



**HAL**  
open science

# Solutions formelles de systèmes différentiels linéaires au voisinage d'un point singulier

Abdelaziz Hilali

► **To cite this version:**

Abdelaziz Hilali. Solutions formelles de systèmes différentiels linéaires au voisinage d'un point singulier. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1987. tel-00324083

**HAL Id: tel-00324083**

**<https://theses.hal.science/tel-00324083>**

Submitted on 24 Sep 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE**

Présentée à

**L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE, TECHNOLOGIQUE  
ET MEDICALE DE GRENOBLE**

**Pour obtenir le titre de  
Docteur d'Etat Es-Sciences Mathématiques**

Par

**Abdelaziz HILALI**

**SOLUTIONS FORMELLES DE SYSTEMES  
DIFFERENTIELS LINEAIRES AU VOISINAGE D'UN  
POINT SINGULIER**

Thèse soutenue le 11 Juin 1987 devant la commission d'examen:

**B. MALGRANGE**

Président

**J. BLUM**

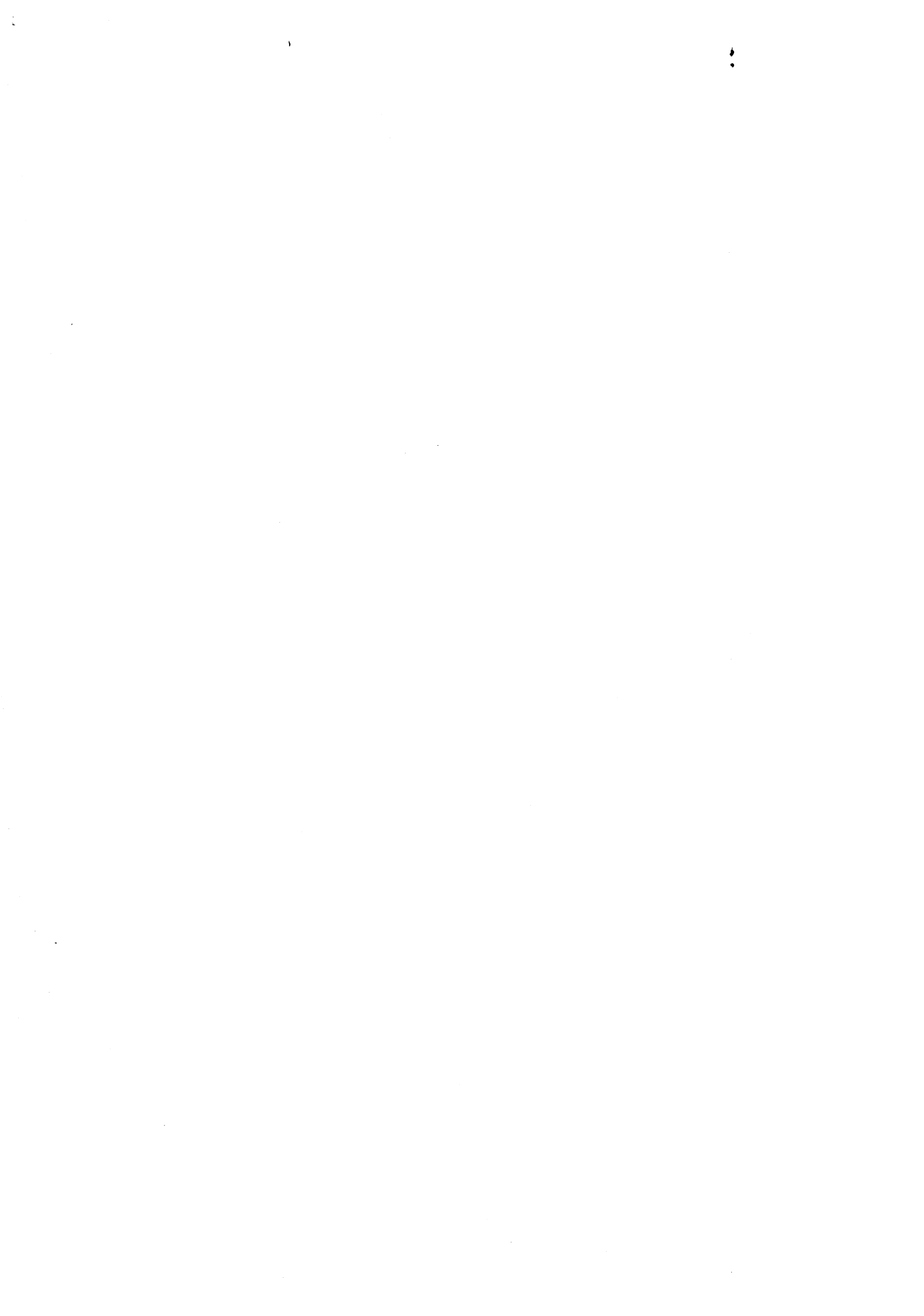
**M. COSNARD**

**J. DELLA DORA**

**A. DUVAL**

**J.P. RAMIS**

Examineurs



# UNIVERSITE SCIENTIFIQUE TECHNOLOGIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Président de l'Université :  
M. TANCHE

Année Universitaire 1986 - 1987

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE SCIENCES ET DE GEOGRAPHIE

### PROFESSEURS DE 1ère Classe

ARNAUD Paul	Chimie Organique
ARVIEU ROBERT	Physique Nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S
AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
AYANT Yves	Physique Approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARBIER Jean-Claude	Physique Expérimentale CNRS
BARJON Robert	Physique Nucléaire ISN
BARNOUD Fernand	Boichimie Macromoléculaire Végétale
BARRA Jean-René	Statistiques-Mathématiques Appliquées
BELORISKY Elie	Physique C.E.N.G- D.R.F.
BENZAKEN Claude	Mathématiques Pures
BERNARD Alain	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Pures
BILLET Jean	Géographie
BOELHER Jean-Paul	Mécanique
BONNIER Jane Marie	Chimie Générale
BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire ISN
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie Végétale
CAUQUIS Georges	Chimie Organique
CHIBON Pierre	Biologie Animale
COHEN ADDAD Jean-Pierre	Physique
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques Pures
CYROT Michel	Physique du Solide
DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DELOBEL Claude	Mathématiques Appliquées
DEPORTES Charles	Chimie Minérale
DESRE Pierre	Electrochimie
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des Plasmas
DOUCE Rolland	Physiologie Végétale
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques Pures
GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique,
GIRAUD Pierre	Géologie
HICTER Pierre	Chimie
IDELMAN Simon	Physiologie Animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
KAHANE André, détaché	Physique
KAHANE Josette	Physique
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques Appliquées
KUPKA Yvon	Mathématiques Pures
LAJZEROWICZ Jeanine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques Appliquées
DE LEIRIS Joel	Biologie

LLIBOUTRY Louis  
 LOISEAUX Jean-Marie  
 MACHE Régis  
 MAYNARD Roger  
 MICHEL Robert  
 OMONT Alain  
 OZENDA Paul  
 PAYAN Jean-Jacques  
 PEBAY-PEYROULA Jean-Claude  
 PERRIAUX Jacques  
 PERRIER Guy  
 PIERRARD Jean-Marie  
 PIERRE Jean-Louis  
 RASSAT André  
 RENARD Michel  
 RINAUDO Marguerite  
 ROSSI André  
 SAKAROVITCH Michel  
 SAXOD Raimard  
 SENDEL Philippe  
 SERGERAERT Francis  
 SOUCHIER Bernard  
 SOUTIF Michel  
 STUTZ Pierre  
 VALENTIN Jacques  
 VAN CUTSEM Bernard  
 VIALON Pierre

Géophysique  
 Sciences Nucléaires I.S.N.  
 Physiologie Végétale  
 Physique du Solide  
 Minéralogie et Pétrographie (Géologie)  
 Astrophysique  
 Botanique (Biologie Végétale)  
 Mathématiques Pures  
 Physique  
 Géologie  
 Géophysique  
 Mécanique  
 Chimie Organique  
 Chimie Systématique  
 Thermodynamique  
 Chimie CERMAV  
 Biologie  
 Mathématiques Appliquées  
 Biologie Animale  
 Biologie Animale  
 Mathématiques Pures  
 Biologie  
 Physique  
 Mécanique  
 Physique Nucléaire I.S.N.  
 Mathématiques Appliquées  
 Géologie

#### PROFESSEURS de 2<sup>ème</sup> Classe

ADIBA Michel  
 ANTOINE Pierre  
 ARMAND Gilbert  
 BARET Paul  
 BECKER Pierre  
 BEGUIN Claude  
 BLANCHI J.Pierre  
 BOITET Christian  
 BORNAREL Jean  
 BRUANDET J.François  
 BRUN Gilbert  
 CASTAING Bernard  
 CERFF Rudiger  
 CHARDON Michel  
 CHIARAMELLA Yves  
 COURT Jean  
 DEMAILLY Jean-Pierre  
 DENEUVILLE Alain  
 DEPASSEL Roger  
 DERRIEN Jacques  
 DUFREYNOY Alain  
 GASPARD François  
 GAUTRON René  
 GENIES Eugène  
 GIDON Maurice  
 GIGNOUX Claude  
 GILLARD Roland  
 GIORNI Alain  
 GUIGO Maryse  
 GUMUCHAIN Hervé  
 GUITTON Jacques  
 HACQUES Gérard

Mathématiques Pures  
 Géologie  
 Géographie  
 Chimie  
 Physique  
 Chimie Organique  
 STAPS  
 Mathématiques Appliquées  
 Physique  
 Physique  
 Biologie  
 Physique  
 Biologie  
 Géographie  
 Mathématiques Appliquées  
 Chimie  
 Mathématiques Pures  
 Physique  
 Mécanique des Fluides  
 Physique  
 Mathématiques Pures  
 Physique  
 Chimie  
 Chimie  
 Géologie  
 Sciences Nucléaires  
 Mathématiques Pures  
 Sciences Nucléaires  
 Géographie  
 Géographie  
 Chimie  
 Mathématiques Appliquées

HERBIN Jacky  
 HERAULT Jeanny  
 JARDON Pierre  
 JOSELEAU Jean-Paul  
 KERCKHOVE Claude  
 LEBRETON Alain  
 LONGEQUEUE Nicole  
 LUCAS Robert  
 LUNA Domingo  
 MANDARON Paul  
 MARTINEZ Francis  
 MASCLE Georges  
 NEMOZ Alain  
 OUDET Bruno  
 PELMONT Jean  
 PERRIN Claude  
 PFISTER Jean-Claude  
 PIBOULE Michel  
 RAYNAUD Hervé  
 RIEDIMANN Christine  
 ROBERT Gilles  
 ROBERT Jean-Bernard  
 SARROT-REYNAULD Jean  
 SAYETAT Françoise  
 SERVE Denis  
 STOECKEL Frédéric  
 SOUTIF Jeanne  
 SCHOLL Pierre-Claude  
 SUBRA Robert  
 VALLADE Marcel  
 VIDAL Michel  
 VIVIAN Robert  
 VOTTERO Philippe

Géographie  
 Physique  
 Chimie  
 Biochimie  
 Géologie  
 Mathématiques Appliquées  
 Sciences Nucléaires I.S.N.  
 Physique  
 Mathématiques Pures  
 Biologie  
 Mathématiques Appliquées  
 Géologie  
 Thermodynamique CNRS - CRTBT  
 Mathématiques Appliquées  
 Biochimie  
 Sciences Nucléaires I.S.N.  
 Physique du Solide  
 Géologie  
 Mathématiques Appliquées  
 Mathématiques Pures  
 Mathématiques Pures  
 Chimie Physique  
 Géologie  
 Physique  
 Chimie  
 Physique  
 Physique  
 Mathématiques Appliquées  
 Chimie  
 Physique  
 Chimie Organique  
 Géographie  
 Chimie

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L' IUT 1

### PROFESSEURS de 1<sup>ère</sup> Classe

BUISSON Roger  
 DODU Jacques  
 NEGRE Robert

Physique IUT 1  
 Mécanique Appliquée IUT 1  
 Génie Civil IUT 1

### PROFESSEURS de 2<sup>ème</sup> classe

BOUTHINON Michel  
 CHAMBON René  
 CHEHIKIAN Alain  
 CHENAVAS Jean  
 CHOUTEAU Gérard  
 CONTE René  
 GOSSE Jean-Pierre  
 GROS Yves  
 KUHN Gérard, (Détaché)  
 MAZUER Jean  
 MICHOUlier Jean  
 MONLLOR Christian  
 NOUGARET Marcel  
 PEFFEN René  
 PERARD Jacques  
 PERRAUD Robert  
 TERRIEZ Jean-Michel  
 TOUZAIN Philippe  
 VINCENDON Marc

EEA. IUT 1  
 Génie Mécanique IUT 1  
 EEA. IUT 1  
 Physique IUT 1  
 Physique IUT 1  
 Physique IUT 1  
 EEA.IUT 1  
 Physique IUT 1  
 Physique IUT 1  
 Physique IUT 1  
 Physique IUT 1  
 EEA.IUT 1  
 Automatique IUT 1  
 Métallurgie IUT 1  
 EEA. IUT 1  
 Chimie IUT 1  
 Génie Mécanique IUT 1  
 Chimie IUT 1  
 Chimie IUT 1

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE MEDECINE

### PROFESSEURS CLASSE EXEPTIONNELLE ET 1ère CLASSE

AMBLARD Pierre	Dermatologie	C.H.R.G.
AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie	C.H.R.G.
BEAUDOING André	Pédiatrie-Puericulture	C.H.R.G.
BEZEZ Henri	Orthopédie-Traumatologie	Hopital SUD
BONNET Jean-Louis	Ophthalmologie	C.H.R.G.
BOUCHET Yves	Anatomie	Faculté La Merci
	Chirurgie Générale et Digestive	C.H.R.G.
BUTEL Jean	Orthopédie-Traumatologie	C.H.R.G.
CHAMPETIER Jean	Anatomie-Topographique et Appliquée	C.H.R.G.
	O.R.L.	C.H.R.G.
CHARACHON Robert	Anatomie-Pathologique	C.H.R.G.
COUDERC Pierre	Pneumophtisiologique	C.H.R.G.
DELORMAS Pierre	Cardiologie	C.H.R.G.
DENIS Bernard	Pharmacologie	Faculté La Merci
GAVEND Michel	Hématologie	C.H.R.G.
HOLLARD Daniel	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
LATREILLE René	Bactériologie-Virologie	C.H.R.G.
	Gynécologie et Qbstétrique	C.H.R.G.
LE NOC Pierre	Médecine du Travail	C.H.R.G.
MALINAS Yves	Clinique Médicale et Maladies Infectieuses	C.H.R.G.
MALLION Jean-Michel	Histologie	Faculté La Merci
MICOUUD Max	Pneumologie	C.H.R.G.
	Neurologie	C.H.R.G.
MOURIQUAND Claude	Hépatogastro-Entérologie	C.H.R.G.
PARAMELLE Bernard	Neurochirurgie	C.H.R.G.
PERRET Jean	Clinique Chirurgicale	C.H.R.G.
RACHAIL Michel	Anesthésiologie	C.H.R.G.
DE ROUGEMONT Jacques	Physiologie	Faculté La Merci
SARRAZIN Roger	Biophysique	Faculté La Merci
STIEGLITZ Paul	Biochimie	Faculté La Merci
TANCHE Maurice		
VERAIN André		
VIGNAIS Pierre		

### PROFESSEURS 2ème CLASSE

BACHELOT Yvan	Endocrinologie	C.H.R.G.
BARGE Michel	Neurochirurgie	C.H.R.G.
BENABID Alim Louis	Biophysique	Faculté La Merci
BENSA Jean-Claude	Immunologie	Hopital Sud
BERNARD Pierre	Gynécologie-Obstétrique	C.H.R.G.
BESSARD Germain	Pharmacologie	ABIDJAN
BOLLA Michel	Radiothérapie	C.H.R.G.
BOST Michel	Pédiatrie	C.H.R.G.
BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie Adultes	Hopital Sud
BRAMBILLA Christian	Pneumologie	C.H.R.G.
CHAMBAZ Edmond	Biochimie	C.H.R.G.
CHIROSSSEL Jean-Paul	Anatomie-Neurochirurgie	C.H.R.G.
COLOMB Maurice	Immunologie	Hopital Sud
COMET Michel	Biophysique	Faculté La Merci
CONTAMIN Charles	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
	Néphrologie	C.H.R.G.
CORDONNIER Daniel	Radiologie	C.H.R.G.
COULOMB Max	Radiologie	C.H.R.G.
CROUZET Guy	Médecine Interne et Toxicologie	C.H.R.G.
DEBRU Jean-Luc	Biostatistiques et Informatique Médicale	Faculté La Merci
DEMONGEOT Jacques		

DUPRE Alain	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
DYON Jean-François	Chirurgie Infantile	C.H.R.G.
ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie	Faculté La Merci
FAURE Claude	Anatomie et Organogénèse	C.H.R.G.
FAURE Gilbert	Urologie	C.H.R.G.
FOURNET Jacques	Hépto-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
FRANCO Alain	Médecine Interne	C.H.R.G.
GIRARDET Pierre	Anesthésiologie	C.H.R.G.
GUIDICELLI Henri	Chirurgie Générale et Vasculaire	C.H.R.G.
GUIGNIER Michel	Thérapeutique et Réanimation Médicale	C.H.R.G.
HADJIAN Arthur	Biochimie	Faculté La Merci
HALIMI Serge	Endocrinologie et Maladies Métaboliques	C.H.R.G.
HOSTEIN Jean	Hépto-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
HUGONOT Robert	Médecine Interne	C.H.R.G.
JALBERT Pierre	Histologie-Cytogénétique	C.H.R.G.
JUNIEN-LAVILLAULOY Claude	O.R.L.	C.H.R.G.
KOLODIE Lucien	Hématologie Biologique	C.H.R.G.
LETOUBLON Christian	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
MACHECOURT Jacques	Cardiologie et Maladies Vasculaires	C.H.R.G.
MAGNIN Robert	Hygiène	C.H.R.G.
MASSOT Christian	Médecine Interne	C.H.R.G.
MOUILLON Michel	Ophthalmologie	C.H.R.G.
PELLAT Jacques	Neurologie	C.H.R.G.
PHELIP Xavier	Rhumatologie	C.H.R.G.
RACINET Claude	Gynécologie	C.H.R.G.
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie	C.H.R.G.
RAPHAEL Bernard	Stomatologie	C.H.R.G.
SCHAERER René	Cancérologie	C.H.R.G.
SEIGNEURIN Jean-Marie	Bactériologie-Virologie	Faculté La Merci
SELE Bernard	Cytogénétique	Faculté La Merci
SOTTO Jean-Jacques	Hématologie	C.H.R.G.
STOEBNER Pierre	Anatomie Pathologique	C.H.R.G.
VROUSOS Constantin	Radiothérapie	C.H.R.G.

#### MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT PHARMACIE

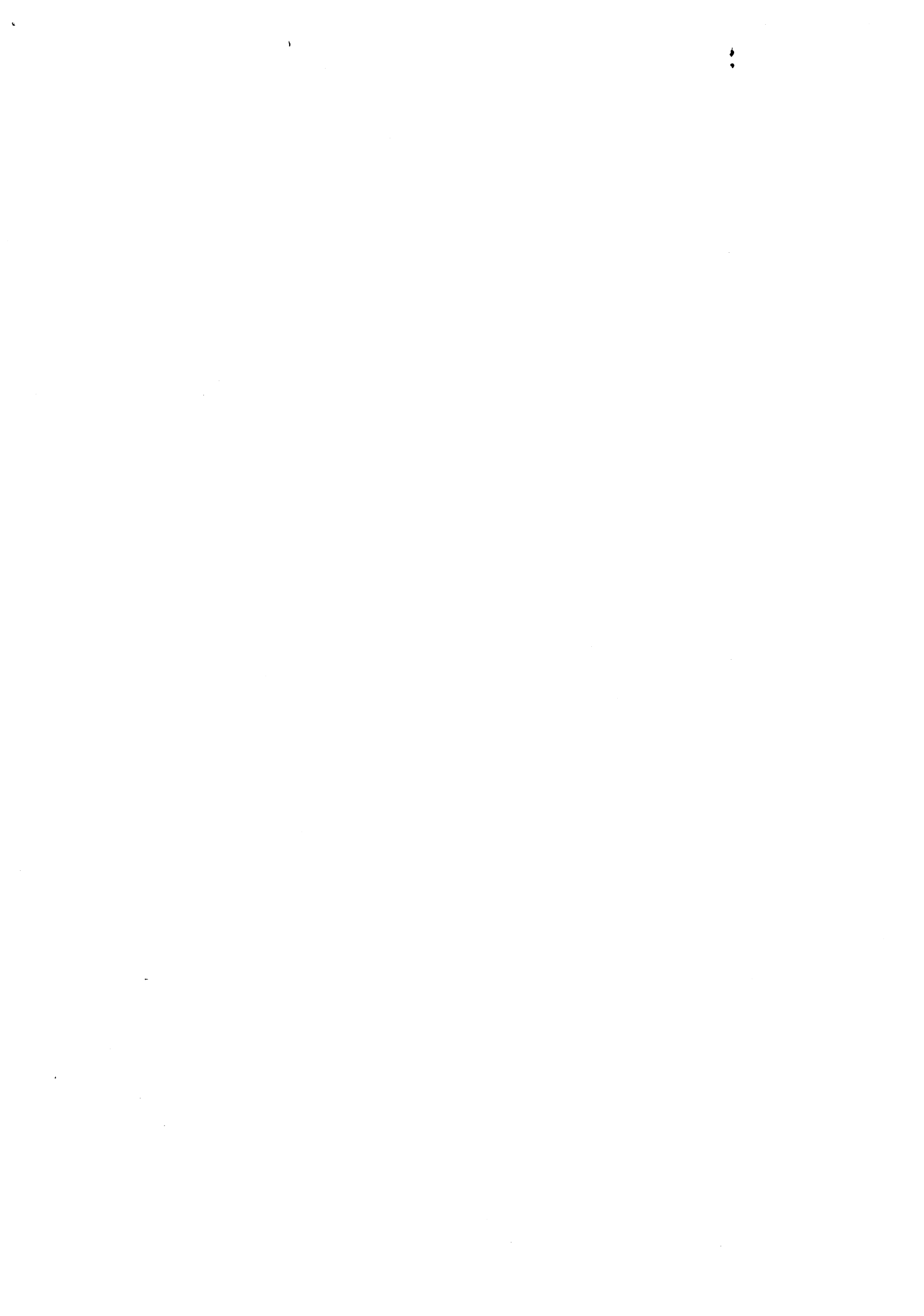
AGNIUS-DELORD Claudine	Physique	Faculté La Tronche
ALARY Josette	Chimie Analytique	Faculté La Tronche
BERIEL Hélène	Physiologie et Pharmacologie	Faculté La Tronche
BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie	Faculté Meylan
CUSSAC Max	Chimie Thérapeutique	Faculté La Tronche
DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie	Faculté La Tronche
JEANNIN Charles	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan
LATURAZE Jean	Biochimie	Faculté La Tronche
LUU DUC Cuong	Chimie Générale	Faculté La Tronche
MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognosie	Faculté La Tronche
MARZIN Daniel	Toxicologie	Faculté Meylan
RENAUDET Jacqueline	Bactériologie	Faculté La Tronche
ROCHAT Jacques	Hygiène et Hydrologie	Faculté La Tronche
SEIGLE-MURANDI Françoise	Botanique et Cryptogamie	Faculté Meylan
VERAIN Alice	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan





*A Malika*

*A mes parents*



*Je voudrais exprimer mes remerciements les plus vifs à*

*Monsieur le Professeur B. MALGRANGE, Directeur de recherches au CNRS, pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider le jury de cette thèse. Ses travaux ont joué un rôle déterminant dans ce projet. Il s'est intéressé de près à mon sujet, pendant de nombreuses heures il m'a accueilli et soutenu. Qu'il me soit permis de lui exprimer toute ma respectueuse gratitude.*

*Monsieur J. P. RAMIS, Professeur à l'université de Strasbourg, pour l'intérêt qu'il a toujours manifesté pour ce projet. Il nous a constamment communiqué ses travaux. Son enthousiasme pour tout ce qui touche au travail de l'équipe de calcul formel de Grenoble nous a toujours encouragé. Il a accepté de participer à ce jury malgré ses très nombreuses obligations. Pour tout cela je lui suis très reconnaissant.*

*Madame A. DUVAL, Maitre de Conférences à l'université de Strasbourg, qui m'a fait l'honneur d'être le rapporteur de ce travail. Ses nombreuses remarques et suggestions ont contribué à l'amélioration du texte initial. Je la remercie vivement d'avoir accepté de juger ce travail.*

*Monsieur J. DELLA DORA, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, qui a dirigé cette thèse. Il m'a d'abord accueilli pour faire un DEA, ensuite une thèse de 3<sup>e</sup> cycle. J'ai pu apprécier durant toutes ces années ses talents tant du point de vue scientifique qu'humain. Il m'a donné constamment des conseils et encouragements. Son amitié et sa sympathie ont beaucoup compté pour moi.*

*Monsieur J. BLUM, Chargé de recherches à l'INRIA, pour avoir accepté de se déplacer de Paris pour siéger à ce jury.*

*Monsieur M. COSNARD, chargé de recherches au CNRS, bien que non spécialiste de ce domaine, m'a fait le plaisir d'accepter de lire cette thèse et d'en être un des examinateurs.*

*Je souhaite également remercier vivement Monsieur J. E. Abderrazik, Directeur de l'Institut National des Postes et Télécommunications de Rabat, de m'avoir dispensé de ma charge d'enseignant durant la préparation de cette thèse.*

*Que tout le personnel du service de reprographie reçoive mes sincères remerciements pour la qualité de son travail.*

*Mes remerciements vont aussi à A. Wazner pour notre longue collaboration. A. Eberhard, C. Dicrescenzo, E. Tournier, M. Barkatou, J. M. Muller ainsi que tous les membres de l'ex-équipe Algorithmique Mathématique pour la contribution que chacun d'eux a su m'apporter.*

*Je souhaite enfin remercier, particulièrement, tous les membres du groupe Calcul Formel pour leur dévouement et sympathie qu'ils m'ont témoigné durant mon séjour parmi eux. J'en garderai un bon souvenir.*



## Table des matières

<b>Introduction</b> .....	<b>1</b>
<b>Contenu de la thèse</b> .....	<b>7</b>
<b>Bibliographie</b> .....	<b>21</b>

### Première Partie

#### SYSTEMES DIFFERENTIELS A SINGULARITE REGULIERE

<b>Chapitre 1: Formes irréductibles d'un système différentiel linéaire</b> ....	<b>33</b>
1.1. Classification des singularités .....	33
1.2. Réductibilité d'un système différentiel linéaire .....	39
1.3. Algorithme de réductibilité .....	42
1.4. Algorithme .....	51
1.5. Cas d'une équation différentielle scalaire d'ordre $n$ .....	55
1.6. Etude de quelques exemples .....	58
<b>Chapitre 2: A propos de la méthode du vecteur cyclique</b> .....	<b>71</b>
2.1. Introduction .....	71
2.2. Méthode de Birkhoff-Cope .....	72
2.3. Equivalence entre systèmes différentiels et équations différentielles scalaires .....	74
2.4. Caractérisation des systèmes différentiels linéaires à singularité régulière par la méthode du vecteur cyclique .....	86
2.5. Exemples .....	89
<b>Chapitre 3: Solutions formelles des systèmes différentiels au voisinage     d'une singularité régulière</b> .....	<b>109</b>
3.1. Introduction .....	109
3.2. Solutions formelles d'un système au voisinage d'un point singulier régulier .....	111
3.3. Exemples .....	118

## Deuxième Partie

### SYSTEMES DIFFERENTIELS A SINGULARITE IRREGULIERE

<b>Chapitre 4: Un algorithme de calcul de l'invariant de Katz d'un système différentiel linéaire .....</b>	<b>129</b>
4.1. Introduction .....	129
4.2. Méthode du vecteur cyclique .....	130
4.3. Invariant de Moser .....	131
4.4. Invariant de Katz .....	133
4.5. Algorithme de calcul de l'invariant de Katz .....	134
4.6. Conclusion .....	141
<b>Chapitre 5: Formes super-irréductibles des systèmes différentiels linéaires .....</b>	<b>147</b>
5.1. Introduction .....	147
5.2. Super-irréductibilité et k-irréductibilité .....	149
5.3. Algorithme de calcul d'une forme k-irréductible .....	154
5.4. Algorithme de calcul d'une forme Q.T.C.D .....	162
5.5. Description de l'algorithme générale .....	162
5.6. Etude de quelques exemples .....	165
<b>Chapitre 6: Calcul des invariants de Malgrange et de Gérard-Levelt d'un système différentiel linéaire en un point singulier irrégulier.....</b>	<b>171</b>
6.1. Introduction .....	172
6.2. Propriétés des systèmes différentiels super-irréductibles .....	174
6.3. Cas d'une équation différentielle scalaire .....	177
6.4. Indice d'irrégularité de B. Malgrange .....	185
6.5. Invariants de Gérard et Levelt .....	188
6.6. Exemple et conclusion .....	190
<b>Chapitre 7: Sur les polygones algébrique et différentiel de Newton-Puiseux.....</b>	<b>197</b>
7.1. Introduction .....	198
7.2. Polygones algébrique et différentiel d'un système .....	200
7.3. Lien entre les deux polygones .....	204
7.4. Algorithme de calcul du polygone de Newton associé à un système différentiel linéaire .....	215
7.5. Algorithm .....	221

**Chapitre 8: Une méthode générale de résolution des systèmes différentiels  $2 \times 2$  au voisinage d'un point singulier irrégulier.....227**

8.1. Introduction .....	227
8.2. Polygone de Newton d'un système $2 \times 2$ .....	228
8.3. Polygone Algébrique d'un système $2 \times 2$ .....	231
8.4. Solutions formelles au voisinage d'une singularité irrégulière .....	234
8.5. Formation du développement d'une solution correspondant à une pente nulle .....	241
8.6. Formation du développement d'une solution correspondant à une pente strictement positive .....	250
8.7. Cas d'une seule pente .....	253
8.8. Exemple .....	261

**Chapitre 9: Solutions formelles des systèmes différentiels au voisinage d'une singularité irrégulière ..... 267**

9.1. Position du problème .....	267
9.2. Propriétés relatives à une forme super-irréductible .....	269
9.3. Algorithme de calcul des solutions formelles associées à une pente nulle .....	273





## INTRODUCTION GENERALE

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la résolution des systèmes différentiels linéaires homogènes d'ordre 1 au voisinage d'une singularité quelconque. Nous conviendrons dans la suite de noter

$$(\Delta) \quad \frac{dY}{dx} = M(x) Y(x) = \frac{A(x)}{x^p} Y(x) = \frac{1}{x^p} [ A_0 + A_1 x + \dots + A_k x^k + \dots ] Y(x)$$

ce système.  $x$  est une variable complexe, les  $A_k$  sont des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients complexes et  $p$  est un entier.

Le problème de l'intégration des équations différentielles linéaires dans le champ complexe est extrêmement ancien et a été étudié par de nombreux mathématiciens. Historiquement, ce sont Lazarus Fuchs (1866), Thomé (1877) et Fabry (1885) qui apportent la notion de points singuliers réguliers et irréguliers et proposent des méthodes pour le calcul des solutions *normales* au voisinage de la singularité d'une équation différentielle homogène d'ordre  $n$ .

Les travaux suivants sont dûs à George D. Birkhoff (1909-1930) qui s'est intéressé au cas des systèmes. Par une technique généralisant la théorie développée par Henri Poincaré (1885), G. D. Birkhoff a dépassé le cas formel (asymptotique) en essayant de donner des méthodes permettant le calcul des *vraies* solutions en étudiant leurs développements asymptotiques. Il donne en particulier la forme des solutions d'un système  $(\Delta)$  au voisinage de la singularité.

Au même moment, Sauvage (1886) a montré que la nature des solutions en un point quelconque dépend, comme dans le cas des équations différentielles scalaires, du comportement des coefficients  $m_{ij}(x)$  de la matrice  $M(x)$  au voisinage de ce point. C'est ainsi que G. Birkhoff et Sauvage ont introduit la notion analogue de points réguliers, singuliers réguliers et singuliers irréguliers pour un système.

On peut noter ici que le choix de  $x = 0$  n'exclut pas la généralité du problème puisque, si  $x_0$  est un pôle pour la matrice  $M(x)$ , par une translation de la forme  $x - x_0$  (ou  $1/x$  si  $x_0 = \infty$ ), on peut toujours se ramener à l'origine.

Lorsque  $p \leq 0$ , on dit que  $x = 0$  est un point *régulier*. Et si on désigne par  $Y_{[ij]}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) une solution vectorielle du système  $(\Delta)$ , elle est de la forme:

$$Y_{[ij]}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} Y_{[ij]}^{(k)} x^k$$

où  $Y_{[ij]}^{(k)}$  sont des vecteurs à coefficients complexes que l'on peut déterminer à l'aide des formules de récurrence.

Si  $p = 1$ , on dit que le point  $x = 0$  est *singulier régulier* et toute solution vectorielle  $Y_{[ij]}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) est de la forme:

$$Y_{[ij]} = x^\lambda [ \Psi_0^{(i)}(x) + \text{Log}x \Psi_1^{(i)}(x) + \dots + (\text{Log}x)^k \Psi_k^{(i)}(x) ]$$

où les  $\Psi_j^{(i)}$  sont des vecteurs colonnes à coefficients des séries formelles sans pôle à l'origine et  $\lambda$  une racine de l'équation *caractéristique*:  $\det(A_0 - \lambda I) = 0$ . Les coefficients de la série  $\Psi_j^{(i)}$  sont déterminés comme dans le cas régulier par des formules de récurrence.

Dans le cas  $p > 1$ , la singularité peut être régulière ou irrégulière. Ceci vient du fait que l'entier  $p$  peut, dans certains cas, être diminué par des changements de variables appliqués sur les composantes du vecteur  $Y$ .

Sous l'hypothèse que l'équation caractéristique  $\det(A_0 - \lambda I) = 0$  admet  $n$  racines distinctes  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , Birkhoff donne la forme générale des solutions formelles au voisinage d'un point singulier irrégulier sous la forme:

$$Y_{[ij]} = \exp \left[ \frac{\lambda_i}{-p+1} \frac{1}{x^{p-1}} + \frac{\lambda_{i1}}{-p+2} \frac{1}{x^{p-2}} + \dots + \lambda_{i,p-2} \frac{1}{x} \right] x^{p_i} [ c_{i0} + c_{i1}x + \dots ] \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Il montre ensuite que tout système  $(\Delta)$  peut être transformé, à l'aide de transformations analytiques (i.e. dont le terme constant est inversible), en une forme simplifiée, appelée *forme canonique*. Ces transformations analytiques ont été étudiées plus tard par Gantmacher (1959), Masani (1959), Turritin (1963) et récemment par (Balser, Jurkat, Lutz et Peyerimhoff (1979)). Par un contre exemple, Gantmacher démontre que dans le cas général (si on n'impose pas de conditions sur la partie la plus polaire  $A_0$ ), il n'existe pas de transformations analytiques permettant de transformer  $(\Delta)$  sous une forme canonique. Cependant, ces observations n'altèrent pas l'importance théorique des travaux de Birkhoff qui

restent indéniablement au coeur du problème de l'intégration des équations différentielles.

A côté de ces travaux, il faut ajouter d'innombrables contributions Schlesinger (1907), Tamarkin (1927), Cope (1936), Watson (1962)) jusqu'aux travaux modernes de Wasow (1973), Sibuya (1958-1962), Turritin (1955/1963), Malgrange (1974-1981), Deligne (1970), Ramis (1981-1985), Gérard et Levelt (1973), Jurkat, Lutz, Moser, Balser ...). L'apport de ces travaux a permis de rendre ces méthodes plus précises et plus générales.

Associé au problème de la recherche des solutions asymptotiques des équations différentielles, se trouve le problème de l'intégration exacte de ces solutions. Grâce au calcul formel, on peut pallier maintenant à cette difficulté. Cet outil a permis de jeter un nouveau regard sur ce problème qui est maintenant en pleine expansion.

Dans ce travail, nous avons été amenés à chercher des algorithmes de *réduction* permettant à la fois une caractérisation de la singularité et construisant par le même moyen des transformations qui conduisent à la résolution directe du système en question.

Au **chapitre I**, nous développons un algorithme (basé sur le critère de J. Moser) permettant de transformer un système sous une forme irréductible au sens de Moser. Cet algorithme permet la caractérisation des systèmes différentiels linéaires à singularité régulière. Il construit, en un nombre fini de pas des transformations élémentaires permettant d'écrire le système sous une forme dont l'ordre polaire est égal à 1. Ces matrices s'obtiennent à l'aide de la méthode d'élimination de Gauss. Cet algorithme constitue une étape nécessaire pour la résolution des systèmes différentiels au voisinage d'une singularité régulière. Ceci est développé dans le **chapitre III**.

Au **chapitre II**, on présente la méthode du vecteur cyclique (développée dans une thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, Hilali (1982)). Cette méthode consiste à réduire tout système ( $\Delta$ ) en une équation différentielle scalaire d'ordre  $n$ . Ce procédé permet d'appliquer sur le système tous les critères déjà connus pour les équations scalaires. Il permet en outre de calculer explicitement tous les invariants associés à ( $\Delta$ ) à partir des coefficients de l'équation obtenue par la méthode; en particulier le polygone de Newton, outil important pour la résolution du système. Cependant, du point de vue pratique, la méthode s'avère d'un maniement lourd et coûteux, d'autant plus que ces invariants sont déterminés uniquement par les valuations des coefficients de l'équation obtenue par un vecteur cyclique. Toutefois, cette méthode est loin d'être négligeable, car elle va jouer dans toute la suite un rôle important dans la traduction, pour les systèmes, de tous les résultats connus sur les équations différentielles scalaires.

Au **chapitre IV**, on s'intéresse au calcul de l'invariant de Katz (i.e. la plus grande pente du polygone de Newton) d'un système sans l'utilisation du vecteur cyclique. Partant d'un système différentiel irréductible, nous construisons un algorithme qui permet le calcul de cet invariant à partir du polynôme caractéristique associé à la matrice du système.

Au **chapitre V**, on donne une généralisation du critère de J. Moser. Une suite d'invariants  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{p-1}$ , associés au système  $(\Delta)$ , est définie. Cette généralisation donne lieu à un algorithme permettant de transformer, en un nombre fini de pas, tout système sous une forme appelée *super-irréductible*. Cette forme définit des polynômes  $\theta_1(A, \lambda), \theta_2(A, \lambda), \dots, \theta_{p-1}(A, \lambda)$ , où  $\lambda$  est un paramètre et  $p$  le plus petit ordre polaire de la matrice du système lorsqu'on lui applique toutes les transformations à coefficients des séries formelles. On démontre en particulier, que les polynômes  $\theta_k(A, \lambda)$  sont des invariants formels pour les systèmes différentiels.

Au **chapitre VI**, on montre que cette forme définit en outre certains entiers qui permettent le calcul effectif de l'invariant de Malgrange (i.e. la hauteur du polygone de Newton), ainsi que d'autres invariants classiques, ceux de Gérard et Levelt, de Lutz et Shäfer et de Wagenführer. On introduit par l'intermédiaire de ces entiers un polygone dont toutes les pentes sont entières et qui coïncident avec celles du polygone de Newton lorsque celles-ci sont entières.

Au **chapitre VII**, on donne une généralisation de l'algorithme de calcul de l'invariant de Katz. Ce travail introduit la notion du polygone algébrique de Newton-Puiseux. Ce dernier est tout naturellement le polygone de Newton associé au déterminant caractéristique  $\det(M(x) + \lambda I)$  de la matrice  $M$ , lorsqu'on remplace le paramètre  $\lambda$  par l'opérateur de dérivation. On montre que lorsque l'ordre polaire de la matrice  $M(x)$  est assez grand, les deux polygones algébrique et différentiel coïncident. Ensuite, par une ramification de la forme  $x = t^m$  (l'entier  $m$  est donné), on peut se ramener au cas précédent.

Ce résultat donne lieu à une généralisation de la classification formelle de la singularité et à une méthode générale pour la résolution directe des systèmes différentiels linéaires.

Dans le **chapitre VIII** (consacré aux systèmes  $2 \times 2$ ), et le **chapitre IX** (aux systèmes  $n \times n$ ), nous avons pu, grâce à certaines propriétés des fonctions  $\theta_k(A, \lambda)$ , généraliser la méthode de Frobenius que l'on utilise dans les équations différentielles d'ordre  $n$  au voisinage d'une singularité régulière. D'après les travaux de B. Malgrange et J. P. Ramis, on sait que cet algorithme est au coeur du problème général qui est celui de la recherche des solutions au voisinage d'une

singularité irrégulière. Cette méthode, dite de cassure de pentes, consiste à construire un certain nombre de solutions correspondant à la pente nulle du polygone. Ensuite, par des changements de variables successifs et des ramifications, on démontre que le tout se ramène à l'utilisation de cet algorithme.

## **Remerciements**

Deux textes présentés dans cette thèse, ont été écrits en collaboration avec A. Wazner. Je souhaite le remercier et témoigner du plaisir que j'ai éprouvé lors de chacune de ces collaborations.

Je remercie vivement Mme A. Duval d'avoir lu et corrigé cette thèse. Pour toutes ses judicieuses remarques et suggestions, je la remercie du fond du coeur.

Je souhaite également exprimer toute ma reconnaissance aux Professeurs J. Della Dora, B. Malgrange et J.P. Ramis dont leurs travaux ont été l'outil principal de cette thèse. J'ai pu librement les consulter, ils ont été utiles pour l'accomplissement de ce travail. Qu'ils soient remerciés ici.

Ce travail a reçu l'aide du PRC Mathématiques-Informatique.



## CONTENU DE LA THESE

Nous donnons dans ce qui suit, un résumé détaillé du contenu des résultats présentés dans cette thèse. Comme nous l'avons signalé, ces algorithmes présentent une étape préliminaire pour la recherche des solutions formelles d'un système différentiel linéaire au voisinage d'une singularité quelconque. On notera

$$(\Delta_p) \quad Y'(x) = M(x)Y(x) = x^{-p}A(x)Y(x) = x^{-p}[A_0 + A_1x + \dots + A_kx^k + \dots]Y(x)$$

un tel système. Les  $A_k$  sont des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients complexes. Un système fondamental de solutions de  $(\Delta_p)$  est une matrice carrée formée par  $n$  solutions vectorielles  $Y_{[1]}, Y_{[2]}, \dots, Y_{[n]}$  linéairement indépendantes, que l'on peut représenter sous la forme [Birkhoff 1930, Turritin 1955]:

$$(1.1) \quad \Phi(x) = F(t) t^\Lambda \exp [Q(1/t)]$$

avec

$$\Phi(x) = [ Y_{[1]}, Y_{[2]}, \dots, Y_{[n]} ]$$

$\Lambda$  est une matrice constante à coefficients complexes,  $t$  est une variable liée à  $x$  par une ramification de la forme  $x = t^m$  ( $m \geq 1$  est un entier convenablement choisi).

$$(1.2) \quad Q\left(\frac{1}{t}\right) = \text{diag} \left( q_1\left(\frac{1}{t}\right), q_2\left(\frac{1}{t}\right), \dots, q_n\left(\frac{1}{t}\right) \right)$$

est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont des polynômes sans terme constant.

$$(1.3) \quad F(t) = \sum_{k=-v}^{+\infty} F_k t^k \quad v \geq 0$$

est une matrice à coefficients des séries formelles en  $t$ , et dont la partie non polaire est en général divergente.

Si  $p \leq 0$ , un système fondamental de solutions peut être représenté sous la forme (1.1) avec  $m = 1$ ,  $Q(1/t) \equiv 0$  et  $\Lambda = 0$ .

Si  $p = 1$ , un système fondamental de solutions peut être représenté sous la forme (1.1) avec  $m = 1$  et  $Q(1/t) \equiv 0$ .



Si  $p > 1$  comme nous l'avons dit, la singularité peut être régulière ou irrégulière. C'est là un des premiers problèmes que nous avons essayé de résoudre (voir aussi les travaux de [Dietrich 1978, Harris 1972, Wagenführer 1983-1987, Lutz et Shäfke 1987]).

### 1. Systèmes différentiels à singularité régulière.

Dans le cas où le système différentiel est à singularité régulière, on sait [Wasow 1973, Lutz 1967a] qu'il existe une transformation  $T$  appartenant au groupe  $GL(n, \mathbb{C}((x)))$  des matrices inversibles à coefficients dans  $\mathbb{C}((x))$  telle que le changement de variables:

$$(1.4) \quad Y(x) = T(x) Z(x)$$

transforme  $(\Delta_p)$ , en un système de la forme:

$$(\Delta_1) \quad Z'(x) = x^{-1}B(x)Z(x) = x^{-1}[B_0 + B_1x + \dots + B_kx^k + \dots]Z(x)$$

où

$$x^{-1}B(x) = x^{-p}T^{-1}A(x)T - T^{-1}T'$$

On dit que les systèmes  $(\Delta_p)$  et  $(\Delta_1)$  sont *équivalents*.

Au système  $(\Delta_p)$ , J. Moser 1960, associe les nombres rationnels

$$(1.5) \quad m(M) = p - 1 + \text{rang}(A_0)/n \geq 0$$

avec  $m(M) = 0$  si  $p - 1 + \text{rang}(A_0)/n \leq 0$ .

$$(1.6) \quad \mu(M) = \text{Inf} \{ m(T^{-1}M(x)T - T^{-1}T'), T \in GL(n, \mathbb{C}((x))) \}$$

Le but du premier chapitre, est de calculer l'invariant de J. Moser  $\mu$  défini par l'égalité (1.6). L'algorithme proposé construit, en un nombre fini de pas, des transformations successives de la forme:

$$T_k(x) = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, x, x, \dots, x)P \quad k = 1, 2, \dots, N$$

où  $P$  est une matrice constante inversible. La transformation finale

$$T(x) = T_1(x) T_2(x) \dots T_N(x)$$

permet de réduire le système sous une forme

$$(\Delta_{p^*}) \quad \frac{dY}{dx} = \frac{1}{x^{p^*}} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^* x^k \right) Y(x)$$

où  $(p^*, \text{rang}(A_0^*))$  sont les plus petits entiers vérifiant l'égalité (1.6). Cet algorithme permet d'avoir une condition nécessaire et suffisante de la régularité du point singulier. On a

$x = 0$  est une singularité régulière du système  $(\Delta_{p^*})$  si et seulement si  $p^* = 1$

L'algorithme développé dans le chapitre III permet de transformer tout système de la forme  $(\Delta_1)$  en un système de la forme:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{C}{x} Y$$

où  $C$  est une matrice constante dont un système fondamental de solutions est

$$\Phi(x) = x^C.$$

## 2. Systèmes différentiels à singularité irrégulière

On peut résumer l'algorithme de la résolution des systèmes différentiels au voisinage d'une singularité irrégulière en quatre étapes :

### Etape 1: SYSTEMES DIFFERENTIELS $k$ -IRREDUCTIBLES:

Considérons la fonction  $\omega$  qui à tout élément  $f$  de  $\mathbb{C}((x))$  de la forme:

$$f(x) = x^v \sum_{k=0}^{k=+\infty} f_k x^k \quad \text{avec} \quad v \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad f_0 \neq 0$$

associe son ordre en zéro (au sens large). C'est à dire  $\omega(f) = v$  (avec  $\omega(0) = +\infty$ ). On désignera dans la suite par  $\mathbb{C}[[x]]$  l'ensemble des séries formelles  $f$  vérifiant  $\omega(f) \geq 0$ .

Désignons par  $(a_{ij}(x))$  les coefficients de la partie non polaire de la matrice  $M(x)$ , on construit  $n$  entiers positifs ou nuls de la manière suivante

$$\alpha_j = \text{Inf}_{1 \leq i \leq n} (p-1, \omega(a_{ij})) \quad j=1,2,\dots,n$$

La matrice du système  $(\Delta_p)$ , s'écrit alors d'une manière unique sous la forme :

$$(1.7) \quad A(x) = x^{-PN(x)} x^\alpha$$

où  $N$  est un élément de  $M_n(\mathbb{C}[[x]])$ : l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{C}[[x]]$ , avec

$$\alpha = \text{diag} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad \alpha_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$$

Appelons  $n_i$  la multiplicité (éventuellement nulle) de l'entier  $i$  dans la matrice  $\alpha$ . On peut supposer sans changer la généralité (quitte à appliquer à  $A$  une permutation sur les colonnes) que la matrice  $\alpha$  soit de la forme :

$$(1.8) \quad \alpha = \text{diag} (0_{n_0}, I_{n_1}, 2I_{n_2}, \dots, (p-2) I_{n_{p-2}}, (p-1)I_{n'_{p-1}})$$

Où  $0_{n_0}$  est une matrice nulle d'ordre  $n_0$ ,  $I_{n_i}$  est la matrice identité d'ordre  $n_i$ , avec

$$(1.9) \quad n'_{p-1} = n - \sum_{i=0}^{p-2} n_i$$

Au système  $(\Delta_p)$ , on associe les nombres rationnels suivants [Hilali, Wazner 1986b]:

$$m(M) = m_k(M) := 1 \quad (k \in \mathbb{N}^*) \quad \text{si } p = 1$$

$$\left. \begin{aligned} m_k(M) &= p - 1 + \frac{n_0}{n} + \frac{n_1}{n^2} + \dots + \frac{n_{k-1}}{n^k} \quad (1 \leq k \leq p-1) \\ m(M) &= m_k(M) := m_{p-1}(M) \quad (k \geq p) \end{aligned} \right\} \quad \text{si } p > 1$$

On définit alors les invariants  $\mu_k(M)$  ( $1 \leq k \leq p-1$ ) et  $\mu^*(M)$  de la manière suivante

$$\begin{aligned} \mu_k(M) &= \text{Inf} (m_k(T^{-1} M T - T^{-1} T')) \\ &\quad T \in \text{GL}(n, \mathbb{C}((x))) \\ \mu^*(M) &= \mu_{p-1}(M) \end{aligned}$$

et on dit que le système différentiel  $(\Delta_p)$  est *k-irréductible* si  $m_k(M) = \mu_k(M)$  et si  $k = p-1$ , on dit que le système différentiel  $(\Delta_p)$  est *super-irréductible*.

On appellera les entiers  $(p, n_0, n_1, \dots, n_{p-2})$  les *paramètres* associés à une forme super-irréductible.

### Remarques

En utilisant l'invariant de Moser  $\mu(M)$  défini ci-dessus, on a

$$\mu_1(M) = \text{Max} \{ 1, \mu(M) \}$$

et la singularité régulière est caractérisée par  $\mu_1(M) = 1$ .

On considère ensuite les fonctions [Hilali, Wazner 1986b]:

$$(1.10) \quad \begin{aligned} \theta_s(A, x, \lambda) &= x^{r_s} \det \left( \frac{A(x)}{x^s} + \lambda I \right) \quad s = 1, 2, \dots, p-1 \\ r_s &= sn_0 + (s-1)n_1 + \dots + n_{s-1} \end{aligned}$$

Ces fonctions sont des polynômes en  $\lambda$  à coefficients dans  $\mathbb{C}[[x]]$ . Elles permettent de caractériser les systèmes différentiels super-irréductibles [Hilali, Wazner 1986b].. On a le

### **Théorème 1**

*Soit  $k$  un entier compris entre 1 et  $p-1$ . Si  $p \geq 2$ , alors le système différentiel  $(\Delta_p)$  est  $k$ -irréductible si et seulement si les polynômes  $\theta_1(A, 0, \lambda), \theta_2(A, 0, \lambda), \dots, \theta_k(A, 0, \lambda)$  sont non identiquement nuls en  $\lambda$ .*

L'algorithme décrit dans le chapitre V, construit, en un nombre fini de pas, des transformations successives de la forme:

$$T_k(x) = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, x, x, \dots, x)(P_0 + P_1x + \dots + P_kx^k) \quad k = 1, 2, \dots, N$$

où  $P_0, P_1, \dots, P_k$  sont des matrices constantes avec  $\det(P_0) \neq 0$ . La méthode proposée est relativement simple, car les transformations sont construites à chaque pas à l'aide de la méthode d'élimination de Gauss sur des matrices constantes d'ordre  $\leq n$ .

Considérons maintenant une équation différentielle linéaire homogène de la forme:

$$(D) \quad \frac{d^n y}{dx^n} - \sum_{k=1}^{k=n} a_k(x) \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} = 0$$

où les  $a_k$  sont des séries formelles de la forme :

$$a_k(x) = x^{-\lambda_k} c_k(x) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

avec  $\lambda_k = -\omega(a_k)$ .

Dans le cas d'une équation différentielle scalaire, on peut obtenir d'une manière explicite le calcul des invariants définis ci-dessus, sans avoir à utiliser l'algorithme de super-réductibilité. On a [Hilali 1987b]

### ***Théorème 2***

*Soit  $q$ , le plus petit entier tel que  $q \geq \lambda_k/k$  et  $q \geq 1$ . Soit  $v_s$  ( $1 \leq s \leq q-1$ ) l'entier défini par:*

$$v_s = \text{Max}_{1 \leq k \leq n} (\lambda_k - k(q-s))$$

*Alors l'invariant  $\mu^*(D)$  de l'équation différentielle (D) est*

$$\mu^*(D) = 1 \quad \text{si} \quad q = 1 \quad \text{et}$$

$$\mu^*(D) = q - 1 + \frac{v_1}{n} + \frac{v_2 - 2v_1}{n^2} + \dots + \frac{v_{s+1} - 2v_s + v_{s-1}}{n^s} + \dots + \frac{v_{q-1} - 2v_{q-2} + v_{q-3}}{n^{q-1}} \quad \text{si } q > 1.$$

### **Remarque**

Si l'on considère (D) comme une équation différentielle obtenue à partir du système  $(\Delta_p)$  par l'intermédiaire d'un vecteur cyclique, on peut déduire le calcul de plusieurs invariants classiques. Nous rappelons brièvement cette méthode:

On pose  $Y_0(x) = (\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x))$ , un vecteur ligne à  $n$  composantes, où les  $\beta_i(x)$  sont des polynômes de degrés  $\leq n-1$  [Ramis 1984]. La récurrence :

$$Y_{k+1} = Y'_k + Y_k M(x) \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

définit alors une matrice carrée d'ordre  $n$ ;  $Q(x)$  dont les lignes sont:  $Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}$ . Si  $Q$  est inversible, on dit que  $Y_0$  est un vecteur cyclique, et le changement de variables  $Y(x) = Q(x)Z(x)$ , nous conduit à un système dont la matrice est sous une forme compagnon:

$$C(x) = QM(x)Q^{-1} + \frac{dQ}{dx}Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ a_n & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{bmatrix}$$

Les  $a_k$  représentent naturellement les coefficients de l'équation différentielle correspondant au système  $(\Delta_p)$  et obtenue à l'aide du vecteur cyclique  $Y_0$ .

En transformant la matrice compagnon sous une forme super-irréductible, on obtient alors les conséquences suivantes [Hilali 1987b]:

### **Théorème 3**

*Si le système  $(\Delta_p)$  est super-irréductible de paramètres  $(p, n_0, n_1, \dots, n_{p-2})$  et si  $p \geq 2$ , alors pour tout choix du vecteur cyclique, on a les propriétés suivantes:*

- (i)  *$p$  est le plus petit entier tel que  $p \geq \lambda_k/k$  ( $1 \leq k \leq n$ ). ( $\lambda_k$  désigne l'ordre polaire du  $k^{\circ}$  coefficient de la forme compagnon  $C(x)$ ).*
- (ii)  $r_s = sn_0 + (s-1)n_1 + \dots + n_{s-1} = \text{Max}_{1 \leq k \leq n} (\lambda_k - k(p-s)) \quad s = 1, 2, \dots, p-1.$
- (iii) *Si  $n_s \neq 0$  et si l'on désigne par  $k_s$  le plus petit entier appartenant à l'intervalle  $[n_0 + n_1 + \dots + n_{s-1}, n_0 + n_1 + \dots + n_s]$  pour lequel le maximum est atteint, on a*

$$k_s = n - d^\circ(\theta_s(A, 0, \lambda)) \quad \text{avec} \quad \lambda_{k_s} = r_s + k_s(p-s).$$

**Remarques**

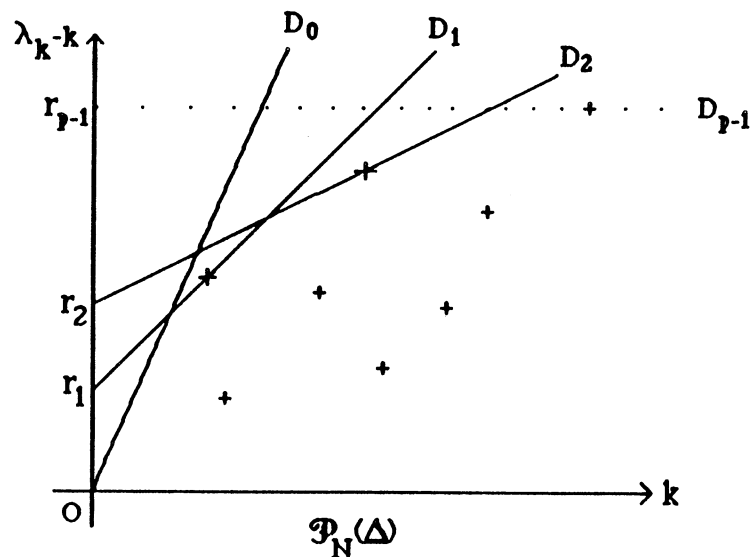
les propriétés (i), (ii) et (iii), montrent en particulier que les entiers  $p$ ,  $r_s$  et  $k_s$  sont des invariants formels pour les systèmes différentiels super-irréductibles. Ces entiers donnent naissance à un polygone  $\mathcal{P}_N(\Delta)$  dont toutes les pentes sont entières. La construction de ce polygone se fait de la manière suivante:

Dans un repère orthonormé, on trace la droite  $D_0$  passant par l'origine et de pente l'entier  $p - 1$  ( $p$  étant l'ordre polaire de la matrice du système). Ensuite, pour tout entier  $s = 1, 2, \dots, p - 1$ , on trace la droite  $D_s$  passant par le point:

$$(0, r_s = sn_0 + (s-1)n_1 + \dots + n_{s-1})$$

et de pente  $p - s - 1$ .

Comme les entiers  $r_s$  vérifient les inégalités  $\lambda_k - k \leq r_s + k (p-s-1)$ , si l'on considère les points  $M_k$  d'abscisses  $k$  et d'ordonnés  $\lambda_k - k \geq 0$ . Tous ces points se trouvent dans le domaine limité par l'axe des abscisses et l'enveloppe convexe supérieure formée par les droites  $D_s$ . De plus, d'après la propriété (iii), chaque droite  $D_s$  ( $s \geq 1$ ) passe par l'un (au moins) des points  $M_k$  (voir fig. ci-dessous).



Ces résultats donnent en particulier le calcul des invariants de Malgrange et Gérard et Levelt. On a la proposition [Hilali 1987b]:

**Proposition**

Si le système  $(\Delta_p)$  est super-irréductible de paramètres  $(p, n_0, n_1, \dots, n_{p-2})$ .  
Alors les entiers

$$r_s = sn_0 + (s-1)n_1 + \dots + n_{s-1} \quad (1 \leq s \leq p-1)$$

désignent les invariants de Gérard et Levelt, et  $r_{p-1}$  l'indice d'irrégularité au sens de Magrange (i.e la hauteur du polygone  $\mathcal{P}_N(\Delta)$ ).

**Etape 2.**

**POLYgone DE NEWTON**

D'après les travaux de J. P. Ramis et B. Malgrange, on sait que le polygone de Newton que l'on note  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  associé à un système est indépendant du choix du vecteur cyclique. Se basant sur ce critère, on peut définir le polygone à partir des coefficients du polynôme caractéristique de la matrice compagnon obtenue via un vecteur cyclique. Donc  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  est le même que celui de l'opérateur différentiel:

$$\det(QMQ^{-1} + Q'Q^{-1} + \lambda I) | \lambda = d/dx$$

où  $Q(x)$  est la matrice définie précédemment. Or, ce déterminant est invariant par similarité. L'opérateur différentiel précédent est donc le même que:

$$\det(M(x) + Q^{-1}Q' + \lambda I) | \lambda = d/dx$$

Il est donc naturel d'introduire ce que l'on peut appeler le polygone algébrique de Newton que l'on notera  $\mathcal{P}_{\text{alg}}(\Delta)$ . Ce polygone est naturellement le polygone différentiel de Newton associé à l'opérateur différentiel:

$$\det(M(x) + \lambda I) | \lambda = d/dx$$

On énonce dans le théorème suivant le résultat essentiel du chapitre VII [Hilali 1987a]:



**Théorème 4**

Soit  $(\Delta_p)$  un système différentiel super-irréductible. Soit  $s^*$  le plus petit entier à partir duquel on a  $n_{s^*+1} = n_{s^*+2} = \dots = n_{p-2} = 0$ . Soit  $k^*$  l'entier défini par :

$$k^* = n - \partial^\circ(\theta_{p-1}(A, 0, \lambda))$$

Si l'inégalité (I)  $p > s^* + 2 + k^*/4$  est vérifiée, alors on a  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta) = \mathcal{P}_{\text{alg}}(\Delta)$   
Sinon, le changement de variables

$$(II) \quad x = t^m \quad \text{avec} \quad m > \frac{k^*/4 + 2}{p-s^*-1}$$

permet de transformer  $(\Delta_p)$  en un système dont les deux polygones sont identiques.

Ce théorème donne un moyen de calcul rapide du polygone de Newton associé au système  $(\Delta_p)$ . Dans le cas où l'inégalité (I) n'est pas vérifiée, on applique au système la ramification  $x = t^m$ , ensuite on applique l'algorithme de réductibilité. Les paramètres du système obtenu vérifient alors l'inégalité (I). Les pentes du polygone de Newton associé à  $(\Delta_p)$  sont celles du système ramifié divisées par l'entier  $m$ .

**Étape 3:                    METHODE DE CASSURE DE PENTES**

Cette méthode consiste à appliquer sur le système  $(\Delta_p)$  des changements de variables successifs de type

$$Y(x) = \exp(a / x^\lambda) Z(x)$$

où  $\lambda$  désigne la valeur d'une pente strictement positive, de telle manière à rendre cette pente nulle. On sait (cf. [Malgrange 1981], [Ramis 1981-1984]) que cet algorithme converge et que l'on peut, en un nombre fini de pas, rendre chaque pente strictement positive égale à 0. On peut trouver une démonstration de ceci pour le cas particulier des systèmes  $2 \times 2$  dans le chapitre VIII.

Cette technique est celle que l'on utilise dans les équations différentielles scalaires. Pour plus de détails, on peut consulter les travaux de J. Della Dora et E. Tournier (1981-1987).

**Étape 4: ALGORITHME DE CALCUL DES SOLUTIONS FORMELLES ASSOCIEES A UNE PENTE NULLE**

Comme nous l'avons précisé, on sait que le tout se ramène à l'utilisation de cet algorithme connu sous le nom de Frobenius. Il s'agit de construire une chaîne de solutions formelles associée à une pente nulle du polygone. Il est clair que les deux étapes 3 et 4 fournissent  $n$  solutions linéairement indépendantes du système.

**Théorème 5**

*Soit  $(\Delta_p)$  un système différentiel super-irréductible. Si l'entier  $k^* = n - \partial^\circ(\theta_{p-1}(A,0,\lambda))$  est inférieur strictement à  $n$ , alors le polygone  $\mathcal{P}_{diff}(\Delta)$  présente une pente nulle de longueur  $n - k^*$ .*

D'après ce qui précède, nous avons vu (cf. (1.7)) que l'on peut toujours supposer que la partie non polaire  $A(x)$  de la matrice  $M(x)$  soit de la forme

$$A(x) = \begin{bmatrix} (A_0^{00} + \dots) & x(A_1^{01} + \dots) & \dots & x^{p-2}(A_{p-2}^{0p-2} + \dots) & x^{p-1}(A_{p-1}^{0p-1} + \dots) \\ (A_0^{10} + \dots) & x(A_1^{11} + \dots) & \dots & x^{p-2}(A_{p-2}^{1p-2} + \dots) & x^{p-1}(A_{p-1}^{1p-1} + \dots) \\ & & \dots & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \\ (A_0^{p-10} + \dots) & x(A_1^{p-11} + \dots) & \dots & x^{p-2}(A_{p-2}^{p-1p-2} + \dots) & x^{p-1}(A_{p-1}^{p-1p-1} + \dots) \end{bmatrix}$$

où les  $A_k^{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) sont des blocs associés à la matrice  $A_k$  ( $k = 1, 2, \dots, \infty$ ) de dimensions respectives  $n_i \times n_j$  (si  $0 \leq i, j \leq p-2$ ),  $n'_{p-1} \times n_j$  (si  $i = p-1$  et  $0 \leq j \leq p-2$ ),  $n_i \times n'_{p-1}$  (si  $j = p-1$  et  $0 \leq i \leq p-2$ ) et  $n'_{p-1} \times n'_{p-1}$  (si  $i = j = p-1$ ).

Ce qui s'écrit encore sous la forme:

$$A(x) = (N_0 + N_1x + \dots + N_kx^k + \dots)x^\alpha$$

avec

$$\alpha = \text{diag} ( 0_{n_0}, I_{n_1}, \dots, (p-1) I_{n_{p-1}} )$$

et

$$N_0 = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \xleftrightarrow{n_0} \\ A_0^{00} \\ \xleftrightarrow{n_1} \\ A_0^{10} \\ \dots \\ A_0^{p-10} \end{matrix} & \begin{matrix} \xleftrightarrow{n_1} \\ A_1^{01} \\ A_1^{11} \\ \dots \\ A_1^{p-11} \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} \xleftrightarrow{n_{p-2}} \\ A_{p-2}^{0p-2} \\ A_{p-2}^{1p-2} \\ \dots \\ A_{p-2}^{p-1p-2} \end{matrix} & \begin{matrix} \xleftrightarrow{n_{p-1}} \\ A_{p-1}^{0p-1} \\ A_{p-1}^{1p-1} \\ \dots \\ A_{p-1}^{p-1p-1} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

La fonction  $\theta_s(A, 0, \lambda)$  définie ci-dessus s'écrit ( pour  $s = p-1$ ) sous la forme:

$$\theta_{p-1}(A, 0, \lambda) = \det(N_0 + \lambda E_0)$$

avec

$$E_0 = \text{diag}(0,0,\dots,0,1,1,\dots,1)$$

où le  $i^{\text{ème}}$  élément de la diagonale vaut 0 si  $i \leq n_0 + n_1 + \dots + n_{p-2}$  et 1 sinon.

