



HAL
open science

Réseaux d'interconnexion bipartis : colorations généralisées dans les graphes

Méziane Aïder

► **To cite this version:**

Méziane Aïder. Réseaux d'interconnexion bipartis : colorations généralisées dans les graphes. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1987. Français. NNT: . tel-00325779

HAL Id: tel-00325779

<https://theses.hal.science/tel-00325779>

Submitted on 30 Sep 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

**L'Université Scientifique Technologique et Médicale
de Grenoble**

pour obtenir le grade de
DOCTEUR 3^{ème} CYCLE

Informatique et Mathématiques Appliquées
spécialité: Recherche Opérationnelle.

par
Méziane AÏDER

* * *

RÉSEAUX D'INTERCONNEXION BIPARTIS. COLORATIONS GÉNÉRALISÉES DANS LES GRAPHES.

* * *

Thèse soutenue le 25 Novembre 1987 devant la commission d'examen :

Président:	Monsieur	C. BENZAKEN
Examineurs:	Mesdames	A. GERMA
		D. SOTTEAU
	Messieurs	A. KHELLADI
		M. MOLLARD
		C. PAYAN



UNIVERSITE SCIENTIFIQUE TECHNOLOGIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

Président de l'Université :
M. TANCHE

Année Universitaire 1986 - 1987

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE SCIENCES ET DE GEOGRAPHIE

PROFESSEURS DE 1ère Classe

ARNAUD Paul
ARVIEU ROBERT
AUBERT Guy
AURIAULT Jean-Louis
AYANT Yves
BARBIER Marie-Jeanne
BARBIER Jean-Claude
BARJON Robert
BARNOUD Fernand
BARRA Jean-René
BELORISKY Elie
BENZAKEN Claude
BERNARD Alain
BERTRANDIAS Françoise
BERTRANDIAS Jean-Paul
BILLET Jean
BOELHER Jean-Paul
BONNIER Jane Marie
BOUCHEZ Robert
BRAVARD Yves
CARLIER Georges
CAUQUIS Georges
CHIBON Pierre
COHEN ADDAD Jean-Pierre
COLIN DE VERDIERE Yves
CYROT Michel
DEBELMAS Jacques
DEGRANGE Charles
DELOBEL Claude
DEPORTES Charles
DESRE Pierre
DOLIQUE Jean-Michel
DOUCE Rolland
DUCROS Pierre
FONTAINE Jean-Marc
GAGNAIRE Didier
GERMAIN Jean-Pierre
GIRAUD Pierre
HICTER Pierre
IDELMAN Simon
JANIN Bernard
JOLY Jean-René
KAHANE André, détaché
KAHANE Josette
KRAKOWIAK Sacha
KUPKA Yvon
LAJZEROWICZ Jeanine
LAJZEROWICZ Joseph
LAURENT Pierre-Jean
DE LEIRIS Joel

Chimie Organique
Physique Nucléaire I.S.N.
Physique C.N.R.S
Mécanique
Physique Approfondie
Electrochimie
Physique Expérimentale CNRS
Physique Nucléaire ISN
Biochimie Macromoléculaire Végétale
Statistiques-Mathématiques Appliquées
Physique C.E.N.G- D.R.F.
Mathématiques Pures
Mathématiques Pures
Mathématiques Pures
Mathématiques Pures
Géographie
Mécanique
Chimie Générale
Physique Nucléaire ISN
Géographie
Biologie Végétale
Chimie Organique
Biologie Animale
Physique
Mathématiques Pures
Physique du Solide
Géologie Générale
Zoologie
Mathématiques Appliquées
Chimie Minérale
Electrochimie
Physique des Plasmas
Physiologie Végétale
Cristallographie
Mathématiques Pures
Chimie Physique
Mécanique,
Géologie
Chimie
Physiologie Animale
Géographie
Mathématiques Pures
Physique
Physique
Mathématiques Appliquées
Mathématiques Pures
Physique
Physique
Mathématiques Appliquées
Biologie

LLIBOUTRY Louis
 LOISEAUX Jean-Marie
 MACHE Régis
 MAYNARD Roger
 MICHEL Robert
 OMONT Alain
 OZENDA Paul
 PAYAN Jean-Jacques
 PEBAY-PEYROULA Jean-Claude
 PERRIAUX Jacques
 PERRIER Guy
 PIERRARD Jean-Marie
 PIERRE Jean-Louis
 RASSAT André
 RENARD Michel
 RINAUDO Marguerite
 ROSSI André
 SAKAROVITCH Michel
 SAXOD Raimard
 SENDEL Philippe
 SERGERAERT Francis
 SOUCHIER Bernard
 SOUTIF Michel
 STUTZ Pierre
 VALENTIN Jacques
 VAN CUTSEM Bernard
 VIALON Pierre

Géophysique
 Sciences Nucléaires I.S.N.
 Physiologie Végétale
 Physique du Solide
 Minéralogie et Pétrographie (Géologie)
 Astrophysique
 Botanique (Biologie Végétale)
 Mathématiques Pures
 Physique
 Géologie
 Géophysique
 Mécanique
 Chimie Organique
 Chimie Systématique
 Thermodynamique
 Chimie CERMAV
 Biologie
 Mathématiques Appliquées
 Biologie Animale
 Biologie Animale
 Mathématiques Pures
 Biologie
 Physique
 Mécanique
 Physique Nucléaire I.S.N.
 Mathématiques Appliquées
 Géologie

PROFESSEURS de 2^{ème} Classe

ADIBA Michel
 ANTOINE Pierre
 ARMAND Gilbert
 BARET Paul
 BECKER Pierre
 BEGUIN Claude
 BLANCHI J.Pierre
 BOITET Christian
 BORNAREL Jean
 BRUANDET J.François
 BRUN Gilbert
 CASTAING Bernard
 CERFF Rudiger
 CHARDON Michel
 CHIARAMELLA Yves
 COURT Jean
 DEMAILLY Jean-Pierre
 DENEUVILLE Alain
 DEPASSEL Roger
 DERRIEN Jacques
 DUFREYNOY Alain
 GASPARD François
 GAUTRON René
 GENIES Eugène
 GIDON Maurice
 GIGNOUX Claude
 GILLARD Roland
 GIORNI Alain
 GUIGO Maryse
 GUMUCHAIN Hervé
 GUITTON Jacques
 HACQUES Gérard

Mathématiques Pures
 Géologie
 Géographie
 Chimie
 Physique
 Chimie Organique
 STAPS
 Mathématiques Appliquées
 Physique
 Physique
 Biologie
 Physique
 Biologie
 Géographie
 Mathématiques Appliquées
 Chimie
 Mathématiques Pures
 Physique
 Mécanique des Fluides
 Physique
 Mathématiques Pures
 Physique
 Chimie
 Chimie
 Géologie
 Sciences Nucléaires
 Mathématiques Pures
 Sciences Nucléaires
 Géographie
 Géographie
 Chimie
 Mathématiques Appliquées

HERBIN Jacky
 HERAULT Jeanny
 JARDON Pierre
 JOSELEAU Jean-Paul
 KERCKHOVE Claude
 LEBRETON Alain
 LONGEQUEUE Nicole
 LUCAS Robert
 LUNA Domingo
 MANDARON Paul
 MARTINEZ Francis
 MASCLE Georges
 NEMOZ Alain
 OUDET Bruno
 PELMONT Jean
 PERRIN Claude
 PFISTER Jean-Claude
 PIBOULE Michel
 RAYNAUD Hervé
 RIEDIMANN Christine
 ROBERT Gilles
 ROBERT Jean-Bernard
 SARROT-REYNAULD Jean
 SAYETAT Françoise
 SERVE Denis
 STOECKEL Frédéric
 SOUTIF Jeanne
 SCHOLL Pierre-Claude
 SUBRA Robert
 VALLADE Marcel
 VIDAL Michel
 VIVIAN Robert
 VOTTERO Philippe

Géographie
 Physique
 Chimie
 Biochimie
 Géologie
 Mathématiques Appliquées
 Sciences Nucléaires I.S.N.
 Physique
 Mathématiques Pures
 Biologie
 Mathématiques Appliquées
 Géologie
 Thermodynamique CNRS - CRTBT
 Mathématiques Appliquées
 Biochimie
 Sciences Nucléaires I.S.N.
 Physique du Solide
 Géologie
 Mathématiques Appliquées
 Mathématiques Pures
 Mathématiques Pures
 Chimie Physique
 Géologie
 Physique
 Chimie
 Physique
 Physique
 Mathématiques Appliquées
 Chimie
 Physique
 Chimie Organique
 Géographie
 Chimie

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L' IUT 1

PROFESSEURS de 1^{ère} Classe

BUISSON Roger
 DODU Jacques
 NEGRE Robert

Physique IUT 1
 Mécanique Appliquée IUT 1
 Génie Civil IUT 1

PROFESSEURS de 2^{ème} classe

BOUTHINON Michel
 CHAMBON René
 CHEHIKIAN Alain
 CHENAVAS Jean
 CHOUTEAU Gérard
 CONTE René
 GOSSE Jean-Pierre
 GROS Yves
 KUHN Gérard, (Détaché)
 MAZUER Jean
 MICHOUILLER Jean
 MONLLOR Christian
 NOUGARET Marcel
 PEFREN René
 PERARD Jacques
 PERRAUD Robert
 TERRIEZ Jean-Michel
 TOUZAIN Philippe
 VINCENDON Marc

EEA. IUT 1
 Génie Mécanique IUT 1
 EEA. IUT 1
 Physique IUT 1
 Physique IUT 1
 Physique IUT 1
 EEA. IUT 1
 Physique IUT 1
 Physique IUT 1
 Physique IUT 1
 Physique IUT 1
 EEA. IUT 1
 Automatique IUT 1
 Métallurgie IUT 1
 EEA. IUT 1
 Chimie IUT 1
 Génie Mécanique IUT 1
 Chimie IUT 1
 Chimie IUT 1

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE MEDECINE

PROFESSEURS CLASSE EXCEPTIONNELLE ET 1ère CLASSE

AMBLARD Pierre	Dermatologie	C.H.R.G.
AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie	C.H.R.G.
BEAUDOING André	Pédiatrie-Puericulture	C.H.R.G.
BEZEZ Henri	Orthopédie-Traumatologie	Hopital SUD
BONNET Jean-Louis	Ophthalmologie	C.H.R.G.
BOUCHET Yves	Anatomie	Faculté La Merci
	Chirurgie Générale et Digestive	C.H.R.G.
BUTEL Jean	Orthopédie-Traumatologie	C.H.R.G.
CHAMPETIER Jean	Anatomie-Topographique et Appliquée	C.H.R.G.
CHARACHON Robert	O.R.L.	C.H.R.G.
COUDERC Pierre	Anatomie-Pathologique	C.H.R.G.
DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologique	C.H.R.G.
DENIS Bernard	Cardiologie	C.H.R.G.
GAVEND Michel	Pharmacologie	Faculté La Merci
HOLLARD Daniel	Hématologie	C.H.R.G.
LATREILLE René	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
LE NOC Pierre	Bactériologie-Virologie	C.H.R.G.
MALINAS Yves	Gynécologie et Qbstétrique	C.H.R.G.
MALLION Jean-Michel	Médecine du Travail	C.H.R.G.
MICOUD Max	Clinique Médicale et Maladies Infectieuses	C.H.R.G.
MOURIQUAND Claude	Histologie	Faculté La Merci
PARAMELLE Bernard	Pneumologie	C.H.R.G.
PERRET Jean	Neurologie	C.H.R.G.
RACHAIL Michel	Hépto-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie	C.H.R.G.
SARRAZIN Roger	Clinique Chirurgicale	C.H.R.G.
STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie	C.H.R.G.
TANCHE Maurice	Physiologie	Faculté La Merci
VERAIN André	Biophysique	Faculté La Merci
VIGNAIS Pierre	Biochimie	Faculté La Merci

PROFESSEURS 2ème CLASSE

BACHELOT Yvan	Endocrinologie	C.H.R.G.
BARGE Michel	Neurochirurgie	C.H.R.G.
BENABID Alim Louis	Biophysique	Faculté La Merci
BENSA Jean-Claude	Immunologie	Hopital Sud
BERNARD Pierre	Gynécologie-Obstétrique	C.H.R.G.
BESSARD Germain	Pharmacologie	ABIDJAN
BOLLA Michel	Radiothérapie	C.H.R.G.
BOST Michel	Pédiatrie	C.H.R.G.
BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie Adultes	Hopital Sud
BRAMBILLA Christian	Pneumologie	C.H.R.G.
CHAMBAZ Edmond	Biochimie	C.H.R.G.
CHIROUSSEL Jean-Paul	Anatomie-Neurochirurgie	C.H.R.G.
COLOMB Maurice	Immunologie	Hopital Sud
COMET Michel	Biophysique	Faculté La Merci
CONTAMIN Charles	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
CORDONNIER Daniel	Néphrologie	C.H.R.G.
COULOMB Max	Radiologie	C.H.R.G.
CROUZET Guy	Radiologie	C.H.R.G.
DEBRU Jean-Luc	Médecine Interne et Toxicologie	C.H.R.G.
DEMONGEOT Jacques	Biostatistiques et Informatique Médicale	Faculté La Merci

DUPRE Alain	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
DYON Jean-François	Chirurgie Infantile	C.H.R.G.
ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie	Faculté La Merci
FAURE Claude	Anatomie et Organogénèse	C.H.R.G.
FAURE Gilbert	Urologie	C.H.R.G.
FOURNET Jacques	Hépatogastro-Entérologie	C.H.R.G.
FRANCO Alain	Médecine Interne	C.H.R.G.
GIRARDET Pierre	Anesthésiologie	C.H.R.G.
GUIDICELLI Henri	Chirurgie Générale et Vasculaire	C.H.R.G.
GUIGNIER Michel	Thérapeutique et Réanimation Médicale	C.H.R.G.
HADJIAN Arthur	Biochimie	Faculté La Merci
HALIMI Serge	Endocrinologie et Maladies Métaboliques	C.H.R.G.
HOSTEIN Jean	Hépatogastro-Entérologie	C.H.R.G.
HUGONOT Robert	Médecine Interne	C.H.R.G.
JALBERT Pierre	Histologie-Cytogénétique	C.H.R.G.
JUNIEN-LAVILLAULOY Claude	O.R.L.	C.H.R.G.
KOLODIE Lucien	Hématologie Biologique	C.H.R.G.
LETOUBLON Christian	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
MACHECOURT Jacques	Cardiologie et Maladies Vasculaires	C.H.R.G.
MAGNIN Robert	Hygiène	C.H.R.G.
MASSOT Christian	Médecine Interne	C.H.R.G.
MOUILLON Michel	Ophthalmologie	C.H.R.G.
PELLAT Jacques	Neurologie	C.H.R.G.
PHELIP Xavier	Rhumatologie	C.H.R.G.
RACINET Claude	Gynécologie	C.H.R.G.
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie	C.H.R.G.
RAPHAEL Bernard	Stomatologie	C.H.R.G.
SCHAERER René	Cancérologie	C.H.R.G.
SEIGNEURIN Jean-Marie	Bactériologie-Virologie	Faculté La Merci
SELE Bernard	Cytogénétique	Faculté La Merci
SOTTO Jean-Jacques	Hématologie	C.H.R.G.
STOEBNER Pierre	Anatomie Pathologique	C.H.R.G.
VROUSOS Constantin	Radiothérapie	C.H.R.G.

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT PHARMACIE

AGNIUS-DELORD Claudine	Physique	Faculté La Tronche
ALARY Josette	Chimie Analytique	Faculté La Tronche
BERIEL Hélène	Physiologie et Pharmacologie	Faculté La Tronche
BOUCHERLE André	Chimie et Toxicologie	Faculté Meylan
CUSSAC Max	Chimie Thérapeutique	Faculté La Tronche
DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie	Faculté La Tronche
JEANNIN Charles	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan
LATURAZE Jean	Biochimie	Faculté La Tronche
LUU DUC Cuong	Chimie Générale	Faculté La Tronche
MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognosie	Faculté La Tronche
MARZIN Daniel	Toxicologie	Faculté Meylan
RENAUDET Jacqueline	Bactériologie	Faculté La Tronche
ROCHAT Jacques	Hygiène et Hydrologie	Faculté La Tronche
SEIGLE-MURANDI Françoise	Botanique et Cryptogamie	Faculté Meylan
VERAIN Alice	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan



*A mes parents,
et à tous les miens.*



AVANT-PROPOS

Ce travail a été effectué au sein du Laboratoire des Structures Discrètes de l'Institut de l'Informatique et des Mathématiques Appliquées de Grenoble.

Je tiens à exprimer ma sincère reconnaissance à tous les membres dudit laboratoire pour l'accueil qui m'a été réservé, et en particulier à son directeur Monsieur Jean-Marie LABORDE.

Que Monsieur Charles PAYAN, Directeur de Recherche au C.N.R.S., trouve ici l'expression de ma plus profonde gratitude pour sa gentillesse, sa disponibilité et sa patience qui m'ont été d'un apport très précieux.

J'adresse mes plus vifs remerciements aux personnalités qui ont bien voulu constituer le Jury de cette thèse:

Monsieur le Professeur Claude BENZAKEN (U.S.T.M.Grenoble), pour l'honneur qu'il me fait en assurant la présidence de cet éminent Jury;

Mesdames le Professeur Anne GERMA (E.N.S.T. Paris) et Dominique SOTTEAU, Chargée de Recherche au C.N.R.S. (Orsay), pour avoir très aimablement accepté d'examiner ce travail et de participer au Jury;

Messieurs le Professeur Abdelkader KHELLADI (U.S.T.H.B. Alger) et Michel MOLLARD Chargé de Recherche au C.N.R.S. (Grenoble) pour avoir bien voulu faire partie du Jury.

Je tiens aussi à exprimer ma sincère reconnaissance au Ministère de l'Enseignement Supérieur du Gouvernement Algérien pour le support financier qu'il m'a apporté tout au long de l'élaboration de ce travail.

Je ne saurai oublier tous les amis et compagnons de thèse pour le soutien qu'ils ont toujours su me prodiguer.

Enfin, mes remerciements vont également aux membres du service de reprographie pour l'excellente qualité de leur travail.

INTRODUCTION

Les thèmes de recherche abordés dans cette thèse sont au nombre de deux.

Le premier, communément appelé (Δ, D) -problème, concerne les réseaux d'interconnexion, et constitue la part essentielle de ce travail.

Les réseaux d'interconnexion ont de nombreux domaines d'application. On les rencontre notamment dans les télécommunications et l'informatique où il s'agit de concevoir des réseaux, et de les adapter à certaines conditions pratiques et matérielles. Dans ce cadre, un élément fondamental, quant aux qualités de bon fonctionnement requises, est le choix de la structure du modèle à utiliser. Cette structure est très étroitement liée à certaines propriétés combinatoires du graphe associé. En effet, un réseau d'interconnexion, est modélisé par un graphe simple, dans lequel les sommets représentent les nœuds ou stations, et les arcs ou arêtes, les liaisons de communication, unidirectionnelles ou bidirectionnelles, le graphe étant soit orienté, soit non orienté.

Parmi les contraintes naturelles de bon fonctionnement des réseaux d'interconnexion, nous pouvons notamment relever :

- le nombre de liaisons issues d'un processeur (ou d'une station) doit être limité; le degré maximum du graphe associé doit être borné. Cette contrainte est imposée par les conditions de réalisation physique, et de coût.

- La durée des transmissions doit être des plus brèves, le graphe devant avoir un diamètre des plus faibles.

- La simplicité de l'acheminement des messages est souhaitée, ce qui se traduit par l'éventuelle existence d'un algorithme de routage permettant de donner assez rapidement un plus court chemin (ou chaîne) entre deux sommets quelconques. La notion de routage est surtout liée aux réseaux unidirectionnels.

- La résistance aux pannes doit être assez forte, le système doit demeurer en fonctionnement en cas de détérioration de certains éléments (nœuds ou liaisons). Cette contrainte est interprétée très diversement pour le graphe associé. La moindre des exigences est que le réseau continue à fonctionner en cas de défection de certains éléments (nœuds ou liaisons). Par conséquent, le graphe associé doit avoir une connexité assez élevée. On peut imposer en plus que la durée des transmissions entre les éléments non défectueux n'augmente pas trop; autrement dit, le diamètre du graphe obtenu après suppression de sommets et /ou arêtes ne doit pas être trop élevé.

D'autres paramètres permettant d'améliorer les qualités de résistance aux pannes des réseaux peuvent aussi être pris en considération. Dans ce cadre, plusieurs nouvelles notions viennent d'être introduites [4, 6, 23]. Citons par exemple celle du graphe de survivance [23]. Elle consiste à associer à un réseau muni d'un routage et d'un ensemble d'éléments défectueux, un graphe dont l'ensemble des sommets est constitué des nœuds indemnes du réseau, il existe un arc d'un sommet vers un autre, si le chemin correspondant du routage n'utilise aucun des éléments en panne. Un réseau a alors une bonne résistance aux pannes, si le graphe de survivance possède un diamètre assez faible, dans n'importe quelle situation de panne, ne disconnectant pas le réseau.

On rencontre essentiellement deux étapes dans l'étude des réseaux d'interconnexion.

Dans un premier temps, il faut construire des classes de graphes denses, puis, voir si leurs propriétés de résistance aux pannes sont bien adaptées.

Le point de départ de la première étape fut le problème de Moore, qui consiste à construire des graphes (non orientés) ayant un nombre de sommets égal à la borne théorique. Les recherches dans ce sens ont permis de constater que de tels graphes, non triviaux (qui ne sont ni des cycles, ni des graphes complets), existent très rarement (deux seulement sont connus).

Les problèmes de Moore, restreints aux graphes bipartis, ou spécifiques aux graphes orientés, ont aussi été considérés par certains auteurs [45, 49, 14]. Le cas des graphes bipartis orientés n'ayant pas été traité, une étude partielle est faite dans le cadre de cette thèse.

Cependant, certaines classes de graphes atteignant asymptotiquement la borne de Moore furent découvertes. Parmi celles-ci, celles définies sur des alphabets possèdent les meilleures qualités, et répondent parfaitement aux conditions exprimées. Elles font d'ailleurs l'objet de recherches actuelles. Citons, en particulier, les graphes de de Bruijn [16] et ceux de Kautz [43].

Les résultats de cette partie de la thèse concernent essentiellement les réseaux bipartis. Plus précisément, nous nous intéressons aux différents problèmes que nous venons d'énumérer, en nous limitant le plus souvent au cas des graphes bipartis.

C'est ainsi que, une fois les concepts de base clarifiés, et les notions utiles pour la suite rappelées au **premier chapitre**, nous présentons, au **deuxième chapitre** l'équivalent de la borne de Moore pour les graphes bipartis orientés et montrons que des graphes atteignant cette borne (que nous appellerons graphes bipartis orientés de Moore) existent pour des valeurs relativement petites du diamètre. Ces graphes serviront par ailleurs à la construction d'une classe de graphes asymptotiquement optimaux. Nous montrons, en outre, que pour certaines valeurs du degré et du diamètre, il n'existe pas de graphes bipartis orientés de Moore.

Nous abordons, enfin, partiellement, une notion généralisant celle des graphes en double boucle, en donnant quelques graphes ayant des diamètres minimums, sous certaines contraintes.

Le **chapitre trois** contient une étude globale des classes de graphes sur alphabets, qui permet de vérifier que la plupart de ces graphes sont générés par l'opération de passage au graphe représentatif des arcs, à partir de graphes ayant un diamètre relativement petit.

Dans le **quatrième chapitre**, nous nous intéressons à la résistance aux pannes d'une classe particulière de graphes bipartis; il s'agit des graphes pseudo-séquentiels, qui constituent une sous-classe des graphes de Delorme-Farhi. Nous montrons, entre autres, que ces graphes ont de bonnes qualités de résistance aux pannes (connexité, vulnérabilité et diamètre de survivance).

Le **chapitre cinq** concerne certaines classes de graphes ayant un petit degré (3 ou 4). Nous définissons une opération de passage d'un graphe 4-régulier à un graphe cubique, et étudions l'évolution du diamètre, induite par cette opération.

Pour clore cette partie, nous avons abordé, au **chapitre six**, les problèmes de résistance aux pannes des réseaux bipartis. C'est ainsi que nous donnons, sous forme de seuils pour le nombre de sommets d'un graphe biparti, des conditions suffisantes assurant la maximalité des différents paramètres de connexité (connexité, connexité forte, arête-connexité et arc-connexité).

La seconde partie de cette thèse concerne la coloration des graphes. Elle est constituée du **septième et dernier chapitre**, dans lequel nous nous intéressons à certaines formes de généralisations de la coloration habituelle. Parmi celles-ci, la notion de \mathfrak{B} -coloration consiste à disposer d'un ensemble de couleurs et d'une famille de permutations sur cet ensemble, chacune associée à une arête d'un graphe donné.

Il s'agit de colorier les sommets d'un tel graphe de sorte que les extrémités d'une arête ne reçoivent pas des couleurs homologues (deux couleurs affectées à deux sommets adjacents étant homologues si l'une de ces couleurs est l'image de l'autre par la bijection associée à l'arête, dans le sens de la bijection, reliant ces sommets). La notion habituelle de coloration revient donc à prendre l'identité pour toutes les bijections. Dans le cas qui nous intéresse, les bijections étant quelconques, nous essayons de généraliser certains des résultats déjà obtenus dans le cadre de la coloration usuelle.

C'est ainsi que nous retrouvons les inégalités de Szekeres-Wilf [51] et de Welsh-Powell [53]. Nous donnons, en outre, une généralisation du théorème de Brooks [15] dans le cadre de la \mathfrak{B} -coloration, et prouvons, en exhibant pour n'importe quelle valeur de n , des graphes bipartis non \mathfrak{B} -colorables avec n couleurs, que le nombre \mathfrak{B} -chromatique d'un graphe est indépendant, en général, de son nombre chromatique.

Néanmoins, l'égalité entre ces nombres est assurée pour les graphes triangulés. C'est d'ailleurs la seule classe de graphes ayant cette propriété conservée par inclusion.

Par ailleurs, tous ces résultats restent valables pour la notion de coloration consistant à associer, en plus, des listes de couleurs aux sommets, chaque sommet devant recevoir une couleur de sa liste.

Pour clore ce chapitre, nous étudions partiellement le cas de la \mathfrak{B} -coloration où les bijections sont définies sur un ensemble de couleurs de cardinal assez élevé.

* * *



CHAPITRE I

DÉFINITIONS ET NOTATIONS

I.1 INTRODUCTION

La performance d'un système informatique distribué ou d'un réseau de communication dépend essentiellement de la structure du modèle utilisé. Parmi les contraintes naturelles de bon fonctionnement, nous pouvons notamment relever les suivantes :

- le nombre de liaisons issues d'un processeur (ou d'une station) doit être limité. Cette contrainte est imposée par les conditions de réalisation physique,
- la durée des transmissions doit être des plus brèves,
- la résistance aux pannes doit être assez conséquente, le système devant demeurer en fonctionnement en cas de défection de certains éléments.

Nous pouvons aussi exiger que l'acheminement des messages s'effectue de façon simple.

Ces contraintes correspondent à certaines propriétés des graphes. Le modèle d'un réseau d'interconnexion est, en effet, un graphe $G = (V, E)$, dans lequel V désigne l'ensemble des sommets du graphe et E l'ensemble des liens entre les sommets, appelés arcs si le graphe est orienté, et arêtes sinon.

Les sommets représentent donc les nœuds (resp. stations) du système informatique (resp. réseau de communication), les arcs les liaisons unidirectionnelles entre les nœuds (resp. stations) et, dans le cas où le graphe n'est pas orienté, les arêtes correspondent à des liaisons bidirectionnelles.

I.2 DÉFINITIONS ET NOTATIONS

D'une manière générale, les définitions et notations utilisées dans cette partie sont celles de C. Berge [3]. Nous allons toutefois en rappeler les principales.

I.2.1 Concept non orienté

Dans un graphe G non orienté, deux sommets x et y sont **adjacents** (voisins) s'ils sont reliés par une arête, notée xy (ou $\{x,y\}$). L'ensemble des voisins d'un sommet x sera noté $\Gamma(x)$, et son cardinal, noté $d(x)$ désignera le **degré du sommet x** . Le **degré maximum** $\Delta(G)$, ou tout simplement Δ s'il n'y a aucun risque de confusion, du graphe G est le plus grand des degrés de ses sommets. Son degré minimum sera noté $\delta(G)$ ou δ , et représentera le plus petit des degrés de ses sommets.

Si $\Delta(G) = \delta(G)$, le graphe G est dit **Δ -régulier**.

La limitation du nombre de liaisons issues d'un processeur se traduit donc, par une majoration du degré maximum du graphe associé.

La distance **$\text{dist}(x,y)$** , entre les sommets x et y est la longueur d'une plus courte chaîne entre x et y . Le maximum de toutes ces distances représente le **diamètre** du graphe G et sera noté **$\text{Diam}(G)$** , ou **D** , s'il n'y a aucune confusion.

La brièveté de la durée de transmission des messages correspond donc à la petitesse du diamètre du graphe associé.

Un **(Δ,D) -graphe** est un graphe ayant un degré maximum égal à Δ , et un diamètre égal à D .

Le graphe G est dit **k -connexe**, si la suppression de moins de k sommets ne disconnecte pas le graphe G . La **connectivité** de G , notée $\kappa(G)$, désigne le plus grand entier k pour lequel le graphe G est k -connexe. De façon analogue, le graphe G est **l -arête-connexe**, si la suppression de moins de l arêtes ne disconnecte pas le graphe G . L'**arête-connectivité** $\lambda(G)$, du graphe G désigne le plus grand entier l pour lequel G est l -arête-connexe.

Tout graphe G vérifie la relation:

$$\lambda(G) \leq \kappa(G) \leq \delta(G)$$

Une bonne résistance aux pannes d'un réseau d'interconnexion correspond, donc, à une large connexité du graphe associé.

I.2.2 Concept orienté

Dans le cas d'un graphe G orienté, un sommet y est dit **successeur** d'un sommet x s'il existe un arc de x vers y , noté (x,y) . Le sommet x (resp. y) est alors dit **extrémité initiale** (resp. **terminale**) de l'arc (x,y) . Dans ce cas, le sommet x est dit **prédécesseur** du sommet y . L'ensemble des successeurs du sommet x est noté $\Gamma^+(x)$. Son cardinal, noté $d^+(x)$, désigne le degré extérieur de x . Le cardinal de l'ensemble $\Gamma^-(y)$ des prédécesseurs de y est noté $d^-(y)$ et représente le degré intérieur du sommet y .

Si, pour tout sommet x de G , $d^+(x) = d^-(x) = d$, le graphe G est dit **d -régulier**.

Un graphe orienté G est **fortement connexe** si pour tout sommet x et pour tout sommet y , il existe un chemin de x vers y . G est dit **k -connexe** si la suppression de moins de k sommets ne disconnecte pas le graphe G (c'est à dire le graphe G reste fortement connexe si on supprime moins de k sommets). La **connectivité forte** de G , notée $\kappa(G)$, désigne le plus grand entier k pour lequel G est k -connexe. De manière similaire, G est dit **l -arc-connexe** si la suppression de moins de l arcs ne disconnecte pas le graphe G (c'est à dire le graphe G reste fortement connexe si on supprime moins de l arcs). L'**arc-connectivité** de G , notée $\lambda(G)$, désigne le plus grand entier l pour lequel G est l -arc-connexe.

La distance d'un sommet x à un sommet y , notée $\text{dist}(x,y)$, désigne la longueur d'un plus court chemin du sommet x au sommet y . Le maximum de toutes ces distances représente le **diamètre** du graphe G et est noté $\text{Diam}(G)$.

Un (Δ, D) -graphe orienté, est un graphe orienté, Δ -régulier et dont le diamètre est au plus égal à D .

Si G est un graphe orienté, le graphe obtenu en ignorant l'orientation des arcs et en remplaçant, éventuellement, les arêtes parallèles par une seule arête, est appelé **graphe sous-jacent** à G et est noté UG .

* * *

1.3 GRAPHES REPRÉSENTATIFS DES ARCS

Le graphe LG représentatif des arcs d'un graphe orienté $G = (X, E)$ est un graphe orienté, dont les sommets représentent les arcs de G , et pour lequel, il existe un arc du sommet e vers le sommet f , si et seulement si, dans G , l'extrémité terminale de l'arc e coïncide avec l'extrémité initiale de l'arc f . Certaines propriétés de ces graphes ont été décrites par Fiol, Yebra et Alegre [30], dont:

Proposition 1.1 Si $G = (X, E)$ est un (Δ, D) -graphe orienté,
alors LG a $\Delta|X|$ sommets et un diamètre au plus égal à $D+1$.

Les graphes représentatifs des arcs ont été étudiés par Heuchenne, qui a donné la caractérisation suivante [35]:

Proposition 1.2 Un graphe orienté G est le graphe représentatif des arcs d'un certain graphe H , si et seulement si, deux sommets de G qui ont un successeur commun ont le même ensemble de successeurs.

En utilisant le fait que cette propriété est conservée par inclusion (dans le sens du passage à un sous-graphe induit), certaines autres propriétés en découlent.

Une conséquence, déduite par J. Bond [11] stipule que:

Proposition 1.3 Si G est un graphe orienté, et LG est le graphe représentatif de ses arcs, alors, H est un sous-graphe induit de LG , si et seulement si, G possède un sous-graphe H' tel que $H=LH'$.

* * *

I.4 (Δ, D)-PROBLÈME ET GRAPHES DE MOORE

I.4.1 Graphes non orientés

Le (Δ, D)-problème consiste en la construction de (Δ, D)-graphes ayant le plus grand nombre possible de sommets. Une borne théorique pour ce nombre est donnée par Moore de la manière suivante:

soit $G = (X, E)$ un (Δ, D)-graphe, et soit x un sommet quelconque de G . Le nombre de sommets à distance i de x est majoré par $\Delta (\Delta-1)^{i-1}$.

Donc:

$$|X| \leq 1 + \Delta \sum_{i=1}^{D-1} (\Delta-1)^{i-1} = \begin{cases} 2D + 1 & \text{si } \Delta=2 \\ \frac{\Delta(\Delta-1)^D - 2}{\Delta-2} & \text{si } \Delta \geq 3 \end{cases}$$

Les graphes satisfaisant l'égalité sont appelés graphes de Moore.

Cependant, l'égalité n'est pas atteinte très souvent. Outre les graphes complets et les cycles impairs, seulement deux autres graphes de Moore sont connus [36].

Il s'agit du graphe de Petersen (fig.1), pour $\Delta = 3$ et $D = 2$, et du graphe de Hoffman-Singleton (fig.2), pour $\Delta = 7$ et $D = 2$.

