



**HAL**  
open science

# Parametric Instabilities of the Ponomarenko dynamo

Marine Peyrot

► **To cite this version:**

Marine Peyrot. Parametric Instabilities of the Ponomarenko dynamo. Planète et Univers [physics]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2008. Français. NNT: . tel-00325286

**HAL Id: tel-00325286**

**<https://theses.hal.science/tel-00325286>**

Submitted on 27 Sep 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Laboratoire de Tectonophysique Interne et Géophysiques

Laboratoire des Ecoulements Géophysiques et Industriels

# **Thèse**

présentée par

**Marine Peyrot**

pour obtenir le grade de docteur de l'Université

Joseph Fourier de Grenoble

Spécialité : Géophysique, Mécanique des Fluides

## **Instabilité paramétrique de la dynamo de Ponomarenko**

soutenue le 25 Janvier 2008 devant le jury composé de

**Christiane Normand  
Caroline Nore  
François Pétrélis  
Mickaël Bourgoïn  
Andrew Gilbert  
Franck Plunian**

**Président du jury  
Rapporteur  
Rapporteur  
Membre du jury  
Membre du jury  
Directeur de thèse**



# Remerciements

Mes premiers remerciements vont en direction de Franck, mon directeur de thèse. Merci pour ta confiance, ton enthousiasme, ta présence, ta patience tout au long de cette thèse. Merci pour m'avoir toujours parlé simplement de sciences. Merci pour m'avoir fait découvrir la recherche sous son plus bel angle, et m'avoir encouragé et poussé à voyager scientifiquement. Et merci pour être comme tu es, dans ton métier mais aussi ailleurs. Je souhaite à tout étudiant d'avoir un directeur de thèse comme toi.

Je remercie Christiane Normand avec qui nous avons travaillé étroitement pendant ces trois années et demie. Nous avons eu de nombreux et riches échanges sur la dynamo, mais aussi sur des sujets plus larges ... Ce fut un réel plaisir de travailler ensemble, notre trio, orchestré par Franck, a très bien fonctionné ... et restera pour moi un modèle de collaboration humaine et scientifique.

Je remercie Andrew Gilbert, un des grand de ce monde de la dynamo, avec qui j'ai eu le privilège et la chance de travailler. Andrew m'a accueilli très chaleureusement à Exeter pendant trois semaines qui ont beaucoup apporté à ces travaux de recherche. Andrew m'a fait la gentillesse de venir à Grenoble pour ma soutenance au cours de laquelle, il a pu nous faire écouter son « perfect french accent ».

Je remercie aussi mes rapporteurs, Caroline Nore et François Pétrélis pour toute l'attention qu'ils ont mis dans la lecture de ce manuscrit. Leurs commentaires et discussions ont beaucoup apporté à ce manuscrit.

Je remercie Mickael Bourguoin pour avoir accepté de faire parti de mon jury.

Je remercie le LEGI qui m'a accueilli pour mes deux premières années de thèse et pour m'avoir donné les moyens numériques de travailler, je remercie plus particulièrement Gabriel Moreau, alias Gaby, qui a fait preuve d'une patience sans limite pour une débutante maladroite en informatique.

Je remercie le LGIT pour saccueil chaleureux lors de ma dernière année de thèse, le cadre de travail que m'a offert ce laboratoire m'a permis de finir cette thèse dans des conditions humaines et matérielles idéales.

Je remercie toute l'équipe Géodynamo pour leur accueil, pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et ce, dès la première année de ma thèse. Merci pour votre bonne humeur, et votre joie de « rechercher » communicante ...

Je remercie aussi tous les membres du GDR dynamo que j'ai eu l'occasion de croiser à de nombreuses reprises. J'adresse un remerciement particulier à Bérangère Dubrulle, Romain Monchaux, et François Daviaud pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail, et les échanges toujours très enrichissants et sympathiques que nous avons eu.

---

Je remercie Achim Wirth, Bernard Barnier du LEGI, ainsi que l'Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique et de Mécanique de Grenoble pour m'avoir soutenu dans mon emploi d'ATER. Je remercie Philippe Sechet, Evariste Ouedraougo, et Benjamin Loret pour leur confiance et la liberté qu'ils m'ont donné dans tous les enseignements que j'ai eu à donner. Merci au passage à tous mes élèves qui m'ont supportés et qui m'ont beaucoup apportés...

Je remercie Karine Froment, Jean Michel Veteau et Jean Marie Seiler, de m'avoir accueilli chaleureusement au CEA Grenoble pour mon stage de master 2 où j'ai pu découvrir les joies de la recherche, d'être venu assister à ma soutenance de thèse 4 ans après, et de m'avoir offert l'opportunité de continuer l'aventure de la recherche dans le domaine de la biomasse.

Merci au Chax' de m'avoir initié aux joies de la recherche à la grenobloise.  
Merci à tous les étudiants du LGIT pour m'avoir accueilli si chaleureusement, au passage merci à mes chers co-bureaux, Florence, Nadège, Aloé, Louis et Clotaire, pour avoir supporté mes allers retours quotidien à la piscine ...  
Merci à Eli pour ses sages conseils sur la dynamo et surtout pour tout le reste ...  
Merci à Beber pour ses célèbres « Salut Coach » ;-)  
Merci à Florent, Ombeline et Eléa pour avoir toujours été par là ...  
Muchas gracias Raul (el especialista mexicana de la dynamo!) para tu sonrisa ...  
Merci à mes ex colocataires pour m'avoir chouchouté pendant toute la période de rédaction...

Merci à toute Ma famille « 4sup.com » autour de laquelle je me suis construite ici, merci pour m'avoir fait découvrir la montagne sous toutes ses formes, merci pour toutes ces belles journées passées en votre charmante compagnie, qui ont beaucoup inspiré ce travail de recherche, et surtout merci pour avoir supporté la tempête verte pendant ces 4 dernières années ;-)

Merci aux organisateurs(et trices) de ce pot pyrénéen dont on se rappellera longtemps.  
Merci à ma grand-mère, qui a 82 ans, n'a pas hésité une seconde pour faire le trajet Castelnau Durban, Grenoble pour venir à ma soutenance.  
Thanks to my dear Ciçou pour avoir décalé son retour dans ses îles pour être là le jour j.  
Merci à Marie et JR pour être venu découvrir le monde de la recherche, ainsi que la neige de Chartreuse avec autant d'enthousiasme.  
Merci à mon frero Pierrot pour tous ses sages conseils, et merci à ma petite kmoulette, ma grande soeur à moi, sans qui je ne ferais pas grand chose.  
Merci à mon Papa pour m'avoir fait confiance et pour m'avoir soutenu dans tous mes choix, même sans rien comprendre à ce que je pouvais bien faire à longueur de journée derrière mon pc.  
Merci Maman pour ton attention, ta patience et ton soutien quotidien, merci pour avoir toujours été présente dans les bons et les mauvais moments. Merci aussi pour avoir relu ce manuscrit un nombre incalculable de fois, et pour avoir réussi à répondre mieu que moi à la question : qu'EST ce que l'effet dynamo ? ;-)

---

Merci à Chamechaude, au Col de Clem, au Col de Vence, au Moucherotte, aux Vouillants, à la Bastille, ....., pour toute l'énergie que ces lieux magiques Grenoblois m'ont donnés, et me donnent encore.

Et Merci à Benoit.

---



## resumé

Nous avons étudié l'influence de fluctuations de grandes échelles sur le seuil de l'instabilité dynamo. Pour cela, nous avons résolu le problème cinématique pour un champ de vitesse hélicoïdal, auquel nous avons rajouté à sa partie stationnaire, une modulation périodique dans le temps, également hélicoïdale. Pour un champ de vitesse hélicoïdal stationnaire des études précédentes ont montré que pour de grands nombres de Reynolds magnétique le champ magnétique était généré au niveau d'une surface caractérisée par une condition de résonance sur le champ de vitesse. Pour un champ de vitesse modulé, nous avons montré que pour une faible amplitude de modulation, c'est la condition de résonance portant sur la partie stationnaire qui gouverne la génération du champ magnétique. Pour une grande amplitude de modulation, c'est la condition de résonance portant sur la modulation qui contrôle la génération du champ magnétique. Dans la plupart des cas et si la condition de résonance est vérifiée pour les deux parties du champ de vitesse, on trouve que le seuil augmente en fonction de l'intensité de la modulation, puis diminue tout en restant supérieur au seuil de l'écoulement stationnaire de même géométrie. Si la condition de résonance n'est pas vérifiée pour la modulation, alors le seuil augmente drastiquement avec son intensité. Cette étude suggère que l'optimisation des expériences dynamo dépend non seulement de la partie stationnaire du champ de vitesse, mais aussi de ses fluctuations de grande échelle. Si ces dernières ne sont pas optimisées alors le seuil dynamo peut augmenter drastiquement, même si celles-ci sont de faible intensité.

### Mots clés :

**Effet dynamo - Instabilité paramétrique - Magnétohydrodynamique - Ecoulement de Ponomarenko - Méthode de Galerkin**

---





# Abstract

We have studied the influence of large scale fluctuations on the dynamo threshold. For that purpose, we have solved the kinematic problem for a helical flow, to the stationary part of which, we have added a periodic and also helical time modulation. For a helical stationary flow, previous studies have shown that for high magnetic Reynolds numbers, the magnetic field is generated on a resonance surface characterised by a resonant condition on the velocity flow. For a modulated flow, we have shown that, for low amplitude of modulation, it is the resonant condition of the stationary part, that controls the generation of the magnetic field. For large amplitude of the fluctuations, it is the resonant condition of the fluctuating part of the flow that governs the dynamo efficiency as well as the dynamo threshold. In most cases and if the resonant condition is satisfied for both parts of the flow, we find that the threshold increases with the intensity of the fluctuations, and then decreases, while remaining higher than the threshold corresponding to the stationary threshold of the same geometry. If the resonant condition is not verified for the modulation, then the threshold increases drastically with its intensity. These results show that the optimization of the dynamo experiments may not only depend on the stationary part of the flow but also on its non stationary large scale part. If the fluctuations are not optimized, then the threshold may increase drastically, even if the amplitude of these fluctuations is low.

**Key words :**

**Dynamo Effect - Parametric instabilities - Magnetohydrodynamic - Ponomarenko flow - Galerkin method**

---



---

# Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	v
Abstract	vii
Table des matières	xii
Liste des notations	xviii
Introduction générale	1
<b>I Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Contexte général de l'effet dynamo</b>	<b>5</b>
1.1 Introduction à la notion d'effet dynamo . . . . .	5
1.1.1 Champ magnétique terrestre et effet dynamo . . . . .	5
1.1.2 Autres domaines d'application . . . . .	7
1.2 Equations de la MHD et effet dynamo . . . . .	10
1.2.1 Equation de l'induction magnétique . . . . .	10
1.2.2 Equation de Navier Stokes . . . . .	16
1.2.3 Dynamo cinématique et mécanismes dynamo . . . . .	17
1.3 Contexte expérimental . . . . .	21
1.3.1 Expériences d'ancienne génération . . . . .	22
1.3.2 Expériences de nouvelle génération . . . . .	25
1.3.3 Positionnement des expériences . . . . .	31
<b>2 Positionnement du problème</b>	<b>35</b>
2.1 Cadre de mon travail de thèse . . . . .	35
2.2 Notion de surface de résonance . . . . .	37
2.3 Déroulement chronologique de la thèse et plan de la suite du manuscrit . . . . .	38
<b>II Définition du problème et approches</b>	<b>41</b>
<b>3 Définition du problème et présentation des approches</b>	<b>43</b>

---

---

3.1	Champ de vitesse . . . . .	43
3.1.1	Approche perturbative et approche basée sur un développement en séries de Fourier . . . . .	44
3.1.2	Approche de Galerkin . . . . .	44
3.1.3	Méthode asymptotique . . . . .	45
3.2	Résolution . . . . .	45
3.2.1	Cas des approches perturbatives, de Fourier et de Galerkin . . . . .	45
3.2.2	Cas de l'approche asymptotique . . . . .	47
3.3	Surface de résonance pour un écoulement présentant un cisaillement fini . . . . .	48
3.4	Conditions aux limites . . . . .	49
3.4.1	Méthode perturbative et développement en séries de Fourier . . . . .	50
3.4.2	Méthode asymptotique . . . . .	50
3.4.3	Méthode de Galerkin . . . . .	50
3.5	Applications numériques . . . . .	51
3.5.1	Comparaison méthode de Galerkin, méthode perturbative pour $\rho \ll 1$ : . . . . .	52
3.5.2	Comparaison méthode de Fourier, méthode de Galerkin pour $m + k\tilde{\Gamma} = 0$ . . . . .	52
3.5.3	Comparaison méthode asymptotique, méthode de Galerkin pour $\varepsilon \ll 1$ et $w_f \gg 1$ : . . . . .	52
3.5.4	Méthode de Galerkin . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Approches basées sur des hypothèses simplificatrices</b> . . . . .	<b>55</b>
4.1	Méthode perturbative . . . . .	55
4.1.1	Spécificités du champ de vitesse étudié . . . . .	55
4.1.2	Solution . . . . .	56
4.2	Développement en séries de Fourier . . . . .	56
4.2.1	Simplification des équations . . . . .	57
4.2.2	Solution générale . . . . .	57
4.2.3	Régime des grandes fréquences pour le cas du champ fluctuant sans champ moyen . . . . .	58
4.2.4	Régime pour de faibles amplitudes de modulation . . . . .	59
4.3	Méthode asymptotique . . . . .	59
4.3.1	Equations . . . . .	60
4.3.2	Résolution . . . . .	60
<b>5</b>	<b>Méthode directe de Galerkin</b> . . . . .	<b>67</b>
5.1	Equations . . . . .	67
5.2	Méthode de résolution . . . . .	68
5.3	Solutions . . . . .	69
5.3.1	Champ magnétique pour $r > 1$ . . . . .	69
5.3.2	Champ magnétique pour $r \leq 1$ . . . . .	70
5.3.3	Système matriciel . . . . .	72

---

---

<b>III</b>	<b>Résultats et Comparaisons</b>	<b>77</b>
<b>6</b>	<b>Validation du code numérique, comparaison avec l'étude perturbative</b>	<b>81</b>
6.1	Détermination du taux de croissance et de la pulsation du champ magnétique	82
6.1.1	Pour un champ de vitesse stationnaire . . . . .	82
6.1.2	Pour un champ de vitesse périodique . . . . .	85
6.2	Cas stationnaire . . . . .	88
6.2.1	Premiers résultats . . . . .	88
6.2.2	Comparaison des résultats avec le code numérique développé par Gailitis . . . . .	91
6.2.3	Comparaison avec le champ de vitesse présentant un cisaillement fini	93
6.3	Comparaison avec l'approche perturbative . . . . .	93
6.3.1	Résultats méthode de Galerkin . . . . .	94
6.3.2	Comparaison des résultats méthode de Galerkin, étude perturbative	96
6.3.3	Conclusions . . . . .	99
<b>7</b>	<b>Résultats de la méthode asymptotique et comparaison avec la méthode de Galerkin</b>	<b>101</b>
7.1	Détermination du taux de croissance . . . . .	101
7.2	Champ de vitesse de la méthode de Galerkin et analogie des problèmes . .	102
7.3	Résultats . . . . .	102
7.3.1	Champ de vitesse stationnaire . . . . .	103
7.3.2	Champ fluctuant sans champ moyen . . . . .	106
7.3.3	Champ fluctuant avec champ moyen . . . . .	109
7.4	Conclusions . . . . .	111
<b>8</b>	<b>Résultats et comparaisons de la méthode de Fourier et de la méthode de Galerkin</b>	<b>115</b>
8.1	Article . . . . .	116
8.2	Compléments à l'article . . . . .	131
8.2.1	Seuil de l'instabilité dynamo . . . . .	131
8.2.2	Rayon de résonance . . . . .	131
8.2.3	Comportement du seuil à faible amplitude de modulation . . . . .	136
<b>9</b>	<b>Etude de la dynamo de Roberts modulée périodiquement en temps</b>	<b>141</b>
9.1	Modèle numérique . . . . .	142
9.2	Résultats . . . . .	144
9.2.1	Cas stationnaire . . . . .	144
9.2.2	Champ fluctuant sans champ moyen . . . . .	144
9.2.3	Champ fluctuant avec champ moyen . . . . .	145
9.3	Interprétation . . . . .	148
9.3.1	Effet alpha ? . . . . .	148
9.3.2	Comment expliquer la présence des pics ? . . . . .	148
9.4	Perspectives . . . . .	149

---

---

<b>Conclusion générale</b>	<b>153</b>
<b>Annexes</b>	<b>157</b>
<b>A Relations d'équivalence</b>	<b>157</b>
A.1 Cas stationnaire - Code Gailitis . . . . .	157
A.2 Comparaison avec l'étude perturbative . . . . .	159
A.2.1 Champ de vitesse et équation de l'induction . . . . .	159
A.2.2 Analogie des grandeurs adimensionnelles . . . . .	161
A.2.3 Relations d'équivalence . . . . .	162
A.3 Comparaison méthode de Galerkin - Méthode asymptotique . . . . .	163
A.3.1 Analogies des approches . . . . .	163
A.3.2 Taux de croissance dans le cas stationnaire . . . . .	164
<b>B Méthode asymptotique pour de grandes fréquences dans le cas fluctuant sans champ moyen</b>	<b>165</b>
<b>C Relation d'orthogonalité</b>	<b>167</b>
<b>D Le code numérique</b>	<b>171</b>
D.1 Méthodes numériques . . . . .	171
D.2 Organisation du code . . . . .	174
D.3 Optimisation et automatisation des calculs . . . . .	177
<b>E <math>R_i</math> et <math>w_i</math>, <math>i = 2, 4</math></b>	<b>181</b>
<b>F Proceedings of the 11<sup>th</sup> EUROMECH European Turbulence Conference</b>	<b>183</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>192</b>

---

## Liste des notations

Symbole	Unité	Définition
<b>B</b>	$T$	Induction magnétique
<b>E</b>	$V.m^{-1}$	Champ électrique
$\mathcal{E}_m$	J	Energie magnétique
<b>j</b>	$A.m^{-2}$	Densité de courant électrique
$q$	$C.m^{-2}$	Densité de charge électrique
$x, y, z$	$m$	Coordonnées en géométrie cartésienne
$\varepsilon_0$	$F.m^{-1}$	Permittivité électrique uniforme
$\eta$	$m^2.s^{-1}$	Diffusivité magnétique
$\mu_0$	$H.m^{-1}$	Perméabilité magnétique uniforme
$\nu$	$m^2.s^{-1}$	Viscosité cinématique
$\rho_v$	$kg.m^{-3}$	Masse volumique
$\sigma$	$\Omega^{-1}.m^{-1}$	Conductivité électrique
$r, \theta, z$	$m, \text{rad}, m$	Coordonnées en géométrie cylindrique

TABLE 1 – *Symboles dimensionnels*



Symbole	Définition
$k$	Nombre d'onde vertical
$L$	Longueur caractéristique
$m$	Nombre d'onde azimuthal
$\mathbf{n}$	Vecteur normal extérieur à une surface
$U$	Vitesse caractéristique
$\mathbf{U}$	Champ de vitesse
$B_r, B_\theta, B_z$	Composantes du champ magnétique en coordonnées cylindriques
$b_r, b_\theta, b_z$	Composantes du champ magnétique divisées par $e^{ikz+im\theta}$
$b^\pm$	Inconnues, tel que $b^\pm = b_r \pm i b_\theta$
$\gamma$	Taux de croissance complexe du champ magnétique
$\Re(\gamma)$	Partie réelle du taux de croissance
$\Im(\gamma)$	Partie imaginaire du taux de croissance
$\mathcal{L}$	Opérateurs de diffusion en coordonnées cylindriques
$\Omega$	Partie radiale de la composante azimuthale du champ de vitesse
$V$	Partie radiale de la composante verticale du champ de vitesse
$\bar{R}_m$	Nombre de Reynolds magnétique basé sur le champ de vitesse stationnaire
$\tilde{R}_m$	Nombre de Reynolds magnétique basé sur le champ de vitesse fluctuant
$\bar{\Gamma}$	Pas de l'hélice de la partie stationnaire du champ de vitesse
$\tilde{\Gamma}$	Pas de l'hélice de la partie fluctuante du champ de vitesse
$\rho$	Amplitude des fluctuations du champ de vitesse / au champ de vitesse moyen
$F(t)$	Dépendance temporelle de la composante azimuthale du champ de vitesse
$G(t)$	Dépendance temporelle de la composante verticale du champ de vitesse
$f(t)$	Fonction définissant la dépendance temporelle de $F$
$g(t)$	Fonction définissant la dépendance temporelle de $G$
$w_f$	Fréquence de forçage du champ de vitesse
$\tau_a$	Temps d'advection du champ magnétique
$\tau_d$	Temps de diffusion du champ magnétique
$T$	Période du champ de vitesse
$r_0$	Rayon définissant la surface de résonance où est généré le champ magnétique
$\bar{r}_0$	Rayon de résonance de partie stationnaire du champ de vitesse
$\tilde{r}_0$	Rayon de résonance de la partie fluctuante du champ de vitesse

TABLE 2 – *Symboles communs à toutes les approches*

Symbole	Définition
$\varepsilon_{pert}$	Amplitude des fluctuations par rapport au champ moyen ( $=\rho$ )
$\varepsilon_1$	Pas de l'hélice de la partie fluctuante du champ de vitesse ( $=\tilde{\Gamma}$ )
$w_f^{pert}$	Fréquence de forçage dimensionnelle
$\sigma$	Fréquence de forçage adimensionnelle ( $= w_f$ )
$\theta_{\pm}$	Fonctions définissant le champ magnétique
$R_i$	Coefficients définissant les corrections au nombre de Reynolds magnétique critique
$w_i$	Coefficients définissant les corrections à la pulsation du champ magnétique

TABLE 3 – *Symboles utilisés dans la méthode perturbative*

Symbole	Définition
$\bar{\mu}$	Caractéristique géométrique de la partie stationnaire du champ de vitesse
$\tilde{\mu}$	Caractéristique géométrique de la partie fluctuante du champ de vitesse
$n$	Indice des modes temporels de Fourier
$A_{ii}$	Inconnues de la méthode

TABLE 4 – *Symboles utilisés dans la méthode basée sur un développement en séries de Fourier*

Symbole	Définition
$V^A$	Fonction radiale de la composante verticale du champ de vitesse
$\gamma^A$	Taux de croissance complexe du champ magnétique ( $= \varepsilon\gamma$ )
$\alpha$	Taux de croissance pour $\bar{w} \gg 1$
$\mathcal{D}$	Coefficient dépendant de la géométrie du champ de vitesse
$\varepsilon$	Inverse du nombre de Reynolds magnétique
$w_f^A$	Fréquence de forçage ( $= \varepsilon w_f$ )
$F_A$	Fonction temporelle définie par la fréquence $w_f^A$
$\bar{F}$	Fonction temporelle introduite dans le système d'ODE
$\bar{w}$	Fréquence de la fonction $\bar{F}$
$\tau, \bar{\tau}$	Temps adimensionnels obtenus par un changement d'échelle
$M$	Nombre d'onde azimutal obtenu après changement d'échelle
$K$	Nombre d'onde vertical obtenu après changement d'échelle
$s$	Longueur radiale obtenue après changement d'échelle
$h$	Fonction complexe dépendant du temps et définissant le champ magnétique
$\bar{h}, \bar{f}, \bar{g}$	Fonctions temporelles résolues par un système d'ODE.
$\bar{\gamma}$	Taux de croissance des fonctions $\bar{f}, \bar{g}$ et $\bar{h}$

TABLE 5 – *Symboles utilisés dans la méthode asymptotique*

Symbole	Définition
$\Omega^G$	Partie radiale de la composante azimutale du champ de vitesse
$V^G$	Partie radiale de la composante verticale du champ de vitesse
$N$	Nombre de modes de Galerkin
$R$	Rayon définissant la frontière entre le milieu conducteur et le milieu isolant
$R'$	Rayon définissant la zone de cisaillement du champ de vitesse
$\psi$	Fonctions d'interpolation
$\phi$	Fonction de poids
$D^j$	Inconnues de la méthode
$R_{\pm}$	Résidus de la méthode de Galerkin

TABLE 6 – *Symboles utilisés dans la méthode de Galerkin*

Symbole	Définition
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	Vecteurs unitaires en coordonnées cartésiennes
$B_x, B_y, B_z$	Composantes du champ magnétique en coordonnées cartésiennes
$b_x, b_y, b_z$	Composantes du champ magnétique divisées par $e^{ikz}$
$p$	mode de Fourier en x de l'induction magnétique
$q$	mode de Fourier en y de l'induction magnétique

TABLE 7 – *Symboles utilisés pour le problème de la dynamo de Roberts modulé périodiquement dans le temps*





# Introduction générale

Les mesures paléomagnétiques ont montré que la Terre possède un champ magnétique depuis plusieurs milliards d'années. Or, comme le temps de diffusion caractéristique d'un champ magnétique dans le noyau terrestre n'est que de quelques centaines de milliers d'années, sa longévité ne peut être expliquée que par un processus d'auto-génération de champ magnétique. Celui-ci résulterait d'une instabilité magnétique, produite par les mouvements turbulents convectifs du fluide dans le noyau de la planète. Cette instabilité est connue sous le terme d'effet dynamo (Moffatt (1978)).

Une dizaine d'expériences dans le monde ont été construites pour tenter de reproduire cet effet dynamo en laboratoire. Toutes ces expériences utilisent un écoulement de Sodium liquide. Grâce à une géométrie d'écoulement fixée par des parois internes (Gailitis *et al.* (2001); Müller *et al.* (2004)), les expériences de Riga (dynamo de Ponomarenko) et de Karlsruhe (dynamo de Roberts) ont réussi en 2000 à reproduire cet effet dynamo. A la suite à ces premiers succès, une série de nouveaux projets sont actuellement en préparation dans le monde, dont un à Grenoble. Ces projets de seconde génération sont plus ambitieux que les deux premiers, l'objectif étant de faire une dynamo sans parois internes. Ils sont de ce fait plus difficiles à réaliser. Le dimensionnement de ces expériences a été fait à partir de la partie moyenne du champ de vitesse. Or, le champ de vitesse réel présente un taux de turbulence de l'ordre de 100 %. Ces fluctuations sont soupçonnées d'augmenter considérablement le seuil de l'instabilité dynamo. A ce jour, seule l'expérience Von Karman Sodium du CEA à Cadarache a mis en évidence en 2006 un effet dynamo dans un écoulement en géométrie libre.

Dans ce contexte, nous proposons d'étudier l'influence de fluctuations de grandes échelles sur le seuil de l'instabilité dynamo pour un champ de vitesse hélicoïdal de même type que la dynamo de Ponomarenko.

Cette dynamo est l'un des premiers exemples de génération d'un champ magnétique par un fluide en mouvement indépendant dans le temps, elle a largement été étudié théoriquement et numériquement, et les confrontations des résultats théoriques, numériques avec ceux obtenus avec l'expérience de Riga ont été très satisfaisants. L'ensemble de ces résultats nous permettra d'avoir des points de comparaison pour notre travail.

Deux approches perturbatives ont été menées antérieurement par C. Normand (Normand (2003)) et F. Pétrélis (Petrelis (2003)) pour des modulations temporelles de faibles amplitudes. C. Normand (Normand (2003)) s'est intéressée à la dynamo de Ponomarenko avec un écoulement modulé dans le temps de manière périodique. Dans la limite de faibles amplitudes de modulations, elle a calculé les corrections du nombre de Reynolds magnétique

---

critique et la fréquence propre en fonction de la fréquence de forçage.

De notre côté, nous nous proposons d'examiner l'écoulement de Ponomarenko dans un modèle unidimensionnel, auquel on superpose une modulation temporelle périodique de grande échelle et d'amplitude quelconque. On calculera le seuil de l'instabilité dynamo en fonction des caractéristiques de cette fluctuation (fréquence, intensité, déphasage,...).

D'une part, nous avons utilisé des méthodes, qui sous certaines hypothèses, ont permis d'obtenir des résultats, à savoir l'approche perturbative pour de faibles amplitudes de modulation, une approche basée sur un développement en séries de Fourier pour une géométrie particulière de la partie fluctuante du champ de vitesse, et une approche asymptotique valable pour de grands nombres de Reynolds magnétiques. D'autre part, nous avons utilisé une approche directe reposant sur une méthode de Galerkin inspirée des travaux de [Marié \*et al.\* \(2006\)](#). Cette approche ne repose sur aucune hypothèse simplificatrice et nous permettra de faire le lien entre toutes les approches précédentes.

Pour comprendre les mécanismes et les résultats obtenus, nous nous sommes en grande partie appuyés sur la notion de surface de résonance issue de la théorie développée pour un champ de vitesse stationnaire pour de grands nombres de Reynolds magnétiques ([Gilbert \(1988\)](#); [Ruzmaikin \*et al.\* \(1988\)](#)).

Ce manuscrit est organisé de la manière suivante. Dans une première partie intitulée *Introduction*, nous présentons la notion d'effet dynamo, à la suite de quoi nous positionnons le contexte dans lequel s'inscrit le problème que nous avons résolu. Dans une deuxième partie intitulée *Définition du problème et approches*, nous présentons une formulation générale du problème ainsi que les différentes approches que nous avons utilisées. Et dans une troisième et dernière partie intitulée *Résultats et Comparaisons*, nous présentons et comparons les résultats de chaque approche. Dans le dernier chapitre de cette partie un peu en marge de ce manuscrit, nous présenterons quelques résultats sur la dynamo de Roberts modulée périodiquement dans le temps, pour laquelle nous avons mené une étude préliminaire similaire à celle portant sur la dynamo de Ponomarenko.

# Première partie

## Introduction

---





# Chapitre 1

## Contexte général de l'effet dynamo

### 1.1 Introduction à la notion d'effet dynamo

#### 1.1.1 Champ magnétique terrestre et effet dynamo

La première observation du champ magnétique terrestre remonterait au huitième siècle avant notre ère. Les Chinois auraient remarqué qu'une masse de fer magnétique s'orientait en direction du pôle Nord de la Terre. A partir du *VII<sup>ième</sup>* et du *VIII<sup>ième</sup>* siècle, les navigateurs Chinois utilisaient déjà l'aiguille aimantée pour se diriger sur les océans. Ces observations ont ainsi posé la question de l'origine du champ magnétique terrestre, qui resta longtemps une grande énigme.

Dans un premier temps, on a pensé que le fait qu'une boussole indiquait le nord était lié à l'étoile polaire ou à une grande île magnétique localisée au pôle Nord.

Dans le célèbre traité « De magnete »(1600), William Gilbert, physicien et médecin de la reine Elisabeth I, fut le premier à formuler une théorie selon laquelle le champ magnétique terrestre possédait une origine interne : la Terre recèlerait en son centre un gigantesque aimant magnétique (« Magnus magnet ipse est globus terrestris »). Mais il a fallu attendre 1835 et les travaux de Gauss, pour avoir une description plus précise de la structure du champ magnétique terrestre, il a été établi que le champ magnétique terrestre possédait une structure dipolaire majoritairement symétrique par rapport à un axe faisant un angle de 10 degrés par rapport à l'axe des pôles géographiques et que la source de ce champ était nécessairement située au centre de la Terre.

Grâce à des données paléomagnétiques issues des roches volcaniques profondes des océans qui conservent la mémoire du champ magnétique lors de leur formation, on a une idée plus précise de l'activité magnétique aux échelles de temps géologiques. On sait maintenant que la Terre possède une activité magnétique depuis 3.2 milliards d'années (*Tarduno et al. (2007)*). De plus, il a été mis en évidence que le champ magnétique variait dans le temps en intensité et en direction. Sur la figure (1.1) retraçant les inversions du champ magnétique

---

terrestre au cours des 115 derniers millions d'années, on voit que ces renversements se font de manière chaotique, sans période propre. Il n'a pas été observé de déclin de cette énergie

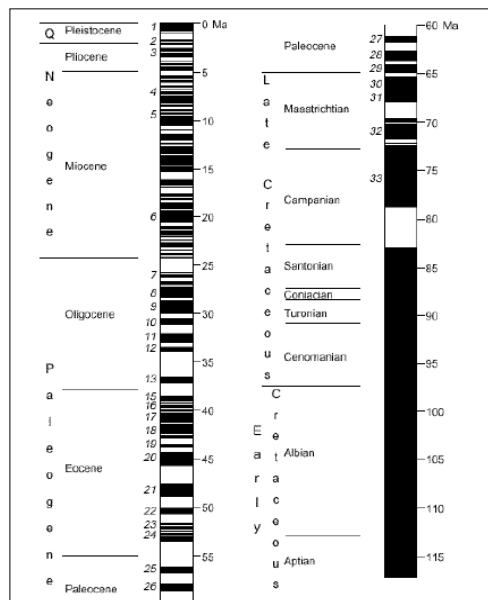


FIGURE 1.1 – Polarité du champ magnétique terrestre au cours du temps géologique. Les intervalles blancs et noirs correspondent aux temps où le champ magnétique conserve la même polarité. (P. Brunhes, 1905). En noir, polarité normale, en blanc, polarité inverse.

magnétique, il doit donc y avoir une source qui la maintient. Plusieurs hypothèses ont été avancées pour expliquer ce phénomène. La théorie de Gilbert, selon laquelle la Terre était composée d'un gigantesque aimant placé en son centre est à exclure. En effet, compte tenu des températures et des pressions régnant au centre de la Terre, on sait qu'aucun matériau ferromagnétique n'est capable d'y produire un champ magnétique. Une autre hypothèse était basée sur le fait qu'il existerait un dipôle fossile généré au moment de la formation de la Terre. On sait maintenant que le temps de diffusion du champ magnétique terrestre est de l'ordre de  $10^5$  années, soit un temps bien inférieur à celui de l'âge de la Terre. Cette hypothèse fut donc aussi rejetée.

Enfin, l'hypothèse la plus vraisemblable et couramment admise à ce jour est celle d'un processus dynamique, lié à la conversion d'énergie mécanique en énergie magnétique par un mécanisme d'instabilité qu'on appelle effet dynamo.

Cet effet peut être illustré de manière minimaliste par la dynamo de Bullard (cf. figure 1.2) mettant en jeu des éléments solides dans lesquels des courants électriques sont libres de circuler. Cette dynamo fut proposée par le physicien anglais E. Bullard dans les années 50 (Bullard (1955)). Son principe est le suivant : lorsqu'un disque en rotation uniforme est plongé dans un champ magnétique  $\mathbf{B}_0$  parallèle à son axe de rotation, il apparaît un champ

électromoteur  $\mathbf{E} = \sigma(\mathbf{u} \times \mathbf{B})$  entre son centre et sa périphérie, où  $\sigma$  est la conductivité électrique du disque. Connecté à un circuit électrique, ce champ électromoteur peut induire un courant électrique. Si on utilise ce courant de manière à ce qu'il produise un champ magnétique  $\mathbf{B}_1$  dans la même direction et dans le même sens que  $\mathbf{B}_0$  alors le champ initial est amplifié et on a effet dynamo. Cet effet est d'autant plus important que le disque tourne vite.

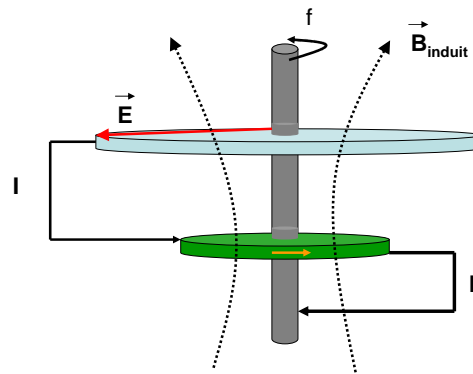


FIGURE 1.2 – Schéma de la dynamo de Bullard, en bleu ciel le disque conducteur, en vert le bobinage, la flèche orange indique la circulation du courant dans la bobine.

Le premier à proposer le principe des dynamos fluides pour le champ magnétique terrestre et du soleil, fut Sir Larmor en 1919 (Larmor (1919)).

Dans le cas de la Terre, l'écoulement a lieu entre la graine solide et le manteau, où se trouve un fluide conducteur de l'électricité essentiellement constitué de fer et de nickel (cf figure 1.3). Le mouvement de ce fluide est induit par les forces d'origine thermique, gravitationnelle et solutale.

## 1.1.2 Autres domaines d'application

### Astrophysique

Il n'y a pas que la Terre qui possède un champ magnétique, la plupart des objets astrophysiques, comme les planètes, les étoiles, les galaxies, les disques d'accrétion, les disques interstellaires par exemple, possèdent aussi leur propre champ magnétique et ce, en l'absence d'aucune source externe. Ces objets sont tous animés d'un mouvement de rotation, et il est admis que leur champ magnétique est dû à l'effet dynamo. Si on s'intéresse au cas du soleil, une manifestation spectaculaire est celle des éjections coronales (cf. fig 1.4), qui sont en fait l'éjection de plasma souvent liée aux éruptions solaires. Sur cette même figure,

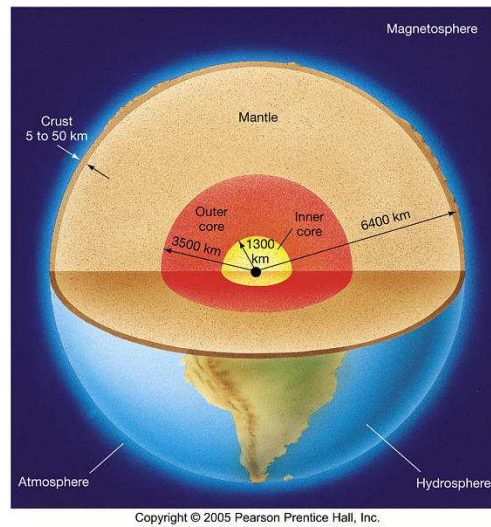


FIGURE 1.3 – *Structure interne de la Terre. Au centre, la graine de fer solide (jaune), entourée par le noyau de fer et de nickel liquide (rouge), siège des mouvements électro-conducteurs conduisant à l'effet dynamo.*

on peut constater l'effet fondamental de la magnétosphère qui sert de bouclier contre les particules ionisantes du vent solaire.

Contrairement à celui de la Terre, l'évolution temporelle du champ magnétique solaire semble périodique, avec une période d'environ 22 années.

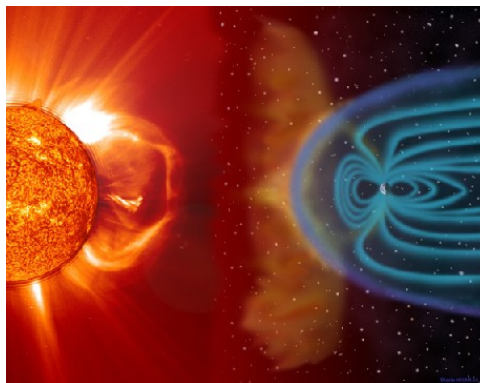


FIGURE 1.4 – *Ejection coronale de plasma lors d'une éruption solaire à gauche et interaction du vent solaire avec la magnétosphère en bleue à droite (la Terre est représentée à droite à l'échelle par rapport au soleil). (SOHO/LASCO/EIT. Nasa. ESA)*

Dans le tableau (1.1), nous présentons les grandeurs caractéristiques de quelques objets astrophysiques représentatifs. Nous définirons les grandeurs de ce tableau dans la suite du manuscrit, mais on peut déjà constater que les échelles mises en jeu sont très différentes d'un objet à un autre, que les échelles de longueur sont considérables et que les échelles

	$\rho_v$	$L$	$U$	$\nu$	$\eta$	$B$	$\frac{L^2}{\eta}$
Terre	$10^4$	$3.10^6$	$4.10^{-4}$	$10^{-6}$	3	$10^{-4}$	$10^5$
Jupiter	$10^3$	$5.10^7$	$5.10^{-2}$	$3.10^{-6}$	10	$4.10^{-4}$	$10^7$
Soleil	1	$2.10^8$	$10^3$	$3.10^{-5}$	$10^3$	$10^{-4}$	$10^6$
Notre galaxie	$2.10^{-21}$	$10^{19}$	$10^4$	$5.10^{13}$	$10^{17}$	$10^{-10}$	$10^{13}$

TABLE 1.1 – *Grandeurs caractéristiques de la masse volumique en  $kg.m^{-3}$ , de longueur en  $m$ , de vitesse en  $m.s^{-1}$ , de viscosité cinématique en  $m^2.s^{-1}$ , de diffusivité magnétique en  $m^2.s^{-1}$ , du champ magnétique en Tesla et du temps de diffusion magnétique en années.*

de vitesse sont relativement faibles. On constate aussi que le champ magnétique de notre galaxie est beaucoup plus faible que celui de la Terre, de Saturne et du Soleil.

### Expériences dynamos fluides

Ce domaine d'application est directement lié à mes travaux de recherche. On verra par la suite plus en détail quelques exemples d'expériences dynamos qui ont pour objectif de reproduire en laboratoire cet effet dynamo. Il est à noter que toutes ces expériences utilisent du sodium liquide, possédant une grande conductivité électrique, et qu'à ce jour seulement trois d'entre elles ont réussi à reproduire cet effet, l'expérience de Riga et de Karlsruhe en 2000, et l'expérience Von Karman Sodium en 2006.

### Réacteurs à neutrons rapides

Les réacteurs à neutrons rapides (RNR) utilisent dans leur circuit de refroidissement du sodium liquide. En effet, le sodium liquide est un excellent caloporteur et il permet d'évacuer la chaleur produite par les réactions de fission au sein du réacteur. Au début des années 1990, l'effet dynamo fut soupçonné d'avoir induit un mouvement transversal des assemblages du coeur du réacteur de la Centrale Super Phenix, entraînant quatre arrêts d'urgence.

Cette thématique a motivé de nombreux travaux, notamment ceux de la thèse de F. Plunian ([Plunian \(1996\)](#)) où il a été montré que cette instabilité était favorisée par la présence d'assemblages aux parois ferromagnétiques.

### Influence du champ magnétique sur les variations climatiques

En comparant les variations détaillées de l'intensité du champ magnétique terrestre avec les changements climatiques sur des échelles de temps très longues de l'ordre de plusieurs

millénaires, des équipes de recherche tentent de mettre en évidence que la variation séculaire du champ magnétique influence fortement les variations climatiques (Gallet *et al.* (2006)).

## 1.2 Equations de la MHD et effet dynamo

La magnétohydrodynamique (Moffatt (1978), Moreau (1991), Gilbert (2003)) décrit les phénomènes où, dans un fluide conducteur de l'électricité, le champ de vitesse  $\mathbf{u}$  et le champ magnétique  $\mathbf{B}$  sont couplés. Ce domaine d'étude fait le lien entre les lois classiques de l'électromagnétisme et les équations de Naviers Stockes.

### 1.2.1 Equation de l'induction magnétique

#### Equations de la MHD et loi d'Ohm

Rappelons d'abord les équations de l'électromagnétisme, appelées encore équations de Maxwell, décrivant l'évolution du champ magnétique  $\mathbf{B}$  et du champ électrique  $\mathbf{E}$ , pour un milieu non ferromagnétique de permittivité électrique uniforme  $\epsilon_0$  et de perméabilité magnétique uniforme  $\mu_0$  :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Dans ces équations apparaissent la densité de charge électrique dans le fluide  $q$  et la densité de courant électrique  $\mathbf{j}$ .

L'équation (1.1) est appelée *Loi d'induction de Faraday*, l'équation (1.2) traduit l'absence de charges magnétiques dans le milieu, l'équation (1.3) est appelée la *Loi d'Ampère*, enfin l'équation (1.4) est la *Loi de Coulomb*.

Les équations (1.4) et (1.2) sont les équations structurelles du champ électromagnétique. Les deux autres relient ce champ aux charges fixes ou mobiles.

Ces équations traduisent le couplage entre champ électrique et champ magnétique qui est à l'origine des phénomènes d'induction. L'existence d'un champ électrique  $\mathbf{E}$  en un point où existe un champ magnétique  $\mathbf{B}$  non stationnaire trouve sa réciproque : un champ magnétique  $\mathbf{B}$  existe en un point où règne un champ électrique  $\mathbf{E}$  non stationnaire. Les équations de Maxwell forment ainsi un système d'équations couplées, dans lequel  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  forment le champ électromagnétique.

En introduisant la conductivité électrique  $\sigma$ , que nous supposons uniforme, nous rajoutons à ce système d'équations la loi d'Ohm :

$$\mathbf{j} = q\mathbf{u} + \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (1.5)$$

Cette dernière diffère de l'expression classique valable pour un milieu immobile ( $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ ). Ici, la vitesse locale  $\mathbf{u}$  advecte la densité de charge électrique  $q$ . De plus dans la limite classique de la transformation de Lorentz du champ électromagnétique, le champ électrique dans le référentiel lié à la matière s'écrit :  $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ .

### Approximation de l'électromagnétisme

L'approximation de l'électromagnétisme permet de faire une simplification du modèle MHD présenté ci-dessus en restreignant l'étude à des intervalles de temps très grands devant le temps de relaxation des charges électriques, ce qui revient à ignorer la propriété de condensateur du matériau.

En prenant la divergence de l'équation (1.3) et en substituant  $\mathbf{j}$  et  $\nabla \cdot \mathbf{E}$  par leur expression issue de (1.1) et de la loi d'Ohm (1.5), nous obtenons l'expression de l'équation de la charge électrique :

$$\frac{\varepsilon_0}{\sigma} \left[ \frac{\partial q}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) q \right] + q = -\varepsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (1.6)$$

Si le temps typique d'évolution du phénomène est très grand devant celui ( $\varepsilon/\sigma$ ) nécessaire aux charges électriques pour se répartir par attraction-répulsion mutuelle dans le matériau, alors on peut négliger le terme  $\left[ \frac{\partial q}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) q \right]$  dans l'équation (1.6). Ainsi sous cette hypothèse, il vient :

$$q = -\varepsilon_0 \nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (1.7)$$

En faisant une analyse des ordres de grandeurs des équations (1.3), (1.5), et en prenant en compte l'expression de  $q$  donnée par la formule (1.7), nous pouvons négliger le terme  $q\mathbf{u}$  dans l'équation (1.5), et le terme correspondant aux courants de déplacements  $\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$  dans l'équation (1.3).

Cette approximation est peu restrictive car pour un métal liquide où  $\sigma$  est de l'ordre de  $10^6 \Omega^{-1} m^{-1}$ , le temps de relaxation des charges est de l'ordre de  $10^{-10}$  s.

Récapitulons les équations de la MHD et la loi d'Ohm dans le cadre de l'approximation électromagnétique :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad (1.8)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.9)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad (1.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.11)$$

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (1.12)$$



## Equation de l'induction

L'équation de l'induction explicite le couplage entre le champ magnétique et l'écoulement du fluide conducteur.

En remplaçant  $\mathbf{j}$  par son expression (1.12) dans l'équation (1.10), on a :

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\sigma \mu_0} \nabla \times \mathbf{B} = \eta \nabla \times \mathbf{B} \quad (1.13)$$

où  $\eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$  est la diffusivité magnétique du milieu considéré.

En prenant le rotationnel de cette équation et en utilisant la relation vectorielle suivante,  $\nabla \times (\nabla \times) = \nabla (\nabla \cdot) - \Delta$ , il vient l'équation de l'induction sous sa forme classique :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1.14)$$

Mettons maintenant cette dernière équation sous sa forme adimensionnelle. Pour cela, nous allons définir les grandeurs adimensionnelles suivantes,  $L$ ,  $U$  et  $\tau$ , qui sont respectivement les échelles de longueur, de vitesse et de temps caractéristiques.

L'équation (1.14) devient (la notation \* indique que les grandeurs sont adimensionnelles) :

$$\frac{L^2}{\eta \tau} \partial_{t^*} \mathbf{B}^* = \frac{U L}{\eta} \nabla^* \times (\mathbf{u}^* \times \mathbf{B}^*) + \nabla^{*2} \mathbf{B}^* \quad (1.15)$$

Les conditions expérimentales imposent l'échelle de vitesse et de longueur caractéristique. Cependant, on peut définir deux échelles de temps caractéristiques. La première,  $\tau_a = \frac{L}{U}$ , correspond au temps advectif, c'est-à-dire au temps que met une structure pour être transportée sur une distance  $L$  par un champ de vitesse de norme  $U$ . La seconde,  $\tau_d = \frac{L^2}{\eta}$  correspond au temps diffusif, c'est-à-dire au temps que met une structure de taille  $L$  pour être diffusée en l'absence de champ de vitesse.

On définit le nombre adimensionnel de Reynolds magnétique comme le rapport de ces deux temps,

$$R_m = \frac{(\mathcal{O} |\nabla (\mathbf{u} \times \mathbf{B})|)}{\mathcal{O} (|\eta \nabla^2 \mathbf{B}|)} = \frac{\tau_d}{\tau_a} = \frac{U L}{\eta} \quad (1.16)$$

Si maintenant, on considère le temps advectif comme temps caractéristique, l'équation de l'induction (1.15) devient :

$$\partial_{t^*} \mathbf{B}^* = \nabla^* \times (\mathbf{u}^* \times \mathbf{B}^*) + \frac{1}{R_m} \nabla^{*2} \mathbf{B}^* \quad (1.17)$$

En définissant le paramètre  $\varepsilon$  par  $\varepsilon = R_m^{-1}$  et en sous-entendant la notation \*, cette équation s'écrit :

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \varepsilon \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1.18)$$

Si on considère le temps diffusif comme temps caractéristique, l'équation (1.15) devient :

$$\partial_{t^*} \mathbf{B}^* = R_m \nabla^* \times (\mathbf{u}^* \times \mathbf{B}^*) + \nabla^{*2} \mathbf{B}^* \quad (1.19)$$

L'équation de l'induction s'écrit :

$$\partial_t \mathbf{B} = R_m \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1.20)$$

*Remarque :*

Dans la suite du manuscrit, excepté pour notre approche asymptotique du problème, nous considérerons l'échelle de temps diffusive qui est la plus longue si  $R_m \gg 1$ .

Le nombre de Reynolds magnétique est le paramètre de contrôle de cette équation. Il compare les termes d'induction ( $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ ) aux termes diffusifs ( $\eta \nabla^2 \mathbf{B}$ ). Décomposons le terme  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$  pour en comprendre la signification. Pour un écoulement incompressible, on peut écrire,  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ . En utilisant cette décomposition, l'équation de l'induction devient :

$$\partial_t \mathbf{B} + R_m (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B} = R_m (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1.21)$$

Le terme  $R_m (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{B}$  correspond au transport des lignes de champ magnétique par l'écoulement. Le terme  $R_m (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  est le terme source de l'instabilité dynamo, il correspond à l'étirement des lignes de champ magnétique par le champ de vitesse. Enfin, le dernier terme correspond aux effets diffusifs, il tend à dissiper l'énergie magnétique.

Si la diffusion domine, alors l'énergie magnétique diminuera avec le temps, interdisant tout effet dynamo. En revanche, si pour une certaine géométrie du champ de vitesse, les termes d'induction prédominent sur les termes de diffusion, alors un effet dynamo est possible.

Il est important de noter que cette équation est linéaire en  $\mathbf{B}$ . Si on fait une analyse linéaire de stabilité de la solution triviale  $\mathbf{B} = 0$ , on comprend qu'il puisse exister un nombre de Reynolds magnétique critique, à partir duquel l'advection soit suffisante, pour qu'une petite perturbation du champ magnétique provoque la croissance du champ induit. C'est ce qui définit le problème de la dynamo cinématique.

Du fait de la linéarité de l'équation de l'induction, le champ magnétique croît exponentiellement sans saturer, ce qui est physiquement impossible. En réalité une saturation intervient via la rétroaction du champ magnétique sur le champ de vitesse dans l'équation de Navier Stokes, que nous verrons plus loin.

**Interprétation énergétique :** Nous définirons  $\mathcal{V}$  comme le volume défini par la région du fluide en mouvement et  $\hat{\mathcal{V}}$  le volume extérieur au fluide. Si on multiplie l'équation (1.14) par  $\mathbf{B}/\mu_0$  et en l'intégrant sur tout l'espace  $\mathcal{V} + \hat{\mathcal{V}}$ , il vient :

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V} + \hat{\mathcal{V}}} \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} dV = \frac{1}{\mu_0} \int_{\mathcal{V} + \hat{\mathcal{V}}} \mathbf{B} \cdot \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) dV + \frac{1}{\sigma \mu_0^2} \int_{\mathcal{V} + \hat{\mathcal{V}}} \mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{B} dV \quad (1.22)$$

En supposant l'absence de source électrique de champ magnétique ou de courant électrique à l'extérieur, le flux du vecteur de Poynting, défini par  $\phi_P = \iint_S \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} dS$ , est

nul à l'infini.

Sous cette hypothèse, on peut montrer que l'on peut écrire l'équation (1.22) (Gilbert (2003)) :

$$\frac{d}{dt} \int_{\nu+\hat{\nu}} \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} dV = - \int_{\nu} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) dV - \int_{\nu} \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} dV \quad (1.23)$$

En définissant l'énergie magnétique  $\mathcal{E}_m$ , par :

$$\mathcal{E}_m = \int_{\nu+\hat{\nu}} \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} dV \quad (1.24)$$

l'équation (1.23) peut s'écrire encore :

$$\partial_t \mathcal{E}_m = -\mathcal{P}_L + \mathcal{P}_J \quad (1.25)$$

$\mathcal{P}_L$  correspond au terme de conversion d'énergie mécanique en énergie magnétique par induction, son signe dépend du champ de vitesse.  $\mathcal{P}_J$  correspond aux pertes par effet Joule et son signe est toujours négatif. Cette approche énergétique montre bien que l'effet dynamo résulte d'une compétition entre l'amplification du champ magnétique et les pertes dissipatives.

Intéressons nous maintenant aux deux cas limites de l'équation de l'induction :  $R_m \ll 1$  et  $R_m \gg 1$ .

**Cas de la limite diffusive,  $R_m \ll 1$  :**

L'équation de l'induction se réduit alors à l'équation de diffusion  $\partial_t \mathbf{B} = \nabla^2 \mathbf{B}$ . Le champ magnétique solution de cette équation décroît exponentiellement dans le temps avec un taux de croissance égal à  $1/\tau_d$ .

**Cas de la limite idéale,  $R_m \gg 1$  :** Dans ce cas, on néglige les termes diffusifs, ce qui revient à supposer que  $\sigma = \infty$ , c'est-à-dire on suppose que le fluide est infiniment conducteur et donc qu'il ne présente pas de résistance électrique. C'est une approximation que l'on fait en particulier en MHD idéale. Cette limite est aussi pertinente pour l'étude de l'effet dynamo pour des objets astrophysiques (Vainshtein & Zeldovich (1972)).

En utilisant la définition de la dérivée particulaire,  $D_t = \partial_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ , l'équation de l'induction devient :

$$D_t \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (1.26)$$

Cette relation traduit le fait que les lignes de champ magnétique suivent parfaitement le mouvement du fluide ou encore, que les lignes de champ magnétique sont gelées dans le fluide (Moffatt (1978)). Ce mécanisme particulièrement bien décrit dans la thèse de M. Bourgoïn (Bourgoïn (2003)), constitue le théorème du champ gelé, qui est l'équivalent du théorème de Kelvin pour l'équation de vorticité. On comprend qu'en étirant un tube

de flux magnétique, l'intensité du champ augmente en proportion inverse à la section du tube.

**Conditions aux limites :** Nous allons maintenant considérer les conditions aux limites de notre problème. Nous allons étudier les situations où le milieu présente un changement dans ses propriétés électromagnétiques que sont la conductivité  $\sigma$  et la perméabilité  $\mu$  à l'interface (S); (S) étant la surface fermée et fixe délimitant l'écoulement du fluide conducteur.

Nous considèrerons que  $\sigma$  et  $\mu$  sont constants et uniformes de part et d'autre de cette surface. De plus, on prendra pour le fluide une condition de non glissement à la paroi, i.e  $\mathbf{u} = 0$  à l'interface. En notant  $\mathbf{n}$  la normale orientée vers l'extérieur à l'interface, cette condition implique  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$

En intégrant les 4 équations de Maxwell, ces conditions limites s'écrivent :

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}] = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \quad (1.27)$$

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}] = 0 \quad (1.28)$$

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{B}] = \mu_0 \mathbf{j}_s \quad (1.29)$$

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = 0 \quad (1.30)$$

où  $\mathbf{j}_s$  est la densité de charge électrique à l'interface,  $\rho_s$  la densité volumique de charge à l'interface, et  $[X] = X_{ext} - X_{int}$ .

Nous allons définir deux cas particuliers suivants, le premier où le milieu extérieur est isolant et le deuxième où le milieu extérieur est parfaitement conducteur. Ces deux cas offrent l'avantage de présenter une formulation mathématique simple.

- **Milieu extérieur isolant**

Les équations (1.28), (1.29), avec  $\mathbf{j}_s = 0$ , impliquent que le champ magnétique doit être continu à la paroi, c'est-à-dire,

$$[\mathbf{B}] = 0 \quad (1.31)$$

D'autre part, le milieu extérieur étant isolant, les courants ne peuvent pas évoluer à l'extérieur de l'écoulement, ainsi la composante normale des courants électriques induits doit s'annuler à la paroi. La relation (1.10) implique que la composante normale du rotationnel du champ magnétique doit s'annuler à l'interface, c'est-à-dire

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (1.32)$$

- **Milieu extérieur parfaitement conducteur**

Dans ce cas, le milieu extérieur est de conductivité infinie, ainsi la continuité de  $\mathbf{B}$  n'est plus imposée, il faut garder la composante normale de  $\mathbf{B}$  à la paroi, c'est-à-dire :

$$[\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}] = 0 \quad (1.33)$$

De plus, la relation (1.30) traduit la continuité des composantes tangentielles du champ électrique. Pour un conducteur parfait  $\mathbf{E} = 0$ , on doit donc avoir continuité des composantes tangentielles de  $\mathbf{E}$ . En utilisant la loi d'Ohm (1.12) et la condition de non glissement à la paroi, on trouve que les composantes tangentielles de la densité de courant à la paroi doivent être nulles, c'est-à-dire,

$$\mathbf{n} \times \mathbf{j} = 0 \quad (1.34)$$

## 1.2.2 Equation de Navier Stokes

Pour un fluide Newtonien en écoulement incompressible, les équations du mouvement sont les équations de Navier Stokes :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\nabla \left( \frac{P}{\rho_v} \right) + \mathbf{f} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \end{aligned} \quad (1.35)$$

où  $\mathbf{f}$  est la résultante des forces volumiques en chaque point,  $P$ , la pression,  $\nu$  et  $\rho_v$  la viscosité cinématique et la masse volumique du fluide respectivement. L'expression de  $\mathbf{f}$  pour un fluide non pesant, en présence d'un champ magnétique, est donnée par la loi de Laplace :  $\mathbf{f} = \frac{1}{\rho_v} \mathbf{j} \times \mathbf{B}$ . En utilisant l'équation (1.10) et en remplaçant  $\mathbf{f}$  par son expression, l'équation (1.35) devient :

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla \left( \frac{P}{\rho_v} \right) + \frac{1}{\rho_v \mu} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.36)$$

En reprenant les échelles caractéristiques définis pour l'équation de l'induction, nous allons écrire l'équation de Naviers Stokes sous forme adimensionnelle. Nous choisirons comme temps caractéristique, le temps diffusif, comme échelle de pression,  $P = \rho_v U^2$ , et comme échelle de l'induction magnétique,  $B = \sqrt{\rho_v \mu U^2}$ . Nous obtenons ainsi,

$$\partial_t^* \mathbf{u}^* + R_m (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -R_m \nabla (P^*) + R_m (\nabla^* \times \mathbf{B}^*) \times \mathbf{B}^* + P_m \nabla^{*2} \mathbf{u}^* \quad (1.37)$$

où  $P_m$  est le nombre de Prandlt magnétique, défini par le rapport  $R_m/R_e$ ,  $R_e$  étant le nombre de Reynolds cinétique de l'écoulement. Dans le sodium liquide qui est utilisé dans les expériences dynamo,  $P_m$  est généralement de l'ordre de  $10^{-6}$ , ce qui signifie que les perturbations du champ magnétique diffusent dans l'écoulement beaucoup plus rapidement que les perturbations du champ de vitesse. Dans ce cas, un écoulement dynamo est donc forcément turbulent.

**Récapitulatif** Les 4 équations de la magnétohydronique sous forme adimensionnelle sont donc :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.38)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = R_m \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1.39)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.40)$$

$$\partial_t \mathbf{u} + R_m (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -R_m \nabla (P) + R_m (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + P_m \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.41)$$

auxquelles il faudra ajouter les conditions limites appropriées au problème.

Nous avons vu que dans le cas des métaux liquides le nombre de Prandtl est très petit (de l'ordre de  $10^{-6}$ ), le nombre de Reynolds très grand, mettant ainsi en jeu une large gamme d'échelles que nous ne sommes pas actuellement capable de résoudre avec des simulations numériques directes.

De plus, contrairement à l'équation de l'induction, l'équation de Navier Stokes est non linéaire en  $\mathbf{B}$ , rendant la résolution de ce problème beaucoup plus complexe.

### 1.2.3 Dynamo cinématique et mécanismes dynamo

**Le problème de la dynamo cinématique** Résoudre le problème cinématique de la dynamo consiste à se donner un champ de vitesse pour l'écoulement, et à chercher s'il donnera lieu à un effet dynamo. Si c'est le cas, on déterminera pour quelle amplitude du champ de vitesse. Dans ce problème, on ne considèrera pas l'équation de Navier Stokes. Mathématiquement, on se donne un champ de vitesse, et il faut trouver le champ magnétique solution de l'équation de l'induction :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.42)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = R_m \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B} \quad (1.43)$$

Si la solution triviale  $\mathbf{B} = 0$  est instable, alors nous parlerons d'effet dynamo. Et le  $R_m$  à partir duquel apparaît cette instabilité, est appelé  $R_m$  critique ou encore seuil de l'instabilité dynamo.

Dans le cas d'écoulements indépendants du temps, on démontre que la solution de l'équation de l'induction peut se mettre sous la forme ( $\mathbf{r}$  désignant le vecteur position au point considéré) :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{R}(\mathbf{B}(\mathbf{r}) \exp(\gamma t)) \quad (1.44)$$

où  $\mathcal{R}$ , désigne la partie réelle,  $\gamma$  le taux de croissance complexe du champ magnétique, dont la partie réelle correspond au taux d'accroissement de  $\mathbf{B}$  et dont la partie imaginaire correspond à la pulsation de  $\mathbf{B}$ .

Si  $\mathcal{R}(\gamma) > 0$ , nous avons croissance du champ magnétique et donc effet dynamo, si  $\mathcal{R}(\gamma) < 0$ , nous n'avons pas effet dynamo, enfin si  $\mathcal{R}(\gamma) = 0$ , nous sommes au seuil de l'instabilité dynamo.

On classe les écoulements dynamos cinématiques pour des nombres de Reynolds infinis, en deux catégories, les dynamos lentes et les dynamos rapides (Vainshtein & Zeldovich (1972); Childress & D.Gilbert (1995)). Si  $\lim_{R_m \rightarrow \infty} \mathcal{R}(\gamma) > 0$ , on parle de dynamo rapide, et la dynamo est contrôlée par le temps d'advection. Si  $\lim_{R_m \rightarrow \infty} \mathcal{R}(\gamma) \rightarrow 0$ , on parle de dynamo lente, et la dynamo est contrôlée par la diffusion magnétique. Cette classification ne s'applique que pour les régimes cinématiques, pour lesquels le taux de croissance du champ magnétique est bien défini. L'étude des dynamos rapides est très intéressante car, pour la plupart des objets astrophysiques, le nombre de Reynolds magnétique est très grand ( $> 10^8$ ). Le processus des dynamos lentes est, quant à lui, insuffisant pour expliquer la génération du champ magnétique pour de tels  $R_m$ .

D'autre part, on distinguera les dynamos cinématiques à séparation d'échelles ou non (Krause & Rädler (1980)). On parle de dynamo de petite échelle, si le champ de vitesse est de petite échelle et qu'il entretient un champ magnétique d'échelle comparable ou plus petite. On parlera de dynamo à séparation d'échelle, si un champ de vitesse de petite échelle génère un champ magnétique de grande échelle ; ce type de dynamo est traditionnellement étudié dans le cadre de la théorie du champ moyen, pour laquelle on trouve une description complète dans les ouvrages de Moffatt (1978) et Krause & Rädler (1980).

Il est important de noter que cette approche cinématique reste valide tant que les forces de Laplace sont négligeables devant les effets inertiels dans l'équation de Navier Stokes. Ainsi résoudre le problème de la dynamo cinématique ne nous dit rien sur le comportement du champ magnétique pour des temps longs. Cette approche nous permet de découpler les équations régissant le champ magnétique de celles régissant le champ de vitesse. De cette manière, le problème devient plus simple à résoudre.

Néanmoins, le problème reste complexe et il est difficile de trouver un écoulement conduisant à l'effet dynamo.

Dans les deux paragraphes suivants, nous allons voir un certain nombre de résultats théoriques qui permettent de cibler les écoulements ne conduisant pas à l'effet dynamo, ainsi qu'un résumé des principaux mécanismes identifiés conduisant à l'effet dynamo.

**Théorèmes anti dynamo** Tout écoulement ne peut pas forcément conduire à un effet dynamo, même pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds magnétique. Un certain nombre de théorèmes ont été démontrés (Moffatt (1978)), nous allons rappeler ici les principaux, le plus connu d'entre eux étant le théorème de Cowling énoncé en 1934

- Théorème de Cowling : *Un champ magnétique axisymétrique ne peut pas être entretenu par un effet dynamo.*
- Théorème de Cowling bis : *Un champ magnétique indépendant d'une coordonnée cartésienne ne peut pas être entretenu par un effet dynamo.*
- Ecoulement toroïdal : *Un écoulement purement toroïdal ne peut pas entretenir un champ magnétique par effet dynamo.*
- Ecoulement radial de dépendance radiale : *Un écoulement dont le champ de vitesse est de la forme  $\mathbf{v} = V(r, t) \mathbf{e}_r$  ne peut pas entretenir un champ magnétique par effet dynamo.*

**Mécanismes dynamos** Nous allons présenter quelques mécanismes classiques de l'effet dynamo ; pour une description détaillée le lecteur pourra se référer aux ouvrages Moffatt (1978) ; Plunian & Massé (2002) ; Petrelis (2003) et Leprovost (2004) par exemple.

---

**Effet  $\Omega$  :** Cet effet dû à la rotation différentielle du fluide traduit la déformation des lignes de champ magnétique par les gradients de vitesse. Pour comprendre ce mécanisme, nous allons utiliser la décomposition en partie poloïdale et toroïdale du champ magnétique, décomposition particulièrement appropriée aux géométries cylindriques et sphériques. Dans le cas du cylindre, la composante poloïdale correspond aux composantes radiales et axiales, et la composante toroïdale correspond à la composante orthoradiale (selon  $\mathbf{e}_\theta$ ).

On peut montrer (Moffatt (1978)) que tout champ magnétique de divergence nulle, peut se mettre sous la forme :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_P + \mathbf{B}_T \text{ où } \mathbf{B}_P = \nabla \times (\nabla \times (P \mathbf{e}_r)) = -\nabla \times (\mathbf{e}_r \times \nabla P) \quad (1.45)$$

$$\mathbf{B}_T = \nabla \times (T \mathbf{e}_r) = -\mathbf{e}_r \times \nabla T \quad (1.46)$$

où P et T sont deux fonctions scalaires de la position. Si, en plus d'être à divergence nulle, le champ de vitesse est axisymétrique, alors on suppose généralement que le champ magnétique est aussi axisymétrique. La décomposition devient alors plus simple et on a en géométrie cylindrique :

$$\mathbf{B} = B \mathbf{e}_\theta + \nabla \times (A \mathbf{e}_\theta) = B \mathbf{e}_\theta + \mathbf{B}_P \quad (1.47)$$

$$\mathbf{u} = U \mathbf{e}_\theta + \nabla \times (\psi \mathbf{e}_\theta) = U \mathbf{e}_\theta + \mathbf{U}_P \quad (1.48)$$

où A est la partie toroïdale du potentiel vecteur et  $\psi$  la fonction de courant du champ de vitesse. Ainsi, on peut décomposer l'équation de l'induction en sa partie toroïdale et en sa partie poloïdale, il vient respectivement :

$$\partial_t A + \frac{1}{r} (\mathbf{U}_P \cdot \nabla) r A = \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) A \quad (1.49)$$

$$\partial_t B + r (\mathbf{U}_P \cdot \nabla) \frac{B}{r} = r (\mathbf{B}_P \cdot \nabla) \frac{U}{r} + \eta \left( \nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) B \quad (1.50)$$

La première équation pour la partie poloïdale du champ magnétique montre bien qu'un champ poloïdal évolue indépendamment de sa partie toroïdale B, et il n'y a aucun terme source pour  $\mathbf{B}_P$ . On retrouve bien ici le théorème anti dynamo de Cowling. La deuxième équation contient quant à elle un terme source,  $r (\mathbf{B}_P \cdot \nabla) \frac{U}{r}$ . Ce terme va transformer du champ poloïdal en champ toroïdal. Si  $U/r$  est constant le long d'une ligne de champ de  $\mathbf{B}_P$ , alors la ligne tourne autour de l'axe sans se déformer. Par contre, si on est en présence de rotation différentielle, *i.e*  $U/r$  non constant, alors les lignes de champ magnétique poloïdal sont étirées par les gradients de vitesse et génèrent du champ toroïdal.

Cependant, nous avons vu que la composante poloïdale disparaît pour des temps longs, ainsi le terme source s'éteint de la même manière. Ce mécanisme, bien qu'intéressant et présent dans la plupart des dynamos, ne permet donc pas à lui seul d'expliquer la génération de champ magnétique.