On suppose que la condition du théorème précédent soit satisfaite et on montre (cf. chapitre IX) que les solutions associées à la pente nulle peuvent être choisies sous la forme

$$Y(x) = x^{-\lambda} x^\varepsilon [ Z_0 + Z_1x + \dots + Z_kx^k + \dots ]$$

où  $\varepsilon$  est une matrice diagonale donnée par la formule:

$$\varepsilon = (p-1)I - \alpha$$

$\lambda$  est une racine de l'équation *caractéristique*:

$$(i) \quad \theta_{p-1}(A,0,\lambda) = \det(N_0 + \lambda E_0) = 0.$$

$Z_0$  est une solution arbitraire de l'équation:

$$(ii) \quad (N_0 + \lambda E_0)Z_0 = 0$$

et Les  $Z_k$  sont déterminés à l'aide de la formule de récurrence:

$$(iii) \quad (N_0 + (\lambda-k)E_0) Z_k = V_{k-1} \quad k = 1, 2, \dots, \infty.$$

où  $V_{k-1}$  est un vecteur colonne qui ne dépend que de  $Z_0, Z_1, \dots, Z_{k-1}$ .

Ces trois équations permettent le calcul des solutions formelles associées à la pente nulle de longueur  $n-k^*$ . Dans le chapitre IX, on construit ces solutions suivant la structure matricielle de  $N_0$ : Cas générique, cas où l'équation (ii) n'admet pas  $n-k^*$  solutions linéairement indépendantes, cas où les racines de l'équation caractéristique  $\theta_{p-1}(A,0,\lambda) = 0$  différent entre elles d'un entier.



## **BIBLIOGRAPHIE**

- [BALSER W., JURKAT W.B. and LUTZ D.A. 1979]**  
Birkhoff invariants and Stokes' Multipliers for meromorphic linear differential equations.  
J. Math. An. App. **71**, 48-94 (1979).
- [BIRKHOFF G. D. 1909]**  
Singular points of ordinary differential equations  
Trans. Amer. Math. Soc. **10**(1909) 463-470.
- [BIRKHOFF G. D. 1913]**  
On a simple type of irregular singular point.  
Trans. Amer. Math. Soc. **14**(1913) 462-476.
- [BIRKHOFF G. D. 1930a]**  
Formal theory of irregular difference equations  
Acta. Math. Vol. **54** (1930), p. 207-209.
- [BIRKHOFF G. D. 1930b]**  
Equivalent singular points for ordinary linear differential equations  
Math. Ann. **74** (1930), 134-139.
- [CODDINGTON E. A. and LEVINSON N. 1955]**  
Theory of ordinary differential equations  
Mc. Graw-Hill Book Company. INC New York (1955).
- [COPE F. T. 1936]**  
Formal solutions of irregular linear differential equations  
Am. J. Math. Vol. **58** (1936) p. 130-140.
- [DELIGNE P. 1970]**  
Equations différentielles à points singuliers réguliers.  
Lectures Notes in Mathematics **163**, Springer-Verlag, 1970.
- [DELLA DORA J. et TOURNIER E. 1981]**  
Solutions formelles d'équations différentielles au voisinage de points singuliers réguliers. R.R n° 239, IMAG, Grenoble (1981).

**[DELLA DORA J. 1986]**

Equations différentielles linéaires du second ordre dans le champ complexe.  
R. R. 623-I, IMAG, TIM3, Grenoble Septembre 1986.

**[DELLA DORA J. DICRESCENZO C. et TOURNIER E. 1982]**

An algorithm to obtain formal solutions of a linear homogenous differential equation at an irregular singular point  
Proc. EUROCAM 82 [Springer Lecture Notes in Computer Science 144, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982],  
p. 273-280. MR 84c:650094.

**[DIETRICH V. 1978]**

Zur Reduktion von Linearen Differentialgleichungssystemen  
Math. Ann. 237, 79-95, (1978)

**[ERDELYI I. 1967]**

On the matrix Equation  $Ax = \lambda Bx$ .  
J. Math. Anal. and Appl. 17, 119-132.(1967)

**[FABRY M.E. 1885]**

Sur les intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients rationnels  
Thèse, Paris: Gauthier-Villars.

**[FUCHS L. 1866]**

Zur Theorie der Linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Koeffizienten  
J. Reine Angew. Math. 66, 121-160.

**[GANTMACHER F. 1959]**

Theory of matrices, vol. II, Chelsea, Pub. Co. New York.

**[GERARD R. et LEVELT A.H.M. 1973]**

Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes différentiels linéaires.  
Ann. Inst. Fourier, 23,1(1973), p. 157-195.

**[GOLUB G. H. and VANLOAN C.F. 1983]**

Matrix Computations  
The John Hopkins Univ. Press, 1983.

**[HARRIS W. A. 1972]**

Characterizations of linear differential systems with a regular singular point.  
Proc. Edinburgh Math. Soc (2) **18** (1972/73), p. 93-98

**[HARTMANN P. 1964]**

Ordinary Differential Equations  
Wiley New York. 1964.

**[HILALI A. 1982]**

Contribution à l'étude des points singuliers des systèmes différentiels linéaires,  
Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, I.M.A.G., Grenoble (1982).

**[HILALI A. 1983a]**

Réductibilité d'un système différentiel linéaire  
Numer. Math. **41**, 1-17 (1983).

**[HILALI A. 1983b]**

Characterization of linear differential system with a regular singularity,  
Computer Algebra, EUROCAL'83, Springer Verlag, Lect. Notes in Computer.  
Science **162**, pp. 68-77, 1983.

**[HILALI A. et WAZNER A. 1986a]**

Un algorithme de calcul de l'invariant de Katz d'un système différentiel linéaire.  
Ann. Inst. Fourier **3,36**(1986) p. 67-81.

**[HILALI A. et WAZNER A. 1986b]**

Formes super-irréductibles des systèmes différentiels linéaires  
Num. Math. **50**(1987), p. 429-449.

**[HILALI A. and WAZNER A. 1986c]**

Algorithm for computing formal invariants for linear differential systems  
Proceeding of SYMSAC'86, ed. B.W. Char, University of Waterloo, 1986.

**[HILALI A. 1987a]**

On the Algebraic and Differential Newton-Puiseux Polygons.  
Journal of Symbolic Computation (*à paraître*).

**[HILALI A. 1987b]**

Calcul des invariants de Malgrange et de Gérard et Levelt d'un système  
différentiel linéaire en un point singulier irrégulier.  
Journal of Differential Equations (*à paraître dans Vol. 69*(1987)).



- [HILALI A. 1987c]**  
A general Method for solving second order Meromorphic linear differential systems. (Accepté au congrés annuel EUROCAL'87)
- [INCE E. L. 1956]**  
Ordinary Differential Equations  
Dover Publications, New York, INC 1956.
- [JURKAT W.B. et LUTZ D. A. 1971]**  
On the order of analytic differential equations  
Proc. London Math. Soc. **3**(1971) p. 465-482.
- [JURKAT W., LUTZ D., and PEYERIMHOFF A. 1976]**  
Birkhoff invariants and effective calculations for meromorphic linear differential equations,  
I, J. Math. Anal. Appl. **53**(1976), 438-470.
- [KATZ N. 1970]**  
Nilpotent Connexions and monodromy theorem;  
IHES , Pub. Math n° **39** (1970), p. 176-232.
- [KATZ N. 1985]**  
A simple algorithm for cyclic vectors  
A paraitre dans Am. J. Math.
- [KITAGAWA K. 1983]**  
L'irrégularité en un point singulier d'un système d'équations différentielles linéaires d'ordre 1.  
J. Math. Kyoto Univ. **23-3** (1983) 427-440.
- [LUTZ D. A. and SCHAFKE R. 1986]**  
On the identification and stability of formal invariants for singular Differential equations. Linear algebra and its applications, **72** : 1-46 (1986).
- [LUTZ D. A. 1967a]**  
On systems of linear differential equations having regular singular solutions.  
J. Diff. Equ. **3**, 311-322, (1967).
- [LUTZ D. A. 1967b]**  
Some characterizations of systems of linear differential equations having regular singular solutions.  
Trans. Amer. Math. Soc. **126**(1967), pp. 427-441.

- [LUTZ D. A. 1972]**  
On the reduction of rank of linear differential systems  
Pacific J. of Math. **42**, (1972) pp. 153-164
- [MALGRANGE B. 1974]**  
Sur les points singuliers des équations différentielles,  
L'enseignement mathématique, t.XX, 1-2, 147-176 (1974).
- [MALGRANGE B. 1981]**  
Sur la réduction formelle des équations différentielles linéaires,  
Preprint Inst. Fourier. Grenoble (1981).
- [MARTIN R. S. and WILKINSON J. H. 1968]**  
Reduction of the symmetric Eigenproblem  $Ax = \lambda Bx$  and related problems to  
standard form. Num. Math. **11**(1968), 99-110.
- [MASANI P. 1959]**  
On a result of G. D. Birkhoff on linear differential equations.  
Proc. Amer. Math., **10**, 696-698.
- [MOSER J. 1960]**  
The order of singularity in Fuch's theory  
Math. Zeitschrift. **72**, 379-398 (1960).
- [POINCARÉ H. 1885]**  
Sur les équations différentielles linéaires aux différentielles ordinaires et aux  
différences finies.  
Amer.J. Math., **7**, 1-56 (Oeuvres **1**, 226-289).
- [POINCARÉ H. 1886]**  
Sur les équations irrégulières des équations linéaires  
Acta. Math. **8**, 295-344. (Oeuvres **1**, 290-332).
- [RAMIS J. P. 1981]**  
Théorème d'indice de Gevrey pour les équations différentielles ordinaires,  
Pub.IRMA Stasbourg (1981).
- [RAMIS J. P. 1984]**  
Théorème d'indice de Gevrey pour les équations différentielles  
Memoirs of the American Mathematical Society.  
Vol. **48**, Number 296, March (1984).

**[RAMIS J. P. 1985]**

Sur les invariants formels des équations différentielles dans le champ complexe Communication au Congrès "*Le calcul .... demain*", Grenoble 2-6 Décembre (1985).

**[RICHARD C.G. 1981]**

Shearing transformation of a linear system at an irregular singular point. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1981), 89,159-166.

**[ROBBA P. 1980]**

Lemmes de Hensel pour les opérateurs différentiels. Application à la réduction formelle des équations différentielles. L'enseignement mathématique, XXVI, fasc. 3-4, pp. 279-311, (1980).

**[SAUVAGE L. 1886]**

Sur les solutions régulières d'un système d'équations différentielles. Ann. de l'Ecole Norm. Sup. 3, 391-404.

**[SCHLESINGER L. 1907]**

Über asymptotische Darstellungen der Lösungen linear differentialsysteme als Funktionen eines parameters Math. Ann. 63, 277-300.(1907)

**[SIBUYA Y. 1958]**

Sur réduction analytique d'un système d'équations différentielles ordinaires linéaires contenant un paramètre, J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, (1), 7, p. 527-540.(1958)

**[SIBUYA Y. 1962]**

Simplification of a system of linear ordinary differential equation about a singular point. Funkcial. Ekvac., 4, 83-113.(1962)

**[SIROVICH L. 1971]**

Techniques of asymptotic analysis Applied Mathematical Sciences. Springer Verlag, New York Heidelberg. Berlin (1971).

**[TAMARKIN J.D. 1927]**

Some general problems of the theory of ordinary linear and expansions of an arbitrary function in series of fundamental functions differential equations. Math. Zeit. 27, 1-45.

- [THOME L. W. 1877]  
Zur Theorie der linearen differentialgleichungen  
J. Reine Angew. Math., **83**, 89-111.
- [THOMPSON G.L. and WEIL R.L. 1970]  
Reducing the rang of  $A - \lambda B$ .  
Amer. Math. Soc. **26**(1970), 548-554.
- [TOURNIER E. 1987]  
Solutions formelles d'équations différentielles linéaires. Le logiciel DESIR.  
Etude théorique et réalisation  
Thèse d'Etat, IMAG, TIM3, Grenoble 1987.
- [TURNBULL H. W. and A.C. AITKEN. 1961]  
An introduction to the canonical theory of matrices  
Dover, New York (1961).
- [TURRITIN H. L. 1963]  
Reduction of ordinary differential equations to the Birkhoff Canonical form.  
Trans. Amer. Math. Soc., **107**, 485-507.
- [TURRITIN H. L. 1955]  
Convergent Solutions of ordinary linear homogeneous differential equations  
in the neighbourhood of an irregular singular point,  
Acta. Math. **93** : 27-66 (1955).
- [VOLEVIC L.R. 1960]  
On general systems of differential equations,  
Dokl. Acad. Nauk SSSR=Soviet. Math. Dokl., **1** (1960), 458-461.
- [WAGENFÜHRER E. 1983]  
On the invariants measuring the irregularity of linear differential equations at a  
singular point,  
Analysis **3**, 369-384 (1983).
- [WAGENFÜHRER E. 1984]  
On the regularity of systems of linear differential  
equations at a singular point  
Analysis **4**, 264-298 (1984)

**[WAGENFÜHRER E. 1987]**

On meromorphic transformations reducing the Poincaré rang  
of a linear differential equations at a singular point  
(To appear in Analysis).

**[WASOW W. 1973]**

Asymptotic expansions for ordinary differential equations  
Wiley (1973).

**[WATANABE S.1970/1976]**

Formula manipulations solving linear ordinary differential equations  
(I and II).

I. Publ RIMS Kyoto univ. Vol. 6. (1970) p. 71-111.

I. Publ RIMS Kyoto univ. Vol. 11. (1976) p. 297-337.

**[WATSON G. N. 1962]**

Theory of Bessel functions

2<sup>nd</sup> Ed. London; Comridge Univ. Press.

**[WAZNER A. 1987]**

Sur les points singuliers des systèmes différentiels linéaires.  
Thèse de doctorat, IMAG, TIM 3 , (prévue fin 1987).

# **PARTIE 1**

## **SYSTEMES DIFFERENTIELS A SINGULARITE REGULIERE**



## **CHAPITRE 1**

# **FORMES IRREDUCTIBLES D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL LINEAIRE**





## 1. Classification des singularités

### 1.a. Singularité régulière

On considère un système différentiel linéaire homogène de la forme

$$(1-1) \quad Y'(x) = M(x) Y(x)$$

où  $M$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  dont les coefficients  $m_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ) sont supposés holomorphes dans le disque  $0 < |x| < \rho$ ,  $\rho > 0$ .

Dans la résolution des systèmes différentiels linéaires au voisinage d'une singularité, nous sommes conduits à une étude préliminaire qui est la classification de la singularité. Les singularités des solutions sont en général celles des coefficients de la matrice  $M(x)$  et sont dans la plupart des cas plus compliquées. Nous supposons que l'origine est un pôle pour les fonctions  $m_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ). Le choix de  $x = 0$  est arbitraire, car on peut toujours à l'aide d'une translation, se ramener à l'origine. Notons

$$(1-2) \quad \Phi(x) = (Y_{[1]}, Y_{[2]}, \dots, Y_{[n]})$$

un système fondamental de solutions de (1-1) où les  $Y_{[i]}$  sont des vecteurs colonnes à  $n$  composantes. D'après le théorème d'existence (cf. [14], p. 3), on sait qu'un système de la forme (1-1) admet dans tout ouvert ne contenant pas l'origine, une solution holomorphe. On peut alors prolonger cette solution le long d'un circuit autour de l'origine de telle sorte qu'en  $z = xe^{2i\pi}$ , on obtienne une autre solution que l'on notera

$$\Phi^+(x) = \Phi(xe^{2i\pi})$$

Si on suppose que la matrice  $M(x)$  est uniforme ( $M(x) = M(xe^{2i\pi})$ ), il en résulte qu'il existe une matrice constante  $C$  non singulière telle que :

$$(1-3) \quad \Phi^+(x) = \Phi(x)C.$$

Puisque  $C$  est une matrice inversible à coefficients complexes, il est toujours possible de définir une matrice  $R$  appartenant à  $M_{n \times n}(\mathbb{C})$  et telle que :

$$(1-4) \quad C = e^{2i\pi R}$$

Posons (cf. [2,14] )

$$S(x) = \Phi(x) e^{-R \log x}$$

cette matrice est uniforme car, on a

$$\begin{aligned} S^+(x) &= S(x e^{2i\pi}) = \Phi^+(x) e^{-R \log(x \exp(2i\pi))} \\ &= \Phi(x) C e^{-2i\pi R} e^{-R \log(x)} \\ &= \Phi(x) e^{-R \log(x)} \end{aligned}$$

De plus  $S(x)$  est une matrice holomorphe dans le disque  $0 < |x| < \rho$  et de déterminant non identiquement nul. Donc tout système fondamental de solutions de (1-1) peut s'écrire sous la forme

$$(1-5) \quad \Phi(x) = S(x) x^R \quad \text{avec} \quad R = 1/2i\pi \log C$$

où  $S(x)$  est une matrice uniforme, holomorphe dans  $0 < |x| < \rho$  et de déterminant non identiquement nul. Comme on a :

$$M(x) = \Phi'(x) \Phi^{-1}(x)$$

En utilisant (1-5), on en déduit la relation suivante

$$(1-6) \quad M(x) = S \frac{R}{x} S^{-1} + S' S^{-1}$$

### Définition 1.1 [14]

*Considérons le système différentiel linéaire (1-1) dont la matrice  $M(x)$  est holomorphe dans le disque  $0 < |x| < \rho$ , avec  $\rho > 0$  et dont le point  $x = 0$  est un pôle pour  $M(x)$ .*

*On dit que ce système admet une singularité régulière à l'origine si la matrice  $S$  dans la relation (1-6) est holomorphe au voisinage de l'origine, ou si elle possède un pôle en ce point. Dans le cas contraire, on dira que le point  $x = 0$  est un point singulier irrégulier.*

Nous nous plaçons, dans ce qui suit, dans le cas formel.  $M(x)$  sera toujours une matrice à coefficients dans le corps des séries formelles  $\mathbb{C}((x))$ . C'est à dire une expression de la forme

$$(1-7) \quad M(x) = x^{-p}A(x) = x^{-p} \sum_{k=0}^{k=+\infty} A_k x^k$$

où  $p = p(A)$  est un entier supérieur ou égal à 1 et les  $A_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) des matrices constantes à coefficients complexes.  $A_0$  sera appelée la matrice résidu de  $M(x)$  et supposée non nulle.

Si  $p(A) = 1$ , l'origine est une singularité régulière pour le système (1-1), mais cela peut être également vrai lorsque  $p(A) > 1$  (voir des exemples à la fin de ce chapitre). En fait d'après la définition 1.1, tout système différentiel à singularité régulière peut se ramener à un système dont la matrice présente un pôle simple à l'aide d'une transformation de la forme :

$$Y(x) = T(x) Z(x)$$

où  $T(x)$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{C}((x))$  et de déterminant non identiquement nul.

Par une telle transformation, on obtient un nouveau système :

$$(1-8) \quad Z'(x) = B(x) Z(x)$$

où  $B(x)$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  qui vérifie la relation

$$B = T^{-1}MT - T^{-1}T' \quad \text{et} \quad p(B) = 1$$

Les deux systèmes (1-1) et (1-8) sont dits *équivalents* par la transformation  $T$ , car les solutions au voisinage de la singularité sont du même "type".

Dans la littérature, le problème de la caractérisation des systèmes différentiels à singularité régulière a été étudié par plusieurs auteurs :

G. D. Birkhoff [1] a démontré, dans le cas des systèmes aux différences, que l'on peut toujours se ramener à une équation scalaire aux différences d'ordre  $n$ . Cette méthode a été reprise, dans le cas des systèmes différentiels par F.T. Cope [3], et

récemment par J. P. Ramis [11] qui a démontré que tout système différentiel est équivalent à une forme compagnon (voir la démonstration dans le chapitre II).

B. Malgrange [9] associe ainsi à tout système (1-1) un entier  $i(D)$  que l'on appelle l'indice d'irrégularité et dont la nullité caractérise la singularité régulière.

De même, N. Katz associe à toute équation différentielle scalaire d'ordre  $n$ , un rationnel  $RK$  appelé l'ordre de la singularité (cf. [4]) dont la nullité entraîne la régularité du point singulier.

R. Gérard et A.H.M Levelt [4] définissent pour tout système (1-1) des entiers  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{p-1}$  ( les invariants associés au système ) et ils montrent que  $i(D) = \rho_1$ .

W.B Jurkat et D.A Lutz [7] associent à (1-1) une suite de matrices  $(G_k)$  ( $k = 1, 2, \dots, \infty$ ) définie par la formule de récurrence

$$G_1 = M$$

$$G_{k+1} = G_k M + G'_k \quad k = 1, 2, \dots, \infty$$

Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. le système (1-1) est à singularité régulière
2.  $p(G_k) \leq k + (n-1)(p-1)$  pour  $k = n, n+1, \dots, (n-1)(2n(p-1)-1)$

J. Moser [10] associe à tout système (1-1), le nombre rationnel :

$$(1-9) \quad m(M) = p - 1 + \frac{r}{n} > 0$$

où  $r = \text{rang}(A_0) \leq n$ . Il considère ensuite le nombre

$$(1-10) \quad \mu(M) = \text{Inf} \{m(T^{-1}MT - T^{-1}T'), T \in \text{GL}(n, \mathbb{C}((x)))\}$$

où  $\text{GL}(n, \mathbb{C}((x)))$  désigne le groupe des matrices inversibles dans  $M_{n \times n}(\mathbb{C}((x)))$ . On appellera  $\mu(M)$  l'invariant de Moser associé à (1-1) et on a la caractérisation suivante:

$x = 0$  est un point singulier régulier si et seulement si  $\mu(M) \leq 1$ .

Moser (cf. [10] p. 382) démontre l'existence des transformations polynomiales de type :

$$T(x) = (P_0 + x P_1) \text{diag}(1, 1, \dots, 1, x, x, \dots, x)$$

où  $P_0, P_1$  sont des matrices constantes avec  $\det(P_0) \neq 0$  et qui permettent de réduire la quantité  $m(M)$ .

D. A. Lutz [8] donne des conditions nécessaires pour que la singularité soit régulière, en regardant le polynôme caractéristique de la matrice  $M(x)$  du système considéré :

$$\det(M(x) + \lambda I) = \lambda^n + a_1(x) \lambda^{n-1} + \dots + a_n(x)$$

Il démontre que si l'origine est une singularité régulière, alors le  $k^{\text{ème}}$  coefficient  $a_k$  du polynôme caractéristique présente un pôle à l'origine d'ordre au plus égal à  $(k-1)p$  si  $2 \leq k \leq n$  et au plus égal à 1 si  $k = 1$ . Il montre en particulier que l'une des conditions nécessaires pour que la singularité soit régulière est que la matrice résidu soit nilpotente.

Dans le même ordre d'idées, W. A. Harris [6] a donné des conditions supplémentaires (non suffisantes), en démontrant que si le point singulier  $x = 0$  est régulier, alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i)  $a_k(x) = O(x^{-(k-1)p} + x^{-k}) \quad k = 1, 2, \dots, n.$
- (ii) Il existe  $k$  ( $k \leq n$ ) tel que  $A_0^k = 0$ .
- (iii)  $\text{trace}(A_0^k A_1) = 0 \quad k = 0, 1, \dots, n-1$  si  $p \geq 3$  et  $k = 1, \dots, n-1$  si  $p=2$ .

E. Wagenführer [12,13] a étudié la matrice  $A_p(\lambda)$  construite à partir du développement (1-7) de  $M(x)$  et définie par :

$$A_\rho(\lambda) = \begin{bmatrix} A_0 & 0 & & \dots & & 0 \\ A_1 & A_0 & & & & \\ \vdots & & \ddots & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ A_p - \lambda I & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ \vdots & & & & & \\ A_\rho & & & A_p - (\lambda + \rho - p)I & A_{p-1} & \dots & A_0 \end{bmatrix} \quad \rho \geq p$$

Se basant sur le critère de Gérard et Levelt, Wagenführer [12] associe à la matrice  $A_\rho(\lambda)$  l'entier

$$d_\rho = \text{Min}_{\lambda \in \mathbb{C}} \{ \dim [ \text{Ker} ( A_\rho(\lambda) ) ] \}$$

et démontre l'existence d'un entier  $q \leq np - 1$  à partir duquel, le nombre  $d_\rho$  est une constante  $d$  pour tout  $\rho \geq q$ . La singularité régulière est alors caractérisée par (cf. [12] p. 383)  $d = np$ .

Dans ce chapitre, on s'intéresse au critère de J. Moser en lui donnant un caractère plus pratique. On donne des conditions nécessaires et suffisantes, dépendant des coefficients  $A_0$  et  $A_1$ , pour que le nombre  $m(M)$  défini dans (1-9) puisse être diminué. Ce critère conduit à la construction d'un algorithme qui, en un nombre fini de pas, donne une transformation  $T(x)$  qui réduit le système (1-1) sous la forme

$$Y'(x) = \frac{1}{x^{p^*}} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} A_k^* x^k \right) Y(x)$$

où  $p^* = p(A^*)$  est la valeur minimale de l'entier  $p(A)$  lorsqu'on applique au système (1-1) toutes les transformations de  $GL(n, \mathbb{C}((x)))$ .

*La singularité régulière est caractérisée par  $p(A^*) = 1$ .*

Les transformations données par cet algorithme sont calculées à l'aide de la méthode d'élimination de Gauss. Cet algorithme est donc plus performant que la méthode proposée dans [5] qui utilise les transformations de Jordan. On traite à la fin de ce chapitre deux exemples.

## 2. Réductibilité d'un système différentiel linéaire

### Définition 2.1

Considérons les nombres rationnels de J. Moser  $\mu(M)$  et  $m(M)$ . On dira que le système (1-1) (ou la matrice  $M(x)$ ) est irréductible au sens de Moser (ou  $M$ -irréductible) si  $m(M) = \mu(M)$ .

Au système (1-1), on associe la fonction en  $x$  et  $\lambda$  définie par :

$$(2-1) \quad f(x, \lambda) = x^r \det(x^{p-1}M(x) + \lambda I) \quad \text{avec} \quad r = \text{rang}(A_0)$$

et qui est un polynôme en  $\lambda$  dont les coefficients sont des séries formelles sans pôle à l'origine (cf. § 3)

Nous supposons dans toute la suite que  $m(M) > 1$  et nous allons regarder dans quelles conditions la matrice  $M(x)$  est  $M$ -réductible. Ceci est contenu dans un théorème de Moser :

### Théorème 2.1 [10]

Si  $m(M) > 1$ , alors  $M(x)$  est  $M$ -réductible si et seulement si le polynôme  $f(0, \lambda)$  est identiquement nul en  $\lambda$ .

### Remarque 2.1

La réductibilité de la matrice

$$M(x) = \frac{1}{x^p} \sum_0^{+\infty} A_k x^k$$

ne dépend que de  $A_0$  et  $A_1$ . En effet, on a

$$(2-2) \quad f(0, \lambda) = x^r \det \left( \frac{A_0}{x} + A_1 + \lambda I \right) \Big|_{x=0}$$



**Remarque 2.2**

Si  $P$  est une matrice constante, inversible permettant d'écrire  $A_0$  sous une forme de Jordan

$$J = P^{-1} A_0 P$$

on a :

$$f(0, \lambda) = x^r \det \left( \frac{J}{x} + G + \lambda I \right) \Big|_{x=0}$$

où

$$G = P^{-1} A_1 P.$$

**Proposition 2.1**

*La réductibilité du système (1-1) ne dépend que de la partie nilpotente de la matrice résidu  $A_0$  (i.e. la partie la plus polaire de la matrice du système).*

**Démonstration :**

Soit

$$P^{-1} A_0 P = J = \text{diag} (J_1, J_2, \dots, J_m)$$

une décomposition en blocs de Jordan de la matrice  $A_0$ , avec

$$(2-3) \quad J_i = \lambda_i I_{n_i} + H_i \quad i = 1, 2, \dots, m$$

où  $I_{n_i}$  désigne la matrice identité d'ordre  $n_i$ , et où les  $H_i$  sont des matrices nilpotentes d'ordre  $n_i$  de la forme :

$$H_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \vdots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{bmatrix} \quad i = 1, \dots, m$$

avec

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_m$$

Supposons que dans  $J$ , les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  ( $s < m$ ) soient nulles et que  $\lambda_{s+1}, \lambda_{s+2}, \dots, \lambda_m$  ne le soient pas. Dans ce cas, on a :

$$r = \text{rang}(A_0) = n_1 - 1 + n_2 - 1 + \dots + n_s - 1 + n_{s+1} + \dots + n_m = n_1 + n_2 + \dots + n_m - s$$

On peut écrire la matrice  $J$  sous la forme:

$$J = \text{diag}(H, K)$$

où  $H$  est la partie nilpotente de  $J$  de rang

$$r_H = \text{rang}(H) = n_1 - 1 + n_2 - 1 + \dots + n_s - 1 = n_1 + n_2 + \dots + n_s - s$$

$K$  est une matrice diagonale par blocs ne contenant que des valeurs propres non nulles et

$$r_K = \text{rang}(K) = n_{s+1} + \dots + n_m$$

est son rang. On a

$$r = r_K + r_H$$

Considérons maintenant les matrices

$$(2-4) \quad \varepsilon(x) = \text{diag}(I_{n-r_K}, xI_{r_K})$$

et

$$(2-5) \quad R(\lambda, x) = \lambda I + \frac{J}{x} + G$$

où  $G = P^{-1}A_1P$  que l'on décompose en quatre blocs suivant la même décomposition que  $J$ , on a

$$G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix}$$

où  $G_{11}$  et  $G_{22}$  ont les mêmes dimensions que  $H$  et  $K$ . Puisque  $\det(\varepsilon(x)) = x^{r_K}$ , on a

$$f(0, \lambda) = x^{r-r_K} \det [(R(\lambda, x) \varepsilon(x))|_{x=0}]$$

En effectuant le produit des matrices (2-4) et (2-5), on obtient

$$f(0, \lambda) = x^{r-r_K} \det \begin{pmatrix} \lambda I_{n-r_K} + \frac{H}{x} + G_{11} & 0 \\ G_{21} & K \end{pmatrix}_{x=0}$$

Donc

$$(2-6) \quad f(0, \lambda) = x^{r-r_K} \det(K) \det \left( \lambda I_{n-r_K} + \frac{H}{x} + G_{11} \right)_{x=0}$$

On peut écrire alors (2-6) sous la forme :

$$f(0, \lambda) = \lambda_{s+1}^{n_{s+1}} \lambda_{s+2}^{n_{s+2}} \dots \lambda_m^{n_m} g(0, \lambda)$$

où

$$g(0, \lambda) = x^{r_H} \det \left( \lambda I_{n-r_K} + \frac{H}{x} + G_{11} \right)_{x=0}, \quad r_H = r - r_K$$

La réductibilité de la matrice  $M(x)$  ne dépend donc que de la partie nilpotente de la matrice  $A_0$ . En particulier une condition nécessaire pour que la quantité de Moser  $m(M)$  définie dans (1-9) puisse être diminuée est que la matrice  $A_0$  possède une valeur propre dont un bloc de Jordan  $J_i$  correspondant, soit de dimension supérieure ou égale à 2.

### 3. Algorithme de réductibilité

#### 3.a. Etape 1

Soit

$$(3-1) \quad Y'(x) = x^{-p} \left( \sum_{k=0}^{k=+\infty} A_k x^k \right) Y(x)$$

Le système différentiel de départ avec  $p > 1$  et  $r = \text{rang}(A_0) < n$ .

Il existe alors  $n-r$  vecteurs colonnes  $W_1, W_2, \dots, W_{n-r}$  linéairement indépendants tels que

$$A_0 W_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n-r$$

On peut compléter la famille des vecteurs  $W_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-r$ ) de manière à avoir une base de  $\mathbb{C}^n$ . Appelons

$$(3-2) \quad \mathfrak{B} = (e'_1, e'_2, \dots, e'_r, W_1, W_2, \dots, W_{n-r})$$

cette nouvelle base.

Soit  $P_r(A_0)$  la matrice de passage de la base canonique à la base  $\mathfrak{B}$ . Comme les vecteurs  $W_i$  ont été choisis dans le noyau de  $A_0$ , en appliquant  $P_r(A_0)$  à  $A_0$ , les  $n-r$  dernières colonnes de la matrice

$$(3-3) \quad A_0^{(1)} = P_r(A_0)^{-1} A_0 P_r(A_0)$$

sont toutes nulles.

La première étape consiste donc à construire une matrice constante (que l'on notera dans la suite par  $P_r(A_0)$ ) telle que le changement de variable

$$Y(x) = P_r(A_0)Z(x)$$

transforme (3-1) en un système

$$Z'(x) = x^{-p} \left( \sum_{k=0}^{k=+\infty} A_k^{(1)} x^k \right) Z(x)$$

où les  $r$  premières colonnes de la matrice résidu  $A_0^{(1)}$  sont linéairement indépendantes et les  $n-r$  suivantes sont toutes nulles. Avec

$$A_k^{(1)} = P_r(A_0)^{-1} A_k P_r(A_0) \quad k = 0, 1, \dots$$

**3.b. Etape 2**

D'après ce qui précède, on peut supposer dans cette étape que la matrice résidu du système (3-1) soit de la forme

$$(3-4) \quad A_0 = \begin{pmatrix} A_0^{11} & 0 \\ A_0^{21} & 0 \end{pmatrix}$$

où  $A_0^{11}$  est une matrice carrée d'ordre  $r$  et  $A_0^{21}$  une matrice à  $n - r$  lignes et  $r$  colonnes. Décomposons la matrice  $A_1$  de la même manière

$$(3-5) \quad A_1 = \begin{pmatrix} A_1^{11} & A_1^{12} \\ A_1^{21} & A_1^{22} \end{pmatrix}$$

où  $A_1^{11}$  et  $A_1^{21}$  ont respectivement les mêmes dimensions que  $A_0^{11}$  et  $A_0^{21}$ . Considérons les matrices

$$\varepsilon_r(x) = \text{diag} (xI_r, I_{n-r})$$

et

$$R_1(\lambda, x) = \lambda I + \frac{A_0}{x} + A_1$$

On a

$$(3-6) \quad f(0, \lambda) = \det (R_1(\lambda, x)) \det (\varepsilon_r(x)) |_{x=0}$$

En utilisant les décompositions (3-4) et (3-5) de  $A_0$  et  $A_1$ , on obtient

$$(3-7) \quad f(0, \lambda) = \det (G(M, \lambda))$$

où

$$(3-8) \quad G(M, \lambda) = R_1(\lambda, x) \varepsilon_r(x) |_{x=0} = \begin{pmatrix} A_0^{11} & A_1^{12} \\ A_0^{21} & A_1^{22} + \lambda I_{n-r} \end{pmatrix}$$

D'où le résultat :

### Lemme 3.1

*Si  $m(M) > 1$ , alors le système (3-1) est  $M$ -réductible si et seulement si la matrice  $G(M, \lambda)$  est singulière identiquement en  $\lambda$ .*

D'après la forme particulière (3-8) de  $G(M, \lambda)$ , une condition suffisante (mais non nécessaire) pour que  $M(x)$  soit  $M$ -réductible est que:

- les vecteurs colonnes de la matrice

$$(3-9) \quad C = \begin{pmatrix} A_0^{11} \\ A_0^{21} \end{pmatrix}$$

- ou les vecteurs lignes de la matrice :

$$(3-10) \quad L = (A_0^{11} \quad A_1^{12})$$

soient linéairement dépendants.

Dans l'étape 1, nous avons montré comment transformer le système sous une forme telle que les vecteurs colonnes de  $C$  soient linéairement indépendants. Nous supposons donc, dans cette étape, que les vecteurs colonnes de la matrice  $C$  soient linéairement indépendants et que les vecteurs lignes de la matrice  $L$  soient linéairement dépendants.

### Théorème 3.2

*Supposons  $m(M) > 1$ . Si la matrice  $M(x)$  est  $M$ -réductible et si les vecteurs lignes de la matrice  $L$  sont linéairement dépendants, alors la réduction s'obtient à l'aide d'une transformation de la forme :*

$$T(x) = \text{diag} ( x, x, \dots, x, 1, 1, \dots, 1 ) Q$$

*où le  $i^{\text{ème}}$  élément de la matrice diagonale vaut  $x$  si  $i \leq r$  et 1 sinon.  $Q$  est une matrice constante inversible.*

**Remarque 3.3**

Soit  $\epsilon_r(x) = \text{diag}(xI_r, I_{n-r})$  la matrice définie ci-dessus. On a

$$\epsilon_r^{-1} \epsilon_r' = 1/x \text{ diag}(I_r, 0_{n-r})$$

La matrice  $\epsilon_r^{-1} \epsilon_r'$  est donc d'ordre polaire égal à 1, le nombre rationnel  $m(M)$ , ne peut donc être diminué que par l'opération  $T^{-1}AT$ , il s'agit donc de démontrer ici que si  $m(M) > 1$  et si

$$(3-11) \quad M^{(1)} = \epsilon_r^{-1} M \epsilon_r$$

alors

$$\text{rang}(A_0^{(1)}) < \text{rang}(A_0)$$

où  $A_0^{(1)}$  désigne la matrice résidu de la nouvelle matrice  $M^{(1)}$ .

**Démonstration du théorème 3.2**

En appliquant à (3-1), la transformation  $\epsilon_r(x)$ , la matrice résidu du nouveau système est

$$A_0^{(1)} = \begin{pmatrix} A_0^{11} & A_1^{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Appelons

$$(3-12) \quad r' = \text{rang}(A_0^{11}, A_1^{12})$$

le rang de la matrice  $A_0^{(1)}$ . Par hypothèse les vecteurs ligne de la matrice  $L$  sont linéairement dépendants, donc

$$(3-13) \quad r' < r$$

on est alors ramené à l'étape 1. Soit  $P_r(A_0^{(1)})$  la transformation constante associée à  $A_0^{(1)}$  définie dans l'étape 1. En l'appliquant à la matrice  $M^{(1)}$  définie dans (3-11), nous obtenons

$$M^{(2)} = P_r(A_0^{(1)})^{-1} M^{(1)} P_r(A_0^{(1)})$$

où les  $n-r'$  dernières colonnes de la matrice résidu  $A_0^{(2)}$  de  $M^{(2)}$  sont nulles. D'où, en vertu de (3-13) et de la remarque 3.3

$$m(M^{(1)}) = p - 1 + \frac{r'}{n} < p - 1 + \frac{r}{n} = m(M)$$

En particulier, lorsque  $r' = 0$ , l'entier  $p$  est réduit à  $p-1$ .

### 3.5. Etape 3

Dans cette étape, nous supposons que la matrice  $G(M, \lambda)$  soit singulière identiquement en  $\lambda$  et que

$$(3-14) \quad \text{rang} \begin{pmatrix} A_0^{11} \\ A_0^{21} \end{pmatrix} = r \quad \text{et} \quad \text{rang} (A_0^{11} \quad A_1^{12}) = r$$

Posons  $\lambda = 0$  dans (3-8), la matrice obtenue

$$G(M, 0) = \begin{pmatrix} A_0^{11} & A_1^{12} \\ A_0^{21} & A_1^{22} \end{pmatrix}$$

est singulière.

Nous allons d'abord étudier le cas où  $G(M, 0)$  admet une forme particulière et donner la transformation de réduction correspondante. Ensuite, par une transformation constante, nous montrerons que l'on peut toujours se ramener à cette forme. Pour cela, on suppose que les matrices blocs de  $G(M, 0)$  sont telles que :

$$(3-15) \quad \begin{aligned} A_0^{21} &= \begin{pmatrix} V_1 \\ 0 \end{pmatrix} & A_1^{12} &= (U_1 \quad U_2) \\ A_1^{22} &= \begin{pmatrix} W_1 & W_2 \\ 0 & W_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où

- $V_1$  est de dimension  $(n-r-q) \times r$  avec  $1 \leq q \leq n-r$
- $U_1, U_2$  sont respectivement de dimensions  $r \times (n-r-q)$  et  $r \times q$



- $W_1, W_2$  sont de dimensions respectives  $(n-r-q) \times (n-r-q)$  et  $(n-r-q) \times q$
- $W_3$  est une matrice carrée d'ordre  $q$  triangulière à diagonale nulle.

On supposera de plus que l'on a la propriété :

$$(3-16) \quad \text{rang} (A_0^{11} \quad U_1) < r$$

#### Remarque 3.4

D'après (3-15), la matrice  $G(M, 0)$  est de la forme:

$$(3-17) \quad G(M, 0) = \begin{pmatrix} A_0^{11} & U_1 & U_2 \\ V_1 & W_1 & W_2 \\ 0 & 0 & W_3 \end{pmatrix}$$

Appliquons à (3-1), la transformation :

$$\alpha(x) = \text{diag} (xI_r, I_{n-r-q}, xI_q)$$

Comme nous l'avons fait dans l'étape 2 (cf. Remarque 3.3), on ne considèrera que l'opération

$$(3-18) \quad M^{(1)} = \alpha^{-1} M \alpha$$

Soit  $A_0^{(1)}$  la matrice résidu de la matrice  $M^{(1)}$ . En effectuant l'opération (3-18), on trouve que la matrice résidu associée à  $M^{(1)}$  est de la forme

$$A_0^{(1)} = \begin{pmatrix} A_0^{11} & U_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous sommes ramenés à l'étape 2 de l'algorithme. On sait alors construire une transformation (cf. Théorème 3.2) qui permet de réduire (3-1) en un système dont la matrice résidu est de rang :

$$r_2 = \text{rang} (A_0^{(1)} \ U_1) < r$$

Pour terminer cette dernière étape, il suffit de démontrer que l'on peut toujours se ramener à un système dont la matrice  $G(M, 0)$  est sous une forme (3-17), où  $q$  est un entier compris entre 1 et  $n - r$ . Considérons la matrice initiale

$$G_0 = \begin{pmatrix} A_0^{11} & A_1^{12} \\ A_0^{21} & A_1^{22} \end{pmatrix}$$

Soit

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

un vecteur du noyau de la matrice transposée de  $G_0$ . Avec

$$w_1^t = (a_1, a_2, \dots, a_r) \quad \text{et} \quad w_2^t = (b_1, b_2, \dots, b_{n-r})$$

D'après (3-14), le vecteur  $w_2$  peut être choisi de telle sorte que l'une au moins des composantes  $b_i$  ( $i = 1, \dots, n-2$ ) soit non nulle. On peut supposer sans changer la généralité que  $b_{n-r} \neq 0$ , il suffit pour cela d'appliquer à  $M(x)$  une permutation sur les  $n-r$  dernières lignes qui ne change pas la structure de la matrice  $M$ .

Dans ce cas, si l'on désigne par  $e_i$  le  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ , le système

$$\mathfrak{B}' = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, w)$$

forme une base de  $\mathbb{C}^n$ . Soit  $P_1$  la matrice dont la  $i^{\text{ème}}$  ligne est formée par le  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique si  $i \neq n$ , la  $n^{\text{ème}}$  ligne étant formée par le vecteur  $w$ . En faisant l'opération

$$M^{(1)} = P_1 M P_1^{-1}$$

on trouve que la  $n^{\text{ème}}$  ligne de la matrice  $G(M^{(1)}, \lambda)$  associée à  $M^{(1)}$  est nulle, car le vecteur  $w$  a été choisi dans le noyau de  ${}^t G_0$ . La matrice  $G_1$  associée à  $M^{(1)}$  est donc de la forme (3-17) avec  $q = 1$ .

En réitérant le même procédé  $k$  fois, on obtient un système dont la matrice  $G$  est de la forme

$$(3-19) \quad G(M^{(k)}, \lambda) = \begin{pmatrix} A_0^{11} & U_1 & U_2 \\ V_1 & W_1 + \lambda I_{n-r-k} & W_2 \\ 0 & 0 & W_3 + \lambda I_k \end{pmatrix}$$

où  $W_3$  est une matrice carrée d'ordre  $k$ , triangulaire supérieure à diagonale nulle.

En développant  $\det(G(M^{(k)}, \lambda))$  par rapport aux  $k$  dernières colonnes, on a

$$(3-20) \quad \det(G_k(M^{(k)}, \lambda)) = \lambda^k \det \begin{pmatrix} A_0^{11} & U_1 \\ V_1 & W_1 + \lambda I_{n-r-k} \end{pmatrix}$$

Si les vecteurs colonnes et les vecteurs lignes constants de la matrice  $G(M^{(k)}, \lambda)$  ne sont pas dépendants, on applique de nouveau à  $M^{(k)}$  la matrice

$$P_k = (e_1, e_2, \dots, e_{n-r-k-1}, w, e_{n-r-k+1}, \dots, e_n)$$

où cette fois le vecteur  $w$  est un vecteur du noyau de la transposée de la matrice  $G(M^{(k)}, 0)$ . Au cours de cet algorithme, soit on rencontre  $k < n-r$  tel que l'une des conditions suivantes :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} A_0^{11} \\ V_1 \end{pmatrix} < r \quad \text{ou} \quad \text{rang} \begin{pmatrix} A_0^{11} & U_1 \end{pmatrix} < r$$

soit vérifiée, soit  $k = n-r$  auquel cas on a

$$\det(G_r(M^{(r)}, \lambda)) = \lambda^{n-r} \det(A_0^{11}) \equiv 0$$

et les deux conditions sont vérifiées.

Nous venons de donner un algorithme permettant à chaque pas de réduire la quantité  $m(M)$  de Moser. Si l'on désigne par  $T(x)$ , la transformation donnée par cet algorithme, et par  $p^*$  l'ordre polaire du système équivalent à (1-1) par cette transformation, alors  $p^*$  est la plus petite valeur de l'entier  $p$  lorsqu'on applique à

(1-1) toutes les transformations de  $GL(n, \mathbb{C}((x)))$  et on a la propriété :

$x=0$  est un point singulier régulier si et seulement si  $p^*=1$ .

L'algorithme s'arrête lorsque  $p=1$  ou  $\det(G(M, \lambda)) \neq 0$ .

#### 4. Algorithme

Considérons le système initial

$$Y'(x) = \frac{1}{x^p} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k \right) Y(x)$$

On désignera par  $p(M) = p > 1$  l'ordre polaire de la matrice du système et par  $n_0$  le nombre de colonnes non nulles de la matrice résidu  $A_0$ . On note  $A_0 = (a_{0ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  et  $A_1 = (a_{1ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  les coefficients des matrices  $A_0$  et  $A_1$  dans le développement de la matrice  $M(x)$ .

##### Etape 1

1.1 Si  $n_0 = 0$  remplacer  $p(M)$  par  $p(M) - 1$ .

1.2 Appliquer à la matrice  $M(x)$  une permutation telle que les  $n-n_0$  dernières colonnes de  $A_0$  soient nulles.

1.3 Si  $p(M) = 1$ , arrêter l'algorithme

1.4 Former la matrice

$$G_\lambda = \begin{pmatrix} A_0^{11} & A_1^{12} \\ A_0^{21} & A_1^{22} + \lambda I_{n-n_0} \end{pmatrix}$$

1.5 Si  $\det(G_\lambda) \neq 0$ , arrêter l'algorithme.

**1.6** Former la matrice :

$$G_0 = \begin{pmatrix} A_0^{11} & A_1^{12} \\ A_0^{21} & A_1^{22} \end{pmatrix}$$

**1.7** Résoudre par l'algorithme de Gauss, le système linéaire :

$$G_0 X = 0.$$

**1.8** Soit  $X_k$  la solution du système correspondant au premier pivot nul rencontré à la position  $(k, k)$  dans  $G_0$  et qui est tel que :

$$X_k^t = (a_1^k, a_2^k, \dots, a_{k-1}^k, 1, 0, \dots, 0)$$

**1.9** Si  $k > n_0$ , passer à l'étape 2.

**1.10** Appliquer à  $M(x)$  la transformation dont la  $i^{\text{ème}}$  colonne est celle de l'identité si  $i \neq k$  et  $X_k$  sinon

**1.11** Remplacer  $n_0$  par  $n_0 - 1$  et passer à l'étape 1.1.

## Etape 2

**2.1** Former la matrice

$$G_0^t = \begin{pmatrix} {}^tA_0^{11} & {}^tA_0^{21} \\ {}^tA_1^{12} & {}^tA_1^{22} \end{pmatrix}$$

**2.2** Résoudre par l'algorithme de Gauss, le système linéaire

$$G_0^t X = 0$$

**2.3** Soit  $X_k$  la solution du système correspondant au premier pivot nul rencontré à la position  $(k, k)$  dans  $G_0^t$  et qui est tel que :

$$X_k^t = (b_1^k, b_2^k, \dots, b_{k-1}^k, 1, 0, \dots, 0)$$

2.4 Si  $k > n_0$ , appliquer à  $M(x)$  la transformation dont la  $i^{\text{ème}}$  ligne est celle de l'identité si  $i \neq k$  et  ${}^tX_k$  sinon.

2.5 Passer à la 3<sup>ème</sup> étape

2.6 Si  $k \leq n_0$ , appliquer à  $M(x)$ , la transformation :

$$T(x) = \text{diag}(x, \dots, x, 1, \dots, 1)$$

où le  $i^{\text{ème}}$  élément de la diagonale vaut  $x$  si  $i \leq n_0$  et 1 sinon

2.7 Passer à l'étape 1.

### Etape 3

3.1  $q = 0$

3.2 Former les matrices

$$A_0^{11} = (a_0^{ij})_{1 \leq i, j \leq n_0} \quad U_1 = (a_1^{ij})_{1 \leq i \leq n_0, n_0+1 \leq j \leq n-n_0-q}$$

$$V_1 = (a_0^{ij})_{n_0+1 \leq j \leq n-n_0-q, 1 \leq i \leq n_0}$$

$$W_1 = (a_1^{ij})_{n_0+1 \leq i \leq n-n_0-q, n_0+1 \leq j \leq n-n_0-q}$$

3.3 Former la matrice

$$G_q = \begin{pmatrix} A_0^{11} & U_1 \\ V_1 & W_1 \end{pmatrix}$$

3.4 Résoudre par l'algorithme de Gauss le système linéaire

$$G_q X = 0$$

**3.5** Soit  $X_k$  la solution du système correspondant au premier pivot nul rencontré à la position  $(k, k)$  dans  $G_0$  et dont la  $j^{\text{ème}}$  composante vaut 1 si  $j = k$  et 0 si  $j > k$ .

**3.6** Si  $k \leq n_0$ , passer à la première étape

**3.7** Si  $k > n_0$ , résoudre par l'algorithme de Gauss le système linéaire

$${}^t(G_q)X = 0$$

**3.8** Soit  $X_k$  la solution correspondant vérifiant les mêmes propriétés que dans 3.5.

**3.9** Si  $k \leq n_0$ , appliquer à  $M(x)$  la transformation

$$T(x) = (x, \dots, x, 1, \dots, 1, x, \dots, x)$$

où le  $i^{\text{ème}}$  élément de la diagonale vaut 1 si  $n_0 + 1 \leq i \leq n - n_0 - q$  et  $x$  sinon.  
Passer à l'étape 1.

**3.10** Si  $k > n_0$ , appliquer à  $M(x)$  la transformation dont la  $i^{\text{ème}}$  ligne est celle de l'identité si  $i \neq k$  et  ${}^tX_k$  sinon

**3.11** Passer à l'étape 3.2 en remplaçant  $q$  par  $q+1$ .

### Conclusion

On peut considérer cet algorithme comme une caractérisation des systèmes différentiels à singularité régulière. En effet si le système différentiel de départ est à singularité régulière, en calculant successivement les transformations  $T_0, T_1, \dots, T_N$  permettant à chaque pas de réduire le nombre rationnel

$$m(M) = p - 1 + \frac{r}{n}$$

On peut ramener ainsi l'entier  $p(M)$  à 1 en au plus  $(n-1)(p(M)-1)$  pas. En général, la transformation donnée par l'algorithme :

$$T(x) = T_0(x)T_1(x) \dots T_N(x)$$

conduit à un système de la forme :

$$Y'(x) = \frac{1}{x^{p^*}} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k \right) Y(x)$$

où  $p^*$  est la valeur minimale de l'entier  $p(M)$  lorsqu'on applique à (1-1) toutes les transformations à coefficients des séries formelles et de déterminant non identiquement nul.

L'invariant de Moser [10] est alors immédiat

$$\mu(M) = m(M^*) = p^* - 1 + \frac{\text{rang}(A_0^*)}{n}$$

la singularité régulière est caractérisée par  $p^* = 1$ .

### 5. Cas d'une équation différentielle scalaire d'ordre $n$ .

Considérons une équation différentielle linéaire homogène d'ordre  $n$ .

$$(E) \quad y^{(n)} - a_1(x)y^{(n-1)} - \dots - a_{n-1}(x)y' - a_n(x)y = 0$$

où les  $a_k$  sont des séries formelles dans  $\mathbb{C}((x))$ . On note  $\lambda_k \geq 0$  l'ordre polaire du  $k^{\text{ème}}$  coefficient  $a_k$  avec  $\lambda_k = 0$  si  $a_k(x)$  est sans pôle à l'origine.

Dans son article, J. Moser [10, p. 382] montre que le calcul de l'invariant  $\mu$  pour une équation différentielle de la forme (E) peut être obtenu d'une manière explicite, sans avoir à utiliser l'algorithme de réductibilité développé ci dessus.

Soit  $C(x)$  la matrice compagnon associée à l'équation différentielle (E). Elle s'obtient en choisissant comme inconnue le vecteur colonne :



$$Y^t = (y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

L'équation (E) s'écrit alors matriciellement sous la forme :

$$(5-1) \quad Y'(x) = C(x) Y(x)$$

où

$$C(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ a_n & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{bmatrix}$$

les entiers  $p$  et  $r$  associés au système différentiel (5-1) sont construits de la manière suivante (cf. [10]) :

On considère l'entier  $p$  immédiatement supérieur à  $\lambda_k / k$  pour  $k = 1, 2, \dots, n$ . Ensuite si  $p > 1$ , on définit l'entier  $r$  par la formule

$$(5-2) \quad r = \text{Max} (\lambda_k - (p-1)k)$$

On peut alors par l'intermédiaire de ces entiers construire un système différentiel  $M$ -irréductible, en considérant la transformation suivante (cf. [10]) :

$$(5-3) \quad \delta = \text{diag} (\delta_n, \delta_{n-1}, \dots, \delta_1)$$

où

$$\delta_k = pk \quad \text{si } 0 \leq k \leq r$$

et

$$\delta_k = (p-1)k + r \quad \text{si } r \leq k \leq n$$

le changement de variable  $Y(x) = x^\delta Z(x)$  nous conduit au système

$$(5-4) \quad Z'(x) = \left( x^{-p} B(x) - \frac{\delta}{x} \right) Z(x)$$

avec

$$B(x) = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} \xrightarrow{n-r+1} \\ \begin{array}{c} 0 \quad x \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad x \\ \quad \quad 0 \end{array} \end{array} & \begin{array}{c} \xleftarrow{r-1} \\ 0 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ \dots \\ b_n \quad \dots \quad b_r \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \diagdown \\ \dots \\ b_{r-1} \quad \dots \quad b_1 \end{array} \\ \hline \end{array}$$

où les  $b_k$  sont donnés par la formule

$$(5-5) \quad b_k(x) = x^{\delta_k} a_k(x) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Par construction, on a pour tout  $k = 1, 2, \dots, n$  les inégalités

$$\lambda_k \leq pk$$

et

$$\lambda_k \leq (p-1)k+r$$

les fonctions  $b_k$  sont donc régulières à l'origine. Soit

$$(5-6) \quad M(x) = x^{-p} B(x) - \frac{\delta}{x}$$

la matrice du système (5-4). Sa matrice résidu est

$$A_0 = B(0)$$

D'après la formule (5-2), il existe un entier  $k_0 \geq r$  tel que

$$(5-7) \quad \lambda_{k_0} = (p-1)k_0 + r$$

Comme

$$b_{k_0}(x) = x^{-\lambda_{k_0}} a_{k_0}(x)$$

on a

$$b_{k_0}(0) \neq 0$$

le rang de la matrice  $A_0$  est donc  $r$ , puisque le bloc  $A_0^{22}$  contient  $r-1$  colonnes linéairement indépendantes. En considérant le déterminant  $f(x, \lambda)$  défini dans (2-1), on a :

$$f(x, \lambda) = x^r \det \left( \lambda I + \frac{B(x)}{x} - \delta x^{p-2} \right) \Big|_{x=0}$$

En développant ce déterminant, on obtient après avoir posé  $x = 0$ ,

$$f(0, \lambda) = \lambda^{n-k_0} b_{k_0}(0) + \dots$$

où  $k_0 \geq r$  est le plus petit entier pour lequel l'égalité (5-7) est obtenue. Le système différentiel (5-4) est donc  $M$ -irréductible, par conséquent l'invariant de Moser associé à l'équation différentielle (E) est

$$\mu(E) = m(M) = p - 1 + r/n \quad \text{si } p > 1.$$

## 6. Etude de quelques exemples

Considérons la matrice:

$$A(x) = \frac{1}{x^3} \begin{pmatrix} 2x^2 - x^3 & x^5 + x^6 & 4x^2 \\ 1 - 2x & x^3 & 4x^2 \\ 0 & 3x^5 & 2x^2 + x^4 \end{pmatrix}$$

On a

$$r = 1, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G(A, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Comme la première ligne de  $G$  est nulle, en vertu du théorème 3.2, on applique à  $A$  la transformation

$$T_0 = \text{diag}(x, 1, 1)$$

On obtient alors

$$A^{(1)} = T_0^{-1} A T_0 = T_0^{-1} T_0 = \frac{1}{x^2} \begin{pmatrix} x - x^2 & x^3 + x^4 & 4 \\ 1 - 2x & x^2 & 4x \\ 0 & 3x^4 & 2x + x^3 \end{pmatrix}$$

avec

$$\text{rang}(A_0^{(1)}) = 2$$

Appliquons la permutation

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous obtenons la matrice

$$A^{(2)} = P_1^{-1} A^{(1)} P_1 = \frac{1}{x^2} \begin{pmatrix} x - x^2 & 4 & x^3 + x^4 \\ 0 & 2x + x^4 & 3x^4 \\ 1 - 2x & 4x & x^2 \end{pmatrix}$$

La matrice

$$G(A^{(2)}, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

est singulière identiquement en  $\lambda$ . En vertu du théorème 3.2, on applique la transformation

$$T_2 = \text{diag}(x, x, 1)$$

ce qui conduit à

$$A^{(3)} = T_2^{-1} A^{(2)} T_2 = T_2^{-1} T_2 = \frac{1}{x^2} \begin{pmatrix} -x^2 & 4 & x^3 + x^2 \\ 0 & x + x^4 & 3x^3 \\ x - 2x^2 & 4x^2 & x^2 \end{pmatrix}$$

Appliquons la permutation

$$T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a

$$A^{(4)} = T_3^{-1} A^{(3)} T_3 = \frac{1}{x^2} \begin{pmatrix} x + x^4 & 0 & 3x^3 \\ 4 & -x^2 & x^2 + x^3 \\ 4x^2 & x - 2x^2 & x^2 \end{pmatrix}$$

Puisque la première ligne de la matrice

$$G(A^{(4)}, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 + \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

est nulle, la transformation à appliquer à la matrice  $A^{(4)}$  est

$$T_4 = \text{diag}(x, 1, 1)$$

ce qui réduit l'ordre polaire à 1. On trouve

$$A^{(5)} = T_4^{-1} A^{(4)} T_4 = T_4^{-1} T_4 = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 3x \\ 4 & -x & x^2 + x \\ 4x^2 & 1 - 2x & x \end{pmatrix}$$

La matrice donnée par l'algorithme est donc le produit des matrices  $T_i$  ( $i=0,1,2,3,4$ ):

$$T(x) = \begin{pmatrix} 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice transforme le système initial en un système dont la matrice est  $A^{(5)}$  avec  $p(A^{(5)}) = 1$ .

### Exemple 2

$$A(x) = \frac{1}{x^4} \begin{pmatrix} 10x^3 & -x & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 4x^3 & 0 \\ 0 & -14x^3 & x & 14x^3 \end{pmatrix}$$

On a

$$G(A, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

La matrice  $A(x)$  est M-réductible sans que la première ligne ni la deuxième ligne ne soient nulles. En faisant  $\lambda = 0$  dans  $G(A, \lambda)$ , on trouve que le vecteur

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

est dans le noyau de la matrice  ${}^tG(A, 0)$ . Désignons par  $T_0$  l'inverse de la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trouve

$$A^{(1)} = T_0^{-1} A T_0 = \frac{1}{x^4} \begin{pmatrix} 10x^3 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 1 & 0 & 4x^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 14x^3 \end{pmatrix}$$

La matrice

$$G(A^{(1)}, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est bien sous la forme (3-17). De plus elle vérifie la condition (3-16). On applique alors à la matrice  $A^{(1)}$ , en vertu de la remarque 3-5, la transformation:

$$T_1(x) = \text{diag}(x, 1, 1, x)$$

On obtient

$$A^{(2)} = T_1^{-1} A^{(1)} T_1 = \frac{1}{x^3} \begin{pmatrix} 9x^2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13x^2 \end{pmatrix}$$

En appliquant à  $A^{(1)}$  la permutation  $T_2$  qui échange les colonnes 2 et 4, on trouve

$$A^{(3)}(x) = \frac{1}{x^3} \begin{pmatrix} 9x^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 13x^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$G(A^{(3)}, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

les vecteurs lignes constants sont linéairement dépendants, on applique donc la transformation :

$$T_3(x) = \text{diag}(x, x, x, 1)$$

On a

$$A^{(4)}(x) = \frac{1}{x^3} \begin{pmatrix} 8x^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12x^2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang de la matrice  $A_0^{(3)}$  est égal à 2. En formant la matrice  $G(A^{(4)}, \lambda)$ , on trouve que les vecteurs lignes constants sont linéairement dépendants, ce qui nous conduit à poser

$$T_4(x) = \text{diag}(x, x, 1, 1)$$

cela donne

$$A^{(5)}(x) = \frac{1}{x^3} \begin{pmatrix} 7x^2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11x^2 & 0 & 0 \\ x & 0 & 3x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix}$$

En désignant par  $T_5$  la permutation qui échange la deuxième colonne avec la première, on a

$$A^{(6)}(x) = \frac{1}{x^3} \begin{pmatrix} 11x^2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 7x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x & 3x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{pmatrix}$$



En formant la matrice  $G(A^{(6)}, \lambda)$ , on est conduit à appliquer la transformation

$$T_6(x) = \text{diag}(x, 1, 1, 1)$$

on trouve

$$A^{(7)}(x) = \frac{1}{x^2} \begin{pmatrix} 10x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 7x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

les vecteurs lignes de la matrice  $G(A^{(7)}, \lambda)$ , sont linéairement dépendants, donc

$$T_7(x) = \text{diag}(x, x, x, 1)$$

De la même manière on trouve

$$T_8(x) = \text{diag}(x, x, 1, 1)$$

$$T_9(x) = \text{diag}(x, 1, 1, 1)$$

En appliquant finalement cette dernière transformation, l'ordre polaire est réduit à 1. La singularité du système considéré est donc régulière et la transformation

$$T(x) = T_0 \cdot T_1 \cdot \dots \cdot T_9$$

appliquée à  $A(x)$  conduit à la matrice

$$B(x) = T^{-1} A T - T^{-1} T' = \frac{C}{x} \quad \text{où} \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec

$$T(x) = \begin{pmatrix} 0 & x^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 \\ x^7 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans cet exemple, on peut avoir explicitement quatre solutions linéairement indépendantes du système, en calculant une forme de Jordan de la matrice  $C$ . Soit

$$J = P^{-1} C P = \text{diag} (7, 5, 2, 0)$$

avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{1}{70} & \frac{1}{15} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Un système fondamental de solutions associé au système différentiel et dont la matrice est  $B(x)$ , est

$$\Phi_B(x) = x^C = P \text{diag} (x^7, x^5, x^2, 1) P^{-1}$$

Donc

$$\Phi_B(x) = \begin{bmatrix} x^7 & 0 & 0 & 0 \\ (x^7 - x^5)/2 & x^5 & 0 & 0 \\ x^2(3x^5 - 5x^3 + 2)/30 & x^2(x^3 - 1)/3 & x^2 & 0 \\ (3x^7 - 7x^5 + 7x^2 - 3)/30 & (2x^5 - 5x^2 + 3)/30 & (x^2 - 1)/2 & 2 \end{bmatrix}$$

Quatre solutions linéairement indépendantes associées au système différentiel  $Y'(x) = A(x)Y(x)$  sont les vecteurs colonnes de la matrice

$$\Phi_A(x) = T(x)\Phi_B(x)$$

**Références**

- [1] **BIRKHOFF G. D.**  
Formal theory of irregular difference equations  
Acta. Math. Vol. 54 (1930), p. 207-209
- [2] **CODDINGTON E. A. et LEVINSON N.**  
Theory of ordinary differential equations  
Mc. Graw-Hill Book Company. INC New York (1955).
- [3] **COPE F. T.**  
Formal solutions of irregular linear differential equations  
Am. J. Math. Vol. 58 (1936) p. 130-140.
- [4] **GERARD R. et LEVELT A. H. M.**  
Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes différentiels linéaires.  
Ann. Inst. Fourier, 23-1(1973), p. 157-195
- [5] **HILALI A.**  
Contribution à l'étude des points singuliers de systèmes différentiels linéaires.  
Thèse de 3<sup>o</sup> cycle, IMAG, Grenoble (1982).
- [6] **HARRIS W. A.**  
Characterizations of linear differential systems with a regular singular point.  
Proc. Edinburgh Math. Soc (2) 18 (1972/73), p. 93-98
- [7] **JURKAT W.B. et LUTZ D. A.**  
On the order of analytic differential equations  
Proc. London Math. Soc. 3(1971) p. 465-482.
- [8] **LUTZ D. A.**  
On systems of linear differential equations having regular singular solutions.  
J. Diff. Equ. 3, 311-322, (1967).
- [9] **MALGRANGE B.**  
Sur les points singuliers des équations différentielles,  
L'enseignement mathématique, t.XX, 1-2, 147-176(1974).