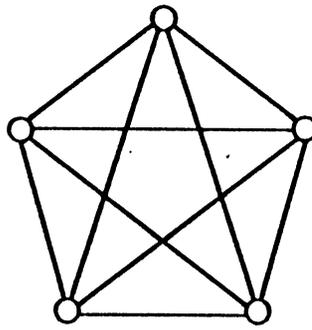


fig 1 Graphe de Petersen

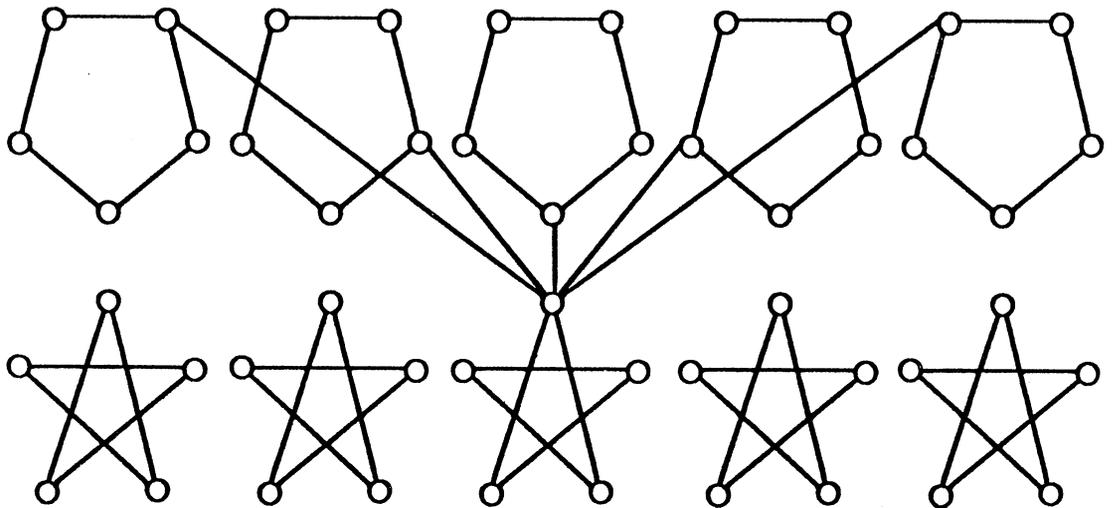


fig 2 : Graphe de Hoffman-Singleton,

les autres arêtes étant celles permettant de former un graphe de Petersen entre n'importe quel cycle représenté en pentagone, et n'importe lequel de ceux représentés en étoiles.

Pour $\Delta=57$ et $D=2$, l'existence est possible mais n'est pas prouvée.

Si $D > 2$ et $\Delta > 2$, il n'existe aucun (Δ, D) -graphe de Moore, [2, 18]. Certains résultats partiels ont été établis par Friedman [32].

I.4.2 Graphes orientés

Dans ce cas, on s'intéresse à la construction de (Δ, D) -graphes orientés, ayant le plus grand nombre possible de sommets.

De façon analogue à celle du cas non orienté, une borne théorique de Moore est obtenue de la manière suivante:

Soit $G=(X,E)$ un (Δ,D) -graphe orienté, et soit x un sommet quelconque de G .

Le nombre de sommets à distance i de x est borné supérieurement par d^i .

Donc:

$$|X| \leq \sum_{i=0}^D d^i = \begin{cases} D + 1 & \text{si } d=1 \\ \frac{d^{D+1} - 1}{d-1} & \text{si } d \geq 2 \end{cases}$$

Néanmoins, les seuls graphes atteignant cette borne sont les graphes orientés complets et les circuits [14].

I.4.3 Graphes bipartis non orientés

Un graphe $G=(X,E)$ (orienté ou non) est **biparti**, si l'ensemble X de ses sommets peut être partitionné en deux parties X_1 et X_2 , de sorte que toutes les arêtes (ou arcs) ne relient que des sommets appartenant à deux parties différentes.

Soit $b(\Delta,D)$ le nombre maximum de sommets que peut avoir un (Δ,D) -graphe biparti. Alors, $b(\Delta,D)$ ne peut excéder la borne de Moore obtenue de la manière suivante:

soit x un sommet quelconque de G . Alors

*) si $i \leq D - 1$, x possède au plus $\Delta(\Delta-1)^{i-1}$ sommets à distance i ,

*) si $i = D$, en utilisant le fait que G est biparti, au plus $(\Delta-1)^{D-1}$ sommets sont à distance D de x .

Par conséquent,

$$b(\Delta,D) \leq 1 + \Delta \sum_{i=1}^{D-1} (\Delta-1)^{i-1} + (\Delta-1)^{D-1} = \begin{cases} 2D & \text{si } \Delta=2 \\ \frac{2(\Delta-1)^D - 1}{\Delta-2} & \text{si } \Delta \geq 3 \end{cases}$$

Les graphes bipartis satisfaisant l'égalité sont appelés graphes bipartis de Moore. De tels graphes existent dans les cas suivants:

- $\Delta = 2$, ces graphes étant les cycles de longueur $2D$,

- $D = 2$, ces graphes étant les graphes bipartis complets équilibrés,

Si $D = 3, 4$ ou 6 , des graphes bipartis de Moore existent si $\Delta - 1$ est une puissance d'un nombre premier [5], auquel cas, certains sont donnés par les graphes d'incidence de certaines géométries projectives [21, 49].

I.4.4 Graphes bipartis orientés

Ce cas n'ayant pas été déjà traité, une étude partielle est faite dans le cadre de cette thèse, et figure au chapitre II.

* * *

I.5 GRAPHES SUR ALPHABETS

I.5.1 Graphes de de Bruijn orientés

Ces graphes ont été introduits par de Bruijn [16], dans un contexte totalement différent. Nombre d'autres auteurs les ont redécouverts et ont procédé à des généralisations [40, 47].

Le graphe de de Bruijn $B(\Delta, D)$, est le graphe orienté dont les sommets sont les mots de longueur D d'un alphabet A de taille Δ , et dans lequel, un sommet $x = x_0 x_1 \dots x_{D-1}$, possède comme successeurs tous les sommets qui s'écrivent sous la forme $x_1 \dots x_{D-1} \alpha$, où α est une lettre quelconque de l'alphabet A .

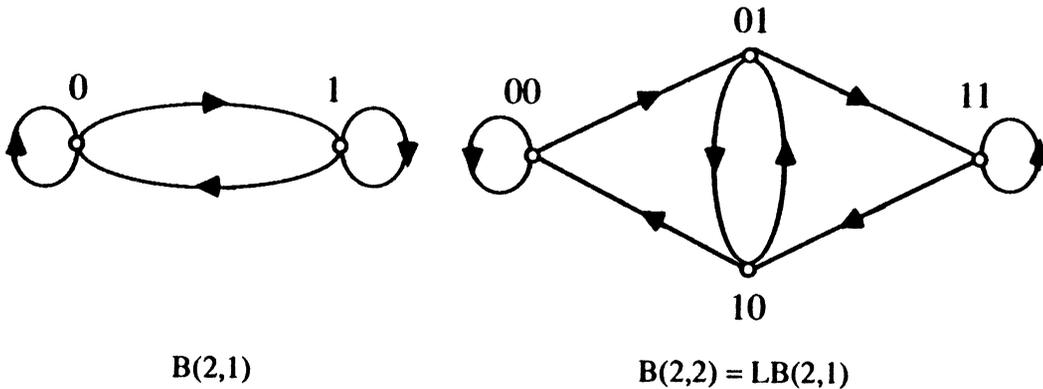
$B(\Delta, D)$ est donc un (Δ, D) -graphe et possède Δ^D sommets.

Remarquons d'abord que si K_Δ est le graphe orienté complet sur Δ sommets, avec une boucle en chaque sommet, alors $B(\Delta, 1) = K_\Delta$.

Considérons $B(\Delta, D)$, et construisons le graphe $LB(\Delta, D)$ représentatif de ses arcs.

Associons au sommet de $LB(\Delta, D)$ représentant l'arc (x, y) de $B(\Delta, D)$, avec $x = x_0 x_1 \dots x_{D-1}$ et $y = x_1 \dots x_{D-1} \alpha$, l'étiquette $x_0 x_1 \dots x_{D-1} \alpha$.

En constatant que dans $B(\Delta, D)$, l'arc représenté dans $LB(\Delta, D)$ par le sommet étiqueté par $x_1 \dots x_{D-1} x_D x_{D+1}$ ne peut succéder qu'à un arc dont l'étiquette dans $LB(\Delta, D)$ est de la forme $x_0 x_1 \dots x_{D-1} x_D$, il en ressort que les graphes $LB(\Delta, D)$ et $B(\Delta, D+1)$ sont isomorphes.



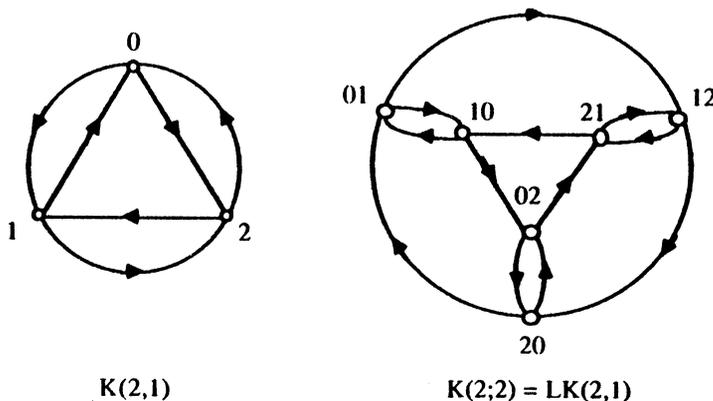
1.5.2 Graphes de Kautz

Le graphe de Kautz $K(\Delta, D)$, est le graphe orienté, dont les sommets sont les mots de longueur D d'un alphabet de taille $\Delta + 1$, dans lequel, un sommet $x = x_0 x_1 \dots x_{D-1}$ possède comme successeurs, tous les sommets qui s'écrivent sous la forme $x_1 \dots x_{D-1} \alpha$, où α est une lettre quelconque de l'alphabet, *différente de x_{D-1}* .

$K(\Delta, D)$ est donc un (Δ, D) -graphe et possède $\Delta^D + \Delta^{D-1}$ sommets.

Notons que $K(\Delta, 1)$ correspond exactement à $K_{\Delta+1}$, le graphe orienté, complet sur $\Delta + 1$ sommets.

Un étiquetage analogue à celui utilisé pour les graphes de de Bruijn, et un raisonnement similaire permet d'affirmer que $K(\Delta, D+1) = LK(\Delta, D)$.



1.5.3 Graphes de Delorme-Farhi

Le graphe orienté $C_s(m,d,k)$, introduit par Delorme et Farhi [22], est défini sur l'ensemble de sommets $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times A^k$,

où $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers modulo m , et A un alphabet de taille Δ .

Chaque sommet est défini par ses coordonnées $(a; x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$,

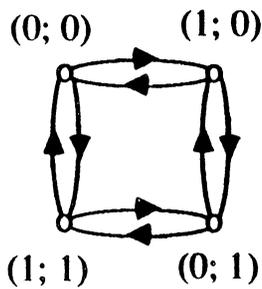
où $a \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, et $x_i \in A, i=0..k-1$.

Les successeurs d'un sommet $x = (a; x_0, x_1, \dots, x_{k-1})$, sont tous les sommets de la forme $(a+1; x_1, x_2, \dots, \alpha)$, où α est une lettre quelconque de l'alphabet A .

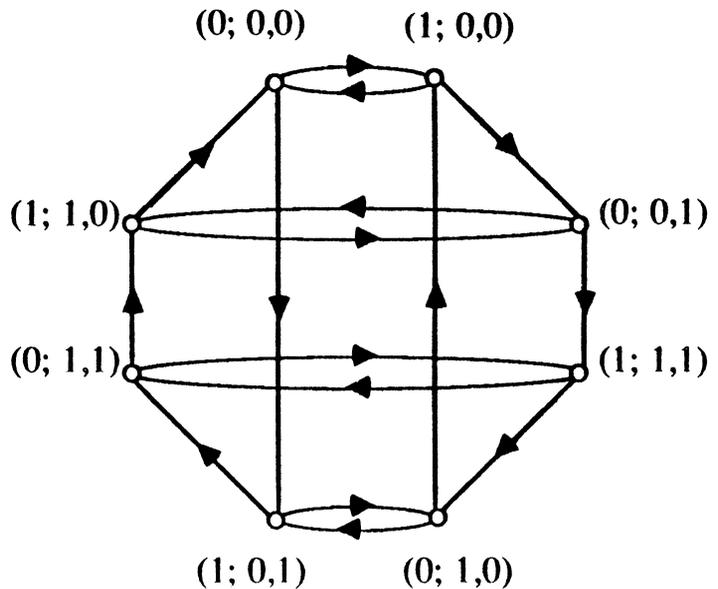
$C_s(m,\Delta,k)$ est un $(\Delta, k+m-1)$ -graphe et possède $m \cdot \Delta^k$ sommets.

Notons par $C_s(m,\Delta,0)$, le circuit sur m sommets, où chaque arc est remplacé par d arcs parallèles.

J. Bond a établi que pour $k \geq 0$, les graphes $C_s(m,\Delta,k+1)$ et $LC_s(m,\Delta,k)$ sont isomorphes [11].



$C_s(2,2,2)$



$C_s(2,2,3) = LC_s(2,2,2)$

I.5.4 Autres classes de graphes sur alphabets

D'autres classes de graphes sur alphabets existent, et leurs définitions sont assez semblables à celles que nous venons d'évoquer.

Un aperçu général de ces graphes peut être trouvé dans [11]. Parmi les plus connus, citons les **graphes séquentiels**, $S(\Delta_1, \Delta_2, k)$, introduits par Fiol, Yebra et Fabrega [31], et qui sont définis à partir d'un graphe, que nous appellerons **pseudo-séquentiel**, ayant comme ensemble de sommets, l'ensemble de tous les mots de longueur $2k$, dont les lettres sont alternativement dans deux alphabets A_1 et A_2 de tailles Δ_1 et Δ_2 respectivement, un sommet $x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_k y_k$ possédant comme successeurs tous les sommets de la forme $y_1 x_2 y_2 \dots x_k y_k x_{k+1}$, où x_{k+1} est une lettre quelconque de l'alphabet contenant les lettres x_i du sommet en question. Lorsque les alphabets A_1 et A_2 sont identiques, nous retrouvons les graphes de de Bruijn, alors que s'ils sont disjoints et de même cardinal, les graphes obtenus sont exactement ceux de Delorme-Farhi, $C_s(2, \Delta, n)$.

Les graphes séquentiels, sont alors obtenus à partir des graphes pseudo-séquentiels, en prenant leur quotient par la polarité consistant à identifier un sommet $x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_k y_k$, avec son opposé, $y_k x_k y_{k-1} x_{k-1} \dots y_1 x_1$.

* * *

I.6 RÉSISTANCE AUX PANNES

I.6.1 Connexité

I.6.1.1 Connexité forte

Si G est un graphe orienté, d'arc-connectivité $\lambda(G)$, le graphe LG est alors de connectivité forte égale à $\lambda(G)$. Donc, la connectivité forte des graphes définis dans le paragraphe I.4 est égale à l'arc-connectivité des premiers graphes définissant l'itération de passage au graphe représentatif des arcs.

Par conséquent, nous avons:

$$\kappa(B(\Delta,D)) = \Delta - 1,$$

$$\kappa(K(\Delta,D)) = \Delta,$$

$$\kappa(C_s(m,\Delta,k)) = \Delta.$$

1.6.1.2 Connectivité des graphes sous-jacents

M. Schlumberger a montré que le graphe $UB(\Delta,D)$, sous-jacent au graphe de de Bruijn $B(\Delta,D)$, est de connectivité égale à $2\Delta - 2$, [48]. Ce résultat a aussi été obtenu par A.H. Esfahanian et S.L. Hakimi [28].

Pour les graphes de Kautz, J.C. Bermond, N. Homobono et C. Peyrat ont établi que la connectivité de $UK(\Delta,D)$ est égale à $2\Delta - 1$ [7].

Dans les deux cas, la connectivité du graphe sous-jacent est égale au degré minimum. Dans le chapitre IV, nous montrons qu'il en est de même pour les graphes $UC_s(2,\Delta,k)$. Leur connectivité vaut effectivement $2d - 1$.

1.6.2 Vulnérabilité du diamètre

J. Bond et C. Peyrat ont étudié la vulnérabilité des graphes $UB(\Delta,D)$ et $UK(\Delta,D)$. Ils ont, en particulier, obtenu le résultat suivant [12]:

Proposition 1.4 Si $D \geq 5$ et $s = 2\Delta - 2D$, alors le graphe obtenu à partir de $UB(\Delta,D)$ ou de $UK(\Delta,D)$ en supprimant au plus $s - 1$ sommets est de diamètre inférieur ou égal à $D + 1$.

Ces mêmes auteurs ont par ailleurs étudié dans un autre article [13], les propriétés de vulnérabilité du diamètre d'un graphe en fonction du nombre de ses sommets. Ils ont obtenu quelques résultats généraux concernant les graphes quelconques. Dans le cadre de cette thèse, nous adapterons certains de ces résultats aux graphes bipartis.

I.6.3 Autres propriétés

Dans un graphe orienté $G = (X, E)$ de diamètre D , un **routage** \mathcal{R} est une application de $X^2 \rightarrow X^{|X|}$, qui associe, à tout couple (x, y) de sommets de G , un chemin de x à y . Nous convenons que la notation X^n désigne l'ensemble de tous les chemins de longueur inférieure ou égale à n .

Un routage qui associe à tout couple (x, y) de sommets un plus court chemin de x à y , est qualifié de **minimal** ou, de façon plus explicite, **routage des plus courts chemins**.

Récemment, Dolev, Halpern, Simons et Strong [23] ont introduit une nouvelle notion permettant d'estimer la résistance aux pannes d'un réseau d'interconnexion. Cette notion se rapporte essentiellement aux graphes orientés.

Elle consiste à associer à un tel graphe G muni d'un routage et dont un ensemble F d'éléments (sommets et/ou arcs), de cardinal inférieur à la connectivité, sont défectueux, un graphe, appelé **graphe de survivance**, défini sur l'ensemble des sommets non défectueux, et pour lequel il existe un arc d'un sommet x à sommet y , si et seulement si, dans G , le chemin du routage considéré, du sommet x au sommet y , évite tous les éléments de F .

Le **diamètre de survivance** d'un graphe G est alors égal au plus grand des diamètres de tous les graphes de survivance associés à G .

Plus le diamètre de survivance est petit, plus le réseau auquel il est associé est, selon Dolev, Halpern, Simons et Strong, performant.

N. Homobono et C. Peyrat ont étudié les graphes de survivance associés aux graphes de de Bruijn et de Kautz, et ont établi que leur diamètre, dans chacun des cas, est minimum, étant égal à deux [37]. Ceci veut dire que la suppression de n'importe quel ensemble de sommets et/ou arêtes, de cardinal inférieur à la connexité forte de ces graphes (égale au degré en l'occurrence) le graphe de survivance associé possède un diamètre égal à deux.

Au chapitre IV, dans l'étude que nous mènée sur la résistance aux pannes des graphes pseudo-séquentiels, nous montrons que ceux-ci ont également un diamètre de survivance égal à deux.

* * *

I.7 PROPRIÉTÉS COMBINATOIRES SUPPLÉMENTAIRES

En plus des propriétés déjà citées (connexité, vulnérabilité,...), nous pouvons nous demander quelles sont les qualités supplémentaires à exiger d'un réseau d'interconnexion. Par exemple, par analogie aux systèmes distribués locaux où les réseaux utilisés ont une structure d'anneau, il peut être intéressant de savoir si un réseau contient un ou plusieurs circuits hamiltoniens [8, 24, 25, 39, 54]. Pour ce qui est des classes de graphes que nous avons citées au paragraphe I.4, ils sont tous hamiltoniens, cette propriété, jointe à celle de la régularité d'un graphe, étant transmise au graphe représentatif de ses arcs.

* * *

CHAPITRE II

GRAPHES BIPARTIS ORIENTÉS DE MOORE

II.1 INTRODUCTION

Les graphes de Moore ont initialement été définis dans le cas général, pour des graphes quelconques non orientés. Depuis, nombre d'auteurs se sont intéressés à certains cas particuliers. C'est ainsi que dans un premier temps, Singleton a étudié le cas des graphes bipartis non orientés, et a montré l'existence, dans certains cas, de tels graphes ayant le nombre maximum théorique de sommets [49]. D'autres auteurs ont étudié le même problème sous d'autres aspects [29, 45]. Puis, Bridges et Toueg ont établi l'inexistence, dans les cas non triviaux, de graphes orientés théoriquement optimaux [14].

Dans ce chapitre, après avoir donné une borne théorique pour les graphes bipartis orientés, nous montrons que de tels graphes, dont le nombre de sommets atteint cette borne, existent pour des diamètres relativement petits (2, 3 et 4). Ces graphes serviront par ailleurs à la construction d'une classe de graphes bipartis orientés ayant, pour un degré et un diamètre donnés, un nombre assez appréciable de sommets (asymptotiquement optimal). Il s'ensuivra une étude des propriétés de cette classe. Nous montrons, en outre, que les graphes bipartis orientés de Moore n'existent pas pour certaines valeurs du degré et du diamètre.

* * *

II.2 GRAPHES BIPARTIS ORIENTÉS DE MOORE

Dans tout ce chapitre, sauf indication contraire, les graphes considérés sont bipartis, orientés et réguliers. Voyons d'abord le nombre maximum de sommets que peut avoir un tel graphe de demi-degré maximum Δ et de diamètre D .

Proposition II.1 Soit $G = (X, E)$, un graphe biparti orienté, de demi-degré maximum Δ et de diamètre D .

$$\text{Alors, } |X| \leq \begin{cases} D+1 & \text{si } \Delta = 1 \text{ et } D \text{ est impair,} \\ D & \text{si } \Delta = 1 \text{ et } D \text{ est pair,} \\ 2 \frac{\Delta^{D+1} - 1}{\Delta^2 - 1} & \text{si } \Delta \geq 2 \text{ et } D \text{ est impair,} \\ 2 \frac{\Delta^{D+1} - \Delta}{\Delta - 1} & \text{si } \Delta \geq 2 \text{ et } D \text{ est pair.} \end{cases}$$

Preuve

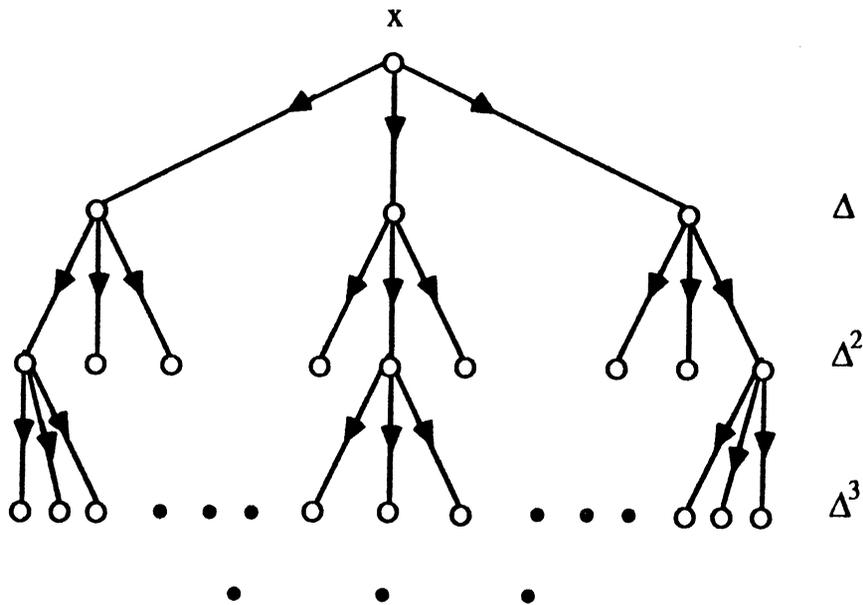
Soient X_1 et X_2 les deux stables du graphe G , définis par la bipartition, et supposons que $|X_1| \geq |X_2|$.

Supposons que Δ soit atteint pour les demi-degrés extérieurs (sinon, il suffirait de considérer une mise en couches jusqu'au sommet x , c'est à dire la couche i est formée des sommets y , tels que $\text{dist}(y, x) = i$, au lieu des sommets z tels que $\text{dist}(x, z) = i$).

Si $D = 2p+1$, en faisant une mise en couches par rapport à un sommet x du stable X_1 et en remarquant que pour $i \leq D-1$, au plus Δ^i sommets sont à distance i de x , nous avons:

$$|X_1| \leq \sum_{i=0}^p \Delta^{2i} = \begin{cases} p+1 & \text{si } \Delta = 1, \\ \frac{\Delta^{2(p+1)} - 1}{\Delta^2 - 1} & \text{si } \Delta \geq 2. \end{cases}$$

Comme $|X_1| \geq |X_2|$, nous obtenons le résultat annoncé.



Si $D = 2p$, en faisant une mise en couches par rapport à un sommet x du stable X_2 , nous avons:

$$|X_1| \leq \sum_{i=0}^{p-1} \Delta^{2i+1} = \Delta \sum_{i=0}^{p-1} \Delta^{2i} = \begin{cases} p & \text{si } \Delta = 1, \\ \Delta \frac{\Delta^{2p} - 1}{\Delta^2 - 1} & \text{si } \Delta \geq 2. \end{cases}$$

On en déduit le résultat annoncé de la même façon que pour D impair. \diamond

Remarque II.1

Il est évident qu'une condition nécessaire pour qu'un graphe biparti orienté $G=(X,E)$ de demi-degré maximum Δ et de diamètre D soit théoriquement optimal (dans le sens où son nombre de sommets est égal à la borne donnée par la proposition II.1 ci-dessus), est qu'il soit régulier.

En effet, soient X_1 et X_2 les deux stables définis par la bipartition de G , et supposons que $|X_2| \leq |X_1|$.

Considérons une mise en couches à partir d'un sommet x de X_1 , et supposons que $D = 2p + 1$. Les couches dont les numéros sont pairs d'une telle décomposition sont composées de sommets du stable X_1 et les couches paires sont constituées de sommets du stable X_2 .

Pour que la borne de la proposition II.1 soit atteinte, les couches paires doivent être pleines. D'où chaque couche immédiatement au dessus d'une couche paire (c'est à dire chaque couche impaire) doit aussi l'être.

Par conséquent, $d(x) = \Delta$, et par suite le graphe G est Δ -régulier.

Le cas où le diamètre D est pair se traite de la même manière.

En outre, le graphe G étant biparti, nous avons:

$$|X| = 2(\Delta^{D-1} + \Delta^{D-3} + \dots).$$

Le nombre de sommets à distance D d'un sommet x est alors donné par:

$$\text{si } D=2p, \quad |\Gamma^{+2p}(x)| = (\Delta^{2p-1} + \Delta^{2p-3} + \dots + \Delta) - (\Delta^{2p-2} + \Delta^{2p-4} + \dots + \Delta^2 + 1),$$

$$\text{si } D=2p+1, \quad |\Gamma^{+(2p+1)}(x)| = (\Delta^{2p} + \Delta^{2p-2} + \dots + \Delta^2 + 1) - (\Delta^{2p-1} + \Delta^{2p-3} + \dots + \Delta). \quad \diamond$$

Remarque II.2

Notons par $b'(\Delta, D)$, la borne donnée par la proposition II.1, avec $\Delta \geq 2$.

$$b'(\Delta, D) = \begin{cases} 2 \frac{\Delta^{2p} - 1}{\Delta^2 - 1} & \text{si } \Delta \geq 2 \text{ et } D = 2p - 1, \text{ est impair,} \\ 2 \frac{\Delta^{D+1} - \Delta}{\Delta - 1} & \text{si } \Delta \geq 2 \text{ et } D = 2p, \text{ est pair.} \end{cases}$$

Donc, $b'(\Delta, 2p) = \Delta * b'(\Delta, 2p-1)$. \(\diamond\)

Appelons **graphes bipartis orientés de Moore**, les graphes bipartis orientés ayant $b'(\Delta, D)$ sommets.

De tels graphes existent dans les cas suivants:

- $\Delta=1$ les circuits de longueur $2p$, si $D = 2p$ ou $D = 2p-1$,
- $D=2$ les graphes bipartis orientés complets, de degré Δ ,
- $D=3,4$ dans ces cas, des graphes bipartis orientés de Moore existent, pour n'importe quelle valeur du degré. Leur étude fera l'objet du prochain paragraphe.

Avant d'étudier ces cas, notons quelques propriétés des graphes bipartis orientés de Moore, et du passage au graphe représentatif des arcs.

Proposition II.2 Un graphe biparti orienté de Moore de degré Δ , est de connectivité forte égale à Δ .

Preuve

Soit $G = (X, E)$ un (Δ, D) -graphe biparti orienté de Moore.

Donc $|X| = 2(\Delta^{D-1} + \Delta^{D-3} + \dots)$, le dernier terme étant Δ si D est pair et 1 sinon.

Soit F un ensemble de sommets, de cardinal au plus $\Delta - 1$.

Notons par $W = \{y, y \in X / \text{dist}(y, F) \geq D - 1 \text{ et } \text{dist}(F, y) \geq D - 1\}$.

Lemme II.1 L'ensemble W est non vide.

Preuve

Soit $Q = \{y, y \in X / \text{dist}(y, F) \leq D - 2 \text{ ou } \text{dist}(F, y) \leq D - 2\}$.

$$|Q| \leq 2|F| \sum_{i=0}^{D-2} \Delta^i \leq 2(\Delta - 1) \frac{\Delta^{D-1} - 1}{\Delta - 1} = 2(\Delta^{D-1} - 1) < 2(\Delta^{D-1} + \Delta^{D-3} + \dots) = |X|.$$

Donc, puisque $W = X \setminus Q$, $W \neq \emptyset$. ◊

Soit z un sommet de W .

Lemme II.2 Pour tout sommet x de $X \setminus F$, il existe un chemin de x à z , évitant F .

Preuve

Soit x un sommet de $X \setminus F$ (donc $\text{dist}(x, F) \geq 1$), et supposons que tout chemin de x à z passe par F .

Donc, $\text{dist}(x, z) \geq \text{dist}(x, F) + \text{dist}(F, z) \geq 1 + D - 1 = D$, et par suite, $\text{dist}(x, z) = D$.

Comme, $|F| \leq \Delta - 1$, x possède un successeur x' , tel que $\text{dist}(x', F) \geq 1$.

Le graphe G étant biparti, les sommets x et x' n'étant pas dans le même stable, $\text{dist}(x', z) \leq D - 1$.

Un chemin minimum du sommet x' au sommet z évite nécessairement l'ensemble F (sinon, nous mettrions en évidence un chemin de longueur au plus $D - 2$, entre un sommet de F et le sommet z , ce qui contredirait le choix de z). Par conséquent, il existe un chemin du sommet x au sommet z , évitant l'ensemble F . ◊

Lemme II.2' Pour tout sommet x de $X \setminus F$, il existe un chemin de z à x , évitant F .

Preuve

Identique à celle du lemme II.2. ◇

Pour achever la démonstration, il suffit de remarquer que pour tout ensemble F d'au plus $(\Delta-1)$ sommets, le lemme II.1 donne un sommet z , tel que pour tout sommet x de $X \setminus F$, il existe un chemin de x à z et un chemin de z à x , évitant F . Ce qui implique la définition de la Δ -connexité forte. ◇

Remarque II.3

En utilisant la méthode de démonstration de la proposition II.2, nous prouvons qu'en fait, les (Δ, D) -graphes ayant au moins $2(\Delta^{D-1}-1)$ sommets sont de connexité forte égale à Δ .

Nous étudierons plus en détail, au chapitre VI, les aspects de la connexité des graphes bipartis. ◇

Proposition II.3 Soit G un graphe fortement connexe.

Alors G est biparti si et seulement si LG est biparti.

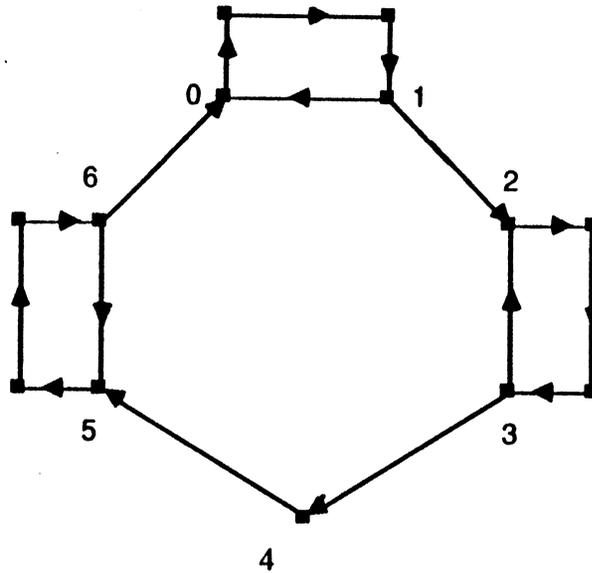
Preuve

Remarquons d'abord que si G est fortement connexe, alors il en est de même du graphe LG .

C.N: Soit G un graphe orienté non biparti, dont le graphe représentatif des arcs est biparti. Donc G possède un cycle impair sans corde. Ce cycle se répartit en deux ensembles A et B , chacun ayant tous ses arcs orientés dans le même sens, le premier de cardinal impair et le second de cardinal pair.

Comme LG est supposé être biparti, chacun de ses arcs est contenu dans un circuit pair. Soit e un arc de A , et soit C_e un circuit pair le contenant.

Les arcs de $\{B \cup \{\bigcup_{e \in A} C_e \setminus \{e\}\}\}$ forment un circuit.



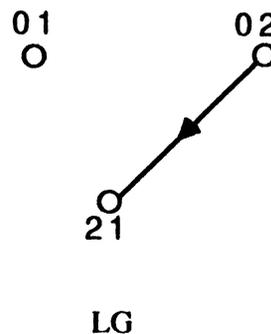
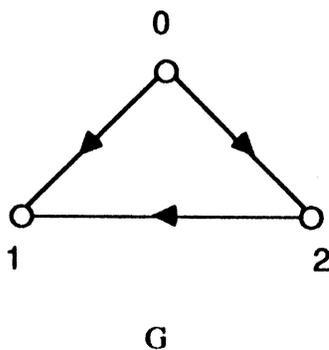
où les arcs de A sont ceux du grand cycle orientés dans le sens trigonométrique, c'est à dire les arcs $(1,0)$, $(6,5)$ et $(3,2)$.

Un tel circuit est de longueur impaire. Le graphe représentatif de ses arcs lui est isomorphe, et est contenu dans LG . Par conséquent, LG ne serait pas biparti.

C.S: Si G est un graphe biparti orienté, il est évident que les sommets de LG représentant tous les arcs orientés dans G de l'un des deux stables vers l'autre constituent un stable. Par conséquent, LG est aussi biparti. \diamond

Remarque II.4

La condition de connexité forte est nécessaire. L'exemple suivant donne un graphe qui n'est pas biparti, alors que le graphe représentatif de ses arcs l'est.



Comme conséquence de la remarque II.2 et de la proposition II.3, nous avons la propriété suivante:

Proposition II.4 Si G est un $(\Delta, 2p - 1)$ -graphe biparti orienté de Moore, alors LG est un $(\Delta, 2p)$ -graphe biparti orienté de Moore.

Preuve

Si G est un (Δ, D) -graphe orienté sur N sommets, nous avons vu, au chapitre I, que LG est Δ -régulier de diamètre au plus $D+1$, sur $\Delta \cdot N$ sommets. Si de plus $D=2p-1$, il s'ensuit que LG est de diamètre $2p$, et la remarque II.2 permet d'achever la démonstration. \diamond

Remarque II.5

La proposition II.4 permet de limiter le domaine de recherche de graphes bipartis orientés de Moore. En effet, s'il existe un $(\Delta, 2p-1)$ -graphe biparti orienté de Moore, alors il existe un $(\Delta, 2p)$ -graphe biparti orienté de Moore. Cette remarque servira à montrer que pour certains couples $(\Delta, 2p-1)$, il n'existe pas de graphes bipartis orientés de Moore admettant ces paramètres. \diamond

Proposition II.5 Soit $G = (X, E)$ un (Δ, D) -graphe biparti orienté de Moore.
 Si D est pair, alors G ne contient pas de circuit de longueur inférieure à D .
 Si D est impair, alors G ne contient pas de circuit de longueur inférieure à $D-1$.

