



HAL
open science

Organisation des systèmes de retraite et modélisation des fonds de pension

Mohamed Talfi

► **To cite this version:**

Mohamed Talfi. Organisation des systèmes de retraite et modélisation des fonds de pension. Gestion et management. Université Claude Bernard - Lyon I, 2007. Français. NNT : . tel-00325943

HAL Id: tel-00325943

<https://theses.hal.science/tel-00325943>

Submitted on 30 Sep 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Organisation des systèmes de retraites et modélisation des fonds de pension

THÈSE

présentation et soutenance publiques le vendredi 23 novembre 2007 à 14 h 30

pour l'obtention du

Doctorat de l'université Claude Bernard – Lyon 1

(spécialité sciences actuarielle et financière)

par

Mohamed TALFI

Composition du jury

Directeur de thèse : François QUITTARD-PINON
Professeur à l'Université Claude Bernard Lyon1 (I.S.F.A.)

Président : Ahmed SILEM
Professeur à l'Université Jean Moulin de Lyon3

Rapporteurs : Patrice FONTAINE
Professeur à l'Université Pierre Mendès France de Grenoble

Jean-Marin SERRE
Professeur à l'Université d'Auvergne

Suffragant : Ahmed SILEM
Professeur à l'Université Jean Moulin de Lyon3

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Je remercie vivement et sincèrement Monsieur le Professeur François QUITTARD-PINON pour la direction de ce travail, la lumière qu'il y a apportée et aussi pour sa disponibilité et sa patience.

Que tous les membres du jury reçoivent mon entière reconnaissance pour l'honneur qu'ils me font de juger ce travail.

J'adresse un multiple remerciement au Professeur Patrice FONTAINE de l'Université Pierre Mendès France de Grenoble pour avoir accepté d'être rapporteur de ma thèse et pour m'avoir initié à la Finance Internationale en D.E.A.

Je suis reconnaissant au Professeur Jean Marin SERRE de l'Université d'Auvergne pour l'immense honneur qu'il me fait d'avoir accepté de rapporter cette thèse.

Ma profonde gratitude va également vers le Professeur Ahmed SILEM de l'Université Jean Moulin de Lyon3 pour sa disponibilité en tant que suffragant de la thèse et aussi pour avoir présidé ma première présentation à la journée des doctorants de l'école doctorale M.I.F.

Je remercie également tout ceux qui ont participé à l'accomplissement de ce travail.

Comme c'est l'usage, je dédie un remerciement à ma famille pour avoir consenti l'éloignement et bien d'autres sacrifices en vue de l'aboutissement de cette thèse.

J'ai commencé ces remerciements avec Monsieur le Professeur François QUITTARD-PINON et je les termine avec lui parce que je ne le remercierai jamais assez, non pas seulement, pour son initiation depuis le D.E.A. à la finance de marché, mais aussi pour la parfaite direction des recherches, pour la réalisation de la présente thèse et aussi pour tous les efforts professionnels et humains fournis.

Tous mes hommages au Professeur Christian Partrat.

*Je dédie cette thèse à ma famille
ainsi qu'à tous mes amis.
À tous ceux qui ont supporté,
avec moi ou pour moi, tant d'aspérités
comme on en trouve dans la vie.
Également, je la dédie ,
bien sûr, à l'Humanité toute entière,
avec le rêve tu,
qu'elle puisse la servir, de quelque manière,
pourvu que cela reste dans le sens de la vertu.*

Table des matières

Introduction générale

Prologue	xiii
Systèmes de retraites et modélisation	xvii
Temps continu	xix

Partie I Organisation et introduction à la modélisation des systèmes de retraites

1

Introduction	3
Introduction à la présentation des systèmes de retraites	3
Dissemblances	3
Ressemblances	4

Difficultés et risques	5
Introduction a la modélisation discrète	5
Modélisation et choix de la chronologie	5
Modélisation dynamique discrète	7
Modélisation statique	9
Chapitre 1 Organisation des systèmes de retraites	11
1.1 Principes de la retraite	12
1.1.1 Principes de subvention et de répartition	12
1.1.2 Principe de retraites par Capitalisation	13
1.1.3 Autres principes et caractéristiques des systèmes de re- traites	14
1.2 Organisation du Système français de retraites	16
1.2.1 Présentation de la retraite par répartition en France . .	16
1.2.2 Présentation de la retraite par capitalisation en France .	25
1.2.3 Difficultés et réformes de la retraite française	30
1.3 Autres systèmes de retraites	35
1.3.1 Organisation des systèmes de retraite dans les pays membres de l’O.C.D.E.	36
1.3.2 Organisation des systèmes de retraites des pays hors O.C.D.E.	40
Conclusion et projections sur la situation des retraites	43
Chapitre 2 Présentation de la modélisation des fonds de pension	55
2.1 Typologie des risques de fonds de pension	58
2.1.1 Risques financiers	61
2.1.2 Risques démographiques	62
2.2 Formulation et évaluation des paramètres du fonds	63
2.2.1 Évaluations discrètes	64
2.2.2 Paramétrage en temps continu	66
2.3 Contrôle des fonds de pension	68
2.3.1 Contrôle par ajustements récurrents de commandes . . .	68
2.3.2 Contrôle par optimisation d’espérance d’utilités/désutilités	69
Conclusion	70

Chapitre 3 Modélisation dynamique discrète des fonds de pension	73
3.1 Formalisme en dynamique discrète	74
3.1.1 Environnement du fonds de pension	74
3.1.2 Modélisation du passif et de l'actif de la caisse de retraite	78
3.2 Différents types de fonds de pension en prestations définies . .	82
3.2.1 Méthode du "Unit Credit"	82
3.2.2 Méthode du "Entry Age Normal"	87
3.2.3 Méthode des coûts supplémentaires	88
3.2.4 Classement par évaluation individuelle ou collective . .	89
3.2.5 Méthodes simultanément individuelles et collectives . .	91
3.3 Autres formes de contrôle	95
3.3.1 Contrôle dans un fonds de pension mixte en dynamique discrète	96
3.3.2 Conclusion	109
Chapitre 4 Modélisation des fonds de pension en statique	111
4.1 Présentation d'un modèle statique en prestations définies	111
4.1.1 Modélisation de l'actif du fonds	112
4.1.2 Passif et surplus	116
4.2 Contrôle du fonds de pension en économie statique	121
4.2.1 Choix du critère d'optimisation	122
4.2.2 Détermination de l'allocation stratégique optimale . . .	125
4.3 Simulation d'un portefeuille optimal de fonds de pension en sta- tique	130
4.3.1 Environnement démographique et financier du fonds de pension	130
4.3.2 Résultats	134
Conclusion et discussions	141
Fonds à cotisations définies	141
Autres contrôles du fonds	142
Allocation tactique	142
Contrôle continu du risque	142
Modélisation en temps continu	143

Partie II Modélisation de fonds de pension en temps continu 145

Introduction	147
Chapitre 1 Formalisme et évaluation du fonds de pension en temps continu	155
1.1 Formalisme de base du modèle de marché	155
1.1.1 Variables fondamentales	156
1.1.2 Dynamique des actifs	159
1.1.3 Prime de risque, univers risque neutre et zéro-coupons .	164
1.2 Environnement démographique	168
1.2.1 évolution du salaire	169
1.2.2 Rente viagère continue	171
1.2.3 Cotisations et Pensions individuelles	172
1.3 Dynamique du passif	177
1.3.1 Passif individuel	177
1.3.2 Faisabilité	180
1.3.3 Équilibre actuariel du fonds de pension	182
1.3.4 Agrégation du fonds de pension : le passif total	187
Chapitre 2 Stratégie du portefeuille de fonds de pension et optimalité	191
2.1 Dynamique du portefeuille du fonds de pension	191
2.1.1 Variables de commande	192
2.1.2 Partage du surplus	195
2.1.3 Évolution du portefeuille	196

2.2	Stratégies du portefeuille	198
2.2.1	Richesse réelle	198
2.2.2	Introduction de nouveau numéraire	202
2.2.3	Stratégie par numéraire du portefeuille de fonds de pension	206
2.3	Gestion optimale du fonds de pension	210
2.3.1	Critères et hypothèses d'optimisation du portefeuille de fonds de pension	211
2.3.2	Contrôle du fonds de pension	219
2.3.3	Commandes optimales	222
 Chapitre 3 Portefeuilles de fonds de pension dans une économie gaussienne		229
3.1	Modèle d'économie	230
3.1.1	Structure du marché	230
3.1.2	Passif	238
3.2	Analyse en horizon fini	249
3.2.1	Conditions d'optimalité en horizon fini	249
3.2.2	Solutions	251
2.3	Probabilité de ruine du fonds de pension	260
3	Analyse en horizon libre	269
3.1	Formalisme en horizon libre	269
3.2	Résultats	272
3.3	simulations	275
 Conclusion		283

Conclusion Générale

Épilogue	289
--------------------	-----

Conclusions sur les structures de retraite et leurs modélisations . . .	290
Perspectives en économie statique et en temps continu	293
<hr/>	
Annexes	295
Annexe A	295
A.1 Organisation des retraites	296
A.1.1 Tableaux récapitulatifs	296
Annexe B	301
B.1 Principaux résultats et développements relatifs au marché finan- cier	302
B.1.1 Le prix de marché du risque	302
B.1.2 Univers risque-neutre et risque réel neutre	305
B.2 Environnement démographique et passif	309
B.3 Stratégie et contrôle du portefeuille	311
B.3.1 Établissement de l'évolution de la richesse	311
B.3.2 Minimisation de la variance dans les résultats	313
Annexe C	315
C.1 Détermination des flux d'équilibre de cotisation et de pension .	316
Annexe D	325
D.1 Valeurs des zéros-coupon	326
D.1.1 Zéro-coupon nominal sur le taux d'intérêt	327
D.1.2 Zéro-coupon indexé sur l'inflation des prix	329
Bibliographie	341

Introduction générale

Prologue

L'évolution démographique actuelle, avec dans les pays occidentaux l'avènement du *pappy boom*, ravive le sujet de l'avenir des retraites. Cela provoque dans les pays concernés une série de réformes des systèmes de retraites qui rivalisent d'innovations pour faire face aux risques démographiques et financiers.

En France, la branche vieillesse du régime général d'assurance sociale, existe depuis 1945. Les premières réformes, relatives à la prise en compte du *pappy boom* dans le domaine de la retraite, datent de 1993 avec les lois Balladur. Ces réformes modifient, entre autres, la durée de cotisation dans le système privé des retraites pour une liquidation des retraites à taux plein passant de 150 à 160 trimestres. En 1999, les réformes Jospin, créent le Fonds de Réserve des Retraites (F.R.R.), afin de répondre au déficit très probable des caisses privées entre 2008 et 2020. Le COR (Conseil d'Orientation des Retraites) est créé en 2000. En 2003, les lois Fillon généralisent les lois Balladur aux régimes publics et vont jusqu'à prolonger la durée de cotisation pour tous en instaurant un système d'allongement progressif jusqu'à 164 trimestres à l'horizon 2012. Les nouvelles lois prévoient une révision possible de la durée de cotisation avec un système d'indexation sur l'allongement de la durée de vie des seniors.

Dans d'autres pays comme le Japon, des réformes ont lieu en 1985 avec effets jusqu'en 2004. Aux États-Unis, depuis 2005, l'âge de liquidation a augmenté d'une demi année sur les 65 ans de base et avancera progressivement jusqu'à 67 ans en 2027.

Toutes ces réformes traduisent l'instabilité au sein des systèmes de retraites, du lien entre évolution démographique et évolutions financières. Il existe pourtant, sur le plan théorique comme pratique, des modélisations de tous les types de caisses de retraites. Ces modélisations recherchent autant que possible une optimalité partielle ou globale sur la gestion des caisses concernées. Des trois principales formes

de retraites que sont la répartition, la subvention et la capitalisation, la retraite par capitalisation nous semble être la plus complète, englobant les deux autres formes. En effet pendant que les retraites par répartition et par subvention restent principalement dans un domaine classifiable comme assuranciel, les retraites par capitalisation vont plus loin en incorporant dans leur structure une véritable dimension financière en plus du caractère assuranciel.

Nous allons principalement nous intéresser à la modélisation des retraites par capitalisation ou fonds de pension. Sur le plan de la pratique, nous retrouvons les modélisations discrètes, du fait de l'adéquation de leur distribution du temps aux opérations effectives possibles. La modélisation dynamique discrète se développe principalement autour des méthodes possibles de gestion des fonds de pension comme par exemple avec Aitken (1994) et Dufresne (1988). Ces modélisations restent pour la plupart purement assurancielles, avec parfois d'importants développements sur les évolutions de la population (voir Chang et Cheng 2002).

Bien que l'étude financière soit indissociable de toute étude un tant soit peu complète des fonds de pension, tous les développements en dynamique discrète s'intéressant aux développements financiers se focalisent sur le seul taux du marché. Nous pouvons citer par exemple dans ce cas : Dufresne (1989), Cairns (1996), Cairns et Huang (2004), Haberman (1994, 1992) ou Owadally (1998). Certes, ces développements restent dans la sphère de la pratique, mais ils souffrent toutfois d'un manque de profondeur dans le domaine de la finance. Pour illustrer cet état de fait, nous remarquerons juste pour exemple que dans tous les articles sus-cités, le marché se résume au seul actif du fonds. Aucune diversification, sur des actifs différents et bien identifiables, n'est proposée. Zimbidis et Greece (2002) et Cairns (n.d.) ont néanmoins proposé des modélisations discrètes assurancielles avec d'importants développements en finance.

De la même manière, les développements en finance de fonds de pension, restent

le plus souvent dans un cadre purement financier et se heurtent peu ou pas assez aux développements démographiques, pourtant essentiels à l'étude d'un fonds de pension. En finance, l'univers de grande prolifération d'études en fonds de pension, reste le temps continu. On y aborde, dans la rigueur de la théorie financière, tous les aspects financiers des fonds de pension.

Blake (1999) étudie la gestion possible des fonds de pension sous forme d'options européennes ayant pour support l'actif du fonds, pour prix d'exercice le passif et l'échéance étant naturellement la date de retraite de l'individu. Les options varient selon le type de fonds et l'implication de la rentabilité des actifs du marché dans la liquidation de la pension. Deelstra, Grasselli et Koehl (2002) comme Deelstra, Grasselli et Koehl (2000) étudient la garantie minimale optimale dans un fonds où les cotisations sont définies. Devolder et Hainaut (2006) ont intégré d'avantage une étude démographique dans le cadre financier.

Les aspects financiers abordables en fonds de pension sont très vastes, mais nous allons nous intéresser à l'un d'eux en particulier : l'allocation stratégique du portefeuille. Tous les développements sur l'optimalité de l'allocation d'actif pour le portefeuille de fonds de pension en fonction des préférences psychologiques des investisseurs face au risque, s'inspirent des travaux pionniers en consommation optimale de portefeuille en temps continu de Merton (1969) et Merton (1971). Ces travaux laissent leur marque sur tous les travaux de recherches diffusés depuis. Plusieurs développements composent l'étude de ce sujet selon le cadre financier, le critère d'optimalité ou le type de fonds de pension. Nous citerons par exemple le cadre des utilités quadratiques en économies stationnaires où certains paramètres restent constants, comme dans Boulier, Florens et Trussant (1993) ou Boulier et Dupré (2002). C'est en prestations définies que Reichlin (2000) fait usage d'une utilité construite sur les différences quadratiques autour de valeurs cibles d'abord fixées pour le niveau du fonds puis imposées aux cotisations. En cotisations définies,

cette fois, mais dans le même esprit, Haberman, Vigna et Russell(2002, 2004) usent d'une utilité prise sur les différences quadratiques au niveau du fonds d'abord, sur les pensions ensuite.

Devolder (2002) rompt avec l'utilité quadratique, en cotisations définies et use d'une utilité plus générale mais qui reste du type CRRA (Constant Relative Risk Aversion) sur le niveau de la richesse finale. Cette dernière forme d'utilité est d'usage dans les économies stationnaires ou non, impliquant mieux le passif.

Sundaesan et Zapatero (1997) recherchent une allocation optimale avec une utilité sur la différence finale entre les actifs et le niveau du fonds, tout en mettant au centre des développements, la productivité marginale ou le capital humain de l'individu dans une économie stationnaire et en prestations définies.

Cairns, Blake et Dowd (2004), dans une économie non stationnaire et en cotisations définies, tirent l'allocation optimale du portefeuille en choisissant l'évolution aléatoire du salaire comme numéraire et suivant la même forme de critère de richesse finale.

Menoncin, Battocchio et Scaillet (2003) dans un cadre financier similaire, font apparaître en plus, la faisabilité et la provision mathématique assurancielles, l'inflation et l'étude mixte de fonds à cotisations définies comme à prestations définies.

Outre le temps continu, en statique également certains développements impliquent au mieux le passif. Wilkie (1985), recherche le portefeuille optimal recouvrant exactement le passif du fonds. Leibowitz, Kogelman et N.Bader (1992), tirent également le portefeuille optimal du fonds de pension par croisement de contraintes de rentabilités sur le portefeuille et sur la différence entre le portefeuille et le passif, tout en respectant la notion de portefeuille efficient au sens de la dualité rentabilité-risque.

Nous subdivisons la thèse en deux parties. La première partie présentera l'organisation des systèmes de retraites dans le monde, introduira la modélisation de

fonds de pension puis abordera les modèles discrets avec la modélisation statique comme cas particulier monopériodique.

La deuxième partie de la thèse sera consacrée à la modélisation dynamique continue. Nous y développerons les notions actuarielles et assurancielles issues de la modélisation discrète pratique présentée en première partie. Nous associerons ces bases actuarielles aux développements les plus récents en théorie de portefeuilles de fonds de pension.

Systèmes de retraites et modélisation

Dans un premier temps, une analyse de l'état des différentes organisations de systèmes de retraites sera présentée. Cette analyse aboutira à une synthèse des difficultés et des risques inhérents à la gestion des systèmes de retraites. Dans un second temps, des propositions de solutions pratiques et courantes de gestion de risques des systèmes de retraites, particulièrement en retraites par capitalisation, introduiront les modélisations.

Systèmes de retraites

Avant d'aborder la modélisation des fonds de pension, il semble judicieux de faire un tour d'horizon de la situation des retraites dans le monde et de se rendre compte de la manière dont les retraites sont gérées. Cela nous permettra aussi de mesurer l'importance de la capitalisation des retraites et même de découvrir ses liens possibles avec les autres formes de gestion des retraites.

Nous rechercherons les principes moteurs des systèmes de retraites à travers le monde entier.

Dans un effort de synthèse, nous dégagerons les aspects assurancielles et financiers des systèmes de retraites en soulignant les risques inhérents à ces systèmes.

Un panorama du système français des retraites sera exposé avant un tour d'horizon des autres systèmes de retraites dans le monde, établi par groupes économiques ou géographiques.

Modélisation

Nous traiterons d'abord des développements dans une vision chronologique en dynamique discrète avant d'y déduire la modélisation statique comme cas particulier monopériodique.

Modélisation dynamique discrète

En retenant les risques de gestion et les risques démographiques, nous étudierons les modélisations possibles en dynamique discrète et dans un cas où les prestations sont définies à l'avance. Nous allons donc présenter ici, comme dans les modélisations à suivre, une synthèse des méthodes de gestion tenant compte de la mortalité des individus avec une modélisation en groupe ouvert, c'est à dire avec un minimum de restrictions sur la population. Le nombre d'individus entrant comme sortant de la population sera libre et aléatoire. Mais nous ne poserons pas de manière explicite l'évolution aléatoire de la population comme cela a été fait en processus markoviens pour Chang et Cheng (2002).

Pour introduire les modélisations avec allocation optimale, nous illustrerons la dynamique discrète par un cas mixte très simplifié, directement inspiré des résultats du même type en prestations définies de Boulier et Dupré (2002).

Modélisation statique de fonds de pension

Si, dans la modélisation discrète, nous allons insister sur la synthèse des différentes méthodes existantes, afin d'éviter une répétition ou une disparité, nous allons, dans la modélisation statique, traiter uniquement de l'allocation stratégique

optimale. Nous présenterons les principaux courants en la matière et choisirons une forme simple pour les illustrer. Nous userons ainsi d'une évaluation du passif respectueuse des règles comptables généralisées, et empruntée à la modélisation discrète pratique.

Temps continu

Dans la modélisation continue, en sus de la synthèse, nous développerons toutes les extensions logiques en vue de rapprocher autant que possible la modélisation continue des pratiques jusqu'ici réservées à la modélisation discrète. Ainsi, comme en modélisation statique, nous évaluerons le passif d'un portefeuille de fonds de pension aussi bien dans les règles comptables, pratiques et assuranciennes que dans les règles de la théorie financière.

Nous perpétons la règle qui veut que le marché compte au moins trois types d'actifs (voir par exemple Devolder et Hainaut 2006, Menoncin et al. 2003, Deelstra et al. 2002, Cairns et al. 2004) : le cash, l'obligation et les actions. Au delà des éléments classiques présents dans une étude de portefeuille de fonds de pension, nous userons d'un processus de salaire collectif qui n'est autre que l'agrégation des salaires individuels de la population du fonds. Seront également présents dans la modélisation : un taux d'inflation, un indice des prix de consommation et une obligation indexée sur l'inflation des prix.

En illustration, nous extrairons différents résultats respectant les principaux critères d'optimisation et de représentation des portefeuilles de fonds de pension de la littérature.

Table des figures

1.1	Organigramme du système des régimes de retraite de base en France	18
1.2	Parts de la population française par groupes d'âges en 1950 et 2006 (source : INSEE)	31
1.3	Parts de la population française par groupes d'âges en 2000 et 2005 (source : Eurostat)	32
1.4	Variations pondérées sur les variations françaises des parts des pensions sur les Pib en Europe de 1990 à 2006 (source : EUROSTAT)	45
1.5	Variations du PIB et des dépenses de retraites dans quelques pays d'Europe	46
1.6	Taux de fécondité de quelques pays membres de l'O.C.D.E.	47
1.7	Taux de fécondité des pays membres de l'O.C.D.E, pondérés sur le taux français	48
1.8	Ratio de dépendance de quelques pays membres de l'O.C.D.E (sources : O.C.D.E.)	49
1.9	Ratio de dépendance des pays membres de l'O.C.D.E, pondérés sur le cas français (sources : O.C.D.E.)	50
1.10	Évolution des espérance de vie à la naissance en O.C.D.E de 1960 à 2003 ; avec cas Français (sources : O.C.D.E.)	51
1.11	Évolution des espérance de vie à la naissance en O.C.D.E de 1960 à 2003 ; avec pondération sur le cas Français (sources : O.C.D.E.)	52

1.12	Taux d'accroissement de la population mondiale de 1995 à 2003 avec pondération sur la valeur initiale (sources : O.C.D.E.)	52
1.13	Accroissement de la population en O.C.D.E. de 1995 à 2003 avec pondération sur la valeur initiale et le cas Français (sources : O.C.D.E.)	53
3.1	Variances des pensions en cotisations définies en quelques valeurs de tolérances et de la cotisation en prestations définies	108
3.2	variations de la pension annuelle moyenne à différentes valeurs de la tolérance en cotisations définies et de la cotisation en prestations définies	109
4.1	Variation de l'allocation optimale sur l'actif risqué en statique, en fonction du poids du passif	135
4.2	Variations de la rentabilité du surplus en fonction du poids du passif	136
4.3	Variations du surplus optimal en fonction du poids du passif	137
4.4	Probabilités d'avoir un surplus négatif ou plus petit que l'initial en fonction du poids m du passif	139
3.1	simulation de r et i en valeurs journalières par jour ouvré sur 80 ans et suivant un processus d'Ornstein Uhlenbeck	232
3.2	simulation sur 80 ans du cash nominal et réel et du Prix	233
3.3	Simulations sur 80 ans en jours ouvrés d'un actif risqué en nominal et en réel	237
3.4	simulation des zéro-coupons indexé et non sur 80 ans d'échéance	238
3.5	simulation des salaires, des pensions en prestations définies, et cotisations en cotisations définies	240
3.6	simulation des cotisations d'équilibre en prestations définies et pensions d'équilibre en cotisations définies	242
3.7	simulation des revenus avant et après la retraite	244

3.8	Simulation des cotisations et pensions définies et d'équilibre	246
3.9	Simulation du passif du fonds en prestations définies	247
3.10	Simulation du passif du fonds en cotisations définies	248
11	Simulation de l'allocation optimale en actifs risqués et de la richesse nominale en horizon fini de 60 ans	256
12	Simulation de l'allocation optimale en actif risqué et de la richesse réelle en horizon fini de 60 ans	258
13	Simulation de l'allocation optimale en actif risqué et de la richesse en numéraire du passif en horizon fini de 60 ans	259
14	Cas de majoration de la probabilité de ruine avec un seuil égal à 5% de la richesse initiale	265
15	Cas de minoration de la probabilité de ruine avec un seuil égal à 10 fois la richesse finale	266
16	Probabilité de ruine à des seuils différents	268
17	Simulations en PD et horizon libre sur 60 années	276
18	Simulations en CD et horizon libre sur 60 années	277
19	Simulations en PD, numéraire des prix et Horizon libre sur 60 années	278
20	Simulations en numéraire des prix et Horizon libre sur 60 années . .	279
21	Simulations en numéraire du passif et Horizon libre sur 60 années .	280
22	Simulation en numéraire du passif et Horizon libre sur 60 années . .	281

Première partie

Organisation et introduction à la modélisation des systèmes de retraites

Introduction

L'organisation comme la modélisation des systèmes de retraites sont tous deux des sujets très vastes comportant de nombreux aspects mais reliés néanmoins par un thème unique : la gestion des retraites. Pour les présenter, nous procéderons à un morcellement en restant sur le point commun de la gestion des retraites et en commençant par une analyse des types d'organisations.

Introduction à la présentation des systèmes de retraites

La présentation des systèmes de retraites passera par une analyse de leur dissemblances et ressemblances. Il sera également question des difficultés de gestion et des risques liés aux différents types de systèmes de retraites.

Dissemblances

Une grande disparité caractérise les différentes formes de systèmes de retraites existantes dans le monde. Ainsi un système de retraites peut fonctionner par capitalisation plutôt que par répartition ou être financé par des allocations de l'État au lieu de cotisations sur salaires par exemple. Un système peut même revêtir un caractère universel avec une pension forfaitaire de base tandis qu'un autre servirait une pension liée au travail fourni. Une multitude de traits caractérise un système

de retraites donné et le différencie d'un autre. Il peut s'agir entre autres :

- du mode de financement ;
- du type de gestion ;
- ou encore, de la qualité de la couverture comprenant la forme des conditions d'éligibilité.

En règle générale, la plus grande couverture géographique homogène d'un système de retraites, se situe institutionnellement, à l'échelle nationale. Quelques rares fois, l'homogénéité de la couverture, se limite à des niveaux communautaires plus modestes. Cependant, des regroupements de tendances s'observent entre pays, autour de principes fondamentaux comme la répartition, la capitalisation, la subvention ou l'universalité des pensions.

Ressemblances

Les pays d'un groupe rassemblant une ou plusieurs tendances communes, sur leurs systèmes de retraites, partagent toujours au moins une particularité, qui peut être d'ordre géographique (proximité frontalière), économique voire historique.

Un regard, même superficiel, révèle tout de suite que les principes fondamentaux sont rarement exclusifs, mais cohabitent souvent en tant que ressources complémentaires de la pension.

Une des constantes les plus répandues est le système de la répartition. Ce principe se présente en plus ou moins grande proportion dans le système global d'un régime de retraite donné. Souvent, c'est un pilier obligatoire complété s'il y a lieu par d'autres formes de capitalisation. C'est le cas dans des pays comme la France, le Portugal, la Grèce, l'Espagne, la Suède ou l'Italie où la répartition constitue la principale forme de retraite sur un, voire deux piliers, et est complétée par des régimes obligatoires ou libres de capitalisation. Parfois, c'est la capitalisation qui prédomine à côté d'un mince filet de sécurité de base, souvent forfaitaire et ma-

jointement obligatoire et en répartition. On trouve ce système dans des pays comme l'Australie, le Canada, les Etats-Unis, les Pays Bas, le Japon, la Suisse ou le Royaume Uni.

En Allemagne les deux formes se partagent à parts égales le système, tandis que certains pays comme le Chili ou le Mexique, ont adopté un système complètement capitaliste. Dans la majorité des pays d'Afrique et d'Asie, seuls quelques privilégiés profitent de l'unique système de retraites par répartition de l'État. Pour le reste de la population (privé, paysans, artisans ou inactifs), rien n'est prévu ou alors ce qui existe est mal adapté aux réalités sociales.

Difficultés et risques

Si les retraites des pays en voie de développement souffrent du manque d'organisation sur fond de pauvreté généralisée, les difficultés dans les pays développés sont d'ordre démographique. En effet, l'évolution démographique des pays ayant en moyenne un niveau de vie élevé tend unanimement vers un vieillissement croissant de la population. Cette morphologie démographique si elle n'est pas prise en compte tôt, est un péril sérieux pour toutes les formes de retraites, qu'elles soient par répartition ou par capitalisation.

Des risques autres que démographiques, menacent les retraites par capitalisation. Notamment, les risques spécifiques au marché rémunérateur des pensions. Pour contrer ces risques, des modèles de gestion sont développés.

Introduction à la modélisation discrète

Avant d'aborder la modélisation, nous présenterons d'abord l'importance du choix de la chronologie.

Modélisation et choix de la chronologie

La modélisation de fonds de pension, comme toute modélisation, distingue deux types, quelle que soit la manière de prise en compte de l'écoulement du temps. Ainsi, il est possible d'opposer la forme chronologique dynamique à la forme chronologique statique. Un autre choix chronologique pourrait consister en une séparation en distribution discrète ou en distribution continue du temps.

Formalisme chronologique	Temps discret	Temps continu
Dynamique	Dynamique discrète	Dynamique continue
Statique	Formalisme monopériodique	

La formalisation dynamique compte la dynamique discrète et la dynamique continue. Par ailleurs, le temps discret englobe la statique et la dynamique discrète, tandis que le temps continu concerne uniquement la dynamique continue.

En substance donc, quelque soit la vision chronologique retenue, on distinguera formellement trois cas :

1. La statique.
2. La dynamique discrète.
3. Le temps continu.

En modélisation discrète, le temps est alors subdivisé en périodes mesurables par unités de temps. Lorsqu'il n'y a qu'une période, on parle de modèle monopériodique ou statique, et pour plusieurs périodes voire une infinité, nous sommes dans le cadre des modèles dynamiques discrets.

Dans le monde réel, le temps "s'écoule" de manière fluide et continue. Mais matériellement, nous ne disposons pas de données économiques ou autres, de façon aussi fluide. Les données sont nécessairement, par unité du temps comme par exemples en secondes, en jours, mois ou années. Même si nous pouvons théoriquement définir une entité économique en temps continu, dans la pratique, sa mesure ou son application se fait inévitablement en une unité dénombrable. C'est ainsi que les modélisations en fonds de pension sont *dans la pratique*, discrètes même si en théorie les modèles continus existent et apportent une importante contribution à la compréhension et même à la mise en pratique, des techniques de gestion.

Par formalisation, la statique pourra être considérée comme un cas particulier de la dynamique discrète par réduction du nombre de périodes à l'unité. Il est aussi concevable de considérer le temps continu comme un cas particulier de la dynamique discrète où le pas de la période tendrait vers le nul. Mais cette dernière conception est moins évidente aussi bien en pratique qu'en théorie puisque la limite vers zéro demande des calculs mathématiques supplémentaires tandis que la réduction du nombre de périodes, réduit ces calculs.

Pour ces raisons nous opterons pour une subdivision en deux grandes parties :

Le temps discret, ce temps comprendra la dynamique discrète suivie de son cas particulier qu'est la statique.

Le temps continu.

Modélisation dynamique discrète

La modélisation discrète de fonds de pension, fournit de nombreux moyens permettant la gestion du portefeuille sous différents aspects. Nous pouvons séparer les aspects abordés en deux tendances :

- d’une part, nous distinguons les développements liés à l’élaboration même des modèles.
- Et d’autre part, nous rassemblons les développements sur le contrôle et la gestion du fonds sachant que ce contrôle utilise les éléments et les règles de l’élaboration précédente.

Parmi les aspects liés à l’élaboration des modèles, nous avons, entre autres, la modélisation des taux d’intérêts et actuariels. Le plus souvent, en dynamique discrète, les taux sont soit constants (Aitken 1994, Cairns n.d.), soit modélisés en processus stochastiques simples (Dufresne (1989) ,Cairns (1994), Cairns (n.d.) ou Haberman (1992)), ou en processus auto-régressifs (Haberman 1994, Owadally 1998).

La problématique la plus abordée en contrôle de gestion aussi bien en pratique qu’en théorie reste de manière très simplifiée : l’ajustement en prestations définies, des cotisations ou du niveau du fonds , en vue de corriger le manque ou le surplus par rapport aux valeurs espérées, attendues ou précédentes. Cet exercice d’ajustement se fait par plusieurs méthodes possibles dont nous verrons les principales. Bien des auteurs dont Dufresne (1989), Cairns (1994), Cairns (n.d.) et Devolder et Goffin (2006), se sont prêtés à cette régulation du processus de manque/surplus du fonds de pension en prestations définies. C’est aussi le principal aspect développé en thèse par Owadally (1998). Nous pouvons encore citer l’ouvrage de Aitken (1994), qui traite également et de manière très étendue du sujet, en prestations définies toujours.

Mais d’autres aspects comme l’efficience des périodes d’ajustements, sont abordés par Haberman (1992) ou Owadally (1998). Zimbidis et Greece (2002), traitent en dynamique discrète, les coûts ou frais de transaction tout en résolvant le choix du portefeuille. Le choix du portefeuille est également résolu par Haberman (1992) et Owadally (1998) avec une désutilité quadratique. Boulier et Dupré (2002) ont

également tiré une allocation optimale en dynamique discrète mais avec une expression très simplifiée du passif et du niveau du fonds.

Modélisation statique

En statique également, le choix du portefeuille a été développé notamment par Wilkie (1985) ou par Leibowitz et al. (1992). Wilkie (1985) s'est intéressé au portefeuille efficient maximisant l'espérance et minimisant le prix (coût en l'occurrence) tout en couvrant exactement le passif. Les développements de Leibowitz et al. (1992) sont repris par Boulier et Dupré (2002) et Boulier et al. (1993).

Ces auteurs, plutôt que de se cantonner aux cadres du modèle désormais classique d'optimisation en statique de Markowitz (1952), par minimisation du risque incarné par la variance du portefeuille, rajoutent des contraintes de rentabilités, à la fois sur le portefeuille et sur le surplus. C'est l'optimisation duale par contraintes de rentabilités espérées ou "dual shortfall". Ainsi, pour les portefeuilles vérifiant les contraintes de rentabilité du portefeuille dans le plan rentabilité-risque, ils trouvent un demi-plan supérieur de l'espace, délimité par une droite. Au même moment, pour les portefeuilles vérifiant les contraintes de rentabilité du surplus et aussi l'efficacité du portefeuille au sens de Markowitz, ils tirent l'intérieur d'un ovoïde centré sur le portefeuille immunisant le passif. De l'intersection des deux figures, ils tirent le portefeuille optimal vérifiant à la fois toutes les contraintes de rentabilité et les critères d'efficacité du marché.

L'approche de Sharpe et Tint (1990) propose une diversification du portefeuille monopériodique par une optimisation maximisant l'espérance de gain tout en réduisant le risque ou variance du même gain, en tenant compte en plus d'un facteur psychologique de perception ou de goût du risque.

Structure de la partie

Dans le prochain chapitre, nous présenterons les différents systèmes de retraites dans le monde à travers leur fonctionnement, en insistant sur le cas français et les influences démographiques que subissent ces systèmes. Dans le chapitre suivant, nous irons voir les risques liés aux retraites par capitalisation et les modèles de gestion de ces risques.

Nous introduirons ensuite dans un autre chapitre, la modélisation des caisses de retraites en présentant les différentes formes de modélisations pratiques et courantes, en dynamique discrète. Les principes issus des pratiques courantes de la dynamique discrète, seront approfondis en modélisation dynamique continue dans la seconde partie de la présente thèse . Nous finirons ce chapitre par le contrôle de l'actif du fonds de pension avec une structure très simplifiée en dynamique discrète et mixte, issue des développements en prestations définies de Boulier et Dupré (2002).

Nous illustrerons enfin et dans un dernier chapitre consacré à cette partie, une optimisation par un critère d'utilité sur le surplus, en statique et prestations définies. Cette modélisation reprend la structure du marché semblable à celle de Leibowitz et al. (1992) et une forme d'utilité proche de Sharpe et Tint (1990).

1

Organisation des systèmes de retraites

Un rapport de l'espace social européen (Moreau 2000), fustige la mauvaise gestion des retraites partout dans le monde. Ce rapport nous montre que les systèmes de retraite des pays *nantis*, sont menacés par le vieillissement croissant des populations, tandis que, les pays en voie de développement, avec une population très jeune, ont cependant une sérieuse carence de structures des systèmes des retraites. Par ailleurs, la pauvreté est un facteur aggravant supplémentaire, des conditions des personnes âgées.

Il est en effet indéniable que la démographie est un facteur important dans tout système de pension, mais comme nous le verrons, elle est loin d'être le seul facteur de réussite ou d'échec.

Un grand nombre d'éléments et principes, entre en jeu dans le fonctionnement parfois hautement complexe des systèmes de retraites. Chaque facteur constitutif du système de retraites, a sa part d'influence voire de conséquence, sur la qualité des pensions.

Nous allons, dans un premier temps, aborder les principes pouvant régir le fonc-

tionnement de systèmes de retraites avant de proposer une vue séparée du fonctionnement et des difficultés des différents systèmes de retraites en nous attardant plus en profondeur sur le système français.

1.1 Principes de la retraite

Les très nombreuses formes de retraites existantes sont des combinaisons de principes de base. Chaque principe est lié à une ou plusieurs des trois phases du fonctionnement d'une retraite, à savoir le financement, la gestion et la redistribution. Ainsi, par exemple, le financement compte les financements par subventions ou par cotisations, sachant que d'un système à l'autre les types de subvention ou de cotisation diffèrent dans les détails. En gestion, nous pouvons inclure les retraites gérées par répartition et celles par capitalisation. La redistribution, quant à elle, concerne les versements de pensions sous forme de capital unique ou sous forme de rentes. Les rentes peuvent être viagères, temporaires ou combinées, parfois optionnellement, avec le versement d'un capital.

1.1.1 Principes de subvention et de répartition

Nous présenterons d'abord le principe de la subvention avant celui de la répartition.

Subvention

Lorsque les retraites sont financées par subvention, l'organisme alloueur paie les retraites à partir de ressources propres non spécifiquement pré-destinées aux retraites. Il peut s'agir, par exemple, d'un État payant gracieusement les retraites à une certaine catégorie qualifiée de la population à partir d'impôts divers.

Répartition

Le principe de la répartition est fondé sur la solidarité entre générations. La génération actuelle d'actifs supporte les coûts de pension des générations précédentes, actuellement en retraite. Les sommes cotisées par les individus actifs sont aussitôt reversées aux retraités du moment. Le mode de calcul des cotisations comme des droits de pension, varie d'une caisse à l'autre.

1.1.2 Principe de retraites par Capitalisation

Une caisse de retraite par capitalisation ou fonds de pension est définie par l'association de trois activités :

- i) : cotisation
- ii) : investissement
- iii) : prestation

L'activité de cotisation ou de contribution est caractérisée par l'alimentation du fonds par les futurs retraités, par l'entreprise ou par les deux selon les clauses. Il n'est évidemment pas exclu que le fonds soit financé par subvention, même si ce cas de figure est assez rare en capitalisation.

L'activité de prestation est, quant à elle, désignée par les versements des pensions aux retraités, sous forme de capital ou de rente viagère, toujours selon les clauses. Enfin, l'activité d'investissement concerne la gestion du fonds, en vue d'atteindre les objectifs. Il s'agit en fait d'investissements du capital cotisé en actifs adéquats. Dans le déroulement chronologique, les activités (i) et (iii) se croisent rarement¹.

Il n'y a de cotisation que durant la période d'activité professionnelle, et de pensions que durant la retraite. L'investissement, quant à lui, est très généralement commun aux deux autres périodes. Dès le versement de la première cotisation, celle

¹Dans les cas de semi retraite, avec par exemple une activité réduite, l'individu cotise à travers son activité et en même temps perçoit sa rente de retraite due pour le travail antérieurement fourni.

ci est placée sur des actifs du marché financier. Sur toute la vie du fonds, il y a investissement et ceci jusqu'au versement de la dernière pension.

Lorsque les cotisations sont pré-établies par clauses, on parle de fonds à cotisations définies. Pour des pensions promises d'avance, il s'agira de fonds à prestations définies.

1.1.3 Autres principes et caractéristiques des systèmes de retraites

À côté de ces principes fondateurs, existent d'autres principes tout aussi importants, comme par exemple le principe de l'universalité des pensions ou le principe de la relativité des pensions par rapport au service. Nous en énumérons quelques uns des plus courants.

Principe des pensions liées au service : dans ce principe, les pensions versées sont nécessairement liées d'une manière ou d'une autre, au service fourni avant la retraite. Le lien peut être par exemple le prorata de la durée de service ou des revenus reçus du service.

Principe de la neutralité actuarielle : ce principe tente de respecter la *justesse* de la pension à percevoir par rapport à la somme cotisée. Il prend en compte l'évolution des environnements aussi bien économiques qu'humains. Ainsi pour chaque individu, les sommes cotisées sont capitalisées à l'âge de la retraite et avec un taux adéquat. Ce capital sert ensuite à déterminer la pension en tenant compte, d'une part, de la probabilité de survie de l'individu à chaque date de versement, et d'autre part, de l'indexation des pensions sur une valeur déterminée¹.

Principe de test : avec ce principe, l'éligibilité au droit à la pension est sujette à

¹Généralement les salaires ou les prix des produits de consommation.

un test, celui des revenus par exemple, par rapport à un standard défini. Ainsi, très couramment, les individus disposant de revenus moindres par rapport à un niveau précis, reçoivent la pension qui est alors généralement une pension sociale.

Principe d'universalité : par opposition au principe de lien au service, les pensions sont ici, sans aucun rapport avec le service rendu des individus qualifiés.

Principes d'obligation ou de volontariat : il s'agit de la possibilité de volontariat ou de l'obligation faite aux individus assurés, à leurs employeurs voire aux ayants droit, d'adhérer à une caisse de retraites. La caisse peut être précise dans certains cas.

Principe de reversion : ce principe prévoit dans des cadres précis, une reversion de la pension aux ayants droit.

Principe de calcul par points : dans certaines caisses, les pensions s'évaluent par l'acquisition et la liquidation de points ayant des valeurs d'achat et de liquidation différentes et souvent indexées.

Caractère de l'âge : l'âge est un caractère important dans les clauses des systèmes de retraites. Particulièrement l'âge de liquidation qui est globalement entre 50 et 70 ans et majoritairement autour des 65 ans, est une donnée essentielle tant pour les assurés que pour les assureurs.

Caractère privé ou public : ce caractère renseigne sur la nature privée ou publique de la caisse. Mais il convient de noter qu'une caisse privée peut gérer des pensions du public. C'est souvent le cas des fonds de pension avec affiliation obligatoire de personnels du public.

Caractéristique de la couverture : la couverture d'un système peut se déterminer sous des conditions diverses qui peuvent être d'âge, de service, de résidence ou de nationalité, selon le type ou la nature de la caisse. C'est une

mesure de la qualité de la caisse, notamment lorsqu'il s'agit d'une caisse à envergure nationale.

Caractéristique du taux de remplacement : il est aussi une mesure, mais de la qualité de la pension offerte. C'est le rapport de la pension sur les revenus antérieurs. Souvent on le limite à la première pension sur le dernier revenu de travail avant la retraite.

Outre le grands nombre de principes, de caractères ou de caractéristiques à prendre en compte, la difficulté d'étudier un ensemble de systèmes de retraites est d'avantage accrue par le fait que chaque système est souvent organisé en combinaison unique de plusieurs de ces éléments.

S'il est impossible de trouver deux systèmes de retraites en tous points identiques, il est heureusement possible de regrouper les différents systèmes de retraites par groupes ayant des tendances similaires. Ces groupes peuvent se réunir par zones géographiques ou par nations ayant un point historique fort, une culture ou une économie semblables.

Nous commençons la revue des systèmes de retraites dans le monde par zones géographiques avec le cas français.

1.2 Organisation du Système français de retraites

Le système de retraites français est essentiellement par répartition, avec néanmoins quelques dispositifs de retraites par capitalisation.

1.2.1 Présentation de la retraite par répartition en France

En France, l'essentiel de la retraite est géré par répartition . L'organisation de cette répartition se fait par régimes classables en quatres grandes catégories comprenant chacune en général un régime de base et un régime complémentaire :

- les régimes des salariés du secteur privé,
- les régimes des salariés du secteur public (fonctionnaires, État),
- les régimes spéciaux des salariés de secteurs parapublics (collectivités locales, entreprises publiques ou parapubliques, entreprises à services publics,...),
- les régimes des non-salariés (artisans, commerçants, professions libérales et agriculteurs).

D'après la Caisse Nationale de l'Assurance Vieillesse (CNAV)¹, la couverture de ces régimes en 2005 serait de près de 70,74% des actifs pour les régimes des salariés du privé et de 19,57 % pour les régimes du secteur public (fonctionnaires et régimes spéciaux) et le reste 9,69% des actifs regroupe les adhérents des régimes des non salariés. La Caisse Nationale de l'Assurance Vieillesse (CNAV) est l'organisme chargé de gérer les retraites du régime général de base des salariés du secteur privé.

Régime général de base

Il est rattaché au système global de sécurité sociale et son fonctionnement se décline en trois aspects regroupant son financement, son administration et le règlement des prestations. Nous schématisons ces traits à travers l'organigramme qui suit².

¹Source citée par la CNAV : Commission de compensation, novembre 2005

²Nos principales sources proviennent des sites-internet officiels des différents organismes concernés.

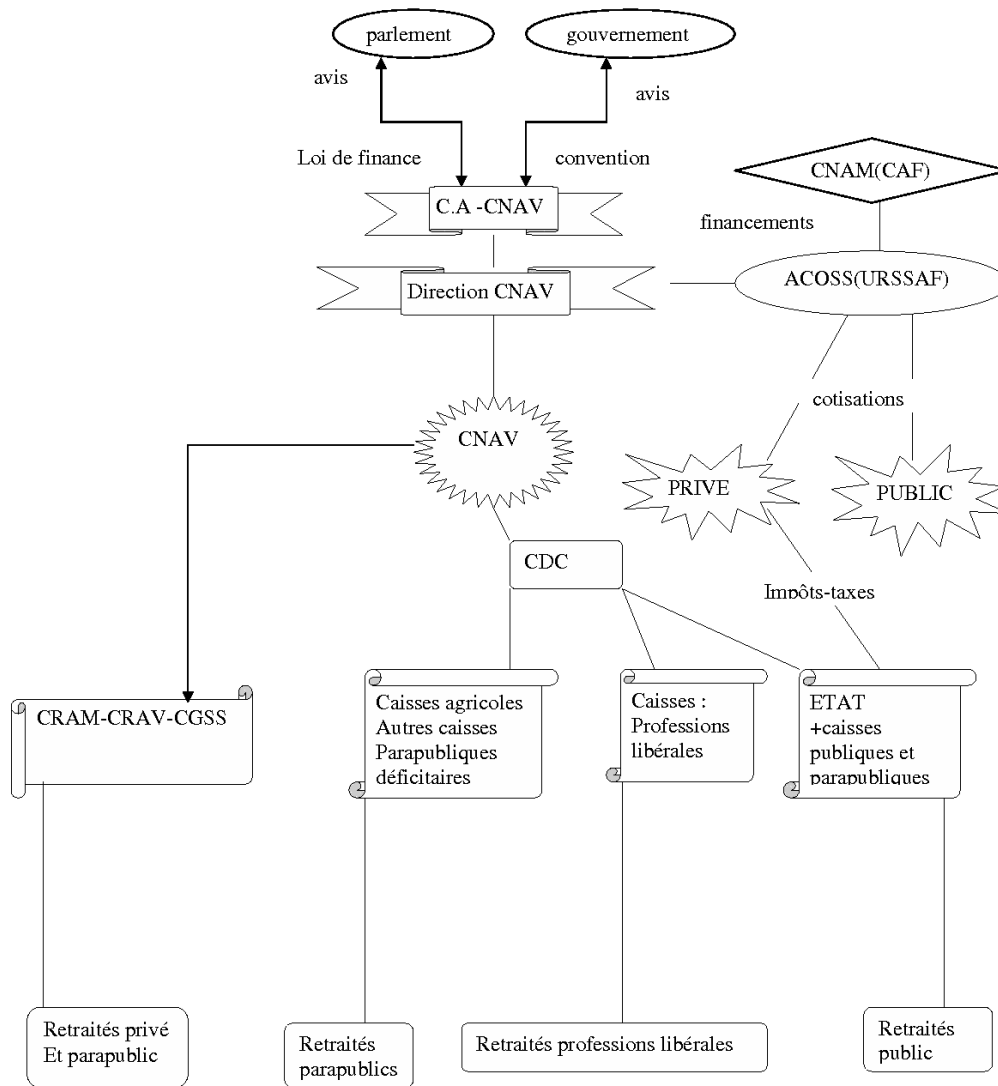


FIG. 1.1: Organigramme du système des régimes de retraite de base en France

L'administration du régime de base : la caisse gérante du secteur privé général de base, est la CNAV.

