



HAL
open science

Application des fonctions-spline au traitement d'images numériques

Philippe Cinquin

► **To cite this version:**

Philippe Cinquin. Application des fonctions-spline au traitement d'images numériques. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1987. tel-00325721v1

HAL Id: tel-00325721

<https://theses.hal.science/tel-00325721v1>

Submitted on 30 Sep 2008 (v1), last revised 1 Oct 2008 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

Présentée à

**L'UNIVERSITE SCIENTIFIQUE, TECHNOLOGIQUE ET MEDICALE
DE GRENOBLE**

pour obtenir le grade de
DOCTEUR ES-SCIENCES MATHÉMATIQUES

par

Philippe CINQUIN

OOOOO

APPLICATION DES FONCTIONS-SPLINE AU TRAITEMENT D'IMAGES NUMÉRIQUES

OOOOO

Thèse soutenue le 29 Septembre 1987 devant la commission d'examen.

R. ARCANGELI Président

**J.M. CHASSERY
J. DEMONGEOT
B. LACOLLE Examineurs
P.J. LAURENT
P. SABLONNIERE**

Thèse préparée au sein du laboratoire TIM3-IMAG

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE TECHNOLOGIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Président de l'Université :
M. TANCHE

Année Universitaire 1986 - 1987

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE SCIENCES ET DE GEOGRAPHIE

PROFESSEURS DE 1ère Classe

ARNAUD Paul
ARVIEU ROBERT
AUBERT Guy
AURIAULT Jean-Louis
AYANT Yves
BARBIER Marie-Jeanne
BARBIER Jean-Claude
BARJON Robert
BARNOUD Fernand
BARRA Jean-René
BELORISKY Elie
BENZAKEN Claude
BERNARD Alain
BERTRANDIAS Françoise
BERTRANDIAS Jean-Paul
BILLET Jean
BOELHER Jean-Paul
BONNIER Jane Marie
BOUCHEZ Robert
BRAVARD Yves
CARLIER Georges
CAUQUIS Georges
CHIBON Pierre
COHEN ADDAD Jean-Pierre
COLIN DE VERDIERE Yves
CYROT Michel
DEBELMAS Jacques
DEGRANGE Charles
DELOBEL Claude
DEPORTES Charles
DESRE Pierre
DOLIQUE Jean-Michel
DOUCE Rolland
DUCROS Pierre
FONTAINE Jean-Marc
GAGNAIRE Didier
GERMAIN Jean-Pierre
GIRAUD Pierre
HICTER Pierre
IDELMAN Simon
JANIN Bernard
JOLY Jean-René
KAHANE André, détaché
KAHANE Josette
KRAKOWIAK Sacha
KUPKA Yvon
LAJZEROWICZ Jeanine
LAJZEROWICZ Joseph
LAURENT Pierre-Jean
DE LEIRIS Joel

Chimie Organique
Physique Nucléaire I.S.N.
Physique C.N.R.S
Mécanique
Physique Approfondie
Electrochimie
Physique Expérimentale CNRS
Physique Nucléaire ISN
Biochimie Macromoléculaire Végétale
Statistiques-Mathématiques Appliquées
Physique C.E.N.G- D.R.F.
Mathématiques Pures
Mathématiques Pures
Mathématiques Pures
Mathématiques Pures
Géographie
Mécanique
Chimie Générale
Physique Nucléaire ISN
Géographie
Biologie Végétale
Chimie Organique
Biologie Animale
Physique
Mathématiques Pures
Physique du Solide
Géologie Générale
Zoologie
Mathématiques Appliquées
Chimie Minérale
Electrochimie
Physique des Plasmas
Physiologie Végétale
Cristallographie
Mathématiques Pures
Chimie Physique
Mécanique,
Géologie
Chimie
Physiologie Animale
Géographie
Mathématiques Pures
Physique
Physique
Mathématiques Appliquées
Mathématiques Pures
Physique
Physique
Mathématiques Appliquées
Biologie

LLIBOUTRY Louis
LOISEAUX Jean-Marie
MACHE Régis
MAYNARD Roger
MICHEL Robert
OMONT Alain
OZENDA Paul
PAYAN Jean-Jacques
PEBAY-PEYROULA Jean-Claude
PERRIAUX Jacques
PERRIER Guy
PIERRARD Jean-Marie
PIERRE Jean-Louis
RASSAT André
RENARD Michel
RINAUDO Marguerite
ROSSI André
SAKAROVITCH Michel
SAXOD Raimard
SENGEL Philippe
SERGERAERT Francis
SOUCHIER Bernard
SOUTIF Michel
STUTZ Pierre
VALENTIN Jacques
VAN CUTSEM Bernard
VIALON Pierre

Géophysique
Sciences Nucléaires I.S.N.
Physiologie Végétale
Physique du Solide
Minéralogie et Pétrographie (Géologie)
Astrophysique
Botanique (Biologie Végétale)
Mathématiques Pures
Physique
Géologie
Géophysique
Mécanique
Chimie Organique
Chimie Systématique
Thermodynamique
Chimie CERMAV
Biologie
Mathématiques Appliquées
Biologie Animale
Biologie Animale
Mathématiques Pures
Biologie
Physique
Mécanique
Physique Nucléaire I.S.N.
Mathématiques Appliquées
Géologie

PROFESSEURS de 2^{ème} Classe

ADIBA Michel
ANTOINE Pierre
ARMAND Gilbert
BARET Paul
BECKER Pierre
BEGUIN Claude
BLANCHI J.Pierre
BOITET Christian
BORNAREL Jean
BRUANDET J.François
BRUN Gilbert
CASTAING Bernard
CERFF Rudiger
CHARDON Michel
CHIARAMELLA Yves
COURT Jean
DEMAILLY Jean-Pierre
DENEUVILLE Alain
DEPASSEL Roger
DERRIEN Jacques
DUFREYNOY Alain
GASPARD François
GAUTRON René
GENIES Eugène
GIDON Maurice
GIGNOUX Claude
GILLARD Roland
GIORNI Alain
GUIGO Maryse
GUMUCHAIN Hervé
GUITTON Jacques
HACQUES Gérard

Mathématiques Pures
Géologie
Géographie
Chimie
Physique
Chimie Organique
STAPS
Mathématiques Appliquées
Physique
Physique
Biologie
Physique
Biologie
Géographie
Mathématiques Appliquées
Chimie
Mathématiques Pures
Physique
Mécanique des Fluides
Physique
Mathématiques Pures
Physique
Chimie
Chimie
Géologie
Sciences Nucléaires
Mathématiques Pures
Sciences Nucléaires
Géographie
Géographie
Chimie
Mathématiques Appliquées

HERBIN Jacky
 HERAULT Jeanny
 JARDON Pierre
 JOSELEAU Jean-Paul
 KERCKHOVE Claude
 LEBRETON Alain
 LONGEQUEUE Nicole
 LUCAS Robert
 LUNA Domingo
 MANDARON Paul
 MARTINEZ Francis
 MASCLE Georges
 NEMOZ Alain
 OUDET Bruno
 PELMONT Jean
 PERRIN Claude
 PFISTER Jean-Claude
 PIBOULE Michel
 RAYNAUD Hervé
 RIEDIMANN Christine
 ROBERT Gilles
 ROBERT Jean-Bernard
 SARROT-REYNAULD Jean
 SAYETAT Françoise
 SERVE Denis
 STOECKEL Frédéric
 SOUTIF Jeanne
 SCHOLL Pierre-Claude
 SUBRA Robert
 VALLADE Marcel
 VIDAL Michel
 VIVIAN Robert
 VOTTERO Philippe

Géographie
 Physique
 Chimie
 Biochimie
 Géologie
 Mathématiques Appliquées
 Sciences Nucléaires I.S.N.
 Physique
 Mathématiques Pures
 Biologie
 Mathématiques Appliquées
 Géologie
 Thermodynamique CNRS - CRTBT
 Mathématiques Appliquées
 Biochimie
 Sciences Nucléaires I.S.N.
 Physique du Solide
 Géologie
 Mathématiques Appliquées
 Mathématiques Pures
 Mathématiques Pures
 Chimie Physique
 Géologie
 Physique
 Chimie
 Physique
 Physique
 Mathématiques Appliquées
 Chimie
 Physique
 Chimie Organique
 Géographie
 Chimie

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L' IUT 1

PROFESSEURS de 1^{ère} Classe

BUISSON Roger
 DODU Jacques
 NEGRE Robert

Physique IUT 1
 Mécanique Appliquée IUT 1
 Génie Civil IUT 1

PROFESSEURS de 2^{ème} classe

BOUTHINON Michel
 CHAMBON René
 CHEHIKIAN Alain
 CHENAVAS Jean
 CHOUTEAU Gérard
 CONTE René
 GOSSE Jean-Pierre
 GROS Yves
 KUHN Gérard, (Détaché)
 MAZUER Jean
 MICHOUILLER Jean
 MONLLOR Christian
 NOUGARET Marcel
 PEFFEN René
 PERARD Jacques
 PERRAUD Robert
 TERRIEZ Jean-Michel
 TOUZAIN Philippe
 VINCENDON Marc

EEA. IUT 1
 Génie Mécanique IUT 1
 EEA. IUT 1
 Physique IUT 1
 Physique IUT 1
 Physique IUT 1
 EEA.IUT 1
 Physique IUT 1
 Physique IUT 1
 Physique IUT 1
 EEA.IUT 1
 Automatique IUT 1
 Métallurgie IUT 1
 EEA. IUT 1
 Chimie IUT 1
 Génie Mécanique IUT 1
 Chimie IUT 1
 Chimie IUT 1

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE MEDECINE

PROFESSEURS CLASSE EXEPTIONNELLE ET 1ère CLASSE

AMBLARD Pierre	Dermatologie	C.H.R.G.
AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie	C.H.R.G.
BEAUDOING André	Pédiatrie-Puericulture	C.H.R.G.
BEZEZ Henri	Orthopédie-Traumatologie	Hopital SUD
BONNET Jean-Louis	Ophthalmologie	C.H.R.G.
BOUCHET Yves	Anatomie	Faculté La Merci
	Chirurgie Générale et Digestive	C.H.R.G.
BUTEL Jean	Orthopédie-Traumatologie	C.H.R.G.
CHAMPETIER Jean	Anatomie-Topographique et Appliquée	C.H.R.G.
	O.R.L.	C.H.R.G.
CHARACHON Robert	Anatomie-Pathologique	C.H.R.G.
COUDERC Pierre	Pneumophtisiologique	C.H.R.G.
DELORMAS Pierre	Cardiologie	C.H.R.G.
DENIS Bernard	Pharmacologie	Faculté La Merci
GAVEND Michel	Hématologie	C.H.R.G.
HOLLARD Daniel	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
LATREILLE René	Bactériologie-Virologie	C.H.R.G.
	Gynécologie et Qbstétrique	C.H.R.G.
LE NOC Pierre	Médecine du Travail	C.H.R.G.
MALINAS Yves	Clinique Médicale et Maladies Infectieuses	C.H.R.G.
MALLION Jean-Michel	Histologie	Faculté La Merci
MICOUD Max	Pneumologie	C.H.R.G.
	Neurologie	C.H.R.G.
MOURIQUAND Claude	Hépto-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
PARAMELLE Bernard	Neurochirurgie	C.H.R.G.
PERRET Jean	Clinique Chirurgicale	C.H.R.G.
RACHAIL Michel	Anestésiologie	C.H.R.G.
DE ROUGEMONT Jacques	Physiologie	Faculté La Merci
SARRAZIN Roger	Biophysique	Faculté La Merci
STIEGLITZ Paul	Biochimie	Faculté La Merci
TANCHE Maurice		
VERAIN André		
VIGNAIS Pierre		

PROFESSEURS 2ème CLASSE

BACHELOT Yvan	Endocrinologie	C.H.R.G.
BARGE Michel	Neurochirurgie	C.H.R.G.
BENABID Alim Louis	Biophysique	Faculté La Merci
BENSA Jean-Claude	Immunologie	Hopital Sud
BERNARD Pierre	Gynécologie-Obstétrique	C.H.R.G.
BESSARD Germain	Pharmacologie	ABIDJAN
BOLLA Michel	Radiothérapie	C.H.R.G.
BOST Michel	Pédiatrie	C.H.R.G.
BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie Adultes	Hopital Sud
BRAMBILLA Christian	Pneumologie	C.H.R.G.
CHAMBAZ Edmond	Biochimie	C.H.R.G.
CHIROSEL Jean-Paul	Anatomie-Neurochirurgie	C.H.R.G.
COLOMB Maurice	Immunologie	Hopital Sud
COMET Michel	Biophysique	Faculté La Merci
CONTAMIN Charles	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
	Néphrologie	C.H.R.G.
CORDONNIER Daniel	Radiologie	C.H.R.G.
COULOMB Max	Radiologie	C.H.R.G.
CROUZET Guy	Médecine Interne et Toxicologie	C.H.R.G.
DEBRU Jean-Luc	Biostatistiques et Informatique Médicale	Faculté La Merci
DEMONGEOT Jacques		

DUPRE Alain	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
DYON Jean-François	Chirurgie Infantile	C.H.R.G.
ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie	Faculté La Merci
FAURE Claude	Anatomie et Organogénèse	C.H.R.G.
FAURE Gilbert	Urologie	C.H.R.G.
FOURNET Jacques	Hépto-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
FRANCO Alain	Médecine Interne	C.H.R.G.
GIRARDET Pierre	Anesthésiologie	C.H.R.G.
GUIDICELLI Henri	Chirurgie Générale et Vasculaire	C.H.R.G.
GUIGNIER Michel	Thérapeutique et Réanimation Médicale	C.H.R.G.
HADJIAN Arthur	Biochimie	Faculté La Merci
HALIMI Serge	Endocrinologie et Maladies Métaboliques	C.H.R.G.
HOSTEIN Jean	Hépto-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
HUGONOT Robert	Médecine Interne	C.H.R.G.
JALBERT Pierre	Histologie-Cytogénétique	C.H.R.G.
JUNIEN-LAVILLAUROY Claude	O.R.L.	C.H.R.G.
KOLODIE Lucien	Hématologie Biologique	C.H.R.G.
LETOUBLON Christian	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
MACHECOURT Jacques	Cardiologie et Maladies Vasculaires	C.H.R.G.
MAGNIN Robert	Hygiène	C.H.R.G.
MASSOT Christian	Médecine Interne	C.H.R.G.
MOUILLON Michel	Ophthalmologie	C.H.R.G.
PELLAT Jacques	Neurologie	C.H.R.G.
PHELIP Xavier	Rhumatologie	C.H.R.G.
RACINET Claude	Gynécologie	C.H.R.G.
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie	C.H.R.G.
RAPHAEL Bernard	Stomatologie	C.H.R.G.
SCHAERER René	Cancérologie	C.H.R.G.
SEIGNEURIN Jean-Marie	Bactériologie-Virologie	Faculté La Merci
SELE Bernard	Cytogénétique	Faculté La Merci
SOTTO Jean-Jacques	Hématologie	C.H.R.G.
STOEBNER Pierre	Anatomie Pathologique	C.H.R.G.
VROUSOS Constantin	Radiothérapie	C.H.R.G.

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT PHARMACIE

AGNIUS-DELORD Claudine	Physique	Faculté La Tronche
ALARY Josette	Chimie Analytique	Faculté La Tronche
BERIEL Hélène	Physiologie et Pharmacologie	Faculté La Tronche
BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie	Faculté Meylan
CUSSAC Max	Chimie Thérapeutique	Faculté La Tronche
DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie	Faculté La Tronche
JEANNIN Charles	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan
LATURAZE Jean	Biochimie	Faculté La Tronche
LUU DUC Cuong	Chimie Générale	Faculté La Tronche
MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognosie	Faculté La Tronche
MARZIN Daniel	Toxicologie	Faculté Meylan
RENAUDET Jacqueline	Bactériologie	Faculté La Tronche
ROCHAT Jacques	Hygiène et Hydrologie	Faculté La Tronche
SEIGLE-MURANDI Françoise	Botanique et Cryptogamie	Faculté Meylan
VERAIN Alice	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan

REMERCIEMENTS

Je dois beaucoup à Monsieur Pierre-Jean Laurent, grâce à qui je suis venu à Grenoble, d'abord dans le cadre du Pôle Rhône-Alpes de Génie Biologique et Médical, puis au CNRS. Je le remercie pour ses conseils et pour le soutien qu'il m'a toujours prodigués tout au long de ce travail, commencé à son initiative, et qui fait largement appel à des outils mathématiques dont il est l'auteur.

Je remercie Monsieur Rémi Arcangéli de me faire l'honneur de présider le jury et d'avoir accepté d'être rapporteur de ce travail.

Je remercie Monsieur Paul Sablonnière d'avoir accepté d'être rapporteur, et de m'avoir aidé dans la rédaction par ses commentaires.

Je suis reconnaissant à Monsieur Jacques Demongeot de m'avoir initié à la théorie des confineurs. J'espère que les outils développés pour leur traitement contribueront au développement des applications de cette théorie. Je le remercie pour l'aide constante qu'il m'a apportée, en particulier dans le travail de relecture, et pour la chaleur de son accueil dans son service.

Je remercie Monsieur Jean-Marc Chassery d'avoir accepté de faire partie du jury. Je garde un très bon souvenir de mon passage dans l'Equipe de Microscopie Quantitative, où j'ai pu bénéficier de son expérience en traitement d'images et de ses conseils.

Je remercie Monsieur Bernard Lacolle d'avoir accepté de faire partie du jury. Les groupes de travail de géométrie algorithmique qu'il anime ont été pour moi l'occasion d'échanges fructueux.

Je suis heureux d'avoir pu mener les dernières parties de cette recherche au sein d'un Centre Hospitalier Universitaire. Je tiens à remercier tous ceux qui ont rendu possible la création en milieu hospitalier d'un Centre de Biostatistiques et d'Informatique Médicale, dont le traitement d'images médicales est l'une des missions, et en particulier Monsieur Roger Sarrazin, sans le soutien de qui cette expérience n'aurait pas pu être menée.

Je remercie tous les médecins imageurs et cliniciens, en collaboration avec qui se font les applications du traitement d'images, et en particulier Messieurs Alim-Louis Benabid, Max Coulomb, Guy Crouzet et Jean-François Lebas.

Je n'oublie pas l'accueil très amical que j'ai reçu pendant 2 ans dans l'Equipe de Microscopie Quantitative, dans laquelle je suis entré grâce à Messieurs Pierre Chibon et Gérard Brugal, que je remercie.

Je remercie également tous les amis que j'ai laissés dans cette équipe et qui m'ont aidé dans mon travail, et particulièrement Madame Catherine Garbay.

Je remercie pour leur soutien tous mes amis du service d'Informatique Médicale, et particulièrement Madame Marie-Isabelle Chenin, Monsieur Stéphane Lavallée et Mesdemoiselles Catherine Goret et Isabelle Marque.

Enfin, je tiens à remercier Madame Geneviève Bicaïs pour l'efficacité avec laquelle elle a pris en charge la frappe du manuscrit, ainsi que Madame Gilla Benchetrit et l'équipe de Physiologie Médicale pour la gentillesse avec laquelle on m'a laissé utiliser à loisir la précieuse imprimante laser!

à Olivier, Michaël et Anne-Laure,
avec toute ma tendresse.

TABLE DES MATIERES

	Pages
INTRODUCTION	3
CHAPITRE I: SEGMENTATION D'IMAGES CYTOLOGIQUES	7
I.1 Obtention d'une représentation continue d'une image 2D	10
I.1.1 Rappels sur le lissage par fonctions-spline	10
I.1.2 Caractérisation des bicubiques de lissage	12
I.1.3 Splines circulantes de lissage	15
I.1.4 Splines aux moindres carrés	21
I.1.5 Splines de lissage aux moindres carrés	25
I.2 Détermination des points "frontière"	28
I.3 Suivi des points "frontière"	33
I.4 Remarques sur la stabilité des points "frontière"	37
CHAPITRE II: APPROXIMATION ADAPTATIVE PAR B-SPLINES POLYHEDRALES	49
II.1 Rappels sur les splines polyédrales	52
II.1.1 Définition et propriétés des B-splines polyédrales	52
II.1.2 Formules de récurrence	56
II.1.3 Combinaison linéaire de B-splines	57
II.2 Principe du lissage adaptatif	62
II.3 Schéma d'approximation linéaire et local sur une base de B-splines polyédrales	64
II.3.1 Représentation de x^α sur une base de splines polyédrales	65
II.3.2 Détermination des coefficients a et choix des fonctionnelles de base	66
II.4 Approximation locale aux moindres carrés	68
II.5 Détection des contours d'une image représentée par une méthode d'approximation adaptative	70

CHAPITRE III: ESTIMATION DE CONFINEURS	81
III.1 Rappel sur les notions d'attracteur et de confineur	83
III.1.1 La notion d'attracteur	83
III.1.2 La notion de confineur	84
III.1.3 Problèmes liés à l'estimation numérique des confineurs	88
III.2 Estimation d'un confineur dont on connaît a priori le caractère annulaire	89
III.3 Estimation d'un confineur sans connaissance a priori de son caractère annulaire	92
III.4 Estimation de la période de description d'un confineur	96
III.4.1 Estimation de la période dans le cas d'un confineur annulaire	96
III.4.2 Estimation de la période par le critère des moindres carrés	98
III.4.3 Estimation de la période par inf-convolution de splines trigonométriques	99
CHAPITRE IV: TRAITEMENT D'IMAGES TRIDIMENSIONNELLES	103
IV.1 Morphoscopie réaliste d'un volume modélisé par des fonctions-spline tricubiques	107
IV.1.1 Un algorithme rapide de lissage et d'interpolation 3D	108
IV.1.2 Visualisation de surfaces d'isodensité- Reformattage de coupes- Mode "pseudo-radio"	116
IV.2 Modélisation de surfaces d'isodensité comme solution d'une équation différentielle	121
IV.2.1 Construction de la surface d'isodensité par un système d'équations différentielles	122
IV.2.2 Description de volumes "fibrillaires"	125
IV.3 Segmentation par généralisation en dimension 3 de la notion de point d'inflexion	127
V CONCLUSION	135
BIBLIOGRAPHIE	139

**APPLICATION DES FONCTIONS-SPLINE AU TRAITEMENT D'IMAGES
NUMERIQUES**

INTRODUCTION

Les images numériques sont habituellement considérées comme des objets mathématiques inclus dans \mathbb{Z}^N , où N varie entre 2 (images bidimensionnelles classiques), 3 (images tridimensionnelles) et même 4 (images tridimensionnelles dépendantes du temps).

Le traitement de ces images est réalisé le plus souvent par des méthodes qui respectent leur caractère discret. Les notions correspondantes (les "primitives" calculées) sont souvent l'analogie discret de définitions initialement posées dans le domaine continu. Leur expression sous forme discrète a de l'intérêt lorsqu'elle permet d'obtenir des algorithmes performants, même au prix d'éventuelles simplifications.

Cependant, les images discrètes peuvent être considérées comme résultant de la discrétisation sur une grille spatio-temporelle plus ou moins fine d'un signal multidimensionnel continu.

Cette discrétisation s'accompagne bien sûr d'une erreur inconnue, si bien que le passage des données discrètes à la fonction continue sous-jacente se pose comme un problème d'approximation

classique : trouver $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x),$$

connaissant:

$$y_{i_1, \dots, i_N} = f(x_{i_1, \dots, i_N}) + \varepsilon_{i_1, \dots, i_N} \quad \text{où} \quad \begin{cases} 1 \leq i_1 \leq n_1 \\ \vdots \\ 1 \leq i_N \leq n_N \end{cases}$$

$$\text{et } x_i = \sum_{k=1}^N i_k e_k r_k,$$

avec $i=(i_1, \dots, i_N)$, e_k représentant le $k^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique

de \mathbb{R}^N , dont toutes les composantes sauf la $k^{\text{ème}}$ sont nulles, $r_k \in \mathbb{R}$ représentant le pas de discrétisation sur la $k^{\text{ème}}$ coordonnée.

Cette formulation du problème correspond au cas le plus fréquent où la discrétisation de la fonction se fait sur une grille régulière, en coordonnées cartésiennes.

Déterminer f revient à se doter d'une représentation continue de l'image. Nous reviendrons au cours de ce travail sur les avantages spécifiques d'un tel mode de représentation des images dans des cas bien particuliers. Mais il est évident qu'elle permet une description plus fine de l'image que l'on a besoin de calculer des "primitives" stables qui font appel à des propriétés de continuité ou de dérivabilité.

Parmi les diverses techniques d'approximation, ce sont essentiellement les fonctions splines qui ont été utilisées dans le traitement d'images et surtout les produits tensoriels de splines unidimensionnelles, pour des raisons évidentes de simplicité de calcul.

Cette représentation a déjà été largement utilisée dans divers domaines : restauration d'images [HOU.77], reconstruction d'images [GIR.84], stockage hiérarchique [CAU.78, CAU.81, SAN.82] , ...

Nous proposons de l'utiliser comme moyen de description des images, et nous illustrerons cette approche en présentant les solutions proposées pour des problèmes concrets.

Les problèmes que nous rencontrerons seront de deux ordres. Il fallait d'abord définir des outils aussi efficaces que possibles pour permettre l'approximation rapide d'images volumineuses (les images les plus volumineuses ont été des images en 3 dimensions, constituées de 56 plans de 512×512 pixels soit 28 672 K octets, à raison de 2 octets par pixel). Disposant de cette représentation continue, il fallait ensuite l'exploiter au mieux pour répondre au problème posé.

Le premier chapitre sur la segmentation d'images cytologiques permettra de présenter diverses méthodes de lissage par des splines bicubiques aux moindres carrés. Ces techniques de lissage conduisent à une représentation continue de l'image qui a été employée avec succès pour la détermination de points frontières. Les insuffisances des méthodes de lissage utilisées nous ont amené à tester, dans le deuxième chapitre, des méthodes d'approximation adaptative par des B-splines polyédrales. De même, le dernier chapitre présentera une alternative continue à la solution employée dans ce premier chapitre pour déterminer, puis suivre les points frontières.

Le troisième chapitre portera sur le traitement d'images un peu particulières, obtenues dans l'étude de systèmes biologiques pour lesquels se pose le problème de l'estimation de la trajectoire et de la périodicité de certaines solutions de systèmes d'équations différentielles issues de la biologie théorique, et des observations expérimentales correspondant à ces méthodes.

Le quatrième chapitre portera sur le traitement d'images tridimensionnelles. Nous avons adapté au cas du lissage un algorithme de calcul rapide de fonctions splines tridimensionnelles. Ceci permet de représenter par une spline tricubique, combinant interpolation et lissage, une image tridimensionnelle volumineuse. Les caractéristiques de continuité et de dérivabilité permettent de synthétiser des images tridimensionnelles très réalistes, et ce dans des conditions qui permettent l'emploi en clinique courante.

Les surfaces qui sont représentées au chapitre IV sont définies tout simplement par seuillage. Pour aller plus loin et pour retrouver, dans le cas d'images 3D, des techniques proches de celles définies au Chapitre I, il est nécessaire de définir d'autres techniques de segmentation, issues de méthodes de géométrie algorithmique destinées à permettre de calculer l'intersection de surfaces connues par une équation implicite. L'idée générale est de construire un système d'équations différentielles dont la solution représente la surface qui "segmente" le volume. L'originalité de cette méthode de segmentation réside dans le fait qu'elle réalise simultanément l'opération de détection de contours et de suivi de contours. Elle fournit une voie d'approche du difficile problème de la description d'un réseau fibrillaire tri-dimensionnel, problème particulièrement important pour les images médicales.

CHAPITRE I
SEGMENTATION D'IMAGES CYTOLOGIQUES

SEGMENTATION D'IMAGES CYTOLOGIQUES

Le problème posé était de décrire une image de lame cytologique en détaillant ses divers constituants : fond, hématies (globules rouges) et surtout leucocytes (globules blancs), ces derniers représentant les objets à étudier (cf figure I.1). La solution du problème posé dans ce premier chapitre constitue une approche alternative et complémentaire à la segmentation discrète développée dans le cadre du projet SAMBA [BRU.77] (Système d'Analyse Microscopique à Balayage Automatique), dont le but à terme est d'automatiser et d'améliorer le diagnostic histo-pathologique et anatomo-pathologique en quantifiant la sémiologie observée sur les lames.

L'étape préalable à la caractérisation des leucocytes est bien sûr l'isolement de ces cellules du reste de la lame, ce qui constitue le temps de "segmentation" de l'image. Cette opération est rendue délicate par le fait que d'autres cellules (hématies ou leucocytes) peuvent être en contact avec le leucocyte que l'on cherche à segmenter. D'autre part, la coloration du leucocyte peut varier fortement et sa limite avec le fond est parfois extrêmement floue. Toutes ces difficultés rendent difficile l'emploi de méthodes de segmentation discrète élémentaires telles qu'un simple seuillage après étude de l'histogramme. Parallèlement au développement de méthodes discrètes spécifiques pour ce problème de segmentation [CHA.76, CHA.84], nous avons étudié ce problème à partir d'une représentation continue de l'image.

L'intérêt d'une représentation continue est ici de permettre une évaluation plus stable d'opérateurs différentiels qui font intervenir des dérivées allant jusqu'à l'ordre 2, ce qui est difficile en restant dans un cadre strictement discret.

Nous présenterons donc tout d'abord les diverses méthodes d'approximation qui ont été essayées ; puis nous verrons comment cette représentation continue de l'image a permis de déterminer des "points frontières". La théorie des graphes est ensuite utilisée pour passer de ces points frontières à la frontière de la cellule elle-même. Les résultats de l'application de cette méthode à des cas réels sont ensuite présentés. Nous concluons sur l'étude de la stabilité des points frontières en fonction du degré de lissage effectué .

I.1 - OBTENTION D'UNE REPRESENTATION CONTINUE D' UNE IMAG BIDIMENSIONNELLE

Cette représentation a été obtenue par des fonctions splines. Nous rappelons brièvement en dimension 1 la définition de ces splines, et leur généralisation en dimension 2 par des produits tensoriels ou des splines de surface. Puis nous caractérisons des splines bicubiques de lissage. La résolution du système correspondant étant difficilement envisageable compte tenu de sa taille, nous présenterons diverses techniques : splines circulantes de lissage, splines aux moindres carrés, splines aux moindres carrés de lissage.

I-1-1 Rappels sur le lissage par fonctions splines

En dimension 1, le problème se pose de la manière suivante :

Données :

$$[a,b] \subset \mathbb{R}$$

$$\Lambda = \{t_1 = a < t_2 \dots < t_n = b\}$$

$$z \in \mathbb{R}^n$$

$$\rho \in \mathbb{R}$$

Théorème I.1.1 [LAU.72]

$\exists ! \sigma \in H^2[a,b]$ tel que :

$$\int_a^b (\sigma''(t))^2 dt + \rho \sum_{i=1}^n (\sigma(t_i) - z_i)^2 = \min_{x \in H^2[a,b]} \int_a^b (x''(t))^2 dt + \rho \sum_{i=1}^n (x(t_i) - z_i)^2$$

Le terme $\int_a^b (x''(t))^2 dt$ correspond à l'énergie de flexion,

le terme : $\sum_{i=1}^n (x(t_i) - z_i)^2$, à une énergie de lissage.

σ vérifie les propriétés suivantes:

. σ est un polynôme de degré 3 par morceaux sur Λ

. $\sigma \in \mathcal{C}^2[a,b]$

On notera S_Λ l'ensemble des polynômes de degré 3 par morceaux sur Λ , 2 fois continûment dérivables. S_Λ est un espace vectoriel de dimension $n+2$.

En dimension 2, les données sont cette fois les suivantes:

$$\mathfrak{R} = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$$

$$\Lambda = \{t_1=a < t_2 \dots < t_n = b\}$$

$$\mu = \{u_1 = c < u_2 \dots < u_m = d\}$$

$$z \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \text{ (les données initiales)}$$

$$\omega \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \text{ (les "poids")}$$

Les deux grandes familles de méthodes de lissage par fonctions splines présentant des propriétés variationnelles sont les suivantes, selon le terme d'énergie minimisée :

- Splines bicubiques [BOO.62]

Elles minimisent l'expression suivante :

$$\text{Min}_x \iint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial^4 x}{\partial t^2 \partial u^2} \right)^2 dt du + \rho \sum_{i,j} \omega_{ij} (x(t_i, u_j) - z_{ij})^2$$

et on démontre qu'elles sont en fait obtenues comme produit tensoriel de fonctions splines cubiques.

L'analogie du terme unidimensionnel d'énergie de flexion n'a ici pas de signification physique

claire; de plus, ces splines ne présentent pas d'invariance par rotation.

-Splines de surface [DUC.76]

Elles minimisent l'expression suivante:

$$\text{Min}_x \iint_{\mathfrak{R}} \left(\left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t \partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \right)^2 \right) dt du + \rho \sum_{i,j} \omega_{ij} (x(t_i, u_j) - z_{ij})^2$$

L'analogie du terme unidimensionnel d'énergie de flexion a ici un sens physique d'énergie de flexion d'une plaque mince. De plus, ces splines sont invariantes par rotation. Malheureusement elles ne présentent aucun caractère de séparabilité, ce qui les rend d'emploi malaisé lorsque le nombre de données à lisser est grand, ce qui est notre cas.

Nous verrons au chapitre II que l'on peut également lisser des données expérimentales en dimension quelconque avec des B-splines multivariées qui n'ont pas de propriétés variationnelles claires.

I-1-2 Caractérisation des bicubiques de lissage.

Pour construire une bicubique de lissage, il faut donc trouver la fonction qui minimise la fonctionnelle $L : \mathcal{E}_2^4(\mathfrak{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, où $\mathcal{E}_2^4(\mathfrak{R})$ représente l'ensemble des fonctions x de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

dont les dérivées $\frac{\partial^{i+j} x}{\partial t^i \partial u^j}$ sont continues, pour i et $j \leq 2$.

$$(I.1) \quad x \xrightarrow{L} \iint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial^4 x}{\partial t^2 \partial u^2} \right)^2 dt du + \rho \sum_{i,j} \omega_{ij} (x_{ij} - z_{ij})^2$$

(en notant $x_{ij} = x(t_i, u_j)$).

En dérivant (I.1), on obtient $L'(x)$ comme la fonctionnelle qui, à tout g de $\mathcal{E}_2^4(\mathbb{R})$,

associe

(I.2)

$$g \xrightarrow{L'(x)} 2 \iint_{\mathbb{R}} \frac{\partial^4 x}{\partial t^2 \partial u^2} \cdot \frac{\partial^4 g}{\partial t^2 \partial u^2} dt du + 2 \rho \sum_{i,j} \omega_{ij} (x_{ij} - z_{ij}) g_{ij}$$

(En notant $g_{ij}=g(t_i, u_j)$).

Or, en posant $X = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ et $G = \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$, nous avons :

(I.3)

$$\iint_{\mathbb{R}} \frac{\partial^4 x}{\partial t^2 \partial u^2} \cdot \frac{\partial^4 g}{\partial t^2 \partial u^2} dt du = \iint_{\mathbb{R}} \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} dt du = \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} dt \right) du$$

Mais en intégrant par parties

(I.4)

$$\int_a^b \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} dt = \left[\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} \cdot \frac{\partial G}{\partial t} \right]_a^b - \int_a^b \frac{\partial^3 X}{\partial t^3} \cdot \frac{\partial G}{\partial t} dt$$

Avec

(I.5)

$$- \int_a^b \frac{\partial^3 X}{\partial t^3} \cdot \frac{\partial G}{\partial t} dt = - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial^3 X}{\partial t^3} \cdot \frac{\partial G}{\partial t} dt$$

Soit par une nouvelle intégration par parties

(I.6)

$$-\int_a^b \frac{\partial^3 X}{\partial t^3} \cdot \frac{\partial G}{\partial t} dt = -\sum_{i=1}^{n-1} \left[\frac{\partial^3 X}{\partial t^3} G \right]_{t_i}^{t_{i+1}} + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial^4 X}{\partial t^4} \cdot G dt = \sum_{i=1}^{n-1} G(t_i, u) \left[-\frac{\partial^3 X}{\partial t^3}(t_i^-, u) + \frac{\partial^3 X}{\partial t^3}(t_i^+, u) \right]$$

car $\frac{\partial^4 X}{\partial t^4} = 0$ puisque X est un polynôme de degré 3 en t.

On peut faire ensuite un raisonnement analogue pour la deuxième variable d'intégration.

On en déduit

$$(I.7) \quad L'(x)(g) = 2 \left(\rho \sum_{i,j=2}^{n-1} \omega_{ij} (x_{ij} - z_{ij}) g_{ij} + \Delta^6 x_{ij} \cdot g_{ij} \right)$$

(aux termes correspondant à i ou j = 1 près),

avec :

(I.8)

$$\Delta^6 x_{ij} = \frac{\partial^6 x}{\partial t^3 \partial u^3}(t_i^-, u_j^-) - \frac{\partial^6 x}{\partial t^3 \partial u^3}(t_i^-, u_j^+) - \frac{\partial^6 x}{\partial t^3 \partial u^3}(t_i^+, u_j^-) + \frac{\partial^6 x}{\partial t^3 \partial u^3}(t_i^+, u_j^+)$$

où l'on note par

$$\frac{\partial^6 x}{\partial t^3 \partial u^3}(t_i^-, u_j^-)$$

la dérivée à gauche, les dérivées à droites étant représentées par le signe +.

$L'(x)(g)$ doit être nul pour tout g si x est solution. Il doit donc être nul, ce qui se traduit par:

Caractérisation I.1.2:

Une spline bicubique de lissage x définie comme ci-dessus vérifie:

$$\rho \omega_{ij} z_{ij} = \rho \omega_{ij} x_{ij} + \Delta^6 x_{ij} \begin{cases} 1 < i < n \\ 1 < j < m \end{cases}$$

Le système correspondant n'est pas séparable. Il n'est donc pas soluble dans le cas général, puisque, même pour de faibles valeurs de n et m (64 par exemple), le coût de la résolution du système serait prohibitif (système de taille 4096 dans notre exemple).

C'est cette impossibilité numérique qui nous a amenés à utiliser d'autres techniques de résolution. (splines circulantes de lissage, où l'on se ramène à deux transformées de Fourier, splines aux moindres carrés où l'on sépare le problème, splines aux moindres carrés de lissage).

I.1.3 - Splines circulantes de lissage.

Les images que nous avons à traiter sont des images $n \times n$, dans lesquelles la région d'intérêt est incluse. Sauf cas très particulier, cette région d'intérêt ne touche pas les bords. D'autre part, nous verrons plus tard que les lissages effectués sont peu importants (on est proche de conditions d'interpolation). On peut donc, sans grande conséquence pour la région d'intérêt, modifier les valeurs de la fonction sur les bords. En particulier, on peut sans danger imposer à la solution de vérifier des conditions très fortes qui sont des conditions de périodicité.

(I.9)

$$\begin{cases} x^{(i)}(a,u) = x^{(i)}(b,u) & , \quad i = 0,1,2 \\ & \forall u \in [c,d] \\ x^{(i)}(t,c) = x^{(i)}(t,d) & , \quad i = 0,1,2 \\ & \forall t \in [a,b] \end{cases}$$

L'intérêt de telles conditions de périodicité est qu'elles vont permettre de transformer le problème précédemment insoluble en un problème soluble par transformée de Fourier en utilisant les propriétés des matrices circulantes.

On sait en effet que l'on peut écrire, localement dans chaque rectangle élémentaire du maillage, la solution x du problème de lissage sous la forme:

$x(t,u) = x_1(t) x_2(u)$, x_1 et $x_2 \in P^3$, où P^3 est l'espace des polynômes de degré 3.

Donc, en vertu de la formule de définition (I.8), nous avons:

Proposition I.1.3

$$\Delta^6 x_{ij} = 4x''_{ij} - 2(x''_{i-1,j} + x''_{i+1,j} + x''_{i,j-1} + x''_{i,j+1}) + x''_{i-1,j-1} + x''_{i+1,j+1} + x''_{i-1,j+1} + x''_{i+1,j-1}$$

où pour simplifier on note $x''_{ij} = \frac{\partial^4 x(t_i, u_j)}{\partial t^2 \partial u^2}$.

Démonstration:

Les propriétés de continuité des splines cubiques unidimensionnelles et leur caractère polynômial par morceaux permettent d'en obtenir une représentation à l'aide de la dérivée seconde [CIN.81]. Une spline cubique s'écrit ainsi sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, lorsque le pas est constant et égal 1:

$$\begin{aligned} \sigma(t) = & [\sigma''(t_i) (t_{i+1} - t)^3 + \sigma''(t_{i+1}) (t - t_i)^3] / 6 + \sigma(t_{i+1}) (t - t_i) + \sigma(t_i) (t_{i+1} - t) \\ & - (t - t_i) \sigma''(t_{i+1}) / 6 - (t_{i+1} - t) \sigma''(t_i) / 6 \end{aligned}$$

On en déduit facilement:

$$\begin{cases} \sigma^{(3)}(t_i^+) = \sigma''(t_{i+1}) - \sigma''(t_i) \\ \sigma^{(3)}(t_i^-) = \sigma''(t_i) - \sigma''(t_{i-1}) \end{cases}$$

Dans le cas des bicubiques, produits tensoriels de splines cubiques, on obtient avec nos notations:

$$(I.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^6 x(t_i^+, u_i^+)}{\partial t^3 \partial u^3} = x''_{i+1,j+1} - x''_{i+1,j} - x''_{i,j+1} + x''_{i,j} \\ \frac{\partial^6 x(t_i^-, u_i^-)}{\partial t^3 \partial u^3} = x''_{i,j} - x''_{i,j-1} - x''_{i-1,j} + x''_{i-1,j-1} \\ \frac{\partial^6 x(t_i^+, u_i^-)}{\partial t^3 \partial u^3} = x''_{i+1,j} - x''_{i+1,j-1} - x''_{i,j} + x''_{i,j-1} \\ \frac{\partial^6 x(t_i^-, u_i^+)}{\partial t^3 \partial u^3} = x''_{i,j+1} - x''_{i,j} - x''_{i-1,j+1} + x''_{i-1,j} \end{array} \right.$$

La proposition I.1.3 s'en déduit facilement.

On peut remarquer que $\Delta^6 x$ s'obtient en faisant passer sur l'image x'' le masque 3×3 suivant :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

(on note x et x'' les matrices des valeurs de x et $\frac{\partial^4 x}{\partial t^2 \partial u^2}$ aux points du réseau \mathcal{R}).