**[10] MOSER J.**

The order of singularity in Fuch's theory  
Math. Zeitschrift. 72, 379-398 (1960).

**[11] J. P RAMIS**

Théorème d'indice de Gevrey pour les équations différentielles ordinaires  
Pub. IRMA, Strasbourg (1981).

**[12] E. WAGENFÜHRER**

On the invariants measuring the irregularity of linear differential equations  
at a singular point,  
Analysis 3, 369-384 (1983)

**[13] E. WAGENFÜHRER**

On the regularity of systems of linear differential equations  
at a singular point  
Analysis 4, 264-298 (1984)

**[14] WASOW W**

Asymptotic expansions for ordinary differential equations  
Wiley (1973).



## **CHAPITRE 2**

### **A PROPOS DE LA METHODE DU VECTEUR CYCLIQUE**



## 1. Introduction

C'est en 1930 que G. D. Birkhoff [1] donne une méthode permettant de réduire un système aux différences de dimension  $n$  à une équation aux différences scalaire d'ordre  $n$ . Cette méthode a été reprise par F.T. Cope [3] pour les systèmes différentiels linéaires et ensuite par P. Deligne [4] qui a démontré que tout système différentiel linéaire à coefficients dans un corps est équivalent à une équation différentielle scalaire à coefficients dans le même corps, par l'intermédiaire d'un vecteur dit *cyclique*, choisi convenablement.

Dans le cadre des systèmes différentiels à coefficients séries formelles, J.P. Ramis [11] a démontré qu'un tel vecteur peut toujours être choisi en tant que polynôme de degré ne dépassant pas la dimension du système.

Le but de l'utilisation de cette méthode est d'avoir dans un premier temps une classification de la singularité. B. Malgrange associe ainsi à tout système différentiel un entier  $i(D)$  appelé l'indice d'irrégularité que l'on sait calculer à partir de la valuation des coefficients de l'équation obtenue via un vecteur cyclique. La singularité régulière est alors caractérisée par la nullité de  $i(D)$ .

Un second but de la méthode est de pouvoir construire un système fondamental de solutions du système à partir de celui de l'opérateur différentiel associé. Cette méthode a été programmée dans un langage de calcul formel Reduce et ajoutée à un Code "SYSDIFF" (cf. [12]) permettant ainsi de calculer un système fondamental de solutions au voisinage d'un point singulier régulier ou irrégulier.

Cependant, la méthode s'avère très coûteuse et donne des transformations très compliquées avec des coefficients trop longs (On donne des exemples à la fin de ce chapitre).

Néanmoins, la méthode est d'une utilité théorique loin d'être négligeable. Elle permet en effet d'attribuer au système toute la théorie connue pour les équations scalaires en lui associant tous les invariants que l'on trouve dans la littérature. En particulier, le polygone de Newton, outil important pour le calcul des solutions formelles au voisinage de la singularité.

Dans ce chapitre, on reprend l'algorithme développé dans [6] en donnant quelques propriétés relatives à la méthode du vecteur cyclique.



## 2. Méthode de Birkhoff-Cope

### 2.a. Système différentiel associé à une équation différentielle scalaire.

On considère une équation différentielle scalaire d'ordre  $n$  :

$$(2-1) \quad y^{(n)} - a_1(x) y^{(n-1)} - a_2(x) y^{(n-2)} - \dots - a_n(x) y = 0$$

où les  $a_i$  sont des éléments de  $\mathbb{C}((x))$ .

Il est bien connu que l'équation différentielle (2-1) peut toujours s'écrire sous la forme d'un système différentiel linéaire en prenant comme vecteur

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

l'équation (2-1) s'écrit alors sous la forme :

$$(2-2) \quad Y'(x) = C(x)Y$$

où  $C(x)$  est une matrice compagnon :

$$(2-3) \quad C(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ a_n & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{bmatrix}$$

On appellera (2-2): *le système différentiel compagnon* associé à (2-1).

On suppose que les coefficients  $a_k$  de (2-1) soient de la forme

$$(2-4) \quad a_k(x) = x^{-\lambda_k} b_k(x)$$

où les  $b_k(x)$  sont des fonctions régulières à l'origine. Les  $\lambda_k$  désignent l'ordre polaire du  $k^{\text{ième}}$  coefficient  $a_k$ . On prendra  $\lambda_k = 0$  si  $a_k$  est régulière à l'origine.

Pour une équation différentielle scalaire de la forme (2-1), on possède un critère très pratique bien connu dû à Fuchs [7] :  $x = 0$  est une singularité régulière si et seulement si

$$(2-5) \quad \lambda_k \leq k \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Dans ce cas, on sait que l'ordre polaire de la matrice  $C(x)$  dans (2-3) peut être réduit à 1. Il est facile de voir que si l'on applique au système (2-2) l'algorithme de réductibilité (cf. chapitre I), on obtient comme transformation :

$$T(x) = \text{diag} (x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, 1)$$

En faisant l'opération :

$$\frac{B(x)}{x} = T^{-1} C(x) T - T^{-1} T'$$

on trouve

$$B(x) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} -(n-1) & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -(n-2) & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -(n-3) & 1 & 0 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & -1 & 1 \\ x^n a_n(x) & x^{n-1} a_{n-1}(x) & \dots & & x a_1(x) \end{matrix} \end{pmatrix}$$

D'après (2-5), la matrice  $B(x)$  est régulière à l'origine, puisque les fonctions

$$\bar{b}_k(x) = x^k a_k(x) = x^{k-\lambda_k} b_k(x)$$

sont régulières à l'origine. Les vraies inconnues sont donc

$$x^{-n+1}y, x^{-n+2}y', \dots, y^{(n-1)}$$

au lieu de

$$y, y', \dots, y^{(n-1)}.$$

### 3. Equivalence entre systèmes différentiels et systèmes compagnons

Considérons le système différentiel écrit sous la forme :

$$(3-1) \quad y'_i = \sum_{j=1}^n m_{ij}(x) y_j(x) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

où les  $m_{ij}$  sont des éléments de  $\mathbb{C}((x))$ ; coefficients de la matrice  $M(x)$ . On pose (cf. [1])

$$y(x) = \beta_{01}(x)y_1 + \beta_{02}(x)y_2 + \dots + \beta_{0n}(x)y_n$$

où les  $\beta_{0i}(x)$  sont des fonctions arbitraires. En dérivant successivement la fonction  $y(x)$  et en remplaçant à chaque fois  $y'_i$  par son expression (3-1), on obtient  $n+1$  équations

$$(3-2) \quad \left\{ \begin{array}{l} y(x) = \beta_{01}(x)y_1 + \beta_{02}(x)y_2 + \dots + \beta_{0n}(x)y_n \\ y'(x) = \beta_{11}(x)y_1 + \beta_{12}(x)y_2 + \dots + \beta_{1n}(x)y_n \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y^{(n)}(x) = \beta_{n1}(x)y_1 + \beta_{n2}(x)y_2 + \dots + \beta_{nn}(x)y_n \end{array} \right.$$

où les  $\beta_{ij}(x)$  vérifient la relation de récurrence :

$$(3-3) \quad \beta_{ij}(x) = \frac{d\beta_{i-1j}}{dx} + \sum_{k=1}^{k=n} \beta_{i-1k}(x) m_{kj}(x)$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Pour que le système d'équations (3-2) admette des solutions non triviales, il faut et il suffit que le déterminant :

$$(3-4) \quad \begin{vmatrix} y & \beta_{01} & \dots & \beta_{0n} \\ y' & \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ y^{(n)} & \beta_{n1} & \dots & \beta_{nn} \end{vmatrix}$$

soit identiquement nul.

Il en résulte alors une relation linéaire homogène entre les dérivées successives de la fonction  $y$  de la forme

$$(3-5) \quad a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0$$

où l'un au moins des  $a_i$  est non identiquement nul.

**Remarque 3.1**

On peut écrire les relations (3-3) sous une forme matricielle en considérant les vecteurs lignes  $Y_k$  définis par

$$(3-6) \quad Y_k = (\beta_{k1}, \beta_{k2}, \dots, \beta_{kn}) \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

On a d'après (3-3)

$$(3-7) \quad Y_k(x) = \frac{dY_{k-1}}{dx} + Y_{k-1} M(x) \quad k = 1, 2, \dots, n$$

où  $M(x) = (m_{ij}(x))_{0 \leq i, j \leq n}$  est la matrice du système différentiel (3-1).

D'après le système (3-2), on a :

$$(3-8) \quad y^{(k)} = \langle Y_k, Y \rangle$$

où  $\langle Y_k, Y \rangle$  désigne le produit scalaire du vecteur  $Y_k$  défini dans (3-6) et du vecteur  $Y$  de composantes  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ : solution du système (3-1). Si on désigne par  $\mathcal{M}_i$  la matrice co-facteur de  $y^{(n-i)}$  dans le déterminant (3-4), on a :

$$(3-9) \quad \mathcal{M}_0(x) = \begin{pmatrix} Y_0(x) \\ Y_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{n-1}(x) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_i(x) = \begin{pmatrix} Y_0(x) \\ Y_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{n-i-1}(x) \\ Y_{n-i+1}(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n(x) \end{pmatrix} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

et

$$a_i(x) = (-1)^i \det(\mathcal{M}_i(x)) \quad i = 0, 1, 2, \dots, n$$

Pour que l'équation différentielle (3-5) soit d'ordre  $n$ , il suffit d'imposer aux fonctions  $\beta_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) la condition

$$(3-10) \quad a_0(x) = \det(\mathcal{M}_0(x)) \neq 0$$

autrement dit, il faut que la matrice  $\mathcal{M}_0$  soit un élément du groupe des matrices inversibles à coefficients dans  $\mathbb{C}((x))$  ( i.e.  $\mathcal{M}_0 \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}((x)))$ ).

### Définition 3.1

On dira que le vecteur  $Y_0(x) = (\beta_{01}(x), \dots, \beta_{0n}(x))$  est cyclique si et seulement si  $\mathcal{M}_0 \in \mathbf{GL}(n, \mathbb{C}((x)))$ .

**Remarque 3.2**

Si on désigne par  $E(Y_0)$  l'équation différentielle (3-5) obtenue par l'intermédiaire d'un vecteur cyclique  $Y_0$ , alors à toute solution scalaire  $y$  de (3-5), on peut associer une solution vectorielle du système (3-1) en inversant la matrice  $\mathcal{M}_0$  définie ci-dessus. Soient

$$y_{[1]}, y_{[2]}, \dots, y_{[n]}$$

$n$  solutions linéairement indépendantes de  $E(Y_0)$ . D'après les relations (3-2), si l'on désigne par

$$Z_{y_{[1]}} = \begin{bmatrix} y_{[1]} \\ y'_{[1]} \\ \vdots \\ y_{[1]}^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad Z_{y_{[2]}} = \begin{bmatrix} y_{[2]} \\ y'_{[2]} \\ \vdots \\ y_{[2]}^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad \dots \dots, \quad Z_{y_{[n]}} = \begin{bmatrix} y_{[n]} \\ y'_{[n]} \\ \vdots \\ y_{[n]}^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

un système fondamental de solutions du système compagnon associé à  $E(Y_0)$ , alors

$$Y_{[1]} = \mathcal{M}_0^{-1} Z_{y_{[1]}}, \quad Y_{[2]} = \mathcal{M}_0^{-1} Z_{y_{[2]}}, \quad \dots \dots, \quad Y_{[n]} = \mathcal{M}_0^{-1} Z_{y_{[n]}}$$

sont solutions du système (3-1). Ces  $n$  vecteurs sont linéairement indépendants car s'il existe  $n$  constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ , non toutes nulles telles que

$$\alpha_1 Y_{[1]} + \alpha_2 Y_{[2]} + \dots + \alpha_n Y_{[n]} = 0$$

alors, on a nécessairement

$$\alpha_1 y_{[1]} + \alpha_2 y_{[2]} + \dots + \alpha_n y_{[n]} = 0.$$

Ce qui est contradictoire.

**Remarque 3.3**

Il est facile de voir que l'équation différentielle (3-5) dépend du choix du vecteur cyclique. Ce choix est évidemment infini, il suffit de voir que si  $Y_0$  est cyclique, alors tout vecteur produit de  $Y_0$  avec une matrice  $T$  appartenant à  $GL(n, \mathbb{C})$ , est aussi cyclique. Cependant, J. P. Ramis [11] a démontré que les  $\beta_{0i}$  peuvent toujours être choisis en tant que polynômes de degré inférieur ou égal à  $n-1$ . Ce résultat est contenu dans le lemme suivant.

**Lemme 3.1 [11]**

Soit  $x_0$  appartenant à  $\mathbb{C}$  qui n'est pas pôle des fonctions  $m_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ).  
Soit  $L$  une matrice constante à coefficients complexes fixée (arbitraire). Alors, on peut trouver

$$Y_0(x) = (\beta_{01}(x), \beta_{02}(x), \dots, \beta_{0n}(x)) \in (\mathbb{C}[x])^n$$

avec  $d^\circ(\beta_{0i}) \leq n-1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) tel que

$$(3-11) \quad \mathcal{M}_0(x_0) = L$$

Les  $\beta_{0i}$  sont alors déterminés d'une manière unique par cette condition.

**Démonstration**

Soient  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) les vecteurs lignes de  $L$ , la condition (3-11) s'écrit de la manière suivante :

$$(3-12) \quad \left\{ \begin{array}{l} Y_0(x_0) = l_1 \\ Y_1(x_0) = l_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_{n-1}(x_0) = l_n \end{array} \right.$$

ces conditions sont équivalentes à

$$\begin{aligned}
 Y_0(x_0) &= l_1 \\
 Y'_0(x_0) &= l_2 - Y_0(x_0) \Phi_{20}(x_0) \\
 Y''_0(x_0) &= l_3 - Y'_0(x_0) \Phi_{30}(x_0) - Y_0(x_0) \Phi_{31}(x_0) \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{3-13}$$

où les  $\Phi_{ij}$  sont des matrices, fonctions algébriques de  $M, M', \dots, M^{(n-1)}$ . Les  $m_{ij}$  étant définis en  $x_0$ , la matrice  $M$  et ses dérivées le sont et donc les  $\Phi_{ij}$  aussi. Les conditions (3-13) considérées comme équations en  $Y_0(x_0), Y'_0(x_0), \dots, Y_0^{(n-1)}(x_0)$  admettent une solution et une seule de la forme

$$\begin{aligned}
 Y_0(x_0) &= l_1 = C_1 \\
 Y'_0(x_0) &= l_2 - l_1 \Phi_{20}(x_0) = C_2 \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 Y_0^{(n-1)}(x_0) &= C_n
 \end{aligned}$$

où les  $C_i = (c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{in})$ , ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) sont  $n$  vecteurs lignes à coefficients dans  $\mathbb{C}$  dépendants des  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

On détermine ainsi d'une manière unique les  $\beta_{0i}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) par la formule de Taylor

$$\beta_{0i}(x) = c_{i1} + (x-x_0)c_{i2} + \dots + \frac{(x-x_0)^{(n-1)}}{(n-1)!} c_{in}$$

On peut trouver une autre méthode dans [8] pour la construction effective d'un vecteur cyclique d'une matrice donnée. Cependant, du point de vue pratique, ces méthodes ne sont pas intéressantes, car le choix d'un tel vecteur reste large, voire même infini et le calcul des coefficients  $a_k$  s'avère trop long et coûteux (on donne des



exemples à la fin de ce chapitre). Pour pallier à cette difficulté, les  $\beta_{0i}(x)$  doivent être choisis de degré le plus petit possible. Le théorème suivant donne une condition suffisante pour qu'un tel vecteur puisse être choisi constant.

**Théorème 3.1**

*Si la matrice résidu de*

$$M(x) = \frac{1}{x^p} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k \right)$$

*est cyclique (polyôme minimal est égal au polynôme caractéristique), alors tout vecteur cyclique de  $A_0$  est cyclique pour la matrice  $M(x)$ .*

**Démonstration**

Considérons au lieu des vecteurs  $Y_k$  dans (3-6), les vecteurs

$$Z_k = x^{kp} Y_k \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

où  $p = p(M) > 1$  est l'ordre polaire de la matrice  $M(x)$ . On pose

$$M(x) = \frac{A(x)}{x^p}, \quad \text{avec} \quad A(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k$$

On peut écrire les relations (3-7) sous la forme:

$$(3-14) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_1 \quad \quad \quad = x^p \frac{dZ_0}{dx} + Z_0 A(x) \\ Z_2 \quad + \quad p x^{p-1} Z_1 \quad = x^p \frac{dZ_1}{dx} + Z_1 A(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_n \quad + \quad (n-1) p x^{p-1} Z_{n-1} = x^p \frac{dZ_{n-1}}{dx} + Z_{n-1} A(x) \end{array} \right.$$

où cette fois, les vecteurs  $Z_k$  sont tous sans pôle à l'origine.

L'équation différentielle obtenue à l'aide du vecteur cyclique  $Y_0 = Z_0$  s'écrit alors de la manière suivante:

$$(3-15) \quad x^{np} b_0(x) y^{(n)} + x^{(n-1)p} b_1(x) + \dots + b_n(x) y = 0$$

où

$$(3-16) \quad b_0(x) = \det [Z_0^t, Z_1^t, \dots, Z_{n-1}^t]$$

et

$$(3-17) \quad b_i(x) = (-1)^i \det [Z_0^t, Z_1^t, \dots, Z_{n-i-1}^t, Z_{n-i+1}^t, \dots, Z_n^t]$$

Supposons que le vecteur  $Z_0$  est choisi constant. En posant  $x = 0$  dans (3-14), on obtient les relations

$$Z_{1|x=0} = Z_0 A_0$$

$$Z_{2|x=0} = Z_0 A_0^2$$

.

.

.

$$Z_{n-1|x=0} = Z_0 A_0^{n-1}$$

Puisque la matrice  $A_0$  est cyclique, il existe un vecteur  $Z_0$  à coefficients constants tel que la famille de vecteurs :

$$\mathfrak{B} = (Z_0, Z_0 A_0, \dots, Z_0 A_0^{n-1})$$

constitue une base de  $\mathbb{C}^n$ . Par conséquent, si  $Z_0$  est choisi de cette façon, en posant  $x = 0$  dans (3-16), on obtient

$$b_0(0) = \det (Z_0^t, A_0^t Z_0^t, \dots, (A_0^{n-1})^t Z_0^t) \neq 0$$

c.q.f.d.

**Remarque 3.4 [11]**

Les systèmes différentiels

$$(3-18) \quad Y'(x) = M(x)Y(x)$$

et

$$(3-19) \quad Z'(x) = C(x)Z(x)$$

sont équivalents par la transformation  $T(x) = \mathcal{M}_0^{-1}$ ; où  $C(x)$  est la matrice compagnon associée à  $E(Y_0)$ :

$$(3-20) \quad C(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ c_n & \dots & \dots & \dots & c_1 \end{bmatrix}$$

où

$$(3-21) \quad c_k(x) = -\frac{a_k(x)}{a_0(x)} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

En effet, d'après les relations (3-17), on a

$$(3-22) \quad \mathcal{M}_n = \frac{d\mathcal{M}_0}{dx} + \mathcal{M}_0 A(x)$$

De plus, on a

$$(3-23) \quad \begin{cases} Y_0 = Y_0 \\ Y_1 = Y_1 \\ \vdots \\ Y_n = c_1 Y_0 + c_2 Y_1 + \dots + c_n Y_{n-1} \end{cases}$$

où les  $c_k$  sont les coefficients de la forme compagnon définis dans (3-21). Le système (3-23) s'écrit matriciellement sous la forme suivante

$$\mathcal{M}_n = C(x) \mathcal{M}_0$$

En utilisant la relation (3-22), nous obtenons la relation

$$(3-24) \quad C(x) = T^{-1} M T - T^{-1} T' \quad \text{avec} \quad T(x) = \mathcal{M}_0^{-1}(x)$$

Ce qui signifie que le système différentiel de départ est équivalent au système compagnon par la transformation  $T = \mathcal{M}_0^{-1}$ .

### Remarques 3.5

Ce résultat va jouer un rôle important dans la suite, car il va permettre la traduction, pour le système (3-18), de tous les résultats (critères, invariants, ...) connus pour les équations différentielles scalaires.

### Proposition 3.1

*Pour tout choix de vecteur cyclique, on a la relation suivante*

$$c_1(x) = \text{trace}(M(x)) + \frac{\frac{d}{dx}(\det(\mathcal{M}_0(x)))}{\det(\mathcal{M}_0(x))}$$

où  $\text{trace}(M(x)) = m_{11} + m_{22} + \dots + m_{nn}$  désigne la trace de la matrice  $M(x)$ .  
 $\mathcal{M}_0$  étant la matrice définie dans (3-9).

En effet, pour toute matrice  $Q(x)$  appartenant à  $GL(n, \mathbb{C}((x)))$ , on a la relation (cf. [2]):

$$(3-25) \quad \text{trace} \left( Q^{-1} \frac{dQ}{dx} \right) = \frac{\frac{d}{dx}(\det(Q(x)))}{\det(Q(x))}$$

Or d'après la relation (3-24), on a

$$M(x) = \mathcal{M}_0 C(x) \mathcal{M}_0 - \mathcal{M}_0^{-1} \mathcal{M}_0'$$

Donc

$$\text{trace}(M(x)) = \text{trace}(C(x)) - \text{trace}(\mathcal{M}_0^{-1} \mathcal{M}'_0)$$

en utilisant la relation (3-25), nous obtenons la relation de la proposition 3.1.

### Proposition 3.2

Soit  $M(x) = x^{-p}A(x)$ ,  $p > 1$ , la matrice du système (3-1), où  $A(x)$  est une matrice régulière à l'origine. Pour tout choix de vecteur cyclique, on a la relation:

$$c_n(x) = x^{-np} [ (-1)^{n+1} \det(A(x)) + O(x^{p-1}) ]$$

où  $c_n(x)$  désigne le  $n^{\text{ème}}$  coefficient de l'équation différentielle associée au système de matrice  $M(x)$ .

### Démonstration:

Soit  $Y_0$  un vecteur cyclique de la matrice  $M(x)$  et  $E(Y_0)$  l'équation différentielle associée. On a

$$c_n(x) = (-1)^{n+1} \det(C(x))$$

où  $C(x)$  est la matrice compagnon associée à  $E(Y_0)$ . Donc

$$\begin{aligned} c_n(x) &= (-1)^{n+1} \det(\mathcal{M}_0 M \mathcal{M}_0^{-1} + \mathcal{M}'_0 \mathcal{M}_0^{-1}) \\ &= (-1)^{n+1} \det(M(x) + \mathcal{M}_0^{-1} \mathcal{M}'_0) \\ &= (-1)^{n+1} x^{-np} \det(A(x) + x^p \mathcal{M}_0^{-1} \mathcal{M}'_0) \end{aligned}$$

Posons (cf. [5, 10])

$$\mathcal{M}_0 = R(x) x^\beta V(x)$$

où  $V(x)$  est une matrice polynomiale de déterminant identiquement égal à 1,

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$$

avec  $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_n$  des entiers relatifs, et

$$R(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} R_k x^k \quad \text{avec} \quad \det(R_0) \neq 0$$

On a

$$x^p \mathcal{M}_0^{-1} \mathcal{M}_0' - x^p V^{-1} V' = \mathcal{M}_0^{-1} (x^p R' R^{-1} + x^{p-1} R \beta R^{-1}) \mathcal{M}_0$$

Donc

$$\det [A(x) + x^p \mathcal{M}_0^{-1} \mathcal{M}_0' - x^p V^{-1} V'] = \det [\mathcal{M}_0 A \mathcal{M}_0^{-1} + x^p R' R^{-1} + x^{p-1} \beta R^{-1}]$$

D'après les propriétés des déterminants, si A et B désignent deux matrices carrées, on a

$$\det(A+B) = \det(A) + \sum_{k=1}^{k=n} (A, B)_k$$

où  $(A, B)_k$  désigne le déterminant de la matrice A dans laquelle on remplace les n-k dernières colonnes par celles de B. Donc

$$\det(A(x) + x^p \mathcal{M}_0^{-1} \mathcal{M}_0') = \det(A(x)) + O(x^{p-1})$$

D'où la relation

$$c_n(x) = x^{-np} [(-1)^{n+1} \det(A(x)) + O(x^{p-1})]$$

En appliquant les propositions 3.1 et 3.2 aux systèmes différentiels linéaires de dimension 2, on a le résultat suivant:

### Corollaire 3.1

Soit  $Y'(x) = x^p A(x)Y(x)$  avec  $A \in M_{2,2}(\mathbb{C}[[x]])$  et  $A(0) \neq 0$

un système différentiel linéaire de dimension 2 avec  $p > 1$ . Pour tout choix de vecteur cyclique, l'opérateur différentiel associé est de la forme:

$$x^{2p} \frac{d^2}{dx^2} - x^p (\text{trace}(A(x)) + O(x^{p-1})) \frac{d}{dx} + (\det(A(x)) + O(x^{p-1}))$$

#### 4. Caractérisation des systèmes différentiels à singularité régulière par la méthode du vecteur cyclique

Supposons que la matrice du système (3-1) soit de la forme

$$(4-1) \quad M(x) = \frac{A(x)}{x^p} \quad \text{avec} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k$$

Si  $p = p(M) = 1$ , la singularité à l'origine est régulière et on sait dans ce cas (cf. chapitre III) construire un système fondamental de solutions. On suppose alors que  $p(M) = p > 1$ , et nous allons construire à partir des vecteurs  $Y_k$  définis par les relations de récurrence (3-7), une transformation  $T(x)$  permettant de réduire l'ordre polaire  $p(M)$  à 1, lorsque (4-1) présente une singularité régulière.

Soit  $Y_0$  un vecteur cyclique de la matrice  $M$ . Considérons les vecteurs

$$Z_k = x^k Y_k \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Les relations (3-7) s'écrivent alors sous la forme:

$$(4-2) \quad \begin{cases} Z_0 = Y_0 \\ Z_1 = xZ_0' + Z_0 \left( \frac{A(x)}{x^{p-1}} \right) \\ Z_2 = xZ_1' + Z_1 \left( \frac{A(x)}{x^{p-1}} - I \right) \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_n = xZ_{n-1}' + Z_{n-1} \left( \frac{A(x)}{x^{p-1}} - (n-1)I \right) \end{cases}$$

L'opérateur différentiel associé au système (3-1) est de la forme

$$(4-3) \quad x^n a_0(x) \frac{d^n}{dx^n} + x^{n-1} a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x)$$

où

$$(4-4) \quad \begin{cases} a_0(x) = \det ( Z_0^t, Z_1^t, \dots, Z_{n-1}^t ) \\ a_i(x) = \det ( Z_0^t, Z_1^t, \dots, Z_{n-i-1}^t, Z_{n-i+1}^t, \dots, Z_n^t ) \\ i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Soit  $\omega$  la fonction qui à tout élément  $f$  de  $\mathbb{C}((x))$  de la forme :

$$f(x) = x^v \sum_{k=0}^{+\infty} f_k x^k \quad \text{avec } v \in \mathbb{Z} \quad \text{et } f_0 \neq 0$$

associe son ordre en zéro (au sens large). C'est à dire  $\omega(f) = v$ . On prendra comme convention  $\omega(0) = +\infty$ .

**Définition (Indice d'irrégularité de Malgrange [9]):**

On appelle irrégularité du système (3-1), au point  $x = 0$ , l'entier défini par

$$(4-5) \quad i(D) = \sup \left[ 0, -\omega \left( \frac{a_i}{a_0} \right) \right]$$

où les  $a_i(x)$  sont les coefficients de (4-3), obtenus par la méthode du vecteur cyclique.

#### Remarque 4.1

On montre (cf. [9]) que l'indice défini dans (4-5) est indépendant du choix du vecteur cyclique  $Y_0$  et qu'il désigne la hauteur du polygone de Newton (cf. Chapitre VI). On a la caractérisation suivante:

$x = 0$  est une singularité régulière, si et seulement si  $i(D) = 0$ .

Ce qui est équivalent à dire que  $\omega(a_k/a_0) \geq 0$  pour tout  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Par conséquent, si la singularité du système (3-1) est régulière, alors il existe  $n$  fonctions  $c_1, c_2, \dots, c_n$  toutes régulières à l'origine, telles que:



$$(4-6) \quad Z_n(x) = c_n Z_0 + c_{n-1} Z_1 + \dots + c_1 Z_{n-1}$$

D'après les relations (4-2), on a

$$\mathcal{M}_n + D_n \mathcal{M}_0 = x \frac{d}{dx} \mathcal{M}_0 + \mathcal{M}_0 \frac{A(x)}{x^{p-1}}$$

où  $\mathcal{M}_n$  (resp.  $\mathcal{M}_0$ ) est la matrice formée par les lignes  $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$  (resp.  $Z_0, Z_1, \dots, Z_{n-1}$ ) et

$$D_n = \text{diag}(0, 1, 2, \dots, n-1)$$

D'autre part, on a la relation

$$\mathcal{M}_n = C(x) \mathcal{M}_0$$

où  $C(x)$  est la matrice compagnon de coefficients  $c_1, c_2, \dots, c_n$ .

Donc

$$\frac{C(x) + D_n}{x} = T^{-1} \frac{A(x)}{x^p} T - T^{-1} T$$

avec

$$(4-7) \quad T(x) = \mathcal{M}_0^{-1}.$$

En conclusion, si le système différentiel (3-1) est à singularité régulière, d'après le critère de B. Malgrange, la matrice  $C(x)$  est sans pôle à l'origine. Par conséquent la matrice  $\mathcal{M}_0$  obtenue par la méthode du vecteur cyclique permet de réduire l'ordre polaire de la matrice (4-1) à 1.

## 5. Exemples

L'algorithme du vecteur cyclique a été programmé en Reduce . Nous reprenons ci-dessous les exemples que nous avons traité au chapitre I et sur lesquels nous avons appliqué l'algorithme de réductibilité. Ces deux exemples sont tous les deux à singularité régulière et la transformation  $T(x)$  (définie par la relation (4-7)) ainsi que la matrice  $B(x)$  du système équivalent, sont données à la fin de chaque exemple.

*On peut remarquer, comme le montrent ces deux exemples, que la taille des coefficients est considérablement réduite si l'on utilise l'algorithme de réductibilité développé dans le premier chapitre.*

MATRICE DU SYSTEME DIFFERENTIEL :

---

$$a(1,1) := (-x + 2)/x$$

$$a(1,2) := x^2 * (x + 1)$$

$$a(1,3) := 4/x$$

$$a(2,1) := (-2x^3 + 1)/x^3$$

$$a(2,2) := 1$$

$$a(2,3) := 4/x$$

$$a(3,1) := 0$$

$$a(3,2) := 3x^2$$

$$a(3,3) := (x^2 + 2)/x$$

COEFFICIENTS DU VECTEUR CYCLIQUE Y0

---

$$z_0(1) = -x + 1$$

$$z_0(2) = x + 1$$

$$z_0(3) = -x + 3$$

COEFFICIENTS DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE CORRESPONDANTS AUX PARAMETRES DONNES :

---

$$\begin{aligned}
 a_3(x) = & (-10x^{19} - 96x^{18} + 70x^{17} + 1876x^{16} + 5x^{15} - 15268x^{14} + 4308x^{13} \\
 & + 36603x^{12} + 22066x^{11} - 77734x^{10} - 34925x^9 + 59770x^8 + \\
 & 23252x^7 - 31739x^6 + 16250x^5 - 9952x^4 + 3736x^3 - 1604x^2 + 136x \\
 & - 60)/x^9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_2(x) = & (-50x^{18} - 145x^{17} + 801x^{16} + 2077x^{15} - 5761x^{14} - 4144x^{13} + \\
 & 1929x^{12} + 19518x^{11} + 3358x^{10} - 26059x^9 + 2880x^8 + 3647x^7 - \\
 & 1565x^6 + 954x^5 + 632x^4 - 124x^3 - 4x^2 - 12x + 4)/x^9
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_1(x) = & (-5x^{17} - 18x^{16} + 8x^{15} + 34x^{14} + 121x^{13} + 1696x^{12} - 3539x^{11} \\
 & - 2295x^{10} + 5269x^9 + 1560x^8 - 1078x^7 - 2105x^6 + 522x^5 - 74x^4 \\
 & + 4x^3 + 20x^2 - 8x + 12)/x^8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_0(x) = & (5x^{15} + 18x^{14} - 68x^{13} - 232x^{12} + 559x^{11} + 392x^{10} - 933x^9 - \\
 & 449x^8 + 329x^7 + 685x^6 - 238x^5 + 50x^4 - 46x^3 + 24x^2 - 4x + 4 \\
 & )/x^7
 \end{aligned}$$

IMPRESSION DE LA TRANSFORMATION T

---

$$T(1,1) = (x^3 * (-5x^{11} - 21x^{10} + 48x^9 + 243x^8 - 369x^7 - 148x^6 - 265x^5 + 666x^4 + 105x^3 - 50x^2 + 4x - 8)) / (5x^{15} + 18x^{14} - 68x^{13} - 232x^{12} + 559x^{11} + 392x^{10} - 933x^9 - 449x^8 + 329x^7 + 685x^6 - 238x^5 + 50x^4 - 46x^3 + 24x^2 - 4x + 4)$$

$$T(1,2) = (x^2 * (-3x^9 + 3x^8 - 23x^7 + 122x^6 - 119x^5 + 9x^4 - 3x^3 + 10x^2 + 4)) / (5x^{15} + 18x^{14} - 68x^{13} - 232x^{12} + 559x^{11} + 392x^{10} - 933x^9 - 449x^8 + 329x^7 + 685x^6 - 238x^5 + 50x^4 - 46x^3 + 24x^2 - 4x + 4)$$

$$T(1,3) = (x^4 * (x^6 - 18x^4 + 27x^3 + x^2 - 5x - 14)) / (5x^{15} + 18x^{14} - 68x^{13} - 232x^{12} + 559x^{11} + 392x^{10} - 933x^9 - 449x^8 + 329x^7 + 685x^6 - 238x^5 + 50x^4 - 46x^3 + 24x^2 - 4x + 4)$$

$$T(2,1) = (-3x^{11} + 9x^{10} + 47x^9 - 64x^8 - 240x^7 + 259x^6 - 68x^5 + 99x^4 - 61x^3 + 32x^2 - 8x + 4) / (5x^{15} + 18x^{14} - 68x^{13} - 232x^{12} + 559x^{11} + 392x^{10} - 933x^9 - 449x^8 + 329x^7 + 685x^6 - 238x^5 + 50x^4 - 46x^3 + 24x^2 - 4x + 4)$$

$$T(2,2) = (x^2 * (-5x^8 - 6x^7 + 44x^6 + 26x^5 - 93x^4 + 30x^3 - 25x^2 + 12x - 7)) / (5x^{15} + 18x^{14} - 68x^{13} - 232x^{12} + 559x^{11} + 392x^{10} - 933x^9 - 449x^8 + 329x^7 + 685x^6 - 238x^5 + 50x^4 - 46x^3 + 24x^2 - 4x + 4)$$

$$T(2,3) = (x^2(x^6 - 3x^5 - x^4 - 5x^3 + 13x^2 + 4x - 3)) / (5x^{15} + 18x^{14} - 68x^{13} - 232x^{12} + 559x^{11} + 392x^{10} - 933x^9 - 449x^8 + 329x^7 + 685x^6 - 238x^5 + 50x^4 - 46x^3 + 24x^2 - 4x + 4)$$

$$T(3,1) = (x^3(-2x^{10} - 7x^9 + 13x^8 + 98x^7 - 263x^6 + 244x^5 - 54x^4 + 89x^3 - 72x^2 - x - 3)) / (5x^{15} + 18x^{14} - 68x^{13} - 232x^{12} + 559x^{11} + 392x^{10} - 933x^9 - 449x^8 + 329x^7 + 685x^6 - 238x^5 + 50x^4 - 46x^3 + 24x^2 - 4x + 4)$$

$$T(3,2) = (x^2(3x^9 - 2x^8 + 9x^7 - 80x^6 + 71x^5 + 18x^4 + 3x^3 + x^2 + 1)) / (5x^{15} + 18x^{14} - 68x^{13} - 232x^{12} + 559x^{11} + 392x^{10} - 933x^9 - 449x^8 + 329x^7 + 685x^6 - 238x^5 + 50x^4 - 46x^3 + 24x^2 - 4x + 4)$$

$$T(3,3) = (x^2(-x^8 - 2x^7 + 13x^6 - 8x^5 - 2x^4 - 6x^3 - x^2 + 1)) / (5x^{15} + 18x^{14} - 68x^{13} - 232x^{12} + 559x^{11} + 392x^{10} - 933x^9 - 449x^8 + 329x^7 + 685x^6 - 238x^5 + 50x^4 - 46x^3 + 24x^2 - 4x + 4)$$

IMPRESSION DE LA MATRICE B = T\*\*(-1)\*A\*T-T\*\*(-1)\*T'

B(1,1) := 0

B(1,2) := 1/x

B(1,3) := 0

B(2,1) := 0

B(2,2) := 1/x

B(2,3) := 1/x

$$\begin{aligned}
 B(3,1) := & (10*x^{19} + 96*x^{18} - 70*x^{17} - 1876*x^{16} - 5*x^{15} + 15268*x^{14} - 4308*x^{13} \\
 & - 36603*x^{12} - 22066*x^{11} + 77734*x^{10} + 34925*x^9 - 59770*x^8 - \\
 & 23252*x^7 + 31739*x^6 - 16250*x^5 + 9952*x^4 - 3736*x^3 + 1604*x^2 - \\
 & 136*x + 60)/(5*x^{15} + 18*x^{14} - 68*x^{13} - 232*x^{12} + 559*x^{11} + 392*x^{10} \\
 & - 933*x^9 - 449*x^8 + 329*x^7 + 685*x^6 - 238*x^5 + 50*x^4 - 46*x^3 \\
 & + 24*x^2 - 4*x + 4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B(3,2) := & (50*x^{18} + 145*x^{17} - 801*x^{16} - 2077*x^{15} + 5761*x^{14} + 4144*x^{13} - \\
 & 1929*x^{12} - 19518*x^{11} - 3358*x^{10} + 26059*x^9 - 2880*x^8 - 3647*x^7 \\
 & + 1565*x^6 - 954*x^5 - 632*x^4 + 124*x^3 + 4*x^2 + 12*x - 4)/(x*(5*x^{15} \\
 & + 18*x^{14} - 68*x^{13} - 232*x^{12} + 559*x^{11} + 392*x^{10} - 933*x^9 \\
 & - 449*x^8 + 329*x^7 + 685*x^6 - 238*x^5 + 50*x^4 - 46*x^3 + 24*x^2 \\
 & - 4*x + 4))
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B(3,3) := & (5*x^{17} + 18*x^{16} + 2*x^{15} + 2*x^{14} - 257*x^{13} - 2160*x^{12} + 4657*x^{11} \\
 & + 3079*x^{10} - 7135*x^9 - 2458*x^8 + 1736*x^7 + 3475*x^6 - 998*x^5 + \\
 & 174*x^4 - 96*x^3 + 28*x^2 - 4)/(x*(5*x^{15} + 18*x^{14} - 68*x^{13} - 232*x^{12}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & x^{12} + 559x^{11} + 392x^{10} - 933x^9 - 449x^8 + 329x^7 + 685x^6 \\
 & - 238x^5 + 50x^4 - 46x^3 + 24x^2 - 4x + 4)
 \end{aligned}$$



MATRICE DU SYSTEME DIFFERENTIEL :

---

$$a(1,1) := 10/x$$

$$a(1,2) := (-1)/x^3$$

$$a(1,3) := 0$$

$$a(1,4) := 1/x^3$$

$$a(2,1) := 0$$

$$a(2,2) := 0$$

$$a(2,3) := 1/x^3$$

$$a(2,4) := 0$$

$$a(3,1) := 1/x^4$$

$$a(3,2) := 0$$

$$a(3,3) := 4/x$$

$$a(3,4) := 0$$

$$a(4,1) := 0$$

$$a(4,2) := (-14)/x$$

$$a(4,3) := 1/x^3$$

$$a(4,4) := 14/x$$

COEFFICIENTS DU VECTEUR CYCLIQUE Z0

---

$$Z0(1) = 1$$

$$Z0(2) = x$$

$$Z0(3) = (-1)$$

$$Z0(4) = 1$$

COEFFICIENTS DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE CORRESPONDANTS AUX PARAMETRES DONNES :

$$a_4(x) = (24 * (1965600 * x^{14} - 630630 * x^{13} + 23040 * x^{12} - 361095 * x^{11} + 87618 * x^{10} - 2222 * x^9 + 10166 * x^8 + 3800 * x^7 - 339 * x^6 - 1388 * x^5 - 252 * x^4 + 126 * x^3 + 27 * x^2 - 5 * x - 1)) / x$$

$$a_3(x) = (24 * (-1965600 * x^{15} - 1334970 * x^{14} + 607590 * x^{13} + 338055 * x^{12} + 273477 * x^{11} - 85396 * x^{10} - 7944 * x^9 - 13966 * x^8 - 3461 * x^7 + 1727 * x^6 + 1640 * x^5 + 126 * x^4 - 153 * x^3 - 22 * x^2 + 6 * x + 1)) / x$$

$$a_2(x) = (12 * (1291680 * x^{15} + 1294314 * x^{14} - 815820 * x^{13} - 519525 * x^{12} - 312912 * x^{11} + 81838 * x^{10} + 46801 * x^9 + 10967 * x^8 + 7628 * x^7 - 2825 * x^6 - 2324 * x^5 - 404 * x^4 + 237 * x^3 + 51 * x^2 - 10 * x - 2)) / x$$

$$a_1(x) = (4 * (-484380 * x^{15} - 541002 * x^{14} + 382662 * x^{13} + 266685 * x^{12} + 155097 * x^{11} - 49572 * x^{10} - 34425 * x^9 - 3512 * x^8 - 4125 * x^7 + 2387 * x^6 + 1807 * x^5 + 318 * x^4 - 187 * x^3 - 50 * x^2 + 9 * x + 2)) / x$$

$$a_0(x) = (84240 * x^{15} + 98364 * x^{14} - 72888 * x^{13} - 53337 * x^{12} - 32652 * x^{11} + 11016 * x^{10} + 8100 * x^9 + 878 * x^8 + 1100 * x^7 - 682 * x^6 - 556 * x^5 - 106 * x^4 + 68 * x^3 + 20 * x^2 - 4 * x - 1) / x$$

IMPRESSION DE LA TRANSFORMATION T

$$T(1,1) = (x^6 (21840x^9 - 6006x^8 + 912x^7 - 837x^6 - 300x^5 - 180x^4 + 60x^3 + 26x^2 - 4x - 1)) / ((84240x^{15} + 98364x^{14} - 72888x^{13} - 53337x^{12} - 32652x^{11} + 11016x^{10} + 8100x^9 + 878x^8 + 1100x^7 - 682x^6 - 556x^5 - 106x^4 + 68x^3 + 20x^2 - 4x - 1))$$

$$T(1,2) = (x^5 (-21840x^{10} - 15834x^9 + 5094x^8 - 75x^7 + 1137x^6 + 480x^5 + 120x^4 - 86x^3 - 22x^2 + 5x + 1)) / ((84240x^{15} + 98364x^{14} - 72888x^{13} - 53337x^{12} - 32652x^{11} + 11016x^{10} + 8100x^9 + 878x^8 + 1100x^7 - 682x^6 - 556x^5 - 106x^4 + 68x^3 + 20x^2 - 4x - 1))$$

$$T(1,3) = (x^5 (6240x^{10} + 6255x^9 - 3450x^8 - 1305x^7 - 597x^6 - 351x^5 - 48x^4 + 40x^3 + 18x^2 - 3x - 1)) / ((84240x^{15} + 98364x^{14} - 72888x^{13} - 53337x^{12} - 32652x^{11} + 11016x^{10} + 8100x^9 + 878x^8 + 1100x^7 - 682x^6 - 556x^5 - 106x^4 + 68x^3 + 20x^2 - 4x - 1))$$

$$T(1,4) = (x^7 (-390x^8 - 417x^7 + 258x^6 + 114x^5 + 38x^4 + 23x^3 + 3x^2 - 2x - 1)) / ((84240x^{15} + 98364x^{14} - 72888x^{13} - 53337x^{12} - 32652x^{11} + 11016x^{10} + 8100x^9 + 878x^8 + 1100x^7 - 682x^6 - 556x^5 - 106x^4 + 68x^3 + 20x^2 - 4x - 1))$$

$$T(2,1) = (134400x^{14} - 31920x^{13} - 30720x^{12} - 32840x^{11} + 1614x^{10} + 8598x^9 - 331x^8 + 1485x^7 - 273x^6 - 428x^5 - 150x^4 + 46x^3 + 23x^2 - 3x - 1) / ((84240x^{15} + 98364x^{14} - 72888x^{13} - 53337x^{12} - 32652x^{11} + 11016x^{10} + 8100x^9 + 878x^8 + 1100x^7 - 682x^6 - 556x^5 - 106x^4 + 68x^3 + 20x^2 - 4x - 1))$$

$$\begin{aligned}
& + 11016x^{10} + 8100x^9 + 878x^8 + 1100x^7 - 682x^6 - 556x^5 \\
& - 106x^4 + 68x^3 + 20x^2 - 4x - 1) \\
T(2,2) = & (x^2 * (-50160x^{12} - 4116x^{11} - 10248x^{10} + 10223x^9 - 1426x^8 + 804x^7 \\
& - 167x^6 - 276x^5 - 112x^4 + 19x^3 + 22x^2 - 2x - 1)) / ( \\
& 84240x^{15} + 98364x^{14} - 72888x^{13} - 53337x^{12} - 32652x^{11} + 11016x^{10} \\
& + 8100x^9 + 878x^8 + 1100x^7 - 682x^6 - 556x^5 - 106x^4 + 68x^3 \\
& + 20x^2 - 4x - 1) \\
T(2,3) = & (x^4 * (6000x^{10} + 1452x^9 + 2568x^8 - 1243x^7 + 289x^6 - 325x^5 - 29x^4 \\
& - 18x^3 + 19x^2 - 1)) / (84240x^{15} + 98364x^{14} - 72888x^{13} - 53337x^{12} \\
& - 32652x^{11} + 11016x^{10} + 8100x^9 + 878x^8 + 1100x^7 - 682x^6 - 556x^5 \\
& - 106x^4 + 68x^3 + 20x^2 - 4x - 1) \\
T(2,4) = & (x^6 * (-240x^8 - 80x^7 - 136x^6 + 52x^5 - 17x^4 + 19x^3 + 4x^2 + 3x \\
& - 1)) / (84240x^{15} + 98364x^{14} - 72888x^{13} - 53337x^{12} - 32652x^{11} \\
& + 11016x^{10} + 8100x^9 + 878x^8 + 1100x^7 - 682x^6 - 556x^5 - 106x^4 \\
& + 68x^3 + 20x^2 - 4x - 1) \\
T(3,1) = & (x^3 * (65520x^{12} + 11880x^{10} - 10556x^9 + 910x^8 - 1052x^7 + 243x^6 + 306x^5 \\
& + 108x^4 - 20x^3 - 22x^2 + 2x + 1)) / (84240x^{15} + 98364x^{14} - 72888x^{13} \\
& - 53337x^{12} - 32652x^{11} + 11016x^{10} + 8100x^9 + 878x^8 + 1100x^7 - 682x^6 \\
& - 556x^5 - 106x^4 + 68x^3 + 20x^2 - 4x - 1) \\
& 2 \qquad 13 \qquad 12 \qquad 11 \qquad 10 \qquad 9
\end{aligned}$$

$$T(3,2)=(x^8 * (-65520*x^7 - 65520*x^6 - 11880*x^5 - 1324*x^4 + 9646*x^3 + 142*x^2 + 809*x - 549) - 549*x^6 - 414*x^5 - 88*x^4 + 42*x^3 + 20*x^2 - 3*x - 1))/((84240*x^{15} + 98364*x^{14} - 72888*x^{13} - 53337*x^{12} - 32652*x^{11} + 11016*x^{10} + 8100*x^9 + 878*x^8 + 1100*x^7 - 682*x^6 - 556*x^5 - 106*x^4 + 68*x^3 + 20*x^2 - 4*x - 1)$$

$$T(3,3)=(x^4 * (10296*x^{11} + 11760*x^{10} + 1980*x^9 + 902*x^8 - 1407*x^7 - 541*x^6 - 462*x^5 + 8*x^4 + 23*x^3 + 16*x^2 - 2*x - 1))/((84240*x^{15} + 98364*x^{14} - 72888*x^{13} - 53337*x^{12} - 32652*x^{11} + 11016*x^{10} + 8100*x^9 + 878*x^8 + 1100*x^7 - 682*x^6 - 556*x^5 - 106*x^4 + 68*x^3 + 20*x^2 - 4*x - 1)$$

$$T(3,4)=(x^6 * (-468*x^9 - 560*x^8 - 99*x^7 - 68*x^6 + 55*x^5 + 47*x^4 + 36*x^3 + 2*x^2 - 1))/((84240*x^{15} + 98364*x^{14} - 72888*x^{13} - 53337*x^{12} - 32652*x^{11} + 11016*x^{10} + 8100*x^9 + 878*x^8 + 1100*x^7 - 682*x^6 - 556*x^5 - 106*x^4 + 68*x^3 + 20*x^2 - 4*x - 1)$$

$$T(4,1)=(-6480*x^{15} + 136290*x^{14} - 31200*x^{13} - 30216*x^{12} - 33056*x^{11} + 1546*x^{10} + 8614*x^9 - 327*x^8 + 1485*x^7 - 273*x^6 - 428*x^5 - 150*x^4 + 46*x^3 + 23*x^2 - 3*x - 1))/((84240*x^{15} + 98364*x^{14} - 72888*x^{13} - 53337*x^{12} - 32652*x^{11} + 11016*x^{10} + 8100*x^9 + 878*x^8 + 1100*x^7 - 682*x^6 - 556*x^5 - 106*x^4 + 68*x^3 + 20*x^2 - 4*x - 1)$$

$$T(4,2)=(x^2 * (6480*x^{13} - 45570*x^{12} - 6726*x^{11} - 11472*x^{10} + 9935*x^9 - 1142*x^8 + 856*x^7 - 187*x^6 - 280*x^5 - 112*x^4 + 19*x^3 + 22*x^2 - 2*x - 1)$$

$$\begin{aligned}
& )/(84240x^{15} + 98364x^{14} - 72888x^{13} - 53337x^{12} - 32652x^{11} + \\
& 11016x^{10} + 8100x^9 + 878x^8 + 1100x^7 - 682x^6 - 556x^5 - 106x^4 \\
& + 68x^3 + 20x^2 - 4x - 1) \\
T(4,3) = & (x^4 (-1944x^{11} + 4053x^{10} + 2862x^9 + 3450x^8 - 1099x^7 + 135x^6 \\
& - 385x^5 - 14x^4 - 14x^3 + 19x^2 - 1)) / (84240x^{15} + 98364x^{14} \\
& - 72888x^{13} - 53337x^{12} - 32652x^{11} + 11016x^{10} + 8100x^9 + 878x^8 \\
& + 1100x^7 - 682x^6 - 556x^5 - 106x^4 + 68x^3 + 20x^2 - 4x - 1) \\
T(4,4) = & (x^6 (162x^9 - 63x^8 - 221x^7 - 234x^6 + 34x^5 + 5x^4 + 29x^3 + x^2 + \\
& 2x - 1)) / (84240x^{15} + 98364x^{14} - 72888x^{13} - 53337x^{12} - \\
& 32652x^{11} + 11016x^{10} + 8100x^9 + 878x^8 + 1100x^7 - 682x^6 - 556x^5 \\
& - 106x^4 + 68x^3 + 20x^2 - 4x - 1)
\end{aligned}$$

IMPRESSION DE LA MATRICE B = T\*\*(-1)\*A\*T-T\*\*(-1)\*T'

-----  
 B(1,1) := 0

B(1,2) := 1/x

B(1,3) := 0

B(1,4) := 0

B(2,1) := 0

B(2,2) := 1/x

B(2,3) := 1/x

B(2,4) := 0

B(3,1) := 0

B(3,2) := 0

B(3,3) := 2/x

B(3,4) := 1/x

B(4,1) := (24\*(<sup>14</sup> - 1965600\*x<sup>14</sup> + <sup>13</sup> 630630\*x<sup>13</sup> - <sup>12</sup> 23040\*x<sup>12</sup> + <sup>11</sup> 361095\*x<sup>11</sup> - 87618  
<sup>10</sup> \*x<sup>10</sup> + <sup>9</sup> 2222\*x<sup>9</sup> - <sup>8</sup> 10166\*x<sup>8</sup> - <sup>7</sup> 3800\*x<sup>7</sup> + <sup>6</sup> 339\*x<sup>6</sup> + <sup>5</sup> 1388\*x<sup>5</sup> + 252  
<sup>4</sup> \*x<sup>4</sup> - <sup>3</sup> 126\*x<sup>3</sup> - <sup>2</sup> 27\*x<sup>2</sup> + <sup>15</sup> 5\*x<sup>15</sup> + 1)) / ((84240\*x<sup>15</sup> + <sup>14</sup> 98364\*x<sup>14</sup> -  
<sup>13</sup> 72888\*x<sup>13</sup> - <sup>12</sup> 53337\*x<sup>12</sup> - <sup>11</sup> 32652\*x<sup>11</sup> + <sup>10</sup> 11016\*x<sup>10</sup> + <sup>9</sup> 8100\*x<sup>9</sup> + 878\*  
<sup>8</sup> x<sup>8</sup> + <sup>7</sup> 1100\*x<sup>7</sup> - <sup>6</sup> 682\*x<sup>6</sup> - <sup>5</sup> 556\*x<sup>5</sup> - <sup>4</sup> 106\*x<sup>4</sup> + <sup>3</sup> 68\*x<sup>3</sup> + <sup>2</sup> 20\*x<sup>2</sup> - <sup>1</sup> 4\*x<sup>1</sup>  
 - 1)

B(4,2) := (24\*(<sup>15</sup> 1965600\*x<sup>15</sup> + <sup>14</sup> 1334970\*x<sup>14</sup> - <sup>13</sup> 607590\*x<sup>13</sup> - <sup>12</sup> 338055\*x<sup>12</sup> - 273477  
<sup>11</sup> \*x<sup>11</sup> + <sup>10</sup> 85396\*x<sup>10</sup> + <sup>9</sup> 7944\*x<sup>9</sup> + <sup>8</sup> 13966\*x<sup>8</sup> + <sup>7</sup> 3461\*x<sup>7</sup> - <sup>6</sup> 1727\*x<sup>6</sup> -  
<sup>5</sup> 1640\*x<sup>5</sup> - <sup>4</sup> 126\*x<sup>4</sup> + <sup>3</sup> 153\*x<sup>3</sup> + <sup>2</sup> 22\*x<sup>2</sup> - <sup>15</sup> 6\*x<sup>15</sup> - 1)) / (x\*(84240\*x<sup>15</sup>  
<sup>14</sup> + <sup>13</sup> 98364\*x<sup>14</sup> - <sup>12</sup> 72888\*x<sup>12</sup> - <sup>11</sup> 53337\*x<sup>11</sup> - <sup>10</sup> 32652\*x<sup>10</sup> + <sup>9</sup> 11016\*  
<sup>8</sup> x<sup>8</sup> + <sup>7</sup> 8100\*x<sup>7</sup> + <sup>6</sup> 878\*x<sup>6</sup> + <sup>5</sup> 1100\*x<sup>5</sup> - <sup>4</sup> 682\*x<sup>4</sup> - <sup>3</sup> 556\*x<sup>3</sup> - <sup>2</sup> 106\*x<sup>2</sup>  
<sup>1</sup> + 68\*x<sup>1</sup> + 20\*x<sup>2</sup> - 4\*x<sup>3</sup> - 1))

$$\begin{aligned}
B(4,3) := & (12 * ( - 1291680 * x^{15} - 1294314 * x^{14} + 815820 * x^{13} + 519525 * x^{12} + \\
& 312912 * x^{11} - 81838 * x^{10} - 46801 * x^9 - 10967 * x^8 - 7628 * x^7 + \\
& 2825 * x^6 + 2324 * x^5 + 404 * x^4 - 237 * x^3 - 51 * x^2 + 10 * x + 2) ) / (x * \\
& (84240 * x^{15} + 98364 * x^{14} - 72888 * x^{13} - 53337 * x^{12} - 32652 * x^{11} + \\
& 11016 * x^{10} + 8100 * x^9 + 878 * x^8 + 1100 * x^7 - 682 * x^6 - 556 * x^5 - \\
& 106 * x^4 + 68 * x^3 + 20 * x^2 - 4 * x - 1))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B(4,4) := & (2190240 * x^{15} + 2459100 * x^{14} - 1749312 * x^{13} - 1226751 * x^{12} - 718344 * \\
& x^{11} + 231336 * x^{10} + 162000 * x^9 + 16682 * x^8 + 19800 * x^7 - 11594 * x^6 - \\
& 8896 * x^5 - 1590 * x^4 + 952 * x^3 + 260 * x^2 - 48 * x - 11) / (x * (84240 * x^{15} \\
& + 98364 * x^{14} - 72888 * x^{13} - 53337 * x^{12} - 32652 * x^{11} + 11016 * \\
& x^{10} + 8100 * x^9 + 878 * x^8 + 1100 * x^7 - 682 * x^6 - 556 * x^5 - 106 * x^4 \\
& + 68 * x^3 + 20 * x^2 - 4 * x - 1))
\end{aligned}$$





**Références**

- [1] **BIRKHOFF G. D.**, Formal theory of irregular difference equations  
Acta. Math. Vol. 54 (1930), p. 207-209
- [2] **CODDINGTON E. A. et LEVINSON N.**  
Theory of ordinary differential equations  
Mc. Graw-Hill Book Company. INC New York (1955).
- [3] **COPE F. T.**, Formal solutions of irregular linear differential equations  
Am. J. Math. Vol. 58 (1936) p. 130-140.
- [4] **P. DELIGNE**, Equations différentielles à points singuliers réguliers.  
Lectures Notes in Mathematics 163, Springer-Verlag, 1970.
- [5] **HARTHMANN P.**, Ordinary differential equations  
Wiley, New York, 1964.
- [6] **HILALI A.**, Contribution à l'étude des points singuliers de systèmes différentiels linéaires.  
Thèse de 3<sup>o</sup> cycle, IMAG, Grenoble (1982).
- [7] **INCE E. L.**, Ordinary differential equations  
New York, Dover publications 1956.
- [8] **KATZ N.**, A simple algorithm for cyclic vectors  
A paraitre dans Am. J. Math.
- [9] **MALGRANGE B.**, Sur les points singuliers des équations différentielles,  
L'enseignement mathématique, t.xx, 1-2, 147-176(1974).
- [10] **MOSER J.**, The order of singularity in Fuch's theory  
Math. Zeitschrift. 72, 379-398 (1960).
- [11] **J. P RAMIS**, Théorème d'indice de Gevrey pour les équations différentielles ordinaires, Pub. IRMA, Strasbourg (1981).
- [12] **TOURNIER E.**, Solutions formelles d'équationss différentielles linéaires. Le logiciel DESIR. Etude théorique et réalisation  
Thèse d'Etat, IMAG, TIM3, Grenoble 1987.



## **CHAPITRE 3**

# **SOLUTIONS FORMELLES DES SYSTEMES DIFFERENTIELS AU VOISINAGE D'UNE SINGULARITE REGULIERE**



## 1. Introduction

Dans ce chapitre, nous reprenons l'algorithme développé dans ([7] ou [3]), qui permet de trouver un système fondamental de solutions des systèmes différentiels linéaires au voisinage d'une singularité régulière. Le système considéré est en général de la forme:

$$(\Delta_p) \quad \frac{dY}{dx} = \frac{A(x)}{x^p} Y(x)$$

où  $A(x)$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{C}[[x]]$  et  $p$  un entier supérieur ou égal à 1.

Lorsque le système  $(\Delta_p)$  présente une singularité régulière à l'origine, on sait (cf.[1]) qu'il existe une base de solutions de la forme:

$$\Phi(x) = F(x) x^\Lambda$$

où  $F(x)$  est une matrice à coefficients des séries formelles de la forme

$$F(x) = \sum_{k=-v}^{k=+\infty} F_k x^k \quad v \geq 0$$

et  $\Lambda$  est une matrice constante à coefficients complexes. Dans le chapitre 1, nous avons développé un algorithme permettant de construire une transformation polynomiale  $T(x)$  telle que le changement de variable

$$Y(x) = T(x) Z(x)$$

réduit  $(\Delta_p)$  sous la forme

$$(\Delta_1) \quad \frac{dZ}{dx} = \frac{B(x)}{x} Z(x)$$

où cette fois l'ordre polaire est égal à 1.

L'algorithme de réductibilité est considéré comme une première étape pour la résolution des systèmes différentiels linéaires au voisinage d'une singularité

régulière. La deuxième consiste à partir d'un système écrit sous une forme  $(\Delta_1)$  pour construire une transformation  $S(x)$  de la forme:

$$S(x) = \sum_{k=-v}^{k=+\infty} S_k x^k \quad \text{avec } \det(S(x)) \neq 0$$

telle que le changement de variable

$$Z(x) = S(x)W(x)$$

transforme  $(\Delta_1)$  sous la forme

$$(\Delta_1) \quad \frac{dW}{dx} = \frac{C}{x} W(x)$$

où  $C$  est une matrice constante à coefficients complexes. Un système fondamental de solutions de  $(\Delta_p)$  est alors

$$\Phi(x) = T(x)S(x) x^C$$

Nous rappelons brièvement ici, l'algorithme développé dans ([1], [7] ou [3]) qui décrit la deuxième étape. Dans le chapitre 9, nous donnons une méthode plus générale qui permet de trouver le développement des solutions formelles sous la forme :

$$Y(x) = x^\lambda [ U_0 + U_1 x + \dots + U_k x^k + \dots ]$$

où  $\lambda \in \mathbb{C}$ , et les  $U_k$  sont des vecteurs colonnes à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .

Dans le cas d'une singularité régulière, on sait (cf.[2]) que le polygone de Newton associé au système  $(\Delta_p)$  admet une seule pente nulle de longueur  $n$ . On peut alors appliquer la méthode décrite dans le chapitre IX qui permet d'avoir d'une manière directe le développement des solutions formelles correspondant à une pente nulle du polygone de Newton (cf. chapitre VII) et de longueur quelconque.

## 2. Solutions formelles des systèmes différentiels linéaires au voisinage d'un point singulier régulier

Considérons le système  $(\Delta_1)$  écrit sous la forme

$$(\Delta_1) \quad x \frac{dY}{dx} - A(x) Y(x) = 0 \quad \text{où} \quad A \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C}[[x]])$$

L'algorithme ( cf. [7]) consiste à chercher une matrice  $P(x)$  de la forme:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} P_k x^k$$

où les  $P_k$  sont des matrices constantes, telle qu'en posant

$$(2-1) \quad Y(x) = P(x)Z(x)$$

on ramène  $A(x)$  à être constante. Par une telle transformation, le système  $(\Delta_1)$  devient

$$(2-2) \quad x \frac{dZ}{dx} - B(x) Z(x) = 0$$

où

$$(2-3) \quad B = P^{-1} A P - x P^{-1} \frac{dP}{dx}$$

Considérons les développements des matrices  $A(x)$  et  $B(x)$ :

$$A(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k \quad \text{et} \quad B(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k x^k$$

En multipliant à gauche les deux termes de l'égalité (2-3) par  $P$ , on obtient

$$x \frac{dP}{dx} = A(x)P(x) - P(x)B(x)$$



En remplaçant les développements de A et B dans la relation précédente, nous obtenons formellement la relation:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} kP_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{v=0}^k A_{k-v} P_v - P_v B_{k-v} \right) x^k$$

En identifiant les termes en  $x^k$  des deux membres de l'égalité, on obtient le système d'équations:

$$(2-4) \quad \begin{cases} A_0 P_0 - P_0 B_0 = 0 \\ (A_0 - kI) P_k - P_k B_0 = - \sum_{v=0}^{k-1} (A_{k-v} P_v - P_v B_{k-v}) \\ k = 1, 2, \dots, +\infty \end{cases}$$

Choisissons  $B_0 = A_0$ ,  $P_0 = I$  et  $B_k = 0$  pour  $k \geq 1$ . Le système (2-4) s'écrit alors de la manière suivante:

$$(2-5) \quad \begin{cases} (A_0 - kI) P_k - P_k B_0 = H_k & k = 1, 2, \dots, \infty \\ H_k = - \sum_{v=0}^{k-1} A_{k-v} P_v & k = 1, 2, \dots, \infty \end{cases}$$

la matrice  $H_k$  ne dépend que de  $P_0, P_1, \dots, P_{k-1}$ .

Pour que le système (2-5) admette une solution unique en  $P_k$ , il suffit que l'équation homogène

$$(A_0 - kI) P_k - P_k A_0 = 0$$

admette pour tout  $k \geq 1$ , comme seule et unique solution la solution triviale  $P_k = 0$ . Le théorème suivant est démontré dans [7]:

**Théorème**

L'équation matricielle  $AX - XB = 0$ , où  $A$  et  $B$  sont des matrices carrées à coefficients dans  $\mathbb{C}$ , admet une solution triviale si et seulement si  $A$  et  $B$  ont une valeur propre commune.