Au bout de sa chaîne d'administration se trouvent le parlement et le gouvernement. Le parlement donne les orientations par lois de financement annuelles et à travers les commissions telles que la COR (Conseil d'Orientation des Retraites). Le gouvernement à travers ses deux ministères concernés¹, réglemente et contrôle le fonctionnement de la caisse par conventions sur contrats pluriannuels. Le Conseil d'Administration (C.A.) de la Caisse reçoit et avise les lois de financement issues du parlement. Les conseils de surveillances issus du parlement encore, suivent les règles de gestion établies par le gouvernement au niveau des caisses régionales : Caisse Régionale d'Assurances Maladies (CRAM), Caisse Régionale d'Assurances Vieillesse (CRAV) ou Caisse Générale de Sécurité Sociale(C.G.S.S). Enfin le conseil d'administration gère la Caisse par représentation de la direction de la Caisse.

Les régimes de base des catégories non-salariées et du public ont à peu près le même mode d'administration que celui du secteur privé. Les caisses gérantes reçoivent les orientations du parlement et les règlements du gouvernement.

Le financement : les retraites des régimes de base font partie intégrante des risques couverts par le système de sécurité sociale. Les cotisations employeurs et employés sont donc collectées par l'organe financier de la sécurité sociale, l'ACOSS (Agence Centrale des Organismes de Sécurité Sociale) qui fédère à l'échelon régional les URSSAF (Union de Recouvrement pour la Sécurité Sociale et les Allocations Familiales) et les C.G.S.S. (Caisses Générales de Sécurité Sociale) en Outre-mer² . L'ACOSS / URSSAF rémunère ensuite les branches familles, la CNAM (Caisse Nationale d'Assurance Maladie) qui

¹Le ministère du travail, des affaires sociales et de la solidarité, et le ministère de l'économie, de l'industrie et des finances

²Il y a selon l'ACOSS, 102 caisses (URSSAF) métropolitaines et 8 caisses (C.G.S.S.).

devient à l'échelon régional la CAF (Caisse d'Allocations Familiales), et les branches maladies dont la caisse d'assurance vieillesse (CNAV) gérant les retraites entre autres. La branche vieillesse constitue la deuxième dépense importante de l'ACOSS (25%) après la branche maladie (43%) contre (0.36%) de frais de fonctionnement. Les cotisations vieillesse du régime général sont, d'une manière très simplifiée, de l'ordre de 7% du salaire brut pour le salarié et 10% pour l'employeur¹.

Le règlement des pensions et la compensation : une fois les cotisations récoltées, la caisse paie les retraites suivant un mode de calcul que nous donnerons plus bas. Mais elle verse également à la C.D.C. (Caisse des Dépôts et Consignations) une contribution pour l'équilibre des autres caisses alors déficitaires, au titre de la compensation démographique généralisée. La CNAV résorbe aussi directement le déficit du régime des salariés agricoles.

Le mode d'évaluation de la pension en régime de base, pour un taux plein atteint pour 40 années de service est donné par :

$$\text{pension} = \frac{(\text{salaire annuel de base} * \text{taux} * \text{durée de cotisation}_{(\text{en trimestres})})}{160} \quad (1.1)$$

Le salaire de base : appelé encore salaire de référence, est une donnée variable selon le régime. Il concerne la moyenne indiciaire² des six (6) derniers mois pour les fonctionnaires du public. Pour le secteur privé, il va de la moyenne

¹L'employé cotise, pour l'assurance vieillesse (veuvage) du régime général, 0.1% contre 1.6% du salaire brut total pour l'employeur. Dans la tranche du salaire brut, inférieure au plafond de la Sécurité Sociale, l'employé cotise pour son assurance vieillesse 6.65% contre 8.3% pour l'employeur. Au total les cotisations du régime général privé de sécurité sociale sont de 20.95% du salaire brut total et de 15.05% de la tranche du salaire brut en dessous du plafond de la sécurité sociale, soit un total de 36% du salaire brut pour un individu gagnant en dessous du plafond. Il faut ajouter, à titre d'information, les contributions sociales obligatoires hors sécurité sociale comme la C.S.G. (7.5%, contribution sociale généralisée) et la C.R.D.S.(0.5%, contribution au remboursement de la dette sociale) sur 97% du salaire brut.

²Selon un indice spécifique de revalorisation des salaires dans la fonction publique.

des 10 aux 25 meilleurs salaires annuels revalorisés selon la génération à considérer. Il était calculé sur la base des 10 meilleures années avant la réforme des retraites de 1993. La réforme harmonise progressivement et à terme, le salaire de base du privé, vers les 25 années, par paliers de générations.

Le taux : applicable au régime de base du privé est de 50% et de 75% pour le public.

La durée de cotisation : en trimestre et plafonnée à 160 pour le privé . Elle était de 150 pour le privé les fonctionnaires et les régimes spéciaux¹, avant les réformes de 1993. Les réformes de 2003 harmonisent progressivement cette durée aux régimes des fonctionnaires et l'adosse même sur l'appréciation de la longévité des seniors.

Depuis les réformes de 2003, des pénalités ou des surcotes peuvent influencer le taux ou la durée de cotisation, selon les situations particulières. Le système de surcote/décote encourage par exemple ceux qui continuent de cotiser au delà de certaines limites telles que les 40 années de cotisations ou les 60 ans d'âge. Il pénalise ceux qui s'arrêtent avant ces limites, selon la génération toujours. Il est à noter qu'il existe un minimum vieillesse pour les individus de 65 ans ou plus ayant des revenus, y compris les retraites, inférieurs à certains niveaux. Il se compose de l'allocation de base et du complément servi par le Fonds de Solidarité Vieillesse (F.S.V). L'allocation de base est gérée par la C.D.C. et atteint un maximum de 2849. 84 euros annuels depuis janvier 2003. Elle est attribuée à toute personne résidant sur le territoire ayant plus de 65 ans (ou 60 ans en cas d'inaptitude au travail) et ayant des revenus annuels inférieurs à 7102 euros pour une personne seule. Le Fonds de Solidarité Vieillesse est financé par différentes ressources dont les impôts sur les sociétés ou au titre de la Contribution Sociale Généralisée (C.S.G.),

¹Avec quelques spécificités au sein d'un même régime, comme les conducteurs de trains qui cotisent 80 trimestres.

mais également en partie par la CNAV. Il verse le complément nécessaire aux retraites ou à l'allocation de base pour atteindre le minimum vieillesse de 7323.49 euros annuels pour une personne seule.

Ce minimum vieillesse est donc une forme de revenu forfaitaire, accordé aux personnes âgées, et commun à de nombreux autres systèmes de retraites à travers le monde, bien qu'il s'y présente sous des formes variées.

Le régime général admet d'autres formes de complémentarités et par le haut cette fois.

Régimes complémentaires

Des régimes obligatoires par répartition, complètent le régime général de retraite de base. Dans le secteur privé, ces régimes sont l'AGIRC (Association Générale des Institutions de Retraite des Cadres) créée en 1947 par convention nationale, et l'ARRCO (Association des Régimes de Retraite Complémentaires) créée aussi par convention nationale en décembre 1961. Depuis fin 1972, une loi généralise ces deux caisses aux affiliés du régime général tandis qu'en 1973, un protocole d'accord élargit l'ARRCO aux cadres. Ces régimes sont à points et valorisés sur le coût de la vie.

Les cotisations sont de l'ordre de 7.5% du salaire dans la tranche inférieure au plafond de la sécurité sociale¹. Dans cette tranche, les cotisations cadres ou non-cadres sont toutes versées à l'ARRCO. Dans les tranches de salaires au delà du plafond de la sécurité sociale, la cotisation prélevée passe à 20% du salaire et elle est alors versée à l'ARRCO pour les non cadres, et à l'AGIRC pour les cadres. Mais seules 80% de ces cotisations sont génératrices de points retraites. Le point s'évalue par division des 80% de la somme prélevée, par la valeur d'achat (appelée salaire de référence) du point de l'année en cours. Pour les retraités, les points ARRCO

¹Ce plafond était pour 2006, fixé à 31068 euros annuels

et AGIRC accumulés sont convertis en pensions par simple multiplication de ces points par la valeur de vente du point¹. Les cotisations sont de 60% employeurs et 40% employés. En somme, le total des cotisations vieillesse sur les deux piliers de la répartition française² sont de l'ordre des 10% du salaire brut pour le salarié et 15% pour l'employeur, dans le secteur privé.

Mais à côté de ces caisses complémentaires, existent encore plusieurs autres caisses complémentaires par répartition, malgré la volonté des législateurs d'unifier toutes les caisses. Ces caisses complètent les régimes de base des professions libérales et les régimes spéciaux. Nous comptons entre autres l'IRCANTEC (Institution de Retraite Complémentaire pour des Agents Non Titulaires de l'État et des Collectivités publiques), la C.R.P.N.A.C. (Caisse de Retraite du Personnel Navigant de l'Aviation Civile) ou la C.G.R.C.E. (Caisses Générales de Retraite des Caisses d'Épargne).

Nous reproduisons les tableaux suivants à partir de tableaux produits par la CNAV et récapitulant les différentes caisses de retraites obligatoires françaises.

SALARIÉS	RÉGIMES DE BASE	RÉGIMES COMPLÉMENTAIRES	
industrie, commerce et services	CNAV	<i>ARRCO</i>	<i>AGIRC</i>
Agents non titulaires de l'État		IRCANTEC	
entreprises à statut particulier		caisses diverses	
Secteur public et para-public	régimes spéciaux de sécurité sociale		
Personnel de l'agriculture	MSA	<i>ARRCO</i>	<i>AGIRC</i>

¹Pour indications : les valeurs en 2006, du point sont de 1,1287euros à la vente et de 13,0271euros à l'achat

²Régime général de base (CNAV) et complémentaires (ARRCO/AGIRC).

MSA : Mutualité Sociale Agricole

Parmi les diverses caisses complémentaires obligatoires des salariés des entreprises à statut particuliers nous pouvons citer : la C.N.R.C.C. (Caisse Nationale de Retraite des Chambres de Commerce et d'industrie), la CREPA (Caisse de Retraite du Personnel des Avocats et des avoués), la C.R.P.C.C.M.P.A . (Caisse de Retraite des Personnels des Chambres de Commerce Maritimes et des Ports Autonomes)ou la C.R.P.N.A.C. ou C.R.P.N.P.A.C (des navigateurs de l'aéronautique civil).

TAB. 1.1: Tableau récapitulatif des différentes caisses de retraites non salariés en France

NON-SALARIÉS	RÉGIMES DE BASE	RÉGIMES COMPLÉMENTAIRES
Exploitants agricoles	MSA	Régimes facultatifs
Artisans	Cancava	
Commerçants et industriels	Organic	Régimes facultatifs
Professions libérales	CNAVPL et CNBF	
Religieux	Cavimac	

Avec :

Cancava : Caisse Autonome Nationale de Compensation de l'Assurance-Vieillesse Artisanale

Organic : Organisation Autonome nationale d'assurance vieillesse de l'industrie et du commerce

Cavimac : Caisse Mutuelle d'Assurance-Vieillesse et Invalidité des Cultes

Cnavpl : Caisse Nationale d'Assurance-Vieillesse des Professions Libérales

C.N.B.F. : Caisse Nationale du Barreau Français

Nous remarquons que les caisses complémentaires de certaines branches comme les commerçants sont facultatives. Par ailleurs, les prestations des caisses des

branches libérales sont si faibles que ces branches ont bénéficié de mesures spéciales pour accéder aux retraites complémentaires par capitalisation en 1994. Il s'agit des retraites des contrats *Madellin* et *exploitants agricoles*.

1.2.2 Présentation de la retraite par capitalisation en France

La capitalisation en France est facultative et seulement sur-complémentaire des régimes de base et régimes complémentaires. Les premières caisses concernaient la fonction publique, la C.R.H. (Caisse de Retraite du personnel Hospitalier) créée en 1963 ou le FONPEL (Fonds de Pensions des Élus Locaux) mis en place en 1967. Comme les caisses de retraites par répartition, les caisses de retraite par capitalisation s'organisent par branches professionnelles, exception faite des dernières caisses apparues en 2004, par les réformes d'août 2003. Ce sont :

- le PERP (Plan Épargne Retraites Populaire),
- le PERCO (Plan Épargne Retraites Collectif),
- ou le PERE (Plan Épargne Retraites Entreprise).

Pour tous les types de retraites par capitalisation, il existe des incitations fiscales, soit à la cotisation, soit au versement de la pension. Par ailleurs, la majorité est de type entreprise, avec parfois une mise en place au sein de l'entreprise d'un abondement de l'employeur sur les cotisations.

Les rentes sont également par capital unique ou viagères, parfois de manière exclusive.

Par contre, seul le contrat dit **”article 39”** du code général des impôts, est en prestations définies. Mais la condition liée à ce contrat, est que l'employé reste dans l'entreprise souscrivante, jusqu'à sa retraite. Il existe aussi un Fonds de Réserve des Retraites (F.R.R.), mis en place en 1999, pour alimenter et compléter les retraites de caisses de régimes de base, dont celle du régime général (CNAV), entre 2020 et 2040. Il est prévu de l'alimenter par une partie du surplus des caisses de retraites

et aussi à travers une part du produit des privatisations de l'État.

Nous récapitulons les principaux types de fonds de pensions, existant dans le paysage français, avec leurs principales caractéristiques, sachant que le COREM est le Complement de Retraite Mutualiste .

Nos principales sources étant la DREES(Direction des Recherches des Études de l'Évaluation et des Statistiques) et la CNAV.

TAB. 1.2: Tableau récapitulatif des différentes caisses de retraites par capitalisation en France

Caisse de retraites par capitalisation	avantages fiscaux	population cible	type	observations
height C.R.H.	déductibilité fiscale des cotisations au titre des revenus	personnel hospitalier hors médecins (public)	cotisations définies, régime à points, rentes non viagères	créé en 1963
FONPEL	rentes exonérables d'impôts	élus locaux (public)	cotisations définies, régime à points, rentes viagères	créé en 1993
PREFON	déductibilité fiscale des cotisations au titre des revenus	fonctionnaires (public)	cotisations définies, régime à points, rentes viagères	créé en 1967
COREM	déductibilité fiscale des cotisations au titre des revenus	public puis tout public	cotisations minimales définies, régime à points, rentes viagères	créé en 1949
<i>Suite à la page suivante...</i>				

<i>suite du tableau</i>					
Caisse de retraites par capitalisation	avantages fiscaux	population cible	type	observations	
F.R.R	—	(public)	sur-complémentaire en prévision de déficit, prestations définies	créé en 1999 et modifié en 2001	
article 39	exonérabilité fiscale entreprise (CSG, CRDS)	tout public, contrat entreprise	prestations définies, rentes viagères	modifié en 2003	
article 83	exonérabilité fiscale entreprise	tout public, contrat entreprise	cotisations définies, rentes viagères	modifié en 2003	
"CONTRAT MADELIN"	déductibilité fiscale des cotisations au titre du bénéfice	professions libérales	cotisations définies	créé en 1994	
"exploitants agricoles"	cotisations défiscalisées	exploitants agricoles	cotisations définies	créé en 1997	

Suite à la page suivante...

<i>suite du tableau</i>						
Caisse de retraites par capitalisation	avantages fiscaux	population cible	type	observations		
PERP	déductibilité fiscale des cotisations au titre des revenus	tout public	cotisations et prestations non définies	créé en 2003		
PERCO	déductibilité fiscale des cotisations	tout public, contrat entreprise	cotisations et prestations non définies	créé en 2003		
PERE	déductibilité fiscale des cotisations	tout public, contrat entreprise	cotisations et prestations non définies	créé en 2003		

1.2.3 Difficultés et réformes de la retraite française

Du fait de la morphologie de la population française, toutes les caisses, qu'elles soient par répartition ou par capitalisation, connaissent ou connaîtront à un moment ou à un autre, des difficultés, qui conduisent souvent à des réformes de leurs structures. Il est désormais bien connu, que la population française vieillit. D'une part, la durée de vie moyenne s'allonge et d'autre part, la natalité cumulée au solde migratoire ne suffisent plus au renouvellement de la population. En effet à partir de données combinées de l'INSEE (Institut National de Statistiques et d'Études Économiques) et de EUROSTAT (office statistique des communautés européenne), nous établissons que, pendant que la part de la population jeune de moins de 20 ans connaît une baisse de 17,88% entre 1950 et 2006 la part de la population entre 20 et 59 ans stagne avec une petite hausse de 1,306%. La part de la population des seniors de plus de 60 ans, grimpe elle de 29% avec une hausse de 115,8% pour les seuls seniors de plus de 75 ans.

années	moins de 20 ans	de 20 à 59 ans	60 ans ou plus	dont 75 ans ou plus
1950	30.2%	53.6 %	16.2%	3.8 %
2006	24.8%	54.3%	20.9 %	8.2%

tableau des parts de la population par générations (source : INSEE)

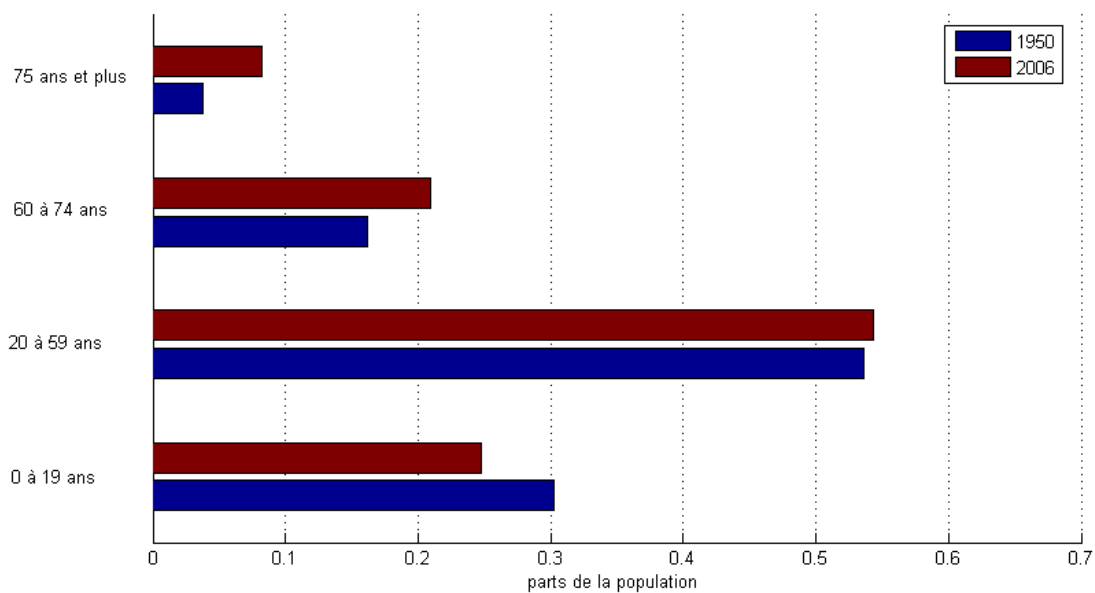


FIG. 1.2: Parts de la population française par groupes d'âges en 1950 et 2006 (source : INSEE)

Ces tendances se confirment, même lorsque nous regardons la structure plus détaillée encore de la population française par âges sur des périodes plus rapprochées comme 2000 et 2005.

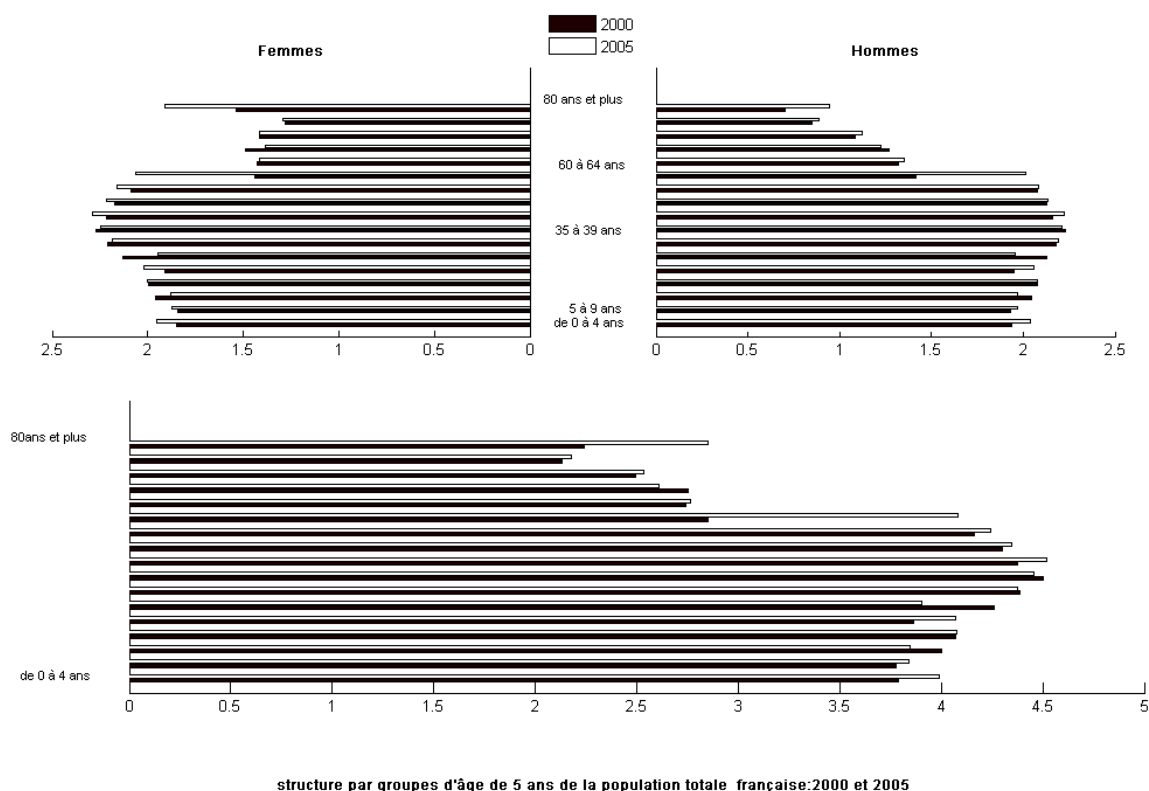


FIG. 1.3: Parts de la population française par groupes d'âges en 2000 et 2005 (source : Eurostat)

En effet comme sur la période de 1950 à 2006, la période de 2000 à 2005 montre une nette augmentation du nombre des personnes âgées. Nous notons bien que la population jeune de 10 à 39 ans, est minoritaire en 2005 par rapport à 2000. Mais de manière globale la population augmente encore et il y a un nombre supérieur de naissances et de moins de neuf ans en 2005.

Par ailleurs et toujours suivant la même source, l'espérance de vie à la naissance pour la même période est passée de 64 ans en 1950 à 76,8 ans en 2006, chez les hommes. Par contre, la natalité stagne autour des 13 pour 1000, depuis 1975, ce qui conduit à un taux de fécondité par femme, actuel de 1,9 tandis que le seuil de renouvellement de la population est de 2,1.

La convergence de ces données, conforte le fait que l'année 2006 soit ainsi une

année démarquée, correspondant à l'arrivée à la soixantaine, des individus issus du "baby boom" des années d'après guerre de 1945, c'est le début de l'effet "pappy boom".

Tous ces facteurs conduisent inéluctablement, à la baisse du nombre d'actifs, cotisants potentiels, par rapport au nombre de bénéficiaires des pensions. Le rapport du nombre d'actifs sur les inactifs¹ est passé de 3 en 1970 à 2.2 en 2005.

Dans un tel contexte démographique, bien que le taux d'activité des 15 à 64 ans reste élevé et stable autour des 70%, les systèmes de retraites mis en place, n'ayant pas inclus ces morphologies démographiques, notamment les systèmes par répartition, accusent sinon des déficits, au moins des hausses de coûts. Ainsi, le nombre de retraités bénéficiaires du régime général, est passé de 1.63 *millions* d'individus, en 1960 à 10.6 *millions* en 2004. Le nombre des cotisants, rapporté au nombre des retraités, a connu une évolution plus marquée encore que le rapport actifs-inactifs, en passant de 4, 14 *cotisants* pour un retraité en 1960, à 3, 8 en 1970, et à 1, 58 en 2004. Toutes ces conditions ont conduit à une multitude de réformes, des systèmes de retraites dont les plus récentes sont celles de 1993 (réformes Balladur), de 1994 (lois Madelin) et de 2003 (lois Fillon).

Ces réformes réduisent les avantages du régime général tandis que les aménagements des régimes spéciaux sont sans cesse repoussés.

L'alignement des "régimes spéciaux" est aujourd'hui encore, sur le devant de la scène politique française.

Leur réforme se heurte à une barrière sociale et politique forte. La tentative de leur alignement sur les lois Balladur(1993) ont conduit à la démission du gouvernement Juppé en 1995. Nous pouvons même parler de barrière culturelle, puisque ces régimes sont instaurés depuis des décennies déjà.

¹Les actifs sont pris au sens du BIT(Bureau International du Travail). Soit donc l'ensemble de la population occupant un emploi ajouté à ceux aptes et à la recherche d'un emploi. Les inactifs sont les individus de 60 ans ou plus.

Les régimes spéciaux, sont réputés provisoires, depuis l'ordonnance du 19 Octobre 1945 créant le régime général. Ils ont même échappé aux différentes lois de généralisation des régimes, de 1946 (22 mai et 13 septembre).

Pourtant les avantages dont ils bénéficient par rapport au régime général et aux régimes agricoles sont bien visibles. La durée de cotisation de base de 150 trimestres avant l'été 2003 a été depuis, prolongée pour les fonctionnaires déjà, et doit atteindre progressivement les 160 trimestres (40 ans) en 2008 déjà en vigueur dans le privé. La durée pour tous sera de 164 trimestres (41 ans) en 2012 et 172 trimestres (43 ans) en 2020. Cet allongement de la durée de travail couplé du système de surcote/décote et tous deux, accompagnés de la mise en place des systèmes de retraites par capitalisation, se justifient par l'allongement de la durée moyenne de la vie en France et le déficit prévu des caisses avec l'arrivée actuelle en retraite des "baby boomers" des années 1945.

Les projections à l'horizon 2050 ne sont guère engageantes, puisque le COR (C.O.R. (2005*b*)) prévoit, même dans le meilleur des scénarii, une baisse du rapport actifs-inactifs à 1,25¹.

A terme donc, il faudra nécessairement une autre source que la répartition, pour le financement des retraites. On serait tenté d'avancer la capitalisation comme solution, mais les retraites par capitalisation ont également connu des bas. Le CREF (Complément Retraite de la Fonction publique créé en 1949) a baissé de 16,7% la valeur du point servi aux retraités en octobre 2000 et voit sa gestion mise en cause par l'IGAS (Inspection Générale des Affaires Sociales).

Le PREFON, baisse également et régulièrement la valeur du point à la vente².

Les difficultés du système de retraites français, sont toutefois à placer dans un contexte mondial où nous retrouvons toutes sortes de tendances dont certaines sont

¹Même avec un solde migratoire de 150 000 individus par an, une fécondité stable à 2,1 enfants par femme en âge de procréer et une hypothèse de mortalité forte.

²- 34% de 1967 (8.56 euros pour 100 euros d'achat) à 2004 (7 euros pour 100 euros) et -20% (5.6 euros pour 100 euros) de 2003 à 2004

très proches du cas français.

1.3 Autres systèmes de retraites

Globalement, deux situations se présentent dans le monde. Les pays émergents et développés font face à un vieillissement des populations qui menace à terme la stabilité des régimes de retraites. Dans le même temps, les pays en voie de développement, connaissent une carence de structures sur fonds de pauvreté générale, malgré la jeunesse de la population.

En effet, à partir de données des Nations Unies rapportées par l'INED (institut national des études démographiques), Pison (2005), nous constatons que le taux moyen de fécondité en Afrique était de 4,83 enfants par femme¹ en 2005 et seulement 3,4% de la population étaient âgés de plus de 65 ans. La fécondité par femme atteint son pic au Niger, avec 8 enfants par femme selon la même source (Pison 2005), mais ce pays étant également classé 177^{ième} sur 177, en terme de développement humain par les Nations Unies (Programme des Nations Unis pour le développement 2005), n'a pas, on se doute bien, le plus performant des systèmes de retraite².

Au même moment, en Europe par exemple, la fécondité est de 1,41 enfants par femme et la population de plus de 65 ans fait 16% de la population.

Nous allons scinder en deux grands groupes, les différents systèmes de retraites dans le monde. Le premier groupe concernera les systèmes de retraite dans les pays membres de l'Organisation de Coopération et de Développement Économiques (O.C.D.E.). Ces systèmes ayant de nombreux points communs, notamment le dé-

¹Par femme en âge de procréer, cela s'entend.

²Le PNUD classe le NIGER dernier de la classe en développement humain avec un indice I.D.H. (indice de développement humain) de 0,281 contre une moyenne mondiale à 0,741 et le plus haut revenant à la Norvège avec 0,963.

veloppement plus élaboré des systèmes mis en place et les tendances démographiques. Le deuxième groupe concernera le reste du monde approché par zones géographiques.

1.3.1 Organisation des systèmes de retraite dans les pays membres de l’O.C.D.E.

Pour chacun des 30 pays membres de l’organisation, il existe un minimum de pension, admis pour tout individu à la retraite. Tous les 30, adoptent les règles de l’O.I.T. (Organisation International du Travail) en matière de calculs démographiques. Par ailleurs la plupart des pays satisfont à la convention numéro 102 de l’O.I.T ¹.

Ce sont là, autant de similarités qui facilitent une étude groupée des pays membres de l’O.C.D.E.

Nous rassemblons les caractéristiques des systèmes de retraites des pays membres de l’O.C.D.E., autour de trois critères communs à tous ces pays :

- le régime minimal de base forfaitaire ou social,
- les régimes obligatoires,
- les régimes sur-complémentaires volontaires.

Mais, à l’intérieur de ces critères, les différences d’un pays à un autre sont flagrantes. Elles vont du type même du régime à son mode de financement, voire les conditions d’éligibilité ou de la nature même des droits.

Régime minimal de retraite de base en O.C.D.E.

Tous les régimes de base forfaitaires ou d’assistance sociale s’accordent pour avoir un unique but, qui est la réduction de la pauvreté des personnes âgées. Même

¹La Convention n° 102 de l’O.I.T. (adoptée en 1952), recommande que les régimes publics de pensions de vieillesse, assurent un taux de remplacement, d’au moins 40 pour cent du dernier salaire, pour un couple ayant atteint l’âge d’ouverture des droits à pension.

lorsqu'il n'est pas précisé que toute la population âgée (en général de 65 ans ou plus), est d'office prise en compte, on élargit quand même au maximum le filet, au cas par cas pour englober tout le monde. C'est le cas en général, dans tous les pays où le régime de base forfaitaire revêt une forme d'assistance sociale aux individus âgés ayant des ressources insuffisantes et inférieures à un minimum donné. Par exemple, en Allemagne, aux États-Unis ou en France. Lorsque le régime admet un minimum forfaitaire de base soumis à des conditions, comme en Espagne ou en Italie, où il faut avoir cotisé, il existe alors un minimum social de vieillesse pour les individus âgés, ayant des revenus insuffisants, sans obligation de cotisations¹. On parle alors de "pensions sociales", pour caractériser le minimum qui ne relève pas toujours d'une caisse de retraites mais plutôt de caisses de sécurité sociale, avec un financement social. Lorsque le minimum de base est dépourvu de tout caractère social et constitue en soi un régime de retraite contributif ou non, sa rémunération est nécessairement liée au travail fourni. Au Japon ou au Royaume-Uni, le financement du minimum forfaitaire de base est assuré par les cotisations et des subventions de l'État. En Irlande et en République Tchèque, il est entièrement financé par les contributions et les versements sont conditionnés à l'affiliation à la Caisse Publique. Le minimum de pension peut être inclus dans un régime obligatoire, auquel cas son financement est celui du régime en question (Espagne, Belgique, Grèce). Parfois, le régime forfaitaire de base est non contributif mais bien obligatoire : Nouvelle-Zélande, Canada ou Luxembourg.

Nous verrons le financement d'un régime obligatoire, précisément dans le paragraphe suivant.

¹En Italie, les deux pensions minimales ont la même valeur liquidative de 7069 euros par an pour les individus de plus de 70 ans (source O.C.D.E.).

Régimes obligatoires

L'adhésion à un régime de retraite est souvent une obligation faite aux actifs des pays membres de l'O.C.D.E. L'obligation peut être issue de dispositions statutaires (Australie) ou de conventions collectives (Danemark, Belgique). Il faut toutefois remarquer que tout individu actif n'est pas toujours éligible à l'obligation d'affiliation qui est souvent soumise à une condition de cotisation (Espagne, Australie, Danemark,). Cette condition pénalise beaucoup de travailleurs à temps partiel âgés, et est objet de réformes en vue d'élargissement, notamment en Finlande et en Suisse. En Pologne, la couverture retraite est universelle.

Les régimes obligatoires sont variablement, soit exclusivement par répartition publique (France), soit exclusivement par capitalisation privée (Australie, Danemark, Mexique), soit librement, par répartition publique ou capitalisation privée (Royaume Uni¹), soit enfin, par répartition publique complétée d'une capitalisation (Suède). Dans le même pays il n'est pas exclu de voir une caisse obligatoire en répartition, pour un secteur d'activité précis, avec un complément également obligatoire par capitalisation dans une autre caisse. C'est le cas en Belgique par exemple pour les professions libérales.

En Irlande ou au Royaume-Uni, les pensions forfaitaires de base sont détachées des contributions obligatoires.

L'exemple de la Suède est très illustratif de la réussite d'une combinaison public-privé où cohabitent répartition et capitalisation avec des pensions intimement liées aux contributions. En effet, en Suède, le régime est contributif avec 18,5% de cotisations salariales obligatoires alloués au retraites . Les 16% prélevés sont dédiés à la répartition tandis que les 2,5% restant vont en capitalisation gérée par l'État ou par des caisses privées au choix de l'assuré. La répartition suédoise a la particularité

¹Au Royaume Uni, le second pilier obligatoire est géré au choix du travailleur : soit par la répartition publique ou par les caisses privées de capitalisation(voir Hervé 2004).

de la neutralité actuarielle. Les sommes cotisées sont réellement et directement reversées aux retraités. Mais ces sommes sont virtuellement versées dans un compte individuel rémunéré au taux de l'inflation salariale. Le capital, à la retraite, est converti en rente viagère avec des pensions indexées également sur l'inflation salariale, mais avec une décote de 1,6% (indexation parallèle). Une autre particularité de la retraite suédoise est la date de départ qui est laissée au choix de l'assuré à partir de 61 ans avec possibilité de cumul des pensions et du salaire en cas de retraites partielles.

Aux États-Unis, les pensions issues du régime contributif répartitif et obligatoire respectent plus le taux de remplacement, en faveur des retraités à faibles revenus, que le lien avec les cotisations. Par ailleurs, les éventuels excédents de la caisse publique de répartition sont capitalisés en bons du trésor public, en vue des déficits futurs éventuels de la caisse. Au Canada, l'excédent est également capitalisé pour les deux années suivantes. Au Japon aussi la répartition utilise des réserves capitalisées.

La frontière entre les retraites par capitalisation et celles par répartition, n'est donc pas toujours nette, même au cœur des régimes publics obligatoires. Mais pour les régimes sur-complémentaires non obligatoires, nous verrons que c'est presque unanimement la capitalisation privée qui prévaut. Des régimes obligatoires sont souvent complémentaires de régimes déjà obligatoires également. En France les régimes obligatoires, en répartition par points, ARRCO ou AGIRC sont des complémentaires du régime de base obligatoire. Au Danemark, l'A.T.P (Allmän Tillägs pension) en capitalisation, est une complémentaire obligatoire.

Régimes volontaires et régimes sur-complémentaires

Dans les pays de l'O.C.D.E., il existe toujours des formes individuelles et volontaires de programmes de retraites privées, servies le plus souvent par des or-

ganismes financiers ou d'assurance. Leur développement est relatif à la culture socio-politique des pays, mais également à la situation des retraites obligatoires dans le pays. En règle générale, lorsque le pays admet des retraites obligatoires, principalement capitalisées, alors les retraites privées volontaires y sont plus développées et sûrement capitalisées. Par exemple ces formes de retraites sont plus développées au Royaume-Uni qu'en France.

Mais aux États-Unis, malgré l'existence d'un pilier de retraite par répartition obligatoire¹, les retraites privées et capitalisées connaissent un fort développement du fait de la culture capitaliste du pays.

1.3.2 Organisation des systèmes de retraites des pays hors O.C.D.E.

Dans les pays hors O.C.D.E., l'organisation des systèmes de retraites révèle un regroupement possible par zones géographiques. Ces pays ont, pour la majeure partie, leurs systèmes de retraites hérités des organisations coloniales ou au moins, connaissent par zones, un développement économique ou culturel semblable, favorisant un type d'organisation très proche. Nous retenons cinq zones économiques et culturelles.

Grand-Maghreb et Moyen-Orient

Tous les pays du Grand-Maghreb et du Moyen-Orient, ont chacun un régime de base de retraites par répartition, financé par cotisations salariales. Dans tous ces pays, la retraite de base est une branche de l'assurance vieillesse incluse dans le régime général de sécurité sociale sous la tutelle du gouvernement. Mais certaines branches professionnelles détiennent leurs propres caisses, notamment en Egypte, en Iran, en Tunisie ou au Maroc où coexistent jusqu'à six caisses différentes. En

¹Avec néanmoins une part de capitalisation dans la répartition même.

Algérie, il existe une caisse au sein du régime général de sécurité sociale pour gérer les retraites, un peu comme la CNAV en France, la C.N.R. (Caisse Nationale de Retraites). Le taux de cotisation alloué aux retraites varie beaucoup d'un pays à l'autre et va de 3% du salaire en Mauritanie, 6% en Israël à 16% en Algérie et en Tunisie. Le mode de calcul des droits varie également beaucoup, mais en moyenne et hors Israël, le taux de remplacement se place d'après la banque mondiale (Robalino, Whitehouse, N.Mataoanu, Musalem, Sherwood et Sluchynsky 2005), autour des 76%. Cette moyenne reste un des taux régionaux le plus généreux du monde. Tous ces pays accordent également des pensions forfaitaires aux assurés n'ayant pas assez cotisé.

Par contre, la couverture reste le défi majeur des caisses du régime de base et seuls quelques pays comme Israël ou la Libye intègrent les travailleurs du privé dans le régime général. Dans la plupart des cas, les privés sont dépourvus d'assurances retraites comme en Djibouti, au Bahrain, en Iraq, au Liban ou au Yemen par exemple. Les régimes privés de retraites existent bien, mais pour la plupart ils restent rattachés aux pouvoirs publics comme c'est le cas en Egypte ou en Israël.

La carence d'institutions de retraites dans le privé et la couverture restent des problèmes majeurs jusqu'en Afrique Sub-saharienne.

Afrique Sub-saharienne

Comme pour les pays d'Afrique du Nord et du Moyen-Orient, il existe dans chaque pays un régime de base public par répartition. Mais ici, dans la presque totalité des cas, ce régime est l'unique régime de retraites du pays. Il y a peu de disparités dans la zone et en général l'unique caisse de retraites du pays gère les retraites des salariés du public comme du privé dans un même régime. Beaucoup de caisses, dans de nombreux pays, ont la même structure voire la même dénomination, témoignage de l'héritage colonial des infrastructures : C.N.S.S. (Caisse Nationale

de Sécurité Sociale) au Bénin, au Niger, au Congo ou au Gabon par exemples. C.N.P.S. (Caisse Nationale de Prévoyance Sociale) au Cameroun et en Côte d'Ivoire ou I.N.P.S. (Institut National de Protection Sociale) pour le Mali et le Sénégal. En Tanzanie toutefois, il existe plus d'une caisse, gérant des retraites.

La part des cotisations pour les retraites est partout autour des 6 et 7% du salaire brut.

Les régimes par capitalisations sont inexistantes dans la plupart des pays, mis à part les pays ayant un héritage coloniale anglo-saxon : Nigéria, Tanzanie par exemple. En Afrique du Sud, la pension de base publique est fixe et complétée par des fonds de pensions privés volontaires. La Tanzanie a tout son système de retraites, géré par capitalisation et en prestations définies.

Asie-Pacifique

Une disparité, encore plus marquée, caractérise les systèmes de retraites en Asie. A l'Est, la Chine est carrément dépourvue de système national de sécurité sociale et donc de système de retraites à l'échelle nationale. La retraite est assurée par les États et essentiellement par les entreprises, qui participent aux cotisations dans des fonds privés majoritairement par capitalisation. L'État central assure quand même les retraites de certaines professions et rend obligatoire aux entreprises l'affiliation des employés à des fonds individuels. Il participe également au niveau des régimes des États locaux ou des entreprises.

Au Sud, en Inde, les salariés de certains secteurs et précisément de l'industrie sont couverts avec parfois une couverture gratuite et dans tous les cas, une participation de l'État. Les retraites sont néanmoins assurées par des fonds privés de capitalisation.

L'universalité des pensions est une donnée rare dans les pays d'Asie-Pacifique exception faite de quelques pays comme le Sultanat de Brunei, Hong Kong, le Nepal

ou le Samoa Occidental.

Dans la plupart des cas, la couverture se limite souvent aux seuls travailleurs et le système encourage les compléments de retraites par des participations à des fonds volontaires (Bahrain, Pakistan, Singapour, Sri Lanka, Taiwan, Turkmenistan).

Les fonds de pensions à participations volontaires sont plus particulièrement développés dans les professions libérales (Azerbaïdjan, Sultanat de Brunei, Burma, Fiji, Malaisie, Philippines, Salomon, Thaïlande, Vanuatu, Viet-Nam).

Europe : Europe Boréale, Centrale et Orientale, Andorre et Monaco.

Les systèmes de retraites d'Europe (centrale et de l'Est principalement), sont toutes, assez proches de ceux des pays européens membres de l'O.C.D.E. Ils ont tous un système de retraites, inclus dans une assurance vieillesse, au sein d'un système global de sécurité sociale. La plupart accorde un minimum de pension avec un complément éventuel en fonction des cotisations (Lituanie ou Slovaquie).

La Macédoine, le Pays Malte et la Roumanie n'accordent pas de minimum vieillesse.

En Bulgarie, la couverture vieillesse est universelle.

À Monaco, les retraites complémentaires sont gérées par les caisses françaises.

Amérique latine et Caraïbes

Tous les pays d'Amérique Latine ont un système de sécurité sociale incluant le versement des retraites au moins pour les salariés avec un minimum de pension. Dans certains cas, les cotisations sont obligatoires avec des pensions individuelles par capitalisation (Bolivie, Chili, République Dominicaine ou Colombie).

Beaucoup d'États garantissent des pensions minimum (Cuba, Équateur, République Dominicaine).

En Antigua-Barbades les régimes volontaires sont exclus.

Conclusion et projections sur la situation des retraites

Nous récapitulons par des tableaux non exhaustifs les principales caractéristiques de l'organisation des systèmes retraites de quelques pays dans le monde en annexe (paragraphe : A.1, page : 296).

En règle générale, il existe, au moins en théorie et dans chaque pays du monde, des régimes d'assurance vieillesse accessibles à certaines catégories de salariés hors informel. Mais comme le pointe l'article du Bureau International du Travail (B.I.T (2000)) sur les conditions des personnes âgées, la couverture est insuffisante et en Afrique, plus de 90% de la population active travaillerait dans le secteur de l'informel. En Amérique latine, le secteur informel créerait 80% des emplois. Or ce secteur n'offre aucune protection sociale directe ou efficace, pour les personnes inactives.

Par ailleurs, outre ces difficultés institutionnelles, les prévisions démographiques ne sont pas non plus très rassurantes et encore moins dans les pays ayant le moins de soucis institutionnels.

En France, la part des pensions dans le Produit Intérieur Brut est stable depuis quelques années avec un taux d'environ 13%, l'un des plus élevés d'Europe. Ce que confirme le graphe suivant donnant les parts des dépenses en pensions des pays européens, tous pondérés sur les parts françaises. Ce graphe et ceux qui suivent sont créés à partir de données de l'EUROSTAT.

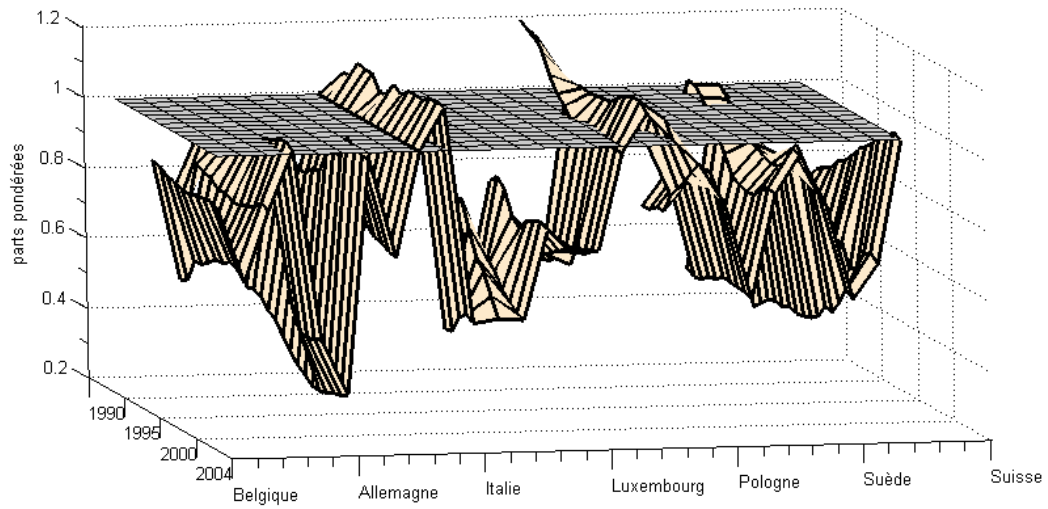


FIG. 1.4: Variations pondérées sur les variations françaises des parts des pensions sur les Pib en Europe de 1990 à 2006 (source : EUROSTAT)

Nous voyons bien que seuls quelques pays arrivent à allouer parfois, aux pensions, des parts de leur Pib, plus importantes qu'en France.

De plus, en comparant en valeurs les Pib et les dépenses en pensions, la France conserve un rang parmi les premiers durant toutes les périodes concernées.

