



**HAL**  
open science

# Étude des interactions hydrodynamiques entre particules et parois par la méthode des éléments de frontière

Maher Berzig

► **To cite this version:**

Maher Berzig. Étude des interactions hydrodynamiques entre particules et parois par la méthode des éléments de frontière. Dynamique des Fluides [physics.flu-dyn]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2007. Français. NNT : . tel-00325418

**HAL Id: tel-00325418**

**<https://theses.hal.science/tel-00325418>**

Submitted on 29 Sep 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École Nationale d'Ingénieurs de Tunis

Université Pierre et Marie Curie Paris 6

# THÈSE

soutenue le 27 Octobre 2007

pour l'obtention des grades de

**Docteur de l'École Nationale d'Ingénieurs de Tunis**

**Spécialité Mathématiques Appliquées**

et

**Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie Paris 6**

**Spécialité Mécanique**

par

**Maher BERZIG**

## **Étude des interactions hydrodynamiques entre particules et parois par la méthode des éléments de frontière**

### **Composition du jury**

<i>President :</i>	M. Mohamed JAOUA	
<i>Rapporteurs :</i>	M. Nabil GMATI M. Bertrand MAURY	
<i>Examineurs :</i>	M. Lassaad ELASMI M. François FEUILLEBOIS Mme. Renée GATIGNOL M. Taïeb HADHRI M. Antoine SELLIER	(Codirecteur de thèse) (Directeur de thèse)  (Directeur de thèse)

Laboratoire d'Ingénierie Mathématique

École Polytechnique de Tunisie

Laboratoire de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes

École Supérieure de Physique et de Chimie Industrielles de la Ville de Paris



*A mes chers parents*



## Remerciements

*Je tiens tout d'abord à remercier le Professeur Lassaad Elasmî qui m'a encadré pendant toutes les années de thèse. Il m'a guidé dans ce travail tout en respectant mes choix de recherche. Je le remercie pour sa disponibilité, l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour ses conseils toujours enrichissants.*

*Je voudrais exprimer ici ma reconnaissance à Monsieur François Feuillebois, directeur de recherche au CNRS, qui a dirigé ma thèse. Grâce à sa disponibilité constante, j'ai pu bénéficier de ses connaissances scientifiques et de son expérience. Je le remercie chaleureusement pour la confiance qu'il m'a accordée.*

*Je tiens à remercier le Professeur Taïeb Hadhri, mon directeur de thèse, pour son soutien, la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de la thèse. Ses grandes qualités humaines et scientifiques ont été essentielles à la réalisation de cette thèse.*

*Je remercie le Professeur Mohamed Jaoua d'avoir accepté de présider mon Jury de thèse. Les Professeurs Nabil Gmati et Bertrand Maury ont bien voulu être les rapporteurs de ce travail, je les remercie vivement. J'adresse mes remerciements aussi aux Professeurs Renée Gatignol et Antoine Sellier, qui ont accepté de faire partie de mon Jury.*

*Je tiens à remercier aussi mes parents pour leurs soutiens et leurs patiences tout au long de cette période, ainsi que ma femme, ma sœur et mes chers frères.*

*Je souhaite aussi adresser ma reconnaissance à tous mes amis, particulièrement à Hatem, Abdessalem, Khaled, Mourad, Adel, Moez, Nader, Abdessattar...*

*J'associe à ces remerciements les membres de Laboratoire d'Ingénierie Mathématique, pour leurs soutiens et leurs amitiés. Merci enfin aux responsables du projet CMCU N° 04PRE01 pour l'appui financier qui m'a été utile pour bien mener cette thèse.*



# Table des matières

Introduction générale	1
-----------------------	---

## Chapitre 1

### Techniques de résolution des équations de Stokes

1.1	Introduction . . . . .	7
1.2	Normalisation et équations de Stokes . . . . .	9
1.3	Superposition des écoulements . . . . .	11
1.4	Aperçu sur des techniques de résolution . . . . .	13
1.4.1	Méthode des réflexions . . . . .	13
1.4.2	Méthode des coordonnées bisphériques . . . . .	14
1.4.3	Méthode des développements multipolaires . . . . .	17
1.5	Formulation intégrale et méthode de résolution . . . . .	18
1.5.1	Existence et unicité de la solution des équations de Stokes	18
1.5.2	Outils de résolution . . . . .	19
1.5.3	Représentation intégrale . . . . .	21
1.5.4	Calcul de la vitesse du fluide . . . . .	25
1.6	Conclusion . . . . .	26

## Chapitre 2

### Cas axisymétrique

2.1	Introduction . . . . .	27
2.2	Discretisation des équations intégrales . . . . .	28
2.3	Assemblage de la matrice . . . . .	30
2.4	Distribution des Stokeslets sur les particules . . . . .	32
2.5	Validation des résultats pour des cas simples . . . . .	35

2.5.1	Une sphère au voisinage d'une paroi plane . . . . .	36
2.5.2	Deux sphères loin de la paroi . . . . .	37
2.6	Résultats et discussion . . . . .	39
2.6.1	Deux sphères proches d'une paroi . . . . .	39
2.6.2	Plusieurs sphères . . . . .	42
2.7	Conclusion . . . . .	43

### Chapitre 3

#### Résolution des équations intégrales de surface

3.1	Introduction . . . . .	47
3.2	Equations intégrales de surfaces . . . . .	48
3.3	Méthode de collocation . . . . .	49
3.4	Méthode de Galerkin de type $P_0$ . . . . .	50
3.5	Assemblage de la matrice . . . . .	52
3.6	Calcul des forces et des couples . . . . .	54
3.7	Maillage adaptatif . . . . .	56
3.8	Conclusion . . . . .	60

### Chapitre 4

#### Dynamique des particules

4.1	Introduction . . . . .	63
4.2	Formulation des relations de résistance . . . . .	64
4.3	Matrice de résistance de translation . . . . .	66
4.4	Matrice de résistance de rotation . . . . .	68
4.5	Superposition des mouvements . . . . .	69
4.6	La grande matrice de résistance pour $N_p$ particules . . . . .	69
4.7	Équations du mouvement des particules. . . . .	73
4.8	Équations des trajectoires des particules . . . . .	75
4.9	Algorithme de calcul des trajectoires des particules . . . . .	76
4.10	Conclusion . . . . .	78

## Chapitre 5

### Validation et comparaisons

5.1	Introduction . . . . .	79
5.2	Calcul des coefficients de résistance . . . . .	80
5.2.1	Une particule dans un fluide infini . . . . .	80
5.2.2	Une particule au voisinage d'une paroi . . . . .	81
5.2.3	Deux particules identiques dans un fluide infini . . . . .	85
5.3	Calcul de la vitesse à l'intérieur du fluide . . . . .	87
5.3.1	Une particule en sédimentation au voisinage d'une paroi . . . . .	87
5.3.2	Calculs sur les droites perpendiculaires à la paroi. . . . .	88
5.3.3	Calculs sur les droites parallèles à la paroi. . . . .	92
5.3.4	Une particule sphérique au voisinage d'une paroi ; cas asymétriques. . . . .	96
5.4	Comparaison des résultats pour un problème axisymétrique . . . . .	99
5.4.1	Deux particules sphériques de différentes tailles . . . . .	99
5.4.2	Chaîne de trois particules identiques . . . . .	101
5.5	Conclusion . . . . .	103

## Chapitre 6

### Résultats numériques et simulations

6.1	Introduction . . . . .	106
6.2	Forces et couples exercés sur des particules de formes ellipsoïdales . . . . .	107
6.2.1	Une particule ellipsoïdale dans un écoulement de cisaillement . . . . .	107
6.2.2	Interaction entre deux ellipsoïdes au voisinage d'une paroi . . . . .	111
6.3	Forces et couples exercés sur plusieurs particules sphériques . . . . .	112
6.3.1	Chaîne de particules : mouvement suivant la ligne des centres et parallèle à la paroi . . . . .	112
6.3.2	Chaîne de particules : mouvement perpendiculaire à la ligne des centres et perpendiculaire à la paroi . . . . .	116
6.3.3	Chaîne de particules : mouvement perpendiculaire à la ligne des centres et parallèle à la paroi . . . . .	120

6.3.4	Effet de la position d'une particule dans une chaîne . . . . .	123
6.3.5	Matrices de particules . . . . .	125
6.4	Calcul des trajectoires des particules . . . . .	126
6.4.1	Trajectoires de deux particules en sédimentation perpendiculaire à une paroi. . . . .	127
6.4.2	Trajectoires de deux particules en sédimentation parallèle à une paroi. . . . .	128
6.4.3	Trajectoires de trois particules au voisinage d'une paroi . . .	130
6.5	Champs de vitesse autour des particules . . . . .	132
6.5.1	Champs de vitesse autour de deux particules . . . . .	133
6.5.2	Champs de vitesse autour de trois particules . . . . .	134
6.6	Champs d'écoulement autour des particules en sédimentation . . .	135
6.6.1	Champs d'écoulement autour de deux particules en sédimentation . . . . .	135
6.6.2	Champs d'écoulement autour de trois particules en sédimentation au voisinage d'une paroi verticale . . . . .	137
6.7	Conclusion . . . . .	141
<b>Conclusions et perspectives</b>		<b>143</b>
<b>Annexe A Formule de symétrie</b>		<b>151</b>
<b>Annexe B Noyaux de l'équation intégrale axisymétrique</b>		<b>153</b>
<b>Annexe C Maillage et interpolation</b>		<b>159</b>
<b>Annexe D Calcul de l'intégrale singulière</b>		<b>161</b>
<b>Liste des tableaux</b>		<b>165</b>
<b>Liste des figures</b>		<b>167</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>175</b>

# Introduction générale

Nombreux sont les phénomènes naturels et processus industriels qui font intervenir des particules en suspension. On peut citer comme exemples familiers : les sédiments dans les rivières ou les estuaires, les gouttes de pluie, les pâtes, les suspensions biologiques (comme le sang), les peintures, l'encre, les eaux résiduaires transportant des solides en suspension. Les suspensions sont également présentes dans de nombreux procédés technologiques ou industriels : le traitement et la filtration des eaux, la séparation dans l'élaboration des minerais, la synthèse de matériaux composites, la fabrication du papier, pour ne citer que quelques exemples.

Ainsi par exemple, l'étude de la sédimentation de particules dans un écoulement de fluide a diverses applications :

- En granulométrie :  
A partir de la vitesse de sédimentation à très faible concentration volumique en particules, on peut déterminer les tailles de particules sensiblement sphériques.
- En Flocculation :  
La mesure de la variation de la vitesse de sédimentation au cours du temps pour une population de particules permet de suivre la coagulation de ces particules et par suite de quantifier la stabilité d'une suspension par rapport à la flocculation.
- Pour les lits fluidisés :  
Un lit fluidisé est une sédimentation dans un état stationnaire et le paramètre variable est la concentration en particules.

La présente étude entre dans le cadre des écoulements à faible nombre de Reynolds,  $Re = aV/\nu \ll 1$  où  $a$  est une longueur caractéristique  $V$  une vitesse caractéristique et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide.

Ce genre d'écoulements peut avoir des origines physiques très variées, puisque ce nombre  $Re$  est obtenu par combinaison de trois grandeurs  $a, V$  et  $\nu$ .  $Re \ll 1$  peut correspondre à un déplacement d'objets microscopiques, à la dynamique des suspensions de particules à très petite vitesse, à l'écoulement de fluide très visqueux. Il faut remarquer qu'à l'échelle des particules considérées dans la pratique ( $100\mu\text{m}$  et moins), même l'eau se comporte comme un fluide très visqueux (c'est à dire que le nombre de Reynolds est petit) et les équations de Stokes s'appliquent.

La première approche théorique de la sédimentation remonte à Stokes (1851) qui a calculé la vitesse d'une particule sphérique tombant dans un fluide visqueux infini. La force  $\mathbf{F}$  appliquée sur une sphère de rayon  $a$ , de vitesse  $\mathbf{U}$  s'écrit :

$$\mathbf{F} = -6 \pi \mu a \mathbf{U}$$

où  $\mu$  est la viscosité dynamique du fluide.

D'autre part, le couple  $\mathbf{C}$  appliqué sur une sphère, de vitesse angulaire  $\mathbf{\Omega}$  s'écrit :

$$\mathbf{C} = -8 \pi \mu a^3 \mathbf{\Omega}$$

Les écoulements considérés ici sont régis par les équations de Stokes. Résoudre les équations de Stokes revient à résoudre un système d'équations aux dérivées partielles elliptiques linéaires. Le cadre mathématique et les techniques de résolution de cette catégorie d'équations sont largement étudiés, citons Ciarlet [21], Raviart et Thomas [91], Pironneau [85], Quarteroni et Valli [90], Ladyzhenskaya [65].

Une large classe de problèmes peut alors être résolue analytiquement grâce à la linéarité de ces équations ( ce qui ne serait pas possible avec les équations de Navier-Stokes).

---

Brenner [16] et Maude [72] ont calculé la force hydrodynamique sur une particule sphérique en mouvement de translation perpendiculaire à une paroi par la méthode des coordonnées bisphériques. Plus tard, O'Neill, Cox et Brenner [80, 44] ont calculé les autres composantes de la force et du couple pour les mouvements parallèles à la paroi. Récemment, Chaoui et Feuillebois [18] ont travaillé sur l'aspect du cisaillement au sein de l'écoulement en utilisant la même méthode. Par ailleurs, d'autres méthodes ont été appliquées pour résoudre ce problème : les unes donnant des solutions analytiques, les autres des solutions approchées. La méthode des développements multipolaires a été utilisée par Jeffrey et Onishi [59] pour le problème de deux particules et Cichocki et al [22, 24] ont généralisé cette méthode au cas de plusieurs particules sphériques grâce à l'utilisation d'harmoniques vectorielles. Lorentz (1897) est le premier à avoir utilisé la méthode des réflexions et Wakiya [100, 101] l'a développé ultérieurement. Parmi les autres méthodes, la méthode de collocation utilisée par Ganatos, Pfeffer et Weinbaum [33, 34, 35] est basée sur la solution générale des équations de Stokes pour un fluide autour d'une particule, solution trouvée par Lamb [66]. Cependant, lorsqu'on étudie le problème de plusieurs particules de forme a priori quelconque, les méthodes analytiques ne peuvent plus s'appliquer à cause de la complexité géométrique et physique et l'on doit avoir recours aux méthodes numériques : la méthode des éléments finis (FEM) est la plus utilisée et ce, dans divers domaines, particulièrement pour les écoulements riches en particules. Maury [74] a étudié l'écoulement 2D dans un domaine périodique ainsi que le développement de la méthode des éléments de frontière élargie avec Ismail [56] ce qui apporte plus de précision dans le calcul des vitesses autour des particules. Pozrikidis [86, 89] a utilisé la méthode des éléments de frontière (BEM) pour la résolution du problème d'une particule de forme quelconque avec le fluide en écoulement de cisaillement, tandis que Gavze [36] l'a utilisé pour étudier le mouvement d'une particule ellipsoïdale au voisinage d'une paroi qui contient un trou de mêmes dimensions que la particule. Ensuite, Gavze et Shapiro [37] ont étudié l'effet de la forme ellipsoïdale sur la vitesse de translation et de rotation et sur les forces et les couples exercés sur la particule. Récemment, Sellier [92, 93] a appliqué cette méthode pour le cas

de 4 particules au voisinage de la paroi avec des formes quelconques. L'approche spectrale est utilisée par Higdon et Muldowney [51, 52] pour la résolution des équations de Stokes dans le cas d'une particule de forme sphérique et même toroïdale.

Plusieurs méthodes ont été appliquées pour déterminer les forces hydrodynamiques entre des particules en suspension afin d'étudier leur dynamique.

La méthode introduite par Brady et al [14] appelée "dynamique Stokesienne" présente un formalisme qui prend en compte les forces hydrodynamiques entre plusieurs particules pour étudier la rhéologie des suspensions concentrées. La méthode de la dynamique Stokesienne est difficile à mettre en œuvre pour les particules non sphériques, ou dans le cas de la présence des parois. Les travaux de Claeys [25] apportent des réponses pour certaines configurations. Les résultats obtenus peuvent être retrouvés à partir de la résolution des équations intégrales de surface par la méthode des éléments de frontières (BEM) [12, 15], ce qui apporte de la flexibilité puisque les particules non sphériques ou déformables peuvent être introduites facilement en (BEM).

Les simulations de Boltzmann sur réseau [76] ont été à l'origine présentées pour simplifier la dynamique macroscopique du modèle de gaz sur réseau, en enlevant les effets des fluctuations thermiques. Ceci a permis à Ladd [63, 64] d'étudier des problèmes d'écoulements de Stokes.

La méthode numérique utilisée dans ce travail est la méthode des éléments de frontière présentée par Pozrikidis [86] qui consiste à distribuer des Stokeslets (fonction de Green des équations de Stokes) sur les surfaces des particules. Dans le cas d'une paroi plane, on utilise comme dans [37, 92, 93] la fonction de Green calculée par Blake [10, 11]. La paroi est ici prise en compte au moyen d'un système d'images. Dans le cas d'autres parois, on peut utiliser des fonctions de Green adaptées, lorsqu'elles existent, sinon utiliser une autre particule d'un grand rayon pour remplacer la paroi.

La méthode des éléments de frontière est une méthode de discrétisation de la formulation intégrale du problème. Cette formulation intégrale débouche sur une équation dont les inconnues sont les intensités des Stokeslets. Cette équation permet de calculer l'écoulement autour des particules et aussi la valeur de la force exercée sur ces particules.

L'équation intégrale de surface est obtenue en utilisant le même démarche que celle utilisé par Ladyzhenskaya [65]. C'est une équation intégrale de première espèce, connue aussi sous le nom de potentiel de simple couche qui admet la fonction de Green du problème comme noyau. Ce noyau contient une singularité qui nécessite un soin particulier dans l'étape de discrétisation. Les opérateurs intégraux à noyau sont étudiés par Stakgold [94], Kress [61], et Mikhlin et Prossdorf [77] lorsque le noyau de l'opérateur est singulier.

L'objectif de ce travail est l'étude des interactions hydrodynamiques entre plusieurs particules dans un fluide. Le calcul de la force et du couple exercés sur chaque particule prend en compte l'effet d'une paroi et les interactions avec les autres particules. La construction de la grande matrice de résistance et par suite de la grande matrice de mobilité permettent la détermination des trajectoires des particules. Par ailleurs on se propose de calculer les champs de vitesses dans le fluide.

Nous avons choisi la répartition des Stokeslets sur les surfaces des particules de façon à prendre en compte les effets de lubrification lorsque les surfaces sont proches. En effet ces effets de lubrification sont à l'origine de difficultés dans le calcul des écoulements de Stokes. On s'attache ici à déterminer de façon systématique la répartition la plus appropriée.

Le premier chapitre décrit d'abord les équations qui régissent un écoulement qui contient plusieurs particules au voisinage d'une paroi ainsi qu'un aperçu sur des techniques analytiques et des solutions pour des configurations particulières, ce

qui permettra de valider nos résultats. On présente, à la fin de ce chapitre, la formulation intégrale qui est à la base de la méthode de calcul utilisée.

Dans le deuxième chapitre, les équations intégrales sont résolues dans le cadre axisymétrique de plusieurs particules en sédimentation suivant une ligne perpendiculaire à la paroi. La distribution des Stokeslets est adaptée de façon à explorer les interactions particule/particule et particule/paroi. On comparera aussi nos résultats avec ceux obtenus par d'autres techniques.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du problème tridimensionnel d'un écoulement général autour de particules. Après avoir discrétisé les équations intégrales, une technique d'adaptation de maillage est mise au point pour améliorer la prise en compte des interactions lorsque les particules s'approchent les unes des autres ou lorsqu'elles s'approchent de la paroi.

Dans le quatrième chapitre, nous avons calculé les coefficients de résistance et les coefficients de mobilité de particules en sédimentation au voisinage d'une paroi.

Afin de valider le code de calcul, on s'intéresse dans le cinquième chapitre aux comparaisons de nos résultats avec ceux obtenus avec les méthodes analytiques, lorsqu'elles existent.

Enfin, dans le sixième chapitre, la vitesse à l'intérieur du fluide est calculée et validée avec une méthode analytique. Ensuite le code de calcul élaboré ici est exploité pour simuler des phénomènes de sédimentation de particules avec l'effet d'une paroi.

# Chapitre 1

## Techniques de résolution des équations de Stokes et formulation intégrale

### Sommaire

---

<b>1.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
<b>1.2</b>	<b>Normalisation et équations de Stokes</b>	<b>9</b>
<b>1.3</b>	<b>Superposition des écoulements</b>	<b>11</b>
<b>1.4</b>	<b>Aperçu sur des techniques de résolution</b>	<b>13</b>
1.4.1	Méthode des réflexions	13
1.4.2	Méthode des coordonnées bisphériques	14
1.4.3	Méthode des développements multipolaires	17
<b>1.5</b>	<b>Formulation intégrale et méthode de résolution</b>	<b>18</b>
1.5.1	Existence et unicité de la solution des équations de Stokes	18
1.5.2	Outils de résolution	19
1.5.3	Représentation intégrale	21
1.5.4	Calcul de la vitesse du fluide	25
<b>1.6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>26</b>

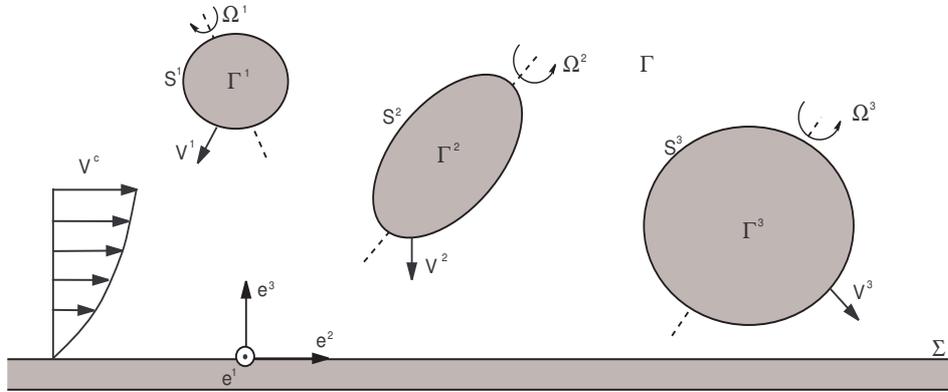
---

### 1.1 Introduction

On considère le problème de particules dans un fluide visqueux en écoulement au voisinage d'une paroi plane imperméable.

Nous présenterons d'abord les équations de Stokes régissant le mouvement du fluide, des propriétés de ces équations, un aperçu sur des techniques classiques de résolution de type analytique et quelques résultats analytiques.

Dans ce travail, on se propose d'étudier les interactions entre plusieurs particules et une paroi lorsqu'on se place à l'échelle des particules en utilisant la méthode des éléments de frontières (BEM) pour résoudre les équations de Stokes. Le choix de cette méthode se justifie par le fait que notre domaine de travail est semi-infini et l'application de la méthode des éléments finis où il faudrait mailler dans un domaine assez grand pour tenir compte de l'effet lointain de l'écoulement de Stokes coûterait trop cher pour une résolution 3D.



**Figure (1.1)** – Particules en mouvements de translation et de rotation dans un fluide en mouvement de cisaillement délimité par une paroi imperméable.

Pour passer du cadre physique au cadre mathématique on utilise les notations suivantes (voir figure (1.1)) :

- ▷  $N_p$  le nombre de particules dans le fluide,
- ▷  $\Gamma$  la région de l'espace extérieure aux particules,
- ▷  $\Sigma$  la surface de la paroi du côté où se trouvent les particules,
- ▷  $\Gamma^i$  la région de l'espace intérieure à la particule  $i$ ,  $i = 1..N_p$ ,  $S = \cup S^i$
- ▷  $S^i$  la surface de la particule  $\Gamma^i$ ,  $i = 1..N_p$ ,  $S = \cup S^i$ ,
- ▷  $\mathbf{V}^i$  la vitesse de translation de la particule  $i$ ,  $i = 1..N_p$ ,
- ▷  $\mathbf{V}^\infty$  la vitesse non perturbée du fluide,
- ▷  $\boldsymbol{\Omega}^i$  la vitesse angulaire de la particule  $i$ ,  $i = 1..N_p$ ,
- ▷  $\mathbf{n}^i$  la normale extérieure à la particule  $\Gamma^i$ ,  $i = 1..N_p$ .

Le fluide étant supposé newtonien, le problème est régi par les équations de Navier-Stokes, qui expriment la conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

Ces équations s'écrivent pour un fluide homogène, incompressible de densité  $\rho$ , de viscosité  $\mu$ , de vitesse  $\mathbf{v}$ , de pression  $p^*$  et soumis à la force gravitationnelle  $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}^3$ .

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p^* + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (1.2)$$

avec les conditions de non glissement sur la paroi et sur les surfaces des particules :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Sigma \quad (1.3)$$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_i^0 \quad \text{pour } \mathbf{x} \in S^i \quad (1.4)$$

où  $\mathbf{v}_i^0$  est la vitesse sur le bord de la particule  $i$ , due au mouvement de translation et de rotation. De plus, l'écoulement perturbé peut être étudié dans le cas où le fluide est en mouvement avec une vitesse  $\mathbf{V}^\infty$  loin des particules :

$$\mathbf{v} \longrightarrow \mathbf{V}^\infty \quad \text{pour } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (1.5)$$

## 1.2 Normalisation et équations de Stokes

Soient  $a$  la dimension caractéristique de l'écoulement, la taille caractéristique d'une particule par exemple,  $V$  la vitesse caractéristique de l'écoulement et  $P$  une pression caractéristique. On peut alors introduire des grandeurs sans dimension en posant :

$$\mathbf{v} = V \mathbf{v}' \quad , \quad \mathbf{x} = a \mathbf{x}' \quad , \quad p^* = P p'^*$$

Les équations (1.1)-(1.2) s'écrivent alors pour le problème stationnaire :

$$\begin{aligned} \nabla' \cdot \mathbf{v}' &= 0 \\ \frac{\rho a V}{\mu} (\mathbf{v}' \cdot \nabla' \mathbf{v}') &= -\frac{a P}{\mu V} \nabla' p'^* + \nabla'^2 \mathbf{v}' - \frac{g a^2 \rho}{V \mu} \mathbf{e}^3 \end{aligned}$$

On peut alors choisir comme pression caractéristique  $P = \frac{\mu V}{a}$ . Le nombre de Reynolds et le nombre de Bond relatifs au problème s'écrivent :

$$\begin{aligned} Re &= \frac{\rho a V}{\mu} \\ Bo &= \frac{g a^2 \rho}{V \mu} \end{aligned}$$

Pour un faible nombre de Reynolds et un nombre de Bond égal à l'unité, les équations de Navier-Stokes se réduisent au 1<sup>er</sup> ordre ( $Re \rightarrow 0$ ) aux équations de Stokes :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v}' &= 0 \\ \nabla'^2 \mathbf{v}' - \nabla' p'^* &= -Bo \mathbf{e}^3 \end{aligned}$$

En revenant aux grandeurs avec dimension, les équations de Stokes deviennent :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \mu \nabla^2 \mathbf{v} - \nabla p^* &= \rho \mathbf{g} \end{aligned}$$

avec  $p^*$  la pression dans le fluide. On posant la pression dynamique  $q = p^* - \rho g x_3$ , on obtient pour  $\mathbf{x} \in \Gamma$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1.6a)$$

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} = \nabla q \quad (1.6b)$$

avec la condition de non glissement sur la paroi

$$\mathbf{v} = 0 \quad (1.6c)$$

et la condition d'adhérence sur les surfaces des particules

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}_i^0 \quad (1.6d)$$

avec  $\mathbf{x} \in S^i$ ,  $i = 1..N_p$ .

La vitesse pour une particule en mouvement de translation et de rotation s'exprime comme suit

$$\mathbf{v}_i^0 = \mathbf{V}^i + \boldsymbol{\Omega}^i \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G^i)$$

où  $\mathbf{V}^i$  est la vitesse de translation de la sphère  $i$ ,  $\boldsymbol{\Omega}^i$  sa vitesse angulaire de rotation et  $\mathbf{x}_G^i$  son barycentre. On suppose aussi que le fluide est en mouvement à l'infini, d'où alors les conditions :

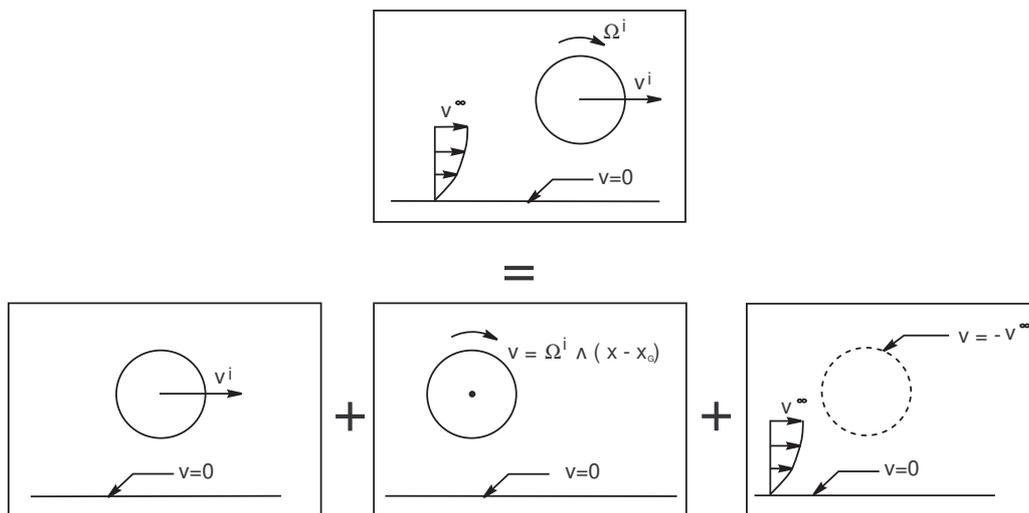
$$|\mathbf{v}| \rightarrow \mathbf{V}^\infty \text{ et } q \rightarrow p^\infty \text{ quand } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (1.7)$$

On cherche alors l'écoulement perturbé sous la forme  $\mathbf{v} = \mathbf{V}^\infty + \mathbf{u}$ ,  $q = p^\infty + p$ , où  $(\mathbf{u}, p)$  représente la perturbation telle que  $|\mathbf{u}| \rightarrow 0$  et  $p \rightarrow 0$  quand  $|x| \rightarrow \infty$ .

### 1.3 Superposition des écoulements

L'équation de Stokes (1.6) étant linéaire, si  $(\mathbf{v}; p)$  et  $(\mathbf{u}; q)$  sont deux solutions de l'équation de Stokes (1.6),  $(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u}; \alpha p + \beta q)$  le sont aussi ;  $\alpha, \beta$  étant deux nombres réels arbitraires. La condition aux limites est aussi linéaire : lorsque  $\mathbf{v}$  est une solution correspondant à une vitesse aux limites à l'infini  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{u}$  une solution correspondant à  $\mathbf{U}$ , alors  $(\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{u})$  correspond à  $(\alpha\mathbf{V} + \beta\mathbf{U})$ .

D'où l'intérêt de décomposer l'écoulement complexe autour d'une particule en plusieurs écoulements élémentaires dus seulement à la vitesse de translation ou de rotation ou bien à la vitesse de cisaillement (voir figure(1.2)).



**Figure (1.2)** – Décomposition d'un écoulement en plusieurs écoulements élémentaires.

D'abord, on décompose le mouvement de translation quelconque d'une particule dans un repère cartésien, afin d'étudier les translations sur chaque axe.

$$\mathbf{V}^T = V_x \mathbf{e}^1 + V_y \mathbf{e}^2 + V_z \mathbf{e}^3 = \mathbf{V}^1 + \mathbf{V}^2 + \mathbf{V}^3 \quad (1.8)$$

$$\mathbf{V}^1 = \begin{pmatrix} V_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{V}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ V_y \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{V}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_z \end{pmatrix} \quad (1.9)$$

Ensuite la vitesse de rotation est décomposée suivant les axes de rotation

$$\mathbf{V}^R = \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) = \mathbf{V}^4 + \mathbf{V}^5 + \mathbf{V}^6 \quad (1.10)$$

avec

$$\mathbf{V}^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\boldsymbol{\Omega}_x(z - z_G) \\ \boldsymbol{\Omega}_x(y - y_G) \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{V}^5 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Omega}_y(z - z_G) \\ 0 \\ -\boldsymbol{\Omega}_y(x - x_G) \end{pmatrix} ; \quad \mathbf{V}^6 = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\Omega}_z(y - y_G) \\ \boldsymbol{\Omega}_z(x - x_G) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

Ainsi la résolution de l'équation (1.6) se ramène à la résolution d'un système avec six seconds membres  $\mathbf{V} = \mathbf{V}^k$ ,  $k = 1..6$ .

$$\left\{ \begin{array}{lll} \nabla^2 \mathbf{v} & = & \frac{1}{\mu} \nabla p & \mathbf{x} \in \Gamma \\ \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) & = & 0 & \mathbf{x} \in \Gamma \\ \mathbf{v} & = & \mathbf{V}^k & \mathbf{x} \in S \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) & = & 0 & \mathbf{x} \in \Sigma \\ |\mathbf{v}| & \rightarrow & 0 & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \\ p & \rightarrow & 0 & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \end{array} \right. \quad (1.12)$$

Chaque choix du second membre  $\mathbf{V}^k$  correspond a un type de mouvement. Reste l'effet d'un écoulement non perturbé ; par exemple pour un écoulement de cisaillement où  $C$  est la constante de cisaillement,  $\mathbf{v}$  est remplacée dans (1.12) par la

perturbation  $\mathbf{u}$  par rapport à cet écoulement et la condition sur la particule est introduite par  $\mathbf{u} = -Cz \mathbf{e}^1$  pour  $\mathbf{x} \in S$ . Pour l'écoulement de cisaillement, la condition à l'infini sur la pression ne change pas.

## 1.4 Aperçu sur des techniques de résolution

### 1.4.1 Méthode des réflexions

La linéarité des équations de Stokes permet la superposition de solutions élémentaires, chacune étant due à un écoulement élémentaire [69].

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{v}^{(1)} + \mathbf{v}^{(2)} + \mathbf{v}^{(3)} + \dots \\ p &= p^{(1)} + p^{(2)} + p^{(3)} + \dots\end{aligned}$$

Chaque couple  $(\mathbf{v}^{(i)}, p^{(i)})$  vérifie à son tour les équations de Stokes mais avec une condition au bord particulière, telle que la somme des conditions au bord de chaque solution élémentaire donne les conditions au bord du problème général.

Par exemple, pour le cas d'un écoulement au voisinage d'une paroi infinie due à un mouvement d'une particule, les conditions au bord sont

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v}_p & \text{sur la particule} \\ \mathbf{v} = 0 & \text{sur la paroi} \\ \mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty & \text{à l'infini} \end{cases}$$

Le problème se décompose en des écoulements élémentaires. Pour l'écoulement (1) la paroi est supposée absente et la particule est présente

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}_p & \text{sur la particule} \\ \mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}_\Sigma^{(1)} & \text{sur la paroi} \\ \mathbf{v}^{(1)} = \mathbf{v}_\infty & \text{à l'infini} \end{cases}$$

Pour l'écoulement (2) la paroi est supposée présente et la particule est absente

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{(2)} = \mathbf{v}_p^{(2)} & \text{sur la particule} \\ \mathbf{v}^{(2)} = -\mathbf{v}_\Sigma^{(1)} & \text{sur la paroi} \\ \mathbf{v}^{(2)} = 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

Pour l'écoulement (3) la paroi est supposée absente et la particule est présente

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{(3)} = -\mathbf{v}_p^{(2)} & \text{sur la particule} \\ \mathbf{v}^{(3)} = \mathbf{v}_\Sigma^{(3)} & \text{sur la paroi} \\ \mathbf{v}^{(3)} = 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

Pour l'écoulement (4) la paroi est supposée présente et la particule est absente

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{(4)} = \mathbf{v}_p^{(4)} & \text{sur la particule} \\ \mathbf{v}^{(4)} = -\mathbf{v}_\Sigma^{(3)} & \text{sur la paroi} \\ \mathbf{v}^{(4)} = 0 & \text{à l'infini} \end{cases}$$

est ainsi de suite ...

Chaque erreur prise sur la paroi ou sur la particule est compensée par une valeur opposée pour l'écoulement suivant. De la même, les forces et les couples exercées sur la particule seront décomposées

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \mathbf{F}^{(1)} + \mathbf{F}^{(2)} + \mathbf{F}^{(3)} + \dots \\ \mathbf{C} &= \mathbf{C}^{(1)} + \mathbf{C}^{(2)} + \mathbf{C}^{(3)} + \dots \end{aligned}$$

Par exemple, Wakiya [101] a trouvé l'expression de la force exercée sur une particule en translation perpendiculairement à une paroi avec une vitesse  $\mathbf{U}_z$

$$F_z = \frac{-6\pi\mu a \mathbf{U}_z}{1 - \frac{9a}{8\ell} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\ell}\right)^3 + \dots}$$

où  $\ell$  est la distance entre le centre de la sphère et la paroi.

Maude [73] donne l'expression du couple exercé sur une particule en rotation autour de  $(Oz)$  au voisinage d'une paroi d'équation  $z = 0$

$$C_z = \frac{-6\pi\mu a \boldsymbol{\Omega}_z}{1 - \frac{9a}{8\ell} + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\ell}\right)^3 + \dots}$$

## 1.4.2 Méthode des coordonnées bisphériques

En utilisant un système de coordonnées bisphériques, Brenner [16] et Maude [73] ont résolu analytiquement le problème d'une particule en mouvement de translation perpendiculaire à une paroi ainsi que le problème de deux sphères identiques [95] en mouvement suivant la ligne qui relie leurs centres. Cette méthode est basée sur le système de coordonnées bisphériques  $(\xi, \eta)$  définies à partir d'un système de coordonnées cylindriques  $(\rho_c, z_c)$  par :

$$z_c + i \rho_c = ic \cot \frac{1}{2}(\xi + i \eta) \quad (1.13)$$

où  $c$  est une constante positive. En prenant les parties réelle et imaginaire de cette équation, on obtient explicitement :

$$z_c = c \frac{\sin \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} \quad (1.14)$$

$$\rho_c = c \frac{\sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} \quad (1.15)$$

Étant données les notations :

$\ell$  distance entre le centre de la sphère et la paroi,  
 $a$  rayon de la sphère, la paroi est représentée par  $\eta = 0$  et la sphère par  
 $\eta = \alpha = a \cosh \frac{\ell}{a}$ .

Différents résultats ont été obtenus pour une sphère et une paroi :

- Particule sphérique en mouvement de translation :

La force exercée sur une particule en translation perpendiculairement à une paroi [16, 73] est donnée par :

$$F_z^t = -6 \pi a \mu f_z^t \left( \frac{\ell}{a} \right) V_z$$

où le coefficient de frottement adimensionné  $f_z^t$  s'écrit

$$\begin{aligned} f_z^t(\alpha) &= \frac{4}{3} \sinh \alpha \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} \left[ \frac{2 \sinh(2n+1)\alpha + (2n+1) \sinh 2\alpha}{4 \sinh^2(n+\frac{1}{2})\alpha - (2n+1)^2 \sinh^2 \alpha} - 1 \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

- Particule sphérique en mouvement de rotation :

Le couple exercé sur une particule en rotation autour d'un axe perpendiculaire à une paroi [57] est donné par :

$$C_z^r = -8 \pi a^3 \mu c_z^r \left( \frac{\ell}{a} \right) \omega_z$$

où le coefficient de frottement adimensionné  $c_z^r$  s'écrit

$$c_z^r(\alpha) = \sinh^3 \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{cosech}^3 n\alpha \quad (1.17)$$

- Particule sphérique fixe dans un fluide en mouvement :

Pour un écoulement de point d'arrêt, la vitesse à l'infini du fluide est donnée par  $\mathbf{v}_\infty = \chi_a(x z \mathbf{e}^1 + y z \mathbf{e}^2 - z^2 \mathbf{e}^3)$ , où  $\chi_a$  est une constante. La force pour une particule sphérique fixe dans cet écoulement peut s'écrire sous la forme :

$$F_z^{\chi_a} = -6 \pi a \mu f_z^{\chi_a}\left(\frac{\ell}{a}\right) \chi_a \ell^2$$

où le coefficient  $f_z^{\chi_a}\left(\frac{\ell}{a}\right)$  sans dimension est donné par [96] :

$$f_z^{\chi_a}\left(\frac{\ell}{a}\right) = \frac{4}{5} \sinh^5 \alpha \operatorname{sech}^2 \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n + \frac{1}{2})(n + 1)}{\sinh^2(n + \frac{1}{2})\alpha - (n + \frac{1}{2})^2 \sinh^2 \alpha} \quad (1.18)$$

- Deux sphères en translation :

Pour le cas de deux sphères en mouvement suivant la ligne qui relie leur centre, des résultats ont été obtenus par Stimson et Jeffery [95] pour deux cas. La force est donnée par

$$F^t = -6 \pi a \mu f^t(\alpha) V$$

où le coefficient de frottement adimensionné  $f^t$  s'écrit pour

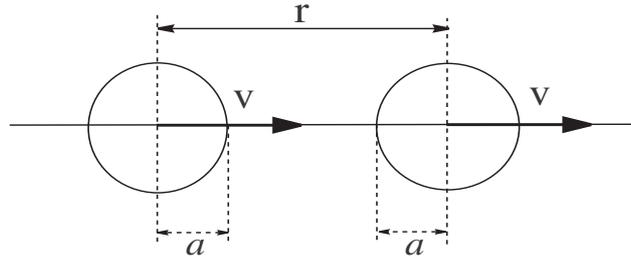
– le cas de deux particules en translation de même sens

$$\begin{aligned} f^t(\alpha) &= \frac{4}{3} \sinh \alpha \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} \left[ \frac{4 \cosh^2(n + \frac{1}{2})\alpha + (2n+1)^2 \sinh^2 \alpha}{2 \sinh(2n+1)\alpha - (2n+1) \sinh 2\alpha} - 1 \right] \end{aligned} \quad (1.19)$$

– le cas de deux particules en translation de sens opposés

$$\begin{aligned} f^t(\alpha) &= \frac{4}{3} \sinh \alpha \\ &\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{(2n-1)(2n+3)} \left[ 1 - \frac{4 \sinh^2(n + \frac{1}{2})\alpha - (2n+1)^2 \sinh^2 \alpha}{2 \sinh(2n+1)\alpha + (2n+1) \sinh 2\alpha} \right] \end{aligned} \quad (1.20)$$

avec  $\cosh \alpha = \frac{r}{2a}$  ; pour les notations voir figure (1.3).



**Figure (1.3)** – Notations pour le cas de deux sphères en mouvement de même sens, dans un fluide au repos.

### 1.4.3 Méthode des développements multipolaires

La méthode des développements multipolaires basée sur l'expression de la solution introduite par Lamb [66] et l'utilisation simultanée de plusieurs systèmes de coordonnées adaptés à chaque particule, a été utilisée pour le cas de deux sphères en translation et rotation dans un fluide au repos par Jeffrey et Onishi [59].

A titre d'exemple, les forces exercées sur deux sphères égales qui se déplacent parallèlement à la ligne qui relie leurs centres, sont données par :

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_{||}^1 \\ F_{||}^2 \end{pmatrix}$$

Les coefficients  $x_{ij}$  appelés "coefficients de mobilité" calculés par Jeffrey et Onishi [59] sont donnés par :

$$\begin{aligned} x_{11} &= 1 - \frac{15}{4}s^{-4} + \frac{11}{2}s^{-6} + \frac{21}{2}s^{-8} + o(s^{-10}) \\ x_{12} &= \frac{3}{2}s^{-1} - s^{-3} + \frac{75}{4}s^{-7} - \frac{15}{2}s^{-9} + o(s^{-10}) \\ y_{11} &= 1 - \frac{17}{16}s^{-6} - \frac{5}{4}s^{-8} + o(s^{-10}) \\ y_{12} &= \frac{3}{4}s^{-1} + \frac{1}{2}s^{-3} + o(s^{-10}) \end{aligned}$$

avec  $s = \frac{r}{a}$ ,  $r$  la distance entre les centres des deux sphères et  $a$  leur rayon.

## 1.5 Formulation intégrale et méthode de résolution

On se propose dans ce travail de résoudre numériquement le problème (1.6)-(1.7). Ce problème est mathématiquement bien posé. Nous rappelons dans la section suivante les résultats de l'existence et de l'unicité de la solution de ce problème.

### 1.5.1 Existence et unicité de la solution des équations de Stokes

On se propose de résoudre numériquement le problème (1.6)-(1.7) avec  $\mathbf{v}$  comme donnée du problème. Il s'agit d'un système d'équations aux dérivées partielles elliptiques linéaires dans un domaine de  $\mathbb{R}^3$  non borné. Ces équations sont du point de vue mathématique largement traitées dans la littérature [28, 65, 78, 85]. Le caractère non borné impose l'introduction des espaces à poids

**Définition 1.1** Soit  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  et  $r = |\mathbf{x}|$ . On définit l'espace :

$$W^1(\Gamma) = \left\{ u, \frac{u}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}} \in L^2(\Gamma), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Gamma), i = 1, 2, 3, \Gamma \subset \mathbb{R}^3 \right\}$$

Le poids  $\frac{1}{(1+r^2)^{\frac{1}{2}}}$  fixe le comportement à l'infini des fonctions de  $W^1(\Gamma)$ .

La norme définie sur l'espace de Hilbert  $W^1(\Gamma)$  est donnée par :

$$\|u\|_{\Gamma}^1 = \int_{\Gamma} \left( \frac{|u(\mathbf{x})|^2}{1+r^2} dx + \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right|^2 \right) dx$$

Le problème de Dirichlet extérieur (1.6)-(1.7) est bien posé. En effet on a [28] le résultat suivant :

**Théorème 1.2** En supposant que le domaine  $\Gamma$  est simplement connexe et que  $\mathbf{v}_i^0 \in (H^{\frac{1}{2}}(S^i))^3$  et satisfait à la condition  $\int_{S^i} \mathbf{v}_i^0 \cdot \mathbf{n} ds = 0$ , le problème de Dirichlet extérieur (1.6) admet une solution unique  $v \in (W^1(\Gamma))^3$  vérifiant :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

et la pression  $p$  existe et est unique à une constante près, dans  $L^2(\Gamma)$ .

## 1.5.2 Outils de résolution

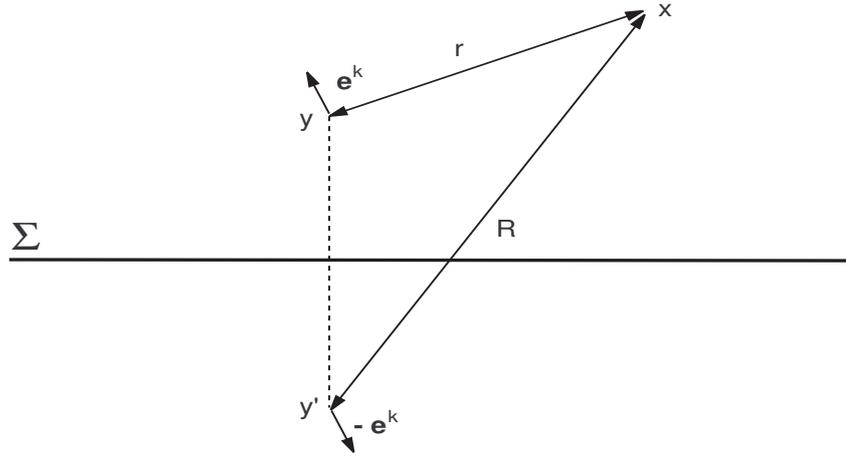
On utilise ici la méthode des intégrales de surfaces [5, 7, 15, 89] pour résoudre numériquement le problème (1.6). Cette méthode consiste à réduire les équations aux dérivées partielles définies dans un domaine non borné en une équation intégrale sur le bord de ce domaine.

L'établissement de l'équation intégrale se fait au moyen des fonctions de Green du problème qui seront définies ultérieurement. Pour écrire la formulation intégrale on applique la formule de Green simultanément à la solution de l'équation (1.6) et à la fonction de Green du problème. La fonction de Green est choisie de façon à vérifier une condition d'adhérence sur la paroi (vitesse nulle) et nulle à l'infini. Nous montrerons que le problème se ramène alors en une équation intégrale sur les surfaces des particules. Cette équation permet d'exprimer la vitesse de chaque particule en fonction de la force hydrodynamique qui s'y exerce.

Cette méthode, ne permet pas seulement de réduire le domaine d'intégration mais elle permet aussi de retrouver une solution approchée du problème par une simple quadrature, ce qui offre toujours une meilleure précision que des calculs numérique de dérivées comme c'est le cas par exemple avec les méthodes des différences finies.

### Fonction de Green pour un domaine semi-infini

On rappelle que la solution d'un problème linéaire elliptique et homogène avec des conditions aux limites peut être représentée en terme d'intégrales de surfaces portant sur les valeurs aux frontières des inconnues et de ses dérivées [28]. Pour le problème de Stokes cette équation intégrale porte sur les valeurs aux bords (à la surface de la frontière) de la vitesse et de la contrainte. Cette équation intégrale est obtenue par application de la formule de Green et en utilisant les fonctions de Green du problème considéré.



**Figure (1.4)** – Stokeslet source et Stokeslet image utilisé dans la construction de la fonction de Blake [10].

On considère ici l'écoulement produit par une force ponctuelle (Stokeslet) en présence d'une paroi plane sur laquelle s'applique la condition de non-glissement.

Les fonctions de Green ( $\mathbf{G}^k, H^k$ ) vérifient les équations :

$$\mu \nabla^2 \mathbf{G}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \nabla H^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{e}^k \quad (1.21)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{G}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (1.22)$$

$$\mathbf{G}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{pour } \mathbf{x} \in \Sigma \quad (1.23)$$

$\mathbf{G}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}), H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  pour  $|\mathbf{x}| = \infty$ , où  $\mathbf{x}$  est un point courant de l'écoulement et  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  est la masse de Dirac.

Les fonctions de Green en un point  $x = (x_1, x_2, x_3)$  de l'écoulement solution de (1.21)-(1.22) et vérifiant (1.23) ont été obtenues par Blake [10] pour une force  $F_k$  suivant la direction  $\mathbf{e}^k$  (figure 1.4) :

$$G_j^k = \frac{F_k}{8\pi\mu} \left[ \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \delta_{jk} + \frac{r_j r_k}{r^3} - \frac{R_j R_k}{R^3} + 2y_3 (\delta_{k\alpha} \delta_{\alpha l} - \delta_{k3} \delta_{3l}) \frac{\partial}{\partial R_l} \left\{ \frac{y_3 R_j}{R^3} - \left( \frac{\delta_{j3}}{R} + \frac{R_j R_3}{R^3} \right) \right\} \right] \quad (1.24)$$

$$H^k = \frac{F_k}{4\pi} \left[ \frac{r_k}{r^3} - \frac{R_k}{R^3} - 2y_3 (\delta_{k\alpha} \delta_{\alpha l} - \delta_{k3} \delta_{3l}) \frac{\partial}{\partial R_l} \left( \frac{R_3}{R^3} \right) \right] \quad (1.25)$$

où le Stokeslet est appliqué en  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$  et des singularités images sont appliquées en  $\mathbf{y}' = (y_1, y_2, -y_3)$  avec  $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$  et  $R = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}'\|$ .

La formule de Blake ainsi construite vérifie la condition de non glissement sur la paroi ainsi que la condition de vitesse nulle à l'infini. En utilisant une distribution de ces fonctions de Green sur les surfaces des particules, on peut introduire la condition sur la paroi dans l'équation ainsi que la condition à l'infini. Il reste seulement les conditions au bord à vérifier pour chaque particule.

### 1.5.3 Représentation intégrale

#### Formule de Green associée au problème de Stokes

**Théorème 1.3** Soient  $\partial\Gamma$  la surface du domaine  $\Gamma$  et  $\mathbf{n}$  la normale extérieure à  $\partial\Gamma$ . Soient  $(\mathbf{u}, q) \in W^1(\Gamma) \times L^2(\Gamma)/\mathbb{R}$  la fonction de Green du problème et  $(\mathbf{v}, p)$  la solution du problème (1.6). La formule de Green correspondant au problème de Stokes s'écrit pour ces champs [65], et en utilisant la convention de sommation d'Einstein :

$$\int_{\Gamma} \left\{ \left( \mu \nabla^2 v_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) u_i - \left( \mu \nabla^2 u_i - \frac{\partial q}{\partial x_i} \right) v_i \right\} dx = \int_{\partial\Gamma} \{ u_i T_{ij}(\mathbf{v}) - v_i T_{ij}(\mathbf{u}) \} n_j d\Gamma$$

où  $T$  est le tenseur des contraintes défini par :

$$T_{ij}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = -\delta_{ij}p + \mu \left( \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) \quad (1.26)$$

Pour les équations de Stokes sans second membre (1.6)-(1.7), le théorème se réduit à la relation de réciprocité de Lorentz :

### Formule de réciprocité de Lorentz

**Corollaire 1.4** Soient  $(\mathbf{u}, p)$  et  $(\mathbf{u}', p') \in W^1(\Gamma) \times L^2(\Gamma)/\mathbb{R}$  où  $\Gamma \in \mathbb{R}^3$  deux solutions des équations (1.6)-(1.7) associées respectivement aux tenseurs des contraintes  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{T}'$  et  $\partial\Gamma$  la surface du domaine  $\Gamma$ .

Si  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}'$  n'ont pas de point singulier alors

$$\int_{\partial\Gamma} \mathbf{u} \cdot (\mathbf{T}' \cdot \mathbf{n}) d\Gamma = \int_{\partial\Gamma} \mathbf{u}' \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \quad (1.27)$$

où  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à la surface  $\partial\Gamma$ .

L'intérêt de la formule de réciprocité est qu'elle permet d'avoir des informations sur les forces et les couples sur les surfaces sans résoudre les équations du mouvement du fluide. Dans le dernier chapitre, ce théorème va nous permettre de tester la grande matrice de résistance et de savoir si la symétrie est bien respectée.

Pour écrire la formulation intégrale on applique la formule de Green simultanément à la solution de l'équation (1.6) et à la fonction de Green.

Les fonctions de Green (1.24) tiennent compte de la condition de non-glissement sur la paroi, par conséquent pour tout  $i$  et pour tout  $\mathbf{y}$  dans le domaine fluide :

$$\int_{\Sigma} \{G_i^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) T_{ij}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) - v_i(\mathbf{x}) T_{ij}(\mathbf{G}^k(\mathbf{x}, \mathbf{y}))\} n_j d\Sigma_x = 0 \quad (1.28)$$

On utilise le fait que  $(\mathbf{v}, p)$  est solution du problème de Stokes et les fonctions de Green  $(\mathbf{G}^k, H^k)$  données par les expressions (1.24)-(1.25).

L'équation intégrale se déduit à partir de la formule de Green pour  $x \in S_i$  :

$$v_k(\mathbf{x}) + \int_S v_i(\mathbf{y}) T_{ij}(\mathbf{G}^k(\mathbf{y}, \mathbf{x})) n_j dS_y = \int_S G_k^i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) T_{ij}(\mathbf{v}(\mathbf{y})) n_j dS_y \quad (1.29)$$

$S = \bigcup_{i=1}^{N_p} S^i$  et où l'on a tenu compte de la direction de la normale  $\mathbf{n}$  extérieure aux particules .

Lorsque l'écoulement considéré est dû à l'effet du mouvement de translation et de rotation de particules rigides, on montre ([86] page 32) que le potentiel de

double couche s'annule et que l'équation intégrale dans le fluide se ramène à une équation intégrale de simple couche :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \int_S \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{q}(\mathbf{y}) dS_y \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad (1.30)$$

Cette équation (1.30) permet d'exprimer la vitesse du fluide en fonction de la contrainte hydrodynamique qui s'exerce sur une surface  $S$ . Il reste donc à définir une équation intégrale de frontière portant seulement sur les valeurs de la vitesse et la contrainte exercée sur chaque sphère. Utilisant le théorème du passage à la limite [65], on obtient l'équation intégrale de surface suivante :

$$v_k(\mathbf{x}^i) = \int_S G_k^j(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}) q_j(\mathbf{y}) dS_y, \quad \mathbf{x}^i \in S^i, \quad i = 1, \dots, N_p \quad (1.31)$$

où

$$q_j(\mathbf{y}) = T_{ij}(\mathbf{v}(\mathbf{y})) n_j \quad \text{et} \quad S = \bigcup_{i=1}^{N_p} S^i \quad (1.32)$$

L'équation (1.31) exprime la vitesse de chaque sphère en fonction des contraintes hydrodynamiques  $\mathbf{q}$  qui s'y exercent. Elle permet alors de calculer les contraintes hydrodynamiques exercées sur la surface de chaque particule connaissant les vitesses de toutes les particules. Ainsi, on a réduit le domaine d'intégration ce qui a simplifié considérablement le problème.