On remarque que ce masque est séparable : on peut en fait écrire $\Delta^6 x = H^t x'' H$, sous l'hypothèse de périodicité, où H est la matrice circulante symétrique

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \\ 0 & & & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Si, maintenant, on tient compte du fait que la solution appartient à l'espace vectoriel $S_\Lambda \times S_\mu$, on va pouvoir l'exprimer à partir d'une base de cette espace vectoriel, constituée de produits tensoriels des B-splines cubiques unidimensionnelles. Or celles-ci peuvent s'exprimer à l'aide de différences divisées d'ordre 4 [LAU.72]. La base habituelle est constituée des

$s_i(t) = \delta_{i-2}^4((t-\xi)_+^3)$, $i=1, \dots, n$, où δ_{i-2}^4 désigne la fonctionnelle différence divisée relative

aux abscisses t_{i-2}, \dots, t_{i+2} . Dans notre cas, lorsque le réseau est régulier, avec un pas de 1 sur chaque coordonnée, pour obtenir des B-splines dont les valeurs aux sommets soient entières, nous multiplions les éléments de base par $4!$, et nous avons, pour tout $t \in [k-2, k+2]$:

$$B_k(t) = [t - (k-2)]_+^3 - 4 [t - (k-1)]_+^3 + 6 [t - k]_+^3 - 4 [t - (k+1)]_+^3, \quad k=1, \dots, n.$$

B_k est donc la spline qui passe par son maximum en k , de support $[k-2, k+2]$.

La solution x recherchée admet dans cette base la représentation suivante:

$$(I.11) \quad x(t, u) = \sum_{k,j} B_k(t) \alpha_{kj} B_j(u).$$

Donc

$$x = M_\lambda^t \alpha M_\mu = M^t \alpha M, \text{ où } M_\lambda = M_\mu = M \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ si } n = m$$

M est la matrice $n \times n$ circulante qui représente en fait l'évaluation des B-splines sur les sommets de la partition Λ ou μ . C'est le caractère circulant de la matrice M qui assure la périodicité de la solution, dans les conditions I.9.

De même, en dérivant 2 fois les expressions des splines de base, on peut écrire matriciellement

$$(x'')_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}} = M''^t \alpha M'',$$

où

$$M'' = 96 \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est la matrice $n \times n$ circulante qui représente l'évaluation de la dérivée seconde de la B-spline de base sur les sommets de la partition Λ ou μ .

On remarque que $M'' = 9/6 H$.

Supposons que tous les poids w_{ij} soient égaux à 1. Avec ces notations, on peut écrire matriciellement le problème d'approximation décrit dans la caractérisation I.1.2 sous la forme

Caractérisation I.1.3:

Une spline circulante de lissage définie par (I.11) vérifie:

$$(I.12) \quad \rho M^t \alpha M + H^t M''^t \alpha M'' H = \rho z ;$$

Dans cette équation, toutes les matrices sont $n \times n$, et les matrices M , H et M'' sont circulantes. Soit $W = (w^{kl})$ la matrice de la transformée de Fourier, où

$$w = e^{-\frac{2i\pi}{n}}$$

On sait que, si A est une matrice circulante, a le premier vecteur colonne de cette matrice et D_A la matrice diagonale dont les coefficients vérifient $D_A(i,i) = \hat{a}(i)$, $i=1, \dots, n$ où \hat{a} est la transformée de Fourier de a , on peut écrire

$$D_A = W A W^{-1}$$

Nous allons utiliser cette propriété pour résoudre le système (I.13) qui prend la forme

$$W(\rho M^t \alpha M + H^t M''^t \alpha M'' H)W^{-1} = \rho W z W^{-1}$$

d'où

$$\rho W M^t W^{-1} W \alpha W^{-1} W M W^{-1} + W H^t M''^t W^{-1} W \alpha W^{-1} W M'' H W^{-1} = \rho W z W^{-1}$$

soit

$$(I.13) \quad \rho D_M \tilde{\alpha} D_M + 96^2 D_H^2 \tilde{\alpha} D_H^2 = \rho \tilde{z} .$$

en posant $\tilde{y} = W y W^{-1}$ pour toute matrice y non circulante (\tilde{y} est "presque la transformée de Fourier $y = W y W$), et en remarquant que $D_{A^2} = (D_A)^2$.

Ce système est maintenant très facilement soluble:

Théorème I.1.3:

Une spline circulante de lissage définie par (I.12) vérifie, si W est la matrice de la transformée de Fourier, $D_H = W H W^{-1}$, $\tilde{\alpha} = W \alpha W^{-1}$ et $\tilde{z} = W z W^{-1}$:

$$(I.14) \quad \forall (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2, \tilde{\alpha}_{ij} (\rho D_M(i) D_M(j) + 96^2 D_H^2(i) D_H^2(j)) = \rho \tilde{z}_{ij},$$

d'où l'on tire aisément $\tilde{\alpha}_{ij}$, puis $\alpha = W^{-1} \tilde{\alpha} W$.

La "circularisation" du problème permet donc de le résoudre en 3 étapes peu coûteuses en temps de calcul :

- 1) Calcul de $\tilde{z} = W z W^{-1}$: pseudo-transformée de Fourier bidimensionnelle, coût $2n^2 \log_2 n$.
- 2) Calcul de $\tilde{\alpha}$, coût n^2 .
- 3) Calcul de $\alpha = W^{-1} \tilde{\alpha} W$: pseudo-transformée de Fourier inverse, coût $2n^2 \log_2 n$.

La détermination de D_H^2 coûte $n \log_2 n$ opérations et peut d'ailleurs être précalculée une bonne fois pour toutes, une fois la géométrie du système figée.

Cette méthode a été implémentée sur Norsk Data 100 et on a pu ainsi vérifier que la circularisation

du problème d'approximation n'avait de conséquences que pour des paramètres p de lissage très faibles, qui n'avaient en fait pas d'intérêt pratique car, comme on le verra plus loin pour ces paramètres de lissage, l'absence d'invariance par rotation des fonctions splines conduisait à des résultats insatisfaisants pour la méthode de détection des points frontières, et ceci indépendamment de la méthode de lissage utilisée.

I.1.4 - Splines aux moindres carrés.

Une méthode de lissage d'images par splines bicubiques aux moindres carrés est mise en oeuvre dans [GIR.81]. Nous avons employé cette technique pour obtenir la première approximation continue d'une image bidimensionnelle utilisable dans notre problème de segmentation. On trouvera au Chapitre IV, pour le problème du lissage par des fonctions splines tricubiques, un algorithme différent et plus rapide de résolution du système auquel conduit cette méthode.

L'idée du lissage par splines aux moindres carrés consiste à chercher la solution du problème d'approximation (I.8) dans un espace de splines définies sur une "sous-grille" de la grille sur laquelle sont données les valeurs de la fonction à approximer.

On reprend les notations du paragraphe I.1.1. et l'on se donne:

$p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ tq $n = hp$, $h \in \mathbb{N}$, et l'on définit $\lambda_p \subset \Lambda$ et $\mu_p \subset \mu$ par:

$$\begin{cases} \lambda_p = \{t_{(k-1)p+1}, k=1, \dots, h\} \\ \mu_p = \{u_{(k-1)p+1}, k=1, \dots, h\} \end{cases}$$

On suppose connues les valeurs de la fonction f à approximer en tous les points de la grille

$$\mathbf{R} = \Lambda \times \mu.$$

Soit S_{λ_p, μ_p} l'espace des splines bicubiques définies sur $\lambda_p \times \mu_p$, dont on connaît la base, obtenue comme produits tensoriels et translations des éléments de base unidimensionnels

$$B_{p,k}(t) = \left(\frac{t-(k-3)p-1}{p}\right)_+^3 - 4\left(\frac{t-(k-2)p-1}{p}\right)_+^3 + 6\left(\frac{t-(k-1)p-1}{p}\right)_+^3 - 4\left(\frac{t-kp-1}{p}\right)_+^3, k=1, \dots, h.$$

Le "sous-échantillonnage" des noeuds en lesquels sont définies les splines de base par rapport à grille de données initiales conduit à une situation qui est l'analogie bi-dimensionnel de la situation unidimensionnelle représentée dans le schéma suivant pour $p = 2$.

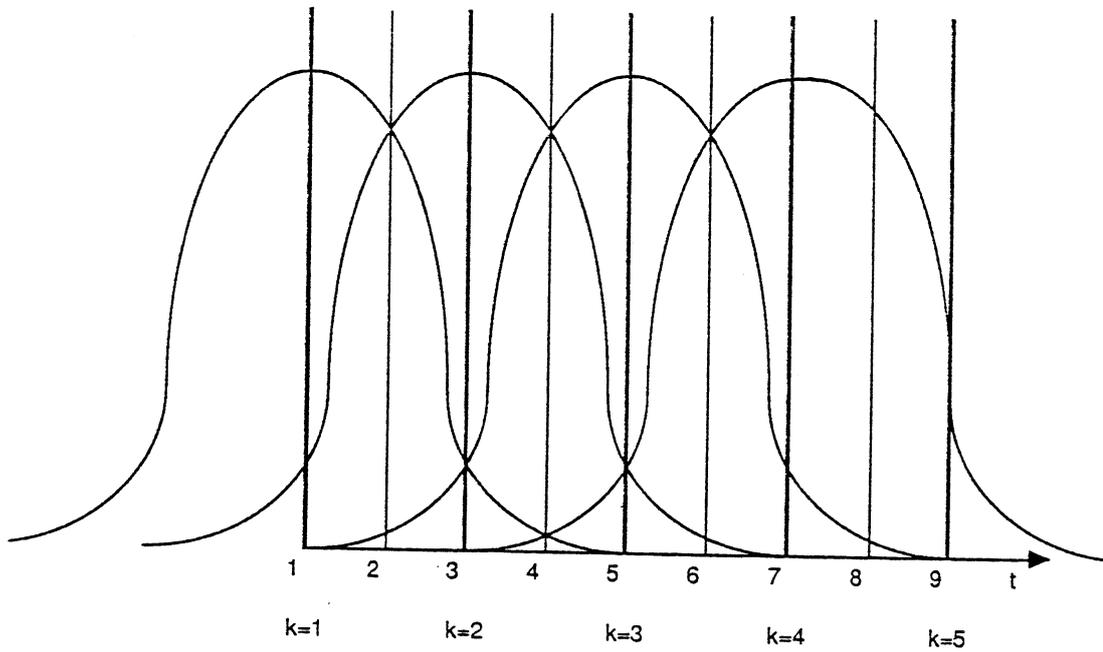


figure I.2: position des B-splines sur la grille des données initiales , pour $p=2$

On recherche $x \in S_{\lambda, \mu, p}$ qui minimise

$$(I.15) \quad \|x-z\|^2 = \sum_{i,j=1}^n (x_{ij} - z_{ij})^2.$$

Le problème d'approximation aux moindres carrés (I.15) s'écrit facilement matriciellement de la manière suivante :

- Soit C_p la matrice bande correspondant à l'évaluation des nouvelles fonctions de base aux sommets de la grille initiale des données.

$$C_p(k,i) = B_{p,k}(i) \begin{cases} k=1, \dots, h \\ i=1, \dots, n \end{cases}$$

Pour $p = 2$,

$$C_p = \begin{pmatrix} 4 & 2.875 & 1 & 0.125 & & & & & \\ 1 & 2.875 & 4 & 2.875 & 1 & 0.125 & & & \\ 0 & 0.125 & 1 & 2.875 & 4 & 2.875 & 1 & 0.125 & \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Avec ces notations, en notant α la matrice $h \times h$ des coefficients de x sur les B-splines bicubiques

$$(I.16) \quad \text{Min } \|x-z\|^2 = \min \|C_p^t \alpha C_p - z\|^2 .$$

Soit L la fonctionnelle

$$\mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^h \mapsto \mathbb{R}$$

$$\alpha \rightarrow L(\alpha) = \|C_p^t \alpha C_p - z\|^2 .$$

$L'(\alpha)$ est la fonctionnelle qui, à tout $g \in \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^h$ associe

$$L'(\alpha)g = (C_p^t g C_p, C_p^t \alpha C_p - z) = (g, C_p C_p^t \alpha C_p C_p^t - C_p z C_p^t)$$

Le fait que $(\forall g \in \mathbb{R}^h \times \mathbb{R}^h, L'(\alpha)g = 0)$ se traduit par:

Proposition I.1.4:

Le problème des moindres carrés (I.15) se ramène à la résolution de l'équation

(I.17) $C_p C_p^t \alpha C_p C_p^t = C_p z C_p^t$, où z est la matrice des données, α la matrice des coefficients sur la base des B-splines choisie et C_p la matrice $h \times n$ définie plus haut.

Le système (I.17) est maintenant soluble par l'application successive de la méthode de Gauss, pour résoudre successivement

$$C_p C_p^t \beta = C_p z C_p^t,$$

puis

$$\alpha C_p C_p^t = \beta.$$

Dans la mesure où la géométrie du système ne change pas, les calculs de la décomposition de matrices qui interviennent dans ce système peuvent être préparés. De plus, on pourrait utiliser le fait que les matrices qui interviennent dans ce système sont des matrices bande pour accélérer la résolution de ces systèmes [LAW.74]. Mais cette résolution est peu coûteuse dans notre cas ($n = 64$, soit $h = 32$ pour $p = 2$).

Remarques:

1) on vérifie aisément que le système (I.17), si l'on fait à nouveau l'hypothèse de la périodicité, est facilement soluble par une pseudo-transformée de Fourier directe et une pseudo-transformée de Fourier inverse, car, en reprenant les notations du paragraphe précédent, ce système s'écrit :

$$D_{C_p C_p^t} \alpha D_{C_p C_p^t} = W (C_p z C_p^t) W^{-1}, \text{ où } W \text{ est cette fois une matrice } h \times h,$$

$$\text{de terme général } w_{kj} = \left(e^{\frac{-2i\pi}{h} \times kj} \right)$$

2) Il n'est pas indispensable de choisir p sous-multiple de n . Cependant l'exposé est plus clair dans ce cas, et en pratique ce sont des valeurs de p puissances successives de 2 qui ont été utilisées.

Cette méthode a été implémentée sur Norsk Data 100. Elle donne de bons résultats "visuels". Elle présente cependant l'inconvénient d'être assez limitée dans le degré de lissage qu'elle permet. En effet, pour des valeurs de p trop grandes (à partir de 8 dans notre situation), le caractère non isotrope des splines bicubiques a pour conséquence de conduire, lors de l'exécution du programme de détection de frontières, à des contours de plus en plus parallèles aux bords de l'image lorsque p croît. Il était donc nécessaire de pouvoir faire cohabiter technique de moindres carrés et lissage classique par un paramètre de lissage.

I.1.5 - Splines de lissage aux moindres carrés.

On cherche toujours la solution d'un problème d'approximation dans l'espace S_{Λ_p, μ_p} défini au paragraphe précédent. Mais on remplace la minimisation de $\|x-z\|^2$ par celle de

$$(I.18) \quad \iint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial^4 x}{\partial t^2 \partial u^2} \right)^2 dt du + \rho \|x-z\|^2 .$$

Le terme sous l'intégrale correspond à l'énergie que minimisent les fonctions splines bicubiques. Son introduction permet de "relativiser" le terme de lissage.

Si l'on fait l'hypothèse de circularisation, avec des notations analogues à celles rappelées plus haut, on obtient, par un raisonnement identique à celui qui a permis d'obtenir la caractérisation des bicubiques de lissage, l'expression matricielle suivante du problème de minimisation (I.18).

$$(I.19) \quad \text{Min} ([M_p^t \alpha M_p, H_p^t M_p''^t \alpha M_p'' H_p] + \rho \|C_p^t \alpha C_p - z\|^2)$$

Dans cette formule, M_p est la matrice $h \times h$ circulante

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & & 0 \\ 0 & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & & & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

L'inconvénient de cette technique est qu'elle ne permet pas l'introduction de poids variables. Or on verra plus loin que ceci aurait été bien utile. Ceci est impossible lors de l'utilisation de splines circulantes, car l'introduction d'une matrice de poids quelconques interdit l'utilisation de la pseudo-transformée de Fourier, qui, appliquée à la matrice de poids, fait perdre le caractère diagonal du système correspondant.

L'introduction de poids variables dans le lissage a été essayé. La quantité à minimiser, toujours dans l'espace $S_{\Lambda_p \times \mu_p}$ est alors

$$(I.22) \quad \iint_{\mathfrak{R}} \left(\frac{\partial^4 x}{\partial t^2 \partial u^2} \right)^2 dt du + \rho \sum_{ij} \omega_{ij} ((C_p^t \alpha C_p)_{ij} - z_{ij})^2$$

En suivant le même raisonnement que pour les splines aux moindres carrés de lissage circulantes, on arrive à:

Proposition I.1.5

La solution du problème (I.22) vérifie:

$$(I.23) \quad M_p H_p^t M_p'' \alpha M_p'' H_p M_p^t + C_p (\omega \cdot (C_p^t \alpha C_p)) C_p^t = C_p (\omega \cdot Z) C_p^t, \text{ où le point}$$

dénote le produit point à point entre matrices, et ω la matrice $n \times n$ de terme général $\rho \omega_{ij}$.

Le système (I.23) est malheureusement un système $h^2 \times h^2$ quelconque.

Nous l'avons résolu pour $n = 64$, $p = 8$, $h = 8$, soit un système 64×64 à résoudre. Les résultats ne sont malheureusement pas très satisfaisants, car c'est pour des paramètres de lissage plus faibles, correspondant par exemple à $p = 2$ que cette étude aurait surtout été intéressante.

I-2 DETERMINATION DES POINTS FRONTIERES

Les méthodes de segmentation d'images peuvent être regroupées en deux catégories principale [FU.81], "clustering" et détection de frontières. Ces deux approches de la segmentation peuvent être utilisées isolément ou en association [BOU.87].

Les méthodes de "clustering" consistent à s'intéresser à une ou plusieurs caractéristiques de l'image (valeur de la fonction, texture,...) et à regrouper les points qui présentent un certain degré d'homogénéité pour ces caractéristiques (typiquement, un simple seuillage, plus ou moins adaptatif, est utilisé pour déterminer les régions de l'image). On travaille ensuite sur ces régions auxquelles on fait subir des transformations géométriques pour extraire les régions recherchées.

Les méthodes de détection de frontière décrivent l'image comme un ensemble de discontinuités qu'il faut organiser. Ces discontinuités s'observent à trois niveaux : ponctuel, local et général. Nous retrouverons plus loin ces 3 niveaux dans l'algorithme de segmentation. L'utilisation de ces discontinuités passe par une étape de représentation de ces discontinuités, qui sont ensuite caractérisées, puis interprétées pour fournir une compréhension globale de l'image. On retrouve en fait, dans ce problème de segmentation, les 3 niveaux d'abstraction (ponctuel, local et général) et les 3 primitives fondamentales (représenter, décrire et interpréter) communs à tous les problèmes de traitement d'images.

La détermination des points frontière est donc la première étape de la segmentation par détection de frontière.

Dans le cas discret, plusieurs filtres sont utilisés pour déterminer ces points frontière [ROB.77, LEV.80]. Un des plus fréquemment utilisé est le laplacien discret dont la courbe de niveau zéro réalise une approximation de la définition d'un point d'inflexion bidimensionnel. On peut combiner le passage de ce filtre laplacien avec une convolution par une gaussienne dont le paramètre permet de contrôler la puissance du lissage résultant [MAR.80]. Cette approche est très séduisante, car elle permet d'envisager de détecter des contours à des niveaux de détails variant avec le paramètre de contrôle de la gaussienne.

D'une manière générale, les opérateurs de détection de contours présentés dans la littérature sont très simples et rapides à mettre en œuvre (ils se ramènent au calcul de un ou plusieurs "filtres" sur des fenêtres de taille réduite, généralement 3×3), mais ils présentent un certain nombre d'inconvénients, dont l'apparition de contours ne correspondant pas à la réalité, ou au contraire la

disparition de certains contours potentiellement intéressants. De plus, dans le cas d'images de faible résolution, (64 x 64 dans notre cas), ils ne permettent pas de prédire la position des points frontières avec une meilleure résolution que l'image initiale. Surtout, l'origine de la définition de ces divers opérateurs est autant liée à des impératifs algorithmiques qu'à la recherche des propriétés locales des images.

Or, lorsqu'on dispose d'une représentation continue des images, on peut chercher à déterminer précisément à quoi correspond mathématiquement la notion "physiologique" de point frontière. On sait déjà [KER.80,CAR.87] utiliser les caractéristiques différentielles ponctuelles pour identifier des points particuliers d'une image. Il faudrait pouvoir en faire autant pour identifier les points frontières. On s'aperçoit rapidement que la classification élémentaire en points elliptiques, paraboliques ou hyperboliques ne permet pas d'obtenir une caractérisation satisfaisante. L'étude des caractéristiques des courbes intersections entre la surface et les plans verticaux contenant une des directions principales (lorsqu'elles existent) était a priori plus intéressante, mais n'a pas donné de résultats satisfaisants. De même, la détermination des "lignes de crête" de l'image "norme du gradient" n'a pas été concluante. En fait, la solution a été obtenue en caractérisant les points frontières comme des équivalents bidimensionnels de points d'inflexion unidimensionnels: un point de la surface sera point frontière si son gradient est maximal, selon un sens à préciser.

Pour comprendre la définition du point d'inflexion pour une fonction définie sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} , considérons l'exemple d'une surface de révolution S engendrée par la rotation autour de son axe de symétrie D d'une courbe symétrique Γ (cf schéma).

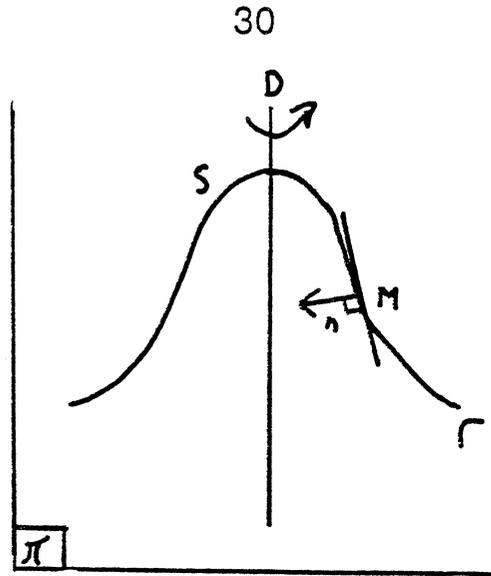


figure (I.3): généralisation de la notion de point d'inflexion

Dans tout plan π contenant D, la détermination du point d'inflexion de la courbe intersection de S et de π est facile. Intuitivement, on aimerait que la courbe qui réunit les points d'inflexion bidimensionnels de S soit constituée par l'ensemble de ces points d'inflexion unidimensionnels.

Ceci est réalisé si l'on prend comme définition d'un point frontière la définition suivante :

Définition I.2

Un point M de la surface S est un point frontière s'il est point d'inflexion de la courbe I intersection entre S et le plan normal à S contenant la verticale.

On vérifie aisément que cette définition correspond à la définition proposée dans le cas d'une surface de révolution. Cette définition se traduit mathématiquement de la manière suivante :

S admet la représentation paramétrique:

$$M \begin{cases} t \\ u \\ z=f(t,u) \end{cases}$$

Le plan tangent à S en M est porté par les vecteurs

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \text{ et } \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \text{ de coordonnées respectives: } \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ p = \frac{\partial f}{\partial t} \end{vmatrix} \text{ et } \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ q = \frac{\partial f}{\partial u} \end{vmatrix} .$$

$$\text{La normale } \vec{n} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{M}}{\partial t} \text{ a pour coordonnées } \vec{n} \begin{vmatrix} p \\ q \\ -1 \end{vmatrix} .$$

La courbe Γ intersection entre le plan vertical passant par M et S admet donc la représentation paramétrique suivante:

$\Gamma: \lambda \rightarrow h(\lambda) = f(t + \lambda p, u + \lambda q)$. M est un point d'inflexion de Γ si et seulement si il vérifie $h''(\lambda) = 0$.

Or

$$h'(\lambda) = p \frac{\partial f}{\partial t}(t + \lambda p, u + \lambda q) + q \frac{\partial f}{\partial u}(t + \lambda p, u + \lambda q)$$

Donc

$$h''(\lambda) = p^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t + \lambda p, u + \lambda q) + 2pq \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial u}(t + \lambda p, u + \lambda q) + q^2 \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(t + \lambda p, u + \lambda q)$$

Soit, en notant :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial u} \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}$$

Caractérisation I.2

(I.24) M est un point frontière si et seulement si :

$$h''(0) = 0 \text{ soit } p^2 r + 2psq + q^2 t = 0$$

Lorsqu'on lisse l'image par des fonctions splines bicubiques, f est un polynôme de degré 3 en t et en u . La résolution de $h''(0)$ amène à la résolution d'une équation de degré 9 en t et en u . Il est donc exclu d'utiliser des techniques de calcul formel pour résoudre cette équation.

Dans la pratique, nous nous sommes contentés de calculer $h''(0)$ en chacun des points d'une matrice $n \times n$, puis de comparer le signe de $h''(0)$ entre chaque point et ses voisins. Un point est donc considéré comme point frontière s'il vérifie ($h''(0) = 0$ ou ($h''(0) > 0$ et $h''(0) < 0$ pour au moins l'un de ses quatre voisins immédiats)) (cf. figure I.4).

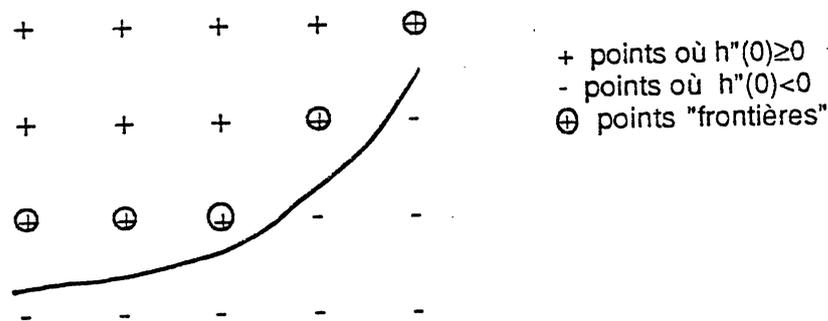


figure I.4: principe de la résolution "discrète" de $h''(0) = 0$

Cette méthode n'est bien sûr pas très satisfaisante. Elle consiste en effet à revenir à une discrétisation d'un problème que l'on essaye de traiter avec des méthodes continues. Nous verrons au Chapitre IV que l'on peut s'affranchir de ce handicap en construisant, puis en résolvant un système d'équations différentielles. La méthode discrète utilisée présente cependant l'avantage d'être algorithmiquement très simple et très rapide. La figure I.5 représente le résultat de la recherche des points frontières par cette technique. Les données initiales étaient connues sur 64×64 pixels, mais la définition des points frontières s'est faite sur 512×512 pixels.

I.3 SUIVI DES POINTS FRONTIERES

Après cette étape de niveau "ponctuel" de définition des points frontières, il faut passer à un niveau "local" dans l'analyse de l'image. Les diverses étapes dans le traitement des points frontières sont résumées dans les figures I.6 et I.7, qui correspondent à un cas réel.

Le premier traitement consiste à éliminer, parmi les points frontières, ceux que l'on peut considérer comme des "parasites". Ce sont les points qui ont un gradient trop faible en norme (les points éliminés par ce test sont ceux qui correspondent aux oscillations de faible amplitude de la spline sur une zone où la fonction reste quasiment constante, au centre de la cellule ou au contraire dans le fond sur lequel elle repose).

D'autres points "parasites" sont ceux pour lequel le gradient présente une trop forte hétérogénéité, caractérisée par une variance locale (calculée sur un faible voisinage) trop forte. L'élimination de ces points n'est pas indispensable, mais facilite grandement les calculs par la suite, car cette situation correspond à une "plicature" de la surface, où l'on trouve côte à côte deux lignes frontières quasiment parallèles mais orientées dans des sens différents ; or l'une de ces lignes suffit à décrire la région d'intérêt.

A ce moment, l'image que l'on obtient est déjà relativement "propre" et l'on pourrait dès maintenant amorcer un algorithme de suivi de contours à partir des points ainsi définis. Mais, en fait, l'information dont on dispose est plus riche : si, en tout point frontière, on représente la direction du plan tangent, on obtient l'image I.8, qui sera très précieuse lorsque l'on aura plusieurs points candidats pour définir le point suivant du contour. On peut d'ailleurs poursuivre (figure I.9) et se doter d'une règle de parcours des frontières analogue à la règle d'Ampère en électricité, c'est-à-dire orienter le contour. Ce point est important, car il permettra de détecter des embranchements : deux points frontières voisins ne seront pas reliés dans le même élément de frontière si le produit scalaire de leurs gradients est trop proche de -1 , ce qui correspond à deux éléments de frontière orientés dans des sens différents.

A l'issue de l'étape de suivi de contours (figure I.10), on dispose donc d'une description de l'image par une vingtaine d'éléments de frontières orientés. On peut maintenant passer à la description de l'image à un niveau global. Pour cela, on va utiliser une connaissance a priori sur les objets contenus dans l'image : les cellules que l'on cherche à isoler sont fermées. Il peut bien sûr arriver que la cellule étudiée soit mal "centrée" et que l'on n'en voie qu'une partie, l'intersection entre cette cellule et la zone de la lame. Dans ce cas, le contour de la cellule apparaîtra ouvert

(puisque une partie de ce contour devrait être constitué par les bords de la lame). Mais ce cas n'est pas intéressant en microscopie quantitative : en effet, on ne pourra pas calculer de paramètres morphologiques sur un contour incomplet. Il faudra donc de toute façon rejeter cette cellule.

Puisqu'on décide donc de rejeter toutes les cellules qui touchent le bord de la lame, on va pouvoir éliminer de la description de l'image les éléments de frontière qui touchent son bord. C'est là qu'il est important d'utiliser une deuxième information a priori, qui est la relative régularité du contour externe des cellules que l'on cherche à isoler. C'est cette régularité qui nous permet de séparer deux éléments de frontière distincts, deux morceaux de frontière qui se raccordent "avec un angle trop aigu". Sans cette précaution, des morceaux entiers de frontière de la véritable cellule seraient éliminés parce que la cellule que l'on cherche à isoler peut être en contact avec d'autres cellules (de hématies typiquement) qui, elles, touchent le bord de la lame. Il en résulte un élément de frontière qui peut aller d'un bord de la lame à l'autre et qui ne peut être partagé en plusieurs éléments de frontières, dont celui qui nous intéresse, que par ce test sur l'orientation de la courbe. On peut alors éliminer les éléments de frontière qui touchent le bord et qui ne peuvent plus contenir un élément de frontière de la cellule que l'on cherche à isoler (figure I.11).

Il reste maintenant à mettre en relation ces éléments de frontière les uns avec les autres. Lorsque l'on observe la figure I.11, on voit que deux situations se présentent : certains éléments de frontière sont relativement proches et, en ces points, les directions des gradients sont compatibles. Il sera facile de mettre en relation ces deux éléments de frontière.

Dans d'autres cas, par contre, la distance entre les éléments de frontière que l'on souhaiterait relier est importante; si l'on ne tenait pas compte de cette distance et qu'on accepte de relier des éléments de frontières trop distants mais compatibles du point de vue de la direction de leurs gradients, on risquerait d'aboutir à une situation où le nombre de cycles faussement détectés serait trop important.

Il faut donc prévoir deux niveaux dans la mise en relation d'éléments de frontière. Le premier niveau correspond à la mise immédiate en relation de deux éléments de frontière compatibles du point de vue de leur gradient et de la distance entre les points de contact éventuels. Pour les éléments de frontières qui ne pourraient être mis en relation qu'avec des points de contacts trop distants, on ne les mettra effectivement en relation que si cela est indispensable pour permettre de fermer un cycle dont on a de bonnes raisons de penser qu'il pourrait être le contour recherché, sur des critères de taille et de régularité.

Il reste à examiner comment on peut détecter les cycles dans la description de notre image sous forme de contours orientés reliés les uns aux autres. Ces cycles sont bien sûr les objets qui nous intéressent dans l'image, car ils correspondent aux objets fermés que l'on cherche à détecter. Pour les mettre en évidence, on va décrire l'image à segmenter dans le formalisme de la théorie des graphes.

Chaque élément de frontière est considéré comme un sommet d'un graphe. Ce graphe est orienté: l'orientation est obtenue en ne mettant l'élément a en relation avec l'élément b que si le sens de parcours de la frontière de a amène à "sauter" à b sans "repartir en arrière" (cf. figure I.12)

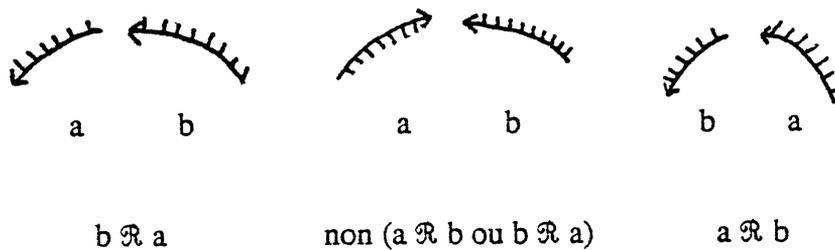


figure I.12: principe de la "mise en relation" de deux éléments "frontière"

Ce graphe est représenté par sa matrice d'adjacence A , définie classiquement par :

$$\begin{cases} A(i,j) = 1 & \text{si } a_i \mathcal{R} a_j \\ A(i,j) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On sait que, pour définir les chemins de divers ordres dans un graphe, il suffit de former les "pseudo-puissances" successives de A définies par $A^{k+1}(i,j) = \min(1, AA^k(i,j))$. Dans la matrice A^k , la présence d'un 1 à la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne signifie que l'on peut passer de l'élément i à l'élément j avec un chemin de longueur k.

La détermination des cycles dans le graphe est donc facile. Il suffit de former les pseudo-puissances successives de A et de rechercher les éléments diagonaux non nuls. Lorsqu'on trouve un de ces éléments non nuls, la "trace" du chemin que l'on a parcouru est inscrite dans les puissances successives de A. Le nombre d'éléments de frontière qui interviennent est de l'ordre d'une vingtaine. Il n'y a donc aucun problème d'espace de stockage de ces matrices.

Dans la recherche des cycles, il est facile de déterminer les "impasses", qui correspondent à des chemins qui aboutissent sur un élément de frontière qui n'est plus en relation avec aucun autre. C'est là que se situe le deuxième niveau de la mise en relation entre éléments de frontières. Avant de conclure à la notion d'impasse, on évalue le chemin parcouru en terme de longueur et de régularité. Si, sur ces critères, il paraît intéressant, on calcule la longueur du "saut" qui séparerait deux points de contact éventuels entre le premier et le dernier élément.. Si ce "saut" respecte les directions de gradients et ne dépasse pas un certain pourcentage de la longueur totale du cycle, on s'autorisera à le faire (figure I.13). La présence d'une nouvelle relation entre deux éléments du graphe impose alors de reprendre le processus d'évaluation des pseudo-puissances successives de A.

On arrive donc maintenant à une description de l'image sous la forme de cycles dans un graphe orienté. Le processus de segmentation est quasiment terminé : pour chaque cycle, on passe à une représentation sous forme de liste orientée des coordonnées des points du contour (figure I.14). De cette représentation, on passe facilement à une représentation par des splines paramétrées fermées:

$$M(t) = \sum_{k=1}^n a_k P_k(t), \quad t \in [0,1], \quad \text{avec } M^{(i)}(0) = M^{(i)}(1), \quad i=0,1,2, \quad \text{les } P_k \text{ étant déterminés à partir de la}$$

liste des points du contour selon une technique "aux moindres carrés" analogue à celle présentée au chapitre III pour la détermination de confins. Pour notre problème, une vingtaine de points P_1 suffisent à décrire correctement le contour (figure I.15).

Toute cette méthode a été implémentée sur Norsk Data ND 100, pour traiter des lames cytologiques numérisées sur 64 x 64 pixels. La première étape de lissage par splines bicubiques aux moindres carrés demande environ 20 secondes. La détermination des points frontières suit en 3 secondes ; le suivi de courbes demande 2 secondes et la recherche de cycles dans l'image environ 1 seconde, soit une durée d'environ 25 secondes au total, ce qui est tout à fait acceptable et comparable à d'autres méthodes de segmentation. La méthode a été validée sur 300 cellules, et le taux de bonne segmentation a atteint 95 %. Il est à noter que cette méthode utilise très peu d'information a priori, ce qui rend sa généralisation facile et permet de traiter des images noir et blanc, ce qui n'est pas le cas des méthodes auxquelles elle a été comparée.

I.4 REMARQUES SUR LA STABILITE DES POINTS FRONTIERES

On a vu que l'une des étapes de l'algorithme de suivi des points frontières consiste à éliminer les points frontières "parasites", sur des critères de seuil du gradient et d'homogénéité locale de ce dernier.

Ceci revient à dire qu'en présence d'un point frontière, on doit se poser la question de sa validité.

Dans le cas où la représentation continue de l'image a été obtenue avec un paramètre de lissage ρ , comme c'est le cas au paragraphe I.1.5, l'opérateur h dont l'annulation caractérise la présence d'un point d'inflexion dépend de ce paramètre de lissage ρ . On peut donc écrire qu'un point $M(x,y)$ est point frontière s'il vérifie $h(x,y,\rho) = 0$. La question de la validité de M comme point frontière se ramène alors à l'étude de $Dh(\rho) = \frac{\partial h}{\partial \rho}(x,y,\rho)$. En effet, un point frontière pour ρ_0 qui vérifie

$Dh(\rho_0) = 0$ restera "assez longtemps proche" d'un point frontière lorsque ρ varie faiblement autour de ρ_0 . De tels points frontières seront appelés "points frontières stables pour ρ_0 ", à l'inverse de points frontières pour lesquels $Dh \neq 0$ et qui seront d'autant plus "instables" que $|Dh|$ sera grand.

Le calcul de Dh passe par l'évaluation de $d\alpha/d\rho$. Or ce terme est facile à obtenir en dérivant (I.20), ce qui conduit à

$$(I.25) \quad A \frac{d\alpha}{d\rho} A + \rho B \frac{d\alpha}{d\rho} B + B \alpha B = C_p z C_p^t, \text{ en notant } A = M_p^t H M_p, B = C_p C_p^t.$$

Or α peut être calculé par la méthode présentée au paragraphe (I.1.5). L'équation (I.25) peut donc s'écrire:

$$(I.26) \quad A^t \frac{d\alpha}{d\rho} A + \rho B \frac{d\alpha}{d\rho} B = C_p^t z C_p^t - B \alpha B .$$

La partie gauche de ce système est identique à celle du système (I.20). La même technique de résolution peut donc être employée.

Dh pourrait donc être obtenu facilement, et utilisé pour caractériser la validité des points d'inflexion obtenus pour ρ donné. Cependant, cette technique n'a pas encore été essayée numériquement.

En fait, il pourrait être intéressant d'aller plus loin et de faire explicitement intervenir le paramètre de lissage ρ comme une variable supplémentaire, c'est-à-dire rechercher $f(x,y,\rho)$, par exemple sous la forme d'une tricubique. La résolution de l'équation (I.20) pour différentes valeurs de ρ , suivie de l'interpolation des coefficients α obtenus, ne serait relativement pas très coûteuse (de l'ordre du coût des systèmes rencontrés au chapitre IV) . Il serait alors intéressant de définir les points frontières comme l'ensemble des points qui vérifient simultanément:

$$\begin{cases} h(x,y,\rho)=0 \\ \frac{\partial h}{\partial \rho}(x,y,\rho)=0 \end{cases}$$

La recherche des points frontières se ramène alors à la détermination de l'intersection de deux surfaces, problème pour lequel de nombreuses solutions existent, dont celles présentées au chapitre IV.