**Effet  $\alpha$  :** L'effet  $\alpha$ , encore appelée effet "Parker" (1955) (Parker (1955)), caractérise les dynamos à plusieurs échelles, dont c'est généralement le cas pour les dynamos turbulentes. La théorie du champ moyen, largement inspirée de la théorie de la turbulence



homogène (Batchelor (1953)), est utilisée pour les champs de vitesse fortement turbulents, pour lesquels la génération du champ magnétique ne se fait pas à la même échelle que celle du champ de vitesse (contrairement au cas d'un champ de vitesse stationnaire). Elle a été principalement élaborée par Steenbeck, Krause et Rädler (Steenbeck *et al.* (1966), Krause & Rädler (1980)).

Dans ce cas, on peut considérer le champ magnétique et le champ de vitesse comme la superposition d'un champ de vitesse moyen et d'une partie fluctuante, *i.e*  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{U}}$  et  $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{B}}$ . En introduisant cette écriture dans l'équation de l'induction, nous obtenons l'équation suivante pour la partie moyenne du champ magnétique :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{B}}}{\partial t} = \nabla \times (\bar{\mathbf{U}} \times \bar{\mathbf{B}} + f_{em}) + \eta \nabla^2 \bar{\mathbf{B}} \quad (1.51)$$

Cette équation est la même que celle obtenue pour le champ magnétique total, à l'exception d'un terme additionnel,  $f_{em} = \overline{\tilde{\mathbf{U}} \times \tilde{\mathbf{B}}}$ , appelé encore force électromotrice moyenne. En effectuant un développement en série de Taylor à l'ordre 2 de  $f_{em}$ , on obtient  $f_{em} = \alpha \bar{\mathbf{B}} - \beta \nabla \times \bar{\mathbf{B}}$ , où  $\alpha$  est un paramètre non nul pour un champ de vitesse turbulent présentant de l'hélicité et  $\beta$  décrit l'accroissement de la résistivité électrique due à la turbulence. Cet effet  $\alpha$  permet, aussi bien de générer du champ toroïdal à partir d'un champ poloïdal, que l'inverse.

Parker illustre cet effet de façon qualitative, cf figure (1.5) ; une ligne de champ magnétique est d'abord étirée vers le haut et tournée simultanément par la vorticité des fluctuations de manière à former une spire dont l'axe est aligné avec le champ magnétique initial. Cette spire donnant ainsi naissance à un champ perpendiculaire au champ initial. On comprend alors que les champs de vitesse présentant une hélicité, définie par  $H_v = \int \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) dV$ , non nulle, sont les premiers candidats pour l'obtention de l'effet dynamo. Ainsi, la plupart des écoulements dynamos théoriques et expérimentaux présentent de l'hélicité, comme la dynamo de Ponomarenko (Ponomarenko (1973)), ou encore l'écoulement de Karlsruhe (Robert (1972)).

On peut avoir des dynamos dites  $\alpha^2$ , fonctionnant uniquement avec ce mécanisme, comme c'est supposé pour le soleil, et aussi des dynamos dites  $\alpha\Omega$ , combinant ces 2 effets, comme c'est le cas supposé pour la Terre.

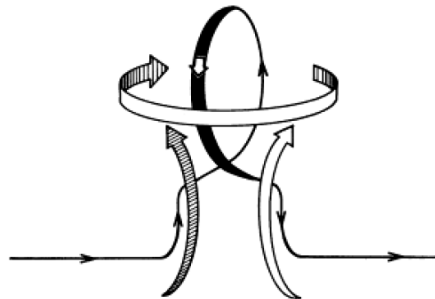


FIGURE 1.5 – Schéma illustrant l'Effet  $\alpha$  (figure originale issue de Parker (1970)).

**Stretch - Twist - Fold** Ce mécanisme d'étirement, torsion et pliage a été imaginé pour de grands nombres de Reynolds magnétique (Childress & D.Gilbert (1995)); il permet de renforcer un tube circulaire de champ magnétique, et pourrait s'appliquer aux dynamos rapides. Le principe de ce mécanisme est basé sur la conservation du flux magnétique dans des tubes de champ. On part d'un tube torique de champ magnétique que l'on étire de manière à doubler sa longueur. Ensuite, on le replie de manière à former un huit que l'on rabat sur lui même. On obtient ainsi un tore de même section qu'au départ mais avec un champ d'intensité double. La figure (1.6) illustre ce mécanisme.

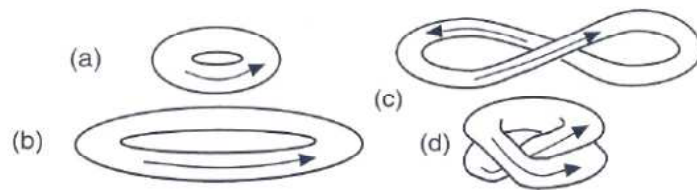


FIGURE 1.6 – Mécanisme 'Stretch-Twist-Fold' (figure originale issue de Childress & D.Gilbert (1995)), (a) à (b) Stretch, (b) à (c) Twist, (c) à (d) Fold.

**Effet de la diffusion en géométrie cylindrique** Le mécanisme dynamo pour une dynamo hélicoïdale, comme c'est le cas pour la dynamo de Ponomarenko, est de type cisaillement diffusion, c'est-à-dire étirement par le cisaillement du champ de vitesse et diffusion magnétique des lignes de champ (Gilbert (1988), Plunian & Massé (2002)). En effet, la composante radiale  $B_r$  du champ magnétique est cisailée de manière à produire un champ hélicoïdal  $(0, B_\theta, B_z)$  où  $(r, \theta, z)$  sont les coordonnées cylindriques. La diffusion magnétique de la composante azimutale  $B_\theta$  génère un champ magnétique radial  $B_r$  due à la géométrie cylindrique du problème.

### 1.3 Contexte expérimental

Nous avons vu dans les paragraphes précédents toute la complexité que doit présenter le champ de vitesse pour être un bon candidat à l'effet dynamo; c'est certainement pour cette raison que le succès des dynamos fluides expérimentales n'est survenu que très récemment, en 2000.

Historiquement, les premières études sur des expériences dynamos ont été faites avec des dynamos, dites solides. La première, fut la dynamo disque de Bullard (Bullard (1955)), que nous avons décrite sommairement dans la partie introductive. Ensuite, vint la dynamo de Rikitake (Rikitake (1958)) couplant deux dynamos de Bullard et générant une dynamique chaotique ainsi que des inversions de polarité analogues au comportement du champ paléomagnétique (Plunian *et al.* (1998)). Toutefois, ces études n'ont jamais été

réalisées expérimentalement. La première expérience fut la dynamo de Lowes et Wilkinson (Lowes & Wilkinson (1963), Lowes & Wilkinson (1968)), constituée essentiellement de deux rotors cylindriques insérés dans un bloc de métal au repos. Cette expérience a cependant conduit à des mécanismes de saturation non représentatifs de l'effet dynamo. Nous allons faire dans cette section une revue des principales dynamos fluides expérimentales qui fonctionnent toutes avec du sodium liquide (liquide pour des températures supérieures à 100°C), connu pour sa très grande conductivité et sa densité proche de celle de l'eau.

Nous avons vu qu'un écoulement dynamo était fortement turbulent. Dans le cas des objets astrophysiques, les vitesses caractéristiques sont lentes, mais elles sont compensées par des longueurs caractéristiques considérables. Pour pouvoir reproduire l'effet dynamo en laboratoire, on compense la relative petite taille des expériences par une vitesse importante de l'écoulement, rendant encore plus complexe la réalisation de celles-ci.

Les premières expériences dynamos ayant réussi à reproduire l'effet dynamo sont les expériences de Riga en Lettonie (Gailitis *et al.* (2000)) et de Karlsruhe en Allemagne (Müller & Stieglitz (2000); Stieglitz & Müller (2001)), toutes deux ayant fonctionné en 2000. L'expérience de Riga est mono cellulaire et produit un champ magnétique oscillant. Celle de Karlsruhe est multicellulaire, c'est-à-dire qu'elle présente une séparation d'échelle entre le champ de vitesse et le champ magnétique, conduisant à un effet  $\alpha$  comme dans les dynamos turbulentes (voir section 9.3.1). Cette expérience génère un champ magnétique stationnaire.

Ces deux expériences ont obtenu un très bon accord entre les résultats expérimentaux et ceux prédits par l'approche théorique cinématique basée sur le champ de vitesse moyen. Elles ont la particularité d'avoir un champ de vitesse extrêmement contraint. Elles font partie des expériences dites d'ancienne génération. Le succès de ces expériences constitua une première avancée dans la compréhension de l'effet dynamo, mais elles sont très éloignées des dynamos naturelles pour lesquelles il n'existe pas de paroi interne. Ainsi, une nouvelle génération de dynamos expérimentales a été développée. Il en existe à ce jour sept dans le monde, dont seule, l'expérience française Von Karman Sodium située à Cadarache a réussi en 2006, à reproduire l'effet dynamo (Monchaux *et al.* (2006)).

### 1.3.1 Expériences d'ancienne génération

#### Expérience de Riga

Cette expérience est inspirée de l'écoulement hélicoïdal de Ponomarenko (Ponomarenko (1973)). Le fluide a un mouvement de translation et de rotation solide dans un cylindre infini de rayon. A l'extérieur de ce cylindre, le fluide est au repos. Dans le repère cylindrique  $(r, \theta, z)$ , le champ de vitesse de l'écoulement de Ponomarenko à l'intérieur du cylindre en

---

mouvement s'écrit :

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ r\Omega \\ V \end{pmatrix}, \quad \Omega \text{ et } V \text{ étant des constantes} \quad (1.52)$$

Le nombre de Reynolds magnétique critique le plus bas pour lequel est observé l'effet dynamo est de 17,7 (Gailitis & Freibergs (1976) ; voir A pour la définition du nombre de Reynolds magnétique).

L'écoulement de Ponomarenko possède le double avantage d'être simple (permettant une résolution quasi analytique du problème cinématique) et de posséder un seuil relativement bas. C'est probablement pour ces raisons que l'expérience de Riga fut basée sur cet écoulement. Elle est composée de trois cylindres concentriques (voir figure 1.7). Le

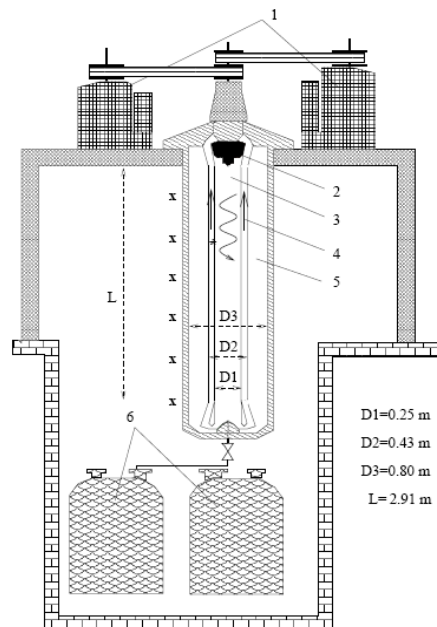


FIGURE 1.7 – *Dispositif expérimental de l'expérience de Riga : (1) moteurs entraînant la turbine (d'une puissance de 55 kW chacun), (2) hélice, (3) cylindre interne contenant le sodium liquide animé d'un mouvement hélicoïdal, (4) coquille externe de recirculation, (5) sodium au repos, (6) réservoirs où est stocké le sodium au repos.*

sodium liquide contenu dans le cylindre central est mis en mouvement de rotation et de translation par une hélice entraînée par deux moteurs, avec une vitesse verticale de l'ordre de 15 m/s. Le système étant fermé, l'écoulement revient avec un mouvement vertical de retour. Enfin, le troisième cylindre contient du sodium liquide au repos, ce qui permet d'abaisser le seuil de l'instabilité dynamo (Gailitis & Freibergs (1976)). Cette expérience a permis d'observer un champ magnétique oscillant à une fréquence voisine de 1 Hz et d'une intensité d'environ 350 G. Pour le mode azimutal  $m=1$  (on verra par la suite la signification de ce nombre  $m$ ), les isovalues de l'énergie électromagnétique s'organisent en double hélice autour de la zone de cisaillement (voir figure 1.8).

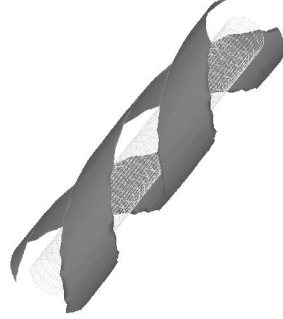


FIGURE 1.8 – *Simulation numérique des isovaleurs de l'énergie magnétique pour le mode azimuthal  $m=1$  (Plunian (1996)).*

### Expérience de Karlsruhe

L'expérience de Karlsruhe est inspirée de l'écoulement périodique de Roberts (Robert (1972)) pour lequel l'efficacité à générer un effet dynamo cinématique a été démontré théoriquement à l'aide de la théorie du champ moyen (Busse (1975); Busse (1992); Rädler et al. (1996); Rädler et al. (2002a); Rädler et al. (2002b)). Cet écoulement est composé d'un réseau périodique infini de vortex hélicitaires, parallèles ou antiparallèles, dont le sens de rotation et de translation sont inversés d'une cellule à une autre (voir figure (b) 1.9). En coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , cet écoulement s'écrit :

$$\vec{u}(x, y) = \begin{pmatrix} \sin x \cos y \\ -\sin y \cos x \\ -\sqrt{2} \bar{\Gamma} \sin x \sin y \end{pmatrix} \quad (1.53)$$

où  $\bar{\Gamma}$  est un facteur d'hélicité. Cet écoulement est stationnaire et indépendant de  $z$ . L'expérience de Karlsruhe (cf. figure (a) 1.9) a été proposée par F. Busse (Busse (1975); Busse (1992)). Elle consiste en un réseau de 52 vortex contenus dans une cuve cylindrique remplie de sodium liquide. Elle présente deux échelles de longueurs caractéristiques, l'échelle intégrale de la cuve, et l'échelle d'un vortex, cette dernière étant plus petite que la première d'un facteur sept approximativement.

Cet écoulement a permis d'observer un champ magnétique stationnaire, perpendiculaire à l'axe des vortex de mode azimuthal  $m = 1$  et d'une intensité voisine de 700 G. Cette expérience est multi-échelle, c'est-à-dire que le champ de vitesse de petite échelle génère un champ magnétique de grande échelle.

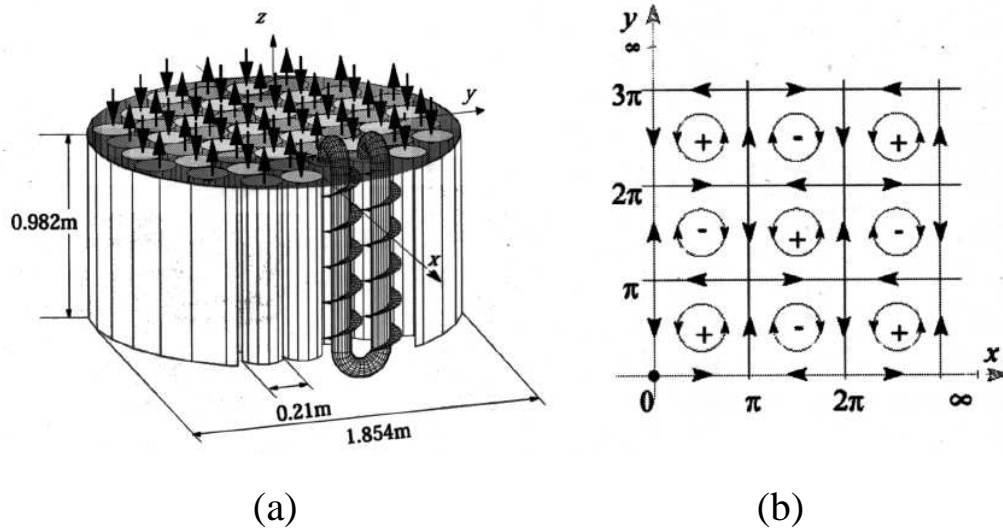


FIGURE 1.9 – (a) *Dispositif expérimental de la dynamo de Karlsruhe*; (b) *Ecoulement périodique de Roberts dans le plan  $(x,y)$ , les signes + et - représentent le sens de la composante verticale de l'écoulement.*

### 1.3.2 Expériences de nouvelle génération

Nous allons dans cette section faire une rapide revue des principales expériences dynamos, dites de 'nouvelle génération', qui visent à étudier l'effet dynamo ainsi que sa saturation, dans des géométries où le fluide, en l'occurrence le sodium liquide, ne présente pas de contraintes. Une des principales difficultés de ces expériences est d'arriver à produire une puissance nécessaire pour pouvoir générer un effet dynamo. En effet, en définissant le nombre de Reynolds magnétique par  $R_m = \sigma \mu R^2 \Omega$ , où  $R$  et  $\Omega$  sont une dimension et une fréquence caractéristique de l'expérience respectivement, alors on peut montrer que, dans un régime turbulent, la puissance mécanique nécessaire pour mettre le liquide en mouvement est de l'ordre de  $P \propto \rho_v R^5 \Omega^3$ , (Mordant *et al.* (1997)). On voit que si on veut augmenter le Reynolds magnétique en doublant la taille de l'expérience, il va falloir injecter une puissance 32 fois plus importante. A l'heure actuelle, les expérimentateurs ne peuvent que difficilement dépasser les quelques centaines de KiloWatt, ce qui est une contrainte très forte pour ces nouvelles expériences.

#### Expérience DTS

L'expérience DTS (Derviche Tourneur Sodium) du LGIT à Grenoble (voir figure 1.10), a pour objectif principal d'étudier le rôle de la rotation dans le régime de champ fort qui

semble caractériser la dynamo terrestre. Cette expérience est donc un peu 'à part' car elle n'est pas destinée à reproduire l'effet dynamo, et n'a pas été dimensionnée pour. Elle est composée de deux sphères concentriques représentant par analogie avec la Terre, la graine et la limite noyau-manteau dans un rapport des rayons d'environ 0,35 (soit approximativement le même rapport que dans le cas de la Terre) (Cardin *et al.* (2002)). La sphère interne, d'un rayon de 7,4 cm, est en cuivre et la sphère externe d'un rayon de 21 cm, est en acier inox; entre les deux, se trouve le sodium liquide. A l'aide de deux moteurs d'une puissance de 10kW chacun, les sphères sont mises en rotation. La force de Coriolis jouant un rôle majeur dans la géodynamo, on impose une rotation globale ainsi qu'une rotation différentielle pour mettre en mouvement le sodium liquide. L'écoulement généré est de type Taylor Couette sphérique.

Cette expérience a permis d'avoir beaucoup d'informations sur les écoulements turbulents générés en présence de rotation et d'un champ magnétique. A l'aide de mesures de champ magnétique induit et d'autres mesures (Nataf *et al.* (2007)), il a été fait une bonne description de l'écoulement moyen axi-symétrique. D'autre part, la partie fluctuante du champ de vitesse a fait apparaître des ondes qui se propagent (Schmitt *et al.* (2007)).



FIGURE 1.10 – *Dispositif expérimental de DTS.*

### Expérience dynamo de Perm

Cette expérience est développée à l'Institut de Mécanique des Milieux Continus de Perm en Russie par l'équipe de P. Frick (Frick *et al.* (2002), Dobler *et al.* (2003)). Un tore rempli de sodium liquide est fixé sur une table tournante. Le tore est en rotation rapide jusqu'à obtenir une rotation solide. A un instant donné, la table est arrêtée à l'aide de freins. Le fluide continue alors de tourner à l'intérieur du tore avec un mouvement de spin-down. L'action d'une hélice fixe à l'intérieur du tore donne une géométrie hélicitaire à l'écoulement. Cette expérience a pour but d'obtenir l'effet dynamo dans un écoulement hélicitaire de type Ponomarenko.

## Expérience VKS

L'expérience dynamo de VKS (Von Karman Sodium) est développée conjointement par les équipes du CEA Saclay, du CEA Cadarache, et des Ecoles Normales Supérieures de Lyon et de Paris. On l'appelle aussi, dans la communauté turbulence, « the french washing machine ». Elle est le fruit d'une collaboration de 10 ans.

L'écoulement de Von Karman (voir figure 1.11) permet de générer un écoulement fortement turbulent. Dans cette expérience, le sodium liquide est contenu dans un cylindre de rapport d'aspect unitaire. A l'intérieur de ce cylindre se trouvent deux disques possédant des pales. Ces disques peuvent tourner soit dans le même sens, soit dans le sens contraire, et ce, à la même fréquence ou à des fréquences différentes. Ainsi le sodium liquide est entraîné de manière inertielle par les disques.

L'écoulement de Von Karman est connu pour être un bon candidat à l'effet dynamo. En effet, il possède de la rotation différentielle et peut donc générer un effet  $\Omega$ . Ensuite, il présente une forte hélicité et nous avons vu que cet ingrédient était très favorable à l'effet dynamo grâce à l'effet  $\alpha$ .

Une autre caractéristique importante de cet écoulement, est qu'il possède de très fortes fluctuations turbulentes. En définissant le taux de turbulence comme le rapport entre les fluctuations de vitesse et leur moyenne, on a établi que le taux de turbulence pour VKS était de l'ordre de 100 % par rapport à l'écoulement moyen.

Parallèlement à cette expérience, une expérience en eau, appelée VKE, a été développée au CEA Saclay afin de caractériser le régime hydrodynamique de l'écoulement de Von Karman (Marié (2003), Ravelet (2005), Monchaux (2007)). L'expérience est la même que celle de VKS, mais deux fois plus petite. Sur les photos (1.12), on peut visualiser, suivant le temps de pause de l'appareil photo, les structures de petites échelles et de grandes échelles de cet écoulement. En effet, sur la photo (a), le temps de pause est court et montre des structures de petites échelles; sur la photo (b), le temps de pause est intermédiaire, d'environ une période de rotation des disques, et l'on distingue clairement une structure cohérente de grande échelle sous forme de vortex dans le plan équatorial (à l'endroit où le cisaillement est le plus important du fait de la rotation différentielle). Ces vortex ont une durée de vie beaucoup plus grande que les périodes de rotation du disque et créent une dynamique temporelle de l'écoulement assez lente. Il est à noter que si l'on continue à moyenner dans le temps, on retombe sur l'écoulement moyen du même type que celui de la figure (1.11).

Entre 1998 et 2003, une première version de l'expérience, appelée VKS1, n'a pas obtenu l'effet dynamo. La puissance injectée n'était pas suffisante pour obtenir un nombre de Reynolds magnétique au dessus du seuil. Toutefois, cette expérience a mis en évidence les processus élémentaires d'induction que sont l'effet Parker et l'effet  $\Omega$ . Elles ont aussi confirmé le fait que cet écoulement était un bon candidat à l'effet dynamo (Bourgoin (2003), Bourgoin *et al.* (2002)). De plus, des simulations numériques basées sur l'écoulement moyen ont très bien reproduit les phénomènes d'induction pour de bas  $R_m$ .

Suite à cette première tentative, les équipes travaillant sur ce projet ont développé une démarche d'optimisation de l'écoulement, avec pour but principal, d'abaisser le seuil de la



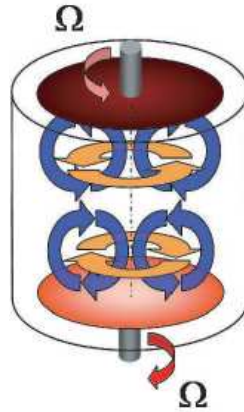
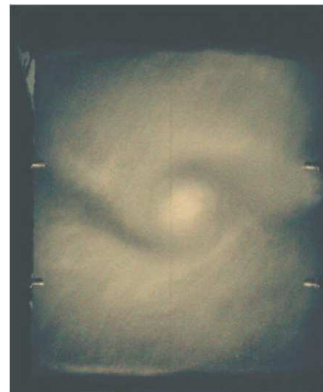


FIGURE 1.11 – *Ecoulement moyen de Von Karman Sodium dans le cas du régime à deux disques contra-rotatifs : en orange, la partie toroïdale ; en bleu, les cellules de recirculations poloïdales.*



(a)



(b)

FIGURE 1.12 – *Photos de l'écoulement de l'expérience VKE (clichés issus du CEA Saclay), pour un temps de pause de 2 ms (a) et de 50 ms (b) ; la visualisation de l'écoulement a été faite grâce à un encensement en bulles.*

dynamo. Elles ont utilisé l'expérience VKE permettant d'avoir une mesure de l'écoulement moyen, ainsi que des simulations du problème cinématique à partir du champ de vitesse moyen mesuré. Il a été mis en évidence que la forme de l'écoulement moyen (directement liée à la forme des pales et des disques), ainsi que les conditions limites, influençaient le seuil de l'instabilité dynamo. Suite à cette campagne, une deuxième version de l'expérience a vu le jour et a permis d'atteindre le seuil. Elle a des dimensions plus grandes, possède une puissance de 300 kW, deux fois supérieure à celle de la première version, ainsi qu'une régulation thermique contrairement à VKS1. Le cylindre contient 160 litres de sodium liquide, il a un rayon interne de 206 mm, une épaisseur de 5 mm et une hauteur de 604 mm. Outre la taille de l'expérience, ont été ajoutés un cylindre interne en cuivre (appelé aussi chemise) séparant l'écoulement de la couche de sodium au repos et un anneau dans le plan équatorial. La géométrie des pales a été elle aussi optimisée par rapport à la première version. De plus, les expérimentateurs ont remplacé les disques en inox par des disques en fer pur, ce qui a eu pour effet de changer les conditions limites sur les extrémités du cylindre, les disques étant désormais ferro-magnétiques. Il a été montré que l'ajout d'une couche de sodium au repos, autour du cylindre où se trouve l'écoulement, abaissait le seuil. Les simulations numériques menées par R. Laguerre *et al.*, ont permis de caractériser de manière plus précise l'influence de couches de conducteur sur le seuil de l'instabilité dynamo pour un écoulement simulant l'expérience VKS. En résolvant le problème cinématique, ils ont montré que les effets d'une enveloppe statique sur le seuil de l'instabilité sont amplifiés lorsque le rapport de conductivité de l'enveloppe sur celle du sodium passe de 1 à 5 (Laguerre *et al.* (2006)).

Il a été aussi montré que placer un anneau dans le plan équatorial permettait de stabiliser l'instabilité de la couche de cisaillement, et de réduire de manière significative les fluctuations lentes de grandes échelles, passant ainsi d'un ordre de 100 %, à un ordre de 30 à 50 % (Ravelet (2005), Monchaux (2007)). Sans anneau, la couche de mélange se déplace dans la cuve jusqu'à disparaître, alors qu'avec anneau, cette même couche reste confinée et ne modifie pas l'écoulement. Ces fluctuations sont fortement soupçonnées d'augmenter le seuil de l'instabilité dynamo (Ponty & Pinton (2004), Laval *et al.* (2006), Ponty *et al.* (2006)); on peut penser que l'ajout de cet anneau aurait constitué la clé du succès de cette expérience.

Une simulation numérique du problème cinématique avec comme gamme de paramètres, celle de l'expérience optimale, a conduit à un nombre de Reynolds magnétique critique de l'ordre de 43.

Sur la figure (1.14), on peut voir la première manifestation de l'effet dynamo pour une configuration des disques en contra-rotation. On s'aperçoit qu'à partir d'une fréquence de rotation des disques de 20 Hz environ, on a croissance et saturation du champ magnétique. La bifurcation est de type stationnaire, on n'observe pas de renversement. Le seuil a été atteint pour une valeur du nombre de Reynolds magnétique de l'ordre de 32 (Monchaux *et al.* (2006)), sensiblement plus faible que celui prévu par les simulations cinématiques basées sur le champ de vitesse moyen. Nous avons vu que l'écoulement moyen de Von Karman est très éloigné de l'écoulement complet; ainsi se pose de manière évidente la question du rôle de la turbulence sur le seuil.

À la suite de ces premières expériences, d'autres expériences ont été menées en utilisant

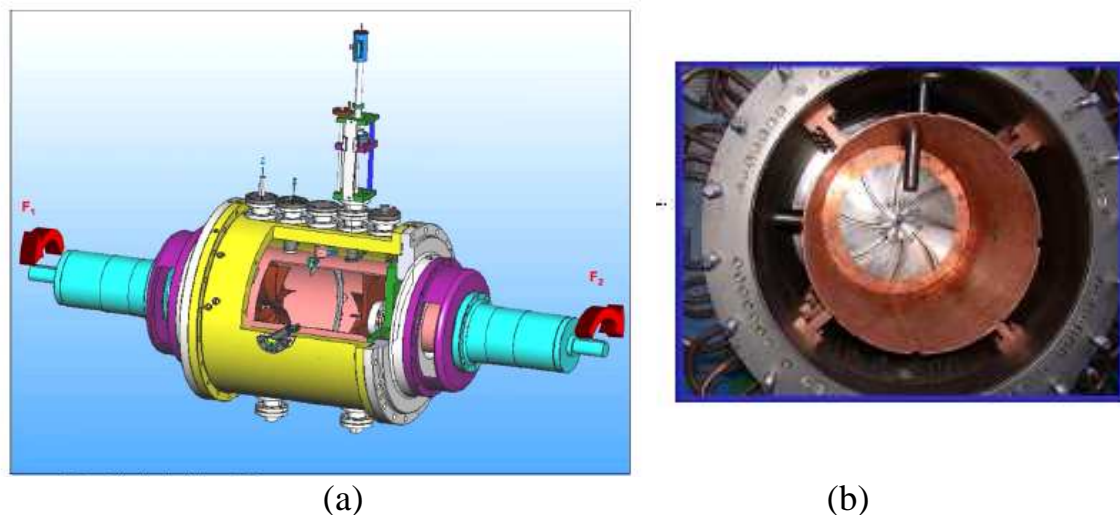


FIGURE 1.13 – Schéma de l'expérience VKS2 (a). Perspective de la cuve de l'expérience (b) où on peut apercevoir la chemise en cuivre.

des forçages non symétriques, elles ont mis en évidence des séries d'inversion du champ magnétique (Berhanu *et al.* (2007)).

Le principal objectif des nouvelles campagnes est de comprendre l'influence des conditions limites, mécaniques et électriques par rapport à la première version VKS1. Dans ce cadre, des mesures avec et sans anneau en contra rotation exacte, ont été récemment réalisées pour déterminer si les fluctuations de grandes échelles ont un rôle ou pas sur le seuil de l'instabilité dynamo (Monchaux (2007)). Ces mesures ont montré que dans le cas où les turbines tournent dans le sens négatif (dans le cas où les turbines attaquent le fluide avec leur face concave), le seuil est très proche de celui obtenu sans anneau (de l'ordre de 32), alors que si elles tournent dans le sens positif (dans le cas où les turbines attaquent le fluide avec leur partie convexe), on n'observe plus de dynamo dans la gamme de Reynolds magnétique envisagée. Ce résultat semblerait confirmer le fait que l'hydrodynamique de l'écoulement et plus particulièrement les fluctuations de grandes échelles, ont bien un effet sur le seuil de l'instabilité dynamo.

### Autres expériences

D'autres expériences sont encore en cours de développement, notamment deux en géométrie sphérique, mettant en jeu un écoulement turbulent proche de l'écoulement de Von Karman. Ces expériences n'ont pas reproduit l'effet dynamo.

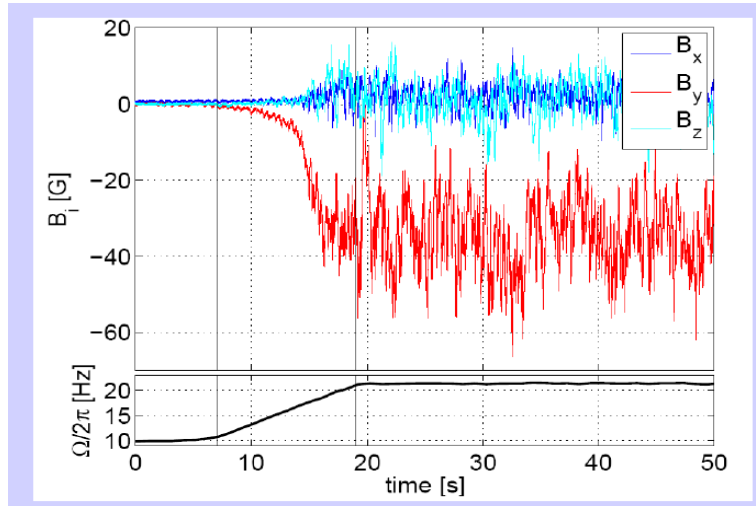


FIGURE 1.14 – Composante du champ magnétique et fréquence de rotation des disques en fonction du temps. La composante en rouge  $B_y$  représente la composante tangente au cylindre. La mesure a été faite en haut du cylindre. (Monchaux et al. (2006))

L'expérience de Maryland aux Etats Unis est constituée d'une sphère de 3 mètres de diamètre, dans laquelle le sodium est mis en mouvement par deux hélices co-axiales contra-rotatives (Peffley et al. (2000), Shew et al. (2001)). Cette expérience colossale n'est pas encore construite.

L'expérience de Madison, développée à l'Université de Wisconsin à Madison, est similaire à l'expérience de Maryland mais pour un diamètre de la sphère de l'ordre d'1 mètre (Forest et al. (2002), Babyliiss et al. (2004)).

L'équipe de C. Forest a récemment projeté d'utiliser du plasma à la place du sodium liquide dans les expériences dynamos turbulentes. A l'heure actuelle, aucun projet utilisant du plasma n'est finalisé.

### 1.3.3 Positionnement des expériences

Nous avons évoqué le contexte astrophysique, le contexte expérimental de l'effet dynamo et nous avons défini les paramètres contrôlant les phénomènes d'induction. Il apparaît intéressant de situer les problèmes les uns par rapport aux autres en terme de nombre de Reynolds cinétique, nombre de Reynolds magnétique et nombre de Prandtl magnétique. Ce dernier est défini par  $P_m = R_m/R_e = \nu/\eta$ . Dans un diagramme  $(R_m, R_e, P_m)$ , nous avons positionné sur la figure (1.15) les simulations numériques directes, les expériences

et quelques objets astrophysiques. Nous constatons que  $P_m$  évolue sur un intervalle très large allant de  $10^{-6}$  pour le noyau des planètes, à  $10^{+14}$  pour les milieux interstellaires. Ce large spectre implique de fortes différences entre les mécanismes possibles de génération du champ magnétique. On constate de manière claire que les DNS et les expériences sont très éloignées des objets astrophysiques, et sont encore loin d'être dans la gamme de paramètres représentatifs des objets astrophysiques. Dans le cas des simulations du champ magnétique terrestre, pour être réaliste, il faudrait utiliser une grille de simulation couvrant le noyau (dont le rayon est d'environ 3500 km) avec des mailles de taille inférieure à 1 mètre, ce qui est, bien évidemment, actuellement impossible.

Une des manières d'aborder ce problème numériquement est de faire des hypothèses sur la nature de l'écoulement. On peut modéliser les petites échelles du champ de vitesse et utiliser la technique des LES, 'Large Eddy Simulation' (Ponty & Pinton (2004), Ponty *et al.* (2006)), habituellement utilisée en turbulence; ou encore, dans le cadre d'applications géophysiques, utiliser l'hypothèse de quasigéostrophie (Shaeffer & Cardin (2006)). Ainsi, on arrive à résoudre le problème pour des nombres de Prandtl magnétique de l'ordre de  $10^{-2}$  à  $10^{-3}$ , mais nous sommes encore loin des paramètres réels.

Une autre méthode a été proposée par F. Plunian et R. Stepanov. En s'inspirant des modèles en couches hydrodynamiques, ils ont développé un modèle de turbulence magnétohydrodynamique en couches. Ce modèle est fondé sur l'expression des équations de Navier-Stokes et de l'induction dans l'espace de Fourier. Son principe est le suivant : dans le cas d'une turbulence isotrope, on peut remplacer toute quantité vectorielle par une quantité scalaire, chaque mode vectoriel étant donc remplacé par une couche scalaire. Ce modèle a donné de très bons résultats et a notamment permis d'identifier les transferts d'énergie locaux et non locaux (Stepanov & Plunian (2006), Plunian & Stepanov (2007)). Avec ce modèle, on peut résoudre ce problème pour des nombres de Prandtl magnétique arbitrairement petit ou grand.

---

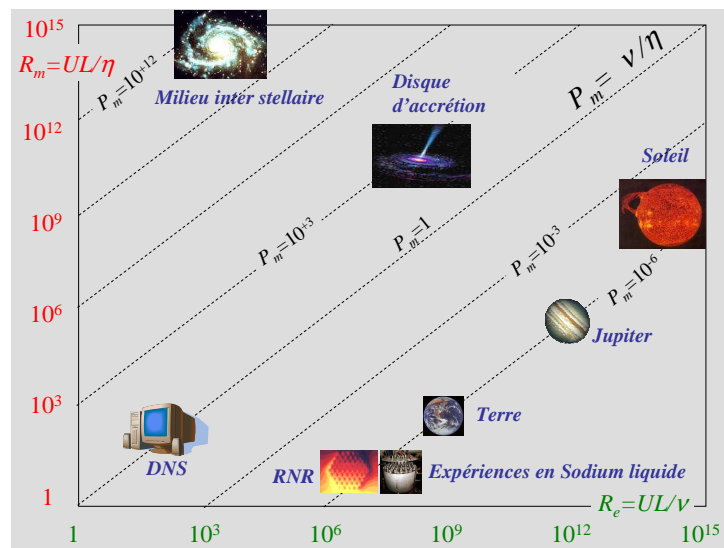


FIGURE 1.15 – Localisation dans le plan  $(Re, R_m)$  des simulations numériques directes (DNS), des expériences en laboratoire, des réacteurs à neutrons rapides (RNR) et de quelques objets astrophysiques. Les lignes obliques correspondent à un nombre de Prandtl magnétique constant ( $P_m = R_m/R_e$ ).



## Chapitre 2

# Positionnement du problème

### 2.1 Cadre de mon travail de thèse

Les expériences de Riga et Karlsruhe ont la particularité d'avoir obtenu l'effet dynamo pour un seuil relativement proche des prévisions de l'approche cinématique basée sur l'écoulement moyen. Ces expériences ont un taux de turbulence relativement faible de l'ordre de 10 %. On peut donc penser que les fluctuations de petites échelles, dues aux expériences elles-mêmes, n'ont pas d'influence sur le seuil de l'instabilité dynamo.

Les expériences de seconde génération pour lesquelles le champ de vitesse est fortement turbulent ont beaucoup de difficulté à atteindre le seuil. Les fluctuations de grandes échelles sont fortement soupçonnées d'influencer le seuil et de le faire augmenter considérablement. Dans ce contexte expérimental, l'étude de l'influence de la turbulence sur le seuil de l'instabilité dynamo a fait l'objet de nombreux travaux numériques, analytiques et expérimentaux. Nous allons faire ici une rapide revue de quelques uns de ces travaux de recherche.

En 2003, Christiane Normand ([Normand \(2003\)](#)) a étudié l'écoulement de Ponomarenko modulé dans le temps de manière périodique dans la limite de faibles amplitudes de modulation. A l'aide d'une méthode perturbative, elle a calculé les corrections du nombre de Reynolds magnétique critique et la fréquence propre en fonction de la fréquence de forçage. Nous la développerons plus en détail dans la section (5). F. Pétrélis a lui aussi étudié pendant sa thèse ([Petrelis \(2003\)](#)) l'effet d'une modulation périodique sur le champ de vitesse de Roberts. Il a montré analytiquement par une approche perturbative que dans la limite de faibles amplitudes de modulation, le seuil est abaissé si l'écoulement est forcé paramétriquement.

En 2005, N. Leprovost et B. Dubrulle ([Leprovost & Dubrulle \(2005\)](#)) ont développé un modèle analytique prédictif pour résoudre le problème de la dynamo cinématique en supposant que toutes les quantités turbulentes sont  $\delta$  corrélées en temps (méthode inspirée du modèle de Kazantsev-Kraichnan). Ils ont obtenu un critère d'apparition de l'effet dynamo, et ont montré que la turbulence pouvait faire augmenter ou diminuer le taux de

---



croissance selon l'intensité des fluctuations ou selon le temps de corrélation.

Suite à ce travail, en 2006, J.-P Laval et l'équipe du CEA Saclay ont étudié numériquement l'influence de la turbulence sur le seuil de l'instabilité dynamo (Laval *et al.* (2006)). Sur la base d'un écoulement de Taylor Green, ils ont montré qu'un bruit stochastique bien choisi pouvait modéliser les fluctuations turbulentes du champ de vitesse, rendant ainsi bien plus simple et rapide la résolution numérique du problème cinématique. Une des principales conclusions de ce travail est que l'addition d'un bruit stochastique au champ de vitesse moyen influence de manière significative le seuil de la dynamo, cette influence dépendant de la nature du bruit. Pour un bruit de grande échelle, le seuil augmente toujours, et pour un bruit de petite échelle, le résultat dépend du temps de corrélation et du nombre de Prandtl magnétique.

Y. Ponty, à l'aide d'un code 3D-périodique du problème dynamo dynamique (Ponty *et al.* (2006)) a montré entre autre que, pour un forçage de type Taylor Green avec un champ magnétique extérieur appliqué, la dynamo peut apparaître de manière sous-critique. Les résultats de ces DNS ont été comparés aux résultats cinématiques, notamment à ceux de J.-P Laval (Laval *et al.* (2006)) et à des modélisations de type LES. Les différentes approches ont convergé vers les mêmes conclusions.

En 2006, F. Pétrélis et S. Fauve ont étudié analytiquement les effets des fluctuations de grandes échelles sur le seuil de l'instabilité dynamo pour un champ de vitesse cellulaire fluctuant dans le temps, avec un champ moyen correspondant au champ de vitesse de type Roberts (Petrelis & Fauve (2006)). Ils ont étudié les effets de l'amplitude des fluctuations en considérant une modulation temporelle périodique ainsi que les effets de perturbations aléatoires de phase. Ils ont montré qu'une modulation en amplitude pouvait soit augmenter soit diminuer le seuil de la dynamo, et que les fluctuations de phase étaient toujours défavorables à la dynamo.

Dans un contexte plus astrophysique, Alice Courvoisier a modélisé pendant sa thèse les fluctuations du champ de vitesse en utilisant la théorie du champ moyen (Courvoisier (2006)). Dans le cas d'un effet  $\alpha$  cinématique, elle a étudié analytiquement et numériquement pour des champs de vitesse chaotiques, l'influence du temps de corrélation sur des trajectoires lagrangiennes.

J. Burguete et A. de la Torre ont étudié, à l'université de Navarra à Pampelune, l'influence sur le seuil de l'instabilité dynamo, d'un champ de vitesse fluctuant périodiquement dans le temps. Ils ont introduit, dans un code cinématique, le champ moyen de l'écoulement de Von Karman obtenu expérimentalement à l'aide d'une expérience similaire à VKE. Ils ont ajouté à ce champ moyen des fluctuations harmoniques. Ils ont étudié une large gamme de fréquences et ont montré que le seuil de l'instabilité dynamo dépendait fortement de la fréquence des fluctuations (Torre *et al.* (2007)).

Récemment, R. Laguerre et C. Nore ont développé un code numérique MHD 3D, permettant de résoudre simultanément l'équation de l'induction et les équations de Navier Stokes pour des écoulements dont la géométrie est finie et axi-symétrique (Laguerre (2007)). Ce code, unique à ce jour, peut prendre en compte des écoulements fortement turbulents proches de ceux des expériences de laboratoire, il permet aussi d'étudier des sauts de conductivité, et à terme de perméabilité magnétique.

Tous ces exemples montrent le grand intérêt que porte la communauté dynamo et plus particulièrement la communauté française, à cette thématique.

C'est dans ce cadre que s'inscrit mon travail de thèse, à savoir, quelle est l'influence des fluctuations de grandes échelles sur le seuil de l'instabilité dynamo. Pour apporter des éléments de réponse à cette question, nous allons prendre comme champ moyen l'écoulement de Ponomarenko, qui a été largement étudié et analysé, auquel nous allons ajouter des fluctuations de grandes échelles. Pour modéliser ces fluctuations, nous utiliserons une fonction périodique de type  $\cos(w_f t)$ ,  $w_f$  étant la fréquence de forçage. Nous déterminerons ainsi, grâce à l'approche cinématique, le seuil de l'instabilité dynamo. Une telle modélisation correspondrait expérimentalement à imposer une fluctuation temporelle aux turbines qui génèrent l'écoulement.

L'écoulement hélicitaire de Ponomarenko ayant fait l'objet de nombreux travaux analytiques, numériques et expérimentaux, il y a, à ce jour, une très bonne compréhension des mécanismes d'induction mettant en jeu l'écoulement moyen. Le problème cinématique de la dynamo de Ponomarenko conduit à une équation de dispersion pouvant être résolue numériquement. L'ensemble de ces résultats constituera un 'benchmark' sur lequel nous pourrons nous baser et dont nous pourrons nous inspirer.

Nous allons supposer de plus que le champ de vitesse est axi-symétrique et indépendant de la direction verticale, rendant ainsi le problème unidimensionnel. Contrairement à des codes numériques 3D, nous allons pouvoir explorer à moindre coût numérique une large gamme de paramètres temporels et géométriques.

Dans la section suivante, nous présentons la notion de surface de résonance qui a été développée par A. Gilbert ([Gilbert \(1988\)](#)) dans le cas d'un champ de vitesse stationnaire et pour de grands nombres de Reynolds. Dans ce manuscrit, nous avons étudié le cas où le champ de vitesse présente un cisaillement infini (cas (i)) et le cas où le champ de vitesse possède un cisaillement fini (cas (ii)). Nous verrons dans la suite de ce manuscrit la définition de ces écoulements ([3.1](#)). Cette notion de surface de résonance est une notion essentielle à ce manuscrit, elle nous permettra de comprendre nos résultats dans le cas d'un champ de vitesse dépendant du temps.

## 2.2 Notion de surface de résonance

On définit par surface de résonance, la surface où est généré le champ magnétique. Cette notion a été introduite pour un champ de vitesse stationnaire de type  $U(r, \theta, z)$  dans la limite de grands nombres de Reynolds magnétique ([Roberts \(1987\)](#), [Gilbert \(1988\)](#), [Ruzmaikin \*et al.\* \(1988\)](#), [Gilbert & Ponty \(2000\)](#), [Gilbert \(2003\)](#)). Ces conditions de résonance sont vérifiées pour des géométries du champ hélicoïdal bien choisies.

Dans le cas (i) du cisaillement infini, A.D. Gilbert ([Gilbert \(1988\)](#)) a montré que la dynamo était 'rapide' et que ce champ de vitesse générait un champ magnétique hélicitaire de même pas que celui de l'écoulement. Le lieu de cisaillement infini correspond à la surface de résonance où le champ magnétique est généré.

Pour le cas (ii) du cisaillement fini, A.D. Gilbert ([Gilbert \(1988\)](#)) a montré que la dynamo

était 'lente' et a mis en évidence l'existence d'une surface de résonance interne à l'écoulement où le champ magnétique était généré.

Nous allons appliquer cette notion de surface de résonance pour un champ de vitesse fluctuant dans le temps de la forme  $\tilde{U}(r, \theta, z) f(t)$ , où  $f(t)$  est une fonction périodique dépendant du temps et pour des nombres de Reynolds magnétique finis. Nous nous attendons à ce que le seuil dépende fortement de la géométrie de chaque partie du champ de vitesse, suivant que la relation de résonance pour chaque partie du champ soit vérifiée ou non, de l'intensité  $\rho$  des fluctuations par rapport au champ moyen, ainsi que de la fréquence des fluctuations.

Nous définirons de manière plus précise cette notion dans la section (3.3).

## 2.3 Déroulement chronologique de la thèse et plan de la suite du manuscrit

Le travail de Normand (2003) constitua le point de départ de mes travaux de thèse. En effet, nous étudierons le même problème mais pour des modulations temporelles périodiques d'amplitude quelconque. On calculera le seuil de l'instabilité dynamo en fonction des caractéristiques de cette fluctuation (fréquence, intensité, déphasage,...). Pour résoudre ce problème, nous nous sommes appuyés en grande partie sur l'article de L. Marié et C. Normand (Marié *et al.* (2006)), dans lequel ils ont étudié en géométrie cylindrique, le problème de la dynamo cinématique pour un champ de vitesse de type Von Karman. La particularité de ce travail est d'avoir utilisé une méthode de Galerkin pour la résolution spatiale. Ils ont travaillé avec un écoulement axisymétrique, mais indépendant du temps et dépendant de  $z$ . De ce fait, les équations de ce problème sont différentes des nôtres, mais l'analogie a été faite au niveau de la méthode en remplaçant la dépendance en  $z$  par la dépendance temporelle. Cette méthode de discrétisation utilisée pour résoudre l'équation de l'induction présente plusieurs avantages : elle est plus rapide qu'une intégration numérique classique pour calculer le seuil ; de plus, les propriétés de symétrie du flux sont utilisées de manière à simplifier le problème ; enfin elle permet d'identifier clairement les différents modes du champ magnétique.

La première moitié de ma thèse fut dédiée à la résolution technique du problème. Nous avons commencé par écrire les équations du problème de l'écoulement de Ponomarenko fluctuant dans le temps en utilisant une méthode de Galerkin. A la suite de ce travail, j'ai construit et développé un code numérique écrit en Fortran 90 permettant de résoudre ces équations à l'aide d'un schéma temporel de Runge Kutta d'ordre 4.

Ensuite, nous avons comparé les résultats de ce code numérique avec les résultats du cas stationnaire et avec ceux de C. Normand pour de faibles amplitudes de fluctuation (Normand (2003)). Cette étude nous a permis de mettre en évidence des erreurs sur les résultats de ce même article (cf. erratum de l'article Peyrot *et al.* (2007)). Une fois le code numérique validé, nous avons pu étudier l'influence des fluctuations de grandes échelles d'intensité arbitraire sur le seuil de l'instabilité dynamo. Tout au long de ce travail, nous avons comparé les résultats issus de mon code numérique, avec les résultats analytiques et

théoriques issus du travail de C. Normand et de F. Plunian. Ces travaux ayant convergé vers les mêmes résultats, nous avons pu mettre en évidence les effets des fluctuations de grandes échelles sur le seuil de l'instabilité dynamo (Peyrot *et al.* (2007)). Nous avons pu expliquer ces effets grâce à la notion de rayon de résonance introduite par A.D Gilbert, que nous avons appliqué à un champ de vitesse fluctuant dans le temps et pour des nombres de Reynolds finis.

Que ce soit dans la partie technique de ma thèse ou dans la partie résultat de cette étude, nous avons travaillé en étroite collaboration avec C. Normand avec qui nous avons eu de nombreux échanges, notamment lors de conférences, ou de réunions.

A la suite de ce travail, nous avons utilisé un code numérique développé par A. Courvoisier permettant de faire la même étude que celle portant sur l'écoulement de Ponomarenko, mais cette fois-ci appliquée à l'écoulement de Roberts. La démarche fut identique, nous sommes partis du champ de vitesse de Roberts, lui aussi largement étudié, auquel nous avons ajouté une modulation temporelle périodique de même type que celle de notre problème de Ponomarenko. Ce travail est à poursuivre, car nous n'avons pas encore pu expliquer les mécanismes conduisant aux résultats obtenus. Néanmoins, nous présenterons ces résultats à la fin de ce manuscrit et les pistes que nous envisageons pour comprendre ces phénomènes.

Enfin, durant la dernière partie de ma thèse, j'ai travaillé avec A.D. Gilbert sur la dynamo de Ponomarenko modulée périodiquement dans le temps pour de grands nombres de Reynolds magnétique. A.D. Gilbert a développé le critère de résonance à l'aide d'une méthode asymptotique (Gilbert (1988)) dans le cadre d'un champ de vitesse hélicoïdal stationnaire. Nous avons dérivé cette méthode asymptotique quand des fluctuations temporelles sont considérées et nous avons comparé cette nouvelle théorie aux résultats numériques issus de notre code. Ce travail a fait l'objet d'un séjour de 3 semaines en Mars 2007 à l'Université d'Exeter.

La suite du manuscrit va s'organiser de la manière suivante.

Dans la deuxième partie intitulée *Définition du problème et approches* (II), nous présentons le problème ainsi que les différentes approches utilisées. Nous séparerons cette partie en trois chapitres. Dans le premier, nous présenterons une formulation générale du problème cinématique, le jeu d'équations résolues et la forme du champ magnétique solution pour toutes les approches, ainsi que la notion de rayon de résonance pour un tel écoulement. Nous présenterons aussi les conditions limites de chaque approche et les applications numériques que nous avons réalisées. Le deuxième chapitre de cette partie présente les méthodes qui, sous certaines hypothèses, ont permis d'obtenir des résultats. Nous présenterons l'approche perturbative dans la limite de faibles amplitudes de modulation, l'approche basée sur un développement en séries de Fourier pour une géométrie particulière de la partie fluctuante de l'écoulement et l'approche asymptotique valable pour de grands nombres de Reynolds magnétiques. Dans un troisième chapitre, nous présenterons l'approche directe basée sur une méthode de Galerkin qui ne repose sur aucune hypothèse simplificatrice. Cette méthode nous permettra de faire le lien entre toutes les approches.

Dans la troisième partie intitulée *Résultats et comparaisons* (III), nous commencerons par

---

décrire les résultats qui ont permis de faire la validation du code numérique utilisant la méthode de Galerkin. Dans le premier chapitre, nous comparerons ces résultats à ceux du cas stationnaire, ainsi qu'à ceux de l'étude perturbative pour de faibles amplitudes de modulation. Dans un deuxième chapitre, nous ferons une étude comparative de la méthode de Galerkin et de la méthode asymptotique incluant une dépendance temporelle, qui permettra de valider cette dernière. Dans le chapitre suivant, nous utiliserons parallèlement les résultats de la méthode de Galerkin et de ceux issus du développement en série de Fourier, pour comprendre l'influence des fluctuations de grandes échelles sur le seuil de l'instabilité dynamo. Nous avons compris ces mécanismes en terme de rayon de résonance fluctuant dans le temps ; ce travail a fait l'objet d'une publication (*Peyrot et al. (2007)*) que nous avons inclus dans ce chapitre. Enfin, dans le dernier chapitre, un peu en marge de l'ensemble du manuscrit, nous présenterons quelques résultats sur la dynamo de Roberts modulée périodiquement en temps.

Pour finir, nous ferons la synthèse de ces travaux de recherche et nous donnerons les conclusions de ce travail.

Pour faciliter la lecture de ce manuscrit, nous avons reporté en annexes, tous les éléments techniques non nécessaire à la compréhension de celui-ci.

---

## Deuxième partie

### Définition du problème et approches

---



## Chapitre 3

# Définition du problème et présentation des approches

Dans toute la suite de ce manuscrit, afin de ne pas faire de confusion, nous avons introduit les notations 'G' et 'A', pour décrire les paramètres relatifs à la méthode de Galerkin et la méthode asymptotique respectivement.

### 3.1 Champ de vitesse

On considère un écoulement hélicoïdal défini en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  par

$$\mathbf{U} = (u(r, t), v(r, t), w(r, t)) \quad (3.1)$$

$$\text{où } u(r, t) = 0 \quad (3.2)$$

$$v(r, t) = r \Omega(r) F(t) \quad (3.3)$$

$$w(r, t) = V(r) G(t) \quad (3.4)$$

$$\text{et } F(t) = \bar{R}_m + \tilde{R}_m f(t) = \bar{R}_m (1 + \rho f(t)) \quad (3.5)$$

$$G(t) = \bar{R}_m \bar{\Gamma} + \tilde{R}_m \tilde{\Gamma} g(t) = \bar{R}_m (\bar{\Gamma} + \rho \tilde{\Gamma} g(t)) \quad (3.6)$$

$\bar{R}_m$  et  $\bar{\Gamma}$  (respectivement  $\tilde{R}_m$  et  $\tilde{\Gamma}$ ) sont le nombre de Reynolds magnétique et un pas d'hélice caractéristique de la partie stationnaire (respectivement fluctuante) de l'écoulement. On définit l'intensité des fluctuations par rapport à celle de l'écoulement moyen par le paramètre  $\rho = \tilde{R}_m / \bar{R}_m$ . Pour  $\rho = 0$  il n'y a pas de fluctuation et le seuil est donné par  $\bar{R}_m$ . En revanche pour  $\rho \gg 1$  les fluctuations dominent et la quantité pertinente pour déterminer le seuil est  $\tilde{R}_m = \rho \bar{R}_m$ .



Dans les paragraphes suivants, nous allons voir les spécificités du champ de vitesse pour chaque approche.

### 3.1.1 Approche perturbative et approche basée sur un développement en séries de Fourier

Dans ces approches, nous prendrons :

$$\Omega(r) = V(r) = \begin{cases} 1, & r < 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}, \quad (3.7)$$

et  $f(t) = g(t) = \cos(w_f t)$ ,  $w_f$  étant défini comme la fréquence de forçage du champ de vitesse.

Ce champ de vitesse correspond à un cisaillement infini en  $r = 1$ .

Le milieu est conducteur, à la fois dans le milieu en mouvement (pour  $r < 1$ ) et dans le milieu au repos (pour  $r > 1$ ). Nous considérerons une conductivité uniforme  $\sigma$ .

### 3.1.2 Approche de Galerkin

Les fonctions azimutales et verticales sont définies respectivement par,

$$\Omega(r) = \begin{cases} \Omega^G(r), & r < 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}, \quad (3.8)$$

$$V(r) = \begin{cases} V^G(r), & r < 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}, \quad (3.9)$$

Les fonctions temporelles  $f(t)$  et  $g(t)$  sont à priori quelconques, cependant nous nous sommes limités au cas  $f(t) = g(t) = \cos(w_f t)$ .

Les fonctions  $\Omega^G(r)$  et  $V^G(r)$  sont elles aussi quelconques. Toutefois, on s'intéressera dans ce manuscrit à deux cas :

- le cas du cisaillement infini (cas (i)), pour lequel  $\Omega^G(r) = V^G(r) = 1$ , ce cas est identique au champ de vitesse défini précédemment (3.7)
- le cas du cisaillement fini (cas (ii)), pour lequel  $\Omega^G(r) = 1 - r$  et  $V^G(r) = 1 - r^2$ .

Nous considérerons le milieu en mouvement conducteur de conductivité uniforme  $\sigma$  et le milieu au repos isolant (voir 3.4.3).

---

### 3.1.3 Méthode asymptotique

Nous avons changé de définition pour la composante verticale  $w(r, t)$  du champ de vitesse :

$$w(r, t) = V^A(r) G^A(t) \quad (3.10)$$

$$\text{avec } V^A(r) = \Gamma V(r) \quad \text{et} \quad G^A(t) = \frac{G(t)}{\Gamma} \quad (3.11)$$

Et nous avons pris  $\bar{\Gamma} = \tilde{\Gamma} = \Gamma$  et donc  $G^A(t) = F(t)$ .

Ici encore, bien que la fonction temporelle  $F(t)$  soit quelconque, nous nous sommes limités à  $f(t) = g(t) = \cos(w_f t)$ .

Dans cette approche asymptotique, nous avons étudié le cas du cisaillement fini pour lequel  $\Omega(r) = 1 - r$  et  $V(r) = 1 - r^2$  pour  $r < 1$ . Ce cas est analogue au cas (ii) défini ci dessus dans la méthode de Galerkin.

Comme dans les approches perturbatives et de Fourier, le milieu est conducteur de conductivité uniforme  $\sigma$  à la fois dans le milieu en mouvement et dans le milieu au repos.

## 3.2 Résolution

### 3.2.1 Cas des approches perturbatives, de Fourier et de Galerkin

**Equations de l'induction et champ magnétique solution :**

Le champ magnétique doit satisfaire l'équation de l'induction :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (3.12)$$

Nous avons choisi ici comme temps caractéristique, le temps diffusif du champ magnétique .

*Remarque :* Cette dernière équation n'apparaît pas sous la forme classiquement étudiée lorsque nous considérons le temps diffusif comme temps caractéristique. Toutefois, ces équations sont équivalentes. En effet, on peut écrire que  $\mathbf{U} = \bar{R}_m \hat{\mathbf{U}}$ ,  $\hat{\mathbf{U}}$  étant défini par :

$$\hat{\mathbf{U}} = \left( 0, r(1 + \rho f(t)) \Omega(r), \left( \bar{\Gamma} + \rho \tilde{\Gamma} g(t) \right) V(r) \right) \quad (3.13)$$

ainsi résoudre  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B}$  revient à résoudre  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\bar{R}_m \hat{\mathbf{U}} \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B}$ . Cette dernière équation est équivalente à  $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \bar{R}_m \nabla \times (\hat{\mathbf{U}} \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B}$ , nous retrouvons

ainsi la forme générale de l'équation de l'induction (1.20).

L'intérêt d'écrire le champ de vitesse en utilisant les paramètres  $\bar{R}_m$  et  $\tilde{R}_m$  comme nous l'avons fait dans (3.6), est de pouvoir définir de manière plus simple les trois problèmes que nous allons aborder c'est à dire : le cas stationnaire pour lequel  $\bar{R}_m \neq 0$  et  $\tilde{R}_m = 0$ , le cas fluctuant sans champ moyen pour lequel  $\bar{R}_m = 0$  et  $\tilde{R}_m \neq 0$ , et le cas fluctuant avec champ moyen pour lequel  $\bar{R}_m \neq 0$  et  $\tilde{R}_m \neq 0$ .

Puisque le champ de vitesse ne dépend ni de  $\theta$  ni de  $z$ , chaque mode magnétique en  $\theta$  et  $z$  évolue indépendamment les uns des autres. Par conséquent, on peut chercher une solution de l'équation de l'induction (3.12) sous la forme :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) \exp(im\theta + ikz) = \begin{pmatrix} b_r(r, t) \\ b_\theta(r, t) \\ b_z(r, t) \end{pmatrix} \exp(im\theta + ikz) \quad (3.14)$$

où  $m$  et  $k$  sont respectivement, les nombres d'onde azimuthal et vertical du champ magnétique.

### Solénoïdalité du champ magnétique :

La solénoïdalité du champ magnétique  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  nous conduit à :

$$\frac{b_r}{r} + b'_r + i\frac{m}{r}b_\theta + ikb_z = 0. \quad (3.15)$$

Dans toutes les approches, nous ne résoudrons que les équations en  $b_r$  et  $b_\theta$ ,  $b_z$  sera déterminé à partir de l'équation (3.15).

### Equations :

En introduisant la forme du champ magnétique recherché (3.14) et l'expression du champ de vitesse de notre problème (3.1) dans l'équation de l'induction (3.12), nous obtenons les

---

deux équations scalaires suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t b_r &= \left( b_r \left( \frac{-i m}{r} v - i k w \right) \right) \\ &+ \partial_r^2 b_r + \frac{1}{r} \partial_r b_r - \left( \frac{m^2}{r^2} + k^2 + \frac{1}{r^2} \right) b_r - \frac{2 i m}{r^2} b_\theta \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \partial_t b_\theta &= (i k (v b_z - w b_\theta) + \partial_r v \cdot b_r + v \partial_r b_r) \\ &+ \partial_r^2 b_\theta + \frac{1}{r} \partial_r b_\theta - \left( \frac{m^2}{r^2} + k^2 + \frac{1}{r^2} \right) b_\theta + \frac{2 i m}{r^2} b_r \end{aligned} \quad (3.17)$$

Définissons les grandeurs  $b^+$  et  $b^-$  par :

$$b^\pm(r, t) = b_r(r, t) \pm i b_\theta(r, t) \quad (3.18)$$

En utilisant l'expression du champ de vitesse (3.1) et la relation (3.15), nous pouvons réécrire les deux équations précédentes sous la forme :

$$\begin{aligned} \partial_t b^\pm &= \left( -i [m \Omega(r) F(t) + k V(r) G(t)] b^\pm \pm i r \Omega'(r) F(t) \left( \frac{b^+ + b^-}{2} \right) \right) \\ &+ \mathcal{L}^{m \pm 1} \cdot b^\pm \end{aligned} \quad (3.19)$$

où  $\mathcal{L}^n$  est l'opérateur de diffusion en coordonnées cylindriques, définis par :

$$\mathcal{L}^n = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r - \left( \frac{n^2}{r^2} + k^2 \right) \quad (3.20)$$

*Remarque :*

L'opérateur Laplacien en coordonnées cylindriques couple les variables  $b_r$  et  $b_\theta$ , à travers le terme  $\frac{-2im}{r^2} b_\theta$  dans l'équation (3.16), et le terme  $\frac{2im}{r^2} b_r$  dans l'équation (3.17). Même si le couplage à travers le terme  $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$  persiste, l'intérêt de passer en variable  $b_+$ ,  $b_-$  est de découpler les équations concernant la partie diffusive. Ce découplage aura une importance lorsque nous développerons sur la base des fonctions propres de l'opérateur  $\mathcal{L}^{m \pm 1}$ .

### 3.2.2 Cas de l'approche asymptotique

Par rapport aux cas précédents, la démarche est identique. Cependant, on introduit une phase dans la forme du champ magnétique solution du problème cinématique et on adimensionnalise l'équation de l'induction par le temps de convection.

**Equations de l'induction et champ magnétique solution :**

Nous résolvons l'équation :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \varepsilon \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (3.21)$$

où  $t$  est le temps adimensionnalisé par le temps d'advection.

$\varepsilon$  est défini comme  $\tilde{R}_m^{-1}$  dans le cas stationnaire et le cas fluctuant avec champ moyen, et comme  $\tilde{R}_m^{-1}$  dans le cas fluctuant sans champ moyen.

Nous allons nous intéresser à la limite de grands nombres de Reynolds magnétique donc pour  $\varepsilon \ll 1$ .

*Remarque :*

On peut montrer (voir annexes A.3.1) que sous certaines conditions d'équivalence, l'équation (3.21) est strictement équivalente à l'équation (3.12).

Comme nous l'avons vu dans la section précédente, nous cherchons un champ magnétique sous la forme,  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{r}, t) \exp(im\theta + ikz)$ . Cependant, nous introduirons dans l'approche asymptotique une phase  $\phi(t)$  dépendant du temps telle que,  $\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = \exp(i\phi(t)) \mathbf{b}'(\mathbf{r}, t)$ . En omettant l'indice ', nous cherchons donc un champ magnétique de la forme suivante :

$$\mathbf{B}(r, t) = \exp[i\phi(t) + i(m\theta + kz)]\mathbf{b}(r, t) \quad (3.22)$$

Nous verrons les spécificités de la fonction  $\phi(t)$  par la suite.

### Equations :

En introduisant la forme du champ magnétique recherché (3.22) et l'expression du champ de vitesse de notre problème (3.10) dans l'équation de l'induction (3.21), nous obtenons les équations suivantes :

$$\begin{aligned} [\partial_t + i\phi'(t) + (im\Omega(r) + ikV(r))F(t)]b_r \\ = \varepsilon((\mathcal{L}^m - r^{-2})b_r - 2imr^{-2}b_\theta) \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} [\partial_t + i\phi'(t) + (im\Omega(r) + ikV(r))F(t)]b_\theta \\ = r\Omega'(r)F(t)b_r + \varepsilon((\mathcal{L}^m - r^{-2})b_\theta + 2imr^{-2}b_r) \end{aligned} \quad (3.24)$$

## 3.3 Surface de résonance pour un écoulement présentant un cisaillement fini

Nous avons introduit cette notion de surface de résonance pour un champ de vitesse hélicoïdal dans la première partie (2.2). Nous allons maintenant définir plus précisément cette notion pour un champ de vitesse présentant un cisaillement fini.

La condition de résonance pour un champ de vitesse hélicoïdal stationnaire présentant un cisaillement fini, nous dit que pour un  $m$  et un  $k$  donnés, le champ magnétique est généré au niveau de surface de résonance définie par  $r = r_0$ , où les lignes de champ magnétique sont alignées avec le cisaillement du champ de vitesse et minimise de ce fait la diffusion

magnétique (Gilbert (1988); Ruzmaikin *et al.* (1988)). Cette surface est définie par la relation suivante :

$$m\Omega'(r_0) + kV'(r_0) = 0. \quad (3.25)$$

La condition de résonance est satisfaite si cette surface se trouve à l'intérieur du fluide c'est à dire pour  $r_0 < 1$ .

Nous pouvons directement appliquer cette notion de surface de résonance au champ de vitesse dépendant du temps :

$$m\Omega'(r_0(t))F(t) + kV'(r_0(t))G(t) = 0. \quad (3.26)$$

Comme les composantes azimutales et verticales du champ de vitesse dépendent du temps, cette condition est partiellement vérifiée dans le temps. Ceci implique des périodes successives de croissance et de décroissance du champ magnétique, selon que  $r_0$  est à l'intérieur ou à l'extérieur du fluide. Le seuil de l'effet dynamo correspond à un taux de croissance moyen nul.

Le champ de vitesse étant défini comme la somme d'une partie stationnaire et d'une partie fluctuante, on peut définir deux surfaces de résonance distinctes,  $\bar{r}_0$  et  $\tilde{r}_0$  correspondant à la partie moyenne et à la partie fluctuante du champ de vitesse. Ces surfaces sont définies par les relations suivantes :

$$m\Omega'(\bar{r}_0)\bar{F} + kV'(\bar{r}_0)\bar{G} = 0, \quad m\Omega'(\tilde{r}_0(t))\tilde{F} + kV'(\tilde{r}_0(t))\tilde{G} = 0 \quad (3.27)$$

où  $\bar{F}, \bar{G}$  sont les parties stationnaires des fonctions  $F(t)$  et  $G(t)$ ,  $\tilde{F}$  et  $\tilde{G}$  sont les parties fluctuantes. De plus, si  $\tilde{F}$  et  $\tilde{G}$  ont la même dépendance temporelle, ce qui sera le cas par la suite, alors  $\tilde{r}_0$  devient indépendant du temps.