### Existence et unicité de la solution de la formulation faible

D'après [28, 65], l'équation intégrale admet la formulation faible suivante :

**Théorème 1.5** *L'équation intégrale (1.31) admet une solution unique  $\mathbf{q}$  à un vecteur près, proportionnel à la normale à la surface  $S$ ;  $\mathbf{q} \in (H^{-\frac{1}{2}}(S))^3$  si  $\mathbf{v} \in (H^{\frac{1}{2}}(S))^3$*

*Le système d'équations (1.31) admet la formulation variationnelle suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{q} \text{ telle que :} \\ b(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \int_S \mathbf{v}_k \mathbf{q}' dS, \quad \forall \mathbf{q}' \in (H^{-\frac{1}{2}}(S))^3 \end{array} \right.$$

où la forme bilinéaire  $b(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$  est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} b(\mathbf{q}, \mathbf{q}') = \int_S \int_S \mathbf{q}'(\mathbf{x}) \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{q}(\mathbf{y}) dS_y dS_x \quad \forall \mathbf{q}, \mathbf{q}' \in \mathbf{T} \\ \mathbf{T} = (H^{-\frac{1}{2}}(S))^3 / \mathfrak{R} \\ \text{où } \mathfrak{R} \text{ est la relation d'équivalence} \\ \mathbf{q} \mathfrak{R} \mathbf{q}' \Leftrightarrow \mathbf{q} - \mathbf{q}' = \lambda \mathbf{n}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

La forme bilinéaire  $b(\mathbf{q}, \mathbf{q}')$  vérifie :

$$b(\mathbf{q}, \mathbf{q}') > \beta \|\mathbf{q}\|_T^2, \quad \beta > 0 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{T}.$$

et la vitesse  $\mathbf{v}$  du problème extérieur de Dirichlet est donnée par l'équation intégrale

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \int_S \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{q}(\mathbf{y}) dS_y, \quad \mathbf{x} \in S$$

### La méthode des éléments de frontière

Le principe de la méthode des éléments de frontière (BEM) repose sur la transformation de l'équation (1.31) [28, 85, 86, 89] que nous avons à résoudre sous la forme :

$$L(q) = v$$

où l'on cherche à connaître  $q$  sur la surface  $S$ . L'opérateur  $L$  est linéaire par rapport à  $q$ . Le principe de la méthode est de chercher à approcher  $q$  par  $q_n \in V_n$ , où  $V_n$  est de dimension finie  $n$  et engendré par une base de fonctions-test  $\phi_k$  bien choisies :

$$q_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{R}, \quad V_n = \left\{ \sum_{k=1}^n \beta_k \phi_k, \quad \beta_k \in \mathbb{R} \right\}$$

Comme  $q_n$  n'est qu'une approximation de  $q$ , le reste  $R(q_n) = L(q_n) - v$  est non nul à priori, A partir de là, il existe principalement deux méthodes de résolution :

- *La méthode de Galerkin* : Dans la méthode de Galerkin, on veut que le reste soit orthogonal à  $V_n$ . Ce qui donne les équations :

$$\int_S R(q_n) \phi_k dS = 0, \quad 1 \leq k \leq n$$

qui sont équivalent à :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \int_S L(\phi_j) \phi_k dS = \int_S v \phi_k dS, \quad 1 \leq k \leq n$$

que l'on peut noter sous forme matricielle  $L_n Q_n = V_n$  où :

$$\begin{aligned} L_n &= \left( \int_S L(\phi_j) \phi_k dS \right)_{1 \leq j, k \leq n}, \\ Q_n &= (\alpha_k)_{1 \leq k \leq n} \\ V_n &= \left( \int_S v \phi_k dS \right)_{1 \leq k \leq n} \end{aligned}$$

• *La méthode de collocation* : Dans la méthode de collocation, on se donne  $n$  points  $\mathbf{x}_k, 1 \leq k \leq n$  de la surface  $S$ , et on définit les fonctions-test de telle sorte que  $\phi_k(\mathbf{x}_j) = \delta_{kj}, 1 \leq j, k \leq n$  où  $\delta_{kj}$  est le symbole de Kronecker.

Il en résulte que  $q_n(\mathbf{x}_k) = \alpha_k, 1 \leq k \leq n$ . On veut alors que le reste soit tel que  $R(q_n)(\mathbf{x}_k) = 0$ .

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j L(\phi_j)(\mathbf{x}_k) = v(\mathbf{x}_k)$$

que l'on peut également noter sous forme matricielle  $L_n Q_n = V_n$  où :

$$\begin{aligned} L_n &= (L(\phi_j)(\mathbf{x}_k))_{1 \leq j, k \leq n}, \\ Q_n &= (\alpha_k)_{1 \leq k \leq n} \\ V_n &= (v(\mathbf{x}_k))_{1 \leq k \leq n} \end{aligned}$$

### 1.5.4 Calcul de la vitesse du fluide

Pour le calcul du champ de vitesse dans le fluide, on évalue simplement l'intégrale suivante :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \int_S \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{q}(\mathbf{y}) dS_y \quad (1.33)$$

où  $\mathbf{x}$  est à l'intérieur du fluide,  $\mathbf{q}(\mathbf{y})$  est la contrainte exercée sur chaque particule  $S^k, k = 1..N_p$  et  $S = \bigcup_{k=1}^{N_p} S^k$ . Donc si on connaît  $\mathbf{q}(\mathbf{y})$ , on peut calculer la vitesse à l'intérieur du fluide.

## 1.6 Conclusion

Dans la pratique, on suppose les vitesses des particules connues et on utilise l'équation intégrale de surface (1.31) pour calculer les contraintes.

Connaissant les contraintes, on déduit par intégration sur les surfaces des sphères les forces et couples qui s'exercent sur celles-ci.

Inversement, la connaissance des forces et couples appliqués sur chaque particule permet de déterminer leur vitesses et par la suite leurs trajectoires.

Pour valider ce calcul, les résultats seront comparés avec ceux des méthodes de coordonnées bisphériques ou de développement multipolaires présentées dans ce chapitre, pour certaines configurations géométriques, où ces méthodes donnent des résultats analytiques.

Dans le cas axisymétrique où les sphères sont supposées alignées sur un axe perpendiculaire à la paroi et se déplaçant le long de cet axe, l'écoulement ambiant étant nul, la symétrie permet de simplifier la résolution en se ramenant à un problème de dimension deux. Ce cas sera considéré dans le chapitre 2.

## Chapitre 2

# Résolution de l'équation intégrale pour le cas axisymétrique

### Sommaire

---

<b>2.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>27</b>
<b>2.2</b>	<b>Discrétisation des équations intégrales</b>	<b>28</b>
<b>2.3</b>	<b>Assemblage de la matrice</b>	<b>30</b>
<b>2.4</b>	<b>Distribution des Stokeslets sur les particules</b>	<b>32</b>
<b>2.5</b>	<b>Validation des résultats pour des cas simples</b>	<b>35</b>
2.5.1	Une sphère au voisinage d'une paroi plane	36
2.5.2	Deux sphères loin de la paroi	37
<b>2.6</b>	<b>Résultats et discussion</b>	<b>39</b>
2.6.1	Deux sphères proches d'une paroi	39
2.6.2	Plusieurs sphères	42
<b>2.7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>43</b>

---

## 2.1 Introduction

La résolution d'une équation intégrale avec une distribution surfacique de Stokeslets a été effectuée, par la méthode de collocation, pour la première fois par Youngren et Acrivos [104] pour une particule isolée dans un fluide en écoulement tridimensionnel axisymétrique.

La résolution de l'équation intégrale pour une particule de forme ellipsoïdale dans le cas axisymétrique est traitée par Pozrikidis [86] par la méthode de collocation. Dans ce chapitre, on traite le cas de plusieurs particules sphériques de diamètres quelconques avec un rangement axisymétrique pour un fluide au repos [31]. Cela permet de se ramener à un problème unidimensionnel par projection azimutale.

Dans le cadre axisymétrique, nous allons résoudre l'équation intégrale de surface par la méthode de collocation sur les frontières. Cette méthode consiste à écrire l'équation intégrale sur un nombre fini de points pour vérifier les conditions aux bords. Ce qui aboutit à un système algébrique linéaire dont la taille dépend du nombre de particules ainsi que du nombre des points de collocation.

Pour valider les résultats, nous allons comparer nos résultats avec ceux donnés dans la littérature [55, 95, 100, 101]. Des techniques d'adaptation de distribution de Stokeslets sur les surfaces des particules sont appliquées afin d'améliorer les résultats obtenus par un maillage uniforme. De nouveaux résultats sont présentés à la fin de ce chapitre.

## 2.2 Discrétisation des équations intégrales

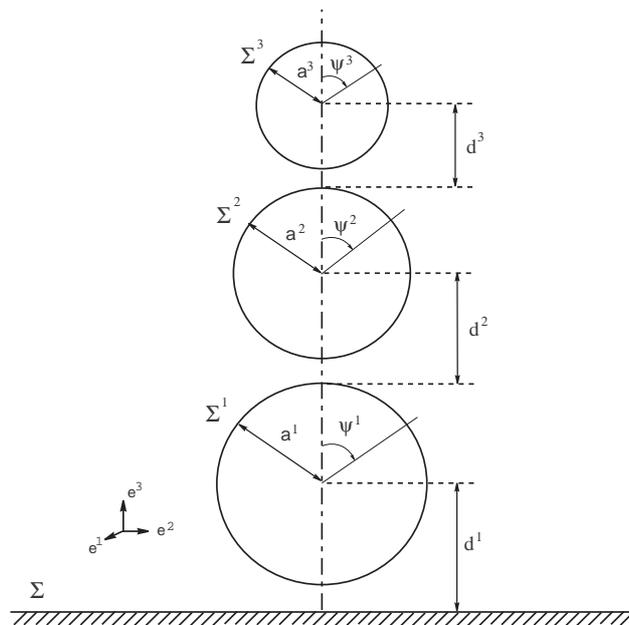


Figure (2.1) – Notation pour une ligne de particules et une paroi [31].

En utilisant un système de coordonnées cylindrique  $(r, \theta, z)$  avec  $y_1 = r \cos \theta$ ,  $y_2 = r \sin \theta$ ,  $y_3 = z$ , et intégrant l'équation (1.31) on obtient :

$$\begin{pmatrix} V_r^i \\ V_\theta^i \\ V_z^i \end{pmatrix} = \frac{1}{8\pi\mu} \sum_{j=1}^{N_p} \int_{L_j} \begin{pmatrix} J_{rr}^{*j} & J_{r\theta}^{*j} & J_{rz}^{*j} \\ J_{\theta r}^{*j} & J_{\theta\theta}^{*j} & J_{\theta z}^{*j} \\ J_{zr}^{*j} & J_{z\theta}^{*j} & J_{zz}^{*j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_r^j \\ q_\theta^j \\ q_z^j \end{pmatrix} dl_j \quad (2.1)$$

où  $L_j, j = 1 \dots N_p$  sont les méridiens des sphères,  $N_p$  est le nombre des particules.

$$\begin{pmatrix} J_{rr}^{*j} & J_{r\theta}^{*j} & J_{rz}^{*j} \\ J_{\theta r}^{*j} & J_{\theta\theta}^{*j} & J_{\theta z}^{*j} \\ J_{zr}^{*j} & J_{z\theta}^{*j} & J_{zz}^{*j} \end{pmatrix} = 8\pi\mu \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_1^1 & G_2^1 & G_3^1 \\ G_1^2 & G_2^2 & G_3^2 \\ G_1^3 & G_2^3 & G_3^3 \end{pmatrix} \sin \theta d\theta \quad (2.2)$$

En raison de l'invariance par rotation du système autour de l'axe  $(Oz)$ , le champ de vitesse est de révolution autour de cet axe avec des composantes  $V_r^i = 0$ ,  $V_\theta^i = 0$  et  $V_z^i = -v_i$  indépendante de  $\theta$ . L'équation (2.1) se réduit à :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -v_i \end{pmatrix} = \frac{1}{8\pi\mu} \sum_{j=1}^{N_p} \int_{L_j} \begin{pmatrix} J_{rr}^{*j} & J_{rz}^{*j} \\ J_{zr}^{*j} & J_{zz}^{*j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_r^j \\ q_z^j \end{pmatrix} dl_j \quad (2.3)$$

Soit  $a_1$  le rayon de la sphère la plus proche de la paroi (sphère 1) et  $a_{N_p}$  celui de la sphère la plus éloignée de la paroi. On utilise la vitesse  $v_1$  de la sphère 1 comme vitesse de référence. Pour rendre les équations intégrales sans dimension, on écrit la contrainte sous la forme :

$$q^j = \frac{3 \mu v_1 q'^j}{a^1} \quad (2.4)$$

L'équation (2.3) devient :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{8\pi}{3} \frac{v_i}{v_1} \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{N_p} \frac{a^j}{a^1} \int_{L_j} \begin{pmatrix} J_{rr}^{*j} & J_{rz}^{*j} \\ J_{zr}^{*j} & J_{zz}^{*j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_r'^j \\ q_z'^j \end{pmatrix} d\psi^j \quad (2.5)$$

où  $\psi^j$  est l'angle du point  $\mathbf{y}$  dans le plan méridien de la sphère  $j$ .

La force hydrodynamique dans un fluide infini est donnée par

$$F_\infty^i = -6 \pi \mu a^i V_z^i \quad (2.6)$$

Soit  $\phi_i$  la force normalisée exercée sur la sphère  $i$ , on obtient :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \phi_i \end{pmatrix} = \frac{a^i v_i}{a^1 v_1} \int_0^\pi \begin{pmatrix} q_r^i \\ q_z^i \end{pmatrix} \sin \psi^i d\psi^i \quad (2.7)$$

$$\phi_i = F^i / F_\infty^i \quad \text{pour } i = 1..N_p \quad (2.8)$$

L'équation intégrale est réduite à la détermination de  $q^i$  à partir des équations (2.5), en fonction des paramètres  $\frac{a^i}{a^1}$ ,  $\frac{v_k}{v_1}$  et  $\frac{d^i}{a^1}$  pour  $i = 1 \dots N_p$ .

## 2.3 Assemblage de la matrice

On introduit les noyaux  $J^S$  et  $J^I$  associés respectivement à la vitesse due au Stokeslet initial et à celle due aux singularités images tels que :

$$J^* = J^S + J^I$$

Soit la limite :

$$J^S = \tilde{J} \quad \text{quand } \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$$

$\tilde{J}$  est l'expression asymptotique du noyau  $J^S$  quand le point courant  $\mathbf{x}$  tend vers le point contenant le Stokeslet  $\mathbf{y}$ . Pour chercher une solution numérique du problème (2.3), on discrétise les équations pour se ramener à un problème linéaire dans un espace de dimension finie.

Afin d'obtenir le système algébrique, l'équation intégrale est discrétisée après l'application du changement de variable  $\psi = \psi(t)$  décrit dans la section 2.4 et de la méthode de quadrature de Gauss-Legendre. Soit  $\omega_q$  et  $t_q$  respectivement les poids et les points de Gauss-Legendre. Les points d'intégration sont  $\psi(t_q)$  et les poids sont  $c_q = (d\psi/dt)\omega_q$ . Sur chaque demi sphère  $M$  points d'intégration sont utilisés pour les sphères  $i = 1, \dots, N_p - 1$ , et  $M$  points d'intégration sont utilisés sur la sphère  $N_p$ . Ainsi, à cause des deux équations dans (2.5), le nombre total des points d'intégration est  $2 \times (2M \times (N_p - 1) + M) = 2M(2N_p - 1)$ .

Les deux équations de (2.5) se ramènent à la résolution d'un système linéaire de taille  $2M(2N_p - 1) \times 2M(2N_p - 1)$  :

$$\sum_{j=1}^{N_p-1} \sum_{L=1}^{4M} A_{KL}^{ij} Q_L^j + \sum_{L=1}^{2M} A_{KL}^{iN_p} Q_L^{N_p} = B_k^i \quad (2.9)$$

où

$$\begin{cases} K = 1 \cdots 4M & \text{pour } i = 1 \cdots N_p - 1 \\ K = 1 \cdots 2M & \text{pour } i = N_p \end{cases} \quad (2.10)$$

Les points avec les indices  $K, L$  sont respectivement sur les sphères  $i, j$ . Les indices impairs de  $K, L$  correspondent à la première composante de l'équation (2.5), et les indices pair correspondent à la seconde composante de la même équation (2.5). Les constantes  $A_{KL}^{ij}$  dépendent de l'angle  $\psi_p^i$  (position de  $p^{\text{ième}}$  point quand la vitesse est calculée sur la sphère  $i$ ) et de l'angle  $\psi_q^j$  (position de  $q^{\text{ième}}$  point quand la vitesse est calculée sur la sphère  $j$ ). Lorsque  $i = j$  une singularité apparaît quand  $\psi_p^i = \psi_q^j$ . On considère donc les cas suivants :

Cas  $i \neq j$  :

- $p, q = 1 \cdots 2M$  ;  $i, j = 1 \cdots N_p$

$$\begin{aligned} A_{(2p-1)(2q-1)}^{ij} &= C_q^j J_{rr}^{*i}(\psi_p^i, \psi_q^j) \\ A_{(2p-1)(2j)}^{ij} &= C_q^j J_{rz}^{*i}(\psi_p^i, \psi_q^j) \\ A_{(2p)(2j-1)}^{ij} &= C_q^j J_{zr}^{*i}(\psi_p^i, \psi_q^j) \\ A_{(2p)(2j)}^{ij} &= C_q^j J_{zz}^{*i}(\psi_p^i, \psi_q^j) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Cas  $i = j$  :

- $p = q$ , pour  $p = 1 \cdots M$  pour les sphères  $i = 1 \cdots N_p$

$$\begin{aligned}
A_{(2p-1)(2q-1)}^{ii} &= \int_0^\pi \tilde{J}_{rr}^i(\psi_p^i, \psi) d\psi - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq p}}^M C_s^i \tilde{J}_{rr}^i(\psi_p^i, \psi_s^i) + C_p^i J_{rr}^{Ii}(\psi_p^i, \psi_p^i) \\
A_{(2p-1)(2q)}^{ii} &= \int_0^\pi \tilde{J}_{rz}^i(\psi_p^i, \psi) d\psi - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq p}}^M C_s^i \tilde{J}_{rz}^i(\psi_p^i, \psi_s^i) + C_p^i J_{rz}^{Ii}(\psi_p^i, \psi_p^i) \\
A_{(2p)(2q-1)}^{ii} &= \int_0^\pi \tilde{J}_{zr}^i(\psi_p^i, \psi) d\psi - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq p}}^M C_s^i \tilde{J}_{zr}^i(\psi_p^i, \psi_s^i) + C_p^i J_{zr}^{Ii}(\psi_p^i, \psi_p^i) \\
A_{(2p)(2q)}^{ii} &= \int_0^\pi \tilde{J}_{zz}^i(\psi_p^i, \psi) d\psi - \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq p}}^M C_s^i \tilde{J}_{zz}^i(\psi_p^i, \psi_s^i) + C_p^i J_{zz}^{Ii}(\psi_p^i, \psi_p^i)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

- $p \neq q$ , pour  $p = 1 \cdots M$  pour les spheres  $i = 1 \cdots N_p$ , comme dans (2.11).

avec

$$C_q^j = \frac{a^j}{a^1} c_q$$

Pour l'expression du noyau  $J$ , voir annexe B.

Les valeurs de  $B_K^i$  sont données par :

$$\begin{aligned}
B_{(2p-1)}^i &= 0 \\
B_{(2p)}^i &= \frac{-8\pi}{3}
\end{aligned} \tag{2.13}$$

## 2.4 Distribution des Stokeslets sur les particules

Afin d'améliorer les calculs sans augmenter le temps d'exécution, nous envisageons d'établir une loi convenable de distribution des Stokeslets sur les surfaces des particules. En effet, les Stokeslets sont automatiquement concentrées dans les zones à fortes contraintes. La loi est d'abord obtenue sur deux sphères et ensuite

généralisée sur une ligne de sphères en mouvement dans une configuration axisymétrique.

Pour que les points de collocation sur les surfaces des deux sphères traduisent les interactions paroi-sphère et sphère-sphère, la répartition de ces points doit se faire d'une manière appropriée :

- (1) Pour la moitié de la sphère 1 du côté de la paroi, la répartition des points de collocation est proportionnelle à la distance qui sépare ce point de la paroi :

$$\psi_{p+1}^1 - \psi_p^1 = \alpha^{(1,0)} \left( \frac{z_p^1}{a^1} \right) \quad (2.14)$$

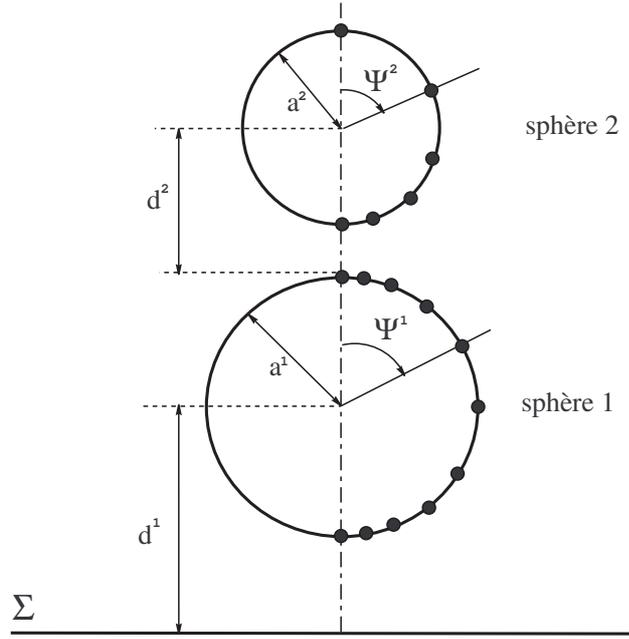
- (2) Pour la moitié de la sphère  $i$  ( $i > 1$ ) du côté de la paroi 2, la répartition des points de collocation est proportionnelle à la distance de ces points au plus proche plan tangent à la sphère  $i - 1$  et parallèle à la paroi :

$$\psi_{p+1}^i - \psi_p^i = \alpha^{(i,i-1)} \left( \frac{z_p^i - \sum_{j=1}^{i-1} (a^j + d^j)}{a^1} \right) \quad (2.15)$$

- (3) Pour la moitié de la sphère  $i$  du côté de la sphère  $i + 1$ , la répartition des points de collocation est proportionnelle à la distance de ces points au plus proche plan tangent à la sphère  $i + 1$  et parallèle à la paroi :

$$\psi_{p+1}^i - \psi_p^i = \alpha^{(i,i+1)} \left( \frac{\sum_{j=1}^i a^j - a^{i+1} + \sum_{j=1}^{i+1} d^j - z_p^j}{a^1} \right) \quad (2.16)$$

- (4) Pour la sphère  $N_p$ , la répartition des points de collocation est proportionnelle à la distance de ces points au plus proche plan tangent à la sphère  $n - 1$  et parallèle à la paroi (la répartition des points de collocation est comme dans (2), avec  $p = M$ )



**Figure (2.2)** – Répartition des points de collocation sur deux sphères.

- Pour les sphères  $i = 1, \dots, N_p - 1$  :  
 Pour la demi sphère  $i$  du côté de la sphère  $i - 1$  (ou bien la paroi) :  
 $\psi_1^i = \pi/2$  et  $\psi_M^i = \pi$   
 Pour la demi sphère  $i$  du côté de la sphère  $i + 1$  :  $\psi_M^i = \pi/2$
- Pour la sphères  $i = N_p$  :  
 $\psi_1^{N_p} = \pi$  et  $\psi_M^{N_p} = \pi$

Soit  $t$  la variable représentant l'indice des points de collocation supposée continue et dérivable. On a alors :

$$\frac{dt}{d\psi^i} = \frac{1}{\alpha^{(i,i\pm 1)} (c_{\pm}^i \pm \cos \psi^i)} \quad (2.17)$$

où les coefficients  $c_{\pm}^i$  sont constants, la loi  $\psi(t)$  de distribution des Stokeslets est obtenue par intégration de l'équation (2.17) en utilisant le coefficient approprié  $c_{\pm}^i$  sur la partie supérieure (+) et inférieure (-) de la sphère  $i$ , et en tenant compte des conditions pour les points aux extrémités comme condition aux bords.

Par exemple pour le cas de deux sphères identiques de rayon unité, on obtient par intégration sur la surface  $S^1$  de la sphère 1 la répartition telle que :

$$\psi_p^1 = 2 \arctan \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon_1 + 2}{\varepsilon_1}} \tan \left[ \frac{p-1}{2(M-1)} \left( \pi - \arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2}}\right) + \arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2}}\right) \right) \right] \right\} \quad (2.18)$$

où  $\psi_p^1 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$$\psi_p^1 = 2 \arctan \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2}} \tan \left[ \frac{p-1}{M-1} \arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1 + 2}{\varepsilon_1}}\right) \right] \right\} \quad (2.19)$$

où  $\psi_p^1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  avec  $\varepsilon_1 = d^1/a^1$

et sur la surface  $S^2$  de la sphère 2 la répartition telle que :

$$\psi_p^2 = 2 \arctan \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon_2 + 2}{\varepsilon_2}} \tan \left( \frac{(p-1)\pi}{2(M-1)} \right) \right\} \quad (2.20)$$

où  $\psi_p^2 \in [0, \pi]$  avec  $\varepsilon_2 = d^2/a^1$

## 2.5 Validation des résultats pour des cas simples

Dans cette section, on compare nos résultats avec ceux donnés dans la littérature. Pour les cas d'une sphère au voisinage d'une paroi plane on fait la comparaison avec les résultats de Brenner [16] et Maude [72] ainsi que les résultats de Hsu et Ganatos [55]. Pour le cas de deux sphères loin de la paroi la comparaison est faite avec Stimson et Jeffery [95] et Wakiya [101].

On considère une sphère de rayon unité au voisinage d'une paroi plane. Cette sphère qui est placée à une distance  $D^1 = d^1/a$  est en mouvement de translation verticale  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^3$  perpendiculairement à la paroi, (pour les notations voir figure (2.1)). Pour deux sphères loin de la paroi (sphère 1 à une distance  $D^1 \gg 1$  de la paroi) leurs rayons sont identiques et égaux à l'unité et elles sont en translation avec la vitesse  $\mathbf{v}^1 = \mathbf{v}^2 = \mathbf{e}^3$ .

Les distances utilisées dans cette section sont toutes normalisées par le rayon de la première sphère 1, donc  $D^i = d^i/a$  où  $i = 1 \dots N_p$

## 2.5.1 Une sphère au voisinage d'une paroi plane

Pour étudier l'effet de la paroi sur une sphère seule, on considère deux sphères et on augmente les distances entre les sphères tout en gardant la première proche de la paroi.

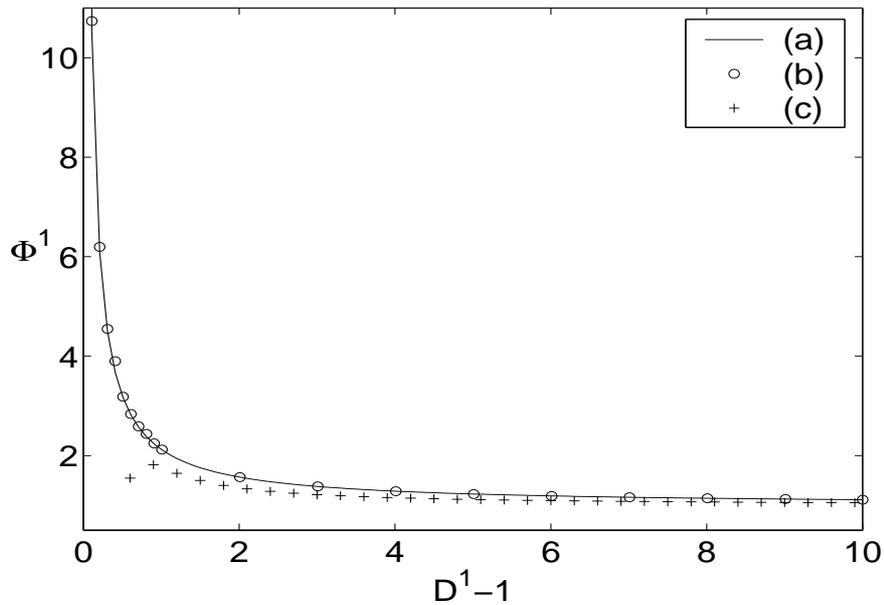
	(A)				(B)			
$D^1$	1.1276	1.5431	2.3524	3.7622	1.1276	1.5431	2.3524	3.7622
N=5	32.13	3.039	1.839	1.222	1.973	3.032	1.834	1.411
N=7	12.09	3.036	1.838	1.222	9.035	3.036	1.837	1.412
N=9	9.45	3.036	1.838	1.222	9.134	3.039	1.838	1.412
N=11	9.25	3.036	1.838	1.222	9.196	3.038	1.838	1.413
N=13	9.25	3.036	1.838	1.222	9.251	3.042	1.838	1.413
'Exacte'	9.25	3.036	1.838	1.413	9.25	3.036	1.838	1.413

**Table (2.1)** – Force hydrodynamique adimensionnée  $\Phi$ , exercée sur une sphère solide de rayon  $a$  et séparée d'une distance  $D^1$  de la paroi (la distance  $D^2$ , qui sépare les deux sphères, est grande " $D^2 = 100$ "). Comparaison de (B) nos résultats avec les résultats (A) de Hsu et Ganatos [55] ainsi que la solution 'exacte' (analytique) de Brenner [16] et Maude [72].

L'expression de la force hydrodynamique adimensionnée  $\Phi$ , exercée sur une sphère solide de rayon  $a$  et séparée d'une distance  $D^1 - 1$  de la paroi est donnée par le tableau (2.1) (la distance  $D^2 - 1$ , qui sépare les deux sphères, est grande  $D^2 = 100$ ). Les valeurs numériques de la force hydrodynamique trouvées par la méthode des intégrales de surface sont proches de la solution analytique de Brenner [16] et Maude [72] et des valeurs obtenues par Hsu et Ganatos [55] (voir la colonne  $D^1 = 1.1276$  par exemple. La colonne  $D^1 = 3.7622$  de (A) cf l'article [55] contient sans doute des erreurs de frappe).

Les courbes de la figure (2.3) représentent la force hydrodynamique en fonction de la distance  $H = D^1 - 1$  séparant la sphère de la paroi ( $D^1 = \frac{d^1}{a}$ ). Ces courbes mettent en évidence une croissance de la force hydrodynamique lorsque la sphère s'approche de la paroi. La courbe obtenue par la présente technique (o) coïncide avec la solution 'exacte' obtenue par Brenner et Maude (-) en utilisant la mé-

thode des coordonnées bisphériques (l'ordre de l'erreur ne dépasse pas 0.1%). Nos résultats sont meilleurs que ceux obtenus par Wakiya (+) qui a utilisé la méthode des réflexions. Ces courbes montrent que la force tend vers 1 quand la distance  $H$  tend vers l'infini, on retrouve ainsi le résultat pour le cas d'une sphère dans un écoulement infini.

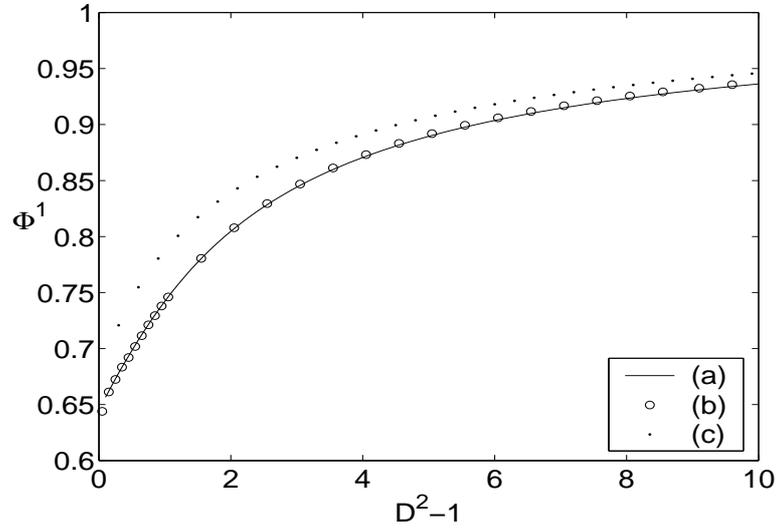


**Figure (2.3)** – La force hydrodynamique exercée sur une sphère au voisinage d'une paroi plane; (a) solution obtenue par la méthode des coordonnées bisphériques [16, 72]; (b) solution obtenue par la présente technique; (c) solution obtenue par Wakiya [101] en utilisant la méthode de réflexions.

## 2.5.2 Deux sphères loin de la paroi

On obtient la force exercée sur deux sphères quand la distance  $D^1$  entre la première sphère et la paroi tend vers l'infini. On remarque (figure 2.4) que la méthode des équations intégrales donne des résultats meilleurs que ceux obtenus par la méthode des réflexions. Les valeurs trouvées sont proches du résultat exact donné par la méthode des coordonnées bisphériques, l'ordre de l'erreur ne dépasse pas 0.1%.

La force exercée sur une sphère au voisinage d'une deuxième sphère est inférieure à la force exercée sur une sphère dans un écoulement infini.



**Figure (2.4)** – Comparaison entre les variations de la force hydrodynamique exercée sur une sphère, pour deux sphères identiques en sédimentation, séparées par la distance  $D^2 - 1$ ; (a) : méthode des coordonnées bisphériques [95], (b) : nos résultats, (c) : méthode des réflexions [101].

$D^2 - 1$	$\Phi_1$	$\Phi_2$	$\Phi$
0.10	0.6509	0.6503	0.650900
0.11	0.6515	0.6509	0.651470
0.12	0.6520	0.6515	0.652039
0.13	0.6526	0.6521	0.652607
0.14	0.6531	0.6527	0.653174
0.15	0.6537	0.6533	0.653740
0.16	0.6542	0.6539	0.654305
0.17	0.6548	0.6544	0.654868
0.18	0.6553	0.6550	0.655431
0.19	0.6559	0.6556	0.655993
0.20	0.6567	0.6561	0.656554
0.30	0.6620	0.6618	0.662106
0.40	0.6674	0.6672	0.667559
1.00	0.6981	0.6981	0.698304
2.00	0.7422	0.7422	0.742258
3.00	0.7772	0.7772	0.777239
7.00	0.8585	0.8585	0.858562
10.0	0.8895	0.8894	0.889487

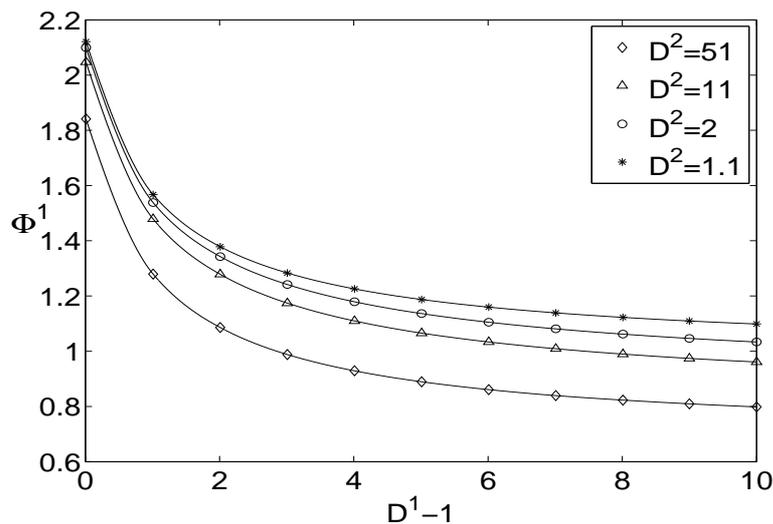
**Table (2.2)** – Comparaison des valeurs des forces  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  obtenues pour différentes valeurs de la distance  $D^2 - 1$ , la sphère 1 étant loin de la paroi ( $D^1 - 1 = 1000$ ).  $\Phi$  est la solution 'exacte' obtenue par Stimson et Jeffery [95] avec la méthode des coordonnées bisphériques.

Dans le tableau (2.2), on a relevé les valeurs de  $\Phi_1$  et  $\Phi_2$  c'est à dire les forces qui s'exercent respectivement sur la sphère 1 et la sphère 2 pour différentes valeurs de  $D^2$ ,  $D^1 - 1$  étant égale à 1000. On voit que les forces sont pratiquement égales comme dans le cas où il n'y a pas présence de paroi. On constate aussi que  $\Phi_1$  est toujours légèrement plus grand que  $\Phi_2$ , à cause de la présence de la paroi même si celle-ci est très lointaine.

## 2.6 Résultats et discussion

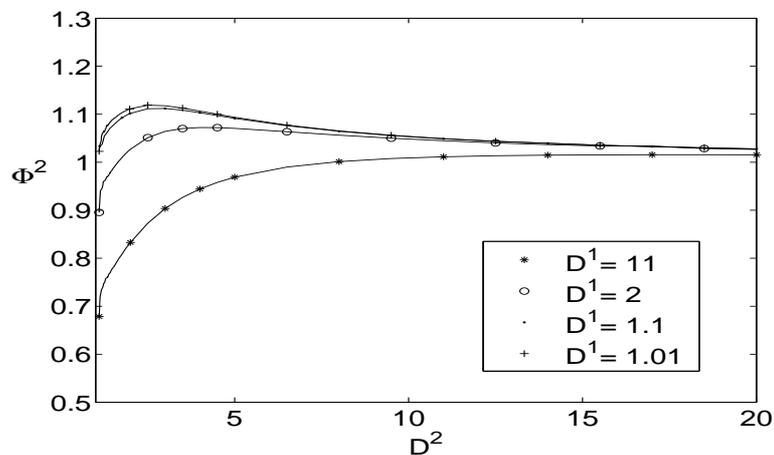
### 2.6.1 Deux sphères proches d'une paroi

On considère deux sphères identiques de rayons  $a$ , en mouvement avec la même vitesse de translation perpendiculaire à la paroi. La force exercée sur une sphère en sédimentation vers une paroi plane est importante quand la sphère s'approche de la paroi. La figure 2.5 montre la variation de cette force en fonction de la distance  $D^1$  qui sépare la sphère 1 de la paroi pour différentes positions de la deuxième sphère. Cette force sur la sphère 1 est plus perturbée par la présence de la deuxième sphère quand la sphère 1 est loin de la paroi. Cette force décroît par ailleurs plus rapidement lorsque la deuxième sphère est plus proche de la première.



**Figure (2.5)** – Comparaison des valeurs de la force hydrodynamique  $\Phi_1$  exercée sur la sphère 1 en fonction de la distance  $D^1$  de la paroi, pour différentes valeurs de  $D^2$ , la distance qui sépare les deux sphères.

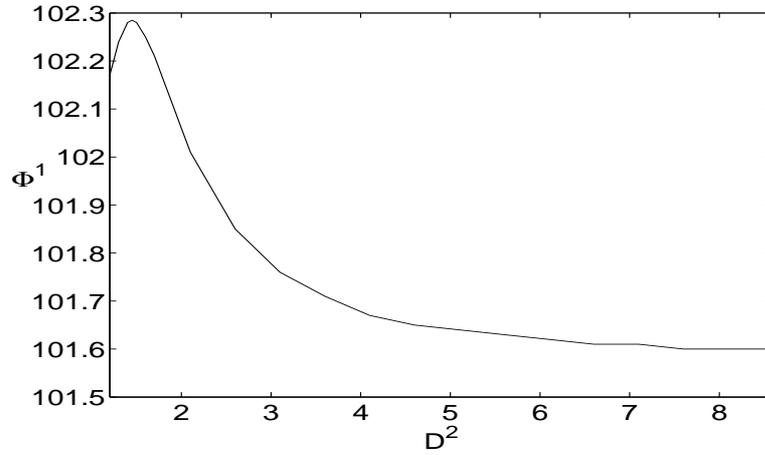
La famille des courbes (2.6) exprime l'influence du mouvement de la sphère 1 sur la force exercée sur la sphère 2. Pour le cas où la paroi est séparée d'une distance  $D^1 = 11$  de la sphère 1, la force exercée sur la sphère 2 tend vers une valeur proche de 1 quand la distance  $D^2$  croît, mais pour les cas où la paroi est proche de la sphère 1 ( $D^1 = 1, 0.1$  et  $0.01$ ) l'influence de la paroi est importante. La force exercée sur la deuxième sphère admet un maximum quand  $D^2 < 5$  et la courbe des forces atteint son maximum plus rapidement pour des petites valeurs de  $D^1$ , figure (2.6). La méthode utilisée par Wakiya ne permet pas de donner une solution pour les cas où la sphère est proche de la paroi et le cas où la sphère est proche de la deuxième sphère car la méthode des réflexions n'est alors pas adaptée.



**Figure (2.6)** – Variation de la force de résistance  $\Phi_2$  qui agit sur la sphère 2, en fonction de sa distance  $D^2$  à la sphère 1. Les courbes sont tracées pour plusieurs valeurs de  $D^1$ .

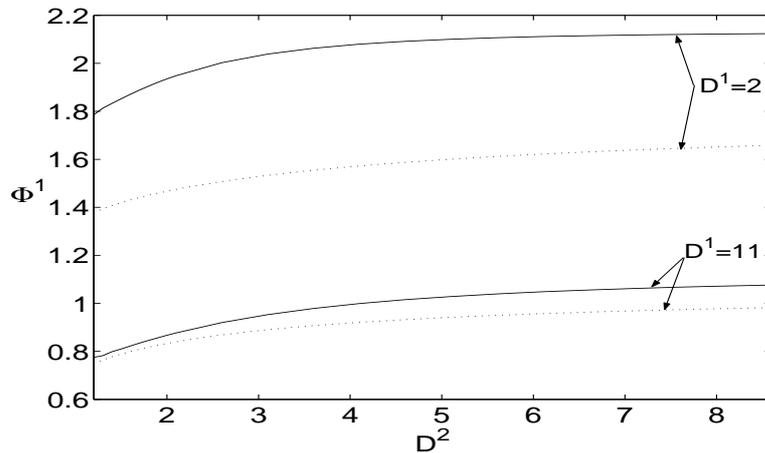
La force appliquée sur une sphère très proche de la paroi  $\phi^1$  est tracé sur la figure (2.7) en fonction de  $D^2$  pour la valeur  $D^1 = 1.01$ . La valeur  $\phi^1$  est du même ordre que le coefficient de lubrification  $1/(D^1 - 1) = 100$  et la variation de  $\phi^1$  causée par la deuxième sphère est de l'ordre de l'unité. La région de lubrification entre la sphère 1 et la paroi est à l'origine de l'importante force exercée sur la sphère 1. La force de lubrification exercée sur la sphère 1 diminue lorsque la sphère 2 est proche de la sphère 1 qui empêche la sphère 2 d'interagir avec la force de lubrification. Aussi, dans le cas où la sphère 2 est loin de la sphère 1 la force est

de l'ordre  $1/(D^1 - 1)$  quand  $D^2 \rightarrow \infty$



**Figure (2.7)** – Profil de variation de la force hydrodynamique sans dimension, exercée sur la sphère 1, en fonction de la distance à la sphère 2. La sphère 1 est fixée à une distance  $D^1 = 1.01$  de la paroi.

La force exercée sur la sphère 1,  $\phi^1$ , est exprimée en fonction de la distance  $D^2$  sur la figure (2.8), pour les valeurs  $D^1 = 2, 11$ . Nos résultats sont comparés avec ceux obtenus par Wakiya [101], la méthode des réflexions est appropriée pour des grandes distances :  $\phi^1$  croît quand la sphère 1 s'approche de la paroi ce qui n'est pas pris en compte pour les résultats de Wakiya.



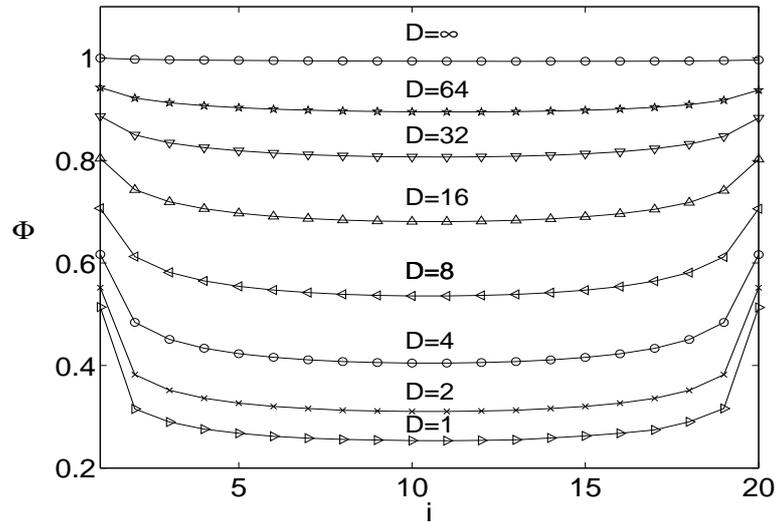
**Figure (2.8)** – Force hydrodynamique sur la sphère 1 au voisinage de la paroi en fonction de la distance  $D^2$  pour les valeurs  $D^1 = 2, 11$ . Comparaison entre les résultats de la présente méthode (—) et ceux de Wakiya (···).

## 2.6.2 Plusieurs sphères

On considère une chaîne de  $N_p$  sphères identiques de rayons  $a$ , en mouvement avec la même vitesse de translation perpendiculaire à la paroi. En utilisant l'équation (2.5) pour le cas de plusieurs particules on obtient les résultats de la table (2.3), pour les cas d'une chaîne composée de 3, 5 et 7 sphères séparées entre elles par une distance  $D^2 = \dots = D^{N_p-1} = D$  cf figure (2.1), la première sphère étant à une distance  $D^1 = 101$  de la paroi ( $N_p$  : nombre de sphères).

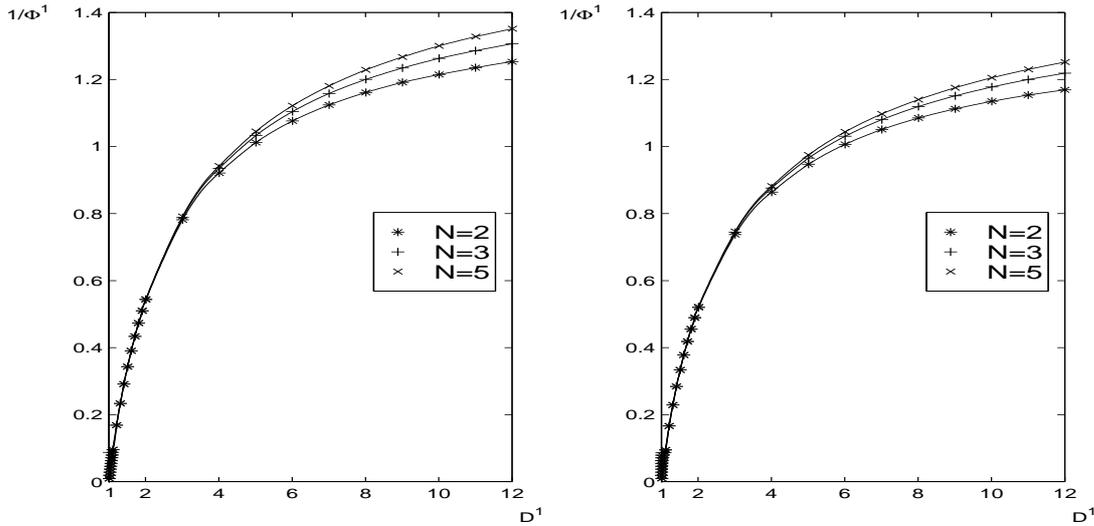
Sphère #	$N_p = 3$	$N_p = 5$	$N_p = 7$
1	.660	.658	.634
2	.445	.470	.445
3	.659	.450	.419
4		.469	.412
5		.655	.418
6			.444
7			.630

**Table (2.3)** – Force normalisée appliquée sur une sphère d'une chaîne de  $N_p = 3, 5, 7$  sphères. La distance  $D^1 = 101$  sépare la sphère 1 de la paroi et  $D = 2$  est la distance qui sépare deux sphères consécutives.



**Figure (2.9)** – Force hydrodynamique exercée sur les particules d'une chaîne de 20 particules.

D'autres résultats pour le cas d'une chaîne de 20 particules loin de la paroi ( $D^1 = 101$ ) sont présentés sur la figure (2.9). On remarque que lorsque la distance entre les sphères décroît la force hydrodynamique est maximale aux extrémités de la chaîne. L'effet de la paroi sur la première sphère dans une chaîne de  $N_p = 3, 5$  sphères est présentée sur la figure (2.10) pour  $D = 4, 5$ . Sur cette figure on a tracé l'inverse de la force hydrodynamique réduite en fonction de la distance  $D^1$ .



**Figure (2.10)** – Inverse de la force hydrodynamique réduite exercée sur une chaîne de 2 ,3 ,5 sphères, en fonction de la distance  $D^1$  entre la première sphère et la paroi. La distance entre les sphères est  $D = 4$  (à gauche) et  $D = 5$  (à droite) .

## 2.7 Conclusion

Nous avons étudié le problème des interactions hydrodynamiques entre des sphères solides alignées en mouvement de translation perpendiculairement à une paroi plane dans une configuration axisymétrique (en sédimentation au voisinage d'une paroi imperméable horizontale). Nous avons utilisé une méthode analogue à celle utilisée par Youngren et Acrivos [104] pour un écoulement de Stokes infini : la méthode des équations intégrales pour le problème de Stokes dans le cas de particules solides. L'équation intégrale se ramène à une équation qui exprime la vitesse en chaque point de la surface de la sphère sous forme d'un potentiel de

simple couche, la densité de ce potentiel étant la contrainte qui s'exerce localement sur chaque sphère.

Nous avons d'abord montré que cette méthode peut s'appliquer au problème posé ici, en utilisant la fonction de Green du problème qui tient compte de la condition de non-glissement sur la paroi. Cette méthode permet donc de déduire les contraintes, ainsi que la traînée, exercées sur des corps solides se déplaçant au voisinage d'une paroi plane.

Nous avons déduit, à partir de cette équation intégrale de surface, le système linéaire qui permet de calculer la force hydrodynamique exercée sur deux sphères en sédimentation dans le cas axi-symétrique. Les difficultés posées par le calcul numérique sont inhérentes aux singularités du noyau de l'équation intégrale. Pour traiter ces singularités, nous avons effectué un calcul analytique pour les points de collocations voisins des singularités, et un calcul numérique pour les points de collocations loin des singularités. Pour la répartition des points de collocation, nous avons utilisé une technique qui permet de diminuer les calculs. Les points sont répartis avec une plus grande densité dans les régions où les interactions sont fortes.

Nous avons comparé les résultats obtenus par la présente méthode avec ceux obtenus par d'autres méthodes. Pour le cas d'une sphère et une paroi, nous avons utilisé les résultats obtenus par Brenner [16] et Maude [72], et pour le cas de deux sphères ceux obtenus par Stimson et Jeffery [95]. Ces derniers résultats sont obtenus par des méthodes exactes. L'ordre de l'erreur ne dépasse pas 0.1% ce qui prouve l'efficacité de la présente méthode pour ce genre de problème. Nous avons comparé aussi les résultats obtenus avec les résultats de méthodes approchées, telle que la méthode des réflexions. La solution du problème obtenu par Wakiya [100, 101] en utilisant la méthode des réflexions ne donne pas une solution précise, dès que les deux sphères s'approchent trop de la paroi. La méthode des intégrales de surfaces permet de donner une meilleure approximation de la solution pour ce cas. Nous avons aussi montré que, pour le problème axi-symétrique, le même code de calcul permet facilement d'étudier le cas d'un plus grand nombre de sphères.

---

Enfin, la présente étude va être étendue dans le chapitre 3 au cas non axisymétrique où les particules ne sont plus alignées perpendiculairement à la paroi, le fluide étant en plus en écoulement loin des particules.



# Chapitre 3

## Résolution des équations intégrales de surface par la méthode des éléments de frontière

### Sommaire

---

3.1	Introduction . . . . .	47
3.2	Equations intégrales de surfaces . . . . .	48
3.3	Méthode de collocation . . . . .	49
3.4	Méthode de Galerkin de type $P_0$ . . . . .	50
3.5	Assemblage de la matrice . . . . .	52
3.6	Calcul des forces et des couples . . . . .	54
3.7	Maillage adaptatif . . . . .	56
3.8	Conclusion . . . . .	60

---

### 3.1 Introduction

Nous nous proposons à présent d'appliquer la méthode des éléments de frontière pour résoudre les équations intégrales de surface. Cette technique s'applique sans restriction sur les positions des particules et sans se limiter aux cas axi-symétriques. La méthode des éléments de frontière est étudiée dans beaucoup d'ouvrages, citons en particulier Brebbia [15]. Bonnet [12] aussi a montré l'effi-

capacité de cette technique dans divers domaines. La mise en œuvre de la méthode est étudiée par Banerjee [5] et Beer [7].

Dans ce chapitre nous envisageons d'établir le système algébrique issu de la formulation intégrale de surface. L'implémentation numérique de la méthode des éléments de frontière comporte plusieurs étapes :

- discrétisation du domaine
- discrétisation des fonctions
- évaluation des intégrales
- remplissage du système algébrique
- résolution du système algébrique

Afin d'améliorer les résultats nous envisagerons de mettre en œuvre une technique d'adaptation de maillage au lieu du maillage uniforme qui ne tient pas compte de la dynamique de l'écoulement.

## 3.2 Equations intégrales de surfaces

Dans le cas d'un écoulement à  $N_p$  particules l'algorithme consiste à déterminer d'abord les contraintes exercées sur chaque particule par l'intermédiaire de l'équation intégrale (1.31)

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}^i) = \sum_{k=1}^{N_p} \int_{S^k} \mathbf{G}(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{q}(\mathbf{y}) dS_y \quad (3.1)$$

ensuite, à sommer ces contraintes sur les surfaces de chaque particule  $k$  pour trouver la force et le couple exercés sur celle-ci :

$$\mathbf{F}^k = \int_{S^k} \mathbf{q}(\mathbf{y}) dS_y \quad (3.2)$$

$$\mathbf{C}^k = \int_{S^k} (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}_G) \wedge \mathbf{q}(\mathbf{y}) dS_y \quad (3.3)$$

### 3.3 Méthode de collocation

L'équation (3.1) après maillage devient :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{N_t} \int_{\Delta^j} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{q}(\mathbf{y}) dS_y \quad (3.4)$$

où  $N_p$  est le nombre de particules et  $N_t$  est le nombre total des triangles  $\Delta^j$  qui couvrent la surface de la particule. Dans l'équation (3.4), en utilisant la même méthode que Pozrikidis [89], on va chercher une contrainte  $\mathbf{q}$  constante par triangle, soit  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_j$  quand  $\mathbf{y} \in \Delta_j$ .

Il faut choisir le nombre de points  $\mathbf{x}$  où l'on calcule la vitesse de façon à avoir autant d'équations que d'inconnues. Nous avons choisi les centres de gravité  $\mathbf{x}_G$  des triangles comme points d'évaluation de la vitesse.

Dans l'équation (3.4) les inconnues à déterminer sont les  $\mathbf{q}_j$  sur chaque triangle  $\Delta_j$ , de sorte que nous avons autant d'inconnues que d'éléments, et le nombre total des inconnues est  $3 \times N_p \times N_t$  pour les trois composantes de la contrainte.

Des problèmes de singularité surgissent lorsque  $\mathbf{x}_G$  et  $\mathbf{y}$  sont sur le même triangle. Une méthode de calcul approprié est utilisée dans ce cas, afin de calculer les intégrales singulières (voir annexe D); elle consiste à isoler la partie qui contient la singularité, puis à la traiter séparément.

Soit  $\mathbf{x}_G^i$  le centre de gravité du triangle  $\Delta^i$ ,  $i \in 1, \dots, N_t$ . L'équation (3.4) s'écrit en ce point :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_G^i) = \sum_{k=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{N_t} \left[ \int_{\Delta^j} \mathbf{G}(\mathbf{x}_G^i, \mathbf{y}) dS_y \right] \cdot \mathbf{q}_j \quad (3.5)$$

Pour alléger la notation, on sous-entend ici le fait que les différents triangles  $\Delta^j$  dépendent de chaque particule  $k$ .

La résolution de cette équation se ramène à la résolution du système linéaire d'inconnue  $Q$  et de matrice  $A = (A_{ij})$ .

$$A Q = V \quad (3.6)$$

avec

$$A_{ij} = \int_{\Delta^j} \mathbf{G}(\mathbf{x}_G^i, \mathbf{y}) dS_y \quad (3.7)$$

$$V_i = \mathbf{v}(\mathbf{x}_G^i) \quad (3.8)$$

On distingue dans (3.7) deux types d'intégrales. Une intégrale régulière, telle que le point  $\mathbf{x}_G^i$  où l'on calcule la vitesse n'est pas sur le même triangle  $\Delta^j$

$$A_{ij} = \int_{\Delta^j} \mathbf{G}(\mathbf{x}_G, \mathbf{y}) dS_y \quad (3.9)$$

$$\simeq A_j \sum_{k=1}^M \mathbf{G}(\mathbf{x}_G, \mathbf{z}_k) w_k \quad (3.10)$$

où  $A_j$  est la surface du triangle  $\Delta^j$ ,  $M$  le nombre de points d'intégration (voir annexe (C)),  $\mathbf{z}_k = \sum_{l=1}^6 \phi_l(\xi_k, \eta_k) \mathbf{y}_l$ ,  $w_k$  sont les poids correspondants et les coefficients  $\xi_k$  et  $\eta_k$  sont les coordonnées paramétriques des points d'intégration sur un triangle de référence [87].

Le deuxième type d'intégrale dans (3.7) est une intégrale singulière puisque  $\mathbf{x}_G^i$  et  $\mathbf{y} \in \Delta^i$ ;

$$A_{ii} = \int_{\Delta^i} \mathbf{G}(\mathbf{x}_G^i, \mathbf{y}) dS_y \quad (3.11)$$

Pour le traitement de cette intégrale voir, annexe (D).

