



ÉCOLE NATIONALE D'INGÉNIEURS DE TUNIS



UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE PARIS 6

Étude des interactions hydrodynamiques entre particules et parois par la méthode des éléments de frontière

Maher BERZIG

LABORATOIRE D'INGÉNIERIE MATHÉMATIQUE, E.P.T.
LABORATOIRE DE PHYSIQUE ET MÉCANIQUE DES MILIEUX HÉTÉROGÈNES, E.S.P.C.I.

27 Octobre 2007

1 Introduction

- 1 Introduction
- 2 Problématique

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Problématique
- 3 Étude des interactions hydrodynamiques pour un écoulement axisymétrique

- 1 Introduction
- 2 Problématique
- 3 Étude des interactions hydrodynamiques pour un écoulement axisymétrique
- 4 Étude des interactions hydrodynamiques pour un écoulement général

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Problématique
- 3 Étude des interactions hydrodynamiques pour un écoulement axisymétrique
- 4 Étude des interactions hydrodynamiques pour un écoulement général
- 5 Calcul des trajectoires des particules en sédimentation

- 1 Introduction
- 2 Problématique
- 3 Étude des interactions hydrodynamiques pour un écoulement axisymétrique
- 4 Étude des interactions hydrodynamiques pour un écoulement général
- 5 Calcul des trajectoires des particules en sédimentation
- 6 Conclusions et perspectives

1

Introduction

Phénomènes naturels et processus industriels

- Phénomènes naturels
 - Les sédiments dans les rivières.
 - Les suspensions biologiques.
 - Les eaux résiduaires transportant des solides en suspensions.

Phénomènes naturels et processus industriels

- Phénomènes naturels
 - Les sédiments dans les rivières.
 - Les suspensions biologiques.
 - Les eaux résiduaires transportant des solides en suspensions.
- Processus industriels
 - Granulométrie.
 - Flocculation.
 - Lits fluidisés.
 - Divers écoulements en micro-technologies
 - Méthodes de séparation en chimie analytique (avec applications à la biologie)

Cadre théorique et motivations

Notre travail :

- les particules étant petites.

Cadre théorique et motivations

Notre travail :

- les particules étant petites.

- $Re = \frac{aV}{\nu} \ll 1$

Cadre théorique et motivations

Notre travail :

- les particules étant petites.

- $Re = \frac{aV}{\nu} \ll 1$

⇒ Stokes (linéaires) diverses solutions analytiques.

Biblio : Happel & Brenner, Kim & Karrila et Pozrikidis ...

Cadre théorique et motivations

Notre travail :

- les particules étant petites.

- $Re = \frac{aV}{\nu} \ll 1$

⇒ Stokes (linéaires) diverses solutions analytiques.

Biblio : Happel & Brenner, Kim & Karrila et Pozrikidis ...

Particularité de ce travail :

Cadre théorique et motivations

Notre travail :

- les particules étant petites.

- $Re = \frac{aV}{\nu} \ll 1$

⇒ Stokes (linéaires) diverses solutions analytiques.

Biblio : Happel & Brenner, Kim & Karrila et Pozrikidis ...

Particularité de ce travail :

- Les interactions sont à longue portée (la vitesse due au Stokeslet en milieu infini décroît comme $1/r$)

Cadre théorique et motivations

Notre travail :

- les particules étant petites.

- $Re = \frac{aV}{\nu} \ll 1$

⇒ Stokes (linéaires) diverses solutions analytiques.

Biblio : Happel & Brenner, Kim & Karrila et Pozrikidis ...

Particularité de ce travail :

- Les interactions sont à longue portée (la vitesse due au Stokeslet en milieu infini décroît comme $1/r$)
- Pour les surfaces proches, les forces de lubrification deviennent importantes.

Cadre théorique et motivations

Notre travail :

- les particules étant petites.

- $Re = \frac{aV}{\nu} \ll 1$

⇒ Stokes (linéaires) diverses solutions analytiques.

Biblio : Happel & Brenner, Kim & Karrila et Pozrikidis ...

Particularité de ce travail :

- Les interactions sont à longue portée (la vitesse due au Stokeslet en milieu infini décroît comme $1/r$)
- Pour les surfaces proches, les forces de lubrification deviennent importantes.
- Peu de travaux sur les effets de paroi.

Solutions analytiques pour des particules et un plan

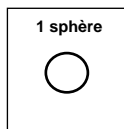


Figure (a)

Auteurs	Années	Méthodes	Figures
Stokes	1851	direct	(a)

Solutions analytiques pour des particules et un plan

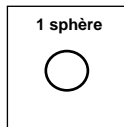


Figure (a)

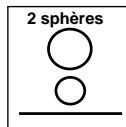


Figure (b)

Auteurs	Années	Méthodes	Figures
Stokes	1851	direct	(a)
Wakiya	1960	réflexions	(b)

Solutions analytiques pour des particules et un plan

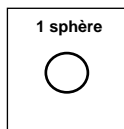


Figure (a)

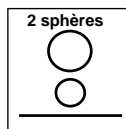


Figure (b)

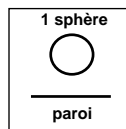


Figure (c)

Auteurs	Années	Méthodes	Figures
Stokes	1851	direct	(a)
Wakiya	1960	réflexions	(b)
Brenner- Maude	1961	bisphériques	(c)

Solutions analytiques pour des particules et un plan

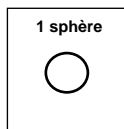


Figure (a)

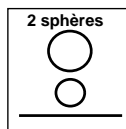


Figure (b)

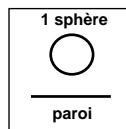


Figure (c)

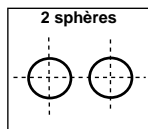


Figure (d)

Auteurs	Années	Méthodes	Figures
Stokes	1851	direct	(a)
Wakiya	1960	réflexions	(b)
Brenner- Maude	1961	bisphériques	(c)
Jeffrey - Onichi	1984	multipolaire	(d)

Solutions numériques pour des particules et un plan

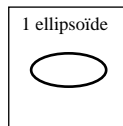


Figure (a)

Auteurs

Youngren-Acrivos

Années

1975

Méthodes

collocation

Figures

(a)

Solutions numériques pour des particules et un plan

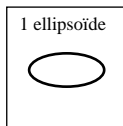


Figure (a)

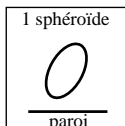


Figure (b)

Auteurs	Années	Méthodes	Figures
Youngren-Acrivos	1975	collocation	(a)
Muldowney-Higdon	1995	spectrale	(b)

Solutions numériques pour des particules et un plan

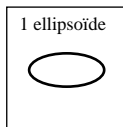


Figure (a)

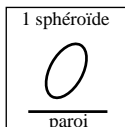


Figure (b)

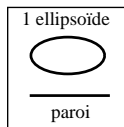


Figure (c)

Auteurs	Années	Méthodes	Figures
Youngren-Acrivos	1975	collocation	(a)
Muldowney-Higdon	1995	spectrale	(b)
Pozrikidis	1998	éléments de surface	(c)

Solutions numériques pour des particules et un plan

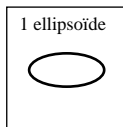


Figure (a)

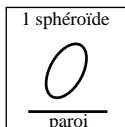


Figure (b)

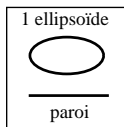


Figure (c)

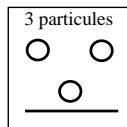


Figure (d)

Auteurs	Années	Méthodes	Figures
Youngren-Acrivos	1975	collocation	(a)
Muldowney-Higdon	1995	spectrale	(b)
Pozrikidis	1998	éléments de surface	(c)
Sellier	2005	éléments de surface	(d)

Solutions numériques pour des particules et un plan

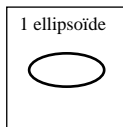


Figure (a)

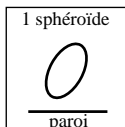


Figure (b)

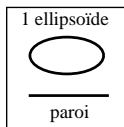


Figure (c)

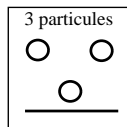


Figure (d)

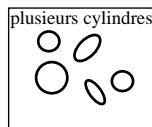


Figure (e)

Auteurs	Années	Méthodes	Figures
Youngren-Acrivos	1975	collocation	(a)
Muldowney-Higdon	1995	spectrale	(b)
Pozrikidis	1998	éléments de surface	(c)
Sellier	2005	éléments de surface	(d)
Maury	1999	éléments finis (cylindres)	(e)

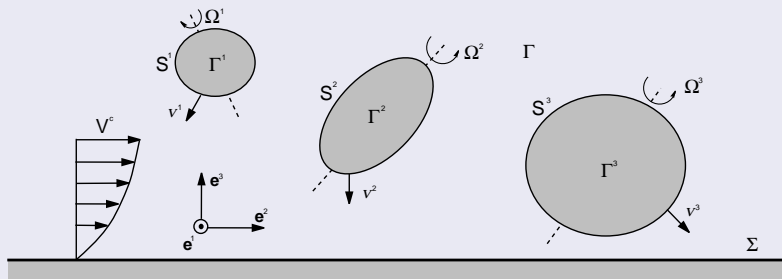
2

Problématique

Plusieurs particules et parois

Hypothèses :

- Petites particules, petit nombre de Reynolds
- Particules solides, paroi imperméable



Équations de Stokes : (E)

les équations de Stokes + conditions au bords + conditions aux limites :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) & = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma \\ \mu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}) & = \nabla p & \mathbf{x} \in \Gamma \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) & = 0 & \mathbf{x} \in \Sigma \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) & = \mathbf{V}^i + \boldsymbol{\Omega}^i \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G^i) & \mathbf{x} \in S^i \\ |\mathbf{v}(\mathbf{x})| & \rightarrow \mathbf{v}^\infty & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

Équations de Stokes : (E)

les équations de Stokes + conditions au bords + conditions aux limites :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) & = & 0 & \mathbf{x} \in \Gamma \\ \mu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}) & = & \nabla p & \mathbf{x} \in \Gamma \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) & = & 0 & \mathbf{x} \in \Sigma \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) & = & \mathbf{V}^i + \boldsymbol{\Omega}^i \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G^i) & \mathbf{x} \in S^i \\ |\mathbf{v}(\mathbf{x})| & \rightarrow & \mathbf{v}^\infty & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

Équations de Stokes : (E)

les équations de Stokes + conditions au bords + conditions aux limites :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) & = 0 & \mathbf{x} \in \Gamma \\ \mu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}) & = \nabla p & \mathbf{x} \in \Gamma \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) & = 0 & \mathbf{x} \in \Sigma \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) & = \mathbf{V}^i + \boldsymbol{\Omega}^i \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G^i) & \mathbf{x} \in S^i \\ |\mathbf{v}(\mathbf{x})| & \rightarrow \mathbf{v}^\infty & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

Équations de Stokes : (E)

les équations de Stokes + conditions au bords + conditions aux limites :

$$(E) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) & = & 0 & \mathbf{x} \in \Gamma \\ \mu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}) & = & \nabla p & \mathbf{x} \in \Gamma \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) & = & 0 & \mathbf{x} \in \Sigma \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) & = & \mathbf{V}^i + \boldsymbol{\Omega}^i \wedge (\mathbf{x} - \mathbf{x}_G^i) & \mathbf{x} \in S^i \\ |\mathbf{v}(\mathbf{x})| & \rightarrow & \mathbf{v}^\infty & |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

Théorème d'existence et d'unicité

Définition

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ et $r = |\mathbf{x}|$. On définit l'espace de Sobolev à poids :

$$W^1(\Gamma) = \left\{ u, \frac{u}{(1+r^2)^{1/2}} \in L^2(\Gamma), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Gamma), i = 1, 2, 3, \Gamma \subset \mathbb{R}^3 \right\}$$

La norme définie sur l'espace de Hilbert $W^1(\Gamma)$ est donnée par :

$$\|u\|_{\Gamma}^1 = \int_{\Gamma} \left(\frac{|u(\mathbf{x})|^2}{1+r^2} dx + \sum_{i=1}^3 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right|^2 \right) dx$$

Théorème (Dautray-Lions)

Dans un domaine Γ simplement connexe, si on a

$$\mathbf{v}_o \in (H^{1/2}(S))^3 \quad \text{avec} \quad \int_S \mathbf{v}_o \cdot \mathbf{n} \, d\sigma = 0$$

alors le problème extérieur (E) admet une solution unique

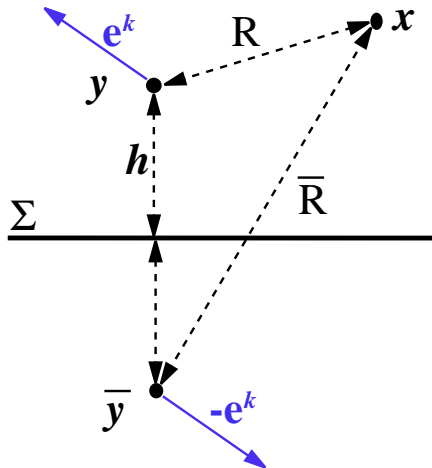
$$\mathbf{v} \in (W^1(\Gamma))^3 \quad \text{vérifiant} \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

et la pression p existe et est unique dans $L^2(\Gamma)/\mathcal{R}$

Fonction de Green (Blake :1971)

La condition sur Σ est prise en compte automatiquement en utilisant la fonction de Green :

$$\begin{aligned} G_i^k &= u_i^k + \bar{u}_i^k + \tilde{u}_i^k \\ H^k &= p^k + \bar{p}^k + \tilde{p}^k \end{aligned}$$