En appliquant la relation précédente (3.27) au champ de vitesse défini dans l'approche de Galerkin (3.1.2), il vient :

$$\bar{r}_0 = -(m/k)/(2\bar{\Gamma}) \quad \text{et} \quad \tilde{r}_0 = -(m/k)/(2\tilde{\Gamma}). \quad (3.28)$$

Nous verrons l'importance de cette notion de surface de résonance dans les résultats de l'approche de Galerkin et de l'approche asymptotique pour lesquelles nous avons étudié un champ de vitesse présentant un cisaillement fini.

## 3.4 Conditions aux limites

Pour chacune des approches, nous prendrons un champ magnétique nul quand  $r$  tend vers l'infini. Nous allons voir ci dessous les conditions limites spécifiques à chaque approche.

### 3.4.1 Méthode perturbative et développement en séries de Fourier

Nous avons utilisé ces méthodes dans le cas du cisaillement infini. La génération du champ magnétique se faisant au voisinage de  $r = 1$ , une conductivité non nulle du milieu extérieur est nécessaire à l'effet dynamo. Par souci de simplicité, on a choisi un milieu extérieur de même conductivité que le milieu intérieur.

A l'interface  $r = 1$ , on a à la fois continuité des composantes du champ magnétique  $\mathbf{B}$ , et continuité de la composante selon  $z$  du champ électrique (puisque  $\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{U} \times \mathbf{B}$ ). La continuité de  $B_r$  et  $B_\theta$  impliquent celle de  $b^\pm$ .

De plus, nous avons la continuité de  $\partial_r B_r$  qui implique la continuité de  $\partial_r b_r$ . Cette condition provient du fait que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  à la frontière du domaine. Compte tenu de la forme du champ magnétique recherché, il suffit d'assurer la continuité de  $\partial_r B_r$  en  $r=1$ , avec  $B_r = b_r(r, t) \cdot \exp(im\theta + ikz)$ , pour vérifier ces deux dernières relations. Si nous combinons la continuité de  $\partial_r b_r$  à la continuité de  $E_z$ , nous obtenons la relation suivante :

$$[Db^\pm]_{1+}^{1-} \pm \frac{i\Omega_{r=1-}}{2}(b^+ + b^-)_{r=1} = 0 \quad (3.29)$$

avec  $D = \partial/\partial r$  et  $[h]_{1+}^{1-} = h_{(r=1-)} - h_{(r=1+)}$ .

### 3.4.2 Méthode asymptotique

Cette méthode a été uniquement utilisée pour un champ de vitesse présentant un cisaillement fini. Nous rappelons seulement que dans cette approche, on considère un milieu conducteur infini.

### 3.4.3 Méthode de Galerkin

Nous avons étudié avec cette méthode un champ de vitesse hélicoïdal possédant un cisaillement infini et fini.

La génération du champ magnétique se faisant dans le fluide, on a choisi de prendre un milieu extérieur non conducteur. Pour cela, nous introduirons le paramètre  $R$  qui définit la frontière entre le milieu isolant et le milieu conducteur, ainsi que le paramètre  $R'$  qui définit le lieu de cisaillement du champ de vitesse (voir figure 3.1). La perméabilité magnétique est quant à elle uniforme quel que soit le rayon  $r$ .

Dans le cas du cisaillement infini, nous choisirons un paramètre  $R'$  de telle manière à reproduire les conditions limites pour lesquelles le fluide est défini dans un domaine infini conducteur de l'électricité. Typiquement, nous prendrons  $R'/R = 0.1; 0.2$ . Dans le

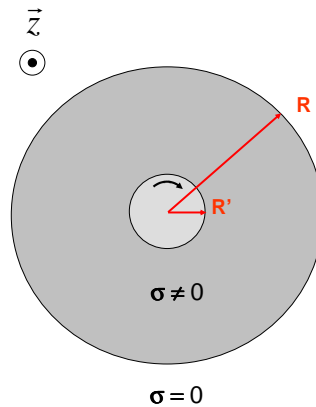


FIGURE 3.1 – Conditions aux limites de l'approche de Galerkin. Le rayon  $R'$  définit le rayon du cylindre en mouvement et le rayon  $R$  définit la frontière entre le milieu isolant et le milieu conducteur.

cas du cisaillement fini, l'écoulement occupe tout le domaine fluide, nous prendrons donc  $R' = R = 1$ .

A l'interface entre le milieu en mouvement et le milieu au repos (i.e pour  $r = 1$ ), nous avons les relations de continuité suivantes :

- continuité des composantes du champ magnétique.
- continuité de  $\partial_r B_r$ . Cette condition provient du fait que  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  et  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$  à la frontière du domaine. Compte tenu de la forme du champ magnétique recherché (3.14), il suffit d'assurer la continuité de  $\partial_r B_r$  en  $r=1$ , avec  $B_r = b_r(r, t) \cdot \exp(im\theta + ikz)$ , pour vérifier ces deux dernières relations.

## 3.5 Applications numériques

Pour toutes nos applications numériques, nous avons pris un nombre d'onde azimutal  $m = 1$ . Nous allons voir les différentes applications numériques que nous avons faites, suivant les approches envisagées.



### 3.5.1 Comparaison méthode de Galerkin, méthode perturbative pour $\rho \ll 1$ :

L'approche perturbative est valable uniquement pour de faibles amplitudes des fluctuations du champ de vitesse, i.e pour  $\rho \ll 1$ .

Nous avons comparé les résultats pour un champ de vitesse stationnaire (i.e  $\bar{R}_m \neq 0$  et  $\tilde{R}_m = 0$ ), et pour un champ de vitesse fluctuant avec champ moyen (i.e  $\bar{R}_m \neq 0$  et  $\tilde{R}_m \neq 0$ ).

Nous avons fixé  $\bar{\Gamma} = 1$ ,  $k = -0.56$  et nous avons fait varier  $\tilde{\Gamma}$  entre  $-1$  et  $1$ , et  $w_f$  entre  $0$  et  $10$ .

### 3.5.2 Comparaison méthode de Fourier, méthode de Galerkin pour $m + k\tilde{\Gamma} = 0$

La seule contrainte de la méthode basée sur un développement en série de Fourier est une contrainte géométrique. En effet, elle est valable si la relation  $m + k\tilde{\Gamma} = 0$  est vérifiée. On peut ré-écrire cette relation sous la forme  $\tilde{\Gamma} = -m/k$ . Cela correspond à prendre un pas du champ magnétique égal au pas de la partie fluctuante du champ de vitesse.

Pour respecter cette condition, nous avons fixé pour faire cette étude  $k = -1$  et  $\tilde{\Gamma} = 1$ .

Nous avons comparé les résultats pour un champ de vitesse stationnaire (i.e  $\bar{R}_m \neq 0$  et  $\tilde{R}_m = 0$ ), pour un champ de vitesse fluctuant sans champ moyen (i.e  $\bar{R}_m = 0$  et  $\tilde{R}_m \neq 0$ ) et pour un champ de vitesse fluctuant avec champ moyen (i.e  $\bar{R}_m \neq 0$  et  $\tilde{R}_m \neq 0$ ).

Nous avons fait varier le rapport  $\bar{\Gamma}/\tilde{\Gamma}$ ,  $w_f$  et  $\rho$ .

### 3.5.3 Comparaison méthode asymptotique, méthode de Galerkin pour $\varepsilon \ll 1$ et $w_f \gg 1$ :

La méthode asymptotique est valable dans la limite de grands nombres de Reynolds magnétique, i.e pour  $\varepsilon \ll 1$ . Pour respecter cette hypothèse, nous avons été obligé de prendre pour les calculs à partir de la méthode de Galerkin,  $w_f \gg 1$  (voir annexes [A.3.1](#)). Nous avons étudié les trois cas, le cas stationnaire, le cas fluctuant sans champ moyen et le cas fluctuant avec champ moyen.

Nous avons fixé  $\bar{\Gamma} = \tilde{\Gamma} = \Gamma = 2$ , nous avons pris  $k = -0.5$  ou  $k = -0.7$ , et nous avons fait varier  $\rho$  entre  $1$  et  $10$ .

### 3.5.4 Méthode de Galerkin

Cette méthode est valable quels que soient les paramètres envisagés.

Nous avons étudié tous les cas, nos seules limitations ont été d'ordre numérique.

Ces résultats nous ont permis d'une part, de valider chacune des approches précédentes reposant toutes sur des hypothèses simplificatrices et d'autre part, d'obtenir des résultats plus généraux en faisant varier tous les paramètres.

---



---

## Chapitre 4

# Approches basées sur des hypothèses simplificatrices

### 4.1 Méthode perturbative

Dans cette section, nous allons présenter l'approche perturbative développée par C. Normand pour résoudre le problème cinématique de la dynamo de Ponomarenko avec une dépendance temporelle. Dans la limite de faibles amplitudes de modulation, le champ de vitesse est modulé de manière périodique dans le temps avec une fréquence de forçage  $w_f$ . Le champ de vitesse étudié dans ce travail correspond au cisaillement infini défini dans le chapitre précédent (3.1.1). Cette méthode perturbative permet de calculer les corrections au nombre de Reynolds magnétique critique et à la fréquence propre du champ magnétique par rapport au cas stationnaire. Ce travail a fait l'objet d'un article (Normand (2003)) dans lequel le lecteur trouvera les détails de résolution, nous ne présenterons ici que les grandes lignes de la méthode.

#### 4.1.1 Spécificités du champ de vitesse étudié

Tous les résultats de cette approche ont été réalisés pour  $\bar{\Gamma}=1$ . Ainsi les fonctions azimutales et verticales du champ de vitesse correspondant au cisaillement infini (3.6) s'écrivent :

$$\Omega(r)F(t) = \left( \bar{R}_m + \tilde{R}_m f(t) \right), \quad V(r)G(t) = \left( \bar{R}_m + \tilde{R}_m \tilde{\Gamma} g(t) \right) \quad (4.1)$$

En mettant  $\bar{R}_m$  en facteur, nous faisons apparaître l'intensité des fluctuations  $\rho = \frac{\tilde{R}_m}{\bar{R}_m}$ , ainsi les fonctions précédentes deviennent :

$$\Omega(r)F(t) = \bar{R}_m (1 + \rho f(t)), \quad V(r)G(t) = \bar{R}_m \left( 1 + \rho \tilde{\Gamma} g(t) \right) \quad (4.2)$$


---

Dans cette étude, nous avons pris  $f(t) = g(t) = \cos(w_f t)$ .

*Remarque* : Le champ de vitesse ainsi écrit correspond à la forme présentée dans l'article (Normand (2003)), les paramètres  $\tilde{\Gamma}$ ,  $\rho$  et  $w_f$  de ce manuscrit correspondant à  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon$ , et  $\sigma$  de Normand (2003) respectivement (voir annexe A.2.3).

### 4.1.2 Solution

Réécrivons l'équation de l'induction (3.19) en tenant compte de la forme particulière du champ de vitesse,

$$\partial_t b^\pm + i\bar{R}_m \left( (m+k) + \rho (m + \tilde{\Gamma}k) \cos w_f t \right) b^\pm = \mathcal{L}^{m\pm 1} \cdot b^\pm \quad (4.3)$$

Comme  $f(t)$  est périodique de période  $2\pi/w_f$ , la théorie de Floquet (Childress & D.Gilbert (1995)) s'applique ici et nous cherchons une solution de la forme :

$$b^\pm = \theta_\pm(r, T) \exp(i \Im(\gamma) t) \quad (4.4)$$

où  $\Im(\gamma)$  est la partie imaginaire du taux de croissance  $\gamma$  du champ magnétique, correspondant à la pulsation du champ magnétique. Les fonctions  $\theta_\pm$  sont des fonctions périodiques, de période  $T = w_f t$ .

On peut obtenir une solution du système (4.3), en faisant un développement asymptotique de  $\theta_\pm$ ,  $\bar{R}_m$ , et  $\Im(\gamma)$  de la forme :

$$\theta_\pm(r, T) = \theta_{\pm 0} + \rho \theta_{\pm 1} + \rho^2 \theta_{\pm 2} + O(\rho^3) \quad (4.5)$$

$$\bar{R}_m = R_0 + \rho R_1 + \rho^2 R_2 + O(\rho^3) \quad (4.6)$$

$$\Im(\gamma) = w_0 + \rho w_1 + \rho^2 w_2 + O(\rho^3) \quad (4.7)$$

Les grandeurs  $R_0$  et  $w_0$  sont les solutions du problème stationnaire.

Les fonctions  $\theta_{\pm n}$  pour  $n \geq 1$  sont fonction de  $T$  et de  $r$ , et les fonctions  $\theta_{\pm 0}$  de  $r$  seulement. En substituant ces fonctions dans les équations (4.3), et en égalisant les termes de même puissance de  $\rho$ , on obtient un système infini d'équations différentielles pour  $\theta_{\pm n}$ , que l'on peut résoudre de manière récursive.

Pour avoir les détails sur la technique de résolution de ce système, se référer à l'article lui-même (Normand (2003)).

On peut démontrer que les quantités  $R_1$  et  $w_1$  sont nulles. Ainsi, les écarts au seuil se calculent à partir du  $R_2$  et du  $w_2$ .

## 4.2 Développement en séries de Fourier

Dans cette section, nous allons présenter la méthode basée sur un développement en séries de Fourier pour résoudre le problème de la dynamo de Ponomarenko modulée dans le temps. Cette étude développée par C. Normand et F. Plunian, a été appliqué au cas du cisaillement infini.

### 4.2.1 Simplification des équations

Posons,

$$m\Omega(r)F(t) + kV(r)G(t) = \bar{R}_m\bar{\mu} + \tilde{R}_m\tilde{\mu}f(t), \quad \text{avec } \bar{\mu} = m + k\bar{\Gamma} \quad \text{et} \quad \tilde{\mu} = m + k\tilde{\Gamma} \quad (4.8)$$

Réécrivons les équations (3.19) pour  $r < 1$ , en utilisant les paramètres  $\bar{\mu}$  et  $\tilde{\mu}$  :

$$\frac{\partial b^\pm}{\partial t} + [i(\bar{R}_m\bar{\mu} + \tilde{R}_m\tilde{\mu}f(t))]b^\pm = \mathcal{L}^\pm b^\pm. \quad (4.9)$$

Pour simplifier mathématiquement cette équation, nous prendrons  $\tilde{\mu} = 0$ . De cette manière, la partie non stationnaire du champ de vitesse ne figure plus dans l'équation (4.9). Elle apparaît seulement dans l'expression des conditions aux limites (3.29) qui peut s'écrire sous la forme :

$$[Db^\pm]_{1+}^{1-} \pm \frac{i}{2}(\bar{R}_m + \tilde{R}_m f(t))(b^+ + b^-)_{r=1} = 0. \quad (4.10)$$

Prendre  $\tilde{\mu} = 0$  est équivalent à prendre le pas du champ magnétique égal au pas de la partie fluctuante du champ de vitesse ( $-m/k = \tilde{\Gamma}$ ). D'un autre côté, le pas du champ magnétique n'est pas nécessairement égal au pas du champ de vitesse moyen (sauf si  $\bar{\Gamma} = \tilde{\Gamma}$ ).

### 4.2.2 Solution générale

Comme  $f(t)$  est périodique de période  $2\pi/\omega_f$ , la théorie de Floquet s'applique ici et nous cherchons  $\mathbf{b}(r, t)$  sous la forme  $\mathbf{b}(r, T) \exp(\gamma t)$  avec  $\mathbf{b}(r, T)$   $2\pi$ -périodique en  $T = \omega_f t$ . Ainsi, nous cherchons une solution pour les fonctions  $b_\pm(r, T)$  se décomposant en séries de Fourier temporelle :

$$b^\pm(r, T) = \sum b_n^\pm(r) \exp(inT) \quad (4.11)$$

En introduisant cette expression dans (4.9), avec  $\tilde{\mu} = 0$ , les amplitudes de Fourier  $b_n^\pm(r)$  vérifient la relation pour  $r < 1$  :

$$[\gamma + i(\bar{R}_m\bar{\mu} + n\omega_f)]b_n^\pm = \mathcal{L}^{m\pm 1}b_n^\pm. \quad (4.12)$$

De plus, la condition limite (4.10) avec  $f(t) = \cos(T)$  implique :

$$[Db_n^\pm]_{1+}^{1-} \pm \frac{i}{2}\bar{R}_m(b_n^+ + b_n^-)_{r=1} \pm \frac{i}{4}\tilde{R}_m(b_{n-1}^+ + b_{n-1}^- + b_{n+1}^+ + b_{n+1}^-)_{r=1} = 0. \quad (4.13)$$

Les solutions de l'équation (4.12) sont continues en  $r = 1$ , elles peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$b_n^\pm = C_n^\pm \psi_n^\pm, \quad \text{avec} \quad \psi_n^\pm = \begin{cases} I^\pm(q_n r)/I^\pm(q_n), & r < 1 \\ K^\pm(s_n r)/K^\pm(s_n), & r > 1 \end{cases}, \quad (4.14)$$

avec

$$q_n^2 = k^2 + \gamma + i(\bar{R}_m \bar{\mu} + n\omega_f), \quad s_n^2 = k^2 + \gamma + in\omega_f. \quad (4.15)$$

En substituant (4.14) dans (4.13), nous obtenons le système suivant :

$$C_n^\pm \mathcal{R}_n^\pm \pm i \frac{\bar{R}_m}{2} (C_n^+ + C_n^-) \pm i \frac{\tilde{R}_m}{4} (C_{n-1}^+ + C_{n-1}^- + C_{n+1}^+ + C_{n+1}^-) = 0 \quad (4.16)$$

où  $\mathcal{R}_n^\pm = q_n I_n^{\pm'} / I_n^\pm - s_n K_n^{\pm'} / K_n^\pm$  et où  $I_n^\pm = I_{m\pm 1}(q_n)$  et  $K_n^\pm = K_{m\pm 1}(s_n)$  sont les fonctions de Bessel modifiées du premier et du second ordre. Le système (4.16) implique la relation de dispersion matricielle suivante :

$$\mathcal{F}_n C_n - i \frac{\tilde{R}_m}{4} (\mathcal{R}_n^+ - \mathcal{R}_n^-) (C_{n-1} + C_{n+1}) = 0 \quad (4.17)$$

avec  $C_j = C_j^+ + C_j^-$  et

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{R}_n^+ \mathcal{R}_n^- - i(\bar{R}_m/2)(\mathcal{R}_n^+ - \mathcal{R}_n^-). \quad (4.18)$$

Résoudre le système (4.17) est équivalent à annuler le déterminant de la matrice  $\mathbf{A}$ , matrice tridiagonale dont les éléments non nuls sont :

$$A_{nn} = \mathcal{F}_n \quad A_{n,n-1} = A_{n,n+1} = -i \frac{\tilde{R}_m}{4} (\mathcal{R}_n^+ - \mathcal{R}_n^-) \quad (4.19)$$

### 4.2.3 Régime des grandes fréquences pour le cas du champ fluctuant sans champ moyen

Pour un champ de vitesse fluctuant sans champ moyen, c'est à dire  $\bar{R}_m = 0$  et  $\tilde{R}_m \neq 0$ , nous avons  $\bar{\mu} = 0$ . Ceci implique que  $q_n = s_n$  (4.15). En utilisant l'identité,

$$I_n^{\pm'} K_n^\pm - K_n^{\pm'} I_n^\pm = \frac{1}{s_n} \quad (4.20)$$

nous obtenons  $\mathcal{R}_n^\pm = (I_n^\pm K_n^\pm)^{-1}$ . Comme  $\bar{R}_m = 0$ , l'équation (4.18) devient  $\mathcal{F}_n = \mathcal{R}_n^+ \mathcal{R}_n^-$ . Nous pouvons alors réécrire ce système (4.17) sous la forme :

$$C_n + i \frac{\tilde{R}_m}{4} (I_n^+ K_n^+ - I_n^- K_n^-) (C_{n-1} + C_{n+1}) = 0. \quad (4.21)$$

En prenant en compte le comportement des fonctions de Bessel pour de grands arguments, nous avons

$$\alpha_n \equiv I_n^- K_n^- - I_n^+ K_n^+ \approx 1/s_n^3. \quad (4.22)$$

Pour de grandes valeurs de  $n$  ces termes sont négligables. Comme première approximation, nous garderons seulement dans le système (4.21) les termes correspondant à  $n = 0, \pm 1$ . Ce qui conduit à un système matriciel  $3 \times 3$  dont le déterminant est :

$$1 + \frac{(\tilde{R}_m)^2}{16} \alpha_0 (\alpha_{-1} + \alpha_1) = 0. \quad (4.23)$$

Pour de grandes fréquences de forçages  $\omega_f$  nous avons  $s_{\pm 1} \approx \sqrt{\omega_f}$ . Associé au système (4.23), cela implique :

$$\tilde{R}_m \approx \omega_f^{3/4}. \quad (4.24)$$

#### 4.2.4 Régime pour de faibles amplitudes de modulation

Pour de faibles amplitudes de modulation i.e  $\rho \ll 1$ , le système (4.16) est tronqué de telle manière à garder les premiers modes de Fourier pour  $n = 0$  et  $n = \pm 1$ . La relation de dispersion (4.17) devient alors :

$$\mathcal{F}_0 + \rho^2 \left( \frac{\bar{R}_m}{4} \right)^2 (\mathcal{R}_0^+ - \mathcal{R}_0^-) \left( \frac{\mathcal{R}_{-1}^+ - \mathcal{R}_{-1}^-}{\mathcal{F}_{-1}} + \frac{\mathcal{R}_{+1}^+ - \mathcal{R}_{+1}^-}{\mathcal{F}_{+1}} \right) = 0 \quad (4.25)$$

Cette équation est résolue avec une méthode perturbative en posant  $\bar{R}_m = R_0 + \delta R$ ,  $\bar{\omega} = \omega_0 + \delta\omega$  et en développant  $\mathcal{F}_0(\bar{R}_m, \bar{\omega})$  au premier ordre en  $\delta R$  et  $\delta\omega$  donnée par  $\mathcal{F}_0(R_0, \omega_0) = 0$  et avec les constantes  $C_0^\mp = \pm \mathcal{R}_0^\pm$ .

La dernière relation de dispersion (8.3) devient :

$$\delta R \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \bar{R}_m} + \delta\omega \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \bar{\omega}} = -\rho^2 \left( \frac{R_0}{4} \right)^2 C_0 \left( \frac{\beta_{-1}}{\mathcal{F}_{-1}} + \frac{\beta_{+1}}{\mathcal{F}_{+1}} \right) \quad (4.26)$$

avec  $\beta_n = \mathcal{R}_n^+ - \mathcal{R}_n^-$ . Dans la suite, nous nous intéresserons au cas où  $\bar{\mu} = 0$ . Introduisons les notations suivantes :

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \bar{R}_m} = -iC_0(f_1 + if_2), \quad \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \bar{\omega}} = -iC_0(g_1 + ig_2), \quad \frac{\beta_{-1}}{\mathcal{F}_{-1}} + \frac{\beta_{+1}}{\mathcal{F}_{+1}} = X + iY \quad (4.27)$$

Les solutions de (8.4) s'écrivent :

$$R_2 = \left( \frac{R_0}{4} \right)^2 \frac{Xg_1 + Yg_2}{f_1g_2 - f_2g_1} \quad \omega_2 = \left( \frac{R_0}{4} \right)^2 \frac{Xf_1 + Yf_2}{f_1g_2 - f_2g_1} \quad (4.28)$$

Nous retrouvons les résultats similaires à ceux obtenus dans Normand (2003) en utilisant une autre approche.

Ainsi, pour de faibles amplitudes de modulation, il y a totale équivalence entre les résultats de l'étude perturbative et le développement en séries de Fourier tronqué à trois modes  $n=0, +1$  et  $-1$ .

### 4.3 Méthode asymptotique

Dans cette section, nous allons présenter la méthode asymptotique utilisée pour résoudre notre problème dans la limite de grands nombres de Reynolds magnétique. Nous allons



nous appuyer sur la théorie développée pour un champ de vitesse stationnaire (Gilbert (1988); Ruzmaikin *et al.* (1988)). Dans un premier temps, nous définirons de manière précise le problème. Dans un deuxième temps, nous résoudrons le problème. Nous rapellons que dans cette section,  $\gamma^\Lambda$  et  $w_f^\Lambda$  sont le taux de croissance et la pulsation du champ magnétique respectivement issus de cette méthode asymptotique.

### 4.3.1 Equations

Rappelons les équations à résoudre pour cette approche asymptotique où  $t$  est le temps adimensionné par le temps d'advection (voir 3.2.2) :

$$\begin{aligned} [\partial_t + i\phi'(t) + (im\Omega(r) + ikV_A(r))F_A(t)]b_r \\ = \varepsilon((\mathcal{L}^m - r^{-2})b_r - 2imr^{-2}b_\theta) \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} [\partial_t + i\phi'(t) + (im\Omega(r) + ikV_A(r))F_A(t)]b_\theta \\ = r\Omega'(r)F_A(t)b_r + \varepsilon((\mathcal{L}^m - r^{-2})b_\theta + 2imr^{-2}b_r) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Nous allons étudier trois cas, dépendant de la définition de la fonction temporelle  $F_A(t)$  : le cas stationnaire où  $F_A(t) = 1$ , le cas sans champ moyen où  $F_A(t) = \cos(w_f^\Lambda t)$  et le cas avec champ moyen où  $F_A(t) = 1 + \rho \cos(w_f^\Lambda t)$ .

On rappelle que  $w_f^\Lambda$  représente la fréquence du champ de vitesse et  $\rho$  l'intensité des fluctuations par rapport au champ moyen.

### 4.3.2 Résolution

Fixons  $m$  et  $k$  et appelons  $r_0$  le rayon de résonance où est généré le champ magnétique. Pour le champ de vitesse défini dans cette méthode, on a montré dans l'annexe (A.3.1) que la relation de résonance s'écrivait simplement sous la forme  $m\Omega'(r_0) + kV_A'(r_0) = 0$ . De cette manière le rayon de résonance de la partie stationnaire et de la partie fluctuante du champ de vitesse sont identiques, i.e  $\bar{r}_0 = \tilde{r}_0 = r_0 = -(m/k)/(2\Gamma)$ .

Choisissons la fonction  $\phi(t)$  de la manière suivante :

$$\phi(t) = -(m\Omega(r_0) + kV_A(r_0)) \int_0^t F_A(t') dt' \quad (4.31)$$

*Remarque* : On peut remarquer ici que si  $F_A(t) = 1$ ,  $\phi(t)$  est une fonction réelle proportionnelle à  $t$ . En utilisant la formule (3.22), nous obtenons un taux de croissance du champ magnétique purement imaginaire. Cependant, ce taux de croissance correspond

simplement à l'ordre principal du développement asymptotique du taux de croissance dans le cas stationnaire. A l'ordre principal, le champ magnétique n'est que fluctuant, avec une fréquence donnée. Le processus conduisant à la croissance ou à la décroissance du champ magnétique est contenu dans un ordre plus petit. En effet, la partie réelle du taux de croissance dans le cas stationnaire (Gilbert (1988); Ruzmaikin *et al.* (1988)) est donnée par la formule :

$$\mathcal{R}(\gamma^A) = \pm \varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{m|\Omega'(r_0)|}{r_0}} - \frac{1}{2} \varepsilon^{1/2} \sqrt{|m\Omega''(r_0) + kV_A''(r_0)|} - \varepsilon \left( \frac{m^2}{r_0^2} + k^2 \right) \quad (4.32)$$

Ainsi, pour  $m = \mathcal{O}(1)$ , la fréquence du champ magnétique à l'ordre principal est de l'ordre  $\mathcal{O}(1)$ , mais en utilisant la formule ci dessus (4.32), on trouve que la partie réelle du taux de croissance est de l'ordre de  $\mathcal{O}(\varepsilon^{1/2})$ .

Reprenons le cas général, ainsi introduite cette fonction  $\phi(t)$ , les équations (4.29) et (4.30) deviennent :

$$\begin{aligned} [\partial_t + (im\Omega(r) + ikV_A(r) - im\Omega(r_0) - ikV_A(r_0)) F_A(t)] b_r \\ = \varepsilon ((\mathcal{L}^m - r^{-2}) b_r - 2imr^{-2} b_\theta) \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} [\partial_t + (im\Omega(r) + ikV_A(r) - im\Omega(r_0) - ikV_A(r_0)) F_A(t)] b_\theta \\ = r\Omega'(r) F_A(t) b_r + \varepsilon ((\mathcal{L}^m - r^{-2}) b_\theta + 2imr^{-2} b_r) \end{aligned} \quad (4.34)$$

On peut noter à ce stade que ces équations sont vérifiées quel que soit  $\varepsilon$ .

Maintenant, prenons  $\varepsilon \ll 1$  et faisons un changement d'échelle :

$$m = \varepsilon^{-1/3} M \quad k = \varepsilon^{-1/3} K \quad r = r_0 + \varepsilon^{1/3} s \quad t = \varepsilon^{-1/3} \tau \quad (4.35)$$

où  $M, K, s, \tau = \mathcal{O}(1)$ , alors il vient,

$$\partial_r = \varepsilon^{-1/3} \partial_s \quad \partial_t = \varepsilon^{1/3} \partial_\tau \quad (4.36)$$

Par rapport au cas stationnaire, nous avons introduit une échelle de temps longue  $\tau$  qui est l'échelle de temps à laquelle les modes du champ magnétique augmentent.

Prenons maintenant,

$$\begin{aligned} b_r(r, t) &= \varepsilon^{1/3} \hat{b}_{r_0}(s, \tau) + \dots \\ b_\theta(r, t) &= \hat{b}_{\theta_0}(s, \tau) + \dots \\ F_A(t) &= \hat{F}(\tau) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Comme  $\varepsilon \ll 1$ , on peut faire un développement de Taylor des fonction  $\Omega(r)$  et  $V_A(r)$ , i.e :

$$\Omega(r) = \Omega(r_0) + \varepsilon^{1/3} s \Omega'(r_0) + 1/2 \varepsilon^{2/3} s^2 \Omega''(r_0) + \dots \quad (4.38)$$

$$V_A(r) = V_A(r_0) + \varepsilon^{1/3} s V_A'(r_0) + 1/2 \varepsilon^{2/3} s^2 V_A''(r_0) + \dots \quad (4.39)$$

En utilisant les relations (4.35,4.36,4.37,4.38,4.39) et la relation de résonance  $m\Omega'(r_0) + kV'_A(r_0) = 0$ , dans (4.33) et (4.34), nous obtenons à l'ordre principal en  $\varepsilon$  :

$$[\partial_\tau + c_0 + i c_2 s^2 \hat{F}(\tau) - \partial_s^2] \hat{b}_{r_0} = \frac{-2iM}{r_0^2} \hat{b}_{\theta_0} \quad (4.40)$$

$$[\partial_\tau + c_0 + i c_2 s^2 \hat{F}(\tau) - \partial_s^2] \hat{b}_{\theta_0} = \hat{F}(\tau) r_0 \Omega'(r_0) \hat{b}_{r_0} \quad (4.41)$$

avec

$$c_0 = \frac{M^2}{r_0^2} + K^2 \quad (4.42)$$

$$c_2 = \frac{1}{2} (M \Omega''(r_0) + K V''_A(r_0)) \quad (4.43)$$

Introduisons maintenant,

$$\hat{b}_{r_0} = f(\tau) \exp^{-h(\tau) s^2} \quad (4.44)$$

$$\hat{b}_{\theta_0} = g(\tau) \exp^{-h(\tau) s^2} \quad (4.45)$$

Le fait d'utiliser des Gaussiennes permet de capturer un maximum d'information sur le champ magnétique. En effet, pour  $\varepsilon$  très petit, le champ magnétique se concentre de plus en plus au niveau du rayon de résonance.

Pour que notre hypothèse de mode localisé autour de  $r = r_0$  soit vérifiée, il est nécessaire d'avoir  $\mathcal{R}(h(\tau)) > 0$ . On note que dans le cas où le champ de vitesse est stationnaire,  $h$  ne dépend pas du temps.

Substituons (4.44) et (4.45) dans (4.40) et (4.41), il vient :

Pour les termes en  $s^0$  ,

$$\text{pour } \hat{b}_{r_0} : \partial_\tau f + c_0 f + 2 h f = \frac{-2iM}{r_0^2} g \quad (4.46)$$

$$\text{pour } \hat{b}_{\theta_0} : \partial_\tau g + c_0 g + 2 h g = r_0 \Omega'(r_0) \hat{F} f \quad (4.47)$$

Pour les termes en  $s^2$  ,

$$\text{pour } \hat{b}_{r_0} : -f \partial_\tau h + i c_2 \hat{F} f - 4 h^2 f = 0 \quad (4.48)$$

$$\text{pour } \hat{b}_{\theta_0} : -g \partial_\tau h + i c_2 \hat{F} g - 4 h^2 g = 0 \quad (4.49)$$

Les équations (4.48) et (4.49) sont équivalentes, ainsi le système devient :

$$\partial_\tau h + 4 h^2 = i c_2 \hat{F} \quad (4.50)$$

$$(\partial_\tau + c_0 + 2 h) f = \frac{-2iM}{r_0^2} g \quad (4.51)$$

$$(\partial_\tau + c_0 + 2 h) g = r_0 \Omega'(r_0) \hat{F} f \quad (4.52)$$

Ecrivons les fonctions  $f$  et  $g$  de la manière suivante :

$$f = \tilde{f} \exp^{-c_0 \tau} \quad (4.53)$$

$$g = \tilde{g} \exp^{-c_0 \tau} \quad (4.54)$$

les équations deviennent alors :

$$\partial_\tau h + 4h^2 = i c_2 \hat{F} \quad (4.55)$$

$$(\partial_\tau + 2h) \tilde{f} = \frac{-2iM}{r_0^2} \tilde{g} \quad (4.56)$$

$$(\partial_\tau + 2h) \tilde{g} = r_0 \Omega'(r_0) \hat{F} \tilde{f} \quad (4.57)$$

Faisons maintenant un nouveau changement d'échelle de manière à réduire le nombre de paramètres contrôlant le problème :

$$\tilde{h} = \alpha \bar{h}(\bar{\tau}) \quad (4.58)$$

$$\tau = \beta \bar{\tau} \quad (4.59)$$

$$\tilde{f} = v \bar{f}(\bar{\tau}) \quad (4.60)$$

$$\tilde{g} = \delta \bar{g}(\bar{\tau}) \quad (4.61)$$

$$\hat{F} = \bar{F}(\bar{\tau}) \quad (4.62)$$

Choisissons  $\alpha = \beta^{-1} = \sqrt{c_2}$ , alors (4.55) devient :

$$\partial_{\bar{\tau}} \bar{h} + 4\bar{h}^2 = i \bar{F} \quad (4.63)$$

Et choisissons  $v \beta / \delta = 2 M \beta^2 / r_0^2$ , alors (4.56) et (4.57) deviennent :

$$\partial_{\bar{\tau}} \bar{f} + 2\bar{h} \bar{f} = -i \bar{g} \quad (4.64)$$

$$\partial_{\bar{\tau}} \bar{g} + 2\bar{h} \bar{g} = -\mathcal{D} \bar{F} \bar{f} \quad (4.65)$$

$$\text{où } \mathcal{D} = \frac{-2 M \Omega'(r_0)}{r_0 c_2} \quad (4.66)$$

Le taux de croissance des fonctions  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$  est seulement une fonction de  $\bar{F}$  et  $\mathcal{D}$ .  
Ecrivons de nouveau l'expression de  $\mathcal{D}$ , en utilisant (4.35) et (4.43) :

$$\mathcal{D} = \frac{-4/r_0}{\frac{\Omega''(r_0)}{\Omega'(r_0)} + \frac{k}{m} \frac{V_A''(r_0)}{\Omega'(r_0)}} \quad (4.67)$$

En utilisant la relation  $m\Omega'(r_0) + kV_A'(r_0) = 0$ , nous avons :

$$\mathcal{D} = \frac{-4/r_0}{\frac{\Omega''(r_0)}{\Omega'(r_0)} - \frac{V_A''(r_0)}{V_A'(r_0)}} \quad (4.68)$$

Ainsi  $\mathcal{D}$  est un paramètre dépendant seulement de la géométrie du champ de vitesse.

Faisons maintenant le lien entre le taux de croissance donné par les dernières équations (4.64, 4.65) avec le véritable taux de croissance du champ magnétique.

Pour un  $\bar{F}$  donné, le taux de croissance est une fonction de  $\mathcal{D}$ . Notons  $\bar{\gamma} = \bar{\gamma}(\mathcal{D})$ , le taux de croissance des fonctions  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$ , tel que  $\bar{f}, \bar{g} \propto \exp(\bar{\gamma} \bar{\tau})$ .

Remontons maintenant à notre échelle réelle :

$$\begin{aligned}\bar{f}, \bar{g}, \tilde{f}, \tilde{g} &\propto \exp(\bar{\gamma} \sqrt{c_2} \tau) \\ f, g &\propto \exp((\bar{\gamma} \sqrt{c_2} - c_0) \tau) \\ \hat{b}_{r_0}, \hat{b}_{\theta_0} &\propto \exp((\bar{\gamma} \sqrt{c_2} - c_0) \varepsilon^{1/3} t)\end{aligned}$$

Ainsi, le véritable taux de croissance du champ magnétique est :

$$\gamma^\Lambda = \varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{1}{2} (m \Omega''(r_0) + k V_A''(r_0))} \bar{\gamma}(\mathcal{D}) - \varepsilon \left( \frac{m^2}{r_0^2} + k^2 \right) \quad (4.69)$$

Afin de faire une vérification de la méthode, il apparaît intéressant de tester le cas stationnaire, c'est-à-dire, de vérifier que nous avons bien dans le cas  $F_A(t) = 1$ , le même taux de croissance que celui donné dans (Gilbert (1988); Ruzmaikin *et al.* (1988)).

Si  $F_A(t) = 1$ , l'équation (4.63) peut s'écrire sous la forme :  $\frac{d\bar{h}}{i-4\bar{h}^2} = d\bar{\tau}$ . En intégrant cette dernière équation, il vient :  $\int \frac{d\bar{h}}{i-4\bar{h}^2} = \bar{\tau} + cte$ . Si  $\bar{\tau}$  tend vers l'infini, la relation précédente implique que  $\bar{h}$  tend vers  $\sqrt{i/4}$ . Ainsi pour  $F_A(t) = 1$ , la fonction  $\bar{h}$  ne dépend plus du temps.

L'équation (4.63) devient alors  $4\bar{h}^2 = i$  qui a pour solution  $\bar{h} = \frac{1+i}{2\sqrt{2}}$ .

Les équations (4.64) et (4.65) deviennent alors :

$$(\bar{\gamma} + 2\bar{h}) \bar{f} = -i \bar{g} \quad (4.70)$$

$$(\bar{\gamma} + 2\bar{h}) \bar{g} = -\mathcal{D} \bar{f} \quad (4.71)$$

Si nous multiplions (4.70) par (4.71), alors nous obtenons  $(\bar{\gamma} + 2\bar{h})^2 = i \mathcal{D}$ , ainsi  $\bar{\gamma} = (-1 - i) / \sqrt{2} \pm \sqrt{i \mathcal{D}}$ . Introduisons ce taux de croissance dans l'équation (4.69), ainsi que l'expression de  $\mathcal{D}$  (4.68) et prenons la partie réelle de  $\gamma^\Lambda$ , nous obtenons bien la même expression que celle issue de (Gilbert (1988); Ruzmaikin *et al.* (1988)), c'est-à-dire :

$$\Re(\gamma^\Lambda) = \pm \varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{m |\Omega'(r_0)|}{r_0}} - \frac{1}{2} \varepsilon^{1/2} \sqrt{|m \Omega''(r_0) + k V_A''(r_0)|} - \varepsilon \left( \frac{m^2}{r_0^2} + k^2 \right) \quad (4.72)$$

Revenons au cas non stationnaire et remontons dans les changements d'échelles successifs afin de retrouver la véritable fréquence :

$$\cos(\bar{w} \bar{\tau}) = \cos(\bar{w} \beta^{-1} \tau) = \cos(\bar{w} \beta^{-1} \varepsilon^{1/3} t) \quad (4.73)$$

Ainsi, le lien entre  $\bar{w}$  et la véritable fréquence de notre champ de vitesse  $w_f$ , est :

$$\begin{aligned}w_f^\Lambda &= \varepsilon^{1/3} \beta^{-1} \bar{w} \\ w_f^\Lambda &= \varepsilon^{1/3} \sqrt{c_2} \bar{w} \\ w_f^\Lambda &= \varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{1}{2} (m \Omega''(r_0) + k V_A''(r_0))} \bar{w}\end{aligned} \quad (4.74)$$

Pour résumer le problème, nous avons donc à résoudre ce système de 3 équations différentielles ordinaires (ODE) :

$$\partial_{\bar{\tau}} \bar{h} + 4\bar{h}^2 = i\bar{F} \quad (4.75)$$

$$\partial_{\bar{\tau}} \bar{f} + 2\bar{h}\bar{f} = -i\bar{g} \quad (4.76)$$

$$\partial_{\bar{\tau}} \bar{g} + 2\bar{h}\bar{g} = -\mathcal{D}\bar{F}\bar{f} \quad (4.77)$$

$$\text{où } \mathcal{D} = \frac{-4/r_0}{\frac{\Omega''(r_0)}{\Omega'(r_0)} - \frac{V_A''(r_0)}{V_A'(r_0)}} \quad (4.78)$$

avec

$$\bar{F} = 1, \text{ pour le cas stationnaire} \quad (4.79)$$

$$\bar{F} = \cos(\bar{w}\bar{\tau}), \text{ pour le cas fluctuant sans champ moyen} \quad (4.80)$$

$$\bar{F} = 1 + \rho \cos(\bar{w}\bar{\tau}), \text{ pour le cas fluctuant avec champ moyen} \quad (4.81)$$

Ce système nous donne le taux de croissance  $\bar{\gamma}(\mathcal{D})$ ,  $\bar{\gamma}(\mathcal{D}, \bar{w})$ ,  $\bar{\gamma}(\mathcal{D}, \bar{w}, \rho)$  du cas stationnaire, du cas fluctuant sans champ moyen et du cas fluctuant avec champ moyen respectivement.

Et les véritables valeurs de la fréquence et du taux de croissance du champ magnétique sont données par :

$$w_f^A = \varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{1}{2} (m \Omega''(r_0) + k V_A''(r_0))} \bar{w} \quad (4.82)$$

$$\gamma^A = \varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{1}{2} (m \Omega''(r_0) + k V_A''(r_0))} \bar{\gamma} - \varepsilon \left( \frac{m^2}{r_0^2} + k^2 \right) \quad (4.83)$$

Nous verrons dans le chapitre (7), les résultats propres à ce système d'équations, ainsi que la confrontation avec les résultats issus de la méthode de Galerkin. Nous étudierons le cas stationnaire, le cas fluctuant sans champ moyen, le cas fluctuant avec champ moyen. C'est la partie confrontation qui permettra de valider cette nouvelle théorie asymptotique.



# Chapitre 5

## Méthode directe de Galerkin

Dans ce chapitre, nous allons décrire la méthode de Galerkin que nous avons utilisée pour résoudre le problème cinématique de la dynamo de Ponomarenko modulée périodiquement dans le temps).

En utilisant une décomposition de Galerkin, inspiré par les travaux de Louis Marié et Christiane Normand ([Marié et al. \(2006\)](#)), nous ramènerons le problème à un système matriciel composé d'équations différentielles du premier ordre.

Nous résoudrons ces équations numériquement à l'aide d'un code écrit en Fortran 90 que nous présentons dans l'annexe (D).

Contrairement aux approches présentées dans le chapitre précédent, cette méthode est valable quelle que soit l'amplitude des fluctuations, quelle que soit la géométrie du champ de vitesse (cisaillement fini ou infini pour un pas du champ magnétique non nécessairement égal au pas de la partie fluctuante du champ de vitesse), et quelle que soit le nombre de Reynolds magnétique. Nos seules limitations seront d'ordre numérique (pas de temps, précision de la méthode ...).

### 5.1 Equations

Pour  $r < 1$ , les équations à résoudre sont (voir [3.19](#)) :

$$\begin{aligned} \partial_t b^\pm &= \left( -i [m \Omega(r) F(t) + k V(r) G(t)] b^\pm \pm i r \Omega'(r) F(t) \left( \frac{b^+ + b^-}{2} \right) \right) \\ &+ \mathcal{L}^{m\pm 1} \cdot b^\pm \end{aligned} \quad (5.1)$$

Cependant pour  $r > 1$ , le milieu est isolant et au repos donc  $\vec{j} = 0$  et  $\vec{v} = 0$ . Or  $\vec{j} = \nabla \times \frac{\mathbf{B}}{\mu}$  donc  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$

De plus, comme  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  et  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla^2 \mathbf{B} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) \Rightarrow \nabla^2 \mathbf{B} = 0$



Ainsi, le champ magnétique dans le milieu isolant est solution de l'équation :

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0 \quad (5.2)$$

Les équations à résoudre sont donc tout simplement :

$$\mathcal{L}^{m\pm 1} \cdot b^\pm = 0 \quad (5.3)$$

## 5.2 Méthode de résolution

Nous avons utilisé une méthode de Galerkin pour résoudre notre problème. Cette méthode nous a été inspirée par les travaux de L.Marié, C. Normand et F. Daviaud, qu'ils ont utilisé pour un écoulement de Von Karman ([Marié \*et al.\* \(2006\)](#)). Dans leur problème, ils ont considéré un champ de vitesse axisymétrique dont les composantes de vitesse en coordonnées cylindriques peuvent s'écrire comme le produit d'une fonction radiale et d'une fonction dépendant de  $z$ . Nous avons repris la même démarche de résolution en l'appliquant à notre champ de vitesse dépendant du temps.

Nous allons d'abord résoudre de manière analytique les équations pour  $r > 1$  c'est-à-dire, à l'extérieur du domaine fluide, en utilisant des combinaisons de fonctions de Bessel.

Ensuite, nous partirons de cette solution pour construire à l'aide de la méthode de Galerkin, une approximation du champ magnétique pour  $r < 1$ .

Nous allons ici décrire cette méthode de manière très simplifiée, le lecteur trouvera tous les détails dans la référence ([Manneville \(1984\)](#)).

Supposons que l'on ait un problème bidimensionnel gouverné par l'équation linéaire différentielle suivante :

$$L(u) = 0 \quad (5.4)$$

dans un domaine  $\mathcal{D}(x,y)$ , avec comme conditions aux limites sur  $\partial \mathcal{D}$  :

$$S(u) = 0 \quad (5.5)$$

La méthode de Galerkin suppose que  $u$  peut se décomposer de la manière suivante :

$$u_{approx} = u_0(x, y) + \sum_{j=1}^N a_j \psi_j(x, y) \quad (5.6)$$

- $N$  est le nombre de mode de l'approximation de Galerkin, c'est ce nombre qui va définir la précision de la méthode.
- $\psi_j$  sont les fonctions d'interpolation, elles sont connues analytiquement.

- $u_0$  est introduit de manière à satisfaire les conditions limites.
- $a_j$  sont donc les inconnues du problème.

Si on injecte la relation (5.6) dans (5.4), on obtient un résidu non nul noté  $R$  :

$$R(a_1, \dots, a_N, x, y) = L(u_{approx}) = L(u_0) + \sum_{j=1}^N a_j L(\psi_j) \quad (5.7)$$

On introduit les fonctions de poids  $\phi_k$  (qui sont connues) de manière à ce qu'il existe une relation d'orthogonalité entre ces fonctions et les fonctions  $\psi$ .

On multiplie alors l'équation (5.7) par ces fonctions  $\phi$ .

Les coefficients  $a_j$  sont déterminés par la résolution du système d'équations suivant :

$$(R, \phi_k) = 0 \quad k = 1, \dots, N \quad (5.8)$$

où  $(.,.)$  représente le produit scalaire.

Ce système peut se mettre sous la forme matricielle suivante,

avec  $j = 1, \dots, N$  et  $k = 1, \dots, N$  :

$$\sum_{j=1}^N a_j (L(\psi_j), \phi_k) = -(L(u_0), \phi_k) \quad (5.9)$$

Il est important de choisir de manière judicieuse les fonctions de poids  $\phi$ , afin d'annuler certains coefficients de la matrice et de simplifier ainsi les calculs.

Les coefficients  $a_j$  étant alors déterminés, on remonte à la solution  $u_{approx}$ , en injectant les  $a_j$  dans (5.6).

## 5.3 Solutions

Le problème et la méthode étant bien posés, nous allons maintenant construire la solution.

### 5.3.1 Champ magnétique pour $r > 1$

En réécrivant les équations (5.3) pour  $b^+$  et  $b^-$ , on obtient :

$$r^2 \partial_r^2 b^\pm + r \partial_r b^\pm - ((m \pm 1)^2 + (kr)^2) b^\pm = 0$$

Ces équations sont du type des équations différentielles de Bessel modifiées d'ordre  $(m \pm 1)$ .

Ces équations ont pour solutions :

$$b^\pm = a_{0\pm}(t) I_{m\pm 1}(kr) + a_{1\pm}(t) K_{m\pm 1}(kr) \quad (5.10)$$

$I_n$  et  $K_n$  sont respectivement les fonctions de Bessel modifiées de première et de deuxième espèce d'ordre  $n$ .

Si  $r \rightarrow \infty$  alors  $I_{m\pm 1}(kr) \rightarrow \infty$ . Or, comme le champ magnétique est fini  $\forall t$ , on a obligatoirement  $a_{0\pm} = 0$ .

Ainsi, la solution est :

$$b^\pm = a_{1\pm}(t) K_{m\pm 1}(kr)$$

En utilisant le fait que  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$  et en notant :

$$D(t) = \frac{a_{1+}(t) + a_{1-}(t)}{2i}$$

$$\text{il vient : } a_{1+}(t) = a_{1-}(t) = iD(t)$$

Donc finalement la solution pour  $r > 1$  est :

$$b^\pm = iD(t) K_{m\pm 1}(kr) \quad (5.11)$$

Le champ magnétique sera donc déterminé par les coefficients  $D(t)$ , qui seront calculés après résolution des équations à l'intérieur (5.1).

### 5.3.2 Champ magnétique pour $r \leq 1$

#### Décomposition de la solution

Nous allons décomposer la solution sur une base de  $N$  modes propres, ainsi nous cherchons  $b^\pm$  sous la forme :

$$b^\pm = \sum_{j=1}^N c_\pm^j(t) J_{m\pm 1}(\mu_j r) \quad (5.12)$$

Les coefficients  $\mu_j$  seront déterminés à la fin de cette section.

Les inconnues du problème sont donc les coefficients  $c_\pm^j$ ,  $j = 1$  à  $N$ .

Le choix des fonctions de Bessel de première espèce est inspirée du problème de Ponomarenko classique, où les fonctions de Bessel sont les fonctions de l'opérateur de diffusion.

Cependant, nous aurions pu tout aussi bien choisir les fonctions de Bessel modifiées de première espèce  $I$ , en utilisant la relation  $I(x) = J(ix)$ . Ce choix des fonctions  $J$ , est purement pratique, il nous permet de travailler avec des quantités réelles.

On va utiliser maintenant la continuité de la solution en  $r = 1$  (3.4.3) pour déterminer les coefficients  $c_\pm^j$ .

$$b_{ext}^\pm(t, r = 1) = b_{int}^\pm(t, r = 1) \quad (5.13)$$

En écrivant ces dernières relations, il vient :

$$c_{\pm}^j(t) = \frac{i D^j(t) K_{m\pm 1}(k)}{J_{m\pm 1}(\mu_j)} \quad (5.14)$$

La solution pour  $r \leq 1$  est donc :

$$b^{\pm}(r, t) = i \sum_{j=1}^N \frac{D^j(t) K_{m\pm 1}(k)}{J_{m\pm 1}(\mu_j)} J_{m\pm 1}(\mu_j r) \quad (5.15)$$

De plus, le raccordement des solutions fait intervenir la relation suivante :

$$D(t) = \sum_{j=1}^N D^j(t) \quad (5.16)$$

### Fonctions d'interpolation

Nous allons définir les fonctions d'interpolation suivantes :

$$\psi_{m\pm 1}^j(\mu_j r) = \frac{K_{m\pm 1}(k)}{J_{m\pm 1}(\mu_j)} J_{m\pm 1}(\mu_j r) \quad (5.17)$$

Ainsi, la solution s'écrit :

$$b^{\pm}(r, t) = i \sum_{j=1}^N D^j(t) \psi_{m\pm 1}^j(\mu_j r) \quad (5.18)$$

Les inconnues de notre problème sont donc les  $D^j$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

A l'aide de la relation (5.16), on pourra à partir de la connaissance de ces  $D^j$ , retrouver les  $D$  et donc la solution à l'extérieur.

### Détermination des coefficients $\mu_j$

Pour déterminer ces coefficients, nous allons utiliser la continuité de  $\partial_r B_r$  en  $r=1$  (voir relation de continuité à l'interface 3.4.3).

En utilisant la relation (5.15) et les solutions (5.11) et (5.18), on réécrit la relation de continuité :

$$\partial_r b_r^{ext}(r=1, t) = \partial_r b_r^{int}(r=1, t) \quad (5.19)$$

Et après calculs, on obtient la relation suivante qui va nous permettre de calculer les  $\mu_j$  :

$$\mu_j \left[ \frac{K_{m+1}(k)}{J_{m+1}(\mu_j)} - \frac{K_{m-1}(k)}{J_{m-1}(\mu_j)} \right] + 2k \frac{K_m(k)}{J_m(\mu_j)} = 0 \quad (5.20)$$

Pour un  $k$  et un  $m$  fixé, il y a une infinité de solutions  $\mu_j$  vérifiant cette équation. On va tronquer le nombre de ces solutions à  $N$ , nombre de mode de l'approximation de Galerkin. Ainsi pour  $j = 1, \dots, N$ , on aura les  $\mu_j$  que l'on classera par ordre croissant ( $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_N$ ).

Le choix du nombre de  $\mu_j$  va donc déterminer la précision de la méthode de Galerkin.  
*Remarques :*

Il est intéressant de noter ici que les  $\mu_j$  sont des réels.

En effet, en utilisant la relation :  $J(\bar{z}) = \overline{J(z)}$  où  $z \in \mathbf{C}$ , il est trivial de démontrer en prenant le conjugué de (5.20) que, si  $\mu_j$  est solution, alors  $\bar{\mu}_j$  est solution.

### 5.3.3 Système matriciel

Nous allons maintenant introduire la solution approchée du champ magnétique (5.18) dans l'équation de l'induction (5.1). En notant  $R_{\pm}$  les résidus introduits dans la méthode de Galerkin, il vient :

$$\begin{aligned}
 R_{\pm} &= \left[ \{m \Omega(r, t) + k V(r, t)\} \sum_{j=1}^N D^j(t) \psi_{m\pm 1}^j(\mu_j r) \right. \\
 &\quad \mp \left. \frac{r}{2} \Omega'(r, t) \sum_{j=1}^N D^j(t) (\psi_{m+1}^j(\mu_j r) + \psi_{m-1}^j(\mu_j r)) \right] \\
 &\quad - i \sum_{j=1}^N \left[ \dot{D}^j(t) + (\mu_j^2 + k^2) D^j(t) \right] \psi_{m\pm 1}^j(\mu_j r) \quad (5.21)
 \end{aligned}$$

### Fonctions de poids

Nous avons choisi les mêmes fonctions de poids que C.Normand (Marié *et al.* (2006)). Ces fonctions sont les suivantes ( $i = 1, \dots, N$ ) :

$$\phi_{m\pm 1}^i(\mu_i r) = \frac{J_{m\pm 1}(\mu_i r)}{J_{m\pm 1}(\mu_i)} \quad (5.22)$$

Ce choix s'est basé sur l'existence de la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_0^1 \phi_{m+1}^i \psi_{m+1}^j r dr + \int_0^1 \phi_{m-1}^i \psi_{m-1}^j r dr = G_{ij} \delta_{ij} \quad (5.23)$$

$$\text{avec} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$G_{ii} = \frac{K_{m+1}(k)}{2 J_{m+1}^2(\mu_i)} \left\{ J_m^2(\mu_i) + J_{m+1}^2(\mu_i) - 2 \frac{m+1}{\mu_i} J_m(\mu_i) J_{m+1}(\mu_i) \right\} \\ + \frac{K_{m-1}(k)}{2 J_{m-1}^2(\mu_i)} \left\{ J_m^2(\mu_i) + J_{m-1}^2(\mu_i) - 2 \frac{m-1}{\mu_i} J_m(\mu_i) J_{m-1}(\mu_i) \right\}$$

Dans l'annexe (C), on trouvera les principales étapes permettant de démontrer cette relation.

### Orthogonalisation des équations

De manière à utiliser la relation d'orthogonalité (5.23), nous allons combiner les équations (5.21).

Les coefficients  $D^j$  seront déterminés par la résolution du système d'équations suivant :

$$\int_0^1 R_+ \phi_{m+1}^i r dr + \int_0^1 R_- \phi_{m-1}^i r dr = 0 \quad (5.24)$$

Après réarrangements et en ayant sorti les  $\sum_{j=1}^N$  des intégrales, il vient :

$$\sum_{j=1}^N D^j(t) \left[ \int_0^1 \left( m \Omega(r, t) + k V(r, t) \right) \left( \phi_{m+1}^i \psi_{m+1}^j + \phi_{m-1}^i \psi_{m-1}^j \right) r dr \right. \\ \left. - \int_0^1 \left( \frac{r^2}{2} \Omega'(r, t) \right) \left( \psi_{m+1}^j + \psi_{m-1}^j \right) \left( \phi_{m+1}^i - \phi_{m-1}^i \right) dr \right] \\ - i \sum_{j=1}^N \left( \dot{D}^j(t) + (\mu_j^2 + k^2) D^j(t) \right) \int_0^1 \left( \phi_{m+1}^i \psi_{m+1}^j + \phi_{m-1}^i \psi_{m-1}^j \right) r dr = (5.25)$$

De plus, comme  $G_{ii}$  est toujours différent de 0, on va utiliser la relation d'orthogonalité en la normalisant.

Ensuite, en séparant les termes en  $D^j$  et  $\dot{D}^j$ , il vient :

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N D^j(t) \{ (\mu_j^2 + k^2) \delta_{ij} \\
& + \frac{i}{G_{ii}} \int_0^1 \left[ \left( m \Omega(r, t) + k V(r, t) \right) (\phi_{m+1}^i \psi_{m+1}^j + \phi_{m-1}^i \psi_{m-1}^j) r \right. \\
& \left. - \frac{r^2}{2} \Omega'(r, t) (\psi_{m+1}^j + \psi_{m-1}^j) (\phi_{m+1}^i - \phi_{m-1}^i) \right] dr \} \\
& + \sum_{j=1}^N \dot{D}^j(t) \delta_{ij} = 0
\end{aligned} \tag{5.26}$$

### Système matriciel

En écrivant l'équation (5.26) pour  $i = 1, \dots, N$ , on obtient un système à  $N$  équations différentielles du premier ordre à  $N$  inconnues, que l'on peut mettre sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{D} + M D = 0 \tag{5.27}$$

Pour cela, on introduit les notations suivantes :

- Soit le vecteur  $D$ , regroupant toutes les inconnues  $D^j$  :

$$D = \begin{pmatrix} D^1(t) \\ D^2(t) \\ \vdots \\ D^N(t) \end{pmatrix} \tag{5.28}$$

- Soit  $M$ , la matrice à coefficients complexes, définie par :

$M = M_R + i M_I$ , où  $M_R, M_I$  sont des matrices de taille  $N \times N$ , à coefficients réels et indépendants du temps (i représente ici le nombre complexe).

Nous allons maintenant exprimer les coefficients de ces matrices.

Pour cela, décomposons d'abord la vitesse azimutale et la vitesse verticale comme la somme d'une partie stationnaire et d'une partie fluctuante de la manière suivante :

$$\Omega(r)F(t) = \Omega_0(r) + f(t)\tilde{\Omega}(r) \tag{5.29}$$

$$V(r)G(t) = V_0(r) + g(t)\tilde{V}(r) \tag{5.30}$$

$$\text{avec } \Omega_0(r) = \bar{R}_m \xi(r); \quad \tilde{\Omega}(r) = \tilde{R}_m \xi(r) \tag{5.31}$$

$$V_0(r) = \bar{R}_m \bar{\Gamma} \zeta(r); \quad \tilde{V} = \tilde{R}_m \tilde{\Gamma} \zeta(r) \tag{5.32}$$

Le profil radial des fonctions  $\xi$  et  $\zeta$  détermine les deux cas qui nous intéressent : cisaillement (i) infini et (ii) fini

$$(i) \quad \xi = \zeta = 1 \tag{5.33}$$

$$(ii) \quad \xi = 1 - r, \quad \zeta = 1 - r^2. \tag{5.34}$$

Ce qui nous permet d'exprimer la matrice  $M$  de la manière suivante :

$$M = M_R + i (M_{I\Omega_o} + M_{IV_o} + f(t) M_{I\tilde{\Omega}} + g(t) M_{I\tilde{V}}) \quad (5.35)$$

avec

$$\begin{aligned} M_{R_{ij}} &= (\mu_j^2 + k^2) \delta_{ij} \\ M_{I\Omega_o_{ij}} &= \frac{1}{G_{ii}} \int_0^1 \left\{ r m \Omega_o(r) [\phi_{m+1}^i \psi_{m+1}^j + \phi_{m-1}^i \psi_{m-1}^j] \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^2}{2} \Omega'_o(r) (\psi_{m+1}^j + \psi_{m-1}^j) (\phi_{m+1}^i - \phi_{m-1}^i) \right\} dr \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$M_{IV_o_{ij}} = \frac{1}{G_{ii}} \int_0^1 k V_o(r) r [\phi_{m+1}^i \psi_{m+1}^j + \phi_{m-1}^i \psi_{m-1}^j] dr \quad (5.37)$$

$$\begin{aligned} M_{I\tilde{\Omega}_{ij}} &= \frac{1}{G_{ii}} \int_0^1 \left\{ r m \tilde{\Omega}(r) [\phi_{m+1}^i \psi_{m+1}^j + \phi_{m-1}^i \psi_{m-1}^j] \right. \\ &\quad \left. - \frac{r^2}{2} \tilde{\Omega}'(r) (\psi_{m+1}^j + \psi_{m-1}^j) (\phi_{m+1}^i - \phi_{m-1}^i) \right\} dr \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$M_{I\tilde{V}_{ij}} = \frac{1}{G_{ii}} \int_0^1 k \tilde{V}(r) r [\phi_{m+1}^i \psi_{m+1}^j + \phi_{m-1}^i \psi_{m-1}^j] dr \quad (5.39)$$

*Remarque :*

Il est possible de calculer de manière analytique  $M_{I\Omega_o}$  et  $M_{I\tilde{\Omega}}$  sans avoir besoin de connaître  $\Omega'_o(r)$  et  $\tilde{\Omega}'(r)$ , il suffit de faire une simple intégration par partie.

En notant,  $f_1(r, \mu_j) = \psi_{m+1}^j + \psi_{m-1}^j$  et  $f_2(r, \mu_i) = \phi_{m+1}^i - \phi_{m-1}^i$ , on trouve :

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \frac{K_{m+1}(k)}{J_{m+1}(\mu_j)} J_{m+1}(\mu_j r) + \frac{K_{m-1}(k)}{J_{m-1}(\mu_j)} J_{m-1}(\mu_j r) \\ f'_1(r) &= \frac{K_{m+1}(k)}{J_{m+1}(\mu_j)} \left[ \frac{-(m+1)}{r} J_{m+1}(\mu_j r) + \mu_j J_m(\mu_j r) \right] \\ &\quad + \frac{K_{m-1}(k)}{J_{m-1}(\mu_j)} \left[ \frac{(m-1)}{r} J_{m-1}(\mu_j r) - \mu_j J_m(\mu_j r) \right] \\ f_2(r) &= \frac{J_{m+1}(\mu_i r)}{J_{m+1}(\mu_i)} - \frac{J_{m-1}(\mu_i r)}{J_{m-1}(\mu_i)} \\ f'_2(r) &= \frac{1}{J_{m+1}(\mu_i)} \left[ \frac{-(m+1)}{r} J_{m+1}(\mu_i r) + \mu_i J_m(\mu_i r) \right] \\ &\quad - \frac{1}{J_{m-1}(\mu_i)} \left[ \frac{(m-1)}{r} J_{m-1}(\mu_i r) - \mu_i J_m(\mu_i r) \right] \end{aligned}$$



$M_{I\Omega_o}$  et  $M_{I\tilde{\Omega}}$  deviennent alors :

$$\begin{aligned}
M_{I\Omega_{oij}} &= \frac{1}{G_{ii}} \left( \int_0^1 r m \Omega_o(r) [\phi_{m+1}^i \psi_{m+1}^j + \phi_{m-1}^i \psi_{m-1}^j] dr \right. \\
&+ \left. \int_0^1 \Omega_o(r) \left\{ \left( r f_1(r) + \frac{r^2}{2} f_1'(r) \right) f_2(r) + \frac{r^2}{2} f_1(r) f_2'(r) \right\} dr \right) \\
M_{I\tilde{\Omega}_{ij}} &= \frac{1}{G_{ii}} \left( \int_0^1 r m \tilde{\Omega}(r) [\phi_{m+1}^i \psi_{m+1}^j + \phi_{m-1}^i \psi_{m-1}^j] dr \right. \\
&+ \left. \int_0^1 \tilde{\Omega}(r) \left\{ \left( r f_1(r) + \frac{r^2}{2} f_1'(r) \right) f_2(r) + \frac{r^2}{2} f_1(r) f_2'(r) \right\} dr \right) \quad (5.40)
\end{aligned}$$

Ainsi, le calcul des inconnues  $D^j$  se fera par la résolution des  $i = 1, \dots, N$  équations différentielles du premier ordre suivantes :

$$\boxed{\dot{D}^i(t) = - \sum_{j=1}^N D^j(t) \left\{ M_{R_{ij}} + i \left( M_{I\Omega_{oij}} + M_{IV_{oij}} + f(t) M_{I\tilde{\Omega}_{ij}} + g(t) M_{I\tilde{V}_{ij}} \right) \right\}} \quad (5.41)$$

Il est important de noter ici que seul le  $i$  placé devant la parenthèse intervenant dans l'équation ci dessous représente le  $i$  complexe, tous les autres représentent l'indice de boucle.

Cette équation se résoudra numériquement à l'aide d'un code écrit en Fortran 90 utilisant pour la résolution temporelle une méthode de Runge Kutta d'ordre 4 avec comme condition initiale un bruit blanc sur les coefficients  $D^j$ . La description des méthodes numériques employées ainsi que l'organisation de ce code est faite dans l'annexe D.

Les  $D^j$  connues, il sera alors possible de calculer les coefficients  $D$  grâce à la relation (5.16).

Enfin, à l'aide des formules (5.18, 5.11), on pourra calculer le champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur.

Il faudra ensuite interpréter les résultats en terme d'énergie magnétique et de taux de croissance, pour étudier l'influence de la dépendance temporelle sur le seuil de l'instabilité dynamo, nous décrirons ces méthodes dans la section (6.1).

## Troisième partie

# Résultats et Comparaisons

---



---

Après avoir présenté dans la partie précédente le problème et toutes les approches que nous avons utilisées, nous consacrons cette troisième et dernière partie du manuscrit aux résultats de ces approches.

Dans le premier chapitre, nous présenterons d'abord les méthodes utilisées pour déterminer le seuil de l'instabilité dynamo pour un écoulement dépendant périodiquement du temps. Ensuite, nous donnerons les résultats qui nous ont permis de valider le code numérique basé sur la méthode de Galerkin. Nous comparerons les résultats de ce code à ceux du cas stationnaire, ainsi qu'à ceux de l'étude perturbative pour de faibles amplitudes de modulation. Dans un deuxième chapitre, nous ferons une étude comparative de la méthode de Galerkin et de la méthode asymptotique incluant une dépendance temporelle. Dans le troisième chapitre, nous présenterons parallèlement les résultats de la méthode de Galerkin et de ceux issus du développement en séries de Fourier. Ce travail a fait l'objet d'une publication ([Peyrot \*et al.\* \(2007\)](#)) que nous avons incluse dans ce chapitre. Enfin, dans le dernier chapitre, nous présenterons quelques résultats sur la dynamo de Roberts modulée périodiquement en temps.

Dans cette partie, tous les résultats ont été exprimés en terme des paramètres  $\bar{R}_m$ ,  $\tilde{R}_m$ ,  $f(t)$ ,  $g(t)$ ,  $\rho$ ,  $\bar{\Gamma}$  et  $\tilde{\Gamma}$ . Tous ces paramètres ont été définis dans le chapitre (3). Dans les approches perturbatives, de Fourier, et de Galerkin, nous avons défini le temps diffusif du champ magnétique comme temps caractéristique. Alors que dans l'approche asymptotique, nous avons défini le temps d'advection comme temps caractéristique. Cette différence nous a contraint à définir le taux de croissance et la fréquence de forçage spécifique aux deux problèmes résolus. Ainsi, nous appellerons  $\gamma$  et  $w_f$ , le taux de croissance du champ magnétique et la fréquence de forçage du champ de vitesse obtenus par l'approche perturbative, le développement en séries de Fourier et la méthode de Galerkin. Et nous définirons  $\gamma^A$  et  $w_f^A$ , le taux de croissance et la pulsation du champ magnétique obtenus par l'approche asymptotique. Le lecteur trouvera dans l'annexe ([A.3.1](#)) les relations d'équivalence entre ces paramètres.

