec D5 simplifie la description et la programmation des algorithmes. On pourrait éventuellement s'en passer, mais il faudrait alors faire beaucoup de calcul de *pgcd* à coefficients entiers.

#### 2.5.1.1 Détermination de la liste d'entiers $l$ ordonnée croissante

Supposons  $f(x)$  sans carré. Si  $f(x)$  ne l'est pas on travaille avec

$$\tilde{f}(x) = \frac{f(x)}{\text{pgcd}(f(x), f'(x))} \quad (11)$$

à la place de  $f(x)$ .

Soit  $f(x)$  de la forme

$$f(x) := a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_dx^d$$

Le discriminant du polynôme  $f(x)$  peut être défini par

$$\text{Discriminant}(f) = \frac{\text{Resultant}(f, f')}{a_d} \quad (12)$$

où  $a_d$  est le coefficient principal de  $f$ . D. Lazard nous a fait remarquer qu'on a alors le résultat suivant.

**Proposition.** *Si  $n$  est un entier, différence de deux racines de  $f(x)$ , alors*

$$n^2 \mid \text{Discriminant}(f). \quad (13)$$

Démonstration:

Les différences de racines distinctes sont les racines du polynôme en  $y$  suivant:

$$\text{Resultant}(f(x), \frac{f(x+y) - f(x)}{y}, x) \quad (14)$$

Dans cette dernière notation, le troisième paramètre signifie que l'on considère le résultant en la variable  $x$ . Le polynôme obtenu par la formule (14) est en fait un polynôme en  $y^2$ , car l'opposé d'une différence de racines est aussi une différence de racines. Tous les coefficients de (14) sont divisibles par le coefficient principal de  $f$  (ce que l'on peut constater en regardant la première ligne de la matrice de Sylvester). Il suffit alors de remarquer que les racines entières d'un polynôme divise son terme constant.

Examinons maintenant le cas particulier où  $d = 2$ .

Cas  $d = 2$

Soit

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

la valeur du discriminant est

$$\text{Discriminant}(f) = -(a_1^2 - 4a_2a_0)$$

La valeur de  $n$  satisfaisante dans ce cas est

$$n^2 = \frac{a_1^2 - 4a_2a_0}{a_2^2} = -\frac{\text{Discriminant}(f)}{a_2^2} \quad (15)$$

Les formules (13), ou (15) nous donnent donc les diverses façons de générer cette liste d'entiers. On notera cependant que cette liste est bien trop grande.

*Exemple 1 :*

$$f(x) = x^4 + 4$$

$$l = (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128)$$

*Exemple 2 :*

$$f(x) = 4(x-1)(x-1/2)(x+3/2)$$

$$l = (1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40)$$

Nous allons donc appliquer une borne sur les entiers. Nous choisirons la borne proposée par [Mignotte 74].

**Lemme 3** [Mignotte 74]. Soit  $f(x) \in \mathbf{Z}[x]$ , avec:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$$

On pose:

$$\|f\| = \left( \sum_{i=0}^d a_i^2 \right)^{1/2}.$$

Soit  $\alpha$  une racine de  $f(x)$  dans  $\mathbf{C}$ , alors:

$$|\alpha| \leq \frac{\|f\|}{|a_d|}.$$

**Corollaire.** Une borne sur les entiers  $n$  qui peuvent être différences de deux racines de  $f(x)$  est donnée par:

$$|n| \leq \frac{2\|f\|}{|a_d|}$$

En appliquant cette borne sur les exemples précédents, nous trouvons:

*Exemple 1 :*

$$n < 10 \implies l = (1, 2, 4, 8)$$

*Exemple 2 :*

$$n < 5 \implies l = (1, 2, 4)$$

En définitive, la liste  $l$  est formée des entiers strictement positifs vérifiant les formules (13) ou (15) selon les cas, et l'inégalité du corollaire ci-dessus.

### 2.5.1.2 Détermination de la liste $G$

On suppose encore  $f(x)$  sans carré. La forme de la liste cherchée est la suivante:

$$G = \left( (g_1(x), \lambda_1), \dots, (g_i(x), \lambda_i), \dots \right)_{1 \leq i \leq k} \quad (16)$$

avec

$$f(x) = \prod_{i=1}^k g_i(x) \quad (17)$$

Pour chaque  $i$ ,  $g_i(x)$  est un polynôme de  $\mathbf{Q}[x]$ , et,  $\lambda_i$  est une liste d'entiers strictement positifs deux à deux distincts et rangés par ordre croissant, de

*Algorithme de recherche des racines dont la différence est entière*

sorte que, pour toute racine  $\alpha$  de  $g_i(x)$ , les racines de  $f(x)$  de la forme  $\alpha - n$  avec  $n$  entier strictement positif, sont les  $\alpha - n$  avec  $n$  dans  $\lambda_i$ . On notera que toute racine  $\alpha$  de  $f(x)$  est racine d'un  $g_i(x)$  et d'un seul.

Pour chaque racine  $\alpha$  de  $f(x)$  dans  $\mathbb{C}$  et pour chaque élément  $n$  de la liste d'entiers, nous cherchons si  $f(\alpha - n) = 0$ , ce qui va nous permettre, en utilisant D5, d'obtenir la liste cherchée, sans avoir à calculer  $\alpha$ . [Dicrescenzo C. Duval D 85].

*Exemple 1 :*

$$f(x) = x^4 + 4$$

La liste  $G$  que l'on obtient est:

$$\left( (x^2 + 2x + 2, ()), (x^2 - 2x + 2, (2)) \right)$$

*Exemple 2 :*

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - 2x^4 - 12x^3 + 38x^2 - 37x + 12 \\ &= (x - 1)^3(x - 3)(x + 4) \end{aligned}$$

$$G = \left( (x + 4, ()), (x - 1, (5)), (x - 3, (2, 7)) \right)$$

*Exemple 3 :*

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^5 - 44x^4 + 167x^3 - 271x^2 + 189x - 45 \\ &= 4(x - 1)(x - 3)(x - 5)(x - 1/2)(x - 3/2) \end{aligned}$$

$$G = \left( (2x^2 - 3x + 1, ()), (2x - 3, (1)), (x - 3, (2)), (x - 5, (2, 4)) \right)$$

La liste obtenue  $G$  comporte en général des renseignements redondants, et il faudra lui appliquer une procédure de "nettoyage" pour la transformer en une liste  $F$  la forme:

$$F = \left( (f_1(x), \lambda_1), \dots, (f_i(x), \lambda_i), \dots, \right)_{1 \leq i \leq k} \quad (18)$$

et vérifiant les propriétés suivantes.

- Pour chaque  $i$ ,  $f_i(x)$  est un polynôme de  $\mathbf{Q}[x]$  et  $\lambda_i$  est une liste d'entiers strictement positifs deux à deux distincts et rangés par ordre croissant.
- $f(x) = \prod_{i=1}^k \prod_{n \in \{0\} \cup \lambda_i} f_i(x+n)$
- Pour chaque  $i$  de chaque racine  $\alpha$  de  $f_i(x)$ , il n'y a aucune racine de  $f(x)$  de la forme  $\alpha - n$  avec  $n$  strictement négatif, et les racines de  $f(x)$  de la forme  $\alpha - n$  avec  $n$  strictement positif sont exactement les  $\alpha - n$  avec  $n$  dans  $\lambda_i$ .

Dans les 3 exemples précédents, nous obtenons comme listes  $F$  les listes suivantes:

*Exemple 1 :*

$$F = \left( (x^2 - 2x + 2, (2)) \right)$$

*Exemple 2 :*

$$F = \left( (x - 3, (2, 7)) \right)$$

*Exemple 3 :*

$$F = \left( (2x - 3, (1)), (x - 5, (2, 4)) \right)$$

### 2.5.1.3 Obtention de la liste finale.

Si  $f$  n'est pas libre de carré, il faut déterminer la multiplicité des racines. Pour chaque  $i$ , si  $\alpha$  est racine de  $f_i$ , il faut donc chercher si  $f'(\alpha) = 0$ ,  $f''(\alpha) = 0, \dots$ , et de même pour chaque entier  $n$  des listes  $\lambda_i$  on regarde si  $f'(\alpha - n) = 0$ ,  $f''(\alpha - n) = 0, \dots$ . Cela se fait assez aisément en utilisant D5.

Dans ce cas, la liste finale sera de la forme:

$$F' = \left( (f_{1,1}, \lambda'_1, r_{1,1}), \dots, (f_{1,j}, \lambda'_1, r_{1,j}), \dots, (f_{i,j}, \lambda'_i, r_{i,j}) \dots \right) \quad (19)$$

où

- $f_i(x) = \prod_j f_{i,j}(x)$  pour tout  $i$ .
- $\lambda'_i$  est la liste  $\{0\} \cup \lambda_i$
- $r_{i,j}$  est une liste d'entiers strictement positifs, de même longueur que la liste  $\lambda'_i$ , et le  $k^{\text{ième}}$  entier de la liste  $r_{i,j}$  étant la multiplicité de

## Algorithme de recherche des racines dont la différence est entière

$\alpha - n_k$  (où  $n_k$  est le  $k^{\text{ième}}$  entier de la liste  $\lambda'_i$ ) comme racine de  $f(x)$ , pour toute racine  $\alpha$  de  $f_{i,j}(x)$ .

Dans les exemples précédents, on obtient la liste finale suivante:

*Exemple 1 :*

$$F' = \left( (x^2 - 2x + 2, (0, 2), (1, 1)) \right)$$

*Exemple 2 :*

$$F' = \left( (x - 3, (0, 2, 7), (1, 3, 1)) \right)$$

*Exemple 3 :*

$$F' = \left( (2x - 3, (0, 1), (1, 1)), (x - 5, (0, 2, 4), (1, 1, 1)) \right)$$

### 2.5.2 Les algorithmes

Pour la description de ces algorithmes nous utiliserons le vocabulaire classique des systèmes de calcul formel, c'est-à-dire:

- Les fonctions *resultant*, *derive*, *pgcd*, ..., *denom* pour dénominateur, *discr* pour discriminant, etc.;
- Le type des variables n'est pas précisé, car par défaut il est considéré comme "formel";
- Les fonctions classiques de manipulation de listes du langage LISP comme *car*, *cdr*, *cons*, *inverse*, *listevide*, ...
- Pour les nombres algébriques, les fonctions *modulop*, *multiplicitealg*, etc., sont celles du système D5 [Dicrescenzo, Duval 86]. Dans ce cas, le type des variables doit être déclaré par *nombrealgebrique*;
- Les notations mathématiques habituelles;
- Les connectives algorithmiques sont en caractère gras, et les commentaires entre les symboles %.

Algorithme principal défini pour  $f \in \mathbb{Q}[x]$

---

```

Algo DD( $f, x$ );
Entrée:  $f, x$  avec  $f(x) \in \mathbb{Q}(x)$ ;
Sortie: la liste finale de la formule (19);
    si  $\text{denom}(f) \neq 1$  alors  $f := f \times \text{denom}(f)$  fsi ;
     $f_{\text{initial}} := f / \text{pgcd}(f, \text{deriv}(f, x))$ ;
     $f_{\text{avecCarre}} := f$ ;
    si  $f \neq f_{\text{sansCarre}}$  alors  $f := f_{\text{sansCarre}}$  fsi;
     $l := \text{LISTEENTIER}(f, x)$ ;
    si  $l = \text{listevide}$  alors retourner listevide
    sinon
         $G := \text{DECALAGE}(f, x, a, l)$ ;
         $F := \text{NETTOYAGE}(G, \text{taille}(l))$ ;
        si  $f_{\text{sansCarre}} \neq f_{\text{initial}}$  alors
            retourner  $\text{LMULTIPLICITE}(f_{\text{initial}}, x, a, F)$ ;
        sinon retourner  $F$ 
    fsi;
    fsi;
fAlgo;

```

---

```

Algo LISTEENTIER( $f, x$ );
Entrée:  $f, x$ ;
Sortie: liste d'entiers ordonnée croissante;
     $a_d := \text{coefPrincipal}(f, x)$ ;
     $d := \text{degre}(f, x)$ ;
    si  $d = 1$  alors retourner listevide fsi;
     $\text{discr} := \text{resultant}(\text{derive}(f, x), f, x) / a_d$ ;
    si  $d = 2$  alors
         $n := (-\text{discr})^{1/2} / a_2$ ;
        retourner  $(n)$ ;
    sinon
         $l := \text{listevide}$ ;
         $n := 1$ ;
        tant que  $n < \text{borneMignotte}$  faire
            si  $n^2 \mid \text{discr}$  alors ajouter( $n, l$ ) fsi;
        ftant que;
        retourner inverse( $l$ );
    fsi;
fAlgo;

```

*Algorithme de recherche des racines dont la différence est entière*

```
Algo DECALAGE( $f, x, a, l$ );  
  %modulop est une fonction du système D5 [D. Duval 87]%;  
  modulop(substitution( $x = a, f$ ),  $a$ );  
  retourner inverse(TEST( $f, x, a, l, \text{listevide}$ ));  
fAlgo;
```

```
Algo TEST( $f, x, a, l, l_1$ );  
  Entrée:  $f(x), a$  (racine de  $f$ ),  $l$  (liste d'entiers);  
  Sortie:  $l_1$ , liste de forme  $(\dots (g_i(x), \lambda_i) \dots)$ ;  
  nombrealgebrique  $b$ ;  
  si  $l = \text{listevide}$  alors retourner  $l_1$ ;  
  sinon  
     $n := \text{car}(l)$ ;  
     $b := \text{substitution}(x = a - n, f)$ ;  
    si  $b = 0$  alors  
      retourner TEST( $f, x, a, \text{cdr}(l), \text{cons}(n, l_1)$ )  
    sinon retourner TEST( $f, x, a, \text{cdr}(l), l_1$ );  
  fsi;  
  fsi;  
fAlgo;
```

**Algo NETTOYAGE**( $G, \text{taille}(l)$ );  
**Entrée:**  $G$  de forme  $(\dots (g_i(x), \lambda_i) \dots)$ ;  
**Sortie:** une liste nettoyée de forme  $(\dots (f_i(x), \lambda_i), \dots)$ ;  
 $F := \bigcup \left\{ (g_j(x), \lambda_j), \mid |\lambda_j| = \max_i |\lambda_i| \right\}$ ;  
**pour**  $m = 0, 1, 2, \dots$  **jusqua**  $\max_i \lambda_i - 1$  **faire**  
    **pour chaque**  $g_j(x)$  **tel que**  $|\lambda_i| = m + 1$  **faire**  
         $n := \text{premierement}(\lambda_i)$ ;  
         $k(x) := g_i(x + n)$ ;  
            **pour chaque**  $g_j(x)$  **tel que**  $|\lambda_j| = m \wedge \lambda_j = " \lambda_i - n "$   
                 $h(x) := \text{pgcd}(g_j(x), k(x))$ ;  
                 $g_j(x) := g_j(x) / h(x)$ ;  
                 $k(x) := k(x) / h(x)$ ;  
            **fpour;**  
        **fpour;**  
    **fpour;**  
 $F := F \bigcup \left\{ (g_j(x), \lambda_j), \mid g_j(x) \neq 1, \text{longueur}(\lambda_j) = m \right\}$ ;  
**retourner**  $F$   
**fAlgo;**

**Algo LMULTIPLICITE**( $f, x, a, F$ );  
**Entrée:**  $f(x)$ ,  $a$  racine de  $f(x)$   
     $F = (\dots (f_i(x), \lambda_i) \dots)$ ;  
**Sortie:** une liste  $(\dots (f_{i,j}, \lambda_i, r_{i,j}), \dots)$ ;  
 $F' = F' \cup ()$ ;  
**pour chaque** racine  $\alpha$  de  $f_i(x)$  **faire**  
    **pour chaque** entier  $n \in \lambda_i$  **faire**  
         $F' = F' \cup \text{MULTIPLICITEALG}(f_i, x, \alpha - n)$ ;  
    **fpour;**  
**fpour;**  
**retourner**  $F'$ ;  
**fAlgo;**

Ces algorithmes sont utilisés dans l'algorithme de Frobenius.

## 2.6 L'ALGORITHME DE FROBENIUS .

Cette méthode est présentée en détail dans les paragraphes 2.3 et 2.4. Nous avons montré que la forme des solutions formelles de l'équation différentielle, dans le cas de singularités régulières, dépend de la nature des racines de l'équation indicielle (en particulier si ces racines diffèrent d'entier).

Nous avons présenté au paragraphe précédent les algorithmes de base permettant de déterminer les racines de différence entière et leur multiplicité. Résumons l'algorithme de FROBENIUS avec ces dernières notations.

### 2.6.1 Résumé de la méthode

Les diverses étapes sont les suivantes:

- détermination de l'équation indicielle notée *eqind*.
- recherche et classement des racines de *eqind* qui diffèrent d'entier.

Pour cela on applique l'algorithme décrit dans le paragraphe précédent. On obtient la liste donnée par la formule (19), soit:

$$\left( (f_{1,1}, \lambda'_1, r_{1,1}), \dots, (f_{1,j}, \lambda'_1, r_{1,j}), \dots (f_{i,j}, \lambda'_i, r_{i,j}) \dots \right)$$

On remarque alors que les racines de chaque  $f_{i,j}$  sont classées exactement comme les lignes du tableau  $T$  du paragraphe 2.3.2.

Pour déterminer les solutions formelles de l'équation différentielle, nous pourrons dans ce cas appliquer les formules (8) et (10).

- Recherchons les autres racines de l'équation indicielle. Comme nous l'avons montré au paragraphe précédent, on sait isoler les facteurs donnant des racines de différence entière. *eqind* peut donc s'écrire:

$$eqind = eqind1 \times eqind2$$

où *eqind1* est un facteur dont les racines diffèrent d'un entier, et où *eqind2* n'a pas de telles racines.

Si les racines de *eqind2* sont simples, alors la solution de l'équation différentielle est donnée par l'expression:

$$x^\lambda \sum_{i=0}^k g_i(\lambda) x^i \Big|_{\lambda=\rho_i}$$

où  $\rho_i$  est racine simple, et  $k$  le nombre de termes demandés pour la série solution.

## Chapitre 2

Si les racines de  $eqind2$  sont multiples, alors les solutions sont données par la formule (8).

### 2.6.2 Les algorithmes

*FROBENIUS* est l'algorithme principal. Pour des raisons de présentation, il se trouve à la page suivante.

```

Algo FROBENIUS(a, n, x, k, solution, nbsol);
    Entrée: a(i) tableau des coefficients
            n ordre de l'équation différentielle
            k nombre de termes demandés pour la solution;
    Sortie: nbsol nombre de solutions
            solution tableau des solutions de l'équation différentielle;
    eqind := EqINDICIELLE(a, n, x);
    pour i = 1 jusqu'à k faire % calcul des g(i) %
        si f(i) = 0 alors g(i) := 0
        sinon
            coeff(f(i), g(i), tab);
            g(i) := -tab(0)/tab(1) fsi;
    fpour;
    % cas des racines qui diffèrent d'entier %
    F' = DD(eqind,  $\lambda$ );
    j := 0; % compteur des racines %
    i := 0; % compteur des solutions %
    pour chaque  $f_{i,j} \in F'$  faire
         $\omega$  := dernierentier( $\lambda'_i$ );
        g(0) := pour i := 1 jusqu'à  $\omega$  produit
            (substitution( $\lambda = \lambda + i$ , f(0))) fpour;
        pour chaque racine  $\rho_j$  faire
            pour m = 1 jusqu'à multiplicité( $\rho_j$ ) faire
                i := i + 1;
                solution(i) := FROBgénéral( $\rho_j$ , i, k);
            fpour;
            j := j + 1;
        fpour;
    nbsol := i;
    fpour;
    % cas des autres racines %
    nbracine := solve(eqind2,  $\lambda$ , racine, mult Racine)
    pour m := 1 jusqu'à nbracine faire
        si mult Racine(m) = 1 alors
            nbsol := nbsol + 1;
            solution(nbsol) := FROBsimple(racine(m), k)
        sinon
            pour p := 1 jusqu'à mult Racine(m) faire
                nbsol := nbsol + 1;
                solution(nbsol) := FROBgénéral(racine(m), p, k)
            fpour; fsi;
    fpour;
fAlgo;

```

**Algo** *EqINDICIELLE*( $a, n, x$ );  
**Entrée:**  $a(i)$ ,  $n$  coefficients et ordre de l'équation différentielle;  
**Sortie:**  $f(0)$  valeur de l'équation indicielle qui est retournée  
 $f(i)$  pour  $1 \leq i \leq n$ ;  
 % forme générale de la solution %  
 $y(0) := x^\lambda * (\text{pour } i := 0 \text{ jusqu'à } k \text{ somme}$   
 $(g(i) * x^i));$   
 $L := a(0)y(0);$   
**pour**  $i = 1$  **jusqu'à**  $n$  **faire**  
 $L := L + a(i)df(y(i - 1), x);$   
**fpour;**  
**si**  $denom(L) \neq 1$  **alors**  $L := L * denom(L)$  **fsi;**  
 $minai := \min_{i=0, \dots, n} (degre(a(i), x) - i);$   
 $L := L/x^{\lambda + minai};$   
 % calcul des  $f(i)$  %  
**pour**  $i := 0$  **jusqu'à**  $n$  **faire**  
 $f(i) := coefficient(L, x^i);$   
**fpour;**  
 $f(0) := f(0)/g(0);$   
**retourner**  $f(0);$   
**fAlgo;**

**Algo** *FROBsimple*( $rac, k$ );  
**Entrée:**  $f(0)$  l'équation indicielle et les  $f(i)$ ;  
**Sortie:** La solution de l'équation différentielle correspondant  
à la racine  $rac$ ;  
 $g(0) := 1;$   
 $sol := x^{rac} * (\text{pour } i := 0 \text{ jusqu'à } k \text{ somme}$   
 $(substitution(\lambda = rac, g(i)x^i))$   
 $);$   
**retourner**  $sol;$   
**fAlgo**

```

Algo FROB général(i,  $\rho$ , k);
  Entrée: i la ième solution pour la racine  $\rho$ 
          avec k termes;
  Sortie: la ième solution est retournée;
  sol := pour h := 0 jusqu'à i somme
          (  $C_{i-h}^h \text{substitution}(\lambda = \rho, x^\lambda w(h, x, \lambda, k)) (\log(x))^{i-h}$  );
  retourner sol;
fAlgo;

```

Opérateur  $w(i, x, \lambda, k) =$   
 pour *j* := 0 jusqu'à *k* somme  
 $df(g(j), \lambda, i) x^j$  ;

## 2.7 QUELQUES EXEMPLES TRAITÉS PAR L'ALGORITHME DE FROBENIUS .

Tous les exemples ont été exécutés sur Bull DPS8 sous le système Multics.

### 2.7.1 Un exemple classique: l'équation de Bessel

Soit l'équation de Bessel  $Ly = 0$  avec

$$L = x^2 \partial^2 + x \partial + x^2 - \nu^2$$

Prenons le cas où  $\nu = 0$  et le nombre de termes demandé est  $k = 10$ .

```

codedesir();

```

```

***** INTRODUCTION DES DONNEES *****

```

```

Est-ce un systeme que vous voulez traiter ? (oui / non)
non;
L' equation est de la forme

```

$$a(1,0)(x)d^0 + a(1,1)(x)d^1 + \dots + a(1,n)(x)d^n = 0$$

```

ordre de l'equation ?
2;
Donner les coefficients a(1,j)(x)
x**2; x; x**2;

```

Chapitre 2

$$a(1,0) = x^2$$

$$a(1,1) = x$$

$$a(1,2) = x^2$$

correction ? ( oui; / non; )

non;

nombre de termes desires pour la solution ?

10;

LES 2 SOLUTIONS CALCULEES SONT DANS LE TABLEAU

soldif(1,j) avec j = 1,...2

=====  
SOLUTION No 1  
=====

$$- 1/14745600*x^{10} + 1/147456*x^8 - 1/2304*x^6 + 1/64*x^4 - 1/4*x^2 + 1$$

=====  
SOLUTION No 2  
=====

$$\begin{aligned} & - 1/14745600*\log(x)*x^{10} + 1/147456*\log(x)*x^8 - 1/2304*\log(x)*x^6 \\ & + 1/64*\log(x)*x^4 - 1/4*\log(x)*x^2 + \log(x) + 137/884736000*x^{10} \\ & - 25/1769472*x^8 + 11/13824*x^6 - 3/128*x^4 + 1/4*x^2 \end{aligned}$$

## 2.7.2 Autres exemples

Choisissons tout d'abord un exemple d'équation différentielle  $Ly = 0$  d'ordre 6 dont les solutions sont exactes. Soit:

$$L = x^6 \partial^6 + 20x^5 \partial^5 + 122x^4 \partial^4 + 258x^3 \partial^3 + 156x^2 \partial^2 + 8x \partial - 8$$

L'équation indicelle de  $L$  est d'ordre 6, aussi il sera fait appel aux algorithmes présentés en 2.5.

La vérification de la validité des solutions en les reportant dans l'équation donné. Les temps d'exécution sont donnés en millisecondes par la commande *showtime*.

codedesiralg()\$

ATTENTION : chaque donnée doit être suivi de ;

\*\*\*\*\* INTRODUCTION DES DONNEES \*\*\*\*\*

Est-ce un système que vous voulez traiter ? (oui / non)

non;

L'équation est de la forme

$$a(1,0)(x)d^0 + a(1,1)(x)d^1 + \dots + a(1,n)(x)d^n = 0$$

ordre de l'équation ?

6;

Donner les coefficients  $a(1,j)(x)$

-8;8\*x;156\*x\*\*2;258\*x\*\*3;122\*x\*\*4;20\*x\*\*5;x\*\*6;

a(1,0) = (-8)

a(1,1) = 8\*x

a(1,2) = 156\*x<sup>2</sup>

a(1,3) = 258\*x<sup>3</sup>

a(1,4) = 122\*x<sup>4</sup>

a(1,5) = 20\*x<sup>5</sup>

a(1,6) = x<sup>6</sup>

## Chapitre 2

correction ? ( oui; / non; )  
non;  
nombre de termes desires pour la solution ?  
5;

LES 6 SOLUTIONS CALCULEES SONT DANS LE TABLEAU

soldifalg(1,j,1) avec j = 1,...6

soldifalg(1,j,2) avec j = 1,...6 pour le contexte

=====  
SOLUTION No 1  
=====

8812800000\*x

=====  
SOLUTION No 2  
=====

$(-2)$   
1728\*x

=====  
SOLUTION No 3  
=====

$(-2)$   
3456\*x \*(log(x) + 4)

=====  
SOLUTION No 4  
=====

$(-2)$   
3456\*x \*(6\*log(x)<sup>2</sup> + 12\*log(x) + 19)

=====  
SOLUTION No 5  
=====

$i$   
12480\*x \*(9842\*i + 2631)

=====  
SOLUTION No 6  
=====

$(-i)$   
12480\*x \*( - 9842\*i + 2631)

*Quelques exemples traités par l'algorithme de FROBENIUS*

On peut vérifier la validité de chaque solution en appelant la procédure : `solvalidealg(j)` qui reporte dans les équations la  $j$ ème solution

```
showtime;  
time: 80571.479 ms
```

```
solvalidealg(1)$  
EQUATION 1
```

0

```
solvalidealg(2)$  
EQUATION 1
```

0

```
solvalidealg(3)$  
EQUATION 1
```

0

```
solvalidealg(4)$  
EQUATION 1
```

0

```
solvalidealg(5)$  
EQUATION 1
```

0

```
solvalidealg(6)$  
EQUATION 1
```

0

```
showtime;  
time: 6184.639 ms
```

Reprenons cet exemple d'ordre 6 dans lequel on perturbe 2 coefficients.  
Soit:

$$L = x^6 \partial^6 + 20x^5 \partial^5 + 122x^4 \partial^4 + (258x^3 + 4x^5) \partial^3 + (156x^2 + x**3) \partial^2 + 8x \partial - 8$$

On pourra noter la croissance du temps (il n'y a plus qu'une solution exacte dans ce cas).

## Chapitre 2

codedesiralg()\$

L' equation est de la forme

$$a(1,0)(x)d\wedge 0 + a(1,1)(x)d\wedge 1 + \dots + a(1,n)(x)d\wedge n = 0$$

ordre de l'equation ?

6;

Donner les coefficients  $a(1,j)(x)$

-8;8\*x;156\*x\*\*2+x\*\*3; 258\*x\*\*3-4\*x\*\*5;122\*x\*\*4;20\*x\*\*5;x\*\*6;

$a(1,0) = (-8)$

$a(1,1) = 8*x$

$a(1,2) = x^2 * (x + 156)$

$a(1,3) = 2*x^3 * (-2*x^2 + 129)$

$a(1,4) = 122*x^4$

$a(1,5) = 20*x^5$

$a(1,6) = x^6$

nombre de termes desires pour la solution ?

4\$

LES 6 SOLUTIONS CALCULEES SONT DANS LE TABLEAU

soldifalg(1,j,1) avec  $j = 1, \dots, 6$

soldifalg(1,j,2) avec  $j = 1, \dots, 6$  pour le contexte

=====  
SOLUTION No 1  
=====

8812800000\*x

=====  
SOLUTION No 2  
=====

$- 1152 * \log(x) * x + 18/5 * x^2 + 2892 * x + 2592 * x^{(-1)} + 1728 * x^{(-2)} + 21384$

*Quelques exemples traités par l'algorithme de FROBENIUS*

=====  
SOLUTION No 3  
=====

$$\begin{aligned}
 & - 4608 \cdot \log(x)^2 \cdot x + 36/5 \cdot \log(x)^2 \cdot x + 5784 \cdot \log(x) \cdot x + 5184 \cdot \log(x) \cdot x^{(-1)} + \\
 & 3456 \cdot \log(x)^{(-2)} \cdot x + 42768 \cdot \log(x) + 207993/200 \cdot x^2 - 4240 \cdot x + 8640 \cdot x^{(-1)} + \\
 & 13824 \cdot x^{(-2)} + 99792
 \end{aligned}$$

=====  
SOLUTION No 4  
=====

$$\begin{aligned}
 & - 41472 \cdot \log(x)^3 \cdot x + 216/5 \cdot \log(x)^2 \cdot x^2 + 34704 \cdot \log(x)^2 \cdot x + 31104 \cdot \log(x)^2 \cdot x^2 ( \\
 & -1) + 20736 \cdot \log(x)^2 \cdot x^{(-2)} + 256608 \cdot \log(x)^2 + 623979/200 \cdot \log(x)^2 \cdot x^2 - 12720 \cdot \\
 & \log(x) \cdot x + 25920 \cdot \log(x) \cdot x^{(-1)} + 41472 \cdot \log(x) \cdot x^{(-2)} + 299376 \cdot \log(x) - \\
 & 21408069/4000 \cdot x^2 + 498 \cdot x + 18144 \cdot x^{(-1)} + 65664 \cdot x^{(-2)} + 110484
 \end{aligned}$$

=====  
SOLUTION No 5  
=====

$$\begin{aligned}
 & x^i \cdot (3791717/5 \cdot i^4 \cdot x + 483900 \cdot i^3 \cdot x + 520718016 \cdot i^2 \cdot x - 213828576 \cdot i \cdot x + \\
 & 21192000960 \cdot i - 4922277/10 \cdot x^4 - 2781872 \cdot x^3 + 748079592 \cdot x^2 + 780587808 \cdot x \\
 & - 34474614720)/(305 \cdot i + 91)
 \end{aligned}$$

=====  
SOLUTION No 6  
=====

$$\begin{aligned}
 & x^{(-i)} \cdot (3791717/5 \cdot i^4 \cdot x + 483900 \cdot i^3 \cdot x + 520718016 \cdot i^2 \cdot x - 213828576 \cdot i \cdot x + \\
 & 21192000960 \cdot i + 4922277/10 \cdot x^4 + 2781872 \cdot x^3 - 748079592 \cdot x^2 - \\
 & 780587808 \cdot x + 34474614720)/(305 \cdot i - 91)
 \end{aligned}$$

showtime;  
time: 302321.65 ms

## Chapitre 2

On peut vérifier la validité de chaque solution en appelant la procédure :  
solvalidealg(j) qui reporte dans les équations la Jieme solution

```
solvalidealg(1)$  
0
```

```
solvalidealg(2)$  
      3  
( - 23004*x )/5
```

```
solvalidealg(3)$  
      2      3  
(9*x*( - 409440*log(x)*x - 76800*log(x)*x - 4147200*log(x) - 640*x +  
      2  
      280417*x - 76800*x - 8294400))/100
```

```
solvalidealg(4)$  
      2 4      2 3      2 2  
(9*( - 110572800*log(x)*x - 24576000*log(x)*x - 1327104000*log(x)*x  
      5      4      3  
      - 153600*log(x)*x + 63140220*log(x)*x - 714729600*log(x)*x -  
      2  
      5723136000*log(x)*x - 1092096000*log(x)*x - 96768000*log(x) - 5776880*  
      5      4      3      2  
      x + 209597789*x + 1049692800*x - 3738528000*x + 88128000*x +  
      27648000))/(2000*x)
```

```
solvalidealg(5)$  
      i 5  
(x *x *(7444332*i*x + 232342127*i + 210736004*x + 17266183))/(2*(305*i + 91))
```

```
solvalidealg(6)$  
      5      i  
(x *(7444332*i*x + 232342127*i - 210736004*x - 17266183))/(2*x *(305*i - 91))
```

```
showtime;  
time: 28768.128 ms
```

## Chapitre 3

# SOLUTIONS FORMELLES D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

## AU VOISINAGE DE POINTS SINGULIERS IRRÉGULIERS

### 3.1 NOTATIONS ET POSITION DU PROBLÈME .

Nous désignerons par  $K((x))^*$  le corps des séries formelles de Puiseux à coefficients dans le corps  $K$ .  $K$  pourra être considéré comme étant une clôture algébrique  $\bar{\mathbb{Q}}$  de  $\mathbb{Q}$  en un premier temps.

Rappelons que:

$$K((x))^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K((x^{\frac{1}{n}}))$$

et donc qu'un élément de ce corps peut toujours se noter:

$$y = \alpha_{-p} t^{-p} + \alpha^{-p+1} t^{-p+1} + \dots$$

avec  $t^q = x$  pour  $q$  entier positif

Soit  $L$  un élément de  $K((x))^*[\partial]$ , anneau des opérateurs différentiels à coefficients dans  $K((x))^*$ . On notera  $\partial = \frac{d}{dx}$  l'opérateur de dérivation.

Si:

$$L = \sum_{j=0}^n a_j \partial^j$$

## Chapitre 3

alors:

$$a_i = \sum_{j=-q_i}^{+\infty} a_{i,j} t_i^j \quad \text{avec} \quad t_i = x^{\frac{1}{m_i}}$$

En introduisant  $m = \text{ppcm}(m_i, i = 0, 1, \dots, n)$  on peut toujours considérer que  $L$  appartient à  $K((x))^*[\partial]$ , et nous allons donc noter

$$L = \sum_{j=0}^n a_j \partial^j \quad \text{avec} \quad a_0 \neq 0 \quad \text{et} \quad a_n \neq 0$$
$$a_i = \sum_{j=-p_i}^{+\infty} a_{i,j} t^j \quad \text{et} \quad t^m = x \quad (1)$$

Le problème que nous voulons considérer est celui de la détermination d'un système fondamental de solutions formelles de (1). Nous précisons plus loin la nature de telles solutions. Ces solutions ne sont naturellement pas de vraies solutions (fonctions méromorphes ou autres), et n'ont pas à l'être, étant donné que l'opérateur lui-même a pour coefficients des séries formelles.

### 3.2 POLYGONE DE NEWTON DE $L$ .

Rappelons brièvement une solution détaillée dans les articles [Malgrange 80], [Ramis 84], [Della Dora, Tournier 81,82].

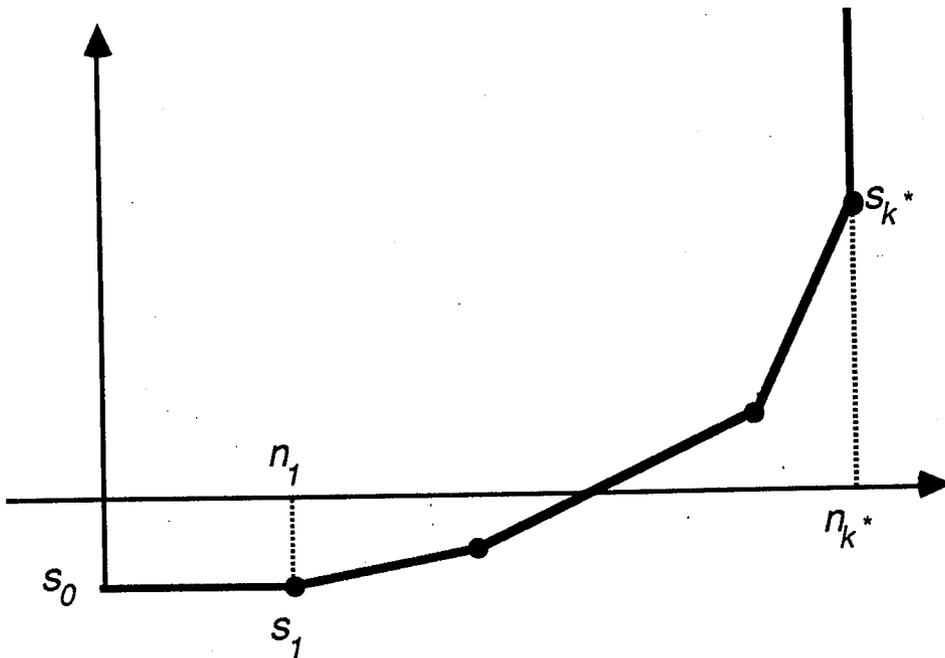
Au monôme différentiel  $a_{i,j} t^j \partial^i$ , on associe le point  $(i, \frac{j}{m} - i)$  de  $\mathbf{Z} \times \mathbf{Q}$ . On construit ensuite les quadrants:

$$QT(i, \frac{j}{m} - i) = \{(s, r) \in \mathbf{Z} * \mathbf{Q} ; s \leq i \text{ et } r \geq \frac{j}{m} - i\}$$

Puis on considère l'ensemble:

$$QT(L) = \bigcup_{a_{i,j} \neq 0} QT(i, \frac{j}{m} - i)$$

et enfin on construit l'enveloppe convexe de cet ensemble, soit:



Le polygone se décrit par la suite de ses sommets:

$$S_0 = (0, s_0), S_1 = (n_1, s_1), \dots, S_{k^*} = (n_{k^*}, s_{k^*})$$

avec  $n_{k^*} = n$  le degré de l'opérateur différentiel.

On a les inégalités:

$$\begin{aligned} n_0 &= 0 \leq n_1 < \dots < n_{k^*} = n \\ s_0 &\leq s_1 < \dots < s_{k^*} \end{aligned}$$

Les sommets étant définis, on a la suite des pentes:

$$\lambda_0 = \frac{s_1 - s_0}{n_1 - n_0} < \lambda_1 = \frac{s_2 - s_1}{n_2 - n_1} < \dots < \lambda_{k^*} = \frac{s_{k^*} - s_{k^*-1}}{n_{k^*} - n_{k^*-1}}$$

des diverses arêtes  $[S_0, S_1], \dots, [S_{k^*-1}, S_{k^*}]$ , pour  $i = 0, 1, \dots, k^* - 1$ . Ces arêtes ont une projection sur l'axe des abscisses de longueur  $l_i = n_{i+1} - n_i$

Naturellement nous avons:

$$l_0 + l_1 + \dots + l_{k^*-1} = n$$

Avant de présenter la méthode plus en détail, il faut introduire quelques lemmes.

### 3.3 QUELQUES LEMMES TECHNIQUES .

#### 3.3.1 Expression de $(\partial + T_1)^i$ où $T_1 = \partial\left(\frac{a}{x^\lambda}\right)$

Pour le développement de l'algorithme, il faut une expression développée de:

$$\left(\partial - \frac{\lambda a}{x^{\lambda+1}}\right)^i .$$

Pour cela, introduisons la suite des  $T_i$  définie récursivement par:

$$T_{i+1} = \partial(T_i) + T_i \cdot T_1 \quad i \geq 1$$

Nous avons alors le lemme suivant:

**Lemme 1.** *Avec les notations précédentes, on a:*

$$\begin{aligned} (\partial + T_1)^i &= T_0 \partial^i + C_1^i T_1 \partial^{i-1} + \dots + T_i \quad i \geq 1 \\ T_0 &= 1 \end{aligned}$$

Le résultat est vrai pour  $i = 1$ . Supposons le vrai pour  $i$ , et démontrons le pour  $i + 1$

$$(\partial + T_1)^{i+1} = (\partial + T_1)(T_0 \partial^i + C_1^i T_1 \partial^{i-1} + \dots + T_i) .$$

Pour cela il faut calculer le terme général:

$$\begin{aligned} (\partial + T_1)(C_j^i \partial^{i-j}) &= C_j^i \partial(T_j) \partial^{i-j} + C_j^i T_j \partial^{i-j+1} + C_j^i T_j T_1 \partial^{i-j} \\ &= C_j^i T_{j+1} \partial^{i-j} + C_j^i T_j \partial^{i-j+1} \end{aligned}$$

En regroupant les termes, nous obtenons:

$$C_{j-i}^i T_j \partial^{i-j+1} + C_j^i T_j \partial^{i-j+1} = C_j^{i+1} T_j \partial^{i-j+1}$$

Le lemme est donc démontré par récurrence.