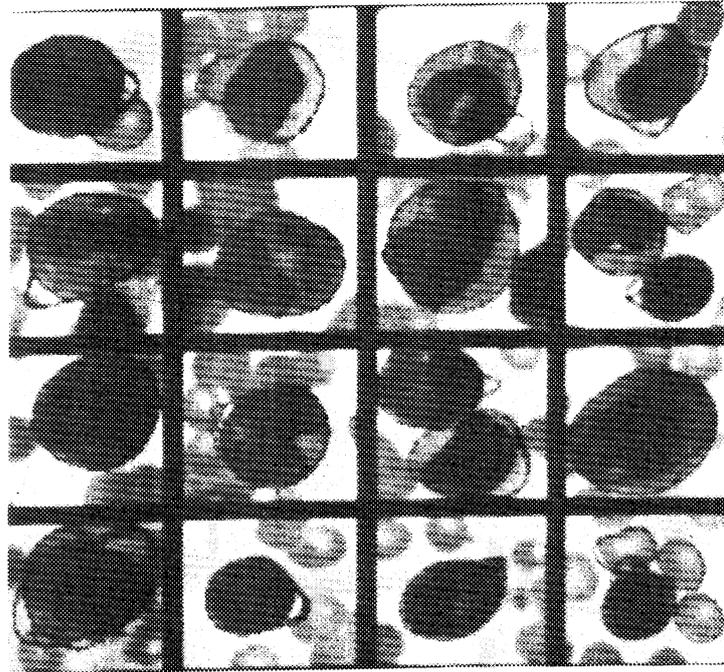


figure I.1: résultat de la segmentation de 16 images cytologiques

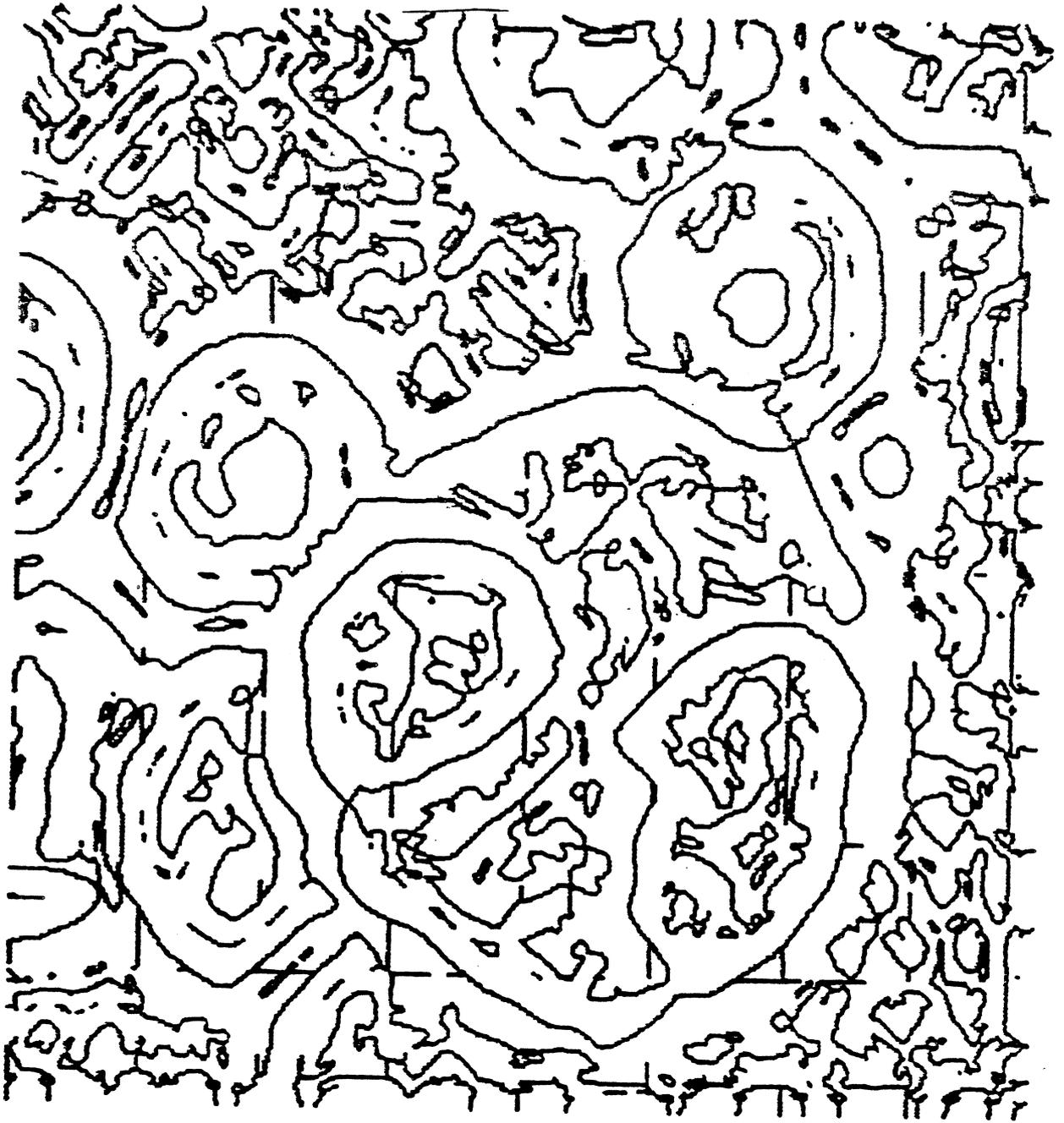


figure I.5: points "frontière" , en résolution 512 x 512

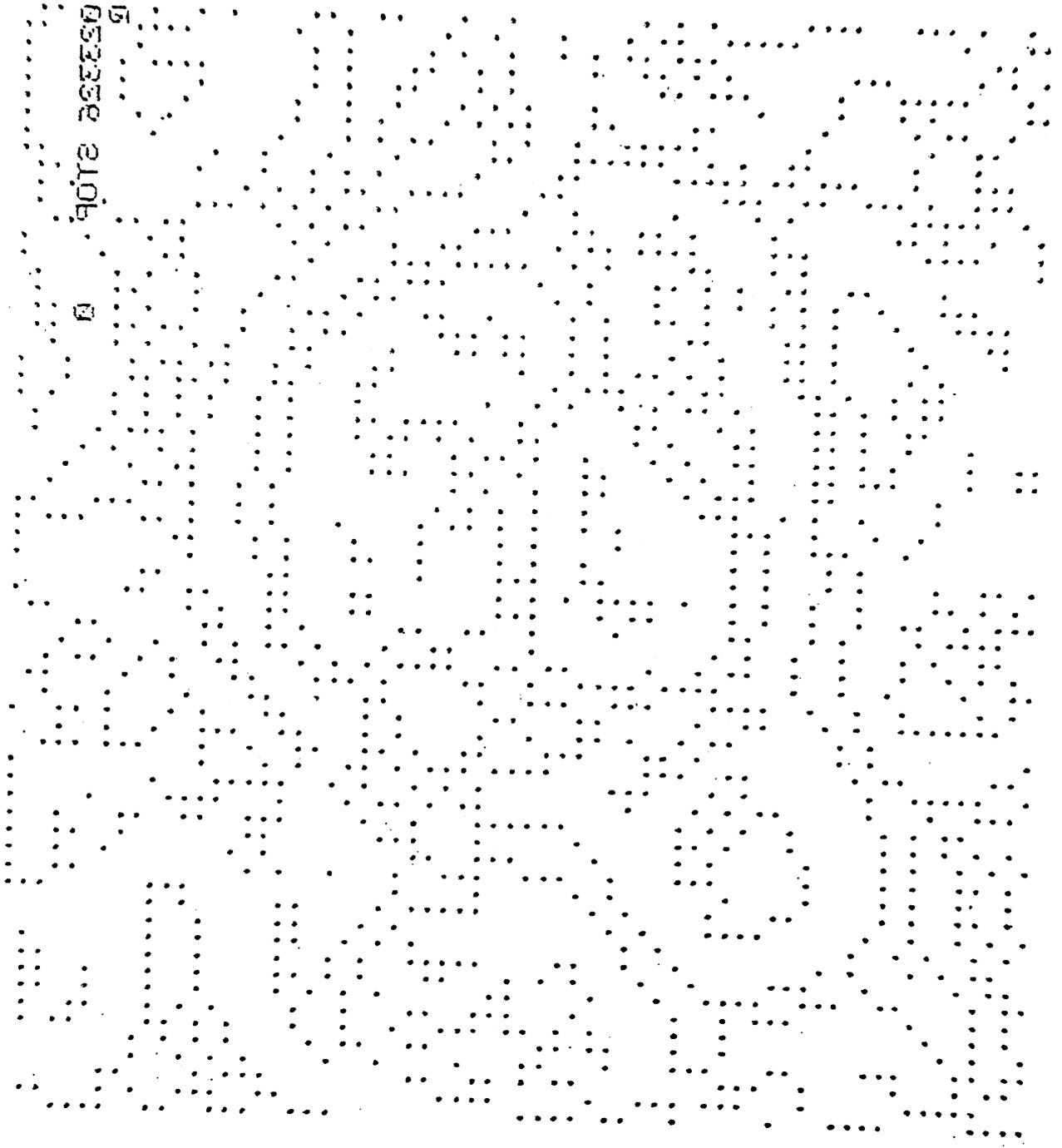


figure I.6: points "frontière", en résolution 64 x 64

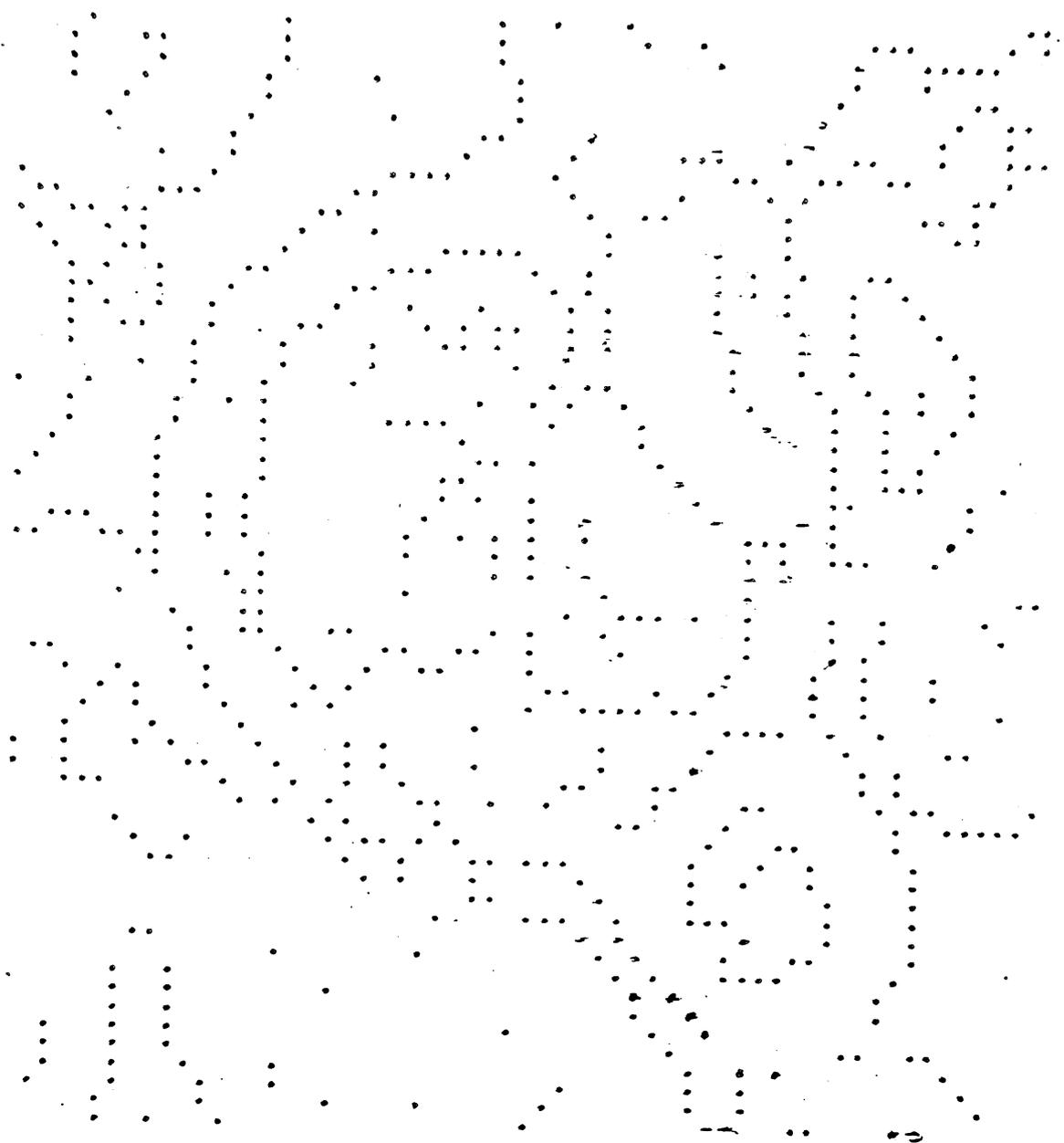


figure I.7: points "frontière", après traitement

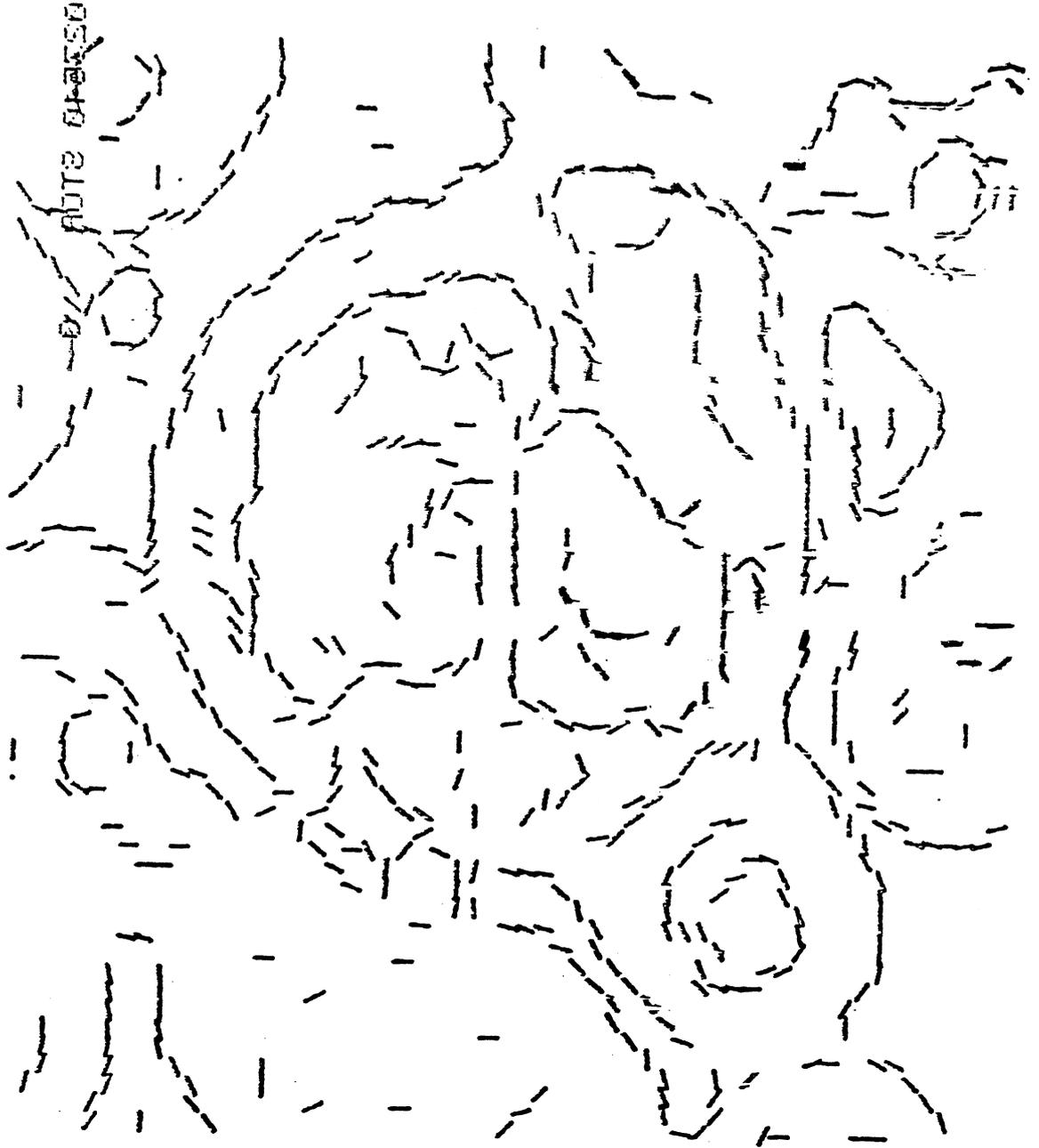


figure I.8: points "frontière", utilisation du gradient

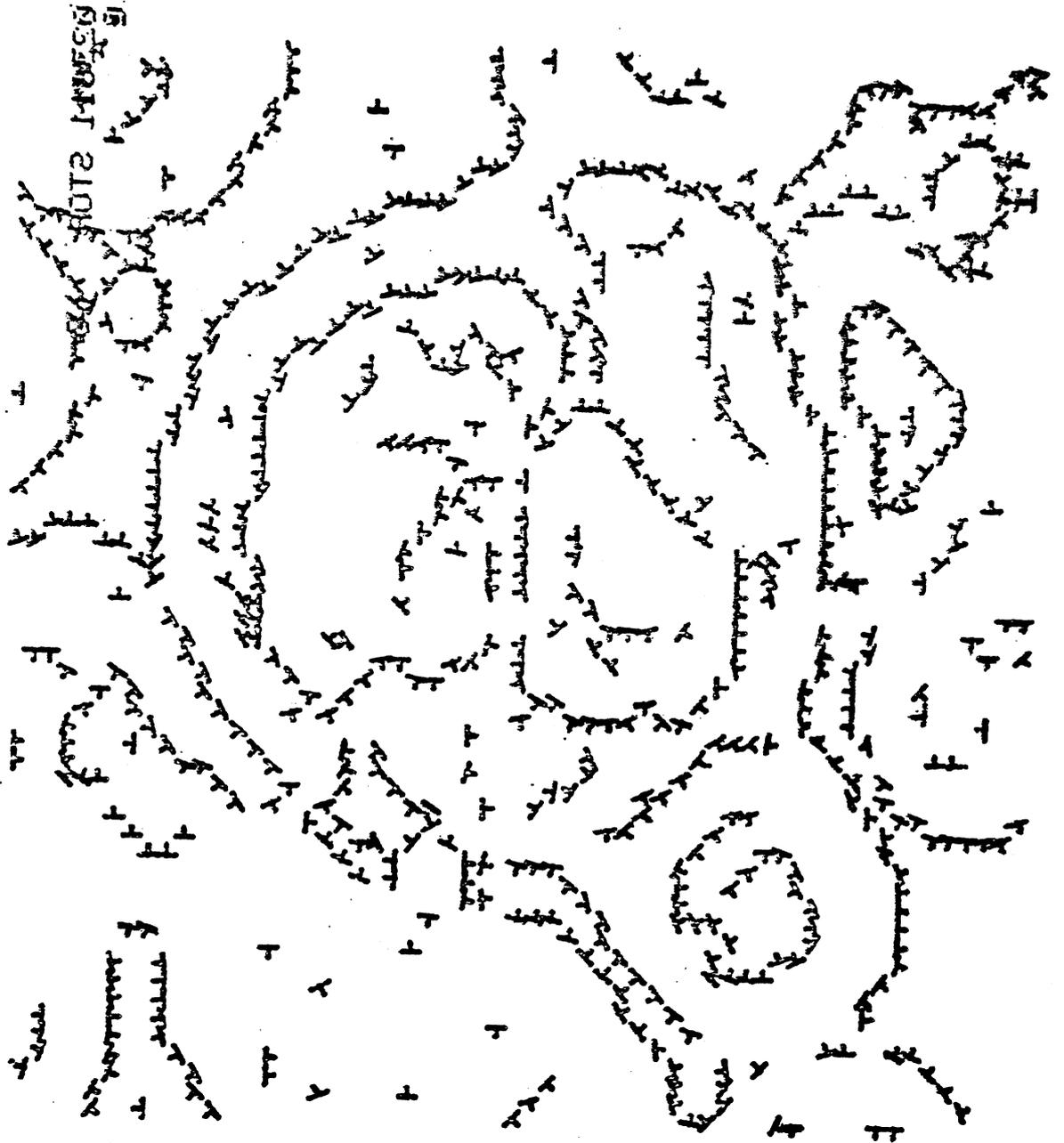


figure I.9: points "frontière", orientation du gradient
(on parcourt le contour en laissant "en dehors" la demi-normale représentée en tout point).

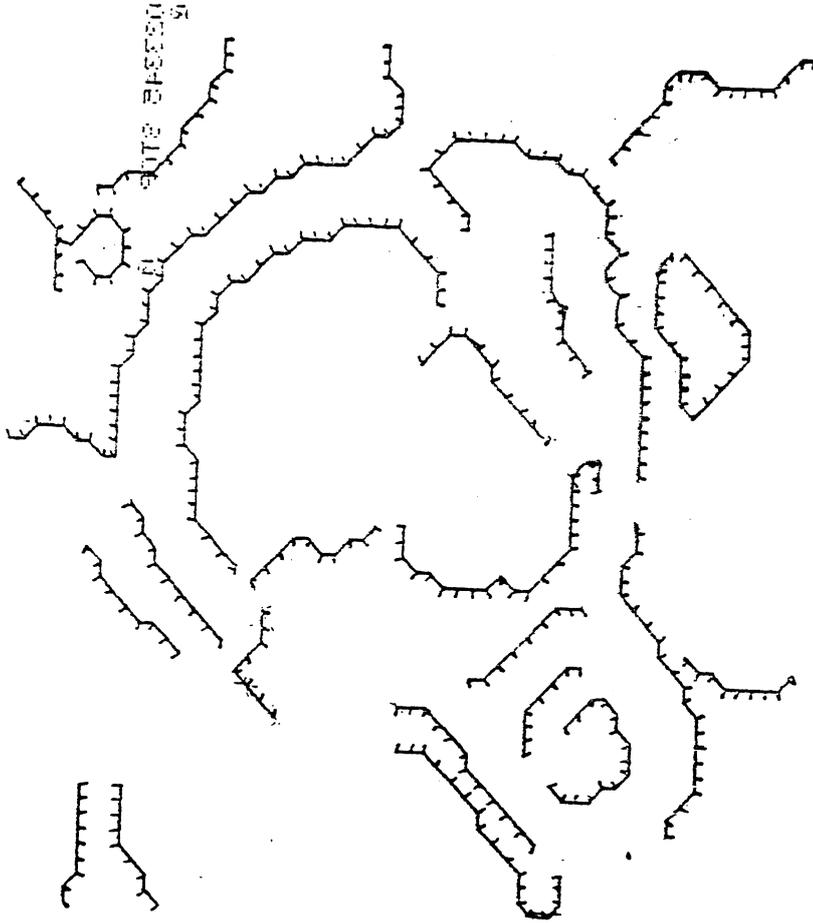


figure I.10: représentation de l'image sous forme de contours

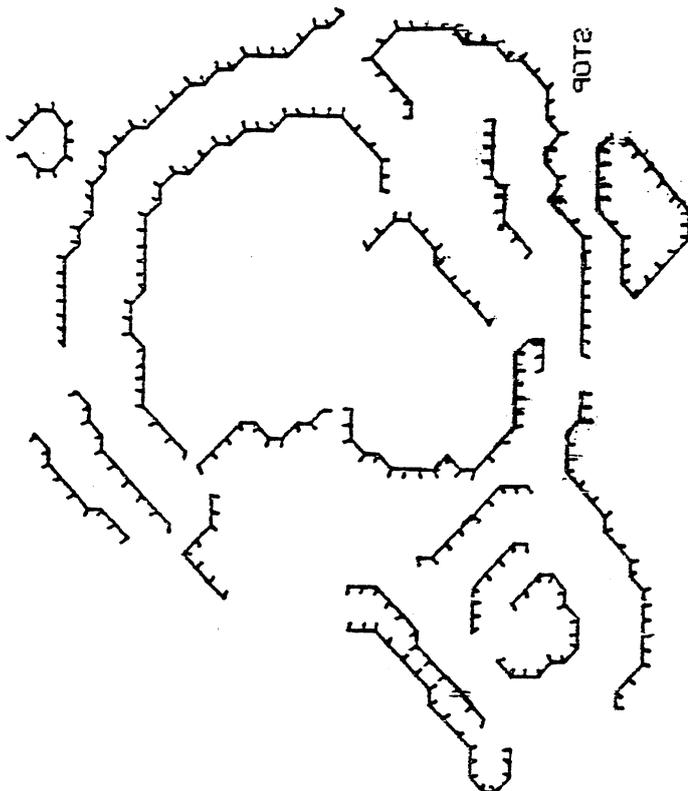


figure I.11: traitement des contours

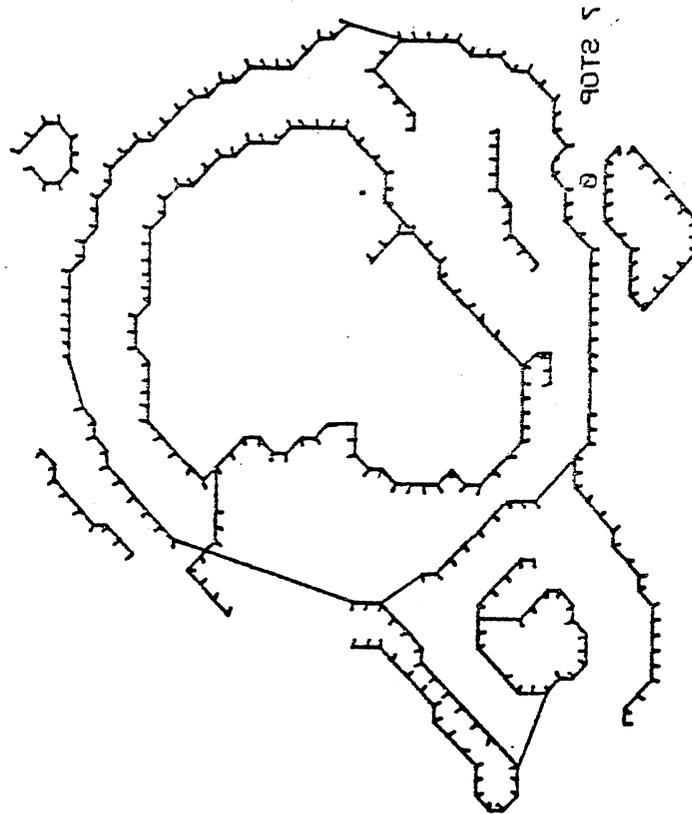


figure I.13: mise en relation des éléments "frontière"

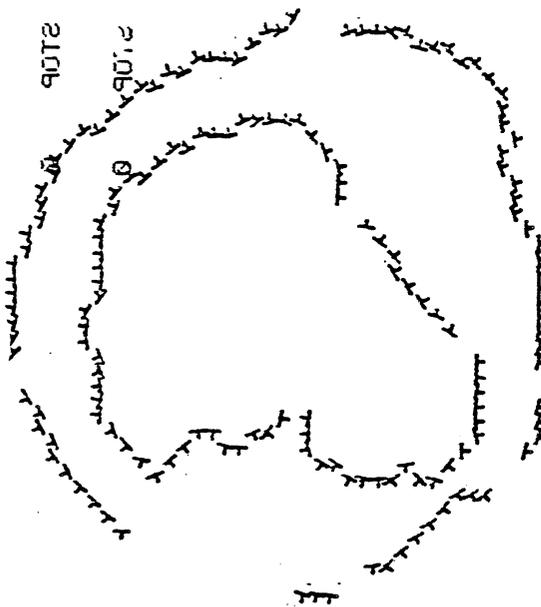


figure I.14: cycles observés dans l'image (contours du cytoplasme et du noyau)

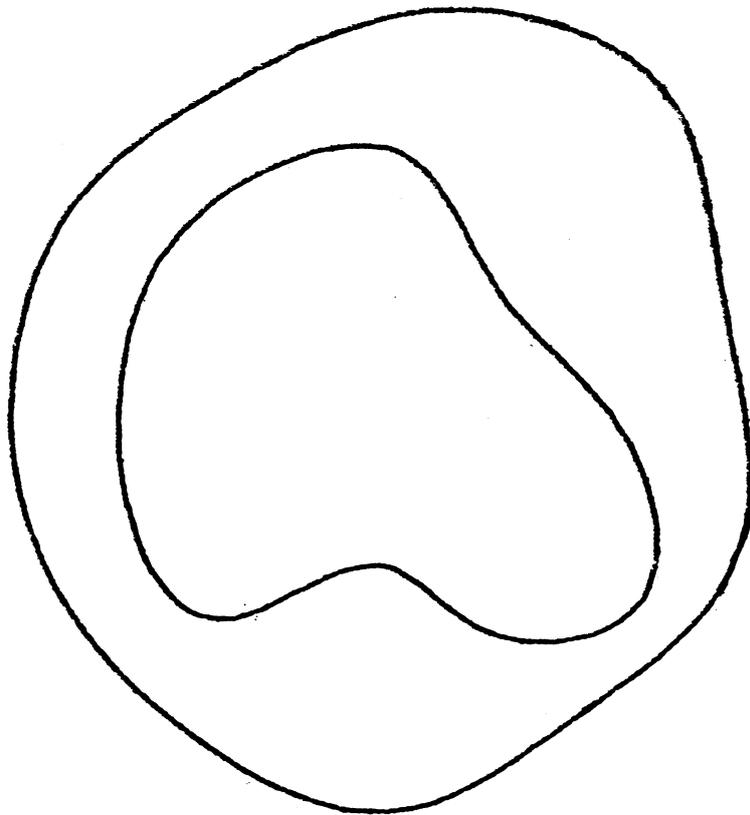


figure I.15: représentation des contours par des splines paramétrées fermées

CHAPITRE II

APPROXIMATION ADAPTATIVE PAR B-SPLINES POLYHEDRALES

APPROXIMATION ADAPTATIVE PAR B-SPLINES POLYHEDRALES

Les techniques d'approximation par fonctions splines sont particulièrement faciles à mettre en oeuvre lorsque les données à lisser sont réparties aux sommets d'une grille régulière. Généralement, dans ce cas, on lisse avec des splines dont les nœuds sont eux aussi répartis aux sommets d'une grille régulière.

Ce cas général n'est pas toujours le cas idéal. Par exemple, lorsqu'on a une image à lisser, il est regrettable d'avoir la même densité de nœuds là où l'image est véritablement significative et là où elle n'a que peu d'intérêt (par exemple le "fond" sur lequel repose l'image intéressante).

Ce sont de telles situations qui font l'intérêt de l'approximation adaptative, où l'on va chercher à approximer une région avec des éléments d'approximation dont la "densité spatiale" sera variable. Lorsque la technique d'approximation est globale, le fait d'ajouter un nœud conduit en fait à ajouter n axes si les données sont sur \mathbb{R}^n . Des exemples de telles techniques sont proposés par Dierckx [DIE.82] et Caughey [CAU.78,CAU.81] (pour une approximation par fonctions splines) ou par De Boor et Rice [BOO.79] (pour une approximation polynômiale).

Pour éviter de devoir ajouter n axes lorsqu'on "raffine" la grille des nœuds, il faut disposer de techniques d'approximation "locales" mais régulières. Ces techniques nécessitent de rechercher la solution du problème d'approximation dans une base de fonctions splines. Dans ce chapitre, deux grands types de bases ont été utilisées : des bases constituées de translations de produits tensoriels de splines unidimensionnelles, et des bases constituées de splines multivariées "polyédrales". Nous ne reviendrons pas sur les premières qui ont été largement utilisées au Chapitre I. Par contre, le premier paragraphe rappellera la théorie des B-splines multivariées et présentera des exemples de construction de ces splines.

Nous verrons dans un deuxième paragraphe le principe du lissage adaptatif, qui sera appliqué dans les paragraphes suivants au lissage à partir de bases de produit tensoriels de splines et de splines polyédrales. Nous verrons en conclusion que ces techniques de lissage adaptatif se révèlent décevantes pour l'application à la détection de frontières sur une image.

II.1- RAPPEL SUR LES SPLINES POLYHEDRALES

Une abondante littérature [DAH.80 -> DAH.84, MIC.79, LYC.84, COH.80, ...] a été publiée récemment sur ces splines. On trouvera en particulier dans [DAH.83] une revue des problèmes posés par l'utilisation de ces splines et de leur intérêt.

Ces splines multidimensionnelles ne sont pas issues de la résolution d'un problème de minimisation, mais de procédés constructifs qui englobent en dimension 1 les splines unidimensionnelles, dont certaines [LAU.72] sont solution de problèmes de minimisation. Leur intérêt principal par rapport aux produits tensoriels d'éléments unidimensionnels est la grande diversité des éléments de base, tant dans leur forme, leur support, que dans leurs propriétés de continuité.

Nous reprendrons dans ce paragraphe des résultats maintenant classiques sur les B-splines détaillés par exemple dans [DAH.83].

II.1.1 - Définition et propriétés des B-splines polyédrales

II.1.1.1 - Généralisation de la B-spline à une variable

En dimension 1 [LAU.72], les splines de base d'ordre q sont classiquement définies par

$B(t) = (2q)! \delta_{2q+1} (\xi-t)_+^{2q-1}$, où l'on note par δ_{2q+1} l'opérateur différence divisée appliquée sur les points $\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_{2q+1}\}$. Ici, cet opérateur est appliqué à la fonction $\xi \mapsto (\xi-t)_+^{2q-1}$.

Cette relation entre spline et différence divisée peut être généralisée en utilisant la formule de Hermite-Genocchi :

Soit S^n le simplexe d'ordre n :

$$S^n = \{ (\tau_0, \dots, \tau_n), \tau_i \geq 0, \sum_{i=0}^n \tau_i = 1 \}$$

$$\forall g, \quad \delta_n(g) = \int_{S^n} g^{(n)}(t_0\tau_0 + \dots + t_n\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n$$

(Cette formule se démontre aisément par récurrence, en remarquant que pour $n=1$, on a bien :

$$\int_0^1 g'(t_0 + \tau_1(t_1 - t_0)) d\tau_1 = \frac{g(t_1) - g(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Notons maintenant $M(t | t_0, \dots, t_n)$ la B-spline unidimensionnelle de support $[t_0, t_n]$.

Elle vérifie donc: $M(t | t_0, \dots, t_n) = n! \delta_n(\xi - t)_+^{n-1}$

En appliquant la formule de Hermite-Genocchi, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) M(t | t_0, \dots, t_n) dt = n! \int_{S^n} g(t_0\tau_0 + \dots + t_n\tau_n) d\tau_1 \dots d\tau_n, \text{ ceci } \forall g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}).$$

Cette définition se généralise dans un espace de dimension s et on définit la B-spline à s variables comme étant la fonction qui vérifie:

$$\int_{\mathbb{R}^s} f(x) M(x | x_0, \dots, x_n) dx = n! \int_{S^n} f(\tau_0 x_0 + \dots + \tau_n x_n) d\tau_1 \dots d\tau_n.$$

II.1.1.2 Expression générale des splines polyédrales.

Soit $\omega : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^s$, X affine

On définira $M_{\omega}(x|X)$ comme la fonction qui vérifie:

$$\int_{\mathbb{R}^s} f(x) M_{\omega}(x|X) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \omega(u) f(Xu) du, \quad \forall f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^s)$$

On vérifie, en posant:

$\omega(u) = n! \chi_{S^n}(u)$, où χ_{S^n} est la fonction indicatrice de S^n ,

$Xu = Au + x_0$ où A est la matrice dont les colonnes sont $(x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0)$,

que l'on obtient la définition de la B-spline à s variables posée plus haut.

On vérifie, par cette définition, que $\text{supp}(M_{\omega}(x|X)) = X(\text{supp } \omega)$, ce qui conduit à:

$\text{supp}(M_{\omega}(x|x_0 \dots x_n)) = [x_0, \dots, x_n]$, en notant $[x_0, \dots, x_n]$ l'enveloppe convexe de $\{x_i\}$.

II.1.1.3 Cas particuliers

a) $\omega(u) = \chi_P(u)$, où P est un polytope qui vérifie :

$$V_{P,X}(x) = \text{vol}_{n-s}(\{u \in P : Xu = x\}, \forall x \in \mathbb{R}^s) < \infty$$

Cette spline est une spline polyédrale dont l'interprétation géométrique est la suivante :

Soit \mathfrak{X} une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^s " qui prolonge " X (i.e. $\mathfrak{X}u|_{\mathbb{R}^s} = Xu, \forall u \in \mathbb{R}^n$).

Alors:

$$\int_{\mathbb{R}^s} f(x) V_{P,X}(x) dx = \int_{\mathfrak{X}(P)} f(u|_{\mathbb{R}^s}) du = \int_P f(Xu) du = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_P(u) f(Xu) du$$

Donc, d'après la définition des B-splines,

$$M_{\chi_P}(x|X) = M_P(x|X) = V_{P,X}$$

si $\mathfrak{X} = \mathfrak{A}u + u_0$

$$V_{P,X}(x) = \text{vol}_{n-s}(\{u \in \mathfrak{X}(P) : u|_{\mathbb{R}^s} = x\}) / |\det \mathfrak{X}|$$

Notons $v_i = \mathfrak{X}(x_i)$, $i=0, \dots, n$. Soit $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$. Notons pour $x \in \mathbb{R}^s$

$$M_{\sigma}(x) = \text{vol}_{n-s}(\{u \in \sigma, u|_{\mathbb{R}^s} = x\}).$$

Alors

$$M(x|x_0, \dots, x_n) = \frac{M_{\sigma}(x)}{\text{vol}_n(\sigma)}.$$

$$b) \omega(u) = \prod_{i=1}^n p_i(u_i)$$

On obtient alors la Box-spline, si l'on choisit $p_1(t) = \dots = p_n(t) = \chi_{[0,1]}(t)$.

(Cette Box spline peut également s'interpréter comme une spline polyédrale, avec $P = [0,1]^n$).

Le choix de ω et de X permet de construire une très grande variété d'éléments approximatifs, capables de s'adapter à un problème particulier.

II.1.1.4 - Propriétés de continuité

Dans le cas général, c'est-à-dire en l'absence de configuration "dégénérée" des noeuds, les B-splines appartiennent à \mathcal{C}^{k-1} .

II.1.2 - Formules de récurrence

La formule fondamentale est la suivante :

$$M(x | x_0, \dots, x_n) = \frac{1}{n-s} \sum_{j=0}^n \lambda_j M(x | x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

$$\text{avec } \begin{cases} x = \sum_{j=0}^n \lambda_j x_j \\ \sum_{j=0}^n \lambda_j = 1 \end{cases}$$

Cette formule permet de construire des splines d'ordre quelconque.

Le schéma de la démonstration est le suivant :

$$\text{on sait que } \delta(x_0, \dots, x_n)(g) = \sum_{j=0}^n \lambda_j \delta(z, x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)(g), \text{ où } z = \sum_{j=0}^n \lambda_j x_j$$

et où δ représente l'opérateur différence divisée.

$$\text{Choisissons } y \text{ vérifiant } \begin{cases} y = \sum_{j=0}^n \lambda_j x_j \\ \sum_{j=0}^n \lambda_j = 1 \end{cases} . \text{ La formule précédente permet d'écrire:}$$

$$M(x | x_0, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^n \lambda_j M(x | y, x_0, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) .$$

On en tire:

$$M(x | x_0, \dots, x_{n-1}) = \frac{1}{n-s} M(x | x_0, \dots, x_{n-1}), \text{ formule que l'on applique en faisant } x=y.$$

On déduit facilement, de cette définition constructive, le caractère polynomial par morceaux de ces splines.

Cette formule a de plus l'avantage de se programmer très facilement dans tout langage acceptant la récursivité. Lorsque $r = 2$, pour tout point x , la première étape consiste à trouver trois sommets x_{i_1} ,

x_{i_2} , x_{i_3} tels que les coordonnées barycentriques λ_{i_1} , λ_{i_2} , λ_{i_3} de x soient toutes positives ou nulles.

Si cela n'est pas possible, c'est que x est à l'extérieur de l'enveloppe convexe des x_{i_j} , notée

$[x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}]$ et donc que la spline correspondante s'annule en x . Pour réduire les calculs, on

impose $\lambda_i = 0$, si $i \notin \{i_1, i_2, i_3\}$ et la formule de récurrence s'applique donc en utilisant 3 splines d'ordre inférieur. Enfin, lorsque l'on est ramené à une spline définie sur 3 sommets, on aura :

$$\begin{cases} M(x | x_i, x_j, x_k) = 0 & \text{si } x \notin [x_i, x_j, x_k] \\ M(x | x_i, x_j, x_k) = 1/\text{aire } [x_i, x_j, x_k] & \text{si } x \in [x_i, x_j, x_k] \end{cases}$$

On trouvera dans [MIC.79] des exemples de telles splines sur diverses configurations de noeuds.

II.1.3 - Combinaison linéaire de B splines

La grande variété de possibilités dans l'utilisation de B-splines impose de choisir correctement les noeuds. Les critères de choix seront les suivants : indépendance linéaire des fonctions de base créées, rapidité du calcul, bonnes propriétés géométriques d'approximation. Définir une base de B-splines va en fait se ramener à choisir un ensemble de convexes $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ dans un espace de dimension $n = s+k$. Or, au départ, on cherchait à définir des fonctions de base dans un ouvert Ω (polyédral) de \mathbb{R}^s . Il faut donc, tout d'abord, "plonger" Ω dans \mathbb{R}^n ; en pratique, cela amène à choisir D , polytope convexe de \mathbb{R}^k , et à former $\Omega \times D$. Pour mieux contrôler le choix des convexes σ , on va se réduire aux convexes σ éléments d'une triangulation T de $\Omega \times D$.

II.1.3.1 Principe géométrique de construction

Le principe est de réaliser une " partition de l'unité " dans le sens suivant :

- . soit $\Omega \subset \mathbb{R}^s$, polyédral.
- . soit T une triangulation de $\Omega \times D$, où D est un polytope convexe de \mathbb{R}^k .
- . soit σ le convexe général de T .
- . soit $H_x = \{ u \in \mathbb{R}^n, u|_{\mathbb{R}^s} = x \}$.

$$\text{Alors: } \sum_{\sigma \in T} M_{\sigma}(x) = \sum_{\sigma \in T} \text{vol}_{n-s}(H_x \cap \sigma) = \text{vol}_{n-s}(\left(\bigcup_T \sigma\right) \cap H_x) = \text{vol}_{n-s}((\Omega \times D) \cap H_x) = \text{vol}_{n-s}(D).$$

Soit $K(\sigma) = \{v_0|_{\mathbb{R}^s}, \dots, v_n|_{\mathbb{R}^s}\}$, pour tout $\sigma = [v_0, \dots, v_n] \in T$;

$\mathcal{K} = \{K(\sigma), \sigma \in T\}$ (triangulation induite par T);

$S(T) = \{M(x | K), K \in \mathcal{K}\}$.

Le problème est alors $\left\{ \begin{array}{l} - \text{de choisir } D \\ - \text{de savoir trianguler } \Omega \times D, \end{array} \right.$

pour que : $\left\{ \begin{array}{l} - K_d \subset S(T) \text{ , où } K_d \text{ représente l'espace des polynômes de degré } d ; \\ - \text{les fonctions } M(x | K) \text{ soient linéairement indépendantes ;} \\ - \text{le calcul soit facile .} \end{array} \right.$

En pratique, ces conditions sont réalisées pour $D = [0,1]^k$, en choisissant une triangulation de Kühn [ALL.78], ou pour $D = S^k$. Pour trianguler $\Omega \times D$ à partir d'une triangulation de Ω , on peut utiliser la "recette" combinatoire suivante.

II.1.3.2 - "Recette" combinatoire

On choisit $D = S^k$

Soit T une triangulation de Ω , K_0 les nœuds correspondants (nœuds " initiaux ").

A partir de K_0 , on va définir $K_e = \{x_i^j, i=0, n; j=0, \dots, k\}$

Considérons la matrice " de dispersion "

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ I_s & & \\ & a_{s1} & \dots & a_{sk} \\ 0 & & & I_k \end{pmatrix} \text{ où } I_s \text{ et } I_k \text{ représentent respectivement les matrices identité } s \times s \text{ et } k \times k .$$

Cette matrice A laisse invariant tout point de \mathbb{R}^s . Elle respecte donc les nœuds "initiaux" de K_0 , que nous noterons x_i^0 ($x_i^0 \in \mathbb{R}^n$). Pour $j = 1, \dots, s$, définissons $y_i^j = x_i^0 + e_{j+m}$, où e_m représente le $m^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n . Nous noterons $x_i^j = Ay_i^j$. La réunion de ces points x_i^j formera l'ensemble des nœuds étendus K_e . On comprend le nom de "matrice de dispersion", car la projection sur \mathbb{R}^s de x_i^j est "relativement" proche de x_i^0 . En pratique, pour limiter le caractère dispersif, on imposera $|a_{ij}| < 0.5$. D'un autre côté, on conçoit intuitivement que le fait "d'écartier" les nœuds permet d'obtenir des conditions de continuité intéressantes (de même qu'en dimension 1, on perd des degrés de continuité lorsque les nœuds sont confondus, cf. par exemple le principe du "pull the knots apart", qui permet de passer des polynômes de Bezier aux B-splines).

En pratique, pour respecter les propriétés de continuité \mathcal{C}^{k-1} , il faut que A soit "dispersive" (i.e. que les vecteurs formés de la somme des projections sur \mathbb{R}^s d'ensembles disjoints de colonnes de A soient s à s linéairement indépendants).

