



**HAL**  
open science

# Analyse des propriétés structurelles d'observabilité de l'état et de l'entrée inconnue des systèmes linéaires par approche graphique

Sinuhé Martinez-Martinez

## ► To cite this version:

Sinuhé Martinez-Martinez. Analyse des propriétés structurelles d'observabilité de l'état et de l'entrée inconnue des systèmes linéaires par approche graphique. Automatique / Robotique. Université Henri Poincaré - Nancy I, 2008. Français. NNT: . tel-00324534

**HAL Id: tel-00324534**

**<https://theses.hal.science/tel-00324534>**

Submitted on 25 Sep 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Analyse des propriétés structurelles d'observabilité de l'état et de l'entrée inconnue des systèmes linéaires par approche graphique

## THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 27 mai 2008

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Henri Poincaré – Nancy 1  
(spécialité Automatique)

par

Sinuhé Martínez Martínez

### Composition du jury

<i>Rapporteurs :</i>	Pr. Olivier SENAME Dr. Mohamed DJEMAI
<i>Examineurs :</i>	Pr. Efrain ALCORTA GARCÍA Pr. Didier MAQUIN
<i>Directeurs de thèse :</i>	Pr. Frédéric HAMELIN Dr. Taha BOUKHOBZA

Mis en page avec la classe thloria.

# Table des matières

<b>Chapitre 1 Introduction</b>	<b>3</b>
1.1 Systèmes linéaires structurés . . . . .	8
1.1.1 Propriétés génériques . . . . .	9
1.1.2 Rang générique d'une matrice structurée . . . . .	10
1.2 Représentation graphique des systèmes linéaires structurés . . . . .	11
1.2.1 Graphe orienté associé à un système linéaire structuré . . . . .	12
1.2.2 Notations et définitions . . . . .	13
1.2.3 Graphe biparti associé à un système linéaire structuré . . . . .	17
1.3 Les problématiques abordées dans ce travail . . . . .	18
<b>Chapitre 2 Observabilité générique de l'état et de l'entrée des systèmes linéaires structurés</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction . . . . .	23
2.2 Observabilité totale de l'état et de l'entrée d'un système linéaire structuré .	25
2.2.1 Position du problème . . . . .	26
2.2.2 Subdivision du système linéaire structuré . . . . .	27
2.2.3 Conditions d'observabilité totale de l'entrée et de l'état . . . . .	33
2.3 Observabilité partielle de l'état et de l'entrée d'un système linéaire structuré	44
2.3.1 Position du problème . . . . .	44
2.3.2 Définitions et notations . . . . .	45
2.3.3 Condition d'observabilité d'un ensemble donné de composantes de l'état et de l'entrée . . . . .	47
2.3.4 Observabilité forte de l'état d'un système linéaire structuré . . . . .	55
2.4 Conclusion . . . . .	58



---

<b>Chapitre 3 Placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité forte ou d'une partie de l'état et de l'entrée</b>	<b>61</b>
3.1 Introduction . . . . .	61
3.2 Placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité forte d'une partie de l'état d'un système . . . . .	62
3.2.1 Position du Problème . . . . .	63
3.2.2 Recouvrement de la condition de connectivité à la sortie . . . . .	64
3.2.3 Recouvrement de la condition $\beta$ . . . . .	67
3.3 Placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité forte . . . . .	71
3.3.1 Position du problème . . . . .	71
3.3.2 Recouvrement de la condition de connectivité à la sortie . . . . .	73
3.3.3 Recouvrement de la condition de couplage . . . . .	73
3.3.4 Recouvrement de la condition de distance . . . . .	76
3.4 Conclusion . . . . .	80
<b>Chapitre 4 Boîte à outils d'analyse structurelle LISA et divers aspects algorithmiques</b>	<b>83</b>
4.1 Introduction . . . . .	83
4.2 Description générale de LISA . . . . .	84
4.3 Algorithmes de base de LISA . . . . .	87
4.4 Algorithmes pour l'analyse des propriétés d'observabilité et de diagnostiquabilité . . . . .	95
4.4.1 Implémentation de l'analyse de l'observabilité de l'état et de l'entrée	95
4.4.2 Détectabilité et localisabilité des défauts . . . . .	98
4.5 Perspectives et algorithmes implémentables à court terme dans LISA . . . . .	101
4.5.1 Observabilité forte de tout l'état . . . . .	101
4.5.2 Observabilité forte d'une partie donnée de l'entrée et de l'état . . . . .	102
4.5.3 Placement de capteurs pour l'observabilité forte de tout l'état . . . . .	103
4.5.4 Placement de capteurs pour l'observabilité partielle . . . . .	104
4.5.5 Implémentation d'outils d'analyse d'autres propriétés structurelles	105
4.6 Conclusion . . . . .	105
<b>Chapitre 5 Conclusions</b>	<b>107</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>111</b>

# 1

## Introduction

L'objectif assez classique de la théorie de l'automatique est la synthèse de schémas de commande, d'observation, de diagnostic ou de supervision afin de rendre un système plus performant, plus sûr, plus fiable, plus durable et plus aisé à maîtriser. Une étape importante préalable à toute synthèse est l'analyse du système à considérer. Cette analyse permet de mieux connaître le système, ses limites et ses capacités. Elle est fondée sur l'étude de diverses caractéristiques de ce système. Parmi ces propriétés, les plus importantes sont la commandabilité, l'observabilité, les rangs, les zéros ou la structure de certaines matrices particulières, les dimensions de certains sous-espaces... qui peuvent traduire la solvabilité totale ou partielle de plusieurs problèmes fondamentaux d'automatique.

Ainsi, divers critères de commandabilité, d'observabilité ou de solubilité de problèmes de découplage, rejet de perturbations, de détection et localisation de défauts ont été établis et font partie des connaissances de base en automatique. Ces critères sont pour la majorité d'entre eux fondés sur des approches algébriques ou géométriques [Zadeh et Desoer, 1963, Rosenbrock, 1970, Kailath, 1980, Wonham, 1985] s'exprimant donc par des conditions de rang de matrices ou de dimension de sous-espaces vectoriels. En effet, la représentation la plus usuelle des systèmes linéaires reste la représentation d'état ou celle par fonctions et matrices de transfert. Il s'est avéré que, lors de l'analyse d'un système linéaire numé-

riquement spécifié, un grand nombre de caractéristiques dépendent plus de la structure du système proprement dite que des valeurs des différents paramètres constituant les matrices de la représentation d'état par exemple. Il est alors judicieux d'étudier ces propriétés en considérant le système sans valeur numérique précise des paramètres. L'étude de ce type de systèmes dits structurés ne nécessite alors que la connaissance de la répartition des éléments nuls/non-nuls dans les diverses matrices de sa représentation. Il est alors possible de traiter les systèmes non-spécifiés numériquement ou non complètement spécifiés, en phase de conception ou encore les systèmes incertains par exemple. Ce type d'étude permet de mieux dégager les propriétés structurelles en se concentrant non plus sur une réalisation donnée par une combinaison numérique fixe des paramètres mais sur la structure du système définie en grande partie par l'existence ou non des interactions entre les variables qui le caractérisent. De plus, l'analyse ainsi menée permet d'étudier les systèmes dès leur phase de conception. Évidemment, Cette analyse n'autorise pas l'étude des propriétés importantes telles que la stabilité qui est très liée justement à la valeur des paramètres.

[Lin, 1974] est la toute première étude par approche graphique relative à la commandabilité des systèmes structurés qui sont caractérisés par une représentation d'état où toutes les matrices ont, soit des éléments nuls fixes, soit des éléments non nuls symbolisés par des paramètres supposés indépendants. Le système linéaire est représenté par un graphe orienté et les conditions de commandabilité sont exprimées de façon très simple et intuitive : existence de cycles, de chemins formant des "cactus" . . . .

L'élégance, l'originalité et la simplicité des résultats obtenus dans [Lin, 1974] ont encouragé d'autres études sur l'analyse structurelle par approche graphique. Ainsi, les propriétés structurelles de commandabilité, observabilité, la caractérisation graphique de certains sous-espaces invariants, le rang générique des fonctions de transfert, la structure à l'infini ainsi que le nombre générique de différents types de zéros des systèmes structurés ont été graphiquement caractérisés. Plus tard des

conditions de solubilité des problèmes classiques de découplage [Linnemann, 1981, Yamada et Saga, 1985, Dion et Commault, 1993, Commault *et al.*, 1999], de rejet de perturbations par retour d'état [van der Woude et Murota, 1995, Commault *et al.*, 1991] ou par retour de sortie [van der Woude, 1996, Commault *et al.*, 1993, Commault *et al.*, 1997, van der Woude, 1993, Dion *et al.*, 1994] et de génération de résidus pour la détection et la localisation de défauts [Commault *et al.*, 2002a] ont été établis.

Les avantages de la représentation graphique des systèmes structurés ont été mis en exergue dès les travaux de [Lin, 1974]. En effet, les graphes, en contenant toute l'information du modèle structuré, permettent de mieux visualiser certaines propriétés du système. L'expression de divers résultats d'analyse est alors très simple, intuitive et (parfois) élégante [Andrè, 1985, Murota, 1987, Reinschke, 1988]. Enfin, la vérification de ces propriétés fait appel à des algorithmes classiques de la théorie des graphes dont les ordres de complexité restent polynomiaux et non exponentiels. Cela permet notamment d'étudier des systèmes de grande dimension et ce dès la phase de conception.

Dans ce mémoire de thèse nous nous consacrons à l'analyse graphique de certaines propriétés liées à l'observabilité de l'état et des entrées de systèmes linéaires structurés à entrées inconnues. Les entrées et l'état d'un système sont génériquement observables lorsque ce dernier est simultanément fortement observable et inversible à gauche [Trentelman *et al.*, 2001]. Les conditions géométriques ou algébriques, pour la validité de ces propriétés sont analysées notamment dans [Sain et Massey, 1969, Silverman, 1969, Basile et Marro, 1969, Guidorzi et Marro, 1971, Basile et Marro, 1973, Basile *et al.*, 1981, Hautus, 1983, Kratz, 1995, Hou et Patton, 1998]. Comme le montre le nombre de ces références (parmi tant d'autres), ces propriétés ont été très étudiées, en particulier dans l'objectif d'une synthèse d'observateurs à entrées inconnues et/ou d'une reconstruction d'entrées inconnues.

L'observation conjointe de l'état et des entrées inconnues est d'ailleurs encore un sujet d'étude ouvert comme en témoignent les récentes publications dans le domaine. Ainsi, [Floquet et Barbot, 2006] démontrent que tout système fortement observable et inversible

à gauche se met sous une forme d'observabilité particulière, puis un observateur à modes glissants est suggéré pour une telle forme.

Dans le travail réalisé dans cette thèse, nous ne nous sommes pas intéressés à la synthèse d'observateurs mais plutôt aux conditions structurelles d'observabilité de tout ou d'une partie choisie de l'état et des entrées. La première question à laquelle nous avons répondu, à partir de la représentation d'un système structuré par un graphe orienté, est : les mesures contiennent-elles suffisamment d'information pour permettre de reconstruire, du moins théoriquement, les variables inconnues du système? De manière équivalente, est-il possible d'exprimer tout ou une partie des entrées et de l'état du système uniquement en fonction des mesures et de leurs dérivées?

Des réponses à cette question avaient été données, évidemment, par des études utilisant des outils algébriques et géométriques. Néanmoins, cela pas encore été réalisé par l'approche graphique, qui s'était arrêtée à la caractérisation de l'observabilité classique de l'état pour des systèmes sans entrée inconnue. Notons que les conditions graphiques d'existence d'un observateur causal à entrées inconnues permettant d'estimer l'état d'un système linéaire avec une dynamique de l'erreur d'estimation indépendante des entrées inconnues ont été données dans [Commault *et al.*, 2001]. Elles sont logiquement plus restrictives que les conditions d'observabilité de l'état et de l'entrée.

Nos recherches ont abouti à l'établissement de conditions graphiques nécessaires et suffisantes de l'observabilité de tout ou d'une partie donnée de l'état et des entrées inconnues d'un système linéaire structuré.

Le second problème que nous avons abordé est celui du placement de capteurs qui permettrait le recouvrement de l'observabilité d'une partie désirée des entrées et de l'état d'un système structuré. Deux principales approches sont employées dans la littérature pour traiter le problème général du placement de capteurs. La première concerne l'utilisation de techniques d'optimisation d'un critère reflétant un grammien d'observabilité ou des fonctions de sensibilité . . . . Elle a fait l'objet de plusieurs travaux dont certains sont rapportés dans [van de Wal *et de Jager*, 2001, Demetriou, 2005, Khosrowjerdi *et al.*, 2007]. La seconde regroupe des études plus structurelles telles que [Liu *et al.*, 2003, Ragot *et al.*, 1992,

[Maquin *et al.*, 1994, Meyer *et al.*, 1994] qui présente une stratégie de placement de capteurs et d'actionneurs dans l'objectif de garantir des propriétés telles que l'inversibilité . . . .

L'étude menée ici peut être vue comme l'extension aux systèmes à entrées inconnues de [Commault *et al.*, 2005b] qui traitent des conditions graphiques de placement de capteurs pour le recouvrement de la propriété d'observabilité d'un système sans entrées inconnues. En fait, il s'agit de proposer une stratégie de placement de capteurs reposant entièrement sur la structure du système et qui permettrait, dans un premier temps, de rendre observables l'état et les entrées du système. Ce problème reste original par rapport à ceux précédemment cités en raison de la présence des entrées inconnues qui ne sont pas supposées constantes ou lentement variables. Deux groupes de conditions sur les capteurs additionnels ont été établis. Les premières conditions sont nécessaires et les secondes, énoncées sous forme d'un système de relations graphiques, sont suffisantes.

Enfin, afin de rendre plus concret l'apport de l'analyse structurelle par approche graphique que nous proposons, il a été important, d'implémenter tous les résultats trouvés et même tous ceux disponibles dans la littérature pour mettre à disposition de la communauté un outil d'analyse structurelle pertinent pour les systèmes linéaires et bilinéaires. La boîte à outils LISA a été conçue dans cet esprit. Elle dispose pour l'instant des outils de base et comprend quelques implémentations de résultats sur l'observabilité.

Plus précisément, LISA est une boîte à outils d'analyse structurelle graphique dédiée aux systèmes linéaires et bilinéaires structurés [Martinez-Martinez *et al.*, 2007]. Elle a comme objectif d'être utilisée pour l'analyse et la conception de systèmes de grande dimension. Une attention particulière a été portée sur l'optimalité de l'aspect calculatoire, évolutivité, modularité, portabilité et convivialité.

## 1.1 Systèmes linéaires structurés

Nous étudions les propriétés structurelles des systèmes linéaires invariant dans le temps de la forme :

$$\Sigma \begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état du système,  $u(t) \in \mathbb{R}^q$  le vecteur des entrées et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur des sorties.  $A, B, C$  et  $D$  sont des matrices de dimension appropriée.

Nous supposons que seule est connue la structure du système, c'est à dire l'existence ou non de relations entre les différentes variables du système. Lorsqu'il n'y a pas de relation entre les variables, nous inscrivons une valeur zéro dans l'élément correspondant de la matrice, tandis que l'existence d'une relation est traduite par un élément non nul dans la matrice matérialisée par un paramètre  $\lambda$  réel. Les systèmes ainsi paramétrés peuvent être représentés par le système linéaire structuré dénoté  $\Sigma_\Lambda$  décrit comme suit :

$$\Sigma_\Lambda \begin{cases} \dot{x}(t) &= A^\lambda x(t) + B^\lambda u(t) \\ y(t) &= C^\lambda x(t) + D^\lambda u(t) \end{cases} \quad (1.2)$$

où les matrices  $A^\lambda, B^\lambda, C^\lambda, D^\lambda$  du système structuré  $\Sigma_\Lambda$  sont des matrices dites structurées. Les paramètres sont rassemblés dans le vecteur  $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k\}$ . Les paramètres du vecteur  $\Lambda$  ne présentent aucune relation commune entre eux et sont dits indépendants. Ces systèmes structurés peuvent représenter une grande catégorie de systèmes linéaires numériquement spécifiés.

Il faut noter qu'ici nous considérons les éléments zéros des matrices comme étant fixes. D'autres approches considèrent le cas où ces valeurs peuvent être différentes de zéro en raison précisément des incertitudes du système. C'est notamment le cas lorsque ces zéros proviennent de la différence de deux valeurs *a priori* connues et fixes. C'est également le cas en ce qui concerne certains paramètres libres, lorsque des composantes du vecteur d'état impliquent certaines valeurs fixes constantes dans la matrice. C'est le cas d'une relation de type  $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ , par exemple. Ces deux cas sont considérés dans [Willems, 1986, Murota, 1987].

Dans certaines parties de ce mémoire, nous aurons à manipuler systèmes linéaires représentés par des matrices polynomiales. Cela aidera à mieux analyser leur structure. Ainsi, au système linéaire structuré (1.2), il peut être associé une matrice polynomiale

$$P_\lambda(s) = \begin{pmatrix} A^\lambda - sI_n & B^\lambda \\ C^\lambda & D^\lambda \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

appelée faisceau de matrices du système  $\Sigma_\Lambda$ . Cette matrice contient une grande partie de l'information importante relative à la structure du système.

### 1.1.1 Propriétés génériques

L'un des avantages de l'analyse des propriétés des systèmes linéaires structurés est la généralité des résultats obtenus. En effet, la validité des propriétés telles que la commandabilité, l'observabilité, ... est vraie non seulement pour une combinaison donnée des paramètres du système, mais aussi pour presque toutes les valeurs qu'ils peuvent prendre. Ces propriétés, dites structurelles car liées à la structure du système, ont ainsi une validité générique par rapport aux valeurs des paramètres.

Il faut noter que l'aspect générique des propriétés structurelles par rapport aux paramètres du système n'implique en rien leur validité pour toutes les combinaisons numériques possibles des paramètres. C'est par exemple le cas pour l'observabilité du système linéaire structuré suivant ayant par entrée connue  $u(t)$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} x(t) \end{aligned} \quad (1.4)$$

La matrice d'observabilité est donnée par  $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}$  où

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_4 \\ \lambda_1\lambda_3 & \lambda_2\lambda_4 \end{pmatrix}$$



Le système est observable si le rang de la matrice  $\mathcal{O}$  est égal à 2, c'est à dire à la dimension du système. Le déterminant étant donné par

$$\det(\mathcal{O}) = \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4 - \lambda_1 \lambda_3 \lambda_4 \\ \lambda_3 \lambda_4 (\lambda_2 - \lambda_1)$$

le système est donc observable pour toute valeur des paramètres  $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4\}$  sauf pour  $\lambda_3 = 0$  ou  $\lambda_4 = 0$  ou  $\lambda_2 - \lambda_1 = 0$ . Ainsi, le système (1.4) est observable pour "presque toutes" les valeurs de  $\Lambda$ . Dans le cas des systèmes linéaires structurés, il est considéré que le système donné par l'équation (1.4) est génériquement observable.

Nous avons parlé ci-dessus de la propriété d'observabilité, mais aussi du rang d'une matrice. Le rang générique d'une matrice structurée est une notion importante dans ce travail de thèse. Le paragraphe suivant approfondit cette notion.

### 1.1.2 Rang générique d'une matrice structurée

Dans le cas des systèmes numériquement spécifiés, le rang du faisceau de matrices  $P(s)$  est le nombre maximal de lignes ou colonnes linéairement indépendantes que l'on peut avoir dans cette matrice. Pour une valeur complexe particulière  $\hat{s}$ , le rang de  $P(\hat{s})$  est naturellement noté  $\text{rang}(P(\hat{s}))$ . Le *rang normal* du faisceau  $P(s)$  est alors le rang de  $P(\hat{s})$  pour presque toutes les valeurs de  $\hat{s} \in \mathbb{C}$  et il est dénoté par  $\text{n-rang}(P(s))$ .

Dans le cadre des systèmes linéaires structurés, à chaque valeur de l'ensemble des paramètres  $\Lambda \in \mathbb{R}^k$ , il est possible d'associer un système numériquement spécifié et une valeur du rang de la matrice de transfert du système. De la section 1.1.1, nous savons que le rang de la matrice de transfert de tous ces systèmes spécifiés n'est pas toujours égal au rang normal puisqu'il dépend des paramètres. Définissons la matrice de transfert du système structuré comme  $T_\lambda(s) = C_\lambda(sI - A_\lambda)^{-1}B_\lambda + D_\lambda$  et assumons que  $\text{rang}(T_\lambda(s)) = q$ . La définition suivante précise la notion de rang générique [van der Woude, 1991, van der Woude, 1991].

**Définition 1.1.** Soit  $\Sigma_\Lambda$  un système linéaire structuré avec pour matrice de transfert  $T_\lambda(s) = C_\lambda(sI - A_\lambda)^{-1}B_\lambda + D_\lambda$ . Le rang générique, noté g-rang, de  $T_\lambda(s)$  est défini

comme

$$\text{g-rang}(T_\lambda(s)) = \max_{\Lambda \in \mathbb{R}^k} \{\text{rang}(T_\lambda(s))\}$$

Cela signifie que le rang de la matrice de transfert  $T_\lambda(s)$  est égal à  $q$  pour "presque toutes" les valeurs de  $\lambda \in \mathbb{R}^k$ , où "presque toutes" doit être compris comme toutes les valeurs  $\lambda_i$  sauf celles qui se trouvent dans une variété propre [Wonham, 1985].

Jusqu'ici, nous avons parlé de l'importance de l'étude des propriétés des systèmes structurés et de la notion de généricité. Nous avons aussi défini le rang générique d'une matrice de transfert pour les systèmes linéaires structurés. La section suivante est consacrée à la représentation graphique des systèmes linéaires structurés et, plus précisément, à l'association d'un graphe orienté à tout système linéaire structuré ainsi qu'à la définition de certaines notions simples utiles à la synthèse et à l'énoncé des résultats présentés dans ce manuscrit.

## 1.2 Représentation graphique des systèmes linéaires structurés

Dès les années 1970, une nouvelle approche reposant sur la représentation par graphe orienté du modèle d'état des systèmes structurés, en a autorisé une analyse pertinente et efficace. La propriété de commandabilité a été la première à être étudiée [Lin, 1974, Shields et Pearson, 1976, Glover et Silverman, 1976]. Bien que les preuves restent fondées sur des arguments algébriques ou géométriques, les résultats énoncés sont très simples à appliquer et à comprendre. En effet, les critères de commandabilité trouvés sont relatifs à l'existence de chemins, de cycles, au calcul du nombre maximal de chemins disjoints . . . .

En outre, ces notions étant assez communes dans la théorie des graphes, des algorithmes optimisés existent pour leur manipulation. La simplicité et le fait que l'approche graphique permette de se défaire de certaines difficultés numériques inhérentes aux approches géométrique et algébrique ont conduit à une série d'études basées sur l'approche graphique. Ainsi, après la commandabilité, l'observabilité, la

solubilité des problèmes de découplage, de rejet de perturbations, les dimensions des sous-espaces invariants, la structure finie et à l'infini des systèmes, la détectabilité, la localisabilité des défauts ont été traités [Murota, 1987, Reinschke, 1988, van der Woude et Murota, 1995, van der Woude, 1996, Dion *et al.*, 2001, Commault *et al.*, 2002a, Commault *et al.*, 2002b, van der Woude *et al.*, 2003]. La majorité des propriétés des systèmes linéaires ont été caractérisées graphiquement en utilisant le plus souvent les notions de nombre et de longueur de chemins et de cycles disjoints.

D'autres types de représentations graphiques ont été utilisées pour l'analyse de propriétés structurelles des systèmes linéaires. C'est le cas de [Rahmani *et al.*, 1997] où les auteurs, en s'appuyant sur la théorie des bond-graphes, proposent une méthode pour l'analyse structurelle de propriétés telles que la commandabilité et l'observabilité des systèmes linéaires. Une approche basée sur le comportement du système est utilisée dans [Blanke *et al.*, 2003],...

Dans ce travail, deux types de représentations sont utilisées : graphes orientés et graphes bipartis. Dans un premier temps, nous présentons la représentation par graphes orientés, plus amplement utilisée dans ce mémoire. Ensuite, la représentation par graphes bipartis est abordée. La représentation des systèmes linéaires structurés par graphes orientés et bipartis est utilisée classiquement dans les travaux d'analyse structurelle par approche graphique [Murota, 1987, Reinschke, 1988, Dion *et al.*, 2003]. Ensuite, nous donnons quelques définitions utiles à l'analyse des propriétés d'observabilité que nous nous proposons de mener.

### 1.2.1 Graphe orienté associé à un système linéaire structuré

Un graphe orienté dénoté  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$  peut être associé au système structuré  $\Sigma_\Lambda$ . Il est composé d'un ensemble de sommets noté  $V$  et d'un ensemble d'arcs  $E$ . L'ensemble des sommets  $V$  est associé aux variables du système, c'est à dire aux composantes de l'état, aux composantes de l'entrée inconnue (perturbations, défauts, etc.) et aux composantes

des mesures du système structuré. L'ensemble des arcs  $E$  représente l'existence de relations statiques ou dynamiques entre les variables du système.

Plus précisément :  $V = \mathbf{X} \cup \mathbf{Y} \cup \mathbf{U}$  où  $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$  est l'ensemble de sommets-états,  $\mathbf{Y} = \{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_p\}$  est l'ensemble de sommets-sorties et  $\mathbf{U} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_q\}$  est l'ensemble de sommets-entrées.

L'ensemble d'arcs  $E = A\text{-arcs} \cup B\text{-arcs} \cup C\text{-arcs} \cup D\text{-arcs}$  est tel que

$$\begin{aligned} A\text{-arcs} &= \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{x}_i) \mid A^\lambda(i, j) \neq 0\}, B\text{-arcs} = \{(\mathbf{u}_j, \mathbf{x}_i) \mid B^\lambda(i, j) \neq 0\}, \\ C\text{-arcs} &= \{(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_i) \mid C^\lambda(i, j) \neq 0\}, D\text{-arcs} = \{(\mathbf{u}_j, \mathbf{y}_i) \mid D^\lambda(i, j) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Les matrices  $A^\lambda$ ,  $B^\lambda$ ,  $C^\lambda$  et  $D^\lambda$  sont des matrices structurées. L'élément  $(i, j)$  de la matrice structurée  $M^\lambda$  est représenté par  $M^\lambda(i, j)$ .

Pour illustrer le graphe orienté proposé, nous utilisons un exemple simple de système structuré

**Exemple 1.1.** Soient les matrices

$$\begin{aligned} A^\lambda &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_6 & 0 \end{pmatrix}, B^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \lambda_7 & 0 \\ \lambda_8 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ C^\lambda &= \begin{pmatrix} \lambda_9 & \lambda_{10} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{13} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D^\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{14} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le graphe orienté associé à un tel système structuré est présenté à la figure 1.1.

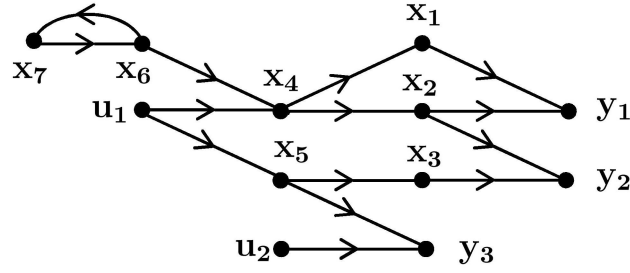


FIG. 1.1 – Représentation graphique du système structuré  $\Sigma_\Lambda$  de l'exemple 1.1

### 1.2.2 Notations et définitions

Ci-dessous, nous donnons quelques définitions utiles aux analyses présentées lors des paragraphes suivants.

- Un arc  $e \in E$  est noté par  $e = (v_i, v_j)$  où  $v_i$  est le sommet de départ ou initial et  $v_j$  est le sommet d'arrivée ou final de l'arc  $e$ .
- Deux arcs  $e_1 = (v_1, v'_1)$  et  $e_2 = (v_2, v'_2)$  sont  $v$ -disjoints si leurs sommets de début ainsi que leurs sommets de fin sont mutuellement distincts *i.e.*  $v_1 \neq v_2$  et  $v'_1 \neq v'_2$ . Des arcs sont  $v$ -disjoints s'ils sont  $v$ -disjoints deux à deux. Il est à noter que  $e_1$  et  $e_2$  peuvent être  $v$ -disjoints même si  $v_2 = v'_1$  et  $v_1 = v'_2$ .

Par exemple, dans la figure 1.1, les arcs  $(x_4, x_1)$  et  $(x_4, x_2)$  ou  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_1)$  ne sont pas  $v$ -disjoints. En revanche,  $(x_4, x_2)$  et  $(x_2, y_1)$  sont  $v$ -disjoints, ainsi que  $(x_6, x_4)$  et  $(x_4, x_2)$ .

- Un chemin consiste en une séquence d'arcs  $(v_{r_j}, v_{r_{j+1}}) \in E$  pour  $j = 0, 1, \dots, i-1$  et il est noté par  $P = v_{r_0} \rightarrow v_{r_1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{r_i}$
- Un chemin est dit *simple* lorsqu'il ne passe pas deux fois par le même sommet.
- Un *cycle* est un chemin de la forme  $v_{r_0} \rightarrow v_{r_1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{r_i} \rightarrow v_{r_0}$ , où tous les sommets  $v_{r_0}, v_{r_1}, \dots, v_{r_i}$  sont distincts.
- Un *chemin U-racine* est un chemin qui a comme sommet de départ un élément de l'ensemble  $U$ .
- Un *chemin Y-cime* est un chemin qui a comme sommet de fin un élément de l'ensemble  $Y$ .

- Des chemins sont disjoints s'ils n'ont aucun sommet commun.
- La *longueur* d'un chemin est définie comme le nombre d'arcs qu'il contient, chaque arc étant compté autant de fois qu'il apparaît dans le chemin.

Soient  $V_1$  et  $V_2$  deux sous-ensembles de sommets de  $V$ . Le cardinal de l'ensemble  $V_1$  (respectivement  $V_2$ ) est noté  $\text{card}(V_1)$  (respectivement  $\text{card}(V_2)$ ).

- Un chemin dont le sommet de départ appartient à  $V_1$  et le sommet de fin appartient à  $V_2$ , est appelé chemin  $V_1$ - $V_2$ . De plus, s'il n'y a que le sommet de départ du chemin  $P$  qui appartient à  $V_1$  et que le sommet de fin qui appartient à  $V_2$ , alors le chemin  $P$  est appelé chemin  $V_1$ - $V_2$  direct.
- L'ensemble de  $\ell$  chemins  $V_1$ - $V_2$  disjoints est appelé un *lien (linking)*  $V_1$ - $V_2$  de taille  $\ell$ . Les liens composés d'un nombre maximal de chemins disjoints sont appelés liens  $V_1$ - $V_2$  maximaux. La taille d'un tel lien est définie comme

$$\rho(V_1, V_2) = \text{nombre maximal de chemins } V_1\text{-}V_2 \text{ disjoints}$$

la longueur d'un lien  $V_1$ - $V_2$  est définie comme étant la somme des longueurs de tous les chemins composant ce lien. La *longueur minimale* d'un lien est le nombre minimal d'arcs nécessaires pour composer ce lien.

- On définit aussi  $\mu(V_1, V_2)$  par le nombre minimal de sommets appartenant à un lien  $V_1$ - $V_2$  maximal et  $\theta(V_1, V_2)$  par le nombre maximal d'arcs  $v$ -disjoints dont les sommets de début sont dans  $V_1$  et les sommets de fin dans  $V_2$ .

Notons que la longueur minimale d'un lien  $V_1$ - $V_2$  maximal est égale à  $\mu(V_1, V_2) - \rho(V_1, V_2)$

L'exemple simple suivant illustre les définitions énoncées ci-dessus.

**Exemple 1.2.** *Considérons le graphe orienté  $\mathcal{G}$  de la figure 1.2.*

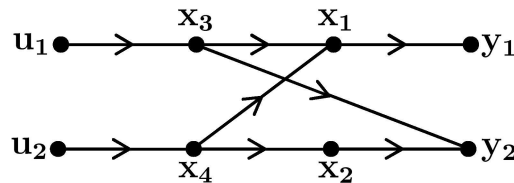


FIG. 1.2 – Lien maximal d'un graphe

Il existe quatre chemins  $\mathbf{U}$ - $\mathbf{Y}$  possibles :

$$P_{11} : \mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{y}_1,$$

$$P_{12} : \mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{y}_2,$$

$$P_{21} : \mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{y}_1,$$

$$P_{22} : \mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{y}_2$$

Il est possible d'avoir au maximum deux chemins  $\mathbf{U}$ - $\mathbf{Y}$  disjoints. Les liens  $\mathbf{U}$ - $\mathbf{Y}$  maximaux sont alors  $\{P_{11}, P_{22}\}$  et  $\{P_{12}, P_{21}\}$ . On a donc  $\rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = 2$ ,  $\mu(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = 7$  alors que  $\theta(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = 0$ .

- L'ensemble de sommets noté  $V_{ess}(V_1, V_2)$  regroupe les sommets communs à tous les liens  $V_1$ - $V_2$  maximaux. Ces sommets sont dits sommets essentiels dans les liens  $V_1$ - $V_2$  maximaux.
- Un ensemble de sommets  $\mathbf{S}(V_1, V_2)$  est appelé *séparateur* entre  $V_1$  et  $V_2$  si chaque chemin  $V_1$ - $V_2$  contient au moins un sommet appartenant à  $\mathbf{S}$ . Un séparateur est dit minimal s'il contient un nombre minimal d'éléments. Ce nombre est égal à  $\rho(V_1, V_2)$  d'après le théorème de Menger.

L'union de tous les séparateurs est égale à l'ensemble des sommets essentiels  $V_{ess}(V_1, V_2)$ .

- Il existe deux séparateurs minimaux particuliers et uniques : le séparateur d'entrée et le séparateur de sortie notés respectivement  $\mathbf{S}^i(V_1, V_2)$  et  $\mathbf{S}^o(V_1, V_2)$  et définis comme suit :
  - $\mathbf{S}^i(V_1, V_2)$  est l'ensemble des sommets de fin de tous les chemins  $V_1$ - $V_{ess}(V_1, V_2)$  directs en prenant en compte les chemins de longueur nulle.
  - $\mathbf{S}^o(V_1, V_2)$  est l'ensemble des sommets de début de tous les chemins  $V_{ess}(V_1, V_2)$  -  $V_2$  directs, en prenant en compte les chemins de longueur nulle.

Une conséquence directe de ces définitions est que  $V_{ess}(V_1, V_2) \cap V_1 \subseteq \mathbf{S}^i(V_1, V_2)$  et  $V_{ess}(V_1, V_2) \cap V_2 \subseteq \mathbf{S}^o(V_1, V_2)$ .

- Une union disjointe de chemins et de cycles est un ensemble de chemins et de cycles n'ayant aucun sommet commun. Une telle union couvre un sommet  $\mathbf{v}$ , s'il existe un chemin appartenant à cette union qui passe par  $\mathbf{v}$ .

- Un graphe partiel de  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$  engendré par un ensemble d'arcs  $\mathcal{S}_\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}$  est noté  $\mathcal{S}_\mathcal{G} = (\mathcal{S}_\mathcal{V}, \mathcal{S}_\mathcal{E})$  où l'ensemble de sommets  $\mathcal{S}_\mathcal{V} \subseteq \mathcal{V}$  est constitué des sommets de début et de fin de tous les arcs de  $\mathcal{S}_\mathcal{E}$ .

**Exemple 1.3.** *Considérons le système structuré représenté par le graphe orienté de la figure 1.3. Nous constatons qu'il y a au maximum 3 chemins disjoints entre  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{Y}$ ,  $\rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = 3$ . Ainsi, le séparateur minimal est constitué de 3 sommets. Nous pouvons citer quelques séparateurs minimaux composés de trois sommets :  $\mathbf{S}_1(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{y}_4\}$ ,  $\mathbf{S}_2(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5\}$ ,  $\mathbf{S}_3(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \{\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_8\}$  et  $\mathbf{S}_4(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \{\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{u}_4\}$  par exemple. L'ensemble de sommets essentiels est donné par  $V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_8, \mathbf{u}_4, \mathbf{y}_4\}$ .*

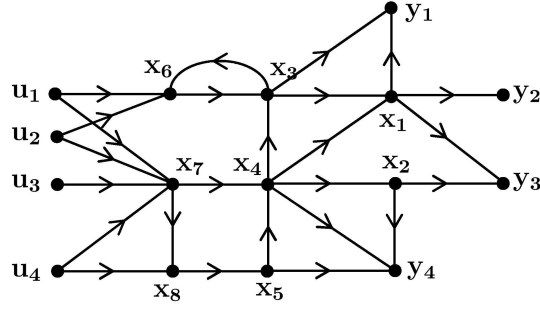


FIG. 1.3 – Exemple illustrant les sommets essentiels et les séparateurs

Parmi les séparateurs minimaux, il est facile de distinguer le séparateur d'entrée comme étant  $\mathbf{S}^i(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \{\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{u}_4\}$  et le séparateur de sortie  $\mathbf{S}^o(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{y}_4\}$ .

### 1.2.3 Graphe biparti associé à un système linéaire structuré

Une autre représentation graphique utile à l'analyse des systèmes structurés est celui de graphes bipartis. Un graphe biparti dénoté  $B(\Sigma_\Lambda)$  peut être associé au système structuré  $\Sigma_\Lambda$ . Il est composé de deux ensembles de sommets disjoints  $V^+$  et  $V^-$  et d'un ensemble d'arcs  $W$ . Les ensembles  $V^+$  et  $V^-$  sont associés aux composantes de l'état, aux composantes de l'entrée inconnue et aux composantes des mesures. L'ensemble d'arcs représente les relations entre les variables du système.