### 3.4 Méthode de Galerkin de type $P_0$

Cette méthode consiste à partir de la formulation variationnelle [28, 85] à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{q} \in H^{-\frac{1}{2}}(S) \text{ tel que } \forall \mathbf{q}' \in H^{-\frac{1}{2}}(S), \text{ on ait :} \\ \int_S \int_S \mathbf{q}'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{q}(\mathbf{y}) dS_y dS_x = \int_S \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{q}'(\mathbf{x}) dS_x \end{array} \right. \quad (3.12)$$

et à approcher l'inconnue  $\mathbf{q}$  par son interpolée d'ordre 0 notée  $\mathbf{q}^j$ , c'est à dire qu'on a une valeur  $\mathbf{q}^j$  par triangle. Le problème discret consiste à résoudre le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{q}_h \in L_h \text{ tel que } \forall \mathbf{q}'_h \in L_h, \text{ on ait :} \\ \int_S \int_S \mathbf{q}'_h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{q}_h(\mathbf{y}) dS_y dS_x = \int_S \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{q}'_h(\mathbf{x}) dS_x \end{array} \right. \quad (3.13)$$

où  $L_h$  est l'espace des fonctions constantes par triangles, dont une base est formée des  $M = N_p \times N_t$  fonctions  $1_{\Delta^j}$  valant 1 sur le triangle  $\Delta^j$  de la particule  $k$  et 0 sur tous les autres triangles. La valeur de  $\mathbf{q}_h$  sur le triangle  $\Delta^j$  est donnée par :

$$\mathbf{q}_h = \sum_{j=1}^M \mathbf{q}^j 1_{\Delta^j} \quad (3.14)$$

où les  $\mathbf{q}^j$  satisfont

$$\sum_{k=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{N_t} \int_{\Delta^i} \int_{\Delta^j} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{q}^j dS_x dS_y = \int_{\Delta^i} \mathbf{v}(\mathbf{x}) dS_x \quad \forall i \in 1, \dots, M \quad (3.15)$$

équation qui est obtenue en prenant pour fonction  $\mathbf{q}'_h$  dans (3.13) successivement chacune des fonctions de base  $1_{\Delta^i}$  de l'espace  $L_h$ . Le problème discret (3.13) se ramène alors à la résolution du système linéaire d'inconnue  $Q$  et de matrice  $A = (A_{ij})$ .

$$A Q = V \quad (3.16)$$

avec

$$A_{ij} = \int_{\Delta^i} \int_{\Delta^j} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_x dS_y, \quad V_i = \int_{\Delta^i} \mathbf{v}(\mathbf{x}) dS_x \quad (3.17)$$

Lorsque l'évaluation du second membre se fait grâce à la formule de quadrature au centre de gravité du triangle  $\Delta^i$ , on obtient alors :

$$A_{ij} = |\Delta^i| \int_{\Delta^j} \mathbf{G}(\mathbf{x}_G^i, \mathbf{y}) dS_y \quad ; \quad V_i = |\Delta^i| \mathbf{v}(\mathbf{x}_G^i) \quad (3.18)$$

L'équation (3.15) devient alors :  $\forall i \in 1, \dots, M$ ,

$$\sum_{k=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{N_t} \left[ \int_{\Delta^j} \mathbf{G}(\mathbf{x}_G, \mathbf{y}) dS_y \right] \cdot \mathbf{q}^j = \mathbf{v}(\mathbf{x}_G^i) \quad (3.19)$$

On obtient ainsi de nouveau l'équation (3.5) qui provient de la méthode de collocation. L'évaluation des deux membres de l'équation (3.15) se fait de la même façon que la méthode de collocation.

### Remarques :

- Le choix d'approximation par des polynômes  $P_o$  a abouti au même système algébrique que celui de la méthode de collocation.
- Puisqu'il y a des intégrales doubles à évaluer la résolution du système (3.16) est plus coûteuse.

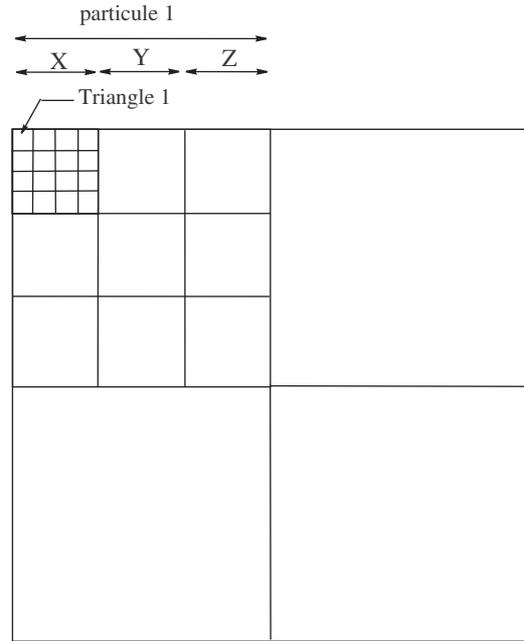
## 3.5 Assemblage de la matrice

La matrice déduite de l'équation intégrale discrétisée est d'ordre  $(3 \times N_p \times N_t)^2$  où  $N_p$  est le nombre de particules et  $N_t$  est le nombre de triangles .

Les éléments de la matrice sont ordonnés de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A_{3(i_p-1)N_t+i, 3(j_p-1)N_t+j} &= \int_{\Delta_{j_p}} G_{xx}(\mathbf{x}_{i_p}, \mathbf{y}_{j_p}) dS_y \\ A_{3(i_p-1)N_t+i, 3(j_p-1)N_t+N_t+j} &= \int_{\Delta_{j_p}} G_{xy}(\mathbf{x}_{i_p}, \mathbf{y}_{j_p}) dS_y \\ A_{3(i_p-1)N_t+i, 3(j_p-1)N_t+2N_t+j} &= \int_{\Delta_{j_p}} G_{xz}(\mathbf{x}_{i_p}, \mathbf{y}_{j_p}) dS_y \\ \\ A_{3(i_p-1)N_t+N_t+i, 3(j_p-1)N_t+j} &= \int_{\Delta_{j_p}} G_{yx}(\mathbf{x}_{i_p}, \mathbf{y}_{j_p}) dS_y \\ A_{3(i_p-1)N_t+N_t+i, 3(j_p-1)N_t+N_t+j} &= \int_{\Delta_{j_p}} G_{yy}(\mathbf{x}_{i_p}, \mathbf{y}_{j_p}) dS_y \\ A_{3(i_p-1)N_t+N_t+i, 3(j_p-1)N_t+2N_t+j} &= \int_{\Delta_{j_p}} G_{yz}(\mathbf{x}_{i_p}, \mathbf{y}_{j_p}) dS_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{3(i_p-1)N_t+2N_t+i,3(j_p-1)N_t+j} &= \int_{\Delta_{j_p}} G_{zx}(\mathbf{x}_{i_p}, \mathbf{y}_{j_p}) dS_y \\
A_{3(i_p-1)N_t+2N_t+i,3(j_p-1)N_t+N_t+j} &= \int_{\Delta_{j_p}} G_{zy}(\mathbf{x}_{i_p}, \mathbf{y}_{j_p}) dS_y \\
A_{3(i_p-1)N_t+2N_t+i,3(j_p-1)N_t+2N_t+j} &= \int_{\Delta_{j_p}} G_{zz}(\mathbf{x}_{i_p}, \mathbf{y}_{j_p}) dS_y
\end{aligned} \tag{3.20}$$



**Figure (3.1)** – Assemblage de la matrice.

où  $1 \leq i_p \leq N_p$  ;  $1 \leq j_p \leq N_p$  ,  $1 \leq i \leq N_t$  ;  $1 \leq j \leq N_t$

Dans (3.20) l'évaluation des intégrales se fait automatiquement de manière différente lorsque l'intégrale contient des singularités.

Le second membre du système linéaire est introduit suivant  $i_p$  qui est le numéro global de la particule et  $i$  le numéro de l'élément triangulaire.

$$\begin{cases} V_{3(i_p-1)N_t+i} &= V_x \\ V_{3(i_p-1)N_t+N_t+i} &= V_y \\ V_{3(i_p-1)N_t+2N_t+i} &= V_z \end{cases} \tag{3.21}$$

La contrainte à trouver est de la forme

$$\begin{cases} Q_{3(i_p-1)N_t+i} & = Q_x \\ Q_{3(i_p-1)N_t+N_t+i} & = Q_y \\ Q_{3(i_p-1)N_t+2N_t+i} & = Q_z \end{cases} \quad (3.22)$$

### 3.6 Calcul des forces et des couples

On calcule la force et le couple exercés sur la particule numéro  $k$  après la résolution du système linéaire (3.6). Les composantes de la force s'écrivent :

$$\begin{aligned} F_1^k &= \int_{S^k} q_1(\mathbf{y}) dS \\ &= \sum_{i=1}^{N_t} q_1^i \int_{\Delta_i} dS \\ &= \sum_{i=1}^{N_t} Q_{3(k-1)N_t+i} \sum_{k=1}^M h_k^i w_k^i \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} F_2^k &= \int_{S^k} q_2(\mathbf{y}) dS \\ &= \sum_{i=1}^{N_t} q_2^i \int_{\Delta_i} dS \\ &= \sum_{i=1}^{N_t} Q_{3(k-1)N_t+N_t+i} \sum_{k=1}^M h_k^i w_k^i \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} F_3^k &= \int_{S^k} q_3(\mathbf{y}) dS \\ &= \sum_{i=1}^{N_t} q_3^i \int_{\Delta_i} dS \\ &= \sum_{i=1}^{N_t} Q_{3(k-1)N_t+2N_t+i} \sum_{k=1}^M h_k^i w_k^i \end{aligned} \quad (3.25)$$

Le couple est calculé par rapport au centre de gravité  $\mathbf{x}_G = {}^t(\bar{x}_1^k, \bar{x}_2^k, \bar{x}_3^k)$  de la particule  $k$ .

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}^k &= \int_{S^k} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \wedge \mathbf{q}(\mathbf{y}) dS \\
&= \int_{S^k} \mathbf{x} \wedge \mathbf{q}(\mathbf{y}) dS - \int_{S^k} \mathbf{x}_G \wedge \mathbf{q}(\mathbf{y}) dS \\
&= \sum_{i=1}^{N_t} \int_{\Delta_i} \mathbf{x} \wedge \mathbf{q}^i dS - \mathbf{x}_G \wedge \int_{S^k} \mathbf{q}(\mathbf{y}) dS \\
&= \sum_{i=1}^{N_t} \int_{\Delta_i} \mathbf{x} \wedge \mathbf{q}^i dS - \mathbf{x}_G \wedge F^k
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Les composantes de  $\mathbf{C}^k$  s'expriment en fonction des quantités définies en (3.26) :

$$\begin{aligned}
C_1^k &= \sum_{i=1}^{N_t} \int_{\Delta_i} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{q}^i)_1 dS - (\bar{x}_2^k F_3^k - \bar{x}_3^k F_2^k) \\
&= \sum_{i=1}^{N_t} \left\{ q_3^i \int_{\Delta_i} x_2^i dS - q_2^i \int_{\Delta_i} x_3^i dS \right\} - (\bar{x}_2^k F_3^k - \bar{x}_3^k F_2^k) \\
&= \sum_{i=1}^{N_t} Q_{3(k-1)N_t+2N_t+i} \sum_{k=1}^M h_k^i w_k^i \sum_{l=1}^6 \phi_l(\xi_k, \eta_k) y_{2l}^i \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N_t} Q_{3(k-1)N_t+N_t+i} \sum_{k=1}^M h_k^i w_k^i \sum_{l=1}^6 \phi_l(\xi_k, \eta_k) y_{3l}^i \\
&\quad - (\bar{x}_2^k F_3^k - \bar{x}_3^k F_2^k)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
C_2^k &= \sum_{i=1}^{N_t} \int_{\Delta_i} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{q}^i)_2 dS - (\bar{x}_3^k F_1^k - \bar{x}_1^k F_3^k) \\
&= \sum_{i=1}^{N_t} \left\{ q_1^i \int_{\Delta_i} x_3^i dS - q_3^i \int_{\Delta_i} x_1^i dS \right\} - (\bar{x}_3^k F_1^k - \bar{x}_1^k F_3^k) \\
&= \sum_{i=1}^{N_t} Q_{3(k-1)N_t+i} \sum_{k=1}^M h_k^i w_k^i \sum_{l=1}^6 \phi_l(\xi_k, \eta_k) y_{3l}^i \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N_t} Q_{3(k-1)N_t+2N_t+i} \sum_{k=1}^M h_k^i w_k^i \sum_{l=1}^6 \phi_l(\xi_k, \eta_k) y_{1l}^i \\
&\quad - (\bar{x}_3^k F_1^k - \bar{x}_1^k F_3^k)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

$$\begin{aligned}
C_3^k &= \sum_{i=1}^{N_t} \int_{\Delta_i} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{q}^i)_3 dS - (\bar{x}_1^k F_2^k - \bar{x}_2^k F_1^k) \\
&= \sum_{i=1}^{N_t} \left\{ q_1^i \int_{\Delta_i} x_2^i dS - q_2^i \int_{\Delta_i} x_1^i dS \right\} - (\bar{x}_1^k F_2^k - \bar{x}_2^k F_1^k) \\
&= \sum_{i=1}^{N_t} Q_{3(k-1)N_t+N_t+i} \sum_{k=1}^M h_k^i w_k^i \sum_{l=1}^6 \phi_l(\xi_k, \eta_k) y_{2l}^i \\
&\quad - \sum_{i=1}^{N_t} Q_{3(k-1)N_t+i} \sum_{k=1}^M h_k^i w_k^i \sum_{l=1}^6 \phi_l(\xi_k, \eta_k) y_{1l}^i \\
&\quad - (\bar{x}_1^k F_2^k - \bar{x}_2^k F_1^k)
\end{aligned} \tag{3.29}$$

### 3.7 Maillage adaptatif

Le maillage d'un domaine  $\Omega$  est par définition un ensemble  $\tau_h$  recouvrant  $\Omega$ . Les éléments d'un maillage doivent satisfaire un certain nombre de propriétés (géométrie, adéquation avec le problème physique).

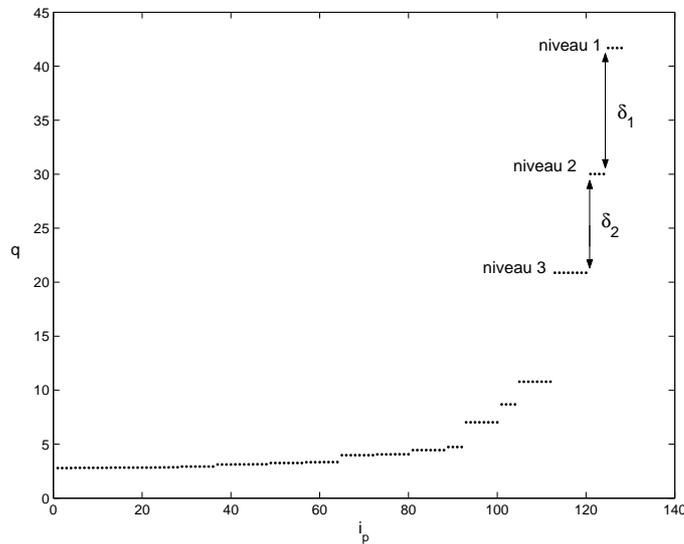
L'adaptation des maillages aux propriétés physiques des problèmes considérés est une technique de plus en plus utilisée (pour une revue de ces méthodes, voir [42]). Elle permet d'obtenir de meilleurs résultats en effectuant les calculs sur des maillages composés d'éléments adaptés au phénomène physique étudié. On travaille, donc, sur des maillages optimaux en termes de taille (nombre de noeuds), position des noeuds et propriétés des mailles (forme des éléments, densité, ...).

Dans une première phase, le maillage de chaque sphère est construit, selon la même démarche que Pozrikidis [89], à partir d'un octaèdre pareil que celui utilisé par Pozrikidis [89], puis un premier calcul de la solution du problème est effectué. Après le choix d'un critère approprié faisant intervenir le gradient de la solution, on génère un nouveau maillage mieux adapté au problème, en évitant la présence d'un angle obtus ( inférieur a une valeur  $\epsilon$  donnée) et des variations trop brutales de la taille de deux triangles voisins. Les éléments du maillage doivent avoir des critères anisotropes (c'est à dire que des directions particulières sont à privilé-

gier) et leur densité dans des zones déterminées doit être la plus importante. Le raffinement de maillage s'effectue sur un maillage initial uniforme avec calcul de la contrainte, puis détection des zones à fort gradient de contrainte et de la partie de table des nœuds et de la table de connexion qui va être modifiée, ensuite subdivision des éléments en 2, 3 et 4 (figure (3.3)) et enfin mise à jour des tables des nœuds et de la table de connexion globale.

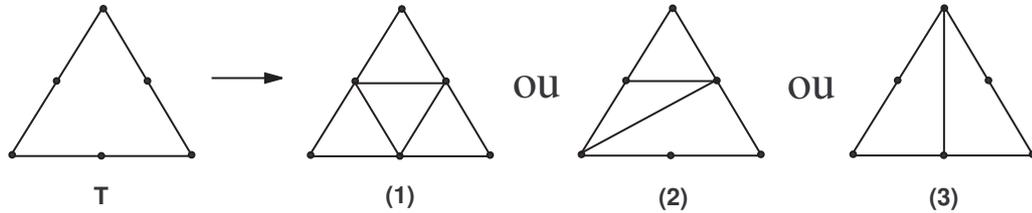
On commence le raffinement du maillage en déterminant les triangles qui vont subir la même quantité de contrainte par surface. Pour cela, un ordonnancement (figure 3.2) des valeurs de contraintes sur les triangles permet de trouver les zones qui ont la même contrainte.

Les numéros de ces triangles sont stockés dans des tables qui s'appellent tables de niveau de contrainte. Deux tables sont construites afin de relier la géométrie avec la physique du problème. La première table contient les intervalles de contraintes triés dans un ordre décroissant. La deuxième table contient les numéros des triangles dans ces intervalles.



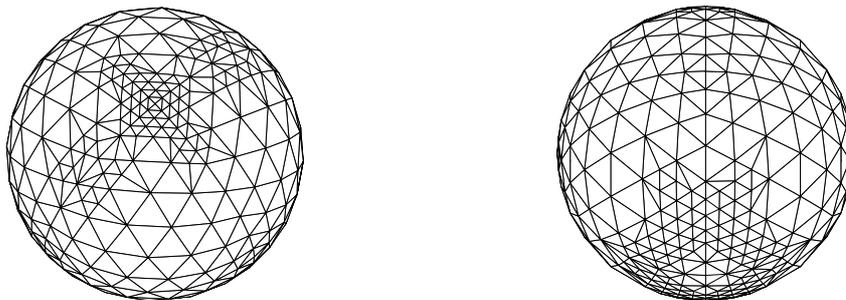
**Figure (3.2)** – Arrangement des valeurs de contrainte pour trouver les niveaux.

Ensuite, un calcul des gradients  $\max_k \delta_k$  entre les différents niveaux de contrainte permet de sélectionner les triangles qui vont subir des subdivisions en 2, 3 ou 4 triangles élémentaires figure ((3.3)).



**Figure (3.3)** – Les subdivisions acceptables d’un triangle en 4, 3 ou 2 triangles élémentaires (la subdivision est d’autant plus importante que le niveau de contraintes est plus grand).

Enfin, nous commençons le calcul sur le nouveau maillage. Lorsqu’une particule s’approche de la paroi, la zone de lubrification induit une contrainte intense autour des points de la particule les plus proches de la paroi. Le raffinement du maillage se fait donc autour du pôle proche de la paroi (figure ??). Une comparaison entre les valeurs de la force adimensionnée exercée sur cette particule montre (table 3.1) que le raffinement du maillage apporte plus de précision qu’un maillage uniforme. D’où l’intérêt d’utiliser le raffinement automatique du maillage.



**Figure (3.4)** – Raffinement du maillage d’une sphère dans la zone à fort gradient de contraintes

Dans la table (3.1) une comparaison est effectuée entre la méthode des éléments de frontières en utilisant un maillage uniforme et la même méthode en utilisant un maillage adaptatif. On considère le cas d'une seule particule sphérique de centre  $(0, 0, Z)$  et de rayon 1 en translation perpendiculairement à la paroi  $z = 0$ . La force  $F_{zz}^t$  est calculée pour différentes valeurs de  $Z$ .

	$Z$	1.01	1.02	1.1
A	$F_{zz}^t$	101.900	51.761	11.459
B	$F_{zz}^t$	206.	44.	10.485
	$N_t$	128	128	128
	Cond.	1.39E+06	5.14E+04	4.37E+04
	Cpu(s)	1.0	1.0	1.0
C	$F_{zz}^t$	137.	49.	10.888
	$N_t$	176	176	176
	Cond.	2.73E+05	2.76E+05	8.23E+04
	Cpu(s)	6.5	6.5	6.5
D	$F_{zz}^t$	161.	46.	11.193
	$N_t$	512	512	512
	Cond.	2.88E+07	6.59E+05	1.12E+06
	Cpu(s)	199.9	190.5	191.6

**Table (3.1)** – Comparaison entre les résultats obtenus pour différents maillages appliqués sur une seule particule de centre  $(0, 0, Z)$ . A : les résultats de Brenner [16], B : les résultats de la méthode (BEM) pour un maillage uniforme de niveau 2 (cf annexe C), C : les résultats de la méthode (BEM) pour un maillage adaptatif à partir du niveau 2 d'un maillage uniforme de la particule et D : résultats de la méthode (BEM) pour un maillage uniforme de niveau 3.

La composante de la force  $F_{zz}^t$  suivant  $(Oz)$  est comparée aux résultats exacts de Brenner [16] et Maude [72] (ligne A de la table).  $N_t$  est le nombre de triangles utilisé pour le maillage, Cond. est le conditionnement de la matrice du système algébrique du problème et Cpu(s) est le temps (en secondes) d'exécution du programme. Les lignes de B de la table représentent les résultats obtenus à partir d'un maillage uniforme au niveau 2 (voir annexe C). Les lignes de C de la table représentent les résultats obtenus à partir d'un maillage adaptatif à partir du niveau 2 (voir annexe A); enfin les lignes de D représentent les résultats obtenus à partir d'un maillage uniforme au niveau 3.

La taille de la matrice issue de chaque méthode de maillage est donnée par la formule  $(3 \times N_p \times N_t)^2$  ce qui montre qu'un gain est apporté dans la taille du système algébrique à traiter avec le maillage adaptatif ( $N_t = 176$ ) comparé à celle du maillage uniforme ( $N_t = 512$ ). On remarque aussi une augmentation de la précision en utilisant la méthode adaptative comparée au maillage uniforme au niveau 1, tout en améliorant le conditionnement (voir Cond. Dans  $D$ ) de la matrice du système algébrique issue du problème ce qui apporte un gain en précision/temps d'exécution.

### 3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, l'équation intégrale de surface est discrétisée par la méthode des éléments de frontière. Le choix de l'approximation par des polynômes  $P_0$  a fait que la discrétisation de l'équation intégrale par la méthode de collocation ou par la méthode de Galerkin aboutissent formellement au même système linéaire.

La résolution des équations intégrales de surface par la méthode des éléments de frontière passe par plusieurs étapes. D'abord, le maillage de la surface de chaque particule par des triangles nous a permis d'obtenir une équation intégrale sur un polyèdre. Ensuite, la difficulté apparue dans le calcul des intégrales singulières est résolue en formulant ce calcul sur des triangles de référence et en utilisant des changements de variables adéquats pour profiter de l'exactitude de la méthode de quadrature de Gauss.

Les équations ainsi discrétisées aboutissent à un système algébrique de taille  $(3 \times N_p \times N_t)^2$  avec  $N_p$  le nombre de particules et  $N_t$  le nombre de triangles par particule. Le système est résolu par la méthode  $LU$  ce qui nous a permis de trouver les contraintes par unité de surface et de contrôler le maillage suivant la variation du gradient, puis de raffiner le maillage autour des maximums de gradient de contrainte. Le maillage dynamique mis au point a permis de gagner en précision/temps d'exécution surtout lorsque la particule s'approche de la paroi ou d'une autre particule.

---

Le calcul des contraintes sur les particules permet le calcul des forces et des couples appliqués sur les particules. On peut alors construire la grande matrice de résistance et par la suite la grande matrice de mobilité (chapitre 4) afin de suivre la dynamique des particules.



# Chapitre 4

## Dynamique des particules

### Sommaire

---

4.1	Introduction . . . . .	63
4.2	Formulation des relations de résistance . . . . .	64
4.3	Matrice de résistance de translation . . . . .	66
4.4	Matrice de résistance de rotation . . . . .	68
4.5	Superposition des mouvements . . . . .	69
4.6	La grande matrice de résistance pour $N_p$ particules .	69
4.7	Équations du mouvement des particules. . . . .	73
4.8	Équations des trajectoires des particules . . . . .	75
4.9	Algorithme de calcul des trajectoires des particules .	76
4.10	Conclusion . . . . .	78

---

### 4.1 Introduction

La linéarité des équations de Stokes permet d'établir les relations entre les forces et les couples appliqués sur les particules d'une part et les vitesses de translation et de rotation d'autre part. L'interaction hydrodynamique entre les particules s'exprime en fonction du tenseur de résistance, dont les composantes peuvent être calculées par différentes méthodes. Citons par exemple la méthode des réflexions [50], la méthode des coordonnées bisphériques [81]. Le tenseur de résistance est introduit pour la première fois par Brenner et O'Neill [17]. Le tenseur de résistance ainsi que son inverse le tenseur de mobilité sont calculés pour

différentes configurations. Le tenseur de résistance de deux sphères est calculé par Jeffrey et Onishi [59] à partir de l'expression de Lamb [66]. Les composantes du tenseur sont calculées pour différents cas : par Perkins et Jones [84] pour le cas d'une particule au voisinage d'une paroi plane, par VanSaarloos et Mazur [98] pour plusieurs particules dans un fluide infini, par Beenakker et al [6, 99] pour le cas de plusieurs particules avec la présence d'une paroi, par Mazur [75] pour le cas d'une suspension de particules avec la présence de plusieurs parois, par Geigenmueller et Mazur [39] pour le cas de plusieurs particules dans un récipient fini. Le calcul des composantes du tenseur de résistance est l'étape clé pour la méthode dite dynamique stokesienne utilisée par Bossis et al [13] pour calculer les trajectoires des particules.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au calcul des coefficients de résistance et de mobilité par notre méthode dans le cas de sédimentation de plusieurs particules afin de déterminer leurs trajectoires. On effectue une comparaison des résultats obtenus avec ceux trouvés dans la littérature pour les différents cas des configurations géométriques. La matrice de mobilité est ensuite intégrée dans l'équation fondamentale de la dynamique permettant par la suite de calculer les trajectoires de plusieurs particules en sédimentation soumises seulement à l'effet de la gravité.

## 4.2 Formulation des relations de résistance

Soient  $O$  le centre d'une particule et  $\mathbf{U}$  sa vitesse instantanée de translation ; la vitesse du point  $O$  est celle de la particule.

Soit  $\boldsymbol{\Omega}$  la vitesse instantanée de rotation de la particule.

Comme le fluide adhère sur les parois des particules, les conditions sur les bords des particules s'écrivent [50] :

$$\mathbf{v} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \quad (4.1)$$

$\mathbf{x}_p$  représente la position de  $O$ .

Par ailleurs du fait que le fluide est au repos à l'infini on peut écrire :

$$\mathbf{v} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (4.2)$$

La linéarité des équations de Stokes permet la superposition de solutions élémentaires ce qui permet d'étudier séparément l'effet de la translation et de la rotation de la particule sur le mouvement du fluide :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^t + \mathbf{v}^r \quad (4.3)$$

$$p = p^t + p^r \quad (4.4)$$

Les équations de Stokes pour le mouvement de translation s'écrivent :

$$\nabla^2 \mathbf{v}^t = \frac{1}{\mu} \nabla p^t \quad \text{dans } \Gamma \quad (4.5a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^t = 0 \quad \text{dans } \Gamma \quad (4.5b)$$

$$\mathbf{v}^t = \mathbf{U} \quad \text{sur } S \quad (4.5c)$$

$$\mathbf{v}^t = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (4.5d)$$

$$\mathbf{v}^t \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (4.5e)$$

et les équations de Stokes pour le mouvement de rotation s'écrivent :

$$\nabla^2 \mathbf{v}^r = \frac{1}{\mu} \nabla p^r \quad \text{dans } \Gamma \quad (4.6a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v}^r = 0 \quad \text{dans } \Gamma \quad (4.6b)$$

$$\mathbf{v}^r = \boldsymbol{\Omega} \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \quad \text{sur } S \quad (4.6c)$$

$$\mathbf{v}^r = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (4.6d)$$

$$\mathbf{v}^r \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (4.6e)$$

Les forces hydrodynamiques exercées par le fluide sur la particule par l'effet d'un mouvement de translation ou de rotation sont données par :

$$\mathbf{F}^t = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}^t \quad (4.7)$$

$$\mathbf{F}^r = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}^r \quad (4.8)$$

Les couples hydrodynamiques exercés par le fluide sur la particule par l'effet d'un mouvement de translation ou de rotation sont donnés par :

$$\mathbf{C}^t = \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \wedge (d\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}^t) \quad (4.9)$$

$$\mathbf{C}^r = \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \wedge (d\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}^r) \quad (4.10)$$

$d\mathbf{S}$  étant dirigé vers le fluide.  $\mathbf{T}^t$  et  $\mathbf{T}^r$  sont les tenseurs des contraintes pour un fluide newtonien définis par :

$$\mathbf{T}^t = -\mathbf{I}p^t + \mu (\nabla \mathbf{v}^t + {}^T(\nabla \mathbf{v}^t)) \quad (4.11a)$$

$$\mathbf{T}^r = -\mathbf{I}p^r + \mu (\nabla \mathbf{v}^r + {}^T(\nabla \mathbf{v}^r)) \quad (4.11b)$$

$\mathbf{I}$  est le tenseur identité et  ${}^T(\nabla \mathbf{v})$  est le transposé de  $\nabla \mathbf{v}$ .

La force totale exercée sur une particule est due à l'effet simultané de la translation et de la rotation d'où :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^t + \mathbf{F}^r \quad (4.12a)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}^t + \mathbf{C}^r \quad (4.12b)$$

### 4.3 Matrice de résistance de translation

Brenner [50] a montré qu'il existe une matrice  $\mathbb{V}^t$  et un vecteur pression  $\mathbb{P}^t$  dus seulement à l'effet du mouvement de translation tels que :

$$\mathbf{v}^t = \mathbb{V}^t \cdot \mathbf{U} \quad (4.13a)$$

$$p^t = \mathbb{P}^t \cdot \mathbf{U} \quad (4.13b)$$

L'existence du couple  $(\mathbb{V}, \mathbb{P})$  est une conséquence [50] de la linéarité des équations

de translation (4.5) ; ils sont solutions de :

$$(\nabla^2 \mathbb{V}^t - \frac{1}{\mu} \nabla \mathbb{P}^t) \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (4.14a)$$

$$(\nabla \cdot \mathbb{V}^t) \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (4.14b)$$

$$(\mathbb{V}^t - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{U} = 0 \quad \text{sur } S \quad (4.14c)$$

$$\mathbb{V}^t \cdot \mathbf{U} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (4.14d)$$

Le système est vérifié quelle que soit  $\mathbf{U}$ . Donc

$$\nabla^2 \mathbb{V}^t = \frac{1}{\mu} \nabla \mathbb{P}^t \quad (4.15a)$$

$$\nabla \cdot \mathbb{V}^t = 0 \quad (4.15b)$$

$$\mathbb{V}^t = \mathbf{I} \quad \text{sur } S \quad (4.15c)$$

$$\mathbb{V}^t \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{lorsque } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (4.15d)$$

Il existe d'après Brenner [50] deux opérateurs linéaires  $\mathbf{R}^{tt}$ ,  $\mathbf{R}^{tr}$  tels que la force et le couple exercés s'écrivent :

$$\mathbf{F}^t = -\mathbf{R}^{tt} \cdot \mathbf{U} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{C}^t = -\mathbf{R}^{tr} \cdot \mathbf{U} \quad (4.17)$$

En effet, à partir de l'équation (4.11a)-(4.13) on peut écrire :

$$\mathbf{T}^t = [-\mathbf{I} \mathbb{P}^t + \mu (\nabla \mathbb{V}^t + {}^T(\nabla \mathbb{V}^t))] \cdot \mathbf{U} \quad (4.18)$$

$$(4.19)$$

Alors il existe un tenseur  $\mathbb{T}^t$  d'ordre 3 définie par la relation suivante [50] :

$$\mathbf{T}^t = \mathbb{T}^t \cdot \mathbf{U} \quad \text{où } \mathbb{T}^t = -\mathbf{I} \mathbb{P}^t + \mu (\nabla \mathbb{V}^t + {}^T(\nabla \mathbb{V}^t)) \quad (4.20)$$

Ainsi la force prend la forme suivante :

$$\mathbf{F}^t = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbb{T}^t \cdot \mathbf{U} \quad (4.21)$$

$$\mathbf{C}^t = \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \wedge (d\mathbf{S} \cdot \mathbb{T}^t) \cdot \mathbf{U} \quad (4.22)$$

On obtient les quantités suivantes :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^{tt} &= - \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbb{T}^t \\ \mathbf{C}^{tr} &= - \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) \wedge (d\mathbf{S} \cdot \mathbb{T}^t)\end{aligned}$$

## 4.4 Matrice de résistance de rotation

Il existe deux tenseurs  $\mathbb{V}^r$  et  $\mathbb{P}^r$  tels que [50] :

$$\mathbf{v}^r = \mathbb{V}^r \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{p}^r = \mathbb{P}^r \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (4.24)$$

On réécrit le système (4.6) sous la forme :

$$\nabla^2 \mathbb{V}^r = \frac{1}{\mu} \nabla \mathbb{P}^r \quad (4.25a)$$

$$\nabla \cdot \mathbb{V}^r = 0 \quad (4.25b)$$

$$\mathbb{V}^r = -\epsilon \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \quad \text{sur } S \quad (4.25c)$$

$$\mathbb{V}^r \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{lorsque } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (4.25d)$$

où  $\epsilon$  est un tenseur du 3<sup>ème</sup> ordre tel que  $\epsilon = \epsilon_{ijk} \mathbf{e}^i \mathbf{e}^j \mathbf{e}^k$ , dans lequel  $\epsilon_{ijk}$  est le symbole de permutation.

Toujour d'après Brenner [50], il existe deux opérateurs linéaires  $\mathbf{R}^{rt}$  et  $\mathbf{R}^{rr}$  tels que la force et le couple exercés sur la particule s'écrivent :

$$\mathbf{F}^r = -\mathbf{R}^{rt} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (4.26)$$

$$\mathbf{C}^r = -\mathbf{R}^{rr} \cdot \boldsymbol{\Omega} \quad (4.27)$$

À partir de l'équation (4.11b) on obtient :

$$\mathbf{T}^r = [-\mathbf{I} \mathbb{P}^r + \mu(\nabla \mathbb{V}^r + {}^T(\nabla \mathbb{V}^r))] \cdot \mathbf{U} \quad (4.28)$$

$$(4.29)$$

Alors il existe un tenseur  $\mathbb{T}^r$  d'ordre 3 défini par la relation suivante :

$$\mathbf{T}^r = \mathbb{T}^r \cdot \mathbf{U} \quad \text{où} \quad \mathbb{T}^r = -\mathbf{I} \mathbb{P}^r + \mu(\nabla \mathbb{V}^r + {}^T(\nabla \mathbb{V}^r)) \quad (4.30)$$

La force devient :

$$\mathbf{F}^r = \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbb{T}^r \cdot \mathbf{U} \quad (4.31)$$

$$\mathbf{C}^r = \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \wedge (d\mathbf{S} \cdot \mathbb{T}^r) \cdot \mathbf{U} \quad (4.32)$$

On obtient les quantités suivantes :

$$\mathbf{R}^{rt} = - \int_S d\mathbf{S} \cdot \mathbb{T}^r$$

$$\mathbf{C}^{rr} = - \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \wedge (d\mathbf{S} \cdot \mathbb{T}^r)$$

## 4.5 Superposition des mouvements

Dans le cas général où la particule est animée d'un mouvement de translation et rotation dans un écoulement de Stokes, la force ainsi que le couple exercés sur la particule dus aux écoulements satisfaisant (4.5)-(4.6) s'écrivent ainsi :

$$\mathbf{F}^r = -\mathbf{R}^{tt} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{R}^{tr} \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

$$\mathbf{C}^r = -\mathbf{R}^{rt} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{R}^{rr} \cdot \boldsymbol{\Omega}$$

ou encore sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}^r \\ \mathbf{C}^r \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{tt} & \mathbf{R}^{tr} \\ \mathbf{R}^{rt} & \mathbf{R}^{rr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \boldsymbol{\Omega} \end{pmatrix}$$

## 4.6 La grande matrice de résistance pour $N_p$ particules

On travaille dans le cas où l'écoulement dans le fluide n'est que le résultat du mouvement de translation ou de rotation de  $N_p$  particules, rigides et de forme quelconque. On se limite ici au cas où le fluide est au repos à l'infini.

Soient  $S^i$  la surface de la  $i^{\text{ème}}$  particule,  $\Sigma$  la surface de la paroi. On considère aussi que le fluide adhère à la paroi.

Soit  $O_i$  le centre de la  $i^{\text{ème}}$  particule, animée d'un mouvement de translation de vitesse  $\mathbf{v}_i$  et d'un mouvement de rotation de vitesse  $\boldsymbol{\Omega}_i$ . Un point  $\mathbf{x}^i$  de la surface de la  $i^{\text{ème}}$  particule satisfait aux conditions aux bords

$$\mathbf{v} = \mathbf{U}_i + \boldsymbol{\Omega}_i \wedge \mathbf{r}_i \quad \text{sur } S^i \quad (4.33)$$

avec  $\mathbf{r}_i$  la distance entre le point  $\mathbf{x}_i$  et  $O_i$ .

D'autre part les conditions vérifiées sur la paroi et à l'infini sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= 0 & \text{sur } \Sigma \\ \mathbf{v} &\rightarrow 0 & \text{à l'infini} \end{aligned} \quad (4.34)$$

La linéarité des équations de Stokes et les conditions aux bords permettent de décomposer la vitesse  $\mathbf{v}$  en une première partie due à la translation notée  $\mathbf{v}^t$  et une deuxième partie due à la rotation notée  $\mathbf{v}^r$  :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^t + \mathbf{v}^r$$

Pour les mêmes raisons de linéarité, Brenner [50] propose la décomposition de chaque mouvement de translation comme suit ;

Soit  $\mathbf{v}_i^t$  la vitesse du fluide lorsque la particule  $i$  est en translation et que les autres particules sont au repos. Idem pour  $\mathbf{v}_i^r$  la vitesse du fluide créée par la rotation de la  $i^{\text{ème}}$  particule lorsque les autres particules sont au repos. Alors on obtient :

$$\mathbf{v}^t = \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{v}_i^t \quad (4.35)$$

$$\mathbf{v}^r = \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{v}_i^r \quad (4.36)$$

avec les conditions aux bords

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^t &= \mathbf{U}_i & \text{sur } S^i \\ \mathbf{v}_i^t &= 0 & \text{sur } S^j, j \neq i \end{aligned} \quad (4.37)$$

de même pour la rotation

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_i^r &= \boldsymbol{\Omega}_i \wedge \mathbf{r}_i \quad \text{sur } S^i \\ \mathbf{v}_i^r &= 0 \quad \text{sur } S^j, \quad j \neq i \end{aligned} \quad (4.38)$$

Soient  $\mathbf{F}_{i,k}^t$  et  $\mathbf{C}_{i,k}^t$  la force et le couple hydrodynamiques exercés par le fluide sur la particule numéro  $k$  par l'écoulement dû à la translation de la  $i^{\text{ème}}$  particule avec une vitesse  $\mathbf{v}_i^t$  :

$$\mathbf{F}_{i,k}^t = \int_{S^k} d\mathbf{S} \cdot \mathbb{T}_i^t \quad (4.39)$$

$$\mathbf{C}_{i,k}^t = \int_{S^k} \mathbf{r}_k \wedge (d\mathbf{S} \cdot \mathbb{T}_i^t) \quad (4.40)$$

$$(4.41)$$

La force totale ainsi que le couple total exercés sur le  $k^{\text{ème}}$  particule dus à la translation de toutes les particules s'écrivent ainsi :

$$\mathbf{F}_k^t = \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{F}_{i,k}^t \quad (4.42)$$

$$\mathbf{C}_k^t = \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{C}_{i,k}^t \quad (4.43)$$

De même, pour le mouvement de rotation nous obtenons :

$$\mathbf{F}_{i,k}^r = \int_{S^k} d\mathbf{S} \cdot \mathbb{T}_i^r dS \quad (4.44)$$

$$\mathbf{C}_{i,k}^r = \int_{S^k} \mathbf{r}_k \wedge (d\mathbf{S} \cdot \mathbb{T}_i^r) dS \quad (4.45)$$

$$\mathbf{F}_k^r = \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{F}_{i,k}^r \quad (4.46)$$

$$\mathbf{C}_k^r = \sum_{i=1}^{N_p} \mathbf{C}_{i,k}^r \quad (4.47)$$

Finalement, la force totale et le couple total autour du centre  $O^k$  de la  $k^{\text{ème}}$  particule sous l'effet de translation et de rotation de toutes les particules prend la forme suivante :

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^t + \mathbf{F}_k^r \quad (4.48)$$

$$\mathbf{C}_k = \mathbf{C}_k^t + \mathbf{C}_k^r \quad (4.49)$$

Comme pour la section 1, nous obtenons les relations suivantes :

$$\mathbf{F}_k^t = -\mathbf{R}_{ki}^{tt} \cdot \mathbf{U}_i \quad (4.50)$$

$$\mathbf{C}_k^t = -\mathbf{R}_{ki}^{tr} \cdot \mathbf{U}_i \quad (4.51)$$

$$\mathbf{F}_k^r = -\mathbf{R}_{ki}^{rt} \cdot \boldsymbol{\Omega}_i \quad (4.52)$$

$$\mathbf{C}_k^r = -\mathbf{R}_{ki}^{rr} \cdot \boldsymbol{\Omega}_i \quad (4.53)$$

où  $\mathbf{R}_{ki}^{tt}$ ,  $\mathbf{R}_{ki}^{tr}$ ,  $\mathbf{R}_{ki}^{rt}$ ,  $\mathbf{R}_{ki}^{rr}$  sont indépendants des propriétés du fluide, du module et de la direction des vitesses  $\mathbf{U}_i$  et  $\boldsymbol{\Omega}_j$ .

Les équations (4.48)-(4.49) deviennent :

$$\mathbf{F}_k = \sum_{i=1}^{N_p} -(\mathbf{R}_{ki}^{tt} \cdot \mathbf{U}_i + \mathbf{R}_{ki}^{tr} \cdot \boldsymbol{\Omega}_i) \quad (4.54)$$

$$\mathbf{C}_k = \sum_{i=1}^{N_p} -(\mathbf{R}_{ki}^{rt} \cdot \mathbf{U}_i + \mathbf{R}_{ki}^{rr} \cdot \boldsymbol{\Omega}_i) \quad (4.55)$$

pour  $k = 1 \dots N_p$  où  $N_p$  est le nombre des particules

On définit les vecteurs  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{U}$  par :

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_{N_p} \\ \mathbf{C}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_{N_p} \end{pmatrix} \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_{N_p} \\ \boldsymbol{\Omega}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Omega}_{N_p} \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

et la grande matrice de résistance  $\mathcal{R}$

$$\mathcal{R} = \left( \begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{R}_{11}^{tt} & \mathbf{R}_{12}^{tt} & \cdots & \mathbf{R}_{1N_p}^{tt} & \mathbf{R}_{11}^{tr} & \mathbf{R}_{12}^{tr} & \cdots & \mathbf{R}_{1N_p}^{tr} \\ \mathbf{R}_{21}^{tt} & \mathbf{R}_{22}^{tt} & \cdots & \mathbf{R}_{2N_p}^{tt} & \mathbf{R}_{21}^{tr} & \mathbf{R}_{22}^{tr} & \cdots & \mathbf{R}_{2N_p}^{tr} \\ \cdots & \cdots \\ \mathbf{R}_{N_p1}^{tt} & \mathbf{R}_{N_p2}^{tt} & \cdots & \mathbf{R}_{N_pN_p}^{tt} & \mathbf{R}_{N_p1}^{tr} & \mathbf{R}_{N_p2}^{tr} & \cdots & \mathbf{R}_{N_pN_p}^{tr} \\ \hline \mathbf{R}_{11}^{rt} & \mathbf{R}_{12}^{rt} & \cdots & \mathbf{R}_{1N_p}^{rt} & \mathbf{R}_{11}^{rr} & \mathbf{R}_{12}^{rr} & \cdots & \mathbf{R}_{1N_p}^{rr} \\ \mathbf{R}_{21}^{rt} & \mathbf{R}_{22}^{rt} & \cdots & \mathbf{R}_{2N_p}^{rt} & \mathbf{R}_{21}^{rr} & \mathbf{R}_{22}^{rr} & \cdots & \mathbf{R}_{2N_p}^{rr} \\ \cdots & \cdots \\ \mathbf{R}_{N_p1}^{rt} & \mathbf{R}_{N_p2}^{rt} & \cdots & \mathbf{R}_{N_pN_p}^{rt} & \mathbf{R}_{N_p1}^{rr} & \mathbf{R}_{N_p2}^{rr} & \cdots & \mathbf{R}_{N_pN_p}^{rr} \end{array} \right) \quad (4.57)$$

Les équations (4.54) (4.55) prennent la forme suivante :

$$\mathcal{F} = -\mathcal{R} \cdot \mathcal{U} \quad (4.58)$$

L'importance de cette équation réside dans le fait que lorsque les forces et les couples sont connus, les vitesses de translation et de rotation peuvent être calculées par l'inversion de la matrice  $\mathcal{R}$ .

$$\mathcal{U} = -\mathcal{M} \cdot \mathcal{F} \quad (4.59)$$

La matrice  $\mathcal{M} = \mathcal{R}^{-1}$  est la grande matrice de mobilité.

En tenant compte de la décomposition de la translation et la rotation suivant les vecteurs  $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$  de la base, la taille de la matrice de résistance est  $(6 \times N_p)^2$ .

## 4.7 Équations du mouvement des particules.

Le mouvement d'une particule solide peut être décrit à un instant donné comme la combinaison d'une translation de vitesse  $\mathbf{U}$  et d'une rotation de vitesse angulaire  $\boldsymbol{\Omega}$  par rapport au centre de gravité  $\mathbf{x}_G$  de la particule.

On peut supposer que la particule se déplace sous l'action d'une force  $\mathbf{F}^e$  et d'un couple  $\mathbf{C}^e$ . On considère maintenant des particules sphériques dans un fluide de

densité  $\rho$ . Les particules sont identiques avec la même densité uniforme  $\rho_p$  et un rayon identique  $a$ .

Dans ces conditions la force externe est alors donnée par :

$$\mathbf{F}^e = \mathbf{F}^m + \mathbf{F}^a + \mathbf{F}^s, \quad (4.60)$$

où  $\mathbf{F}^m$  est le poids d'une particule.

$$\mathbf{F}^m = M_p \mathbf{g} = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho_p \mathbf{g} \quad (4.61)$$

$\mathbf{g}$  est l'accélération de la gravité et  $M_p$  est la masse de la particule.

$\mathbf{F}^a$  est la poussée d'Archimède :

$$\mathbf{F}^a = -M_f \mathbf{g} = -\rho V \mathbf{g} = -\frac{4}{3}\pi a^3 \rho \mathbf{g} \quad (4.62)$$

avec  $M_f$  la masse du volume de fluide déplacé.

La force induite par le mouvement du fluide sur la surface  $S$  de la particule est

$$\mathbf{F}^s = \int_S \mathbf{q} \, ds \quad (4.63)$$

Finalement, la force  $\mathbf{F}^e$  totale appliquée sur une particule est donnée par

$$\mathbf{F}^e = \frac{4}{3}\pi a^3 (\rho_p - \rho) \mathbf{g} + \mathbf{F}^s = \mathbf{F} + \mathbf{F}^s \quad (4.64)$$

De même pour le mouvement de rotation, le couple extérieur exercé sur une particule est :

$$\mathbf{C}^e = \mathbf{C}^m + \mathbf{C}^a + \mathbf{C}^s, \quad (4.65)$$

Dans le cas de sphères de même densité uniforme  $C^m = 0$  ( en outre  $C^a$  est nul pour une sphère), l'équation précédente devient :

$$\mathbf{C}^e = \mathbf{C}^s \quad (4.66)$$

Le couple exercé par le fluide sur la surface d'une particule est donc :

$$\mathbf{C}^s = \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \wedge \mathbf{q} \, ds \quad (4.67)$$

Le couple total exercé sur la particule est :

$$\mathbf{C}^e = \int_S (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G) \wedge \mathbf{q} \, ds \quad (4.68)$$

Lorsque  $\rho_p \cong \rho$  (cas de particules solides dans un liquide), l'inertie des particules est négligeable comme celle du fluide et les équations du mouvement d'une particule deviennent  $\mathbf{F}^e = \mathbf{C}^e = 0$  d'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^s &= -\mathbf{F} \\ \mathbf{C}^s &= 0 \end{aligned}$$

La connaissance de la force et du couple exercés sur la surface de chaque particule permet de trouver les vitesses de translation et de rotation.

## 4.8 Équations des trajectoires des particules

À partir de l'équation :

$$\mathcal{U} = -\mathcal{M} \cdot \mathcal{F} \quad (4.69)$$

où la matrice  $\mathcal{M} = \mathcal{R}^{-1}$  est la matrice de mobilité, on calcule les  $3 \times N_p$  premiers coefficients de  $\mathcal{U}$  qui proviennent seulement du mouvement de translation. Notons  $\mathcal{U}^t$  ce vecteur .

Dans le cas où les particules sont soumises seulement à la force de gravitation, on peut utiliser l'expression de la force dans le système (4.69) et trouver la vitesse.

La trajectoire est la solution de l'équation différentielle ordinaire du mouvement :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathcal{U}^t \quad (4.70)$$

où le vecteur des positions des particules est donnée par :

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{N_p} \end{pmatrix} \quad (4.71)$$

Pour le reste de nos calculs, nous avons choisi la force de gravitation suivant  $(Oz)$ . Pour simplifier, nous supposons les particules identiques et divisons l'équation du mouvement par la somme du poids et de la poussée d'Archimède c'est-à-dire  $\mathbf{F}_k = \mathbf{e}_z$  ( $k = 1 \dots N_p$ ). Nous supposons comme indiqué plus haut que les particules tournent librement sans effet extérieur :  $\mathbf{C}_k = 0$  pour  $k = 1 \dots N_p$ .

La force totale appliquée sur les surfaces des particules est donnée par le vecteur à  $3 \times N_p$  composantes :

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{g} \\ \vdots \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} \quad (4.72)$$

où  $\mathbf{g}$  est la force de gravitation appliquée sur chaque particule

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.73)$$

Comme les forces hydrodynamiques varient rapidement lorsque les surfaces sont proches,  $\mathcal{M}^t$  varie aussi rapidement, la résolution de cette équation se fait alors par la méthode de Gear [38] pour les systèmes raides.

## 4.9 Algorithme de calcul des trajectoires des particules

Le calcul des trajectoires de  $N_p$  particules passe par plusieurs étapes. D'abord on commence par fixer les paramètres physiques des particules tel que le nombre  $N_p$  des particules, ainsi que les formes et les rayons des particules. Les paramètres

numériques à fixer sont le nombre de triangles du maillage initial et le nombre de points d'intégration par triangle. Dans l'algorithme suivant on présente la boucle qui permet de calculer les trajectoires des particules qui peut contenir aussi une étape optionnelle de calcul de champs de vitesse pour chaque position des particules (étape 2)

Début Boucle

**Étape 0.** Initialisation des positions des particules.

**Étape 1.** Résoudre l'équation intégrale de surface pour un écoulement élémentaire dû au mouvement de vecteur vitesse  $\mathbf{e}_p^k$  vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^{3N_p}$

$$\mathbf{e}_p^k = \iint_S \mathbf{G}(\mathbf{x}^i, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{q}(\mathbf{y}) dS_y, \mathbf{x}^i \in S^i, i = 1 \cdots N_p$$

et remplir la matrice de résistance  $\mathcal{R}$ .

**Étape 2.** Calcul de la vitesse à l'intérieur du fluide à partir de la contrainte calculée précédemment en utilisant :

$$v(\mathbf{x}) = \iint_S \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{q}(\mathbf{y}) dS_y, \mathbf{x} \in \Gamma$$

**Étape 3.** Calcul de la matrice de mobilité  $\mathcal{M} = \mathcal{R}^{-1}$ .

**Étape 4.** Résoudre l'équation différentielle ordinaire :  $\frac{dx}{dt} = -\mathcal{M} \cdot \mathbf{F}$

**Étape 5.** Test d'arrêt sur les positions des particules.

**Étape 6.** Revenir à l'étape 1.

Fin Boucle

## 4.10 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons établi les équations qui permettent de calculer les trajectoires des particules en sédimentation sous l'effet de la gravité dans un fluide au repos.

D'abord, nous avons rappelé l'expression introduite par Brenner [50] de la grande matrice de résistance qui exprime, pour des positions données des particules, les forces et les couples exercés sur celles-ci en fonction de leurs vitesses de translation et de rotation. Inversement, c'est-à-dire si les forces et les couples appliqués sur les particules sont connus, alors la grande matrice de mobilité permet de calculer les vitesses de translation et de rotation.

Ensuite, nous avons établi l'équation des trajectoires à partir de la relation fondamentale de la dynamique, pour des particules qui tournent librement avec des masses volumiques des particules qui sont du même ordre que la masse volumique du fluide.

Enfin, nous avons présenté un algorithme qui permet de calculer les trajectoires des particules en sédimentation. Dans le chapitre suivant, des comparaisons sont effectuées afin de valider le code mis au point et les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus par des méthodes analytiques disponibles dans la littérature. Nos résultats sont aussi comparés avec ceux obtenus avec d'autres méthodes numériques lorsqu'il n'existe pas de résultat analytique.

# Chapitre 5

## Validation et comparaisons

### Sommaire

---

<b>5.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>79</b>
<b>5.2</b>	<b>Calcul des coefficients de résistance</b>	<b>80</b>
5.2.1	Une particule dans un fluide infini	80
5.2.2	Une particule au voisinage d'une paroi	81
5.2.3	Deux particules identiques dans un fluide infini	85
<b>5.3</b>	<b>Calcul de la vitesse à l'intérieur du fluide</b>	<b>87</b>
5.3.1	Une particule en sédimentation au voisinage d'une paroi	87
5.3.2	Calculs sur les droites perpendiculaires à la paroi.	88
5.3.3	Calculs sur les droites parallèles à la paroi.	92
5.3.4	Une particule sphérique au voisinage d'une paroi; cas asymétriques.	96
<b>5.4</b>	<b>Comparaison des résultats pour un problème axisymétrique</b>	<b>99</b>
5.4.1	Deux particules sphériques de différentes tailles	99
5.4.2	Chaîne de trois particules identiques	101
<b>5.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>103</b>

---

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on se propose de comparer nos résultats à des solutions analytiques, pour les configurations où elles existent dans la littérature, afin de valider le code mis au point.

D'abord, on calcule les coefficients de résistance pour une particule avec et sans effet de la paroi. Les résultats obtenus seront comparés aux résultats classiques de Stokes, pour le cas d'une particule dans un fluide infini et à ceux de Brenner [16] et Maude [72], pour le cas d'une particule en translation perpendiculairement à une paroi plane. Nous comparerons aussi nos résultats pour le cas de deux particules identiques à ceux obtenus par Stimson et Jeffery [95].

Ensuite, la vitesse à l'intérieur du fluide pour une particule en sédimentation au voisinage d'une paroi horizontale et pour une particule fixée dans un écoulement de cisaillement au voisinage d'une paroi sera calculée et comparée aux résultats obtenus par la méthode de coordonnées bisphériques par Yahiaoui [102].

Enfin, pour le problème axisymétrique, nous comparerons la méthode présentée dans le chapitre 2 à celle présentée dans le chapitre 3, pour le cas de deux particules sphériques de différentes tailles et le cas d'une chaîne de particules sphériques identiques.

## 5.2 Calcul des coefficients de résistance

### 5.2.1 Une particule dans un fluide infini

Nous allons comparer dans ce paragraphe les résultats de calcul de la matrice de résistance ou de mobilité avec les résultats de la littérature.

Une particule, dans le cas du mouvement de translation dans un fluide infini, est soumise seulement à la force de Stokes (1851)  $\mathbf{F} = -6\pi\mu a\mathbf{U}$ , d'où le tenseur  $\mathbf{R}^{tt} = 6\pi\mu a\mathbf{I}$

Lorsque la particule tourne avec une vitesse  $\boldsymbol{\Omega}$  dans un fluide infini, le couple exercé sur cette particule est  $-8\pi\mu a^3\boldsymbol{\Omega}$ , d'où le tenseur  $\mathbf{R}^{RR} = 8\pi\mu a^3\mathbf{I}$ .

Ces valeurs sont utiles pour les tests numériques permettant de vérifier les termes des tenseurs lorsque les interactions entre les particules deviennent négligeables.

On normalise la force par la force de Stokes  $-6\pi a\mu v$  (avec  $\mathbf{U} = v \mathbf{e}^k$ ) et le couple par  $-6\pi a^3\mu\omega$  (avec  $\Omega = \omega \mathbf{e}^k$ ), la vitesse de translation par  $v$  et la vitesse de rotation par  $\omega$ .