La matrice A suivante permet de préserver sur \mathbb{R}^s des conditions de continuité \mathcal{C}^2 , pour $s=2$ et $k=3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.25 \cos \alpha_1 & 0.25 \cos \alpha_2 & 0.25 \cos \alpha_3 \\ 1 & 0 & 0.25 \sin \alpha_1 & 0.25 \sin \alpha_2 & 0.25 \sin \alpha_3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Avec $\alpha_1 = \pi/8$, $\alpha_2 = 5\pi/4$, $\alpha_3 = -7\pi/8$, c'est à dire que les noeuds étendus sont disposés comme indiqué dans la figure II.1.

Cette configuration a été choisie de manière empirique pour "maximiser" les aires des convexes qui interviennent dans le calcul des splines (cf figures II.3 à II.12).

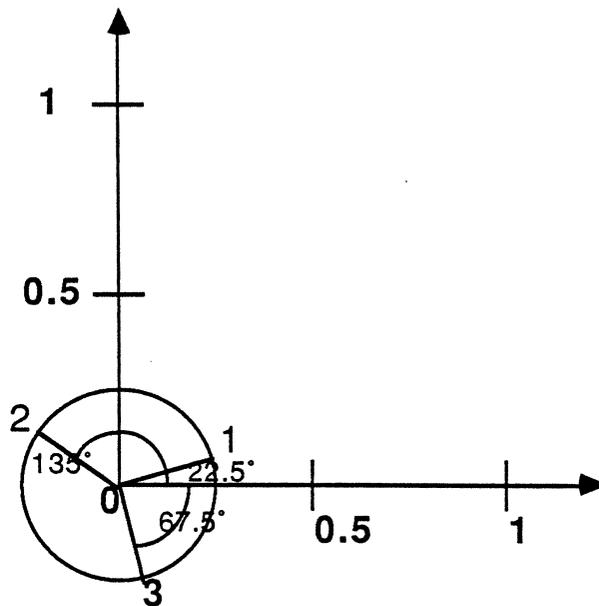


figure II.1: configuration des "noeuds étendus"

Il reste maintenant à définir une stratégie pour construire les convexes $\sigma = [v_0, \dots, v_n]$ à partir de chaque élément Σ de T .

Il faut donc choisir des ensembles de n points parmi les $(s+1)^{(k+1)}$ noeuds obtenus en "étendant" les $(s+1)$ noeuds de Σ .

On montre que ce choix se ramène au choix d'un chemin "non décroissant" dans le réseau représenté par la figure II.2.

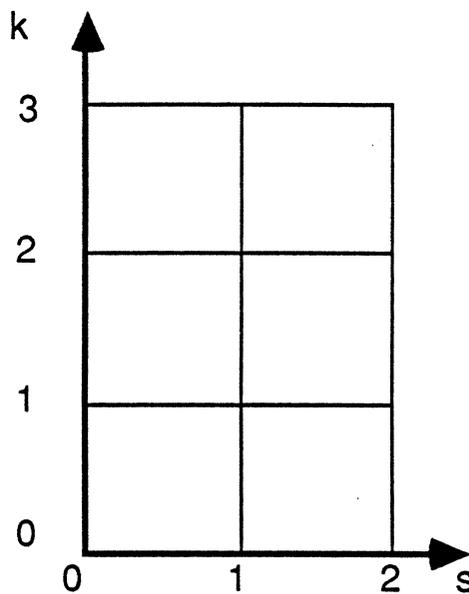


figure II.2: tout "chemin non décroissant" dans ce réseau correspond à un des convexes retenus.

On définit donc $\binom{s+k}{k}$ ensembles de $n+1$ points $[x_{i_k}^{j_k}]_{k=0, \dots, n}$, avec $\begin{cases} s \geq i_{k+1} \geq i_k \geq 0 \\ k \geq j_{k+1} \geq j_k \geq 0 \end{cases}$.

On remarque que $\binom{s+k}{k}$ est aussi le cardinal de la triangulation triviale de $\Sigma \times S^k$.

Pour $s=2$, $k=3$, avec la matrice de dispersivité présentée plus haut, les figures II.3 à II.12 représentent la configuration des noeuds obtenus pour un des éléments de la triangulation triviale du carré unité. Les figures II.13 à II.22 représentent la forme des éléments approximatifs.

II.2 - PRINCIPE DU LISSAGE ADAPTATIF

L'approximation de fonctions présentant des singularités a tout naturellement conduit de nombreux auteurs [RIC.76, BOO.79, DAH.81.3, DAH.82, CAU.81, DIE.82, BRA.83, ...] à chercher de nouvelles méthodes qui permettent d'adapter l'espace des fonctions de base sur lesquelles se fait l'approximation à ces singularités. Cette "adaptation" peut prendre la forme de la recherche du meilleur "raffinement" possible de grilles régulières. Diverses approches ont été proposées dans le cas unidimensionnel pour l'approximation polynômiale par morceaux. En plusieurs variables, les propriétés de l'approximation adaptative ont été étudiées par de Boor et Rice [BOO.79] pour l'approximation polynômiale par morceaux, et par Dahmen [DAH.82] pour l'approximation par des splines polyédrales.

A côté de ces méthodes de "raffinement" de grilles locales, il faut citer les possibilités de recherche de singularités par inf-convolution de splines et d'éléments lissants présentant des discontinuités [VAL.84, LAU.86].

On trouvera dans [DAH.80, DAH.82] une étude très complète des propriétés de continuité d'un schéma très général d'approximation adaptative par raffinement de grilles régulières. Notre but ici est seulement de construire selon les principes développés dans [DAH.80], un schéma d'approximation adaptative correspondant à notre cas particulier.

Les données initiales sont des valeurs d'une fonction f définie de $R = [0,1]^S \rightarrow \mathbb{R}$; ces valeurs sont connues aux sommets d'un réseau régulier V défini sur R . Nous supposons que nous disposons d'un moyen quelconque pour approcher ces données sur tout sous-ensemble convexe C de R .

Le principe du schéma d'approximation adaptative est de décomposer l'hypercube initial R en 2^S hypercubes plus fins. Le processus se répète jusqu'à ce qu'une fonction d'erreur passe sous un certain seuil. L'algorithme est le suivant :

Dans la suite, les θ_j seront des parties de $\mathcal{P}(R)$.

a) Soit $\theta_0 = \{R\}$; $j = 0$

b) approcher f sur $\{\mathcal{X}(C), C \in \theta_j\}$, où \mathcal{X} représente une "extension" des cubes, destinée à préserver des conditions de continuité.

- c) $\varepsilon_j = \max_{C \in \theta_j} E_j(C)$, où E_j est une fonction de mesure de l' "erreur".
- d) si $\varepsilon_j \leq \varepsilon$, stop
- e) sinon, soit $\theta_j^* = \{ C \in \theta_j, E_j(C) > \varepsilon \}$
- f) On passe de θ_j à $\theta_{j+1} = \{ D \in d_s(C), C \in \theta_j^* \}$, où $d_s(C)$ représente l'ensemble des 2^s hypercubes obtenus en subdivisant C par dichotomie.
- g) $j = j+1$ et retour en b.

Pour l'étape b), l'approximation sur une "cellule" C se fait en utilisant une base d'éléments approximatifs dont l'union des supports définit $\mathfrak{X}(C)$.

Ordonnons de $i=0$ à n les éléments C_i de θ_j . Soit g une fonction connue par ses valeurs sur le réseau V . Notons $S_{C_i}^j(g)$ l'approximation de g sur C_i . Cette fonction, définie sur R , est nulle en dehors de $\mathfrak{X}(C_i)$.

On définit $S_0^j(g) = S_{C_0}^j(g)$

et $S_{i+1}^j(g) = S_{C_{i+1}}^j(g - S_i^j(g)) + S_i^j(g), \quad i = 0, \dots, n-1$

On appellera "approximation de g sur θ_j ", la dernière approximation notée $S^j(g) = S_n^j(g)$.

L'approximation de f se fait de la même manière :

On note :

$$T^0(f) = S^0(f)$$

$$T^{j+1}(f) = S^j(f - T^j(f)) + T^j(f)$$

En pratique, on choisira pour E_j une fonction d'erreur quadratique moyenne

$$E_j(C) = \frac{\sum_{x \in D} (f(x) - T^j(f)(x))^2}{\text{card}(D)}, \text{ avec } D = C \cap V.$$

L'approximation par ce schéma d'approximation est donnée par le dernier $T^j(f)$. La manière de procéder garantit le respect d'un degré de continuité identique à celui de l'élément approximant le moins continu utilisé.

Il nous reste maintenant à préciser comment approximer f sur $\mathfrak{X}(C)$. Deux méthodes sont possibles: on peut utiliser des schémas d'approximation linéaires et locaux ou utiliser une méthode des moindres carrés.

II.3 - SCHEMA D'APPROXIMATION LINEAIRE ET LOCAL SUR UNE BASE DE SPLINES POLYHEDRALES

Pour pouvoir utiliser l'algorithme adaptatif du paragraphe II.2, il faut disposer de méthodes d'approximation locales. L'inconvénient de l'approximation habituelle par fonctions splines est en effet que la modification d'une seule donnée entraîne une modification de la fonction approximante sur tout l'intervalle sur lequel elle est définie. Nous utiliserons des méthodes d'approximation locales, proposées dans [BOO.73, LYC.75, DAH.81.1], qui évitent cet inconvénient.

On souhaite approximer, d'une manière "locale", une fonction f sur une base de splines polyédrales. Cette approximation revient à définir un opérateur Q , tel que :

$$f \rightarrow Qf = \sum_i \lambda_i(f) N_i, \text{ où } N_i \text{ est une base de splines polyédrales.}$$

Q sera dit linéaire et local si les fonctionnelles λ_i le sont aussi. Le terme "local" pour les λ_i signifie

que $\lambda_i(f)$ ne dépend que de la restriction de f au support de N_i . Plusieurs fonctionnelles λ_i pourraient vérifier ces conditions. Pour limiter le choix tout en se rapprochant des propriétés des splines polyédrales, on imposera de plus une stabilité pour des polynômes de degré d aussi élevé que possible:

$\forall g \in K_d, Qg = g$, où K_d représente l'espace des polynômes de degré total inférieur ou égal à d .

Cette stabilité se traduit, si $x^\alpha = \sum_i \xi_i^\alpha N_i$, par $\lambda_i(x^\alpha) = \xi_i^\alpha$.

Les λ_i seront définies sur une base λ_{ij} construite à partir des différences divisées généralisées. Sur cette base, on peut écrire $\lambda_i = \sum_j a_{ij} \lambda_{ij}$. La condition de stabilité des polynômes s'écrit alors :

$\lambda_i(x^\alpha) = \sum_j a_{ij} \lambda_{ij}(x^\alpha) = \xi_i^\alpha$. La détermination des λ_i se fera donc en deux temps :

calcul des ξ_i^α (i.e. obtention d'une représentation de x^α sur la base N_i), puis détermination des coefficients a_{ij} après avoir choisi les fonctionnelles de base.

II.3.1 - Représentation de x^α sur une base de splines polyédrales.

La base de splines polyédrales sera définie comme on l'a vu au paragraphe II.1.3.

Rappel des notations :

soit s la dimension de l'espace, Ω un convexe de \mathbb{R}^s , $k \in \mathbb{N}$, T une triangulation de $\Omega \times S^k$, où S^k est le simplexe d'ordre k .

Pour tout $\sigma \in T$, notons $K(\sigma)$ la projection de σ sur \mathbb{R}^s . La base de splines polyédrales est constituée des $M(x | K(\sigma))$, où $\sigma \in T$. Le cardinal de cette base est

$\binom{s+k}{k}$, qui représente aussi la dimension de K_k , espace des polynômes sur \mathbb{R}^s de degré inférieur ou égal à k .

La condition de stabilité précédente ne pourra donc être vérifiée que pour $d \leq k$. En pratique, on prendra $d=k$, et on cherche donc pour $\alpha \in \mathbb{N}^s$, $|\alpha| \leq k$,

$$x^\alpha = \sum_{\sigma \in T} \xi_\sigma^\alpha M(x | K(\sigma))$$

Or on démontre [DAH.81.1] que l'on peut écrire

$$x^\alpha = \sum_{\sigma \in T} (-1)^{|\alpha|} \frac{(k-|\alpha|)!}{k!} D_{(\lambda)}^\alpha \psi_\alpha(0,1) M(x | K(\sigma)),$$

avec $D_{(\lambda)}^\alpha$ = dérivée directionnelle selon λ et :

$$\psi_\sigma(\lambda, y) = \sum_I C_I \prod_{j \in I} (y - \lambda \cdot x_j), \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}^s, x_j : \text{projections sur } \mathbb{R}^s \text{ des sommets de } \sigma, I$$

représentant un ensemble d'indices de cardinal k ($I = \{0, \dots, n\} \setminus \{j_0, \dots, j_s\}$), et

$$C_I = |\det(x^{j_0}, \dots, x^{j_s})|.$$

II.3.2 - Détermination des coefficients a et choix des fonctionnelles de base

Les fonctionnelles de base sont construites à partir des différences divisées généralisées définies pour tout $\sigma \in T$, sur $(k+1)$ points de σ notés $\tau^j = (\tau^j_1, \dots, \tau^j_s)$, $j = 0, \dots, k$. Pour simplifier les notations, nous noterons l'opérateur différence divisée sur $\{t_0, \dots, t_k\}$ appliqué à f par $[t_0, \dots, t_k]f$.

Pour $\sigma \in T$ et pour $\alpha \in \mathbb{N}^s$, $|\alpha| \leq k$, on définit

$$\mu_\sigma^\alpha f = [\tau^0, \dots, \tau^k]_\alpha f = ([\tau^0_s, \dots, \tau^{\alpha_s}_s] ([\tau^0_{s-1}, \dots, \tau^{\alpha_{s-1}}_{s-1}] \dots ([\tau^0_1, \dots, \tau^{\alpha_1}_1] f) \dots)).$$

Par exemple, pour $s=2$,

$$\text{soit } \alpha = (\alpha_1, \alpha_2); \quad |\alpha_1 + \alpha_2| \leq k$$

$$\text{et soit } \tau^i = (x_i, y_i), \quad i = 0, \dots, k, \quad (k+1) \text{ points fixés.}$$

alors

$$[\tau^0, \dots, \tau^k]_{\alpha} f = \sum_{t=0}^{\alpha_1} \sum_{u=0}^{\alpha_2} \frac{f(x_t, y_u)}{\prod_{j \neq t} (x_t - x_j) \prod_{i \neq u} (y_u - y_i)}$$

Il reste donc à déterminer les coefficients a_{σ}^{α} .

$$\text{Soit } g_{\sigma}^{\alpha}(x) = \prod_{i=1}^s \prod_{r=0}^{\alpha_i-1} (x_i - \tau_i^r), \text{ où } x = (x_1, \dots, x_s), \tau^r = (\tau_1^r, \dots, \tau_s^r), \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s).$$

Il est évident que $g_{\sigma}^{\alpha} \in K_k$. Et on remarque que

$$\mu_{\sigma}^{\alpha} g_{\sigma}^{\beta} = \delta_{\alpha, \beta}. \text{ Soit } C_{\alpha, \beta} \text{ la représentation de } g_{\sigma}^{\alpha} \text{ sur la base des monômes } x^{\beta}. g_{\sigma}^{\alpha} = \sum_{|\beta| \leq k} C_{\alpha, \beta} x^{\beta}$$

Donc pour tout $\gamma \in N^s, |\gamma| \leq k$,

$$\mu_{\gamma}(g_{\sigma}^{\alpha}) = \sum_{|\beta| \leq k} C_{\alpha, \beta} \mu_{\gamma}(x^{\beta}) = \delta_{\gamma, \alpha}.$$

ce qui s'écrit matriciellement $C_{\sigma} M_{\sigma} = I$, d'où, en résolvant les coefficients inconnus $C_{\alpha, \beta}$. Il reste alors à choisir a_{σ}^{α} tels que:

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_{\sigma}^{\alpha} \mu_{\sigma}^{\alpha}(x^{\beta}) = \xi_{\sigma}^{\beta}$$

soit matriciellement : $M_{\sigma} a_{\sigma} = \xi_{\sigma}$, d'où $a_{\sigma} = C_{\sigma} \xi_{\sigma}$.

On démontre [DAH.81.1] qu'en associant une méthode d'approximation adaptative et des schémas d'approximation linéaires et locaux, on obtient une convergence de la solution vers la fonction à approximer.

II.4 - APPROXIMATION LOCALE AUX MOINDRES CARRES

L'avantage de la méthode précédente est sa facilité d'emploi.

Si l'on pose $d = \binom{s+k}{k}$, l'approximation demande, pour tout simplexe σ , la résolution d'un système linéaire $d \times d$ et l'évaluation de f en $(k+1)$ points.

La contre-partie du faible nombre de points expérimentaux utilisés est une convergence en pratique relativement lente vers la solution, au moins pour l'approximation d'images dont le nombre de points n'est jamais inférieur à 4096.

Des schémas d'approximation aux moindres carrés ont donc dû être développés. Ils sont indépendants du type de base utilisée, et nous avons utilisé des éléments lissants composés d'un nombre variable de B-splines bicubiques et des éléments lissants formés de splines polyédrique. C'est sur l'exemple de ces dernières que nous présenterons la méthode d'approximation locale aux moindres carrés.

Nous nous replacerons dans les conditions du paragraphe II.1.3.2 : $s=2$, $k=3$. Nous avons vu que dans ces conditions, l'approximation sur un carré demande 20 splines de base.

Au cours de l'approximation adaptative, nous avons besoin de déterminer l'approximation sur cette base d'un carré C comportant $m \times m$ points. Compte tenu de la limitation imposée à la dispersivité de la matrice A , le support des splines de base reste à l'intérieur d'un carré D $2m \times 2m$ centré sur le centre de C (cf. figure II.23).

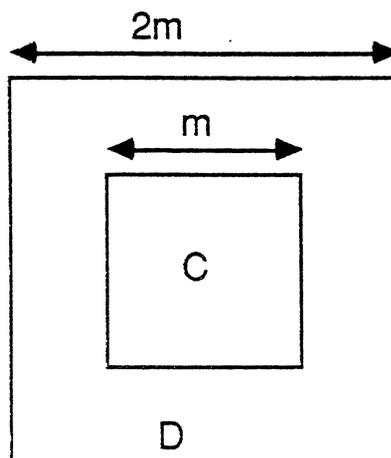


figure II.23: approximation locale d'une "cellule" de la décomposition adaptative

C'est en fait sur $D = \mathfrak{X}(C)$ que sera affectée l'approximation. Nous cherchons $\alpha_i, i = 1, \dots, 20$

minimisant :
$$\sum_{i,j \text{ tq } x_{ij} \in D} (x_{ij} - \sum_{k=1}^{20} \alpha_k N_k(x_{ij}))^2$$
. Ce problème classique aux moindres carrés

amène à former la matrice A_m , de dimensions $20 \times 4m^2$, des évaluations des N_k sur les points de D .

α est alors donné par $\alpha = (A_m^t A_m)^{-1} A_m^t x$, où x représente le vecteur obtenu en linéarisant les $4m^2$ points de D .

Il faut remarquer que A_m ne dépend que de m ; on peut donc facilement précalculer A_m et $B_m = (A_m^t A_m)^{-1}$ pour toutes les valeurs de m , soit moins de $\log_2 N$, si N représente la dimension du carré initial sur lequel est définie l'image. D'ailleurs, il suffit de calculer A_N . Les A_m pour $m < N$ s'en déduiront par simple sous-échantillonnage de A_N .

Disposant de tous les A_m et B_m , l'évaluation de α sur une cellule quelconque obtenue par l'algorithme d'approximation adaptative se ramène essentiellement au calcul de $A_m x$, produit d'une matrice $20 \times 4m^2$ et d'un vecteur $4m^2$.

Les premières étapes (m grand) seront donc les plus longues, puis l'algorithme adaptatif pourra s'exécuter très rapidement.

Le cas du lissage par des éléments bicubiques permet d'améliorer considérablement ces temps de calcul, car on peut, comme au Chapitre I, tenir compte des propriétés de séparabilité pour effectuer l'approximation aux moindres carrés sur une cellule.

II.5 - DETECTION DES CONTOURS D'UNE IMAGE REPRESENTEE PAR UN METHODE D'APPROXIMATION ADAPTATIVE

Les méthodes de segmentation présentées au Chapitre I peuvent s'appliquer lorsque la représentation continue de l'image est obtenue par une technique d'approximation adaptative. Lorsque la base est constituée de splines bicubiques, le calcul des dérivées est trivial.

Dans le cas d'une base de splines polyédrales, les formules suivantes [DAH.83] permettent de calculer les dérivées :

$$\text{notons } D_y f = \sum_{i=1}^s y_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\text{alors : } D_y M(x | x^0, \dots, x^n) = n \sum_{j=0}^n \mu_j M(x | x^0, \dots, x^{j-1}, x^{j+1}, \dots, x^n)$$

$$\text{où } \begin{cases} y = \sum_{j=0}^n \mu_j x^j \\ \sum_{j=0}^n \mu_j = 0 \end{cases}$$

Ces formules permettent de calculer les dérivées nécessaires pour le calcul de l'opérateur h qui intervient dans la définition des points frontières. On attendait du lissage adaptatif une meilleure définition des points frontières, qui aurait permis d'obtenir des frontières plus régulières et plus précises, puisque la "force" du lissage aurait été adaptée à la "dynamique locale" de l'image.

Les résultats ont en fait été assez décevants : les figures II.24 à II.35 montrent les résultats de la segmentation. Les frontières sont définies par la méthode présentée au chapitre I, l'approximation étant réalisée par des splines bicubiques locales aux moindres carrés. On voit que les frontières obtenues ne sont pas satisfaisantes. Ces résultats se retrouvent avec d'autres configurations des éléments approximatifs (variation de la "densité" de B-splines bicubiques pour l'approximation sur un carré). Cette mauvaise définition semble liée au fait que la qualité du lissage varie trop fortement entre une cellule pour laquelle le lissage adaptatif s'est arrêté au niveau k et sa voisine pour laquelle le processus s'est poursuivi après le niveau k . Il en résulte des contours qui sont très "locaux" et ne permettent pas d'avoir une vue d'ensemble des contours que l'on cherche à identifier.

En conclusion, le lissage adaptatif est extrêmement intéressant lorsqu'on s'intéresse à la fonction elle-même, mais il ne permet pas une bonne approximation de ses dérivées. Il n'est donc pas utilisable pour des opérations de détection de contours, mais reste intéressant pour des applications de codage ou d'acquisition de données "intelligente" [CAU.81], c'est-à-dire avec une résolution variable selon les régions: dans ce cas, la résolution choisie pour numériser chaque région peut correspondre au niveau d'arrêt de l'algorithme de lissage adaptatif.

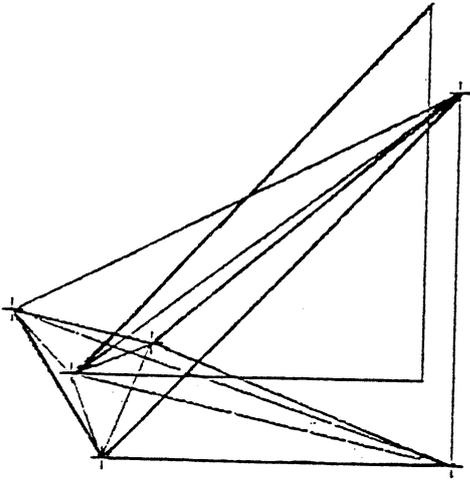


figure II.3

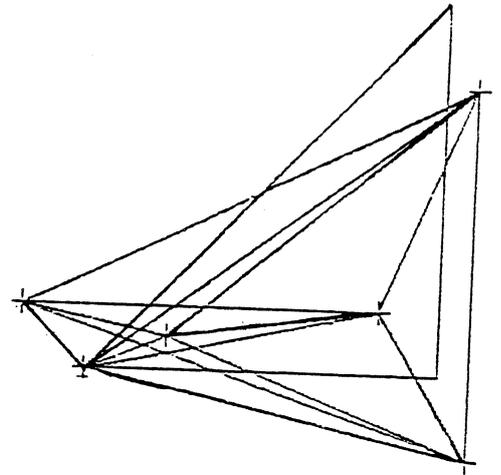


figure II.4

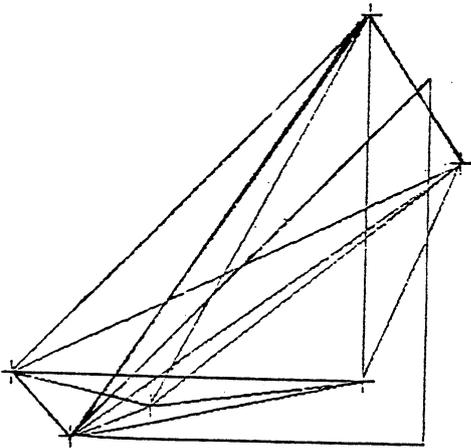


figure II.5

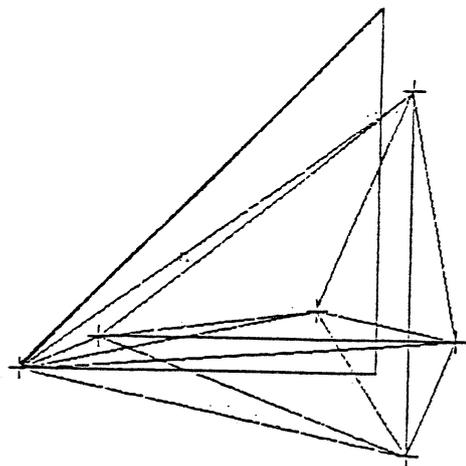


figure II.6

projection des sommets des convexes intervenant dans l'approximation ϵ^2 d'un triangle

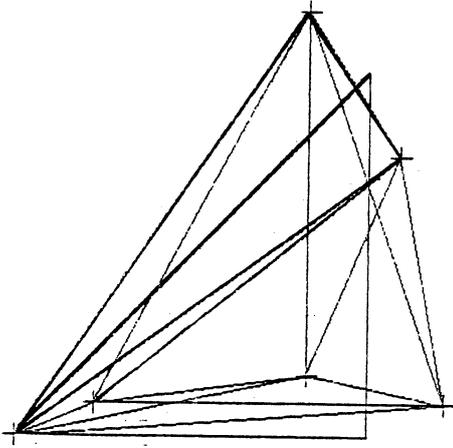


figure II.7

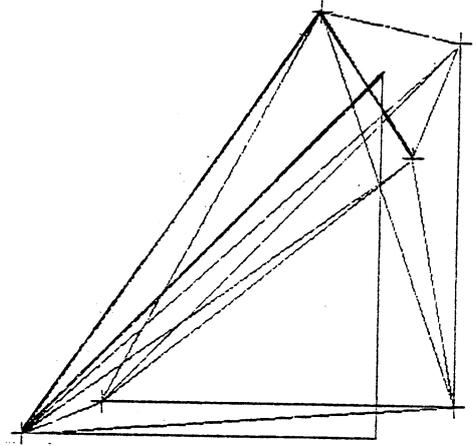


figure II.8

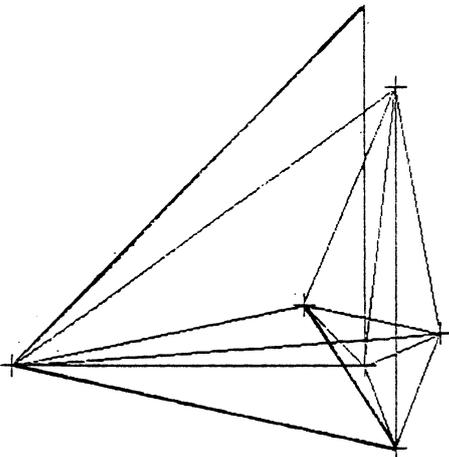


figure II.9

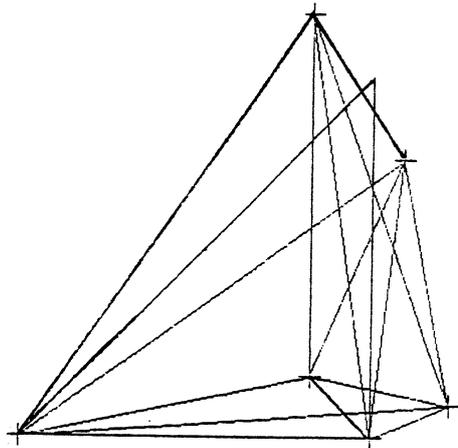


figure II.10

projection des sommets des convexes intervenant dans l'approximation ϵ^2 d'un triangle

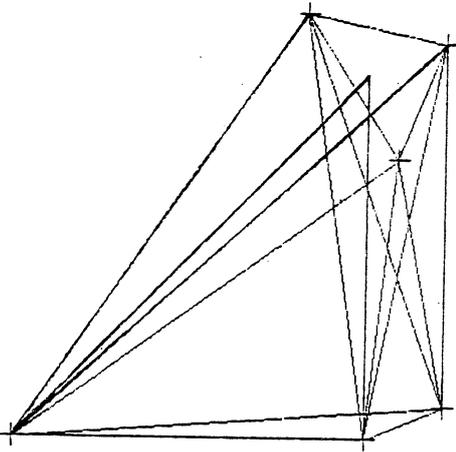


figure II.11

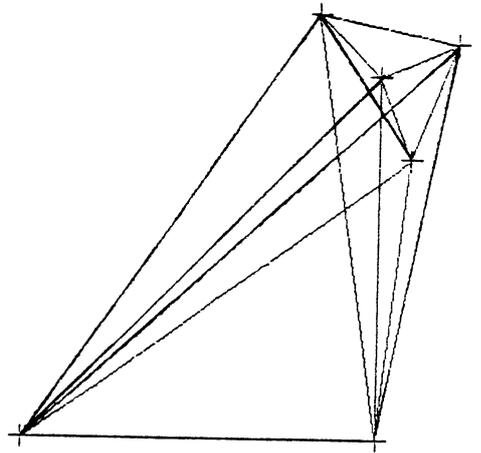


figure II.12

projection des sommets des convexes intervenant dans l'approximation ϵ^2 d'un triangle