Preuve

Si $D=2p$, supposons que G contient un circuit de longueur k , avec $k \leq D - 2$, et considérons une mise en couches des sommets de G , à partir d'un sommet x de ce circuit.

Le nombre de sommets du niveau $k+1$, $k+1 \leq D-1$, serait alors au plus égal à $\Delta^{k+1} - 1$ (puisque, un sommet du niveau k aurait alors x comme successeur), et le graphe G ne serait pas de Moore.

Les mêmes raisons empêchent un graphe biparti orienté de Moore, de diamètre D , impair, d'avoir un circuit de longueur inférieure à $D-1$. \diamond

Proposition II.6 Dans un (Δ, D) -graphe biparti orienté de Moore, le nombre de chemins de longueur inférieure à D d'un sommet à un autre est au plus égal à un.

Preuve

Soit G un (Δ, D) -graphe biparti orienté de Moore, et supposons que du sommet x au sommet y il existe deux chemins de longueur k , $k \leq D-1$.

Considérons une mise en couches des sommets de G , à partir du sommet x . Alors $|\Gamma^{+k}(x)| < \Delta^k$, ce qui est contradictoire avec le fait que G soit un (Δ, D) -graphe biparti orienté de Moore. \diamond

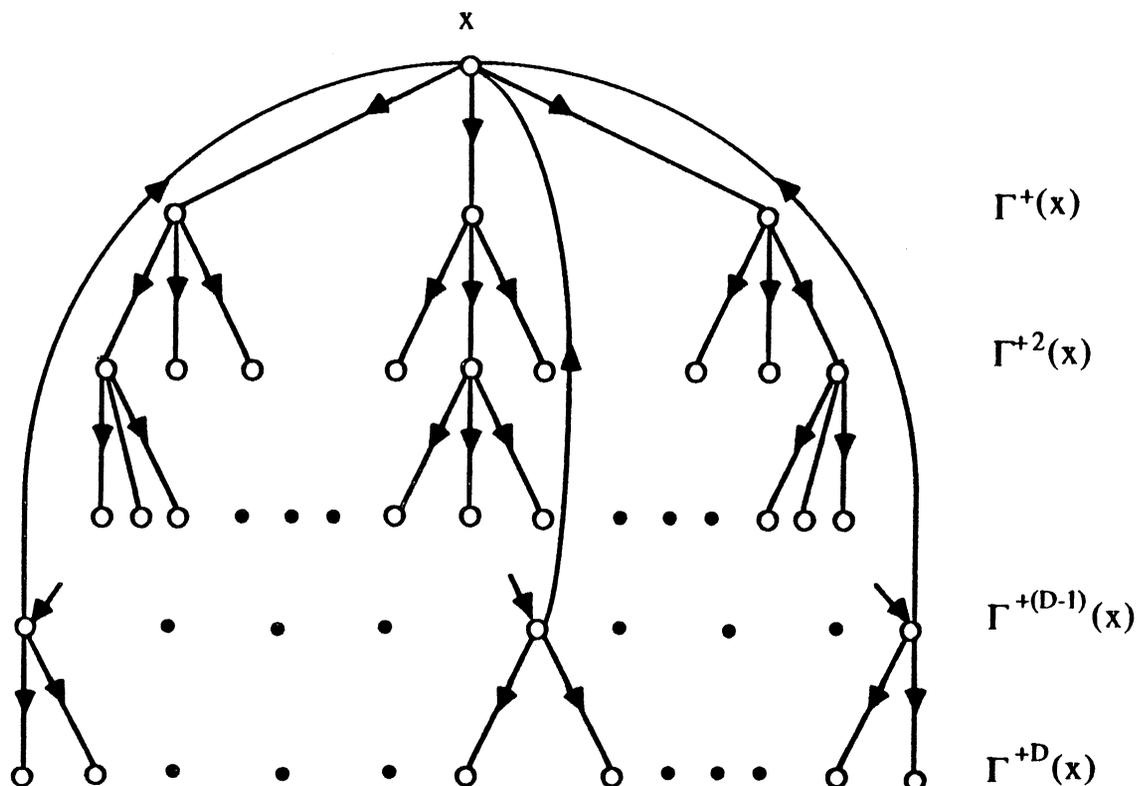
Proposition II.7 Dans un $(\Delta, 2p)$ -graphe biparti orienté de Moore, tout sommet x est contenu dans exactement Δ circuits distincts de longueur $2p$.

De plus, ces Δ circuits n'ont, deux à deux, que le sommet x en commun.

Preuve

Considérons une mise en couches des sommets de G , à partir d'un sommet x .

Par la proposition II.5, les prédécesseurs du sommet x sont tous dans le niveau $2p-1$ (si x possédait un prédécesseur dans le niveau $2p$, le graphe G ne serait pas biparti, et s'il en possédait un dans un niveau k , inférieur à $2p-1$, le graphe G aurait un circuit de longueur $k+1$, inférieur à $2p$, ce qui est exclu par la proposition II.5). De plus, ils sont tous dans des branches distinctes (*une branche* étant l'ensemble des descendants à distance au plus $2p-1$, d'un successeur de x).



Comme, d'après la proposition II.6, il n'existe qu'un seul chemin de longueur $2p-1$ de x à chacun de ses prédécesseurs, le résultat en découle. \diamond

Remarque II.6

Dans un (d,D) -graphe biparti orienté de Moore, si pour deux sommets x et y , $\text{dist}(x,y) = D$, alors le nombre de chemins de longueur D , de x à y , est égal à d . Ceci découle du fait que les prédécesseurs de y sont dans le niveau $D-1$, d'une mise en couches à partir de x , et appartiennent à des branches distinctes. \diamond

Notons par $A(\Delta, 2p)$, le nombre de circuits de longueur $2p$ dans un $(\Delta, 2p)$ -graphe biparti orienté de Moore.

Proposition II.8 Dans un $(\Delta, 2p)$ -graphe biparti orienté de Moore, le nombre de circuits de longueur $2p$ est égal à :

$$A(\Delta, 2p) = \frac{\Delta^2 (\Delta^{2p} - 1)}{p(\Delta^2 - 1)}.$$

Preuve

Chaque sommet étant contenu dans d circuits de longueur $2p$, le nombre de tels circuits est donc obtenu en effectuant le produit du nombre total de sommets, par le nombre Δ , de circuits contenant un sommet donné. Le nombre obtenu doit être divisé par la longueur des circuits considérés:

$$A(\Delta, 2p) = \frac{\Delta * b'(\Delta, 2p)}{2p} = \frac{\Delta^2 (\Delta^{2p} - 1)}{p(\Delta^2 - 1)}$$

ce qui correspond au résultat énoncé. \diamond

Conséquence

Lorsque le nombre $A(\Delta, 2p)$, donné par la proposition II.8, n'est pas entier, il est évident qu'il n'existe pas de $(\Delta, 2p)$ -graphe biparti orienté de Moore, et par conséquent, il n'existe pas de $(\Delta, 2p-1)$ -graphe biparti orienté de Moore.

La proposition II.8 permet donc de prouver l'inexistence de graphes bipartis orientés de Moore, pour certaines valeurs du degré et du diamètre.

C'est ainsi que, puisque, $A(2, 10) = 682/5$, donc n'est pas entier, il n'existe pas de $(2, 10)$ -graphe biparti orienté de Moore.

De même, il n'existe pas de $(2, 14)$ et de $(3, 10)$ -graphes bipartis orientés de Moore ($A(2, 14) = 21844/7$ et $A(3, 10) = 66429/5$ ne sont pas entiers).

En fait, ces deux cas ne sont pas isolés. De manière plus générale, la proposition suivante donne une construction globale de certains couples de valeurs interdites. \diamond

Proposition II.9 Si p est un nombre premier, ne divisant ni Δ^2 ni $(\Delta^2 - 1)$, alors il n'existe pas de $(\Delta, 2p)$ -graphe biparti orienté de Moore, et par suite, il n'existe pas de $(\Delta, 2p - 1)$ -graphe biparti orienté de Moore.

Preuve

Si p est un nombre premier, le petit théorème de Fermat assure que

$$\Delta^{2p} \equiv \Delta^2 \pmod{p}.$$

Donc, si p ne divise ni Δ^2 ni $\Delta^2 - 1$, alors, p étant premier, il ne divise pas non plus $\Delta^2 (\Delta^{2p} - 1)$, et par suite le nombre $A(\Delta, 2p)$ n'est pas entier. \diamond

Remarque II.7

Pour de mêmes raisons arithmétiques, d'autres valeurs des couples $(\Delta, 2p)$ sont aussi interdites. Par exemple, si p est un multiple de Δ^3 , alors p ne divise pas $\Delta^2 (\Delta^{2p} - 1)$, et par conséquent $A(\Delta, 2p)$ n'est pas entier. \diamond

* * *

II.3 GRAPHES OPTIMAUX DE DIAMÈTRE TROIS ET QUATRE

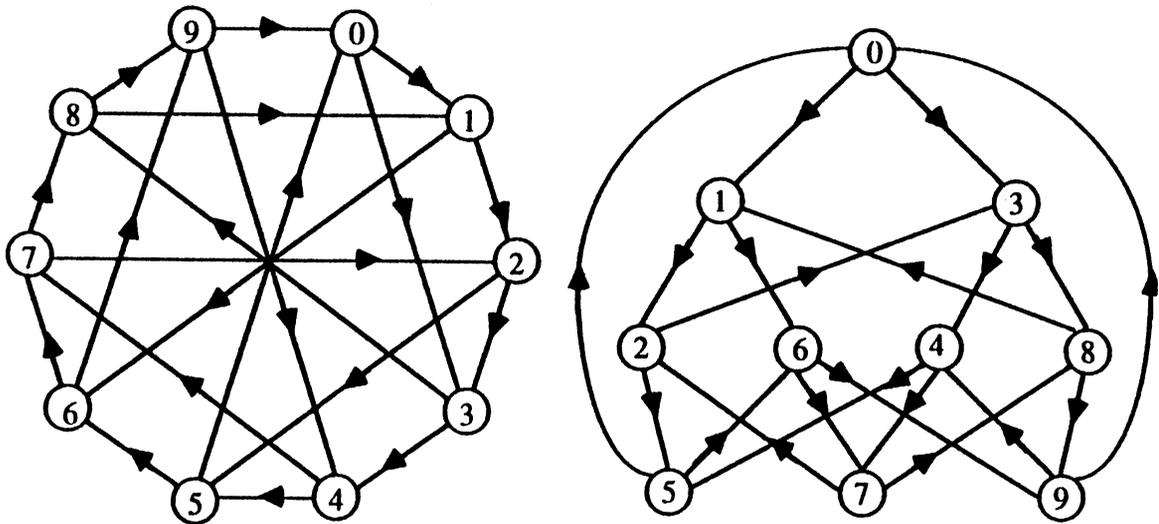
D'après la proposition II.1, un $(\Delta, 3)$ -graphe biparti orienté de Moore, doit avoir $N = 2(d^2 + 1)$ sommets.

Considérons le graphe $G(\Delta) = (X, E)$, construit de la manière suivante:

L'ensemble X des sommets est composé des entiers naturels compris entre 0 et $2\Delta^2 + 1$, inclus.

Un sommet x pair, possède comme successeurs les sommets impairs qui s'écrivent sous la forme $x + 2i + 1$, où $0 \leq i \leq \Delta - 1$, et les successeurs d'un sommet y impair s'écrivent sous la forme $y + 2i\Delta + 1$, avec $0 \leq i \leq \Delta - 1$,

les additions étant effectuées, dans chacun des cas, modulo N .



G(2)

Propriétés de $G(\Delta)$

1) Le graphe $G(\Delta)$ est Δ -régulier. De plus, sa structure vue de n'importe quel sommet est identique.

En effet, il est évident que cette structure est la même pour des sommets de même parité.

Pour voir qu'elle l'est aussi pour deux sommets de parités différentes, il suffit d'effectuer le changement suivant des numérotations des sommets:

si x est pair $x = 2k$, $x \mapsto 2k\Delta$,

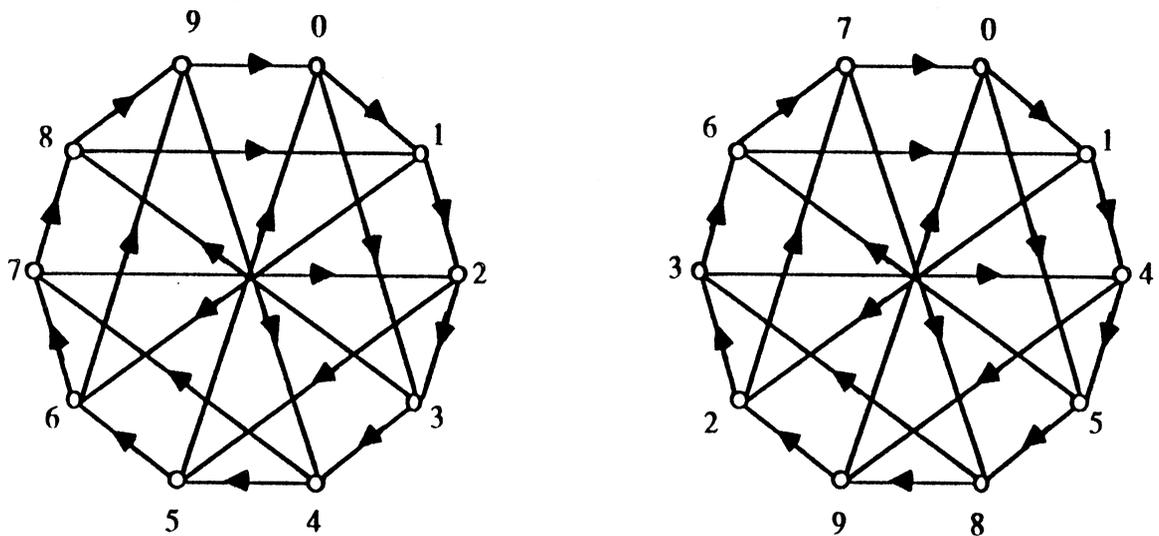
si x est impair, $x = 2k + 1$, $x \mapsto 2k\Delta + 1$,

les opérations étant effectuées modulo N , le nombre de sommets de $G(\Delta)$.

Nous allons montrer que pour une telle numérotation des sommets, les successeurs d'un sommet pair $2k$ sont de la forme $2k + 2i\Delta + 1$, avec $0 \leq i \leq \Delta - 1$, et qu'un sommet impair $2k + 1$, possède comme successeurs, les sommets de la forme $2k + 1 + 2i\Delta + 1$, avec $0 \leq i \leq \Delta - 1$.

Dans la numérotation initiale, le sommet $2k$ possède comme successeurs, les sommets de la forme $2k + 2i + 1$, $0 \leq i \leq \Delta - 1$. Un sommet d'une telle forme possède, dans la nouvelle numérotation, le numéro $(2k + 2i)\Delta + 1$, $0 \leq i \leq \Delta - 1$.

Le cas des sommets impairs se vérifie de la même manière.



2) Les sommets de $G(\Delta)$ sont disposés en un circuit hamiltonien, induit par l'ordre naturel des entiers modulo N . En effet, tout sommet x possède le sommet $x+1$ comme successeur. Si x est pair, $x+1$ est un successeur de x ($i=0$). De même, $x+1$ est un successeur de x ($i=0$). En fait, le graphe $G(\Delta)$ possède au moins deux circuits hamiltoniens. \diamond

Proposition II.10 Pour tout d , le graphe $G(\Delta)$ possède au moins deux circuits hamiltoniens disjoints.

Preuve

Les arcs de $G(\Delta)$ peuvent être indexés de la manière suivante.

Soit x un sommet de $G(\Delta)$, et soit $i \in \{0, \dots, \Delta-1\}$. Le sommet x possède d successeurs:

- *) si x est pair, ses successeurs s'écrivent sous la forme $x+2i+1$,
- *) si x est impair, ses successeurs sont les sommets de la forme $x+2i\Delta+1$.

Donc un arc d'extrémité initiale x peut être indexé par $(x; i)$. Un tel index désignera l'arc $(x, x+2i+1)$ si x est pair, et l'arc $(x, x+2i\Delta+1)$ si x est impair.

Ces arcs seront dits de type i , et formeront un ensemble A_i .

Nous savons déjà que A_1 est un circuit hamiltonien, et nous allons montrer que l'ensemble $A_{\Delta-1}$ est aussi un circuit hamiltonien de $G(\Delta)$.

Parcourons les arcs de $A_{\Delta-1}$, en partant du sommet 0. Après $2p$ étapes, nous atteignons le sommet $p(2(\Delta-1)+1+2\Delta-1)\Delta+1 = 2p\Delta^2$, modulo N .

Comme les nombres Δ^2 et Δ^2+1 sont premiers entre eux, donc pour revenir au sommet 0, il est nécessaire de parcourir $p = \Delta^2+1$ étapes. Par suite, grâce à la structure de $G(\Delta)$, les sommets pairs parcourus entre-temps sont tous distincts. Pour les mêmes raisons, les sommets impairs le sont aussi. \diamond

Proposition II.11 Le diamètre de $G(\Delta)$ est égal à 3.

Preuve

Pour démontrer cette proposition, il suffit de prouver que pour tout sommet x , $\text{dist}(0,x) \leq 3$.

En utilisant la propriété 1, il suffira de trouver un chemin de longueur 2 du sommet 0 vers tous les autres sommets pairs, et l'existence d'un circuit hamiltonien induit par l'ordre naturel des entiers permettra de conclure.

Soit $x = 2k + 2 \leq 2\Delta^2$, un sommet pair de $G(\Delta)$, et considérons la division euclidienne de k par Δ , $k = q\Delta + r$, avec $0 \leq r \leq \Delta-1$, et $0 \leq q \leq \Delta-1$.

Par construction du graphe $G(\Delta)$, il existe un arc entre le sommet 0 et le sommet $y = 2r+1$, et il existe un arc du sommet y vers le sommet $z = 2r+1+2q\Delta+1$.

Mais $z = 2(q\Delta + r) + 2 = x$. \diamond

Corollaire Pour toute valeur de Δ , les graphes $G(\Delta)$ et $LG(\Delta)$ sont des graphes bipartis orientés de Moore.

Preuve

$G(\Delta)$ est Δ -régulier, de diamètre 3 et possède $2(\Delta^2+1)$ sommets.

$LG(\Delta)$ est Δ -régulier, de diamètre 4 et possède $2\Delta(\Delta^2+1)$ sommets.

Ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour que de tels graphes bipartis orientés soient de Moore. \diamond

II.4 CONSTRUCTION POUR DE PLUS GRANDS DIAMÈTRES

II.4.1 Introduction

La plupart des classes de graphes orientés proposées pour l'interconnexion des processeurs, sont définies sur des alphabets. Dans [11], l'auteur montre qu'en fait, tous ces graphes sont obtenus par passage itératif au graphe représentatif des arcs, à partir de certains graphes initiaux. Ces graphes de départ ont en général un très faible diamètre (égal à 1 ou 2, dans la totalité des cas).

Cependant, pour avoir des classes de graphes obtenues de cette manière avec le plus possible de sommets, il serait plus intéressant de partir de graphes initiaux, éventuellement optimaux, avec un diamètre assez élevé. Dans ce cadre, nous proposons la construction d'une classe de graphes bipartis orientés, générés à partir de $G(\Delta)$, graphes optimaux de diamètre 3 (4 si l'on considère que le graphe initial est $LG(\Delta)$).

II.4.2 Construction

Soit $A = \{0, 1, \dots, m-1\}$, un alphabet sur $m = 2(d^2 + 1)$ lettres et soit:

$$X(d, n) = \{s_0 s_1 \dots s_{n-1} \in A^n / s_0 \in A, s_{i+1} = s_i + 2jd^{k+1}, 0 \leq j \leq d-1, \text{ si } s_i \equiv k [2], k \in \{0, 1\}\}.$$

Pour $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$, posons $f_j(s) = s_1 \dots s_{n-1} (s_{n-1} + 2jd^{k+1})$ si $s_i \equiv k [2], 0 \leq j \leq d-1$.

Soit $BM(d, n) = (X(d, n), E(d, n))$, le graphe défini sur l'ensemble de sommets $X(d, n)$, et tel qu'un couple de sommets (x, y) de $X(d, n)$ est un arc de $BM(d, n)$ si et seulement si, pour un certain j , $y = f_j(x)$.

Remarque II.8

Une autre manière de définir le graphe $BM(d, n)$ serait de remarquer qu'en fait, les mots de longueur n constituant l'ensemble $X(d, n)$ représentent les chemins (en tant que séquences d'arcs) de longueur n du graphe $G(d)$, il existe un arc d'un sommet vers un autre si et seulement si les $(n-1)$ derniers arcs du chemin représentant le premier sommet coïncident avec les $(n-1)$ derniers arcs du chemin représentant le second sommet. \diamond

Remarque II.9

Le graphe $BM(d,n)$ est biparti, d -régulier. En effet, $X(d,n)$ peut être partitionné en deux stables, le premier étant composé des sommets (donc mots) dont la dernière lettre est paire, le second, ceux se terminant par une lettre impaire. La d -régularité découle de la définition des arcs.

Une autre manière de voir que ces graphes sont bipartis serait d'utiliser le résultat de la proposition II.3. \diamond

Remarque II.10

Si $n=1$, nous retrouvons les graphes $G(d)$ définis dans le paragraphe précédent. \diamond

Remarque II.11

$BM(d,n) = L^{n-1}G(d)$. Par conséquent,
 $|X(d,n)| = d^n |X(d)| = 2 d^{n-1} (d^2+1) = 2d^{n+1} + 2 d^{n-1}$. \diamond

Proposition II.12 Le diamètre de $BM(d,n)$ est minimum et est égal à $n+2$.

Preuve

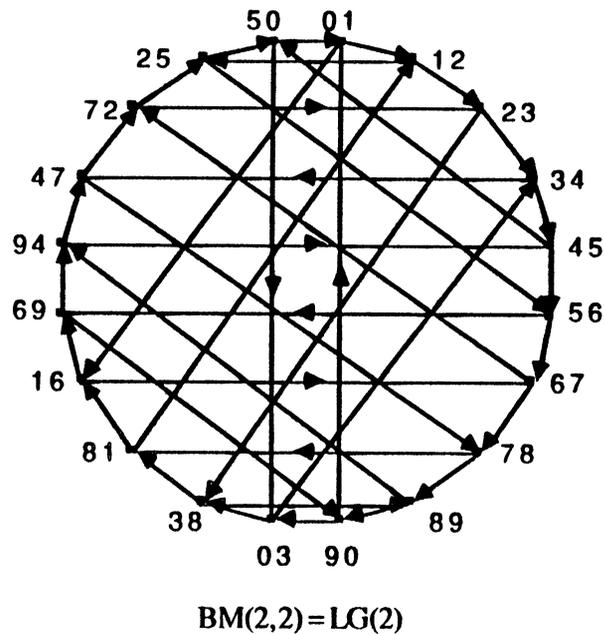
La construction de $BM(d,n)$ par l'opération de passage au graphe représentatif des arcs permet d'assurer que son diamètre est au plus égal à $n+2$.

L'égalité vient du fait qu'un graphe orienté d -régulier de diamètre $n+1$ ne peut avoir plus de $2(d^n + d^{n-2} + d^{n-4} + \dots)$ sommets, comme le montre la proposition II.1. Cette dernière valeur est, lorsque $d \geq 2$, inférieure à la quantité $2(d^{n+1} + d^{n-1})$, constituant le nombre de sommets du graphe $BM(d,n)$. \diamond

Remarque II.12

En fait, la proposition II.12 montre aussi que les graphes $BM(d,n)$ sont asymptotiquement optimaux, dans le sens où leur nombre de sommets tend vers la borne de Moore, lorsque leur diamètre (ou n) augmente indéfiniment. \diamond

Exemple



II.4.3 Connexité de $BM(d,n)$

Il est évident que $BM(d,n)$ est de connexité forte égale à d . Pour le voir, il suffit de remarquer que le passage au graphe représentatif des arcs conserve la connexité forte, puisque, la connexité forte de LG est égale à l'arc-connexité de G laquelle est supérieure ou égale à la connexité forte de G . Le résultat découle alors du fait que $G(d)$ est de connexité égale à d .

II.4.4 Routage

Un algorithme très simple de détermination d'un chemin entre deux sommets s et t de $BM(d,n)$ consiste à utiliser la méthode de démonstration de la proposition II.5, qui donne, dans $G(d)$, un chemin d'un sommet s_{n-1} à un sommet t_0 de longueur au plus égale à trois.

Soient $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ et $t = t_0 t_1 \dots t_{n-1}$ deux sommets de $BM(d,n)$ et supposons, par exemple, que la distance, dans $G(d)$, du sommet s_{n-1} au sommet t_0 soit égale à trois. Soient x et y les sommets intermédiaires dans un chemin d'une telle distance.

Vu la construction des arcs de $BM(d,n)$, déduite de celle de $G(d)$, le mot $s_1 \dots s_{n-1} x$ représente un sommet de $BM(d,n)$, successeur du sommet $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$, tout comme le mot $s_2 \dots s_{n-1} x y$ représente un sommet du graphe $BM(d,n)$, successeur de $s_1 \dots s_{n-1} x$. Pour les mêmes raisons, $s_2 \dots s_{n-1} x y$ possède comme successeur le sommet $s_3 \dots s_{n-1} x y t_0$.

A partir de ce sommet, un chemin trivial traversant successivement les sommets suivants, permet d'atteindre le sommet t :

$s_4 \dots s_{n-1} x y t_0 t_1$, $s_5 \dots s_{n-1} x y t_0 t_1 t_2$, \dots , $x y t_0 \dots t_{n-3}$, $y t_0 \dots t_{n-3} t_{n-2}$, $t = t_0 \dots t_{n-2} t_{n-1}$.

Si la distance dans $G(d)$, de s_{n-1} à t_0 est inférieure à 3, nous obtenons, dans $BM(d,n)$, un chemin de s à t , de longueur inférieure à $n+2$. \diamond

* * *

II.5 RÉSEAUX PRESQUE EN DOUBLE BOUCLE

Un réseau en double boucle d'ordre N et de pas s est un graphe orienté 2-régulier sur N sommets numérotés de 0 à $N-1$, un sommet i ayant comme successeurs les sommets $i+1$ et $i+s$, avec les additions effectuées modulo N .

Il s'agit d'étudier le diamètre $D(N, s)$ d'un tel graphe, en fonction des paramètres s et de N .

Wong et Coppersmith, après avoir donné une borne inférieure pour $D(N, s)$ [54], ont exhibé un exemple avec $N=16$ et $s=7$, atteignant cette borne et ont posé le problème de la construction d'autres exemples optimaux. Récemment, Hwang et Xu répondirent à cette question par l'affirmatif en donnant la construction de quelques classes infinies de graphes atteignant cette borne [39].

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à un cas légèrement plus général, concernant les graphes bipartis.

Appelons **réseau presque en double boucle** d'ordre N et de pas (a, b) (dans la suite nous parlerons de $(N; a, b)$ -graphe pour désigner un tel graphe), tout graphe orienté, 2-régulier, ayant N sommets numérotés de 0 à $N-1$, un sommet pair i ayant comme successeurs les sommets $i+1$ et $i+a$, et les successeurs d'un sommet impair j étant les sommets $j+1$ et $j+b$, avec les additions effectuées modulo N . Dans la suite les nombres a et b seront supposés impairs, et les graphes considérés seront alors bipartis

Evaluons d'abord le nombre de sommets d'un tel graphe en fonction de son diamètre.

Proposition II.13 Soit $G = (X, E)$ un $(N; a, b)$ -graphe de diamètre D .

$$\text{Si } D = 2m, \text{ alors } N \leq \{2m(m+1)(m+2)\}/3.$$

$$\text{Si } D = 2m + 1, \text{ alors } N \leq \{(m+1)(m+2)(2m+3)\}/3.$$

Preuve

Les valeurs de a et de b n'intervenant pas, elles jouent le même rôle.

Considérons une mise en couches des sommets de G à partir du sommet 0 .

Les sommets à distance $2k$ de 0 sont de la forme

$$y(k, i, j) = i + j + (k-i)a + (k-j)b \quad [N].$$

Leur nombre est inférieur ou égal à $(k+1)^2$.

Les sommets à distance $2k+1$ de 0 sont de la forme

$$z(k+1, i, j) = i + j + (k+1-i)a + (k-j)b.$$

Leur nombre est de $(k+1)(k+2)$.

Si $D = 2m$, estimons le nombre N_i de sommets de G à distance impaire du sommet 0 :

$$N_i \leq \sum_{k=0}^{m-1} (k+1)(k+2) = \frac{m(m+1)(m+2)}{3}.$$

Si $D = 2m + 1$, évaluons le nombre N_p de sommets de G à distance paire du sommet 0:

$$N_p \leq \sum_{k=0}^m (k+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}.$$

Pour achever la démonstration, il suffit de tenir compte du fait que les $(N; a, b)$ -graphes sont bipartis et équilibrés. \diamond

Remarque II.13

L'ordre d'un $(N; a, b)$ -graphe de diamètre donné dépend essentiellement des valeurs des nombres a et b . La borne donnée ci-dessus est très théorique, et l'existence de graphes l'atteignant n'est, à priori, pas évidente (nous verrons toutefois qu'il existe un graphe presque en double boucle optimal, de diamètre égal à 3). Néanmoins nous pouvons nous intéresser au problème concernant le diamètre. C'est à dire, trouver des $(N; a, b)$ -graphes de diamètre minimum.

En effet, de la proposition VII.12, le diamètre de tels graphes est minoré par:

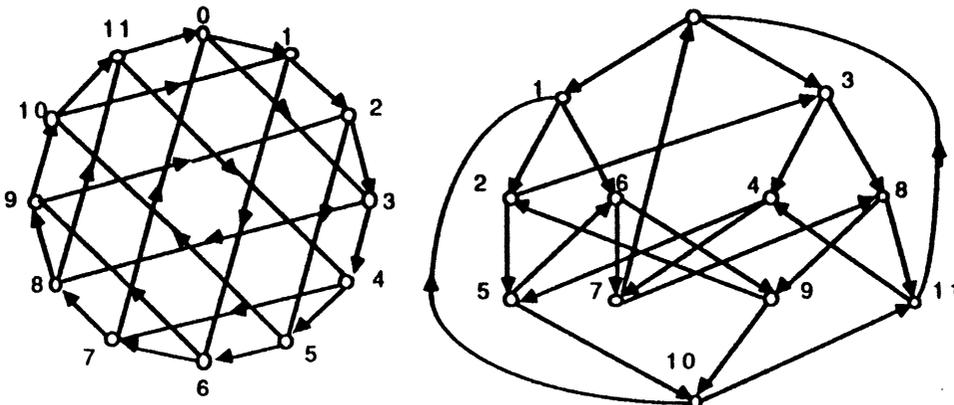
$$\text{Diam}(G) \geq \lceil \sqrt[3]{12N} \rceil - 2.$$

où le signe $\lceil \alpha \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à α . \diamond

Exemples

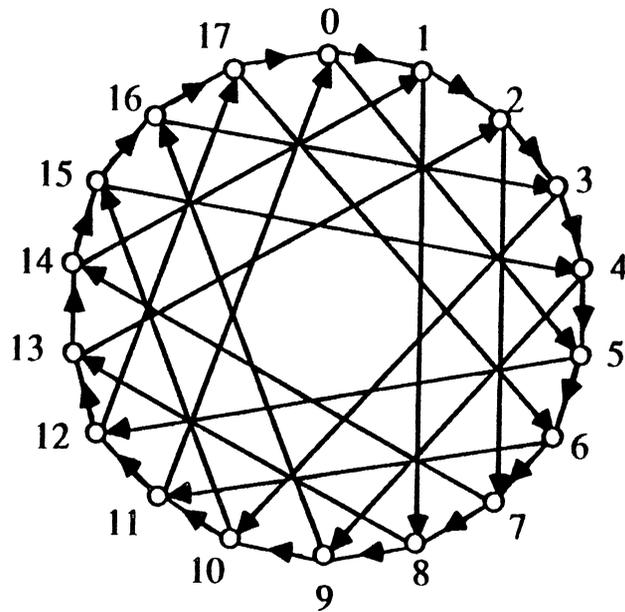
Les trois graphes suivants sont des $(N; a, b)$ -graphes de diamètre minimum.

1) Le diamètre du $(12; 3, 5)$ -graphe est égal à 4.



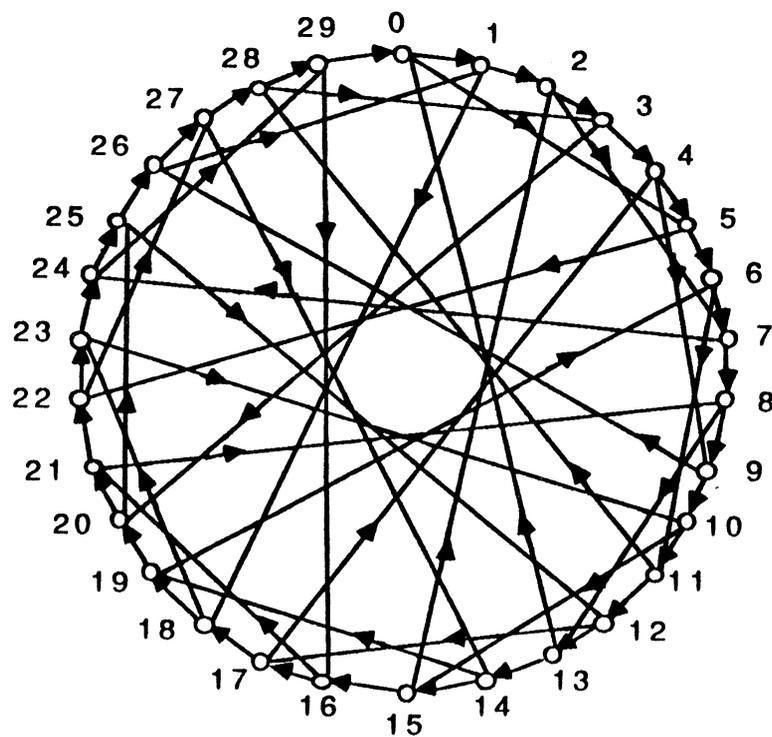
$G(12; 3, 5)$

2) Le diamètre du $(18; 5,7)$ -graphe est égal à 5.



Le $(18; 5,7)$ -graphe

3) Le diamètre du $(30; 5,17)$ -graphe est égal à 6.