Il en résulte de ce théorème, que si les valeurs propres de la matrice  $A_0$  ne diffèrent pas entre elles d'un entier, alors il existe une transformation

$$P(x) = \sum_{k=0}^{k=+\infty} P_k x^k$$

avec  $P_0 = I$ , qu'on peut déterminer d'une manière unique telle que le changement de variable  $Y(x) = P(x) Z(x)$ , réduit le système  $(\Delta_1)$  sous la forme

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{A_0}{x} Z(x)$$

Nous avons donc deux cas à distinguer:

### 2.1. Cas où les valeurs propres de la matrice $A_0$ ne diffèrent pas entre elles d'un entier (*Le cas générique*)

L'équation matricielle (2-5) peut s'écrire à l'aide du produit tensoriel (cf. [4]) sous la forme suivante :

$$(2-7) \quad G_k P_k = h_k \quad k=1, 2, \dots, \infty$$

où  $G_k$  est une matrice carrée d'ordre  $n^2$  qui s'exprime sous la forme

$$G_k = (A_0 - kI) \otimes I - I \otimes {}^t A_0$$

où  $A \otimes B$  désigne le produit tensoriel de la matrice  $A$  avec  $B$ .  ${}^t A_0$  est la matrice

transposée de  $A_0$ .  $p_k$  et  $h_k$  sont des vecteurs colonnes à  $n^2$  composantes que l'on construit de la manière suivante:

Soit  $(P_k)_{i\bullet}$  ( resp.  $(H_k)_{i\bullet}$  ) le  $i^{\text{ème}}$  vecteur ligne de la matrice  $P_k$  ( resp.  $H_k$  ), on pose :

$$P_k = \begin{bmatrix} {}^t(P_k)_{1\bullet} \\ {}^t(P_k)_{2\bullet} \\ \vdots \\ {}^t(P_k)_{n\bullet} \end{bmatrix} \quad h_k = \begin{bmatrix} {}^t(H_k)_{1\bullet} \\ {}^t(H_k)_{2\bullet} \\ \vdots \\ {}^t(H_k)_{n\bullet} \end{bmatrix}$$

### Remarque 2.1

L'équation (2-7) est un système linéaire de  $n^2$  équations à  $n^2$  inconnues qui sont les coefficients de la matrice  $P_k$ . Dans le cas générique,  $G_k$  est inversible quelque soit le choix de l'entier  $k \geq 1$ . En utilisant le calcul formel, on peut inverser formellement la matrice  $G_k$  et si l'on désigne par  $D(k)$  son inverse formel, on peut déterminer à chaque fois l'inconnue  $p_k$  en affectant à l'entier  $k$  la valeur correspondante.

Remarquons que numériquement, il est difficile de décider si deux valeurs propres diffèrent d'un entier qui est la condition de la régularité de la matrice  $G_k$ ; cependant on peut appliquer un algorithme dû à Watanabe (cf. [8], [6]).

### 2.2 Cas général: Il existe des valeurs propres qui diffèrent d'un entier

Cette méthode (cf. [7]) consiste à chercher une transformation  $T(x)$  qui permet de se ramener au cas générique. Autrement dit, si l'on désigne par  $\bar{A}(x)$ , la matrice:

$$\bar{A}(x) = T^{-1}A(x)T - T^{-1}\frac{dT}{dx}$$

Les valeurs propres distinctes de la matrice  $\bar{A}(0)$  ne diffèrent pas entre elles d'un entier. La procédure à suivre est la suivante:

Désignons par  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  les valeurs propres de  $A_0$  qui diffèrent entre elles d'un entier. Soit  $m_i$  la multiplicité algébrique de la valeur propre  $\lambda_i$ . On suppose que  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  sont ordonnées de la manière suivante :

$$(2-8) \quad \operatorname{Re}(\lambda_1) \geq \operatorname{Re}(\lambda_2) \geq \dots \operatorname{Re}(\lambda_p)$$

avec

$$\lambda_{i+1} - \lambda_i = k_i \quad (i = 1, 2, \dots, p-1)$$

où  $k_i$  appartient à  $\mathbb{N}^*$ .

Soit  $P$ , la matrice de passage qui permet de transformer  $A_0$  sous une forme de Jordan

$$(2-9) \quad J = P^{-1} A_0 P$$

que l'on suppose écrite sous la forme :

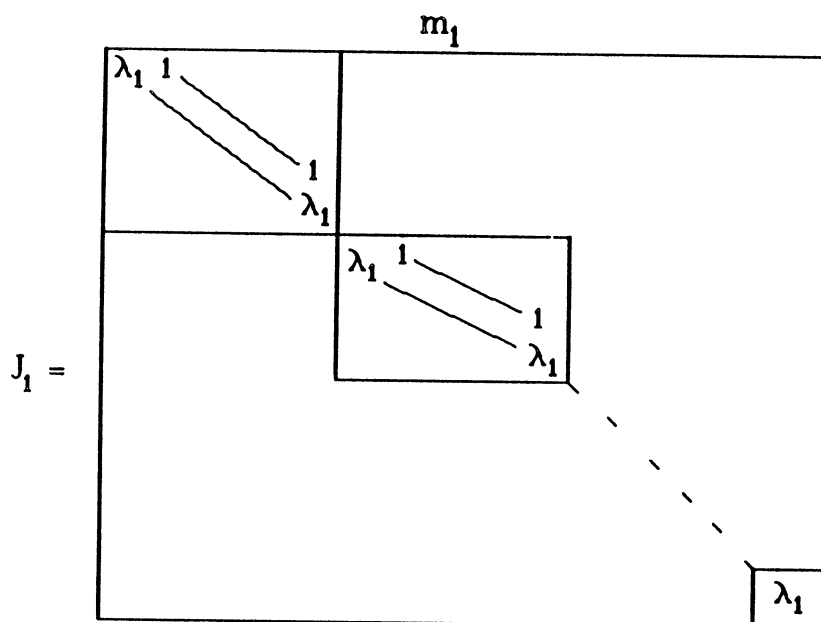
$$(2-10) \quad J = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \xleftrightarrow{m_1} & \xleftrightarrow{n-m_1} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline J_1 & 0 \\ \hline 0 & J_2 \\ \hline \end{array} \end{array} \end{array}$$

où

$J_2$  est la matrice  $J$  à laquelle on enlève les  $m_1$  premières lignes et colonnes et ayant comme valeurs propres :

$$\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \dots, \lambda_r$$

$J_1$  est la matrice diagonale par blocs correspondant à la valeur propre  $\lambda_1$  de la forme



Ecrivons la matrice  $A(x)$  sous la forme

$$A(x) = A_0 + xN(x)$$

où

$$N(x) = A_1 + A_2x + \dots$$

Soit

$$T_0(x) = P S(x)$$

où  $P$  est la matrice définie dans (2-9) et  $S(x)$ ; la matrice diagonale définie par :

$$S(x) = \text{diag}( I_{m_1} , xI_{n-m_1} )$$

$$\bar{A}(x) = T_0^{-1} A T_0 - x T_0^{-1} \frac{dT_0}{dx}$$

On a

$$(2-11) \quad \bar{A}_0 = \bar{A}(0) = S^{-1} (J + x G) S \Big|_{x=0} - x S^{-1} \frac{dS}{dx} \Big|_{x=0}$$

où

$$G = P^{-1} A_1 P.$$

Décomposons la matrice G en blocs suivant la même décomposition que J;

$$G = (G_{ij})_{i,j=1,2}$$

où  $G_{11}$ ,  $G_{12}$ ,  $G_{21}$ ,  $G_{22}$  désignent les blocs de dimensions respectives  $m_1 \times m_1$ ,  $m_1 \times (n-m_1)$ ,  $m_1 \times (n-m_1)$  et  $(n-m_1) \times (n-m_1)$ . En effectuant l'opération (2-11), on trouve:

$$\bar{A}_0 = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \xleftrightarrow{m_1} & \xleftrightarrow{n-m_1} \\ \hline J_1 & 0 \\ \hline G_{21} & J_2 - I \\ \hline \end{array} \end{array}$$

dont les valeurs propres sont cette fois:

$$\lambda_1, \lambda_2 - 1, \lambda_3 - 1, \dots, \lambda_p - 1, \lambda_{p+1} - 1, \dots, \lambda_r - 1$$

chacune de ces valeurs propres admet la même multiplicité algébrique initiale.

En répétant le même procédé  $k_1$  fois, les valeurs propres de la matrice résidu obtenue sont:

$$\lambda_1, \lambda_2 - k_1, \lambda_3 - k_1, \dots, \lambda_p - k_1, \lambda_{p+1} - k_1, \dots, \lambda_r - k_1.$$

On peut ainsi se ramener au cas générique en amenant toutes les valeurs propres qui

différent entre elles d'un entier à être égales. L'algorithme s'arrête au bout de  $k = k_1 + k_2 + \dots + k_{p-1}$  pas.

Pour une autre méthode, on peut appliquer l'algorithme développé dans le chapitre IX qui donne le développement des solutions formelles (sous une forme vectorielle) suivant la longueur de la pente nulle du polygone de Newton associé au système. Pour cela, il suffit de considérer une pente nulle de longueur égale à  $n$ .

### 3. Exemples

#### 3.1. Exemple 1

Le système

$$(3-1) \quad Y'(x) = \frac{1}{x^3} \begin{pmatrix} x + x^3 & 1 - 2x & 4x^2 \\ x^5 + x^6 & 3x^2 - x^4 & x^4 \\ 3x^5 & 0 & 3x^2 + x^4 \end{pmatrix} Y(x)$$

admet au voisinage de l'origine une singularité régulière, car si on applique l'algorithme de la réductibilité, on trouve que le changement de variables:

$$(3-2) \quad Y(x) = T_1(x)Z(x) \quad \text{avec} \quad T_1(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \\ x & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

transforme (3-1) en un système dont l'ordre polaire est 1. On obtient :

$$(3-3) \quad Z'(x) = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 2+x^2 & 3x^2 & 0 \\ 4x & 1+x & 1-2x \\ x & x+x^2 & 1-x \end{pmatrix} Z(x)$$

Les valeurs propres de la matrice résidu du système (3-3):

$$A_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

différent entre elles d'un entier. En vertu de ce qui précède, on applique à (3-3), la transformation:

$$(3-4) \quad T_2(x) = \text{diag}(x, 1, 1)$$

ce qui nous conduit au système :

$$W'(x) = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} 1+x^2 & 3x & 0 \\ 4x^2 & 1+x & 1-2x \\ x^2 & x+x^2 & 1-x \end{pmatrix} W(x)$$

où cette fois, les valeurs propres de la matrice résidu sont toutes confondues. On donne dans la suite, les 7 premiers termes du développement de la matrice  $P(x)$  définie dans le paragraphe 2.1 (cas générique).

Un système fondamental de solutions du système (3-1) est donc:

$$\Phi(x) = T_1 T_2 P V$$

où  $T_1, T_2$  sont données par les formules (3-2) et (3-4),  $P$  est donnée dans page 120 et

$$V(x) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & x \text{Log} x \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$



Matrice du systeme :

$$A(1,1)=x^2 + 1$$

$$A(1,2)=3*x$$

$$A(1,3)=0$$

$$A(2,1)=4*x^2$$

$$A(2,2)=x + 1$$

$$A(2,3)= - 2*x + 1$$

$$A(3,1)=x^2$$

$$A(3,2)=x*(x + 1)$$

$$A(3,3)= - x + 1$$

Impression des - 7 - premiers transformation P

$$P(1,1) = (1159*x^6 + 925*x^5 + 700*x^4 + 2700*x^3 + 600*x^2 + 1200)/1200$$

$$P(1,2) = (3*x*(96*x^5 + 165*x^4 + 250*x^3 + 100*x^2 + 200*x + 200))/200$$

$$P(1,3) = (421875*x*( - 16264*x^5 - 34255*x^4 - 31250*x^3 - 16000*x^2 - 42000*x - 12000))/1687500000$$

$$P(2,1) = (18*x^2*(4051*x^4 + 12508*x^3 + 3850*x^2 + 4400*x + 16200))/129600$$

$$P(2,2) = (2*(4448*x^6 + 2934*x^5 + 6525*x^4 + 7200*x^3 + 900*x^2 + 3600*x + 1800))/3600$$

$$P(2,3) = (46875*x*( - 627217*x^5 - 545166*x^4 - 1308375*x^3 - 612000*x^2 - 270000*x - 648000))/5062500000$$

$$P(3,1) = (x^2*(1389*x^4 + 1945*x^3 + 2500*x^2 + 2100*x + 1800))/3600$$

$$P(3,2) = (x*(748*x^5 + 915*x^4 + 900*x^3 + 900*x^2 + 600*x + 600))/600$$

$$P(3,3) = (140625*( - 134362*x^6 - 137805*x^5 - 150000*x^4 - 126000*x^3 - 90000*x^2 - 72000*x + 36000))/5062500000$$

### 3.2. Exemple 2

Nous reprenons l'exemple 1 du chapitre 1 (page 58) sur lequel nous avons appliqué l'algorithme de réductibilité. Soit

$$Y'(x) = A(x)Y(x)$$

où

$$A(x) = \frac{1}{x^3} \begin{pmatrix} 2x^2 - x^3 & x^5 + x^6 & 4x^2 \\ 1 - 2x & x^3 & 4x^2 \\ 0 & 3x^5 & 2x^2 + x^4 \end{pmatrix}$$

L'algorithme de réductibilité fournit la transformation (cf. chap.1 pour le calcul):

$$T(x) = \begin{pmatrix} 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui réduit le système sous la forme :

$$(3-5) \quad Y'(x) = \frac{1}{x} \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 3x \\ 4 & -x & x^2 + x \\ 4x^2 & 1 - 2x & x \end{pmatrix} Y(x)$$

On donne dans ce qui suit le développement des premiers termes de la matrice  $P(x)$  qui permet de transformer le système (3-5) sous la forme:

$$Y'(x) = \frac{A_0}{x} Y(x)$$

où  $A_0$  est la matrice résidu du système (3-5).

Matrice du systeme :

-----  
          2  
A(1,1) := x  
A(1,2) := 0  
A(1,3) := 3\*x  
A(2,1) := 4  
A(2,2) := - x  
A(2,3) := x\*(x + 1)  
  
          2  
A(3,1) := 4\*x  
A(3,2) := - 2\*x + 1  
A(3,3) := x

-----  
Impression des - 7 - premiers termes de la transformation P  
-----

                  6                  5                  4                  3                  2  
P(1,1) := 414548053\*x + 24595524\*x + 1301029\*x + 56532\*x + 1633\*x + 12  
                  \*x + 1

                  5                  4                  3                  2  
P(1,2) := 3\*x\*( - 3769780\*x - 275607\*x - 18944\*x - 1166\*x - 56\*x - 1)

                  5                  4                  3                  2  
P(1,3) := 3\*x\*(211938\*x + 19283\*x + 1754\*x + 159\*x + 14\*x + 1)

                  5                  4                  3                  2  
P(2,1) := 4\*x\*(466553251\*x + 28443951\*x + 1570609\*x + 73715\*x + 2533\*x  
                  + 38)

                  6                  5                  4                  3                  2  
P(2,2) := - 48012368\*x - 3560388\*x - 250412\*x - 16092\*x - 858\*x - 26\*  
                  x + 1

                  5                  4                  3                  2  
P(2,3) := x\*(2541340\*x + 231224\*x + 21036\*x + 1910\*x + 170\*x + 13)

                  5                  4                  3                  2  
P(3,1) := 4\*x\*(488601792\*x + 30667472\*x + 1769309\*x + 89339\*x + 3544\*x  
                  + 80)

                  5                  4                  3                  2  
P(3,2) := 2\*x\*( - 23483971\*x - 1769449\*x - 127579\*x - 8567\*x - 503\*x -  
                  21)

                  6                  5                  4                  3                  2  
P(3,3) := 2310124\*x + 210184\*x + 19124\*x + 1740\*x + 158\*x + 14\*x + 1

**Références**

- [1] **CODDINGTON E.A. et LEVINSON N.**  
Theory of ordinary differential equations  
Mc. Graw-Hill Book Company. INC New York (1955).
- [2] **INCE E.L.**  
Ordinary differential equations  
New york, Dover (1956).
- [3] **HILALI A.,**  
Contribution à l'étude des points singuliers de systèmes différentiels linéaires.  
Thèse de 3° cycle, IMAG, Grenoble (1982).
- [4] **MAC. DUFFEE,**  
The theory of matrices  
Chelsa (1959) p. 157-264.
- [5] **SIROVICH L.**  
Techniques of asymptotic analysis  
Applied Mathematical Sciences. Springer Verlag, New York Heidelberg.  
Berlin (1971).
- [6] **TOURNIER E.**  
Solutions formelles d'équations différentielles linéaires. Le logiciel DESIR.  
Etude théorique et réalisation  
Thèse d'Etat, IMAG, TIM3, Grenoble 1987.
- [7] **WASOW W.**  
Asymptotic expansions for ordinary differential equations.  
Wiley (1973).
- [8] **WATANABE**  
Formula manipulations solving linear ordinary differential equations  
(I and II).  
I. Publ RIMS Kyoto univ. Vol. 6. (1970) p. 71-111.  
I. Publ RIMS Kyoto univ. Vol. 11. (1976) p. 297-337.



## **PARTIE 2**

# **SYSTEMES DIFFERENTIELS A SINGULARITE IRREGULIERE**



## **CHAPITRE 4**

### **UN ALGORITHME DE CALCUL DE L'INVARIANT DE KATZ D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL LINEAIRE**





# UN ALGORITHME DE CALCUL DE L'INVARIANT DE KATZ D'UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE

par A. HILALI et A. WAZNER

## 1. Introduction.

On considère un système différentiel linéaire homogène d'ordre 1 :

$$\frac{dy}{dx} = M(x)y \quad (S)$$

où  $M$  est une matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{C}((x))$ , le corps des séries formelles :

$$M(x) = \frac{A(x)}{x^q} = \frac{1}{x^q} \sum_0^{+\infty} A_k x^k \quad A_0 \neq 0 \quad (1)$$

avec  $q$  un entier supérieur ou égal à 1, les  $A_k : k = 0, 1, \dots$  sont des matrices à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . On sait par le lemme du vecteur cyclique [2] réduire le système (S) à une seule équation différentielle scalaire d'ordre  $n$  [4]. Ce procédé permet d'appliquer sur le système (S) tous les critères déjà connus sur les équations différentielles scalaires et d'attribuer ainsi au système (S) des invariants (voir [9]) qui servent à mesurer l'irrégularité au point singulier (supposé ici à l'origine). B. Malgrange [9] a démontré que l'indice d'irrégularité associé à l'équation différentielle est indépendant du choix du vecteur cyclique. Cependant du point de vue pratique, on constate que la méthode est d'un maniement lourd et coûteux (voir des exemples dans [4]) surtout que ces invariants sont uniquement déterminés par la connaissance des valuations des coefficients de l'équation différentielle obtenue par la méthode. D'où l'intérêt de travailler directement sur le système.

*Mots-clés* : Points singuliers – Invariant de Moser – Invariant de Katz – Vecteur cyclique.

Le calcul explicite de ces invariants est en général connu pour une équation différentielle scalaire, tandis que pour un système différentiel (S) nous sommes amenés à construire des algorithmes de "Réduction" qui conduisent au bout d'un certain nombre de pas au calcul de ces invariants. On s'intéresse dans cet article au calcul de l'invariant de N. Katz. Ce travail constitue une suite à l'algorithme de "Réductibilité" développé dans [5] et [6]. Ensuite partant d'un système écrit sous une forme irréductible (au sens de Moser) nous construisons un algorithme permettant le calcul de cet invariant sans l'utilisation de vecteur cyclique. Nous rappelons brièvement cette méthode :

## 2. Méthode du vecteur cyclique.

On pose

$$Y_0(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x))$$

un vecteur à  $n$  composantes où les  $\lambda_i(x)$  sont des polynômes arbitraires de degrés  $\leq n - 1$  [12]. La récurrence :

$$Y_i = Y'_{i-1} + Y_{i-1} M$$

définit une matrice  $Q$  carrée d'ordre  $n$  dont les lignes sont :

$$Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}.$$

DEFINITION 1 [4]. — *On dira que le vecteur  $Y_0$  est "cyclique" si la matrice  $Q$  est inversible.*

(Pour une autre méthode de construction de vecteur cyclique voir [7].)

Dans ce cas on pose  $T = Q^{-1}$  et le changement de variables :

$$y(x) = T(x) z(x) \quad (2)$$

transforme (S) en un système dont la matrice est sous une forme compagnon :

$$C = T^{-1} M T - T^{-1} T' = \begin{bmatrix} 0 & & & & 1 \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_n & & & & a_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Les  $a_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) sont naturellement les coefficients de l'équation différentielle qui correspond au système (S) obtenue par l'intermédiaire du vecteur cyclique  $Y_0$ . On notera  $E_S(Y_0)$  cette équation :

$$E_S(Y_0) : \frac{d^n y}{dx^n} - \sum_{k=1}^n a_k(x) \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} = 0.$$

DEFINITION 2. — On dira que deux matrices  $M$  et  $N$  appartenant à  $M_n(\mathbf{C}((x)))$  sont équivalentes (ou que leurs systèmes différentiels sont équivalents) s'il existe  $T$  appartenant à  $Gl(n, \mathbf{C}((x)))$  telle que :

$$M = T^{-1} N T - T^{-1} \frac{dT}{dx}.$$

Dans la suite on supposera que les  $a_k$  sont de la forme :

$$a_k(x) = x^{-\lambda_k} b_k(x) \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

où les  $\lambda_k$  désignent l'ordre du pôle des  $a_k$  au sens large, avec  $b_k(0) \neq 0$  (on prendra  $\lambda_k = -\infty$  si  $a_k \equiv 0$ ).

### 3. Invariant de Moser.

J. Moser [11] associe à tout système (S), les rationnels :

$$m(M) = q - 1 + \text{rang}(A_0)/n \geq 0 \quad (5)$$

avec :  $m(M) = 0$  si  $q - 1 + \text{rang}(A_0)/n \leq 0$

$$\mu(M) = \inf_{T \in Gl(n, \mathbf{C}((x)))} (m(T^{-1} M T - T^{-1} dT/dx)) \quad (6)$$

où  $Gl(n, \mathbf{C}((x)))$  désigne le groupe des matrices inversibles à coefficients dans  $\mathbf{C}((x))$ .

DEFINITION 3. — On dira que le système (S) est irréductible au sens de Moser (ou M-irréductible), si  $m(M) = \mu(M)$ .

Dans le cas où  $m(M) > 1$ , nous avons donné dans [5] et [6] un algorithme qui construit, en un nombre fini de pas, une transformation permettant de mettre (S) sous une forme :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^{q^*}} \left( \sum_0^{+\infty} A_k^* x^k \right) y \quad (S^*)$$

où  $q^*$  et  $r^* = \text{rang}(A_0^*)$  sont les plus petites valeurs de  $q \geq 1$  et  $r$  obtenues en appliquant à (S) toutes les transformations de  $Gl(n, \mathbf{C}((x)))$ . Dans le cas où  $x = 0$  est une singularité régulière, l'algorithme s'arrête lorsque  $m(M) \leq 1$ . Cet algorithme donne la caractérisation suivante :

$x = 0$  est une singularité régulière si et seulement si :

$$\mu = q^* - 1 + r^*/n \leq 1.$$

### 3.1 Calcul de l'invariant de Moser à partir d'un vecteur cyclique.

Dans le cas d'une équation différentielle scalaire de la forme  $E_S(Y_0)$ , J. Moser (cf. [11] théorème 3 p. 382) a explicité le calcul du nombre  $\mu$ . Pour cela il considère  $p$  le plus petit entier tel que

$$p \geq \frac{\lambda_k}{k} \quad k = 1, 2, \dots, n, \text{ et } p \geq 1 \quad (7)$$

et en notant

$$r_k = \lambda_k - (p - 1)k \quad (8)$$

$$r = \text{Max}_{1 \leq k \leq n} (r_k) \quad (9)$$

on a

$$\mu = p - 1 + r/n.$$

En appliquant ce résultat à l'équation différentielle  $E_S(Y_0)$  on obtient :

**PROPOSITION 1.** — *Si le système (S) est M-irréductible et si la singularité est irrégulière (i.e.  $q \geq 2$ ) alors quel que soit le choix du vecteur cyclique on a :  $p = q$  et  $r = \text{rang}(A_0)$  où  $p$  et  $r$  sont les entiers définis par (7) et (9).*

*Démonstration.* — Soit  $E_S(Y_0)$  l'équation différentielle obtenue à partir du système (S) à l'aide du vecteur cyclique  $Y_0$ . Soit  $C(x)$  sa matrice compagnon définie en (3) et :

$$\frac{dy}{dx} = C(x)y \quad (10)$$

le système différentiel correspondant. Dans [11] J. Moser construit une matrice :

$$x^\beta = \text{diag}(x^{\beta_1}, x^{\beta_2}, \dots, x^{\beta_n}) \quad \beta_i \in \mathbb{Z}$$

qui réduit (10) à une forme M-irréductible :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{D(x)}{x^p} y \quad (11)$$

où  $D \in M_n(\mathbb{C}[[x]])$  ( $\mathbb{C}[[x]]$  désigne l'algèbre des séries formelles à coefficients complexes).  $p$  et  $r = \text{rang}(D(0))$  sont les entiers définis en (7) et (9). Or :

$$\frac{D(x)}{x^p} = x^{-\beta} C(x) x^\beta - \frac{\beta}{x} \quad (12)$$

D'après les relations (3) et (12), les systèmes (S) et (11) sont donc équivalents par la transformation  $S(x) = T(x)x^\beta$ . Comme les deux systèmes sont M-irréductibles on a :

$$q - 1 + \text{rang}(A_0)/n = p - 1 + r/n$$

d'où

$$q = p \quad \text{et} \quad \text{rang}(A_0) = r.$$

#### 4. Invariant de Katz.

N. Katz (cf. [3] pages 190 et 191) associe à tout système (S) un nombre rationnel  $RK \geq 0$ , tel que si  $Y_0$  est un vecteur cyclique de (S), on a (cf. [2], prop. 1.10 p. 48)

$$RK = \text{Max} \left( 0, \text{Max}_{1 \leq k \leq n} \left( \frac{\lambda_k - k}{k} \right) \right)$$

d'après (8) on peut encore écrire :

$$RK = \text{Max} \left( 0, p - 2 + \text{Max}_k \left( \frac{r_k}{k} \right) \right).$$

(La singularité régulière est caractérisée ici par la nullité de RK). On sait (cf. [10]) que si le système (S) est M-irréductible et si la matrice résidu  $A_0$  est non nilpotente, alors l'invariant de Katz vaut  $p - 1$ .

Nous supposerons donc dans la suite les hypothèses suivantes :

- a) – le système de départ (S) est M-irréductible.
- b) –  $p = q \geq 2$  et  $r = \text{rang}(A_0)$  (cf. proposition 1).
- c) – La matrice  $A_0$  est nilpotente.

### 5. Algorithme de calcul de l'invariant de Katz.

Au système (S), on associe l'expression :

$$f_A(x, \lambda) = x^r \det \left( \frac{A(x)}{x} + \lambda I \right)$$

où  $r = \text{rang}(A_0)$  et :

$$A(x) = x^p M(x) = \sum_0^{+\infty} A_k x^k. \quad (13)$$

LEMME 1. –  $f_A(x, \lambda)$  est un polynôme appartenant à  $\mathbb{C}[[x]][\lambda]$  et son développement en  $x$  jusqu'à l'ordre  $k$  dépend seulement des  $k + 2$  premiers termes du développement (13).

En effet  $r$  désignant le rang de  $A(0)$ , il existe  $r$  colonnes de  $A(0)$  linéairement indépendantes. On peut supposer sans changer la généralité que ce sont les  $r$  premières. Soit la matrice :

$$E = \text{diag}(1, 1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)$$

le  $i^{\text{ème}}$  élément de sa diagonale vaut 1 si  $i \leq r$  et 0 sinon.

On pose

$$P(x, \lambda) = \left( \lambda I + \frac{A(x)}{x} \right) x^E$$

donc

$$f_A(x, \lambda) = \det(P(x, \lambda)).$$

Les seules expressions polaires de la matrice  $P(x, \lambda)$  sont les  $n - r$  dernières colonnes de  $A_0$ . En ajoutant à ces colonnes une combinaison linéaire adéquate des  $r$  premières colonnes, on ne change pas la valeur du déterminant et on élimine ainsi les termes polaires. Nous noterons :

$$\tilde{P}(x, \lambda) = \sum_0^{+\infty} P_i(\lambda) x^i$$

la matrice obtenue par l'opération décrite ci-dessus.

On remarque que  $P_i(\lambda)$  ne dépend que de  $\lambda$ , de  $A_i$  et de  $A_{i+1}$ .

Notons :

$$C_1(x, \lambda), C_2(x, \lambda), \dots, C_n(x, \lambda)$$

les vecteurs colonnes de la matrice  $\tilde{P}(x, \lambda)$ . Le terme d'ordre  $k$  du développement de  $f_A(x, \lambda)$  en  $x$  est :

$$\frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial x^k} (\det(\tilde{P}(x, \lambda))) \quad (14)$$

pris en  $x = 0$ . Or l'expression (14) dépend des dérivés partielles des  $C_i(x, \lambda)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) d'ordres plus petits ou égaux à  $k$ . Donc la valeur de cette expression prise en  $x = 0$  dépend de

$$P_0(\lambda), P_1(\lambda), \dots, P_k(\lambda).$$

Or la donnée des  $A_i$  ( $i = 0, 1, \dots, k + 1$ ) détermine les coefficients  $P_i(\lambda)$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) de  $\tilde{P}(x, \lambda)$ . Donc le coefficient d'ordre  $k$  en  $x$  du polynôme  $f_A(x, \lambda)$  dépend seulement des  $k + 2$  premiers coefficients de la matrice  $A(x)$  et de  $\lambda$ .

LEMME 2. — Soient  $M(x) = \frac{A(x)}{x^p}$  et  $N(x) = \frac{B(x)}{x^p}$  où  $A$  et  $B$  appartiennent à  $M_n(\mathbb{C}[[x]])$  et telles que  $\text{rang}(A(0)) = \text{rang}(B(0))$ .

Si  $p > 2$  et s'il existe une transformation  $T$  appartenant à  $\text{Gl}(n, \mathbb{C}((x)))$  telle que

$$N = T^{-1} M T - T^{-1} \frac{dT}{dx} \quad (15)$$



alors  $f_A(x, \lambda) = f_B(x, \lambda) + O(x^{p-3})$ .

*Remarque.* – Le lemme 2 montre que si deux matrices, ayant le même ordre polaire et dont les matrices résidus ont même rang, sont équivalentes alors les polynômes  $f_A$  et  $f_B$  ont le même développement en  $x$  jusqu'à l'ordre  $p-3$ . D'après le lemme 1, il suffit de considérer les  $p-1$  premiers termes de  $A(x)$  et  $B(x)$  pour démontrer le lemme 2. Ce résultat est la conséquence d'un lemme dû à Moser :

LEMME 3 [11]. – Toute matrice  $T$  appartenant à  $Gl(n, \mathbf{C}((x)))$  peut être décomposée de la manière suivante :

$$T(x) = P(x) x^\alpha Q(x)$$

où

–  $P$  est une matrice polynomiale vérifiant  $\det(P(x)) \equiv 1$

–  $Q(x) = \sum_0^{+\infty} Q_k x^k$  avec  $\det(Q_0) \neq 0$

–  $\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$   $\alpha_i \in \mathbf{Z}$

avec

–  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$ .

En posant  $T(x) = P(x) x^\alpha Q(x)$  d'après la relation (15) si on note :

$$\frac{A^{(1)}}{x} = P^{-1} \frac{A}{x} P - x^{p-1} P^{-1} \frac{dP}{dx} \quad (16)$$

$$\frac{B}{x} = Q^{-1} \frac{A^{(2)}}{x} Q - x^{p-1} Q^{-1} \frac{dQ}{dx}$$

on a alors :

$$\frac{A^{(2)}}{x} = x^{-\alpha} \frac{A^{(1)}}{x} x^\alpha - x^{p-2} \alpha. \quad (17)$$

Comme  $P$  est un polynôme de déterminant identiquement égal à 1,  $P^{-1}$  est aussi un polynôme. Le terme  $x^{p-1} P^{-1} dP/dx$  est donc de valuation supérieure ou égale à  $p-1$ . Comme on a :

$$\text{rang}(A(0)) = \text{rang}(A^{(1)}(0)) \quad (18)$$

et

$$x^r \det\left(\frac{A(x)}{x} + \lambda I\right) = x^r \det\left(P^{-1} \frac{A(x)}{x} P + \lambda I\right)$$

en vertu de l'égalité (16) et du lemme 1 on a :

$$f_A(x, \lambda) = f_{A^{(1)}}(x, \lambda) + O(x^{p-2}). \quad (19)$$

De la même manière puisque  $Q_0$  est inversible, la matrice  $Q^{-1}$  est dans  $M_n(\mathbb{C}[[x]])$ . En faisant le même raisonnement on trouve

$$\text{rang}(B(0)) = \text{rang}(A^{(2)}(0)) \quad (20)$$

et

$$f_B(x, \lambda) = f_{A^{(2)}}(x, \lambda) + O(x^{p-2}). \quad (21)$$

L'hypothèse du lemme  $\text{rang}(A(0)) = \text{rang}(B(0))$ , et les égalités (17), (18) et (20) entraînent les relations :

$$r = \text{rang}(A^{(1)}(0)) = \text{rang}(A^{(2)}(0))$$

et

$$f_{A^{(2)}}(x, \lambda) = f_{A^{(1)}}(x, \lambda) + O(x^{p-3}) \quad (22)$$

d'où :

$$f_A(x, \lambda) = f_B(x, \lambda) + O(x^{p-3}).$$

Ceci démontre le lemme 2.

D'après les relations (3) et (12), les matrices :

$$\frac{A(x)}{x^p} \quad \text{et} \quad \frac{D(x)}{x^p}$$

sont équivalentes. D'après le lemme 2, si  $p > 2$ , on a :

$$f_A(x, \lambda) = f_D(x, \lambda) + O(x^{p-3}). \quad (23)$$

Or  $f_D(x, \lambda) = x^r \det(x^{p-1} x^{-\beta} C(x) x^\beta - x^{p-2} \beta + \lambda I)$ .

Comme  $x^\beta$  et  $\beta$  commutent entre elles :

$$f_D(x, \lambda) = x^r \det(x^{p-1} C(x) - x^{p-2} \beta + \lambda I)$$

d'où le résultat :

LEMME 4. — Si  $C(x)$  désigne la matrice compagnon obtenue par l'intermédiaire d'un vecteur cyclique d'un système (S) M-irréductible et si  $p > 2$  alors :

$$x^r \det\left(\frac{A(x)}{x} + \lambda I\right) = x^r \det(x^{p-1} C(x) + \lambda I) + O(x^{p-3}).$$

Soit  $q_C(x, \lambda)$  le polynôme  $x^r \det(x^{p-1} C(x) + \lambda I)$  où  $C(x)$  est la matrice définie dans (3) :

on a

$$\begin{aligned} q_C(x, \lambda) &= x^{r+n(p-1)} \det(C(x) + \lambda x^{-p+1} I) \\ &= x^r \lambda^n - \sum_1^n (-1)^k \lambda^{n-k} x^{r+k(p-1)} a_k(x). \end{aligned}$$

Or d'après (4) on a :

$$a_k(x) = x^{-\lambda_k} b_k(x) \text{ avec } b_k(0) \neq 0$$

donc

$$q_C(x, \lambda) = x^r \lambda^n - \sum_1^n (-1)^k x^{r-r_k} \lambda^{n-k} b_k(x) \quad (24)$$

où

$$r = \text{rang}(A(0)) = \text{Max}_k(r_k) = \text{Max}_k(\lambda_k - k(p-1)).$$

DEFINITION. — On appelle  $F_p$  l'application linéaire de  $C((x))[\lambda]$  dans  $C((x)) \left[ \frac{d}{dx} \right]$ , espace des opérateurs différentiels linéaires à coefficients dans  $C((x))$  qui, au polynôme  $x^l \lambda^{n-k}$  associe l'opérateur  $x^{l-k(p-1)} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}$ .

Nous allons dans ce qui suit donner un moyen de calcul de l'invariant de Katz. Pour cela nous distinguerons deux cas :

5.1 Cas où  $p > r + 2$ .

THEOREME 2. — Soit le système différentiel M-irréductible :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A(x)}{x^p} Y \quad (S)$$

où  $A(0)$  est une matrice nilpotente de rang égal à  $r$ . Si  $p > r + 2$  alors (S) admet le même invariant de Katz que l'opérateur :

$$F_p \left( \det \left( \frac{A(x)}{x} + \lambda I \right) \right).$$

*Démonstration.* – D'après le lemme 4, si  $p > 2$  alors :

$$q_C(x, \lambda) = f_A(x, \lambda) + O(x^{p-3})$$

donc

$$x^r \det \left( \frac{A(x)}{x} + \lambda I \right) = x^r \lambda^n - \sum_1^n (-1)^k x^{r-rk} b_k \lambda^{n-k} + O(x^{p-3}). \quad (25)$$

Notons

$$x^r \det \left( \frac{A(x)}{x} + \lambda I \right) = x^r \lambda^n - x^r \sum_1^n (-1)^k Q_k(x) \lambda^{n-k} \quad (26)$$

le développement en  $\lambda$  du premier terme de l'égalité (25). Par identification on a :

$$x^r Q_k(x) = x^{r-rk} b_k(x) + O(x^{p-3}). \quad (27)$$

On peut supposer sans changer la généralité que les  $r_k$  sont positifs puisque les  $r_k$  négatifs n'interviennent pas dans le calcul de l'invariant de Katz (voir la définition page 72).

D'après la relation (27) on a :

$$Q_k(x) = x^{-rk} b_k(x) + O(x^{p-r-3}).$$

Comme nous avons supposé que  $p > r + 2$  et  $b_k(0) \neq 0$  on a donc :

$$Q_k(x) = x^{-rk} \tilde{b}_k(x) \quad (28)$$

avec  $\tilde{b}_k(x) \in \mathbb{C}[[x]]$  et  $\tilde{b}_k(0) \neq 0$   $k = 1, 2, \dots, n$ .

Dans l'égalité (26) on divise les deux membres par  $x^r$  et on applique  $F_p$

$$F_p \left( \det \left( \frac{A(x)}{x} + \lambda I \right) \right) = \frac{d^n}{dx^n} - \sum_{k=1}^n x^{-rk-k(p-1)} \tilde{b}_k(x) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}. \quad (29)$$

L'invariant de Katz associé à l'opérateur (29) vaut alors :

$$RK = \text{Max}_{1 < k < n} \left( 0, \frac{r_k + k(p-1) - k}{k} \right)$$

$$RK = p - 2 + \text{Max}_k \left( \frac{r_k}{k} \right)$$

qui est le même que celui de l'équation différentielle  $E_S(Y_0)$  associée au système (S) et obtenue par le vecteur cyclique  $Y_0$ .

5.2. Cas où  $p \leq r + 2$ .

Nous allons voir dans ce paragraphe que dans le cas où  $p \leq r + 2$ , par un changement de variable de la forme  $x = t^m$  ( $m$  est un entier convenablement choisi) on peut se ramener au cas précédent ( $p > r + 2$ ). En posant  $x = t^m$  on obtient :

$$\frac{dy}{dt} = mt^{m-1} M(t^m)y. \quad (S_m)$$

DEFINITION. — On dira que  $(S_m)$  est le système ramifié de (S) par  $m$ .

LEMME 5. — Le rang de Katz  $RK$  d'un système différentiel (S) M-irréductible d'invariant de Moser  $\mu = p - 1 + r/n$  est tel que :

$$\mu \leq RK + 1 \leq p.$$

Démonstration. — Supposons que (S) est M-irréductible i.e de rang de Moser

$$\mu = p - 1 + \frac{r}{n}.$$

Soit  $Y_0$  un vecteur cyclique dont l'équation différentielle correspondante est  $E_S(Y_0)$ . Le rang de Katz vaut :

$$RK = p - 2 + \text{Max}_k \left( \frac{r_k}{k} \right).$$

Les  $r_k$  sont les nombres définis dans (8), on a  $r_k \leq k$  pour  $k = 1, 2, \dots, n$  et donc :

$$\frac{r}{n} \leq \max_k \left( \frac{r_k}{k} \right) \leq 1.$$

Ceci démontre le lemme 5.

LEMME 6. — Si (S) est M-irréductible et si  $m$  est un entier tel que

$$m > \frac{n+1}{p-2+r/n}$$

alors  $(S_m)$  est d'invariant de Moser  $\tilde{p} - 1 + \tilde{r}/n$  avec  $\tilde{p} > \tilde{r} + 2$ .

En effet soient RK et  $\tilde{RK}$  les rangs de Katz des systèmes respectifs (S) et  $(S_m)$ , d'après le lemme 5 :

$$p - 2 + \frac{r}{n} \leq \text{RK} \leq p - 1.$$

Or on sait [10] que si (S) est de rang de Katz RK, alors  $\tilde{RK} = m \text{RK}$  donc

$$m(p - 2 + r/n) \leq \tilde{RK} = m \text{RK} \leq m(p - 1)$$

$$\tilde{p} - 1 \geq \tilde{RK} > n + 1 \geq \tilde{r} + 1$$

ce qui entraîne

$$\tilde{p} > \tilde{r} + 2. \quad \text{c.q.f.d.}$$

## 6. Conclusion.

On peut résumer tout ce qui précède en un algorithme qui est le suivant :

Soit 
$$\frac{dy}{dx} = M(x)y. \quad (\text{S})$$

I — Appliquer l'algorithme de réductibilité (cf. [6]) qui construit une transformation  $T(x)$  telle que le système de matrice

$$T^{-1} M T - T^{-1} \frac{dT}{dx} = \frac{A(x)}{x^p}$$

soit irréductible au sens de Moser.

- II – 1) Si  $A(0)$  n'est pas nilpotente alors  $RK = p - 1$ . Sinon :
- 2) Si  $p > 2 + \text{rang}(A(0))$  alors  $RK$  est égal à celui de l'opérateur :

$$F_p \left( \det \left( \frac{A(x)}{x} + \lambda I \right) \right)$$

- 3) Si  $p \leq 2 + \text{rang}(A(0))$  alors
- 3-a) Trouver un entier  $m$  tel que :

$$m > \frac{n + 1}{p - 2 + \text{rang}(A(0))/n} .$$

3-b) Soit  $(S_m)$  le système ramifié par  $m$ .

3-c) Appliquer l'algorithme de réductibilité, le système obtenu est de la forme

$$\frac{dy}{dx} = \frac{A(x)}{x^p} y \text{ avec } p > 2 + \text{rang}(A(0)) .$$

3-d) Si  $A(0)$  n'est pas nilpotente  $RK = (p - 1)/m$ .

3-e) Si  $A(0)$  est nilpotente, le rang de Katz de  $(S)$  est  $RK/m$  où  $RK$  est le rang de Katz de l'opérateur  $F_p$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] E. CODDINGTON and N. LEVINSON, *Theory of ordinary differential equations*, New York, 1955.
- [2] P. DELIGNE, Equations différentielles à points singuliers réguliers, *Lectures Notes in Mathematics*, 163, Springer-Verlag, 1970.
- [3] R. GERARD et A.H.M. LEVELT, Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes différentiels linéaires, *Ann. Inst. Fourier*, 23-1(1973), 157-195.

- [4] A. HILALI, *Contribution à l'étude des points singuliers des systèmes différentiels linéaires*, Thèse de 3<sup>e</sup> cycle IMAG, Grenoble, 1982.
- [5] A. HILALI, Réductibilité d'un système différentiel linéaire, *Num. Math.*, 41 (1983), 1-17.
- [6] A. HILALI et A. WAZNER, *Un algorithme de calcul de l'invariant de Moser d'un système différentiel linéaire*, R.R n° 487 IMAG, TIM3, Grenoble, 1984.
- [7] N. KATZ, *A simple algorithm for cyclic vector*, Manuscrit, Août, 1984.
- [8] N. KATZ, Nilpotent connexions and the monodromy theorem, *Pub. Math. IHES* n° 39 (1970), 176-232.
- [9] B. MALGRANGE, Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires, *L'Enseignement Mathématique*, t. xx, 1-2 (1974), 147-176.
- [10] B. MALGRANGE, *Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularité irrégulière*, Preprint Institut Fourier, Grenoble, 1981.
- [11] J. MOSER, The order of singularity in Fuch's theory, *Math. Zeitschrift*, 72 (1960), 379-398.
- [12] J.P. RAMIS, *Théorème d'indice de Gevrey pour les équations différentielles ordinaires*, Pub. IRMA Strasbourg (1981).

Manuscrit reçu le 15 avril 1985

révisé le 10 juin 1985.

A. HILALI,  
Institut IMAG  
& I.N.P.T.  
Boulevard Maâ El Ainine  
Rabat Instituts (Maroc).

A. WAZNER,  
Institut IMAG  
Lab. TIM3  
B.P. 68  
38402 St. Martin d'Hères Cedex .





## **CHAPITRE 5**

### **FORMES SUPER-IRREDUCTIBLES D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL LINEAIRE**



## Formes super-irréductibles des systèmes différentiels linéaires

A. Hilali et A. Wazner

Institut I.M.A.G., Laboratoire TIM3, B.P. 68, F-38402 Grenoble Cedex, France

### Super-irreducible Form of Linear Differential Systems

**Summary.** In this paper, we generalise the criterion of J. Moser. A sequence of invariants related to a linear differential system is defined. An algorithm is given which reduces a differential system to a *super-irreducible* form. The computation of these invariants follows directly from this form. A more general classification of the singularity is thus obtained, cf. [11] where the link between this form and the Newton polygon of the differential system is studied. The algorithm given is implemented in computer algebra system (REDUCE).

**Résumé.** Dans cet article, nous donnons une généralisation du critère de J. Moser. Une suite d'invariants associés à un système différentiel est définie ainsi qu'un algorithme permettant de réduire le système différentiel sous une forme *super-irréductible*. Le calcul de ces invariants est alors immédiat. Nous obtenons ainsi une classification plus générale de la singularité, cf. [11] où on étudie le lien entre cette forme et le polygone de Newton d'un système différentiel linéaire. L'algorithme donné est programmé dans un langage de calcul formel (REDUCE).

*Subject Classifications:* AMS(MOS): 65L07; G: 1.7.

### 1. Introduction

On considère un système différentiel linéaire homogène de la forme

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y \quad (1.1)$$

où  $A$  est une matrice carrée d'ordre  $n$ , à coefficients séries formelles, de la forme:

$$A(x) = x^{-p} \sum_{k=0}^{k=\infty} A_k x^k \quad A_0 \neq 0 \quad (1.2)$$

$p$  étant un entier supérieur ou égal à 1; les  $A_k$  sont des matrices constantes à coefficients complexes. Dans la recherche des solutions formelles des systèmes différentiels linéaires de la forme (1.1) au voisinage d'un point singulier; nous sommes amenés à une étude préliminaire qui est la classification des singularités. Dans la littérature, plusieurs invariants sont donnés pour la mesure de l'irrégularité du point singulier (voir [3, 8 et 9]). On sait par la méthode du vecteur cyclique [5], réduire (1.1) à une équation différentielle scalaire. Malgrange [8] associe ainsi à (1.1) un indice que l'on calcule à partir des coefficients de l'équation différentielle scalaire obtenue par la méthode. Ce procédé permet d'appliquer sur le système (1.1) tous les critères déjà connus pour les équations différentielles linéaires scalaires. Cependant du point de vue pratique, on constate que la méthode est d'un maniement lourd et coûteux (voir des exemples dans [5]) surtout que ces invariants sont déterminés uniquement par les valuations des coefficients de l'équation différentielle obtenue par la méthode. D'où l'intérêt de travailler directement sur le système. Moser (cf. [9]) associe à tout système (1.1) le nombre rationnel:

$$m(A) = p - 1 + \text{rang}(A_0)/n. \quad (1.3)$$

Dans le cas où  $m(A) > 1$ , J. Moser donne une condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une transformation  $T$  de la forme:

$$T(x) = (P_0 + xP_1) \cdot \text{diag}(1, 1, \dots, 1, x, x, \dots, x)$$

avec  $\det(P_0) \neq 0$ , telle que le changement de variables:

$$y(x) = T(x) z(x)$$

transforme (1.1) en un nouveau système:

$$\frac{dz}{dx} = B(x) z(x) \quad \text{où} \quad B = T^{-1}AT - T^{-1} \frac{dT}{dx} \quad (1.4)$$

avec  $m(B) < m(A)$ . On dit que les deux systèmes différentiels (1.1) et (1.4) sont *équivalents* par la transformation  $T$ .

Se basant sur ce critère, Dietrich [2] donne une méthode construisant à chaque étape une transformation qui réduit la quantité  $m(A)$ . Cette méthode permet de transformer le système (1.1) sous la forme:

$$\frac{dy}{dx} = x^{-p^*} \left\{ \sum_{k=0}^{k=\infty} A_k^* x^k \right\} y \quad (1.5)$$

où  $p^*$  et  $r^* = \text{rang}(A_0^*)$  sont les plus petites valeurs de  $p$  et  $\text{rang}(A_0)$  lorsqu'on applique à  $A$  toutes les transformations  $T(x)$  méromorphes à l'origine et vérifiant  $\det(T(x)) \neq 0$ . L'invariant de Moser est naturellement

$$\mu(A) = \text{Inf} \left\{ m \left( T^{-1}AT - T^{-1} \frac{dT}{dx} \right) : \det(T(x)) \neq 0 \right\} = p^* - 1 + r^*/n. \quad (1.6)$$

Une méthode vient d'être donnée dans [7] pour le calcul de l'invariant de Katz [10] lorsqu'un système est écrit sous une forme (1.5) sans l'utilisation de la méthode du vecteur cyclique. L'algorithme proposé dans [4] est en général incomplet (sauf le cas où  $n \leq 3$ ), puisque la réciproque du ([4], théorème 2, p. 10) est fautive. On donne dans le présent article une généralisation du critère de J. Moser en introduisant dans la quantité  $m(A)$  d'autres invariants dépendants des  $k+1$  premiers coefficients du développement (1.2) (i.e.,  $A_0, A_1, \dots, A_k$ ) où  $k$  est un entier compris entre 1 et  $p^*-1$ . Nous définissons ainsi une suite de nombres rationnels  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{p^*-1}$ : des invariants associés au système différentiel (1.1). Nous donnons par le même moyen un algorithme qui construit en un nombre fini de pas, une transformation  $T$  permettant d'écrire (1.1) sous une forme que nous appellerons forme *super-irréductible* où le calcul des invariants  $\mu_k$  est immédiat. Les transformations construites par cet algorithme sont calculées à l'aide de la méthode d'élimination de Gauss, donc plus performant que la méthode proposée dans [4] et [6] qui utilise des transformations de Jordan. On donne dans le §5, la description générale de l'algorithme programmé dans un langage de calcul formel (Reduce) et on traite à la fin deux exemples numériques.

Par cet algorithme nous obtenons ainsi une classification plus générale de la singularité. On démontre dans l'article de A. Hilali (soumis pour publication) que l'indice d'irrégularité de Malgrange ainsi que les invariants de Gérard et Levelt [3] peuvent être obtenus d'une manière directe à partir d'un système différentiel écrit sous une forme super-irréductible. Enfin, dans [11], A. Wazner définit le lien qui existe entre cette forme et le polygone de Newton [1], d'un système différentiel linéaire.

## 2. Systèmes différentiels super-irréductibles

### 2.1. Quelques définitions et notations

Dans cet article, on désignera par  $\mathbb{C}((x))$ : le corps des séries formelles à coefficients dans  $\mathbb{C}$ ; c'est à dire des expressions de type:

$$f(x) = x^v \sum_{k=0}^{k=\infty} f_k x^k$$

où  $v$  est un entier appartenant à  $\mathbb{Z}$ , les  $f_k$  sont des nombres complexes avec  $f_0 \neq 0$ . On appellera  $v$ : la valuation de  $f$  et on note  $\omega(f) = v$  (avec la convention  $\omega(0) = +\infty$ ).  $\mathbb{C}[[x]]$ : désignera l'algèbre des séries formelles sans pôle à l'origine, i.e.:  $f \in \mathbb{C}[[x]]$  si et seulement si  $f \in \mathbb{C}((x))$  et  $\omega(f) \geq 0$ . On désignera aussi par  $\mathcal{M}_n(K)$ : l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$ , à coefficients dans  $K$ . Si  $K = \mathbb{C}((x))$ , on notera  $GL(n, K)$ : le groupe des matrices inversibles à coefficients d'ordre  $n$  dans  $K$ .

Soit  $M(x)$  la partie non polaire de  $A(x)$ :

$$M(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} A_k x^k \quad A_0 \neq 0.$$

Si  $m_{ij}$  désigne l'élément de la  $i^{\text{me}}$  ligne et de la  $j^{\text{me}}$  colonne de la matrice  $M(x)$ , on pose:

$$\alpha_j = \inf_{1 \leq i \leq n} (p-1, \omega(m_{ij})).$$

La matrice  $A(x)$  du système (1.1) peut alors s'écrire d'une manière unique sous la forme:

$$A(x) = x^{-p} N(x) x^\alpha \quad (2.1.1)$$

où  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}[[x]])$  et

$$\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

avec  $\alpha_i \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ .

Appelons  $n_i$  la multiplicité (éventuellement nulle) de l'entier  $i$  dans la matrice  $\alpha$  ( $0 \leq i \leq p-2$ ), avec  $n_i = 0$  si  $i \geq p-1$ . On dira que la matrice  $M(x) = x^p A(x)$  admet  $n_i$  colonnes de valuation  $i$  ( $i=0, 1, \dots, p-1$ ). A tout système (1.1), on associe les nombres rationnels  $m_k(A)$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) et  $m(A)$  définis de la manière suivante

$$\left. \begin{aligned} m(A) = m_k(A) &:= 1 \quad (k \in \mathbb{N}^*) \quad \text{si } p=1 \\ m_k(A) &= p-1 + \frac{n_0}{n} + \frac{n_1}{n^2} + \dots + \frac{n_{k-1}}{n^k} \quad (1 \leq k \leq p-1) \\ m(A) = m_k(A) &:= m_{p-1}(A) \quad (k \geq p) \end{aligned} \right\} \quad \text{si } p > 1 \quad (2.1.2)$$

*Remarques 2.1.* Dans le cas où  $p > 1$ , puisque  $n_k = 0$  pour tout  $k \geq p-1$ , l'équation:

$$m_k(A) = p-1 + \frac{n_0}{n} + \frac{n_1}{n^2} + \dots + \frac{n_{k-1}}{n^k}$$

est donc vérifiée pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ . Si deux matrices  $A$  et  $B$  sont telles que  $m(B) \leq m(A)$  avec:

$$m(B) = p'-1 + \frac{n'_0}{n} + \frac{n'_1}{n^2} + \dots + \frac{n'_{p'-2}}{n^{p'-1}}$$

alors on a:  $(p', n'_0, n'_1, \dots, n'_{p'-2}) \leq (p, n_0, n_1, \dots, n_{p-2})$  où  $\leq$  désigne l'ordre lexicographique. Pour tout système (1.1), on définit alors les invariants  $\mu_k(A)$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ) et  $\mu^*(A)$  par:

$$\left. \begin{aligned} \mu_k(A) &= \inf \left\{ m_k \left( T^{-1} A T - T^{-1} \frac{dT}{dx} \right) : T \in \text{GL}(n, \mathbb{C}((x))) \right\} \\ \mu^*(A) &= \mu_{p-1}(A). \end{aligned} \right\} \quad (2.1.3)$$

## 2.2. Super-irréductibilité et $k$ -irréductibilité

*Définition 2.1.* (i) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  un entier fixé. On dira que la matrice (2.1.1) ou le système différentiel (1.1) est  $k$ -irréductible si et seulement si  $m_k(A) = \mu_k(A)$ . (Dans le cas contraire on dira que  $A$  est  $k$ -réductible.)

(ii) La matrice (2.1.1) ou le système différentiel (1.1) sera dit super-irréductible si et seulement si  $m(A) = \mu^*(A)$ .

*Remarques 2.2.* 1) En utilisant l'invariant de J. Moser  $\mu(A)$  défini dans (1.6), on a:

$$\mu_1(A) = \text{Max} \{1, \mu(A)\}.$$

$$2) \quad \mu^*(A) = \text{Inf} \left\{ m \left( T^{-1} A T - T^{-1} \frac{dT}{dx} \right) : T \in \text{GL}(n, \mathbf{C}(x)) \right\}.$$

3) Si  $A$  est super-irréductible, alors pour tout  $k=1, 2, \dots, p-1$ ,  $A$  est  $k$ -irréductible et  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_{p-1}$ .

4) La singularité régulière est caractérisée par  $\mu_1(A) = 1$ .

Nous supposons donc dans la suite que  $p > 1$  est nous allons voir dans quelles conditions la matrice (2.1.1) est  $k$ -réductible,  $k$  variant de 1 à  $p-1$ .

### 2.3. Critère de la $k$ -réductibilité

Pour tout système (1.1), dont la matrice  $A$  est de la forme (2.1.1), on associe  $p-1$  fonctions définies par:

$$\theta_s(A, x, \lambda) = x^{r_s} \det(x^{p-s} A(x) + \lambda I) \quad s=1, 2, \dots, p-1 \quad (2.3.1)$$

avec

$$r_s = s n_0 + (s-1) n_1 + \dots + n_{s-1}. \quad (2.3.2)$$

**Lemme 2.3.1.** Les fonctions  $\theta_s(A, x, \lambda)$  sont des éléments de  $\mathbf{C}[[x]][\lambda]$ : ensemble des polynômes en  $\lambda$  à coefficients séries formelles sans pôle à l'origine.

En effet, introduisons la matrice:

$$\varepsilon_s(A) = \text{diag}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$$

avec

$$\varepsilon_i = 0 \quad \text{si} \quad \alpha_i \geq s \quad \text{et} \quad \varepsilon_i = s - \alpha_i \quad \text{sinon.}$$

On a

$$\det(x^{\varepsilon_s(A)}) = x^{r_s}$$

où  $r_s$  est l'entier défini dans (2.3.2). En faisant intervenir la matrice  $\varepsilon_s(A)$  dans le déterminant (2.3.1) on a:

$$\theta_s(A, x, \lambda) = \det(N(x) x^{\alpha + \varepsilon_s(A) - sI} + \lambda x^{\varepsilon_s(A)})$$

et puisque la matrice  $\alpha - sI + \varepsilon_s(A)$  est à coefficients positifs ou nuls:

$$\theta_s(A, x, \lambda) \in \mathbf{C}[[x]][\lambda] \quad \text{c.q.f.d.}$$

**Théorème 1.** Soit  $k$  un entier compris entre 1 et  $p-1$ . Si  $p \geq 2$ , alors le système différentiel (1.1) est  $k$ -réductible si et seulement si l'une des fonctions  $\theta_1(A, 0, \lambda)$ ,  $\theta_2(A, 0, \lambda)$ , ...,  $\theta_k(A, 0, \lambda)$  est identiquement nulle en  $\lambda$ .

Montrons que la condition est nécessaire: Pour cela, on suppose qu'il existe une transformation  $T \in \text{GL}(n, \mathbf{C}((x)))$  telle que la matrice

$$B = T^{-1} A T - T^{-1} \frac{dT}{dx} \quad (2.3.3)$$



vérifie

$$m_k(B) = \mu_k(A) < m_k(A). \quad (2.3.4)$$

Soit

$$m_k(A) = p - 1 + \frac{n_0}{n} + \frac{n_1}{n^2} + \dots + \frac{n_{k-1}}{n^k}$$

et

$$m_k(B) = p' - 1 + \frac{n'_0}{n} + \frac{n'_1}{n^2} + \dots + \frac{n'_{k-1}}{n^k}.$$

D'après la remarque (2.1.1) et l'inégalité (2.3.4), on a: soit  $p' < p$  (1° cas), soit  $p' = p$  et il existe  $s \in \{1, 2, \dots, k\}$  tel que  $n'_{s-1} < n_{s-1}$  (2° cas). Posons:

$$S = T^{-1} = R \cdot x^\beta \cdot V \quad (2.3.5)$$

où:

- $R$  est une matrice polynomiale de déterminant identiquement égal à 1.
- $\beta = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  avec  $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \dots \leq \beta_n$  et
- $V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}[[x]])$  avec  $\det(V(0)) \neq 0$  (cf. [9], p. 384).

D'après (2.3.3) on a:

$$A = S^{-1}BS - S^{-1} \frac{dS}{dx}. \quad (2.3.6)$$

En utilisant la décomposition (2.3.5), on a:

$$\begin{aligned} S^{-1} \frac{dS}{dx} &= V^{-1} x^{-\beta} R^{-1} \left[ \frac{dR}{dx} x^\beta V + R \cdot \frac{\beta}{x} \cdot x^\beta \cdot V + R \cdot x^\beta \cdot \frac{dV}{dx} \right] \\ &= S^{-1} \frac{dR}{dx} R^{-1} S + S^{-1} R \frac{\beta}{x} R^{-1} S + V^{-1} \frac{dV}{dx}. \end{aligned}$$

Donc

$$A + V^{-1} \frac{dV}{dx} = S^{-1} \left[ B - \frac{dR}{dx} R^{-1} - R \frac{\beta}{x} R^{-1} \right] S$$

d'où l'égalité:

$$\begin{aligned} \det \left( x^{p-s} A(x) + x^{p-s} V^{-1} \frac{dV}{dx} + \lambda I \right) \\ = \det \left( x^{p-s} B(x) - x^{p-s} \frac{dR}{dx} R^{-1} - x^{p-s-1} R \beta R^{-1} + \lambda I \right). \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

1° cas.  $p' < p$ . Dans ce cas la matrice (2.3.3) est de la forme:

$$B(x) = \frac{B'(x)}{x^{p'}} \quad \text{avec } B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}[[x]]).$$

En faisant  $s=1$  dans (2.3.7), on obtient:

$$\begin{aligned} \det \left( x^{p-1} A(x) + x^{p-1} V^{-1} \frac{dV}{dx} + \lambda I \right) \\ = \det \left( x^{p-p'-1} B'(x) - x^{p-1} \frac{dR}{dx} R^{-1} - x^{p-2} R \beta R^{-1} + \lambda I \right). \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Comme  $V^{-1} \frac{dV}{dx} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}[[x]])$  et  $p \geq 2$ , en multipliant les deux membres de l'égalité (2.3.8) par  $x^{n_0}$ , nous obtenons après avoir fait  $x=0$ :

$$x^{n_0} \cdot \det \left( x^{p-1} A(x) + x^{p-1} V^{-1} \frac{dV}{dx} + \lambda I \right) \Big|_{x=0} = \theta_1(A, 0, \lambda).$$

Puisque  $p-p' \geq 1$ , et  $p \geq 2$ , la matrice:

$$x^{p-p'-1} B'(x) - x^{p-1} \frac{dR}{dx} R^{-1} - x^{p-2} R \beta R^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}[[x]])$$

$n_0$  étant strictement supérieur à 0, en multipliant le second membre de l'égalité (2.3.8) par  $x^{n_0}$ , nous obtenons en faisant  $x=0$

$$x^{n_0} \cdot \det \left( x^{p-p'-1} B'(x) - x^{p-2} \frac{dR}{dx} R^{-1} - x^{p-2} R \beta R^{-1} + \lambda I \right) \Big|_{x=0} \equiv 0.$$

D'où

$$\theta_1(A, 0, \lambda) \equiv 0.$$

2° cas.  $p=p'$ . Dans ce cas, on considère  $s$  le plus petit entier inférieur ou égal à  $k$  tel que  $n'_{s-1} < n_{s-1}$ . Par définition  $B$  est  $(s-1)$ -irréductible et on a:

$$m_k(B) = p-1 + \frac{n_0}{n} + \frac{n_1}{n^2} + \dots + \frac{n_{s-2}}{n^{s-1}} + \frac{n'_{s-1}}{n^s} + \dots + \frac{n'_{k-1}}{n^k}.$$

Nous allons démontrer dans ce cas que  $\theta_s(A, 0, \lambda)$  est identiquement nulle.

D'après la lemme 2.3.1, puisque  $\frac{dR}{dx} R^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}[[x]])$  et  $s \leq p-1$ , l'expression:

$$x^{sn_0 + \dots + 2n_{s-2} + n'_{s-1}} \det \left( x^{p-s} B(x) - x^{p-s} \frac{dR}{dx} R^{-1} - x^{p-s-1} R \beta R^{-1} + \lambda I \right)$$

est un élément de  $\mathbb{C}[[x]][\lambda]$ . En multipliant les deux membres de l'égalité (2.3.7) par la même expression, on a donc de même:

$$x^{sn_0 + \dots + 2n_{s-2} + n'_{s-1}} \det \left( x^{p-s} A(x) + x^{p-s} V^{-1} \frac{dV}{dx} + \lambda I \right) \in \mathbb{C}[[x]][\lambda].$$

Donc

$$x^{s'} \cdot \det \left( x^{p-s} A(x) + x^{p-s} V^{-1} \frac{dV}{dx} + \lambda I \right) \in x^{n_{s-1} - n'_{s-1}} \mathbb{C}[[x]][\lambda]. \quad (2.3.9)$$

Comme  $n_{s-1} > n'_{s-1}$  et  $s < p$ , on obtient après avoir fait  $x=0$  dans (2.3.9)

$$\theta_s(A, 0, \lambda) \equiv 0 \quad \text{c.q.f.d.}$$

Pour démontrer la réciproque, nous allons donner dans le paragraphe suivant un algorithme qui construit des transformations  $T$  permettant de réduire la quantité  $m_k(A)$  lorsque l'un des polynômes  $\theta_i(A, 0, \lambda)$  est identiquement nul en  $\lambda$ .

### 3. Algorithme de calcul d'une forme super-irréductible d'un système différentiel linéaire

#### 3.1. Position du problème

Notons

$$A(x) = x^{-p} \sum_{v=0}^{v=\infty} A_v x^v \quad (3.1.1)$$

la matrice définie dans (2.1.1).

Remarquons d'abord que si  $P$  est une permutation des vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ , on a  $\mu_k(P^{-1}AP) = \mu_k(A)$ . On peut donc supposer sans changer la généralité que la matrice  $\alpha$  dans (2.1.1) est de la forme:

$$\alpha = \text{diag}(0_{n_0}, I_{n_1}, 2I_{n_2}, \dots, (p-2)I_{n_{p-2}}, (p-1)I_{n_{p-1}}). \quad (3.1.2)$$

$I_{n_i}$ : désigne la matrice identité d'ordre  $n_i$ ,  $0_{n_0}$ : désigne une matrice nulle d'ordre  $n_0$ .

$$n'_{p-1} = n - \sum_{i=0}^{i=p-2} n_i. \quad (3.1.3)$$

C'est à dire que les  $n_0$  premières colonnes de  $x^p A(x)$  sont de valuation 0, les  $n_1$  suivantes sont de valuation 1, ... etc.