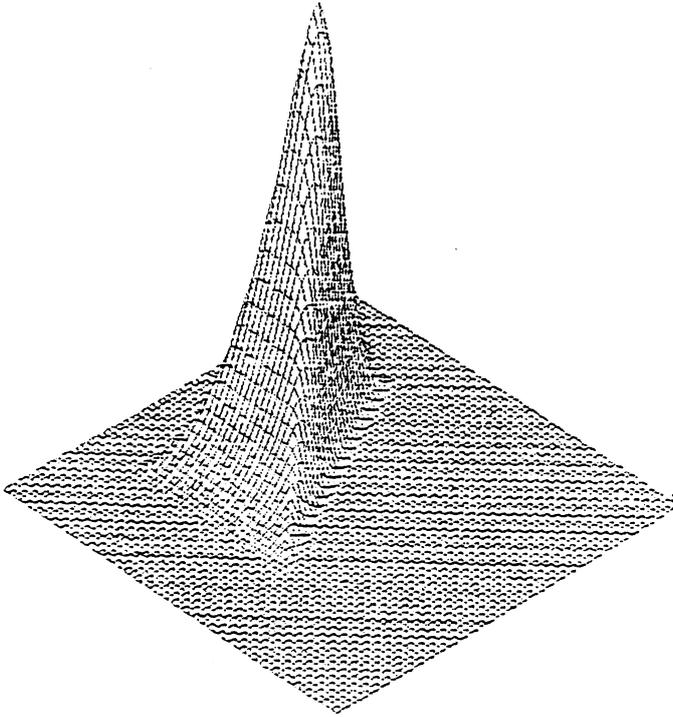


figure II.13

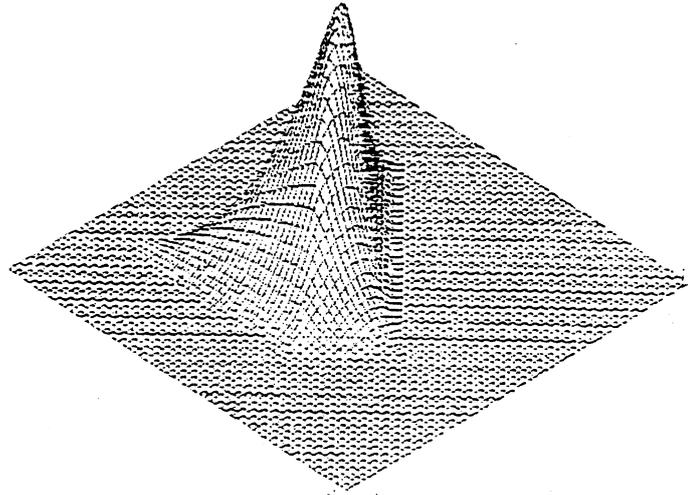


figure II.14

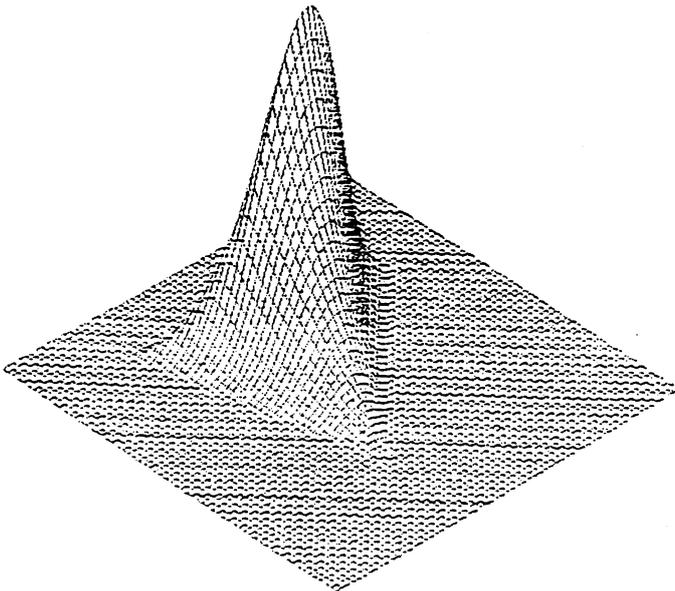


figure II.15

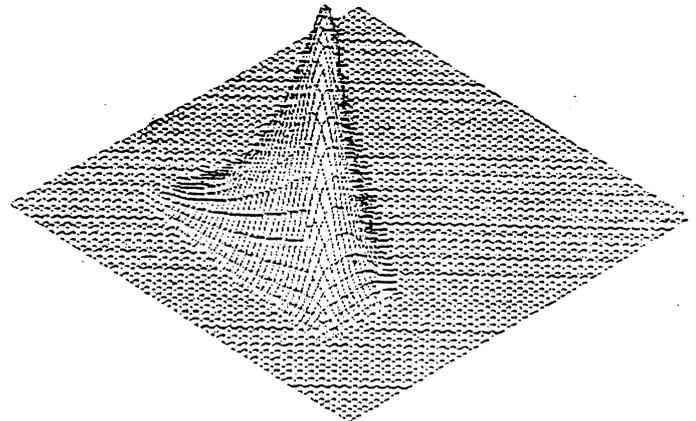


figure II.16

forme des **B-splines** pour l'approximation \mathcal{E}^2 d'un triangle

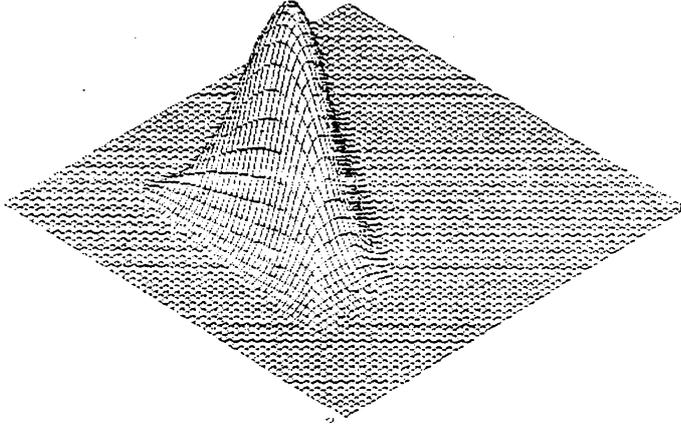


figure II.17

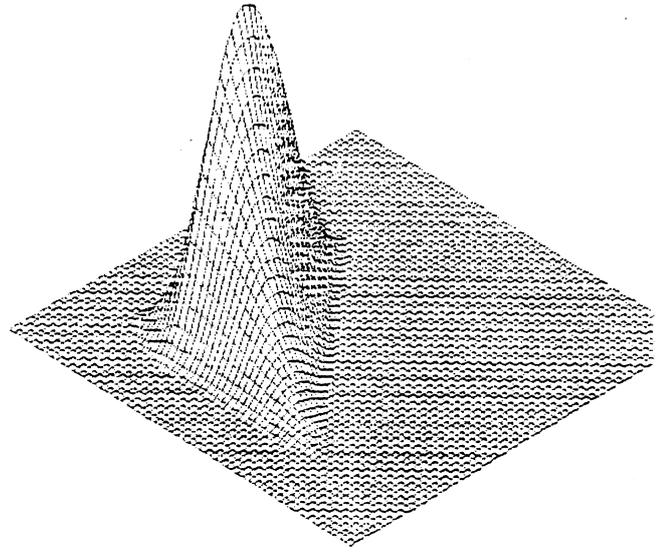


figure II.18

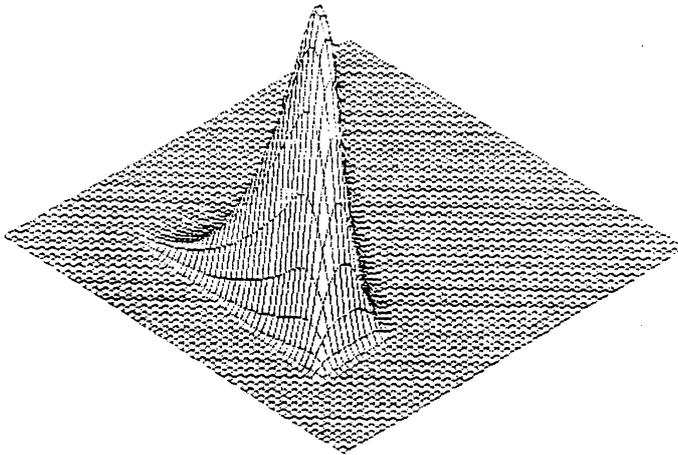


figure II.19

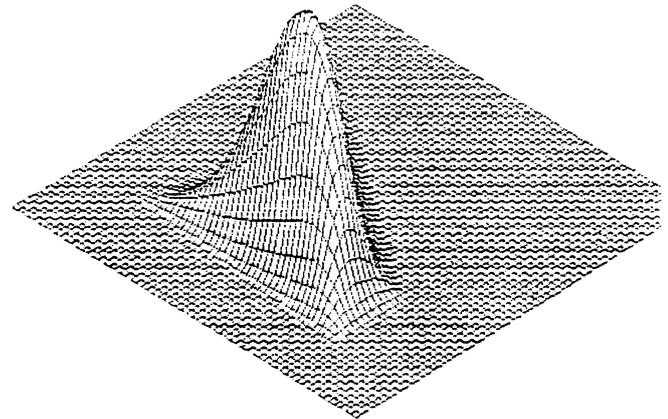


figure II.20

forme des B-splines pour l'approximation e^2 d'un triangle

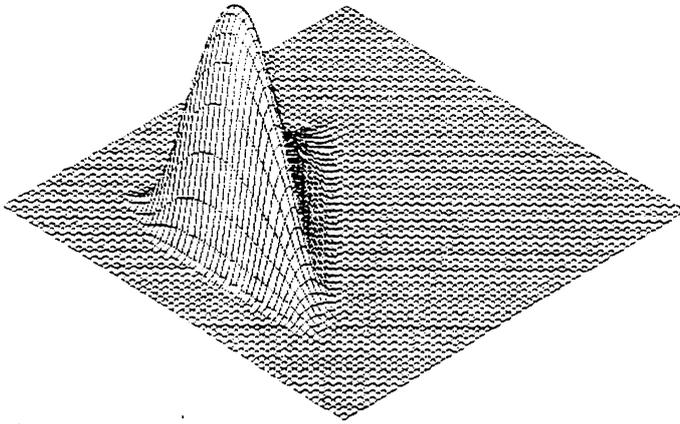


figure II.21

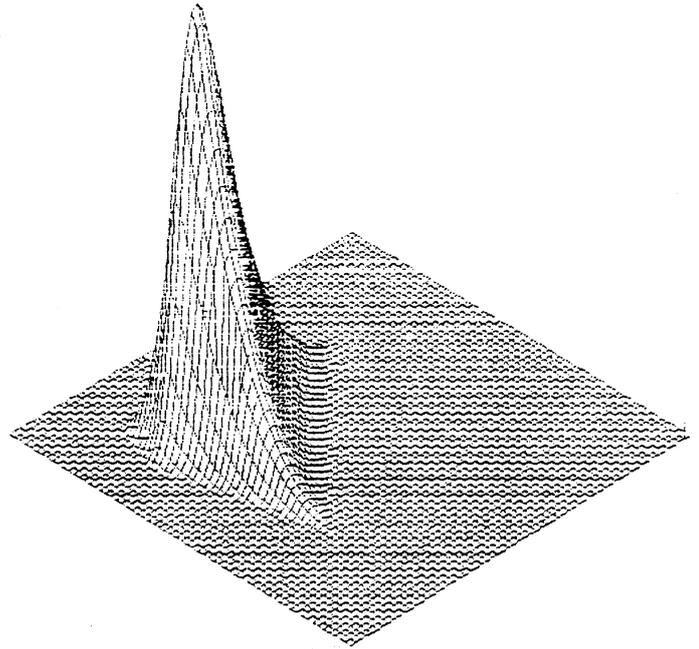


figure II.22

forme des B-splines pour l'approximation ϵ^2 d'un triangle

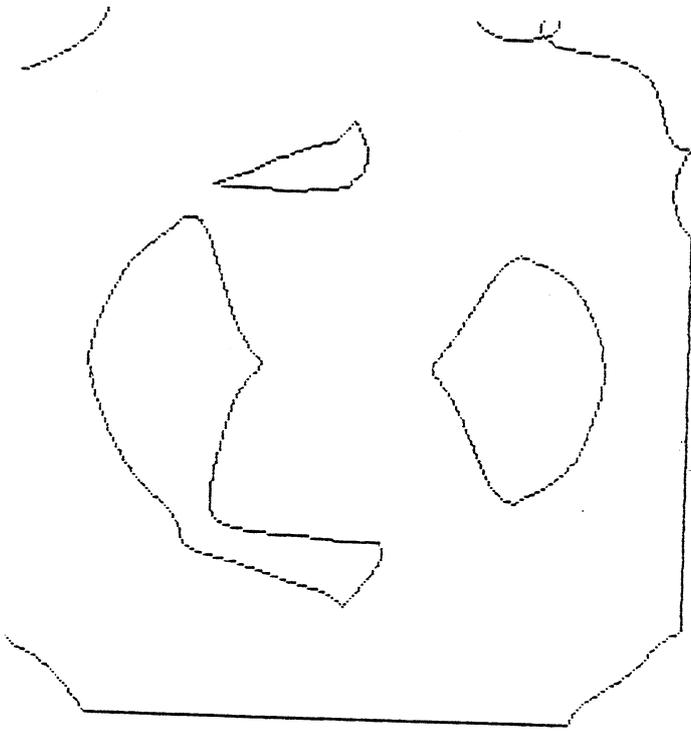


figure II.24: seuil à 300,
résultats de la segmentation



figure II.25: seuil à 250,
résultats de la segmentation

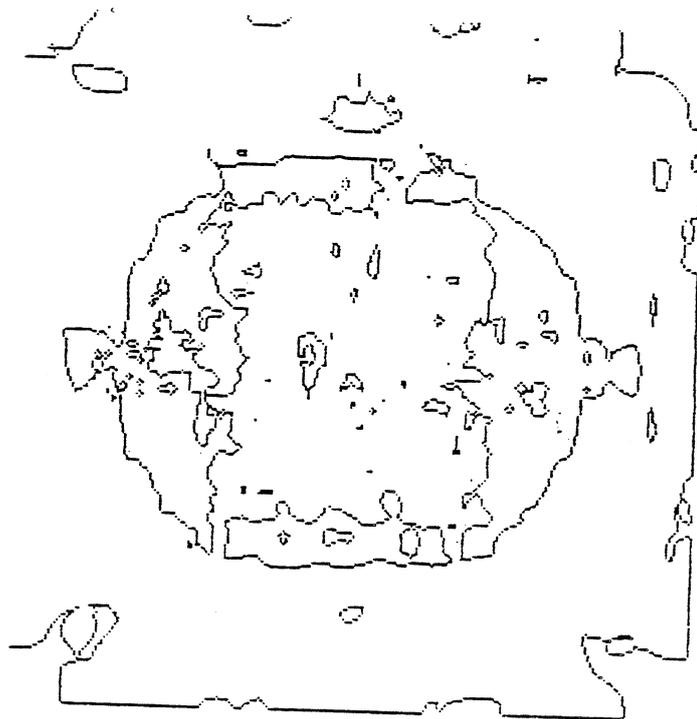


figure II.26: seuil à 150,
résultats de la segmentation

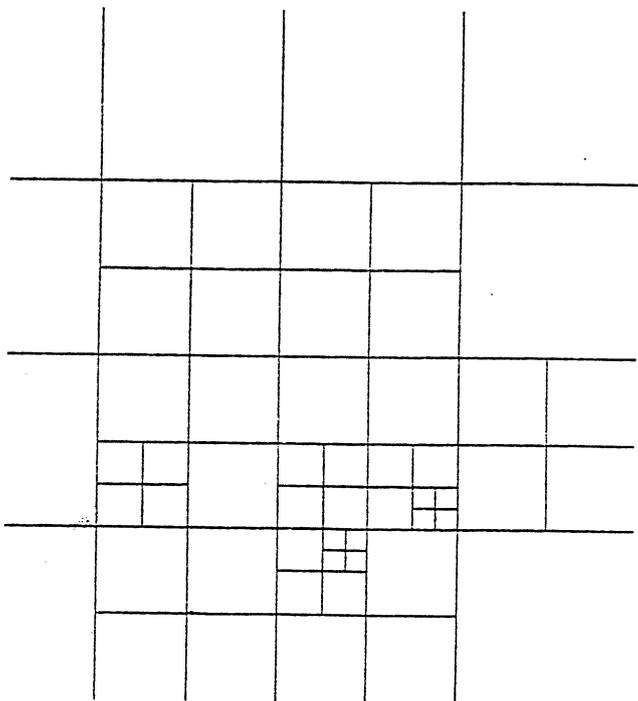


figure II.27: seuil à 200

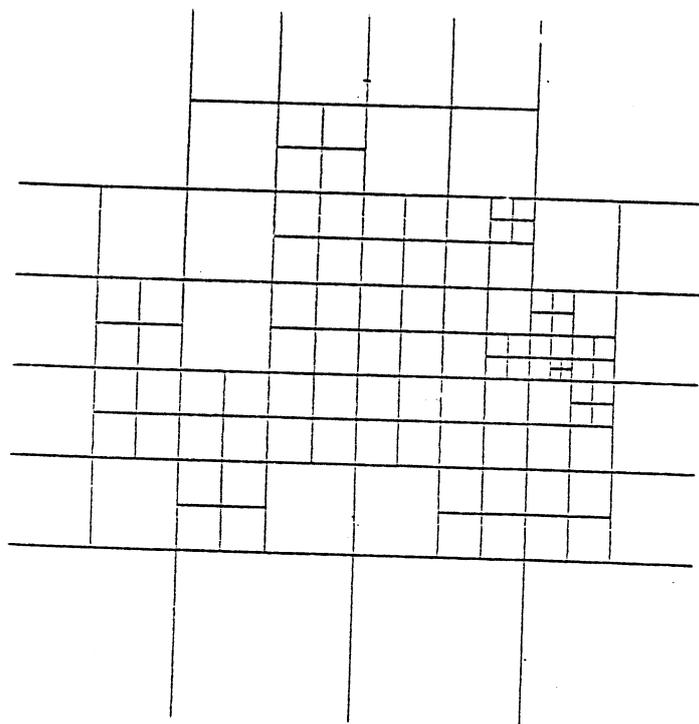


figure II.28: seuil à 150

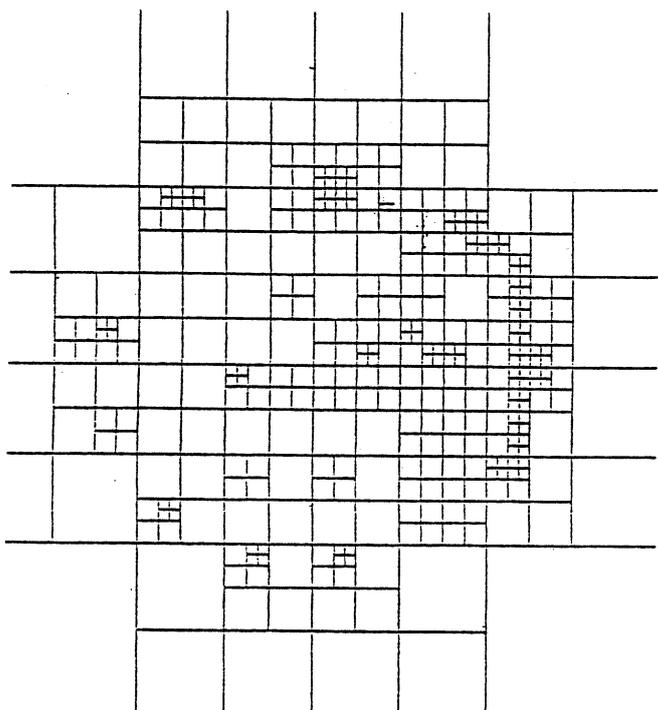


figure II.29: seuil à 100

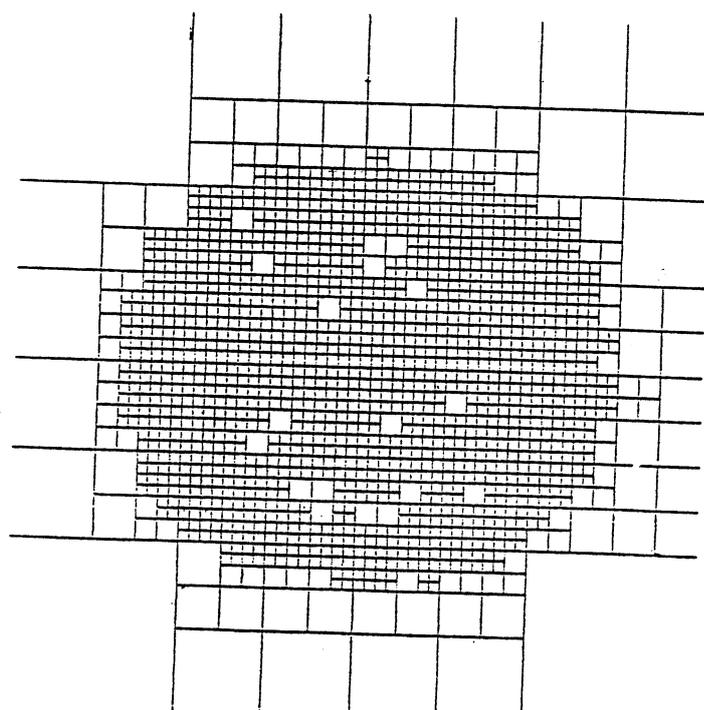


figure II.30: seuil à 50

Cellules obtenues en arrêtant la décomposition adaptative à des seuils variables

CHAPITRE - III

ESTIMATION DE CONFINEURS

ESTIMATION DE CONFINEURS

Des recherches récentes en physique, en chimie, en économie [DAN.85] ou en biologie [GUE.81, MAR.85, LI.75, DEM.81, DEM.86.1, ...] ont mis en évidence l'intérêt de l'étude de la trajectoire de certaines solutions d'équations différentielles ou récurrentes. Après un bref rappel des notions d'attracteur et de confineur, nous verrons comment l'étude de ces objectifs peut se traduire dans des termes d'approximation par des fonctions à une ou plusieurs variables. Les méthodes de lissage présentées dans les chapitres précédents peuvent d'adapter au traitement de ces "images" un peu particulières.

III.1 - RAPPEL SUR LES NOTIONS D'ATTRACTEUR ET DE CONFINEUR

III.1.1. - La notion d'attracteur

Parmi les nombreuses définitions de la notion d'attracteur [BIR.27, SMA.67, BAT.67, THO.80], nous retiendrons la définition suivante [COS.85] :

Soit X un espace métrique compact, $\{f_t\}$ un semi-flot continu de $X \times T$ vers X (où l'ensemble temporel T est une partie de \mathbb{R}^+). Notons $L(x)$ l'ensemble ω_+ -limite de la trajectoire issue de x et engendrée par $\{f_t\}$. Pour toute partie A non vide de X , nous définissons les opérateurs limite L et bassin B par :

$$L(A) = \bigcup_{x \in A} L(x) \quad \text{et} \quad B(A) = \{x \in X \setminus (A \cup L(x)) ; L(x) \subset A\} .$$

Une partie A de X non vide est dite attracteur faible si elle vérifie :

- i) $L \circ B(A) = A$
- ii) quel que soit M composante c -connexe de A , il n'existe pas M' c -connexe contenant strictement M tel que $A \cup M'$ vérifie i)

iii) Il n'existe pas A' strictement inclus dans A vérifiant i) et ii).

Dans cette définition, c -connexe signifie que tout couple de points peut être réuni par un pseudo-orbite de Bowen [BOW.78].

- i) est une condition de point fixe sous l'opérateur L ou B
- ii) est une condition de maximalité pour la c -connexité
- iii) est une condition atomique de minimalité.

Le théorème suivant [COS.85] justifie la définition ci-dessus.

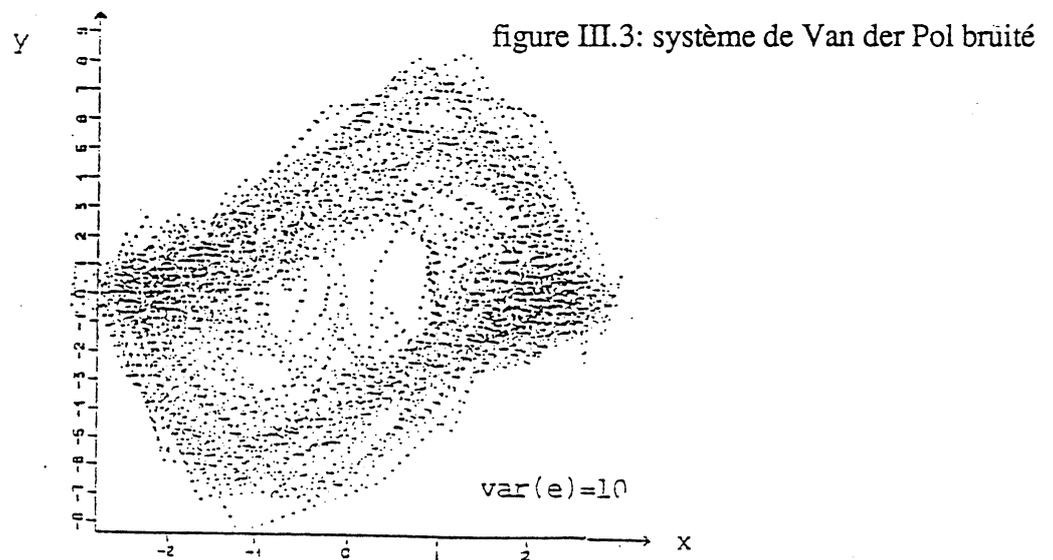
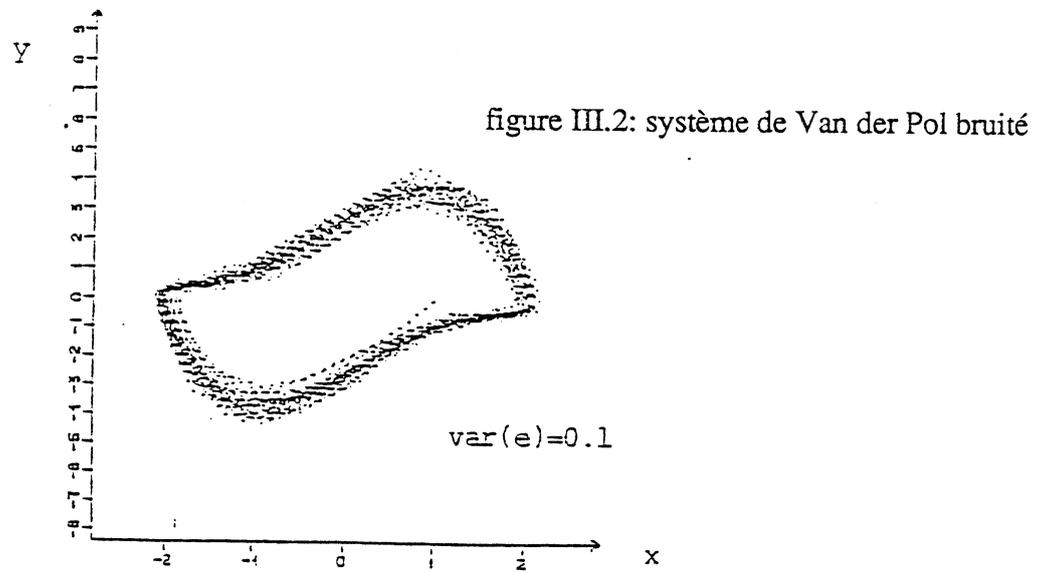
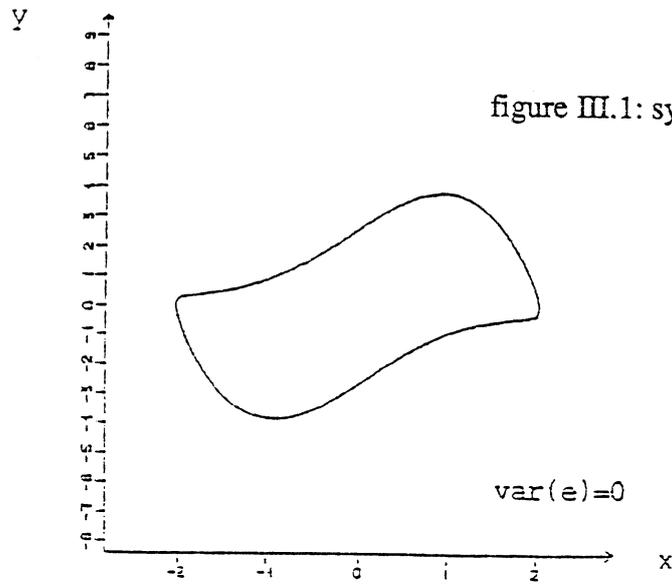
Théorème III.1

Tout attracteur faible A vérifie :

- i) A est invariant par le flot
- ii) $L(A) \subset A$
- iii) A est c -connexe
- iv) si $\text{Attr}(X)$ désigne l'attractant de X , i.e. l'union des parties de X invariantes par L ou B alors A est une composante c -connexe de $\text{Attr}(X)$; réciproquement, toute composante c -connexe de $\text{Attr}(X)$ est un attracteur faible.

III.1.2. La notion de confineur.

La notion de confineur repose sur la généralisation au cas stochastique des opérateurs bassin et limite définis plus haut. Dans un système dont l'attracteur est une variété de dimension 1 dans un espace de dimension 2, comme dans le cas de la figure III.1, qui représente l'attracteur du système de Van der Pol, on souhaiterait définir un "anneau de confinement", lorsque le système est bruité (cf. les figures III.2 et III.3, où l'accélération du système de Van der Pol est bruitée par une gaussienne).



On cherchera donc à définir le confineur comme l'ensemble des points fixes de l'opérateur $L_\varepsilon \circ B_\varepsilon$, où L_ε et B_ε sont des généralisations au cas stochastique des opérateurs déterministes B et L présentés plus haut.

Définitions

Soit X un espace métrique polonais localement compact et soit $(X^T, \mathfrak{A}^T, P_\mu)$ un système dynamique stochastique défini sur X , où \mathfrak{A} est la tribu borélienne de X , P_μ la mesure canonique induite par la loi de transition markovienne homogène du système et par la probabilité initiale μ sur X , et $\mathfrak{A}^{\otimes T}$ la tribu produit complétée pour P_μ . On note $\omega(t)$ l'état à l'instant t d'une trajectoire ω de X^T .

L'opérateur aléatoire limite L est défini de $(X^T, \mathfrak{A}^{\otimes T})$ vers $(P(X), M)$, où $P(X)$ est l'ensemble de parties de X et M la tribu de Matheron engendrée par les ensembles F^K , où K est un compact de X

$$F^K = \{ E \subset X ; E \text{ fermé et } E \cap K = \emptyset \}.$$

Par définition, $L(\omega)$ est l'ensemble limite de la trajectoire ω (au sens du paragraphe III.1.1), et ceci pour tout élément ω de X^T .

Une condition suffisante pour que L soit une variable aléatoire est que le processus $\{\xi_t(\omega) = \omega(t)\}$ des applications composantes de l'espace canonique soit séparable.

Nous appellerons, dans ce cas, bassin d' ε -confinement global d'une partie A quelconque de X , l'ensemble défini par :

$$B_\varepsilon(A) = \{ x \in X \setminus A ; F_A(x) > \varepsilon \},$$

où ν est une mesure de référence définie sur X , σ -additive et σ -finie et où F_A est la densité, si elle existe, de la mesure de confinement ρ_A par rapport à ν :

$$F_A = \frac{d\rho_A}{d\nu}, \quad \text{où } \rho_A(C) = P_\mu(L^{-1}(F^{A^C}) \cap (C \times X^{T*}))$$

exprime la probabilité de "finir sa vie dans A en l'ayant commencée dans $C \subset X$ ".

Nous pouvons donc maintenant définir un ε -confiner global faible A par les conditions [JAC.87]:

i) - $A \in \mathfrak{A}$ et tout x de A est ε -chaîné à lui-même (i.e. il existe une ε -pseudo-orbite de Bowen, généralisation stochastique naturelle de la notion de pseudo-orbite [DEM.1].

- $L_\varepsilon \circ B_\varepsilon(A) = A$ (i.e. $\forall L(D) \in L_\varepsilon \circ B_\varepsilon(A)$, $\nu(A \setminus L(D)) \leq \varepsilon$), en définissant $L_\varepsilon \circ B_\varepsilon$ par :

$$L_\varepsilon \circ B_\varepsilon(A) = \{ L(D); D \subset X^T \text{ et } P_\mu(B_\varepsilon(A) \times X^{T*} \setminus D) \leq \varepsilon \}.$$

ii) et iii) identiques à ii) et iii) de la définition d'un attracteur faible en remplaçant c -connexe par ε - c -connexe.

Un ε -confiner global est dit fort, si $B_\varepsilon(A)$ contient un voisinage de A .

La notion ci-dessus d' ε -confiner global prend un intérêt grâce aux propositions suivantes [DEM.1]:

Proposition III.1

Si le système dynamique stochastique est obtenu en prenant un système déterministe défini sur X compact avec des conditions initiales régies par la probabilité μ que l'on suppose absolument continue par rapport à ν , alors, si $d\mu/d\nu = 1$, si $\nu(X) = 1$ et si $0 < \varepsilon < 1$, nous avons : tout ε -confineur global faible est un attracteur faible, à un ensemble ν -négligeable près

Proposition III.2

Si A est complètement absorbant (i.e. $\exists V(A)$, voisinage de A , tel que : $\forall x \in V(A) \setminus A$, $P_x(L(\omega) \cap (V(A) \setminus A) \neq \emptyset) = 0$), fermé, ν -récurrent (i.e. $\forall x \in A$, $\forall B \subset A$; $\nu(B) > 0$,

$P_x(\bigcup_{t > 0} \{\omega(t) \in B\}) = 1$) et si l'on a :

i) $\text{supp } \nu \supset V(A)$

ii) $\|\varphi\|_A = \inf_{x \in A} \varphi(x) > 0$, où φ est la densité de μ par rapport à ν .

alors A est un ε -confineur global fort, pour tout $\varepsilon < \|\varphi\|_A$.

III.1.3 - Problèmes liés à l'estimation numérique des confineurs.

Dans les diverses applications de la notion de confineur, il est d'un intérêt primordial de connaître la localisation du confineur, ainsi que de pouvoir décrire la "manière" dont la solution du système stochastique se comporte à l'intérieur de ce confineur : y a-t-il périodicité et, si oui, quelle est la période, ou, au contraire, est-on dans une situation de chaos ?

Ces problèmes ne s'abordent pas de la même manière selon la forme du confineur, et nous séparerons deux cas:

- on connaît a priori le caractère "annulaire" du confineur
- aucune connaissance a priori sur la topologie du confineur n'est disponible.

Dans chacun de ces cas, nous définirons les confineurs empiriques et nous proposerons des moyens de les obtenir. Les méthodes correspondantes seront testées sur des données théoriques bruitées ou sur des données réelles. Nous examinerons ensuite le problème de l'estimation de la "période" avec laquelle sont décrits ces confineurs.

III.2 - ESTIMATION D'UN CONFINEUR DONT ON CONNAIT A PRIORI LE CARACTERE ANNULAIRE

Nous présenterons le problème posé par l'étude du confineur du système de Van der Pol bruité par une variable gaussienne appliquée à l'accélération. Nous chercherons tout d'abord à déterminer la forme de ce confineur .

L'équation d'un tel système est donnée par

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2(1-x^2)y + e(t), \text{ où } e(t) \text{ est une variable aléatoire gaussienne.} \end{cases}$$

Les figures III.1 à III.3 représentent trois simulations de ce système pour des variances respectivement égales à 0, 0.1 et 10.

Le premier problème est d'approximer, par un "confineur empirique", le "confineur théorique" dont la définition a été rappelée au paragraphe précédent. Pour définir le confineur empirique à 5%, nous allons chercher à déterminer tout d'abord une "courbe moyenne" qui approxime le cycle limite du système de Van der Pol, puis une aire moyenne située "autour" de cette approximation du cycle limite et dans laquelle se trouvent 5% des points observés.

Compte tenu de la géométrie du système, ce problème se ramène à estimer un "anneau" contenant 5% des points observés.

Si l'on reste dans un formalisme discret, il s'agit de déterminer deux polygones, l'un interne et l'autre externe, qui définissent l'anneau en question. Ce problème se rapproche de celui de l'estimation d'une enveloppe convexe contenant 5% des points. Mais, ici, une difficulté supplémentaire est liée à la présence d'une aire "interne" (l'intérieur du polygone le plus petit) qu'il faut éliminer. De plus, les systèmes réels n'ont pas toujours une géométrie convexe (le cycle limite du système de Van der Pol, par exemple, n'est pas convexe).

La résolution de ce problème dans un cadre discret n'étant pas facile à réaliser, nous avons choisi de le poser en termes continus. La stratégie proposée est la suivante, compte tenu du caractère a priori annulaire du confineur.

- i) Choisir un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ centré sur le barycentre des points expérimentaux.
- ii) Pour tout point expérimental M , calculer l'angle $\theta = (\vec{OM}, \vec{i})$
- iii) Déterminer une courbe fermée paramétrée par l'angle au centre θ , d'équation $(x = x(\theta), y = y(\theta))$, qui approxime au sens des moindres carrés le nuage des points expérimentaux.
- iv) Considérer k secteurs angulaires centrés en 0 , définis par les demi-droites d'angles $j \frac{2\pi}{k}$ et $(j+1) \frac{2\pi}{k}$. Dans chaque secteur, nous choisissons ensuite les homothétiques de la courbe, de part et d'autre de celle-ci, et qui contiennent 5% des points expérimentaux contenus dans ce secteur.
- v) le confineur empirique est obtenu par l'union des ensembles ci-dessus, lorsque j varie de 0 à $(k-1)$.

Remarque: on peut remplacer les points iv) et v) ci-dessus en ne conservant que le $(1-\epsilon)$ % des points les plus proches de la courbe déterminée en iii) .

Le seul point délicat dans l'algorithme précédent est la détermination de la courbe "moyenne". Cette courbe sera définie comme une courbe spline paramétrée fermée exprimée au moyen de B-splines.

Soit p le nombre de "points de contrôle" de cette spline; x et y s'expriment sous la forme

$$x(t) = \sum_{i=1}^{p+3} \alpha_i B_i(t), \quad y(t) = \sum_{i=1}^{p+3} \beta_i B_i(t), \quad \text{où } B_i(t) = B(t-(i-1) \frac{2\pi}{p}).$$

B étant la spline cubique de base déjà rencontrée. La condition de fermeture de la spline impose simplement $\alpha_{i+p} = \alpha_i$ et $\beta_{i+p} = \beta_i$ pour $i = 1, 2, 3$.

Posons $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)^t$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_p)^t$

Soit n le nombre de points expérimentaux, $x = (x_i)^t$, $i = 1, \dots, n$, $y = (y_i)^t$, $i = 1, \dots, n$ les points expérimentaux, (θ_i) $i = 1, \dots, n$ leurs angles aux centres.

α et β seront déterminés comme solution du problème de minimisation aux moindres carrés classique :

$$\text{Min} \left[\sum_{i=1}^n (x_i - x(\theta_i))^2 + \sum_{i=1}^n (y_i - y(\theta_i))^2 \right]$$

Ce problème de minimisation se ramène en fait à résoudre séparément

$$\text{Min} \sum_{i=1}^n (x_i - x(\theta_i))^2 \quad \text{et} \quad \text{Min} \sum_{i=1}^n (y_i - y(\theta_i))^2.$$

Ces deux problèmes de minimisation conduisent à la résolution de deux systèmes linéaires qui ont chacun la même matrice AA^t , où A^t est la matrice de n lignes et p colonnes dans laquelle on trouve, pour toute ligne i , les évaluations de p B-splines de base au point θ_i , avec des modifications mineures pour assurer la fermeture de la courbe.

Compte tenu de la géométrie du système, un nombre de "points de contrôle" relativement faible est suffisant pour représenter d'une manière satisfaisante le cycle limite ($p = 10$ dans le cas du système de Van der Pol, ce qui est largement suffisant).

Les figures III.4 à III.6 représentent les résultats numériques du traitement de la simulation d'un système de Van der Pol. On observe que l'approximation des parties de ce système dans lesquelles la solution "passe peu de temps" (i.e. le nombre de points expérimentaux dans ces zones est faible) est moins bonne que celle des parties où la densité des points expérimentaux est plus forte. Cet effet est lié à la nature intrinsèque de la méthode des moindres carrés, qui privilégie les zones bien représentées par les points expérimentaux. Cependant, on pourrait améliorer ces résultats en conservant une méthode des moindres carrés, mais en affectant aux points expérimentaux un poids inversement proportionnel à la densité locale en points expérimentaux, de manière à privilégier les zones "peu peuplées". Cette correction devrait cependant rester modeste, pour ne pas donner un poids trop important aux points "aberrants" éventuels. Ceux-ci sont d'ailleurs en principe éliminés par un prétraitement qui ne retient, pour la définition du confineur, que les "points d'accumulation empiriques", définis par une contrainte de retour dans un voisinage donné, après un nombre d'itérations fixé.

Cette technique a été appliquée à des données expérimentales, et la figure III.7 représente le confineur du système représentant la densité de la population de lynx au Canada.

III.3 - ESTIMATION D'UN CONFINEUR SANS CONNAISSANCE A PRIORI DE SON CARACTERE ANNULAIRE

Pour que la méthode présentée au paragraphe III.2 soit applicable, il faut que l'on puisse représenter le cycle limite du confineur en paramétrant par l'angle au centre. Ceci n'est bien sûr pas toujours possible. D'ailleurs, même dans le cas du système de Van der Pol, le caractère non convexe du cycle limite rend difficile l'emploi d'une telle paramétrisation, assez éloignée de la paramétrisation par l'abscisse curviligne, qui serait la plus régulière. Mais cette technique est tout à fait inapplicable pour des cycles limites "en forme de 8" par exemple.

Pour la clarté de l'exposé, nous reprendrons l'exemple de l'estimation du confineur du système de Van der Pol. Ce confineur est une surface dans un espace de dimension 2. Nous allons chercher une définition de cette surface comme l'ensemble des points compris entre deux courbes de niveau d'une fonction de deux variables.

figure III.4: variance = 0.1

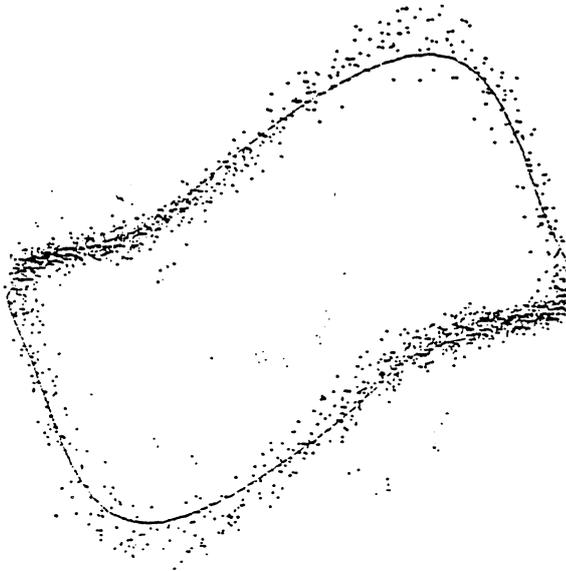


figure III.5: variance = 1

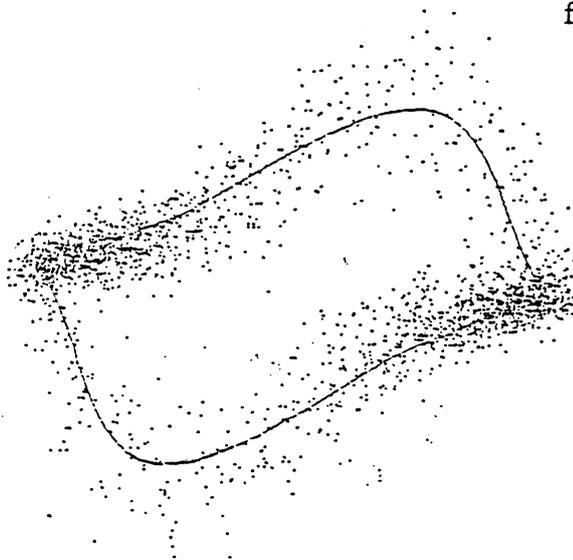
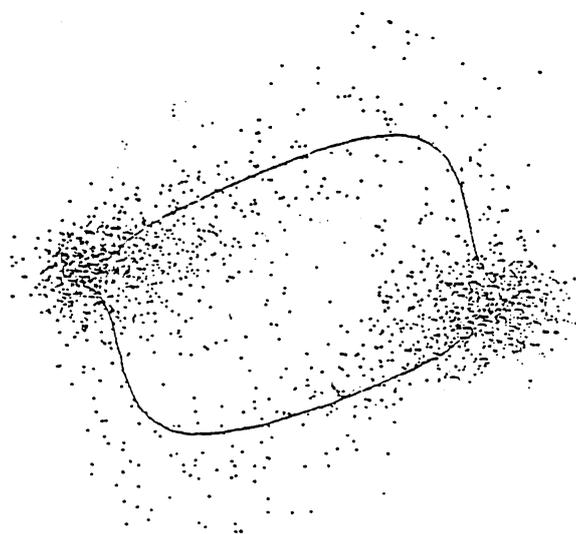


figure III.6: variance = 10



Cette fonction sera une représentation continue de la densité de points expérimentaux. Cette densité peut être définie en tout point de l'espace comme

$$d(x,y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{Nombre de points dans } B_{\varepsilon}(x,y)}{\text{surf}(B_{\varepsilon}(x,y))}, \text{ où } B_{\varepsilon}(x,y) \text{ est la boule de rayon } \varepsilon \text{ centrée sur } (x,y)$$

Le nombre de points expérimentaux étant fini, cette définition n'est pas directement applicable. En effet, cette fonction est presque partout nulle, sauf aux points expérimentaux où elle vaut $+\infty$. Pour garder une définition aussi proche que possible de la densité précédemment définie, mais utilisable dans le cas d'un nombre fini de points expérimentaux, nous définirons

$$D(x,y) = \frac{N(x,y) + M(B_{\varepsilon}(x,y))}{\text{surf}(B_{\varepsilon}(x,y))},$$

où ε est le diamètre de la plus petite boule centrée sur (x,y) qui contient un point expérimental non placé en (x,y) , $M(B_{\varepsilon}(x,y))$ est le nombre de points expérimentaux contenus dans $B_{\varepsilon}(x,y) \setminus (x,y)$ et $N(x,y)$ est le nombre de points expérimentaux observés en (x,y) .

Le confineur expérimental C_a sera alors défini comme l'ensemble des points du plan pour lesquels $D(x,y) > a$.

Dans la pratique, D est discrétisé aux sommets d'une grille $n \times n$; pour l'évaluer, il suffit de parcourir le fichier des points expérimentaux et d'incrémenter pour chaque point expérimental la valeur de la cellule définie par la grille de discrétisation qui le contient.

On lisse ensuite D par une technique de lissage aux moindres carrés tout à fait analogue à celle présentée au chapitre I. Le confineur s'obtient alors "visuellement" comme l'ensemble des points de la grille pour lesquels D dépasse le seuil. On peut également le définir numériquement comme la solution d'un problème de segmentation pour lequel les techniques présentées au chapitre I ou au chapitre IV sont applicables.

La figure III.8 représente le confineur empirique du système de Van der Pol estimé par cette technique.

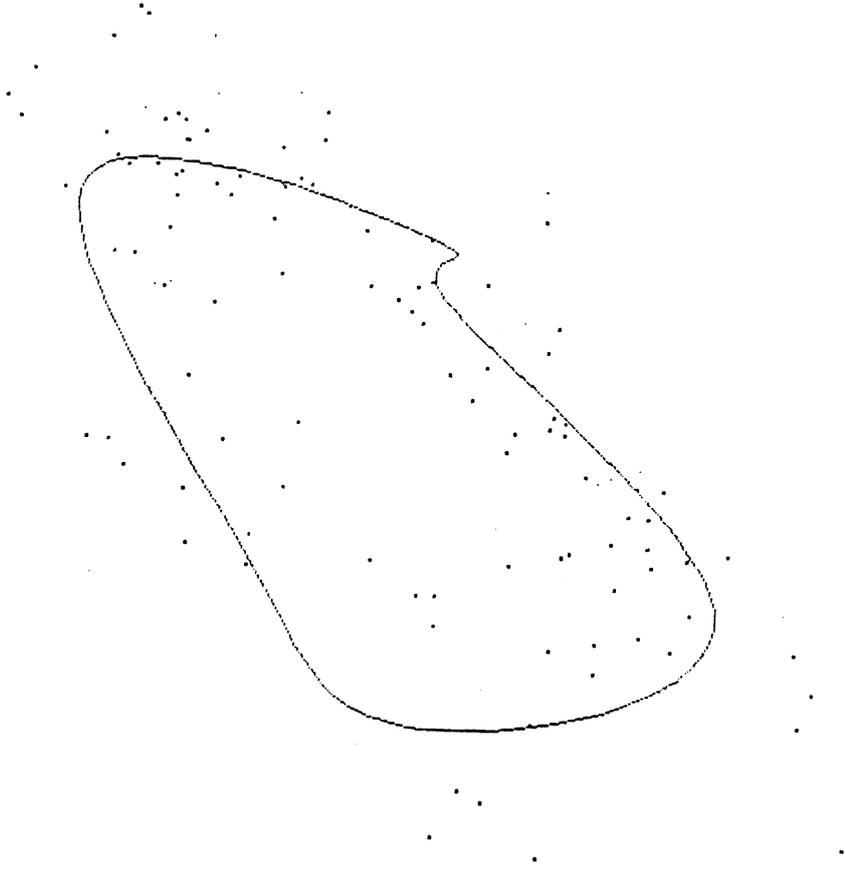


figure III.7: confineur du système représentant la densité de la population de lynx au Canada (en abscisse la densité pour une année, en ordonnée la densité pour l'année précédente) .

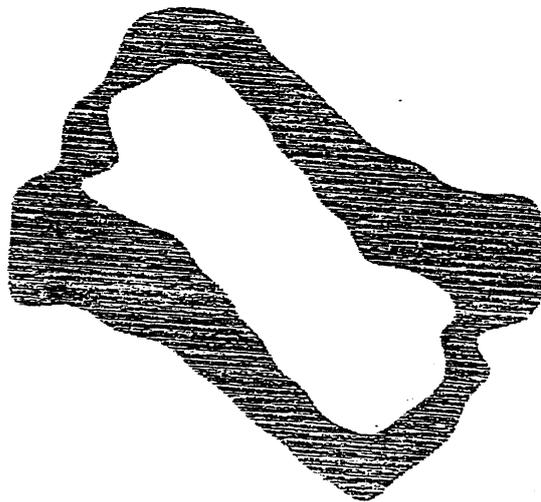


figure III.8: estimation du confineur empirique du confineur du système de Van der Pol, sans connaissance a priori. Le lissage est effectué "aux moindres carrés", sur une base de 32 x 32 splines, et on représente en noir les points dont la densité estimée est supérieure à 5% .

III.4 - ESTIMATION DE LA PERIODE DE DESCRIPTION D'UN CONFINEUR

Le confineur étant déterminé, il reste à examiner le comportement de la solution à l'intérieur de confineur. Il faut pouvoir répondre aux questions suivantes : le comportement de la solution est périodique ou chaotant ? S'il est périodique, quelle est sa période ?

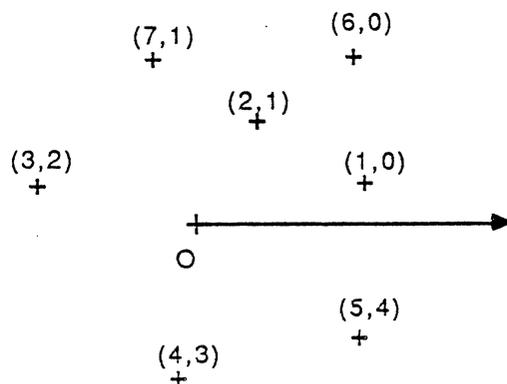
L'étude du comportement périodique ou chaotant de la solution a fait l'objet de nombreux travaux [LAUS.87, JAC.83]. L'estimation des confineurs par des fonctions continues fournit de nouveaux outils d'étude de ce problème. Nous proposons trois techniques de calcul de la période de description d'un confineur, présentées sur l'exemple du système de Van der Pol.

III.4.1. - Estimation de la période dans le cas d'un confineur annulaire

Soit un confineur dont le cycle limite est paramétrable par l'angle au centre. Les points expérimentaux sont "renumérotés" lors de la "traversée" de la droite horizontale passant par barycentre. Les angles au centre sont orientés dans le sens trigonométrique et sont dans $[0, 2\pi]$. Les points expérimentaux sont numérotés de 1 à n. Soit I l'ensemble des indices

tel que $i \in I \Leftrightarrow (i=1 \text{ ou } (i > 1 \text{ et } \theta(i-1) > \pi \text{ et } \theta(i) < \pi))$. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, soit j_i l'élément de I le plus proche de i, inférieur ou égal à i. Posons $t(i) = i - j_i$. $t(i)$ représente le rang du point i "modulo" un nombre entier de parcours du confineur.