Plus précisément, l'ensemble de sommets  $V^+ = \mathbf{X}^+ \cup \mathbf{U}^+$  et  $V^- = \mathbf{Y}^- \cup \mathbf{X}^-$  avec  $\mathbf{X}^+ = \{\mathbf{x}_1^+, \mathbf{x}_2^+, \dots, \mathbf{x}_n^+\}$ ,  $\mathbf{U}^+ = \{\mathbf{u}_1^+, \mathbf{u}_2^+, \dots, \mathbf{u}_q^+\}$ ,  $\mathbf{X}^- = \{\mathbf{x}_1^-, \mathbf{x}_2^-, \dots, \mathbf{x}_n^-\}$ ,  $\mathbf{Y}^- = \{\mathbf{y}_1^-, \mathbf{y}_2^-, \dots, \mathbf{y}_p^-\}$ . L'ensemble d'arcs  $W$  est défini par  $\{(\mathbf{x}_j^+, \mathbf{x}_i^-) \mid A^\lambda(i, j) \neq 0\} \cup \{(\mathbf{u}_j^+, \mathbf{x}_i^-) \mid B^\lambda(i, j) \neq 0\} \cup \{(\mathbf{x}_j^+, \mathbf{y}_i^-) \mid C^\lambda(i, j) \neq 0\} \cup \{(\mathbf{u}_j^+, \mathbf{y}_i^-) \mid D^\lambda(i, j) \neq 0\}$ .

En fait, il existe dans le graphe biparti un arc  $(\mathbf{v}_i^+, \mathbf{v}_j^-)$  s'il existe un arc correspondant  $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j)$  dans le graphe orienté  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ .

Un couplage dans un graphe biparti  $B(\Sigma_\Lambda) = (V^+, V^-, W)$  est un ensemble  $M \subseteq W$  d'arcs disjoints (et donc  $v$ -disjoints car le graphe est biparti). Un couplage est maximal s'il contient un nombre d'arcs égal à  $\theta(V^+, V^-)$ . Nous notons par  $\partial^+ M$  (resp.  $\partial^- M$ ) l'ensemble des sommets de  $V^+$  (resp. de  $V^-$ ) incidents aux arcs inclus dans  $M$ .

#### Exemple 1.4.

Les deux principaux représentations graphiques utilisées dans ce document étant déjà présentées, le paragraphe suivant est dédié à l'exposé des principaux objectifs et motivations de ce mémoire.

### 1.3 Les problématiques abordées dans ce travail

#### – Observabilité forte de l'état et de l'entrée inconnue pour les systèmes linéaires structurés

L'observabilité forte traduisant l'observabilité des variables d'état d'un système pour toute valeur d'entrée ainsi que l'observabilité conjointe de l'état et de l'entrée inconnue restent encore des propriétés des systèmes linéaires structurés non abordées graphiquement. Ces propriétés un peu plus fortes que l'observabilité de l'état ou que la détection et la localisation d'entrées inconnues de type défauts sont utiles et pertinentes à étudier au sein de l'équipe projet DIMODIC du CRAN à laquelle j'appartient dont les thématiques de recherches gravitent autour du diagnostic et de la synthèse de commandes tolérantes aux défauts avec des applications récentes aux systèmes distribués en réseaux. En effet, les

systèmes à entrées inconnues peuvent par exemple représenter des systèmes soumis à des défauts dont l'estimation pourrait servir dans le cadre de la synthèse de commandes tolérantes aux défauts. De même, les systèmes distribués en réseaux peuvent être considérés comme étant un assemblage de systèmes indépendants dont les interactions sont représentées par des entrées inconnues. L'étude de l'observabilité forte de l'état consisterait suivant les cas à savoir si les défauts symbolisés par des entrées inconnues ne détériorent pas la capacité à estimer les composantes de l'état ou si un système distribué en réseau reste observable en distribuant les schémas d'observation localement sur les sous-systèmes qui le composent.

Ainsi motivée, notre analyse graphique de l'observabilité des systèmes à entrées inconnues a pris en compte plusieurs cas. En premier lieu, nous nous sommes intéressés à l'observabilité de toutes les composantes de l'état et de l'entrée. Ensuite, nous avons étudié les conditions d'observabilité forte d'une partie donnée de l'état et/ou de l'entrée. Enfin, l'observabilité forte de tout l'état est considérée. Cela correspond sommairement aux cas d'études que nous avons jugés les plus intéressants dans le contexte des systèmes à entrées inconnues.

– *Placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité*

Le rajout de capteurs pour le recouvrement d'une propriété donnée a déjà été étudié dans le cadre des systèmes linéaires structurés. Dans [Commault *et al.*, 2005b], les auteurs s'intéressent au recouvrement de la propriété d'observabilité. Le problème est divisé en deux parties. La première partie consiste à assurer que le système est connecté à la sortie. Ensuite, il s'agit de faire en sorte qu'il n'y ait aucune contraction dans le graphe associé au système, ou plus précisément, il doit exister un ensemble de chemins et/ou de cycles disjoints qui couvrent tout l'état. Plus récemment, dans [Commault et Dion, 2007, Commault *et al.*, 2006], les auteurs donnent par approche graphique, une classification des capteurs et de leur localisation permettant de résoudre le problème de détection de défauts à base d'observateurs.

D'autres travaux sur le placement de capteurs utilisent des représentations graphiques différentes. Ainsi, les diagrammes de flots de données représentant les informations d'ob-

servation sur les systèmes sont utilisés dans [Maquin *et al.*, 1995, Maquin *et al.*, 1994] pour résoudre des problèmes d'observabilité ou de diagnosticabilité. Les graphes bipartis sont employés dans [Frisk et Krysander, 2007, Travé-Massuyès *et al.*, 2001, Trave-Massuyes *et al.*, 2006], qui comparent la capacité structurelle d'un ensemble donné de configurations de capteurs à détecter et localiser des défauts. Citons aussi les approches fondées sur les bond-graphes [Khemliche *et al.*, 2006] qui aboutissent à des procédures de placement de capteurs à des fins de diagnostic applicables à des systèmes assez complexes.

Dans ce contexte, il nous a paru intéressant de compléter notre analyse de l'observabilité des systèmes à entrées inconnues par une étude de placement de capteurs pour le recouvrement des propriétés considérées. Là aussi, en relation avec les propriétés étudiées, nous avons considéré séparément le recouvrement de l'observabilité forte en présence d'entrées inconnues d'une partie donnée de l'état puis celle de tout l'état.

L'étude consiste à placer des capteurs de sorte que le système devienne, suivant le cas, soit complètement observable, soit tel qu'un ensemble donné de composantes de l'état et de l'entrée inconnue soit observable. Pour ce faire, il est évident que l'une des premières conditions est la condition de connectivité à la sortie puisque il doit être garanti que tous les états et les entrées inconnues ont un lien avec la sortie. Cela signifie que tout changement dans d'états et d'entrées inconnues est reflété par les mesures. Ensuite, il s'agit de satisfaire aux conditions d'observabilité forte du système. Les résultats trouvés donnent des conditions nécessaires et suffisantes au placement de capteurs, à savoir, leur localisation. Le nombre minimal de capteurs à rajouter pour le recouvrement de l'observabilité forte d'une partie de l'état n'a pas été trouvé. Seulement une borne supérieure à ce nombre a été obtenue.

– *Boîte à outils* LISA

Enfin, une façon de concrétiser nos travaux a été de participer à la conception d'un logiciel sous la forme d'une boîte à outils d'analyse structurelle dont l'objectif est de proposer une panoplie d'algorithmes permettant de caractériser des propriétés structurelles ou la solubilité de problèmes classiques de commande.

Nos travaux de thèse ont donné lieu à un article de revue :

T. BOUKHOBZA, F. HAMELIN et S. MARTINEZ-MARTINEZ. State and input observability for structured linear Systems : a graph-theoretic approach. *Automatica*, **43**(7), 1204–1210, 2007,

un article de congrès international avec comité de lecture :

S. MARTINEZ-MARTINEZ, T. MADER, T. BOUKHOBZA et F. HAMELIN. LISA : a linear structured system analysis program. Dans *IFAC Symposium on System, Structure and Control (SSSC)*, Foz do Iguaçu, Brésil, 2007,

et à la soumission d'un article en revue :

T. BOUKHOBZA, F. HAMELIN, S. MARTINEZ-MARTINEZ et D. SAUTER . Partial state and input observability for structured linear Systems : a graph-theoretic approach. *Soumis à European Journal of Control*, 2008.

L'objectif de ce manuscrit est de décrire les travaux effectués lors de cette thèse. Les divers résultats sont illustrés par des exemples simples permettant aux lecteurs non familiers avec l'approche graphique de mieux comprendre les développements théoriques de notre travail. Le premier chapitre, des trois que comporte ce document, regroupe tous les résultats d'analyse d'observabilité pour les systèmes à entrées inconnues. Le second chapitre traite de l'aspect placement de capteurs pour le recouvrement des propriétés d'observabilité étudiées. Enfin, le dernier chapitre est dédié à la présentation de la boîte à outils d'analyse structurelle LISA. Sans rentrer dans les détails de programmation, une description des fonctionnalités et une discussion des ordres de complexité des différents algorithmes implémentés sont exposées. Enfin, une conclusion et quelques perspectives à ce travail, notamment en ce qui concerne les problèmes de placements de capteurs et l'enrichissement de LISA, sont données.



## 2

# Observabilité générique de l'état et de l'entrée des systèmes linéaires structurés

## 2.1 Introduction

La propriété d'observabilité qui consiste à garantir que les mesures faites sur un système sont suffisamment informatives pour pouvoir en déduire toutes les variables non mesurées du système, est une propriété fondamentale en automatique. Ainsi, il est important de faire l'étude de cette propriété lorsqu'il s'agit de construire un observateur permettant l'estimation de l'état et des entrées d'un système. Cela est évidemment utile dans le contexte de la commande, si les lois de commande doivent utiliser des variables non mesurées mais aussi du diagnostic pour la construction et la génération de résidus, de la commande tolérante aux défauts pour laquelle l'observation des amplitudes des défauts peut être un avantage ou tout simplement dans le cadre de la supervision et de la surveillance de processus.

Aussi, l'observabilité est l'une des premières propriétés, avec la commandabilité, à avoir fait l'objet de caractérisations diverses par l'utilisation de multiples outils mathématiques.

Les conditions classiques d'observabilité pour les systèmes linéaires utilisent les notions de dimension de sous-espaces vectoriels, de rang de matrices ou de faisceaux de matrices [Zadeh et Desoer, 1963, Kalman, 1968, Kailath, 1980, Rosenbrock, 1970, Wonham, 1985]. Cela est aussi le cas pour l'analyse de l'observabilité des systèmes à entrées inconnues [Sain et Massey, 1969, Basile et Marro, 1969, Guidorzi et Marro, 1971] [Basile et Marro, 1973, Basile *et al.*, 1981, Hautus, 1983]. Du fait des outils utilisés, la majorité des critères d'observabilité nécessitent pour leur application la connaissance des paramètres du système étudié. Or, d'une part, la valeur des paramètres n'est pas toujours connue, notamment lors de la phase de conception du système. D'autre part, il est établi [Willems, 1986] que la propriété d'observabilité est une propriété qui dépend beaucoup plus de la structure du système considéré que de la valeur des paramètres de ce système. Aussi, comme cela a été argumenté dans l'introduction générale de ce manuscrit, l'approche graphique permet d'étudier efficacement des systèmes dont on ne connaît que la structure *i.e.* la répartition des termes nul/non-nuls dans les matrices d'état par exemple. Les conditions graphiques de l'observabilité de l'état d'un système sans entrée inconnue sont rappelées dans [Murota, 1987, Reinschke, 1988, Dion *et al.*, 2003]. Elles s'expriment en termes de connectivité à la sortie et de couplage maximal dans un graphe biparti ou par l'existence d'un ensemble de chemins simples et de cycles disjoints recouvrant tous les sommets d'un graphe. Notre objectif est d'étendre l'analyse graphique de l'observabilité aux systèmes à entrées inconnues sans faire d'hypothèses sur ces dernières. En effet, si nous supposons les entrées lentement variables, le problème étudié se ramène, par extension de l'état du système, à celui de l'étude de l'observabilité d'un système sans entrée inconnue. Nous considérerons dans ce mémoire des entrées inconnues exogènes sans contrainte ou connaissance sur leur dynamique. Une analyse de l'existence d'un observateur causal permettant l'estimation de l'état en découplant l'erreur d'observation des entrées inconnues a été effectuée dans [Commault *et al.*, 2001]. Ces conditions sont évidemment des conditions suffisantes d'observabilité forte de l'état. Notre travail d'analyse mené ici est différent de [Commault *et al.*, 2001], car nous ne nous intéressons pas à la synthèse d'un observateur, bien que ce problème soit également d'un grand intérêt. C'est bien la propriété d'observa-

bilité seule que nous avons tenté de cerner, c'est à dire la capacité informative des mesures effectuées sur le système. Par ailleurs, il a été prouvé dans le cadre des systèmes singuliers [Hou et Müller, 1999], que l'observabilité forte est une condition nécessaire et suffisante à l'existence d'un observateur non causal qui permettrait la reconstruction de l'état mais qui utiliserait les dérivées des signaux de mesure.

Plus précisément, nous nous intéresserons dans ce chapitre à trois cas distincts. Le premier consiste à donner les conditions pour que le système linéaire structuré soit totalement fortement observable, c'est à dire, des conditions pour que toutes les composantes des vecteurs d'état et d'entrée soient observables. Ensuite, lorsque le système n'est pas complètement observable, nous étudierons l'observabilité forte d'une partie donnée des composantes de l'état et de l'entrée inconnue. Enfin, nous nous intéresserons à la propriété d'observabilité forte de l'état qui est notamment utile dans le cadre de la synthèse d'observateurs pour l'analyse de tolérance aux défauts ou de l'autonomie des systèmes distribués en réseaux.

## 2.2 Observabilité totale de l'état et de l'entrée d'un système linéaire structuré

Le premier problème abordé dans ce chapitre est l'analyse graphique de l'observabilité générique de l'entrée et de l'état de  $\Sigma_\Lambda$ . Avant cela, nous donnons d'abord la définition de la propriété d'observabilité totale. Ensuite, quelques résultats concernant la caractérisation algébrique et géométrique de cette propriété sont rappelés. Une subdivision particulière du système est alors présentée avant l'énoncé de notre principal résultat. A la fin de cette section, un exemple est présenté pour illustrer l'applicabilité de l'approche proposée.



### 2.2.1 Position du problème

Considérons le système linéaire structuré  $\Sigma_\Lambda$  :

$$\Sigma_\Lambda \begin{cases} \dot{x}(t) &= A^\lambda x(t) + B^\lambda u(t) \\ y(t) &= C^\lambda x(t) + D^\lambda u(t) \end{cases}$$

L'état et l'entrée du système linéaire structuré  $\Sigma_\Lambda$  sont génériquement observables si toute variation de l'entrée ou de l'état initial se reflète sur la sortie, ce qui peut s'écrire plus formellement :

**Définition 2.1.** *L'état et l'entrée du système linéaire structuré  $\Sigma_\Lambda$  sont génériquement observables lorsque pour tout état initial  $x_0$  et pour tout signal d'entrée  $u(t)$ , l'égalité  $y(t) = 0, \forall t \geq 0$  implique  $x(t) = 0, \forall t \geq 0$  et  $u(t) = 0, \forall t > 0$ .*

En d'autres termes, l'observabilité totale de l'entrée et de l'état est équivalente à la possibilité d'exprimer toutes les composantes de l'état et de l'entrée en fonction des sorties et de leur dérivées. Cela n'est évidemment possible que si les mesures effectuées sur le système, symbolisées ici par les sorties  $y(t)$ , sont suffisamment informatives pour pouvoir refléter toute variation de l'état et/ou de l'entrée.

Ainsi, l'état et l'entrée d'un système sont génériquement observables si et seulement si ce dernier est génériquement fortement observable et inversible à gauche [[Trentelman et al., 2001](#)].

Des critères algébriques et géométriques d'observabilité totale de l'entrée et de l'état existent depuis les années 1970. En effet, Il est possible de déduire de [[Hautus, 1983](#)] :

**Théorème 2.1.** *Considérons le système structuré  $\Sigma_\Lambda$  et soit  $P_\lambda(s) = \begin{pmatrix} A^\lambda - sI_n & B^\lambda \\ C^\lambda & D^\lambda \end{pmatrix}$*

*le faisceau de matrices de  $\Sigma_\Lambda$ .*

*L'état et l'entrée du système linéaire structuré  $\Sigma_\Lambda$  sont génériquement observables si et seulement si*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \text{g-rang}(P(s)) = n + q$$

Un critère géométrique utilisant la notion de sous-espace d'observabilité peut aussi être déduit de [Basile et Marro, 1969, Basile et Marro, 1973, Basile *et al.*, 1981]. Pour cela, nous notons  $E = (I_{n \times n} \mid 0_{n \times q})$  où  $I_{n \times n}$  est la matrice identité de rang  $n$  et  $0_{n \times q}$  est la matrice nulle ayant  $n$  lignes et  $q$  colonnes.  $\tilde{A} = (A^\lambda \mid B^\lambda)$  et  $\tilde{C} = (C^\lambda \mid D^\lambda)$ . Considérons alors la suite de sous-espaces obtenus par la récurrence

$$\begin{cases} \Delta_{E, \tilde{A}, \tilde{C}}^0 &= \text{Im}(\tilde{C}^T) \\ \Delta_{E, \tilde{A}, \tilde{C}}^{i+1} &= \Delta_{E, \tilde{A}, \tilde{C}}^i + \tilde{A}^T E (\Delta_{E, \tilde{A}, \tilde{C}}^i \cap \text{Im}(E^T)) \end{cases} \quad (2.1)$$

Cette suite est une suite non décroissante et comme elle est bornée, elle converge en moins de  $n + q$  itérations. Soit  $\Delta^*$  le sous-espace maximal donné par cette suite. Nous avons alors

**Théorème 2.2.** *L'état et l'entrée du système linéaire structuré  $\Sigma_\Lambda$  sont génériquement observables si et seulement si  $\text{g-dim}(\Delta^*) = n + q$ .*

où  $\text{g-dim}(\Delta^*)$  représente la dimension générique du sous-espace  $\Delta^*$ , c'est à dire, la dimension de  $\Delta^*$  pour presque toutes les valeurs de  $\lambda$ .

Ce résultat, prouvé dans [Boukhobza *et al.*, 2005], est assez aisément déductible du Théorème 2.1 de [Basile et Marro, 1969] ou de [Basile *et al.*, 1981] qui donnent le sous-espace inobservable  $Q_1$  dans l'espace d'état pour un système à entrées inconnues :  $Q_1$  est le plus grand sous-espace  $(A^\lambda, B^\lambda)$  invariant inclus dans  $\ker C^\lambda$  i.e.  $A^\lambda Q_1 \subseteq Q_1 + \text{Im} B^\lambda$  et  $Q_1 \subseteq \ker C^\lambda$ .

L'objectif que nous nous sommes fixé, dans un premier temps, est de donner des conditions graphiques équivalentes à celles des théorèmes 2.1 et 2.2 en tenant compte si possible de l'aspect calculatoire afin d'obtenir un outil d'analyse adapté aux systèmes de grande dimension.

### 2.2.2 Subdivision du système linéaire structuré

Le calcul de la dimension générique du sous-espace d'observabilité est très lié au nombre générique de zéros invariants du système considéré. La caractérisation graphique

de ce nombre a fait l'objet de plusieurs publications parmi lesquelles [van der Woude, 2000, van der Woude *et al.*, 2003]. L'utilisation des résultats de [van der Woude, 2000] a semblé plus judicieuse dans le contexte de l'analyse de l'observabilité totale. Cependant les deux théorèmes principaux de cette publication concernent des systèmes carrés (autant d'entrées que de sorties) ou des systèmes rectangulaires particuliers. Ainsi, pour pouvoir appliquer ces deux théorèmes au calcul du nombre générique de zéros invariants d'un système quelconque, il faut faire apparaître ces deux types de systèmes. A cette fin, les ensembles de sommets suivants sont introduits :

**Définition 2.2.** *Soit le système linéaire structuré  $\Sigma_\Lambda$  représenté par le graphe orienté  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ . L'ensemble des sommets du graphe orienté  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$  est subdivisé en plusieurs sous-ensembles*

- $\Delta_0 \stackrel{def}{=} \{ \mathbf{x}_i \in \mathbf{X} \mid \rho(\mathbf{U} \cup \{ \mathbf{x}_i \}, \mathbf{Y}) = \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) \}$  ;
- $\mathbf{X}_1 \stackrel{def}{=} \{ \mathbf{x}_i \in \mathbf{X} \mid \rho(\mathbf{U} \cup \{ \mathbf{x}_i \}, \mathbf{Y}) > \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) \}$  ;
- $\mathbf{Y}_0 \stackrel{def}{=} \{ \mathbf{y}_i \in \mathbf{Y} \mid \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) > \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y} \setminus \{ \mathbf{y}_i \}) \}$  ;
- $\mathbf{Y}_1 \stackrel{def}{=} \mathbf{Y} \setminus \mathbf{Y}_0$  ;
- $\mathbf{U}_0 \stackrel{def}{=} \{ \mathbf{u}_i \in \mathbf{U} \mid \theta(\{ \mathbf{u}_i \}, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = 0 \}$  ;
- $\mathbf{U}_1 \stackrel{def}{=} \mathbf{U} \setminus \mathbf{U}_0$  ;
- $\mathbf{S}_o \stackrel{def}{=} \mathbf{S}^o(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$  ;
- $\mathbf{X}_s \stackrel{def}{=} \mathbf{S}_o \cap \mathbf{X}$  ;
- $\mathbf{X}_0 \stackrel{def}{=} \Delta_0 \setminus \mathbf{X}_s$ .

Avant d'interpréter la décomposition proposée dans la définition ci-dessus, un exemple est présenté afin de l'illustrer.

**Exemple 2.1.** *Considérons le système structuré représenté par le graphe orienté de la figure 2.1. Calculons tout d'abord le nombre maximal de chemins disjoints entre l'entrée et la sortie. Nous avons,  $\rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = 3$ . Considérons maintenant chacun des sommets  $\mathbf{x}_i$ . A partir des sommets d'entrée et du sommet  $\mathbf{x}_5$  par exemple, il n'est pas possible d'avoir plus de 3 chemins disjoints vers la sortie, alors  $\rho(\mathbf{U} \cup \{ \mathbf{x}_5 \}, \mathbf{Y}) = \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$  et le sommet  $\mathbf{x}_5$  appartient au sous-ensemble  $\Delta_0$ . En faisant la même démarche avec les autres sommets,*

nous obtenons  $\Delta_0 = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{11}\}$ . En revanche, pour le sommet  $\mathbf{x}_3$ , le nombre maximal de chemins disjoints entre  $\{\mathbf{x}_3\} \cup \mathbf{U}$  vers  $\mathbf{Y}$  est plus grand que celui entre  $\mathbf{U}$  vers  $\mathbf{Y}$ . Nous avons en effet  $\rho(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_3\}, \mathbf{Y}) = 4 > \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ . Il en est de même pour les autres sommets qui n'appartiennent pas à  $\Delta_0$ . Par conséquent,  $\mathbf{X}_1 = \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_8, \mathbf{x}_9\}$ .

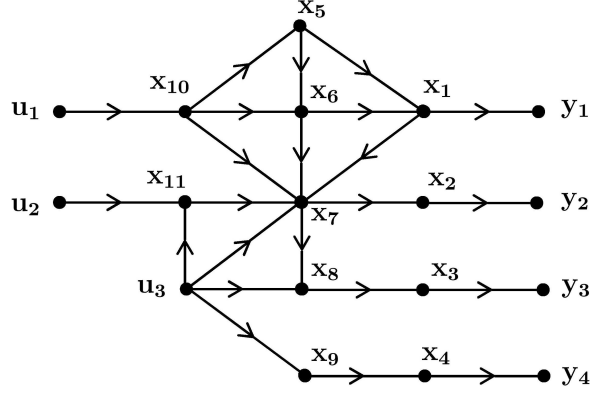


FIG. 2.1 – Décomposition du système

En ce qui concerne les sorties, nous constatons que  $\rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y} \setminus \{y_1\}) = 2 < \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ . La sortie  $y_1$  est donc essentielle. D'ailleurs,  $y_1$  est la seule sortie essentielle car,  $\rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y} \setminus \{y_2\}) = \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y} \setminus \{y_3\}) = \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y} \setminus \{y_4\}) = \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ . Nous trouvons alors  $\mathbf{Y}_0 = \{y_1\}$  et  $\mathbf{Y}_1 = \{y_2, y_3, y_4\}$ .

Avec les sous-ensembles précédents, nous constatons facilement qu'aucun arc ne relie  $\{u_1, u_2\}$  à un quelconque sommet de  $\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1$ , et alors  $\mathbf{U}_0 = \{u_1, u_2\}$  et  $\mathbf{U}_1 = \{u_3\}$ . Le séparateur de sortie est  $\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) = \{x_7, y_1\}$ . On en déduit facilement  $\mathbf{X}_s = \{x_7\}$  et finalement,  $\mathbf{X}_0 = \{x_1, x_5, x_6, x_{10}, x_{11}\}$ .

Les quelques remarques suivantes permettent de mieux comprendre la décomposition introduite à la définition 2.2 :

- En considérant un système structuré sans entrée inconnue, l'ensemble  $\mathbf{X}_0$  regrouperait les sommets état qui n'ont pas de chemin vers la sortie ou autrement dit non connectés aux sommets sortie.
- En général,  $\Delta_0$  regroupe les sommets état qui
  - soit ne sont pas connectés aux sommets de sortie,

- soit font partie des sommets essentiels pour les liens  $\mathbf{U}$ - $\mathbf{Y}$  maximaux *i.e.*  $V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) \cap \mathbf{X} \subseteq \Delta_0$ . En outre, aucun élément de  $\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1$  n'est inclus dans  $V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$  ou en d'autres termes  $V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) \cap \mathbf{X} \subseteq \Delta_0$ .
- soit sont tels que tous les chemins les reliant aux sorties passent obligatoirement par un sommet essentiel pour les liens  $\mathbf{U}$ - $\mathbf{Y}$  maximaux. En effet, si cela n'était pas le cas, *i.e.* s'il existait des éléments  $\mathbf{v}_i \in \Delta_0$  et un chemin  $P$  partant de  $\mathbf{v}_i$  vers  $\mathbf{Y}$  qui ne contienne aucun élément de  $V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ , alors il n'y aurait aucun élément de  $\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$  dans  $P$  et donc  $\text{card}(\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{Y})) > \text{card}(\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}, \mathbf{Y}))$ . Or, d'après le théorème de Menger, cela impliquerait que  $\rho(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{Y}) > \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ , ce qui contredit le fait que  $\mathbf{v}_i \in \Delta_0$ .
- Directement à partir de la définition de  $\mathbf{Y}_0$ , nous avons  $\mathbf{Y}_0 \subseteq V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$  et donc  $\mathbf{Y}_0 \subseteq \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ .
- En supposant que  $\rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = q$ , alors  $\rho(\mathbf{U}_1, \mathbf{Y}) = \text{card}(\mathbf{U}_1)$ . Dans ce cas,  $\mathbf{U}_1 \subseteq V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$  et par conséquent  $\mathbf{U}_1 \subseteq \mathbf{S}^i(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ . D'autre part, comme  $(\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) \cap V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \emptyset$ , tous les éléments de  $\mathbf{U}_1$  sont les sommets de départ de chemins  $V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) - \mathbf{Y}$  directs et donc  $\mathbf{U}_1 \subseteq \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ . Par ailleurs,  $\mathbf{U}_1 \subseteq \mathbf{S}^i(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$  et  $\mathbf{U}_1 \subseteq \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$  impliquent que, dans un lien  $\mathbf{U}$ - $\mathbf{Y}$  maximal, tous les sommets inclus dans un chemin partant de  $\mathbf{U}_1$  ne sont pas inclus dans  $V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$  et donc ne peuvent appartenir à  $\Delta_0$ . En conclusion,

$$V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \mathbf{U}_1 \cup V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \quad (2.2)$$

- A partir de chaque sommet  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_1$ , il existe un chemin *Y-cime* disjoint à tous les chemins d'au moins un lien  $\mathbf{U}$ - $\mathbf{Y}$  maximal. Par conséquent, pour tout  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_1$ , il existe un chemin *Y-cime* constitué uniquement d'éléments de  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{Y}_1$ . De même,  $\forall \mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_1$ , dans tous les liens  $\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\} - \mathbf{Y}$  maximaux, les chemins partant de sommets appartenant à  $\mathbf{U}_1 \cup \{\mathbf{x}_i\}$  ne passent nécessairement que par des sommets de  $\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1$ . Pareillement,  $\forall \mathbf{y}_i \in \mathbf{Y}_1$ , dans tous les liens  $\mathbf{U} - \mathbf{Y} \setminus \{\mathbf{y}_i\}$  maximaux, les chemins partant de  $\mathbf{U}_1$  ne passent nécessairement que par des sommets de  $\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1$ . En résumé,  $\forall \mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_1$  et  $\forall \mathbf{y}_i \in \mathbf{Y}_1$ ,

$$V_{ess}(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \mathbf{Y}) \cap (\mathbf{\Delta}_0 \cup \mathbf{Y}_0) = V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y} \setminus \{\mathbf{y}_i\}) \cap (\mathbf{\Delta}_0 \cup \mathbf{Y}_0) = V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \quad (2.3)$$

D'autres propriétés essentielles de la décomposition sont formalisées dans le lemme suivant :

**Lemme 2.3.** *Soit le système linéaire structuré  $\Sigma_\Lambda$  représenté par le graphe orienté  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ . En supposant  $\rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = q$  et en utilisant la décomposition de la définition 2.2, nous avons :*

**St1.**  $\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cap (\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = \emptyset$  ;

**St2.**  $\forall \mathbf{v}_i \in \mathbf{\Delta}_0 \cup \mathbf{U}_0, \mathbf{v}_i \in \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \Leftrightarrow \theta(\{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) \neq 0$  ;

**St3.**  $\theta(\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = \text{card}(\mathbf{X}_s) = n_s$  ;

**St4.**  $\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cap \mathbf{U}_0 = \emptyset$  ;

**St5.**  $\theta(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = 0$  ;

**St6.**  $\mathbf{Y}_0 \subseteq \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$ .

**Preuve :**

[St1.] D'après les définitions de  $\mathbf{X}_1$  et de  $\mathbf{Y}_1$ ,  $(\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) \cap V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \emptyset$ . Or,  $\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \subseteq V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \subseteq V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ . Nous avons donc  $\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cap (\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = \emptyset$ .

[St2.] D'abord, nous allons montrer que,  $\forall \mathbf{v}_i \in \mathbf{\Delta}_0$ , si  $\theta(\{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) \neq 0$  alors  $\mathbf{v}_i \in \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ .

Nous savons que  $\mathbf{v}_i \in \mathbf{\Delta}_0$  et  $\theta(\{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) \neq 0$  impliquent que  $\mathbf{v}_i \in V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ . En effet, si ce n'était pas le cas alors d'après la relation (2.3),  $\exists \mathbf{x}_j \in \mathbf{X}_1, \mathbf{v}_i \notin V_{ess}(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_j\}, \mathbf{Y})$  et  $\exists \mathbf{y}_k \in \mathbf{Y}_1, \mathbf{v}_i \notin V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y} \setminus \{\mathbf{y}_k\})$ . Or, comme  $\mathbf{v}_i$  est directement relié à un élément de  $\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1$ , il existe un chemin  $\{\mathbf{v}_i\} - \mathbf{Y}$  qui est disjoint de tous les chemins formant un lien  $\mathbf{U}-\mathbf{Y}$  maximal. Cela est équivalent à dire que  $\rho(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{Y}) > \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ , ce qui est en contradiction avec le fait que  $\mathbf{v}_i \in \mathbf{\Delta}_0$ . De plus, non seulement  $\mathbf{v}_i \in V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$  mais aussi il est le sommet de départ d'un chemin  $V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) - \mathbf{Y}$  direct. Cela entraîne que  $\mathbf{v}_i \in \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ .

En outre, le fait que  $\mathbf{v}_i$  soit le début d'un chemin  $V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) - \mathbf{Y}$  direct et comme  $\mathbf{v}_i \in V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$  d'après l'égalité (2.2), induisent aussi que  $\mathbf{v}_i \in \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$ .

Maintenant nous allons montrer que  $\forall \mathbf{v}_i \in \Delta_0 \cup \mathbf{U}_0, \theta(\{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = 0 \Rightarrow \mathbf{v}_i \notin \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$ .

Supposons qu'il existe un sommet  $\mathbf{v}_i \in \Delta_0 \cup \mathbf{U}_0$  tel que  $\theta(\{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = 0$  et  $\mathbf{v}_i \in \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$ . Évidemment,  $\mathbf{v}_i \in \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$  implique que  $\mathbf{v}_i$  appartient à tout lien  $\mathbf{U}_0 - \mathbf{Y}$  maximal. Considérons alors un quelconque lien  $\mathbf{U}_0 - \mathbf{Y}$  maximal. Ce dernier inclut nécessairement un chemin de la forme  $P = \mathbf{u}_j \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{v}_i \rightarrow \mathbf{v}_{j_1} \rightarrow \mathbf{v}_{j_2} \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{v}_{j_k} \rightarrow \mathbf{y}_t$ .

En premier lieu, notons que comme  $\theta(\{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = 0$  alors  $\mathbf{v}_{j_1} \in \Delta_0$ . Ensuite, pour  $r > 1$ , si  $\mathbf{v}_{j_r} \in \mathbf{X}_1$  alors d'après la déduction faite précédemment  $\mathbf{v}_{j_{r-1}} \in \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$ . Néanmoins, cela est impossible car dans tout lien  $\mathbf{U}_0 - \mathbf{Y}$  maximal, nous avons un et un seul élément de  $\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$  dans chaque chemin. Aussi,  $\mathbf{v}_{j_1}, \mathbf{v}_{j_2}, \dots, \mathbf{v}_{j_k}$  sont tous éléments de  $\Delta_0$ .

Par ailleurs,  $\mathbf{y}_t \notin \mathbf{Y}_1$  car autrement  $\mathbf{v}_{j_k} \in \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$ . Cela conduirait forcément à  $\mathbf{y}_t \in \mathbf{Y}_0$ . Or, par définition, nous avons  $\mathbf{Y}_0 \subseteq V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$  et d'après l'égalité (2.2), nous aurions  $\mathbf{y}_t \in V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$ , ce qui conduirait à  $\mathbf{y}_t \in \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$ . Ainsi, dans le chemin  $P$ , nous aurions deux éléments de  $\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$ . Comme cela est impossible, l'hypothèse de départ qui stipule qu'il existe un élément  $\mathbf{v}_i \in \Delta_0 \cup \mathbf{U}_0$  tel que  $\theta(\{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = 0$  et  $\mathbf{v}_i \in \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$  est fausse. Cela achève la preuve de [St2].

**[St3.]** Dans tout lien  $\mathbf{U}_0 - \mathbf{Y}$  maximal, il y a  $n_s$  chemins contenant des éléments de  $\mathbf{X}_s$  et qui arrivent à un élément de  $\mathbf{Y}_1$ . De plus, d'après [St2.], dans tous ces chemins, tous les sommets se trouvant entre les éléments de  $\mathbf{X}_s$  et ceux de  $\mathbf{Y}_1$  appartiennent à  $\mathbf{X}_1$ . Donc, il existe  $n_s$  chemins disjoints entre  $\mathbf{X}_s$  et  $\mathbf{Y}_1$  qui ne couvrent que des sommets de  $\mathbf{X}_s \cup \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1$ . Par conséquent,  $\theta(\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = n_s$ .

**[St4.]** Comme  $\theta(\mathbf{U}_0, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = 0$ , nous avons d'après [St2]  $\mathbf{U}_0 \cap \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) = \emptyset$ .

**[St5.]** Vu que  $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X} \setminus (\mathbf{X}_s \cup \mathbf{X}_1)$ , où  $\mathbf{X}_s = \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cap \mathbf{X}$ , nous avons  $\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cap \mathbf{X}_0 = \emptyset$ . Aussi, il est possible de déduire immédiatement de [St2] que  $\theta(\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = 0$ .

**[St6.]** D'après la relation [St2],  $\forall \mathbf{v}_i \in \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$  satisfaisant  $\theta(\{\mathbf{v}_i\}, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) \neq 0$ , nous avons  $\mathbf{v}_i \in \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ . Ainsi,  $\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \subseteq \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ . En outre,  $\mathbf{U}_1 \subseteq \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ ,

$\mathbf{U}_1 \cap \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) = \emptyset$  et  $\text{card}(\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}, \mathbf{Y})) = q_1 + q_0 = \text{card}(\mathbf{U}_1) + \text{card}(\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}))$ . Donc,  $\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cup \mathbf{U}_1$ . D'autre part,  $\mathbf{Y}_0 \subseteq V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) \Rightarrow \mathbf{Y}_0 \subseteq \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$  et comme  $\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cup \mathbf{U}_1$ , nous avons finalement  $\mathbf{Y}_0 \subseteq \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$ .  $\triangle$

En résumé, avec le lemme précédent nous avons établi que

$$\begin{cases} V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cup \mathbf{U}_1, \\ \theta(\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = n_s, \\ \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) \cup \mathbf{U}_1 = \mathbf{X}_s \cup \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{U}_1 \\ \theta(\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{Y}_0, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = 0. \end{cases}$$

Ces égalités importantes, reflétées à la figure 2.2, regroupent les principales propriétés de la décomposition graphique de notre système. Elles vont permettre de subdiviser le système  $\Sigma_\Lambda$  considéré en deux sous-systèmes particuliers pour lesquels nous pouvons appliquer les algorithmes de calcul du nombre générique de zéros invariants [van der Woude, 2000].