$G(30; 5,17)$

Remarque II.14

Il est facile de noter que les graphes des exemples que nous venons de donner sont optimaux. Ceci est dû au fait que leur nombre de sommets N et leur diamètre D vérifient la relation suivante:

- pour les exemples 1 et 3, dont le diamètre $D=2m$ est pair:

$$N = 2 + [m(m+1)(2m+1)]/3,$$

alors que le nombre maximum de sommets d'un $(N; a,b)$ -graphe de diamètre $2m-1$ est de $m(m+1)(2m+1)/3$,

- pour l'exemple 2), dont le diamètre $D=5$ est impair:

$$N = 18,$$

alors que le nombre maximum de sommets d'un $(N; a,b)$ -graphe de diamètre 4 est de 16. \diamond

Remarque II.15

Une propriété intéressante pour les $(N; a,b)$ -graphes est de savoir s'ils possèdent une décomposition en deux circuits hamiltoniens. Une condition suffisante à cet égard est que les nombres $N/2$ et $a+b$ soient premiers entre eux. \diamond

* * *

QUELQUES QUESTIONS

Pour achever ce chapitre, nous allons poser quelques questions qui nous ont paru assez intéressantes.

1) Existe -il d'autres graphes bipartis orientés de Moore ?

Les graphes bipartis orientés de Moore de diamètre 4 définis au paragraphe II.3, sont représentatifs des arcs des graphes bipartis orientés de Moore de diamètre 3. En est-il de même pour tous les éventuels graphes bipartis orientés de Moore, de diamètre pair ?

2) Peut-on améliorer les bornes données à la proposition II.13, concernant les graphes presque en double boucle? Existe-il d'autres graphes optimaux dans le sens qu'ils aient le diamètre minimum, tout comme le sont les graphes cités dans les exemples ?

* * *

CHAPITRE III

GRAPHES SUR ALPHABETS

III.1 INTRODUCTION

La plupart des classes de graphes proposées pour l'interconnexion des processeurs sont définies sur des alphabets. Parmi celles-ci, les graphes de de Bruijn ont été les premiers découverts. Ce sont en fait les plus triviaux dans leur construction en tant que graphes sur alphabets. Leurs sommets étant tous les mots de longueur n d'un alphabet de taille d , alors que les successeurs d'un sommet $s_0s_1\dots s_{n-1}$ sont de la forme $s_1s_2\dots s_{n-1}\alpha$, où α est une lettre quelconque de l'alphabet. Récemment, plusieurs autres classes de graphes sur des alphabets ont été introduites. Parmi celles-ci, nous pouvons notamment citer les graphes de Kautz [43], les graphes de Delorme-Farhi [22], les graphes séquentiels [31], les graphes séquentiels améliorés [10], les graphes de Delorme [19], ainsi que d'autres classes. Un aperçu global de ces graphes est donné dans [11].

L'objet de ce chapitre est de donner une construction générale de toutes ces classes de graphes, ainsi que quelques propriétés communes, telles que le passage au graphe représentatif des arcs, ou le routage.

* * *

III.2 DÉFINITIONS

Soit A un alphabet de taille q , et soit A^* une partie de A , de cardinal Δ . En fait, l'alphabet A est en général composé des entiers naturels compris entre 0 et $q-1$, et est muni de l'addition modulo q , notée "+".

Considérons l'ensemble $X = \{s \in A^n, s = s_0s_1 \dots s_{n-1} / s_{i+1} = s_i + \alpha, \alpha \in A^*\}$, sur lequel est définie une famille de permutations $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A^*}$, de la manière suivante:

$$f_\alpha(s_0s_1 \dots s_{n-1}) = s_1 \dots s_{n-1}(s_{n-1} + \alpha).$$

Soit $G(q, \Delta, n) = (X, E)$, le graphe orienté, ayant X comme ensemble de sommets, et pour arcs, tous les couples de la forme $(x, f_\alpha(x))$, avec $x \in X$, et $\alpha \in A^*$.

Le graphe $G(q, \Delta, n)$ est donc orienté, Δ -régulier, et possède $q \Delta^{n-1}$ sommets.

Le graphe $G(q, \Delta, n)$ peut aussi être défini de la manière suivante:

Posons $G_0 = G(q, \Delta, 1)$. Donc les sommets de G_0 sont toutes les lettres de l'alphabet A et ses arcs sont de la forme $(s, s + \alpha)$ où $\alpha \in A^*$.

Les sommets du graphe $G(q, \Delta, n)$ représentent les chemins de G_0 de longueur $n-1$ et il existe un arc d'un sommet à un autre si et seulement si les $n-2$ derniers arcs du chemin représenté par le premier sommet coïncident avec les $n-2$ premiers arcs du chemin représenté par le second sommet.

Lemme général $G(q, \Delta, n+1) = LG(q, \Delta, n)$.

Preuve

Donnons à chaque arc de $G(q, \Delta, n)$, de la forme (s, t) , avec $s = s_0s_1 \dots s_{n-1}$ et $t = s_1 \dots s_{n-1}(s_{n-1} + \alpha)$, l'étiquette $s_0s_1 \dots s_{n-1}(s_{n-1} + \alpha)$.

Les successeurs dans G , du sommet y s'écrivent sous la forme $z = s_2 \dots s_{n-1}(s_{n-1} + \alpha)(s_{n-1} + \alpha + \beta)$. Donc, l'arc (y, z) reçoit l'étiquette $s_1s_2 \dots s_{n-1}(s_{n-1} + \alpha)(s_{n-1} + \alpha + \beta)$.

Par conséquent, les sommets de $LG(q, \Delta, n+1)$ sont les mots de A^{n+1} , de la forme $s_0 s_1 \dots s_{n-1} s_n$, avec $s_{i+1} = s_i + \alpha$, $\alpha \in A^*$, et les successeurs de $s_0 s_1 \dots s_{n-1} s_n$ sont tous les sommets s'écrivant $s_1 \dots s_{n-1} s_n (s_n + \alpha)$ avec $\alpha \in A^*$, ce qui correspond à la définition exacte de $G(q, \Delta, n+1)$. \diamond

* * *

III.3 QUELQUES CLASSES CONNUES

Les plus importantes classes de graphes sur alphabets (graphes de de Bruijn et graphes de Kautz) ont été introduites dans un cadre totalement étranger à la théorie des réseaux d'interconnexion. Ils n'ont été adaptés et souvent généralisés que très récemment.

III.3.1 Graphes de de Bruijn

En fait, de toutes les classes de graphes sur alphabets, les graphes de de Bruijn sont les plus triviaux. Il suffit de prendre, dans la définition générale, $A = A^*$.

III.3.2 Graphes de Kautz

Soient k et p , deux entiers et A un alphabet de cardinal $q = kp$, dont les éléments sont $\{0, 1, \dots, q-1\}$.

Posons $A^* = \{\alpha \in A / k \text{ ne divise pas } \alpha\}$. Donc $|A^*| = (k-1)p$.

Soit $X = \{s \in A^n, s = s_0 s_1 \dots s_{n-1} / s_{i+1} = s_i + \alpha [k], i = 0..n-2\}$, et considérons la famille de permutations $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A^*}$, définies sur A par:

$$f_\alpha(s_0 s_1 \dots s_{n-1}) = s_1 \dots s_{n-1} (s_{n-1} + \alpha).$$

Posons $\Delta = (k-1)p$, et soit $G(k, p, \Delta, n) = (X, E)$, le graphe orienté, ayant X comme ensemble de sommets, et pour arcs, tous les couples de la forme $(x, f_\alpha(x))$, avec $x \in X$ et $\alpha \in A^*$.

Propriétés de $G(k,p,d,n)$

$$1) |X| = q(q-p)^{n-1} = q(d+p)^{n-1}.$$

En effet, si $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ est un sommet de $G(k,p,\Delta,n)$, alors la lettre s_0 peut prendre q valeurs, alors que toutes les autres lettres $s_i, i > 0$, ne peuvent en prendre que $q-p$.

2) Le graphe $G(k,p,\Delta,n)$ est d -régulier, et k -parti équilibré.

La Δ -régularité est triviale. Quant au k -partisme, considérons la partition suivante de l'ensemble X en $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_k$, avec:

$$X_i = \{s \in X, s = s_0 s_1 \dots s_{n-1} / s_{n-1} \equiv i \pmod{k}\}.$$

Par définition de $G(k,p,\Delta,n)$, il n'existe aucun arc entre deux sommets de la même partie de X .

$$3) \text{Diam}(G) = \begin{cases} n & \text{si } p = 1, \\ n + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En effet, soient s et t deux sommets de G . Définissons le chemin suivant, de $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ à $t = t_0 t_1 \dots t_{n-1}$:

- Si $s_{n-1} \not\equiv t_0 \pmod{k}$, alors la séquence suivante:

$s = s_0 s_1 \dots s_{n-1} \rightarrow s_1 \dots s_{n-1} t_0 \rightarrow s_2 \dots s_{n-1} t_0 t_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_{n-1} t_0 \dots t_{n-2} \rightarrow t_0 t_1 \dots t_{n-1} = t$,
détermine un chemin de s à t , de longueur n .

- Si $s_{n-1} \equiv t_0 \pmod{k}$, alors soit $\alpha \in A$, tel que $\alpha \not\equiv t_0 \pmod{k}$, et posons $s' = s_1 \dots s_{n-1} \alpha$.

Donc, puisque $\alpha \not\equiv t_0 \pmod{k}$, les sommets s' et t vérifient l'hypothèse du premier cas, et par conséquent, il existe un chemin de s' à t de longueur n .

4) Le graphe $G(k,p,\Delta,n)$ est hamiltonien.

Ce résultat découle du fait que $G(k,p,\Delta,1)$ est hamiltonien, et eulérien. Par suite, il en est de même pour tous les graphes obtenus à partir de $G(k,p,\Delta,1)$ par passages successifs au graphe représentatif des arcs. \diamond

Graphes de Kautz: pour ces graphes, il suffit de prendre $A^*=A\setminus\{0\}$, donc, $p=1$.

Dans ces conditions, l'ensemble $\{s \in A^n, s=s_0s_1\dots s_{n-1} / s_{i+1} \neq s_i [k], i=0..n-2\}$, devient:

$$\{s \in A^n, s=s_0s_1\dots s_{n-1} / s_{i+1} \neq s_i, i=0..n-2\},$$

et correspond bien à l'ensemble des sommets du graphe de Kautz $K(\Delta-1,D)$, tout comme la famille de permutations $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A^*}$, définies par:

$$f_\alpha(s_0s_1\dots s_{n-1}) = s_1\dots s_{n-1}(s_{n-1}+\alpha),$$

coïncide avec la définition des arcs de $K(\Delta-1,D)$.

III.3.3 Graphes de Delorme-Farhi

Soit A un alphabet de taille $q = m\Delta$, et posons:

$$- A^* = \{1, m+1, 2m+1, \dots, (\Delta-1)m+1\} = \{i, i \in A / i \equiv 1 [m]\},$$

$$- X = \{s \in A^n, s = s_0s_1\dots s_{n-1} / s_{i+1} = s_i + \alpha [1], i=0..n-2 \alpha \in A^*\}.$$

Considérons le graphe $G(q,\Delta,n)$, dont l'ensemble des sommets est X , et pour lequel les arcs sont tous les couples de la forme $(x, f_\alpha(x))$, avec $x \in X$, et $\alpha \in A^*$.

Remarquons que l'ensemble X est de cardinal md^n , et se répartit en m sous-ensembles, X_0, X_1, \dots, X_{m-1} , chacun de cardinal d^n , avec la partie X_j composée des éléments de X , dont la première lettre est de résidu j , modulo m .

En fait, $X_j = \{s \in A^n, s = s_0s_1\dots s_{n-1} / s_i = j + \beta m + i + 1, \beta \in \{0, 1, \dots, \Delta-1\}\}$, et ses sommets s'écrivent, donc, $s = (a_0m+j, a_1m+j+1, \dots, a_{n-1}m+j+n-1)$, où a_i peut prendre les valeurs $0, 1, \dots, \Delta-1$. Associons à un tel sommet, l'étiquette $(j; a_0a_1\dots a_{n-1})$. Ses successeurs, dans $G(q,\Delta,n)$, sont tous les sommets de la forme $s_1\dots s_{n-1}(s_{n-1}+\alpha)$, $\alpha \in A^*$, dont la nouvelle étiquette est $(j+1; a_1\dots a_{n-1}a_n)$, a_n pouvant prendre toutes les valeurs $0, 1, \dots, d-1$. Cette définition de $G(q,\Delta,n)$ n'est autre que celle des graphes de Farhi-Delorme [22], $C_s(m,\Delta,n)$, déjà donnée au chapitre I.

III.4 CAS DES GRAPHES BIPARTIS

De manière générale, pour définir les graphes bipartis réguliers, on se donne un alphabet A sur $2q$ lettres, réparties en deux sous-ensembles A_1 et A_2 de même cardinal q . Communément, alors que l'alphabet A est constitué des entiers $0, 1, \dots, 2q-1$, les deux parties A_1 et A_2 sont composées, l'une des q premiers nombres pairs, et l'autre des nombres impairs inférieurs à $2q$.

Soient A^* et A'^* deux parties de A_1 , chacune ayant d lettres et soit $X = \{s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}, s \in A^n, / s_{i+1} = s_i + \alpha, \text{ où } \alpha \in A^* \text{ si } s_i \in A_1 \text{ et } \alpha \in A'^* \text{ sinon}\}$.

Il est évident que l'ensemble X est formé de mots sur l'alphabet A , dont les lettres sont alternativement dans A_1 et A_2 . Définissons sur X deux familles de permutations $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A^*}$ et $\{f_\beta\}_{\beta \in A'^*}$ de la manière suivante:

- si $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ et $s_{n-1} \in A_1$ alors $f_\alpha(s) = s_1 \dots s_{n-1} (s_{n-1} + \alpha)$ $\alpha \in A^*$,
- si $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ et $s_{n-1} \in A_2$ alors $f_\beta(s) = s_1 \dots s_{n-1} (s_{n-1} + \beta)$ $\beta \in A'^*$.

Soit $B(q, \Delta, n)$ le graphe dont l'ensemble de sommets est X , et dont les arcs sont tous les couples de la forme $(s, f_\alpha(s))$, si la dernière lettre de s est dans A_1 , et ceux de la forme $(s, f_\beta(s))$, sinon.

Proposition III.1 $B(q, \Delta, n+1) = LB(q, \Delta, n)$.

Preuve

Découle du lemme général. ◇

Propriétés du graphe $B(q, \Delta, n)$

1) Le graphe $B(q, \Delta, n)$ est biparti d -régulier.

En effet, les deux stables sont constitués, l'un par les mots dont la dernière lettre est dans A_1 , et l'autre par ceux se terminant par une lettre de A_2 .

La d -régularité découle de la définition des successeurs d'un sommet donné.

2) $|X| = 2q\Delta^{n-1}$.

Pour un sommet $s = s_0s_1\dots s_{n-1}$ de $B(q,\Delta,n)$, la lettre s_0 peut prendre $2q$ valeurs, pendant que les autres lettres $s_i, 1 \leq i \leq n-1$, ne peuvent valoir que d quantités.

3) Le graphe $B(q,\Delta,n)$ est hamiltonien, si $n \geq 2$.

$B(q,\Delta,1)$ est eulérien, donc $LB(q,\Delta,1)$ est hamiltonien, et eulérien. Cette propriété se trouvant être conservée pour le passage au graphe représentatif des arcs, il s'ensuit que le graphe $B(q,\Delta,n)$ est hamiltonien. \diamond

III.4.1 Graphes séquentiels

Ces graphes ont été introduits par Fiol, Yebra et Fabrega [31]. Ils sont définis sur un ensemble de sommets, formé de tous les mots $s = s_0s_1\dots s_{n-1}$, de longueur n , dont les lettres sont alternativement dans deux alphabets A_1 et A_2 , et où les successeurs de $s = s_0s_1\dots s_{n-1}$ sont tous les sommets qui s'écrivent $s_1\dots s_{n-1}\alpha$, avec $\alpha \in A_1$ si $s_{n-1} \in A_2$, et $\alpha \in A_2$ si $s_{n-1} \in A_1$. Ces graphes correspondent donc aux graphes $B(2d,d,n)$, avec, en supposant que A_1 représente les Δ premiers nombres impairs, $A_1 = A^* = A'^*$.

III.4.2 BM-graphes

Dans le chapitre II de cette thèse, nous avons introduit et étudié les BM-graphes. Nous pouvons voir de manière directe qu'en posant, dans la définition des graphes $B(q,\Delta,n)$:

- $q = 2(\Delta^2 + 1)$,
- $A^* = \{1, 3, 5, \dots, 2\Delta - 1\}$,
- $A'^* = \{1, 2\Delta + 1, 4\Delta + 1, \dots, 2\Delta(\Delta - 1) + 1\}$,

nous obtenons les BM-graphes, $BM(\Delta,n)$.

Remarque III.1

Il est évident qu'avec certaines modifications, d'autres classes de graphes peuvent être obtenues. Nous avons juste été intéressés par les graphes déjà connus, dont les qualités techniques (dans le sens de leur éventuelle utilisation dans les réseaux d'interconnexion de processeurs) et combinatoires ont fait l'unanimité. En plus de ces classes de graphes, nous avons pu retrouver les graphes que nous avons introduits au chapitre II de cette thèse. \diamond

* * *

III.5 ROUTAGE

Le routage dans les graphes sur alphabets peut être défini d'une façon assez simple et commune.

Soit $G=(X,E)$ un graphe sur un alphabet A , avec $X=\{s \in A^n / s_{i+1} = s_i + \alpha, \alpha \in A^*\}$, où $A^* \subseteq A$ et l'addition effectuée modulo $m = |A|$. Les successeurs d'un sommet $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ sont de la forme $s_1 \dots s_{n-1} (s_{n-1} + \alpha)$, avec $\alpha \in A^*$.

Alors un routage peut être défini de la manière suivante:

soient $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ et $t = t_0 t_1 \dots t_{n-1}$ deux sommets de G .

- si $s_{n-1} = t_0$, alors un chemin trivial de s à t est donné par:

$$s = s_0 s_1 \dots s_{n-1} \rightarrow s_1 \dots s_{n-1} t_0 \rightarrow s_2 \dots s_{n-1} t_0 t_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_{n-1} t_0 \dots t_{n-2} \rightarrow t_0 t_1 \dots t_{n-1} = t.$$

- si $s_{n-1} \neq t_0$, il suffit de joindre, à partir de s , un sommet dont la dernière lettre est t_0 pour mettre en évidence un chemin de s à t . Pour ce faire, considérons le graphe G_0 dont les sommets sont les lettres de l'alphabet A et dont les arcs sont tous les couples (x,y) tels que $y = x + \alpha, \alpha \in A^*$. Un chemin de s_{n-1} à t_0 traversant successivement les sommets $s_{n-1} = x_0, x_1, \dots, x_{k-1} = t_0$ dans G_0 peut être associé au chemin suivant, dans G , du sommet s à un sommet dont la première lettre est t_0 :

$$s = s_0 s_1 \dots s_{n-1} \rightarrow s_1 \dots s_{n-1} x_0 \rightarrow s_2 \dots s_{n-1} x_0 x_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_k \dots s_{n-1} x_0 \dots x_{k-1}.$$

Remarque III.2

Dans le cas où $s=s_0s_1\dots s_{n-1}$ et $t=s_p s_{p+1}\dots s_{n-1}t_0\dots t_{n-p-1}$, le chemin trivial est donné par:

$$s = s_0s_1\dots s_{n-1} \rightarrow s_1\dots s_{n-1}t_0 \rightarrow s_2\dots s_{n-1}t_0t_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_p\dots s_{n-1}t_0\dots t_{k-1}=t. \quad \diamond$$

Remarque III.3

Dans le cas des graphes bipartis, un raisonnement analogue permet de donner un routage. \(\diamond\)

* * *



CHAPITRE IV

RÉSISTANCE AUX PANNES DES GRAPHES PSEUDO-SÉQUENTIELS

IV.1 INTRODUCTION

Les graphes $C_s(m,d,k)$ ont été introduits par Delorme et Farhi [22]. Dans le cas où m est égal à deux, ils constituent l'une des plus importantes classes de graphes bipartis orientés, proposées pour l'interconnexion des processeurs. Comme nous l'avons vu dans le chapitre III, ces graphes sont générés par l'opération de passage au graphe représentatif des arcs, en partant d'un graphe biparti orienté complet équilibré. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux propriétés de résistance aux pannes de ces graphes, en étudiant et prouvant que la connexité de leurs graphes sous-jacents est maximum, soit égale au degré minimum. Puis, nous nous intéresserons à la vulnérabilité de leur diamètre.

Et enfin, nous montrerons que, tout comme il a été établi pour les graphes de de Bruijn et de Kautz [37], le diamètre de survivance de ces graphes est égal à deux.

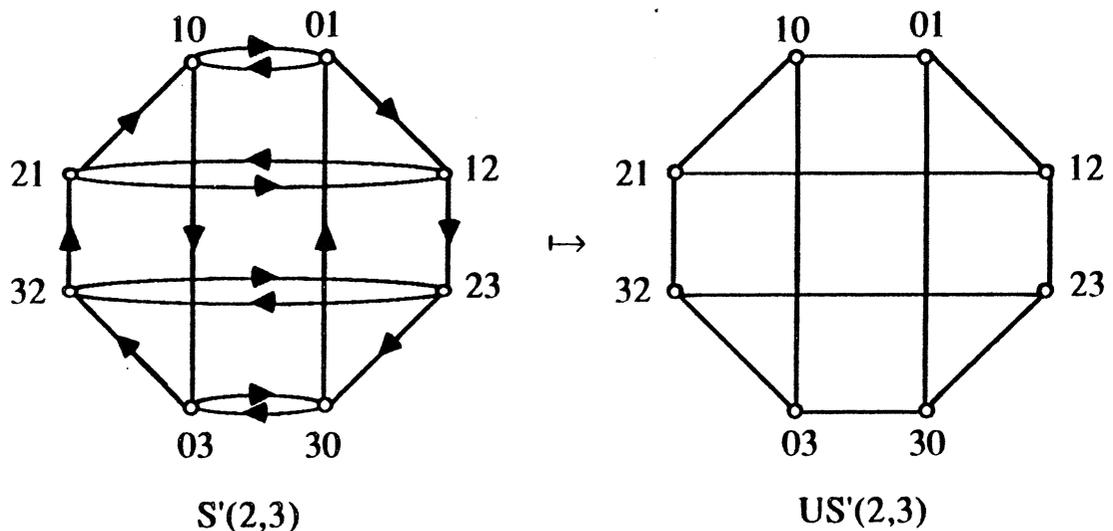
* * *

IV.2 CONNEXITÉ DES GRAPHES SOUS-JACENTS

Soient A_0 et A_1 deux alphabets disjoints, de même cardinal Δ . Nous supposons que A_0 (resp. A_1) est composé des Δ premiers nombres pairs (resp. impairs). Le graphe pseudo-séquentiel $S'(\Delta, n) = (X, E)$ est défini sur l'ensemble de tous les mots de longueur n , ayant leurs lettres alternativement dans A_0 et A_1 (et inversement), et comme successeurs d'un sommet $s_0 s_1 \dots s_{n-1}$, tous les sommets $s_1 s_2 \dots s_{n-1} \alpha$, avec $\alpha \in A_1$ si $s_{n-1} \in A_0$ et $\alpha \in A_0$ si $s_{n-1} \in A_1$.

Le graphe $S'(\Delta, n)$ est Δ -régulier, d'ordre $2\Delta^{n-1}$ et possède un diamètre égal à $n+1$. Sa connexité forte est maximum, étant égale à Δ (voir chapitre III).

Voyons dans ce qui suit, la connectivité du graphe sous-jacent à $S'(\Delta, n)$, et montrons qu'elle est maximum, en valant $2\Delta-1$ ($2\Delta-1$ correspond effectivement au degré minimum du graphe $US'(\Delta, n)$, puisque $S'(\Delta, n)$ possède des circuits de longueur 2).



Les circuits de longueur deux étant tous disjoints, dans $US'(\Delta, n)$ ils sont remplacés chacun par une seule arête. Donc, le degré minimum de $US'(\Delta, n)$ est de $2\Delta-1$.

Théorème IV.1 Le graphe $US'(\Delta, n)$ est de connexité égale à $2\Delta-1$.

Preuve

Soit F un ensemble de sommets de cardinal $2\Delta-2$. Notons par $T_0(F)$ (resp. $T_1(F)$) l'ensemble des lettres e paires (resp. impaires), pour lesquelles il existe un sommet de F dont la dernière lettre est e .

Donc $|T_0(F) \cup T_1(F)| \leq 2\Delta-2$.

Lemme IV.1 Si $|T_0(F)| \leq \Delta-1$ et $|T_1(F)| \leq \Delta-1$,

alors toute paire de sommets de $X \setminus F$, est reliée, dans $US'(\Delta, n) \setminus F$, par une chaîne de longueur inférieure ou égale à $2n+1$.

Preuve

Soit α_0 (resp. α_1) une lettre paire (resp. impaire) ne terminant aucun des sommets de F , et soient $\alpha = \alpha_0\alpha_1\alpha_0\alpha_1\dots$ et $\alpha' = \alpha_1\alpha_0\alpha_1\alpha_0\dots$ deux sommets de $X \setminus F$.

Par définition de $S'(\Delta, n)$, ces deux sommets sont adjacents.

Soit $s = s_0s_1\dots s_{n-1}$ un sommet quelconque de $X \setminus F$.

- Si s_{n-1} est impaire, la chaîne suivante permet de relier, dans $S'(\Delta, n) \setminus F$, les sommets s et α (et s et α'):

$$s \rightarrow s_1 \dots s_{n-1}\alpha_0 \rightarrow s_1 \dots s_{n-1}\alpha_0\alpha_1 \rightarrow s_2 \dots s_{n-1}\alpha_0\alpha_1\alpha_0 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha'$$

- Si s_{n-1} est paire, la chaîne suivante permet de relier, dans $S'(\Delta, n) \setminus F$, les sommets s et α :

$$s \rightarrow s_1 \dots s_{n-1}\alpha_1 \rightarrow s_1 \dots s_{n-1}\alpha_1\alpha_0 \rightarrow s_2 \dots s_{n-1}\alpha_1\alpha_0\alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha' \rightarrow \alpha.$$

Donc pour relier deux sommets s et t de $X \setminus F$, il suffit d'utiliser les chaînes reliant ces deux sommets à α ou à α' .

Comme ces deux chaînes évitent F , et sont de longueur au plus $n+1$, avec au moins une des deux chaînes de longueur inférieure ou égale à n , le résultat se trouve ainsi démontré. \diamond

Lemme IV.2 Si $|T_0(F)| = d$ ou $|T_1(F)| = d$,
alors pour toute paire de sommets s et t de $X \setminus F$, il existe, dans
 $S'(\Delta, n) \setminus F$, une chaîne de longueur au plus $2n+1$, les reliant.

Preuve

Supposons que $|T_0(F)| = \Delta$ (le même raisonnement reste valable si $|T_1(F)| = d$).
Donc $|T_1(F)| \leq \Delta - 2$.

Soient α_1 et β_1 deux lettres impaires n'appartenant pas à $T_1(F)$. Il existe alors une
lettre paire α_0 de $T_0(F)$, telle que, soit aucun sommet de F ne se termine par $\alpha_1 \alpha_0$,
soit aucun d'eux ne possède ses deux dernières lettres égales respectivement à
 β_1 et à α_0 (si tel n'était pas le cas, nous aurions $|F| \geq 2d$).

Dans le premier cas, soit $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ un sommet quelconque de $X \setminus F$.

- Si s_{n-1} est paire, la chaîne suivante permet de relier dans $S'(\Delta, n) \setminus F$ les
sommets s et α' :

$$s \rightarrow s_1 \dots s_{n-1} \alpha_1 \rightarrow s_1 \dots s_{n-1} \alpha_1 \alpha_0 \rightarrow s_2 \dots s_{n-1} \alpha_1 \alpha_0 \alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow \alpha'$$

- Si s_{n-1} est impaire, le sommet s possédant un voisin dans $X \setminus F$
(puisque $|F| < 2\Delta - 1$, le degré minimum de $US'(\Delta, n)$ étant égal à $2\Delta - 1$), la
dernière lettre de celui-ci est paire. L'existence d'une chaîne entre s et α' est
assurée de la même manière que ci-dessus.

La même conclusion que celle de la preuve du lemme IV.1 permet aussi d'aboutir
au résultat énoncé. \diamond

La preuve du théorème IV.1 se trouve ainsi achevée. \diamond

* * *

IV.3 VULNÉRABILITÉ DU DIAMÈTRE

IV.3.1 Introduction

J. Bond et C. Peyrat ont étudié un certain aspect de la vulnérabilité du diamètre des graphes sous-jacents aux graphes de de Bruijn $B(\Delta, D)$ et de Kautz $K(\Delta, D)$ [12]. Ils ont notamment établi que le diamètre de tels graphes augmentait d'au plus une unité en cas de défection de $2(\Delta - D) - 1$ sommets.

En utilisant une méthode de démonstration semblable à la leur, nous allons étudier la vulnérabilité du diamètre du graphe sous-jacent au graphe pseudo-séquentiel.

IV.3.2 Résultat

Le résultat principal de ce paragraphe est contenu dans le théorème suivant:

Théorème IV.2 Soit $S'(\Delta, n)$ le graphe pseudo-séquentiel de degré d et de diamètre $D = n + 1$, et soit F un ensemble de sommets de cardinal inférieur à $2\Delta - D$.

Alors $\text{Diam}(US'(\Delta, n) \setminus F) \leq D + 1$.

Preuve

Si $2\Delta - D \leq 0$, le résultat est trivial. Donc, supposons que $n \leq 2\Delta - 2$.

Soient $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ et $t = t_0 t_1 \dots t_{n-1}$ deux sommets de $US'(\Delta, n) \setminus F$, et supposons que s_{n-1} et t_0 soient de même parité, appartenant, par exemple, à A_1 .

Soit λ une lettre de A_0 , différente de toutes celles composant le sommet t . Disons de toute lettre vérifiant cette condition qu'elle est (s, t) -acceptable et associons lui la chaîne suivante, notée $C_\lambda(s, t)$, de longueur $n + 1$, entre les sommets s et t :

$$s \rightarrow s_1 \dots s_{n-1} \lambda \rightarrow s_1 \dots s_{n-1} \lambda t_0 \rightarrow \dots \rightarrow s_i \dots s_{n-1} \lambda t_0 \dots t_{i-2} \rightarrow \dots \rightarrow t.$$

Lemme IV.3 Si λ et μ sont deux lettres (s, t) -acceptables distinctes, alors $C_\lambda(s, t) \cap C_\mu(s, t) = \{s, t\}$.

Preuve

Soit $v \in C_\lambda(s,t) \cap C_\mu(s,t)$.

Donc, $v = s_i \dots s_{n-1} \lambda t_0 \dots t_{i-2} = s_j \dots s_{n-1} \mu t_0 \dots t_{j-2}$, avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ (en convenant que si $i = n$, $v = \lambda t_0 \dots t_{n-2}$, et que si $j = n$, $v = \mu t_0 \dots t_{n-2}$).

Comme $\lambda \neq \mu$, donc $i \neq j$.

Par suite, si $i < j$, alors nous aurions $\lambda = t_{j-i}$, et si $j < i$, alors $\mu = t_{i-j}$, ce qui est impossible, vu le choix de λ et μ . \diamond

Lemme IV.4 Soient λ une lettre (s,t)-acceptable et μ une lettre (t,s)-acceptable.

Si $\lambda \neq \mu$, alors $C_\lambda(s,t) \cap C_\mu(t,s) = \{s,t\}$.

Si $\lambda = \mu$, alors $C_\lambda(s,t) \cap C_\mu(t,s) = \{s,t\}$, sauf si s et t diffèrent d'une seule coordonnée.

Preuve

Soit $v \in C_\lambda(s,t) \cap C_\mu(t,s)$.

Donc, $v = s_i \dots s_{n-1} \lambda t_0 \dots t_{i-2} = s_j \dots s_{n-1} \mu t_0 \dots t_{j-2}$, avec $1 \leq i \leq n$, et $1 \leq j \leq n$.

Si $i < j$, alors nous aurions $\lambda = s_{n+i-j}$.

Si $j < i$, alors nous aurions $\mu = s_{n+j-i}$.

Si $i = j$, alors nécessairement $\lambda = \mu$, et $s_i = t_i$, sauf pour $i = i-1 = j-1 = k$. \diamond

Conséquence

Sauf pour le cas où les sommets s et t diffèrent d'une seule coordonnée, il existe au moins $2\Delta - n$ lettres (s,t)-acceptables ou (t,s)-acceptables, les lemmes IV.3, 4 et 5 permettent de construire au moins $2\Delta - n$ ($2\Delta - n$ si n est pair, et $2\Delta - n + 1$ si n est impair) chaînes disjointes, de longueur $(n+1) = D$, entre les sommets s et t. \diamond

Examinons à présent le cas où s et t diffèrent d'une seule coordonnée.

Dans ce cas, s et t s'écrivent: $s = s_0 s_1 \dots s_{k-1} s_k s_{k+1} \dots s_{n-1}$ et $t = s_0 s_1 \dots s_{k-1} t_k s_{k+1} \dots s_{n-1}$, et les chaînes $C_\lambda(s,t)$ et $C_\lambda(t,s)$ ont un sommet v en commun, de coordonnées:

$$v = s_{k+1} \dots s_{n-1} \lambda s_0 \dots s_{k-2} s_{k-1}.$$

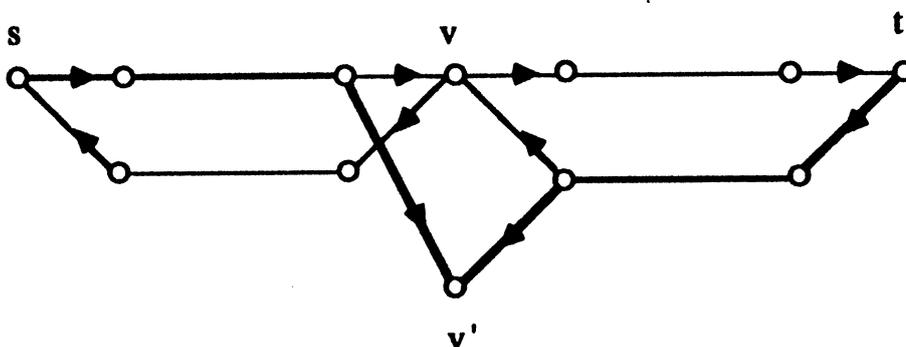
1^{er} cas: $k \neq 0$.

Soit λ une lettre acceptable pour les sommets s et t , et soit $P_\lambda(s,t)$, la chaîne entre s et t , obtenue en prenant les sous-chaînes de $C_\lambda(s,t)$ et $C_\lambda(t,s)$, formées des k premières arêtes. Ces sous-chaînes sont formées concrètement des sommets suivants:

$$s \rightarrow s_1 \dots s_k \dots s_{n-1} \lambda \rightarrow \dots \rightarrow s_k \dots s_{n-1} \lambda s_0 \dots s_{k-2} \rightarrow s_{k+1} \dots s_{n-1} \lambda s_0 \dots s_{k-2} z = v',$$

$$t \rightarrow s_1 \dots t_k \dots s_{n-1} \lambda \rightarrow \dots \rightarrow t_k \dots s_{n-1} \lambda s_0 \dots s_{k-2} \rightarrow s_{k+1} \dots s_{n-1} \lambda s_0 \dots s_{k-2} z = v',$$

avec $z \neq \lambda$.



Soit $S = \{\alpha \in \{s_0, s_1, \dots, s_k \dots, s_{n-1}, t_k\} / \alpha \text{ ne soit pas de même parité que } s_{n-1}\}$.