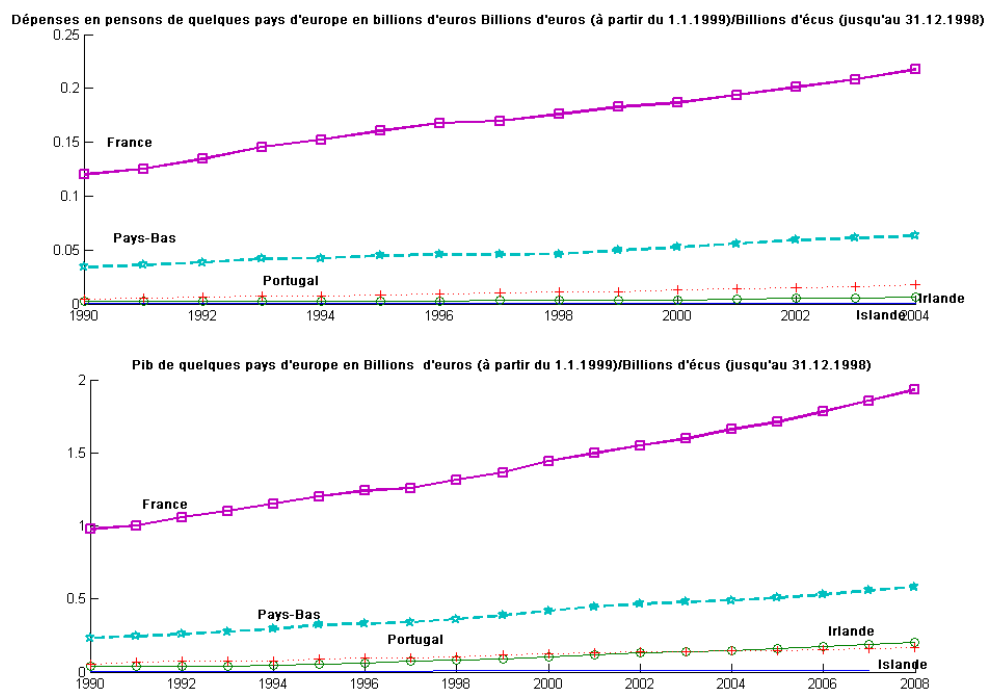


FIG. 1.5: Variations du PIB et des dépenses de retraites dans quelques pays d'Europe

Le Pib et les pensions françaises croissent en communion et favorisent une stabilité des dépenses des pensions mais l'Ireland fait encore mieux, puisque ses dépenses augmentent moins vite que son Pib.

Sur le plan démographique également, la France garde un atout considérable par l'évolution du taux de fécondité par rapport aux autres pays européens. Le taux de fécondité tend aussi à se stabiliser, même en projection sur les années à venir.

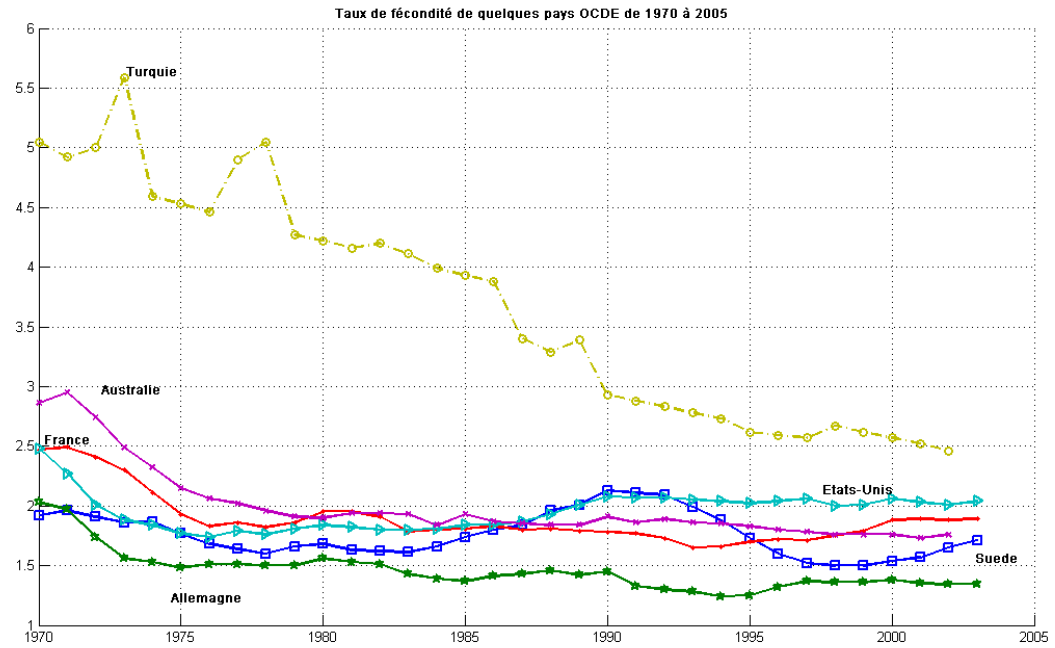


FIG. 1.6: Taux de fécondité de quelques pays membres de l'O.C.D.E.

Le taux de fécondité français bien qu'inférieur au minimum requis de 2,1 pour renouveler la population, garde néanmoins un bon rang au sein de l'organisation. Le graphe pondérant les taux de fécondité sur le taux français démontre cette position moyenne en présentant comme une symétrie autour du taux français.

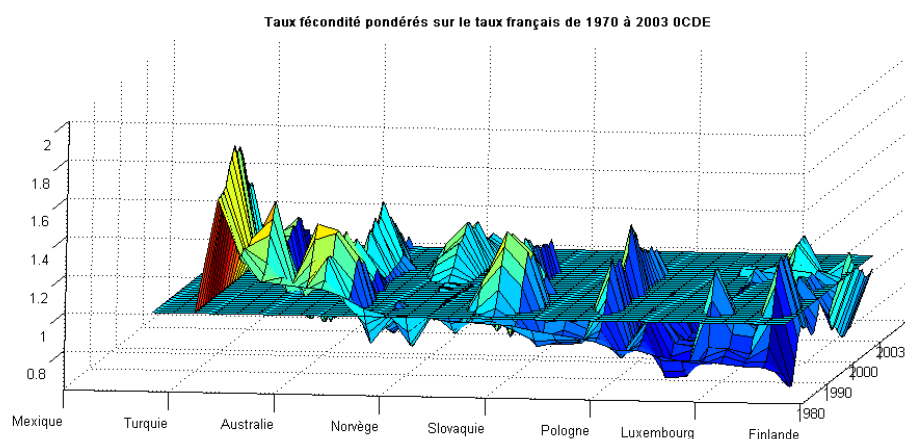


FIG. 1.7: Taux de fécondité des pays membres de l'O.C.D.E, pondérés sur le taux français

L'inquiétude majeure vient plutôt de la croissance du ratio de dépendance des personnes âgées par rapport aux jeunes. Ce ratio garde la même tendance haussière au sein de l'O.C.D.E. La France garde l'un des plus hauts niveaux de ce ratio donnant la proportion des personnes âgées (> 65 ans) sur le reste de la population.

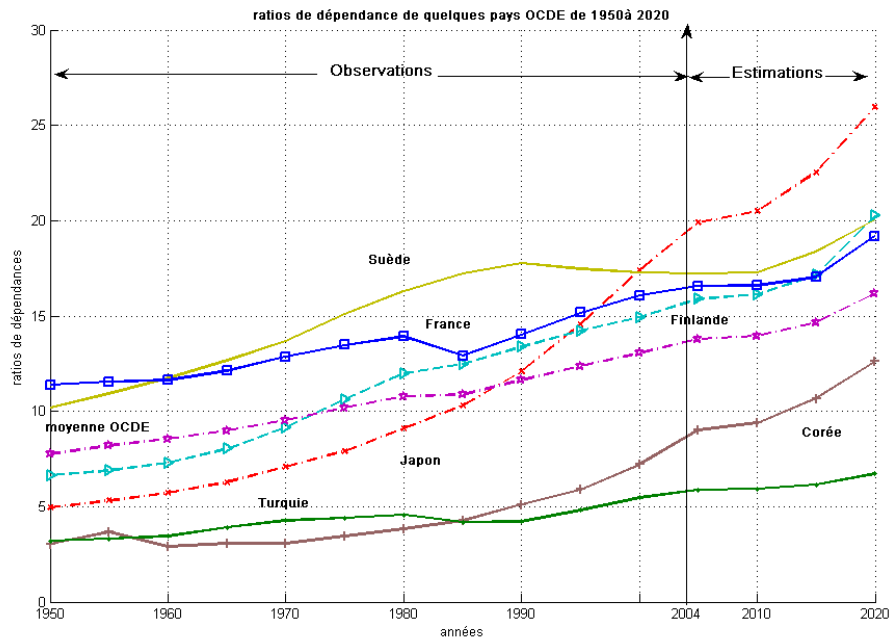


FIG. 1.8: Ratio de dépendance de quelques pays membres de l'O.C.D.E (sources : O.C.D.E.)

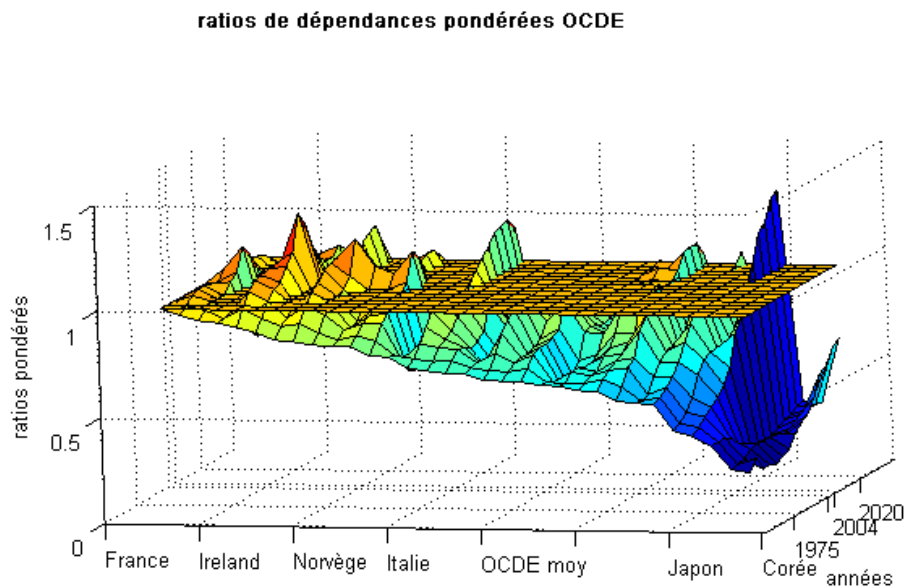


FIG. 1.9: Ratio de dépendance des pays membres de l'O.C.D.E, pondérés sur le cas français (sources : O.C.D.E.)

L'allongement de l'espérance de vie, une bonne chose en soi, contribue cependant, aux inquiétudes sur la prise en charge des personnes âgées. Parce que plus la longévité augmente. Plus il y aura de personnes âgées dépendantes et moins il y aura de cotisants par personne âgée lorsque les naissances ne suivent pas.

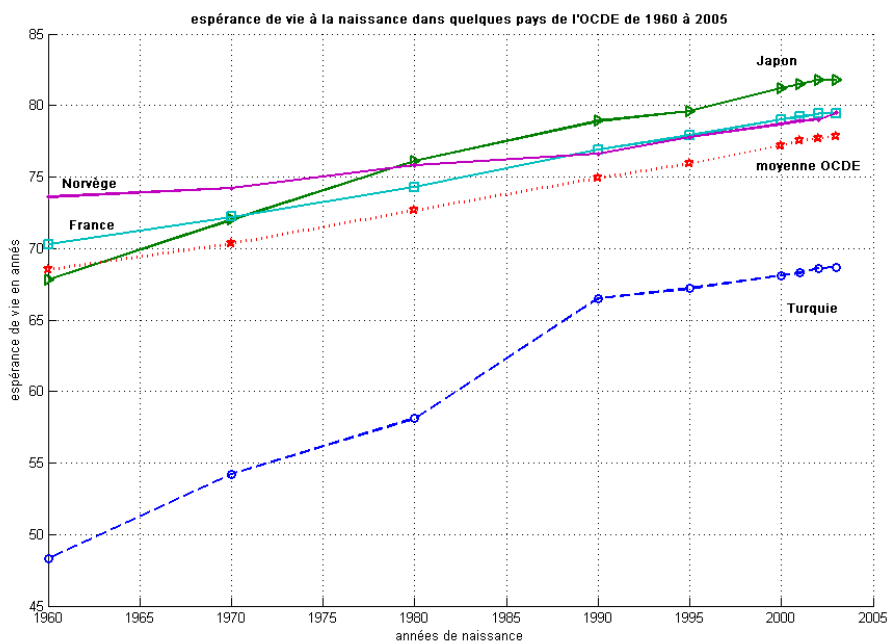


FIG. 1.10: Évolution des espérance de vie à la naissance en O.C.D.E de 1960 à 2003; avec cas Français (sources : O.C.D.E.)

Le cas français reste bien l'un des meilleurs quant l'allongement de la durée de vie.

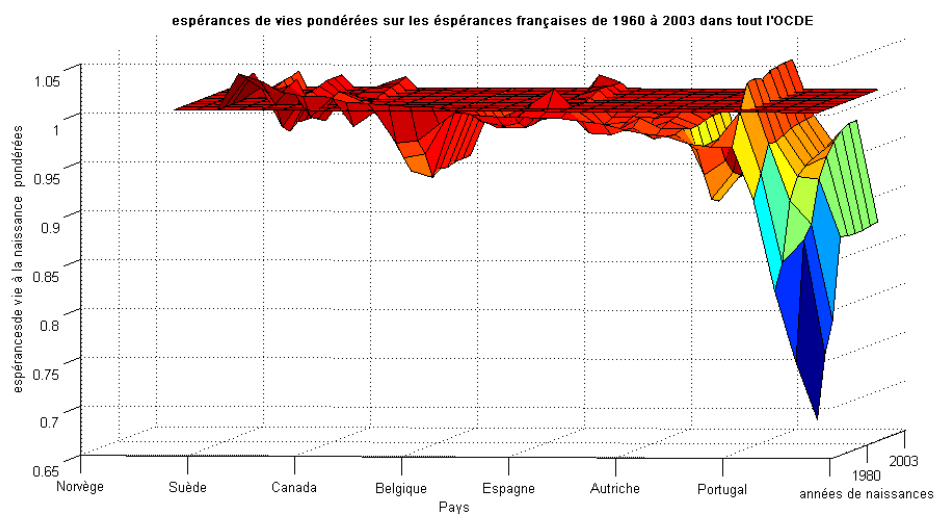


FIG. 1.11: Évolution des espérance de vie à la naissance en O.C.D.E de 1960 à 2003; avec pondération sur le cas Français (sources : O.C.D.E.)

Comme pour terminer le tableau pessimiste quant à l'avenir des retraites françaises, nous voyons que la population totale française ne croît pas très vite par rapport aux autres pays O.C.D.E.

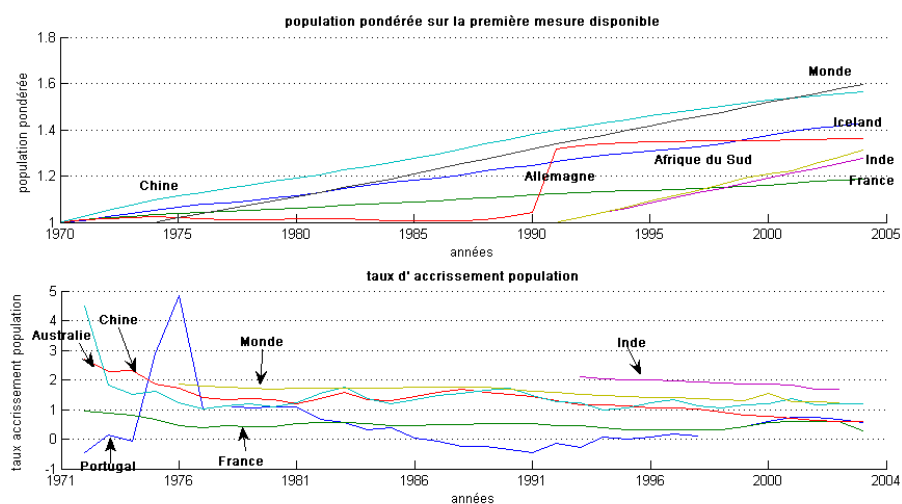


FIG. 1.12: Taux d'accroissement de la population mondiale de 1995 à 2003 avec pondération sur la valeur initiale (sources : O.C.D.E.)

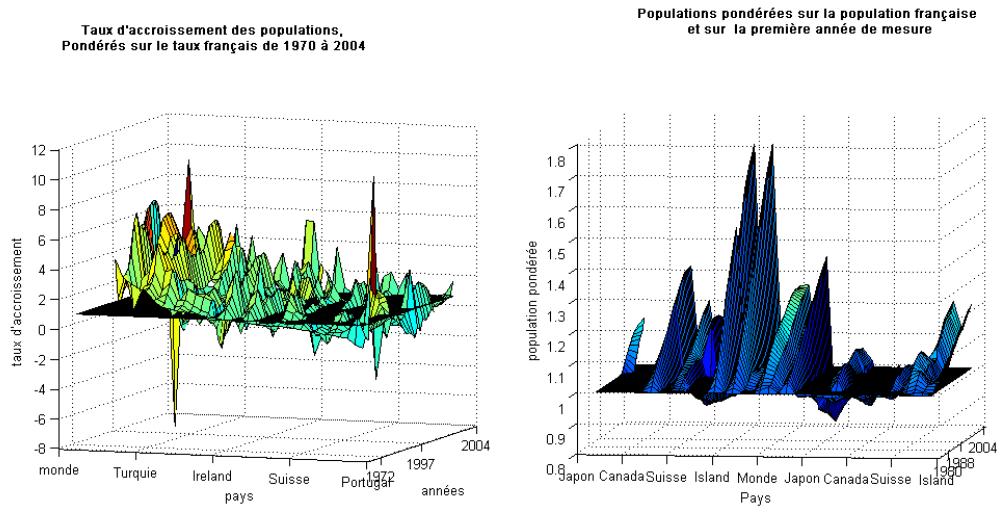


FIG. 1.13: Accroissement de la population en O.C.D.E. de 1995 à 2003 avec pondération sur la valeur initiale et le cas Français (sources : O.C.D.E.)

Au total, la situation, actuelle comme future, des retraites françaises reste assez mitigée au vu des évolutions démographiques et économiques. Ainsi la France possède l'un des plus hauts taux de dépenses des retraites sur le Pib. Mais son Pib est également l'un des plus hauts et de plus, ses dépenses se stabilisent autour des 13%. Par ailleurs le taux de fécondité en France assez bas maintient une croissance faible mais de plus en plus stable de la population totale. Avec l'allongement de la durée de vie et du ratio de dépendance des plus de 65 ans, les français ayant un système de retraites principalement par répartition auront du mal à conserver ce système. Le nombre réel comme potentiel¹ des cotisants reste insuffisant malgré les différentes réformes encore en cours. En outre, du fait du *Pappy boom*, la CNAV enregistre en 2005 un déficit, pour la première fois depuis 1998, à hauteur de 1,9

¹Selon la prise en compte ou non des chômeurs

milliard deuros (C.O.R. 2005a).

La situation de tous les systèmes de retraites exige des mesures alternatives. Pour le cas français nous pourrions proposer au moins la neutralité actuarielle. Cette neutralité est le plus souvent mieux respectée au cœur des systèmes par capitalisation. Nous allons, dans le chapitre prochain, voir les différents développements existant en modélisation de fonds de pension avant de voir techniquement le respect de la neutralité actuarielle dans un fonds de pension.

2

Présentation de la modélisation des fonds de pension

L'exemple du paysage français que nous avons parcouru suffit à nous montrer que les fonds de pensions ne sont pas toujours soit à contributions définies soit à prestations définies. Il existe, en effet, une multitude de types de fonds de pensions hybrides des deux types de fonds à prestations ou contributions définies. On trouve ainsi des fonds à cotisations définies avec minimum de prestations garanties Deelstra et al. (2002), des fonds à cotisations et prestations définies à la fois, ou des fonds où ni les cotisations ni les prestations ne sont définies. Ce dernier cas correspond aux fonds avec des cotisations libres et volontaires durant la période d'activité. À la retraite, le capital, quel qu'il soit, est versé tel quel ou transformé en rente. C'est la forme des PERP français, où les cotisations libres sont déductibles des revenus imposables et les versements soumis aux cotisations sociales comme toute retraite.

En prestations définies, les rentes sont spécifiées dans les clauses et les calculs actuariels permettent de définir les cotisations, à l'aide des tables de mortalité, des informations du marché et selon le niveau actuel des actifs. Ainsi, par exemple,

connaissant la rente mensuelle ou annuelle à verser pour chaque individu, le gérant du fonds s'aide des tables prospectives de mortalité ou de service pour estimer la rente totale probable et actuelle à verser pour la population du fonds. Cette valeur actuelle probable constitue, dans la plupart des cas, le passif du portefeuille considéré. Les pensions, bien que déterminées, ne sont pas en général complètement connues d'avance. Elles sont, par exemples, calculées en fonctions de revenus futurs et indexés sur les prix ou sur les salaires futurs. C'est le cas, par illustration, dans le cadre des contrats entreprises dits "article 39" en France où les pensions sont fonction du dernier salaire annuel et revalorisées sur l'évolution du coût de la vie. En plus des tables statistiques et démographiques, le gérant doit utiliser les données économiques de l'environnement, telles que l'évolution des salaires, des prix ou des actifs du marché pour estimer les pensions à verser. En actualisant ce passif et en le comparant à la valeur de son portefeuille d'actifs, le gérant peut se donner un objectif de gestion sur la différence entre l'actif et le passif. Il peut avoir pour but de réduire cet écart en minimisant les risques, ou de l'agrandir par un actif plus grand. Cette différence est généralement appelée surplus (ou déficit). Le gérant contrôle le processus de surplus/déficit avec les commandes de cotisations et des investissements.

On assiste au phénomène inverse en cotisations définies, où la contribution est connue et les rentes estimées avec les tables statistiques toujours et avec l'évolution du marché. Dans ce type de fonds de pension, le gérant disposant d'une modélisation du marché et de l'évolution de ses propres actifs, estime la part du portefeuille revenant à chaque individu au moment de sa retraite future. Cette part de richesse est alors transformée en rente actualisée dont il a désormais une estimation. Par analogie aux prestations définies, la valeur actuelle totale probable des rentes futures, constitue le passif du fonds. Mais ce passif n'engage pas le fonds et par ailleurs le processus de surplus/déficit est continuellement nul puisque le

passif égale l'actif (hors frais de gestion) dont il est défini. Le gérant jouera sur la commande de diversification des investissements pour réduire ses risques et optimiser son portefeuille. Mais, là aussi, la contribution bien que définie n'est pas complètement maîtrisée sur toute la durée puisqu'elle peut être comme les pensions, fonction de revenus qui fluctuent tout au long des carrières sans parler du risque de défaut du contribuant.

Pour l'évaluation du portefeuille, les actualisations, les capitalisations et projections, la connaissance de l'environnement économique et financier est indispensable. Cette connaissance suppose la disponibilité ou tout au moins la capacité de mise en place d'une modélisation des différents outils et de leur cadre interactif. En d'autres termes, il nous faut soit développer soit disposer de l'évolution probable des taux d'intérêt ou des rendements des actifs.

Les règles théoriques sur les relations entre les différents actifs sont nécessaires notamment pour permettre une *juste* évaluation des actifs contingents ou du portefeuille lui même.

En théorie de portefeuille, la relation régissant le comportement global des actifs et des taux du marché est une relation d'équilibre du marché. L'équilibre dit par arbitrage (ou A.P.T. *arbitrage pricing theory*) se base sur l'absence d'opportunité d'arbitrage ou A.O.A. L'évolution des actifs, mêmes fondamentaux, et la prime de marché du risque sont souvent exogènes en A.P.T. (Haberman, Vigna et Russell (2002), Deelstra et al. (2000) ou même Vasicek (1977)).

En fonds de pension, l'attention étant focalisée sur un seul portefeuille, l'équilibre se fait par arbitrage.

Mais, dans tous les cas de modélisation, le modèle répond forcément à un besoin de maîtrise ou de contrôle des nombreux aléas. Ces risques qu'ils soient de nature financière ou démographique, exigent une approche réaliste pour un contrôle efficace.

Nous allons dans un premier temps, énumérer les risques liés à un fonds de pension, puis nous évoquerons les différentes formes d'évaluation des outils menant à la mise en place des modèles de contrôle des risques.

Nous finirons naturellement par la présentation des modèles de contrôle des risques en passant en revue les objectifs courants en modélisation de fonds de pension, les moyens mis en place et les résultats.

2.1 Typologie des risques de fonds de pension

A démographie et cotisations égales, les prestations en fonds de pensions se doivent d'être plus prometteuses qu'en régime de retraite par répartition classique. Un plus devrait s'attendre du fait que les pensions proviennent d'une structure spécifique, qui fait appel à une fructification de la somme cotisée. Hélas, de ce même fait, elles sont d'ores et déjà plus risquées. Les risques diffèrent des risques liés aux versements de retraites par répartition et il en est logiquement de même pour leurs évaluation et contrôle. La cotisation en fonds de pension est évidemment non ordinaire aussi, puisque fonction des investissements, dont les produits serviront en prestations.

Nous retenons pour illustration le cas des investissements pour un portefeuille de fonds de pension où nous négligeons les frais de gestion ¹. Un investissement de fonds de pension en trop forte proportion d'obligations d'État, fausse la définition du fonds puisque étant au dessous du marché ². Les bénéfices se rapprochent de ceux d'une épargne retraite classique. Turbot (1997) a par exemple montré qu'un portefeuille "efficient" en prestations définies peut être alors une sorte de système cyclique de Fonds Communs de Placement (F.C.P.). Chaque F.C.P. constitue les investissements propres à une classe d'individus ayant une différence d'âge maxi-

¹Puisque leur impact est sans incidence sur le raisonnement.

²les obligations ayant de faibles rentabilités en moyenne

male de cinq ans par exemple. Ainsi, la population du fonds est subdivisée en classes d'âge avec pour caractère principal le temps restant avant la retraite. La largeur de chaque groupe étant de cinq ans. Dans un premier groupe, nous disposerons d'individus ayant moins de cinq ans de fonction à venir avant l'âge de la retraite, un deuxième groupe ayant plus de cinq ans et moins de dix ans avant l'âge de la retraite. Ainsi de suite, jusqu'à ceux qui sont les moins âgés du portefeuille. Pour le premier groupe, les individus étant très proches de la retraite, leur fonds se doit d'être solvable à court terme pour assurer les rentes. Les investissements plus sûrs (obligations et monétaire), sont alors privilégiés au détriment des actions plus volatiles. Dans le dernier groupe, où l'âge de la retraite est à un horizon plutôt éloigné, on peut se permettre d'investir en actifs risqués, puisque même en cas de chute des valeurs, le temps restant avant le besoin de liquidité suffira au redressement du portefeuille. Par ailleurs, sur le long terme, les actions sont réputées plus rémunératrices (Hervé 2004). De même, au cœur de chaque groupe, la dynamique du fonds doit évoluer vers le groupe contingent dans lequel ses composants se verront juste après. C'est à dire que le passage d'un groupe de F.C.P. à l'autre est adouci le plus possible en investissements risqués. De plus en plus d'actions du F.C.P., sont converties en obligations pour la sécurité. Dans un groupe donné lié à un F.C.P., tant que la valeur des actifs dépasse le passif¹, on ne fera pas d'appel de cotisations, mais dès que les actifs seront en deçà du passif, les cotisations devront atteindre le montant du déficit pour le respect des engagements.

Une telle approche de la gestion de fonds de retraite est courante et se retrouve par exemple dans les annonces de gestion de fonds français comme le PERP ou le COREM, pour ne citer que ceux là. Les risques couverts par une telle gestion sont la sécurité du fonds puis la solvabilité (monétaire). Mais même en faisant fi des risques démographiques, par supposition forte de stabilité de la population, une

¹Valeur actuelle probable des engagements promis.

telle stratégie reste sous optimale comme le démontre Cairns (1996).

Cet exemple illustre déjà les liens subtiles entre différents risques liés au fonds de pension, notamment sur l'émergence possible d'un risque suite à une gestion focalisée sur un seul risque.

S'il n'est pas possible de citer tous les risques liés à un fonds de pension, nous pouvons déjà intuitivement, essayer d'en énumérer quelques principaux.

1. les risques financiers
 - risque de volatilité
 - risque de solvabilité
 - risque de liquidité
 - le risque de krach
2. les risques démographiques
 - risque de sur ou sous-mortalité
 - risque de sur ou sous-estimation des tables de service
 - risque de mutualité
3. les risques de gestion
 - le risque de modèle
 - le risque de sur ou de sous évaluation d'actif
4. les risques économiques et sociaux
 - le risque d'inflation
 - risque de fluctuation de la croissance
 - risque de chômage
 - risques politiques (dont les risques de guerre ou de conflit, de détournement d'objectifs ou de manipulations. . .)
5. les risques humains
 - risques de mauvaise gouvernance du fonds (dont les délits d'initiés ou la corruption et le détournement. . .) ;

– risques culturels

6. les catastrophes naturelles

Nous allons regarder d'un peu plus près ces risques en les classant par types financiers ou démographiques.

2.1.1 Risques financiers

Par risques financiers, nous entendons tous les risques directement liés aux actifs et éléments du marché. En somme, les risques où le facteur humain n'intervient pas directement. Le risque financier le plus abordé en modélisation de fonds de pension est sans doute le risque de volatilité des actifs (voir par exemple : Boulier et al. 1993, Cairns et al. 2004, Leibowitz et al. 1992, Menoncin et al. 2003). Il renferme le potentiel des actifs du fonds à sur performer ou à sous performer. Il constitue une spécificité déterminante des fonds de pensions puisqu'il traduit le risque de perte sur les investissements. Sa seule prise en compte devrait conduire, au moins partiellement, à une intégration implicite de la plupart des risques de marché. En effet, la nature des actifs détermine le plus souvent leur degré de volatilité mais aussi leur capacité de liquidité puisque par exemple les actifs monétaires sont les actifs les plus rapidement convertibles en liquides et les moins volatiles en général. La volatilité se trouve liée à la liquidité, à la solvabilité et au krach également. Le krach ou la ruine est souvent la conséquence directe d'une trop grande volatilité des actifs, notamment, lorsque les dits actifs ont une tendance de variations plutôt orientée à la baisse. L'insolvabilité du fonds peut découler quant à elle, dès que la baisse conduit les actifs en dessous des engagements escomptés par exemple. Mais il convient de noter que la volatilité n'est pas la seule responsable possible d'un krach ou de la solvabilité. Ces risques peuvent survenir, on l'imagine, par suite d'erreurs humaines bien que le marché reste *normal*. La maîtrise de la volatilité du marché conduit aussi à la maîtrise de l'inflation en tant qu'élément du marché

(comme dans Poncet et Lioui 2005, Brennan et Xia 2000, Battocchio, Menoncin et Scaillet 2003). Pour terminer sur la question, rappelons l'exemple précédent de l'approche historique où il a été noté que la volatilité des actifs peut conduire à un risque comme l'inflation des cotisations. Ce qui est un risque spécifique aux fonds de pension à prestations définies, .

2.1.2 Risques démographiques

Si la volatilité est un élément central dans les risques financiers sur un fonds de pension, la mortalité est certainement le risque démographique majeur. C'est par la mortalité que l'on évalue les rentes viagères et donc les engagements et le passif du fonds. La sous mortalité du fonds, du fait de la surpopulation qui en résulte, peut facilement conduire à l'insolvabilité ou à la ruine du fonds comme pour une caisse par répartition. Par ailleurs, la sur-mortalité peut également nuire au fonds du simple fait qu'elle conduit à une gestion approvisionnement abusivement des actifs pour des engagements sur-évalués. En prestations définies par exemple, la sur-mortalité aurait conduit à un appel excessif de cotisations qui nuit aux membres du fonds, tandis qu'en cotisations définies elle expose les membres à une sous-estimation de leurs droits et donc à des pensions moindres.

Le pilier de la gestion actif-passif étant la prise en compte du passif, il convient d'avoir le *bon* passif. La mortalité peut conduire à une sur ou sous évaluation des tables et aboutir à un risque de modèle aux conséquences fatales.

Le risque de modèle fait suite à une mauvaise évaluation d'éléments acteurs du fonds.

2.2 Formulation et évaluation des paramètres du fonds

Pour la mise en place d'un dispositif de contrôle du risque il faut au strict minimum disposer d'une modélisation chronologique incorporant globalement :

- le niveau du fonds tout entier,
- le niveau des bénéfices retirables du fonds,
- ou la valeur actuarielle des promesses de prestations ou de cotisations.

L'aspect différenciant de la chronologie dans les modèles de portefeuille est la dimension discrète ou continue que l'on donne au temps.

Nous distinguerons toutefois trois principaux niveaux de modélisation :

- les modèles statiques
- les modèles dynamiques discrets
- les modèles dynamiques continus

Les modèles statiques (dont Leibowitz et al. 1992, Wilkie 1985, Sharpe et Tint 1990) et les modèles dynamiques continus (entre autres également : Cairns et al. 2004, Haberman, Vigna et Russell 2004, Pochart, Taillard et Veltman 1997, Deelstra et al. 2002) de la littérature, sont plutôt financiers et axés sur les risques de marché et de gestion .

Les modèles statiques et dynamiques discrets sont, eux aussi, financiers mais avec une plus grande attention assurantielle et démographique (Owadally 1998, Dufresne 1988, Aitken 1994).

Dans l'étude des paramètres, nous mettrons en place à la fois les éléments interagissant dans le modèle mais aussi les règles et hypothèses de leurs interactions.

Nous y énumérerons le nombre et les types d'actifs, de taux ou d'indices disponibles dans le marché. En générale nous avons toujours un actif sans risque caractérisé par son taux "r" et au moins un actif risqué avec parfois des actifs

contingents.

De solides hypothèses sur l'environnement financier sont également nécessaires, pour la bonne définition des éléments mathématiques.

Il doit être précisé la théorie d'équilibre permettant l'évaluation des actifs contingents par exemple et surtout définissant la règle d'évolution des actifs et des taux. La règle générale est l'absence d'opportunités d'arbitrage (nommée A.O.A.) en marché complet.

Bien souvent, les hypothèses s'écartent de la réalité. Un effort est requis pour qu'elles restent le plus simple possible, afin d'être plus facilement transposable à la réalité. Les points saillants des hypothèses concerneront :

- la complétude ou l'efficience du marché ;
- l'inflation salariale ou des prix ;
- les taux d'évaluation du marché tout entier, à court ou long terme ;
- les taux d'intérêt sans risque à court terme et d'évaluation du fonds à long terme .

Tous ces éléments sont sensibles à la chronologie, selon que nous soyons en modélisation discrète ou continue.

Dans la formulation des hypothèses, il faut tenir compte du risque d'incompatibilité des hypothèses. C'est à dire que, pour un élément, on peut être amené à poser certaines hypothèses, qui pourraient être contraires à d'autres hypothèses, faites pour un deuxième élément. On peut considérer, par exemple, un modèle où le taux serait constant avec un horizon long.

2.2.1 Évaluations discrètes

Les évaluations concerneront les évaluations en modélisation dynamique discrète et en statique séparément.

Évaluations en dynamique discrète

Les principaux paramètres qui sont l'actif du portefeuille et son passif s'évaluent à travers des taux d'évolution. Ces taux peuvent prendre différentes formes et servent aux actualisations ou capitalisations de tous les flux financiers en présence.

Les évaluations se font par types de méthodes en dynamique discrète principalement selon des prises en compte temporelles. La méthode la plus utilisée est celle du "Unit-Credit" (Dufresne 1988, Devolder et Goffin 2006), considérant les engagements réels et effectifs uniquement, sans intégration anticipative des engagements futurs, comme c'est le cas en "Entry Age Normal". Nous reviendrons plus en détails sur les formes et usages courants en modélisations discrètes, dans le chapitre consacré.

L'évaluation du passif, dans tous les cas, passe par des évaluations intermédiaires d'autres paramètres du fonds tels que les pensions annuelles pour les services effectués ou les cotisations annuelles d'équilibre avec bien sûr les indispensables outils d'actualisation que sont les rentes viagères. Ces rentes pourront être différées ou non, temporaires ou permanentes, voire anticipées ou non. Elles se retrouveront en temps continu mais seront inexistantes en statique.

Évaluations en statique

En statique, nous avons une formulation du marché et de l'environnement qui fait apparaître de nouveaux actifs contingents comme le portefeuille témoin ou "benchmark" et les portefeuilles immunisants et ceux dupliquant le passif (Leibowitz et Kogelman 1991, Sharpe et Tint 1990, Boulier et Dupré 2002).

L'apparition de ces portefeuilles fait intervenir la gestion par la duration pour ses sensibilités aux variations des taux. Si la duration n'est pas une donnée fréquente en temps continu, le taux d'intérêt, par contre, y est un élément central comme dans toutes les formes de modélisation.

2.2.2 Paramétrage en temps continu

Bon nombre de développements en temps continu, considère une économie stationnaire avec un taux constant basé sur le modèle de consommation de Merton (1969). Mais dans une bonne partie des cas, le taux d'intérêt y est stochastique (voir par exemple : Deelstra et al. 2000, Boulier, Huang et Taillard 2001, Deelstra et al. 2002, Menoncin et al. 2003, Cairns et al. 2004). La complétude et l'absence d'opportunité d'arbitrage conduisent à la très importante relation d'évaluation des actifs qui veut que *la valeur actualisée de tout gain total d'un actif y compris ses versements futurs, soit égal à la valeur initiale du gain.* .

Cette relation entre la valeur actuelle d'un actif ne versant pas de dividende et sa valeur future, constitue le principal outil d'évaluation des différents éléments financiers en présence. Mais les calculs de valeurs futures probables actualisées se simplifient considérablement grâce aux univers liés au risque du marché, tels que l'univers risque neutre ou l'univers risque réel neutre (voir Menoncin et al. 2003, pour ce dernier univers incorporant le risque d'inflation) .

L'évaluation de tous les flux du modèle permet celle de l'actif total du portefeuille appelé souvent *la richesse* du portefeuille.

Représentation de l'actif

Dans ces types de modèles, cette fois, l'évolution de l'actif du fonds est explicitée et passe par l'évaluation de plusieurs paramètres instantanés constitutifs comme les taux d'intérêt, les actifs en place, les pensions versées ou les cotisations reçues. L'actif du fonds prend en compte toute la dynamique instantanée du fonds. Souvent, sur les portefeuilles de fonds de pension, le passif apparaît dans l'étude de l'actif du fonds par introduction d'une règle de partage du surplus ou de la variation du surplus (Battocchio et al. (2003), Deelstra et al. (2002)). Il arrive aussi que les études portent directement sur le surplus, ce qui met le passif en premier

plan au même titre que l'actif du fonds.

L'inflation connaît un double usage dans les développements de portefeuille de fonds de pension. Elle s'utilise comme facteur d'indexation des cotisations ou pensions ou pour la prise en compte des variations réelles des actifs.

La plupart du temps, elle est, certes, mentionnée mais figure sous forme implicite et les valeurs sont considérées nettes d'inflation(Boulier et al. (1993), Haberman et al. (2002) ou Devolder (2002)). Néanmoins Menoncin et al. (2003), intègrent une inflation des prix, permettant une évaluation des variations réelles et nominales à la fois. Cairns et al. (2004) mentionne en contribution définie l'inflation salariale avec des cotisations indexées . La situation, pourtant concrète, regroupant les deux usages reste cependant inexploitée. Dans un tel schéma, on aurait la vision simultanée des variations réelles et nominales de tout flux financier et aussi une indexation possible des pensions ou cotisations sur le salaire.

Représentation du passif

Par contre, peu de développements font état d'un passif élaboré avec une définition claire des pensions instantanées et du temps de travail comme en dynamique discrète. Très généralement, lorsque le passif est évoqué, il figure en tant qu'entité exogène parfois représenté par la simple agrégation de la pension totale instantanée réglée par le fonds(Boulier et al. (1993), Reichlin (2000)).

Mais Deelstra et al. (2002) ont impliqué un passif optimal relatif au minimum garanti en cotisations définies. Menoncin et al. (2003) ont introduit un passif retrospectif et même un passif prospectif tenant compte de l'instant futur de la mort de l'individu.

Ces derniers ont également introduit dans l'étude du passif la condition assurancielle de faisabilité faisant intervenir les valeurs totales futures comme passées des pensions et des cotisations.

Actif et passif du portefeuille, évalués à partir des éléments financiers et démographiques, serviront dans le contrôle du fonds de pension.

2.3 Contrôle des fonds de pension

Le contrôle consiste à dégager de manière optimale un outil ou un moyen de contrôle sur un risque ou un ensemble de risques menaçant le fonds de pension.

Les risques généralement couverts comprennent les risques du marché et les risques démographiques.

De manière générale, on part d'un critère à optimiser sous des contraintes sur les variables de commande. Le résultat est donc un ensemble de variables de commandes respectant les contraintes de façon optimale.

Mais le contrôle peut également s'opérer par des réajustements sur les commandes en vue d'atteindre les objectifs.

2.3.1 Contrôle par ajustements récurrents de commandes

La modélisation dynamique discrète dispose de l'avantage certain de présenter des modèles concrets et pratiques de la gestion des fonds de pension. En effet, la discrétisation du temps reflète la capacité réelle de réaction des gérants. Le contrôle peut, dans ces types de modélisation, passer par une régulation des commandes à chaque itération pour respecter des critères préétablis d'équilibre du fonds. Par exemple, dans un fonds à prestations définies on recherchera chaque année la cotisation qui, ajoutée à l'actif du fonds, fera égalier l'actif au passif (Aitken (1994) ou Owadally (1998)).

Mais, très généralement par souci de stabilité, ces ajustements sont étalés sur plusieurs périodes. Haberman (1992), Zimbidis et Haberman (1993) ou Owadally (1998) ont étudié le nombre optimal de périodes adéquat à l'étalement des ajuste-

ments.

Mais cette forme de contrôle nous amène déjà dans les types de contrôle par optimisation d'utilité espérée.

2.3.2 Contrôle par optimisation d'espérance d'utilités/désutilités

Le contrôle du fonds de pension par optimisation d'espérance d'utilité est une forme de contrôle qui se trouve dans tous les types de modélisation, qu'elles soient discrètes ou continues.

Formes des critères d'utilité

Le critère d'utilité peut concerner une minimisation de valeurs futures des coûts ou de la perte. Il peut aussi s'agir d'une maximisation du gain, du surplus ou de la richesse. Dans les cas de minimisation, on pourra parler de désutilité plutôt que d'utilité. Un avantage certain de ces types de contrôle est la possibilité d'y inclure des éléments psychologiques comme le goût du risque des individus ou un facteur d'escompte des valeurs futures.

Le goût du risque est celui de l'individu ou du groupe d'individus porteur du risque.

L'utilité peut être une fonction linéaire simple de l'élément à optimiser ou une fonction quadratique voire une fonction plus complexe du type H.A.R.A. (*Hyperbolique absolute risk aversion*)(voir Merton 1971).

En horizon fini, l'utilité porte souvent sur la valeur finale du critère considéré. Mais en horizon infini, l'utilité couvre souvent toute la période.

Admissibilité aux critères

La formulation de l'admissibilité joue un rôle prépondérant dans le contrôle des commandes. Les contraintes peuvent être de rentabilité et constituer le point

important de l'optimisation comme avec Leibowitz et al. (1992) où les auteurs croisent les portefeuilles admissibles pour des contraintes sur les deux rentabilités du surplus et du portefeuille à la fois.

Souvent, les contraintes sont simplement déterminées par une inéquation sur les commandes en question. Par exemple, on peut se donner comme contrainte la positivité des commandes de cotisation, de pension ou des parts de richesse du fonds à allouer selon les cas. La contrainte la plus courante reste la contrainte d'égalité sur les commandes d'allocation de la richesse. Elle se traduit par la condition faite à la somme des parts pondérées de toute l'allocation d'actif pour le fonds, d'égaliser l'unité. Cette contrainte assure que la totalité du fonds est placée en actifs du marché.

Conclusion

Au total, nous retiendrons que la modélisation est fonction du risque que l'on souhaite contrôler. Dans tous les cas, on observera au moins deux principales phases de la modélisation, à savoir le formalisme et le contrôle du risque.

Le formalisme définit les variables de commandes comme d'états constituant la dynamique de l'environnement économique, financier ou démographique du modèle. C'est aussi, et surtout, le lieu où est décrit le comportement de ces variables et donc leurs évolutions dans le temps, ce qui force donc le choix de la chronologie à adopter. Ce choix est très important pour le contrôle du fait que les outils mathématiques restent profondément liés au type d'évolution des variables. La manipulation de variables discrètes propres à une modélisation statique ou dynamique discrète diffère de celle d'une variable à valeurs continues. Cette différence se remarque ne serait ce que par le calcul des espérances mathématiques qui passe de l'outil de la sommation en temps discret à l'intégrale en temps continu.

Malgré toute son importance sur les calculs du contrôle, le choix de la chronologie seul ne suffit pas à caractériser les résultats. À formalisations assez identiques, les résultats seront plutôt fonction des critères d'optimalité et d'admissibilité.

Ainsi, par exemple, avec la formalisation la plus courante en temps continu qu'est l'économie stationnaire où le taux sans risque est constant et les actifs risqués ayant une évolution en brownien géométrique, les résultats de l'allocation stratégique optimale sont quasi-identiques pour une même forme d'utilité.

Dans une telle économie, lorsque l'utilité est en puissance CRRA (*Constant Relative Risk Aversion*) de la richesse finale, Devolder (2002) trouve une allocation en cotisations définies égale à l'allocation constante issue des travaux originaux de Merton (1969), bien que l'utilité porte sur la consommation pour ce dernier. Sundaresan et Zapatero (1997), avec une utilité toujours en puissance CRRA mais sur le surplus final, trouvent des résultats proches mais non identiques à Merton (1969), comme d'ailleurs Devolder (2002), lorsque la pension intervient en cotisations définies toujours. Des similitudes à Merton (1969) et à Merton (1971) qui passe cette fois par une utilité en fonction HARA (*Hyperbolique Absolute Risk Aversion*) plus générale sur la consommation, se retrouvent dans la plupart des résultats. C'est le cas pour la plupart des utilités quadratiques, comme par exemple pour l'utilité quadratique sur la cotisation en prestations définies avec Boulier et al. (1993) et Boulier et Dupré (2002). En cotisations définies, Haberman et al. (2004) et Haberman et al. (2002) ont également des résultats analogues avec une utilité composée quadratique portée sur les différences quadratiques du niveau du fonds puis des pensions autour de valeurs tests. Dans le même esprit, en prestations définies, Reichlin (2000) usant d'une utilité composée quadratique portée sur les différences quadratiques autour de valeurs tests du niveau du fonds puis des cotisations, obtient des résultats dans le même ordre de similitudes. Outre les développements en économie stationnaire, tous les résultats d'allocation stratégique optimale en

fonds de pension gardent de fait un fond de similitude avec les résultats de Merton (1971), dès que le temps est continu et le critère d'optimalité de forme HARA (Cairns et al. (2004), Boulier et al. (2001) et Menoncin et al. (2003)).

En modélisation dynamique discrète, les regroupements s'observent plutôt autour des méthodes pratiques de gestion des fonds de pension.

3

Modélisation dynamique discrète des fonds de pension

La modélisation de fonds de pension comporte une partie d'évaluation et une autre de contrôle. L'évaluation concerne la formalisation du modèle par la définition de l'environnement et des différents éléments constituant du modèle.

La partie contrôle, quant à elle, s'intéresse plus à la manière dont ces entités interagissent entre elles et surtout comment nous pouvons contrôler ces interactions afin de parvenir à un but déclaré de gestion. Pour citer un exemple, nous avons tout simplement l'allocation stratégique du portefeuille sous un critère d'utilité espérée ou, comme c'est souvent le cas en dynamique discrète avec prestations définies, le choix du type de fonds. En effet, dans ce cas précis, et comme le soulignent bien Aitken (1994) ou Owadally (1998), le choix du type de fonds comprend le type de gestion du fonds. Ainsi un fonds peut être du type "Unit credit" où seuls comptent les engagements effectivement dus. Pour les cas du type "Entry age normal", à chaque période, il est tenu compte à la fois des engagements effectifs et des engagements futurs.