---



## Chapitre 6

# Validation du code numérique, comparaison avec l'étude perturbative

Dans ce chapitre, nous allons d'abord présenter les méthodes que nous avons utilisées pour déterminer le taux de croissance et la pulsation du champ magnétique, dans le cas d'un champ de vitesse stationnaire, et dans le cas d'un champ de vitesse modulé périodiquement dans le temps.

Nous présenterons ensuite pour le cas du cisaillement infini, les résultats qui ont permis de faire la validation du code numérique basé sur la méthode de Galerkin.

Dans le cas stationnaire, nous avons confronté nos résultats à ceux issus d'un benchmark numérique réalisé à partir d'un code développé par A. Gailitis. Une fois le code validé pour le cas stationnaire, nous avons étudié le cas du champ de vitesse modulé périodiquement dans le temps pour de faibles amplitudes de modulation. En comparant nos résultats avec ceux obtenus par l'approche perturbative (Normand (2003)), nous avons trouvé des différences significatives qui ont mis en évidence des erreurs dans la programmation des résultats publiés dans Normand (2003) (bien que les développements analytiques soient corrects). Nous retranscrivons ici les résultats de l'article Normand (2003) en prenant en compte ces corrections.

---

## 6.1 Détermination du taux de croissance et de la pulsation du champ magnétique

### 6.1.1 Pour un champ de vitesse stationnaire

#### Taux de croissance à partir du calcul de l'énergie magnétique

Nous avons vu dans la première partie de ce manuscrit que l'effet dynamo se traduisait par une croissance exponentielle de la norme du champ magnétique en tout point de l'espace. Une des manières classique de visualiser cet effet est de calculer l'évolution de l'énergie magnétique en fonction du temps.

Rappelons l'expression de l'énergie magnétique :

$$\mathcal{E}_m = \int_{\mathcal{V} + \hat{\mathcal{V}}} \frac{\mathbf{B}^2}{2\mu_0} dV \quad (6.1)$$

où  $\mathcal{V}$  est le volume défini par la région du fluide en mouvement et  $\hat{\mathcal{V}}$  le volume extérieur au fluide.

Cependant la manifestation de l'effet dynamo ne dépend pas de la localisation spatiale, sauf pendant une durée transitoire pendant laquelle le mode magnétique se met en place. Ici, nous choisirons arbitrairement de limiter le domaine de calcul de l'énergie magnétique au cylindre de rayon 1, sur une hauteur  $H = 1$ .

Pour le champ de vitesse de Ponomarenko stationnaire, on peut chercher un champ magnétique solution du problème cinématique sous la forme :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{b}(\mathbf{r}) \exp(\gamma t + im\theta + ikz) \quad (6.2)$$

où  $\gamma$  est le taux de croissance complexe du champ magnétique. Ainsi, l'énergie magnétique s'écrit :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2\mu_0} \exp(2\Re(\gamma)t) \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^1 \int_{\theta=0}^{2\pi} (b_r b_r^* + b_\theta b_\theta^* + b_z b_z^*) r dr d\theta dz \quad (6.3)$$

$$\mathcal{E}_m = \frac{\pi}{\mu_0} \exp(2\Re(\gamma)t) \int_{r=0}^1 (b_r b_r^* + b_\theta b_\theta^* + b_z b_z^*) r dr \quad (6.4)$$

L'intérêt de calculer l'énergie magnétique est de faire disparaître le terme en  $\exp(im\theta + ikz)$  et de faire apparaître de manière explicite la partie réelle du taux de croissance.

Calculons maintenant le logarithme de l'énergie,

$$\log(\mathcal{E}_m) = 2\Re(\gamma) t + \log \left\{ \frac{\pi}{\mu_0} \int_{r=0}^1 |\mathbf{b}|^2 r dr \right\} \quad (6.5)$$


---

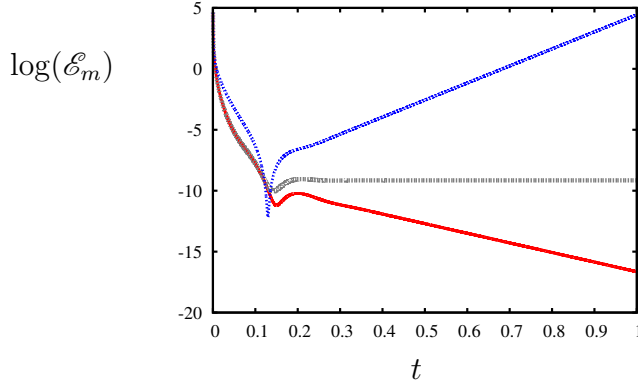


FIGURE 6.1 – Logarithme de l'énergie magnétique en fonction du temps (en secondes) dans le cas stationnaire, pour  $m = 1$ ,  $k = -0.4$ ,  $R' = 0.1$ ,  $\bar{\Gamma} = 1.3$ . La courbe en rouge représente le cas  $\bar{R}_m < \bar{R}_m^{critique}$ , la grise le cas  $\bar{R}_m = \bar{R}_m^{critique}$  et la bleue le cas  $\bar{R}_m > \bar{R}_m^{critique}$ .

Ainsi,  $\log(\mathcal{E}_m)$  se comporte comme une droite de pente  $2\mathcal{R}(\gamma)$ . Pour déterminer facilement le taux de croissance, il suffit de tracer  $\log(\mathcal{E}_m)$  en fonction du temps pour différents nombres de Reynolds magnétique.

Le nombre de Reynolds magnétique correspondant au cas  $\mathcal{R}(\gamma) = 0$ , représente le nombre de Reynolds magnétique critique. Sur la figure (6.1) dans le cas stationnaire, nous avons représenté le logarithme de l'énergie pour trois nombres de Reynolds magnétique, un au dessous du seuil, un au niveau du seuil, et un au dessus du seuil. Typiquement pour nos calculs, nous prendrons au minimum quatre valeurs en dessus du seuil et quatre en dessous.

En faisant une approximation linéaire de la courbe  $\mathcal{R}(\gamma)$  en fonction de  $\bar{R}_m$  (voir l'exemple de la figure 6.2), nous déterminerons dans un premier temps "à la main" l'intersection de cette courbe avec l'axe des abscisses.

### Autre méthode de détermination du Reynolds magnétique critique

La méthode décrite précédemment est très efficace, cependant pour un cas donné, elle nécessite plusieurs calculs. Nous allons ici présenter une méthode très rapide qui détermine le nombre de Reynolds magnétique critique en un seul calcul.

A la place de l'équation de l'induction adimensionnalisée par le temps diffusif (sous sa forme classique envisagée dans la première partie (1.20)),  $\partial_t \mathbf{B} = R_m \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B}$ , il faut résoudre l'équation :

$$\partial_t \mathbf{B} = R_m^1 \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B} \quad (6.6)$$

$$\text{avec } R_m^1 = \frac{R_m^0}{1 + \|\mathbf{B}\|^2} \quad (6.7)$$



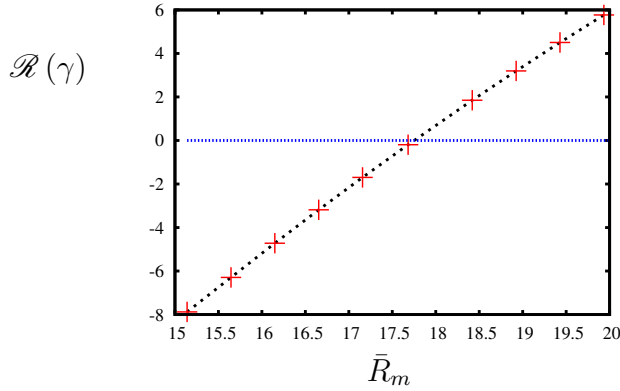


FIGURE 6.2 – Partie réelle du taux de croissance en fonction de  $\bar{R}_m$  pour  $m = 1$ ,  $k = -0.4$ ,  $R' = 0.1$ ,  $\bar{\Gamma} = 1.3$ . Les croix rouges représentent les points donnés par la DNS basée sur la méthode de Galerkin, la courbe noire en pointillé l'approximation linéaire des croix rouges. L'intersection de la courbe avec la droite pour laquelle  $\mathcal{R}(\gamma) = 0$  (en pointillé bleu) correspond ici à  $\bar{R}_m = 17,64$ .

Le principe de cette méthode récursive est le suivant, en partant d'un  $R_m^0$  surcritique, on a effet dynamo, le champ magnétique augmente,  $\|\mathbf{B}^2\|$  augmente et donc  $R_m^1$  diminue à chaque pas de temps. Dès que  $R_m^1 < R_{m,crit}$ , on n'aura plus l'effet dynamo, ainsi  $\|\mathbf{B}^2\|$  diminue et donc  $R_m^1$  augmente à chaque pas de temps, jusqu'à repasser une nouvelle fois au dessus du seuil. De cette manière, le  $R_m^1$  converge vers le  $R_{m,crit}$ .

A titre d'illustration, nous avons représenté dans la figure (6.3),  $R_m^1$  en fonction du temps pour un cas donné, nous pouvons constater que  $R_m^1$  converge rapidement vers la valeur du nombre de Reynolds magnétique critique.

### Pulsation du champ magnétique

Pour un champ de vitesse stationnaire,  $\mathbf{B}$  peut se mettre sous la forme  $\mathbf{B} = \mathbf{b} \exp(\gamma t)$ .

Nous pouvons remarquer que  $\partial_t \mathbf{B} = \gamma \mathbf{B}$ .

De cette manière,  $\gamma = \frac{\partial_t B_r}{B_r} = \frac{\partial_t B_\theta}{B_\theta} = \frac{\partial_t B_z}{B_z}$ .

La pulsation du champ magnétique, *i.e* la partie imaginaire du taux de croissance  $\Im(\gamma)$ , est donc donnée par :

$$\Im(\gamma) = \Im\left(\frac{\partial_t B_r}{B_r}\right) = \Im\left(\frac{\partial_t B_\theta}{B_\theta}\right) = \Im\left(\frac{\partial_t B_z}{B_z}\right) \quad (6.8)$$

Grâce à cette méthode, il est aussi possible de calculer le taux de croissance en prenant la partie réelle de  $\gamma$ . On retrouve les mêmes résultats que ceux donnés par la méthode de l'énergie magnétique.

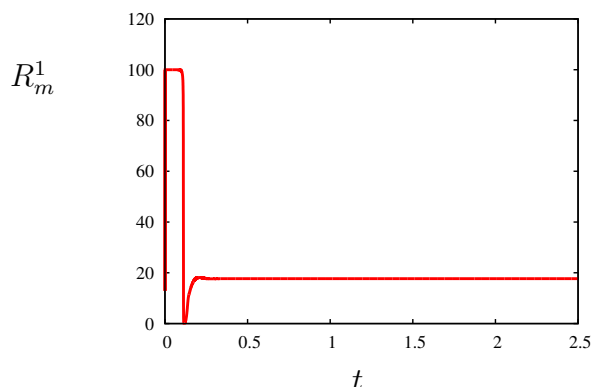


FIGURE 6.3 – Méthode de détermination du Reynolds magnétique critique (ici le temps est exprimé en secondes),  $m = 1$ ,  $k = -0.4$ ,  $R' = 0.1$ ,  $\bar{\Gamma} = 1.3$ .  $R_m^1$  converge rapidement vers  $R_m$  critique ( $R_m = 17.64$ ).

## 6.1.2 Pour un champ de vitesse périodique

### Taux de croissance et pulsation

Pour un champ de vitesse périodique dans le temps de période  $T$ ,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t + T) = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \quad (6.9)$$

la théorie de Floquet s'applique et on peut montrer que le champ magnétique solution de l'équation de l'induction peut se mettre sous la forme (Childress & D.Gilbert (1995)) :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t + T) = \exp(\gamma T) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (6.10)$$

où  $\gamma$  est le taux de croissance complexe du champ magnétique dont la partie réelle représente le taux de croissance et la partie imaginaire la pulsation du champ magnétique. Cependant, nous pouvons remarquer que :

$$\exp(\gamma T) = \frac{B_r(\mathbf{r}, t + T)}{B_r(\mathbf{r}, t)} = \frac{B_\theta(\mathbf{r}, t + T)}{B_\theta(\mathbf{r}, t)} = \frac{B_z(\mathbf{r}, t + T)}{B_z(\mathbf{r}, t)} \quad (6.11)$$

$$\gamma = \frac{1}{T} \log \left( \frac{B_r(\mathbf{r}, t + T)}{B_r(\mathbf{r}, t)} \right) = \frac{1}{T} \log \left( \frac{B_\theta(\mathbf{r}, t + T)}{B_\theta(\mathbf{r}, t)} \right) = \frac{1}{T} \log \left( \frac{B_z(\mathbf{r}, t + T)}{B_z(\mathbf{r}, t)} \right) \quad (6.12)$$

La génération du champ magnétique dans le problème cinématique ne dépend pas de la localisation spatiale. Il suffit de se placer en un point donné de l'espace et de calculer ce taux de croissance complexe  $\gamma$  à chaque instant. Après quelques effets transitoires correspondant aux premiers pas de temps, ce taux de croissance converge rapidement. Nous avons vérifié que nous trouvons les mêmes résultats quelque soit la composante du

champ magnétique utilisée pour le calcul de  $\gamma$  et quelque soit la valeur de  $r$ .

Si on écrit le nombre complexe  $\gamma$  sous la forme exponentielle complexe :

$$\gamma = |\gamma| \exp(i(\vartheta + 2n\pi)), n \in \mathbb{N} \quad (6.13)$$

où  $|\gamma|$  et  $\vartheta$  sont respectivement le module et l'argument de  $\gamma$ , alors la partie réelle du taux de croissance et la pulsation du champ magnétique s'écrivent :

$$\Re(\gamma) = \frac{\log(|\gamma|)}{T} \quad (6.14)$$

$$\Im(\gamma) = \frac{\vartheta}{T} + \frac{(2n\pi)}{T} \quad (6.15)$$

### Autre méthode de détermination du taux de croissance

Il est intéressant de noter que la méthode de détermination du taux de croissance utilisée pour un champ de vitesse stationnaire à partir du calcul de l'énergie magnétique, peut aussi s'appliquer pour un champ de vitesse périodique. En effet :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t + T) = \exp(\gamma T) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (6.16)$$

$$\mathbf{B}^*(\mathbf{r}, t + T) = \exp(\gamma^* T) \mathbf{B}^*(\mathbf{r}, t) \quad (6.17)$$

$$\mathcal{E}_m(t + T) \propto \mathbf{B}(\mathbf{r}, t + T) \mathbf{B}^*(\mathbf{r}, t + T) \quad (6.18)$$

$$\propto \exp(2 \Re(\gamma) T) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \mathbf{B}^*(\mathbf{r}, t) \quad (6.19)$$

$$\propto \exp(2 \Re(\gamma) T) \mathcal{E}_m(t) \quad (6.20)$$

Pour déterminer le seuil, on recherche un  $\Re(\gamma)$  nul, donc si  $\Re(\gamma) = 0$ , alors l'énergie est périodique :  $\mathcal{E}_m(t + T) \propto \mathcal{E}_m(t)$ .

Si l'énergie magnétique est périodique, alors la pente du logarithme de l'énergie est nulle (voir figure 6.4). Ainsi, la méthode de détermination du taux de croissance à partir du calcul de l'énergie magnétique décrite dans la section précédente pour un champ de vitesse stationnaire peut s'appliquer dans le cas d'un champ de vitesse périodique. Pour déterminer la pente de l'énergie magnétique, nous ferons une approximation linéaire aux moindres carrés sur un temps correspondant à dix périodes du champ de vitesse (en ne prenant pas en compte les effets transitoires en début de calculs). Nous avons vérifié que ces méthodes donnaient les mêmes résultats.

### Recherche du seuil par dichotomie

Nous avons mis en place dans le code numérique une recherche automatique du nombre de Reynolds magnétique critique en appliquant la méthode de dichotomie.

Appelons  $y$  la fonction définie par  $y(\bar{R}_m) = \Re(\gamma)$ . Le principe de cet algorithme de recherche de zéro se déroule en deux étapes.

En partant d'un nombre de Reynolds magnétique sous critique, nous chercherons d'abord

---

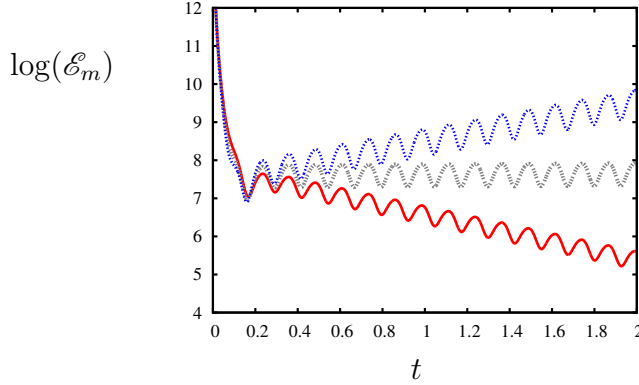


FIGURE 6.4 – Logarithme de l'énergie magnétique en fonction du temps (en secondes) dans le cas fluctuant avec champ moyen, pour  $m = 1$ ,  $k = -1$ ,  $R' = 0.1$ ,  $\bar{\Gamma} = 1$ ,  $\tilde{\Gamma} = 1$ ,  $\rho = 2$ ,  $w_f = 50$ . La courbe en rouge représente le cas  $\bar{R}_m < \bar{R}_m^{critique}$ , la courbe grise le cas  $\bar{R}_m = \bar{R}_m^{critique}$  et la courbe bleue le cas  $\bar{R}_m > \bar{R}_m^{critique}$ .

un intervalle  $[\bar{R}_m^1, \bar{R}_m^2]$ , tel que le produit :  $\{y(\bar{R}_m^1) \cdot y(\bar{R}_m^2)\}$  soit négatif de telle manière à ce que la fonction  $y$  s'annule pour une valeur de  $\bar{R}_m$  appartenant à cet intervalle. Pour déterminer les bornes de cet intervalle, nous appliquerons le principe de la fenêtre glissante : tant que le produit  $\{y(\bar{R}_m^1) \cdot y(\bar{R}_m^2)\}$  sera positif, nous déplacerons la fenêtre d'un pas  $\delta\bar{R}_m$  que nous choisirons selon les cas envisagés (voir figure 6.5 (i)).

Une fois cet intervalle déterminé, la méthode de dichotomie divise l'intervalle en deux en calculant le point milieu,  $\bar{R}_m^3 = \frac{\bar{R}_m^1 + \bar{R}_m^2}{2}$ . Il y a alors deux possibilités, soit  $y(\bar{R}_m^1)$  et  $y(\bar{R}_m^3)$  sont de signes opposés, soit  $y(\bar{R}_m^3)$  et  $y(\bar{R}_m^2)$  sont de signes opposés. L'algorithme de dichotomie est alors appliqué au sous-intervalle dans lequel le changement de signe se produit, cet algorithme est donc récursif. Le processus est ainsi itéré  $n$  fois jusqu'à obtention du zéro avec la précision souhaitée. L'erreur absolue de cette méthode est au plus  $\frac{\bar{R}_m^2 - \bar{R}_m^1}{2^{n+1}}$ , ce qui signifie que l'erreur est diminuée de moitié à chaque étape et que la méthode converge linéairement.

La figure (6.5 (ii)) illustre cette méthode.

*Remarque* : Comme chaque calcul du taux de croissance pour un  $\bar{R}_m$  donné est relativement long (de l'ordre de une à soixante minutes avec nos moyens numériques selon les paramètres envisagés), nous avons choisi une précision de l'ordre de  $10^{-2}$  sur la détermination du nombre de Reynolds magnétique critique. Cette précision est relativement importante, mais reste satisfaisante pour notre étude. De plus, pour les cas où le seuil n'est jamais atteint, nous avons mis en place un 'test' dans le code qui permet d'arrêter le processus au delà d'un certain  $\bar{R}_m$ .

Le lecteur trouvera dans l'annexe (D) une description de l'organisation générale du code numérique.

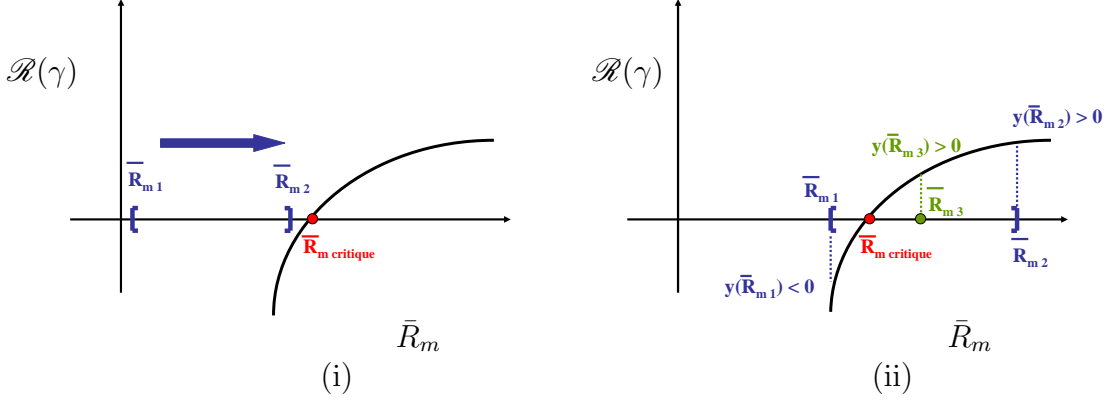


FIGURE 6.5 – Principe de recherche automatique de zéro de la fonction  $\mathcal{R}(\gamma) = y(\bar{R}_m)$ . La figure (i) illustre la méthode de la fenêtre glissante, i.e à la recherche de l'intervalle  $[\bar{R}_m^1, \bar{R}_m^2]$  auquel appartient  $\bar{R}_m$  critique; la figure (ii) illustre la recherche du zéro par dichotomie dans le cas où le point milieu  $\bar{R}_m^3$  est tel que  $y(\bar{R}_m^3)$  est positif.

## 6.2 Cas stationnaire

### 6.2.1 Premiers résultats

#### Localisation du champ magnétique

**Influence de  $R'$  :** Nous avons vu que dans le cas du cisaillement infini, la génération du champ magnétique se faisait au niveau de la zone de cisaillement, c'est-à-dire en  $r = R'$ . Dans notre modèle, nous pouvons choisir cette valeur arbitrairement. Toutefois, afin de respecter les conditions limites du milieu infini, il faudra garder un rapport  $\frac{R'}{R}$  suffisamment petit. Nous verrons par la suite que nous avons obtenu de très bons résultats pour  $R'/R = 0.1; 0.2$ . Sur la figure (6.6), nous avons tracé la composante azimutale du champ magnétique en fonction de  $r$  pour deux valeurs de  $R'$  à  $t = t_{final}$ . Nous constatons que le champ magnétique est bien concentré en  $r = R'$ .

**Composantes du champ magnétique :** Sur la figure (6.7), nous avons représenté les modules des trois composantes du champ magnétique en fonction de  $r$ .

On constate d'abord que la contribution de la composante radiale est faible par rapport à celle de la composante azimutale et verticale. Comme dans le paragraphe précédent, le maximum de  $|B_\theta|$  et  $|B_z|$  est localisé en  $r = R'$ . De plus, les composantes radiale et azimutale comportent une tangente horizontale en  $r = 0$ . Et la composante verticale s'annule en  $r = 0$ .

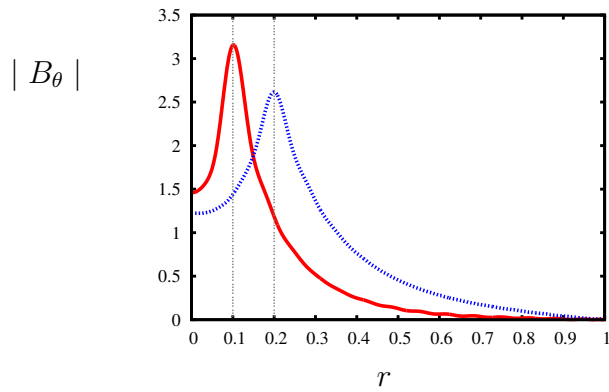


FIGURE 6.6 –  $|B_\theta|$  en fonction de  $r$  à  $t = t_{final}$ , pour  $\bar{R}_m = \bar{R}_m^{crit} = 17,68$  pour  $R' = 0.1$  en rouge,  $R' = 0.2$  en bleu;  $m = 1$ ,  $\bar{\Gamma} = 1.3$ ,  $k = -0.4$ ,  $z = 1$ .

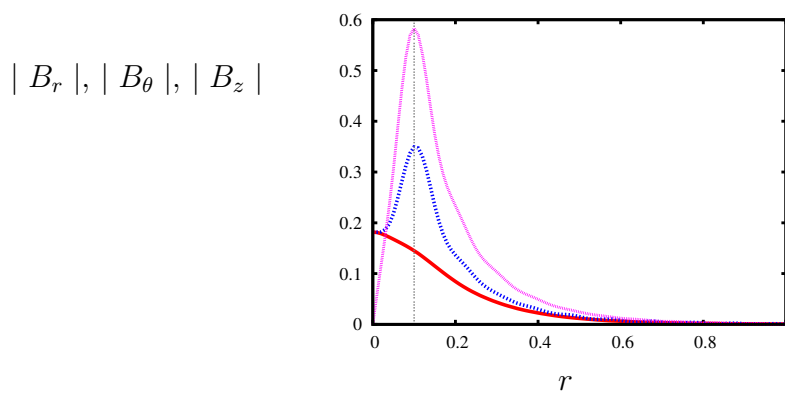


FIGURE 6.7 –  $|B_r|$  (en rouge),  $|B_\theta|$  (en bleu),  $|B_z|$  (en violet) en fonction de  $r$  à  $t = t_{final}$ , pour  $R' = 0.1$ ,  $m = 1$ ,  $\bar{\Gamma} = 1.3$ ,  $k = -0.4$ ,  $z = 1$ ,  $\bar{R}_m = \bar{R}_m^{crit} = 17.68$ .

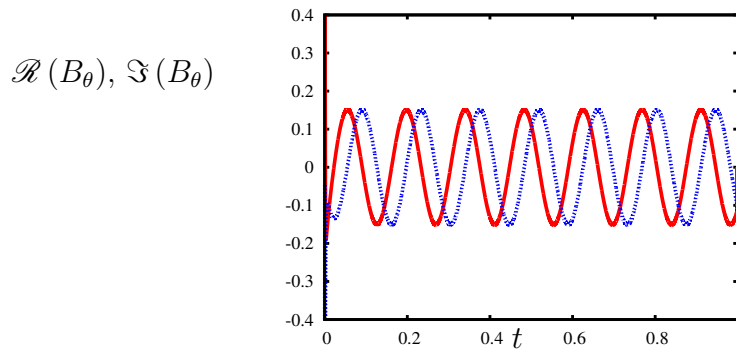


FIGURE 6.8 – Partie réelle (en rouge) et partie imaginaire (en bleu) de  $B_\theta$  en fonction du temps pour  $\bar{R}_m = \bar{R}_m^{critique}$  ;  $m = 1$ ,  $\bar{\Gamma} = 1.3$ ,  $k = -0.4$ ,  $R' = 0.1$ .

### Oscillations du champ magnétique

Le champ magnétique, ou plutôt, la partie réelle et la partie imaginaire de ses composantes, oscillent avec une fréquence constante dans le temps.

D'autre part, si on se place à un endroit fixe dans l'espace, l'enveloppe de la partie réelle ou de la partie imaginaire de ses composantes, ont une croissance ou une décroissance exponentielle en fonction du temps, suivant que le nombre de Reynolds magnétique est en dessous, ou en dessus du seuil. Si l'on se trouve au seuil, la partie réelle et la partie imaginaire de ses composantes sont périodiques.

Nous avons représenté la partie réelle de la composante azimutale de  $\mathbf{B}$  pour  $\bar{R}_m = \bar{R}_m^{crit}$  pour un  $r$  fixé dans l'espace (voir figure 6.8).

### Spectre modal

Dans l'approche de Galerkin, les modes sont représentés par les coefficients complexes  $D^i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $N$  est le nombre de mode de l'approximation de Galerkin (voir chapitre 5). Nous avons réalisé une sorte de "spectre énergétique" de ces modes, en traçant leur norme en fonction de leur indice et ce, pour un instant donné, par exemple à  $t = t_{final}$ .

Nous avons représenté *ce spectre* (voir figure 6.9), pour un cas où  $\bar{R}_m$  est au dessus du seuil et pour différents nombres de modes,  $N = 60, 90, 120, 150$ .

On constate un comportement assez particulier du module de ces modes, on aurait pu s'attendre à une décroissance rapide pour un certain  $N = N_{conv}$ , or, ces modes convergent vers une valeur, mais sans toutefois s'annuler complètement.

Dans le cas du cisaillement infini, nous prendrons un minimum de 90 modes. Ce nombre est largement suffisant pour avoir une précision sur le nombre de Reynolds magnétique de l'ordre de  $10^{-2}$ .

---

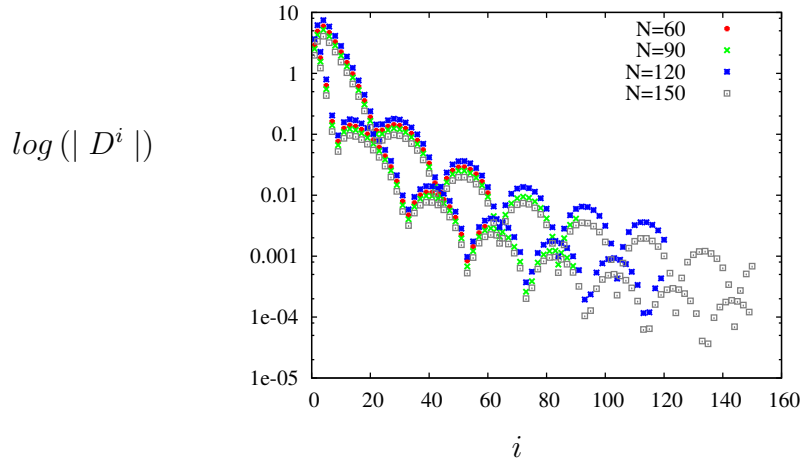


FIGURE 6.9 –  $\log(|D^i|)$  en fonction de  $i = 1, \dots, N$ , pour  $\bar{R}_m > \bar{R}_m^{crit}$  pour  $t = t_{final}$ ;  $m = 1$ ,  $\bar{\Gamma} = 1.3$ ,  $k = -0.4$ ,  $R' = 0.1$

## 6.2.2 Comparaison des résultats avec le code numérique développé par Gailitis

Nous allons comparer les résultats de notre DNS basée sur la méthode de Galerkin avec les résultats d'un code numérique développé par Gailitis dans les années 70, ce code permet de calculer le seuil de la dynamo, ainsi que la pulsation du champ magnétique pour différents  $R'$ ,  $m$ ,  $\Gamma_P$  et  $k$ . Le lecteur trouvera dans l'annexe (A.1) la définition du champ de vitesse de cet écoulement, ainsi que les relations permettant de faire l'analogie entre les grandeurs adimensionnelles des deux approches.

Le code numérique développé par Gailitis s'appuie sur la résolution numérique d'une équation de dispersion. Il a été ré-utilisé par Franck Plunian pour réaliser un Benchmark numérique sur la dynamo de Ponomarenko. Ce benchmark constituera une référence pour nos calculs issus de la DNS en régime stationnaire.

Nous avons comparé les résultats en terme de nombre de Reynolds magnétique critique et de fréquence du champ magnétique pour  $R' = 0.1$  et  $R' = 0.2$ . Quel que soit  $R'$ , les résultats sont en parfait accord avec ceux du benchmark (voir figure 6.10) et nous permettent de valider le code numérique pour le cas stationnaire.



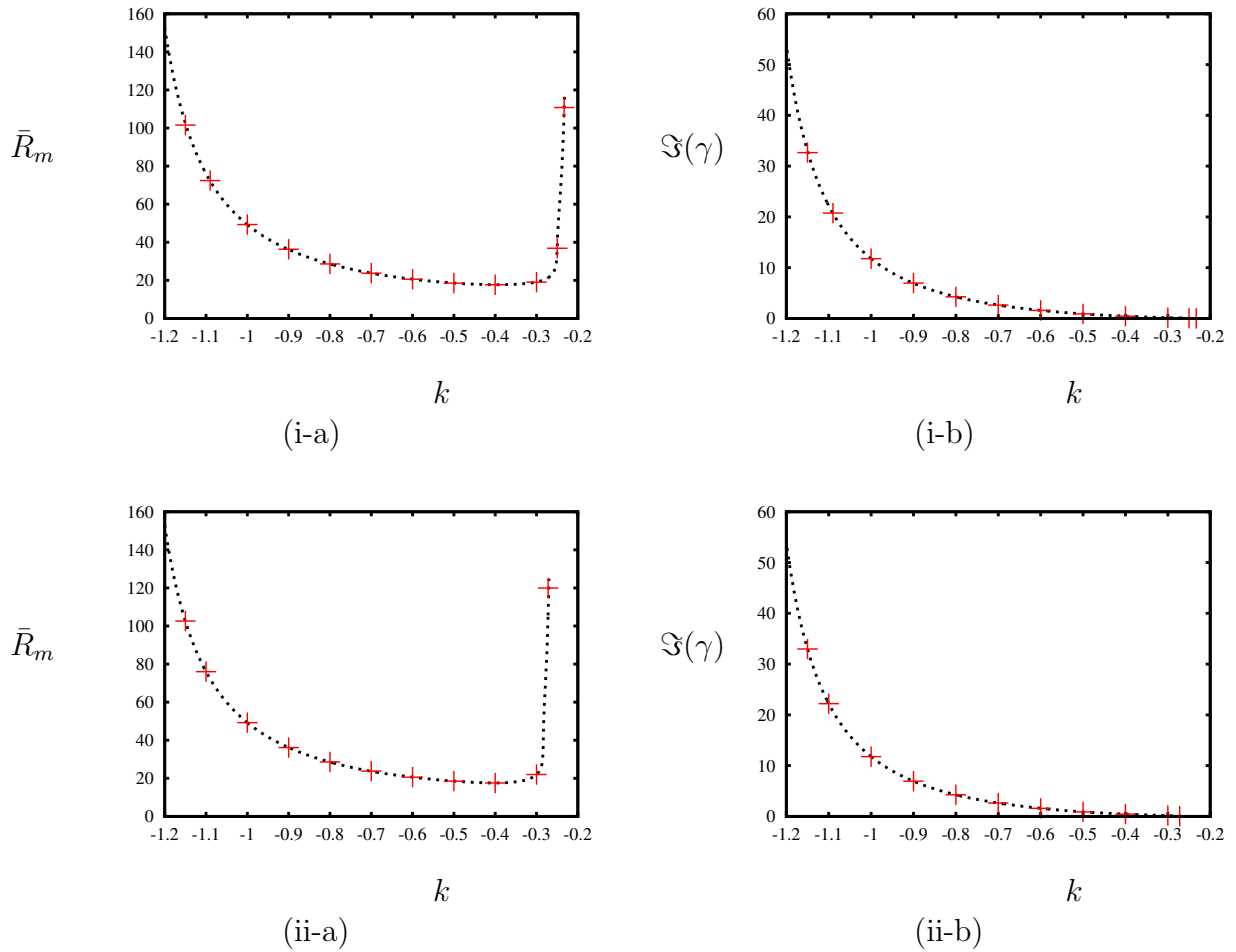


FIGURE 6.10 –  $\bar{R}_m$  critique ((i.a) et (ii.a)) et  $\mathfrak{S}(\gamma)$  ((i.b) et (ii.b)) en fonction de  $k$ ,  $m = 1$ ,  $\bar{\Gamma} = 1.3$ , les graphes (i.a) et (i.b) ont été obtenus pour  $R' = 0.1$  et les graphes (ii.a) et (ii.b) pour  $R' = 0.2$ . Les traits en pointillé noir correspondent au benchmark et les croix rouges à la DNS basée sur la méthode de Galerkin. On peut remarquer que le minimum de  $\bar{R}_m$  est d'environ 17.7 et correspond à  $k = -0.4$

---

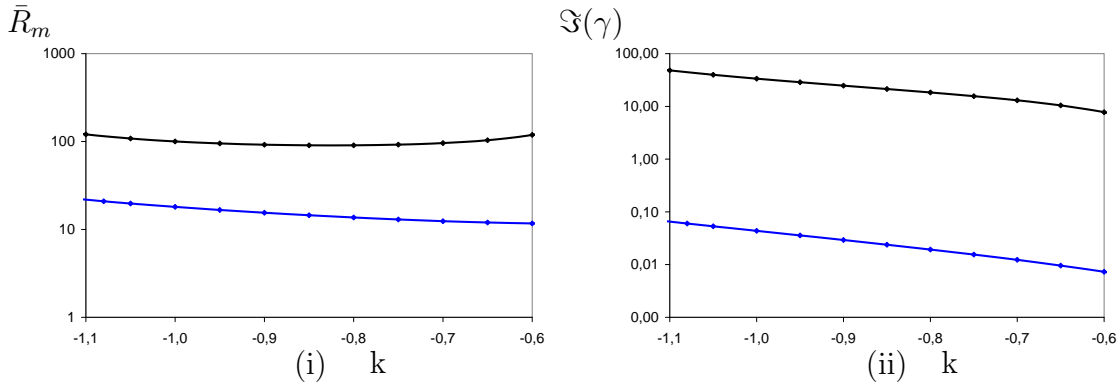


FIGURE 6.11 –  $\bar{R}_m$  critique en fonction de  $k$  (i),  $\mathfrak{S}(\gamma)$  en fonction de  $k$  (ii) pour  $m = 1$  et  $\bar{\Gamma} = 1$ , dans le cas stationnaire. Les traits noirs représentent le cas du cisaillement fini et les traits bleus le cas du cisaillement infini.

### 6.2.3 Comparaison avec le champ de vitesse présentant un cisaillement fini

Dans la suite de ce travail, nous traiterons les cas du cisaillement infini et fini, il nous a paru intéressant de comparer quantitativement les résultats en terme de seuil et de pulsation du champ magnétique dans le cas stationnaire. Nous constatons que pour la même configuration, le nombre de Reynolds magnétique critique et la pulsation du champ magnétique, sont plus grands pour le cas du cisaillement fini que pour le cas du cisaillement infini (voir 6.11).

## 6.3 Comparaison avec l'approche perturbative

C.Normand a étudié le champ de vitesse de Ponomarenko modulé de manière périodique dans le temps avec une fréquence de forçage  $w_f^{pert}$  et ce, dans la limite de faibles amplitudes de modulation. Nous avons présenté les principes de cette méthode dans la section (4.1). Le lecteur trouvera dans l'annexe (A.2.1) une présentation de cette étude comparative avec les paramètres qui sont définis dans l'article Normand (2003). On trouvera dans l'annexe (A.2.2) les relations permettant de faire l'analogie entre les grandeurs adimensionnelles adoptées dans la DNS et celles définies dans Normand (2003).

Nos paramètres  $\rho$ ,  $\tilde{\Gamma}$  et  $w_f$  définis dans ce manuscrit correspondent aux paramètres  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_1$  et  $\sigma$  définis Normand (2003) respectivement (voir annexe A.2.3).

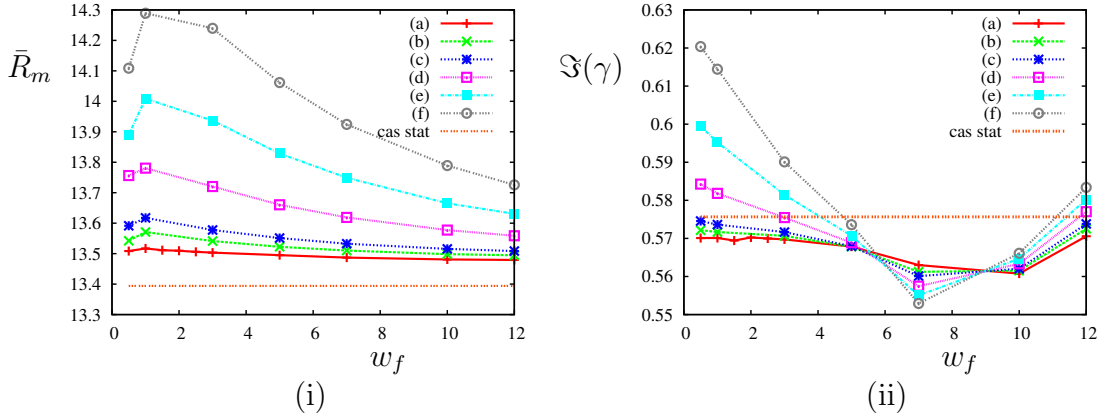


FIGURE 6.12 –  $\bar{R}_m$  critique (i) et  $\Im(\gamma)$  (ii) en fonction de  $w_f$  pour  $\rho=0.1$ ;  $m = 1$ ,  $k = -0.56$ ,  $R' = 0.2$ . Les courbes (a), (b), (c), (d), (e) et (f) correspondent à  $\tilde{\Gamma} = 1; 0.7; 0.5; 0; -0.5; -1$  respectivement. La courbe en pointillé orange correspond au nombre de Reynolds magnétique critique (i) et à la fréquence du champ magnétique correspondant (ii) dans le cas stationnaire.

### 6.3.1 Résultats méthode de Galerkin

La DNS calcule le taux de croissance et la pulsation du champ magnétique pour n'importe quelle amplitude (dans les limites imposées par le nombre de modes de Galerkin et par la valeur du pas de temps).

Nous avons calculé le seuil et la pulsation du champ magnétique, en utilisant la théorie de Floquet pour un champ de vitesse périodique (cf paragraphe 6.1.2).

Comme C.Normand l'a fait dans son article, nous avons pris  $m = 1$ ,  $k = -0.56$ ,  $\tilde{\Gamma}=1$ . Et nous avons fixé dans notre DNS,  $R' = 0.2$ .

Dans un premier temps, nous avons résolu le problème stationnaire obtenu pour  $\rho = 0$ . Nous trouvons  $R_0 = 13.4564$  et  $\omega_0 = 0.57166$ , à quelques pourcents près, ces résultats sont en parfait accord avec ceux obtenus par la méthode perturbative ( $R_0^{pert} = 13.459$  et  $\omega_0^{pert} = 0.5715$ , Normand (2003)).

#### Amplitude de la modulation fixée

Nous nous sommes d'abord intéressés au calcul du nombre de Reynolds magnétique critique et à la pulsation du champ magnétique correspondant, pour de faibles amplitudes de fluctuation  $\rho$ .

Nous avons calculé  $\bar{R}_m$  critique et  $\Im(\gamma)$  en fonction de la fréquence de forçage, en se donnant un  $\rho$  petit et pour différentes valeurs de  $\tilde{\Gamma}$  comprises entre -1 et 1 (cf. figure (6.12)).

Quelque soit le déphasage entre la vitesse azimutale et la vitesse verticale,  $\bar{R}_m$  critique

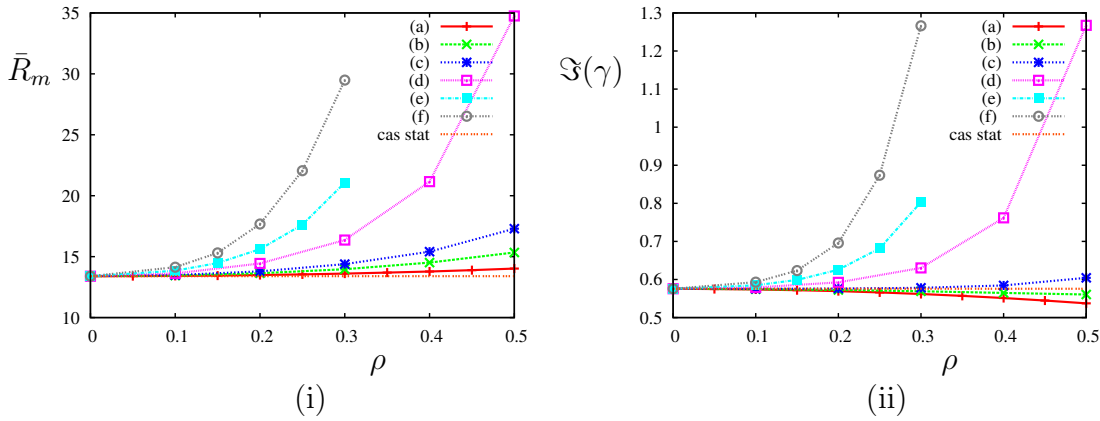


FIGURE 6.13 –  $\bar{R}_m$  critique (i) et  $\mathfrak{S}(\gamma)$  (ii) en fonction de  $\rho$  pour  $w_f=3$ ;  $m = 1$ ,  $k = -0.56$ ,  $R' = 0.2$ ,  $\bar{\Gamma} = 1$ . Les courbes (a), (b), (c), (d), (e) et (f) correspondent à  $\tilde{\Gamma} = 1$ ;  $0.7$ ;  $0.5$ ;  $0$ ;  $-0.5$ ;  $-1$  respectivement. La courbe en pointillé orange correspond au nombre de Reynolds magnétique critique (i) et à la fréquence du champ magnétique correspondant (ii) dans le cas stationnaire.

est toujours supérieur au  $\bar{R}_m$  critique obtenu dans le cas stationnaire. Si  $\tilde{\Gamma}$  diminue,  $\bar{R}_m$  critique augmente. De plus, quand  $w_f \rightarrow \infty$ ,  $\bar{R}_m$  critique tend asymptotiquement vers  $R_0$ , ce qui est normal puisque la fréquence de la perturbation est tellement grande que le champ magnétique n'a pas le temps de voir les fluctuations du champ de vitesse.

L'évolution de la pulsation du champ magnétique dépend fortement du signe de  $\tilde{\Gamma}$ . Si  $0 < \tilde{\Gamma} \leq 1$ ,  $\mathfrak{S}(\gamma)$  est toujours inférieur à la pulsation du cas non modulé. Si  $\tilde{\Gamma} \leq 0$ ,  $\mathfrak{S}(\gamma)$  est supérieur à  $\omega_0$  pour de petites valeurs de  $w_f$  et  $\mathfrak{S}(\gamma)$  est inférieur à  $\omega_0$  quand  $w_f$  augmente. Enfin de manière moins monotone que pour  $\bar{R}_m$ , quand  $w_f \rightarrow \infty$ , la pulsation tend asymptotiquement vers  $w_0$ .

Remarquez que le cas stationnaire ne correspond pas à  $R_0$  et  $w_0$  car si  $w_f = 0$ ,  $\cos(w_f t) = 1$ .

### Fréquence de forçage fixe

La fréquence de forçage étant fixée, nous avons calculé l'évolution du seuil et de la pulsation du champ magnétique en fonction de l'amplitude de la modulation  $\rho$ .

Nous avons fait ces calculs pour différentes valeurs de  $w_f$ ,  $w_f = 1, 3, 5, 10$  (voir annexes E). Pour illustrer ces résultats, nous ne retranscrivons ici qu'un seul cas  $w_f = 3$  (cf figure 6.13)).

Quelque soit le déphasage entre la vitesse azimutale et la vitesse verticale,  $\bar{R}_m$  critique est toujours supérieur au  $\bar{R}_m$  critique obtenu dans le cas stationnaire.

De plus, si  $\tilde{\Gamma}$  diminue, on constate que plus l'amplitude de la modulation augmente, plus  $\bar{R}_m$  critique augmente.

Les résultats sur les fréquences sont différents selon le déphasage, et il est assez difficile de dégager une tendance générale selon la valeur de  $\tilde{\Gamma}$ .

D'autre part, on peut observer le comportement quadratique de  $\bar{R}_m$  et de  $\mathfrak{S}(\gamma)$  en fonction de  $\rho$  et ce, pour chaque  $\tilde{\Gamma}$ , nous reviendrons plus précisément sur ce point dans le paragraphe suivant.

### 6.3.2 Comparaison des résultats méthode de Galerkin, étude perturbative

Dans le paragraphe précédent, nous avons comparé les résultats des deux approches en terme de  $R_2$  et  $w_2$ .

Il nous a paru intéressant de calculer les coefficients relatifs à l'ordre 4, afin de vérifier que le développement asymptotique de C.Normand à l'ordre 2 était suffisant.

Cependant avec la DNS basée sur la méthode de Galerkin, nous avons accès au seuil et à  $\mathfrak{S}(p)$  pour un  $\rho$  donné, il a donc fallut mettre en place une méthode permettant de calculer les coefficients  $R_i$  et  $w_i$ ,  $i = 2, 4$ .

#### Détermination des $R_i$ et $w_i$ , $i = 2, 4$

En partant du fait que les coefficients de puissance impaire, 3, 5, ..., ont une importance quasi nulle sur le  $\bar{R}_m$ , nous avons calculé pour chaque  $w_f$  et chaque  $\tilde{\Gamma}$ , le  $R_m$  critique et le  $\mathfrak{S}(p)$  en fonction de  $\rho$ .

Nous avons ensuite "fitté" ces résultats par un polynôme d'ordre 4, qui nous donnera accès aux  $R_i$  et  $w_i$ ,  $i = 2, 4$ .

Pour une plus grande précision des résultats, nous avons pris systématiquement au moins cinq valeurs de  $\rho$ , comprises entre 0 et 0.5.

Nous chercherons  $\bar{R}_m$  critique et la pulsation du champ magnétique  $\mathfrak{S}(\gamma)$  sous la forme respectivement :

$$\bar{R}_m = R_0 + \rho^2 R_2 + \rho^4 R_4 + O(\rho^4) \quad (6.21)$$

$$\mathfrak{S}(\gamma) = w_0 + \rho^2 w_2 + \rho^4 w_4 + O(\rho^4) \quad (6.22)$$

$R_0$  et  $w_0$  étant les solutions du problème stationnaire. La figure (6.14) illustre cette méthode sur un exemple, on constate que ce modèle "fitté" très bien les résultats de la DNS.

*Remarque :* En "fittant" les résultats avec un polynôme d'ordre 4 dont tous les coefficients à l'ordre 1 et 3 sont non nuls, nous avons vérifié que  $R_1, R_3, w_1, w_3$  avaient une importance quasi nulle.

---

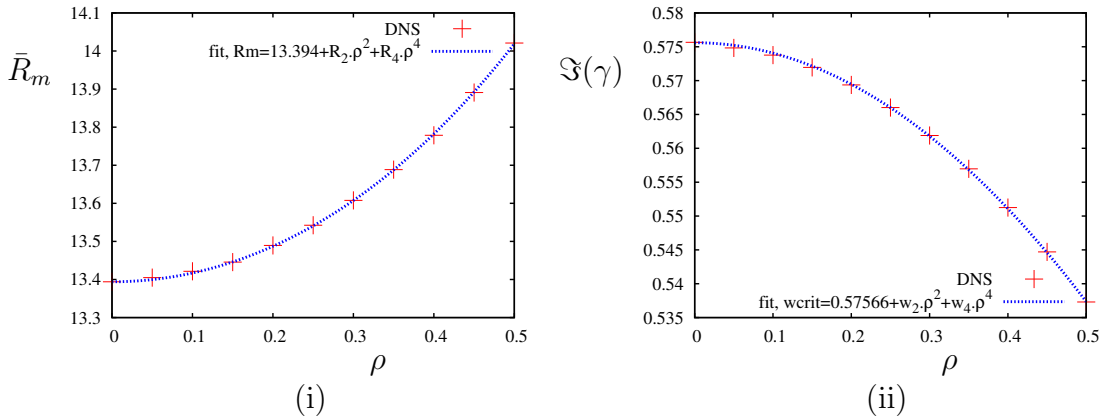


FIGURE 6.14 – Méthode de détermination des coefficients  $R_i$  (i) et  $w_i$  (ii),  $i = 2, 4$ , pour  $\tilde{\Gamma} = 1$ ,  $w_f = 3$ ,  $m = 1$ ,  $k = -0.56$ ,  $\tilde{\Gamma} = 1$ ,  $R' = 0.2$ . Les croix rouges représentent les calculs issus de la DNS et les courbes en trait pointillé bleu le "fit". Dans ce cas :  $R_2 = 2.2298$ ,  $R_4 = 0.802$ ,  $w_2 = -0.1536$ ,  $w_4 = 0.0024$ .

## Résultats

### Comparaison des termes d'ordre 2 :

Sur la figure (6.15), nous avons comparé les  $R_2$  issus des deux approches en fonction de  $w_f$ , et de la même manière sur la figure (6.16), les  $w_2$  en fonction de  $w_f$ . Nous avons fait cette étude pour différentes valeurs de  $\tilde{\Gamma}$  comprises entre  $-1$  et  $1$ .

Pour  $\tilde{\Gamma} > 0$ , il y a un accord satisfaisant des résultats quelque soit la fréquence de forçage. Pour  $\tilde{\Gamma} \leq 0$ , il y a un accord pour de petits  $w_f$ , mais les résultats divergent pour des  $w_f$  plus importants. Pour expliquer ces écarts, nous nous sommes intéressés dans le paragraphe suivant au calcul des termes d'ordre 4.

### Termes d'ordre 4 :

Sur la figure (6.17), nous avons représenté  $R_4$  et  $w_4$  en fonction de  $w_f$  pour différentes valeurs de  $\tilde{\Gamma}$  comprises entre  $-1$  et  $1$ .

On constate que les termes d'ordre 4 sont négligeables pour les  $\tilde{\Gamma} > 0$ , par contre, ils deviennent importants pour  $\tilde{\Gamma} \leq 0$ . Ce résultat pourrait expliquer les écarts obtenus sur les  $R_2$ .

Notre DNS a une précision relativement faible sur la détermination de  $\bar{R}_m^{crit}$ , de l'ordre de  $10^{-2}$  près. Une contribution importante des termes d'ordre 4 induisent une grande incertitude sur le calcul des  $R_2$ . On peut donc penser que les calculs du  $R_2$  pour les  $\tilde{\Gamma} \leq 0$  ne sont pas exacts.

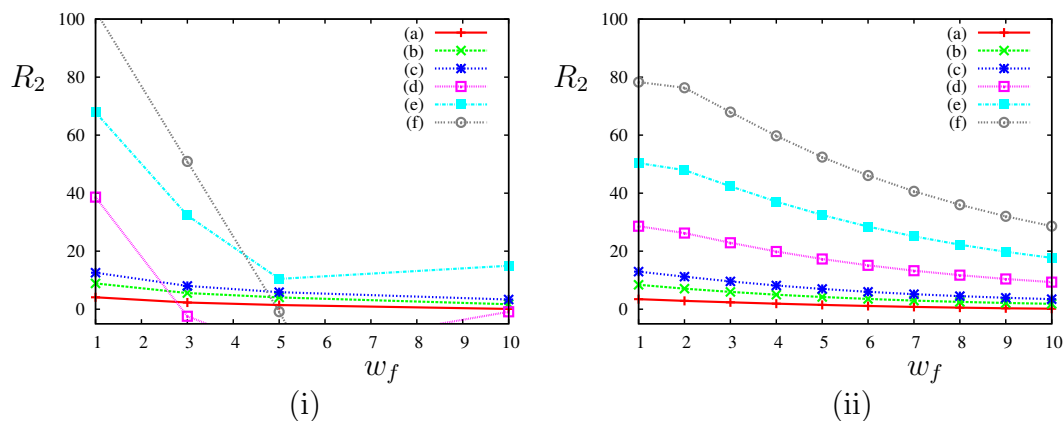


FIGURE 6.15 –  $R_2$  en fonction de  $w_f$  pour la méthode de Galerkin (i), pour l'étude perturbative (ii);  $m = 1$ ,  $k = -0.56$ ,  $\bar{\Gamma} = 1$ ,  $R' = 0.2$ . Les courbes (a), (b), (c), (d), (e) et (f) correspondent à  $\tilde{\Gamma} = 1; 0.7; 0.5; 0; -0.5; -1$  respectivement.

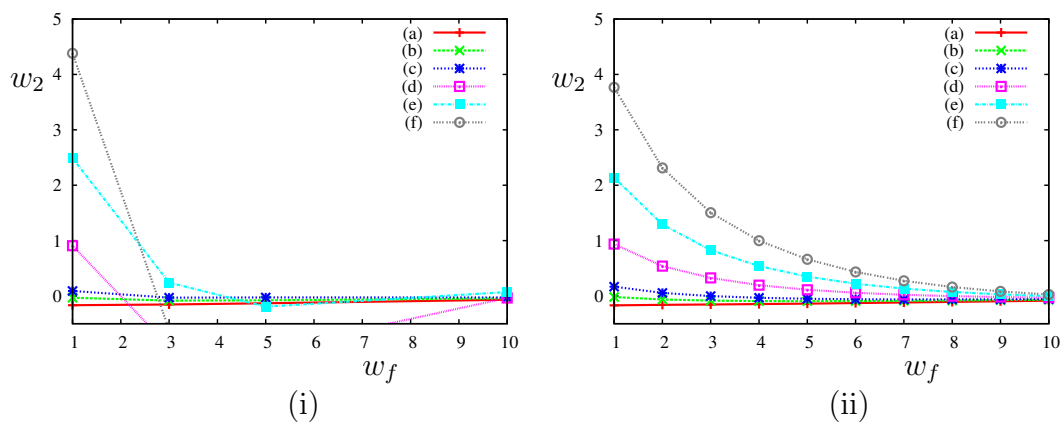


FIGURE 6.16 –  $w_2$  en fonction de  $w_f$  pour la méthode de Galerkin (i), pour l'étude perturbative (ii);  $m = 1$ ,  $k = -0.56$ ,  $\bar{\Gamma} = 1$ ,  $R' = 0.2$ . Les courbes (a), (b), (c), (d), (e) et (f) correspondent à  $\tilde{\Gamma} = 1; 0.7; 0.5; 0; -0.5; -1$  respectivement.

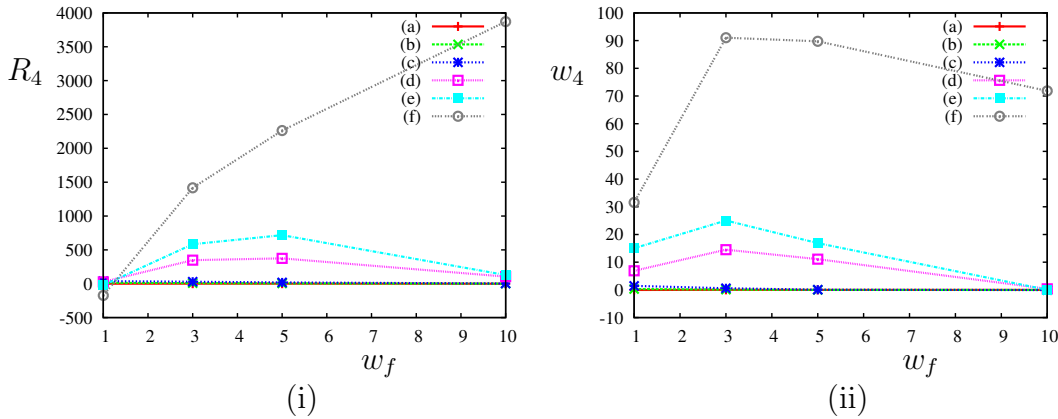


FIGURE 6.17 –  $R_4$  (i) et  $w_4$  (ii) en fonction de  $w_f$ ;  $m = 1$ ,  $k = -0.56$ ,  $\bar{\Gamma} = 1$ ,  $R' = 0.2$ . Les courbes (a), (b), (c), (d), (e) et (f) correspondent à  $\tilde{\Gamma} = 1; 0.7; 0.5; 0; -0.5; -1$  respectivement.

### 6.3.3 Conclusions

Cette étude comparative nous a permis de mettre en évidence des erreurs concernant la programmation des équations de Normand (2003). C. Normand a apporté un corrigendum avec les bons résultats de l'approche perturbative dans l'annexe (E), figure 8 de l'article Peyrot *et al.* (2007) (voir le chapitre 8).

D'une manière générale pour l'ensemble des configurations envisagées, nous constatons que pour de faibles amplitudes de modulation, le seuil de l'instabilité dynamo pour un champ fluctuant est toujours supérieur au seuil correspondant au cas stationnaire.

A l'aide de la méthode de Galerkin, nous allons pouvoir étudier l'influence des fluctuations de grandes échelles pour une intensité arbitraire des fluctuations. Nous verrons par la suite que nous comprendrons ces résultats en terme de rayon de résonance fluctuant dans le temps (Peyrot *et al.* (2007)).

Bien que nous avons basé la validation du code numérique sur une comparaison des résultats dans le cas du cisaillement infini. Par la suite, nous avons préféré faire nos calculs avec l'écoulement présentant un cisaillement fini. En effet, cet écoulement permet de répartir l'ensemble des modes de Galerkin sur le cylindre en mouvement, alors que dans le cas du cisaillement infini, seulement un rapport de  $R'/R$  des modes, occupe le cylindre en mouvement. Ceci nous permettra de réduire considérablement le temps de calcul.





## Chapitre 7

# Résultats de la méthode asymptotique et comparaison avec la méthode de Galerkin

Dans ce chapitre nous allons présenter les résultats qui nous ont permis de valider la méthode asymptotique incluant une dépendance temporelle. Nous commencerons par rappeler les méthodes utilisées pour déterminer le taux de croissance du champ magnétique. Ensuite, nous établirons les relations d'équivalences entre le champ de vitesse défini pour l'approche asymptotique et celui défini dans la méthode de Galerkin. Nous présenterons alors les résultats obtenus et nous donnerons nos conclusions.

### 7.1 Détermination du taux de croissance

Nous avons vu dans le paragraphe (6.1) que pour un champ de vitesse périodique de période  $T$ , vérifiant  $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t + T) = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ , on peut démontrer que le champ magnétique solution de l'équation de l'induction peut s'écrire (Childress & D.Gilbert (1995)) :

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t + T) = \exp(\gamma^\Lambda T) \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad (7.1)$$

où  $\gamma^\Lambda$  est le taux de croissance complexe,  $\gamma^\Lambda = \mathcal{R}(\gamma^\Lambda) + i \mathcal{I}(\gamma^\Lambda)$ .

On peut reprendre le même raisonnement pour les fonctions  $\bar{f}$  (*i.e* pour  $\bar{g}$ ) qui définissent le système de trois ODE à résoudre avec cette méthode asymptotique (4.76, 4.77), ainsi :

$$\exp(\bar{\gamma} \bar{T}) = \frac{\bar{f}(\bar{\tau} + \bar{T})}{\bar{f}(\bar{\tau})} \quad (7.2)$$

De cette manière, le taux de croissance  $\bar{\gamma}$  de la fonction  $\bar{f}$  est donné par :

$$\mathcal{R}(\bar{\gamma}) = \mathcal{R}\left\{\frac{\bar{w}}{2\pi} \log\left(\frac{\bar{f}(\bar{\tau} + \bar{T})}{\bar{f}(\bar{\tau})}\right)\right\} \quad (7.3)$$

Ensuite en utilisant la relation (4.83), on peut remonter au véritable taux de croissance du champ magnétique.

*Remarque :*

Dans le cas stationnaire, la pulsation du champ magnétique correspond simplement à la partie imaginaire du taux de croissance complexe  $\bar{\gamma}$ . Dans le cas fluctuant, on pourrait déterminer la pulsation du champ magnétique de la même manière que nous l'avons fait dans la partie numérique (6.1). Mais dans ce travail, nous nous sommes focalisés sur la partie réelle du taux de croissance du champ magnétique.

## 7.2 Champ de vitesse de la méthode de Galerkin et analogie des problèmes

Afin de simplifier les équations dans nos développements asymptotiques, nous étudierons le champ de vitesse défini dans la partie introductive (cf. 3.1 et 3.6). Nous nous placerons dans le cas du cisaillement fini et nous choisirons une géométrie de l'écoulement telle que  $\bar{\Gamma} = \tilde{\Gamma} = \Gamma$ . Ainsi, dans le cas de la méthode de Galerkin, les fonctions  $v(r, t)$  et  $w(r, t)$  du champ de vitesse (voir 3.1) ont la forme suivante :

$$v(r, t) = r \left( \bar{R}_m + \tilde{R}_m f(t) \right) (1 - r), \quad w(r, t) = \left( \bar{R}_m \Gamma + \tilde{R}_m \Gamma f(t) \right) (1 - r^2) \quad (7.4)$$

Nous ne reviendrons pas ici sur la méthode numérique de résolution qui a été largement détaillée dans la partie (5).

Une importante remarque concerne les rayons de résonance définis dans le paragraphe (3.3). En appliquant la relation de résonance (3.25), pour le champ de vitesse défini ci-dessus (7.4), on trouve que les deux rayons de résonances  $\bar{r}_0$  et  $\tilde{r}_0$  sont équivalents, ainsi nous avons :

$$\bar{r}_0 = \tilde{r}_0 = r_0 = -(m/k)/(2\Gamma) \quad (7.5)$$

Enfin, nous rappelons ici que les relations d'équivalence du taux de croissance et de la fréquence de forçage entre l'approche asymptotique et la méthode de Galerkin sont (voir annexe A.3) :

$$\gamma = \gamma^A / \varepsilon \quad (7.6)$$

$$w_f = w_f^A / \varepsilon \quad (7.7)$$

## 7.3 Résultats

Dans un premier temps, nous allons comparer les résultats pour le cas stationnaire, et déterminer les valeurs du nombre de Reynolds magnétique pour lesquelles les deux approches sont équivalentes. Dans un deuxième temps, nous nous intéresserons au cas non stationnaire.

### 7.3.1 Champ de vitesse stationnaire

Au début de ce travail, nous avons cherché un accord des résultats concernant le seuil de la dynamo, ce seuil correspondant à une partie réelle du taux de croissance nulle. Mais nous n'avons trouvé aucun accord. Nous avons ensuite cherché un accord en terme de taux de croissance. Ainsi, sur la figure (7.1), nous avons comparé le taux de croissance et la fréquence du champ magnétique en fonction de  $\bar{R}_m$  pour deux valeurs du rayon de résonance,  $\bar{r}_0 = 0, 5; 0, 35$ .

On trouvera dans l'annexe (A.3.2) l'expression de la partie réelle et de la partie imaginaire du taux de croissance dans le cas stationnaire donnés par la méthode asymptotique (Gilbert (2003)).

Pour les deux rayons de résonance choisis, nous avons un bon accord en terme de taux de croissance pour des valeurs du  $\bar{R}_m$  supérieures à 1000 environ, soit des valeurs supérieures à celles du seuil (correspondant sur la figure à l'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses). Nous avons également un bon accord des fréquences.

Concernant le taux de croissance, le meilleur accord est obtenu pour  $\bar{r}_0 = 0, 5$  (noter le changement d'échelle entre (ia) et (ib)), alors que les résultats sur les fréquences ne semblent pas dépendre du rayon de résonance.

Sur la figure (7.2), nous avons représenté le profil radial de la norme des composantes du champ magnétique pour différentes valeurs du nombre de Reynolds magnétique. Ces calculs ont été réalisés à l'aide de la méthode de Galerkin. On peut remarquer que plus on augmente  $\bar{R}_m$ , plus le champ magnétique se concentre autour du rayon de résonance (qui est de 0.5 dans ces calculs).

Nous pouvons aller plus loin et chercher comment se concentre radialement le champ magnétique en fonction de  $\varepsilon$ , pour mieux comprendre la physique du phénomène.

En utilisant les équations (4.44, 4.45), on peut écrire que :

$$b_r, b_\theta \propto \exp(-h s^2) = \exp(-h \varepsilon^{-2/3} (r - r_0)^2) \quad (7.8)$$

On peut déduire de cette dernière écriture qu'autour de  $r = r_0$ , le champ magnétique est concentré dans une couche d'épaisseur  $\varepsilon^{1/3} h^{-1/2}$ .

Dans le cas stationnaire, (4.55) implique que  $h = \sqrt{i} c_2$ . A l'aide des relations (4.43) et (4.35), on peut écrire que pour  $m = \mathcal{O}(1)$ , alors  $c_2 = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3})$ , ainsi  $h = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/6})$ .

Si nous appelons  $l$  l'épaisseur de cette couche, on peut écrire que :

$l = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/3} h^{1/2}) = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/4})$ . Donc si  $m = \mathcal{O}(1)$  alors  $l = \mathcal{O}(\varepsilon^{1/4})$ . Ainsi,  $l$  varie avec une petite puissance de epsilon et indique que la convergence est lente.

Nous avons calculé cette épaisseur  $l$  à l'aide de la méthode de Galerkin, en cherchant les deux valeurs de  $r$  pour lesquelles la norme de  $b_r$  vaut la moitié de sa valeur maximum. Nous définirons l'épaisseur comme la différence de ces deux valeurs. Sur la figure (7.3), nous avons représenté  $l$  en fonction d' $\varepsilon$  dans un diagramme log log. En faisant une interpolation linéaire de cette courbe, nous trouvons que  $l = C \varepsilon^{0.27}$ , où C est une constante. Nous trouvons donc une puissance de  $\varepsilon$  très proche de 1/4.