Si $|S| \leq \left\lceil \frac{D}{2} \right\rceil$, le sous-graphe $H_\lambda = C_\lambda(s,t) \cup C_\lambda(t,s) \cup P_\lambda(s,t)$, étant 2-connexe, et λ pouvant prendre n'importe quelle valeur hors de S , donc pour disconnecter les sommets s et t , la suppression de $2\Delta - D$ sommets est nécessaire.

Si $|S| = \left\lceil \frac{D}{2} \right\rceil + 1$, alors s_k et t_k sont distinctes et appartiennent à S .

De plus, la lettre s_k (resp. t_k) est (s,t) -acceptable (resp. (t,s) -acceptable), et notons par C_s (resp. C_t) la chaîne correspondante. Les deux chaînes C_s et C_t étant disjointes, par suite, pour disconnecter les sommets s et t , il faut détruire ces deux chaînes en supprimant au moins deux sommets, et pour chaque valeur de λ (λ pouvant prendre toutes les valeurs hors de S) oter également au moins deux sommets.

Donc, en tout, la suppression de $2(\Delta - |S|) + 2 \geq 2\Delta - D$ sommets.

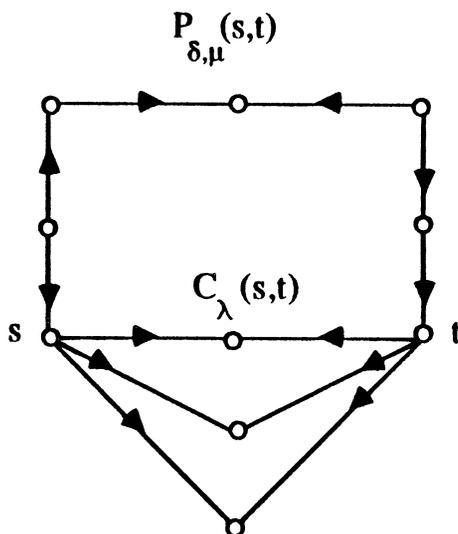
2nd cas: $k=0$, $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ et $t = t_0 s_1 \dots s_{n-1}$.

Les lettres s_{n-1} et t_0 étant supposées de même parité, donc n est impair et s_1 et s_{n-1} sont de parités différentes.

Les sommets s et t ont le même ensemble de successeurs, dans $S'(\Delta, n)$ (puisque $S'(\Delta, n) = LS'(\Delta, n-1)$). A chacun d'entre eux correspond une chaîne $C_\lambda(s, t)$, de longueur deux, entre s et t .

Pour un couple (δ, μ) de lettres, telles que δ (resp. μ) soit de même parité mais distincte de s_{n-1} (resp. s_1), soit $P_{\delta, \mu}(s, t)$, la chaîne entre s et t définie de la manière suivante:

$$s \rightarrow \mu s_0 \dots s_{n-2} \rightarrow s_0 s_1 \dots s_{n-2} \delta \rightarrow s_1 \dots s_{n-2} \delta \mu \rightarrow t_0 s_1 \dots s_{n-2} \delta \rightarrow \mu t_0 s_1 \dots s_{n-2} \rightarrow t$$



Les lettres δ et μ sont de parités différentes et peuvent prendre chacune, $\Delta-1$ valeurs. Donc nous pouvons choisir $\Delta-1$ couples complètement distincts, de la forme (δ, μ) , chacun correspondant à une chaîne $P_{\delta, \mu}(s, t)$ de longueur six, entre les sommets s et t .

Nous pouvons facilement vérifier que:

$$P_{\delta, \mu}(s, t) \cap P_{\delta', \mu'}(s, t) = \{s, t\} \quad \text{si } (\delta, \mu) \neq (\delta', \mu'),$$

$$C_\lambda(s, t) \cap P_{\delta, \mu}(s, t) = \{s, t\}.$$

Donc, nous avons mis en évidence $2(\Delta-1)$ chaînes entre les sommets s et t , de longueur inférieure ou égale à six.

Par conséquent, si $D \geq 6$, et D est impair, il existe au moins $2\Delta - D$ chaînes de longueur au plus $D + 1$, entre deux sommets quelconques de $US'(\Delta, n)$.

Examinons à présent le cas où les lettres s_{n-1} et t_0 sont de parités différentes, autrement dit, le cas où n est pair.

Comme $|F| \leq 2\Delta - D - 1$, donc $|S| \leq 2\Delta - 3$, et alors le sommet s possède un voisin s' à l'extérieur de F . Les voisins de s ont la propriété d'avoir la première lettre de parité différente de celle de la première lettre de s . Donc, le sommet s' , vérifie toutes les hypothèses du cas précédemment traité, et, par suite, il est relié, dans $US'(\Delta, n) \setminus F$, par au moins une chaîne de longueur au plus D , au sommet t . Cette chaîne, complétée par l'arête $\{s, s'\}$, compose une chaîne de longueur au plus $D + 1$, entre les sommets s et t . \diamond

* * *

IV.4 DIAMÈTRE DU GRAPHE DE SURVIVANCE

Le routage trivial \mathcal{C} associé aux graphes pseudo-séquentiels, est celui affectant à un couple (s, t) , $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ et $t = t_0 t_1 \dots t_{n-1}$, de sommets de $S'(\Delta, n)$, le chemin suivant:

si s_{n-1} et t_0 sont de parités différentes, alors:

$$s \rightarrow s_1 \dots s_{n-1} t_0 \rightarrow s_2 \dots s_{n-1} t_0 t_1 \rightarrow \dots \rightarrow s_i \dots s_{n-1} t_0 t_1 \dots t_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow t,$$

si s_{n-1} et t_0 sont de même parité, alors:

$$s \rightarrow s_1 \dots s_{n-1} t_1 \rightarrow s_2 \dots s_{n-1} t_1 t_0 \rightarrow \dots \rightarrow s_{i+1} \dots s_{n-1} t_1 t_0 t_1 \dots t_{i-1} \rightarrow \dots \rightarrow t.$$

Pour avoir de plus courts chemins, il suffit de voir si s contient un facteur gauche de la forme $s_{n-i} \dots s_{n-1}$ constituant un facteur droit de t de la forme $t_0 t_1 \dots t_{i-1}$. Si tel est le cas, prendre le plus grand entier j , tel que $s_{n-j} \dots s_{n-1} = t_0 t_1 \dots t_{j-1}$.

Un plus court chemin de s à t est alors de longueur $n - j$, et est constitué des sommets suivants:

$$s = s_0 \dots s_{n-i-1} s_{n-i} \dots s_{n-1} = s_0 \dots s_{n-i-1} t_0 \dots t_{j-1} \rightarrow s_1 \dots s_{n-i-1} t_0 \dots t_j \rightarrow \dots \rightarrow t.$$

Le routage minimal \mathcal{R} associé au graphe $S'(\Delta, n)$, est alors formé des plus courts chemins sus-définis.

Théorème IV.2 Le diamètre de survivance du graphe $S'(\Delta, n)$, muni du routage \mathcal{R} est égal à 2.

Preuve

Nous savons déjà que la connexité forte de $S'(\Delta, n)$ est égale à d .

Soit F un ensemble de sommets de cardinal au plus $\Delta - 1$. Nous allons montrer que pour tout couple (s, t) de sommets de $S'(\Delta, n) \setminus F$, il existe un sommet z , tel que $\mathcal{R}(s, z) \cap F = \emptyset$, et $\mathcal{R}(z, t) \cap F = \emptyset$.

Notons par $T_0(F)$ (resp. $T_1(F)$) l'ensemble des lettres paires (resp. impaires), constituant la première lettre d'au moins un sommet de F .

$$\text{Donc } |T_0(F) \cup T_1(F)| \leq 2d - 2.$$

Lemme IV.6 Si $|T_0(F)| \leq \Delta - 1$ et $|T_1(F)| \leq \Delta - 1$, alors,

$$\exists z, z \in X \setminus F / \forall s, t \in X \setminus F, \mathcal{R}(s, z) \cap F = \emptyset, \text{ et } \mathcal{R}(z, t) \cap F = \emptyset.$$

Preuve

Soit α_0 (resp. α_1) une lettre paire (resp. impaire) ne terminant aucun des sommets de F , et désignons par z , le sommet $\alpha_0 \alpha_1 \alpha_0 \alpha_1 \dots$, et par z' le sommet $\alpha_1 \alpha_0 \alpha_1 \alpha_0 \dots$.

Soit $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ un sommet quelconque de $X \setminus F$.

- Si s_{n-1} est impaire, alors le chemin suivant correspond à $\mathcal{R}(s,z)$, et évite F:

$$s \rightarrow s_1 \dots s_{n-1} \alpha_0 \rightarrow s_1 \dots s_{n-1} \alpha_0 \alpha_1 \rightarrow s_2 \dots s_{n-1} \alpha_0 \alpha_1 \alpha_0 \rightarrow \dots \rightarrow z.$$

- Si s_{n-1} est paire, alors le chemin $\mathcal{R}(s,z)$ est donné par la séquence suivante, et évite F:

$$s \rightarrow s_1 \dots s_{n-1} \alpha_1 \rightarrow s_1 \dots s_{n-1} \alpha_1 \alpha_0 \rightarrow s_2 \dots s_{n-1} \alpha_1 \alpha_0 \alpha_1 \rightarrow \dots \rightarrow z' \rightarrow z.$$

- Si s_0 est impaire, alors le chemin suivant correspond à $\mathcal{R}(z,s)$, et évite F:
 $z \rightarrow \alpha_0 \dots \alpha_0 \alpha_1 \alpha_0 s_0 \rightarrow \alpha_0 \dots \alpha_0 \alpha_1 \alpha_0 s_0 s_1 \rightarrow \dots \rightarrow s$, avec une éventuelle transition au premier pas, par le sommet z' (si n est pair).

- Si s_0 est paire, alors le chemin $\mathcal{R}(z,s)$ est donné par la séquence suivante, et évite F:

$$z \rightarrow \dots \alpha_0 \alpha_1 \alpha_0 s_0 \rightarrow \dots \alpha_0 \alpha_1 \alpha_0 s_0 s_1 \rightarrow \dots \rightarrow s, \text{ avec une éventuelle transition au premier pas, par le sommet } z' \text{ (si } n \text{ est impair).}$$

Dans chacun des cas que nous venons d'étudier, il faut éventuellement tenir compte dans les deux premiers cas (resp. les deux derniers cas) de l'existence d'un facteur droit de s (resp. z) correspondant à un facteur gauche de z (resp. s). \diamond

Lemme IV.7 Si $|T_0(F)| = \Delta$ ou $|T_1(F)| = \Delta$,

$$\text{alors } \exists z, z \in X \setminus F / \forall s, t \in X \setminus F, \mathcal{R}(s,z) \cap F = \emptyset \text{ et } \mathcal{R}(z,t) \cap F = \emptyset.$$

Preuve

Supposons que $|T_0(F)| = \Delta$. Donc $|T_1(F)| \leq \Delta - 2$. Soient α_1 et β_1 deux des lettres impaires, n'appartenant pas à $T_1(F)$.

Donc il existe une lettre paire α_0 , telle que pour au moins l'une des lettres α_1 et β_1 , par exemple α_1 , nous ayons $\forall u, u \in F, u_0 u_1 \notin \{\alpha_0 \alpha_1, \alpha_1 \alpha_0\}$, et $u_{n-2} u_{n-1} \notin \{\alpha_0 \alpha_1, \alpha_1 \alpha_0\}$.

Pour achever la preuve, il suffit d'appliquer le même raisonnement que celui de la preuve du lemme IV.6. \diamond

Donc, pour tout ensemble F d'au plus $\Delta-1$ sommets, il existe un sommet z dans $S'(\Delta,n)\setminus F$, tel que pour tout sommet s de $S'(\Delta,n)\setminus F$, $\mathcal{R}(s,z) \cap F = \emptyset$, et $\mathcal{R}(z,s) \cap F = \emptyset$.

Cette propriété suffit pour conclure. \diamond

* * *

CHAPITRE V

DIAMÈTRE DE QUELQUES GRAPHES CUBIQUES

V.1 INTRODUCTION

Les opérations sur les graphes présentent un aspect assez important dans l'étude des réseaux d'interconnexion. Certaines méthodes donnent des résultats très intéressants, et permettent de construire des graphes très denses. Des aperçus généraux des plus efficaces (dans le sens où elles donnent des graphes assez denses) sont donnés par Bermond, Delorme et Farhi [6] et par Delorme [20] pour ce qui est des graphes bipartis.

Plusieurs travaux, dans les contextes de l'étude des réseaux d'interconnexion concernent les graphes ayant des degrés relativement petits (notamment 3 et 4) [1, 24, 25 et 44]. Dans ce chapitre, nous présentons une opération d'éclatement de sommets permettant de construire des graphes cubiques, à partir de certains graphes orientés 2-réguliers. Il s'ensuivra l'étude des variations du diamètre, engendrées par une telle opération.

* * *

V.2 OPÉRATION D'ÉCLATEMENT DE SOMMETS

V.2.1 Première définition

Soit $G=(X,E)$ un graphe orienté 2-régulier, dont les sommets sont répartis en deux classes, X_0 et X_1 , de sorte que si (s,t) est un arc de G , alors:

- si s et t sont dans la même classe, alors $(s,t) \in E_0$, $t=f_0(s)$, l'arc (s,t) est alors de type f_0 ,

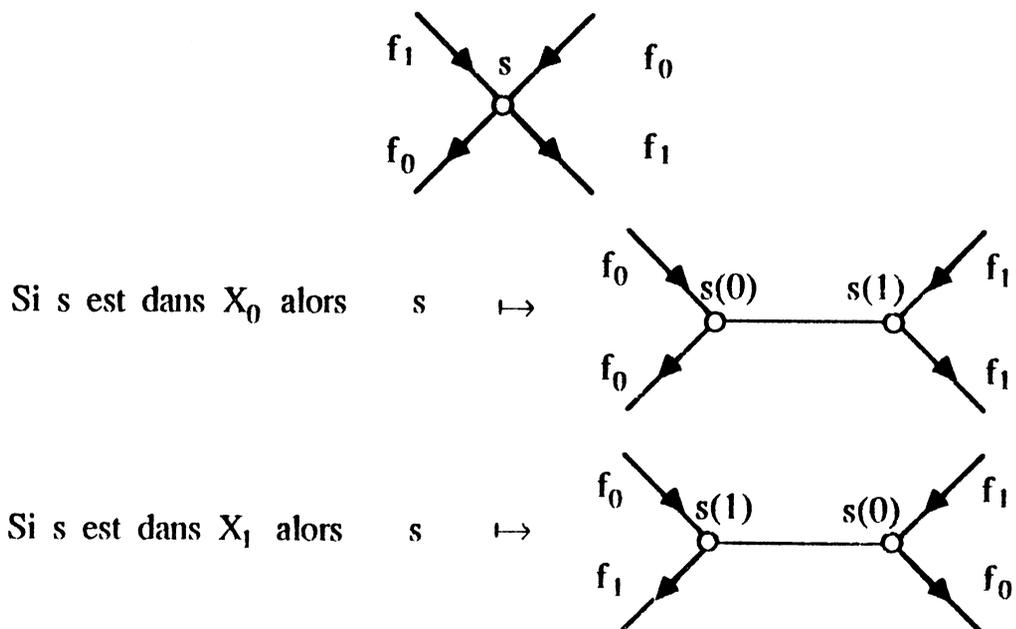
- si s et t sont dans des classes distinctes, alors $(s,t) \in E_1$, $t=f_1(s)$, et l'arc (s,t) est de type f_1 .

Supposons, en outre, que chaque sommet de G possède un successeur et un prédécesseur dans chacune des classes X_0 et X_1 .

Notons par D le diamètre du graphe G ; donc pour tout couple (s,t) de sommets de G , il existe un chemin de s à t , $s = s^0, s^1, \dots, s^q = t$, de longueur q inférieure ou égale à D .

Un tel chemin peut être décrit comme étant une séquence $P = p^1, p^2, \dots, p^q$, où pour chaque i , $p^i \in \{f_0, f_1\}$, et $s^i = p^i(s^{i-1})$.

Associons au graphe G , le graphe $H=(Y,F)$, obtenu en effectuant sur chaque sommet de G , l'opération suivante:



Quelques propriétés du graphe $H(G)$

- Le graphe $H(G)$ est cubique, contient tous les arcs de G , et des arêtes, qui seront appelées arêtes rajoutées, constituant un couplage parfait,
- $|Y| = 2|X|$,
- $|F| = |E| + |X|$,
- A chaque sommet s de G , correspond dans H deux sommets $s(0)$ et $s(1)$, que nous appellerons sous-sommets de s , résultant de l'opération d'éclatement du sommet s , et constituant les extrémités initiales d'arcs de type f_0 et f_1 respectivement. ◊

Soient s et t deux sommets de G . Donc il existe un chemin de s à t , $s = s^0, s^1, \dots, s^q = t$, de longueur q , auquel est associé une séquence $P = p^1, p^2, \dots, p^q$. A ce chemin est associée dans le graphe $H(G)$, une certaine chaîne, notée $H(P)$, comportant, en plus des arcs de P , certaines des arêtes rajoutées.

Etude de la longueur de $H(P)$

La séquence P étant donnée, notons par P' , la séquence $\bar{p}^1, p^2, \dots, p^q$, obtenue à partir de P , en changeant de type au premier arc (c'est à dire, $\bar{p}^1 = f_0$ si et seulement si $p^1 = f_1$) et par Q , la sous-séquence de P , obtenue en ignorant la première fonction; autrement dit, $Q = p^2, p^3, \dots, p^q$. Notons par $l(P)$, la longueur du chemin P , et par $H(P)$, celle de la chaîne correspondante dans $H(G)$.

Proposition V.1 $l(H(P)) + l(H(P')) \leq 3q + o(1)$.

Preuve

Nous pouvons supposer que $p^1 = f_0$ (sinon, le même raisonnement reste valable) et donc la séquence P s'écrit sous la forme suivante:

$$P = f_0, \dots, f_0, f_1, \dots, f_1, f_0, \dots, f_0, f_1, \dots, f_1, \dots$$

Appelons **séquence f_m -homogène**, toute séquence composée uniquement des fonctions f_m . Le chemin associé possède aussi cette propriété.

Calculons alors la longueur, dans $H(G)$, d'une chaîne associée à une telle séquence.

Désignons par P_i une séquence f_m -homogène de longueur k_m , joignant un sommet s à un sommet u^m .

Dans la définition des opérations d'éclatement, chaque sommet est remplacé par deux sommets reliés par une arête rajoutée.

Donc lorsque nous parlons de chaîne de $H(G)$ associée à une séquence entre les sommets s et t de G , il y'a risque de confusion quant au choix du sous-sommet de s à prendre comme origine d'une telle chaîne (le même problème se pose évidemment pour le choix d'un sous-sommet de t , comme extrémité d'une telle chaîne).

Pour éviter cette confusion, nous allons convenir que dans $H(G)$, l'origine d'une séquence f_m -homogène entre les sommets s et t est le sommet $s(m)$, alors que son extrémité est $t(\bar{m})$. Cette convention est par ailleurs justifiée par le fait que toute séquence est composée d'une suite alternée de sous-séquences homogènes (c'est à dire, une sous-séquence f_m -homogène est suivie d'une sous-séquence $f_{\bar{m}}$ -homogène et inversement).

Lemme V.1 Si $s \in X_1$, alors $l(H(P^0)) \leq 2k_0 - 1$,

$$l(H(P^1)) \leq \begin{cases} \frac{3}{2}k_1 - 1 & \text{si } k_1 \text{ est pair,} \\ \frac{3}{2}k_1 + \frac{1}{2} & \text{si } k_1 \text{ est impair.} \end{cases}$$

Preuve

Nous allons donner la preuve du cas où k_1 est impair. L'autre cas se démontre d'une manière identique.

*) Pour prouver que $l(H(P^0)) \leq 2k_0 - 1$, il suffit de remarquer qu'à chaque fois qu'un arc de type f_0 est parcouru, l'une des arêtes rajoutées l'est aussi, sauf pour le dernier, vu que nous avons convenu qu'une sous-séquence de la forme de P^0 se termine au niveau du sous-sommet $u(1)$ de u , sous-sommet qui correspond fort justement à l'extrémité terminale d'un arc de type f_0 , soit, le dernier arc de la sous-séquence P^0 .

*) Le fait que $l(H(P^1)) \leq \frac{3}{2}k_1 + \frac{1}{2}$, découle de la propriété qu'ont les arcs de type f_1 à ne relier que des sommets n'appartenant pas à la même partie de X . Donc, dans les $(k_1 - 1)$ premières étapes, pour tout parcours d'une paire d'arcs de P^1 consécutifs, une arête rajoutée doit être parcourue. Pour le dernier arc de la séquence P^1 , puisque $s \in X_1$ et $v \in X_0$, son extrémité terminale coïncide, dans $H(G)$, avec le sous-sommet $v(0)$. Donc, l'arête $\{v(0), v(1)\}$ doit être traversée pour atteindre l'origine d'une séquence de la forme de P^0 .

Au total, nous avons:

$$\frac{3}{2}(k_1 - 1) + 2 \text{ arcs et arêtes.}$$

Ce qui correspond bien au résultat énoncé. \diamond

Lemme V.2 Si $s \in X_0$, alors $l(H(P^0)) \leq k_0 + 1$,

$$l(H(P^1)) \leq \begin{cases} \frac{3}{2}k_1 + 1 & \text{si } k_1 \text{ est pair,} \\ \frac{3}{2}k_1 - \frac{1}{2} & \text{si } k_1 \text{ est impair.} \end{cases}$$

Preuve

Identique à celle du lemme V.1. \diamond

Revenons à présent à la démonstration de la proposition V.1, et soient $x = f_0(s)$, et $y = f_1(s)$ les deux successeurs, dans G , du sommet s .

Donc si $s \in X_0$, alors $x \in X_0$ et $y \in X_1$. Par conséquent, parcourir les séquences P et P' à partir du sommet s revient à parcourir la même séquence Q , en partant respectivement des sommets x et y .

Pour terminer, remarquons que le lemme V.1 assure que le nombre d'arcs et arêtes traversés dans $H(G)$ par une séquence f_m -homogène de longueur k , en prenant comme origines deux sommets de types différents dans G , est toujours inférieur ou égal à $3k$. La preuve de la proposition V.1 se trouve alors complètement achevée. \diamond

V.2.2 Seconde définition

L'opération d'éclatement que nous venons de décrire peut également être définie en utilisant les notations suivantes:

soit $G = (X, E)$, un graphe orienté, fortement connexe, 2-régulier et de diamètre D .

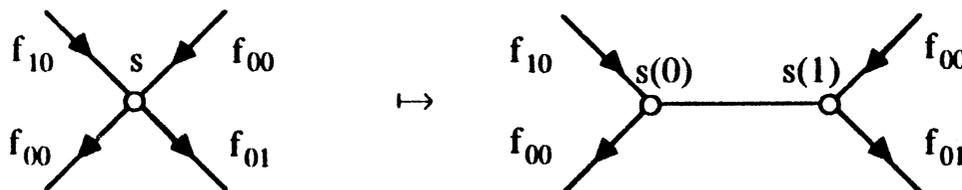
Supposons que l'ensemble X puisse se répartir en deux sous-ensembles X_0 et X_1 , de sorte que chaque sommet de G ait un successeur et un prédécesseur dans chacune des parties X_0 et X_1 .

Désignons par f_{mn} , les arcs (x, y) de G ayant l'extrémité initiale dans X_m et l'extrémité terminale dans X_n . Nous dirons alors que $y = f_{mn}(x)$. Dans la suite, les arcs de la forme f_{ii} auront la notation f_i .

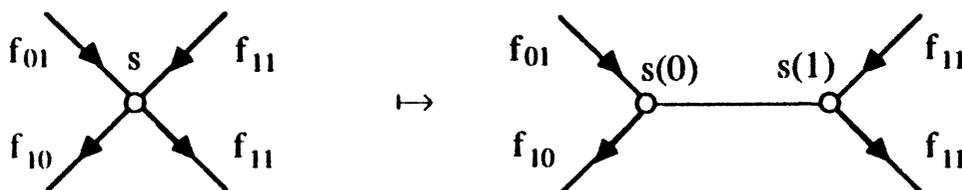
Nous allons associer au graphe G , le graphe $H(G)$, défini ci-dessus, mais que nous noterons $A(G) = (Y, F)$. Cette différence de notation est due à la manière que nous utiliserons pour répartir les sommets et les arcs.

Le graphe $A(G)$ est défini de la manière suivante:

*) Si $s \in X_0$, alors



*) Si $s \in X_1$, alors



Soient s et t deux sommets du graphe G . Donc il existe un chemin $s=s^0, s^1, \dots, s^q=t$ de s à t , de longueur q , inférieure ou égale à D . Un tel chemin peut être décrit comme étant une séquence $P=p^1, p^2, \dots, p^q$, où chaque $p^i \in \{f_{00}, f_{01}, f_{11}, f_{10}\}$, $s^i = p^i(s^{i-1})$ et, si $p^i = f_{jk}$, alors $p^{i+1} = f_{kl}$.

A un tel chemin, est associée dans $A(G)$ une certaine chaîne $A(P)$, comprenant en plus des arcs p^i , certaines des arêtes rajoutées.

Notons par \bar{P} , la séquence $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_q$, où $\bar{f}_{mn} = f_{mn}$.

Proposition V.2 $l(A(P)) + l(A(\bar{P})) \leq 3q + o(1)$.

Preuve

Le principe de la démonstration est le même que celui de la proposition V.1. Il consiste à considérer d'abord les séquences homogènes (dans ce cas, formées seulement de f_m , et se terminant par f_{mn}). Durant le parcours des séquences P et \bar{P} , comme dans le cas ci-dessus, à chaque fois que l'une des séquences atteint un sommet de X_0 , l'autre atteint un sommet de X_0 , et inversement.

Pour conclure, il suffit de constater que dans les définitions des graphes $A(G)$ et $H(G)$, les éclatements des sommets sont effectués dans les deux cas de nature à séparer deux arcs de même type par une arête rajoutée pour tous les sommets d'une partie, et à les garder consécutifs dans l'autre partie. \diamond

* * *

V.3 APPLICATIONS

V.3.1 Introduction

Les opérations que nous venons de définir au paragraphe V.2 vont servir à la construire, de deux classes de graphes cubiques, de diamètre au plus $3D/2$, à partir des graphes de de Bruijn, qui sont très appropriés, et d'une autre classe de graphes, un peu apparentée à celle des graphes pseudo-séquentiels, mais dont la définition est légèrement différente.

V.3.2 A partir des graphes de de Bruijn

Rappelons que le graphe de de Bruijn $B(2,n) = (X,E)$, peut être défini de la manière suivante:

X représente l'ensemble de tous les mots de longueur n , sur l'alphabet binaire $\{0,1\}$, et un sommet $s = s_0s_1\dots s_{n-1}$ possède comme successeurs les sommets $f_0(s) = s_1\dots s_{n-1}s_0$ et $f_1(s) = s_1\dots s_{n-1}\bar{s}_0$.

Considérons la répartition suivante de l'ensemble X des sommets de $B(2,n)$, en:

$$X_0 \cup X_1, \text{ avec } X_i = \{s \in X, s = s_0s_1\dots s_{n-1} / \sum_{j=0}^{n-1} s_j \equiv i [2]\}, i=0,1.$$

Remarquons que pour tout sommet s de $B(2,n)$, nous avons:

$$*) s \in X_0 \Leftrightarrow f_0(s) \in X_0 \text{ et } f_1(s) \in X_1,$$

$$*) s \in X_1 \Leftrightarrow f_0(s) \in X_1 \text{ et } f_1(s) \in X_0.$$

Donc chaque sommet du graphe $B(2,n)$ possède un voisin et un successeur dans chacune des parties X_0 et X_1 , et le graphe en question vérifie les hypothèses exigées pour l'existence du graphe $H(B(2,n))$, associé par l'opération définie au paragraphe V.2. Soient $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ et $t = t_0 t_1 \dots t_{n-1}$, deux sommets de $B(2,n)$, et $P = p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$, le chemin de s à t qui passe successivement par les sommets $s, x^1 = p_0(s), x^2 = p_1(x^1), \dots, t = p_{n-1}(x^{n-1})$, avec pour tout $i, p_i \in \{f_0, f_1\}$, et:

$$P_i = \begin{cases} f_0 & \text{si } t_i = s_i \\ f_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, à tout couple de sommets (s,t) de $B(2,n)$, est associé un chemin de s à t de longueur inférieure ou égale à n , défini de cette manière.

Proposition V.3 Soit $P = p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ une séquence quelconque de longueur égale à n , et posons $P' = \bar{p}_0, p_1, \dots, p_{n-1}$.

Alors $\forall s \in B(2,n), (p_0)^{-1}(\bar{p}_0(P'(s))) = P(s)$.

Preuve

Il suffit de remarquer que si $t = P(s) = t_0 t_1 \dots t_{n-1}$, alors $t' = P'(s) = \bar{t}_0 t_1 \dots t_{n-1}$, ce qui est dû aux définitions de f_0 et de f_1 .

De plus, si, par exemple, $p_0 = f_0$, alors:

$$(p_0)^{-1}(\bar{p}_0(t')) = (p_0)^{-1}(t_1 \dots t_{n-1} \bar{t}_0) = t_0 t_1 \dots t_{n-1} = t.$$

Si $p_0 = f_1$, le même résultat est obtenu. \diamond

Théorème V.3 $\text{Diam}(H(B(2,n))) \leq \frac{3}{2} \text{Diam}(B(2,n)) + o(1)$.

Preuve

La proposition V.1 assure que pour toute paire de séquences P et P' de longueur n , définies par $P = p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$ et $P' = \bar{p}_0, p_1, \dots, p_{n-1}$, nous avons $l(H(P)) + l(H(P')) \leq 3q + o(1)$. La proposition V.3 permet de vérifier que pour un sommet s donné, $\text{dist}_{B(2,n)}(P(s), P'(s)) \leq o(1)$. Le résultat du théorème en découle alors. \diamond

V.3.3 A partir de graphes pseudo-séquentiels

Soit $S(n)$ le graphe, dont l'ensemble des sommets est composé de tous les mots de longueur n de l'alphabet $\{0,1\}$, et pour lequel un sommet $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ possède comme successeurs les sommets $g_0(s) = s_1 \dots s_{n-1} \bar{s}_0$ et $g_1(s) = s_1 \dots s_{n-2} \bar{s}_{n-1} s_0$.

Propriétés de $S(n)$

1) Le graphe $S(n)$ est biparti, la somme des lettres d'un sommet étant toujours de parité différente de celle de ses successeurs.

2) $\text{Diam}(S(n)) = n$ [12], [31].

Pour une autre preuve et quelques propriétés supplémentaires, voir l'annexe, en fin de chapitre. \diamond

Définissons sur X , les deux bijections suivantes:

$$f_0(s) = \begin{cases} g_0(s) & \text{si } s_0 = 1, \\ g_1(s) & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad f_1(s) = \begin{cases} g_1(s) & \text{si } s_0 = 1, \\ g_0(s) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notons que les arcs de $S(n)$ peuvent être définis par les bijections g_0 et g_1 . Considérons la partition de X en $X_0 \cup X_1$, avec le sous-ensemble X_i formé des sommets de $S(n)$, dont la dernière lettre est égale à i , $i = 0$ ou 1 . Donc chaque sommet possède un successeur et un prédécesseur dans chacune des parties X_i . Désignons par g_{ij} , les arcs ayant l'extrémité initiale dans X_i , et l'extrémité terminale dans X_j , et posons $\bar{g}_{ij} = g_{ij}$. Toutes les hypothèses requises pour l'existence du graphe $A(S(n))$, défini au paragraphe V.2, sont alors vérifiées.

Proposition V.4 Soit $P = \{p_0, p_1, \dots, p_{n-1}\}$ une séquence de longueur n .

Alors pour tout sommet s de $S(n)$, $P(s) = \bar{P}(s)$.

Preuve

Voir annexe. ◇

Théorème V.4 $\text{Diam}(A(S(n))) \leq \frac{3}{2} \text{Diam}(S(n)) + o(1)$.

Preuve

Soient s et t deux sommets de $S(n)$. S'il existe un chemin de s à t de longueur n , alors le théorème V.2 assure qu'au moins l'un des chemins $A(P)$ et $A(\bar{P})$ est de longueur au plus $3n/2$.

S'il existe un chemin de longueur $n-1$ du sommet s au sommet t , alors si s' est un successeur de s , il existe forcément un chemin Q , de longueur n , de s' à t . Par suite, le théorème V.2 assurant également dans ce cas que l'un des chemins $A(Q)$ et $A(\bar{Q})$ est de longueur inférieure ou égale à $3n/2$, le résultat du théorème en découle directement. ◇

* * *

V.A ANNEXE

Dans cette annexe, nous allons étudier certaines propriétés des graphes pseudo-séquentiels de degré 2, définis au paragraphe V.3.2.

Propriété V.A1 Soit s un sommet de $S(n)$ et soit k un entier, $k \leq n-1$.

Alors $g_0^k(s) = s_k \dots s_{n-1} \bar{s}_0 \dots \bar{s}_{k-1}$ et $g_1^k(s) = s_k \dots \bar{s}_{n-1} \bar{s}_0 \dots \bar{s}_{k-2} s_{k-1}$.

Preuve

Immédiate. ◇

Propriété V.A2 $g_0^n(s) = g_1^n(s) = \bar{s}$.

Preuve

De la propriété V.A1 ci-dessus, nous avons:

$$g_0^{n-1}(s) = s_{n-1} \bar{s}_0 \dots \bar{s}_{n-2} \quad \text{et} \quad g_1^{n-1}(s) = \bar{s}_{n-1} \bar{s}_0 \dots \bar{s}_{n-3} s_{n-2}.$$

$$g_0^n(s) = g_0(g_0^{n-1}(s)) = \bar{s}, \quad \text{et} \quad g_1^n(s) = g_1(g_1^{n-1}(s)) = \bar{s}. \quad \diamond$$

Remarque V.A1

Soient $P = p_0 \dots p_{k-1}$ une séquence de longueur k , $k \leq n-1$ et $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ un sommet quelconque de $S(n)$, et posons $u = P(s) = u_0 u_1 \dots u_{n-1}$.

$$\text{Alors } u_i = s_{i+k} \Leftrightarrow \begin{cases} \{i \leq n-k-2\}, \\ \text{ou } \{p_0 = f_0 \text{ et } i = n-k-1\}, \\ \text{ou } \{p_{i+k+1} \neq p_{i+k} \text{ et } i \geq n-k\}. \end{cases}$$

De plus, si $k = n$, cette équivalence devient:

$u_i = s_i \Leftrightarrow \{p_{i+1} = \bar{p}_i\}$, pour tout i , $0 \leq i \leq n-1$, avec l'addition, dans les indices, effectuées modulo n .

Ceci découle des définitions des fonctions f_0 et f_1 . ◇

Appelons **séquences complémentaires** toute paire de séquences P et P' , de même longueur, ayant leurs $k^{\text{ièmes}}$ composantes complémentaires ($g_{i\bar{m}} = \bar{g}_m$).

Propriété V.A3 Soient P et Q deux séquences quelconques, de même longueur k .

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- i) pour tout sommet s de $S(n)$, $P(s) = Q(s)$,
- ii) soit les deux séquences sont identiques, soit $k = n$ et les deux séquences sont complémentaires.