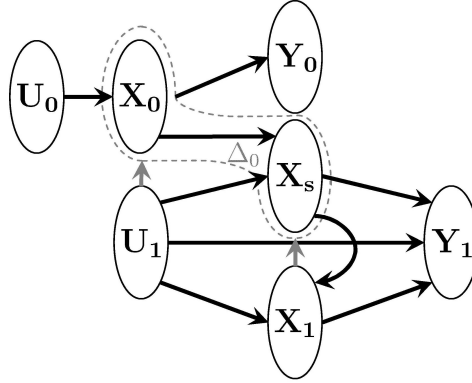


FIG. 2.2 – Division du système

### 2.2.3 Conditions d'observabilité totale de l'entrée et de l'état

Les propriétés de la décomposition proposée à la définition 2.2, entraînent qu'il n'existe pas de liens entre  $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0$  et  $\mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1$ . Le système structuré  $\Sigma_\Lambda$  peut être décrit par les



équations suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{X}_0(t) = A_{0,0}^\lambda X_0(t) + A_{0,s}^\lambda X_s(t) + A_{0,1}^\lambda X_1(t) + \\ \quad + B_{0,0}^\lambda U_0(t) + B_{0,1}^\lambda U_1(t) \\ \dot{X}_s(t) = A_{s,0}^\lambda X_0(t) + A_{s,s}^\lambda X_s(t) + A_{s,1}^\lambda X_1(t) + \\ \quad + B_{s,0}^\lambda U_0(t) + B_{s,1}^\lambda U_1(t) \\ \dot{X}_1(t) = A_{1,s}^\lambda X_s(t) + A_{1,1}^\lambda X_1(t) + B_{1,1}^\lambda U_1(t) \\ Y_0(t) = C_{0,0}^\lambda X_0(t) + C_{0,s}^\lambda X_s(t) + C_{0,1}^\lambda X_1(t) + \\ \quad + D_{0,0}^\lambda U_0(t) + D_{0,1}^\lambda U_1(t) \\ Y_1(t) = C_{1,s}^\lambda X_s(t) + C_{1,1}^\lambda X_1(t) + D_{1,1}^\lambda U_1(t) \end{array} \right. \quad (2.4)$$

où  $X_0$ ,  $X_s$ ,  $U_0$ ,  $U_1$ ,  $Y_0$  and  $Y_1$  représentent respectivement les variables associées aux sommets des ensembles  $\mathbf{X}_0$ ,  $\mathbf{X}_s$ ,  $\mathbf{U}_0$ ,  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{Y}_0$  et  $\mathbf{Y}_1$ .

Après la permutation de certaine lignes et colonnes du faisceau de matrices  $P(s)$  de  $\Sigma_\Lambda$ , celui-ci peut être transformé sous la forme

$$\tilde{P}(s) = \begin{pmatrix} A_{0,0}^\lambda - sI_{n_0} & A_{0,s}^\lambda & B_{0,0}^\lambda & A_{0,1}^\lambda & B_{0,1}^\lambda \\ A_{s,0}^\lambda & A_{s,s}^\lambda - sI_{n_s} & B_{s,0}^\lambda & A_{s,1}^\lambda & B_{s,1}^\lambda \\ C_{0,0}^\lambda & C_{0,s}^\lambda & D_{0,0}^\lambda & C_{0,1}^\lambda & D_{0,1}^\lambda \\ 0 & A_{1,s}^\lambda & 0 & A_{1,1}^\lambda - sI_{n_1} & B_{1,1}^\lambda \\ 0 & C_{1,s}^\lambda & 0 & C_{1,1}^\lambda & D_{1,1}^\lambda \end{pmatrix}$$

Notons que [van der Woude *et al.*, 2003] proposent une subdivision en trois sous-systèmes similaire à celle ci-dessus. D'une part, seulement deux sous-systèmes sont nécessaires pour l'étude de l'observabilité. D'autre part, la subdivision est ici explicite ce qui n'est pas le cas dans [van der Woude *et al.*, 2003] où les auteurs soulignent juste son existence.

En utilisant  $\tilde{P}(s)$ , nous allons maintenant énoncer le principal résultat de ce paragraphe équivalent aux conditions du théorème 2.1 :

**Proposition 2.4.** *L'état et l'entrée du système structuré  $\Sigma_\Lambda$  sont génériquement observables si et seulement si dans son graphe orienté associé  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ , il existe un graphe partiel  $\mathcal{S}_\mathcal{G}$  qui satisfait*

**Cond1.**  *$\mathcal{S}_\mathcal{G}$  couvre tous les sommets de  $\mathbf{X} \cup \mathbf{U}$  ;*

**Cond2.** *Les sommets  $\mathbf{x}_i$  qui seraient couverts par des cycles dans  $\mathcal{S}_\mathcal{G}$  appartiennent tous à  $\mathbf{X}_1$  ;*

**Cond3.**  *$\mathcal{S}_\mathcal{G}$  contient un lien  $\mathbf{U}_0\text{-}\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$  maximal ayant une longueur égale à  $\mu(\mathbf{U}_0, \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})) - \text{card}(\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}))$ .*

**Preuve :** En premier lieu, nous établissons la nécessité de la condition **Cond1**

Nécessité de la condition **Cond1** :

La condition **Cond1**, qui est équivalente à l'existence de  $n + q$  arcs  $v$ -disjoints, implique que  $\text{g-rang}(P(0)) = n + q$ . En effet, le nombre d'arcs  $v$ -disjoints dans  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$  est égal au couplage maximal (maximal matching) dans le graphe biparti [Murota, 1987] qu'il est possible d'associer à la matrice  $P(0)$  et qui est égal à  $\text{g-rang}(P(0))$ .

Par conséquent, **Cond1** est une condition nécessaire à l'observabilité générique de l'entrée et de l'état de  $\Sigma_\Lambda$ . De plus, **Cond1** implique aussi  $\rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = q$ , ce qui rend utilisables les résultats du lemme 2.3.

Évidemment, si cette égalité n'est pas vérifiée, l'entrée inconnue  $u$  ne peut être observable et notre analyse peut conclure directement à la non validité de la propriété d'observabilité générique de l'entrée et de l'état du système  $\Sigma_\Lambda$ . Dans la suite de la preuve, nous supposons que la condition **Cond1** est vérifiée et donc que  $\rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = q$ .

Subdivision du système  $\Sigma_\Lambda$  : Considérons le faisceau de matrices  $\tilde{P}(s)$ . D'après l'égalité

**St3** du lemme 2.3,  $\text{g-rang} \begin{pmatrix} A_{1,s}^\lambda \\ C_{1,s}^\lambda \end{pmatrix} = \theta(\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = n_s$ . Ainsi  $P(s)$  et donc  $\tilde{P}(s)$  sont de rang plein colonne  $\forall s \in \mathbb{C}$ , si et seulement si le faisceau de matrices  $P_e(s)$  est aussi de

rang plein colonne  $\forall s \in \mathbb{C}$ , où

$$P_e(s) = \begin{pmatrix} A_{0,0}^\lambda - sI_{n_0} & A_{0,s}^\lambda & B_{0,0}^\lambda & A_{0,1}^\lambda & B_{0,1}^\lambda & 0 \\ A_{s,0}^\lambda & A_{s,s}^\lambda - sI_{n_s} & B_{s,0}^\lambda & A_{s,1}^\lambda & B_{s,1}^\lambda & 0 \\ C_{0,0}^\lambda & C_{0,s}^\lambda & D_{0,0}^\lambda & C_{0,1}^\lambda & D_{0,1}^\lambda & 0 \\ 0 & I_{n_s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{1,1}^\lambda - sI_{n_1} & B_{1,1}^\lambda & A_{1,s}^\lambda \\ 0 & 0 & 0 & C_{1,1}^\lambda & D_{1,1}^\lambda & C_{1,s}^\lambda \end{pmatrix}$$

Notons que cette matrice correspond également au faisceau de matrices du système étendu

$$\Sigma_e : \begin{cases} \dot{X}_0(t) = A_{0,0}^\lambda X_0(t) + A_{0,s}^\lambda X_s(t) + A_{0,1}^\lambda X_1(t) + \\ \quad + B_{0,0}^\lambda U_0(t) + B_{0,1}^\lambda U_1(t) \\ \dot{X}_s(t) = A_{s,0}^\lambda X_0(t) + A_{s,s}^\lambda X_s(t) + A_{s,1}^\lambda X_1(t) + \\ \quad + B_{s,0}^\lambda U_0(t) + B_{s,1}^\lambda U_1(t) \\ \dot{X}_1(t) = A_{1,s}^\lambda X_s(t) + A_{1,1}^\lambda X_1(t) + B_{1,1}^\lambda U_1(t) \\ Y_0(t) = C_{0,0}^\lambda X_0(t) + C_{0,s}^\lambda X_s(t) + C_{0,1}^\lambda X_1(t) + \\ \quad + D_{0,0}^\lambda U_0(t) + D_{0,1}^\lambda U_1(t) \\ Y_1(t) = C_{1,s}^\lambda X_s(t) + C_{1,1}^\lambda X_1(t) + D_{1,1}^\lambda U_1(t) \\ Y_s(t) = X_s(t) \end{cases} \quad (2.5)$$

De plus, nous avons  $\rho(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) = \text{card}(\mathbf{U}_0) = q_0 = \text{card}(\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})) = p_0 + n_s$  et donc

$$P_1(s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A_{0,0}^\lambda - sI_{n_0} & A_{0,s}^\lambda & B_{0,0}^\lambda \\ A_{s,0}^\lambda & A_{s,s}^\lambda - sI_{n_s} & B_{s,0}^\lambda \\ C_{0,0}^\lambda & C_{0,s}^\lambda & D_{0,0}^\lambda \\ 0 & I_{n_s} & 0 \end{pmatrix} \text{ est une matrice carrée. Ainsi, } \Sigma_e \text{ est com-}$$

posé de deux systèmes :

- $\Sigma_0$  qui a comme entrée  $U_0$ , comme vecteur d'état  $X_0$  et comme vecteur de sortie  $\begin{pmatrix} Y_0 \\ Y_s \end{pmatrix}$  où  $Y_s = X_s$  est un vecteur de sortie virtuel.
- $\Sigma_1$  qui a comme entrée le vecteur  $\begin{pmatrix} U_1 \\ X_s \end{pmatrix}$ , comme vecteur d'état  $X_1$  et comme vecteur de sortie  $Y_1$ .

Cette subdivision est schématisée à la figure 2.3. Comme  $\text{g-rang} \begin{pmatrix} A_{1,s}^\lambda \\ C_{1,s}^\lambda \end{pmatrix} = \theta(\mathbf{X}_s, \mathbf{X}_1 \cup$

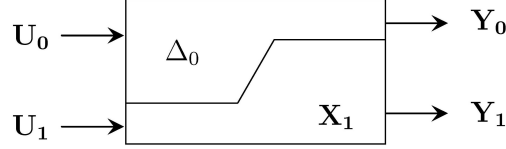


FIG. 2.3 – Division du graphe associé  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$  du système  $\Sigma_\Lambda$

$\mathbf{Y}_1) = n_s$ , la matrice  $P_e(s)$  est génériquement de rang plein colonne  $\forall s \in \mathbb{C}$  si et seulement si  $P_1(s)$  et  $P_2(s)$  sont toutes deux génériquement de rang plein colonne  $\forall s \in \mathbb{C}$ , où  $P_2(s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A_{1,1}^\lambda - sI_{n_1} & B_{1,1}^\lambda & A_{1,s}^\lambda \\ C_{1,1}^\lambda & D_{1,1}^\lambda & C_{1,s}^\lambda \end{pmatrix}$ .

Nécessité et suffisance des conditions **Cond2** et **Cond3** :

Concernant  $P_1(s)$  qui représente le faisceau de matrices d'un système carré, nous pouvons appliquer le théorème 5.1 de [van der Woude, 2000]. Ce théorème stipule que le degré en  $s$  du déterminant de  $P_1(s)$  est génériquement égal à  $n_0 + q_0$  moins le nombre minimal d'arcs dans un lien  $\mathbf{U}_0\text{-}\mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s$  maximal. Ce nombre minimal d'arcs peut être exprimé comme  $\mu(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s) - \text{card}(\mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s)$ . Le degré du déterminant de  $P_1(s)$  est  $n_0 + q_0 - (\mu(\mathbf{U}_0, \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})) - \text{card}(\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})))$ , avec évidemment  $\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) = \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s$ . Ce déterminant est différent de zéro pour tout  $s \in \mathbb{C}$  si et seulement si son degré en  $s$  est nul et  $\text{g-rang}(P_1(0)) = n_0 + q_0 + n_s$ . De plus, comme  $\theta(\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{U}_1) = 0$ , l'existence d'un graphe partiel  $v$ -disjoint qui couvre  $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0$  avec les contraintes énoncées dans **Cond2** et **Cond3** est nécessaire et suffisant pour garantir que  $\text{g-rang}(P_1(0)) = n_0 + q_0 + n_s$  et que  $\mu(\mathbf{U}_0, \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})) = n_0 + q_0 + \text{card}(\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}))$ . En effet, si la longueur du lien  $\mathbf{U}_0\text{-}\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})$  excède la taille donnée par  $\mu(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s) - \text{card}(\mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s)$  le nombre d'arcs ne serait pas minimal et le degré du déterminant de  $P_1(s)$  ne serait pas égal à zéro. En outre, si dans le sous-graphe un cycle disjoint couvrant un élément de  $\mathbf{U}_0 \cup \mathbf{X}_0$  est pris en compte, le degré du déterminant de  $P_1(s)$  serait au moins égal à un [van der Woude, 1991]. Ainsi,  $P_1(s)$  est génériquement de rang plein pour tout  $s \in \mathbb{C}$ , *i.e.*  $\text{g-rang}(P_1(s)) = n_0 + q_0 + n_s$ ,  $\forall s \in \mathbb{C}$ .

Suffisance de la condition **Cond1** :

D'après le Théorème 5.2 de [van der Woude, 2000], adapté au contexte de l'analyse de la propriété d'observabilité, nous avons :

*Si  $P_2(s)$  est génériquement de rang normal plein colonne même après l'effacement d'une de ses lignes, choisie arbitrairement, alors, génériquement, le plus grand diviseur commun de tous les mineurs principaux d'ordre  $(n_1 + q_1 + n_s)$  de  $P_2(s)$  est un monôme en  $s$  de degré  $n_1 + q_1 + n_s$  moins le nombre maximal d'arcs dans une union disjointe d'un lien  $\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s - \mathbf{Y}$  maximal, d'une famille de chemins  $Y$ -cime et d'une famille de cycles ne couvrant que des éléments de  $\mathbf{X}_1$ .*

D'une part, **Cond1** implique que  $\rho(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s, \mathbf{Y}_1) = q_1 + n_s$  et que le nombre maximal d'arcs dans une union disjointe d'un lien  $\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s - \mathbf{Y}$  maximal, d'une famille de chemins  $Y$ -cime et d'une famille de cycles ne couvrant que des éléments de  $\mathbf{X}_1$  est égal à  $n_1 + n_s + q_1$ . Par conséquent, si l'hypothèse stipulant que  $P_2(s)$  est de rang normal plein colonne même après l'effacement d'une de ses lignes, choisie arbitrairement, est vraie alors le plus grand diviseur commun de tous les mineurs principaux d'ordre  $(n_1 + q_1 + n_s)$  de  $P_2(s)$  est un monôme en  $s$  de degré 0. Ce qui induirait que  $\text{g-rang}(P_2(s)) = n_1 + q_1 + n_s \forall s \in \mathbb{C}$  i.e.  $P_2(s)$  est génériquement de rang plein pour tout  $s \in \mathbb{C}$ .

Nous allons montrer ci-dessous que cette hypothèse est vraie. En d'autres termes, il faut montrer que  $\text{g-rang}(P_{2,i}(s)) = n_1 + n_s + q_1, \forall i = 1, \dots, n_1 + q_1$ , où  $P_{2,i}(s)$ , pour tout  $i = 1, \dots, n_1 + q_1$ , correspond à la matrice  $P_2(s)$  après la suppression de sa  $i^{\text{ème}}$  ligne.

La suppression de la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $\begin{pmatrix} A_{1,1}^\lambda - sI_{n_1} & B_{1,1}^\lambda & A_{1,s}^\lambda \end{pmatrix}$  dans  $P_2(s)$  est équivalente à la suppression de tous les arcs arrivant à  $\mathbf{x}_{i_1}$  dans le graphe  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ , où  $x_{i_1}$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $X_1$ . De plus,  $\rho(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_{i_1}\}, \mathbf{Y}) > \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$  et donc  $\rho(\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) \cup \{\mathbf{x}_{i_1}\}, \mathbf{Y}) > \rho(\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}, \mathbf{Y}), \mathbf{Y})$ . En outre, d'après le lemme 2.3,  $\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s \cup \mathbf{Y}_0$ . Sachant que  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y} \setminus \mathbf{Y}_0$ , nous avons alors  $\rho(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s \cup \{\mathbf{x}_{i_1}\}, \mathbf{Y}_1) > \rho(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s, \mathbf{Y}_1) = q_1 + n_s$ . En conséquence,  $\rho(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s \cup \{\mathbf{x}_{i_1}\}, \mathbf{Y}_1) = q_1 + n_s + 1$ . En appliquant le résultat de [van der Woude, 2000], nous avons donc pour  $i < n_1$ ,  $\text{g-rang}(P_{2,i}(s))$  qui est égal à  $n_1 - 1 + \rho(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s \cup \{\mathbf{x}_{i_1}\}, \mathbf{Y}_1)$ . Ainsi,  $\text{g-rang}(P_{2,i}(s)) = n_1 + q_1 + n_s$  pour

tout  $i \leq n_1$ .

La suppression de la  $i^{\text{ème}}$  ligne de  $\begin{pmatrix} C_{1,1}^\lambda & D_{1,1}^\lambda & C_{1,s}^\lambda \end{pmatrix}$  dans  $P_2(s)$  est équivalente à la suppression de tous les arcs arrivant à  $\mathbf{y}_{i_1}$  dans le graphe  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ , où  $y_{i_1}$  est la  $i^{\text{ème}}$  composante du vecteur  $\mathbf{Y}_1$ . Or, par définition de tous les éléments de  $\mathbf{Y}_1$ ,  $\rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y} \setminus \{\mathbf{y}_{i_1}\})$ . Aussi,  $\rho(\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}, \mathbf{Y}), \mathbf{Y}) = \rho(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s \cup \mathbf{Y}_0, \mathbf{Y} \setminus \{\mathbf{y}_{i_1}\})$ . Comme  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y} \setminus \mathbf{Y}_0$ , nous avons alors  $\rho(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s, \mathbf{Y}_1 \setminus \{\mathbf{y}_{i_1}\}) = q_1 + n_s$ . Toujours, d'après [van der Woude, 2000], nous pouvons écrire que  $\text{g-rang}(P_{2,i}(s))$ , pour  $n_1 < i \leq n_1 + p_1$ , est égal à  $n_1 + \rho(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s, \mathbf{Y}_1 \setminus \{\mathbf{y}_{i_1}\})$ . Toutefois, aucun des éléments de  $\mathbf{Y}_1$  n'étant essentiel,  $\rho(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s, \mathbf{Y}_1 \setminus \{\mathbf{y}_{i_1}\}) = q_1 + n_s$ . Nous pouvons déduire que pour tout  $n_1 < i \leq n_1 + p_1$ ,  $\text{g-rang}(P_{2,i}(s)) = n_1 + q_1 + n_s$ .

En résumé, la condition **Cond1** de la proposition 2.4 garantit que :

- le nombre maximal d'arcs dans une union disjointe d'un lien  $\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s - \mathbf{Y}$  maximal, d'une famille de chemins  $Y$ -cime et d'une famille de cycles ne couvrant que des éléments de  $\mathbf{X}_1$  est égal à  $n_1 + n_s + q_1$  ;
- $P_2(s)$  est de  $n$ -rang plein colonne même après l'effacement d'une de ses lignes, choisie arbitrairement.

Par conséquent, le plus grand diviseur commun de tous les mineurs d'ordre  $(n_1 + q_1 + n_s)$  de  $P_2(s)$  est génériquement un monôme de degré 0 en  $s$ . Comme  $\text{g-rang}(P_2(0)) = n_1 + n_s + q_1$ , alors  $P_2(s)$  est génériquement de rang plein colonne  $\forall s \in \mathbb{C}$ .

En conclusion,  $\text{g-rang}(P_2(s)) = n + q, \forall s \in \mathbb{C}$ .

Ainsi, les trois conditions de la proposition 2.4 sont nécessaires et suffisantes pour établir qu'aussi bien  $P_1(s)$  que  $P_2(s)$  sont génériquement de rang plein  $\forall s \in \mathbb{C}$  ce qui implique que  $P_e(s)$  et donc  $P(s)$  le sont aussi.  $\triangle$

Un corollaire plus simple et plus aisément implémentable peut être déduit de la proposition 2.4 :

**Corollaire 2.5.** *Soit le système linéaire structuré  $\Sigma_\Lambda$  représenté par le graphe orienté  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ . L'entrée et l'état de  $\Sigma_\Lambda$  sont génériquement observables si et seulement si dans  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ ,*

$$\text{Cond. a.} \quad \theta(\mathbf{U} \cup \mathbf{X}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) = n + q,$$

**Cond. b.**  $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0 \subseteq V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s)$ .

**Preuve :** D'abord, notons que la condition **Cond. a.** est identique à la condition **Cond1** de la proposition 2.4. Nous avons donc à démontrer seulement que la condition **Cond. b.** du corollaire 2.5 est équivalente aux deux conditions **Cond2** et **Cond3** de la proposition 2.4.

Nécessité :

Si la condition **Cond. b.** n'était pas vérifiée alors nécessairement il existerait des éléments de  $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0$  n'appartenant pas à  $V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s)$ . Cela impliquerait que  $\text{card}(\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0) > \mu(\mathbf{U}_0, \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})) - \rho(\mathbf{U}_0, \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}))$ . Dans ce cas, nous ne pourrions pas couvrir tous les éléments de  $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0$  avec des chemins disjoints dont la longueur totale serait de  $\mu(\mathbf{U}_0, \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})) - \text{card}(\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}))$ . Comme, de plus, aucun cycle ne pourrait être utilisé pour couvrir les éléments de  $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0$ , il ne peut donc exister de graphes partiels  $v$ -disjoints couvrant tout  $\mathbf{X} \cup \mathbf{U}$  et satisfaisant aux contraintes **Cond2** et **Cond3**. La condition **Cond. b.** du corollaire 2.5 est donc nécessaire à l'observabilité de l'entrée et de l'état du système structuré  $\Sigma_\Lambda$ .

Suffisance : Supposons que la condition **Cond. b.** soit satisfaite. Elle implique d'une part que  $\rho(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) = \text{card}(\mathbf{U}_0)$  et d'autre part que  $\text{card}(\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0) = \mu(\mathbf{U}_0, \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y})) - \rho(\mathbf{U}_0, \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}))$ . Aussi, tous les graphes partiels  $v$ -disjoints qui couvriraient  $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0$  sont constitués d'un lien  $\mathbf{U}_0\text{-}\mathbf{X}_s \cup \mathbf{Y}_0$  maximal de longueur minimale. Par conséquent, tous les graphes partiels  $v$ -disjoints qui couvriraient  $\mathbf{X} \cup \mathbf{U}$  contiennent aussi un lien  $\mathbf{U}_0\text{-}\mathbf{X}_s \cup \mathbf{Y}_0$  maximal de longueur minimale, qui lui couvrirait tous les sommets  $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0$  ne contenant pas de cycles incluant des sommets de  $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{X}_s$ . Cela est suffisant pour assurer que les conditions **Cond2** et **Cond3** de la proposition 2.4 sont satisfaites si la condition **Cond. b.** du corollaire 2.5 l'est.  $\triangle$

L'avantage du corollaire 2.5 est non seulement dans la simplicité de son énoncé mais aussi dans la simplicité de son implémentation car cette dernière ne fait appel qu'à des algorithmes simples, connus et de complexité polynômiale. Ainsi, pour vérifier l'observabilité générique de l'entrée et de l'état d'un système linéaire structuré, il suffit de :

- calculer la taille d'un couplage maximal dans un graphe biparti,
- déterminer les ensembles  $\mathbf{X}_0$  et  $\mathbf{U}_0$ , ce qui revient à des évaluations et des comparaisons de tailles de liens maximaux. Évidemment, la détermination des ensembles  $\mathbf{X}_0$  et  $\mathbf{U}_0$  nécessite le calcul de  $\mathbf{Y}_0$ ,  $\mathbf{Y}_1$  et  $\mathbf{X}_1$  notamment. En effet, la condition **Cond. b.** peut aussi s'écrire  $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0 \cup \mathbf{X}_s \subseteq V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s)$  ou encore  $\mathbf{X} \cup \mathbf{U}_0 \setminus \mathbf{X}_1 \subseteq V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ . Il n'est alors plus nécessaire d'effectuer la totalité de la subdivision.

L'aspect algorithmique de l'analyse de l'observabilité de l'entrée et de l'état que nous proposons est plus détaillé dans le chapitre 4.

Enfin, notons que les conditions du corollaire 2.5 généralisent explicitement les conditions bien connues d'observabilité de l'état des systèmes linéaires sans entrée inconnue. En effet, lorsqu'il n'y a pas d'entrée inconnue *i.e.*  $\mathbf{U} = \emptyset$ , **Cond. b.** est équivalente à  $\mathbf{X}_0 = \emptyset$  et donc à ce que chaque sommet état soit connecté par un chemin à au moins un sommet de sortie ou qu'il existe un chemin *Y-cime* partant de chaque sommet de  $\mathbf{X}$ . D'autre part, la condition **Cond. a.** est équivalente à l'existence d'une union disjointe de chemins *Y-cime* et de cycles qui couvrirait tous les sommets de  $\mathbf{X}$ . Ces deux conditions sont celles de l'observabilité de l'état des systèmes linéaires sans entrée inconnue rappelées dans [Murota, 1987, Reinschke, 1988, Dion *et al.*, 2003].

**Exemple 2.2.** *Considérons le système structuré représenté par le graphe orienté de la figure 2.4. D'abord, notons que  $\rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = 4$ . D'après la définition 2.2, nous trouvons  $\Delta_0 = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_8, \mathbf{x}_9\}$ ,  $\mathbf{X}_1 = \{\mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \mathbf{x}_{13}, \mathbf{x}_{14}\}$ ,  $\mathbf{U}_0 = \{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ ,  $\mathbf{U}_1 = \{\mathbf{u}_1\}$ . À partir du séparateur de sortie  $\mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_4\}$ , nous trouvons l'ensemble  $\mathbf{X}_s = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ . De ce dernier, il est évident que  $\mathbf{Y}_0 = \{\mathbf{y}_4\}$  et  $\mathbf{Y}_1 = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}$ . De plus,  $\mathbf{X}_0 = \{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_8, \mathbf{x}_9\}$ . Une fois la division est effectuée, il est assez simple d'analyser le système. En effet, nous pouvons analyser séparément les deux sous-graphes engendrés par la décomposition.*

*Nous constatons que la condition de connectivité à la sortie est satisfaite et qu'il existe un sous-graphe *v-disjoint* qui couvre tous les sommets état ainsi que tous les sommets entrée (condition **Cond1**). De plus, le sommet  $\mathbf{x}_{14}$  est couvert par un cycle et il appartient au*



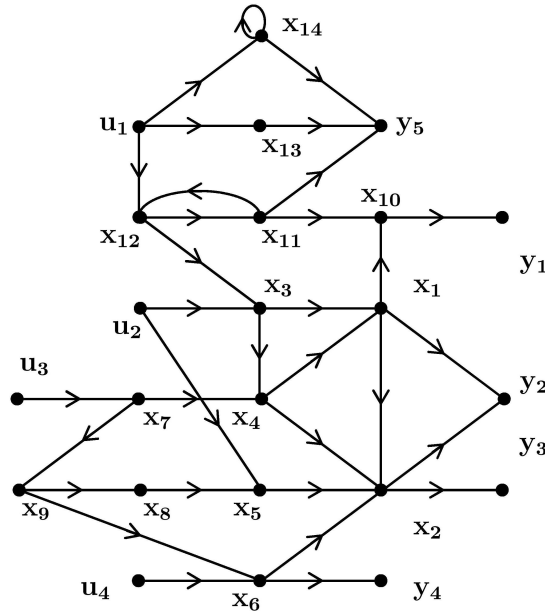


FIG. 2.4 – Graphe orienté associé au système de l'exemple 2.2

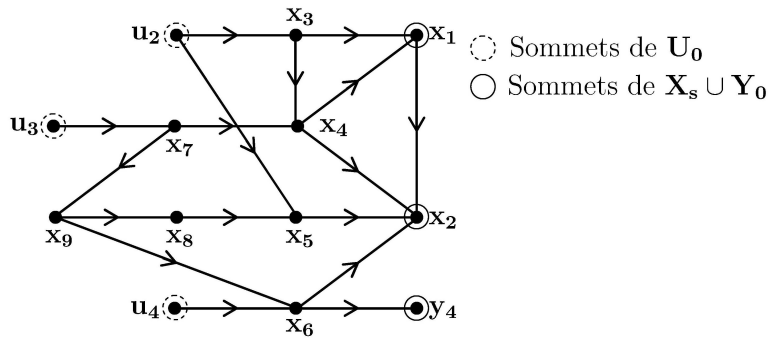


FIG. 2.5 – Graphe orienté associé aux sous-ensembles  $U_0, X_0, X_s$  et  $Y_0$  de l'exemple 2.2

sous-ensemble  $X_1$  (**Cond2**). Pour le sous graphe constitué par les sous-ensembles  $U_1, X_1$  et  $Y_1$ , nous notons, à la figure 2.6, qu'il existe un sous-graphe  $S_G$  qui couvre tous ces sommets. Nous pouvons citer par exemple le lien constitué des chemins  $u_1 \rightarrow x_{13} \rightarrow y_5$ ,  $x_{12} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_{10} \rightarrow y_1$ ,  $x_1 \rightarrow y_2$  et  $x_2 \rightarrow y_3$  satisfaisant la condition **Cond1**.

Pour la partie constituée des ensembles  $U_0, X_0, X_s$  et  $Y_0$  il n'y a que la condition **Cond3** à vérifier. D'ailleurs, à la figure 2.5, nous notons que dans un lien  $U_0-S^o(U_0, Y)$  maximal,  $\mu(U_0, S^o(U_0, Y)) = 10$  et  $\text{card}(S^o(U_0, Y)) = 3$ , la longueur maximale pour couvrir

tout l'état et l'entrée est donc de 7. Par ailleurs,  $\text{card}(\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0) = 12$ ; en conséquence, le système n'est pas génériquement observable puisqu'il n'est pas possible de déterminer un sous-graphe qui couvre  $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0$  avec seulement 7 arcs disjoints. D'autre part, si nous calcu-

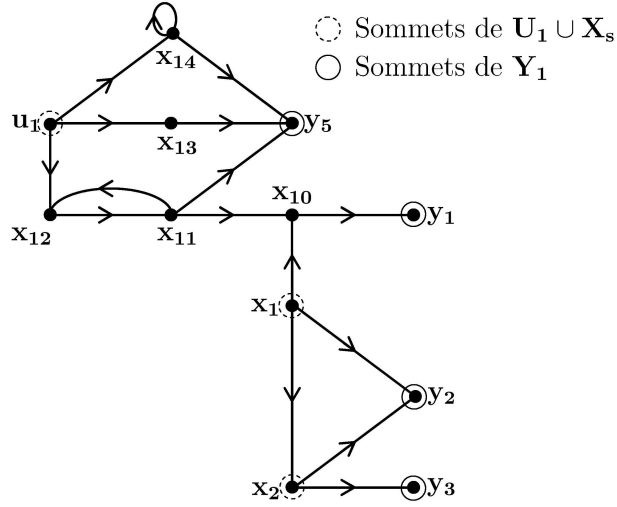


FIG. 2.6 – Graphe orienté associé aux sous-ensembles  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{X}_s$ ,  $\mathbf{X}_1$  et  $\mathbf{Y}_1$  de l'exemple 2.2

lons l'ensemble des sommets essentiels  $V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{X}_s \cup \mathbf{Y}_0) = \{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{y}_4\}$ , nous constatons que tous les sommets  $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0$  ne sont pas inclus dans l'ensemble  $V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{X}_s \cup \mathbf{Y}_0)$ . Ainsi, la condition **Cond.b.** du corollaire 2.5 n'est pas satisfaite. De plus, il n'y a pas de sous graphe qui couvre tout l'état et l'entrée inconnue avec un maximum de  $n + q = 18$  arcs  $v$ -disjoints. En effet, il n'y a que 14 arcs  $v$ -disjoints pour couvrir tout l'état et l'entrée inconnue. En conclusion, après avoir étudié le système avec la proposition 2.4 et le corollaire 2.5, il s'avère que le système n'est pas génériquement observable. Dans la section suivante, nous allons pouvoir déterminer les composantes des vecteurs d'entrée inconnue et d'état observables.

## 2.3 Observabilité partielle de l'état et de l'entrée d'un système linéaire structuré

Le second problème abordé dans cette partie concerne la caractérisation de l'observabilité d'un ensemble donné de composantes des vecteurs d'entrée et d'état. Plus précisément, il s'agit de déterminer quelles parties de l'état et de l'entrée sont fortement observables. Ce problème est particulièrement intéressant lorsque l'analyse précédente a révélé que l'état et l'entrée inconnue n'étaient pas génériquement observables.

### 2.3.1 Position du problème

En premier lieu, les systèmes étudiés étant structurés, l'observabilité d'une fonctionnelle  $L \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$  n'a de sens que si la matrice  $L$  est formée de vecteurs de la base canonique *i.e.*  $L \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = (x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}, u_{j_1}, u_{j_2}, \dots, u_{j_\ell})^T$ .

Aussi, le problème posé est de savoir si la composante de l'état  $x_i$  ou de l'entrée  $u_j$  est fortement observable. La définition d'observabilité forte donnée dans [Hautus, 1983, Basile et Marro, 1969] pour tout un système est appliquée ici à une composante de l'état ou de l'entrée et ce dans le contexte d'un système structuré :

**Définition 2.3.** *La composante de l'état  $x_i$  (respectivement de l'entrée  $u_j$ ) du système linéaire structuré  $\Sigma_\Lambda$  est génériquement fortement observable lorsque pour tout état initial  $x_0$  et pour tout signal d'entrée  $u(t)$ , l'égalité  $y(t) = 0, \forall t \geq 0$  implique  $x_i(t) = 0, \forall t \geq 0$  (respectivement  $u_j(t) = 0, \forall t > 0$ ).*

Ainsi, l'observabilité forte d'une composante de l'état ou de l'entrée est équivalente à dire qu'une variation de cette composante est nécessairement traduite par une variation des mesures quelles que soient les variations des autres composantes de l'état et de l'entrée. Cela est aussi équivalent à dire qu'il est possible d'exprimer cette composante seulement en fonction des composantes de sortie et de leurs dérivées.

Notre objectif, dans un premier temps, est de trouver des conditions graphiques qui caractérisent l'observabilité forte d'une composante donnée de l'état  $x_i$  ou de l'entrée  $u_j$  de  $\Sigma_\Lambda$ . Ensuite, nous caractériserons l'ensemble de toutes les composantes de l'état et de l'entrée qui sont fortement observables.

En utilisant le sous-espace d'observabilité  $\Delta^*$  défini par la séquence 2.1, nous pouvons aisément établir que :

**Théorème 2.6.** *Soit le système linéaire structuré  $\Sigma_\Lambda$  représenté par le graphe orienté  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ . Une composante de l'état  $x_i$  (resp. une composante de l'entrée  $u_j$ ) est génériquement fortement observable si et seulement si génériquement  $e_i \in \Delta^*$  (resp.  $e_{n+j} \in \Delta^*$ ), où  $e_k \in \mathbb{R}^{n+q}$  est le  $k^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^{n+q}$ .*

Notons que les deux conditions du théorème 2.6 sont équivalentes respectivement à  $\text{g-dim}(\Delta^* + \text{Im}(e_i)) = \text{g-dim}(\Delta^*)$  et  $\text{g-dim}(\Delta^* + \text{Im}(e_{n+j})) = \text{g-dim}(\Delta^*)$  ou encore à

$$\text{g-dim}(\Delta_i^* + \text{Im}(e_i)) = \text{g-dim}(\Delta^*) \quad (2.6)$$

et

$$\text{g-dim}(\Delta_{n+j}^*) = \text{g-dim}(\Delta^*) \quad (2.7)$$

où  $\Delta_k^*$  représente l'élément maximal de la séquence

$$\begin{cases} \Delta_{E, \tilde{A}, \tilde{C}}^0 &= \text{Im}(\tilde{C}^T) + \text{Im}(e_k) \\ \Delta_{E, \tilde{A}, \tilde{C}}^{i+1} &= \Delta_{E, \tilde{A}, \tilde{C}}^i + \tilde{A}^T E (\Delta_{E, \tilde{A}, \tilde{C}}^i \cap \text{Im}(E^T)) \end{cases} \quad (2.8)$$

En effet  $\Delta_k^*$  représente l'espace d'observabilité forte dans l'espace étendu  $\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$  en rajoutant comme mesure au système  $y_{p+1} = x_k$  si  $k \leq n$  ou  $y_{p+1} = u_{n-k}$  si  $k > n$ .

### 2.3.2 Définitions et notations

D'autres définitions nécessaires à la formulation des conditions d'observabilité forte d'une composante de l'état et/ou de l'entrée viennent compléter celles énoncées au paragraphe 1.2.2. Notamment, il est nécessaire de paramétrer les ensembles  $\mathbf{U}_0$ ,  $\mathbf{U}_1$ ,  $\mathbf{X}_0$ ,

$\mathbf{X}_s$ ,  $\mathbf{X}_1$ ,  $\mathbf{Y}_0$  et  $\mathbf{Y}_1$  définis dans le paragraphe 2.2.2 par un ensemble de sommets  $\mathbf{V}$ . Nous définissons alors :

**Définition 2.4.** *Pour tout ensemble de sommets  $\mathbf{V}$  tel que  $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{V} \subseteq \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$ , nous définissons les ensembles de sommets suivants :*

- $\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \mathbf{X} \setminus (\mathbf{V} \cap \mathbf{X})$ ,
- $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}) \subseteq \mathbf{U}$  tel que  $\text{card}(\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V})) = \rho(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \rho(\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}), \mathbf{V})$  et  $\mu(\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}), \mathbf{V}) = \mu(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ .

*Il est clair que l'ensemble  $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V})$  existe toujours mais il n'est pas nécessairement unique.*

- $\mathbf{X}_1(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{x}_i \in \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{V}) \mid \rho(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \mathbf{V}) > \rho(\mathbf{U}, \mathbf{V}) \right\}$ ,
- $\Upsilon_0(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{v}_i \in \mathbf{V} \mid \rho(\mathbf{U}, \mathbf{V}) > \rho(\mathbf{U}, \mathbf{V} \setminus \{\mathbf{v}_i\}) \right\} = \mathbf{V} \cap V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ ,
- $\Upsilon_1(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \mathbf{V} \setminus \Upsilon_0(\mathbf{V})$ ,
- $\mathbf{U}_0(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{u}_i \in \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}) \mid \theta[\{\mathbf{u}_i\}, \mathbf{X}_1(\mathbf{V}) \cup \Upsilon_1(\mathbf{V})] = 0 \right\}$ ,
- $\mathbf{U}_1(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}) \setminus \mathbf{U}_0(\mathbf{V})$ ,
- $\mathbf{S}_o(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \mathbf{S}^o(\mathbf{U}_0(\mathbf{V}), \mathbf{V})$ ,
- $\mathbf{X}_s(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \mathbf{S}_o(\mathbf{V}) \cap \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{V})$ .
- $\mathbf{X}_0(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \bar{\mathbf{X}}(\mathbf{V}) \setminus (\mathbf{X}_1(\mathbf{V}) \cup \mathbf{X}_s(\mathbf{V}))$ .
- $\beta_1(\mathbf{V})$  est le nombre maximal de sommets de  $\mathbf{X}_1(\mathbf{V}) \cup \mathbf{X}_s(\mathbf{V}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{V})$  couverts par une union disjointe

- d'un lien  $\mathbf{X}_s(\mathbf{V}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{V}) - \Upsilon_1(\mathbf{V})$  de taille  $\rho(\mathbf{X}_s(\mathbf{V}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{V}), \Upsilon_1(\mathbf{V}))$ ,

- d'une famille de chemins  $\mathbf{X}_1(\mathbf{V}) - \Upsilon_1(\mathbf{V})$  simples

- d'une famille de cycles ne couvrant que des éléments de  $\mathbf{X}_1(\mathbf{V})$ .

- $\beta_0(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \mu(\mathbf{U}_0(\mathbf{V}), \mathbf{S}_o(\mathbf{V})) - \rho(\mathbf{U}_0(\mathbf{V}), \mathbf{S}_o(\mathbf{V}))$ ,
- $\beta(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \beta_1(\mathbf{V}) + \beta_0(\mathbf{V}) + \text{card}(\mathbf{V} \setminus \mathbf{Y})$ .

En s'inspirant des conditions géométriques du théorème 2.6, l'ensemble  $\mathbf{V}$  représente un ensemble de sorties virtuelles regroupant les mesures vraies  $\mathbf{Y}$  ainsi que les composantes de l'état et de l'entrée dont on veut étudier l'observabilité forte. Cela correspond au calcul du sous-espace  $\Delta_k^*$ . Par ailleurs, l'étude de l'observabilité forte des composantes de l'entrée peut se limiter aux composantes des éléments de  $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V})$  car il est aisé de voir que les autres composantes de l'entrée ne peuvent être fortement observables. En effet,

en utilisant les résultats de [Commault *et al.*, 1997], où les auteurs traitent du problème de rejet de perturbations, les composantes de l'entrée associées aux sommets inclus dans  $\mathbf{U} \setminus \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V})$  peuvent être rendues inobservables en utilisant les autres entrées. En d'autres termes, il existe des composantes de l'entrée associées aux sommets de  $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V})$  telles que les sorties associées aux sommets de  $\mathbf{V}$  ne sont pas sensibles aux composantes associées à  $\mathbf{U} \setminus \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{Y})$ . Par conséquent, il est clair que les composantes associées aux sommets de  $\mathbf{U} \setminus \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{Y})$  ne sont pas fortement observables.

### 2.3.3 Condition d'observabilité d'un ensemble donné de composantes de l'état et de l'entrée

Une étape importante à l'analyse de l'observabilité forte d'une composante de l'état ou de l'entrée est la caractérisation géométrique de la dimension générique du sous-espace d'observabilité  $\Delta^*$ . Cette dimension est liée au nombre de zéros invariants du faisceau de matrices  $P(s)$  du système. En effet, en supposant que  $P(s)$  soit génériquement de rang normal plein et en généralisant aux systèmes structurés des résultats fort connus et rappelés dans [Trentelman *et al.*, 2001], nous avons  $\text{g-dim}(\Delta^*) = n + q - \text{g-n}_{\text{invz}}(P(s))$  où  $\text{g-n}_{\text{invz}}(P(s))$  est le nombre générique de zéros invariant de  $P(s)$  caractérisé graphiquement dans [van der Woude, 2000].

Le premier lemme ci-dessous est consacré à la caractérisation graphique du nombre générique de zéros invariants du système structuré  $\Sigma_\Lambda$ . Évidemment, nous pouvons pour cela utiliser les résultats de [van der Woude *et al.*, 2003]. Cependant, pour des raisons d'homogénéité et comme la décomposition dans notre cas est explicite, nous établirons le calcul de ce nombre en utilisant les notations de la définition 2.4. Nous notons  $\bar{q} = \text{card}(\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}))$  comme résultat de la discussion menée dans la section précédente. Le lemme suivant donne une caractérisation du nombre  $\text{g-n}_{\text{invz}}(P(s))$  en relation avec la fonction  $\beta$  :

**Lemme 2.7.** *Considérons le système structuré  $\Sigma_\Lambda$  représenté par le graphe orienté  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ .*

*Nous avons*

$$n + \bar{q} - \text{g-n}_{\text{invz}}(P(s)) = \beta(\mathbf{Y})$$

**Preuve :** Appliquée au sous-ensemble  $\mathbf{V} = \mathbf{Y}$ , la décomposition de la définition 2.4 est identique à celle de la définition 2.2. Nous gardons donc les mêmes notations que dans la preuve de la proposition 2.4. Cependant, comme les composantes associées aux sommets de  $\mathbf{U} \setminus \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{Y})$  ne sont pas fortement observables, nous allons restreindre le système aux entrées représentées par les éléments de  $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{Y})$ . Ainsi, nous obtenons un système génériquement de  $n$ -rang plein. Aussi, nous notons par  $\bar{B}^\lambda$  (resp.  $\bar{D}^\lambda$ ) les sous-matrices de  $B^\lambda$  (resp.  $D^\lambda$ ) associées aux entrées de  $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{Y})$ . Les matrices  $\bar{B}^\lambda$  (resp.  $\bar{D}^\lambda$ ) sont donc constituées de la concaténation des colonnes  $B_j^\lambda$  (resp.  $D_j^\lambda$ ) de  $B^\lambda$  (resp.  $D^\lambda$ ) où  $\mathbf{u}_j \in \bar{\mathbf{U}}(\mathbf{Y})$ . De plus, nous notons par  $\bar{P}(s) = \begin{pmatrix} A^\lambda - sI_n & \bar{B}^\lambda \\ C^\lambda & \bar{D}^\lambda \end{pmatrix}$  le faisceau de matrices du système  $(A^\lambda, \bar{B}^\lambda, C^\lambda, \bar{D}^\lambda)$ .

Nous réutilisons les notations  $n_0 = \text{card}(\mathbf{X}_0(\mathbf{Y}))$ ,  $n_s = \text{card}(\mathbf{X}_s(\mathbf{Y}))$ ,  $n_1 = \text{card}(\mathbf{X}_1(\mathbf{Y}))$ ,  $q_0 = \text{card}(\mathbf{U}_0(\mathbf{Y}))$ ,  $q_1 = \text{card}(\mathbf{U}_1(\mathbf{Y}))$ ,  $p_0 = \text{card}(\mathbf{Y}_0(\mathbf{Y}))$  et  $p_1 = \text{card}(\mathbf{Y}_1(\mathbf{Y}))$  ainsi que celles de la réécriture du système étendu (2.4). Le nombre générique de zéros invariants de  $\bar{P}(s)$  est évidemment égal à celui du faisceau de matrices  $P_e(s)$ , où

$$P_e(s) = \begin{pmatrix} A_{0,0}^\lambda - sI_{n_0} & A_{0,s}^\lambda & B_{0,0}^\lambda & A_{0,1}^\lambda & B_{0,1}^\lambda & 0 \\ A_{s,0}^\lambda & A_{s,s}^\lambda - sI_{n_s} & B_{s,0}^\lambda & A_{s,1}^\lambda & B_{s,1}^\lambda & 0 \\ C_{0,0}^\lambda & C_{0,s}^\lambda & D_{0,0}^\lambda & C_{0,1}^\lambda & D_{0,1}^\lambda & 0 \\ 0 & I_{n_s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{1,1}^\lambda - sI_{n_1} & B_{1,1}^\lambda & A_{1,s}^\lambda \\ 0 & 0 & 0 & C_{1,1}^\lambda & D_{1,1}^\lambda & C_{1,s}^\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1(s) & P_{1,1}(s) \\ 0 & P_2(s) \end{pmatrix}$$

$$\text{et } P_1(s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A_{0,0}^\lambda - sI_{n_0} & A_{0,s}^\lambda & B_{0,0}^\lambda \\ A_{s,0}^\lambda & A_{s,s}^\lambda - sI_{n_s} & B_{s,0}^\lambda \\ C_{0,0}^\lambda & C_{0,s}^\lambda & D_{0,0}^\lambda \\ 0 & I_{n_s} & 0 \end{pmatrix}, P_2(s) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A_{1,1}^\lambda - sI_{n_1} & B_{1,1}^\lambda & A_{1,s}^\lambda \\ C_{1,1}^\lambda & D_{1,1}^\lambda & C_{1,s}^\lambda \end{pmatrix}.$$

D'après [van der Woude, 2000]  $\text{g-rang}(P_1(s))$  est égal au nombre de lignes de  $P_1(s)$  et  $\text{g-rang}(P_2(s))$  est égal au nombre de colonnes de  $P_2(s)$ . Ainsi, en comptant les zéros invariants avec leur multiplicité, le nombre générique de zéros invariants de  $P_e(s)$  est égal à la somme des nombres génériques de zéros invariants de  $P_1(s)$  et de  $P_2(s)$ .

D'une part, en appliquant le théorème 5.1 de [van der Woude, 2000], nous savons que le nombre générique de zéros invariants de  $P_1(s)$  est égal à  $n_0 + n_s + q_0 - \mu(\mathbf{U}_0(\mathbf{Y}), \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0(\mathbf{Y}), \mathbf{Y})) + \rho(\mathbf{U}_0(\mathbf{Y}), \mathbf{S}^\circ(\mathbf{U}_0(\mathbf{Y}), \mathbf{Y})) - n_s$ .

Notons que la présence du terme  $n_s$  est due au fait que la sortie du système  $\Sigma_1$  est  $Y_s$  et non  $X_s$ .

D'autre part, d'après le théorème 5.2 de [van der Woude, 2000], le nombre générique de zéros invariants de  $P_2(s)$  est égal à  $n_1 + n_s + q_1$  moins le nombre maximal de sommets de  $\mathbf{X}_1(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{X}_s(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{Y})$  couverts par une union disjointe :

- d'un lien  $\mathbf{X}_s(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{Y}) - \Upsilon_1(\mathbf{Y})$  de taille  $\rho(\mathbf{X}_s(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{Y}), \Upsilon_1(\mathbf{Y}))$ ,
- d'une famille de chemins  $\mathbf{X}_1(\mathbf{Y}) - \Upsilon_1(\mathbf{Y})$  simples,
- d'une famille de cycles ne couvrant que des éléments de  $\mathbf{X}_1(\mathbf{Y})$ .

Par conséquent, en exploitant les notations de la définition 2.4, le nombre générique de zéros invariants de  $P_e(s)$ , et donc aussi de  $P(s)$ , est égal à  $n_0 + q_0 + n_1 + n_s + q_1 - \beta_0(\mathbf{Y}) - \beta_1(\mathbf{Y}) = n + \bar{q} - \beta_0(\mathbf{Y}) - \beta_1(\mathbf{Y})$ . Nous en déduisons alors que la dimension générique de l'espace d'observabilité forte de  $\Sigma_\Lambda$ , noté  $\Delta^*$ , est égal à  $n + \bar{q} - \text{g-n}_{\text{invz}} = \beta_1(\mathbf{Y}) + \mu(\mathbf{U}_0(\mathbf{Y}), \mathbf{S}_o(\mathbf{U}_0(\mathbf{Y}), \mathbf{Y})) - \rho(\mathbf{U}_0(\mathbf{Y}), \mathbf{S}_o(\mathbf{U}_0(\mathbf{Y}), \mathbf{Y})) = \beta_1(\mathbf{Y}) + \beta_0(\mathbf{Y}) = \beta(\mathbf{Y})$ .  
□

Le lemme précédent permet donc de caractériser graphiquement la dimension de l'espace d'observabilité forte de  $\Sigma_\Lambda$  dans l'espace d'état étendu  $(x^T, u^T)^T$ . La condition nécessaire et suffisante d'observabilité forte se déduit alors immédiatement de ce lemme. En effet, si  $\beta(\mathbf{Y}) < n + q$  alors l'état et l'entrée de  $\Sigma_\Lambda$  ne sont pas génériquement observables. Il peut alors être intéressant de savoir si une composante  $x_i$  quelconque de l'état ou  $u_j$  de l'entrée est génériquement fortement observable. Pour cela, il suffit de comparer  $\beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_i\})$  (resp.  $\beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{u}_j\})$ ) à  $\beta(\mathbf{Y})$ . En effet, cela revient à comparer la dimension générique de  $\Delta_i^*$  (resp.  $\Delta_{n+j}^*$ ) à celle de  $\Delta^*$  pour vérifier la condition d'observabilité forte (2.6) de  $x_i$  (resp. la condition d'observabilité forte (2.7) de  $u_j$ ). En fait, rajouter une mesure virtuelle sur la composante de l'état  $x_i$  (resp. la composante de l'entrée  $u_j$ ) est équivalent à rajouter sur le graphe orienté de  $\Sigma_\Lambda$  un sommet de sortie  $\mathbf{y}_{\mathbf{p}+1}$  et



un arc  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_{p+1})$  (resp.  $(\mathbf{u}_j, \mathbf{y}_{p+1})$ ). Pour le nouveau système ainsi obtenu, le calcul de la dimension générique de l'espace d'observabilité forte dans l'espace étendu  $(x^T, u^T)^T$  peut être effectué en utilisant l'expression  $\beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{y}_{p+1}\})$ . Cependant, cela nécessiterait la définition et le tracé d'un nouveau graphe orienté avec une nouvelle composante de sortie  $\mathbf{y}_{p+1}$  et un arc  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_{p+1})$  (resp.  $(\mathbf{u}_j, \mathbf{y}_{p+1})$ ). Pour des raisons de simplicité, nous avons choisi de travailler avec un graphe orienté unique. Nous ne rajoutons donc pas d'éléments au graphe original mais l'idée est de considérer le sommet  $\mathbf{x}_i$  (resp.  $\mathbf{u}_j$ ) comme un sommet de sortie. Ainsi, il est assez aisé de déduire à partir du lemme 2.7 que  $\beta(\mathbf{V}) = \beta_1(\mathbf{V}) + \mu(\mathbf{U}_o(\mathbf{V}), \mathbf{S}_o(\mathbf{V})) - \rho(\mathbf{U}_o(\mathbf{V}), \mathbf{S}_o(\mathbf{V})) + \text{card}(\mathbf{V} \setminus \mathbf{Y})$ , pour  $\mathbf{V} = \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_i\}$  (resp.  $\mathbf{V} = \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{u}_j\}$ ), représente la dimension générique de  $\Delta_i^*$  (resp.  $\Delta_{n+j}^*$ ). Nous pouvons alors déduire :

**Proposition 2.8.** *Soit le système linéaire structuré  $\Sigma_\Lambda$  représenté par le graphe orienté  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ . Une composante de l'état  $x_i$  (resp. une composante de l'entrée  $u_j$ ) est génériquement fortement observable si et seulement si  $\mathbf{x}_i \in \mathcal{V}_{obs} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{X} \cup \mathbf{U}, \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{v}\}) = \beta(\mathbf{Y}) \right\}$  (resp.  $\mathbf{u}_j \in \mathcal{V}_{obs}$ )*

**Preuve :** La preuve de cette proposition est assez immédiate d'après le lemme 2.7 et la discussion qui s'en est suivie. En résumé, la composante de l'état ou de l'entrée est fortement observable si et seulement si une mesure de cette composante rajoutée au système ne change pas la dimension de l'espace d'observabilité forte. En utilisant les notations de la définition 2.4, cela revient à dire que la composante de l'état  $x_i$  (resp. la composante de l'entrée  $u_j$ ) est fortement observable si et seulement si  $\beta(\mathbf{Y}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_i\})$  (resp.  $\beta(\mathbf{Y}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{u}_j\})$ ) □

**Exemple 2.3.** *Considérons le système linéaire structuré représenté par le graphe orienté montré à la figure 2.7. Le graphe est similaire à l'exemple 2.2 mais notons que pour cet exemple  $\rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = 4$  et qu'il y a 5 entrées inconnues. Nous observons que  $\rho(\mathbf{U} \setminus \{\mathbf{u}_5\}, \mathbf{Y}) = \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$  et  $\mu(\mathbf{U} \setminus \{\mathbf{u}_5\}, \mathbf{Y}) = \mu(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ . Il est donc aisé de conclure que  $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ .*

*Nous nous sommes intéressés à trouver les états et les entrées inconnues qui ne sont*

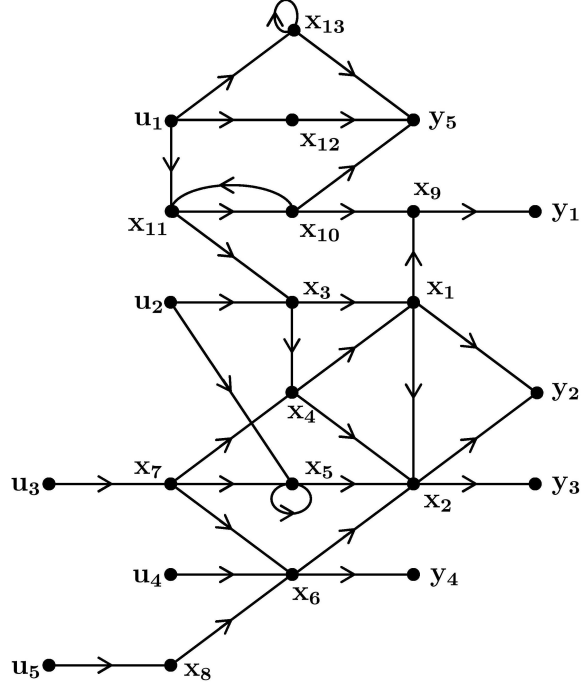


FIG. 2.7 – Graphe orienté associé au système de l'exemple 2.3

pas fortement observables. Pour cela, d'après les résultats précédents, nous devons chercher l'ensemble des sommets qui appartiennent au sous-espace observable  $\mathcal{V}_{obs}$  et ainsi déterminer le sous-ensemble inobservable.

Tout d'abord, nous calculons la dimension du sous-espace d'observabilité avec les sorties originelles  $\mathbf{Y}$ . Pour faire cela, nous appliquons la définition 2.4 pour  $\mathbf{V} = \mathbf{Y}$ . Nous avons  $\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}) = \mathbf{X}$  et  $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ . Ainsi, nous trouvons  $\mathbf{X}_1(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{x}_9, \mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \mathbf{x}_{13}\}$ ,  $\mathbf{Y}_1(\mathbf{Y}) = \{y_1, y_2, y_3, y_5\}$ ,  $\mathbf{Y}_0(\mathbf{Y}) = \{y_4\}$ ,  $\mathbf{U}_1(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{u}_1\}$  et  $\mathbf{U}_0(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ . D'après le séparateur de sortie  $\mathbf{S}_o(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}_4\}$ , nous trouvons l'ensemble  $\mathbf{X}_s(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$  et donc,  $\mathbf{X}_0(\mathbf{Y}) = \{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_8\}$ .

Nous pouvons à présent analyser séparément les deux sous graphes engendrés par la décomposition. Nous constatons que le nombre maximal de chemins disjoints est  $\rho(\mathbf{U}_0(\mathbf{Y}), \mathbf{S}_o(\mathbf{Y})) = 3$  et le minimum de sommets couverts par ces chemins disjoints est donné par  $\mu(\mathbf{U}_0(\mathbf{Y}), \mathbf{S}_o(\mathbf{Y})) = 10$ , ce qui implique  $\beta_0(\mathbf{Y}) = 7$  d'après la définition 2.4.

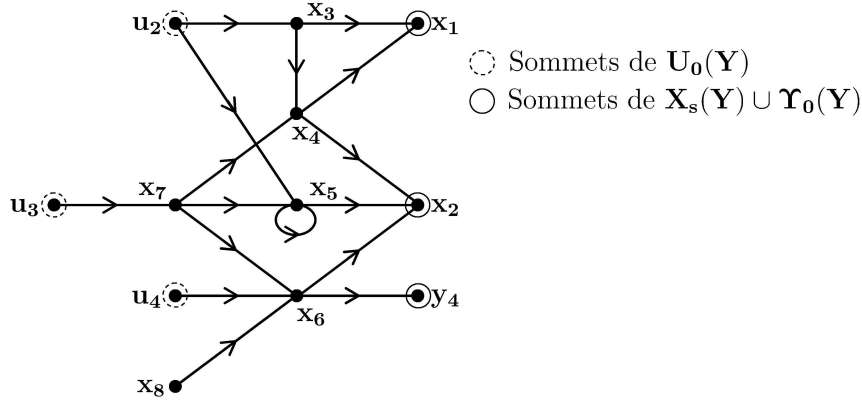


FIG. 2.8 – Graphe orienté associé aux ensembles  $\mathbf{U}_0(\mathbf{Y})$ ,  $\mathbf{X}_0(\mathbf{Y})$ ,  $\mathbf{X}_s(\mathbf{Y})$  et  $\Upsilon_0(\mathbf{Y})$  de l'exemple 2.3

Pour le calcul de  $\beta_1(\mathbf{Y})$ , nous cherchons le maximum de sommets de  $\mathbf{U}_1(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{X}_s(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{X}_1(\mathbf{Y})$  couverts par l'union disjointe d'un lien  $\mathbf{X}_s(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{Y}) - \Upsilon_1(\mathbf{Y})$  de taille  $\rho(\mathbf{X}_s(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{Y}), \Upsilon_1(\mathbf{Y}))$ , une famille de chemins  $\mathbf{X}_1(\mathbf{Y}) - \Upsilon_1(\mathbf{Y})$  simples et une famille de cycles ne couvrant que des éléments de  $\mathbf{X}_1(\mathbf{Y})$ . Nous pouvons citer par exemple :

- le lien  $\mathbf{X}_s(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{Y}) - \Upsilon_1(\mathbf{Y})$  de taille  $\rho(\mathbf{X}_s(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{Y}), \Upsilon_1(\mathbf{Y})) = 3$  composé par les chemins :  $\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{x}_{12} \rightarrow \mathbf{y}_5$ ,  $\mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{y}_2$ ,  $\mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{y}_3$ ,
- le chemin  $\mathbf{X}_1(\mathbf{Y}) - \Upsilon_1(\mathbf{Y})$  simple  $\mathbf{x}_{11} \rightarrow \mathbf{x}_{10} \rightarrow \mathbf{x}_9 \rightarrow \mathbf{y}_1$  et
- le cycle couvrant  $\mathbf{x}_{13}$  de  $\mathbf{X}_1(\mathbf{Y})$ .

il se trouve que cette configuration couvre une quantité maximale de sommets (8 sommets) et donc d'après la définition 2.4,  $\beta_1(\mathbf{Y}) = 8$ . En conséquence,  $\beta(\mathbf{Y}) = 7 + 8 = 15$ . La dimension de l'espace génériquement observable étant plus petite que celle de l'espace étendu  $(x^T, u^T)^T$ , il est alors évident que le système n'est pas totalement génériquement observable (pour l'observabilité totale avec les entrées du système,  $\beta(\mathbf{Y}) = n + q$ ).

À présent, nous allons chercher les composantes de l'état et de l'entrée inconnue qui, en les mesurant, peuvent rendre plus grande la valeur de  $\beta$  et donc la dimension de l'espace observable. Nous constatons que tous les sommets de  $\mathbf{U}_1(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{X}_s(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{X}_1(\mathbf{Y})$  sont couverts et donc que la condition **Cond. a.** du corollaire 2.5 est satisfaite. Une mesure sur l'une des composantes de  $\mathbf{U}_1(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{X}_s(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{X}_1(\mathbf{Y})$  n'augmentera pas la dimension de  $\beta_1(\mathbf{Y})$

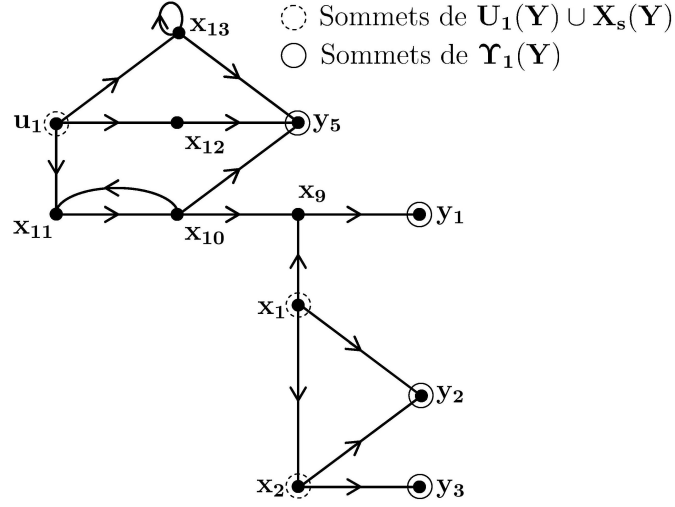


FIG. 2.9 – Graphe orienté associé aux ensembles  $\mathbf{U}_1(\mathbf{Y})$ ,  $\mathbf{X}_s(\mathbf{Y})$ ,  $\mathbf{X}_1(\mathbf{Y})$  et  $\mathbf{Y}_1(\mathbf{Y})$  de l'exemple 2.3

et, par conséquent, tous ces sommets se trouvent dans l'espace d'observabilité du système. En revanche, il est évident que les sommets appartenant à l'ensemble  $\mathbf{U}_0(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{X}_0(\mathbf{Y})$  du graphe ne peuvent pas être tous couverts par 3 chemins  $\mathbf{U}_0(\mathbf{Y})$ - $\mathbf{S}_0(\mathbf{Y})$  disjoints contenant 10 sommets seulement. Cela signifie que tous les sommets dans  $\mathbf{U}_0(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{X}_0(\mathbf{Y})$  ne sont pas essentiels. En effet, l'ensemble des sommets essentiels est donné par  $V_{ess}(\mathbf{U}_0(\mathbf{Y}), \mathbf{Y}_0(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{X}_s(\mathbf{Y})) = \{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{y}_4\}$  et donc la condition **Cond. b.** du corollaire 2.5 n'est pas satisfaite.

Il est évident que considérer l'un des sommets d'état  $\mathbf{x}_1$  et/ou  $\mathbf{x}_2$  dans  $\mathbf{V}$  est inutile. Supposons alors que le sommet  $\mathbf{x}_4$  soit mesuré. Nous avons alors  $\mathbf{V} = \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_4\}$  et  $\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{V}) = \mathbf{X} \setminus \{\mathbf{x}_4\}$ .  $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}) = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$  reste le même et le nombre maximal de chemins  $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V})$ - $\mathbf{V}$  disjoints reste aussi égal à 4. Dans ce cas, nous constatons que  $\rho(\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}), \mathbf{V}) = 4 < \rho(\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}) \cup \{\mathbf{x}_4\}, \mathbf{V}) = 5$ . Ainsi,  $\mathbf{X}_1(\mathbf{V}) = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_9, \mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \mathbf{x}_{13}\}$ ,  $\mathbf{Y}_1(\mathbf{V}) = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4, \mathbf{y}_5\}$ ,  $\mathbf{Y}_0(\mathbf{V}) = \emptyset$ .  $\mathbf{U}_1(\mathbf{V}) = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ ,  $\mathbf{U}_0(\mathbf{V}) = \{\mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ ,  $\mathbf{X}_s(\mathbf{V}) = \{\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7\}$  et  $\mathbf{X}_0(\mathbf{V}) = \{\mathbf{x}_8\}$ .

Pour calculer  $\beta_1(\mathbf{V})$  nous trouvons

- un lien  $\mathbf{X}_s(\mathbf{V}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{Y})$ - $\mathbf{Y}_1(\mathbf{Y})$  de taille  $\rho(\mathbf{X}_s(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{Y}), \mathbf{Y}_1(\mathbf{Y})) = 4$ . Par exemple,  $\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{x}_{12} \rightarrow \mathbf{y}_5$ ,  $\mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{y}_2$ ,  $\mathbf{x}_7 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{y}_3$  et  $\mathbf{x}_6 \rightarrow \mathbf{y}_4$  qui couvre

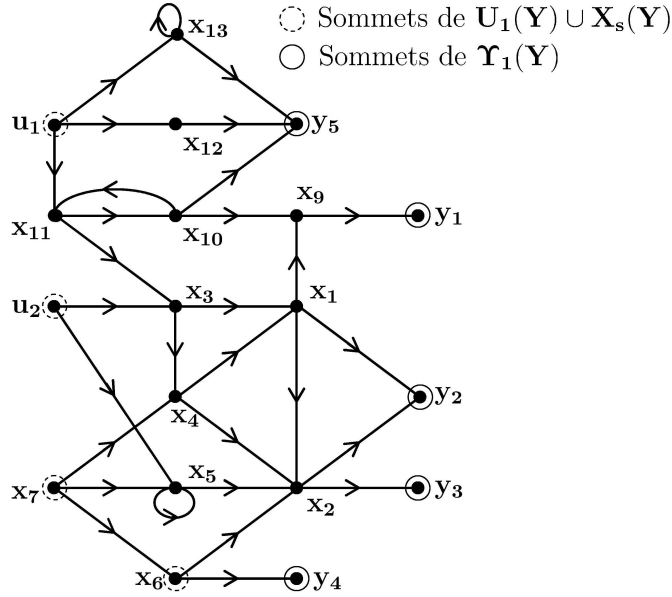


FIG. 2.10 – Graphe orienté associé aux ensembles  $\mathbf{U}_1(\mathbf{V})$ ,  $\mathbf{X}_1(\mathbf{V})$ ,  $\mathbf{X}_s(\mathbf{V})$  et  $\mathbf{\Upsilon}_1(\mathbf{V})$  de l'exemple 2.3

9 sommets,

- Deux chemins  $\mathbf{X}_1(\mathbf{Y})$ - $\mathbf{\Upsilon}_1(\mathbf{Y})$  simples  $\mathbf{x}_{11} \rightarrow \mathbf{x}_{10} \rightarrow \mathbf{x}_9 \rightarrow \mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{y}_6$  qui couvrent 4 sommets et
- un cycle qui couvre  $\mathbf{x}_{13}$

tous ces sommets formant une union disjointe et couvrant la totalité des sommets de  $\mathbf{U}_1(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{X}_s(\mathbf{Y}) \cup \mathbf{X}_1(\mathbf{Y})$ . Il est donc aisé de voir que  $\beta_1(\mathbf{V}) = 14$ .

Pour  $\beta_0(\mathbf{V})$ , nous avons deux chemins  $\mathbf{U}_0(\mathbf{Y})$ - $\mathbf{S}_0(\mathbf{Y})$  disjoints couvrant un minimum de  $\mu(\mathbf{U}_0(\mathbf{V}), \mathbf{S}_0(\mathbf{V})) = 4$  sommets et donc  $\beta_0(\mathbf{V}) = 2$ . Nous concluons que  $\beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_4\}) = 16$  et que le sommet  $\mathbf{x}_4$  n'appartient pas au sous-ensemble observable. En fait, nous avons  $\beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_3\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_4\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_5\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_6\})$ .

Par ailleurs, considérons  $\mathbf{V} = \mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_8\}$  et donc  $\bar{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}) = \mathbf{X} \setminus \{\mathbf{x}_8\}$ . Dans ce cas  $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V}) = \mathbf{U}$  et il y a 5 chemins  $\bar{\mathbf{U}}(\mathbf{V})$ - $(\mathbf{V})$  disjoints. La décomposition du système nous donne  $\mathbf{X}_1(\mathbf{V}) = \{\mathbf{x}_9, \mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \mathbf{x}_{13}\}$ ,  $\mathbf{\Upsilon}_1(\mathbf{V}) = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_5\}$ ,  $\mathbf{\Upsilon}_0(\mathbf{V}) = \{\mathbf{x}_4, \mathbf{y}_4\}$ ,  $\mathbf{U}_1(\mathbf{V}) = \{\mathbf{u}_1\}$  et  $\mathbf{U}_0(\mathbf{V}) = \{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$ . D'après le séparateur de sortie  $\mathbf{S}_0(\mathbf{V}) = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_8, \mathbf{y}_4\}$ , nous trouvons l'ensemble  $\mathbf{X}_s(\mathbf{V}) = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$  et donc  $\mathbf{X}_0(\mathbf{V}) = \{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4,$

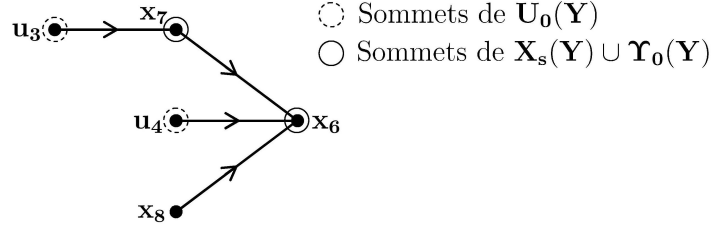


FIG. 2.11 – Graphe orienté associé aux ensembles  $\mathbf{U}_0(\mathbf{Y})$ ,  $\mathbf{X}_0(\mathbf{Y})$ ,  $\mathbf{X}_s(\mathbf{Y})$  et  $\Upsilon_0(\mathbf{Y})$  de l'exemple 2.3

$\mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7\}$ .

Nous constatons qu'il y a 4 chemins  $\mathbf{U}_0(\mathbf{V})$ - $\mathbf{X}_s(\mathbf{V}) \cup \Upsilon_0(\mathbf{V})$  disjoints qui peuvent couvrir un minimum de 11 sommets  $v$ -disjoints et donc  $\beta_0(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_8\}) = 11$ . Pour  $\beta_1(\mathbf{V})$  il est aisé de voir qu'il a la même valeur que  $\beta_1(\mathbf{Y})$  et donc  $\beta_1(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_8\}) = 6$ . Finalement,  $\beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{x}_8\}) = 17 \neq \beta(\mathbf{Y})$  et nous concluons que le sommet d'état  $\mathbf{x}_8 \notin \mathcal{V}_{obs}$ .

Ainsi finalement, nous trouvons que  $\beta(\mathbf{Y}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_9, \mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \mathbf{x}_{13}\})$ . Le sous-espace observable est donc  $\mathcal{V}_{obs} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_9, \mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{11}, \mathbf{x}_{12}, \mathbf{x}_{13}\}$ .

### 2.3.4 Observabilité forte de l'état d'un système linéaire structuré

La dernière partie de ce chapitre est dédiée à l'étude de l'observabilité forte d'une partie de l'état. Cette propriété est importante lorsqu'il est intéressant de savoir si des entrées exogènes, comme des défauts par exemple, peuvent altérer l'observabilité du système. Ce cas d'étude a aussi été désigné par le vocable "observabilité tolérante aux défauts" et a été abordé dans [Staroswiecki, 2006] en utilisant des graphes bipartis. Cet outil conduit nécessairement à faire l'hypothèse que les entrées exogènes sont lentement variables. A l'image de toute l'analyse réalisée jusque là, nous ne ferons pas cette hypothèse. Par ailleurs, l'analyse et la synthèse des divers schémas d'observation possibles pour un système distribué seraient aussi un contexte où l'étude de l'observabilité de l'état peut s'avérer utile. En effet, il est classique [Saif et Guan, 1992, Hou et Müller, 1994] pour les systèmes distribués ayant divers types d'interconnexions de considérer des schémas d'observation autonomes qui se basent sur des observateurs à entrées inconnues où pour chaque sous-système, l'état

et les entrées des autres sous-systèmes sont considérés comme étant des entrées inconnues. Dans ce court paragraphe sont données les conditions nécessaires et suffisantes graphiques d'observabilité de tout l'état d'un système linéaire.

La définition de l'observabilité forte générique d'un système linéaire est déduite de [Basile et Marro, 1969, Hautus, 1983] qui en donnent aussi les caractérisations algébriques et géométriques. En généralisant ces définitions et résultats aux systèmes structurés, nous pouvons définir la notion d'observabilité de l'état ainsi :

**Définition 2.5.** *L'état et l'entrée du système linéaire structuré  $\Sigma_\Lambda$  sont génériquement observables lorsque pour tout état initial  $x_0$  et pour tout signal d'entrée  $u(t)$ , l'égalité  $y(t) = 0, \forall t \geq 0$  implique  $x(t) = 0, \forall t \geq 0$ .*

Cette définition est relative à un cas particulier de l'observabilité forte d'une partie de l'état et/ou de l'entrée explicitée dans la définition 2.3.

Une condition algébrique nécessaire et suffisante à l'observabilité forte générique de l'état de  $\Sigma_\Lambda$  est déduite de [Trentelman et al., 2001] :

**Théorème 2.9.** *Le système structuré  $\Sigma_\Lambda$  est génériquement fortement observable si et seulement si*

$$\forall s \in \mathbb{C}, \quad \text{g-rang}(P(s)) = n + \text{g-rang} \begin{pmatrix} B^\lambda \\ D^\lambda \end{pmatrix}$$

Évidemment, une condition graphique nécessaire et suffisante peut être déduite de la proposition 2.8 :

**Corollaire 2.10.** *Le système linéaire structuré  $\Sigma_\Lambda$  représenté par le graphe orienté  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$  est génériquement fortement observable si et seulement si  $\beta(\mathbf{Y} \cup \mathbf{X}) = \beta(\mathbf{Y})$ .*

Cependant, une autre condition plus simple à mettre en œuvre est envisageable. Partant du corollaire 2.5 et de la preuve de la proposition 2.4, nous pouvons établir :

**Corollaire 2.11.** *Soit le système linéaire structuré  $\Sigma_\Lambda$  représenté par le graphe orienté  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ . L'état de  $\Sigma_\Lambda$  est génériquement fortement observable si et seulement si dans  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$*

**Cond. a'.**  $\mathbf{X}_0 \subseteq V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s)$ ,

**Cond. b'.**  $\theta(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s \cup \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = n_s + n_1 + \theta(\mathbf{U}_1, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1)$ .