Nous commencerons par le formalisme de l'environnement économique définis-

sant les conditions permettant l'évaluation des éléments constitutifs du modèle.

3.1 Formalisme en dynamique discrète

Toutes les entités économiques présentes dans un modèle de portefeuille interagissent selon des règles précises et sont supposées vérifier certaines hypothèses de définition ou d'équilibre. Les deux principaux constituants de tout modèle de fonds de pension sont l'actif et le passif. Des sous éléments constitutifs de ces deux piliers jouent également dans la dynamique du fonds, comme par exemple les taux d'intérêt ou d'inflation, les pensions et cotisations.

3.1.1 Environnement du fonds de pension

Nous pouvons distinguer un environnement lié directement au marché et un autre plutôt lié aux caractéristiques de la population du fonds.

Éléments du marché

En modélisation dynamique discrète, les éléments du marché restent les différents taux liés au marché.

Le taux d'inflation Mis à part quelques articles comme Cairns (2003 b), Cairns et Huang (2004) ou Cairns (1994), qui développent explicitement l'inflation des prix, elle est souvent déclarée inexistante par hypothèse (par exemple Dufresne 1989) ou implicitement prise en compte dans les taux qui seraient alors réels (par exemple Haberman 1994). Toute fois, l'usage de l'inflation salariale est assez courant (Dufresne 1988, Cairns 2003 b, Cairns 1994, Aitken 1994).

Le taux du marché Soit r_t le taux du marché ou taux d'évolution de l'actif du fonds sur la période $[t, t + 1[$. Haberman (1994) opte pour un taux de marché

autoregressif gaussien d'ordre un, tandis que Owadally (1998) le prend d'ordre multiple p avec p un entier quelconque positif. Dufresne (1988, 1989) penchent pour un taux simplement gaussien discret.

Le taux actuariel ou taux d'évaluation Ce taux qui sert principalement à l'évaluation du passif du fonds, est parfois pris comme l'espérance du taux de rendement des investissements du fonds que nous notons i_t (Zimbidis et Greece 2002, Haberman 1994, Dufresne 1988). Même si ces deux derniers, Haberman (1994) et Dufresne (1988), affirment que l'égalité :

$$E[i_t] = r \tag{3.1}$$

avec r le taux d'évaluation, n'a pas d'importance mathématique mais se conforme juste aux hypothèses classiques en étude de fonds de pension, nous ne pouvons ne pas y voir une forme d'absence d'opportunité d'arbitrage par analogie avec les développements en temps continu. En effet, cette égalité traduit que le rendement espéré de l'actif du fonds est égal au rendement de l'actif sans risque qui est bien le rendement d'évaluation d'usage. C'est comme si l'espérance se faisait en univers neutre au risque, et rejoignait là un des principes clés de l'évaluation par arbitrage¹. L'égalité 3.1 étant, dans tous les cas, liée à une hypothèse de stationarité de la population du fonds, nous ne la considérons pas vérifiée *a priori* et gardons l'écriture "r" pour le taux d'évaluation ou taux actuariel que nous supposons constant par simplification. À notre connaissance, ce taux en dynamique discrète a toujours été constant, même pour Cairns et Huang (2005) qui ont brisé le tabou du taux sans risque en dynamique discrète qu'ils ont pris stochastique. Cairns et Huang (2005), reviennent sur un taux actuariel constant différent du taux

¹On pourra se reporter à la page : 164 et sous-paragraphe 1.1.3, pour les évaluations en absence d'opportunité d'arbitrage (ou consulter Quittard-Pinon 1998, p.322).

”sans risque”, avec une population stationnaire.

Modélisation de la population de la caisse de retraite

Notons $N(t)$ la variable contenant les caractéristiques de la population, telles le nombre d’individu (N), leurs différents âges d’embauche (e_x) ou les âges à la mise en place du fonds (a_x) et aussi les âges effectifs ou supposés de départ en retraites (r_{0x}).

Les revenus Ils sont incontournables dans une modélisation de fonds de pension puisqu’ils interviennent à plusieurs niveaux. En effet les cotisations comme les pensions sont souvent indexées sur les revenus. Les salaires ont soit une évolution linéaire déterministe soit une évolution stochastique. Mais dans tous les cas, l’évolution des salaires est modélisable et exogène. Soit $S_{x,t}$, le salaire de l’individu d’âge x sur la période $[t, t + 1[$.

La mortalité En dynamique discrète, la probabilité de mortalité est souvent associée à la probabilité de maintien en service qui tient compte des licenciements, des démissions ou des cessations accidentelles d’activité. C’est ainsi que l’on parle de tables de service plutôt que de tables de mortalité (voir Petauton 1996, p.195). Il arrive que l’on fasse figurer directement les éléments issus de la table (de mortalité ou de service) plutôt que les probabilités. Ainsi, par exemple, nous utiliserons l_x pour désigner tous les individus d’âge x du fonds encore vivants à un instant donné. Nous ajouterons l’exposant (τ) aux éléments démographiques actuariels comme les commutateurs pour désigner que nous tenons compte de tables de service. La table par défaut étant la table prospective de mortalité.

L’actualisation Elle se fait à défaut par le taux sans risque ” r ” : $\nu^s = (1 + r)^{-s}$ avec $s \geq 0$ représentant le nombre de périodes d’actualisation .

Les commutateurs Le commutateur de base D_x est l’actualisation à l’instant

initial (plutôt à la date de naissance des individus en l'occurrence), d'une unité monétaire et pour l'ensemble des individus d'âge x et sur x périodes.

$$D_x = \nu_x l_x$$

Pour un usage des tables de services :

$$D_x^{(\tau)} = \nu_x l_x^{(\tau)}$$

Et lorsque les pensions ou cotisations sont indexées sur les salaires en pourcentage :

$${}^S D_x = S_x \nu_x l_x$$

$${}^S D_x^{(\tau)} = S_x \nu_x l_x^{(\tau)}$$

Une particularité intéressante du commutateur de base est que pour deux âges x_1 et x_2 d'un individu, tels que $x_1 \geq x_2$, alors :

$$\frac{D_{x_1}}{D_{x_2}} = \frac{\nu^{x_1} l_{x_1}}{\nu^{x_2} l_{x_2}} = \nu^{x_1-x_2} {}_{x_1-x_2}P_{x_2} \quad (3.2)$$

avec ${}_{x_1-x_2}P_{x_2}$, la probabilité d'atteindre l'âge x_1 sachant que l'individu a atteint l'âge x_2 . Le rapport de deux commutateurs correspond à une actualisation de l'âge x_1 à l'âge x_2 . Cette propriété essentielle est à la base de la construction des rentes viagères à partir du commutateur de base.

Les rentes viagères Les rentes viagères de toutes sortes s'obtiennent, de près ou de loin, à partir du commutateur de base :

•

$$N_x = \sum_{j=x}^{+\infty} D_j$$

la rente viagère actualisée à l'instant initial pour une unité monétaire versée à chaque période, partant de l'âge x .

•

$$\ddot{a}_x = \sum_{j=x}^{+\infty} \frac{D_j}{D_x} = \frac{N_x}{D_x}$$

la rente viagère anticipée d'une unité monétaire par période actualisée à l'âge x et en partant de l'âge x . Soit donc :

$$\ddot{a}_x = \sum_{j=x}^{+\infty} \nu^{j-x} {}_{j-x}P_x \quad (3.3)$$

•

$$\ddot{a}_{x:\overline{h-x}|} = \frac{N_h - N_x}{D_x}$$

La rente temporaire anticipée d'une unité monétaire actualisée à l'âge x et temporaire de $h - x$. Soit alors :

$$\ddot{a}_{x:\overline{h-x}|} = \sum_{j=x}^h \nu^{j-x} {}_{j-x}P_x \quad (3.4)$$

Nous notons que toutes les rentes viagères peuvent prendre les exposants (τ) à droite pour les probabilités de maintien en service ou S à gauche pour des pensions ou cotisations proportionnelles aux salaires. Tous ces éléments, liés à la population du fonds, ont leur usage dans l'élaboration et la structuration du passif du fonds.

3.1.2 Modélisation du passif et de l'actif de la caisse de retraite

Nous commencerons par l'évaluation du passif du fonds de pension puisque l'évaluation de son actif se fera à l'aide de la valeur du passif.

Passif

Soient x l'âge actuel de l'individu, L_x la valeur actualisée à l'âge x de la pension totale future. C'est donc la pension due pour le travail effectué depuis la date d'embauche (respectivement la date d'affiliation au fonds). Son mode de calcul dépendra beaucoup du type de gestion du fonds de pension. Rappelons que $l_{x,t}$ est le nombre d'individus d'âge x du fonds encore vivants à t et considérons en outre, les entités suivantes :

- e_x l'âge d'embauche de l'individu d'âge actuel x .
- a_x l'âge à la mise en place du fonds de pension de l'individu d'âge actuel x .
- r_0 l'âge de la retraite pour l'individu concerné.
- Soient ${}_{r_0-x}p_x$ la probabilité d'atteindre l'âge r_0 sachant qu'on a atteint l'âge x . ${}_{r_0-x}p_x = \frac{l_{r_0}}{l_x}$
- Soit b_x la pension due pour une période de travail effectué par l'individu d'âge x et à verser à partir de la retraite à chaque début de période.
- Soit B_x la pension due pour toute les périodes de travail effectué depuis l'embauche ou la mise en place du fonds selon le type de fonds et à verser à partir de la retraite à chaque période, à l'individu d'âge actuel x . $B_x = b_x(x - a_x)$ ou $B_x = b_x(x - e_x)$, lorsque b_x est constant. L'expression exacte serait, en prenant désormais l'âge d'embauche, comme âge de début des droits par défaut :

$$B_{x,t} = \sum_{x_k=e_x}^{x_t} b_{x_k} \quad (3.5)$$

; sachant que $b_{x_k} = 0$ pour $x_k \geq r_0$ ¹.

Rappelons $\ddot{a}_{r_0}^{(12)}$ la valeur actualisée en r_0 d'une rente d'une unité monétaire annuelle partant de l'âge r_0 jusqu'à la mort de l'individu pour un versement mensuel de $(\frac{1}{12})^{ieme}$ d'euro par mois et incluant la probabilité de survie annuelle. Cette rente

¹Il n'y a pas d'activité donnant droit à la retraite après l'âge de la retraite.

dans le cas général de m versements par an au lieu des 12, vaut :

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{j=x \cdot m}^{+\infty} \frac{1}{m} \nu^{\frac{j-x \cdot m}{m}} \left(\frac{j-x \cdot m}{m} \right) P_x$$

ou, pour

$$k_{(j,x,m)} = \frac{j-x \cdot m}{m} \quad (3.6)$$

nous avons

$$\ddot{a}_x^{(m)} = \sum_{k_{(j,x,m)}=0}^{+\infty} \frac{1}{m} \nu^{k_{(j,x,m)}} k_{(j,x,m)} P_x$$

Une autre écriture de $\ddot{a}_x^{(m)}$, consisterait à chercher le taux équivalent $r^{(m)}$ de r pour une période de $\frac{1}{m}$:

$$r^{(m)} = (1 + r)^{\frac{1}{m}} - 1 \quad (3.7)$$

, mais une telle écriture nous oblige à transformer toutes nos périodes et serait inadéquate si nous souhaitions garder des valeurs annuelles pour les pensions et autres flux. La population du fonds est généralement considérée très stable au point que seules les variations du marché affectent le passif d'une période à l'autre hors paiement de la pension et de la cotisation prévisionnelles (Dufresne 1989, Dufresne 1988, Haberman 1994, Cairns 1994). Dans une telle situation, le nombre d'individus dans chaque groupe d'âge est constant et le passif s'évalue par la formule suivante si TNC_t est la cotisation totale prévisionnelle ou d'équilibre sachant la pension prévue B_t de la même période :

$$L_{t+1} = (L_t - B_t + TNC_t) (1 + r_t) \quad (3.8)$$

Avec dans ce cas $r_t = r$ puisque nous avons considéré plus haut que le taux d'évaluation est constant. Le passif est alors la valeur capitalisée du flux formé du passif de la période précédente diminué de la pension à payer au cours de cette même période passée et augmenté de la cotisation d'équilibre correspondante. La

stabilité de la population dispense de la prise en compte éventuelle de passif dû à de nouveaux éléments entrants et rend le passif prévisible. Mais nous allons ici revenir à une hypothèse plus ouverte sur la population qui évolue naturellement avec des entrées et des sorties libres.

Actif

L'actif représente la richesse disponible ou l'avoir du portefeuille, qui permettra de faire face à ses encours. Pour faire face aux besoins et engagements du fonds, le gérant investit la richesse disponible sur les actifs du marché. Sa richesse est, de plus, sans cesse alimentée par les cotisations. En dynamique discrète on différencie peu les actifs du marché et seul le taux i_t de rendement de l'actif total du fonds cité plus haut, est représentatif du marché. Nous noterons X_t le niveau du fonds sur la période entre les instants t et $t + 1$. Soit $c(t)$ la cotisation effective de la période et NC_x le coût *normal* de la pension ou la cotisation d'équilibre sur la période. L'équilibre du fonds est un équilibre vérifiant le principe des assurances qui veut que la valeur actualisée des primes futures égale celle actualisée des décaissements futurs.

Le coût total normal¹ du fonds est TNC_t et la contribution effective totale est C_t . Elle se fait en fin de période et la pension totale versée en début période est B_t . Les relations suivantes sont en fin de la période $[t, t + 1]$.

$$X_{t+1} = (X_t - B_t)(1 + i_t) + C_t \quad (3.9)$$

Lorsque la contribution se fait en début de période on a :

$$X_{t+1} = (X_t - B_t + C_t)(1 + i_t) \quad (3.10)$$

¹Par "normal" nous entendons en fait d'équilibre.

Différentes relations d'équilibre peuvent lier le niveau du fonds X_t et le passif L_t . Le lien peut être direct à travers le surplus ou le déficit. Mais le lien peut aussi être indirect et passer par les principaux constituants C_t , TNC_t ou B_t selon les choix d'objectifs de gestion. L'objectif principal sera toujours le paiement des engagements L_t avec l'avoir X_t . Le contrôle le plus direct de X_t pour atteindre cet objectif se fera par la détermination de la cotisation d'équilibre en prestations définies TNC_t .

3.2 Différents types de fonds de pension en prestations définies

La gestion d'un fonds de pension en dynamique discrète se base donc sur la vérification du principe des assurances. Cette condition garantit un équilibre entre l'assureur et les souscripteurs. En prestations définies, pour un niveau de fonds et un niveau de passif donnés, il y a plusieurs manières de déterminer la cotisation permettant de vérifier le principe d'équilibre. Nous dénombrons deux principales méthodes avec néanmoins plusieurs sous méthodes en prestations définies, ayant usage dans la pratique de gestion de fonds de pension. Nous fixons donc la période à une année, les pensions et les cotisations sont en valeurs annuelles mais leurs versements effectifs sont mensuels d'où l'utilisation de la rente périodique $\ddot{a}_x^{(12)}$.

3.2.1 Méthode du "Unit Credit"

Le principe de cette méthode est tel qu'à tout instant, la valeur actualisée des cotisations totales issues de la rémunération du travail effectivement fourni, égale la valeur actualisée des pensions futures correspondantes. Selon que les prestations sont définies en unité monétaire ou respectivement en proportion de salaires futurs, nous distinguons le "Traditional Unit Credit" ou respectivement le "Projected Unit

Credit”.

Le total des engagements accumulés depuis l’entrée en service pour un individu d’âge x , avant la retraite, s’évalue en unités monétaires d’aujourd’hui par :

$$L_x = B_x \frac{D_{r_o}^{(\tau)}}{D_x^{(\tau)}} \ddot{a}_{r_o}^{(12)} \quad (3.11)$$

Le passif sur l’individu d’âge x , est la rente mensuelle viagère à partir de la retraite, de la pension totale annuelle acquise jusqu’à l’âge x et projetée à la retraite. Pour un individu déjà à la retraite, le passif est simplement la rente mensuelle de la pension totale acquise jusqu’à la retraite, abstraction faite d’une éventuelle évolution de la pension une fois déterminée¹ :

$$L_{x,t} = B_{x,t} \ddot{a}_x = B_{r_0} \ddot{a}_x \quad (3.12)$$

Le total des engagements pour l’ensemble de la population du fonds s’obtient donc par simple sommation des L_x . Pour un individu d’âge x , le coût NC_x de la pension de sa $x^{\text{ième}}$ période, se calcule en ”Unit Credit” par :

$$NC_x = b_x \cdot \frac{D_{r_o}^{(\tau)}}{D_x^{(\tau)}} \ddot{a}_{r_o}^{(12)} \quad (3.13)$$

Pour une période, l’individu devra *normalement* payer une cotisation égale à la rente viagère actualisée de la pension acquise pour le travail effectué durant la seule période concernée.

Par définition de b_x et B_x (équation :3.5) on voit bien que de telles cotisations, lorsque les pensions b_x sont constantes, conduisent à la relation d’égalité liant le

¹Les pensions sont supposées non indexées sur les salaires ou sur l’inflation. Les cas de pensions indexées sont développés en modélisations continues

passif et la cotisation d'équilibre :

$$L_x = NC_x (x - e_x) \quad (3.14)$$

Dans un cas où il n'y a pas de départ avant l'âge de la retraite, la cotisation d'équilibre s'écrit :

$$NC_x = b_x \frac{N_{r_o}^{(12)}}{D_x} = b_x \cdot \nu^{r_o-x} p_x \cdot \ddot{a}_x^{(12)}$$

En "Projected Unit credit", nous aurions eu les prestations b_x et B_x en fonction d'une moyenne de salaires finaux. En supposant donc que b_x soit une proportion fixe du salaire S_x et en admettant une progression linéaire des salaires au taux "s" nous avons :

$$NC_x = b_x S_x \frac{{}_S D_{r_o}^{(\tau)}}{{}_S D_x^{(\tau)}} \ddot{a}_{r_o}^{(12)} \quad (3.15)$$

Exemple de calcul en "Traditional Unit credit" :

On se donne un fonds de pension mis en place le 01/01/1997 avec une promesse de 30 euros par mois par année de service depuis l'embauche (respectivement : depuis la date de mise en place). Nous supposons que tous les employés sont embauchés à 25 ans et qu'en plus, il n'y a aucun cas de départ avant l'âge de la retraite autre que la mort de l'individu. Avec les tables de mortalité et la valeur du taux d'actualisation de la rente, nous fixons que : $\ddot{a}_{65}^{(12)} = 10$, en supposant que l'âge de la retraite est à 65 ans pour tous. Nous disposons en plus des informations suivantes au 01/01/2007 sur les âges des employés, leur nombre et les fonctions d'actualisation.

Age x	membres	D_x
25	8	16
35	0	8
45	2	4
55	0	2
65	0	1

On se propose d'évaluer en euros d'aujourd'hui le total \mathbf{L} des pensions accumulées au 01/01/2007.

Pour ce faire, nous prenons la date 01/01/1997 pour instant initial $t = 0$. Pour les individus d'âge 25, la pension annuelle accumulée $B_{25} = 0$ car il n'y a pas encore d'accumulation de droits à la retraite, puisqu'ils viennent tout juste d'être embauchés. Pour les deux membres d'âge 45, on a, en cas de rachat des années de travail avant la mise en place du fonds et comme ils ont en tout travaillé 20 ans depuis leur embauche :

$$B_{45} = 30 \times 12 \times 20 = 7200 \text{ Euros}$$

Sinon, pour les 10 années de travail depuis la mise en place du fonds, la pension annuelle est de :

$$B_{45} = 30 \times 12 \times 10 = 3600 \text{ Euros}$$

Pour 10 ans de travail fourni, avec un droit de 30 euros par mois de travail, l'individu d'âge 45 a accumulé un droit de 3600 euros annuels à vie à partir de la retraite.

Les engagements accumulés aujourd'hui pour un individu d'âge 45 ans :

$$L_{45} = \frac{D_{65}}{D_{45}} B_{45} \ddot{a}_{65}^{(12)} \quad (3.16)$$

la valeur du passif à la date $t = 10$ (aujourd'hui) vaut pour le premier cas de rachat des années avant mise en place du fonds :

$$\begin{aligned} TL &= 2 \times L_{45} \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{4} \times 7200 \times 10\right) \\ &= 36000 \text{ euros} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Et pour le cas de prise en compte uniquement des années à partir de la mise en place du fonds :

$$\begin{aligned} TL &= 2 \times L_{45} \\ &= 2 \times \left(\frac{1}{4} \times 3600 \times 10\right) \\ &= 18000 \text{ euros} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Évaluons maintenant la valeur probable du passif à un horizon de 10 ans (01/01/2017) où les individus d'âge actuel de 25 ans auront 35 ans avec 10 ans de service et ceux de 45 ans auront 55 ans, avec 20 ans de service validés pour les droits à la retraite :

$$\begin{aligned} TL_{10} &= 8 L_{35} + 2 L_{55} \\ &= 8 \left(\frac{1}{8} \times 36000\right) + 2 \left(\frac{1}{2} \times 72000\right) \\ &= 108000 \text{ euros} \end{aligned} \quad (3.19)$$

En dix ans, les engagements du fonds connaissent un bon de 500% dans un cas certes simplifié par l'absence d'indexation, mais qui reste tout à fait réaliste.

3.2.2 Méthode du "Entry Age Normal"

Le principe de cette méthode se base sur le fait que, pour déterminer le coût de la pension, on ne considère pas que le travail effectivement produit depuis l'embauche ou depuis la mise en place du fonds mais plutôt le travail sur toute la durée d'activité de l'individu. Autrement dit, on tient compte en une seule fois des cotisations et pensions correspondantes au travail total effectué et donc passé additionné au travail total à effectuer et donc futur. Ici, comme dans toutes les méthodes, on pourrait distinguer les cas où la pension est fixe ou fonction d'une moyenne de salaires finaux et les cas où l'on tient compte plutôt de la date d'embauche ou de la date de participation au fonds comme instant initial.

Dans tous ces cas, en "Entry age normal", l'équilibre se définit par la relation suivante qui doit se vérifier à tout instant :

$$NC_x \left(\frac{N_{e_x}^{(\tau)} - N_{r_o}^{(\tau)}}{D_{e_x}^{(\tau)}} \right) = B_{r_o} \frac{D_{r_o}^{(\tau)}}{D_{e_x}^{(\tau)}} \ddot{a}_{r_o}^{(12)} \quad (3.20)$$

À chaque période, on réajuste, si nécessaire, les cotisations de sorte qu'elles vérifient l'équilibre sur toute la vie du fonds. Lorsque la contribution normale doit être un pourcentage U des salaires et en admettant encore une progression linéaire des salaires au taux "s" nous avons :

$$U S_{e_x} \ddot{a}_{e_x: r_o - e_x}^S = B_{r_o} \frac{D_{r_o}^{(\tau)}}{D_{e_x}^{(\tau)}} \ddot{a}_{r_o}^{(12)} \quad (3.21)$$

La rente temporaire des cotisations en pourcentage U des salaires évoluant au taux "s" de l'embauche à la retraite vaut la rente viagère au taux r de la pension totale, à partir de la retraite.

Lorsque à présent nous fixons l'instant initial à la mise en place du fonds et que

l'individu est bien sûr déjà en fonction en ce moment, il vient :

$$NC_{ax} \frac{N_{ax}^{(\tau)} - N_{ro}^{(\tau)}}{D_{ax}^{(\tau)}} = B_{ro} \frac{D_{ro}^{(\tau)}}{D_{ax}^{(\tau)}} \ddot{a}_{ro}^{(12)} \quad (3.22)$$

Remarques : 3.1 1. En "Unit Credit" comme en "Entry Age Normal", la cotisation d'équilibre peut être en pourcentage U du salaire, que ce soit un salaire initial évoluant comme sur l'équation 3.21, ou un salaire futur ou le salaire du moment.

2. Les différentes formes d'indexation de cotisations comme des pensions sur un support de salaire moyen futur, sont développées en modélisation en temps continu sous paragraphe : 1.2.3; page : 172.

3.2.3 Méthode des coûts supplémentaires

Il arrive souvent, dans la pratique, que la relation d'équilibre assurantiel ne soit pas vérifiée à certaines périodes. Pour diverses raisons comme une croissance non prévue des droits promis à la retraite¹ ou une décroissance imprévue du marché ou même de la mortalité de la population, le passif peut se trouver plus important que prévu et de manière si importante parfois qu'il serait lourd de reporter cette excroissance dans le coût de la seule période suivante. En pratique donc, on évalue l'écart par rapport à l'évolution "normale" du fonds et on en constitue un actif négatif dont on résorbera la valeur par paiements *supplémentaires*, étalés sur une durée fixée. Si nous appelons LS le déficit observé du fonds tel que : $LS_t = L_t - X_t$, et si le délai d'absorption est de m périodes, alors le coût supplémentaire CS_x à la $n^{\text{ième}}$ avec $0 \leq n \leq m$ période depuis le constat de LS sera de : $CS_x = \frac{LS}{\ddot{a}_{m-n}}$.

La contribution effective est donc la somme des coûts : $C = NC + CS$. En

¹Par négociation syndicale ou forte hausse des salaires ou de l'inflation non prévues, il peut il y avoir alors une hausse du niveau des retraites promises. Dans les deux derniers cas, cela joue lorsque les retraites sont indexées sur les salaires ou l'inflation.

cas de surplus, LS est négative, et la contribution effective sera alors moindre par soustraction de la valeur de CS à NC.

Lorsque le décalage LS a lieu dès le début de la participation de l'individu au fonds, on parle de gel de passif initial ou de "Frozen initial liability", puisque le paiement ne s'effectue pas aussitôt. Et c'est le cas des rachats d'années supplémentaires où, par exemple, les années de longues études sont rachetées par cotisations supplémentaires.

3.2.4 Classement par évaluation individuelle ou collective

Nous pouvons remarquer que toutes les méthodes sus citées amènent à des calculs de coûts pour l'individu. Ce sont alors des méthodes individuelles, mais en réalité, il est également possible de considérer la cotisation totale du fonds par l'une ou l'autre de ses méthodes : c'est la méthode collective ou "Aggregate cost method". Dans une telle méthode, le passif est bien la valeur actuelle de la somme des engagements du fonds mais la cotisation normale n'est pas individuelle mais collective.

Les méthodes collectives ont la particularité de mutualiser directement le risque démographique de la mortalité puisqu'elles opèrent sur l'ensemble de la population à travers une moyenne des rentes viagères individuelles. Par ailleurs, elles ont aussi la particularité de faire intervenir le niveau du fonds dans la détermination de la cotisation d'équilibre, notamment dans la collective en "Unit Credit".

Méthode du "Aggregate Unit Credit"

La cotisation totale d'équilibre, dans la collective en "Unit Credit", s'obtient par une hypothèse de déduction sur les cotisations futures. Le principe stipule que le niveau actuel du fonds est destiné au cumul des engagements passés et donc la différence du passif total et du niveau actuel du fonds correspond à la valeur des

engagements futurs. Or, par hypothèse d'équilibre, ces engagements futurs égalent les cotisations totales futures. Si N est le nombre d'individus dans le fonds :

$$TNC \sum_x \frac{N_x^{(\tau)} - N_{ro}^{(\tau)}}{N \cdot D_x^{(\tau)}} = \sum_x B_{ro} \frac{D_{ro}^{(\tau)}}{D_x^{(\tau)}} \ddot{a}_{ro}^{(12)} - X_t \quad (3.23)$$

Le principe sera le même pour les autres méthodes collectives.

Méthode du "Aggregate Entry Age Normal"

Bien que le principe de la déduction reste le même en méthodes collectives, en "Aggregate Entry Age Normal" le niveau actuel du fonds n'apparaît pas dans la détermination de la cotisation d'équilibre puisque par définition de la "Entry Age Normal", on ne peut dissocier le passé du futur.

$$TNC \sum_{ex} \frac{N_{ex}^{(\tau)} - N_{ro}^{(\tau)}}{N \cdot D_{ex}^{(\tau)}} = \sum_{ex} B_{ro} \frac{D_{ro}^{(\tau)}}{D_{ex}^{(\tau)}} \ddot{a}_{ro}^{(12)} \quad (3.24)$$

Méthode du "Aggregate Frozen Initial Liability"

La méthode collective incluant un gel du passif initial est identique à celle du "Unit Credit", à cela près qu'il faut y tenir compte du règlement échelonné du gel. Le gel total restant dû faisant toujours partie du passif total et la partie du gel déjà réglée étant considérée comme faisant partie des engagements passés et donc pris en compte dans l'actif actuel, il ne reste plus qu'à matérialiser le règlement du gel courant qui s'ajoute de fait à l'actif.

$$TNC \sum_x \frac{N_x^{(\tau)} - N_{ro}^{(\tau)}}{N \cdot D_x^{(\tau)}} = \sum_x B_{ro} \frac{D_{ro}^{(\tau)}}{D_x^{(\tau)}} \ddot{a}_{ro}^{(12)} - PNC_t - X_t \quad (3.25)$$

Avec PNC_t le Passif Non Couvert du fonds en début de la période $[t, t + 1[$:

$$PNC_0 = \sum_{ax} B_{ro} \frac{D_{ro}^{(\tau)}}{D_{ax}^{(\tau)}} \ddot{a}_{ro}^{(12)} - TNC \sum_{ax} \frac{N_{ax}^{(\tau)} - N_{ro}^{(\tau)}}{N \cdot D_{ax}^{(\tau)}}$$

Dans ce cas, une richesse nulle à la mise en place du fonds s'impose :

$$X_0 = 0$$

et la relation suivante pour les autres années sur PNC et la cotisation supplémentaire :

$$\begin{aligned} PNC_0 &= CS \ddot{a}_{\overline{m}|} \\ PNC_1 &= CS \ddot{a}_{\overline{m-1}|} \\ &\dots \\ &\dots \\ PNC_m &= 0 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Nous remarquons que la richesse totale du fonds fait son retour dans cette méthode collective.

3.2.5 Méthodes simultanément individuelles et collectives

Pour évaluer une cotisation individuelle à partir du fonds total, on passe par un partage du niveau de la richesse disponible au prorata par exemple du passif individuel, on parle alors de méthode à la fois individuelle et collective ou de "Individual-Aggregate Cost Method" (voir Aitken 1994, p.111).

En notant X_x la part de l'individu d'âge x dans le fonds, nous pouvons déduire sa contribution normale dans un type "traditional" :

$$NC_x \frac{N_x^{(\tau)} - N_{ro}^{(\tau)}}{D_x^{(\tau)}} = B_{ro} \frac{D_{ro}^{(\tau)}}{D_x^{(\tau)}} \ddot{a}_{ro}^{(12)} - X_x \tag{3.27}$$

Nous récapitulons quelques cas des méthodes sus citées dans le tableau suivant :

TAB. 3.1: Tableau récapitulatif de formules de la contribution normale en dynamique discrète

Méthodes	sous-méthodes	Formules de la contribution normale
Unit credit	Traditional	$NC_x = b_x \frac{D_{ro}^{(\tau)}}{D_x^{(\tau)}} \ddot{a}_{ro}^{(12)}$
	Projected	$NC_x = b_x S_x \frac{{}^S D_{ro}^{(\tau)}}{S D_x^{(\tau)}} \ddot{a}_{ro}^{(12)}$
	$t_0 = e_x$	$NC_{ex} \frac{N_{ex}^{(\tau)} - N_{ro}^{(\tau)}}{D_{ex}^{(\tau)}} = B_{ro} \frac{D_{ro}^{(\tau)}}{D_{ex}^{(\tau)}} \ddot{a}_{ro}^{(12)}$
Entry age normal	$t_0 = e_x$ et NC en pourcentage U du salaire	$US_{ex} \ddot{a}_{ex:ro-ex}^{(12)} = B_{ro} \frac{D_{ro}^{(\tau)}}{D_{ex}^{(\tau)}} \ddot{a}_{ro}^{(12)}$
	$t_0 = a_x$	$NC_{ax} \frac{N_{ax}^{(\tau)} - N_{ro}^{(\tau)}}{D_{ax}^{(\tau)}} = B_{ro} \frac{D_{ro}^{(\tau)}}{D_{ax}^{(\tau)}} \ddot{a}_{ro}^{(12)}$
Aggregate	Aggregate Unit credit	$TNC \sum_x \frac{N_x^{(\tau)} - N_{ro}^{(\tau)}}{N_x D_x^{(\tau)}} = \sum_x B_{ro} \frac{D_{ro}^{(\tau)}}{D_x^{(\tau)}} \ddot{a}_{ro}^{(12)} - X_t$
	Aggregate Entry age normale	$TNC \sum_{ex} \frac{N_{ex}^{(\tau)} - N_{ro}^{(\tau)}}{N_x D_{ex}^{(\tau)}} = \sum_{ex} B_{ro} \frac{D_{ro}^{(\tau)}}{D_{ex}^{(\tau)}} \ddot{a}_{ro}^{(12)}$
	Aggregate Frozen initial liability	$TNC \sum_x \frac{N_x^{(\tau)} - N_{ro}^{(\tau)}}{N_x D_x^{(\tau)}} = \sum_x B_{ro} \frac{D_{ro}^{(\tau)}}{D_x^{(\tau)}} \ddot{a}_{ro}^{(12)} - PNC_t - X_t$
	Traditional Individual Aggregate	$NC_x \frac{N_x^{(\tau)} - N_{ro}^{(\tau)}}{D_x^{(\tau)}} = B_{ro} \frac{D_{ro}^{(\tau)}}{D_x^{(\tau)}} \ddot{a}_{ro}^{(12)} - X_x$

Relations pertes/gain ou surplus/déficit

De manière générale, lorsque nous ne sommes pas en cas de gel du passif initial, on a la relation suivante définissant le passif non couvert :

$$PNC_t = L_t - X_t \quad (3.28)$$

Et la valeur espérée à t du passif non couvert en fin de période $[t, t + 1[$:

$${}^{esp} PNC_{t+1} = (PNC_t + TNC_t)(1 + r_t) - C_t \quad (3.29)$$

Tandis que lorsque arrive le temps t+1 la valeur effective actuelle se note par la définition (équation : 3.28) :

$${}^{act} PNC_{t+1} = L_{t+1} - X_{t+1}$$

On parle de gain lorsque :

$${}^{esp} PNC_{t+1} > {}^{act} PNC_{t+1}$$

et de perte dès que :

$${}^{esp} PNC_{t+1} < {}^{act} PNC_{t+1}$$

Le processus de perte ou de gain :

$$G_t = {}^{esp} PNC_t - {}^{act} PNC_t$$

constitue un principal sujet de contrôle de la gestion du fonds de pension (voir Owadally 1998, Aitken 1994, p.59). Le processus est différent du surplus ou déficit classique dans la mesure où, pour le processus de surplus, il n'est pas question

de comparaison entre l'expérience et l'espérance. Appelons $Sur_+(t)$ le surplus du fonds à l'instant "t" et $Def(t)$ le déficit à cet instant.

$$Sur_+(t) = X_t + CS \ddot{a}_{\overline{m}|} - L_t \tag{3.30}$$

$$Def(t) = L_t - CS \ddot{a}_{\overline{m}|} - X_t$$

Avec $CS = 0$ lorsqu'il n'y a pas de cotisation supplémentaire.

Bien que la comparaison entre l'expérience et l'espérance ne soit pas explicite dans la formulation du surplus/déficit, il n'en est pas moins que le processus dépend fortement de l'expérience.

Dans les méthodes "Aggregate Unit Credit" ou "Traditional Individual Aggregate", par hypothèse même des méthodes, la cotisation d'équilibre veille à chaque période à la vérification de la relation d'équilibre qui n'est autre que l'annulation du déficit entre le passif et l'actif. Ainsi, à chaque expérience, lorsque le déficit/surplus n'est pas nul, le fonds réajuste aussitôt sa cotisation d'équilibre de façon à y remédier à la période suivante. À chaque période, le fonds avance comme si les engagements passés sont sûrement couverts par le fonds jusqu'à l'instant présent, et tout éventuel déficit incombe aux cotisations futures qui sont alors définies de sorte à corriger tout écart possible. En somme donc, dans ces deux méthodes, le processus de surplus/déficit est lié à l'expérience et est toujours maintenu nul, car suite à l'expérience, sa valeur est immédiatement réajustée vers le nul à travers la cotisation d'équilibre.

Pour les mêmes raisons, le processus G est toujours maintenu nul également, dans ces deux méthodes. La valeur espérée des pensions non couvertes est toujours nulle et la valeur d'expérience aussitôt absorbée par la cotisation d'équilibre.

Dans les développements qui vont suivre, nous allons observer les différentes formes de contrôle autres que celles liées à l'équilibre actuariel.

3.3 Autres formes de contrôle

Outre ces méthodes de gestion, le gestionnaire du fonds de pension a en sa possession d'autres moyens de contrôle en dynamique discrète. Ces moyens comme, nous allons le voir, sont le plus souvent complémentaires des méthodes actuarielles sus présentées.

Ainsi, Haberman (1992), Owadally (1998) et Cairns (1994) ont recherché l'efficience du délai "m" d'étalonnement des cotisations supplémentaires dans le cadre d'un fonds de pension à prestations définies par minimisation des variances des cotisations et du fonds lui même lorsque le taux du marché est un processus autoregressif gaussien.

Par ailleurs, ces deux premiers, Haberman (1992) et Owadally (1998), appliquent un contrôle d'un autre genre sur le fonds en déterminant l'allocation stratégique optimale sous minimisation d'une espérance d'un critère de perte quadratique. Dans le même esprit, Zimbidis et Greece (2002), recherchent l'allocation optimale minimisant les pertes quadratiques sur les coûts de transaction cette fois.

Sur la même lancée, Cairns et Huang (2004), déterminent par minimisation d'une désutilité quadratique, l'allocation optimale du portefeuille dupliquant les pensions qui sont elles même indexées sur l'inflation.

Boulier et Dupré (2002) ont également par, minimisation d'une désutilité quadratique de coût, résolu dans un cadre très simplifié, le problème d'allocation optimale d'un portefeuille de fonds de pension à prestations définies en dynamique discrète. Nous suivons ici les grandes lignes de leur démarche en l'appliquant cette fois ci à un fonds qui peut être aussi bien à prestations définies qu'à cotisations définies.

3.3.1 Contrôle dans un fonds de pension mixte en dynamique discrète

Après avoir posé les bases du modèle, les cas de cotisations définies seront analysés avant les prestations définies.

Formalisme

On se met dans un cadre simple, où la période est l'année et l'intervalle d'étude infini. Il n'y a que deux actifs sur le marché : l'un sans risque de rentabilité constante r et l'autre risqué de rentabilité annuelle R_t pour l'année $[t, t + 1[$.

Soient C_t , la contribution du fonds pour l'année $[t, t + 1[$ et P_t , la pension à verser au cours de la même année. Pensions et contributions sont supposées versées en début d'année. Soient X_t , la richesse du fonds sur la période concernée et u_t la proportion en actif risqué. Le fonds peut être *a priori*, aussi bien à prestations définies qu'à cotisations définies. Le but est de contrôler l'allocation en actif risqué dans tous les cas et les pensions lorsque les cotisations sont définies (respectivement les cotisations lorsque les pensions sont définies), pour respecter le niveau des cotisations (respectivement des pensions) fixé.

Hypothèse : 3.1 (H_X)

Nous supposons que le fonds ne souhaite pas s'écarter d'un certain niveau X et que les paramètres démographiques du fonds restent constants.

Puisque nous avons des pensions et des cotisations qui existent simultanément, nous sommes alors nécessairement dans un cas collectif avec des actifs et des inactifs évoluant simultanément.

Les approximations simplificatrices sur la population du fonds, font que nous n'avons plus que trois variables dans le système :

- La rentabilité de l’actif risqué, dont les variations sont aléatoires et indépendantes du fonds.
- La variable de la pension si nos cotisations sont définies ou celle de la cotisation lorsque ce sont nos prestations qui sont définies.
- Et l’allocation en actif risqué.

Les deux dernières variables sus-citées, sont endogènes au fonds et constituent les variables de commande sur lesquelles il faudra jouer pour approcher l’objectif de gestion souhaité, tout en observant l’évolution du marché.

Soient :

- $G(t)$ la valeur du cash en début de période, sur l’intervalle $[t, t + 1[$;
- A_t , la valeur du cours de l’actif risqué, en début de période, sur l’intervalle $[t, t + 1[$, également ;
- λ , la prime de risque constante ;
- σ^2 la variance constante de la rentabilité $R(t)$ de l’actif risqué sur tout intervalle $[t, t + 1[$;
- et z_t , $t \geq 0$ un processus gaussien discret et iid¹, de loi centrée réduite, traduisant la source d’incertitudes du marché sur le couple $(A(t), R(t))$ en $t \geq 0$.

Les valeurs initiales $A(0)$ et $G(0)$ sont toujours connues et $G(0) = 1$.

Nous modélons l’évolution du cours de l’actif risqué entre deux périodes successives par :

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{A_{t+1} - A_t}{A_t} = (\lambda + r) + \sigma z_t \quad (3.31)$$

¹C’est à dire à représentations indépendantes et identiquement distribuées à chaque période.

Tandis que pour le cash, nous avons :

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{G_{t+1} - G_t}{G_t} = r$$

et donc

$$G(t+1) = G(t)[1+r]$$
(3.32)

En début de chaque période $[t, t+1[$, le fonds investit la proportion u_t de sa richesse X_t , sur l'actif risqué et la proportion $(1 - u_t)$, sur le cash. Le rendement $R_p(t)$ du portefeuille sur le marché, est donc en fin de période la $[t, t+1[$:

$$R_p(t) = u_t \frac{\Delta A}{A} + (1 - u_t) \frac{\Delta G}{G}$$

$$R_p(t) = u_t [(\lambda + r) + \sigma z_t] + (1 - u_t) r$$
(3.33)

$$R_p(t) = u_t \lambda + r + u_t \sigma z_t$$

Le niveau du fonds étant maintenu constant à X , alors tout le retour des investissements et l'abondement des cotisations sont aussitôt versés en pension. Que nous soyons en cotisations définies ou en prestations définies, le gérant du fonds observe les opérations suivantes en début de la période $[t, t+1[$, en supposant que t est plus grand que 1 :

- il rassemble la cotisation $C(t)$ reçue en ce même début de période et le retour des investissements, du portefeuille sur le marché, issu de la période précédente, $X_{t-1}R_p(t-1)$;
- avec le flux $C(t) + X_{t-1}R_p(t-1)$ ainsi rassemblé il paie sa pension $P(t)$.

Nous supposons qu'à l'instant initial, $P(0) = 0$ et le fonds ne paie des pensions qu'à partir de la deuxième année de fonctionnement, après une année d'investissement. Dans toute la suite, nous considérons que nous sommes au moins à la deuxième période ou deuxième année d'investissement ($t \geq 2$).

Par ailleurs, du fait de l'hypothèse H_X : 3.1 de constance de la richesse, nous avons nécessairement $X_t = X_{t-1} = X$ et donc :

$$P_t = C_t + X R_p(t-1) \quad (3.34)$$

Nous faisons en outre l'hypothèse qui suit :

Hypothèse : 3.2 (H_u)

La proportion u d'actif risqué dans le fonds est constante sur toute l'étude.

Ce qui nous permet de réécrire l'équation : 3.34 précédente telle que :

$$P_t = C_t + u \lambda X + r X + X u \sigma z_{(t-1)} \quad (3.35)$$

Cette équation peut s'écrire aussi en isolant plutôt la cotisation :

$$C_t = P_t - u \lambda X - r X - X u \sigma z_{(t-1)} \quad (3.36)$$

L'équation 3.35 sert à la détermination de la pension en cotisations définies tandis que l'équation 3.36 sert à la détermination de la cotisation en prestations définies.

Nous allons désormais différencier le cas de cotisations définies de celui de prestations définies.

Optimalité en cotisations définies

Lorsque nous sommes en cotisations définies, les cotisations sont alors constantes ($C_t = C$) et la relation :3.35 devient donc :

$$P_t = C + u \lambda X + r X + X u \sigma z_{(t-1)} \quad (3.37)$$

Appelons P_o la pension obtenue dans la condition précise où le fonds n'investit pas en actif risqué ($u = 0$) :

$$\begin{aligned} P_o &= P_{t,(u=0)} \\ \text{et} & \\ P_o &= C + r X \end{aligned} \tag{3.38}$$

Dans le cas général, la pension moyenne à l'année t s'écrit :

$$E[P_t] = P = C + X(u\lambda + r)$$

ou

$$P = P_o + u\lambda X \tag{3.39}$$

avec

$$P_o = C + Xr$$

La pension est financée par la cotisation fixe et la rentabilité des actifs. C'est la somme de la pension pour investissements non risqués et la rémunération due à l'investissement risqué.

L'incertitude sur la rentabilité de l'actif risqué est transférée sur les pensions. Ainsi, si les rentabilités sont performantes par rapport aux espérances, la pension est augmentée du surplus de rentabilité. Si, par contre, la rentabilité est en baisse, la pension cède le manque de performance. Les pensions sont alors diminuées du déficit.

Nous faisons l'hypothèse que ce gain/manque de performance de l'actif risqué ($X u \sigma z_{(t-1)}$), est placé ou emprunté au taux sans risque, sur une durée de "m" années. Nous supposons en outre que cette somme est remboursée dans un sens comme dans l'autre le cas échéant, par annuités constantes.

Comme les annuités commencent en début de l'année qui suit l'événement de gain ou de déficit, la valeur d'une annuité sera de :

$$\frac{X u \sigma z_{(t-1)}}{a_m^r}$$

avec (3.40)

$$a_m^r = \sum_{k=1}^m \frac{1}{(1+r)^k} = \frac{1-(1+r)^{-m}}{r}$$

Comme la pension à l'année $[t, t + 1[$ doit tenir compte au plus des m derniers lissages précédents, la partie aléatoire dans la pension est :

$$\sum_{k=1}^{(t-1) \wedge m} \frac{X u \sigma z_{(t-1-k)}}{a_m^r} \quad (3.41)$$

L'étalement sur plusieurs années, permet de lisser les variations brusques de la pension comme ce serait le cas pour les cotisations supplémentaires en prestations définies (voir Boulier et Dupré 2002). Il s'agit alors de pensions supplémentaires qui peuvent être positives ou négatives. De plus, avec le temps, le gérant peut faire le pari que les différences sur la rentabilité du fonds pourront s'auto-annuler, ce qui stabiliserait les versements de pension.

La pension prend alors la forme suivante :

$$P_t = C + u \lambda X + r X + \sum_{k=1}^{(t-1) \wedge m} \frac{X u \sigma z_{(t-1-k)}}{a_m^r} \quad (3.42)$$

La variance de la pension est pour tout instant postérieur à m périodes :

$$Var(P_t) = ((t-1) \wedge m)^2 \frac{X^2 u^2 \sigma^2}{(a_m^r)^2} \quad (3.43)$$

Le principal risque est ici le risque dû au lissage des annuités et donc la maîtrise de la variance. Nous allons rechercher une allocation qui minimiserait ce risque, tout en tenant compte à la fois de la tolérance au risque des participants au fonds et de l'amélioration de leur intérêt.

Le risque étant supporté par les cotisants d'une part, et puisque nous travaillerons avec des espérances d'autre part, nous introduisons un nouveau paramètre qui sera le seuil de tolérance, de tout écart de la pension par rapport à la moyenne. Soit tol , ce seuil de tolérance des membres du fonds, puisque ce sont ces derniers qui supportent le risque. Le but de la gestion sera de maximiser la pension moyenne tout en minimisant la variance ou l'écart type. Mais plutôt que de prendre l'écart type, nous prendrons le rapport de la variance sur le seuil de tolérance tol . La dimension de la tolérance est la même que celle de l'écart type. À risques ou variances égales dans l'absolu, les individus très tolérants, perçoivent le risque à un degré moindre que les individus moins tolérants comme le risque relatif $\frac{Var(P_t)}{tol}$ est décroissant en tol . Le gérant se donne alors comme objectif de gestion :

$$\max_{0 \leq u \leq 1} \left\{ E[P_t] - \frac{\text{var}(P_t)}{tol} \right\} \quad (3.44)$$

La solution, par simple optimisation, est donc pour t strictement plus grand que m :

$$u^* = \frac{tol (a_m^r)^2 \lambda}{2 m X \sigma^2} \quad (3.45)$$

Pour les instants t plus petits que $m+1$, on remplacera m par $(t-1)$.