On l'utilisera dans les diverses transformations:

$$L = \sum_{j=0}^n a_j \partial^j \quad \longrightarrow \quad L(a, \lambda) = \sum_{j=0}^n a_j (\partial + T_1)^j$$

Si nous notons:

$$a_j(\lambda, a) = T_0 a_j + C_j^{j+1} T_1 a_{j+1} + \dots + C_j^n T_{n-j} a_n$$

alors nous pouvons écrire:

$$L(a, \lambda) = \sum_{j=0}^n a_j(\lambda, a) \partial^j$$

**Remarque:**  $T_1 = -\frac{\lambda a}{x^{\lambda+1}}$ , et donc  $L(a, 0) = L(0, a) = L(0, 0) = L$ .

### 3.3.2 Expression des $T_j$

Nous devons ensuite estimer les divers  $T_j$ . Pour cela, nous pouvons démontrer le lemme suivant:

**Lemme 2.** Avec  $T_0 = 1$  et  $T_1 = -\frac{\lambda a}{x^{\lambda+1}}$ , nous avons:

$$T_j = \sum_{k=1}^j \frac{T_k^j}{x^{\lambda k+j}} \quad (j \geq 1)$$

avec en particulier:

$$T_j^j = (-\lambda a)^j$$

### Démonstration

Le résultat est vrai pour  $j = 1$ . Supposons le vrai pour  $j$ , et démontrons le pour  $j + 1$ :

$$\begin{aligned} T_{j+1} &= \partial(T_j) + T_j \cdot T_1 \\ &= \sum_{k=1}^j \frac{T_k^j \cdot (-(\lambda k + j))}{x^{\lambda k+j+1}} + \sum_{k=1}^j \frac{T_k^j (-\lambda a)}{x^{\lambda k+j+\lambda+1}} \\ &= \sum_{k=1}^{j+1} \frac{T_k^{j+1}}{x^{\lambda k+(j+1)}} \end{aligned}$$

Si nous notons alors:

$$T_k^{j+1} = -(\lambda k + j) T_k^j + (-\lambda a) T_{k-1}^j$$

nous avons en particulier:

$$T_{j+1}^{j+1} = (-\lambda a) T_j^j$$

d'ou le résultat.

### 3.3.3 Expression de l'opérateur $L(\lambda, a)$

Rappelons que la forme de l'opérateur est:

$$L(a, \lambda) = \sum_{j=0}^n a_j(\lambda, a) \partial^j.$$

Pour donner une expression de cet opérateur, il faut maintenant exprimer les  $a_j(\lambda, a)$ . La question des notations devient ici délicate. Afin de ne pas les alourdir, nous allons convenir des notations suivantes:

$a_j = a_j^* x^{\sigma_j} + \dots$   $\sigma_j$  étant l'ordre de  $a_j$   
 $a_j^*$  le coefficient non nul associé à  $x^{\sigma_j}$   
 $a_j^* x^{\sigma_j}$  est donc la forme initiale de  $a_j$ .

Dans ce cas, on a:

$$\begin{aligned} a_j(\lambda, a) &= T_0 a_j + C_j^{j+1} T_1 a_{j+1} + \dots + C_j^n T_{n-j} a_n \\ &= (a_j^* x^{\sigma_j} + \dots) + C_j^{j+1} \frac{-\lambda a}{x^{\lambda+1}} (a_{j+1}^* x^{\sigma_{j+1}} + \dots) + \dots \\ &\quad + C_j^n \left( \frac{(-\lambda a)^{n-j}}{x^{(\lambda+1)(n-j)}} + \dots \right) (a_n^* x^{\sigma_n} + \dots \end{aligned}$$

Nous allons considérer la suite des exposants associés au monôme différentiel:

$$a_j(\lambda, a) \partial^j$$

c'est-à-dire:

$$\begin{aligned} &\sigma_j - j, \dots \\ &\sigma_{j+1} - (\lambda + 1) - j, \dots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\sigma_n - (\lambda + 1)(n - j) - j, \dots \end{aligned}$$

Il est préférable de l'écrire en ne conservant que les exposants principaux:

$$\begin{aligned}
 & \sigma_j - j \\
 & \sigma_{j+1} - (j+1) - \lambda \\
 & \vdots \\
 & \vdots \\
 & \sigma_n - n - (n-j)\lambda
 \end{aligned} \tag{2}$$

Naturellement, les  $\sigma_s - s$  correspondent aux points du polygone de Newton déjà construit. Notons pour simplifier:

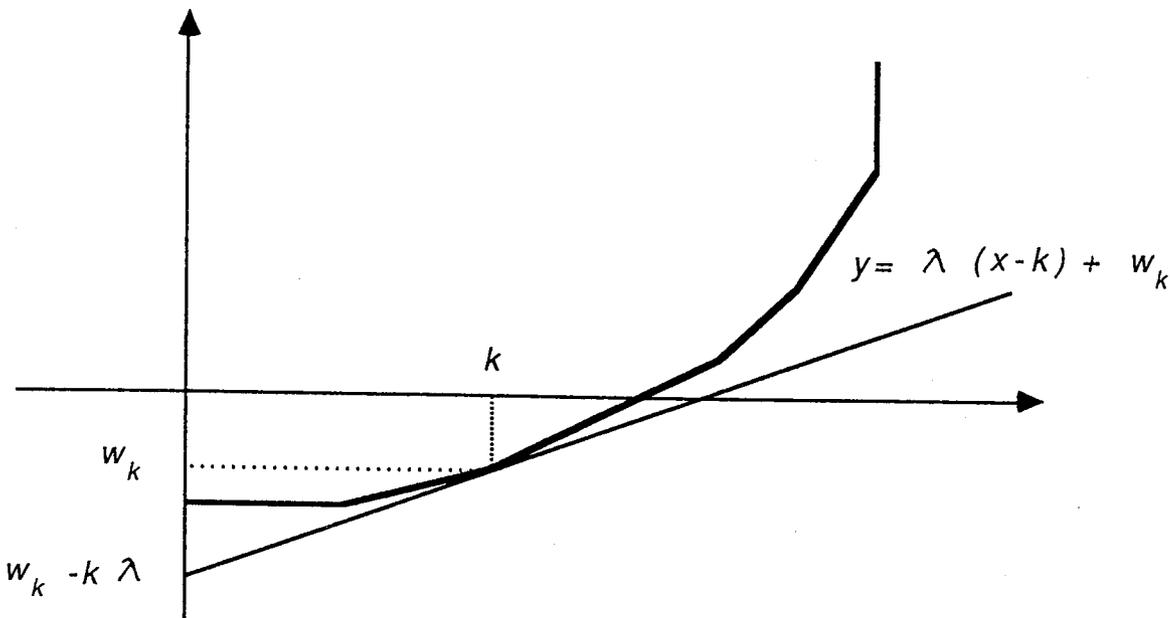
$$w_k = \sigma_k - k$$

en remarquant que  $w_i = s_i$  pour  $i = 0, n_1, \dots, n_{k^*}$ .

A partir des points du polygone de Newton de  $L$ , traçons la droite passant par le point  $(k, w_k)$  et de pente  $\lambda$  :

$$y = \lambda(x - k) + w_k$$

L'ordonnée à l'origine de cette droite est  $y(0) = w_k - k\lambda$ , c'est-à-dire l'exposant (2) associé:



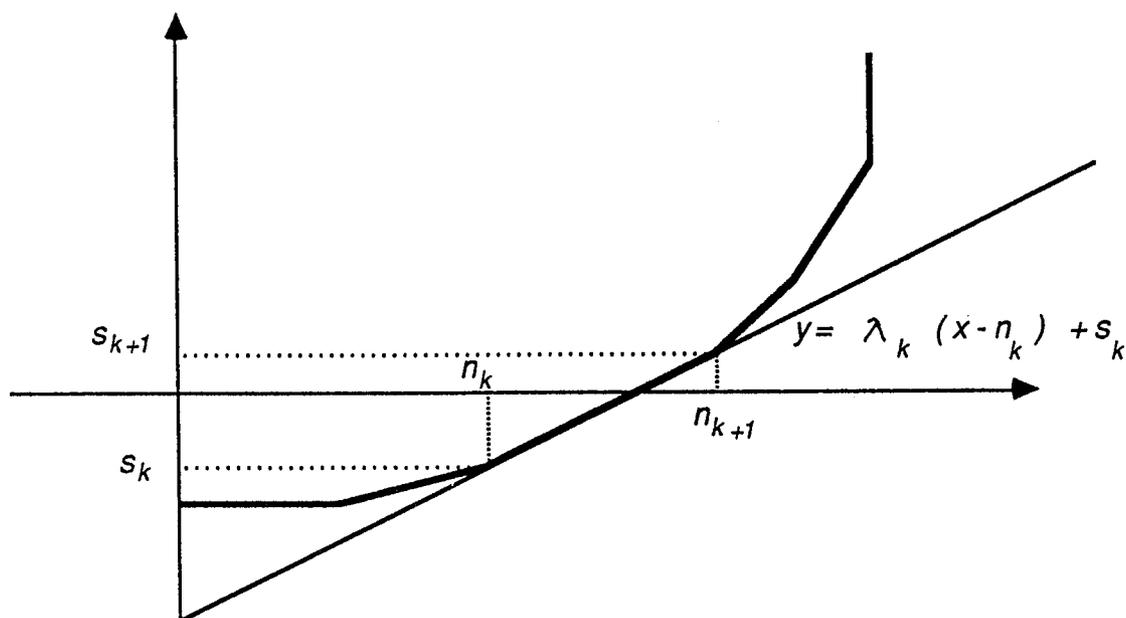
## Chapitre 3

Le point clef de tout l'algorithme est naturellement de ne pas choisir n'importe quelle pente, mais seulement une des *pentés positives* de la suite:

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{k^*}$$

Etudions de plus près le cas où l'on choisit  $\lambda_k$  comme pente de la transformation précédemment décrite.

### 3.3.4 Polygone de Newton de $L(\lambda_k, a)$



L'observation de la suite des exposants (2) montre immédiatement que le polygone de  $L(\lambda_k, a)$  coïncidera avec la droite  $y = \lambda_k(x - n_k) + s_k$  sur le segment  $[0, n_{k+1}]$  et avec le polygone de Newton de  $L$  sur  $[n_{k+1}, n]$ .

Considérons en particulier le monôme:

$$a_0(\lambda_k, a) = T_0 a_0 + C_0^1 T_1 a_1 + \dots + C_0^{n_k} T_{n_k} a_{n_k} + \dots + C_0^{n_{k+1}} T_{n_{k+1}} a_{n_{k+1}} + \dots + C_0^n T_n a_n$$

Nous pouvons écrire:

$$a_0^*(\lambda_k, a) = (-\lambda_k a)^{n_k} a_{n_k}^* + \dots + (-\lambda_k a)^{n_{k+1}} a_{n_{k+1}}^*$$

avec

$$a_0(n, k) = a_0^*(n, k)x^{s_k - n_k \lambda_k} + \dots$$

$a_0^*(n, k)$  apparaît donc comme un polynôme en la variable  $a$ . On peut alors donner la définition de *l'équation caractéristique*.

**Définition.**

$$c(\lambda_k, a) = (-\lambda_k a)^{l_k} a_{n_{k+1}}^* + \dots + a_{n_k}^*$$

*sera appelée l'équation caractéristique associée à la pente  $\lambda_k$ .*

Il est aussi très important de remarquer que:

$$a_1^*(\lambda_k, a) = C_1^{n_k} (-\lambda_k a)^{n_k - 1} a_{n_k}^* + \dots + C_1^{n_{k+1}} (-\lambda_k a)^{n_{k+1} - 1} a_{n_{k+1}}^*$$

Donc

$$a_1^*(\lambda_k, a) = -\frac{1}{\lambda_k} \frac{d}{da} (a_0^*(\lambda_k, a))$$

De manière générale, pour  $j < n_k$  on a:

$$a_j^*(\lambda_k, a) = \frac{1}{j! (-\lambda_k)^j} \frac{d^j}{da^j} (a_0^*(\lambda_k, a))$$

### 3.4 DESCRIPTION DE LA MÉTHODE .

Le but de la méthode que nous allons décrire est:

1) démontrer que l'équation différentielle initiale:

$$L = \sum_{j=0}^n a_j \partial^j$$

$$\text{où } a_j = \sum_{i=-p_j}^{+\infty} a_{ji} t^i \quad \text{avec } t^m = x$$

$$a_0 \neq 0 \quad \text{et} \quad a_n \neq 0$$

possède un système fondamental de solutions formelles ,

2) déterminer ces solutions formelles, qui sont de la forme:

$$y_i(x) = e^{Q_i(x)} x^{r_i} \sigma_i(x) \quad (3)$$

## Chapitre 3

avec

$$Q_i(x) = \sum_{k=0}^{k=l_i-1} q_{ik} x^{(l_i-\nu)/(k_i)}$$

$$\sigma_i(x) = \sigma_i^0(x) + \sigma_i^1(x) \log(x) + \dots + \sigma_i^{m_i} \log^{m_i}(x)$$

$$\sigma_i^j(x) = \sigma_i^{j,0} + \sigma_i^{j,1} x^{\frac{1}{k_i}} + \sigma_i^{j,2} x^{\frac{2}{k_i}} + \dots$$

$$(j = 0, 1, \dots, m_i; \quad i = 1, 2, \dots, n)$$

et  $l_i, m_i, k_i$  entiers,  $m_i \geq 0$ , et  $r_i$  algébrique.

Cette forme (3) est donnée par Birkoff, Fabry, et Trjetzinsky, pour ne citer qu'eux.

Il est à remarquer, pour être plus précis, que ces séries formelles peuvent être rassemblées en plusieurs groupes possédant le même facteur

$$e^{Q(x)} x^r \quad r \text{ étant défini à un rationnel près.}$$

A l'intérieur d'un tel groupe, on ordonne les éléments de la même manière que pour l'algorithme de Frobenius, c'est-à-dire

$$\left\| \begin{array}{l} e^{Q(x)} x^r \sigma_{p+1}(x) \\ e^{Q(x)} x^r \sigma_{p+2}(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ e^{Q(x)} x^r \sigma_{p+q}(x) \end{array} \right. \quad (4)$$

avec

$$m_{p+1} = 0, m_{p+2} = 1, \dots, m_{p+q} = q - 1$$

En suivant la notation de Trjetzinsky, on appellera un tel groupe *un groupe logarithmique*.

Avant de donner l'algorithme, précisons encore quelques notations.

- $P(L) = \{\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{k^*}\}$  désignera l'ensemble des pentes du polygone de Newton de  $L$ .
- Si  $\lambda \in P(L)$ , on désignera par  $l(\lambda)$  la longueur de la projection sur l'axe des abscisses de l'arête du polygone de pente  $\lambda$ , et on appellera  $l$  la longueur de la pente  $\lambda$ .

- $c_\lambda$  désignera l'équation caractéristique réduite (polynôme de degré  $l(\lambda)$ ), associée à cette pente. Si  $\lambda = 0$ , nous avons un traitement particulier longuement décrit dans le chapitre précédent.
- $R(\lambda)$  désignera l'ensemble des racines distinctes de  $c_\lambda$ .
- $L(\lambda, .)$  désignera l'opérateur différentiel obtenu à partir de  $L$  en faisant la transformation:

$$\partial \longrightarrow \partial - \frac{\lambda a}{x^{\lambda+i}}$$

où  $\lambda$  a une valeur donnée et  $a$  est indéterminé. Dans ce cas, en formant l'équation caractéristique  $c_\lambda$  et en choisissant  $a \in R(\lambda)$ , on réduit tout ou partie de la pente de longueur  $l(\lambda)$  associée à  $\lambda$ , en donnant naissance à un ensemble de nouvelles pentes:

$$P(\lambda, a) = \{\lambda_i \mid \lambda_i \text{ pente de } L(\lambda, a) \text{ telle que } \lambda_i < \lambda\}$$

### 3.5 JUSTIFICATION DE LA MÉTHODE .

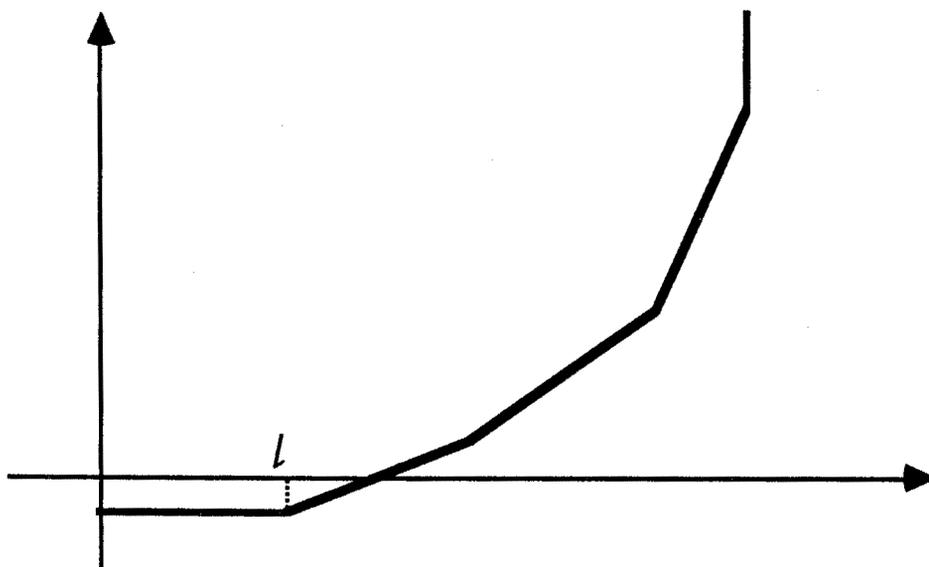
Les données initiales sont:

$$L = \sum_{j=0}^n a_j \partial^j$$

avec  $a_j = \sum_{i=-p}^{+\infty} a_{ji} t^j$  où  $t^m = x$ , ( $m$  étant le plus petit entier positif vérifiant cette égalité).

Nous allons choisir  $\lambda$  le plus petit élément de  $P(\lambda)$ .

### 3.5.1 Premier cas : la pente $\lambda$ est nulle



Si  $\lambda = 0$  et si  $l$  est la longueur de la projection sur l'axe des abscisses de l'arête de pente  $\lambda$ , nous pouvons toujours utiliser l'algorithme de Frobenius [Della Dora, Tournier 1981]. Cet algorithme va fournir  $l$  solutions formelles de  $L$  ayant naturellement un facteur exponentiel de 1.

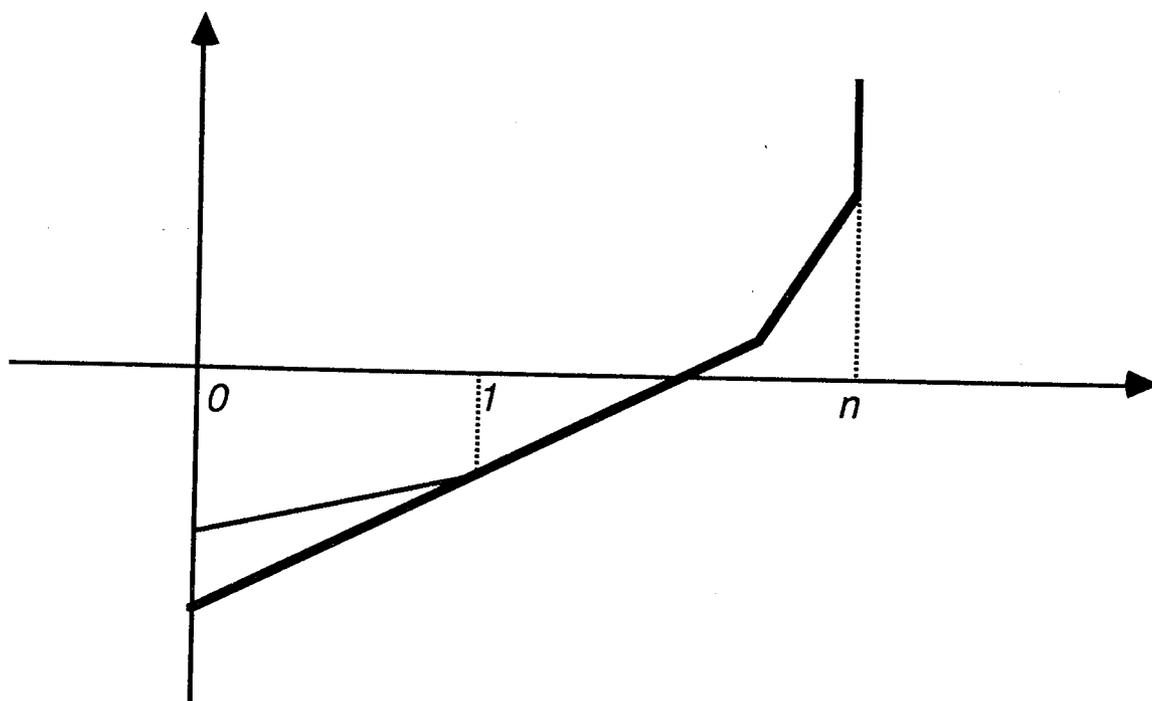
En effet, l'algorithme de Frobenius peut être utilisé même si la singularité est, comme ici, irrégulière. Il fournira uniquement  $l$  solutions "régulières". Les séries solutions ainsi formées sont en général des séries divergentes.

### 3.5.2 Deuxième cas: la pente $\lambda$ est strictement positive

On suppose donc que la pente  $\lambda$  est strictement positive. On forme alors  $c_\lambda$ , l'équation caractéristique réduite, et on prend une racine  $\bar{a}$  de  $c_\lambda$ . La formation de  $L_1 = L(\lambda, \bar{a})$  va nous conduire, afin de justifier l'algorithme, à considérer plusieurs situations qui sont automatiquement traitées par l'algorithme. Ces situations vont être distinguées par la nature de la racine  $\bar{a}$  de  $c_\lambda$ .

#### 3.5.2.1 $\bar{a}$ est racine simple de $c_\lambda$

D'après ce que nous avons déjà vu au paragraphe précédent, le polygone de Newton de ce nouvel opérateur  $L_1 = L(\lambda, \bar{a})$  coïncide, pour un  $a$  quelconque, avec celui de  $L(\lambda, a)$  sur  $[0, 1]$ , mais la pente associée au segment  $[0, 1]$  sera inférieure à  $\lambda$  (puisque  $a_0^* = a_0^*(\lambda, \bar{a}) = 0$ ).



Que peut-on dire de la ramification associée au nouvel opérateur  $L(\lambda, \bar{a})$  ?

Les coefficients de cet opérateur ont des exposants de la forme:

$$x^{c/m - \lambda k}$$

Or,  $\lambda = \frac{p}{q}$  est un rationnel, donc le nouvel indice de ramification sera:

$$m(\lambda_k, \bar{a}) = \text{ppcm}(m, q) .$$

L'étape suivante consiste à former un nouvel opérateur

$$L(\lambda, \bar{a})(\mu, b)$$

On choisit cette fois-ci pour pente  $\mu$  la pente associée au segment  $[0, 1]$ , sauf si cette pente est nulle, auquel cas nous utilisons directement le traitement des pentes nulles par la méthode de Frobenius présentée au début de ce chapitre.

L'équation caractéristique associée à cette arête dont la projection sur l'axe des abscisses est de longueur 1, est du premier degré. On détermine donc dans  $\mathbb{Q}(\bar{a})$  un rationnel  $\bar{b}$  qui annulera cette équation caractéristique.

Naturellement, le nouveau polygone de Newton aura une pente  $\nu < \mu$  sur le segment  $[0, 1]$ . Mais, et c'est un point important, si:

$$\mu = \frac{p}{m(\lambda_k, \bar{a})}$$

## Chapitre 3

on n'ajoutera pas de nouveaux points dus à une ramification supplémentaire, et on aura donc:

$$\nu = \frac{p'}{m(\lambda_k, \bar{a})} \quad \text{avec } p' < p$$

On itérera le processus jusqu'à trouver une pente nulle (ce qui se fera au plus en  $p$  itérations). Ce faisant, on gardera toujours la ramification  $m(\lambda_k, \bar{a})$  et l'on travaillera toujours dans  $\mathbf{Q}(\bar{a})$ .

### Conclusion

Si  $\bar{a}$  est une racine simple de  $c_\lambda$ , on a pu lui associer une suite de pentes décroissantes:

$$\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{n_a}$$

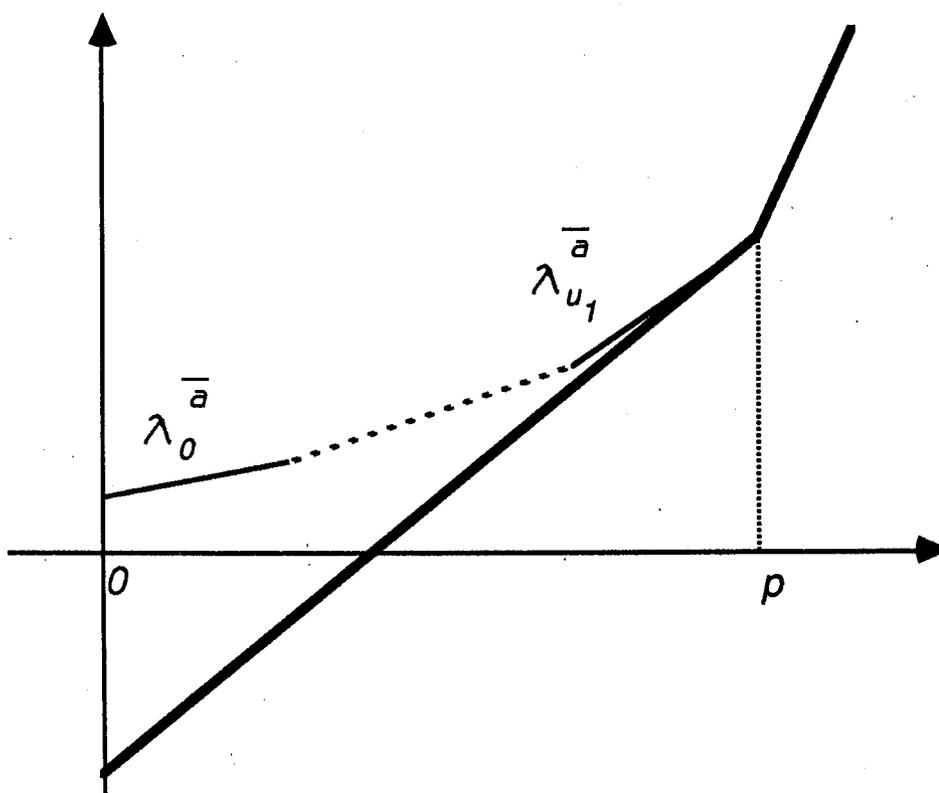
et un nombre algébrique  $\bar{a}$  vérifiant  $c_\lambda(\bar{a}) = 0$ ,  $\bar{a}$  étant racine simple.

#### 3.5.2.2 $\bar{a}$ est racine d'ordre $p$ de $c_\lambda$ , ( $p < l$ )

Formons  $L(\lambda, \bar{a})$ . D'après ce que nous avons établi, son polygone de Newton coïncidera avec celui de  $L$  sur  $[p, n]$ . Sur le segment  $[0, p]$ , existe un nombre fini de pentes (au plus  $p$ ) :

$$\lambda_0^{\bar{a}} < \lambda_1^{\bar{a}} < \dots < \lambda_{u_1}^{\bar{a}} \quad \text{avec } 0 \leq u_1 \leq p$$

Illustrons cela sur la figure suivante.



On choisit alors une pente  $\lambda_i^{\bar{a}}$  de longueur  $l(\lambda_i^{\bar{a}})$ . Si  $l(\lambda_i^{\bar{a}}) = 1$  on est ramené au cas du paragraphe précédent et c'est terminé. Sinon, on a:

$$1 < l(\lambda_i^{\bar{a}}) < p < l(\lambda)$$

et l'on forme:

$$L(\lambda, \bar{a})(\lambda_i^{\bar{a}}, b).$$

On est alors ramené au cas du début de ce paragraphe, à condition que l'équation indiciale de ce nouvel opérateur n'ait pas qu'une racine unique de multiplicité  $l(\lambda_i^{\bar{a}})$ , le degré de l'équation indiciale.

Si ce cas particulier ne se produit pas, la décroissance successive des pentes nous conduit à une arête dont la projection est de longueur 1 dans tous les cas.

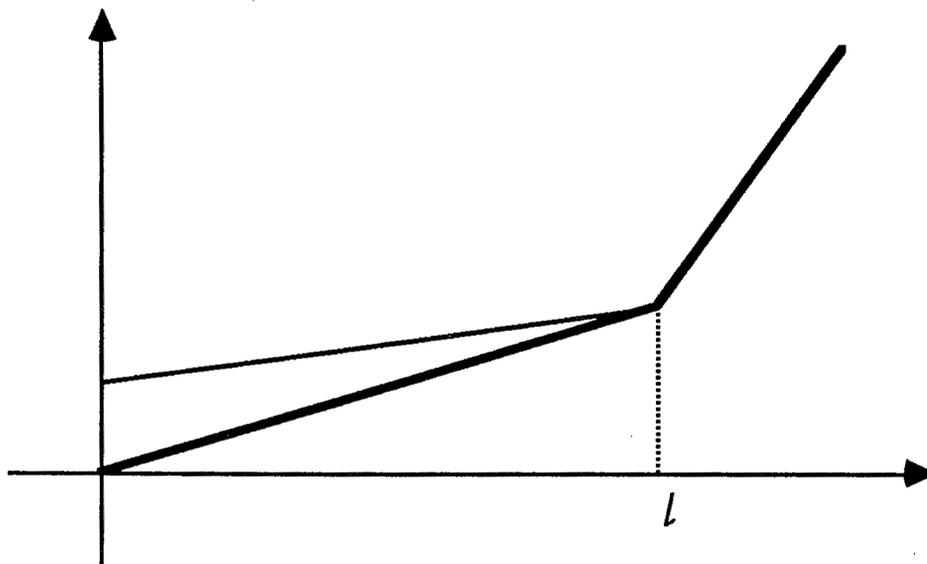
### 3.5.2.3 $\bar{a}$ est racine d'ordre $l$ de $c_\lambda$

Dans ce contexte, deux cas sont à distinguer:

- soit  $L(\lambda, \bar{a})$  possède sur  $[0, l]$  un nombre de pentes supérieur à 1, et on est alors dans le cas du paragraphe précédent (sauf si une des pentes

est nulle et la projection de cette arête de pente nulle est de longueur  $\geq 2$ );

- soit, et c'est le cas délicat, il existe une unique nouvelle arête dont la projection est de longueur  $l$ .



Sans changer la généralité du problème, nous allons supposer que

$$a_0(\lambda, \bar{a}) = a_0^* + \dots$$

L'indice de ramification initial étant  $m$  nous avons

$$\lambda = \frac{q}{ml}.$$

Il faut alors faire la remarque fondamentale suivante:

L'équation étant de degré  $l$  et admettant une racine unique, elle s'écrit, à une constante près

$$c_\lambda(a) = (a - \xi)^l$$

Remarquons que le coefficient de  $a$  est non nul dans cette expression. Donc, sur le diagramme de Newton, le point d'abscisse 1 et d'ordonnée  $\frac{q}{ml}$  appartient à la grille des points  $\mathbf{Z} \times \frac{1}{m}\mathbf{Z}$ . Cela n'est possible que si  $l$  divise  $q$ , et donc:

$$\lambda = \frac{\sigma}{m} \quad \sigma \in \mathbf{N}$$

Cela montre que le nouvel opérateur  $l(\lambda, \bar{a})$  ne conduit pas à une nouvelle ramification.

De plus, par un raisonnement identique au précédent, nous voyons que la nouvelle pente  $\lambda'$  sera de la forme  $\lambda' = \frac{\sigma'}{m}$  avec  $\sigma' < \sigma$ .

On voit donc que la récurrence se poursuit soit en "cassant des arêtes" soit en "diminuant la pente sans changer la ramification", ce qui conduit au plus en  $m$  étapes (avec les notations actuelles) à une pente nulle de longueur  $> 1$ .

### 3.6 LES ALGORITHMES .

Ils sont fondés sur la méthode décrite et justifiée précédemment.

Algorithme principal pour les singularités irrégulières

---

```

Algo SING_IRREG(L, n, x, k, solcomplète);
  Entrée: L, opérateur différentiel de la forme
           $\sum_{i=0}^n a_i(x)\delta^i$ ;
  Sortie: solcomplète, est l'ensemble des solutions de  $Ly = 0$ 
          déterminées avec k termes;
  % initialisations %
  prof := 0; % prof est relatif aux cassures des pentes, c'est %
            % aussi le nombre d'appels récursifs de NEWTON%
  partexp(prof) := 0; %partie exponentielle de la solution%
  prof := 1;
  NEWTON(prof, L, n, x, k, solcomplete, ns);
fAlgo;
```

---

```

Algo NEWTON(prof, L, n, x, k, solcomplète, ns);
  Entrée: L, opérateur différentiel;
  Sortie: solcomplète, ensemble des l solutions d'une pente du
           polygone initial, ns la mise à jour du nombre de
           solutions total;
  CONSTRUIRE_POLYGONE(prof, nbpente(prof));
  % étude pour la première pente %
  si 1ère pente = 0 alors
    FROBENIUS(a, n, x, k, solution, nbsol);
    solcomplète :=  $e^{\text{partexp}} * \text{solution}$ ;
    ns := ns + nbsol;
    nbpente(prof) := nbpente(prof) - 1;
  fsi;
  % itérations sur les pentes %
  tant que nbpente(prof) ≠ 0 faire
    Choisir_une_pente;
    Calcul_RAMIFICATION;
    La := Nouvel_OPERATEUR;
    eqcar := EqCARACTERISTIQUE(La);
    % calcul et traitement des racines de eqcar %
    nbracine := solve(eqcar, aq, racine, multirac);
    pour i := 0 jusqu'à nbracine faire
      % compléter la partie exponentielle %
      partexp(prof) := partexp(prof) + racine(i)/ $x^{\text{pente}}$ ;
      % nouvel opérateur %
      Lrac := substitution(a = racine(i), La);
      NEWTON(prof + 1, Lrac, n, x, k, solcomplète, ns);
    fpour;
    nbpente(prof) := nbpente(prof) - 1;
  ftantque;
fAlgo;

```

```

Algo Nouvel_OPERATEUR;
  Entrée: Lu, opérateur;
  Sortie: Lu, modifié;
  substituer( $\partial$  par  $\partial - \frac{\text{pente} * a}{x^{\text{pente}+1}}$ );
  fsi;
fAlgo;

```

### Exemple traité par l'algorithme de Newton

**Algo** *CONSTRUIRE\_POLYGONE*(*prof*, *nbpente*(*prof*));  
  **Entrée:** L'opérateur donné par ses coefficients;  
  **Sortie:** Le polygone de Newton relatif à ce nouvel opérateur;  
  *nbpente* := *nombre\_de\_pentes\_construites*;  
  **pour** *chaque nouvelle\_pente* **faire**  
    *pente* :=  $p/q$ ;  
    *l* := *longueur*(*pente*);  
    *point\_init* := ( $x_{inf}, y_{inf}$ );  
  **fpour**;  
**fAlgo**;

**Algo** *Calcul\_RAMIFICATION*;  
  **Entrée:**  $g(\text{prof} - 1)$ ;  
  **Sortie:**  $g(\text{prof})$ ;  
  **si** *longueur*(*pente*) = 1 **alors**  $g(\text{prof}) := g(\text{prof} - 1)$   
    **sinon**  $g(\text{prof}) := 1/\text{ppcm}(q, \frac{1}{g(\text{prof} - 1)})$ ;  
  **fsi**;  
**fAlgo**;

### 3.7 EXEMPLE TRAITÉ PAR L'ALGORITHME DE NEWTON .

Reprenons l'exemple donné au chapitre 1 en détaillant les étapes de l'algorithme avec les cassures de pente.

Pour des raisons de présentation, cet exemple est à la page suivante.

# Chapitre 3

```

codedesir();
ordre de l'equation ? 4;
Donner les coefficients a(1,j)(x)
a(1,0) = x + 1
           2
a(1,1) = 2*x *(x + 1)
           4
a(1,2) = x
           7
a(1,3) = (5*x )/2
           10
a(1,4) = x

```

nombre de termes desires pour la solution ? 4\$

A chaque etape le polygone NRM sera visualise par la donnee des aretes modifiees , sous la forme :

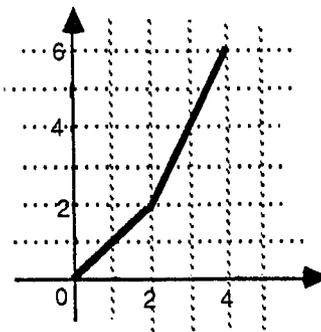
ARETE No i : coordonnes de l'origine gauche , pente , longueur

polygone de Newton  
INITIAL

```

0 0 1 2
2 2 2 2

```

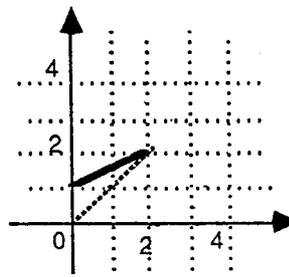


```

0 0 1 2

```

equa. caracteristique :  
1 racine double



```

0 1 1/2 2

```

equa. caracteristique :  
2 racines

```

0 3/2 0 1

```

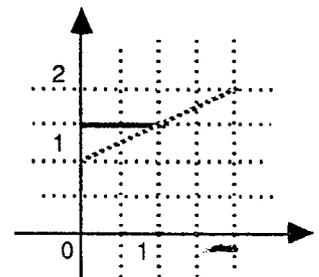
solution 1

```

0 3/2 0 1

```

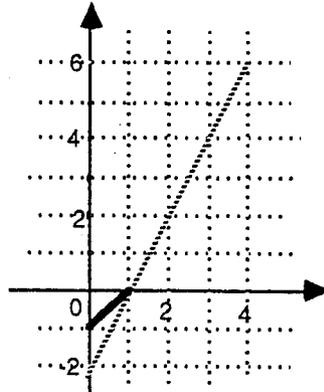
solution 2



Exemple traité par l'algorithme de Newton

2 2 2 2

equa. caracteristique :  
2 racines

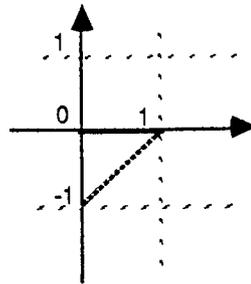


0 (-1) 1 1

equa. caracteristique :  
1 racine

0 0 0 1

solution 3

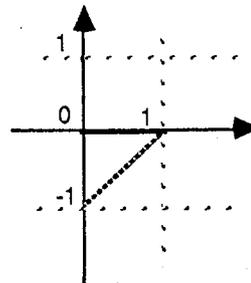


0 (-1) 1 1

equa. caracteristique :  
1 racine

0 0 0 1

solution 4



LES 4 SOLUTIONS CALCULEES SONT DANS LE TABLEAU

soldif(1,j) avec j = 1,...4

=====  
SOLUTION No 1  
=====

$$e \left( \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{6})x}{(\sqrt{x})x} \right)^{(-4)} x^{(-1)} \left( \frac{1528403}{96} \sqrt{x} \sqrt{6} \right)^{(-1)}$$

$$x - 173/2 \sqrt{x} \sqrt{6}^{(-1)} + 292992595/4608 x^2 - 10549/16 x + 1$$

Chapitre 3

=====  
SOLUTION No 2  
=====

$$e^{((\sqrt{x} + \sqrt{6})x)/(\sqrt{x}x))^{(-4)}} \cdot x^{(-1)} \cdot (-1528403/96 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{6})^{(-1)} \cdot x^{(-1)} \cdot (173/2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sqrt{6})^{(-1)} + 292992595/4608 \cdot x^2 - 10549/16 \cdot x + 1)$$

=====  
SOLUTION No 3  
=====

$$x^{(1/54)} \cdot e^{((2x + 3)/(3x))^2} \cdot x^{10} \cdot (863316799848061/1338925209984 \cdot x^4 - 48578095525/344373768 \cdot x^3 + 7318955/236196 \cdot x^2 - 1333/243 \cdot x + 1)$$

=====  
SOLUTION No 4  
=====

$$x^{(13/27)} \cdot e^{((-32x + 3)/(12x))^2} \cdot x^{14} \cdot (90412648939865456/10460353203 \cdot x^4 + 10833178373456/43046721 \cdot x^3 + 353835104/59049 \cdot x^2 + 25336/243 \cdot x + 1)$$

showtime;  
time: 88292.207 ms

On peut verifier la validite de chaque solution en appelant la procedure :  
solvalide(j) qui reporte dans les equations la Jieme solution

solvalide(4)\$

$$(4x^{(13/27)} \cdot e^{(1/4x)^{(-2)}} \cdot x^{19} \cdot (990257269423100118693513920 \cdot x^5 + 594123382117700844009670080 \cdot x^4 + 206916887927154631811497560 \cdot x^3 + 42430957397769059047189944 \cdot x^2 + 725456964087791956738818 \cdot x - 671561892675430880099571)) / ((5559060566555523 \cdot e^{(8/3x)^{(-1)}}))$$

## Chapitre 4

# PRÉSENTATION GÉNÉRALE DU LOGICIEL DÉSIR

### 4.1 ORGANISATION GÉNÉRALE .

L'ensemble du résolveur DÉSIR est composé de modules qui sont écrits dans le système de calcul formel REDUCE. Ce résolveur est donc transportable sur tout type de matériel supportant REDUCE. L'extension graphique de DÉSIR fait appel au logiciel graphique UNIRAS. L'extension numérique est écrite en FORTRAN 77. Les problèmes d'interface formel-numérique-graphique, c'est-à-dire dans ce cas REDUCE-FORTRAN-UNIRAS, ont été étudiés par C. Dicrescenzo et F. Richard.

Il existe actuellement deux versions complètes de DÉSIR, une version opérationnelle sur Bull DPS8 sous le système Multics\*, et une version sur IBM 3081K sous le système VM/MVS\*\*. Cette dernière version est standard et peut être transportée sur tout type de matériel supportant REDUCE et UNIRAS. Son utilisation ne nécessite aucune connaissance particulière de REDUCE ou UNIRAS. Les données sont introduites de façon interactive, et la demande des résultats formels, numériques ou graphiques se fait à l'aide de commandes élémentaires.

Le noyau central de ce logiciel est formé des modules FROBENIUS et NEWTON qui font appel au module D5, qui traite des nombres algébriques.