**Preuve :** D'abord, nous définissons  $\bar{\mathbf{U}} \subseteq \mathbf{U}$  tel que  $\text{card}(\bar{\mathbf{U}}) = \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \rho(\bar{\mathbf{U}}, \mathbf{Y})$  et  $\mu(\bar{\mathbf{U}}, \mathbf{Y}) = \mu(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$ .  $\bar{\mathbf{U}}$  n'est pas unique mais existe toujours. Son unicité n'est pas, pour la présente démonstration, très importante. La preuve est assez immédiate en remarquant que l'observabilité forte de l'état pour  $\Sigma_\Lambda$  est équivalente à l'observabilité forte de l'état et de l'entrée du système  $\bar{\Sigma}_\Lambda$  défini par le quadruplé  $(A^\lambda, \bar{B}^\lambda, C^\lambda, \bar{D}^\lambda)$  où  $\bar{B}^\lambda$  (resp.  $\bar{D}^\lambda$ ) représente la sous-matrice de  $B^\lambda$  (resp.  $D^\lambda$ ) associée aux entrées de  $\bar{\mathbf{U}}$  *i.e.* les matrices  $\bar{B}^\lambda$  (resp.  $\bar{D}^\lambda$ ) sont constituées de la concaténation des colonnes  $B_j^\lambda$  (resp.  $D_j^\lambda$ ) de  $B^\lambda$  (resp.  $D^\lambda$ ) où  $\mathbf{u}_j \in \bar{\mathbf{U}}$ .

En effet,  $\bar{\Sigma}_\Lambda$  étant par construction inversible à gauche, l'observabilité totale de son entrée et de son état est alors équivalente à son observabilité forte qui est elle-même équivalente à l'observabilité forte de  $\Sigma_\Lambda$ . Les conditions **Cond. a'** et **Cond. b'** sont déduites directement du corollaire 2.5.  $\square$

**Exemple 2.4.** Nous présentons ici un exemple simple pour vérifier la condition d'observabilité forte. Considérons le système associé au graphe orienté de la figure 2.12. Il faut

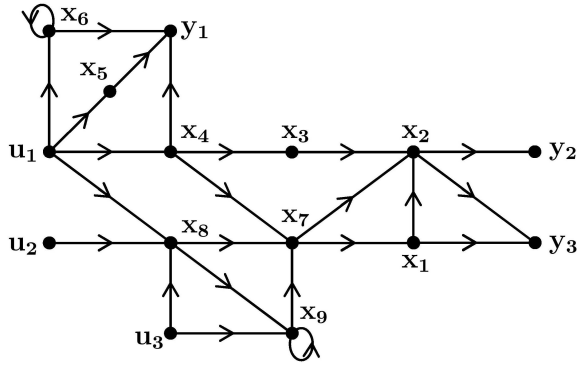


FIG. 2.12 – Graphe orienté associé au système de l'exemple 2.4

d'abord noter que  $\mathbf{u}_3$  rend inobservable à  $\mathbf{u}_2$  (et vice-versa) puisque  $\text{card}(\mathbf{U} \setminus \{\mathbf{u}_3\}) = \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \rho(\mathbf{U} \setminus \{\mathbf{u}_3\}, \mathbf{Y}) = 2$  et  $\mu(\mathbf{U} \setminus \{\mathbf{u}_3\}, \mathbf{Y}) = \mu(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = 8$ . Choisissons  $\bar{\mathbf{U}} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  ( $\bar{\mathbf{U}} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3\}$  peut aussi être choisi).



D'après la définition 2.2, pour l'ensemble  $\bar{\mathbf{U}}$  choisi, nous obtenons :  $\Delta_0 = \{\mathbf{x}_7, \mathbf{x}_8, \mathbf{x}_9\}$ ,  $\mathbf{X}_1 = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6\}$ ,  $\mathbf{U}_0 = \{\mathbf{u}_2\}$  et  $\mathbf{U}_1 = \{\mathbf{u}_1\}$ . D'après le séparateur  $\mathbf{S}_0 = \{\mathbf{x}_7\}$ , nous avons également  $\mathbf{X}_s = \{\mathbf{x}_7\}$ . De ce dernier, il est évident que  $\mathbf{Y}_0 = \emptyset$  et  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}$ . Finalement,  $\mathbf{X}_0 = \{\mathbf{x}_8, \mathbf{x}_9\}$ .

Avec ces sous-ensembles calculés, nous constatons facilement que le nombre maximal d'arcs disjoints couvrant un lien  $\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s \cup \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1$  est  $\theta(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s \cup \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = 8$ . En effet, 8 arcs  $v$ -disjoints peuvent couvrir le lien composé des chemins  $\mathbf{u}_1 \rightarrow \mathbf{x}_5 \rightarrow \mathbf{y}_1$ ,  $\mathbf{x}_4 \rightarrow \mathbf{x}_3 \rightarrow \mathbf{x}_2 \rightarrow \mathbf{y}_2$ ,  $\mathbf{x}_7 \rightarrow \mathbf{x}_1 \rightarrow \mathbf{y}_3$  et  $\mathbf{x}_6 \rightarrow \mathbf{x}_6$  par exemple. Le nombre maximal d'arcs disjoints couvrant un lien  $\mathbf{U}_1 - \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1$  est  $\theta(\mathbf{U}_1, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = 1$  par exemple  $\mathbf{u}_2 \rightarrow \mathbf{x}_5$ . Étant donné que  $n_s + n_1 = 7$ , la condition **Cond. b'** est vérifiée.

Pour la partie composée des ensembles  $\mathbf{U}_0, \mathbf{X}_0, \mathbf{X}_s$  et  $\mathbf{Y}_0$ , nous constatons que dans un lien  $\mathbf{U}_0 - \mathbf{X}_s$ , le sommet  $\mathbf{x}_9$  n'est pas essentiel, d'ailleurs  $\rho(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}) = \rho(\mathbf{U} \setminus \{\mathbf{x}_9\}, \mathbf{Y}) = 1$ . En conclusion le système n'est pas fortement observable.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, divers problèmes d'observabilité des systèmes linéaires à entrées inconnues ont été abordés par une approche graphique. En premier lieu, nous avons donné les conditions nécessaires et suffisantes à l'observabilité générique simultanée de l'entrée et de l'état. Ces conditions sont aisément vérifiables car elle ne font appel qu'à des algorithmes classiques de la théorie des graphes ayant de surcroît des ordres de complexité polynômiaux. Le second problème étudié est la caractérisation graphique de l'observabilité forte d'une partie quelconque de l'état et de l'entrée. Ce problème est le plus général concernant l'observabilité des systèmes linéaires standards. Les conditions trouvées sont moins intuitives et nécessitent l'évaluation d'une fonction dont l'argument est un ensemble de sommets. Comme cela sera discuté plus en détails dans le chapitre 4, l'implémentation de ces conditions est moins aisée et moins directe. La dernière question abordée dans ce chapitre concerne l'observabilité forte de l'état. Les conditions nécessaires et suffisantes obtenues sont aussi simples que celles de l'observabilité totale de l'entrée et de l'état.

Les conditions d'observabilité énoncées dans ce chapitre ne garantissent pas l'existence d'un observateur de Luenberger ou plus généralement causal permettant l'estimation des variables non mesurées du système. Ce dernier problème, résolu pour la reconstruction de l'état dans [Commault *et al.*, 2001], aboutit évidemment à des conditions plus restrictives que celles assurant (juste) son observabilité.

La notion de zéros invariants a été très utilisée pour établir nos résultats. Nous nous sommes inspirés spécifiquement de résultats de [van der Woude, 2000] qui s'appliquent très bien au problème d'observabilité, une fois effectuée la décomposition introduite dans la définition 2.2.

Dans le chapitre suivant, nous traitons du problème de placement de capteurs additionnels dont l'objectif serait le recouvrement des conditions d'observabilité obtenues dans ce chapitre.



# 3

## Placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité forte ou d'une partie de l'état et de l'entrée

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons établi les conditions graphiques d'observabilité forte générique de tout ou d'une partie de l'état d'un système à entrées inconnues. Au cas où ces conditions ne seraient pas vérifiées, la seule solution pour leur recouvrement est de placer de nouveaux capteurs. Aussi, l'objectif de l'étude que nous avons menée est de proposer des stratégies optimisées de placement de capteurs reposant sur une approche graphique et sur une analyse structurelle du système. L'approche graphique permet, d'une part, d'avoir une vue plus claire des interactions entre les variables du système et, d'autre part, nous autorise à disposer d'outils et d'algorithmes optimisés pour la résolution du problème considéré.

Notre étude est largement inspirée de [Commault *et al.*, 2005b] qui traitent du placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité de l'état des systèmes sans entrée inconnue et de [Commault *et al.*, 2005a, Commault *et al.*, 2006, Commault et Dion, 2007]

qui concernent le problème de placement de capteurs pour la solubilité du problème de détection et de localisation de défauts. Aussi, nous utilisons les mêmes représentations graphiques, les mêmes outils et les mêmes algorithmes classiques de la théorie des graphes à savoir l'algorithme de calcul de flot maximal, de Ford-Fulkerson et de Dulmage-Mendelsohn.

Ainsi, dans ce chapitre, nous nous proposons de traiter le problème de placement de capteurs afin de garantir l'observabilité forte de tout ou d'une partie de l'état. D'abord, nous traitons le problème plus complexe qui consiste à recouvrir l'observabilité de certaines composantes données de l'état. La méthode que nous adoptons présentant certains points faibles, nous tenterons par la suite de les supprimer en considérant le problème de recouvrement de l'observabilité forte de tout l'état du système. Les deux solutions proposées sont illustrées, tout au long du chapitre, par des exemples académique assez simples.

## **3.2 Placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité forte d'une partie de l'état d'un système**

Le premier problème abordé dans ce chapitre concerne donc le recouvrement de la propriété d'observabilité forte pour une partie donnée de l'état d'un système soumis à des entrées inconnues. L'objectif que nous nous fixons est de trouver des éléments de réponse à la question "combien et où faut-il placer des capteurs pour qu'un ensemble donné de composantes de l'état du système considéré soit génériquement fortement observable?". Cette question peut se poser dès la conception du système afin d'assurer l'observabilité forte de certaines composantes d'état essentielles dans le contexte d'une supervision par exemple. Les conditions que nous allons proposer pour le placement des capteurs additionnels se répartissent en deux groupes. Le premier regroupe des conditions nécessaires et le second des conditions suffisantes. Le second contient des conditions suffisantes qui, lorsqu'elles sont satisfaites, assurent que l'ensemble des composantes de l'état devant être

fortement observable le sont effectivement.

### 3.2.1 Position du Problème

Soit  $\Delta \subseteq \mathbf{X}$ , l'ensemble des composantes de l'état que nous désirons rendre fortement observables. L'objectif de cette section est de trouver le nombre et la localisation des mesures supplémentaires symbolisées par l'équation  $z(t) = H_x^\lambda x(t) + H_u^\lambda u(t)$  de telle sorte que pour le système structuré

$$\Sigma_\Delta^c : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A^\lambda x(t) + B^\lambda u(t) \\ y(t) &= C^\lambda x(t) + D^\lambda u(t) \\ z(t) &= H_x^\lambda x(t) + H_u^\lambda u(t) \end{cases} \quad (3.1)$$

toutes les composantes de  $\Delta$  soient fortement observables alors qu'elles ne le sont pas pour le système

$$\Sigma_\Delta : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A^\lambda x(t) + B^\lambda u(t) \\ y(t) &= C^\lambda x(t) + D^\lambda u(t) \end{cases}$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état du système,  $u(t) \in \mathbb{R}^q$  le vecteur des entrées et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur des sorties.  $A, B, C$  et  $D$  sont des matrices de dimension appropriée. En d'autres termes, d'après la proposition 2.8, le système complété  $\Sigma_\Delta^c$  doit vérifier

$$\beta(\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z} \cup \Delta) = \beta(\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z})$$

L'objectif étant de trouver le placement des nouveaux capteurs, partir d'un graphe représentant le système complété  $\Sigma_\Delta^c$  ne nous paraît pas pertinent car, nous ne saurions combien il y a de sommets relatifs aux capteurs additionnels et à quels sommets les relier. Ainsi, notre étude repose entièrement sur le graphe orienté du système d'origine. Par ailleurs, la décomposition définie dans le paragraphe 2.2.2 est aussi appliquée au système structuré d'origine  $\Sigma_\Delta$ .

Tout comme l'étude [Commault *et al.*, 2005b], notre stratégie comportera, pour des raisons de simplicité, deux étapes correspondant respectivement au recouvrement des deux conditions bien spécifiques. Ainsi, on sépare la condition de la proposition 2.8 en les deux

conditions suivantes :

Condition de connectivité à la sortie : tout sommet de  $\Delta$  est le début d'au moins un chemin atteignant un sommet de  $\mathbf{Y}$ .

En effet, supposons que la condition de connectivité à la sortie ne soit pas satisfaite, *i.e.*  $\exists \mathbf{x}_i \in \Delta$  à partir duquel il n'existe pas de chemin *Y-cime*. Alors,  $\forall k \geq 0$ , la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $C^\lambda(A^\lambda)^k$  serait égale à zéro. Ce qui impliquerait que la composante de l'état  $x_i$  n'est pas observable.

condition  $\beta$  :  $\forall \mathbf{v} \in \Delta, \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{v}\}) = \beta(\mathbf{Y})$ .

Procéder en deux étapes permet d'obtenir aussi bien des conditions nécessaires que des conditions suffisantes. Nous n'avons pas, pour l'instant, trouvé des conditions nécessaires et suffisantes permettant de mieux caractériser les solutions de recouvrement de l'observabilité forte de  $\Delta$  par rajout de capteurs.

### 3.2.2 Recouvrement de la condition de connectivité à la sortie

Notons par  $\Delta_1$  l'ensemble de tous les sommets de  $\Delta$  qui ne sont pas au début d'un chemin *Y-cime*. Le but est alors de rajouter des mesures sur le système pour que tous ces sommets soient connectés à au moins un capteur. Ce problème est similaire à celui traité dans [Commault *et al.*, 2005b]. Aussi, nous allons utiliser la même stratégie pour le résoudre. Nous définissons les notations suivantes :

- Deux sommets  $\mathbf{v}_i$  et  $\mathbf{v}_j$  sont dits fortement connectés s'il existe un chemin de  $\mathbf{v}_i$  à  $\mathbf{v}_j$  et un autre de  $\mathbf{v}_j$  à  $\mathbf{v}_i$  *i.e.*  $\rho(\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{v}_j\}) = \rho(\{\mathbf{v}_j\}, \{\mathbf{v}_i\}) = 1$ .

Nous supposons qu'un sommet est fortement connecté à lui-même.

La relation "est fortement connecté à", notée  $\mathcal{R}_{SC}$ , est une relation d'équivalence et nous pouvons définir ces classes d'équivalence. Chaque classe d'équivalence est appelée composante connexe du graphe orienté  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ . Notons que chaque sommet de sortie ainsi que chaque sommet d'entrée est une composante connexe à lui seul.

Les composantes fortement connexes peuvent être ordonnées en utilisant une relation d'ordre partielle notée " $\preceq$ " et définie par :

Deux composantes connexes  $C_i$  et  $C_j$  sont telles que  $C_i \preceq C_j$ , s'il existe au moins un arc  $(v_j, v_i)$  où  $v_j \in C_j$  et  $v_i \in C_i$  ou en d'autres termes  $\theta(C_j, C_i) \neq 0$ .

Nous pouvons ordonner partiellement les composantes connexes contenant des éléments de  $\Delta_1$  en utilisant cette relation " $\preceq$ ". Notons alors par  $\mathbf{I}^*$  l'ensemble de tous les éléments  $x_i \in \Delta_1$  tels que la composante fortement connexe incluant  $x_i$  soit minimale dans  $\Delta_1$ . À chaque élément  $x_i \in \mathbf{I}^*$ , nous associons un ensemble  $\Omega_{x_i}$  défini par

$\Omega_{x_i} = \{x_k \in C_\ell, C_\ell \in \mathbf{X}/\mathcal{R}_{SC} \text{ et } C_\ell \preceq C_{x_i}\}$ , où  $\mathbf{X}/\mathcal{R}_{SC}$  est l'ensemble quotient de  $\mathbf{X}$  par la relation  $\mathcal{R}_{SC}$ .

Nous pouvons alors énoncer :

**Proposition 3.1.** *Soit le système linéaire structuré  $\Sigma_\Lambda$  représenté par le graphe orienté  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ . Afin de recouvrir la condition de connectivité à la sortie, il est nécessaire et suffisant que les capteurs additionnels mesurent au moins un état associé à un élément de chaque ensemble  $\Omega_{x_i}$ ,  $x_i \in \mathbf{I}^*$ .*

**Preuve :**

Suffisance : D'une part, par construction, tous les sommets de  $\Delta_1$  sont connectés à tous les éléments d'au moins un ensemble  $\Omega_{x_i}$ ,  $x_i \in \mathbf{I}^*$ . Il est donc évident que si un capteur mesure un état associé à un sommet dans chacun de ces ensembles, alors la condition de connectivité sera satisfaite.

Nécessité : S'il existe un ensemble  $\Omega_{x_i}$ ,  $x_i \in \mathbf{I}^*$  dans lequel aucune mesure n'a été prise alors aucun élément de cet ensemble n'est connecté à la sortie. Cela implique qu'il n'y a aucun chemin connectant le sommet  $x_i$  vers la sortie car, par définition, tous les chemins partant de  $x_i$  passent nécessairement par un élément de  $\Omega_{x_i}$ . Aussi, cela conduit au fait que la condition de connectivité à la sortie n'est pas satisfaite pour le système complété  $\Sigma_\Lambda^c$  et, par voie de conséquence, que tous les éléments de  $\Delta_1$  ne sont pas fortement observables.  $\square$

La proposition 3.1 établit des conditions nécessaires et suffisantes au placement de capteurs additionnels pour le recouvrement de la connectivité à la sortie de tous les éléments de  $\Delta_1$ . Cette condition étant nécessaire à l'observabilité forte des composantes de l'état



associées aux éléments de  $\Delta_1$ , la contrainte de la proposition 3.1 représente une condition suffisante à la localisation des capteurs à rajouter sur le système. Néanmoins, cette proposition n'indique pas le nombre minimal de capteurs à rajouter pour le recouvrement de la connectivité à la sortie de tous les éléments de  $\Delta_1$ . En théorie, ce nombre est égal à 1. En effet, il est possible avec un seul capteur mesurant une combinaison linéaire de composantes incluant au moins celle associée à un sommet de chaque ensemble  $\Omega_{\mathbf{x},i}$ ,  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{I}^*$  de satisfaire à la condition de connectivité à la sortie. Cependant, cela risque de ne pas toujours être possible en pratique, en raison de la disparité des variables à mesurer par exemple. Nous pouvons tout de même affirmer que rajouter plus de  $\text{card}(\mathbf{I}^*)$  capteurs serait inefficace ou redondant dans le cadre du recouvrement de la condition de connectivité à la sortie de tous les éléments de  $\Delta_1$ .

**Exemple 3.1.** Afin d'illustrer les propos précédents, considérons le système représenté dans l'exemple de la figure 3.1 ci-dessous :

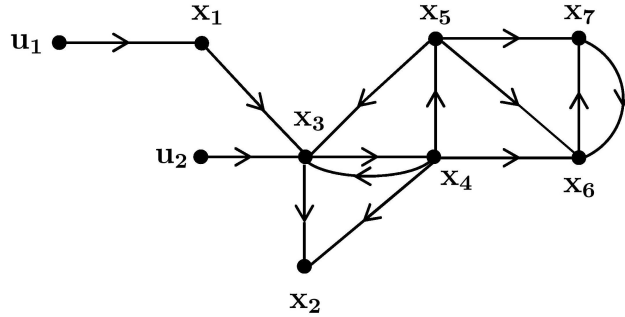


FIG. 3.1 – Exemple pour le recouvrement de la condition de la connectivité à la sortie

Les composantes connexes du système sont  $\{\mathbf{u}_1\}$ ,  $\{\mathbf{u}_2\}$ ,  $\{\mathbf{x}_1\}$ ,  $\{\mathbf{x}_2\}$ ,  $\{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5\}$  et  $\{\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7\}$ . De plus, nous avons les relations suivantes :

$\{\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7\} \preceq \{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5\} \preceq \{\mathbf{x}_1\} \preceq \{\mathbf{u}_1\}$  et  $\{\mathbf{x}_2\} \preceq \{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5\} \preceq \{\mathbf{u}_2\}$ . Comme  $\{\mathbf{x}_2\} \not\preceq \{\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7\}$  et que  $\{\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7\} \not\preceq \{\mathbf{x}_2\}$ , il existe alors deux éléments minimaux qui sont  $\{\mathbf{x}_2\}$  et  $\{\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7\}$ . Si nous souhaitons rendre fortement observables  $x_1, x_2, x_3$  et  $x_6$ , les éléments minimaux dans  $\Delta$  sont  $\{\mathbf{x}_2\}$  et  $\{\mathbf{x}_6\}$ . Nous avons alors  $\mathbf{I}^* = \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_6\}$ . Les définitions des

ensembles  $\Omega_{\mathbf{x},i}$  donnent  $\Omega_{\mathbf{x},2} = \{\mathbf{x}_2\}$  et  $\Omega_{\mathbf{x},6} = \{\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7\}$ . Par conséquent, le rajout d'un capteur dont la mesure inclurait une combinaison linéaire de  $x_2$  et  $x_6$  ou de  $x_2$  et  $x_7$  ou encore de  $x_2$ ,  $x_6$  et  $x_7$  permettrait de recouvrir la propriété de connectivité à la sortie.

### 3.2.3 Recouvrement de la condition $\beta$

En complément aux conditions nécessaires énoncées dans le paragraphe précédent, l'objectif ici est de proposer un placement de capteurs permettant le recouvrement de la condition  $\beta$ . Dans un souci de simplicité, nous abordons d'abord le cas où seule une composante de l'état doit être rendue fortement observable. Ensuite, nous généralisons à tout l'ensemble  $\Delta$ .

A partir du lemme 2.7, l'ensemble  $\Delta_2 = \Delta \setminus \{\mathbf{v} \in \Delta, \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{v}\}) = \beta(\mathbf{Y})\}$  représente toutes les composantes de  $\Delta$  qui ne sont pas fortement observables. Pour chaque élément  $\mathbf{x}_i \in \Delta_2$ , nous pouvons définir l'ensemble  $\Gamma_{\mathbf{x},i} = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{X} \cup \mathbf{U}, \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{v}, \mathbf{x}_i\}) = \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{v}\}) \right\}$ . L'ensemble  $\Gamma_{\mathbf{x},i}$  représente l'ensemble des composantes de l'état ou de l'entrée qui, si elles étaient mesurées, rendraient la composante de l'état  $x_i$  fortement observable. Nous pouvons alors énoncer le lemme :

**Lemme 3.2.** *Soit le système linéaire structuré  $\Sigma_\Lambda$  représenté par le graphe orienté  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ . Pour chaque composante de l'état associée à un élément  $\mathbf{x}_i \in \Delta_2$ , afin de recouvrir la condition  $\beta$ , il suffit de rajouter un seul capteur dont la mesure serait une combinaison linéaire d'éléments associés à l'ensemble  $\mathcal{V}_{obs}$  et d'un et un seul élément de  $\Gamma_{\mathbf{x},i}$ .*

**Preuve :** La preuve de ce lemme est immédiate sachant que le nombre minimal de capteurs pour le recouvrement de la condition  $\beta$  est égal à 1. Comme  $\mathcal{V}_{obs}$  représente l'ensemble des sommets associés aux composantes fortement observables, qui s'expriment donc en fonction seulement des composantes de sortie  $y$  et de leurs dérivées, rajouter un capteur qui mesurerait une combinaison linéaire de composantes prises dans  $\mathcal{V}_{obs}$  et d'une composante dans  $\Gamma_{\mathbf{x},i}$  est équivalent, d'un point de vue observabilité, à rajouter un capteur qui mesurerait uniquement une composante associée à un élément de  $\Gamma_{\mathbf{x},i}$ . Par construction, cela assure l'observabilité forte de  $x_i$ .  $\square$

Revenons maintenant au cas où nous voulons rendre fortement observables tous les éléments de  $\Delta_2$ . Pour cela, nous utilisons la relation d'ordre partielle d'inclusion " $\subseteq$ " afin d'ordonner les ensembles  $\Gamma_{\mathbf{x}_i}$ ,  $\mathbf{x}_i \in \Delta_2$ . Ainsi, nous pouvons définir  $\Delta_2^*$  comme étant le sous-ensemble de  $\Delta_2$  tel que

$$\Delta_2^* \stackrel{def}{=} \{\mathbf{x}_i \in \Delta_2, \Gamma_{\mathbf{x}_i} \text{ est un élément minimal pour la relation } "\subseteq"\}$$

La proposition suivante donne les conditions suffisantes pour que le rajout de capteurs représentés par un ensemble de sommets  $\mathbf{Z}$  dans le graphe  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$  assure l'observabilité forte des composantes associées aux éléments de  $\Delta_2$  et donc à ceux de  $\Delta$  :

**Proposition 3.3.** *Soit le système linéaire structuré  $\Sigma_\Lambda$  représenté par le graphe orienté  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ . Afin de recouvrir la condition  $\beta$ , et donc de recouvrir l'observabilité forte des éléments de  $\Delta$  avec des capteurs additionnels représentés par l'ensemble de sommets  $\mathbf{Z}$ , il suffit qu'il existe un ensemble de sommets  $\mathbf{V}_{\mathbf{X},\mathbf{U}} \subseteq (\bigcup_{\mathbf{x}_i \in \Delta_2^*} \Gamma_{\mathbf{x}_i})$  tel que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \mathbf{x}_i \in \Delta_2^*, \mathbf{V}_{\mathbf{X},\mathbf{U}} \cap \Gamma_{\mathbf{x}_i} \neq \emptyset \\ \theta((\mathbf{X} \cup \mathbf{U}) \setminus \mathcal{V}_{obs}, \mathbf{Z}) = \text{card}(\mathbf{V}_{\mathbf{X},\mathbf{U}}) + \theta((\mathbf{X} \cup \mathbf{U}) \setminus (\mathcal{V}_{obs} \cup \mathbf{V}_{\mathbf{X},\mathbf{U}}), \mathbf{Z}) \\ \theta(\mathbf{V}_{\mathbf{X},\mathbf{U}}, \mathbf{Z}) = \text{card}(\mathbf{V}_{\mathbf{X},\mathbf{U}}) \end{array} \right. \quad (3.2)$$

**Preuve :** Le système d'équations (3.2) assure que pour chaque  $\mathbf{x}_i \in \Delta_2^*$ , il existe un élément dans  $\Gamma_{\mathbf{x}_i}$  qui s'exprime comme une combinaison linéaire :

- d'éléments associés aux capteurs ajoutés ;
- d'éléments associés aux sommets inclus dans  $\mathcal{V}_{obs}$  qui s'expriment en fonction des sorties  $y$  et de leurs dérivées.

Ainsi, c'est comme si un élément était mesuré dans chaque ensemble  $\Gamma_{\mathbf{x}_i}$ ,  $\mathbf{x}_i \in \Delta_2^*$ . Or, comme par définition les ensembles  $\Gamma_{\mathbf{x}_i}$ ,  $\mathbf{x}_i \in \Delta_2^*$  sont minimaux par rapport à la relation d'inclusion, alors  $\forall \mathbf{x}_k \in \Delta_2$ , il existe un élément  $\mathbf{x}_i \in \Delta_2^*$  tel que  $\Gamma_{\mathbf{x}_k} \subseteq \Gamma_{\mathbf{x}_i}$ . Ainsi, satisfaire au système d'équations (3.2) revient à assurer pour tout  $\mathbf{x}_k \in \Delta_2$ , l'existence d'une composante associée à un élément de  $\Gamma_{\mathbf{x}_k}$  qui est combinaison linéaire de  $z$ , de  $y$  et de ses dérivées. D'après le lemme 3.2, cela est suffisant à assurer l'observabilité de toutes

les composantes de l'état constituant  $\Delta_2$ . □

L'exemple suivant permet d'illustrer les calculs induits par l'application de la stratégie de placement de capteurs proposée pour le recouvrement de la condition  $\beta$ .

**Exemple 3.2.** *Considérons le système associé au graphe orienté représenté à la figure 3.2 et supposons que l'observabilité forte des éléments de  $\Delta = \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6\} = \mathbf{X} \setminus \mathcal{V}_{obs}$  doit être garantie. Notons que  $\Delta = \Delta_2$ . Le calcul des ensembles  $\Gamma_{\mathbf{x},i}$  donne :  $\Gamma_{\mathbf{x},2} =$*

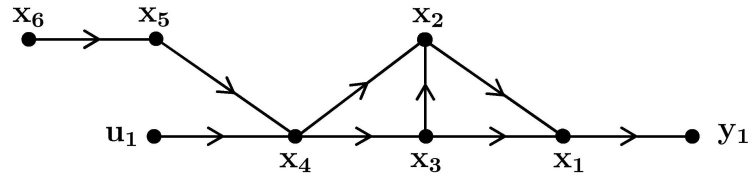


FIG. 3.2 – Exemple 3.2

$\{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$ ,  $\Gamma_{\mathbf{x},3} = \{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_4\}$ ,  $\Gamma_{\mathbf{x},4} = \{\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2\}$ ,  $\Gamma_{\mathbf{x},5} = \{\mathbf{x}_5\}$  et  $\Gamma_{\mathbf{x},6} = \{\mathbf{x}_6, \mathbf{x}_5\}$ . Nous constatons que  $\Gamma_{\mathbf{x},5} \subseteq \Gamma_{\mathbf{x},6}$ ,  $\Gamma_{\mathbf{x},2} \subseteq \Gamma_{\mathbf{x},3} \subseteq \Gamma_{\mathbf{x},4}$  et que  $\Gamma_{\mathbf{x},5} \cap (\Gamma_{\mathbf{x},2} \cup \Gamma_{\mathbf{x},3} \cup \Gamma_{\mathbf{x},4}) = \emptyset$ . Nous pouvons vérifier que  $\Delta^* = \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5\}$ . D'après le lemme 3.2, pour garantir l'observabilité forte de  $\Delta$ , il faut mesurer  $\mathbf{x}_5$  et  $\mathbf{x}_2$  ou  $\mathbf{x}_3$  ou  $\mathbf{x}_4$ . Choisissons par exemple  $\mathbf{V}_{\mathbf{X},\mathbf{U}} = \{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_5\}$ . Pour garantir l'observabilité forte de  $\Delta$ , selon la proposition 3.3, il est nécessaire que  $\theta(\mathbf{V}_{\mathbf{X},\mathbf{U}}, \mathbf{Z}) = 2$  et donc qu'il y ait au moins deux arcs  $v$ -disjoints de  $\mathbf{V}_{\mathbf{X},\mathbf{U}}$  aux sommets de capteurs rajoutés  $\mathbf{Z}$ . Nous constatons que la condition se vérifie car  $\theta((\mathbf{X} \cup \mathbf{U}) \setminus \mathcal{V}_{obs}, \mathbf{Z}) = 2$  et  $\theta((\mathbf{X} \cup \mathbf{U}) \setminus (\mathcal{V}_{obs} \cup \mathbf{V}_{\mathbf{X},\mathbf{U}}), \mathbf{Z}) = 0$ .

Notons que la proposition 3.3 ne donne pas de conditions nécessaires et suffisantes à la configuration des nouveaux capteurs à placer. En effet, à part la condition triviale  $\beta(\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z} \cup \Delta) = \beta(\mathbf{Y} \cup \mathbf{Z})$ , nous ne proposons pas de conditions qui soient nécessaires et suffisantes. Par ailleurs, il se peut aussi qu'il existe des solutions avec des capteurs mesurant des éléments qui ne sont dans aucun ensemble  $\Gamma_{\mathbf{x},k}$ ,  $\mathbf{x}_k \in \Delta_2$ , comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 3.3.** *Considérons le système associé au graphe orienté représenté à la figure 3.3 et supposons que l'observabilité forte des éléments associés à  $\Delta = \{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$  souhaite*

être assurée. Des calculs assez simples permettent d'écrire  $\Gamma_{x,3} = \{x_3\}$  et  $\Gamma_{x,4} = \{x_4\}$ . Il est alors aisé de voir que toute solution de recouvrement de l'observabilité forte de  $x_3$  et  $x_4$  nécessite au moins deux capteurs. Par ailleurs, il est assez aisé de constater qu'une solution serait de choisir  $z_1 = x_5$  et  $z_2 = x_4$ , même si  $x_5$  n'est ni dans  $\Gamma_{x,3}$  ni dans  $\Gamma_{x,4}$ .

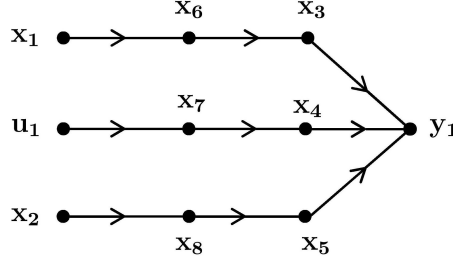


FIG. 3.3 – Exemple 3.3

D'autre part, la proposition 3.3 ne donne aucune information sur le nombre minimal de capteurs nécessaire au recouvrement des composantes associées aux éléments de  $\Delta$ . En effet, nous pouvons juste dire qu'il existe une solution avec  $p^*$  capteurs où  $p^* = \min(\text{card}(\mathbf{V}_{\mathbf{x},\mathbf{U}}))$  sous la contrainte  $\forall x_i \in \Delta^*, \mathbf{V}_{\mathbf{x},\mathbf{U}} \cap \Gamma_{x,i} \neq \emptyset$ . Une solution avec moins de capteurs pourrait très bien exister, comme le montre l'exemple suivant :

**Exemple 3.4.** *Considérons le système de l'exemple 3.3 précédent représenté par le graphe orienté de la figure 3.3. Supposons que nous voulions recouvrir l'observabilité forte des composantes associées à  $\Delta = \{x_1, x_2, x_7\}$ . Le calcul de  $\Gamma_{x,1}$ ,  $\Gamma_{x,2}$  et  $\Gamma_{x,7}$  donne :*

$$\Gamma_{x,1} = \{x_1, x_3, x_6\}, \Gamma_{x,2} = \{x_2, x_5, x_8\} \text{ et } \Gamma_{x,7} = \{x_4, x_7\}.$$

*Ainsi,  $\Gamma_{x,1} \cap \Gamma_{x,2} = \Gamma_{x,1} \cap \Gamma_{x,7} = \Gamma_{x,7} \cap \Gamma_{x,2} = \emptyset$ . Donc toute solution préconisée par la proposition 3.3 nécessiterait le rajout de trois capteurs.*

*Or, seulement deux capteurs sont nécessaires. En effet, une solution consisterait à rajouter par exemple les capteurs  $z_1 = x_3$  et  $z_2 = x_4$ . Cette configuration ne contient aucune composante associée à l'ensemble  $\Gamma_{x,2}$ . Il existe de plus d'autres solutions. Ainsi, la stratégie proposée par la proposition 3.3 aboutit certes à un placement de capteurs assurant l'observabilité forte des éléments de  $\Delta$  mais avec un nombre de capteurs qui n'est pas minimal.*

La stratégie proposée pour le recouvrement de l'observabilité forte d'une partie donnée de l'état reste donc encore une question à approfondir. Il peut être attendu qu'à l'image de l'analyse de l'observabilité, le problème de placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité forte de tout l'état soit plus simple à appréhender. L'étude de ce problème fait l'objet du paragraphe suivant.

### 3.3 Placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité forte

Le second problème abordé dans ce chapitre concerne le recouvrement de la propriété d'observabilité forte de l'état d'un système soumis à des entrées inconnues telles que des défauts, des perturbations ou encore des interactions avec des systèmes extérieurs dans le cas de systèmes distribués. L'observabilité de l'état serait ainsi garantie indépendamment de ces entrées, ce qui peut être important dans le cadre de la synthèse de schémas d'observation tolérants aux défauts par exemple. Évidemment, il est possible d'utiliser les résultats obtenus dans le paragraphe précédent. Cependant, la stratégie de placement de capteurs pouvant encore être améliorée, l'objectif est de trouver des conditions plus simples et éventuellement plus complètes. Les conditions recherchées pour le placement de capteurs additionnels peuvent être nécessaires et/ou suffisantes. Elles peuvent aussi conduire à utiliser des tests pour évaluer l'efficacité de certaines configurations de capteurs additionnels. Néanmoins, en aucun cas nous ne nous sommes intéressés à établir une liste exhaustive de tous les placements qui rendraient le système fortement observable. Ce problème combinatoire ne présente pas un intérêt théorique majeur et sa résolution, toujours possible, nécessiterait, à notre avis, l'utilisation d'algorithmes de complexité exponentielle.

Ci-dessous, nous posons précisément le problème du placement de capteurs que nous envisageons de résoudre. Ce problème relativement complexe est découpé en deux sous-problèmes plus simples dont la solution est proche de ce qui a été réalisé notamment dans

[Commault *et al.*, 2005b, Commault et Dion, 2007].

### 3.3.1 Position du problème

L'objectif de cette section est de trouver le nombre et la localisation de capteurs supplémentaires symbolisés par l'équation  $z(t) = H_x^\lambda x(t) + H_u^\lambda u(t)$  de telle sorte que le système structuré

$$\Sigma_\Lambda^c : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A^\lambda x(t) + B^\lambda u(t) \\ y(t) &= C^\lambda x(t) + D^\lambda u(t) \\ z(t) &= H_x^\lambda x(t) + H_u^\lambda u(t) \end{cases} \quad (3.3)$$

soit fortement observable alors que le système

$$\Sigma_\Lambda : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A^\lambda x(t) + B^\lambda u(t) \\ y(t) &= C^\lambda x(t) + D^\lambda u(t) \end{cases}$$

ne l'est pas. En d'autres termes, le système complété  $\Sigma_\Lambda^c$  doit vérifier les deux conditions du corollaire 2.10 :

Condition de distance :  $\mathbf{X}_0 \subseteq V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s)$ .