L'allocation optimale en actif risqué est inversement proportionnelle à la richesse, à la variance et au nombre d'années de lissage. C'est bien les mêmes caractéristiques qu'obtiennent Boulier et Dupré (2002) avec la minimisation de la désutilité quadratique pour les prestations définies. Ceci implique en outre que

plus le fonds a de la ressource, moins sa stratégie sera d'investir en actifs risqués. Ce comportement s'explique sans doute par le fait que, lorsque les ressources sont importantes, le fonds n'a plus grand intérêt à prendre des risques puisqu'il est plus proche de son objectif premier de pérennité des pensions. C'est également la conclusion tirée par Boulier et al. (1993) ou Reichlin (2000) avec des résultats analogues en temps continu et prestations définies.

L'allocation est proportionnelle à la prime du risque par unité de risque $\frac{\lambda}{\sigma^2}$. À rémunération λ constante du risque, lorsque l'actif risqué est plus volatile, le fonds ne prend pas plus de risque. Et à volatilité constante, lorsque la prime est meilleure, le fond s'y engage naturellement plus, ce qui reste conforme à une attitude parfaitement rationnelle. Et, bien sûr, lorsque l'ensemble de la prime par unité de risque $\frac{\lambda}{\sigma^2}$ se dégrade, le fonds se retient également d'investir plus en actif risqué.

L'allocation est également proportionnelle à la tolérance. Naturellement donc, plus les individus sont tolérants au risque et plus le fonds prend des positions de plus en plus fortes en actif risqué.

Cas de prestations définies

Nous reprenons à partir de la relation : 3.36. En prestations définies, cette fois, les pensions sont constantes et les cotisations égalent la pension fixe diminuée des expériences de rentabilités issues des investissements du marché :

$$C_t = P - u \lambda X - r X - X u \sigma z_{(t-1)} \quad (3.46)$$

Comme en cotisations définies, la partie aléatoire, qui peut diminuer ou accroître les cotisations, est lissée sur m années en annuités constantes. Le processus de

cotisations est alors :

$$C_t = P - u \lambda X - r X - \sum_{k=1}^{(t-1) \wedge m} \frac{X u \sigma z_{(t-1-k)}}{a_m^r} \quad (3.47)$$

En notant $C_o = P - r X$ ou $C = E[C_t] = C_o - u \lambda X$, l'équation précédente du processus C_t se réécrit :

$$C_t = C_o - u \lambda X - \sum_{k=1}^{(t-1) \wedge m} \frac{X u \sigma z_{(t-1-k)}}{a_m^r} \quad (3.48)$$

ou

$$C_t = C - \sum_{k=1}^{(t-1) \wedge m} \frac{X u \sigma z_{(t-1-k)}}{a_m^r}$$

La cotisation est la cotisation moyenne diminuée des annuités. La variance de la cotisation est exactement la même que celle des pensions en cotisations définies. Afin que les seuls flux revenant aux membres du fonds restent leurs pensions P , nous limitons l'allocation en actif risqué entre 0 et $u_M = \frac{C_o}{\lambda X}$ de telle sorte que les cotisations restent positives ou nulles en moyenne. Ici encore, du fait de la constance de la richesse, le principal risque demeure le risque d'annuité. Ce risque pèse sur les cotisations et ceci bien que nous soyons en prestations définies. Même si le gérant du fonds supporte le risque de solvabilité, dans ce cas précis ce sont les participants au fonds qui supportent le risque du marché à travers la fluctuation des cotisations. Nous allons rechercher la cotisation optimale minimisant le risque et les coûts. Supposons le taux d'escompte psychologique β des participants du fonds, tel que β soit toujours constant. Le but de la gestion sera par exemple de minimiser l'espérance de la valeur actualisée au taux d'escompte, de la somme des

carrées de toutes les cotisations futures :

$$\min_{0 \leq u \leq \min(1, u_M)} E \left[\sum_{k=1}^{+\infty} (1 + \beta)^{-k} C_{t+k}^2 \right] \quad (3.49)$$

Par Fubini¹, le programme devient :

$$\min_{0 \leq u \leq \min(1, u_M)} \sum_{k=1}^{+\infty} (1 + \beta)^{-k} E [C_t^2]$$

Ce qui équivaut à :

$$\min_{0 \leq u \leq \min(1, u_M)} \frac{1}{\beta} E [C_t^2] \quad (3.50)$$

Et la minimisation se réduit à :

$$\min_{0 \leq u \leq \min(1, u_M)} E [C_t^2]$$

À partir de l'expression :3.48 de la cotisation, on tire l'allocation optimale de ce programme, qui est en tout point identique à celle de Boulier et Dupré (2002, p.169).

$$u^* = \frac{1}{\lambda^2 + \frac{m \sigma^2}{(a_n^r)^2}} \frac{\lambda C_o}{X} \quad (3.51)$$

Comme en cotisations définies, l'allocation est raisonnablement, inversement proportionnelle au niveau du fonds X. Contrairement au cas de cotisations définies, l'allocation ne dépend pas de facteur psychologique. Nous appréhenderons mieux le comportement de cette allocation à travers les applications numériques.

¹L'écriture qui va suivre de l'espérance étant finie puisque l'espérance C de C_{t+k} ne dépend pas du temps $t + k$, alors l'intervertissement de l'espérance et du signe somme ne change pas la valeur finale.

Applications numériques

Récapitulons dans le tableau qui suit, les principaux résultats en cotisations définies comme prestations définies :

cotisations définies	prestations définies
$u^* = \frac{tol(a_m^r)^2 \lambda}{2 m X \sigma^2}$	$u^* = \frac{1}{\lambda^2 + \frac{m \sigma^2}{(a_m^r)^2}} \frac{\lambda C_o}{X}$
$P_t = C + u \lambda X + r X + \sum_{k=1}^{(t-1) \wedge m} \frac{X u \sigma z_{(t-1-k)}}{a_m^r}$	$C_t = P - u \lambda X - r X - \sum_{k=1}^{(t-1) \wedge m} \frac{X u \sigma z_{(t-1-k)}}{a_m^r}$
$Var(P_t) = Var(C_t) = ((t-1) \wedge m)^2 \frac{X^2 u^2 \sigma^2}{(a_m^r)^2}$	

TAB. 3.2: Tableau récapitulatifs des résultats

Soient les valeurs intuitives suivantes des paramètres :

r	λ	m	σ	$C_{\text{définies}}$	$P_{\text{définies}}$	X	Horizon
6%	12%	10 ans	20%	20 euros	35 euros	140 euros	40 ans

TAB. 3.3: Valeurs des paramètres

Nous avons les premiers résultats suivants :

P_o	C_o	a_m^r
28,4 euros	26,6 euros	7,3601

TAB. 3.4: P_o , C_o et a_m^r

Nous avons également les parts suivantes des allocations optimales ainsi que les valeurs en euros des pensions moyennes en cotisations définies avec différentes tolérances et la cotisation moyenne en prestations définies et en euros également :

Cotisations définies			Prestations définies
$u_{tol=6\%} = 0,35\%$	$u_{tol=50\%} = 2,9\%$	$u_{tol=90\%} = 5,22\%$	$u_{PD} = 104,66\%$
$P_{moy,tol=6\%} = 28,4585$	$P_{moy,tol=50\%} = 28,8875$	$P_{moy,tol=90\%} = 29,2776$	$C_{moy} = 9,0165$

TAB. 3.5: résultats

L'allocation optimale en cotisations définies croît vite avec la tolérance, ce qui confirme bien que plus les individus sont tolérants au risque, plus ils investissent en actif risqué. Mais leurs pensions moyennes n'en sont pas pour autant très améliorées. Dans les mêmes conditions du marché, en prestations définies, un peu plus de la valeur du fonds est allouée en actif risqué seul. Les résultats donnent un avantage certain aux fonds à prestations définies. En effet avec des prestations promises de 35 unités monétaires, une cotisation de 9 unités monétaires est nécessaire. Tandis qu'en cotisations définies, même pour les individus les plus tolérants au risque, avec une cotisation de 20 unités monétaires, la pension versée n'atteint que 30 unités monétaires.

Mais la bonne performance des prestations définies repose, ne l'oublions pas, sur une allocation risquée forte dont la principale conséquence est l'élévation de la variance.

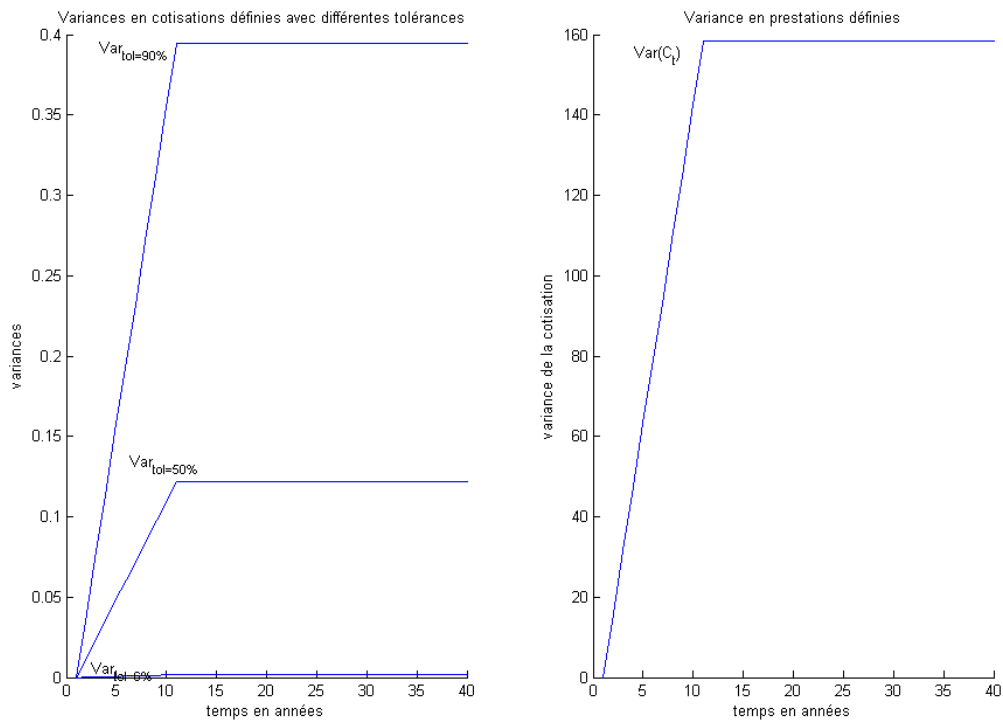


FIG. 3.1: Variances des pensions en cotisations définies en quelques valeurs de tolérances et de la cotisation en prestations définies

Comme on peut s'y attendre, les variances fluctuent et croissent jusqu'à la dixième année avant de se fixer. Les variances des pensions sont de plus en plus élevées selon que la tolérance au risque augmente, mais restent globalement très en dessous de la variance des cotisations en prestations définies. Les courbes suivantes nous le confirment en montrant une cotisation en prestations définies plus volatile que les pensions en cotisations définies.

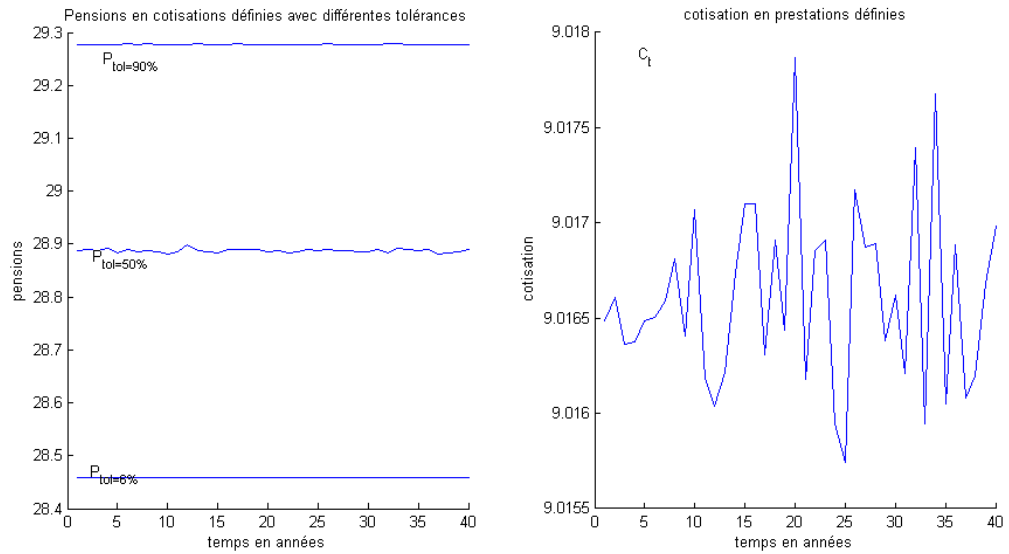


FIG. 3.2: variations de la pension annuelle moyenne à différentes valeurs de la tolérance en cotisations définies et de la cotisation en prestations définies

Les pensions fluctuent même faiblement dans un très mince couloir de moins de 1% et autour des 28,8 unités monétaires. Les cotisations fluctuent, elles, dans un couloir encore plus mince de moins de 0,3%, mais avec des variations beaucoup plus brusques.

3.3.2 Conclusion

Au delà du respect de l'équilibre actuariel, bien d'autres principes du fonds nécessitent un contrôle pour la maîtrise des risques. En nous focalisant sur l'allocation optimale du portefeuille, nous avons introduit un exemple simple de fonds de pension mixte.

Le modèle simplifié de fonds de pension, malgré ses hypothèses de stationarité du marché comme de la population, nous permet néanmoins de voir qu'un paiement de la pension ou de la cotisation adossé sur des annuités constantes contribue à la stabilité des flux sortants. Ce modèle nous donne également une première

vue du contrôle de fonds de pension avec une modélisation détaillée du marché. En effet, les méthodes de contrôle sur les fonds de pensions à travers, l'équilibre actuariel uniquement, abordent peu le risque lié aux volatilités du marché. Nous allons désormais nous intéresser d'avantage à ce risque à travers, principalement, l'allocation optimale stratégique d'abord dans un univers statique.

4

Modélisation des fonds de pension en statique

Pour avoir une vision instantanée du fonds de pension, l'étude sur une unique période suffit. Une telle vision nous permettra de mieux appréhender la gestion du fonds à très court terme pour dégager les caractéristiques et corrélations immédiates avec seulement un instant de départ et un instant d'arrivée : c'est l'analyse monopériodique ou statique.

Nous allons principalement nous intéresser à l'allocation stratégique optimale d'un fonds de pension en prestations définies dans une économie statique.

4.1 Présentation d'un modèle statique en prestations définies

Nous développerons une allocation avec deux actifs, inspirée des travaux de Leibowitz et al. (1992) repris depuis par Boulier et al. (1993) puis redéveloppés par Boulier et Dupré (2002).

Nous intégrerons également l'approche du passif initiée par Sharpe et Tint

(1990).

Nous partirons donc d'une structure du marché et du fonds de pension avec des investissements possibles en actifs risqués uniquement. Seuls deux types d'actifs tous risqués seront admis aux investissements : les actions et les obligations comme pour Leibowitz et al. (1992). Avec cette structure, nous allons rechercher l'allocation stratégique optimale, à l'aide d'une utilité de type "moyenne-variance" incluant un coefficient de tolérance au risque.

4.1.1 Modélisation de l'actif du fonds

Très généralement, en statique, l'inflation est abordée de manière plutôt elliptique. Ainsi, par exemple, toutes les rentabilités sont souvent prises réelles, plutôt que nominales (Boulier et al. 1993, Leibowitz et al. 1992, par exemple). Ce choix raccourcit l'étude par rapport à l'inflation sur l'actif, comme sur le passif. Dans tout le modèle statique, nous admettrons que le marché est complet. Soit H l'horizon d'étude exprimé en années.

Nous présentons deux actifs fondamentaux dans le marché :

- Un actif risqué A de rentabilité aléatoire gaussienne R_a de moyenne *annuelle* de rentabilité μ_a et de volatilité de la rentabilité sur H années σ_a .
- Et un actif obligataire B . Avec \tilde{r} qui représente sa rentabilité aléatoire, en fin de la période d'étude, avec une moyenne *annuelle* de rentabilité constante r_b et une volatilité de rentabilité sur H années σ_b . L'échéance de l'obligation est supposée être au moins supérieure à l'horizon H .

Posons en outre les éléments suivants :

- $z_{a,H}$ et $z_{r,H}$, deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites, telles que $z_{a,H}$ représente les incertitudes du marché dues à l'actif risqué A , avec réalisation à $t = H$, et $z_{r,H}$ représente celles dues au taux \tilde{r} à $t = H$. Rassemblons

$z_{a,H}$ et $z_{r,H}$ au sein d'un unique vecteur gaussien :

$$Z_H = \begin{pmatrix} z_{a,H} \\ z_{r,H} \end{pmatrix}$$

- $\lambda = \mu_a - r_b$ la prime de risque *annuelle* et constante de l'action sur l'obligation.
- Soit ρ_{ar} la corrélation entre $z_{a,H}$ et $z_{r,H}$.
- La matrice ρ , de corrélation de Z_H est alors telle que :

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{ar} \\ \rho_{ar} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

- Et enfin, σ_{ar} , la covariance entre les rentabilités des actifs A et B :

$$\sigma_{ar} = \text{cov}(R_a, \tilde{r}) = \sigma_a \sigma_b \rho_{ar} \quad (4.2)$$

Si A_o et B_o sont respectivement les valeurs initiales de l'actif risqué et de l'actif obligataire, et A_H et B_H les valeurs finales respectives à l'horizon, alors les rentabilités de ces actifs s'écrivent :

$$R_a = \frac{A_H - A_o}{A_o} = \frac{A_H}{A_o} - 1 \quad \text{et} \quad \tilde{r} = \frac{B_H - B_o}{B_o} = \frac{B_H}{B_o} - 1$$

On écrira alors en détaillant les différentes expressions :

$$\begin{cases} R_a = (1 + \lambda + r_b)^H - 1 + \sigma_a z_{a,H} \\ \tilde{r} = (1 + r_b)^H - 1 + \sigma_b z_{r,H} \end{cases} \quad (4.3)$$

Remarque : 4.1 *Le retrait de l'unité aux moyennes de R_a et \tilde{r} , les ramène à leur définition de taux de rentabilité sur la période concernée.*

Appelons X_0 la valeur initiale du portefeuille et X_H cette valeur à l'échéance H .

Nous émettons l'hypothèse suivante sur la représentation du portefeuille et le règlement des pensions aux instants initial et final :

Hypothèse : 4.1 (H_{X_0})

À $t = 0$ (respectivement $t = H$), $X_0 = X(0)$ (respectivement $X_H = X(H)$) est la valeur du portefeuille après règlement (respectivement : avant règlement) des pensions dues à cet instant.

Supposons que le gérant du fonds investisse une part u de sa richesse initiale sur l'actif risqué et la part restante $(1 - u)$ sur l'actif contingent. Nous ne considérons pas le cash mais plutôt l'obligation comme alternative d'investissement au gérant du fonds autre que l'actif risqué.

Le gérant du fonds investit sa richesse disponible sur les actifs du marché en vue du règlement à l'horizon des pensions. Nous avons en H les formes équivalentes

suyvantes de la richesse :

$$X_H = u X_0 (1 + R_a) + (1 - u) X_0 (1 + \tilde{r})$$

ou

$$X_H = X_0 + u X_0 R_a + (1 - u) X_0 \tilde{r} \tag{4.4}$$

soit que :

$$X_H = \left[\begin{array}{l} X_0 u (1 + \lambda + r_b)^H + X_0 (1 - u) (1 + r_b)^H \\ + X_0 u \sigma_a z_{a,H} + X_0 (1 - u) \sigma_b z_{r,H} \end{array} \right]$$

Remarque : 4.2 *La richesse X_H est gaussienne.*

Soient le scalaire et le vecteur suivants :

$$\mu_X = \left[u (1 + \lambda + r_b)^H + (1 - u) (1 + r_b)^H - 1 \right]$$

et

$$\sigma_X = \begin{pmatrix} u \sigma_a \\ (1 - u) \sigma_b \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

σ_X est un vecteur $(2, 1)$ composé d'écart types mais n'est pas lui-même un écart type.

Alors le niveau du fonds à l'horizon se réécrit :

$$X_H = X_0 + X_0 [\mu_X + \sigma_X^T Z_H] \quad (4.6)$$

Soit donc R_X la rentabilité du portefeuille du fonds, telle que :

$$R_X = \frac{X_H - X_0}{X_0} \quad (4.7)$$

On pourra également écrire la rentabilité du portefeuille à partir de la dernière expression du portefeuille :

$$R_X = \mu_X + \sigma_X^T Z_H \quad (4.8)$$

La rentabilité de l'actif du fonds est gaussienne puisque l'actif du fonds est gaussien également (équation :4.4 et remarque :4.2).

4.1.2 Passif et surplus

Nous allons considérer un groupe fermé de population dans le fonds de pension. En d'autres termes, il n'y aura pas de mouvement de nouvelles entrées ni même de sorties entre le moment initial et la fin de période. Cela revient à considérer une population stable¹, sans mortalité sur la période considérée.

La populations étant stable en prestations définies, alors les pensions et leurs

¹La population est stable sur les entrées et sorties, mais elle n'est pas figée, puisqu'elle évolue quand même en âge. Ceci n'est pas conforme à l'hypothèse courante (Boulier et Dupré (2002) ou Turbot (1997)), qui prend en compte une population parfaitement équilibrée. Dans une telle population, lorsqu'un individu meurt, par exemple à l'âge $x+1$, sa place dans le fonds est prise par un individu qui était âgé de x et qui accède à l'âge $x+1$. À chaque niveau d'âge, un remplacement s'effectue par un individu de l'âge précédent. Ainsi de suite itérativement, jusqu'au moins âgé de la population qui sera alors comblé par une nouvelle recrue. Chaque mouvement d'âge est aussitôt rétabli. De sorte que la population reste involutive dans ses caractéristiques économiques.

dates de paiement sont prédéterminées et fixes. Comme le passif implique l'actualisation de ces pensions fixes, il variera, lui, par le biais des facteurs d'actualisation ou par le décaissement effectif des pensions.

Représentation du passif : portefeuille dupliquant

Dans la pratique, on considère le cumul actualisé des engagements réels présents et futurs du portefeuille pour caractériser le passif. Il s'agit des engagements relatifs aux seuls adhérents actuels du fonds de pension, qu'ils soient actifs ou retraités. Ces engagements ne couvrent que les périodes effectives de travail. Le passif encouru par rapport à un membre, à un moment donné, est la valeur actualisée des pensions dues à partir de la retraite et non encore payées, relatives à la seule période de travail réellement effectué depuis l'embauche. C'est en fait le principe d'évaluation du passif par la méthode du "Unit credit" en dynamique discrète (paragraphe :3.2.1, page : 82). Il s'agit du "Traditional Unit Credit" qui compte en unité monétaire fixe d'aujourd'hui et non le "Projected Unit Credit" en valeurs de salaires futurs. Comme le soulignent Leibowitz et al. (1992), cette forme de considération du passif en *passif réellement dû en numéraire fixe*, est exigée par la réglementation comptable "Financial Accounting Standards Board Statement 87" (FASB 87) aux États-Unis et se nomme A.B.O. (pour "Accumulated Benefits Obligations"), par opposition au P.B.O. ou "Projected Benefits Obligations". L'A.B.O. diminue la surenchère comptable possible sur la marge entre le passif probable et celui réellement dû.

Si $P_{tot}(H)$ est le cumul total des pensions prévues en "Unit Credit", qui sont à verser sur la période de H années, alors la valeur actuelle du passif est :

$$L(0) = P_{tot}(H)(1+r_L)^{-H} + L(H)(1+r_L)^{-H} \quad (4.9)$$

Avec $L(H)$ la valeur en A.B.O. du passif à $t = H$ et r_L le taux d'actualisation du passif. Mais comme la population est stable, seul le marché influe sur l'évolution des pensions. Et comme en outre, le paiement des pensions traduit des engagements de la firme dans un marché complet, nous prendrons désormais $r_L = r_b$.

Pour rejoindre les considérations faites sur l'actif (voir hypothèse H_{X_0} :4.1, page :114), nous maintenons qu'en $t = 0$ la première pension $P(0) = P_0$ est déjà payée¹ et en $t = H$ la dernière pension $P(H)$ n'est pas encore réglée.

Hypothèse : 4.2 $H_{P_{tot}}$

Comme nous sommes en économie statique, où n'existent que les instants $t = 0$ présent et final $t = H$, nous allons supposer que le gérant du fonds ne paie pas les pensions aux dates prévues, mais seulement à l'échéance².

La valeur *in fine* , espérée du passif à l'échéance et avant règlement des pensions dues par le fonds est alors :

$$\begin{aligned} E \left[\tilde{L} (H) \right] &= L (H) + P_{tot} (H) \\ &= L (0) (1 + r_b)^H \end{aligned} \tag{4.10}$$

Comme le marché est complet (voir plus haut, paragraphe : 4.1.1), alors il existe un actif ou une combinaison d'actifs dupliquant le passif. Du fait du choix de r_b comme taux d'actualisation et de l'expression (équation :4.10) précédente de la valeur espérée du passif, nous voyons que l'on peut représenter le passif par un portefeuille d'obligations qui sont au taux r_b .

¹On pourrait aussi prendre $P(0) = 0$, dans les deux cas on ne prendra plus en compte la pension initiale P_0 .

²On pourrait par exemple imaginer que le gérant du fonds délègue le paiement des pensions avant l'échéance H à un courtier, ou toute autre institution habilitée à cette mission. Le gérant du fonds régulariserait alors les comptes avec cette institution uniquement après l'échéance H et n'aurait donc pas à verser de pension entre les instants 0 et H .

L'expression du passif vue de l'instant initial pourra alors s'écrire :

$$\begin{aligned}\tilde{L}(H) &= (L(H) + P_{tot}(H)) \left[1 + \frac{\sigma_b}{(1+r_b)^H} z_{r,H} \right] \\ \tilde{L}(H) &= L_0 (1+r_b)^H + L_0 \sigma_b z_{r,H}\end{aligned}\tag{4.11}$$

$$\tilde{L}(H) = L_0 (1 + \tilde{r})$$

Comme par ailleurs le passif représente des décaissements, il figurera en négatif dans le portefeuille. Le fonds sera alors émetteur des obligations représentant son passif et ayant un taux annuel fixe r_b et la valeur finale totale $E[\tilde{L}_H]$. Il peut s'agir d'un portefeuille de L_0 unités d'obligations $\frac{B_H}{B_0}$: $\tilde{L}(H) = L_0 \frac{B_H}{B_0}$. La rentabilité du passif se trouve alors confondue avec celle de l'actif obligataire B_H : $R_L = \frac{\tilde{L}_H - L_0}{L_0} = \tilde{r}$.

Remarque : 4.3 Les hypothèses H_{X_0} et $H_{P_{tot}}$ sont fondamentales, puisqu'elles permettent :

- La cohérence de l'écriture du niveau du fonds X_H qui est alors véritablement dispensée de la présence de tout élément du passif, les pensions n'étant pas réglées sur la période d'étude. Sur cette période donc, l'actif du fonds évolue librement au gré des investissements du marché, sans influence directe du passif.
- La réduction des pensions du modèle sur la période d'étude à la seule pension P_{tot} .
- La comparaison entre X_H et \tilde{L}_H à $t = H$, puisque les deux sont liés à cet instant précis par l'obligation faite à X_H de régler l'unique pension P_{tot} qui est partie intégrante du cumul des engagements \tilde{L}_H .

La représentation de l'actif et du passif, et surtout la possibilité de les opposer du fait de la remarque précédente, ouvre désormais la voie à la construction d'un

autre élément important dans la gestion d'un fonds de pension : le surplus.

Modélisation du surplus du fonds

Sharpe et Tint (1990) ont proposé un surplus pondéré sur l'actif initial X_0 avec un coefficient d'importance relative sur le passif.

$$\text{Surplus} = \frac{X_H - m \tilde{L}_H}{X_0} \quad (4.12)$$

Le gestionnaire du fonds pourra alors, par un jeu sur le coefficient m , donner au passif le poids d'importance souhaité ou psychologiquement évalué. Lorsqu'il est supérieur à l'unité, ce coefficient peut traduire un chargement sur le fonds, proportionnel au passif. Ce chargement peut prendre en compte par exemple les frais de gestion comprenant la rémunération du gérant.

Nous maintenons le même coefficient m , mais incorporons la définition du surplus par rapport au passif initial comme défini par Leibowitz et al. (1992). Désignons par S_H le surplus à la date $t = H$ et par R_s la rentabilité du surplus avec les définitions suivantes pour le surplus et sa rentabilité :

$$\begin{aligned} S_H &= \frac{X_H - m \tilde{L}_H}{L_0} \\ R_s &= \frac{\Delta(X_H - m \tilde{L}_H)}{L_0} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Remarque : 4.4 R_{SH} Comme les rentabilités de l'actif X et du passif L sont gaussiennes, il en va de même pour la rentabilité du surplus.

Soit φ le ratio de la richesse initiale sur le passif initial, $\frac{X_0}{L_0}$ appelé ratio de capita-

lisation initiale. Alors :

$$R_S = \frac{(X_H - X_0) - m(L_H - L_0)}{L_0} = \varphi R_X - m R_L$$

et

$$R_S = \varphi \mu_X + \varphi \sigma_X^T Z_H - m \tilde{r} \tag{4.14}$$

ou encore dans les détails :

$$\begin{aligned} R_S = & \varphi u (1 + \lambda + r_b)^H + \varphi (1 - u) (1 + r_b)^H - (\varphi - m) \\ & + \varphi u \sigma_a z_{a,H} + [\varphi (1 - u) - m] \sigma_b z_{r,H} \end{aligned}$$

Avec le surplus, nous finissons la présentation de l'environnement économique et démographique et nous pouvons désormais amorcer le contrôle du fonds de pension.

4.2 Contrôle du fonds de pension en économie statique

Pour le contrôle du fonds de pension, nous allons ici nous focaliser sur l'allocation stratégique du portefeuille. Pour ce faire, nous allons passer par une optimisation d'une utilité de type "rentabilité-risque" sur le surplus du fonds. En général, en statique, on parle plus fréquemment de portefeuilles efficients plutôt que de portefeuille optimal. L'efficience du portefeuille est dans le sens du minimum de risque pour une rentabilité maximale.

Le portefeuille efficient est, dans l'analyse "moyenne-variance" de Markowitz (1952), le portefeuille pour lequel on ne peut trouver un autre portefeuille offrant

une meilleure rentabilité espérée pour la même volatilité et pour les mêmes types d'actifs les composant. C'est donc le portefeuille offrant la meilleure combinaison (ou allocation) à partir d'actifs donnés. Ces portefeuilles forment dans le plan moyenne-variance une figure conique. Leibowitz et al. (1992) ont trouvé le portefeuille optimal de fonds de pension à prestations définies en respectant à la fois les critères d'efficience et des critères de contraintes de rentabilité sur le portefeuille et sur le surplus du fonds. Si nous gardons une structure assez similaire du marché et du fonds de pension, nous différons totalement de leur démarche, par l'allocation optimale que nous recherchons à partir d'une utilité en gain certain équivalent sur le surplus. Le critère inclut un coefficient de tolérance au risque plutôt proche du critère d'utilité formulé par Sharpe et Tint (1990).

4.2.1 Choix du critère d'optimisation

Soit tol la tolérance du gérant pour un écart par rapport à la rentabilité moyenne de surplus. Nous prenons ici la tolérance du gérant du fonds parce que ce dernier est le principal opérateur supportant le risque. En cas de faillite du fonds de pension suite à une mauvaise ou une malheureuse gestion (victime par exemple de fortes volatilités des actifs), le gérant est le seul garant des pensions promises. Contrairement aux fonds à cotisations définies où il n'y a, en général, pas d'engagement préalablement fixé sur le niveau des pensions, la responsabilité des investissements repose sur le gérant en prestations définies. On se fixe comme objectif de gestion de maximiser :

$$V(R_s) = \left(E[R_s] - \frac{\text{var}(R_s)}{tol} \right) \quad (4.15)$$

Le risque, dans la formulation de l'utilité, est exprimé par le rapport $\frac{\text{Var}(R_s)}{tol}$. Visuellement, à variance égale, plus le coefficient tol est grand, plus le risque ou du

moins la perception du risque par le gestionnaire est minime. Ce coefficient mesure donc le goût du risque du gestionnaire du fonds. Ce qui justifie bien le nom de *tolérance* au risque. Et donc l'inverse $\frac{1}{tol}$ constitue un coefficient d'aversion au risque.

En somme la maximisation de l'espérance d'utilité (équation : 4.15) assure la combinaison d'actifs maximisant la rentabilité du surplus et minimisant le risque relatif $\frac{Var(R_S)}{tol}$.

L'optimisation se fait sur l'allocation en actif risqué u :

$$\max_u f(u) = \max_u V(R_S) \quad (4.16)$$

Les caractéristiques principales du surplus seront utiles à la résolution du programme d'optimisation précédent.

L'espérance du surplus :

$$E[R_S] = \mu_S = \varphi u (1 + \lambda + r_b)^H + \varphi (1 - u) (1 + r_b)^H - (\varphi - m)$$

sa variance :

$$\text{var}(R_S) = \Omega_S = \varphi^2 u^2 \sigma_a^2 + [\varphi (1 - u) - m]^2 \sigma_B^2 + 2\varphi u [\varphi (1 - u) - m] \sigma_{ar}$$

et l'écart type est naturellement :

$$\sigma_S = \sqrt{\Omega_S} \quad (4.17)$$

Mais plutôt que de considérer le surplus dans sa globalité, comme nous venons de le détailler, nous pouvons à l'instar de Sharpe et Tint (1990), séparer l'actif du

passif dans la formulation du surplus afin de ne retenir que les termes agissant véritablement sur les résultats. Ainsi les caractéristiques du surplus peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} E [R_S] &= \varphi E [R_X] - m E [R_L] \\ E [R_S] &= \varphi E [R_X] - m E [\tilde{r}] \end{aligned} \tag{4.18}$$

la variance :

$$\text{var} (R_S) = \varphi^2 \text{var} (R_X) + m^2 \text{var} (\tilde{r}) - 2m\varphi \text{cov} (R_X, \tilde{r})$$

L'utilité à optimiser s'écrit également :

$$\begin{aligned} V(R_S) &= E [R_S] - \frac{\text{var}(R_S)}{\text{tol}} \\ &= \varphi E [R_X] - m E [\tilde{r}] - \frac{\varphi^2}{\text{tol}} \text{var} (R_X) - \frac{m^2}{\text{tol}} \text{var} (\tilde{r}) + \frac{2m\varphi}{\text{tol}} \text{cov} (R_X, \tilde{r}) \end{aligned} \tag{4.19}$$

Les termes en dehors du portefeuille, notamment $-m E [\tilde{r}]$ et $-\frac{m^2}{\text{tol}} \text{var} (\tilde{r})$, n'influent en rien sur l'allocation du portefeuille. Leur suppression ne modifiera donc pas les résultats. Ce qui nous ramène à une nouvelle utilité :

$$V_1 (R_S) = \varphi E [R_X] - \frac{\varphi^2}{\text{tol}} \text{var} (R_X) + \frac{2m\varphi}{\text{tol}} \text{cov} (R_X, \tilde{r}) \tag{4.20}$$

Le dernier terme ($\frac{2m\varphi}{\text{tol}} \text{cov} (R_X, \tilde{r})$) de cette nouvelle utilité, allégé du coefficient m , est appelé la L.H.C. (*Liability Hedging Credit*) par Sharpe et Tint (1990) et s'interprète comme une couverture contre le risque lié au passif. En effet il représente, d'une part, la satisfaction supplémentaire par rapport à une utilité d'un investisseur sans égard pour le passif ($m = 0$). D'autre part, plus la corrélation entre l'actif et le passif s'accroît, mieux l'actif constituera une bonne couverture contre le risque

du passif. Ce que défend bien la L.H.C. En cas de corrélation positive, lorsque le passif initial croît seul, l'utilité liée à sa couverture décroît, du fait de notre choix de la forme du surplus ($\varphi = \frac{X_0}{L_0}$). La croissance du passif, toutes choses égales par ailleurs, entraîne une baisse de la satisfaction sur la couverture liée au risque du passif, du fait de l'aversion pour ce risque. Par contre, pour Sharpe et Tint (1990), la satisfaction croît avec le passif et les investisseurs riscophobes se satisfont d'une plus grande couverture pour un plus grand passif. Les investisseurs dans notre cas d'utilité, s'appuient sur l'actif tandis que les autres sont intéressés par la sélection des "bons risques". Nous pousserons d'autant plus la dissemblance avec ces auteurs, en examinant de plus près le comportement optimal des investisseurs par rapport aux actifs présents.

4.2.2 Détermination de l'allocation stratégique optimale

L'extremum en u du programme d'optimisation conduit bien à une maximisation du critère (équation : 4.16) puisque la différentielle du second ordre en u est négative :

$$f''(u) = -\frac{2\varphi^2}{tol} [\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_{ar}] = -\frac{2\varphi^2}{tol} \text{var}(z_{a,H} - z_{r,H}) \quad (4.21)$$

Après résolution, on obtient l'allocation optimale suivante :

$$u^* = \frac{tol}{2\varphi} \frac{[(1 + \lambda + r_b)^H - (1 + r_b)^H]}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_{ar}} + \left(1 - \frac{m}{\varphi}\right) \frac{[\sigma_b^2 - \sigma_{ar}]}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_{ar}} \quad (4.22)$$

Le deuxième membre de cette allocation est l'allocation obtenue à partir d'une simple minimisation de la variance du surplus seule. On en déduit que le premier terme est relatif à la maximisation de l'espérance du surplus. Ce qui est confirmé

par la présence de la différence des rentabilités proche, par ailleurs, du ratio de Sharpe.

Si l'optimisation était portée sur la rentabilité du portefeuille, du fait de la complétude du marché qui fait que l'aléa du passif soit déjà intégré par l'actif à travers l'obligation B_H , le résultat de l'allocation optimale ne changerait pas beaucoup.

$$u_X^* = \frac{tol}{2} \frac{[(1 + \lambda + r_b)^H - (1 + r_b)^H]}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_{ar}} + \frac{[\sigma_b^2 - \sigma_{ar}]}{\sigma_a^2 + \sigma_b^2 - 2\sigma_{ar}} \quad (4.23)$$

Comme pour l'optimisation sur la rentabilité du surplus, le deuxième terme correspond à la minimisation de la variance. Cette allocation nous confirme une fois de plus que les coefficients m et φ sont intimement liés à la présence du passif dans le modèle. Dans l'allocation liée à la rentabilité du surplus (premier terme de l'équation : 4.22), un accroissement du passif initial *coeterus paribus*, s'accompagne à travers $\frac{1}{\varphi} = \frac{L_0}{X_0}$ d'un accroissement de l'allocation sur l'actif risqué A, pour garantir une plus grande rentabilité qui ferait face à la hausse du passif. Par contre, dans la couverture contre le risque du surplus (second terme de l'équation : 4.22), le rôle de levier lié au passif est assuré par $-\frac{m}{\varphi} = -\frac{mL_0}{X_0}$. Accroître le poids "m" du passif dans le surplus, aura les mêmes conséquences sur la stratégie de couverture contre le risque lié à la variance, qu'accroître le passif initial. Cette conséquence est dépendante de la valeur de la corrélation ρ_{ar} entre les deux uniques sources d'incertitudes du modèle $z_{a,H}$ et $z_{r,H}$.

En effet, lorsque ρ_{ar} est strictement inférieur à la valeur seuil de $\frac{\sigma_b}{\sigma_a}$, une croissance du passif par son poids ou par sa valeur initiale, entraîne la diminution de l'allocation sur l'actif risqué A. Cela se traduit automatiquement par une augmentation de l'allocation sur l'actif obligataire B_H .

A contrario, lorsque le coefficient ρ_{ar} est supérieur au seuil de corrélation $\frac{\sigma_b}{\sigma_a}$,

une augmentation du passif seul, s'accompagne d'une augmentation de l'allocation u sur l'actif risqué A.

En remarquant qu'une forte valeur de ρ_{ar} signifie que les variations de l'actif risqué A sont, en bonne partie, directrices des variations de B¹, on pourra conclure que, pour se couvrir contre les variations du passif, la stratégie du fonds fait d'avantage confiance à l'actif qui traduit fidèlement les variations du passif et avec un bon rendement. Cela est une bonne stratégie puisque le passif figure en négatif dans le portefeuille. Ainsi, en cas de hausse du passif, l'actif ayant une bonne corrélation avec le passif subira également une hausse similaire et couvrira les pertes dues au passif.

Lorsqu'on se place dans un cadre simplifié avec une année d'horizon $H = 1$ et un seul actif risqué A avec un actif sans risque $\sigma_b = 0$, on retrouve le résultat classique en "espérance-variance" mais aussi proche d'un résultat très connu obtenu dans un cadre très différent (Merton 1969) :

$$u^* = \frac{tol \lambda}{2\varphi \sigma_a^2} \quad (4.24)$$

En effet dans ce résultat, l'allocation optimale est une proportion constante de la prime du risque par unité de risque. Le coefficient de proportionnalité est joué ici par la moitié de l'inverse de ce qui constituerait l'aversion relative au risque², tandis qu'il est incarné par l'inverse de l'aversion relative seule avec Merton (1969, 1971). Nous ne manquerons pas de rapprocher ces résultats avec ceux du temps continu dans la seconde partie de la thèse.

Pour mieux évaluer encore la portée des allocations, nous allons examiner à partir de l'instant initial, différentes probabilités d'occurrence à l'échéance, de si-

¹ Seulement en sens de variation. L'ampleur des variations étant principalement due aux écarts-types.

² $\frac{1}{tol}$ représente déjà l'aversion absolue du risque. φ est aussi facilement rapprochable du surplus initial. $\frac{\varphi}{tol}$ pourra donc être perçu comme une forme de l'aversion relative au risque, pour une utilité sur le surplus.

tuations particulières .

Probabilités de ruine du fonds

En utilisant les hypothèses gaussiennes des sources d'incertitudes Z_H , nous aboutissons à différentes probabilités sur le portefeuille mais aussi sur le passif ou le surplus ainsi que sur leurs rentabilités respectives. Considérons d'abord les notations suivantes :

- F la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite,
- $F(x/E)$ la fonction de répartition conditionnelle de la loi normale centrée réduite en x sachant l'événement E.

Nous allons partir de la probabilité de ruine sur la rentabilité du surplus, parce que comme nous le verrons, toutes les autres probabilités s'en déduisent aisément.

La remarque R_{SH} (page : 120) sur le caractère gaussien de la rentabilité du surplus nous donne en fait directement la distribution de probabilité de cette rentabilité en utilisant sa moyenne μ_S et son écart-type σ_S définis plus haut (équation : 4.17, page : 123).

Soit donc r_s un réel dont on désire connaître la probabilité d'avoir une rentabilité de surplus plus petite, alors :

$$P(R_S < r_s) = P\left(\frac{1}{\sigma_S} R_S - \frac{\mu_S}{\sigma_S} < \frac{r_s - \mu_S}{\sigma_S}\right) = F\left(\frac{r_s - \mu_S}{\sigma_S}\right) \quad (4.25)$$

Pour la rentabilité sur le surplus S_H lui-même nous reprenons la définition de la rentabilité du surplus (équation : 4.13) en remarquant que le passif initial est $S(0) = S_0 = \frac{X_0 - m L_0}{L_0} = \varphi - m$.

Ainsi, comme $R_S = S_H - (\varphi - m)$ alors : $S_H = R_S + (\varphi - m)$ et on a :

$$P(S_H < s) = P(R_S + (\varphi - m) < s) = P\left(\frac{1}{\sigma_S} R_S - \frac{\mu_S}{\sigma_S} < \frac{[s - (\varphi - m)] - \mu_S}{\sigma_S}\right)$$

d'où finalement : (4.26)

$$P(S_H < s) = F\left(\frac{[s - (\varphi - m)] - \mu_S}{\sigma_S}\right)$$

Pour la rentabilité du portefeuille, nous remarquons (équation : 4.14) qu'elle n'est rien d'autre que la rentabilité du surplus sous les conditions $\varphi = 1$ et $m = 0$. Alors :

$$P(R_X < r_X) = P(R_S < r_X / \varphi = 1, m = 0)$$

et donc en définitive

$$P(R_X < r_X) = P\left(\frac{1}{\sigma_S} R_S - \frac{\mu_S}{\sigma_S} < \frac{r_X - \mu_S}{\sigma_S} / \varphi = 1, m = 0\right) = F\left(\frac{r_X - \mu_S}{\sigma_S} / \varphi = 1, m = 0\right) \quad (4.27)$$

Quant à la probabilité liée au portefeuille lui même, elle se déduit le plus simplement de la probabilité précédente :

$$P(X_H < x) = P(X_0 + X_0 R_X < x) = P\left(R_X < \frac{x - X_0}{X_0}\right)$$

et

$$P\left(R_X < \frac{x - X_0}{X_0}\right) = P\left(R_S < \frac{x - X_0}{X_0} / \varphi = 1, m = 0\right)$$

$$= P\left(\frac{1}{\sigma_S} R_S - \frac{\mu_S}{\sigma_S} < \frac{x - X_0(1 + \mu_S)}{X_0 \sigma_S} / \varphi = 1, m = 0\right)$$

soit donc

$$P(X_H < x) = F\left(\frac{x - X_0(1 + \mu_S)}{X_0 \sigma_S} \middle| \varphi = 1, m = 0\right) \quad (4.29)$$

Enfin, nous prendrons la probabilité pour le passif d'être à l'horizon H , plus petite qu'un niveau l_h :

$$P(\tilde{L}_H < l_h) = P(L_0 + L_0 \tilde{r} < l_h) = P\left(\tilde{r} < \frac{l_h - L_0}{L_0}\right)$$

et (4.30)

$$P\left(\tilde{r} < \frac{l_h - L_0}{L_0}\right) = P\left(\frac{1}{\sigma_b} \tilde{r} - \frac{(1+r_b)^H - 1}{\sigma_b} < \frac{l_h - L_0(1+r_b)^H}{L_0 \sigma_b}\right)$$

Nous illustrons l'ensemble des résultats dans un cas concret d'application numérique.

4.3 Simulation d'un portefeuille optimal de fonds de pension en statique

Nous présentons ici un exemple concret à partir de données simulées sur un portefeuille de fonds de pension à prestations définies.

4.3.1 Environnement démographique et financier du fonds de pension

L'analyse de l'environnement définira les éléments constitutifs du marché et du passif.

Représentation du marché

Fixons l'horizon de gestion à sept (7) ans : $H = 7$. Nous gardons des valeurs caractéristiques du fonds et du marché, quasi identiques à celles dans l'exemple mixte discret précédent (3.3) :

r	λ	σ_a	σ_b	ρ_{ar}
0,06	0,09	0,53	0,04	0,35

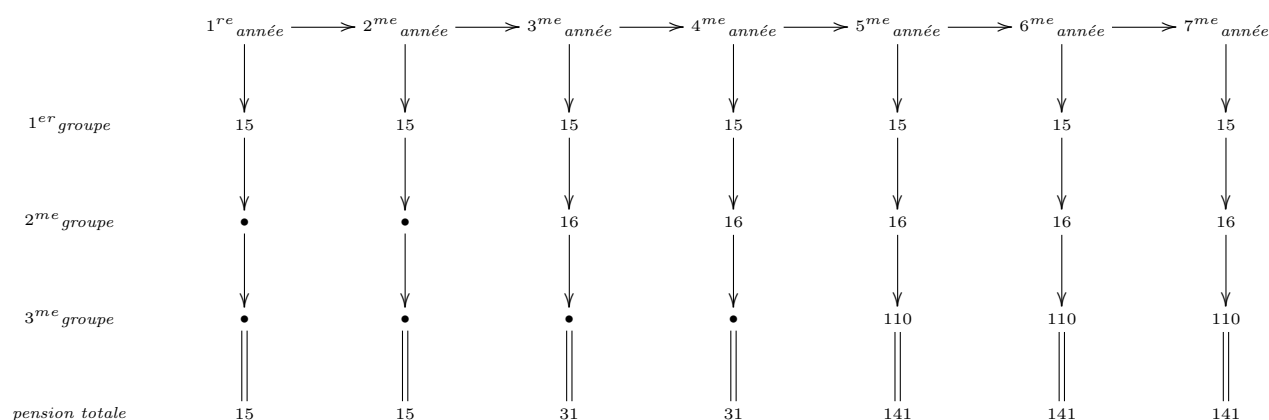
Nous allons évaluer notre passif selon nos hypothèses financières et démographiques.