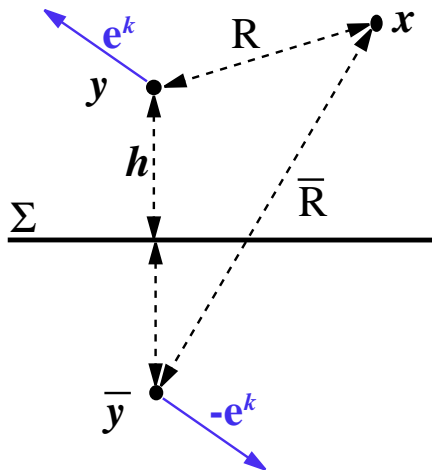
Fonction de Green (Blake :1971)

La condition sur Σ est prise en compte automatiquement en utilisant la fonction de Green :

$$\begin{aligned} G_i^k &= u_i^k + \bar{u}_i^k + \tilde{u}_i^k \\ H^k &= p^k + \bar{p}^k + \tilde{p}^k \end{aligned}$$

► Stokeslet source

$$u_i^k = \frac{1}{8\pi\mu} \left(\frac{\delta_{ik}}{R} + \frac{R_i R_k}{R^3} \right); p^k = \frac{1}{4\pi} \frac{R_k}{R^3}$$



Fonction de Green (Blake :1971)

La condition sur Σ est prise en compte automatiquement en utilisant la fonction de Green :

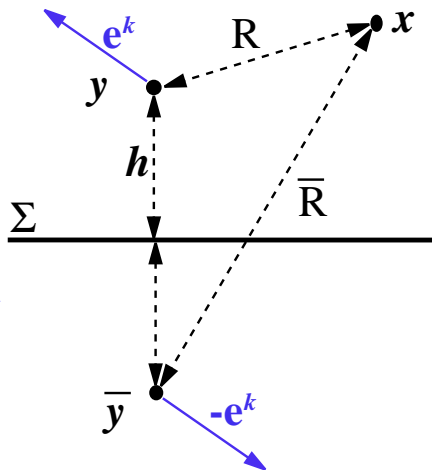
$$\begin{aligned} G_i^k &= u_i^k + \bar{u}_i^k + \tilde{u}_i^k \\ H^k &= p^k + \bar{p}^k + \tilde{p}^k \end{aligned}$$

► Stokeslet source

$$u_i^k = \frac{1}{8\pi\mu} \left(\frac{\delta_{ik}}{R} + \frac{R_i R_k}{R^3} \right); p^k = \frac{1}{4\pi} \frac{R_k}{R^3}$$

► Stokeslet image

$$\bar{u}_i^k = \frac{-1}{8\pi\mu} \left(\frac{\delta_{ik}}{\bar{R}} + \frac{\bar{R}_i \bar{R}_k}{\bar{R}^3} \right); \bar{p}^k = \frac{-1}{4\pi} \frac{\bar{R}_k}{\bar{R}^3}$$



Fonction de Green (Blake :1971)

La condition sur Σ est prise en compte automatiquement en utilisant la fonction de Green :

$$\begin{aligned} G_i^k &= u_i^k + \bar{u}_i^k + \tilde{u}_i^k \\ H^k &= p^k + \bar{p}^k + \tilde{p}^k \end{aligned}$$

► Stokeslet source

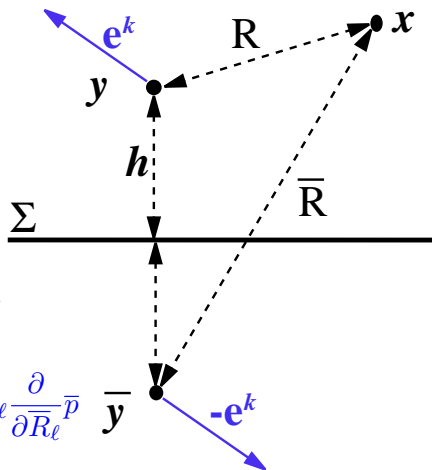
$$u_i^k = \frac{1}{8\pi\mu} \left(\frac{\delta_{ik}}{R} + \frac{R_i R_k}{R^3} \right); p^k = \frac{1}{4\pi} \frac{R_k}{R^3}$$

► Stokeslet image

$$\bar{u}_i^k = \frac{-1}{8\pi\mu} \left(\frac{\delta_{ik}}{\bar{R}} + \frac{\bar{R}_i \bar{R}_k}{\bar{R}^3} \right); \bar{p}^k = \frac{-1}{4\pi} \frac{\bar{R}_k}{\bar{R}^3}$$

► Terme complémentaire

$$\tilde{u}_i^k = 2h \bar{R}_{kl} \frac{\partial}{\partial R_l} \left(\frac{h \bar{R}_k}{R^3} - \bar{u}_{i3} \right); \tilde{p}^k = 2h \bar{R}_{kl} \frac{\partial}{\partial R_l} \bar{p}^k$$



Formulation intégrale (Rappels)

- Formule de Green associée aux équations de Stokes :

$$\int_{\Gamma} \left\{ (\mu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \nabla p(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) - (\mu \nabla^2 \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \nabla H(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right\} d\Gamma_x$$

$$= \int_{\partial\Gamma} \left\{ \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{T}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathbf{T}(\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \right\} dS_x$$

où $\mathbf{T}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = -p(\mathbf{x})\mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) + {}^t\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}))$

Formulation intégrale (Rappels)

- Formule de Green associée aux équations de Stokes :

$$\int_{\Gamma} \left\{ (\mu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \nabla p(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) - (\mu \nabla^2 \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \nabla H(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right\} d\Gamma_x$$

$$= \int_{\partial\Gamma} \left\{ \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{T}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathbf{T}(\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \right\} dS_x$$

où $\mathbf{T}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = -p(\mathbf{x})\mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) + {}^t\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}))$

- Equation intégrale

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) + \int_S \mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathbf{T}(\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS_y = \int_S \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{T}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS_y$$

Formulation intégrale (Rappels)

- Formule de Green associée aux équations de Stokes :

$$\int_{\Gamma} \left\{ (\mu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \nabla p(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) - (\mu \nabla^2 \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \nabla H(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right\} d\Gamma_x$$

$$= \int_{\partial\Gamma} \left\{ \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{T}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathbf{T}(\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \right\} dS_x$$

où $\mathbf{T}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = -p(\mathbf{x})\mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) + {}^t\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}))$

- Equation intégrale

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) + \int_S \mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathbf{T}(\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS_y = \int_S \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{T}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS_y$$

- Condition de non glissement :

$$\int_{\Sigma} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{T}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathbf{T}(\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS_x = 0$$

Formulation intégrale (Rappels)

- Formule de Green associée aux équations de Stokes :

$$\int_{\Gamma} \left\{ (\mu \nabla^2 \mathbf{v}(\mathbf{x}) - \nabla p(\mathbf{x})) \mathbf{u}(\mathbf{x}) - (\mu \nabla^2 \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \nabla H(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \mathbf{v}(\mathbf{x}) \right\} d\Gamma_x$$

$$= \int_{\partial\Gamma} \left\{ \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{T}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathbf{T}(\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \right\} dS_x$$

où $\mathbf{T}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) = -p(\mathbf{x})\mathbf{I} + \mu (\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) + {}^t \nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}))$

- Equation intégrale

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) + \int_S \mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathbf{T}(\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS_y = \int_S \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{T}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) \mathbf{n}(\mathbf{y}) dS_y$$

- Condition de non glissement :

$$\int_{\Sigma} \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{T}(\mathbf{v}(\mathbf{x})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{x}) \mathbf{T}(\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS_x = 0$$

- Symétrie de la fonction de Green :

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = {}^t \mathbf{G}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

Equation intégrale de surface

Théorème (Ladyzhenskaya)

Le système d'équations intégrale d'inconnu $\mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3)$

$$\mathbf{v}_o(\mathbf{x}) = \int_S \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{q}(\mathbf{y}) dS_y, \quad \mathbf{x} \in S$$

admet une solution unique \mathbf{q} à un vecteur près, proportionnel à la normale à la surface S ; $\mathbf{q} \in (H^{-\frac{1}{2}}(S))^3$ si $\mathbf{v}_o \in (H^{\frac{1}{2}}(S))^3$ et satisfait la condition :

$$\int_S \mathbf{v}_o \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0$$

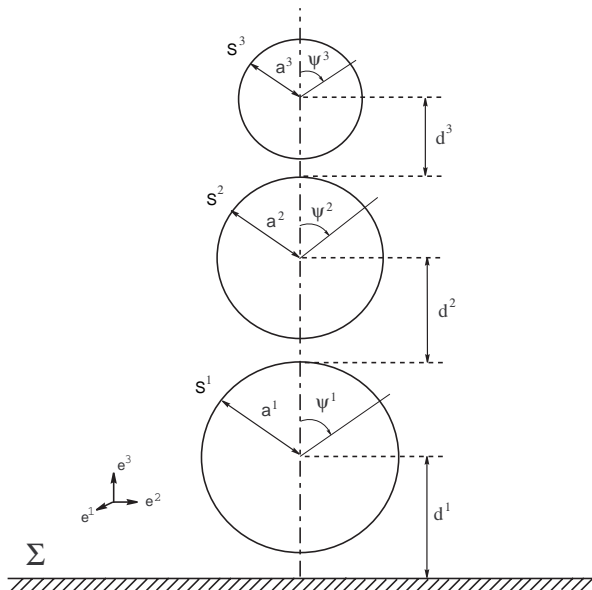
• Pour des particules solides, la solution du système (E) s'exprime sous la forme d'un potentiel de simple couche :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \int_S \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{q}(\mathbf{y}) dS_y, \quad \mathbf{x} \in \Gamma$$

3

Étude des interactions hydrodynamiques
pour un écoulement axisymétrique

CONFIGURATION AXISYMÉTRIQUE



Réduction de l'équation intégrale

- En effectuant une première intégration autour de l'azimuth Ψ , l'équation intégrale s'écrit sans dimension :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{8\pi}{3} \frac{V^i}{V^1} \end{bmatrix} = \sum_{k=1, N} \frac{a^i}{a^1} \int_0^\pi \begin{bmatrix} J_{rr}^i & J_{rz}^i \\ J_{zr}^i & J_{zz}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r'^2 \\ q_z'^2 \end{bmatrix} d\Psi_y$$

Réduction de l'équation intégrale

- En effectuant une première intégration autour de l'azimuth Ψ , l'équation intégrale s'écrit sans dimension :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{8\pi}{3} \frac{V^i}{V^1} \end{bmatrix} = \sum_{k=1, N} \frac{a^i}{a^1} \int_0^\pi \begin{bmatrix} J_{rr}^i & J_{rz}^i \\ J_{zr}^i & J_{zz}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r'^2 \\ q_z'^2 \end{bmatrix} d\Psi_y$$

- Force hydrodynamique normalisée par la force de Stokes :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \Phi^i \end{bmatrix} = \int_0^\pi \begin{bmatrix} q_r'^i \\ q_z'^i \end{bmatrix} \sin(\Psi_y) d\Psi_y$$

Réduction de l'équation intégrale

- En effectuant une première intégration autour de l'azimuth Ψ , l'équation intégrale s'écrit sans dimension :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{8\pi}{3} \frac{V^i}{V^1} \end{bmatrix} = \sum_{k=1, N} \frac{a^i}{a^1} \int_0^\pi \begin{bmatrix} J_{rr}^i & J_{rz}^i \\ J_{zr}^i & J_{zz}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r'^2 \\ q_z'^2 \end{bmatrix} d\Psi_y$$

- Force hydrodynamique normalisée par la force de Stokes :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \Phi^i \end{bmatrix} = \int_0^\pi \begin{bmatrix} q_r'^i \\ q_z'^i \end{bmatrix} \sin(\Psi_y) d\Psi_y$$

► Répartition des Stokeslets sur les sphères

Réduction de l'équation intégrale

- En effectuant une première intégration autour de l'azimuth Ψ , l'équation intégrale s'écrit sans dimension :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{8\pi}{3} \frac{V^i}{V^1} \end{bmatrix} = \sum_{k=1, N} \frac{a^i}{a^1} \int_0^\pi \begin{bmatrix} J_{rr}^i & J_{rz}^i \\ J_{zr}^i & J_{zz}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_r'^2 \\ q_z'^2 \end{bmatrix} d\Psi_y$$

- Force hydrodynamique normalisée par la force de Stokes :

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \Phi^i \end{bmatrix} = \int_0^\pi \begin{bmatrix} q_r'^i \\ q_z'^i \end{bmatrix} \sin(\Psi_y) d\Psi_y$$

► Répartition des Stokeslets sur les sphères

► Singularité des noyaux J^i si $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$

Distribution de Stokeslets

La répartition de Stokeslets sur les particules est proportionnelle à la distance :

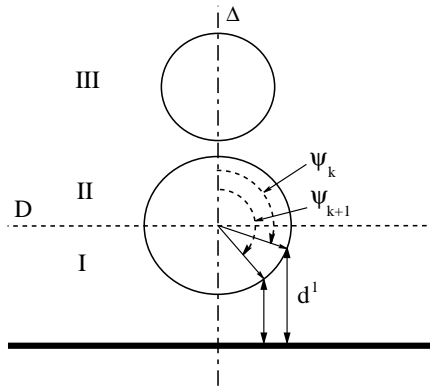
- Interactions sphère - sphère :

$$(I) \quad \Psi_{k+1}^i - \Psi_k^i \propto d^{i+1}$$

$$(II) \quad \Psi_{k+1}^i - \Psi_k^i \propto \frac{1}{d^{i+1}}$$

- Interactions sphère-paroi :

$$(III) \quad \Psi_{k+1}^1 - \Psi_k^1 \propto d^1$$



Soit en généralisant à un indice k réel $\frac{d\Psi}{dk} = Cte \times d$.