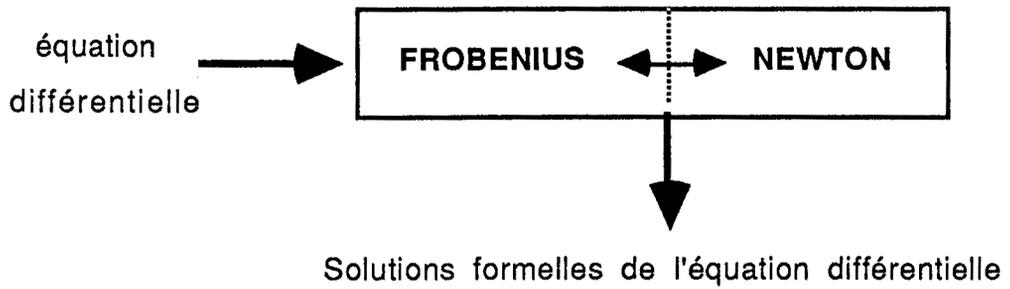
---

\* sur le matériel du CIGG à Grenoble

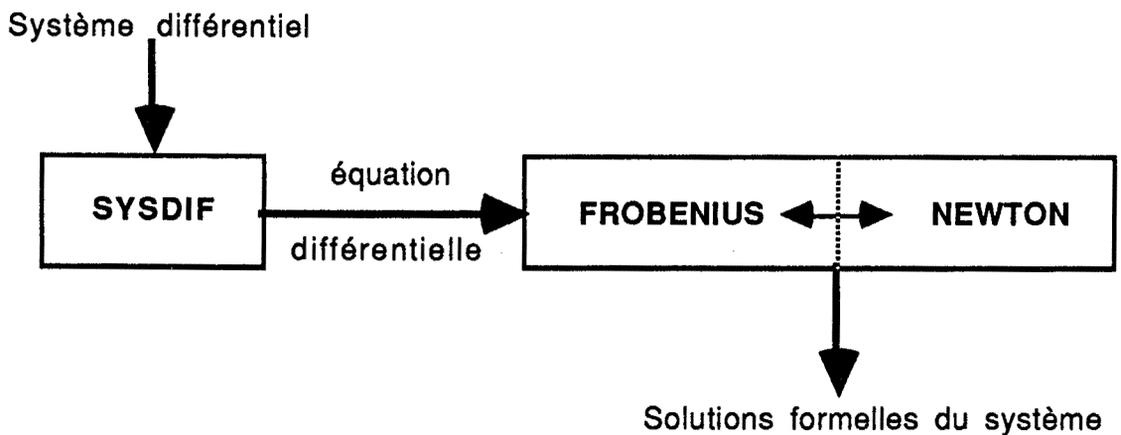
\*\* sur le matériel du Centre de Calcul du CNRS de Strasbourg

## Chapitre 4

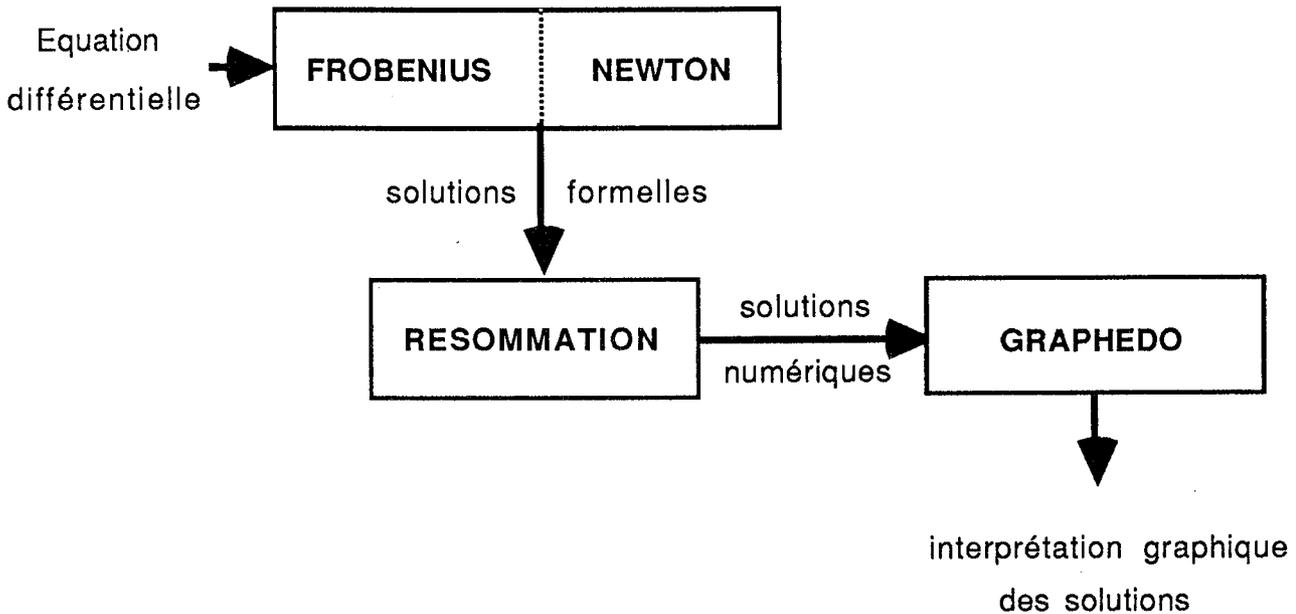
Dans sa forme standard, le noyau fonctionne ainsi:



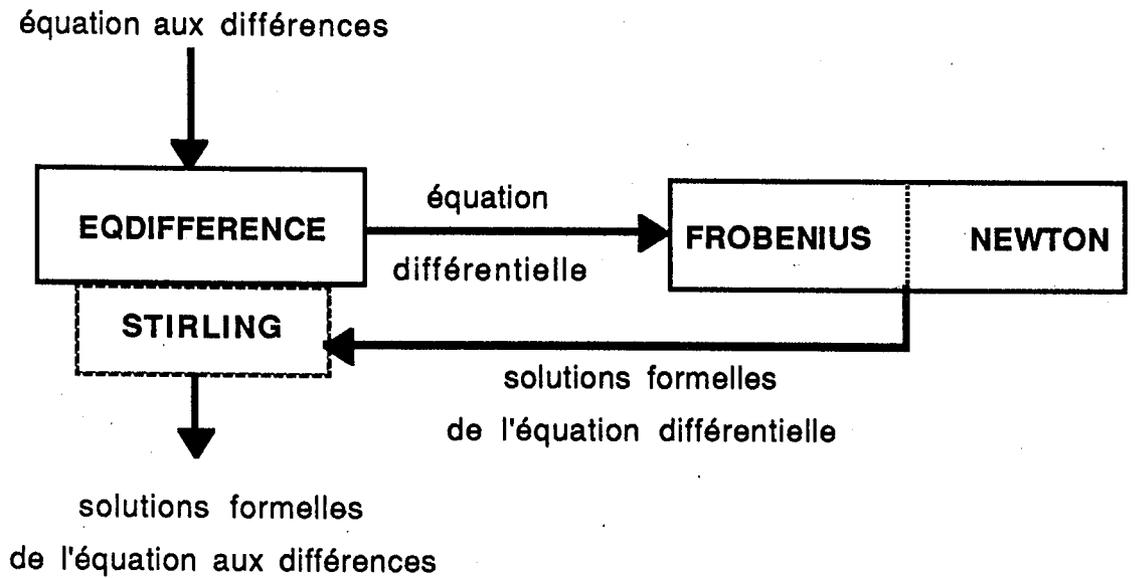
Avec ce même noyau central, on peut aussi résoudre un système d'équations différentielles. On a alors en entrée un système différentiel qui est transformé en équation différentielle par le module SYSDYF, ce qui donne le schéma de fonctionnement suivant:



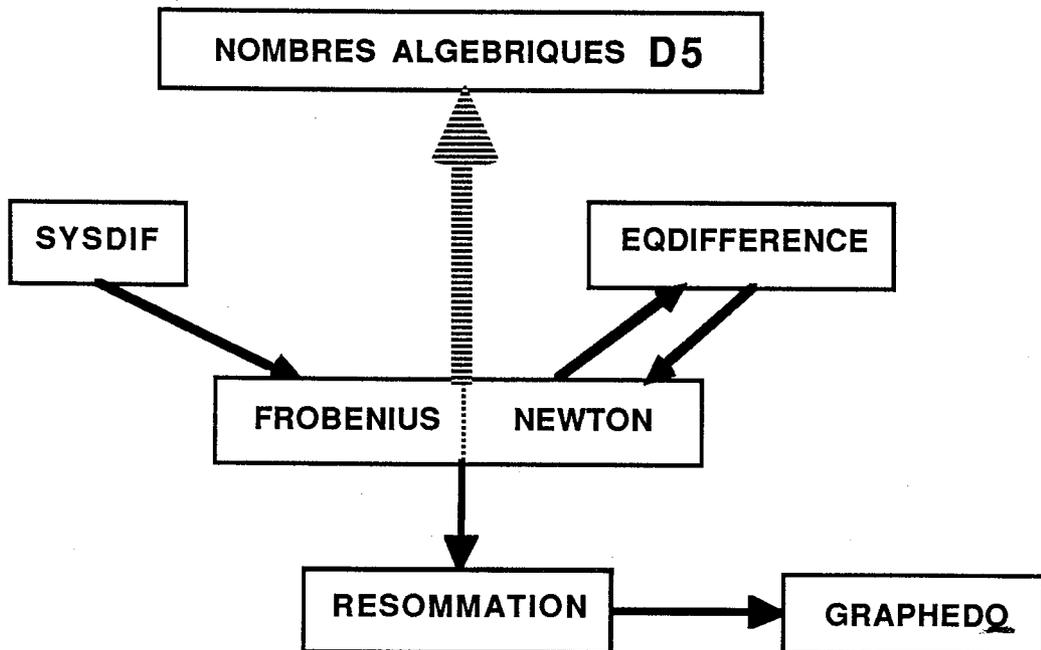
On peut ensuite traiter numériquement et graphiquement les solutions formelles en faisant appel aux modules RESOMMATION et GRAPHIQUE. On a alors:



A ce résolveur d'équations différentielles est associé un résolveur d'équations aux différences. En effet, on va montrer dans la deuxième partie que résoudre une équation aux différences peut se ramener à résoudre une ou plusieurs équations différentielles provenant de l'équation aux différences à laquelle on fait subir diverses transformations. Ces transformations sont obtenues en faisant appel au module EQDIFFERENCE. Il faut ensuite transformer les solutions formelles de l'équation différentielle en solutions formelles de l'équation aux différences en utilisant les développements asymptotiques des fonctions  $\Gamma$  généralisées [chapitre 7 paragraphe 7.8]. Cette dernière transformation est faite par le module STIRLING. Dans le cas des équations aux différences, le fonctionnement général est le suivant:



L'organisation de l'ensemble du logiciel est la suivante:



Voyons maintenant un peu plus en détail le rôle de chaque module.

## 4.2 LES DIFFÉRENTS MODULES .

### 4.2.1 Le module central: FROBENIUS-NEWTON

Ce module a été développé par C. Dicrescenzo et E. Tournier. Il est essentiellement fondé sur les méthodes présentées aux chapîtres 2 et 3. Ce module nécessite l'environnement des nombres algébriques, comme nous l'avons montré au paragraphe 2.5.

Les *données* du module central sont les coefficients d'une équation différentielle qui peut être d'ordre quelconque.

Les *résultats* sont les solutions de cette équation différentielle sous forme de série, avec le nombre de termes demandés.

### 4.2.2 Le module de calcul avec les nombres algébriques: D5

Ce module des nombres algébriques a été développé par C. Dicrescenzo et D. Duval. Il permet de calculer dans des extensions de  $\mathbf{Q}$ , sans faire de factorisation et en utilisant l'algorithme d'Euclide. Il est écrit en RLISP et est utilisable sous REDUCE. La présentation générale de D5 est décrite dans la thèse d'État de [D. Duval 87].

### 4.2.3 Le module SYSDIF

Ce module a été développé par A. Hilali. Il permet la résolution de systèmes différentiels de la forme:

$$Y'(x) = M(x) Y \quad (1)$$

avec:

$$M(x) = x^{-p} \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k$$

où  $Y$  est un vecteur colonne à  $n$  composantes et  $M(x)$  une matrice méromorphe à l'origine d'ordre polaire  $p \geq 1$ .

L'algorithme présenté dans [Hilali 82] p.12, permet la réduction du système (1) en une équation différentielle scalaire d'ordre  $n$ . Pour résumer, on pose:

$$X_0(x) = \left( \lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x) \right)$$

où les  $\lambda_i$  sont des polynômes arbitraires de degrés  $\leq n - 1$ . La récurrence:

$$X_i = X'_{i-1} + X_{i-1}A$$

définit une matrice  $Q$  dont les colonnes sont les vecteurs  $X_0^t, X_1^t, \dots, X_{n-1}^t$ . Si  $Q$  est une matrice inversible, on dit que le vecteur ligne  $X_0$  est *cyclique*. Dans ce cas, on effectue le changement de variable  $Z(x) = Q(x)Y$  qui transforme (1) en

$$Z'(x) = C(x) Z \tag{2}$$

avec

$$\begin{aligned} C(x) &= QAQ^{-1} + Q'Q^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \dots & 0 & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ a_n & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2) est un système compagnon, les  $a_k$  sont naturellement les coefficients de l'équation différentielle associée à (1) et obtenue à l'aide du vecteur cyclique  $X_0$ :

$$y^{(n)} - a_1(x)y^{(n-1)} - a_2(x)y^{(n-2)} \dots - a_n(x)y = 0. \tag{3}$$

Si les solutions de (3) données par DÉsir sont:

$$y_{[1]}, y_{[2]}, \dots, y_{[n]}$$

[Hilali 82] p. 21 démontre que les solutions du système (1) sont respectivement:

$$Y_{[1]} = Q^{-1}Z_{y_{[1]}}, \dots, Y_n = Q^{-1}Z_{y_{[n]}}$$

avec

$$Z_{y_{[i]}} = (y_{[i]}, y'_{[i]}, \dots, y_{[i]}^{(n-1)}).$$

Cependant, il est montré dans [Hilali 83] et en particulier dans un exemple en page 71, que, du point de vue pratique, la méthode est très lourde, car les coefficients  $a_k$  de (3) sont plus grands que nécessaire et la matrice inverse de  $Q$  pourrait être très compliquée. Récemment, A. Hilali a proposé un algorithme permettant la construction du polygone de Newton associé au système (1), sans l'utilisation de la méthode du vecteur cyclique. [Hilali 87b] permet de résoudre le système (1) en travaillant directement sur le système lui-même.

#### 4.2.4 Le module des équations aux différences: EQDIFFERENCE

Ce module est en cours de développement. Il est étudié par J. Della Dora et E. Tournier. Une étude détaillée de diverses méthodes permettant de résoudre les équations aux différences est présentée en deuxième partie.

#### 4.2.5 Le module numérique: RESOMMATION

Ce module a été développé par J. Thomann à Strasbourg. Avant de préciser le rôle de ce module, il est nécessaire de rappeler quelques notations.

Dans le cas d'une singularité irrégulière, le logiciel DÉsir donne un système fondamental de solutions asymptotiques de la forme:

$$e^{P(\frac{1}{t})} t^\lambda \hat{f}(t)$$

où  $\left\{ \begin{array}{l} t \text{ est relié à } z \text{ par } z = t^p, p \text{ entier,} \\ \hat{f} \text{ est une série de la forme } \hat{f}(t) = \hat{f}_0(t) + \hat{f}_1(t) \ln t + \dots + \hat{f}_l(t) (\ln t)^l, \\ \text{les } \hat{f}_i \text{ étant des séries formelles à coefficients dans } \mathbf{C}, \\ \lambda \text{ est racine de l'équation indicelle,} \\ P \text{ est un polynôme à coefficients dans } \mathbf{C}. \end{array} \right.$

Le but de la partie numérique est de "resommer" les séries formelles généralement divergentes fournies par DÉsir.

Les résultats théoriques qui permettent d'affirmer que l'on peut retrouver les vraies solutions à partir des solutions formelles sont essentiellement fondés sur la théorie de la  $k$ -sommabilité.

**Définition.** Soit  $k \in \mathbf{R}^{*+}$ . Soit  $\alpha \in \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$  et  $\hat{f} \in \mathbf{C}[[z]]$ ,  $\hat{f}(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ .

On dira que  $\hat{f}$  est  $k$ -sommable dans la direction  $\alpha$  s'il existe un secteur ouvert  $V_\alpha$  de sommet 0, de bissectrice  $\alpha$ , d'ouverture  $\beta \geq \pi/k$  et une fonction  $f_\alpha$  holomorphe sur  $V_\alpha$ , qui admet  $\hat{f}$  comme développement asymptotique Gevrey sur  $V_\alpha$ , c'est-à-dire:

$$\forall W \subset V_\alpha, \exists C_w, A_w \mid \forall z \in W - \{0\}, |z|^{-n} |f_\alpha(z) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p z^p| \leq C_w (n!)^{1/k} A_w^n$$

On dira que  $\hat{f}$  est  $k$ -sommable si et seulement si elle l'est dans toutes les directions, sauf au plus un nombre fini,  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$ , qui forment l'ensemble

des directions singulières. Dans ce cas, les différentes sommes  $f_\alpha$  se recollent pour  $\alpha \in ]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$  et donnent une somme sur un domaine en forme d'œil.

Cette théorie s'applique de façon simple:

- dans le cas où le polygone de Newton n'a qu'une seule pente  $k \in \mathbf{Q}^{*+}$ . On peut alors préciser la forme des solutions trouvées par le logiciel DÉsir: la ramification  $p$  est le dénominateur de  $k$  et le terme de plus haut degré de  $P$  est de la forme  $a/z^k$  où  $a$  est racine d'un polynôme à coefficients dans  $\mathbf{C}$  (équation caractéristique). Les séries formelles  $\hat{f}$  sont alors  $k$ -sommables dans toutes les directions, sauf celles pour lesquelles  $a/z^k \in \mathbf{R}^-$  (directions singulières), et les sommes ainsi obtenues sont de vraies solutions.
- dans le cas des équations du second ordre. Les séries divergentes sont aussi  $k$ -sommables pour un  $k$  pouvant être déterminé à partir du polygone de Newton.

Dans les autres cas, les séries divergentes sont des mélanges de séries  $k$ -sommables avec des  $k$  correspondant aux différentes pentes du polygone. Le calcul est alors plus délicat à effectuer.

Pour calculer effectivement la somme de ces séries divergentes  $k$ -sommables, nous allons maintenant supposer que  $k \in \mathbf{N}^*$ , ce qui est toujours le cas si l'on effectue la ramification  $z = t^p$  dans l'opérateur initial.

On se ramène ensuite à  $k = 1$  en décomposant la série  $k$ -sommable

$$\hat{f}(z) = a_1 + a_2 z + a_3 z^2 + \dots + a_{n+1} z^n + \dots$$

en une somme de  $k$  séries 1-sommables:

$$\begin{aligned} \hat{f}(z) = & [a_1 + a_{k+1} z^k + a_{2k+1} z^{2k} + \dots] + z[a_2 + a_{k+2} z^k + \dots] + \dots \\ & + z^{k-1}[a_k + a_{2k} z^k + \dots]. \end{aligned}$$

On peut démontrer que chaque sous série entre crochets est 1-sommable en  $x = z^k$ .

Si  $\hat{f}(z) = \sum_{n \geq 0} a_{n+1} z^n = \sum_{n \geq 0} \frac{a_{n+1}}{x^n}$  avec  $x = \frac{1}{z}$ , on peut écrire formellement:

$$\frac{1}{x} \hat{f}\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_{n+1}}{x e^{i\theta} (x e^{i\theta} + s_1) \cdots (x e^{i\theta} + s_n)} \quad (4)$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} b_{n+1} = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+n} S_s(n, k) a_{k+1} e^{i(k+1)\theta}, \\ s_i \in \mathbf{R}, 0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n < \dots, \\ S_s(n, k) \text{ étant les nombres de Stirling généralisés de première espèce} \\ S_s(n+1, k) = S_s(n, k-1) - s_n S_s(n, k). \end{array} \right.$$

En particulier, pour  $s_i = i\omega$ , si  $\hat{f}$  est 1-sommable dans la direction  $\alpha$  (d'angle  $\theta$  avec  $\mathbf{R}^+$ ), la série (4) converge dans le demi-plan  $\Re(ze^{i\theta}) > 0$  pour  $\omega > \omega_0$ , où  $\omega_0$  est une valeur critique liée au type de  $\hat{f}$ .

Cette convergence peut être optimisée avec des valeurs de  $s_i$  plus appropriées: par exemple les racines des polynômes de Laguerre pour l'exponentielle intégrale.

En pratique, cette méthode de "resommation" donne des résultats de moins en moins fiables, d'une part lorsque  $|z|$  augmente, c'est à dire lorsque  $z$  s'éloigne de la singularité, d'autre part lorsque la direction de resommation se rapproche des directions singulières.

#### 4.2.6 Le module graphique: GRAPHEDO

Il a été développé par F. Richard à Strasbourg. Présentons brièvement la fonction de ce module.

La partie graphique du logiciel permet de représenter l'image par la solution considérée d'un cercle ou d'un arc de cercle autour de la singularité  $z_0$  étudiée. Il s'agit donc de construire l'image d'ensembles du type  $A_\rho = \{z = z_0 + \rho e^{i\theta}, \theta \in I\}$ , et de la dessiner dans le plan  $(x, y)$ .

Il est important de remarquer qu'un dessin noir et blanc ne fournirait qu'une information globale sur l'ensemble image, mais ne permettrait pas "d'identifier" chaque point de la courbe obtenue, dans le sens où l'on ne pourrait pas reconnaître son antécédent. C'est pourquoi nous avons utilisé la couleur.

Chaque point  $f(z)$  est affiché à l'écran avec une couleur caractérisant l'argument de son antécédent, et choisie dans une palette d'au plus 256 couleurs différentes, en associant par exemple le bleu à 0, le rouge à  $2\pi/3$ , le jaune à  $\pi$ , etc.

Bien entendu, cette méthode, telle qu'elle est décrite ici, privilégie l'étude de la variation de la solution en fonction de l'argument, au détriment de la variation en fonction du module. Pour pallier cet inconvénient, la possibilité est offerte de tracer sur le même schéma l'image de plusieurs  $A_\rho$ . Mais, étant donné la nature des courbes obtenues, on se rend très vite compte qu'il faut se limiter à un petit nombre de  $A_\rho$ , ceux-ci devant, de plus, correspondre à des  $\rho$  assez proches, si l'on veut que le dessin reste lisible.

Par ailleurs, un zoom permet de visualiser des parties de courbes qui ne sont pas visibles sur le dessin initial. En effet, la mise à l'échelle est calculée de façon à pouvoir représenter tous les points images, et entraîne souvent une "accumulation" près de l'origine de nombreux points de petit module. En

général, sur le premier dessin, on ne peut pas voir l'allure de la courbe près de 0.

Le zoom permet d'agrandir une fenêtre définie par l'utilisateur, ce qui revient à représenter la courbe à une plus grande échelle en "clippant" les points de grand module, et cela de façon itérative.

Cette méthode de représentation est très agréable, en particulier pour comparer les résultats numériques obtenus en faisant varier certains paramètres de la resommation ( par exemple  $\omega$  ou la direction de resommation). Il faut à ce sujet noter que la resommation peut également être comparée à une seconde méthode de calcul. On transforme de façon formelle l'équation différentielle de départ en un système différentiel réel de la variable réelle  $\theta$  ( $\rho = \text{cste}$ ) obtenu par changement de variable  $z = \rho e^{i\theta}$  et séparation des parties réelle et imaginaire. Si  $n$  est l'ordre de l'équation de départ, on obtient

$$\begin{pmatrix} u^{(n)} \\ v^{(n)} \end{pmatrix} = fct \left( \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} u^{(n-1)} \\ v^{(n-1)} \end{pmatrix}, \theta \right)$$

et  $y = u + iv$  est une solution. On intègre alors ce système par une méthode de Runge-Kutta, à partir d'un angle pour lequel on a calculé par resommation la valeur de la solution et de ses dérivées.

On dispose ainsi d'un outil de calcul pour visualiser l'évolution complémentaire de ces 2 méthodes (la resommation se dégrade lorsque l'on s'éloigne de la singularité alors que Runge-Kutta devient plus stable), et pour cerner leur région respective de validité.

Le programme permet également de construire plusieurs courbes différentes au cours d'une même exécution, en faisant varier certains paramètres (par exemple, rayon ou angles définissant l'arc de cercle, choix de la méthode de calcul). Il nous a enfin paru intéressant de pouvoir mémoriser une courbe pour la revisualiser plus tard au cours de l'exécution, ou encore l'imprimer sur papier.

Dans ce but, la partie supérieure de l'écran graphique est réservé au "stockage" des courbes que l'utilisateur juge intéressantes. Une courbe stockée reste visible à échelle très réduite tout au long de l'exécution. Elle peut être réaffichée à son échelle d'origine ou imprimée sur une imprimante à jet d'encre en désignant son image miniature à l'aide du curseur graphique.

Outre la couleur, qui s'est révélée indispensable pour rendre le caractère "complexe" des fonctions étudiées, le logiciel utilise au maximum l'interactivité, en proposant à l'aide de menus, un grand choix de paramètres, ce qui facilite l'utilisation par des non-informaticiens.

### 4.3 UN EXEMPLE COMPLET TRAITÉ PAR "DÉSIR" .

Prenons l'exemple de l'équation d'Airy. Donnons ses solutions formelles en zéro et à l'infini.

#### 4.3.1 Solutions en zéro

Soit l'opérateur:

$$L = \partial^2 - x\partial$$

Les solutions sont demandées avec 26 termes.

```
=====
SOLUTION No 1
=====
x*(1/80500434094080000*x24 + 1/134167390156800*x21 + 1/290405606400*x18 +
1/849139200*x15 + 1/3538080*x12 + 1/22680*x9 + 1/252*x6 + 1/6*x3 + 2)
```

```
=====
SOLUTION No 2
=====
1/25486372251648000*x24 + 1/46170964224000*x21 + 1/109930867200*x18 +
1/359251200*x15 + 1/1710720*x12 + 1/12960*x9 + 1/180*x6 + 1/6*x3 + 1
```

```
showtime;
time: 134172.29 ms
```

```
solvalidealg(1)$
26
(- x )/80500434094080000
```

```
solvalidealg(2)$
25
(- x )/25486372251648000
```

#### 4.3.2 Solutions à l'infini

Soit l'opérateur d'Airy:

$$x^5 \partial^2 + 2x\partial - 1$$

Les solutions avec 26 termes sont:

## Chapitre 4

=====  
SOLUTION No 1  
=====

$$e^{(( - 2)/(3*\sqrt{x}) * i * x)^2} * \sqrt{\sqrt{x)} * x^2 * ( - 96031445635125/4294967296 * \sqrt{x} * x^{10} - 4908328425/8388608 * \sqrt{x} * x^7 - 216125/8192 * \sqrt{x} * x^4 - 39/16 * \sqrt{x} * x - 89789401668841875/549755813888 * x^{12} - 914585196525/268435456 * x^9 - 60298875/524288 * x^6 - 3705/512 * x^3 - 1)}$$

=====  
SOLUTION No 2  
=====

$$e^{(2/(3*\sqrt{x}) * i * x)^2} * \sqrt{\sqrt{x)} * x^2 * (96031445635125/4294967296 * \sqrt{x} * x^{10} + 4908328425/8388608 * \sqrt{x} * x^7 + 216125/8192 * \sqrt{x} * x^4 + 39/16 * \sqrt{x} * x - 89789401668841875/549755813888 * x^{12} - 914585196525/268435456 * x^9 - 60298875/524288 * x^6 - 3705/512 * x^3 - 1)}$$

showtime;  
time: 84653.12 ms

### 4.3.3 Interprétation numérique et graphique

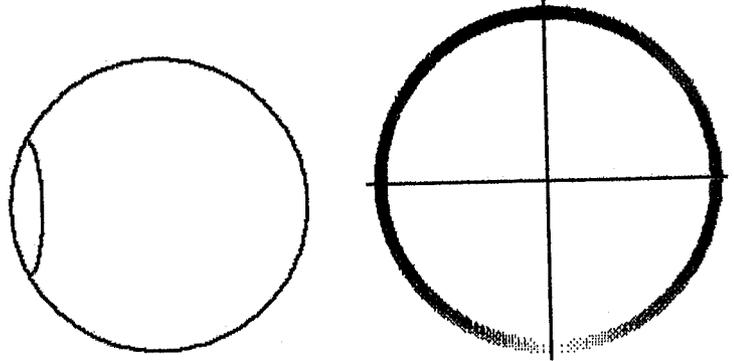
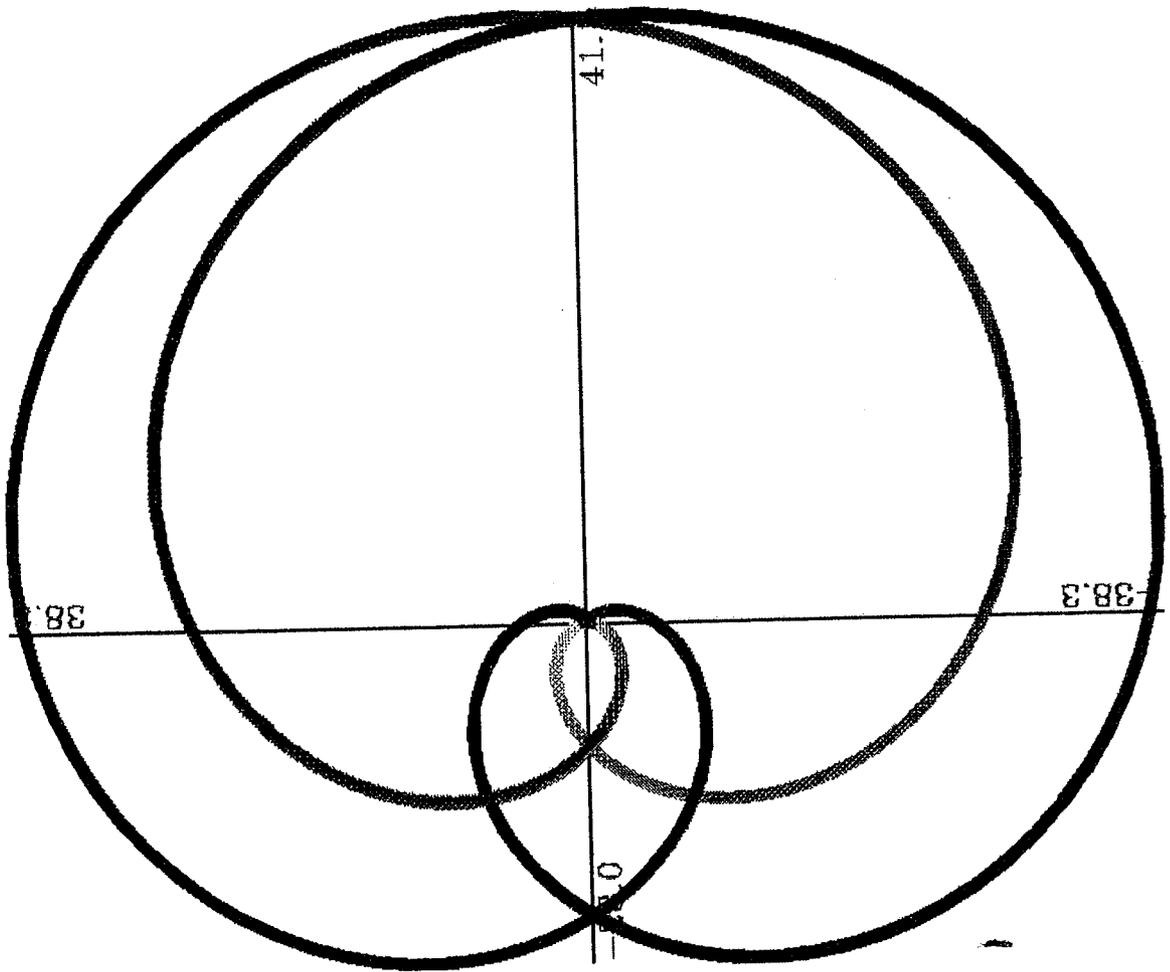
Pour des raisons de présentation, l'interprétation graphique se trouve à la page suivante.

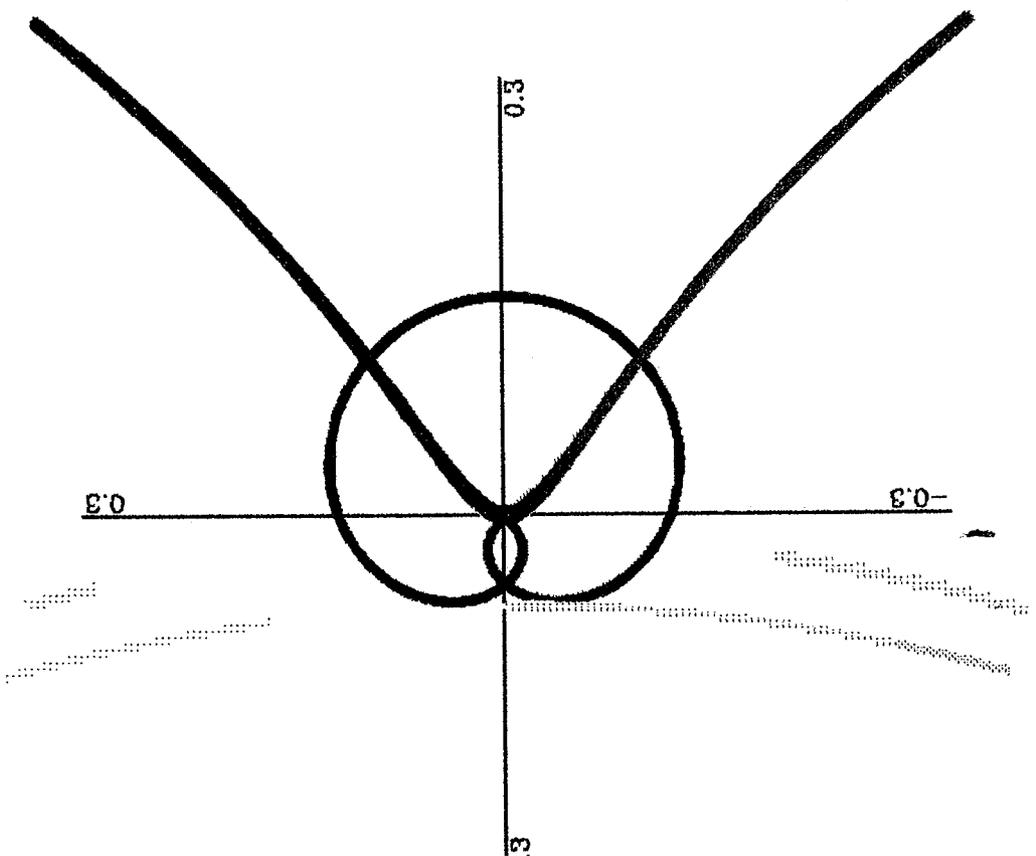
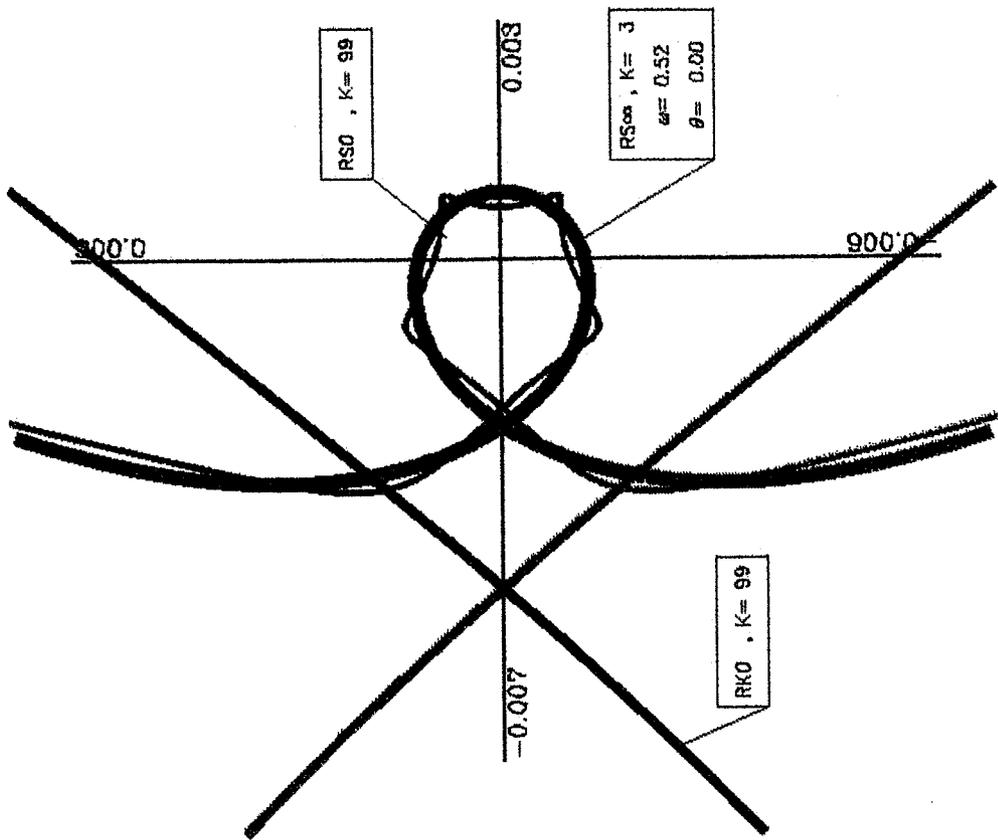
C'est une comparaison de la méthode de resommation (RS en zéro et à l'infini) appliquée sur les 26 termes des solutions formelles des 2 exemples précédents, avec la méthode numérique de Runge-Kutta (RK) sur cette équation d'Airy.

Pour une étude détaillée de la resommation et de la partie graphique, on pourra se reporter aux travaux de [Ramis J.P., Thoman J. 80,81] et [Richard F. 86,87].

FONCTION D'AIRY  $Ai(z)$

NB TERMES=	26
NB PAS=	600
ROINF=	4.000
ROSUP=	4.000
TETAINF=	-0.500
TETASUP=	0.500
COMBLI:	DEFAULT





**Deuxième partie**

**ÉTUDE**

**DES SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES**

**DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES LINÉAIRES**



## Chapitre 5

### QUELQUES RAPPELS

#### SUR LES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES LINÉAIRES

Le but de ce chapitre est de rappeler quelques définitions, propriétés et théorèmes qui seront utilisés dans les chapitres suivants.

##### 5.1 DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS .

###### 5.1.1 Équation aux différences

Une *équation aux différences* est une équation fonctionnelle de la forme:

$$\Phi\left(x, f(x), f(x+1), \dots, f(x+n), g(x), \dots, g(x+k), \dots, h(x+m)\right) = 0$$

où  $\Phi$  est une fonction donnée de  $x$  et des valeurs des fonctions  $f, g, \dots, h$  aux points  $x, x+1, x+2, \dots$ . Le cas plus général dans lequel l'intervalle entre les points n'est pas de 1 mais un réel ou complexe quelconque, peut être ramené à celui-ci.

Si  $\Phi$  est linéaire en tous ses arguments, sauf  $x$ , l'équation est dite *équation aux différences linéaires*. On notera une équation aux différences linéaires homogène d'ordre  $n$  de la façon suivante:

$$a_n(x)u(x+n) + a_{n-1}(x)u(x+n-1) + \dots + a_0(x)u(x) = 0 \quad (1)$$

où les coefficients  $a_i$  peuvent être des constantes, ou, si ils sont polynomiaux,  $a_i \in \mathbb{C}[x]$ .

### 5.1.2 Opérateurs aux différences

On note  $\Delta$  l'opérateur aux différences. Ainsi,  $\Delta u$  désigne la différence de  $u$

$$\Delta u(x) = u(x+1) - u(x)$$

$\Delta^2 u$  désigne la seconde différence de  $u$

$$\Delta^2 u(x) = \Delta(\Delta u(x)) = u(x+2) - 2u(x+1) + u(x)$$

$\Delta^n u$  désigne la nième différence,

$$\Delta^n u(x) = \Delta(\Delta^{n-1} u(x)).$$

Ces équations peuvent être résolues pour  $u(x+1), u(x+2), \dots, u(x+n)$  ce qui donne:

$$\begin{aligned} u(x+1) &= u(x) + \Delta u(x) \\ u(x+2) &= u(x) + 2\Delta u(x) + \Delta^2 u(x) \\ &\dots \dots \\ u(x+n) &= u(x) + n\Delta u(x) + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 u(x) + \dots + \Delta^n u(x) \end{aligned}$$

En substituant dans l'équation (1), il vient:

$$A_n(x)\Delta^n u(x) + A_{n-1}\Delta^{n-1}u(x) + \dots A_0u(x) = 0 \quad (2)$$

C'est cette forme (2) qui est appelée *l'équation aux différences*.

A la place d'une seule équation linéaire du  $n$ -ième ordre, on peut avoir un système de  $n$  équations linéaires du premier ordre, soit:

$$u_i(x+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)u_j(x), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Un tel système est équivalent à l'équation (1). Pour  $n = 1$ , les formes (1) et (3) coïncident, et nous avons:

$$u(x+1) - r(x)u(x) = 0 \quad (4)$$

### 5.1.3 Fonctions périodiques et sommation

Considérons le cas particulier de l'équation (4) où  $r(x) = 1$ , soit

$$u(x+1) - u(x) = 0$$

Cette équation est évidemment satisfaite par toute fonction périodique de période 1. Les fonctions périodiques sont très importantes dans la théorie des équations aux différences et jouent un rôle analogue à celui des constantes pour la théorie des équations différentielles.

Une fonction périodique de période 1 est déterminée dans tout le plan par ses valeurs dans une bande verticale de largeur l'unité. Une telle bande constitue une *région fondamentale* pour la fonction périodique. Nous nous intéresserons seulement aux fonctions périodiques qui sont analytiques, sauf aux pôles, dans une partie finie d'une telle bande.

Pour déterminer les formes explicites de certaines fonctions périodiques, le théorème suivant de la théorie des fonctions à une variable complexe sera utile.

**Théorème.** *Si une fonction périodique de période 1 n'a pas de singularités, sauf aux pôles, dans une bande périodique fondamentale, et si elle tend vers une valeur définie, finie ou infinie, à chaque bord de la bande, c'est une fonction rationnelle de  $e^{2\pi ix}$ .*

Considérons maintenant l'équation:

$$\Delta u(x) = \phi(x) \tag{5}$$

Le problème revient à trouver une fonction dont la différence est connue. En notant  $S$  l'opération inverse de  $\Delta$ , on peut écrire:

$$u(x) = S\phi(x) \tag{6}$$

qui est une solution de (5). Cette opération, appelée *sommation*, est analogue à l'intégration. C'est pourquoi elle est aussi parfois appelée "intégration en forme finie". L'évaluation de la somme est souvent un problème très difficile. Comme l'intégrale, la somme peut ne pas exister. Nous ne détaillons pas plus cette question, car ce n'est pas sous cette forme que nous allons chercher les solutions.