Preuve

Soient $P = p_0 \dots p_{k-1}$ et $Q = q_0 \dots q_{k-1}$ deux séquences de longueur k , et $s = s_0 s_1 \dots s_{n-1}$ un sommet quelconque de $S(n)$.

Posons $P = p_0 \dots p_{k-1}$, $P(s) = t = t_0 \dots t_{n-1}$, $Q = q_0 \dots q_{k-1}$ et $Q(s) = r = r_0 \dots r_{n-1}$.

C.N. Si $k \leq n - 1$ et $t = r$, alors, pour tout i , $0 \leq i \leq n - 1$, $t_i = r_i$.

Or, de la remarque V.A1, si $i = n - k - 1$, alors $t_i = r_i \Rightarrow p_0 = q_0$,

et si $i \geq n - k$, alors:

$t_i = r_i \Leftrightarrow \{p_{i+k+1} = p_{i+k} \text{ et } q_{i+k+1} = q_{i+k}\} \text{ ou } \{p_{i+k} = \bar{p}_{i+k+1} \text{ et } q_{i+k+1} = \bar{q}_{i+k}\}$.

La seule possibilité est donc donnée par l'égalité de toutes les composantes homologues de P et Q ($p_0 = q_0 \Rightarrow p_1 = q_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow p_{k-1} = q_{k-1}$).

Si $k = n$, la remarque V.A1 montre que p_0 peut être choisi arbitrairement.

C.S. Immédiate. ◇

Propriété V.A4 Le diamètre de $S(n)$ est égal à n .

Preuve

Il existe 2^n séquences distinctes, de longueur n , formées des fonctions f_0 et f_1 .

Donc il en existe 2^{n-1} distinctes et non complémentaires.

Il existe 2^{n-1} séquences distinctes de longueur $n-1$.

Si s est un sommet quelconque de $S(n)$, les séquences distinctes et non complémentaires de longueur n permettent d'atteindre 2^{n-1} sommets différents, de même que le permettent les 2^{n-1} séquences distinctes de longueur $n-1$.

Vu que la parité d'un sommet est différente de celle de ses successeurs, et que $S(n)$ possède 2^n sommets, donc, pour tout sommet t de $S(n)$, il existe une séquence de longueur n ou $n-1$, permettant de l'atteindre à partir du sommet s . \diamond

* * *

CHAPITRE VI

RÉSISTANCE AUX PANNES DES RÉSEAUX BIPARTIS

VI.1 INTRODUCTION

Parmi les propriétés requises pour l'interconnexion des processeurs, la résistance aux pannes est sans doute des plus fondamentales. Une bonne résistance aux pannes (on utilise aussi le terme sûreté) d'un réseau lui permet d'assurer des liaisons entre les processeurs indemnes, en cas de défection d'un certain nombre d'entre eux.

Cette sûreté peut être mesurée, dans le cadre d'une interprétation combinatoire, par la connexité du graphe modélisant un tel réseau.

Comme la presque totalité des graphes proposés pour l'interconnexion des processeurs sont réguliers, nous allons nous intéresser aux conditions suffisantes que peut satisfaire un graphe dans le but d'avoir une connectivité maximum, donc égale au degré. Très récemment, certains auteurs se sont intéressés à ce paramètre, et ont donné certaines bornes, sous forme de seuils, pour le nombre de sommets, à partir desquels la connectivité est maximum [25, 42].

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser essentiellement aux graphes bipartis. Dans un premier temps, nous donnerons des conditions similaires pour qu'un graphe biparti régulier soit de connectivité égale au degré, tous les aspects de la connexité étant pris en considération. Il s'ensuivra une étude partielle de la vulnérabilité du diamètre.

* * *

VI.2 CONNEXITÉ

L'objet principal de ce paragraphe est la démonstration du théorème suivant:

Théorème VI.1 Si $G = (X,E)$ est un (d,D) -graphe biparti, avec $D \geq 3$,
alors $|X| > 2d(d-1)^{D-2} \Rightarrow G$ est de connectivité égale à d .

Preuve

Nous allons d'abord démontrer ce résultat dans les cas où $D \geq 4$ et $d \geq 4$, en utilisant trois lemmes techniques. Les autres cas sont traités à l'issue de cette preuve.

Soit F , un ensemble de sommets de G tel que $|F| \leq d-1$.

Soit $W = \{x \in X / \text{dist}(x,F) \geq D-1\}$.

Lemme VI.1 L'ensemble W n'est pas vide .

Preuve:

Soit $Q = \{x \in X / \text{dist}(x,F) \leq D-2\}$.

$$|Q| \leq |F| d \sum_{i=0}^{D-3} (d-1)^i \leq \frac{d}{d-2} ((d-1)^{D-1} - d + 1) < |X|.$$

Donc, puisque $W = X \setminus Q$, nous avons: $W \neq \emptyset$. ◊

Soit $x_0 \in W$, et soit $S(x_0) = \{y \in X / \text{toute chaîne entre } x_0 \text{ et } y \text{ passe par } F\}$.

Donc, $|S(x_0)| \leq (d-1)|F| \leq (d-1)^2$.

Nous allons considérer un sommet x de G et nous montrerons que, dans tous les cas, il existe une chaîne entre x et x_0 , évitant F .

Lemme VI.2 Si $\text{dist}(x,F) \geq 2$,

alors il existe une chaîne entre x et x_0 , évitant F .

Preuve

Supposons que toute chaîne C de longueur minimale entre les sommets x et x_0 passe par F .

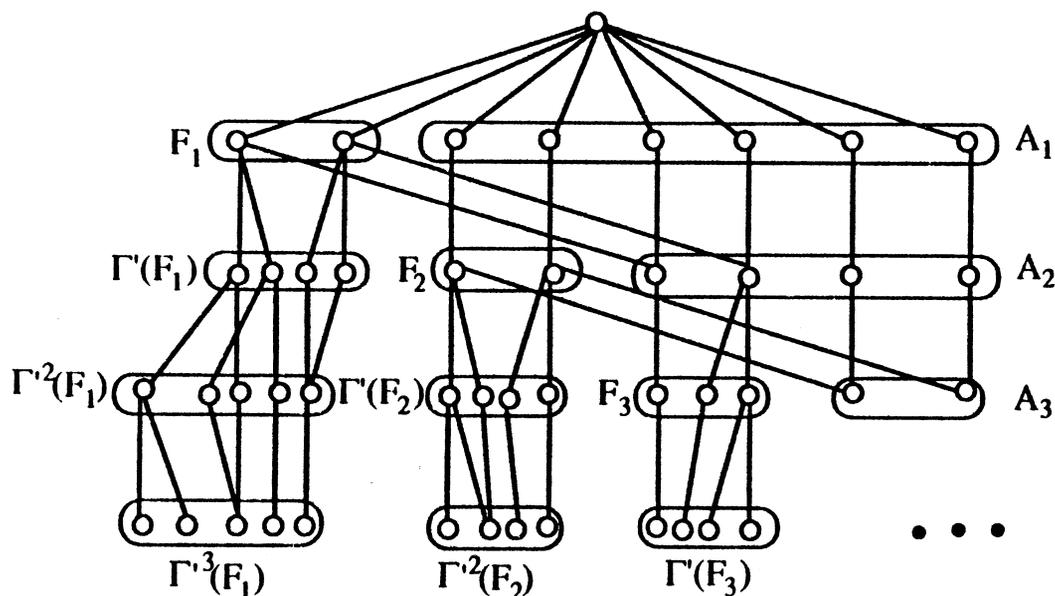
Donc $l(C) \geq \text{dist}(x, F) + \text{dist}(F, x_0) \geq D - 1 + 2 = D + 1$, ce qui est impossible. \diamond

Lemme VI.3 Si $\text{dist}(x, F) = 1$,

alors il existe une chaîne entre x et x_0 , évitant F .

Preuve

Notons par F_i , l'ensemble $F \cap \Gamma^i(x)$, et considérons une mise en couches des sommets de G , à partir de x :



Adoptons les notations suivantes:

$$A_i = \Gamma^i(x) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \Gamma^j(F_{i-j}) \quad \Gamma^0(F_i) = F_i$$

$$\Gamma^j(F_i) = \Gamma^j(F_i) \cap \Gamma^{i+j}(x).$$

En fait, A_i désigne l'ensemble des sommets à distance i de x , pour lesquels toute chaîne de longueur i les reliant à x , évite l'ensemble F .

Par exemple: $A_1 = \Gamma(x) \setminus F_1$ et $A_2 = \Gamma^2(x) \setminus \{F_2 \cup \Gamma(F_1)\}$.

Remarque VI.1

a)- S'il existe un sommet y dans A_i tel que $\Gamma(y) \cap F_{i+1} = \emptyset$, alors un tel sommet serait à distance au moins 2 de F , puisque le graphe G est biparti, et le lemme VI.2 permet de construire une chaîne entre y et x_0 évitant F . Comme, par définition de A_i , il existe une chaîne entre x et y qui évite F , nous aurons une chaîne entre les sommets x et x_0 .

Donc, nous pouvons supposer que $|A_{i+1}| \leq (d-2)|A_i|$.

b)- $|\Gamma'(F_i)| \leq d|F_i| - |A_{i-1}|$.

En effet, de la remarque a), tout sommet de A_{i-1} possède au moins un voisin dans F_i .

c)- Le graphe $G = (X, E)$ considéré étant d -régulier et biparti, avec $X = X_1 \cup X_2$, donc il est équilibré.

Par conséquent, $|X| = 2|X_1| = 2|X_2|$, et, par hypothèse du théorème, $|X_1| = |X_2| > d(d-1)^{D-2}$.

d)- $F_1 \neq \emptyset$ et $F_2 \neq \emptyset$.

Le fait que F_1 ne soit pas vide provient de l'hypothèse, $\text{dist}(x, F) = 1$, du lemme.

Supposons que $F_2 = \emptyset$.

Alors (remarque a), $A_1 = \emptyset$. D'où, $|F_1| = \emptyset$, ce qui est impossible, par hypothèse. \diamond

Cas $F_4 \neq \emptyset$

Estimons $|\Gamma^4(x)|$:

$$\Gamma^4(x) = \Gamma^3(F_1) \cup \Gamma^2(F_2) \cup \Gamma'(F_3) \cup F_4 \cup A_4.$$

$$\text{Donc, } |\Gamma^4(x)| \leq |\Gamma^3(F_1)| + |\Gamma^2(F_2)| + |\Gamma'(F_3)| + |F_4| + |A_4|,$$

$$\leq (d-1)^3 |F_1| + (d|F_2| - |A_1|)(d-1) + d|F_3| - |A_2| + |F_4| + |A_4|.$$

Comme, $|F_1| + |F_2| + |F_3| + |F_4| \leq d-1$,

et $|A_1| = d - |F_1|$,

$$|A_2| \leq (d-2)(d - |F_1|) \quad \text{et} \quad |A_4| \leq (d-2)^2 |A_2|.$$

Donc, $|A_4| - |A_2| \leq (d-2)^2 |A_2| - |A_2| = ((d-2)^2 - 1) |A_2| \leq (d-3)(d-1)(d-2)(d-|F_1|)$.

Et, par suite,

$$\begin{aligned} |\Gamma^4(x)| &\leq (d-1)^3 |F_1| + (d|F_2| - d + |F_1|)(d-1) + d|F_3| + |F_4| + (d-3)(d-2)(d-1)(d-|F_1|) \\ &\leq d(d-1)(d-2)(d-3) + (d-1)(3d-4)|F_1| + d(d-1)(|F_2|-1) + d|F_3| + |F_4|. \end{aligned}$$

Comme, $|F_1| \geq 1$, $|F_2| \geq 1$, $|F_4| \geq 1$ et $|F_1| + |F_2| + |F_3| + |F_4| \leq d-1$, ce dernier terme atteint son maximum lorsque:

$$|F_1| = d-3, |F_2| = 1, |F_3| = 0 \quad \text{et} \quad |F_4| = 1,$$

auquel cas, il vaut:

$$d(d-1)(d-2)(d-3) + (d-1)(3d-4)(d-3) + 1.$$

Donc, $|\Gamma^4(x)| \leq d^4 - 3d^3 - 5d^2 + 19d - 1$.

Si $D=2p+1$, évaluons le cardinal du stable X_1 , du graphe G , qui contient le sommet x :

$$|X_1| \leq 1 + |\Gamma^2(x)| + |\Gamma^4(x)| \sum_{i=0}^{p-2} (d-1)^{2i}$$

$$|\Gamma^2(x)| \leq |F_1|(d-1) + |F_2| + |A_2| \leq |F_1|(d-1) + |F_2| + (d - |F_1|)(d-2).$$

Donc,

$$|\Gamma^2(x)| \leq |F_1| + |F_2| + d(d-2) \leq d^2 - d - 2.$$

D'où,

$$|X_1| \leq d^2 - d - 1 + |\Gamma^4(x)| \frac{(d-1)^{D-3} - 1}{d(d-2)}$$

Et par suite,

$$|X_1| \leq \frac{6d^2 - 17d + 1}{d(d-2)} + \frac{d^4 - 3d^3 - 5d^2 + 19d - 1}{d(d-2)} (d-1)^{D-3}.$$

Un calcul assez simple de cette dernière expression montre qu'elle est toujours (sous les hypothèses du théorème) inférieure à $d(d-1)^{D-2}$.

Si $D = 2p$, évaluons le cardinal du stable X_2 du graphe G , ne contenant pas le sommet x .

Si $D > 4$, nous avons:

$$|X_2| \leq d + |\Gamma^3(x)| + |\Gamma^4(x)| (d-1) \sum_{i=0}^{p-3} (d-1)^{2i}$$

$$\begin{aligned} |\Gamma^3(x)| &\leq |\Gamma^2(F_1)| + |\Gamma^2(F_2)| + |F_3| + |A_3| \leq (d-1)^2 |F_1| + d |F_2| - |A_1| + |F_3| + |A_3| \\ &\leq (d-1)^2 |F_1| + d |F_2| + |F_3| + (d-|F_1|)((d-2)^2 - 1) \\ &\leq d(d-1)(d-3) + (2d-3)|F_1| + d|F_2| + |F_3|. \end{aligned}$$

Cette dernière expression atteint son maximum lorsque:

$|F_1| = d-3$, $|F_2| = 1$ et $|F_3| = 0$, auquel cas, la borne supérieure est de:

$$|\Gamma^3(x)| \leq d^3 - 4d^2 + 3d + 2d^2 - 9d + 9 + d = d^3 - 2d^2 - 5d + 9,$$

et par conséquent,

$$|X_2| \leq \frac{2d^3 - 7d^2 + 2d - 1}{d(d-2)} + \frac{d^5 - 4d^4 - 2d^3 + 24d^2 - 20d + 1}{d(d-2)} (d-1)^{D-4}.$$

Un calcul direct de cette expression, et moyennant une étude fonctionnelle assez simple, conduit au fait que $|X_2| < d(d-1)^{D-2}$.

Si $D = 4$,

$$\text{alors } |X_2| \leq d + |\Gamma^3(x)| \leq d + d^3 - 2d^2 - 5d + 9 < d^3 - 2d^2 + d = d(d-1)^2.$$

Cas $F_4 = \emptyset$

Donc, $A_3 = \emptyset$

$$\begin{aligned} |\Gamma^3(x)| &\leq |\Gamma^2(F_1)| + |\Gamma^2(F_2)| + |F_3| \leq (d-1)^2 |F_1| + d |F_2| - |A_1| + |F_3| \\ &\leq d(d-2)|F_1| + d|F_2| + d + |F_3|. \end{aligned}$$

Cette dernière expression atteint son maximum lorsque:

$$|F_1| = d-1, |F_2| = 0 \text{ et } |F_3| = 0.$$

Dans ce cas, elle vaut: $d(d-2)(d-1) + d = d(d^2 - 3d + 3)$.

Si $D=2p+1$, évaluons le cardinal du stable X_1 .

$$|X_1| \leq 1 + |\Gamma^2(x)| + |\Gamma^3(x)| (d-1) \sum_{i=0}^{p-2} (d-1)^{2i}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^2(x) &\leq |F_1|(d-1) + |F_2| + |A_2| \leq |F_1|(d-1) + |F_2| + (d-|F_1|)(d-2) \leq |F_1| + |F_2| + d(d-2) \\ &\leq d - 1 + d^2 - 2d = d^2 - d - 1, \end{aligned}$$

maximum atteint avec $|F_1| = d-1$ et $|F_2| = 0$, valeurs pour lesquelles nous avons:

$$|X_1| \leq d^2 - d + \frac{(d^2 - 3d + 3)(d-1)}{d-2} ((d-1)^{D-3} - 1) \leq \frac{d^2 - 3d + 3}{d-2} (d-1)^{D-2} + \frac{d^2 - 4d + 3}{d-2}$$

dont le dernier terme est strictement majoré par $d(d-1)^{D-2}$.

Si $D=2p$, évaluons le cardinal du stable X_2 .

$$|X_2| \leq |\Gamma(x)| + |\Gamma^3(x)| \sum_{i=0}^{p-2} (d-1)^{2i} \leq d + \frac{d^2 - 3d + 3}{d-2} ((d-1)^{D-2} - 1)$$

Donc,

$$|X_2| \leq \frac{d-3}{d-2} + \frac{d^2 - 3d + 3}{d-2} (d-1)^{D-2} < d(d-1)^{D-2}$$

ce qui contredit l'hypothèse de départ. \diamond

Pour clore ce paragraphe, notons les quelques remarques suivantes.

Remarque VI.2

a) Dans chacun des cas que nous venons d'examiner, nous aboutissons soit au fait qu'un certain sommet de GNF , relié au sommet x par une chaîne évitant F , est relié au sommet x_0 par une chaîne évitant F , soit que le cardinal de l'un des stables de G viole l'hypothèse du théorème. Ceci nous permet de conclure que l'énoncé du théorème est toujours vérifié, lorsque $d \geq 4$ et $D \geq 4$.

b) Lorsque $D=3$, la borne de Moore donne $|X| \leq 2d(d-1)$.

Comme l'hypothèse du théorème suppose que $|X| > 2d(d-1)$, nous pouvons convenir que le résultat est valable.

c) Dans le cas des graphes cubiques, la borne donnée pour les graphes quelconques est inférieure à celle que nous donnons. Donc, le résultat en découle.

d) La condition de régularité n'est pas nécessaire. Le résultat du théorème concerne, en effet tous les graphes bipartis équilibrés, avec le seul fait de remplacer la valeur d par le degré maximum d'un tel graphe. Ainsi, nous obtenons des graphes de connectivité maximum, égale au degré minimum. \diamond

* * *

VI.3 ARÊTE-CONNEXITÉ

L'objet de ce paragraphe est la démonstration du théorème suivant:

Théorème VI.2 Soit $G=(X,E)$, un graphe biparti, d -régulier, de diamètre D ,
 $D \geq 5$.

Si $|X| > 2((d-1)^{D-2} + d^2 - d)$ alors G est d'arête-connectivité d ,

qui constitue une version, pour les graphes bipartis, du résultat suivant, établi dans [50]:

Soit $G = (X,E)$ un graphe d -régulier, de diamètre $D \geq 3$.

Si $|X| > (d-1) \left(\frac{(d-1)^{D-1} + d - 3}{d-2} \right) + d - 1$, alors G est d'arête-connectivité égale à d .

Preuve du théorème VI.2

Soit $E_0 \subset E$ tel que $|E_0| \leq d-1$.

Convenons que si $e = ab$ est une arête de G et $x \in X$,

alors $\text{dist}(x,e) = \text{Min}\{\text{dist}(x,a), \text{dist}(x,b)\}$.

Soit $W = \{x \in X / \text{dist}(x, E_0) \geq D-3\}$.

Lemme VI.4 L'ensemble W n'est pas vide.

Preuve

Soit $Q = \{x \in X / \text{dist}(x, E_0) \leq D-4\}$.

$$|Q| \leq 2|E_0|(d-1) \sum_{i=0}^{D-5} (d-1)^i \leq 2(d-1)^2 \frac{(d-1)^{D-4}-1}{d-2} \leq \frac{2}{d-2} ((d-1)^{D-2} - (d-1)^2) < |X|.$$

Donc, puisque $W = X \setminus Q$, l'ensemble W n'est pas vide. \diamond

Soit $x_0 \in W$.

Posons $S(x_0) = \{y \in X / \text{toute chaîne minimum entre } x_0 \text{ et } y \text{ passe par } E_0\}$.

Donc, $|S(x_0)| \leq 2(d-1)|E_0| \leq 2(d-1)^2$.

Lemme VI.5 Si $\text{dist}(x, E_0) \geq 2$,

alors il existe une chaîne entre x et x_0 , qui évite E_0 .

Preuve

Soit $S(x) = \{y \in X / \text{toute chaîne minimum entre } x \text{ et } y \text{ passe par } E_0\}$.

$$|S(x)| \leq |E_0| \sum_{i=0}^{D-3} (d-1)^i \leq \frac{(d-1)^{D-1} - d + 1}{d-2}$$

Donc, $|S(x) \cup S(x_0)| \leq \frac{(d-1)^{D-1} - d + 1}{d-2} + 2(d-1)^2 < |X|$.

Soit z un sommet de $X \setminus \{S(x) \cup S(x_0)\}$.

Par définition de $S(x)$ et de $S(x_0)$, il existe une chaîne entre x et z , et une chaîne entre z et x_0 , qui évitent E_0 . \diamond

Lemme VI.6 Si $\text{dist}(x, E_0) = 1$,

alors il existe une chaîne entre x et x_0 , évitant E_0 .

Preuve

Pour démontrer ce lemme, nous allons utiliser la caractérisation suivante des graphes bipartis, dont la preuve est immédiate:

Proposition VI.1 Soit $G = (X, E)$ un graphe.

Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes:

i) G est biparti.

ii) Pour tout sommet x , toute arête de G est contenue, dans une mise en couches à partir de x , dans au moins une chaîne minimum issue de x . \diamond

Soit $F = \{a \in X / \exists e = ab \in E_0, \text{dist}(x, a) < \text{dist}(x, b)\}$,
et soit $F' = \{b \in X / \exists e = ab \in E_0, \text{dist}(x, a) < \text{dist}(x, b)\}$.

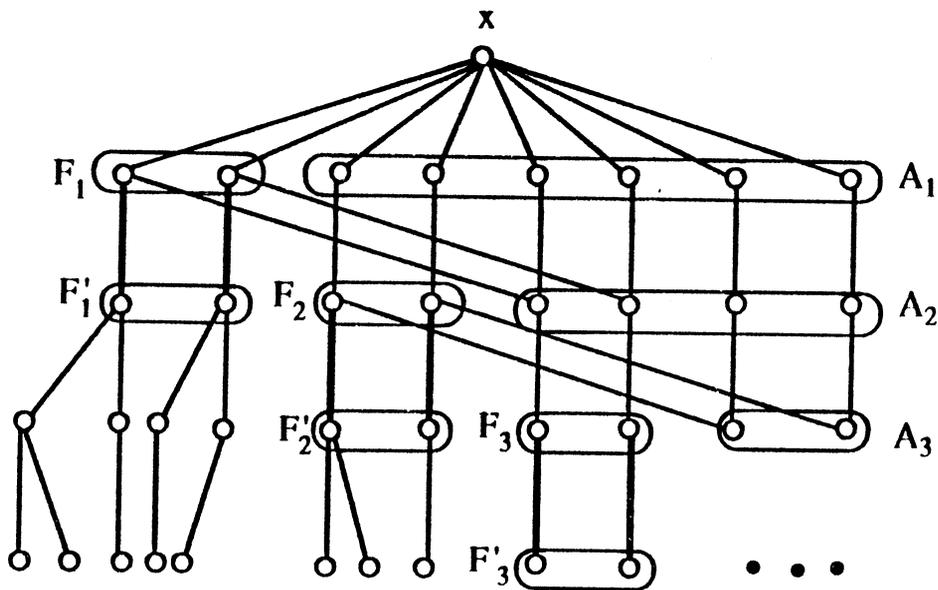
Considérons une mise en couches des sommets de G , à partir de x , et adoptons les notations suivantes:

$$F_i = F \cap \Gamma^i(x)$$

$$|F_i| = f_i$$

$$F'_i = F' \cap \Gamma^{i+1}(x)$$

$$|F'_i| = f'_i$$



Posons:

$$A_i = \Gamma^i(x) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \Gamma^{j-1}(F'_{i-j}), \text{ avec } \Gamma^{-1}(F_i) = F_i \text{ et } |A_i| = a_i.$$

En fait, l'ensemble A_i est constitué des sommets de G , à distance i de x , qui sont reliés à x par au moins une chaîne évitant E_0 .

Donc, par exemple, nous avons:

$$\gamma_1 = f_1 + a_1 = d \quad \text{et} \quad \gamma_2 \leq f'_1 + f_2 + a_2.$$

Notons d'abord que si $y \in A_i$, alors y possède au moins un voisin dans $\{F'_{i-2} \cup F_{i-1} \cup F'_i \cup F_{i+1}\}$.

Effectivement, les autres ensembles F_i et F'_i sont tous à une distance supérieure ou égale à deux de y .

$$\text{Donc, } \gamma_2 \leq f_1 + f_2 + (d-2)f_1 + (d-1)(f_2 + f_3) \leq (d-1)d - 1 = d^2 - d - 1.$$

$$\text{Si } f_4 = 0, \text{ alors } \gamma_3 \leq d(f_1 + f_2) - d + f_3 + (d-1)f_3 \leq d(d-2)$$

$$\text{Si } f_4 \neq 0, \text{ alors } \gamma_3 \leq d(f_1 + f_2) - d + f_3 + (d-1)(f_3 + f_4) \leq d^2 - 2d - 1.$$

Donc, dans chacun des cas, $\gamma_3 \leq d(d-2)$.

Si $D = 2p + 1$, évaluons le cardinal du stable X_1 contenant x .

$$\begin{aligned} |X_1| &\leq 1 + \gamma_2 + \gamma_3(d-1) \sum_{i=0}^{p-2} (d-1)^{2i} \leq 1 + d^2 - d - 1 + d(d-2)(d-1) \frac{(d-1)^{D-3} - 1}{d(d-2)} \\ &\leq (d-1)^{D-2} + d^2 - d. \end{aligned}$$

Si $D = 2p$, évaluons le cardinal du stable X_2 qui ne contient pas x .

$$|X_2| \leq \gamma + \gamma_3 \sum_{i=0}^{p-2} (d-1)^{2i} \leq d + d(d-2) \frac{(d-1)^{D-2} - 1}{d(d-2)} \leq (d-1)^{D-2} + d - 1$$

et le lemme se trouve ainsi démontré. \diamond

Lemme VI.7 Si $\text{dist}(x, E_0) = 0$,

alors il existe une chaîne entre x et x_0 , qui évite E_0 .

Preuve

Dans ce cas, x possède forcément un voisin à distance au moins un de E_0 .

En effet, $|E_0| \leq d - 1$ et G étant biparti et d -régulier, donc x est relié à au plus un sommet par arête. \diamond

Le théorème se trouve ainsi totalement démontré. ◇

* * *

VI.4 CONNEXITÉ FORTE

Dans le cas général, il a été établi, dans [50], que:

Si $G = (X, E)$ est un (d, D) -graphe orienté,
alors $|X| > d^D + d^2 - d - 1 \Rightarrow G$ est de connectivité forte égale à d .

Pour les graphes bipartis, nous allons montrer :

Théorème VI.3 Si $G = (X, E)$ est un (d, D) -graphe biparti orienté
alors, $|X| > 2(d^{D-1} - 1) \Rightarrow G$ est de connectivité forte d .

Preuve

Soit $G = (X, E)$ un (d, D) -graphe biparti orienté, avec $|X| > 2(d^{D-1} - 1)$.

Soit F un ensemble de sommets, de cardinal au plus $d-1$.

Notons par $W = \{y, y \in X / \text{dist}(y, F) \geq D-1 \text{ et } \text{dist}(F, y) \geq D-1\}$.

Lemme VI.8 L'ensemble W est non vide.

Preuve

Soit $Q = \{y, y \in X / \text{dist}(y, F) \leq D-2 \text{ ou } \text{dist}(F, y) \leq D-2\}$.

$$|Q| \leq 2|F| \sum_{i=0}^{D-2} d^i \leq 2(d-1) \frac{d^{D-1} - 1}{d-1} = 2(d^{D-1} - 1) < |X|.$$

Donc, puisque $W = X \setminus Q$, $W \neq \emptyset$. ◇

Soit z un sommet de W .

Lemme VI.9 Pour tout sommet x de $X \setminus F$, il existe un chemin de x à z , évitant F .

Preuve

Soit x un sommet de $X \setminus F$; donc $\text{dist}(x, F) \geq 1$.

Supposons que tout chemin de x à z passe par F .

Donc, $\text{dist}(x, z) \geq \text{dist}(x, F) + \text{dist}(F, z) \geq 1 + D - 1 = D$.

Par conséquent, puisque le diamètre de G est égal à D , $\text{dist}(x, z) = D$.

Comme, $|F| \leq d - 1$, x possède un successeur x' , tel que $\text{dist}(x', F) \geq 1$.

Le graphe G étant biparti, donc, les sommets x et x' n'étant pas dans le même stable, $\text{dist}(x', z) \leq D - 1$. Un chemin minimum du sommet x' au sommet z évite nécessairement l'ensemble F (sinon, nous mettrions en évidence un chemin de longueur au plus $D - 2$, entre un sommet de F et le sommet z , ce qui contredirait le choix de z). Par conséquent, il existe un chemin du sommet x au sommet z , évitant l'ensemble F . ◇

La preuve de la proposition est donc achevée. ◇

Nous verrons en annexe de ce chapitre, une autre démonstration de ce théorème, utilisant un argument sur les sous-graphes exclus, et donnant une borne légèrement plus faible.

* * *

VI.5 ARC-CONNEXITÉ DES GRAPHES BIPARTIS

Tout comme les trois paragraphes précédents, nous allons adapter un seuil pour le nombre de sommets que peut avoir un graphe biparti afin d'être d'arc-connectivité maximum.

Pour les graphes quelconques, il a été prouvé, [50], que:

Si $G = (X, E)$ est un graphe orienté, d -régulier, de diamètre D ,
alors $|X| > d^{D-1} + d^2 - 2 \Rightarrow G$ est d'arc-connectivité égale à d .

Si nous rajoutons la contrainte de bipartisme, nous obtenons:

Théorème VI.4 Si $G = (X, E)$ est un graphe biparti orienté, d -régulier et de diamètre D , $D \geq 5$,

alors, $|X| > 2d^{D-2} \Rightarrow G$ est d'arc-connectivité égale à d .

Preuve

Soit E_0 un ensemble d'arcs de G , de cardinal au plus égal à $d-1$.

Soient $F = \{x \in X / \exists y \in X, (x, y) \in E_0\}$ et $F' = \{y \in X / \exists x \in X, (x, y) \in E_0\}$.

Donc, $|F| \leq |E_0|$ et $|F'| \leq |E_0|$.

Posons $W = \{x \in X / \text{dist}(x, F) \geq D-2 \text{ et } \text{dist}(F', x) \geq D-2\}$.

Lemme VI.10 L'ensemble W n'est pas vide.

Preuve

Soit $Q = \{x \in X / \text{dist}(x, F) \leq D-3 \text{ ou } \text{dist}(F', x) \leq D-3\}$.

$$|Q| \leq |E_0| \left(\sum_{i=0}^{D-3} d^i + \sum_{i=0}^{D-3} d^i \right) \leq 2(d-1) \left(\frac{d^{D-2}-1}{d-1} \right) < 2d^{D-2} < |X|.$$

Donc, puisque $W = X \setminus Q$, $|W| \neq 0$. ◊

Soit $x_0 \in W$. Considérons l'ensemble suivant:

$P(x_0) = \{y \in X / \text{il n'existe pas de chemin minimum de } y \text{ à } x_0 \text{ évitant } E_0\}$, dont le cardinal vérifie: $|P(x_0)| \leq |F'| (d+1) \leq d^2 - 1$.

Soit $x \in X$, un sommet quelconque du graphe G .

Lemme VI.11 Si $\text{dist}(x, F) \geq 2$,

alors, il existe un chemin de x à x_0 évitant E_0 .

Preuve

Supposons que tout chemin minimum C de x à x_0 passe par F .

Donc $l(C) \geq \text{dist}(x, F) + \text{dist}(F, F') + \text{dist}(F', x_0) \geq 2 + 1 + D - 2 = D + 1$, ce qui est impossible. \diamond

Lemme VI.12 Si $\text{dist}(x, F) = 1$,

alors il existe un chemin de x à x_0 évitant E_0 .

Preuve

Adoptons les notations suivantes:

$$F_i = F \cap \Gamma^{+i}(x)$$

$$|F_i| = f_i$$

$$F'_i = F' \cap \Gamma^{+(i+1)}(x) \quad |F'_i| = f'_i$$

Pour $i \geq 1$, définissons l'ensemble A_i de la manière suivante:

$A_i = \{y, y \in \Gamma^{+i}(x) / \text{il existe un chemin minimum de } x \text{ à } y, \text{ évitant } E_0\}$,

et posons $|A_i| = a_i$.

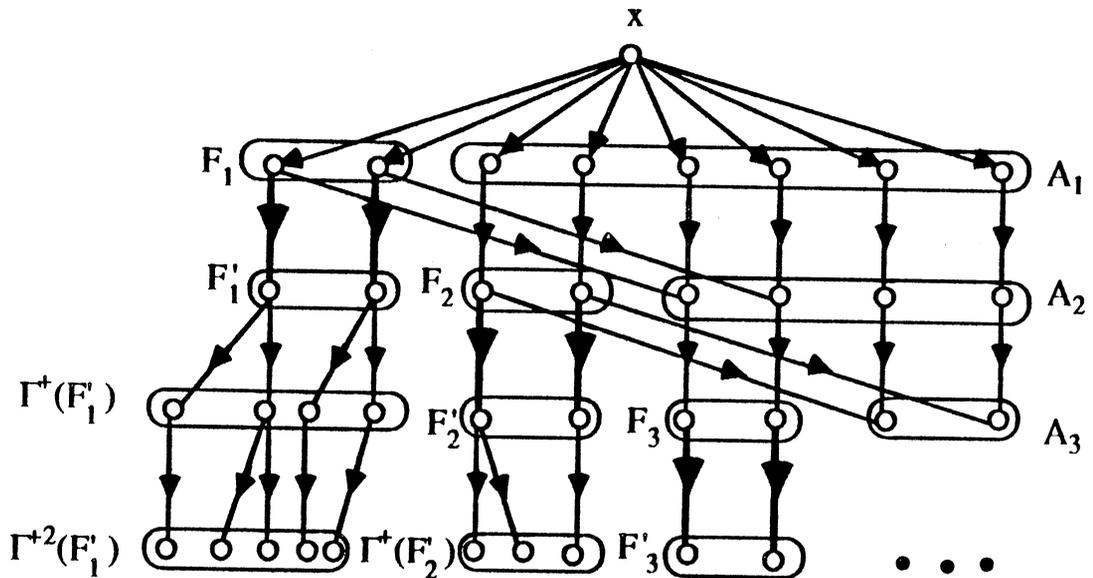
En fait, $A_i = \Gamma^{+i}(x) \setminus \bigcup_{j=0}^{i-1} \Gamma^{+(j+1)}(F'_{i-j})$, avec, par convention, $\Gamma^{+(-1)}(F'_i) = F_i$.