Soit  $k$  un entier quelconque compris entre 1 et  $p-1$ . Décomposons la matrice (3.1.1) de la manière suivante:

$$A = (A^{ij})_{0 \leq i, j \leq k}. \quad (3.1.4)$$

Les blocs  $A^{ij}$  sont de dimensions respectives:  $n_i \times n_j$  si  $i, j < k$ ,  $n'_k \times n_j$  si  $j < k$ ,  $n_i \times n'_k$  si  $i < k$  et  $n'_k \times n'_k$  si  $i = j = k$ . Avec:

$$n'_k = n - \sum_{i=0}^{i=k-1} n_i. \quad (3.1.5)$$

Posons

$$A^{ij} = x^{-p} \sum_{v=0}^{v=\infty} A_v^{ij} x^v.$$

D'après la structure de  $A$ , on a:

$$A^{ij} = x^{-p} \sum_{v=j}^{v=\infty} A_v^{ij} x^v$$

donc

$$A_v^{ij} = 0 \quad \text{si } v < j.$$

Introduisons la matrice

$$\varepsilon_k = \text{diag}(kI_{n_0}, (k-1)I_{n_1}, \dots, 2I_{n_{k-2}}, I_{n_{k-1}}, 0_{n_k}). \quad (3.1.7)$$

D'après le lemme 2.3.1, la matrice:

$$M(x, \lambda) = x^{p-k} A(x) x^{\varepsilon_k} + \lambda x^{\varepsilon_k}$$

est sans pôle à l'origine et vérifie la relation suivante:

$$\theta_k(A, x, \lambda) = \det(M(x, \lambda)). \tag{3.1.8}$$

En décomposant  $M$  de la même manière que dans (3.1.4), on obtient

$$M^{ij}(x, \lambda) = x^{-j} \sum_{v=j}^{+\infty} A_v^{ij} x^v \quad \text{si } 0 \leq i, j \leq k \text{ et } i \neq j,$$

$$M^{jj}(x, \lambda) = x^{-j} \sum_{v=j}^{+\infty} A_v^{jj} x^v + \lambda x^{k-j} I_{n_j} \quad \text{si } i = j \leq k-1,$$

$$M^{kk}(x, \lambda) = x^{-k} \sum_{v=k}^{+\infty} A_v^{kk} x^v + \lambda I_{n_k}.$$

En faisant  $x=0$ , on obtient:

$$M^{ij}(0, \lambda) = A_j^{ij} \quad \text{si } 0 \leq i, j \leq k \text{ et } i \neq j,$$

$$M^{kk}(0, \lambda) = A_k^{kk} + \lambda I_{n_k} \quad \text{si } i = j = k.$$

Appelons  $\mathcal{G}_k(A, \lambda)$ : la matrice carrée d'ordre  $n$  formée par les blocs  $M^{ij}(0, \lambda)$ , on a d'après (3.1.8):

$$\theta_k(A, 0, \lambda) = \det(\mathcal{G}_k(A, \lambda)).$$

Nous avons donc démontré que  $A$  est  $k$ -réductible si et seulement si, l'une des matrices  $\mathcal{G}_s(A, \lambda)$ ,  $s \in \{1, 2, \dots, k\}$  est identiquement singulière en  $\lambda$ .

Nous développons dans ce qui suit un algorithme qui transforme (1.1) sous une forme super-irréductible. Pour cela nous supposons que les matrices  $\mathcal{G}_s(A, \lambda)$  sont toutes non identiquement singulières en  $\lambda$  pour  $s=1, 2, \dots, k-1$  (i.e.,  $A$  est  $(k-1)$ -irréductible) avec  $k \geq 2$  et que  $\mathcal{G}_k(A, \lambda)$  est identiquement singulière en  $\lambda$ . L'algorithme décrit le passage de l'étape  $k-1$  à l'étape  $k$ , pour  $k \geq 2$ . Le même procédé est valable pour la première étape ( $k=1$ ) de l'algorithme (cf. § 5).

On pose

$$m_i = n_0 + n_1 + \dots + n_i \quad i=0, 1, \dots, k,$$

$$R = (A_j^{ij})_{0 \leq i, j \leq k-1}, \quad U = (A_k^{ik})_{0 \leq i \leq k-1}, \tag{3.1.9}$$

$$V = (A_j^{kj})_{0 \leq j \leq k-1} \quad \text{et} \quad W = A_k^{kk}.$$

On a:

$$\mathcal{G}_k(A, \lambda) = \begin{array}{|c|c|} \hline & \begin{array}{c} m_{k-1} \\ R \end{array} & \begin{array}{c} n_k \\ U \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} V \\ W + \lambda I_{n_k} \end{array} & & \\ \hline \end{array} \tag{3.1.10}$$

Une condition suffisante (mais non nécessaire) pour que la matrice  $\mathcal{G}_k(A, \lambda)$  soit singulière pour toute valeur de  $\lambda$  est que les vecteurs colonnes de  $\begin{pmatrix} R \\ V \end{pmatrix}$  ou les vecteurs lignes de  $(R, U)$  soient linéairement dépendants. Nous allons traiter d'abord ces deux cas.

3.2. Cas où les vecteurs colonnes constants de  $\mathcal{G}_k(A, \lambda)$  sont linéairement dépendants

Remarquons d'abord que  $n_{k-1}$  est non nul, car sinon  $\mathcal{G}_k(A, \lambda) = \mathcal{G}_{k-1}(A, \lambda)$  et donc  $\det(\mathcal{G}_k(A, \lambda)) \neq 0$ , ce qui est contradictoire.

Appelons  $v_1, v_2, \dots, v_{m_{k-1}}$ ; les vecteurs colonnes de la matrice  $\begin{pmatrix} R \\ V \end{pmatrix}$ , et  $r$  leur rang. Puisque  $A$  est supposée  $(k-1)$ -irréductible avec  $k \geq 2$ , les  $m_{k-2}$  premiers vecteurs colonnes sont nécessairement linéairement indépendants, donc

$$r = m_{k-2} + r'$$

avec

$$r' < n_{k-1}. \quad (3.2.1)$$

Il existe alors  $n_{k-1} - r'$  vecteurs colonnes:  $w_1, w_2, \dots, w_{n_{k-1}-r'}$  de  $\mathbb{C}^{m_{k-1}}$  tels que:

$$\begin{bmatrix} R \\ V \end{bmatrix} w_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n_{k-1} - r'.$$

Appelons  $e_1, e_2, \dots, e_{m_{k-2}}$ , les  $m_{k-2}$  premiers vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{C}^{m_{k-1}}$ , le système de vecteurs:

$$e_1, e_2, \dots, e_{m_{k-2}}, w_1, w_2, \dots, w_{n_{k-1}-r'}$$

forme alors un système libre et on peut le compléter de manière à obtenir une base de  $\mathbb{C}^{m_{k-1}}$ . Soit:

$$\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_{m_{k-2}}, e'_1, \dots, e'_{r'}, w_1, w_2, \dots, w_{n_{k-1}-r'})$$

cette nouvelle base. Si  $P$  désigne la matrice de passage de la base canonique à la base  $\mathcal{B}$ , elle est de la forme

$$P = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \xleftrightarrow{m_{k-2}} \\ \hline I_{m_{k-2}} \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{c} \xleftrightarrow{n_{k-1}} \\ \hline P_1 \\ \hline P_2 \end{array} \\ \hline & \end{array} \quad (3.2.3)$$

avec  $\det(P_2) \neq 0$ . On pose alors

$$T = \begin{array}{c|c|c} \begin{array}{c} \xleftrightarrow{m_{k-2}} \\ \hline I_{m_{k-2}} \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{c} \xleftrightarrow{n_{k-1}} \\ \hline Q \\ \hline P_2 \end{array} & \begin{array}{c} \xleftrightarrow{n'_k} \\ \hline 0 \\ \hline 0 \end{array} \\ \hline & & \begin{array}{c} \updownarrow m_{k-2} \\ \updownarrow n_{k-1} \\ \updownarrow n'_k \end{array} \\ \hline & & \end{array} \quad (3.2.4)$$

où  $Q = x^p P_1$  et  $\beta = ((k-1)I_{n_0}, (k-2)I_{n_1}, \dots, I_{n_{k-2}})$ . La matrice  $T(x)$  est polynomiale et vérifie

$$\det(T(x)) \equiv \det(P_2) \neq 0 \tag{3.2.5}$$

donc

$$T, T^{-1} \in M_n(\mathbb{C}[x]) \quad \text{avec } \deg T, \deg(T^{-1}) \leq k.$$

La quantité  $m_k(A)$  ne peut donc être diminuée que par l'opération  $T^{-1}AT$ . Il s'agit de démontrer que si:

$$A^{(1)} = T^{-1}AT \tag{3.2.6}$$

alors

$$m_k(A^{(1)}) < m_k(A).$$

Pour cela décomposons les matrices  $A$  et  $A^{(1)}$  en blocs de la même manière que  $T$ :

$$A = \frac{1}{x^p} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & m_{k-2} & n_{k-1} & n'_k \\ \hline B_1 & C_1 & D_1 \\ \hline B_2 & C_2 & D_2 \\ \hline B_3 & C_3 & D_3 \\ \hline \end{array} \quad A^{(1)} = \frac{1}{x^p} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & m_{k-2} & n_{k-1} & n'_k \\ \hline B_1^{(1)} & C_1^{(1)} & D_1^{(1)} \\ \hline B_2^{(1)} & C_2^{(1)} & D_2^{(1)} \\ \hline B_3^{(1)} & C_3^{(1)} & D_3^{(1)} \\ \hline \end{array} \tag{3.2.7}$$

En faisant l'opération (3.2.6), on obtient:

$$(D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_3^{(1)}) = (D_1 - QP_2^{-1}D_2, P_2^{-1}D_2, D_3).$$

Puisque les  $D_i$  sont à coefficients dans  $x^k \mathbb{C}[x]$ ,  $QP_2^{-1}$  à coefficients dans  $x \mathbb{C}[x]$ , les matrices  $D_i^{(1)}$  sont donc de la même forme que les  $D_i$ .

$$(B_1^{(1)}, B_2^{(1)}, B_3^{(1)}) = (B_1 - QP_2^{-1}B_2, P_2^{-1}B_2, B_3).$$

D'après la structure de  $A$ , les matrices  $B_i$  sont toutes de la forme:

$$B_i = B_i^\wedge x^{\gamma_{k-2}} \tag{3.2.8}$$

où  $B_i^\wedge$  est une matrice à coefficients dans  $\mathbb{C}[x]$  et

$$\gamma_{k-2} = (0_{n_0}, I_{n_1}, \dots, (k-2)I_{n_{k-2}}). \tag{3.2.9}$$

Comme  $QP_2^{-1}$  est à éléments dans  $x \mathbb{C}[x]$ , les  $B_i^{(1)}$  sont donc de la même forme que les  $B_i$ ;

$$B_i^{(1)} = B_i^{\wedge(1)} x^{\gamma_{k-2}} \tag{3.2.10}$$

avec  $B_i^{\wedge(1)}$  à coefficients dans  $\mathbb{C}[x]$ .

Il en résulte que  $A^{(1)}$  est une matrice  $(k-1)$ -irréductible. Comme  $k \geq 2$ , on a donc

$$\mu_{k-1}(A) = \mu_{k-1}(A^{(1)}) \tag{3.2.11}$$

$$\begin{aligned} & (C_1^{(1)}, C_2^{(1)}, C_3^{(1)}) \\ &= (B_1 Q + C_1 P_2 - QP_2^{-1}[B_2 Q + C_2 P_2], P_2^{-1}[B_2 Q + C_2 P_2], B_3 Q + C_3 P_2). \end{aligned}$$

D'après la structure de  $A$ , on a :

$$C_i = C_i^\wedge x^{k-1} \quad i=1, 2, 3 \quad (3.2.12)$$

avec  $C_i^\wedge$  à coefficients dans  $\mathbb{C}[[x]]$ . D'après les relations (3.2.10) et (3.2.12), on a

$$C_3^{(1)} = B_3^\wedge x^{\gamma_{k-2}} x^\beta P_1 + C_3^\wedge x^{k-1} P_2.$$

Or

$$\gamma_{k-2} + \beta = (k-1) I_{m_{k-2}}$$

donc  $C_3^{(1)}$  est de la forme :

$$C_3^{(1)} = C_3^{\wedge(1)} \cdot x^{k-1}$$

avec

$$C_3^{\wedge(1)} = B_3^\wedge P_1 + C_3^\wedge \cdot P_2 \quad (3.2.13)$$

une matrice à coefficients dans  $\mathbb{C}[[x]]$ . De la même manière, on obtient :

$$C_2^{(1)} = C_2^{\wedge(1)} \cdot x^{k-1}$$

$$C_1^{(1)} = C_1^{\wedge(1)} \cdot x^{k-1}$$

avec

$$C_2^{\wedge(1)} = P_2^{-1} [B_2^\wedge P_1 + C_2^\wedge \cdot P_2], \quad (3.2.14)$$

$$C_1^{\wedge(1)} = B_1^\wedge P_1 + C_1^\wedge \cdot P_2 - x^\beta P_1 \cdot C_2^{\wedge(1)}. \quad (3.2.15)$$

D'après les relations (3.2.13), (3.2.14) et (3.2.15) on a :

$$C_1^{\wedge(1)}|_{x=0} = ((A_j^{ij})_{0 \leq i, j \leq k-2} \cdot P_1 + (A_{k-1}^{ik-1})_{0 \leq i \leq k-2} \cdot P_2),$$

$$C_2^{\wedge(1)}|_{x=0} = P_2^{-1} ((A_j^{kj-1})_{0 \leq j \leq k-2} \cdot P_1 + (A_{k-1}^{kk-1}) \cdot P_2),$$

$$C_3^{\wedge(1)}|_{x=0} = ((A_j^{kj})_{0 \leq j \leq k-2} \cdot P_1 + (A_{k-1}^{kk-1}) \cdot P_2).$$

Puisque la matrice  $P$  définie dans (3.2.3) est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbb{C}^n$  à la base (3.2.2) et comme les vecteurs  $w_i$  ( $i=1, 2, \dots, n_{k-1} - r'$ ) sont choisis dans le noyau de la matrice  $\begin{pmatrix} R \\ V \end{pmatrix}$ , la matrice formée par les blocs  $C_1^{\wedge(1)}|_{x=0}$ ,  $C_2^{\wedge(1)}|_{x=0}$ ,  $C_3^{\wedge(1)}|_{x=0}$  admet  $n_{k-1} - r'$  colonnes nulles. Donc

$$m_k(A^{(1)}) = \mu_{k-1}(A) + r'/n^k.$$

D'où d'après (3.2.1) et (3.2.11)

$$m_k(A^{(1)}) < m_k(A).$$

### 3.3. Cas où les vecteurs lignes constants de $\mathcal{G}_k(A, \lambda)$ sont linéairement dépendants

On suppose dans ce cas que  $\text{rang}(R, U) < m_{k-1}$  où  $R, U$  sont les matrices définies dans (3.1.9). On pose :

$$x^\beta = \text{diag}(x, x, \dots, x, 1, \dots, 1) \quad (3.3.1)$$

où le  $i^{\text{ème}}$  élément de la diagonale vaut  $x$  si  $i \leq m_{k-1}$  et 1 sinon. De la même manière que dans le cas précédent, on ne considèrera que l'opération  $x^{-\beta} A x^{\beta}$ . Soit alors

$$A^{(1)} = x^{-\beta} A x^{\beta}. \tag{3.3.2}$$

Si on décompose  $A$  de la même manière que (3.2.7), on a :

$$A^{(1)} = \frac{1}{x^p} \begin{array}{|c|c|c|} \hline B_1 & C_1 & x^{-1} D_1 \\ \hline B_2 & C_2 & x^{-1} D_2 \\ \hline x B_3 & x C_3 & D_3 \\ \hline \end{array}.$$

$A$  étant  $(k-1)$ -irréductible, on remarque que l'opération (3.3.2) ne peut modifier les entiers  $n_i$  pour  $i=0, 1, \dots, k-2$ . En effet si on considère  $i$  le plus petit entier pour lequel  $n_{i-1}$  est modifié; puisque  $B_3$  se change en  $x B_3$ ,  $n_{i-1}$  diminue nécessairement et alors

$$m_i(A^{(1)}) < p - 1 + \frac{n_0}{n} + \frac{n_1}{n^2} + \dots + \frac{n_{i-1}}{n^i}$$

donc  $m_i(A^{(1)}) < m_i(A)$ . Ce qui est contradictoire.

Soit  $\tilde{n}_{k-1} \geq n_{k-1}$  le nombre de vecteurs colonnes de valuation  $k-1$  de la matrice  $x^p A^{(1)}$ . On peut supposer (quitte à appliquer à  $A^{(1)}$  une permutation qui ne change rien à la généralité) que les  $\tilde{n}_{k-1}$  colonnes de  $x^p A^{(1)}$  de valuation  $k-1$  sont ordonnées de la même manière que celles de  $A$ . En décomposant ensuite  $A$  et  $A^{(1)}$  en blocs comme dans (3.1.4), on peut voir facilement que la matrice  $\mathcal{S}_k$  associée à  $A^{(1)}$  est de la forme :

$$\mathcal{S}_k(A^{(1)}, \lambda) = \begin{array}{|c|c|} \hline \begin{array}{c} m_{k-2} + \tilde{n}_{k-1} \\ R^{(1)} \end{array} & \begin{array}{c} n_k'' \\ U^{(1)} \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} V^{(1)} \end{array} & \begin{array}{c} W^{(1)} + \lambda I_{n_k''} \end{array} \\ \hline \end{array}. \tag{3.3.3}$$

Où  $\begin{pmatrix} R^{(1)} \\ V^{(1)} \end{pmatrix}$  est une matrice contenant au moins  $n - m_{k-1} \geq n_k''$  lignes nulles.

Comme

$$\text{rang} \begin{pmatrix} R^{(1)} \\ V^{(1)} \end{pmatrix} < m_{k-1} \leq m_{k-2} + \tilde{n}_{k-1}$$

donc les vecteurs colonnes constants de la matrice (3.3.3) sont linéairement dépendants. L'opération (3.3.2) nous ramène au premier cas (cf. § 3.2), on sait donc construire une transformation  $T$  qui réduit la quantité  $m_k(A)$ . Appelons  $n_{k-1}^{(2)}$  le nombre de colonnes de valuation  $k-1$  associé à la matrice

$$A^{(2)} = T^{-1} A^{(1)} T - T^{-1} \frac{dT}{dx}$$



on a :

$$n_{k-1}^{(2)} \leq \text{rang} \begin{pmatrix} R^{(1)} \\ V^{(1)} \end{pmatrix} - m_{k-2} < m_{k-1} - m_{k-2} = n_{k-1}.$$

### 3.4. Cas où les vecteurs constants de la matrice $\mathcal{G}_k(A, \lambda)$ sont linéairement indépendants

Nous allons résoudre le problème dans le cas où  $\mathcal{G}_k(A, \lambda)$  est sous une forme particulière, ensuite nous montrerons comment s'y ramener.

**Définition 3.4.1.** Soit  $q \leq n'_k$  un entier naturel. On dira que la matrice  $(A_j^{ij})_{0 \leq i, j \leq k}$  est  $q$ -triangulaire si elle est de la forme :

$$\dot{A} = (A_j^{ij})_{1 \leq i, j \leq k} = \begin{array}{c|cc} & \begin{matrix} m_{k-1} & n'_k - q & q \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} R \\ V_1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} U_1 \\ W_1 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} U_2 \\ W_2 \\ W_3 \end{matrix} \end{array} \quad (3.4.1)$$

avec  $W_3$  une matrice carrée d'ordre  $q$ , triangulaire supérieure à diagonale nulle. Si de plus on a :

$$\text{rang}(R, U_1) < m_{k-1} \quad (3.4.2)$$

on dira que la matrice  $A$  est sous forme  $q$ -triangulaire avec conditions de dépendance (on écrira  $A$  est q.t.c.d.).

**Remarque 3.4.1.** Si  $A$  est q.t.c.d., en développant le déterminant de la matrice (3.4.1) par rapport aux  $q$  dernières colonnes, on a :

$$\det(\mathcal{G}_k(A, \lambda)) = \lambda^q \begin{array}{c|c} \begin{matrix} R \\ V_1 \end{matrix} & \begin{matrix} U_1 \\ W_1 + \lambda I_{n'_k - q} \end{matrix} \\ \hline & \end{array} \equiv 0.$$

**Remarque 3.4.2.** Si les vecteurs colonnes de  $\begin{pmatrix} R \\ V_1 \end{pmatrix}$  sont linéairement dépendants, alors ceux de  $\begin{pmatrix} R \\ V_1 \\ 0 \end{pmatrix}$  le sont aussi et on sait dans ce cas construire une transformation réduisant la quantité  $m_k(A)$  (cf. § 3.2).

**Remarque 3.4.3.** Si  $A$  est q.t.c.d., on considère la matrice diagonale :

$$x^\beta = \text{diag}(x, x, \dots, x, 1, 1, \dots, 1, x, x, \dots, x) \quad (3.4.3)$$

où le  $i^{\text{ème}}$  élément de la diagonale vaut 1 si  $m_{k-1} + 1 \leq i \leq m_{k-1} + n'_k - q$  et  $x$  sinon. Par un argument identique à celui utilisé dans le cas précédent, on

démontre que la matrice  $\mathcal{G}_k(x^{-\beta} Ax^\beta, \lambda)$  est de la même forme que (3.3.3). On se ramène ainsi au cas 3.2 par l'opération  $A^{(1)} = x^{-\beta} Ax^\beta$ .

*Remarque 3.4.4.* Dans le deux cas qui précèdent, les transformations que nous avons construites sont de la forme  $S(x) = x^\beta T(x)$  où  $T$  est une matrice polynomiale de la forme (3.2.4). Donc  $S$  est une matrice polynomiale de degré au plus égal à  $k$ .

**Théorème 2.** *Il existe une transformation constante  $P$ , telle qu'en l'appliquant sur (1.1), le système obtenu soit sous forme q.t.c.d.  $q$  étant un entier compris entre 0 et  $n'_k$ .*

*Démonstration.* On suppose que  $A$  est 0-triangulaire sans conditions de dépendance. Puisque  $\mathcal{G}_k(A, \lambda)$  est singulière en  $\lambda$ , en prenant  $\lambda = 0$ , la matrice

$$\mathcal{G}_k(A, 0) = \begin{array}{|c|c|} \hline R & U \\ \hline V & W \\ \hline \end{array}$$

est singulière. Soit  $X' = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  un vecteur du noyau de la matrice transposée de  $\mathcal{G}_k(A, 0)$ . Puisque  $A$  est 0-triangulaire sans condition de dépendance, on a :

$$\text{rang}(R, U) = m_{k-1}.$$

Le vecteur  $X$  peut donc être choisi de sorte que l'une au moins des composantes  $a_i$  ( $m_{k-1} + 1 \leq i \leq n$ ) soit non nulle. On peut supposer que  $a_n \neq 0$ , sinon on applique à  $A$  une permutation sur les lignes qui ne change rien à la généralité.

Soit  $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$  la base canonique de  $\mathbb{C}^n$ . Comme  $a_n \neq 0$ , on peut choisir comme nouvelle base :

$$\mathcal{B}' = (e_1, e_2, \dots, e_{n-1}, X).$$

Désignons par  $P$  la matrice dont la  $i^{\text{ème}}$  ligne est formée par le  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique si  $i \neq n$ , la  $n^{\text{ème}}$  ligne est formée par le vecteur  $X$ . Comme  $X$  est choisi dans le noyau de  $(\mathcal{G}_k(A, 0))$ , la nouvelle matrice :

$$A^{(1)} = P \cdot A \cdot P^{-1}$$

est donc 1-triangulaire.

La procédure que nous venons de décrire est valable en général pour le passage d'une forme  $q$ -triangulaire à une forme  $(q+1)$ -triangulaire. Il suffit pour cela de prendre en vertu de la remarque 3.4.1 comme nouvelle base :

$$\mathcal{B}' = (e_1, e_2, \dots, e_{n'_k - q - 1}, X, e_{n'_k - q + 1}, \dots, e_n)$$

où  $X$  est un vecteur pris dans le noyau de la transposée de la matrice (3.4.1) et dont la composante d'indice  $n'_k - q$  est non nulle.

Au cours de cette procédure, soit on rencontre un  $q < n'_k$  tel que  $A$  est sous forme q.t.c.d., soit on a  $q = n'_k$  et alors

$$\det(\mathcal{G}_k(A, \lambda)) = \lambda^{n'_k} \det(R) \equiv 0$$

auquel cas nous avons nécessairement les conditions de dépendance.

#### 4. Algorithme de calcul d'une forme Q.T.C.D.

Soit  $(S_0)$  le système de départ, on pose  $q=0$  et  $P_0=I_n$ .

##### Etape 1

1.1. Former les matrices  $R, U_1, V_1, W_1$  définies dans (3.4.1) avec:

$$R = (A_j^{ij})_{0 \leq i, j \leq k-1}$$

$$\dot{A} = \begin{array}{|c|c|} \hline R & U_1 \\ \hline V_1 & W_1 \\ \hline \end{array}.$$

1.2. Passer à l'étape 2.

##### Etape 2

2.1. Résoudre par l'algorithme de Gauss, le système linéaire

$$(\dot{A})X = 0.$$

2.2. Soit  $X^t = (X_1^t, X_2^t)$  une solution non nulle du système avec

$$-X_1^t = (a_1, a_2, \dots, a_{m_k-1})$$

$$-X_2^t = (b_1, b_2, \dots, b_{n_k-q}).$$

2.3. Si  $X_2$  peut être choisi nul, arrêter l'algorithme Sinon.

2.4. Si  $b_{n_k-q} = 0$ , effectuer une permutation sur  $A$ , de sorte que  $b_{n_k-q} \neq 0$ , Sinon.

2.5. Appliquer à  $A$  la transformation:  $P = (e_1, e_2, \dots, e_{n_k-q-1}, X, e_{n_k-q+1}, \dots, e_n)$  où  $X^t = (X_1^t, X_2^t, 0, \dots, 0)$ .

2.6. Passer à l'étape 1 en remplaçant  $q$  par  $q+1$ .

#### 5. Description de l'algorithme général

On peut résumer tout ce qui précède en un algorithme que nous décrivons ci-dessous. Il est à noter que les transformations données par cet algorithme sont calculées en résolvant à chaque étape un système linéaire à coefficients constants à partir de la méthode d'élimination de Gauss contrairement à l'algorithme de réductibilité [4, 6] qui utilise des transformations de Jordan.

Soit:

$$(S_0) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^p} \left( \sum_{v=0}^{+\infty} A_v x^v \right) y$$

le système différentiel de départ avec  $p > 1$ . On pose  $k=1$  et  $p(A)=p$ : l'ordre polaire de la matrice  $A(x)$  du système  $(S_0)$ :

**Etape 1**

- 1.1. Si  $n_0 = 0$ , remplacer  $p(A)$  par  $p(A) - 1$  et former la matrice  $A(x)$  de sorte que  $A_0$  soit non nul (i.e.,  $n_0 \neq 0$ ).
- 1.2. Si  $p(A) = 1$  ou  $k = p(A)$ , arrêter l'algorithme. Sinon.
- 1.3. Effectuer une permutation sur la matrice  $A$  de sorte que :
  - Les  $n_0$  premières colonnes soient de valuation = 0
  - Les  $n_1$  suivantes soient de valuation = 1
  - etc. ...
  - Les  $n_{k-1}$  suivantes soient de valuation =  $k - 1$ .
- 1.4. Former les matrices:

$$\begin{aligned} \dot{A} &= (A_{ij}^{ij})_{0 \leq i, j \leq k} & R &= (A_{ij}^{ij})_{0 \leq i, j \leq k-1} \\ U &= (A_{ik}^{ik})_{0 \leq i \leq k-1} & V &= (A_{ij}^{kj})_{0 \leq j \leq k-1} \\ W &= A_k^{kk}. \end{aligned}$$

- 1.5. Calculer  $m_{k-1} = n_0 + n_1 + \dots + n_{k-1}$ ,  $n'_k = n - m_{k-1}$ .
- 1.6. Former la matrice:

$$\mathcal{S}_k(A, \lambda) = \begin{array}{|c|c|} \hline & \begin{array}{c} m_{k-1} \\ \hline \end{array} \\ \hline R & U \\ \hline V & W + \lambda I_{n'_k} \\ \hline \end{array}$$

- ∴ Si  $\det(\mathcal{S}_k(A, \lambda)) \equiv 0$  passer à la deuxième étape. Sinon.
- 1.8. Si  $\det(\mathcal{S}_k(A, \lambda)) \neq 0$  passer à la première étape en remplaçant  $k$  par  $k + 1$ .

**Etape 2**

- 2.1. Résoudre par l'algorithme de Gauss, le système linéaire:

$$\dot{A}X = 0.$$

- 2.2. Soit  $X^t = (X_1^t, X_2^t)$  une solution du système.
  - avec  $X_1^t = (a_1, a_2, \dots, a_{m_{k-1}})$  et  $X_2^t = (b_1, b_2, \dots, b_{n'_k})$ .
- 2.3. Si  $X_2$  peut être choisi nul, passer à la cinquième étape sinon passer à la troisième.

**Etape 3**

- 3.1. Résoudre par l'algorithme de Gauss, le système linéaire:

$${}^t\dot{A}X = 0.$$

- 3.2. Soit  $X^t = (X_1^t, X_2^t)$  une solution du système.
  - avec  $X_1^t = (a_1, a_2, \dots, a_{m_{k-1}})$  et  $X_2^t = (b_1, b_2, \dots, b_{n'_k})$ .

3.3. Si  $X'_2$  peut être choisi nul, appliquer à la matrice  $A$ :

$$x^\beta = \text{diag} \left( \underbrace{x, x, \dots, x}_{m_{k-1}}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n'_k} \right)$$

– Passer à l'étape 1.

3.4. Si  $X'_2$  ne peut être choisi nul passer à l'étape 4.

*Etape 4*

4.1. Appliquer l'algorithme qui transforme  $A$  sous une forme q.t.c.d.

4.2. Appliquer à  $A$ , la transformation:

$$x^\beta = \text{diag} \left( \underbrace{x, x, \dots, x}_{m_{k-1}}, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n'_k - q}, \underbrace{x, x, \dots, x}_q \right).$$

4.3. Passer à l'étape 1.

*Etape 5*

5.1. Dans cette étape le système est tel que  $\text{rang} \begin{pmatrix} R \\ V \end{pmatrix} < m_{k-1}$  et  $X$  peut être choisi de la forme:

$$\begin{aligned} - X^t &= (X'_2, a_{n_0}, 0) && \text{si } k=1 \\ - X^t &= (X'_1, X'_2, a_{m_{k-1}}, 0) && \text{si } k \geq 2 \end{aligned}$$

où  $X_1$  est formé par les  $(m_{k-1} - n_{k-1})$  premières composantes de  $X$ .  $X_2$  est formé par les  $n_{k-1} - 1$  suivantes.

5.2. Si  $a_{m_{k-1}} = 0$ , effectuer une permutation sur les  $n_{k-1}$  dernières colonnes de  $\begin{pmatrix} R \\ V \end{pmatrix}$ , de sorte que  $a_{m_{k-1}} \neq 0$ .

5.3. Si  $k=1$  et  $a_{n_0} \neq 0$  appliquer à  $A$  la transformation:

$$T = (e_1, e_2, \dots, e_{n_0-1}, X, e_{n_0+1}, \dots, e_n).$$

5.4. Si  $k \geq 2$  et  $a_{m_{k-1}} \neq 0$ , appliquer à  $A$  la transformation:

$$T(x) = \begin{array}{cccc|c} \xleftarrow{m_{k-2}} & \xleftarrow{n_{k-1}-1} & \xleftarrow{1} & \xleftarrow{n'_k} & \\ \hline I_{m_{k-2}} & 0 & x^\beta \cdot X_1 & 0 & m_{k-2} \\ \hline 0 & I_{n_{k-1}-1} & X_2 & 0 & n_{k-1}-1 \\ \hline 0 & 0 & a_{m_{k-1}} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & I_{n'_k} & n'_k \end{array}$$

avec  $\beta = \text{diag}(k-1, k-1, \dots, k-1, k-2, \dots, k-2, \dots, 1, \dots, 1)$ .

5.5. Passer à l'étape 1.

## 6. Etude de deux exemples

6.1. Exemple où  $x=0$  est une singularité irrégulière

Soit

$$A(x) = \frac{1}{x^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x^6 & x^5 \end{bmatrix}. \quad (6.1)$$

On a  $n_0=1$  et

$$\det(\mathcal{G}_1(A, \lambda)) = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \equiv 0.$$

La matrice (6.1) est donc 1-réductible. Comme la première ligne et la première colonne de la matrice  $\mathcal{G}_1(A, \lambda)$  ne sont pas nulles, nous allons appliquer à  $A$  la transformation:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La nouvelle matrice:

$$A^{(1)} = T_1^{-1} A T_1 = \frac{1}{x^4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^5(x+1) & x^5 \end{bmatrix}$$

est l.t.c.d., on applique donc à  $A^{(1)}$ , la transformation:

$$T_2 = \text{diag}(x, 1, 1, x)$$

la quantité  $n_0^{(1)}$  est alors réduite à 0, et:

$$A^{(2)} = T_2^{-1} A^{(1)} T_2 = \frac{1}{x^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^3(x+1) & x^4 \end{bmatrix}.$$

On a  $n_0^{(2)}=3$  et  $\det(\mathcal{G}_1(A^{(2)}, \lambda)) \equiv 0$ . En appliquant à  $A^{(2)}$  la transformation  $T_3$  permutant la troisième et la quatrième colonne, on obtient:

$$A^{(3)} = T_3^{-1} A^{(2)} T_3 = \frac{1}{x^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^4 & x^3(x+1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Comme les vecteurs lignes de  $\mathcal{G}_1(A^{(3)}, \lambda)$  sont linéairement dépendants, on applique:

$$T_4 = \text{diag}(x, x, x, 1).$$

On a  $n_0^{(4)} = 2$ . Ensuite on applique à  $A^{(4)}$  la transformation  $T_5$  qui permute la deuxième et la troisième colonne et à  $A^{(5)}$  la transformation:

$$T_6 = \text{diag}(x, x, 1, 1).$$

Ensuite à  $A^{(6)}$  on applique la transformation  $T_7$  qui permute la deuxième et la première colonne. Nous obtenons ainsi:

$$A^{(7)} = \frac{1}{x^3} \begin{bmatrix} x^4 & 0 & 0 & x(x+1) \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{bmatrix}.$$

On trouve

$$\det(\mathcal{G}_1(A^{(7)}, \lambda)) \neq 0,$$

$$\det(\mathcal{G}_2(A^{(7)}, \lambda)) \neq 0.$$

La matrice  $A^{(7)}$  est donc super-irréductible et on a:

$$p^* = 3, \quad n_0^* = 1, \quad n_1^* = 3, \quad \mu_1 = 9/4, \quad \mu_2 = 39/16.$$

6.2. Exemple où  $x=0$  est une singularité régulière

$$A(x) = \frac{1}{x^4} \begin{bmatrix} 0 & -x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

On trouve au bout de 7 pas la transformation:

$$T(x) = \begin{bmatrix} 0 & x^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 \\ x^7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

qui réduit la matrice (6.2) sous la forme:

$$T^{-1}AT - T^{-1} \frac{dT}{dx} = \frac{1}{x} \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans cet exemple, il est facile de calculer les solutions formelles du système différentiel associé à la matrice (6.2). En effet un système fondamental de solutions est

$$\mathcal{F}(x) = T(x) \cdot x^C$$

où  $T$  est la matrice définie dans (6.3), et

$$C = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{0} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dans les deux exemples traités ci-dessus, on remarque que les transformations construites par l'algorithme sont très simples. Ceci est important car les paramètres  $p, n_0, n_1, \dots, n_{p-2}$  d'une forme super-irréductible permettent le calcul de divers invariants formels qu'on trouve dans la littérature sans avoir à utiliser la méthode du vecteur cyclique qui donne des transformations très compliquées en pratique. La méthode proposée par Wagenführer [12, 13] permet effectivement le calcul de l'indice d'irrégularité de Malgrange [8] et les invariants de Gérard et Levelt [3]. Cependant d'un point de vue pratique, le critère de  $r$ -régularité donné par Gérard et Levelt est difficile à réaliser. On montre dans l'article de A. Hilali (soumis pour publication), que ces invariants peuvent être obtenus d'une manière directe à partir des quantités  $p, n_0, n_1, \dots, n_{p-2}$  d'une forme super-irréductible. Enfin dans [11], Wazner définit sous des conditions supplémentaires le lien entre une forme super-irréductible et le polygone de Newton d'un système différentiel linéaire.

### Bibliographie

1. Della Dora, J., Tournier, E.: Solutions formelles d'équations différentielles au voisinage de points singuliers. R.R n° 239, IMAG, Grenoble 1981
2. Dietrich, V.: Zur Reduktion von Linearen Differentialgleichungssystemen. Math. Ann. 237, 79-95 (1978)
3. Gerard, R., Levelt, A.H.M.: Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes différentiels linéaires. Ann. Math. Fourier 23, 157-195 (1973)
4. Hilali, A.: Réductibilité d'un système différentiel linéaire. Numer. Math. 41, 1-17 (1983)
5. Hilali, A.: Contribution à l'étude des points singuliers des systèmes différentiels linéaires. Thèse 3ème cycle. IMAG, Grenoble 1982
6. Hilali, A., Wazner, A.: Un algorithme de Calcul de l'invariant de Moser. R.R n° 487, TIM3, Grenoble 1984
7. Hilali, A., Wazner, A.: Un algorithme de Calcul de l'invariant de Katz. Ann. Math. Fourier 36, 67-81 (1986)
8. Malgrange, B.: Sur les points singuliers des équations différentielles. L'Enseignement Math. t.xx, 1-2, 147-176 (1974)
9. Moser, J.: The order of singularity in Fuch's theory. Math. Z. 72, 379-398 (1960)
10. Katz, N.: Nilpotent Connexions and monodromy theorem. IHES Publ. Math. 39, 176-232 (1970)
11. Wazner, A.: Polygone de Newton des systèmes différentiels linéaires; Thèse de doctorat. IMAG TIM3, Grenoble 1986 (à paraître)
12. Wagenführer, E.: On the invariants measuring the irregularity of a system of linear differential equations at a singular point. Analysis 3, 369-384 (1983)
13. Wagenführer, E.: On the meromorphic transformations reducing the Poincaré rank of a linear differential equations at a singular point. Analysis (to appear)

Received February 27, 1986/October 1, 1986





## **CHAPITRE 6**

**CALCUL DES INVARIANTS DE MALGRANGE ET DE  
GERARD ET LEVELT D'UN SYSTEME DIFFERENTIEL  
LINEAIRE EN UN POINT SINGULIER IRREGULIER**



# Calcul des Invariants de Malgrange et de Gérard et Levelt d'un Système Différentiel Linéaire en un Point Singulier Irrégulier

A. HILALI

Laboratoire TIM3, IMAG,  
Institut National polytechnique de Grenoble  
46, Félix Viallet, 38031-Grenoble cédex.

*A PARAITRE DANS JOURNAL OF DIFFERENTIAL EQUATIONS*

**Abstract:** We consider a system of ordinary differential equations  $(\Delta) Y'(x) = A(x)Y(x)$ , where  $A(x)$  is a matrix with a pole of the order  $q$  at  $x=0$ . For this system, B. Malgrange has introduced the quantity  $i(D)$ , which can be computed with the cyclic vector method. The present paper treats the practical evaluation of  $i(D)$  and the invariants  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{q-1}$ , of Gérard and Levelt without using a cyclic vector. First, we shall give a survey of the algorithm given in [7] by which a system  $(\Delta)$  is reduced to a super-irreducible form. We show that these invariants follows directly from this form.

**Résumé:** On considère un système différentiel linéaire de la forme  $(\Delta) Y'(x) = A(x)Y(x)$ , où  $A(x)$  est une matrice d'ordre polaire  $q$  en  $x=0$ . B. Malgrange associe à tout système  $(\Delta)$  un indice que l'on peut calculer à l'aide de la méthode du vecteur cyclique. Dans cet article, nous nous intéressons au calcul de  $i(D)$  ainsi qu'à celui des invariants  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{q-1}$ , de Gérard et Levelt sans utiliser la méthode du vecteur cyclique. On donne dans [7], un algorithme permettant de réduire  $(\Delta)$  sous une forme super-irréductible. On démontre que le calcul de ces invariants est obtenu d'une manière directe à partir de cette forme.

## 1. Introduction

On considère un système différentiel linéaire homogène de la forme

$$(\Delta) \quad \frac{dY}{dx} - A(x)Y = 0$$

où  $Y$  est un vecteur colonne à  $n$  composantes.  $A(x)$  est une matrice à coefficients fonctions méromorphes ou plus simplement des éléments de  $\mathbb{C}((x))$ : Le corps des séries formelles à coefficients complexes. On pose

$$(1-1) \quad A(x) = x^{-q} \sum_{k=0}^{k=+\infty} A_k x^k$$

où  $q$  est un entier supérieur ou égal à 1. Les  $A_k$  sont des matrices constantes à coefficients dans  $\mathbb{C}$  avec  $A_0 \neq 0$ .

La transformation  $Y(x) = T(x)Z(x)$ , avec  $T$  appartenant à  $GL(n, \mathbb{C}((x)))$ : le groupe des matrices inversibles d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{C}((x))$ , transforme  $(\Delta)$  en :

$$(\Delta^T) \quad \frac{dZ}{dx} - B(x)Z = 0 \quad \text{avec} \quad B = T^{-1}AT - T^{-1} \frac{dT}{dx}$$

On dira que les deux systèmes  $(\Delta)$  et  $(\Delta^T)$  sont *équivalents* par la transformation  $T$ .

Dans le problème de la classification formelle des singularités, il semble évident d'introduire des grandeurs mesurant l'ordre de la complication de la singularité (supposée ici à l'origine). Dans la littérature, on trouve le nombre  $\mu$  de Moser [12], l'indice d'irrégularité  $i(D)$  de Malgrange [10], les invariants  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$  de Gérard et Levelt [3],.... A ces invariants, on peut ajouter le nombre rationnel  $r$  de N. Katz [3] qui sert à mesurer l'ordre des solutions du système  $(\Delta)$  au voisinage de la singularité (cf.[3] ou [8]).

On sait par la méthode du vecteur cyclique [1], [4] réduire tout système différentiel linéaire de la forme  $(\Delta)$  à une seule équation différentielle scalaire. Ce procédé nous permet de déterminer ces invariants. Mais il est intéressant de

pouvoir les calculer directement sur le système sans avoir à utiliser la méthode du vecteur cyclique qui s'avère très coûteuse en pratique (voir des exemples dans [4]), d'autant plus que les invariants cités ci-dessus sont uniquement déterminés par la connaissance des valuations des coefficients de l'équation différentielle obtenue par la méthode. C'est ainsi que K. Kitagawa [8] a remarqué que l'on peut lier ces invariants à la structure matricielle du système. Pour cela, il considère au lieu du nombre  $q$  dans (1-1), l'ordre du pôle de  $A(x)$  au sens de Volevic [14], appelé le poids formel  $p_f$  du pôle du système  $(\Delta)$ . Cette définition lui permet d'avoir un calcul direct de l'ordre  $r$  des solutions (cf. [8] p.434), par une méthode n'utilisant que les coefficients du polynôme caractéristique associé à la matrice  $A(x)$ . Dans le même ordre d'idées, une méthode similaire vient d'être donnée dans [6] pour le calcul de l'invariant de Katz, lorsque le système étudié est écrit sous une forme irréductible (au sens de Moser [12]). Un autre problème lié à la classification formelle est celui de la construction effective des transformations de *réduction* permettant d'écrire le système sous une forme où le calcul de ces invariants est immédiat.

Se basant sur le critère de J. Moser [12], nous avons donné dans [4] et [5], un algorithme construisant à chaque pas une transformation élémentaire qui réduit la quantité :

$$(1-2) \quad m(\Delta) = q - 1 + \text{rang}(A_0) / n$$

La transformation  $T^*$ , donnée par cet algorithme permet d'écrire le système  $(\Delta)$  sous la forme:

$$(\Delta^{T^*}) \quad \frac{dY}{dx} - \left[ x^{-q^*} \sum_{k=0}^{k=+\infty} A_k x^k \right] Y = 0$$

où  $q^*$  et  $r^* = \text{rang}(A_0^*)$  sont les plus petites valeurs de  $q$  et  $\text{rang}(A_0)$  lorsqu'on applique à  $A$  toutes les transformations de  $GL(n, \mathbb{C}((x)))$ .

L'invariant de J. Moser est naturellement (cf. [12] p. 380):

$$(1-3) \quad \mu(\Delta) = \inf_{T \in GL(n, \mathbb{C}((x)))} m(\Delta^T) = q^* - 1 + r^* / n$$

Dans la littérature, il existe d'autres méthodes pour le calcul de  $\mu(\Delta)$ , voir les articles de V. Dietrich [2], et E. Wagenführer ([15], [16], [17]). Ces algorithmes permettent la caractérisation de la singularité régulière d'un système différentiel linéaire par l'égalité  $q^* = 1$ .

On donne dans [7], une généralisation de ce critère, en définissant une suite d'invariants  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{q^*-1}$  associés au système différentiel  $(\Delta)$ . Un algorithme est donné pour réduire le système sous une forme appelée *super-irréductible*.

Dans le présent article, on rappelle dans le paragraphe 2, des résultats donnés dans [7]. Le paragraphe 3 traite le cas d'une équation différentielle scalaire pour laquelle on donne le calcul explicite des invariants  $\mu_k$ . Ensuite, dans les paragraphes 4 et 5, en utilisant les résultats du § 3, on démontre que le calcul de l'indice d'irrégularité de B. Malgrange ainsi que les invariants de Gérard et Levelt est immédiat à partir d'un système différentiel super-irréductible.

## 2. Systèmes différentiels super-irréductibles

On considère la fonction  $\omega$  qui à tout élément  $f$  de  $\mathbb{C}((x))$ , associe son ordre en zéro (au sens large). C'est à dire que si  $f$  est une série formelle de la forme :

$$f(x) = x^v \sum_{k=0}^{k=+\infty} f_k x^k \quad \text{avec} \quad v \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad f_0 \neq 0$$

On a  $\omega(f) = v$ . ( On prendra comme convention  $\omega(0) = +\infty$ ). On désignera dans la suite par  $\mathbb{C}[[x]]$ : l'ensemble des séries formelles  $f$  vérifiant  $\omega(f) \geq 0$ .

Soit  $M(x) = x^q A(x)$ , la partie non polaire de  $A(x)$  et  $m_{ij}(x)$ , son élément de la  $i^{\text{ème}}$  ligne,  $j^{\text{ème}}$  colonne. On pose :

$$\alpha_i = \text{Inf}_{1 \leq j \leq n} (q-1, \omega(m_{ij}))$$

La matrice du système  $(\Delta)$ , s'écrit alors d'une manière unique sous la forme :

$$(2-1) \quad A(x) = x^{-q} x^\alpha N(x)$$

où  $N$  est un élément de  $M_n(\mathbb{C}[[x]])$ ; l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n$  à coefficients dans  $\mathbb{C}[[x]]$ , avec :

$$\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad \alpha_i \in \{0, 1, \dots, q-1\}$$

Appelons  $n_i$  la multiplicité ( éventuellement nulle ) de l'entier  $i$  dans la matrice  $\alpha$ . On peut supposer sans changer la généralité (quitte à appliquer à  $A$  une permutation sur les lignes) que la matrice  $\alpha$  dans (2-1) soit de la forme :

$$\alpha = \text{diag}(0_{n_0}, I_{n_1}, 2I_{n_2}, \dots, (q-2)I_{n_{q-2}}, (q-1)I_{n'_{q-1}})$$

Où  $0_{n_0}$  est une matrice nulle d'ordre  $n_0$ ,  $I_{n_i}$  est la matrice identité d'ordre  $n_i$ , avec

$$n'_{q-1} = \sum_{i=0}^{i=q-2} n_i$$

Au système  $(\Delta)$ , on associe les nombres rationnels suivants (cf.[7]) :

$$(2-2) \quad \begin{cases} m(A) = q - 1 + \frac{n_0}{n} + \frac{n_1}{n^2} + \dots + \frac{n_{q-2}}{n^{q-1}} & \text{si } q \geq 2 \\ m(A) = 1 & \text{si } q \leq 1 \end{cases}$$

$$(2-3) \quad \mu^*(A) = \text{Inf} (m(T^{-1}AT - T^{-1}T')) \\ T \in \text{GL}(n, \mathbb{C}((x)))$$

### Définition 2.1

On dira que la matrice  $A(x)$  (ou que le système différentiel  $(\Delta)$ ) est super-irréductible si  $m(A) = \mu^*(A)$ .



**Remarque 2.2**

La super-réductibilité de la matrice  $A(x)$  ne dépend que des  $q$  premiers coefficients de son développement (i.e  $A_0, A_1, \dots, A_{q-1}$ ).  $\mu^*(A)$  peut donc être considéré comme une généralisation de l'invariant de Moser (cf. [12] ) puisque ce dernier ne dépend que de  $A_0$  et  $A_1$ .

Pour tout système  $(\Delta)$ , on introduit dans [7],  $q-1$  fonctions associées à la matrice (2-1) définies par :

$$(2-3) \quad \theta_s(A, x, \lambda) = x^{v_s} \det ( x^{q-s} A(x) + \lambda I )$$

avec

$$v_s = sn_0 + (s-1)n_1 + \dots + n_{s-1} \quad \text{pour } s = 1, 2, \dots, q-1$$

On démontre dans [7], que les fonctions  $\theta_s(A, x, \lambda)$  sont des polynômes en  $\lambda$  à coefficients dans  $\mathbb{C}[[x]]$  et:

**Théorème 1**

*Le système différentiel  $(\Delta)$  est super-irréductible si et seulement si les polynômes  $\theta_1(A, 0, \lambda), \theta_2(A, 0, \lambda), \dots, \theta_{q-1}(A, 0, \lambda)$  sont non identiquement nuls en  $\lambda$ .*

Dans le cas où  $q > 1$ , nous avons donné dans [7], un algorithme qui construit en un nombre fini de pas une transformation polynomiale, qui permet d'écrire le système  $(\Delta)$  sous une forme super-irréductible. La méthode proposée est relativement simple, car les transformations sont construites à chaque pas à l'aide de la méthode d'élimination de Gauss sur des matrices constantes d'ordre  $\leq n$ .

**Remarque 2.4**

Les polynômes  $\theta_s(A, 0, \lambda)$  dépendent seulement des  $s+1$  premiers coefficients du développement de  $A(x)$ , puisqu'on a

$$\theta_s(A, 0, \lambda) = x^{v_s} \det \left( \frac{A_0}{x^s} + \frac{A_1}{x^{s-1}} + \dots + \frac{A_{s-1}}{x} + A_s + \lambda I \right)_{|x=0}$$

### 3. Cas d'une équation différentielle scalaire

Considérons une équation différentielle linéaire homogène de la forme:

$$(D) \quad \frac{d^n y}{dx^n} - \sum_{k=1}^{k=n} a_k(x) \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} = 0$$

Nous allons voir dans ce qui suit que dans le cas d'une équation différentielle de la forme (D), le calcul de l'invariant  $\mu^*$  peut être obtenu d'une manière explicite sans avoir à utiliser l'algorithme de la super-réductibilité développé dans [7]. Pour cela, on suppose que les  $a_k$  soient de la forme

$$(3-4) \quad a_k(x) = \frac{c_k(x)}{x^{\lambda_k}} \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, n$$

où les  $\lambda_k$  désignent l'ordre du pôle des  $a_k$  au sens large, avec  $c_k(0) \neq 0$ . (On prendra  $\lambda_k = -\infty$  si  $a_k \equiv 0$ ).

#### Théorème 2

Soit  $p$ , le plus petit entier vérifiant la relation suivante:

$$(3-2) \quad p \geq \frac{\lambda_k}{k} \quad k = 1, 2, \dots, n \quad \text{et } p \geq 1$$

Soit  $r_s$  ( $s \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ ) l'entier défini par:

$$(3-3) \quad r_s = \text{Max}_{1 \leq k \leq n} (\lambda_k - k(p-s))$$

Alors l'invariant  $\mu^*(D)$  de l'équation différentielle (D) est :

$$\mu^*(D) = 1 \quad \text{si } p = 1 \quad \text{et}$$

$$\mu^*(D) = p - 1 + \frac{r_1}{n} + \frac{r_2 - 2r_1}{n^2} + \dots + \frac{r_{s+1} - 2r_s + r_{s-1}}{n^s} + \dots + \frac{r_{p-1} - 2r_{p-2} + r_{p-3}}{n^{p-1}}$$

si  $p > 1$ .

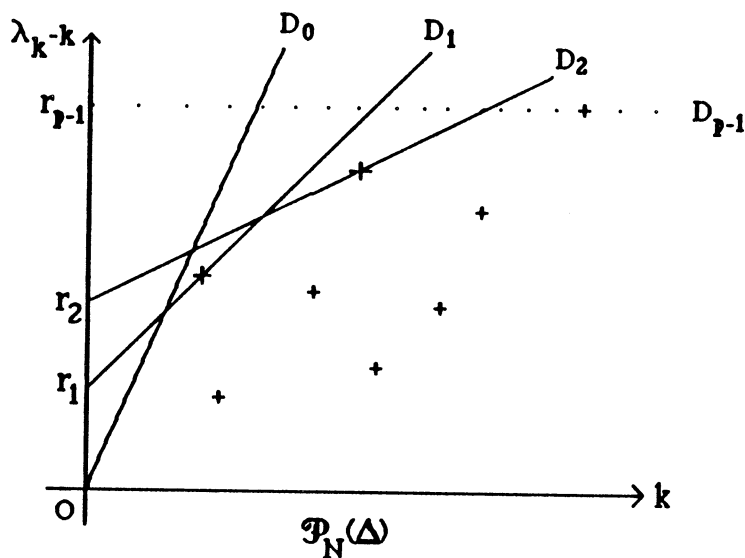
On peut considérer ce théorème comme une généralisation du résultat de Moser (cf [12], Théorème p. 382) et en même temps une généralisation du résultat bien connu dû à Fuchs qui dit que l'équation différentielle scalaire (D) admet une singularité régulière à l'origine si et seulement si  $\lambda_k - k \leq 0$  i.e  $\mu^*(D) = 1$ .

**Remarque 3.2.**

En considérant l'entier  $p$  défini dans (3-2), on peut définir le nombre  $r_s$ , pour  $s \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ , comme le plus petit entier vérifiant la relation:

$$(3-4) \quad \lambda_k - k \leq k(p-s-1) + r_s \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Ceci peut être illustré graphiquement dans un repère orthonormé de la manière suivante (voir fig. 1) :



En considérant les points  $M_k$  d'abscisses  $k$  et d'ordonnées  $\lambda_k - k \geq 0$ , on trace la droite  $D_0$  passant par l'origine et de pente le plus petit entier  $p - 1$  tel que tous les points  $M_k$  soient dans le domaine limité par l'axe des abscisses et la droite  $D_0$ . Ensuite, on trace pour tout entier  $s = 1, 2, \dots, p-1$ , la droite  $D_s$  qui parmi toutes celles qui passent par un point  $M_k$  et de pente  $p-s-1$ , se trouve au dessus de tous les autres points  $M_k$ . Le point d'intersection d'une droite  $D_s$  et l'axe des  $\lambda_k - k$  est  $r_s$ .

On définit ainsi  $p-1$  entiers  $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$  par la formule:

$$r_s = \text{Max} (\lambda_k - k (p-s)) \\ 1 \leq k \leq n$$

### Lemme 1

les suites  $(r_s) 1 \leq s \leq p-1$  et  $(r_s - r_{s-1}) 2 \leq s \leq p-1$  sont croissantes.

### Démonstration

Considérons le plus petit entier  $k_s$  qui vérifie l'égalité :

$$r_s = \lambda_{k_s} - k_s(p-s) \quad s = 1, 2, \dots, p-1$$

Par définition des  $r_s$ , on a :

$$r_{s+1} \geq \lambda_{k_s} - k_s(p-s-1) = r_s + k_s$$

et pour  $s \neq 1$

$$r_{s-1} \geq \lambda_{k_s} - k_s(p-s+1) = r_s - k_s$$

donc

$$r_{s+1} - r_s \geq k_s \geq 0$$

et

$$r_{s+1} - 2r_s + r_{s-1} \geq 0.$$

### Démonstration du théorème 2

On considère une subdivision de l'intervalle  $[0, n]$  définie de la manière suivante:

$$I_0 = [0, r_1] \quad , \quad I_s = [r_s - r_{s-1}, r_{s+1} - r_s] \quad \text{pour } s = 1, 2, \dots, p-2$$

$$\text{et} \quad I_{p-1} = [r_{p-1} - r_{p-2}, n] \quad (\text{avec la convention } r_0 = 0)$$

On pose :

$$(3-5) \quad \begin{aligned} \delta_k &= pk && \text{si } k \in I_0 \\ \delta_k &= (p-s)k + r_s && \text{si } k \in I_s \text{ pour } s=1,2,\dots,p-1 \end{aligned}$$

En vertu des inégalités (3-2) et (3-4), on a pour tout  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , la relation suivante :

$$(3-6) \quad \lambda_k \leq \delta_k$$

De plus, d'après (3-3), pour tout  $s \in \{2, 3, \dots, p-1\}$ , il existe  $k_s \in I_s$  pour lequel l'inégalité (3-4) est atteinte.

Soit  $C(x)$ , la matrice compagnon associée à l'équation différentielle (D):

$$C(x) = \begin{bmatrix} 0 & & & & 1 \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ a_n & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{bmatrix}$$

L'équation (D) peut alors être écrite matriciellement sous la forme

$$(3-4) \quad \frac{dU}{dx} = C(x) U(x)$$

où

$$U(x) = \left( y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \right)$$

Posons

$$\delta = \text{diag} (\delta_n, \delta_{n-1}, \dots, \delta_1)$$

où les  $\delta_k$  sont les entiers définis dans (3-5). Le système (3-7) peut alors s'écrire sous



Montrons que la matrice du système (3-8) définie par:

$$M(x) = \frac{B(x)}{x^p} - \frac{\delta}{x}$$

est super-irréductible.

Si  $p=1$ , dans ce cas  $M(x)$  est par définition super-irréductible. on a alors  $x=0$  est une singularité régulière et donc  $m(A) = \mu^*(A) = 1$ .

Si  $p > 1$ , puisque la matrice  $\delta/x$  est d'ordre polaire égal à 1, d'après la remarque 2.4, nous ne considérerons que la partie :

$$M^{(1)}(x) = x^{-p} B(x)$$

Il suffit donc de démontrer, en vertu du théorème 1 que les fonctions  $\theta_s(M^{(1)}, 0, \lambda)$  sont toutes non identiquement nulles en  $\lambda$ .

On a :

$$M^{(1)}(x) = x^{-p} B(x) = x^{-p} x^\alpha N(x)$$

où  $N$  est un élément de  $M_n(\mathbb{C}[[x]])$  et :

$$\alpha = \text{diag}((p-1)I_{m_{p-1}}, (p-2)I_{m_{p-2}}, \dots, I_{m_1}, 0_{m_0})$$

D'après les relations (3-9) et (3-10), on peut avoir par récurrence la relation suivante:

$$(3-11) \quad r_s = sm_0 + (s-1)m_1 + \dots + m_{s-1} \quad \text{pour } s = 1, 2, \dots, p-1$$

où les  $m_i$  sont les entiers définis dans (3-9) et (3-10). Les fonctions  $\theta_s(M^{(1)}, x, \lambda)$  associées à  $M^{(1)}$  sont donc :

$$(3-12) \quad \theta_s(M^{(1)}, x, \lambda) = x^{r_s} \det(x^{p-s}M^{(1)}(x) + \lambda I)$$

on a

$$\theta_s(M^{(1)}, x, \lambda) \in \mathbb{C}[[x]][\lambda]$$

En effet, soit

$$\epsilon_s = \text{diag}(0_{m'_s}, I_{m_{s-1}}, 2I_{m_{s-2}}, \dots, sI_{m_0})$$

où

$$m'_s = n - \sum_{i=0}^{s-1} m_i$$

puisque  $\det(x^{\epsilon_s}) = x^{r_s}$ , en faisant entrer  $x^{\epsilon_s}$  dans le déterminant (3-12), on obtient:

$$(3-13) \quad \theta_s(M^{(1)}, x, \lambda) = \det(x^{\epsilon_s + \alpha - sI} N(x) + \lambda I)$$

Comme  $\epsilon_s + \alpha - sI$  est à coefficients positifs ou nuls,  $x^{\epsilon_s + \alpha - sI} N(x)$  est donc à coefficients dans  $\mathbb{C}[[x]]$ . En faisant  $x = 0$  dans (3-13), on a :

$$\theta_s(M^{(1)}, 0, \lambda) = \det(g_s(M^{(1)}, \lambda))$$

où

$$g_s(M^{(1)}, \lambda) = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} m'_s \\ \lambda \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad 1 \\ \quad \quad \lambda \end{array} & \begin{array}{c} t_{s-1} \\ 0 \\ 1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ b_n(0) \dots b_{t_{s-1}+1}(0) \end{array} & \begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad 1 \\ b_{t_{s-1}}(0) \dots b_2(0) \quad b_1(0) \end{array} \end{array}$$

avec

$$t_{s-1} = m_0 + m_1 + \dots + m_{s-1}, \quad m'_s = n - t_{s-1}$$



En développant le déterminant de la matrice  $g_s(M^{(1)}, \lambda)$ , on obtient:

$$\det(g_s(M^{(1)}, \lambda)) = (-1)^{t_{s-1}} \lambda^{n-t_{s-1}} b_{t_{s-1}}(0) + (-1)^{t_{s-1}+1} \lambda^{n-t_{s-1}-1} b_{t_{s-1}+1}(0) \\ + \dots + (-1)^{n-1} \lambda b_{n-1}(0) + (-1)^n b_n(0)$$

D'après la relation (3-3), on sait qu'il existe au moins  $k_s \in I_s$  avec  $s \in \{2, 3, \dots, p-1\}$ , tel que

$$(3-14) \quad \lambda_{k_s} = \delta_{k_s} = (p-s)k_s + r_s$$

Soit  $k_s$ , le plus petit entier appartenant à  $I_s = [t_{s-1}, t_s]$  (où  $t_s = t_{s-1} + m_s$ ) et vérifiant l'égalité (3-14). Le coefficient du plus haut degré du polynôme  $\theta_s(M^{(1)}, 0, \lambda)$  est alors  $(-1)^{k_s} b_{k_s}(0)$ . Donc

$$\det(g_s(M^{(1)}, \lambda)) = (-1)^{k_s} \lambda^{n-k_s} b_{k_s}(0) + \dots$$

avec  $b_{k_s}(0) \neq 0$ . D'où

$$\theta_s(M^{(1)}, 0, \lambda) = \det(g_s(M^{(1)}, \lambda)) \neq 0$$

Le système différentiel (3-7) est donc super-irréductible. Par conséquent

$$\mu^*(D) = p-1 + \frac{m_0}{n} + \frac{m_1}{n^2} + \dots + \frac{m_{p-2}}{n^{p-1}}$$

avec

$$m_s = r_{s+1} - 2r_s + r_{s-1} \quad s = 1, 2, \dots, p-2$$

où les  $r_s$  sont les entiers définis par la relation (3-3).

#### 4. Indice d'irrégularité de B. Malgrange

Dans son article [10], B. Malgrange définit pour tout système  $(\Delta)$ , un indice appelé l'irrégularité du point singulier. Le calcul de cet indice peut être obtenu en utilisant la méthode du vecteur cyclique [4]. Cette méthode consiste à réduire tout système différentiel de la forme  $(\Delta)$  à une seule équation différentielle scalaire. Malheureusement elle s'avère d'un maniement lourd et coûteux d'autant plus que le calcul de cet invariant est déterminé uniquement par les valuations des coefficients de l'équation différentielle obtenue par la méthode. B. Malgrange [11] démontre que l'irrégularité du point singulier ne dépend pas du choix du vecteur cyclique. Se basant sur ce critère, on démontre dans ce paragraphe que le calcul de l'indice d'irrégularité est obtenu d'une manière directe à partir d'un système écrit sous une forme super-irréductible sans l'utilisation de vecteur cyclique. Nous rappelons brièvement cette méthode;

##### 4.1. Méthode du vecteur cyclique

On pose

$$Y_0(x) = (\beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x))$$

un vecteur ligne à  $n$  composantes, où les  $\beta_i(x)$  sont des fonctions arbitraires. La récurrence :

$$(4-1) \quad Y_{k+1} = \frac{dY_k}{dx} + Y_k A(x) \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

définit une matrice carrée  $Q(x)$  d'ordre  $n$  dont les lignes sont:  $Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}$ .