La figure III.9 explicite la signification de t, et la figure III.10 représente t en fonction de θ dans le cas du système de Van der Pol.



chaque point est représenté par un couple $(i, t(i))$.
ici, $t(5)=0$, car $\theta(4) > \pi$ et $\theta(5) < \pi$, donc $5 \in I$

figure III.9: définition des rangs des points "modulo" un nombre entier de confineurs

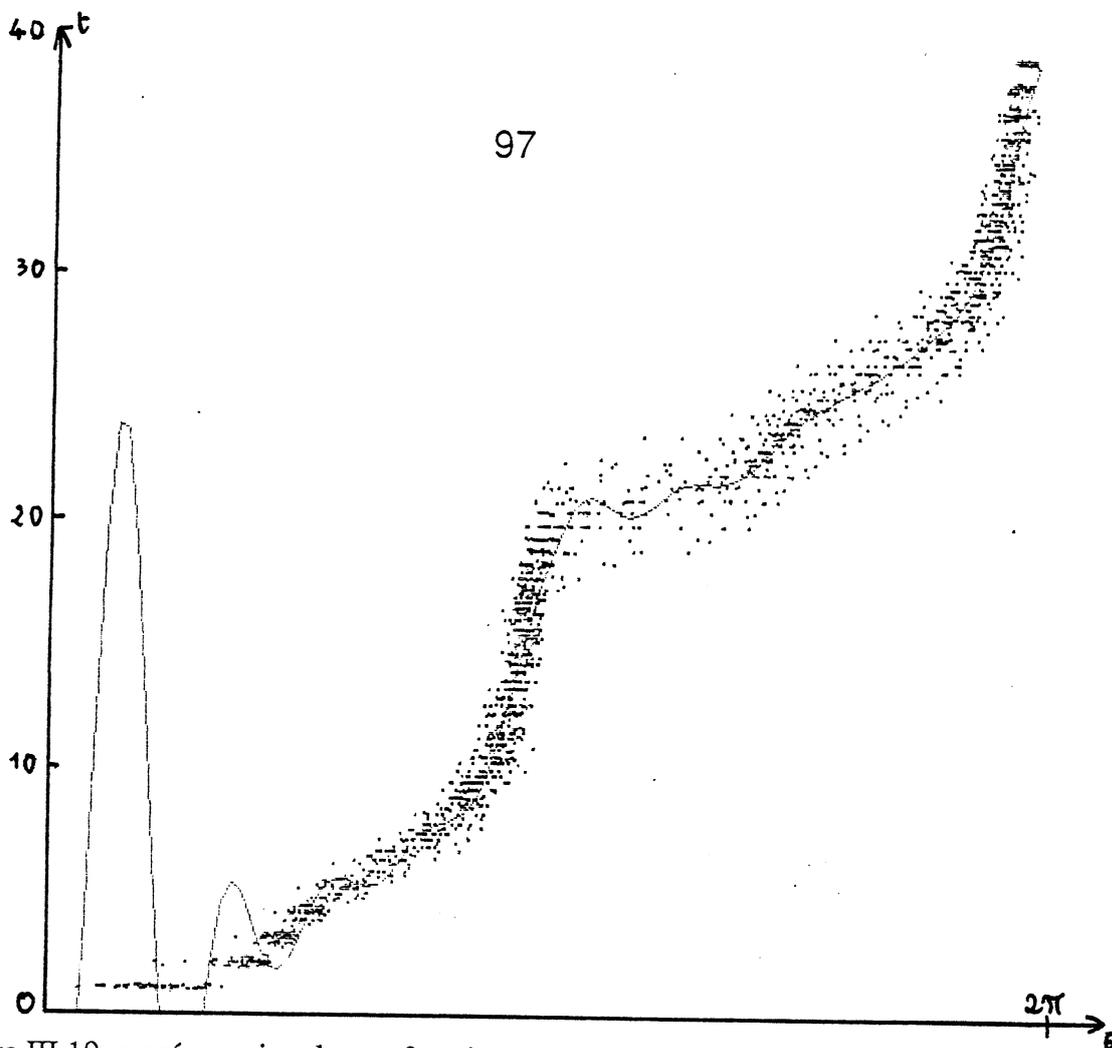


figure III.10: représentation de t en fonction de θ pour le système de Van der Pol, de variance 0.1

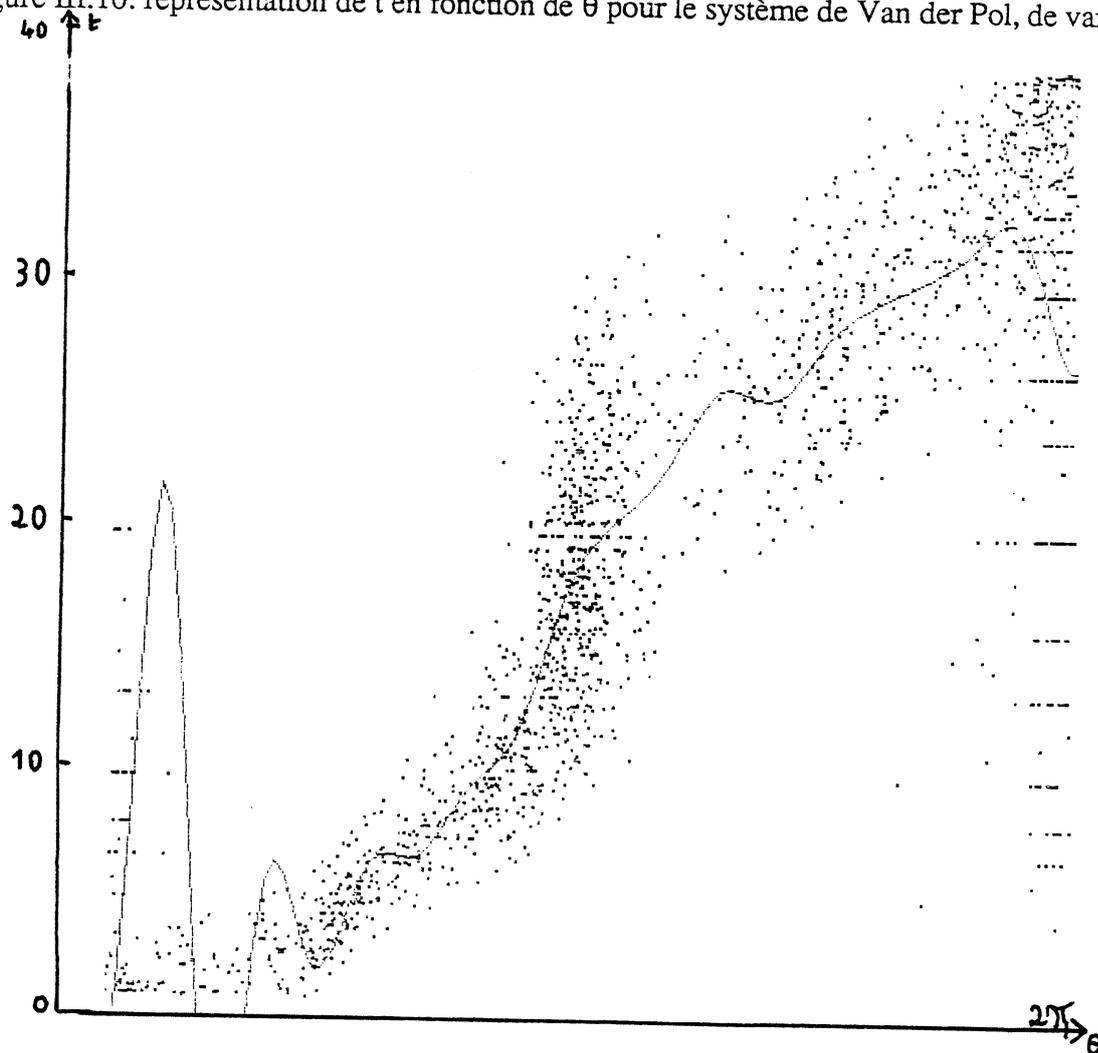


figure III.11: représentation de t en fonction de θ pour le système de Van der Pol, de variance 1

A partir des données expérimentales, nous définissons $t = f(\theta)$. f sera obtenue en divisant $[0, 2\pi[$ en k intervalles égaux et en cherchant la solution aux moindres carrés dans une base de B-splines définies sur ces intervalles. La technique d'obtention de f est analogue à celle présentée au paragraphe III.2, si ce n'est qu'ici on n'impose la périodicité que sur les dérivées, i.e. $f^{(i)}(0) = f^{(i)}(2\pi)$, $i = 1, 2$.

La période de description du confineur est alors estimée par $f(2\pi)$. La figure III.10 montre le résultat de l'approximation de f . On observe que l'approximation n'est pas très satisfaisante, le graphe de f présentant des oscillations anormales. On pourrait améliorer l'approximation en remplaçant le lissage aux moindres carrés par un lissage contrôlé par un paramètre de lissage défini par validation croisée. Mais cette technique d'estimation de la période est très sensible au bruit comme le montre le graphe de t en fonction de θ dans l'étude du système de Van der Pol avec un bruit plus fort (figure III.11). Elle sera donc peu utilisable en pratique.

III.4.2 - Estimation de la période par le critère des moindres carrés

Soit T une estimation proposée de la période. $[0, T]$ est découpé en k intervalles égaux, et une base de B-splines cubiques est définie sur le réseau correspondant.

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, posons $t_i = ((i-1) \text{ modulo } k) \times T$.

Nous cherchons $\begin{cases} x = x(t|T) \\ y = y(t|T) \end{cases}$ qui minimise $d = \sum_i (x_i - x(t_i|T))^2 + \sum_i (y_i - y(t_i|T))^2$,

$$\text{avec } \begin{cases} x(0|T)^{(i)} = x(T|T)^{(i)} \\ y(0|T)^{(i)} = y(T|T)^{(i)} \end{cases}, i = 0, 1, 2.$$

Les solutions sont recherchées dans la base de B-splines définie sur le réseau (d'une manière analogue à celle présentée au paragraphe III.2).

d est calculé pour toute valeur de la période T . La meilleure approximation de la période sera la plus faible pour laquelle ce critère est minimal.

Cette méthode de calcul est assez robuste au bruit; même avec un bruit fort (cf. figure III.12), la période est retrouvée correctement.

III.4.3 - Détermination de la période par inf convolution de fonctions splines trigonométriques.

Nous supposons que la description du confineur est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

x et y sont donc toutes deux périodiques de période T . Jusqu'ici, nous avons lissé x et y par des splines cubiques, c'est-à-dire par des fonctions polynômiales par morceaux. Il serait intéressant de lisser par des fonctions dont la forme dépende de T . Or, on sait [LAU.72] définir les fonctions splines trigonométriques de lissage, qui minimisent

$$\int_a^b (x'' + \omega^2 x)^2 dt + \rho \sum_i (x_i - x(t_i))^2 .$$

On sait que ces fonctions sont, dans chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}]$, des combinaisons linéaires par morceaux des fonctions $\sin \omega t$, $\cos \omega t$, $t \sin \omega t$, $t \cos \omega t$. De plus, une fonction trigonométrique

$\cos(\omega t + \phi)$ réalise le minimum de la fonctionnelle $\int_0^T (x'' + \omega^2 x)^2 dt$.

Or, on sait qu'une fonction périodique de période $\frac{2\pi}{\omega}$ est représentable par une série de fonctions

trigonométriques de pulsation $k\omega$, $k \in \mathbb{N}$.

On est donc amené à chercher la solution du problème de minimisation

$$\min \int_a^b \sum_{k=1}^K (x'' + (k\omega)^2 x)^2 dt + \rho \sum_i (x_i - x(t_i))^2 + \int_a^b \sum_{k=1}^K (y'' + (k\omega)^2 y)^2 dt + \rho \sum_i (y_i - y(t_i))^2 ,$$

où K est fixé arbitrairement et représente la limite supérieure du nombre d'"harmoniques" que l'on accepte de prendre en compte.

L' "énergie globale" $\int_a^b \sum_{k=1}^K (x'' + (k\omega)^2 x)^2 dt + \int_a^b \sum_{k=1}^K (y'' + (k\omega)^2 y)^2 dt$ serait nulle si la fonction étudiée était périodique de période T (si l'on néglige l'influence, dans cette énergie, de "harmoniques" de pulsation $k\omega$, $k > K$).

Ce problème de minimisation d'une somme de plusieurs fonctionnelles se ramène à rechercher la solution comme inf-convolution des splines trigonométriques associées aux problèmes de minimisation de pulsation ω . Les algorithmes itératifs de résolution de ce problème sont dûs à P. Laurent (à paraître).

On peut donc, pour toute valeur de ω , trouver la solution du problème et donc calculer l'énergie globale $E(\omega)$ correspondante. Les fonctions périodiques de période T ayant une énergie nulle sur un intervalle multiple entier de $[0, T]$, on peut considérer que la période réelle de description du confineur est la plus faible qui vérifie $\min_{\omega \in \mathbb{R}^+} E(\omega)$.

Cette méthode de recherche de la période a été appliquée à la détermination de la période du système de Van der Pol bruité. Les résultats sont présentés dans la figure III.12. On voit que la période peut être déterminée même lorsque le bruit est important.

Variance	période par moindres carrés	période par inf convolution
0.1	38.7	38.5
1	38.9	38.5
10	38.4	37.7

figure III.12: résultats de l'estimation de la période du système de Van der Pol, dont l'accélération est bruitée par une gaussienne de variance variable.

CHAPITRE IV

TRAITEMENT D'IMAGES TRIDIMENSIONNELLES

TRAITEMENT D'IMAGES TRIDIMENSIONNELLES

De nombreux systèmes d'acquisition d'images, en médecine notamment, permettent d'étudier une propriété physique d'un volume (la densité radiologique par exemple), en fournissant une série de coupes parallèles de ce volume. A partir de ces seules coupes (figure IV.1), il est assez difficile d'arriver à une interprétation qualitative des formes et des positions relatives des objets complexes qui constituent ce volume. Il est encore plus difficile de quantifier cette interprétation par des paramètres morphologiques ou "positionnels". C'est ce qui fait l'intérêt des méthodes de traitement et de visualisation d'images tridimensionnelles, dont l'intérêt ne se limite pas à la médecine. On trouvera dans [AMA.85] une revue détaillée des méthodes classiques de visualisation de volumes numériques.

L'intérêt pour un médecin de pouvoir exploiter des images véritablement tridimensionnelles recouvre plusieurs objectifs diagnostiques ou thérapeutiques. Pour le diagnostic, l'exploitation d'images tridimensionnelles permet d'améliorer la compréhension de la forme des objets étudiés, et éventuellement de quantifier celle-ci par des paramètres morphologiques quantitatifs comme le volume. De plus, les moyens d'investigation de la plupart des pathologies sont dès maintenant "multi-média" (Tomodensitométrie X (TDM), Imagerie par Résonance Magnétique (IRM), échographie, radios conventionnelles,...). Il est donc intéressant de pouvoir comparer les images produites par ces divers types d'examen. Or, cette comparaison est souvent délicate, car les plans de coupe ne sont pas les mêmes. De plus, il est souvent souhaitable de pouvoir comparer les images obtenues par des moyens "classiques" (radiographies conventionnelles) avec les images de TDM ou IRM (pour pouvoir par exemple déterminer sur une radio de crâne la projection d'une tumeur détectée en TDM). Enfin, l'estimation de la position relative des objets étudiés les uns par rapport aux autres, déjà intéressante sur le plan diagnostique, devient parfois capitale lors de l'exploitation thérapeutique des images 3D, afin de permettre de guider un geste chirurgical ou de bien focaliser une radiothérapie.

Face à ces objectifs, les systèmes de traitement d'images proposent toute une gamme d'"outils" [DAR.84] plus ou moins développés qui couvrent chacun un objectif précis parmi les nombreux objectifs rappelés plus haut, et dont les principaux sont les suivants: "morphoscopie" (visualisation de surfaces particulières du volume), synthèse de "pseudo-radios" (i.e. intégration de l'image

selon une direction donnée pour synthétiser l'image qu'aurait permis d'obtenir un système radiologique conventionnel), "édition de volumes" (segmentation interactive, dissection numérique, calcul d'intersections avec d'autres volumes,...), "reformattage" de coupes (calcul de coupes du volume par des plans quelconques, non parallèles aux plans des coupes initiales), calcul automatique de prothèses, combinaisons de données de l'examen avec les connaissances issues d'un atlas (atlas stéréotaxique par exemple)...

Pour développer ces outils, on a besoin de modèles, si l'on ne se contente pas d'une simple visualisation de la surface externe de l'objet étudié telle que celles que permettent des systèmes optiques variés (holographie[GRE.77], stéréovision[PIZ.84], miroirs à focale variable[RAW.68, AND.82, HAR.84, ROB.86,]...). Cette modélisation utilise des éléments unidimensionnels (l'ensemble des contours de l'objet [VAN.84]), des éléments bidimensionnels (facettes), ou des éléments tridimensionnels (voxels).

L'utilisation d'éléments bidimensionnels passe par une étape de segmentation du volume, qui se fait plan par plan [BOI.84, DAR.84, PIZ.85, EKO.87]. On obtient ainsi une suite de contours parallèles qui doivent être reliés les uns aux autres pour obtenir une triangulation, "optimale" selon certains critères (minimisation de la surface, maximisation du volume par exemple). L'objet à étudier est donc modélisé par sa surface externe représentée par des facettes triangulaires. Mais la détection des contours est parfois difficilement automatisable et la triangulation ne donne pas toujours les résultats souhaités.

La modélisation de l'objet par des éléments tridimensionnels peut également conduire à une modélisation de sa surface externe, ou permettre sa visualisation sans véritable modélisation.

Dans le premier cas, la surface est modélisée sous forme d'une liste de voxels ou de faces de voxels. Les voxels "frontière" sont déterminés par des méthodes de segmentation qui peuvent procéder plan par plan [UDU.82, UDU.85], comme dans le cas d'une modélisation par des éléments bidimensionnels, ou qui au contraire peuvent procéder d'une manière globale [ART.81].

Lorsqu'on se contente d'une visualisation sans véritable modélisation, on est amené à produire une image de synthèse: on calcule, en chaque point P d'un plan perpendiculaire à la direction d'observation, une valeur qui caractérise le premier point M de l'objet, situé sur la droite contenant P et portée par la direction d'observation choisie. Cette valeur peut être tout simplement la distance MP (algorithme du "Z-buffer"), et l'on peut parcourir les voxels du volume de diverses manières [DAR.84, FRI.85]; mais on peut aussi obtenir des visualisations plus réalistes par des techniques

de "lancer de rayons" [NEW.79], qui demandent l'estimation de la normale à la surface en P [HOH.86, TRO.87].

La modélisation d'objets représentés par des éléments tridimensionnels pose des problèmes de déplacement plus ou moins interactif à l'intérieur d'une quantité de données importante. C'est ce qui fait l'intérêt des méthodes de décomposition par arbre octal du volume, qui permettent d'utiliser les propriétés algorithmiques des arbres pour manipuler le volume. Le principe de cette décomposition est rappelé ci-dessous, sur son équivalent bidimensionnel, le "quad tree" [SAM.84]; dans cette figure, la décomposition hiérarchique s'arrête lorsqu'un carré est complètement à l'extérieur, ou complètement à l'intérieur de l'objet.

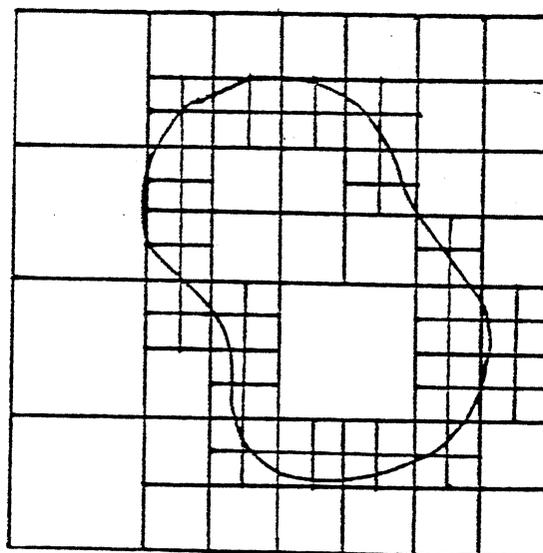


figure IV.2: Principe du codage d'une image binaire dans un quad-tree.

La décomposition du volume se fait d'une manière récursive: le volume est représenté par un arbre dont chaque feuille terminale correspond à une région homogène (au sens de certaines propriétés comme la présence ou l'absence d'un objet, sa densité, ...). Les noeuds de l'arbre sont associés à une région donnée de l'espace. On peut enregistrer, pour chaque feuille de l'arbre, des informations binaires (présence ou absence d'un objet), mais aussi des caractéristiques plus fines (valeur de la fonction, du gradient local, ...).

Ce modèle présente l'avantage de permettre une implémentation très rapide et efficace. Il a donné lieu à des applications très intéressantes dans le domaine médical [MEA.85, DAR.84]. Il est parfaitement adapté à certains des objectifs rappelés plus haut et, en particulier, à la visualisation de surfaces d'iso-densité (c'est-à-dire définies par $f(x,y,z) = \text{cte}$), par des techniques de "Z buffer" (représentation en niveaux de gris de la distance entre un point visible de la surface et un observateur).

Cependant, cette représentation discrète n'est pas parfaitement adaptée aux objectifs qui requièrent le calcul de primitives locales ou régionales, car deux points voisins spatialement peuvent être assez éloignés dans la représentation arborescente. Or, de telles primitives sont indispensables pour utiliser des techniques de visualisation de surface plus "réalistes" que le Z buffer (lancer de rayons par exemple, qui exige le calcul de la normale en tout point de la surface).

De même, une segmentation qui ne se contente pas d'un simple seuillage, par exemple une segmentation par détection de frontières, impose le calcul d'opérateurs différentiels jusqu'à l'ordre 2. On peut, bien sûr, faire cohabiter deux types de représentation: une première modélisation très simple, l'image 3D représentée par la série de coupes parallèles, peut permettre de calculer en tout point la valeur des opérateurs différentiels dont on pourra avoir besoin. Cette valeur peut ensuite être elle-même stockée à l'intérieur d'un arbre octal. Mais on conçoit aisément que la juxtaposition de ces deux représentations nuise à leur efficacité.

Le modèle octal discret présente d'ailleurs d'autres inconvénients. L'absence d'interpolation rend nécessaire l'acquisition d'un grand nombre de coupes, car, dans l'idéal, il faudrait disposer d'une résolution spatiale équivalente dans toutes les dimensions. Or, les configurations actuelles permettent d'acquérir typiquement des images constituées de 512×512 pixels, et l'on ne pourrait pas descendre dans le plan d'acquisition au-dessous d'une résolution de 128×128 pixels, pour garder une image d'une qualité convenable. Mais un volume de 128^3 pixels est déjà difficile à manipuler. De plus, l'acquisition de 128 coupes parallèles pose des problèmes de dose de rayons X administrée au patient et de surchauffe du tube radiologique.

D'autre part, le modèle octal est très sensible à la translation. Ceci rend difficile son utilisation avec une base de connaissances d'un atlas, où le problème consiste à retrouver, dans les images réelles du patient, des données théoriques anatomiques individualisées.

La méthode de modélisation que nous décrivons dans ce chapitre utilise une représentation par des éléments tridimensionnels continus, des splines tricubiques. Le caractère continûment dérivable de

cette représentation évite les inconvénients des représentations discrètes présentées plus haut, en permettant une estimation stable de primitives locales ou régionales. Elle fournit un cadre commun pour les opérations de visualisation et de segmentation 3D d'objets dont les surfaces seront également représentées par des fonctions splines.

Nous étudierons tout d'abord l'algorithme d'obtention d'une telle représentation pour obtenir une visualisation réaliste de surface (morphoscopie) par une technique de lancer de rayons. Dans ce premier paragraphe, les surfaces seront représentées, mais pas modélisées. Dans un deuxième paragraphe nous modéliserons ces surfaces en obtenant directement les coefficients d'une fonction spline comme solution d'une équation différentielle. Nous verrons ensuite comment cette méthode de segmentation nouvelle permet de décrire des volumes constitués de structures "fibrillaires". Enfin, la méthode de détermination des points frontières par généralisation en dimension 3 du point d'inflexion sera présentée.

IV.1 - MORPHOSCOPIE REALISTE D'UN VOLUME MODELISE PAR DES FONCTIONS SPLINES TRICUBIQUES

Les données initiales sont m coupes qui correspondent chacune à la discrétisation aux sommets d'une grille régulière d'un signal bidimensionnel. Obtenir une modélisation continue du volume correspondant par des splines tricubiques consiste à approximer ces m coupes par une fonction f .

$$f_k(x_i, y_j), \begin{cases} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \\ k = 1, \dots, m \end{cases} \rightarrow f(x, y, z).$$

f approxime les f_k "au mieux" dans un sens que l'on précisera tout à l'heure, et devra être facile à calculer aux points d'un maillage régulier et de classe ϵ^2 . Nous verrons tout d'abord comment obtenir f , puis, connaissant f , comment l'utiliser pour la visualisation de surfaces d'isodensité (qui vérifient $f(x, y, z) = \text{cte}$).

soit

(IV.4)

$$\lambda_{i+1} + \frac{\lambda_{i+2}}{4-\gamma} = \frac{b_{i+1}-\gamma_i}{4-\gamma} = \gamma_{i+1}$$

Choisissons maintenant γ de telle sorte que :

(IV.5)
$$\gamma = \frac{1}{4-\gamma}$$

soit $\gamma^2 - 4\gamma + 1 = 0$, équation qui admet 2 racines distinctes $2 \pm \sqrt{3}$.

On obtient alors une relation de récurrence (IV.6) $\lambda_i + \gamma\lambda_{i+1} = \gamma_i$, valable pour $1 \leq i \leq n-1$.

En $n-1$, on a donc simultanément

(IV.7)
$$\begin{cases} \lambda_{n-1} + \gamma\lambda_n = \gamma_{n-1} \\ b\lambda_{n-1} + 4\lambda_n = b_n \end{cases}$$

Choisissons $b = 4\gamma$; la dernière équation du système (IV.7) s'écrit alors

(IV.8) $\gamma\lambda_{n-1} + \lambda_n = \beta_n$, et le même raisonnement que celui présenté plus haut permet d'obtenir une relation de récurrence (IV.9) $\gamma\lambda_{i-1} + \lambda_i = \beta_i$. Mais, cette fois, λ_n a pu être déterminé à partir du système de deux équations à deux inconnues (IV.7).

L'algorithme correspondant consiste donc simplement à évaluer les γ_i par la relation de récurrence

(IV.10) $\gamma_{i+1} = \gamma(b_{i+1} - \gamma_i)$, à résoudre le système (IV.7) et à revenir à la solution par la relation

(IV.8) , en tenant compte dans (IV.9) de ce que (IV.11) $\beta_{i-1} = \gamma(b_{i-1} - \beta_i)$.

On recherche 3 matrices tridiagonales A, B et C telles que $C_p C_p^t = ABC$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ 1 & a & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & a & 1 \\ & & & & & 1 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b & 1 & & & \\ 1 & b & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & b & 1 \\ & & & & & 1 & b \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c & 1 & & & \\ 1 & c & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & c & 1 \\ & & & & & 1 & c \end{pmatrix}$$

ABC est bien une matrice bande symétrique, dont les termes non nuls valent :

$$\begin{cases} ABC_{i,i} = 2(a+b) + c(ab+2) \\ ABC_{i,i+1} = (a+b)c + b + 3 \\ ABC_{i,i+2} = c + a + b \\ ABC_{i,i+3} = 1 \end{cases}$$

Posons $S = a+b$, $P = ab$. $ABC = C_p C_p^t$ s'écrit alors

$$\begin{cases} m_1 = 2S + c(P+2) \\ m_2 = Sc + P + 3 \\ m_3 = c + S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = m_3 - S \\ c = (m_2 - P + 3)/S \\ c = (m_1 - 2S)/(P+2) \end{cases}$$

Ou encore,

$$\begin{cases} c = m_3 - S \\ (m_3 - S)S = m_2 - P - 3 \\ (m_3 - S)(P+2) = m_1 - 2S \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = m_3 - S \\ P = \frac{m_1 - 2S}{m_3 - S} - 2 \\ S^3 - 2m_3 S^2 + S(m_3^2 - 3 + m_2) + m_3(3 - m_2) - 2m_3 + m_1 = 0 \end{cases}$$

L'équation du 3ème degré en S admet 3 racines réelles. L'ensemble des solutions est présenté dans le tableau suivant:

S et P	a	b	c
S = 10.71610 P = 20.06368	2.417808	8.298293	99.2839
S = 8.298293 P = 19.58669	racines complexes : 4.14917 ± i x1.539894		101.7017
S = 107.5824 P = 823.9568	8.299043	99.28336	2.417603

Pour résoudre $C_p C_p^t \alpha = C_p z$, on résoud successivement

$$A\gamma = C_p z$$

puis

$$B\beta = \gamma$$

et enfin

$$C\alpha = \beta$$

Chaque résolution peut se faire par la méthode de résolution d'un système tridiagonal présentée à la section précédente. En effet, le raisonnement qui a été appliqué à la résolution du système de matrice

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & \diagdown & \diagdown & \diagdown \\ & & & & 1 & 4 \\ & & & & & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

peut s'appliquer d'une manière identique à la résolution d'un système de matrice

$$\begin{pmatrix} a & 1 & & & \\ 1 & a & 1 & & \\ & \diagdown & \diagdown & \diagdown & \\ & & 1 & a & 1 \\ & & & \diagdown & \diagdown & \diagdown \\ & & & & 1 & a \\ & & & & & 1 & a \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, γ doit être solution de $\gamma = \frac{1}{a-\gamma}$, soit $\gamma = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4}}{2}$.

Le discriminant de cette équation est positif pour toutes les valeurs de a, b et c calculées plus haut. La méthode précédente s'applique donc sans grandes modifications. Le coût global de la résolution est donc $3(2n \text{ additions} + 2n \text{ multiplications})$, soit $6n$ additions et $6n$ multiplications.

En résolvant le système de cette manière, on contrôle mal les conditions aux bords, mais on a vu au Chapitre I, que pour les images que nous traitons, l'approximation aux bords n'avait pas beaucoup d'importance, et que le résultat final n'était pas perturbé par des conditions aux bords beaucoup plus contraignantes (périodicité de la solution).

IV.1.1.3. - Lissage et interpolation en 3 dimensions

Les images que nous avons à traiter ont une très bonne résolution spatiale (512 x 512 pixels). Par contre, le nombre de coupes dont on dispose est relativement limité (60 au maximum). Il y a donc une inhomogénéité entre la résolution spatiale dans 2 dimensions par rapport à la résolution spatiale dans la 3^{ème} dimension.

Ceci va influencer sur la manière dont le volume discret va être modélisé par les splines : il faudrait interpoler dans la 3^{ème} dimension, mais réaliser un faible lissage dans les deux autres dimensions. Il faut donc pouvoir résoudre simultanément un problème d'interpolation et un problème de lissage.

On a vu au Chapitre I que le lissage par des bicubiques amenait à résoudre le système (I.17)

$C_p C_p^t \propto C_p C_p^t = C_p z C_p^t$. La notation sous cette forme est encore possible, car α est une matrice à 2 dimensions. Le même problème en dimension 3 ne peut pas s'écrire de manière aussi simple et il faut définir les notations suivantes :

soient :

$$s, s_1, t, t_1, u, u_1 \in \mathbb{N}$$

$$A \in \mathbb{R}^{s \times t \times u}$$

$$B \in \mathbb{R}^{s_1 \times s}, C \in \mathbb{R}^{t_1 \times t}, D \in \mathbb{R}^{u_1 \times u}.$$

On définit

$$(A, B)_1, (A, C)_2, (A, D)_3 \in \mathbb{R}^{s_1 \times t_1 \times u_1} \text{ par :}$$

$$(A,B)_1(i,j,k) = \sum_{m=1}^s B(i,m) A(m,j,k)$$

$$(A,C)_2(i,j,k) = \sum_{m=1}^t C(j,m) A(i,m,k)$$

$$(A,D)_3(i,j,k) = \sum_{m=1}^u D(k,m) A(i,j,m)$$

Soit n^2 le nombre de pixels dans chaque plan de coupe (ici, $n=512$), m le nombre de coupes (inférieur à 60).

Le volume à étudier est un parallélépipède de \mathbb{R}^3 , et l'on peut sans nuire à la généralité supposer que ce parallélépipède est en fait $[1,n] \times [1,n] \times [1,m]$, le volume initial étant discrétisé dans une matrice z de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, aux sommets de la grille $\Lambda \times \Lambda \times \mu$, où $\Lambda = \{i, 1 \leq i \leq n\}$, $\mu = \{i, 1 \leq i \leq m\}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$, $h_n = n/p$, $h_m = m/p$.

Notons $\lambda_p = \{(i-1)p+1, 1 \leq i \leq h_n\}$ et $\mu_p = \{(i-1)p+1, 1 \leq i \leq h_m\}$.

Soit $S_{\lambda_p, \lambda_p, \mu_p}$ l'espace des splines tricubiques définies sur $\lambda_p \times \lambda_p \times \mu_p$, dont on connaît la base, obtenue comme produits tensoriels et translations des éléments de base unidimensionnels $B_{p,k}$ définis au chapitre I.

On recherche $x \in S_{\lambda_p, \lambda_p, \mu_p}$ qui minimise

$$(IV.12) \quad \|x-z\|^2 = \sum_{i,j=1}^n \sum_{k=1}^m (x_{ijk} - z_{ijk})^2, \text{ où l'on note } x_{ijk} = x(i,j,k).$$

Soit α la matrice des coefficients de x sur les B-splines tricubiques. Notons, comme au chapitre I, $C_{p,n}$ la matrice bande correspondant à l'évaluation des B-splines aux sommets de la grille initiale des données en x et en y :

$$C_{p,n}(k,i) = B_{p,k}(i), \begin{cases} k = 1, \dots, h_n \\ i = 1, \dots, n \end{cases}$$

On définira de même $C_{p,m}$ par :

$$C_{p,m}(k,i) = B_{p,k}(i), \begin{cases} k = 1, \dots, h_m \\ i = 1, \dots, m \end{cases}$$

Avec ces notations,

$$(IV.13) \quad \text{Min } \|x-z\|^2 = \text{Min } \|((\alpha, C_{p,n})_1, C_{p,n})_2, C_{p,m})_3 - z\|^2.$$

D'où en dérivant (IV.13) :

Caractérisation IV.1.1.3.

La spline tricubique définie aux moindres carrés par le système (IV.12) a pour coefficients sur les B-splines tricubiques le vecteur tridimensionnel α solution de (IV.14)

$$((\alpha, C_{p,n} C_{p,n}^t)_1, C_{p,n} C_{p,n}^t)_2, C_{p,m} C_{p,m}^t)_3 = ((z, C_{p,n}^t)_1, C_{p,n}^t)_2, C_{p,m}^t)_3.$$

Cette formulation a l'avantage de montrer la séparabilité du système. Notons en effet

$$A \in \mathbb{R}^{h_n} \times \mathbb{R}^{h_n} \times \mathbb{R}^{h_m} \quad \text{le membre droit de (IV.14).}$$

On résoud successivement

$$(\gamma, C_{p,m} C_{p,m}^t) = A,$$

puis

$$(\beta, C_{p,n} C_{p,n}^t) = \gamma,$$

et enfin

$$(\alpha, C_{p,n} C_{p,n}^t) = \beta,$$

A chaque étape, on est amené à résoudre un système linéaire dont la matrice bande a été étudiée au paragraphe précédent, la résolution se faisant avec la méthode proposée.

Dans ce cas, le coût de résolution du système est alors :

$$2(6n \text{ additions} + 6n \text{ multiplications}) + 6m \text{ additions} + 6m \text{ multiplications.}$$

Il faut remarquer que l'obtention du terme droit du système n'est en fait qu'une convolution, mais qu'elle est assez longue à obtenir sur un ordinateur classique, alors qu'elle pourrait facilement être accélérée sur un ordinateur spécialisé.

Dans des conditions réelles d'utilisation, l'obtention de la modélisation continue du volume demande environ 20 minutes de CPU sur VAX 11/780 pour 56 images 512 x 512.

Remarque:

On vérifie que la caractérisation (IV.1.1.3) peut être modifiée si dans l'une des dimensions on souhaite remplacer le lissage aux moindres carrés par une interpolation.

Si par exemple, on souhaite interpoler dans la troisième dimension, on définit $M \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ par $M(k,i) = B(k,i)$, $\begin{cases} k = 1, \dots, m \\ i = 1, \dots, m \end{cases}$, où B est la B-spline définie au chapitre I.

La représentation continue du volume est alors recherchée dans $S_{\lambda_p, \lambda_p, \mu}$, espace des splines

tricubiques définies sur $\lambda_p \times \lambda_p \times \mu$ et obtenue comme solution du système

(IV.15)

$$((\alpha, C_{p,n} C_{p,n}^t)_1, C_{p,n} C_{p,n}^t)_2, M)_3 = ((z, C_{p,n}^t)_1, C_{p,n}^t)_2 .$$

Le coût de la résolution de ce système est donc cette fois :

$$2(6n \text{ additions} + 6n \text{ multiplications}) + 2m \text{ additions} + 2m \text{ multiplications.}$$

IV.1.2 - Visualisation de surfaces d'isodensité - Reformattage de coupes - Mode "pseudo-radio"

A l'issue de la phase de modélisation, on dispose donc de coefficients α_{ijk} qui permettent de calculer d'une manière continue $f(x,y,z) = \sum \alpha_{ijk} B_i(x) B_j(y) B_k(z)$. Les B-splines ayant un support de largeur 4, chaque point est en fait défini par $4^3 = 64$ fonctions de base.

A partir de cette modélisation continue, le "reformattage" de coupes est trivial. Il s'agit de recalculer l'intersection d'un plan de coupe quelconque avec le volume étudié. Soit $M(x,y,z)$ un point de ce plan, u et v deux vecteurs de base de ce plan. Calculer la nouvelle coupe revient en fait à calculer

$f(\lambda u + \mu v + M)$ en tous les points d'une grille régulière en λ et μ . Pour accélérer le calcul, les valeurs de la spline de base B sont discrétisées sur 400 points. L'évaluation d'un point de la nouvelle image demande donc $64 \times 3 = 192$ multiplications et 64 additions. Dans la pratique, le calcul d'une coupe en 256×256 dans une direction quelconque se fait en moins de 30 secondes de temps utilisateur. On vérifie (cf. figures IV.3 à IV.5) que des résultats satisfaisants sont obtenus même avec un très faible nombre de coupes (18). Sur la figure (IV.5), l'image est synthétisée dans un plan perpendiculaire au plan d'acquisition, ce qui signifie que sur, chaque colonne, on ne disposait en fait que de 18 pixels données pour reconstituer l'image.

Le mode "pseudo-radio" est lui aussi facile à obtenir, lorsque la direction d'intégration est portée par l'un des trois vecteurs de base de \mathbb{R}^3 .

Ainsi par exemple, si l'on intègre selon la troisième dimension, on est amené à calculer, en tous points d'une grille régulière en λ et μ :

$$g(\lambda, \mu) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda, \mu, v) dv = \sum \alpha_{ijk} B_i(\lambda) B_j(\mu) \int_{\mathbb{R}} B_k(v) dv .$$

Les B-splines ayant un support borné, $\int_{\mathbb{R}} B_k(v) dv$ est une constante, sauf sur les "bords" de l'image; le calcul est donc très facile.

Dans le cas général, par contre, la synthèse de l'image serait plus complexe. Soit w un vecteur de la direction d'intégration, u et v une base du plan normal à w . Notons $u=(u_x, u_y, u_z)$, $v=(v_x, v_y, v_z)$, $w=(w_x, w_y, w_z)$. Il faut cette fois calculer :

$$g(\lambda, \mu) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda u_x + \mu v_x + v w_x, \lambda u_y + \mu v_y + v w_y, \lambda u_z + \mu v_z + v w_z) dv .$$

Ce qui devient:

$$g(\lambda, \mu) = \sum \alpha_{ijk} \int_{\mathbb{R}} B_i(\lambda u_x + \mu v_x + \nu w_x) B_j(\lambda u_y + \mu v_y + \nu w_y) B_k(\lambda u_z + \mu v_z + \nu w_z) d\nu .$$

L'expression située sous l'intégrale est polynômiale par morceaux, de degré 9 en ν . L'évaluation de l'intégrale se ramène donc au calcul d'un polynôme de degré 10. Pour que cette évaluation en tous les points d'une grille régulière soit rapide, il faudrait pouvoir adapter l'évaluation de ces polynômes de degré 10 à la géométrie du problème, de manière à éviter les exponentiations.

Pour visualiser les surfaces d'isodensité, il faut résoudre $f(x,y,z) = \text{cte}$. Plus précisément, on se donne une direction d'observation, et l'on voudrait synthétiser l'image que verrait un observateur qui regarderait de cette direction l'objet d'équation $f(x,y,z) = \text{cte}$, si celui-ci était éclairé par un éclairage situé dans une direction à définir. Les techniques les plus réalistes pour de telles synthèses sont les techniques de lancer de rayons [NEW.79]. Ces techniques nécessitent de connaître la normale à la surface en tout point de celle-ci visible depuis la direction d'observation choisie. Sous leur forme la plus simple, elles se ramènent à représenter par une échelle de gris le produit scalaire entre la direction d'observation et la normale à la surface.

Soit n le vecteur unitaire de la direction d'observation, u et v formant avec n un repère orthonormé, π un plan porté par u et v tangent au parallélépipède dans lequel se trouve le volume étudié. Pour synthétiser l'image de la surface d'isodensité étudiée, on place une grille sur ce plan π . Le problème est alors de calculer, en tout point $M(\lambda, \mu)$ de cette grille, le résultat du lancer de rayons. Il faut donc connaître en tout point $M(\lambda, \mu)$ la valeur de la normale à la surface d'isodensité au point d'intersection P entre cette surface et la droite D normale à π passant par M (figure IV.6).

Il faut donc calculer l'intersection entre D et la surface de l'objet à étudier. La méthode la plus simple consiste à discrétiser l'espace intersection entre D et le parallélépipède dans lequel se trouve le volume étudié. En chaque point de cette discrétisation, on évalue $(f-\text{cte})$, et on considère que le point recherché est le premier point où le signe de $(f-\text{cte})$ change.

Cette méthode est bien sûr très coûteuse : si l'on veut des images de bonne qualité, il faut discrétiser le plan π sur au moins 256×256 pixels, et la droite D sur 256 points. Ceci amène "en moyenne" à évaluer la fonction sur $256 \times 256 \times 128 = 8$ Méga pixels. Les temps de calcul correspondants sont bien sûr longs : environ 20 minutes de CPU sur VAX 11/780 pour le calcul de la normale dans une

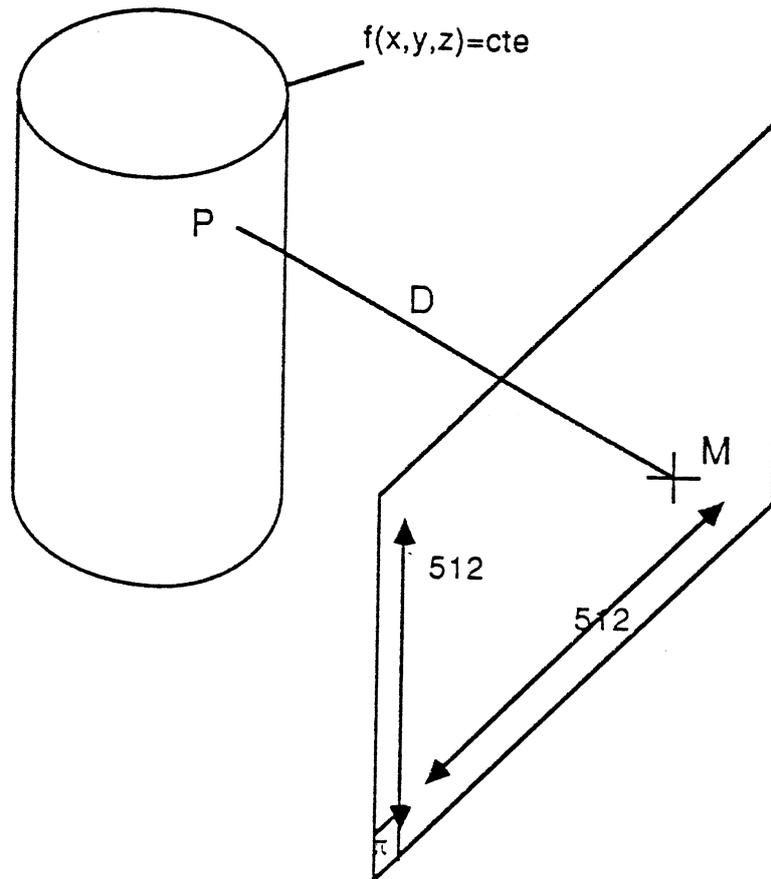


figure IV.6: principe de la détermination des points de la surface de l'objet à visualiser

direction d'observation quelconque. Par contre, la synthèse de l'image de lancer de rayons après cette étape de calcul de la normale se fait en quelques dizaines de secondes.