On intègre : d'où la loi Ψ_k .

Distribution des Stokeslets sur deux sphères identiques de rayon unité

► la répartition sur la sphère 1 :

$$\psi_p^1 = 2 \arctan \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon_1 + 2}{\varepsilon_1}} \tan \left[\frac{p-1}{2(M-1)} \left(\pi - \arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2}}\right) \right) + \arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2}}\right) \right] \right\}$$

$$\text{où } \psi_p^1 \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right]$$

$$\psi_p^1 = 2 \arctan \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + 2}} \tan \left[\frac{p-1}{M-1} \arctan\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1 + 2}{\varepsilon_1}}\right) \right] \right\}$$

$$\text{où } \psi_p^1 \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{avec } \varepsilon_1 = d^1/a^1$$

► la répartition sur la sphère 2 :

$$\psi_p^2 = 2 \arctan \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon_2 + 2}{\varepsilon_2}} \tan \left(\frac{(p-1)\pi}{2(M-1)} \right) \right\}$$

$$\text{où } \psi_p^2 \in [0, \pi] \quad \text{avec } \varepsilon_2 = d^2/a^1$$

Traitement des singularités et système algébrique

► Traitement des singularités

Les noyaux J^s , J^I et J^c sont associés au Stokeslet source, Stokeslet image et Stokeslet complémentaire tels que :

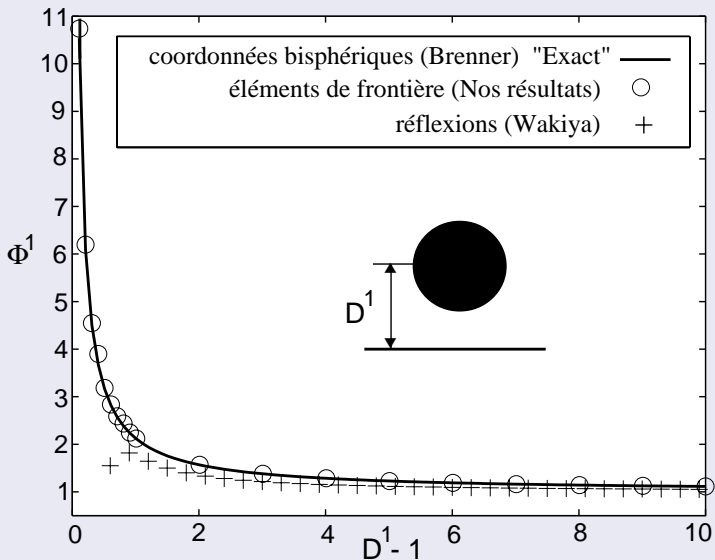
$$J^* = J^S + J^I + J^c \text{ avec } J^S = \tilde{J} \text{ quand } \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}$$

► Système algébrique

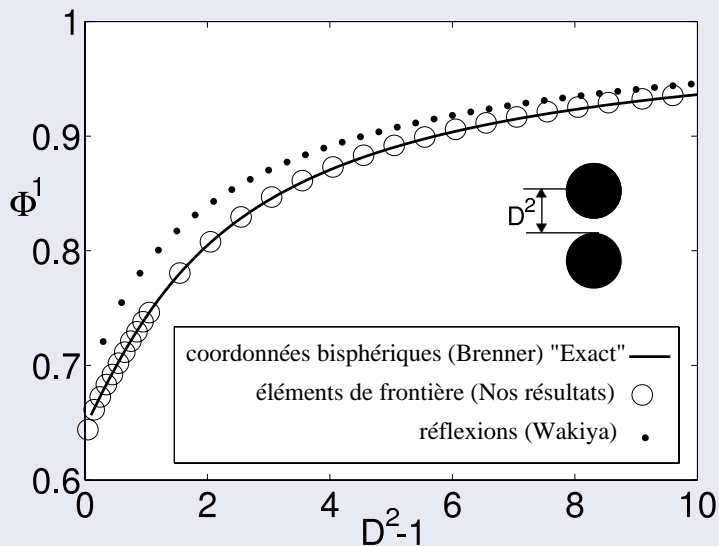
Système algébrique de taille $2N_i(2N_p - 1) \times 2N_i(2N_p - 1)$ pour N_p particules, N_i points de Gauss :

$$\sum_{j=1}^{N_p-1} \sum_{L=1}^{4N_i} A_{KL}^{ij} Q_L^j + \sum_{L=1}^{2N_i} A_{KL}^{iN_p} Q_L^{N_p} = B_K^i$$

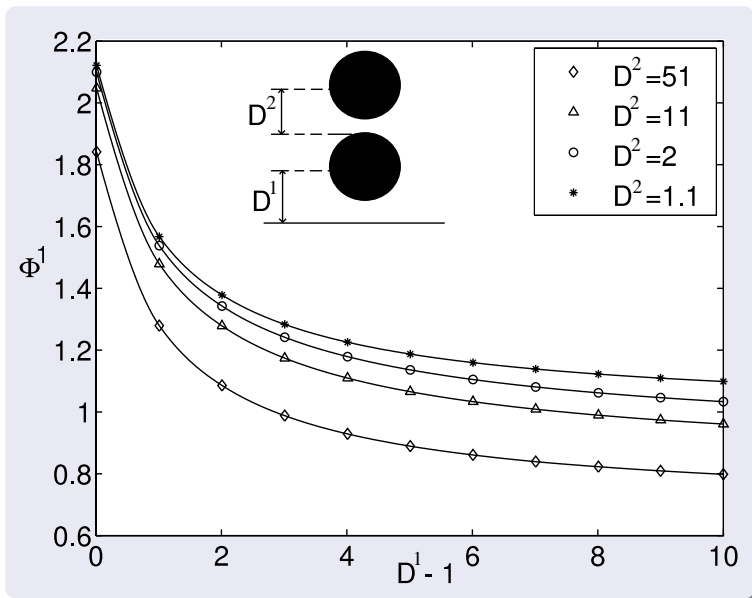
Validations : cas d'une particule et une paroi



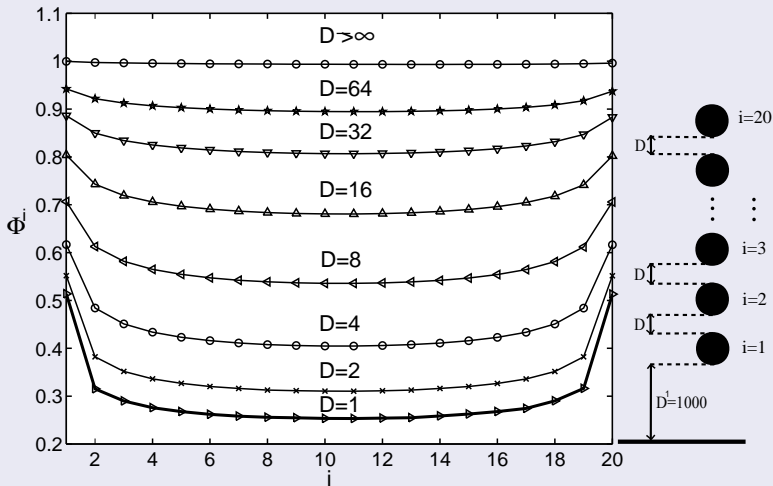
Validations : cas de 2 particules



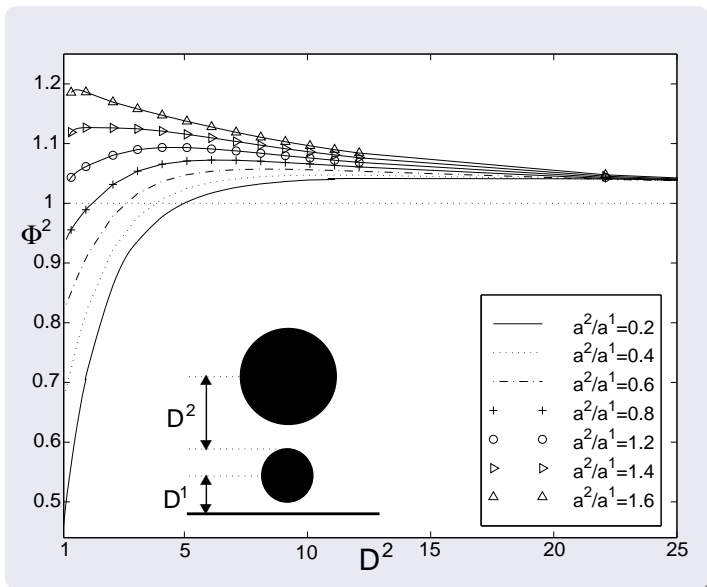
Résultats : cas de 2 particules au voisinage de la paroi



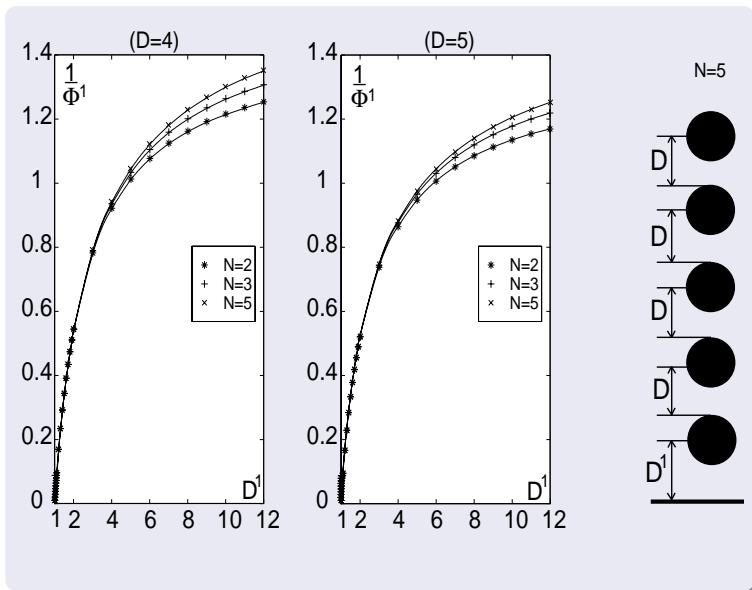
Résultats : cas d'une chaîne de 20 particules loin de la paroi



Résultats : cas de 2 particules non identiques



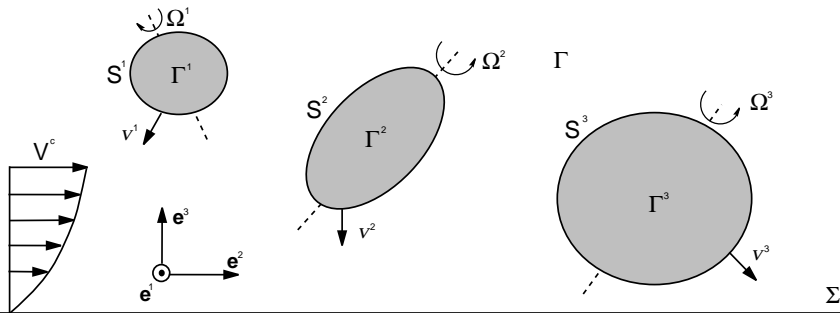
Résultats : cas d'une chaîne de 2, 3 et 5 particules identiques