Une sphère dans un fluide infini sans la présence d'une paroi admet alors une matrice de résistance adimensionnelle comme suit (cf (4.58)) :

$$\mathcal{R}_{th} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Nos calculs donnent la matrice  $\mathcal{R}$  pour le cas où la paroi est suffisamment loin de la particule ; pour une distance de 1000 rayons de la particule, on obtient :

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.001 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.332 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.332 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 & 1.332 \end{pmatrix}$$

Nous avons utilisé dans nos calculs 128 triangles, avec 5 points de Gauss-Legendre pour l'intégration sur une particule. On remarque qu'à partir du 2<sup>ième</sup> raffinement les résultats numériques atteignent (5.1) avec un écart de 0.1%, ce qui est attendu compte-tenu de la distance de 1000 rayons.

### 5.2.2 Une particule au voisinage d'une paroi

On considère une particule en mouvement de translation perpendiculairement ou bien parallèlement à la paroi et on calcule les coefficients de frottement en prenant en compte l'effet de la paroi sur la particule. De même pour une particule en rotation.

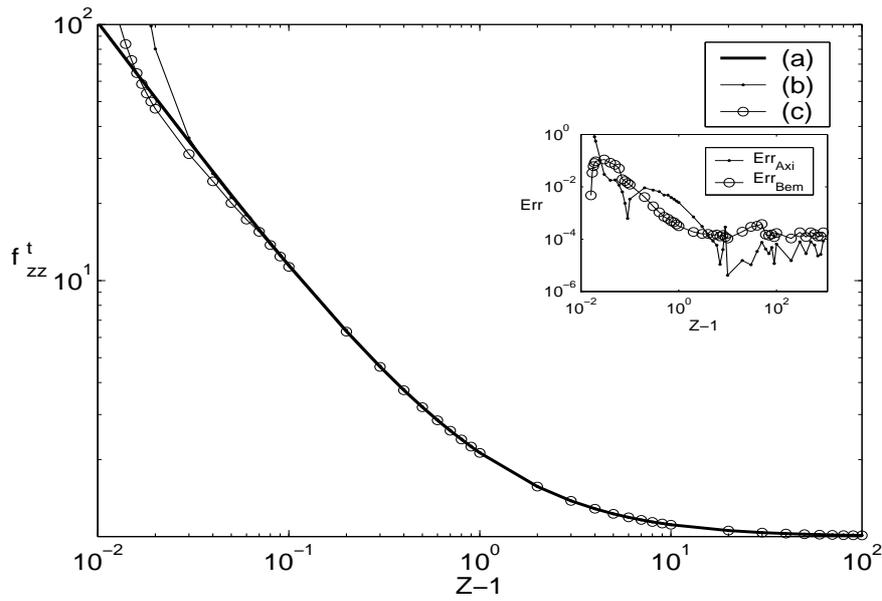
$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ C_x \\ C_y \\ C_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} f_{xx}^t & f_{xy}^t & f_{xz}^t & f_{xx}^r & f_{xy}^r & f_{xz}^r \\ f_{yx}^t & f_{yy}^t & f_{yz}^t & f_{yx}^r & f_{yy}^r & f_{yz}^r \\ f_{zx}^t & f_{zy}^t & f_{zz}^t & f_{zx}^r & f_{zy}^r & f_{zz}^r \\ c_{xx}^t & c_{xy}^t & c_{xz}^t & c_{xx}^r & c_{xy}^r & c_{xz}^r \\ c_{yx}^t & c_{yy}^t & c_{yz}^t & c_{yx}^r & c_{yy}^r & c_{yz}^r \\ c_{zx}^t & c_{zy}^t & c_{zz}^t & c_{zx}^r & c_{zy}^r & c_{zz}^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

La figure (5.1) représente la force hydrodynamique  $f_{zz}^t$  exercée sur une particule sphérique en sédimentation perpendiculairement à une paroi plane exprimée en fonction de  $Z = \frac{z}{a}$ ; avec  $z$  la coordonnée suivant  $\mathbf{e}^3$  du centre de la particule. Les résultats peuvent être obtenus soit par la méthode axisymétrique soit par la méthode BEM. Ici nos résultats dans les deux cas précédemment cités coïncident avec les résultats analytiques obtenus en utilisant la méthode de coordonnées bisphériques par Brenner et Maude . L'erreur relative est de l'ordre de 1% pour  $Z - 1 \geq 10^{-1}$ .

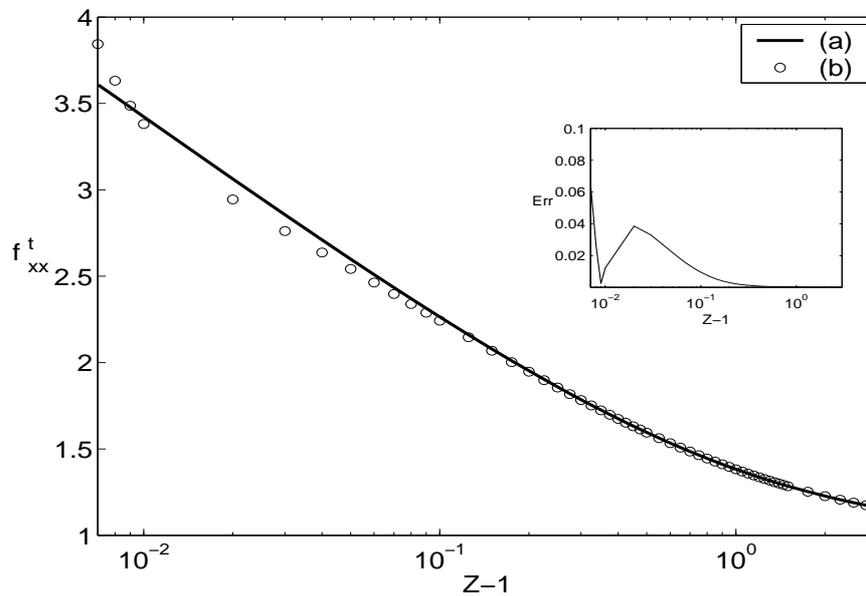
On considère maintenant les cas où une particule est en mouvement de translation parallèlement à la paroi suivant  $x$  et en mouvement de rotation autour de  $\mathbf{e}^2$ . Pour ces cas, les coefficients de frottement ont été calculés par la méthode des coordonnées bisphériques [2, 18, 44] en fonction de la distance à la paroi. Sur la figure (5.2), nous présentons une comparaison des coefficients de frottement  $f_{xx}^t$  entre les résultats exacts (a) et nos résultats (b) en fonction de la distance  $Z$  à la paroi pour une particule en translation suivant  $\mathbf{x}$  parallèlement à la paroi.

La figure (5.3) montre pour une particule en rotation autour de l'axe ( $Oy$ ) une comparaison des résultats exacts du coefficient de frottement  $f_{yx}^r$  (a) et de nos résultats (b) en fonction de la distance  $Z$  à la paroi, comme conséquence du théorème de réciprocité de Lorentz [2], le coefficient  $f_{yx}^r = \frac{4}{3}c_{yx}^t$ .

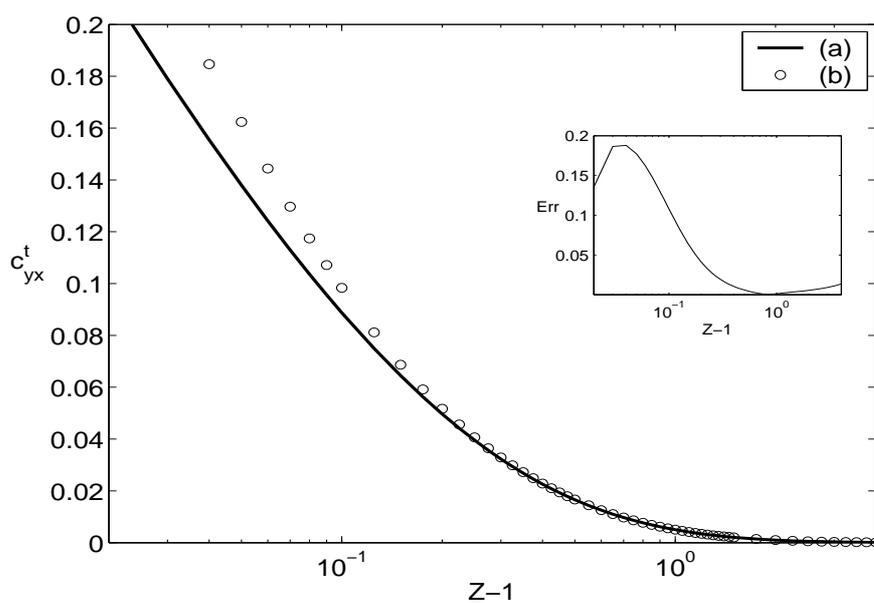
La figure (5.4) montre pour la même configuration une comparaison des résultats exact du coefficient de frottement  $c_{yy}^r$  (a) et de nos résultats (b).



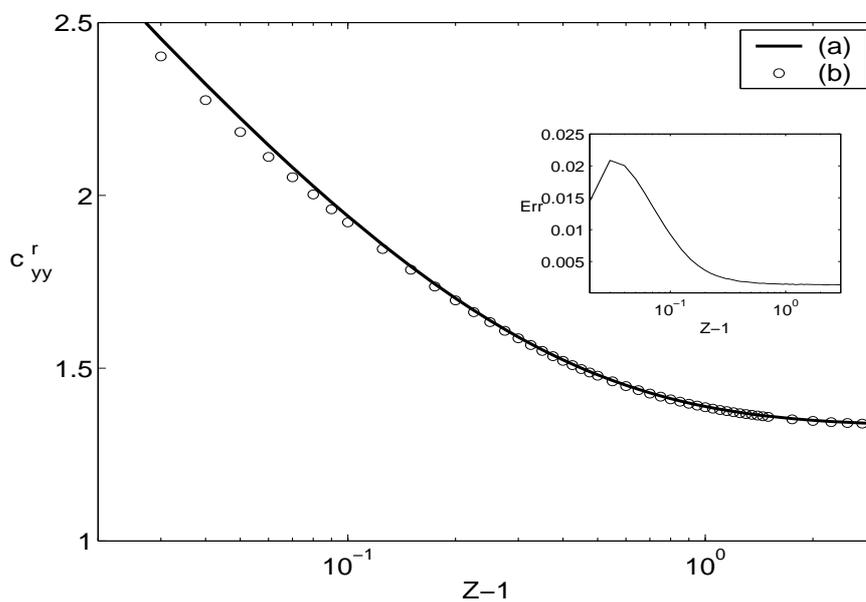
**Figure (5.1)** – Force hydrodynamique en fonction de  $Z$  (distance centre particule et paroi). (a) Résultats de Brenner calculés par la méthode des coordonnées bisphériques (b) Méthode des éléments de frontière : cas axisymétrique (c) Méthode des éléments de frontières : cas général.



**Figure (5.2)** – Force hydrodynamique suivant ( $Ox$ ) exercée sur une particule en translation suivant ( $Ox$ ) (a) Résultats de la méthode des coordonnées bisphériques [2] (b) Nos résultats.



**Figure (5.3)** – Couple hydrodynamique autour de  $(Oy)$  exercé sur une particule en translation suivant  $(Ox)$ . (a) Les résultats par la méthode des coordonnées bisphériques [2] (b) Nos résultats.



**Figure (5.4)** – Couple hydrodynamique autour de  $(Oy)$  exercé sur une particule en rotation autour de  $(Oy)$ . (a) Les résultats de Goldman et coll. [44, 45] (b) Nos résultats.

### 5.2.3 Deux particules identiques dans un fluide infini

Un mouvement dans une direction quelconque peut se décomposer en un mouvement parallèle à la ligne qui relie leurs centres et un mouvement perpendiculaire à cette même ligne. Ceci réduit le calcul des forces à deux directions seulement :

$$\mathbf{F}_k = \mathbf{F}_k^{\parallel} + \mathbf{F}_k^{\perp} \quad k = 1, 2$$

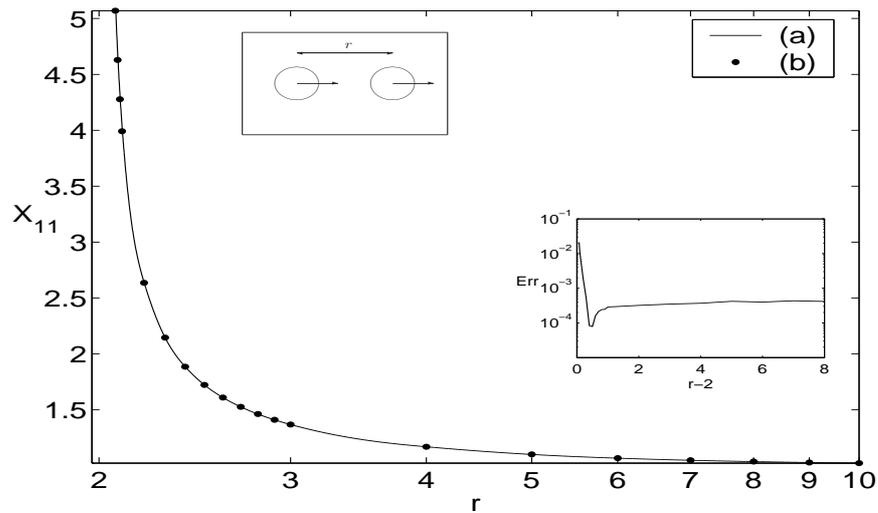
On calcule les coefficients de frottement  $X_{11}$  et  $X_{12}$  à partir de (4.54)-(4.55) permettant d'exprimer les forces  $F_1^{\parallel}$  et  $F_2^{\parallel}$  exercées sur deux particules de même vitesse de translation  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = v \mathbf{e}^1$  :

$$\begin{pmatrix} F_1^{\parallel} \\ F_2^{\parallel} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^{\parallel} \\ v_2^{\parallel} \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

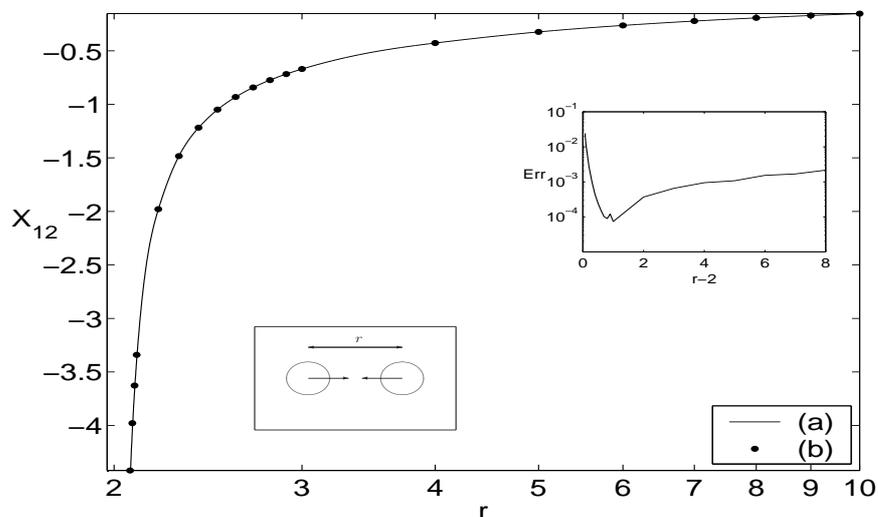
Nous comparons nos calculs aux résultats de Stimson et Jeffery [95]. Dans le cas où les deux particules se dirigent dans le même sens alors  $f^t(\alpha) = X_{11} + X_{12}$  est donnée par la formule (1.19) et dans le cas où les deux particules se dirigent en sens contraire alors  $f^t(\alpha) = X_{11} - X_{12}$  est donnée par la formule (1.20) avec  $\cosh \alpha = \frac{r}{2a}$  ; pour les notations voir figure (1.3).

Pour faire nos calculs, on considère deux particules sphériques de même taille avec les coordonnées de leurs centres aux points  $(-r/2, 0, 1000)$  et  $(r/2, 0, 1000)$ , où la valeur 1000 est la distance par rapport à la paroi, ce qui va nous permettre de négliger l'effet de la paroi et de ne prendre en compte que l'interaction entre les deux particules.

La force adimensionnée est tracée en fonction de la distance entre les deux centres des deux particules, figures (5.5) et (5.6). Dans le cas de deux sphères identiques qui se déplacent dans le même sens, l'erreur de nos résultats dans (5.5) est inférieur à  $10^{-3}$  lorsque la distance entre les deux particules dépasse 1/2 rayon d'une sphère.



**Figure (5.5)** – Coefficient  $X_{11}$  en fonction de la distance  $r$  entre les centres de deux particules. Les particules sphériques sont identiques et en translation parallèlement à la ligne de leurs centres et dans le même sens. (a) Calcul de Stimson et Jeffery [95] par la méthode des coordonnées bisphériques (b) Nos calculs par la méthode des éléments de surface. Err est la fonction d’erreur relative entre les deux solutions en fonction de  $r - 2$ .

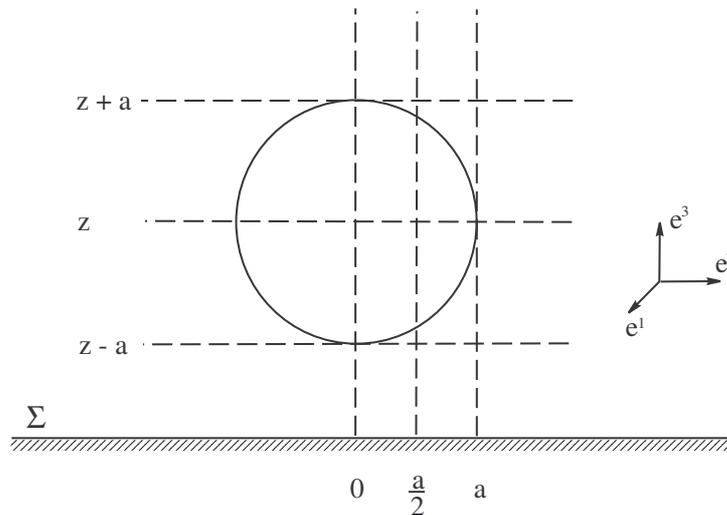


**Figure (5.6)** – Coefficient  $X_{12}$  en fonction de la distance  $r$  entre les centres des deux sphères, les deux particules en translation parallèlement à la ligne de leurs centres dans le sens contraire. (a) Solution de Stimson et Jeffery [95] calculée par la méthode des coordonnées bisphériques. (b) calcul par la méthode des éléments de surface. Err est la fonction d’erreur relative entre les deux solutions en fonction de  $r - 2$ .

## 5.3 Calcul de la vitesse à l'intérieur du fluide

### 5.3.1 Une particule en sédimentation au voisinage d'une paroi

On considère une particule sphérique en sédimentation perpendiculairement à une paroi. On calcule la vitesse du fluide induite par le mouvement de cette particule en différents points situés sur des droites perpendiculaires et des droites parallèles à la paroi, voir figure (5.7). La validation de nos calculs se fait par la confrontation de nos résultats avec ceux obtenus par la méthode exacte des coordonnées bisphériques [82, 102].



**Figure (5.7)** – Droites sur laquelle la vitesse est calculée par deux méthodes

Le centre de la sphère est dans le plan d'équation  $x = 0$ . Dans un premier cas, on calcule la vitesse sur des droites parallèles à la paroi d'équations  $z - a$ ,  $z$  et  $z + a$  pour étudier l'effet de la particule. Dans un second cas, on calcule la vitesse sur des droites perpendiculaires à la paroi d'équations  $x = 0$ ,  $y = 10^{-5}$ ,  $1/2$  et  $1$  pour étudier essentiellement l'effet de la paroi. La valeur  $10^{-5}$  est choisie à cause des singularités qui surgissent dans la résolution par la méthode des coordonnées bisphériques ce qui nécessite l'utilisation de beaucoup de temps de calcul par cette méthode. Les résultats dans les deux cas sont calculés pour une sphère centrée en  $(0, 0, z/a)$  pour  $z/a = 10$  et  $z/a = 1.1$ .

### 5.3.2 Calculs sur les droites perpendiculaires à la paroi.

La table (5.1) montre une comparaison entre les composantes de vitesse calculées par les deux méthodes : (BIS) la méthode des coordonnées bisphériques et (BEM) la méthode des éléments de frontière. Le centre de la sphère est à 10 rayons de la paroi. Nos résultats  $V_y^{BEM}$  et  $V_z^{BEM}$  coïncident avec les résultats  $V_y^{BIS}$  et  $V_z^{BIS}$  de la méthode (BIS) à  $O(10^{-4})$  près.

$Z - 1$	$V_y^{BIS}$	$V_y^{BEM}$	$V_z^{BIS}$	$V_z^{BEM}$
0.01000000	0.00000000	0.00000000	-0.00000100	-0.00000100
0.11000000	0.00000001	0.00000001	-0.00011917	-0.00011915
0.21000000	0.00000002	0.00000002	-0.00042741	-0.00042733
0.31000000	0.00000003	0.00000003	-0.00091688	-0.00091671
0.41000000	0.00000004	0.00000004	-0.00157945	-0.00157914
0.51000000	0.00000005	0.00000005	-0.00240761	-0.00240714
0.61000000	0.00000005	0.00000005	-0.00339447	-0.00339382
0.71000000	0.00000006	0.00000006	-0.00453372	-0.00453285
0.81000000	0.00000007	0.00000007	-0.00581958	-0.00581846
0.91000000	0.00000007	0.00000007	-0.00724676	-0.00724536
1.01000000	0.00000008	0.00000008	-0.00881047	-0.00880877
2.01000000	0.00000014	0.00000014	-0.03119735	-0.03119133
3.01000000	0.00000020	0.00000020	-0.06477970	-0.06476710
4.01000000	0.00000026	0.00000026	-0.11041383	-0.11039195
5.01000000	0.00000036	0.00000036	-0.17241625	-0.17238090
6.01000000	0.00000054	0.00000054	-0.26083669	-0.26077976
7.01000000	0.00000088	0.00000088	-0.39847924	-0.39838070
8.01000000	0.00000164	0.00000164	-0.64110955	-0.64089397
9.01000000	0.00000000	0.00000000	-1.00000000	-1.00000000
10.01000000	0.00000000	0.00000000	-1.00000000	-1.00000000
11.01000000	-0.00000016	0.00000079	-0.99983677	-0.99812038
12.01000000	-0.00000153	-0.00000153	-0.65330816	-0.65311375
13.01000000	-0.00000080	-0.00000080	-0.42967521	-0.42958138
14.01000000	-0.00000047	-0.00000047	-0.30721023	-0.30715084
15.01000000	-0.00000030	-0.00000030	-0.23227910	-0.23223687
16.01000000	-0.00000021	-0.00000021	-0.18249981	-0.18246780
17.01000000	-0.00000015	-0.00000015	-0.14744047	-0.14741519
18.01000000	-0.00000011	-0.00000011	-0.12166564	-0.12164510
19.01000000	-0.00000009	-0.00000009	-0.10208658	-0.10206953
20.01000000	-0.00000007	-0.00000007	-0.08682640	-0.08681201
21.01000000	-0.00000005	-0.00000005	-0.07468277	-0.07467048
22.01000000	-0.00000004	-0.00000004	-0.06485217	-0.06484154
23.01000000	-0.00000004	-0.00000004	-0.05677855	-0.05676928
24.01000000	-0.00000003	-0.00000003	-0.05006589	-0.05005774

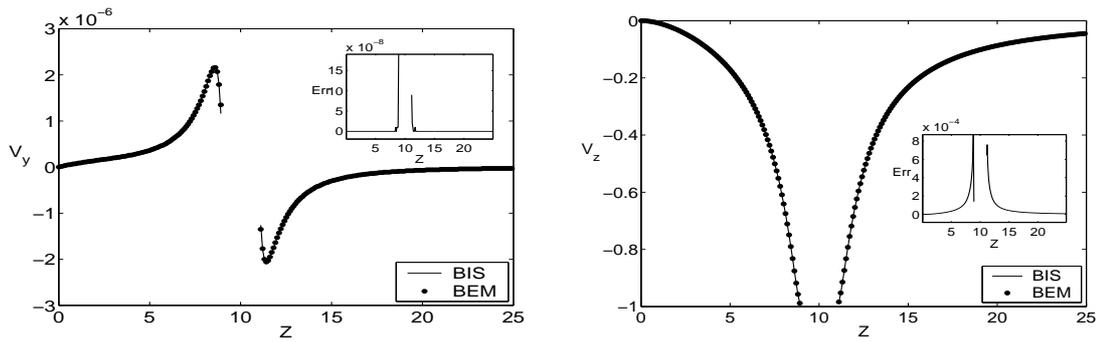
**Table (5.1)** – Composantes de vitesse  $V_z$  et  $V_y$  en fonction de  $Z - 1$  aux points  $(0, 10^{-5}, Z)$  pour une particule de centre  $(0, 0, 10)$

La table (5.2) montre les mêmes quantités que la table (5.1), la sphère étant ici centrée à 1.1 rayon de la paroi.

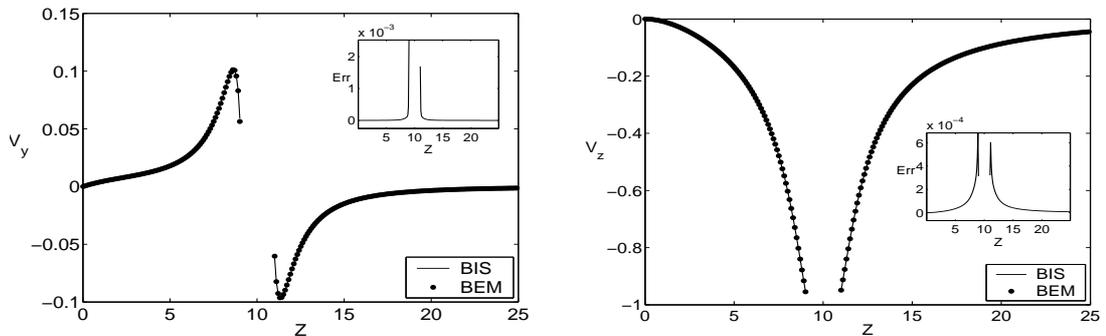
$Z - 1$	$V_y^{BIS}$	$V_y^{BEM}$	$V_z^{BIS}$	$V_z^{BEM}$
2.20000000	-0.00000155	-0.00000257	-0.98279415	-0.97787242
2.30000000	-0.00000231	-0.00000248	-0.94329706	-0.92741284
2.40000000	-0.00000264	-0.00000262	-0.89328039	-0.87649286
2.50000000	-0.00000273	-0.00000271	-0.83924810	-0.82292202
2.60000000	-0.00000269	-0.00000268	-0.78481310	-0.76879745
2.70000000	-0.00000258	-0.00000257	-0.73195494	-0.71610142
2.80000000	-0.00000244	-0.00000243	-0.68171142	-0.66599226
2.90000000	-0.00000228	-0.00000226	-0.63457119	-0.61902459
3.00000000	-0.00000211	-0.00000210	-0.59070200	-0.57538895
3.05000000	-0.00000203	-0.00000201	-0.56999329	-0.55482056
3.10000000	-0.00000195	-0.00000193	-0.55008616	-0.53506837
3.20000000	-0.00000180	-0.00000178	-0.51260171	-0.49793240
4.20000000	-0.00000080	-0.00000078	-0.26767634	-0.25735280
5.20000000	-0.00000039	-0.00000038	-0.15494127	-0.14798389
6.20000000	-0.00000021	-0.00000020	-0.09727146	-0.09245973
7.20000000	-0.00000012	-0.00000012	-0.06494106	-0.06150086
8.20000000	-0.00000008	-0.00000007	-0.04546788	-0.04293214
9.20000000	-0.00000005	-0.00000005	-0.03305640	-0.03113733

**Table (5.2)** – Composantes de vitesse  $V_z$  et  $V_y$  en fonction de  $Z - 1$  aux points  $(0, 10^{-5}, Z)$  pour une particule de centre  $(0, 0, 1.1)$

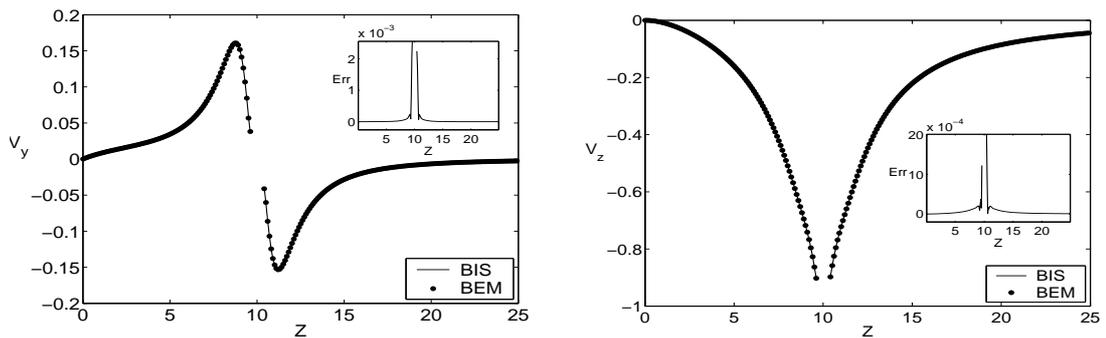
Sur les figures (5.8)-(5.9)-(5.10)-(5.11)-(5.12)-(5.13), les composantes de la vitesse  $V_y$  et  $V_z$  sont tracées en fonction de  $Z$ . On remarque que les résultats obtenus par notre méthode (BEM) sont en bon accord avec les résultats obtenus par la méthode 'exacte' (BIS) sauf au voisinage de la particule. Ceci est montré par les maxima sur les courbes d'erreurs  $Err = |V^{BIS} - V^{BEM}|$  tracées en fonction de  $Z$ .



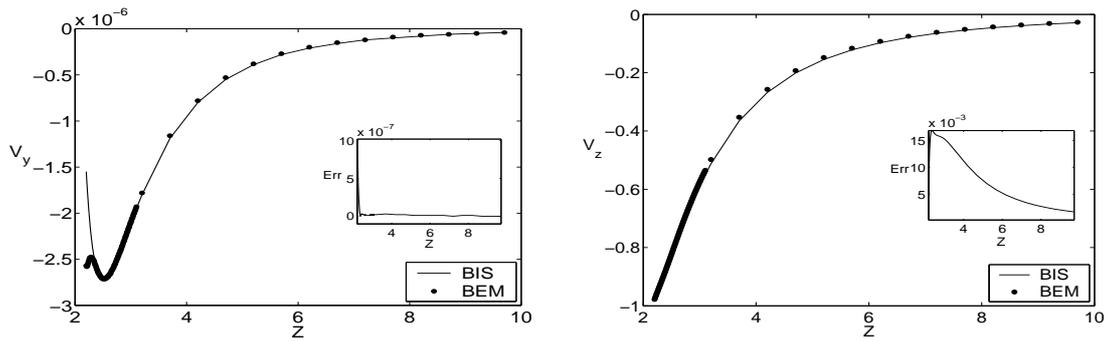
**Figure (5.8)** – Composantes de vitesse  $V_y$  et  $V_z$  calculées aux points de coordonnées  $(0, 10^{-5}, Z)$  pour une particule de centre  $(0, 0, 10)$  en translation avec la vitesse  $\mathbf{V} = -\mathbf{e}^3$  perpendiculairement à la paroi d'équation  $Z = 0$ . (BIS) résultats exacts par la méthode des coordonnées bisphériques, (BEM) nos résultats par la méthode des éléments de frontière.



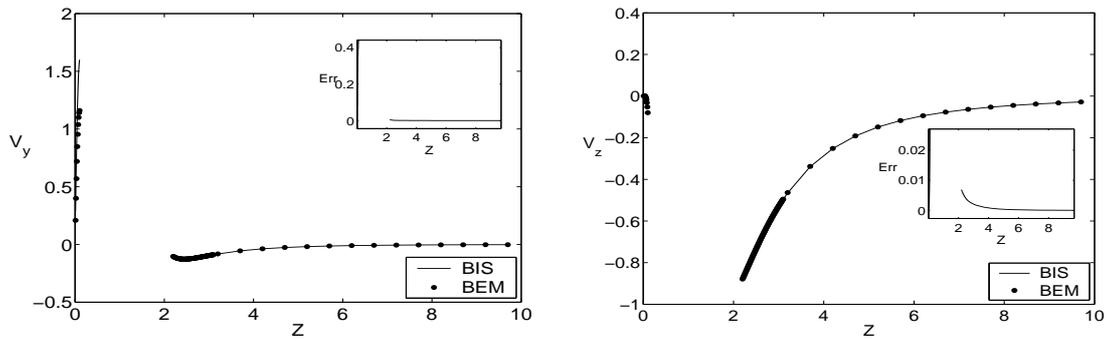
**Figure (5.9)** – Comme figure (5.8) mais aux points de coordonnées  $(0, 0.5, Z)$ .



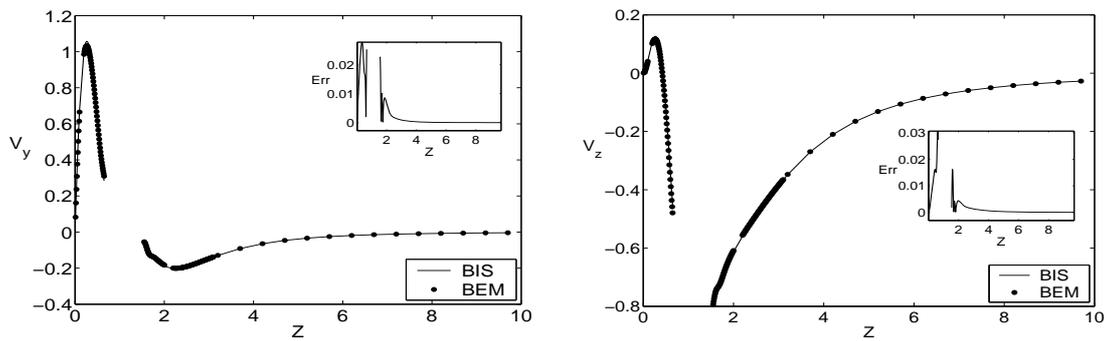
**Figure (5.10)** – Comme figure (5.8) mais aux points de coordonnées  $(0, 1, Z)$ .



**Figure (5.11)** – Composantes de vitesse  $V_y$  et  $V_z$  calculées aux points de coordonnées  $(0, 10^{-5}, Z)$  pour une sphère de centre  $(0, 0, 1.1)$  en translation avec la vitesse  $\mathbf{V} = -\mathbf{e}^3$  perpendiculairement à la paroi d'équation  $Z = 0$ . (BIS) résultats exacts par la méthode des coordonnées bisphériques, (BEM) nos résultats par la méthode des éléments de frontière.



**Figure (5.12)** – Comme figure (5.11) mais aux points de coordonnées  $(0, 0.5, Z)$ .



**Figure (5.13)** – Comme figure (5.11) mais aux points de coordonnées  $(0, 1, Z)$ .

### 5.3.3 Calculs sur les droites parallèles à la paroi.

La table (5.3) montre une comparaison entre les composantes de vitesse calculées par la méthodes des coordonnées bisphériques (BIS) et la méthode des éléments de frontière (BEM). La sphère est centrée à 10 rayons de la paroi. Nos résultats coïncident avec les résultats de la méthode (BIS) à  $5 \times 10^{-3}$  près.

$Y$	$V_y^{BIS}$	$V_y^{BEM}$	$V_z^{BIS}$	$V_z^{BEM}$
-10.0000000	-0.01800836	-0.01800560	0.00432084	0.00431990
-9.0000000	-0.01783329	-0.01783060	0.00014522	0.00014480
-8.0000000	-0.01731252	-0.01730990	-0.00642008	-0.00641950
-7.0000000	-0.01639964	-0.01639730	-0.01654671	-0.01654470
-6.0000000	-0.01505717	-0.01505520	-0.03215261	-0.03214840
-5.0000000	-0.01325737	-0.01325600	-0.05666111	-0.05665360
-4.0000000	-0.01097390	-0.01097340	-0.09699559	-0.09698280
-3.0000000	-0.00814193	-0.00814290	-0.17007188	-0.17005050
-2.0000000	-0.00448997	-0.00449420	-0.33311390	-0.33307670
-1.8000000	-0.00359507	-0.00360040	-0.39273073	-0.39268710
-1.6000000	-0.00262488	-0.00263150	-0.47149120	-0.47143570
-1.4000000	-0.00159003	-0.00159820	-0.58044506	-0.58035870
-1.2000000	-0.00057908	-0.00059090	-0.74100381	-0.74076990
-1.0000000	-0.00000000	-0.00002920	-1.00000000	-0.99548390
1.00001000	-0.00000065	0.00002920	-0.99998358	-0.99547550
1.20001000	0.00057913	0.00059090	-0.74099389	-0.74076000
1.40001000	0.00159008	0.00159830	-0.58043857	-0.58035220
1.60001000	0.00262493	0.00263160	-0.47148662	-0.47143120
1.80001000	0.00359511	0.00360050	-0.39272734	-0.39268370
2.10000000	0.00491146	0.00491530	-0.30842029	-0.30838550
3.00000000	0.00814193	0.00814290	-0.17007188	-0.17005050
4.00000000	0.01097390	0.01097340	-0.09699559	-0.09698280
5.00000000	0.01325737	0.01325600	-0.05666111	-0.05665360
6.00000000	0.01505717	0.01505520	-0.03215261	-0.03214840
7.00000000	0.01639964	0.01639730	-0.01654671	-0.01654470
8.00000000	0.01731252	0.01730990	-0.00642008	-0.00641950
9.00000000	0.01783329	0.01783060	0.00014522	0.00014480
10.00000000	0.01800836	0.01800560	0.00432084	0.00431990

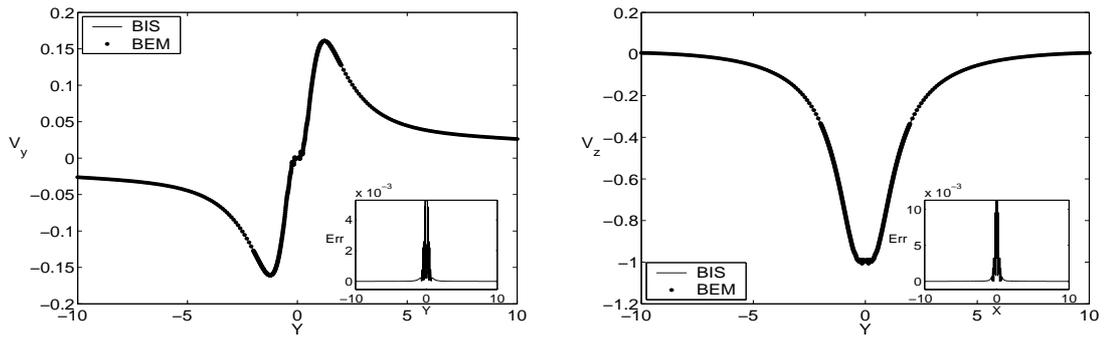
**Table (5.3)** – Composantes de vitesse  $V_y$  et  $V_z$  en fonction de  $Y$  aux points  $(0, Y, 10)$  pour une particule de centre  $(0, 0, 10)$ .

La table (5.4) montre des résultats analogues lorsque la sphère est centrée à 1.1 rayon de la paroi.

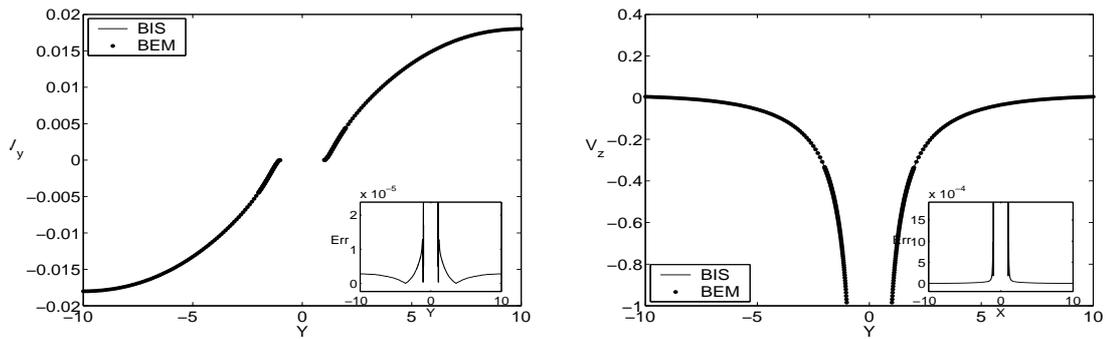
$Y$	$V_y^{BIS}$	$V_y^{BEM}$	$V_z^{BIS}$	$V_z^{BEM}$
-10.0000000	0.00314428	-0.00314510	0.00051344	0.00051360
-9.0000000	0.00466416	-0.00466550	0.00084423	0.00084450
-8.0000000	0.00719598	-0.00719810	0.00146041	0.00146080
-7.0000000	0.01163148	-0.01163480	0.00268478	0.00268550
-6.0000000	0.01986498	-0.01987020	0.00530998	0.00531090
-5.0000000	0.03614557	-0.03615230	0.01145378	0.01145320
-4.0000000	0.07021065	-0.07020940	0.02719280	0.02717680
-3.0000000	0.14103461	-0.14095710	0.06918503	0.06903880
-2.0000000	0.23341211	-0.23298150	0.13664252	0.13532830
-1.8000000	0.23112218	-0.23063310	0.12430842	0.12230740
-1.6000000	0.20560952	-0.20516730	0.06908802	0.06616270
-1.4000000	0.14778595	-0.14753920	-0.07380613	-0.07768650
-1.2000000	0.06104674	-0.06122550	-0.38549197	-0.38938410
-1.0000000	-0.00000028	-0.01318810	-0.99999980	-0.99655770
1.00001000	-0.00000028	0.01319380	-0.99995857	-0.99653720
1.20001000	0.06105129	0.06123000	-0.38547018	-0.38936240
1.40001000	0.14778971	0.14754300	-0.07379564	-0.07767600
1.60001000	0.20561154	0.20516930	0.06909248	0.06616720
1.80001000	0.23112278	0.23063370	0.12430985	0.12230890
2.10000000	0.22887538	0.22849010	0.13460612	0.13354860
3.00000000	0.14103461	0.14095710	0.06918503	0.06903880
4.00000000	0.07021065	0.07020940	0.02719280	0.02717680
5.00000000	0.03614557	0.03615230	0.01145378	0.01145320
6.00000000	0.01986498	0.01987020	0.00530998	0.00531090
8.00000000	0.00719598	0.00719810	0.00146041	0.00146080
9.00000000	0.00466416	0.00466550	0.00084423	0.00084450
10.00000000	0.00314428	0.00314510	0.00051344	0.00051360

**Table (5.4)** – Composantes de vitesse  $V_y$  et  $V_z$  en fonction de  $Y$  aux points  $(0, Y, 10)$  pour une particule de centre  $(0, 0, 1.1)$

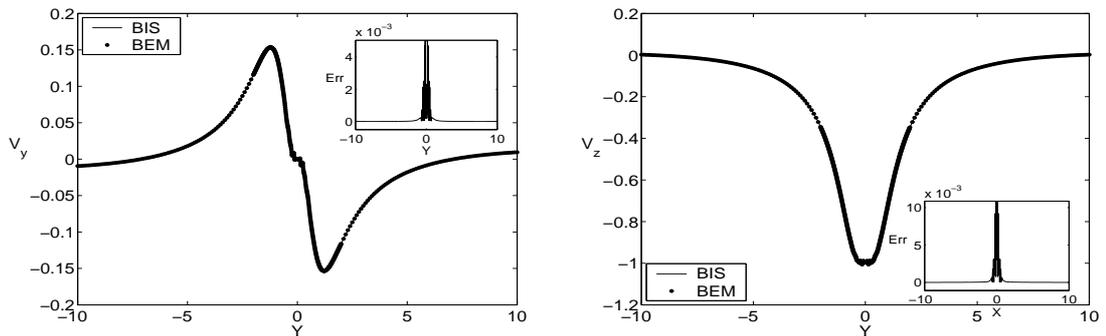
Sur les figures (5.14)-(5.15)-(5.16) -(5.17)-(5.18)-(5.19), les composantes de la vitesse  $V_y$  et  $V_z$  sont tracées en fonction de  $Y$ . On remarque que les résultats obtenus par notre méthode (BEM) sont en bon accord avec les résultats obtenus par la méthode 'exacte' BIS sauf au voisinage de la particule. Ceci est montré par les maxima sur les courbes d'erreurs  $Err = |V^{BIS} - V^{BEM}|$  tracées en fonction de  $Y$ .



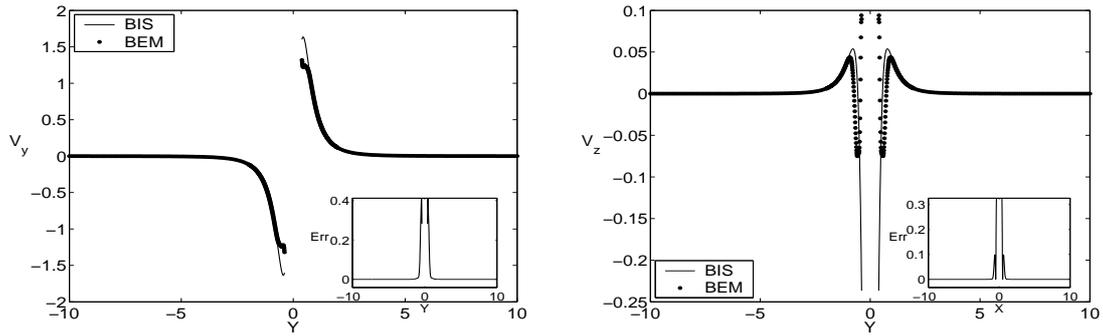
**Figure (5.14)** – Composantes de vitesse  $V_y$  et  $V_z$  calculées aux points de coordonnées  $(0, Y, 9)$  pour une particule de centre  $(0, 0, 10)$  en translation avec la vitesse  $\mathbf{V} = -\mathbf{e}^3$  perpendiculairement à la paroi d'équation  $Z = 0$ . (BIS) résultats exacts par la méthode des coordonnées bisphériques, (BEM) nos résultats par la méthode des éléments de frontière.



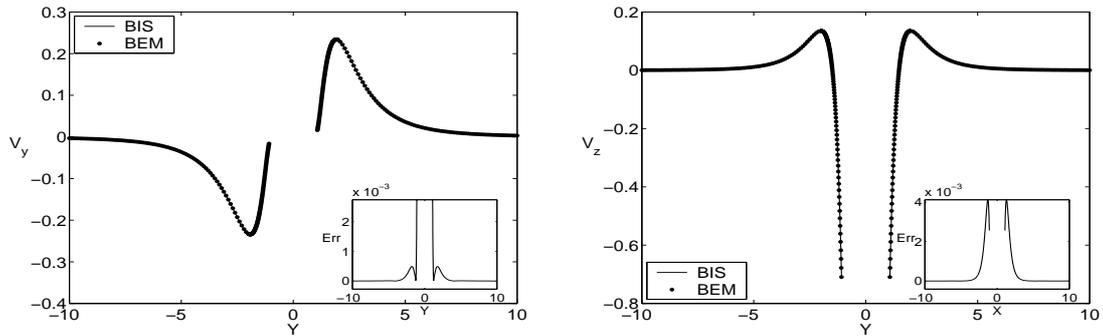
**Figure (5.15)** – Comme figure (5.14) mais aux points de coordonnées  $(0, Y, 10)$ .



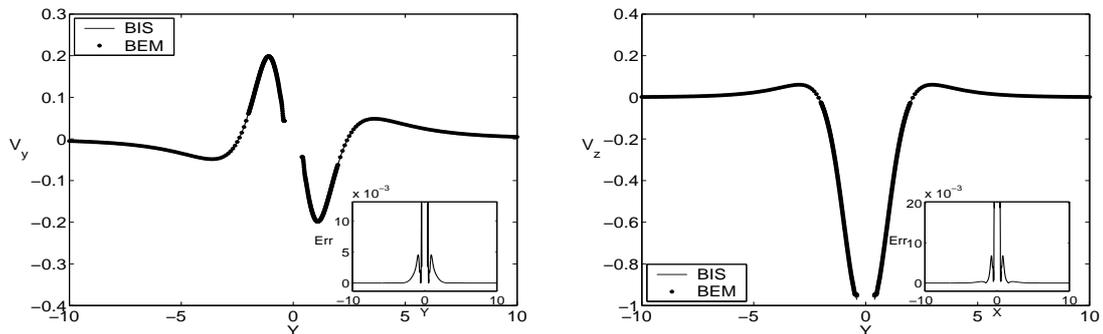
**Figure (5.16)** – Comme figure (5.14) mais aux points de coordonnées  $(0, Y, 11)$ .



**Figure (5.17)** – Composantes de vitesse  $V_y$  et  $V_z$  calculées aux points de coordonnées  $(0, Y, 1.1)$  pour une sphère de centre  $(0, 0, 1.1)$  en translation avec la vitesse  $\mathbf{V} = -\mathbf{e}^3$  perpendiculairement à la paroi d'équation  $Z = 0$ . (BIS) résultats exacts par la méthode des coordonnées bisphériques, (BEM) nos résultats par la méthode des éléments de frontière.



**Figure (5.18)** – Comme figure (5.17) mais aux points de coordonnées  $(0, Y, 1.1)$ .



**Figure (5.19)** – Comme figure (5.17) mais aux points de coordonnées  $(0, Y, 2.1)$ .

### 5.3.4 Une particule sphérique au voisinage d'une paroi; cas asymétriques.

La force et le couple exercés sur une particule en translation, en rotation et fixée dans un écoulement de cisaillement au voisinage d'une paroi ont été calculés par Chaoui & Feuillebois [18] en utilisant la méthode des coordonnées bisphériques. Outre leur validation, la comparaison de nos résultats avec ceux obtenus par la méthode de coordonnées bisphériques permet d'avoir une idée sur leur domaine de validité ainsi que l'ordre de grandeur de la précision voir les tables (5.5), (5.6) et (5.7).

La force et le couple exercés sur une particule de rayon  $a$  centrée au point de coordonnée  $(0, 0, \ell)$  dans un fluide de viscosité  $\mu$  est donnés par :

- En translation avec la vitesse  $U_x$  suivant l'axe ( $Ox$ )

$$F_x^t = -6\pi a \mu f_{xx}^t U_x$$

$$C_y^t = 8\pi a^2 \mu c_{yx}^t U_x$$

- En rotation avec la vitesse  $\Omega_y$  autour de l'axe ( $Oy$ )

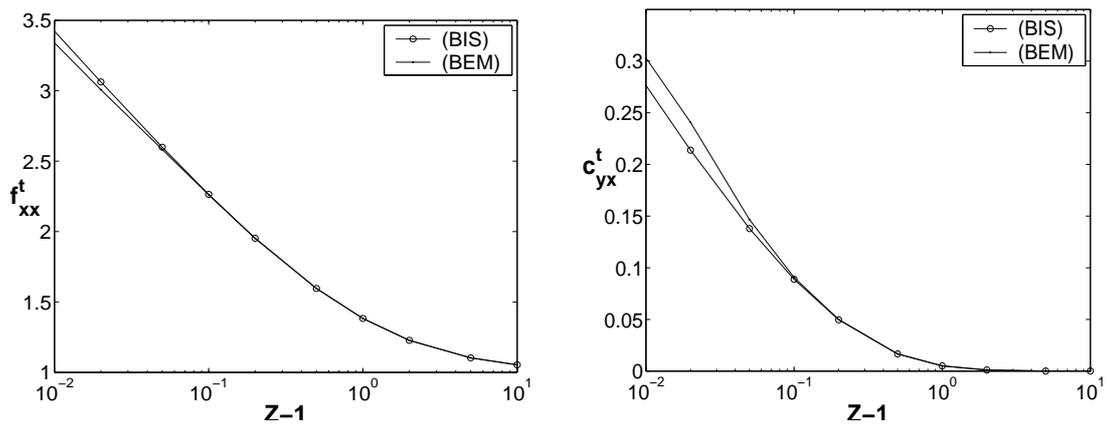
$$F_x^r = 6\pi a^2 \mu f_{xy}^r \Omega_y$$

$$C_y^t = -8\pi a^3 \mu c_{yy}^r \Omega_y$$

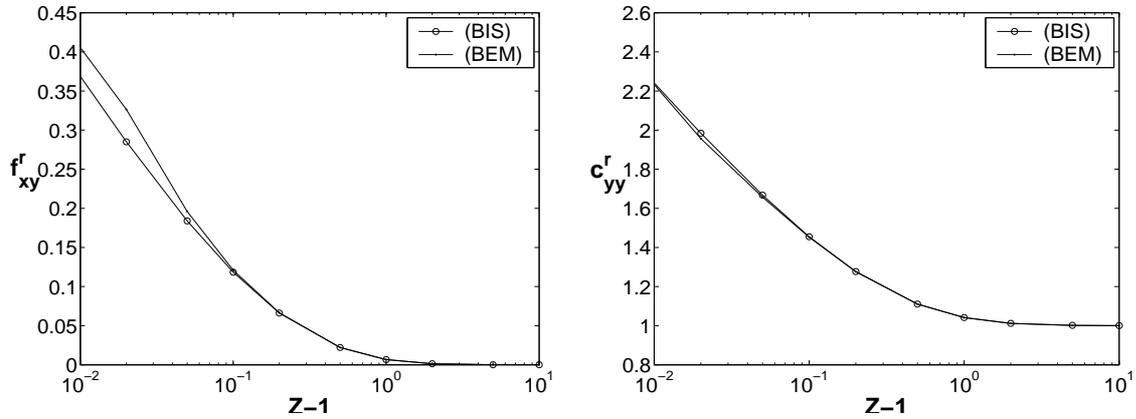
- fixée dans un écoulement de cisaillement de vitesse  $\kappa z$  suivant l'axe ( $Ox$ )

$$F_x^\kappa = 6\pi a \mu f_{xx}^\kappa \kappa \ell$$

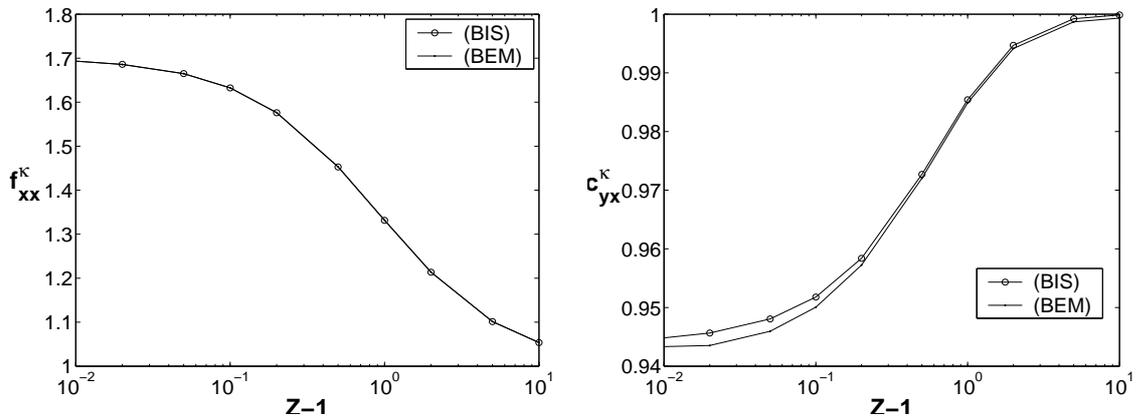
$$C_y^t = 4\pi a^3 \mu c_{yx}^\kappa \kappa$$



**Figure (5.20)** –  $f_{xx}^t$  (à gauche) et  $c_{yx}^t$  (à droite) pour une sphère de centre  $(0, 0, Z)$  en translation parallèlement à une paroi. (BIS) résultats exacts par la méthode des coordonnées bisphériques, (BEM) nos résultats par la méthode des éléments de frontière.



**Figure (5.21)** –  $f_{xy}^r$  (à gauche) et  $c_{yy}^r$  (à droite) pour une sphère de centre  $(0, 0, Z)$  en rotation autour de  $(Oy)$ . (BIS) résultats exacts par la méthode des coordonnées bisphériques, (BEM) nos résultats par la méthode des éléments de frontière.



**Figure (5.22)** –  $f_{xx}^{\kappa}$  (à gauche) et  $c_{yx}^{\kappa}$  (à droite) pour une sphère de centre  $(0, 0, Z)$  fixée dans un écoulement de cisaillement de vitesse  $\mathbf{v}^{\kappa} = \kappa z \mathbf{e}^1$ . (BIS) résultats exacts par la méthode des coordonnées bisphériques, (BEM) nos résultats par la méthode des éléments de frontière.

$Z$	(BIS)		(BEM)	
	$f_{xx}^t$	$c_{yx}^t$	$f_{xx}^t$	$c_{yx}^t$
1.001	4.6400	0.49911	4.1939	0.67567
1.002	4.2717	0.43085	3.9089	0.60932
1.005	3.7867	0.34195	3.8120	0.27342
1.01	3.4225	0.27652	3.3399	0.30306
1.02	3.0626	0.21381	3.0072	0.24076
1.05	2.5990	0.13793	2.5827	0.14657
1.1	2.2643	0.088763	2.2599	0.090665
1.2	1.9527	0.049638	1.9515	0.049941
1.5	1.5957	0.016574	1.5953	0.016591
2	1.3828	0.005025	1.3825	0.005025
3	1.2272	0.001020	1.2270	0.001020
6	1.1029	0.0000676	1.1028	0.000067
11	1.0538	0.0000061	1.0537	0.0000061

**Table (5.5)** –  $f_{xx}^t$  et  $c_{yx}^t$  pour une particule de centre  $(0, 0, Z)$  calculés par les méthodes (BIS) et (BEM).