### 5.1.4 Représentation asymptotique

La représentation asymptotique joue un rôle important dans la théorie des équations aux différences linéaires. On la définit comme suit.

Soit  $f(x)$  une fonction de la variable complexe  $x$  définie sur une demi-droite allant du point  $\alpha$  à l'infini, et soit:

$$S(x) = s_0 + \frac{s_1}{x} + \frac{s_2}{x^2} + \dots$$

une série en  $\frac{1}{x}$  convergente ou divergente. Alors, si pour tout  $n$  il existe  $M$  et  $R$ , constantes positives, telles que:

$$\left| f(x) - \left( s_0 + \frac{s_1}{x} + \dots + \frac{s_n}{x^n} \right) \right| < \frac{M}{|x|^n} \quad (7)$$

quand  $|x| > R$  sur la demi-droite,  $f(x)$  est dite *représentée asymptotiquement* par  $S(x)$ , ce que l'on notera  $f(x) \sim S(x)$ . Les constantes  $M$  et  $R$  dépendent en général de  $n$ . Généralement, si  $f(x)$  est définie dans un secteur  $\theta_1 < \arg(x - \alpha) < \theta_2$  du plan complexe,  $f(x)$  est toujours représentée par (7) quand  $|x| > R$  dans le secteur fermé  $\theta_1 + \epsilon \leq \arg(x - \alpha) \leq \theta_2 + \epsilon$ . Dans ce cas,  $M$  et  $R$  dépendent de  $n$  et de  $\epsilon$ .

### 5.1.5 Rappel sur la fonction Gamma et ses propriétés

Pour donner la définition de la fonction  $\Gamma$ , on commence par la définition suivante, due à Norlund:

$$\log \Gamma(x) = \int_0^x \log z \Delta z + c \quad (8)$$

où  $c$  est une constante choisie de telle sorte que  $\log \Gamma(1) = 0$ . On en déduit:

$$\Delta \log \Gamma(x) = \log x$$

et donc:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (9)$$

C'est une des propriétés importantes de  $\Gamma(x)$ .

En particulier, si  $n$  est un entier positif, on a:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Puis en différenciant (8), nous obtenons:

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^x \Delta z = \Psi(x)$$

où  $\Psi(x)$  est la dérivée logarithmique de  $\Gamma(x)$ .

Par la suite, nous utiliserons aussi:

- Les fonctions "Γ généralisées" introduites par [A. Duval 1984] :

$$\Gamma_r(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{P(t)} dt = \int_0^{+\infty} t^{-x-1} e^{P(1/t)} dt \quad (10)$$

avec  $r = \text{degré}(P)$ ,  $P(t) = b_r t^r + \dots + b_0 \in \mathbf{C}[t]$ ,  $\Re(b_r) > 0$ .

- Les séries de Stirling :

Ce sont les séries

$$\begin{aligned} \log \Gamma(x+h) = & \log \sqrt{2\pi} + x \log x - x + B_1(h) \log x \\ & - \sum_{\nu=1}^{m-1} (-1)^\nu \frac{B_{\nu+1}(h)}{\nu(\nu+1)x^\nu} - \frac{1}{m} \int_0^\infty \frac{P_m(z-h)}{(x+z)^m} dz. \end{aligned} \quad (11)$$

où les  $B_\nu$  sont des polynômes de Bernoulli.

Ces séries sont valables non seulement pour  $x$  réel, mais aussi pour

$$-\pi + \epsilon < \arg x < \pi - \epsilon$$

En posant  $h = 0$ , on montre que l'on a la formule de Stirling suivante:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x}} = 1. \quad (12)$$

En posant  $m = 2$  dans les séries de Stirling (11), nous avons aussi

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(x+h)}{x^h \Gamma(x)} = 1, \quad 0 \leq h \leq 1. \quad (13)$$

## 5.1.6 Les propriétés générales aux équations aux différences linéaires

### 5.1.6.1 Points singuliers d'une équation aux différences linéaires

Soit l'équation aux différences linéaires d'ordre  $n$

$$a_n(x)u(x+n) + a_{n-1}(x)u(x+n-1) + \dots + a_0(x)u(x)$$

où  $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{C}[x]$ .

On appelle points singuliers d'une telle équation

- les zéros de  $a_0(x)$ , notés  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$

## Chapitre 5

- les singularités essentielles des coefficients  $a_i(x)$ , notées  $\beta_1, \beta_2, \dots$
- les zéros de  $a_n(x)$ , notés  $\gamma_1, \gamma_2, \dots$

Les points

$$\alpha_i - \nu, \beta_i - \nu, \beta_i + n + \nu, \gamma_i + \nu, \quad \text{avec } i = 1, 2, \dots \quad \nu \in \mathbf{N}$$

sont dits *congruents* aux points singuliers de l'équation. Plus généralement, si  $\alpha$  est un point quelconque, les points  $\alpha + \nu$  avec  $\nu \in \mathbf{Z}$  sont dits *congruents* à  $\alpha$ . Si  $x$  est un point quelconque, et si  $x - \alpha$  n'est ni zéro ni un entier positif ou négatif, alors  $x$  est dit *incongruent* à  $\alpha$ .

### 5.1.6.2 Système fondamental de solutions

Soit toujours l'équation aux différences linéaires homogène:

$$a_n(x)u(x+n) + a_{n-1}(x)u(x+n-1) + \dots + a_0(x)u(x) = 0 \quad (1)$$

avec  $a_i(x) \in \mathbf{C}[x]$ .

Si

$$u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$$

sont  $n$  solutions particulières de l'équation (1). On voit facilement, par substitution, que:

$$p_1(x)u_1(x) + p_2(x)u_2(x) + \dots + p_n(x)u_n(x) \quad (14)$$

où les  $p_i(x)$  sont des fonctions périodiques de période 1, est aussi solution. Les solutions de ce type forment un système fondamental quand il n'existe pas de relation linéaire de la forme (14) et que, au moins pour une valeur de  $x$  congruente aux points singuliers de l'équation, les  $p_i(x)$  ne sont pas nulles simultanément.

Donnons deux théorèmes qui permettent de déterminer si un ensemble donné de solutions forme un système fondamental.

**Théorème 1.** *Une condition nécessaire et suffisante pour que  $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$  forme un système fondamental de l'équation homogène d'ordre  $n$  est que le déterminant*

$$D(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \dots & u_n(x) \\ u_1(x+1) & u_2(x+1) & \dots & u_n(x+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1(x+n-1) & u_2(x+n-1) & \dots & u_n(x+n-1) \end{vmatrix}$$

ne s'annule que pour des valeurs de  $x$  congruentes à des points singuliers de (1).

**Théorème 2.** *Si  $n$  fonctions  $u_1, \dots, u_n$  sont telles que:*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u_s(x+r)}{u_{s+1}(x+r)} = 0, \quad s = 1, 2, \dots, n-1$$

*où  $r$  est un entier positif, alors elles sont linéairement indépendantes.*

## 5.2 SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES .

Le problème de l'intégration des équations aux différences linéaires, s'avère être plus difficile que celui de l'intégration des équations différentielles linéaires. En effet, la notion même de solution d'une telle équation n'est pas très claire. On se référera à ce sujet aux travaux récents de J.P. Ramis.

En ce qui concerne la recherche des solutions, il faut distinguer:

- les solutions asymptotiques;
- les solutions obtenues par intégration par primitive.

Dans cette étude, on ne s'intéressera qu'aux **solutions asymptotiques**. Avant de présenter quelques méthodes permettant la recherche de telles solutions, nous rappellerons certains théorèmes sur le comportement asymptotique des solutions d'équations aux différences linéaires. En particulier, le théorème de Poincaré a marqué le début de nouvelles méthodes de recherche dans la théorie des équations aux différences linéaires. Ce théorème étant insuffisant dans certains cas, on citera aussi le théorème de Perron.

### 5.2.1 Le théorème de Poincaré

**Théorème de Poincaré.** *Si  $u(n)$  est une solution quelconque d'une équation aux différences linéaires dont les coefficients tendent vers une valeur constante quand  $n \rightarrow +\infty$ , alors :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u(n+1)}{u(n)}$$

*existe et est égale à l'une des racines de l'équation caractéristique associée à l'équation aux différences à coefficients constants, pourvu que les modules des racines de l'équation caractéristique soient distincts.*

Un théorème plus général a été démontré par [Perron 1909]. Ce théorème dit:

**Théorème.** *Si le coefficient de  $u$  dans l'équation aux différences d'ordre  $n$  est non nul pour  $x = 0, 1, 2, \dots$ , alors l'équation possède  $n$  solutions fondamentales  $u_1, \dots, u_n$  telles que:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{u_i(x+1)}{u_i(x)} = \alpha_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

où  $\alpha_i$  est une racine de l'équation caractéristique et  $x \rightarrow \infty$  positivement.

Quand les conditions énoncées dans le théorème de Poincaré ne sont pas remplies, c'est-à-dire quand l'équation caractéristique présente deux ou plusieurs racines de même module, ce théorème n'est plus toujours vérifié. On doit encore à Perron un théorème qui reste valable dans ce cas.

Soit l'équation aux différences d'ordre  $r$

$$u(\mu+r) + \alpha_{\mu,r-1}u(\mu+r-1) + \dots + \alpha_{\mu,1}u(\mu+1) + \alpha_{\mu,0}u(\mu) = 0 \quad (15)$$

où la variable indépendante  $\mu$  prend les valeurs  $0, 1, 2, \dots$ . Cette équation est du type de Poincaré, si toutes les limites

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \alpha_{\mu,\nu} = \alpha_\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, r-1$$

existent. Alors on peut énoncer:

**Théorème de Perron.** *Soient  $q_1, q_2, \dots, q_\sigma$  racines de modules distincts de l'équation caractéristique*

$$t^r + \alpha_{r-1}t^{r-1} + \alpha_{r-2}t^{r-2} + \dots + \alpha_1t + \alpha_0 = 0$$

et soit  $l_\lambda$  le nombre de racines dont le module est  $q_\lambda$ , les racines multiples étant comptées suivant leur multiplicité, c'est-à-dire

$$l_1 + l_2 + \dots + l_r = r.$$

Pourvu que les  $a_{\nu,0}$ \* soient différents pour toutes les valeurs de  $\nu$ , l'équation aux différences (15) a un système fondamental de solutions qui s'organise en  $\sigma$  classes, et tel que, pour les solutions de la classe  $\lambda$  et leurs combinaisons linéaires

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \sup \sqrt[\nu]{|u(\mu)|} = q_\mu.$$

---

\* où  $a_{\mu,\nu}$  provient des coefficients du système infini d'équations qui s'écrit  $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\mu,\nu}x_{\mu+\nu} = c_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, \dots$

Le nombre de solutions de la classe  $\lambda$  est  $l_\lambda$ .

### 5.2.2 Les méthodes de recherche des solutions

Malgré la difficulté, soulignée au début de cette section, du problème de l'intégration des équations aux différences linéaires, de nombreuses méthodes ont cependant été présentées pour avoir au moins l'analogie de la méthode de Frobenius pour une équation différentielle linéaire.

Ce qui a guidé notre étude, a été la recherche d'un *algorithme* permettant de *construire une base de solutions asymptotiques* d'un opérateur aux différences linéaires à coefficients dans un corps de séries formelles.

Il existe quatre grandes méthodes pour étudier ce problème, ce sont:

#### 1) La méthode de Birkhoff

Cette méthode décrite par [Birkhoff 1911] conduit à des calculs algébriques insurmontables. Elle a été reprise par [Birkhoff et Trjitzinsky 1933] en transformant l'équation en un système. Plus récemment, ces travaux ont été complétés et repris par [Duval A. 1984] et par [Praagman 1985], sous forme de factorisation d'opérateurs aux différences. L'algorithme présenté au chapitre 6 s'inspire de cette méthode, et est repris de [Della Dora et Wazner 1985].

#### 2) La méthode de Laplace

Cette méthode donne les solutions sous forme de transformées intégrales, généralisant ainsi les méthodes connues pour les équations à coefficients constants. Pour une étude détaillée, on pourra se référer au chapitre XV de [Milne Thomson 1933]

#### 3) Les méthodes symboliques (la méthode de Boole)

Ces méthodes très astucieuses ont été partiellement décrites par [Jordan 1939]. Pour la méthode de Boole on pourra se référer à une première présentation dans [Milne Thomson 1933]. Plus récemment, l'étude de la méthode de Boole a été reprise par [Della Dora et Tournier 1984], dans un cas simple, afin d'en approcher ses limites. Cette étude ne nous ayant pas conduit à la construction d'un algorithme, nous ne la présenterons qu'en annexe.

#### 4) La méthode de Pincherle-Ramis

Cette méthode est bien différente de la méthode de Boole. Son origine remonte aux idées développées par [Pincherle 1892]. Plus récemment, cette

## *Chapitre 5*

·méthode a été reprise et améliorée par [Ramis 1984] et [A. Duval 1984]. C'est à partir de l'étude de ces derniers travaux que nous avons pu élaborer les algorithmes qui nous ont permis de construire un résolveur d'équations aux différences. Cette méthode fera l'objet du chapitre 7.

Dans la classification de ces méthodes, on ne saurait omettre les ouvrages fondamentaux de [Norlund 1924,1929] qui font le point sur les équations aux différences linéaires en 1929.

## Chapitre 6

### LA METHODE DELLA DORA - WAZNER

Cette méthode a été étudiée par [Della Dora et Wazner 1985]. Elle s'apparente à la méthode de Birkhoff et s'inspire des travaux de [A. Duval 1984]. Dans ce chapitre, on décrira les étapes d'un algorithme permettant de construire une base de solutions formelles d'un opérateur aux différences linéaires à coefficients dans un corps de séries formelles.

Tout d'abord, nous devons introduire quelques définitions, en particulier la notion de *polygone de Newton* d'un opérateur aux différences. Ensuite, nous décrirons les étapes essentielles de l'algorithme. Nous examinerons enfin le cas des opérateurs aux différences fuchsien.

#### 6.1 POLYGONE DE NEWTON D'UN OPÉRATEUR AUX DIFFÉRENCES .

##### 6.1.1 Quelques notations

Nous désignerons par  $K$  le corps des séries formelles  $\mathbf{C}((1/x))$  que nous munirons de la *valuation*  $v$  sur  $\mathbf{Z}$ , qui, à la série

$$a = \sum_{i \geq n_0} a_i x^{-i} \quad \text{avec } a_{n_0} \neq 0$$

associe l'entier

$$v(a) = n_0.$$

## Chapitre 6

et nous noterons  $L_p$  l'opérateur:

$$L_p u = p^x \sum_{i=0}^n a_i p^i \tau^i.$$

On considère uniquement:

$$L_p u = p^{-x} L u.$$

Le  $\Delta_\tau$ -polygone de  $L$  est alors obtenu à partir de l'opérateur:

$$L_p = \sum_{i=0}^n a_i p^i (\Delta_\tau^i + \binom{i}{1} \Delta_\tau^{i-1} + \binom{i}{2} \Delta_\tau^{i-2} + \dots +)$$

que nous noterons:

$$L_p = \sum_{i=0}^n b_i \Delta_\tau^i.$$

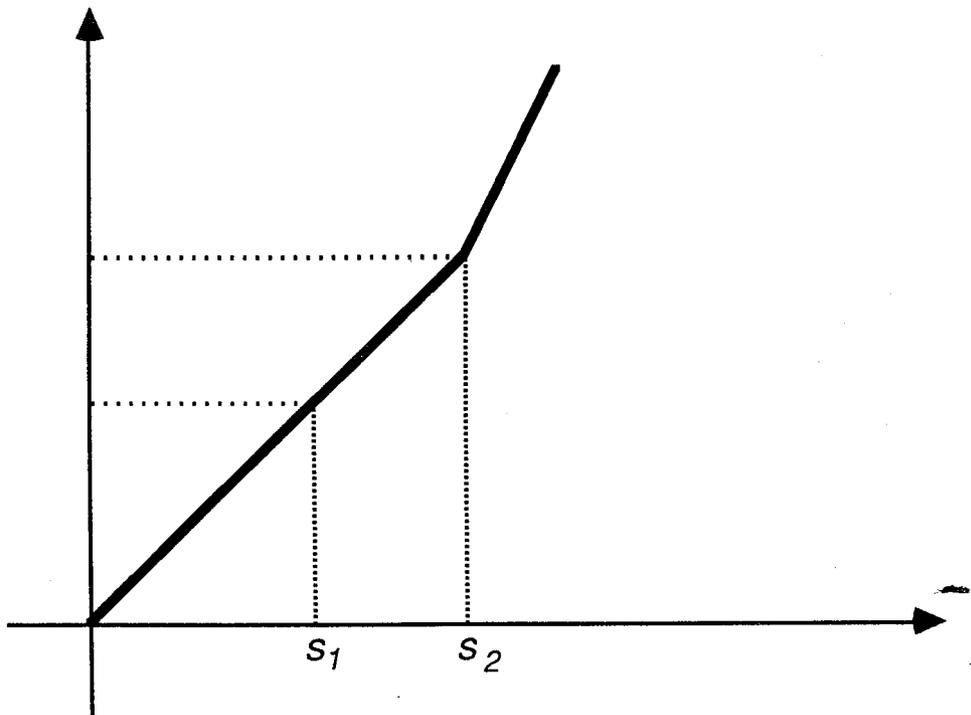
où

$$b_j = a_j p^j + a_{j+1} p^{j+1} \binom{j+1}{1} + a_{j+2} p^{j+2} \binom{j+2}{2} + \dots + a_n p^n \binom{n}{n_i}.$$

On remarque alors que:

$$\begin{aligned} v(b_j) &> v(a_{s_2}) && \text{si } j > s_2 \\ v(b_j) &= v(a_{s_2}) && \text{si } s_1 \leq j \leq s_2 \\ v(b_j) &= v(a_{s_1}) && \text{si } j \leq s_1 \end{aligned}$$

Compte tenu du fait que  $v(a_{s_1}) = 0$ , le polygone de Newton a la forme suivante:



Dans un système d'axes orthonormés, on construit la frontière de l'enveloppe convexe inférieure des points

$$(i, v(a_i)).$$

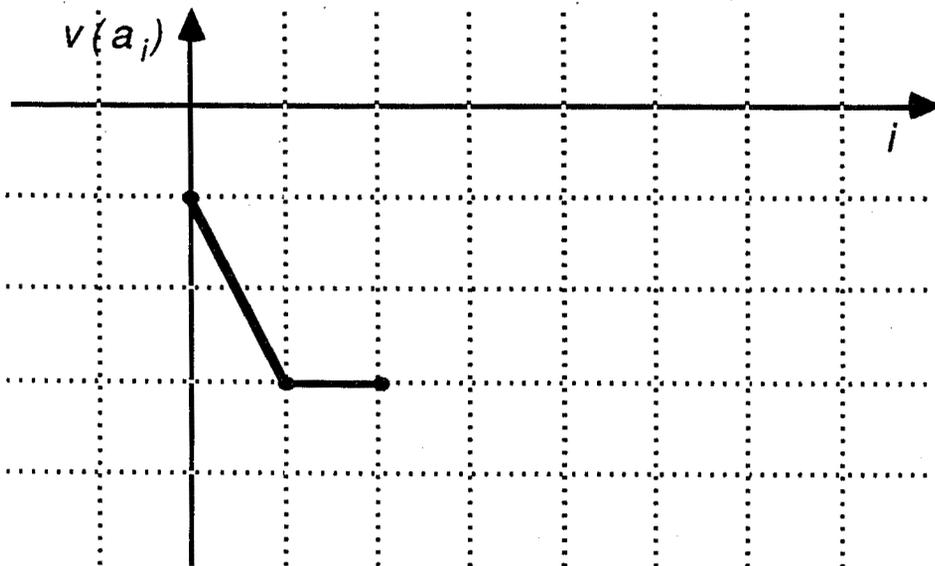
Le polygone ainsi obtenu s'appelle le  $\tau$ -polygone de l'opérateur  $L$ .

*Exemple*

Soit l'opérateur:

$$L = (1 + x) + (x^2 + 2x^3)\tau + x^3\tau^2$$

son  $\tau$ -polygone est:



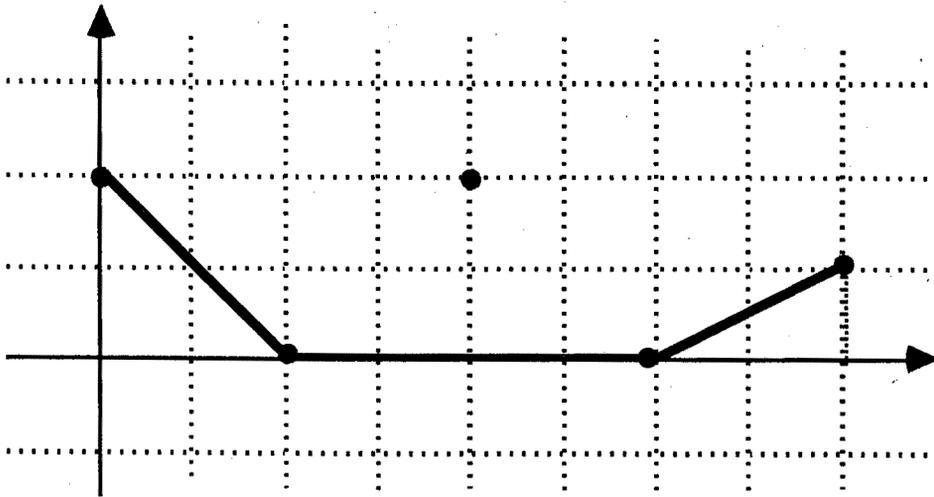
### 6.1.3 Le $\Delta_\tau$ -polygone de Newton

Soit  $M$  un polynôme de  $K[\Delta_\tau]$

$$M = \sum_{i=0}^n b_i \Delta_\tau^i \quad \text{avec } b_i \in K$$

Le  $\Delta_\tau$ -polygone se définit en prenant l'enveloppe convexe inférieure des points:

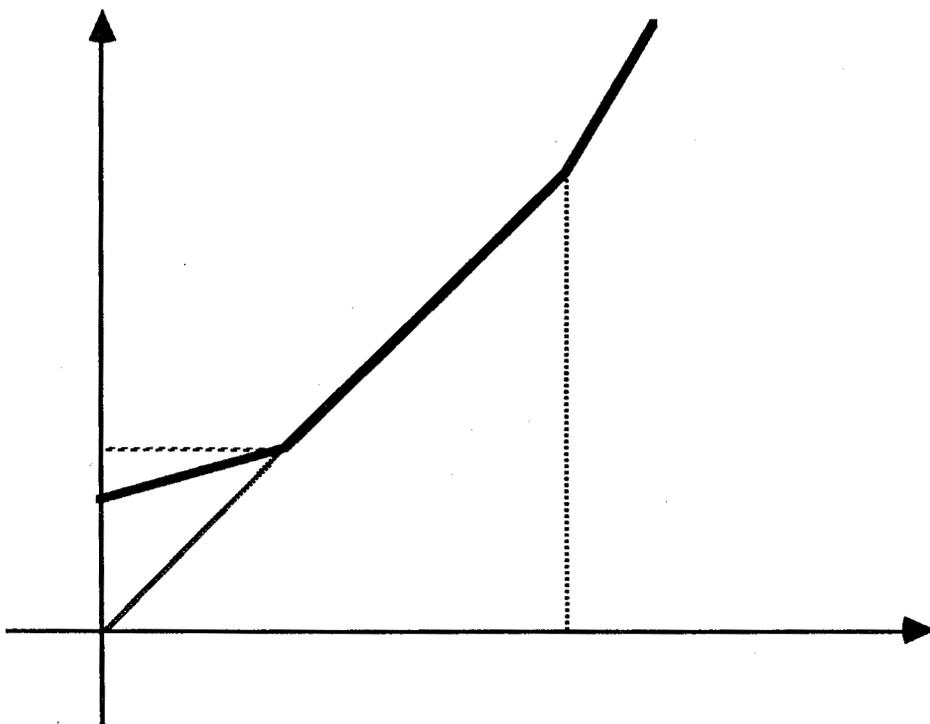
$$(i, v(b_i) + i).$$

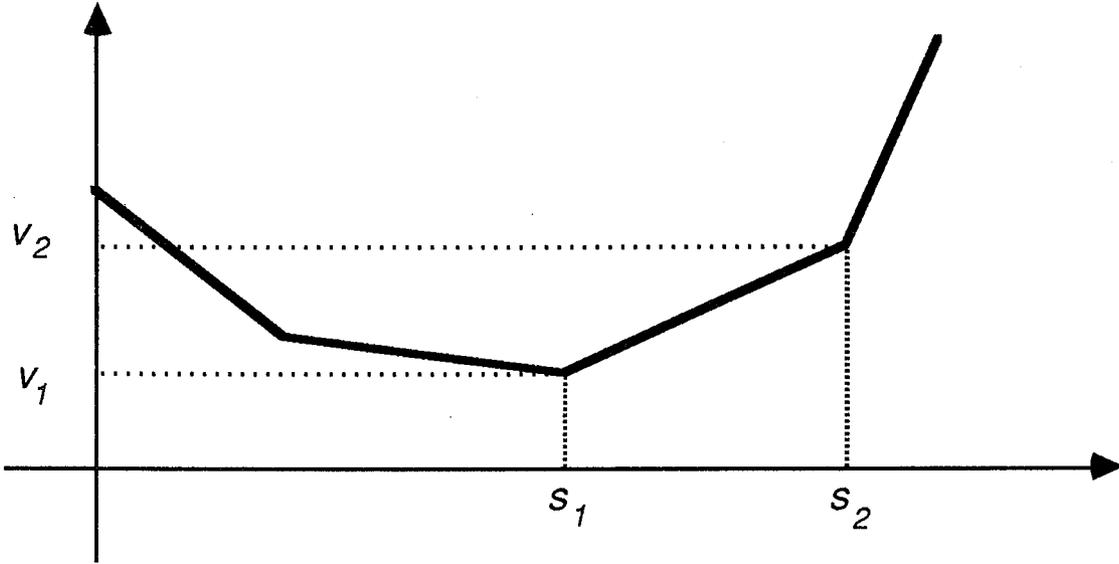


Dans ce cas, on a  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 3$  et l'équation caractéristique est  $P_0 = p(p^2+1)$ .

### 6.3.2 Itération fondamentale

Soit  $g$  une racine non nulle de l'équation caractéristique  $P_0$ . Considérons l'opérateur obtenu en substituant  $g$  à  $p$  dans  $L$ . Son  $\Delta_r$ -polygone de Newton peut prendre deux formes distinctes suivant la multiplicité de la racine  $g$ . En effet, si  $g$  est racine simple de  $P_0$ , le polygone a alors la forme:





Par définition, nous avons:

$$a_{s_1} = e_{s_1} x^{v_1} + \dots \quad \text{avec } v_1 = v(a_{s_1})$$

$$a_{s_2} = e_{s_2} x^{v_2} + \dots \quad \text{avec } v_2 = v(a_{s_2})$$

Transformons l'opérateur  $L$  en un nouvel opérateur  $L_1$  défini par:

$$L_1(u) = x^{-px} L(x^{px} u) .$$

En remarquant que:

$$\tau^k(x^{px} u) = x^{p(x+k)} S_k(x) \tau^k(u)$$

où  $S_k$  désigne une série formelle en la variable  $1/x$  de valuation nulle, on a:

$$L_1 = \sum_{i=0}^n a_i x^{pi} S_i(x) \tau^i$$

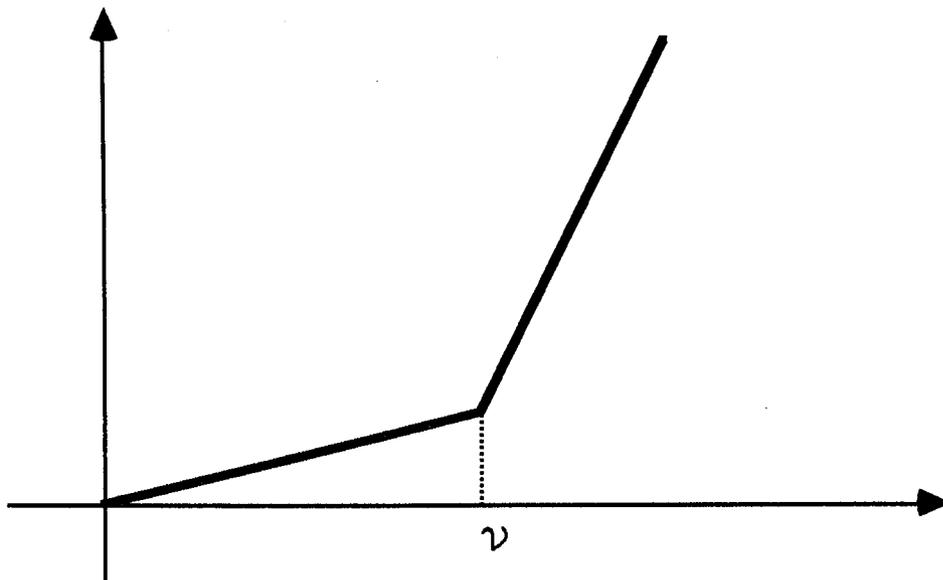
et l'expression de la valuation est:

$$v(a_i x^{pi} S_i) = v(a_i) - ip .$$

Regardons de plus près les transformations géométriques que nous avons faites en passant de  $L$  à  $L_1$  sur le polygone de Newton.

### 6.3.3 Description d'une étape du procédé

Nous allons supposer, sans rien changer à la généralité du procédé, que le  $\Delta_\tau$ -polygone de notre nouvel opérateur a la forme suivante:



Soit  $L$  cet opérateur, que l'on note:

$$L = \sum_{i=0}^n b_i \Delta_\tau^i$$

avec les conventions suivantes:

$$\begin{aligned} v(b_0) &= 0 \\ v(b_i) &= i(p-1), \quad i \leq \nu \\ v(b_j) &> j(p-1), \quad j > \nu \end{aligned}$$

La plus petite pente de cet opérateur est donc  $p$ . Formons alors l'opérateur  $L_\alpha$  défini par:

$$L_\alpha u = e^{-\alpha x^p} L(e^{\alpha x^p} u).$$

Il dépend de la constante, complexe que nous devons déterminer de façon à diminuer la pente  $p$  initiale.

Pour déterminer cette nouvelle constante nous devons établir une combinatoire sur les opérateurs  $\Delta_\tau$  et sur l'opérateur de multiplication par  $e^{\alpha x^p}$ . Nous conviendrons de noter:

$$\Delta_\tau \circ e^{\alpha x^p}$$

l'opérateur

$$u \longrightarrow \Delta_\tau(e^{\alpha x^p} u)$$

### 6.3 RÉCURRENCE FONDAMENTALE .

Soit  $L$  un opérateur appartenant à  $C((1/t))[\tau]$

$$L = \sum_{i=0}^n a_i \tau^i$$

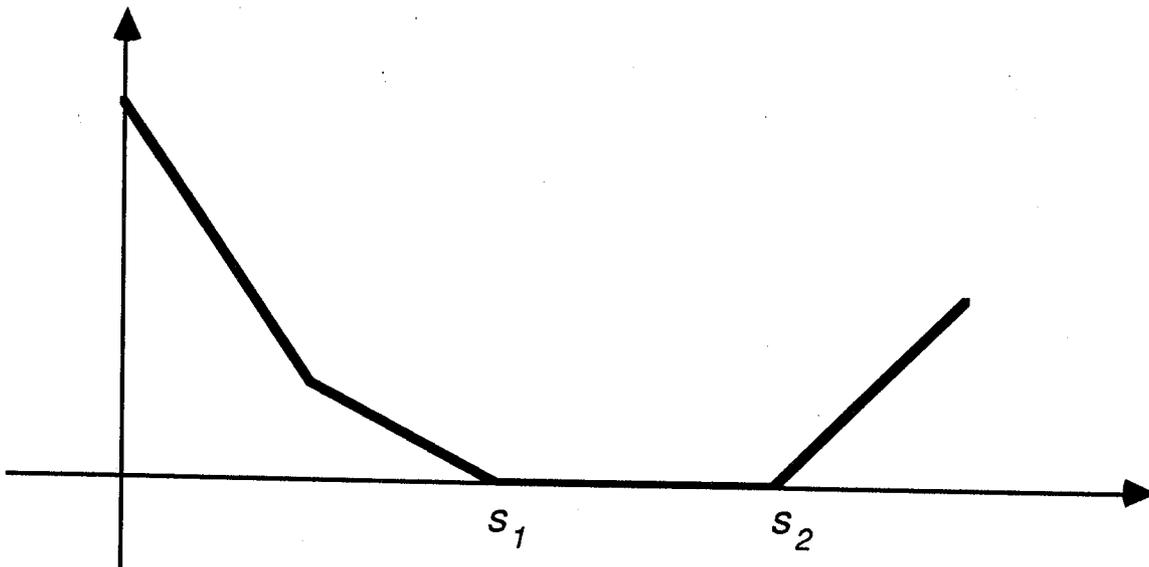
Nous supposons qu'il existe deux entiers  $s_1$  et  $s_2$  tels que:

$$v(a_{s_1}) = v(a_{s_2})$$

$$v(a_i) > v(a_{s_1}) \quad \text{pour tout } i > s_2 \text{ et } i < s_1$$

$$v(a_i) \geq v(a_{s_1}) \quad \text{pour tout } i \text{ tel que } s_1 \leq i \leq s_2$$

Pour un tel opérateur, le  $\tau$ -polygone a la forme suivante:



On peut toujours supposer que  $v(a_{s_1}) = 0$  même si l'on doit multiplier cet opérateur par une puissance convenable de  $t$ .

#### 6.3.1 Équation caractéristique relative au côté $[s_1, s_2]$

Nous allons tout d'abord effectuer le changement de variable:

$$u = p^x w$$

## Chapitre 6

### Exemples

$$\begin{aligned}v(3x + 1) &= -1 \\ v(x^{-2} + 2x^{-3}) &= 2\end{aligned}$$

Nous noterons  $\tau$  l'opérateur aux *différences* dans  $C((1/x))$  :

$$\tau u(x) = u(x + 1)$$

On lui associe l'opérateur de  $\tau$ -*dérivation* notée  $\Delta_\tau$  et défini par:

$$\Delta_\tau u(x) = u(x + 1) - u(x).$$

Formellement, les deux opérateurs sont donc liés par la relation:

$$\Delta_\tau = \tau - 1.$$

Deux anneaux vont intervenir souvent dans la suite, ce sont:

- l'anneau des polynômes en l'opérateur aux différences, noté:

$$A = K[\tau]$$

- l'anneau des polynômes en l'opérateur de  $\tau$ -dérivation, noté:

$$B = K[\Delta_\tau].$$

### Remarque:

Dans ce qui suit, nous serons aussi souvent conduit à introduire une variable  $t$  définie par:

$$t^m = x$$

et donc à travailler dans les anneaux

$$C((1/t))[\tau] \quad \text{ou} \quad C((1/t))[\Delta_\tau].$$

Dans ce cas,  $\tau$  et  $\Delta_\tau$  garderont leurs significations initiales.

### 6.1.2 Le $\tau$ -polygone de Newton

Soit  $L$  un élément de  $K[\tau]$ :

$$L = \sum_{i=0}^n a_i \tau^i \quad \text{avec} \quad a_i \in K$$

Sur cette figure, on remarque que la pente est 1 sur  $[0, s_2]$ , et que les pentes sont strictement supérieures ensuite.

Avec les notations

$$a_j = e_j x^{v_j} + \dots \quad \text{pour } j \leq s_2, \quad (v_1 = v(a_{s_1}) = 0),$$

on a:

$$b_j = p^j x^{v_1} \left( e_{s_1} p^{s_1-j} \binom{s_1}{j} + \dots + e_{s_2} p^{s_2-j} \binom{s_2}{j} + \dots \right)$$

que nous noterons

$$b_j = P_j x^{v_1} + \dots$$

où les termes remplacés par les pointillés, sont de valuation supérieure.

Nous avons donc, si  $j \leq s_1$

$$P_j = p^j \left( e_j \binom{j}{j} + \dots + e_{s_2} p^{s_2-j} \binom{s_2}{j} \right).$$

On pourra alors donner la définition de l'équation caractéristique.

**Définition.**  $P_0$  se nommera l'équation caractéristique associée à la pente 1.

$$P_0 = p^{s_1} (e_{s_1} + \dots + e_{s_2} p^{s_2-s_1}).$$

Cette équation caractéristique se présente comme un polynôme de degré  $s_2$ , ayant a priori  $s_1$  racines nulles. Les autres polynômes  $P_j$  sont intéressants aussi, et nous avons le lemme:

**Lemme 1.** Si  $j \leq s_2$ , et sous les hypothèses précédentes

$$P_j = \frac{p^j}{j!} P_0^{(j)}.$$

*Exemple*

$$L = x^{-1} + \tau + x^{-1} \tau^2 + \tau^3 + x^{-1/2} \tau^4$$

Son  $\tau$ -polygone est:

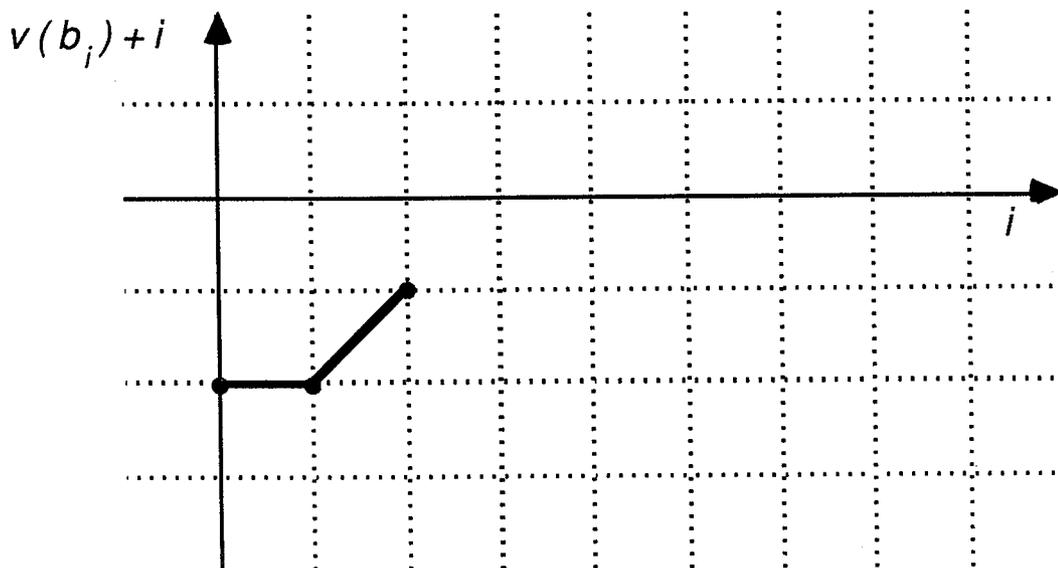
## Chapitre 6

### Exemple

Soit le polynôme

$$M = (1 + 2x^2) + (x^2 + x^3)\Delta_\tau + x^3\Delta_\tau^2$$

Son  $\Delta_\tau$ -polygone est:



Nous allons maintenant rechercher les solutions formelles. Nous procéderons en deux étapes: tout d'abord l'étude du redressement d'une pente, et ensuite, l'étude de la récurrence fondamentale.

### 6.2 REDRESSEMENT D'UNE PENTE DU $\tau$ -POLYGONE .

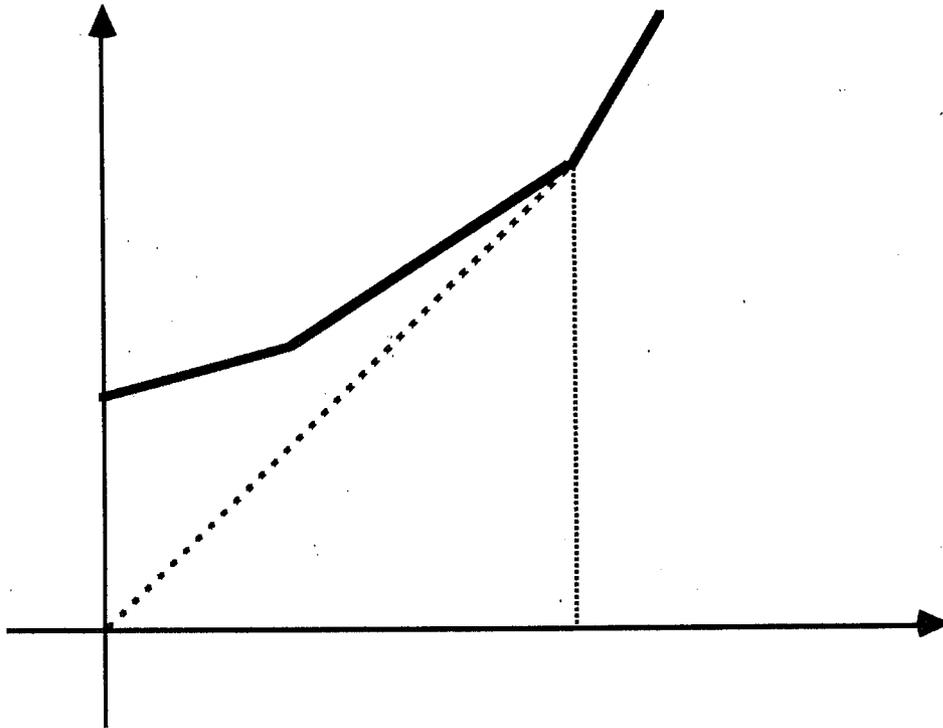
Soit  $L$  un opérateur de  $A$ , (ou plus généralement de  $C((1/t))[\tau]$ ) noté:

$$L = \sum_{i=0}^n a_i \tau^i.$$

Associons à  $L$  son  $\tau$ -polygone. On s'intéresse à la valeur d'une des pentes  $p$  de celui-ci définie par:

$$p = \frac{(v_2 - v_1)}{(s_2 - s_1)}.$$

Si  $g$  est racine multiple, on a  $P_0(g) = 0, \dots, P_\nu(g) = 0$ , et la pente 1 du polygone  $L$  se "casse" en plusieurs segments. Tout ce que l'on peut dire sur le polygone résultant, c'est que les pentes ont diminuées globalement. Toutes les pentes du polygone entre 0 et  $s_2$  sont comprises entre 0 et 1. Le polygone a alors la forme suivante:



On remarque que si  $m$  est la multiplicité de la racine de l'équation caractéristique, on a:

$$m \leq s_2 - s_1.$$

Toutes les pentes sur le segment  $[0, m]$  ont diminué, et le nouveau polygone de  $L$  vérifie une des propriétés suivantes:

- Il possède une pente nulle de longueur supérieure ou égale à 1.
- Il possède une pente de longueur 1 qui a diminué. Les autres pentes ont une valeur supérieure ou égale à 1. On remarque que si l'opérateur appartient à  $C((t))[\Delta_\tau]$ , l'opérateur  $L_g$  restera dans ce même anneau, donc on n'introduit pas de nouvelle ramification.
- Il possède une pente de longueur supérieure à 1 qui a diminué. Sa nouvelle longueur est sûrement inférieure à  $s_2 - s_1$  et sa valeur est strictement inférieure à 1. Il est possible que dans ce cas nous ayons introduit une nouvelle ramification.