Évaluation du passif

Donnons une population multi-âges comprenant à l'instant de départ des actifs comme des retraités avec possibilité de passage de l'état actif vers l'état inactif, avant l'échéance. Nous allons respecter l'hypothèse d'absence de mortalité pendant la durée H de l'étude et la constance de la pension durant la retraite, conformément à l'évaluation en "Traditional Unit credit". Schématisons en milliers d'euros d'aujourd'hui, les paiements de retraites annuelles durant la période H par groupes d'âge d'individus prenant leur retraite la même année :

Schéma : 4.1 Flux des pensions

Schéma de la distribution de la pension annuelle due en milliers d'euros par an et par groupes d'âge.



Le premier groupe comprend des individus déjà en retraite avant ou à partir de la première année avec des pensions annuelles de 15 000 euros. Les membres du deuxième groupe accèdent à la retraite à la troisième année avec des pensions annuelles de 16 000 euros. Enfin le dernier groupe touche ses pensions de retraites à la cinquième année de l'étude avec 110 000 euros de pension annuelle. La pension totale à régler passe alors de 15 000 euros sur les deux premières années à 141 000 euros sur les trois dernières années.

Supposons, par ailleurs que la valeur L_H en $t = H$ du passif du fonds inclut, outre les pensions futures restantes des trois groupes d'individus inactifs sus cités, les pensions acquises pour le service déjà rendu jusqu'en $t = H$ des individus qui seraient encore en activité.

Soit donc un passif : $L_H = 3000$ en unité monétaire égal au millier d'euros d'aujourd'hui et évalué avec la méthode du "Traditional Unit credit".

Avec nos hypothèses du marché, nous déduisons les valeurs suivantes caractéristiques du passif :

paramètres	L_0	$P_{tot}(H)$	$E[\tilde{L}_H]$
Valeurs	2 371,79122	566,297	3 566,297

TAB. 4.1: tableau des premiers résultats :caractéristiques du passif

La pension théorique $P_{tot}(H)$, qui est la valeur totale cumulée et capitalisée à l'échéance des flux de pensions présentés au schéma :4.1 précédent, est de 566,297 milliers d'euros. La pension à régler subit une capitalisation au taux r_b depuis les dates supposées de chaque décaissement.

$$P_{tot}(H) = \sum_{t=1}^H P(t) (1+r_b)^{H-t} \quad (4.31)$$

La pension cumulée simple sans capitalisation est de 515 milliers d'euros.

En ajoutant cette valeur au passif restant dû à $t = H$ de $L_H = 3000$ milliers d'euros, nous obtenons la valeur théorique ou espérée du passif total à l'échéance : $E[\tilde{L}_H]$. La valeur actualisée de ce passif figure en L_0 , conformément à sa définition(équation : 4.10). Au total, le passif a une valeur actuelle de 2371,79122 milliers d'euros avec une pension totale cumulée et capitalisée de 566,297 milliers d'euros à régler à l'échéance. La valeur moyenne à l'échéance du passif est de 3566,297 milliers d'euros avant règlement de la pension, et sa volatilité sur les sept ans de 4%.

Actif et Surplus du fonds : valeurs initiales

Nous allons désormais décrire les différentes caractéristiques de l'actif du fonds et de son surplus. Supposons que la valeur du fonds en $t = 0$ soit de $X_0 = 3500$ en milliers d'euros.

L'actif initial correspond à 147% ($\varphi = 1,47$) du passif initial et le rendement moyen sur 7 ans de l'actif risqué est de 166% tandis que l'actif obligataire se situe

autour des 50,36%. Le surplus initial est donc de $S_0 = 1,47 - m$.

Nous prenons $tol = 10\%$, ce qui reste un coefficient assez faible puisqu'il signifie que les participants perçoivent le risque incarné par la variance 10% sur la rentabilité moyenne espérée du surplus sur les sept ans d'étude, tandis que la volatilité de l'actif risqué est à 53% et l'obligation à 4% . Nous sommes donc en présence d'individus particulièrement riscophobes.

Donnons à présent les résultats sur le contrôle optimal.

4.3.2 Résultats

Les résultats concerneront aussi bien l'allocation pour le portefeuille de fonds de pension que le portefeuille optimal lui même à travers son niveau ou son surplus. En effet, une fois que nous aurons déterminé l'allocation optimale, nous la réintégrerons dans le portefeuille qui est alors optimal. Il sera également question des résultats concernant la probabilité de ruine.

Pour toute valeur comportant une dimension aléatoire, nous procédons à une simulation directe de 10^5 valeurs et nous retenons la valeur moyenne comme notre valeur représentative.

Allocation

L'allocation optimale stratégique du portefeuille est calculée à partir des éléments de l'actif comme du passif sus-présentés et des équations :4.22 (page :125). Compte tenu du choix de nos paramètres, le seuil de corrélation $\frac{\sigma_b}{\sigma_a}$ vaut 7,55% et donc, avec un coefficient de corrélation à 35%, nous obtenons une allocation stratégique croissante avec le poids m du passif.

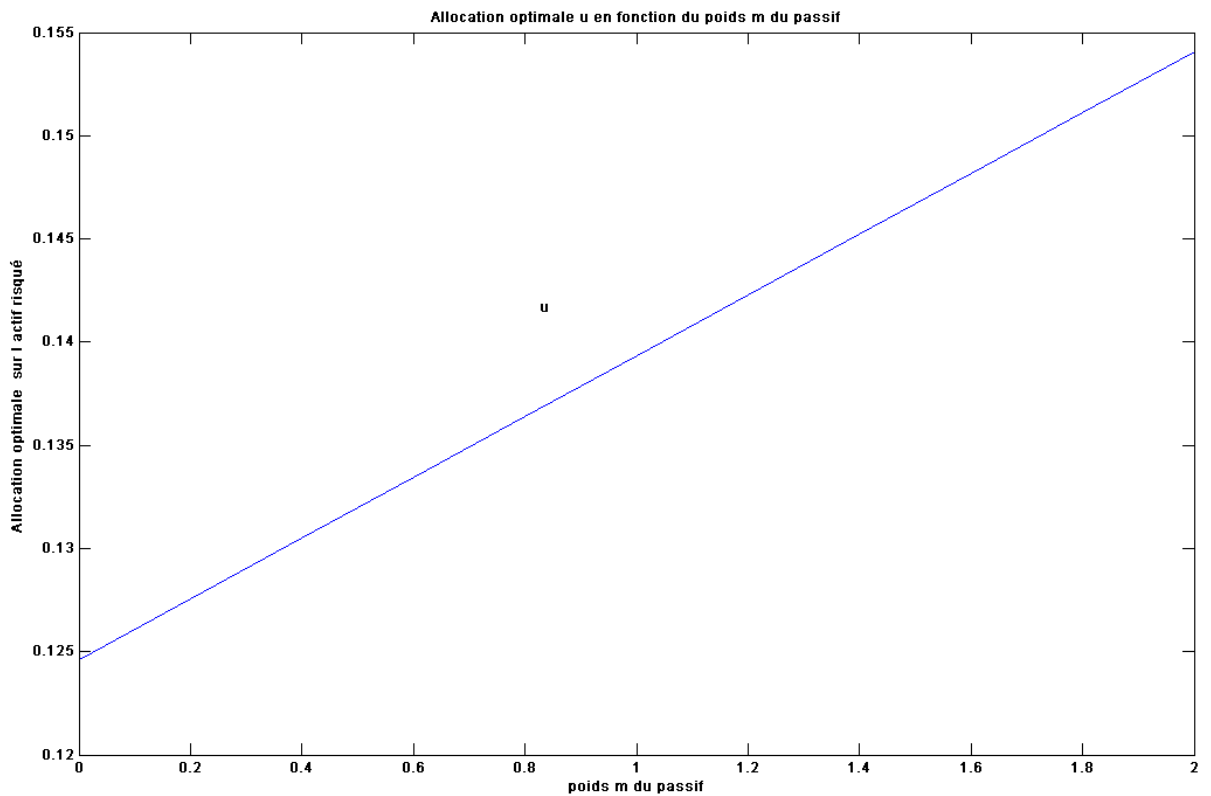


FIG. 4.1: Variation de l'allocation optimale sur l'actif risqué en statique, en fonction du poids du passif

Malgré la très forte variation de m proposée (de 0 à 2), l'allocation u ne varie pas beaucoup (de 12,46% à 15,41%). Malgré la forte rentabilité proposée par l'actif risqué, l'investisseur reste attaché à l'obligation plus sûre lui assurant en outre le paiement de ses pensions. Il alloue entre 84,59% et 87,54% de sa richesse sur l'obligation. Le poids m , garde néanmoins une relative importance, puisque pour un investisseur pour qui le passif n'aurait aucune importance dans la prise de décision ($m = 0, \varphi \neq 1$), l'allocation optimale serait de 12,46%. Elle passerait à 13,93% pour l'investisseur neutre considérant le passif sans charge supplémentaire ($m = 1$).

L'optimisation sur la rentabilité du portefeuille seul, donne une allocation optimale de 19,43%. Hors considération du passif, l'investisseur ne se préoccupe que de la rentabilité de son portefeuille et du seul risque de ses actifs. Cette diminution

du risque dans sa perspective, lui fait allouer plus sur l'actif risqué.

Le comportement prudent amenant à une allocation de la grande partie de la richesse du fonds sur l'actif le moins risqué du marché, s'explique aussi par la faible valeur du goût du risque ($tol = 10\%$) de l'investisseur et aussi de la relative avance initiale dont il dispose sur le passif ($\varphi = 1,47\%$).

Le portefeuille optimal de fonds de pension : actif, passif et surplus

La rentabilité du surplus connaît des variations plus importantes que l'allocation optimale sur l'actif risqué en faisant varier le poids m du passif.

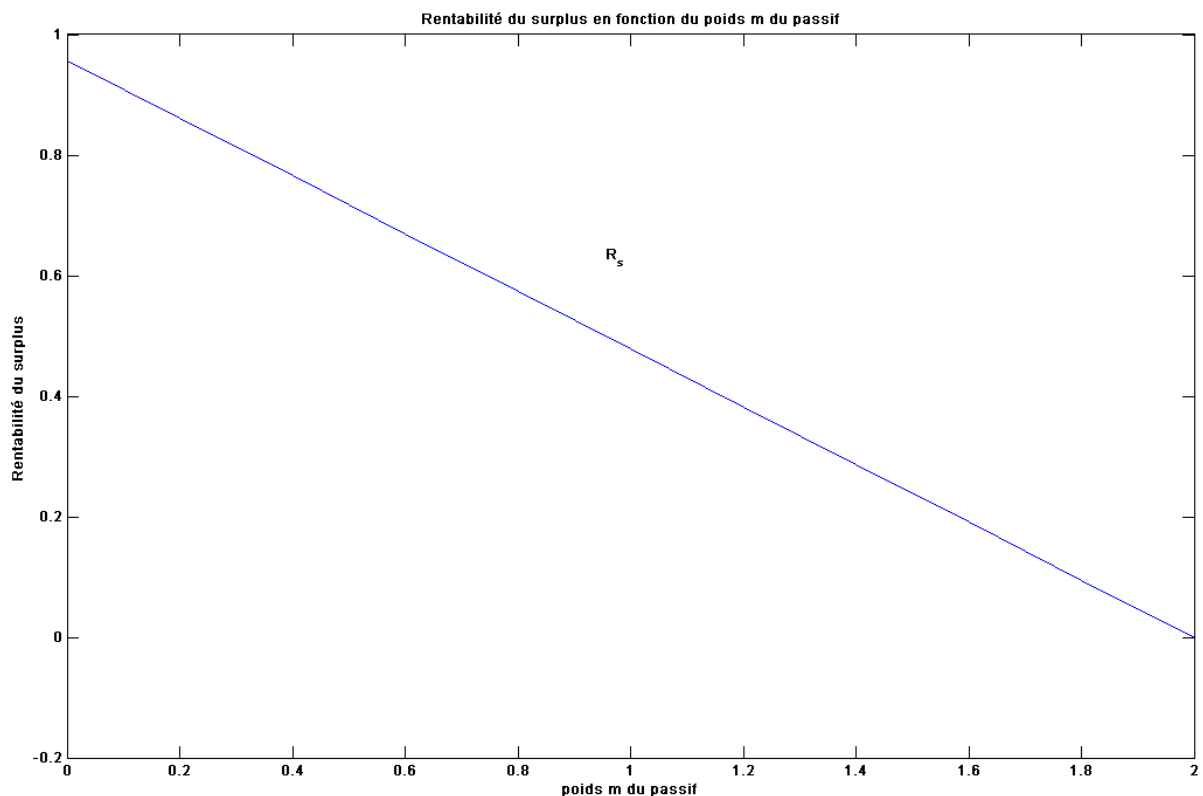


FIG. 4.2: Variations de la rentabilité du surplus en fonction du poids du passif

La rentabilité décroît de 95,66% à -0,08%, avec une rentabilité de 57,36% pour un poids neutre ($m = 1$).

Le surplus final et optimal à l'horizon H connaît une variation similaire à sa

rentabilité.

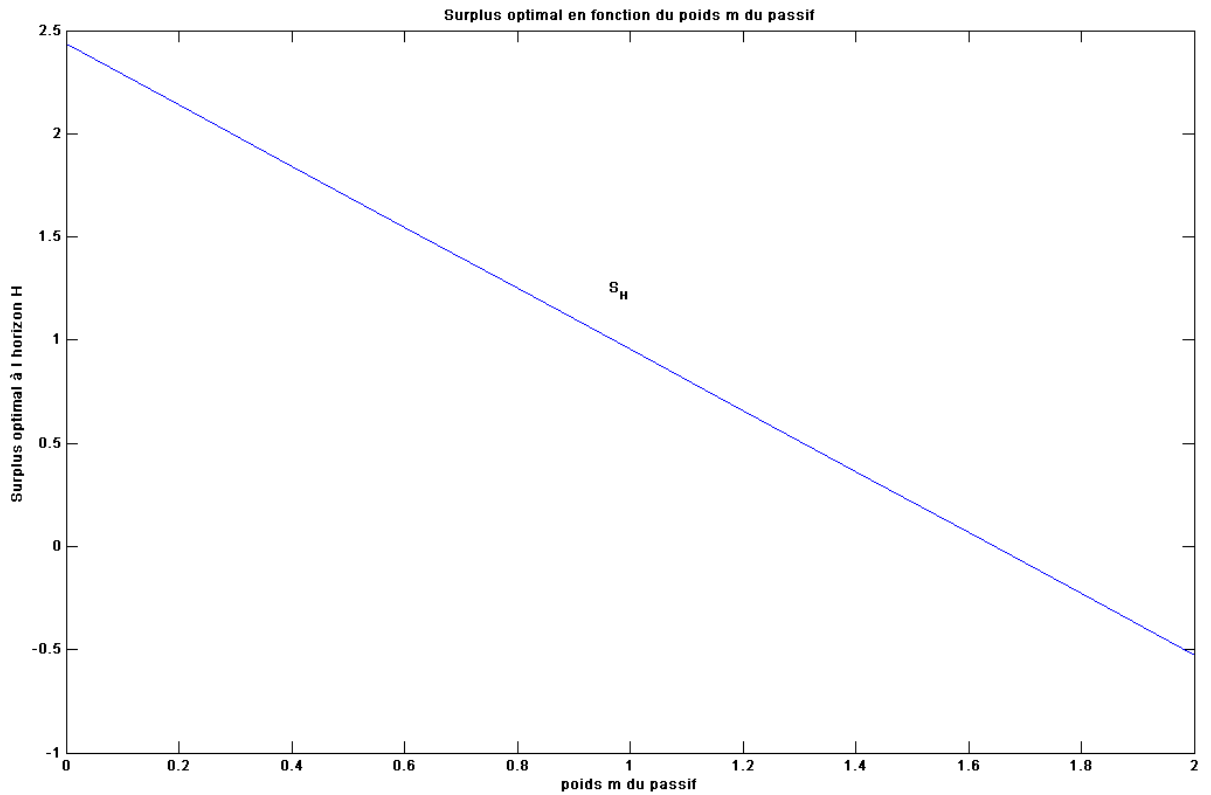


FIG. 4.3: Variations du surplus optimal en fonction du poids du passif

Le surplus va ainsi de 243,38% pour un poids nul ($m = 0, \varphi \neq 1$) à -52,54% pour un poids double ($m = 2$). Le surplus à poids neutre est de 95,42%.

La rentabilité du portefeuille R_X est quant à elle, relativement élevée et s'élève à environ 72,98% tandis que le niveau optimal du portefeuille est proche des 6 054,3 milliers d'euros. La simulation du passif donne une valeur autour des 3 565 milliers d'euros

Probabilité de ruine du fonds de pension

A partir de notre allocation obtenue et du fait du comportement gaussien des rentabilités mises en jeu, nous pouvons évaluer à terme la probabilité d'avoir une richesse ou un surplus en deçà de certaines valeurs critiques. Nous récapitulons

dans les tableaux suivants quelques probabilités de certains seuils.

Dans un premier temps, nous prenons la probabilité pour le portefeuille X_H d'être inférieur au seuil choisi, à l'échéance H . Nous nous servons des résultats (équation : 4.29, Page : 130) sur la probabilité de ruine du portefeuille, précédemment obtenus.

Seuils x	0	X_0	L_0	\tilde{L}_H	$95\%E[X_H]$
probabilités $P(X_H < x)$	$9,620 \times 10^{-49}$	$3,564 \times 10^{-10}$	$2,9749 \times 10^{-19}$	$9,5661 \times 10^{-10}$	0,2323

La probabilité de ruine du portefeuille qui correspond à la probabilité que la richesse du fonds soit à l'échéance inférieure au passif \tilde{L}_H est quasi nulle. De même que les probabilités d'avoir une richesse finale du fonds négative ou nulle ou simplement moins intéressante que la valeur initiale du portefeuille. C'est dire qu'avec nos paramètres le fonds est performant et assure une sécurité solide aux membres. La probabilité d'avoir à terme une richesse plus petite que 95% de la richesse finale moyenne s'établit à 23,23%. Nous allons néanmoins observer l'évolution des probabilités de ruines sur le surplus cette fois et en faisant varier le poids m du passif dans le surplus.

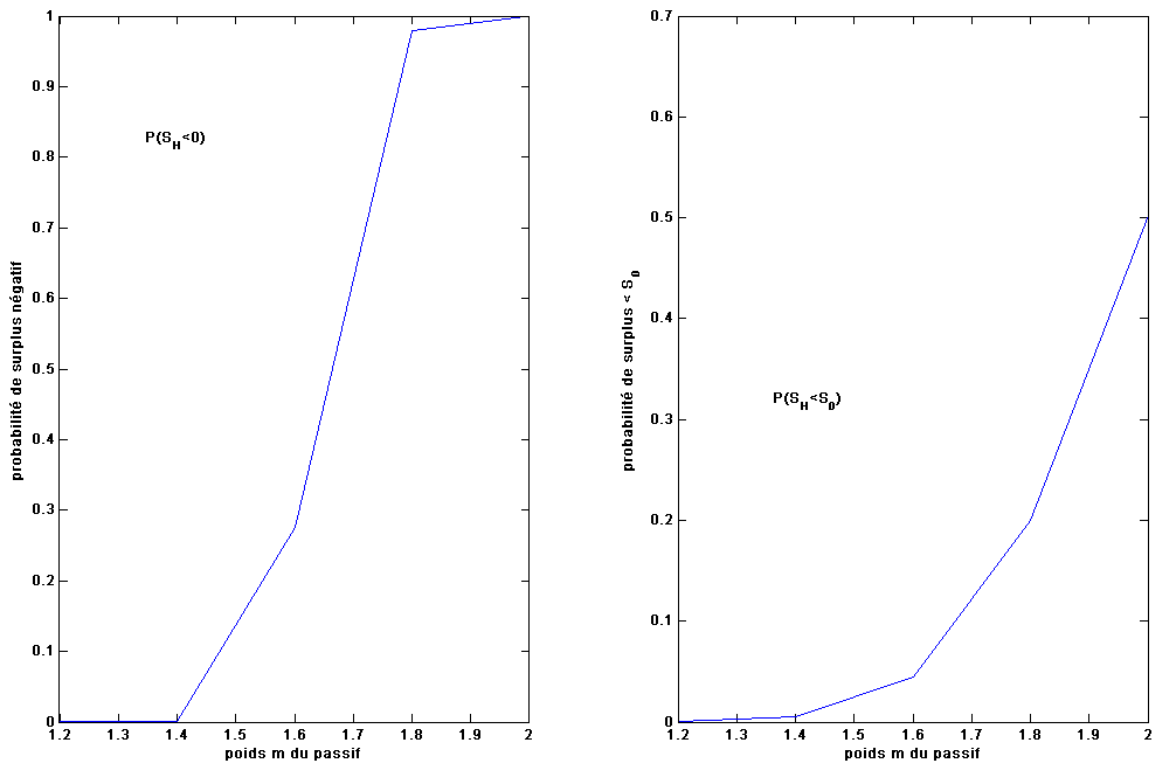


FIG. 4.4: Probabilités d'avoir un surplus négatif ou plus petit que l'initial en fonction du poids m du passif

Nous voyons que les probabilités d'avoir un surplus négatif ou inférieur à sa valeur initiale deviennent importantes à certaines valeurs de m . À $m = 2$ il est même certain d'obtenir un surplus négatif et donc une ruine du fonds de pension. L'allocation stratégique même optimale, bien qu'elle conduise à un portefeuille optimal satisfaisant, ne protégera pas le fonds en cas de doublement du passif.

Conclusion et discussions

L'allocation d'actif pour le portefeuille constitue un élément central dans la gestion d'un fonds de pension, car de sa réussite dépend le respect des engagements pris. Le gérant se doit donc de posséder une stratégie élaborée prenant en compte le maximum de facteurs influents, et sur laquelle il puisse se fier pour allouer sa richesse dans les différents actifs en présence. Le modèle de fonds de pension en prestations définies dans un univers économique statique, que nous venons de présenter, nous a permis de bien cerner les fondements et aussi les facettes, notamment à travers les simulations, de l'allocation stratégique. Certes, il ne répond pas encore à tous les aléas possibles, mais peut déjà constituer un socle pour des développements futurs. Notamment pour un cas en contributions définies ou mixte avec une étude plus poussée vers d'autres moyens de contrôle de gestion comme par exemple l'allocation tactique ou les contrôles de types "shortfall" incluant la *Value at Risk* (VaR) ou la probabilité de ruine. Il serait également intéressant d'inclure plus de paramètres et de dynamisme, dans un cadre continu par exemple, qui unifierait le réalisme et la praticité de la modélisation dynamique discrète et les perspectives d'allocation optimale de la modélisation statique.

Fonds à cotisations définies en statique

Les fonds à cotisations définies, en statique, présentent une modélisation plus simple encore. Le fonds ne s'engage sur les retraites à payer qu'une fois la retraite

atteinte et la part de richesse due à l'individu déterminée. Le gestionnaire du fonds aura juste à convertir la richesse sous la forme de versements souhaitée, que ce soit en capital ou rente viagère.

A partir du moment où la retraite est atteinte, le gestionnaire pourra allouer la richesse sous forme d'un fonds à prestations définies. Avant retraite, il n'y a pas d'engagements qui interfèrent avec les décisions d'investissements. Le contrôle peut s'opérer via une optimisation sur le portefeuille plutôt que sur le surplus. Les résultats conduiraient à l'allocation u_X^* déjà obtenu dans ce type d'optimisation (équation : 4.23).

Mais il est possible que le gérant se donne un niveau fictif de pension à atteindre. Cela fera apparaître un passif fictif et induire ainsi une gestion semblable à celle faite en prestations définies.

Autres contrôles du fonds

L'allocation stratégique peut être complétée par d'autres formes de gestion du fonds.

Allocation tactique

L'allocation tactique se fait selon les connaissances et les compétences du gestionnaire du portefeuille sur l'état et les opportunités du marché. Toutefois, afin de ne pas trop s'écarter de l'allocation stratégique qui a été définie de manière plus objective, une limite d'écart par actif est nécessaire. Un contrôle par gestion indiciaire comme celle présentée par Boulier et Dupré (2002), peut être proposé alors.

Contrôle continu du risque

La faible importance de l'horizon de gestion fait qu'en étude statique, le suivi du risque se simplifie autour du risque de marché lié aux volatilités des rentabilités espérées des actifs. On peut mesurer ce risque en se donnant, par exemple, des outils de mesure du risque tels que la *Value at Risk*, l'"expected shortfall" ou tout simplement par une probabilité de ruine du fonds.

Contrôles alternatifs

Les mesures de probabilité de ruine du portefeuille, se font en aval de l'allocation stratégique mais elles auraient pu prévaloir en amont aussi et même constituer des critères d'allocation comme l'ont montré Leibowitz et al. (1992) avec des contraintes de rentabilités sur le portefeuille et le surplus comme point de départ.

On peut aussi s'intéresser à une étude du risque du portefeuille de fonds de pension, associé à la solvabilité de la firme. Comme proposé par : Haugen (1989).

Modélisation en temps continu

Bien sûr, il faut garder la modélisation en statique dans son horizon court car avec l'allongement du temps, l'hypothèse de constance des différents éléments est vite erronée. La modélisation en temps continu tient compte de la fluidité réelle du temps et permet des horizons libres incluant l'infini. Dans un cas de temps continu, nous pourrions donner plus de dynamisme aux évolutions des différents éléments financiers et même démographiques.

Au total, les modélisations en économie discrète, même en y incluant le cas monopériodique, développent de puissants outils. Mais ces modèles restent axés de manière très exclusive sur un choix entre les domaines financiers ou assuranciers. Le temps continu, sera pour nous, l'occasion de tenter une fusion des deux tendances.

Ainsi il nous sera possible de tenir compte d'une inflation et d'un taux d'intérêt stochastiques continus avec en prime la prise en compte des probabilités de mortalité dans l'évaluation du passif. C'est le schéma utilisé par le modèle de marché avec un actif traduisant l'évolution des prix à partir d'une inflation stochastique continue de Menoncin et al. (2003). Cairns et al. (2004), ont choisi un schéma où l'inflation est plutôt incarnée par l'évolution des salaires dans un fonds de pension à cotisations définies.

Nous reviendrons plus en détail sur ces développements dans la prochaine partie de la thèse où nous présenterons une modélisation en temps continu avec des pensions et des cotisations indexées sur l'inflation des prix ou des salaires et un marché avec des taux stochastiques continus. La modélisation dynamique continue sera aussi l'occasion de lier enfin dans un même développement l'équilibre actuariel des cotisations ou des pensions avec l'équilibre de la théorie financière de l'allocation stratégique du portefeuille sous des critères et des contraintes bien définies.

L'équilibre actuariel ¹ peut y être incluse à partir de la formulation en dynamique discrète.

Menoncin et al. (2003) ont développé un tel schéma mais avec des flux de consommation (cotisations et pensions) non explicitement séparés en cotisations ou prestations définies mais liés par la relation de neutralité actuarielle qui prévaut dans l'un comme dans l'autre cas.

¹Ou neutralité actuarielle

Deuxième partie

Modélisation de fonds de pension en temps continu

Introduction

Des nombreuses sources d'appréhension que suscite la gestion d'un fonds de pension, nous touchons ici à la principale qui est le risque lié à la volatilité des marchés de capitaux. C'est le risque d'effondrement des investissements du fonds, prévus pour financer les pensions. Ce risque est lié à l'évolution de paramètres du marché comme les volatilités des actifs, les taux d'intérêt ou l'inflation. Nous disposons, en général, d'une transcription mathématique des évolutions théoriques de ces paramètres du marché. On peut donc construire un modèle de portefeuille de fonds de pension à optimiser selon des critères bien définis et à travers des outils et hypothèses mathématiques et économiques adéquats. Le facteur déterminant et contrôlable de l'évolution de tout portefeuille financier étant son allocation en actifs, nous chercherons à tirer de notre modèle d'optimisation des solutions d'allocation d'actif pour le portefeuille de fonds de pension en tenant compte du goût du risque du gérant ou des participants eux mêmes. Le choix stratégique d'un portefeuille de fonds de pension est un élément central de la gestion du fonds si ce n'est l'élément central. Nous tiendrons compte dans la formalisation du modèle, d'un maximum d'informations influant sur l'environnement. Il pourra s'agir des variables d'états telles l'inflation ou le taux d'intérêt. D'autres informations pourront concerner les hypothèses temporelles, voire la complétude du marché.

Tout résultat final, s'il répond alors directement et même parfois explicitement, au problème d'allocation d'actif pour le portefeuille, répond également aux

problèmes liés aux informations introduites. Évidemment la pertinence de la couverture du risque dépend de la qualité du modèle associé au paramètre introduit. Par exemple, les prix des actifs doivent suivre un modèle incluant les informations du marché (Fama 1970). Sans répondre donc de façon exhaustive à tous les risques de gestion d'un fonds de pension, une allocation issue d'un modèle incorporant le plus grand nombre d'informations *justes*, inclut une réponse même partielle aux risques inhérents aux informations bien modélisées. Ainsi, nous nous couvrons par exemple du risque d'inflation lorsque notre allocation est issue d'un modèle incorporant l'évolution des prix. En effet, le fait de pouvoir manipuler des valeurs réelles, permet d'éliminer le biais sur les véritables performances des actifs (voir Sharpe et Tint 1990). Si, de plus, nous disposons d'une formulation explicite du taux d'inflation et de l'évolution des prix nous permettant de passer de valeurs nominales effectivement disponibles aux valeurs réelles, le modèle sera encore plus réaliste et donc plus efficace. Par contre, si nous prenons directement tous nos actifs en valeurs réelles, cela nous transpose dans un univers débarrassé des influences de l'inflation sur les performances des actifs. Par ailleurs, l'inflation reste une donnée essentielle sur laquelle le gestionnaire doit pouvoir tirer des prévisions à long terme. Pour intégrer ce second aspect de la prise en compte de l'inflation, nous proposerons l'introduction d'un actif support, contingent à l'inflation des prix et sur lequel le gérant pourra faire des placements en vue de se couvrir de l'évolution des prix. L'actif le plus à même de remplir ce rôle est le zéro-coupon indexé sur l'inflation des prix. Nous allons avoir d'une part, un taux et un indice spécifiques aux variations des prix comme dans Brennan et Xia (2000), d'autre part, nous allons également considérer un actif contingent à l'inflation comme dans Cairns (2000) cette fois. Dans cet exemple, l'enrichissement du modèle par une prise en compte effective de l'inflation, entraîne l'incorporation dans la modélisation de trois éléments nouveaux dont un taux d'inflation, un actif fondamental des prix et un actif

contingent indexé. Ce qui constitue des développements considérables tant sur le plan théorique que technique. Or, le modèle peut encore être enrichi de différentes autres visions comme par exemple : l'inflation salariale, l'indexation des pensions et des cotisations sur l'une ou l'autre des inflations ou, pour arrêter la liste, la prise en compte des probabilités de survie ou de maintien en service. C'est sans nul doute, ce potentiel inépuisable qui est à l'origine de la très grande diversité prévalant même sur le seul plan de l'allocation stratégique en modélisation des fonds de pension.

Une foisonnante littérature, majoritairement anglo-saxonne, sur l'allocation stratégique des fonds de pension se consacre essentiellement aux fonds à prestations définies et un peu moins aux fonds à contributions définies. Les modèles de fonds à contributions définies avec un minimum de pension garanti sont encore les moins représentés. En sous division de ces types de modèles, on retrouve les modèles statiques de fonds de pensions qui sont en moindre représentation face aux modèles dynamiques continus ou discrets ¹. Nous pouvons encore subdiviser les différents modèles de gestion ou de contrôle de fonds de pension en modèles financiers² ou assuranciers. Nous rappelons que les modèles assuranciers de la littérature qui sont en fait les modèles développés dans la pratique de la gestion des fonds de pension au Royaume-Uni, au Canada ou aux États-Unis, sont des modèles statiques ou dynamiques discrets dont les plus représentatifs sont ceux présentés par Aitken (1994), Cairns et Huang (2005), Cairns (1994), Cairns (n.d.), Haberman (1992) ou Owadally (1998). Mais il y a aussi des modèles dynamiques discrets sur fonds de développements financiers comme celui de Boulier et Dupré (2002) ou de Zimbidis et Greece (2002). Une illustration particulière de transition de la

¹Dans la partie précédente de la thèse présentant les fonds de pension, figurent des définitions et/ou une introduction des différents types de modèles : statiques ou dynamiques ; contributions, prestations ou minimum de pensions définis (chapitre :2, page :55).

²Nous appelons ainsi les modèles se focalisant sur l'aspect purement financier sans développement du caractère assuranciel.

modélisation assurancielle dynamique et discrète vers une modélisation en temps continu est présentée par Cairns (1996). Dans ce modèle, fidèlement aux modèles dynamiques assuranciers et discrets, le but recherché est l'équilibre assurantiel par ajustement des cotisations en prestations définies. Mais ici, nous faisons plutôt de l'équilibre financier le pilier fondamental du modèle autour duquel s'érigeront les hypothèses financières comme assurancielles. Par ailleurs, nous conserverons dans le fonds la structure du passif issue de ces modèles assuranciers. Comme pour les modèles de portefeuille en général, les premiers modèles financiers de fonds de pension furent statiques. Notamment celui développé par Leibowitz et Langetieg (1989) avec une modélisation gaussienne et une optimisation basée sur la dualité rentabilité-risque ou encore moyenne-variance de type Markowitz. Puis, très vite, sont apparus des modèles dynamiques continus, Boulier et al. (1993) basés sur les modèles de choix optimal de portefeuille de Merton (1969), pour un environnement en temps continu avec consommation. Les premiers modèles financiers de la littérature aussi bien en statique qu'en dynamique, traitent le problème sur un seul actif risqué et un actif sans risque. Ceci est essentiellement dû au théorème de Merton-Tobin (Merton 1971), sur la séparabilité en économie stationnaire du portefeuille optimal à consommation et avec une utilité HARA (*Hyperbolique Absolute Risk Aversion*), en deux sous portefeuilles distincts. Lesquels portefeuilles étant identifiables en portefeuille d'investissements en actifs risqués d'une part et en investissements en actif non risqué pour le second. En regroupant tous les actifs risqués en un seul actif représentatif, on obtient l'unique actif risqué du marché. Il faut aussi probablement tenir compte de la relative simplicité de présentation des calculs, surtout que pour une étude purement financière, un actif risqué reste représentatif du marché. La représentation en un seul actif risqué permet également une appréciation globale des différentes relations entre les éléments présents difficilement discernables avec plusieurs actifs risqués. L'analyse de Merton (1969)

sur l'allocation de portefeuille avec consommation traite également de l'allocation en économie stationnaire avec plusieurs actifs. La consommation pourrait correspondre, dans un portefeuille de fonds de pension, aux pensions diminuées des cotisations. Nous avons déjà présenté en statique un modèle de fonds de pension à plusieurs actifs risqués, basé sur la diversification d'un portefeuille à passif de Sharpe et Tint (1990). Pour les modèles dynamiques stationnaires ou non à plusieurs actifs risqués, Cairns et al. (2004) et Menoncin et al. (2003) ont abouti à des résultats explicites, via un contrôle stochastique et par résolution des équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (H.J.B.). Lorsque cela est possible, les solutions s'obtiennent par une approche directe dite aussi méthode par martingales puisqu'il s'agit d'un calcul d'espérance sous la probabilité risque neutre où les valeurs actualisées des actifs sont des martingales. Enfin dans le souci de proposer un modèle le plus complet et réaliste possible, nous y introduirons des notions et principes actuariels. Déjà, en dynamique discrète, nous disposons d'une modélisation du passif incluant les probabilités de mortalité. Il s'agira, dans ce nouveau modèle, d'inclure une formalisation des pensions et des contributions intégrant les âges des individus ainsi que la probabilité de survie et de maintien dans le fonds. La structure finale de ces modèles nous est fortement inspirée par Menoncin et al. (2003). En effet, dans cet article à modèle dynamique financier de fonds de pension d'équilibre par arbitrage, sont introduits des notions actuarielles telles que les provisions mathématiques ou les conditions de faisabilité et surtout la mortalité de l'individu. La mortalité y intervient dans la formulation de la condition de faisabilité et de la provision mathématique. Nous aimerions proposer un développement tenant compte de la mortalité dans les processus de cotisation ou de pension afin d'aboutir à des expressions explicites et pratiques comme celles issues des modèles assuranciers. Pour ce faire, il nous faudra adapter au temps continu les différents outils de mathématiques actuarielles puisque les développements dont nous dis-

posons sont en distributions discrètes et purement assurancielles. Nous élargirons également à un fonds collectif de plusieurs individus dont le passif constituera la somme des passifs individuels et de même la cotisation collective sera la somme des cotisations effectives individuelles. C'est l'agrégation du fonds déjà défini au paragraphe : 3.2.4 (page :89). Ainsi, en cas de besoin de retour sur l'individu, le calcul de la part de pension individuelle peut s'obtenir par exemple, proportionnellement à ses cotisations dans le fonds comme en "Individual aggregate" du paragraphe : 3.2.5 (page : 91), défini aussi par Petauton (1996) et le partage proposé par Cairns (1994) dans le cadre d'un fonds de pension à cotisations définies en dynamique discrète. Cairns et al. (2004) ont développé un modèle à contributions définies tenant compte des probabilités de décès des individus, mais le modèle n'incorpore ces probabilités qu'au niveau de la pension et via la rente viagère continue. Dans Zimbidis et Greece (2002) le modèle emprunte tous ses outils des mêmes notations actuarielles en fonds de pension et l'allocation optimale est recherchée dans le but (non unique) de résorber les risques démographiques. Puisque les actualisations actuarielles se font sur des décennies, il conviendra alors d'envisager un taux actuariel stochastique. Nous prendrons alors le taux dit "sans risque" du modèle pour nos actualisations. Dans notre modélisation, tous les actifs sont pris initialement en valeurs nominales et sont ensuite évalués en valeurs réelles via le processus d'évolution des prix comme dans Menoncin et al. (2003). C'est aussi l'évaluation réelle suivie par Brennan et Xia (2000) ou Poncet et Lioui(2004, 2005). Dans les deux derniers articles, l'inflation comme l'actif indiciel des prix sont déterminés de manière endogène. Les deux premiers articles (Menoncin et al. 2003, Brennan et Xia 2000), desquels notre modèle se rapproche le plus, considèrent l'actif indiciel des prix et le taux d'inflation comme exogènes suivant respectivement un processus géométrique et un processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

Nos développements comporteront également, un coefficient de partage de la

variation du surplus très proche de celui de Menoncin et al. (2003). Nous partirons d'une modélisation la plus générale possible en équilibre par arbitrage. Nous en déduirons ensuite, au fur et à mesure, et selon les besoins de résultats, des formes plus simples comme les cas stationnaires en rendant constants certains paramètres.

Pour les critères d'optimisation aussi, nous retrouverons les formes courantes de critères en espérances d'utilités simples ou composées, à partir d'un cas général. L'avantage qu'il y a, à considérer le plus de généralités au départ, c'est la conservation du potentiel à retrouver, par la relaxe d'une généralité, une forme ou un résultat courants de la littérature.

Nous traiterons, par contre, des contraintes d'égalité seules. Mais avant tout développement il nous faut asseoir les fondements de la modélisation.

1

Formalisme et évaluation du fonds de pension en temps continu

Un fonds de pension se compose de l'actif et du passif qui interagissent dans un milieu démographique et financier. L'actif rassemble l'avoir du portefeuille tandis que le passif est l'ensemble de ses engagements. Tout fondement de modèle passe par la définition de l'environnement économique déterminant la structure de l'actif et du passif du fonds.

1.1 Formalisme de base du modèle de marché

Un environnement économique, pour être le plus réaliste possible, devra normalement tenir compte du maximum d'informations ou d'entités traduisant les réalités financières. Par ailleurs, pour un modèle mathématiquement exploitable, il est indispensable de simplifier certaines de ces "réalités" financières. Pour essayer de satisfaire autant que possible cette dualité entre la réalité économique et sa modélisation mathématique, nous partirons d'un cadre général le plus naturel possible. Nous procéderons ensuite, graduellement et selon les besoins, aux simplifications qui s'imposeraient.

Nous allons d'emblée, supposer vérifiée, la désormais très classique hypothèse d'absence de frictions ou de frais de transaction dans le marché. L'hypothèse contraire est rare, Zimbidis et Greece (2002) ont, par exemple, développé une allocation optimale où les coûts de transactions ne sont pas nuls et constituent même le critère d'optimisation (minimisation). Nous pouvons par exemple concevoir que les prix d'achats et les rendements des actifs incluent les coûts de transaction. Nous accompagnons cette hypothèse d'une autre qui lui succède naturellement, la parfaite fluidité de la circulation des informations. En tout instant, toutes les informations présentes et passées sur l'ensemble des variables d'état, sont disponibles. La filtration $(\mathfrak{S})_{t \geq 0}$ est engendrée par les incertitudes (informations) du marché, elles même matérialisées par la donnée d'un vecteur brownien standard z dont nous préciserons la dimension ultérieurement. L'espace filtré $(A, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$ est muni de la probabilité historique \mathbf{P} .

1.1.1 Variables fondamentales

Nous comptons, dans le marché, n actifs risqués fondamentaux $n \in N^*$ et un actif sans risque. L'actif sans risque correspond à l'évolution d'un placement à l'instant initial, d'une unité monétaire au taux à court terme du marché local.

La modélisation du taux d'intérêt sans risque est un élément déterminant de toute modélisation financière puisque les hypothèses d'équilibre du marché se construisent autour. Un nombre impressionnant d'articles traite de ce point qui conduit inexorablement à l'évaluation des actifs obligataires sur taux d'intérêt. Une principale conséquence à tirer d'un modèle d'équilibre est la valeur de marché des actifs financiers qui le composent. Le modèle d'équilibre définit alors, entre autres, la structure par termes des taux d'intérêt (désormais : S.T.T.I.). Dans les modèles par arbitrage, la prime du risque est exogène et à l'exception de la struc-

ture par termes de Heath, Jarrow et Morton (1992)¹, l'évolution du processus du taux d'intérêt est souvent admise également (voir Vasicek 1977).

Nous citons à présent quelques formulations des plus usuelles de l'évolution du taux d'intérêt instantané.

- Merton, 1973, $dr = bdt + \sigma dz$
- Vasicek, 1977, $dr = a(b - r)dt + \sigma dz$
- Dothan, 1978, $dr = brdt + \sigma rdz$
- Cox, Ingersoll, Ross (CIR), 1985,
 $dr = k(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r} dz$
- Ho, Lee, 1986, $dr = \theta(t)dt + \sigma dz$
- Hull, White (prolongement de Vasicek), 1990,
 $dr = (\theta(t) - \beta r)dt + \sigma dz$
- Hull, White (prolongement de CIR), 1990,
 $dr = (\theta(t) - \beta r)dt + \sigma\sqrt{r} dz$
- Black, Karasinski, 1991, $d \log r = (\theta(t) - \beta \log r)dt + \sigma dz$

Soit donc $r(t)$ le seul taux d'intérêt instantané du marché², suivant l'équation différentielle stochastique (E.D.S.) *a priori* suivante :

$$dr = \mu_r(r, t) dt + \sigma_r(r, t) dz \tag{1.1}$$

Avec :

μ_r et σ_r des fonctions de r et du temps t à préciser selon le modèle de taux.

z le processus brownien de dimension $(n + d, 1)$, $d \in N$; composé de $n + d$ browniens standards liés aux incertitudes du marché, de sources les n actifs risqués et les "d" autres variables d'états générant des incertitudes propres, telles que

¹Dans leur modèle par arbitrage, les valeurs initiales du zéro-coupon et du taux forward sont admises et la S.T.T.I. est déterminée en fonction de ces facteurs.

²Pour une démonstration simple du lien entre la présence de plus d'un taux sans risque et l'arbitrage on pourra consulter Petauton (1996)

les taux sans risque r et d'inflation i . Nous fixerons "d" ultérieurement.

ρ la matrice de dimension $(n + d, n + d)$, la matrice de dispersion incrementale de z .

Les sources d'incertitudes présentes dans le modèle précisent en partie son caractère complet ou incomplet.

Hypothèse de complétude du Marché

Dans les modèles par arbitrage, le marché est le plus souvent complet et la prime de risque est exogène au modèle¹. Parfois, l'hypothèse de complétude du marché est implicitement admise du fait que certains éléments non financiers *a priori* sont dupliqués en actifs financiers. C'est le cas dans la plupart des modèles statiques où le passif est assimilable à un actif obligataire : Leibowitz et al. (1992), Leibowitz et Kogelman (1991) ou Boulier et Dupré (2002). Dans une même étude il arrive que le modèle bascule d'un caractère complet à un caractère incomplet de manière plutôt locale et selon des propriétés bien définies malgré l'A.O.A. Ainsi, Cairns et al. (2004) ont traité un cas de marché dont la complétude dépend de la prise en compte ou non du facteur non duplicable dans la volatilité des salaires. Ce caractère incomplet cohabite pourtant avec la présence d'une prime du risque et l'absence d'opportunité d'arbitrage sur les actifs du marché. C'est la même logique, suivie par Brennan et Xia (2000) en équilibre général où cette fois l'actif admettant une dimension non duplicable est l'actif prix traduisant les variations effectives de l'inflation et qui s'appuie sur une source d'incertitudes orthogonale aux autres sources et donc non duplicable et rendant ainsi incomplet le marché. Une différence essentielle entre Cairns et al. (2004) et Brennan et Xia (2000) est que les primes de risques sont exogènes dans le premier cas et endogènes dans le second. Nous laissons libre *a priori* le caractère de complétude du marché, que nous

¹Elle est endogénéisée comme le taux d'intérêt aussi dans les modèles d'équilibre général où le marché n'est généralement pas complet (Brennan et Xia 2000).

préciserons selon le choix des éléments qui le déterminent. Nous allons justement nous référer quelque peu à la formulation de Brennan et Xia (2000) sur l'évolution des prix pour introduire l'inflation.

Autres variables d'état

Donnons à présent l'évolution générale des autres variables avant de revenir plus loin sur un choix précis de modèle du taux d'intérêt. Nous supposons alors donnée l'évolution instantanée de l'inflation :

$$di(t) = \mu_{inf}(i, t) dt + \sigma_{inf}(i, t) dz \quad (1.2)$$

Dans la quasi-totalité des modèles lorsque l'inflation est mentionnée c'est pour considérer réelles les rentabilités des actifs. Dans certains modèles d'équilibre général, l'inflation est déterminée de façon endogène. Nous pouvons citer dans ce contexte Cairns (2000) ainsi que Poncet et Lioui(2004, 2005). Nous adoptons une formalisation explicite de l'inflation comme cela a été le cas dans Menoncin et al. (2003) ou Brennan et Xia (2000). Nous explicitons également les dynamiques des actifs fondamentaux, des actifs contingents ou dérivés, de l'actif sans risque et de l'actif Prix.