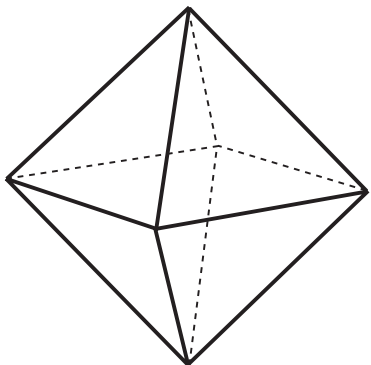
4

Étude des interactions hydrodynamiques
pour un écoulement général

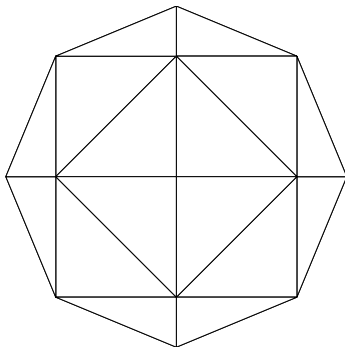
CONFIGURATION GÉNÉRALE



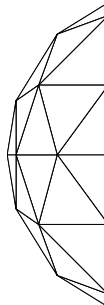
Maillage uniforme



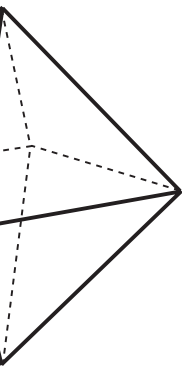
Octaèdre
8 triangles



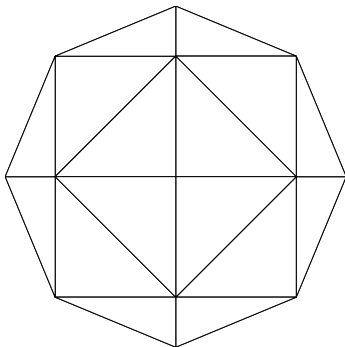
Niveaux 1
32 triangles



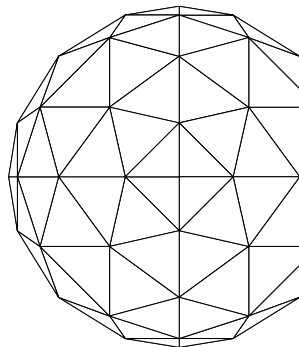
Maillage uniforme



édre
ngles

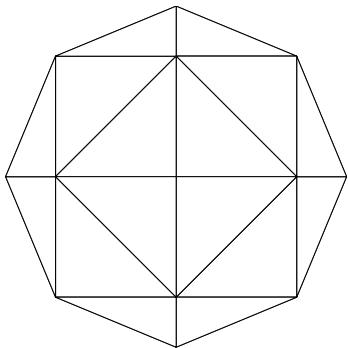


Niveaux 1
32 triangles

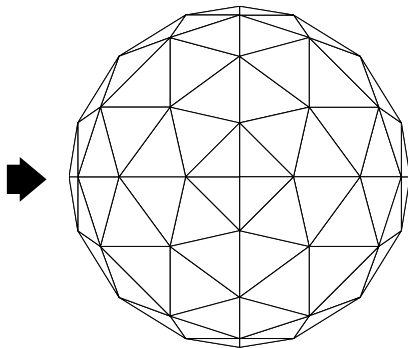


Niveaux 2
128 triangles

Maillage uniforme

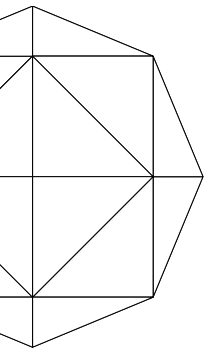


Niveaux 1
32 triangles

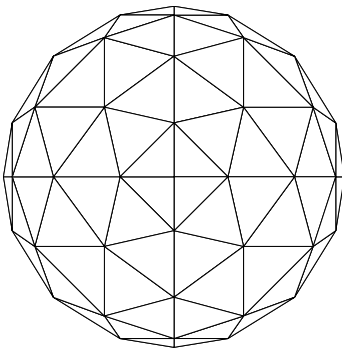


Niveaux 2
128 triangles

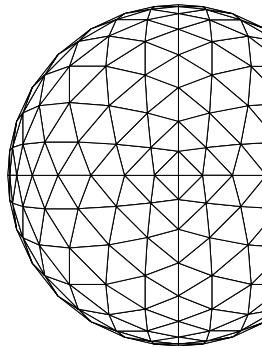
Maillage uniforme



Niveaux 1
8 triangles

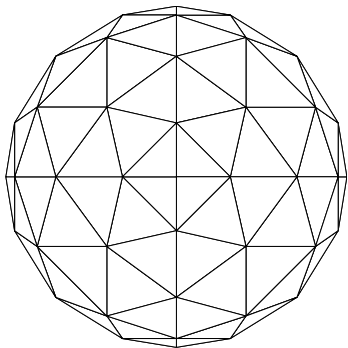


Niveaux 2
128 triangles

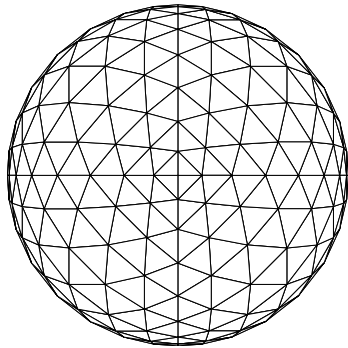


Niveaux 3
512 triangles

Maillage uniforme



Niveaux 2
128 triangles



Niveaux 3
512 triangles

Equations intégrale et système algébrique

L'équation intégrale de surface :

$$\int_S \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{q}(\mathbf{y}) dS_y = \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

le système algébrique :

$$\sum_{k=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{N_t^k} \left[\int_{\Delta_k^j} \mathbf{G}(\mathbf{x}_G^i, \mathbf{y}) dS_y \right] \cdot \mathbf{q}_k^j = \mathbf{v}(\mathbf{x}_G^i) \quad \forall i \in 1, \dots, \sum_{k=1}^{N_p} N_t^k$$

Equations intégrale et système algébrique

L'équation intégrale de surface :

$$\int_S \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{q}(\mathbf{y}) dS_y = \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

le système algébrique :

$$\sum_{k=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{N_t^k} \left[\int_{\Delta_k^j} \mathbf{G}(\mathbf{x}_G^i, \mathbf{y}) dS_y \right] \cdot \mathbf{q}_k^j = \mathbf{v}(\mathbf{x}_G^i) \quad \forall i \in 1, \dots, \sum_{k=1}^{N_p} N_t^k$$

► Singularité du noyau \mathbf{G} si $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$

Equations intégrale et système algébrique

L'équation intégrale de surface :

$$\int_S \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{q}(\mathbf{y}) dS_y = \mathbf{v}(\mathbf{x})$$

le système algébrique :

$$\sum_{k=1}^{N_p} \sum_{j=1}^{N_t^k} \left[\int_{\Delta_k^j} \mathbf{G}(\mathbf{x}_G^i, \mathbf{y}) dS_y \right] \cdot \mathbf{q}_k^j = \mathbf{v}(\mathbf{x}_G^i) \quad \forall i \in 1, \dots, \sum_{k=1}^{N_p} N_t^k$$

► Singularité du noyau \mathbf{G} si $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{y}$

► Répartition des Stokeslets (adaptation de maillage)

Traitement des singularités

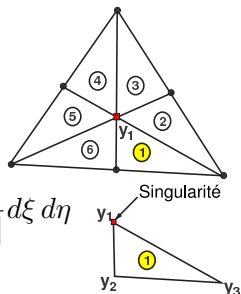
$$\mathbf{v}(\mathbf{x}_G^i) = \mathbf{q}_1^i \int_{\Delta_1^i} \mathbf{G}(\mathbf{x}_G^i, \mathbf{y}) dS_y + \sum_{(j,k) \neq (i,1)} \mathbf{q}_k^j \int_{\Delta_k^j} \mathbf{G}(\mathbf{x}_G^i, \mathbf{y}) dS_y ; \quad \mathbf{x}_G^i \in S^1$$

► paramétrisation :

$$I = \int_{\Delta} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y = \int_{\Delta} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|} dS_y = 2A \int_{\Sigma} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{y} - \mathbf{y}_1|} d\xi d\eta$$

$$\mathbf{y} - \mathbf{y}_1 = \xi(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) + \eta(\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1), \quad B = \frac{b}{a^2}, \quad C = \frac{c^2}{a^2}$$

$$a = |\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1|, \quad b = (\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1)^T (\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1), \quad c = |\mathbf{y}_3 - \mathbf{y}_1|$$



Traitement des singularités :

► changements de variables :

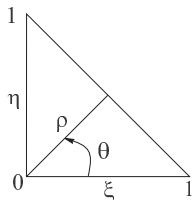
- $\xi = \rho \cos \theta, \quad \eta = \rho \sin \theta, \quad d\xi d\eta = \rho \, d\rho \, d\theta$

avec $\rho \in \left[0, \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} \right]$

$$I = 2 \frac{A}{a} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos \theta + B \sin 2\theta + C \sin^2 \theta} \int_0^{\frac{1}{\cos \theta + \sin \theta}} g(\rho, \theta) \, d\rho \, d\theta$$

- $\theta = \frac{\pi}{4} v_2 + \frac{\pi}{4}, \quad \rho = \frac{1}{\cos \theta + \sin \theta} (1 + v_1)$

avec $(v_1, v_2) \in [-1, 1]^2$



Répartition des Stokeslets

- Interactions hydrodynamiques

Répartition des Stokeslets

- Interactions hydrodynamiques
- Adaptation de maillage

Répartition des Stokeslets

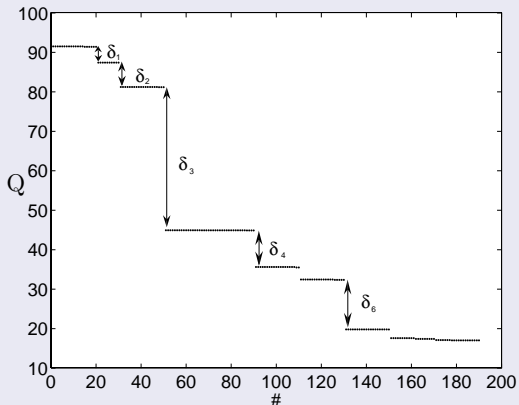
- Interactions hydrodynamiques
- Adaptation de maillage
- Gradient de contrainte

Détermination des niveaux de contraintes



Ordonnancement des niveaux de contraintes

detection des niveaux

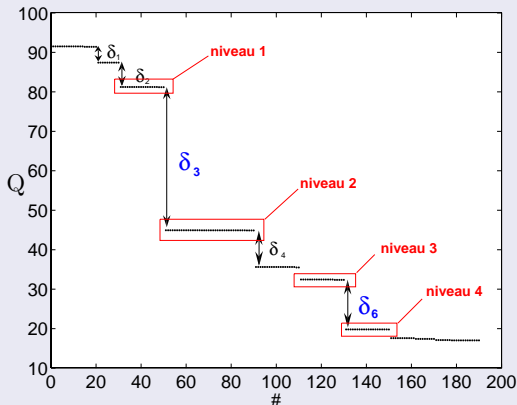


Ordonnancement

δ	niveaux	numéro
δ_3	niveau 1	4, 17, 24
δ_3	niveau 2	2, 1, 13, 14
δ_6	niveau 3	1, 7, 8, 9, 11
δ_6	niveau 4	3, 5, 6, 8
δ_4	niveau 5	...
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮

Adaptation de maillage suivant le gradient de contrainte

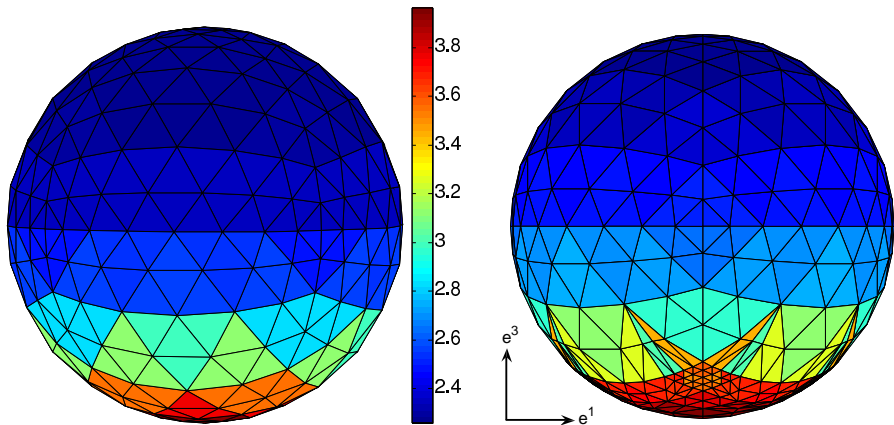
detection des niveaux



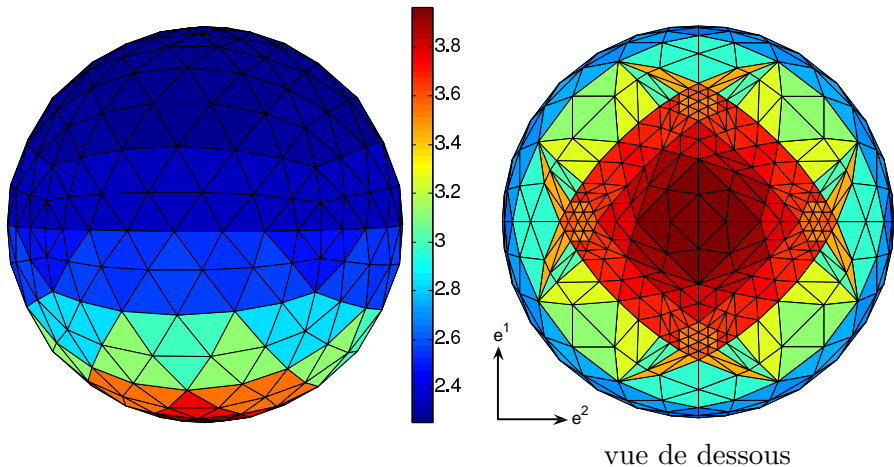
Ordonnancement

δ	niveaux	numéro
δ_3	niveau 1	4, 17, 24
δ_3	niveau 2	2, 1, 13, 14
δ_6	niveau 3	1, 7, 8, 9, 11
δ_6	niveau 4	3, 5, 6, 8
δ_4	niveau 5	...
\vdots	\vdots	\vdots
\vdots	\vdots	\vdots

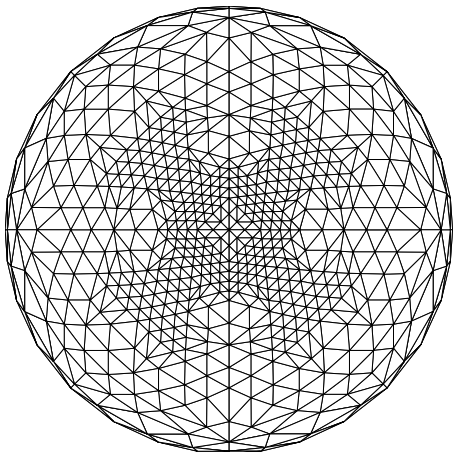
Maillage d'une particule en sédimentation



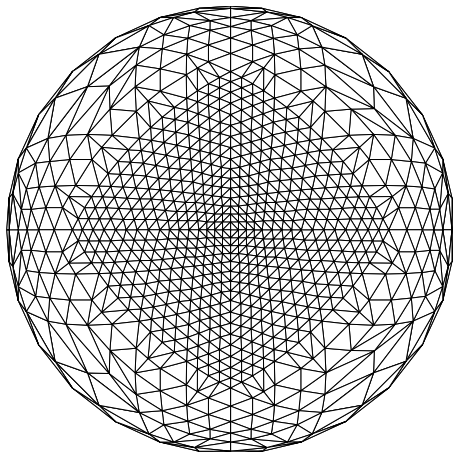
Maillage d'une particule en sédimentation



Raffinement de maillage d'une sphère dans la zone à fort gradient de contrainte



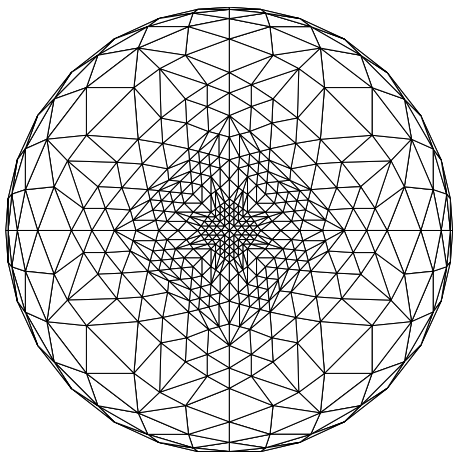
$D = 0.1$



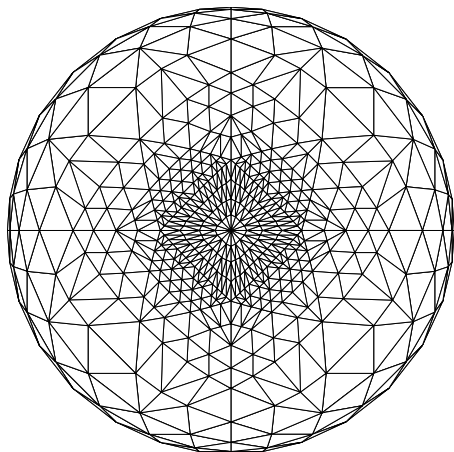
$D = 0.02$

D : distance particule/paroi.