Condition de couplage :  $\theta(\mathbf{U}_1 \cup \mathbf{X}_s \cup \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1) = n_s + n_1 + \theta(\mathbf{U}_1, \mathbf{X}_1 \cup \mathbf{Y}_1)$ .

La décomposition de la définition 2.2 est relative au système ayant comme sortie le vecteur  $(y^T(t), z^T(t))^T$ .

L'objectif étant de placer de nouveaux capteurs, comme pour le paragraphe précédent, notre étude repose entièrement sur le graphe orienté du système d'origine. Par ailleurs, la décomposition définie dans le paragraphe 2.2.2 est aussi appliquée au système structuré d'origine  $\Sigma_\Lambda$ .

Aux deux conditions ci-dessus, nous rajoutons la condition de connectivité, bien que prise en compte par la condition de distance. En effet la condition de distance étant complexe à traiter, nous répartissons ainsi la difficulté du problème initial en deux problèmes plus simples.

Une seule hypothèse non restrictive est faite sur le système, à savoir que  $\text{g-rang} \begin{pmatrix} B^\lambda \\ D^\lambda \end{pmatrix} =$

$\theta(\mathbf{U}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) = q$ . Si tel n'était pas le cas, cela signifierait que des colonnes de  $\begin{pmatrix} B^\lambda \\ D^\lambda \end{pmatrix}$  ne sont pas linéairement indépendantes. Dans ce cas, les entrées seraient redondantes et il suffirait d'éliminer les entrées inutiles et donc les colonnes liées.

Tout comme l'étude [Commault *et al.*, 2005b], notre stratégie comporte trois étapes correspondant au recouvrement de la condition de connectivité à la sortie puis des deux conditions du corollaire 2.10. Procéder ainsi permet de traiter trois problèmes relativement simples. Cependant, cela ne garantit pas que le nombre total de capteurs additionnels proposés sera minimal mais cet aspect est abordé à la fin de la section. Pour des raisons exposés plus tard dans le texte, nous débutons par le recouvrement de la condition de connectivité avant de traiter la condition de couplage et enfin, d'aborder le recouvrement de la condition de distance.

### 3.3.2 Recouvrement de la condition de connectivité à la sortie

Nous n'exposerons pas entièrement la stratégie de recouvrement de la condition de connectivité à la sortie, sachant qu'elle est rigoureusement identique à celle exposée dans le paragraphe 3.2.2. En reprenant les définitions de ce dernier paragraphe, nous définissons les éléments minimaux par rapport à la relation " $\preceq$ " comme étant des composantes fortement connexes n'ayant aucun arc sortant vers une autre composante fortement connexe. C'est naturellement le cas pour les sommets de sortie. On appelle composantes minimales non connectées les composantes fortement connexes minimales qui ne sont pas des sommets de sortie. Nous pouvons alors énoncer :

**Proposition 3.4.** *Soit le système linéaire structuré  $\Sigma_\Lambda$  représenté par le graphe orienté  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ . Afin de satisfaire à la condition de connectivité à la sortie de toutes les composantes de l'état, il est nécessaire et suffisant que les capteurs rajoutés mesurent au moins un élément dans chaque composante minimale non connectée.*



### 3.3.3 Recouvrement de la condition de couplage

Le problème de l'ajout de nouveaux capteurs pour le recouvrement de la condition de couplage a été traité dans [Commault *et al.*, 2005b] en utilisant les graphes bipartis et l'algorithme de décomposition de Dulmage-Mendelsohn. L'objectif du placement de capteurs étant d'obtenir un couplage de taille  $n + q$ , le nombre minimal et donc nécessaire et suffisant de capteurs à rajouter pour le recouvrement de la condition de couplage est égal à  $n + q - \theta(V^+, V^-)$ . Il s'agit maintenant de savoir les localiser. Pour cela, nous utilisons une partie de l'algorithme de décomposition de Dulmage-Mendelsohn.

En premier lieu, nous associons à chaque couplage  $M$  un graphe non biparti noté  $B_M(\Sigma_\Lambda) = (V^+, V^-, \bar{W})$  où  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in \bar{W} \Leftrightarrow (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in W$  ou  $(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1) \in M$ . En outre, nous notons  $S_0^+ = V^+ \setminus \partial^+ M$ .

Afin de préciser la localisation des capteurs additionnels pour le recouvrement de la condition de couplage, nous utilisons l'algorithme suivant similaire à celui présenté dans [Commault *et al.*, 2005b] :

#### Algorithme 3.1.

- Trouver un couplage maximal  $M$  dans  $B(\Sigma_\Lambda)$ ,
- Soient  $V_0^+ = S_0^+ \cup \{\mathbf{v} \in V^+, \text{ il existe un chemin dans } B_M(\Sigma_\Lambda) \text{ de } S_0^+ \text{ à } \mathbf{v}\}$  et  $V_0^- = \{\mathbf{v} \in V^-, \text{ il existe un chemin dans } B_M(\Sigma_\Lambda) \text{ de } S_0^+ \text{ à } \mathbf{v}\}$ .

Après avoir déterminé l'ensemble  $V_0^+$ , nous pouvons énoncer :

**Proposition 3.5.** *Soit le système linéaire structuré  $\Sigma_\Lambda$  représenté par le graphe biparti  $B(\Sigma_\Lambda)$ . Afin de recouvrir la condition de couplage, il faut et il suffit de rajouter  $d = n + q - \theta(V^+, V^-)$  capteurs qui doivent prendre  $n + q - \theta(V^+, V^-)$  mesures linéairement indépendantes dans  $V_0^+$  i.e.  $\theta(V_0^+, \mathbf{Z}^-) = d$ , où  $\mathbf{Z}^-$  représente les sommets associés aux capteurs ajoutés.*

**Preuve :** La preuve est identique à celle donnée dans [Commault *et al.*, 2005b], nous n'en présenterons qu'un aperçu.

En premier lieu, notons que la décomposition de Dulmage-Mendelsohn caractérise tous

les couplages maximaux. Il s'ensuit que si l'on rajoute à un couplage maximal  $M$  de  $B(\Sigma_\Lambda)$  un nombre d'arcs égal à  $\text{card}(V_0^+) - \text{card}(V_0^-)$  entre  $S_0^+$  et les capteurs additionnels pour former un couplage de taille  $\text{card}(V_0^+) - \text{card}(V_0^-)$ , alors nous obtenons un couplage maximal de taille  $n + q$  dans  $B(\Sigma_\Lambda^c)$  ce qui permettrait de satisfaire à la condition de couplage. D'autre part, considérons une quelconque solution qui donnerait un couplage maximal  $M^c$  de taille  $n + q$  dans  $B(\Sigma_\Lambda^c)$ .  $M^c$  est incident à tous les sommets de  $V_0^+$  et donc il existe au moins  $\text{card}(V_0^+) - \text{card}(V_0^-)$  arcs entre  $V_0^+$  et les capteurs additionnels.  $\triangle$

L'exemple suivant illustre la décomposition de Dulmage-Mendelsohn et la stratégie de placement de capteurs adoptée ainsi que le type de conclusions auxquelles conduit notre précédente analyse.

**Exemple 3.5.** *Considérons le système linéaire structuré avec pour graphe associé celui de la figure 3.4. Les ensembles donnés par la définition 2.2 qui nous intéressent sont  $\mathbf{X}_1 = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}, \mathbf{U}_0 = \{\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}, \mathbf{U}_1 = \{\mathbf{u}_1\}, \mathbf{Y}_0 = \emptyset$  et  $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{Y}$ .  $\mathbf{X}_0 = \{\mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_8, \mathbf{x}_9, \mathbf{x}_{10}\}$ .*

*Notons que le système n'est pas complètement connecté. D'ailleurs, les composantes qui*

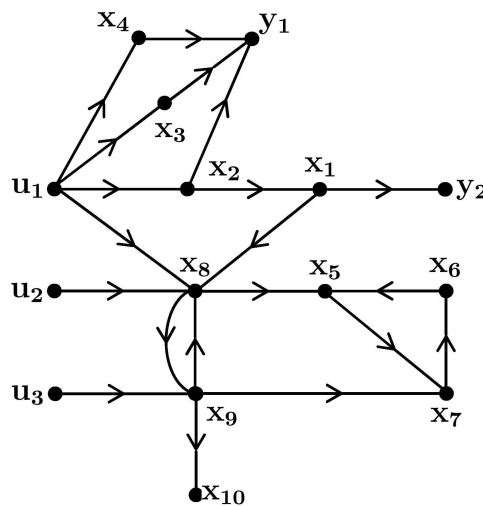


FIG. 3.4 – Exemple 3.5

*n'appartiennent pas à un chemin Y-cime sont représentées par  $\Delta_1 = \mathbf{X}_0$ . Commençons*

par reconnaître les composantes connexes dans  $\Delta_1$ . Les composantes fortement connexes sont  $C_1 = \{u_2\}$ ,  $C_2 = \{u_3\}$ ,  $C_3 = \{x_8, x_9\}$ ,  $C_4 = \{x_{10}\}$  et  $C_5 = \{x_5, x_6, x_7\}$ . Nous remarquons qu'il n'existe pas de chemin entre les composantes connexes  $C_4$  et  $C_5$  alors qu'il est possible d'aller de  $C_1$  et  $C_2$  à  $C_3$  et de cette dernière à  $C_5$ . Avec ces relations nous pouvons ordonner les composantes par rapport à l'ordre partielle. Nous obtenons  $C_5 \preceq C_3 \preceq C_1$  et  $C_4 \preceq C_2$ . Les éléments minimaux sont alors  $C_4 = \{x_{10}\}$  et  $C_5 = \{x_5, x_6, x_7\}$ . Dans ces ensembles, les éléments tels que la composante fortement connexe est minimale en  $\Delta_1$  sont  $I^* = \{x_5, x_6, x_7, x_{10}\}$ . Ainsi, nous pouvons calculer les ensembles  $\Omega_{x,6} = \{x_5, x_6, x_7\}$  et  $\Omega_{x,10} = \{x_{10}\}$ . En conséquence, le rajout d'un capteur dont la mesure inclurait une combinaison linéaire de  $x_6$  et  $x_{10}$  ou de  $x_7$  et  $x_{10}$ , ou encore de  $x_5, x_6, x_7$  et  $x_{10}$  permettrait de recouvrir la propriété de connectivité à la sortie. Il faut noter que toutes ces combinaisons linéaires permettent de recouvrir la connectivité à la sortie, mais en aucun cas rendent forcément observable le système. En utilisant l'une de ces combinaisons linéaires, nous garantissons seulement que chaque sommet de  $\Delta_1$  est le sommet de départ d'au moins un chemin Y-cime.

Pour rétablir la condition de couplage, nous utilisons le graphe biparti auxiliaire de la figure 3.5. Un couplage maximal  $M$ , montré en tiret sur la figure, est composé des arcs  $(u_1^+, x_3^-)$ ,  $(x_3^+, y_2^-)$ ,  $(x_2^+, x_1^-)$  et  $(x_1^+, y_1^-)$ . Du graphe  $B_M(\Sigma_\Lambda)$  associé au couplage maximal  $M$ , nous

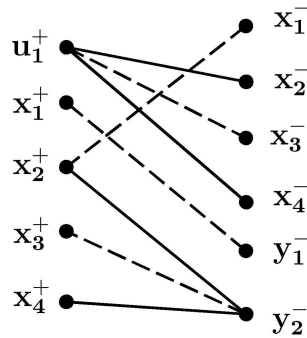


FIG. 3.5 – Graphe biparti de l'exemple 3.5

obtenons que  $S_0^+ = \{x_4^+\}$ ,  $V_0^+ = \{x_3^+, x_4^+\}$  et  $V_0^- = \{y_2^-\}$ . De plus,  $\theta(V^+, V^-) = 4$  et donc  $d = 1$ . Il est facile de conclure qu'une mesure doit être placée sur la composante de l'état représentée par le sommet  $x_4^+$ .

### 3.3.4 Recouvrement de la condition de distance

Supposons que les conditions de connectivité à la sortie et de couplage soient satisfaites. Dans ce cas, la taille du lien maximal  $\mathbf{U}$ - $\mathbf{Y}$  est égale à  $\text{card}(\mathbf{U})$  soit  $q$ . Il est alors important de remarquer qu'un capteur quelconque rajouté sur le système  $\Sigma_\Lambda$  ne peut en aucun cas agrandir l'ensemble  $V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y})$  et donc  $V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}_0)$  car  $V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}_0) \cup \mathbf{U}_1$ , d'après le lemme 2.3. En effet, le nombre de chemins disjoints entre  $\mathbf{U}$  et  $\mathbf{Y}$  étant déjà maximal, il ne peut être augmenté. Un sommet qui n'était pas essentiel pour les liens maximaux  $\mathbf{U}$ - $\mathbf{Y}$  ne peut donc pas le devenir en rajoutant d'autres capteurs et donc d'autres possibilités de chemins. Ainsi, si un élément  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_0$  est tel que  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_0 \setminus (\mathbf{X}_0 \cap V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}))$  alors en rajoutant un ou plusieurs capteurs  $z$  n'importe où sur le système, nous ne pourrions avoir  $\mathbf{x}_i \in V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z})$ . Par conséquent, l'unique possibilité pour le recouvrement de la condition de distance est de réduire l'ensemble  $\mathbf{X}_0$  ou plus précisément lui enlever tous les éléments  $\mathbf{x}_i$  tels que  $\mathbf{x}_i \notin V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s)$ .

L'objectif est alors de rajouter des capteurs  $z$  pour qu'à chaque élément  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_0 \stackrel{def}{=} \mathbf{X}_0 \setminus (\mathbf{X}_0 \cap V_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}))$ , nous ayons  $\rho(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}) > \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z})$ . Ce placement est alors nécessaire et suffisant pour le recouvrement de la condition de distance sachant que nous avons assuré par un placement de capteurs antérieur que  $\rho(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \mathbf{Y}) = \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \text{card}(\mathbf{U})$ . Pour cela, les capteurs doivent être obligatoirement placés pour prendre des mesures sur  $\mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0$ , ce que nous justifierons plus tard par le calcul. Notons enfin, que placer un capteur ainsi peut transformer un élément de  $\mathbf{X}_0$  en un élément de  $\mathbf{X}_1$  et plus particulièrement un élément de  $V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}_0)$  en un élément de  $\mathbf{X}_1$  ou de  $\mathbf{X}_s$ . Un élément de  $V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}_0)$  ne peut donc être mesuré et rester dans  $\mathbf{X}_0$ .

Il s'agit, après cette discussion, de placer les capteurs  $z$  qui réduiraient  $\mathbf{X}_0$  à  $V_{ess}(\mathbf{U}_0, \mathbf{Y}_0) \cap \mathbf{X}$ . Considérons un sommet  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_0$ , si celui-ci est un sommet d'entrée sans arc rentrant, alors une condition nécessaire et suffisante qui garantit  $\rho(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}) > \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z})$  est d'avoir  $z$  qui prenne une mesure dans l'ensemble des composantes associées aux sommets se trouvant sur un chemin  $\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}$ - $\mathbf{S}^i(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \mathbf{Y})$  direct de longueur non nulle. Cela peut être déduit des travaux effectués dans le cadre du placement de cap-

teurs pour la résolution du problème de génération de résidus [Commault et Dion, 2007] où les auteurs ont montré qu'un capteur prenant ses mesures après  $\mathbf{S}^i(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \mathbf{Y})$  est complètement inutile alors que s'il en prend au moins une seule (dans notre cas) sur un chemin  $\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}$ - $\mathbf{S}^i(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \mathbf{Y})$  direct alors il résoudreait le problème.

Néanmoins, contrairement aux sommets d'entrée, il peut y avoir des arcs rentrant sur  $\mathbf{x}_i$  à partir de sommets qui ne sont pas sur des chemins  $\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}$ - $\mathbf{S}^i(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \mathbf{Y})$  directs, ou tout simplement n'allant pas vers des sommets de sortie. Toutes les mesures qui peuvent être effectuées sur de tels sommets, qui sont inclus dans  $\mathbf{C}_i \cap \mathbf{X}_\emptyset$ , où  $\mathbf{C}_i$  est la composante fortement connexe à laquelle appartient  $\mathbf{x}_i$ , peuvent aussi satisfaire à  $\rho(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z}) > \rho(\mathbf{U}, \mathbf{Y} \cup \mathbf{Z})$ .

Aussi, à chaque sommet  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_\emptyset$ , nous associons un ensemble de sommets noté  $\delta_i$  défini par :

$$\delta_i = \left\{ \mathbf{v}_j \in \mathbf{X}_0 \cup \mathbf{U}_0, \mathbf{v}_j \text{ est couvert par un chemin } \mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\} - (\mathbf{S}^i(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_i\}, \mathbf{Y}) \setminus \mathbf{U}) \text{ direct} \right\} \cup (\mathbf{C}_i \cap \mathbf{X}_\emptyset).$$

Sur ces ensembles de sommets, nous appliquons la relation d'ordre partielle d'inclusion " $\subseteq$ " ce qui nous permet d'obtenir la condition nécessaire et suffisante suivante pour le recouvrement de la condition de distance par ajout de capteurs :

**Proposition 3.6.** *Soit le système linéaire structuré  $\Sigma_\Lambda$  représenté par le graphe orienté  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ . Supposons que les conditions de connectivité à la sortie et de couplage soient satisfaites. Afin de recouvrir la condition de distance, il est nécessaire et suffisant que les capteurs ajoutés mesurent au moins une composante associée à un élément dans chaque ensemble  $\delta_i$ , associé à chaque  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_\emptyset$  et constituant un élément minimal par rapport à la relation " $\subseteq$ ".*

**Preuve :** La preuve de la proposition est immédiate, sachant que pour tout sommet  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_\emptyset$  seulement un capteur est nécessaire et suffisant s'il mesure une combinaison linéaire de composantes incluant au moins un élément associé à un sommet de  $\delta_i$ . Ainsi, pour le recouvrement de la condition de distance, les capteurs ajoutés doivent prendre au moins une mesure dans chaque ensemble  $\delta_i$ ,  $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_\emptyset$ . L'utilisation de la relation d'ordre

partielle d'inclusion permet de dire que cette condition est équivalente à celle qui imposerait de mesurer un élément au moins de chaque ensemble  $\delta_i$  constituant des ensembles minimaux par rapport à la relation " $\subseteq$ ".  $\triangle$

La proposition 3.6 précise la localisation des capteurs additionnels mais non leur nombre. En fait, là aussi, un seul capteur est suffisant théoriquement pour le recouvrement de la condition de distance s'il mesure une combinaison linéaire de composantes avec au moins une prise dans chaque ensemble  $\delta_i$  constituant des ensembles minimaux par rapport à la relation " $\subseteq$ ".

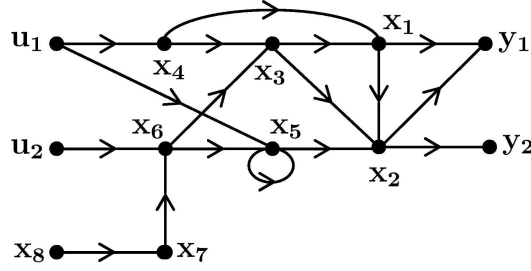


FIG. 3.6 – Exemple 3.6

**Exemple 3.6.** *Considérons le système linéaire représenté par le graphe orienté de la figure 3.6. Les ensembles donnés selon la définition 2.2 sont  $\Delta_0 = \mathbf{X} = \mathbf{X}_0$ ,  $\mathbf{X}_1 = \emptyset$ ,  $\mathbf{U}_0 = \mathbf{U}$ ,  $\mathbf{U}_1 = \emptyset$ ,  $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{Y}$  et  $\mathbf{Y}_1 = \emptyset$ .*

*Nous constatons que l'ensemble de sommets essentiels est  $\mathbf{V}_{ess}(\mathbf{U}, \mathbf{Y}) = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_6, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$ . Il est alors aisé de voir par le corollaire 2.5 que l'ensemble des sommets non observables est  $\mathbf{X}_\emptyset = \{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_8\}$ . Calculons maintenant les ensembles  $\delta_i$ . Prenons, par exemple, le sommet  $\mathbf{x}_3$ . Le séparateur d'entrée avec  $\mathbf{x}_3$  comme sommet d'entrée est donné par  $\mathbf{S}^i(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_3\}, \mathbf{Y}) = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ . Nous pouvons noter que des chemins  $\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_3\} - \mathbf{S}^i(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_3\}, \mathbf{Y})$  directs peuvent couvrir les sommets  $\delta_3 = \{\mathbf{x}_3, \mathbf{u}_1, \mathbf{x}_4, \mathbf{u}_2, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_5\}$ . En faisant la même démarche pour les autres sommets de  $\mathbf{X}_\emptyset$ , nous obtenons  $\delta_4 = \{\mathbf{x}_4, \mathbf{x}_3, \mathbf{u}_2, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_5\}$ ,  $\delta_5 = \{\mathbf{x}_5, \mathbf{u}_2, \mathbf{x}_6, \mathbf{x}_3, \mathbf{u}_1, \mathbf{x}_4\}$ . Notons maintenant que  $\mathbf{S}^i(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_7\}, \mathbf{Y}) = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{x}_6\}$ , alors les chemins  $\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_7\} - \mathbf{S}^i(\mathbf{U} \cup \{\mathbf{x}_7\}, \mathbf{Y})$  non nuls directs couvrent  $\delta_7 =$*

$\{\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_7\}$ . Pour le sommet  $\mathbf{x}_8$ ,  $\delta_8 = \{\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_7, \mathbf{x}_8\}$ . En appliquant les relations d'inclusion nous trouvons qu'il existe deux ensembles maximaux  $\{\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4, \mathbf{x}_5, \mathbf{x}_6, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$  et  $\{\mathbf{u}_2, \mathbf{x}_7\}$ . Nous pouvons recouvrir la condition de distance et, pour cet exemple, l'observabilité forte si nous mesurons une composante dans chaque sous-ensemble maximal, par exemple,  $x_7$  et  $x_5$  ou  $x_7$  et  $x_3$ . Cependant, la quantité de mesures n'est pas précisée par la proposition 3.6. En rajoutant une seule mesure d'une combinaison linéaire de  $x_7$  et  $x_5$ , par exemple  $z = \alpha x_7 + \gamma x_5$ , et le système devient fortement observable.

### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé le problème du placement de capteurs pour le recouvrement de la propriété d'observabilité forte d'une partie donnée ou de tout l'état d'un système à entrées inconnues. Cette étude s'inspire des résultats récents [Commault *et al.*, 2005b, Commault *et al.*, 2006, Commault et Dion, 2007] obtenus sur le placement de capteurs pour l'observabilité simple ou pour la détection et la localisation de défauts. Elle a pour objectif de proposer des stratégies de placement de capteurs sous forme de conditions nécessaires et/ou suffisantes basées sur une représentation graphique du système. Plus précisément, pour le problème de recouvrement de l'observabilité forte d'une partie de l'état, nous avons établi des conditions nécessaires reposant sur la notion de recouvrement de la condition de connectivité à la sortie. Ensuite, nous avons énoncé des conditions graphiques suffisantes sous la forme d'un système d'équations. La stratégie proposée se fonde sur l'utilisation multiple de la fonction  $\beta$  (cf. définition 2.4) dont l'implémentation algorithmique n'est pas aisée. Par ailleurs, cette stratégie présente différentes faiblesses parmi lesquelles une non exhaustivité due à des conditions qui ne sont que suffisantes et au fait qu'elle ne permet pas de savoir quel est le nombre minimal de capteurs additionnels nécessaires.

Le second problème abordé est celui du placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité forte de tout l'état du système. Le problème a été décomposé en trois étapes. La résolution de chaque étape repose sur des solutions ou des algorithmes connus

tels que la décomposition de Dulmage-Mendelsohn pour la seconde étape ou l'algorithme de relaxation de Ford-Fulkerson utile à la détermination de séparateurs pour la dernière étape. D'une part, les conditions obtenues pour la localisation de capteurs sont nécessaires et suffisantes et l'on arrive ainsi à caractériser, si cela s'avère nécessaire, toutes les localisations de capteurs additionnels résolvant le problème considéré. D'autre part, d'un point de vue algorithmique, la stratégie proposée est plus aboutie et conduit à une implémentation d'ordre de complexité polynômial. Par ailleurs, le nombre minimal de capteurs qu'il est nécessaire et suffisant de rajouter est celui qui permet le recouvrement de la propriété de couplage si celle-ci n'est évidemment pas vérifiée. En effet, il est possible de résoudre les deux problèmes de recouvrement des conditions de connectivité à la sortie et de distance avec un capteur déjà nécessaire à la résolution du problème de couplage si on lui impose de prendre en plus des mesures dans certains ensembles.

Avec cette étude menée sur le problème de placement de capteurs, il est possible de générer une liste de toutes les configurations de capteurs permettant de recouvrir l'observabilité forte de l'état. Malheureusement, ce problème ne pourrait être résolu que par un algorithme d'ordre de complexité exponentiel. De plus, l'utilité de cette liste reste à prouver. En revanche, en utilisant la fonction  $\beta$  associée à une fonction coût de placement de capteurs, il serait aisé de générer un outil comparatif des différentes configurations possibles de capteurs, utile à la conception même du système. La fonction  $\beta$  étant une image de la dimension de l'espace d'observabilité étendu (cf. lemme 2.7), elle pourrait refléter l'efficacité d'une configuration de capteurs.





# 4

## Boîte à outils d'analyse structurelle LISA et divers aspects algorithmiques

### 4.1 Introduction

L'ambition première de la boîte à outils d'analyse structurelle LISA est de proposer à la communauté scientifique intéressée un logiciel développé sur plateforme libre, regroupant les principaux résultats d'analyse structurelle connus pour les systèmes linéaires. La seconde ambitions de cette boîte à outils est de mettre en oeuvre les résultats théoriques que notre équipe développe pour les systèmes bilinéaires avec comme contrainte de n'utiliser que des algorithmes ayant un ordre de complexité non exponentiel. Cette dernière exigence garantit l'applicabilité de notre approche aux systèmes de grande dimension. Ainsi, nous privilégions l'utilisation d'algorithmes classiques de la théorie des graphes en les adaptant à notre cadre d'utilisation.

LISA a été créé en collaboration avec M. Théodore MADER qui a effectué au CRAN un stage de 12 semaines, entre avril et juin 2006, dans le cadre de sa 2<sup>ème</sup> année au Swiss Federal Institute of Technology Zurich (ETH). L'existence de LISA doit beaucoup à ses connaissances très précieuses en informatique et en algorithmique.

Une autre boîte à outils d'analyse structurelle SATOOL a aussi vu le jour récemment

dans la communauté [Blanke et Lorentzen, 2006]. Cette dernière est essentiellement basée sur des graphes bipartis et est dédiée particulièrement aux propriétés de diagnostic. Comparativement, LISA a pour finalité de regrouper une plus grande partie de propriétés structurelles à analyser, telles la diagnosticabilité mais aussi l'observabilité, la commandabilité... D'autre part, les systèmes sont représentés dans LISA principalement par des graphes orientés bien que des procédures s'appuient parfois sur des graphes bipartis. Enfin, LISA, contrairement à SATOOL, n'a pas été conçue pour être une boîte à outils de MATLAB®. En effet, LISA est un logiciel indépendant pouvant avoir des interactions avec d'autres logiciels, pour l'instant de calcul formel.

Dans ce chapitre, nous commençons par un descriptif général des diverses fonctionnalités de LISA. Nous détaillons ensuite les algorithmes de base déjà implémentés tels que le calcul de la taille maximale d'un lien, les chemins disjoints, ... Le paragraphe suivant montre comment ces éléments de base ont été associés pour la construction d'outils dédiés à l'analyse de l'observabilité et de la diagnosticabilité. Enfin, avant de présenter une brève conclusion, nous discutons des différents résultats d'analyse structurelle qui seraient assez aisément implémentables et de l'ordre de complexité des algorithmes auxquels il faudrait avoir recours.

## 4.2 Description générale de LISA

LISA est une boîte à outils d'analyse structurelle graphique dédiée aux systèmes linéaires et bilinéaires structurés. Il est important de noter que LISA n'est pas un produit achevé et est toujours en cours d'élaboration. Nos travaux de thèse étant exclusivement consacrés aux systèmes linéaires, nous ne présentons en détail dans ce manuscrit que les fonctionnalités liées aux systèmes linéaires. Pour la partie concernant les systèmes bilinéaires, quelques explications sont données dans [Martinez-Martinez *et al.*, 2007] sachant que cette partie est plus en lien avec les travaux de thèse de M. Sébastien CANITROT.

Étant donné que LISA a comme objectif d'être appliqué à des systèmes de grande dimension et que, dans ce cas, la majorité des problèmes à résoudre peuvent être assez coûteux

en temps et en complexité de calcul (trouver des chemins disjoints dans un graphe orienté par exemple...), il nous a semblé crucial d'utiliser un langage de programmation avec un coût faible d'exécution (overhead), convivial et assez proche du niveau du code machine. Le langage C/C++ nous a paru assez adapté, il est très flexible dans la création d'objets ou de classes avec un sacrifice moindre de temps de calcul propre et de performances en général. Concernant l'interface graphique utilisateur, la bibliothèque libre QT 4.0 a été choisie car elle est flexible, très portable et assez simple d'utilisation pour la création d'interfaces graphiques. La simplicité de programmation et l'évolutivité ont été pour nous des critères cruciaux dans le choix de nos outils de programmation. Le fait en plus d'adopter des plateformes libres de droits, nous permet d'envisager un partage et une diffusion plus simples auprès de la communauté scientifique. Par ailleurs, LISA a été conçue pour s'exécuter aussi bien sur les systèmes d'exploitation Microsoft Windows<sup>®</sup> 98, XP et NT que sur LINUX. Enfin, une attention particulière a été portée à la documentation. Toutes les classes, les méthodes et les objets utilisés sont documentés. La gestion de la documentation est effectuée avec l'outil *doxygen* qui est un générateur de documentations pour code source. Cette documentation se présente sous la forme de pages html regroupées dans un répertoire dédié.

LISA est subdivisé en deux parties :

- l'interface graphique utilisateur,
- les diverses procédures de calcul et les classes d'objet utilisées : Graph, StateRecorder, MatrixExporter,...

La classe principale sur laquelle résident la majorité de nos algorithmes est la classe *Graph*. Elle contient le graphe orienté défini par l'utilisateur et fournit des fonctions permettant à ce dernier de procéder à différents calculs détaillés dans les sections suivantes.

#### *- Utilisation rapide de LISA*

L'interface utilisateur est présentée à la figure 4.1. L'utilisateur doit tout d'abord choisir le type de systèmes avec lequel il souhaite travailler : linéaire ou bilinéaire (figure 4.2).

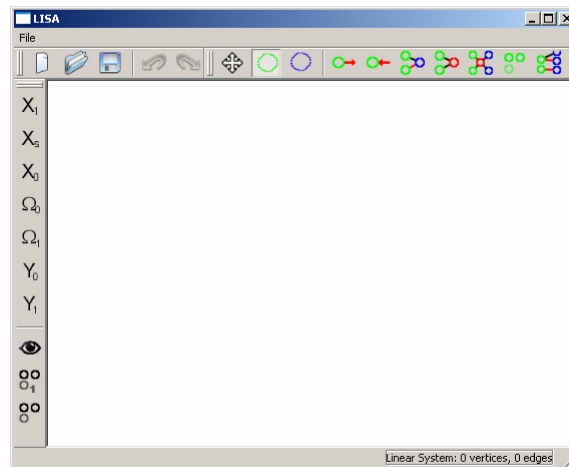


FIG. 4.1 – Interface graphique utilisateur

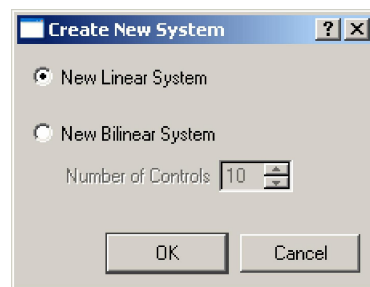


FIG. 4.2 – Sélection du type de système

Ensuite, il est possible de créer simplement le graphe en posant des sommets et en choisissant leur type comme le montre la figure 4.3, 4 types de sommets existent : les entrées (connues), les perturbations (inconnues et représentant des défauts ou toute autre entrée inconnue), les sommets état et les sommets sortie.

Les arcs peuvent ensuite être placés entre les différents sommets avec la souris. Évidemment, des sécurités ont été programmées pour éviter les arcs sortant de sommets de sortie ou rentrant sur des sommets d'entrée.

Dans la fenêtre principale, plusieurs outils sont disponibles pour permettre à l'utilisateur de copier, effacer ou transformer des sommets existants ce qui rend la manipulation des graphes assez conviviale. Par ailleurs, les graphes peuvent être sauvegardés pour être réutilisés, imprimés sous différents formats (eps, ps, png). Enfin, les matrices structu-

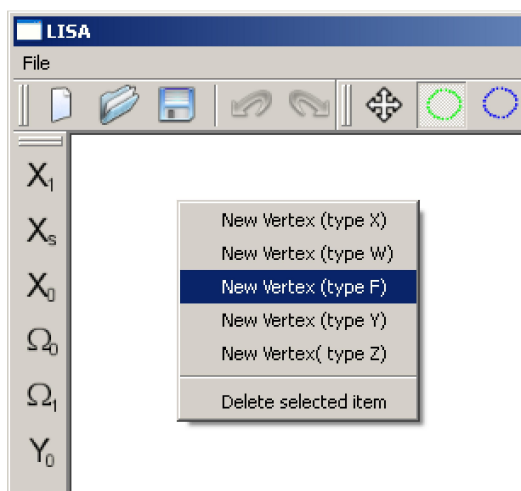


FIG. 4.3 – Choix des types de sommets

rées associées au graphe tracé peuvent être exportées, via l'outil *MatrixExporter*, pour être exploitées sur les logiciels de calcul formel MAPLE et MUPAD. En effet, vu que nous travaillons avec des systèmes structurés, caractérisés par des paramètres sans valeur numérique, il nous a semblé plus pertinent de travailler avec des logiciels de calcul formel. Après ce bref aperçu de LISA, nous abordons ci-dessous les différents programmes qui ont été implémentés à ce jour et les différentes propriétés qu'ils permettent d'étudier.

### 4.3 Algorithmes de base de LISA

Afin de faire l'analyse des propriétés structurelles de systèmes linéaires et bilinéaires, LISA utilise des algorithmes de base. Ces briques élémentaires ont été conçues pour être portables et implémentables dans d'autres contextes dans un souci d'évolutivité. Ci-dessous, nous exposons les principales routines relatives aux systèmes linéaires. Nous explicitons sommairement les ordres de complexité des algorithmes utilisés sans en donner les détails techniques qui seraient rébarbatifs d'une part et pour lesquels nous ne sommes pas très spécialistes d'autre part. En effet, dans la mesure du possible, nous avons retranscrit à notre contexte des algorithmes existants issus de la théorie classique des graphes.

À la figure 4.4 nous présentons l'interface du logiciel LISA et les différents icônes associés

aux routines expliquées ci-dessous.

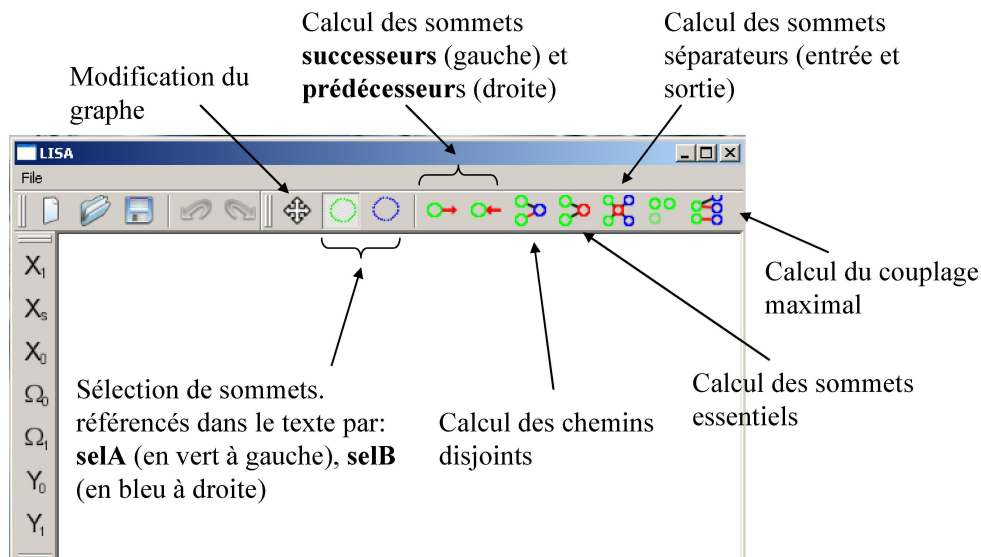



FIG. 4.4 – Icônes servant au calcul des propriétés de base

### Calcul des sommets successeurs

Cet outil permet de calculer et de mettre en évidence les sommets successeurs d'un ensemble de sommets donné  $V_1$ . Ce dernier est d'abord sélectionné avec l'outil de sélection de sommets accessible par l'icône  ("selA"). L'ensemble des sommets  $v$  tels que  $\rho(V_1, v) \neq 0$  est alors déterminé et mis en évidence par une coloration en bleu du pourtour de chaque sommet concerné. L'algorithme utilisé pour faire le calcul est issu de la bibliothèque Boost Library (<http://www.boost.org>). L'ordre de complexité de cet algorithme est en  $O(M)$ , où  $M$  représente ici le nombre d'arcs total du graphe.

**Exemple 4.1.** La figure 4.5 montre comment le logiciel met en évidence (en rouge sur le logiciel et entouré par une ligne pointillée dans ce mémoire) les sommets successeurs du sommet choisi  $w_2$ .