1.1.2 Dynamique des actifs

La dynamique des n actifs risqués fondamentaux est également supposée connue en nominal. Considérons un actif risqué au prix en t de $A_{iN}(t)$ ($1 \leq i \leq n$), puis l'ensemble $A_N(t)$ des n actifs risqués. L'indice N indiquant le caractère nominal, la

valeur par défaut des prix sera la valeur réelle que nous verrons plus loin :

$$dA_{iN}(t) = \mu_{iN}(A_{iN}, t) dt + \sigma_{iN}^T(A_{iN}, t) dz$$

ou encore

$$dA_{iN}(t) = \mu_{iN}(A_{iN}, t) dt + \sum_j \sigma_{ij}(A_{iN}, A_{jN}, t) dz_j$$

$$0 \leq j \leq n + d$$

Nous adopterons désormais la forme suivante qui ressort plutôt les évolutions des rendements des actifs :

$$dA_N(t) = \text{Diag}(A_N) [\mu_{aN}(t) dt + \sigma_{aN}(t) dz]$$

avec $\text{Diag}(A_N)$ la matrice (n, n) diagonale d'éléments diagonaux, les

A_{iN} $1 \leq i \leq n$:

$$\text{Diag}(A_N) = (I_{aN(i,j)})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{avec :} \quad I_{aN(i,j)} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ A_{iN} & \text{si } i = j \end{cases} \quad (1.3)$$

Remarques : 1.1 1. z_i le brownien standard associé à l'actif A_{iN} est la source des incertitudes propres, dues à l'actif support A_{iN} . Nous convenons que $z_0 = z_{n+1} = z_r$, est la source des incertitudes dues à "r" et que $z_{n+2} = z_{inf}$, la source des incertitudes dues à l'inflation.

2. $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ est la covariance des rendements instantanés entre les actifs A_{iN} et A_{jN} .

3. σ_{aiN} est le vecteur ligne $(1, n + d)$, des éléments de la diffusion de l'actif A_{iN} , traduisant les interactions avec toutes les variables d'état lui-même compris

et à travers les processus de Wiener z_i ($1 \leq i \leq n + d$).

4. Dans le document et lorsque cela sera nécessaire, nous préciserons le caractère nominal des actifs ou autres variables par l'indice N .

Pour un cas le plus général possible nous supposons les z_i mutuellement dépendants et soit ρ_z la matrice carrée $(n + d, n + d)$ des corrélations incrémentales des dz_i ($1 \leq i \leq n + d$).

$$\rho_{(n+d, n+d)} = (\rho_{i,j})_{(1 \leq i, j \leq n+d)} \quad ; \quad \text{avec} \quad \rho_{i,j} dt = \text{cov}(dz_i, dz_j) \quad (1.4)$$

Comme autres actifs fondamentaux, nous allons considérer l'actif sans risque nominal $G_N(t)$, issu du taux sans risque $r(t)$ et le prix $\text{Pri}(t)$ issu de l'inflation. Nous introduisons un deuxième brownien standard ω_{Pr_i} indépendant et orthogonal au brownien du marché z et qui portera les incertitudes non liées au marché. Initialisons le temps à l'instant de mise en place du fonds de pension, avec $G_N(0) = 1$,

$Pri(0) = 1$ et t l'instant présent.

l'actif sans risque :

$$\frac{dG_N}{G_N} = r dt \quad \text{alors}$$

$$G_N(s) = G_N(t) \exp \left\{ \int_t^s r(u) du \right\} ; 0 \leq t \leq s$$

l'indice d'évolution des prix :

$$\frac{dPri}{Pri} = \mu_{Pri} dt + \sigma_{Pri} dz + \eta_{Pri} d\omega_{Pri}$$

et alors

$$Pri(s) = Pri(t) \exp \left\{ \begin{array}{l} \int_t^s \left(\mu_{Pri}(u) - \frac{1}{2} \sigma_{Pri} \rho \sigma_{Pri}^T - \frac{1}{2} \eta_{Pri}^2 \right) du \\ + \int_t^s \sigma_{Pri} dz(u) + \int_t^s \eta_{Pri} d\omega_{Pri}(u) \end{array} \right\} ; 0 \leq t \leq s \quad (1.5)$$

Le premier paramètre de diffusion des prix σ_{Pri} représente les interactions avec n'importe quel autre actif du marché et est adossé sur le brownien z représentant les incertitudes du marché. Le deuxième paramètre de diffusion η_{Pri} des incertitudes indépendantes du marché, est adossé sur le brownien standard ω_{Pri} . Nous rejoignons ainsi la formulation des prix faite par Brennan et Xia (2000) et celle des salaires dans Cairns et al. (2004). Ce second brownien rend le marché incomplet puisqu'il n'est corrélé à aucun des actifs fondamentaux du marché. Par conséquent, l'indice des prix de la consommation ne respectera pas les règles du marché comme l'admission d'une prime du risque du marché tant que η_{Pri} ne sera pas *nécessaire-*

ment nul. Nous dédions le dernier et ($n+3^{\text{ième}}$) brownien standard du vecteur z aux incertitudes dues à l'indice des prix de la consommation de sorte que $z_{n+3} = z_{Pri}$. C'est le brownien reflétant les incertitudes des fluctuations des prix corrélées avec les actifs du marché, les autres fluctuations des prix non corrélées aux actifs du marché étant portées par ω_{Pri} . Désormais donc $d = 3$ et z de dimension $(n+3, 1)$. Les paramètres μ_{Pri} , σ_{Pri} ou η_{Pri} sont des fonctionnelles à préciser du temps et des variables d'états telles que les taux r ou i . $G_N(t)$ représentera le cash. Il servira aussi, dans un univers certain, de facteur d'actualisation au taux sans risque r . Pour une actualisation respectant l'évolution de tout le marché et l'A.O.A., nous avons des outils comme le zéro-coupon classique ou le zéro-coupon indexé sur les prix. Avant d'introduire convenablement les zéro-coupons, nous avons besoin de passer par des outils financiers tels que la prime de risque ou l'univers risque neutre. Nous allons faire l'hypothèse d'inversibilité qui va suivre.

Hypothèses : 1.1 (H_{inv})

Nous supposons inversible la matrice carrée $(n+3, n+3)$, de variances covariances des actifs et taux du marché Ω_{arip} qui est telle que :

- $\Omega_{arip} = \sigma_{arip} \rho \sigma_{arip}^T$
- Les n premières lignes de σ_{arip} sont formées par les paramètres de diffusion des n actifs risqués, elles valent donc la matrice σ_{aN}
- La $n+1^{\text{ième}}$ ligne de σ_{arip} est formée par le paramètre de diffusion du taux r σ_r .
- La $n+2^{\text{ième}}$ ligne de σ_{arip} formée par le paramètre de diffusion du taux d'inflation σ_{inf} .
- Enfin, la $n+3^{\text{ième}}$ ligne de σ_{arip} est formée par le premier paramètre de la diffusion des prix σ_{pri} .

Cette hypothèse n'est pas excessive puisque dans un cas de marché même localement complet, au moins la matrice de variances covariances de tous les actifs

fondamentaux du marché est nécessairement inversible. Nous élargissons aux taux qui ont la capacité de générer des actifs supplémentaires. Ainsi, comme nous le verrons, des actifs contingents à ces taux pourront alors s'ajouter aux actifs fondamentaux pour *completer* le marché.

1.1.3 Prime de risque, univers risque neutre et zéro-coupons

Il est désormais bien connu qu'en A.O.A. dans un marché complet il existe une prime du risque unique engendrant un univers de probabilité où tous les actifs ont le même rendement instantané égal au rendement du cash. Soit λ la prime de risque exogène des actifs risqués fondamentaux du marché et Q la probabilité risque neutre associée, équivalente à la probabilité historique et E_Q l'espérance sous Q . Soit $B(t, T)$, la valeur en t du zéro-coupon nominal, d'échéance en T . C'est donc la valeur en t de l'actif qui verse une unité monétaire en T . Soit par ailleurs $B_i(t, T)$, la valeur en t du zéro-coupon indexé, d'échéance en T . C'est la valeur en t de l'actif qui verse en T la valeur réelle d'une unité monétaire ayant évolué avec l'indice des prix. Soit donc un versement à l'échéance de $\frac{Pri(T)}{Pri(t)}$. Par définition, les zéros-coupon respectent les formulations qui suivent, $\omega_{Pri}(t)$ étant \mathfrak{F}_t mesurable sous Q^1 :

$$B(t, T) = E_Q \left[\frac{G_N(t)}{G_N(T)} \middle/ \mathfrak{F}_t \right]$$

et (1.6)

$$B_i(t, T) = E_Q \left[\frac{Pri(T)}{Pri(t)} \frac{G_N(t)}{G_N(T)} \middle/ \mathfrak{F}_t \right]$$

Soit $(H_s^t)_{(0 \leq t \leq s)}$ le processus respectant l'équation différentielle stochastique sui-

¹ ω et z à t fixé, sont tous les deux gaussiens sous la probabilité historique P équivalente à Q

vante :

$$\frac{dH_s^t}{H_s^t} = -rds - \lambda dz; \quad t \leq s \quad (1.7)$$

et $H_t^t = 1$

Ce facteur est aussi connu comme étant le "pricing Kernel". Il est l'équivalent dans l'univers de probabilité historique du $\frac{\delta(s)}{\delta(t)} = \frac{G_N(t)}{G_N(s)}$, $0 \leq t \leq s$ et $\delta(t) = \frac{1}{G_N(t)}$ de l'univers risque neutre. Il permet de déterminer en univers historique, sous condition d'A.O.A., la valeur actuelle de tout actif versant des flux ou pas, à partir de la valeur à un horizon et des flux donnés. Ainsi pour tout actif F versant les flux instantanés f entre deux instants t et T tels que $t \leq T$ et t soit l'instant présent :

$$F(t) = E \left[F(T) H_T^t + \int_t^T f(s) H_s^t ds \middle/ \mathfrak{S}_t \right] \quad (1.8)$$

Et donc pour nos zéros-coupon¹ :

$$B(t, T) = E \left[H_T^t / \mathfrak{S}_t \right]$$

et

$$B_i(t, T) = E \left[\frac{Pri(T)}{Pri(t)} H_T^t / \mathfrak{S}_t \right] \quad (1.9)$$

Lorsque le marché est complet, Menoncin et al. (2003), ressortent la prime du risque réel² comme $\lambda_{rr} = \lambda - \sigma_{Pri}$ et nous en tirons la proposition qui suit.

Proposition : 1.1 *Univers risque réel neutre*

¹Une démonstration rigoureuse et détaillée de l'équivalence de l'utilisation de H_T^t sous la probabilité historique, en lieu et place de $\frac{\delta(T)}{\delta(t)}$ dans l'univers risque neutre se trouve dans Quittard-Pinon (1998, p.305).

²C'est la prime du risque des actifs réels sur le cash réel.

Lorsque le marché est complet, l'univers risque neutre reste sensible au risque d'inflation et il existe un univers risque réel neutre insensible au risque réel. La probabilité associée à cet univers est la probabilité Q_{Pri} , équivalente aux probabilités Q et P et engendrée par le brownien : $z_{Q_{Pri}}$, tel que $dz_{Q_{Pri}} = dz_Q - \sigma_{Pri} dt = dz + \lambda dt - \sigma_{Pri} dt$. Dans cet univers risque réel neutre, le prix réel de tout actif du marché est une martingale de même volatilité que dans l'univers réel :

$$F_{réel}(t) = E_{Q_{Pri}} [F_{réel}(T) / \mathfrak{F}_t] \quad (1.10)$$

Preuve de la proposition : 1.1 Nous figurons en annexe tous les développements et preuves relatifs à la théorie financière.

Remarques : 1.2 Actualisations

1. Pour respecter l'A.O.A, toute actualisation de tout actif nominal du marché, sous la probabilité historique se fait à l'aide du facteur d'escompte stochastique $H_s^t, 0 \leq t \leq s$.
2. Pour respecter l'A.O.A, toute actualisation de tout actif nominal du marché, sous la probabilité risque neutre se fait à l'aide du cash G_N .
3. Pour respecter l'A.O.A, toute actualisation de tout actif nominal du marché, sous la probabilité risque réel neutre se fait à l'aide du seul indice des prix de la consommation Pri_t .
4. Sous la probabilité risque réel neutre les prix Pri_t jouent le même rôle que le zéro-coupon nominal en univers forward-neutre.

Supposons une formalisation générale des zéro-coupons d'échéance T issus de r et i en t :

$$dB_{t,T} = \mu_B(i, r, B, t, T) dt + \sigma_B(i, r, B, t, T) dz \quad (1.11)$$

Avec σ_B le vecteur ligne $(1, n+3)$, diffusion du zéro-coupon sur dz .

Nous adopterons l'écriture en proportionnel, comme pour les actifs risqués. Pour le zéro-coupon à t d'échéance T :

$$\frac{dB_{t,T}}{B_{t,T}} = \mu_B(i_t, r_t, B_{t,T}, t, T) dt + \sigma_B(i_t, r_t, B_{t,T}, t, T) dz_t \quad (1.12)$$

La valeur du zéro-coupon dépendra fortement du type de modèle d'équilibre autant que des taux, comme nous le verrons. En définitive donc, nous sommes en présence de trois types d'actifs financiers dans le marché : les n actifs risqués, un actif sans risque ou cash $G_N(t)$ et deux zéro-coupons. Cette représentation en trois types d'actifs est celle adoptée par Boulier et al. (2001) avec un seul actif risqué et reprise en plusieurs actifs risqués par Menoncin et al. (2003) ainsi que par Cairns et al. (2004) ou Brennan et Xia (2000)). Poncet et Lioui (2005) introduisent une quatrième variable représentant l'offre de cash sur le marché. Mais le zéro-coupon est, dans la quasi totalité des cas, représenté tout seul et en nominal. Nous trouvons quand même Jarrow et Yildirim (2002) et Cairns (2000) qui développent le zéro-coupon indexé à côté du zero-coupon nominal.

Proposition : 1.2 *Inversion et décomposition de Cholesky*

L'Hypothèse H_{inv} et la définition précédente des zéros-coupon induisent l'inversibilité de la matrice de covariances carrée $(n+2, n+2)$ Ω_{abN} des actifs nominaux.

Avec Ω_{abN} telle que :

- $\Omega_{abN} = \sigma_{abN} \rho \sigma_{abN}^T$ avec σ_{abN} $(n+2, n+3)$;
- les n premières lignes de σ_{abN} , formées des n paramètres de diffusions des n actifs risqués fondamentaux.
- et les 2 dernières lignes de σ_{abN} , formées respectivement des 2 paramètres de diffusions des actifs risqués contingents $B(t, T)$ et $B_i(t, T)$.

Désormais, l'utilisation des sous matrices (lignes) de la matrice triangulaire supérieure issue de la décomposition de Cholesky de Ω_{arip} , nous dispense de l'usage

de la matrice d'auto-covariance de z : ρ .

Preuve de la proposition : 1.2 *Les paramètres de diffusions des zéros-coupon sont des combinaisons (à t fixé), des paramètres de diffusions des taux dont ils sont contingents. La matrice Ω_{ari} , sous matrice de Ω_{arip} reste inversible. Et de ce fait la matrice Ω_{abN} l'est aussi. En effet : $\Omega_{ari} = \sigma_{ari}\rho\sigma_{ari}$ avec σ_{ari} formée de $\sigma_{ari,p}$ hors σ_{Pr_i} est formée de vecteurs lignes libres.*

Dans toute la suite du document, hors définitions, les paramètres de diffusions sont utilisés uniquement en produit avec ρ et d'autres paramètres. Par exemple : $\sigma_{ai}\rho\sigma_{aj}^T = \sigma_{ai,Cholesky}\cdot\sigma_{aj,Cholesky}^T$. Du fait de l'égalité du produit avec ρ et de celui sans, avec usage des décomposition de Cholesky, nous considérons désormais les paramètres comme issus des décompositions de Cholesky sans changer leur écriture pour ne pas allourdir le texte.

Outre les actifs du marché, nous étudierons également l'environnement démographique qui est aussi une source d'incertitudes et donc un foyer de risques potentiels pour la gestion du fonds de pension.

1.2 Environnement démographique

Nous partons d'un raisonnement sans reversion et en groupe ouvert. Le fonds peut alors accueillir et perdre à tout moment des individus sans aucune restriction sur le nombre d'individus de la population, contrairement à l'usage en modélisation de fonds de pension. Mis à part quelques rares cas où la population évolue aléatoirement (comme Chang et Cheng 2002), dans la majeure partie des cas les populations sont supposées stables (Boulier et al. 2001, Reichlin 2000, Devolder 2002, Haberman et al. 2002, Menoncin et al. 2003, Cairns 1994). Nous pourrions toujours revenir, si nécessaire, à un groupe fermé avec une population stable et même à un seul

et unique individu formant l'ensemble des membres de la population. Pour tout individu de la population du fonds d'âge x à l'instant présent t , nous nommons :

- L'âge (respectivement la date) au moment de la mise en place du système de fonds de pension : a_x (respectivement t_{a_x}).
- L'âge (respectivement la date) à l'embauche de l'individu dans le service : e_x (respectivement t_{e_x}).
- L'âge (respectivement la date) supposée de la retraite de l'individu : r_0 (respectivement t_{r_0}).
- ${}_{s-t}p_{t_x}$ la probabilité d'être en vie à l'instant s , $s \geq t$, sachant que l'individu est en vie à l'instant t ou date t_x à l'âge x ;
- t_0 ou t_{0_x} la date initiale prise en compte pour l'individu. Elle correspond, selon les cas à préciser, au moment où l'individu est embauché ou à celui où il est pris en compte dans le fonds ou encore à la date de mise en place du fonds.
- ${}_{s-t}p_{t_x}^{(\tau)}$ la probabilité d'être à la fois en vie et maintenu dans son travail à l'instant s , sachant que l'individu est en vie et maintenu en service à l'instant t ou date t_x à l'âge x . C'est aussi la probabilité de maintien dans le système.
- Comme en dynamique discrète (sous paragraphe : 3.1.1 ; page : 76), l'exposant τ indique que nous considérons, en plus de la survie, le maintien en service. Nous admettons que le maintien en service (exposant τ) se *consume* dès que l'âge r_0 est franchi puisque nous supposons qu'il n'y a plus de service donnant droit à des retraites à partir de cet âge.

1.2.1 évolution du salaire

soit l'évolution du salaire :

$$dS_x(t) = \mu_{s,x}(S_x, t) dt + \sigma_{s,x}(S_x, t) dz_{s,x} \quad (1.13)$$

Ou encore en incluant des variations stochastiques autres que celles dues au marché directement :

$$\frac{dS_x}{S_x} = \mu_{S_x} dt + \sigma_{S_x} dz + \eta_{S_x} d\omega_{S_x} \quad (1.14)$$

Avec $\sigma_{s,x}$ le vecteur ligne (1,n+3), diffusion du salaire sur z. Nous supposons indépendante du marché une partie des évolutions du salaire de l'individu, notamment par exemple : les changements des revenus dus à l'âge, au type d'emploi, à la durée de service ou même à des spécificités de l'entreprise non liées au marché. Cela se traduit comme pour les prix, par la présence d'une source supplémentaire d'incertitudes ω_{S_x} brownien standard tel que $d\omega_{S_x}.dz \equiv 0$ par contre $d\omega_{S_x}$ est non nécessairement orthogonal à $d\omega_{P_{ri}}$ ($-1 \leq \rho_{S_x, P_{ri}} \leq 1$ pour toute tête d'âge x).

La connaissance de l'évolution des revenus peut avoir un double emploi au moins. En effet on peut, comme c'est souvent le cas dans la pratique, indexer les flux de cotisations comme de pensions sur le salaire par un pourcentage. C'est le mode de calcul en "Level Percent" avec Aitken (1994).

Contrairement à l'évaluation dans une économie statique ou dynamique discrète et du fait de la continuité du temps d'une part et du caractère stochastique des taux, il n'est pas possible ici de développer des commutateurs (comme D_x , paragraphe : 3.1.1, page : 76) qui respectent l'A.O.A. et qui permettraient une évaluation plus pratique des pensions et cotisations. En effet le rapport de deux espérances mathématiques ne donne pas toujours une nouvelle espérance gardant la même contenance économique d'actualisation ou de capitalisation. Cela reste néanmoins possible dans un cas d'univers forward où les actualisations sous forme de rapports peuvent se compenser. Il est aussi possible d'avoir des commutateurs dans un cas particulier, après calcul où les zéro-coupon sont des exponentielles d'intégrales qui garderaient une bonne linéarité par rapport aux divisions.

Le principal outil d'actualisation sera alors la rente viagère continue pour rester dans un cas plus général.

1.2.2 Rente viagère continue

La rente viagère continue est la valeur en l'instant présent t d'un versement instantané et à vie d'une unité monétaire. Déjà Cairns et al. (2004) ont proposée une forme de rente viagère où l'actualisation se fait via le zéro-coupon nominal. Dans le cas où la valeur à évaluer s'apprécie sur l'évolution des prix, comme pour le cas des pensions qui doivent respecter le niveau de vie, alors l'actualisation se fera via le zéro-coupon indexé.

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_{x,t}^{(\tau)} &= \int_{t_x}^{+\infty} E_Q \left[p^{(\tau)} \left(\tau_x \geq s / \tau_x \geq t_x \right) \frac{Pri(s) G_N(t)}{Pri(t) G_N(s)} \middle/ \mathfrak{S}_{t_x} \right] ds \\
 &= \int_{t_x}^{+\infty} \left({}_{s-t_x} p^{(\tau)} \middle/ {}_{t_x} E_Q \left[\frac{Pri(s) G_N(t)}{Pri(t) G_N(s)} \middle/ \mathfrak{S}_t \right] \right) ds \\
 &= \int_{t_x}^{+\infty} ({}_{s-t_x} p^{(\tau)} \middle/ {}_{t_x} B_i(t, s)) ds
 \end{aligned}$$

(1.15)

et sous la probabilité historique :

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_{x,t}^{(\tau)} &= \int_{t_x}^{+\infty} \left({}_{s-t_x} p^{(\tau)} \middle/ {}_{t_x} E \left[\frac{Pri(s)}{Pri(t)} H_s^t \middle/ \mathfrak{S}_t \right] \right) ds \\
 &= \int_{t_x}^{+\infty} ({}_{s-t_x} p^{(\tau)} \middle/ {}_{t_x} B_i(t, s)) ds
 \end{aligned}$$

(1.16)

La différentielle s'écrit :

$$d\bar{a}_{x,t} = -1 + \int_t^{+\infty} s-t p_{x,t}^{(\tau)} B_i(t, s) \left(\frac{-\mu_{x,t}}{p_{x,t}} dt + \mu_{B_i} dt + \sigma_{B_i} dz \right) ds \quad (1.17)$$

Avec $\mu_{x,t}$ la densité de probabilité de survie et $p_{x,t}$ la probabilité de survie elle même. Cette rente viagère entrera dans la structure du passif à côté des expressions des flux de cotisations et de pensions.

1.2.3 Cotisations et Pensions individuelles

Nous présenterons d'abord la cotisation individuelle qui sera suivie de la pension individuelle.

Cotisation individuelle

Dans ce modèle, nous allons supposer les cotisations prélevées sur le salaire de l'individu. Il nous paraît en effet plus adéquat d'adosser les participations sur les moyens disponibles de l'individu.

Soit donc $\pi_x(t)$ la proportion instantanée du salaire cotisée de l'individu d'âge x . $\pi_x(t)$ peut être une fonction du temps et du salaire (en cotisations définies). Comme par exemple une fonction définie par intervalles ou tranches du salaire. En cotisations définies $\pi_x(t)$ sera alors connue et déterministe au moins en fonction du temps et du salaire à l'instant t . La cotisation à l'instant t pour un individu x est alors :

$$c_x(t) = \pi_x(t) S_{xN}(t) 1_{\{t < r_0, \tau_x^{(\tau)} \geq t\}} \quad (1.18)$$

Nous choisissons donc d'inclure dans l'expression de la cotisation la condition d'antériorité à la retraite et la condition de survie et de maintien en service, à l'instant t d'activité. Cette précaution se justifie du fait qu'il n'y ait pas de cotisation en cas de non activité.

Aussi bien pour l'évolution des revenus (équations : 1.14), nous suivons ainsi de près les développements de Cairns et al. (2004), qui ont également des salaires avec un risque non couvert par le marché et des cotisations définies sur les salaires telles que la condition $\pi_x = 0$, correspond à un cas où il n'y a pas de cotisations continues et où le gérant du fonds doit gérer un niveau initial de la richesse qui contiendrait des participations antérieures.

Cette formulation des cotisations est celle que nous considérerons par défaut lorsque les cotisations sont définies. Dans le cas général incluant les prestations définies, la cotisation reste une variable libre dont on précisera les caractéristiques selon le cas considéré.

Nous poserons une hypothèse similaire pour les pensions instantanées.

Pension individuelle

Comme pour les cotisations, les pensions peuvent être issues des salaires. Mais plutôt que du salaire instantané, ce sera, soit du dernier salaire soit d'une moyenne de salaires étalée sur une durée de travail. Aitken (1994) propose une étude des cas où les pensions sont définies comme pourcentage d'une moyenne précise des salaires annuels¹.

Nous pouvons aussi envisager la possibilité d'une pension complètement détachée du salaire et fixée (prestations définies) à l'avance pour un instant de service effectué ou en fonction des cotisations investies. Ce dernier cas se produit en cotisations définies avec une gestion collective du fonds. On y répartit le fonds sur chaque individu au *pro rata* de ses cotisations comme en "Individual Aggregate" et prestations définies où c'est plutôt au *pro rata* du passif (voir sous paragraphe :3.2.5, page : 91). Dans tous les cas, nous adoptons une forme de pension en fonction de

¹Par exemple une rente annuelle viagère de 1,875% de la moyenne des six derniers mois de salaire, par année de service fourni. Cette forme est très proche des modes de calculs en répartition de la fonction publique française sous les réformes de 2003 et nécessite une bonne modélisation des salaires pour les projections et revalorisations.

la durée de service effectuée. Aussi, nous allons introduire $b_x(t)$, comme la valeur instantanée à t , de la pension accordée à l'individu d'âge x , pour une durée instantanée de travail effectué. Pour Aitken (1994) c'est la valeur annuelle pour une année de service. Il inclura la condition d'antériorité à la retraite voire la condition de maintien en service. Dans le cas d'une somme fixe définie en t_0 et qui évolue en fonction des salaires, nous aurons :

$$b_x(t) = b_{x_0} \frac{S_x(t)}{S_x(t_0)} 1_{\{t < r_0, \tau_x^{(\tau)} \geq t\}} \quad (1.19)$$

Pour le cas où la pension est fonction du dernier salaire ou d'une moyenne des derniers salaires sur une période m avant la retraite, nous allons d'abord définir un outil d'actualisation sur les salaires. La moyenne des salaires s'écrit :

$$S_{x,m}(t_{r_0}) = \frac{1}{m} \int_{t_{r_0}-m}^{t_{r_0}} S_x(s) ds$$

avec

$$S_{x,0}(t_{r_0}) = S_x(t_{r_0}) \quad (1.20)$$

Et la valeur en t d'un versement en t_{r_0} de $\frac{S_{x,m}(t_{r_0})}{S_x(t_x)}$ en respectant l'A.O.A. :

$$B_{S_{x,m}}(t, t_{r_0}) = E \left[\frac{S_{x,m}(t_{r_0})}{S_x(t)} H_{t_{r_0}}^t / \mathfrak{F}_t \right]$$

ou

$$(1.21)$$

$$B_{S_{x,m}}(t, t_{r_0}) = EQ \left[\frac{S_{x,m}(t_{r_0})}{S_x(t)} \frac{G_N(t)}{G_N(t_{r_0})} / \mathfrak{F}_t \right]$$

Et la pension instantanée pour un instant de service vaudra :

$$\begin{aligned}
 b_x(t) &= b_{x_0} S_x(t) E \left[\frac{S_{x,m}(t_{r_0})}{S_x(t)} H_{t_{r_0}}^t / \mathfrak{S}_t \right]_{t_{r_0}-t_x} p_{t_x}^{(\tau)} 1_{\{t < r_0\}} \\
 &= b_{x_0} S_x(t) E_Q \left[\frac{S_{x,m}(t_{r_0})}{S_x(t)} \frac{G_N(t)}{G_N(t_{r_0})} / \mathfrak{S}_t \right]_{t_{r_0}-t_x} p_{t_x}^{(\tau)} 1_{\{t < r_0\}} \quad (1.22) \\
 &= b_{x_0} S_x(t) B_{S_{x,m}}(t, t_{r_0})_{t_{r_0}-t_x} p_{t_x}^{(\tau)} 1_{\{t < r_0\}}
 \end{aligned}$$

Notons $B_x(t)$ la valeur instantanée à t , de la pension due à l'individu x et à partir de t_{r_0} , pour tout le service effectué de t_0 , jusqu' à t . C'est la pension accumulée. Nous considérons que les pensions sont revalorisées sur les prix de la consommation.

$$B_x(t) = \int_{t_0}^t b_x(s) \frac{Pri(t)}{Pri(s)} 1_{\{s < r_0, \tau_x^{(\tau)} \geq s\}} ds \quad (1.23)$$

Dans le cas d'une pension initialement fixe à l'embauche mais évoluant avec les salaires et revalorisée ensuite sur les prix jusqu'à la retraite :

$$B_x(t) = b_{x_0} \frac{Pri(t)}{S_x(t_0)} \int_{t_0}^t \frac{S_x(s)}{Pri(s)} 1_{\{s < r_0, \tau_x^{(\tau)} \geq s\}} ds \quad (1.24)$$

La valeur en un instant t avant la retraite de la pension instantanée pour le service rendu depuis l'embauche ou la date de participation au fonds et dans le cas d'une promesse de pension en proportion b_{x_0} de la moyenne des m derniers salaires

revalorisée sur les prix :

$$B_x(t) = \int_{t_0}^t b_{x_0} S_x(s) B_{S_{x,m}}(s, t_{r_0}) \frac{Pri(t)}{Pri(s)} {}^{t_{r_0}-s_x} p^{(\tau)} {}_{s_x} 1_{\{s < r_0, \tau_x^{(\tau)} \geq s\}} ds \quad (1.25)$$

Malgré leurs différences fondamentales dans leurs expressions détaillées, ces deux pensions instantanées, admettent une expression commune pour leurs différentielles :

$$\frac{dB_x(t)}{B_x(t)} = \frac{dPri(t)}{Pri(t)} + \frac{b_x(t)}{B_x(t)} dt \quad (1.26)$$

La variation relative de la pension instantanée promise avant retraite est due d'une part, à la variation des prix et d'autre part, à la pension instantanée relative acquise pour l'instant de travail. Enfin, nous tirons pour tout instant t après la retraite, la pension instantanée évoluant avec l'inflation. Cette pension est à verser à l'individu d'âge x en t et encore vivant à cette date, pour son travail total effectué :

$$P_x(t) = B_x(t_{r_0}) \frac{Pri(t)}{Pri(t_{r_0})} 1_{\{t \geq t_{r_0}, \tau_x \geq t\}} \quad (1.27)$$

Et de façon naturelle nous avons :

$$\frac{dP_x(t)}{P_x(t)} = \frac{dPri(t)}{Pri(t)} \quad (1.28)$$

Cette expression est prévisible à partir de la variation de la pension avant retraite (équation :1.26). Le terme additif de l'équation :1.26 étant dû au travail instantané effectué tandis qu'après la date de retraite il n'y a plus d'activité. Nous rejoignons par là plusieurs auteurs stipulant une variation simple des pensions égalant la variation de l'inflation, notamment Boulier et al. (1993), Boulier et Dupré (2002) ou Reichlin (2000). Ces valeurs des pensions instantanées avant et après la date de la retraite entreront naturellement dans l'évaluation du passif du fonds de pension

par rapport à l'individu .

1.3 Dynamique du passif

La dynamique du passif peut aussi bien concerner le passif du fonds par rapport à l'individu ou le passif total du fonds par rapport à toute la population. Qu'il s'agisse d'un passif individuel ou collectif, la notion d'engagement du fonds de pension découle de principes d'équilibre en assurance qui partent de la faisabilité du contrat d'assurance à la souscription. Ces principes conduisent à la mise en place d'importants outils comme les flux d'équilibre en pension et cotisation ou la provision mathématique, qui peuvent servir au lien dans le passage d'un passif individuel à un passif collectif.

1.3.1 Passif individuel

Comme en statique, nous allons définir le passif nominal comme étant la pension totale réellement due à un instant t donné pour la durée du service réellement effectué. Cette définition est souvent celle compatible avec les législations en matière d'assurances retraites, notamment pour les normes anglo-saxonnes F.A.S.B. 87¹, (voir Leibowitz et al. 1992, U.S.A.) et européennes I.A.S./I.F.R.S.², (voir Devolder et Goffin 2006). Pour la tête d'âge x , le passif nominal en tout instant t n'aura pas la même expression selon que l'individu soit en retraite ou pas :

$$L_x(t) = \begin{cases} \frac{B_x(t)}{B_i(t, tr_o)} r_o - x p^{(\tau)}_{tx} \bar{a}_{tr_o} & \text{si } t < r_o \\ P_x(t) \bar{a}_{tx} & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.29)$$

¹Financial Accounting Standards Boards-Issued 87

²International Accounting Standards/International Financial Reporting Standards

Cette expression du passif individuel respecte la définition d'engagements réellement dus. Avant la retraite, le passif correspond au cumul des engagements jusqu'à l'instant t , mais dus à partir de la retraite et donc évalués à la retraite. Ces engagements sont la pension pour le travail effectivement fourni jusqu'à t .

Après la retraite, le passif est tout simplement la rente viagère continue de la pension instantanée. La limite en t_{r_0} de la pension instantanée donne :

$$\lim_{x \rightarrow r_0} P_x(t) = P_x(r_0) = B_x(r_0) \quad (1.30)$$

Nous déduisons, avec les limites à gauche et à droite du passif, la continuité du passif sur tout l'intervalle $[0, \tau_x[$:

$$\lim_{x \rightarrow r_0^+} L_x(t) = \lim_{x \rightarrow r_0^-} L_x(t) = B_x(r_0) \bar{a}_{r_0} = P_x(r_0) \bar{a}_{r_0} \quad (1.31)$$

La différentielle du passif, avant la retraite comme après, sera fortement influencée par l'évolution des prix de consommation puisque la pension instantanée, qui est la principale composante du passif, évolue à tout moment avec les prix (voir équations : 1.26 et 1.28, page : 176).

Avant t_{r_0} (une démonstration est donnée en annexe : B.2) :

$$\frac{dL_x(t)}{L_x(t)} = \left[\begin{array}{l} \mu_{\text{Pri}}(t) - \mu_{B_i}(t, t_{r_0}) + \frac{b_x(t)}{B_x(t)} - \frac{\mu_x^{(\tau)}(t)}{p^{(\tau)}(\tau_x \geq t)} \\ - \sigma_{B_i}(t, t_{r_0}) (\sigma_{\text{Pri}}(t) - \sigma_{B_i}(t, t_{r_0})) \end{array} \right] dt$$

$$+ (\sigma_{\text{Pri}}(t) - \sigma_{B_i}(t, t_{r_0})) dz + \eta_{\text{Pri}} d\omega_{\text{Pri}}$$

(1.32)

Avec $\mu_x^{(\tau)}(t)$ la densité de maintien en service.

Et après t_{r_o} :

$$\frac{dL_x(t)}{L_x(t)} = \frac{dPri(t)}{Pri(t)} + \frac{da_{t_x}}{a_{t_x}} \quad (1.33)$$

Sans surprise la différentielle du passif de l'individu est différente selon que nous nous situons avant ou après la date de retraite. En observant les variations du passif, nous constatons que le passif réel ne peut pas être assimilable à un actif du marché¹ du fait d'une part des flux exogènes issus de l'accumulation des pensions instantanées acquises par instant de travail et principalement du fait que la pension évolue avec les prix qui contiennent une part de risque η_{Pri} sur le brownien standard ω_{Pri} non couvert par le marché. Soient $\mu_{L_x}(t)$ le drift du passif individuel à tout instant t et σ_{L_x} son paramètre de diffusion sur dz , la différentielle du passif se généralise d'après les équations : 1.17;1.33 et 1.32.

$$\frac{dL_x}{L_x} = \mu_{L_x} dt + \sigma_{L_x} dz + \eta_{Pri} d\omega_{Pri} \quad (1.34)$$

En prestations définies, $L_x(t)$ est déterminé comme en cotisations définies avec minimum garanti où le passif peut être issu de la pension minimale garantie. En cotisations définies sans minimum garanti de pension, le passif pourra être évalué à tout instant à partir, par exemple, de la part de l'individu dans la richesse du fonds et de ses probabilités prospectives de mortalité. Aitken (1994) propose un partage, à l'équilibre, de la richesse disponible du fonds collectif en prestations définies pour chaque individu. Les individus déjà en retraite ont droit d'office à la valeur actuelle de leurs pensions totales tandis que ceux encore en activité se partagent la richesse résiduelle. À l'équilibre, la part de chaque individu doit correspondre à la valeur actuelle de son passif. C'est encore le passage d'une vision collective du fonds vers

¹Nous entendons par actif assimilable tout actif respectant la relation d'A.O.A. : $\mu - r = \sigma\lambda$, en somme un actif duplicable à partir des actifs disponibles sur le marché.

l'individu ou "Individual Aggregate"(voir sous paragraphe :3.2.5, page : 91). Le partage peut se faire au *pro rata* :

- du nombre de participants (parts égales),
- de la valeur actuelle des prestations futures ,
- du passif individuel,
- ou toute autre mesure raisonnable.

On pourra aussi imaginer un partage en proportionnalité avec la part totale cotisée par participant. Toutes ces partitions sus citées de la richesse du fonds peuvent aussi s'appliquer en contributions définies pour tout individu encore en activité ou non. On obtient ainsi une valeur d'équilibre assurancielle du passif. De cette valeur on déduit la pension future pour les inactifs.

Nous remarquons qu'à tout instant une forme du passif est déterminée ou déterminable et que dans tous les cas une évaluation est possible. Nous donnerons aussi d'autres pistes d'évaluation du passif en cotisations définies à partir de valeurs issues de l'équilibre actuariel. Équilibre qui prend ses principes dans la condition de faisabilité du contrat d'assurance-retraite.

1.3.2 Faisabilité

Selon le principe des assurances, la souscription d'un contrat d'assurance doit être subordonnée à une condition dite de faisabilité. La condition préalable à l'acceptation du contrat d'assurance autant par le souscripteur que par le souscrivant doit garantir qu'il n'y ait pas de position dominante, *a priori*, de l'un ou de l'autre, à la date initiale. La condition préalable vérifiera donc qu'au temps initial individuel t_0 , la valeur actuelle probable des primes futures égale la valeur actuelle probable des engagements futurs. Menoncin et al. (2003) la matérialisent par l'annulation

de l'espérance sous la probabilité risque réel neutre¹ de l'intégrale du processus actualisé des flux d'accumulation et de distribution sur toute la durée de vie de l'individu. Nous la prendrons comme étant l'égalité des valeurs initiales probables des flux actualisés de cotisations et de pensions futures.

La condition se note pour toute tête d'âge x :

$$E \left[\int_{t_o}^{t_{r_0}} c_x(s) s - t_o p^{(\tau)}_{t_o} H_{t_o}^s ds \middle/ \mathfrak{S}_{t_o} \right] = \quad (1.35)$$

$$E \left[\int_{t_o}^{t_{r_0}} b_x(s) s - t_o p_{t_o} \frac{t_{r_0} - s p^{(\tau)}}{B_i(s, t_{r_0})} ds \bar{a}_{t_{r_0}} H_{t_o}^{t_{r_0}} \middle/ \mathfrak{S}_{t_o} \right]$$

Avec

$$E \left[\int_{t_o}^{t_{r_0}} b_x(s) s - t_o p_{t_o} \frac{t_{r_0} - s p^{(\tau)}}{B_i(s, t_{r_0})} ds \bar{a}_{t_{r_0}} H_{t_o}^{t_{r_0}} \middle/ \mathfrak{S}_{t_o} \right] = \quad (1.36)$$

$$E \left[\int_{t_o}^{t_{r_0}} b_{x_o} \frac{S_x(s)}{S_x(t_o)} s - t_o p^{(\tau)}_{t_o} \frac{t_{r_0} - s p^{(\tau)}}{B_i(s, t_{r_0})} ds \bar{a}_{t_{r_0}} H_{t_o}^{t_{r_0}} \middle/ \mathfrak{S}_{t_o} \right]$$

Si la pension est initialement fixée et évoluant ensuite avec les salaires
ou

$$E \left[\int_{t_o}^{t_{r_0}} b_x(s) s - t_o p^{(\tau)}_{t_o} \frac{t_{r_0} - s p^{(\tau)}}{B_i(s, t_{r_0})} ds \bar{a}_{t_{r_0}} H_{t_o}^{t_{r_0}} \middle/ \mathfrak{S}_{t_o} \right] = \quad (1.37)$$

$$E \left[\int_{t_o}^{t_{r_0}} b_{x_o} S_x(s) s - t_o p^{(\tau)}_{t_o} B_{S_x, m}(s, t_{r_0}) \frac{t_{r_0} - s p^{(\tau)}}{B_i(s, t_{r_0})} ds \bar{a}_{t_{r_0}} H_{t_o}^{t_{r_0}} \middle/ \mathfrak{S}_{t_o} \right]$$

Si la pension est une proportion de la moyenne des derniers salaires
sur une période de portée m .

¹C'est la probabilité associée à un univers où tous les actifs réels ont un même et unique rendement égal au rendement du cash réel.

À la différence de Menoncin et al. (2003), nous intégrons du temps initial individuel à la date de retraite et non sur toute la durée de vie de l'individu. Cette restriction a été possible grâce à l'introduction des probabilités de survie et de maintien, des rentes viagères et surtout de la part de pension instantanée due par instant de travail $b_x(t)$, qui évalue la pension avant même la retraite. Ainsi la valeur actualisée des cotisations jusqu'à la retraite, avec à chaque instant la probabilité de survie à cet instant, doit égaler la valeur actualisée de la pension totale gagnée pour chaque instant de travail, avec aussi la probabilité de survie ou de maintien en service à cet instant. Les pensions étant bien sûr dues à partir de la retraite et leur valeurs évoluant de l'instant de promesse à l'instant d'échéance (la retraite) avec les salaires ou les prix selon les clauses.

Nous pouvons généraliser des relations temporelles respectant le principe de cette condition initiale en tout instant et à partir desquelles nous pourrions toujours revenir à la condition initiale en prenant $t = t_o$. C'est le principe de l'équilibre actuariel.

1.3.3 Équilibre actuariel du fonds de pension

De l'esprit de la condition initiale découleront des relations temporelles assurant la cohésion de l'activité d'assurance. En généralisant simplement la condition de faisabilité en tout instant avant la retraite, nous déduisons une condition d'équilibre assurantiel. Le respect de cet équilibre garanti la *justesse* du contrat d'assurance.

Avant la retraite, nous remettons en cause, à chaque instant, le fondement du contrat d'assurance avant de poursuivre. Ce serait alors une mesure de précaution (en cas de respect de la condition) ou un indicateur pour le gérant comme pour l'assuré sur la santé ou l'équilibre des engagements du portefeuille. En effet, si les cotisations futures évaluées à l'instant présent dépassent de beaucoup¹ les pensions

¹On peut se donner un seuil par exemple.

correspondantes, l'assuré sera lésé du trop payé au gérant, qui se devra de réguler cet écart. Par contre, si le scénario inverse se produit, l'assuré pourra s'en réjouir mais le gérant devra faire face à un produit sous tarifé.

Comme en dynamique discrète¹, l'équilibre peut être considéré sous plusieurs angles, selon que nous considérons un équilibre du type "Unit Credit" ou "Entry Age Normal" ou même en "Aggregate" en "Frozen Initial" ou en "Supplemental Cost".

Ces méthodes ayant les mêmes fondements qu'en dynamique discrète, nous nous restreignons à la méthode du "Unit Credit" seule.

Nous imposons donc que la valeur actuelle en tout instant des cotisations futures égale celle des pensions futures liées à la période de cotisations futures.

La condition s'obtient par l'égalité suivante des espérances, conditionnelles à la filtration en t :

$$E \left[\int_t^{tr_0} c_x(s) {}_{s-t}p^{(\tau)} H_t^s ds \middle/ \mathfrak{F}_t \right] =$$

$$E \left[\int_t^{tr_0} b_x(s) {}_{s-t}p^{(\tau)} \frac{{}_{tr_0-s}p^{(\tau)}}{B_i(s, tr_0)} ds \bar{a}_{tr_0} H_t^{tr_0} \middle/ \mathfrak{F}_t \right]$$
(1.38)

On peut exprimer le membre de droite comme en faisabilité (équations : 1.36 ; 1.37), selon que la pension soit une valeur initialement fixe et évoluant au rythme des prix ou des salaires par la suite ou selon que la même pension instantanée soit cette fois en fonction de la moyenne des salaires sur la dernière période d'activité de m unités temporelles. Dans ces relations, nous remarquons que les cotisations en tout instant s, $s \geq t$, sont actualisées en t à partir de s tandis que la pension instantanée est d'abord projetée à la retraite avant d'être adéquatement réactualisée à t. Il en est ainsi car les cotisations sont effectives à l'instant s alors que les pensions n'existent

¹Partie précédente de la thèse.

réellement qu'à partir de la retraite.

Cotisations et pensions d'équilibre

Selon que nous soyons respectivement en cotisations définies ou en prestations définies, nous pourrions sous certaines conditions tirer à partir des relations d'équilibres (respectivement) une pension ou une cotisation instantanées d'équilibre.

Proposition : 1.3 Valeurs d'équilibres

Lorsque en prestations définies (respectivement en cotisations définies), la valeur actuelle probable des prestations (respectivement des cotisations) futures à un instant quelconque avant la retraite est définie, il existe, alors et au moins avec un taux d'intérêt gaussien, une valeur de cotisation (respectivement de pension) instantanée respectant l'équilibre actuariel en "Unit Credit".

Ces valeurs d'équilibre ont les expressions suivantes :

En prestations définies

$$\bar{c}_x(t) = b_x(t) {}_{(t_{r_0}-t)}\bar{a}^{(\tau)}_{t_{r_0}} \quad (1.39)$$

Avec

$${}_{(t_{r_0}-t)}\bar{a}_{t_{r_0}} = E \left[\frac{{}_{t_{r_0}-t}p^{(\tau)}_t}{B_i(t, t_{r_0})} \bar{a}_{t_{r_0}} H_{t_{r_0}}^t \middle/ \mathfrak{S}_t \right]$$

la rente viagère continue et différée de t à t_{r_0} .

Et en cotisations définies :

$$\bar{b}_x(t) = \frac{1}{{}_{(t_{r_0}-t)}\bar{a}^{(\tau)}_{t_{r_0}}} c_x(t) \quad (1.40)$$

Avec : $\mu_x(t)$, la densité de survie¹ de l'individu d'âge x au temps t .

Preuve de la proposition : 1.3 Voir annexe : D, page : 325.

¹Opposé de la densité de mortalité ou force de mortalité appelée encore "mortality force"

Remarque : 1.1 *La condition du taux d'intérêt gaussien, dans la preuve, peut être remplacée par un taux constant ou même simplement par une condition de marché complet permettant une écriture du drift par un produit des volatilités et primes de risques constantes et à espérance facilement évaluable.*

Les valeurs d'équilibre obtenues, nous montrent que la cotisation (d'équilibre si PD) instantanée est égale à la valeur forward à la retraite de la pension viagère (d'équilibre si CD) instantanée pour un instant de travail. C'est exactement la même valeur qu'en dynamique discrète par la méthode du "Unit Credit" (équation : 3.13, paragraphe : 3.2.1, page : 83).

De ces valeurs, on pourrait déduire un passif d'équilibre $\bar{L}_x(t)$ en CD en remplaçant simplement dans l'expression du passif, b_x par \bar{b}_x . À partir de la retraite, la pension est déterminée et le passif ne dépendrait plus alors de la relation d'équilibre. Ces flux sont dits d'équilibre parce qu'ils respectent la relation d'équilibre, de manière prospective ici. Nous présupposons qu'avant t , toutes les cotisations ou pensions antérieures ont été *justes* et respectueuses de la relation d'équilibre. Dans la pratique, une des préoccupations principales de la gestion du fonds, consiste à réguler des déficits ou excédents des cotisations antérieures ou à venir, sur les pensions futures qui leur correspondent en terme d'équilibre ou neutralité actuarielle. Souvent, le gain (excédent) ou perte (déficit) se répercute sur les cotisations ou pensions futures par annuités fixes et sur un délai donné de périodes en ajustant à chaque période avec les gains ou pertes de la période précédente. C'est la méthode dite "Supplemental Cost" ou aussi, lorsque le déficit est initial, "Frozen Initial" dont nous avons détaillé les principes en modélisation dynamique discrète (voir paragraphe :3.2).