### 6.2.1 Pour le côté de pente $p$

On a les valuations suivantes:

$$\begin{aligned}v(a_{s_1} x^{ps_1} S_{s_1}) &= v_1 - ps_1 \\v(a_{s_2} x^{ps_2} S_{s_2}) &= v_2 - ps_2\end{aligned}$$

La nouvelle pente  $p'$  est alors:

$$p' = \frac{((v_2 - ps_2) - (v_1 - ps_1))}{(s_2 - s_1)}$$

comme  $p = (v_2 - v_1)/(s_2 - s_1)$ , on voit immédiatement que:

$$p' = 0$$

Nous dirons alors que nous avons *redressé la pente  $p$* .

### 6.2.2 Cas des autres pentes

Soit un autre sommet du polygone associé à un point  $(j, v_j)$  différent des deux sommets considérés précédemment. Dans la transformation, ce point devient  $(j, v_j - pj)$ . Pour les points  $(j, v_j)$  et  $(s_1, v_1)$ , la pente:

$$q = \frac{(v_1 - v_j)}{(s_1 - j)}$$

se transforme en:

$$\begin{aligned}q' &= \frac{(v_1 - ps_1) - (v_j - pj)}{(s_1 - j)} \\ &= q - p\end{aligned}$$

La transformation géométrique est alors immédiate à décrire. On *retranche  $p$  à chaque pente*.

Remarquons que cette transformation introduit des puissances de  $x$  de la forme:

$$x^p$$

et donc que le nouvel opérateur va appartenir à  $C((1/t)[r])$  avec  $t$  puissance fractionnaire de  $x$ .

et  $Q_k$  la fonction définie par:

$$Q_k(x) = \Delta_\tau^k(e^{\alpha x^p}) .$$

On a alors le lemme suivant:

**Lemme 2.** *Avec les notations précédentes, nous avons la formule suivante:*

$$\begin{aligned} \Delta_\tau^k \circ e^{\alpha x^k} = & Q_0(x+k)\Delta_\tau^k + \binom{k}{1}Q_1(x+k-1)\Delta_\tau^{k-1} + \dots \\ & + \binom{k}{i}Q_i(x+k-i)\Delta_\tau^{k-i} + \dots + Q_k(x) . \end{aligned}$$

Nous ne donnerons pas la démonstration de ce lemme ici, mais signalons qu'elle se fait par récurrence.

Revenons maintenant à l'opérateur  $L_\alpha$  que nous exprimons sous la forme:

$$L_\alpha = \sum_{i=0}^n \hat{b}_i \Delta_\tau^i .$$

Le lemme précédent nous permet de donner l'expression de  $\hat{b}_i$ :

$$\hat{b}_i = \sum_{j=i}^n b_j Q_{j-i}(x+i) \binom{j}{i} .$$

Ce qui nous intéresse, c'est la valuation des divers  $\hat{b}_i$ . Pour déterminer cette valuation, il faut tout d'abord exprimer celle des  $Q_i$ . Un moyen rapide de la calculer est d'utiliser une formule due à Boole [Jordan 60], qui est la suivante:

$$\Delta_\tau^k f = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{k!}{m!} S_m^k \times f^{(m)}$$

où  $f^{(m)}$  désigne la dérivée d'ordre  $m$  de la fonction  $f$ , et  $S_m^k$  un nombre de Stirling de seconde espèce. (Notons que la seule propriété des nombres de Stirling que nous utiliserons est:  $S_m^m = 1$ ).

En remarquant que:

$$v(\Delta_\tau^k(e^{\alpha x^p})) = k(1-p)$$

nous pouvons déduire immédiatement que

$$v(Q_i(x)) = i(1-p) .$$

Nous pouvons maintenant exprimer la valuation des  $\hat{b}_i$ .

### 6.3.3.1 Valuation des $\hat{b}_i$

Traisons d'abord le cas de  $\hat{b}_0$  qui est fondamental dans la suite. On a montré que:

$$\hat{b}_0 = \sum_{j=0}^n b_j Q_j$$

Donc sa valuation est:

$$v(\hat{b}_0) = \inf_j (v(b_j Q_j))$$

en effet:

$$\begin{aligned} v(b_j Q_j) &= v(b_j) + v(Q_j) \\ &= j(1-p) + v(b_j) \end{aligned}$$

D'après le calcul de  $v(b_j)$  que nous avons indiqué plus haut, nous en déduisons que:

$$\begin{aligned} v(b_j Q_j) &= 0 \quad \text{si } j = 0, 1, \dots, \nu \\ v(b_j Q_j) &> 0 \quad \text{si } j > \nu \end{aligned}$$

Il est donc clair que:

$$\hat{b}_0 = P_0(\alpha) + \dots$$

où  $P_0(\alpha)$  est un polynôme dépendant de la constante  $\alpha$ .

### 6.3.3.2 Détermination du polynôme $P_0(\alpha)$

On note:

$$b_i = b_0^i x^{-i(1-p)} + \dots \quad \text{pour } i \leq \nu$$

où les pointillés indiquent des termes de valuation supérieure. Puisque la dérivée  $i$ -ième de  $e^{\alpha x^p}$  a comme coefficient du terme de valuation minimale  $(p\alpha)^i$ , on a:

$$P_0(\alpha) = b_0^0 + b_0^1 p\alpha + \dots + b_0^\nu (p\alpha)^\nu$$

$P_0(\alpha)$  est donc un polynôme de degré  $\nu$  en la variable  $\alpha$ , il représente la *nouvelle équation caractéristique*.

*Remarque*

Les mêmes considérations que ci-dessus montrent immédiatement que le terme de valuation minimale de  $\hat{b}_i$  a comme coefficient  $P_i(\alpha)$  pour  $i \leq \nu$ , avec  $P_i(\alpha) = K_i P_0^{(i)}(\alpha)$ , où  $K_i$  est une constante indépendante de  $\alpha$ .

## Conclusion

L'algorithme théorique est le suivant:

A une étape du procédé nous considérons la pente minimale positive, l'équation caractéristique ayant pour degré la longueur de cette pente. Soit  $a$  une racine de cette équation, et  $p$  la valeur de cette pente.

En substituant  $a$  dans l'opérateur  $L$ , on obtient un nouvel opérateur qui a une pente minimale  $p'$ , éventuellement  $\leq 0$ .

D'après les remarques faites plus haut, il est clair que le nouvel opérateur a soit une pente minimale de même longueur, (mais dans ce cas on n'a pas introduit de nouvelles ramifications), soit une pente de longueur strictement inférieure, (mais alors on introduit éventuellement une nouvelle ramification).

Il ne reste donc plus, pour avoir un algorithme complet, qu'à savoir traiter le cas des opérateurs qui ont une pente initiale inférieure où égale à 0. Ce sera l'objet du paragraphe suivant.

## 6.4 OPÉRATEURS AUX DIFFÉRENCES DU TYPE DE FUCHS

Nous allons introduire une classe d'opérateurs aux différences, qui par bien des aspects ressemble à la classe des opérateurs différentiels linéaires du type de Fuchs étudiés dans les chapîtres 2 et 3.

### 6.4.1 Définition des opérateurs fuchsien.

Soit  $L$  un élément de  $C((1/t))[\Delta_\tau]$ , nous lui associons son  $\Delta_\tau$ -polygone de la manière suivante:

Si  $t^i \Delta_\tau^j$  est un monôme de  $L$ , on lui associe le point:

$$(j, \frac{i}{m} + j)$$

et le quadrant:

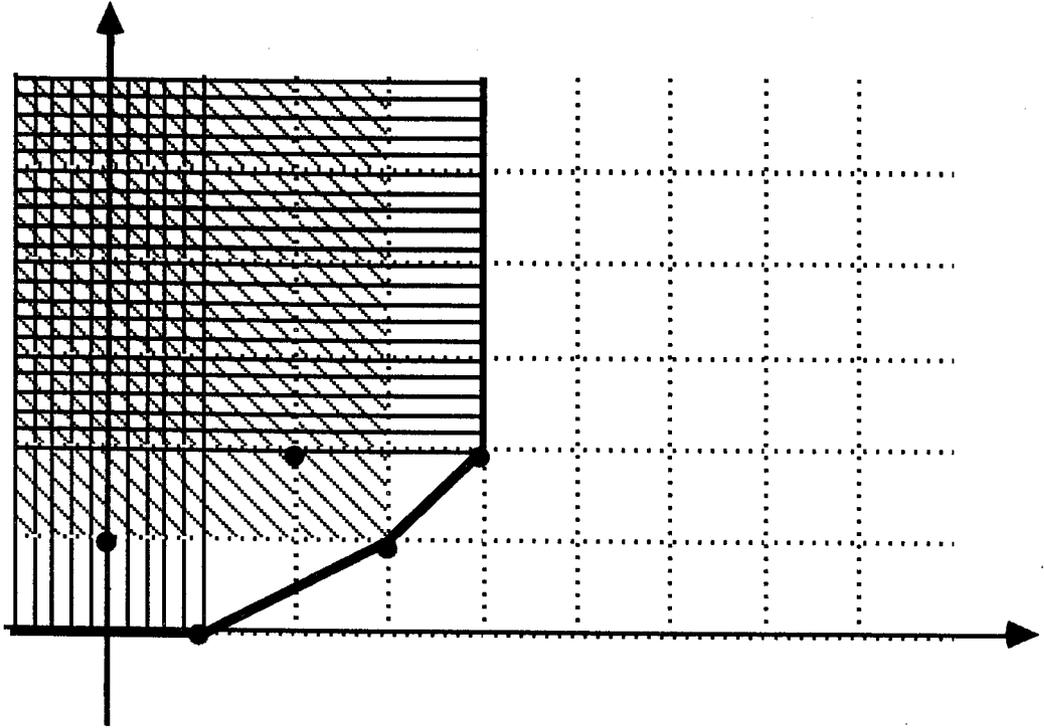
$$Q(j, \frac{i}{m} + j) = \{(x, y), (x, y) \in \mathbf{R}, x \leq j, y \geq \frac{i}{m} + j\}.$$

On forme son *polygone de Newton* en prenant l'enveloppe convexe des

$$Q(j, (i/m) + j)$$

lorsque  $t^i \Delta^j$  décrit l'ensemble de tous les monômes de  $L$ .

*Exemple*



**Définition.** On dira qu'un opérateur aux différences est de type de Fuchs, si son polygone de Newton a une seule pente nulle.

### 6.4.2 Recherche des solutions formelles d'un opérateur fuchsien

Nous allons démontrer que l'on peut déterminer un *système fondamental* de solutions formelles d'un opérateur linéaire Fuchsien. Pour cela, nous allons suivre une procédure tout à fait analogue à celle suivie pour les équations différentielles linéaires du type de Fuchs, présentée dans le chapitre 2.

#### 6.4.2.1 Action d'un opérateur Fuchsien sur $t^\nu$

Avant de préciser cette action, il faut rappeler une formule due à Boole:

$$\begin{aligned} \Delta_\tau^k(t^\nu) &= \Delta^k(x^{\frac{\nu}{m}}) \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{k!}{n!} S_n^k(x^{\frac{\nu}{m}})^n \end{aligned}$$

avec

$$\Delta_r^n(x^{\frac{q}{m}}) = \left(\frac{q(q-m)\dots(q-m(n-1))}{m^n}\right)t^{q-mn}$$

donc

$$L(t^\nu) = \sum_{i=0}^n b_i(t) \left(\frac{q(q-m)\dots(q-m(i-m))}{m^i}t^{\nu-mi} + \dots\right).$$

Les conventions que nous avons faites sur l'opérateur  $L$  entraînent que:

$$b_i(t) = b_0^i t^{im} + b_1^i t^{im-1} + \dots \quad \text{avec } b_0^i \neq 0.$$

Si l'on écrit  $L(t^q)$  sous la forme:

$$L(t^q) = t^q(f_0(q) + \frac{f_1(q)}{t} + \frac{f_2(q)}{t^2} + \dots).$$

le facteur de  $t$  dans le second membre est une série formelle en la variable  $1/t$ . D'après les remarques précédentes, on voit que:

$$f_0(q) = b_0^0 + b_0^1 \frac{q}{m} + \dots + b_0^n \left(\frac{q(q-m)\dots(q-m(n-1))}{m^n}\right).$$

Si nous convenons de noter  $z = q/m$ , l'équation précédente devient:

$$f_0(z) = b_0^0 + b_0^1 z + \dots + b_0^n z(z-1)\dots(z-(n-1)).$$

**Définition.** *Le polynôme  $f_0$  s'appelle l'équation indicelle de  $L$ .*

### 6.4.2.2 Action de $L$ sur une série formelle

Formellement, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} L\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^{q-i}\right) &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i L(t^{q-i}) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} c_i \left(\sum_{j=0}^{\infty} t^{q-i-j} f_j(q+j)\right) \end{aligned}$$

En développant cette dernière expression, nous avons:

$$t^q(c_0 f_0(q) + \frac{c_0 f_1(q) + c_1 f_0(q-1)}{t} + \frac{c_0 f_2(q) + c_1 f_1(q-1) + c_2 f_0(q-2)}{t^2} + \dots)$$

## Chapitre 6

Choisissons, ce qui est possible,  $c_0, c_1, c_2, \dots \in \mathbf{C}(q)$  de façon à avoir les relations suivantes:

$$\begin{aligned}c_0 f_1(q) + c_1 f_0(q-1) &= 0 \\c_0 f_2(q) + c_1 f_1(q-1) + c_2 f_0(q-2) &= 0 \\&\dots\dots\end{aligned}$$

Alors:

$$L\left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i t^{q-i}\right) = t^q c_0 f_0(q).$$

### Remarque

Nous avons conduit ce calcul exactement comme pour les équations différentielles ordinaires, et de la même façon nous allons avoir une discussion sur les solutions où nous ferons la même classification des divers cas.

#### 6.4.2.3 Discussion des différentes solutions

Nous allons considérer trois cas.

##### 1) le cas générique.

Le polynôme  $f_0(q)$  a toutes ses racines distinctes et différentes entre elles d'un entier. On peut dans ce cas trouver  $n$  solutions formelles linéairement indépendantes.

##### 2) le cas des racines multiples.

Le problème dans ce cas est que nous ne pouvons déterminer qu'une solution associée à cette racine. Afin de déterminer les  $s-1$  autres solutions ( $s$  étant la multiplicité de la racine), nous utiliserons la méthode de Frobenius. Dans cette méthode, on remarquera que l'on peut toujours remplacer  $c_0$  par  $(p-g)^s$ , où  $g$  désigne la racine multiple considérée.

Il suffit alors de remarquer que:

$$\begin{aligned}\partial_q \left( \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^{q-i} \right) &= L \left( \partial_q \sum_{i=0}^{\infty} c_i t^{q-i} \right) \\&= \partial_q (t^q c_0 f_0(q)) \\&= t^q \left( \log(t) c_0 f_0(q) + \partial_q (f_0(q)) \right)\end{aligned}$$

$g$  étant racine multiple, le second membre s'annule. Il en résulte que:

$$\partial_q \left( \sum_i t^{q-i} \right)$$

est solution de l'équation. Or, cette dérivée s'écrit:

$$\log(t)t^q \sum c_i t^{-i} + t^q \sum \partial_q(c_i t^{-i})$$

ce qui assure l'indépendance linéaire des solutions. Ce raisonnement se généralise immédiatement, et on renvoie au chapitre 2 pour le même raisonnement à propos des opérateurs différentiels.

### 3) le cas des racines qui diffèrent d'un entier.

Ce cas se traite en remplaçant  $c_i$  par le produit de  $c_i f_0(q-i)$ , de manière à supprimer l'occurrence des dénominateurs qui s'annulent. De même, pour une étude détaillée de ce cas, nous renvoyons aux chapitres 2 et 3.

Illustrons ce qui vient d'être présenté sur un exemple.

Soit l'opérateur

$$L = x^2 \Delta_r^2 - 2x \Delta_r + 2.$$

L'action de  $L$  sur  $x^\lambda$  s'écrit:

$$x^{-\lambda} L(x^\lambda) = x^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)^\lambda - 2x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)^\lambda + x^2 - 2x \left( \left(1 + \frac{1}{x}\right)^\lambda - 1 \right) + 2.$$

En développant suivant la formule du binôme, on obtient:

$$x^{-\lambda} L(x^\lambda) = (\lambda^2 - 3\lambda + 2) + \frac{\lambda(\lambda-1)(11\lambda-25)}{3x} + \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)(7\lambda-25)}{12x^2} + \dots$$

Cette expression est de la forme:

$$x^{-\lambda} L(x^\lambda) = f_0(\lambda) + \frac{f_1(\lambda)}{x} + \frac{f_2(\lambda)}{x^2} + \dots$$

Donc, l'action de  $L$  sur une série de la forme:

$$x^\lambda \sum_{i=0}^{\infty} g_i x^{-i}$$

nous conduit au système triangulaire:

$$\begin{aligned} g_0 f_0(\lambda) &= 0 \\ g_0 f_1(\lambda) + g_1 f_0(\lambda-1) &= 0 \\ g_0 f_2(\lambda) + g_1 f_1(\lambda-1) + g_2 f_0(\lambda-2) &= 0 \\ \dots \end{aligned}$$

## Chapitre 6

L'équation indiciale est:

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)$$

elle a donc deux racines qui diffèrent d'un entier. On remarque alors que la substitution  $\lambda = 1$ , dans le système d'équations précédent, nous conduit à une solution. Il n'en est pas de même pour la substitution  $\lambda = 2$ . En effet, la deuxième équation s'écrit dans ce cas:

$$g_0 f_1(2) + g_1 f_0(1) = 0$$

Or  $g_0 \neq 0$  et puisque  $f_1(2) \neq 0$ , il y a contradiction. L'idée est alors d'effectuer le changement:

$$g_0 \longrightarrow g_0(\lambda - 2).$$

Avec ce changement, la deuxième équation devient:

$$g_0 f_1(\lambda) + g_1(\lambda - 3) = 0.$$

Les autres équations ne posent pas de problème.

Si maintenant nous remarquons qu'il est impossible de prendre la valeur  $\lambda = 2$  qui nous conduirait à la solution nulle, ni  $\lambda = 1$  qui redonnerait une solution proportionnelle, nous sommes conduit à utiliser la remarque suivante:

Si  $x^\lambda \sum g_i x^{-i}$  est solution de l'équation initiale, alors la dérivée par rapport à  $\lambda$  est aussi solution, et elle s'exprime sous la forme:

$$\log(x) x^\lambda \sum g_i x^{-i} + x^\lambda \sum \partial_\lambda(g_i) x^{-i}$$

les valeurs des  $g_i$  et  $\partial(g_i)$  étant calculées pour  $\lambda = 1$ .

Nous ne développerons pas plus loin ces calculs. Pour une discussion plus complète, on se reportera aux chapitres 2 et 3.

## Chapitre 7

# LA MÉTHODE DE PINCHERLE-RAMIS

### Introduction

Le rôle important joué par la transformée de Laplace

$$u(x) = \int_1 t^{x-1} v(t) dt$$

dans la résolution de certaines équations aux différences linéaires à coefficients rationnels est établi depuis longtemps [Doetsch 1955]. Nous allons, dans ce chapitre, systématiser l'utilisation d'une transformée extrêmement voisine: *la transformée de Pincherle*.

### 7.1 LA TRANSFORMÉE FORMELLE DE PINCHERLE .

Nous allons étudier les propriétés formelles d'une transformée, voisine de la transformée de Mellin [Doetsch 1955], d'une fonction complexe d'une variable complexe.

**Définition 1.** *On appelle transformée de Pincherle d'une fonction complexe  $\varphi$  d'une variable complexe, le long d'un chemin rectifiable  $\gamma$  du plan complexe, la fonction  $P\varphi$  (si elle existe) définie par*

$$P\varphi = \int_{\gamma} t^{-x-1} \varphi(t) dt.$$

L'importance de cette transformation dans l'étude des systèmes récurrents linéaires a été mise en évidence par [Pincherle 1892], et, plus récemment, a été précisée par [A. Duval 1984]. Grâce à cette transformation, on peut établir une correspondance entre équations aux différences linéaires (et homogènes) et équations différentielles linéaires (et homogènes).

Afin d'étudier les propriétés formelles de cette transformée, nous allons donner les notations qui seront utilisées. Certaines de ces notations ont déjà été introduites dans les chapîtres précédents.

### 7.1.1 Notations

- $\tau$  désigne l'opérateur de translation:

$$\tau u(x) = u(x + 1)$$

- $A$  désigne l'anneau des opérateurs aux différences à coefficients polynomiaux:

$$A = \mathbf{C}[x][\tau]$$

- $(x)_p$  désigne la "puissance symbolique":

$$(x)_p = x(x - 1) \dots (x - p + 1)$$

et nous introduirons la convention:

$$(x)_0 = 1$$

- $M_{k,p}$  est l'élément de  $A$  défini par:

$$M_{k,p} = (x + k)_p \tau^k$$

Nous allons maintenant étudier en détail l'action de  $M_{k,p}$  sur une transformée de Pincherle.

### 7.1.2 L'action de $M_{k,p}$ sur la transformée de Pincherle.

Pour présenter un exposé complet de la méthode en gardant une cohérence de notation, nous reprenons certains calculs de [Galbrun 1913] que nous allons compléter. Nous voulons étudier:

$$\begin{aligned} M_{k,p}(P\varphi) &= (x + k)_p \tau^k \left( \int_{\gamma} t^{-x-1} \varphi(t) dt \right) \\ &= (x + k)_p \int_{\gamma} t^{-x-k-1} \varphi(t) dt \end{aligned}$$

En intégrant par partie, nous obtenons:

$$\int_{\gamma} t^{-x-k-1} \varphi(t) dt = \left[ -\frac{t^{-x-k}}{x+k} \varphi(t) \right]_{\gamma} + \int_{\gamma} \frac{t^{-x-k}}{x+k} \partial \varphi dt \quad \text{avec } \delta \varphi = \frac{d\varphi}{dt}$$

D'où:

$$(x+k)_p \int_{\gamma} t^{-x-k-1} \varphi(t) dt = \left[ -(x+k-1)_{k-1} t^{-x-k} \varphi(t) \right]_{\gamma} + M_{k-1,p-1}(P\partial\varphi)$$

cela nous donne comme première expression de  $M_{k,p}(P\varphi)$ :

$$M_{k,p}(P\varphi) = - \left( (x+k-1)_{p-1} \tau^k(t^{-x}\varphi(t)) \right) \Big|_{\gamma} + M_{k-1,p-1}(P\partial\varphi). \quad (1)$$

En itérant cette intégration par partie, et en supposant  $k \geq p$ , nous obtenons:

$$M_{k,p}(P\varphi) = -D_{k,p} \Big|_{\gamma} + M_{k-p,0}(P\partial^p\varphi)$$

avec

$$D_{k,p} = (x+k-1)_{p-1} \tau^k(t^{-x})\varphi(t) + (x+k-2)_{p-2} \tau^{k-1}(t^{-x})\partial\varphi + \dots + \tau^{k-p+1}(t^{-x})\partial^{p-1}\varphi$$

et

$$M_{k-p,0}(P\partial^p\varphi) = \int_{\gamma} t^{-x-k+p-1} \partial^p\varphi(t) dt = P(t^{p-k}\partial^p\varphi).$$

Nous résumons cela dans le lemme suivant.

**Lemme 1.**

$$M_{k,p}(P\varphi) = -D_{k,p} \Big|_{\gamma} + M_{k-p,0}(P\partial^p\varphi) \quad (2)$$

La formule (2) s'interprète de la manière suivante. Si nous savons choisir un chemin rectifiable  $\gamma$  du plan complexe tel que:

$$P\varphi \text{ soit convergente} \quad (2.1)$$

$$D_{k,p} \Big|_{\gamma} = 0 \quad (2.2)$$

alors

$$(x+k)_k \tau^k (P\varphi) = P(t^{p-k} \partial^p \varphi) . \quad (3)$$

Dans le membre de gauche de la formule (3), il y a un opérateur aux différences, dans celui de droite, un opérateur différentiel. Cela va être la base du dictionnaire que nous allons créer.

## 7.2 DICTIONNAIRE DE LA TRANSFORMÉE DE PINCHERLE

Soit  $L$  un élément de l'anneau  $A$

$$L = \sum_{i=0}^n a_i(x) \tau^i .$$

Comme nous l'avons vu au début de cette deuxième partie, il est toujours possible de mettre cet opérateur sous forme canonique:

$$L = \sum_{i=0}^n b_i(x) \tau^i$$

où nous supposons les  $b_i$  écrit dans la base de Newton:

$$b_i(x) = b_i^{n_i}(x+i)_{n_i} + \dots + b_i^0$$

avec  $i = 0, 1, \dots, n$

Nous essayons d'écrire une solution d'une telle équation sous forme d'une transformée de Pincherle, soit:

$$L(P\varphi) = 0 .$$

Cela se traduit par:

$$\begin{aligned} L(P\varphi) &= \sum_{i=0}^n b_i(x) \tau^i (P\varphi) \\ &= \sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^{n_i} b_i^j(x+i)_j \tau^i (P\varphi) \right) \end{aligned}$$

D'après le lemme 1, le second membre de la formule précédente peut se réécrire:

$$\begin{aligned}
 L(P\varphi) &= \sum_{i=0}^n \left( \sum_{j=0}^{n_i} \left( -D_{i,j}(\varphi) \Big|_{\gamma} + P(t^{j-i} \partial^j \varphi) \right) \right) \\
 &= D\varphi \Big|_{\gamma} + P \left( \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n_i} b_i^j t^{j-i} \partial^j \varphi \right) \\
 &= D\varphi \Big|_{\gamma} + P(D_L(\varphi)) .
 \end{aligned} \tag{4}$$

Dans (4), nous avons:

- $D\varphi \Big|_{\gamma}$  représente la partie tout intégrée, c'est-à-dire une combinaison linéaire à coefficients polynomiaux des valeurs de  $\varphi$  et de ses dérivées aux extrémités de  $\gamma$ .
- $D_L(\varphi)$  est l'opérateur différentiel

$$D_L(\varphi) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n_i} b_i^j t^{j-i} \partial^j \varphi$$

et s'appellera l'adjoint de Pincherle de l'opérateur aux différences  $L$ .

**Remarque fondamentale.** Si nous pouvons déterminer  $\varphi$  dans  $\text{Ker } D_L$  telle que  $D\varphi \Big|_{\gamma} = 0$  pour un  $\gamma$  convenable, alors  $P\varphi$  sera une solution de  $L$ .

### 7.3 POLYGONE DE NEWTON D'UN OPÉRATEUR DIFFÉRENTIEL .

Nous ne faisons ici qu'un rappel de ce qui a été présenté en détail au chapitre 2. Soit donc  $D$  un opérateur différentiel à coefficients dans  $\mathbf{C}((x)) = \mathbf{C}[[x]][x^{-1}]$

$$D = \sum_{j=0}^n a_j(x) \partial^j$$

où  $\partial$  désigne toujours l'opérateur  $\frac{d}{dx}$ .

## Chapitre 7

On lui associe le *polygone de Newton de  $D$* , dont la définition a été donnée au chapitre 2.

On peut utiliser la même construction dans le cas où  $D$  appartient à  $\mathbb{C}[x][\partial]$ , pour construire un polygone de Newton au voisinage de l'infini. Pour étudier  $D$  au voisinage de l'infini, il faut faire le changement de variable

$$x = \frac{1}{t}$$

et étudier le polygone de Newton de l'opérateur en  $t$  au voisinage de  $t = 0$ . On peut alors faire la remarque élémentaire suivante:

On a:

$$\begin{aligned} t\partial_t &= t\left(\frac{d}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{d}{dx}\right)(-x^2) \\ &= -x\partial_x \end{aligned}$$

De même:

$$\begin{aligned} t^2\partial_t^2 &= t(t\partial_t)(\partial_t) \\ &= t(-x\partial_x)(-x^2\partial_x) \\ &= 2x\partial_x + x^2\partial_x^2 \end{aligned}$$

D'où le lemme:

**Lemme 2.**

$$t^k\partial_t^k = \sum_{j=0}^k \beta_{kj}x^j\partial_x^j \quad \text{avec} \quad \beta_{kk} = (-1)^k$$

Ce résultat se démontre par récurrence en utilisant la formule de Leibnitz et le fait que:

$$\partial_x^\nu \left( (-x^2)\partial_x \right) = \alpha_\nu \partial_x^{\nu-1} + \beta_\nu x \partial_x^\nu + \gamma_\nu x^2 \partial_x^{\nu+1} .$$

Si maintenant  $x^i\partial_x^j$  est un monôme de  $D$  (c'est à dire  $\alpha_{ij} \neq 0$ ), la transformation  $x = \frac{1}{t}$  le transforme en

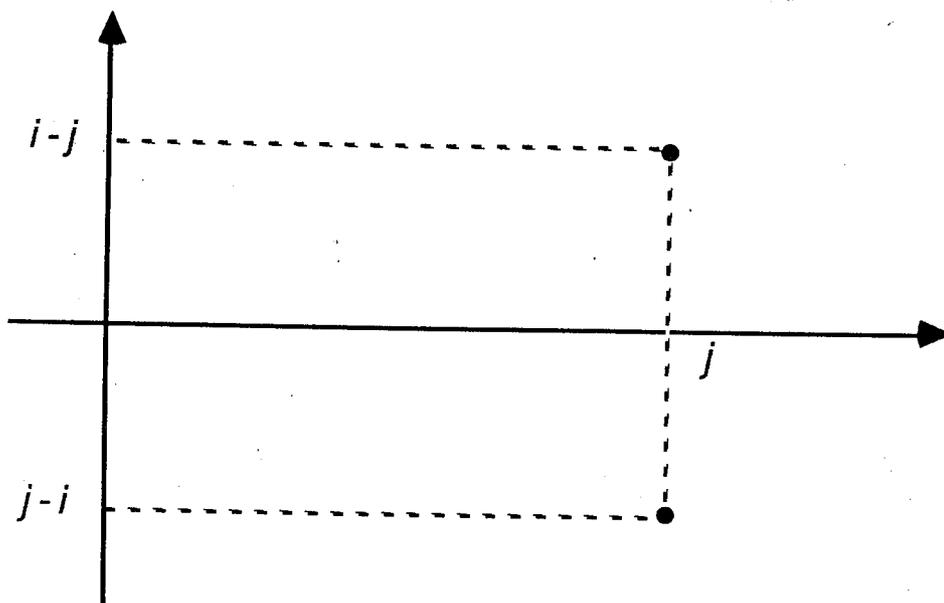
$$\begin{aligned} x^i\partial_x^j &= x^{i-j}(x^j\partial_x^j) \\ &= t^{j-i} \left( \sum_{k=1}^j \alpha_{jk} t^k \partial_t^k \right) \end{aligned}$$

Donc, au point:

$$(j, i - j)$$

construit pour le polygone de Newton en 0, on associe les points

$$(k, j - i) \text{ pour } k = 1, \dots, j$$



Sur le polygone de Newton, seul le point  $(j, j - i)$  est important (et il existe bien car  $\alpha_{kk} \neq 0$ ).

Donc, pour construire le polygone de Newton de  $D$  à l'infini:

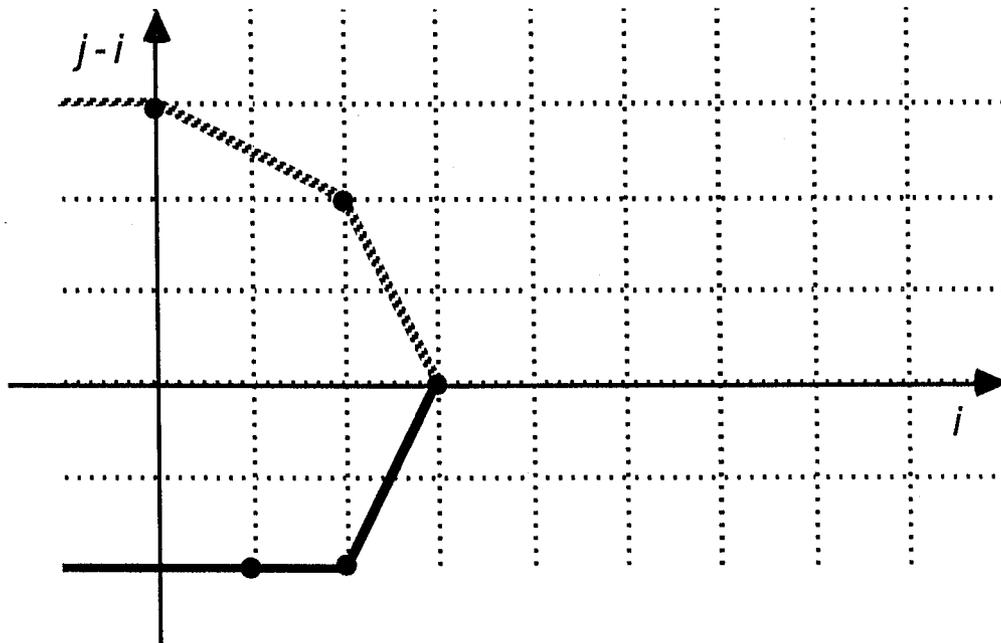
- 1) On porte dans  $\mathbf{R}^2$  tous les points  $(j, i - j)$  associés aux divers monômes  $x^i \partial^j$  apparaissant dans  $D$ .
- 2) On effectue une symétrie par rapport à l'axe Ox.
- 3) On construit le polygone de Newton, tel que décrit au début de ce paragraphe.

*Exemple:*

$$D = (1 + x^3) + x^{-1} \partial + (1 + x^4) \partial^2 + x^3 \partial^3$$

Sur la figure suivante, on a:

- Le polygone de Newton en 0 (en trait plein).



- Le symétrique de ce polygone à l'infini (en pointillé).

#### 7.4 LIENS ENTRE LES POLYGONES DE NEWTON .

Étudions les liens entre le polygone de Newton d'une équation aux différences et le polygone de Newton de l'équation différentielle adjointe. Soit  $L$  un opérateur aux différences linéaires:

$$L = \sum_{i=0}^n a_i(x)\tau^i \quad \text{avec } a_i \in \mathbf{C}[x].$$

A  $L$  nous associons:

- son  $\tau$ -polygone noté  $\mathcal{N}_L$ ;
- son opérateur adjoint au sens de Pincherle noté  $D_L$ , auquel nous faisons correspondre un polygone de Newton en zéro noté  $\mathcal{N}_{D_L}$ .

Dans ce paragraphe, nous allons montrer le lien étroit qui existe entre  $\mathcal{N}_L$  et  $\mathcal{N}_{D_L}$ . Pour cela, il suffit de revenir à la formule (2) du lemme 1 qui établit la correspondance suivante:

$$(x+k)_p \tau^k \quad \longleftrightarrow \quad t^{p-k} \partial^p$$

Pour contruire  $\mathcal{N}_L$ , à  $(x+k)_p \tau^k$  on associe le point

$$(k, -p) \in \mathbf{Z}^2$$

et pour construire  $\mathcal{N}_{D_L}$ , à  $t^{p-k} \partial^p$  on associe le point:

$$(p, -k) \in \mathbf{Z}^2$$

ce que l'on peut résumer dans le schéma suivant:

$$\begin{array}{ccc} (x+k)_k \tau^k & \longleftrightarrow & t^{p-k} \partial^p \\ \downarrow & & \downarrow \\ (k, -p) & & (p, -k) \end{array} \quad (5)$$

Il est clair que l'on va passer de  $\mathcal{N}_L$  à  $\mathcal{N}_{D_L}$  par une symétrie par rapport à la deuxième bissectrice. Faisons quelques remarques sur cette construction.

*Remarques*

- 1) Cette construction n'a de sens que si les coefficients de  $L$  sont des polynômes, sinon  $D_L$  aurait des exposants de  $\partial$  négatifs.
- 2) La remarque précédente montre que l'on peut parler de *hauteur* du polygone de Newton de  $L$ , qui n'est rien d'autre que *l'ordre* de  $D_L$ .
- 3)  $\mathcal{N}_{D_L}$  étant l'enveloppe convexe des points extrémaux associés aux monômes de  $D_L$ , par construction il est clair que ces points sont aussi des points extrémaux de  $\mathcal{N}_L$ . Cela montre bien que, dans la transformation canonique, on n'altère ni la forme de  $\mathcal{N}_L$  ni celle de  $\mathcal{N}_{D_L}$ .

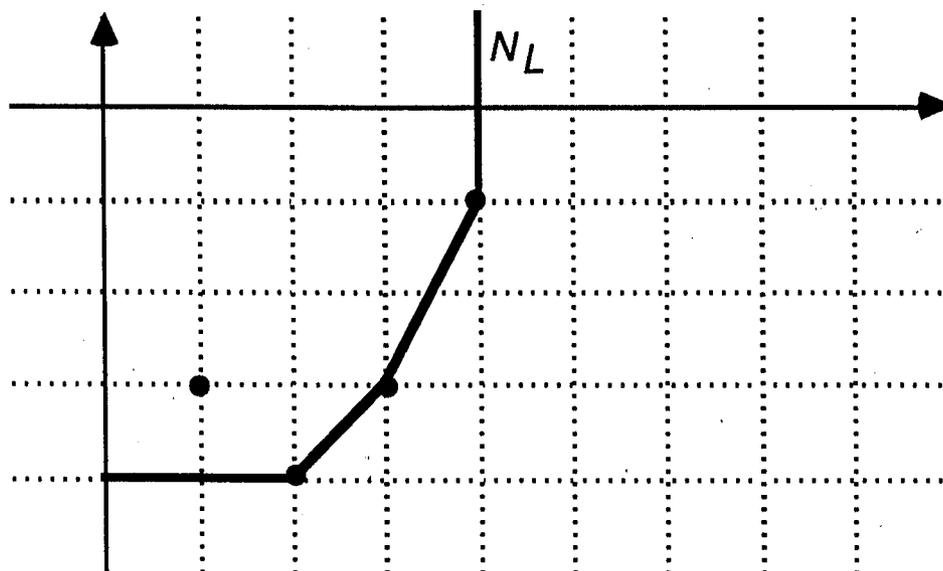
Illustrons cela sur un exemple.

*Exemple:*

Soit  $L$  un opérateur aux différences sous forme canonique:

$$L = 1 + (x+1)_3 \tau + (x+2)_4 \tau^2 + (x+3)_3 \tau^3 + (x+4)_1 \tau^4$$

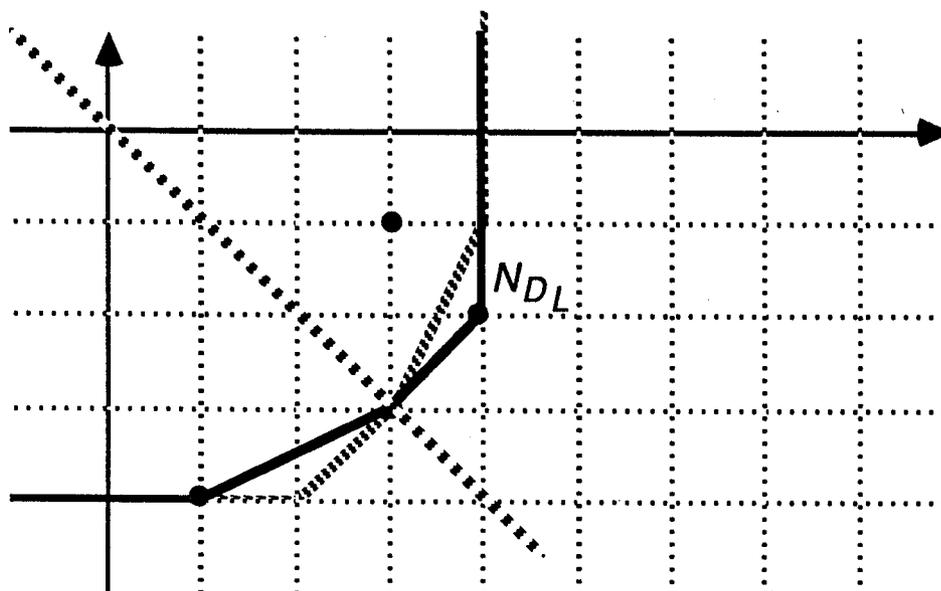
Son  $\tau$ -polygone  $\mathcal{N}_L$  est alors:



On associe à  $L$  l'opérateur adjoint  $D_L$  suivant:

$$D_L = 1 + t^2 \partial^3 + t^2 \partial^4 + \partial^3 + t^{-3} \partial$$

son polygone de Newton  $\mathcal{N}_{D_L}$  est le suivant:



Dans le paragraphe suivant, nous allons donner des précisions sur la construction de l'opérateur  $D_L$  et quelques propriétés, [Galbrun 1913,1921].

### 7.5 LE CALCUL DE GALBRUN .

Soit  $L$  un opérateur aux différences donné sous forme canonique:

$$L = \sum_{i=0}^n A_{n-1} \tau^i$$

avec  $A_i \in \mathbb{C}[x]$  noté

$$A_i = a_{i0}(x+n-i)_q + a_{i1}(x+n-i)_{q-1} + \dots + a_{iq}$$

où:

$$q = \max_i \deg(A_i) .$$

Il n'y a rien de restrictif dans cette écriture, car nous pouvons toujours supposer que certains  $a_{i0}$  sont nuls.