### Calcul des sommets prédécesseurs

Cet algorithme permet de calculer et de mettre en évidence les sommets prédécesseurs

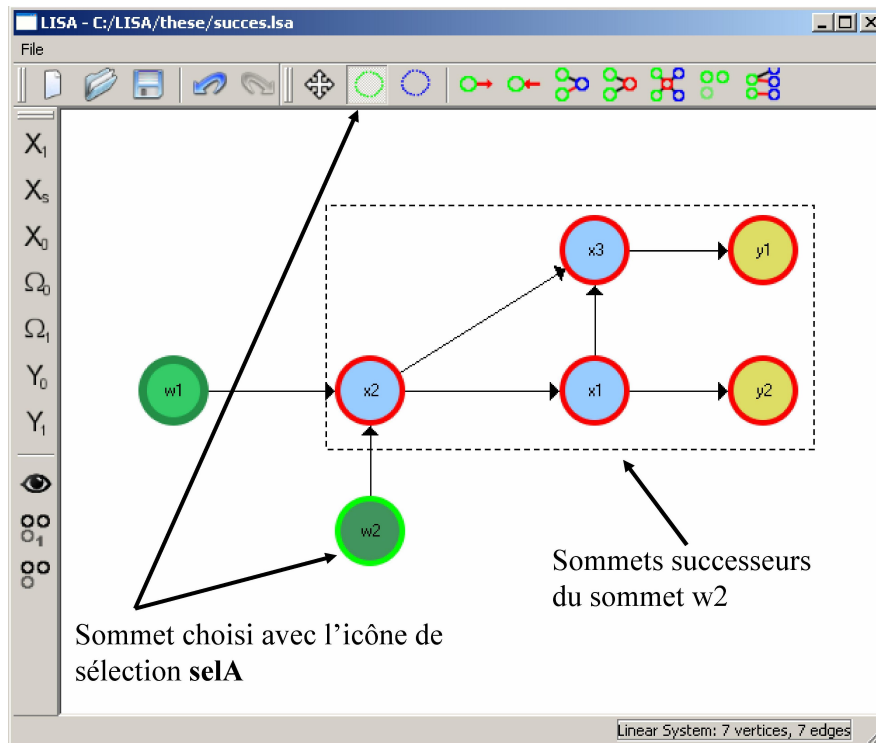






FIG. 4.5 – Calcul de successeurs

d'un ensemble de sommets donné et sélectionné par l'icône de sélection  ("selA"). L'algorithme utilisé provient là aussi de la bibliothèque Boost Library. Son ordre de complexité est aussi en  $O(M)$ .

**Exemple 4.2.** La figure 4.6 montre comment le logiciel met en évidence (en rouge sur le logiciel et entouré par une ligne pointillée dans ce mémoire) les sommets prédécesseurs du sommet choisi  $y_2$ .

 **Nombre maximal de chemins disjoints entre deux ensembles de sommets**  
Après sélection de deux ensembles de sommets  $V_1$  et  $V_2$  respectivement grâce aux icônes de sélection  ("selA") et  ("selB"), cet algorithme retourne la taille du lien maximal entre  $V_1$  et  $V_2$ . Pour cela, une représentation interne équivalente à celle du graphe orienté défini par l'utilisateur est utilisée. En effet, le calcul du nombre maximal de chemins disjoints revient à un calcul de flot maximal dans un graphe orienté particulier. Ainsi, il



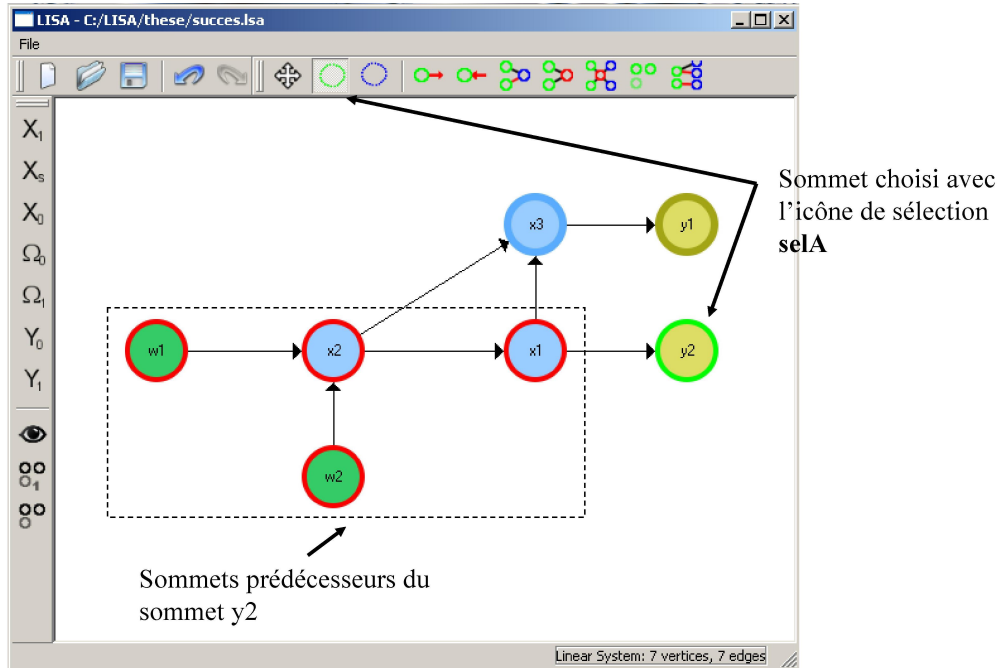


FIG. 4.6 – Calcul de prédécesseurs

est associé au système un nouveau graphe noté  $\mathcal{G}_a(\Sigma_\Lambda)$  sur lequel est appliqué l'algorithme de calcul de flot maximal.  $\mathcal{G}_a(\Sigma_\Lambda)$  est construit en "éclatant" chaque sommet  $\mathbf{v}$  de  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$  en deux sommets  $\mathbf{v}'$  et  $\mathbf{v}''$  liés par un arc  $(\mathbf{v}', \mathbf{v}'')$  de capacité unitaire. Chaque arc  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$  de  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$ , sauf évidemment les arcs partant de  $\mathbf{V}_2$  et ceux arrivant à  $\mathbf{V}_1$ , est transformé en un arc  $(\mathbf{v}_1'', \mathbf{v}_2')$  de capacité infinie dans  $\mathcal{G}_a(\Sigma_\Lambda)$ . De plus, on rajoute un sommet source  $\mathbf{s}^+$  duquel un arc de capacité infinie part vers chaque sommet entrée  $\mathbf{v}_i'$  si  $\mathbf{v}_i' \in \mathbf{V}_1$ . On rajoute aussi un sommet puits  $\mathbf{s}^-$  sur lequel arrivent des arcs de capacité infinie partant de chaque sommet  $\mathbf{v}_i''$  si  $\mathbf{v}_i'' \in \mathbf{V}_2$ .

La taille d'un lien  $\mathbf{V}_1$ - $\mathbf{V}_2$  maximal dans  $\mathcal{G}(\Sigma_\Lambda)$  est égale à la valeur du flot maximal dans  $\mathcal{G}_a(\Sigma_\Lambda)$  [Ford et Fulkerson, 1962, Murota, 1987]. L'algorithme utilisé est une partie de l'algorithme de Ford-Fulkerson classique [Bang-Jensen et Gutin, 2006]. Le nombre de recherches de chemins est d'ordre de complexité  $O(N)$ , où  $N$  est le nombre de sommets du graphe. L'ordre de complexité total de chaque recherche de chemin est en  $O(N\sqrt{M})$ . Ainsi, l'algorithme de calcul du nombre maximal de chemins disjoints entre  $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{V}_2$  a un ordre de complexité total de  $O(N^2\sqrt{M})$ .

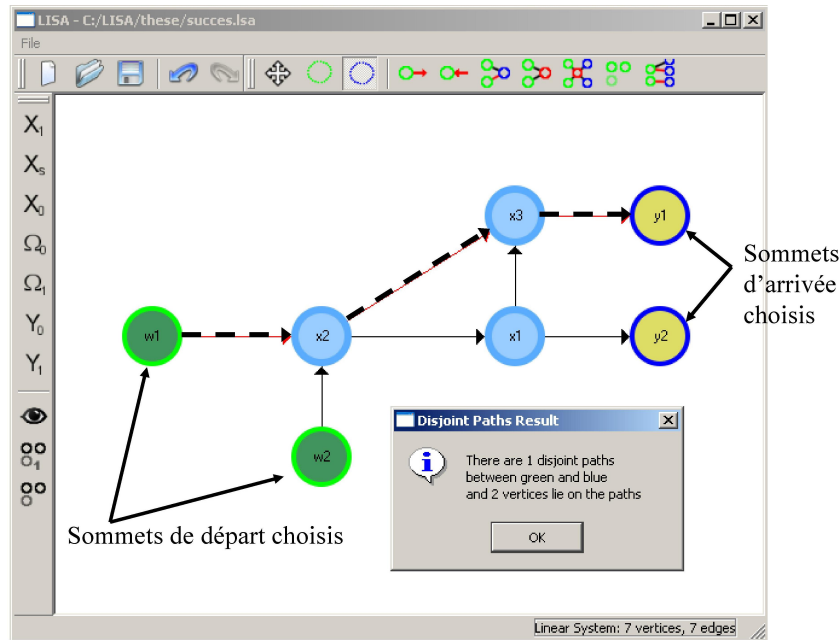




FIG. 4.7 – Calcul de chemins disjoints

**Exemple 4.3.** À la figure 4.7, le résultat obtenu pour le nombre maximal de chemins disjoints entre les ensembles  $\{w_1, w_2\}$  et  $\{y_1, y_2\}$  est montré. Il se trouve qu'il y a seulement un chemin disjoint montré en rouge sur le logiciel et en trait tirets dans ce document. À la figure 4.8, le graphe auxiliaire pour le calcul des chemins disjoints est généré suivant la procédure présentée ci-dessus. Le flot et la capacité sont indiqués par la relation "flot/capacité" à côté de chaque arc concerné. Sur ce graphe, le résultat est plus clair. Notons que le flot maximal dans le graphe auxiliaire est restreint à 1, puisque l'arc  $(x'_1, x''_1)$  a une capacité maximale de 1.

#### Calcul de l'ensemble de sommets essentiels $V_{ess}(V_1, V_2)$

Après sélection de deux ensembles de sommets  $V_1$  et  $V_2$  respectivement grâce aux icônes de sélection  ("selA") et  ("selB"), cet algorithme calcule et met en évidence l'ensemble des sommets communs à tous les liens de taille maximale entre  $V_1$  et  $V_2$ . Le calcul s'effectue en faisant le constat simple que le nombre maximal de chemins entre  $V_1$  et  $V_2$  diminue si nous effaçons tous les arcs arrivant et partant d'un sommet essentiel. En

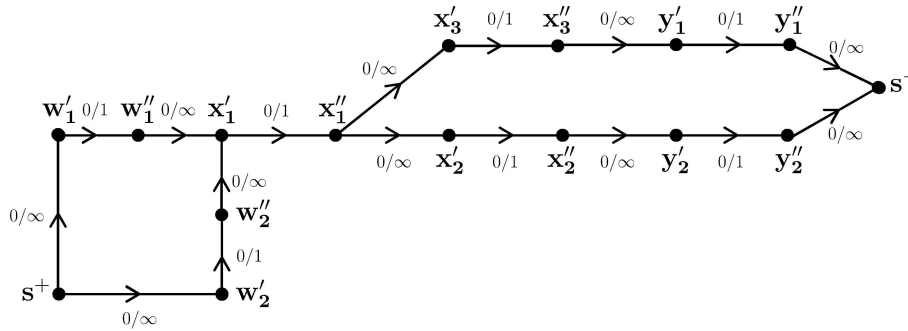


FIG. 4.8 – Graphe auxiliaire pour le calcul de chemins disjoints de la figure 4.6

revanche, ce nombre ne varie pas si nous effaçons les arcs arrivant et partant d'un sommet non essentiel. Ainsi, la détermination de l'ensemble des sommets essentiels consiste en  $N$  calculs et comparaisons de tailles de liens maximaux. L'ordre de complexité pour ce calcul est  $N$  fois l'ordre de complexité de l'algorithme utilisé pour le calcul du nombre maximal de chemins disjoints, c'est à dire  $O(N^3\sqrt{M})$ .

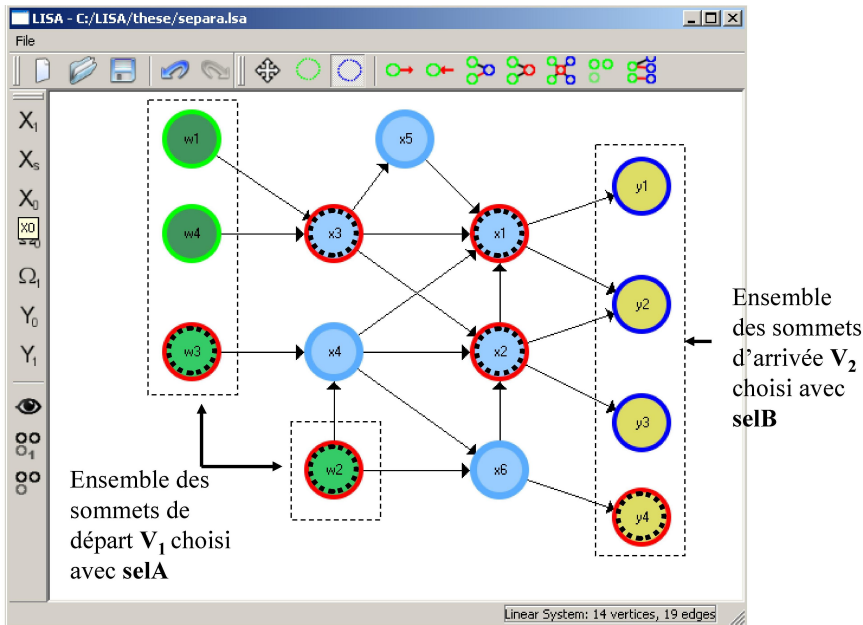






FIG. 4.9 – Calcul de sommets essentiels

**Exemple 4.4.** À la figure 4.9, il est montré le résultat donné par l'algorithme déterminant

les sommets essentiels. D'abord, les sommets de départ  $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$  et  $\mathbf{w}_4$  sont sélectionnés avec  (“selA”). Ensuite, les sommets d'arrivée  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$  et  $\mathbf{y}_4$  sont sélectionnés avec  (“selB”). Finalement, les sommets essentiels sont affichés en rouge sur le logiciel. La figure 4.9 montre les sommets essentiels entourés par une ligne pointillée.



### Calcul de séparateurs d'entrée et de sortie

Après sélection de deux ensembles de sommets  $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{V}_2$  respectivement grâce aux icônes de sélection  (“selA”) et  (“selB”). Cet algorithme calcule et met en évidence les séparateurs d'entrée et de sortie.

Le calcul se fait de la manière suivante : d'abord, nous calculons le nombre maximal de sommets disjoints entre  $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{V}_2$ . Ensuite, nous calculons l'ensemble des sommets essentiels  $V_{ess}(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$ . Pour trouver le séparateur d'entrée, il est suffisant de prendre les sommets essentiels les plus proches de la source dans le graphe auxiliaire. Le séparateur de sortie est construit par symétrie en considérant les sommets essentiels les plus proches du sommet puits. Comme nous l'avons détaillé précédemment, la détermination de l'ensemble de sommets essentiels nécessite un algorithme d'ordre de complexité  $O(N^3\sqrt{M})$ . La détermination des sommets les plus proches de la source et du puits, qui se fait en série avec l'algorithme précédent, nécessite un ordre de complexité en  $O(N \log_2(N))$ . Ainsi, l'ordre de complexité total de l'algorithme permettant le calcul des séparateurs d'entrée et de sortie est de  $O(N^3\sqrt{M})$ .

**Exemple 4.5.** À la figure 4.10, les séparateurs d'entrée et de sortie sont montrés. La même démarche que pour les sommets essentiels est appliquée. Les sommets appartenant aux séparateurs d'entrée et de sortie sont montrés en rouge sur le logiciel. La figure 4.10 montre les sommets des séparateurs entourés par une ligne pointillée. Deux séparateurs peuvent être distingués. Le séparateur d'entrée, composé par les sommets  $\mathbf{x}_3, \mathbf{w}_2$  et  $\mathbf{w}_3$ , et le séparateur de sortie, composé par les sommets  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  et  $\mathbf{y}_4$ .



### Calcul de la taille du couplage maximal entre deux ensembles de sommets

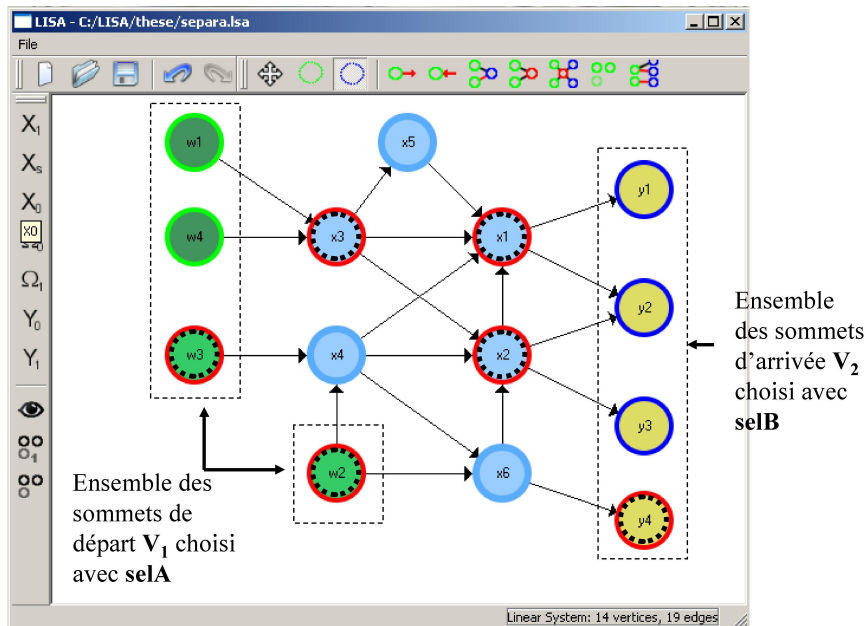







FIG. 4.10 – Calcul de séparateurs d’entrée et de sortie

Après sélection de deux ensembles de sommets  $\mathbf{V}_1$  et  $\mathbf{V}_2$  respectivement grâce aux icônes de sélection  (“selA”) et  (“selB”), cet algorithme calcule  $\theta(\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2)$  *i.e.* le nombre maximal d’arcs  $v$ -disjoints entre ces deux ensembles.

Pour cette fonctionnalité, nous construisons un graphe biparti sur lequel nous appliquons un calcul de flot maximal. La construction du graphe biparti nécessite un algorithme d’ordre de complexité  $O(M + N)$ . Le calcul du flot maximal nécessite, comme nous l’avons vu, un algorithme d’ordre de complexité en  $O(N^2\sqrt{M})$ . Ainsi, l’ordre de complexité total de l’algorithme proposé pour le calcul de la taille du couplage maximal est en  $O(N^2\sqrt{M})$ .

**Exemple 4.6.** *Un exemple de calcul de couplage maximal entre deux ensembles de sommets est montré à la figure 4.11. Après la construction du graphe, nous sélectionnons l’icône de couplage maximal . Une fenêtre s’ouvre en demandant l’ensemble de sommets  $\mathbf{V}_1$ . Cet ensemble est sélectionné avec l’icône de sélection  (“selA”). Ensuite, il suffit d’appuyer sur "Next" pour sélectionner l’ensemble  $\mathbf{V}_2$  avec l’icône de sélection  (“selB”). Finalement, "Finish" est appuyée et le résultat est montré par une fenêtre qui*

indique la taille du couplage maximal entre les ensembles  $V_1$  et  $V_2$  sélectionnés.

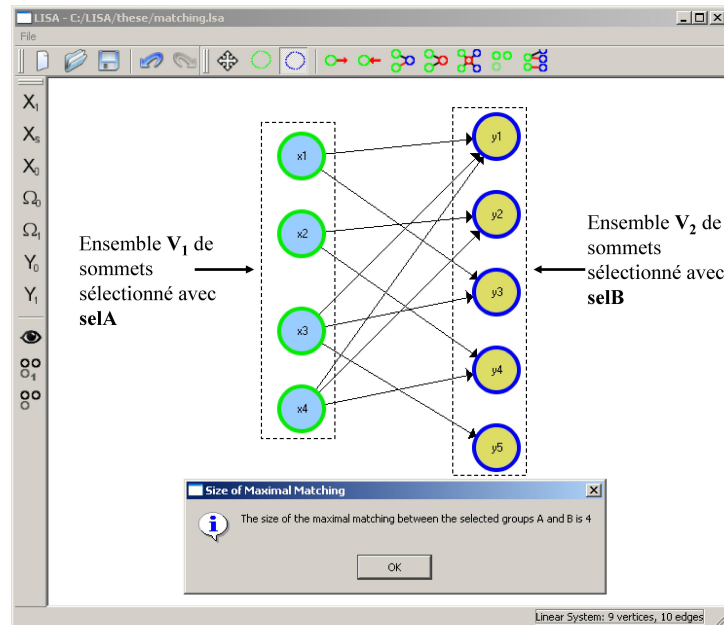


FIG. 4.11 – Calcul du couplage maximal entre deux ensembles de sommets

## 4.4 Algorithmes pour l'analyse des propriétés d'observabilité et de diagnosticabilité

Les algorithmes de base présentés aux paragraphes précédents sont utilisés comme des briques élémentaires afin de construire les différents tests d'analyse des propriétés structurelles d'observabilité et de diagnosticabilité que nous présentons ci-dessous. En premier, nous présentons l'analyse de la propriété d'observabilité totale de l'entrée et de l'état détaillée au paragraphe 2.2.3. Ensuite, nous présentons l'implémentation des conditions d'analyse du problème de localisation de défauts traité dans [Commault *et al.*, 2002a].

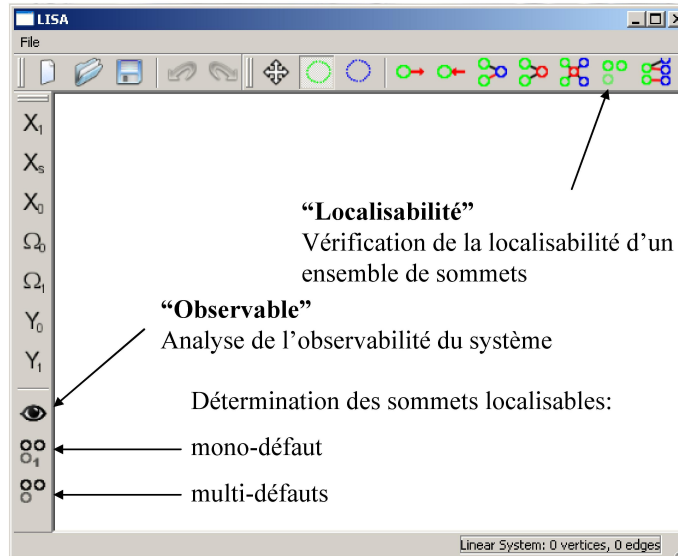



FIG. 4.12 – Icônes servant à la vérification des propriétés d'observabilité et de diagnosticabilité

#### 4.4.1 Implémentation de l'analyse de l'observabilité de l'état et de l'entrée

L'icône  "Observable" lance la vérification des conditions suivantes issues du corollaire 2.5 :

**Cond1** : Chaque sommet de  $\mathbf{X} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{W}$  est le prédécesseur d'un sommet de  $\mathbf{Y}$  (condition de connectivité).

**Cond2** :  $\mathbf{X}_0 \cup \Omega_0 \subseteq V_{ess}(\Omega_0, \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s)$

**Cond3** :  $\theta(\mathbf{W} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{X}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) = n + q$

où les ensembles  $\mathbf{F}$  et  $\mathbf{W}$  représentent l'ensemble des entrées inconnues noté  $\mathbf{U}$  dans notre étude théorique du chapitre 2. Cette décomposition est liée au fait que le logiciel LISA a été conçu avec un objectif de diagnostic, donc les entrées inconnues représentent tant des défauts que des perturbations qu'il est important de distinguer. De même  $\Omega_0$  représente ici l'ensemble noté  $\mathbf{U}_0$  dans le chapitre 2.

Afin de vérifier la condition **Cond1**, l'algorithme calcul de sommets "prédécesseurs" (page 88) est utilisé. Nous vérifions que tous les sommets de  $\mathbf{X} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{W}$  sont bien pré-

décresseurs de  $\mathbf{Y}$ . L'ordre de complexité de l'algorithme vérifiant la condition **Cond1** est donc en  $O(M)$ .


Les étapes principales à la vérification de la condition **Cond2** sont :

1. la mise en oeuvre de la décomposition décrite à la définition 2.2,
2. le calcul de l'ensemble de sommets essentiels  $V_{ess}(\Omega_0, \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s)$ ,
3. enfin, la vérification de l'inclusion  $\mathbf{X}_0 \cup \Omega_0 \subseteq V_{ess}(\Omega_0, \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s)$ .

La décomposition s'effectue par  $N$  calculs de taille maximale de chemins entre deux ensembles, d'un calcul d'un ensemble de séparateurs de sortie et de  $N$  calculs de couplage maximal. Ainsi, l'ordre de complexité de l'algorithme permettant la vérification de l'observabilité générique de l'état et de l'entrée est en  $O(N^3\sqrt{M})$ .

Enfin, la vérification de la condition **Cond3** nécessite le calcul de la taille d'un couplage maximal entre  $\mathbf{X} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{W}$  et  $\mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$ . Aussi, l'ordre de complexité de l'algorithme utilisé pour la vérification de la condition **Cond3** est en  $O(N^2\sqrt{M})$ .

Les trois conditions étant vérifiées en série, l'ordre de complexité total pour l'analyse de l'observabilité de l'entrée et de l'état est en  $O(N^3\sqrt{M})$ .

**Exemple 4.7.** *La vérification de l'observabilité d'un système linéaire structuré sur LISA est très simple. Après la construction du graphe, il suffit d'appuyer sur l'icône destiné à vérifier l'observabilité (figure 4.12)  et le résultat s'affiche sur une fenêtre indiquant si le système est observable ou pas. Dans la négative, la fenêtre affiche la cause possible de la "non observabilité" ainsi que, les sommets qui ne satisfont pas les conditions d'observabilité (en rouge sur le logiciel). À la figure 4.13, ces sommets sont entourés par un trait-tiret.*

#### 4.4.2 Détectabilité et localisabilité des défauts

Les algorithmes de base de LISA permettent assez aisément d'implémenter les conditions de localisation de défauts établies dans [Commault *et al.*, 2002a]. Deux cas sont à



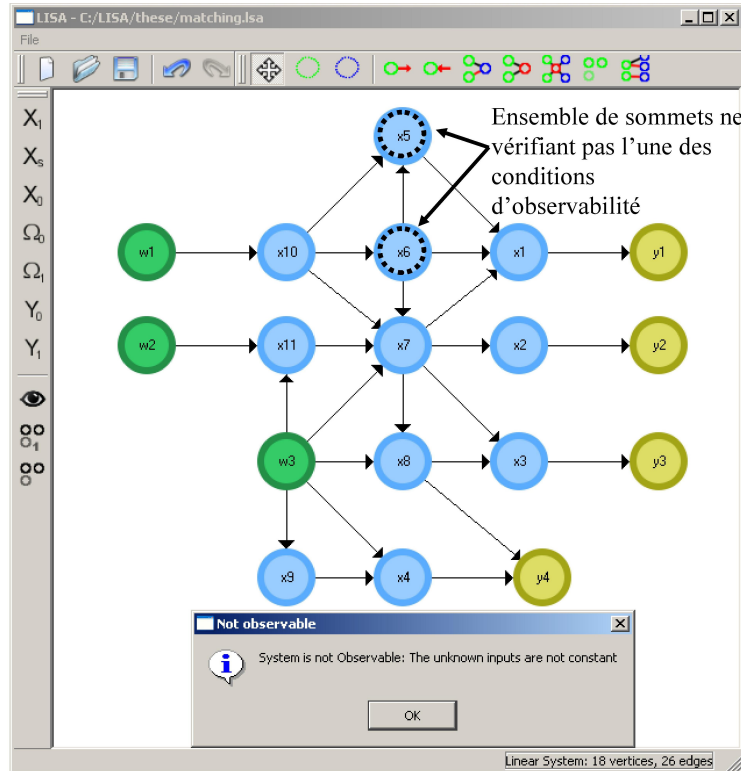


FIG. 4.13 – Vérification de l'observabilité de l'état et de l'entrée inconnue

considérer : celui mono-défaut où nous supposons que le système ne peut être soumis qu'à un seul défaut à un instant donné. Le second cas, dit multi-défauts, traduit un système pouvant être soumis à plusieurs défauts simultanément. La condition nécessaire et suffisante à implémenter est la suivante :

**Cond. Multi-défauts :** L'ensemble de défauts associé à l'ensemble  $\mathbf{F}_0 \subseteq \mathbf{F}$  est localisable en utilisant un schéma à base d'observateurs si et seulement si



$$\rho(\mathbf{F} \cup \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = \rho(\mathbf{F}_\emptyset \cup \mathbf{W}, \mathbf{Y}) + \text{card}(\mathbf{F}_0)$$


avec  $\mathbf{F}_\emptyset = \mathbf{F} \setminus \mathbf{F}_0$


**Cond. Mono-défaut :** L'ensemble de défauts associé à l'ensemble  $\mathbf{F}_0 \subseteq \mathbf{F}$  est localisable en utilisant un schéma à base d'observateurs si et seulement si


$$\forall \mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j \in \mathbf{F}_0 \quad \rho(\mathbf{F} \cup \mathbf{W} \cup \{\mathbf{f}_i, \mathbf{f}_j\}, \mathbf{Y}) > \rho(\mathbf{F} \cup \mathbf{W} \cup \{\mathbf{f}_i\}, \mathbf{Y})$$

Il faut noter que nous distinguons entre l'ensemble de défauts à localiser  $\mathbf{F}_0$  et l'ensemble total de défaut  $\mathbf{F}$ . Cela parce que, dans le cas multi-défauts, il peut être intéressant de connaître la localisabilité de certains défauts par rapport aux perturbations  $\mathbf{W}$  et les autres défauts  $\mathbf{F}_\emptyset$ . Pour le cas mono-défaut l'intérêt c'est d'étudier la localisabilité d'un défaut  $\mathbf{f}_i$  par rapport à un autre  $\mathbf{f}_j$ .

L'icône  “**Localisabilité**” permet de vérifier la condition **Cond. Multi-défauts** une fois l'ensemble  $\mathbf{F}_0$  sélectionné grâce à l'icône de sélection  (“**selA**”). L'algorithme est basé sur celui permettant le calcul de la taille d'un lien maximal. Il a un ordre de complexité en  $O(N^2\sqrt{M})$ .

**Exemple 4.8.** *Pour la vérification de la localisabilité d'un ensemble de sommets en utilisant l'icône de “localisabilité”, il suffit de sélectionner, à l'aide de  “selA” le(s) sommet(s) pour le(s)quel(s) nous souhaitons vérifier cette propriété. Le résultat s'affiche sur une fenêtre indiquant la localisabilité pour le(s) sommet(s) choisi(s). Dans l'exemple présenté à la figure 4.14, le sommet  $\mathbf{f}_1$  a été choisi pour vérification.*

L'icône  du “**Calcul de l'ensemble des défauts localisables dans le cas multi-défauts**” met en évidence tous les sommets de  $\mathbf{F}$  associés aux composantes de défauts localisables dans le cas multi-défauts. L'algorithme est basé sur celui permettant le calcul de la taille d'un lien maximal. Il a un ordre de complexité en  $O(N^3\sqrt{M})$  car il requiert  $O(N)$  fois le test précédent sur chaque composante  $\mathbf{f}_i \in \mathbf{F}$ .

L'icône  du “**Calcul de l'ensemble des défauts localisables dans le cas mono-défauts**” met en évidence tous les sommets de  $\mathbf{F}$  associés aux composantes de défauts localisables dans le cas mono-défaut. L'algorithme est basé sur celui permettant le calcul de la taille d'un lien maximal. Il a un ordre de complexité en  $O(N^3\sqrt{M})$  car il requiert  $O(N)$  fois le test **Cond. Mono-défaut** sur chaque composante  $\mathbf{f}_i \in \mathbf{F}_0$ .

LISA inclut également d'autres algorithmes dédiés à l'analyse des systèmes bilinéaires.

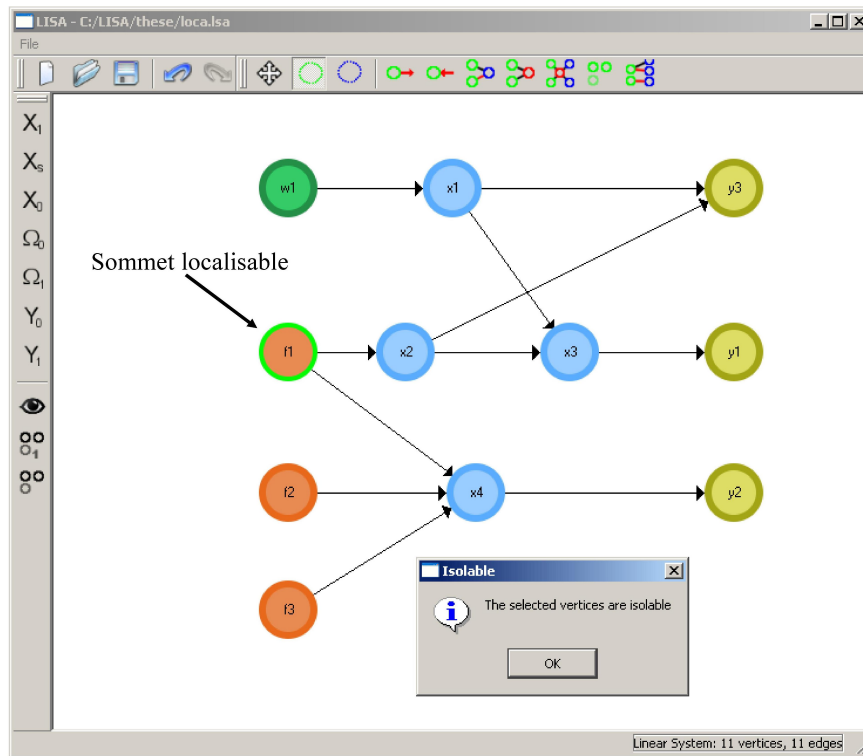


FIG. 4.14 – Localisabilité des défauts : cas mono-défaut

Comme nous pouvons le constater, c'est un logiciel ouvert et évolutif. Dans la section suivante, nous discutons des diverses propriétés que l'on pourrait implémenter à court terme dans cette boîte à outils en spécifiant l'ordre de complexité attendu.

**Exemple 4.9.** La figure 4.15 illustre sur un exemple le calcul de l'ensemble de défauts localisables dans le cas multi-défauts. Les sommets localisables sont montrés en rouge sur le logiciel. Ils sont entourés par un trait-tiret sur la figure. Dans le cas multi-défauts, les sommets  $\mathbf{f}_1$  et  $\mathbf{f}_2$  sont localisables puisque nous pouvons constater que  $\rho(\mathbf{F} \cup \mathbf{W}, \mathbf{Y}) = 3$ ,  $\rho(\mathbf{W}, \mathbf{Y}) = 1$  et  $\text{card}(\mathbf{F}_0) = 2$  sachant que  $\mathbf{F}_0 = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}$ . Pour le cas mono-défaut nous pouvons constater que  $\rho(\mathbf{F} \cup \mathbf{W} \cup \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2\}, \mathbf{Y}) = 3$  est plus grand que  $\rho(\mathbf{F} \cup \mathbf{W} \cup \{\mathbf{f}_1\}, \mathbf{Y}) = 2$  par exemple.

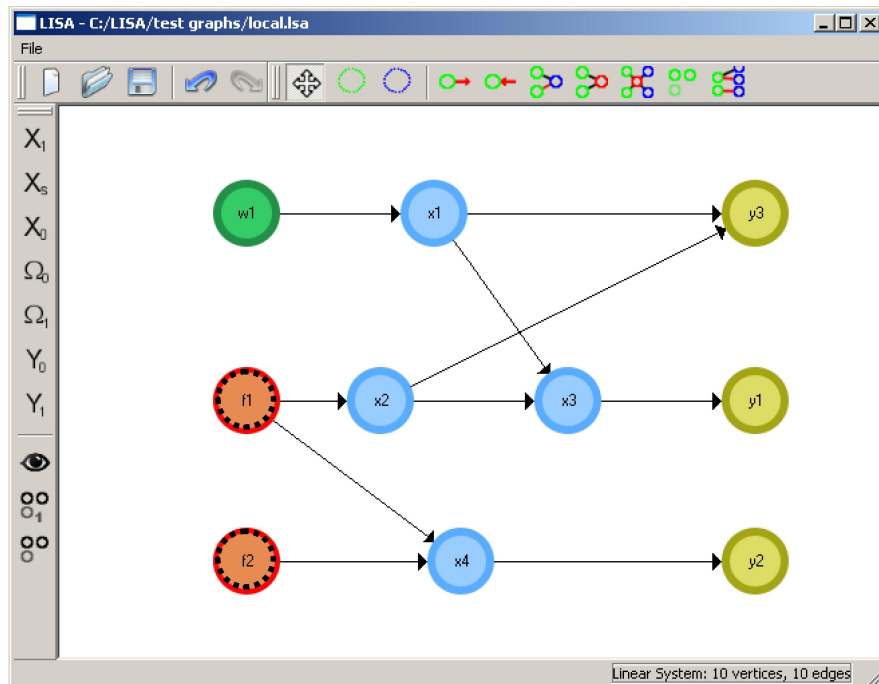


FIG. 4.15 – Localisabilité des défauts : cas multi-défauts

## 4.5 Perspectives et algorithmes implémentables à court terme dans LISA

Plusieurs propriétés peuvent être assez facilement implémentées en utilisant les algorithmes de base de LISA. D'autres, en revanche, nécessiteraient des études et des recherches supplémentaires afin de satisfaire à la contrainte qui est de n'implémenter si possible que des algorithmes d'ordre de complexité polynômial. Dans ce paragraphe, nous présentons quelques uns des résultats que nous envisageons de programmer dans LISA. D'abord, nous discutons des résultats présentés dans ce manuscrit avant d'aborder d'autres résultats d'analyse structurelle dont il est possible de trouver les détails notamment dans [Dion *et al.*, 2003].