Raffinement de maillage d'une sphère dans la zone à fort gradient de contrainte



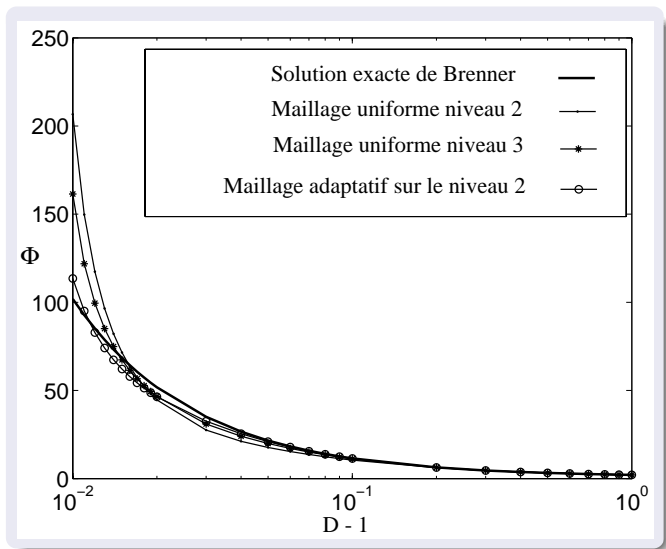
$$D = 0.006$$



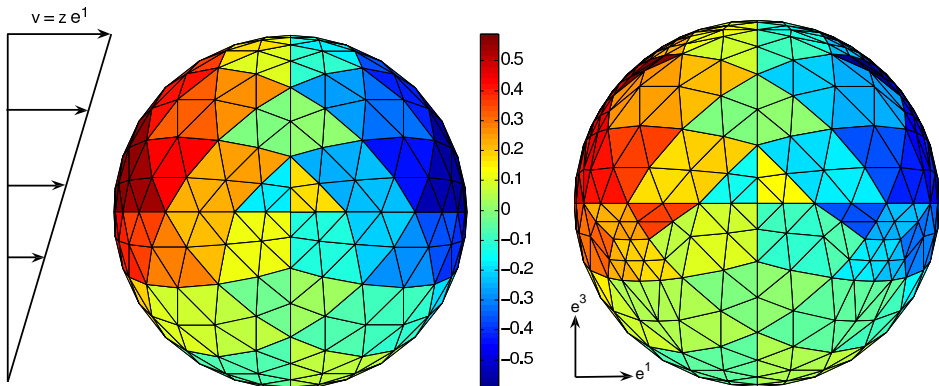
$$D = 0.001$$

D : distance particule/paroi.

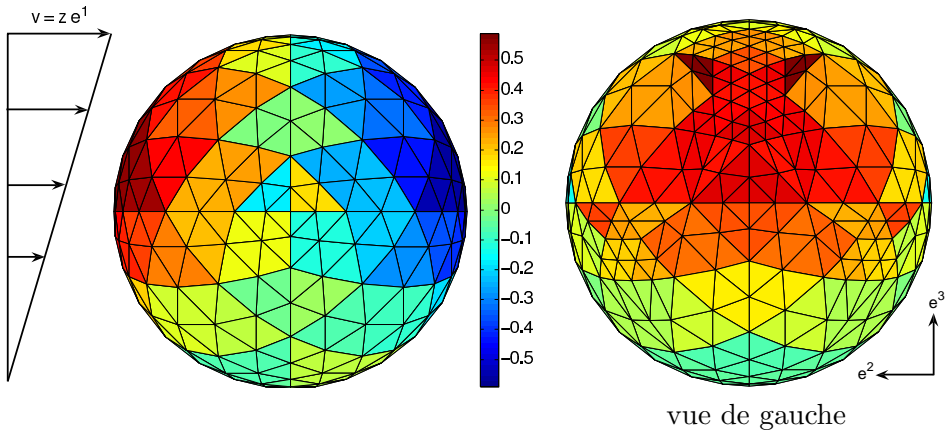
Validations : une sphère en sédimentation perpendiculairement à une paroi



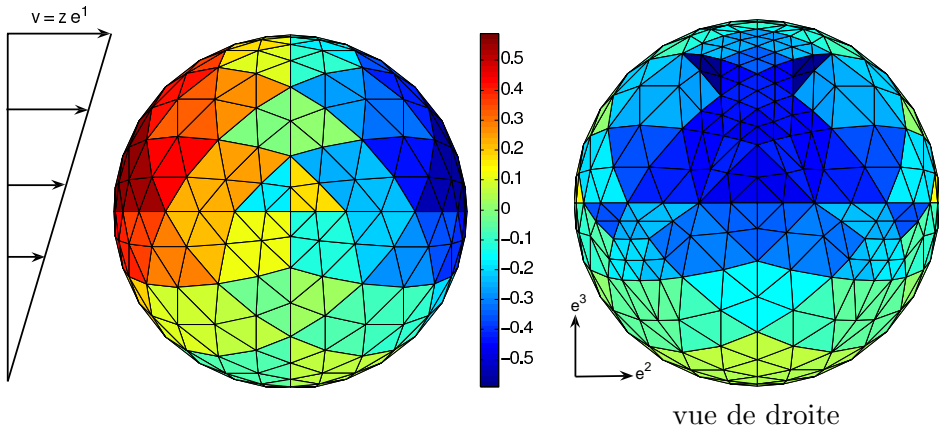
Cas d'une sphère fixée dans un écoulement de cisaillement parallèlement à une paroi



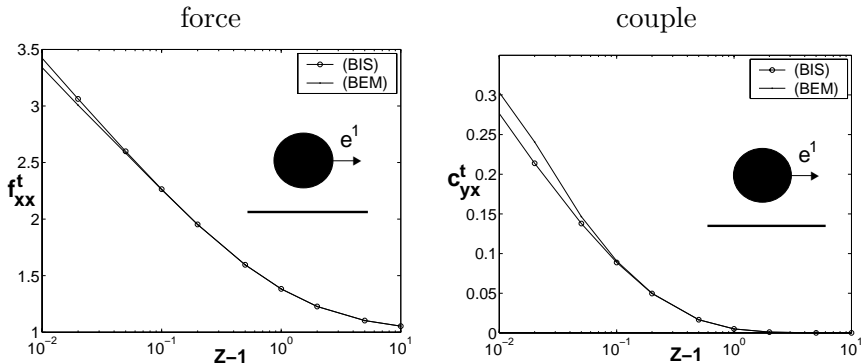
Cas d'une sphère fixée dans un écoulement de cisaillement parallèlement à une paroi



Cas d'une sphère fixée dans un écoulement de cisaillement parallèlement à une paroi



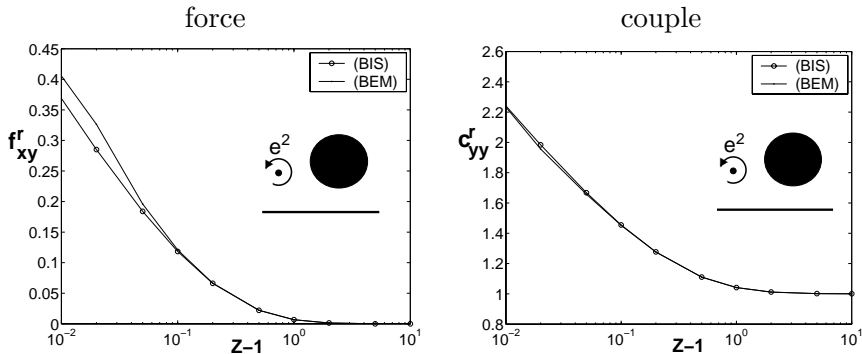
Validations : une sphère en translation parallèlement à une paroi



BIS : résultats "exact" de Chaoui-Feuillebois (2003)

BEM : nos résultats

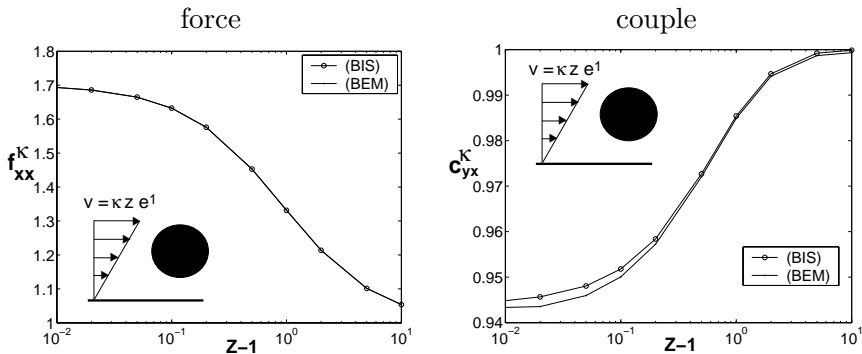
Validations : Une sphère en rotation autour d'un axe parallèle à la paroi



BIS : résultats "exact" de Chaoui-Feuillebois (2003)

BEM : nos résultats

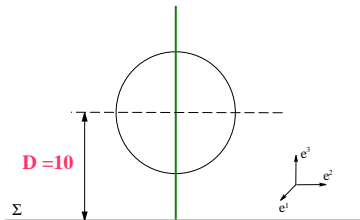
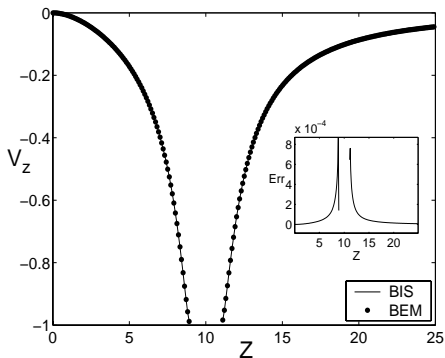
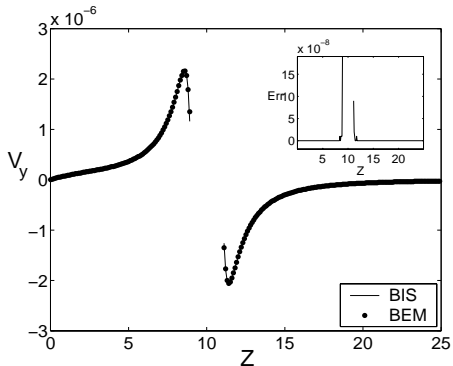
Validations : une sphère fixée dans un écoulement de cisaillement



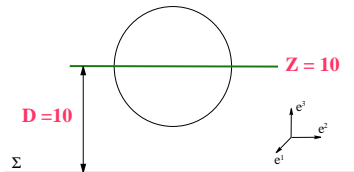
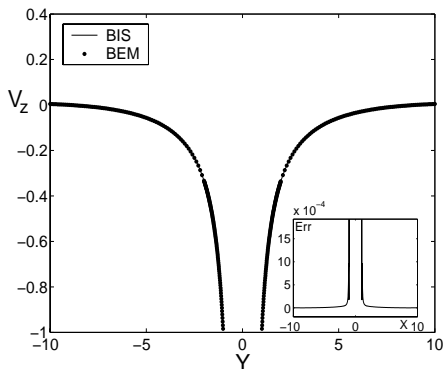
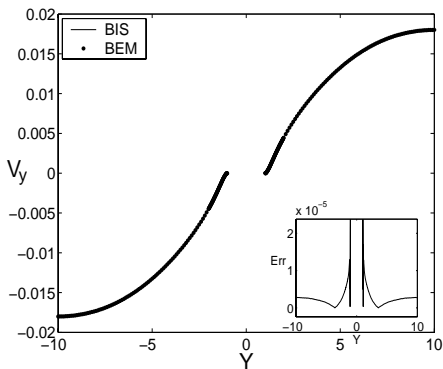
BIS : résultats "exacts" de Chaoui-Feuillebois (2003)