Donc, par exemple, nous avons:

$$\gamma_1 = f_1 + a_1 = d,$$

$$\gamma_2 \leq f_1 + f_2 + a_2,$$

$$\gamma_3 \leq df_1 + f_2 + f_3 + a_3.$$



Si $F_2 = F_3 = \dots = F_i = \dots = \emptyset$,

alors le résultat découle du fait que dans ce cas $F = F_1$, et donc, x posséderait un successeur y dans $\Gamma^+(x) \setminus F$ tel que $\text{dist}(y, F) \geq 2$.

D'après le lemme VI.11, il existerait donc un chemin de y à x_0 et par suite, de x à y , évitant E_0 .

Notons d'abord les remarques suivantes:

Remarque VI.2

a)- Dans la preuve, nous ne prenons en considération que les arcs de E_0 appartenant à des plus courts chemins issus de x .

b)- Si $y \in A_i$, alors y possède un successeur dans $F_{i+1} \cup F_{i-1}$.

Effectivement, pour que la distance de y à F soit inférieure ou égale à un, la seule possibilité est que y ait un successeur dans $F_{i+1} \cup F_{i-1}$, les autres ensembles F_j lui étant à une distance supérieure ou égale à deux, et y ne pouvant être relié à un sommet de F_i , puisque chaque couche $\Gamma^{+j}(x)$ est un stable (G étant biparti). \diamond

De la remarque VI.2 b) ci-dessus, nous pouvons déduire que $F_2 \neq \emptyset$, puisque $A_1 \neq \emptyset$ et qu'un sommet de A_1 doit avoir un successeur dans F_2 .

De plus, $a_i \leq d(f_{i-1} + f_{i+1})$,

et par conséquent, $\gamma_3 \leq df'_1 + f'_2 + f_3 + d(f_2 + f_4) \leq d(f'_1 + f_2 + f_4) + f'_2 + f_3$
 $\leq d(d-1) + d - 2 = d^2 - 2$,

ce qui est dû au fait que: $f'_1 + f_2 + f_4 \leq |F| \leq d-1$,

et que $f'_2 + f_3 \leq |F| - 1$ (car $f_1 \geq 1$ et $f'_1 \geq 1$).

En outre, $\gamma_4 \leq d^2f'_1 + df'_2 + f'_3 + f_4 + a_4 \leq d^2f'_1 + df'_2 + f'_3 + f_4 + d(f_3 + f_5)$.

Cette dernière expression atteint son maximum lorsque:

$f_1 = d-2$, $f'_2 = 1$ (car $F_2 \neq \emptyset$), et $f'_3 = f_3 = f_4 = f_5 = 0$,

auquel cas, nous aurons, $\gamma_4 \leq d^2(d-2) + d = d^3 - 2d^2 + d = d(d-1)^2$.

Si $D=2p+1$, évaluons le cardinal du stable X_2 .

$$\begin{aligned} |X_2| &\leq 1 + \gamma_2 + \gamma_4 \sum_{i=0}^{p-2} d^{2i} \leq 1 + (d^2 - 3d + 2) + d(d-1)^2 \frac{d^{D-3}-1}{d^2-1} \\ &\leq d^{D-2} - \frac{d^3 - 3d^2 - d + 3}{d+1} < d^{D-2} \end{aligned}$$

Si $D=2p$, évaluons le cardinal du stable X_1 .

$$\begin{aligned} |X_1| &\leq \gamma + \gamma_3 + d\gamma_4 \sum_{i=0}^{p-3} d^{2i} \leq d + (d^2 - 2) + d^2(d-1)^2 \frac{d^{D-4}-1}{d^2-1} \\ &\leq d^{D-2} - \frac{2d^4 - 3d^3 + d + 2}{d+1} < d^{D-2} \end{aligned}$$

Donc, chacun des cas aboutissant à une contradiction, la démonstration du lemme se trouve ainsi achevée. \diamond

Lemme VI.13 Si $\text{dist}(x, F) = 0$,

alors il existe un chemin de x à x_0 évitant E_0 .

Preuve

Dans ce cas, x_0 possède obligatoirement un successeur y , tel que $\text{dist}(x, F) \geq 1$.
Le résultat découle alors des lemmes VI.13 ou 14. \diamond

Lemme VI.11' Si $\text{dist}(F', x) \geq 2$,

alors il existe un chemin de x_0 à x évitant E_0 .

Preuve

Identique à celle du lemme VI.11 . \diamond

Lemme VI.12' Si $\text{dist}(F', x) = 1$,

alors il existe un chemin de x_0 à x évitant E_0 .

Preuve

Identique à celle du lemme VI.12. \diamond

Lemme VI.13' Si $\text{dist}(F', x) = 0$,

alors il existe un chemin de x_0 à x , qui évite E_0 .

Preuve

Identique à celle du lemme VI.13. \diamond

Remarque VI.3

Les cas traités dans les lemmes VI.12, 13, 13', 14, 14', 15 et 15' étant exhaustifs, la preuve du théorème VI.4 est donc complètement achevée. \diamond

* * *

VI.6 VULNÉRABILITÉ DES RÉSEAUX BIPARTIS

La seconde qualité requise pour la résistance aux pannes d'un réseau d'interconnexion est la vulnérabilité du diamètre. Dans ce cadre, le (d,D,D',s) -problème est sans doute des plus étudiés. Il consiste en la construction de (d,D,D',s) -graphes (ceux de degré maximum d et de diamètre D , et dont le diamètre, après destruction de s sommets, ne dépasse pas D') ayant le plus possible de sommets. Certains résultats se trouvent dans [13] et [17].

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser aux graphes bipartis non orientés et à l'évolution de leur diamètre en fonction du nombre de sommets détruits.

Proposition VI.1 Soit $G=(X,E)$ un $(d,D,D',1)$ -graphe biparti équilibré, où $X=X_1 \cup X_2$, tel qu'il existe un sommet z pour lequel $\text{Diam}(G \setminus \{z\})=D'$.

$$\text{Alors: } |X| > 2 \frac{(d-1)^{D-1} - 1}{d-2} \Rightarrow D' \leq 2D.$$

Preuve

Supposons que $z \in X_1$.

$$\text{Donc, } X_1 = \bigcup_{i=0}^{\lfloor \frac{D}{2} \rfloor} \Gamma^{2i}(z), \text{ et } X_2 = \bigcup_{i=0}^{\lfloor \frac{D}{2} \rfloor} \Gamma^{2i+1}(z).$$

Si $D' \geq 2D+1$, soient x et y deux sommets de $G'=G \setminus \{z\}$, tels que $\text{dist}_{G'}(x,y)=D'$, et soit v un sommet quelconque de G' .

Donc, soit $\text{dist}_{G'}(x,v) \geq D+1$, soit $\text{dist}_{G'}(y,v) \geq D+1$.

Dans le premier cas, toute plus courte chaîne, dans G , entre les sommets x et v contient obligatoirement le sommet z .

Par conséquent:

$$\text{dist}_G(z,v) < \text{dist}_G(v,x) \leq D, \text{ et par suite, } \text{dist}_G(v,z) \leq D-1.$$

Si $D=2p+1$, évaluons le cardinal du stable X_2 de G , ne contenant pas le sommet z :

$$|X_2| \leq \sum_{i=0}^{p-1} |\Gamma^{2i+1}(z)| \leq d \sum_{i=0}^{p-1} (d-1)^{2i} = \frac{(d-1)^{D-1} - 1}{d-2}$$

Si $D=2p$, évaluons le cardinal du stable X_1 de G , contenant le sommet z :

$$|X_1| \leq \sum_{i=0}^{p-1} |\Gamma^{2i}(z)| \leq d(d-1) \sum_{i=0}^{p-2} (d-1)^{2i} = \frac{(d-1)^{D-1} - d + 1}{d-2}.$$

Donc, dans chacun des cas nous aboutissons à une contradiction. \diamond

Proposition VI.2 Soit $G = (X, E)$ un (d, D, D, s) -graphe biparti, avec $D \geq 3$.

$$\text{Alors, } |X| \leq \left(\frac{d}{d-2} + \frac{d-1}{s+1} + \frac{d}{(s+1)^2} \right) (d-1)^{D-2} + \frac{d}{d-2}.$$

Preuve

Soit F un ensemble de sommets de G , de cardinal s , et soit z un sommet de $G' = G \setminus F$.

Si $i \leq D-2$, alors $|\Gamma^i(z)| \leq d(d-1)^{i-1}$.

Estimons à présent $|\Gamma^{D-1}(z)|$ et $|\Gamma^D(z)|$.

Soit $x \in \Gamma^j(z)$, $j = D-1$ ou D . Alors x possède au moins $(s+1)$ voisins dans $\Gamma^{j-1}(z)$.

En effet, autrement, la suppression des voisins de x contenus dans $\Gamma^{j-1}(z)$ conduirait au fait que la distance entre les sommets z et x devienne supérieure strictement à D .

Donc, d'une part, le nombre d'arêtes entre $\Gamma^{D-2}(z)$ et $\Gamma^{D-1}(z)$ est au plus de $(d-1)|\Gamma^{D-2}(z)|$, et au moins de $(s+1)|\Gamma^{D-1}(z)|$.

Par conséquent, $|\Gamma^{D-1}(z)| \leq \frac{d-1}{s+1} |\Gamma^{D-2}(z)|$.

D'autre part, le nombre d'arêtes entre $\Gamma^{D-1}(z)$ et $\Gamma^D(z)$ est au plus de $(d-s-1)|\Gamma^{D-1}(z)|$, et au moins de $(s+1)|\Gamma^D(z)|$.

Par conséquent, $|\Gamma^D(z)| \leq \frac{d-s-1}{s+1} |\Gamma^{D-1}(z)|$.

Evaluons à présent le nombre de sommets de G:

$$|X| \leq \sum_{i=0}^D |\Gamma^i(z)| \leq d \sum_{i=0}^{D-3} (d-1)^i + \frac{d}{s+1} (d-1)^{D-2} + \frac{d-s-1}{(s+1)^2} (d-1)^{D-2}.$$

Un calcul simple de cette dernière expression permet alors d'aboutir au résultat énoncé. \diamond

Proposition VI.3 Soit $G = (X, E)$ un (d, D, D', s) -graphe biparti, équilibré, de diamètre $D \geq 3$,

$$\text{si } D \text{ est impair, alors } |X| \leq 2 \left(\frac{1}{d-2} + \frac{d}{s+1} \right) (d-1)^{D-2} - 2 \frac{d-1}{d-2},$$

$$\text{si } D \text{ est pair, alors } |X| \leq 2 \left(\frac{1}{d-2} + \frac{d}{s+1} \right) (d-1)^{D-2} - \frac{2}{d-2}.$$

Preuve

Nous allons utiliser les résultats obtenus au cours de la démonstration de la proposition VI.2, mais, au lieu d'estimer directement le nombre de sommets du graphe G, nous le ferons en passant d'abord par l'évaluation des cardinaux de l'un des stables, et nous utiliserons le fait que G soit équilibré.

Si $D=2p+1$, alors évaluons le cardinal du stable X_1 , contenant le sommet z:

$$|X_1| \leq \sum_{i=0}^{p-1} |\Gamma^{2i}(z)| \leq d(d-1) \sum_{i=0}^{p-2} (d-1)^{2i} + \frac{d}{s+1} (d-1)^{D-2} = \left(\frac{1}{d-2} + \frac{d}{s+1} \right) (d-1)^{D-2} - \frac{d-1}{d-2}.$$

Si $D=2p$, alors évaluons le cardinal du stable X_2 , ne contenant pas le sommet z:

$$|X_2| \leq \sum_{i=0}^{p-1} |\Gamma^{2i+1}(z)| \leq d \sum_{i=0}^{p-2} (d-1)^{2i} + \frac{d}{s+1} (d-1)^{D-2} = \left(\frac{1}{d-2} + \frac{d}{s+1} \right) (d-1)^{D-2} - \frac{1}{d-2}.$$

En tenant compte de l'hypothèse supposant que le graphe G soit équilibré, la preuve se trouve achevée. \diamond

VI.A Annexe

Dans cette annexe, nous donnons une démonstration d'un théorème légèrement plus faible que le théorème VI.3, mais dont la démonstration utilise une autre technique.

Théorème VI.A1 Si $G=(X,E)$ est un graphe biparti orienté, d -régulier et de diamètre D ,
alors, $|X| > 2 d^{D-1} \Rightarrow G$ est de connectivité forte égale à d .

Preuve

Soit F , un ensemble de sommets de G , tel que $|F| \leq d-1$.

Soit $W = \{x \in X / \text{dist}(x,F) \geq 2 \text{ et } \text{dist}(F,x) \geq 2\}$.

Lemme VI.A1 L'ensemble W n'est pas vide.

Preuve

Soit $Q = \{x \in X / \text{dist}(x,F) \leq 1 \text{ ou } \text{dist}(F,x) \leq 1\}$.

$|Q| \leq |F| + |\Gamma^-(F)| + |\Gamma^+(F)| \leq (d-1)(2d+1) = 2d^2 - d - 1$.

Donc, $|Q| < |X|$ et, puisque $W = X \setminus Q$, $W \neq \emptyset$. ◊

Soit x_0 un sommet de W , et adoptons la notation suivante:

$P(x_0) = \{y \in X / \text{il n'existe pas de chemin minimum de } y \text{ à } x_0 \text{ évitant } F\}$.

Donc, puisque $\forall y, y \in P(x_0), \text{dist}(y,F) \leq D-2$,

$$|P(x_0)| \leq (d-1) \sum_{i=0}^{D-2} d^i = d^{D-1} - 1.$$

Soit $x \in X \setminus F$.

Lemme VI.A2 Si $\text{dist}(x,F) \geq 2$,

alors il existe un chemin de x à x_0 évitant F .

Preuve

Posons $S(x) = \{y \in X \mid \text{il n'existe pas de chemin minimum de } x \text{ à } y \text{ évitant } F\}$.

$$|S(x)| \leq (d-1) \sum_{i=0}^{D-2} d^i = d^{D-1} - 1$$

Donc, $|S(x) \cup P(x_0)| \leq 2 d^{D-1} < |X|$.

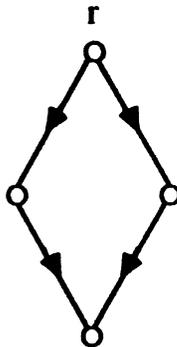
Soit alors, $z \in X \setminus \{S(x) \cup P(x_0)\}$. Par définition des ensembles $S(x)$ et $P(x_0)$, il existe un plus court chemin de x à z et un autre de z à x_0 qui évitent F . \diamond

Lemme VI.A3 Si $\text{dist}(x, F) = 1$,

alors il existe un chemin de x à x_0 évitant F .

Preuve

Pour démontrer ce résultat, nous allons utiliser le lemme technique suivant: soit H , le graphe:



Lemme VI.A4 Si $|X| > 2 d^{D-1}$,

alors G ne contient pas de sous-graphe isomorphe à H .

Preuve

Si G contient un sous-graphe isomorphe à H , considérons une mise en couches à partir de la racine r de celui-ci. Nous avons donc:

$$|\Gamma^+(r)| = d, \quad |\Gamma^{+2}(r)| \leq d^2 - 1$$

et $|\Gamma^{+i}(r)| \leq (d^2 - 1) d^{i-2}$ si $i \geq 2$.

Si $D = 2p$, évaluons le cardinal du stable X_2 de G ne contenant pas r .

$$|X_2| = \sum_{i=0}^{p-1} \gamma_{2i+1} \leq \gamma_1 + \gamma_3 \sum_{i=0}^{p-2} d^{2i} \leq d + d(d^2-1) \left(\frac{d^{D-2} - 1}{d^2 - 1} \right) = d^{D-1}.$$

D'où, $|X| = 2|X_2| \leq 2 d^{D-1}$, ce qui contredit l'hypothèse $|X| > 2 d^{D-1}$.

Si $D = 2p + 1$, évaluons le cardinal du stable X_1 de G qui contient r .

$$|X_1| \leq \sum_{i=0}^p \gamma_{2i} \leq 1 + \gamma_2 \sum_{i=0}^{p-1} d^{2i} \leq 1 + (d^2-1) \left(\frac{d^{2p} - 1}{d^2 - 1} \right) = d^{D-1}.$$

Et par conséquent, la même hypothèse se trouve violée. \diamond

Revenons à présent, à la démonstration du lemme VI.A3 et soit $y \in \Gamma^+(x)$.

Si $\text{dist}(y, F) \geq 2$, le lemme VI.A2 permettrait de conclure.

Donc, supposons que: $\forall y, y \in \Gamma^+(x), \text{dist}(x, F) \in \{0, 1\}$.

Si $F \subset \Gamma^+(x)$, soit $y \in \Gamma^+(x) \setminus F$. Donc $\text{dist}(y, F) \geq 2$ (puisque G est biparti), et le lemme VI.A2 assure le résultat.

Sinon, désignons par F_1 , l'ensemble $F \cap \Gamma^+(x)$ et par F_2 , l'ensemble $F \cap \Gamma^{+2}(x)$. Donc, $\forall y \in \Gamma^+(x) \setminus F_1, \text{dist}(y, F) = \text{dist}(y, F_2) = 1$.

Comme, $|F| > |\Gamma^+(x)|$ et donc $|\Gamma^+(x) \setminus F_1| > |F_2|$, par conséquent, x possède, dans $\Gamma^+(x) \setminus F_1$, deux successeurs y_1 et y_2 ayant un successeur commun z , appartenant à F_2 .

Et, par suite, les sommets x, y_1, y_2 et z engendrent un graphe isomorphe au graphe H , ce qui, exclu par le lemme technique VI.A4 ci-dessus, constitue une contradiction. \diamond

Lemme VI.A2' Si $\text{dist}(F, x) \geq 2$,

alors il existe un chemin de x_0 à x évitant F .

Preuve

Identique à celle du lemme VI.A2. \diamond

Lemme VI.A3' Si $\text{dist}(F,x) = 1$,

alors il existe un chemin de x_0 à x évitant F .

Preuve

Identique à celle du lemme VI.A3.

◇

Pour achever la démonstration du théorème VI.A1, il suffit de remarquer que les cas traités par les lemmes VI.A1, A2, A3, A2' et A3' sont exhaustifs.

◇

* * *



CHAPITRE VII

COLORATIONS GÉNÉRALISÉES DES GRAPHES

VII.1 INTRODUCTION

On dispose d'un ensemble \mathcal{C} de couleurs. Pour chaque arête xy d'un graphe G , on définit une bijection b_{xy} de l'ensemble \mathcal{C} dans lui-même.

Appelons \mathfrak{B} -coloration, la notion permettant de colorier les sommets de G avec les couleurs de \mathcal{C} , de sorte que si un sommet x est colorié avec une couleur c , on impose que son voisin y ne soit pas colorié par la couleur $b_{xy}(c)$.

Appelons nombre \mathfrak{B} -chromatique d'un graphe G , le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour \mathfrak{B} -colorier ce graphe G .

La notion habituelle de coloration revient, donc, à prendre l'identité pour toutes les bijections. Dans le cas qui nous intéresse, les bijections étant quelconques, nous essayons de généraliser certains des résultats déjà obtenus dans le cadre de la coloration usuelle.

C'est ainsi que nous retrouvons les inégalités de Szekeres-Wilf [51] et de Welsh-Powell [53]. Nous donnons, en outre, une généralisation du théorème de Brooks [15] dans le cadre de la \mathfrak{B} -coloration, et prouvons, en exhibant pour n'importe quelle valeur de n , des graphes bipartis non \mathfrak{B} -colorables avec n couleurs, que le nombre \mathfrak{B} -chromatique d'un graphe est indépendant, en général, de son nombre chromatique.

Néanmoins, l'égalité entre ces nombres est assurée pour les graphes triangulés. C'est, d'ailleurs, la seule classe de graphes ayant cette propriété conservée par inclusion.

Par ailleurs, une autre notion de coloration, la **L-coloration**, consiste à associer des listes de couleurs aux sommets d'un graphe, chaque sommet devant recevoir une couleur de sa liste.

A première vue, tout semble faire croire que cette notion n'est pas plus difficile que celle de la coloration habituelle. Lorsque les listes sont disjointes, le graphe est trivialement colorié pour n'importe quelle famille de listes, et lorsque les listes sont identiques, on obtient la notion usuelle de coloration. Cependant, comme nous le verrons, il existe des cas de graphes bipartis, dont le nombre de couleurs nécessaires pour la L-coloration n'est pas borné.

Cette notion peut être utilisée pour redémontrer beaucoup plus simplement, des résultats classiques de la coloration usuelle (par exemple, le théorème de Brooks), et les généraliser à la \mathfrak{B} -coloration.

La notion de L-coloration a déjà été adaptée à la coloration des arêtes, auquel cas certains problèmes sont posés, et d'autres partiellement résolus [9, 33].

Pour clore ce chapitre, nous étudions partiellement le cas de la \mathfrak{B} -coloration où les bijections sont définies sur un ensemble de couleurs de cardinal assez élevé.

* * *

VII.2 GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE BROOKS

VII.2.1 Définitions et notations

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple.

Un **L-système** associé au graphe G est une application $L: X \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, qui, à tout sommet x de G , fait correspondre une liste de couleurs $L(x)$.

La taille d'un tel système désigne le plus grand des cardinaux de toutes les listes du système L .

Une **L-coloration** du graphe G est une application $c: X \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que:

- $\forall x \in X, c(x) \in L(x)$,
- $\forall xy \in E, c(x) \neq c(y)$.

Le nombre **L-chromatique d'un graphe G** , noté $\gamma_l(G)$ est le plus petit entier p pour lequel G admet une L-coloration, pour tout L-système L vérifiant:

pour tout sommet x de G , $|L(x)| \geq p$.

Soit $G = (X, E)$ un graphe simple muni d'un système L . Notons par \mathcal{C} l'ensemble de toutes les couleurs disponibles, et associons à chaque arête xy de G une bijection b_{xy} de \mathcal{C} dans \mathcal{C} . Notons par \mathfrak{B} une telle famille de bijections ($\mathfrak{B} = \{b_e\}_{e \in E}$).

Une application $c: X \rightarrow \mathbb{N}^*$ sera appelée **\mathfrak{B} L-coloration** du graphe G , si:

- $\forall x \in X, c(x) \in L(x)$,
- $\forall xy \in E, c(x) \neq b_{xy}(c(y))$.

Le plus petit entier p pour lequel il existe une \mathfrak{B} L-coloration de G , pour n'importe quel L-système et n'importe quelle famille de bijections \mathfrak{B} est appelé nombre **\mathfrak{B} L-chromatique** de G et sera noté $\hat{\gamma}_l(G)$.

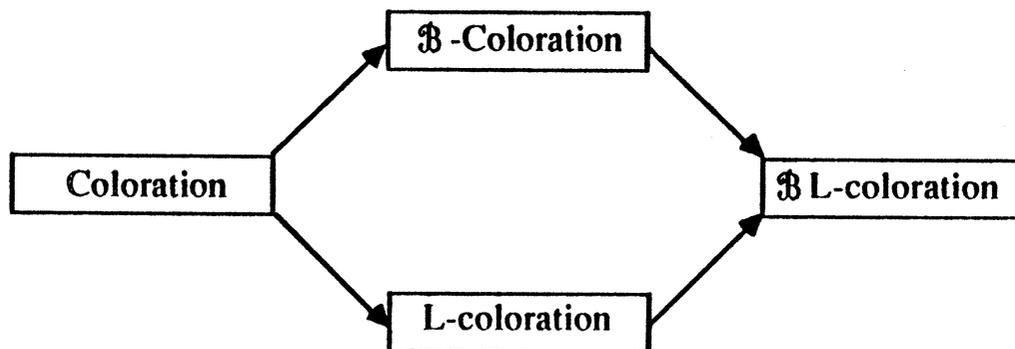
Lorsque toutes les listes sont identiques, nous parlerons de \mathfrak{B} -coloration et de nombre \mathfrak{B} -chromatique, nombre qui sera noté $\hat{\gamma}(G)$.

Pour toutes les autres notions, notations et définitions, nous utiliserons celles de C. Berge [3] et de F. Harary [34]. Celles qui nous intéressent sont relatives au concept non orienté.

Remarque VII.1

La coloration habituelle n'est que le cas particulier de la L-coloration où toutes les listes de couleurs sont identiques.

Si, dans la \mathfrak{B} L-coloration, toutes les bijections sont des identités, alors nous retrouvons, naturellement, la L-coloration.



Donc, $\gamma(G) \leq \hat{\gamma}(G) \leq \hat{\gamma}_1(G)$,

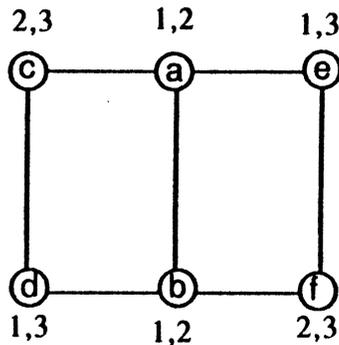
et $\gamma(G) \leq \gamma_1(G) \leq \hat{\gamma}_1(G)$.

Ces inégalités peuvent être strictes.

Les exemples suivants illustrent de tels cas, pour certains graphes bipartis (coloriables avec deux couleurs dans le cadre de la notion habituelle de coloration).

Exemple

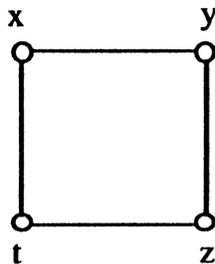
a) Le graphe G ci-dessous est biparti, donc de nombre chromatique égal à deux, alors que son nombre L -chromatique est supérieur ou égal à trois.



G

En effet, le graphe G ne peut être L -colorié avec un tel système, puisque dans une L -coloration, les sommets a et b doivent utiliser les deux couleurs 1 et 2 (resp. 2 et 1), et par suite, les sommets e et f (resp. c et d) ne pouvant être coloriés qu'avec la couleur 3, ce qui est interdit, puisque ces sommets sont adjacents. Le graphe G est donc de nombre L -chromatique au moins égal à trois.

b) Désignons par H , le cycle sur quatre sommets. Donc, H est biparti, mais son nombre \mathfrak{B} -chromatique est supérieur ou égal à trois, comme nous allons le vérifier.



H

Soit $\mathcal{C} = \{1,2\}$, un ensemble de deux couleurs, et affectons à toutes les arêtes de ce graphe, sauf l'arête xy , l'identité. L'arête xy recevra l'anti-identité p de \mathcal{C} . Supposons que H possède une \mathfrak{B} -coloration avec les deux couleurs de \mathcal{C} . Alors les sommets x et y recevront des couleurs différentes le long de la chaîne x, t, z, y , couleurs qui sont incompatibles avec l'anti-identité. \diamond

VII.2.2 Propriétés du nombre \mathfrak{B} L-chromatique

Pour la coloration usuelle, le théorème de Mycielski [46] (une bibliographie étendue sur ce thème se trouve dans le livre de F. Harary [34]) affirme que pour n'importe quel entier n , il existe un graphe sans triangle, de nombre chromatique supérieur à n .

Pour la notion de \mathfrak{B} -coloration, ce résultat reste valable, comme le montre la proposition suivante, dans le cadre des graphes bipartis.

Proposition VII.1 Pour tout $n \geq 2$, il existe un graphe biparti de nombre \mathfrak{B} -chromatique supérieur ou égal à n .

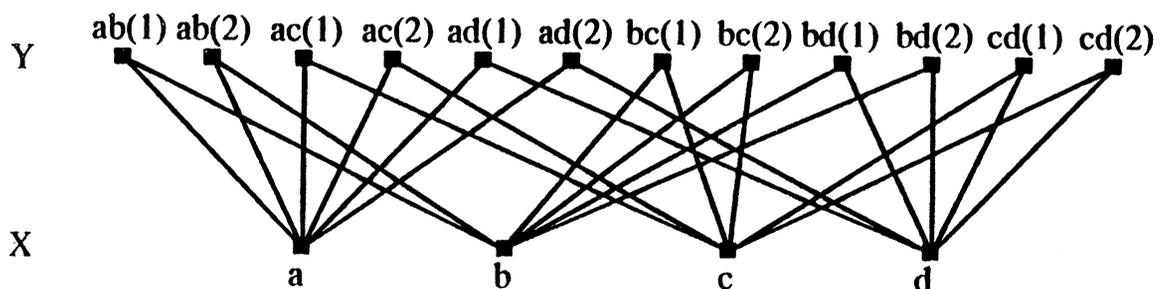
Preuve

Considérons le graphe biparti $G = (X \cup Y, E)$, construit de la manière suivante:

X est composé de n^2 sommets.

A chaque combinaison A de n sommets de X , numérotés de a_1 à a_n , on associe un ensemble A' de n sommets de Y , numérotés de $A(1)$ à $A(n)$, chacun étant relié par des arêtes à tous les sommets de l'ensemble A .

A une arête $(a_i, A(j))$, associons une bijection b , vérifiant $b(j) = i$ (i.e si a_i est colorié par j , alors $A(j)$ ne peut être colorié par i). La définition de la bijection b pour les autres valeurs n'est pas importante.



Supposons que G admette une coloration avec une telle famille de bijections. Donc, dans X , il existe un ensemble A de n sommets, de couleur j . A cet ensemble correspond, dans l'ensemble A' qui lui est associé, un sommet de numéro j , ne pouvant être colorié par aucune des n couleurs disponibles. \diamond

Proposition VII.2 Pour tout $n \geq 2$, il existe un graphe biparti de nombre L -chromatique supérieur à n .

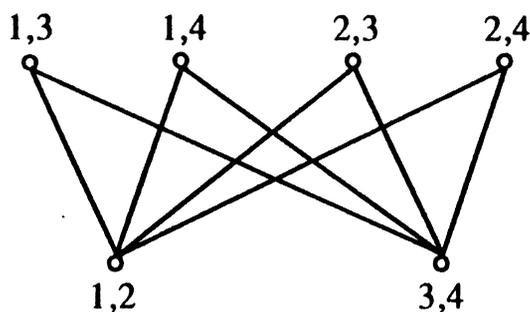
Preuve

Soit \mathcal{C} un ensemble de n^2 couleurs. Considérons le graphe biparti complet $K_{n,n} = (X \cup Y, E)$, avec $|X| = n$ et $|Y| = n^n$.

Associons à un sommet x de X une liste $L(x)$ de n couleurs, de sorte que les listes de couleurs associées à tous les sommets de X soient deux à deux disjointes.

A un sommet y de Y , nous associons une liste $L(y)$ de n couleurs, chacune étant prise de l'une des listes $L(x)$ associées aux sommets de X .

Autrement dit, pour tout sommet y de Y et tout sommet x de X , $|L(y) \cap L(x)| = 1$. Le nombre de listes $L(y)$ distinctes ainsi définies est n^n , et donc nous pouvons affecter toutes ces listes à tous les sommets de Y .

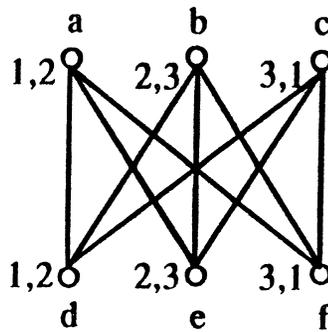


Pour L -colorier les sommets de X , n couleurs sont nécessaires (les listes associées aux sommets de X étant disjointes). Ces n couleurs forment une combinaison constituant l'une des listes associées aux sommets de Y et affectée, par exemple, au sommet y_0 . Un tel sommet ne peut être colorié, vu que chacune des couleurs de $L(y_0)$ est utilisée pour colorier l'un de ses voisins.

Une autre manière de démontrer cette proposition serait d'utiliser la construction suivante:

soit $K_{p,p}=(X \cup Y, E)$ le graphe biparti complet, avec $p = \binom{2n-1}{n}$.

Numérotons les sommets de X en x_1, x_2, \dots, x_p et ceux de Y en y_1, y_2, \dots, y_p et associons aux sommets x_i et y_i , une même liste $L_i=L(y_i)=L(x_i)$ de n couleurs, comprises entre 1 et $2n-1$, de sorte que deux sommets de numéros différents aient des listes distinctes (c'est à dire $L_i \neq L_j$ si $i \neq j$). Ainsi, nous affectons toutes les combinaisons possibles à n éléments, prises dans un ensemble de $2n-1$ couleurs.



Pour L -colorier les sommets de X , n couleurs sont nécessaires, puisque pour chaque ensemble de $n-1$ couleurs, il existe un sommet de X , dont le liste associée ne contient aucune de ces couleurs. De plus, pour chaque combinaison à n couleurs, il existe un sommet de Y , tel que la liste qui lui est affectée soit constituée de ces n couleurs. Par conséquent, le graphe $K_{p,p}$ muni du système sus-défini ne peut être colorié. \diamond

L'inégalité de Welsh-Powell [53], est conservée pour le nombre $\mathfrak{B}L$ -chromatique et peut s'écrire sous la forme de la proposition suivante.

Proposition VII.3 Si $G=(X,E)$ est un graphe k -dégénéré, alors, $\hat{\chi}_1(G) \leq k+1$.

Preuve

En effet, par récurrence sur $|X|$, le résultat étant évident pour les petits graphes, par exemple d'ordre 1, soit x un sommet de G , de degré au plus k .

Supposons que le résultat soit vrai pour $G \setminus \{x\}$.

Le sommet x ayant au plus k voisins, coloriés avec au plus k couleurs, donc chacune de ces couleurs interdit à x d'en prendre une certaine.

Il en restera au moins une de disponible pour le colorier. \diamond

Corollaire 1 Si G est un graphe planaire,
alors $\hat{\chi}_1(G) \leq 6$.

Preuve

Un graphe planaire est 5-dégénéré. \diamond

Comme seconde conséquence, nous retrouvons l'inégalité de Szekeres-Wilf.

Corollaire 2 Soit $G=(X,E)$ un graphe simple d'ordre n , dont les sommets sont numérotés suivant l'ordre décroissant des degrés (c'est à dire $d(x_1) \geq d(x_2) \geq \dots \geq d(x_n)$).
Alors $\hat{\chi}_1(G) \leq \text{Max} \{ \min(i, d(x_i)+1), 1 \leq i \leq n \}$.

Preuve

Il suffit de remarquer que si nous posons $k = \text{Max} \{ \min(i-1, d(x_i)), 1 \leq i \leq n \}$, alors le graphe G est k -dégénéré. \diamond

Remarque VII.2

La proposition VII.3 se généralise de manière évidente au cas des hypergraphes [3]. La preuve est exactement la même. \diamond

Proposition VII.4 $\hat{\chi}(G) \geq 3 \Leftrightarrow G$ contient un cycle.

Preuve

C.N. Si G ne contient pas de cycle, alors G est 1-dégénéré, et la proposition VII.3 assure le résultat.

C.S. Il suffit de montrer le résultat pour un cycle C donné.

Si le cycle C est de longueur impaire, le résultat est trivial.

Si le cycle C est pair, de longueur $2p$, considérons une famille de $2p$ permutations sur $\{1,2\}$, formée de $(2p-1)$ identités et d'une anti-identité (i.e la bijection b telle que $b(1)=2$ et $b(2)=1$), sur une arête xy .

La bijection b oblige les sommets x et y à avoir la même couleur, alors que les identités les contraignent à avoir des couleurs différentes. \diamond

Lemme fondamental de la \mathfrak{B} L-coloration

Soit $G = (X,E)$ un graphe connexe.