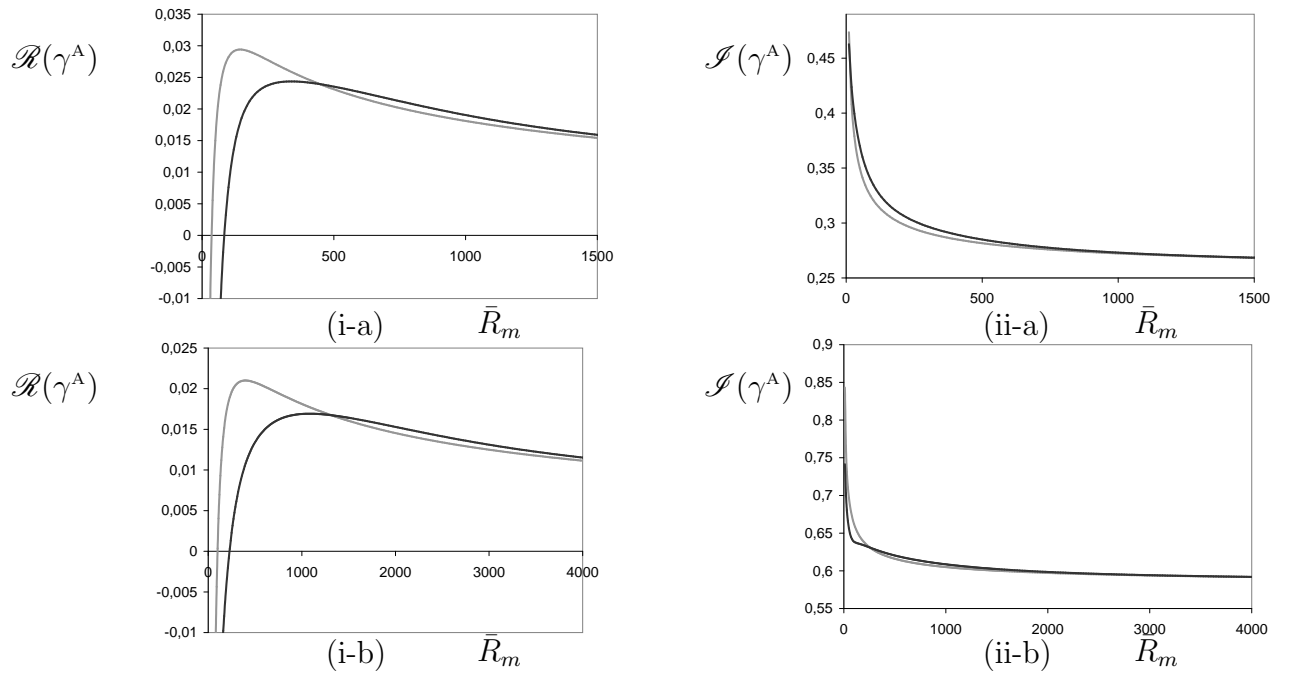


FIGURE 7.1 – Partie réelle (i) et partie imaginaire (ii) du taux de croissance complexe du champ magnétique en fonction de  $\bar{R}_m$  dans le cas stationnaire. Les résultats issus de la méthode asymptotique sont en trait gris clair, ceux de la méthode de Galerkin (multipliés par  $\varepsilon$ ) sont en trait noir foncé, le cas (a) correspond à  $m = 1, \Gamma = 2; k = -0.5; \bar{r}_0 = 0,5$ , le cas (b) à  $m = 1, \Gamma = 2; k = -0.7; \bar{r}_0 = 0,35$

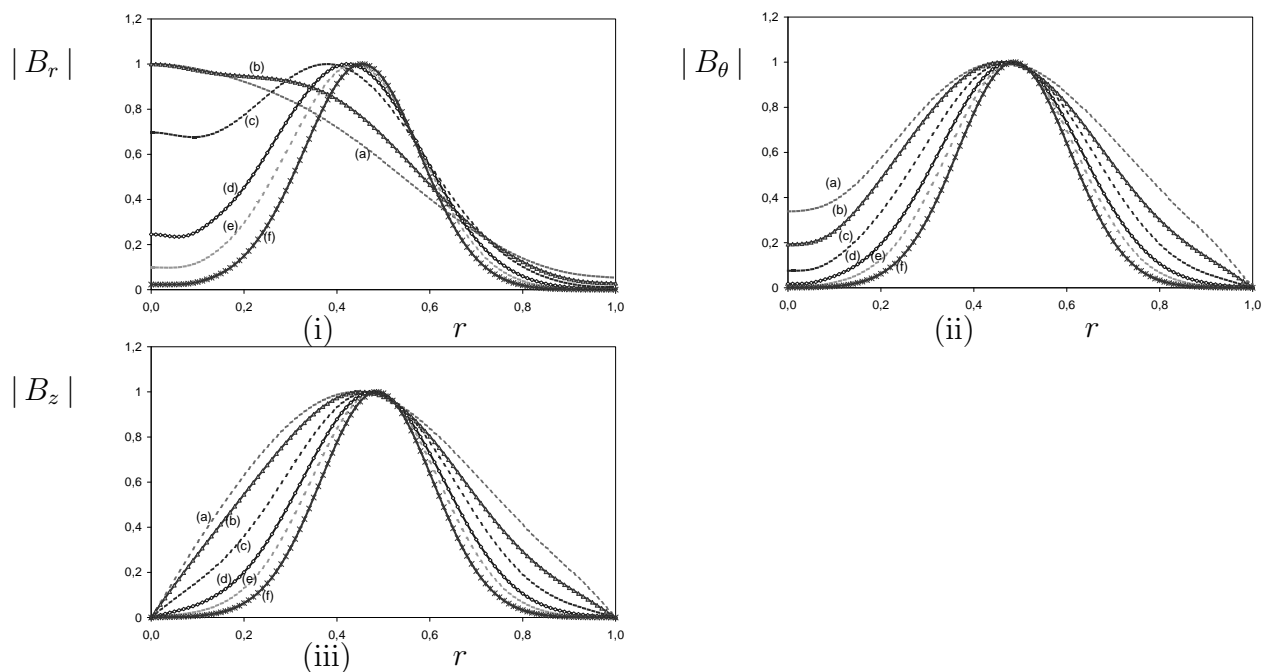


FIGURE 7.2 – Evolution du module de  $B_r$  (i),  $B_\theta$  (ii),  $B_z$  (iii), en fonction de  $r$ , pour  $\bar{R}_m = 500$  (a); 1000 (b); 2000 (c); 4000 (d); 6000 (e); 10000 (f) et pour  $m = 1$ ;  $\Gamma = 2$ ;  $k = -0.5$ ;  $\bar{r}_0 = 0,5$ . (calculs issus de la méthode de Galerkin)

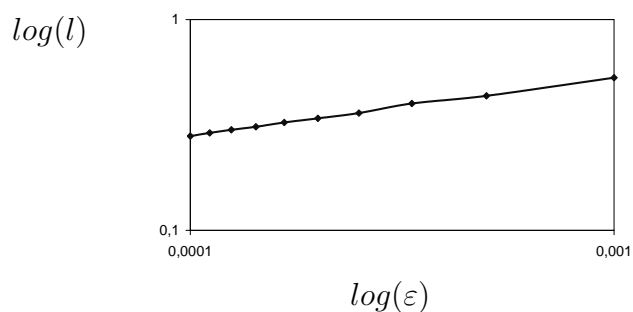


FIGURE 7.3 – Epaisseur de couche radiale du champ magnétique en fonction de  $\varepsilon$  pour  $m = 1$ ;  $\Gamma = 2$ ;  $k = -0.5$ ;  $\bar{r}_0 = 0,5$ .

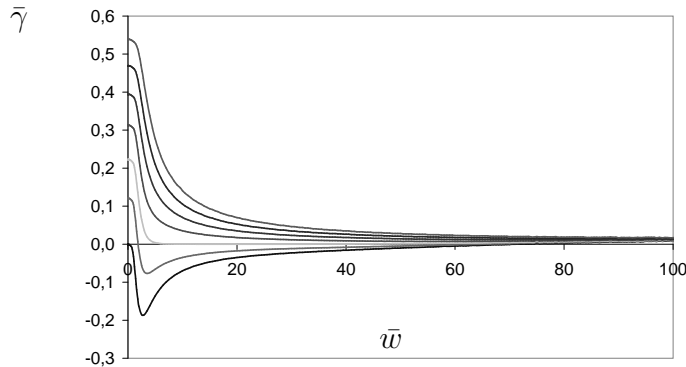


FIGURE 7.4 – Taux de croissance  $\bar{\gamma}$  en fonction  $\bar{w}$ . Les courbes correspondent aux différentes valeurs du paramètre  $\mathcal{D}$ , de bas en haut,  $\mathcal{D} = 1; 1.5; 2; 2.5; 3; 3.5; 4$

Cette étude sur le cas stationnaire indique que pour chercher un accord des résultats entre la méthode de Galerkin et la méthode asymptotique dans le cas fluctuant avec et sans champ moyen, il est préférable de se placer à une valeur du rayon de résonance  $\bar{r}_0 = 0.5$  et à des valeurs de  $\bar{R}_m$  et de  $\tilde{R}_m$  supérieures à 1000.

### 7.3.2 Champ fluctuant sans champ moyen

#### Résultats de la méthode asymptotique

Tous les calculs concernant les méthodes asymptotiques ont été d'abord réalisés à l'aide d'un programme matlab, puis d'un programme écrit en Fortran 90. Les deux codes ont donné les mêmes résultats, cependant nous avons utilisé le code en Fortran qui était beaucoup plus rapide. Nous avons, comme dans la méthode de Galerkin, utilisé pour la résolution temporelle un schéma de Runge Kutta d'ordre 4 en prenant un bruit blanc comme condition initiale.

Sur la figure (7.4), sont représentés les résultats du taux de croissance  $\bar{\gamma}$  en fonction de  $\bar{w}$  pour différentes valeurs de  $\mathcal{D}$ . On rappelle que  $\bar{\gamma}$  est le taux de croissance des fonctions  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$ , que l'on détermine en résolvant le système de trois ODE (4.75, 4.76, 4.77). Pour  $\mathcal{D} < 2$  le taux de croissance est négatif, et pour des valeurs supérieures, le taux de croissance est positif, la limite semble apparaître pour  $\mathcal{D} = 2$ .

**Comportement pour de grandes valeurs de la fréquence** Si nous considérons une fonction  $\bar{F}(\bar{\tau}) = \cos(\bar{w}\bar{\tau})$  avec  $\bar{w} \gg 1$ , nous pouvons faire un autre développement asymptotique pour trouver la forme analytique du taux de croissance.

Nous appellerons ce taux de croissance  $\alpha$ , afin de le distinguer avec le taux de croissance  $\bar{\gamma}$  obtenu par résolution du système des trois ODE (4.75, 4.76, 4.77). Dans l'annexe (B), le lecteur trouvera les calculs permettant d'obtenir l'expression analytique de ce taux de

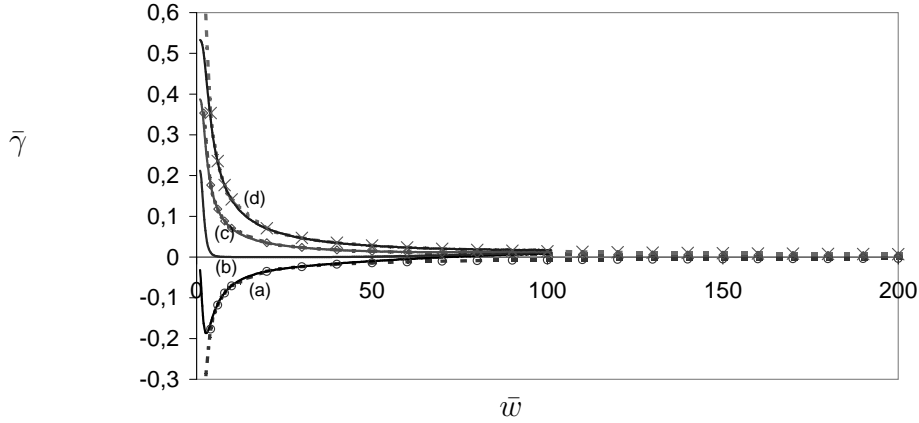


FIGURE 7.5 – Taux de croissance  $\bar{\gamma}$  en fonction de  $\bar{w}$ , les traits pleins correspondent aux résultats des équations générales des ODE, (a) correspond à  $\mathcal{D}=1$ , (b) à  $\mathcal{D}=2$ , (c) à  $\mathcal{D}=3$ , (d) à  $\mathcal{D}=4$  et les courbes avec les traits discontinus correspondent aux taux de croissance pour de grandes valeurs des fréquences (donné par la formule 7.9), 'o' correspond à  $\mathcal{D}=1$ , ' $\Delta$ ' à  $\mathcal{D}=3$ , ' $\times$ ' à  $\mathcal{D}=4$ .

croissance  $\alpha$ , dont l'expression est la suivante :

$$\alpha = \frac{1}{\bar{w}} \left( -\sqrt{2} \pm \frac{\mathcal{D}}{\sqrt{2}} \right) \quad (7.9)$$

Nous pouvons remarquer que pour  $\mathcal{D} = 2$ ,  $\alpha = 0$ , ainsi nous devons avoir  $\mathcal{D} > 2$  pour avoir des instabilités. Ceci est en accord avec les résultats de la figure (7.5). Sur la figure (7.5), nous avons représenté le taux de croissance obtenu par les équations générales des ODE (4.75, 4.76, 4.77), et ceux obtenus par la relation (7.9) pour de grandes fréquences. L'accord est très satisfaisant, même pour de faibles valeurs de  $\bar{w}$ .

### Comparaison avec les résultats issus de la méthode de Galerkin

Pour le champ de vitesse défini par (A.39), le paramètre  $\mathcal{D}$  est toujours égal à 4 (voir équation 4.78). Nous allons fixer la géométrie du champ de vitesse de telle manière à prendre un rayon de résonance  $\tilde{r}_0 = 0,5$ . Il est à noter que les relations (7.7) et (4.82), nous ont obligé à travailler avec la méthode de Galerkin sur un intervalle restreint de  $w_f$ . Sur la figure (7.6) sont représentés le taux de croissance des deux approches. Nous avons un très bon accord pour des valeurs de  $\tilde{R}_m$  supérieures à 2000.

Ce premier résultat valide donc la théorie des développements asymptotiques pour la dynamo oscillante de Ponomarenko.



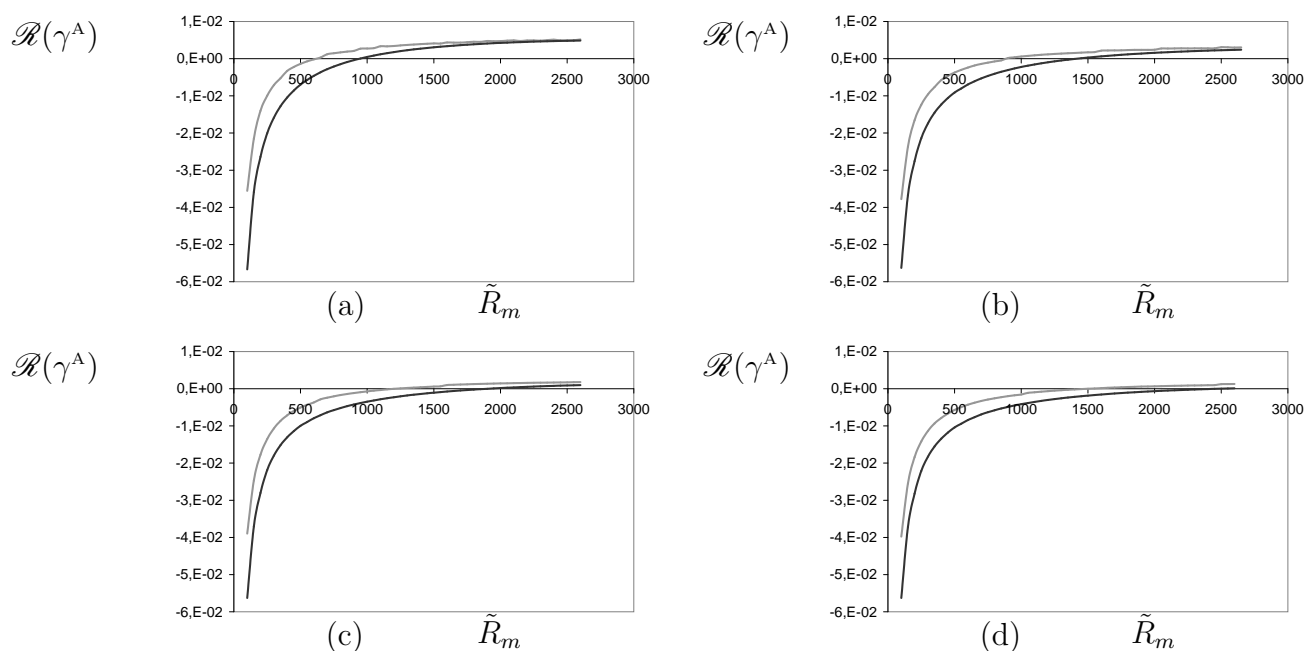


FIGURE 7.6 – Taux de croissance du champ magnétique en fonction de  $\tilde{R}_m$  dans le cas fluctuant sans champ moyen. Les résultats issus de la méthode asymptotique sont en trait gris clair, ceux de la méthode de Galerkin (multipliés par  $\varepsilon$ ) sont en trait noir foncé. Dans tous les cas,  $m = 1$ ,  $\Gamma = 2$ ;  $k = -0.5$ ;  $\tilde{r}_0 = 0,5$ , les courbes (a) correspondent à  $w_f = 200$ , (b) à  $w_f = 300$ , (c) à  $w_f = 400$  et (d) à  $w_f = 500$ .

### 7.3.3 Champ fluctuant avec champ moyen

Dans cette section, nous d'abord allons nous intéresser aux résultats de la méthode asymptotique dans le cas du champ fluctuant avec champ moyen pour de faibles et de grandes intensités des fluctuations. Cette étude des cas limites permettra de faire le lien entre les trois cas étudiés. Ensuite, nous comparerons les résultats des ODE avec ceux de la méthode de Galerkin.

#### Cas limites pour de faibles et de grands $\rho$

Reposons le problème, nous résolvons donc l'équation de l'induction :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \varepsilon \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (7.10)$$

avec un champ de vitesse de forme générale,  $\mathbf{U} = \mathbf{u}_0 F^\Lambda(t)$ , où

$$F^\Lambda(t) = 1, \text{ pour le cas stationnaire} \quad (7.11)$$

$$F^\Lambda(t) = \cos(w_f^\Lambda t), \text{ pour le cas fluctuant sans champ moyen} \quad (7.12)$$

$$F^\Lambda(t) = 1 + \rho \cos(w_f^\Lambda t), \text{ pour le cas fluctuant avec champ moyen} \quad (7.13)$$

Dans chaque cas, nous recherchons une solution de Floquet,  $\mathbf{B} = e^{\gamma^\Lambda t} \mathbf{b}(\mathbf{r}, t)$ , avec  $\mathbf{b}$  périodique en  $t$ , de période  $2\pi/w_f^\Lambda$ . Le taux de croissance  $\gamma^\Lambda$  est,  $\gamma_{stat}^\Lambda(\varepsilon)$ ,  $\gamma_{ZM}^\Lambda(\varepsilon, w_f^\Lambda)$ ,  $\gamma_{NZM}^\Lambda(\varepsilon, w_f^\Lambda, \rho)$ , pour le cas stationnaire, fluctuant sans champ moyen (Zero Mean), et fluctuant avec champ moyen (Non Zero Mean) respectivement.

Dans chaque cas,  $\mathbf{b}$  satisfait :

$$\gamma_{stat}^\Lambda \mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{b}) + \varepsilon \nabla^2 \mathbf{b} \quad (7.14)$$

$$\gamma_{ZM}^\Lambda \mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \cos(w_f^\Lambda t) (\nabla \times (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{b}) + \varepsilon \nabla^2 \mathbf{b}) \quad (7.15)$$

$$\gamma_{NZM}^\Lambda \mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = (1 + \rho \cos(w_f^\Lambda t)) (\nabla \times (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{b}) + \varepsilon \nabla^2 \mathbf{b}) \quad (7.16)$$

- Pour de faibles  $\rho$ , nous avons  $1 + \rho \cos(w_f^\Lambda t) \simeq 1$  :

Ainsi  $\gamma_{NZM}^\Lambda(\varepsilon, w_f^\Lambda, \rho) \simeq \gamma_{stat}^\Lambda(\varepsilon)$ . En utilisant (4.82) et (4.83), nous avons :

$$\bar{\gamma}(\mathcal{D}) \simeq \bar{\gamma}(\mathcal{D}, \bar{w}, \rho) \quad (7.17)$$

Sur la figure (7.7), nous avons comparé le taux de croissance du cas fluctuant avec champ moyen  $\bar{\gamma}(\mathcal{D}, \bar{w}, \rho)$ , avec le taux de croissance  $\bar{\gamma}(\mathcal{D})$  du cas stationnaire en fonction de  $\rho$  et pour une valeur fixe de la fréquence. Plus  $\rho$  diminue, plus les courbes se rapprochent et finissent par se confondre. La relation (7.17) est donc bien vérifiée pour de faibles  $\rho$ .

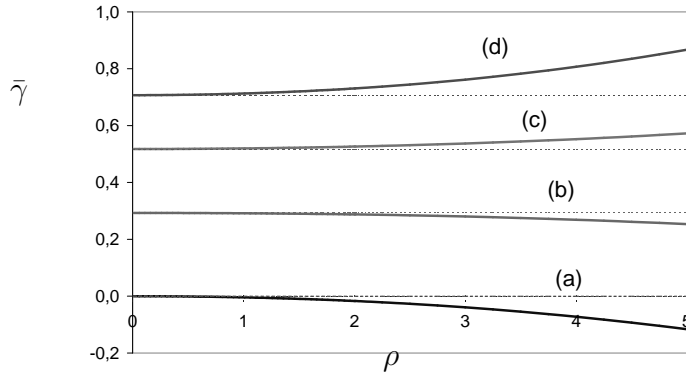


FIGURE 7.7 – Taux de croissance  $\bar{\gamma}$  en fonction de  $\rho$ , les traits pleins correspondent au cas fluctuant avec champ moyen  $\bar{\gamma}(\mathcal{D} = 1, 2, 3, 4, \bar{w} = 10, \rho)$  et les traits en pointillé correspondent au cas stationnaire  $\bar{\gamma}(\mathcal{D} = 1, 2, 3, 4)$ . Les courbes (a), (b), (c) et (d) correspondent à  $\mathcal{D}=1, 2, 3, 4$  respectivement.

- Pour de grands  $\rho$ , nous avons  $1 + \rho \cos(w_f^\Delta t) \simeq \rho \cos(w_f^\Delta t)$  :

Si on divise l'équation (7.16) par  $\rho$ , il vient :

$$\frac{\gamma_{\text{NZM}}^\Delta}{\rho} \mathbf{b} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \cos(w_f^\Delta t) (\nabla \times (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{b})) + \frac{\varepsilon}{\rho} \nabla^2 \mathbf{b} \quad (7.18)$$

Introduisons dans cette équation le paramètre  $t'$ , tel que,  $t' = \rho t$ , la relation (7.18) donne alors :

$$\frac{\gamma_{\text{NZM}}^\Delta}{\rho} \mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t'} = \cos\left(\frac{w_f^\Delta}{\rho} t'\right) (\nabla \times (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{b})) + \frac{\varepsilon}{\rho} \nabla^2 \mathbf{b} \quad (7.19)$$

Ainsi, nous avons pour de grands  $\rho$  la relation :

$$\gamma_{\text{NZM}}^\Delta(\varepsilon, w_f^\Delta, \rho) \simeq \rho \gamma_{\text{ZM}}^\Delta\left(\frac{\varepsilon}{\rho}, \frac{w_f^\Delta}{\rho}\right) \quad (7.20)$$

Sur la figure (7.8), nous avons tracé la différence  $\gamma_{\text{NZM}}^\Delta(\varepsilon, w_f^\Delta, \rho) - \rho \gamma_{\text{ZM}}^\Delta\left(\frac{\varepsilon}{\rho}, \frac{w_f^\Delta}{\rho}\right)$  ramenée en % en fonction de  $\rho$ . Nous voyons clairement que plus  $\rho$  augmente, plus l'erreur diminue et que nous avons un très bon accord pour de grands  $\rho$ .

### Comparaison avec les résultats issus de la méthode de Galerkin

Ici encore le paramètre  $\mathcal{D}$  est fixé à 4 et  $\bar{r}_0 = \tilde{r}_0 = 0, 5$ .

Sur la figure (7.9), nous avons comparé les résultats du taux de croissance pour une fréquence  $w_f = 100$ .

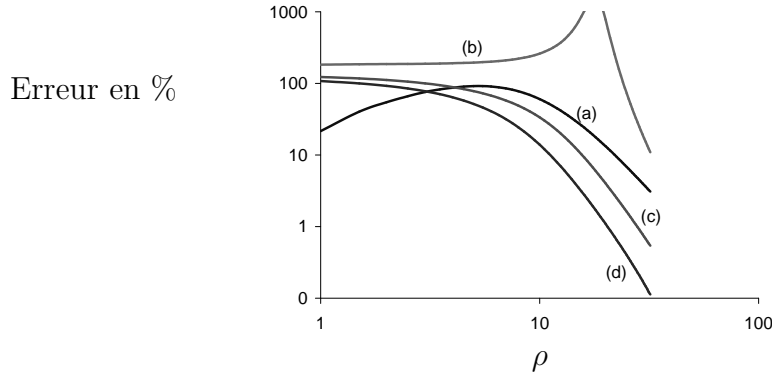


FIGURE 7.8 – Différence  $\left\{ \gamma_{\text{NZM}}^{\text{A}}(\varepsilon, w_f^{\text{A}}, \rho) - \rho \gamma_{\text{ZM}}^{\text{A}}\left(\frac{\varepsilon}{\rho}, \frac{w_f^{\text{A}}}{\rho}\right) \right\}$  ramenée en % en fonction de  $\rho$ , pour  $m=1$ ,  $k=-0.5$ ,  $\Gamma=2$ ,  $\varepsilon=0.001$ . Les courbes (a), (b), (c) et (d) correspondent à  $\mathcal{D}=1, 2, 3, 4$  respectivement.

Nous avons un très bon accord des résultats entre les deux approches pour des valeurs de  $\bar{R}_m$  supérieures à 500 et ce, pour chaque valeur de l'intensité des fluctuations que nous avons considérée.

Après l'accord des résultats pour le cas fluctuant sans champ moyen, ce deuxième résultat permet donc de valider cette méthode des développements asymptotiques pour un champ de vitesse dépendant du temps.

## 7.4 Conclusions

Dans cette étude, nous avons généralisé la théorie des développements asymptotiques pour de grands nombres de Reynolds magnétique pour un modèle dynamo basé sur le champ de vitesse de Ponomarenko incluant une dépendance temporelle. Cette approximation donne lieu à un système d'équations différentielles ordinaires. Pour comparer les résultats de cette théorie avec les résultats du problème complet résolu par la méthode de Galerkin, nous avons choisi un rayon de résonance de telle manière que le rayon de résonance de la partie fluctuante soit égale au rayon de résonance de la partie stationnaire.

Nous nous sommes d'abord intéressé au cas du champ de vitesse stationnaire, et nous avons trouvé que les équations provenant des développements asymptotiques donnaient les mêmes résultats en terme de taux de croissance et de fréquence du champ magnétique, que ceux obtenus à l'aide de la méthode de Galerkin. Mais cet accord intervient pour des valeurs de  $\bar{R}_m$  supérieures à 1500 environ, soit des valeurs plus grandes que celles du seuil de l'instabilité dynamo. De plus, le choix du rayon de résonance s'avère crucial. Ce rayon doit être choisi de telle manière à ce que le champ magnétique soit généré loin des limites fluides du champ de vitesse. Le meilleur accord des résultats a été obtenu pour un rayon

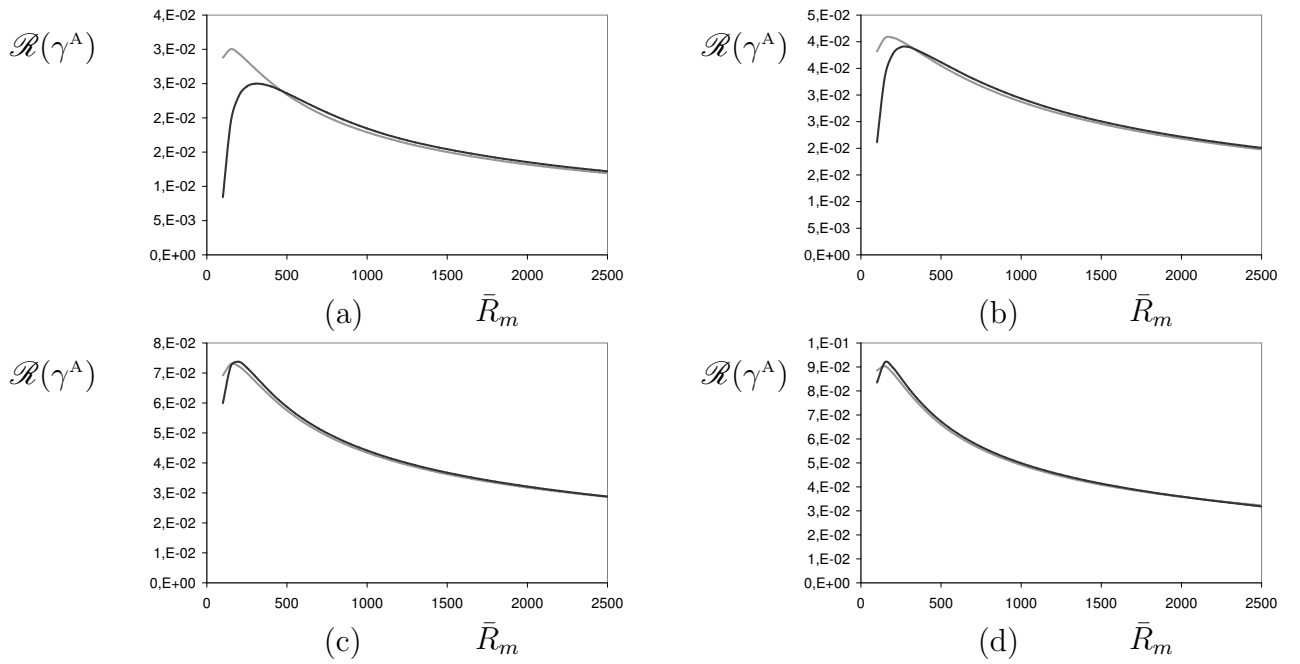


FIGURE 7.9 – Taux de croissance du champ magnétique en fonction de  $\bar{R}_m$  pour le cas fluctuant avec champ moyen. Les résultats issus de la méthode asymptotique sont en trait gris clair, ceux de la méthode de Galerkin (multipliés par  $\varepsilon$ ) sont en trait noir foncé. Pour tous ces cas,  $m = 1, \Gamma = 2; k = -0.5; \bar{r}_0 = \tilde{r}_0 = 0,5$ , les courbes (a) correspondent à  $\rho = 1$ , (b)  $\rho = 4$ , (c)  $\rho = 8$ , (d)  $\rho = 10$  respectivement.

de résonance de 0.5. Ainsi dans toute cette étude, nous avons fixé ce paramètre à 0.5. Ensuite, nous avons étudié la dynamo de Ponomarenko oscillante sans champ moyen et nous avons trouvé un très bon accord en terme de taux de croissance pour des valeurs du  $\tilde{R}_m$  supérieures à 2000. Nous avons aussi développé une solution approchée dans la limite de grands  $\tilde{R}_m$  et pour de grandes valeurs de la fréquence de la fonction temporelle contrôlant les trois ODE. Nous avons ainsi obtenu l'expression analytique de ce taux de croissance, qui a été confirmé par les résultats des ODE.

Enfin, nous nous sommes intéressés au cas fluctuant avec champ moyen. Nous avons étudié les deux cas limites de cette configuration. Sous certaines relations d'équivalences, pour de faibles valeurs de l'intensité des fluctuations, nous retrouvons le problème stationnaire ; et pour de grandes valeurs de l'intensité, nous retrouvons le cas fluctuant sans champ moyen. Nous avons aussi comparé les résultats avec ceux de la méthode de Galerkin et nous avons trouvé là aussi un accord des taux de croissance pour des  $\bar{R}_m$  supérieurs à 500.

Nous avons donc validé cette théorie asymptotique pour un champ de vitesse fluctuant dans le temps pour un rayon de résonance de la partie stationnaire égale à celui de la partie oscillante.

Nous projetons d'étendre ce travail pour un rayon de résonance de la partie stationnaire différente de la partie fluctuante. Ce travail devrait nous conduire à un système d'ODE un peu plus complexe que celui traité dans ce chapitre. Nous pourrions encore une fois comparer ces résultats avec les simulations numériques obtenues par la méthode de Galerkin. Ce travail pourrait être pertinent dans la détermination des effets des fluctuations sur le taux de croissance du champ magnétique.

A l'aide de ces résultats, nous pourrions accroître notre compréhension du rôle des fluctuations de grandes échelles pour les dynamos expérimentales, et confirmer le fait que l'optimisation d'une expérience dynamo dépend non seulement de sa partie stationnaire mais aussi de sa partie fluctuante, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant.



## Chapitre 8

# Résultats et comparaisons de la méthode de Fourier et de la méthode de Galerkin

Dans ce chapitre, nous reproduisons un article publié dans *Physics of Fluids* en 2007, dans lequel se trouvent les résultats obtenus avec l'approche de Galerkin et ceux obtenus à partir du développement en séries de Fourier. Nous avons étudié deux écoulements hélicoïdaux, un écoulement en bloc (cas du cisaillement infini (i)) et un écoulement dit *smooth* (cas du cisaillement fini (ii)). Deux conditions de résonance ont été élaborées pour un champ de vitesse stationnaire dans la limite de grands nombres de Reynolds magnétique. Nous avons testé ces conditions pour des nombres de Reynolds magnétique relativement faibles (correspondant aux valeurs critiques) et pour un champ de vitesse fluctuant dans le temps. Nous étudierons trois cas, le champ de vitesse stationnaire, le champ de vitesse fluctuant périodiquement dans le temps sans et avec champ moyen.

A la suite de cet article, nous donnons quelques compléments à ce travail.

Dans le cas du cisaillement fini, nous définissons l'expression d'un rayon de résonance général, qui est fonction du rayon de résonance basé sur la partie moyenne de l'écoulement, du rayon basé sur la partie fluctuante, de l'intensité des fluctuations et des fonctions temporelles  $f(t)$  et  $g(t)$ . En étudiant le comportement de ce rayon, nous avons pu confirmer les résultats de notre article et comprendre les raisons pour lesquelles sur des intervalles particuliers d'intensité des fluctuations, nous n'observons pas d'effet dynamo. De plus, nous avons mené le même raisonnement, mais à partir des isovaleurs de l'énergie magnétique. Nous donnerons aussi quelques résultats qualitatifs pour un champ de vitesse possédant une double dépendance temporelle.

Dans le cas du cisaillement infini, nous donnons un complément analytique développé par C.Normand concernant le comportement du seuil pour de faibles amplitudes de modulation pour le régime des hautes fréquences, pour un forçage à fréquence double et pour le

---



régime basse fréquence.

*Remarque :*

La définition du champ de vitesse dans l'article [Peyrot et al. \(2007\)](#), est différente de celle présentée dans le chapitre (3) de ce manuscrit. Cependant, il y a totale équivalence, les fonctions  $\Omega(r, t)$  et  $V(r, t)$  définies dans l'article sont équivalentes aux fonctions  $\Omega(r)F(t)$  et  $V(r)G(t)$  respectivement définies dans le chapitre (3).

L'étude asymptotique a été réalisé après écriture de cet article et la formulation du champ de vitesse de cet article ne nous permettait pas d'exprimer simplement le champ de vitesse utilisé dans la méthode asymptotique. C'est la raison pour laquelle, nous avons changé de définition.

## 8.1 Article

Phys. Fluid, 19, 054109 (2007)

---

## Parametric instability of the helical dynamo

Marine Peyrot<sup>a)</sup> and Franck Plunian<sup>b)</sup>

*Laboratoire de Géophysique Interne et Tectonophysique, CNRS, Université Joseph Fourier, Maison des Géosciences, B.P. 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France  
and Laboratoire des Écoulements Géophysiques et Industriels, CNRS, Université Joseph Fourier, INPG, B.P. 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France*

Christiane Normand<sup>c)</sup>

*Service de Physique Théorique, CEA/DSM/SPHT, CNRS/URA 2306, CEA/Saclay, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France*

(Received 4 December 2006; accepted 3 April 2007; published online 30 May 2007)

We study the dynamo threshold of a helical flow made of a mean plus a fluctuating part. Two flow geometries are studied: (i) solid body and (ii) smooth. Two well-known resonant dynamo conditions, elaborated for stationary helical flows in the limit of large magnetic Reynolds numbers, are tested against lower magnetic Reynolds numbers and for fluctuating flows with zero mean. For a flow made of a mean plus a fluctuating part, the dynamo threshold depends on the frequency and the strength of the fluctuation. The resonant dynamo conditions applied on the fluctuating (respectively, mean) part seems to be a good diagnostic to predict the existence of a dynamo threshold when the fluctuation level is high (respectively, low). © 2007 American Institute of Physics.

[DOI: 10.1063/1.2734118]

### I. INTRODUCTION

In the context of recent dynamo experiments,<sup>1-3</sup> an important question is to identify the relevant physical parameters that control the dynamo threshold and eventually minimize it. In addition to the parameters usually considered, such as the geometry of the mean flow<sup>4,5</sup> or the magnetic boundary conditions,<sup>6,7</sup> the turbulent fluctuations of the flow seem to have an important influence on the dynamo threshold.<sup>8-11</sup> Some recent experimental results<sup>12,13</sup> suggest that the large spatial scales of these fluctuations could play a decisive role.

In this paper we consider a flow of large spatial scale, fluctuating periodically in time, such that its geometry at some given time is helical. Such helical flows have been identified to produce dynamo action.<sup>14,15</sup> Their efficiency has been studied in the context of fast dynamo theory<sup>16-21</sup> and they have led to the realization of several dynamo experiments.<sup>3,22-24</sup>

The dynamo mechanism of a helical dynamo is of stretch-diffuse type. The radial component  $B_r$  of the magnetic field is stretched to produce a helical field  $(0, B_\theta, B_z)$ , where  $(r, \theta, z)$  are the cylindrical coordinates. The magnetic diffusion of the azimuthal component  $B_\theta$  produces some radial component  $B_r$  due to the cylindrical geometry of the problem.<sup>17</sup> In this paper we shall consider two cases, depending on the type of flow shear necessary for the  $B_r$  stretching.

In case (i), the helical flow is solid body for  $r < 1$  and at rest for  $r > 1$  (the same conductivity is assumed in both domains). The flow shear is then infinite and localized at the discontinuity surface  $r = 1$ . Gilbert<sup>17</sup> has shown that this dy-

namo is fast (positive growth rate in the limit of large magnetic Reynolds number) and is thus very efficient to generate a helical magnetic field of same pitch as the flow. In case (ii), the helical flow is continuous, and equal to zero for  $r \geq 1$ . The flow shear is then finite at any point. Gilbert<sup>17</sup> has shown that such a smooth helical flow is a slow dynamo and that the dynamo action is localized at a resonant layer  $r = r_0$  such that  $0 < r_0 < 1$ . Contrary to case (i), having a conducting external medium is not necessary here.

In both cases some resonant conditions leading to dynamo action have been derived.<sup>16-18,20,21</sup> Such resonant conditions can be achieved by choosing an appropriate geometry of the helical flow, such as changing its geometrical pitch. They have been derived for a stationary flow  $\mathbf{U}(r, \theta, z)$  and can be generalized to a time-dependent flow of the form  $\tilde{\mathbf{U}}(r, \theta, z) \cdot f(t)$ , where  $f(t)$  is a periodic function of time. Now taking a flow composed of a mean part  $\mathbf{U}$  plus a fluctuating part  $\tilde{\mathbf{U}} \cdot f(t)$ , we expect the dynamo threshold to depend on the geometry of each part of the flow accordingly to the resonant condition of each of them and to the ratio of the intensities  $|\tilde{\mathbf{U}}|/|\mathbf{U}|$ . However, we shall see that in some cases even a small intensity of the fluctuating part may have a drastic influence. The results also depend on the frequency of  $f(t)$ .

The Ponomarenko dynamo [case (i)] fluctuating periodically in time and with a fluctuation of infinitesimal magnitude had already been the object of a perturbative approach.<sup>25</sup> Here we consider a fluctuation of arbitrary magnitude. Comparing our results for a small fluctuation magnitude with those obtained with the perturbative approach, we found significant differences. We then realized that there was an error in the computation of the results published in Ref. 25 (though the perturbative development in itself is correct). In Appendix E, we give an erratum of these results.

<sup>a)</sup>Electronic mail: Marine.Peyrot@ujf-grenoble.fr

<sup>b)</sup>Electronic mail: Franck.Plunian@ujf-grenoble.fr

<sup>c)</sup>Electronic mail: Christiane.Normand@cea.fr

## II. MODEL

We consider a dimensionless flow defined in cylindrical coordinates  $(r, \theta, z)$  by

$$\mathbf{U} = [0, r\Omega(r, t), V(r, t)] \cdot h(r)$$

$$\text{with } h(r) = \begin{cases} 1, & r < 1, \\ 0, & r > 1, \end{cases} \quad (1)$$

corresponding to a helical flow in a cylindrical cavity which is infinite in the  $z$  direction, the external medium being at rest. Each component, azimuthal and vertical, of the dimensionless velocity is defined as the sum of a stationary part and of a fluctuating part:

$$\Omega(r, t) = [\bar{R}_m + \tilde{R}_m f(t)] \xi(r), \quad (2)$$

$$V(r, t) = [\bar{R}_m \bar{\Gamma} + \tilde{R}_m \tilde{\Gamma} f(t)] \zeta(r),$$

where  $\bar{R}_m$  and  $\bar{\Gamma}$  ( $\tilde{R}_m$  and  $\tilde{\Gamma}$ ) are the magnetic Reynolds number and a characteristic pitch of the stationary (fluctuating) part of the flow, respectively. In what follows we consider a fluctuation periodic in time, of the form  $f(t) = \cos(\omega_f t)$ . Depending on the radial profiles of the functions  $\xi$  and  $\zeta$ , we determine two cases, (i) solid body and (ii) smooth flow, as

$$(i): \quad \xi = \zeta = 1, \quad (3)$$

$$(ii): \quad \xi = 1 - r, \quad \zeta = 1 - r^2. \quad (4)$$

We note here that the magnetic Reynolds numbers are defined with the maximum angular velocity (either mean or fluctuating part) and the radius of the moving cylinder. Thinking of an experiment, it would not be sufficient to minimize the magnitude of the azimuthal flow. In particular, if  $\bar{\Gamma}$  is large (considering a steady flow for simplicity), one would have to spend too many megawatts in forcing the  $z$  velocity. Therefore, the reader interested in linking our results to experiments should bear in mind that our magnetic Reynolds number is not totally adequate for it. A better definition of the magnetic Reynolds number might be, for example,  $\hat{R}_m = \bar{R}_m \sqrt{1 + \bar{\Gamma}^2}$ . For a stationary flow of type (i), the minimum dynamo threshold  $\hat{R}_m$  is obtained for  $\bar{\Gamma} = 1.3$ .

Both cases (i) and (ii) differ in the conductivity of the external medium  $r > 1$ . In case (i), in which the magnetic generation occurs in a cylindrical layer in the neighborhood of  $r = 1$ , a conducting external medium is necessary for dynamo action. For simplicity, we choose the same conductivity as the inner fluid. In the other hand, in case (ii), in which the magnetic generation is within the fluid, a conducting external medium is not necessary for dynamo action; thus, we choose an insulating external medium. Though the choice of the conductivity of the external medium is far from being insignificant for a dynamo experiment,<sup>3,4,6,7</sup> we expect that it does not change the overall meaning of the results given below.

We define the magnitude ratio of the fluctuation to the mean flow by  $\rho = \tilde{R}_m / \bar{R}_m$ . For  $\rho = 0$ , there is no fluctuation and the dynamo threshold is given by  $\bar{R}_m$ . On the other hand,

for  $\rho \gg 1$ , the fluctuation dominates and the relevant quantity to determine the threshold is  $\tilde{R}_m = \rho \bar{R}_m$ . The perturbative approach of Normand<sup>25</sup> corresponds to  $\rho \ll 1$ .

The magnetic field must satisfy the induction equation

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (5)$$

where the dimensionless time  $t$  is given in units of the magnetic diffusion time, implying that the flow frequency  $\omega_f$  is also a dimensionless quantity. As the velocity does not depend on  $\theta$  or on  $z$ , each magnetic mode in  $\theta$  and  $z$  is independent from the others. Therefore, we can look for a solution of the form

$$\mathbf{B}(r, t) = \exp i(m\theta + kz) \mathbf{b}(r, t), \quad (6)$$

where  $m$  and  $k$  are the azimuthal and vertical wave numbers of the field, respectively. The solenoidality of the field  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  then leads to

$$\frac{b_r}{r} + b'_r + i \frac{m}{r} b_\theta + i k b_z = 0. \quad (7)$$

With the new variables  $b^\pm = b_r \pm i b_\theta$ , the induction equation can be written in the form

$$\frac{\partial b^\pm}{\partial t} + [k^2 + i(m\Omega + kV)h(r)] b^\pm = \pm \frac{i}{2} r \Omega' h(r) (b^+ + b^-) + \mathcal{L}^\pm b^\pm, \quad (8)$$

with

$$\mathcal{L}^\pm = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(m \pm 1)^2}{r^2}, \quad (9)$$

except in case (ii), where in the insulating external domain ( $r > 1$ ), the induction equation takes the form

$$(\mathcal{L}^\pm - k^2) b^\pm = 0. \quad (10)$$

At the interface  $r = 1$ , both  $\mathbf{B}$  and the  $z$  component of the electric field  $\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{U} \times \mathbf{B}$  are continuous. The continuity of  $B_r$  and  $B_\theta$  imply that of  $b^\pm$ . The continuity of  $\mathbf{B}$  and (7) imply the continuity of  $b'_r$ , which, combined with the continuity of  $E_z$  implies

$$[Db^\pm]_{1+}^{1-} \pm \frac{i\Omega_{r=1-}}{2} (b^+ + b^-)_{r=1} = 0 \quad (11)$$

with  $D = \partial / \partial r$  and  $[h]_{1+}^{1-} = h_{(r=1-)} - h_{(r=1+)}$ . We note that in case (ii), as  $\Omega_{r=1-} = 0$ , (11) implies the continuity of  $Db^\pm$  at  $r = 1$ .

In summary, we calculate for both cases (i) and (ii) the growth rate

$$\gamma = \gamma(m, k, \bar{\Gamma}, \tilde{\Gamma}, \bar{R}_m, \tilde{R}_m, \omega_f) \quad (12)$$

of the kinematic dynamo problem and look for the dynamo

threshold (either  $\bar{R}_m$  or  $\tilde{R}_m$ ) such that the real part ( $\text{Re } \gamma$ ) of  $\gamma$  is zero. In our numerical simulations we shall take  $m=1$  for it leads to the lowest dynamo threshold.

### A. Case (i): Solid body flow

In case (i), we set

$$m\Omega + kV = \bar{R}_m \bar{\mu} + \tilde{R}_m \tilde{\mu} f(t),$$

$$\text{with } \bar{\mu} = m + k\bar{\Gamma} \quad \text{and} \quad \tilde{\mu} = m + k\tilde{\Gamma}, \quad (13)$$

and (8) changes into

$$\frac{\partial b^\pm}{\partial t} + \{k^2 + i[\bar{R}_m \bar{\mu} + \tilde{R}_m \tilde{\mu} f(t)]h(r)\}b^\pm = \mathcal{L}^\pm b^\pm. \quad (14)$$

For mathematical convenience, we take  $\tilde{\mu}=0$ . Thus, the non-stationary part of the velocity no longer occurs in (14). It occurs only in the expression of the boundary conditions (11) that can be written in the form

$$[Db^\pm]_{1\pm}^\pm \pm \frac{i}{2}[\bar{R}_m + \tilde{R}_m f(t)](b^+ + b^-)_{r=1} = 0. \quad (15)$$

Taking  $\tilde{\mu}=0$  corresponds to a pitch of the magnetic field equal to the pitch of the fluctuating part of the flow  $-m/k = \tilde{\Gamma}$ . On the other hand, it is not necessarily equal to the pitch of the mean flow (except if  $\bar{\Gamma}=\tilde{\Gamma}$ ). In addition, we shall consider two situations depending on whether the mean flow is zero ( $\bar{R}_m=0$ ) or not. The method used to solve Eqs. (14) and (15) is given in Appendix A.

At this stage we can make two remarks. First, according to boundary layer theory results<sup>16,17</sup> and for a stationary flow, in the limit of large  $\bar{R}_m$ , the magnetic field that has the highest growth rate satisfies  $\bar{\mu} \approx 0$ . This resonant condition means that the pitch of the magnetic field is roughly equal to the pitch of the flow. We shall see in Sec. III A that this stays true even at the dynamo threshold. Though the case of a fluctuating flow of type  $\tilde{\mu} \cdot f(t)$  may be more complex with possibly a skin effect, the resonant condition is presumably analogous; i.e.,  $\tilde{\mu} \approx 0$ . This means that setting  $\tilde{\mu}=0$  implies that if the fluctuations are sufficiently large ( $\rho \gg 1$ ), dynamo action is always possible. This is indeed what will be found in our results. In other words, setting  $\tilde{\mu}=0$ , we cannot tackle the situation of a stationary dynamo flow to which a fluctuation acting against the dynamo would be added. This aspect will be studied with the smooth flow (ii).

Our second remark is about the effect of a phase lag between the azimuthal and vertical components of the flow fluctuation. Though we did not study the effect of an arbitrary phase lag, we can predict the effect of an out-of-phase lag. This would correspond to take a negative value of  $\tilde{\Gamma}$ . Solving numerically Eqs. (14) and (15) for the stationary flow and  $m=1$ , we find that dynamo action is possible only if  $k\bar{\Gamma} < 0$ . For the fluctuating flow with zero mean,  $m=1$  and  $\tilde{\mu}=0$  necessarily imply that  $k\tilde{\Gamma} = -1$ . Let us now consider a flow containing both a stationary and a fluctuating part. Setting  $\tilde{\Gamma} < 0$  necessarily implies that  $k > 0$ . For  $\bar{\Gamma} > 0$ , the stationary flow, then, is not a dynamo. Therefore, in that case

we expect the dynamo threshold to decrease for increasing  $\rho$ . For  $\bar{\Gamma} < 0$ , together with  $\tilde{\Gamma} < 0$  and  $k > 0$ , it is equivalent to take  $\tilde{\Gamma} > 0$  and  $\bar{\Gamma} > 0$  for  $k < 0$ , and it is then covered by our subsequent results.

### B. Case (ii): Smooth flow

For case (ii), we can directly apply the resonant condition made up for a stationary flow,<sup>17,18</sup> to the case of a fluctuating flow. For given  $m$  and  $k$ , the magnetic field is generated in a resonant layer  $r=r_0$ , where the magnetic field lines are aligned with the shear and thus minimize the magnetic field diffusion. This surface is determined by the following relation:<sup>17,18</sup>

$$m\Omega'(r_0) + kV'(r_0) = 0. \quad (16)$$

The resonant condition is satisfied if the resonant surface is embedded within the fluid:

$$0 < r_0 < 1. \quad (17)$$

As  $\Omega$  and  $V$  depend on time, this condition may only be satisfied at discrete times. This implies successive periods of growth and damping, the dynamo threshold corresponding to a zero mean growth rate. We can also define two distinct resonant surfaces  $\bar{r}_0$  and  $\tilde{r}_0$  corresponding to the mean and fluctuating part of the flow:

$$m\bar{\Omega}'(\bar{r}_0) + k\bar{V}'(\bar{r}_0) = 0, \quad m\tilde{\Omega}'[\tilde{r}_0(t), t] + k\tilde{V}'[\tilde{r}_0(t), t] = 0, \quad (18)$$

with appropriate definitions of  $\bar{\Omega}$ ,  $\bar{V}$ ,  $\tilde{\Omega}$  and  $\tilde{V}$ . In addition, if  $\tilde{\Omega}$  and  $\tilde{V}$  have the same time dependency, as in (2), then  $\tilde{r}_0$  becomes time independent. We can then predict two different behaviors of the dynamo threshold versus the fluctuation rate  $\rho = \tilde{R}_m / \bar{R}_m$ . If  $0 < \bar{r}_0 < 1$  and  $\tilde{r}_0 > 1$ , then the dynamo threshold will increase with  $\rho$ . In this case, the fluctuation is harmful to dynamo action. On the other hand, if  $0 < \tilde{r}_0 < 1$ , then the dynamo threshold will decrease with  $\rho$ .

From the definitions (18) and for a flow defined by (1), (2), and (4), we have

$$\bar{r}_0 = -(m/k)/(2\bar{\Gamma}) \quad \text{and} \quad \tilde{r}_0 = -(m/k)/(2\tilde{\Gamma}). \quad (19)$$

For  $m=1$  and  $k < 0$ , taking  $\tilde{\Gamma} < 0$  implies  $\tilde{r}_0 < 0$  and then the impossibility of dynamo action for the fluctuating part of the flow. Therefore, we expect that the addition of a fluctuating flow with an out-of-phase lag between its vertical and azimuthal components will necessarily be harmful to dynamo action. This will be confirmed numerically in Sec. III C.

To solve (8), (10), and (11), we used a Galerkin approximation method in which the trial and weighting functions are chosen in such a way that the resolution of the induction equation is reduced to the conducting domain  $r \leq 1$ .<sup>5</sup> The method of resolution is given in Appendix D. For the time resolution we used a Runge-Kutta scheme of order 4.

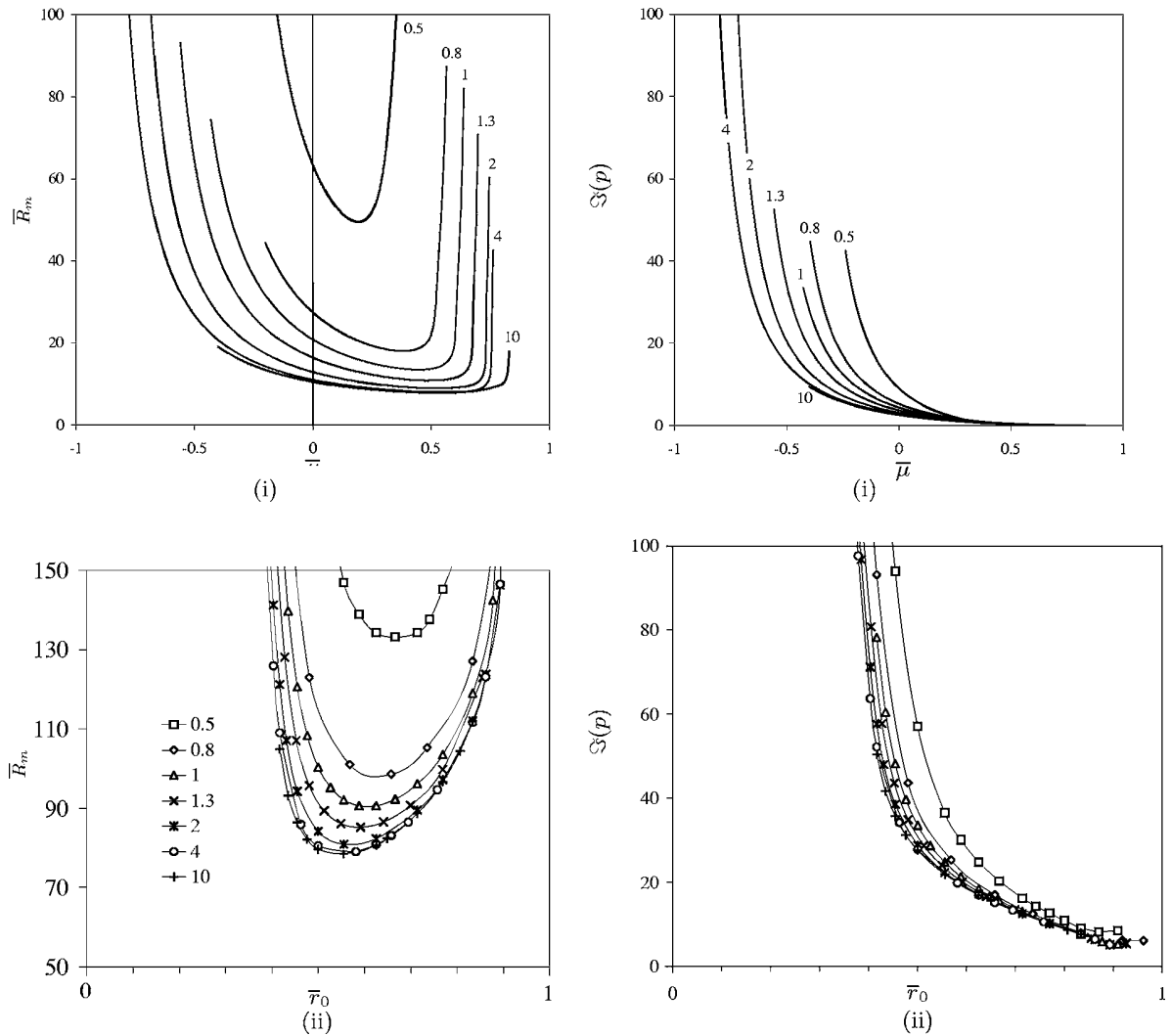


FIG. 1. The dynamo threshold  $\bar{R}_m$  (left column) and  $\Im(\gamma)$  (right column) versus (i)  $\bar{\mu}$ , (ii)  $\bar{r}_0$ , for the stationary case,  $m=1$  and  $\bar{\Gamma}=0.5, 0.8, 1, 1.3, 2, 4, 10$ .

### III. RESULTS

#### A. Stationary flow ( $\tilde{\mathbf{R}}_m=0$ )

We solve

$$\text{Re } \gamma(m=1, k, \bar{\Gamma}, 0, \bar{\mathbf{R}}_m, 0, 0) = 0 \quad (20)$$

with  $k=(\bar{\mu}-1)/\bar{\Gamma}$  for case (i) and  $k=-1/(2\bar{r}_0\bar{\Gamma})$  for case (ii). In case (i), the dispersion relation (A6) in Appendix A becomes  $\mathcal{F}_0=0$ . In Fig. 1, the threshold  $\bar{R}_m$  and the field frequency  $\Im(\gamma)$  are plotted versus  $\bar{\mu}$  ( $\bar{r}_0$ ) for case (i) [(ii)], and for different values of  $\bar{\Gamma}$ . Though we do not know how these curves asymptote, and though the range of  $\bar{\mu}$  ( $\bar{r}_0$ ) for which dynamo action occurs changes with  $\bar{\Gamma}$ , it is likely that the resonant condition  $|\bar{\mu}| < 1$  ( $0 < \bar{r}_0 < 1$ ) is fulfilled for the range of  $\bar{\Gamma}$  corresponding to a dynamo experiment ( $\bar{\Gamma} \approx 1$ ).

#### B. Periodic flow with zero mean ( $\tilde{\mathbf{r}}_0=0$ )

We solve

$$\text{Re } \gamma(m=1, k, 0, \bar{\Gamma}, 0, \bar{\mathbf{R}}_m, \omega_f) = 0. \quad (21)$$

In Fig. 2, the threshold  $\bar{R}_m$  is plotted versus  $\omega_f$  for both cases (i) and (ii). In both cases we take  $\tilde{\mu}=0$  corresponding to  $k=-1/\bar{\Gamma}$ . For case (ii), it implies from (19) that  $\tilde{r}_0=1/2$ , meaning that the resonant surface is embedded in the fluid and thus favorable to dynamo action. In each case (i)  $\bar{\Gamma}=1, 1.78$  and (ii)  $\bar{\Gamma}=1, 2$ , we observe two regimes: one at low frequencies for which the threshold does not depend on  $\omega_f$  and the other at high frequencies for which the threshold behaves like  $\bar{R}_m \propto \omega_f^{3/4}$ .

To understand the existence of these two regimes, we pay attention to the time evolution of the magnetic field for

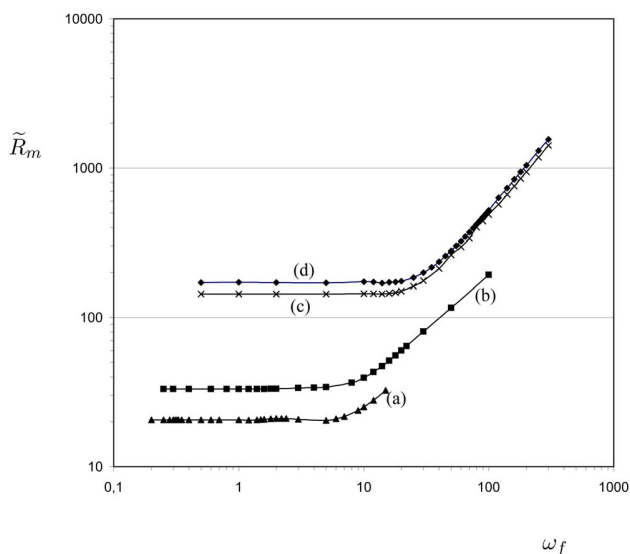


FIG. 2. Dynamo threshold  $\tilde{R}_m$  versus  $\omega_f$  for case (i) with  $\tilde{\mu}=0$  and (a)  $\tilde{\Gamma}=1.78$ , and (b)  $\tilde{\Gamma}=1$ ; for case (ii) with  $\tilde{\nu}_0=0.5$ , (c)  $\tilde{\Gamma}=2$ , and (d)  $\tilde{\Gamma}=1$ .

different frequencies  $\omega_f$ . In Fig. 3, the time evolution of  $b^-$  (real and imaginary parts) for case (ii)  $\tilde{\Gamma}=1$  [case (d) in Fig. 2] is plotted for several frequencies  $\omega_f$ .

**1. Low frequency regime**

For low frequencies ( $\omega_f=1$ ), we observe two time scales: periodic phases of growth and decrease of the field, with a time scale equal to the period of the flow as expected by Floquet’s theory. In addition, the field has an eigenfrequency much higher than  $\omega_f$ . In fact, the slow phases of growth and decrease seem to occur every half-period of the flow. This can be understood from the following remarks.

First of all, the growth (or decrease) of the field does not depend on the sign of the flow. Indeed, from (8), we show that if  $b^\pm(m, k)$  is a solution for  $(\Omega, V)$ , then its complex conjugate  $b^{\pm*}(m, k)$  is a solution for  $(-\Omega, -V)$ . Therefore, we have  $b^\pm(t+T/2)=b^{\pm*}(t)$ , where  $T=2\pi/\omega_f$  is the period of the flow. Now from Floquet’s theory (see Appendix A), we may write  $\mathbf{b}(r, t)$  of the form  $\mathbf{b}(r, \tau)\exp(\gamma t)$ , with  $\mathbf{b}(r, \tau)$   $2\pi$ -periodic in  $\tau=\omega_f t$ . This implies that changing  $(\Omega, V)$  in  $(-\Omega, -V)$  changes the sign of  $\text{Im}(\gamma)$ . This is consistent with the fact that for given  $m$  and  $k$ , the direction of propagation of  $\mathbf{B}$  changes with the direction of the flow. Therefore changing the sign of the flow changes the sign of propagation of the field but does not change the magnetic energy, neither the dynamo threshold  $\tilde{R}_m$ , which are then identical from one half-period of the flow to another. This means that the dynamo threshold does not change if we consider  $f(t)=|\cos(\omega_f t)|$  instead of  $\cos(\omega_f t)$ . It is then sufficient to concentrate on one half-period of the flow, such as, for example  $[\pi/2\omega_f, 3\pi/2\omega_f]$  (modulo  $\pi$ ).

The second remark uses the fact that the flow geometry that we consider does not change in time (only the flow magnitude changes). For such a geometry we can calculate the dynamo threshold  $\bar{R}_m$  corresponding to the stationary

case. Coming back to the fluctuating flow, we then understand that  $\tilde{R}_m|f(t)| > \bar{R}_m$  [ $\tilde{R}_m|f(t)| < \bar{R}_m$ ] corresponds to a growing (decreasing) phase of the field. Assuming that the dynamo threshold  $\tilde{R}_m$  is given by the time average  $\langle \cdot \rangle$  of the flow magnitude leads to the following estimation for  $\tilde{R}_m$ :

$$\tilde{R}_m \approx \frac{\pi}{2} \bar{R}_m \tag{22}$$

as  $\langle |\cos(\omega_f t)| \rangle = 2/\pi$ . For the four cases (a), (b), (c), and (d) in Fig. 2, we give in Table I the ratio  $2\tilde{R}_m/\pi\bar{R}_m$ , which is found to be always close to unity. In this interpretation of the results, the frequency  $\omega_f$  does not appear, provided that it is sufficiently weak in order that the successive phases of growth and decrease have sufficient time to occur. This can explain why for low frequencies in Fig. 2, the dynamo threshold  $\tilde{R}_m$  does not depend on  $\omega_f$ .

Finally the frequencies  $\bar{\omega}$  of the stationary case for  $\tilde{\Gamma}=\bar{\Gamma}$  are also reported in Table I. For a geometry identical to case (d), we find, in the stationary case,  $\bar{\omega}=33$ , which indeed corresponds to the eigenfrequency of the field occurring in Fig. 3 for  $\omega_f=1$ . The previous remarks assume that the flow frequency is sufficiently small compared to the eigenfrequency of the field, in order to have successive phases of growth and decrease of the field. We can check that the values of  $\bar{\omega}$  given in Table I are indeed reasonable estimations of the transition frequencies between the low and high frequency regimes in Fig. 2.

**2. High frequency regime**

In case (ii) and for high frequencies (Fig. 3,  $\omega_f=100$ ), the signal is made of harmonics without growing or decreasing phases. We note that the eigenfrequencies of the real and imaginary parts of  $b^-$  are different, the one being twice the other.

In case (i), relying on the resolution of Eqs. (14) and (15) given in Appendix A, we can show that  $\tilde{R}_m \propto \omega_f^{3/4}$ . We also find that some double frequency as found in Fig. 3 for case (ii) can emerge from an approximate  $3 \times 3$  matrix system. As these developments necessitate the notations introduced in Appendix A, they are postponed until Appendix B.

**3. Further comments about the ability for fluctuating flows to sustain dynamo action**

We found and explained how a fluctuating flow (zero mean) can act as a dynamo. We also understood why the dynamo threshold for a fluctuating flow is higher than that for a stationary flow with the same geometry. It is because the time-average of the velocity norm of the fluctuating flow is on the mean lower than that of the stationary flow. This can be compensated with other definitions of the magnetic Reynolds number. Our definition is based on  $\max_t |\Omega(r, t)|$ . Another definition based on  $\langle |\Omega(r, t)| \rangle_t$  would exactly compensate the difference.

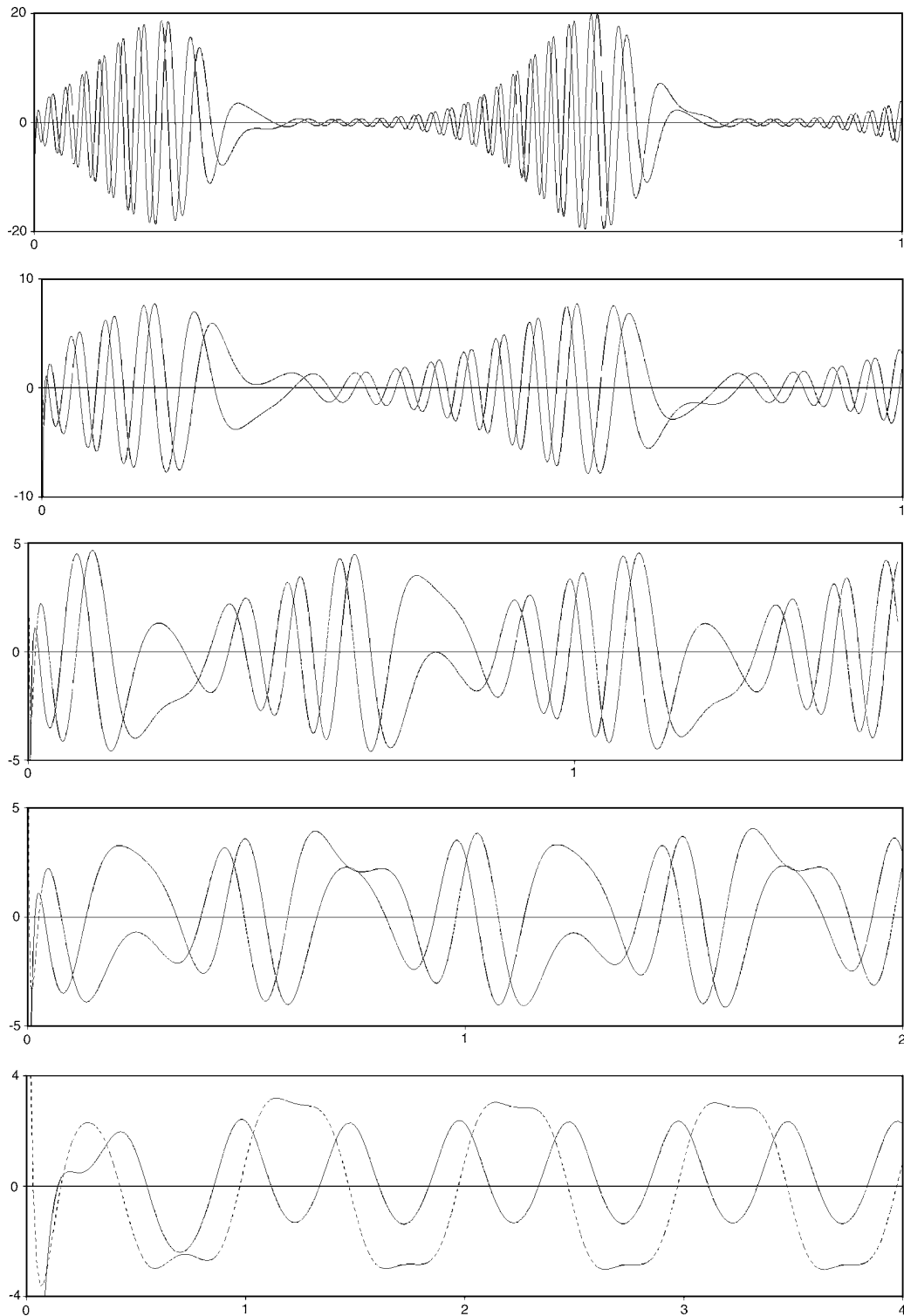


FIG. 3. Time evolution of  $\text{Re}(b^-)$  (solid lines) and  $\text{Im}(b^-)$  (dotted lines) for several values of  $\omega_f$  (from top to bottom  $\omega_f=1; 2, 5, 10, 100$ ), for case (ii) with  $\tilde{\Gamma}=1$ . Time unity corresponds here to  $2\pi/\omega_f$ .