BEM : nos résultats

Validations : calcul des composantes de la vitesse

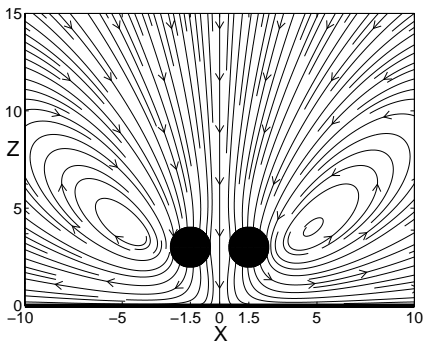


Validations : calcul des composantes de la vitesse

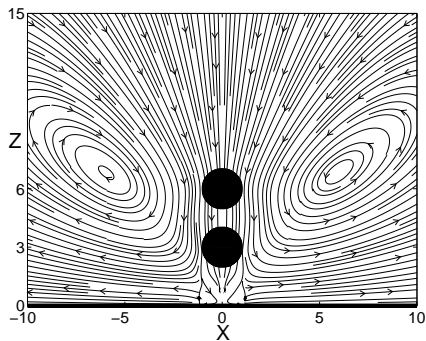


Résultats : deux particules sphériques en translation perpendiculairement à la paroi

Les centres alignés
parallèlement à la paroi

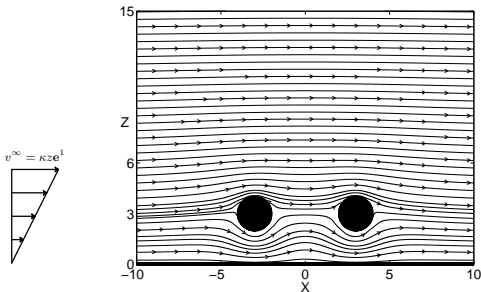


les centres alignés
perpendiculairement à la paroi

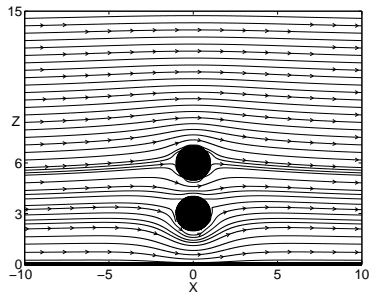


Résultats : deux particules sphériques fixées dans un écoulement de cisaillement

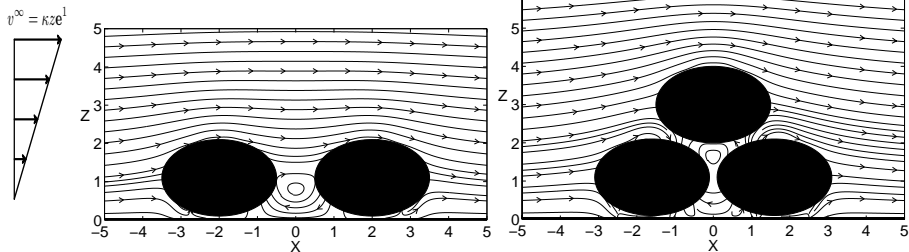
Les centres alignés
parallèlement à la paroi



les centres alignés
perpendiculairement à la paroi



Résultats : trajectoires du fluide autour de deux et trois particules ellipsoïdales



Résultats : forces normalisées exercées sur 61 particules

figure (a)

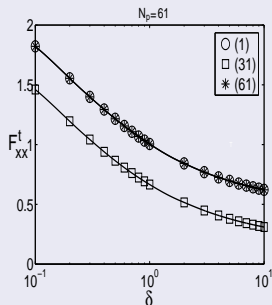
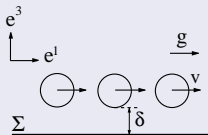


figure (b)

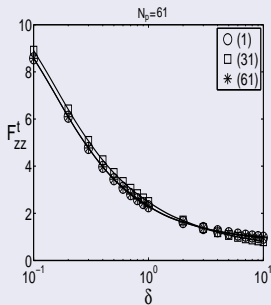
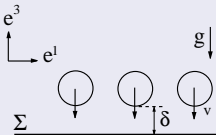
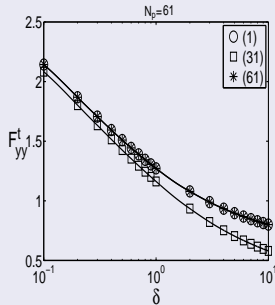
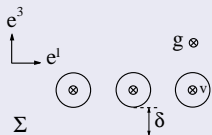


figure (c)



Résultats : couples normalisés exercés sur 61 particules

figure (a)

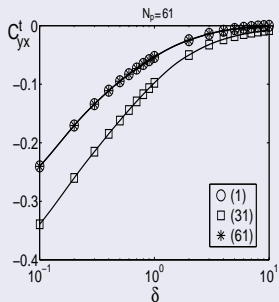
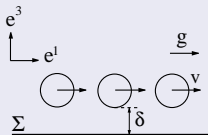


figure (b)

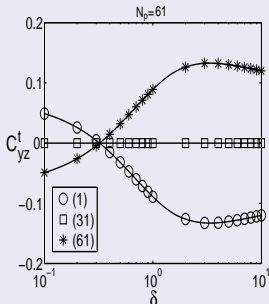
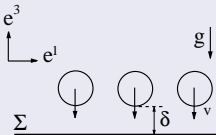
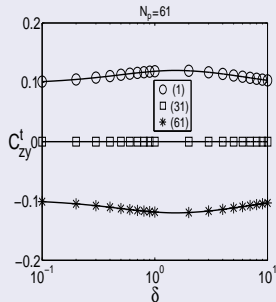
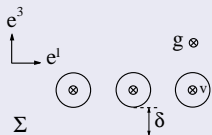


figure (c)



6

Calcul des trajectoires des particules en
sédimentation

Matrice de résistance – Matrice de mobilité

- Lorsque les forces et les couples sont connus, les vitesses de translation et de rotation peuvent être calculées par l'inversion de la *grande matrice de résistance* \mathcal{R} (Brenner 1973).

$$\mathcal{F} = -\mathcal{R} \cdot \mathcal{U}$$

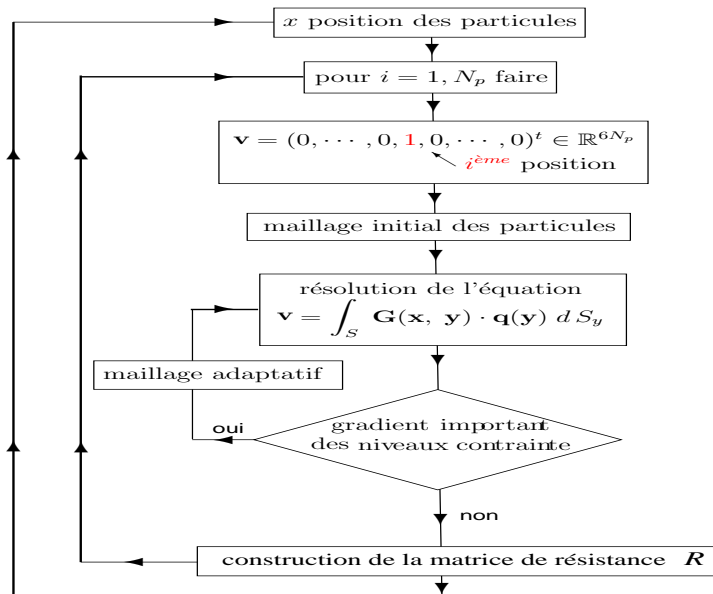
$$\mathcal{U} = -\mathcal{M} \cdot \mathcal{F}$$

La matrice $\mathcal{M} = \mathcal{R}^{-1}$ est la *grande matrice de mobilité*.

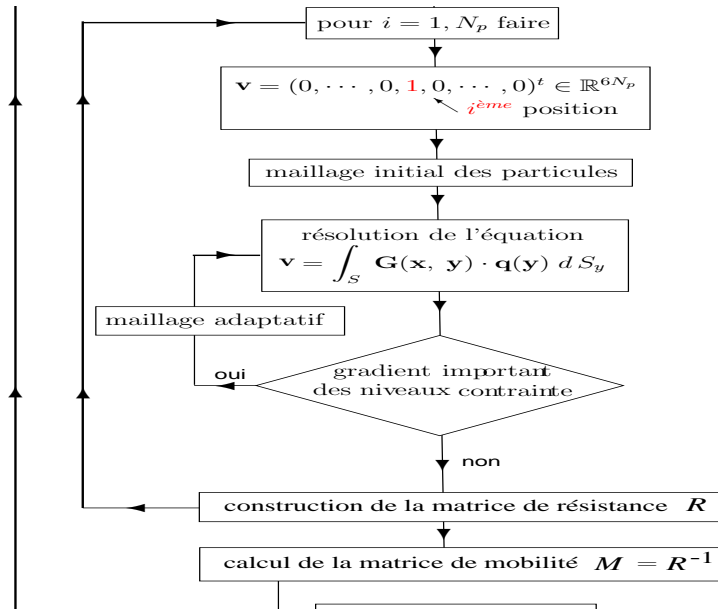
- La solution de l'équation différentielle ordinaire du mouvement donne les trajectoires des particules :