Pour tout L-système L et pour tout sommet x_0 de G tels que:

$$1) |L(x_0)| \geq d(x_0) + 1,$$

$$2) |L(x)| \geq d(x) \quad \forall x, x \neq x_0,$$

il existe une \mathfrak{B} L-coloration de G , quelque soit la famille \mathfrak{B} associée.

Preuve

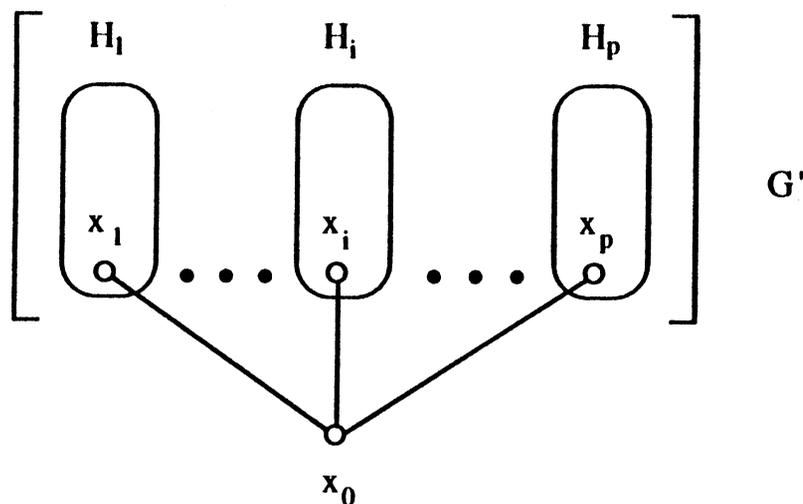
Par récurrence sur n , le nombre de sommets d'un graphe.

Si $n=1$, le lemme est vérifié.

Supposons que le lemme soit vrai pour tous les graphes ayant au plus n sommets, et montrons qu'il l'est aussi pour les graphes ayant $n+1$ sommets.

Soit $G = (X,E)$ un graphe, tel que $|X| = n+1$, et soit x_0 un sommet quelconque de G , vérifiant les hypothèses du lemme.

Le graphe $G' = G \setminus \{x_0\}$ peut ne pas être connexe. Soient alors H_1, H_2, \dots, H_p , avec $H_i = (X_i, E_i)$, ses composantes connexes.



Donc, pour tout i , $i \in \{1, 2, \dots, p\}$, x_0 possède un voisin x_i dans H_i .

Remarquons que nous avons:

- $|H_i| \leq n$,
- $p \leq d(x_0)$,
- si $d_i(x)$ désigne le degré du sommet x dans le graphe H_i , alors:
 - $d_i(x_i) = d(x_i) - 1 \leq |L(x_i)| - 1$,
 - $d_i(x) = d(x) \leq |L(x)|$ si $x \in X_i \setminus \{x_i\}$.

Comme $|H_i| \leq n$, et que H_i vérifie les hypothèses du lemme, donc, par hypothèse de récurrence, H_i admet une $\mathfrak{B}L$ -coloration, pour toute famille \mathfrak{B} de bijections associées à ses arêtes.

Le sommet x_0 a $d(x_0)$ voisins, coloriés par la procédure ci-dessus, chacun ayant une couleur incompatible avec au plus une couleur de $L(x_0)$. Comme $|L(x_0)| \geq d(x_0) + 1$, il restera une couleur pour le colorier. \diamond

Proposition VII.5 Soit $G = (X, E)$ un graphe 2-connexe, n'étant ni complet ni un cycle.

Pour tout L -système L , et pour toute famille de bijections \mathfrak{B} associés à G tels que $\forall x \in X, |L(x)| \geq d(x)$, il existe une $\mathfrak{B}L$ -coloration de G .

Preuve

Par récurrence sur n , le nombre de sommets d'un graphe.

Si n est assez petit, le résultat est évident. Supposons que le résultat soit vrai pour tous les graphes ayant n sommets et satisfaisant les hypothèses, et soit $G=(X,E)$ un graphe 2-connexe, n'étant ni complet ni un cycle d'ordre $n+1$.

Si G n'est pas régulier, alors G contient deux sommets x et y de degrés différents, avec, par exemple $d(x) > d(y)$.

$$|L(x)| > |L(y)| \Rightarrow \exists \alpha, \alpha \in L(x) \text{ tel que } b_{xy}(\alpha) \notin L(y).$$

Considérons le graphe $G' = G \setminus \{x\}$, et notons par $d'(z)$, le degré du sommet z dans le graphe G' .

Nous avons alors:

- G' est connexe,
- $d'(z) = d(z) - 1$, si z est un voisin de x ,
- $d'(z) = d(z)$ sinon.

Soit L' , le système suivant associé à G' :

- $L'(y) = L(y)$,
donc, $|L'(y)| = d'(y) + 1$,
- $L'(z) = L(z)$, si z et x ne sont pas adjacents, donc, $|L'(z)| = d'(z)$,
- $L'(z) = L(z) \setminus \{b_{xz}(\alpha)\}$, si x et z sont adjacents, donc, $|L'(z)| = d'(z)$.

Le graphe G' , muni du système L' , satisfaisant les hypothèses du lemme fondamental, possède donc une $\mathfrak{B}L$ -coloration, pour n'importe quelle famille \mathfrak{B} de bijections sur ses arêtes. Pour avoir une $\mathfrak{B}L$ -coloration de G , il suffit de colorier le sommet x par α , dont le choix assure la compatibilité.

Si le graphe G est régulier, alors utilisons le lemme suivant:

Lemme VII.1 Si $G = (X,E)$ est un graphe 2-connexe, de degré minimum au moins 3, alors $\exists x_0, x_0 \in X / G \setminus \{x_0\}$ est aussi 2-connexe. \diamond

Comme G est régulier et n'est pas un cycle, son degré minimum est supérieur ou égal à 3, G contient un sommet x_0 tel que le graphe $G' = G \setminus \{x_0\}$ est aussi 2-connexe. Le graphe G' n'est pas régulier (puisque G n'est pas complet).

Soit $\alpha \in L(x)$, une couleur quelconque, et considérons le système L' associé à G' , défini de la manière suivante:

- $L'(z) = L(z)$, si z et x ne sont pas adjacents, donc, $|L'(z)| = d'(z)$,
- $L'(z) = L(z) \setminus \{b_{xz}(\alpha)\}$, si x et z sont adjacents, donc, $|L'(z)| \geq d'(z)$.

Par conséquent, nous avons:

pour tout sommet z de G' , $|L'(z)| \geq d'(z)$.

Donc le graphe G' satisfait les hypothèses de cette proposition. Comme il n'est pas régulier, nous avons déjà établi dans la première partie de cette preuve que de tels graphes possédaient une $\mathfrak{B}L$ -coloration. Pour avoir une $\mathfrak{B}L$ -coloration de G , il suffit de colorier le sommet x par α , dont le choix assure la compatibilité. \diamond

Proposition VII.6 Soit $G = (X, E)$ un graphe connexe d -régulier, n'étant ni complet ni un cycle.

Pour tout L -système L , et pour toute famille \mathfrak{B} associés à G tels que $\forall x \in X, |L(x)| = d$, il existe une $\mathfrak{B}L$ -coloration de G .

Preuve

G n'étant pas 2-connexe, admet une décomposition en blocs, dont au moins deux sont pendants. Soit G' un bloc pendant, et soit x son sommet d'attache (c'est à dire le sommet de G dont la suppression disconnecte le graphe G).

Notons par H le graphe obtenu à partir de G en supprimant tous les sommets de G' . G étant régulier, G' n'est pas régulier et n'est donc ni complet ni un cycle. H n'est pas forcément connexe, mais chacune de ses composantes possède un voisin de x dans G .

Les listes associées à ces sommets sont de cardinal égal à leur degré dans H , plus un (puisque pour un sommet z de H , $d_H(z) = d_G(z)$ si z n'est pas un voisin de x et $d_H(z) = d_G(z) + 1$ si z est un voisin de x). Donc, en utilisant le lemme fondamental, tous les sommets des composantes connexes de H peuvent être coloriés de manière compatible.

Si d' est le degré du sommet x dans le graphe G' , alors x possède $(d-d')$ voisins dans H , coloriés de sorte que chacun ait une couleur incompatible avec au plus une couleur de la liste $L(x)$ associée au sommet x . Soit $\bar{L}(x)$ l'ensemble des couleurs ainsi interdites à x . Considérons le graphe G' , muni du système L' , obtenu en gardant les mêmes listes sur tous les sommets, sauf sur le sommet x , auquel nous associons la liste $L'(x) = L(x) \setminus \bar{L}(x)$.

Le graphe G' , vérifiant les hypothèses de la proposition VII.5, admet une $\mathfrak{B}L'$ -coloration, laquelle, associée à la $\mathfrak{B}L$ -coloration de H , constitue une $\mathfrak{B}L$ -coloration du graphe G en entier. \diamond

Théorème VII.1 Soit G est un graphe qui n'est ni complet ni un cycle, de degré maximum Δ .

Pour tout système L , et pour toute famille \mathfrak{B} associés à G tels que $\forall x \in X, |L(x)| = \Delta$, il existe une $\mathfrak{B}L$ -coloration de G .

Preuve

Si G n'est pas régulier, alors il est $(\Delta-1)$ -dégénéré, et le résultat découle de la proposition VII.3.

Si G est Δ -régulier et 2-connexe, la proposition VII.5 permet de conclure.

Si G est Δ -régulier et 1-connexe, le résultat découle de la proposition VII.6.

Ces cas étant exhaustifs, le théorème se trouve ainsi démontré et généralise celui de Brooks. \diamond

* * *

VII.3 GRAPHERS \mathfrak{B} -PARFAITS ET L-PARFAITS

VII.3.1 Graphes \mathfrak{B} -parfaits

Nous avons déjà vu, dans la proposition VII.4, que seuls les arbres sont \mathfrak{B} -colorables avec deux couleurs. Une remarque à tirer de ce résultat est que le nombre deux correspond exactement au cardinal de la plus grande clique d'un arbre.

Définissons la notion de \mathfrak{B} -perfection de la manière suivante:

Un graphe $G=(X,E)$ sera dit \mathfrak{B} -parfait, si:

$$\forall S \subseteq X, \hat{\chi}(G_S) = \omega(G_S),$$

où $\omega(G_S)$ représente le cardinal de la plus grande clique du graphe G_S .

Exemple

Comme nous l'avons noté ci-dessus, les arbres sont de nombre \mathfrak{B} -chromatique égal à deux. Comme un sous-graphe induit d'un arbre est aussi un arbre (ou une réunion disjointes d'arbres), il en résulte que les arbres sont \mathfrak{B} -parfaits. En fait, la proposition qui suit montre que cette propriété est due au fait que les arbres sont des graphes triangulés. \diamond

Proposition VII.7 Un graphe G est \mathfrak{B} -parfait, si et seulement si il est triangulé.

Preuve

Si G est triangulé, alors G possède un sommet simplicial. Ce sommet est de degré au plus égal $\omega(G)-1$. De la proposition VII.3, $\hat{\chi}(G) \leq \omega(G)$. Comme pour \mathfrak{B} -colorier une clique de cardinal p , p couleurs sont nécessaires, donc, $\hat{\chi}(G) = \omega(G)$.

Le résultat pour les sous-graphes de G découle du fait qu'un sous-graphe d'un graphe triangulé est aussi triangulé.

Si G n'est pas triangulé, alors il possède un cycle de longueur supérieure ou égale à 4. Un tel cycle est de nombre \mathfrak{B} -chromatique égal à 3, alors qu'il ne possède que des cliques de cardinal au plus égal à 2. \diamond

La notion de \mathfrak{B} -perfection peut se généraliser de manière naturelle à celle de $\mathfrak{B}L$ -perfection. C'est ainsi que nous dirons qu'un graphe est $\mathfrak{B}L$ -parfait, si:

$$\forall S \subseteq X, \hat{\gamma}_1(G_S) = \omega(G_S).$$

Exemple

De la proposition VII.3, nous pouvons déduire que les arbres sont aussi $\mathfrak{B}L$ -parfaits. \diamond

Comme pour la notion de \mathfrak{B} -perfection nous allons voir que les graphes triangulés sont les seuls graphes $\mathfrak{B}L$ -parfaits.

Proposition VII.7' Un graphe G est $\mathfrak{B}L$ -parfait, si et seulement si il est triangulé.

Preuve

Les graphes triangulés étant $(\omega(G)-1)$ -dégénérés, la proposition VII.3 assure qu'ils sont de nombre $\mathfrak{B}L$ -chromatique inférieur ou égal à $\omega(G)$.

De plus, pour $\mathfrak{B}L$ -colorier une clique de taille $\omega(G)$, $\omega(G)$ couleurs sont nécessaires.

Ceci suffit pour achever la preuve de la proposition. \diamond

VII.3.2 Graphes L -parfaits

Dans le cadre de la L -coloration, nous allons nous intéresser à la notion de perfection. Cette notion est définie de manière analogue à la perfection habituelle.

Un graphe $G=(X,E)$ sera dit L -parfait, si:

$$\forall S \subseteq X, \gamma_1(G_S) = \omega(G_S).$$

Nous pouvons nous demander quels graphes sont L-parfaits? A première vue comme le montre la proposition VII.1' et l'exemple qui la précède, les graphes contenant $K_{3,3}$ ou $K_{2,4}$ comme sous-graphes induits ne le sont pas. Néanmoins, nous pouvons déduire de la proposition ci-dessus que:

Proposition VII.8 Les graphes triangulés sont L-parfaits.

Preuve

La notion de L-coloration n'est qu'un cas particulier de la notion de \mathfrak{B} L-coloration. ◇

* * *

VII.4 BIJECTIONS SUR PLUS DE COULEURS

Soit $G=(X,E)$ un graphe simple. Soient \mathcal{C} un ensemble de couleurs de cardinal k et \mathfrak{B} une famille de $|E|$ bijections définies sur \mathcal{C} , chacune étant associée à une arête de G . Nous allons à présent nous intéresser au problème suivant:

trouver le plus petit nombre p de couleurs nécessaires pour \mathfrak{B} -colorier tous les sommets du graphe G en n'utilisant que $(k-1)$ couleurs.

Appelons **nombre \mathfrak{B} -chromatique auxiliaire de G** , le plus petit entier p tel que pour toute famille \mathfrak{B} de bijections définies sur un ensemble \mathcal{C} de couleurs, de cardinal $p+1$, le graphe G possède une \mathfrak{B} -coloration utilisant p couleurs. Notons le nombre \mathfrak{B} -chromatique auxiliaire de G , par $\hat{\chi}_a(G)$.

Proposition VII.9 Pour tout graphe G , $\chi(G) \leq \hat{\chi}(G) \leq \hat{\chi}_a(G) + 1$.

Preuve

La première inégalité est évidente. La seconde provient du fait qu'une \mathfrak{B} -coloration auxiliaire d'un graphe avec $\hat{\chi}_a(G)$ est, par définition, en même temps une \mathfrak{B} -coloration de ce graphe avec $\hat{\chi}_a(G) + 1$ couleurs. ◇

Proposition VII.10 Si G est k -dégénéré, alors $\hat{\chi}_a(G) \leq k+1$.

Preuve

Identique à celle de la proposition VII.3. ◇

Parmi les cas où l'inégalité est stricte, nous avons:

Proposition VII.11 Si G est un cycle de longueur paire,
alors $\hat{\chi}_a(G)=2$.

Preuve

Soit $\mathcal{C}=\{\alpha,\beta,\delta\}$, un ensemble de couleurs.

Si la bijection associée à chaque arête de G est l'identité, le résultat est donné par la notion habituelle de la coloration.

Sinon, soit xy une arête à laquelle la bijection b associée n'est pas l'identité. Supposons, par exemple que $b_{xy}(\alpha)=\beta$. Supprimons l'arête xy . Le graphe $G \setminus \{xy\}$ est une chaîne, donc 1-dégénéré. Colorions y par la couleur β . Cette couleur lui interdisant une couleur, le voisin de y dans $G \setminus \{xy\}$ peut être colorié soit par β , soit par δ . En réitérant ce raisonnement, nous arrivons à colorier les sommets de $G \setminus \{xy\}$ par les couleurs β et δ .

Le sommet x se trouvant colorié par l'une de ces deux couleurs, en remettant l'arête xy , la coloration ainsi définie reste compatible. ◇

Conséquence 1

Si G est un graphe biparti, monocyclique, alors $\hat{\chi}_a(G)=2$.

Preuve

Pour colorier le cycle, on utilise la même méthode de démonstration que celle utilisée à la proposition VII.11. Les sommets restants peuvent être numérotés, et coloriés en suivant cette numérotation de sorte que chacun d'eux ait au plus un voisin déjà colorié. Deux couleurs suffisent alors pour colorier tout le graphe. ◇

La proposition VII.11 pourrait laisser espérer que tous les graphes bipartis sont de nombre \mathfrak{B} -chromatique auxiliaire égal à deux. Cependant, comme le montre la proposition suivante, les graphes bipartis qui ont au plus un cycle sont les seuls dans ce cas.

Proposition VII.12 Un graphe G est de nombre \mathfrak{B} -chromatique auxiliaire égal à deux, si et seulement si, il est biparti et ne possède qu'au plus un cycle.

Preuve

C.N. Si G n'est pas biparti, alors il est évident que son nombre \mathfrak{B} -chromatique auxiliaire est supérieur à 2.

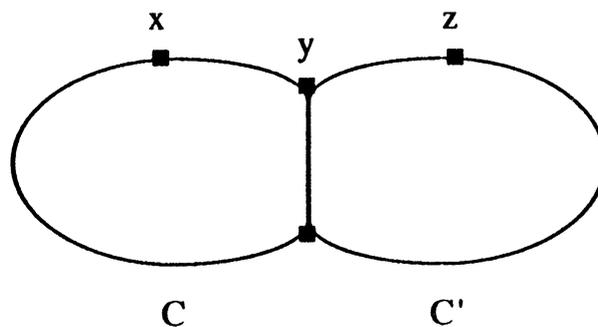
Si G est biparti et possède au moins deux cycles C et C' , nous allons construire une classe de bijections sur un ensemble de trois couleurs, de sorte que G n'admette pas de \mathfrak{B} -coloration auxiliaire. Définissons d'abord les trois bijections suivantes, sur un ensemble de couleurs $\mathcal{C} = \{\alpha, \beta, \delta\}$:

i : l'identité sur \mathcal{C} ,

b est telle que: $b(\alpha) = \beta$, $b(\beta) = \delta$ et $b(\delta) = \alpha$.

$b' = b^{-1}$.

Cas 1: si les cycles C et C' ont une intersection non vide, choisissons deux arêtes xy et yz adjacentes, la première dans C et la seconde dans C' , comme indiqué sur la figure ci-dessous. Un tel choix est toujours possible.



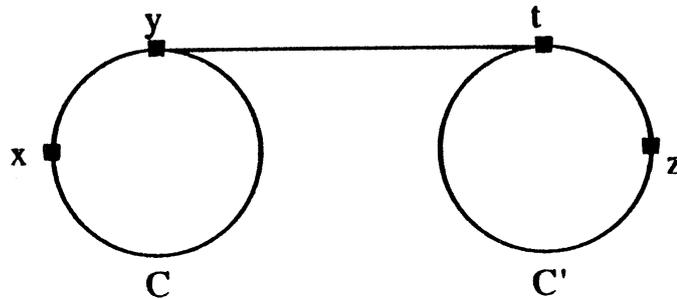
Associons aux arêtes xy et yz la bijection b , et à toutes les autres arêtes, l'identité i .

Si y est colorié par α , la bijection b empêche le sommet x d'être colorié par la couleur δ , alors que les identités (en utilisant la chaîne de y à x , de longueur impaire, composée des arêtes de $C \setminus \{xy\}$) lui interdisent de prendre la même couleur que y .

Donc si G pouvait être colorié par deux couleurs, la seconde couleur ne peut être que β . Cependant, dans le cycle C' , le sommet z ne peut être colorié par α (à cause des identités qui le lui interdisent le long de la chaîne $C' \setminus \{yz\}$) ni par β , la bijection b l'en empêchant sur l'arête yz .

Pour cause de symétrie du rôle de la bijection b par rapport à n'importe laquelle des trois couleurs, le graphe G ne peut être colorié par deux couleurs.

Cas 2: si les cycles C et C' sont disjoints, alors il existe une chaîne entre un sommet y de C et un sommet t de C' (les graphes nous intéressant dans ce chapitre étant tous connexes). Soient x un voisin de y dans C , et z un voisin de t dans C' .



Associons à l'arête xy la bijection b et à toutes les autres, sauf l'arête tz , l'identité.

Si la chaîne entre y et t est de longueur paire, associons à l'arête tz la bijection b .

Supposons que le sommet y soit de couleur α . Donc le sommet x ne peut être ni de couleur α , ni de couleur δ (pour les mêmes raisons que dans le cas traité ci-dessus).

La seconde couleur doit alors être β . Or, sur la chaîne entre y et t , ce dernier devant être de même couleur que y , donc α , son voisin z ne pourra recevoir aucune des deux couleurs α et β .

Pour les mêmes raisons de symétrie de la bijection b , le graphe G ne peut être colorié par deux couleurs.

Si la chaîne entre les sommets y et t est de longueur impaire, il suffira d'associer la bijection b' à l'arête tz , et le même raisonnement conduit aussi à une impossibilité.

C.S: découle de la conséquence de la proposition VII.11. ◇

Proposition VII.13 Pour tout n , il existe un graphe biparti de nombre \mathfrak{B} -chromatique auxiliaire supérieur ou égal à n .

Preuve

Identique à celle de la proposition VII.1. ◇

Remarque VII.2

Les résultats que nous venons d'obtenir peuvent se généraliser au cas où l'on dispose de listes de couleurs associées aux sommets d'un graphe. Dans un tel cas, il suffit de définir des bijections sur l'ensemble de toutes les couleurs disponibles, et de ne prendre en considération en chaque sommet que celles qui lui sont affectées. Les raisonnements sont alors les mêmes que ceux que nous avons utilisés, ceux-ci ne faisant intervenir que la quantité de couleurs disponibles. ◇

* * *

QUELQUES PROBLÈMES

1) Nous avons vu à la proposition VII.3 que les graphes k -dégénérés sont de nombre \mathfrak{B} -chromatique au plus $k+1$. Il nous paraît très probable qu'en fait, le nombre \mathfrak{B} -chromatique de tels graphes soit égal à $k+1$. Dans le cas contraire, il serait intéressant de déterminer une borne pour le nombre \mathfrak{B} -chromatique des graphes planaires. Cette borne peut être 4, 5 ou 6. Pour la L -coloration, la borne devrait être 5 ou 6 [27, 52].

2) Il serait intéressant de savoir si, dans un graphe donné, muni d'une famille \mathfrak{B} de bijections, un sommet quelconque peut être colorié, dans une \mathfrak{B} -coloration minimum, avec une couleur donnée. Dans le cas où cette supposition est vraie, elle permettrait d'adapter un certain nombre des propriétés du nombre chromatique au nombre \mathfrak{B} -chromatique.

3) Dans la proposition VII.8, nous avons noté que les graphes triangulés sont L -parfaits. Il est clair que la condition de triangularité n'est pas nécessaire. En effet, les cycles pairs sont L -parfaits. Certains graphes minimaux, non L -parfaits sont connus ($K_{3,3}$, $K_{2,4}$ ou bien le graphe H de l'exemple suivant la remarque VII.1). Ces graphes sont-ils les seuls graphes minimaux non L -parfaits ? Existe-il une caractérisation des graphes L -parfaits par des sous-graphes minimaux exclus ? Outre les graphes triangulés, quelles autres classes de graphes sont-elles L -parfaites ? Notons que les graphes $K_{3,3}$, $K_{2,4}$ et H possèdent tous le graphe $K_{1,3}$ comme sous-graphe exclu.

* * *

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. **B.W. Arden and H. Lee**, "Analysis of chordal ring network," *IEEE Trans. on computers*, vol. C-30, no. 9, 1981, pp. 291-295.
2. **E. Bannai and T. Ito**, "On finite Moore graphs," *J. Fac. Tokyo Univ.* no. 20, 1973, pp. 191-208.
3. **C. Berge**, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1973.
4. **J.C. Bermond, J. Bond, M. Paoli and C. Peyrat**, "Graphs and interconnection networks: diameter and vulnerability," in *Surveys in Combinatorics, Proc. of Ninth British Comb. Conference*, Cambridge Univ. Press, 1983, London Math. Soc., Lect. Notes Ser. 82, pp. 1-30.
5. **J.C. Bermond, C. Delorme and G. Farhi**, "Large graphs with given degree and diameter. II," *J. of Comb. Theory, Ser. B*, no. 36, 1984, pp.32-48.
6. **J.C. Bermond, C. Delorme and J.J. Quisquater**, "Strategies for interconnection networks: some methods from graph theory," *Rapport de Recherche, 227 LRI*, Avril 1985.
7. **J.C. Bermond, N. Homobono and C. Peyrat**, "Large fault-tolerant interconnection networks," *Proc. of the first Japan International Conference on Graph Theory and Applications*, Hakone, Japan, 1986.
8. **J.C. Bermond, G. Illiades and C. Peyrat**, "An optimization problem in distributed loop computer network," *Third Intern. Conf. on Combi. Mathematics*, New-York, 1985.

- 9 **B. Bollobás and A.J. Harris**, "List-colourings of graphs," *Graphs and Combinatorics*, no. 1, 1985, pp. 115-127.
10. **J. Bond**, "Construction de grands réseaux d'interconnexions," *Thèse 3ème cycle, LRI, Université Paris-Sud, Orsay*, 1984.
11. **J. Bond**, "Grands réseaux d'interconnexion," *Thèse d'Etat, LRI, Université Paris-Sud, Orsay*, 1987.
12. **J. Bond and C. Peyrat**, "Diameter vulnerability of some interconnection networks," *Rapport de Recherche 171 LRI, Avril 1984*.
13. **J. Bond and C. Peyrat**, "Diameter vulnerability in networks," in *Proc. of Kalamazoo Colloquium 1984, Graph theory and its applications to algorithms and computer science*, 1985, pp. 123-149, Wiley.
14. **W.G. Bridges and S. Toueg**, "On the impossibility of directed Moore graphs," *J. of Comb. Theory, Ser. B*, no. 29, pp. 339-341, 1980.
15. **R.L. Brooks**, "On colouring the nodes of a network," *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, vol. 60, 1941, pp. 194-197.
16. **N.G. de Bruijn**, "A combinatorial problem," *Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen Proc.*, vol. A49, 1946, pp. 758-764.
17. **F.R.K. Chung and M.R. Garey**, "Diameter bounds for altered graphs," *J. of Graph Theory*, Vol. 8, 1984, pp. 511-534.
18. **R. M. Damerel**, "On Moore graphs," *Proc., Cambridge Phil. Soc.*, no 74, 1973, pp. 227-236.

19. C. Delorme, "Two notes on large graphs," *Rapport de Recherche 172*, LRI, Orsay 1984.
20. C. Delorme, "Large bipartite graphs with given degree and diameter," *J. of Graph Theory*, vol. 8, 1985, pp. 325-334.
21. C. Delorme, "Grands graphes de degré et diamètre donnés," *Europ. J. of Combinatorics*, vol. 6, 1985, pp. 291-302.
22. C. Delorme and G. Farhi, "Large graphs with given degree and diameter Part I," *IEEE Trans. on computers*, vol. C-33, no. 9, 1984, pp. 857-860.
23. D. Dolev, J. Halpern, B. Simons and R. Strong, "A new look at fault-tolerant network routing," *STOC*, 1984.
24. K.W. Doty, "New design processor interconnection networks," *IEEE Trans. on computers*, vol. C-33, no. 5, 1984, pp. 447-450.
25. D.Z. Du, D.F. Hsu and F.K. Hwang, "Doubly linked ring networks," *IEEE Trans. on computers*, vol. C-34, no. 9, 1985, pp. 853-855.
26. P. Erdos, A.L. Rubin and A.J. Harris, "Choosability in graphs," *Proc. West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing* (Humboldt State Univ.), pp. 125-157.
27. A.H. Esfahanian, "Lower bounds on the connectivities of a graph," *J. of Graph Theory*, vol.9, 1985, pp. 503-511.

28. **A.H. Esfahanian and S.L. Hakimi**, "Fault-tolerant routing in de Bruijn communication networks," *IEEE Trans. on computers*, vol. C-34, no. 9, 1985, pp. 777-788.
29. **W. Feit and G. Higman**, "The non-existence of certain generalized polygons," *J. of Algebra*, vol. 1, 1964, pp. 114-131.
30. **M.A. Fiol, J.L.A. Yebra and I. Alegre**, "Line digraph iterations and the (d,k) digraph problem," *IEEE Trans. on computers*, vol. C-33, no. 5, 1984, pp. 400-403.
31. **M.A. Fiol, J.L.A. Yebra and J. Fabrega**, "Sequence graphs and interconnection networks," *Ars Combinatoria*, vol. 16-A, 1983, pp. 7-14.
32. **H.D. Friedman**, "On the impossibility of certain Moore graphs," *J. of Comb. Theory*, no. 10, 1971, pp. 245-252.
33. **R.P. Gupta**, "Problem session," *Annals of Discrete Math.*, no. 9, 1980, pp. 303-304.
34. **F. Harary**, *Graph theory*, Addison-Welsey, Reading, MA, 1969.
35. **C. Heuchenne**, "Sur une certaine correspondance entre graphes," *Bull. Soc. Roy. Sc. Liège*, no. 33, 1964, pp. 743-753.
36. **A.J. Hoffman and R.R. Singleton**, "On Moore graphs with diameters 2 and 3," *IBM J. Res. Develop.* vol. 4, 1960, pp. 497-504.
37. **N. Homobono and C. Peyrat**, "Fault-tolerant routings in Kautz and de Bruijn networks," *LRI, Rapport de Recherche*, no. 281, 1986.

38. N. Homobono and C. Peyrat, "Connectivity of Imase and Itoh digraphs," *LRI, Rapport de Recherche*, no. 284, 1986.
39. F.K. Hwang and Y.H. Xu, "Double loop networks with minimum delay," *Discrete Math*, no. 66, 1987, pp. 109-118.
40. M. Imase and M. Itoh, "Design to minimize a diameter on building block network," *IEEE Trans. on computers*, vol. C-30, 1981, pp. 439-442.
41. M. Imase and M. Itoh, "A design for directed graphs with minimum diameter," *IEEE Trans. on computers*, vol. C-32, 1983, pp. 782-784.
42. M. Imase, T. Soneoka and K. Okada, "Connectivity of regular directed graphs with small diameters," *IEEE Trans. on computers*, vol. C-34, no. 3, 1985, pp. 269-273.
43. W.H. Kautz, "Bounds on directed (d,k) graphs," *Theory of cellular logic networks and machines, AFCRL-68-0668 Final Report*, 1968, pp. 20-28.
44. W.E. Leland and M.H. Solomon, "Dense trivalent graphs for processor interconnection," *IEEE Trans. on computers*, vol. C-31, no. 3, 1982, pp. 219-222.
45. J.Q. Longyear, "Regular d-valent graphs of girth 6 and $2(d^2-d+1)$ vertices," *J. of Comb. Theory*, no. 9, 1970, pp. 420-422.
46. J. Mycielski, "Sur le coloriage des graphes," *Colloq. Math.* vol. 3, 1955, pp. 161-162.

47. **S.M. Reddy, D.K. Pradhan and J.G. Kuhn**, "Directed graphs with minimum diameter and maximum node connectivity," *School of Eng. Oakland Univ., Tech. Rep.*, July 1980.
48. **M.L. Schlumberger**, "Connectivity of de Bruijn networks," *Rapport de Recherche 154, IMAG*, 1978.
49. **R. Singleton**, "On minimal graphs of maximum even girth," *J. of Comb. Theory*, no. 1, 1966, pp.306-332.
50. **T. Soneoka, H. Nakada, M. Imase and C. Peyrat**, "Sufficient conditions for maximally connected dense graphs," *Discrete Math*, no. 63, 1987, pp. 53-66.
51. **G. Szekeres and H. Wilf**, "An inequality for the chromatic number of a graph," *J. Comb. Theory*, no. 4, 1968, pp. 1-3.
52. **V.G. Vizing**, "Vertex colourings with given colours," (in Russian), *Diskret. Analiz.*, no. 29, pp. 3-10.
53. **D.J.A. Welsh and M.B. Powell**, "An upper bound of the chromatic number of a graph and its application to timetabling problem," *Computer J.*, no. 10, 1967, pp. 85-87.
54. **C.K. Wong and D. Coppersmith**, "A combinatorial problem related to multimodule memory organizations," *J. of Assoc. of Comput. Mach.*, no. 24, 1974, pp. 392-402.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I Définitions et notations.....	7
CHAPITRE II Graphes bipartis orientés de Moore	21
II.1 Introduction	21
II.2 Graphes bipartis orientés de Moore	22
II.3 Graphes optimaux de diamètre trois et quatre	32
II.4 Construction pour de plus grands diamètres	36
II.5 Réseaux presque en double boucle	39
Quelques problèmes	44
CHAPITRE III Graphes sur alphabets	45
III.1 Introduction	45
III.2 Définitions	46
III.3 Quelques classes connues	47
III.4 Cas des graphes bipartis	50
III.5 Routage	52
CHAPITRE IV Graphes pseudo-séquentiels	55
IV.1 Introduction	55
IV.2 Connexité des graphes sous-jacents	56
IV.3 Vulnérabilité du diamètre	59
IV.4 Diamètre du graphe de survivance	63

CHAPITRE V Diamètre de certains graphes cubiques.....	67
V.1 Introduction	67
V.2 Opération d'éclatement de sommets	68
V.3 Applications	74
V.A Annexe	78
CHAPITRE VI Résistance aux pannes des réseaux bipartis	81
VI.1 Introduction	81
VI.2 Connexité	82
VI.3 Arête-connexité	88
VI.4 Connexité forte	92
VI.5 Arc-connexité	94
VI.6 Vulnérabilité du diamètre	99
VI.A Annexe	102
CHAPITRE VII Colorations généralisées dans les graphes	107
VII.1 Introduction	107
VII.2 Généralisation du théorème de Brooks	109
VII.3 Notions de \mathfrak{B} -perfection et de L-perfection	121
VII.4 Notion de \mathfrak{B} -coloration auxiliaire	123
Quelques problèmes	128
RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES	129

AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT 3ème CYCLE, DOCTORAT-INGENIEUR, DOCTORAT USTMG

Vu les dispositions de l'Arrêté du 16 avril 1974,

Vu les dispositions de l'Arrêté du 5 juillet 1984,

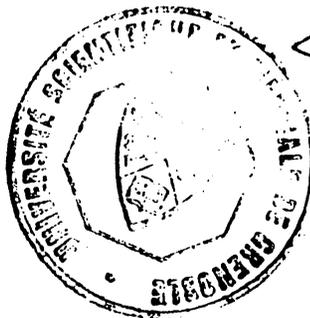
Vu les rapports de Mr....PAYAN.....Charles.....+...

M.....

Mr.....AIDER...Méziane..... est autorisé
à présenter une thèse en vue de l'obtention du ...Doctorat.....
...troisième...cycle...de...Recherche..Opérationnelle.....

JULIEN 1987
Grenoble, le.....

Le Président de l'Université Scientifique
Technologique et Médicale



J.J. PAYAN