Recently, a controversy appeared about the difficulty for a fluctuating flow (zero mean) to sustain dynamo action at low  $P_m$ ,<sup>26</sup> whereas a mean flow (nonzero time average) exhibits a finite threshold at low  $P_m$ <sup>10,27</sup> (the magnetic Prandtl number  $P_m$  being defined as the ratio of the viscosity to the diffusivity of the fluid). This issue is important not only for

dynamo experiments but also for natural objects such as the Earth's inner core or the solar convective zone in which the electroconducting fluid is characterized by a low  $P_m$ . Though we did not study this problem, our results suggest that the dynamo threshold should not be much different between fluctuating and mean flows, provided an appropriate defini-

TABLE I. Dynamo thresholds  $\tilde{R}_m$  for a fluctuating flow at low frequency,  $\bar{R}_m$  (and  $\bar{\omega}$ ) for a stationary flow with the same geometry. The labels (a)–(d) have the same meaning as in Fig. 2.

	$\tilde{R}_m$	$\bar{R}_m$	$2\tilde{R}_m/\pi\bar{R}_m$	$\bar{\omega}$
(a)	21	13	1.03	4.4
(b)	33	21	1	3.1
(c)	143	84	1.08	28.8
(d)	170	100	1.08	33

tion of the magnetic Reynolds number is taken. In that case, why does it seem so difficult to sustain dynamo action at low  $P_m$  for a fluctuating flow,<sup>26</sup> whereas it seems much easier for a mean flow?<sup>10,27</sup>

In the simulations with a mean flow,<sup>10,27</sup> two dynamo regimes have been found, one with a threshold much lower than the other. In the lowest threshold regime, the magnetic field is generated at some infinite scale in two directions.<sup>27</sup> There is then an infinite scale separation between the magnetic and the velocity field, and the dynamo action is probably of mean-field type and might be understood in terms of  $\alpha$ -effect,  $\beta$ -effect, etc. In that case, removing the periodic boundary conditions would cancel the scale separation and imply the loss of the dynamo action. In the highest threshold regime, the magnetic field is generated at a scale similar to the flow scale, the periodic boundary conditions are forgotten and the dynamo action can no longer be understood in terms of an  $\alpha$ -effect. In order to compare the mean flow results<sup>27</sup> with those for a fluctuating flow,<sup>26</sup> we have to consider only the highest threshold regime in Ref. 27, the lowest one relying on mean-field dynamo processes due to the periodic boundary conditions and which are absent in the fluctuating flow calculations.<sup>26</sup>

Now when comparing the threshold of the highest threshold regime for a mean flow with the threshold obtained

for a fluctuating flow and with appropriate definitions of  $R_m$ , a strong difference remains at low  $P_m$ . A speculation made by Schekochihin *et al.*<sup>28</sup> is that the highest threshold regime obtained for the mean flow at low  $P_m$  would correspond in fact to the large  $P_m$  results for the fluctuating flow. Their arguments rely on the fact that the mean flow in Ref. 27 is peaked at large scale and is thus spatially smooth for the generated magnetic field. It would then belong to the same class as the large- $P_m$  fluctuation dynamo. Both dynamo thresholds are found to be similar indeed, and thus the discrepancy vanishes.

Though the helical flow that we consider here is noticeably different (no chaotic trajectories) it may have some consistency with the simulations at large  $P_m$  mentioned above and at least supports the speculation by Schekochihin *et al.*<sup>28</sup>

### C. Periodic flow with nonzero mean

We are now interested in the case in which both  $\tilde{R}_m \neq 0$  and  $\bar{R}_m \neq 0$ . The flow is then the sum of a nonzero mean part and a fluctuating part. We have considered two approaches depending on which part of the flow geometry is fixed, either the mean or the fluctuating part.

#### 1. $\bar{\Gamma}=1$

Here we fix  $\bar{\Gamma}=1$ ,  $m=1$ , and  $k=-1$ , and vary  $\tilde{\Gamma}$ ,  $\rho$ , and  $\omega_f$  for case (ii). We then solve the equation

$$\text{Re } \gamma(m=1, k=-1, \bar{\Gamma}=1, \tilde{\Gamma}=1/2\tilde{r}_0, \bar{R}_m, \tilde{R}_m=\rho\bar{R}_m, \omega_f)=0 \quad (23)$$

to plot  $\bar{R}_m$  as a function of  $\rho$  in Fig. 4 for values of  $\tilde{r}_0$  and  $\omega_f$ . From (19), we have  $\bar{r}_0=1/2$ , which corresponds to a mean flow geometry with a dynamo threshold about 100. The curves are plotted for several values of  $\tilde{\Gamma}$  leading to values of  $\tilde{r}_0$  not necessarily between 0 and 1. We consider two fluctua-

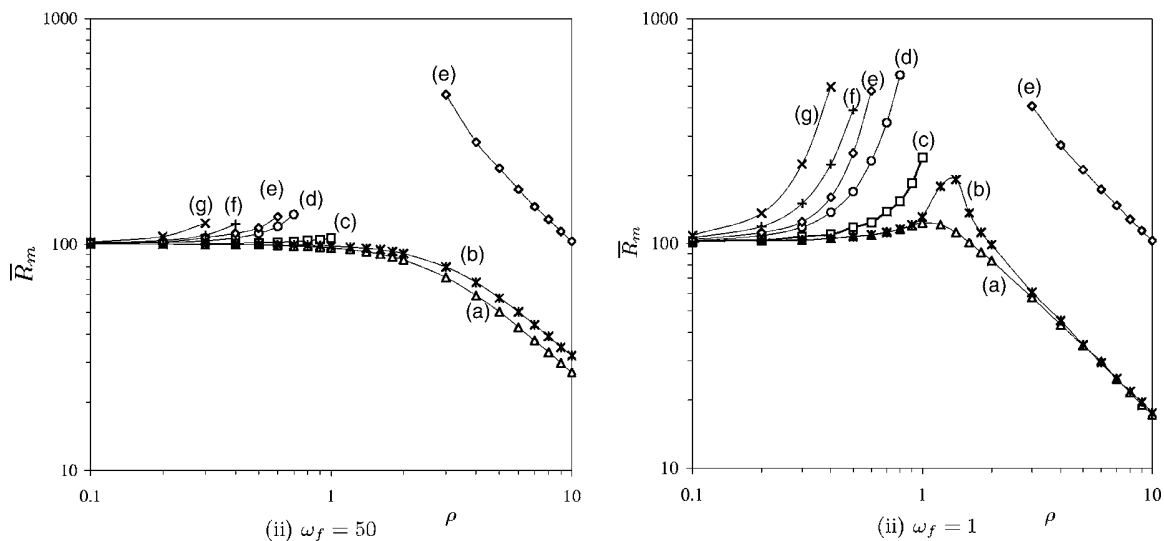


FIG. 4. Dynamo threshold  $\bar{R}_m$  versus  $\rho$  for case (ii), for two frequencies  $\omega_f=50$  and  $\omega_f=1$  and  $\bar{r}_0=1/2$  ( $\bar{\Gamma}=1$ ,  $m=1$ ,  $k=-1$ ). The different curves correspond to  $\tilde{r}_0=(a) 1/2$ ; (b)  $2/3$ ; (c) 1; (d)  $\infty$ ; (e)  $1/4$ ; (f)  $-1$ ; (g)  $-1/2$  [ $\tilde{\Gamma}=(a) 1$ ; (b) 0.75; (c) 0.5; (d) 0; (e) 2; (f)  $-0.5$ ; (g)  $-1$ ].



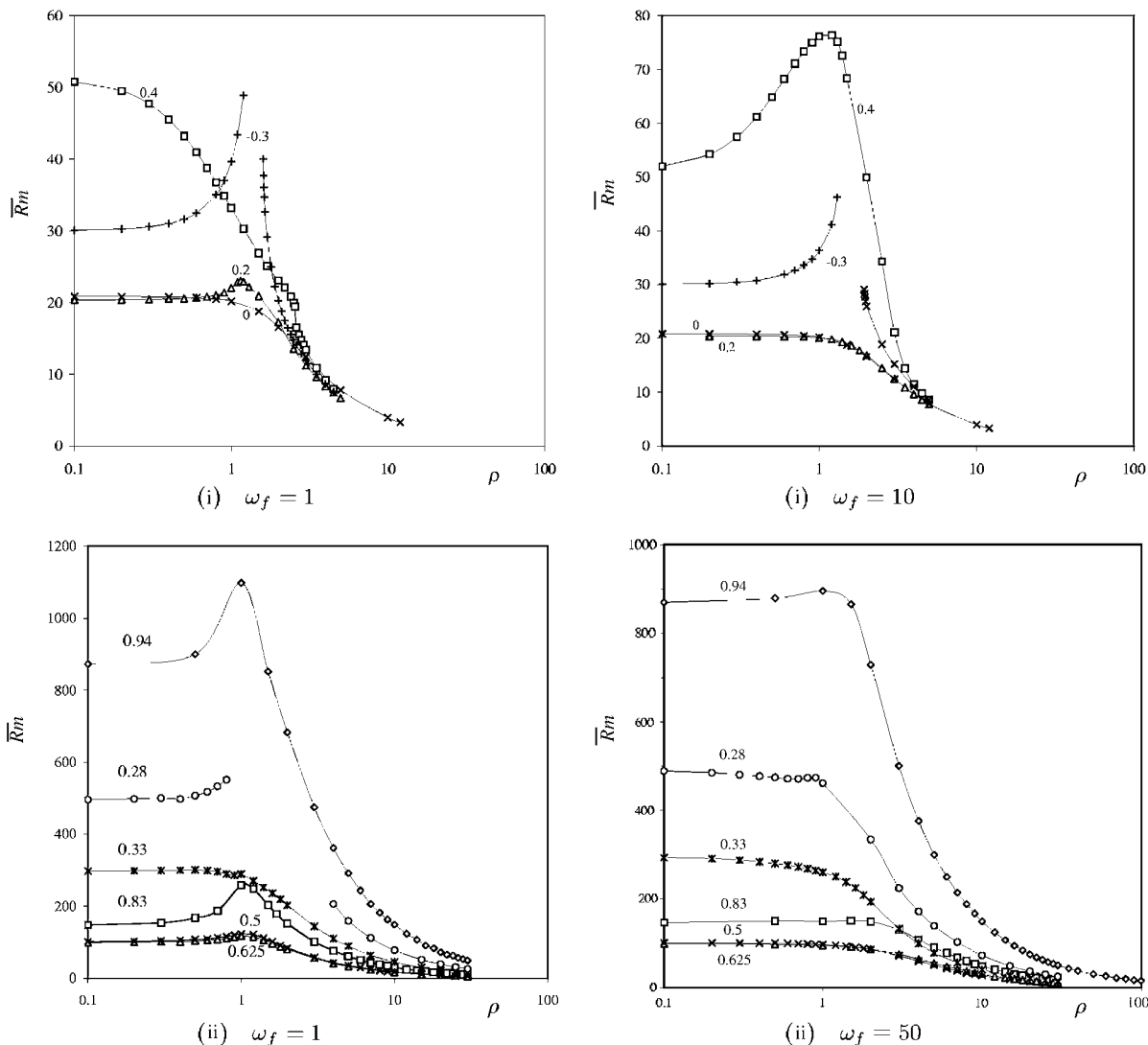


FIG. 5. The dynamo threshold  $\bar{R}_m$  versus  $\rho$  for  $k=-1, m=1$ , and  $\tilde{\Gamma}=1$  [ $\tilde{\mu}=0$  in case (i) and  $\tilde{r}_0=0.5$  in case (ii)] and  $\omega_f=1, 10$ , or  $50$ . The labels correspond to  $\tilde{\mu}$  in case (i) and  $\tilde{r}_0$  in case (ii).

tion frequencies  $\omega_f=1$  and  $\omega_f=50$ . We find that the dynamo threshold  $\bar{R}_m$  increases asymptotically with  $\rho$  unless the resonant condition  $0 < \tilde{r}_0 < 1$  is satisfied; see curves (a), (b), and (e). For these three curves we checked that in the limit of large  $\rho$ ,  $\bar{R}_m = O(\rho^{-1})$ . For  $\tilde{r}_0=1/4$  [curve (e)] and for  $\rho \approx 1$  we do not know if a dynamo threshold exists.

**2.  $\tilde{\Gamma}=1$**

Here we fix  $\tilde{\Gamma}=1, m=1$ , and  $k=-1$  and vary  $\tilde{\Gamma}, \rho$ , and  $\omega_f$ . We then solve the equation

$$\text{Re } \gamma(m=1, k=-1, \tilde{\Gamma}, \tilde{\Gamma}, \bar{R}_m, \tilde{R}_m = \rho \bar{R}_m, \omega_f) = 0 \quad (24)$$

with  $\tilde{\Gamma}=1-\tilde{\mu}$  in case (i) and  $\tilde{\Gamma}=1/2\tilde{r}_0$  in case (ii). In Fig. 5,  $\bar{R}_m$  is plotted versus  $\rho$  for values of  $\tilde{\mu}$  ( $\tilde{r}_0$ ) in case (i) [(ii)] and  $\omega_f$ . Taking  $\tilde{\Gamma}=1, m=1$ , and  $k=-1$  implies  $\tilde{\mu}=0$  in case (i) and  $\tilde{r}_0=0.5$  in case (ii). In both cases (i) and (ii) the fluctuating part of the flow satisfies the resonant condition

for which dynamo action is possible. This implies that  $\bar{R}_m$  should scale as  $O(\rho^{-1})$  provided that  $\rho$  is sufficiently large. In each case we consider two flow frequencies  $\omega_f=1$  and  $\omega_f=10$  for case (i);  $\omega_f=1$  and  $\omega_f=50$  for case (ii). The curves are plotted for different values of  $\tilde{\Gamma}$  corresponding to  $|\tilde{\mu}| < 1$  for case (i) and  $0 < \tilde{r}_0 < 1$  for case (ii). For large  $\rho$ , we checked that  $\bar{R}_m = O(\rho^{-1})$ . The main difference between the curves is that  $\bar{R}_m$  versus  $\rho$  may decrease monotonically or not. In particular, in case (i) for  $\tilde{\mu}=0.4$ ,  $\bar{R}_m$  decreases by 40% when  $\rho$  goes from 0 to 1 showing that even a small fluctuation can strongly decrease the dynamo threshold. In most of the curves there is a bump for  $\rho$  around unity showing a strong increase of the threshold before the final decrease at larger  $\rho$ .

**3.  $\tilde{\Gamma}=\tilde{\Gamma}=1$**

Here we fix  $\tilde{\Gamma}=\tilde{\Gamma}=1, m=1$ , and  $k=-1$  for the case (ii) and vary  $\omega_f$  and  $\rho$ . We then solve the equation

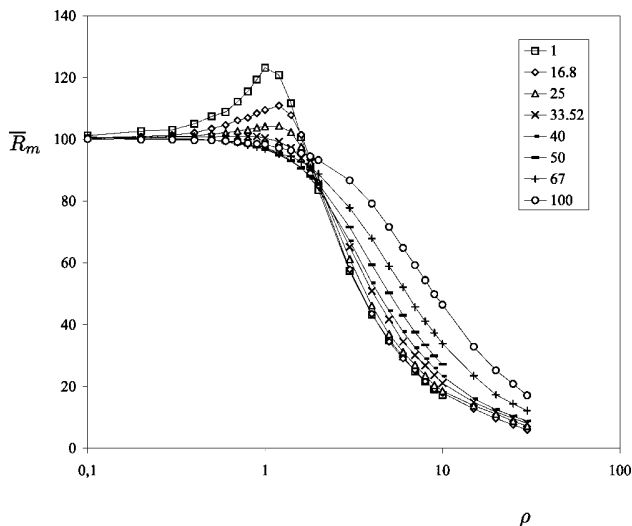


FIG. 6. Dynamo threshold  $\bar{R}_m$  versus  $\rho$  for  $\bar{r}_0 = \tilde{r}_0 = 0.5$  ( $\bar{\Gamma} = \tilde{\Gamma} = 1$ ). The labels correspond to different values of  $\omega_f$ . The eigenfrequency for  $\rho = 0$  is  $\bar{\omega} = 33$ .

$$\text{Re } \gamma(m = 1, k = -1, \bar{\Gamma} = 1, \tilde{\Gamma} = 1, \bar{R}_m, \tilde{R}_m = \rho \bar{R}_m, \omega_f) = 0 \tag{25}$$

to plot  $\bar{R}_m$  versus  $\rho$  in Fig. 6 for various frequencies  $\omega_f$ . Taking  $\bar{\Gamma} = \tilde{\Gamma} = 1$ ,  $m = 1$ , and  $k = -1$  implies  $\bar{r}_0 = \tilde{r}_0 = 0.5$ . For  $\rho$  larger than 1,  $\bar{R}_m$  decreases as  $O(\rho^{-1})$  as mentioned earlier. For  $\rho$  smaller than unity,  $\bar{R}_m$  decreases versus  $\rho$  monotonically only if  $\omega_f$  is large enough. In fact the transition value of  $\omega_f$ , above which  $\bar{R}_m$  decreases monotonically is exactly the field frequency  $\bar{\omega}$  (here,  $\bar{\omega} = 33$ ) corresponding to  $\rho = 0$ . This shows that a fluctuation of small intensity ( $\rho \leq 1$ ) helps the dynamo action only if its frequency is sufficiently high. This is shown in Appendix C for case (i). However, the frequency above which a small fluctuation intensity helps the dynamo may be much larger than  $\bar{\omega}$ . For example, in case (i) for  $\bar{\mu} = 0.4$  and  $\tilde{\mu} = 0$  represented in Fig. 5, we have  $\bar{\omega} = 0.51$ . For  $\omega_f = 1$  small fluctuation helps, for  $\omega_f = 10$  they do not help, and for higher frequencies they help again.

#### IV. DISCUSSION

In this paper we studied the modification of the dynamo threshold of a stationary helical flow by the addition of a large scale helical fluctuation. We extended a previous asymptotic study<sup>25</sup> to the case of a fluctuation of arbitrary intensity (controlled by the parameter  $\rho$ ). We knew from previous studies<sup>17,18</sup> that the dynamo efficiency of a helical flow is characterized by some resonant condition at large  $R_m$ . First we verified numerically that such resonant condition holds at lower  $R_m$  corresponding to the dynamo threshold, for both a stationary and a fluctuating (no mean) helical flow. For a helical flow made of a mean part plus a fluctuating part we showed that, in the asymptotic cases  $\rho \ll 1$  (dominating mean) and  $\rho \gg 1$  (dominating fluctuation), it is naturally the resonant condition of the mean (for the first case) or the fluctuating (for the second case) part of the flow that governs the dynamo efficiency and then the dynamo threshold. In

between, for  $\rho$  of order unity and if the resonant condition of each flow part (mean and fluctuating) is satisfied, the threshold first increases with  $\rho$  before reaching an asymptotic behavior in  $O(\rho^{-1})$ . However, there is no systematic behavior as depicted in Fig. 5, case (i), for  $\omega_f = 1$  and  $\bar{\mu} = 0.4$ , in which a threshold decrease of 40% is obtained between  $\rho = 0$  and  $\rho = 1$ . If the fluctuation part of the flow does not satisfy the resonant condition, then the dynamo threshold increases drastically with  $\rho$ .

Contrary to the case of a cellular flow,<sup>11</sup> there is no systematic effect of the phase lag between the different components of the helical flow. For the helical flow geometry it may imply an increase or a decrease of the dynamo threshold, depending how it changes the resonant condition mentioned above.

There is some similarity between our results and those obtained for a noisy (instead of periodic) fluctuation.<sup>8</sup> In particular, in Ref. 8 it was found that increasing the noise level the threshold first increases due to geometrical effects of the magnetic field lines and then decreases at larger noise. This could explain why at  $\rho \approx 1$  we generally obtain a maximum of the dynamo threshold.

Finally, these results show that the optimization of a dynamo experiment depends not only on the mean part of the flow but also on its nonstationary large scale part. If the fluctuation is not optimized then the threshold may increase drastically with (even small)  $\rho$ , ruling out any hope of producing dynamo action. In addition, even if the fluctuation is optimized (resonant condition satisfied by the fluctuation), our results suggest that there is generally some increase of the dynamo threshold with  $\rho$  when  $\rho \leq 1$ . If the geometry of the fluctuation is identical to that of the mean part of the flow, there can be some slight decrease of the threshold at high frequencies but this decrease is rather small. When  $\rho > 1$ , the dynamo threshold decreases as  $O(\rho^{-1})$ , which at first sight seems interesting. However, we have to keep in mind that as soon as  $\rho > 1$ , the driving power spent to maintain the fluctuation is larger than that to maintain the mean flow. The relevant dynamo threshold is, then, no longer  $\bar{R}_m$ , but  $\tilde{R}_m = \rho \bar{R}_m$  instead. In addition monitoring large scale fluctuations in an experiment may not always be possible, especially if they occur from flow destabilization. In that case it is better to try cancelling them as was done in the von Karman sodium experiment in which an azimuthal belt has been added.<sup>29</sup>

#### ACKNOWLEDGMENTS

We acknowledge B. Dubrulle, F. Pétrélis, R. Stepanov, and A. Gilbert for fruitful discussions.

#### APPENDIX A: RESOLUTION OF EQS. (14) AND (15) FOR CASE (I): SOLID BODY FLOW

As  $f(t)$  is time-periodic of period  $2\pi/\omega_f$ , we look for  $\mathbf{b}(r, t)$  in the form  $\mathbf{b}(r, \tau)\exp(\gamma t)$  with  $\mathbf{b}(r, \tau)$  being  $2\pi$ -periodic in  $\tau = \omega_f t$ . Thus, we look for the functions  $\mathbf{b}^\pm(r, \tau)$  in the form

$$b^\pm(r, \tau) = \sum b_n^\pm(r) \exp(in\tau) \tag{A1}$$

where, from (14) and for  $\tilde{\mu}=0$ , the Fourier coefficients  $b_n^\pm(r)$  must satisfy

$$\{\gamma + k^2 + i[\bar{R}_m \bar{\mu} h(r) + n\omega_f]\} b_n^\pm = \mathcal{L}^\pm b_n^\pm. \tag{A2}$$

In addition, the boundary condition (15) with  $f(t)=\cos(\tau)$  implies

$$[Db_n^\pm]_{1+}^\pm \pm \frac{i}{2} \bar{R}_m (b_n^+ + b_n^-)_{r=1} \pm \frac{i}{4} \tilde{R}_m (b_{n-1}^+ + b_{n-1}^- + b_{n+1}^+ + b_{n+1}^-)_{r=1} = 0. \tag{A3}$$

The solutions of (A2), which are continuous at  $r=1$ , can be written in the form

$$b_n^\pm = C_n^\pm \psi_n^\pm, \quad \text{with } \psi_n^\pm = \begin{cases} I^\pm(q_n r)/I^\pm(q_n), & r < 1, \\ K^\pm(s_n r)/K^\pm(s_n), & r > 1, \end{cases} \tag{A4}$$

with

$$q_n^2 = k^2 + \gamma + i(\bar{R}_m \bar{\mu} + n\omega_f), \quad s_n^2 = k^2 + \gamma + in\omega_f. \tag{A5}$$

Substituting (A4) in (A3), we obtain the following system:

$$C_n^\pm \mathcal{R}_n^\pm \pm i \frac{\bar{R}_m}{2} (C_n^+ + C_n^-) \pm i \frac{\tilde{R}_m}{4} (C_{n-1}^+ + C_{n-1}^- + C_{n+1}^+ + C_{n+1}^-) = 0 \tag{A6}$$

with  $\mathcal{R}_n^\pm = q_n I_n^\pm / I_n^\pm - s_n K_n^\pm / K_n^\pm$  and where  $I_n^\pm = I_{m\pm 1}(q_n)$  and  $K_n^\pm = K_{m\pm 1}(s_n)$  are modified Bessel functions of first and second kind.

The system (A6) implies the following matrix dispersion relation:

$$\mathcal{F}_n C_n - i \frac{\tilde{R}_m}{4} (\mathcal{R}_n^+ - \mathcal{R}_n^-) (C_{n-1} + C_{n+1}) = 0 \tag{A7}$$

with  $C_j = C_j^+ + C_j^-$  and

$$\mathcal{F}_n = \mathcal{R}_n^+ \mathcal{R}_n^- - i(\bar{R}_m/2)(\mathcal{R}_n^+ - \mathcal{R}_n^-). \tag{A8}$$

Solving the system (A7) is equivalent to setting to zero the determinant of the matrix  $A$  defined by

$$A_{nn} = \mathcal{F}_n, A_{n, n-1} = A_{n, n+1} = -i \frac{\tilde{R}_m}{4} (\mathcal{R}_n^+ - \mathcal{R}_n^-) \tag{A9}$$

and with all other coefficients being set to zero.

**APPENDIX B: HIGH FREQUENCY REGIME FOR THE PERIODIC FLOW (I) WITH ZERO MEAN**

Following the notation of Appendix A, and considering a periodic flow (i) with zero mean, we have  $\bar{\mu}=0$ . From (A5) this implies that  $q_n = s_n$ . Using the identity

$$I_n' K_n^\pm - K_n' I_n^\pm = \frac{1}{s_n}, \tag{B1}$$

we obtain  $\mathcal{R}_n^\pm = (I_n^+ K_n^\pm)^{-1}$ . As  $\bar{R}_m=0$ , Eq. (A8) becomes  $\mathcal{F}_n = \mathcal{R}_n^+ \mathcal{R}_n^-$ . We can then rewrite the system (A7) in the form

$$C_n + i \frac{\tilde{R}_m}{4} (I_n^+ K_n^+ - I_n^- K_n^-) (C_{n-1} + C_{n+1}) = 0. \tag{B2}$$

From the asymptotic behavior of the Bessel functions for high arguments, we have

$$\alpha_n \equiv I_n^- K_n^- - I_n^+ K_n^+ \approx 1/s_n^3. \tag{B3}$$

For the high values of  $n$ , these terms are negligible and in first approximation we keep in the system (B2) only the terms corresponding to  $n=0, \pm 1$ . This leads to a  $3 \times 3$  matrix system whose determinant is

$$1 + \frac{(\tilde{R}_m)^2}{16} \alpha_0 (\alpha_{-1} + \alpha_1) = 0. \tag{B4}$$

At high forcing frequencies  $\omega_f$ , we have  $s_{\pm 1} \approx \sqrt{\omega_f}$ . Together with (B4), it implies

$$\tilde{R}_m \approx \omega_f^{3/4}. \tag{B5}$$

In addition, from the approximate  $3 \times 3$  matrix system, the double-frequency  $2\omega_f$  depicted in Fig. 3 emerges for  $n = \pm 1$ .

**APPENDIX C: HIGH FREQUENCY REGIME AND SMALL MODULATION AMPLITUDE FOR THE PERIODIC FLOW (I) WITH NONZERO MEAN**

For small amplitude modulation  $\rho \ll 1$ , the system (A6) is truncated so as to keep the first Fourier modes  $n=0$  and  $n = \pm 1$ . The dispersion relation

$$\mathcal{F}_0 + \rho^2 \left( \frac{\bar{R}_m}{4} \right)^2 (\mathcal{R}_0^+ - \mathcal{R}_0^-) \left( \frac{\mathcal{R}_{-1}^+ - \mathcal{R}_{-1}^-}{\mathcal{F}_{-1}} + \frac{\mathcal{R}_{+1}^+ - \mathcal{R}_{+1}^-}{\mathcal{F}_{+1}} \right) = 0 \tag{C1}$$

is then solved perturbatively setting  $\bar{R}_m = R_0 + \delta R$  and  $\bar{\omega} = \omega_0 + \delta \omega$  and expanding  $\mathcal{F}_0(\bar{R}_m, \bar{\omega})$  to first order in  $\delta R$  and  $\delta \omega$  given that  $\mathcal{F}_0(R_0, \omega_0) = 0$  and with the constants  $C_0^\mp = \pm \mathcal{R}_0^\pm$ . The dispersion relation (C1) becomes

$$\delta R \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \bar{R}_m} + \delta \omega \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \bar{\omega}} = -\rho^2 \left( \frac{R_0}{4} \right)^2 C_0 \left( \frac{\beta_{-1}}{\mathcal{F}_{-1}} + \frac{\beta_{+1}}{\mathcal{F}_{+1}} \right) \tag{C2}$$

with  $\beta_n = \mathcal{R}_n^+ - \mathcal{R}_n^-$ . The threshold and frequency shifts that behave like  $\rho^2$  are written  $\delta R = \rho^2 R_2$  and  $\delta \omega = \rho^2 \omega_2$ . In the left-hand side of (C2) the partial derivatives are given by

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \bar{\omega}} = -\frac{1}{C_0} \left[ (C_0^+)^2 \frac{\partial \mathcal{R}_0^+}{\partial \bar{\omega}} - (C_0^-)^2 \frac{\partial \mathcal{R}_0^-}{\partial \bar{\omega}} \right], \tag{C3}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \bar{R}_m} = -\frac{1}{C_0} \left[ (C_0^+)^2 \frac{\partial \mathcal{R}_0^+}{\partial \bar{R}_m} - (C_0^-)^2 \frac{\partial \mathcal{R}_0^-}{\partial \bar{R}_m} \right] - \frac{i}{2} C_0. \tag{C4}$$

One can show that the partial derivatives of  $\mathcal{R}_0^\pm$  are related to integrals calculated in Ref. 25 through the relations

$$\frac{\partial \mathcal{R}_0^\pm}{\partial \omega} \equiv i \int_0^\infty (\Psi_0^\pm)^2 r dr, \quad \frac{\partial \mathcal{R}_m^\pm}{\partial \mathbf{R}_m} \equiv i \bar{\mu} \int_0^1 (\Psi_0^\pm)^2 r dr. \quad (\text{C5})$$

In the following, we shall focus on the case  $\bar{\mu}=0$  and we introduce the notations

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \bar{\mathbf{R}}_m} = -i C_0(f_1 + i f_2), \quad \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \bar{\omega}} = -i C_0(g_1 + i g_2), \quad (\text{C6})$$

$$\frac{\beta_{-1}}{\mathcal{F}_{-1}} + \frac{\beta_{+1}}{\mathcal{F}_{+1}} = X + iY.$$

Solutions of (C2) are

$$\mathbf{R}_2 = \left( \frac{\mathbf{R}_0}{4} \right)^2 \frac{Xg_1 + Yg_2}{f_1g_2 - f_2g_1}, \quad \omega_2 = \left( \frac{\mathbf{R}_0}{4} \right)^2 \frac{Xf_1 + Yf_2}{f_1g_2 - f_2g_1} \quad (\text{C7})$$

recovering results similar to those obtained in Ref. 25 using a different approach.

We have in mind that for some values of  $\omega_f$ , resonance can occur. An oscillating system forced at a resonant frequency is prone to instability and a large negative threshold shift is expected. However, inspection of (C7) reveals no clear relation between the sign of  $\mathbf{R}_2$  and the forcing frequency, which appears in the quantities  $X$  and  $Y$ . We only know that  $f_1g_2 - f_2g_1 < 0$ , since near the critical point ( $\delta \mathbf{R} = \bar{\mathbf{R}}_m - \mathbf{R}_0$ ) the denominator in (C7) is proportional to the growth rate of the dynamo driven by a steady flow. When  $\rho=0$ , we shall consider Eq. (C2) for an imposed  $\delta \mathbf{R}$  and complex values of  $\delta \omega = \omega_1 + i\sigma_1$ , where  $\omega_1$  is the frequency shift and  $\text{Re}(\gamma) = -\sigma_1$  is the growth rate, given by

$$\sigma_1 = \delta \mathbf{R} \frac{f_1g_2 - f_2g_1}{g_1^2 + g_2^2}. \quad (\text{C8})$$

Above the dynamo threshold ( $\delta \mathbf{R} > 0$ ) the field is amplified [ $\text{Re}(\gamma) > 0$ ]; thus,  $\sigma_1 < 0$  and  $f_1g_2 - f_2g_1 < 0$ .

In the high frequency limit ( $\omega_f \gg \omega_0$ ), expressions for  $X$  and  $Y$  can be derived explicitly using the asymptotic behavior of the Bessel functions for large arguments. For  $\bar{\mu}=0$  with  $q_{\pm 1} = s_{\pm 1} \approx (\omega_f \pm \omega_0)^{1/2} (1 \pm i) / \sqrt{2}$  and using the asymptotic behavior, i.e.,  $\beta_{\pm 1} / \mathcal{F}_{\pm 1} \rightarrow (s_{\pm 1})^{-3}$ , one gets

$$X + iY = -\sqrt{2} \omega_f^{-3/2} \left( 1 - i \frac{3\omega_0}{2\omega_f} \right). \quad (\text{C9})$$

When  $\bar{\mu}=0$ , we have also  $f_1=1/2$  and  $f_2=0$ , leading to the expression for  $\mathbf{R}_2$ :

$$\mathbf{R}_2 \approx -\frac{\mathbf{R}_0^2}{4\sqrt{2}} \omega_f^{-3/2} \left( \frac{g_1}{g_2} - \frac{3\omega_0}{2\omega_f} \right). \quad (\text{C10})$$

For the wave numbers  $m=-k=1$ , numerical calculations of  $g_1$  and  $g_2$ , which depend only on the critical parameters  $\mathbf{R}_0$  and  $\omega_0$ , give  $g_1/g_2=1.626$ , and thus  $\mathbf{R}_2 < 0$  when  $\omega_f \rightarrow \infty$ .

When  $\bar{\mu}=0$ , there are several reasons to consider the particular value of the forcing; i.e.,  $\omega_f=2\omega_0$ . One of them is that for Hill or Mathieu equations it is a resonant frequency. Moreover, in the present problem it leads to simplified calculations. In particular the asymptotic behavior of  $\beta_n/\mathcal{F}_n$  can still be used for  $n=+1$  since  $\omega_f+\omega_0$  is large, while the ap-

proximation is no longer valid for  $n=-1$ . Nevertheless, the mode  $n=-1$  is remarkable since it corresponds to  $s_{-1}=s_0^*$ , from which it follows that  $\beta_{-1}=\beta_0^*$  and  $\mathcal{F}_{-1}=-i\mathbf{R}_0\beta_0^*$ . Finally, one gets the exact result:  $\beta_{-1}/\mathcal{F}_{-1}=i/\mathbf{R}_0$ , which leads to

$$X + iY \approx \frac{i}{\mathbf{R}_0} + \frac{1}{s_1^3} \quad \text{with } s_1^3 \approx -2 \left( \frac{3\omega_0}{2} \right)^{3/2} (1-i). \quad (\text{C11})$$

For the values  $\mathbf{R}_0=20.82$  and  $\omega_0=4.35$  corresponding to Fig. 8(f), one gets  $X=-1.5 \times 10^{-2}$  and  $Y=3.3 \times 10^{-2}$ . The threshold shift is

$$\mathbf{R}_2 \approx \frac{\mathbf{R}_0^2}{8} (1.62X + Y) = 0.48, \quad (\text{C12})$$

showing that the sign of  $\mathbf{R}_2$  changes when  $\omega_f$  decreases from infinity to  $2\omega_0$ . This result is in qualitative agreement with the exact results reported in Fig. 8(f), where  $\mathbf{R}_2=0$  for  $\omega_f=8.3 \approx 2\omega_0$ . When the forcing frequency is exactly twice the eigenfrequency  $\omega_0$ , we had rather expected a large negative value of  $\mathbf{R}_2$  on the basis that it is a resonant condition for ordinary differential system under temporal modulation. In Fig. 8(f), the maximum negative value of  $\mathbf{R}_2$  occurs for  $\omega_f \approx 4\omega_0$ , which cannot be explained by simple arguments.

For  $\bar{\mu} \neq 0$ , we have not been able to find resonant conditions such as:  $n\omega_f + m\omega_0 = 0$  ( $n, m$  integers) between  $\omega_f$  and  $\omega_0$  such that  $\omega_f$  would be associated with a special behavior of the threshold shift. Contrary to the Hill equation, the induction equation is a partial differential equation with the consequence that the spatial and temporal properties of the dynamo are not independent. The wave numbers  $k$  and  $m$  are linked to the frequencies  $\omega_0$  and  $\omega_f$  through  $q_{\pm n}$  and  $s_{\pm n}$ , which appears as arguments of Bessel functions having rules of composition less trivial than trigonometric functions. Exhibiting resonant conditions implies to find relationship between  $q_{\pm n}, s_{\pm n}$ , and  $q_0, s_0$  for specific values of  $\omega_f$ . We have shown above for  $\bar{\mu}=0$  that a relation of complex conjugation exists for  $n=-1$  when  $\omega_f=2\omega_0$ , but we have not yet found how to generalize to other values of  $\bar{\mu}$ , and have left this part for a future work.

#### APPENDIX D: RESOLUTION OF CASE (II): SMOOTH FLOW

We define the trial functions  $\psi_j^\pm = K_{m\pm 1}(k) J_{m\pm 1}(\alpha_j r) / J_{m\pm 1}(\alpha_j)$ , where the  $\alpha_j$  are the roots of the equation

$$\alpha_j \left[ \frac{K_{m+1}(k)}{J_{m+1}(\alpha_j)} - \frac{K_{m-1}(k)}{J_{m-1}(\alpha_j)} \right] + 2k \frac{K_m(k)}{J_m(\alpha_j)} = 0, \quad (\text{D1})$$

and where  $J$  and  $K$  are, respectively, the Bessel functions of first kind and the modified Bessel functions of second kind. For  $r \leq 1$ , we look for solutions in the form

$$b^\pm = \sum_{j=1}^N b^j(t) \psi_j^\pm(\alpha_j r), \quad (\text{D2})$$

where  $N$  defines the degree of truncature. For  $r \geq 1$ , the solutions of (10) are thus of the form

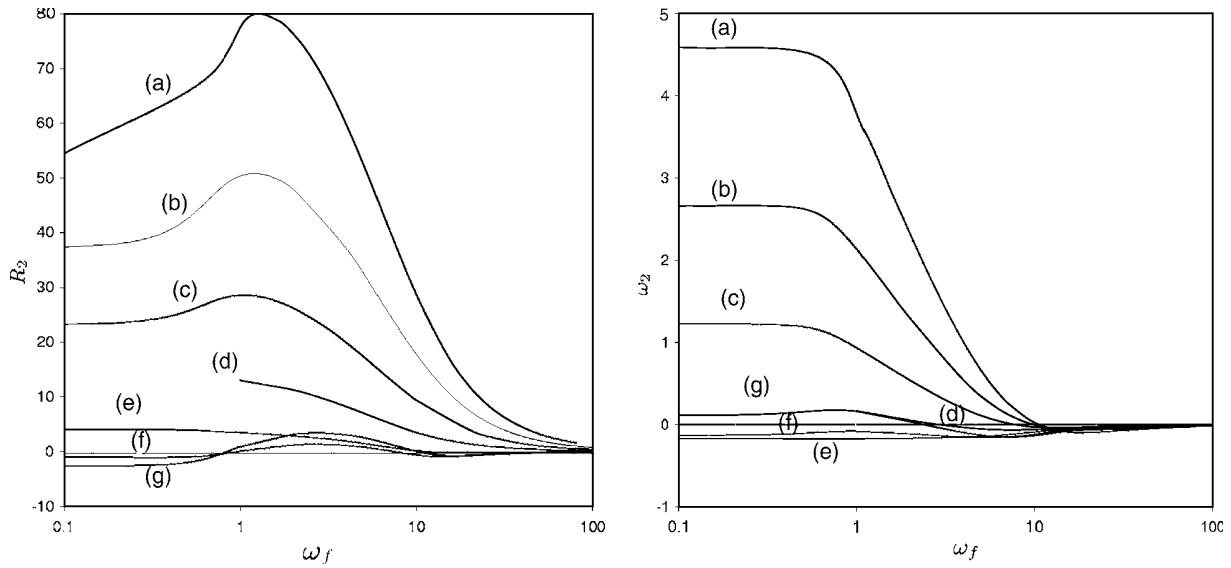


FIG. 7. Results obtained by the perturbative approach for  $m=1$ ,  $k=-0.56$ , and  $\bar{\mu}=0.44$  ( $\bar{\Gamma}=1$ ). The dynamo threshold  $R_2$  is plotted versus  $\omega_f$  for several values of  $\tilde{\mu}$ : (a) 1.56; (b) 1.28; (c) 1; (d) 0.72; (e) 0.44; (f) 0.16; and (g) 0.

$$b^\pm = K_{m\pm 1}(kr) \sum_{j=1}^N b_j^\pm(t) \tag{D3}$$

and, from (D1), these solutions satisfy the conditions (11) at the interface  $r=1$ . To determine the functions  $b_j(t)$ , it is sufficient to solve the induction equation (8) for  $r \leq 1$ . For that, we replace the expression of  $b^\pm$  given by (D2) into the induction equation (8), in order to determine the residual

$$R^\pm = \sum_{j=1}^N \{ \dot{b}_j + [k^2 + \alpha_j^2 + i(m\Omega + kV)]b_j \} \psi_j^\pm \mp \frac{i}{2} r \Omega' \sum_{j=1}^N b_j (\psi_j^+ + \psi_j^-). \tag{D4}$$

We then solve the following system:

$$\int_0^1 R^+ \phi_i^+ r dr + \int_0^1 R^- \phi_i^- r dr = 0, \quad i = 1, \dots, N, \tag{D5}$$

where the weighting functions are defined by  $\phi_j^\pm = J_{m\pm 1}(\alpha_j r) / J_{m\pm 1}(\alpha_j)$ . Using the orthogonality relation

$$\int_0^1 \phi_i^+ \psi_j^+ r dr + \int_0^1 \phi_i^- \psi_j^- r dr = \delta_{ij} G_{ij} \tag{D6}$$

with

$$G_{ii} = \frac{K_{m+1}(k)}{J_{m+1}^2(\alpha_i)} \int_0^1 J_{m+1}^2(\alpha_i r) r dr + \frac{K_{m-1}(k)}{J_{m-1}^2(\alpha_i)} \int_0^1 J_{m-1}^2(\alpha_i r) r dr, \tag{D7}$$

we write the system (D5) in the following matrix form:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{M}\mathbf{X} \quad \text{with } \mathbf{X} = (b_1, \dots, b_N) \tag{D8}$$

with

$$M_{ij} = \delta_{ij} (k^2 + \alpha_j^2) + \frac{i}{G_{ii}} \int_0^1 (\phi_i^+ \psi_j^+ + \phi_i^- \psi_j^-) (m\Omega + kV) r dr - \frac{i}{2G_{ii}} \int_0^1 (\phi_i^+ - \phi_i^-) (\psi_j^+ + \psi_j^-) \Omega' r^2 dr. \tag{D9}$$

The numerical resolution of this system is done with a fourth-order Runge-Kutta time-step scheme. We took a white noise as an initial condition for the  $b_j$ .

**APPENDIX E: ERRATUM OF NORMAND (2003) RESULTS (REF. 25)**

For very small values of the fluctuation rate  $\rho$  and for an infinite shear [case (i)], a comparison can be made between the results obtained for  $\tilde{\mu}=0$  by the method based on Floquet theory (see Appendix A) and those obtained by a perturbative approach,<sup>25</sup> which consists in expanding  $\bar{R}_m$  and the frequency  $\text{Im}(p)$  in powers of  $\rho$  according to

$$\text{Im}(p) = \omega_0 + \rho \omega_1 + \rho^2 \omega_2 + \dots, \tag{E1}$$

$$\bar{R}_m = R_0 + \rho R_1 + \rho^2 R_2 + \dots, \tag{E2}$$

where  $R_0$  and  $\omega_0$  are, respectively, the critical values of the Reynolds number and the frequency in the case of a stationary flow. At the leading order, it appears that  $\omega_1=R_1=0$ . At the next order, the expressions of  $R_2$  and  $\omega_2$  are given in Ref. 25; however, their numerical values are not correct due to an error in their computation.

After correction, the new values of  $R_2$  and  $\omega_2$  are given in Fig. 7 for the set of parameters considered in Ref. 25:  $m=1$ ,  $k=-0.56$ , and  $\bar{\Gamma}=1$  ( $\bar{\mu}=0.44$ ). The different curves correspond to values of  $\tilde{\mu}$ , which are not necessarily the same as those taken in Ref. 25. For  $|\tilde{\mu}|$  sufficiently small (curves e and f),  $R_2$  changes its sign twice versus the forcing frequency. We find that  $R_2$  is negative for low and high frequen-

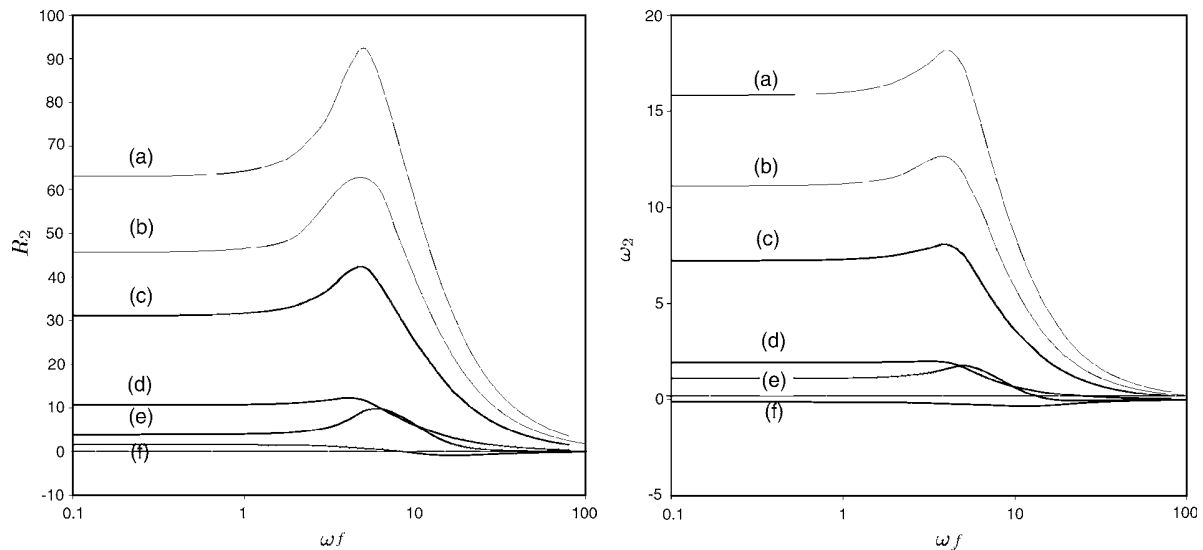


FIG. 8. Same as Fig. 7, but for  $m=1$ ,  $k=-1$ , and  $\bar{\mu}=0$  ( $\bar{\Gamma}=1$ ). The labels correspond to  $\tilde{\mu}=(a)$  1.5; (b) 1.25; (c) 1; (d) 0.5; (e)  $-0.5$ ; and (f) 0.

cies, implying a dynamo threshold smaller than the one for the stationary flow. At intermediate frequencies,  $R_2$  is positive with a maximum value, implying a dynamo threshold larger than the one for the stationary flow. For larger values of  $|\tilde{\mu}|$  (curves a, b, c, and d)  $R_2$  is positive for all forcing frequencies with a maximum value at a low frequency, which increases with  $|\tilde{\mu}|$ . This implies that for  $|\tilde{\mu}|$  sufficiently large, the dynamo threshold is larger than the one obtained for the stationary flow, as was already mentioned in Sec. III A. For  $\tilde{\Gamma}=1.78$ , we have  $\tilde{\mu}=0$ . In this case, we have checked that the values of  $R_2$  and  $\omega_2$  are in good agreement with the values of  $R_m$  and  $\bar{\omega}$  obtained by the method of Appendix A, provided  $\rho \leq 0.1$ .

For completeness, we have also calculated the values of  $R_2$  and  $\omega_2$  for  $m=1$ ,  $k=-1$ , and  $\bar{\Gamma}=1$ , ( $\bar{\mu}=0$ ), as considered in the body of the paper. The results are plotted in Fig. 8. Qualitatively, the results are in good agreement with those of Fig. 7. For  $\tilde{\mu}=0$  again, we have checked that the values of  $R_2$  and  $\omega_2$  are in good agreement with the values of  $R_m$  and  $\bar{\omega}$  obtained by the method of Appendix A, provided  $\rho \leq 0.1$ . For higher values of the modulation amplitude  $\rho$ , the relative difference between the results obtained by the two methods can reach 10% on  $R_2$  for  $\rho=0.4$ .

Finally, it must be noticed that our parameters  $\tilde{\Gamma}$  and  $\omega_f$  are strictly equivalent to, respectively,  $\varepsilon_1$  and  $\sigma$  in Ref. 25.

<sup>1</sup>P. Cardin, D. Jault, H.-C. Nataf, and J.-P. Masson, "Towards a rapidly rotating liquid sodium dynamo experiment," *Magneto hydrodynamics* **38**, 177 (2002).

<sup>2</sup>M. Bourgoïn, L. Marié, F. Pétrelis, C. Gasquet, A. Guigon, J.-B. Luciani, M. Moulin, F. Namer, J. Burgete, A. Chiffaudel, F. Daviaud, S. Fauve, P. Odier, and J.-F. Pinton, "Magneto hydrodynamics measurements in the von Karman sodium experiment," *Phys. Fluids* **14**, 3046 (2002).

<sup>3</sup>P. Frick, V. Noskov, S. Denisov, S. Khripchenko, D. Sokoloff, R. Stepanov, and A. Sukhanovsky, "Non-stationary screw flow in a toroidal channel: way to a laboratory dynamo experiment," *Magneto hydrodynamics* **38**, 143 (2002).

<sup>4</sup>F. Ravelet, A. Chiffaudel, F. Daviaud, and J. Léorat, "Towards an experimental von Karman dynamo: numerical studies for an optimized design," *Phys. Fluids* **17**, 117104 (2005).

<sup>5</sup>L. Marié, C. Normand, and F. Daviaud, "Galerkin analysis of kinematic dynamos in the von Kármán geometry," *Phys. Fluids* **18**, 017102 (2006).

<sup>6</sup>R. Avalos-Zunñiga and F. Plunian, "Influence of electro-magnetic boundary conditions onto the onset of dynamo action in laboratory experiments," *Phys. Rev. E* **68**, 066307 (2003).

<sup>7</sup>R. Avalos-Zunñiga and F. Plunian, "Influence of inner and outer walls electromagnetic properties on the onset of a stationary dynamo," *Eur. Phys. J. B* **47**, 127 (2005).

<sup>8</sup>N. Leprovost and B. Dubrulle, "The turbulent dynamo as an instability in a noisy medium," *Eur. Phys. J. B* **44**, 395 (2005).

<sup>9</sup>S. Fauve and F. Pétrelis, "Effect of turbulence on the onset and saturation of fluid dynamos," in *Peyresq Lectures on Nonlinear Phenomena*, edited by J. Sepulchre (World Scientific, Singapore, 2003), pp. 1–64.

<sup>10</sup>J.-P. Laval, P. Blaineau, N. Leprovost, B. Dubrulle, and F. Daviaud, "Influence of turbulence on the dynamo threshold," *Phys. Rev. Lett.* **96**, 204503 (2006).

<sup>11</sup>F. Petrelis and S. Fauve, "Inhibition of the dynamo effect by phase fluctuations," *Europhys. Lett.* **76**, 602 (2006).

<sup>12</sup>F. Ravelet, "Bifurcations globales hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques dans un écoulement de von Kármán turbulent," Ph.D. thesis, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, 2005.

<sup>13</sup>R. Volk, Ph. Odier, and J.-F. Pinton, "Fluctuation of magnetic induction in von Kármán swirling flows," *Phys. Fluids* **18**, 085105 (2006).

<sup>14</sup>D. Lortz, "Exact solutions of the hydromagnetic dynamo problem," *Plasma Phys.* **10**, 967 (1968).

<sup>15</sup>Yu. Ponomarenko, "Theory of the hydromagnetic generator," *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **14**, 775 (1973).

<sup>16</sup>P. H. Roberts, "Dynamo theory," in *Irreversible Phenomena and Dynamical Systems Analysis in Geosciences*, edited by C. Nicolis and G. Nicolis (D. Reidel, Dordrecht, 1987), pp. 73–133.

<sup>17</sup>A. D. Gilbert, "Fast dynamo action in the Ponomarenko dynamo," *Geophys. Fluid Dyn.* **44**, 241 (1988).

<sup>18</sup>A. A. Ruzmaïkin, D. D. Sokoloff, and A. M. Shukurov, "Hydromagnetic screw dynamo," *J. Fluid Mech.* **197**, 39 (1988).

<sup>19</sup>A. Basu, "Screw dynamo and the generation of nonaxisymmetric magnetic fields," *Phys. Rev. E* **56**, 2869 (1997).

<sup>20</sup>A. D. Gilbert and Y. Ponty, "Slow Ponomarenko dynamos on stream surfaces," *Geophys. Fluid Dyn.* **93**, 55 (2000).

<sup>21</sup>A. D. Gilbert, "Dynamo theory," in *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, edited by S. Friedlander and D. Serre (Elsevier, New York, 2003), Vol. 2, pp. 355–441.

<sup>22</sup>A. Gailitis and Ya. Freiberg, "Non uniform model of a helical dynamo," *Magneto hydrodynamics* (N.Y.) **16**, 11 (1980).

<sup>23</sup>A. Gailitis, O. Lielausis, S. Dementiev, E. Platācis, A. Ciferons, G. Gerbeth, Th. Gundrum, F. Stefani, M. Christen, H. Hänel, and G. Will, "Detection of a flow induced magnetic field eigenmode in the Riga dynamo facility," *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4365 (2000).

- <sup>24</sup>A. Gailitis, O. Lielausis, E. Platācis, S. Dementiev, A. Ciferons, G. Gerbeth, Th. Gundrum, F. Stefani, M. Christen, and G. Will, "Magnetic field saturation in the Riga dynamo experiment," *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3024 (2001).
- <sup>25</sup>C. Normand, "Ponomarenko dynamo with time-periodic flow," *Phys. Fluids* **15**, 1606 (2003).
- <sup>26</sup>A. A. Schekochihin, S. C. Cowley, J. L. Maron, and J. C. McWilliams, "Critical magnetic Prandtl number for small-scale dynamo," *Phys. Rev. Lett.* **92**, 054502 (2004).
- <sup>27</sup>Y. Ponty, P. D. Mininni, H. Politano, J.-F. Pinton, and A. Pouquet, "Dynamo action at low magnetic Prandtl numbers: mean flow vs. fully turbulent motion," *New J. Phys.* (in press).
- <sup>28</sup>A. A. Schekochihin, A. B. Iskakov, S. C. Cowley, J. McWilliams, M. R. E. Proctor, and T. A. Jousef, "Fluctuation dynamo and turbulent induction at low magnetic Prandtl numbers," *New J. Phys.* (in press); see also Fig. 2 of A. B. Iskakov, A. A. Schekochihin, S. C. Cowley, J. McWilliams, and M. R. E. Proctor, "Numerical demonstration of fluctuation dynamo at low magnetic Prandtl numbers," *Phys. Rev. Lett.* **98**, 208501 (2007).
- <sup>29</sup>R. Monchaux, M. Berhanu, M. Bourgoïn, P. Odier, M. Moulin, J.-F. Pinton, R. Volk, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, C. Gasquet, L. Marié, and F. Ravelet, "Generation of magnetic field by a turbulent flow of liquid sodium," *Phys. Rev. Lett.* **98**, 044502 (2007).

## 8.2 Compléments à l'article

### 8.2.1 Seuil de l'instabilité dynamo

Pour de faibles intensités des fluctuations ( $\rho \ll 1$ ), la quantité pertinente pour déterminer le seuil est le nombre de Reynolds magnétique basé sur la partie moyenne de l'écoulement (*i.e.*  $\bar{R}_m$ ). Cependant lorsque  $\rho$  augmente, c'est le nombre de Reynolds magnétique basé sur la partie fluctuante de l'écoulement qui devient alors pertinent. Ainsi, il nous a paru intéressant de tracer pour le cas du champ fluctuant avec champ moyen  $\bar{R}_m(1 + \rho)$  en fonction de  $\rho$ , au lieu de  $\bar{R}_m$  en fonction de  $\rho$  comme nous l'avons fait dans l'article. De cette manière, pour de petits  $\rho$ , le seuil est représenté par  $\bar{R}_m$  et pour de grands  $\rho$ , le seuil est représenté par le produit  $\bar{R}_m \rho$  (*i.e.*  $\tilde{R}_m$ ).

Sur la figure (8.1), nous avons retracé pour le cas du cisaillement fini, la figure (4) de l'article en tenant compte de cette remarque. Cette figure met bien en évidence le fait que le seuil augmente avec l'intensité des fluctuations.

Dans le cas du cisaillement infini, nous avons trouvé une configuration particulière pour laquelle le seuil diminuait pour une faible amplitude de modulation ; cette diminution a été observé pour  $w_f = 1$  et  $\bar{\mu} = 0,4$ . Or en retraçant les résultats de la figure 5 de l'article (cas (i) pour  $w_f = 1$ ), en terme de  $\bar{R}_m(1 + \rho)$ , on constate que le véritable seuil lui augmente, quelque soit  $\bar{\mu}$  (cf. figure 8.2).

### 8.2.2 Rayon de résonance

#### Formule analytique du rayon de résonance

Dans le cas fluctuant avec champ moyen, nous avons défini un rayon de résonance correspondant à la partie moyenne du champ de vitesse (*i.e.*  $\bar{r}_0$ ) et un rayon de résonance correspondant à la partie fluctuante (*i.e.*  $\tilde{r}_0$ ).

Si nous introduisons notre champ de vitesse (3.1 et 3.6 cas (ii)) dans la relation donnant la valeur du rayon de résonance (3.3) :  $m\Omega'(r_0)F(t) + kV'(r_0)G(t) = 0$ , nous trouvons que :

$$r_0(t) = \frac{1 + \rho g(t)}{\frac{1}{\bar{r}_0} + \frac{1}{\tilde{r}_0} \rho f(t)} \quad (8.1)$$

Ainsi, si  $\rho \ll 1$ ,  $r_0(t) \rightarrow \bar{r}_0$ , nous obtenons le cas stationnaire, inversement si  $\rho \gg 1$ ,  $r_0(t) \rightarrow \tilde{r}_0$ , nous obtenons alors le cas fluctuant sans champ moyen. Nous nous sommes intéressés à ce qui se passe entre ces deux cas.

Nous nous sommes placé dans la configuration de la courbe (e) de la figure 4 de gauche de Peyrot *et al.* (2007), pour lequel  $\bar{r}_0 = 0,5$ ,  $\tilde{r}_0 = 0,25$  et  $f(t) = g(t)$ . Dans cette configuration, nous observons un intervalle de  $\rho$  (entre  $\rho = 0,6$  et 3), pour lequel nous



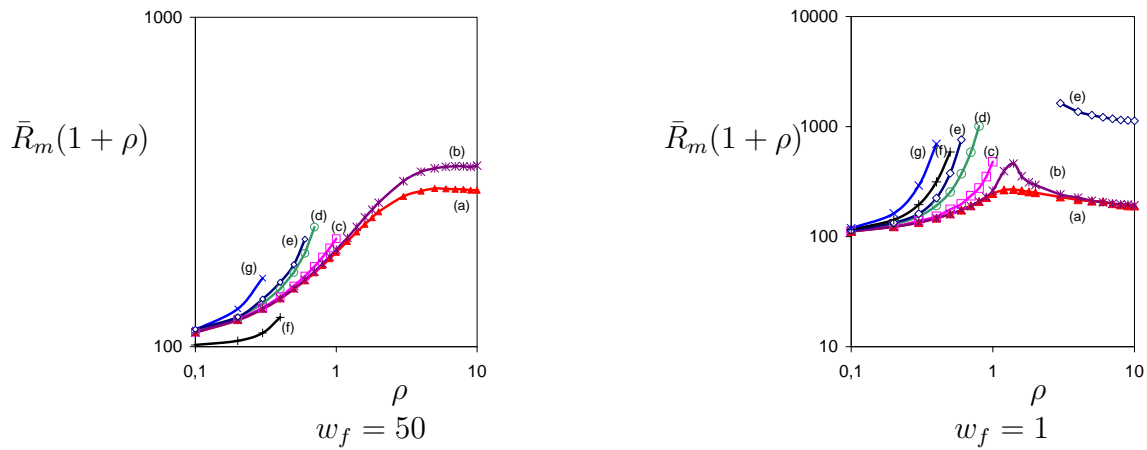


FIGURE 8.1 –  $\bar{R}_m(1 + \rho)$  en fonction de  $\rho$  pour le cas (ii), pour deux fréquences  $\omega_f = 50$ ,  $\omega_f = 1$  et  $\bar{r}_0 = 1/2$  ( $\bar{\Gamma} = 1$ ,  $m = 1$ ,  $k = -1$ ). Les différentes courbes correspondent à  $\tilde{r}_0 =$  (a)  $1/2$ ; (b)  $2/3$ ; (c)  $1$ ; (d)  $\infty$ ; (e)  $1/4$ ; (f)  $-1$ ; (g)  $-1/2$  ( $\tilde{\Gamma} =$  (a)  $1$ ; (b)  $0.75$ ; (c)  $0.5$ ; (d)  $0$ ; (e)  $2$ ; (f)  $-0.5$ ; (g)  $-1$ ).

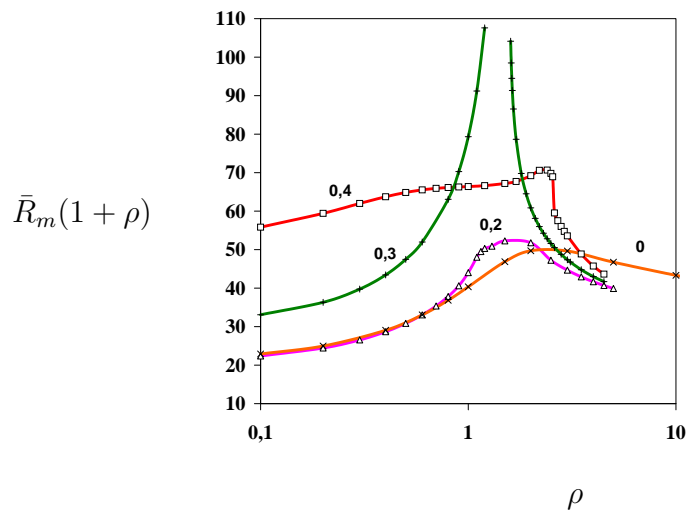


FIGURE 8.2 –  $\bar{R}_m(1 + \rho)$  en fonction de  $\rho$  pour le cas (i) et  $w_f = 1$ ; les valeurs figurant sur les courbes correspondent aux valeurs de  $\tilde{\mu}$ .

n'avons pas effet dynamo.

Nous avons représenté sur la figure (8.3),  $r_0(t)$  pour différentes valeurs de l'intensité des fluctuations, allant de  $\rho = 0.1$  à 1000. Les pics des courbes correspondent au cas où le dénominateur de  $r_0(t)$  s'annule (8.1). Nous constatons que pour de faibles intensités des fluctuations,  $r_0(t)$  oscille autour d'une valeur proche de  $\bar{r}_0 = 0.5$  et pour de grandes valeurs de  $\rho$ ,  $r_0(t)$  oscille autour de  $\tilde{r}_0 = 0.25$ . Pour des valeurs intermédiaires de  $\rho$ , nous comprenons facilement à l'aide de ces différents graphes, pourquoi nous n'avons pas effet dynamo, la relation de résonance n'étant pas respectée (*i.e*  $|r_0(t)| < 1$ ).

### Isovaleurs de l'énergie magnétique

Nous avons tracé les isovaleurs de l'énergie magnétique dans le plan  $z = \text{constante}$  pour le cas du champ de vitesse fluctuant avec champ moyen (cf. figure 8.4). En utilisant le logiciel Matlab, nous avons visualisé sous forme de film, l'évolution des iso-valeurs de l'énergie magnétique sur un temps correspondant à une ou deux période(s) du champ de vitesse.

Nous avons vérifié que dans le cas stationnaire pour le mode azimutal  $m = 1$ ,  $k = -1$ ,  $\bar{\Gamma} = 1$ , l'énergie magnétique était bien organisée en forme de double hélice oscillant à fréquence fixe dans le temps (voir cas (a) de la figure 8.4). De plus, en appliquant la relation de résonance (voir 3.3), nous trouvons que le rayon de résonance  $\bar{r}_0$  a pour valeur  $\bar{r}_0 = -(m/k)/(2\bar{\Gamma}) = 0.5$ . Sur la figure (a), nous constatons bien que l'énergie magnétique est concentrée au niveau du rayon de résonance (les zones en rouge sur le graphe correspondent aux lieux où l'énergie magnétique est maximum).

Pour le cas fluctuant avec champ moyen, nous nous sommes placés dans la configuration de la courbe (e) de la figure 4 de gauche de l'article. Nous avons tracé ces isovaleurs pour différents  $\rho$  (voir cas (b), (c) et (d) de la figure 8.4). Nous constatons que quelle que soit l'intensité des fluctuations, l'énergie magnétique conserve sa structure en double hélice tout en changeant légèrement de forme. Plus  $\rho$  augmente, plus l'énergie est concentrée au niveau du rayon de résonance  $\tilde{r}_0 = 0.25$  correspondant à la partie fluctuante du champ de vitesse. Pour  $\rho = 10$ , le champ de vitesse n'est que oscillant et l'énergie magnétique suit le champ de vitesse. Elle tourne dans un sens, puis au niveau d'un changement de signe du champ de vitesse (*i.e* quand le cos change de signe), l'énergie magnétique change de sens (la figure (d) correspond à un moment où l'énergie 's'arrête' et repart dans l'autre sens).

De plus, dans l'intervalle de  $\rho$  pour lequel nous n'observons pas dynamo sur la courbe (e) de la figure 4 de gauche de l'article, l'énergie magnétique ne se concentre pas sur un rayon fixe et n'a pas de structure définie. Ce résultat est en accord avec ceux du paragraphe précédent où nous avons vu que la condition de résonance n'était pas vérifiée.