$Z$	(BIS)		(BEM)	
	$f_{xx}^r$	$c_{yx}^r$	$f_{xx}^r$	$c_{yx}^r$
1.001	0.66548	3.138	0.85695	2.887
1.002	0.57446	2.864	0.97304	2.5977
1.005	0.45593	2.5059	0.15413	2.7549
1.01	0.36869	2.2408	0.40552	2.2326
1.02	0.28509	1.9842	0.32634	1.9566
1.05	0.18390	1.6675	0.19592	1.6573
1.1	0.11835	1.4549	0.12084	1.452
1.2	0.06618	1.2766	0.06656	1.2757
1.5	0.02201	1.1105	0.02212	1.11
2	0.0066996	1.0418	0.0066988	1.0414
3	0.0013603	1.0118	0.0013596	1.0114
6	0.0000902	1.0015	0.0000902	1.0011
11	0.0000082	1.0002	0.0000082	0.9999

**Table (5.6)** –  $f_{xy}^r$  (à gauche) et  $c_{yy}^r$  pour une particule de centre  $(0, 0, Z)$  calculés par les méthodes (BIS) et (BEM).

$Z$	(BIS)		(BEM)	
	$f_{xx}^\kappa$	$c_{yx}^\kappa$	$f_{xx}^\kappa$	$c_{yx}^\kappa$
1.001	1.6999	0.94407	1.6986	0.94064
1.002	1.6991	0.94416	1.6977	0.94054
1.005	1.6969	0.94441	1.6934	0.93788
1.01	1.6932	0.94483	1.6933	0.94334
1.02	1.6859	0.94565	1.6856	0.94353
1.05	1.6649	0.94805	1.6647	0.94595
1.1	1.6325	0.95179	1.6326	0.95006
1.2	1.5761	0.95839	1.5764	0.95724
1.5	1.4528	0.97269	1.4533	0.97205
2	1.3315	0.98542	1.3319	0.98489
3	1.2135	0.99468	1.2138	0.99415
6	1.1013	0.99922	1.1016	0.99868
11	1.0536	0.99987	1.0538	0.99932

**Table (5.7)** –  $f_{xx}^\kappa$  (à gauche) et  $c_{yx}^\kappa$  pour une particule de centre  $(0, 0, Z)$  calculés par les méthodes (BIS) et (BEM).

## 5.4 Comparaison des résultats pour un problème axisymétrique

Dans cette section les deux méthodes du chapitre 2 et du chapitre 3 sont comparées afin de recueillir les avantages des deux techniques.

### 5.4.1 Deux particules sphériques de différentes tailles

On considère deux particules sphériques de rayons  $a^1$  et  $a^2$  en mouvement dans le même sens suivant la ligne qui joint leurs centres (par exemple suivant  $\mathbf{e}^1$ ). Jeffrey et Onishi [59] ont calculé à l'aide de la méthode des multipôles les coefficients de mobilité qui relient les forces et les vitesses des particules par les équations suivantes :

$$v_x^1 = \frac{1}{6\pi\mu a^1} x_{11} F_x^1 + \frac{1}{3\pi\mu(a^1 + a^2)} x_{12} F_x^2 \quad (5.4)$$

$$v_x^2 = \frac{1}{3\pi\mu(a^1 + a^2)} x_{21} F_x^1 + \frac{1}{6\pi\mu a^2} x_{22} F_x^2 \quad (5.5)$$

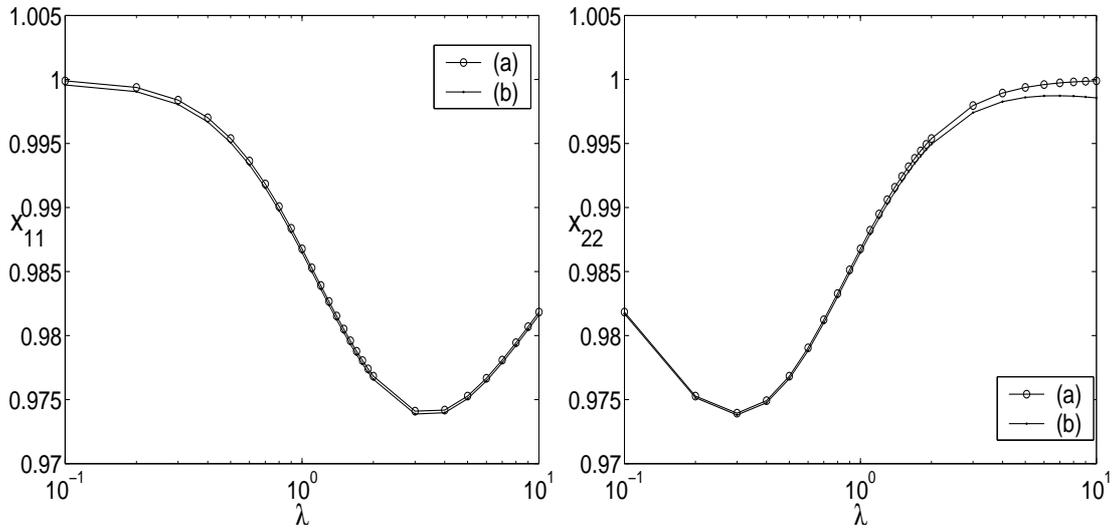
Les coefficients des équations (5.4)-(5.5) sont exprimés en fonction de  $\lambda = \frac{a^2}{a^1}$  et

$$s = \frac{2r}{a^1 + a^2}$$

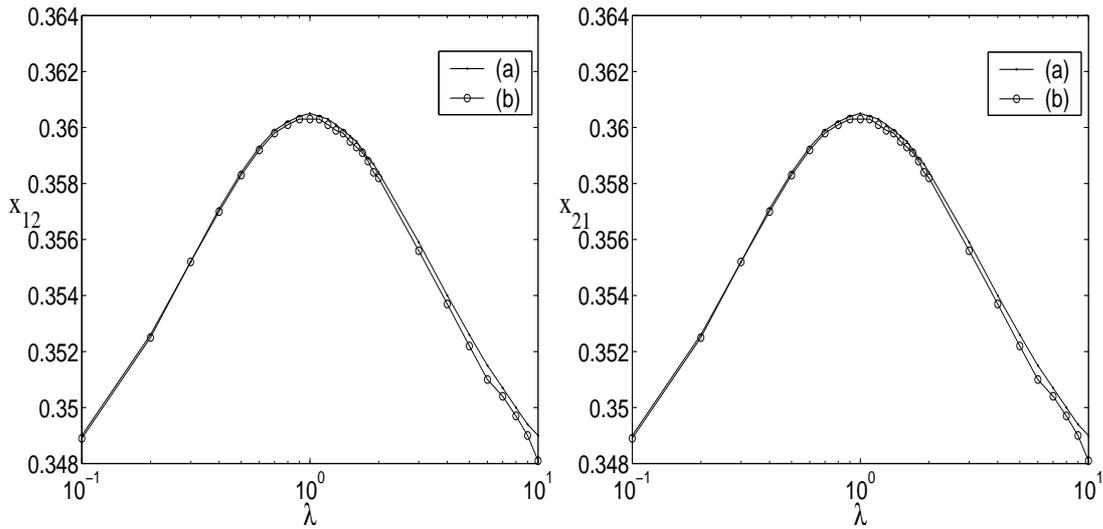
$$x_{11}(\lambda, s) = 1 - \frac{60\lambda^3}{(1+\lambda)^4 s^4} + \frac{32\lambda^3(15-4\lambda^2)}{(1+\lambda)^6 s^6} - \frac{192\lambda^3(5-22\lambda^2+3\lambda^4)}{(1+\lambda)^8 s^8} - \frac{256\lambda^5(70+375\lambda-120\lambda^2+9\lambda^4)}{(1+\lambda)^{10} s^{10}} + O(s^{-12})$$

$$x_{12}(\lambda, s) = \frac{3}{2s} - \frac{2(1+\lambda^2)}{(1+\lambda)^2 s^3} + \frac{1200\lambda^3}{(1+\lambda)^6 s^7} - \frac{960\lambda^3(1+\lambda^2)}{(1+\lambda)^8 s^9} + \frac{768\lambda^3(10-151\lambda^2+10\lambda^4)}{(1+\lambda)^{10} s^{11}} + O(s^{-13})$$

avec  $x_{22}(\lambda, s) = x_{11}(\frac{1}{\lambda}, s)$  et  $x_{12}(\lambda, s) = x_{21}(\lambda, s)$



**Figure (5.23)** – Coefficients de mobilité  $x_{11}$  et  $x_{22}$  en fonction du rapport des rayons  $\lambda = \frac{a^2}{a^1}$  pour deux sphères dans un fluide infini telle que  $s = \frac{2r}{a^1 + a^2} = 4$  où  $r$  est la distance entre les deux centres, (a) résultats de Jeffrey et Onishi [59], (b) nos résultats.



**Figure (5.24)** – Coefficients de mobilité  $x_{12}$  et  $x_{21}$  en fonction du rapport des rayons  $\lambda = \frac{a^2}{a^1}$  pour deux sphères dans un fluide infini telle que  $s = \frac{2r}{a^1 + a^2} = 4$  où  $r$  est la distance entre les deux centres, (a) résultats de Jeffrey et Onishi [59], (b) nos résultats.

Sur les figures (5.23) et (5.24) on exprime les variations des valeurs des coefficients de mobilité en fonction du rapport des rayons  $\lambda = \frac{a^2}{a^1}$ . Cette comparaison montre un bon accord entre les résultats de [59] avec nos résultats pour le cas des deux sphères de rayons différents.

### 5.4.2 Chaîne de trois particules identiques

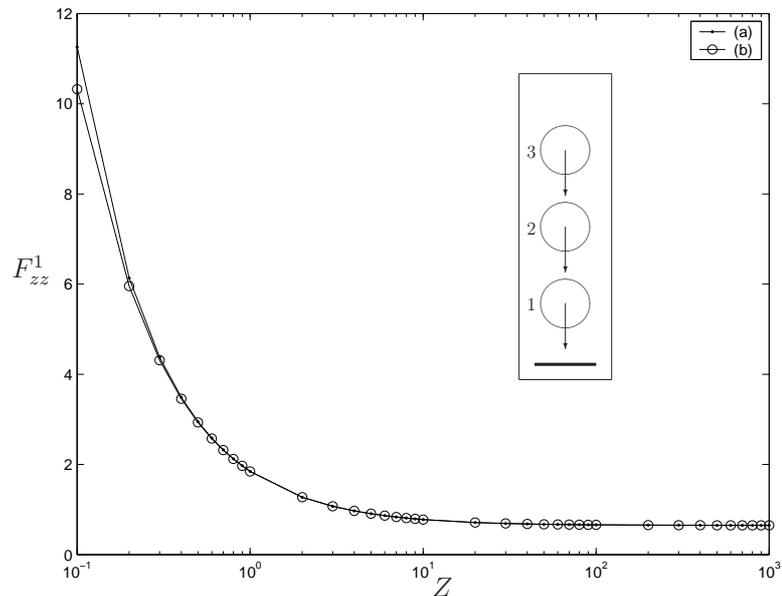
Une comparaison entre deux méthodes numériques ne donne pas une idée sur l'exactitude de ces méthodes mais elle peut donner une idée sur l'avantage de l'une par rapport à l'autre. Aussi elle permet de combiner les deux techniques pour pouvoir exploiter l'avantage des deux approches. Pour cela, nous envisageons une comparaison entre les résultats obtenus par la méthode du chapitre 2, qui s'applique uniquement aux problèmes axisymétriques et la méthode du chapitre 3 valable pour des configurations quelconques.

On considère des particules en sédimentation perpendiculairement à la paroi et arrangées suivant une ligne normale à la paroi. La vitesse de sédimentation est  $\mathbf{v}^k = -\mathbf{e}^3$  avec  $k = 1..N_p$ . Toutes les forces sont normalisées avec la force de Stokes qui est relative à la sphère la plus proche de la paroi.

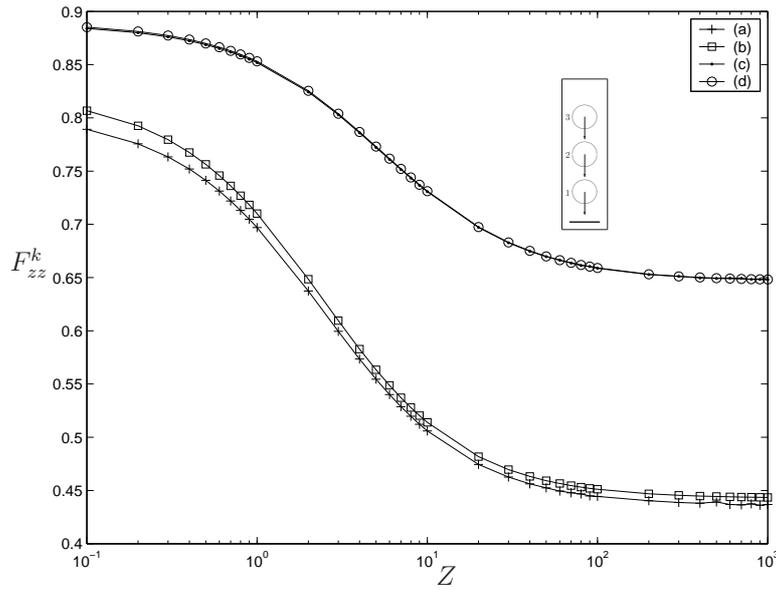
Nous comparons les forces normalisées s'exerçant sur chaque particule d'une chaîne de  $N_p = 3$  particules sphériques identiques de rayon 1, la distance qui sépare deux centres successifs étant égale à 3 rayons.

La figure (5.25) présente la force adimensionnée  $F_{zz}^1$  sur la sphère 1, la plus proche de la paroi. Les résultats obtenus par les deux méthodes coïncident lorsque la chaîne des particules est assez loin de la paroi, mais un écart apparaît lorsque la sphère 1 s'approche de la paroi. Sur la figure (5.26), l'écart entre les valeurs de la force hydrodynamique appliquée sur les deux autres sphères diminue en fonction de leurs distances à la paroi.

La variation entre les valeurs obtenues par les deux méthodes peut s'expliquer par le fait que la symétrie est mieux conservée par la méthode axisymétrique plutôt que par la méthode des éléments de frontière. En effet, dans ce dernier cas la répartition des nœuds brise la symétrie du problème.



**Figure (5.25)** – Force hydrodynamique normalisée  $F_{zz}^1$  exercée sur la sphère numéro 1 en fonction de  $Z$  la distance à la paroi  $Z = 0$ , avec les deux méthodes : (a) axisymétrique (b) non axisymétrique. Les sphères sont en mouvement de translation vers la paroi avec une vitesse  $\mathbf{v}^1 = \mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^3 = -\mathbf{e}^3$



**Figure (5.26)** – Force hydrodynamique normalisée  $F_{zz}^k$  exercée sur la sphère numéro  $k = 2, 3$  en fonction de  $Z$  la distance de la première sphère à la paroi, avec les méthodes (a) axisymétrique (b) non axisymétrique pour la sphère 2 et les méthodes (c) axisymétrique (d) non axisymétrique pour la sphère 3. Les sphères sont en mouvement de translation vers la paroi avec une vitesse  $\mathbf{v}^1 = \mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^3 = -\mathbf{e}^3$

## 5.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons calculé les coefficients de résistance pour des configurations particulières dans les cas où il existe des solutions analytiques.

Les comparaisons de nos résultats avec ceux qui existent dans la littérature ont permis de valider le code mis au point en déterminant le domaine de validité de la méthode des éléments de frontière et les limites à prendre en compte pour un ordre d'erreur acceptable.

Le résultat obtenu pour le cas d'une seule sphère dans un fluide infini est comparé avec le résultat de Stokes (1851). Le cas d'une sphère au voisinage d'une paroi est comparé avec le résultat de Brenner [16] et Maude [72] lorsque la particule est en sédimentation perpendiculairement à la paroi. Le cas de deux sphères de tailles différentes dans un fluide infini est comparé avec le résultat de Jeffrey et Onishi [59].

Après avoir calculé la contrainte sur chaque élément de surface de la sphère, nous pouvons calculer la vitesse à l'intérieur du fluide. Une comparaison est effectuée avec les résultats récemment calculés [82] par la méthode des coordonnées bi-sphériques. La précision atteint  $10^{-6}$  lorsque le centre de la particule est à une distance supérieure à 2 rayons de la paroi. L'erreur sur la vitesse dans le fluide augmente au voisinage de la particule. En fait, ceci est dû à la singularité de la fonction de Green lorsque le point où l'on calcule la vitesse coïncide avec le point où se trouve le Stokeslet.

Une comparaison entre les deux méthodes de résolution présentées respectivement au chapitre 2 et au chapitre 3 appliquées à un problème axisymétrique, montre que la méthode axisymétrique est plus précise que la méthode BEM sur deux plans : temps de calcul et précision. Ceci est dû à la réduction d'une dimension de résolution pour le temps de calcul et à la répartition axisymétrique des triangles sur les surfaces des particules.

L'implémentation de la méthode des éléments de frontière répond bien aux exigences imposées par la complexité de la géométrie pour des particules de tailles et de formes quelconques. Néanmoins, des précautions sont à prendre dans la précision du calcul dans la zone de lubrification. Comme l'indique les présents résultats, pour des sphères. Les résultats deviennent imprécis pour des distances entre surfaces inférieurs au  $1/10^2$  du rayon.

# Chapitre 6

## Résultats numériques et simulations

### Sommaire

---

<b>6.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>106</b>
<b>6.2</b>	<b>Forces et couples exercés sur des particules de formes ellipsoïdales</b>	<b>107</b>
6.2.1	Une particule ellipsoïdale dans un écoulement de cisaillement	107
6.2.2	Interaction entre deux ellipsoïdes au voisinage d'une paroi	111
<b>6.3</b>	<b>Forces et couples exercés sur plusieurs particules sphériques</b>	<b>112</b>
6.3.1	Chaîne de particules : mouvement suivant la ligne des centres et parallèle à la paroi	112
6.3.2	Chaîne de particules : mouvement perpendiculaire à la ligne des centres et perpendiculaire à la paroi	116
6.3.3	Chaîne de particules : mouvement perpendiculaire à la ligne des centres et parallèle à la paroi	120
6.3.4	Effet de la position d'une particule dans une chaîne	123
6.3.5	Matrices de particules	125
<b>6.4</b>	<b>Calcul des trajectoires des particules</b>	<b>126</b>
6.4.1	Trajectoires de deux particules en sédimentation perpendiculaire à une paroi.	127
6.4.2	Trajectoires de deux particules en sédimentation parallèle à une paroi.	128
6.4.3	Trajectoires de trois particules au voisinage d'une paroi	130
<b>6.5</b>	<b>Champs de vitesse autour des particules</b>	<b>132</b>
6.5.1	Champs de vitesse autour de deux particules	133
6.5.2	Champs de vitesse autour de trois particules	134

---

<b>6.6</b>	<b>Champs d'écoulement autour des particules en sédimentation . . . . .</b>	<b>135</b>
6.6.1	Champs d'écoulement autour de deux particules en sédimentation . . . . .	135
6.6.2	Champs d'écoulement autour de trois particules en sédimentation au voisinage d'une paroi verticale . . . . .	137
<b>6.7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>141</b>

---

## 6.1 Introduction

Le problème général de l'écoulement autour de particules en mouvement dans un fluide au repos ou en écoulement ne peut pas être en général résolu analytiquement à ce jour. Ceci est dû à la complexité de la géométrie du problème. Mais des solutions assez générales sont possibles grâce à des méthodes numériques.

Dans le chapitre précédent nous avons montré l'efficacité de la méthode des éléments de frontière pour la résolution des équations intégrales de surface. Dans ce chapitre nous utilisons cette méthode pour explorer deux problèmes difficiles à résoudre théoriquement.

Nous calculons d'abord dans la première section les forces et les couples qui s'exercent sur des particules de formes ellipsoïdales. Nous considérons une particule ellipsoïdale en translation perpendiculairement à une paroi dans un fluide qui contient un écoulement de cisaillement et ensuite le cas de deux particules ellipsoïdales en mouvements perpendiculaires ou parallèles à la paroi.

Dans la deuxième section, nous considérons le problème de  $N_p = 3, 11, 21$  et  $61$  particules dans un fluide au repos, pour deux cas : le premier est celui d'une chaîne de particules de centres alignés parallèlement à la paroi et le deuxième cas est celui d'une chaîne de particules de centres alignés perpendiculairement à la paroi. La chaîne de particules est en mouvement de translation parallèle ou

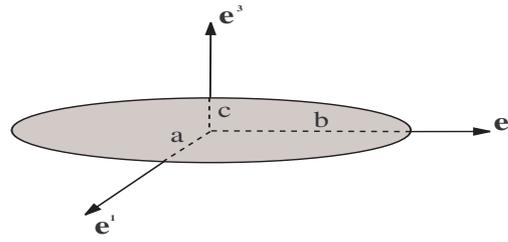
perpendiculaire à la paroi. D'autres configurations, telles que le cas d'une matrice de particules placées aux sommets d'un parallélépipède, seront traitées dans cette section. Nous avons aussi calculé les vitesses du fluide dans les cas d'une seule particule et le cas de deux particules dans un écoulement de cisaillement ainsi que dans le cas de trois particules en sédimentation dans un fluide au repos. A la fin de ce chapitre, Le problème complet de sédimentation de plusieurs particules en présence d'une paroi dans un fluide au repos est étudié afin d'aboutir à des simulations plus complètes.

## 6.2 Forces et couples exercés sur des particules de formes ellipsoïdales

Dans cette section on étudie des particules de forme ellipsoïdale. D'abord, on commence par présenter les résultats pour une particule ellipsoïdale immobile dans un écoulement de cisaillement sans la présence d'une paroi. Les résultats sont comparés avec ceux de Jeffery [58] et Gavze et al [37] et comparés aussi par rapport aux résultats pour la sphère unité. Par rapport à l'étude de Gavze et al [37] pour le cas d'une seule particule ellipsoïdale nous ajoutons l'étude de deux particules de forme ellipsoïdale.

### 6.2.1 Une particule ellipsoïdale dans un écoulement de cisaillement

Dans cette section, on calcule les forces et couples exercés sur une particule de forme ellipsoïdale de petit axe  $a$  suivant  $\mathbf{e}^1$ ,  $b$  suivant  $\mathbf{e}^2$  et  $c$  suivant  $\mathbf{e}^3$  voir figure (6.1). Soit  $Z$  la distance normalisée par  $a$  qui sépare le centre de l'ellipsoïde de la paroi.



**Figure (6.1)** – Un ellipsoïde d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , avec  $a$ ,  $b$ ,  $c$  les petits axes respectivement suivant  $\mathbf{e}^1$ ,  $\mathbf{e}^2$  et  $\mathbf{e}^3$ .

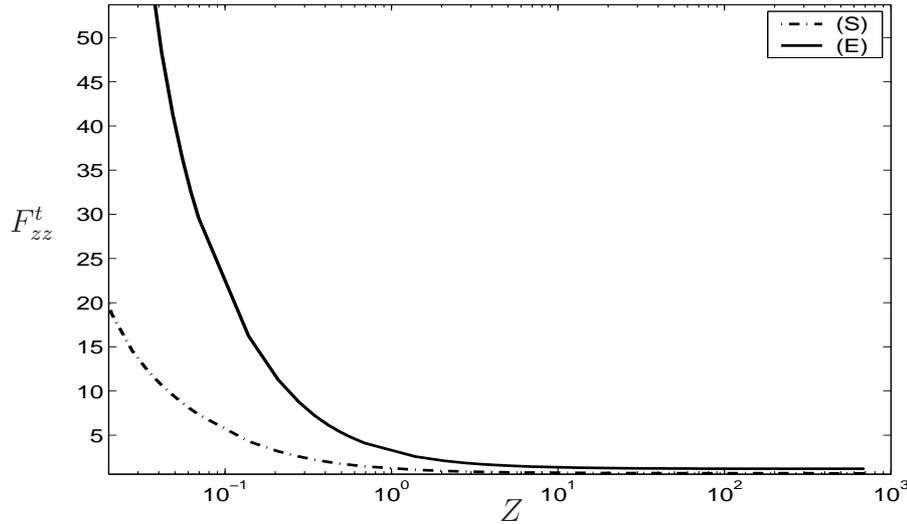
a/c	$F_x^\kappa / \mu \kappa z$			$F_z^\kappa / \mu \kappa z$		
	(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)
0.1	6.088	6.055	6.104	-1.098	-1.088	-1.109
0.2	7.834	7.798	7.841	-1.105	-1.106	-1.112
0.3	10.079	10.027	10.081	-0.999	-1.002	-1.004
0.5	12.172	12.105	12.171	-0.825	-0.827	-0.827
0.7	14.872	14.789	14.870	-0.529	-0.530	-0.529
0.8	16.204	16.113	16.201	-0.362	-0.363	-0.362
0.9	17.529	17.432	17.527	-0.185	-0.186	-0.185
0.95	18.190	18.089	18.188	-0.094	-0.095	-0.093
0.990	18.718	18.614	18.716	-0.019	-0.021	-0.019
0.9999	18.848	18.744	18.846	-0.000	-0.002	-0.000
0.999999	18.850	18.747	18.848	-0.000	-0.000	-0.000

**Table (6.1)** – Une particule ellipsoïdale dans un fluide infini en écoulement de cisaillement avec la vitesse  $\mathbf{v}^\infty = \kappa z \mathbf{e}^1$ . (a) résultats analytiques de Jeffery [58], (b) résultats de Gavze et Shapiro [37] (1200 triangles) et (c) nos résultats (512 triangles).

z/a	$F_x^\kappa / 6\pi\mu a \kappa z$			$C_y^\kappa / 4\pi\mu a^3 \kappa$		
	(a)	(b)	(c)	(a)	(b)	(c)
1.045	1.668	1.654	1.667	0.948	0.935	0.945
1.128	1.616	1.603	1.615	0.954	0.941	0.951
1.543	1.439	1.428	1.439	0.974	0.961	0.973
2.352	1.278	1.269	1.278	0.990	0.977	0.989
3.762	1.167	1.159	1.167	0.997	0.984	0.996
10.068	1.059	1.052	1.059	1.000	0.987	0.999

**Table (6.2)** – Une particule sphérique dans un fluide infini en écoulement de cisaillement avec la vitesse  $\mathbf{v}^\infty = \kappa z \mathbf{e}^1$ . (a) résultats analytiques de Goldman, Cox et Brenner [45], (b) résultats de Gavze et Shapiro [37] (1200 triangles) et (c) nos résultats (512 triangles).

Considérons d'abord une particule centrée en  $z = Z$  en mouvement de translation avec une vitesse  $\mathbf{v} = -\mathbf{e}_3$  perpendiculairement à une paroi plane d'équation  $z = 0$  et calculons la force  $F_{zz}^t$  suivant  $(Oz)$ . La force exercée sur une particule sphérique est plus faible que celle exercée sur une particule de forme ellipsoïdale telle que  $\frac{b}{a} = 3, \frac{c}{a} = 1$  dans le voisinage de la paroi, voir figure (6.2). Notons que les deux particules ont le même volume et la particule sphérique prise est de rayon  $\sqrt[3]{3}$ .

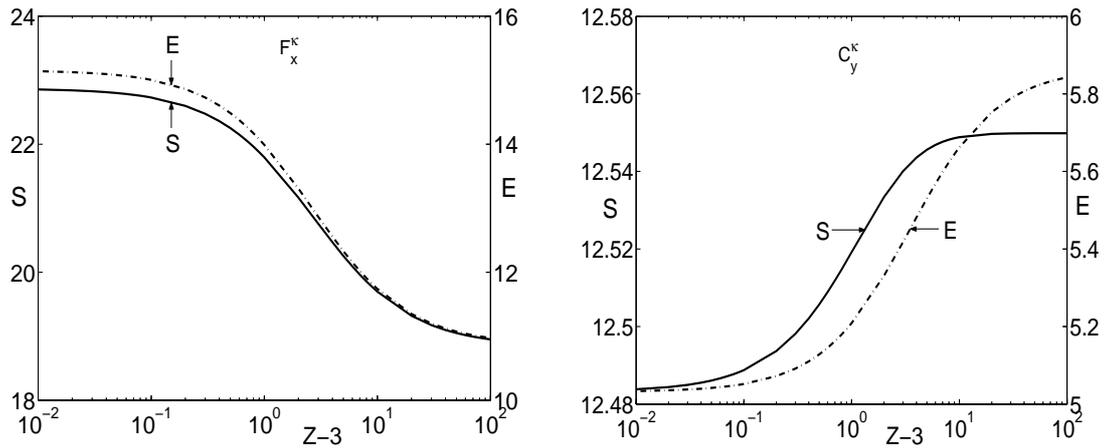


**Figure (6.2)** – La composante normalisée de la force  $F_{zz}^t$  qui s'exerce sur une particule en sédimentation perpendiculaire à la paroi d'équation  $Z = 0$  en fonction de la distance à la paroi : (E) pour une particule ellipsoïdale d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z-Z)^2}{c^2} = 1$  avec  $b/a = 3$  et  $c/a = 1$ ; (S) pour une particule sphérique de même volume.

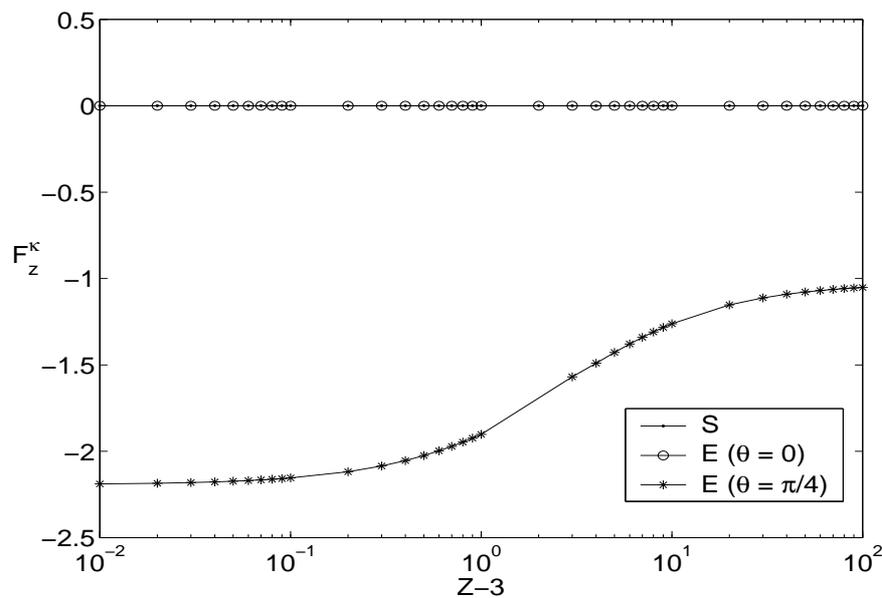
On considère une particule fixée dans un fluide en écoulement de cisaillement avec une vitesse d'écoulement proportionnelle à  $Z$  avec la vitesse  $\mathbf{v}^\infty = \kappa z \mathbf{e}_y$  où  $\kappa = 1$ .

La force exercée sur une particule ellipsoïdale telle que  $b/a = 1$  et  $c/a = 3$  est supérieure à celle exercée sur une particule sphérique unité lorsque les particules s'approchent de la paroi ( $Z - 3 < 1$ ) (figure (6.3) à gauche). L'écoulement de cisaillement provoque une variation plus importante de la vitesse de rotation autour de  $(Oy)$  pour une particule ellipsoïdale que pour une particule sphérique ((figure (6.3) à droite)).

Sur la figure (6.4) montre l'effet de la forme et de la position de la particule par rapport à la paroi sur la force exercée sur un ellipsoïdale telle que  $b/a$  et  $c/a = 3$ . Une particule inclinée d'un angle  $\theta = \pi/4$  autour ( $Oy$ ) reçoit une force de 'portance' qui à pour effet d'approcher (ou d'éloigner) la particule de la paroi (suivant l'angle  $\theta$ ). Par contre une particule sphérique ou ellipsoïdale non inclinée ( $\theta = 0$ ) ne subit aucune force perpendiculaire à la paroi.



**Figure (6.3)** – Comparaison de la force  $F_z^\kappa$  (à gauche) et du couple  $C_y^\kappa$  (à droite) exercés sur une sphère unité (S) et un ellipsoïde (E) telle que  $b/a = 1$  et  $c/a = 3$ . Les particules fixées dans un fluide en écoulement de cisaillement de vitesse  $\mathbf{v}^\infty = \kappa z \mathbf{e}^1$  et la distance du centre de la particule à la paroi est  $Z$ .



**Figure (6.4)** – Comparaison de la force  $F_z^\kappa$  exercée sur une sphère unité (S) et un ellipsoïde (E) telle que  $b/a = 1$  et  $c/a = 3$  pour deux positions de l'ellipsoïde ( $\theta = 0$  et  $\theta = \pi/4$  où  $\theta$  est l'angle de rotation autour de ( $Oy$ )).

## 6.2.2 Interaction entre deux ellipsoïdes au voisinage d'une paroi

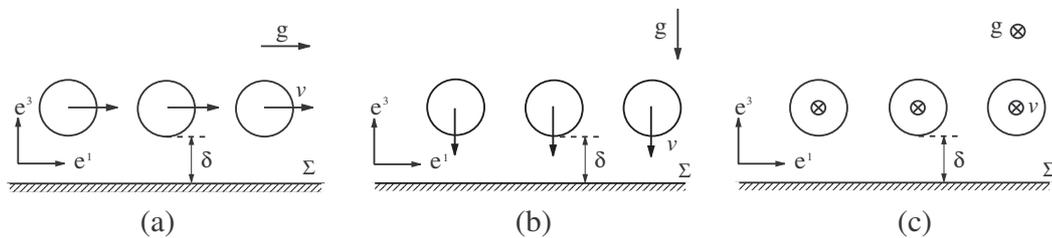
Considérons deux particules de forme ellipsoïdale en translation perpendiculairement à la paroi d'équation  $Z = 0$ . Les longueurs sont normalisées par rapport à  $a$ . L'équation du premier ellipsoïde est  $(x + 3)^2 + \frac{y^2}{9} + (z - Z)^2 = 1$  et l'équation du deuxième ellipsoïde est  $(x - 3)^2 + \frac{y^2}{9} + (z - Z)^2 = 1$  avec les rapports  $b/a = 3$  et  $c/a = 1$  pour les deux ellipsoïdes. Pour le cas d'une particule en translation perpendiculairement à la paroi suivant  $(Oy)$  avec une vitesse  $\mathbf{v} = -\mathbf{e}^3$ , la composante normalisée  $F_{zz}^t$  de la force suivant  $(Oz)$  est exprimée en fonction de  $Z$  la distance à la paroi table (6.3). Et pour le cas d'une particule en translation parallèlement à la paroi suivant  $(Oy)$  avec une vitesse  $\mathbf{v} = -\mathbf{e}^2$ , la composante normalisée  $F_{yy}^t$  en fonction de la distance  $Z$  est présentée table (6.3). La normalisation de la force exercée sur les ellipsoïdes est faite par rapport à la force exercée sur une sphère de même volume que l'ellipsoïde en question, soit une sphère de volume  $4\pi$  et de rayon  $\sqrt[3]{3}$ .

$Z - 4$	$F_{zz}^t/6\pi\mu a$		$F_{yy}^t/6\pi\mu a$	
	(1)	(2)	(1)	(2)
0.01	114.58	114.58	2.2796	2.2796
0.02	30.866	30.866	1.9769	1.9769
0.04	14.644	14.644	1.7630	1.7630
0.06	10.653	10.653	1.6415	1.6415
0.08	8.6018	8.6018	1.5547	1.5547
0.1	7.2803	7.2803	1.4869	1.4869
0.5	2.2330	2.2330	1.0232	1.0232
1	1.4978	1.4978	0.8634	0.8634
5	0.8569	0.8569	0.6462	0.6462
10	0.7423	0.7423	0.6058	0.6058
50	0.6403	0.6403	0.5680	0.5680

**Table (6.3)** – Forces hydrodynamiques  $F_{zz}^t$  et  $F_{yy}^t$  exercées sur deux particules en translation à gauche perpendiculaire à une paroi et à droite parallèlement à celle-ci. Les ellipsoïdes (1) et (2) sont centrés respectivement : à gauche aux points  $(0, -3, Z)$  et  $(0, 3, Z)$  et à droite aux points  $(-3, 0, Z)$  et  $(3, 0, Z)$ .

## 6.3 Forces et couples exercés sur plusieurs particules sphériques

Dans cette section les forces et les couples exercés sur  $N_p$  particules sphériques sont calculés en fonction des distances qui les séparent de la paroi. On commence par une chaîne de particules en mouvement de translation suivant la ligne qui relie leurs centres étant parallèle à la paroi. On étudie les trois mouvements indiqués dans les configurations (a), (b) et (c) sur la figure (6.5). Ensuite, on étudie le cas d'une matrice de particules réparties sur les sommets d'un polyèdre (voir figures (6.27) et (6.29)) pour comparaisons avec les résultats des problèmes où la répartition de particules est périodique.

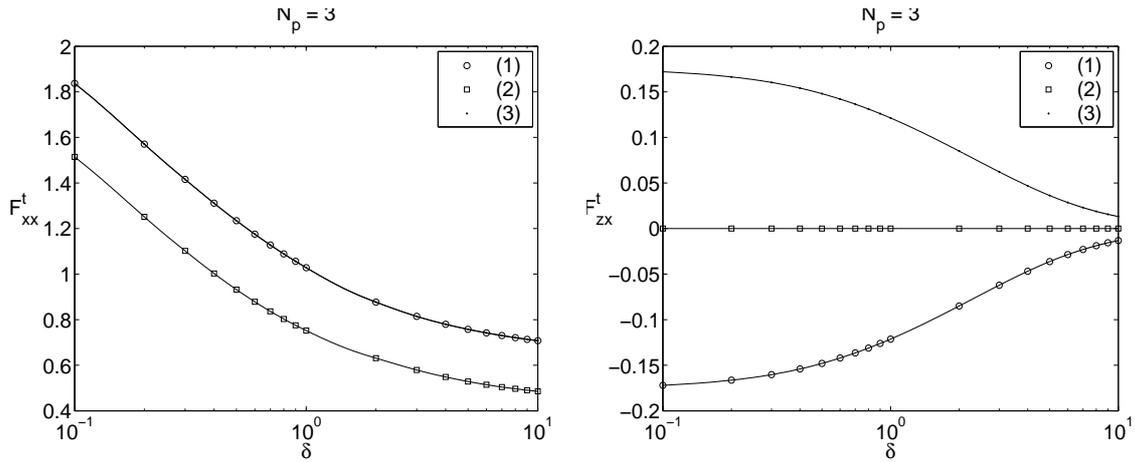


**Figure (6.5)** – Trois configurations de  $N_p$  particules ( $N_p = 3$ ) sont étudiées : configuration (a) Particules en translation suivant la ligne de leurs centres et parallèlement à la paroi; configuration (b) Particules en translation perpendiculaire à la ligne de leurs centres et perpendiculaire à la paroi; configuration (c) Particules en translation perpendiculaire à la ligne de leurs centres et parallèlement à la paroi.

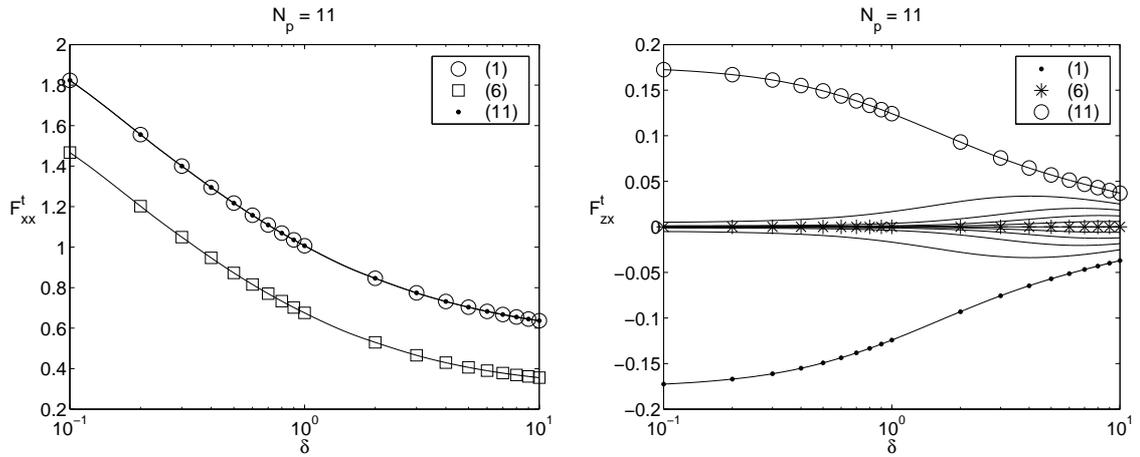
### 6.3.1 Chaîne de particules : mouvement suivant la ligne des centres et parallèle à la paroi

On considère une chaîne de particules sphériques de rayon  $a$  de centres alignés parallèlement à la paroi, cas (a) sur la figure (6.5). La particule numéro  $k$  de la chaîne est centrée au point de coordonnées  $(x/a = 3(k - 1), y/a = 0, z/a = 1 + \delta/a)$ . Le nombre de particules étudiées dans cette section est  $N_p = 3, 11, 21$  et 61 particules par chaîne. La chaîne de particules est en mouvement de translation avec une vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^1$ .

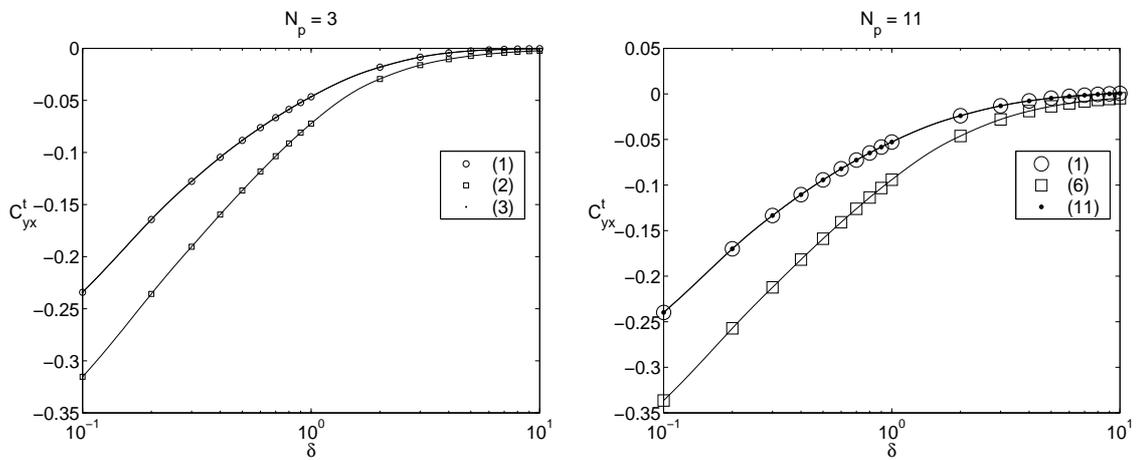
Les composantes de la force normalisée appliquée sur une particule en translation suivant la direction  $\mathbf{e}^1$  sont notées  $(F_{xx}^t, F_{yx}^t, F_{zx}^t)$  et les composantes du couple normalisé appliqué sur une particule en translation suivant la direction  $\mathbf{e}^1$  sont notées  $(C_{xx}^k, C_{yx}^k, C_{zx}^k)$ . Les forces et les couples exercés sur les particules numéro  $k$  avec  $k = 1..N_p$  sont calculés en fonction de  $\delta$  avec la distance  $\delta$  qui varie dans l'intervalle  $[0.1, 10]$ . Sur les figures (6.6), (6.7), (6.9), (6.10) les composantes de la force  $F_{xx}^t$  et  $F_{zx}^t$  suivant  $(Ox)$  sont exprimées en fonction de  $\delta$ . On remarque que la force  $F_{xx}^t$  exercée suivant  $\mathbf{e}^1$  sur la particule intermédiaire est la moins importante, et que les forces appliquées sur les particules d'extrémités de la chaîne ont la même valeur. Ceci est dû à la symétrie de la figure et la linéarité des équations de Stokes. Sur les figures (6.8), (6.11) la composante du couple  $C_{yx}^t$  suivant  $(Oy)$  est exprimée en fonction de  $\delta$ .



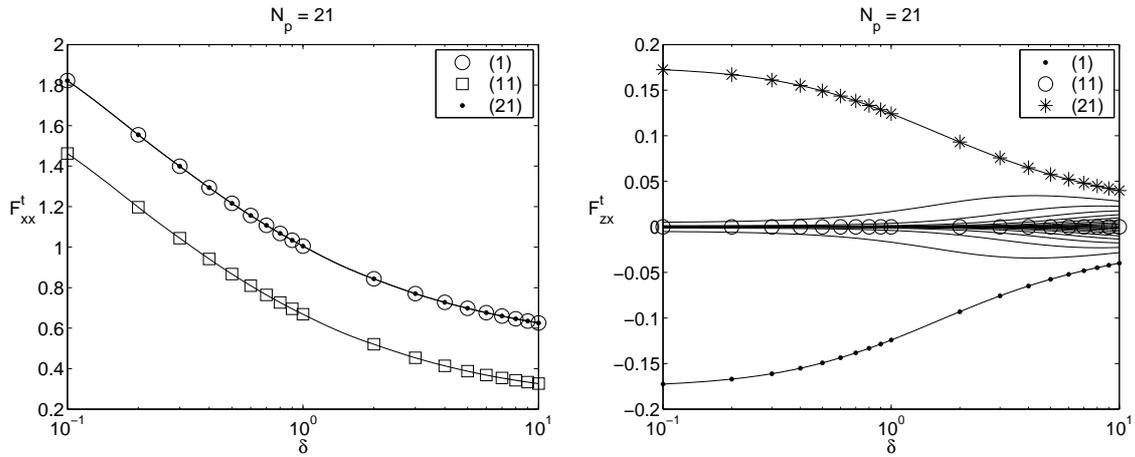
**Figure (6.6)** – La composante normalisée  $F_{xx}^t$  (à gauche) et  $F_{zx}^t$  (à droite) de la force exercée sur la particule numéro (1),(2) et (3) d'une chaîne de trois particules sphériques en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^1$ .



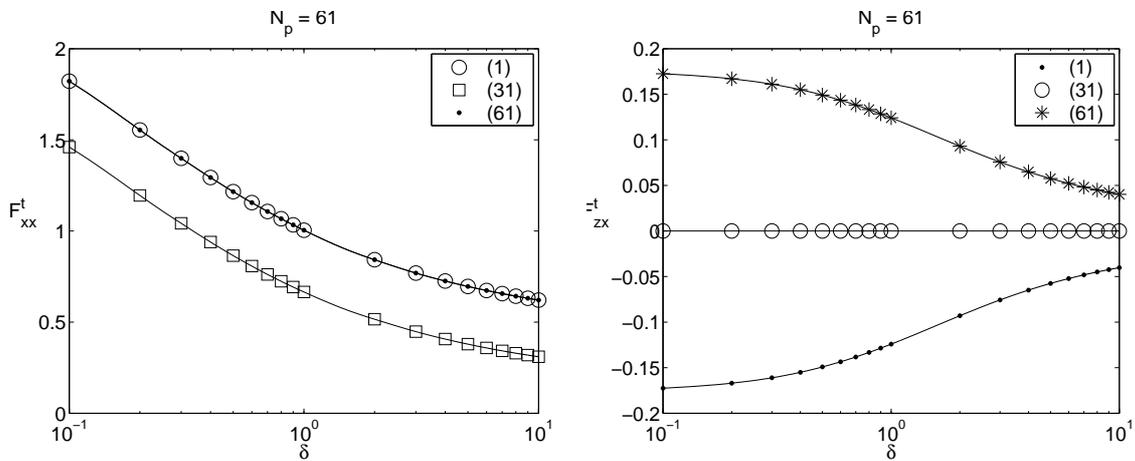
**Figure (6.7)** – La composante normalisée  $F_{xx}^t$  (à gauche) et  $F_{zx}^t$  (à droite) de la force exercée sur la particule (1), (6) et (11) d'une chaîne de particules sphériques de 11 particules en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^1$ .



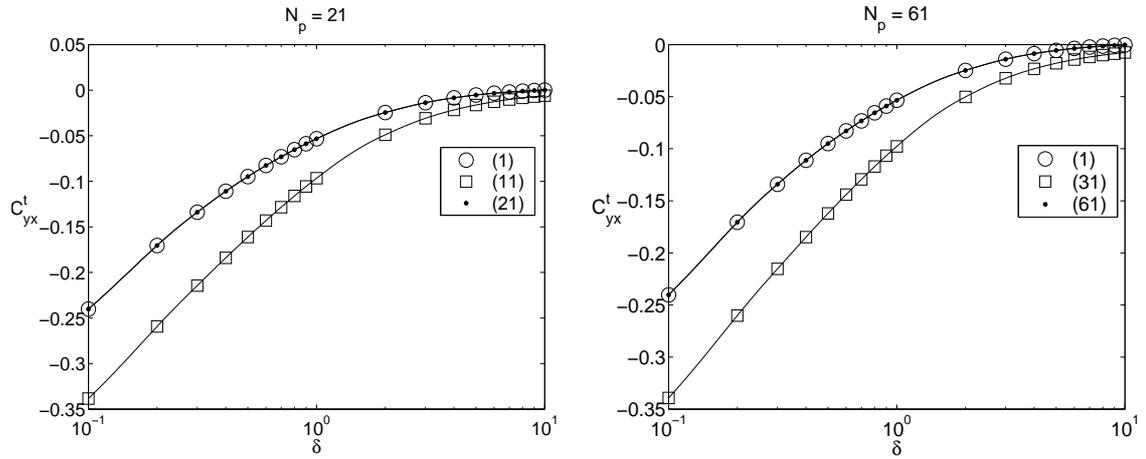
**Figure (6.8)** – La composante normalisée du couple  $C_{yx}^t$ , à gauche pour les mêmes conditions que figure (6.6), à droite pour les mêmes conditions que figure (6.7).



**Figure (6.9)** – La composante normalisée  $F_{xx}^t$  (à gauche) et  $F_{zx}^t$  (à droite) de la force exercée sur la particule (1), (11) et (21) d'une chaîne de 21 particules sphériques en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^1$ .



**Figure (6.10)** – La composante normalisée  $F_{xx}^t$  (à gauche) et  $F_{zx}^t$  (à droite) de la force exercée sur la particule (1), (31) et (61) d'une chaîne de 61 particules sphériques en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^1$ .

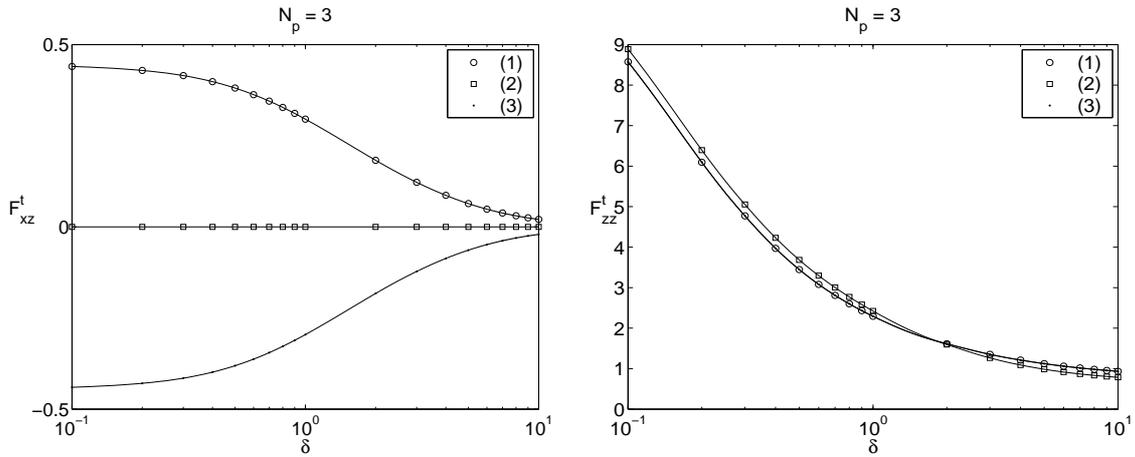


**Figure (6.11)** – La composante normalisée du couple  $C_{yx}^t$ , à gauche pour les mêmes conditions que figure (6.9), à droite pour les mêmes conditions que figure (6.10).

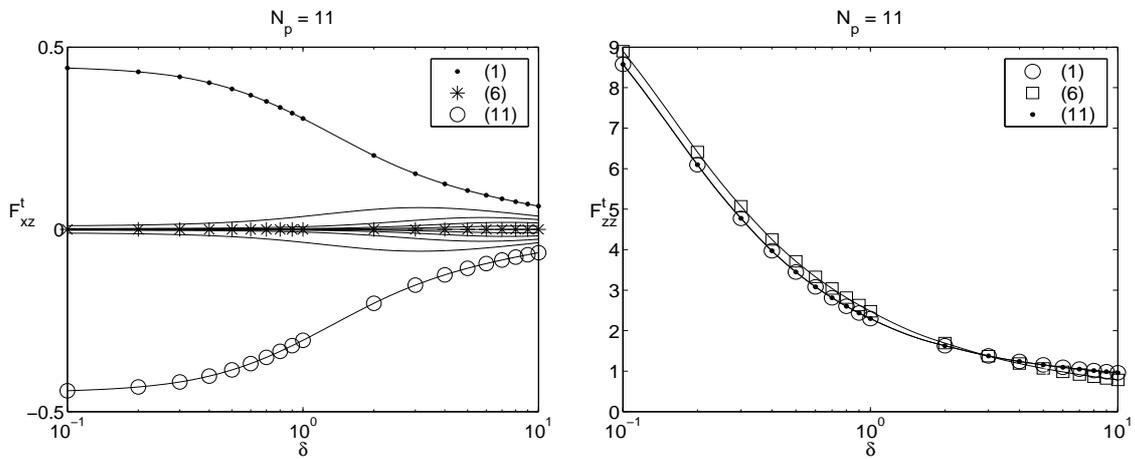
### 6.3.2 Chaîne de particules : mouvement perpendiculaire à la ligne des centres et perpendiculaire à la paroi

On considère une chaîne de particules sphériques de centres alignés parallèlement à la paroi, cas (b) sur la figure (6.5). La particule numéro  $k$  de la chaîne est centrée au point de coordonnées  $(x/a = 3(k-1), y/a = 0, z/a = 1 + \delta/a)$ . Le nombre de particules étudiées dans cette section est  $N_p = 3, 11, 21$  et  $61$  particules par chaîne. La chaîne de particules est en mouvement de translation avec une vitesse  $\mathbf{v} = -\mathbf{e}^3$ .

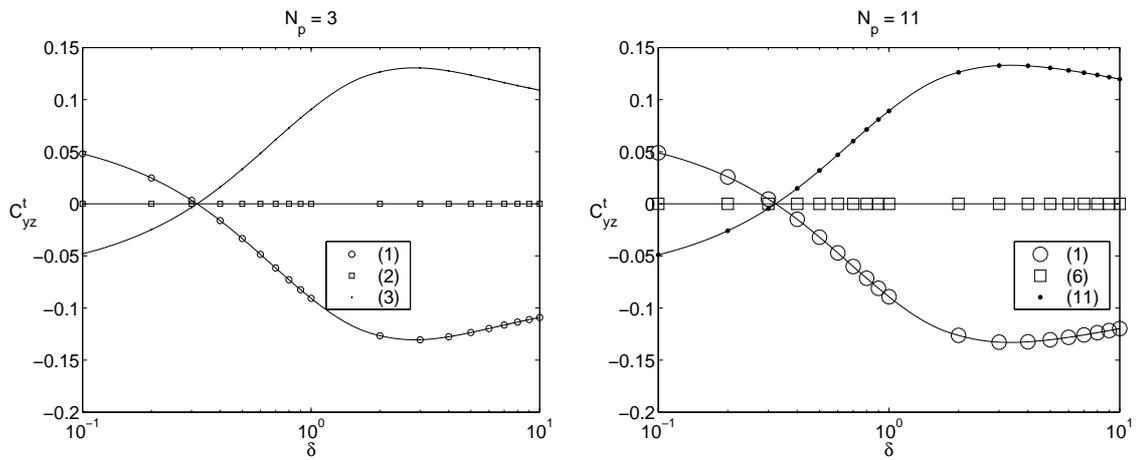
Les composantes de la force normalisée appliquée sur une particule en translation suivant la direction  $\mathbf{e}^3$  sont notées  $(F_{xz}^t, F_{yz}^t, F_{zx}^t)$  et les composantes du couple normalisé sont notées  $(C_{xz}^k, C_{yz}^k, C_{zz}^k)$ . Les forces et les couples exercés sur les particules numéro  $k$  avec  $k = 1..N_p$  sont calculés en fonction de  $\delta$  avec la distance  $\delta$  qui varie dans l'intervalle  $[0.1, 10]$ .