##### Définition:

*On dit que  $Y_0$  est un vecteur cyclique de la matrice  $A(x)$ , si  $Q$  est une matrice inversible.*

J. P. Ramis [13], démontre que les  $\beta_k(x)$  peuvent toujours être choisis en tant que polynômes de degré  $\leq n-1$ , pour que la matrice  $Q$  soit inversible. Dans ce cas on pose  $T = Q^{-1}$  et le changement de variables

$$Y(x) = T(x)Z(x)$$

transforme ( $\Delta$ ) en un système dont la matrice est sous une forme compagnon:

$$(4-2) \quad C(x) = T^{-1}AT - T^{-1} \frac{dT}{dx} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ a_n & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{bmatrix}$$

Les  $a_k$  représentent naturellement les coefficients de l'équation différentielle correspondant au système ( $\Delta$ ) et obtenue à l'aide du vecteur cyclique  $Y_0$ . On notera  $E_{\Delta}(Y_0)$  cette équation. Les  $a_k$  s'obtiennent en calculant  $n+1$  déterminants; on a (cf. [4] pour les détails) :

$$a_k(x) = \frac{\det(Y_0^t, Y_1^t, \dots, Y_{n-k-1}^t, Y_{n-k+1}^t, \dots, Y_n^t)}{\det(Y_0^t, Y_1^t, \dots, Y_{n-1}^t)}$$

On supposera dans la suite que les  $a_k$  sont de la forme (3-1). En appliquant le théorème 2 à l'équation différentielle  $E_{\Delta}(Y_0)$ , on obtient le résultat :

**Corollaire :**

*Si le système ( $\Delta$ ) est super-irréductible et si  $q \geq 2$ , i.e.:*

$$\mu^*(A) = m(A) = q - 1 + \frac{n_0}{n} + \frac{n_1}{n^2} + \dots + \frac{n_{q-2}}{n^{q-1}}$$

*alors, quelque soit le choix du vecteur cyclique, on a les égalités :*

$$(4-3) \quad p = q, n_0 = r_1 \quad \text{et} \quad n_s = r_{s+1} - 2r_s + r_{s-1} \quad s = 1, 2, \dots, p-1$$

*où  $p, r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$  sont les entiers définis par les relations (3-2) et (3-3), avec  $r_0 = 0$ .*

**Démonstration :**

Soit  $E_{\Delta}(Y_0)$ , l'équation différentielle obtenue à partir du système  $(\Delta)$  à l'aide du vecteur cyclique  $Y_0$ . Soit  $C(x)$  sa matrice compagnon définie dans (4-2) et

$$(4-4) \quad \frac{dY}{dx} = C(x)Y(x)$$

le système différentiel correspondant. D'après le théorème 2, en appliquant au système (4-4) la transformation :

$$Y(x) = x^{\delta}Z(x)$$

où  $\delta$  est la matrice diagonale donnée par les formules (3-5). Par une telle transformation, on obtient un système super-irréductible de la forme:

$$(4-5) \quad \frac{dZ}{dx} = \left( x^{-p} B(x) - \frac{\delta}{x} \right) Z(x)$$

Les systèmes  $(\Delta)$  et (4-5) sont donc équivalents par la transformation

$$S(x) = T(x) x^{\delta}$$

Comme ils sont tous les deux super-irréductibles, on a :

$$p-1 + \frac{r_1}{n} + \frac{r_2 - 2r_1}{n^2} + \dots + \frac{r_{p-1} - 2r_{p-2} + r_{p-3}}{n^{p-1}} = q-1 + \frac{n_0}{n} + \frac{n_1}{n^2} + \dots + \frac{n_{q-2}}{n^{q-1}}$$

D'où les égalités (4-3). c.q.f.d.

Nous supposons alors dans la suite, que le système différentiel  $(\Delta)$  est super-irréductible et que les égalités (4-3) sont vérifiées.

## 4.2. Calcul de l'indice d'irrégularité

B. Malgrange (cf.[10], p. 150) associe à tout système  $(\Delta)$ , un indice  $i(\Delta) \geq 0$ , tel que si  $Y_0$  est un vecteur cyclique de la matrice  $A(x)$  du système  $(\Delta)$ , on a :

$$i(\Delta) = \text{Max}_{1 \leq k \leq n} (0, \lambda_k - k)$$

La singularité régulière est caractérisée par la nullité de  $i(\Delta)$ . Le théorème 2 et le corollaire précédent donnent le résultat suivant :

### Proposition 4.2

*Si le système différentiel  $(\Delta)$  est super-irréductible et si  $q \geq 2$ , alors :*

$$i(\Delta) = r_{q-1} = (q-1)n_0 + (q-2)n_1 + \dots + n_{q-2}.$$

## 5. Invariants de Gérard et Levelt

Gérard et Levelt [3], associent à tout système  $(\Delta)$ , des entiers  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{q^*-1}$ , où  $q^*$  est la plus petite valeur de l'entier  $q$  supérieur ou égal à 1, lorsqu'on applique à  $A$  toutes les transformations de  $GL(n, \mathbb{C}((x)))$ . Ils montrent ensuite, que les invariants  $\rho_s$  peuvent être obtenus à l'aide de la méthode du vecteur cyclique. Dans [15], E. Wagenführer propose une méthode de calcul de ces invariants utilisant des transformations méromorphes. De la même manière que le paragraphe précédent, nous montrons ici que ces invariants, sont obtenus d'une manière immédiate à partir de  $(\Delta)$ .

### 5.1. Calcul des $\rho_s$ par la méthode du vecteur cyclique

Au système  $(\Delta)$ , on associe le système :

$$(\Delta_s) \quad \mathfrak{D}_s Y(x) = x^s A(x) Y(x)$$

où  $\mathfrak{D}_s = x^s d/dx$ , où  $s$  un entier donné compris entre 1 et  $p-1$ .

Soit  $Y_0$  un vecteur cyclique de la matrice  $A(x)$ . Considérons au lieu des vecteurs  $Y_k$  définis par les relations de récurrence (4-1), les vecteurs :

$$Z_k(x) = x^{sk} Y_k \quad k=0, 1, \dots, n$$

Les relations (4-1) deviennent :

$$(5-1) \quad Z_{k+1}(x) = x^s \frac{dZ_k}{dx} + Z_k [x^s A(x) - skx^{s-1} I_n] \quad k=0, 1, \dots, n$$

où  $I_n$  désigne la matrice identité d'ordre  $n$ .

L'équation différentielle correspondante au système  $(\Delta_s)$  et associée au vecteur cyclique  $Y_0$  est alors de la forme :

$$E_{\Delta_s}(Y_0) \quad (\mathfrak{D}_s)^n y + b_1(x)(\mathfrak{D}_s)^{n-1} y + \dots + b_k(x)(\mathfrak{D}_s)^{n-k} y + \dots + b_n(x)y = 0$$

avec

$$b_k(x) = \frac{\det(Z_0^1, Z_1^1, \dots, Z_{n-k-1}^1, Z_{n-k+1}^1, \dots, Z_n^1)}{\det(Z_0^1, Z_1^1, \dots, Z_{n-1}^1)}$$

On suppose que les  $b_k(x)$  soient de la forme :

$$(5-2) \quad b_k(x) = x^{-\sigma_k} d_k(x) \quad k=1, 2, \dots, n$$

où les  $\sigma_k$  désignent l'ordre du pôle des  $b_k$  au sens large, avec  $d_k(0) \neq 0$  (On prendra  $\sigma_k = -\infty$  si  $b_k \equiv 0$ ). Les invariants de Gérard et Levelt (cf.[3], thm 3.1, p. 171) peuvent alors être déterminés par la formule suivante:

$$(5-3) \quad \rho_s = \text{Max}(0, \sigma_k) \\ 1 \leq k \leq n$$

### 5.2. Calcul des Invariants $\rho_s$ à partir d'un système super-irréductible

Supposons que le système différentiel  $(\Delta_s)$  soit super-irréductible. En identifiant les coefficients de l'équation différentielle  $E_{\Delta_s}(Y_0)$  et ceux de  $E_{\Delta}(Y_0)$ , on obtient :

$$\sigma_k = \lambda_k - ks$$

D'après les relations (5-3) et (3-3), on a donc

$$\rho_s = \text{Max}_{1 \leq k \leq n} (0, \lambda_k - ks) = \text{Max}_{1 \leq k \leq n} (0, \lambda_k - k[p - (p-s)]) = r_{p-s}$$

D'où le résultat:

#### Proposition 5.1

*Si le système différentiel  $(\Delta)$  est super-irréductible et si  $q \geq 2$  alors les invariants de Gérard et Levelt sont :*

$$\rho_s = r_{q-s} = (q-s)n_0 + (q-s-1)n_1 + \dots + n_{q-s-1}$$

pour  $s = 1, 2, \dots, q-1$ .

## 6. Exemple et Conclusion

L'exemple suivant est traité dans [7], sur lequel nous avons appliqué l'algorithme permettant de transformer un système sous une forme super-irréductible. Soit

$$(6-1) \quad \frac{dY}{dx} = \frac{1}{x^4} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & x & x^6 & x^5 \end{pmatrix} Y(x)$$

La transformation (cf.[7], pour les calculs) :

$$T(x) = \begin{pmatrix} 0 & x^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ x^3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

transforme le système différentiel (6-1), en un système super-irréductible:

$$(6-2) \quad \frac{dZ}{dx} = \frac{1}{x^3} \begin{bmatrix} x^4-3x^2 & 0 & 0 & 1+x \\ 1 & -3x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{bmatrix} Z(x)$$

On a

$$q = 3, n_0 = 1, n_1 = 3, r_1 = 1, r_2 = 5$$

Le système (6-2) est super-irréductible car, si on désigne par  $A^*(x)$ , la matrice du système, on a :

$$\theta_1(A^*, 0, \lambda) = x \det(x^2 A^*(x) + \lambda I) |_{x=0} \equiv -1$$

$$\theta_2(A^*, 0, \lambda) = x^5 \det(x A^*(x) + \lambda I) |_{x=0} \equiv -1$$

En vertu des propositions 4.2 et 5.1, nous avons donc les égalités :

$$\rho_1 = i(\Delta) = r_2 = 5, \quad \rho_2 = r_1 = 5$$

On peut remarquer à partir de cet exemple que la forme super-irréductible donne une classification plus générale de la singularité irrégulière des systèmes différentiels. Par un argument identique à celui utilisé dans cet article, on peut comparer les entiers  $r_s$  ( $s=1,2, \dots, p-1$ ) avec les quantités  $d_m^{(s)}$  ( $m, s = 1,2, \dots, p-1$ ) définies par E. Wagenführer [16], avec les invariants  $i^{(s)}(D)$  ( $s = 1,2, \dots, p-1$ ) introduits récemment par D. A. Lutz et R. Shäfer dans [9]. En effet, d'après ([9], thm. 3.3, p. 30), on a pour  $s = 1, 2, \dots, q-1$  les relations :

$$\rho_s = i^{(s)}(D) = n(q-s) - d_m^{(s)} = r_{q-s} = (q-s)n_0 + (q-s-1)n_1 + \dots + n_{q-s-1}$$



où les  $\rho_s$  sont les invariants de Gérard et Levelt définis dans (5-3).

D'un point de vue pratique deux méthodes sont connues pour la construction effective des transformations permettant de réduire le système sous une forme où le calcul de ces invariants est immédiat. La première, proposée par E. Wagenfürher [17], est basée sur le critère de Gérard et Levelt. La deuxième appelée super-réductibilité et développée dans [7], donne des transformations élémentaires construites par la méthode de Gauss lorsque les fonctions  $\theta_k(A, x, \lambda)$  sont identiquement nulles. Ces fonctions ont l'avantage de déterminer le polygone de Newton-Puiseux du système. Ceci est démontré dans [18], où A. Wazner donne sous des conditions supplémentaires sur les fonctions  $\theta_k(A, x, \lambda)$ , la construction effective du polygone de Newton associé au système différentiel considéré.

**Références**

- [1] **P. DELIGNE**  
Equations différentielles à points singuliers réguliers.  
Lectures Notes in Mathematics 163, Springer-Verlag, 1970.
- [2] **V. DIETRICH**  
Zur Reduktion von Linearen  
Differentialgleichungssystemen  
Math. Ann. 237, 79-95, (1978)
- [3] **R. GERARD et A. H. M. LEVELT**  
Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier  
des systèmes différentiels linéaires.  
Ann. Inst. Fourier, 23-1(1973), p. 157-195
- [4] **A. HILALI**  
Contribution à l'étude des points singuliers  
des systèmes différentiels linéaires.  
Thèse de 3<sup>o</sup> cycle, IMAG, Grenoble (1982).
- [5] **A. HILALI et A. WAZNER**  
Un algorithme de calcul de l'invariant de Moser  
R. R n°487, TIM3, IMAG, Grenoble (1984)
- [6] **A. HILALI et A. WAZNER**  
Un algorithme de Calcul de l'invariant de Katz  
d'un système différentiel linéaire  
Ann. Inst. Fourier Vol. 3-36(1986), p. 67-81.
- [7] **A. HILALI et A. WAZNER**  
Formes super-irréductibles des systèmes différentiels linéaires.  
Num. Math. 50 (1987), p. 429-449.
- [8] **K. KITAGAWA**  
L'irrégularité en un point singulier d'un système d'équations différentielles  
linéaires d'ordre 1.  
J. Math. Kyoto Univ. 23-3 (1983) 427-440.

- [9] **D. A. LUTZ and R. SCHÄFKE**  
On the identification and stability of formal invariants for singular  
Differential equations, *Linear algebra and its applications*, 72: 1-46 (1985).
- [10] **B. MALGRANGE**  
Sur les points singuliers des équations différentielles,  
*L'enseignement mathématique*, t.XX, 1-2, 147-176(1974).
- [11] **B. MALGRANGE**  
Sur la réduction formelle des équations différentielles  
à singularité irrégulière. Preprint Inst. Fourier.Grenoble(1981)
- [12] **J. MOSER**  
The order of singularity in Fuch's theory  
*Math. Zeitschrift*. 72, 379-398 (1960).
- [13] **J. P RAMIS**  
Théorème d'indice de Gevrey pour les équations différentielles ordinaires  
Pub. IRMA, Strasbourg (1981).
- [14] **L.R. VOLEVIC**  
On general systems of differential equations,  
*Dokl. Acad. Nauk SSSR=Soviet. Math. Dokl.*, 1 (1960), 458-461.
- [15] **E. WAGENFÜHRER**  
On the invariants measuring the irregularity of linear differential equations  
at a singular point  
*Analysis* 3,369-384 (1983)
- [16] **E. WAGENFÜHRER**  
On the regularity of systems of linear differential equations  
at a singular point. *Analysis* 4,264-298 (1984)
- [17] **E. WAGENFÜHRER**  
On meromorphic transformations reducing the Poincaré rang of a linear  
differential equations at a singular point, ( à paraître)
- [18] **A. WAZNER**  
Sur les points singuliers des systèmes différentiels linéaires.  
Thèse de doctorat, IMAG, TIM3 , (prévue fin 1987).

## **CHAPITRE 7**

# **SUR LES POLYGONES ALGEBRIQUE ET DIFFERENTIEL DE NEWTON-PUISEUX**



# ON THE ALGEBRAIC AND DIFFERENTIAL NEWTON-PUISEUX POLYGONS

A. HILALI

Equipe de Calcul Formel, Laboratoire TIM3,  
Institut National Polytechnique de Grenoble  
46, Ave Félix Vialet, 38031- Grenoble-cédex

*A PARAITRE DANS JOURNAL OF SYMBOLIC COMPUTATION*

## **Abstract**

This paper deals with the system of  $n$  linear differential equations

$$(\Delta) \quad Y'(x) = A(x) Y(x)$$

where  $A(x)$  is holomorphic in a punctured neighbourhood of  $x = 0$  with a pole of order  $p \geq 1$ . First, we shall give a survey of the algorithm described in [6] by which a system  $(\Delta)$  is reduced to super-irreducible form. Using the symmetric functions of the matrix  $A$ , the construction of the Newton-Puiseux polygon is demonstrated to be derived directly from this form. These results allow a generalization of the formal singularity classification and a method for the computation of formal solutions near an irregular singular point of  $(\Delta)$ .

## 1. Introduction

Let us consider the system of  $n$  linear ordinary differential equations

$$(Δ) \quad Y'(x) = x^{-p} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k \right) Y(x) = A(x) Y(x)$$

where  $p$  is an integer, and the  $A_k$  are constant  $n \times n$  matrices for which the series converges in the neighbourhood of  $x = 0$ . If we assume that the system  $(Δ)$  has an *irregular singular point* near the origin, then structural properties induced on  $A(x)$  can be investigated.

A fundamental matrix of solutions for such a system can be represented [10], [15] as:

$$(1.2) \quad \Phi(x) = F(x^{1/s}) \cdot x^\Lambda \cdot \exp[Q(x^{-1/s})]$$

where  $s$  is a positive integer,

$$Q(x^{-1/s}) = \text{diag}(q_1(x^{-1/s}), q_2(x^{-1/s}), \dots, q_n(x^{-1/s}))$$

is a polynomial in  $x^{-1/s}$  without constant term,  $\Lambda$  is a constant matrix and  $F(x^{1/s})$  is formal meromorphic series in  $x^{1/s}$ , i.e. expression of the form:

$$F(x^{1/s}) = \sum_{k=-v}^{+\infty} F_k x^{k/s}$$

where  $v$  is a positive integer.

For  $p \leq 0$ , the origin is a *regular point* of  $(Δ)$  and every fundamental solution is represented by (1.2) with  $C = 0$ ,  $Q(x^{-1/s}) \equiv 0$  and  $s=1$ .

For  $p = 1$ , the origin is a *regular singular point*, and a fundamental solution is designated by (1.2) with  $Q(x^{-1/s}) \equiv 0$  and  $s = 1$ . This may be true also for  $p > 1$ ; in this case, the reducibility algorithm described in [5] is applied. This algorithm allows us to construct a transformation  $T(x)$  such that the change of unknown:

$$(1.3) \quad Y(x) = T(x)Z(x)$$

reduces  $(\Delta)$  into a system

$$(\Delta^*) \quad Z'(x) = B(x)Z(x)$$

with

$$B = T^{-1}AT - T^{-1}T'$$

where  $B(x)$  has a pole of order one only. Here  $T(x)$  is a matrix whose elements are polynomials and satisfies  $\det(T(x)) \neq 0$ . In this case, one can compute a fundamental solution matrix [5]. Two matrices  $A$  and  $B$  ( or systems  $(\Delta)$  and  $(\Delta^*)$ ) which satisfy the above equation are called *equivalent* since the behaviour of the solutions near the singularity is the same.

When the singularity is irregular the problem is to classify the system up to analytic or formal equivalence. These classifications are closely related to the computation of formal solutions near the origin. It is easy to see that apart from the ordering of the diagonal elements of the matrix  $Q(x^{-1/s})$ , is invariant with respect to the class of formal transformations (1.3). These quantities can be obtained by applying the *Newton-Polygon algorithm* [2], [12]. This algorithm calculates, after a finite number of steps, the polynomials  $q_1(x^{-1/s}), q_2(x^{-1/s}), \dots, q_n(x^{-1/s})$ , and  $C$ , and allows through a recursive calculation, to compute the coefficients  $F_k$ .

The general method consists in reducing the system  $n \times n$  into a scalar linear differential equation of the  $n^{\text{th}}$  order. It is well known that this method, the *cyclic vector method* [5], allows the computation of the Newton-Polygon. It is associated, however, with several practical difficulties. The coefficients  $a_k$ , of the scalar differential equation, as found by this method, particularly, are far larger than necessary (see an example in [5]). In particular we point out that the Newton polygon is uniquely determined by the valuations of  $a_k$ , and it is desirable to have an alternative criterion depending directly on  $(\Delta)$ .

In this paper we give an algorithm for the construction of the Newton polygon directly from the system without using the cyclic vector method. We will call the desired result the *differential polygon*. From a linear differential system, it is easy to compute what might be called the *algebraic polygon*.



The purpose of this paper is to manipulate the system  $(\Delta)$  with the assumption that:

- (1) The differential Newton polygon is invariant (cf. [12] or [14]) with respect to the class of formal transformation (1.3).  
such that:
- (2) The algebraic and the differential Newton polygons are equal.

Section 2 explains how to compute the differential polygon via a cyclic vector, and defines the algebraic polygon in terms of the  $n$  symmetric functions of  $\Lambda(x)$ . Section 3 gives a summary of the algorithm described in [6] where the system  $(\Delta)$  is reduced to *super-irreducible* form. The link between the two polygons is demonstrated and a sequence of integers related to  $(\Delta)$  are defined.

In section 4, A criterion depending on these integers is given, such that the differential and the algebraic Newton polygons are equal. Section 4.2 shows that if this criterion is not satisfied, then the change of independent variable  $x = t^m$  (the suitable choice of  $m$  is given) reduces the problem to the previous case.

## 2. Algebraic and differential Newton Polygons of a linear differential system

### 2.1 Cyclic vector method

This method consists of reducing  $(\Delta)$  to an  $n^{\text{th}}$  order equation for some component or linear combination of components of  $Y(x)$ . In outline, we write:

$$X_0(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_n(x))$$

where the  $\xi_i(x)$  are random polynomials (cf.[13]) of degree  $\leq n-1$ . The recurrence

$$X_i = X'_{i-1} + X_{i-1}A$$

defines a matrix  $Q$  as:

$$(2.1) \quad Q(x) = (X_0^t, X_1^t, \dots, X_{n-1}^t)$$

If  $Q$  is non-singular, we say that  $X_0$  is a *cyclic vector*. In this case we write  $T = Q^{-1}$ , and the transformation  $Y(x)=T(x)Z(x)$  reduces the matrix  $A(x)$  to a companion-matrix:

$$(2-2) \quad C(x) = T^{-1}AT - T^{-1}T' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ a_n & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{bmatrix}$$

where the  $a_k$  are the coefficients of the  $n^{\text{th}}$  order differential equation related to  $(\Delta)$  obtained from the cyclic vector  $X_0$ . We will denote this equation as follows:

$$E_{\Delta}(X_0) \quad y^{(n)} - a_1(x)y^{(n-1)} - a_2(x)y^{(n-2)} \dots - a_n(x)y = 0$$

### 2.2. Differential Polygon: $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$

Let  $E_{\Delta}(X_0)$  be an  $n^{\text{th}}$  order differential equation obtained from  $(\Delta)$  by any cyclic vector  $X_0$ , and let  $\lambda_k \geq 0$  be the pole order of  $a_k$  at  $x = 0$  ( $\lambda_k = 0$  if  $a_k$  is regular at  $x = 0$ ). In  $\mathbb{R}^2$ , we consider the closed convex hull  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  of the set (see [10]):

$$\mathcal{M} = \{(x,0) / x \in [0, +\infty[ \} \cup \{(j, \lambda_j - j) \quad j=1,2,\dots,n; \text{ with } \lambda_j > j \}$$

i.e. the positive  $x$ -axis and the points  $(j, \lambda_j - j)$  above the  $x$ -axis. The boundary of  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  ( see fig. 2.2) consists of the positive  $x$ -axis, the segments between each pair of successive points out of  $(0,0)$ ,  $(j_0, \lambda_{j_0} - j_0)$ ,  $\dots$ , and  $(j_m, \lambda_{j_m} - j_m)$  ( where the  $j_i$  are integers such  $0 < j_0 < j_1 < \dots < j_m \leq n$  ) and the ray

$$\{(x, \lambda_{j_m} - j_m) / x \geq \lambda_{j_m} - j_m\}.$$

Then the slopes of the Newton polygon are respectively:

$$\pi_0 = \frac{\lambda_{j_0} - j_0}{j_0}, \quad \pi_s = \frac{(\lambda_{j_s} - j_s) - (\lambda_{j_{s-1}} - j_{s-1})}{j_s - j_{s-1}}$$

$s = 1, 2, \dots, m$

with multiplicity  $j_0, j_s - j_{s-1}$  ( $s = 1, 2, \dots, m$ ) and  $\pi_s = 0$  occurs (possibly) with multiplicity  $n - j_m$  if  $j_m < n$ .

In [10], D. A. Lutz and R. Shäfke, show how these slopes may be used to calculate the degrees of the individual polynomials  $q_j(x^{-1/s})$  in (1.2).

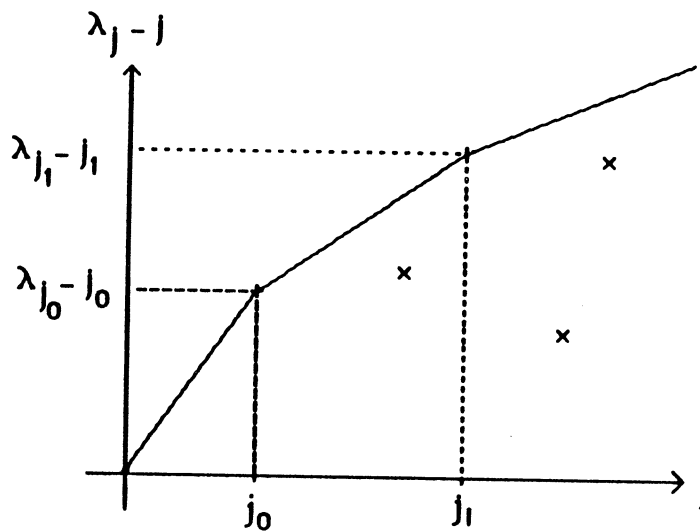


fig. 2.2

We will denote

$$\beta_k = \lambda_k - k \quad k = 1, 2, \dots, m$$

**Remark 2.2**

The slopes  $\pi_s$  of  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  defined above can be computed as follows:

$$(2.3) \quad \pi_0 = \text{Max}_{1 \leq j \leq r} \left\{ 0, \frac{\beta_j}{j} \right\} = \frac{\beta_{j_0}}{j_0}$$

where  $j_0$  is the smallest integer which satisfies (2.3). Then for each integer  $s$ , we have:

$$(2.4) \quad \pi_s = \text{Max}_{j_{s-1} < j \leq n} \left\{ 0, \frac{\beta_j - \beta_{j_{s-1}}}{j - j_{s-1}} \right\} = \frac{\beta_{j_s} - \beta_{j_{s-1}}}{j_s - j_{s-1}}$$

where  $j_s$  is the smallest integer  $> j_{s-1}$  which satisfies (2.4). This recurrence stops when  $\pi_s = 0$  or  $j_s = n$ .

### 2.3. Algebraic Polygon: $\mathcal{P}_{\text{alg}}(\Delta)$

Of course, the obvious approach to solve our problem is to use the cyclic vector method which transforms our matrix  $A(x)$  to a companion matrix (2.2). Then the pole orders of the  $a_k$  ( $k=1,2,\dots,n$ ) let one compute  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$ . It is well known that this polygon is independent of the particular cyclic vector used (see [12]). But if we define the symmetric function of rank  $k$  of a matrix to be  $(-1)^k$  times the coefficient of  $\lambda^{n-k}$  in its characteristic polynomial, the polygon can be constructed invariantly using the terms of the  $n$  symmetric functions of the companion matrix. Thus the Newton-Polygon of  $(\Delta)$  is the same as that of the following differential operator:

$$(2.5) \quad \det(QAQ^{-1} + Q'Q^{-1} + \lambda I) \Big|_{\lambda = d/dx}$$

where  $Q(x)$  is the matrix defined in (2.1). But the  $n$  symmetric functions are invariants with respect to similarity transformations since determinant (2.5) is equal to:

$$\det(A(x) + Q^{-1}Q' + \lambda I) \Big|_{\lambda = d/dx}$$

Then the computation of  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  can be obtained using the  $n$  symmetric functions of

$$A(x) + Q^{-1}Q'$$

It is therefore natural to introduce what might be called the algebraic polygon related to  $(\Delta)$  as:

$$\mathcal{P}_{\text{alg}}(\Delta) = \mathcal{P}_{\text{diff}}((\det(A(x) + \lambda I)) \mid \lambda = d/dx)$$

### 3. Link between $\mathcal{P}_{\text{alg}}(\Delta)$ and $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$

Let  $\omega$  be the function such that, for each formal series:

$$(3.1) \quad f(x) = x^v \sum_{k=0}^{+\infty} f_k x^k \quad \text{where} \quad v \in \mathbb{Z} \quad \text{and} \quad f_0 \neq 0$$

$\omega(f) = v$ , with the convention  $\omega(0) = +\infty$ .

We will denote  $\mathbb{C}((x))$  the field of formal series of type (3.1).  $\mathbb{C}[[x]]$  will represent the set of formal series which satisfies  $\omega(f) \geq 0$ . Then for each system  $(\Delta)$ , we define  $n$  integers as:

$$\alpha_i = \inf_{1 \leq j \leq n} (p-1, \omega(m_{ij})) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

where  $m_{ij}$  is the coefficient in position  $(i,j)$  of the matrix  $M(x) = x^p A(x)$ . Then the matrix  $A(x)$  can be written uniquely in the form:

$$(3.2) \quad A(x) = x^{-p} x^\alpha N(x) \quad \text{with} \quad N(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} N_k x^k$$

where the  $N_k$  are  $n \times n$ - constant matrices with  $N_0 \neq 0$  and

$$\alpha = \text{diag} (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \quad \text{with} \quad \alpha_i \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$$

A permutation matrix  $P$  exists such that  $A = P^{-1}AP$  is of the form (3.2) with  $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$ . Then without loss of generality, we may assume that  $\alpha$  is of

the following form:

$$(3.3) \quad \alpha = \text{diag} (0_{n_0}, I_{n_1}, 2I_{n_2}, \dots, (p-2)I_{n_{p-2}}, (p-1)I_{n'_{p-1}})$$

where  $n_i$  is the multiplicity of integer  $i$  in  $\alpha$  which might be eventually equal to zero,  $0_{n_0}$  is a  $n_0 \times n_0$ -zero matrix,  $I_{n_i}$  is the  $n_i \times n_i$ -identity matrix, and

$$(3.4) \quad n'_{p-1} = n - \sum_{i=0}^{i=p-2} n_i$$

For each matrix  $A(x)$  represented by (3.2), let us consider (cf.[6]) the rational numbers:

$$(3.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} m(A) = p - 1 + \sum_{i=0}^{p-2} \frac{n_i}{i+1} \quad \text{if } p \geq 2 \\ \text{and} \\ m(A) = 1 \quad \text{if } p \leq 1 \end{array} \right.$$

$$(3.6) \quad \mu(A) = \text{Inf} \left( m(T^{-1}AT - T^{-1}T') \right)_{\det(T(x)) \neq 0}$$

**Defintion 3.1 [6]:**

*The system  $(\Delta)$  is called super-irreducible (or  $\mu$ -irreducible ) iff  $m(A)=\mu(A)$ . The integers  $p, n_0, n_1, n_2, \dots, n_{p-2}$  will be called the parameters of the super-irreducible form.*

In [6], an algorithm is given, which can carry out the computation of successive transformations  $T_k$  ( $k=1,2, \dots,n$ ) of the form:

$$T_k(x) = (P_0 + P_1x + \dots + P_k x^k) \cdot \text{diag}(1,1, \dots, 1, x, x, \dots,x)$$

where  $P_0, P_1, \dots, P_k$  are constant matrices with  $\det(P_0) \neq 0$ . This algorithm permits us to transform the system  $(\Delta)$  into a  $\mu$ -irreducible form. In [8], it was shown that

for an  $n^{\text{th}}$  order differential equation of the form  $E_{\Delta}(X_0)$ , the invariants  $p, n_0, n_1, n_2, \dots, n_{p-2}$  can be computed explicitly without using the  $\mu$ -irreducibility algorithm.

If we assume that  $E_{\Delta}(X_0)$  is obtained by a cyclic vector from  $(\Delta)$ , one can show (see [8]) how these integers may be used to calculate the pole order of  $a_k$ . The results of [8] is contained in:

**Proposition 3.1:**

*With the above definitions, if  $(\Delta)$  is a  $\mu$ -irreducible system and  $p \geq 2$ , then for any choice of the cyclic vector:*

*(i)  $p$  is the smallest integer with*

$$(3.7) \quad p \geq \lambda_k / k \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

*(ii) If we define the integers  $r_s$  ( $s=1, 2, \dots, p-1$ ) by:*

$$(3.8) \quad r_s = \text{Max} (\lambda_k - k(p-s)) \quad s = 1, \dots, p-1 \\ 1 \leq k \leq n$$

*then*

$$(3.9) \quad r_s = sn_0 + (s-1)n_1 + \dots + n_{s-1} \quad s = 1, \dots, p-1.$$

**Remark 3.1**

The above relations allow the practical computation of Malgrange-Invariant  $i(\Delta)$  [11], and Gerard,Levelt-Invariants  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_{p-1}$  [3]. It was shown in [8], that if  $(\Delta)$  is a  $\mu$ -irreducible system, then

$$i(\Delta) = \rho_1 = r_{p-1} \quad \text{and} \quad \rho_s = r_{p-s} \quad \text{for } s = 2, \dots, p-1.$$

For each system  $(\Delta)$ , we consider the functions introduced in [6], as

$$(3.10) \quad \theta_s(A, x, \lambda) = x^{r_s} \det (x^{p-s} A(x) + \lambda I) \quad s = 1, 2, \dots, p-1$$

where  $r_s$  are the integers defined in (3.9).

**Lemma 1**

The function  $\theta_s(A, x, \lambda)$  ( $s \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ ) is polynomial in  $\lambda$  with coefficients in  $\mathbb{C}[[x]]$  and its expansion in  $x$  up to order  $k$  depends only on  $\lambda$  and the first  $k+s+1$  terms of  $A(x)$  (i.e.  $A_0, A_1, \dots, A_{k+s}$ ).

**Proof**

we consider the representation

$$(3.11) \quad A(x) = x^{-p} x^{\alpha_s} N^{(s)}(x)$$

where

$$N^{(s)}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} N_k^{(s)}(x) x^k = x^{\alpha - \alpha_s} N(x)$$

$N(x)$  is the matrix defined in (3.2) and

$$(3.12) \quad \alpha_s = \text{diag} (0_{n_0}, I_{n_1}, 2I_{n_2}, \dots, (s-1) I_{n_{s-1}}, sI_{n'_s})$$

with

$$(3.13) \quad n'_s = n - \sum_{i=0}^{i=s-1} n_i$$

Let  $\epsilon_s$  be the diagonal matrix  $\epsilon_s = sI_n - \alpha_s$ , so that

$$\det (x^{\epsilon_s}) = x^{r_s}$$

If we introduce  $x^{r_s}$  in determinant (3.10), we obtain:

$$\theta_s(A, x, \lambda) = \det (P_s(x, \lambda))$$

where

$$(3.14) \quad P_s(x, \lambda) = N^{(s)}(x) + \lambda x^{\epsilon_s}$$



From (3.11), one can see that the matrix  $N_k^{(s)}$  ( $k \leq s-1$ ) depends only on  $A_k, A_{k+1}, \dots,$  and  $A_{k+s}$ . So, if we denote by

$$C_1(x, \lambda), C_2(x, \lambda), \dots, C_n(x, \lambda)$$

the  $n$  columns of the matrix  $P_s(x, \lambda)$  the coefficient of  $x^k$  in  $\theta_s(A, x, \lambda)$  is:

$$(3.15) \quad \frac{1}{k!} \frac{d^k}{dx^k} (P_s(x, \lambda)) |_{x=0}$$

But this expression depends on the partial derivatives of  $C_i(x, \lambda)$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) having orders less than  $k$ . Thus expression (3.15) depends only on  $N_0^{(s)}, N_1^{(s)}, \dots, N_k^{(s)}$  and then on the first  $k + s + 1$  terms of  $A(x)$ .

**Lemma 2**

*Any two equivalent matrices  $A$  and  $B$  having the same representation (3.11) satisfy*

$$(3.16) \quad \theta_s(A, x, \lambda) = \theta_s(B, x, \lambda) + O(x^{p-s-1}) \quad s=1, 2, \dots, p-1$$

**Remark 3.2**

Assume that the system  $(\Delta)$  is  $\mu$ -irreducible and

$$(3.17) \quad \det(A(x) + \lambda I) = \lambda^n - \sum_{k=1}^n (-1)^k p_k(x) \lambda^{n-k}$$

is the characteristic polynomial of  $A(x)$ . Then

$$\theta_s(A, x, \lambda) = x^{r_s} \lambda^n - \sum_{k=1}^n (-1)^k x^{r_s + k(p-s)} p_k(x) \lambda^{n-k}$$

Lemma 2 expresses that the expansion in  $x$  of the expression  $x^{r_s + k(p-s)} p_k(x)$  up to order  $p-s-2$  is invariant for equivalent  $\mu$ -irreducible systems, i.e. if  $(\Delta)$  is

transformed by  $Y(x)=T(x)Z(x)$  with  $\det(T(x)) \neq 0$ , and if  $B = T^{-1} A T - T^{-1}T'$  is  $\mu$ -irreducible, then the  $k^{\text{th}}$  symmetric coefficient  $q_k(x)$  of  $B$  satisfies

$$x^{r_s+k(p-s)} p_k(x) = x^{r_s+k(p-s)} q_k(x) + O(x^{p-s-1})$$

To prove lemma 2, one can consider only the first  $p$  terms of  $A$  and  $B$ , since lemma 1 guarantees that the coefficient of  $x^k$  in  $\theta_s(A,x, \lambda)$  depends only on the first  $k + s + 1$  terms of  $A(x)$  and  $B(x)$ .

**Proof of lemma 2**

Since  $A$  and  $B$  are equivalent, there exists a transformation  $T$  with  $\det(T(x)) \neq 0$ , such that

$$B = T^{-1} A T - T^{-1}T'$$

Let  $T$  have the factorization

$$(3.18) \quad T(x) = P(x) x^d Q(x)$$

where  $P(x)$  is a polynomial with  $\det(P(x)) \equiv 1$ ,  $Q(x)$  is regular at  $x = 0$  with  $\det(Q_0) \neq 0$ , and

$$d = \text{diag} (d_1, d_2, \dots, d_n)$$

where  $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$  are integers (see Hartmann [4], p. 75). Then with

$$(3.19) \quad A^{(1)} = P^{-1} A P - P^{-1}P' \quad \text{and} \quad B = Q^{-1} A^{(2)} Q - Q^{-1} Q'$$

one has

$$(3.20) \quad A^{(2)} = x^{-d} A^{(1)} x^d - d/x$$

Since  $P(x)$  is a unit in the ring of polynomials, the matrix  $P^{-1}P'$  is also a polynomial. In the same manner, since  $Q(x)$  is a unit in the ring of power series, then  $Q^{-1}Q'$  is also a power series without a pole at  $x=0$ . Thus from equation (3.19), we can write

$$x^{r_s} \det (x^{p-s} A(x) + \lambda I) = x^{r_s} \det (x^{p-s} A^{(1)}(x) + x^{p-s} P^{-1} P' + \lambda I)$$

then

$$(3.21) \quad \theta_s(A, x, \lambda) = \theta_s(A^{(1)}, x, \lambda) + \mathbf{O}(x^{p-s})$$

and

$$x^{r_s} \det (x^{p-s} B(x) + \lambda I) = x^{r_s} \det (x^{p-s} A^{(2)}(x) + x^{p-s} Q^{-1} Q' + \lambda I)$$

then

$$(3.22) \quad \theta_s(B, x, \lambda) = \theta_s(A^{(2)}, x, \lambda) + \mathbf{O}(x^{p-s}).$$

From equation (3.20) we can write

$$(3.23) \quad \theta_s(A^{(2)}, x, \lambda) = \theta_s(A^{(1)}, x, \lambda) + \mathbf{O}(x^{p-s-1})$$

Combining the order equation (3.21), (3.22), and (3.23), (3.16) is proved.

If we apply this result to a companion matrix related to  $(\Delta)$  by a cyclic vector, we obtain the following theorem:

**Theorem 1:**

*Assume that  $(\Delta)$  is a  $\mu$ -irreducible system. If*

$$\det (A(x) + \lambda I) = \lambda^n - \sum_{k=1}^n (-1)^k p_k(x) \lambda^{n-k}$$

*is the characteristic polynomial of A, and*

$$E_{\Delta}(X_0) \quad y^{(n)} - a_1(x) y^{(n-1)} - a_2(x) y^{(n-2)} \dots - a_n(x) y = 0$$

*is an  $n^{\text{th}}$  order equation obtained via any cyclic vector  $X_0$ , then for each  $s \in \{1, 2, \dots, p-2\}$ , we have:*

$$(3.24) \quad x^{r_s+k(p-s)} a_k(x) = x^{r_s+k(p-s)} p_k(x) + \mathbf{O}(x^{p-s-1})$$

$$k \in [n_0 + n_1 + \dots + n_{s-1}, n_0 + n_1 + \dots + n_{s+1}]$$

**Proof**

Let  $\lambda_k \geq 0$  be the order of the pole of  $a_k(x)$  in  $E_\Delta(X_0)$  ( $\lambda_k = 0$  if  $a_k(x)$  is regular). We can construct a subdivision of the segment  $[0, n]$  as follows:

$$(3.25) \quad I_s = [m_s, m_{s+1}] \quad \text{for } 0 \leq s \leq p-2 \quad \text{and} \quad I_{p-1} = [m_{p-1}, n]$$

where

$$(3.26) \quad m_s = n_0 + n_1 + \dots + n_{s-1} \quad s = 0, 1, \dots, p-1 \quad \text{with} \quad m_0 = 0$$

From equation (3.9), we have  $m_s = r_s - r_{s-1}$ , for  $s = 1, \dots, p-1$  (with  $r_0 = 0$ ). For each  $k = 1, 2, \dots, n$ , we write

$$(3.27) \quad \delta_k = k(p-s) + r_s \quad \text{if} \quad k \in I_s \quad s = 1, \dots, p-1$$

From (3.8), we have  $\lambda_k \leq \delta_k$  and one has  $\lambda_k = \delta_k$  for at least one  $k \in I_s$  for each  $s = 1, 2, \dots, p-1$ . Let  $k_s \in I_s$  be the smallest integer belong to  $I_s$  such that

$$(3.28) \quad \delta_{k_s} = k_s(p-s) + r_s \quad s = 1, \dots, p-1$$

Now it is easy to construct a  $\mu$ -irreducible system which is equivalent to  $E_\Delta(X_0)$ . To achieve this, we consider the change of variables

$$y_i = x^{-\delta_{n-i}} y^{(i)} \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Then for  $k=0, \dots, n-2$

$$\frac{dy_{i+1}}{dx} = x^{-\delta_{n-i} + \delta_{n-i-1}} y_{i+2} + \frac{\delta_{n-i}}{x} y_{i+1}$$

and

$$\frac{dy_n}{dx} = - \sum_{k=1}^{n-1} a_{n-k} x^{-\delta_1 + \delta_{n-k}} y_{k+1} - \frac{\delta_1}{x} y_n$$



From equations (2.2) and (3.31),  $A(x)$  and  $x^{-p}B(x) - \delta/x$  are equivalent matrices with the transformation  $T(x)x^\delta$ . Then according to lemma 2, we have

$$x^{r_s} \det (x^{p-s} A(x) + \lambda I) = x^{r_s} \det (x^{p-s} B(x) + x^{p-s-1} \delta + \lambda I) + \mathbf{O}(x^{p-s-1}).$$

Then

$$(3.32) \quad \theta_s(A, x, \lambda) = x^{r_s} \det (x^{p-s} C(x) + \lambda I) + \mathbf{O}(x^{p-s-1})$$

Thus from remark 3-2, we have

$$x^{r_s+k(p-s)} a_k(x) = x^{r_s+k(p-s)} p_k(x) + \mathbf{O}(x^{p-s-1})$$

**Corollary:**

If  $\Delta$  is a  $\mu$ -irreducible system with  $p, n_0, \dots, n_{p-2}$  as parameters, then we have the properties:

(i) The polynomials  $\theta_s(A, 0, \lambda)$  ( $1 \leq s \leq p-2$ ) are invariants for equivalent  $\mu$ -irreducible systems and if  $n_s \neq 0$ , we have

$$(3.33) \quad d^\circ(\theta_s(A, 0, \lambda)) = n - k_s \quad s = 1, 2, \dots, p-1$$

where  $k_s$  is the smallest integer in  $[n_0 + \dots + n_{s-1}, n_0 + \dots + n_{s-1} + n_s]$  such that

$$r_s = \lambda_{k_s} - k_s(p-s)$$

**Proof**

From equation (3.32), we have for  $s \neq p-1$ :

$$\theta_s(A, 0, \lambda) = x^{r_s} \det (x^{p-s} C(x) + \lambda I) \Big|_{x=0}$$

It is easy to see that the highest coefficient of this determinant is  $(-1)^{k_s} b_{k_s}(0)$ , where  $b_{k_s}$  and  $k_s$  were defined earlier. Then:

$$\theta_s(A, 0, \lambda) = (-1)^{k_s} b_{k_s}(0) \lambda^{n-k_s} + \dots$$

With  $b_{k_s}(0) \neq 0$ . If  $s = p - 1$ , and  $B = T^{-1} A T^{-1} T'$  is a  $\mu$ -irreducible matrix, we have in general

$$\theta_{p-1}(A, 0, \lambda) \neq \theta_{p-1}(B, 0, \lambda)$$

but their degree is invariant. In fact, using the factorization (3.18) of  $T$ , one can see from equation (3.19) that:

$$x^{r_{p-1}} \det(xA(x) + \lambda I) \Big|_{x=0} = x^{r_{p-1}} \det(xA^{(1)}(x) + \lambda I) \Big|_{x=0}$$

and

$$x^{r_{p-1}} \det(xB(x) + \lambda I) \Big|_{x=0} = x^{r_{p-1}} \det(xA^{(2)}(x) + \lambda I) \Big|_{x=0}$$

then

$$(3.34) \quad x^{r_{p-1}} \det(xA^{(1)}(x) + \lambda I) \Big|_{x=0} = x^{r_{p-1}} \det(xA^{(2)}(x) + d + \lambda I) \Big|_{x=0}$$

where  $d$  is the diagonal matrix defined in (3.18). Hence the two polynomials (3.34) have the same degree. Then

$$(3.35) \quad d^\circ(\theta_{p-1}(A, 0, \lambda)) = d^\circ(\theta_{p-1}(B, 0, \lambda))$$

If  $B$  is the matrix (3.29) obtained from a cyclic vector, from equation (3.35) we have

$$d^\circ(\theta_{p-1}(A, 0, \lambda)) = d^\circ(\theta_{p-1}(B, 0, \lambda)) = n - k_{p-1}$$

where  $k_{p-1}$  is the smallest integer such that

$$r_{p-1} = \lambda_{k_{p-1}} - k_{p-1} = \text{Max}(\lambda_k - k)$$

**4. Algorithm for computing the Newton-Polygon of a linear differential system**

In this section, we will use the notation

- (i)  $\beta_k = \lambda_k - k$
- (ii)  $k^* = n - d^\circ(\theta_{p-1}(A, 0, \lambda))$
- (iii)  $s^*$  is the smallest integer such that  $n_{s^*+1} = n_{s^*+2} = \dots = n_{p-2} = 0$  ( $s^* = p - 2$  if  $n_{p-2} \neq 0$ )

Let  $\mathcal{M}$  ( resp.  $\mathcal{M}_1$  ) be the closed convex hull of the set

$$\mathcal{Y} = \{ (x, 0) / x \in [0, +\infty[ ] \cup \{ (m_s, r_s + m_s(p-s-1)), s = 1, 2, \dots, s^* \}$$

respectively:

$$\mathcal{Y}_1 = \{ (x, 0) / x \in [p-2, +\infty[ ] \cup \{ (m_s+1, r_s + m_s(p-s-1) - (p-s-2)), s = 1, 2, \dots, s^* \}$$

This can be visualized graphically as follows: first we construct the straight line  $D_0$  ( resp.  $D'_0$  ) which passes through the point  $(0,0)$  ( resp.  $(p-2,0)$  ) with integer slope  $p-1$ . For each  $s = 2, \dots, s^*$ , the straight line  $D_s$  ( resp.  $D'_s$  ) is constructed with the integer slope  $p-s-1$  and passing through the point  $(0, r_s)$  ( resp.  $(0, r_s - (p-s-2))$  ). From equation (3.8), one can see easily that all  $\beta_k \geq 0$  are limited by the straight lines  $D_0, D_1, \dots, D_{s^*}$ . The section which is limited by  $D_s$  and  $D'_s$  ( $s = 0, \dots, s^*$ ) is  $\mathcal{M} - \mathcal{M}_1$ .

Let  $v_k \geq 0$  denote the pole order of  $p_k$ : i.e the coefficient of  $\lambda^{n-k}$  in the characteristic polynomial of  $A(x)$ . From remark 3-2, if there exists an integer  $s \leq p-2$  such that

$$(4.1) \quad v_k > r_s + k(p-s-1) - (p-s-2)$$

(i.e if the point  $(k, v_k)$  belongs to  $\mathcal{M}$  but not to  $\mathcal{M}_1$ ), then we have for any cyclic vector:

$$v_k = \beta_k$$



**Theorem 2**

Let 
$$\det(A(x) + \lambda I) = \lambda^n - \sum_{k=1}^n (-1)^k p_k(x) \lambda^{n-k}$$

be the characteristic polynomial of  $A(x)$ . and  $v_k$  be the pole order of the symmetric function of rank  $k$  of  $A(x)$ . If for each  $k=1,2,\dots,n$  there exists  $s \leq p-1$  such that  $v_k > r_s + k(p-s-1) - (p-s-2)$  then:

$$\mathcal{P}_{diff}(\Delta) = \mathcal{P}_{alg}(\Delta)$$

**Example**

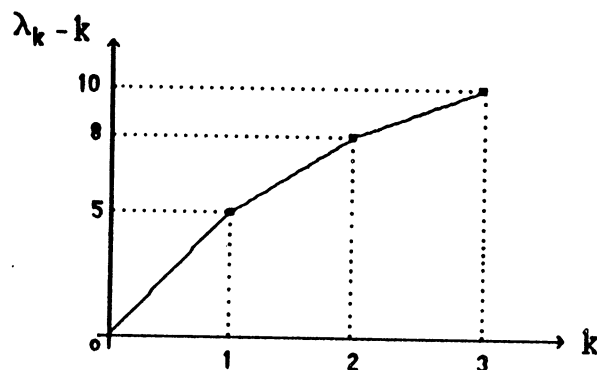
$$A(x) = \frac{1}{x^6} \begin{pmatrix} 1 & x^3 & x^4 \\ x^2 & x^2 & x^4 \\ x^3 & x^4 & x^3 \end{pmatrix}$$

Obviously  $p = 6, n_0 = 1, n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 1, n_4 = 0$ . Then  $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 4, r_4 = 7$  and  $r_5 = 10$ . One can show (cf. [6]) that the matrix  $A(x)$  is  $\mu$ -irreducible, the characteristic polynomial of  $A$  is:

$\det(A + \lambda I) =$

$$\lambda^3 + 1/x^6(1 + x^2 + x^3) \lambda^2 + 1/x^{10}(1 + x - x^4 - x^6) \lambda + 1/x^{13}(1 - 3x^3 + x^4 + x^5)$$

Since the conditions of Theorem 2 are satisfied, the differential polygon is the same as the algebraic polygon ( see figure below).



The conditions given by theorem 2 above are satisfied for very large values of  $p$  only. In the next section a criterion with weaker conditions will be given. Two cases will be investigated:

#### 4.1 Case I: $p > s^* + 2 + k^* / 4$

Let  $s$  be an integer of  $\{1, 2, \dots, s^*\}$  for which  $n_s \neq 0$ . Considering two pairs of straight lines  $(D_s, D'_s)$ . From the previous corollary, for each  $s > 1$ , there exists an integer  $k_{s-1}$  (resp.  $k_s$ ) which is the smallest integer such that

$$\beta_{k_{s-1}} = k_{s-1}(p-s) + r_{s-1} \quad (\text{resp. } \beta_{k_s} = k_s(p-s) + r_s)$$

Let  $M$  and  $T$  be the points such that:

$$OM = (m_s + 1, (m_s + 1)(p - s - 1) + r_s)$$

$$OT = (m_s + 1, m_{s-1}(p - s) + r_{s-1} + h(m_s + 1 - m_{s-1}))$$

where  $h$  is the slope of the straight line which joins the points  $A_{s-2}$  and  $A_s$  (see fig. 4-1). We have

$$h = \frac{(m_s - m_{s-1})(p-s) + (m_{s+1} - m_s)(p-s-1)}{m_{s+1} - m_{s-1}}$$

From equation (3.26), we have

$$m_s - m_{s-1} = n_{s-1} \quad \text{and} \quad m_{s+1} - m_s = n_s$$

thus

$$(4.2) \quad h = p - s - \frac{n_s}{n_{s-1} + n_s}$$

#### Remark 4.1

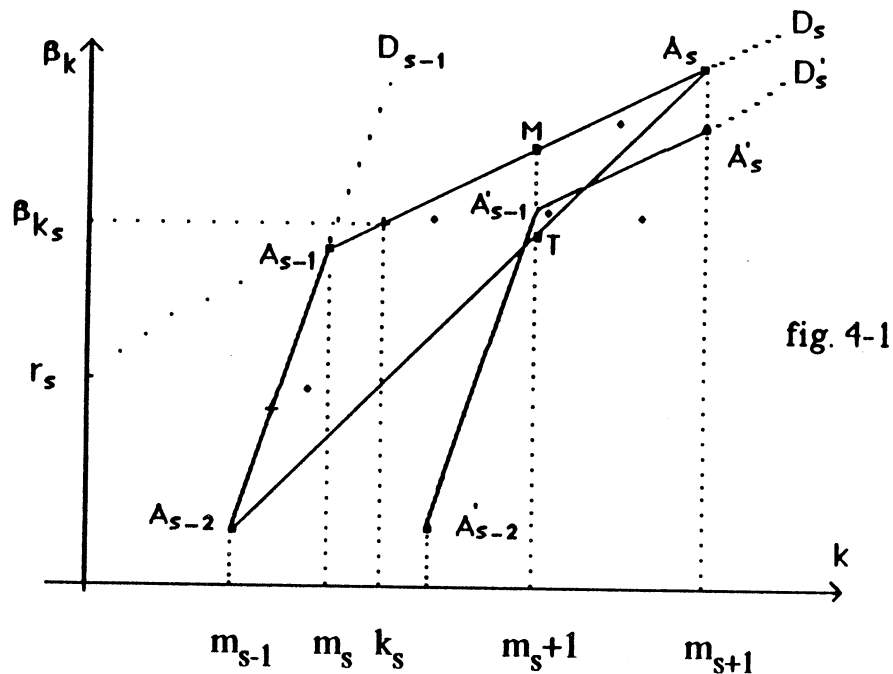
From fig. 4.1 and theorem 2, one can see that if the distance  $\|MT\|$  is greater than  $p-s-2$ , then the  $s^{\text{th}}$  slope of  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  depends only on  $\beta_k$  which are in the

domain limited by the the segments  $A_i, A_{i+1}$  and  $A'_i, A'_{i+1}$  ( $i = s-2, s-1, s$ ). Since

$$\|MT\| = (n_{s-1} + 1)(p - s - h) - 1$$

from (4.2), it follows

$$\|MT\| = \frac{n_{s-1}(n_s - 1)}{n_{s-1} + n_s}$$



Since  $n_s$  and  $n_{s-1}$  are positive integers, from remark 4-1 we have:

$$\|MT\| < \frac{n_{s-1} + n_s}{4} \leq \frac{k^*}{4}$$

where  $k^*$  is defined above. Hence, from Remark 4.1, if

$$p > s^* + 2 + k^*/4$$

then the  $s^{\text{th}}$  slope of  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  is the same as that of  $\mathcal{P}_{\text{alg}}(\Delta)$ . This can be embodied in the following theorem:

**Theorem 3**

Let  $(\Delta)$  be a  $\mu$ -irreducible system with  $p, n_0, n_1, \dots, n_{s^*}$  as parameters. If  $p - s^* - 2 > (n - d^\circ(\theta_{p-1}(A, 0, \lambda)) / 4)$ , then

$$\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta) = \mathcal{P}_{\text{alg}}(\Delta).$$

**Remark 4.2**

One can consider this theorem as an extension of the theorem given in [7]. This gives a sufficient condition depending on  $p$  and the rank of  $A_0$ , such that Katz's invariant of  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  is the same as that of  $\mathcal{P}_{\text{alg}}(\Delta)$ .

**4.2 Case II:  $p \leq s^* + 2 + k^* / 4$**

Our purpose in this section is to show that it is always possible to choose an integer  $m$ , such that with the change of the independent variable  $x = t^m$ , the new system satisfies the condition of case I. A transformation  $x = t^m$  changes the system  $(\Delta)$  to

$$(\Delta_m) \quad W'(t) = mt^{m-1}A(t^m)W(t)$$

$(\Delta_m)$  is called the *system ramified* by  $m$  [12]. From remark 2.2 and equation (2.4), it follows that

$$(4.3) \quad p - s - 1 \leq \pi_s \leq p - s$$

where  $\pi_s$  is the  $s^{\text{th}}$  slope of  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  through  $(k_s, \beta_{k_s})$ .

**Lemma 3**

If we choose  $m$  an integer such that:  $m > (k^* / 4 + 2) / (p - s^* - 1)$ , then the invariant (3.6) of  $(\Delta_m)$  is

$$\mu(\Delta_m) = \bar{p} - 1 + \sum_{i=0}^{\bar{s}^*} \bar{n}_i / n^{i+1}$$

such that  $\bar{p} - \bar{s}^* - 1 > k^* / 4$  where  $k^*$  was defined earlier.

**Proof**

From equation (4.3), we have

$$p - s^* - 1 \leq p - s - 1 \leq \pi_s \leq p - s$$

Since  $m > (k^* / 4 + 2) / (p - s^* - 1)$ , we have:

$$k^* / 4 + 2 \leq m \pi_s \leq m(p - s)$$

But if  $\pi_s$  is a slope of  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$ , it is well known (cf. [12]) that

$$\bar{\pi}_s = m \pi_s$$

is a slope of  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta_m)$ , then

$$(4-4) \quad k^* / 4 + 2 \leq \bar{\pi}_s \leq \bar{p} - s \quad s = 1, 2, \dots, \bar{s}^*$$

where  $\bar{p}$  and  $\bar{s}^*$  are the integers related to an equivalent  $\mu$ -irreducible system to  $(\Delta_m)$ . Since the integer  $k^*$  which is the height of  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  is invariant with respect to ramification  $x = t^m$  ( see [12]). Then on the basis of (4-4), the proof of lemma 3 is obtained.

**Remark 4.3**

The system  $(\Delta_m)$  is not necessary  $\mu$ -irreducible. Lemma 3 guarantees that if we choose  $m$  such that

$$m > \frac{k^*/4 + 2}{p - s^* - 1}$$

then the  $\mu$ -irreducibility algorithm, transforms  $(\Delta_m)$  into a  $\mu$ -irreducible system  $(\Delta^*_m)$  which satisfies the criterion of case I and if we denote

$$\pi_i^{(m)}(\Delta^*_m) \quad i = 1, 2, \dots, l$$

the slopes of  $\mathcal{P}_{\text{alg}}(\Delta^*_m)$ , then

$$\pi_i(\Delta) = \frac{\pi_i^{(m)}(\Delta^*_m)}{m} \quad i = 1, 2, \dots, l$$

are the slopes of  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$ .

**5. Algorithm**

The previous result can be embodied in the following algorithm:

1. make the system  $(\Delta)$   $\mu$ -irreducible.

2. compute  $s^*$ ,  $k^*$ ,  $p$ .

3. If  $p > s^* + 2 + k^*/4$

then

3.1. return the slopes  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_l$  of  $\mathcal{P}_{\text{alg}}(\Delta)$ .

else

3.2. compute  $m$  such that:  $m > (k^*/4 + 2)/(p - s^* - 1)$ .

3.3. Let  $(\Delta)$  be the system ramified by  $m$ .

3.4. make  $(\Delta)$   $\mu$ -irreducible.

3.5. compute the slopes  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_l$  of  $\mathcal{P}_{\text{alg}}(\Delta)$ .

3.6. return  $\pi_0/m, \pi_1/m, \dots, \pi_l/m$ .

## REFERENCES

- [1] **J. DELLA DORA et E. TOURNIER**  
Solutions formelles d'équations différentielles au voisinage de points singuliers réguliers  
R.R n° 239, IMAG, Grenoble (1981).
- [2] **J. DELLA DORA and E. TOURNIER**  
An algorithm to obtain Formal Solutions of a Linear Homogeneous Differential equations at an irregular singular point  
Computer Algebra, EUROCAM'82, Proc. Conf, Lect. Notes Comput. sci 144, 1982.
- [3] **R. GERARD et A.H.M. LEVELT**  
Invariants mesurant l'irrégularité en un point singulier des systèmes différentiels linéaires.  
Ann. Inst. Fourier, 23-1(1973), p. 157-195.
- [4] **P. HARTMANN**  
Ordinary Differential Equations Wiley New York. 1964.
- [5] **A. HILALI**  
Contribution à l'étude des points singuliers des systèmes différentiels linéaires,  
Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, I.M.A.G., Grenoble (1982).
- [6] **A. HILALI et A. WAZNER**  
Formes super-irréductibles des systèmes différentiels linéaires  
Num. Math. 50(1987), p. 429-449.
- [7] **A. HILALI et A. WAZNER**  
Un algorithme de calcul de l'invariant de Katz d'un système différentiel linéaire.  
Ann. Inst. Fourier 3,36(1986) p. 67-81.
- [8] **A. HILALI**  
Calcul des invariants de Malgrange et de Gérard et Levelt d'un système différentiel linéaire en un point singulier irrégulier.  
Jour. Diff. Equ. (To appear in Vol. 69(1987)).

- [9] **E. L. INCE**  
Ordinary Differential Equations, Dover, New York, 1956.
- [10] **D. A. LUTZ and R. SCHAFKE**  
On the identification and stability of formal invariants for singular  
Differential equations,  
linear algebra and its applications, 72 : 1-46 (1986).
- [11] **B. MALGRANGE**  
Sur les points singuliers des équations différentielles,  
L'enseignement mathématique, t.XX, 1-2, 147-176 (1974).
- [12] **B. MALGRANGE**  
Sur la réduction formelle des équations différentielles linéaires,  
Preprint Inst. Fourier. Grenoble (1981).
- [13] **J. P RAMIS**  
Théorème d'indice de Gevrey pour les équations différentielles ordinaires,  
Pub. IRMA Stasbourg (1981).
- [14] **J. P RAMIS**  
Sur les invariants formels des équations différentielles dans le champ  
complexe  
Communication au Congrès " Le calcul .... demain " , Grenoble 2-6 Décembre  
(1985).
- [15] **H. L. TURRITIN**  
Convergent Solutions of ordinary linear homogeneous differential equations  
in the neighbourhood of an irregular singular point,  
Acta. Math. 93 : 27-66 (1955).





## **CHAPITRE 8**

# **UNE METHODE GENERALE DE RESOLUTION DES SYSTEMES DIFFERENTIELS 2x2 AU VOISINAGE D'UN POINT SINGULIER IRREGULIER**



### 1. Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la résolution des systèmes différentiels linéaires de dimension 2 de type:

$$(1-1) \quad Y'(x) = \frac{A(x)}{x^p} Y(x) = x^{-p} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k \right) Y(x)$$

où  $Y$  est un vecteur colonne à 2 composantes,  $p$  est supposé un entier strictement supérieur à 1, les  $A_k$  sont des matrices  $2 \times 2$  à coefficients complexes (en pratique à coefficients dans  $\mathbb{Q}$ ).

Lorsque la matrice  $A_0$  possède deux valeurs propres distinctes  $\gamma_1 \neq \gamma_2$ ; cas appelé *standard*, l'origine  $x = 0$  est un point singulier irrégulier si et seulement si  $p > 1$  et on sait dans ce cas à l'aide de la méthode de découplage (cf. [1], [9]) construire un système fondamental de solutions formelles de (1-1). Cette méthode est due aux travaux de Sibuya [8], elle consiste à chercher une transformation formelle

$$Y(x) = T(x) Z(x)$$

avec

$$(1-2) \quad T(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} T_k x^k, \quad \det(T_0) \neq 0$$

qui conduit au système différentiel:

$$Z'(x) = \frac{B(x)}{x^p} Z(x) \quad \frac{B(x)}{x^p} = T^{-1} \frac{A(x)}{x^p} T - T^{-1} T'$$

où  $B(x) = \text{diag}(b_1(x), b_2(x))$  une matrice diagonale. Le système fondamental de solutions formelles obtenu au voisinage de l'origine, peut être présenté dans ce cas sous la forme:

$$(1-3) \quad \Phi(x) = F(x) x^\Lambda \exp\left(Q\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

où  $\Lambda$  est une matrice constante,  $Q$  est une matrice diagonale, polynomiale en  $1/x$ , de la forme:

$$(1-4) \quad Q\left(\frac{1}{x}\right) = \text{diag}\left(q_1\left(\frac{1}{x}\right), q_2\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

et  $F(x)$  désigne une série formelle de la forme:

$$F(x) = \sum_{k=-v}^{k=+\infty} F_k x^k \quad v \geq 0$$

Dans le cas d'une singularité irrégulière, il n'existe pas de méthode générale (en dehors du cas standard) qui construit d'une manière directe les solutions formelles du système (1-1). La méthode proposée dans ce chapitre repose sur l'algorithme du polygone de Newton développé par J. Della Dora [3] dans le cas des équations scalaires d'ordre 2. On démontre que si le système différentiel considéré est super-irréductible, alors son polygone de Newton algébrique (cf. chapitre VII) est le même que le polygone différentiel. Ensuite, nous construisons un algorithme permettant de former des solutions (vectorielles) associées au système (1-1) suivant la structure matricielle de  $A(x)$ . Rappelons brièvement la définition des deux polygones:

## 2. Polygone de Newton d'un système différentiel $2 \times 2$

### 2.1. Polygone de Newton associé à une équation différentielle d'ordre 2

On considère une équation différentielle scalaire d'ordre 2 de la forme:

$$(E) \quad \frac{d^2}{dx^2} y + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y = 0$$

où  $a_1, a_2 \in \mathbb{C}(x)$ : le corps des fractions rationnelles à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . Soit  $\lambda_k \geq 0$  l'ordre polaire du coefficient  $a_k$  en 0.

Dans le plan rapporté à un système d'axes orthonormés, on associe à chaque coefficient  $a_k$ , le quadrant:

$$Q(a_k) = \{ (x,y) / x \geq k, y \leq \lambda_k - k \} \text{ si } \lambda_k > k$$

On construit ensuite l'enveloppe convexe supérieure passant par les points (0,0) avec éventuellement une pente nulle de longueur 1. On notera  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(E)$ , le polygone obtenu.

**Remarque 2.1:**

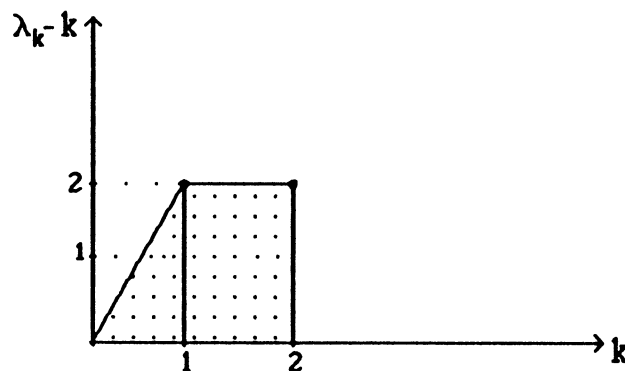
Les pentes du polygone  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(E)$  sont les mêmes que celles du polygone de Newton-Puiseux défini dans [2], ou [6]. On notera bien que ces polygones sont relatifs à la singularité *localisée* à l'origine.