Si nous appliquons le *dictionnaire de Pincherle* à cet opérateur  $L$ , on a:

$$L = \sum_{i=0}^n \left\{ \left( \sum_{j=0}^q a_{i,q-j}(x+n-i)_j \right) \tau^{n-i} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$D_L = \sum_{i=0}^n \left\{ \sum_{j=0}^q a_{i,q-j} t^{j-n+i} \partial^j \right\} \quad (6)$$

nous retrouvons bien un opérateur d'ordre  $q$  [Galbrun 1913], que nous allons écrire:

$$D_L = \sum_{k=0}^q C_{q-k} \partial^k \quad (6.1)$$

avec:

$$C_{q-k} = t^{k-n} \sum_{i=0}^n a_{i,q-k} t^i \quad k = 0, 1, \dots, q \quad (6.2)$$

Nous pouvons maintenant étudier plus en détail les singularités possibles de  $D_L$ . En effet nous remarquons que:

- Nous avons éventuellement une singularité à l'infini.

- Les singularités à distance finie dans  $\hat{C}$  sont les racines de:

$$C_0 = t^{q-n} \sum_{i=0}^n a_{i,0} t^i .$$

On peut aussi remarquer que les singularités à distance finie dans  $\hat{C}$  qui sont déterminées par les racines du polynôme  $C_0$  ne dépendent en fait que des coefficients de tête des polynômes  $A_i$ .

*Exemple:*

Soit un opérateur aux différences sous forme canonique:

$$L = 1 + x^3 \tau + x^3 \tau^3 + \tau^4$$

où  $A_0 = 1$ ,  $A_1 = x^3$ ,  $A_2 = 0$ ,  $A_3 = x^3$ ,  $A_4 = 1$  et  $q = 3$ ,  $n = 4$ ,  $a_{00} = 0$ ,  $a_{10} = 1$ ,  $a_{20} = 0$ ,  $a_{30} = 1$ ,  $a_{40} = 0$ .

On a donc:

$$\begin{aligned} C_0 &= t^{-1}(t - t^3) \\ &= 1 + t^2 \end{aligned}$$

Cet exemple montre que la construction de  $C_0$  peut être faite directement sans passer par la forme canonique, puis utiliser le dictionnaire de Pincherle. Ce résultat va nous être utile.

Après avoir précisé les singularités à distance finie, nous allons considérer le comportement à l'infini.

D'après les remarques des paragraphes précédents, ce comportement va être décrit par les points les plus hauts du squelette de Newton, ces points étant tous, par construction, sous l'axe des  $x$ . Pour les constructions à venir, le critère qui permettra de reconnaître si l'infini est une singularité régulière est intéressant. D'après les critères classiques revus dans les chapitres 2 et 3, cela arrivera si l'ordre de  $A_0$  (c'est-à-dire le degré du terme de plus bas degré dans  $A_0$ ), est inférieur ou égal à l'ordre des  $A_i$ .

À la méthode partielle de [Galbrun 1921], reprise par [Duval A. 1984], nous allons préférer une méthode plus récente proposée par [Ramis J.P. 1984]. Cette méthode est fondée sur l'idée de condenser toutes les singularités à l'origine qui deviennent *très singulières* et de laisser à l'infini uniquement "une" singularité régulière. C'est ce que nous présenterons dans le paragraphe suivant.

## 7.6 LA MÉTHODE DE RAMIS .

Cette méthode repose sur le lemme technique suivant.

**Lemme 3.** *Soit  $L$  un opérateur aux différences linéaires, et  $D_L$  son adjoint au sens de Pincherle. Il existe alors un entier  $\sigma \in \mathbf{Z}$  tel que le changement de variable:*

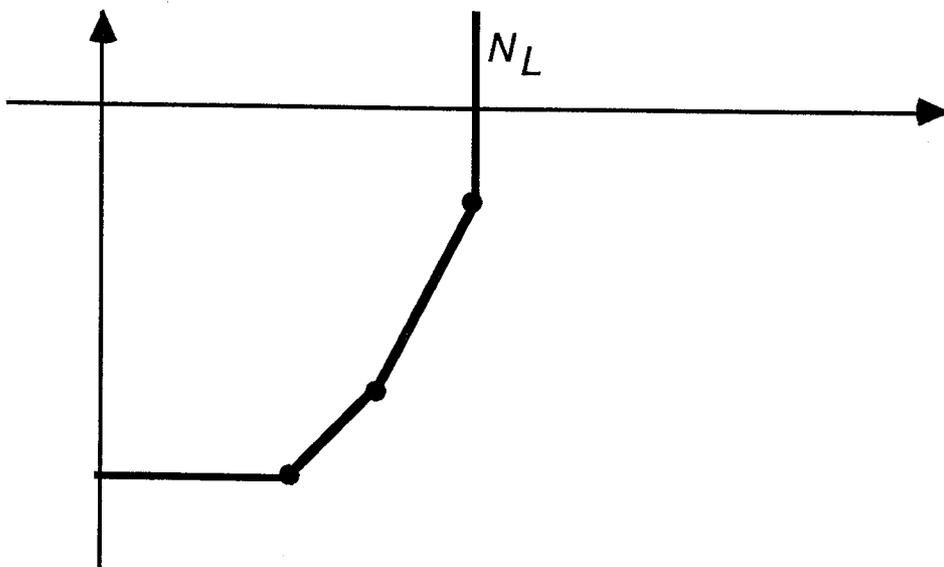
$$u(x) = \Gamma(x + 1)^\sigma v(x)$$

*transforme  $L$  en un nouvel opérateur aux différences  $L_\sigma$  dont l'adjoint au sens de Pincherle possède*

- *une singularité irrégulière à distance finie localisée en zéro.*
- *une (éventuellement) singularité régulière à l'infini.*

**Démonstration:**

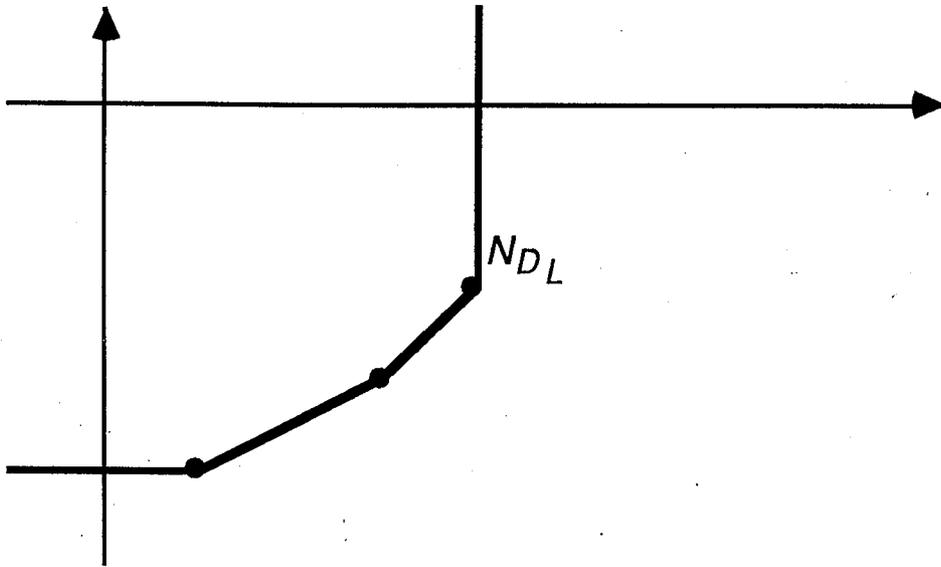
Nous voulons donc que  $D_\sigma$  ait un polygone de Newton qui ait la forme  $\mathcal{F}_0$  suivante:



D'après ce que nous savons de la correspondance

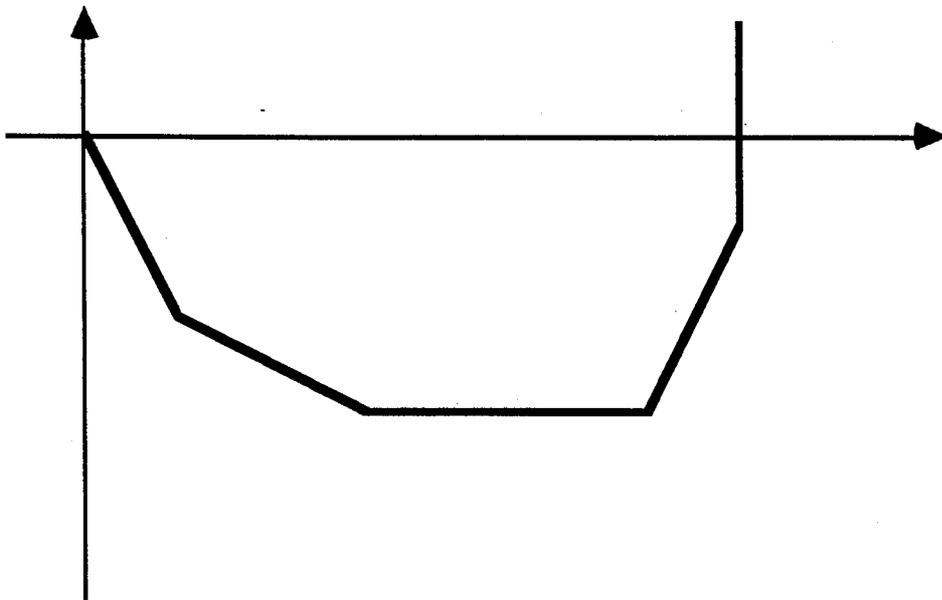
$$\mathcal{N}_{L_\sigma} \longleftrightarrow \mathcal{N}_{D_{L_\sigma}},$$

le  $\tau$ -polygone de Newton de  $\mathcal{N}_{L_\sigma}$  aura donc la forme  $\mathcal{F}_1$  suivante (à une normalisation près). C'est dire que  $\mathcal{N}_{D_{L_\sigma}}$  n'aura que des pentes nulles ou strictement positives.



On remarque que, si la singularité à l'infini n'était pas régulière, la symétrie entraînerait pour  $\mathcal{N}_{L_\sigma}$  des pentes négatives au départ du polygone. C'est ce que nous voulons éviter.

Donc le problème est le suivant: à partir d'un  $\tau$ -polygone quelconque obtenu en prenant strictement l'enveloppe convexe des points extrémaux, effectuer une transformation qui nous ramène à une forme  $\mathcal{F}_1$ .



Or, d'après la méthode DellaDora-Wazner présentée au chapitre précédent, nous savons comment s'interprètent les pentes de ce  $\tau$ -polygone: une

penne  $p$  du polygone correspond à un ensemble de solutions dont le développement asymptotique s'écrit:

$$u(x) = \Gamma(x)^p \gamma(x)$$

et le changement de variable précédent retranche  $p$  à toutes les pentes.

Donc, si on désigne par:

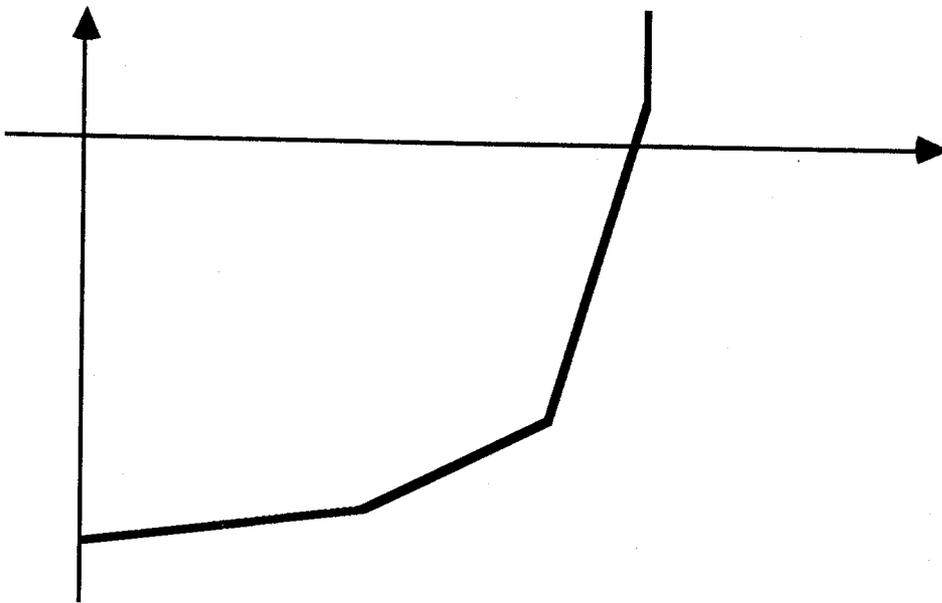
$p^*$  la pente la plus négative (si elle existe),

$\sigma$  le plus grand entier inférieur à  $p$ ,

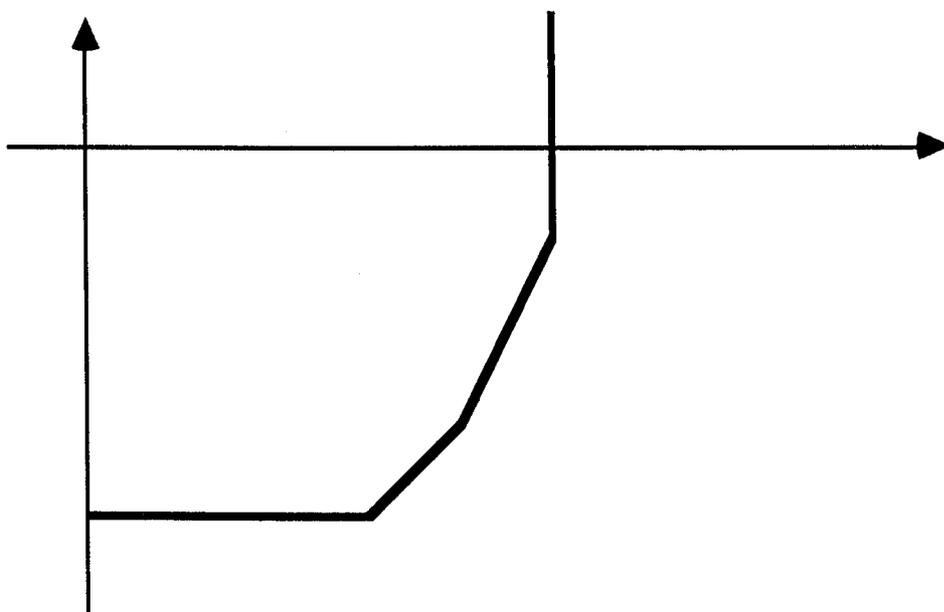
et si on effectue alors le changement de variable:

$$u(x) = \Gamma(x)^\sigma v(x)$$

le polygone du nouvel opérateur aura la forme  $\mathcal{F}_2$  suivante:



ou bien la forme  $\mathcal{F}_3$  suivante:



Cela nous montre que l'adjoint de ces polygones présente une singularité régulière à l'infini. Il reste maintenant à voir si une telle transformation supprime "toutes" les singularités, à distance finie, non nulle. Pour cela, il est nécessaire de revenir à l'analyse et aux notations du paragraphe précédent. Dans ce paragraphe, il est montré que les singularités à distance finie sont les racines du polynôme  $C_0$

$$C_0 = t^{q-n} \sum_{i=0}^n a_{i,0} t^i$$

qui dépend uniquement des coefficients de tête des polynômes  $A_i$

$$A_i = a_{i,0}(x+n-i)_q + a_{i,1}(x+n-i)_{q-1} + \dots + a_{i,q}$$

avec:

$$q = \max_i (\deg A_i) .$$

Il est alors clair que, dans les deux figures précédentes, la forme  $\mathcal{F}_3$  va conduire à des singularités à distance finie, alors que la forme  $\mathcal{F}_2$  n'y conduit pas, car  $\deg(A_q) > \deg(A_i)$ ,  $i \neq q$ .

Afin d'éviter la situation  $\mathcal{F}_3$ , il est nécessaire de choisir  $\sigma$  un peu plus fort, c'est-à-dire:

$$\sigma = \begin{cases} \hat{p} & \text{si } p^* \notin \mathbf{Z} \text{ où } \hat{p} \text{ désigne le plus grand entier inférieur à } p \\ p^* - 1 & \text{si } p^* \in \mathbf{Z} \end{cases}$$

Dans tous les cas, le polygone de  $\mathcal{N}_{L_\sigma}$  présentera une "pointe".

Cette précision achève la démonstration du lemme. Nous terminerons l'étude de cette méthode par la remarque suivante.

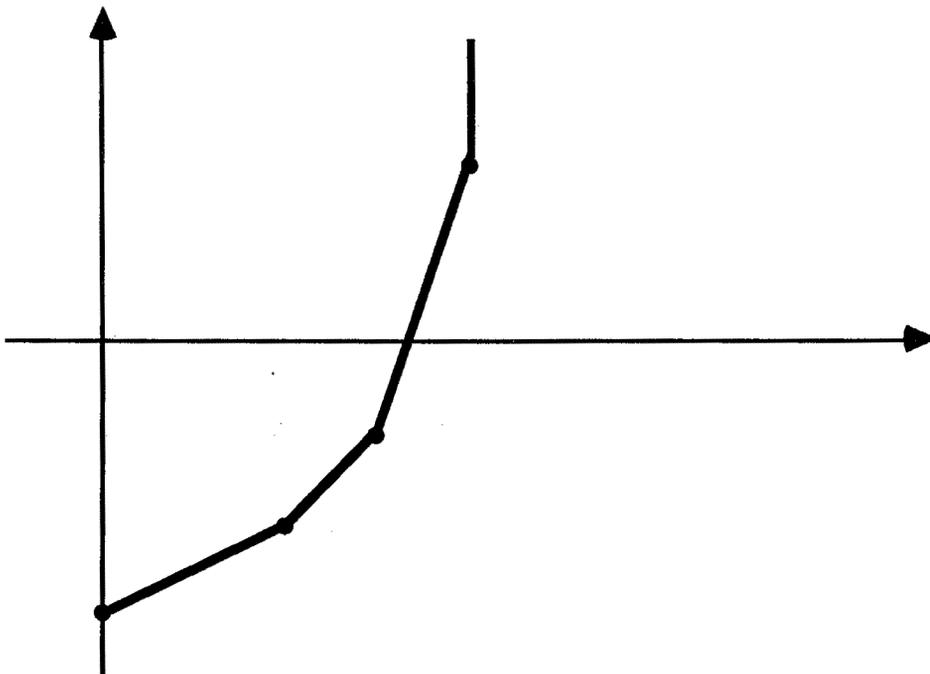
*Remarque*

A partir de maintenant, nous pouvons toujours supposer que  $D_L$  possède une *unique singularité irrégulière en zéro* (avec éventuellement une pente nulle dans  $\mathcal{N}_{D_L}$ ) et une *singularité régulière à l'infini*.

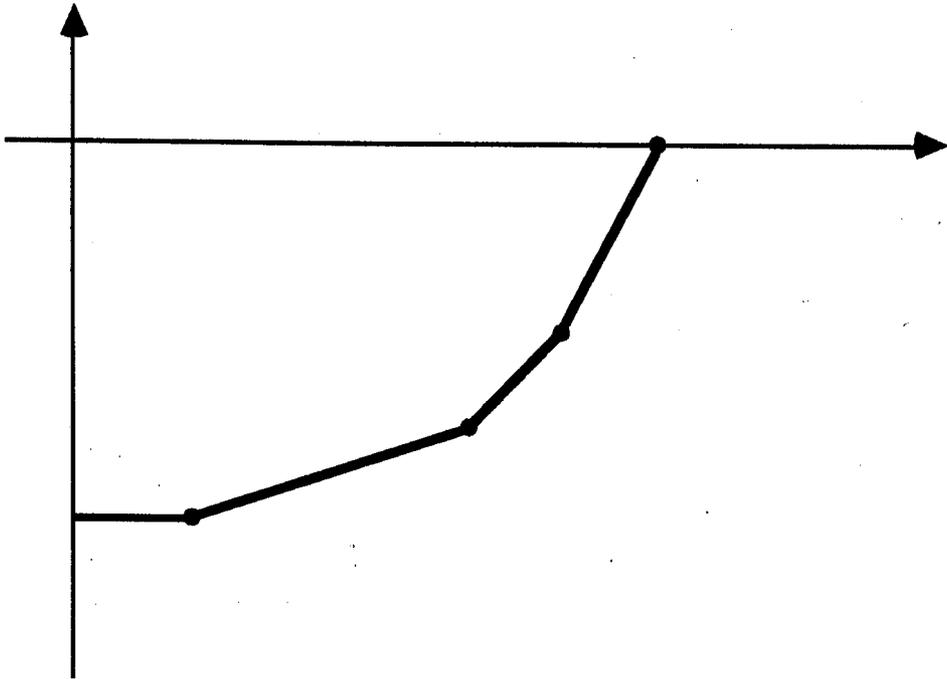
## 7.7 APERÇU SUR LA THÉORIE DE RAMIS-MALGRANGE .

Dans ce paragraphe, nous ne donnerons que les éléments nécessaires de cette théorie, dont on trouvera une étude complète dans [Duval A. 1984].

Le problème initial est de chercher une solution asymptotique d'un opérateur aux différences linéaires  $L$  à coefficients polynomiaux. On peut toujours, par une modification de Poincaré-Ramis, supposer que le  $\tau$ -polygone de  $L$  a la forme suivante:



Par la transformée de Pincherle, on est alors conduit à étudier l'opérateur adjoint  $D_L$  dont le polygone de Newton a la forme:



Considérons maintenant les solutions asymptotiques de cet opérateur  $D_L$ . Nous avons vu aux chapitres 2 et 3 que ces solutions sont de la forme:

1) Pour la partie de pente nulle, on a:

$$y = x^\lambda \hat{\varphi}(x) \quad \text{avec } \hat{\varphi} \in \mathbf{C}[[x]][\log x]$$

où  $\hat{\varphi}$  est le développement asymptotique de  $\varphi$ .

2) Pour les parties de pente positive, on a:

$$y = e^{P(\frac{1}{t})} t^\lambda \hat{\varphi}(t)$$

avec:

$$P \in \mathbf{C}[x], \quad \hat{\varphi} \in \mathbf{C}[[t]][\log t], \quad t^q = x.$$

Il est bien connu que les séries apparaissant dans ces solutions sont des séries asymptotiques.

Le problème est alors le suivant. Nous devons trouver des solutions de  $L$  qui s'expriment sous la forme:

$$P\varphi(x) = \int_l \varphi(t) t^{x-1} dt$$

pour  $x$  voisin de l'infini, puisque les développements qui nous intéressent sont valides pour  $n$  très grand.

Il est alors évident qu'une solution (une vraie solution holomorphe au voisinage de zéro) qui admettrait  $y = x^\lambda \hat{\varphi}(x)$  comme développement asymptotique, ne peut convenir. En effet, nous devrions prendre un développement asymptotique de:

$$\int_l t^{\lambda+x-1} \varphi(t) dt$$

avec comme chemin une droite joignant l'origine à l'infini. Or, pour  $x$  grand, quel que soit  $\lambda$  et la droite choisie, cette intégrale diverge.

La seule possibilité est donc d'utiliser les solutions qui correspondent aux pentes strictement positives, et nous sommes donc ramenés à déterminer des développements asymptotiques d'intégrales de la forme:

$$\int_l e^{P(\frac{1}{t})} t^{\lambda+c-1} \hat{\varphi}(t) dt .$$

Nous choisissons, comme chemin d'intégration, une droite du plan complexe allant de 0 à l'infini.

Considérons maintenant:

$$e^{P(1/t)} = e^{\alpha/t^r + \beta/t^{r-1} + \dots + \gamma/t}$$

Nous voyons que nous pouvons découper le plan autour de l'origine (ou plus généralement, la surface de Riemann du log autour de l'origine) en un certain nombre de secteurs adjacents séparés par des lignes de Stokes où l'exponentielle va être alternativement décroissante et croissante.

Si  $V$  désigne un secteur de décroissance exponentielle d'ouverture suffisamment petite, nous savons d'après le théorème fondamental des développements asymptotiques [Wasow 1965], qu'il existe une fonction holomorphe dans ce secteur admettant  $\varphi$  comme développement asymptotique. Si  $\varphi$  désigne cette fonction holomorphe, nous savons de plus que:

$$e^{P(\frac{1}{t})} \varphi(t^\lambda) \text{ est solution de } D_L$$

et donc que  $\varphi$  a une croissance modérée à l'infini où la singularité est régulière. Donc, l'intégrale est bien convergente. Et nous avons ainsi construit une véritable solution, à condition de choisir pour  $l$  un chemin, issu de zéro et allant à l'infini, tracé dans ce secteur. Or sur la ligne de "plus grande décroissance" de l'exponentielle  $e^{P(\frac{1}{t})}$ , on peut toujours se ramener à cette situation d'après un argument de [Ramis 1984b] utilisant un résultat de [Ramis 1985].

Naturellement, nous ne savons pas calculer  $\varphi$ , mais nous allons essayer à partir du développement asymptotique de  $\varphi$  d'obtenir le développement

asymptotique de la transformée de Pincherle, qui lui seul nous intéresse. Cela sera l'objet du paragraphe suivant. Avant d'aborder ce calcul, il faut compléter la théorie que nous venons d'esquisser.

Tout d'abord, nous avons mis en évidence le fait que seules sont ici intéressantes les solutions asymptotiques présentant un coefficient exponentiel. Nous allons donc en avoir  $p$ , avec:

$$p = \text{ordre}(D_L) - \text{longueur}(\text{ partie de pente nulle }).$$

Nous pouvons donc considérer l'existence de solutions  $(\Theta_i, V_i)$  où

- $V_i$  est un secteur de centre l'origine
- $\Theta_i$  est holomorphe pour  $x$  tel que  $\Re(x) > \lambda_0$ , où  $\lambda_0$  dépend de la singularité régulière à l'infini.
- le développement asymptotique provient de l'intégrale.

Nous avons ainsi  $p$  solutions élémentaires  $(\Theta_i, V_i)$ . La théorie de Ramis-Sibuya assure alors que ces  $p$  solutions constituent un système fondamental de solutions de l'équation récurrente [Ramis 85]. Les  $p$  solutions sont holomorphes dans un demi-plan  $\Re(x) > \lambda^*$  que l'on peut choisir valable pour toutes ces solutions.

## 7.8 LES FONCTIONS $\Gamma$ GÉNÉRALISÉES .

Le problème que nous allons aborder dans ce paragraphe est celui du calcul du développement asymptotique, lorsque  $x$  tend vers l'infini, de l'intégrale:

$$\int_l e^{P(\frac{1}{t})} t^{\lambda-x-1} \hat{\varphi}(t) dt$$

avec les conventions de notation du paragraphe précédent ( $l$  étant supposé tracé sur la ligne de décroissance maximale de  $e^{P(\frac{1}{t})}$ ). Ce calcul repose sur des idées de [de Bruijn 1961], complétées par [A. Duval 1984]. Rappelons les résultats essentiels donnés par A. Duval sur ce sujet. On fait en particulier l'étude avec des intégrales de la forme

$$I(s) = \int_0^1 x^{s-1} e^{P(\frac{1}{x})} dx \quad \text{avec } p = \text{deg}(P)$$

Pour le cas non logarithmique, on a le résultat suivant.

**Théorème.** L'intégrale  $I(s)$  admet, lorsque  $s \rightarrow \infty$  avec

$$\Re(s) < 0, (\sigma = \arg s \in ]\frac{\pi}{2} + \epsilon, \frac{3\pi}{2} - \epsilon[$$

un développement asymptotique de la forme:

$$I(s) \sim \sqrt{\frac{2\pi}{-sp}} \left( \frac{pa_p \frac{s}{p}}{s} \times \exp\left(\frac{s}{p} + \sum_{n=1}^p A_n \left(\frac{s}{pa_p}\right)^{1-n/p}\right) \Theta(s) \right)$$

avec:

$$P(x) = a_p x^p + \dots$$

$$\Theta(s) = 1 + \sum_{\substack{i \geq 1 \\ j \geq 0}} D_{ij} \left(\frac{pa_p}{s}\right)^{\frac{1}{p}(1+\frac{j}{i})}$$

les coefficients  $A$  et  $D$  ayant des expressions explicites.

Si nous considérons le cas logarithmique pour:

$$\int_l e^{P(\frac{1}{t})} t^{\lambda-x-1} \hat{\varphi}(t) dt$$

nous pouvons toujours paramétrer  $l$  sous la forme d'une demi-droite:

$$\rho e^{i\theta_0}, \quad \rho \in [0, +\infty]$$

On pose donc:

$$t = \rho e^{i\theta_0} \quad \text{avec} \quad dt = e^{i\theta_0} d\rho$$

L'intégrale s'écrit alors:

$$\int_0^{+\infty} e^{P(\frac{1}{\rho e^{i\theta_0}})} \rho^{\lambda-x-1} e^{i\theta_0(\lambda-x-1)} \times \hat{\varphi}(\rho e^{i\theta_0}) e^{i\theta_0} d\rho$$

soit, avec de nouvelles notations évidentes:

$$e^{i\theta_0(\lambda-x)} \int_0^{+\infty} e^{\tilde{P}(\frac{1}{\rho})} \rho^{\lambda-x-1} \tilde{\varphi}(\rho) d\rho \tag{7}$$

Afin de donner un développement de l'intégrale de la formule (7), posons  $s = \lambda - x$ . Nous avons donc:

$$\int_0^{+\infty} e^{\tilde{P}(\frac{1}{\rho})} \rho^{s-1} \tilde{\varphi}(\rho) d\rho. \tag{8}$$

## Chapitre 7

Par rapport à l'intégrale associée à la fonction  $\Gamma$  généralisée, nous avons à considérer une partie:

$$\int_1^{+\infty} e^{\tilde{P}(\frac{1}{\rho})} \rho^{s-1} \tilde{\varphi}(\rho) d\rho \quad (9)$$

et aussi une "perturbation holomorphe" de  $\rho^{s-1}$ .

Il est cependant clair que pour une intégrale

$$\int_1^{+\infty} e^{\tilde{P}(\frac{1}{\rho})} \rho^{s-1} d\rho \quad (10)$$

la partie exponentielle reste bornée sur  $[1, +\infty]$  par la valeur en 1, et  $s$  étant négatif pour  $x$  assez grand  $\int_1^{+\infty} \rho^{s-1} d\rho$  est bornée. Cette quantité n'apportera donc rien au développement asymptotique. D'autre part, la partie "perturbatrice" n'apportera pas de modification aux termes dominants du développement asymptotique.

Nous avons donc les développements asymptotiques souhaités dans notre construction. On pourra se reporter à [A. Duval 1984] pour l'étude du cas logarithmique.

## Chapitre 8

### APPLICATION DES MÉTHODES DELLA DORA-WAZNER ET RAMIS

#### Étude comparative d'un exemple d'équation aux différences d'ordre 2

##### 8.1 INTRODUCTION .

Le but de ce chapitre est d'appliquer à une équation différentielle linéaire ordinaire les techniques développées dans les équipes de Calcul Formel de Grenoble et de Strasbourg.

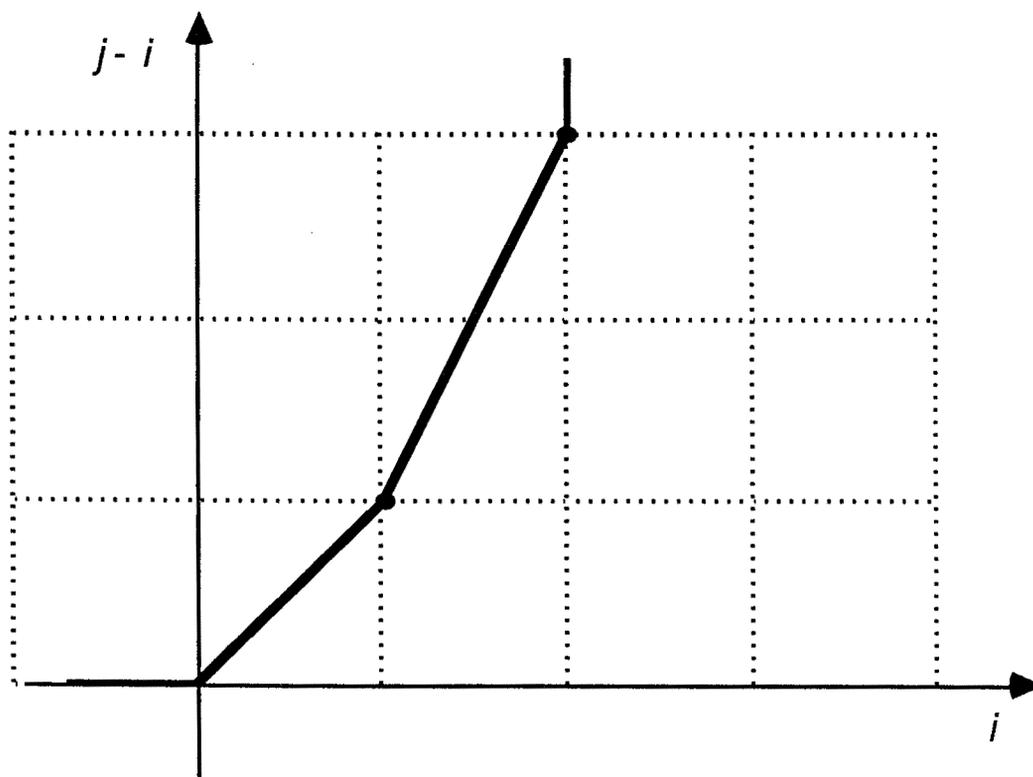
Pour cette étude, nous choisirons une équation test du second ordre. Soit donc l'équation:

$$D = 4x^5 \partial^2 + 2x^2 \partial + 1 \quad (1)$$

Cette équation présente

- à l'origine, une singularité irrégulière
- à l'infini, une singularité régulière;

Cela se déduit facilement de la lecture du polygone de Newton.



A l'origine, la singularité irrégulière est caractérisée par les deux pentes  $\lambda = 1$  et  $\lambda = 2$  du polygone. On remarque aussi que cette équation ne présente pas d'autres singularités dans le plan complexe.

Dans les chapîtres 1 et 2 nous avons montré comment on pouvait associer aux deux pentes de valeur 1 et 2 des développements asymptotiques de la forme:

$$y = e^{a/x} x^\lambda \left( \sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i \right) \quad (2)$$

Nous allons donc déterminer la forme de la solution pour ces deux pentes.

### 8.1.1 Cas de la pente $\lambda_1 = 1$

Dans ce cas, nous détaillerons tous les calculs qui nous permettront de déterminer les coefficients  $a$ ,  $\lambda$ , et les  $g_i$  de la solution asymptotique.

On sait que la solution de  $D$  est de la forme:

$$y = e^{a/x} z$$

D'où:

$$y' = \left( -\frac{a}{x^2} z + z' \right) e^{a/x}$$

$$y'' = \left( z'' - \frac{2a}{x^2} z' + \left( \frac{2a}{x^3} + \frac{a^2}{x^4} \right) z \right) e^{a/x}$$

En reportant cela dans  $Dy = 0$ , on obtient:

$$\left(4x^5 z'' + (-8ax^3 + 2x^2)z' + (8ax^2 + 4a^2x + 2a + 1)z\right) e^{\frac{a}{x}} = 0 \quad (3)$$

dont l'équation caractéristique est:

$$f_0(a) = 1 - 2a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

et l'équation (3) devient

$$4x^5 z'' + (2x^2 - 4x^3)z' + (x + 4x^2)z = 0 \quad (4)$$

On cherche maintenant une solution de la forme  $D(x^\lambda) = 0$ , soit:

$$\begin{aligned} D(x^\lambda) &= 4x^5 \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2} + (2x^2 - 4x^3)\lambda x^{\lambda-1} + (x + 4x^2)x^\lambda \\ &= x^{\lambda+1} \left( (1 + 2\lambda) + 4x(1 - \lambda) + x^2 4\lambda(\lambda - 1) \right) \end{aligned}$$

On peut donc écrire:

$$D(x^\lambda) = x^{\lambda+1} \left( f_0(\lambda) + x f_1(\lambda) + x^2 f_2(\lambda) \right)$$

avec:

$$\begin{aligned} f_0(\lambda) &= 1 + 2\lambda \\ f_1(\lambda) &= 4(1 - \lambda) \\ f_2(\lambda) &= 4\lambda(\lambda - 1) \end{aligned}$$

où l'équation caractéristique est:

$$f_0(\lambda) = 1 + 2\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{1}{2}$$

La solution générale s'écrit alors:

$$y = e^{\frac{1}{2x}} x^{-\frac{1}{2}} \sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i$$

où les  $g_i$  vérifient une relation de récurrence que l'on va déterminer.

Nous savons que les  $g_i$  sont solutions du système linéaire infini  $FG = 0$ , avec

$$F = \begin{pmatrix} f_0(\lambda) & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ f_1(\lambda) & f_0(\lambda+1) & 0 & 0 & \dots & \dots \\ f_2(\lambda) & f_1(\lambda+1) & f_0(\lambda+2) & 0 & \dots & \dots \\ 0 & f_2(\lambda+1) & f_1(\lambda+2) & f_0(\lambda+3) & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & f_2(\lambda+j) & f_1(\lambda+j+1) & f_0(\lambda+j+2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

et

$$G = \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_j \\ \vdots \end{pmatrix}$$

La deuxième équation:

$$f_1(\lambda)g_0 + f(\lambda+1)g_1 = 0$$

permet de déterminer  $g_1$ . En effet, avec  $\lambda = -\frac{1}{2}$ , on a:

$$g_1 = -3g_0$$

D'autre part, si l'on évalue  $f_0, f_1, f_2$  pour  $\lambda = -\frac{1}{2}$  dans l'équation générale:

$$f_2(\lambda+j)g_j + f_1(\lambda+j+1)g_{j+1} + f_0(\lambda+j+2)g_{j+2} = 0 \quad (6)$$

on a la relation de récurrence suivante:

$$(2j-3)(2j-1)g_j + 2(1-2j)g_{j+1} + 2(j+2)g_{j+2} = 0 \quad (7)$$

### 8.1.2 Cas de la pente $\lambda_2 = 2$

On détermine de la même façon la solution, qui est dans ce cas:

$$y = e^{\frac{1-2x}{4x^2}} x^3 \sqrt{x} \left( \sum_{i=0}^{+\infty} g_i x^i \right) \quad (8)$$

où les  $g_i$  vérifient aussi la relation de récurrence du second ordre suivante:

$$(7+2i)(5+2i)g_i + 2(7+2i)g_{i+1} - (2i+4)g_{i+2} = 0 \quad (9)$$

avec la condition initiale

$$g_1 = 5g_0 .$$

Afin d'étudier les solutions associées à ces développements asymptotiques, nous allons appliquer deux méthodes:

- 1) la méthode Della Dora-Wazner,
- 2) la méthode de Pincherle-Ramis.

Par ailleurs, nous savons que l'infini est une singularité régulière pour l'équation différentielle  $Dy = 0$ . Nous allons montrer que le changement de variable  $t = \frac{1}{x}$  va conduire à l'étude d'un autre opérateur différentiel  $D_\infty$  que nous allons déterminer.

Rappelons que si  $x = \frac{1}{t}$  on a:

$$\begin{aligned} \partial_x &= \partial_t \left( \frac{dt}{dx} \right) \\ &= -t^2 \partial_t \\ \partial_x^2 &= t^4 \partial_t^2 + 2t^3 \partial_t \end{aligned}$$

En faisant ce changement de variable dans (1), nous obtenons:

$$\begin{aligned} D_\infty &= 4\left(\frac{1}{t}\right)^5 (t^4 \partial_t^2 + 2t^3 \partial_t) + 2\left(\frac{1}{t}\right)^2 (-t^2 \partial_t) + 1 \\ &= 4t \partial_t^2 + 2(4 - t^2) \partial_t + t^2 \end{aligned} \quad (10)$$

Cet opérateur (10) présente deux solutions fuchsienues dont les exposants sont donnés par les racines de l'équation caractéristique  $f_0(\lambda) = 0$ , avec

$$f_0(\lambda) = 4\lambda(\lambda + 1)$$

soit  $\lambda_1 = 0$  et  $\lambda_2 = -1$ . Il n'y a donc pas de ramification. Cependant, ces deux racines diffèrent d'un entier, et donc il y aura des termes logarithmiques dans la solution.

De la même façon, les  $g_i$  sont déterminés par le système:

$$\begin{aligned} f_0(\lambda) &= 0 \\ f_1(\lambda)g_0 + f_0(\lambda + 1)g_1 &= 0 \\ f_2(\lambda)g_0 + f_1(\lambda + 1)g_1 + f_0(\lambda + 2)g_2 &= 0 \end{aligned}$$

et par l'équation de récurrence:

$$f_3(\lambda + j)g_j + f_2(\lambda + j + 1)g_{j+1} + f_1(\lambda + j + 2)g_{j+2} + f_0(\lambda + j + 3)g_{j+3} = 0$$

avec  $f_0(\lambda) = 4\lambda(\lambda + 1)$ ,  $f_1(\lambda) = 0$ ,  $f_2(\lambda) = -2\lambda$ ,  $f_3(\lambda) = 1$ . Donc, pour  $\lambda = -1$ , on a la relation de récurrence suivante:

$$g_j - 2jg_{j+1} + 4(j+2)(j+1)g_{j+3} = 0$$

avec  $g_1 = 0$ ,  $g_2 = 18g_0$

(11)

La deuxième solution s'obtient de manière classique.

Dans les paragraphes suivants, nous ferons donc une étude comparative des méthodes appliquées à une même équation aux différences linéaires du second ordre.

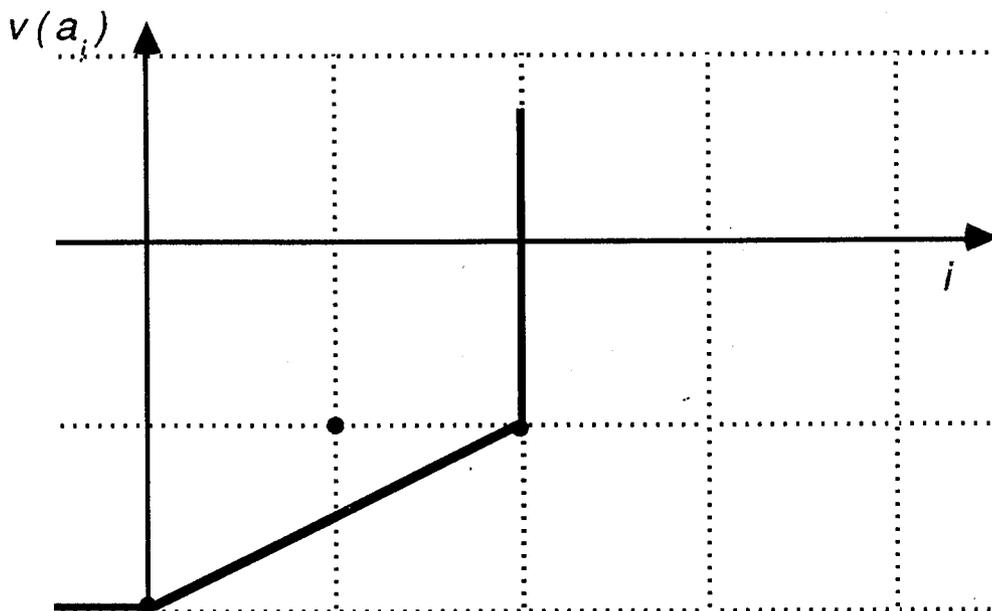
## 8.2 LA MÉTHODE DELLA DORA-WAZNER .