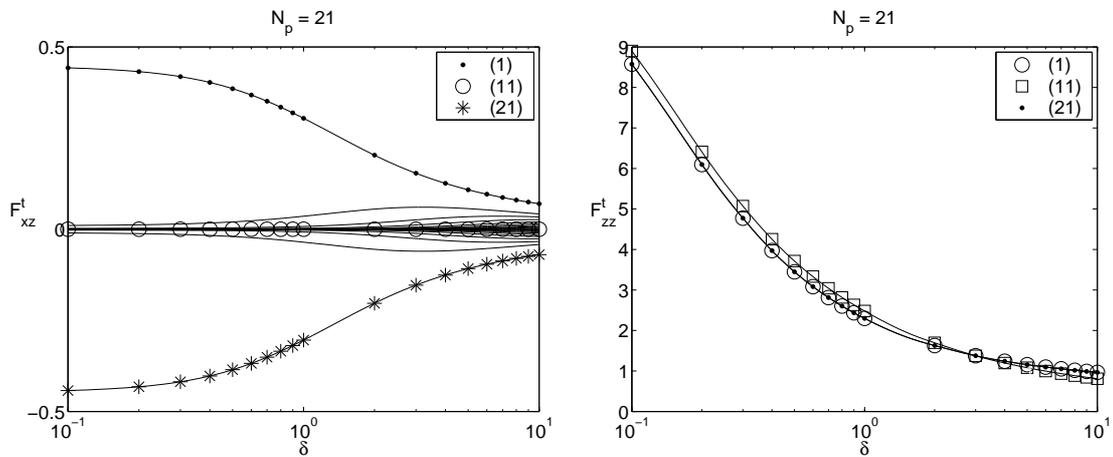
**Figure (6.12)** – La composante normalisée  $F_{xz}^t$  (à gauche) et  $F_{zz}^t$  (à droite) de la force exercée sur la particule numéro (1),(2), et (3) d’une chaîne de particules sphériques en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = -\mathbf{e}^3$ .



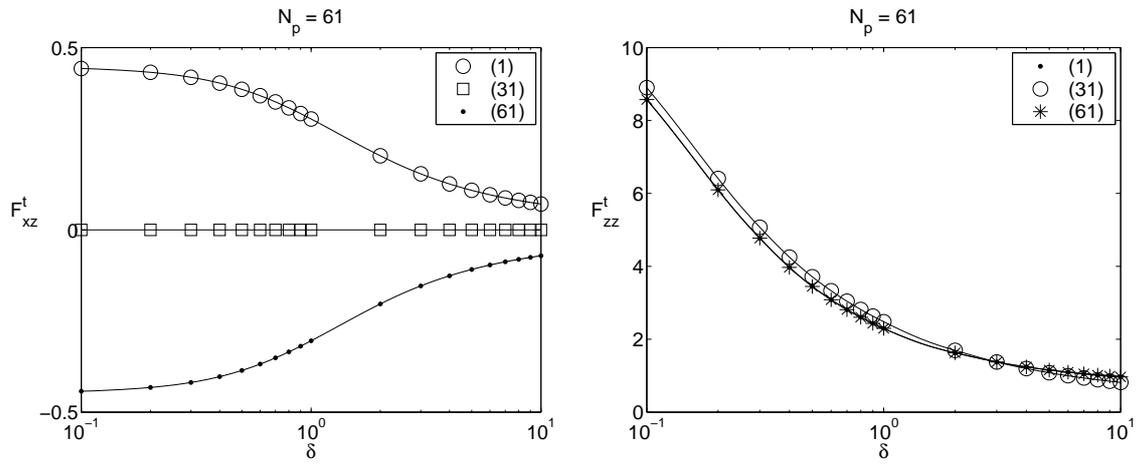
**Figure (6.13)** – La composante normalisée  $F_{xz}^t$  (à droite) et  $F_{zz}^t$  (à gauche) de la force exercée sur la particule (1), (6) et (11) d’une chaîne 11 de particules sphériques en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = -\mathbf{e}^3$ .



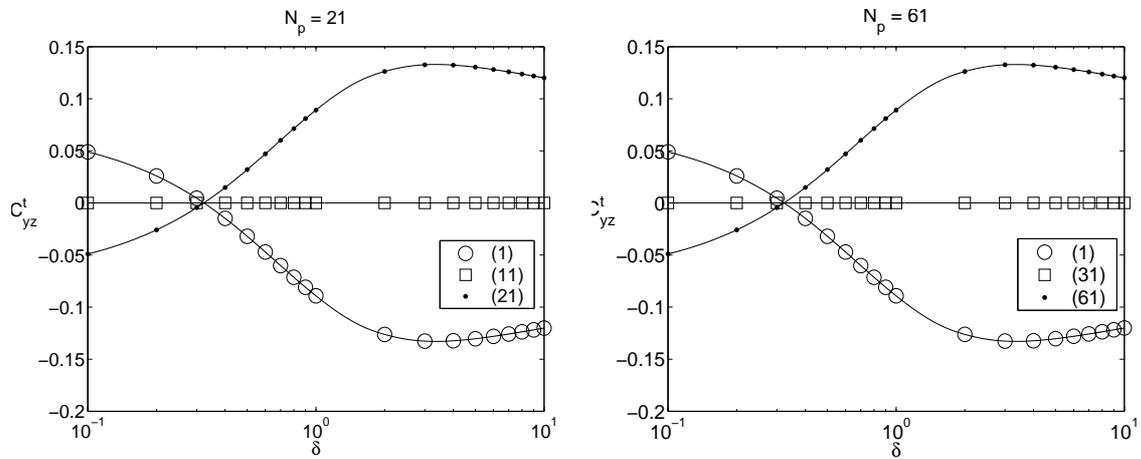
**Figure (6.14)** – La composante normalisée du couple  $C_{yz}^t$ , à gauche pour les mêmes conditions que figure (6.12), à droite pour les mêmes conditions que figure (6.13).



**Figure (6.15)** – La composante normalisée  $F_{xz}^t$  (à gauche) et  $F_{zz}^t$  (à droite) de la force exercée sur la particule (1), (11) et (21) d'une chaîne de 21 particules sphériques en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = -\mathbf{e}^3$ .



**Figure (6.16)** – La composante normalisée  $F_{xz}^t$  (à gauche) et  $F_{zz}^t$  (à droite) de la force exercée sur la particule (1), (31) et (61) d'une chaîne de 61 particules sphériques en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^1$ .

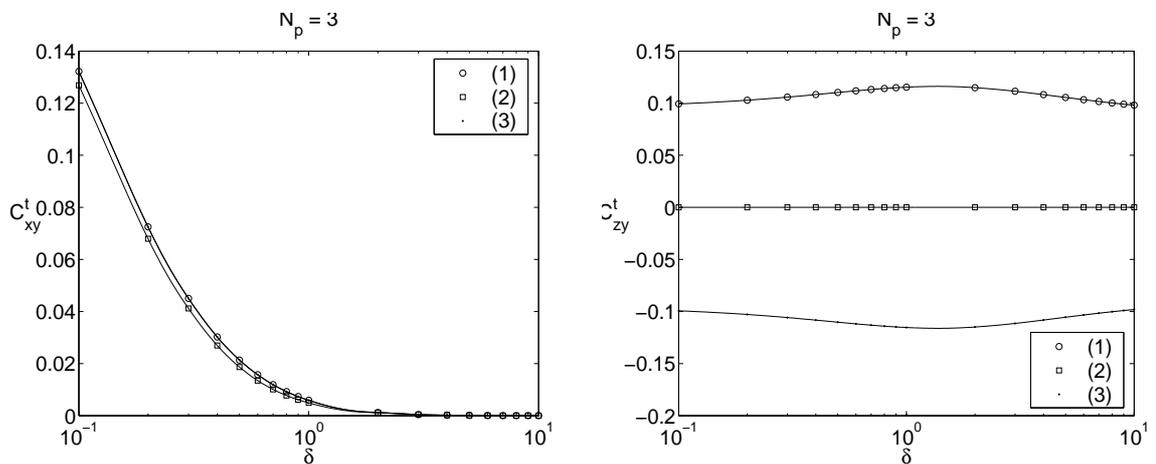


**Figure (6.17)** – La composante normalisée du couple  $C_{yz}^t$ , à gauche pour les mêmes conditions que figure (6.13), à droite pour les mêmes conditions que figure (6.16).

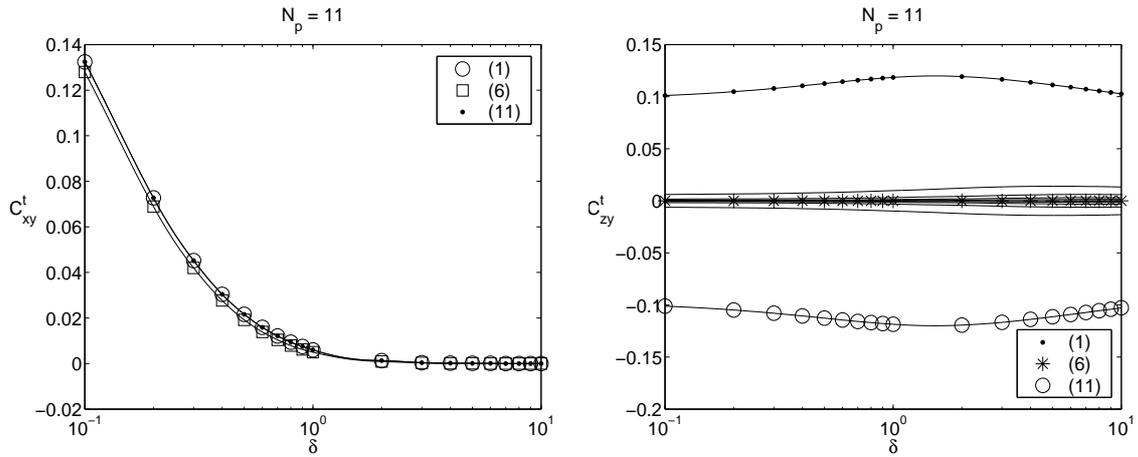
### 6.3.3 Chaîne de particules : mouvement perpendiculaire à la ligne des centres et parallèle à la paroi

On considère une chaîne de particules sphériques de centres alignés parallèlement à la paroi, cas (c) sur la figure (6.5). La particule numéro  $k$  de la chaîne est centrée au point de coordonnées  $(x/a = 3(k-1), y/a = 0, z/a = 1 + \delta/a)$ . Le nombre de particules étudiées dans cette section est  $N_p = 3, 11, 21$  et  $61$  particules par chaîne. La chaîne de particules est en mouvement de translation avec une vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^2$ .

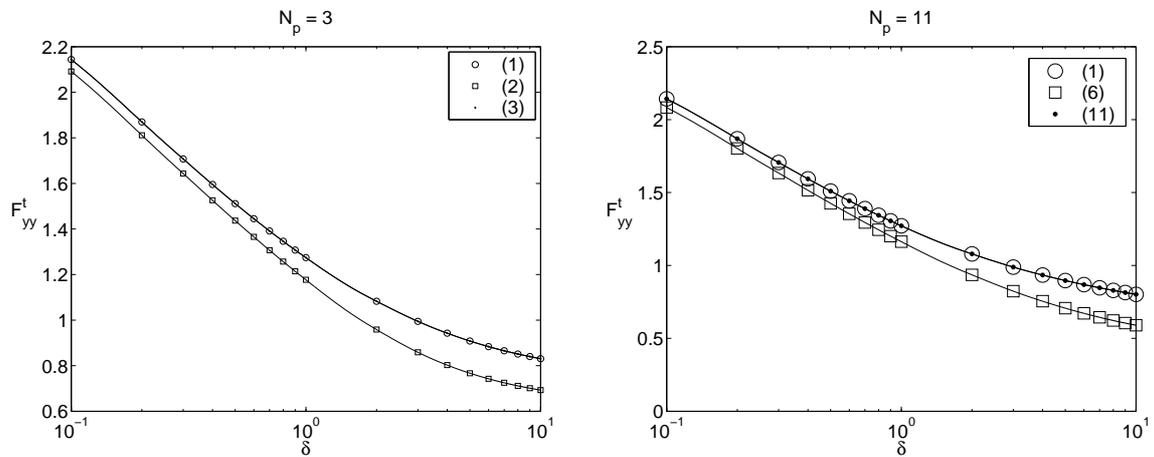
Les composantes de la force normalisée appliquée sur une particule en translation suivant la direction  $\mathbf{e}^2$  sont notées  $(F_{xy}^t, F_{yy}^t, F_{zy}^t)$  et les composantes du couple normalisé appliqué sur une particule en translation suivant la direction  $\mathbf{e}^2$  sont notées  $(C_{xy}^k, C_{yy}^k, C_{zy}^k)$ . Les forces et les couples exercés sur les particules numéro  $k$  avec  $k = 1..N_p$  sont calculés en fonction de  $\delta$  avec la distance  $\delta$  qui varie dans l'intervalle  $[0.1, 10]$ . La chaîne de particules est en mouvement de translation avec une vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^2$ .



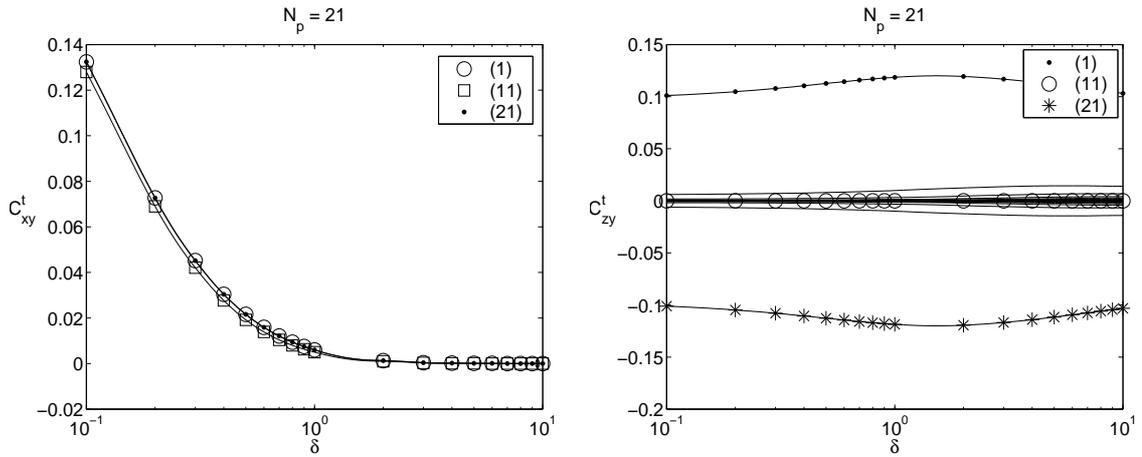
**Figure (6.18)** – La composante normalisée  $C_{xy}^t$  (à gauche) et  $C_{zy}^t$  (à droite) du couple exercé sur la particule numéro (1),(2), et (3) d'une chaîne de particules sphériques en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^2$ .



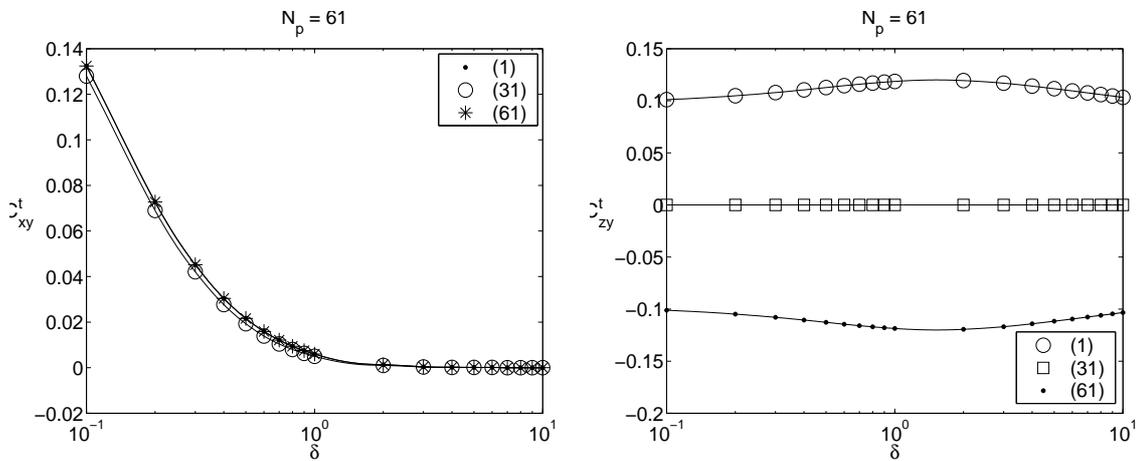
**Figure (6.19)** – La composante normalisée  $C_{xy}^t$  (à droite) et  $C_{zz}^t$  (à gauche) du couple exercé sur la particule numéro (1),(6), et (11) d'une chaîne de particules sphériques en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^2$ .



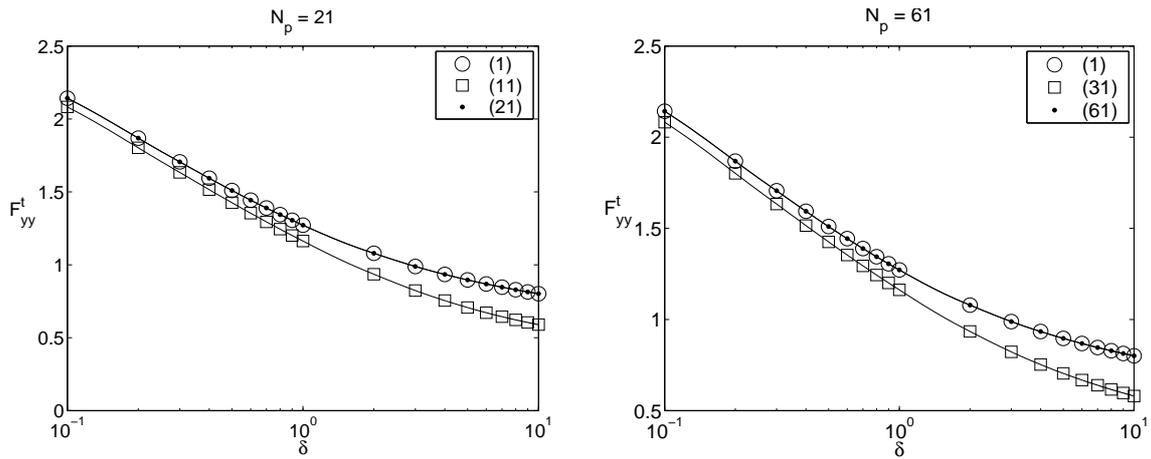
**Figure (6.20)** – La composante normalisée du couple  $F_{yy}^t$ , à gauche pour les mêmes conditions que figure (6.19), à droite pour les mêmes conditions que figure (6.22).



**Figure (6.21)** – La composante normalisée  $C_{xy}^t$  (à droite) et  $C_{zy}^t$  (à gauche) du couple exercé sur la particule numéro (1),(11), et (21) d'une chaîne de  $N_p$  particules sphériques en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^2$ .



**Figure (6.22)** – La composante normalisée  $C_{xy}^t$  (à droite) et  $C_{zy}^t$  (à gauche) du couple exercé sur la particule numéro (1),(31), et (61) d'une chaîne de particules sphériques en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^2$ .

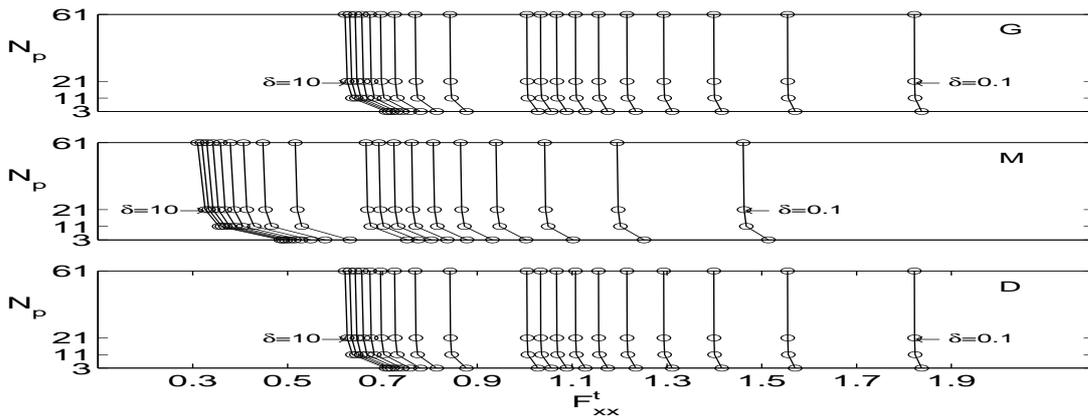


**Figure (6.23)** – La composante normalisée du couple  $F_{yy}^t$ , à gauche pour les mêmes conditions que figure (6.21), à droite pour les mêmes conditions que figure (6.22).

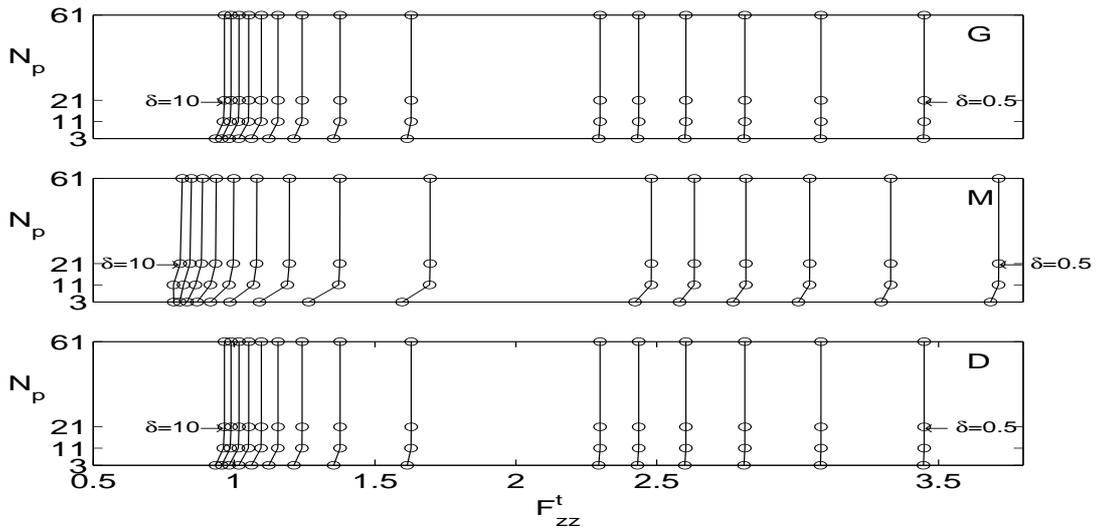
### 6.3.4 Effet de la position d'une particule dans une chaîne

Nous avons vu dans cette section 6.3 que les forces exercées sur les particules ne sont pas identiques pour les particules d'une chaîne. D'où l'intérêt de comparer pour toutes les chaînes l'effet de la position sur les forces exercées sur les particules aux extrémités gauche, milieu et droite de la chaîne, notées respectivement G, M et D. Sur les figures (6.24), (6.25) et (6.26) le numéro de la particule est exprimé en fonction de la force exercée dans la même direction que le mouvement pour les valeurs de  $\delta$ , la distance qui sépare les particules de la paroi :

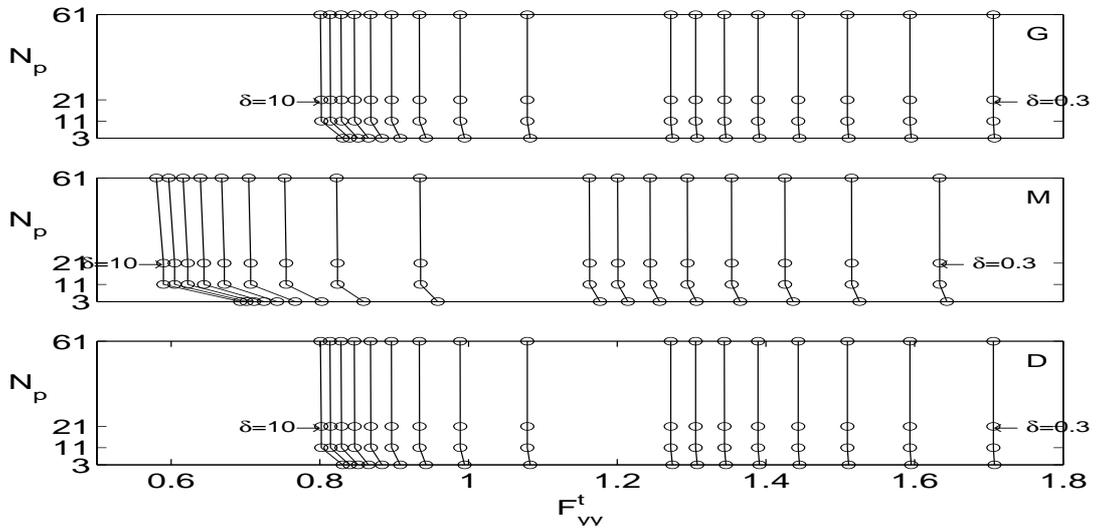
$$\delta \in \{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7, 0.8, 0.9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\} \quad (*)$$



**Figure (6.24)** – Force exercée sur les particules d'une chaîne de particules dans la configuration (a), figure (6.5) pour différentes valeurs de  $\delta$ , cf (\*), la distance qui sépare les particules de la paroi.



**Figure (6.25)** – Force exercée sur les particules d’une chaîne de particules dans la configuration (b), figure (6.5) pour différentes valeurs de  $\delta$ , cf (\*), la distance qui sépare les particules de la paroi.



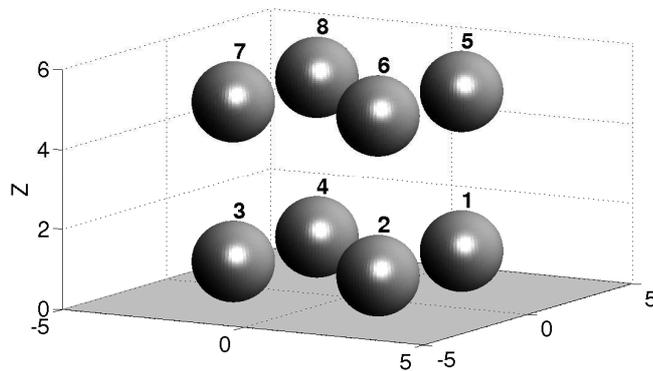
**Figure (6.26)** – Force exercée sur les particules d’une chaîne de particules dans la configuration (c), figure (6.5) pour différentes valeurs de  $\delta$ , cf (\*), la distance qui sépare les particules de la paroi.

### 6.3.5 Matrices de particules

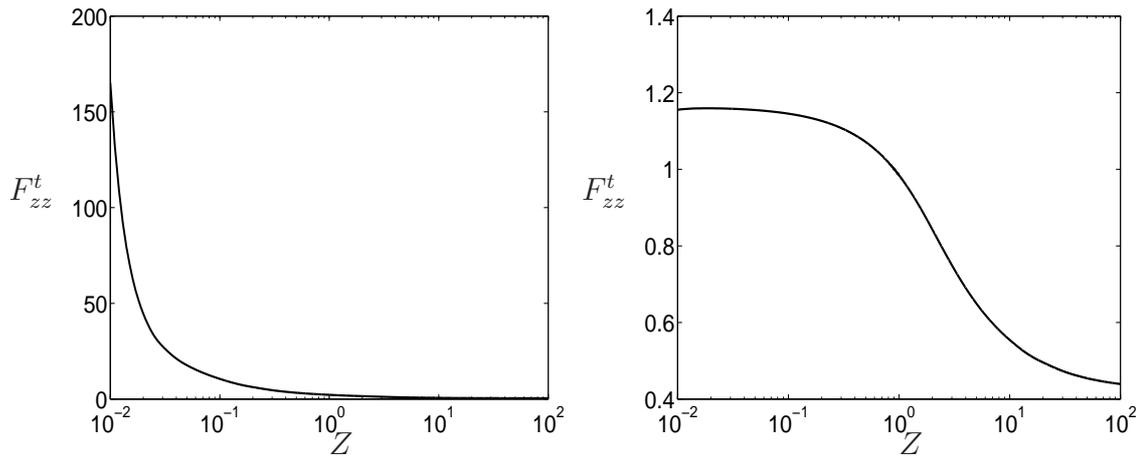
On considère une matrice de  $N_p$  particules placées sur les sommets des polyèdres représentés sur les figures (6.27) et (6.29) pour  $N_p = 8$  et  $N_p = 12$ .

Considérons de huit particules centrées aux sommets  $(2, 2, Z + 1)$ ;  $(2, -2, Z + 1)$ ;  $(-2, -2, Z + 1)$ ;  $(-2, 2, Z + 1)$ ;  $(2, 2, Z + 5)$ ;  $(2, -2, Z + 5)$ ;  $(-2, -2, Z + 5)$ ;  $(-2, 2, Z + 5)$  d'un parallélépipède, cf figure (6.27). On trace la composante  $F_{zz}^t$  suivant l'axe ( $Oz$ ) de la force pour un mouvement de translation de toutes les particules suivant ( $Oz$ ). La symétrie qui existe dans cette configuration donne un résultat identique pour les quatre particules de chaque plan parallèle à la paroi. Cette symétrie est vérifiée sur la figure (6.28) (à gauche) où l'on a tracé la force  $F_{zz}^t$  exercée sur les particules 1, 2, 3, 4 et sur la figure (6.28)(à droite) où l'on a tracé la force  $F_{zz}^t$  exercée sur les particules 5, 6, 7, 8, les forces qui sont identiques dans chaque cas.

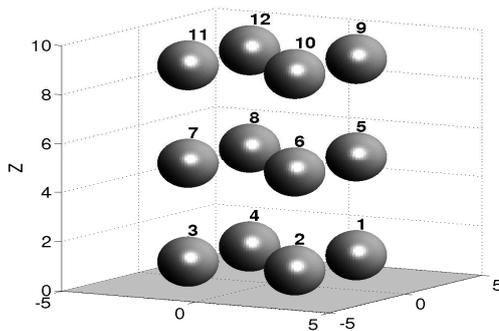
De même dans le cas des douze particules arrangées comme indiqué (6.29), les forces appliquées sur chacune des sphère d'un même plan  $x = cte$  restent identiques : il en est ainsi pour les quatre particules 9, 10, 11, 12 sur la figure (6.30). Les forces exercées sur chaque particule d'un même plan parallèle à la paroi diminue proportionnellement à la distance des centres à la paroi et cette diminution est beaucoup plus importante à proximité de la paroi.



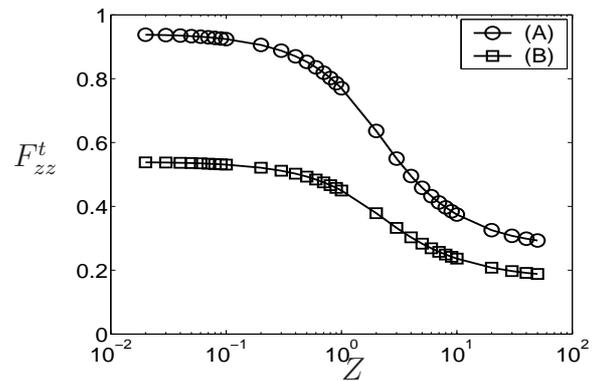
**Figure (6.27)** – Huit particules numérotées de 1 à 8, de coordonnées respectivement  $(2, 2, Z + 1)$ ;  $(2, -2, Z + 1)$ ;  $(-2, -2, Z + 1)$ ;  $(-2, 2, Z + 1)$ ;  $(2, 2, Z + 5)$ ;  $(2, -2, Z + 5)$ ;  $(-2, -2, Z + 5)$ ;  $(-2, 2, Z + 5)$ .



**Figure (6.28)** – Matrice de huit particules figure (6.27), en sédimentation perpendiculairement à la paroi d'équation  $z = 0$ . Force hydrodynamique en fonction de  $Z$  exercée sur les particules 1, 2, 3, 4 (à gauche) et 5, 6, 7, 8 (à droite)



**Figure (6.29)** – Douze particules numérotées de 1 à 12, de coordonnées respectivement  $(2, 2, Z + 1)$ ;  $(2, -2, Z + 1)$ ;  $(-2, -2, Z + 1)$ ;  $(-2, 2, Z + 1)$ ;  $(2, 2, Z + 5)$ ;  $(2, -2, Z + 5)$ ;  $(-2, -2, Z + 5)$ ;  $(-2, 2, Z + 5)$ ;  $(2, 2, Z + 9)$ ;  $(2, -2, Z + 9)$ ;  $(-2, -2, Z + 9)$ ;  $(-2, 2, Z + 9)$ .



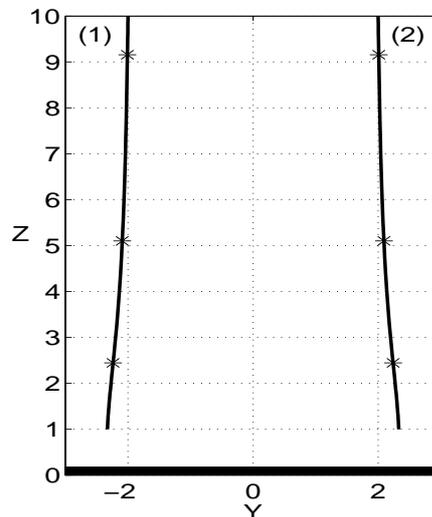
**Figure (6.30)** – Matrice de douze particules figure (6.29), en sédimentation perpendiculairement à la paroi d'équation  $z = 0$ .  $F_{zz}^t$  exercée sur les particules 5, 6, 7, 8 pour (A) et exercée sur les particules 9, 10, 11, 12 pour (B) en fonction de  $Z$ .

## 6.4 Calcul des trajectoires des particules

Après avoir calculé les forces et les couples exercés sur les particules, nous allons déterminer les trajectoires des particules en appliquant l'algorithme de la section (4.9). Nous considérons des particules en sédimentation sous l'effet de la gravité dans un fluide au repos dans deux cas : la sédimentation perpendiculaire à la paroi et la sédimentation parallèle à la paroi.

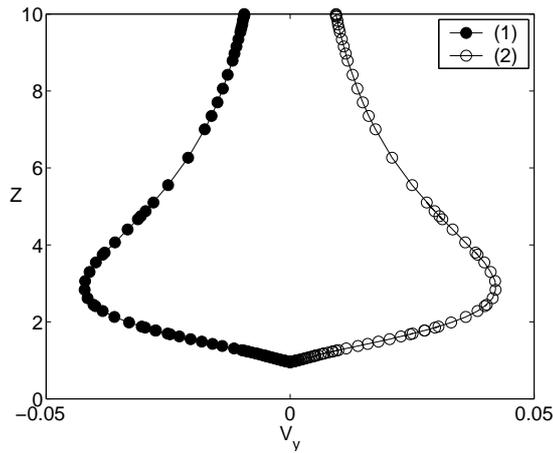
### 6.4.1 Trajectoires de deux particules en sédimentation perpendiculaire à une paroi.

Deux particules sphériques identiques se déplacent sous l'effet de la sédimentation perpendiculairement à la paroi d'équation  $z = 0$ . La position initiale de la particule (1) est  $(-2, 0, 10)$  et celle de la particule (2) est  $(+2, 0, 10)$ , cf figure (6.31). Les étoiles dans cette figure représentent la position des deux particules après le même pas de temps d'intégration dans la résolution de l'équation différentielle du mouvement (4.70).

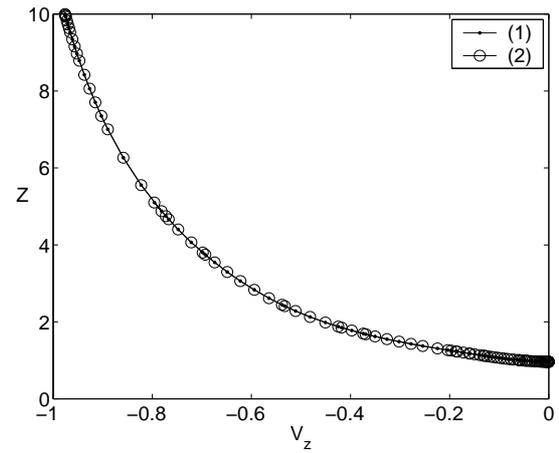


**Figure (6.31)** – Les trajectoires de deux particules en sédimentation perpendiculairement à une paroi.

Sur la figure (6.32), la vitesse horizontale (parallèle à la paroi)  $V_y$  est exprimée en fonction de  $Z$  et elle atteint un extremum au voisinage de la paroi pour  $Z = 3$  pour les deux particules. Les vitesses des deux particules sont de même module et de signes opposés. Sur la figure (6.33) le vitesse verticale  $V_z$  est décroissante vers la valeur 0 lorsque la particule touche la paroi.



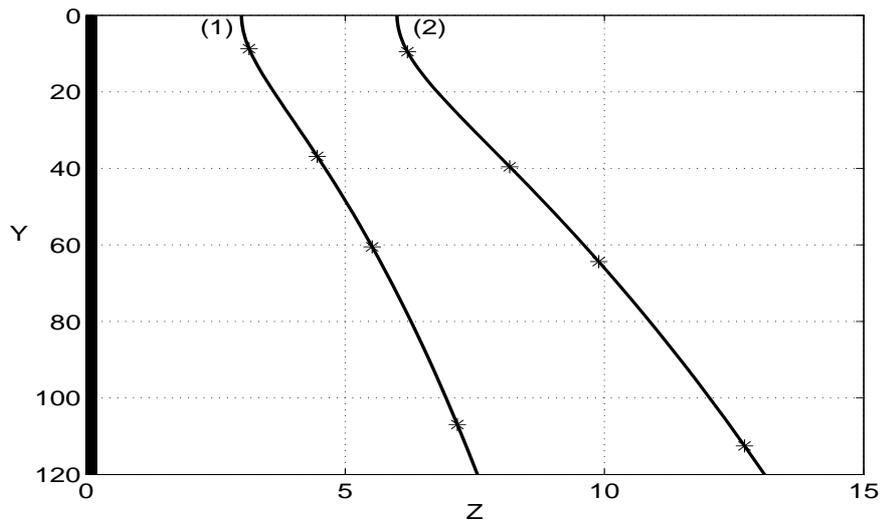
**Figure (6.32)** – Profil de la vitesse  $V_y$  des particules de la figure (6.31) en fonction de  $Z$  pour la particule numéro (1) et la particule numéro (2).



**Figure (6.33)** – Profil de la vitesse  $V_z$  des particules de la figure (6.31) en fonction de  $Z$  pour la particule numéro (1) et la particule numéro (2).

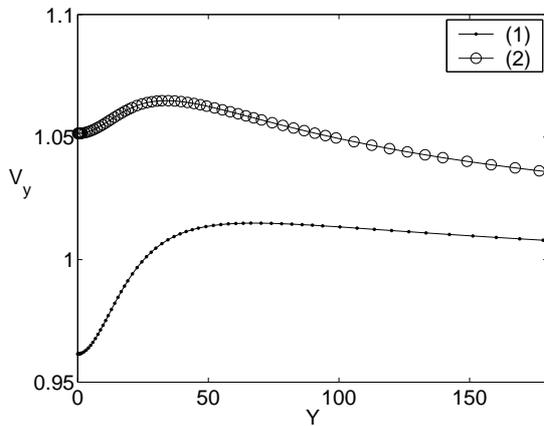
### 6.4.2 Trajectoires de deux particules en sédimentation parallèle à une paroi.

On considère deux particules sphériques (1) et (2) de centres respectivement  $(0, 0, 3)$  et  $(0, 0, 6)$ . Les deux particules sont en mouvement de sédimentation sous l'effet de la gravitation dans un fluide au repos. La figure (6.34) montre les trajectoires des deux particules par rapport à la paroi d'équation  $z = 0$  (le trait épais sur la figure 6.34 représente la paroi). Les étoiles représentent les positions des deux particules calculées après le même pas d'intégration dans la résolution des équations différentielles ordinaires du mouvement. Les deux particules s'éloignent de la paroi qui exerce sur elles de fortes interactions hydrodynamiques. La particule (1) la plus proche de la paroi est freinée plus que la particule (2). On remarque aussi que la particule (1) s'éloigne plus que la particule (2) de la paroi (lorsque  $Y$  varie entre 0 et 120,  $Z$  passe de 3 à 7.3 pour la particule (1) et pour la particule (2),  $Z$  passe de la valeur 6 à 13).

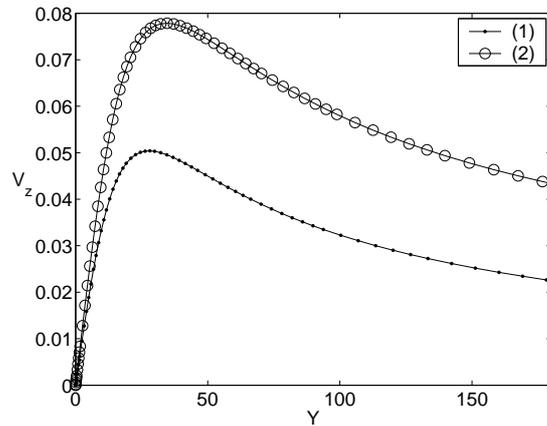


**Figure (6.34)** – Les trajectoires de deux particules en sédimentation parallèlement à la paroi, avec effet faible de la paroi.

Sur la figure (6.35), le profil de vitesse  $V_y$  est tracé en fonction de  $Y$  pour les deux particules (1) et (2). On constate un maximum dans l'intervalle  $[0, 50]$ . Par ailleurs, la figure (6.36), représente la vitesse horizontale  $V_z$ . Les deux particules démarrent avec une vitesse  $V_z = 0$ . La vitesse  $V_z$  est beaucoup plus petite que  $V_y$ . Ceci se traduit par les longues distances parcourues selon  $Y$  comparées à celles parcourues selon  $Z$  (voir figure (6.34)).



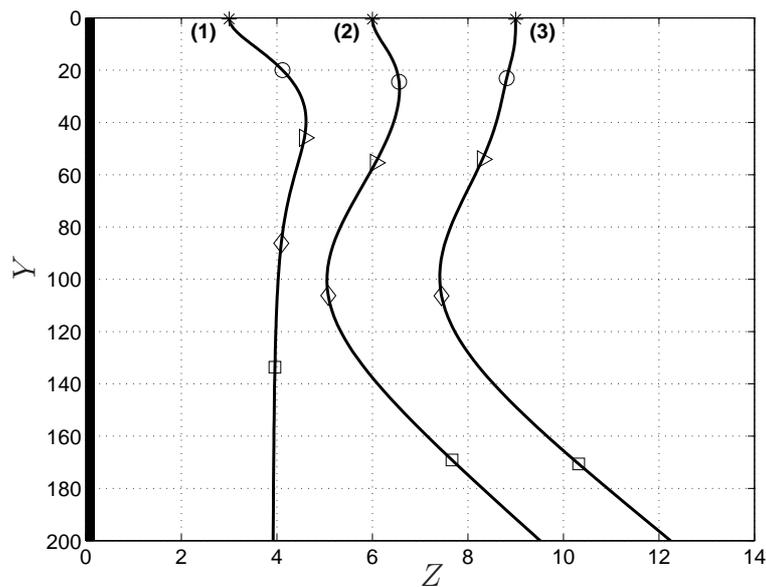
**Figure (6.35)** – Profil de la vitesse verticale des particules de la figure (6.34) en fonction de  $Y$  pour la particule numéro (1) et la particule numéro (2).



**Figure (6.36)** – Profil de la vitesse horizontale des particules de la figure (6.34) en fonction  $Y$  pour la particule numéro (1) et la particule numéro (2).

### 6.4.3 Trajectoires de trois particules au voisinage d'une paroi

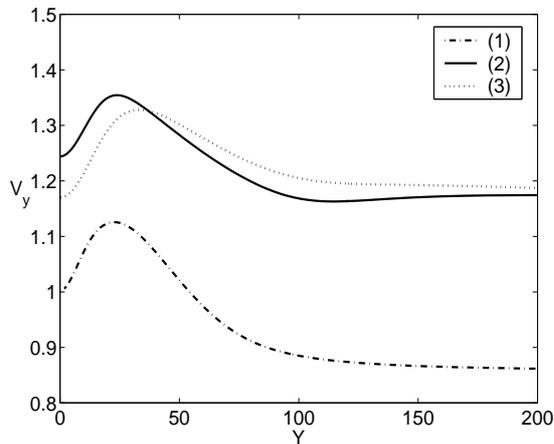
Trois particules (1), (2) et (3) placées initialement aux positions respectivement  $(0, 0, 3)$ ,  $(3, 0, 3)$  et  $(6, 0, 3)$  sont en sédimentation dans un fluide au repos parallèlement à la paroi verticale d'équation  $z = 0$ . Leurs trajectoires sont tracées sur la figure (6.37). Les interactions entre les trois particules influent sur leurs trajectoires. La particule (1) la plus proche de la paroi subit une attraction par interaction hydrodynamique avec les deux autres, puis elle est repoussée vers la paroi qui ralentit sa vitesse (le marqueur de position losange indique un léger retard de la première particule par rapport au deux autres après le même pas de calcul). La particule du milieu démarre avec une vitesse supérieure aux deux autres vitesses. A partir de la position  $Y = 100$  on remarque que les trois particules se séparent et les deux particules (2) et (3) sont projetées loin de la paroi.



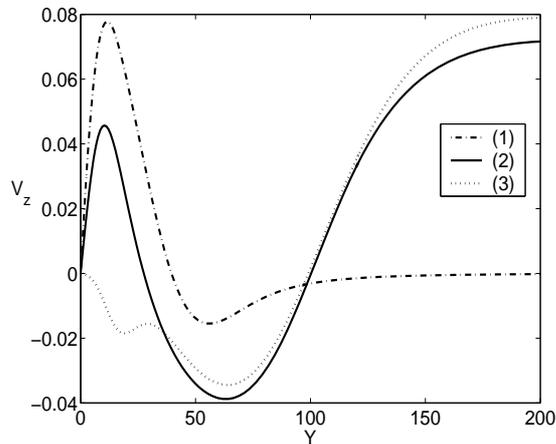
**Figure (6.37)** – Trajectoires de trois particules initialement aux positions  $(0, 0, 3)$ ,  $(0, 0, 6)$  et  $(0, 0, 9)$  en sédimentation ( $\mathbf{g} = g \mathbf{e}^2$ ) dans un fluide au repos au voisinage d'une paroi verticale d'équation  $Z = 0$ . Des marqueurs sur les courbes des trajectoires indiquant la position après le même laps de temps.

Sur la figure (6.38), le profil de vitesse verticale  $V_y$  est tracé en fonction de  $Y$  pour les deux particules (1) et (2) démarrants avec des vitesses non nulles. On constate

que la particule (1), la plus proche de la paroi, possède la vitesse  $V_y$  la plus faible. Ceci se traduit sur la figure (6.37) par le décalage du marqueur de position (après le même pas d'intégration) de la particule (1) par rapport à ceux des particules (2) et (3). Par ailleurs, sur la figure (6.39), on remarque que les particules (1) et 2 s'éloignent au début de la paroi, ce que montrent les valeurs de  $V_z$  positives et la particule (3) s'en rapproche ce que montrent les valeurs négatives de  $V_z$ . Ensuite, dans l'intervalle  $[10, 60]$ , on remarque que les trois particules se rapprochent de la paroi. Enfin, à partir de  $Y > 100$ , on remarque que la particule 1 qui est la plus proche de la paroi, tend vers une vitesse  $V_z$  nulle tandis que les deux autres particules (2) et (3) possèdent une vitesse  $V_z$  croissante positive engendrant leurs éloignements de la paroi.

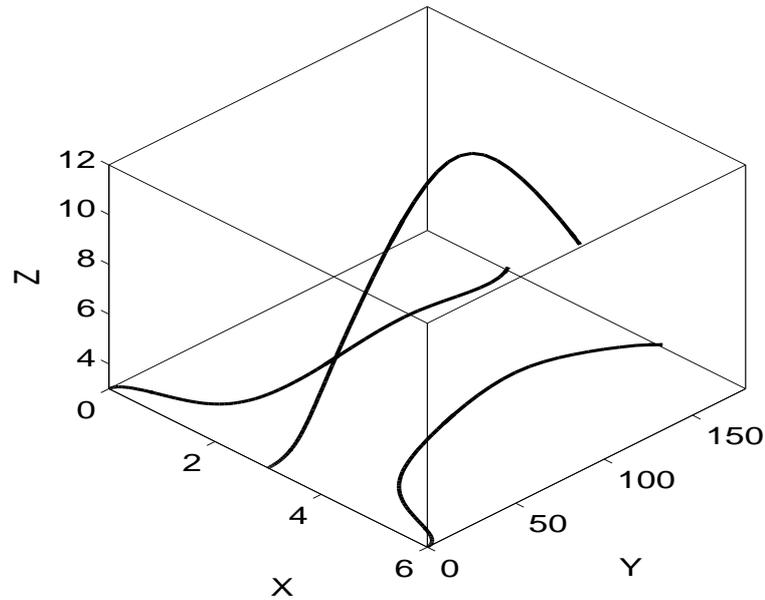


**Figure (6.38)** – Profil de la vitesse  $V_y$  des particules (1),(2) et (3) de la figure (6.37) en fonction de  $Z$ .

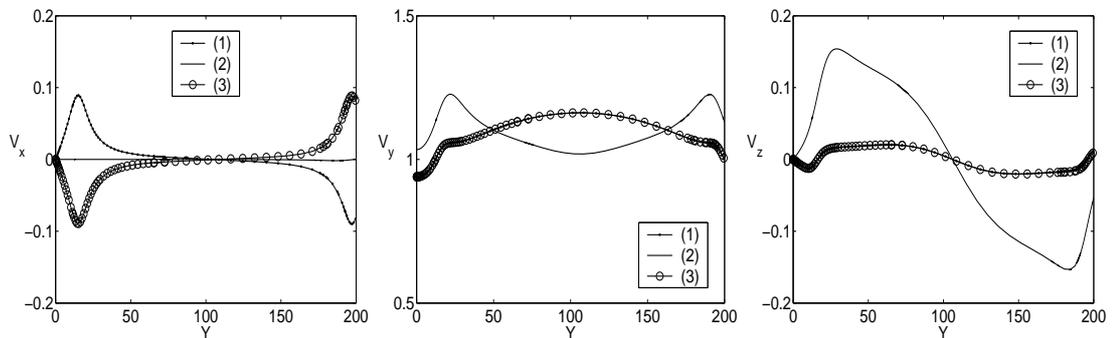


**Figure (6.39)** – Profil de la vitesse  $V_z$  des particules (1),(2) et (3) de la figure (6.37) en fonction de  $Z$ .

La figure (6.40) montre les trajectoires des trois particules initialement aux positions  $(0,0,3)$ ,  $(3,0,3)$  et  $(6,0,3)$  en sédimentation dans un fluide au repos. Sur la figure (6.41), les profils des vitesses  $V_x$ ,  $V_y$  et  $V_z$  sont représentés en fonction de  $Y$  pour les particules (1), (2) et (3). On remarque que le mouvement de ces particules est tridimensionnel.



**Figure (6.40)** – Trajectoires de trois particules initialement aux positions  $(0, 0, 3)$ ,  $(3, 0, 3)$  et  $(6, 0, 3)$  en sédimentation ( $\mathbf{g} = g \mathbf{e}^2$ ) dans un fluide au repos au voisinage d'une paroi verticale d'équation  $z = 0$ . Les particules sont soumises à la force de gravitation seulement  $\mathbf{g} = g \mathbf{e}^2$ .



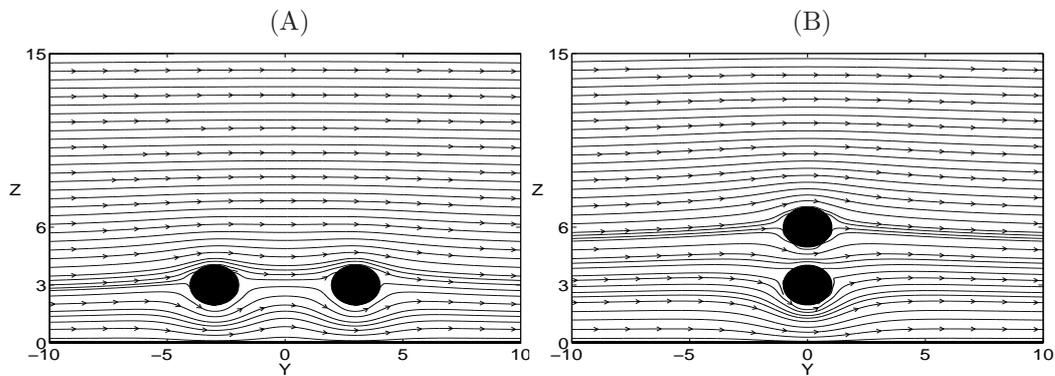
**Figure (6.41)** – Profil de la vitesse  $V_x, V_y, V_z$  des particules de la figure (6.40) en fonction de  $Y$  pour les particules numéro (1), (2) et (3).

## 6.5 Champs de vitesse autour des particules

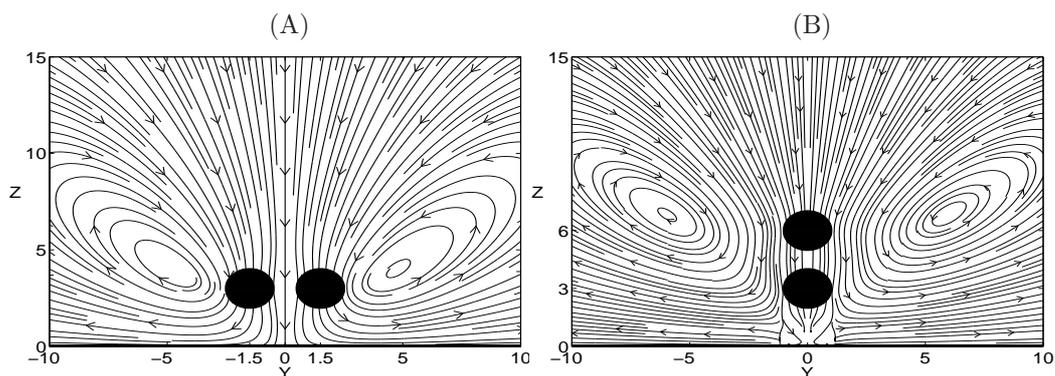
Dans cette section les particules sont d'abord considérées immobiles dans un écoulement de cisaillement de vitesse  $\mathbf{v}^\infty = \kappa z \mathbf{e}^2$  avec  $\kappa = 1$ , puis en sédimentation dans un fluide au repos avec la vitesse de sédimentation  $\mathbf{v} = -\mathbf{e}^3$ . Le champ de vitesse est tracé dans le plan perpendiculaire à la paroi passant par les centres des particules.

### 6.5.1 Champs de vitesse autour de deux particules

Deux configurations sont choisies pour évaluer le champ de vitesse dans le fluide voir figure (6.42) et (6.43). Dans la première configuration, la ligne de centres est parallèle à la paroi et dans la deuxième elle est perpendiculaire à la paroi. Sur la figure (A) les champs de vitesse sont tracés autour des deux particules de coordonnées  $(0, -1.5, 3)$  et  $(0, 1.5, 3)$  et sur la figure (B) les champs de vitesse sont tracés au voisinage des deux particules de coordonnées  $(0, 0, 3)$  et  $(0, 0, 6)$ . Sur les figures de (6.42) l'écoulement est perturbé par la présence des particules immobiles. Sur les figures (6.43) les particules sont en sédimentation produisant des zones de recirculations.



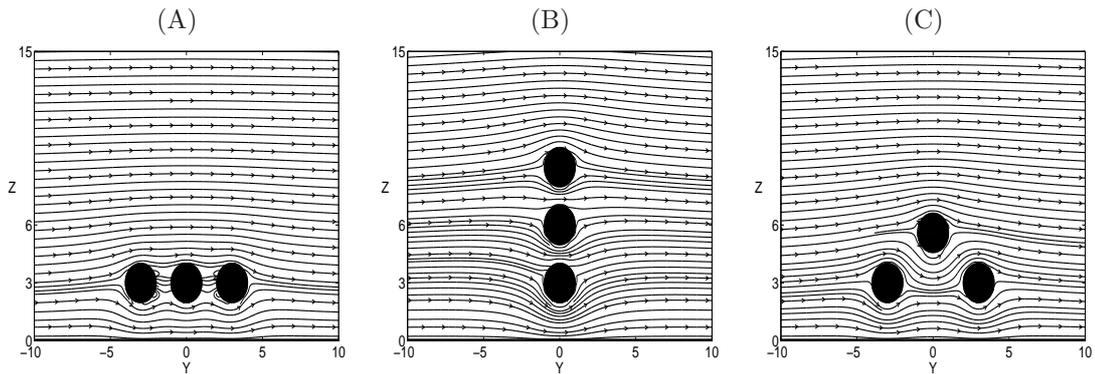
**Figure (6.42)** – Champs de vitesse autour de deux particules fixées dans un écoulement de cisaillement : (A) ligne de centres parallèle à la paroi ; (B) ligne de centre perpendiculaire à la paroi.