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathcal{U}^t$$

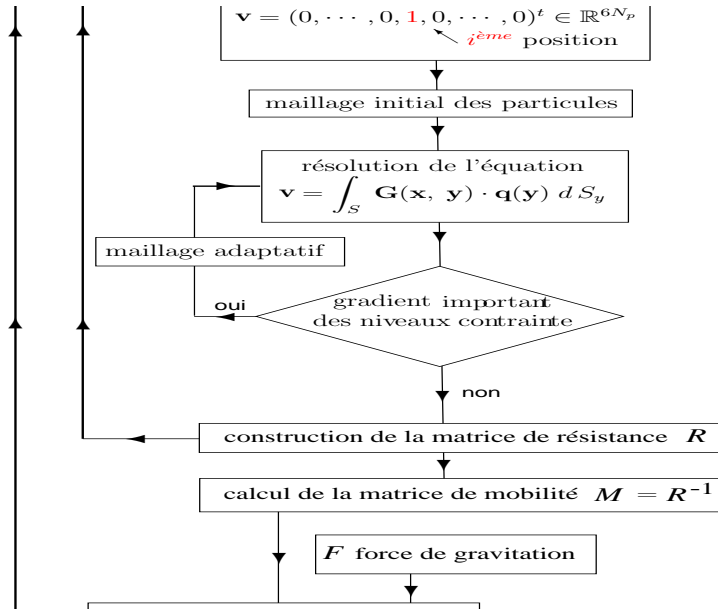
Algorithme de calcul des trajectoires



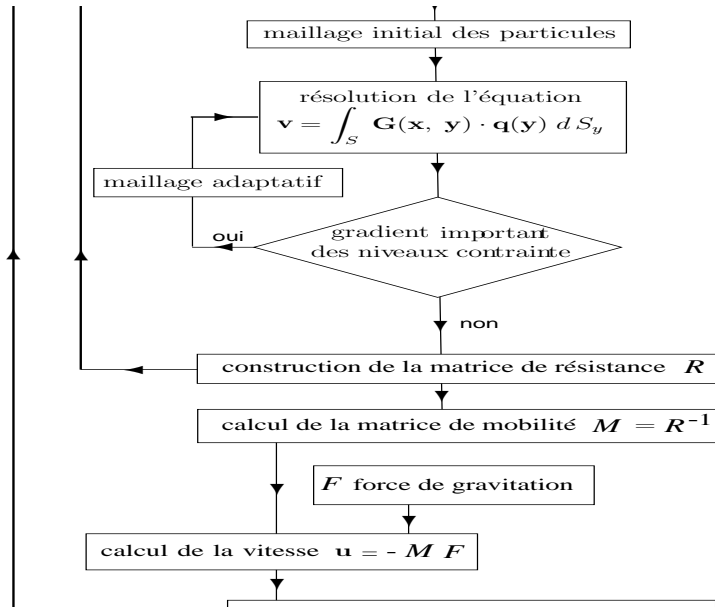
Algorithme de calcul des trajectoires



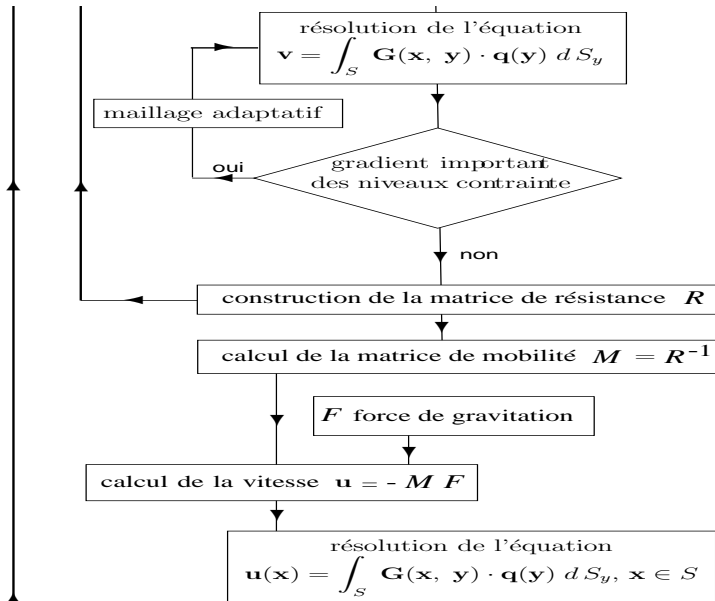
Algorithme de calcul des trajectoires



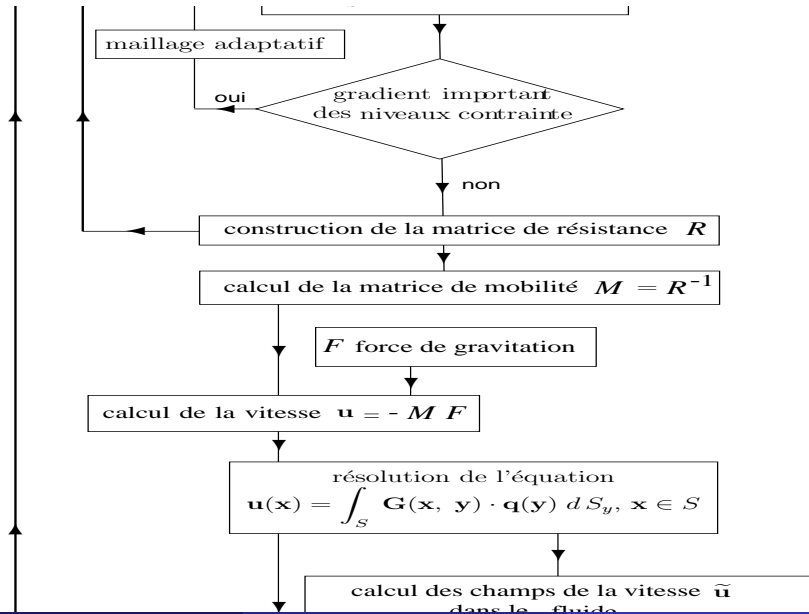
Algorithme de calcul des trajectoires



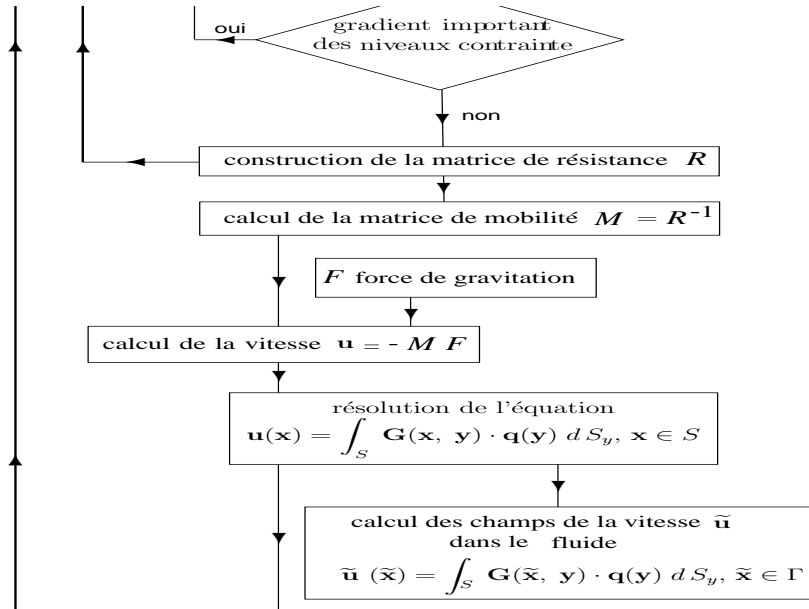
Algorithme de calcul des trajectoires



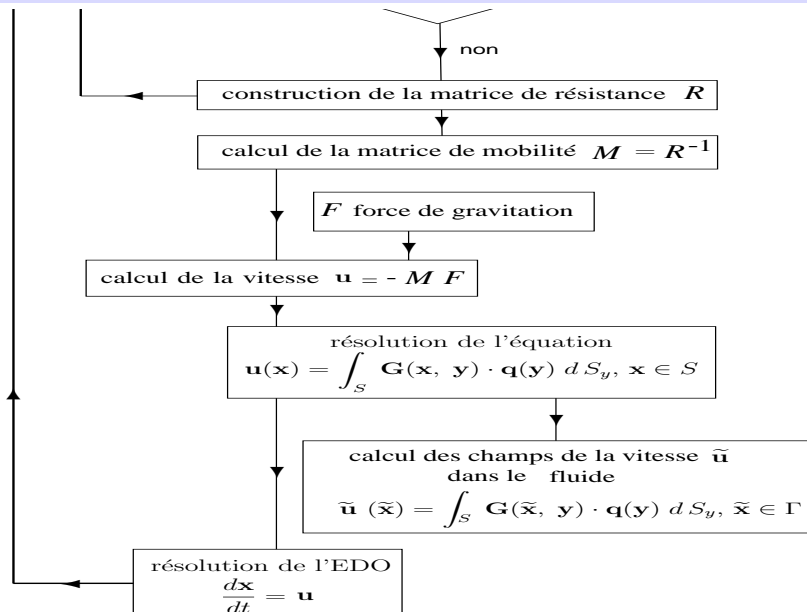
Algorithme de calcul des trajectoires



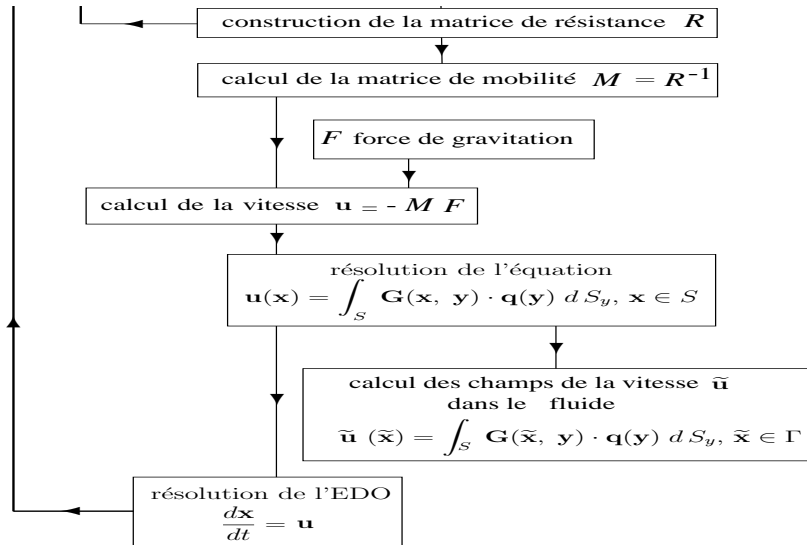
Algorithme de calcul des trajectoires



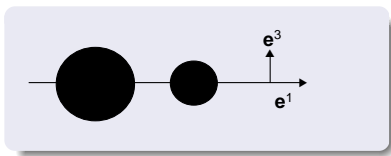
Algorithme de calcul des trajectoires



Algorithme de calcul des trajectoires

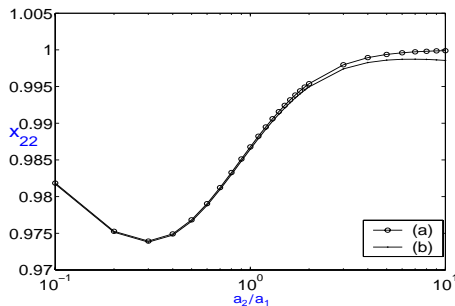
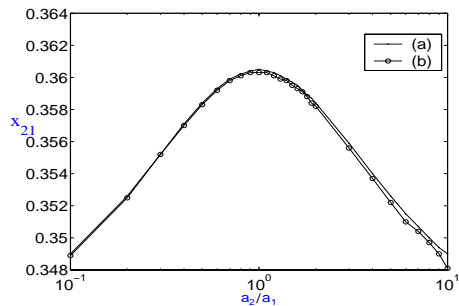
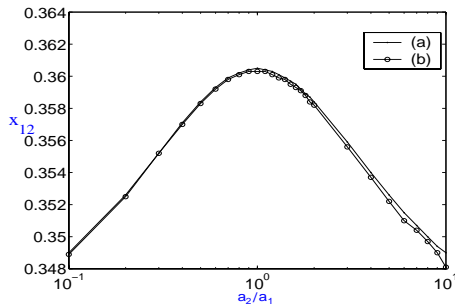
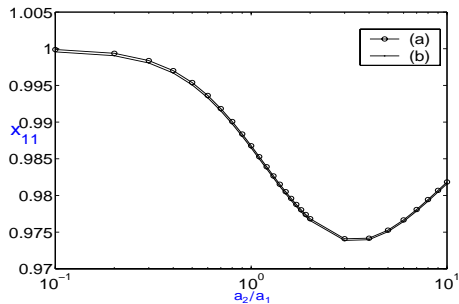


Validation : deux particules de différentes tailles en mouvement de translation suivant la ligne qui joint leurs centres



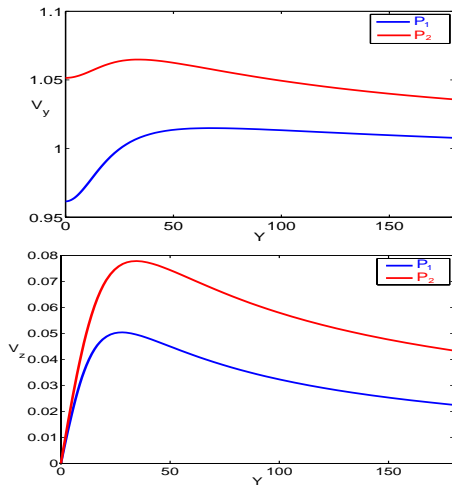
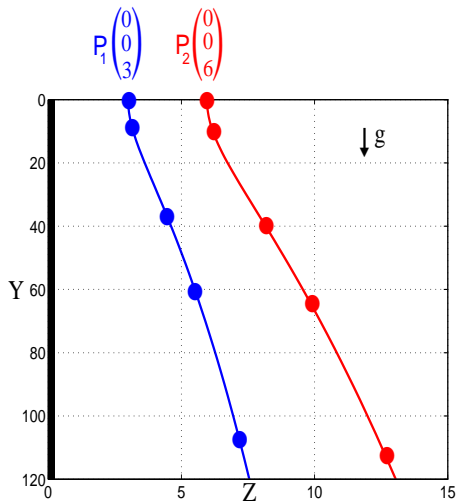
$$v_x^1 = \frac{1}{6\pi\mu a^1} x_{11} F_x^1 + \frac{1}{3\pi\mu(a^1 + a^2)} x_{12} F_x^2$$

$$v_x^2 = \frac{1}{3\pi\mu(a^1 + a^2)} x_{21} F_x^1 + \frac{1}{6\pi\mu a^2} x_{22} F_x^2$$

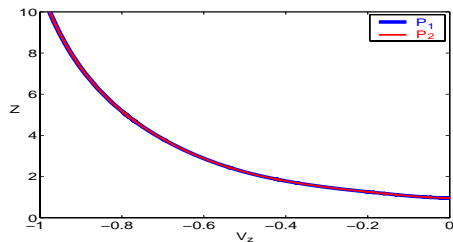
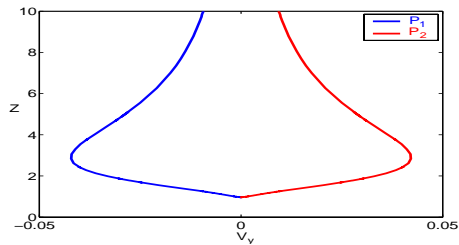
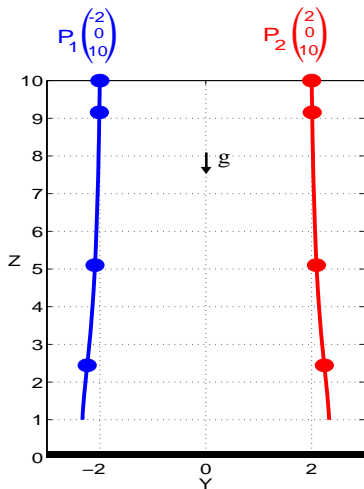


(a) Résultats de Jeffrey et Onishi, (b) Nos résultats.

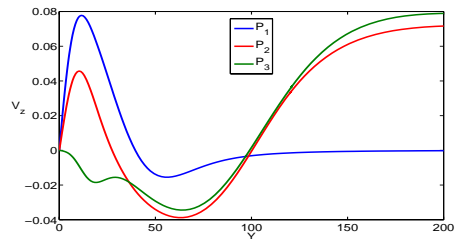
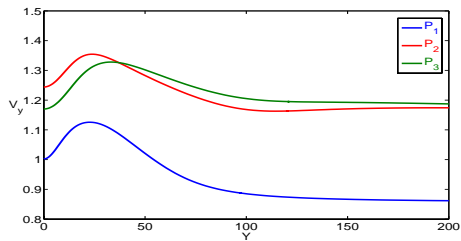
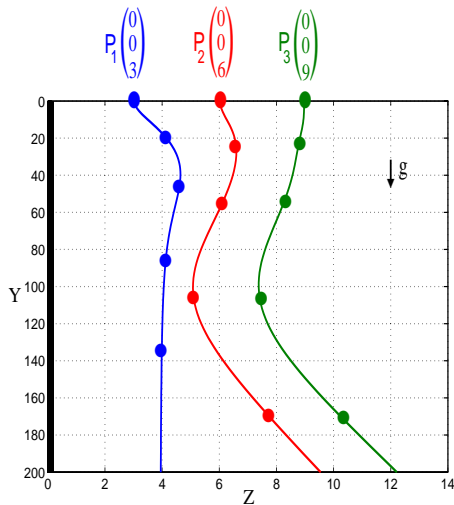
Résultats : étude de trajectoires de deux particules en sédimentation



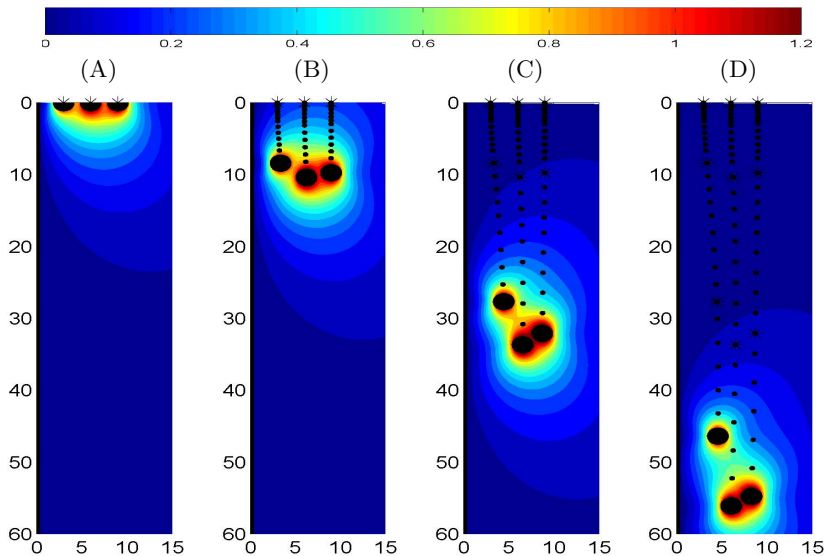
Résultats : étude de trajectoires de deux particules en sédimentation