Les figures IV.7 à IV.12 représentent les résultats de cet algorithme sur le traitement de 56 coupes tomodensitométriques d'une patiente de chirurgie plastique et maxillo-faciale. On peut bien sûr tourner autour de l'objet et le représenter en densité osseuse ou cutanée. Pour mettre en évidence les relations entre les os et les parties molles, on peut représenter ces dernières en transparence et superposer image osseuse et image cutanée. La figure IV.13 montre le résultat qu'aurait permis d'obtenir une technique de Z buffer, moins réaliste, sur les mêmes données.

Les coupes initiales étaient des coupes de 5mm d'épaisseur, et l'écart entre deux coupes successives était de 2mm. L'examen se fait en une vingtaine de minutes, mais, pour le rendre encore plus facile, il serait intéressant de pouvoir diminuer le nombre de coupes. Le même algorithme a donc été lancé en prenant comme données initiales une coupe sur deux, soit 28 coupes. Les résultats sont présentés dans les figures IV.17 et IV.18. La qualité visuelle diminue un peu, mais les images restent très "lisibles". En particulier, on conçoit qu'à partir de ces images il soit possible de calculer des paramètres positionnels, la résolution possible avec les 56 coupes n'étant nécessaire que pour des diagnostics très fins.

On peut facilement améliorer le temps de calcul lorsque les structures étudiées sont suffisamment épaisses, en faisant une première détermination du point d'intersection avec une résolution plus grossière, puis en affinant la recherche au voisinage de la première approximation d'un point d'intersection. Si l'on ne veut pas passer à côté de structures fines, on ne peut pas gagner plus d'un facteur 2 dans le coût par cette méthode.

La deuxième manière de procéder consiste à calculer un premier point P d'intersection, puis à utiliser la position de ce point sur la droite D lors de la recherche du point d'intersection correspondant à un point M' voisin immédiat du point M. Les dérivées partielles de f en P ont dû être calculées pour la détermination de la normale nécessaire au lancer de rayons. Elles sont donc disponibles pour guider la recherche du point P' correspondant au point P.

On peut donc prédire la position de P' et la vérifier. L'estimation de P' ne sera le plus souvent pas différente de sa valeur réelle, de plus de 1 ou 2 pixels, dans un sens ou dans l'autre. La fonction ne devra donc être calculée qu'au plus pour 5 points au lieu de 256, sauf cas particuliers correspondant à des points ou des lignes de "rebroussement", dont le nombre est faible devant le nombre de points de la grille sur laquelle est synthétisée l'image. On peut donc espérer gagner par cette méthode un

facteur important dans la synthèse d'une image dans une direction donnée.

On peut encore voir le problème différemment, en séparant l'étape de segmentation et l'étape de visualisation. On peut en effet admettre un temps de segmentation relativement long, si la visualisation est rapide. Il est alors tout à fait envisageable de réaliser la détection des points de la surface non plus dans une géométrie cartésienne, mais dans une géométrie cylindrique ou sphérique.

Prenons l'exemple d'une géométrie sphérique. On place le centre de la sphère au barycentre de l'image étudiée, et l'on détermine les points d'intersection entre les rayons issus du centre de cette sphère et la surface d'isodensité. Chaque rayon peut bien sûr couper la surface en plusieurs points. La représentation de la surface se fait en discrétisant assez finement les coordonnées sphériques (sur 1024 x 1024 par exemple) et en enregistrant en chaque point de cette grille la ou les valeurs des coordonnées du point d'intersection ainsi que la valeur de la normale en ce point. La visualisation consiste alors simplement à parcourir cette grille pour déterminer, étant donnée une direction d'observation, quels seront les points visibles et que vaudra la normale en ces points. Les seules opérations que l'on doit effectuer sont des comparaisons. Cet algorithme devrait donc être extrêmement rapide. Il a bien sûr pour conséquence une légère déformation géométrique, due au fait que, contrairement au cas précédent, on n'a pas une direction d'observation à laquelle tous les rayons soient parallèles; on pourrait donc observer un effet "grand angle".

IV.2 - MODELISATION DES SURFACES D'ISODENSITE COMME SOLUTION D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE

L'inconvénient des méthodes présentées plus haut est qu'elles permettent la visualisation des surfaces d'isodensité, mais pas leur modélisation. Or celle-ci est souvent indispensable: dans l'application à la chirurgie plastique et maxillo-faciale présentée plus haut, pour caractériser par des paramètres morphologiques les "tissus mous" (compris entre la peau et les os), il est nécessaire de connaître mathématiquement les deux surfaces qui les limitent. Par ailleurs, connaître analytiquement la surface à représenter est une alternative intéressante pour la visualiser rapidement.

La surface intéressante est définie par l'équation $f(x,y,z) = cte$. La déterminer analytiquement revient donc à suivre une "surface de niveau" dans un espace de dimension 3. Diverses techniques de suivi de courbes de niveau existent (cf en particulier [WEN.85] pour une technique de suivi de courbes de niveau d'une surface représentée de manière continue). On peut considérer que ce

problème est un cas particulier de la détermination de l'intersection de surfaces, problème pour lequel de nombreuses solutions existent [LAC.87]. Nous avons choisi de construire un système d'équations différentielles dont la solution stable est la surface que l'on recherche. Cette manière de procéder se rapproche d'une technique plus générale de détermination de l'intersection de surfaces proposée par Philipps et Odell [PHI.84].

L'intérêt de l'application de telles techniques dans un problème de traitement d'images est qu'elles fournissent une solution originale au problème de segmentation par détection de frontières. On a vu au Chapitre I que, après l'étape de détermination des points frontières, il fallait écrire un algorithme de suivi de ces points frontières. Ici, ces deux étapes n'en font qu'une : résoudre l'équation différentielle fournit directement les points frontières et une modélisation de leurs relations entre eux, par le biais de la variable de résolution de l'équation différentielle. Cette méthode a été utilisée dans un premier temps pour résoudre $f = \text{cte}$, mais elle pourrait tout aussi bien s'appliquer à la résolution de $Hf = 0$, où H serait un opérateur proche de celui défini au Chapitre I pour caractériser les points frontières.

IV.2.1 - Construction de la surface d'isodensité par un système d'équations différentielles.

Pour comprendre comment se pose ce problème en dimension 3, examinons tout d'abord comment il se pose en dimension 2.

On cherche donc à trouver une ligne qui vérifie $f(x,y) = \text{cte}$.

Cette ligne est représentée en coordonnées paramétriques par l'équation

$$(IV.13) \quad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad \text{pour tout } t \in [a,b]$$

Elle représente donc l'intégrale de l'équation différentielle

$$(IV.14) \quad x'(t) \frac{\partial f}{\partial x} + y'(t) \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

dont une solution particulière est

$$(IV.15) \quad \begin{cases} x'(t) = \frac{\partial f}{\partial y} \\ y'(t) = -\frac{\partial f}{\partial x} \end{cases} \quad \text{c'est à dire le système hamiltonien de fonction énergie } f.$$

L'intégration de ce système d'équations différentielles à partir d'un point vérifiant $f(x_0, y_0) = \text{cte}$ devrait donc fournir l'équation paramétrée de la courbe de niveau. Malheureusement, ce système n'est manifestement pas stable, car une perturbation qui s'écarte de la ligne de niveau étudiée n'a aucun moyen d'être corrigée. Pour rendre le système stable, il faut lui ajouter un terme correcteur qui ramène la trajectoire sur la ligne de niveau étudiée selon la ligne de plus grande pente de la fonction $(f-\text{cte})^2$.

Le système d'équations différentielles devient donc

$$(IV.16) \quad \begin{cases} x'(t) = \frac{\partial f}{\partial y} - \beta \frac{\partial f}{\partial x} (f-\text{cte}) \\ y'(x) = -\frac{\partial f}{\partial x} - \beta \frac{\partial f}{\partial y} (f-\text{cte}) \end{cases}$$

Le terme β représente un facteur qui permet d'équilibrer le terme de "suivi de contour" et le terme de "force de rappel" vers le bon contour.

En dimension 3, la solution recherchée est cette fois une surface. Compte tenu de la géométrie de notre problème, il est naturel de la rechercher en coordonnées "semi-paramétriques"

$$(IV.17) \quad \begin{cases} x = x(t, z) \\ y = y(t, z) \\ z = z \end{cases}$$

Cette formulation montre immédiatement que l'on peut se ramener à plusieurs problèmes bidimensionnels, qui correspondent aux diverses valeurs de z . Comme nos données sont obtenues dans des plans parallèles et tous perpendiculaires à l'axe des z , c'est dans ces plans que l'on résoudra l'équation. Les diverses solutions devront ensuite être reliées. Ce problème, délicat avec

des représentations discrètes, prend ici une forme relativement simple. On utilise à nouveau l'information a priori selon laquelle les surfaces étudiées sont "fermées en t". Pour tout z, on arrêtera donc le processus de résolution de l'équation différentielle lorsque la courbe se refermera sur elle-même. Soit t_n la valeur du paramètre correspondant au dernier point. Posons $t_{n+1} = t_n + (t_n - t_{n-1})$; on peut alors "normaliser" les paramètres en posant $t'_i = t_i / t_{n+1}$; les paramètres obtenus sont alors compris entre 0 et 1, et donc comparables d'une courbe à l'autre (le paramètre du premier point de résolution de l'équation différentielle est pris égal à 0). Ce processus est répété pour chaque courbe. Pour connaître les conditions initiales sur chaque coupe, on détermine auparavant la courbe contenue dans un plan vertical quelconque (par exemple un plan normal à l'axe des x), en résolvant l'équation différentielle

$$(IV.18) \quad \begin{cases} y'(t) = \frac{\partial f}{\partial z} - \beta \frac{\partial f}{\partial y} (f\text{-cte}) \\ z'(t) = -\frac{\partial f}{\partial y} - \beta \frac{\partial f}{\partial z} (f\text{-cte}) \end{cases}$$

On remarquera que, dans chaque plan, on connaît la spline cubique d'interpolation qui passe par les $x(t_i)$ et les $y(t_i)$ sans calcul supplémentaire, puisque on connaît $x(t_i)$ et $x'(t_i)$, de même que $y(t_i)$ et $y'(t_i)$. On choisit donc une discrétisation régulière sur $[0,1]$ et on utilise cette spline d'interpolation pour calculer x , x' , y et y' aux sommets de cette grille, ceci pour chaque coupe. On peut alors interpoler ces valeurs dans la direction de l'axe z pour obtenir la surface sous la forme d'une double bicubique paramétrée,

$$(IV.19) \quad \begin{cases} x = x(t,z) \\ y = y(t,z) \\ z = z \end{cases}$$

Il est alors facile d'utiliser cette représentation pour calculer des paramètres positionnels ou pour visualiser la surface correspondante.

Les figures IV.19 et IV.20 montrent le résultat de l'application de cette technique au crâne déjà étudiée dans le paragraphe précédent. L'équation différentielle a été résolue par la méthode de Gear [GEA.71], car les variations très rapides d'intensité rendent ce problème très ("stiff"). Diverses

expérimentations numériques ont amené à remplacer β par

$$\frac{\beta}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + 1}}$$

IV.2.2. - Description de volumes "fibrillaires"

De nombreux volumes, et pas seulement dans des problèmes médicaux, sont constitués de structures arborescentes que l'on peut décomposer en éléments fondamentaux topologiquement équivalents à des cylindres. Repérer et paramétrer ceux-ci est un problème délicat lorsque les données dont on dispose sont des coupes parallèles. En particulier la présence d'embranchements et de coudes rend difficile la description du volume, ainsi que le montre la figure IV.21.

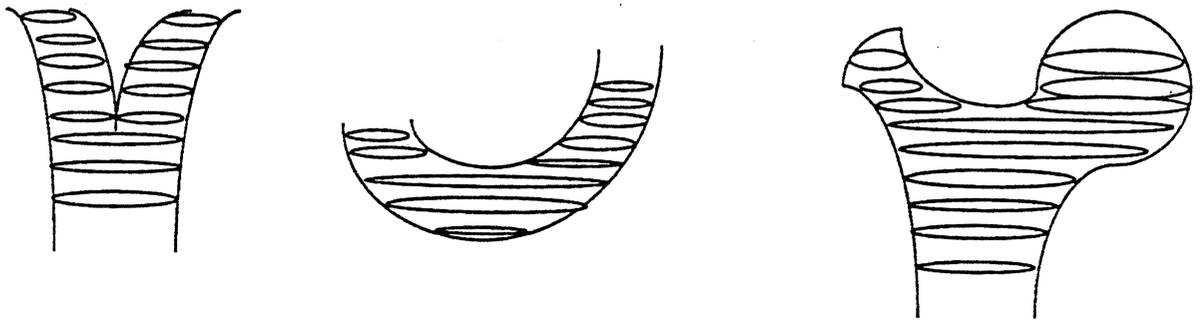


figure IV.21: étude par des coupes parallèles de volumes "fibrillaires"

Repérer la différence de structure entre un embranchement et un coude n'est pas facile, si l'on traite séparément les coupes, car, pour ces deux structures, il existe une coupe où elles sont représentées par 2 contours, alors que, sur la coupe suivante, elles ne sont plus définies que par un seul contour.

De telles situations se retrouvent dans des cas de vaisseaux, de bronches, de certaines structures osseuses (un fémur par exemple ou dans des images des structures ventriculaires du cerveau, de réseaux dans des milieux poreux,...)

Nous allons montrer que le formalisme présenté plus haut est applicable dans ces situations et permet de décrire ces objets.

La stratégie retenue consiste à essayer de décrire ces objets en les décomposant en des "cylindres généralisés", c'est-à-dire des surfaces paramétrables sous la forme

$$\begin{cases} x = x(t,u) \\ y = y(t,u) \\ z = z(t,u) \end{cases} \quad \begin{cases} t \in [0,1] \\ u \in [0,1] \end{cases} \quad \text{et } \forall u, \quad \begin{cases} x^{(i)}(0,u) = x^{(i)}(1,u) \\ y^{(i)}(0,u) = y^{(i)}(1,u) \\ z^{(i)}(0,u) = z^{(i)}(1,u) \end{cases}$$

Pour obtenir cette description, on part d'un point de la première coupe appartenant à la surface à décrire. On suit ensuite le contour intersection entre la surface à modéliser et le plan vertical passant par ce point et contenant la normale à la surface en ce point. Cette opération est réalisée par une technique de résolution d'équation différentielle analogue à celle présentée au paragraphe précédent. La variable d'intégration de cette équation différentielle va représenter le premier paramètre de description de la surface. On normalise ses variations entre 0 et 1.

En chacun des points d'intersection de cette courbe avec les plans dans lesquels sont connues les coupes parallèles, on reprend le suivi de contours, mais cette fois dans un plan normal à l'axe des z . Les contours sont cette fois fermés. La figure IV.22 montre les résultats que l'on obtiendrait dans les 3 cas étudiés plus haut.

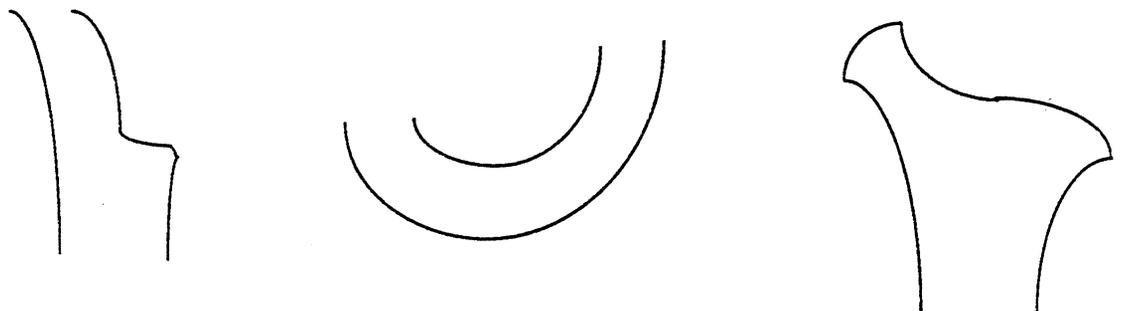


figure IV.22: résultats d'une première décomposition en cylindres généralisés de volumes "fibrillaires"

Le cas du coude est le seul où la totalité de la structure puisse être obtenue immédiatement. Ce n'est pas surprenant compte tenu de son équivalence topologique avec un cylindre. Dans le cas de l'embranchement, on obtient une partie de la structure, topologiquement équivalente à un cylindre, de même que dans le cas du fémur. Pour ces deux surfaces, les parties manquantes seront obtenues lors d'une nouvelle application du processus de segmentation, qui conduira aux structures suivantes :



figure IV.23: résultats du deuxième passage de la décomposition en cylindres généralisés de l' "embranchement" et du "fémur"

Cette technique est en cours de test sur des images du genou et de hanches obtenues en Imagerie par Résonance Magnétique et en tomодensitométrie X. Pour décrire entièrement un volume par cette technique, il faut chercher systématiquement toutes les surfaces d'isodensité. L'image est alors représentée par un ensemble de surfaces tubulaires dont il faut préciser les relations topologiques. Bien entendu, cette description s'adapte particulièrement bien à la visualisation des structures intéressantes, par des techniques analogues à celles utilisées pour visualiser les surfaces présentées au paragraphe IV.2.1.

IV.3 - SEGMENTATION PAR GENERALISATION EN DIMENSION 3 DE LA NOTION DE POINT D'INFLEXION

Certaines images sont suffisamment bien contrastées pour permettre la segmentation des surfaces intéressantes par des techniques de recherche des surfaces d'isodensité. C'est en particulier le cas pour les images d'os ou de vaisseaux injectés de produit de contraste. Par contre, ces méthodes ne sont pas applicables dans le cas général. C'est en particulier le cas en médecine quand on étudie des tissus mous comme par exemple les ligaments dans les articulations. Pour segmenter dans de pareils cas, il faut utiliser des techniques qui sont l'analogue tridimensionnel des techniques de segmentation bidimensionnelles présentées au Chapitre I.

La détection des points frontières se fera par une technique de généralisation en 3D de la notion de point d'inflexion. Contrairement à ce qui a été développé dans le cas de la segmentation d'images cytologiques, il sera ici nécessaire de coupler la phase de détection des points frontière et la phase de suivi de ces points, car cette dernière serait algorithmiquement très difficile. En effet, ordonner les points d'une surface est encore plus difficile que suivre les points d'une courbe. Or, nous avons vu au Chapitre I que ce suivi unidimensionnel était déjà difficile à mettre en oeuvre. Si H dénote l'opérateur qui s'annule aux points d'inflexion 3D, nous rechercherons donc les surfaces $Hf = 0$ par des techniques de résolution d'équations différentielles analogues à celles présentées au paragraphe précédent.

Généralisation en 3D de la notion de point d'inflexion.

Nous allons reprendre une définition analogue à celle qui a été proposée au Chapitre I pour les points d'inflexion en dimension 2.

Nous recherchons les points d'inflexion d'une hypersurface d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=z \\ f=f(x,y,z) \end{cases}$$

L'hyperplan tangent à cette hypersurface est porté par les vecteurs

$$\vec{t}_1 \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{vmatrix}, \vec{t}_2 \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix}, \vec{t}_3 \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

La normale à la surface est donc portée par le vecteur $\vec{n} \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} = p_1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = p_2 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = p_3 \end{vmatrix}$

Par analogie avec la définition en 2D, on dira qu'un point $M(x,y,z,f)$ est point d'inflexion 3D si la courbe Γ intersection entre l'hypersurface et l'hyperplan vertical contenant n admet en M un point d'inflexion. Or Γ admet la représentation paramétrique suivante :

$$\Gamma : \lambda \rightarrow h(\lambda) = f(\lambda p_1 + x, \lambda p_2 + y, \lambda p_3 + z)$$

Donc :

$$h'(\lambda) = p_1 \frac{\partial f}{\partial x} (\lambda p_1 + x, \lambda p_2 + y, \lambda p_3 + z) + p_2 \frac{\partial f}{\partial y} (\lambda p_1 + x, \lambda p_2 + y, \lambda p_3 + z) \\ + p_3 \frac{\partial f}{\partial z} (\lambda p_1 + x, \lambda p_2 + y, \lambda p_3 + z)$$

D'où

$$h''(\lambda) = p_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (M) + p_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} (M) + p_3^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} (M) \\ + 2 (p_1 p_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} (M) + p_2 p_3 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} (M) + p_1 p_3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} (M))$$

Définition IV.3:

M sera point d'inflexion 3D s'il vérifie

$$H(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + 2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0$$

La figure IV.24 montre le résultat de l'application de cet opérateur sur une coupe de l'image de crâne étudié en tomodynamométrie.

Pour pouvoir appliquer la méthode de Gear dans le suivi de contours par construction-résolution d'une équation différentielle, il faut pouvoir évaluer les dérivées secondes de $H(f)$. Il faut donc que f soit \mathcal{C}^4 . Pour obtenir une représentation \mathcal{C}^4 de f , nous avons utilisé des splines tri-quintiques (polynômiales par morceau de degré 5 en chaque variable, avec raccordement continu des dérivées jusqu'à l'ordre 4). Lorsqu'on cherche à définir f "aux moindres carrés", le système à résoudre est

toujours bande, mais les B-splines quintiques ayant un support plus large, la bande est cette fois de largeur $6p - 1$. Même pour $p=2$ (une spline pour deux points sur la grille des données initiales), cette largeur rend délicate l'application de la méthode proposée au paragraphe IV.1. Dans un premier temps, nous avons donc résolu par des méthodes classiques (Gauss) les systèmes 64×64 que l'on obtient pour des images 512×512 en posant $p=8$. La figure IV.25 représente le résultat dans ce cas du lancer de rayons. La valeur relativement lisse de p rend le résultat visuel plus "lisse" que les images présentées précédemment, au prix d'une perte de précision.

La méthode de suivi du contour des points de la peau qui vérifient $H(f)=0$ a donné de moins bon résultats que le suivi des points qui vérifient $f=cte$. Le suivi d'un contour sur une coupe a en effet tendance à "boucler" autour de petits "accidents" mineurs. Un contour qui devrait être unique se trouve ainsi morcelé en 2 ou 3 segments. Pour arriver à segmenter complètement un volume par cette méthode, il faut donc développer un algorithme de "contrôle" du déplacement du point solution, de manière à détecter les bouclages et relancer le processus sur un point voisin. Ceci reste à mettre en place.

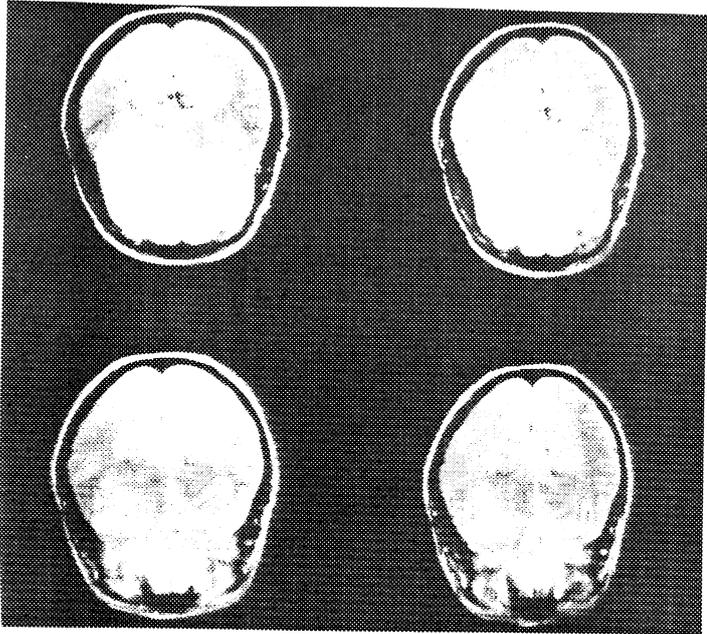


figure IV.1: exemple de coupes d'IRM

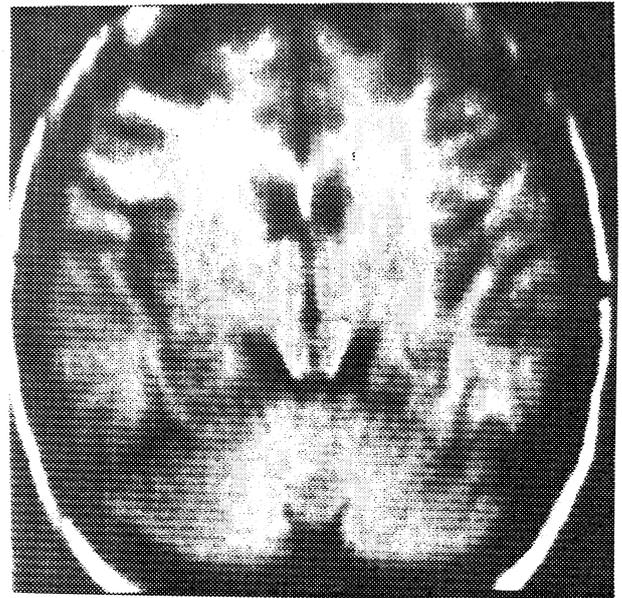


figure IV.3: reformattage d'une coupe de crâne à 90° du plan de coupe initial



figure IV.4: reformattage d'une coupe de crâne à 60° du plan de coupe initial



figure IV.5: reformattage d'une coupe de crâne à 90° du plan de coupe initial

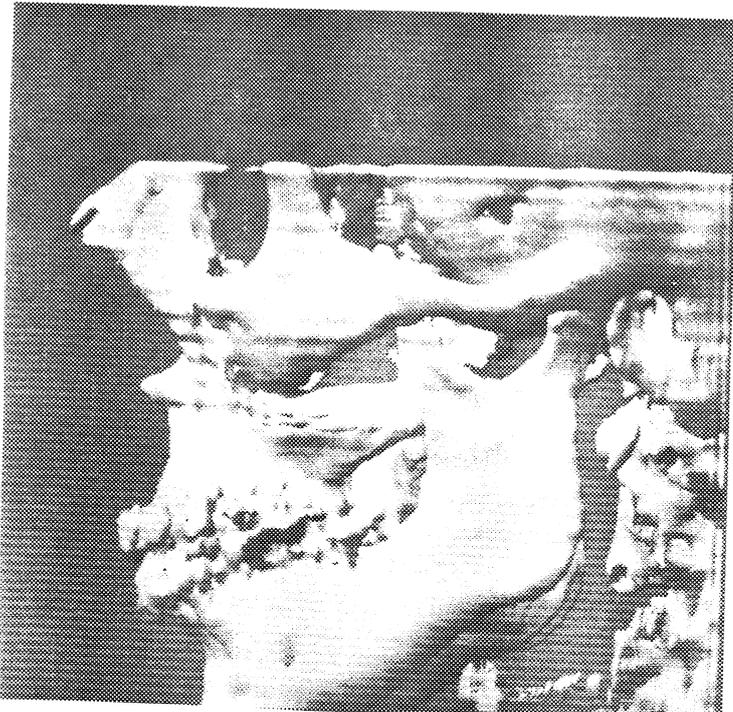


figure IV.7: crâne de profil

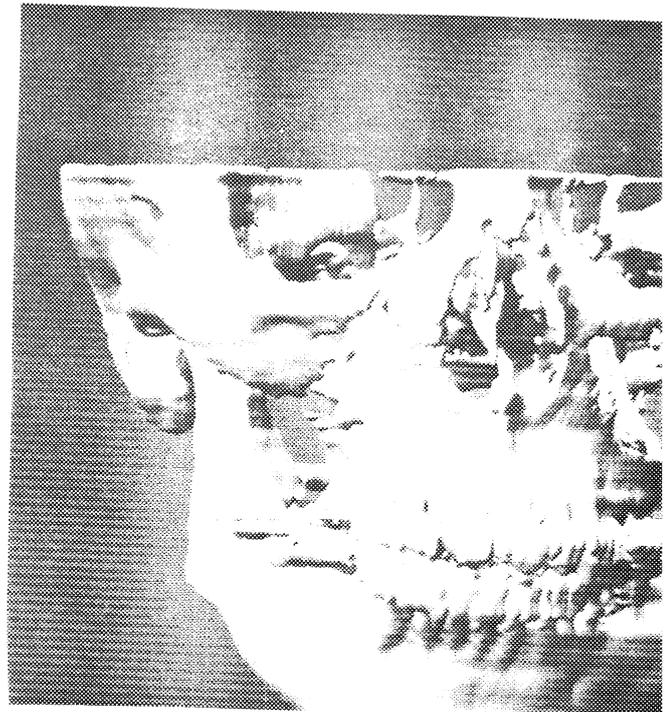


figure IV.8: crâne de face



figure IV.9: crâne de face zoomé

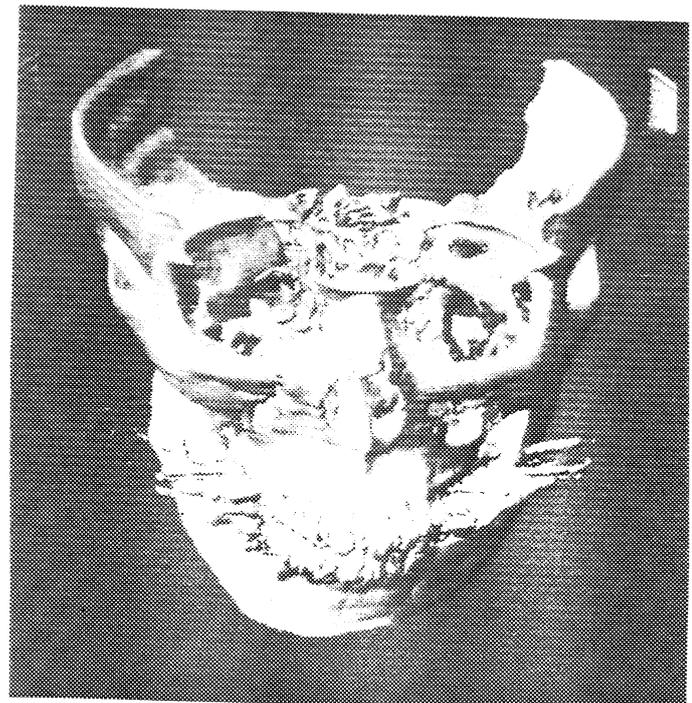


figure IV.10: crâne de face incliné et coupé en arrière

Ces images sont reconstituées à partir de 56 coupes tomодensitométriques de 5 mm d'épaisseur, décalées de 2mm les unes par rapport aux autres. Les artéfacts au niveau des dents sont liés à la présence de dents en or qui perturbent le logiciel qui calcule ces coupes.

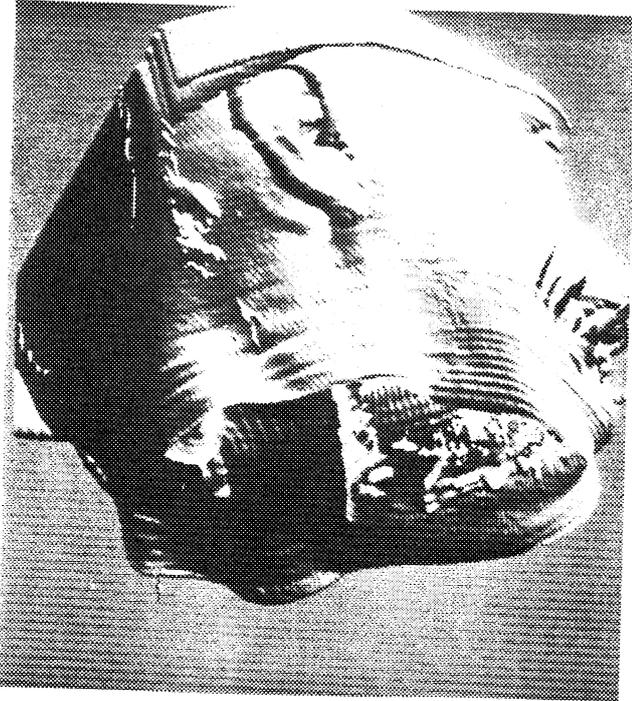


figure IV.11: visualisation de la peau

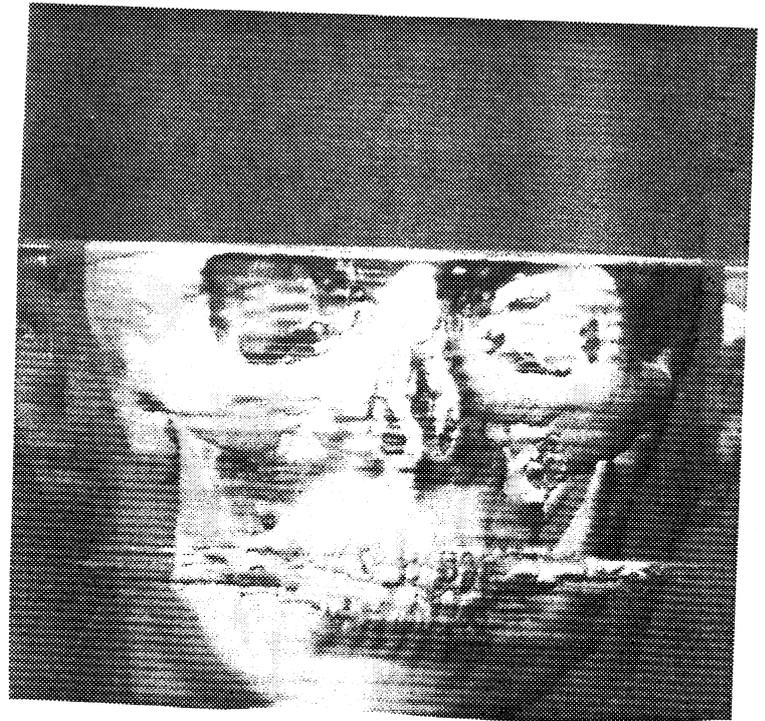


figure IV.12: superposition os + peau

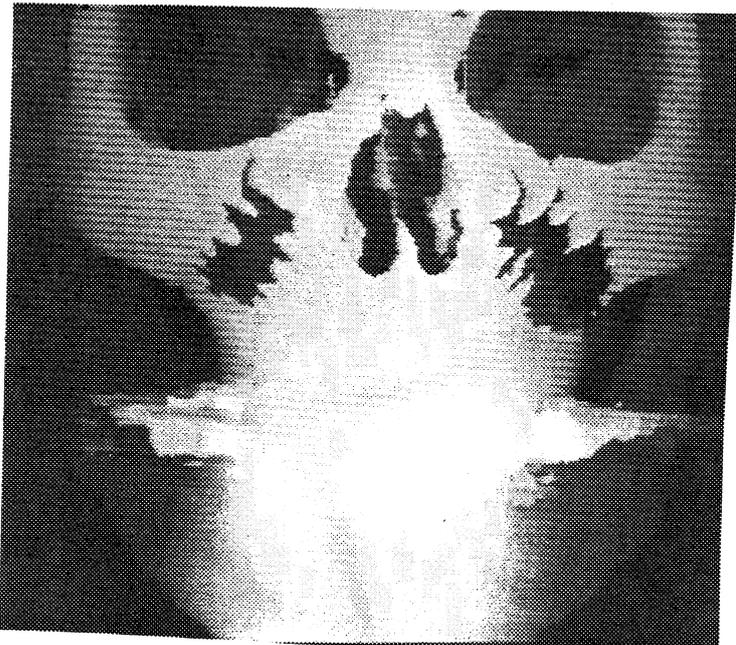


figure IV.13: mêmes données
représentées en "Z-buffer"



figure IV.14: tumeur du cerveau
étudiée en IRM

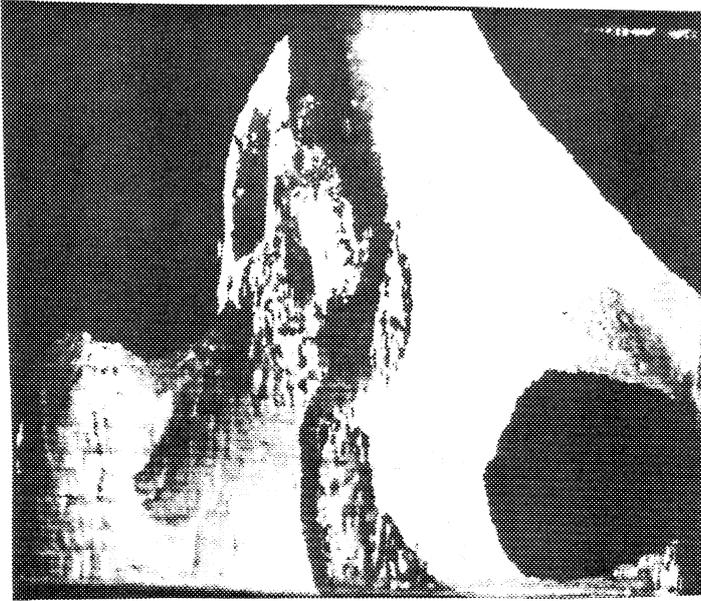


figure IV.15: fracture du bassin
étudiée en tomodensitométrie

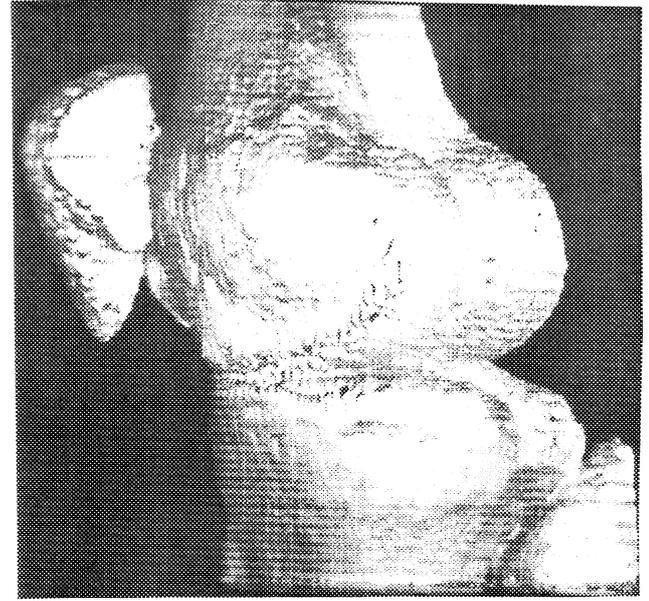


figure IV.16: genou
étudié en tomodensitométrie

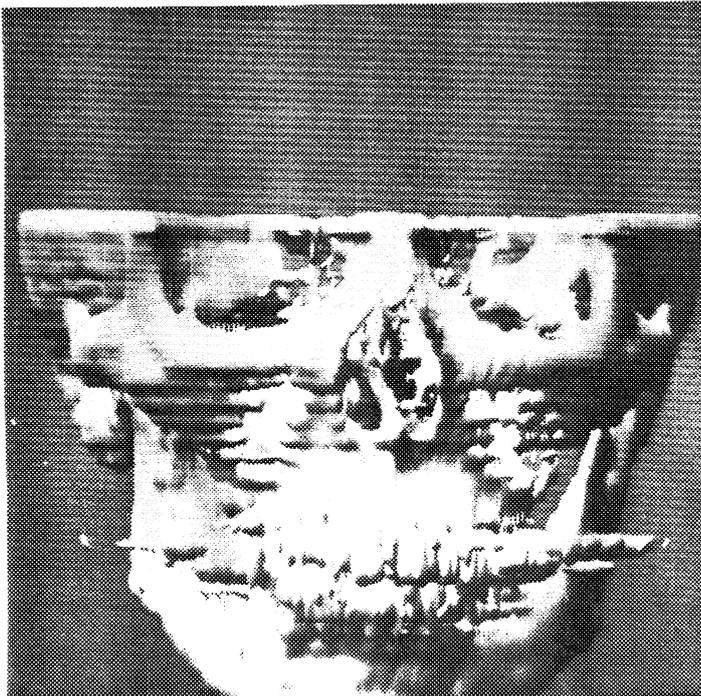


figure IV.17: visualisation du crâne de face
à partir de 28 coupes

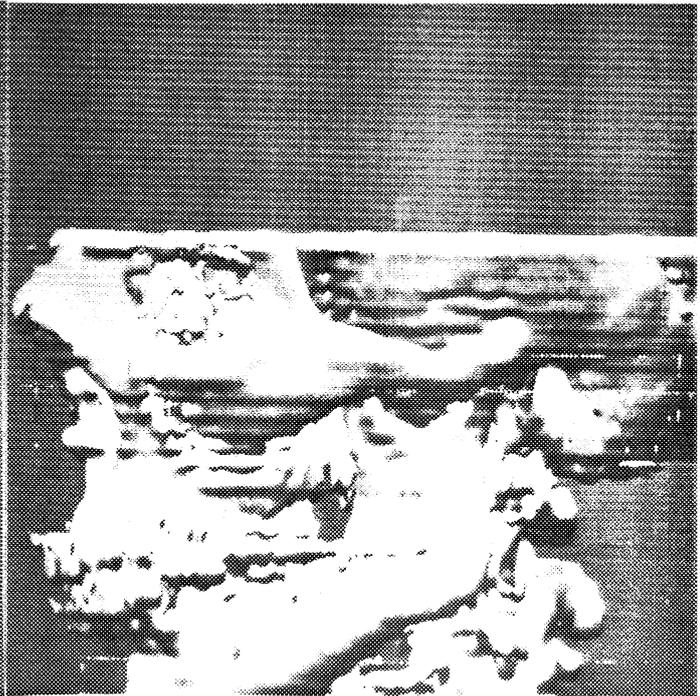


figure IV.18: visualisation du crâne de profil
à partir de 28 coupes



figure IV.19: visualisation du crâne en modèle "fil de fer", après segmentation par construction-résolution d'une équation différentielle

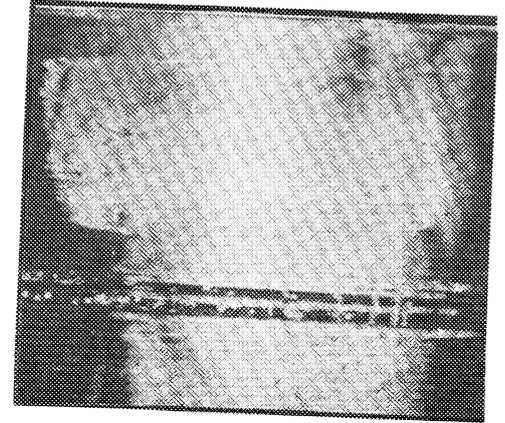


figure IV.20: visualisation du crâne en lancer de rayons, après segmentation par construction-résolution d'une équation différentielle, et modélisation de la surface obtenue par des splines bicubiques

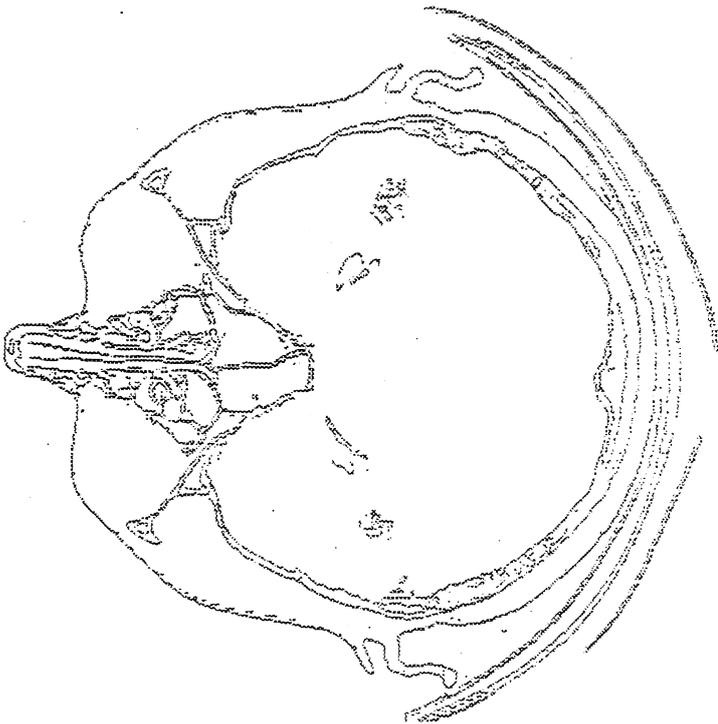


figure IV.24: coupe horizontale des points d'inflexion 3D



figure IV.25: lancer de rayons sur une image modélisée par $64 \times 64 \times 56$ splines triquintiques

CONCLUSION

CONCLUSION

Le travail présenté dans ce mémoire est une contribution au développement d'un modèle continu pour le traitement et l'analyse d'images. Trois exemples concrets illustrent les motivations de l'utilisation d'une telle représentation des images.