### 8.2.1 Étude de la première équation récurrente.

Nous allons tout d'abord étudier l'équation récurrente (7), c'est-à-dire l'opérateur aux différences  $L$  suivant:

$$L = 2(x+2)\tau^2 + 2(1-2x)\tau + (2x-1)(2x-3)$$
(12)

À  $L$  on associe son  $\tau$ -polygone



Ce polygone présente une pente  $\frac{1}{2}$ , ce qui conduit au changement de variable:

$$y = \gamma(x)^{\frac{1}{2}} v$$

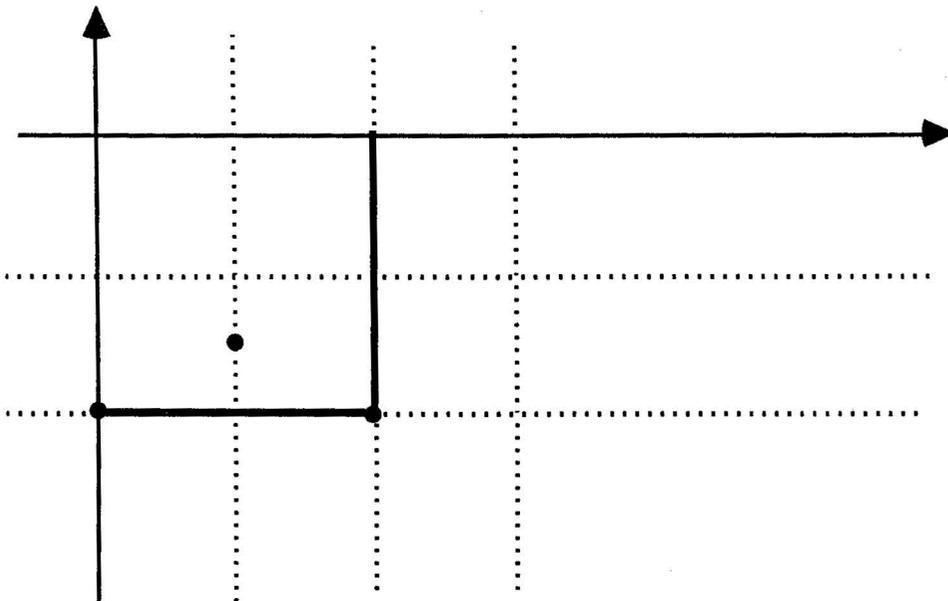
transformant  $L$  en un nouvel opérateur  $L'$

$$L' = 2(x+2)\sqrt{x}\sqrt{x+1} \tau^2 + 2(1-2x)\sqrt{x} \tau + (2x-1)(2x-3)$$

$L'$  peut aussi s'écrire:

$$\begin{aligned} L' &= 2(x+2)x\sqrt{1+\frac{1}{x}} \tau^2 + 2(1-2x)\sqrt{x} \tau + (2x-1)(2x-3) \\ &= 2(x+2)x \left( 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1.3}{2.4.6} \frac{1}{x^3} \dots \right. \\ &\quad \left. + (-1)^{n-1} \frac{1.3 \dots (2n-3)}{2.4 \dots 2n} \frac{1}{x^n} + \dots \right) \tau^2 \\ &\quad + 2(1-2x)\sqrt{x} \tau + (2x-1)(2x-3) \end{aligned}$$

et admet le  $\tau$ -polygone



Il est clair que cette transformation induit des ramifications qui vont se retrouver dans les solutions. L'étape suivante consiste à introduire un nouveau changement de variable de la forme:

$$v = q^x w$$

Il faut maintenant former  $L_q(e^{\alpha\sqrt{x}}w)$ . La formule de Leibnitz donne immédiatement

$$\begin{aligned}\delta(e^{\alpha\sqrt{x}}v) &= \delta(e^{\alpha\sqrt{x}})v + e^{2\sqrt{x+1}}\delta v \\ \delta^2(e^{\alpha\sqrt{x}}v) &= \delta^2(e^{\alpha\sqrt{x}})v + 2\delta(e^{\alpha\sqrt{x+1}})\delta v + e^{\alpha\sqrt{x+2}}\delta^2 v\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}L_q(e^{\alpha\sqrt{x}}v) &= C_2 e^{\alpha\sqrt{x+2}}\delta^2 v + \left(2C_2\delta e^{\alpha\sqrt{x+1}} + C_1 e^{\alpha\sqrt{x+1}}\right)\delta v \\ &\quad + \left(C_2\delta^2 e^{\alpha\sqrt{x}} + C_1\delta e^{\alpha\sqrt{x}} + C_0 e^{\alpha\sqrt{x}}\right)v\end{aligned}$$

Nous notons  $L_{q,\alpha}$  le nouvel opérateur:

$$L_{q,\alpha} = D_2\delta^2 + D_1\delta + D_0 \quad (14)$$

où les  $D_i$  sont les coefficients de  $\delta^i$  dans l'expression précédente. On a la relation matricielle:

$$\begin{pmatrix} D_2 \\ D_1 \\ D_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\alpha\sqrt{x+2}} & 0 & 0 \\ 2\delta(e^{\alpha\sqrt{x+1}}) & e^{\alpha\sqrt{x+1}} & 0 \\ \delta^2(e^{\alpha\sqrt{x}}) & \delta(e^{\alpha\sqrt{x}}) & e^{\alpha\sqrt{x}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_1 \\ C_0 \end{pmatrix}$$

nous la noterons:

$$D = AC.$$

La matrice  $A$  doit être développée au voisinage de l'infini. Nous allons l'écrire par colonne, après avoir factorisé  $e^{\alpha\sqrt{x}}$ .

première colonne:

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{\alpha}{\sqrt{x}} + \frac{\alpha^2}{2x} + \frac{8\alpha^3 - 24\alpha}{48x\sqrt{x}} + \frac{16\alpha^4 - 112\alpha^2}{384x^2} + \dots \\ 2\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{x}} + \frac{3\alpha^3}{8x} + \frac{7\alpha^3 - 18\alpha}{48x\sqrt{x}} + \frac{15\alpha^4 - 168\alpha^2}{384x^2} + \dots\right) \\ \frac{\alpha^2}{4x} + \frac{\alpha^3 - 2\alpha}{8x\sqrt{x}} + \frac{7\alpha^4 - 72\alpha^2}{192x^2} + \dots \end{pmatrix}$$

deuxième colonne:

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{\alpha}{2\sqrt{x}} + \frac{\alpha^2}{8x} + \frac{\alpha^3 - 6\alpha}{48x\sqrt{x}} + \frac{\alpha^4 - 24\alpha^2}{384x^2} + \dots \\ \frac{\alpha}{2\sqrt{x}} + \frac{\alpha^2}{8x} + \frac{\alpha^3 - 6\alpha}{48x\sqrt{x}} + \frac{\alpha^4 - 24\alpha^2}{384x^2} + \dots \end{pmatrix}$$

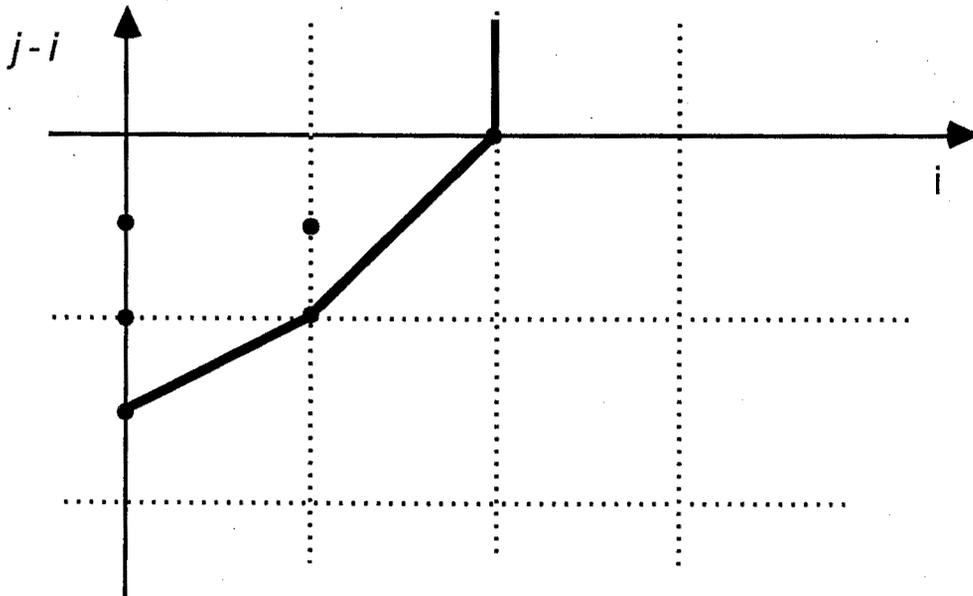
L'équation caractéristique est alors:

$$q^2 + 2 = 0$$

Elle a deux racines conjuguées  $q = i\sqrt{2}$  et  $q = -i\sqrt{2}$ . En utilisant les techniques décrites dans le chapitre 3, l'opérateur  $L'''$  est transformé en l'opérateur  $L_q$  suivant:

$$L_q = \left( -4(x^2 + 2x) \left( 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \dots \right) \right) \delta^2 + \\ \left( 2(-4x^2 - 2qx\sqrt{x} - 10x + q\sqrt{x} - \frac{7}{2} + \dots) \right) \delta + \\ \left( -4qx\sqrt{x} - 18x + 2q\sqrt{x} + \dots \right)$$

Le  $\delta$ -polygone de cet opérateur est alors



Notons:

$$L_q C_2 \delta^2 + C_1 \delta + C_0$$

où les  $C_i$  sont les coefficients de  $\delta$  dans l'expression précédente. La méthode proposée conduit à un nouveau changement de variable:

$$u = e^{\alpha\sqrt{x}} w .$$

ce qui conduit à l'opérateur:

$$L'' = 2(x+2)xq^2\theta(x)\tau^2 + 2(1-2x)\sqrt{x}q\tau + (2x-1)(2x-3)$$

où  $\theta$  représente le développement de  $\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ .

Afin de construire le  $\tau$ -polygone associé à  $L''$ , nous devons maintenant faire le changement:

$$\delta = \tau - 1 \text{ d'où } \tau^2 = \delta^2 + 2\delta + 1$$

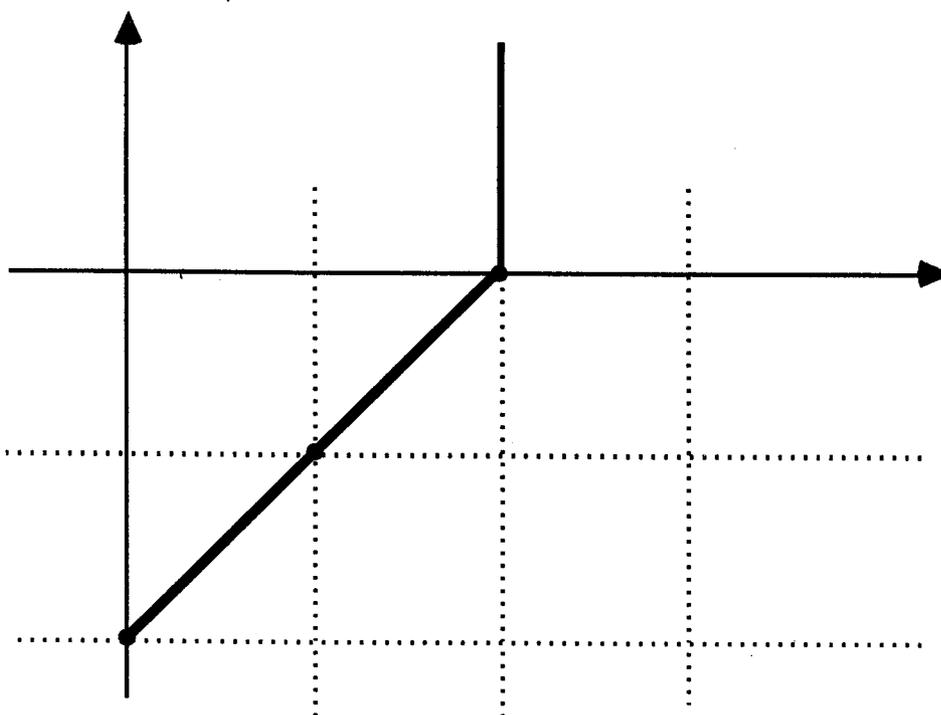
$L''$  se transforme alors en:

$$L''' = 2(x+2)xq^2\theta(x)\delta^2 + (4x(x+2)q^2\theta(x) + 2(1-2x)\sqrt{x}q)\delta + (2xq^2(x+2)\theta(x) + 2\sqrt{x}q(1-2x) + (2x-1)(2x-3))$$

Les coefficients de ce nouvel opérateur sont:

$$L''' = \left( 2(x^2 + 2x)q^2 \left( 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \dots \right) \right) \delta^2 + \left( 2(2x^2q^2 - 2qx\sqrt{x} + (4q^2 + q)^2x + q\sqrt{x} + \frac{7}{4}q^2 + \dots) \right) \delta + \left( 2x^2(q^2 + 2) - 4qx\sqrt{x} + x(5q^2 - 9) + 2q\sqrt{x} + \dots \right)$$

Le polygone a donc la forme suivante:





Le coefficient "non fuchsien" de notre solution asymptotique est donc:

$$q^x e^{-q\sqrt{x}} \Theta(x) \quad (16)$$

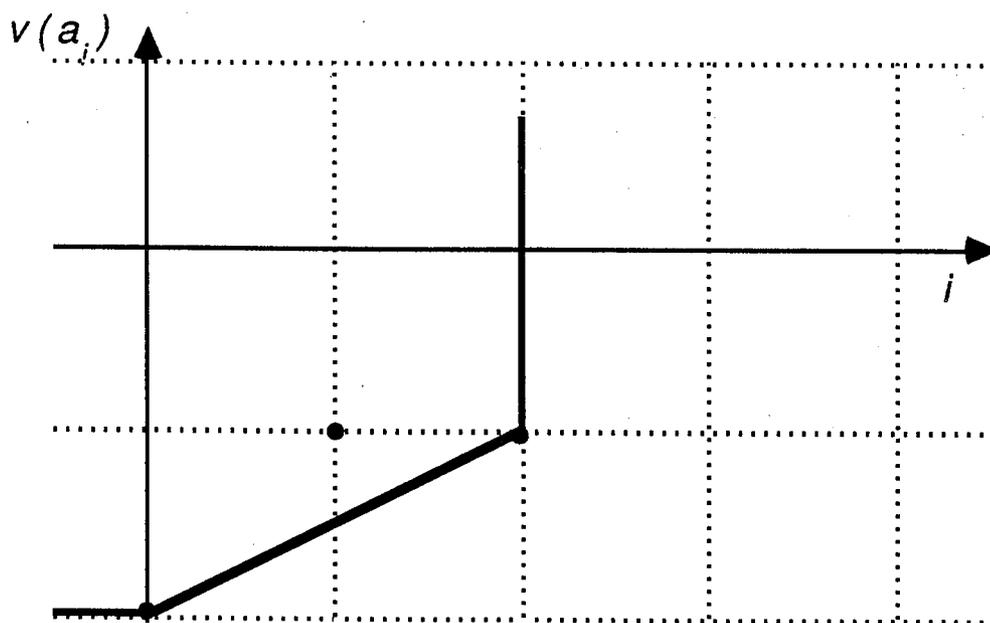
Comme  $q = \pm i\sqrt{2}$ , nous avons le terme principal du développement asymptotique.

### 8.2.2 Étude de la deuxième équation récurrente.

Nous allons maintenant reprendre l'étude pour l'autre équation récurrente, l'équation (9). Soit donc l'opérateur  $L$  suivant:

$$L = -(2x + 4)\tau^2 + 2(2x + 7)\tau + 4x^2 + 24x + 35$$

Le  $\tau$ -polygone de  $L$  est:



Cela nous montre immédiatement que nous sommes conduit à un changement de variable de la forme:

$$u = \gamma(x)^{\frac{1}{2}} v$$

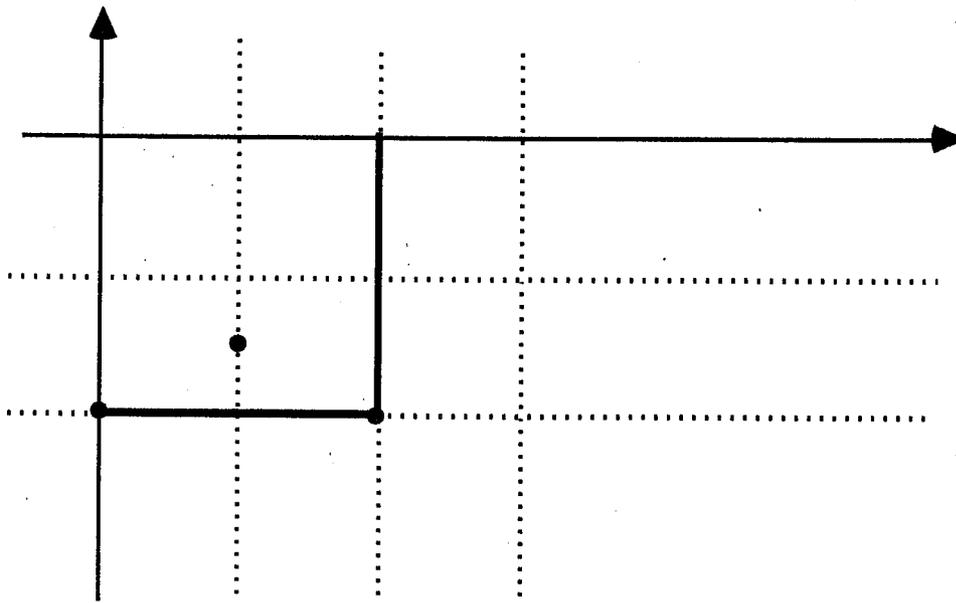
ce qui nous donne le nouvel opérateur  $L'$  suivant:

$$L' = -(2x + 4)\sqrt{x}\sqrt{x+1} \tau^2 + 2(2x + 7)\sqrt{x} \tau + 4x^2 + 24x + 35$$

que nous écrivons:

$$L' = - (2x + 4)x \left( 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + \frac{1.3}{2.4.6} \frac{1}{x^3} \dots \right) \tau^2 + 2(2x + 7)\sqrt{x} \tau + 4x^2 + 24x + 35$$

Le  $\tau$ -polygone de  $L'$  est:



De nouveau, le changement de variable:

$$v = q^x w$$

conduit à un nouvel opérateur  $L''$

$$L'' = - (2x + 4)x \left( 1 + \frac{1}{2x} \dots \right) q^2 \tau^2 + 2q(2x + 7)\sqrt{x} \tau + 4x^2 + 24x + 35$$

Passons alors à l'opérateur en  $\delta$  en posant  $\tau = \delta + 1$ . L'opérateur obtenu sera noté:

$$L_q = C_2 \delta^2 + C_1 \delta + C_0$$

avec:

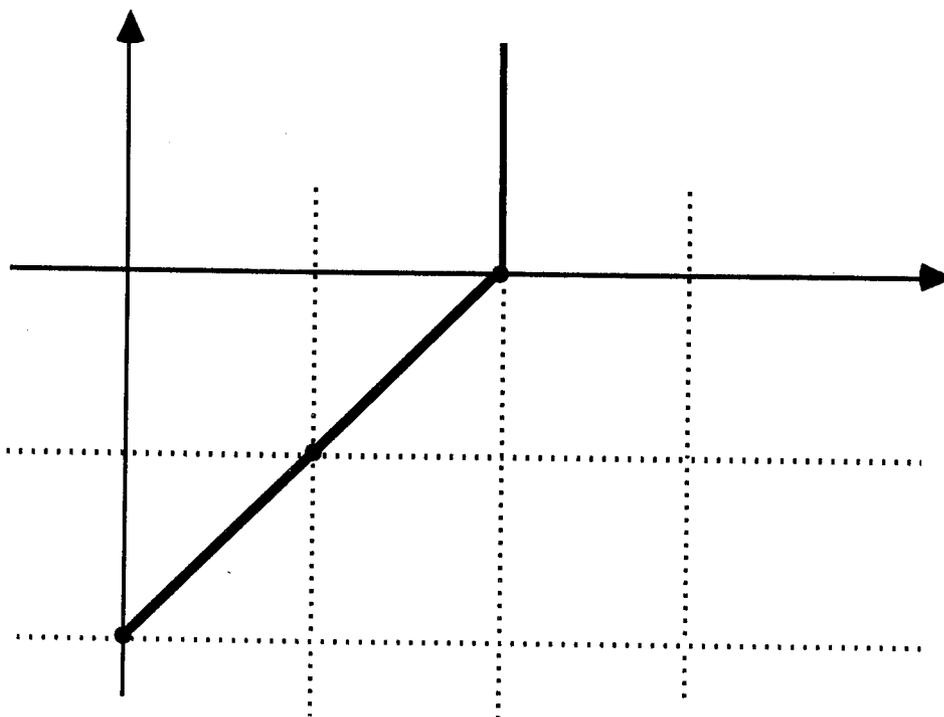
$$C_2 = -2(x + 2)x \left( 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} \dots \right) q^2$$

$$C_1 = -2(2x + 4)x \left( 1 + \frac{1}{2x} \dots \right) q^2 + 2q(2x + 7)\sqrt{x}$$

$$C_0 = -2(x + 2)x \left( 1 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} \dots \right) q^2 + 2q(2x + 7)\sqrt{x} + 4x^2 + 24x + 35$$

## Chapitre 8

Le  $\tau$ -polygone de cet opérateur est :



Si nous ordonnons ces différents développements, nous obtenons, après avoir remarqué que l'équation caractéristique est  $q^2 - 2 = 0$ , donc a deux racines réelles.

$$C_2 = -4\left(x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{7}{8} - \frac{3}{16x} \dots\right)$$

$$C_1 = 2(-4x^2 + 4qx\sqrt{x} - 10x + 14q\sqrt{x} \dots)$$

$$C_0 = 4qx\sqrt{x} + 14x + 14q\sqrt{x} + \frac{63}{2}$$

Avec le choix de  $q^2 = 2$  on doit faire un nouveau changement de variable de la forme:

$$u = e^{\alpha\sqrt{x}}w$$

Reprenons la formulation précédente qui nous conduit à l'opérateur:

$$L_{q,\alpha} = D_2\delta^2 + D_1\delta + D_0$$

les  $D_i$  étant définis par les formules précédentes. Nous n'allons pas reprendre les calculs comme dans la section précédente, mais nous allons abrégé cette discussion en nous contentant de déterminer  $\alpha$ . Pour cela, cherchons le terme

“principal” du développement de  $D_0$  provenant de:

$$\left(\frac{\alpha^2}{4x} + \frac{\alpha^3 - 2\alpha}{8x\sqrt{x}} + \frac{7\alpha^4 - 72\alpha^2}{192x^2}\right)(-4x^2 - 10x\dots) \\ + \left(\frac{\alpha}{2\sqrt{x}} + \frac{\alpha^2}{8x}\dots\right)(-8x^2 + 8qx\sqrt{x}\dots) + (4qx\sqrt{x} + 14x\dots)$$

cela nous conduit donc à l'équation caractéristique:

$$q - \alpha = 0 \implies \alpha = q$$

Le coefficient non fuchsien est alors

$$q^x e^{q\sqrt{x}} \Psi(x) \quad \text{avec } q = \pm\sqrt{2} \quad (18)$$

**En résumé:**

- Les solutions formelles associées à la pente 1 sont de la forme:

$$y = e^{\frac{1}{2x}} x^{-\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right)$$

les  $a_i$  étant parfaitement déterminés par l'équation récurrente du second ordre associée (7). On a de plus démontré que:

$$a_i = \alpha a_i^1 + \beta a_i^2$$

où les  $a_i^j$  solutions de l'équation récurrente ont un comportement asymptotique défini par:

$$a_n^1 = \gamma(n)^{1/2} i^n (\sqrt{2})^n e^{-i\sqrt{2n}} \Theta_1(n) \\ a_n^2 = \gamma(n)^{1/2} (-1)^n i^n (\sqrt{2})^n e^{i\sqrt{2n}} \Theta_2(n)$$

Ainsi, nous avons toujours:

$$a_n = \gamma(n)^{1/2} i^n (\sqrt{2})^n \left( \alpha e^{-i\sqrt{2n}} \Theta_1(n) + (-1)^n \beta e^{i\sqrt{2n}} \Theta_2(n) \right)$$

- Les solutions formelles associées à la pente 2 sont de la forme

$$y = e^{(1-2x)/(4x^2)} x^3 \sqrt{x} \left( \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \right)$$

et nous venons de montrer que les  $b_i$  vérifient une relation de la forme

$$b_n = E(n)^{1/2} \left( \alpha(\sqrt{2})^n e^{\sqrt{2}n} \Psi_{\sqrt{2}}(n) + \beta(-1)^n (\sqrt{2})^n e^{-\sqrt{2}n} \Psi_{-\sqrt{2}}(n) \right)$$

Les solutions ne peuvent pas être plus explicitement déterminées pour le moment. Néanmoins, en reprenant la notation des espaces Gevrey, on peut écrire:

$$\mathbf{C}[[x]]_{k, \Lambda_0} = \left\{ \sum a_n x^n \in \mathbf{C}[[x]] \mid \exists c > 0 \forall n \in \mathbf{N}, |a_n| \leq c(n!)^{1/k} \exp(\Lambda_0 n) \right\}$$

On voit que:

- pour la solution formelle associée à la pente 1, on a:

$$|a_n| \leq K(n!)^{1/2} e^{n \log(\sqrt{2})}$$

et donc:

$$a(x) \in \mathbf{C}[[x]]_{2, \log(\sqrt{2})}$$

- pour la solution formelle associée à la pente 2 on a:

$$|a_n| \leq K'(n!)^{1/2} e^{n \log(\sqrt{2})}$$

et donc de même:

$$b(x) \in \mathbf{C}[[x]]_{2, \log(\sqrt{2})}$$

### 8.3 LA MÉTHODE DE PINCHERLE-RAMIS .

Reprenons l'étude de l'équation récurrente (7) associée à la pente 1, soit

$$L = 2(x+2)\tau^2 + 2(1-2x)\tau + 4x^2 - 8x + 3 .$$

Afin d'étudier  $L$ , on lui associe son adjoint au sens de Pincherle, comme cela a été vu au chapitre précédent. Puis on écrit sous forme de Newton les coefficients de  $L$ , soit:

$$\begin{aligned} -4x + 2 &= -4(x+1)_1 + 6 \\ 4x^2 - 8x + 3 &= 4(x)_2 - 4(x) + 3 \\ 2(x+2) &= 2(x+2)_1 \end{aligned}$$

$L$  s'écrit alors:

$$L = 2(x+2)_1 r^2 + (-4(x+1)_1 + 6)r + (4(x)_2 - 4(x) + 3)$$

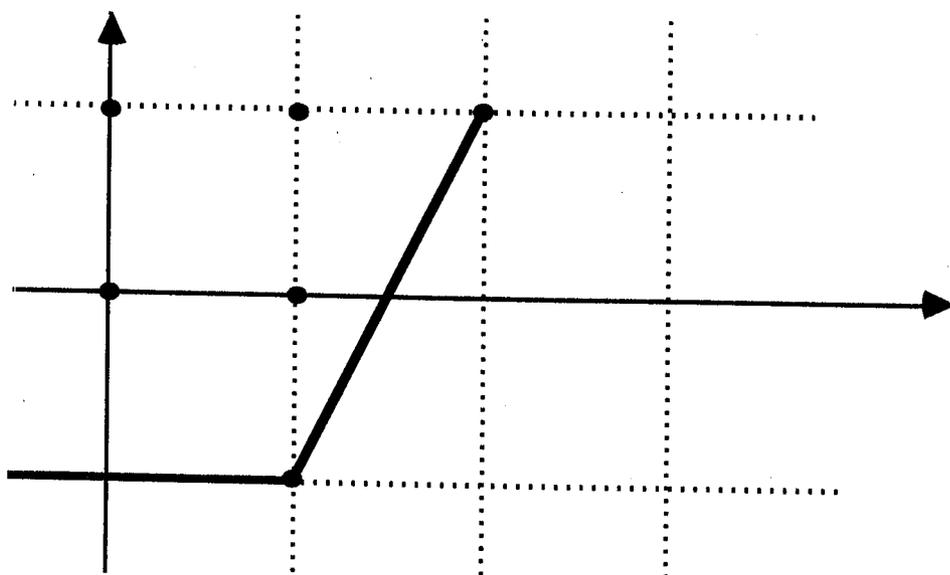
dont la forme de l'adjoint de Pincherle est:

$$\begin{aligned} D &= 2t^{-1}\partial - 4\partial + 6t^{-1}\partial^0 + 4t^2\partial^2 - 4t\partial + 3 \\ &= 4t^2\partial^2 + (2t^{-1} - 4 - 4t)\partial + 6t^{-1} + 3. \end{aligned}$$

En éliminant le dénominateur dans  $D$ , on obtient:

$$D' = 4t^3\partial^2 + 2(1 - 2t - 2t^2)\partial + 6 + 3t.$$

Cet opérateur différentiel  $D'$  a comme polygone de Newton



Il présente donc

- une singularité régulière en zéro;
- une singularité régulière à l'infini.

Nous allons maintenant étudier le comportement asymptotique de ces solutions.

Le premier changement de variable à effectuer est:

$$y = e^{\alpha/t^2} z$$

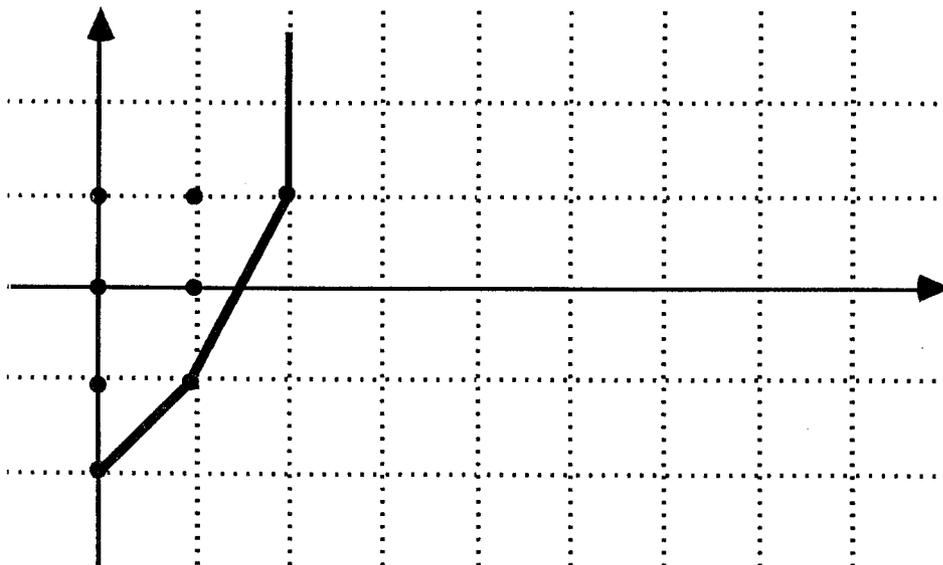
qui conduit à l'opérateur:

$$D_\alpha = 4t^3 \partial^2 + 2 \left( (1 - 8\alpha) - 2t - 2t^2 \right) \partial + \left( \frac{4}{t^3} (4\alpha^2 - \alpha) + \frac{8\alpha}{t^2} - \frac{16\alpha}{t} + 6 + 3t \right).$$

On met ainsi en évidence l'équation indicelle qui est  $\alpha(4\alpha - 1) = 0$ . Seule la solution non nulle est à prendre en compte, donc  $\alpha = \frac{1}{4}$ , d'où:

$$D_{\frac{1}{4}} = 4t^3 \partial^2 - 2(1 + 2t + 2t^2) \partial + \frac{2}{t^2} - \frac{4}{t} + 6 + 3t \quad (19)$$

Considérons son polygone de Newton.



Nous retrouvons le fait que la pente d'ordre 2 est devenue d'ordre 1. Nous sommes alors conduit à poser le nouveau changement de variable:

$$y = e^{\frac{\beta}{t}} u$$

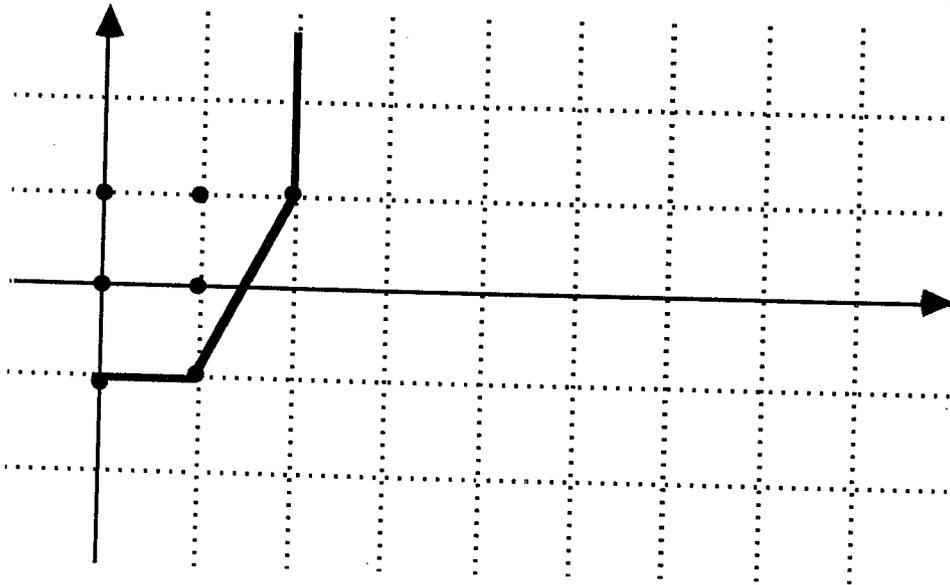
On obtient le nouvel opérateur:

$$D_{(\frac{1}{4}, \beta)} = 4t^3 \partial^2 - 2(1 + 2(1 + 2a)t + 2t^2) \partial + \left( \frac{2(a + 1)}{t^2} + \frac{4a^2 + 4a - 4}{t} + 12a + 6 + 3t \right)$$

dont l'équation caractéristique est  $a + 1 = 0$ . En prenant cette valeur pour  $a$ , on obtient:

$$D_{(\frac{1}{4}, -1)} = 4t^3 \partial^2 - 2(1 - 2t + 2t^2) \partial + \left( -\frac{4}{t} - 6 + 3t \right) \quad (20)$$

Son polygone de Newton est:



La solution va alors se présenter sous la forme asymptotique suivante:

$$y = e^{(1/4t^2 - 1/t)} \Psi(t) \quad (21)$$

où  $\Psi$  est une solution fuchsienne.

Déterminons cette solution. Pour cela, on applique l'opérateur (20) à  $t^\lambda$ , soit:

$$\begin{aligned} D(t^\lambda) &= 4\lambda(\lambda - 1)t^{\lambda+1} - 2\lambda(1 - 2t + 2t^2)t^{\lambda-1} + \left(-\frac{4}{t} - 6 + 3t\right)t^\lambda \\ &= t^{\lambda-1} \left( -2(\lambda + 2) + 2(2\lambda - 3)t + (4\lambda^2 - 8\lambda + 3)t^2 \right). \end{aligned}$$

On écrit cet opérateur sous la forme:

$$D(t^\lambda) = t^{\lambda-1} (f_0(\lambda) + f_1(\lambda)t + f_2(\lambda)t^2)$$

où nous notons:

$$f_0(\lambda) = -2(\lambda + 2) \quad \text{l'équation indiciale}$$

$$f_1(\lambda) = 2(2\lambda - 3)$$

$$f_2(\lambda) = 4\lambda^2 - 8\lambda + 3.$$

Cela nous conduit à choisir  $\lambda = -2$ . Donc la forme de la solution est:

$$y = e^{\frac{1}{4t^2} - \frac{1}{t}} t^{-2} \Theta(t) \quad (22)$$

où  $\Theta(t)$  est une série formelle appartenant à  $\mathbf{C}[[x]]$  et de terme constant non nul.

*Remarque:*

Cet opérateur a une autre solution asymptotique en zéro. Cette solution est associée à la pente nulle, donc nous allons appliquer à  $D'$ , la même méthode que celle appliquée précédemment.

$$\begin{aligned} D'(t^\lambda) &= \lambda(\lambda - 1)t^{\lambda+1} + 2(1 - 2t - 2t^2)\lambda t^{\lambda-1} + (6 + 3t)t^\lambda \\ &= t^{\lambda-1} \left( 2\lambda + 2(-2\lambda + 3)t + (\lambda(\lambda - 1) - 4\lambda + 3)t^2 \right) \end{aligned}$$

On peut écrire:

$$D'(t^\lambda) = t^{\lambda-1} (f_0(\lambda) + t f_1(\lambda) + t^2 f_2(\lambda))$$

où

$$\begin{aligned} f_0(\lambda) &= 2\lambda \\ f_1(\lambda) &= -2(2\lambda - 3) \\ f_2(\lambda) &= \lambda^2 - 5\lambda + 3 \end{aligned}$$

On a donc le système habituel pour déterminer les coefficients  $g_i$  de la série solution  $\sum_{i=0}^{\infty} g_i x^i$ , soit:

$$\begin{aligned} g_0 f_0(\lambda) &= 0 \\ g_0 f_1(\lambda) + g_1 f_1(\lambda + 1) &= 0 \\ g_0 f_2(\lambda) + g_1 f_1(\lambda + 1) + g_2 f_0(\lambda + 2) &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Donc, l'équation caractéristique  $f_0(\lambda) = 0$  avec  $\lambda = 0$  conduit à  $6g_0 + 2g_1 = 0$ , etc.

**Conclusion:**

L'opérateur adjoint de Pincherle admet comme développement asymptotique de la solution générale en zéro:

$$f = \alpha(1 - 3t + \dots) + \beta e^{\frac{1}{4t^2} - \frac{1}{t}} t^{-2} (1 + \dots) \quad (23)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux nombres complexes.

Cependant, il y a une grande différence entre les deux développements asymptotiques précédents dans (23). Le développement  $(1 - 3t + \dots)$  n'est pas identiquement nul à l'origine, donc il ne va pas donner naissance à une intégrale de Pincherle convergente. Il faut au contraire considérer l'autre solution

$$\Psi(t) = e^{\frac{1}{4t^2} - \frac{1}{t}} t^{-2} \varphi(t) \quad (24)$$

qui, elle, admet dans certains secteurs du plan que nous allons déterminer, un développement asymptotique identiquement nul (à cause du terme exponentiel). Cela permettra de donner un sens à la transformée de Pincherle au voisinage de zéro. Quant à l'infini, nous avons vu que la croissance de la fonction  $\varphi$  est modérée puisque l'infini est une singularité régulière.

Considérons maintenant les solutions que nous voulons obtenir sous la forme de transformée de Pincherle:

$$\int_{\gamma} t^{-x-1} \varphi(t) dt \quad (25)$$

où  $\varphi$  est solution de l'équation différentielle et admet:

- 1) en zéro un développement asymptotique de la forme

$$y = e^{\frac{1-4t}{4t^2}} t^{-2} \Theta(t)$$

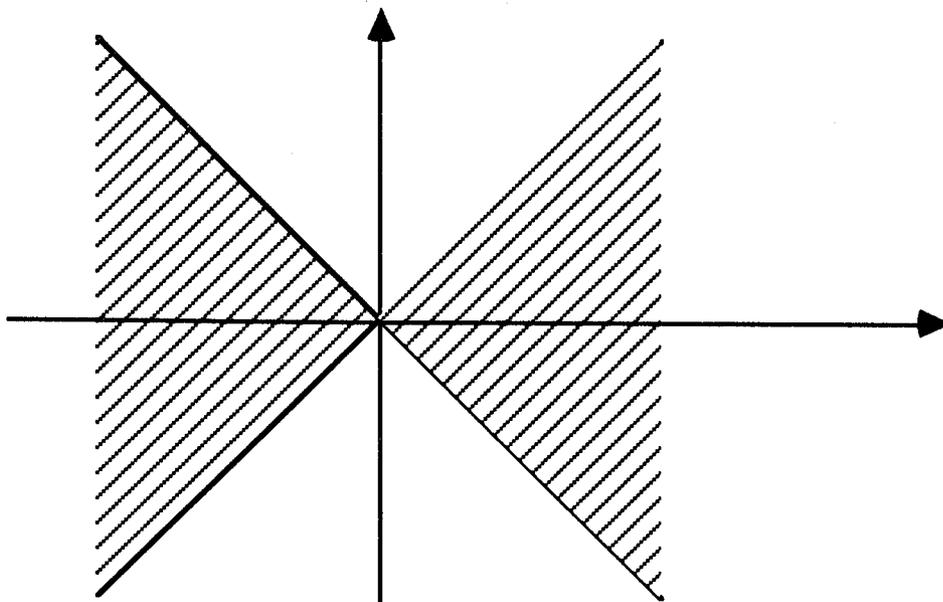
- 2) à l'infini un développement fuchsien.