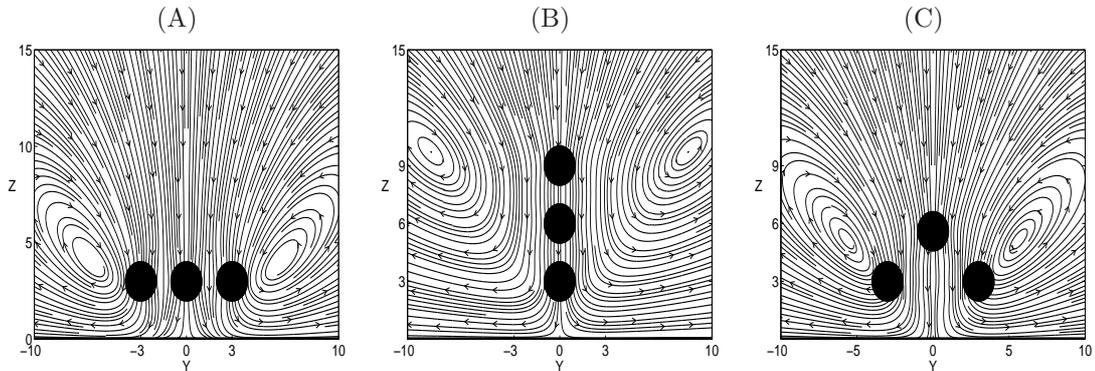
**Figure (6.43)** – Champs de vitesse autour de deux particules en sédimentation : (A) ligne de centres parallèle à la paroi ; (B) ligne de centre perpendiculaire à la paroi.

## 6.5.2 Champs de vitesse autour de trois particules

Trois particules fixées dans un fluide en écoulement de cisaillement perturbent le champ de vitesse voir figure (6.44). Leurs centres sont placées dans un premier lieu aux points  $(0, -3, 3)$ ,  $(0, 0, 3)$ ,  $(0, 3, 3)$  voir figure (A), ensuite aux points  $(0, 0, 3)$ ,  $(0, 0, 6)$ ,  $(0, 0, 9)$  voir figure (B) et enfin aux points  $(0, -1.5, 3)$ ,  $(0, 0, 3+3\frac{\sqrt{3}}{2})$ ,  $(0, 1.5, 3)$  voir figure (C). Les mêmes configurations sont utilisées pour trois particules en sédimentation dans un fluide au repos voir figure (6.45).



**Figure (6.44)** – Champs de vitesse autour de trois particules fixées dans un écoulement de cisaillement : (A) ligne des centres de particules parallèle à la paroi ; (B) ligne des centres de particules centre perpendiculaire à la paroi ; (C) les centres des particules sont placés au sommet d'un triangle.



**Figure (6.45)** – Champs de vitesse autour de trois particules en sédimentation : (A) ligne des centres de particules parallèle à la paroi ; (B) ligne des centres de particules centre perpendiculaire à la paroi ; (C) les centres des particules sont placés au sommet d'un triangle.

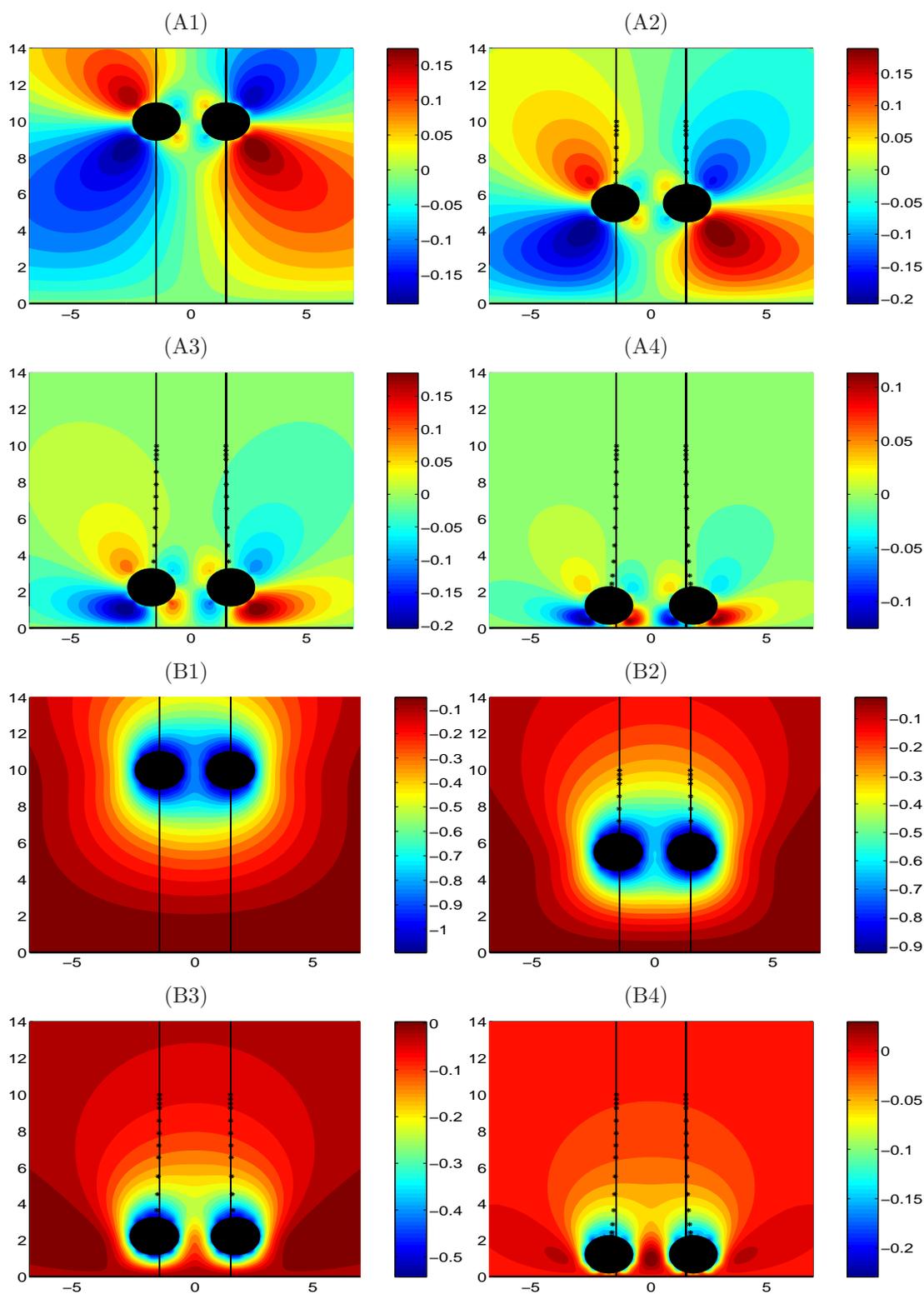
## 6.6 Champs d'écoulement autour des particules en sédimentation

Le but est de calculer les isovaleurs de la vitesse à l'intérieur du fluide en fonction des positions des particules trouvées par la résolution de l'équation différentielle des trajectoires. On considère la sédimentation de deux particules (6.6.1) et trois particules (6.6.2) au voisinage d'une paroi.

### 6.6.1 Champs d'écoulement autour de deux particules en sédimentation

On considère le problème de sédimentation de deux particules sphériques vers une paroi horizontale d'équation  $Z = 0$  dans un fluide au repos. Les positions initiales des deux particules sont  $(0, -1.5, 10)$  et  $(0, 1.5, 10)$ .

Sur les figures (6.46) nous avons tracé les trajectoires des deux particules à partir de leurs positions initiales aux points de coordonnées  $(0, -1.5, 10)$  et  $(0, 1.5, 10)$ . Nous remarquons que leurs trajectoires se décalent par rapport à la droite verticale qui marque leurs positions initiales. Outre les trajectoires, nous avons représenté sur les figures (6.46) les isovaleurs de la composante de vitesse  $V_y$ . La symétrie par rapport au plan d'équation  $Y = 0$  dans le problème de Stokes pour cette configuration donne des résultats de symétrie pour les composantes de la vitesse ce qui a été retrouvé ici par symétrie des couleurs par rapport  $Y = 0$ . De même pour le composante  $V_z$  sur les figures (6.46).



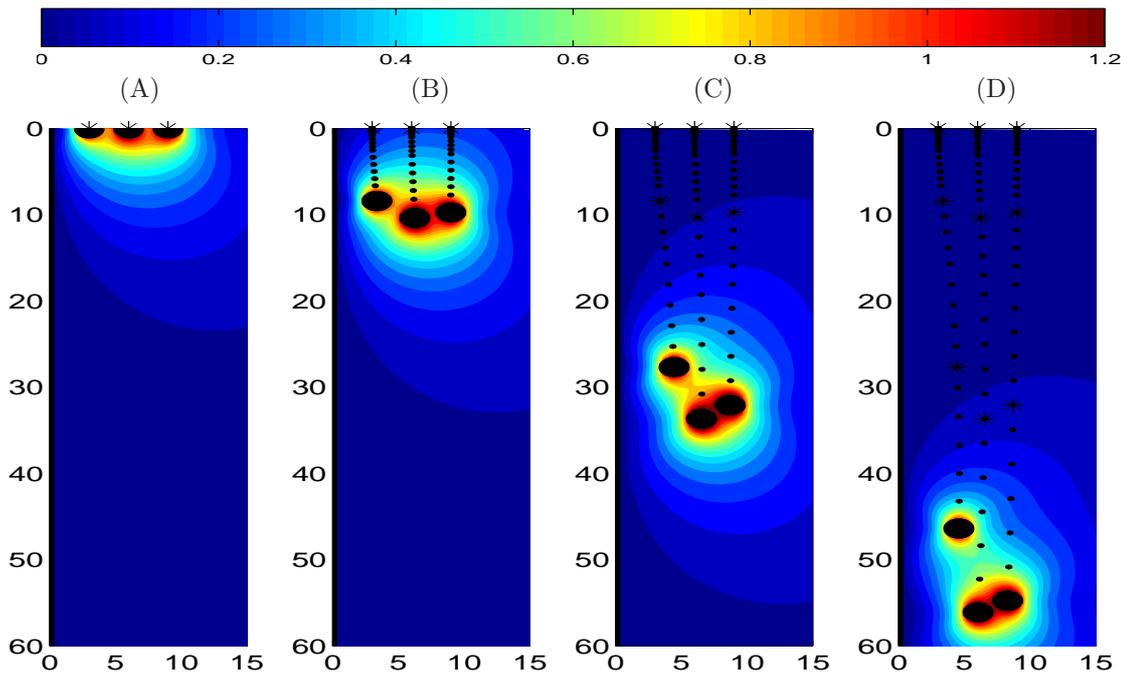
**Figure (6.46)** – Deux particules en sédimentation à partir des positions  $(0, -1.5, 10)$ ,  $(0, 1.5, 10)$ . Les étoiles représentent leurs trajectoires. Les étoiles sont des positions choisies pour le même nombre de pas de temps. La barre des couleurs représente la valeur de la composante de la vitesse  $V_y$  pour (A1)-(A2)-(A3)-(A4) et la composante de la vitesse  $V_z$  pour (B1)-(B2)-(B3)-(B4) à l'intérieur du fluide  $A$ .

## 6.6.2 Champs d'écoulement autour de trois particules en sédimentation au voisinage d'une paroi verticale

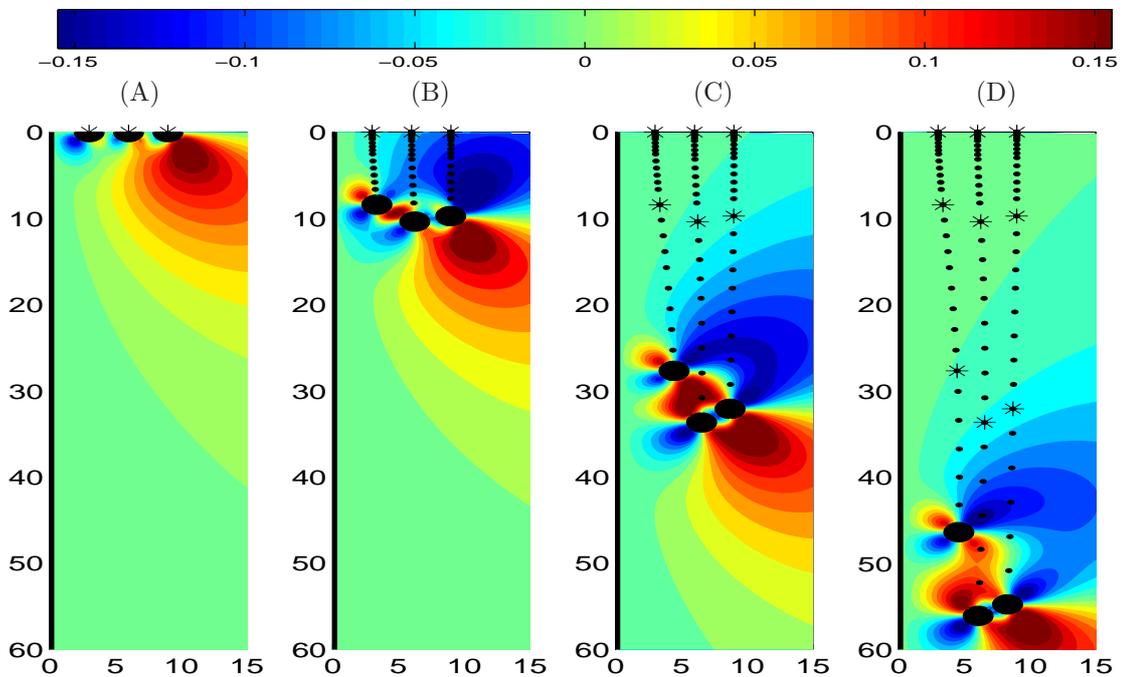
On considère le problème de sédimentation de trois particules sphériques au voisinage d'une paroi plane verticale d'équation  $Z = 0$  dans un fluide au repos. On considère trois cas : d'abord les positions initiales des trois particules sont  $(0, 0, 3)$ ,  $(0, 0, 6)$ ,  $(0, 0, 9)$  puis  $(0, 0, 3)$ ,  $(0, 3, 3)$ ,  $(0, 6, 3)$  et finalement  $(0, 0, 3)$ ,  $(3, 0, 3)$ ,  $(6, 0, 3)$ , avec  $\mathbf{g} = \mathbf{e}^2$  pour les trois cas.

Les figures (6.47)-(6.50) représentent les isovaleurs des composantes de la vitesse du fluide, pour le cas de trois particules de centres initialement alignés perpendiculairement (figures (6.47), (6.48) ) et parallèlement (figures (6.49), (6.50)) à la paroi.

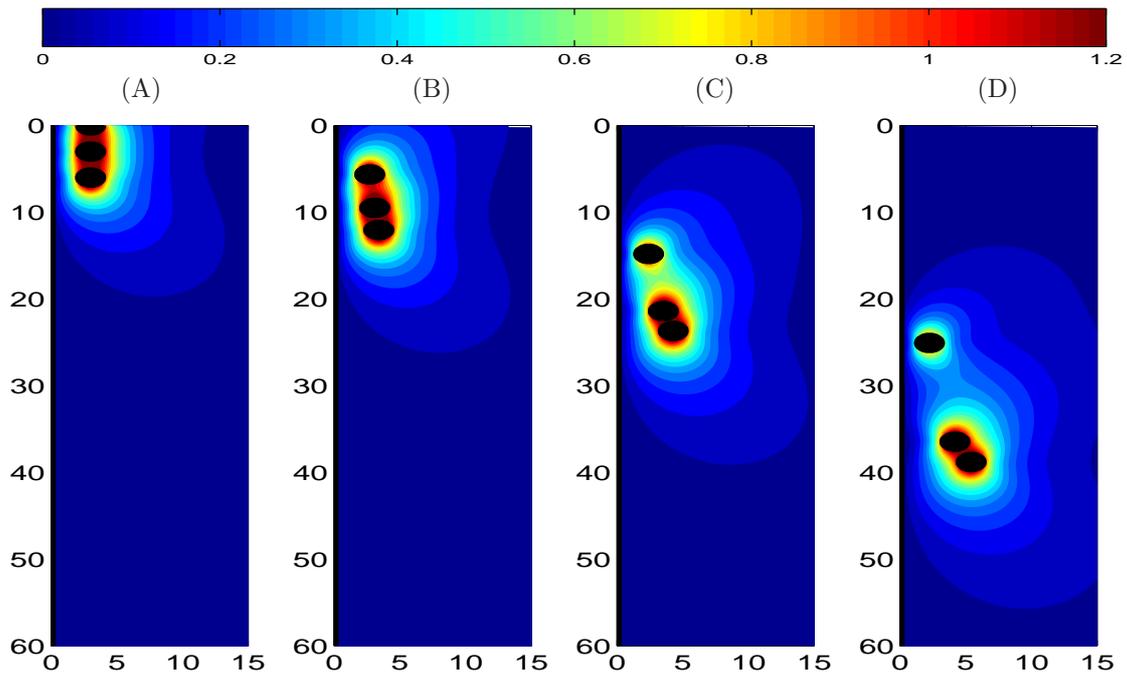
La particule 1 la plus proche de la paroi sur les figures (6.47),(6.48) avance lentement par rapport aux deux autres particules. En effet, la particule 1 de coordonnées  $(0, 0, 3)$  est soumise de plus fortes interactions hydrodynamiques avec la paroi, ce qui ralentit son mouvement par rapport à la deuxième et à la troisième particule. L'effet de la paroi est montré par la présence des zones bleues à gauche de chaque particule dans (6.48). Il est remarquable que la zone bleue entre la paroi et la particule 1 est la plus importante. Les particules 2 et 3 forment un couple et restent groupées en pivotant l'une autour de l'autre, et ceci dans les deux configurations (figures (6.47) , (6.48)) et (figures (6.49), (6.50)).



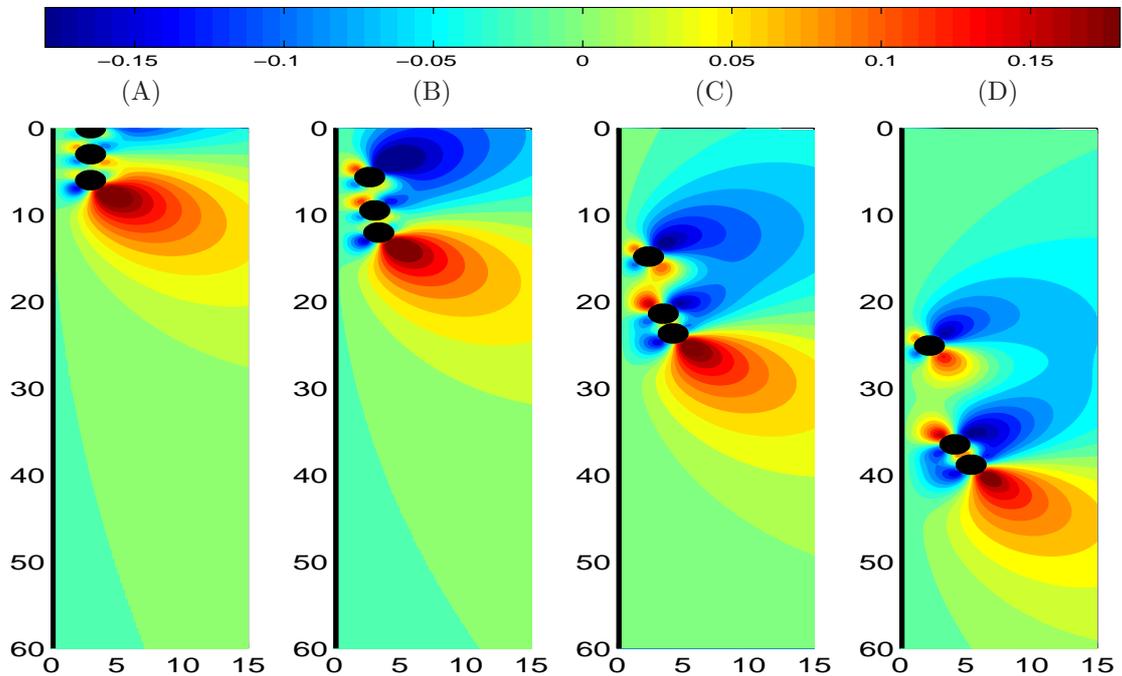
**Figure (6.47)** – Trois particules en sédimentation à partir des positions  $(0, 0, 3)$ ,  $(0, 0, 6)$ ,  $(0, 0, 9)$ . Les points représentent leurs trajectoires. Les étoiles sont des positions choisies après le même nombre de pas de temps. La barre des couleurs représente la valeur de la composante  $V_y$  de la vitesse à l'intérieur du fluide.



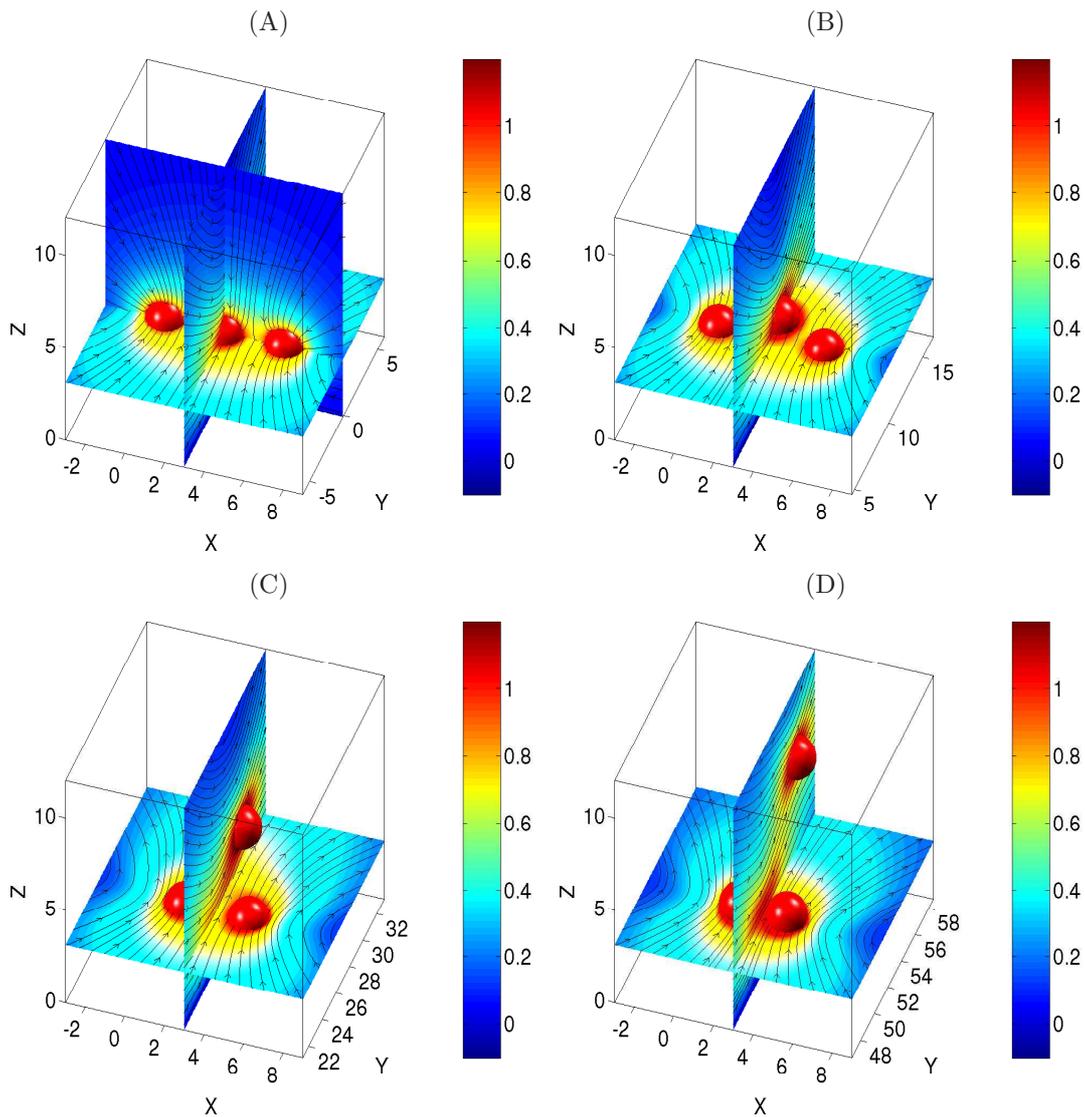
**Figure (6.48)** – Comme figure (6.47) mais ici la barre des couleurs représente la valeur de la composante  $V_z$  de la vitesse à l'intérieur du fluide.



**Figure (6.49)** – Trois particules en sédimentation à partir des positions  $(0, 0, 3)$ ,  $(0, 3, 3)$ ,  $(0, 6, 3)$ . La barre des couleurs représente la valeur de la composante  $V_y$  de la vitesse à l'intérieur du fluide.



**Figure (6.50)** – Comme figure (6.49) mais ici la barre des couleurs représente la valeur de la vitesse  $V_z$  à l'intérieur du fluide.



**Figure (6.51)** – Trois particules en sédimentation à partir des positions  $(0, 0, 3)$ ,  $(3, 0, 3)$ ,  $(6, 0, 3)$ . Les barres des couleurs représente l'isovaleur du module de la vitesse à l'intérieur du fluide.

Les figures (6.51), (A), (B), (C), (D) présentent des vues tridimensionnelles des positions successives de trois particules en sédimentation sous l'effet de la gravitation  $\mathbf{g} = g\mathbf{e}^2$  au voisinage de la paroi verticale  $z = 0$ . Les positions initiales des centres des trois particules (1), (2) et (3) sont respectivement  $(0, 0, 3)$ ;  $(3, 0, 3)$ ;  $(6, 0, 3)$  cf la vue (A). Les vues (B), (C), (D) montrent l'évolution tridimensionnelle du mouvement des trois particules marquée par le rapprochement des particules (1), (2) du plan  $X = 3$  et l'éloignement de la particule (3) de la paroi.

## 6.7 Conclusion

Dans la section (6.2) de ce chapitre, nous avons calculé les forces et les couples hydrodynamiques exercés sur une particule de forme ellipsoïdale lorsqu'elle est en sédimentation dans un fluide au repos ainsi que dans le cas d'un fluide en mouvement de cisaillement. Les variations des efforts exercés sur la particule sont étudiées en fonction de sa position par rapport à la paroi.

Dans la section (6.3) nous avons calculé les forces et les couples hydrodynamiques exercés sur  $N_p$  particules où  $N_p = 3, 11, 21$  et  $61$ . Nous avons étudié aussi l'effet de la paroi sur une chaîne de  $N_p$  particules. Plus précisément, nous avons distingué deux types de mouvements, une translation parallèle à la paroi et une translation perpendiculaire à la paroi pour étudier les interactions entre les particules et l'effet de la paroi sur les particules.

Dans la section (6.4) nous avons calculé les trajectoires de deux et trois particules pour différentes configurations et pour les mouvement perpendiculaire et parallèle à la paroi. Lorsque deux particules s'approchent d'une paroi horizontale, l'écoulement est perturbé par les interactions hydrodynamiques avec celle-ci. Nous avons étudié aussi l'effet d'une paroi verticale sur les trajectoires d'une chaîne de particules composée de deux particules ou de trois particules.

Nous avons dans la section (6.5) calculé les différentes composantes de la vitesse dans le fluide. Les interactions entre les particules sont clairement visibles par le calcul des isovaleurs de vitesse à l'intérieur du fluide. A la fin du chapitre dans la section (6.6), nous avons présenté des séquences de films qui montrent les étapes de sédimentation de plusieurs particules et mettent ainsi en évidence les interactions particule-particule ainsi que l'effet de la paroi sur l'interaction particule-paroi.



# Conclusions et perspectives

Nous avons étudié le problème des interactions hydrodynamiques entre plusieurs particules au voisinage d'une paroi imperméable. Nous avons d'abord résolu le problème axisymétrique pour une chaîne de particules sphériques arrangées suivant une ligne perpendiculaire à la paroi. Ensuite, nous avons considéré le problème dans une configuration plus générale : les cas où la position des particules est quelconque ainsi que le cas où le fluide est en écoulement, par exemple de cisaillement. Le problème est résolu par la méthode des équations intégrales de surface et nous avons mis au point un code de résolution qui utilise la méthode des éléments de frontière. La résolution des équations intégrales de surface nous a permis dans un premier temps de calculer les forces et les couples exercés sur les particules et par suite de construire la matrice de résistance et la matrice de mobilité. A partir de la matrice de mobilité et de la relation fondamentale de la dynamique qui tient compte des forces hydrodynamiques, nous avons calculé les trajectoires des particules en sédimentation dans un fluide au repos. Nous avons par ailleurs effectué des validations avec des solutions analytiques calculées par des méthodes directes telles que la méthode des coordonnées bisphériques qui donne des résultats exacts dans le cas de configurations particulières. Nous avons également calculé les isovaleurs de la vitesse ainsi que les isovaleurs des composantes de la vitesse.

Le travail est réparti en six chapitres. **Le premier chapitre** contient le cadre physique du problème ainsi que les notations utilisées et la formulation des équations de Stokes qui régissent l'écoulement. Il contient un aperçu sur les solutions obtenues par diverses techniques analytiques telles que la méthode des réflexions,

la méthode des coordonnées bisphériques et la méthode des développements multipolaires. Les équations de Stokes sont alors écrites sous forme d'une équation intégrale qui utilise la fonction de Green calculée par Blake [10]. Cette fonction de Green est utilisée pour intégrer automatiquement dans la résolution les conditions de non glissement sur la paroi. Rappelant des résultats classiques, nous avons présenté la formulation des équations intégrales de surface à l'aide de la formule de réciprocité de Lorentz et à l'aide de la formule de Green associée au problème de Stokes. Compte-tenu de la condition de non-glissement sur les particules, l'équation intégrale est ramenée à une équation qui exprime la vitesse en chaque point de la surface des particules sous forme d'un potentiel de simple couche, la densité de ce potentiel étant les contraintes qui s'exercent sur chaque sphère [65, 86]. Cette approche permet de réduire le calcul aux surfaces des particules bien que le problème soit défini sur un domaine infini. La vitesse du fluide est alors obtenue par une intégrale de surface utilisant les contraintes calculées. La méthode des éléments de frontière a été choisie pour la résolution des équations intégrales de surface. Et avec un choix adéquat, on a pu montrer que la résolution directe par la méthode des éléments de frontières de collocation et la résolution dans l'espace dual par la méthode des éléments de frontière de Galerkin se ramènent à la résolution du même système algébrique pour les approximations type  $P_0$ .

Dans le **deuxième chapitre** nous avons appliqué la méthode des éléments de frontière de collocation à un problème axisymétrique. A partir de l'équation intégrale de surface, nous avons appliqué la méthode de collocation et écrit un système linéaire qui permet de calculer la contrainte sur les particules. Puis, par intégration de contraintes, nous avons obtenu les forces hydrodynamiques exercées sur une ligne de sphères en sédimentation dans le cas axisymétrique. Les difficultés posées par le calcul numérique sont inhérentes aux singularités du noyau de l'équation intégrale. Pour traiter ces singularités, nous avons effectué un calcul analytique pour les points de collocation voisins des singularités et un calcul numérique pour les points de collocation éloignés des singularités. Pour la répartition des points de collocation, nous avons utilisé une technique qui permet d'optimiser l'algorithme de calcul. Les points sont répartis avec une plus grande densité dans les régions où les interactions sont fortes.

Nous avons comparé les résultats obtenus avec ceux issus d'autres méthodes. Pour le cas d'une sphère et une paroi, nous avons utilisé les résultats de Brenner [16] et Maude [72], et pour le cas de deux sphères, ceux obtenus par Stimson et Jeffery [95]. Ces derniers résultats sont obtenus par la méthode exacte des coordonnées bisphériques ; l'ordre de l'erreur ne dépasse pas 0.1% prouvant l'efficacité de la présente méthode pour ce genre de problème. Nous avons comparé aussi nos résultats avec ceux obtenus par des méthodes approchées, telles que la méthode des réflexions. La solution du problème obtenu par Wakiya [100, 101] a utilisé la méthode des réflexions qui ne donne pas une solution précise dès que les deux sphères s'approchent trop de la paroi. La méthode des intégrales de surface permet de donner une meilleure approximation de la solution pour ce cas.

Dans **le troisième chapitre**, nous avons étendu l'étude des interactions hydrodynamiques pour les cas où il n'existe pas de symétrie. Après normalisation des équations intégrales de surface, nous avons discrétisé les équations pour les deux méthodes de collocation et de Galerkin. Après discrétisation, le choix de l'approximation par des polynômes  $P_0$  a permis de ramener les résolutions par les deux méthodes au même système algébrique. La construction de ce système algébrique passe par plusieurs étapes. En premier lieu, les surfaces des particules sont approximées par des polyèdres. En effet, pour mailler la surface de chaque particule, nous avons utilisé l'octaèdre comme polyèdre de départ et appliqué des raffinements successifs consistant à subdiviser chaque facette triangulaire en quatre triangles élémentaires. Ensuite, sur ces triangles afin de remplir la matrice du système linéaire, nous avons calculé des intégrales de surface. Lorsque les points de calcul d'évaluation de la vitesse ne coïncident pas avec les points où nous avons placé les Stokeslets, les intégrales à évaluer sont régulières. En revanche, lorsque les points d'évaluation de la vitesse et les points d'application des Stokeslets sont sur le même triangle, une technique d'évaluation d'intégrale singulière est utilisée. Enfin, et après la résolution du système linéaire par la méthode LU, la force et le couple exercés sur chaque particule sont calculés à partir des contraintes exercées sur la particule concernée. Nous avons adapté le maillage

à la variation du gradient de contrainte de façon que les zones de la surface qui entrent en fortes interactions hydrodynamiques soient les plus raffinées. La technique de raffinement dynamique de maillages que nous avons mise au point nous a permis de mieux détecter les zones de lubrification entre particules et paroi ainsi que les interactions entre particules. Des comparaisons avec la technique utilisée dans le problème axisymétrique ont montré que le résultat obtenu avec ce raffinement dynamique est meilleur pour ce genre de problème. Les équations intégrales de surface permettent de calculer la vitesse à l'intérieur du fluide en utilisant la relation de dualité entre la contrainte exercée sur les surfaces des particules et la vitesse à l'intérieur du fluide. *L'originalité de ce travail est la mise au point d'une technique de maillage dynamique qui prend en considération les caractéristiques physiques et géométriques du problème.*

Dans le **quatrième chapitre**, nous avons introduit le cadre de calcul des trajectoires de plusieurs particules en sédimentation dans un fluide au repos. Nous avons présenté la "grande matrice de résistance" [17] qui exprime les effets sur les particules en fonction de leurs vitesses de translation et de rotation, ainsi que son inverse, la "grande matrice de mobilité". Utilisant la relation fondamentale de la dynamique, cette dernière matrice permet en particulier d'écrire les vitesses de particules tournant librement dans un champ de force donné. Les trajectoires sont calculées par la résolution d'un système différentiel ordinaire pour des cas de sédimentation : sédimentation perpendiculaire à une paroi plane et sédimentation parallèle à la paroi. L'algorithme de calcul des trajectoires commence par la résolution d'un système à six seconds membres qui proviennent des différents types de mouvements (la translation et la rotation). Ensuite, on remplit la matrice de résistance et on calcule son inverse, la matrice de mobilité, pour construire le système différentiel ordinaire donnant les trajectoires. Ce système est résolu par la méthode de Gear [38]. L'effet de la paroi sur les trajectoires est intégré automatiquement à travers la fonction de Green. Ceci nous permet par la suite, dans le chapitre 6, d'étudier l'influence de la paroi sur les trajectoires.

**Le chapitre cinq** est consacré à la validation du code mis au point avec quelques solutions exactes existantes dans la littérature. Nous avons commencé les comparaisons avec la solution exacte de Stokes pour une particule dans un fluide infini ce qui nous a montré que l'erreur, même pour le deuxième niveau de maillage, est de l'ordre de 0.1%. La deuxième comparaison a été effectuée avec la solution de Brenner [16] et Maude [72] calculée par la méthode des coordonnées bisphériques pour le cas d'une seule particule dans un fluide borné par une paroi imperméable. Une troisième comparaison a été faite avec la solution de Stimson et Jeffery [95] calculée aussi par la méthode des coordonnées bisphériques pour deux sphères de tailles différentes et il a été montré que l'erreur est de l'ordre de 0.01% lorsque les particules s'éloignent l'une de l'autre de plus de 0.5 rayon.

Le calcul de la vitesse à l'intérieur du fluide par la méthode des équations intégrales de surface a montré que l'erreur par rapport à la solution exacte calculée par la méthode de coordonnées bisphériques peut être inférieure à  $10^{-5}$  lorsque la distance à la paroi est  $\geq 10$  rayons. La méthode de résolution utilisée dans le deuxième chapitre s'est révélée plus efficace pour les problèmes axisymétriques à cause de la parfaite intégration de la symétrie, contrairement à la méthode des éléments de frontières qui ne préserve pas parfaitement la symétrie à cause de la distribution a priori non symétrique des Stokeslets.

Enfin, dans **le chapitre six**, nous avons présenté des nouveaux résultats et de nouvelles simulations numériques. Les forces et les couples exercés sur une particule de forme ellipsoïdale sont calculés en fonction de la distance à la paroi en présence d'un écoulement de cisaillement ambiant. L'effet de la paroi est étudié également pour le cas de deux ellipsoïdes en translation parallèlement à la paroi et en translation perpendiculairement à celle-ci. Nous avons calculé les forces et les couples exercés sur plusieurs particules sous l'effet de la paroi pour une chaîne de 3, 11, 21 et 61 particules de centres alignés soit parallèlement, soit perpendiculairement à la paroi. Les résultats sont exprimés soit en fonction de la distance à la paroi pour mettre en évidence l'effet de paroi, soit en fonction de la

distance entre les particules pour étudier leurs interactions. On a remarqué que la particule médiane est soumise aux contraintes les plus faibles ce qui favorise son mouvement. Nous avons ensuite calculé les forces exercées sur des particules placées aux sommets d'un parallélépipède en mouvement de translation perpendiculaire à la paroi. Nous avons aussi résolu le problème de sédimentation de douze particules ce qui permettra l'étude des problèmes périodiques. Nous avons calculé les trajectoires de deux particules sous l'effet de la gravitation orientée perpendiculairement à une paroi. Les deux particules s'écartent l'une de l'autre lorsqu'elles arrivent sur la paroi. Nous avons tracé les profils de vitesses verticales et horizontales décrivant la sédimentation. De même nous avons calculé, pour la première fois, les trajectoires de deux particules qui tombent parallèlement à une paroi ainsi que leurs profils de vitesses. Nous avons étudié la sédimentation de trois particules parallèlement à la paroi et tracé les profils de vitesses en fonction de la distance à la paroi. Enfin, nous avons présenté des séquences de simulation numérique de sédimentation de deux particules et trois particules en sédimentation ainsi que les champs de vitesses du fluide.

Une perspective de ce travail est l'augmentation du nombre de particules. Il s'agit d'optimiser l'espace mémoire et le temps de calcul sur ordinateur.

Une autre perspective est l'étude des particules déformables qui se ramène à la résolution d'équations intégrales de surfaces de deuxième espèce, nécessitant une technique de maillage adaptatif qui tienne compte à la fois des variations des grandeurs physiques et de la déformation des surfaces des particules.

L'approximation de la contrainte par des constantes sur des triangles nous a permis d'élaborer une technique d'adaptation de maillage basée sur les sauts des valeurs de la contrainte. Une perspective de ce travail est l'utilisation de fonctions d'interpolation de degré supérieur ainsi que d'éléments de surfaces curvilignes.

# **Annexes**



# Annexe A

## Formule de symétrie de la fonction de Green

Les fonctions de Green du problème vérifient la propriété de symétrie :

$$G_{ij}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = G_{ji}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) \quad (\text{A.1})$$

Cette propriété est démontré par Pozrikidis [86]. Nous rappelons la démonstration. On considère les vecteurs

$$u_i(\mathbf{x}) = G_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1)a_k \quad \text{et} \quad u'_i(\mathbf{x}) = G_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2)b_k$$

où  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  deux vecteurs constants,  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  deux vecteurs quelconques définissant des positions dans le fluide. Les vecteurs  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{u}'$  sont associés respectivement aux tenseurs de contrainte  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{T}'$ , alors :

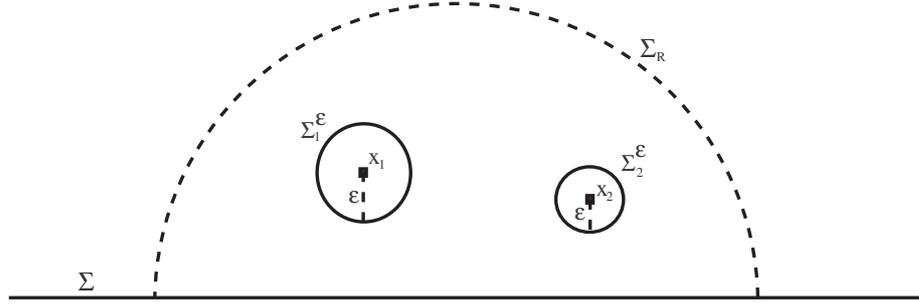
$$\begin{aligned} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} &= a_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \\ \frac{\partial T'_{ij}}{\partial x_j} &= b_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \end{aligned}$$

où  $\delta$  la distribution de Dirac.

Donc, la formule de réciprocité s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i T_{ij} - u_i T'_{ij}) = G_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) b_k a_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) - G_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) a_k b_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) \quad (\text{A.2})$$

On intègre cette formule sur le volume  $\Omega_R$  délimité par la surface  $\Sigma$ , les deux surfaces  $\Sigma_1^\varepsilon$  et  $\Sigma_2^\varepsilon$  sphérique de rayon infinitésimale  $\varepsilon$ , de centres respectifs  $x_1$  et  $x_2$  (figure A.1) et  $\Sigma_R$  est une surface de rayon  $R$  grand devant  $|\mathbf{x}_1|$  et  $|\mathbf{x}_2|$ , qui permettra de délimiter le fluide à l'infini.



**Figure (A.1)** – Application du théorème de réciprocité

En appliquant le théorème de la divergence sur la premier intégrale, on obtient :

$$\iiint_{\Omega_R} \frac{\partial}{\partial x_j} (u'_i T_{ij} - u_i T'_{ij}) dx = \iint_{\Sigma \cup \Sigma_R \cup \Sigma_1^\varepsilon \cup \Sigma_2^\varepsilon} (u'_i T_{ij} - u_i T'_{ij}) dS$$

En utilisant la formule de Green (1.26) on obtient :

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma \cup \Sigma_R \cup \Sigma_1^\varepsilon \cup \Sigma_2^\varepsilon} (u'_i T_{ij} - u_i T'_{ij}) dS &= \iiint_{\Omega_R} \{(\mu \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p) - (\mu \nabla^2 \mathbf{u}' - \nabla p')\} dx \\ &= \iiint_{\Omega_R} \{\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) - \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)\} dx = 0 \end{aligned}$$

Cette intégrale est nulle  $\forall \varepsilon \neq 0$ , compte-tenu du support de la masse de Dirac  $\delta$ . Par ailleurs l'intégrale du deuxième terme de l'équation (A.2) donne :

$$\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} \{G_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) b_k a_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) - G_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) a_k b_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)\} dx \\ &= \iiint_{\Omega} \{G_{ki}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2) b_i a_k \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) - G_{ik}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1) a_k b_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)\} dx \\ &= a_k b_i [G_{ki}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - G_{ik}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)] \end{aligned}$$

L'intégrale de l'équation (A.2) devient :

$$a_k b_i [G_{ki}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) - G_{ik}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)] = 0$$

d'où la formule de symétrie (A.1), puisque les vecteurs  $\mathbf{a}$  et  $\mathbf{b}$  sont quelconques.

## Annexe B

# Noyaux de l'équation intégrale axisymétrique

### Traitement du noyaux

D'après les notations adoptées  $\mathbf{x}$  désigne un point courant de l'écoulement,  $\mathbf{y}$  le point d'emplacement du Stokeslet et  $\mathbf{y}'$  le point d'emplacement du Stokeslet image par rapport à la paroi. On choisit un repère de coordonnées cylindriques tel que  $\mathbf{x}$  soit dans le plan engendré par  $(\mathbf{e}^k)$ ,  $k = 1, 2$ .

Dans ce qui suit  $i = 1, \dots, N$ . On pose pour  $x \in \sum^i$

$$R = \mathbf{x} - \mathbf{y} = \begin{bmatrix} R_x - R_y \cos(\theta) \\ -R_y \sin(\theta) \\ x - y \end{bmatrix}$$

et

$$R' = \mathbf{x} - \mathbf{y}' = \begin{bmatrix} R_x - R_y \cos(\theta) \\ -R_y \sin(\theta) \\ x + y \end{bmatrix}$$

Les noyaux  $J^{*i}$ ,  $i = 1, N$  calculés par Elasmî [30] s'écrivent par rapport à ce repère et après une intégration azimuthale :

$$J_{zz}^{*i} = J_{zz}^i - J_{zz}'^i + 2y \frac{\partial}{\partial x} J_{zz}''^i + 2y^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} J_{zz}'''^i \quad (\text{B.1a})$$

$$J_{zr}^{*i} = J_{zr}^i - J_{zr}'^i - 2y \frac{\partial}{\partial R_x} J_{zr}''^i - 2y^2 \frac{\partial^2}{\partial R_x \partial x} J_{zr}'''^i \quad (\text{B.1b})$$

$$J_{rz}^{*i} = J_{rz}^i - J_{rz}'^i + 2y \frac{\partial}{\partial x} J_{rz}''^i + 2y^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial R_x} J_{rz}'''^i \quad (\text{B.1c})$$

$$J_{rr}^{*i} = J_{rr}^i - J_{rr}'^i - 2y \frac{\partial}{\partial R_x} J_{rr}''^i - 2y^2 \frac{\partial^2}{\partial R_x^2} J_{rr}'''^i \quad (\text{B.1d})$$

où le noyau  $J^i$  pour  $i = 1, N$  est donné par :

$$J_{zz}^i = (A_{01} + (x - y)^2 A_{03}) R_y \quad (\text{B.2a})$$

$$J_{zr}^i = (x - y)(R_x A_{13} - R_y A_{03}) R_y \quad (\text{B.2b})$$

$$J_{rz}^i = (x - y)(R_x A_{03} - R_y A_{13}) R_y \quad (\text{B.2c})$$

$$J_{rr}^i = (A_{11} + (R_x^2 + R_y^2) A_{13} - R_x R_y A_{03} - R_x R_y A_{23}) R_y \quad (\text{B.2d})$$

Le noyau  $J'^i$  se déduit du noyau  $J^i$  en remplaçant  $y$  par  $-y$  dans ( B.1)

Le noyau  $J''^i$  s'écrit :

$$J''_{zz}{}^i = J'^i_{zz} \quad (\text{B.3a})$$

$$J''_{zr}{}^i = (R_y A'_{11} - (x + y) A'_{03}) R_y \quad (\text{B.3b})$$

$$J''_{rz}{}^i = J'^i_{rz} \quad (\text{B.3c})$$

$$J''_{rr}{}^i = R_y (x + y) (R_x A'_{13} - R_y A'_{23}) R_y \quad (\text{B.3d})$$

et le noyau  $J'''^i$  s'écrit :

$$J'''_{zz}{}^i = R_y A'_{01} \quad (\text{B.4a})$$

$$J'''_{zr}{}^i = R_y A'_{11} \quad (\text{B.4b})$$

$$J'''_{rz}{}^i = R_y A'_{01} \quad (\text{B.4c})$$

$$J'''_{rr}{}^i = R_y A'_{11} \quad (\text{B.4d})$$

où

$$A_{ij} = -\pi \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\cos(\theta))^i}{R^j} d\theta$$

$$R = \sqrt{(x - y)^2 + R_x^2 + R_y^2 - 2R_x R_y \cos(\theta)}$$

On pose

$$a^2 = (x - y)^2 + R_x^2 + R_y^2$$

$$b^2 = 2R_x R_y$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$R_{xy}^2 = a^2 - b^2$$

$$k^2 = \frac{2b^2}{c^2}$$

En effectuant un changement de variable on peut écrire  $A_{ij}$  sous la forme :

$$A_{ij} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(\cos 2\theta)^i}{(1 - k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{j}{2}}} d\theta$$

D'après Gradshteyn et Ryzhik [48] et en utilisant le logiciel de calcul formel Maple, on peut exprimer  $A_{ij}$  en fonction des intégrales elliptique complètes :

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}$$

$$A_{01} = \frac{2\sqrt{2}kF}{b} \quad (\text{B.5a})$$

$$A_{11} = \frac{2\sqrt{2}k(-c^2E + a^2F)}{b^3} \quad (\text{B.5b})$$

$$A_{21} = \frac{4(-2a^2c^2E + (2R_{xy}^2c^2 + 3b^2)F)}{3cb^4} \quad (\text{B.5c})$$

$$A_{03} = \frac{2\sqrt{2}kR_{xy}^2E}{b} \quad (\text{B.5d})$$

$$A_{13} = \frac{2\sqrt{2}k}{b^3} \left( \frac{a^2}{R_{xy}^2} E - F \right) \quad (\text{B.5e})$$

$$A_{23} = \frac{4\sqrt{2}k}{b^5} \left( \frac{2a^2 - b^4}{2R_{xy}^2} E - a^2 F \right) \quad (\text{B.5f})$$

$A'_{ij}$  se déduit de  $A_{ij}$  en remplaçant  $y$  par  $-y$ .

## Traitement des singularités des noyaux

Loin de l'axe de symétrie et quand  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$  on utilise le développement asymptotique des noyaux  $J^i, i = 1, 2$ .

On constate que lorsque  $y$  s'approche de  $x$ ;  $k$  et  $E(k)$  tendent vers l'unité,  $F(k)$  diverge. En effet :

$$F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2(\sin(\theta))^2}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos(\theta)) d\theta}{\sqrt{1 - k^2(\cos(\theta))^2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2(\cos(\theta))^2}}$$

$$\text{Pour } \theta \in ]0, \frac{\pi}{2}], \lim_{\substack{k \leq 1 \\ k \rightarrow 1}} \frac{1 - \cos(\theta)}{\sqrt{1 - k^2(\cos(\theta))^2}} = \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

$$\text{et } 0 \leq \frac{1 - \cos(\theta)}{\sqrt{1 - k^2(\cos(\theta))^2}} \leq \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$$

La fonction qui à  $\theta$  associe  $\frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)}$  est continue dans l'intervalle  $]0, \frac{\pi}{2}]$ , donc intégrable sur cet intervalle.

D'après le théorème de convergence dominée, on a alors :

$$\lim_{\substack{k \leq 1 \\ k \rightarrow 1}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - \cos(\theta))d\theta}{\sqrt{1 - k^2(\cos(\theta))^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(\theta)}{\sin(\theta)} d\theta = \ln(2)$$

D'autre part, en faisant le changement de variable  $t = \sin \theta$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \theta}} &= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2(1 - t^2)}} \\ &= \int_0^{\text{Argsh}(\frac{1}{\sqrt{1-k^2}})} \frac{\text{ch } u}{\sqrt{1 + \text{sh}^2 u}} du \quad \text{pour } \text{sh } u = \frac{t}{\sqrt{1 - k^2}} \\ &= -\ln(\sqrt{1 - k^2}) + \ln(1 + \sqrt{2 - k^2}) \end{aligned}$$

$$\lim_{\substack{k \leq 1 \\ k \rightarrow 1}} F(k) = \ln \frac{4}{\sqrt{1 - k^2}}$$

On utilise l'expression :

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = 2 \cos\left(\frac{\theta_x + \theta_y}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_x - \theta_y}{2}\right)$$

et des expression analogue pour  $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ ,  $R_x - R_y$  et  $R_x + R_y$

Quand  $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$ , les noyaux  $F(k)$  et  $J^i$ ,  $i = 1, 2$  s'écrivent :

$$\tilde{F} = \ln \frac{8R_x}{|\theta_x - \theta_y|} \tag{B.6}$$

$$\tilde{J}_{zz}^i = 2(\tilde{F} + \sin^2(\theta)) \tag{B.7a}$$

$$\tilde{J}_{rr}^i = 2\left(\tilde{F} - (2 + \sin^2(\theta))\right) \tag{B.7b}$$

$$\tilde{J}_{rz}^i = (\theta_x - \theta_y)\tilde{F} + 2R_x \cos(\theta) \tag{B.7c}$$

$$\tilde{J}_{zr}^i = -(\theta_x - \theta_y)\tilde{F} - 2R_x \cos(\theta) \tag{B.7d}$$

## L'expression des noyaux au voisinage de l'axe de symétrie

Le calcul des noyaux pour les points proches de l'axe de symétrie (*i.e.* :  $r_x \rightarrow 0$  ou  $r_y \rightarrow 0$ ) se fait par un développement suivant les puissances de  $k$ .

Le développement de  $E$  et  $F$  par rapport à  $k$  s'écrit :

$$E(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 - \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{(i+1)} ((2i-1)!)^2 k^{2i}}{2^{2(2i-1)} n^2 ((n-1)!)^4 (2i-1)} \right) \quad \text{quand } k \rightarrow 0$$

$$F(k) = \frac{\pi}{2} \left( 1 + \sum_{i=1}^n \frac{((2i-1)!)^2 k^{2i}}{2^{2(2i-1)} n^2 ((n-1)!)^4 (2i-1)} \right) \quad \text{quand } k \rightarrow 0$$

Si  $r_y \rightarrow r_x = 0$  on obtient [67] :

$$\begin{aligned} \tilde{J}_{zz}^i &\rightarrow 2\pi \\ \tilde{J}_{zr}^i &\rightarrow 0 \\ \tilde{J}_{rz}^i &\rightarrow 0 \\ \tilde{J}_{rr}^i &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

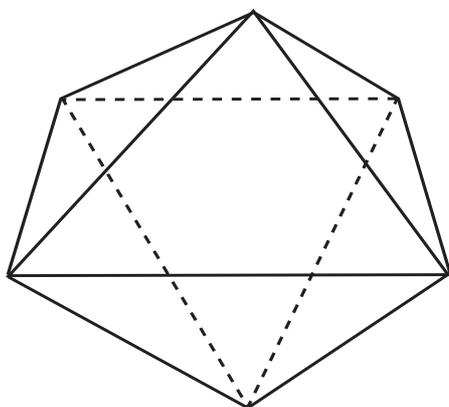


# Annexe C

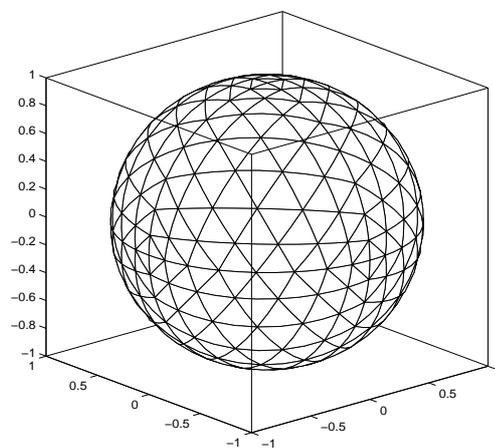
## Maillage et interpolation

### Maillage

Dans ce mémoire, nous avons utilisée la technique simple, présentée par Pozrikidis [87] (p311), sur la discrétisation de la surface d'une sphère. Un octaèdre servira de point de départ pour le maillage initial. Pour construire un maillage plus fin sur une particule sphérique il suffit de subdiviser les triangles de la surface de l'octaèdre et de les projeter sur la sphère cf (figures (C.2)).



**Figure (C.1)** – Octaèdre à 6 sommets et 8 faces, niveau 0 du maillage.



**Figure (C.2)** – Polyèdre à 1026 sommets et 512 faces, 3<sup>ème</sup> niveau du maillage.

Ce recouvrement vérifie les propriétés suivantes

- $\Delta^i \cap \Delta^j = \emptyset$  ou un sommet ou un côté
- $S^h = \bigcup_{k=1}^{N_t} \Delta^k$

La discrétisation de l'équation (3.1) consiste à l'écrire en un nombre fini de points. On travaillera avec des triangles de six nœuds, les 3 sommets et les 3 milieux de chaque côté. Le nombre des triangles  $N_t$  augmente en fonction de chaque subdivision, voir figure (C.2). Pour la subdivision numéro  $nd$  on obtient  $N_t = 8 \times 4^{nd}$  et le nombre des nœuds  $n_{nd} = 16 \times (4^{nd}) + 2$

## Interpolation

On utilise une transformation géométrique de chaque triangle du maillage vers un triangle de référence. Chaque triangle est considéré comme image par la fonction transformation géométrique  $p : H \rightarrow \Delta$ . La fonction  $p$  forme une paramétrisation de  $\Delta^j$ .