### Double dépendance temporelle

La seule configuration où nous avons observé une diminution du seuil a été obtenue dans le cas du cisaillement fini (voir figure 5 (i) de l'article) pour  $\omega_f = 1$  et  $\bar{\mu} = 0.4$ , dans lequel

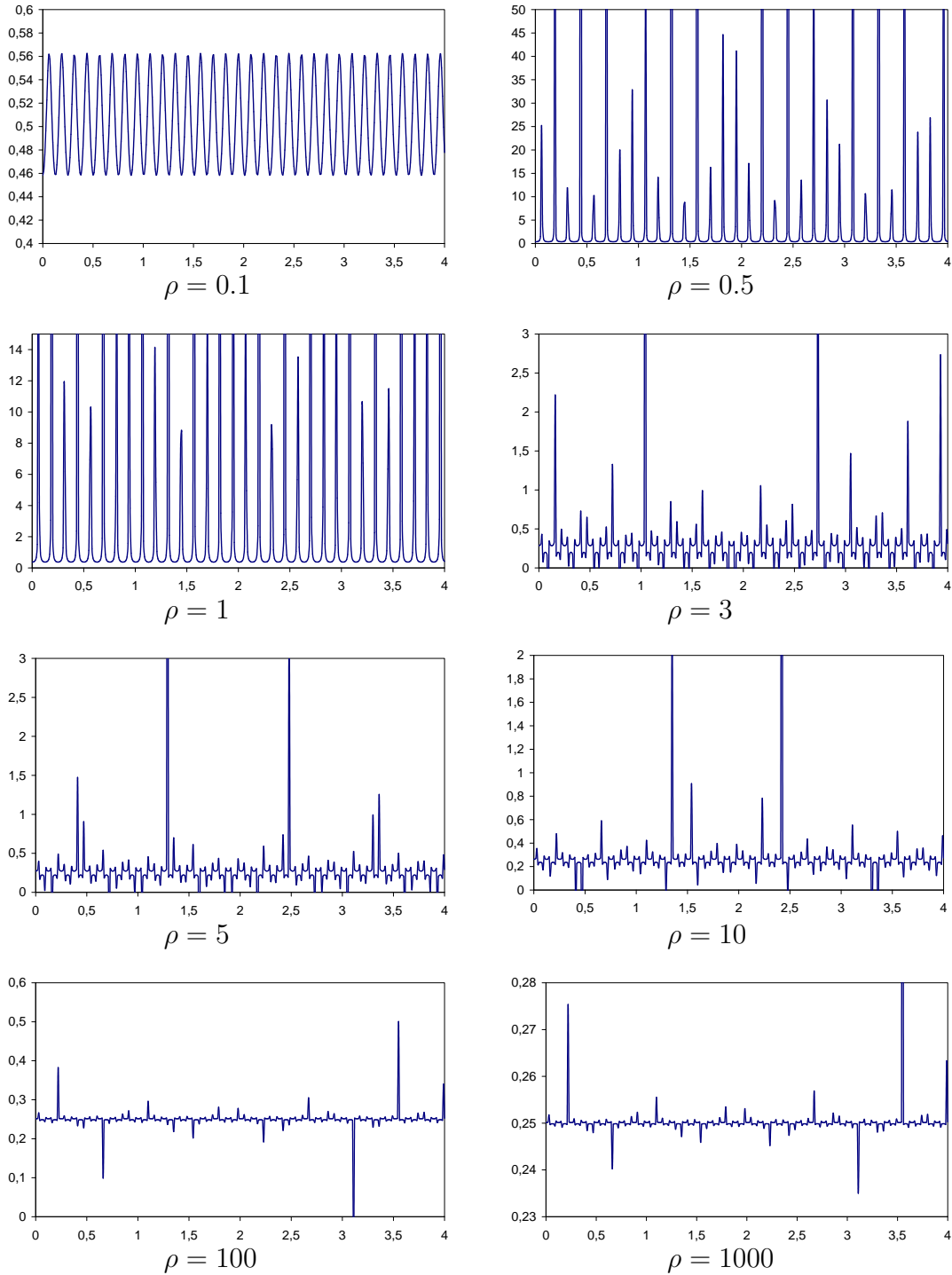


FIGURE 8.3 – Rayon de résonance  $r_0(t)$  en fonction du temps pour le cas d'un champ fluctuant avec champ moyen pour  $m = 1$ ,  $k = -1$ ,  $\bar{\Gamma} = 1$ ,  $\bar{\Gamma} = 2$ ,  $w_f = 50$ ,  $(\bar{r}_0 = 0.5, \tilde{r}_0 = 0.25)$ ,  $\rho = 0.1$  à  $\rho = 1000$ . (Cette configuration correspond à la courbe (e) de la figure (4) de gauche du papier [Peyrot et al. \(2007\)](#))

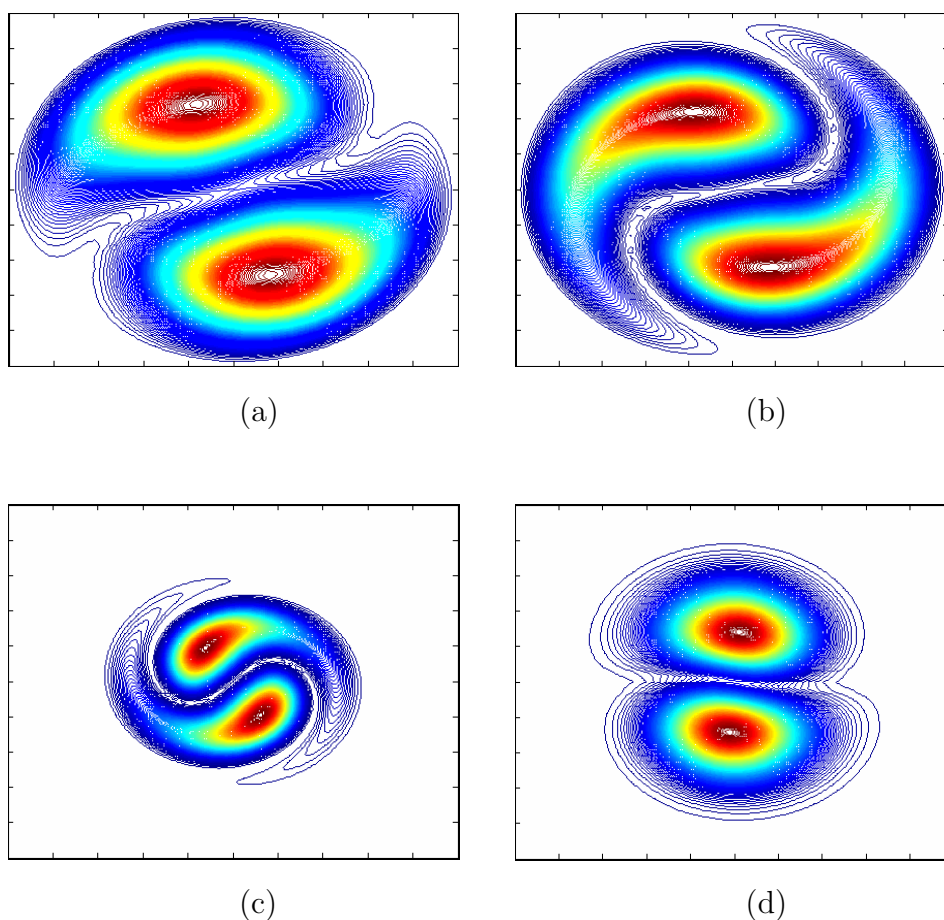


FIGURE 8.4 – Isovaleurs de l'énergie magnétique pour  $\bar{R}_m$  critique dans le plan  $z = \text{constante}$  dans le cas du cisaillement fini. Le cas (a) représente le cas stationnaire pour  $m = 1$ ,  $k = -1$ ,  $\bar{\Gamma} = 1$ ,  $(\bar{r}_0 = 0.5)$ . Les cas (b), (c) et (d) représentent le cas d'un champ fluctuant avec champ moyen pour  $m = 1$ ,  $k = -1$ ,  $\bar{\Gamma} = 1$ ,  $\tilde{\Gamma} = 2$ ,  $w_f = 50$ ,  $(\bar{r}_0 = 0.5, \tilde{r}_0 = 0.25)$ , avec  $\rho = 0.6$  (courbe b),  $\rho = 3$  (courbe c) et  $\rho = 10$  (courbe d). L'échelle de la boîte de visualisation est de 1 sur 1. (Cette configuration correspond à la courbe (e) de la figure 4 de gauche du papier [Peyrot et al. \(2007\)](#))

on observe une diminution du seuil de l'ordre de 40% entre  $\rho = 0$  et  $\rho = 1$ . Pour tous les autres cas, nous avons observé une augmentation du seuil.

Un des enjeux de ce travail aurait été de trouver une configuration pour laquelle on observe systématiquement une dynamo sous critique, *i.e* une diminution du seuil pour une faible amplitude des fluctuations.

Après avoir fait cette étude pour  $f(t) = g(t)$ , il nous a paru logique de tester un champ de vitesse possédant une double dépendance temporelle pour lequel la composante azimutale du champ de vitesse a une dépendance temporelle différente de la dépendance verticale. Ainsi, les fonctions azimutales et verticales ont la forme suivante (dans le cas du cisaillement fini) :

$$\Omega(r)F(t) = \left( \bar{R}_m + \tilde{R}_m f(t) \right) (1 - r), \quad V(r)G(t) = \left( \bar{R}_m \bar{\Gamma} + \tilde{R}_m \tilde{\Gamma} g(t) \right) (1 - r^2) \quad (8.2)$$

avec  $f(t) = \cos(a\bar{\omega}_0 t)$  et  $g(t) = \cos(b\bar{\omega}_0 t + \phi)$ , où  $\bar{\omega}_0$  correspond à la fréquence propre du champ magnétique dans le cas  $\rho = 0$ ,  $a, b$  prennent les valeurs  $1/2; 1; 2$  et  $\phi$ , *i.e* le déphasage, vaut  $0$  ou  $\pi$ .

Nous avons exploré cette large gamme de paramètres en observant systématiquement une augmentation drastique du seuil, même pour de faibles intensités des fluctuations.

Pour un tel champ de vitesse (8.2), si nous traçons  $r_0(t)$ , nous observons que quels que soient les paramètres,  $a, b$  et  $\phi$  envisagés, la condition de résonance n'est pas vérifiée,  $r_0(t)$  étant largement supérieur à 1 (ce qui explique l'augmentation très importante du seuil).

Ainsi, pour trouver une dépendance temporelle du champ de vitesse susceptible d'être favorable à l'effet dynamo, il est nécessaire d'étudier la fonction  $r_0(t)$  donnant l'expression analytique du rayon de résonance, pour qu'en moyenne dans le temps, ce rayon satisfasse la relation de résonance.

En procédant cette manière, nous pourrions peut être trouver une configuration pour laquelle nous pourrions obtenir une dynamo sous critique.

### 8.2.3 Comportement du seuil à faible amplitude de modulation

#### Régime haute fréquence de forçage

Pour de faibles valeurs de l'amplitude de modulation on tronque le système (4.16) pour ne conserver que les modes  $n = 0$  et  $n = \pm 1$ . On obtient alors la relation de dispersion suivante

$$\mathcal{F}_0 + \rho^2 \left( \frac{\bar{R}_m}{4} \right)^2 (\mathcal{R}_0^+ - \mathcal{R}_0^-) \left( \frac{\mathcal{R}_{-1}^+ - \mathcal{R}_{-1}^-}{\mathcal{F}_{-1}} + \frac{\mathcal{R}_{+1}^+ - \mathcal{R}_{+1}^-}{\mathcal{F}_{+1}} \right) = 0 \quad (8.3)$$

Dans le cas non modulé les modes neutres apparaissent au seuil  $\bar{R}_m = R_0$  avec la fréquence  $\omega_0$ , la relation de dispersion étant  $\mathcal{F}_0(R_0, \omega_0) = 0$ . Dans le cas modulé et pour de faibles valeurs de l'amplitude de modulation, on peut résoudre (8.3) perturbativement en posant  $\bar{R}_m = R_0 + \delta R$  et  $\omega = \omega_0 + \delta \omega$ . Au premier ordre des perturbations, la quantité

$\mathcal{F}_0$  admet le développement suivant

$$\mathcal{F}_0(\bar{R}_m, \omega) = \mathcal{F}_0(R_0, \omega_0) + \delta\bar{R}_m \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \bar{R}_m} + \delta\omega \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \omega} + \dots$$

et pour  $\delta R$  et  $\delta\omega$  réels, la relation de dispersion (8.3) s'écrit

$$\delta R \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \bar{R}_m} + \delta\omega \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \omega} = -\rho^2 \left( \frac{R_0}{4} \right)^2 \alpha_0 \left( \frac{\alpha_{-1}}{\mathcal{F}_{-1}} + \frac{\alpha_{+1}}{\mathcal{F}_{+1}} \right) \quad (8.4)$$

où l'on a introduit les quantités  $\alpha_n = \mathcal{R}_n^+ - \mathcal{R}_n^-$ . La dérivée partielle de  $\mathcal{F}_0$  par rapport à  $\omega$  vaut

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \omega} = -\frac{1}{\alpha_0} \left[ (C_0^+)^2 \frac{\partial \mathcal{R}_0^+}{\partial \omega} - (C_0^-)^2 \frac{\partial \mathcal{R}_0^-}{\partial \omega} \right] \equiv -\frac{i}{\alpha_0} \mathcal{I}_0$$

où la quantité entre parenthèse est, au facteur  $i$  près, identique à l'intégrale  $\mathcal{I}_0$  calculée dans (Normand (2003)), comme on peut le vérifier en remarquant que les quantités :

$$\frac{\partial \mathcal{R}_0^\pm}{\partial \omega} = \frac{i}{2} \left( 2(1 \pm m) \left[ \frac{I_m}{qI_\pm} + \frac{K_m}{sK_\pm} \right] + \frac{K_m^2}{K_\pm^2} - \frac{I_m^2}{I_\pm^2} \right) \quad (8.5)$$

sont identiques aux intégrales  $\langle (\Psi_0^\pm)^2 \rangle$  calculées sur l'intervalle  $0 < r < \infty$  (Normand, 2003). Lorsque  $\mu = 0$  et  $m = 1$  on a

$$\mathcal{I}_0 = \frac{R_0^2 \alpha_0^2}{2 s_0^2} (I_1(s_0)K_1(s_0) - I_2(s_0)K_2(s_0)) \quad (8.6)$$

que l'on calcule numériquement pour les valeurs critiques  $R_0$  et  $\omega_0$ . La dérivée partielle de  $\mathcal{F}_0$  par rapport à  $\bar{R}_m$  vaut

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \bar{R}_m} = -\frac{1}{\alpha_0} \left[ (C_0^+)^2 \frac{\partial \mathcal{R}_0^+}{\partial \bar{R}_m} - (C_0^-)^2 \frac{\partial \mathcal{R}_0^-}{\partial \bar{R}_m} \right] - \frac{i}{2} \alpha_0$$

avec

$$\frac{\partial \mathcal{R}_0^\pm}{\partial \bar{R}_m} = -\frac{i\mu}{2} \left( 2(1 \pm m) \frac{I_m}{qI_\pm} + 1 - \frac{I_m^2}{I_\pm^2} \right) \quad (8.7)$$

qui s'annulent lorsque  $\mu = 0$ . Les deux quantités ci-dessus sont au facteur  $i\mu$  près identiques aux intégrales  $\langle (\Psi_0^\pm)^2 \rangle_1$  calculées sur l'intervalle  $0 < r < 1$  dans POF03. Pour résoudre (8.4) on posera

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \bar{R}_m} = -i\alpha_0(f_1 + if_2), \quad \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial \omega} = -i\alpha_0(g_1 + ig_2), \quad \frac{\alpha_{-1}}{\mathcal{F}_{-1}} + \frac{\alpha_{+1}}{\mathcal{F}_{+1}} = X + iY$$

L'écart au seuil et l'écart en fréquence se comportent comme le carré de l'amplitude de modulation, avec  $\delta R = \rho^2 R_2$ ,  $\delta\omega = \rho^2 \omega_2$  et

$$R_2 = \left( \frac{R_0}{4} \right)^2 \frac{Xg_1 + Yg_2}{f_1g_2 - f_2g_1} \quad \omega_2 = \left( \frac{R_0}{4} \right)^2 \frac{Xf_1 + Yf_2}{f_1g_2 - f_2g_1} \quad (8.8)$$

expressions équivalentes à celles obtenues de manière différente dans POF03. Dans le cas général il n'y a pas de relation évidente entre le signe de  $\delta R$  et la fréquence de forçage,

mais dans la limite haute fréquence  $\omega_f \gg \omega_0$  on peut statuer sur le signe de  $\delta R$ . On remarquera tout d'abord que la quantité  $f_1 g_2 - f_2 g_1$  au dénominateur a un signe bien défini car elle est proportionnelle au taux de croissance de la dynamo lorsqu'on s'écarte du seuil de  $\delta R = \bar{R}_m - R_0$  dans le cas non modulé. En effet, lorsque  $\rho = 0$ , on doit considérer la relation (8.4) pour des valeurs complexes de  $\delta\omega = \omega_1 + i\sigma_1$  où  $\omega_1$  est l'écart en fréquence et  $\Re(p) = -\sigma_1$  le taux de croissance de la dynamo, avec

$$\sigma_1 = \delta R \frac{f_1 g_2 - f_2 g_1}{g_1^2 + g_2^2} \quad (8.9)$$

Pour des valeurs de  $\bar{R}_m$  supérieures au seuil  $R_0$ , soit  $\delta R > 0$  on doit avoir  $\Re(p) > 0$  soit  $\sigma_1 < 0$  et donc  $f_1 g_2 - f_2 g_1 < 0$ . Connaissant la valeur numérique de  $\mathcal{I}_0$  qui ne dépend que des paramètres critiques du cas non modulé, il reste à évaluer le terme dans le membre de droite de (8.4) ce qui peut être fait explicitement dans le cas des fréquences de forçage élevées en utilisant le développement des fonctions de Bessel aux grands arguments. Dans le cas simple où  $\mu = 0$  et  $q_{\pm 1} = s_{\pm 1} \approx (\omega_f \pm \omega_0)^{1/2} (1 \pm i)/\sqrt{2}$  on utilise le comportement asymptotique :  $\alpha_{\pm 1}/\mathcal{F}_{\pm 1} \rightarrow (s_{\pm 1})^{-3}$  et on obtient

$$\frac{\alpha_{-1}}{\mathcal{F}_{-1}} + \frac{\alpha_{+1}}{\mathcal{F}_{+1}} = -\sqrt{2}\omega_f^{-3/2} \left(1 - i\frac{3\omega_0}{2\omega_f}\right) \quad (8.10)$$

donc la partie réelle  $X$  et la partie imaginaire  $Y$  sont de signe opposé. On a vérifié que cette approximation est valable dès  $\omega_f = 25 \approx 6\omega_0$ . Dans le cas  $\mu = 0$  on a  $f_1 = 1/2$  et  $f_2 = 0$  et l'expression de  $R_2$  se simplifie en

$$R_2 = \frac{R_0^2}{8} \left( X \frac{g_1}{g_2} + Y \right) \approx -\frac{R_0^2}{4\sqrt{2}} \omega_f^{-3/2} \left( \frac{g_1}{g_2} - \frac{3\omega_0}{2\omega_f} \right)$$

Pour la valeur des nombres d'onde  $m = -k = 1$  on a  $g_1/g_2 = 1.626$  et donc  $R_2 < 0$  quand  $\omega_f \rightarrow \infty$ .

### Forçage à fréquence double : $\omega_f = 2\omega_0$

La valeur  $\omega_f = 2\omega_0$  est très particulière car elle correspond à  $s_{-1}^2 = k^2 - i\omega_0 = (s_0^2)^*$  et donc  $\alpha_{-1} = \alpha_0^*$  et  $\mathcal{F}_{-1} = -iR_0\alpha_0^*$ . On a donc  $\alpha_{-1}/\mathcal{F}_{-1} = i/R_0$  qui est purement imaginaire. Dans le cas du forçage à fréquence double, on évalue le terme  $\alpha_{+1}/\mathcal{F}_{+1}$  en utilisant le développement des Bessel aux grands arguments. En effet  $s_{+1}^2 = k^2 + 3i\omega_0$  et pour  $\omega_0 \gg k^2$  on a l'approximation  $s_{+1} = (3\omega_0/2)^{1/2}(1 + i)$ .

### Régime basse fréquence

Pour étudier ce régime, on évalue le membre de droite de l'Eq. (8.4) dans la limite  $\omega_f \rightarrow 0$ . On effectue des développements des quantités  $\alpha_{\pm 1} \equiv \alpha(\omega_0 \pm \omega_f)$  et  $\mathcal{F}_{\pm 1} = \mathcal{F}(\omega_0 \pm \omega_f)$  que

$\bar{\Gamma}$	$R_2$
0.6	-66.65
0.62	-3.322
0.7	1.902
0.8	1.009
1	1.576
1.3	5.899

TABLE 8.1 – Valeurs de  $R_2$  dans la limite  $\omega_f \rightarrow 0$ , pour différentes valeurs de  $\bar{\Gamma}$  et  $m = 1$ ,  $k = -1$ ,  $\tilde{\Gamma} = 1$ .

l'on tronque à l'ordre  $\omega_f^2$

$$\alpha(\omega_0 \pm \omega_f) = \alpha(\omega_0) \pm \omega_f \alpha' + \frac{\omega_f^2}{2} \alpha'' \quad (8.11)$$

$$\mathcal{F}(\omega_0 \pm \omega_f) = \mathcal{F}(\omega_0) \pm \omega_f \mathcal{F}' + \frac{\omega_f^2}{2} \mathcal{F}'' \quad (8.12)$$

avec  $\alpha(\omega_0) = \alpha_0$  et  $\mathcal{F}(\omega_0) = \mathcal{F}_0 = 0$ . Il vient

$$\frac{\alpha_{\pm 1}}{\mathcal{F}_{\pm 1}} = \pm \frac{\alpha_0}{\omega_f \mathcal{F}'} + \left( \frac{\alpha'}{\mathcal{F}'} - \frac{\alpha_0}{2} \frac{\mathcal{F}''}{(\mathcal{F}')^2} \right) \pm \mathcal{O}(\omega_f) \quad (8.13)$$

On constate que chacun des termes  $\alpha_1/\mathcal{F}_1$  et  $\alpha_{-1}/\mathcal{F}_{-1}$  diverge en  $\omega_f^{-1}$ , c'est la singularité basse fréquence souvent mentionnée dans la littérature. Dans le cas présent c'est la somme des deux termes que l'on calcule et donc tous les termes précédés du signe  $\pm$  et impairs en  $\omega_f$  disparaissent dans la somme. Il reste à l'ordre le plus bas un terme constant :

$$\left( \frac{\alpha_{-1}}{\mathcal{F}_{-1}} + \frac{\alpha_{+1}}{\mathcal{F}_{+1}} \right) = \left( 2 \frac{\alpha'}{\mathcal{F}'} - \alpha_0 \frac{\mathcal{F}''}{(\mathcal{F}')^2} \right) + \mathcal{O}(\omega_f^2) \quad (8.14)$$

que l'on a évalué pour plusieurs valeurs du paramètre  $\bar{\Gamma}$ . Les résultats correspondant pour  $R_2$  qui figurent dans la Table 1 sont en très bon accord avec ceux obtenus par l'analyse en développement de Fourier, voir en particulier figure 8(f) de notre article pour le cas  $\bar{\Gamma} = 1$ . Il faut noter que pour obtenir les résultats de la Table 1, une grande précision de calcul est nécessaire sinon l'exacte compensation des termes divergents ne se produit pas.





## Chapitre 9

# Etude de la dynamo de Roberts modulée périodiquement en temps

Comme le champ de vitesse de Ponomarenko, le champ de vitesse de Roberts a été largement étudié, autant d'un point de vue théorique que numérique et expérimental. Nous avons donc à notre disposition un solide benchmark théorique et numérique. Les mécanismes mis en jeu dans la dynamo de Roberts sont très différents de ceux de la dynamo de Ponomarenko. En effet, d'une part, la dynamo de Roberts génère un champ magnétique stationnaire et d'autre part, l'échelle à laquelle est générée le champ magnétique est beaucoup plus grande que l'échelle spatiale du champ de vitesse. Il nous a paru très intéressant au regard de ce dernier point, d'étudier l'influence des fluctuations de vitesse sur le seuil de l'instabilité dynamo en adoptant la même démarche que celle menée sur l'étude de la dynamo de Ponomarenko. Nous pourrions ainsi enrichir le travail sur la dynamo Ponomarenko pour laquelle nous rappelons que l'échelle du champ de vitesse est comparable à l'échelle à laquelle est générée le champ magnétique.

Ce dernier chapitre est donc un peu à part du manuscrit car nous n'y avons pas étudié un champ de vitesse hélicoïdal. Nous avons étudié ici le champ de vitesse de Roberts modulé périodiquement dans le temps. Il reste encore beaucoup de travail sur cette partie, notamment d'un point de vue théorique. Toutefois, nous avons ici retranscrit les résultats obtenus.

Pour résoudre ce problème, nous avons utilisé un code numérique écrit et développé par Alice Courvoisier pendant sa thèse ([Courvoisier \(2006\)](#)). Ce code, écrit en fortran 90, utilise pour la résolution spatiale une décomposition de Fourier en  $x$  et  $y$  et pour la résolution spatiale un schéma de Runge Kutta d'ordre 2.

Nous allons décrire de manière succincte la méthode utilisée pour résoudre ce problème. Le lecteur trouvera le détail des calculs et la description du code numérique dans la thèse d'A. Courvoisier ([Courvoisier \(2006\)](#)).

L'objet de ce chapitre fait suite à l'étude réalisée à l'aide de ce même code par Cyrille Fargant lors de son stage de Master 2 avec Franck Plunian ([Fargant & Plunian \(2005\)](#)).

---

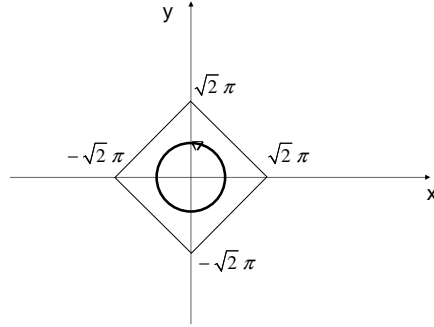


FIGURE 9.1 – Champ de vitesse de Roberts étudié.

## 9.1 Modèle numérique

Dans la première partie de ce manuscrit, nous avons présenté dans l'équation (1.53) le champ de vitesse de Roberts stationnaire sous sa forme écrite classiquement. Dans le but de comparer nos résultats à ceux obtenus avec la dynamo de Ponomarenko modulée dans le temps, nous avons ré-écrit ce champ de vitesse en y introduisant une dépendance temporelle. Le champ de vitesse est ainsi composé de la somme d'un écoulement de type Roberts stationnaire et d'un écoulement de même type mais fluctuant périodiquement dans le temps. En coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , ce champ de vitesse s'écrit :

$$\mathbf{U} = \nabla \times (\psi \mathbf{e}_z) + V \mathbf{e}_z, \quad (9.1)$$

$$\psi = \left( \bar{R}_m + \tilde{R}_m f(t) \right) (\cos x - \cos y) \quad , \quad V = \left( \bar{R}_m \bar{\Gamma} + \tilde{R}_m \tilde{\Gamma} f(t) \right) (\cos x - \cos y)$$

où  $\mathbf{e}_z$  est le vecteur unitaire dans la direction verticale  $z$ ,  $\bar{R}_m$  et  $\bar{\Gamma}$  ( $\tilde{R}_m$  et  $\tilde{\Gamma}$  respectivement) sont le nombre de Reynolds magnétique et un facteur d'hélicité de la partie stationnaire (fluctuante respectivement) du champ de vitesse.

Remarque : le champ de vitesse (1.53) correspond bien à celui représenté sur la figure (1.9). Le champ de vitesse défini ici par la formule (9.1), correspond au champ de vitesse représenté dans la figure (9.1). Il résulte d'un changement de repère et d'un rescaling d'un facteur  $\sqrt{2}$  (voir Childress & D.Gilbert (1995) p 116 pour les détails).

Nous considèrerons une fluctuation temporelle périodique de la forme  $f(t) = \cos(\omega_f t)$ , avec  $\omega_f$  la fréquence de la fluctuation.

Le champ magnétique doit satisfaire l'équation de l'induction :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B} \quad (9.2)$$

où nous avons adimensionné le temps  $t$  par le temps de diffusion du champ magnétique, ce qui implique que  $\omega_f$  est aussi une quantité adimensionnelle.

Comme le champ de vitesse ne dépend pas de  $z$ , chaque mode magnétique évolue indépendamment les uns des autres. Ainsi, nous cherchons une solution de la forme suivante :

$$\mathbf{B}(x, y, z, t) = \exp(ikz) \mathbf{b}(x, y, t) \quad (9.3)$$

où  $k$  est le nombre d'onde vertical du champ magnétique.

De cette manière, nous pouvons remplacer dans (9.2) l'opérateur  $\nabla$  par  $(\partial_x, \partial_y, ik)$ . L'équation (9.2) devient donc :

$$\partial_t \mathbf{b} + (k^2 - \nabla_{xy}^2) \mathbf{b} = \nabla_{xy} \times (\mathbf{U} \times \mathbf{b}) + ik \mathbf{e}_z \times (\mathbf{U} \times \mathbf{b}) - 2ik(\mathbf{e}_z \cdot \nabla_{xy}) \mathbf{b} \quad (9.4)$$

où  $\nabla_{xy} = (\partial_x, \partial_y, 0)$  et  $\mathbf{e}_z = (0, 0, 1)$ .

La projection de (9.4) sur  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$  ne fait intervenir que  $\mathbf{b}_x$  et  $\mathbf{b}_y$ . Nous résoudrons seulement les équations en  $\mathbf{b}_x$  et  $\mathbf{b}_y$ , la composante verticale  $\mathbf{b}_z$  sera déterminée en utilisant la relation de solénoïdité  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  qui implique :

$$\partial_x b_x + \partial_y b_y + ik b_z = 0. \quad (9.5)$$

Nous allons faire un développement de Fourier des termes  $\mathbf{b}_x$  et  $\mathbf{b}_y$  :

$$\mathbf{b}(x, y, t) = \sum_{p,q} \mathbf{b}_{pq}(t) \cdot e^{ipx+iqy} \quad (9.6)$$

Pour un couple  $(p, q)$  l'équation (9.2) devient :

$$(\partial_t + (k^2 + p^2 + q^2)) b_{pq}(t) = \mathbf{F}_{pq}(t) \quad (9.7)$$

où  $\mathbf{F}_{pq}(t)$  est la transformée de Fourier du membre de droite. En multipliant par  $e^{(k^2+p^2+q^2)t}$  on obtient :

$$\frac{d}{dt} (b_{pq}(t) e^{(k^2+p^2+q^2)t}) = e^{(k^2+p^2+q^2)t} \cdot \mathbf{F}_{pq}(t) \quad (9.8)$$

On résout alors ce système avec un schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 (point milieu) :

$$\mathbf{b}(t + \frac{dt}{2}) e^{(k^2+p^2+q^2)(t+\frac{dt}{2})} = \mathbf{b}(t) e^{(k^2+p^2+q^2)t} + \frac{dt}{2} \mathbf{F}(t) \quad (9.9)$$

soit

$$\mathbf{b}(t + \frac{dt}{2}) = e^{-(k^2+p^2+q^2)\frac{dt}{2}} (\mathbf{b}(t) + \frac{dt}{2} \mathbf{F}(t)) \quad (9.10)$$

De même, on a :

$$\mathbf{b}(t + dt) = e^{-(k^2+p^2+q^2)\frac{dt}{2}} (e^{-(k^2+p^2+q^2)\frac{dt}{2}} \mathbf{b}(t) + dt \cdot \mathbf{F}(t + \frac{dt}{2})) \quad (9.11)$$

où  $\mathbf{F}(t + \frac{dt}{2})$  est calculé avec  $\mathbf{b}(t + \frac{dt}{2})$  et  $\mathbf{U}(t + \frac{dt}{2})$ . On note ici que l'on calcule les termes croisés  $\mathbf{U} \times \mathbf{B}$  dans l'espace réel et non dans l'espace de Fourier.

A chaque pas de temps on calcule le logarithme de l'énergie magnétique (définie par  $\mathbf{b}^2(t)/2$ ). On détermine ensuite le taux de croissance de l'énergie magnétique en utilisant une régression aux moindres carrés. Le seuil de l'instabilité dynamo correspond aux valeurs de  $\bar{R}_m$ ,  $\tilde{R}_m$ ,  $\bar{\Gamma}$ ,  $\tilde{\Gamma}$  and  $k$  pour lesquelles le taux de croissance de l'énergie magnétique est égal à zéro.

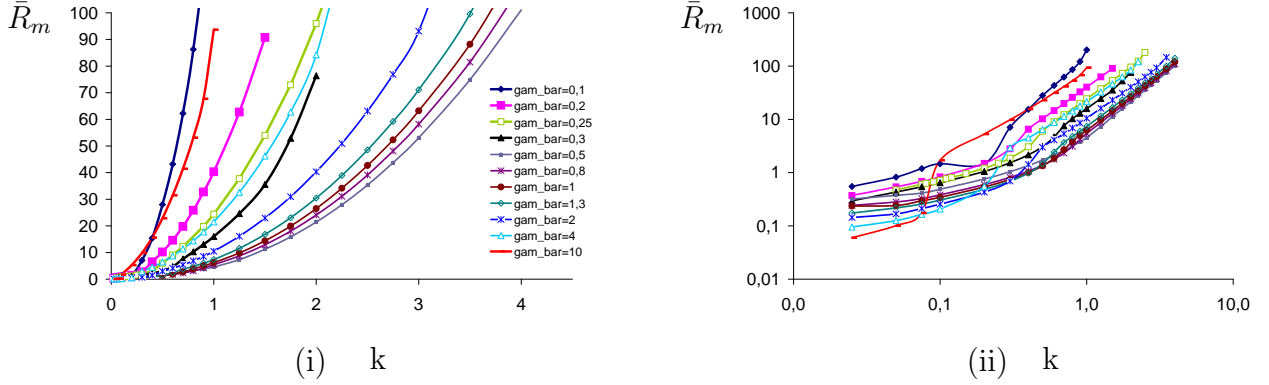


FIGURE 9.2 –  $\bar{R}_m$  critique en fonction de  $k$ , ((i) échelle normale, (ii) échelle logarithmique) dans le cas stationnaire pour  $\bar{\Gamma} = 0.1; 0.2; 0.25; 0.3; 0.5; 0.8; 1; 1.3; 2; 4; 10$ .

## 9.2 Résultats

### 9.2.1 Cas stationnaire

Il s'agit du cas particulier du modèle précédent, obtenu en posant  $\tilde{R}_m = 0$ .

Sur la figure (9.2 (i) et (ii)), nous avons représenté le seuil de l'instabilité dynamique  $\bar{R}_m$  en fonction de  $k$ , pour différentes valeurs de  $\bar{\Gamma}$ .

Quelle que soit la valeur de  $\bar{\Gamma}$ , nous trouvons que le seuil augmente avec  $k$ . Le cas optimum, *i.e* celui correspondant au seuil le plus bas, est obtenu pour  $\bar{\Gamma} = 0.5$ .

En utilisant une échelle logarithmique (ii), nous observons pour  $\bar{\Gamma} = 0.1; 0.2; 10$ , un saut du seuil pour  $0.1 < k < 1$ .

### 9.2.2 Champ fluctuant sans champ moyen

#### Seuil de l'instabilité dynamo en fonction de la fréquence pour $k=1$

Dans ce cas :  $\bar{R}_m = 0$  et  $\tilde{R}_m \neq 0$ . Sur la figure (9.3), nous avons représenté le seuil de l'instabilité dynamo  $\tilde{R}_m$  en fonction de  $\omega_f$ . Nous avons fixé le nombre d'onde vertical  $k$  à 1. Nous avons choisi cinq géométries différentes pour la partie fluctuante :  $\tilde{\Gamma} = 0.25; 0.5; 1; 2; 4$ . A part pour le cas  $\tilde{\Gamma} = 0.25$ , nous trouvons que le seuil est quasi constant pour  $\omega_f$  inférieur à 0.1 et augmente drastiquement pour des valeurs plus grandes de la fréquence de forçage. Pour le cas  $\tilde{\Gamma} = 0.25$  (voir courbes verte de la figure (9.3)), nous trouvons deux pics significatifs pour le seuil de la dynamo pour  $\omega_f \approx 0.06; 0.125$ . Nous remarquons aussi que pour la fréquence  $\omega_f = 0.1$ , le seuil  $\tilde{R}_m$  est supérieur à celui du cas stationnaire correspondant

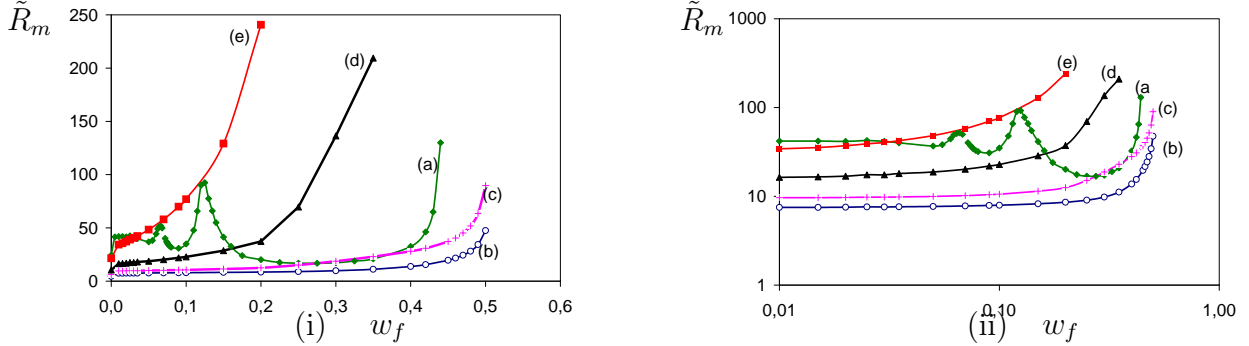


FIGURE 9.3 –  $\tilde{R}_m$  critique en fonction de  $w_f$  pour  $k=1$ , ((i) échelle normale, (ii) échelle logarithmique) pour un champ fluctuant sans champ moyen ( $\bar{R}_m = 0$ ). Les courbes (a), (b), (c), (d) et (e) correspondent à  $\tilde{\Gamma} = 0.25; 0.5; 1; 2; 4$ , respectivement.

à la même géométrie ( $\tilde{R}_m = 35$  à comparer avec 24.41 pour le cas stationnaire). Au contraire, pour  $w_f = 0.25$ , le seuil  $\tilde{R}_m$  est inférieur à celui du cas stationnaire pour la même géométrie ( $\tilde{R}_m = 16.88$  à comparer avec 24.41 pour le cas stationnaire).

### Seuil de l'instabilité dynamo en fonction de $k$ pour $w_f = 0.1$ et $0.25$

Nous avons représenté sur la figure (9.4),  $\tilde{R}_m$  critique en fonction de  $k$  pour deux valeurs de la fréquence de forçage  $\omega_f = 0.1; 0.25$ . Nous avons étudié cinq géométries différentes de la partie fluctuante,  $\tilde{\Gamma} = 0.25; 0.5; 1; 2; 4$ .

Comme pour le cas stationnaire, nous avons trouvé pour les deux fréquences que le seuil augmentait avec  $k$ , le cas optimum est obtenu pour  $\tilde{\Gamma} = 0.5$ .

Pour pouvoir comparer ces résultats avec ceux obtenus pour le champ de vitesse stationnaire (i.e.  $\tilde{R}_m=0$ ), nous avons représenté sur la même figure, le seuil de la dynamo  $\bar{R}_m$  en fonction de  $k$  pour les géométries correspondantes ( $\tilde{\Gamma} = 0.25; 0.5; 1; 2; 4$ ).

Sauf pour le cas  $\omega_f = 0.25$  et  $\tilde{\Gamma} = 0.25$ , nous trouvons que le seuil pour un champ fluctuant sans champ moyen est supérieur à celui du cas stationnaire. Pour la fréquence  $\omega_f = 0.25$  et  $\tilde{\Gamma} = 0.25$ , c'est le contraire. Ce résultat est en accord avec ceux obtenus sur la figure (9.3).

### 9.2.3 Champ fluctuant avec champ moyen

Dans ce cas, nous avons pris dans notre modèle  $\tilde{R}_m \neq 0$  et  $\bar{R}_m \neq 0$ .

Sur la figure (9.5), nous avons représenté  $\bar{R}_m$  en fonction de l'intensité des fluctuations  $\rho$ , qui est défini par  $\rho = \tilde{R}_m/\bar{R}_m$ , pour deux valeurs de  $\omega_f$ ,  $\omega_f = 0.1; 0.25$ . Nous avons fixé le nombre d'onde vertical  $k = 1$  et la géométrie de la partie stationnaire telle que  $\tilde{\Gamma} = 1$ .

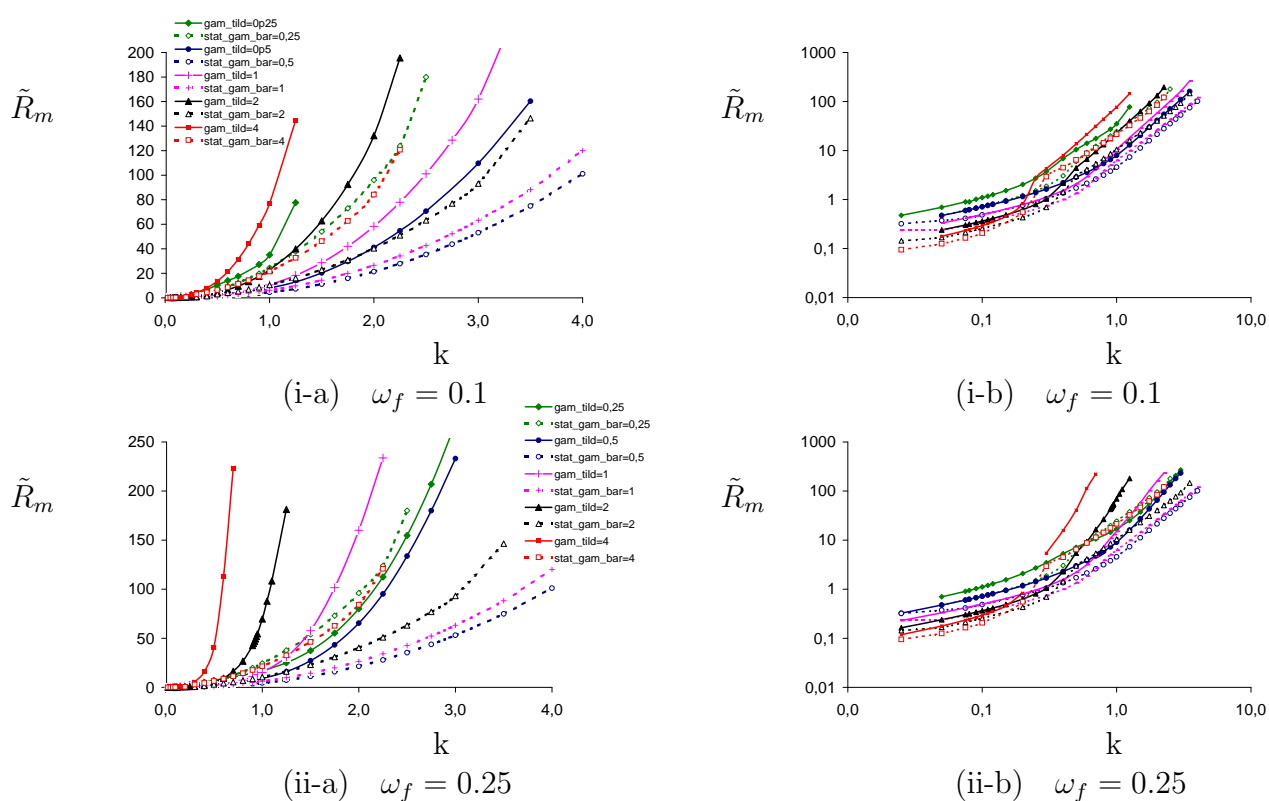


FIGURE 9.4 –  $\tilde{R}_m$  critique en fonction de  $k$  pour  $\omega_f=0.1$  ((i-a) échelle normale, (i-b) échelle logarithmique) ; et pour  $\omega_f=0.25$  ((ii-a) échelle normale, (ii-b) échelle logarithmique) ; pour  $\tilde{\Gamma} = 0.25; 0.5; 1; 2; 4$  (en **trait plein**).  $\tilde{R}_m$  critique en fonction de  $k$  pour le cas stationnaire ( $\tilde{R}_m=0$ ), pour  $\tilde{\Gamma} = 0.25; 0.5; 1; 2; 4$ . en **traits pointillés**)

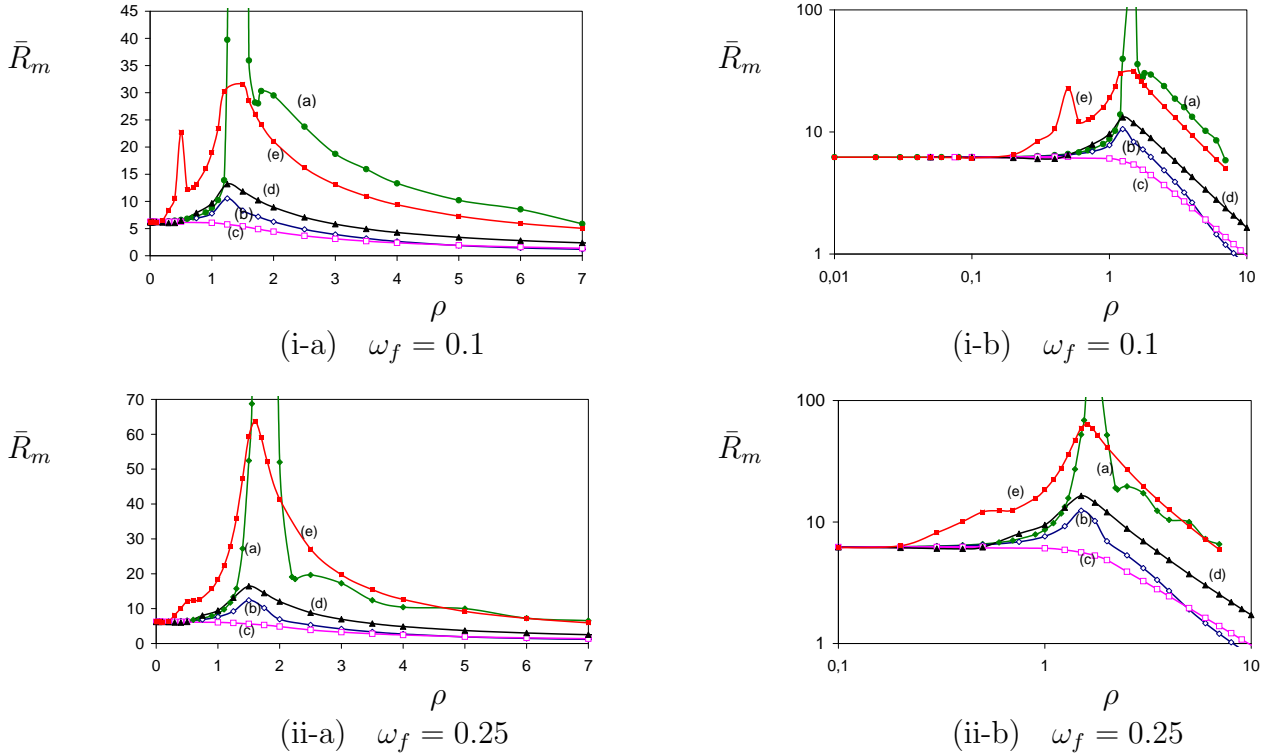


FIGURE 9.5 –  $\bar{R}_m$  critique en fonction de  $\rho = \tilde{R}_m/\bar{R}_m$ , pour  $\omega_f = 0.1$  ( (i-a) échelle normale, (i-b) échelle logarithmique) et pour  $\omega_f = 0.25$  ( (ii-a) échelle normale, (ii-b) échelle logarithmique). Les courbes (a), (b), (c), (d) et (e) correspondent à  $\tilde{\Gamma} = 0.25; 0.5; 1; 2; 4$ , respectivement.

Nous étudierons cinq géométries différentes de la partie fluctuante,  $\tilde{\Gamma} = 0.25; 0.5; 1; 2; 4$ . Quelle que soit la géométrie de la partie fluctuante, nous trouvons que le seuil augmente avec l'intensité des fluctuations, même pour de faibles valeurs de celles-ci. De plus, il existe deux configurations particulières de la géométrie du champ fluctuant,  $\tilde{\Gamma} = 0.25$  et  $\tilde{\Gamma} = 4$ , pour lesquelles le seuil augmente drastiquement.

Enfin, si  $\rho$  est suffisamment grand, le seuil diminue avec  $\rho$ , quelle que soit la valeur de  $\tilde{\Gamma}$ .

Pour les mêmes raisons que celles invoquées dans le chapitre précédent (voir paragraphe 8.2.1), nous avons retracé les figures (ia) et (ib) de la figure ci-dessus (9.5) en terme de  $\bar{R}_m(1 + \rho)$  en fonction de  $\rho$ , au lieu de  $\bar{R}_m$  en fonction de  $\rho$ . Le seuil de la dynamo est représenté par  $\bar{R}_m$  pour de petits  $\rho$  et par le produit  $\bar{R}_m \rho$  (i.e.  $\tilde{R}_m$ ) pour de grands  $\rho$ . Sur la figure (9.6), nous constatons que quelle que soit l'intensité des fluctuations, le seuil augmente.

Dans cette configuration, les fluctuations de grandes échelles semblent ainsi toujours défavorables à la dynamo.



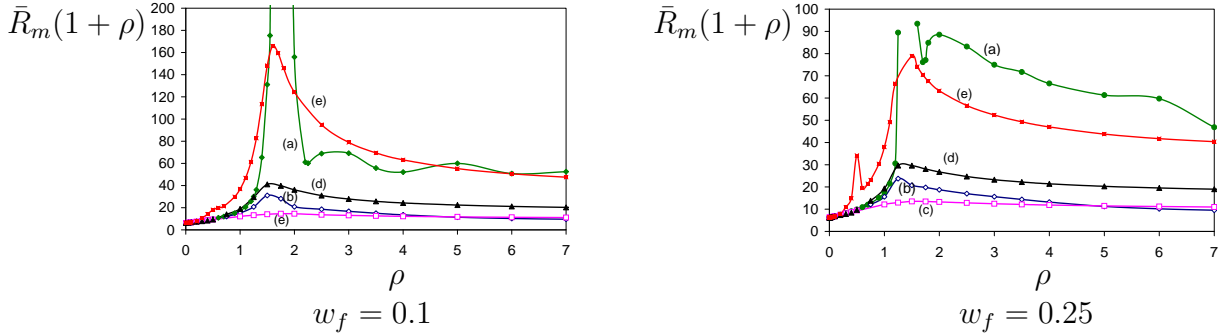


FIGURE 9.6 –  $\bar{R}_m(1 + \rho)$  en fonction de  $\rho$  pour le cas du champ fluctuant avec champ moyen, pour deux fréquences  $\omega_f = 0.1$  et  $\omega_f = 0.25$ . Les courbes (a), (b), (c), (d) et (e) correspondent à  $\tilde{\Gamma} = 0.25; 0.5; 1; 2; 4$ , respectivement.

## 9.3 Interprétation

### 9.3.1 Effet alpha ?

Nous nous sommes posés la question de savoir s’il était possible d’appliquer la théorie du champ moyen au cas non stationnaire. De cette manière, nous aurions pu calculer le seuil à l’aide de l’effet  $\alpha$  et comparer ces résultats à nos résultats numériques. Ce travail avait été commencé par C. Fargant et F. Plunian (Fargant & Plunian (2005)).

Nos premiers calculs menés conjointement avec Alice Courvoisier, conduisent à une contradiction entre les résultats du seuil donnés par la théorie de l’effet  $\alpha$  et ceux donnés par la DNS. Nous avons de forts doutes sur la possibilité d’appliquer la théorie du champ moyen à un champ de vitesse fluctuant dans le temps. Cette étude analytique est à poursuivre.

### 9.3.2 Comment expliquer la présence des pics ?

Nous avons vu que dans certaines configurations du champ de vitesse, il apparaît des augmentations très importantes du seuil (les résultats de la figure (9.5) mettent bien en évidence ces phénomènes). Nous pensons expliquer ces pics, *i.e* ces augmentations drastiques du seuil, par des changements brusques dans l’organisation du champ magnétique. Une de nos hypothèses était que pour de faibles et de grandes intensités des fluctuations, les iso-valeurs de l’énergie magnétique étaient organisées selon un mode propre de style Roberts. Alors qu’au niveau des pics qui apparaissent pour des intensités intermédiaires, les iso-valeurs de l’énergie magnétique seraient organisées différemment, par exemple selon un mode de type Ponomarenko. Pour vérifier cette hypothèse, nous avons tracé les iso-valeurs de l’énergie magnétique dans le plan  $z=\text{constante}$  pour le cas du champ de

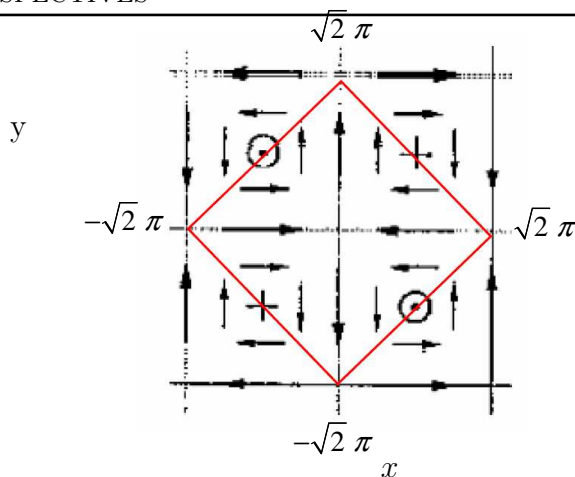


FIGURE 9.7 – Localisation dans les cellules de Roberts de la zone dans laquelle nous avons tracé les iso-valeurs de l'énergie magnétique (en rouge).

vitesse fluctuant avec champ moyen (voir figure (9.7) pour voir la localisation de la cellule de visualisation). En utilisant le logiciel Matlab, nous avons visualisé sous forme de film, l'évolution des iso-valeurs de l'énergie magnétique sur un temps correspondant à une ou deux période(s) du champ de vitesse. Nous avons observé que quelle que soit l'intensité des fluctuations, les iso-valeurs de l'énergie magnétique sont toujours organisées selon une structure de type Roberts. Ainsi l'hypothèse avancée ci dessus ne nous permet pas d'expliquer la présence de ces pics.

Cependant, cette étude reste intéressante et nous a permis de mettre en évidence certains phénomènes. Pour de faibles  $\rho$ , le champ moyen domine par rapport à la partie oscillante du champ de vitesse. Le champ magnétique se fige sur un mode propre de style Roberts, le système est relativement stable. A partir d'une certaine valeur de l'intensité, on observe des bifurcations dans l'organisation du champ magnétique (facilement visualisables à l'aide des films). Nous illustrons ici une bifurcation caractéristique au niveau d'un pic sur la figure (9.8). Cette bifurcation se déroule de la manière suivante : la "langue allongée" orientée dans la diagonale "coin bas gauche/coin haut droit" se rétrécit (cas (i)) jusqu'à se concentrer au niveau d'un point de stagnation (cas (ii)), la bifurcation opère et la "langue" se développe dans la diagonale opposée. Pour de grands  $\rho$ , le champ de vitesse n'est que fluctuant. Nous observons le même type de bifurcation que celle de la figure (9.8).

## 9.4 Perspectives

Ce travail a donné lieu à une publication lors d'une conférence en Juin 2007 à Porto (voir annexe F), dans laquelle nous avons comparé l'influence des fluctuations de grandes échelles sur le seuil de l'instabilité dynamo pour un champ de vitesse hélicoïdal et pour un champ de vitesse cellulaire. Cependant, il nous reste encore beaucoup de travail pour comprendre les résultats obtenus avec le champ de vitesse de type Roberts. Nous pouvons commencer par essayer de comparer qualitativement nos résultats avec les travaux de

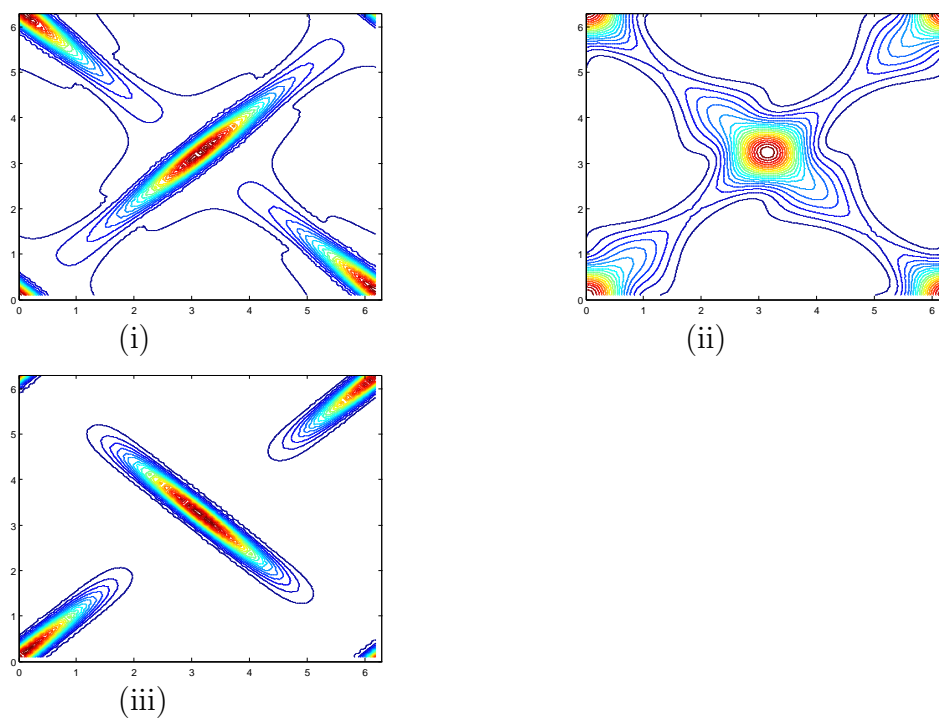


FIGURE 9.8 – Isovaleurs de l'énergie magnétique dans le plan  $z=\text{cte}$ , pour  $\bar{\Gamma} = 1$ ,  $\tilde{\Gamma} = 0.25$ ,  $\rho = 1.55$ ,  $w_f = 0,25$  (cette configuration correspond à la courbe (a) de la figure (9.5) cas (ii-a)), à  $t=46$  (i),  $t=48$  (ii),  $t=50$  (iii) secondes. La période du champ de vitesse est de 25 sec. La taille de la cellule de visualisation est  $[2.\pi \times 2.\pi]$ .

---

François Pétrélis sur cette thématique. En effet, F. Pétrélis a étudié pendant sa thèse (Petrelis (2003)) l'effet d'une modulation périodique sur le champ de vitesse de Roberts. Il a montré analytiquement par une approche perturbative que dans la limite de faibles amplitudes de modulation, le seuil est abaissé si l'écoulement est forcé paramétriquement. Nous ne retrouvons pas ce résultat dans nos calculs, puisque le seuil dans le cas fluctuant est toujours supérieur au cas stationnaire même pour de faibles amplitudes de fluctuation. Nous devrions reprendre les calculs théoriques de Petrelis (2003) et essayer de comprendre pour quelles raisons nos résultats sont différents.

Nous devons aussi déterminer de manière claire, s'il est possible ou pas d'appliquer la théorie du champ moyen à ce champ de vitesse.

Il faudrait aussi étudier l'influence sur le seuil de la phase du champ de vitesse. Nous pourrions de cette manière comparer nos résultats numériques avec les résultats analytiques de F. Pétrélis (Petrelis & Fauve (2006)). Dans notre configuration prendre une phase égale à  $\pi$ , correspond à prendre un pas de la partie fluctuante  $\tilde{\Gamma}$  de valeur négative.

De plus, en modifiant le schéma temporel, nous pourrions aussi étudier l'influence d'un bruit stochastique sur le seuil de l'instabilité dynamo.

---



## Conclusion générale

Dans ce manuscrit, nous avons étudié l'influence de fluctuations de grandes échelles sur le seuil de l'instabilité dynamo. Pour cela, nous avons résolu le problème cinématique pour un champ de vitesse hélicoïdal, auquel nous avons rajouté à sa partie stationnaire, une partie fluctuante dans le temps périodiquement. Nous avons utilisé quatre approches différentes pour résoudre ce problème, l'approche perturbative pour de faibles amplitudes de modulation, une approche basée sur un développement en séries de Fourier pour un pas du champ magnétique égal au pas de la partie fluctuante du champ de vitesse, une approche asymptotique valable pour de grands nombres de Reynolds magnétique, et une approche directe reposant sur une méthode de Galerkin valable quelque soit les paramètres envisagés.

La méthode de Galerkin nous a permis de faire le lien entre toutes ces approches et de valider chacune des approches reposant sur des hypothèses simplificatrices.

De précédentes études sur un champ de vitesse hélicoïdal stationnaire ont montré que pour de grands nombres de Reynolds magnétique, le champ magnétique était généré au niveau d'une surface de résonance. Cette surface est caractérisée par un rayon de résonance qui est lui même déterminé analytiquement par une condition de résonance. D'abord, nous avons vérifié numériquement que cette condition de résonance était bien vérifiée pour des nombres de Reynolds plus faibles correspondant au seuil de l'instabilité dynamo. Nous avons fait ce travail à la fois pour un champ de vitesse stationnaire et pour un champ de vitesse fluctuant dans le temps sans champ moyen.

Pour un champ de vitesse hélicoïdal constitué de la somme d'un champ de vitesse stationnaire et d'un champ de vitesse fluctuant dans le temps, nous avons montré que pour de faibles amplitudes de fluctuations, c'est la condition de résonance portant sur la partie stationnaire qui gouverne la génération du champ magnétique. Alors que pour de grandes intensités des fluctuations, c'est la condition de résonance portant sur la partie fluctuante qui contrôle la génération du champ magnétique. Si la condition de résonance est vérifiée pour la partie stationnaire et pour la partie fluctuante du champ de vitesse, on trouve que pour une valeur de l'intensité des fluctuations du même ordre que celle du champ moyen, le seuil augmente, puis diminue tout en restant toujours supérieur au cas stationnaire de même géométrie. Si la condition de résonance n'est pas vérifiée, alors le seuil augmente drastiquement avec l'intensité des fluctuations.

---

Finalement, cette étude montre que l'optimisation des expériences dynamo dépend non seulement de la partie stationnaire du champ de vitesse, mais aussi de sa partie fluctuante de grande échelle. Si les fluctuations ne sont pas optimisées, alors le seuil peut augmenter, même pour de très faibles valeurs de leur intensité. De plus, même si les fluctuations sont optimisées de telle manière à ce que la condition de résonance portant sur la partie fluctuante soit vérifiée, nos résultats suggèrent que le seuil augmente toujours.

Contrôler les fluctuations de grandes échelles dans une expérience n'est pas toujours possible, particulièrement quand elles proviennent d'une déstabilisation du champ de vitesse. Dans ce cas, il est préférable d'essayer de diminuer l'intensité de ces fluctuations comme cela a été fait dans l'expérience VKS2. En effet, entre le début et la fin de cette thèse, un anneau a été rajouté dans le plan méridien entre les disques de l'expérience VKS2 qui a conduit à la dynamo. Des essais supplémentaires sans anneau ont montré la disparition de la dynamo dans certains régimes de fonctionnement. Cela conforte l'idée que les fluctuations de grandes échelles influent sur la génération du champ magnétique.

# Annexes





# Annexe A

## Relations d'équivalence

### A.1 Cas stationnaire - Code Gailitis

Les grandeurs caractéristiques définies dans la méthode de Galerkin porteront la notation "G" et celles correspondant au cas du cisaillement infini de Ponomarenko porteront la notation "P". La notation \* correspond aux grandeurs adimensionnelles.

Dans le repère cylindrique  $(r, \theta, z)$ , le champ de vitesse de l'écoulement de Ponomarenko s'écrit :

$$\text{Pour } r > R', \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et pour } r \leq R', \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \Omega_P \\ V_P \end{pmatrix}, \quad \Omega_P \text{ et } V_P \text{ étant des constantes} \quad (\text{A.1})$$

Les grandeurs caractéristiques définies classiquement pour cette approche sont,  $R'$  l'échelle de longueur caractéristique,  $U_{Max} = \sqrt{R'^2 \Omega_P^2 + V_P^2}$ , l'échelle de vitesse caractéristique,  $R'^2/\eta$  l'échelle de temps caractéristique correspondant au temps de diffusion du champ magnétique. Le nombre de Reynolds est défini par :  $R_m = \mu_0 \sigma U_{Max} R'$ .

Dans la méthode de Galerkin, les grandeurs caractéristiques sont  $R$  l'échelle de longueur radiale caractéristique,  $L$  l'échelle de longueur verticale caractéristique,  $\bar{U}$  l'échelle de vitesse moyenne caractéristique et  $\frac{R^2}{\eta}$  l'échelle de temps caractéristique, ce temps correspond au temps de diffusion du champ magnétique. Le nombre de Reynolds magnétique correspondant à la partie stationnaire de l'écoulement s'écrit :  $\bar{R}_m = \bar{U} R/\eta$ .

**Temps caractéristiques :**

Les temps adimensionnels du problème défini avec la méthode de Galerkin et du problème de Ponomarenko sont respectivement :

$$t_G^* = \frac{t\eta}{R^2} \quad (\text{A.2})$$

$$t_P^* = \frac{t\eta}{R'^2} \quad (\text{A.3})$$

Ainsi, il vient la relation :

$$t_G^* = t_P^* \frac{R'^2}{R^2} \quad (\text{A.4})$$

Ou encore, en terme de fréquence, notée  $w$  :

$$w_G^* = w_P^* \frac{R^2}{R'^2} \quad (\text{A.5})$$

**Longueurs d'onde caractéristiques :**

De même, les longueurs d'onde du problème sont définis respectivement par :

$$k_G^* = k L \quad (\text{A.6})$$

$$k_P^* = k R' \quad (\text{A.7})$$

Ainsi, il vient la relation :

$$k_G^* = k_P^* \frac{L}{R'} \quad (\text{A.8})$$

**Nombre de Reynolds magnétiques :**

Enfin, les nombres de Reynolds magnétique sont définis respectivement par :

$$\bar{R}_m^G = \frac{\bar{U} R}{\eta} \quad (\text{A.9})$$

$$R_m^P = \frac{R' \sqrt{R'^2 \Omega_P^2 + V_P^2}}{\eta} \quad (\text{A.10})$$

On va introduire ici, le paramètre  $\Gamma_P$ , définissant le pas de l'hélice, il représente le rapport entre la vitesse poloïdale et la vitesse toroïdale.

$$\Gamma_P = \frac{V_P}{R' \Omega_P} \quad (\text{A.11})$$

Ainsi, il vient :

$$\eta = \frac{\bar{U}R}{R_m^G} \quad (\text{A.12})$$

$$\bar{R}_m^P = \frac{R'^2 \Omega_P \sqrt{1 + \Gamma_P^2}}{\bar{U}R} \bar{R}_m^G \quad (\text{A.13})$$

Pour comparer les résultats de manière simple, nous prendrons pour  $\Omega_P$  :

$$\Omega_P = \frac{R\bar{U}}{R'^2 \sqrt{1 + \Gamma_P^2}} \quad (\text{A.14})$$

Ainsi, les nombres de Reynolds magnétique sont équivalents :

$$R_m^P = \bar{R}_m^G \quad (\text{A.15})$$

## A.2 Comparaison avec l'étude perturbative

Afin de ne pas faire de confusion nous appellerons  $R'$  le paramètre que C. Normand appelle  $R$  dans son article, ce paramètre définit le lieu de cisaillement du champ de vitesse. Nous adopterons les notations suivantes, les grandeurs relatives à la méthode de Galerkin porteront l'indice "G" et celles adoptées par C. Normand, "pert".

### A.2.1 Champ de vitesse et équation de l'induction

Le champ de vitesse sous sa forme dimensionnelle défini dans Normand (2003) est de la forme suivante :

$$\text{Pour } r > R', \quad \vec{u} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{et pour } r \leq R', \quad \vec{u} = \begin{vmatrix} 0 \\ r\Omega_0 (1 + \varepsilon_{pert} \cos(\omega_f^{pert} t)) \\ w_0 (1 + \varepsilon_{pert} \varepsilon_1 \cos(\omega_f^{pert} t)) \end{vmatrix} \quad (\text{A.16})$$

- $\Omega_0$  et  $w_0$  sont des constantes.
- $\varepsilon_{pert}$  est le paramètre qui contrôle l'amplitude de la modulation,  $\varepsilon_{pert} \ll 1$ .
- $\varepsilon_1$  contrôle l'importance relative de la vitesse azimutale par rapport à la vitesse verticale, ainsi que le déphasage entre ces deux composantes suivant son signe. Si  $\varepsilon_1 > 0$ , ces composantes sont en phase et pour un  $\varepsilon_1 < 0$ , en opposition de phase,  $\varepsilon_1$  variant entre -1 et 1.

- $\omega_f^{pert}$  est la fréquence de forçage sous sa forme dimensionnelle.

Afin de ne pas faire de confusion, il est important de bien remarquer que le paramètre  $\varepsilon_{pert}$  ne représente pas l'inverse du nombre de Reynolds magnétique comme nous l'avons présenté dans le début de ce manuscrit (voir 1.18).

Les grandeurs caractéristiques définies dans (Normand (2003)) sont :

- $R'$ , l'échelle de longueur caractéristique.
- $w_0 = \Omega_0 R'$ , l'échelle de vitesse caractéristique.
- $\frac{R'^2}{\eta}$ , l'échelle de temps caractéristique, ce temps correspond au temps de diffusion de  $\mathbf{B}$ . Ainsi,  $\frac{\eta}{R'^2}$ , représente la fréquence caractéristique et on définit,  $\sigma = \frac{w_f^{pert} R'^2}{\eta}$ , la fréquence de forçage sous sa forme adimensionnelle.

Le paramètre  $\chi$  définit le pas de l'hélice, il représente le rapport entre la vitesse poloïdale et la vitesse toroïdale. La forme adoptée pour la composante verticale du champ de vitesse fixe ce paramètre,

$$\chi = \frac{w_0}{R' \Omega_0} = 1 \quad (\text{A.17})$$

En définissant le nombre de Reynolds magnétique par :

$$R_m^{pert} = \frac{w_0 R'}{\eta} \quad (\text{A.18})$$

L'équation de l'induction (1.14) devient (les indices \* des grandeurs adimensionnelles seront sous-entendus) :

$$\partial_t \mathbf{B} = R_m^{pert} \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B} \quad (\text{A.19})$$

Nous avons présenté la méthode de résolution dans la section (4.1). On cherche ici le nombre de Reynolds magnétique critique  $\bar{R}_m$  et la fréquence du champ magnétique correspond  $\mathfrak{S}(\gamma)$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \bar{R}_m &= R_0 + \varepsilon_{pert} R_1 + \varepsilon_{pert}^2 R_2 + O(\varepsilon_{pert}^3) \\ \mathfrak{S}(\gamma) &= \omega_0 + \varepsilon_{pert} \omega_1 + \varepsilon_{pert}^2 \omega_2 + O(\varepsilon_{pert}^3) \end{aligned}$$

Les grandeurs  $R_0$  et  $\omega_0$  sont les solutions du problème stationnaire et l'on peut montrer que les quantités  $R_1$  et  $\omega_1$  sont nulles.

Nous verrons par la suite (voir A.2.3) que le paramètre  $\varepsilon_{pert}$  est strictement égal au paramètre  $\rho$  défini dans l'ensemble de ce manuscrit.

## A.2.2 Analogie des grandeurs adimensionnelles

Comme nous l'avons fait dans le cas stationnaire, nous allons faire une analogie entre les grandeurs adimensionnelles adoptées dans la méthode de Galerkin et celles définies dans Normand (2003).