### 4.5.1 Observabilité forte de tout l'état

L'analyse de cette propriété ne présente aucune difficulté à être implémentée. En effet, les conditions du corollaire 2.11 :

**Cond1'** : Chaque sommet de  $\mathbf{X}$  est le prédécesseur d'un sommet de  $\mathbf{Y}$  (condition de connectivité).

**Cond2'** :  $\mathbf{X}_0 \subseteq V_{ess}(\Omega_0, \mathbf{Y}_0 \cup \mathbf{X}_s)$

**Cond3'** :  $\theta(\mathbf{W} \cup \mathbf{F} \cup \mathbf{X}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}) = n + \theta(\mathbf{W} \cup \mathbf{F}, \mathbf{X} \cup \mathbf{Y})$

sont très proches des conditions programmées pour l'observabilité forte de l'état et de l'entrée. La dernière étape nécessiterait le calcul de la taille de deux couplages maximaux au lieu d'un seul, mais globalement nous pouvons considérer que la programmation de la vérification de la propriété d'observabilité forte ne nécessite aucun effort particulier. L'algorithme utilisé a un ordre de complexité égal à celui dédié à l'observabilité forte de l'état et de l'entrée *i.e.*  $O(N^3\sqrt{M})$ .

### 4.5.2 Observabilité forte d'une partie donnée de l'entrée et de l'état

Afin de déterminer si un ensemble  $\Delta$  de composantes de l'état ou de l'entrée est fortement observable, il faut soit déterminer l'ensemble  $\mathcal{V}_{obs} \stackrel{def}{=} \left\{ \mathbf{v} \in \mathbf{X} \cup \mathbf{U}, \beta(\mathbf{Y} \cup \{\mathbf{v}\}) = \beta(\mathbf{Y}) \right\}$  soit vérifier si  $\beta(\mathbf{Y} \cup \Delta) = \beta(\mathbf{Y})$ . Dans les deux cas, il s'agit de calculer la fonction  $\beta(\bullet)$  dont l'expression est donnée à la définition 2.4. Cette fonction est la somme de deux fonctions  $\beta_0(\bullet)$  et  $\beta_1(\bullet)$ .

Pour un ensemble  $\mathbf{V}$  tel que  $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{V} \subseteq \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$ , l'expression de  $\beta_0(\bullet)$  est donnée par :  $\beta_0(\mathbf{V}) \stackrel{def}{=} \mu(\mathbf{U}_0(\mathbf{V}), \mathbf{S}_o(\mathbf{V})) - \rho(\mathbf{U}_0(\mathbf{V}), \mathbf{S}_o(\mathbf{V}))$ . L'évaluation de  $\beta_0(\bullet)$  nécessite une décomposition du système qui s'effectue avec un algorithme d'ordre de complexité  $O(N^3\sqrt{M})$  déjà programmé dans LISA. Le calcul du nombre maximal de chemins  $\rho(\mathbf{U}_0(\mathbf{V}), \mathbf{S}_o(\mathbf{V}))$  est aussi programmé dans LISA. Il reste donc à calculer la fonction  $\mu(\mathbf{U}_0(\mathbf{V}), \mathbf{S}_o(\mathbf{V}))$  qui retourne le nombre minimal de sommets couverts par un lien  $\mathbf{U}_0(\mathbf{V})$ - $\mathbf{S}_o(\mathbf{V})$  maximal.

Cette fonction peut être implémentée grâce à l'algorithme primal-dual [Hovelaque *et al.*, 1996] qui aboutit à un ordre de complexité en  $O(N^3\sqrt{M})$ . Pour l'évaluation de  $\beta_0(\bullet)$ , un ordre de complexité total en  $O(N^3\sqrt{M})$  peut donc être envisagé.

Pour ce qui est de la fonction  $\beta_1(\bullet)$ , elle est définie pour tout ensemble  $\mathbf{V}$  tel que  $\mathbf{Y} \subseteq \mathbf{V} \subseteq \mathbf{X} \cup \mathbf{Y}$  comme étant le nombre maximal de sommets de  $\mathbf{X}_1(\mathbf{V}) \cup \mathbf{X}_s(\mathbf{V}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{V})$  couverts par une union disjointe :

- d'un lien  $\mathbf{X}_s(\mathbf{V}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{V})$ - $\Upsilon_1(\mathbf{V})$  de taille  $\rho(\mathbf{X}_s(\mathbf{V}) \cup \mathbf{U}_1(\mathbf{V}), \Upsilon_1(\mathbf{V}))$ ,
- d'une famille de chemins  $\mathbf{X}_1(\mathbf{V})$ - $\Upsilon_1(\mathbf{V})$  simples,
- d'une famille de cycles ne couvrant que des éléments de  $\mathbf{X}_1(\mathbf{V})$ .

Jusque très récemment, l'algorithme pensé pour cette fonction était basé sur un balayage de toutes les unions disjointes de chemins et de cycles pour évaluer celles qui couvrent le maximum de sommets. Cette solution conduit évidemment à un ordre de complexité exponentiel. Cependant, les travaux de M. Taha BOUKHOBZA sur l'observabilité des systèmes bilinéaires à entrées inconnues l'ont amené à transformer le graphe original afin que l'évaluation de  $\beta_1(\bullet)$  revienne juste à déterminer le nombre maximum de sommets couverts par une famille de chemins disjoints. Ensuite, par des recherches successives de chemins les plus longs et par des transformations itératives du graphe d'origine, il aboutit à des graphes plus simples formés de chemins tous disjoints connectés aux sommets de sortie et couvrant un nombre maximal de sommets plus une partie de graphe non connectée aux sommets de sortie. L'ordre de complexité de cet algorithme serait polynomial car il ne ferait appel qu'à des algorithmes d'ordre de complexité polynômial. Cette approche est encore en développement et pourrait aboutir dans les mois qui viennent à une implémentation de la fonction  $\beta(\bullet)$ .

Une fois cet algorithme de calcul de  $\beta(\bullet)$  mis en œuvre, l'analyse de l'observabilité partielle pourrait rapidement être implémentée.

### 4.5.3 Placement de capteurs pour l'observabilité forte de tout l'état

Les trois étapes de placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité forte de tout l'état reposent essentiellement sur :

- La détermination des composantes connexes et leur ordonnancement pour le recouvrement de la condition de connectivité : cela peut se faire respectivement par les algorithmes dédiés à l'évaluation du nombre de chemins disjoints entre deux sommets ou l'évaluation des ensembles de successeurs et de prédécesseurs et au calcul de la taille de couplage entre deux composantes connexes.

Ainsi, trouver les composantes connexes minimales reposerait sur des algorithmes de base déjà programmés ce qui induirait un algorithme d'ordre de complexité polynomial.

- Le calcul de la taille de couplages maximaux et l'application de la décomposition de Dulmage-Mendelsohn pour le recouvrement de la condition de couplage : les algorithmes de la décomposition de Dulmage-Mendelsohn existent dans plusieurs bibliothèques et aboutissent à un ordre de complexité en  $O(M^2)$  [Lovasz et Plummer, 1986, Chen et Kanj, 2003].

- Le calcul de séparateurs de sortie pour le recouvrement de la condition de distance : ces outils sont déjà programmés dans LISA.

En résumé, l'implémentation de l'aide au placement de capteurs pour le recouvrement de la propriété d'observabilité forte serait assez aisée à réaliser à partir des outils existant dans LISA et dans la littérature classique de la théorie des graphes.

### 4.5.4 Placement de capteurs pour l'observabilité partielle

La stratégie proposée de placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité forte d'un ensemble donné de composantes de l'état se déroule en deux étapes. La première est relative au recouvrement de la condition de connectivité à la sortie. Comme cela est décrit dans le paragraphe précédent, il est possible d'associer les algorithmes de base permettant l'évaluation des ensembles de successeurs et de prédécesseurs et l'évaluation

de la taille de couplage entre deux composantes connexes.

La seconde étape nécessite, quant à elle, l'utilisation de la fonction  $\beta(\bullet)$  pour la détermination des ensembles  $\Gamma_{\mathbf{x},\mathbf{k}}$ . Comme cela a été discuté auparavant, l'algorithme relatif à cette fonction est en cours de conception. Cela reste la seule difficulté avant l'implémentation d'une fonctionnalité de placement de capteurs pour le recouvrement de l'observabilité forte d'un ensemble donné de composantes. En effet, pour le reste, il suffit d'ordonner des ensembles de sommets par rapport à la relation d'inclusion des ensembles. La solution du système de contraintes (3.2) pourrait se faire par une décomposition de Dulmage-Mendelsohn.

#### 4.5.5 Implémentation d'outils d'analyse d'autres propriétés structurelles

La finalité de LISA étant de proposer une panoplie d'outils d'analyse la plus large possible, il est prévu d'implémenter les résultats relatifs à d'autres propriétés structurelles des systèmes linéaires que celles que nous avons établies.

Ainsi, en utilisant les algorithmes de base de LISA, l'analyse de la propriété de commandabilité, propriété duale de l'observabilité, est programmable sans effort.

Par ailleurs, une fois le calcul de la fonction  $\beta(\bullet)$  mis au point, la fonctionnalité calculant le nombre générique de zéros invariants du système pourra être rajoutée.

L'analyse du problème de découplage par retour d'état [Dion et Commault, 1993] utilise le calcul du nombre maximal de chemins disjoints entre deux ensembles ainsi que le nombre minimal de sommets couverts par un lien entrée-sortie maximal. L'algorithme de base pour le calcul du premier nombre existe déjà. Quant au second nombre, il est calculable par l'algorithme primal-dual [Hovelaque *et al.*, 1996]. Cette fonctionnalité serait implémentable assez aisément. Il en est de même pour la solvabilité du problème de rejet de perturbations par retour d'état ou retour de sortie ainsi que la caractérisation de la structure à l'infini et des dimensions de différents sous-espaces invariants qui requièrent ces mêmes outils de base.



## 4.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décrit la boîte à outils LISA en présentant d'abord ses objectifs et les principes qui ont guidé sa conception à savoir l'élaboration d'un outil d'analyse structurelle complet sur plateforme logicielle libre et avec une attention particulière portée aux aspects calculatoire et algorithmique. L'élaboration de LISA repose sur des algorithmes de base tels que le calcul de la taille maximale d'un lien, d'un couplage, la détermination de séparateurs,... Ces algorithmes ont été repris de travaux classiques de la théorie des graphes et adaptés. D'autres outils de base seraient encore nécessaires tels que le calcul du nombre minimal ou maximal de sommets couverts par un lien de taille maximale afin d'avoir un logiciel complet. C'est une partie du travail auquel se consacrent M. Taha BOUKHOBZA et M. Frédéric HAMELIN et qui constitue un élément du projet de recherche de l'équipe-projet dirigée par ce dernier.

Les programmes d'analyse de certaines propriétés d'observabilité et de diagnosticabilité ont d'ores et déjà été implémentés par assemblage des algorithmes de base. Nous avons présenté ceux relatifs à l'observabilité de l'état et de l'entrée ainsi que ceux liés à la solubilité du problème de localisation de défauts. L'ordre de complexité des algorithmes utilisés est polynomial et explicité en fonction du nombre d'arcs et de sommets du graphe représentant le système.

Enfin, nous avons brièvement discuté des possibilités offertes par LISA pour l'analyse des systèmes linéaires, une fois que les deux algorithmes de base manquants seraient mis au point.

# 5

## Conclusions

Le travail de thèse présenté dans ce document traite différentes propriétés liées à l'observabilité des systèmes à entrées inconnues par approche graphique. Les outils d'analyse développés peuvent s'avérer importants dans le cadre de la synthèse d'observateurs, d'estimateurs d'entrées utiles à la synthèse de lois de commandes tolérantes aux défauts ou robustes par rapport aux perturbations, ou encore lorsqu'il s'agit de vérifier si la propriété d'observabilité d'un système n'est pas altérée lorsqu'il est soumis à des perturbations, voire à des défauts d'amplitude suffisamment importante pour ne pas être négligés.

Le manuscrit est structuré en trois parties principales. Dans la première, nous avons abordé l'analyse de différentes propriétés d'observabilité. Plus précisément, nous avons tout d'abord présenté une décomposition graphique du système étudié en deux sous-systèmes particuliers en cascade. Les propriétés de ces sous-systèmes, dont le premier est carré et le second a un faisceau de matrices de rang plein colonne même après l'effacement de l'une de ses lignes, choisie arbitrairement, sont démontrées. Ainsi, il est prouvé que l'observabilité du système original est équivalente à l'observabilité des deux sous-systèmes pris séparément. Les conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité de l'entrée et de l'état d'un système linéaire ont alors été établies en utilisant les théorèmes de [van der Woude, 2000]. En paramétrant la décomposition du système par un ensemble de sommets, nous avons exprimé à l'aide d'une fonction graphique notée  $\beta$  des conditions nécessaires et suffisantes

pour l'observabilité forte d'une partie donnée des composantes de l'entrée et de l'état. Cette fonction est relative au nombre générique de zéros invariants du système qui a été caractérisé graphiquement dans [van der Woude, 2000, van der Woude *et al.*, 2003]. Le dernier résultat de cette partie concerne l'observabilité forte de tout l'état d'un système à entrées inconnues. Des conditions nécessaires et suffisantes ont été démontrées.

En ce qui concerne les propriétés d'observabilité de l'état et de l'entrée et l'observabilité forte de l'état, les conditions sont exprimées en termes de nombre de chemins disjoints, de sommets essentiels et de taille de couplage maximal.

La seconde partie de cette thèse a consisté à étudier le problème du placement de capteurs afin de recouvrir la propriété d'observabilité forte lorsque les conditions mentionnées au paragraphe ci-dessus ne sont pas vérifiées. Deux cas ont été traités. Le premier concerne la propriété d'observabilité forte d'une partie donnée de l'état. La stratégie du placement de capteurs consiste alors en une condition nécessaire permettant d'imposer qu'au moins une sortie du système soit sensible à chacune des composantes de l'état devant être fortement observables. Cette condition repose sur la décomposition des sommets du graphe en composantes connexes qui sont ensuite partiellement ordonnées. La seconde étape du placement de capteurs consiste en la détermination d'un certain nombre d'ensembles via la fonction  $\beta$  précédemment citée. Puis, ces ensembles sont aussi partiellement ordonnés par la relation d'inclusion. Enfin, un système de relations graphiques est utilisé pour assurer qu'une configuration de capteurs assure l'observabilité forte des composantes de l'état choisies. La stratégie proposée pour le recouvrement de l'observabilité d'une partie de l'état souffre de plusieurs faiblesses. En premier lieu, elle est déduite de conditions juste suffisantes et non nécessaires. Le nombre minimal de capteurs nécessaires pour résoudre le problème considéré n'est pas donné. Enfin, il existe certaines configurations de capteurs aussi valables pouvant mesurer des variables qui ne se trouvent pas dans les ensembles calculés.

Le second problème de placement de capteurs a pour objectif de rendre observables toutes les composantes de l'état. Le problème a été traité en trois étapes. Pour chacune d'elles, des conditions nécessaires et suffisantes au placement de capteurs ont été trouvées. Le

nombre minimal de capteurs nécessaires et suffisants a aussi été déterminé. Cependant, le fait de fragmenter le problème en trois parties peut mener à des configurations de capteurs non optimales en termes de nombre. L'ordre dans lequel les étapes sont traitées peut être important. Les conditions trouvées sont fondées essentiellement sur la décomposition de Dulmage-Mendelsohn, sur un calcul de séparateurs, de nombre de chemins disjoints et sur l'ordonnement de certains ensembles.

La troisième partie traite de l'implémentation des résultats établis dans une boîte à outils dédiée à l'analyse structurelle des systèmes linéaires et bilinéaires structurés. En premier lieu, les motivations qui ont conduit à la conception de cette boîte à outils sont exposées. Il en a découlé un certain cahier des charges concernant la plateforme de programmation et les algorithmes utilisés. La structure de LISA a ensuite été présentée. Elle repose entièrement sur des algorithmes de base tels que la détermination des ensembles de successeurs et de prédecesseurs, le calcul des tailles de liens et de couplage maximaux entre deux ensembles de sommets, la caractérisation des ensembles de sommets essentiels dans des liens de taille maximale ou encore la définition des séparateurs d'entrée et de sortie. Tous ces algorithmes ont des ordres de complexité polynomiaux. Nous avons montré comment en associant certains algorithmes de base, nous sommes arrivés à analyser l'observabilité de l'état et de l'entrée et à établir des conditions de détection et de localisation de défauts [Commault *et al.*, 2002a]. Enfin, nous avons discuté des fonctions qui peuvent être rajoutées à LISA concernant différentes propriétés structurelles afin d'en faire un outil d'analyse plus complet.

Cette thèse a eu pour objectif de proposer un outil supplémentaire à ce qui existe dans le cadre de l'analyse des systèmes linéaires. Elle a permis de caractériser graphiquement une propriété structurelle traitée jusque là principalement par des méthodes algébriques et géométriques. D'un autre côté, l'analyse des propriétés d'observabilité pour les systèmes à entrées inconnues, largement étudiés par ailleurs, représentait l'une des rares analyses non encore effectuées par approche graphique jusque-là. Ainsi, notre étude sur l'observabilité des systèmes à entrées inconnues tente de combler ce manque en considérant tous les cas

possibles *i.e.* l'observabilité de tout ou d'une quelconque partie de l'état et de l'entrée inconnue.

Pour ce qui est de l'étude du placement de capteurs, l'approche graphique semble offrir de bons avantages. Il reste cependant à approfondir la partie concernant le recouvrement de l'observabilité forte d'une partie de l'état afin d'arriver à des conditions nécessaires et suffisantes. Néanmoins, de prime abord le problème semble être assez difficile pour prévoir une solution immédiate en persévérant avec les mêmes outils. L'utilisation d'autres outils graphiques ou d'autres séparateurs que ceux d'entrée et de sortie pourrait être envisagée. Une décomposition du problème en plusieurs étapes peut aussi déboucher sur des conditions nécessaires et suffisantes, mais pour cela il faudrait aussi décliner la condition d'observabilité forte exprimée en fonction de  $\beta$  en plusieurs conditions qui lui seraient équivalentes ensemble.

Un autre problème de placement de capteurs qu'il serait intéressant à traiter, et pour lequel nous pensons avoir les clés est celui dont l'objectif serait la solubilité du problème de rejet de perturbations par retour de sortie. En effet, les conditions de solubilité de ce problème sont relativement proches de la condition de distance.

Enfin, en termes d'implémentation, deux algorithmes de base devront être programmés sur LISA avant de pouvoir en faire une boîte relativement complète pour ce qui est des systèmes linéaires. Le premier concerne le calcul du nombre minimal de sommets couverts dans un lien maximal entre deux ensembles. Il peut être fondé sur l'algorithme primal-dual [Hovelaque *et al.*, 1996]. Le second algorithme est relatif au calcul du nombre maximal de sommets couverts par une union disjointe :

- d'un lien de taille maximale,
- d'une famille de chemins *Y-cime* simples,
- d'une famille de cycles.

Cet algorithme devra avoir un ordre de complexité polynomial, ce qui ne le rend pas trivial. Sa synthèse permettrait une avancée certaine pour l'analyse des problèmes d'observabilité et le calcul du nombre générique de zéros invariants d'un système.

# Bibliographie

- [Andr , 1985] ANDR , N. (1985). *Sparse Systems, Digraph Approach of Large-Scale Linear Systems Theory*. T V, Köln, Germany. 5
- [Bang-Jensen et Gutin, 2006] BANG-JENSEN, J. et GUTIN, G. (2006). *Digraphs : Theory, Algorithms and Applications*. Springer-Verlag, London, U.K., 2<sup>nd</sup>  dition. 90
- [Basile et al., 1981] BASILE, G., HAMANO, F. et MARRO, G. (1981). Some new results on unknown input observability. *In IFAC World Congress*, pages 21–24, Kyoto, Japan. 5, 24, 27
- [Basile et Marro, 1969] BASILE, G. et MARRO, G. (1969). On observability of linear time-invariant systems with unknown inputs. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 3:410–415. 5, 24, 27, 44, 56
- [Basile et Marro, 1973] BASILE, G. et MARRO, G. (1973). A new characterization of some structural properties of linear systems : unknown-input observability, invertibility and functional controllability. *International Journal of Control*, 17(5):931–943. 5, 24, 27
- [Blanke et al., 2003] BLANKE, M., KINNAERT, M., LUNZE, J. et STAROSWIECKI, M. (2003). *Diagnosis and Fault-Tolerant Control*. Springer-Verlag, Heidelberg. 12
- [Blanke et Lorentzen, 2006] BLANKE, M. et LORENTZEN, T. (2006). SATOOL - a software tool for structural analysis of complex automation systems. *In IFAC Safeprocess Conference*, Beijing, China. 84
- [Boukhobza et al., 2005] BOUKHOBZA, T., HAMELIN, F., JOIN, C. et SAUTER, D. (2005). Input and state functional observability for descriptor systems. *In IFAC World Congress*, Praha, Czech Republic. 27

- [Chen et Kanj, 2003] CHEN, J. et KANJ, I. A. (2003). Constrained minimum vertex cover in bipartite graphs : Complexity and parameterized algorithms. *Journal-of-Computer-and-System-Sciences*, 67(4):833–847. 104
- [Commault et Dion, 2007] COMMAULT, C. et DION, J. M. (2007). Sensor location for diagnosis in linear Systems : a structural analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 52(2):155–169. 19, 61, 71, 77, 80
- [Commault et al., 2005a] COMMAULT, C., DION, J. M. et AGHA, S. Y. (2005a). A system decomposition for sensor location in fault detection and isolation. *In IFAC World Congress*, Praha, Czech Republic. 61
- [Commault et al., 2006] COMMAULT, C., DION, J. M. et AGHA, S. Y. (2006). Structural analysis for the sensor location problem in fault detection and isolation. *In IFAC Safeprocess Conference*, Beijing, China. 19, 61, 80
- [Commault et al., 1993] COMMAULT, C., DION, J. M. et BENAHCENE, M. (1993). Output feedback disturbance decoupling. graph interpretation for structured systems. *Automatica*, 29(6):1463–1472. 5
- [Commault et al., 1999] COMMAULT, C., DION, J. M. et BENAHCENE, M. (1999). Decoupling of structured systems by parameter-independent compensation and state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(2):348–352. 5
- [Commault et al., 1997] COMMAULT, C., DION, J. M. et HOVELAQUE, V. (1997). A geometric approach for structured systems : Application to disturbance decoupling. *Automatica*, 33(3):403–409. 5, 47
- [Commault et al., 1991] COMMAULT, C., DION, J. M. et PEREZ, A. (1991). Disturbance rejection for structured systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(7):884–887. 5
- [Commault et al., 2001] COMMAULT, C., DION, J. M., SENAME, O. et MOTYEIAN, R. (2001). Unknown input observer - a structural approach. *In European Control Conference*, Porto, Portugal. 6, 24, 59

- [Commault *et al.*, 2002a] COMMAULT, C., DION, J. M., SENAME, O. et MOTYEIAN, R. (2002a). Observer-based fault diagnosis for structured systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 47(12):2074–2079. 5, 12, 95, 98, 109
- [Commault *et al.*, 2005b] COMMAULT, C., DION, J. M. et TRINH, D. H. (2005b). Observability recovering by additional sensor implementation in linear structured systems. In *IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*, Seville, Spain. 6, 19, 61, 63, 64, 71, 72, 73, 74, 80
- [Commault *et al.*, 2002b] COMMAULT, C., DION, J. M. et van der WOUDE, J. W. (2002b). Characterization of generic properties of linear structured systems for efficient computations. *Kybernetika*, 38(5):503–520. 12
- [Demetriou, 2005] DEMETRIOU, M. A. (2005). Robust sensor location and optimization in distributed parameter systems using functional observers. In *IEEE Conference on Decision and Control, European Control Conference*, pages 7187–7192, Seville, Spain. 6
- [Dion et Commault, 1993] DION, J. M. et COMMAULT, C. (1993). Feedback decoupling of structured systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(7):1132–1135. 5, 105
- [Dion *et al.*, 1994] DION, J. M., COMMAULT, C. et MONTROYA, J. (1994). Simultaneous decoupling and disturbance Rejection : a structural approach. *International Journal of Control*, 59:1325–1344. 5
- [Dion *et al.*, 2001] DION, J. M., COMMAULT, C. et VAN DER WOUDE, J. W. (2001). Generic properties and control of linear structured systems. In *IFAC Symposium on System Structure and Control*, Praha, Czech Republic. 12
- [Dion *et al.*, 2003] DION, J. M., COMMAULT, C. et VAN DER WOUDE, J. W. (2003). Generic properties and control of linear structured systems : a survey. *Automatica*, 39(7):1125–1144. 12, 24, 41, 101



- [Floquet et Barbot, 2006] FLOQUET, T. et BARBOT, J.-P. (2006). An observability form for linear systems with unknown inputs. *International Journal of Control*, 79(2):132–139. 5
- [Ford et Fulkerson, 1962] FORD, L. R. et FULKERSON, D. R. (1962). *Flows in Networks*. Princeton University Press. 90
- [Frisk et Krysander, 2007] FRISK, E. et KRYSANDER, M. (2007). Sensor placement for maximum fault isolability. In *DX-07*, pages 106–113, Nashville, U.S.A. 19
- [Glover et Silverman, 1976] GLOVER, K. et SILVERMAN, L. M. (1976). Characterization of structural controllability approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-21(4):534–537. 11
- [Guidorzi et Marro, 1971] GUIDORZI, R. et MARRO, R. (1971). On wonham stabilizability condition in the synthesis of observers for unknown-input systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-16:499–500. 5, 24
- [Hautus, 1983] HAUTUS, M. (1983). Strong detectability and observers. *Linear Algebra and its Applications*, 50:353–360. 5, 24, 26, 44, 56
- [Hou et Müller, 1994] HOU, M. et MÜLLER, P. C. (1994). Design of decentralized linear state function observers. *Automatica*, 30(11):1801–1805. 55
- [Hou et Müller, 1999] HOU, M. et MÜLLER, P. C. (1999). Observer design for descriptor systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1):164–169. 25
- [Hou et Patton, 1998] HOU, M. et PATTON, R. J. (1998). Input observability and input reconstruction. *Automatica*, 34(6):789–794. 5
- [Hovelaque *et al.*, 1996] HOVELAQUE, V., COMMAULT, C. et DION, J. M. (1996). Analysis of linear structured systems using a primal-dual algorithm. *Systems & Control Letters*, 27:73–85. 102, 105, 110
- [Kailath, 1980] KAILATH, T. (1980). *Linear systems*. Prentice Hall Information and system science series. Prentice Hall, Englewood Cliffs. 3, 24

- [Kalman, 1968] KALMAN, R. E. (1968). Lectures on controlability and observability. *In Proceedings of C.I.M.E. (International Mathematical Summer Center)*, Bologna, Italy. 24
- [Khemliche *et al.*, 2006] KHEMLICHE, M., BOUAMAMA, B. O. et HAFFAF, H. (2006). Sensor placement for component diagnosability using bond-graph. *Sensors and Actuators : A Physical*, 132(2):547–556. 19
- [Khosrowjerdi *et al.*, 2007] KHOSROWJERDI, M. J., SAFARI-SHAD, N. et NIKOUKHAH, R. (2007). Optimal sensor location for robust fault detection. *In European Control Conference*, pages 402–407, Kos, Greece. 6
- [Kratz, 1995] KRATZ, W. (1995). Characterization of strong observability and construction of an observer. *Linear algebra and its applications*, 221:31–40. 5
- [Lin, 1974] LIN, C. T. (1974). Structural controllability. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-19(3):201–208. 4, 5, 11
- [Linnemann, 1981] LINNEMANN, A. (1981). Decoupling of structured systems. *System & Control Letters*, 1:79–86. 5
- [Liu *et al.*, 2003] LIU, X., CHEN, B. M. et LI, Z. (2003). On the problem of general structural assignments of linear systems through sensor/actuator selection. *Automatica*, 39(2):233–241. 6
- [Lovasz et Plummer, 1986] LOVASZ, L. et PLUMMER, M. D. (1986). *Matching Theory*, volume 29 de *Annals of Discrete Mathematics*. North-Holland, Amsterdam, Netherlands. 104
- [Maquin *et al.*, 1994] MAQUIN, D., LUONG, M. et RAGOT, J. (1994). Observability analysis and sensor placement. *In IFAC SAFEPROCESS'94/IMACS Symposium on Fault Detection, Supervision and Safety for Technical Process*, Espoo, Finland. 6, 19
- [Maquin *et al.*, 1995] MAQUIN, D., LUONG, M. et RAGOT, J. (1995). Some ideas about the design of measurement systems. *In European Control Conference*, pages 3178–3183, Rome, Italy. 19

- [Martinez-Martinez *et al.*, 2007] MARTINEZ-MARTINEZ, S., MADER, T., BOUKHOBZA, T. et HAMELIN, F. (2007). LISA : a linear structured system analysis program. *In IFAC Symposium on System, Structure and Control*, Foz do Iguaçu, Brésil. 7, 84
- [Meyer *et al.*, 1994] MEYER, M., LANN, J. M. L., KOEHRET, B. et ENJALBERT, M. (1994). Optimal selection of sensor location on a complex plant using a graph oriented approach. *Computers & Chemical Engineering*, 18:S535–S540. 6
- [Murota, 1987] MUROTA, K. (1987). *System Analysis by Graphs and Matroids*. Springer-Verlag, New York, U.S.A. 5, 8, 12, 24, 35, 41, 90
- [Ragot *et al.*, 1992] RAGOT, J., MAQUIN, D. et BLOCH, G. (1992). Sensor positioning for processes described by bilinear equations. *Diagnostic et Sûreté de Fonctionnement*, 2. 6
- [Rahmani *et al.*, 1997] RAHMANI, A., SUEUR, C. et DAUPHIN-TANGUY, G. (1997). Approche des bond graphs pour analyse structurelle de systèmes linéaires. *Automatica*, 259:101–131. 12
- [Reinschke, 1988] REINSCHKE, K. J. (1988). *Multivariable Control. A Graph Theoretic Approach*. Springer-Verlag, New York, U.S.A. 5, 12, 24, 41
- [Rosenbrock, 1970] ROSENBROCK, H. (1970). *State-space and multivariable theory*. Studies in dynamical systems. Nelson Wiley, London. 3, 24
- [Saif et Guan, 1992] SAIF, M. et GUAN, Y. (1992). Decentralized state estimation in large-scale interconnected dynamical systems. *Automatica*, 28(1):215–219. 55
- [Sain et Massey, 1969] SAIN, M. K. et MASSEY, J. L. (1969). Invertibility of linear time-invariant dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-14(2):141–149. 5, 24
- [Shields et Pearson, 1976] SHIELDS, R. W. et PEARSON, J. B. (1976). Structural controllability of multi-input linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-21(2):203–212. 11
- [Silverman, 1969] SILVERMAN, L. M. (1969). Inversion of multivariable linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC -14(3):270–276. 5

- [Staroswiecki, 2006] STAROSWIECKI, M. (2006). *Observability and the Design of Fault Tolerant Estimation Using Structural Analysis*, pages 257–278. Advances in Control Theory and Application. Springer. 55
- [Travé-Massuyès *et al.*, 2001] TRAVÉ-MASSUYÈS, L., ESCOBET, T. et MILNE, R. (2001). Model-based diagnosability and sensor placement. application to a frame 6 gas turbine subsystem. *In DX'01 International Workshop on Principles of Diagnosis*, pages 205–212, Nashville, U.S.A. 19
- [Trave-Massuyes *et al.*, 2006] TRAVE-MASSUYES, L., ESCOBET, T. et OLIVE, X. (2006). Diagnosability analysis based on component-supported analytical redundancy relations. *IEEE-Transactions-on-Systems,-Man-and-Cybernetics,-Part-A-Systems-and-Humans*, 36(6):1146–1160. 19
- [Trentelman *et al.*, 2001] TRENTELMAN, H. L., STOORVOGEL, A. A. et HAUTUS, M. (2001). *Control Theory for Linear Systems*. Springer, London, U.K. 5, 26, 47, 56
- [van de Wal et de Jager, 2001] VAN DE WAL, M. et de JAGER, B. (2001). A review of methods for input/output selection. *Automatica*, 37(4):487–510. 6
- [van der Woude, 2000] van der WOUDE, J. (2000). The generic number of invariant zeros of a structured linear system. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 38(1):1–21. 28, 33, 37, 38, 39, 47, 48, 49, 59, 107, 108
- [van der Woude, 1991] van der WOUDE, J. W. (1991). A graph theoretic characterization for the rank of the transfer matrix of a structured system. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 4(1):33–40. 10
- [van der Woude, 1991] van der WOUDE, J. W. (1991). On the structure at infinity of a structured system. *Linear Algebra and its Application*, 148:145–169. 10, 37
- [van der Woude, 1993] van der WOUDE, J. W. (1993). Disturbance decoupling by measurement feedback for structured linear Systems : a graph theoretical approach. *In European Control Conference*, pages 1132–1137. 5
- [van der Woude, 1996] van der WOUDE, J. W. (1996). Disturbance decoupling by mea-

- surement feedback for structured transfer matrix systems. *Automatica*, 32(3):357–363. 5, 12
- [van der Woude *et al.*, 2003] van der WOUDE, J. W., COMMAULT, C. et DION, J. M. (2003). Zero orders and dimensions of some invariant subspaces in linear structured systems. *Mathematics of Control, Signals and Systems*, 16:225–237. 12, 28, 34, 47, 108
- [van der Woude et Murota, 1995] van der WOUDE, J. W. et MUROTA, K. (1995). Disturbance decoupling with pole placement for structured Systems : a graph-theoretic approach. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 16(3):922–942. 5, 12
- [Willems, 1986] WILLEMS, J. L. (1986). Structural controllability and observability. *System & Control Letters*, 8(1):5–12. 8, 24
- [Wonham, 1985] WONHAM, W. M. (1985). *Linear multivariable control : a geometric approach*, volume 10 de *Applications of mathematics*. Springer-Verlag, New York, 3<sup>rd</sup> édition. 3, 11, 24
- [Yamada et Saga, 1985] YAMADA, T. et SAGA, T. (1985). A sufficient condition for structural decouplability of linear nonsquare systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-30(9):918–921. 5
- [Zadeh et Desoer, 1963] ZADEH, L. et DESOER, C. (1963). *Linear system theory*. MacGraw-Hill Book Company. 3, 24

## Résumé

Le travail de thèse présenté dans ce document traite de l'analyse de différentes propriétés liées à l'observabilité des systèmes à entrée inconnue par approche graphique. La simplicité de mise en œuvre de l'approche graphique permet de se défaire des difficultés numériques inhérentes aux approches géométrique et algébrique. Ce constat a conduit ces dernières décennies, à une série d'études structurelles basées sur l'approche graphique. Parmi les propriétés encore non abordées graphiquement, l'observabilité forte traduit l'observabilité des variables d'état d'un système pour toute valeur d'entrée ainsi que l'observabilité conjointe de l'état et de l'entrée. Ces propriétés plus fortes que l'observabilité simple et le diagnostic nous ont paru utiles et pertinentes à étudier. En effet, les outils d'analyse développés peuvent s'avérer importants dans le cadre de la synthèse d'observateurs ou d'estimateurs d'entrées utile à la synthèse de lois de commandes tolérantes aux défauts ou robustes aux perturbations, ou encore quand il s'agit de vérifier si la propriété d'observabilité d'un système n'est pas altérée lorsqu'il est soumis à des perturbations, voire à des défauts d'amplitude trop importante pour être négligés. Le manuscrit est structuré en trois parties. Dans la première, nous avons abordé l'analyse de différentes propriétés d'observabilité. Plus précisément, nous avons tout d'abord donné des conditions nécessaires et suffisantes d'observabilité de l'entrée et de l'état d'un système. Des conditions nécessaires et suffisantes pour l'observabilité forte d'une partie donnée des composantes de l'entrée et de l'état ont ensuite été établies. Le dernier résultat de cette partie concerne l'observabilité forte de tout l'état d'un système à entrée inconnue. Des conditions nécessaires et suffisantes ont été démontrées. La seconde partie de cette thèse a consisté à étudier le problème du placement des capteurs afin de recouvrer des propriétés d'observabilité forte lorsque les conditions de la première partie ne sont pas vérifiées. Deux cas ont été traités. Le premier concerne la propriété d'observabilité forte d'une partie donnée de l'état. La stratégie de placement de capteurs consiste alors en une condition nécessaire permettant

d'imposer qu'au moins une sortie du système soit sensible à chacune des composantes de l'état devant être fortement observables, puis en un système de relations graphiques, utilisé comme condition suffisante à ce qu'une configuration de capteurs assure l'observabilité forte des composantes de l'état choisies. Le second problème de placement de capteurs a pour objectif de rendre observables toutes les composantes de l'état. Le problème a été traité en trois étapes. Pour chacune d'elles, des conditions nécessaires et suffisantes sur le placement de capteurs ont été trouvées. Le nombre minimal de capteurs nécessaire et suffisant a aussi été déterminé. Les conditions trouvées sont fondées essentiellement sur des algorithmes classiques de la théorie des graphes. La troisième partie traite de l'implémentation des résultats établis dans une boîte à outils dédiée à l'analyse structurelle (LISA) des systèmes linéaires et bilinéaires structurés. En premier lieu, les motivations qui ont conduit à la conception de cette boîte à outils sont exposées. La structure de LISA est ensuite présentée. Elle repose entièrement sur des algorithmes de base tels que la détermination des ensembles de successeurs et de prédécesseurs, le calcul des tailles de lien et de couplages maximaux entre deux ensembles de sommets et la caractérisation des ensembles de sommets essentiels dans des liens de taille maximale ou encore des séparateurs d'entrée et de sortie. Tous ces algorithmes ont des ordres de complexité polynomiaux. Nous avons montré comment en associant certains algorithmes de base, nous sommes arrivés à analyser l'observabilité de l'état et de l'entrée et à établir des conditions de détection et de localisation de défauts. Enfin, il est présenté des fonctions pouvant être rajoutées à LISA concernant différentes propriétés structurelles pour en faire un outil d'analyse plus complet.

**Mots-clés:** Systèmes linéaires, systèmes structurés, observabilité forte, observabilité de l'entrée inconnue, théorie de graphes, graphes orientés, placement de capteurs