Pour choisir le chemin d'intégration  $\gamma$ , nous allons étudier les secteurs dans lesquels le développement asymptotique en zéro est identiquement nul. Pour cela, il suffit de considérer la fonction:

$$y(t) = e^{\frac{1-4t}{4t^2}} \quad \text{au voisinage de zéro.}$$

Il est clair que cette fonction se comporte comme  $e^{1/4t^2}$  et admet donc deux secteurs de décroissance exponentielle définis par:

$$\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4} \quad \text{et} \quad \frac{5\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4}$$



Dans les secteurs hachurés, la croissance est au contraire exponentielle. Nous allons choisir comme chemin d'intégration l'un des deux axes imaginaires. Prenons par exemple le demi-axe positif, et notons  $t = is$ ,  $s \in [0, +\infty]$ . L'intégrale (25) se transforme en:

$$i^{-x} \int_0^{+\infty} s^{-x-1} \varphi(is) ds \quad (26)$$

Par construction on peut découper cette intégrale en deux parties.

1<sup>ière</sup> partie:

$$\int_0^a s^{-x-1} \varphi(is) ds \quad (27)$$

elle converge à cause des propriétés de convergence du développement asymptotique de  $\varphi$ .

2<sup>ième</sup> partie:

$$\int_0^{+\infty} s^{-x-1} \varphi(is) ds \quad (28)$$

Si l'on pose  $s = \frac{1}{u}$  l'intégrale (28) devient:

$$\int_0^{\frac{1}{a}} u^{x-1} \sum_{i=0}^{+\infty} a_i u^{i+p} du \quad (29)$$

où l'on a un développement fuchsien en zéro.

Il faut donc considérer une série de la forme:

$$\sum_0^{+\infty} a_i \frac{1}{a^{i+p+x}(x+p+i)}$$

convergente et représentant une fonction méromorphe dans  $\mathbf{C}^-$  et holomorphe dans  $\mathbf{C}^+$ . Donc il existe un entier  $\Lambda_0$  dépendant de  $\varphi$  tel que si  $\Re(x) > \Lambda_0$ , l'intégrale représente une fonction holomorphe. Il est donc possible de parler des valeurs entières de cette intégrale  $P(n)$  qui définit aussi les coefficients cherchés. Pour avoir le développement asymptotique de ces coefficients, il faut procéder comme suit.

La partie intégrale de ce développement limité est donnée par:

$$\int_0^{+\infty} s^{-x-3} e^{(2is-1)/(4s^2)} ds \tag{30}$$

Afin de ramener cette intégrale (30) à une fonction  $\Gamma$ -généralisée, on pose  $t - 1 = -x - 3$ , d'où

$$\int_0^{+\infty} s^{t-1} e^{(2is-1)/(4s^2)} ds \tag{31}$$

On pose ensuite :

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2ix - 1}{4x^2}.$$

Pour le détail des calculs, on renvoie à [de Bruijn 1961]. À quelques modifications près, on montre alors que lorsque  $x \rightarrow \infty$  avec  $\text{Arg}(x) \in ] -\frac{\pi}{2} + \epsilon, \frac{\pi}{2} - \epsilon[$ , cette intégrale admet un développement asymptotique donné par:

$$I(x) \sim \left(\frac{2\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2x}\right)^{-\frac{x}{2}} \exp\left(-\frac{x}{2} + A_1(2x)^{\frac{1}{2}} + A_2(2x)^0\right) \Theta(x) \tag{32}$$

avec  $\Theta(x)$  série en  $\frac{1}{x}$ , (développement asymptotique tel que  $\Theta(0) = 1$ ).

Interprétons ce développement asymptotique pour  $x \in \mathbf{R}$ . Nous savons que  $\Gamma(1+x)$  admet, d'après la formule de Stirling, comme développement asymptotique

$$\Gamma(1+x) = e^{-x} \sqrt{2\pi x} x^{x+\frac{1}{2}}$$

Donc en prenant la racine carrée:

$$\sqrt{\Gamma(1+x)} = e^{-\frac{x}{2}} \sqrt[4]{2\pi} x^{\frac{x}{2}} x^{\frac{1}{4}}$$

## Chapitre 8

Reportons dans la formule (32). Il vient:

$$I(x) \sim \sqrt{\Gamma(1+x)} 2^{\frac{x}{2}} \hat{\Theta}(x).$$

Nous retrouvons alors les expressions que nous avons mises en évidence, à savoir:

$$(n!)^{\frac{1}{2}} e^{x \log \sqrt{2}}$$

qui caractérisent la classe Gevrey.

Nous retrouvons donc bien le résultat obtenu directement par la méthode Della Dora-Wazner.

## Annexe

### ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES LINÉAIRES

#### LA MÉTHODE DE BOOLE

Au début de notre étude sur les équations aux différences, la méthode de Boole nous a paru plus facile que la méthode de Birkhoff et mieux adaptée à un traitement algorithmique. Nous l'avons donc étudiée en espérant pouvoir suivre la méthode de Frobenius que nous avons exploitée pour les équations différentielles.

Après un certain temps d'étude, cette méthode s'est montrée moins constructive que prévu. Aussi ne l'avons nous pas retenue pour la réalisation du logiciel. Nous choisissons cependant de la présenter en annexe car elle est intéressante du point de vue théorique.

#### A.1 INTRODUCTION .

Soit  $L$  un opérateur différentiel à coefficients polynomiaux:

$$L = \sum_{i=0}^n a_i \tau^i \tag{1}$$

avec  $a_i \in k[x]$  et  $\tau$  l'opérateur de translation défini par:

$$\tau u(x) = u(x - 1).$$

## A.2 LES OPÉRATEURS $\pi$ ET $\rho$ DE BOOLE .

Les deux opérateurs fondamentaux de cette théorie sont:

$$\pi u(x) = x(u(x) - u(x - 1)) \quad (2)$$

$$\rho u(x) = \frac{\Gamma(x + 1)}{\Gamma(x)} u(x - 1) \quad (3)$$

Ils ont des propriétés intéressantes:

- *Propriété 1* : Si  $m$  est un entier positif:

$$(\pi + \rho)^m u(x) = x^m u(x) \quad (4)$$

$$\rho^m u(x) = \frac{\Gamma(x + 1)}{\Gamma(x - m + 1)} u(x - m) \quad (5)$$

Si l'on applique  $\rho^m$  à la fonction identique à 1, nous obtenons:

$$\rho^m 1 = \frac{\Gamma(x + 1)}{\Gamma(x - m + 1)}. \quad (6)$$

- *Propriété 2*

$$xu(x) = (\pi + \rho)u(x)$$

Cette propriété permet de donner une expression générale du polynôme  $P(x)$  par rapport à  $\pi$  et  $\rho$ .

On déduit de ces deux propriétés, deux théorèmes très importants dans les applications.

**Théorème 1.** *Si  $P$  est un élément de  $k[x]$  avec  $k$  de caractéristique zéro, on a*

$$P(\pi)\rho^m = \rho^m P(\pi + m) \quad (7)$$

*En particulier, si la formule (6) est vérifiée, nous voyons que  $P(\pi)\rho^m = P(m)\rho^m$ .*

L'idée fondamentale de la méthode de Boole est de remplacer dans la définition de l'opérateur  $L$  en (1) les deux opérateurs (l'opérateur de multiplication et l'opérateur de translation  $\tau$ ) par les deux opérateurs  $\pi$  et  $\rho$ .

**Théorème 2.** *Si  $\nabla$  est l'opérateur défini par  $\nabla(x) = u(x) - u(x - 1)$ , si  $P \in k[x]$ , et degré  $(P) = n$ , alors:*

$$P(\pi + \rho) = P(\pi) + \frac{\nabla P(\pi)}{1!} \rho + \dots + \frac{\nabla^n P(\pi)}{n!} \rho^n$$

En pratique, on utilise une récurrence pour calculer  $x^m$ . Soit

$$x = \pi + \rho$$

Si l'on a:

$$x^n = \pi^n + g_1^n(\pi)\rho + \dots + g_{n-1}^n(\pi)\rho^{n-1} + \rho^n \quad g_i^n \in k[x]$$

alors:

$$x^{n+1} = x^n(\pi + \rho) = \pi^{n+1} + g_1^{n+1}(\pi)\rho + \dots + \rho^{n+1}$$

On a donc aussi:

$$g_i^{n+1} = g_{i-1}^n + (\pi + \rho)g_i^n$$

On remarque que, dans cette méthode, la simplification de l'expression aux différences conduit à utiliser des règles de réécriture avec des variables non commutatives, la règle la plus importante étant:

$$\rho^m \pi^n = (\pi - m)^n \rho^m.$$

### A.2.1 Les séries de faculté

Définissons d'abord le  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel des séries formelles de faculté méromorphes  $MF(x)$ . Pour cela, nous introduisons la notation:

$$(x)_\lambda = \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x-\lambda+1)} \quad (10)$$

où  $\lambda$  est une constante complexe quelconque et  $\Gamma$  la fonction d'Euler habituelle. Si  $n$  est un entier positif, nous avons donc:

$$\begin{aligned} (x)_n &= x(x-1)\dots(x-n+1) \\ (x)_0 &= 1 \\ (x)_{-n} &= \frac{1}{(x+1)\dots(x+n)} \end{aligned}$$

**Définition.** Nous appelons *série formelle de faculté méromorphe* une série formelle quelconque de la forme:

$$\sum_{n \geq n_0} a_n (x)_n, \quad n_0 \in \mathbf{Z} \quad (11)$$

L'ensemble de ces séries forme un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel qui contient des sous-espaces vectoriels particuliers, comme  $F_2(x)$  et  $F_1(x)$ .

$F_2(x)$  : est le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des séries de forme:

$$\sum_{n \geq 0} a_n(x)_n.$$

Ces séries sont connues sous le nom de séries factorielles de deuxième espèce ou séries de Newton.

$F_1(x)$  : est le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel des séries de première espèce. Ces séries ont la forme:

$$\sum_{n \geq 0} a_n(x)_{-n}.$$

Avec  $F_1(x)$  et  $F_2(x)$  nous formons les espaces généralisés  $GF_1(x)$  et  $GF_2(x)$  des séries formelles de la forme:

$$\sum_{n \geq 0} a_n(x)_{n+\lambda} \quad \text{et} \quad \sum_{n \geq 0} a_n(x)_{-n+\lambda}$$

### A.3 LA MÉTHODE DE BOOLE-FROBENIUS .

Cette méthode consiste à adapter aux équations aux différences linéaires, la technique de Frobenius pour les solutions des équations différentielles linéaires présentée dans la première partie.

#### A.3.1 Les différentes étapes de la méthode

Soit  $L$  un opérateur initial défini comme en (1).

$$L = \sum_{i=0}^n a_i \tau^i$$

- *Première étape:* Nous formons:

$$x_{(n)}L = L_1$$

alors:

$$L_1 = \sum_{i=0}^n a_i(x)x(x-1)\dots(x-n+1)\tau^i$$

Avec les propriétés (4) et (5), nous avons:

$$L_1 = \sum_{i=0}^n a_i(x)(x-i+1)\dots(x-n+1)\rho^i$$

que nous noterons:

$$L_1 = \sum_{i=0}^n b_i(x)\rho^i \quad (12)$$

- *Deuxième étape:* Nous changeons de variable en cherchant des solutions de la forme

$$u(x)\mu^x v(x)$$

ce qui conduit à l'opérateur:

$$L_\mu = \sum_{i=0}^n b_i(x)\mu^{n-i}\rho^i \quad (13)$$

- *Troisième étape:* Avec un changement de variable dans (13) nous obtenons:

$$l_\mu = \sum_{i=0}^n \mu^{n-i} b_i(\pi + \rho)\rho^i.$$

En appliquant le théorème 2, et si  $n_i = \text{degré}(b_i)$ , nous pouvons écrire:

$$b_i(\pi + \rho) = b_i(\pi) + \dots + \frac{\nabla^{n_i} b_i(\pi)}{n_i!} \rho^{n_i}$$

$L_\mu$  devient alors:

$$L_\mu = \sum_{i=0}^n \mu^{n-i} \left( \sum_{j=0}^{n_i} \frac{\nabla^j b_i(\pi)}{j!} \rho^j \right) \rho^i$$

En notant  $m = \max_{i=0, \dots, n} (i + n_i)$ , nous obtenons:

$$L_\mu = \sum_{i=0}^m f_i(\pi, \mu)\rho^i \quad (14)$$

où  $f_i(\pi, \mu)$  appartient à  $k(\mu)[x]$ .

- *Quatrième étape:* Nous allons utiliser le lemme suivant.

**Lemme.** Quel que soit  $\nu \in \mathbf{C}$ , nous avons:

$$\rho((x)_\nu) = (x)_{\nu+1} \quad (15)$$

$$\pi((x)_\nu) = \nu(x)_\nu \quad (16)$$

L'action de  $L_\nu$  sur une puissance symbolique est alors:

$$\begin{aligned} L_\nu((x)_\nu) &= \left( \sum_{i=0}^m f_i(\pi, \mu) \rho^i \right) (x)_\nu \\ &= \sum_{i=0}^m f_i(\pi, \mu) (x)_{\nu+i} \\ &= \sum_{i=0}^m f_i(\nu + i, \mu) (x)_{\nu+i} \end{aligned}$$

### A.3.2 Recherche des solutions sous forme de séries formelles

#### A.3.2.1 Solutions appartenant à $GF_1(x)$

Nous essayons des solutions de la forme:

$$v = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j (x)_{j-\nu}$$

avec  $\nu \in \mathbf{C}$ . En utilisant la linéarité de l'opérateur  $L_\nu$ , nous avons:

$$\begin{aligned} L_\nu v &= \sum_{j=0}^{+\infty} a_j L_\nu((x)_{-j+\nu}) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \left( \sum_{i=0}^m f_i(\nu - j + i, \mu) (x)_{\nu-j+i} \right) \end{aligned}$$

Par identification, nous obtenons deux systèmes linéaires qui, sous certaines hypothèses, déterminent les  $a_i$ .

1<sup>er</sup> système

$$\left| \begin{array}{l} a_0 f_m(\nu + m, \mu) = 0 \\ \vdots \\ a_0 f_1(\nu + 1, \mu) + \dots + a_{m-1} f_m(\nu + 1, \mu) = 0 \end{array} \right. \quad (17)$$

2<sup>ieme</sup> système: Ce système n'est autre que l'équation aux différences linéaires.

$$a_{m+s}f_m(\nu - s, \mu) + \dots + a_s f_0(\nu - s, \mu) = 0 \quad s = 0, 1, \dots \quad (18)$$

On remarque que, si le système (17) permet de déterminer  $\mu$  et  $\nu$  et les  $a_i$  des conditions initiales, alors (18) détermine complètement la solution.

### A.3.2.2 Solutions appartenant à $GF_2(x)$

Nous cherchons des solutions de la forme:

$$v = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j (x)_{\nu+j}$$

avec  $\nu \in \mathbb{C}$ . Dans ce cas, le système devient:

$$\begin{cases} a_0 f_0(\nu, \mu) = 0 \\ \vdots \\ a_0 f_{m-1}(\nu + m - 1, \mu) + \dots + a_{m-1} f_0(\nu + m - 1, \mu) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Nous avons de même:

$$a_{m+s} f_0(s + m + \nu, \mu) + \dots + f_m(\nu + m + s, \mu) = 0 \quad (20)$$

Il convient maintenant de discuter de la faisabilité de la méthode. Pour cela, pour cela nous allons tout d'abord essayer de donner une classification des équations aux différences linéaires. C'est l'objet du prochain paragraphe.

## A.4 POLYGONE D'UNE ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES ET CLASSIFICATION .

### A.4.1 Le polygone de Newton

Nous avons vu que la méthode de Boole suppose tout d'abord la détermination des indices  $\mu$  et  $\nu$ . Les valeurs de  $\mu$  sont obtenues en cherchant les zéros du polynôme

$$f_m(m + \nu, \mu)$$

## Annexe

On appelle  $f_m(m + \nu, \mu) = 0$  l'équation caractéristique de l'équation aux différences. Montrons comment nous la formons.

Soit:

$$L = \sum_{i=0}^n a_i \tau^i$$

l'opérateur initial, avec:

$$a_i(x) = \sum_{j=0}^{n_i} a_j^i x^j$$

La seconde étape de la méthode de Boole conduit à l'opérateur:

$$L_\mu = \sum_{i=0}^n b_i(\pi + \rho) \mu^{n-i} \rho^i$$

dans lequel la plus haute puissance de  $\rho$  dans le terme  $b_i(\pi + \rho) \mu^{n-i} \rho^i$  est donnée par le théorème 2 et est:

$$a_{n_i}^i \mu^{n-i} \rho^{n+n_i}$$

Pour construire le polygone de Newton, nous plaçons les points  $(i, n_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  dans un système d'axes orthogonaux, et nous considérons l'enveloppe convexe de ces points. C'est le polygone de Newton. Si le polygone a une pente nulle aux extrémités:

$$(i_m, n_{i_m}) \text{ et } (i_M, n_{i_M})$$

nous obtenons comme coefficients de  $\rho^{n+n_{i_m}}$

$$\mu^{n-i_m} a_{n_{i_m}}^{i_m} + \dots + \mu^{n-i_M} a_{n_{i_M}}^{i_M}$$

qui donne immédiatement l'expression de l'équation caractéristique, soit:

$$f_m(m + \nu, \mu) = \mu^{n-i_m} \left( a_{n_{i_m}}^{i_m} \mu^{i_M-i_m} + \dots + a_{n_{i_M}}^{i_M} \right) \quad (21)$$

### Définition 1

Une équation aux différences linéaires est dite *normale* si son polygone de Newton a une unique arête de pente nulle dont la projection sur l'axe des  $x$  est de longueur  $n$ .

Exemple:

L'équation aux différences hypergéométriques:

$$\Delta = (b_0x + c_0) \tau^2 + (b_1x + c_1) \tau + (b_2x + c_2)$$

est normale si  $b_0.b_2 \neq 0$ .

#### A.4.2 Équations normales régulières et irrégulières

Nous considérons une équation récurrente linéaire et  $\mu$  une racine de son équation caractéristique. On doit alors déterminer  $\nu$ . Pour ce faire, on divise le problème en deux parties, en recherchant les solutions dans  $GF_1(x)$  et  $GF_2(x)$ .

##### A.4.2.1 Recherche des solutions dans $GF_1(x)$

$\nu$  peut être déterminé en fonction de la solution de la seconde équation

$$a_0 f_{m-1}(\nu + m - 1, \mu) + a_1 f_m(\nu + m - 1, \mu) = 0$$

Or  $f_m(\nu + m - 1, \mu) = 0$  à cause du choix de racine de l'équation caractéristique. Pour déterminer  $\nu$ , nous avons donc à chercher une racine du polynôme

$$f_{m-1}(\nu + m - 1, \mu) = 0$$

Étudions ce polynôme. Par des développements successifs on peut montrer que

$$L_\mu = \sum_{i=0}^n \mu^{n-i} \left( a_{n_i}^i (x)_{n+n_i} + (a_{n_i}^i (n+n_i-1)(\pi - (n+n_i-1-i) + \gamma_i) (x)_{n+n_i-1} \right) \quad (22)$$

où  $\gamma_i$  est une constante. Si nous supposons que  $L$  est un opérateur normal, c'est-à-dire que tous les  $n_i$  sont égaux, l'expression (22) peut s'écrire:

$$L_\mu = \left( \sum_{i=0}^n a_{n_i}^i \mu^{n-i} \right) (x)_{n+n_i} + \left( \left( \sum_{i=0}^n a_{n_i}^i (n+n_i-i) \mu^{n-i} \right) + \sum_{i=0}^n \theta_i \right) (x)_{n+n_i-1}$$

où  $\theta_i$  est une constante. De ce qui précède, nous déduisons que:

- 1)  $f_{m-1}(\pi, \mu)$  est un polynôme de degré 1.
- 2)  $\nu$  est déterminé par l'équation  $f_{m-1}(\nu + m - 1, \mu) = 0$
- 3)  $\nu$  peut être déterminé par un polynôme de degré 1, seulement si le coefficient de  $\nu$  dans ce polynôme est non nul.
- 4) ce coefficient est  $\sum_{i=0}^n a_{n_i}^i (n+n_i-i) \mu^{n-i}$

- 5) l'équation  $f_m(\mu) = 0$  ne peut pas avoir de racine nulle (sinon l'arête de pente nulle ne pourrait pas avoir une projection sur l'axe de  $x$  de longueur  $n$ ).

Ces diverses remarques nous conduisent aux définitions et théorèmes suivants.

**Définition 2**

Nous dirons qu'une équation récurrente linéaire normale est *régulière* si les racines de son polynôme caractéristique sont simples. Sinon nous dirons que cette équation est *irrégulière*.

**Théorème 3.** *Pour une équation régulière normale, la méthode de Boole permet à  $\mu$  et  $\nu$  d'être déterminés.*

Le problème est alors de savoir si nous obtenons, dans ce cas, un système fondamental de solutions. C'est ce que nous allons discuter brièvement. L'étude du système (17), nous conduit au lemme et au théorème suivants.

**Lemme 2.** *Nous pouvons déterminer les coefficients du développement en série dans  $GF_1(x)$ , si et seulement si la relation suivante est vérifiée*

$$f_{m-1}(\nu + j) \neq 0 \quad j = m - 2, m - 1, \dots$$

Comme nous savons que  $f$  est de degré 1 dans le cas d'une équation normale, on en déduit le théorème 4.

**Théorème 4.** *Pour une équation récurrente linéaire normale régulière, la méthode de Boole permet de déterminer  $n$  solutions formelles sous forme de séries de puissance dans  $GF_1(x)$ .*

**A.4.2.2 Recherche des solutions dans  $GF_2(x)$**

Les résultats que nous avons obtenus dans cette direction sont moins précis, et restent insuffisants. Néanmoins nous pouvons les présenter brièvement.

Nous commencerons donc toujours avec  $\mu$  comme racine de  $f_m(\mu) = 0$ . Mais il faut maintenant annuler  $f_0(\nu, \mu)$  pour déterminer  $\nu$ . Une étude détaillée de ces équations nous permet d'établir les lemmes suivants.

**Lemme 3.**

$$f_0(\mu, \nu) = \mu^n \nu(\nu - 1) \dots (\nu - n + 1) a_0(\nu)$$

*Remarque:* Ce lemme illustre bien combien cette méthode est difficile. En effet, nous pouvons à priori associer à une valeur de  $\mu$ ,  $n_0 + n$  valeurs de  $\nu$  qui sont indépendantes de  $\mu$ .

Cependant, une étude du système (19) permet d'énoncer le lemme 4.

**Lemme 4.** *Nous pouvons déterminer  $a_1, a_2, \dots$  en fonction de  $a_0$ , si et seulement si  $f_0(\nu + j) \neq 0$  pour tous les  $j$  positifs.*

Cela permet d'éliminer  $\nu = 0, 1, 2, \dots, n - 2$  comme racines de  $f_0(\nu) = 0$ . De même, il est clair que si deux racines de  $a_0(\nu)$  diffèrent entre elles d'un entier, les conditions précédentes ne peuvent pas être vérifiées.

Donc, si toutes ces conditions énoncées sont vérifiées, nous pouvons déterminer les coefficients de la série.

Dans cette étude de la méthode de Boole, qui est la première méthode sur laquelle nous avons travaillé, il reste encore des problèmes ouverts (cas d'une équation normale irrégulière, cas d'une équation irrégulière...). Nous avons abordé seulement certains de ces problèmes, car nous avons abandonné cette méthode au profit de méthodes plus constructives, malgré son aspect symbolique intéressant qui mériterait d'être approfondi.



## BIBLIOGRAPHIE

[Adams R.C. 1928]

On the irregular cases of the linear ordinary difference equations. Trans. Amer. Math. Soc. vol 30 p.507-541, 1928.

[Barton D., Willers I., Zahar R. 1972a]

The automatic solution of systems of ordinary differential equations by the method of Taylor series, *The best computer paper of 1971*. Ed. Petrocelli, p. 147-163, Auerbach Publishers Inc., 1972.

[Barton D., Willers I., Zahar R. 1972b]

Taylor series methods for ordinary differential equations, an evaluation. *Mathematical Software*, Ed. J. Rice, p. 369-390, Academic Press New-York, 1972.

[Bateman H. 1953]

The Bateman project, vol. 1, Higher transcendental functions. McGraw-Hill book Company, Inc., 1953.

[Bateman, Danielopoulos 1981]

Computerised analytic solution of 2nd order differential equations. *Computer journal*, 24 [1981] p. 180-183.

[Birkhoff G.D. 1911]

General theory of linear difference equation. Trans. Amer. Math. Soc. 12 (1911) p. 243-284

[Birkhoff G.D. et Trjitzinsky 1933]

Analytic theory of singular difference equations. *Acta Math.* 1933 vol. 60 p. 1-89.

## *Bibliographie*

- [Birkhoff G.D. 1938]  
Formal theory of irregular difference equations. Acta Math. 1938 vol. 54 p. 205-246.
- [Boole G. 1957]  
Calculus of finite differences. 4<sup>ième</sup> édition, Chelsea publishing company, New-York N Y, 1957.
- [Brown W.S. 1973]  
ALTRAN user manual. Bell Telephone Lab. Inc., 1973.
- [Chaffy C. 1984]  
Interpolation polynomiale et rationnelle d'une fonction de plusieurs variables complexes. Thèse de troisième cycle, Université de Grenoble, 1984.
- [Davenport J.H. 1981]  
On the integration of algebraic functions. Springer Lecture Notes in Computer Science 102, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-york, 1981, Zbl. 471.14009. MR 84k:14024.
- [Davenport J.H. 1983]  
The Risch differential equation problem. University of Delaware, technical report 1983.
- [Davenport J.H. 1984a]  
 $y'+fy=0$ . EUROSAM 84, Springer lecture Notes in computer science 174, Springer Verlag, 1984, p. 341-350.
- [Davenport J.H. 1984b]  
Solutions of inhomogeneous differential equations. preprint, Journées équations différentielles dans le champ complexe, juin 1984, Luminy. A paraître dans le SIGSAM bulletin.
- [Davenport J.H. 1985]  
Closed form solutions of ordinary differential equations. Proc. 2nd. RIKEN Symposium symbolic and algebraic computation, ed. N. Inada & T. Soma, World Scientific Publ., 1985.
- [Davenport J.H., Siret Y., Tournier E. 1986]  
Calcul Formel, systèmes et algorithmes de manipulations algébriques. Ed. Masson, collection études et recherches en informatique, 1986.

- [de Bruijn N.G. 1970]  
Asymptotic methods in analysis. North\_holland Publishing Co., 1970.
- [Deligne P. 1970]  
Équations différentielles à points singuliers réguliers. Lecture Notes in Mathematics, 163, 1970.
- [Della Dora J., Tournier E. 1981]  
Solutions formelles d'équations différentielles au voisinage de points singuliers réguliers. Rapport de recherche IMAG N° 239, 1981.
- [Della Dora J., Tournier E, 1981]  
Les bases d'obtention des solutions formelles d'une équation différentielle linéaire homogène en un point singulier irrégulier. Rapport de recherche IMAG N° 266, 1981.
- [Della Dora J., Tournier E. 1981]  
Formal solution of differential equations in the neighborhood of singular points. SYMSAC'81 Paul S.Wang editor, Kent state university, p. 25-29.
- [Della Dora J., Dicrescenzo C., Tournier E. 1982]  
An algorithm to obtain formal solutions of a linear homogeneous differential equation at an irregular singular point. (EUROCAM 82, Springer Verlag, Lecture Notes in computer science 174, p273-280)
- [Della Dora J., Tournier E. 1984]  
Homogeneous linear difference equations: the Frobenius-Boole method. EUROSAM 84, Springer Verlag, Lecture notes in computer science 174, 1-12.
- [Della Dora J., Tournier E. 1986]  
Formal solutions of linear difference equations method of Pincherle-Ramis. Proceedings SYMSAC'86, ed. B.W. Char, University of Waterloo.
- [Della Dora J., Wazner A. 1985]  
Solutions formelles d'équations aux différences linéaires. Rapport de recherche N° 510, février 1985, TIM3-IMAG Grenoble.
- [Dicrescenzo C., Duval D. 1985 ]  
About a new method for computing in algebraic number field. EUROCAL 85, Springer Verlag, Lecture Notes in computer science N° 204.

## *Bibliographie*

- [Dicrescenzo C., Duval D. 1986]  
Algebraic computation on algebraic numbers. Computers and computing 54-61 Masson and Wiley.
- [Duval A. 1984]  
Équations aux différences dans le champ complexe. Thèse d'État, Mars 1984, Université de Strasbourg.
- [Duval D. 1987]  
Diverses questions relatives au calcul formel avec des nombres algébriques. Thèse d'État, Université de Grenoble, Avril 1987.
- [Euler L. 1924]  
Opera omnia. Vol 1, Leibzig Berlin 1924
- [Evgrafov M.A. 1966]  
Analytic functions. Dover publications, Inc., New-York, 1966.
- [Fateman R. 1976]  
An approach to Asymptotic Expansions. Proceedings, ACM Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, 1976, p. 365-371.
- [Galbrun H. 1913]  
Sur certaines solutions exceptionnelles d'une équation linéaire aux différences finies pour les grandes valeurs de la variable. Acta Math. 1913, vol, 36 p. 1-68.
- [Galbrun H. 1921]  
Sur certaines solutions exceptionnelles d'une équation linéaire aux différences finies. Bull. Soc. Math. de France, vol 49 (1921), p. 206-241.
- [Golden J.P. 1977]  
MACSYMA's Symbolic Ordinary Differential Equation Solver. Proceedings of the 1977 MACSYMA Users' conference, NASA CP-2012, 1977.
- [Green D.H., Knuth D.E. 1982]  
Mathematics for the analysis of algorithms, 2<sup>ième</sup> édition, Progress in computer science, Birkauser, 1982.
- [Hearn A.C. 1983]  
REDUCE user manual. Ed. the RAND Corporation, Santa Monica CA 90406.

- [Henrici P. 1977]  
Applied and computational complex analysis. Volume 2, J. Wiley & sons Publication, 1977.
- [Hilali A. 1982]  
Contribution à l'étude de points singuliers des systèmes différentiels linéaires. Thèse de 3ieme cycle, IMAG 1982, Grenoble.
- [Hilali A. 1983]  
Characterization of a linear differential system with a regular singularity. EUROCAL 83, Springer Verlag, Lecture Notes in computer science 162, p 68-77.
- [Hilali A. 1986]  
An algorithm for computing formal invariants of linear differential systems. Proceeding of SYMSAC'86, ed. B.W. Char, University of Waterloo.
- [Hilali A., Wazner A. 1986]  
Un algorithme de calcul de l'invariant de Katz d'un système différentiel linéaire. Ann. Institut Fourier, 3, 36 (1986).
- [Hilali A. 1987a]  
On the algebraic and differential Newton-Puiseux polygons. (à paraître dans Journal of Symbolic computation, Academic Press).
- [Hilali A. 1987b]  
Calcul des invariants formels des systèmes linéaires. Thèse d'État de l'Université de Grenoble. (à paraître).
- [Hukuhara M. 1937]  
Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires, II. Jour. Fac. Sci. Univ. Hokkaido, I, 5 (1937), p157-166.
- [Hukuhara M. 1942]  
Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires, III. Mem. Fac. Sci. Univ. Kyushu. A, 2 (1942) p. 125-137.
- [Ince 1956]  
Ordinary differential equations. Dover publication INC 1956.
- [Iwano M. 1956]  
Sur les points singuliers d'une équation différentielle ordinaire linéaire du  $n^{ième}$  ordre. Fac. Sc. Tokyo Sect I 7 (1956), (N. Lvison) 19-210.

## *Bibliographie*

- [Jordan C. 1960]  
Calculus of finite difference. Chelsea Publishing Company, 1960.
- [Kamke E. 1961]  
Differenzialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen 1 Geets & Portig K.G., Leipzig 7<sup>th</sup> edition.
- [Lafferty F.I. 1977]  
Power series solutions of ordinary differential equations in Macsyma. Proceedings of MACSYMA users' conference, 1977.
- [MACSYMA 1983]  
MACSYMA reference manual. Mathlab group. Project MAC, MIT Cambridge, Mass. 1983.
- [Malgrange B. 1980]  
Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularités irrégulières. rapport interne Institut Fourier, Grenoble 1980.
- [Mignotte M. 1974]  
An inequality about factors of polynomials. Math. of Comp. vol 28, (1974), p. 1153-1157.
- [Milne Thomson L.M. 1932]  
On Boole's operational solution of linear finite difference equations. Proc. Cambridge Phil. Soc., XXVIII 1932 p. 311.
- [Milne Thomson L.M. 1933]  
The calculus of finite difference. MacMillan and Co. limited, London, 1933.
- [Morse S.M., Fishbach H. 1953]  
Methods of theoretical physics. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1953.
- [Moses J. 1967]  
Symbolic Integration. Ph. D. Thesis, Project MAC TR-47, M.I.T., Cambridge Mass.
- [Murphy G.M. 1960]  
Ordinary differential equations. D. van Nostrand Comp., Inc. Princeton, New Jersey.
- [Norlund N.E. 1924]  
Vorlesungen über Differenzenrechnung. Springer Verlag, Berlin 1924

- [Norlund N.E. 1926]  
Leçons sur les séries d'interpolation. Gauthier Villars, Paris 1926.
- [Norlund N.E. 1929]  
Leçons sur les équations linéaires aux différences finies. Gauthier Villars, Paris 1929.
- [Norman A.C. 1973]  
Taylor User's manual. University of Cambridge computer service, 1973.
- [Norman A.C. 1975a]  
Computing with formal power series. ACM transactions on Mathematical software 1 (1975) p. 346-356.
- [Norman A.C. 1975b]  
SCRATCHPAD power series package. SIGSAM bulletin, ACM New York, Vol. 9, No. 1, Feb. 1975.
- [Norman A.C. 1976]  
Expanding solutions of implicit sets of ordinary differential equations in power series. Comp. J. 19 (1976) p. 63-68.
- [Ozello P. 1987]  
Calcul exact de formes de Jordan et de Frobenius d'une matrice. Thèse de l'Université de Grenoble, janvier 1987.
- [Praagman G. 1985]  
The formal classification of linear difference operators. (preprint).
- [Perron O. 1909]  
Journal f. rein. u. angev. Math 136 (1909), 17-37.
- [Pincherle S. 1892]  
Sur la généralisation des systèmes récurrents. Acta Math. 16 (1892) 341-36.
- [Poincaré H. 1885]  
Le théorème de Poincaré sur le comportement asymptotique des solutions d'une équation aux différences linéaire. American Journal of Math., 7 (1885) p. 213.
- [Poincaré H. 1934]  
Oeuvres de Henri Poincaré. Gautier-Villars Paris, Vol. III, 1934.

## *Bibliographie*

- [Puisseux M.V. 1850]  
Recherches sur les fonctions algébriques. Journal de Mathématiques pures et appliquées, N° 15, p 365-480, 1850.
- [Ramis J.P. 1978]  
Dévissage Gevrey. Astérisque SMF, 59-60, p. 173-204, (1978).
- [Ramis J.P., Thoman J. 1980]  
Remarques sur l'utilisation numérique des séries de factorielles. Séminaire d'analyse numérique No 346, Strasbourg.
- [Ramis J.P., Thoman J. 1981]  
Some comments about the numerical utilization of factorial series methods in the study of critical phenomena. Springer Verlag 81.
- [Ramis J.P. 1984a]  
Théorème d'indices Gevrey pour les équations différentielles ordinaires. Memoirs of the American Mathematical Society, Volume 48, Number 296, March 1984.
- [Ramis J.P. 1984b]  
Etude des solutions méromorphes des équations aux différences linéaires algébriques. Colloque de Saale 1984.
- [Ramis J.P. 1985]  
Équations différentielles: Phénomènes de Stokes et resommation. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 301, série I n° 4, 1985.
- [Richard F. 1986]  
Représentations graphiques de fonctions complexes solutions d'équations différentielles. Rapport de recherche IRMA 86, Strasbourg.
- [Richard F. 1986]  
Équations différentielles linéaires dans le champ complexe. Actes du XIX<sup>e</sup> congrès national d'analyse numérique, (1986).
- [Richard F. 1987]  
Thèse de l'Université de Strasbourg (à paraître).
- [Risch R.H. 1969]  
The problem of integration in finite terms. Trans. A.M.S. 139 (1969) pp.167-189 Zbl. 184-67. MR 38 (1969) NO 5759.
- [Roch J.L. 1986]  
Transformation de programmes pour les nombres algébriques. Rapport de recherche IMAG (à paraître).

- [Samuel P. 1971]  
Théorie algébrique des nombres. Hermann (1971) 2<sup>ième</sup> édition, chapitre 2.
- [Saunders B.D. 1981]  
An implementation of Kovacic's algorithm for solving second order linear homogeneous differential equations. SYMSAC 81, P.S. Wang editor, Kent State University.
- [Senechaud P., Siebert F. 1986]  
Étude de l'algorithme de Kovacic et son implantation sur SCRATCH-PAD 2. Rapport de recherche IMAG ,RR 639 M, février 1987.
- [Scmidt P. 1976]  
Automatic symbolic solution of differential equations of the first order and first degree. Proceedings of the ACM symposium on Symbolic and Algebraic Computation, 1976, p. 114-125.
- [Schmidt P. 1979]  
Substitution methods for the automatic symbolic solution of differential equations of first order and first degree. Proceedings EURO-SAM'79, Lecture Notes in Computer Science Springer Verlag, N° 72, 1979.
- [Singer M.F. 1981]  
Liouville solutions of  $n^{th}$  order homogeneous linear differential equations. Amer. J. Math. 103 (1981) p. 661-682. Zbl. 477.12016 MR 82i:12008.
- [Singer M.F. 1985]  
Solving homogeneous linear differential equations in terms of second order linear differential equations. Amer. J. Math 107 (1985), p 663-696.
- [Singer M.F., Davenport J.H. 1985]  
Elementary and Liouville solutions of linear differential equations. Proc. EUROCAL 85, Vol. 2 Springer, Lecture Notes in Computer Science N0 204, Springer Verlag 1985 pp 595-596.
- [Singer M.F. 1986]  
Formal solutions of differential equations tutorial presented at the Computers and Mathematics conference at Stanford University, August 1986.

## *Bibliographie*

[Slage J. 1961]

A heuristic program that solves symbolic integration problems in Freshman calculus. Ph D thesis, Harvard Univ., Cambridge Mass.

[Thomann J. 1981]

Séries 1-sommables, séries de factorielles généralisées et approximants de type Padé. Séminaire IMAG n<sup>o</sup> 373, Grenoble 1981.

[Thomann J. 1987]

Thèse de l'Université de Strasbourg (à paraître).

[Tournier E. 1979]

An algebraic form of a solution of a system of linear differential equations with constant coefficients. Proceedings EUROSAM'79, Lecture Notes in Computer Science, 72, Springer Verlag, 1979.

[Turittin H.L. 1965]

Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighbourhood of an irregular singular point. Acta Math. 93, (1965), p. 27-66.

[Wang P. 1971]

Evaluation of definite integrals by symbolic manipulation. Report MAC TR-92, project MAC, MIT, Cambridge, Mass.

[Wasow W. 1965]

Asymptotic expansions for ordinary differential equations. R.E. Krieger publishing company, Huntington, New-York 1965.

[Watanabe S. 1970-1976]

Formula manipulation solving linear differential equations (I) and (II). Publ. RIMS Kyoto Univ., I: vol.6, 1970, p 71-111, II: vol 11, 1976, p. 297-337 1976, p. 297-337.

[Watanabe S. 1981]

A technique for solving differential equations using Riemann's P-functions. SYMSAC 81, P.S. Wang editor, Kent State University.

[Watanabe S. 1984]

An experiment towards a general quadrature for second order linear ordinary differential equations by symbolic computation. EURO-SAM 84, Spinger Verlag, Lecture Notes in computer science 174, p 13-22.

- [Wazner A. 1987]  
Thèse de l'Université de Grenoble, (prévue fin 1987).
- [Williamson C. 1984]  
Taylor series solutions of explicit ODE's in a strongly typed algebra system. SYGSAM bulletin 18 (1984) 1, p. 25-29.
- [Wimp J. 1984]  
Computations with recurrence relations. Pitman Advanced Publishing, 1984.
- [Zeilberger D. 1980]  
The Algebra of linear partial difference operators and its applications. Siam J. Math. Anal. vol. 11 N° 6, November 1980 p 919-932.
- [Zejli-Najid H. 1985]  
Extensions algébriques: cas général et cas des radicaux. Thèse de troisième cycle de l'Université de Grenoble, 1985.
- [Zippel R.E. 1974]  
Power series expansion in MACSYMA. Proceedings of the Conference on Mathematical Software II Purdue University, May 1974.
- [Zippel R.E. 1976]  
Univariate power series expansions in Algebraic Manipulation. Proceedings SYMSAC 76, p. 198-208.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT D'ETAT

Vu les dispositions de l'Article 5 de l'Arrêté du 16 avril 1974,

Vu les rapports de Monsieur... *Ramis*.....

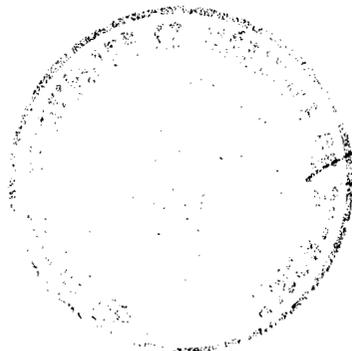
Monsieur... *Lazard*.....

Monsieur... *Della Dora*.....

Mme... *TOURNIER*... *Evelyne*..... est autorisé à  
présenter une thèse en vue de l'obtention du grade de DOCTEUR D'ETAT  
ES SCIENCES.

Fait à Grenoble, le

Le Président de l'U.S.T.M.G.



*J.J. Payan*  
J.J. PAYAN

**Résumé:**

Le sujet de cette thèse se rattache au **CALCUL FORMEL**.

La première partie est consacrée à l'étude et à la réalisation d'un logiciel de résolution d'équations différentielles. Ce logiciel DESIR est écrit pour le système de calcul formel REDUCE. Il permet d'obtenir les solutions formelles d'équations différentielles d'un ordre quelconque au voisinage de points singuliers réguliers et irréguliers. Cela conduit à une étude plus approfondie des équations aux différences, qui est exposée dans la deuxième partie. Cette étude est orientée vers la recherche d'algorithmes permettant de construire une base de solutions asymptotiques d'équations aux différences linéaires à coefficients dans un corps de séries formelles.

**Mots clés:**

Calcul formel, logiciel DESIR, équations différentielles, solutions formelles, points singuliers réguliers et irréguliers, équations aux différences.