L'étude du premier problème a donné lieu à la mise au point d'une nouvelle technique de segmentation d'images cytologiques. Ici, le principal intérêt de la modélisation continue est de permettre la caractérisation des points frontières. Cependant, dans l'état actuel, le caractère continu des frontières n'est pas complètement exploité, puisque la résolution de $h''(0)=0$ n'est réalisée que discrètement. Pour rester dans un cadre continu et obtenir directement les frontières sous une forme continue, il serait intéressant de mettre en œuvre des méthodes semblables à celle proposée au chapitre IV.

On pourrait d'ailleurs poser le problème du suivi en termes de contrôle optimal, en faisant intervenir dans le coût une évaluation de l' "énergie de flexion" de la courbe fermée représentant le contour recherché. Ceci permettrait de lisser ce contour et pourrait faciliter le "saut" d'un élément de frontière à l'autre lorsque le contour de la cellule apparaît ouvert du fait de la proximité d'un autre objet.

De plus, on peut attendre une amélioration de l'image des points frontières en cherchant à tenir compte de leur stabilité en fonction du paramètre de lissage. Il serait ainsi possible d'obtenir divers contours correspondant à des degrés de lissage différents.

Il aurait été intéressant de pouvoir utiliser des méthodes de lissage adaptatif, comme celles présentées au chapitre II, pour profiter d'une plus grande souplesse dans l'approximation. On pouvait espérer améliorer par là la définition des points frontières, mais l'expérience numérique a été décevante. Il pourrait être intéressant de reprendre l'idée du lissage adaptatif en modifiant la fonction d'erreur qui décide de l'arrêt de l'algorithme de subdivision adaptatif, de manière à obtenir une plus grande homogénéité dans l'approximation d'une cellule à ses voisines, ce qui semble indispensable pour une estimation stable d'opérateurs différentiels.

Des outils de détermination numérique des confineurs ont pu être mis au point et testés sur des modèles théoriques et quelques données expérimentales. Ces outils devront être testés sur un plus grand nombre de confineurs, dans des domaines variés. Ici, l'intérêt de la modélisation continue est de permettre l'estimation directe du cycle limite, et de s'adapter au calcul de la période.

Les images tridimensionnelles ont posé des problèmes de visualisation et de segmentation pour lesquels la modélisation continue propose une approche homogène. Du point de vue médical, les enjeux de la manipulation d'images de volumes sont très nombreux. Les méthodes développées sont d'ores et déjà utilisées sur des patients, pour aider le diagnostic, lorsque la visualisation de scènes 3D est importante. Des projets sont en cours, qui utilisent ce modèle pour guider des gestes médico-chirurgicaux dans des domaines très divers.

La méthode de segmentation proposée doit être validée sur de plus nombreux cas. Elle doit être améliorée en optimisant le mode de résolution de l'équation différentielle, et complétée par un logiciel permettant de gérer et de mettre en relation les éléments de contours produits. Ceci pose des problèmes très proches de ceux rencontrés en Conception Assistée par Ordinateur, et il est envisagé d'utiliser un logiciel de CAO pour gérer les objets produits par l'étape de segmentation, de manière à décrire complètement un volume.

La représentation continue a été obtenue par deux types de fonctions-spline: B-splines polyédrales et produits tensoriels de splines unidimensionnelles.

L'approximation adaptative par B-splines polyédrales est un moyen séduisant d'obtention de la représentation continue, limité dans notre expérience par une mauvaise appréciation d'opérateurs différentiels, ce qui ne semble pas un obstacle infranchissable. Surtout, la grande variété des B-splines pourrait en faire un outil intéressant pour la modélisation des objets présents dans les images; il serait en particulier intéressant de chercher un lien entre les B-splines et les éléments utilisés en morphologie mathématique.

L'utilisation de produits tensoriels de splines fournit un moyen rapide, de par la séparabilité des systèmes auxquels il conduit, pour obtenir une représentation continue de gros volumes de données. L'approximation pourrait être améliorée en gérant mieux le paramètre de lissage, par exemple par des techniques de validation croisée.

La modélisation continue d'images est donc un outil pour le traitement et l'analyse d'images, dont la mise en œuvre est rendue possible par les propriétés des fonctions-spline.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [ALL.78] **ALLGOWER E., GEORG K.**
Triangulations by reflections with applications to approximation.
In Numerische Methoden der Approximations Theorie Bd 4, L. Collatz, G. Meinardus, H. Werner eds, Birkhäuser Basel (1978), 10-32.
- [ATT.70] **ATTEIA M.**
Fonctions splines et noyaux reproduisants d'Aronszajn-Bergman
RIRO, R-3, (1970), 31-43.
- [AMA.85] **AMANS J.L., CAMPAGNOLO R.E., GARDERET Ph.**
Imagerie médicale: méthodes de reconstruction et techniques instrumentales.
Note technique LETI:MCTE 1511, Grenoble (1985).
- [AND.82] **ANDERSON R., BAXTIER B.S., HITCHNER L.E., SHORTHILL R.W., JOHNSON S.A.**
Three-dimensional viewing system for tomographic interpretation.
Radiology 145, (1982), 525-527.
- [ART.81] **ARTZY E., FRIEDER G., HERMAN G.T.**
The theory, design, implementation and evaluation of three-dimensional surface detection algorithm.
Computer graphics and image processing, vol. 15 , (1981), 1-24.
- [BAR.84] **BARILLOT G., GIBAUD B., LUO L.M., , SCARABIN J.M., VELUT S., MOREAU J.J.**
Représentation synthétique de structures anatomiques. Visualisation par synthèses d'images.
Premier colloque "image-traitement, synthèse, technologie et applications", Biarritz, (1984), 21-28.
- [BAR.85] **BARILLOT G., GIBAUD B., LUO L.M., SCARABIN J.M.**
3D representation of anatomic structures from CT examinations.
Proc. SPIE, Biostereometrics' 85, Cannes, (1985), 307-314.
- [BAT.67] **BATHIA N.P., SZEGO G.P.**
Dynamical systems: stability theory and applications.
Lect. Notes in Maths, 35, Springer Verlag, New York, (1967).
- [BEN.87] **BENABID A.L., CINQUIN P., LAVALLEE S., LE BAS J.F., DEMONGEOT J., DE ROUGEMONT J.**
A computer driven robot for stereotaxic surgery connected to CT scan and magnetic resonance imaging. Technological design and preliminary results.
Abstract congress of the American Society for Stereotaxy and Functional Neurosurgery, 4-6 june (1987), Montreal.
- [BIR.27] **BIRKHOFF G.D.**
Dynamical systems
AMS Colloq. Publ. 9 AMS, New York, (1927).

- [BOI.84] **BOISSONNAT J.D.**
La triangulation de Delaunay et la représentation des formes bi et tri dimensionnelles
proc. 4ème congrès AFCET Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle,
Paris (1984), 279-293.
- [BOO.62] **de BOOR C.**
Bicubic spline interpolation
J. of Maths. and Physics, tome 41, (1962), 212-218.
- [BOO.73] **de BOOR C., FIX G.,**
Spline approximation by quasi-interpolants.
J. Approx. Theory, 7, (1973), 19-45.
- [BOO.78] **de BOOR C.**
A practical guide to splines.
Springer Verlag, Berlin, New-York, (1978).
- [BOO.79] **de BOOR C., RICE J.R.**
An adaptative algorithm for multivariate approximation giving optimal convergence
rates.
J. Approx. Theory, 25, 1979, 337-359.
- [BOO.79.1] **de BOOR C.**
Efficient computer manipulation of tensor products.
ACM Trans. Math. Software, 5, (1979), 173-182.
- [BOU.87] **BOUAKAZ S.**
Approche stochastique de la segmentation des images: un modèle de coopération entre
les primitives de régions et de frontières.
Thèse, Grenoble, (1987).
- [BOW.78] **BOWEN R.**
On axiom A diffeomorphisms.
Reg. Conf. Series in Maths, 35, AMS, Providence, (1978).
- [BRA.83] **BRANNIGAN M.**
Criteria for adaptative approximation
Approx Theory IV, Academic Press, (1983), 381-386.
- [BRO.82] **BROWNING J.D., TANIMOTO S.L.**
Segmentation of pictures into regions with a tile by tile method.
Pattern recognition, vol, 15, n°1, (1982), 1-10.
- [BRU.77] **BRUGAL G., CHASSERY J.M.**
Un système d'analyse densitométrique.
Histochemistry, vol. 52, (1977), 241-258.
- [BUD.84] **BUDINGER T.F.**
An analysis of 3D display strategy.
SPIE vol. 501, Processing and display of 3D data II, (1984), 2-8.
- CAR.87] **CARTOUX J.Y., LAPRESTE J.T., RICHETIN M.**
Vers l'identification ou la reconnaissance automatique de visages à partir de leur image
tridimensionnelle.
Proceedings Cognitiva - Image électronique, Paris, mai (1987), 219-224 .

- [CAU.78] **Mac CAUGHEY D.**
An image coding algorithm using spline functions.
Proc. Society of photo-optical instrumentation engineers, applications of Digital Image Processing, Vol. 149, (1978), 51-61.
- [CAU.81] **Mac CAUGHEY D., ANDREWS H.C.**
Image approximation by variable knot bicubic splines.
IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, Vol. PAM 1-3, n°3, May (1981), 299-310.
- [CHA.76] **CHASSERY J.M.**
Quelques problèmes liés à l'analyse d'images numériques obtenues par un système automatique de microphotométrie à balayage.
Thèse Grenoble. (1976).
- [CHA.84] **CHASSERY J.M.**
Représentation discrète, interprétation numérique et description des images: des concepts à l'application.
Thèse d'Etat, Grenoble, (1984).
- [CHA.84] **CHASSERY J.M., GARBAY C., CINQUIN P.**
Segmentation d'images cytologiques, étude de méthodes.
Proceedings 4^{ème} Congrès AFCET de Reconnaissance des Formes et d'Intelligence Artificielle, Paris (1984), 51-68.
- [CHU.83] **CHUI C.K., WANG R.H.**
Bivariate B-splines on triangulated rectangles
In Approximation Theory IV, Academic Press, (1983), 413-418.
- [CHU.83] **CHUI C.K., HU Y.S.**
Geometric properties of certain bivariate splines
in Approximation Theory IV, Academic Press (1983), 407-412.
- [CIN.81] **CINQUIN P.**
Splines unidimensionnelles sous tension et bidimensionnelles paramétrées: deux applications médicales.
Thèse de 3^{ème} Cycle, Mathématiques Appliquées, Université de Saint Etienne, novembre (1981).
- [CIN.82] **CINQUIN P.**
Optimal surface reconstruction using parametric spline functions.
Lecture notes in pure and applied mathematics, M. Dekker, New York, (1982), 187-195.
- [CIN.82.1] **CINQUIN P., CHALMOND B., BERARD D., DUSSERRE L, TROUILLOU P., GRAMMONT A., BINNERT D., MABILLE J.P., CARASSO C.**
Hip prosthesis design.
Proceedings 4th congress of medical informatics in Europe Dublin, Springer Verlag, Lecture notes in medical informatics, 16 (1982), 123-129.
- [CIN.84] **CINQUIN P.**
Application des fonctions splines au traitement d'images numériques.
Congrès National d'Analyse Numérique, Bombannes, mai (1984).

- [CIN.86] **CINQUIN P.**
Représentation de volumes par splines tricubiques aux moindres carrés.
Congrès national d'Analyse Numérique, Port Bacares, mai (1986).
- [CIN.86.1] **CINQUIN P.**
Un modèle pour la représentation d'images médicales 3D.
Informatique Médicale : imagerie et systèmes d'information hospitaliers, Sauramps
Medical Editeur, (1986) 62-68.
- [CIN.87] **CINQUIN P.**
Application des produits tensoriels de splines en médecine.
A paraître, Masson, actes du séminaire sur les courbes et surfaces Bézier et
B-splines, Rennes mai (1987).
- [CIN.87.1] **CINQUIN P.**
Approximation adaptative par B-splines à plusieurs variables
A paraître, Masson, actes du séminaire sur les courbes et surfaces Bézier et
B-splines, Rennes mai (1987).
- [CIN.87.2] **CINQUIN P.**
Tricubic spline functions, an efficient tool for 3D images modelling.
Abstract Congress ICIAM 87 (International Conference on Industrial and Applied
Mathematics), Paris, juillet (1987).
- [CIN.87.3] **CINQUIN P., GORET C., LE BAS .F. ROSE-PITET L., COULOMB
M. BENABID A.L.**
Premiers résultats d'une méthode de modélisation continue d'images
tridimensionnelles.
Abstracts du Congrès sur la Recherche en Imagerie Médicale, Paris, mars (1987).
- [CIN.87.4] **CINQUIN P., GORET C.**
Une nouvelle technique de modélisation continue d'images tridimensionnelles.
Proceedings Cognitiva-image électronique, Paris, mai (1987), 63-68.
- [CIN.87.5] **CINQUIN P., GORET C.**
Morphoscopie et modélisation continue d'images tridimensionnelles.
A paraître, Proceedings du 6ème congrès AFCET Reconnaissance des formes et
intelligence artificielle, novembre (1987) Antibes.
- [CIN.87.6] **CINQUIN P., LAVALLEE S., GORET C., DEMONGEOT D.,
CROUZET G., PELTIE P.**
Computer assisted intervertebral puncture.
A paraître. Proceedings 7th International Congress on Medical Informatics in Europe,
Springer-Verlag, 21-25 septembre (1987) Rome.
- [CIN.87.7] **CINQUIN P., COSNARD M., DEMONGEOT J., JACOB C.**
Attracteurs et confineurs
Editions du CNRS, Traitement numérique des attracteurs étranges, M. Cosnard, C.
Mira eds., (1987), 243-257.
- [CIN.1] **CINQUIN P., DEMONGEOT J., JACOB C.**
Attractors and confiners : definition and estimation procedures.
A paraître, Nijhoff, Amsterdam.

- [COH.80] **COHEN E., LYCHE T.**
Discrete B-splines and subdivision techniques in Computer Aided Geometric Design and Computer Graphics.
Computer Graphics and image processing, vol. 14, n°2, october (1980), 87-111
- [COH.84] **COHEN E., LYCHE T., RIESENFELD R.**
Discrete box splines and refinement algorithms
CAGD, (1984), 131-148.
- [COS.85] **COSNARD M., DEMONGEOT J.**
On the definitions of attractors.
in Lecture notes in Maths., 1163, (1985), 23-31.
- [COS.85.1] **COSNARD M., DEMONGEOT J.**
Attracteurs: une approche déterministe.
C.R. Acad. Sc. 300, (1985), 551-556.
- [COS.86] **COSNARD M., DEMONGEOT J., LAUSBERG C., LOTT K.**
Quelques exemples sur la dimension fractale des attracteurs.
Rapport de recherche TIM3-IMAG, (1986).
- [CRA.79] **CRAVEN P., WAHBA G.**
Smoothing noisy data with spline functions. Estimating the correct degree of smoothing by the method of generalized cross-validation.
Numer. math., 31 (1979), 377-403.
- [DAH.79] **DAHMEN W.**
Multivariate B-splines. Recurrence relations and linear combinations of truncated powers.
Multivariate approximation theory, Birkhäuser Verlag, ISNM Vol. 51, (1979), 64-82.
- [DAH.80] **DAHMEN W.**
Adaptative approximation by multivariate smooth spline.
Research Report IBM T.J. Watson Research Center, RC 8310 (1980).
- [DAH.80.1] **DAHMEN W.**
On multivariate B splines
SIAM.J. Numer. Anal. vol 17, n°2, April (1980), 179-191.
- [DAH.80.2] **DAHMEN W., de VORE R. SCHERER K.**
Multidimensional spline approximation
SIAM J. Numer. Anal., vol 17, n°3, June (1980), 380-402.
- [DAH.80.3] **DAHMEN W.**
Konstruktion Mehrdimensionaler B-Splines und ihre Anwendung auf Approximations problem.
In Numerical Methods of Approximation Theory, Birkhäuser Verlag, ISNM, Vol. 52, Bd 5, (1980), 84-110.
- [DAH.80.4] **DAHMEN W.**
Approximation by smooth multivariate splines on non-uniform grids.
Quantitative Approximation, R. de Vore and K. Scherer eds, Academic Press, (1980), 99-114.
- [DAH.81.1] **DAHMEN W.**
Approximation by linear combinations of multivariate B-splines
J. of Approximation Theory, 31 (1981), 299-324.

- [DAH.81.2] **DAHMEN W., MICHELLI C.A.**
On limits of multivariate B-splines.
Journal d'analyse mathématique, vol. 39, (1981), 256-278.
- [DAH.81.3] **DAHMEN W., MICHELLI C.A.**
Computation of inner products of multivariate B-splines.
Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 3(3), (1981), 367-375.
- [DAH.81.4] **DAHMEN W., MICHELLI C.A.**
Numerical algorithms for least squares approximation by multivariate B-splines.
Numerical methods of approximation theory, Collatz L., Meinardus G. and Werner H. eds, Birkhäuser, Basel, (1981), 85-114 .
- [DAH.82] **DAHMEN W.**
Adaptative approximation by multivariate smooth splines
J. of Approximation Theory, 36, (1982), 119-140.
- [DAH.82.1] **DAHMEN W., MICHELLI C.A.**
Some remarks on multivariate B-splines.
ISNM 61, Birkhäuser Verlag, (1982), 81-87.
- [DAH.82.2] **DAHMEN W., MICHELLI C.A.**
On the linear independence of multivariate B-splines, I. Triangulations of simploids.
SIAM J. Numer. Anal. vol. 19, n°5, october (1982), 993-1012.
- [DAH.83] **DAHMEN W., MICHELLI C.A.**
Multivariate splines. A new constructive approach.
Surfaces in CAGD, R.E. Barnhill, W. Boehm eds, North Holland p.c.,
(1983), 191-215.
- [DAH.83.1] **DAHMEN W., MICHELLI C.A.**
Recent progress in multivariate splines.
Approximation Theory IV, Academic Press, (1983), 27-121.
- [DAH.83.2] **DAHMEN W., MICHELLI C.A.**
On the linear independence of multivariate B-splines II : Complete configurations
Mathematics of computation, Vol. 41, n° 163, july (1983), 143-163.
- [DAH.83.3] **DAHMEN W., MICHELLI C.A.**
Translates of multivariate splines
Linear Algebra and its Applications 52/53 (1983), 217-234.
- [DAH.83.4] **DAHMEN W., MICHELLI C.A.**
On the approximation order from certain multivariate spline spaces.
Research report, IBM T.J. Watson Research Center, RC 9796 (1983).
- [DAH.84] **DAHMEN W., MICHELLI C.A.**
Some results on box splines.
Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 11, n°1, July (1984), 147-150.
- [DAN.83] **DANA R.A., MALGRANGE P.**
Propriétés d'une version discrète d'un modèle de croissance cyclique.
Cahiers du séminaire d'économétrie, 25, (1983) .

- [DAR.84] **DARIER P., GARDERET P., GRANGEAT P., MATTE P.,
TOURNIER F., VILLAFANA R.**
Voludensitométrie: visualisation tridimensionnelle d'organes.
Premier colloque "image-traitement, synthèse, technologie et applications", Biarritz
(1984), 337-342.
- [DEM.81] **DEMONGEOT J**
Theoretical study of attractors in enzymatic systems.
in System dynamics and analysis of change, B.E. Paulre éd., North Holland,
Amsterdam, (1981).
- [DEM.86] **DEMONGEOT J., COSNARD M., JACOB C.**
Attractors and confiners: deterministic and stochastic approaches.
Dynamical systems: a renewal of mechanisms. Diner et al eds, World Scientific Pub.
Singapour, (1986).
- [DEM.86.1] **DEMONGEOT J., PACHOT P., BACONNIER P., BENCHETRIT G.,
MUZZIN S.**
Entrainment of the respiratory rhythm.
in Formalizations and concepts of breathing, G. Benchetrit et al eds, Manchester
Univ. Press, (1986).
- [DEM.1] **DEMONGEOT J, JACOB C.**
Confineurs: une approche stochastique.
à paraître, CR Acad. Sci.
- [DEM.2] **DEMONGEOT J., JACOB C., CINQUIN P.**
Periodicity and chaos in biological systems: new tools for the study of attractors.
A paraître, Nato life science series, Plenum, Chaos in Biological system, A. Holden
ed.
- [DEM.3] **DEMONGEOT J., JACOB C., CINQUIN P.**
Attracteurs et confineurs: du périodique au chaos.
A paraître, Modélisation en Biologie et en Economie, J. Demongeot et P. Malgrange
ed., publications de l'IME.
- [DIE.77] **DIERCKX P.**
An algorithm for least squares fitting of cubic spline surfaces to functions on a
rectilinear mesh over a rectangle.
J. Computational and applied mathematics, vol. 3, n°2, (1977), 113-129.
- [DIE.82] **DIERCKX P.**
A fast algorithm for smoothing data on a rectangular grid while using spline functions.
SIAM J. Numer. Anal., vol. 19, n°6, December (1982), 1286-1304.
- [DUC.76] **DUCHON J.**
Interpolation des fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des
plaques minces.
RAIRO Analyse Numérique, vol. 10, n°12, (1976), 5-12.
- [DUC.80] **DUCHON J.**
Fonctions splines homogènes à plusieurs variables.
Thèse d'Etat, Grenoble (1980).
- [DYN.83] **DYN N., LEVIN D., RIPPA S.**
Surface interpolation and smoothing by "thin plate" splines.
in Approximation theory IV, Academic Press, (1983), 445-449.

- [EKO.87] **EKOULE A., PEYRIN F., ODET C.**
Description d'une procédure de triangulation entièrement automatique.
Proceedings Cognitiva - Image électronique, Paris, mai (1987), 88-95.
- [FAR.83] **FARRELL E.J.**
Color display and interactive interpretation of 3D data.
IBM Journal of Research and development, vol 27, n°24, (1983), 356-366.
- [FAR.85] **FARRELL E.J.**
Animated 3D CT imaging.
IEEE CG&A, (1985), 27-31.
- [FRI.85] **FRIEDER G., GORDON D., REYNOLOS R.A.**
Back to front display of voxel based objects.
IEEE Computer Graphics and Applications, Vol. 5, n°1, (1985), 52-60.
- [FU.81] **FU K.S., HUI J.K.**
A survey on image segmentation.
Pattern recognition, vol 13, (1981), 3-16 .
- [GAR.79] **GARBAY C.**
Images, stratégies, perspectives et stratégies d'analyse.
Thèse d'Etat, Grenoble, (1985).
- [GEA.71] **GEAR C.W.**
Numerical initial value problems in Ordinary Differential Equations, Prentice-Hall,
New-jersey, (1971).
- [GIR.81] **GIRARD D., RICHARD I.**
Traitement d'images biomédicales par fonctions splines.
Rapport de DEA et de projet de 3^{ème} année ENSIMAG, Grenoble, (1981).
- [GIR.84] **GIRARD D.**
Les méthodes de régularisation optimale et leur application en tomographie: nouveaux
algorithmes performants de reconstruction d'images.
Thèse Grenoble, (1984).
- [GOO.81] **GOODMAN T.N.T.**
Spline approximation operators of Bernstein-Schönberg type in one and two
variables.
J. Approx. Theory 33, (1981), 248-263.
- [GRE.77] **GREGUSS P.**
Holographic displays for computer assisted tomography.
Journal of Computer Assisted Tomography, 1, (1977), 184-186.
- [GUE.81] **GUEVARA M.R., GLASS L., SCHRIER A.**
Phase locking, period doubling bifurcations and irregular dynamics in periodically
stimulated cardiac cells.
Science, 214 (1981), 1350-1353.
- [HAK.82] **HAKOPIAN H.**
Multivariate spline functions, B-splines basis and polynomial interpolations.
SIAM J. Numer. Anal., vol 19, n°3, June (1982), 510-517.

- [HAR.84] **HARRIS L., CAMP L.**
Display and analysis of tomographic volumetric images using a varifocal mirror.
SPIE Vol. 507, Processing and display of three dimensional data II, (1984), 38-45.
- [HEF.85] **HEFFERMANN P.B., ROBB R.A.**
A new method for shaded surface display of biological and medical images.
IEEE trans. med. imaging MI-4, (1985), 26-38.
- [HER.86] **HERMAN G.T.**
3D computer graphic display in medicine.
Nato asi series vol F19: Pictorial information in medicine, (1986), 181-210.
- [HER.83] **HERMAN G.T., UDUPA J.K.**
Display of 3D digital images: computational foundations and medical applications.
IEEE CG&A, vol3, n°5 (1983), 39-46.
- [HES.72] **HESSING R.C., LEE M.K., PIERCE A. POWERS E.N.**
Automatic contouring using bicubic functions.
Geophysics, vol 37, n°4, (1972), 669-674.
- [HOH.86] **HOHNE K.H., BERNSTEIN R.**
Shading 3D images from CT using grey levels gradients.
IEEE medical imaging, vol. MI-15, (1986), 45-47.
- [HOL.82] **HOLLIG K.**
Multivariate splines
SIAM, J. Numer. Anal., vol. 19, n°5, october (1982), 1013-1031.
- [HOU.77] **HOU H.S.**
Least squares image restoration using spline basis functions.
IEEE transactions on computers, vol. C-26, n°9 septembre (1977), 856-873.
- [JAC.83] **JACOB C., KERBOEUF D**
Statistical methods of detection of a periodic phenomenon in a short series. Example
of application: a density series of nematode Eggs-II.
Chronobiologia 10, (1983), 351-373.
- [JAC.87] **JACOB C.**
Cycles limites stochastiques et confineurs: étude mathématique, intérêt en biologie.
Thèse d'Etat, Grenoble, (1987).
- [JIA.84] **JIA R.Q.**
Linear independence of translates of a box spline.
J. Approx. Theory 40, (1984), 158-160.
- [KER.77] **KERGOSIEN Y.L.**
Introduction de la topologie en médecine.
Thèse de Médecine, Paris, (1977).
- [KER.80] **KERGOSIEN Y.L.**
Sur les points paraboliques des surfaces.
C.R. Acad. Sc. Paris, t 290, Série A, (1980), 705-710.
- [KER.81] **KERGOSIEN Y.L.**
La famille des projections orthogonales d'une surface et ses singularités.
C.R. Acad. Sc. Paris, t.292, Série I, (1981), 929-932.

- [KER.81] **KERGOSIEN Y.L.**
 Medical exploration of some rhythmic phenomena: a topological semeiology.
 Lecture notes in Biomathematics, Rhythms in Biology and other Fields of
 Applications, M. Cosnard, J. Demongeot and A. Le Breton eds, (1981), 32-49.
- [KER.84] **KERGOSIEN Y.L.**
 Sémiotique de la nature.
 Actes du IV^{ème} séminaire de l'école de biologie théorique, G. Benchetrit et J.
 Demongeot eds, éditions du CNRS, (1984), 11-26
- [KER.87] **KERGOSIEN Y.L.**
 Projections of smooth surfaces: stable primitives.
 Proceedings Cognitiva-Image Electronique, Paris, mai (1987), 447-454.
- [KIM.70] **KIMELDORF G.S., WAHBA G.**
 A correspondance between bayesian estimation on stochastic processes and smoothin
 by splines.
 The annals of mathematical statistics, vol 41, n°2, (1970), 495-502.
- [KUL.85] **KULKARNI R.**
 Fonctions splines cardinales tronquées.
 Thèse Grenoble, (1985).
- [LAC.87] **LACOLLE B., DANIEL M.**
 Intersections de courbes et surfaces paramétriques.
 A paraître, Masson, Actes du séminaire sur courbes et surfaces Bézier et B-splines,
 Rennes, mai (1987).
- [LAS.86] **LASCAUX P., THODOR P.**
 Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur.
 Tome 1, Masson, (1986).
- [LAU.72] **LAURENT P.J.**
 Approximation et optimisation
 Hermann, Paris, (1972).
- [LAU.85] **LAURENT P.J.**
 Fonctions splines cardinales tronquées.
 Rapport de recherches, IMAG, Grenoble avril (1985).
- [LAU.85.1] **LAURENT P.J.**
 Fonctions splines périodiques.
 Rapport de recherche, IMAG, Grenoble, juillet (1985).
- [LAU.86] **LAURENT P.J.**
 Inf-convolution spline pour l'approximation de données discontinues.
 M²AN, vol 20, n°1, (1986), 89-111.
- [LAU.86.1] **LAURENT P.J.**
 Quadratic convex analysis and splines.
 International series of numerical mathematics, Vol. 76, Birkhäuser Verlag, (1986),
 17-43.
- [LAU.87] **LAURENT P.J.**
 Truncated cardinal splines.
 A paraître, Approximation theory and its applications, vol 3, (1987).

- [LAUS.87] **LAUSBERG C.**
Calcul numérique de la dimension fractale d'un attracteur étrange.
Thèse d'Etat, Grenoble (1987).
- [LAV.87] **LAVALLEE S., CINQUIN P., GORET C., DEMONGEOT J.,
CROUZET G., PELTIE P.**
Ponction assistée par ordinateur.
A paraître, Proceedings du 6ème congrès AFCET, Reconnaissance des Formes et
Intelligence Artificielle, novembre (1987), Antibes.
- [LAW.74] **LAWSON C.L., HANSON R.J.**
Solving least squares problems.
Prentice Hall series in automatic computation, (1974).
- [LEV.80] **LEVIALDI S.**
Finding the edge
Digital image processing, Simon J.C. and Haralick eds, D. Reidel p.c., (1980).
- [LI.75] **LI T.Y., YORKE J.A.**
Period three implies chaos.
Amer. Math. Mo. 82 (1975), 985-992.
- [LYC.75] **LYCHE T., SCHUMAKER L.L.**
Local spline approximation methods.
J. of Approx. Theory, 15, (1975), 294-325.
- [LYC.84] **LYCHE T., MORKEN K.**
Making the Oslo algorithm more efficient.
Research report in informatics, University of OSLO, August, (1984).
- [LYC.85] **LYCHE T**
A recurrence relation for Chebyshevian B-splines.
Const. Approx. 1, (1985), 155-173.
- [LYC.85.1] **LYCHE T., COHEN E., MORKEN K**
Knot line refinement algorithms for tensor product B-spline surfaces.
CAGD 2, (1985), 133-139.
- [MAN.85] **MANKOVICH N.J., WOODRUF T.S., BEUMER J.**
The use of computerized tomographic scans for 3D display and prosthesis
construction.
SPIE 535, Application of optical instrumentation in medicine, Newport Beach, CA,
(1985).
- [MAR.80] **MARR D., HILLDRETH E.**
Theory of edge detection.
Proc. R. Soc. Lond. B207, (1980), 187-217.
- [MAR.70] **MARSDEN M.J.**
An identity for spline functions with applications to variation diminishing spline
approximation.
J. Approx. Theory 3, (1970), 7-49.
- [MAR.85] **MARTIEL J.L., GOLDBETER A.**
Oscillations, excitabilité et chaos dans les systèmes biochimiques et cellulaires.
in Actes du 4ème séminaire de Biologie Théorique, G. Benchetrit et J. Demongeot
éds, éditions du CNRS, Paris, (1985).

- [MAR.85.1] **MARTIEL J.L., GOLDBETER A.**
Autonomous chaotic behaviour of the slime mould *Dictyostelium discoideum*.
Nature 313, (1985), 590-592.
- [MEA.82] **MEAGHER D.J.**
Geometric modelling using octree encoding.
Computer graphics and image processing, vol. 19, n°2 (1982), 129-147.
- [MEA.85] **MEAGHER D.J.**
Application of octree techniques to 3D medical imaging.
7th annual conference of the IEEE engineering in medicine and biology society,
Chicago, (1985), 612-615.
- [MEM.86] **MEMIER M.**
Utilisation de l'ordinateur et des techniques d'analyse d'images pour la
caractérisation de champs turbulents.
Mémoire de diplôme d'Ingénieur CNAM, Grenoble.(1986)
- [MIC.79] **MICHELLI C.A.**
On a numerically efficient method for computing multivariate B-splines.
Multivariate approximation theory, Birkhäuser-Verlag, ISNM Vol. 51, (1979),
211-247.
- [MOD.77] **MODESTINO J.W., FRIES R.W.**
Edge detection in noisy images using recursive digital filtering.
Computer graphics and image processing, 6, (1977), 409-433.
- [MUR.84] **MURCH M.**
Physiological principles for the effective uses of colors.
IEEE CG&A, (1984), 49-54.
- [NEW.79] **NEWMAN W., SPROULL R.**
Principles of interactive computer graphics
Mc Graw Hill, New York, (1979).
- [PAI.78] **PAIHUA MONTES L.**
Quelques méthodes numériques pour le calcul de fonctions splines à une et à plusieurs
variables.
Thèse Grenoble, (1978).
- [PAT.86] **PATE D., RESNICK D., ANDRE M., SARTORIS D.J.**
Three dimensional imaging of the musculoskeletal system.
American Roentgen Ray Society, (1986), 545-551.
- [PEN.84] **PENG Q.S.**
An algorithm for finding the intersection lines between two B-splines surfaces.
Computer aided design, vol. 14, n°4, (1984), 191 (-)
- [PEY.82] **PEYRIN F.**
Méthodes de reconstruction et de visualisation d'images tridimensionnelles sur
tomographie numérique par rayons X.
Thèse Lyon (1982).
- [PIZ.84] **PIZER S.M.**
Systems for 3D display in medical imaging.
Pictorial Information Systems in Medecine, K.H. Höhne ed, Nato Series F19,
235-249.(1984)

- [PHI.84] **PHILLIPS M.B., ODELL G.M.**
An algorithm for locating and displaying the intersection of two arbitrary surfaces.
IEEE CG&A, (1984), 48-58.
- [RAW.68] **RAWSON E.G.**
3D computer generated movies using a varifocal mirror.
Applied Optics. vol. 7, n°8, (1968), 1505-1512.
- [RIC.76] **RICE J.R.**
Adaptative approximation.
J. Approx. Theory, 16, (1976), 329-337 .
- [RIG.87] **RIGAUT J.P.**
Fractals, semi-fractals et biométrie.
La dimension non entière et ses applications, Masson, Paris, (1987).
- [ROB.86] **ROBB A., HEFFERMAN P.B., CAMP J.J., HANSON D.P.**
A workstation for interactive display and quantitative analysis of 3D and 4D
biomedical images.
Proc. 10th IEEE annual symposium on Computer Applications in Medical care,
Washington, (1986) 240-256.
- [ROB.77] **ROBINSON G.**
Edge detection by compass gradient masks.
Computer graphics and image processing, 6, (1977), 492-501 .
- [SAM.84] **SAMET H.**
The quadtree and related hierarchical data structure.
Computed survey, vol. 16, n°2, (1984), 189-260.
- [SAN.82] **SANZ A., MUNOZ C., GARCIA N.**
On the use of splines in hierarchical image transmission.
Proc. ICASSP 82, IEEE CH 1746-7, (1982), 456-459.
- [SCH.85] **SCHMITT F, DU W.H.**
Méthode adaptative pour l'approximation polynomiale d'une surface échantillonnée.
Proc. 5ème congrès AFCET Reconnaissance des Formes et Intelligence Artificielle,
Grenoble (1985), 787-802.
- [SCHW.68] **SCHWARZ H.R.**
Tridiagonalization of a symmetric band matrix.
Numer. math. 12, (1968), 231-241.
- [SER.82] **SERRA J.**
Image analysis and mathematical morphology.
Academic Press, (1982).
- [SMA.67] **SMALE S.**
Differentiable dynamical systems.
Bull. AMS Soc. 73, (1967), 747-817.
- [THO.80] **THOM R.**
Modèles mathématiques de la morphogénèse.
C. Bourgeois, Paris, (1980).

- [TOT.84] **TOTTY W.G, VANNIER M.W.**
Complex musculoskeletal anatomy analysis using 3D surface reconstruction.
Radiology, 150, (1984), 173-177.
- [TRA.87] **TROUSSET Y., SCHMITT F.**
Lancer de rayon actif sur un volume numérique
Proceedings, Cognitiva-Image électronique, Paris (mai 1987), 308-314.
- [TUY.84] **TUY H.K., TUY L.Y.**
Direct 2D display of 3D objects.
IEEE Computer graphics and Applications, Vol. 4, n°10, (1984), 29-33.
- [UDU.82] **UDUPA J.K.**
Interactive segmentation and boundary surface formation for 3D digital images.
Computer graphics and image processing, 18, (1982), 213-235.
- [UDU.82.1] **UDUPA J.K.**
Boundary detection in multidimensions
IEEE transactions on pattern analysis and machine intelligence, vol. PAMI-4, n°1
(1982), 41-50.
- [UDU.83] **UDUPA J.K.**
Display of 3D information in discrete 3D scenes produced by computerized
tomography.
proc. IEEE, , vol. 71, n°3, (1983), 420-431.
- [UDU.84] **UDUPA J.K, HSUI-MEI HUNG, LIH-SHYANG CHEN**
Interactives display of 3D medical objects.
Pictorial Information Systems in Medecine, K.H. Höhne ed, Nato Series F19,
445-457 (1984).
- [UTR.79] **UTRERAS F.**
Utilisation de la méthode de validation croisée pour le lissage par fonctions splines à
une ou deux variables.
Thèse Grenoble, (1979).
- [VAL.84] **VALERA G.**
Application de l'inf-convolution spline au traitement de chromatogrammes de gas-oil.
Thèse Grenoble, (1984).
- [VAN.84] **VANNIER M.W., MARSH J.L.**
Surface reconstruction and computer aided design of cranio-facial surgical procedures
based on CT scans.
NGCA 5th annual conference, (1984).
- [VAN.84.1] **VANNIER M.W., MARSH J.L., WARREN J.O.**
3D reconstruction images for cranio-facial surgical planning and evaluation.
Radiology, 150, (1984), 179-184.
- [VAR.72] **VARAH J.M.**
On the solution of block tridiagonal systems arising from certain finite difference
equations.
Mathematics of computation, vol 26, n° 120, (1972), 859-868.
- [VIL.83] **VILLAFANA-PINO R.**
Méthodes de représentation pour la visualisation de volumes numériques.
Thèse Grenoble (1983).

- [WAH.75] **WAHBA G., WOLD S.**
A completely automatic french curve: fitting spline functions by cross validation.
Communications in statistics, 4 1°, (1975), 1-17.
- [WAH.79] **WAHBA G.**
How to smooth curves and surfaces with spline and cross-validation.
Technical report n° 555, Stat. Dept., Univ. of Wisconsin, (1979).
- [WEN.85] **WENDLINGER T.**
Construction, étude et représentation graphique de surfaces définies par des relevés de points.
Thèse Strasbourg (1985).
- [YAS.84] **YASUDA T., TORIWAKI J., YOKOI S., KATADA K.**
A three dimensional display system of CT images for surgical planning.
CH2047-9/84/000/0322 IEEE (1984), 322-327

AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT D'ETAT

Vu les dispositions de l'Article 5 de l'Arrêté du 16 avril 1974,

Vu les rapports de M..A.R.C.A.N.G.E.L.I. Rémi.....

M..L.A.U.R.E.N.T. Pierre-Jean.....

M..S.A.B.L.O.N.N.I.E.R.E. Paul.....

M..C.I.N.Q.U.I.N. Philippe..... est autorisé à
présenter une thèse en vue de l'obtention du grade de DOCTEUR D'ETAT
ES SCIENCES.

Fait à Grenoble, le 16 SEP. 1987

Le Président de l'U.S.T.M.G.



J.J. PAVAN

Résumé:

De nombreuses étapes du traitement et de l'analyse d'images font appel à l'estimation de paramètres de nature continue, obtenus classiquement à partir d'une représentation discrète. Pour améliorer ces estimations et pour disposer d'un cadre homogène de description de l'image et des objets produits par son analyse, nous proposons de modéliser d'une manière continue les images à traiter.

Cette modélisation est obtenue par des fonctions-spline (produits tensoriels de splines unidimensionnelles, B-splines polyédrales). Diverses techniques d'approximation sont mises en œuvre, et des algorithmes spécifiques sont développés pour s'adapter au volume important des données.

L'intérêt de cette représentation continue est illustré sur trois exemples d'origine médicale: segmentation d'images cytologiques, estimation numérique des confineurs décrivant certains systèmes biologiques, visualisation, segmentation et modélisation d'images tridimensionnelles obtenues en Tomodensitométrie et en Imagerie par Résonance Magnétique.

Mots clés:

Traitement d'images - Fonctions-splines - Représentation continue d'images - Segmentation 2D et 3D - Visualisation 3D - Application en Cytologie - Application en Radiologie - Application à l'estimation de confineurs .