Les fonctions d'interpolation sont données par

$$\begin{aligned} \phi_2(\xi, \eta) &= \frac{1}{1-\alpha} \xi \left( \xi - \alpha + \frac{\alpha - \gamma}{1-\gamma} \eta \right) \\ \phi_3(\xi, \eta) &= \frac{1}{1-\beta} \eta \left( \eta - \beta + \frac{\beta + \gamma - 1}{\gamma} \xi \right) \\ \phi_4(\xi, \eta) &= \frac{1}{\alpha(\alpha - \beta)} \xi (1 - \xi - \eta) \\ \phi_5(\xi, \eta) &= \frac{1}{\gamma(1-\gamma)} \xi \eta \\ \phi_6(\xi, \eta) &= \frac{1}{\beta(1-\beta)} \eta (1 - \xi - \eta) \\ \phi_1 &= 1 - \phi_2 - \phi_3 - \phi_4 - \phi_5 - \phi_6 \end{aligned}$$

avec

$$\alpha = \frac{1}{1 + \left| \frac{\mathbf{x}_4^j - \mathbf{x}_2^j}{\mathbf{x}_4^j - \mathbf{x}_1^j} \right|}; \quad \beta = \frac{1}{1 + \left| \frac{\mathbf{x}_6^j - \mathbf{x}_3^j}{\mathbf{x}_6^j - \mathbf{x}_1^j} \right|}; \quad \gamma = \frac{1}{1 + \left| \frac{\mathbf{x}_5^j - \mathbf{x}_2^j}{\mathbf{x}_5^j - \mathbf{x}_3^j} \right|}$$

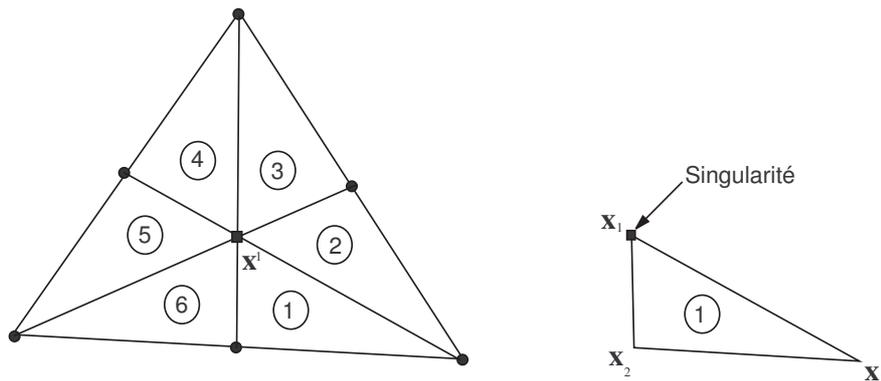
avec  $\{\mathbf{x}_l^j, l = 1, 2, 3\}$  les sommets du triangle  $\Delta^j$  et  $\{\mathbf{x}_l^j, l = 4, 5, 6\}$  les milieux des côtés du même triangle.

# Annexe D

## Calcul de l'intégrale singulière

### Changements de variables

Quelques techniques utilisées pour effectuer une intégration d'un noyau singulier sont citées dans les travaux de Darve [27].



**Figure (D.1)** – Subdivision d'un triangle en 6 triangles, le point de singularité étant au centre de gravité  $\mathbf{x}_G$

Lorsque la singularité est à l'intérieur du triangle, on subdivise celui-ci en six triangles élémentaires (figure (D.1)) de façon à avoir le point de singularité  $\mathbf{x}$  au centre de gravité du triangle. Ensuite, on fait des changements de variables pour extraire le terme de la singularité du noyau de la fonction à intégrer.

Les intégrales sur les triangles élémentaires sont transformées sur le triangle de référence  $H = \{(\xi, \eta); 0 \leq \xi, \eta, \xi + \eta \leq 1\}$ , afin d'extraire la singularité.

Supposons que la singularité soit en un point  $\mathbf{x}_1$  sommet d'un triangle après subdivision

$$I = \int_{\Delta} f(\mathbf{x}) dS_x = \int_{\Delta} \frac{g(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} dS_x = 2A \int_{\Sigma} \frac{g(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_1|} d\xi d\eta \quad (\text{D.1})$$

La fonction  $g(\mathbf{x})$  est une fonction non singulière sur le triangle  $\Delta$  de surface  $A$ . Le dénominateur de l'expression (D.1) devient

$$\mathbf{x} - \mathbf{x}_1 = -(\xi + \eta) \mathbf{x}_1 + \eta \mathbf{x}_2 + \xi \mathbf{x}_3 \quad (\text{D.2})$$

$$= \xi(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) + \eta(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \quad (\text{D.3})$$

On calcule une intégrale [87] de la forme

$$I = 2 \frac{A}{a} \int_{\sigma} \frac{g(\xi, \eta)}{(\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2)^{1/2}} d\xi d\eta \quad (\text{D.4})$$

où

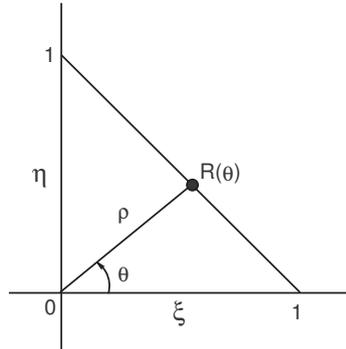
$$B = \frac{b}{a^2}, \quad C = \frac{c^2}{a^2} \quad (\text{D.5})$$

$$a = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|, \quad b = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^T (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1), \quad c = |\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1| \quad (\text{D.6})$$

par l'intermédiaire des coordonnées polaires sur le triangle de référence.

$$\xi = \rho \cos \theta, \quad \eta = \rho \sin \theta, \quad d\xi d\eta = \rho d\rho d\theta \quad \text{avec} \quad \rho \in \left[0, \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}\right] \quad (\text{D.7})$$

$$I = 2 \frac{A}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos \theta + B \sin 2\theta + C \sin^2 \theta} \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} g(\rho, \theta) d\rho d\theta \quad (\text{D.8})$$



**Figure (D.2)** – Coordonnées polaires sur le triangle de référence.

Enfin, pour bénéficier de la quadrature de Gauss-Legendre sur le carré  $[-1, 1]^2$ , sur chacune des subdivisions de  $\Delta^k$ , on considère le changement de variables  $(v_1, v_2) \rightarrow (\rho, \theta)$  défini par :

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{\pi}{4} v_2 + \frac{\pi}{4} \\ \rho &= \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} (1 + v_1) \end{aligned}$$

## Expressions des Stokeslets sources

D'abord, on sépare la partie singulière de la fonction de Green et la partie non singulière. Ensuite, on applique sur la partie singulière due au Stokeslet source de la fonction de Green (1.24) le changement en coordonnées polaires sur le triangle de référence

$$\begin{aligned}
G_{11}^s &= E + F \left( (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{e}^1 \cos \theta + (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{e}^1 \sin \theta \right)^2 \\
G_{12}^s &= F \left( (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{e}^1 \cos \theta \right. \\
&\quad \left. + (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{e}^1 \sin \theta \right) \left( (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{e}^2 \cos \theta \right. \\
&\quad \left. + (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{e}^2 \sin \theta \right) \\
G_{13}^s &= F \left( (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{e}^1 \cos \theta \right. \\
&\quad \left. + (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{e}^1 \sin \theta \right) \left( (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{e}^3 \cos \theta \right. \\
&\quad \left. + (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{e}^3 \sin \theta \right) \\
G_{21}^s &= G_{12}^s \\
G_{22}^s &= E + F \left( (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{e}^2 \cos \theta + (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{e}^2 \sin \theta \right)^2 \\
G_{23}^s &= F \left( (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{e}^2 \cos \theta \right. \\
&\quad \left. + (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{e}^2 \sin \theta \right) \left( (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{e}^3 \cos \theta \right. \\
&\quad \left. + (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{e}^3 \sin \theta \right) \\
G_{31}^s &= G_{13}^s \\
G_{32}^s &= G_{23}^s \\
G_{33}^s &= E + F \left( (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{e}^3 \cos \theta + (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{e}^3 \sin \theta \right)^2
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
E &= 2 \frac{A}{a} \frac{1}{(\cos^2 \theta + B \sin(2\theta) + C \sin^2 \theta)^{1/2}} \\
F &= 2 \frac{A}{a^3} \frac{1}{(\cos^2 \theta + B \sin(2\theta) + C \sin^2 \theta)^{3/2}}
\end{aligned}$$



# Liste des tableaux

2.1	Force hydrodynamique adimensionnée $\Phi$ , exercée sur une sphère solide de rayon $a$ et séparée d'une distance $D^1$ de la paroi (la distance $D^2$ , qui sépare les deux sphères, est grande " $D^2 = 100$ "). Comparaison de (B) nos résultats avec les résultats (A) de Hsu et Ganatos [55] ainsi que la solution 'exacte' (analytique) de Brenner [16] et Maude [72] . . . . .	36
2.2	Comparaison des valeurs des forces $\Phi_1$ et $\Phi_2$ obtenues pour différentes valeurs de la distance $D^2 - 1$ , la sphère 1 étant loin de la paroi ( $D^1 - 1 = 1000$ ). $\Phi$ est la solution 'exacte' obtenue par Stimson et Jeffery [95] avec la méthode des coordonnées bisphériques. . . . .	38
2.3	Force normalisée appliquée sur une sphère d'une chaîne de $N_p = 3, 5, 7$ sphères. La distance $D^1 = 101$ sépare la sphère 1 de la paroi et $D = 2$ est la distance qui sépare deux sphères consécutives. . . . .	42
3.1	Comparaison entre les résultats obtenus pour différents maillages appliqués sur une seule particule de centre $(0, 0, Z)$ . A : les résultats de Brenner [16] , B : les résultats de la méthode (BEM) pour un maillage uniforme de niveau 2 (cf annexe C), C : les résultats de la méthode (BEM) pour un maillage adaptatif à partir du niveau 2 d'un maillage uniforme de la particule et D : résultats de la méthode (BEM) pour un maillage uniforme de niveau 3. . . . .	59
5.1	Composantes de vitesse $V_z$ et $V_y$ en fonction de $Z-1$ aux points $(0, 10^{-5}, Z)$ pour une particule de centre $(0, 0, 10)$ . . . . .	88
5.2	Composantes de vitesse $V_z$ et $V_y$ en fonction de $Z-1$ aux points $(0, 10^{-5}, Z)$ pour une particule de centre $(0, 0, 1.1)$ . . . . .	89
5.3	Composantes de vitesse $V_y$ et $V_z$ en fonction de $Y$ aux points $(0, Y, 10)$ pour une particule de centre $(0, 0, 10)$ . . . . .	92
5.4	Composantes de vitesse $V_y$ et $V_z$ en fonction de $Y$ aux points $(0, Y, 10)$ pour une particule de centre $(0, 0, 1.1)$ . . . . .	93
5.5	$f_{xx}^t$ et $c_{yx}^t$ pour une particule de centre $(0, 0, Z)$ calculés par les méthodes (BIS) et (BEM). . . . .	98
5.6	$f_{xy}^r$ (à gauche) et $c_{yy}^r$ pour une particule de centre $(0, 0, Z)$ calculés par les méthodes (BIS) et (BEM). . . . .	98

5.7	$f_{xx}^\kappa$ (à gauche) et $c_{yx}^\kappa$ pour une particule de centre $(0, 0, Z)$ calculés par les méthodes (BIS) et (BEM). . . . .	99
6.1	Une particule ellipsoïdale dans un fluide infini en écoulement de cisaillement avec la vitesse $\mathbf{v}^\infty = \kappa z \mathbf{e}^1$ . (a) résultats analytiques de Jeffery [58], (b) résultats de Gavze et Shapiro [37] (1200 triangles) et (c) nos résultats (512 triangles). . . . .	108
6.2	Une particule sphérique dans un fluide infini en écoulement de cisaillement avec la vitesse $\mathbf{v}^\infty = \kappa z \mathbf{e}^1$ . (a) résultats analytiques de Goldman, Cox et Brenner [45], (b) résultats de Gavze et Shapiro [37] (1200 triangles) et (c) nos résultats (512 triangles). . . . .	108
6.3	Forces hydrodynamiques $F_{zz}^t$ et $F_{yy}^t$ exercées sur deux particules en translation à gauche perpendiculaire à une paroi et à droite parallèlement à celle-ci. Les ellipsoïdes (1) et (2) sont centrés respectivement : à gauche aux points $(0, -3, Z)$ et $(0, 3, Z)$ et à droite aux points $(-3, 0, Z)$ et $(3, 0, Z)$ . . . . .	111

# Liste des figures

1.1	Particules en mouvements de translation et de rotation dans un fluide en mouvement de cisaillement délimité par une paroi imperméable. . . .	8
1.2	Décomposition d'un écoulement en plusieurs écoulements élémentaires. . .	11
1.3	Notations pour le cas de deux sphères en mouvement de même sens, dans un fluide au repos. . . . .	17
1.4	Stokeslet source et Stokeslet image utilisé dans la construction de la fonction de Blake [10]. . . . .	20
2.1	Notation pour une ligne de particules et une paroi [31]. . . . .	28
2.2	Répartition des points de collocation sur deux sphères. . . . .	34
2.3	La force hydrodynamique exercée sur une sphère au voisinage d'une paroi plane ; (a) solution obtenue par la méthode des coordonnées bisphériques [16, 72] ; (b) solution obtenue par la présente technique ; (c) solution obtenue par Wakiya [101] en utilisant la méthode de réflexions. . . . .	37
2.4	Comparaison entre les variations de la force hydrodynamique exercée sur une sphère, pour deux sphères identiques en sédimentation, séparées par la distance $D^2 - 1$ ; (a) : méthode des coordonnées bisphériques [95],(b) : nos résultats ,(c) : méthode des réflexions [101]. . . . .	38
2.5	Comparaison des valeurs de la force hydrodynamique $\Phi_1$ exercée sur la sphère 1 en fonction de la distance $D^1$ de la paroi, pour différentes valeurs de $D^2$ , la distance qui sépare les deux sphères. . . . .	39
2.6	Variation de la force de résistance $\Phi_2$ qui agit sur la sphère 2, en fonction de sa distance $D^2$ à la sphère 1. Les courbes sont tracées pour plusieurs valeurs de $D^1$ . . . . .	40
2.7	Profil de variation de la force hydrodynamique sans dimension, exercée sur la sphère 1, en fonction de la distance à la sphère 2. La sphère 1 est fixée à une distance $D^1 = 1.01$ de la paroi. . . . .	41
2.8	Force hydrodynamique sur la sphère 1 au voisinage de la paroi en fonction de la distance $D^2$ pour les valeurs $D^1 = 2, 11$ . Comparaison entre les résultats de la présente méthode (—) et ceux de Wakiya (⋯). . . . .	41
2.9	Force hydrodynamique exercée sur les particules d'une chaîne de 20 particules. . . . .	42

2.10	Inverse de la force hydrodynamique réduite exercée sur une chaîne de 2, 3, 5 sphères, en fonction de la distance $D^1$ entre la première sphère et la paroi. La distance entre les sphères est $D = 4$ (à gauche) et $D = 5$ (à droite) . . . . .	43
3.1	Assemblage de la matrice. . . . .	53
3.2	Arrangement des valeurs de contrainte pour trouver les niveaux. . . . .	57
3.3	Les subdivisions acceptables d'un triangle en 4, 3 ou 2 triangles élémentaires (la subdivision est d'autant plus importante que le niveau de contraintes est plus grand). . . . .	58
3.4	Raffinement du maillage d'une sphère dans la zone à fort gradient de contraintes . . . . .	58
5.1	Force hydrodynamique en fonction de $Z$ (distance centre particule et paroi). (a) Résultats de Brenner calculés par la méthode des coordonnées bisphériques (b) Méthode des éléments de frontière : cas axisymétrique (c) Méthode des éléments de frontières : cas général. . . . .	83
5.2	Force hydrodynamique suivant $(Ox)$ exercée sur une particule en translation suivant $(Ox)$ (a) Résultats de la méthode des coordonnées bisphériques [2] (b) Nos résultats. . . . .	83
5.3	Couple hydrodynamique autour de $(Oy)$ exercé sur une particule en translation suivant $(Ox)$ . (a) Les résultats par la méthode des coordonnées bisphériques [2] (b) Nos résultats. . . . .	84
5.4	Couple hydrodynamique autour de $(Oy)$ exercé sur une particule en rotation autour de $(Oy)$ . (a) Les résultats de Goldman et coll. [44, 45] (b) Nos résultats. . . . .	84
5.5	Coefficient $X_{11}$ en fonction de la distance $r$ entre les centres de deux particules. Les particules sphériques sont identiques et en translation parallèlement à la ligne de leurs centres et dans le même sens. (a) Calcul de Stimson et Jeffery [95] par la méthode des coordonnées bisphériques (b) Nos calculs par la méthode des éléments de surface. Err est la fonction d'erreur relative entre les deux solutions en fonction de $r - 2$ . . . . .	86
5.6	Coefficient $X_{12}$ en fonction de la distance $r$ entre les centres des deux sphères, les deux particules en translation parallèlement à la ligne de leurs centres dans le sens contraire. (a) Solution de Stimson et Jeffery [95] calculée par la méthode des coordonnées bisphériques. (b) calcul par la méthode des éléments de surface. Err est la fonction d'erreur relative entre les deux solutions en fonction de $r - 2$ . . . . .	86
5.7	Droites sur laquelle la vitesse est calculée par deux méthodes . . . . .	87

5.8	Composantes de vitesse $V_y$ et $V_z$ calculées aux points de coordonnées $(0, 10^{-5}, Z)$ pour une particule de centre $(0, 0, 10)$ en translation avec la vitesse $\mathbf{V} = -\mathbf{e}^3$ perpendiculairement à la paroi d'équation $Z = 0$ . (BIS) résultats exacts par la méthode des coordonnées bisphériques, (BEM) nos résultats par la méthode des éléments de frontière. . . . .	90
5.9	Comme figure (5.8) mais aux points de coordonnées $(0, 0.5, Z)$ . . . . .	90
5.10	Comme figure (5.8) mais aux points de coordonnées $(0, 1, Z)$ . . . . .	90
5.11	Composantes de vitesse $V_y$ et $V_z$ calculées aux points de coordonnées $(0, 10^{-5}, Z)$ pour une sphère de centre $(0, 0, 1.1)$ en translation avec la vitesse $\mathbf{V} = -\mathbf{e}^3$ perpendiculairement à la paroi d'équation $Z = 0$ . (BIS) résultats exacts par la méthode des coordonnées bisphériques, (BEM) nos résultats par la méthode des éléments de frontière. . . . .	91
5.12	Comme figure (5.11) mais aux points de coordonnées $(0, 0.5, Z)$ . . . . .	91
5.13	Comme figure (5.11) mais aux points de coordonnées $(0, 1, Z)$ . . . . .	91
5.14	Composantes de vitesse $V_y$ et $V_z$ calculées aux points de coordonnées $(0, Y, 9)$ pour une particule de centre $(0, 0, 10)$ en translation avec la vitesse $\mathbf{V} = -\mathbf{e}^3$ perpendiculairement à la paroi d'équation $Z = 0$ . (BIS) résultats exacts par la méthode des coordonnées bisphériques, (BEM) nos résultats par la méthode des éléments de frontière. . . . .	94
5.15	Comme figure (5.14) mais aux points de coordonnées $(0, Y, 10)$ . . . . .	94
5.16	Comme figure (5.14) mais aux points de coordonnées $(0, Y, 11)$ . . . . .	94
5.17	Composantes de vitesse $V_y$ et $V_z$ calculées aux points de coordonnées $(0, Y, 1.1)$ pour une sphère de centre $(0, 0, 1.1)$ en translation avec la vitesse $\mathbf{V} = -\mathbf{e}^3$ perpendiculairement à la paroi d'équation $Z = 0$ . (BIS) résultats exacts par la méthode des coordonnées bisphériques, (BEM) nos résultats par la méthode des éléments de frontière. . . . .	95
5.18	Comme figure (5.17) mais aux points de coordonnées $(0, Y, 1.1)$ . . . . .	95
5.19	Comme figure (5.17) mais aux points de coordonnées $(0, Y, 2.1)$ . . . . .	95
5.20	$f_{xx}^t$ (à gauche) et $c_{yx}^t$ (à droite) pour une sphère de centre $(0, 0, Z)$ en translation parallèlement à une paroi. (BIS) résultats exacts par la méthode des coordonnées bisphériques, (BEM) nos résultats par la méthode des éléments de frontière. . . . .	96
5.21	$f_{xy}^r$ (à gauche) et $c_{yy}^r$ (à droite) pour une sphère de centre $(0, 0, Z)$ en rotation autour de $(Oy)$ . (BIS) résultats exacts par la méthode des coordonnées bisphériques, (BEM) nos résultats par la méthode des éléments de frontière. . . . .	97
5.22	$f_{xx}^\kappa$ (à gauche) et $c_{yx}^\kappa$ (à droite) pour une sphère de centre $(0, 0, Z)$ fixée dans un écoulement de cisaillement de vitesse $\mathbf{v}^\kappa = \kappa z \mathbf{e}^1$ . (BIS) résultats exacts par la méthode des coordonnées bisphériques, (BEM) nos résultats par la méthode des éléments de frontière. . . . .	97

- 5.23 Coefficients de mobilité  $x_{11}$  et  $x_{22}$  en fonction du rapport des rayons  $\lambda = \frac{a^2}{a^1}$  pour deux sphères dans un fluide infini telle que  $s = \frac{2r}{a^1 + a^2} = 4$  où  $r$  est la distance entre les deux centres, (a) résultats de Jeffrey et Onishi [59], (b) nos résultats. . . . . 100
- 5.24 Coefficients de mobilité  $x_{12}$  et  $x_{21}$  en fonction du rapport des rayons  $\lambda = \frac{a^2}{a^1}$  pour deux sphères dans un fluide infini telle que  $s = \frac{2r}{a^1 + a^2} = 4$  où  $r$  est la distance entre les deux centres, (a) résultats de Jeffrey et Onishi [59], (b) nos résultats. . . . . 101
- 5.25 Force hydrodynamique normalisée  $F_{zz}^1$  exercée sur la sphère numéro 1 en fonction de  $Z$  la distance à la paroi  $Z = 0$ , avec les deux méthodes : (a) axisymétrique (b) non axisymétrique. Les sphères sont en mouvement de translation vers la paroi avec une vitesse  $\mathbf{v}^1 = \mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^3 = -\mathbf{e}^3$  . . . 102
- 5.26 Force hydrodynamique normalisée  $F_{zz}^k$  exercée sur la sphère numéro  $k = 2, 3$  en fonction de  $Z$  la distance de la première sphère à la paroi, avec les méthodes (a) axisymétrique (b) non axisymétrique pour la sphère 2 et les méthodes (c) axisymétrique (d) non axisymétrique pour la sphère 3. Les sphères sont en mouvement de translation vers la paroi avec une vitesse  $\mathbf{v}^1 = \mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^3 = -\mathbf{e}^3$  . . . . . 103
- 6.1 Un ellipsoïde d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , avec  $a, b, c$  les petits axes respectivement suivant  $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2$  et  $\mathbf{e}^3$ . . . . . 108
- 6.2 La composante normalisée de la force  $F_{zz}^t$  qui s'exerce sur une particule en sédimentation perpendiculaire à la paroi d'équation  $Z = 0$  en fonction de la distance à la paroi : (E) pour une particule ellipsoïdale d'équation  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(z-Z)^2}{c^2} = 1$  avec  $b/a = 3$  et  $c/a = 1$ ; (S) pour une particule sphérique de même volume. . . . . 109
- 6.3 Comparaison de la force  $F_z^\kappa$  (à gauche) et du couple  $C_y^\kappa$  (à droite) exercés sur une sphère unité (S) et un ellipsoïde (E) telle que  $b/a = 1$  et  $c/a = 3$ . Les particules fixées dans un fluide en écoulement de cisaillement de vitesse  $\mathbf{v}^\infty = \kappa z \mathbf{e}^1$  et la distance du centre de la particule à la paroi est  $Z$ . . . . . 110
- 6.4 Comparaison de la force  $F_z^\kappa$  exercée sur une sphère unité (S) et un ellipsoïde (E) telle que  $b/a = 1$  et  $c/a = 3$  pour deux positions de l'ellipsoïde ( $\theta = 0$  et  $\theta = \pi/4$  où  $\theta$  est l'angle de rotation autour de  $(Oy)$ ). . . . . 110
- 6.5 Trois configurations de  $N_p$  particules ( $N_p = 3$ ) sont étudiées : configuration (a) Particules en translation suivant la ligne de leurs centres et parallèlement à la paroi; configuration (b) Particules en translation perpendiculaire à la ligne de leurs centres et perpendiculaire à la paroi; configuration (c) Particules en translation perpendiculaire à la ligne de leurs centres et parallèlement à la paroi. . . . . 112

- 
- 6.6 La composante normalisée  $F_{xx}^t$  (à gauche) et  $F_{zx}^t$  (à droite) de la force exercée sur la particule numéro (1),(2) et (3) d'une chaîne de trois particules sphériques en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^1$ . . . . . 113
- 6.7 La composante normalisée  $F_{xx}^t$  (à gauche) et  $F_{zx}^t$  (à droite) de la force exercée sur la particule (1) , (6) et (11) d'une chaîne de particules sphériques de 11 particules en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^1$ . . . 114
- 6.8 La composante normalisée du couple  $C_{yx}^t$ , à gauche pour les mêmes conditions que figure (6.6), à droite pour les mêmes conditions que figure (6.7). . . . . 114
- 6.9 La composante normalisée  $F_{xx}^t$  (à gauche) et  $F_{zx}^t$  (à droite) de la force exercée sur la particule (1) , (11) et (21) d'une chaîne de 21 particules sphériques en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^1$ . . . . . 115
- 6.10 La composante normalisée  $F_{xx}^t$  (à gauche) et  $F_{zx}^t$  (à droite) de la force exercée sur la particule (1) , (31) et (61) d'une chaîne de 61 particules sphériques en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^1$ . . . . . 115
- 6.11 La composante normalisée du couple  $C_{yx}^t$ , à gauche pour les mêmes conditions que figure (6.9), à droite pour les mêmes conditions que figure (6.10). . . . . 116
- 6.12 La composante normalisée  $F_{xz}^t$  (à gauche) et  $F_{zz}^t$  (à droite) de la force exercée sur la particule numéro (1),(2), et (3) d'une chaîne de particules sphériques en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = -\mathbf{e}^3$ . . . . . 117
- 6.13 La composante normalisée  $F_{xz}^t$  (à droite) et  $F_{zz}^t$  (à gauche) de la force exercée sur la particule (1) , (6) et (11) d'une chaîne 11 de particules sphériques en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = -\mathbf{e}^3$ . . . . . 117
- 6.14 La composante normalisée du couple  $C_{yz}^t$ , à gauche pour les mêmes conditions que figure (6.12), à droite pour les mêmes conditions que figure (6.13). 118
- 6.15 La composante normalisée  $F_{xz}^t$  (à gauche) et  $F_{zz}^t$  (à droite) de la force exercée sur la particule (1) , (11) et (21) d'une chaîne de 21 particules sphériques en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = -\mathbf{e}^3$ . . . . . 118
- 6.16 La composante normalisée  $F_{xz}^t$  (à gauche) et  $F_{zz}^t$  (à droite) de la force exercée sur la particule (1) , (31) et (61) d'une chaîne de 61 particules sphériques en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^1$ . . . . . 119
- 6.17 La composante normalisée du couple  $C_{yz}^t$ , à gauche pour les mêmes conditions que figure (6.13), à droite pour les mêmes conditions que figure (6.16). . . . . 119
- 6.18 La composante normalisée  $C_{xy}^t$  (à droite) et  $C_{zy}^t$  (à gauche) du couple exercé sur la particule numéro (1),(2), et (3) d'une chaîne de particules sphériques en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^2$ . . . . . 120
- 6.19 La composante normalisée  $C_{xy}^t$  (à droite) et  $C_{zy}^t$  (à gauche) du couple exercé sur la particule numéro (1),(6), et (11) d'une chaîne de particules sphériques en translation avec la même vitesse  $\mathbf{v} = \mathbf{e}^2$ . . . . . 121

6.20	La composante normalisée du couple $F_{yy}^t$ , à gauche pour les mêmes conditions que figure (6.19), à droite pour les mêmes conditions que figure (6.22). . . . .	121
6.21	La composante normalisée $C_{xy}^t$ (à droite) et $C_{zy}^t$ (à gauche) du couple exercé sur la particule numéro (1),(11), et (21) d'une chaîne de $N_p$ particules sphériques en translation avec la même vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{e}^2$ . . . . .	122
6.22	La composante normalisée $C_{xy}^t$ (à droite) et $C_{zy}^t$ (à gauche) du couple exercé sur la particule numéro (1),(31), et (61) d'une chaîne de particules sphériques en translation avec la même vitesse $\mathbf{v} = \mathbf{e}^2$ . . . . .	122
6.23	La composante normalisée du couple $F_{yy}^t$ , à gauche pour les mêmes conditions que figure (6.21), à droite pour les mêmes conditions que figure (6.22). . . . .	123
6.24	Force exercée sur les particules d'une chaîne de particules dans la configuration (a), figure (6.5) pour différentes valeurs de $\delta$ , cf (*), la distance qui sépare les particules de la paroi. . . . .	123
6.25	Force exercée sur les particules d'une chaîne de particules dans la configuration (b), figure (6.5) pour différentes valeurs de $\delta$ , cf (*), la distance qui sépare les particules de la paroi. . . . .	124
6.26	Force exercée sur les particules d'une chaîne de particules dans la configuration (c), figure (6.5) pour différentes valeurs de $\delta$ , cf (*), la distance qui sépare les particules de la paroi. . . . .	124
6.27	Huit particules numérotées de 1 à 8, de coordonnées respectivement $(2, 2, Z+1); (2, -2, Z+1); (-2, -2, Z+1); (-2, 2, Z+1); (2, 2, Z+5); (2, -2, Z+5); (-2, -2, Z+5); (-2, 2, Z+5)$ . . . . .	125
6.28	Matrice de huit particules figure (6.27), en sédimentation perpendiculairement à la paroi d'équation $z = 0$ . Force hydrodynamique en fonction de $Z$ exercée sur les particules 1, 2, 3, 4 (à gauche) et 5, 6, 7, 8 (à droite) . . . . .	126
6.29	Douze particules numérotées de 1 à 12, de coordonnées respectivement $(2, 2, Z+1); (2, -2, Z+1); (-2, -2, Z+1); (-2, 2, Z+1); (2, 2, Z+5); (2, -2, Z+5); (-2, -2, Z+5); (-2, 2, Z+5); (2, 2, Z+9); (2, -2, Z+9); (-2, -2, Z+9); (-2, 2, Z+9)$ . . . . .	126
6.30	Matrice de douze particules figure (6.29), en sédimentation perpendiculairement à la paroi d'équation $z = 0$ . $F_{zz}^t$ exercée sur les particules 5, 6, 7, 8 pour (A) et exercée sur les particules 9, 10, 11, 12 pour (B) en fonction de $Z$ . . . . .	126
6.31	Les trajectoires de deux particules en sédimentation perpendiculairement à une paroi. . . . .	127
6.32	Profil de la vitesse $V_y$ des particules de la figure (6.31) en fonction de $Z$ pour la particule numéro (1) et la particule numéro (2). . . . .	128
6.33	Profil de la vitesse $V_z$ des particules de la figure (6.31) en fonction $Z$ pour la particule numéro (1) et la particule numéro (2). . . . .	128
6.34	Les trajectoires de deux particules en sédimentation parallèlement à la paroi, avec effet faible de la paroi. . . . .	129

- 
- 6.35 Profil de la vitesse verticale des particules de la figure (6.34) en fonction de  $Y$  pour la particule numéro (1) et la particule numéro (2). . . . . 129
- 6.36 Profil de la vitesse horizontale des particules de la figure (6.34) en fonction  $Y$  pour la particule numéro (1) et la particule numéro (2). . . . . 129
- 6.37 Trajectoires de trois particules initialement aux positions  $(0, 0, 3)$ ,  $(0, 0, 6)$  et  $(0, 0, 9)$  en sédimentation ( $\mathbf{g} = g \mathbf{e}^2$ ) dans un fluide au repos au voisinage d'une paroi verticale d'équation  $Z = 0$ . Des marqueurs sur les courbes des trajectoires indiquant la position après le même laps de temps. 130
- 6.38 Profil de la vitesse  $V_y$  des particules (1),(2) et (3) de la figure (6.37) en fonction de  $Z$ . . . . . 131
- 6.39 Profil de la vitesse  $V_z$  des particules (1),(2) et (3) de la figure (6.37) en fonction de  $Z$ . . . . . 131
- 6.40 Trajectoires de trois particules initialement aux positions  $(0, 0, 3)$ ,  $(3, 0, 3)$  et  $(6, 0, 3)$  en sédimentation ( $\mathbf{g} = g \mathbf{e}^2$ ) dans un fluide au repos au voisinage d'une paroi verticale d'équation  $z = 0$ . Les particules sont soumises à la force de gravitation seulement  $\mathbf{g} = g \mathbf{e}^2$ . . . . . 132
- 6.41 Profil de la vitesse  $V_x, V_y, V_z$  des particules de la figure (6.40) en fonction de  $Y$  pour les particules numéro (1), (2) et (3). . . . . 132
- 6.42 Champs de vitesse autour de deux particules fixées dans un écoulement de cisaillement : (A) ligne de centres parallèle à la paroi ; (B) ligne de centre perpendiculaire à la paroi. . . . . 133
- 6.43 Champs de vitesse autour de deux particules en sédimentation : (A) ligne de centres parallèle à la paroi ; (B) ligne de centre perpendiculaire à la paroi. . . . . 133
- 6.44 Champs de vitesse autour de trois particules fixées dans un écoulement de cisaillement : (A) ligne des centres de particules parallèle à la paroi ; (B) ligne des centres de particules centre perpendiculaire à la paroi ; (C) les centres des particules sont placées au sommet d'un triangle. . . . . 134
- 6.45 Champs de vitesse autour de trois particules en sédimentation : (A) ligne des centres de particules parallèle à la paroi ; (B) ligne des centres de particules centre perpendiculaire à la paroi ; (C) les centres des particules sont placées au sommet d'un triangle. . . . . 134
- 6.46 Deux particules en sédimentation à partir des positions  $(0, -1.5, 10)$ ,  $(0, 1.5, 10)$ . Les étoiles représentent leurs trajectoires. Les étoiles sont des positions choisies pour le même nombre de pas de temps. La barre des couleurs représente la valeur de la composante de la vitesse  $V_y$  pour (A1)-(A2)-(A3)-(A4) et la composante de la vitesse  $V_z$  pour (B1)-(B2)-(B3)-(B4) à l'intérieur du fluide  $A$ . . . . . 136

6.47	Trois particules en sédimentation à partir des positions $(0, 0, 3)$ , $(0, 0, 6)$ , $(0, 0, 9)$ . Les points représentent leurs trajectoires. Les étoiles sont des positions choisies après le même nombre de pas de temps. La barre des couleurs représente la valeur de la composante $V_y$ de la vitesse à l'intérieur du fluide. . . . .	138
6.48	Comme figure (6.47) mais ici la barre des couleurs représente la valeur de la composante $V_z$ de la vitesse à l'intérieur du fluide. . . . .	138
6.49	Trois particules en sédimentation à partir des positions $(0, 0, 3)$ , $(0, 3, 3)$ , $(0, 6, 3)$ . La barre des couleurs représente la valeur de la composante $V_y$ de la vitesse à l'intérieur du fluide. . . . .	139
6.50	Comme figure (6.49) mais ici la barre des couleurs représente la valeur de la vitesse $V_z$ à l'intérieur du fluide. . . . .	139
6.51	Trois particules en sédimentation à partir des positions $(0, 0, 3)$ , $(3, 0, 3)$ , $(6, 0, 3)$ . Les barres des couleurs représente l'isovaleur du module de la vitesse à l'intérieur du fluide. . . . .	140
A.1	Application du théorème de réciprocity . . . . .	152
C.1	Octaèdre à 6 sommets et 8 faces, niveau 0 du maillage. . . . .	159
C.2	Polyèdre à 1026 sommets et 512 faces, 3 <sup>ème</sup> niveau du maillage. . . . .	159
D.1	Subdivision d'un triangle en 6 triangles, le point de singularité étant au centre de gravité $\mathbf{x}_G$ . . . . .	161
D.2	Coordonnées polaires sur le triangle de référence. . . . .	162

# Bibliographie

- [1] ABRAMOWITZ, M., AND STEGUN, I. A. *Handbook of Mathematical Functions*. New York :Dover, 1965.
- [2] ADLER, P. M. Interaction of unequal spheres. 1. Hydrodynamic interaction. colloidal forces. *J. Colloidal Interface Sci.* 84 (1981), 461–474.
- [3] ATKINSON, K. E. *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*. Cambridge University Press, 1997.
- [4] ATKINSON, K. E., AND CHIEN, D. Piecewise polynomial collocation for boundary integral equations. *SIAM Journal on Scientific Computing* 16, 3 (1995), 651–681.
- [5] BANERJEE, P. K. *The Boundary Element Methods in Engineering*. McGraw-Hill, 1993.
- [6] BEENAKKER, C. W. J., SAARLOOS, W. V., AND MAZUR, P. Many-sphere hydrodynamic interactions. *Physica A* 127 (1984), 451–472.
- [7] BEER, G. *Programming the Boundary Element Method : An Introduction for Engineers*. John Wiley and Sons, 2001.
- [8] **Berzig, M.**, ELASMI, L., AND FEUILLEBOIS, F. Etude des interactions hydrodynamiques la sédimentation entre particules et paroi par la méthode des intégrales de surfaces. *14ème Congrès Français de Mécanique, Toulouse* (1999).
- [9] **Berzig, M.**, ELASMI, L., AND FEUILLEBOIS, F. Calcul des interactions hydrodynamiques entre une ligne de particules de différentes tailles en sédimentation perpendiculairement à une paroi plane. *32<sup>e</sup> Congrès National d'Analyse Numérique, CANUM 2000* (2000).
- [10] BLAKE, J. R. A note on the image system for a Stokeslet in a no-slip boundary. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 70 (1971), 303–310.
- [11] BLAKE, J. R. Fundamental singularities of viscous flow. Part 1 : The image systems in the vicinity of a stationary no-slip boundary. *J. Eng. Math.* 8 (1974), 23–29.
- [12] BONNET, M. *Boundary Integral Equations Methods for Solids and Fluids*. John Wiley and Sons, 1999.
- [13] BOSSIS, G., MEUNIER, A., AND SHERWOOD, J. D. Stokesian dynamics simulations of particles trajectories near a plane. *Phys. Fluids A* 3, 8 (1991), 1853–1858.

- 
- [14] BRADY, F., AND BOSSIS, G. Stokesian dynamics. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 20 (1988), 111–157.
- [15] BREBBIA, C. A., TELLES, J. C. L., AND WROBEL, L. C. *Boundary Element Techniques*. theory and applications in engineering. Springer-Verlag, 1984.
- [16] BRENNER, H. The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface. *Chemical Engineering Science* 16 (1961), 242–251.
- [17] BRENNER, H., AND O’NEILL, M. E. On the Stokes resistance of multiparticle systems in a linear shear field. *Chemical Engineering Science* 27 (1972), 1421–1439.
- [18] CHAOUÏ, M., AND FEUILLEBOIS, F. Creeping flow around a sphere in a shear flow close to a wall. *Q. J. Mech. Appl. Math.* 56 (2003), 231–410.
- [19] CHEN, Y., AND ATKINSON, K. E. Solving a single layer integral equation on surfaces in  $\mathbb{R}^3$ . Reports on Computational Mathematics 51, Dept of Mathematics, University of Iowa, 1994.
- [20] CHIEN, D. Numerical evaluation of surface integrals in three dimensions. *Mathematics of Computation* 64, 210 (1995), 727–743.
- [21] CIARLET, P. G. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, 1st edition ed. North-Holland, 1978.
- [22] CICHOCKI, B., B.U., HINSEN, F. K., WIJNRYB, E., AND BŁAWZDZIEWICZ, J. Friction and mobility of many spheres in Stokes flow. *J. Chem. Phys.* 100, 5 (1994), 3780–3790.
- [23] CICHOCKI, B., AND JONES, R. B. Image representation of a spherical particle near a hard wall. *Physica A* 258 (1998), 273–302.
- [24] CICHOCKI, B., JONES, R. B., KUTTEB, R., AND WAJNRYB, E. Friction and mobility for colloidal spheres in Stokes flow near a boundary : The multipole method and applications. *J. Chem. Phys.* 112 (2000), 2548–2561.
- [25] CLAEYS, I. L., AND BRADY, J. F. Suspension of prolate spheroids in Stokes flow : 1. Dynamics of finite number of particles in an unbounded fluid. *J. Fluid Mech.* 251 (1993), 411–442.
- [26] DABROS, T., AND DE VEN, T. G. M. V. Hydrodynamic interactions between two spheres near a solid plane. *Int. J. Multiph. Flow* 18, 5 (1992), 751–764.
- [27] DARVE, E. *Méthodes multipôles rapides : Résolution des équations de Maxwell par formulations intégrales*. Thèse, Université Pierre et Marie Curie., 1999.
- [28] DAUTRAY, R., AND LIONS, J. L. *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, vol. 4. Springer-Verlag, 1990.
- [29] DUFFY, D. G. *Green’s Functions with Applications*. Chapman and Hall/CRC, 2001.
- [30] ELASMI, L. *Etude de la sustentation d’un corps par un fluide traversant une plaque poreuse*. Thèse, Université Pierre et Marie Curie., 1990.

- 
- [31] ELASMI, L., **Berzig, M.**, AND FEUILLEBOIS, F. Stokes flow for the axisymmetric motion of several spherical particles perpendicular to a plane wall. *Journal of Applied Mathematics and Physics, ZAMP* 54, 2 (2003), 304–327.
- [32] FEUILLEBOIS, F. *Multiphase Science and Technology*, vol. 4. Hemisphere publ. corp., 1989, ch. Some theoretical results for the motion of solid spherical particles in a viscous fluid.
- [33] GANATOS, P., PFEFFER, R., , AND WEINBAUM, S. A numerical-solution technique for three-dimensional Stokes flows, with application to the motion of strongly interacting spheres in a plane. *J. Fluid Mech.* 84 (1978), 79–111.
- [34] GANATOS, P., PFEFFER, R., AND WEINBAUM, S. A strong interaction theory for the creeping motion of a sphere between plane parallel boundaries. part 2. parallel motion. *J. Fluid Mech.* 99 (1980), 755–783.
- [35] GANATOS, P., WEINBAUM, S., AND PFEFFER, R. A strong interaction theory for the creeping motion of a sphere between plane parallel boundaries. part 1. perpendicular motion. *J. Fluid Mech.* 99 (1980), 739–753.
- [36] GAVZE, E. A boundary integral equation solution of the Stokes flow due to the motion of an arbitrary body near a plane wall with a hole. *Int. J. Multiphase Flow* 16, 3 (1990), 529–543.
- [37] GAVZE, E., AND SHAPIRO, M. Particles in a shear flow near a solid wall : Effect of nonsphericity on forces and velocity. *J. Multiphase Flow* 23, 1 (1997), 155–182.
- [38] GEAR, C. W. Numerical initial value problems in ordinary differential equations. *Prentice-Hall, NJ* (1971).
- [39] GEIGENMUELLER, U., AND MAZUR, P. Sedimentation of homogeneous suspensions in finite vessels. *J. Stat. Phys.* 53, 1/2 (1988), 137–173.
- [40] GEORG, K. Approximation of integrals for boundary element methods. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing* 12, 2 (1991), 443–453.
- [41] GEORG, K., AND TAUSCH, J. Some error estimates for the numerical approximation of surface integrals. *Mathematics of Computation* 62, 206 (1994), 755–763.
- [42] GEORGE, P. L. *Génération automatique de maillages : applications aux méthodes d'éléments finis.*, vol. 16 of *Collection recherche en mathématiques appliquées*. Masson, 1991.
- [43] GOLDMAN, A. J., COX, R. G., AND BRENNER, H. The slow motion of two identical arbitrarily oriented spheres through a viscous fluid. *Chem. Engng. Sci.* 21 (1966), 1151–1170.
- [44] GOLDMAN, A. J., COX, R. G., AND BRENNER, H. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall. I Motion through a quiescent fluid. *Chem. Engng. Sci.* 22 (1967), 637–651.
- [45] GOLDMAN, A. J., COX, R. G., AND BRENNER, H. Slow viscous motion of a sphere parallel to a plane wall. II Couette flow. *Chem. Engng. Sci.* 22 (1967), 653–660.

- [46] GOREN, S. L. Resistance and stability of a line of particles moving near a wall. *J. Fluid Mech.* 132 (1983), 185–196.
- [47] GOREN, S. L., AND O’NEILL, M. E. On the hydrodynamic resistance to a particle of a dilute suspension when in the neighbourhood of a large obstacle. *Chem. Engng. Sci.* 26 (1971), 325.
- [48] GRADESHTEYN, I., AND RYZHIK, I. *Table of Integrals, Series and products*. Academic Press New York and London, 1956.
- [49] GUYON, E., HULIN, J. P., AND PETIT, L. *Hydrodynamique physique*. Inter editions, CNRS, 1994.
- [50] HAPPEL, J., AND BRENNER, H. *Low Reynolds Number Hydrodynamics, with special applications to particulate media*, second revised ed. Noordhoff International Publishing Leyden, 1973.
- [51] HIGDON, J. J. L., AND MULDOWNEY, G. P. Resistance functions for spherical particles, droplets and bubbles in cylindrical tubes. *J. Fluid Mech.* 298 (1994), 193–210.
- [52] HIGDON, J. J. L., AND MULDOWNEY, G. P. A spectral boundary element approach to three-dimensional Stokes flow. *J. Fluid Mech.* 298 (1994), 167–192.
- [53] HIGDON, J. J. L., AND SCHNEPPER, C. A. *High order boundary integral methods for viscous free surface flow*. Springer-Verlag, 1994, ch. In Free Boundaries in Viscous Flows, pp. 49–66.
- [54] HSIAO, G. C., KLEINMAN, R. E., AND WANG, H. K. Applications of boundary integral equation methods in 3d electromagnetic scattering. *J. Comp. App. Math.* 104 (1999), 89 – 110.
- [55] HSU, R., AND GANATOS, P. The motion of rigid body in viscous fluid bounded by a plane wall. *J. Fluid Mech.* 207 (1989), 29–72.
- [56] ISMAIL, M. *Méthode de la frontière élargie pour la résolution de problèmes elliptiques dans des domaines perforés. Application aux écoulements fluides tridimensionnels*. Thèse, Université de Pierre et Marie Curie., 2004.
- [57] JEFFERY, G. B. One the steady rotation of a solid of revolution in a viscous fluid. *Proc. London Math. Soc., Ser. 14* (1915), 327–338.
- [58] JEFFERY, G. B. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. *Proc. R. Soc. London A* 102 (1922), 161–179.
- [59] JEFFREY, D. J., AND ONISHI, Y. Calculation of resistance and mobility functions for two unequal rigid spheres in low Reynolds number flow. *J. Fluid Mech.* 139 (1984), 261–290.
- [60] KIM, S., AND KARRILA, S. *Microhydrodynamics : Principles and Selected Applications*. Butterworth–Heinemann, 1991.
- [61] KRESS, R. *Linear Integral Equations*, vol. 82 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer Verlag, 1989.

- 
- [62] LADD, A. J. C. Hydrodynamic interactions in a suspension of spherical particles. *J. Chem. Phys.* 88 (1987), 5051–5063.
- [63] LADD, A. J. C. Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. Part1. Theoretical foundation. *J. Fluid. Mech.* 271 (1994), 285–309.
- [64] LADD, A. J. C. Numerical simulations of particulate suspensions via a discretized Boltzmann equation. Part2. Numerical results. *J. Fluid. Mech.* 271 (1994), 285–309.
- [65] LADYZHENSKAYA, O. A. *The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow*. Gordon and Breach Science Publishers, 1969.
- [66] LAMB, H. *Hydrodynamics*. Cambridge, 1932.
- [67] LI, X. Z., BARTHES-BIESEL, D., AND HELMY, A. Large deformation and burst of a capsule freely suspended in an elongational flow. *J. Fluid Mech.* 187 (1988), 179–196.
- [68] LOEWENBERG, M., AND HINCH, E. J. Numerical simulation of a concentrated emulsion in shear flow. *J. Fluid Mech.* 321 (1996), 395–419.
- [69] LORENTZ, H. A. A general theorem concerning the motion of a viscous fluid and a few consequences derived from it. *Versl. Kon. Acad. Wet. Amst.* 5, 168 (1897).
- [70] LUCQUIN, B., AND PIRRONNEAU, O. *Introduction au calcul scientifique*. Masson, 1996.
- [71] MALYSA, K., DABROS, T., AND VAN DE VEN, T. G. M. The sedimentation of one sphere past a second attached to a wall. *J. Fluid Mech.* 162 (1986), 157–170.
- [72] MAUDE, A. D. End effects in a falling-sphere viscometer. *British J. of Appl. Physics* 12 (1961), 293–295.
- [73] MAUDE, A. D. the movement of a sphere in front of a plane at low Reynolds number. *British J. of Appl. Physics* 14 (1963), 894.
- [74] MAURY, B. Direct simulations of 2d fluid-particle flows in bi-periodic domains. *J. Computational Physics* 156 (1999), 325–351.
- [75] MAZUR, P. Many-sphere hydrodynamic interactions. *Faraday Discuss. Chem. Soc.* 83, 3 (1987), 1–14.
- [76] MCNAMARA, G. R., AND ZANETTI, G. Use of the Boltzmann equation to simulate lattice-gas automata. *Pys. Rev. Lett.* 61 (1993), 2332.
- [77] MIKHLIN, S. G., AND PRÖSSDORF, S. *Singular integral operators*. Springer-Verlag, 1986.
- [78] NEDELEC, J. C. Curved finite element methods for the solution of singular integral equations on surface in  $\mathbb{R}^3$ . *Computer methods in applied mechanics and engineering* 8 (1976), 61–80.
- [79] NEDELEC, J. C., AND PLANCHARD, J. Une méthode variationnelle d’éléments finis pour la résolution numérique d’un problème extérieur dans  $\mathbb{R}^3$ . *R.a.i.r.o.* 7 (1973), 105–129.

- 
- [80] O'NEILL, M. E. A slow motion of viscous liquid caused by a slowly moving solid sphere. *Mathematika* 11 (1964), 67–74.
- [81] O'NEILL, M. E., AND MAJUMDAR, S. R. Axisymmetric slow viscous motions caused by translation or rotation of two spheres. part i. the determination of exact solutions for any values of the radii ratio and separation parameters. *Journal of Applied Mathematics Physics (ZAMP)* 21 (1970), 164–179.
- [82] PASOL, L., CHAOUI, M., YAHIAOUI, S., AND FEUILLEBOIS, F. Analytical solutions for a spherical particle near a wall in axisymmetrical polynomial creeping flows. *Physics of fluids* 17, 7 (2005), 073602.
- [83] PASOL, L., SELLIER, A., AND FEUILLEBOIS, F. A sphere in a second degree polynomial creeping flow parallel to a wall. *Soumis pour publication* (2006).
- [84] PERKINS, G. S., AND JONES, R. B. Hydrodynamic interaction of a spherical particle with a planar boundary. *Physica A* 189 (1992), 447 – 477.
- [85] PIRONNEAU, O. *Finite Element Methodes for Fluids*. John Wiley and Sons, 1989.
- [86] POZRIKIDIS, C. *Boundary Integral and Singularity Method for Linearized Viscous Flow*. Cambridge Univesity Press, 1992.
- [87] POZRIKIDIS, C. *Numerical Computation in Science and Engineering*. Oxford University Press, 1998.
- [88] POZRIKIDIS, C. *Fluid Dynamics, Theory, Computation, and Numerical Solution*. Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [89] POZRIKIDIS, C. *A Practical Guide to Boundary Element Methods with the Software Library Bemlib*. CRC Press, 2002.
- [90] QUARTERONI, A., AND VALLI, A. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, 1994.
- [91] RAVIART, P. A., AND THOMAS, J. M. *Introduction à l'Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles*. Masson, 1983.
- [92] SELLIER, A. On the slow gravity-driven migration of arbitrary clusters of small solid particles. *C. R. Mecanique* 332 (2004), 987–992.
- [93] SELLIER, A. Settling motion of interacting solid particles in the vicinity of a plane solid boundary. *C. R. Mecanique* 333 (2005), 413–418.
- [94] STAKGOLD, I. *Green's Functions and Boundary Value Problems*. John Wiley and sons, 1979.
- [95] STIMSON, M., AND JEFFERY, G. B. The motion of two spheres in a viscous fluid. *Proc. Royal Soc., London series A* 111 (1926), 110–116.
- [96] TAKAGI, H. The force on a sphere lying near a plane surface of a viscous fluid. *J. Phys. Soc. Japan* 36 (1974), 1471.
- [97] TEMAM, R. *Navier Stokes Equations*. Studies in Mathematics and its Applications 2. North Holland, 1984.
- [98] VAN SAARLOOS, W., AND MAZUR, P. Many-sphere hydrodynamic interactions : Mobilities at finite frequencies. *Physica A* 120 (1983), 77–102.

- 
- [99] VAN SAARLOOS, W., AND MAZUR, P. Many-sphere hydrodynamic interactions : The influence of a plane wall. *Physica A* 127 (1984), 451–472.
- [100] WAKIYA, S. Effect of a body onto a very slow viscous flow. Case of a sphere between two parallel planes. *Res. Rept. Fac. Engng. Niigata. Univ.* 5 (1956), 1–12. In japanese.
- [101] WAKIYA, S. Effect of a body onto a very slow viscous flow. Case of a plane wall and two spheres. *Res. Rept. Fac. Engng. Niigata. Univ.* 9 (1960), 31–40. In japanese.
- [102] YAHIAOUI, S., 2005. Communication personnelle.
- [103] YANG, Y., AND ATKINSON, K. E. Numerical integration for multivariable functions with point singularities. *SIAM Journal of Numerical Analysis* 32 (1995), 969–983.
- [104] YOUNGREN, G. K., AND ACRIVOS, A. Stokes flow past a particle of arbitrary shape : a numerical method of solution. *J. Fluid Mech.* 69, 2 (1975), 377–403.
- [105] YOUNGREN, G. K., AND ACRIVOS, A. On the shape of a gas bubble in a viscous extensional flow. *J. Fluid Mech.* 76, 3 (1976), 433–442.
- [106] ZICK, A. A., AND HOMSY, M. Stokes flow through periodic array of spheres. *J. Fluid Mech.* 115 (1982), 13–26.

# Résumé

## Étude des interactions hydrodynamiques entre particules et parois par la méthode des éléments de frontière

Cette thèse présente une étude numérique des interactions hydrodynamiques entre des particules et une paroi plane dans un fluide Newtonien, dans l'hypothèse d'un petit nombre de Reynolds. Les équations de Stokes sont d'abord transformées sous la forme classique d'une équation intégrale de surface donnant les contraintes sur la surface entourant le fluide. Nous avons calculé ainsi les forces et les couples exercés sur les particules. Une étude préliminaire correspond au problème axisymétrique pour une chaîne de particules sphériques arrangées suivant une ligne perpendiculaire à la paroi et en mouvement suivant cette ligne dans un fluide au repos. Puis nous avons abordé le problème général de particules non sphériques, la position des particules étant quelconque et le fluide loin des particules pouvant être en écoulement.

Pour le cas axisymétrique, les points de collocation (qui sont aussi les emplacements des singularités de Stokes ou "stokeslets") sont choisis sur les surfaces des particules de façon que leurs distance relatives soient proportionnelles à la distance entre surfaces proches. Pour traiter le cas général, nous avons mis au point un code de calcul utilisant la méthode des éléments de frontière (BEM). Les stokeslets sont ici répartis de façon à prendre en compte les interactions hydrodynamiques et la complexité géométrique des configurations. En effet, le maillage est adapté à la variation du gradient de contraintes de façon que les zones de la surface qui entrent en forte interaction hydrodynamique soient les plus raffinées. La technique de raffinement dynamique de maillages que nous avons mise au point nous a permis de mieux détecter les zones de lubrification entre particules et paroi ainsi que les interactions entre particules. Les contraintes ont ainsi été calculées pour de nouvelles configurations géométriques.

Enfin, les relations linéaires entre les forces et couples qui s'exercent sur les particules et leurs vitesses de translation et rotation sont exprimées au moyen de la "grande matrice de résistance" (ou de son inverse la "grande matrice de mobilité") qui est alors introduite dans la relation fondamentale de la dynamique. En intégrant, nous avons déterminé les trajectoires des particules dans diverses configurations : en sédimentation dans un fluide au repos au voisinage d'une paroi, tournant librement dans un écoulement donné, ... La méthode permet aussi d'obtenir les champs de vitesse du fluide dans ces conditions.

**Mots-clés :** Interaction hydrodynamique, stokeslet, équation intégrale, méthode des éléments de frontière, maillage dynamique, trajectoires.

Abstract  
**Study of the hydrodynamic interactions  
between particles and walls  
by the boundary element method**

This thesis presents a numerical study of hydrodynamic interactions between particles and a plane wall in a Newtonian fluid, on the assumption of a small Reynolds number. The Stokes equations are first transformed in the classical form of a surface integral equation giving the stresses on a surface surrounding the fluid. We calculate in this way the forces and torques exerted on the particles. A preliminary study corresponds to the axisymmetric problem for a chain of spherical particles arranged as a line perpendicular to the wall and moving following this line in a fluid at rest. Then we study the general problem of non-spherical particles, for any position of the particles and with the possibility of a flow field far from the particles.

For the axisymmetric case, the points of collocation (which are also the sites of the singularities of Stokes or “Stokeslets”) are selected on the surfaces of the particles so that their relative distances are proportional to the distance between close surfaces. To treat the general case, we developed a computer code using the boundary element method (BEM). The stokeslets are distributed here so as to take into account the hydrodynamic interactions and geometrical complexity of the configurations. Indeed, the grid is adapted to the variation of the gradient of stresses so that the boundary areas submitted to a strong hydrodynamic interaction are refined. The technique of dynamic grid refinement which we developed allowed us to better detect the lubrication regions between particles and wall as well as the interactions between particles. The stresses were calculated in this way for new geometrical configurations.

Finally, the linear relationships between the forces and torques exerted on the particles and their translation and rotation velocities are expressed by the “grand resistance matrix” (or of its inverse the “grand mobility matrix”) which is then introduced into the fundamental relation of dynamics. Integrating, we determine the trajectories of the particles in various configurations : when in sedimentation in a fluid at rest in the vicinity of a wall, or freely rotating in a given flow field... The method also makes it possible to obtain the velocity fields of the fluid under these conditions.

**Key Words :** hydrodynamics interaction, stokeslet, integral equation, boundary element method, adaptive mesh refinement , trajectoires.