**Exemple 2.2**

Le polygone  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(E)$  associé à l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x^3} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2} y = 0$$

est



En utilisant le critère de L. Fuchs [4], on a la propriété suivante :

*L'origine est une singularité régulière pour l'équation différentielle si et seulement si le polygone de Newton présente une unique pente nulle (i.e  $\lambda_k \leq k$  pour  $k = 1, 2$ ). Autrement on dit que la singularité est irrégulière.*

## 2.2. Polygone de Newton associé à un système de dimension 2

Soit

$$(Δ) \quad Y'(x) = \frac{A(x)}{x^p} Y(x) \quad \text{où} \quad A(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k$$

où  $A(x)$  est une matrice  $2 \times 2$  avec  $A_0 \neq 0$ , et  $p$  un entier strictement supérieur à 1. Soit  $Y_0$  un vecteur cyclique (cf. chapitre II) du système  $(Δ)$  et

$$E_{\Delta}(Y_0) \quad \frac{d^2}{dx^2} y + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x) y = 0$$

l'équation différentielle obtenue par l'intermédiaire de  $Y_0$ . On notera  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  le polygone de défini dans § 2.1. associé à l'équation différentielle  $E_{\Delta}(Y_0)$ .

Nous supposons dans toute la suite que les coefficients  $a_k$  sont de la forme:

$$(2-1) \quad a_1(x) = x^{-\lambda_1} b_1(x) \quad \text{et} \quad a_2(x) = x^{-\lambda_2} b_2(x)$$

où  $\lambda_k = -\omega(a_k)$  désigne l'ordre polaire (au sens large) du coefficients  $a_k$  en 0 avec  $b_k(0) \neq 0$  si  $a_k \neq 0$ . (la fonction  $\omega$  désigne la valuation définie dans le chapitre V).

### Remarque 2.2

Comme le système différentiel est de dimension 2, si  $\pi_0$  désigne la plus grande pente du polygone  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$ , on a

$$(2-2) \quad \pi_0 = \text{Max} \left( 0, \lambda_1 - 1, \frac{\lambda_2 - 2}{2} \right)$$

Le polygone de Newton présente alors soit une seule pente, soit deux suivant les cas suivants:

(i) Cas où  $\lambda_2 \geq 2\lambda_1$

Dans ce cas, on a  $(\lambda_2 - 2)/2 \geq \lambda_1 - 1$  et le polygone  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  présente une seule pente. On peut remarquer alors que soit la pente est entière (i.e.  $\lambda_2$  est paire), soit la pente est rationnelle.

(ii) Cas où  $\lambda_2 < 2\lambda_1$

Dans ce cas, la plus grande pente est évidemment  $\lambda_1 - 1$ , le polygone  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  présente alors deux pentes:

$$(2-3) \quad \pi_0 = \text{Max}(0, \lambda_1 - 1), \quad \pi_1 = \text{Max}(0, \lambda_2 - \lambda_1 - 1)$$

Ces deux pentes sont distinctes sauf le cas où  $\pi_0 = \pi_1 = 0$  (i.e.  $x = 0$  est une singularité régulière).

### 3. Polygone algébrique d'un système 2x2

**Définition 3.1** (cf. chapitre VII)

On appellera le polygone algébrique associé à  $(\Delta)$ , le polygone différentiel  $\mathcal{P}_{\text{diff}}$  associé à l'opérateur différentiel:

$$\det(M(x) + \lambda I) \Big|_{\lambda = \frac{d}{dx}}$$

et on le notera  $\mathcal{P}_{\text{alg}}(\Delta)$ .

On donne dans le chapitre VII, un algorithme permettant de construire le polygone  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  à partir de  $\mathcal{P}_{\text{alg}}(\Delta)$ . Dans le cas particulier des systèmes différentiels  $2 \times 2$ , il s'avère que ces deux polygones coïncident lorsque le système considéré est écrit sous une forme super-irréductible. Nous donnons dans ce qui suit la forme générale de l'équation différentielle correspondant à  $(\Delta)$  suivant la structure matricielle de la matrice  $A(x)$ .

Ecrivons la matrice du système  $(\Delta)$  (quitte à appliquer au système une matrice de permutation) sous la forme:



$$A(x) = N(x) \operatorname{diag} ( 1, x^i ) \quad \text{avec} \quad 0 \leq i \leq p-1$$

où  $i$  est la valuation de la deuxième colonne de  $A(x)$  si celle-ci est plus petite que  $p-1$ , sinon  $i = p-1$ . Les fonctions  $\theta_s$  introduites dans le chapitre V s'écrivent pour  $s = 1, 2, \dots, p - 1$  sous la forme suivante:

$$(3-1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \theta_s ( A, x, \lambda ) = x^{2s} \det \left( \frac{A(x)}{x^s} + \lambda I \right) & \text{si } i = 0 \\ \theta_s ( A, x, \lambda ) = x^s \det \left( \frac{A(x)}{x^s} + \lambda I \right) & \text{si } s \leq i \leq p-2 \\ \theta_s ( A, x, \lambda ) = x^{2s-i} \det \left( \frac{A(x)}{x^s} + \lambda I \right) & \text{si } i \leq p-2 \text{ et } s \geq i \\ \theta_s ( A, x, \lambda ) = x^s \det \left( \frac{A(x)}{x^s} + \lambda I \right) & \text{si } i = p-1 \end{array} \right.$$

On rappelle que le système  $(\Delta)$  est super-irréductible si et seulement si les fonctions  $\theta_s(A, 0, \lambda)$  ( $s = 0, 1, \dots, p-1$ ) sont toutes non identiquement nulles en  $\lambda$ . Posons

$$A(x) = \begin{pmatrix} a^{11}(x) & a^{12}(x) \\ a^{21}(x) & a^{22}(x) \end{pmatrix}$$

avec

$$a^{ij}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k^{ij} x^k \quad a_k^{ij} \in \mathbb{C}$$

On suppose dans toute la suite que le système  $(\Delta)$  est super-irréductible et on désignera par  $E_{\Delta}(Y_0)$  une équation différentielle associée à  $(\Delta)$  obtenue par l'intermédiaire d'un vecteur cyclique  $Y_0$  arbitraire.

### Remarque 3.1

D'après le lemme 3.3, chapitre II, nous avons vu que, pour tout choix de vecteur cyclique  $Y_0$ , on a la relation

$$a_1(x) = \operatorname{tr} (M(x)) + O(x^{-1}) = x^{-p} [ \operatorname{trace} (A(x)) + O(x^{p-1}) ]$$

donc si la valuation de la trace de la matrice  $M$  est telle que  $\omega(M(x)) < -1$ , on a

$$(3-2) \quad \lambda_1 = p - \omega(\text{trace}(A(x)))$$

où  $\lambda_1$  désigne l'entier défini dans (2-1).

Dans le cas où  $\omega(M(x)) \geq -1$ , l'entier  $\lambda_1$  n'intervient pas dans la construction du polygone de Newton (voir la définition ci-dessus). On peut donc supposer déjà que la valeur de  $\lambda_1$  est connue.

Pour le calcul de  $\lambda_2$ , nous utiliserons les résultats donnés dans le chapitre VII (Théorème 2). En effet, si l'on désigne par

$$(3-3) \quad k_s = 2 - d^\circ(\theta_s(A, 0, \lambda))$$

alors  $k_s$  est le plus petit entier tel que

$$(3-4) \quad \lambda_{k_s} = r_s + k_s(p - s)$$

où  $r_s$  est défini par les relations suivantes:

$$(3-5) \quad \begin{cases} r_s = s & \text{si } s \leq i \leq p-2 \\ r_s = 2s - i & \text{si } s \geq i+1 \text{ et } i \leq p-2 \\ r_s = s & \text{si } i = p-1 \end{cases}$$

Le problème de la construction de  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  se réduit donc à la recherche d'un entier  $s$  compris entre 1 et  $p-1$  et tel que

$$d^\circ(\theta_s(A, 0, \lambda)) = 0 \quad 1 \leq s \leq p-1$$

i.e.

$$\lambda_2 = r_s + 2(p - s).$$

#### 4. Solutions formelles des systèmes 2x2 au voisinage d'un point singulier irrégulier

Nous proposons dans ce qui suit, la mise en oeuvre d'un algorithme permettant la construction d'un système fondamental de solutions au voisinage d'un point singulier irrégulier, pour un système 2x2. La première étape consiste d'abord à construire  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  à partir du polygone algébrique. On démontre dans la suite que dans le cas 2x2, ces deux polygones sont en fait identiques. Pour cela, nous allons distinguer trois cas:

##### 4.1. Cas où $i = 0$

Dans ce cas, les deux colonnes de la matrice résidu  $A_0$  sont toutes les deux non nulles et on a

$$\theta_s(A, 0, \lambda) = \det (A(x) + x^s \lambda I)_{|x=0} \equiv \det (A_0)$$

Comme le système  $(\Delta)$  est supposé super-irréductible, on a

$$(4-1) \quad \theta_s(A, 0, \lambda) \equiv \det (A_0) \neq 0 \quad \text{pour} \quad 1 \leq s \leq p-1$$

En vertu de (3-3), on a

$$k_1 = k_2 = \dots = k_{p-1} = 2$$

D'après la relation (3-4), on a donc  $\lambda_2 = 2p$ . L'équation différentielle  $E_{\Delta}(Y_0)$  est donc (pour tout choix de vecteur cyclique) de la forme

$$\frac{d^2}{dx^2} y + x^{-p+\omega(\text{tr}(A))} b_1(x) \frac{dy}{dx} + x^{-2p} b_2(x) y = 0$$

avec  $b_1(0)b_2(0) \neq 0$ .

D'après la formule (3-2), nous sommes dans le cas où  $\lambda_2 \geq 2\lambda_1$  et donc  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  présente une seule pente entière qui vaut  $p-1$  (cf. fig. 4.1).

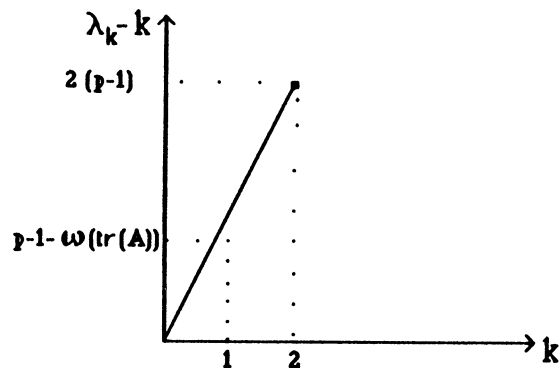


fig. 4.1

**4.2. Cas où  $0 < i < p-1$**

Dans ce cas, la deuxième colonne de la matrice  $A_0$  est nulle.

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_0^{11} & 0 \\ a_0^{21} & 0 \end{pmatrix}$$

Comme  $A_0 \neq 0$ , nous avons deux cas à distinguer:

**4.2.a. Cas où  $a_0^{11} \neq 0$  (i.e.  $A_0$  non nilpotente)**

On a dans ce cas, d'après les relations (3-1)

$$\Theta_s(A, 0, \lambda) = x^s \det \begin{pmatrix} \frac{a_0^{11}}{x^s} + \dots + a_s^{11} + \lambda & 0 \\ \frac{a_0^{21}}{x^s} + \dots + a_s^{21} & \lambda \end{pmatrix} \Big|_{x=0} \quad \text{pour } s=1, \dots, i-1$$

donc

$$\theta_1(A, 0, \lambda) = \theta_2(A, 0, \lambda) = \dots = \theta_{i-1}(A, 0, \lambda) = \lambda a_0^{11} \neq 0$$

Pour  $s \geq i$ , on a

$$\theta_s(A, 0, \lambda) = x^{2s-i} \det \begin{pmatrix} \frac{a_0^{11}}{x^s} + \dots + a_s^{11} + \lambda & \frac{a_i^{12}}{x^{s-i}} + \dots + a_s^{12} \\ \frac{a_0^{21}}{x^s} + \dots + a_s^{21} & \frac{a_i^{22}}{x^{s-i}} + \dots + a_s^{22} + \lambda \end{pmatrix} \Big|_{x=0}$$

donc

$$\theta_i(A, 0, \lambda) = a_0^{11} \lambda + a_0^{11} a_i^{22} - a_0^{21} a_i^{12} \neq 0$$

et

$$\theta_{i+1}(A, 0, \lambda) = \dots = \theta_{p-1}(A, 0, \lambda) = a_0^{11} a_i^{22} - a_0^{21} a_i^{12} \neq 0$$

Par conséquent, on a d'après (3-3)

$$k_s = 2 \quad \text{pour } s = i+1, i+2, \dots, p-1$$

et donc  $\lambda_2 = 2p - i$ . D'autre part, on a

$$\text{tr}(A_0) = a_0^{11} \neq 0$$

d'après la relation (3-2), on a  $\lambda_1 = p$ . Donc l'équation différentielle  $E_\Delta(Y_0)$  est de la forme :

$$\frac{d^2}{dy^2} + x^{-p} b_1(x) \frac{dy}{dx} + x^{-2p+i} b_2(x) y = 0$$

avec  $b_1(0)b_2(0) \neq 0$ . Son polygone de  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  présente deux pentes entières  $p-1$  et

$p - i - 1$  (cf. fig. 4.2) toutes les deux distinctes et strictement positives.

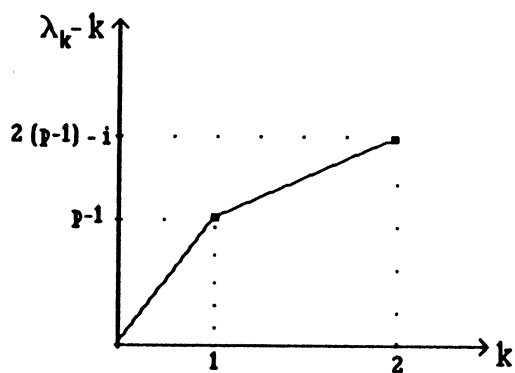


fig. 4.2

**4.2.b. Cas où  $a_0^{11} = 0$  (i.e.  $A_0$  est nilpotente)**

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_0^{21} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } a_0^{21} \neq 0$$

On peut voir facilement dans ce cas, que l'entier  $i$  vaut nécessairement 1, car sinon le système n'est pas super-irréductible. Les fonctions  $\theta_s(A, 0, \lambda)$  s'expriment

$$\theta_s(A, 0, \lambda) = x^{2s-1} \det \begin{pmatrix} \frac{a_1^{11}}{x^{s-1}} + \dots + a_s^{11} + \lambda & \frac{a_1^{12}}{x^{s-1}} + \dots + a_s^{12} \\ \frac{a_0^{21}}{x^s} + \dots + a_s^{21} & \frac{a_1^{22}}{x^{s-1}} + \dots + a_s^{22} + \lambda \end{pmatrix} \Big|_{x=0}$$

$s = 1, 2, \dots, p-1$

donc

$$\theta_s(A, 0, \lambda) = -a_0^{21} a_1^{12} \quad s = 1, 2, \dots, p-1$$

Puisque  $d^\circ(\theta_s(A, 0, \lambda)) = 0$ , on a  $k_s = 2$  pour tout  $s = 1, 2, \dots, p-1$ , et donc

$$\lambda_2 = 2p-1.$$

L'équation différentielle  $E_\Delta(Y_0)$  est donc de la forme

$$\frac{d^2}{dy^2} + x^{-p+\omega(\text{tr}(A))} b_1(x) \frac{dy}{dx} + x^{-2p+1} b_2(x) y = 0$$

avec  $b_1(0)b_2(0) \neq 0$ . Puisque  $\omega(\text{tr}(A(x))) \geq 1$ , on a

$$\lambda_2 = 2p-1 \geq 2 [ p - \omega(\text{tr}(A(x))) ]$$

D'après la remarque 2.1, le polygone de  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  ne présente alors qu'une seule pente qui est rationnelle et qui vaut

$$\pi_0 = \frac{2p-3}{2}$$

### 4.3. Cas où $i = p-1$

C'est dans ce cas que le polygone de Newton présente une pente nulle. En effet, on a

$$\theta_s(A, 0, \lambda) = x^s \det \begin{pmatrix} \frac{a_0^{11}}{x^s} + \dots + a_s^{11} + \lambda & x^{p-s-1} a_{p-1}^{12} + x^{p-s} a_p^{12} + \dots \\ \frac{a_0^{21}}{x^s} + \dots + a_s^{21} & x^{p-s-1} a_{p-1}^{22} + x^{p-s} a_p^{22} + \dots + \lambda \end{pmatrix} \Big|_{x=0}$$

Donc

$$\theta_1(A, 0, \lambda) = \theta_2(A, 0, \lambda) = \dots = \theta_{p-2}(A, 0, \lambda) = a_0^{11} \lambda$$

et

$$\theta_{p-1}(A, 0, \lambda) = a_0^{11} \lambda + a_0^{11} a_{p-1}^{22} - a_0^{11} a_{p-1}^{22}$$

Comme  $(\Delta)$  est supposé super-irréductible, on a nécessairement  $a_0^{11} \neq 0$ , les polynômes  $\theta_s(A, 0, \lambda)$  sont donc tous de degré 1. On ne peut pas conclure comme dans les cas précédents la construction immédiate du polygone  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$ . Cependant, on peut remarquer d'après la proposition 4.2, chapitre VI, que l'entier :

$$r_{p-1} = \text{Max}_{1 \leq k \leq 2} (\lambda_k - k) = \lambda_1 - 1 = p - 1$$

désigne la hauteur du polygone  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$ . Ce dernier présente donc une pente nulle de longueur 1 (cf. fig. 4.3). Dans le chapitre IX, on donne dans le cas général, une condition nécessaire et suffisante sur le degré de  $\theta_{p-1}(A, 0, \lambda)$  pour que le polygone  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  présente une pente nulle. L'équation différentielle obtenue par la méthode du vecteur cyclique est alors de la forme:

$$\frac{d^2}{dy^2} + x^{-p} b_1(x) \frac{dy}{dx} + x^{-p-1} b_2(x) y = 0$$

avec  $b_1(0) = \text{tr}(A_0) \neq 0$ .

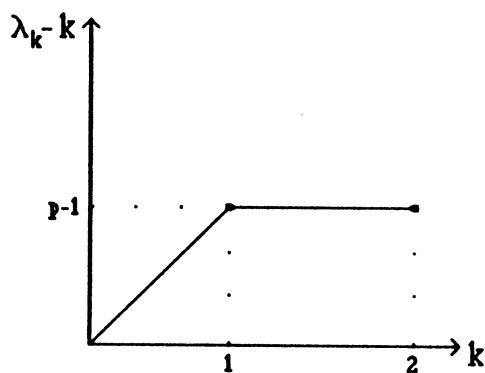


fig 4.3



**Remarques 4.1**

1. Dans le cas 4.1, on a

$$\det ( M(x) ) = x^{-2p} ( \theta_s ( A, 0, \lambda ) + O(x) ) \quad \text{pour } s = 1, 2, \dots, p-1$$

avec  $\det(A_0) \neq 0$ . Donc

$$\lambda_2 = - \omega(\det( M(x) )) = 2p$$

2. Dans le cas 4.1 et 4.3, on a

$$\det ( M(x) ) = x^{-2p+i} [ a_0^{11} a_i^{22} - a_i^{12} a_0^{21} + O(x) ]$$

avec  $a_0^{11} a_i^{22} - a_i^{12} a_0^{21} \neq 0$ . Donc

$$\lambda_2 = - \omega(\det( M(x) )) = 2p - i$$

3. Dans le cas 4.2.b, on a :

$$\det ( M(x) ) = x^{-2p} [ -x a_0^{21} a_1^{12} + O(x^2) ]$$

avec  $a_0^{21} a_1^{12} \neq 0$ . Donc

$$\lambda_2 = - \omega(\det( M(x) )) = 2p - 1$$

Nous venons de voir dans tous les cas traités, que si le système  $(\Delta)$  est super-irréductible, alors pour tout choix de vecteur cyclique  $Y_0$ ,  $\lambda_2$  admet la même valeur que l'ordre polaire du déterminant de la matrice  $M(x)$  (si celui-ci est supérieur ou égal à  $p+1$ ). D'autre part, d'après la relation (3-2) on a

$$\lambda_1 = p - \omega(\text{trace}( A(x) ))$$

D'où le théorème

**Théorème 4.2**

*Les polygones algébrique et différentiel de Newton d'un système différentiel 2x2 super-irréductible sont identiques.*

**Remarque 4.3**

D'après la définition 3.1, le polygone algébrique est indépendant du vecteur cyclique. Le théorème précédent montre en particulier que le polygone  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  est indépendant du vecteur choisi. Ce résultat est démontré d'une manière plus générale dans [7].

La deuxième étape de cet algorithme consiste à construire deux solutions vectorielles associées au système. On donne dans ce qui suit la formation de ces solutions suivant la structure du polygone de Newton. Chaque pente fournit une solution :

Lorsque le polygone présente deux pentes, on donne d'abord une méthode générale pour le calcul d'une solution correspondant à une pente nulle de longueur 1. Ensuite, par des changements de variables, on montre qu'on peut réduire chaque pente strictement positive (de longueur 1) à 0. De même, si le polygone présente une seule pente, par des changements de variables et des ramifications, on peut se ramener, en un nombre fini de pas, soit au cas de deux pentes, soit au cas d'une singularité régulière auquel cas, on sait former un système fondamental de solutions.

Ecrivons le système différentiel sous la forme :

$$(5-1) \quad Y'(x) = x^{-p} A(x) Y(x) = x^{-p} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} A_k x^k \right) Y(x) \quad \text{avec } p > 1$$

### 5. Formation du développement d'une solution correspondant à une pente nulle

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que si le polygone de Newton présente une pente nulle, alors la matrice du système est telle que

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_0^{11} & 0 \\ a_0^{21} & 0 \end{pmatrix}$$

avec  $a_0^{11} \neq 0$  et  $i = p - 1$  ( cf. fig. 4.3).

La matrice  $A(x)$  du système (5-1) est alors de la forme

$$(5-2) \quad A(x) = \begin{pmatrix} a_0^{11} + x a_1^{11} + \dots & x^{p-1} ( a_{p-1}^{12} + a_p^{12} + \dots ) \\ a_0^{21} + x a_1^{21} + \dots & x^{p-1} ( a_{p-1}^{22} + a_p^{22} + \dots ) \end{pmatrix}$$

Puisque le polygone  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  admet une pente nulle, nous allons tenter de chercher une solution " régulière " de la forme

$$(5-3) \quad Y(x) = x^\lambda [ u_0 + u_1 x + \dots + u_k x^k + \dots ]$$

où  $\lambda$  est une constante complexe et les  $u_k$  sont des vecteurs colonnes à 2 composantes dans  $\mathbb{C}$  avec  $u_0 \neq 0$ .

En remplaçant formellement l'expression (5-3) dans (5-1), on obtient la relation :

$$\begin{aligned} x^{\lambda-1} [ \lambda u_0 + (\lambda+1)u_1 x + \dots + (k+\lambda)u_k x^k + \dots ] \\ = x^{\lambda-p} [ u_0 + u_1 x + \dots + u_k x^k + \dots ] [ A_0 + A_1 x + \dots + A_k x^k + \dots ] \end{aligned}$$

Ce qui donne la relation

$$(5-4) \quad \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda+k)u_k x^{k+p-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{v=0}^k A_{k-v} u_v \right) x^k$$

En identifiant terme à terme les deux membres de l'égalité (5-4), on obtient les deux relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} (5-5) \quad \sum_{v=0}^{+\infty} A_{k-v} u_v = 0 \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots, p-2 \\ \text{et} \\ (5-6) \quad \sum_{v=0}^k A_{k-v} u_v = (\lambda + k - (p-1)) u_{k-(p-1)} \quad \text{pour } k = p-1, p, \dots, +\infty \end{array} \right.$$

Pour  $k = 0$ , on a l'équation

$$(5-7) \quad A_0 u_0 = 0$$

Comme le coefficient  $a_{011}$  de la matrice  $A_0$  est supposé non nul, une solution non triviale de l'équation (5-7) est

$$(5-8) \quad u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}$$

où  $\beta_0$  est une constante non nulle arbitraire.

Avec ce choix de  $u_0$ , d'après la structure matricielle des coefficients  $A_1, A_2, \dots, A_{p-2}$ , pour  $k = 1$ , l'équation (5-5) se réduit à

$$(5-9) \quad A_0 u_1 = 0$$

en choisissant les vecteurs  $u_1, u_2, \dots, u_{s-1}$ , de la même forme que  $u_0$ , on obtient pour  $k = s$  une équation du même type que la précédente avec l'inconnue  $u_s$ . La solution générale de l'équation (5-5) est donc

$$(5-10) \quad u_s = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_s \end{pmatrix} \quad \text{pour } s = 1, 2, \dots, p-2$$

où les  $\beta_s$  sont des constantes pour l'instant arbitraires.

Considérons maintenant le cas où  $k = p-1$ , on a d'après (5-6)

$$(5-11) \quad A_0 u_{p-1} + A_1 u_{p-2} + \dots + A_{p-2} u_1 + A_{p-1} u_0 = \lambda u_0$$

Or, d'après (5-8) et (5-10)

$$A_{(p-1)-s} u_s = 0 \quad \text{pour } s = 1, 2, \dots, p-2$$

L'équation (5-11) peut donc s'écrire sous la forme suivante

$$(5-12) \quad A_0 u_{p-1} + (A_{p-1} - \lambda I) u_0 = 0$$

Ce qui s'écrit encore sous la forme d'un système linéaire homogène

$$(5-13) \quad G(A, \lambda) W_{p-1} = 0$$

avec

$$(5-14) \quad G(A, \lambda) = \begin{pmatrix} a_0^{11} & a_{p-1}^{12} \\ a_0^{21} & a_{p-1}^{22} - \lambda \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W_{p-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{p-1} \\ \beta_0 \end{pmatrix}$$

où  $\alpha_{p-1}$  est la première composante de  $u_{p-1}$ ,  $\beta_0$  étant le paramètre défini dans (5-8).

Puisque  $\beta_0 \neq 0$ , le vecteur  $W_{p-1}$  est non nul. Il est donc nécessaire de choisir  $\lambda$  de telle manière que le déterminant de la matrice  $G(A, \lambda)$  soit nul. Or, on peut remarquer que ce dernier est égal au polynôme  $\theta_{p-1}(A, 0, -\lambda)$  qui est de degré 1. Donc

$$\det(G(A, \lambda)) = \theta_{p-1}(A, 0, -\lambda) = 0$$

Ce qui détermine la valeur de  $\lambda$

$$(5-15) \quad \lambda = \lambda_0 = \frac{a_0^{11} a_{p-1}^{22} - a_0^{21} a_{p-1}^{12}}{a_0^{11}}$$

On appelle la constante  $\lambda_0$  l'exposant de la monodromie formelle (cf. [5]) associée au système. Nous pouvons donc considérer que  $\alpha_{p-1}$  est déterminé à partir du système (5-13) en fonction du paramètre  $\beta_0$  et on a

$$\alpha_{p-1} = -\frac{a_{p-1}^{12}}{a_0^{11}} \beta_0$$

d'où

$$(5-16) \quad u_{p-1} = \begin{pmatrix} -\frac{a_{p-1}^{12}}{a_0^{11}} \beta_0 \\ \beta_{p-1} \end{pmatrix}$$

où  $\beta_{p-1}$  est une constante arbitraire pour l'instant.

D'une manière générale, nous allons montrer comment déterminer les autres vecteurs  $u_k$  pour  $k \geq p$ . Pour cela posons

$$(5-17) \quad w_{p+s} = \begin{pmatrix} \alpha_{p+s} \\ \beta_{s+1} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad u_{p+s} = \begin{pmatrix} \alpha_{p+s} \\ \beta_{p+s} \end{pmatrix} \quad s \geq 0$$

et supposons que les vecteurs

$$w_0, w_1, \dots, w_{p+(s-1)} \quad s \geq 1$$

sont déterminés. En remplaçant  $k$  par  $p+s$  dans (5-6), on obtient

$$(5-18) \quad A_0 u_{p+s} + \Sigma_1 + A_{p-1} u_{s+1} + \Sigma_2 = (\lambda_0 + s+1) u_{s+1}$$

où

$$\Sigma_1 = A_1 u_{p+s-1} + A_2 u_{p+s-2} + \dots + A_{p-2} u_{s+2}$$

$$\Sigma_2 = A_p u_s + A_{p+1} u_{s-1} + \dots + A_{p+s} u_0$$

Comme la deuxième colonne de chaque matrice  $A_k$ ,  $k \leq p-2$  est nulle, la somme  $\Sigma_1$  ne dépend que de  $\alpha_{p+s-1}, \alpha_{p+s-2}, \dots, \alpha_{s+2}$  supposés connus. Donc les deux sommes partielles  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  sont indépendantes des  $\beta_k$  ( $k > s$ ).

L'équation (5-18) s'écrit matriciellement sous la forme

$$G(A, \lambda_0+s+1)W_{p+s} = V_{p+s} \quad s = 0, 1, \dots, +\infty$$

où

$$V_{p+s} = - \sum_{\substack{v=0 \\ v \neq s+1}}^{p+s+1} A_{p+s-v} u_v - \alpha_{s+1} \begin{pmatrix} a_{p-1}^{11} - (\lambda_0+s+1) \\ 0 \end{pmatrix}$$

qui est une quantité connue. Comme  $\theta_{p-1}(A, 0, -\lambda)$  est un polynôme de degré 1 s'annulant en  $\lambda = \lambda_0$ , on a

$$\det(G(A, \lambda_0+s+1)) = \theta_{p-1}(A, 0, -(\lambda_0+s+1)) \neq 0 \quad \text{pour } s = 0, 1, \dots$$

La matrice  $G(A, \lambda_0+s+1)$  est donc une matrice inversible pour tout  $s \geq 0$ . Par conséquent, les constantes  $\alpha_{p+s}$  et  $\beta_{s+1}$  sont déterminés d'une manière unique.

**Remarque 5.1**

La procédure décrite ci-dessus peut bien être appliquée dans le cas général d'un système différentiel  $n \times n$  dont le polygone de Newton en une singularité irrégulière possède une pente nulle.

Les solutions obtenues par l'algorithme sont en général divergentes, l'exemple ci-dessous le prouve.

**Exemple 5.2**

Considérons le système différentiel :

$$(5-19) \quad Y'(x) = \frac{A(x)}{x^4} Y(x) \quad \text{où} \quad A(x) = \begin{bmatrix} 2 & x^3 \\ 1 & x^3 \end{bmatrix}$$

Ce système est super-irréductible car les polynômes

$$\theta_1(A,0,\lambda) = \theta_2(A,0,\lambda) = 2\lambda \quad \text{et} \quad \theta_3(A,0,\lambda) = 2\lambda + 1$$

sont tous non identiquement nuls. On a

$$\det \left( \frac{A(x)}{x^4} + \lambda I \right) \Big|_{\lambda = \frac{d}{dx}} = \frac{d^2}{dx^2} + \left[ \frac{2+x^3}{x^4} \right] \frac{d}{dx} + \frac{1}{x^5}$$

Le polygone de  $\mathcal{P}_{\text{diff}}$  associé au système (5-19) est donc

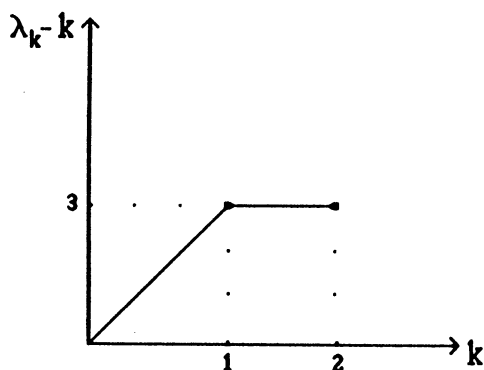


fig. 4.4

Il existe alors d'après ce que l'on vient de voir, une solution formelle de la forme :

$$Y(x) = x^\lambda [ u_0 + u_1 x + \dots ]$$

où  $\lambda = 1/2$  est la racine du polynôme  $\theta_3(A,0,-\lambda)$ . On a d'après les équations (5-5) et (5-6), les relations :



$$\sum_{\nu=0}^k A_{k-\nu} u_{\nu} = 0 \quad \text{pour} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$\sum_{\nu=0}^k A_{k-\nu} u_{\nu} = \left(\frac{1}{2} + k - 3\right)u_{k-3} \quad \text{pour} \quad k = 4, 5, \dots$$

Les premières équations admettent comme solutions :

$$u_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\beta_0 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

où  $\beta_0 \neq 0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  sont des paramètres à déterminer. Le système précédent s'écrit sous la forme

$$\sum_{\nu=0}^{k+3} A_{k+3-\nu} u_{\nu} = \left(\frac{1}{2} + k\right)u_k \quad k = 1, 2, \dots$$

Comme  $A_0 = A_1 = A_k = 0$  pour  $k \geq 4$ , l'équation précédente se traduit sous la forme :

$$(5-20) \quad A_0 u_{k+3} + A_3 u_k = \left(\frac{1}{2} + k\right)u_k$$

Notons

$$u_k = \begin{pmatrix} \alpha_k \\ \beta_k \end{pmatrix} \quad k = 0, 1, \dots$$

on a

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \quad \text{et} \quad \beta_0 \neq 0 \quad \text{arbitraire}$$

L'équation (5-20) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} 2\alpha_{k+3} + \beta_k = \left(\frac{1}{2} + k\right)\alpha_k \\ \alpha_{k+3} + \left(\frac{1-2k}{2}\right)\beta_k = 0 \end{cases}$$

Ce qui s'écrit matriciellement

$$(5-21) \quad G(A, \lambda+k)W_{3+k} = V_k$$

avec

$$W_{3+k} = \begin{pmatrix} \alpha_{k+3} \\ \alpha_k \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V_k = \begin{pmatrix} (1/2 + k)\alpha_k \\ 0 \end{pmatrix} \quad k = 1, 2, \dots$$

En inversant la matrice  $G(A, \lambda+k)$ , on obtient:

$$(5-22) \quad \beta_k = \frac{2k+1}{4k} \alpha_k \quad k = 1, 2, \dots$$

$$(5-23) \quad \alpha_{k+3} = \frac{(2k+1)(2k-1)}{8k} \alpha_k \quad k = 1, 2, \dots$$

Comme  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ , les équations (5-22) et (5-23) entraînent

$$\alpha_{3k+1} = \alpha_{3k+2} = \beta_{3k+1} = \beta_{3k+2} = 0 \quad k = 0, 1, \dots$$

Les vecteurs  $u_k$  sont donc nuls pour tout  $k$  non multiple de 3. Si  $k$  est un multiple de 3, on a d'après (5-22) et (5-23)

$$\alpha_{3(k+1)} = \frac{(6k+1)(6k-1)}{24k} \alpha_{3k} \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\alpha_{3(k+1)} = \frac{3}{2} \frac{(k+1/6)(k-1/6)}{k} \alpha_{3k} \quad k = 1, 2, \dots$$

En faisant intervenir la fonction  $\Gamma$ , on obtient

$$\alpha_{3(k+1)} = - \frac{3^k}{\pi 2^k (k-1)!} \Gamma\left(k + \frac{1}{6}\right) \Gamma\left(k - \frac{1}{6}\right) \beta_0 \quad k = 1, 2, \dots$$

$$\beta_{3k} = - \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3}{2}\right)^k \Gamma\left(k + \frac{7}{6}\right) \Gamma\left(k - \frac{1}{6}\right) \beta_0 \quad k = 1, 2, \dots$$

où  $\beta_0 \neq 0$  est un paramètre quelconque.

### 6. Formation du développement d'une solution correspondant à une pente strictement positive.

La méthode développée ci-dessous est valable pour toute pente strictement positive. Elle consiste à effectuer des changements de variables de manière à ramener à l'étape 1. Pour cela, nous allons étudier le cas où les deux pentes du polygone sont strictement positives et nous donnons la solution correspondant à la pente la plus petite (la même démarche est valable pour l'autre). L'étape 1 ajoutée à cette étape fournit deux solutions linéairement indépendantes. On suppose donc que la matrice du système différentiel est de la forme:

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_0^{11} + x a_1^{11} + \dots & x^i (a_i^{12} + a_{i+1}^{12} x + \dots) \\ a_0^{21} + x a_1^{21} + \dots & x^j (a_j^{22} + a_{j+1}^{22} x + \dots) \end{bmatrix}$$

où  $1 < i < p-1$  et  $a_0^{11} \neq 0$ .

Nous avons vu dans ce cas, que le polygone de Newton du système (cf. fig 4.2) présente deux pentes:

$$\pi_0 = p - 1 \quad , \quad \pi_1 = p - i - 1$$

toutes les deux strictement positives. Connaissant les pentes du polygone de Newton du système (5-1), on peut utiliser la même technique appliquée pour les équations différentielles scalaires (cf. [3]). La démarche à suivre est la suivante :

On effectue le changement de variable

$$(6-1) \quad Y(x) = e^{-\frac{a}{x^{p-i-1}}} Z(x)$$

où  $Z(x)$  est un vecteur colonne à 2 composantes,  $a$  est un nombre complexe arbitraire à déterminer. Ce changement de variable transforme le système (5-1) en

$$(6-2) \quad Z'(x) = \frac{B(x)}{x^p} Z(x)$$

avec

$$(6-3) \quad B(x) = A(x) - a(p-i-1)x^i I_2$$

où  $I_2$  est la matrice identité d'ordre 2. Notons

$$B(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} B_k x^k$$

On a d'après (6-3)

$$B_k = A_k \quad \text{pour} \quad k \neq i$$

et

$$B_i = A_i - a(p-i-1)I_2 \quad \text{pour} \quad k = i$$

Les fonctions  $\theta_s(B, 0, \lambda)$  associées au système (6-2) ( cf. cas 4.2.a) sont;

$$\theta_s(B, 0, \lambda) = \lambda a_0^{11} = \theta_s(A, 0, \lambda) \neq 0 \quad \text{pour} \quad s = 1, 2, \dots, i-1$$

et

$$\theta_i(B, 0, \lambda) = \lambda a_0^{11} + a_0^{11} (a_i^{22} - a(p-i-1)) - a_0^{21} a_i^{12} \quad \text{pour} \quad s = i$$

qui est non identiquement nulle pour toute valeur de  $a$ . Pour  $s \geq i+1$ , on a d'après la relation (3-1)

$$(6-4) \quad \theta_s(B, 0, \lambda) = \det \begin{pmatrix} a_0^{11} & a_i^{12} \\ a_0^{21} & a_i^{22} - a(p-i-1) \end{pmatrix}$$

Or  $a_0^{11} \neq 0$ , il suffit donc de choisir le paramètre  $a$  de telle sorte que le déterminant ci-dessus soit nul. D'où

$$(6-5) \quad a = \frac{a_0^{11} a_0^{22} - a_0^{21} a_i^{12}}{a_0^{11} (p-i-1)} = \frac{\theta_s(A, 0, \lambda)}{a_0^{11} (p-i-1)} \quad \text{pour } i+1 \leq s \leq p-1$$

Ce choix, rend le système (5-1) super-réductible. Par conséquent la deuxième colonne de la matrice  $B_i$  peut être annulé ( cf. Chapitre V) par une transformation polynomiale de la forme

$$(6-6) \quad T(x) = P. \text{diag}(1, x^i)$$

où  $P$  est une matrice constante. Puisque

$$\theta_s(B, 0, \lambda) = \theta_s(A, 0, \lambda) \neq 0 \quad \text{pour } s = 1, 2, \dots, i-1$$

on peut voir que l'autre pente  $\pi_0 = p-1$  n'a pas été modifiée. D'autre part, la transformation (6-6) augmente l'entier  $i$  d'une unité (au moins). Le polygone  $\mathcal{P}_{\text{diff}}$  associé au nouveau système différentiel est donc de la forme

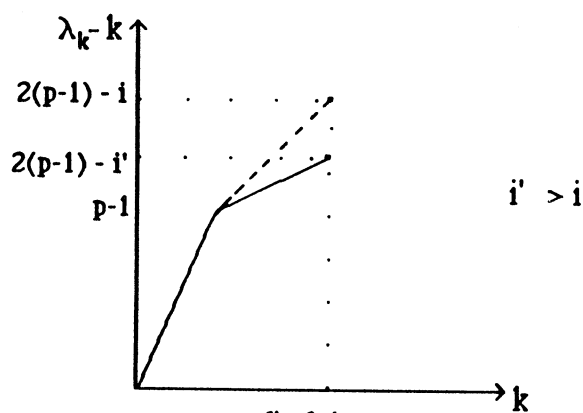


fig 6.1

En répétant les mêmes changements de variable sur la pente la plus petite, on obtient une pente nulle et on se retrouve ainsi dans le premier cas (cf. § 5). On aura donc une solution de la forme:

$$Y(x) = e^{q_1\left(\frac{1}{x}\right)} \cdot x^\lambda \Psi_1(x)$$

avec

$$q_1(x) = \frac{a_{p-i-1}}{x^{p-i-1}} + \frac{a_{p-i-2}}{x^{p-i-2}} + \dots + \frac{a_1}{x}$$

On peut faire le même raisonnement sur l'autre pente de manière à obtenir la deuxième solution. On a donc le résultat:

**Proposition 6.1**

*Supposons que la matrice du système (5-1) soit de la forme*

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_0^{11} + xa_1^{11} + \dots & x^i (a_i^{12} + a_i^{12}x + \dots) \\ a_0^{21} + xa_1^{21} + \dots & x^j (a_i^{22} + a_{i+1}^{22}x + \dots) \end{bmatrix}$$

*avec  $1 < i < p-1$ . Si  $a_0^{11}$  est non nul, alors les polynômes  $q_1(1/x)$  et  $q_2(1/x)$  dans (1-4) sont de degré respectifs  $p-1$  et  $p-i-1$ .*

**7. Cas d'une seule pente**

**7.a. Cas d'une pente rationnelle non entière**

C'est le cas où la matrice résidu  $A_0$  est de la forme

$$(7-1) \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_0^{21} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad a_0^{21} \neq 0$$

Nous avons vu dans ce cas, que les polynômes  $\theta_s(A,0,\lambda)$  sont tous de degré 0 et

(cf.cas 4.2.b)

$$(7-2) \quad \theta_s(A, 0, \lambda) = -a_0^{21} a_0^{12} \neq 0$$

Le polygone  $\mathcal{P}_{\text{diff}}$  possède comme pente  $\pi_0 = (2p-3)/2$

Le changement de variable

$$x = t^2$$

transforme le système (5-1) en un système dont le polygone  $\mathcal{P}_{\text{diff}}$  possède une pente entière. En effet, on a la proposition suivante:

### Proposition 7.2

*Si la matrice résidu  $A_0$  est nilpotente écrite sous la forme (7-1), et si le système (5-1) est super-irréductible, alors la matrice*

$$P(x) = \text{diag}(x^{\frac{1}{2}}, 1)$$

*transforme (5-1) en un système super-irréductible où le polygone de Newton admet une seule pente entière égale à  $2p-3$ . De plus la matrice résidu possède deux valeurs propres distinctes*

$$\lambda = \pm 2 \sqrt{a_0^{21} a_0^{12}}$$

### Remarque 7.1

Nous verrons dans la suite, que ce résultat sert à démontrer la convergence de l'algorithme.

### Démonstration:

La ramification  $x = t^2$ , change (5-1) en un nouveau système de la forme

$$(7-3) \quad Y'(t) = \frac{B(t)}{t^{2p-1}} Y(t)$$

avec

$$B(t) = 2 A(t^2) = 2 \left[ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_0^{21} & 0 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} a_1^{11} & a_1^{12} \\ a_1^{21} & a_1^{22} \end{pmatrix} + \dots \right]$$

Le système différentiel (7-3) est donc super-réductible car

$$\theta_1(B, 0, \lambda) \equiv 0$$

En appliquant l'algorithme de réductibilité du chapitre I, on trouve que la transformation

$$P(t) = \text{diag}(t, 1)$$

réduit l'ordre polaire du système (7-3) à  $2p-2$ . Le nouveau système s'écrit sous la forme

$$(7-4) \quad Y'(t) = \frac{C(t)}{t^{2(p-1)}} Y(t)$$

avec

$$C(0) = 2 \begin{pmatrix} 0 & a_1^{12} \\ a_0^{21} & 0 \end{pmatrix}$$

On a d'après (7-2)

$$\theta_s(A, 0, \lambda) = -a_0^{21} a_0^{12} \neq 0 \quad 1 \leq s \leq p-1$$

donc

$$\det(C(0)) = 4 \theta_s(A, 0, \lambda) \neq 0$$

Par conséquent, on a

$$\theta_s(C, 0, \lambda) \neq 0 \quad 1 \leq s \leq p-1$$

Ce qui prouve la super-irréductibilité du système (7-4). D'après le paragraphe 4.1,



le polygone  $\mathcal{P}_{\text{diff}}$  présente alors une seule pente

$$\pi_0 = 2(p-1) - 1 = 2p-3$$

De plus la matrice résidu  $C(0)$  admet deux valeurs propres distinctes et toutes les deux non nulles

$$\lambda_1 = 2\sqrt{a_0^{21} a_1^{12}} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = -2\sqrt{a_0^{21} a_1^{12}}$$

## 7.b. Cas d'une pente entière

### 7.b.1. Cas où $A_0$ admet deux valeurs propres distinctes

On sait dans ce cas, que la pente vaut  $\pi_0 = p - 1$  et que la matrice résidu

$$A_0 = \begin{pmatrix} a_0^{11} & a_0^{12} \\ a_0^{21} & a_0^{22} \end{pmatrix}$$

est régulière. Posons le changement de variable

$$(7-5) \quad Y(x) = e^{-\frac{a}{x^{p-1}}} Z(x)$$

cela nous conduit au système

$$(7-6) \quad Z'(x) = \frac{B(x)}{x^p} Z(x)$$

avec

$$B(0) = B_0 = A_0 - (p-1)aI_2$$

Comme dans le cas précédent, nous allons choisir le paramètre  $a$  de telle sorte que le nouveau système (7-6) soit super-réductible. i.e.

$$\det(B_0) = \det(A_0 - (p-1)aI_2) = 0$$

Si  $\lambda_1$  désigne une valeur propre de la matrice  $A_0$ , on a

$$a = \frac{\lambda_1}{p-1}$$

En appliquant l'algorithme de réductibilité du chapitre I au système (7-6), la nouvelle matrice présente nécessairement une colonne de valuation  $i$  strictement positif. Le polygone obtenu aura donc la forme suivante:

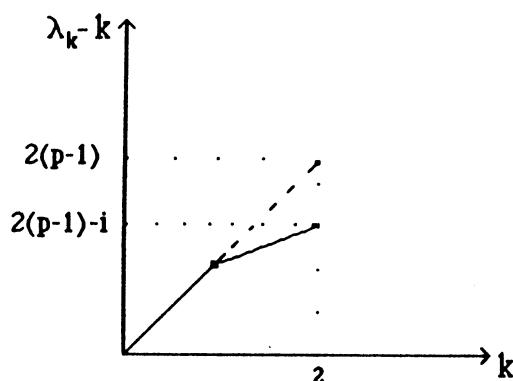


fig 7.2

où  $i > 0$ .

En appliquant alors la procédure expliquée dans le paragraphe 6, on obtient deux solutions formelles de la forme

$$(7-7) \quad Y_i(x) = e^{q\left(\frac{1}{x}\right)} x^{\lambda_i} \Psi_i(x) \quad i = 1, 2$$

où  $q_1$  et  $q_2$  sont des polynômes de degré  $p-1$ .

### 7.b.2. Cas où $A_0$ admet une seule valeur propre $\lambda$

Nous avons deux cas à distinguer:

**(i) Cas où  $\lambda$  admet deux vecteurs propres linéairement indépendants**

Il est évident dans ce cas que la matrice  $A_0$  est diagonale et le choix

$$(7-8) \quad a = \frac{\lambda}{p-1}$$

transforme  $A_0$  en une matrice nulle. Le nombre  $p$  est donc réduit à d'une unité (au moins). Le polygone  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  obtenu possède alors l'une des deux formes suivantes:

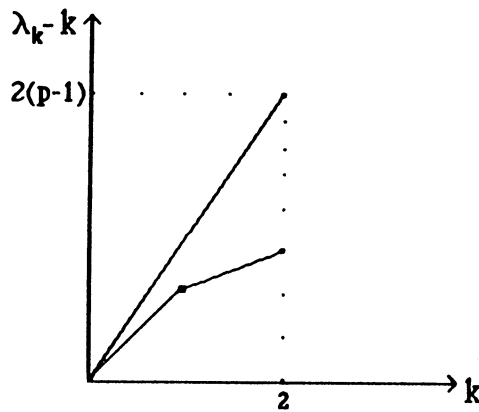


fig 7.3

ou

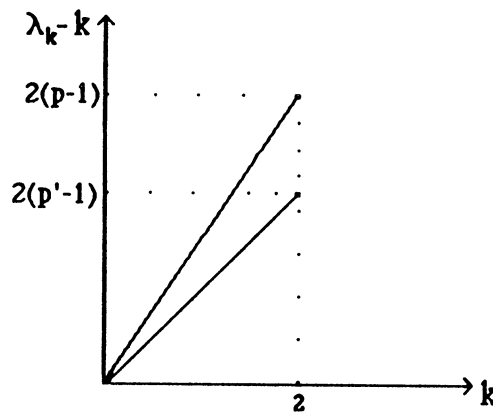


fig 7.4

Le premier polygone ( fig 7.3) correspond au cas du paragraphe 6. On sait donc nous ramener au cas d'une pente nulle, les solutions formelles sont alors de la forme

$$Y_i(x) = e^{q_i \left(\frac{1}{x}\right)} x^{\lambda_i} \Psi_i(x) \quad i = 1, 2$$

où  $q_1$  et  $q_2$  sont des polynômes de degré  $p-1$ .

Le deuxième cas (fig 7.4), pose lui un problème, mais grâce à la proposition 7.2, nous sommes assurés que l'algorithme converge. En effet, nous avons deux possibilités:

- i.1. Si le nouveau polygone admet une pente rationnelle, la procédure expliquée dans le paragraphe précédent, nous assure qu'une transformation de la forme

$$(7-9) \quad P(x) = \text{diag} ( x^{1/2}, 1 )$$

plus un changement de variables de la forme (7-5) nous conduit à un polygone du type (fig. 7.3)

- i.2. Si le nouveau polygone admet une pente entière, la procédure expliquée ci-dessus transforme le système, soit sous une forme où le polygone possède deux pentes strictement positives, soit l'entier  $p$  est réduit d'une unité au moins, soit nous sommes dans le cas (ii) qui suit :

### (ii) Cas où $\lambda$ admet un seul vecteur propre

Dans ce cas, le même choix (7-8) rend la matrice  $A_0$  nilpotente. Puisque d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$B_0^2 = (A_0 - (p-1)al)(A_0 - (p-1)al) = 0$$

Deux cas sont alors à distinguer:

- i.1. Le système obtenu est super-réductible. Dans ce cas, l'algorithme de super-réductibilité réduit nécessairement l'entier  $p$  d'une unité (au moins).

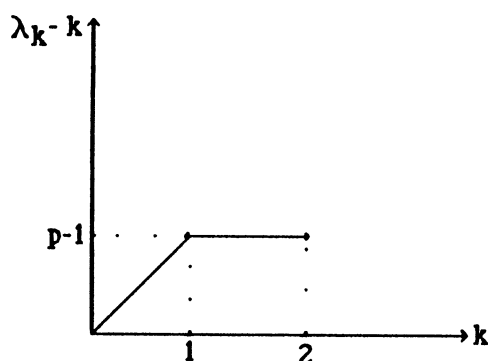
i.2. Le système obtenu est super-irréductible. Comme  $B_0$  est nilpotente, d'après la proposition 7.2, on sait qu'après ramification et une transformation de type (7-9), le polygone est de la forme fig. 7.3.

Il peut, cependant, se passer dans les deux cas précédents le phénomène où à chaque pas, le polygone  $\mathcal{P}_{\text{diff}}$  présente une seule pente (entière). Autrement dit, il n'y a pas de "cassure de pente". C'est le cas, par exemple, d'une matrice diagonale de la forme

$$A(x) = \frac{a(x)}{x^p} I_2 \quad \text{avec } a(0) \neq 0$$

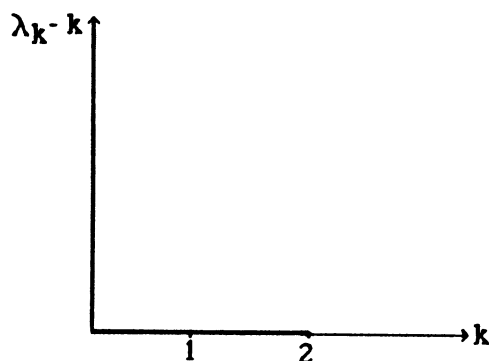
Nous venons de donner un algorithme qui en un nombre fini de pas, transforme le système différentiel de départ en un système dont le polygone admet l'une des figures suivantes

1)



ou

2)



1) Dans le premier cas, la procédure expliquée dans le § 5 fournit la solution correspondante à la pente nulle. Il faut alors remarquer que la procédure du § 6 appliquée à la pente non nulle conduit à la formation de la deuxième solution.

2) Dans le deuxième cas, il est clair que cela correspond à un système dont la singularité est régulière. Dans ce cas, l'algorithme de réductibilité développé dans le premier chapitre réduit l'ordre polaire à 1. Ensuite à l'aide de l'un des algorithmes expliqués dans le 3<sup>o</sup> chapitre, on peut former un système fondamental de solutions.

### 8. Exemple

Nous allons reprendre l'exemple 5.2 pour lequel nous avons calculé la solution correspondante à la pente nulle cf. fig. 4.4. Pour obtenir la deuxième solution (correspondant à la pente  $\pi_0 = 3$ ) nous commençons par faire le changement de variable

$$Y(x) = e^{-\frac{a}{x^3}} Z(x)$$

Cela nous conduit au système

$$Z'(x) = \frac{A^{(1)}(x)}{x^4} Z(x)$$

avec

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 2-3a & x^3 \\ 1 & -3a + x^3 \end{pmatrix}$$

en choisissant  $a = 2/3$ , on obtient un système super-réductible, puisque

$$A_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

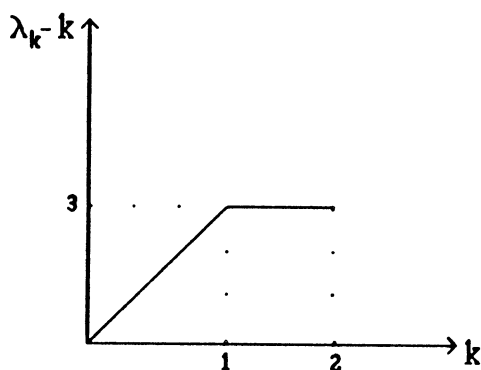
l'algorithme de super-réductibilité fournit la transformation:

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui conduit à la matrice

$$A^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} -2 & -x^3 \\ 1 & x^3 \end{pmatrix}$$

dont le polygone de Newton est



Nous sommes donc amenés à chercher une solution de type

$$Z(x) = x^\lambda [ u_0 + u_1 x + \dots + u_k x^k + \dots ]$$

correspondant au système différentiel

$$Z'(x) = \frac{A^{(2)}(x)}{x^4} Z(x)$$

$\lambda$  est racine du polynôme

$$\theta_3(A, 0, -\lambda) = 2\lambda - 1$$

En appliquant le même raisonnement que nous avons fait pour la première solution, on trouve

$$u_{3k} = \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} \frac{3^k}{\pi 2^k (k-1)!} \Gamma\left(k + \frac{1}{6}\right) \Gamma\left(k - \frac{1}{6}\right) \beta_0 \\ \frac{(-1)^{k+1}}{2\pi} \left(\frac{3}{2}\right)^k \Gamma\left(k + \frac{7}{6}\right) \Gamma\left(k - \frac{1}{6}\right) \beta_0 \end{pmatrix} \quad k = 1, 2, \dots \text{ et } \beta_0 \in \mathbb{C}$$

avec

$$u_{3k+i} = 0 \quad i = 1, 2$$



**Références**

- [1] **CODDINGTON E. A. and LEVINSON N.**  
Theory of ordinary differential equations  
Mc. Graw-Hill Book Company. INC New York (1955).
- [2] **DELLA DORA J. et TOURNIER E.**  
Solutions formelles d'équations différentielles au voisinage de points singuliers réguliers. R.R N° 239, IMAG, Grenoble 1981.
- [3] **DELLA DORA J.**  
Equations différentielles linéaires du second ordre dans le champ complexe.  
R.R. 623-I, IMAG, TIM3, Grenoble Septembre 1986.
- [4] **INCE E. L.**  
Ordinary differential equations.  
New York, Dover (1956).
- [5] **JURKAT W., LUTZ D., and PEYERIMHOFF A.**  
Birkhoff invariants and effective calculations for meromorphic linear differential equations,  
I, J. Math. Anal. Appl. 53(1976), 438-470.
- [6] **MALGRANGE B.**  
Sur les points singuliers des équations différentielles,  
L'enseignement mathématique, t.xx, 1-2, 147-176(1974).
- [7] **J. P RAMIS**  
Théorème d'indice de Gevrey pour les équations différentielles  
Memoirs of the American Mathematical Society.  
Vol. 48, Number 296, March (1984).
- [8] **SIBUYA Y.**  
Sur réduction analytique d'un système d'équations différentielles ordinaires linéaires contenant un paramètre,  
J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, (1), 7, p. 527-540.
- [9] **WASOW W,**  
Asymptotic expansions for ordinary differential equations  
Wiley (1973).

## **CHAPITRE 9**

# **SOLUTIONS FORMELLES DES SYSTEMES DIFFERENTIELS LINEAIRES AU VOISINAGE D'UNE SINGULARITE IRREGULIERE**



## 1. Position du Problème

Dans ce chapitre, nous proposons la mise en oeuvre d'un algorithme permettant de construire un système fondamental de solutions formelles au voisinage d'une singularité irrégulière pour un système différentiel linéaire d'ordre 1 de la forme:

$$(\Delta) \quad Y'(x) = x^{-p} \left[ \sum_{k=0}^{k=+\infty} A_k x^k \right] Y(x) \quad \left( Y'(x) = \frac{dY}{dx} \right)$$

où  $p$  est un entier supérieur ou égal à 1. Les  $A_k$  sont des matrices carrées d'ordre  $n$ , à coefficients complexes.

Un système fondamental de solutions d'un tel système peut s'exprimer sous la forme [1], [19]:

$$\Phi(x) = F(t) t^C \exp \left[ Q\left(\frac{1}{t}\right) \right]$$

où  $t$  est une variable liée à  $x$  par une ramification de la forme  $x = t^m$  ( $m \in \mathbb{N}^*$ ).  $Q(1/t)$  est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont des polynômes en  $1/t$  sans terme constant:

$$Q\left(\frac{1}{t}\right) = \text{diag} \left( q_1\left(\frac{1}{t}\right), q_2\left(\frac{1}{t}\right), \dots, q_n\left(\frac{1}{t}\right) \right)$$

$C$  est une matrice constante et  $F$  une matrice dont les coefficients sont des séries formelles; i.e une expression de la forme:

$$F(t) = \sum_{k=-v}^{k=+\infty} F_k t^k$$

où  $v$  est un entier positif.

Dans le cas d'une singularité régulière, l'algorithme de Frobenius (cf.[2]) permet de construire un système fondamental de solutions d'une équation différentielle scalaire d'ordre  $n$ . Par une méthode similaire (cf. [7], [15]), on peut construire aussi les solutions du système  $(\Delta)$  lorsque celui ci présente une singularité régulière à l'origine.

D'après les travaux de J.P Ramis [12], [13] et B. Malgrange [9], [10], on sait que l'algorithme de Frobenius est au coeur du problème général qui est celui de la recherche des solutions formelles au voisinage d'une singularité irrégulière. On démontre que le tout peut se ramener à l'utilisation de cet algorithme (cf. [10] et [14]). Cette approche est basée sur la structure du polygone de Newton relatif à la singularité de l'équation différentielle étudiée.

C'est ainsi que J. Della Dora et E. Tournier [3], ont développé un algorithme, dans le cas des équations différentielles scalaires, appelé algorithme de cassure de pentes du polygone de Newton. Cette méthode nécessite deux étapes:

- 1) Donner une méthode générale pour la formation d'une chaîne de solutions associée à une pente nulle du polygone de Newton.

Ensuite:

- 2) Pour chaque pente strictement positive, effectuer successivement des changements de variables de type:

$$Y(x) = \exp\left(\frac{a}{x^\lambda}\right) Z(x)$$

où  $\lambda$  désigne la valeur de la pente, de telle manière à la rendre nulle.

Pour le deuxième point, on peut trouver une démonstration de la convergence de l'algorithme dans [3], ou [10].

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la première étape, la deuxième étant essentiellement la même dans le cas des équations différentielles scalaires (cf. [17] pour les détails).

Partant d'un système différentiel super-irréductible, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que le polygone de Newton du système ( $\Delta$ ) admette une pente nulle. Ensuite, nous développons un algorithme permettant de construire une famille de solutions formelles linéairement indépendantes dont le nombre correspond à la longueur de la pente nulle. La technique de la deuxième étape ajoutée à cet algorithme permet ainsi la formation d'un système fondamental de solutions du système ( $\Delta$ ).

### 2. Propriétés relatives à une forme super-irréductible

On considère le système différentiel écrit sous la forme

$$(\Delta) \quad x^p Y'(x) - A(x)Y(x) = 0 \quad p > 1.$$

où  $A(x)$  est une matrice carrée d'ordre  $n$ , sans pôle à l'origine de la forme:

$$(2-1) \quad A(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} A_k x^k \quad A_0 \neq 0$$

D'après le chapitre V, § 2, nous avons vu qu'à l'aide d'une permutation agissant sur les colonnes, on peut toujours écrire la matrice  $A(x)$  sous une forme telle que les  $n_0$  premières colonnes soient de valuation 0, les  $n_1$  suivantes de valuations 1, etc ... . On définit ainsi  $p - 1$  entiers positifs ou nuls  $n_0 > 0, n_1, \dots, n_{p-2}$  tels que les matrices  $A_k$  ( $k \in \{0, 1, \dots, p - 2\}$ ) soient de la forme:

$$(2-2) \quad A_k = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \xleftrightarrow{n_0} \\ A_k^{00} & \xleftrightarrow{n_1} & A_k^{01} & \dots & \xleftrightarrow{n_k} & A_k^{0k} & \xleftrightarrow{n'_k} \\ \downarrow & & & & & & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_k^{10} & A_k^{11} & \dots & A_k^{1k} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_k^{k0} & A_k^{k1} & \dots & A_k^{kk} & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow n_0 \\ \uparrow n_1 \\ \uparrow n'_k \end{matrix}$$

où

$$(2-3) \quad n'_k = n - \sum_{i=0}^{i=k} n_i \quad k = 0, 1, \dots, p-2$$

les  $A_k^{ij}$  sont des matrices associées à la matrice  $A_k$  de dimensions respectives :

$$- n_i \times n_j \quad \text{si} \quad 0 \leq i, j \leq k$$

$$- n'_k \times n_j \quad \text{si} \quad i = k+1 \text{ et } 0 \leq j \leq k$$

On pose

$$(2-4) \quad m_k = n_0 + n_1 + \dots + n_k \quad k = 0, 1, 2, \dots, p-2$$

Dans le chapitre V, on introduit des fonctions  $\theta_s$  qui permettent de caractériser les systèmes différentiels super-irréductibles (cf. [8]). On pose

$$(2-6) \quad \theta_s(A, x, \lambda) = x^{r_s} \det \left( \frac{A(x)}{x^s} + \lambda I \right) \quad s = 1, 2, \dots, p-1$$

où

$$(2-7) \quad r_s = sn_0 + (s-1)n_1 + \dots + n_{s-1}$$

D'après la structure particulière (2-2) des matrices  $A_k$ , en posant

$$(2-8) \quad \alpha_s = \text{diag} (0_{n_0}, I_{n_1}, \dots, sI_{n_s}) \quad 1 \leq s \leq p-1$$

le déterminant (2-6) s'écrit sous la forme (voir le chapitre V):

$$(2-9) \quad \theta_s(A, x, \lambda) = \det ( N^{(s)}(x) + \lambda x^{sI} \alpha_s )$$

où

$$(2-10) \quad N^{(s)}(x) = A(x) x^{-\alpha_s}$$

est une matrice sans pôle à l'origine.

Les fonctions  $\theta_s(A, x, \lambda)$  sont donc des polynômes en  $\lambda$  à coefficients dans  $\mathbb{C}[[x]]$ , l'algèbre des séries formelles sans pôle à l'origine. En remplaçant  $x$  par 0 dans (2-9), on obtient

$$\theta_s(A, 0, \lambda) = \det( \mathcal{G}_s(A, \lambda) )$$

où

$$(2-11) \quad \mathfrak{G}_s(A, \lambda) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \xleftrightarrow{n_0} \\ A_0^{00} \\ \downarrow \\ A_0^{10} \\ \vdots \\ A_0^{s0} \end{matrix} & \begin{matrix} \xleftrightarrow{n_1} \\ A_1^{01} \\ \downarrow \\ A_1^{11} \\ \vdots \\ A_1^{s1} \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} \xleftrightarrow{n_{s-1}} \\ A_{s-1}^{0s-1} \\ \downarrow \\ A_{s-1}^{1s-1} \\ \vdots \\ A_{s-1}^{ss-1} \end{matrix} & \begin{matrix} \xleftrightarrow{n'_s} \\ A_s^{0s} \\ \downarrow \\ A_s^{1s} \\ \vdots \\ A_s^{ss} + \lambda I_{n'_s} \end{matrix} \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow n_0 \\ \uparrow n_1 \\ \vdots \\ \uparrow n'_s \end{matrix}$$

où les  $A_s^{ij}$  sont des blocs associés à la matrice  $A_s$  de dimensions respectives  $n_i \times n_j$  si  $0 \leq i, j \leq s-1$ ,  $n'_s \times n_j$  si  $(i=s, 0 \leq j \leq s-1)$ ,  $n_i \times n'_s$  si  $(j=s, 0 \leq i \leq s-1)$  et  $n'_s \times n'_s$  si  $i=j=s$ .