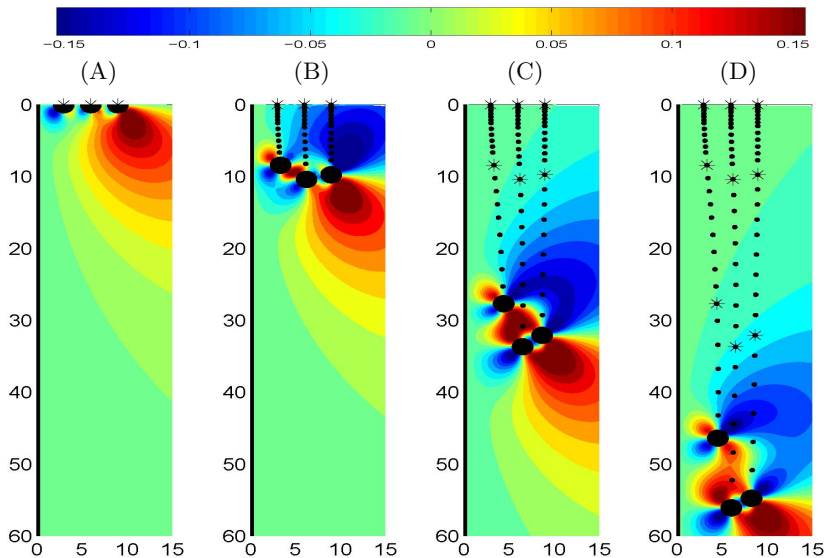
Résultats : étude de trajectoires de trois particules en sédimentation



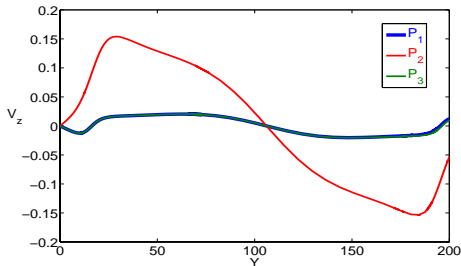
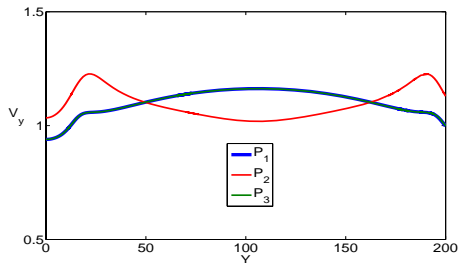
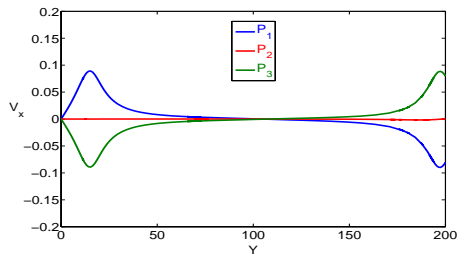
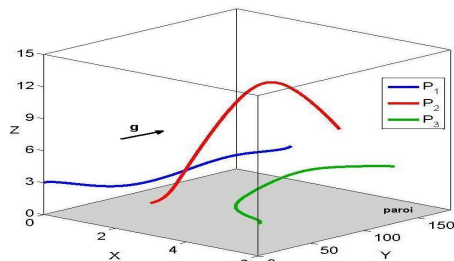
Résultats : trois particules au voisinage d'une paroi



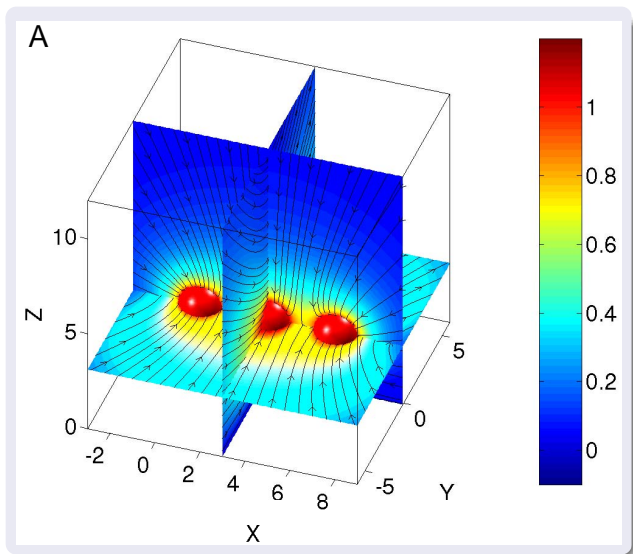
Résultats : trois particules au voisinage d'une paroi



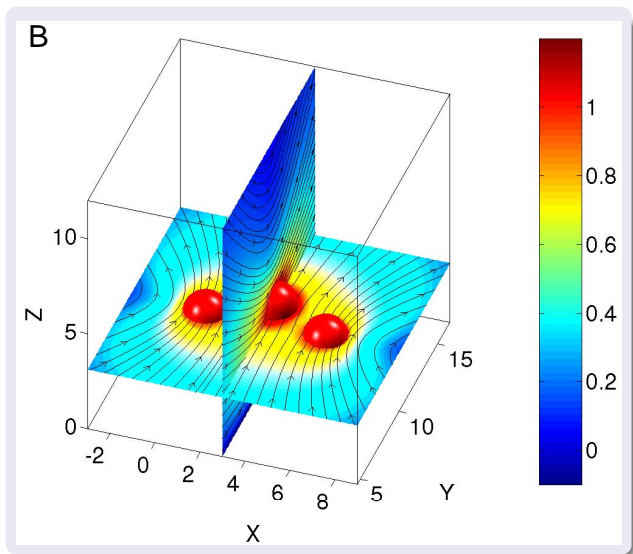
Résultats : étude de trajectoires de trois particules en sédimentation parallèlement à la paroi



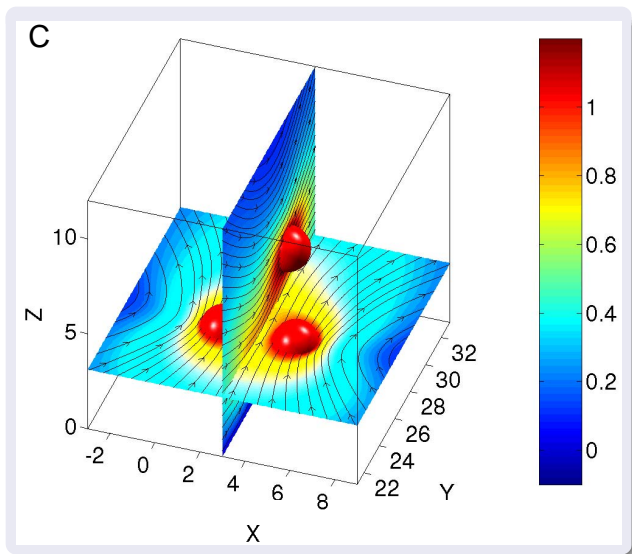
Résultats : calculs des trajectoires de 3 particules en sédimentation parallèlement à la paroi



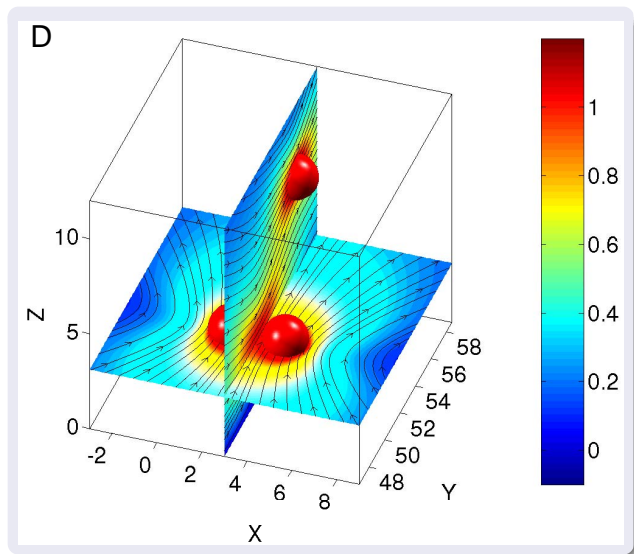
Résultats : calculs des trajectoires de 3 particules en sédimentation parallèlement à la paroi



Résultats : calculs des trajectoires de 3 particules en sédimentation parallèlement à la paroi



Résultats : calculs des trajectoires de 3 particules en sédimentation parallèlement à la paroi



Résultats : deux particules au voisinage d'une paroi

Résultats : deux particules au voisinage d'une paroi



6

Conclusions et perspectives

Conclusions (1/3) : un écoulement axisymétrique

- ✓ Loi de distribution des Stokeslets sur les surfaces des particules \Rightarrow plus de précisions dans les calculs.

Conclusions (1/3) : un écoulement axisymétrique

- ✓ Loi de distribution des Stokeslets sur les surfaces des particules \Rightarrow plus de précisions dans les calculs.
- ✓ Mise au point d'un code \Rightarrow le calcul des forces et des couples exercés sur les particules.

Conclusions (1/3) : un écoulement axisymétrique

- ✓ Loi de distribution des Stokeslets sur les surfaces des particules \Rightarrow plus de précisions dans les calculs.
- ✓ Mise au point d'un code \Rightarrow le calcul des forces et des couples exercés sur les particules.
- ✓ Validations des résultats (littératures).

Conclusions (1/3) : un écoulement axisymétrique

- ✓ Loi de distribution des Stokeslets sur les surfaces des particules \Rightarrow plus de précisions dans les calculs.
- ✓ Mise au point d'un code \Rightarrow le calcul des forces et des couples exercés sur les particules.
- ✓ Validations des résultats (littératures).
- ✓ **Nouveaux résultats** : pour une chaîne de sphères en translation perpendiculaire à une paroi dans un fluide infini.

Conclusions (2/3) : un écoulement général

- ✓ Mise au point d'une méthode d'adaptation de maillage.

Conclusions (2/3) : un écoulement général

- ✓ Mise au point d'une méthode d'adaptation de maillage.
- ✓ Calcul des forces, des couples et des champs de vitesse pour des configurations complexes.

Conclusions (2/3) : un écoulement général

- ✓ Mise au point d'une méthode d'adaptation de maillage.
- ✓ Calcul des forces, des couples et des champs de vitesse pour des configurations complexes.
- ✓ Validations des résultats (littératures).

Conclusions (2/3) : un écoulement général

- ✓ Mise au point d'une méthode d'adaptation de maillage.
- ✓ Calcul des forces, des couples et des champs de vitesse pour des configurations complexes.
- ✓ Validations des résultats (littératures).
- ✓ **Nouveaux résultats** : pour des particules de formes et tailles différentes dans un écoulement au voisinage d'une paroi.

Conclusions (3/3) : calcul des trajectoires

- ✓ Résolution des équations de mouvement pour des particules sphériques en sédimentation sous l'effet de la gravitation.

Conclusions (3/3) : calcul des trajectoires

- ✓ Résolution des équations de mouvement pour des particules sphériques en sédimentation sous l'effet de la gravitation.
- ✓ Calcul des trajectoires des particules sphériques en tenant compte des interactions hydrodynamiques.

Conclusions (3/3) : calcul des trajectoires

- ✓ Résolution des équations de mouvement pour des particules sphériques en sédimentation sous l'effet de la gravitation.
- ✓ Calcul des trajectoires des particules sphériques en tenant compte des interactions hydrodynamiques.
- ✓ Validations des résultats (littératures).

Conclusions (3/3) : calcul des trajectoires

- ✓ Résolution des équations de mouvement pour des particules sphériques en sédimentation sous l'effet de la gravitation.
- ✓ Calcul des trajectoires des particules sphériques en tenant compte des interactions hydrodynamiques.
- ✓ Validations des résultats (littératures).
- ✓ **Nouveaux résultats** : étude des trajectoires de 2 et 3 particules en sédimentation au voisinage d'une paroi ainsi que leurs profils de vitesses.

Perspectives

- ❖ Optimisation de la distribution des Stokeslets.

Perspectives

- ❖ Optimisation de la distribution des Stokeslets.
- ❖ Étude des géométries complexes : particules déformables, paroi poreuse.

Perspectives

- ❖ Optimisation de la distribution des Stokeslets.
- ❖ Étude des géométries complexes : particules déformables, paroi poreuse.
- ❖ Augmentation du nombre des particules.

Perspectives

- ❖ Optimisation de la distribution des Stokeslets.
- ❖ Étude des géométries complexes : particules déformables, paroi poreuse.
- ❖ Augmentation du nombre des particules.
- ❖ Calcul des trajectoires pour les particules non sphériques.

Perspectives

- ❖ Optimisation de la distribution des Stokeslets.
- ❖ Étude des géométries complexes : particules déformables, paroi poreuse.
- ❖ Augmentation du nombre des particules.
- ❖ Calcul des trajectoires pour les particules non sphériques.
- ❖ Effet de la présence d'un écoulement et d'autres forces extérieures sur les trajectoires des particules.