### Temps caractéristique

$$\begin{aligned} t_G^* &= \frac{t\eta}{R^2} \\ t_{pert}^* &= \frac{t\eta}{R'^2} \\ \text{d'où } t_G^* &= t_{pert}^* \frac{R'^2}{R^2} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Ou encore, en terme de fréquence, notée  $w$  :

$$w_G^* = w_{pert}^* \frac{R^2}{R'^2} \quad (\text{A.21})$$

### Longueurs verticales caractéristiques

$$\begin{aligned} k_G^* &= k L \\ k_{pert}^* &= k R' \\ \text{d'où } k_G^* &= k_{pert}^* \frac{L}{R'} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

### Nombre de Reynolds magnétique

Les nombres de Reynolds magnétique sont définis par :

$$\bar{R}_m^G = \frac{\bar{U} R}{\eta} \quad (\text{A.23})$$

$$R_m^{pert} = \frac{w_0 R'}{\eta} \quad (\text{A.24})$$

Ainsi, il vient :

---

$$\begin{aligned}\eta &= \frac{\bar{U} R}{\bar{R}_m^G} \\ \bar{R}_m^G &= \frac{\bar{U} R}{w_0 R'} R_m^{pert}\end{aligned}$$

Si  $R = U = 1$  et  $w_0 = \Omega_0 R'$ , il vient :

$$\bar{R}_m^G = \frac{1}{\Omega_0 R'^2} R_m^{pert} \quad (\text{A.25})$$

### A.2.3 Relations d'équivalence

Nous allons voir dans ce paragraphe les relations d'équivalences entre les paramètres définis dans ce manuscrit (dans cas du cisaillement infini) et les paramètres définis dans [Normand \(2003\)](#).

Ecrivons la forme générale en coordonnées cylindriques du champ de vitesse présenté dans le chapitre (3) de la manière suivante,

$$\mathbf{u}^G = (\bar{u}_r^G + \tilde{u}_r^G, \bar{u}_\theta^G + \tilde{u}_\theta^G, \bar{u}_z^G + \tilde{u}_z^G),$$

et le champ de vitesse de l'approche perturbative comme,

$$\mathbf{u}^{pert} = (\bar{u}_r^{pert} + \tilde{u}_r^{pert}, \bar{u}_\theta^{pert} + \tilde{u}_\theta^{pert}, \bar{u}_z^{pert} + \tilde{u}_z^{pert}),$$

où  $\bar{u}$  et  $\tilde{u}$  représente la partie stationnaire et fluctuante respectivement.

Les deux champs de vitesse étant équivalents, nous avons donc :

$$\frac{\tilde{u}_\theta^G}{\bar{u}_\theta^G} = \frac{\tilde{u}_\theta^{pert}}{\bar{u}_\theta^{pert}} \quad (\text{A.26})$$

$$\frac{\tilde{u}_z^G}{\bar{u}_z^G} = \frac{\tilde{u}_z^{pert}}{\bar{u}_z^{pert}} \quad (\text{A.27})$$

En injectant la forme des champs de vitesse (3.1.2 et A.16) dans la relation (A.26), on obtient  $\varepsilon_{pert} = \frac{\tilde{R}_m}{\bar{R}_m}$ . De même, la relation (A.27) implique  $\varepsilon_{pert}\varepsilon_1 = \frac{\tilde{R}_m}{\bar{R}_m} \frac{\tilde{\Gamma}}{\bar{\Gamma}}$ . Nous avons donc les deux relations suivantes :

$$\varepsilon_{pert} = \frac{\tilde{R}_m}{\bar{R}_m} \quad (\text{A.28})$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\tilde{\Gamma}}{\bar{\Gamma}} \quad (\text{A.29})$$

Le pas de l'hélice de la partie stationnaire est défini comme le rapport entre la composante verticale et la composante toroïdale, nous avons :

$$\chi = \bar{\Gamma} = \frac{\bar{u}_z^{pert}}{\bar{u}_\theta^{pert}} = \frac{\bar{u}_z^G}{\bar{u}_\theta^G} = 1 \quad (\text{A.30})$$

Ainsi, avec  $\bar{\Gamma} = 1$ , les relations d'équivalences entre les deux problèmes sont :

$$\varepsilon_{pert} = \rho \quad (\text{A.31})$$

$$\varepsilon_1 = \tilde{\Gamma} \quad (\text{A.32})$$

Nous rappelons que C.Normand a défini comme temps caractéristique le temps de diffusion du champ magnétique, ainsi la fréquence  $w_f$  de forçage défini dans tout ce manuscrit est équivalente au paramètre  $\sigma$  défini dans Normand (2003).

## A.3 Comparaison méthode de Galerkin - Méthode asymptotique

### A.3.1 Analogies des approches

Dans l'approche numérique du problème, nous résolvons l'équation de l'induction adimensionnalisée par le temps de diffusion du champ magnétique, alors que dans l'approche asymptotique nous résolvons la même équation mais adimensionnalisée par le temps d'advection. Faisons le lien entre ces deux équations, afin d'obtenir des résultats comparables. Partons de l'équation de l'induction résolue dans l'approche de Galerkin,

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{U}^G \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B}.$$

Si on multiplie cette dernière équation par  $\varepsilon$ , elle devient :

$$\varepsilon \partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\varepsilon \mathbf{U}^G \times \mathbf{B}) + \varepsilon \nabla^2 \mathbf{B} \quad (\text{A.33})$$

Si on exprime le temps en unité de temps d'advection alors  $(\varepsilon \partial_t)$  devient  $\partial_t$ . De plus, en posant  $\mathbf{U}^A = \varepsilon \mathbf{U}^G$ , on obtient la forme de l'équation de l'induction résolue dans les développements asymptotiques. Il faudra toutefois faire attention au fait que remplacer  $\partial_t$  par  $(\varepsilon \partial_t)$  dans les méthodes asymptotiques, implique les deux relations suivantes :

$$\gamma = \gamma^A / \varepsilon \quad (\text{A.34})$$

$$w_f = w_f^A / \varepsilon \quad (\text{A.35})$$

En ce qui concerne le champ de vitesse utilisé dans la méthode de Galerkin, nous prendrons le champ de vitesse défini dans l'ensemble de ce manuscrit (3.1, 3.6), dans le cas du cisaillement fini et pour  $\bar{\Gamma} = \tilde{\Gamma} = \Gamma$ . Sous ces conditions, ce champ de vitesse s'écrit :

$$\Omega^G F(t) = \left( \bar{R}_m + \tilde{R}_m f(t) \right) (1 - r), \quad V^G G(t) = \left( \bar{R}_m \Gamma + \tilde{R}_m \Gamma f(t) \right) (1 - r^2) \quad (\text{A.36})$$

où  $f(t) = \cos(w_f t)$ .

Ainsi, pour comparer les résultats des deux approches, nous devons injecter dans le champ



de vitesse défini dans les développements asymptotiques (sec :MéthodeAsymptotique) les fonctions azimutale et verticale suivantes :

$$\Omega^A(r) = 1 - r, \quad V^A(r) = \Gamma(1 - r^2) \quad (\text{A.37})$$

Ensuite, suivant les cas, nous prendrons :

$$\begin{aligned} &\text{pour le cas stationnaire, i.e } \tilde{R}_m = 0 \\ \varepsilon &= \bar{R}_m^{-1}, \quad F^A(t) = 1 \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

$$\begin{aligned} &\text{pour le cas fluctuant sans champ moyen, i.e } \bar{R}_m = 0, \tilde{R}_m \neq 0 \\ \varepsilon &= \tilde{R}_m^{-1}, \quad F^A(t) = \cos(w_f^A t) \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

$$\begin{aligned} &\text{pour le cas fluctuant avec champ moyen, i.e } \bar{R}_m, \tilde{R}_m \neq 0 \\ \varepsilon &= \bar{R}_m^{-1}, \quad \rho = \frac{\tilde{R}_m}{\bar{R}_m}, \quad F^A(t) = 1 + \rho \cos(w_f^A t) \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Si nous appliquons la relation de résonance (3.25) au champ de vitesse ainsi défini, il vient :

$$\bar{r}_0 = \tilde{r}_0 = r_0 = -(m/k)/(2\Gamma) \quad (\text{A.41})$$

### A.3.2 Taux de croissance dans le cas stationnaire

La théorie des développements asymptotiques (Gilbert (2003)) nous donne directement l'expression du taux de croissance complexe :

$$\begin{aligned} \gamma^A &= \varepsilon^{-1/3} \gamma_0 + \gamma_1 + \varepsilon^{1/3} \gamma_2 \\ \gamma_0 &= -i \varepsilon^{1/3} (m \Omega(r_0) + k V(r_0)) \\ \gamma_1 &= 0 \\ \gamma_2 &= \pm(1 - i) \varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{m |\Omega'(r_0)|}{r_0}} - \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right) \varepsilon^{1/2} \sqrt{|m \Omega''(r_0) + k V''(r_0)|} - \varepsilon \left(\frac{m^2}{r_0^2} + k^2\right) \end{aligned}$$

Ainsi, si nous prenons la partie réelle et la partie imaginaire de  $\gamma^A$  en introduisant la forme du champ de vitesse défini dans (A.37) et (A.38), nous obtenons l'expression du taux de croissance et de la fréquence :

$$\mathcal{R}(\gamma^A) = \pm \varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{m}{r_0}} - \frac{1}{2} \varepsilon^{1/2} \sqrt{-2k\Gamma} - \varepsilon \left(\frac{m^2}{r_0^2} + k^2\right) \quad (\text{A.42})$$

$$\mathcal{I}(\gamma^A) = m(1 - r_0) \frac{1/r_0 - 1}{2} + \varepsilon^{1/2} \sqrt{\frac{m}{r_0}} (\mp 1 - 1/2) \quad (\text{A.43})$$

## Annexe B

# Méthode asymptotique pour de grandes fréquences dans le cas fluctuant sans champ moyen

Nous allons donner les principales étapes de calcul permettant d'obtenir l'expression analytique des fonctions  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$ .

Introduisons le paramètre  $s$ , tel que :

$$\begin{aligned}\bar{f}(\bar{\tau}) &= \hat{f}(s) \\ \bar{g}(\bar{\tau}) &= \hat{g}(s) \\ \bar{h}(\bar{\tau}) &= \hat{h}(s) \\ \text{avec } s &= \bar{w} \bar{\tau}\end{aligned}\tag{B.1}$$

ainsi que le paramètre  $\delta^{-1} = \bar{w} \ll 1$ .

De cette manière, le système des 3 ODE du problème initial (4.75), (4.76), (4.77) devient

$$\delta^{-1} \partial_s \hat{h} + 4 \hat{h}^2 = i \cos(s) \tag{B.2}$$

$$\delta^{-1} \partial_s \hat{f} + 2 \hat{h} \hat{f} = -i \hat{g} \tag{B.3}$$

$$\delta^{-1} \partial_s \hat{g} + 4 \hat{h} \hat{g} = -\mathcal{D} \hat{f} \cos(s) \tag{B.4}$$

Ecrivons les fonctions  $\hat{f}$  et  $\hat{g}$  de la manière suivante,

$\hat{f}(s) = \exp(\alpha s) f^*(s)$  et  $\hat{g}(s) = \exp(\alpha s) g^*(s)$ , avec  $f^*$  and  $g^*$  périodique en  $s$ .

Les équations (B.2), (B.3), et (B.4) deviennent (en sous entendant les indices \*) :

$$\delta^{-1} \partial_s h + 4 h^2 = i \cos(s) \tag{B.5}$$

$$\delta^{-1} \alpha f + \delta^{-1} \partial_s f + 2 h f = -i g \tag{B.6}$$

$$\delta^{-1} \alpha g + \delta^{-1} \partial_s g + 2 h g = -\mathcal{D} f \cos(s) \tag{B.7}$$

Le paramètre  $\delta$  étant petit, effectuons un développement de  $\alpha$ ,  $f$ ,  $g$  et  $h$  de la manière suivante :

$$\alpha = \alpha_0 + \delta \alpha_1 + \delta^2 \alpha_2 + \dots \quad (\text{B.8})$$

$$f = f_0 + \delta f_1 + \delta^2 f_2 + \dots \quad (\text{B.9})$$

$$g = g_0 + \delta g_1 + \delta^2 g_2 + \dots \quad (\text{B.10})$$

$$h = h_0 + \delta h_1 + \delta^2 h_2 + \dots \quad (\text{B.11})$$

Le but de cette méthode est de substituer ces développements dans les équations (B.5), (B.6), (B.7) et de fixer  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  de telle manière à ce que  $f$ ,  $g$ ,  $h$  soit strictement périodique en  $s$ .

Ensuite, nous nous intéresserons aux fonctions  $h$ ,  $f$  et  $g$ . Nous chercherons pour chacune d'elles, les termes d'ordre  $\delta$ ,  $o(\delta^{-1})$ ,  $o(0)$ ,  $o(\delta)$ ,  $o(\delta^2)$ . Nous introduirons pour cela les constantes suivantes  $A_0, A_1, \dots, B_0, B_1, \dots, C_0, C_1, \dots$ .

Après calcul, nous trouvons finalement que :

$$f = A_0 + \delta A_1 + \delta^2 (i A_0 (2 - \mathcal{D}) \cos(s) + A_2) + \dots \quad (\text{B.12})$$

$$g = \delta (-\mathcal{D} A_0 \sin(s) + B_1) + \delta^2 (-\mathcal{D} A_1 \sin(s) + B_2) + \dots \quad (\text{B.13})$$

$$h = \delta \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + i \sin(s) \right) + \delta^3 (C_3 - \sin(2s)) + \dots \quad (\text{B.14})$$

$$\alpha = \delta^2 \left( -\sqrt{2} \pm \frac{\mathcal{D}}{\sqrt{2}} \right) + \dots \quad (\text{B.15})$$

Revenons à l'échelle originale :

$$\bar{f}, \bar{g} \propto \exp(\alpha s) \simeq \exp(\delta^2 \alpha_2 s) \propto \exp(\delta \alpha_2 \bar{\tau}) \quad (\text{B.16})$$

Ainsi, le taux de croissance des fonctions  $\bar{f}$  et  $\bar{g}$  s'écrit :

$$\alpha = \frac{1}{\bar{w}} \left( -\sqrt{2} \pm \frac{\mathcal{D}}{\sqrt{2}} \right) \quad (\text{B.17})$$


---

## Annexe C

### Relation d'orthogonalité

Nous allons décrire ici les principales étapes de calculs permettant de démontrer la relation d'orthogonalité suivante :

$$\int_0^1 \phi_{m+1}^i \psi_{m+1}^j r dr + \int_0^1 \phi_{m-1}^i \psi_{m-1}^j r dr = G_{ij} \delta_{ij} \quad (\text{C.1})$$

$$\text{avec} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

$$G_{ii} = \frac{K_{m+1}(k)}{2 J_{m+1}^2(\mu_i)} \left\{ J_m^2(\mu_i) + J_{m+1}^2(\mu_i) - 2 \frac{m+1}{\mu_i} J_m(\mu_i) J_{m+1}(\mu_i) \right\} \\ + \frac{K_{m-1}(k)}{2 J_{m-1}^2(\mu_i)} \left\{ J_m^2(\mu_i) + J_{m-1}^2(\mu_i) - 2 \frac{m-1}{\mu_i} J_m(\mu_i) J_{m-1}(\mu_i) \right\}$$

A partir des définitions des fonctions  $\phi$  et  $\psi$ , réécrivons la relation (C.1) :

$$\int_0^1 \phi_{m+1}^i \psi_{m+1}^j r dr + \int_0^1 \phi_{m-1}^i \psi_{m-1}^j r dr = \\ \frac{K_{m+1}(k)}{J_{m+1}(\mu_i) J_{m+1}(\mu_j)} \int_0^1 J_{m+1}(\mu_i r) J_{m+1}(\mu_j r) r dr \\ + \frac{K_{m-1}(k)}{J_{m-1}(\mu_i) J_{m-1}(\mu_j)} \int_0^1 J_{m-1}(\mu_i r) J_{m-1}(\mu_j r) r dr \quad (\text{C.2})$$

Calculons l'intégrale  $I_1$ , avec  $I_1 = \int_0^1 J_{m+1}(\mu_i r) J_{m+1}(\mu_j r) r dr$ .

Remarquons tout d'abord que  $J_{m+1}(\mu_j r)$ , et  $J_{m+1}(\mu_i r)$  sont respectivement solutions des équations :

$$r \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} J_{m+1}(\mu_j r) \right) + (\mu_j^2 r^2 - (m+1)^2) J_{m+1}(\mu_j r) = 0 \quad (\text{C.3})$$

$$r \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} J_{m+1}(\mu_i r) \right) + (\mu_i^2 r^2 - (m+1)^2) J_{m+1}(\mu_i r) = 0 \quad (\text{C.4})$$

Ensuite, combinons ces deux dernières équations de la manière suivante :

$$(\text{C.3}) * J_{m+1}(\mu_i r) - (\text{C.4}) * J_{m+1}(\mu_j r) = 0$$

En divisant par  $r$ , et en intégrant sur  $r$  entre 0 et 1, il vient :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \left[ J_{m+1}(\mu_i r) \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} J_{m+1}(\mu_j r) \right) - J_{m+1}(\mu_j r) \frac{d}{dr} \left( r \frac{d}{dr} J_{m+1}(\mu_i r) \right) \right] dr \\ & + (\mu_j^2 - \mu_i^2) \int_0^1 r J_{m+1}(\mu_i r) J_{m+1}(\mu_j r) dr = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

En intégrant par partie le premier terme de cette dernière équation, l'équation (C.5) devient :

$$\int_0^1 r J_{m+1}(\mu_i r) J_{m+1}(\mu_j r) dr = \frac{\mu_i J_{m+1}(\mu_j) J_m(\mu_i) - \mu_j J_{m+1}(\mu_i) J_m(\mu_j)}{\mu_j^2 - \mu_i^2} \quad (\text{C.6})$$

Si on utilise le même raisonnement pour calculer  $I_2 = \int_0^1 J_{m-1}(\mu_i r) J_{m-1}(\mu_j r) r dr$ , on trouve :

$$\int_0^1 r J_{m-1}(\mu_i r) J_{m-1}(\mu_j r) dr = \frac{\mu_j J_{m-1}(\mu_i) J_m(\mu_j) - \mu_i J_{m-1}(\mu_j) J_m(\mu_i)}{\mu_j^2 - \mu_i^2} \quad (\text{C.7})$$

Finalement, en utilisant ces deux relations (C.6, C.7), la relation (C.2) devient :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \phi_{m+1}^i \psi_{m+1}^j r dr + \int_0^1 \phi_{m-1}^i \psi_{m-1}^j r dr = \\ & \frac{1}{\mu_j^2 - \mu_i^2} \left\{ J_m(\mu_i) \mu_i \left( \frac{K_{m+1}(k)}{J_{m+1}(\mu_i)} - \frac{K_{m-1}(k)}{J_{m-1}(\mu_i)} \right) \right. \\ & \left. - J_m(\mu_j) \mu_j \left( \frac{K_{m+1}(k)}{J_{m+1}(\mu_j)} - \frac{K_{m-1}(k)}{J_{m-1}(\mu_j)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Il suffit alors d'utiliser la relation (5.20) pour obtenir la relation d'orthogonalité (C.1).

D'autre part, pour obtenir l'expression analytique des coefficients  $G_{ii}$ , on réécrit l'équation (C.1), en repartant de la définition des fonction  $\phi$  et  $\psi$  dans le cas où  $i = j$ , il vient :

$$G_{ii} = \frac{K_{m+1}(k)}{J_{m+1}^2(\mu_i)} \int_0^1 J_{m+1}^2(\mu_i r) r dr + \frac{K_{m-1}(k)}{J_{m-1}^2(\mu_i)} \int_0^1 J_{m-1}^2(\mu_i r) r dr \quad (\text{C.9})$$

Ensuite, en utilisant les relations suivantes, on obtient la relation donnant les  $G_{ii}$ .

$$\begin{aligned} \int_0^1 J_n^2(\mu_i r) r dr &= \frac{1}{2} \left\{ \left( J_n'(\mu_i) \right)^2 + \left( 1 - \frac{n^2}{\mu_i^2} \right) J_n^2(\mu_i) \right\}, \quad n = m \pm 1 \\ J_{m+1}'(\mu_i) &= J_m(\mu_i) - \frac{m+1}{\mu_i} J_{m+1}(\mu_i) \\ J_{m-1}'(\mu_i) &= \frac{m-1}{\mu_i} J_{m-1}(\mu_i) - J_m(\mu_i) \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$



## Annexe D

### Le code numérique

Le code numérique utilisé pour résoudre le problème de Ponomarenko modulé périodiquement dans le temps avec la méthode de Galerkin a été entièrement écrit et développé par l'auteur. Ce code est écrit en langage *Fortran 90* et a été exécuté essentiellement à l'aide d'une station de calcul multi-processeurs largement pourvue en mémoire vive (8Go) et cadencée à 3,60GHz.

Il est à noter que ce code n'est pas parallélisé.

Nous avons construit ce code à partir des fonctions, sous-routines et modules issus de la librairie *Numerical Recipes* (Press *et al.* (1999)). Les méthodes numériques utilisées sont décrites de manière détaillée dans le volume 1 du *Numerical Recipes* (Press *et al.* (1993)), cependant nous n'avons pas utilisé les sous-routines de cet ouvrage, car elles sont toutes écrites en *fortran 77*.

Dans cette annexe nous adopterons la notation *N.R.* pour *Numerical Recipes*.

Nous allons ici seulement présenter le code sans rentrer dans les détails. L'auteur met à disposition sur simple demande ce code ainsi que les explications de fonctionnement de ce dernier.

#### D.1 Méthodes numériques

##### Fonctions de Bessel

Un grand nombre de fonctions définies dans notre problème utilise les fonctions de Bessel. Nous avons utilisé les fonctions de la librairie du N.R (Press *et al.* (1999) p1101 à 1115). Grâce à la notion d'interface introduite en *Fortran 90*, les fonctions de Bessel acceptent en argument aussi bien un scalaire qu'un vecteur. Par exemple, si on appelle dans le programme la fonction de Bessel de première espèce  $J_0(x)$ , sans avoir besoin de préciser si  $x$  est un vecteur ou un scalaire, on aura en retour :

---



- le scalaire  $J0(\mathbf{x})$ , si  $\mathbf{x}$  est un scalaire (en appelant automatiquement la fonction *besselj0-s(x)*).
- le vecteur  $\mathbf{J0}(\mathbf{x})$ , si  $\mathbf{x}$  est un vecteur (en appelant automatiquement la fonction *besselv0-s(x)*).

### Détermination des $\mu_j$

Pour calculer les  $\mu_j$ , il faut déterminer les  $N$  racines de l'équation (5.20), qui est une équation du type  $f(x) = 0$  ( $x$  représentant  $\mu_j$ ).

Nous avons appliqué la méthode de Newton Raphson qui est une méthode très efficace pour trouver des approximations d'un zéro (ou racine) d'une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles. L'algorithme consiste à linéariser une fonction  $f$  en un point et de prendre le point d'annulation de cette linéarisation comme approximation du zéro recherché. On réitère cette procédure en l'approximation obtenue. Dans les cas favorables, les approximations successives obtenues convergent avec une vitesse quadratique.

Cette méthode est décrite en détails au chapitre 9 p 340 de [Press et al. \(1993\)](#). Pour la mettre en place, nous utiliserons les sous-routines *zbrak* et *rtnewt* ([Press et al. \(1999\)](#) p 1184 et 1189).

La sous-routine *zbrak* permet de calculer le nombre de racines de la fonction  $f(x)$  sur l'intervalle  $I = [x_1, x_2]$   $x \in I$  et la sous-routine *rtnewt* applique l'algorithme de Newton Raphson. La fonction  $f(x)$  figurant dans le code (appelée *func*) est issue de l'équation (5.20), cependant nous l'avons réarrangée de la manière suivante :

$$x J_m(x) \left[ K_{m+1}(k) J_{m-1}(x) - K_{m-1}(k) J_{m+1}(x) \right] + 2 k K_m(k) J_{m+1}(x) J_{m-1}(x) = 0 \quad (\text{D.1})$$

De plus, l'algorithme de Newton Raphson fait appel à la fonction  $f'(x)$  (appelée *funcd*), cette fonction est la suivante :

$$\begin{aligned} \text{funcd}(x) &= x K_{m+1}(k) \left( J_{m-1}^2(x) - J_m^2(x) \right) + x K_{m-1}(k) \left( J_{m+1}^2(x) - J_m^2(x) \right) \\ &+ 2 k K_m(k) \left( \frac{-2}{x} J_{m+1}(x) J_{m-1}(x) - J_m \{ (x) J_{m+1}(x) - J_{m-1}(x) \} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

### Intégration

Le calcul des coefficients de la matrice  $M$  fait intervenir des intégrales (cf. 5.36, 5.37, 5.38, 5.39). Nous avons calculé ces intégrales avec la méthode de Simpson basée sur la méthode des trapèzes (décrite au chap 4 de [Press et al. \(1993\)](#)).

Pour cela, nous avons utilisé les sous-routines *trapzd* et *qsimp* ([Press et al. \(1999\)](#) p 1052 et p1053). La sous-routine *trapzd* calcule les intégrales à l'aide de la méthode des trapèzes et la sous-routine *qsimp* applique l'algorithme de Simpson en faisant appel à *trapzd* autant de fois que nécessaire (en fonction de la précision recherchée).

## Equation différentielle

L'équation différentielle du premier ordre à coefficients non constants (5.41), a été résolue avec la méthode de Runge Kutta d'ordre 4. Les inconnues de cette équation sont les coefficients complexes  $D^j$ .

Nous résoudrons le problème ayant des conditions initiales. Celles-ci seront choisies arbitrairement car la génération de champ magnétique ne doit pas dépendre des conditions initiales, une petite source de champ magnétique suffit. Nous avons testé plusieurs conditions initiales et vérifié que toutes donnent le même résultat en terme de taux de croissance. Pour tous nos calculs, nous avons choisi de prendre un bruit blanc pour les parties réelles et imaginaires des inconnues complexes  $D^j$ .

La méthode de RK4 propage une solution sur un intervalle en combinant l'information à partir de plusieurs pas de type Euler. Ensuite, on utilise l'information obtenue pour construire un développement en série de Taylor à l'ordre suivant. A chaque pas, elle nécessite quatre évaluations de la fonction  $f$ .

Nous allons présenter les grandes lignes de cette méthode. Le problème général d'une équation différentielle consiste à résoudre  $N$  équations différentielles ordinaires couplées pour les fonctions  $y_i$ ,  $i = 1 \dots N$ . Ces équations ont la forme suivante :

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = f_i(x, y_1, \dots, y_N), \quad i = 1 \dots N \quad (\text{D.3})$$

où les fonctions  $f_i$  de la partie droite de cette équation sont connues. La méthode de RK4 est donnée par l'équation :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + \mathcal{O}(h^5) \quad (\text{D.4})$$

où  $\mathcal{O}(h^5)$  représente l'erreur de la méthode,

$$k_1 = hf(x_n, y_n) \quad (\text{D.5})$$

$$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right) \quad (\text{D.6})$$

$$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right) \quad (\text{D.7})$$

$$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3) \quad (\text{D.8})$$

et  $x_{n+1} = x_n + h$ , où  $h$  est le pas. La figure D.1 illustre cette méthode. Le lecteur trouvera tous les détails du schéma dans le chapitre 16 p 701 de Press *et al.* (1993).

Nous avons utilisé la subroutine `rk4` (Press *et al.* (1999) p 1297) qui applique l'algorithme, ainsi que la subroutine `derivs` qui donne à l'instant  $t$ , la valeur de la dérivée, c'est dans cette dernière fonction qu'est écrite l'équation (5.41).

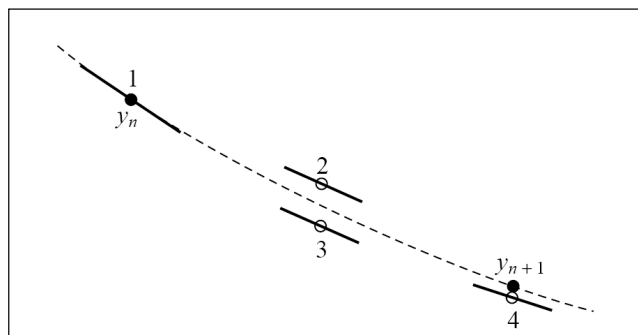


FIGURE D.1 – Méthode de Runge Kutta d’ordre 4. A chaque pas de temps, la dérivée de la fonction  $y$  est évaluée quatre fois : une fois au point initial, deux fois au point milieu interpolé et une fois au point final interpolé. A partir du calcul de ces dérivées, la valeur finale de la fonction (représentée en trait pointillé sur la figure) est calculée. (figure extraite du [Press \*et al.\* \(1993\)](#))

## D.2 Organisation du code

Une large littérature existe sur la programmation en Fortran 90 qui est un langage utilisé principalement en mathématiques et dans les applications de calcul scientifique. Ce langage est beaucoup plus robuste et évolué que le Fortran 77 encore beaucoup utilisé. Le lecteur trouvera les notions élémentaires et spécificités de ce langage dans les ouvrages suivants : ([C.Delannoy \(1998\)](#), [P.Corde & A.Fouilloux \(2005\)](#), [P.Corde & H.Delouis \(2005\)](#)).

Un code en Fortran 90, est idéalement construit de la manière suivante :

- un programme principal, où sont effectués tous les calculs. Ce programme ne doit pas comporter les outils de calculs, c’est à dire les sous-routines, les fonctions et les modules.
- les modules qui sont une spécificité du langage par rapport au Fortran 77. Pour résumer, un module est une unité de compilation autonome, comportant à la fois des déclarations de variables, des interfaces de procédure, ainsi que des définitions de procédures.
- les procédures, où sont regroupées les fonctions et les sous-routines ne pouvant pas s’intégrer dans un module.

### Schématisation du code élémentaire

Sur la figure D.2, nous avons schématisé le fonctionnement de notre code numérique sous sa forme la plus élémentaire.

Dans un premier temps, dans le fichier *vitesse.f90*, on choisit le cas que l'on souhaite étudier à travers les fonctions radiales  $\Omega^G$  et  $V^G$ , ainsi que la forme des fonctions temporelles,  $f(t)$  et  $g(t)$ .

Le profil radial des fonctions  $\Omega^G$  et  $V^G$  déterminent les deux cas qui nous intéressent : cisaillement (i) infini et (ii) fini

$$(i) \quad \Omega^G(r) = V^G(r) = 1 \quad (D.9)$$

$$(ii) \quad \Omega^G(r) = 1 - r \quad \text{et} \quad V^G(r) = 1 - r^2 \quad (D.10)$$

Bien que nous ayons quasiment toujours étudié les fonctions radiales représentant le cisaillement infini et fini et les fonctions temporelles telles que  $f(t) = g(t) = \cos(w_f t)$ , il est important de noter que nous pouvons choisir les fonctions radiales et temporelles comme nous voulons.

Ensuite, dans le fichier d'entrée *in.dat*, on se donne les paramètres de données :

- les paramètres géométriques du champ de vitesse,  $m$ ,  $k$ ,  $\bar{\Gamma}$ ,  $\tilde{\Gamma}$ , ainsi que la valeur du paramètre  $R'$  qui représente le lieu de cisaillement du champ de vitesse (nous avons pris 0.2 pour le cas (i) et 1 pour le cas (ii)) .
- les paramètres  $\bar{R}_m$ ,  $\tilde{R}_m$ ,  $\rho$  et  $w_f$ .
- les paramètres relatifs au calcul numérique,  $N$  le nombre de mode de Galerkin,  $t_0$  le temps de début des calculs (que nous prendrons systématiquement égal à 0),  $dt$  le pas de temps,  $NSTEP$  le nombre de pas de temps.

*Remarque* : La valeur des paramètres relatifs au calcul numérique va dépendre fortement de la valeur de la fréquence de forçage ainsi que de la valeur du nombre de Reynolds magnétique. Plus la fréquence est petite, plus il faudra calculer sur des temps longs, typiquement nous travaillerons sur un temps représentant au minimum dix périodes du champ de vitesse. D'autre part, plus on travaille à grand nombre de Reynolds magnétique, plus on doit prendre de modes de Galerkin. De la même manière, plus on prend de modes de Galerkin, plus on doit diminuer le pas de temps.

Typiquement, nous avons pris 20 modes de Galerkin dans le cas du cisaillement fini (cas (i)) et 90 dans le cas du cisaillement infini (cas (ii)).

Enfin, notre DNS nous donne en sortie le fichier *out.dat* dans lequel se trouve le taux de croissance ainsi que la pulsation du champ magnétique.

D'autre part dans un souci de compréhension des phénomènes, nous avons mis en place de nombreuses fonctions et sous-routines permettant par exemple de visualiser l'énergie magnétique en fonction du temps, l'évolution des composantes du champ magnétique en fonction du temps et en fonction de  $r$ , les coefficients  $D^j$  ...

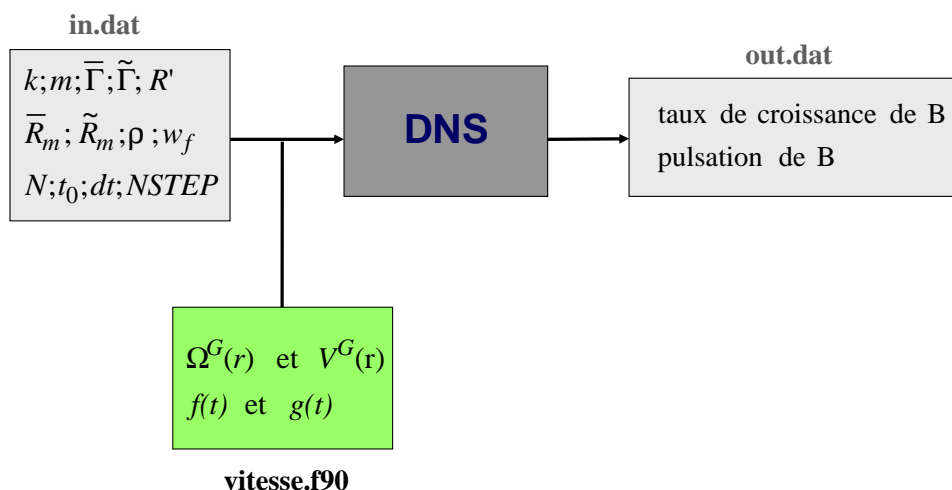


FIGURE D.2 – Schématisation de l'organisation du code numérique

Ecrire sur un fichier *.dat* prend beaucoup de temps et d'espace mémoire, ainsi pour que nos calculs soient les plus rapides possibles, nous n'avons conservé que le fichier correspondant à l'énergie magnétique. En effet, visualiser l'énergie en fonction du temps nous permet de vérifier que les calculs n'ont pas divergé et que le temps de calcul a été suffisamment long.

## DNS

Nous donnerons ici en résumé les différents fichiers que contient notre DNS.

### Programme principal :

Le programme principal (*main.f90*) lit le fichier d'entrée *in.dat*.

Dans un premier temps ce programme calcule les  $N$  coefficients  $\mu_j$  (voir [D.1](#)).

Dans un deuxième temps, il calcule tous les coefficients de la matrice  $M$  ([5.36](#), [5.37](#), [5.38](#), [5.39](#)).

Ensuite intervient le schéma temporel, à chaque pas de temps, le programme résout l'équation différentielle régissant le problème ([5.41](#)) et stocke les résultats dans différents fichiers en vue de l'interprétation.

Enfin, le programme calcule le taux de croissance ainsi que la pulsation du champ magnétique à l'aide des méthodes que nous avons vues dans la section [6.1](#).

**Modules :**

Le fichier *mod\_nr\_nrutil\_nrtype.f90* regroupe les modules suivants :

- *nr*, qui définit une partie des interfaces utilisées par les sous-routines issues du N.R (Press *et al.* (1999) p 1384).
- *nrutil*, qui contient toutes les implémentations spécifiques pour utiliser la librairie du N.R (Press *et al.* (1999) p 1364).
- *nrtype*, qui définit les paramètres constants, la simple et la double précision (Press *et al.* (1999) p 1361).

Le fichier *mods.f90* regroupe les modules suivants :

- *parametres\_pb.f90*, qui définit tous les paramètres du problème.
- *schema\_temporel.f90*, où se trouvent les outils permettant de résoudre l'équation différentielle.

Le module *mod\_b.f90* contient toutes les sous-routines qui calculent le champ magnétique.

**Procédures :**

- *bessel.f90* contient toutes les fonctions de Bessel.
- *sub-integration.f90* contient toutes les sous-routines utilisées pour le calcul d'intégrales.
- *vitesse.f90* définit les composantes du champ de vitesse.

## D.3 Optimisation et automatisation des calculs

Pour déterminer le nombre de Reynolds magnétique critique, nous devons exécuter plusieurs fois le programme élémentaire décrit ci-dessus. Nous devons en effet tracer le taux de croissance en fonction de  $\bar{R}_m$ . Le  $\bar{R}_m$  correspondant à un taux de croissance nul correspond au seuil de l'instabilité dynamo. Procéder à la main, c'est-à-dire, choisir un  $\bar{R}_m$ , calculer le taux de croissance, se redonner un autre  $\bar{R}_m$  en fonction du positionnement

---

du premier résultat, calculer le taux de croissance correspondant et ainsi de suite jusqu'à obtenir une courbe passant approximativement par quatre points au dessous du seuil et quatre au dessus, est un travail long et fastidieux. C'est la raison pour laquelle nous avons développé une méthode de recherche du seuil par dichotomie (voir 6.1.2). En se donnant un  $\bar{R}_m$  initial, le programme calcule automatiquement le  $\bar{R}_m$  critique avec la précision souhaitée, ainsi que la pulsation du champ magnétique correspondant. Cette recherche de seuil s'avèrera très efficace car nous ne chercherons pas à avoir une précision très fine sur le nombre de Reynolds magnétique (de l'ordre de  $10^{-2}$  au plus).

De plus, pour rendre l'utilisation de ce code plus conviviale, nous l'avons automatisé comme le montre la figure (D.3). Nous avons créé un répertoire *Donnees* dans lequel se trouve les fichiers 1 à *Nfile* que nous souhaitons traiter. A l'aide d'un script écrit en langage shell (*lancement.sh*), le programme s'exécute pour chacun de ces fichiers d'entrée, les résultats se trouvent en sortie de la DNS dans le répertoire *Resultats*. Ce répertoire est lui même divisé en plusieurs sous répertoires dans lesquels se trouvent les fichiers *.dat* contenant les résultats. Par exemple, dans le répertoire *Rm* se trouvent les fichiers *Rm1.dat* à *RmNfile.dat* correspondant aux valeurs du seuil pour les fichiers de données *in1.dat* à *inNfile.dat* respectivement ; de même, dans le répertoire *Energie* se trouvent les fichiers *energie1.dat* à *energieNfile.dat* et ainsi de suite pour chaque sous répertoire.

Cependant, il est indispensable avant chaque phase de calcul de bien vérifier qu'avec les paramètres choisis, le calcul ait bien convergé et que le temps de calcul soit suffisamment long. On fera donc d'abord une phase de test, seulement ensuite nous lancerons les calculs.

De plus, nous n'avons pas systématiquement trouvé de seuil, ainsi nous avons mis un système de test qui arrête le calcul quand on dépasse une certaine valeur du nombre de Reynolds magnétique.

*Remarque* : Nous avons mis en place le même système d'automatisation dans le code portant sur la dynamo de Roberts modulée périodiquement dans le temps (voir chapitre 9)

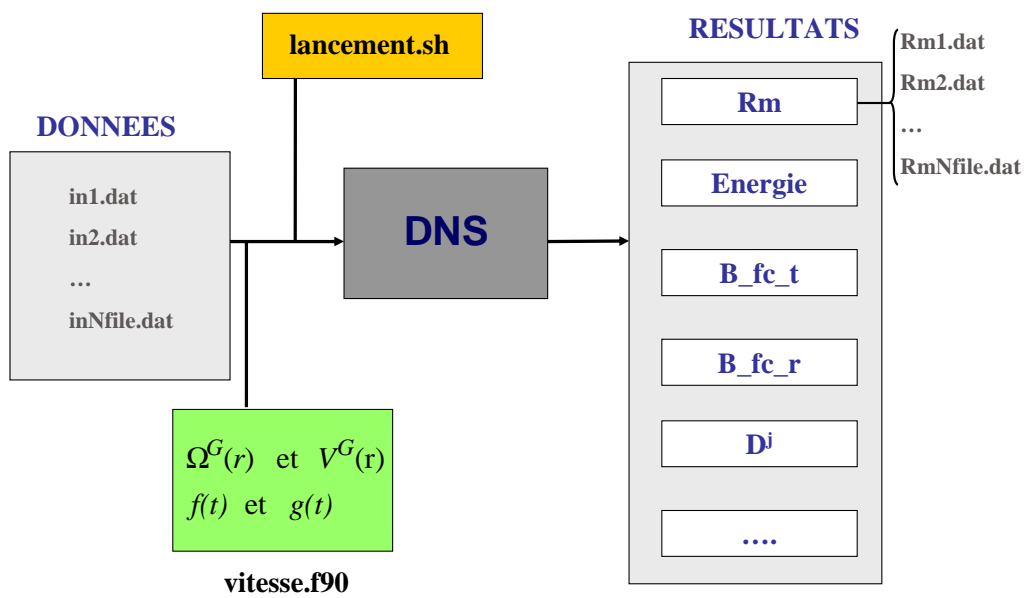


FIGURE D.3 – Schématisation de l'automatisation du code numérique





## Annexe E

### $R_i$ et $w_i$ , $i = 2, 4$

Dans cette annexe, nous donnons les résultats en terme de  $R_i$  et  $w_i$ ,  $i = 1, 2$  issus de la DNS, pour la dynamo de Ponomarenko modulée périodiquement dans le temps, dans la limite de faibles amplitudes de modulation.

$w_f$	$R_2$	$R_4$	$w_2$	$w_4$
1	4.10206	-0.132288	-0.166441	-0.0248582
3	2.29886	0.802025	-0.153661	0.0024881
5	1.43363	0.437259	-0.131524	0.000836227
10	0.108235	0.114297	-0.067486	-0.0174275

TABLE E.1 –  $R_i$  et  $w_i$ ,  $i = 2, 4$  en fonction de  $w_f$  pour  $\bar{\Gamma} = 1$ ,  $\tilde{\Gamma} = 1$

$w_f$	$R_2$	$R_4$	$w_2$	$w_4$
1	8.89051	13.53400	-0.03179	0.28753
5	5.56768	8.87967	-0.08301	0.09011
3	4.05498	4.55161	-0.07815	-0.00098
10	1.71849	1.19355	-0.04289	-0.04340

TABLE E.2 –  $R_i$  et  $w_i$ ,  $i = 2, 4$  en fonction de  $w_f$  pour  $\bar{\Gamma} = 1$ ,  $\tilde{\Gamma} = 0.7$

$w_f$	$R_2$	$R_4$	$w_2$	$w_4$
1	12.59190	38.08300	0.08995	1.42928
5	8.02649	30.08480	-0.03070	0.57575
3	5.87532	18.86310	-0.02710	0.06058
10	3.34707	3.34707	-0.02655	-0.05705

TABLE E.3 –  $R_i$  et  $w_i$ ,  $i = 2, 4$  en fonction de  $w_f$  pour  $\bar{\Gamma} = 1$ ,  $\tilde{\Gamma} = 0.5$ 

$w_f$	$R_2$	$R_4$	$w_2$	$w_4$
1	38.63380	27.41220	0.90755	6.89407
5	-2.42693	347.58200	-0.91648	14.52920
3	-14.64500	374.51700	-0.98040	11.10110
10	-0.88765	105.17400	-0.03584	0.36541

TABLE E.4 –  $R_i$  et  $w_i$ ,  $i = 2, 4$  en fonction de  $w_f$  pour  $\bar{\Gamma} = 1$ ,  $\tilde{\Gamma} = 0$ 

$w_f$	$R_2$	$R_4$	$w_2$	$w_4$
1	67.86440	-21.84360	2.48842	15.03770
5	32.34230	583.74000	0.24223	25.03740
3	10.44060	717.28300	-0.19234	16.88300
10	14.99010	128.52500	0.07060	0.01805

TABLE E.5 –  $R_i$  et  $w_i$ ,  $i = 2, 4$  en fonction de  $w_f$  pour  $\bar{\Gamma} = 1$ ,  $\tilde{\Gamma} = -0.5$ 

$w_f$	$R_2$	$R_4$	$w_2$	$w_4$
1	102.78500	-173.54200	4.38169	31.56340
5	50.95030	1417.27000	-0.61305	91.03830
3	-0.85778	2262.60000	-2.16285	89.76210
10	-140.31900	3871.45000	-3.22141	71.86400

TABLE E.6 –  $R_i$  et  $w_i$ ,  $i = 2, 4$  en fonction de  $w_f$  pour  $\bar{\Gamma} = 1$ ,  $\tilde{\Gamma} = -1$

## Annexe F

# Proceedings of the 11<sup>th</sup> EUROMECH European Turbulence Conference

Advances in Turbulence *XI*, Proceedings of the 11<sup>th</sup> EUROMECH  
European Turbulence Conference, June 25-28, 2007, Porto, Portu-  
gal (p 118-120)

---

---

# Influence of large scale flow fluctuations on the dynamo threshold

M. Peyrot<sup>1,2</sup>, C. Fargant<sup>1</sup>, F. Plunian<sup>1</sup>, C. Normand<sup>3</sup>, and A. Courvoisier<sup>4</sup>

<sup>1</sup> LGIT, CNRS, UJF, Maison des Géosciences B.P. 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France

LEGI, CNRS, UJF, INPG, B.P. 53, 38041 Grenoble Cedex 9, France

<sup>2</sup> [Marine.peyrot@ujf-grenoble.fr](mailto:Marine.peyrot@ujf-grenoble.fr)

<sup>3</sup> CEA Saclay 91191 Gif sur Yvette, France

<sup>4</sup> Departement of Applied Mathematics, University of Leeds, UK

## 1 Introduction

Most of astrophysical objects (planets, stars, galaxies,) have their own magnetic field in the absence of any external source. We know that such a field results from a magnetic instability, the so-called dynamo effect, generated by the turbulent motion of the conducting fluid within the natural object. In the recent years several liquid metal experiments have been built, aiming at reproducing dynamo action in a highly turbulent regime [1, 2, 3]. Most of these experiments have been designed assuming that it is the mean (time-averaged) part of the flow  $\bar{U}$  which generates the dynamo action. In fact, the flow has a highly turbulent nature and then presents a full spectrum of scales and frequencies. In particular the time fluctuation  $\tilde{U}$  of scale comparable with the largest scale of  $\bar{U}$  is suspected to modify the dynamo threshold. Knowing whether this large scale fluctuation can endanger or help for the dynamo instability is of high interest for the dynamo experiments [4].

In the present paper we consider two cases (i) and (ii) depending on the scale separation between  $L_B$  and  $L_{\bar{U}}$ , the largest scales of the generated magnetic field and of the mean flow. Case (i) corresponds to  $L_B \approx L_{\bar{U}}$ , the magnetic field is thus generated by a mean flow of comparable scale. Case (ii) corresponds to  $L_B \gg L_{\bar{U}}$ , the magnetic field is thus generated by a mean flow of much smaller scale. Both cases, (i)-without or (ii)-with scale separation (between  $B$  and  $\bar{U}$ ), have been the object of several studies showing that the dynamo mechanisms are highly different [5].

Now, adding to the mean flow  $\bar{U}$  a time-dependent fluctuation  $\tilde{U}$  of same scale ( $L_{\tilde{U}} = L_{\bar{U}}$ ) may drastically change the dynamo threshold. We want to compare the two types of dynamo mechanism (i) and (ii) under the influence of such a flow fluctuation. In particular is there one dynamo mechanism less

sensitive than the other to such a fluctuation, and therefore more robust for a dynamo experiment ?

## 2 Model

For flow (i), we take a smooth Ponomarenko flow [6] defined in cylindrical coordinates  $(r, \varphi, z)$  by

$$\mathbf{U} = (0, r\Omega, V)h(r) \quad \text{with} \quad h(r) = \begin{cases} 1, & r < 1 \\ 0, & r > 1 \end{cases}, \quad (1)$$

corresponding to a helical flow in a cylindrical cavity infinite along the  $z$ -direction, the external part being at rest. Each velocity component, angular and vertical, is defined as the sum of a stationary and fluctuating part

$$\Omega = \left( \bar{R}_m + \tilde{R}_m f(t) \right) (1-r), \quad V = \left( \bar{R}_m \bar{\Gamma} + \tilde{R}_m \tilde{\Gamma} f(t) \right) (1-r^2) \quad (2)$$

where  $\bar{R}_m$  and  $\bar{\Gamma}$  (resp.  $\tilde{R}_m$  and  $\tilde{\Gamma}$ ) are the magnetic Reynolds number and a factor of helicity for the stationary (resp. fluctuating) part of the flow. In the rest of the paper, we consider a periodic fluctuation of frequency  $\omega_f$ ,  $f(t) = \cos(\omega_f t)$ .

For flow (ii) we take the Roberts flow [7] defined in cartesian coordinates  $(x, y, z)$  by

$$\mathbf{U} = \nabla \times (\psi \mathbf{e}) + V \mathbf{e}, \quad (3)$$

$$\psi = \left( \bar{R}_m + \tilde{R}_m f(t) \right) (\cos x - \cos y), \quad V = \left( \bar{R}_m \bar{\Gamma} + \tilde{R}_m \tilde{\Gamma} f(t) \right) (\cos x - \cos y)$$

where  $\mathbf{e}$  is the unit vector in the  $z$ -direction. This flow corresponds to a periodic network of parallel vortices of alternated directions.

The magnetic field satisfies the induction equation

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (4)$$

where the dimensionless time  $t$  is given in units of diffusive time scale, implying that  $\omega_f$  is also a dimensionless quantity. As the velocity field does not depend on  $z$  (neither on  $\varphi$  for case (i)), each magnetic mode in  $z$  (and  $\varphi$  for case (i)) is independent from the others. Therefore we look for monochromatic solutions of the form

$$(i) \quad \mathbf{B}(r, \varphi, z, t) = \exp i(m\varphi + kz) \mathbf{b}(r, t), \quad (ii) \quad \mathbf{B}(x, y, z, t) = \exp(ikz) \mathbf{b}(x, y, t) \quad (5)$$

where  $k$  (resp.  $m$ ) is the vertical (resp. azimuthal) wave number of the field. To solve (4), we use for case (i) a Galerkin method in  $r$  [8] and RK4 in time, and for case (ii) a Fourier decomposition in  $x$  and  $y$  (FTW) and RK2 in time.

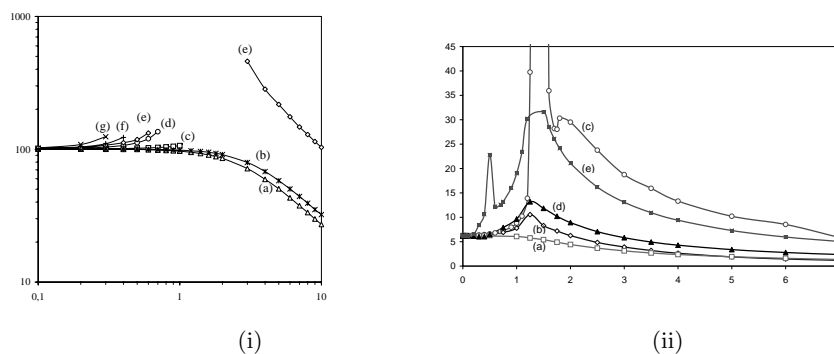
### 3 Results and conclusions

We plot on figure 1, the dynamo threshold  $\bar{R}_m$  versus the fluctuation intensity  $\rho = \tilde{R}_m/\bar{R}_m$  for  $\bar{\Gamma} = 1$  and different values of  $\tilde{\Gamma}$ .

For the case (i), if the fluctuation has not an appropriate geometry (curves (c) to (g)), we find that the threshold is drastically increased even if  $\rho$  is fairly small. On the other hand, if it has an appropriate geometry, it can help for  $\rho \geq 1$  (curves (a), (b) and (e)).

For the case (ii), similar results are obtained. The main difference is that in case (ii) if  $\rho$  is sufficiently large, the threshold decreases versus  $\rho$ , whatever the value of  $\tilde{\Gamma}$ .

Unfortunately for dynamo experiments, for both cases (i) and (ii), we did not find any subcritical dynamo state at small  $\rho$ .



**Fig. 1.** Dynamo threshold  $\bar{R}_m$  versus  $\rho = \tilde{R}_m/\bar{R}_m$ . For the case (i),  $\bar{\Gamma} = 1$ ,  $m = 1$ ,  $k = -1$  and  $\omega_f = 50$ . The different curves correspond to  $\tilde{\Gamma} =$  (a) 1; (b) 0.5; (c) 0; (d) -0.5; (e) -1. For the case (ii),  $\bar{\Gamma} = 1$ ,  $k = 1$  and  $\omega_f = 0.1$ . The different curves correspond to  $\tilde{\Gamma} =$  (a) 1; (b) 0.5; (c) 0.25; (d) 2; (e) 4

### References

1. P. Cardin, D., D. Jault, H.-C. Nataf and J.-P. Masson, "Towards a rapidly rotating liquid sodium dynamo experiment", *Magnetohydrodynamics* **38**, 177-189 (2002)
2. P. Frick, V. Noskov, S. Denisov, S. Khripchenko, D. Sokoloff, R. Stepanov, A. Sukhanovsky, "Non-stationary screw flow in a toroidal channel: way to a laboratory dynamo experiment", *Magnetohydrodynamics* **38**, 143-162 (2002)
3. R. Monchaux, M. Berhanu, M. Bourgoin, Ph Odier, M. Moulin, J.-F. Pinton, R. Volk, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, C. Gasquet, L. Marj  , and F. Ravelet. "Generation of magnetic field by a turbulent flow of liquid sodium", *Phys. Rev. Lett.* **98**, 044502 (2006)
4. R. Volk, F. Ravelet, R. Monchaux, M. Berhanu, A. Chiffaudel, F. Daviaud, Ph. Odier, J.-F. Pinton, S. Fauve, N. Mordant, and F. Pétrélis, "Transport of Magnetic Field by a Turbulent Flow of Liquid Sodium", *Phys. Rev. Lett.* **97**, 074501 (2006)
5. A.D. Gilbert, "Dynamo theory", In: *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, **2** (ed. S. Friedlander, D. Serre), 355-441, Elsevier (2003)
6. Y.U. Ponomarenko, "Theory of the hydromagnetic generator", *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **6**, 755 (1973)
7. G. O. Roberts, "Dynamo Action of Fluid Motions with Two-Dimensional Periodicity" *Phil. Tran. R. Soc. Lond. A* **271**, 411 (1972)
8. L. Mari  , C. Normand and F. Daviaud, "Galerkin analysis of kinematic dynamos in the von Kármán geometry", *Phys. Fluids* **18**, 017102 (2006)

---

## Bibliographie

- BABYLISS, A., FOREST, C.-B. & TERRY, P. 2004 Magnetic field generation and saturation in a mechanically forced spherical dynamo. *Magnetohydrodynamics* **38**, 107–120.
- BATCHELOR, G. 1953 *The theory of homogeneous turbulence*. Cambridge Univ. Press.
- BERHANU, M., MONCHAUX, R., MORDANT, N., PÉTRÉLIS, F., CHIFFAUDEL, A., DAVIAUD, F., MARIÉ, L., RAVELET, F., BOURGOIN, M., PITON, J.-F. & VOLK, R. 2007 Magnetic field reversals in an experimental turbulent dynamo. *E. P. L* **77** (59001).
- BOURGOIN, M. 2003 Etudes en magnétohydrodynamique, application à l'effet dynamo. PhD thesis, Ecole Normale supérieure de Lyon.
- BOURGOIN, M., MARIÉ, L., PÉTRÉLIS, F., GASQUET, C., GUIGON, A., LUCIANI, J.-B., MOULIN, M., NAMER, F., BURGETE, J., CHIFFAUDEL, A., DAVIAUD, F., FAUVE, S., ODIERP. & PINTON, J.-F. 2002 Magnetohydrodynamics measurements in the von Karman sodium experiment. *Phys. Fluids* **17**, 3046–3058.
- BULLARD, E. 1955 The stability of a homopolar dynamo. *Proc. Camb. Phil. Soc.* **51**, 744–760.
- BUSSE, F.-H. 1975 A model of geodynamo. *Geophys. J. R. Astr. Soc.* (42).
- BUSSE, F.-H. 1992 *Dynamo theory of planetary magnetism and laboratory experiments*, vol. 69, p. 197. Springer Proceedings in Physics.
- CARDIN, P., JAULT, D., NATAF, H.-C. & MASSON, J.-P. 2002 Towards a rapidly rotating liquid sodium dynamo experiment. *Magnetohydrodynamics* **38**, 177–189.
- C.DELANNOY 1998 *Programmer en Fortran 90 Guide complet*. Eyrolles.
- CHILDRESS, S. & D.GILBERT, A. 1995 *Stretch, Twist, Fold : The Fast Dynamo*. Springer.
- COURVOISIER, A. 2006 Dynamo Action and the Generation of Large-Scale Magnetic Fields in Astrophysics. PhD thesis, The University of Leeds.
- DOBLER, W., FRICK, P. & STEPANOV 2003 Screw dynamo in a time-dependent pipe flow. *Phys. Rev. E* **67**, 056309.
-



- FARGANT, C. & PLUNIAN, F. 2005 Etudes de la dynamo de Roberts modulée périodiquement dans le temps, stage de Master 2 au LEGI.
- FOREST, C.-B., BABYLISS, A., KENDRICH, R., NORNBORG, M., OCONNEL, R. & SPENCE, E. 2002 Hydrodynamic and numerical modeling of a spherical homogeneous dynamo experiment. *Magnetohydrodynamics* **38**, 107–120.
- FRICK, P., NOSKOV, V., DENISOV, S., KHRIPCHENKO, S., SOKOLOFF, D., STEPANOV, R. & SUKHANOVSKY, A. 2002 Non-stationary screw flow in a toroidal channel : way to a laboratory dynamo experiment. *Magnetohydrodynamics* **38**, 143–162.
- GAILITIS, A. & FREIBERGS, J. 1976 Theory of a helical MHD dynamo. *Magnetohydrodynamics* **12**, 127.
- GAILITIS, A., LIELAUSIS, O., DEMENTIEV, S., PLATACIS, E., CIFERSONS, A., GERBETH, G., GUNDRUM, T., STEFANI, F., CHRISTEN, M., HÄNEL, H. & WILL, G. 2000 Detection of a Flow Induced Magnetic Field Eigenmode in the Riga Dynamo Facility. *Phys. Rev. Lett.* **84**, 4365–4368.
- GAILITIS, A., LIELAUSIS, O., PLATACIS, E., DEMENTIEV, S., CIFERSONS, A., GERBETH, G., GUNDRUM, T., STEFANI, F., CHRISTEN, M. & WILL, G. 2001 Magnetic field saturation in the Riga dynamo experiment. *Phys. Rev. Lett.* **86**, 3024.
- GALLET, Y., GENEVEY, A., LE GOFF, M., FLUTEAU, F. & ESHRAGHI, A. 2006 Possible impact of the earth's magnetic field on the history of ancient civilizations. *Earth and Planetary Science Letters* **246**, 17–26.
- GILBERT, A. 1988 Fast dynamo action in the Ponomarenko dynamo. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* (44).
- GILBERT, A. 2003 *Handbook of Mathematical Fluid Dynamics*, , vol. 2, chap. Dynamo theory, pp. 355–441. New-York : Elsevier.
- GILBERT, A. & PONTY, Y. 2000 Slow Ponomarenko dynamos on stream surfaces. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynam.* **93**, 55–95.
- KRAUSE, F. & RÄDLER, K.-H. 1980 *Mean field magnetohydrodynamics and dynamo theory*. Akademie-Verlag Berlin and Pergamon Press Oxford.
- LAGUERRE, R. 2007 Approximation des équations de la magnétohydrodynamique par une méthode hybride spectrale - éléments finis nodaux : application à l'effet dynamo. PhD thesis, Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur.
- LAGUERRE, R., NORE, C., LÉORAT, J. & GUERMOND, J.-L. 2006 Influence of conductivity jumps in the envelope of a kinematic flow. *C. R. Mecanique* **334**.
- LARMOR, J. 1919 how could a rotating body such as the sun become a magnet? *Rep. Brit. Assoc. Sci.* p. 1919.
-

- LAVAL, J.-P., BLAINEAU, P., LEPROVOST, N., DUBRULLE, B. & DAVIAUD, F. 2006 Influence of Turbulence on the Dynamo Threshold. *Phys. Rev. Lett.* **96**, 204503.
- LEPROVOST, N. 2004 Influence des petites échelles sur la dynamique à grande échelle en turbulence hydro et magnétohydrodynamique. PhD thesis, Université de Paris 6.
- LEPROVOST, N. & DUBRULLE, B. 2005 The turbulent dynamo as an instability in a noisy medium. *Eur. Phys. J. B* **44**, 395.
- LOWES, F.-J. & WILKINSON, I. 1963 Geomagnetic dynamo : a laboratory model. *Nature* (198).
- LOWES, F.-J. & WILKINSON, I. 1968 Geomagnetic dynamo : an improved laboratory model. *Nature* (219).
- MANNEVILLE, P. 1984 *Computational Galerkin Methods*. Springer-Verlag.
- MARIÉ, L. 2003 Transport de moment cinétique et de champ magnétique par un écoulement turbillonnaire turbulent : influence de la rotation. PhD thesis, CEA Saclay.
- MARIÉ, L., NORMAND, C. & DAVIAUD, F. 2006 Galerkin analysis of kinematic dynamos in the von Kàrman geometry. *Phys. of Fluids* **18**.
- MÜLLER, U., STIEGLITZ, R. & HORANYI, S. 2004 A two-scale hydromagnetic dynamo experiment. *J. Fluid Mech.* **498**, 31–71.
- MOFFATT, H. 1978 *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*. Cambridge University Press.
- MONCHAUX, R. 2007 Mécanique statistique et effet dynamo dans un écoulement de Von Karman turbulent. PhD thesis, CEA Saclay.
- MONCHAUX, R., BERHANU, M., BOURGOIN, M., ODIER, P., MOULIN, M., PINTON, J.-F., VOLK, R., FAUVE, S., MORDANT, N., PÉTRÉLIS, F., CHIFFAUDEL, A. AND DAVIAUD, F., DUBRULLE, B., GASQUET, C., MARIÉ, L. & RAVELET, F. 2006 Generation of magnetic field by a turbulent flow of liquid sodium. *Phys. Rev. Lett.* **98** (044502).
- MORDANT, N., PINTON, J.-F. & CHILLA, F. 1997 Characterization of turbulence in a closed flow. *J. Phys* **II7**, 1.
- MOREAU, R. 1991 *Magnetohydrodynamics*. Kluwer Academic Publisher.
- MÜLLER, U. & STIEGLITZ, R. 2000 *Naturwissenschaften* **87**, 381.
- NATAF, H.-C., ALBOUSSIÈRE, T., BRITO, D., CARDIN, P., GAGNIERE, N. & SCHMITT, D. 2007 Towards a rapidly rotating liquid sodium dynamo experiment. Preprint.
- NORMAND, C. 2003 Ponomarenko dynamo with time-periodic flow. *Phys. of Fluids* **15**, 1606–1611.
-

- 
- PARKER, E.-N. 1955 Hydromagnetic dynamo models. *Astrophys. J.* **122**, 293.
- PARKER, E.-N. 1970 The generation of magnetic fields in astrophysical bodies. *Astrophys. J.* **162**, 655.
- P.CORDE & A.FOUILLOUX 2005 *Langage Fortran*. IDRIS.
- P.CORDE & H.DELOUIS 2005 *Cours Fortran 95*. IDRIS.
- PEFFLEY, N.-L., CAWTHORNE, A.-B. & LATHROP, D.-P. 2000 Toward a Self-generating Magnetic Dynamo. *Phys. Rev. E* **61**.
- PETRELIS, F. 2003 Etude des mécanismes d'instabilité et de saturation du champ magnétique. PhD thesis, Université de Paris 6.
- PETRELIS, F. & FAUVE, S. 2006 Inhibition of the dynamo effect by phase fluctuations. *Europhys. Lett.* **76**, 602–608.
- PEYROT, M., PLUNIAN, F. & NORMAND, C. 2007 Parametric instabilities of the helical dynamo. *Physics of Fluids* **18**, 054109.
- PLUNIAN, F. 1996 Etude de l'Effet dynao dans le coeur du réacteur Phoenix. PhD thesis, Laboratoire des Ecoulements géophysiques et Industriels.
- PLUNIAN, F., MARTY, P. & ALEMANY, A. 1998 Chaotic behaviour of the rhitake dynamo with symetric mechanical friction and azimuthal currents. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **454**, 1835.
- PLUNIAN, F. & MASSÉ, P. 2002 *Couplage magnétohydraulique : modélisation de la dynamo cinématique*, , vol. chap 6. Hermes.
- PLUNIAN, F. & STEPANOV, R. 2007 A non-local shell model of hydrodynamics and magnetohydrodynamic turbulence. *New Journal of Physics* **9**, 294.
- PONOMARENKO, Y. 1973 Theory of the hydromagnetic generator. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **6**, 755.
- PONTY, Y, P. H. & PINTON, J.-F. 2004 Simulation of induction at low prandlt number. *Phys. Rev. Lett.* **92**, 144.503.
- PONTY, Y., MININNI, P., PINTON, J.-F., POLITANO, H. & POUQUET, A. 2006 Dynamo action at low magnetic Prandtl numbers : mean flow vs. fully turbulent motion. Preprint, physics/0601105.
- PRESS, W. H., VETTERLING, W. T. & P.FLANNERY, S. A. T. B. 1993 *Numerical recipies in Fortran 77, the art scientific computing second edition, volume 1 of Fortran numerical recipe*. Cambridge University Press.
- PRESS, W. H., VETTERLING, W. T. & P.FLANNERY, S. A. T. B. 1999 *Numerical recipies in Fortran 90, the artof Parallel Computing, volume 2 of Fortran numerical recipe*. Cambridge University Press.
-

- RAVELET, F. 2005 Bifurcations globales hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques dans un écoulement de von Kármán turbulent. PhD thesis, Ecole Polytechnique.
- RÄDLER, K.-H., APSEIN, E., RHEINHARTDT, M. & SHÜLER, M. 1996 Contribution to the theory of the planned Karlsruhe dynamo experiment. *Astrophysical Institute Potsdam Report* .
- RÄDLER, K.-H., RHEINHARTDT, M., APSEIN, E. & FUSH, H. 2002a On the mean field theory of the Karlsruhe experiment I. Kinematic theory. *Magnetohydrodynamics* **38**, 41–71.
- RÄDLER, K.-H., RHEINHARTDT, M., APSEIN, E. & FUSH, H. 2002b On the mean field theory of the Karlsruhe experiment II . Back-reaction of the magnetic field on the fluid flow. *Magnetohydrodynamics* **38**, 41–71.
- RIKITAKE, T. 1958 Oscillations of a system of disk dynamos. *Proc. Camb. Phil. Soc.* (54).
- ROBERT, G. 1972 Dynamo action of fluid motions with two dimensional periodicity. *Phil. Trans. Soc. London A* (271).
- ROBERTS, P. 1987 *Dynamo theory, in Irreversible Phenomena and Dynamical Systems Analysis in Geosciences*. C. Nicolis & G. Nicolis, 73–133.
- RUZMAIKIN, A., SOKOLOFF, D.-D. & SHUKUROV, A.-M. 1988 Hydromagnetic screw dynamo. *J. Fluid Mech.* **197**, 39–56.
- SCHMITT, D., ALBOUSSIÈRE, T., BRITO, D., CARDIN, P., GAGNIÈRE, N., JAULT, D. & NATAF, H.-C. 2007 Rotating spherical Couette flow in a dipolar magnetic field : Experimental evidence of hydromagnetic waves. Preprint, Journal of Fluid Mechanics.
- SHAEFFER, N. & CARDIN, P. 2006 Quasi-geostrophic kinematic dynamos at low magnetic Prandtl number. *Earth and Planetary Science Letters* **245**, 595–604.
- SHEW, W., SISAN, D.-R. & LATHROP, D.-P. 2001 Dynamo and dynamics, a Mathematical Challenge. *Proceedings of NATO advanced Research Workshop* (ed. Dordrecht), , vol. 26, p. 83. France : Kluwer Academic Publishers.
- STEENBECK, M., KRAUSE, F. & RÄDLER, K.-H. 1966 A calculation of the mean electromotive force in a electrically conductive fluid in turbulent motion, under the influence of Coriolis forces. *Z. Naturforsch* **21a**, 369–376.
- STEPANOV, R. & PLUNIAN, F. 2006 Fully developed turbulent dynamo at low magnetic Prandtl number. *Journal of turbulence* **7**, 39.
- STIEGLITZ, R. & MÜLLER, U. 2001 Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo. *Phys. Fluids* **13**, 561.
-

- TARDUNO, J., COTTREL, R.-D., WATKEYS, M.-K. & BAUCH, D. 2007 Geomagnetic field strength 3.2 billion years ago recovered by single silicate crystals. *Nature* **446**, 657–660.
- TORRE, A., BURGUETE, J. & PÉRÈZ-GARCIA, C. 2007 Influence of time dependant flows on the threshold of the kinematic dynamo action. *European Physical Journal* **146**, 313–320.
- VAINSHTEIN, S. & ZELDOVICH, Y. 1972 Origin of magnetic field in astrophysics. *Usp. Fiz. Nauk* **106**, 431–457.
-