On montre dans chapitre V, que le système  $(\Delta)$  est  $k$ -irréductible (voir la définition 2.1), si et seulement si les matrices :

$$\mathfrak{G}_1(A, \lambda), \mathfrak{G}_2(A, \lambda), \dots, \mathfrak{G}_k(A, \lambda)$$

sont toutes non singulières identiquement en  $\lambda$ . Lorsque  $k = p - 1$ , on dit que le système  $(\Delta)$  est super-irréductible.

Soit  $T(x)$ , la matrice définie au chapitre II qui permet de transformer  $(\Delta)$  sous une forme compagnon:

$$(2-12) \quad C(x) = T^{-1} \frac{A(x)}{x^p} T - T^{-1} T' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ a_n & \dots & \dots & \dots & a_1 \end{bmatrix}$$

où les  $a_k$  sont les coefficients de l'équation différentielle scalaire  $E_\Delta(Y_0)$  associée à  $(\Delta)$  et obtenue à l'aide d'un vecteur cyclique  $Y_0$ .



On supposera dans toute la suite que les  $a_k$  sont de la forme suivante:

$$(2-13) \quad a_k(x) = \frac{c_k(x)}{x^{\lambda_k}} \quad \text{pour } k = 1, 2, \dots, n$$

où les  $\lambda_k$  désignent l'ordre du pôle des  $a_k$  au sens large, avec  $c_k(0) \neq 0$ . ( On prendra comme convention  $\lambda_k = -\infty$ , si  $a_k \equiv 0$ ). Dans le chapitre VI, on construit une transformation  $\delta$  permettant d'écrire le système compagnon (2-12) sous une forme super-irréductible. Cette approche nous permet d'avoir le lien entre la structure matricielle de  $A(x)$  et l'ordre polaire des coefficients d'une équation différentielle scalaire obtenue par n'importe quel vecteur cyclique. Sous l'hypothèse que le système  $(\Delta)$  est super-irréductible, les résultats essentiels des chapitre VI sont les suivants:

( $\mathcal{P}_1$ ) Si  $p$  désigne l'ordre polaire de la matrice associée à  $(\Delta)$ , alors  $p$  est le plus petit entier vérifiant la relation:

$$(2-14) \quad p \geq \frac{\lambda_k}{k} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

( $\mathcal{P}_2$ ) Si les entiers  $r_s$  ( $0 \leq s \leq p-1$ ) désignent les invariants définis ci-dessus, alors on a la relation :

$$(2-15) \quad r_s = \text{Max} \{ \lambda_k - k(p-s) : k = 1, 2, \dots, n \}$$

( $\mathcal{P}_3$ ) Si  $n_s \neq 0$  et si on désigne par  $k_s$  le plus petit entier appartenant à l'intervalle  $[ n_0 + n_1 + \dots + n_{s-1}, n_0 + n_1 + \dots + n_s ]$  pour lequel le maximum dans (2-15) est atteint, alors on a:

$$(2-16) \quad \lambda_{k_s} = r_s + k_s(p-s) \quad s=1, 2, \dots, p-1$$

et

$$(2-17) \quad k_s = n - d^\circ(\theta_s(A, 0, \lambda)) \quad s=1, 2, \dots, p-1.$$

Dans le chapitre VII, on introduit le polygone  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  (cf. § 2.2) dont les pentes sont exactement celles du polygone de Newton défini dans ([3], [10], [13]). Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que le polygone  $\mathcal{P}_{\text{diff}}(\Delta)$  présente une pente nulle.

**Théorème 2.1:**

*Si  $(\Delta)$  est un système super-irréductible, alors son polygone de Newton admet une pente nulle si et seulement si  $d^\circ(\theta_{p-1}(A,0,\lambda)) > 0$ . Cette pente est alors de longueur  $d^\circ(\theta_{p-1}(A,0,\lambda)) = n - k_{p-1}$ .*

**Démonstration:**

Par construction, on sait que le polygone de Newton admet une pente nulle si et seulement si, il existe  $j_0 < n$  tel que:

$$(2-18) \quad \lambda_{j_0} - j_0 = r_{p-1}$$

où  $r_{p-1}$  désigne la hauteur du polygone (i.e. l'indice d'irrégularité au sens de Malgrange [9]). Or d'après la propriété ( $\mathcal{P}_3$ ),  $k_{p-1}$  est le plus petit entier vérifiant l'égalité (2-18). Donc  $k_{p-1} \leq j_0 < n$ . Par conséquent  $d^\circ(\theta_{p-1}(A,0,\lambda)) = n - k_{p-1} > 0$ .  
c.q.f.d.

**3. Algorithme de calcul des solutions formelles associées à une pente nulle.**

Dans tout ce qui suit, on supposera que le système  $(\Delta)$  est super-irréductible et on notera

$$(3-1) \quad k^* = n - d^\circ(\theta_{p-1}(A,0,\lambda))$$

Nous supposons de plus que la condition du théorème 2.1 (i.e.  $k^* < n$ ) est vérifiée. Si on pose  $s = p - 1$  dans (2-11), on a:

$$(3-2) \quad \mathfrak{G}(A, \lambda) = \mathfrak{G}_{p-1}(A, \lambda) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} \xleftrightarrow{n_0} \\ A_0^{00} \\ \xleftrightarrow{A_0^{10}} \\ \dots \\ A_0^{p-10} \end{matrix} & \begin{matrix} \xleftrightarrow{n_1} \\ A_1^{01} \\ \xleftrightarrow{A_1^{11}} \\ \dots \\ A_1^{p-11} \end{matrix} & \dots & \begin{matrix} \xleftrightarrow{n_{p-2}} \\ A_{p-2}^{0p-2} \\ \xleftrightarrow{A_{p-2}^{1p-2}} \\ \dots \\ A_{p-2}^{p-1p-2} \end{matrix} & \begin{matrix} \xleftrightarrow{n'_{p-1}} \\ A_{p-1}^{0p-1} \\ \xleftrightarrow{A_{p-1}^{1p-1}} \\ \dots \\ A_{p-1}^{p-1p-1} + \lambda I_{n'_{p-1}} \end{matrix} \end{pmatrix}$$

On notera

$$(3-3) \quad m = n_0 + n_1 + \dots + n_{p-2}$$

$$(3-4) \quad n'_{p-1} = n - m$$

En utilisant la même procédure que dans le cas des systèmes différentiels 2x2, nous allons tenter de chercher des solutions de la forme:

$$(3-7) \quad Y(x) = x^{-\lambda} [ u_0 + u_1 x + \dots + u_k x^k + \dots ]$$

où  $\lambda$  est un nombre complexe, et les  $u_k$  des vecteurs colonnes à  $n$  composantes à coefficients dans  $\mathbb{C}$ , avec  $u_0 \neq 0$ . On écrit formellement:

$$x^p Y'(x) = x^{-\lambda} \sum_{k=0}^{k=+\infty} (k-\lambda) u_k x^{k+p-1}$$

$$A(x)Y(x) = x^{-\lambda} \sum_{k=0}^{k=+\infty} \left( \sum_{v=0}^{v=k} A_{k-v} u_v \right) x^k$$

Donc  $x^p Y'(x) - A(x)Y(x) =$

$$(3-8) \quad x^{-\lambda} \left[ \sum_{k=0}^{p-2} \left( \sum_{v=0}^{v=k} A_{k-v} u_v \right) x^k + \sum_{k=p-1}^{k=+\infty} \left[ (k-(p-1) - \lambda) u_{k-(p-1)} - \sum_{v=0}^k A_{k-v} u_v \right] x^k \right]$$

D'où l'équivalence: Le vecteur  $Y(x)$  dans (3-7) est solution du système  $(\Delta)$  si et seulement si les relations suivantes sont vérifiées:

$$(3-9) \quad \sum_{\nu=0}^k A_{k-\nu} u_{\nu} = 0 \quad \text{pour } k=0, 1, 2, \dots, p-2$$

et

$$(3-10) \quad \sum_{\nu=0}^k A_{k-\nu} u_{\nu} = (k-(p-1)-\lambda)u_{k-(p-1)} \quad \text{pour } k=p-1, p, \dots, \infty$$

Pour  $k = 0, 1, 2, \dots, p-2$ , on a d'après les équations (3-9):

$$(3-11) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0 u_0 = 0 \\ A_0 u_1 + A_1 u_0 = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ A_0 u_{p-2} + A_1 u_{p-3} + \dots + A_{p-2} u_0 = 0 \end{array} \right.$$

D'après la structure matricielle (2-2) des coefficients  $A_k$  ( $0 \leq k \leq p-2$ ), si l'on désigne par  $\text{Ker}(A_k)$  le noyau de l'application linéaire associée à la matrice  $A_k$ , on a la propriété suivante:

$$(3-12) \quad \text{Ker}(A_{p-2}) \subset \text{Ker}(A_{p-3}) \subset \dots \subset \text{Ker}(A_0)$$

Le système (3-11) admet alors comme solutions :

$$(3-13) \quad u_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_0^{(p-1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \vdots \\ \downarrow \end{matrix} \begin{matrix} m \\ \vdots \\ n-m \end{matrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_1^{(p-2)} \\ X_1^{(p-1)} \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad u_{p-2} = \begin{bmatrix} 0 \\ X_{p-2}^{(1)} \\ \vdots \\ X_{p-2}^{(p-2)} \\ X_{p-2}^{(p-1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow n_0 \\ \uparrow n_1 \\ \vdots \\ \uparrow n_{p-2} \\ \uparrow n-m \end{matrix}$$

où les  $X_s^{(k)}$  sont des vecteurs colonnes à  $n_k$  composantes si  $k \leq p-2$ , et  $n-m$  si  $k = p-1$ . Ces composantes sont pour l'instant arbitraires avec  $X_0^{(p-1)} \neq 0$ .

Pour  $k \geq p-1$ , décomposons les vecteurs  $u_k$  de la même manière:

$$u_{p-1+k} = \begin{bmatrix} X_{p+k-1}^{(0)} \\ X_{p+k-1}^{(1)} \\ \vdots \\ X_{p+k-1}^{(p-2)} \\ X_{p+k-1}^{(p-1)} \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow n_0 \\ \updownarrow n_1 \\ \\ \updownarrow n_{p-2} \\ \updownarrow n-m \end{matrix} \quad k = 0, 1, \dots$$

D'après ce que l'on vient de voir, le vecteur solution (3-7) s'écrit sous la forme:

$$Y(x) = x^{-\lambda} \begin{bmatrix} x^{p-1} \sum_{k=0}^{+\infty} X_{p+k-1}^{(0)} x^k \\ x^{p-2} \sum_{k=0}^{+\infty} X_{p+k-2}^{(1)} x^k \\ \dots \\ \sum_{k=0}^{+\infty} X_k^{(p-1)} x^k \end{bmatrix}$$

ce qui s'écrit encore sous la forme:

$$(3-14) \quad Y(x) = x^{-\lambda} x^\varepsilon Z(x)$$

où  $\varepsilon = \text{diag} ( (p-1)I_{n_0}, (p-2)I_{n_1}, \dots, I_{n_{p-2}}, 0_{n-m} )$  et :

$$(3-15) \quad Z(x) = Z_0 + Z_1 x + \dots + Z_k x^k + \dots$$

D'après la relation (2-10), la matrice du système ( $\Delta$ ) est de la forme:

$$(3-17) \quad A(x) = N(x) x^\alpha$$

où  $\alpha$  est la matrice définie dans (2-8) pour  $s = p-1$ , et qui vérifie la relation:

$$(3-18) \quad \alpha + \varepsilon = (p-1)I_n$$

$N(x)$  est une matrice à coefficients dans  $\mathbb{C}[[x]]$  et de la forme:

$$(3-19) \quad N(x) = \sum_{k=0}^{k=\infty} N_k x^k$$

avec

$$N_0 = \begin{pmatrix} \overleftrightarrow{n_0} & \overleftrightarrow{n_1} & & \overleftrightarrow{n_{p-2}} & \overleftrightarrow{n_{p-1}} \\ A_0^{00} & A_1^{01} & \dots & A_{p-2}^{0p-2} & A_{p-1}^{0p-1} \\ A_0^{10} & A_1^{11} & \dots & A_{p-2}^{1p-2} & A_{p-1}^{1p-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_0^{p-10} & A_1^{p-11} & \dots & A_{p-2}^{p-1p-2} & A_{p-1}^{p-1p-1} \end{pmatrix}$$

les  $A_k^{ij}$  sont les blocs des matrices  $A_k$  définis ci-dessus. En remplaçant  $Y(x)$  par son expression (3-14), on a

$$x^p Y'(x) = x^{p-\lambda-1} x^\varepsilon [(\varepsilon - \lambda I)Z + xZ'(x)]$$

et

$$A(x)Y(x) = x^{-\lambda} N(x) x^\alpha x^\varepsilon Z(x)$$

D'après la relation (3-18), on a:

$$A(x)Y(x) = x^{p-\lambda-1} N(x)Z(x)$$

Donc

$$(3-20) \quad \frac{A(x)}{x^{p-1}} Y(x) - xY'(x) = x^{-\lambda} [N(x)Z(x) - x^\varepsilon [(\varepsilon - \lambda I)Z(x) + xZ'(x)]]$$

On a donc l'équivalence : le vecteur  $Y(x)$  est solution du système  $(\Delta)$  si et seulement si le vecteur  $Z$  vérifie la relation

$$(3-21) \quad N(x)Z(x) + (\lambda I - \varepsilon)x^\varepsilon Z(x) = x^{\varepsilon+1} Z'(x)$$

Ecrivons  $x^\varepsilon$  sous la forme:

$$(3-22) \quad x^\varepsilon = \sum_{k=0}^{+\infty} E_k x^k$$

avec

$$(3-23) \quad \begin{cases} E_0 = \text{diag} ( 0_m , I_{n-m} ) & \text{si } k=0 \\ E_k = \text{diag} ( 0, \dots, 0, I_{n_{p-1-k}}, 0, \dots, 0 ) & \text{si } 1 \leq k \leq p-1 \\ E_k = 0 & \text{si } k \geq p \end{cases}$$

En utilisant les développements précédents ainsi que ceux de (3-15) et (3-19), nous obtenons formellement la relation:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{\nu=0}^k N_{k-\nu} Z_\nu + (\lambda I - \varepsilon) E_{k-\nu} Z_\nu \right) x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \left( \sum_{\nu=0}^k \nu E_{k-\nu} Z_\nu \right) x^k$$

L'identification terme à terme des deux séries entraîne les relations suivantes:

$$(3-24) \quad N_0 Z_0 + (\lambda I - \varepsilon) E_0 Z_0 = 0 \quad \text{pour } k = 0$$

$$(3-25) \quad [N_0 + ((\lambda - k)I - \varepsilon)E_0] Z_k = V_{k-1} \quad \text{pour } k \geq 1.$$

où

$$(3-26) \quad V_{k-1} = \sum_0^{k-1} [ \nu E_{k-\nu} Z_\nu - (N_{k-\nu} + \lambda I - \varepsilon) E_{k-\nu} ]$$

Le second membre de l'égalité (3-25) ne dépend que de  $Z_0, Z_1, \dots, Z_{k-1}$  et de  $\lambda$ . L'équation (3-25) peut donc déterminer d'une manière récursive le vecteur  $Z_k$  en fonction des vecteurs  $Z_0, Z_1, \dots, Z_{k-1}$ . On peut remarquer d'autre part que les deux premiers membres des égalités (3-24) et (3-25) ne dépendent pas de  $\varepsilon$ , puisque dans les relations (3-23) on peut voir que

$$\varepsilon E_0 = 0$$

On peut donc écrire les équations (3-24) et (3-25) d'une manière plus simple:

$$(3-27) \quad [N_0 + \lambda E_0] Z_0 = 0$$

$$(3-28) \quad [N_0 + (\lambda - k)E_0] Z_k = V_{k-1} \quad \text{pour } k \geq 1.$$

### Remarque 3-1

Les deux systèmes linéaires (3-27) et (3-28) ont comme matrices

$$\mathcal{G}(A, \lambda) = N_0 + \lambda E_0 \quad \text{et} \quad \mathcal{G}(A, \lambda - k) = N_0 + (\lambda - k)E_0$$

où  $\mathcal{G}(A, \lambda)$  désigne la matrice que nous avons déjà définie dans (3-2).

Puisque le système différentiel ( $\Delta$ ) est supposé super-irréductible, en vertu de la relation (2-17), le polynôme

$$(3-29) \quad \theta_{p-1}(A, 0, \lambda) = \det(N_0 + \lambda E_0)$$

est non identiquement nul et son degré vaut  $n - k^*$ . Ce degré n'est autre (cf. Théorème 2.1) que la longueur de la pente du polygone de Newton relatif à ( $\Delta$ ).

Nous allons, dans ce qui suit, donner les solutions correspondant à cette pente suivant la structure matricielle de  $N_0$ . Pour cela, nous supposons d'abord que l'on puisse choisir les vecteurs  $Z_k$  pour  $k \geq 1$  de telle sorte que l'équation (3-28) soit satisfaite. Dans ce cas, on a d'après (3-20):



$$(3-30) \quad \left[ \frac{A(x)}{x^{p-1}} - x \frac{d}{dx} \right] Y(x) = x^{-\lambda} [N_0 + \lambda E_0] Z_0$$

Comme  $Z_0$  est arbitraire, le vecteur  $Z$  dépend de  $x$ , de  $\lambda$  et  $Z_0$ , nous le notons donc:

$$(3-31) \quad Z = Z(x, \lambda, Z_0) = \sum_{k=0}^{+\infty} Z_k(\lambda) x^k$$

Pour que  $Y$  soit solution du système  $(\Delta)$ , il faut choisir  $\lambda$  de telle sorte que:

$$(3-32) \quad \det(N_0 + \lambda E_0) = 0.$$

On notera

$$Y^{(i)} = Y(x, \lambda_i, Z_0^{(i)}) = x^{-\lambda_i} x^\varepsilon Z^{(i)}(x, \lambda_i, Z_0^{(i)})$$

une solution du système  $(\Delta)$  correspondant au choix de  $\lambda_i$  et  $Z_0^{(i)}$ .

Un nombre complexe vérifiant l'égalité (3-32) sera appelé valeur propre de la matrice  $N_0$  relative à  $E_0$ . Dans la littérature, l'équation (3-32), appelée problème de valeurs propres généralisées (cf. [6, p. 251-265]), a été étudiée par plusieurs auteurs (voir [4, 18, 11]). Le polynôme (3-29) est appelé polynôme caractéristique de  $N_0$  relatif à  $E_0$ . On donne dans [16] une méthode de calcul du rang de la matrice  $A + \lambda B$ , suivant la structure matricielle de  $A$  et  $B$ . Dans [5], on parle de faisceaux de matrices et on dit qu'un faisceau  $A + \lambda B$  est régulier lorsque les deux matrices  $A$  et  $B$  sont carrées et vérifient  $\det(A + \lambda B) \neq 0$ . Ce qui est notre cas ici.

### Définition 3-2

*Si un vecteur colonne  $X$  non nul à coefficients complexes vérifie l'équation*

$$[N_0 + \lambda E_0]X = 0$$

*On dira qu'il est vecteur propre relatif au faisceau  $N_0 + \lambda E_0$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .*

On peut donc déterminer une solution  $Y(x)$  dès qu'on est en présence d'un vecteur propre relatif au faisceau  $N_0 + \lambda E_0$ . La difficulté apparaît alors dans (3-28) lorsque  $\lambda - k$  est aussi racine du polynôme  $\theta_{p-1}(A, 0, \lambda)$ , autrement dit, lorsqu'il existe des racines de  $\theta_{p-1}(A, 0, \lambda)$  qui diffèrent entre elles d'un entier. Nous sommes donc conduits à distinguer deux cas.

### 3.1 Cas où les racines du polynôme $\theta_{p-1}(A, 0, \lambda)$ ne diffèrent pas entre elles d'un entier

#### (a) Cas générique:

Supposons que le faisceau  $N_0 + \lambda E_0$  admette  $n - k^*$  racines deux à deux distinctes:  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-k^*}$ . Nous pouvons alors faire le même raisonnement que dans le cas d'une singularité régulière (cf. [7] ou [15]) pour obtenir le résultat suivant:

#### **Théorème 3.3:**

*Si le polynôme  $\theta_{p-1}(A, 0, \lambda)$  admet  $n - k^*$  racines ne différant pas entre elles d'un entier positif ou nul, alors  $(\Delta)$  admet  $n - k^*$  solutions linéairement indépendantes:*

$$Y_{[1]} = x^{-\lambda_1} x^\varepsilon Z^{(1)}(x, \lambda_1, Z_0^{(1)})$$

$$Y_{[2]} = x^{-\lambda_2} x^\varepsilon Z^{(2)}(x, \lambda_2, Z_0^{(2)})$$

⋮

⋮

⋮

$$Y_{[n-k^*]} = x^{-\lambda_{n-k^*}} x^\varepsilon Z^{(n-k^*)}(x, \lambda_{n-k^*}, Z_0^{(n-k^*)})$$

où les  $Z_0^{(i)}$  désignent les  $n - k^*$  vecteurs propres associés aux  $\lambda_i$ , relatifs au faisceau  $N_0 + \lambda E_0$ .

**Démonstration:**

Puisque  $\theta_{p-1}(A, 0, \lambda)$  est non identiquement nul, il existe un nombre complexe  $c$  tel que

$$(3-33) \quad \theta_{p-1}(A, 0, c) \neq 0.$$

Soit la matrice

$$(3-34) \quad M_0 = N_0 + cE_0$$

le système (3-27) s'écrit alors sous la forme:

$$(3-35) \quad M_0 Z_0 = -(\lambda - c) E_0 Z_0$$

Comme  $M_0$  est une matrice inversible, on a

$$(3-36) \quad (M_0^{-1} E_0) Z_0 = -\frac{1}{\lambda - c} Z_0$$

Par conséquent, si  $\mu$  désigne une valeur propre non nulle de  $M_0^{-1} E_0$ , on a d'après l'équation précédente:

$$(3-37) \quad (M_0^{-1} E_0 - \mu I) Z_0 = 0 \quad \text{avec} \quad \mu = -\frac{1}{\lambda - c}$$

Décomposons la matrice  $M_0^{-1}$  et le vecteur  $Z_0$  suivant la décomposition de  $E_0$ :

$$(3-38) \quad M_0^{-1} = \begin{pmatrix} \overset{\longleftarrow m}{F} & \overset{\longleftarrow n-m}{G} \\ H & K \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow n \\ \uparrow n-m \end{matrix}$$

et

$$(3-39) \quad Z_0 = \begin{pmatrix} Z_{01} \\ Z_{02} \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow n \\ \uparrow n-m \end{matrix}$$

On obtient d'après (3-37)

$$(3-40) \quad G Z_{02} = \mu Z_{01}$$

$$(3-41) \quad K Z_{02} = \mu Z_{02}$$

où  $\mu = -1/(\lambda-c)$  est une valeur propre non nulle de la matrice  $M_0^{-1}E_0$ .

A toute solution  $Z_{02}$  du système (3-41) on peut associer une solution de (3-40) en multipliant par la matrice  $G$ . Il suffit donc d'étudier le système (3-41).

Nous sommes alors amenés à un problème de valeurs propres associées à une matrice  $K$  de taille plus petite. En introduisant la matrice  $M_0$  définie dans (3-34) dans le déterminant (3-29), on obtient

$$(3-42) \quad \theta_{p-1}(A, 0, \lambda) = 1/\det(M_0) \det((\lambda-c) M_0^{-1}E_0 + I)$$

et puisque

$$(3-43) \quad M_0^{-1}E_0 = \begin{pmatrix} \overset{m}{\leftarrow} & \overset{n-m}{\leftarrow} \\ 0 & G \\ \downarrow n & \\ 0 & K \\ \downarrow n-m & \end{pmatrix}$$

le déterminant (3-42) ne dépend donc que de la partie non nilpotente de la matrice  $M_0^{-1}E_0$  (i.e la partie non nilpotente de  $K$ ). Comme le polynôme  $\theta_{p-1}(A, 0, \lambda)$  est de degré  $n-k^*$  et que les  $\lambda_i$  ( $i=1, 2, \dots, n-k^*$ ) sont distinctes deux à deux, il s'en suit que la matrice  $K$  admet  $n-k^*$  valeurs propres non nulles  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-k^*}$  avec  $\mu_i \neq \mu_j$  si  $i \neq j$ . Soient

$$Z_{02}^{(1)}, Z_{02}^{(2)}, \dots, Z_{02}^{(n-k^*)}$$

les vecteurs propres associés.

Les vecteurs

$$Z_0^{(i)} = \begin{pmatrix} Z_{01}^{(i)} \\ Z_{02}^{(i)} \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow_n \\ \uparrow_{n-m} \end{matrix} \quad 1 \leq i \leq n-k^*$$

avec

$$Z_{01}^{(i)} = \frac{1}{\mu_i} G Z_{02}^{(i)} \quad i = 1, 2, \dots, n-k^*$$

sont donc  $n - k^*$  solutions linéairement indépendantes du système (3-27). Nous pouvons alors déterminer  $n-k^*$  solutions linéairement indépendantes de  $(\Delta)$ , correspondant à la pente nulle du polygone de Newton:

$$Y_{[ij]} = x^{-\lambda_i} x^\varepsilon Z^{(i)}(x, \lambda_i, Z_0^{(i)}) \quad i = 1, 2, \dots, n-k^*$$

où

$$(3-44) \quad \lambda_i = c - \frac{1}{\mu_i}$$

les  $Z_k^{(i)}$  pour  $k \geq 1$ , sont déterminés d'une manière récursive à partir de l'équation (3-28).

#### Remarque 3-4

Le théorème précédent reste vrai lorsque la matrice  $K$  dans (3-41) admet  $n-k^*$  vecteurs propres linéairement indépendants associés à des valeurs propres non nulles sans qu'elles soient nécessairement distinctes.

En calcul formel, il est possible d'inverser formellement la matrice  $N_0 + (\lambda - k)E_0$  pour tout  $k \geq 1$ . On peut ensuite déterminer les solutions de (3-28) en utilisant la formule

$$Z_k = D_k V_{k-1} \quad k \geq 1$$

où  $D_k$  désigne l'inverse formel de la matrice  $N_0 + (\lambda - k)E_0$ . Cependant, en pratique, il est difficile de décider si deux racines diffèrent entre elles d'un entier, qui est la

condition de régularité de cette matrice. On peut dans ce cas utiliser un algorithme dû à Watanabe (cf. [17], [20]).

**(b) Cas où le faisceau  $N_0 + \lambda E_0$  n'admet pas  $n - k^*$  vecteurs propres linéairement indépendants**

Dans ce cas la matrice  $M_0^{-1}E_0$  est semblable à une matrice diagonale par blocs, sa forme de Jordan:

$$(3-45) \quad J = P^{-1}(M_0^{-1}E_0)P.$$

Nous avons vu dans ce qui précède que le polynôme  $\theta_{p-1}(A, 0, \lambda)$  ne dépend que des valeurs propres non nulles de la matrice  $J$ . Supposons que  $J$  soit de la forme

$$J = \text{diag}(\mathfrak{J}, \mathfrak{H})$$

où  $\mathfrak{J}$  est la partie non nilpotente de  $J$  que nous écrivons sous la forme:

$$(3-46) \quad \mathfrak{J} = \text{diag}(J_1, J_2, \dots, J_q)$$

avec

$$J_k = \mu_k I_{\beta_k} + H_k \quad k = 1, 2, \dots, q$$

où  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_q$  sont les valeurs propres non nulles de la matrice  $M_0^{-1}E_0$  et:

$$H_k = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & & 0 \end{bmatrix}$$

une matrice nilpotente de dimension  $\beta_k$ . Notons ici que les valeurs propres  $\mu_i$  ne sont pas nécessairement distinctes.

D'après (3-42) et (3-45), on a:

$$(3-47) \quad \theta_{p-1}(A,0,\lambda) = 1/\det(M_0) \det((\lambda-c)J + I)$$

Comme  $d^\circ(\theta_{p-1}(A,0,\lambda)) = n - k^*$ , on a:

$$(3-48) \quad \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_q = n - k^*$$

Nous allons montrer, dans ce qui suit, comment déterminer la chaîne de solutions correspondant au bloc  $J_1$ , la même procédure est valable pour  $J_2, \dots, J_{n-k^*}$ .

Appelons  $Z_0^{(1)}, Z_0^{(2)}, \dots, Z_0^{(\beta_1)}$  les  $\beta_1$  premières colonnes de la matrice de passage P. Ces vecteurs vérifient les relations suivantes :

$$(3-49) \quad \left\{ \begin{array}{l} (M_0^{-1}E_0 - \mu_1 I) Z_0^{(1)} = 0 \\ (M_0^{-1}E_0 - \mu_1 I) Z_0^{(2)} = Z_0^{(1)} \\ \dots \\ (M_0^{-1}E_0 - \mu_1 I) Z_0^{(\beta_1)} = Z_0^{(\beta_1-1)} \end{array} \right.$$

En utilisant la relation (3-36), ces équations peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$(3-50) \quad \left\{ \begin{array}{l} (N_0 + \lambda_1 E_0) Z_0^{(1)} = 0 \\ (N_0 + \lambda_1 E_0) Z_0^{(2)} = -\frac{1}{\mu_1} M_0 Z_0^{(1)} \\ \dots \\ (N_0 + \lambda_1 E_0) Z_0^{(\beta_1)} = -\frac{1}{\mu_1} M_0 Z_0^{(\beta_1-1)} \end{array} \right.$$

Considérons, au lieu des vecteurs  $Z_0^{(i)}$ , les vecteurs  $\omega_0^{(i)}$  définis par les relations suivantes:

$$(3-51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_0^{(1)} = Z_0^{(1)} \\ \omega_0^{(2)} = \mu_1^2 Z_0^{(2)} \\ \dots \\ \omega_0^{(k)} = \mu_1^k \sum_{j=2}^k \binom{j-2}{k-2} \mu_1^{j-2} Z_0^{(j)} \\ \dots \\ \omega_0^{(\beta_1)} = \mu_1^{\beta_1} \sum_{j=2}^{\beta_1} \binom{j-2}{\beta_1-2} \mu_1^{j-2} Z_0^{(j)} \end{array} \right.$$

Ces vecteurs sont linéairement indépendants puisque, si l'on désigne par  $\Omega$  la matrice formée par les vecteurs  $\omega_0^{(i)}$  et par  $\mathcal{C}$  la matrice formée par les vecteurs  $Z_0^{(i)}$ , on a

$$\Omega = T\mathcal{C}$$

où  $T$  est une matrice carrée triangulaire supérieure avec:

$$\text{diag} ( T ) = \text{diag} ( 1, \mu_1^2, \mu_1^4, \dots, \mu_1^{2(\beta_1 - 1)} )$$

Puisque  $\mu_1 \neq 0$ , et que les vecteurs  $Z_0^{(1)}, Z_0^{(2)}, \dots, Z_0^{(\beta_1)}$  sont linéairement indépendants, il en est de même pour les vecteurs  $\omega_0^{(1)}, \omega_0^{(2)}, \dots, \omega_0^{(\beta_1)}$ .

Les vecteurs (3-51) vont nous permettre de construire la chaîne de solutions correspondantes au bloc  $J_1$ . On a le lemme suivant:



**Lemme 3.5**

Les vecteurs  $\omega_0^{(i)}$   $i = 1, 2, \dots, \beta_1$  vérifient les relations suivantes:

$$(3-52) \quad \begin{cases} (N_0 + \lambda_1 E_0) \omega_0^{(1)} = 0 \\ (N_0 + \lambda_1 E_0) \omega_0^{(2)} = -E_0 \omega_0^{(1)} \\ \dots \\ (N_0 + \lambda_1 E_0) \omega_0^{(\beta_1)} = -E_0 \omega_0^{(\beta_1-1)} \end{cases}$$

**Démonstration:**

Considérons pour  $k = 2, 3, \dots, \beta_1$ , l'expression:

$$S = (N_0 + \lambda_1 E_0) \omega_0^{(k)} + E_0 \omega_0^{(k-1)}$$

On a d'après (3-51),

$$S = -\mu_1^{k-1} \sum_{j=2}^{j=k} \binom{j-2}{k-2} \mu_1^{j-2} M_0 Z_0^{(j-1)} + \mu_1^{k-1} \sum_{j=2}^{j=k-1} \binom{j-2}{k-3} \mu_1^{j-2} E_0 Z_0^{(j)}$$

En multipliant les membres de l'égalité par  $M_0^{-1}$ , on obtient après avoir utilisé les relations (3-49) l'égalité suivante:

$$M_0^{-1} S = -\mu_1^{k-1} \sum_{j=2}^{j=k} \binom{j-2}{k-2} \mu_1^{j-2} Z_0^{(j-1)} + \mu_1^{k-1} \sum_{j=2}^{j=k-1} \binom{j-2}{k-3} \mu_1^{j-1} E_0 Z_0^{(j)} + \mu_1^{k-1} \sum_{j=2}^{j=k-1} \binom{j-2}{k-3} \mu_1^{j-2} Z_0^{(j-1)} = 0$$

c.q.f.d.

Considérons maintenant les vecteurs  $Y(x, \lambda_i, \omega_0^{(i)})$ . Comme le choix des  $\omega_0^{(i)}$  ( $0 \leq i \leq \beta_1$ ) est indépendant du paramètre  $\lambda$ , on a le résultat suivant:

**Théorème 3.6**

Les  $\beta_1$  solutions du système  $(\Delta)$  correspondant au bloc  $J_1$  sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{[1]}^{(1)}(x, \lambda_1) = Y(x, \lambda_1, \omega_0^{(1)}) \\ Y_{[2]}^{(1)}(x, \lambda_1) = \frac{\partial}{\partial \lambda} Y(x, \lambda, \omega_0^{(1)}) \Big|_{\lambda=\lambda_1} + Y(x, \lambda_1, \omega_0^{(2)}) \\ \dots \\ Y_{[\beta_1]}^{(1)}(x, \lambda_1) = \frac{1}{(\beta_1-1)!} \frac{\partial^{\beta_1-1}}{\partial \lambda^{\beta_1-1}} Y(x, \lambda, \omega_0^{(1)}) \Big|_{\lambda=\lambda_1} + \dots + Y(x, \lambda_1, \omega_0^{(\beta_1-1)}) \end{array} \right.$$

**Remarque 3.7:**

En faisant le même raisonnement pour les blocs  $J_2, J_3, \dots, J_q$ , nous pouvons ainsi déterminer :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_{[1]}^{(1)}(x, \lambda_1), Y_{[2]}^{(1)}(x, \lambda_1), \dots, Y_{[\beta_1]}^{(1)}(x, \lambda_1) \\ Y_{[1]}^{(2)}(x, \lambda_2), Y_{[2]}^{(2)}(x, \lambda_2), \dots, Y_{[\beta_2]}^{(2)}(x, \lambda_2) \\ \dots \\ Y_{[1]}^{(q)}(x, \lambda_q), Y_{[2]}^{(q)}(x, \lambda_q), \dots, Y_{[\beta_q]}^{(q)}(x, \lambda_q) \end{array} \right.$$

$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_q = n - k^*$  solutions linéairement indépendantes du système  $(\Delta)$  correspondant à la pente nulle du polygone de Newton.

**Démonstration du théorème 3.6:**

En dérivant successivement l'expression:

$$(3-53) \quad x^{-\lambda} (N_0 + \lambda E_0) \omega_0^{(i)}$$

on a d'après la relation (3-30):

$$(3-54) \quad \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} \left[ \left( \frac{A(x)}{x^{p-1}} - x \frac{d}{dx} \right) Y^{(i)} \right] = \left( \frac{A(x)}{x^{p-1}} - x \frac{d}{dx} \right) \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} Y^{(i)}$$

$$= \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} (x^{-\lambda} [N_0 + \lambda E_0] \omega_0^{(i)})$$

où

$$Y^{(i)} = Y(x, \lambda, \omega_0^{(i)})$$

Or

$$\frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} (x^{-\lambda} (N_0 + \lambda E_0) \omega_0^{(i)}) = x^{-\lambda} [(-1)^s (\log x)^s (N_0 + \lambda E_0) + (-1)^{s-1} s (\log x)^{s-1} E_0] \omega_0^{(i)}$$

Considérons, pour  $s = 0, 1, \dots, \beta_1 - 1$ , les expressions;

$$(3-55) \quad Y_{[s+1]}^{(1)} = \left[ \frac{1}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} Y^{(1)} + \frac{1}{(s-1)!} \frac{\partial^{s-1}}{\partial \lambda^{s-1}} Y^{(2)} + \dots + Y^{(s+1)} \right]_{\lambda = \lambda_1}$$

où les  $Y^{(i)}$  sont les vecteurs définis ci-dessus. On a pour  $0 \leq s \leq \beta_1 - 1$ :

$$\left[ \frac{A(x)}{x^{p-1}} - x \frac{d}{dx} \right] \left[ \frac{1}{s!} \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} Y^{(1)} + \frac{1}{(s-1)!} \frac{\partial^{s-1}}{\partial \lambda^{s-1}} Y^{(2)} + \dots + Y^{(s+1)} \right]$$

$$= x^{-\lambda} (-1)^s \frac{(\log x)^s}{s!} (N_0 + \lambda E_0) \omega_0^{(1)} + x^{-\lambda} (-1)^{s-1} \frac{(\log x)^{s-1}}{(s-1)!} E_0 \omega_0^{(1)}$$

$$+ x^{-\lambda} (-1)^{s-1} \frac{(\log x)^{s-1}}{(s-1)!} (N_0 + \lambda E_0) \omega_0^{(2)} + x^{-\lambda} (-1)^{s-2} \frac{(\log x)^{s-2}}{(s-2)!} E_0 \omega_0^{(2)}$$

$$+ \dots \dots \dots$$

$$+ x^{-\lambda} (-\log x) (N_0 + \lambda E_0) \omega_0^{(s)} + x^{-\lambda} E_0 \omega_0^{(s)}$$

$$+ x^{-\lambda} (N_0 + \lambda E_0) \omega_0^{(s+1)}$$

Remplaçons dans l'expression précédente  $\lambda$  par  $\lambda_1$ . Les relations (3-52) entraînent que le second membre de cette dernière égalité est nul. Le vecteur (3-55) est donc solution du système ( $\Delta$ ).

c.q.f.d.

### 3.2 Cas où les racines du polynôme $\theta_{p-1}(A,0,\lambda)$ diffèrent entre elles d'un entier

Soient  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$  les valeurs propres du faisceau  $N_0 + \lambda E_0$  qui diffèrent entre elles d'un entier. On suppose qu'elles sont ordonnées de la manière suivante:

$$\operatorname{Re}(\lambda_1) \geq \operatorname{Re}(\lambda_2) \geq \dots \geq \operatorname{Re}(\lambda_q)$$

avec

$$(3-56) \quad \lambda_i - \lambda_{i+1} = l_i \quad i=1, 2, \dots, q-1 \quad l_i \in \mathbb{N}^*$$

On suppose que les autres valeurs propres  $\lambda_i, i \geq q+1$ , ne vérifient pas la condition ci-dessus.

Soient  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ , les multiplicités respectives des valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q$ . De la même manière que dans le cas précédent, nous allons construire la chaîne des solutions correspondant à la valeur propre  $\lambda_1$ . Pour cela, nous avons deux cas à distinguer.  $\beta_1 = 1$  et  $\beta_1 > 1$ .

#### (a) Cas où la multiplicité de $\lambda_1$ est $\beta_1 = 1$

Soit

$$(3-57) \quad \beta = \sum_{i=2}^{i=q} \beta_i$$

Dans ce cas, nous allons considérer, au lieu du vecteur  $Z_0$  défini dans (3-37), le vecteur:

$$(3-58) \quad Z_0 = (\lambda - \lambda_1)^\beta \Psi_0$$

sachant que  $\Psi_0$  vérifie la relation

$$(3-59) \quad (N_0 + \lambda_1 E_0) \Psi_0 = 0.$$

D'après ce qui précède, le vecteur solution  $Y$  associé à  $Z_0$ , vérifie la relation

$$\left[ \frac{A(x)}{x^{p-1}} - x \frac{d}{dx} \right] Y = x^{-\lambda} (\lambda - \lambda_1)^\beta (N_0 + \lambda E_0) \Psi_0$$

si pour tout  $k \geq 1$ , l'équation:

$$(3-60) \quad [N_0 + (\lambda - k)E_0] Z_k = V_{k-1}$$

admet une solution.  $V_{k-1}$  étant le vecteur défini dans (3-26).

Puisque  $Z_0$  est de la forme (3-58), il s'en suit que tous les vecteurs  $Z_1, Z_2, \dots, Z_{l_1-1}$  sont aussi de la forme :

$$Z_k = (\lambda - \lambda_1)^\beta \Psi_k \quad k = 1, 2, \dots, l_1 - 1.$$

Pour  $k = l_1$ , l'inverse de la matrice

$$[N_0 + (\lambda - l_1)E_0] = [N_0 + (\lambda - (\lambda_1 - \lambda_2))E_0]$$

admet un pôle en  $\lambda = \lambda_1$  dont l'ordre est la multiplicité de  $\lambda_2$ , c'est à dire  $\beta_2$ .  $Z_{l_1}$  est donc de la forme :

$$Z_{l_1} = (\lambda - \lambda_1)^{\beta - \beta_2} \Psi_{l_1}$$

ainsi de suite. On peut donc déterminer les vecteurs  $Z_k$  de la manière suivante:

$$(3-61) \quad \begin{cases} Z_k = (\lambda - \lambda_1)^{\beta} \Psi_k & k=0, 1, \dots, l_1-1 \\ Z_k = (\lambda - \lambda_1)^{\beta - \beta_2} \Psi_k & k= l_1, \dots, l_2 + l_1 - 1 \\ \dots \\ Z_k = (\lambda - \lambda_1)^{\beta - (\beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_{q-1})} \Psi_k & k= l_{q-2}, \dots, l_1 + \dots + l_{q-1} - 1 \end{cases}$$

les autres  $Z_k$ , pour  $k > l_1 + l_2 + \dots + l_{q-1}$  peuvent être déterminés (de la même manière que dans le cas générique) par l'équation (3-60), puisque la matrice:

$$[N_0 + (\lambda - k)E_0]$$

est inversible pour  $k > l_1 + l_2 + \dots + l_{q-1}$  en  $\lambda = \lambda_1$ .

D'après la même démarche (dérivation formelle), on a

$$\frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} Y(x, \lambda, Z_0) |_{\lambda = \lambda_1}$$

est solution du système ( $\Delta$ ) pour  $s = 0, 1, \dots, \beta$ .

**Remarque 3.8**

Le choix de la plus petite valeur propre  $\lambda_1$  ne restreint pas la généralité de l'algorithme. La même démarche est valable pour les autres valeurs propres  $\lambda_k$  ( $2 \leq k \leq q$ ). Il suffit pour cela, de prendre comme  $\beta$ ; la somme des  $\beta_i$  pour  $i > k$ .

**Remarque 3.9**

On peut remarquer dans l'expression précédente, que les dérivées d'ordre  $\leq \beta - 1$ , sont combinaisons linéaires des solutions correspondant aux valeurs propres  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_q$ . Si on pose  $s = 0$  dans l'expression ci-dessus, le vecteur solution s'exprime sous la forme :

$$Y(x) = x^{-\lambda_1} x^\epsilon Z(x, \lambda_1, Z_0)$$

avec

$$Z(x, \lambda_1, Z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} Z_k(\lambda_1) x^k$$

Or d'après (3-61), on a:

$$Z_0(\lambda_1) = Z_1(\lambda_1) = \dots = Z_{l-1}(\lambda_1) = 0$$

où

$$l = l_1 + l_2 + \dots + l_{q-1} = \lambda_1 - \lambda_q$$

Donc

$$Z(x, \lambda_1, Z_0) = x^l \sum_{k=0}^{k=+\infty} Z_{k+l}(\lambda_1) x^k$$

Il s'ensuit que la solution:

$$Y(x) = x^{-\lambda_1} x^\epsilon x^l \sum_{k=0}^{+\infty} Z_{k+l}(\lambda_1) x^k = x^{-\lambda_q} x^\epsilon \sum_{k=0}^{+\infty} Z_{k+l}(\lambda_1) x^k$$

n'est autre (à une constante multiplicative près) que la solution correspondant à la valeur propre  $\lambda = \lambda_q$ .

Pour  $s = 1, 2, \dots, \beta - 1$ , on peut démontrer de la même manière, que les vecteurs :

$$\frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} [Y(x, \lambda, Z_0)]_{\lambda = \lambda_1} \quad 1 \leq s < \beta$$

sont combinaisons linéaires des solutions correspondant aux valeurs propres  $\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_q$ .

C'est le cas où  $s = \beta$ , que l'on obtient une solution correspondant à la valeur propre  $\lambda = \lambda_1$ , qui est en fait

$$(3-62) \quad \frac{\partial^\beta}{\partial \lambda} [Y(x, \lambda, Z_0)]_{\lambda = \lambda_1}$$

**(b) Cas où la multiplicité de la valeur propre  $\lambda_1$  est  $\beta_1 > 1$ .**

De la même manière que dans le cas où les valeurs propres ne diffèrent pas entre elles d'un entier, les solutions associées à la valeur propre  $\lambda_1$  seront au nombre de  $\beta_1$ . Pour les construire, nous distinguerons deux cas:

**(i) Cas où le faisceau  $N_0 + \lambda_1 E_0$  admet  $\beta_1$  vecteurs propres linéairement indépendants.**

Dans ce cas, si l'on désigne par

$$\Psi_0^{(1)}, \Psi_0^{(2)}, \dots, \Psi_0^{(\beta_1)}$$

les  $\beta_1$  vecteurs propres linéairement indépendants relatifs au faisceau  $N_0 + \lambda_1 E_0$  vérifiant la relation

$$(3-63) \quad (N_0 + \lambda_1 E_0) \Psi_0^{(i)} = 0 \quad \text{pour } i = 1, 2, \dots, \beta_1$$

On pose

$$(3-64) \quad Z_0^{(i)} = (\lambda - \lambda_1)^\beta \Psi_0^{(i)} \quad i = 1, 2, \dots, \beta_1$$

Le même raisonnement que nous avons fait dans le cas précédent conduit à la construction de  $\beta_1$  vecteurs solutions formelles du système  $(\Delta)$  linéairement indépendants qui sont respectivement:



$$\frac{\partial^\beta}{\partial \lambda^\beta} Y(x, \lambda, Z_0^{(1)}) |_{\lambda = \lambda_1}$$

$$\frac{\partial^\beta}{\partial \lambda^\beta} Y(x, \lambda, Z_0^{(2)}) |_{\lambda = \lambda_1}$$

...

$$\frac{\partial^\beta}{\partial \lambda^\beta} Y(x, \lambda, Z_0^{(\beta_1)}) |_{\lambda = \lambda_1}$$

**(ii) Cas où le faisceau  $N_0 + \lambda_1 E_0$  n'admet pas  $\beta_1$  vecteurs propres linéairement indépendants :**

Comme nous l'avons fait dans le cas où les valeurs propres ne diffèrent pas entre elles d'un entier, si la forme de Jordan de la matrice  $M_0^{-1}E_0$ , dans (3-45) admet plusieurs blocs correspondant à la valeur propre  $\mu_1 = -1/(\lambda - c)$ , nous donnerons le procédé pour obtenir les solutions correspondant au premier bloc  $J_1$ . Pour les autres blocs, la même procédure est valable.

On supposera donc que la valeur propre  $\mu_1$  non nulle n'admet qu'un seul bloc  $J_1$  dans (3-46). Il existe donc en vertu de le lemme 3.5,  $\beta_1$  vecteurs colonnes  $\omega_0^{(i)}$ , qui sont linéairement indépendants et vérifient les relations suivantes:

$$(3-65) \quad \left\{ \begin{array}{l} (N_0 + \lambda_1 E_0) \omega_0^{(1)} = 0 \\ (N_0 + \lambda_1 E_0) \omega_0^{(2)} = -E_0 \omega_0^{(1)} \\ \dots \\ (N_0 + \lambda_1 E_0) \omega_0^{(\beta_1)} = -E_0 \omega_0^{(\beta_1 - 1)} \end{array} \right.$$

Posons

$$Z_0^{(i)} = (\lambda - \lambda_1)^\beta \omega_0^{(i)} \quad i = 1, 2, \dots, \beta_1$$

avec

$$\beta = \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_q$$

Supposons que les vecteurs  $Z_k$  ( $k \geq 1$ ) aient été déterminés de la manière décrite ci-dessus. On a alors:

$$\left[ \frac{A(x)}{x^{p-1}} - x \frac{d}{dx} \right] Y^{(i)}(x, \lambda, Z_0) = x^{-\lambda} (\lambda - \lambda_1)^\beta (N_0 + \lambda E_0) \omega_0^{(i)}$$

D'après la même démarche (dérivation formelle), on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} \left[ \frac{A(x)}{x^{p-1}} - x \frac{d}{dx} \right] Y^{(i)} &= \left[ \frac{A(x)}{x^{p-1}} - x \frac{d}{dx} \right] \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} Y^{(i)} \\ &= \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} [ x^{-\lambda} (\lambda - \lambda_1)^\beta (N_0 + \lambda E_0) \omega_0^{(i)} ] \\ &= \sum_{k=0}^{k=s} \binom{k}{s} \frac{\partial^k}{\partial \lambda^k} (\lambda - \lambda_1)^\beta \frac{\partial^{(s-k)}}{\partial \lambda^{(s-k)}} [ x^{-\lambda} (N_0 + \lambda E_0) \omega_0^{(i)} ] \end{aligned}$$

Posons

$$(\beta)_k = \beta(\beta-1) \dots (\beta-k+1)$$

On a

$$\begin{aligned} (3-66) \quad \left[ \frac{A(x)}{x^{p-1}} - x \frac{d}{dx} \right] \frac{\partial^s}{\partial \lambda^s} Y^{(i)} &= \sum_{k=0}^{k=s} \binom{k}{s} (\beta)_k (\lambda - \lambda_1)^{\beta-k} x^{-\lambda} [ (-1)^{s-k} (\log x)^{s-k} (N_0 + \lambda E_0) \omega_0^{(i)} ] \\ &+ \sum_{k=0}^{k=s} \binom{k}{s} (\beta)_k (\lambda - \lambda_1)^{\beta-k} x^{-\lambda} [ (-1)^{s-k-1} (s-k) (\log x)^{s-k-1} E_0 \omega_0^{(i)} ] \end{aligned}$$

**Théorème 3.10**

Les  $\beta_1$  solutions correspondant à la valeur propre  $\lambda_1$  du faisceau  $N_0 + \lambda E_0$ , sont respectivement:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^\beta}{\partial \lambda^\beta} Y^{(1)}(x, \lambda, Z_0^{(1)})|_{\lambda=\lambda_1} \\ & \frac{\partial^{1+\beta}}{\partial \lambda^{1+\beta}} Y^{(1)}(x, \lambda, Z_0^{(1)})|_{\lambda=\lambda_1} + \frac{\beta+1}{1!} \frac{\partial^\beta}{\partial \lambda^\beta} Y^{(2)}(x, \lambda, Z_0^{(2)})|_{\lambda=\lambda_1} \\ & \dots \\ & \frac{1}{(\beta_1-1)!} \frac{\partial^{\beta+\beta_1-1}}{\partial \lambda^{\beta+\beta_1-1}} Y^{(1)}(x, \lambda, Z_0^{(1)})|_{\lambda=\lambda_1} + \frac{\beta+\beta_1-1}{(\beta_1-1)!} \frac{\partial^{\beta+\beta_1-2}}{\partial \lambda^{\beta+\beta_1-2}} Y^{(2)}(x, \lambda, Z_0^{(2)})|_{\lambda=\lambda_1} \\ & \dots \dots \dots + \frac{(\beta+\beta_1-1)!}{\beta! (\beta_1-1)!} \frac{\partial^\beta}{\partial \lambda^\beta} Y^{(\beta_1)}(x, \lambda, Z_0^{(\beta_1)})|_{\lambda=\lambda_1} \end{aligned}$$

**Démonstration**

Considérons pour  $0 \leq s \leq \beta_1 - 1$ , l'expression suivante:

$$\begin{aligned} S = \left[ \frac{A(x)}{x^{p-1}} \cdot x \frac{d}{dx} \right] & \left[ \frac{1}{s!} \frac{\partial^{s+\beta}}{\partial \lambda^{s+\beta}} Y^{(1)}(x, \lambda, Z_0^{(1)})|_{\lambda=\lambda_1} + \frac{s+\beta}{s!} \frac{\partial^{s+\beta-1}}{\partial \lambda^{s+\beta-1}} Y^{(2)}(x, \lambda, Z_0^{(2)})|_{\lambda=\lambda_1} + \dots \right. \\ & \left. + \dots \dots + \frac{(\beta+s)!}{\beta! s!} \frac{\partial^\beta}{\partial \lambda^\beta} Y^{(s+1)}(x, \lambda, Z_0^{(s+1)})|_{\lambda=\lambda_1} \right] \end{aligned}$$

On a d'après (3-66):

$$\begin{aligned} S = & \sum_{k=0}^{s+\beta} \frac{1}{s!} \binom{k}{s+\beta} (\beta)_k (\lambda-\lambda_1)^{\beta-k} x^{-\lambda} [(-1)^{s+\beta-k} (\log x)^{s+\beta-k} (N_0 + \lambda E_0) \omega_0^{(1)}] \\ & + \sum_{k=0}^{s+\beta} \frac{1}{s!} \binom{k}{s+\beta} (\beta)_k (\lambda-\lambda_1)^{\beta-k} x^{-\lambda} [(-1)^{s+\beta-k-1} (s+\beta-k) (\log x)^{s+\beta-k-1} E_0 \omega_0^{(1)}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=0}^{s+\beta-1} \frac{\beta+s}{s!} \binom{k}{s+\beta-1} (\beta)_k (\lambda-\lambda_1)^{\beta-k} x^{-\lambda} [(-1)^{s+\beta-k-1} (\log x)^{s+\beta-k-1} (N_0+\lambda E_0) \omega_0^{(2)}] \\
 & + \sum_{k=0}^{s+\beta-1} \frac{\beta+s}{s!} \binom{k}{s+\beta-1} (\beta)_k (\lambda-\lambda_1)^{\beta-k} x^{-\lambda} [(-1)^{s+\beta-k-2} (s+\beta-k-1) (\log x)^{s+\beta-k-2} E_0 \omega_0^{(2)}] \\
 & + \dots \\
 & + \sum_{k=0}^{\beta} \frac{(\beta+s)!}{\beta! s!} \binom{k}{\beta} (\beta)_k (\lambda-\lambda_1)^{\beta-k} x^{-\lambda} [(-1)^{\beta-k} (\log x)^{\beta-k} (N_0+\lambda E_0) \omega_0^{(s+1)}] \\
 & + \sum_{k=0}^{\beta} \frac{(\beta+s)!}{\beta! s!} \binom{k}{\beta} (\beta)_k (\lambda-\lambda_1)^{\beta-k} x^{-\lambda} [(-1)^{\beta-k-1} (\beta-k) (\log x)^{\beta-k-1} E_0 \omega_0^{(s+1)}]
 \end{aligned}$$

En remplaçant  $\lambda$  par  $\lambda_1$  dans le deuxième membre de l'égalité, on obtient:

$$\begin{aligned}
 S & = \frac{1}{s!} \binom{\beta}{s+\beta} (\beta)_\beta x^{-\lambda_1} (-1)^s (\log x)^s (N_0+\lambda_1 E_0) \omega_0^{(1)} \\
 & + \frac{s}{s!} \binom{\beta}{s+\beta} (\beta)_\beta x^{-\lambda_1} (-1)^{s-1} (\log x)^{s-1} E_0 \omega_0^{(1)} \\
 & + \frac{\beta+s}{s!} \binom{\beta}{s+\beta-1} (\beta)_\beta x^{-\lambda_1} (-1)^{s-1} (\log x)^{s-1} (N_0+\lambda_1 E_0) \omega_0^{(2)} \\
 & + \frac{(\beta+s)(s-1)}{s!} \binom{\beta}{s+\beta-1} (\beta)_\beta x^{-\lambda_1} (-1)^{s-2} (\log x)^{s-2} E_0 \omega_0^{(2)} \\
 & + \dots \\
 & + \frac{(\beta+s)!}{\beta! s!} \binom{\beta}{\beta} (\beta)_\beta x^{-\lambda_1} (N_0+\lambda_1 E_0) \omega_0^{(s+1)}
 \end{aligned}$$

En utilisant les relations que vérifient les vecteurs  $\omega_0^{(i)}$  ( cf.Lemme 3.5), on trouve que

$$S = 0.$$

Nous venons donc de mettre en évidence  $\beta_1$  solutions linéairement indépendantes qui correspondent à la valeur propre  $\lambda_1$ . En utilisant ce même procédé pour les autres valeurs propres, nous pouvons déterminer ainsi

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_q = n - k^*$$

solutions linéairement indépendantes du système ( $\Delta$ ) et dont le nombre correspond à la longueur de la pente nulle du polygone de Newton.

**Références**

- [1] **CODDINGTON E. A. and LEVINSON N.**  
Theory of ordinary differential equations  
Mc. Graw-Hill Book Company. INC New York (1955).
- [2] **DELLA DORA J. et TOURNIER E.**  
Solutions formelles d'équations différentielles  
au voisinage de pointssinguliers réguliers.  
R.R N° 239, IMAG, Grenoble 1981.
- [3] **DELLA DORA J. DICRESCENZO C. et TOURNIER E.**  
An algorithm to obtain formal solutions of a linear homogenous differential  
equation at an irregular singular point  
Proc. EUROCAM 82 [Springer Lecture Notes in Computer Science 144,  
Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1982],  
p. 273-280. MR 84c:650094.
- [4] **ERDELYI I.**  
On the matrix Equation  $Ax = \lambda Bx$ .  
J. Math. Anal. and Appl. 17, 119-132.
- [5] **GANTMACHER F.**  
The theory of matrices  
vol. II, Chelesa, New York.
- [6] **GOLUB G. H. and VANLOAN C.F.**  
Matrix Computations  
The John Hopkins Univ. Press, 1983.
- [7] **HILALI A.,**  
Contribution à l'étude des points singuliers de systèmes différentiels linéaires.  
Thèse de 3° cycle, IMAG, Grenoble (1982).
- [8] **A. HILALI et A. WAZNER,**  
Formes super-irréductibles des systèmes différentiels linéaires.  
Num. Math. 50, 429-449 (1987).

- [9] **B. MALGRANGE**  
Sur les points singuliers des équations différentielles,  
L'enseignement mathématique, t.XX, 1-2, 147-176(1974).
- [10] **B. MALGRANGE,**  
Sur la réduction formelle des équations différentielles à singularité  
irrégulière  
Preprint Inst. Fourier. Grenoble(1981).
- [11] **MARTIN R. S. and WILKINSON J. H.**  
Reduction of the symmetric Eigenproblem  $Ax = \lambda Bx$  and related problems to  
standard form.  
Num. Math. 11(1968), 99-110.
- [12] **RAMIS J. P.,**  
Dévissage de Gevrey  
Astérisque S.M.F. 59-60 (1978), p. 173-204.
- [13] **RAMIS J. P.,**  
Théorème d'indice de Gevrey pour les équations différentielles  
Memoirs of the American Mathematical Society.  
Vol. 48, Number 296, March (1984).
- [14] **ROBBA P.**  
Lemmes de Hensel pour les opérateurs différentiels. Application à la réduction  
formelle des équations différentielles.  
L'enseignement mathématique, XXVI, fasc. 3-4, pp. 279-311, (1980).
- [15] **SIROVICH L.**  
Techniques of asymptotic analysis  
Applied Mathematical Sciences. Springer Verlag, New York Heidelberg.  
Berlin (1971).
- [16] **THOMPSON G.L. and WEIL R.L.**  
Reducing the rang of  $A - \lambda B$ .  
Amer. Math. Soc. 26(1970), 548-554.

- [17] TOURNIER E.**  
Solutions formelles d'équations différentielles. Le logiciel de Calcul Formel: DESIR. Etude théorique et réalisation.  
Thèse d'Etat, IMAG, TIM3, Grenoble 1987.
- [18] Turnbull H. W. and A.C. AITKEN**  
An introduction to the canonical theory of matrices, Dover, New York (1961).
- [19] TURRITIN H. L.**  
Convergent solutions of ordinary differential equations in the Neighbourhood of an irregular singular point.  
Acta. Math. 93: 27-66 (1955).
- [20] WATANABE**  
Formula manipulations solving linear ordinary differential equations (I and II).  
I. Publ RIMS Kyoto univ. Vol. 6. (1970) p. 71-111.  
I. Publ RIMS Kyoto univ. Vol. 11. (1976) p. 297-337.





AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT D'ETAT

Vu les dispositions de l'Article 5 de l'Arrêté du 16 avril 1974,

Vu les rapports de M. A. DUVAL.....

M. J. DELLA-DORA.....


M. B. MALGRANGE.....

M. HILALI Abdelaziz..... est autorisé à  
présenter une thèse en vue de l'obtention du grade de DOCTEUR D'ETAT  
ES SCIENCES.

Fait à Grenoble, le 22 MAI 1987

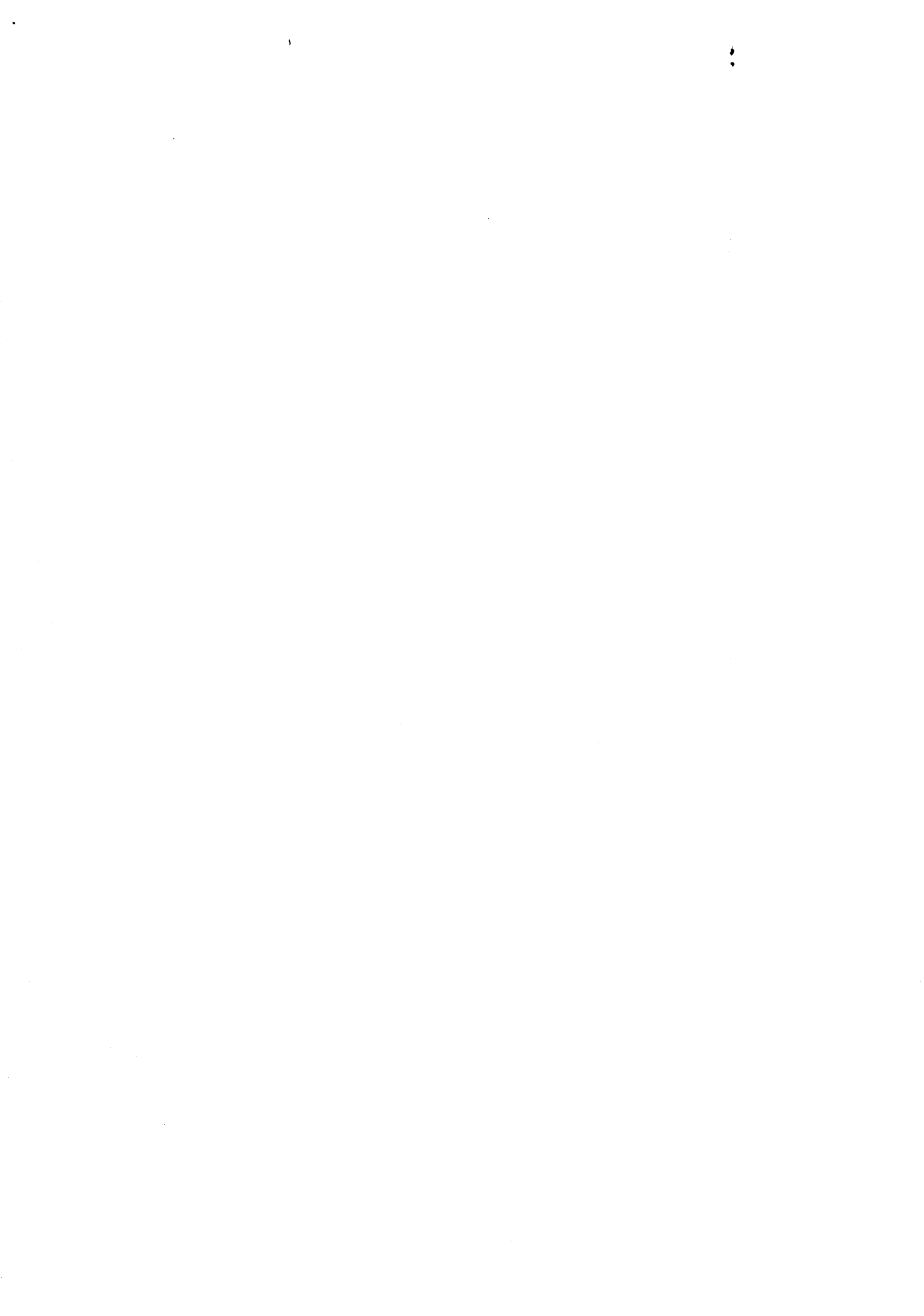
Le Président de l'U.S.T.M.G.



  
J.J. PAYAN









## Résumé

Dans cette thèse, nous proposons des algorithmes de réduction des systèmes différentiels linéaires dont les coefficients sont des séries formelles. Ces méthodes donnent une caractérisation de la singularité et construisent par le même moyen des transformations permettant la résolution du système.

Dans la première partie, consacrée aux systèmes différentiels à singularité régulière, nous développons une méthode qui transforme tout système en une forme irréductible au sens de Moser. Cet algorithme est une étape nécessaire pour la résolution des systèmes au voisinage d'une singularité régulière.

Dans la deuxième partie, nous donnons une généralisation de l'algorithme de réductibilité et du critère de J. Moser. Une suite d'invariants est définie ainsi qu'un algorithme permettant de transformer le système en une forme appelée super-irréductible. Cette forme définit des entiers qui permettent le calcul effectif de plusieurs invariants classiques et introduit la notion de polygone algébrique de Newton-Puiseux. Ces résultats conduisent à un algorithme général de construction d'un système fondamental de solutions formelles au voisinage d'une singularité quelconque.

## Mots clés:

*Calcul formel, Systèmes différentiels, Vecteur cyclique, Points singuliers réguliers et irréguliers, Invariants d'équations différentielles, Polygone algébrique et différentiel de Newton-Puiseux.*