Ces méthodes actuarielles principalement développées en prestations définies et en dynamique discrète (Owadally 1998, Devolder et Goffin 2006, Aitken 1994), trouvent ici, à travers la proposition (1.3) précédente, leur équivalent aussi bien en

temps continu qu'en cotisations définies en "Unit Credit".

La généralisation à toutes les méthodes actuarielles similaires telles que l'"Entry Age", ou le "Supplemental Cost", voire le "Frozen Initial Liability" s'obtient sur le même principe et ne figurera pas dans ce document. En partant toujours de la relation d'équilibre (équations : 1.38), nous allons nous intéresser aux éventuels déficits futurs et introduire la provision mathématique prospective.

Provision mathématique prospective

Dans le déroulement des événements au delà de l'instant initial, un décalage entre la valeur actuelle des contributions futures et celle des versements futurs est naturellement envisageable. Ce décalage probable constitue la provision mathématique prospective. C'est la réserve nécessaire maintenant en plus des cotisations conventionnelles, pour faire face en moyenne aux règlements futurs. La provision mathématique prospective individuelle à t est donc la valeur en t des pensions futures non encore approvisionnées, diminuées des cotisations à venir.

$$W_x(t) = E \left[\int_t^{t_{r_0}} \left(b_x(s) s - t p^{(\tau)}_t \frac{t_{r_0} - s p^{(\tau)}_s}{B_i(s, t_{r_0})} \bar{a}_{t_{r_0}} H_t^{t_{r_0}} - c_x(s) s - t p^{(\tau)}_t H_t^s \right) ds \middle/ \mathfrak{F}_t \right] \quad (1.41)$$

C'est un indicateur en complément du passif qui donne au gérant une idée de ses engagements. Avec la notion de provisions, on prend toute la mesure de l'importance de la relation d'équilibre 1.38. En effet le déséquilibre conduit à l'existence d'une provision mathématique que le gérant s'efforcera de réduire puisque c'est une réserve qui traduit des engagements non couverts de manière individuelle.

Une autre approche en dynamique continue est notamment celle menée par Menoncin et al. (2003) qui réajuste la richesse du fonds à tout moment par le déficit ou excédent actuel probable des cotisations passées sur les éventuelles pensions

passées également. Cet écart constitue la réserve mathématique retrospective et sert de manière analogue à notre démarche à la mise en place de la faisabilité et de l'équilibre actuariel. Par ailleurs, cette démarche aboutissant à des valeurs d'équilibre entre pensions et cotisations instantanées à partir d'une expansion de l'équilibre sur toute la vie de l'individu sans tenir compte de l'instant présent, elle est très proche de la méthode du "Entry Age " utilisant le même principe en dynamique discrète.

Notre approche, si elle est tournée vers les engagements futures à travers la provision mathématique et les valeurs actuarielles, n'en délaisse pas moins les engagements liés aux cotisations passées. En effet, ces engagements constituent comme nous l'avons vu (paragraphe : 1.3.1 page : 177), le passif du fonds par rapport à l'individu considéré. L'usage de ce passif déterminera le degré de prise en compte des engagements passés comme pour la réserve mathématique retrospective, dans la gestion du fonds.

Mais lorsque l'on se rapporte à la population entière du fonds, la provision mathématique, comme les autres éléments du fonds, change de principe du fait de la mutualité : c'est l'agrégation du fonds.

1.3.4 Agrégation du fonds de pension : le passif total

D'un point de vue pratique, il est préférable pour le gérant du fonds de pension de faire ses calculs pour le fonds tout entier plutôt que par individu, et ce, qu'il soit en cotisations définies ou en prestations définies. D'un point de vue mathématique aussi, on pourra toujours déduire les éléments individuels du collectif par considération d'un seul individu composant la population entière par exemple. Pour rester donc dans un esprit général, nous évoluerons désormais en gestion collective et en

groupe ouvert¹. Nous reviendrons à une analyse individuelle lorsque cela s'imposera. Le salaire total instantané pour le fonds sera la somme totale des salaires instantanés à tout instant t . Idem pour les cotisations, les pensions ou le passif .

$$\begin{aligned}
 S(t) &= \sum_x S_x(t) & P(t) &= \sum_x P_x(t) \\
 b(t) &= \sum_x b_x(t) & L(t) &= \sum_x L_x(t) \\
 B(t) &= \sum_x B_x(t) & C(t) &= \sum_x c_x(t)
 \end{aligned} \tag{1.42}$$

Une attention particulière doit être portée au fait que les valeurs collectives n'entretiennent pas entre elles les mêmes relations correspondantes qu'en valeurs individuelles. Ceci est dû au caractère ouvert de la modélisation de la population du fonds. En effet, les différentes probabilités de survies, les dates d'entrées ou de sorties du fonds ou toute autre caractéristique de la population intervenant dans les évaluations individuelles ne sont pas les mêmes pour tous et nécessitent une attention particulière et personnelle. Ainsi, par exemple, la pension totale instantanée ne s'obtient pas toujours à partir du salaire total instantané, puisque nous ne pouvons évidemment pas appliquer une probabilité de survie ou une rente viagère globales dans une relation non additive. Seule la pension totale instantanée pour le travail total effectué dans le service pour toute la population de $t = 0$ à l'instant présent t ($B(t)$), est fonction de la pension totale instantanée produite à l'instant t , pour un instant de travail ($b(t)$), comme en analyse individuelle. Mais uniquement dans le cas d'une pension instantanée revalorisée sur les prix de la consommation qui sont des valeurs non personnelles.

$$B(t) = \int_0^t b(s) \frac{Pri(t)}{Pri(s)} ds \tag{1.43}$$

¹Possibilités d'entrées et de sorties du fonds sans restrictions particulières aussi bien sur le nombre que sur les dates.

La méthode collective est déjà bien défendue en statique ou en dynamique discrète et en prestations définies. Mais en dynamique continue très peu d'auteurs l'abordent, à moins de considérer des groupes fortement identiques démographiquement. Même avec de telles simplifications, la collective n'a presque jamais encore été évoquée en cotisations définies. Grasselli (2006), entame le problème avec une modélisation stochastique des entrées du fonds, mais fait une abstraction absolue sur les probabilités de maintien ou de survie. Dans les expressions agrégées, les probabilités ou conditions de survie disparaissent. Elles sont, en fait, contenues au niveau de chaque individu mais n'apparaissent pas dans l'expression collective. La différence essentielle entre une considération collective et une considération individuelle se situe au niveau des expressions d'équilibre. Lorsque le fonds compte plusieurs individus ayant des âges différents d'entrée et de sortie du fonds (retraite, mort, incapacité), le gérant du fonds reçoit à tout instant des cotisations issues de ceux qui sont encore actifs et paie des pensions à ceux qui sont inactifs. Il fonctionne comme dans un système de répartition tout en tenant bien compte des spécificités individuelles car le passif ou la pension à payer par individu sont issus d'une analyse individuelle préalable. Pour pousser plus loin l'analogie avec la répartition, nous dirons que cela fonctionne un peu comme la répartition suédoise avec la neutralité actuarielle sauf qu'ici le compte individuel est bien réel et pas seulement notionnel.

L'équilibre assurantiel reste celui de l'individu vu de la population entière et les éléments issus de cet équilibre restent donc :

$$\bar{c}(t) = \sum_x \bar{c}_x(t) \quad \bar{b}(t) = \sum_x \bar{b}_x(t) \quad W(t) = \sum_x W_x(t) \quad (1.44)$$

D'après l'équation : 1.34, nous avons la différentielle du passif total de la forme

suivante, avec μ_L et σ_L , telle que :

$$\frac{dL}{L} = \mu_L dt + \sigma_L dz + \eta_{\text{Pri}} d\omega_{\text{Pri}} \quad (1.45)$$

Nous allons supposer exogène la variable $N(t)$ donnant à l'instant t , le nombre de personnes dans le fonds et comprenant pour chaque individu l'âge d'entrée ou âge de prise en compte dans le fonds, l'âge d'embauche, l'âge actuel et la date prévue de retraite. Nous allons, de plus, supposer cette variable mesurable par la filtration \mathfrak{F} du brownien z . La donnée de cette dernière variable améliore considérablement les anticipations sur les évolutions probables du passif total, et de là, son étude dans un cadre collectif élaboré.

Dans ce document, nous restons dans une vue collective tirée de l'individuelle et nous ferons donc peu usage de la variable du nombre de participants plus propice à une étude directement portée sur le collectif (voir Chang et Cheng 2002).

La présence de ce passif influencera notablement la dynamique du portefeuille de fonds de pension comme nous le verrons ci dessous.

2

Stratégie du portefeuille de fonds de pension et optimalité

Selon la stratégie de gestion retenue, le portefeuille de fonds de pension peut tenir compte du passif à différents niveaux. En effet, le passif entre dans la détermination du surplus et influence ainsi l'actif selon la place accordée au surplus par exemple. Le passif pourrait aussi servir de numéraire pour l'actif du fonds afin de mieux appréhender les valeurs par rapport aux engagements ou objectifs. Mais plusieurs autres éléments entrent dans la composition et l'évolution du portefeuille de fonds de pension.

2.1 Dynamique du portefeuille du fonds de pension

A tout instant t , l'actif du fonds est représenté par le niveau $X(t)$ de la valeur totale du portefeuille. Les composantes essentielles de cette richesse sont les investissements en actifs du marché. Les variables de commande des investissements définissent les proportions de la richesse disponible, à investir dans chaque

type d'actif et pour chaque actif de sorte que la somme totale de la richesse soit entièrement réinvestie à tout instant.

2.1.1 Variables de commande

Nous dénombrons les commandes de pensions, celles de cotisations ou les commandes d'investissement.

Les commandes de pensions et de cotisations sont souvent exclusives. Lorsque les cotisations sont définies, leurs commandes disparaissent au profit des commandes de prestations et vice versa. Par contre, certaines formes de fonds de pension où ni les cotisations, ni les prestations ne sont formellement définies préalablement, admettent simultanément les deux types de commandes¹.

Nous aurons donc trois types de variables de commande d'investissement relatives aux types d'actifs et regroupés en un seul vecteur colonne $u(n+3, 1)$:

- $u_a(t)$, vecteur colonne $(n, 1)$, pour les investissements en actifs risqués ;
- $u_{b_N}(t) = u_{n+1}(t)$ scalaire pour l'investissement sur le zéro-coupon nominal ;
- $u_{b_i}(t) = u_{n+2}(t)$ scalaire pour l'investissement sur le zéro-coupon indexé sur l'inflation ;
- $u_G(t) = u_0(t) = u_{n+3}(t) = (1 - u_{b_N}(t) - u_{b_i}(t) - 1_n^T u_a(t))$ scalaire pour l'investissement sur l'actif sans risque $G(t)$.

¹C'est le cas par exemple des fonds individuels PERP français.

Nous allons également considérer les décompositions suivantes de u :

$$u = \begin{bmatrix} u_{a_1} \\ \vdots \\ u_{a_n} \\ u_{b_N} \\ u_{b_i} \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \\ u_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{ab} \\ u_0 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

$$u_a = \begin{bmatrix} u_{a_1} \\ \vdots \\ u_{a_i} \\ \vdots \\ u_{a_n} \end{bmatrix}, \quad u_b = \begin{bmatrix} u_{b_N} \\ u_{b_i} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad u_{ab} = \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix}$$

Outre la contrainte d'égalité sur la somme $\sum_{(i \leq n+2)} u_i = 1$ (évidente par la définition de u_0^1), nous élargissons dans un premier temps, à des contraintes d'inégalité sur chaque composante des variables d'investissement. Il est, par exemple, naturel de limiter les investissements sur un actif risqué au niveau de la valeur du portefeuille. Ainsi, le gérant du fonds n'aura pas à emprunter plus de la valeur de son portefeuille pour investir sur un seul des actifs risqués du marché. Cette contrainte se matérialisera par les bornes 1 et -1 pour chaque commande d'investissement en actif risqué. En plus de cette contrainte, il pourrait être exigé au gérant de ne pas dépasser certaines valeurs planchers d'investissements de parts de son portefeuille par type d'actifs. Nous ferons l'hypothèse que le gérant peut vendre et acheter instantanément n'importe quel actif du marché selon la disponibilité de sa trésorerie. Les produits de la vente d'actif sont instantanément réinvestis en d'autre actifs.

¹ $u_0 = (1 - \mathbf{1}_{n+2}^T u_{ab}(t))$

Les ventes figurent en valeurs négatives dans la richesse tandis que les achats sont les valeurs positives du portefeuille. En terme de ventes, une limite de $|U_m|$ pour les actions et $|b_m|$ pour les actifs obligataires peut être exigée. Avec U_m , $b_m \leq 0$. Similairement, pour les achats les limites U_M pour les actions et b_M pour les actifs obligataires peuvent être exigées avec $U_M, b_M \geq 0$. L'ensemble de tous ces exemples de contraintes est représenté dans le tableau suivant, en incorporant en plus des contraintes sur les flux de consommation (pensions et cotisations).

	Cotisations définies	Prestations définies
Commandes	$u(t), P(t)$	$u(t), \pi(t)$ ou $c(t)$
contraintes sur u_a	$-1 \leq U_m \leq u_i(t) \leq U_M \leq 1_{(1 \leq i \leq n)}$	$-1 \leq U_m \leq u_i(t) \leq U_M \leq 1_{(1 \leq i \leq n)}$
contraintes sur u_b	$-1 \leq b_m \leq u_{b_N}(t), u_{b_i}(t) \leq b_M \leq 1$	$-1 \leq b_{mb_N}(t), u_{b_i}(t) \leq b_M \leq 1$
Sur $P(t)$ ou $c(t)$	$P_G(t) \leq P(t)$	$0 \leq c(t) \leq c_M$

TAB. 2.1: tableau des contraintes générales sur les variables de commandes

Avec pour la dernière ligne :

- $P_G(t)$ est le minimum garanti de pension en C.D.M.G. (cotisations définies avec minimum de pension garanti). Il peut être variable et prendre toutes les formes possibles de la pension en prestations définies. Lorsque le minimum n'est pas spécifié, on convient de prendre sa valeur constante et nulle.
- $c_M(t)$ est la valeur plafond de cotisations. On pourrait par exemple l'imaginer comme un haut pourcentage défini des salaires $c_M(t) = \pi_M(t) \cdot S(t)$.

Remarque : 2.1 U_m, b_m

Il n'est pas imposé de limites inférieures positives aux commandes d'investissement. U_m et b_m sont nécessairement négatifs ou nuls. Le gérant du fonds n'a pas d'obligation d'achat pour chaque actif, mais juste une obligation de limite d'achat en cas d'achat.

Dans la littérature, il a toujours été question de contraintes d'égalité. Pourtant, il serait bien nécessaire de limiter les parts d'investissement afin de ne pas avoir des solutions qui alloueraient des parts "exagérées" de la richesse même en respectant la contrainte d'égalité.

Par ailleurs, il se trouve que dans la plupart des législations en matière d'investissement pour les caisses de retraites, les parts d'acquisition du portefeuille sur certaines firmes sont limitées¹, ou tout simplement et de manière plus courante, le gérant du fonds a une limite de découvert. Dans le même souci de réalisme de la dynamique du fonds de pension nous devons inclure les frais liés à la gestion du fonds. Mais plutôt que de les formuler explicitement, nous pouvons les considérer directement ponctionnés sur les cotisations ou les présenter en retombées du partage du surplus de la richesse sur les engagements.

2.1.2 **Partage du surplus**

Plutôt que de partage du surplus, Reichlin (2000) a parlé d'un poids psychologique de l'importance du surplus pour le gérant. Menoncin et al. (2003) introduisent un intéressement du fonds aux membres. En effet, une fois que la richesse a couvert les engagements du fonds, il serait intéressant pour le gérant du fonds de contenter ses membres, d'autant plus que les périodes de cotisations peuvent être très longues(jusqu'à 40 ans ou plus). On peut même imaginer un gérant du fonds qui proposerait de réinvestir les fonds d'intéressement afin de racheter des droits supplémentaires de pension. En alliant les deux points de vue, nous allouons une proportion déterminée du surplus du fonds aux frais de gestion du fonds dont la rémunération du gérant et un éventuel intéressement redistribué aux membres. Les frais de gestions sont très assimilables à la rémunération du gérant et même s'il ne s'agit plus directement d'un coefficient psychologique, les effets sur le gérant

¹Lois ERISA aux États-Unis.

sont les mêmes. Menoncin et al. (2003), montrent qu'un tel coefficient constant ne modifie pas fondamentalement la dynamique du fonds ou les solutions. Les auteurs rapportent que la forme de partage susceptible d'apporter une modification plus significative est plutôt le partage de la *variation* du surplus. Nous allons retenir ce dernier concept car il s'insère mieux dans une logique de partage instantané. *A priori*, on pourrait envisager une proportion variable en fonction du temps et de la valeur même du surplus. Mais dans tous les modèles qui en font cas et sus cités, il s'agit d'une proportion constante. Nous noterons $\phi((X - L), t)$ le coefficient de partage, tel que $d(\phi((X - L), t)[X(t) - L(t)])$ soit cédé d'une part au gérant pour les frais et d'autre part pour une éventuelle redistribution aux membres avec la condition a priori que $0 \leq \phi((X - L), t) \leq 1$ ¹.

Reichlin (2000) fait intervenir un coefficient de partage dans le critère de maximisation du gérant puisqu'il s'agit d'un coefficient psychologique tandis que Menoncin et al. (2003) le font apparaître dans l'expression de l'évolution de la richesse. Ici aussi, nous essaierons de garder les deux concepts, à savoir un partage avec une dimension psychologique et une présence dans l'évolution de la richesse. Avec ce dernier paramètre nous disposons désormais de toutes les informations nécessaires à l'élaboration de cette évolution.

2.1.3 Évolution du portefeuille

À tout instant t , le gestionnaire du fonds :

- investit $u_i(t)X(t)$ dans l'actif risqué i ($1 \leq i \leq n$);
- investit $u_b(t)X(t)$ dans les zéro-coupons;
- investit $u_0(t)X(t)$ dans l'actif sans risque;
- reçoit la contribution ou cotisation $c(t)$;
- paie en pension la somme $P(t)$;

¹Cette condition pourra évoluer dans la suite.

– et s’octroie la valeur $d(\phi((X - L), t)[X(t) - L(t)])$ prise sur le fonds en rémunération ou prime ;

On supposera par la suite que ϕ est constant. On en déduit donc une expression finale de la variation du portefeuille pour une durée de temps infinitésimale dt entre les instants t et $t+dt$ ¹ :

$$dX_N = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\phi} X_N u_{ab}^T \sigma_{abN} \lambda \\ + X_N r \end{bmatrix} dt + \frac{1}{1+\phi} \begin{bmatrix} (c(t) - P(t)) \\ + \phi L_N (\mu_{LN} - r) \\ - (X_N - L_N) \phi r \end{bmatrix} dt \quad (2.2)$$

$$+ \frac{1}{1+\phi} \{ X_N u_{ab}^T \sigma_{abN} + \phi L_N \sigma_{LN} \} dz + \frac{\phi}{1+\phi} L_N \eta_{Pri} d\omega_{Pri}$$

Le drift du portefeuille que nous noterons désormais μ_{X_N} se compose donc de deux parties distinctes comprenant les investissements en actifs risqués et non risqué et la consommation. Nous notons que l’investissement dans le cash est indépendant du partage du surplus. Mais il apparaît dans les consommations un surplus évoluant au rythme du cash et en proportion du partage ϕ . La consommation du portefeuille compte en somme les flux de cotisation et pension et les flux dus au partage du surplus. De ces flux, une partie est profondément liée au passif de par la présence de la prime de risque nominale du passif sur la rentabilité du cash. Notons σ_{X_N} , le paramètre de la diffusion de la richesse nominale. Comme les variations du cash se notent :

$$rdt = \frac{dG_N}{G_N}$$

¹démonstrations en annexe

Nous pouvons écrire afin d'isoler les investissements directs en cash :

$$dX_N = \left[\frac{1}{1+\phi} X_N u_{ab}^T \sigma_{abN} \lambda \right] dt + \frac{1}{1+\phi} \begin{bmatrix} (c(t) - P(t)) \\ +\phi L_N \sigma_{LN} \lambda \\ - (X_N - L_N) \phi r \end{bmatrix} dt \quad (2.3)$$

$$+ X_N \frac{dG_N}{G_N} + \frac{1}{1+\phi} \{ X_N u_{ab}^T \sigma_{abN} + \phi L_N \sigma_{LN} \} dz + \frac{\phi}{1+\phi} L_N \eta_{\text{Pri}} d\omega_{\text{Pri}}$$

Cette écriture nous permettra un meilleur rapprochement avec la richesse réelle du portefeuille faisant intervenir l'inflation.

2.2 Stratégies du portefeuille

L'évolution de la richesse dévoile la stratégie du portefeuille par rapport à sa consommation et au marché. Cette stratégie peut s'évaluer dans un environnement réel ou sous tout autre numéraire adéquat.

2.2.1 Richesse réelle

Comme nous sommes dans le long terme en matière de retraites, pour mieux apprécier les rendements et l'évolution réelle des actifs, nous allons prendre les

différents processus allégés de l'inflation. La richesse réelle sera :

$$X' = \frac{X}{P_{ri}} \quad \text{et par différentiation d'Itô}$$

$$\begin{aligned} dX' &= d\left(\frac{X_N}{P_{ri}}\right) \\ &= \frac{1}{P_{ri}} dX_N - \frac{X_N}{P_{ri}} \frac{dP_{ri}}{P_{ri}} - \frac{1}{P_{ri}} \sigma_{X_N} \sigma_{P_{ri}} dt + \frac{X_N}{P_{ri}} \sigma_{P_{ri}} \sigma_{P_{ri}}^T dt + \frac{X_N}{P_{ri}} \eta_{P_{ri}}^2 dt - \frac{\phi}{1-\phi} \frac{L_N}{P_{ri}} \eta_{P_{ri}}^2 dt \end{aligned} \quad (2.4)$$

Posons désormais en prenant les valeurs réelles comme valeurs par défaut :

$$\mu_a \text{ (réel)} = \mu_a = \mu_a \text{ (nominal)} - \mu_{P_{ri}} 1_n + \sigma_{P_{ri}} \sigma_{P_{ri}}^T 1_n + \eta_{P_{ri}}^2 1_n$$

$$\mu_B \text{ (réel)} = \mu_B = \mu_B \text{ (nominal)} - \mu_{P_{ri}} + \sigma_{P_{ri}} \sigma_{P_{ri}}^T + \eta_{P_{ri}}^2$$

$$\mu_G \text{ (réel)} = \mu_G = r - \mu_{P_{ri}} + \sigma_{P_{ri}} \sigma_{P_{ri}}^T + \eta_{P_{ri}}^2$$

$$\mu_L \text{ (réel)} = \mu_L = \mu_L \text{ (nominal)} - \mu_{P_{ri}} + \sigma_{P_{ri}} \sigma_{P_{ri}}^T + \eta_{P_{ri}}^2$$

$X' = X$ et

$$\sigma_a \text{ (réel)} = \sigma_a = \sigma_a \text{ (nominal)} - 1_n (\sigma_{Pri}) \quad \text{sur } dz \text{ et } \sigma_a = -\eta_{Pri} \quad \text{sur } d\omega_{Pri}$$

$$\sigma_B \text{ (réel)} = \sigma_B = \sigma_B \text{ (nominal)} - \sigma_{Pri} \quad \text{sur } dz \text{ et } \sigma_B = -\eta_{Pri} \quad \text{sur } d\omega_{Pri}$$

$$\sigma_G \text{ (réel)} = \sigma_G = -\sigma_{Pri} \quad \text{sur } dz \text{ et } \sigma_G = -\eta_{Pri} \quad \text{sur } d\omega_{Pri}$$

$$\sigma_L \text{ (réel)} = \sigma_L = \sigma_L \text{ (nominal)} - \sigma_{Pri} \quad \text{sur } dz \text{ et } \sigma_L = -\eta_{Pri} \quad \text{sur } d\omega_{Pri}$$

01. et enfin

$$c' = \frac{c \text{ (nominal)}}{Pri} = c \text{ et } P' = \frac{P \text{ (nominal)}}{Pri} = P$$

Rappelons la définition suivante de la prime de risque des actifs réels sur la rentabilité réelle du cash :

$$\lambda_{rr} = \lambda - \sigma_{Pri}$$

Avec ces notations la richesse réelle se réécrit :

$$\begin{aligned}
 dX = & \left[\begin{array}{c} \frac{1}{1+\phi} X u_{ab}^T \sigma_{abN} \lambda_{rr} \\ + X \mu_G dt \end{array} \right] dt + \frac{1}{1+\phi} \left[\begin{array}{c} (c'(t) - P'(t)) \\ + \phi L (\mu_L - \mu_G) \\ - (X - L) \phi r \end{array} \right] dt \\
 & + \left[\begin{array}{c} \frac{1}{1+\phi} \{ X u_{ab}^T \sigma_{abN} + \phi L \sigma_{LN} \} \\ - X \sigma_{Pri} \end{array} \right] dz + \left[\begin{array}{c} \frac{\phi}{1+\phi} L \eta_{Pri} \\ - X \eta_{Pri} \end{array} \right] d\omega_{Pri}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 dX = & \left[\frac{1}{1+\phi} X u_{ab}^T \sigma_{abN} \lambda_{rr} \right] dt + \frac{1}{1+\phi} \left[\begin{array}{c} (c'(t) - P'(t)) \\ + \phi L (\mu_L - \mu_G) \\ - (X - L) \phi r \end{array} \right] dt \\
 & + X \frac{dG}{G} + \frac{1}{1+\phi} \{ X u_{ab}^T \sigma_{abN} + \phi L \sigma_{LN} \} dz + \frac{\phi}{1+\phi} L \eta_{Pri} d\omega_{Pri}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Nous voyons que l'écriture de la richesse réelle est très proche de la nominale. Les seules différences apparues sont les changements suivants :

- la transformation de la prime de risque nominale en prime de risque réelle ;
- la prise en compte des valeurs réelles pour la richesse, le passif, la consommation ($c - p$) et pour le cash ayant pour conséquence l'apparition d'un nouveau paramètre de diffusion dans l'expression détaillée.

Nous notons bien que l'évolution réelle fait intervenir de manière directe l'évolution des prix. Ceci permettra de rendre compte plus efficacement des véritables efforts de rentabilité des actifs.

2.2.2 Introduction de nouveau numéraire

Il n'est pas rare en allocation stratégique d'exprimer le portefeuille en un numéraire particulier comme le salaire pour Cairns et al. (2004) ou la pension instantanée pour Boulier et al. (1993). Ainsi le simple fait d'exprimer la richesse en numéraire du prix nous projète dans un univers "réel" comme nous venons de le faire et comme il a déjà été présenté par Brennan et Xia (2000), Poncet et Lioui (2005) et aussi Menoncin et al. (2003). En prenant comme numéraire le zéro-coupon nominal, nous nous retrouverions dans un univers forward. Selon les besoins, nous pouvons choisir une quelconque des variables d'état comme numéraire et exprimer toutes nos variables en numéraire de celle ci. Ce choix permet souvent une vision objective par rapport aux critères de gestion et parfois même, il permet une nette simplification des développements mathématiques. En effet, le choix d'un numéraire réduit l'ensemble des variables d'états de ce numéraire au moins.

Nous ferons le choix du passif réel $L(t)$ pour illustrer la gestion sous un choix de numéraire. Cela revient à parler du surplus et surtout, présente le précieux avantage de mieux tenir compte des engagements dans la gestion au niveau même des critères¹ et non uniquement par le partage ϕ des variations du surplus. Soit

¹Nous reviendrons plus loin sur la providence de ce choix dans la recherche de la stratégie optimale sur la gestion du surplus.

$X_L = \frac{X}{L}$ et nous voyons que :

$$dX_L = d\left(\frac{X}{L}\right) = d\left(\frac{X-L}{L}\right) \quad (2.7)$$

Ce qui conforte encore plus l'identification au surplus du fonds. La comparaison se fait désormais par rapport à l'unité. Ainsi, plus X_L sera grand par rapport à un et plus le fonds aura un confortable surplus sur ses engagements. Soient les nouvelles entités suivantes :

$$\lambda_L = \lambda - \sigma_{LN}^T \quad (2.8)$$

$$c_L = \frac{c_N}{L_N} = \frac{\frac{c_N}{P_{ri}}}{\frac{L_N}{P_{ri}}} = \frac{c}{L} \quad ; \quad P_L = \frac{P_N}{L_N} = \frac{\frac{P_N}{P_{ri}}}{\frac{L_N}{P_{ri}}} = \frac{P}{L}$$

et

$$G_L = \frac{G_N}{L_N}$$

$$\frac{dG_L}{G_L} = -(\mu_{LN} - r) dt + \sigma_{LN} \sigma_{LN}^T + \eta_{Pri}^2 - \sigma_{LN} dz - \eta_{Pri} d\omega_{Pri}$$

Les nouvelles expressions de la richesse relative au passif réel seront donc :

$$dX_L = \left[\frac{1}{1+\phi} X_L u_{ab}^T \sigma_{abN} \lambda_L \right] dt + \frac{1}{1+\phi} \begin{bmatrix} (c_L(t) - P_L(t)) \\ -\phi \mu_{GL} \\ -(X_L - 1) \phi r \end{bmatrix} dt \quad (2.9)$$

$$+ X_L \frac{dG_L}{G_L} + \frac{1}{1+\phi} \{ X_L u_{ab}^T \sigma_{abN} + \phi \sigma_{LN} \} dz + \frac{\phi}{1+\phi} \eta_{\text{Pri}} d\omega_{\text{Pri}}$$

ou

$$dX_L = \left[\frac{1}{1+\phi} X_L u_{ab}^T \sigma_{abN} \lambda_L \right] dt + \frac{1}{1+\phi} \begin{bmatrix} (c_L(t) - P_L(t)) \\ -\phi \mu_{GL} \\ -(X_L - 1) \phi r \end{bmatrix} dt \quad (2.10)$$

$$+ \left(X_L - \frac{\phi}{1+\phi} \right) \frac{dG_L}{G_L} + \{ X_L u_{ab}^T \sigma_{abN} \} dz$$

ou encore

$$dX_L = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+\phi} X_L u_{ab}^T \sigma_{abN} \lambda_L \\ + X_L \mu_{G_L} \end{bmatrix} dt + \frac{1}{1+\phi} \begin{bmatrix} (c_L(t) - P_L(t)) \\ -\phi \mu_{G_L} \\ -(X_L - 1) \phi r \end{bmatrix} dt \quad (2.11)$$

$$+ \frac{1}{1+\phi} \left\{ \begin{array}{l} X_L u_{ab}^T \sigma_{abN} \\ - \left(X_L - \frac{\phi}{1+\phi} \right) \sigma_{LN} \end{array} \right\} dz - \left(X_L - \frac{\phi}{1+\phi} \right) \eta_{\text{Pri}} d\omega_{\text{Pri}}$$

Ces expressions ne sont pas différentes de celles du portefeuille réel ou du nominal qui sont tous exprimables sous les mêmes formes. Les différences symboliques¹ sont les transformations du $(X - L)$ en $(X_L - 1)$ dans la consommation, de la richesse en surplus X_L , des primes de risques nominale ou réelle en prime du risque liée au passif et du cash en cash-passif G_L . En nous penchant plus sur le $(X_L - 1)$, nous voyons qu'il reflète bien le surplus $(X_L - 1) = \frac{(X-L)}{L}$. Par ailleurs, la seconde écriture des variations du surplus (équation :2.10), nous permet de réunir sous un même actif G_L , l'investissement en cash et une partie de la consommation dédiée au partage du surplus. Le second numéraire a pour effet d'annuler le premier, ce qui découle normalement du double rapport : $\frac{X}{L} = \frac{\frac{X_N}{P_{ri}}}{\frac{L_N}{P_{ri}}} = \frac{X_N}{L_N}$. Il est donc équivalent d'exprimer la richesse nominale directement en numéraire du passif nominal. Cette formulation

¹Nous insistons bien sur le symbole car, par exemple, la richesse indiquée par L est fondamentalement différente de la richesse réelle et de même pour les autres entités présentes.

du portefeuille via le surplus aura pour autre avantage la prise en compte simultanée du Passif et de l'Actif et sera utile dans les prochains développements, notamment dans la formulation du critère d'optimisation. Elle nous permettra également, avec les autres expressions de l'évolution de la richesse, de mieux rendre compte de la stratégie face à la consommation et aux actifs du marché.

2.2.3 Stratégie par numéraire du portefeuille de fonds de pension

La stratégie du portefeuille change peu selon le numéraire. Le choix du numéraire induit par contre un véritable changement sur l'ensemble des variables d'état.

Variables par numéraire

Soient les variables D_N et Y_N telles que :

$$Y_N \in R^{n+9}, \quad \text{et} \quad Y_N = \begin{pmatrix} A_N \\ B \\ B_i \\ G_N \\ P r i \\ S_N \\ r \\ i \\ L_N \\ c(\text{resp} : P)_N \end{pmatrix}$$

et

$$D_N \in R^{n+10}, \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} Y_N \\ X_N \end{pmatrix}$$

Si nous sommes en prestations définies, la variable c des cotisations devient une variable de commande et non une variable d'état, elle est remplacée par la nouvelle variable d'état P . En cotisations définies, la variable d'état est c et P celle de commande. Lorsque les calculs différeront (ajout d'éléments nouveaux) nous préciserons les changements par rapport à la présence de l'une ou l'autre variable en indiquant CD pour l'usage de c dans Y_N et PD pour P .

Les différentielles :

$$dY_N = \mu_{Y_N} dt + \sigma_{Y_N} dz \quad (2.12)$$

Pour D_N :

$$dD_N = \mu_{DN} dt + \sigma_{DN} dz$$

$$\text{avec } \mu_{DN (n+10,1)} = \begin{pmatrix} \mu_{Y N} \\ \mu_{X N} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \sigma_{DN (n+10,n+2)} = \begin{pmatrix} \sigma_{Y N} \\ \sigma_{X N} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Posons naturellement à présent que : $D = (Y, X)^T$ en réel ou numéraire du prix et $D_L = (Y_L, X_L)^T$. Avec toutes les variables s'exprimant dans le nouveau numéraire à l'exception des taux r et i . Nous retenons aussi le retrait de la variable servant de numéraire. Soit donc le retrait de l'indice des prix $\text{Pri}(t)$ de Y dans D et celui de L_N de Y_L dans D_L .

Dans la suite du document, nous travaillerons par défaut sur D et nous précisons, lorsque cela s'avérera nécessaire, les développements spécifiques sur D_N ou D_L .

Stratégie :

La stratégie du portefeuille reste inchangée dans le fonds, quel que soit le numéraire d'expression de la richesse et des autres variables.

en nominal :

$$dX_N = \left[\frac{1}{1+\phi} X_N (u_{ab}^T \sigma_{abN} \lambda + r) \right] dt + \frac{1}{1+\phi} \begin{bmatrix} (c_N(t) - P_N(t)) \\ +\phi L_N \mu_{LN} \end{bmatrix} dt \quad (2.14)$$

$$+ \frac{1}{1+\phi} \{ X_N u_{ab}^T \sigma_{abN} + \phi L_N \sigma_{LN} \} dz + \frac{\phi}{1+\phi} L_N \eta_{\text{Pri}} d\omega_{\text{Pri}}$$

en numéraire du passif :

$$\begin{aligned}
 dX_L = & \left[\frac{1}{1+\phi} X_L (u_{ab}^T \sigma_{abN} \lambda_L + \mu_{GL}) \right] dt + \frac{1}{1+\phi} \left[\begin{array}{c} (c_L(t) - P_L(t)) \\ + (X_L - 1) \phi (\mu_{GL} - r) \end{array} \right] dt \\
 & + \frac{1}{1+\phi} X_L [(u_{ab}^T \sigma_{abN} + \sigma_{GL}) dz + \sigma_{GL} d\omega_{\text{Pri}}] + \frac{\phi}{1+\phi} (X_L - 1) (-\sigma_L dz - \eta_{\text{Pri}} d\omega_{\text{Pri}})
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

en réel :

$$\begin{aligned}
 dX = & \left[\frac{1}{1+\phi} X (u_{ab}^T \sigma_{abN} \lambda_{rr} + \mu_G) \right] dt + \frac{1}{1+\phi} \left[\begin{array}{c} (c(t) - P(t)) \\ + \phi L \mu_L \\ + (X - L) \phi (\mu_G - r) \end{array} \right] dt \\
 & + \frac{1}{1+\phi} \{ X (u_{ab}^T \sigma_{abN} + \sigma_G) + \phi L \sigma_L \} dz + \frac{1}{1+\phi} X \sigma_G d\omega_{\text{Pri}} \\
 & + \frac{\phi}{1+\phi} (X - L) (-\sigma_{\text{Pri}} dz - \eta_{\text{Pri}} d\omega_{\text{Pri}})
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

En considérant que lors de la prise en compte d'un numéraire tous les actifs du marché sont également exprimés et disponibles sous ce numéraire, il ressort que le gérant du fonds investit à tout instant :

La proportion : $\frac{1}{1+\phi}$ de sa richesse sur les actifs du marché à savoir les n actifs risqués fondamentaux, les deux actifs contingents et le cash.

La proportion : $\frac{\phi}{1+\phi}$ du passif sur l'actif dupliquant le passif. Notons quand même qu'un tel actif n'est pas toujours disponible sur le marché à moins d'avoir $\eta_{Pr_i} \equiv 0$.

Enfin la proportion : $\frac{\phi}{1+\phi}$ du surplus sur la prime du risque, du cash sur le cash nominal.

En nominal bien sûr l'investissement sur la prime du cash sur le cash nominal est nul et en numéraire du passif c'est l'investissement sur le passif qui s'annule naturellement puisque avec ce numéraire les variations du passif dégènerent.

Nous allons désormais nous intéresser à l'optimisation de cette stratégie à travers le choix des commandes d'investissement et de consommation.

2.3 Gestion optimale du fonds de pension

Le contrôle stochastique est la résolution d'un programme d'optimisation dynamique en dimension infinie, en présence de processus aléatoires et sous contraintes ou non. Le programme porte sur un critère d'optimisation qui en théorie de portefeuille est souvent sous forme d'une espérance d'une intégrale de fonction d'utilité ou sur l'utilité finale seule : c'est le critère d'optimisation. Ce critère est sujet à l'évolution des variables d'états dans le temps. Outre les variables d'états qui sont supposées connues, existent les variables de commande sur lesquelles portent le programme et constituant la solution ou du moins les clés ou maillons essentiels de la solution. La résolution se fait par programmation en dimension infinie qui peut

aboutir à une résolution d'équations de type Hamilton Jacobi Bellman.

2.3.1 Critères et hypothèses d'optimisation du portefeuille de fonds de pension

Nous séparons la présentation des critères d'optimisation à celles des hypothèses.

Critères d'optimisation

Le principal critère d'optimisation en gestion de portefeuille de fonds de pension comme de tout portefeuille d'actifs est l'utilité soit des investisseurs, soit des membres du fonds, selon le point de vue adopté.

En général, on remarquera qu'en choix de portefeuille, le critère d'optimisation est toujours lié à la psychologie. Ce qui est un avantage certain lorsque l'on évolue en univers incertain.

L'utilité en fonds de pension, peut porter sur différents éléments de l'économie du fonds et prendre aussi différentes formes.

En statique, nous avons vu que nous nous fixions comme objectif de maximiser le gain certain équivalent qui se présente sous forme de l'espérance d'une expression composée du surplus d'une part et de l'opposé de sa variance sur un seuil psychologique de tolérance du risque.

Le plus souvent, en temps continu, c'est une espérance d'intégrale du temps sur une durée précise d'une fonction d'utilité de type HARA (*Hyperbolique Absolute Risk Aversion*) ou dérivé (voir Merton 1971, pour plus de détails sur les fonctions HARA).

En prestations définies, par exemple Boulier et al. (1993) proposent de minimiser¹ l'espérance de la valeur actualisée à un taux psychologique d'escompte de la

¹En minimisation on parle de "désutilité" (voir Haberman, Vigna et Russell 2004)

quadrature des cotisations futures. En cotisations définies, Haberman et al. (2002) et Devolder (2002) optimisent la valeur escomptée de la richesse finale à la retraite.

Certains auteurs considèrent des formes composées d'autres fonctions d'utilité toujours issues des fonctions d'utilité HARA. C'est le cas de Haberman et al. (2004) ou de Reichlin (2000) qui portent l'optimisation sur le surplus ou déficit et sur les coûts simultanément.

Nous allons adopter une fonction d'utilité générale à partir de laquelle il nous sera possible de retrouver les fonctions d'utilité les plus courantes de la littérature, ne serait ce que par un jeu sur des paramètres. Mais avant, fixons les éléments suivants :

- T l'horizon d'étude que se fixe le gérant du fonds, T peut être l'infini positif. Lorsque T est fini il correspondra à l'échéance des zéros-coupon du modèle.
- φ le taux psychologique d'escompte des valeurs futures.
- et $R(X, T)$ le leg à l'horizon du fonds; si $T \rightarrow +\infty$ alors $R(X, T) = 0$.
À défaut nous prenons T très proche de l'infini positif mais sans l'atteindre de sorte que l'écriture $[0, T]$ soit justifiée ($T \rightarrow +\infty^{(-)}$), et la conséquence limite de nullité sur le leg est maintenue.
- m le poids psychologique des variations des cotisations (respectivement des pensions) autour de la valeur d'équilibre en PD (respectivement en CD).
- g le poids psychologique lié au surplus. Il peut être en CD la part du surplus revenant au gérant comme rémunération.

Soit donc la fonction d'utilité suivante :

en PD

$$V(X, Y, c, u, t) = e^{-\varphi t} [g X^\gamma - m (c - \bar{c})^2]$$

(2.17)

et en CD

$$V(X, Y, P, u, t) = e^{-\varphi t} [g X^\gamma - m (P - \bar{P})^2]$$

Avec γ dans $\{0\} \cup]0, 1[\cup \{1\}$; $g \geq 0$ et $0 \leq m \leq 1$.

Ainsi pour :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \rightarrow 0 \\ m = 0 \\ g = \frac{1}{1-\gamma} \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad V(D, v, t) = e^{-\varphi t} \ln(X)$$

Pour

$$T < +\infty, \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} g = 0 \\ m = 0 \\ \text{et} \\ R(X, T) = e^{-\varphi T} \frac{X(T)^\gamma}{1-\gamma} \end{array} \right.$$

Nous retrouvons, cette fois, le cas d'utilité de richesse finale en l'occurrence en puissance CRRA. Nous avons encore pour :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \in]0, 1[\\ m = 0 \\ g = \frac{1}{1-\gamma} \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad V(X, v, t) = e^{-\varphi t} \left[\frac{X^\gamma}{1-\gamma} \right]$$

Et nous retrouvons ainsi les fonctions CRRA. Mais encore plus, pour :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma = 1 \\ m \neq 0 \\ g \in]0, 1] \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad \left\{ \begin{array}{l} V(X, P, t) = e^{-\varphi t} [gX - m(P - \bar{P})^2] \quad \text{en } CD \\ \text{ou} \\ V(X, c, t) = e^{-\varphi t} [gX - m(c - \bar{c})^2] \quad \text{en } PD \end{array} \right.$$

nous retrouvons ainsi une fonction d'utilité très proche de celle introduite par Reichlin (2000) en PD

et enfin pour

$$\left\{ \begin{array}{l} g = 0 \\ \text{et} \\ m = 1 \end{array} \right. , \quad \text{alors} \quad \left\{ \begin{array}{l} V(X, P, t) = e^{-\varphi t} [-(P - \bar{P})^2] \quad \text{en } CD \\ \text{ou} \\ V(X, c, t) = e^{-\varphi t} [-(c - \bar{c})^2] \quad \text{en } PD \end{array} \right.$$

Nous retrouvons cette fois ci une fonction d'utilité des coûts dont l'optimisation rappelle celle utilisée par Boulier et al. (1993) à la valeur d'équilibre de la cotisation en PD près. Dans ces fonctions d'utilité, la valeur du surplus ou du portefeuille est prise seule pour favoriser son optimisation (maximisation) tandis que les coûts sont pris en variations quadratiques et opposées aux valeurs de portefeuilles ou de surplus. Ceci pour obtenir des valeurs proches autant que possible des valeurs objectives¹. Le critère est aussi sujet aux évolutions des variables d'états qui seront déterminantes dans la dynamique du contrôle. Mais avant de procéder au contrôle stochastique, nous allons d'abord résumer toutes nos hypothèses déjà développées afin d'asseoir définitivement les fondements de notre modèle.

¹Les valeur d'équilibre en l'occurrence.

Récapitulatif des hypothèses financières

Nous pouvons classer nos hypothèses en trois grands groupes : les hypothèses financières, les hypothèses démographiques et les hypothèses propres au fonctionnement du fonds de pension. Les hypothèses financières regroupent toutes les caractéristiques du marché formant l'univers dans lequel évolue le fonds de pension.

Hypothèses : 2.1 H_A

1. Il y a n actifs risqués sur le marché à trajectoires aléatoires continues.
2. Il existe un seul taux d'intérêt sans risque, auquel les agents peuvent emprunter et prêter, ce taux est stochastique.
3. Il existe un taux d'inflation $i(t)$ stochastique également, traduisant les variations de l'inflation des prix de la consommation.
4. Il existe un actif indice des prix de la consommation, stochastique et de valeur initiale l'unité.
5. Il existe $n+3$ sources d'incertitudes du marché, liées aux actifs fondamentaux, aux taux et aux variations des prix. L'incertitude du marché est matérialisée par un brownien standard $n + 3$ dimensionnel.
6. Il existe un zéro-coupon à valeur d'échéance l'unité et un zéro-coupon indexé sur l'inflation des prix.
7. Il existe d'autres sources d'incertitudes indépendantes du marché et dues aux variations des revenus individuels ou des prix.
8. le marché est sans frictions et les transactions sont instantanées sans frais et sans durée significatives.
9. La matrice de variances covariances des $n+2$ actifs risqués nominaux (les n actions et les deux zéro-coupons) Ω_{abN} est inversible.

10. *Il n'y a pas d'encaisse oisive. Toute richesse encaissée ou décaissée évolue dans le temps à défaut de sa propre trajectoire (actif) au moins au taux sans risque et est soumis au risque d'inflation.*
11. *Tout bien encaissable ou décaissable mais non encore encaissé, décaissé ou investi, évolue au moins au taux d'inflation et avec l'indice des prix ou avec les salaires.*
12. *L'ensemble des variables d'états interagissant et agissant sur l'économie se résumant aux variables financières et démographiques déjà présentées.*
13. *Tout agent peut investir (achat et vente) librement sur les n actifs risqués fondamentaux, les deux zéros-coupon (classique et indexé) et sur le cash.*
14. *Il n'y a pas d'opportunité d'arbitrage dans le marché.*

Toutes ces hypothèses ne sont évidemment pas toujours réalistes mais simplifient beaucoup l'univers financier. Elles suffisent pour se concentrer sur la maîtrise des risques de marché et de volatilité. Leur prise en compte engendre d'autres conséquences sur le fonctionnement du marché des capitaux. Le réinvestissement des entrées ainsi que les décaissements se faisant de manière instantanée, nous nous entendons ainsi que les liquidités issues d'opérations financières sont instantanément disponibles. De même, du fait de l'absence d'opportunité d'arbitrage et de frictions et aussi du fait de la libre circulation des informations, tout actif sur le marché peut être instantanément cédé ou acheté sans difficulté, au prix d'équilibre du marché.

Les hypothèses démographiques subissent aussi des simplifications.

Récapitulatif des hypothèses démographiques

Les hypothèses démographiques regroupent les informations disponibles sur la population composant le fonds sans décrire le fonctionnement même du fonds.

Hypothèses : 2.2 H_L

1. Nous sommes en groupe ouvert : à tout instant des individus peuvent entrer ou sortir de la population.
2. Tout individu qui entre dans la population apporte aussitôt les informations sur son âge, sa date d'entrée, sa date d'embauche, et sa date de départ en retraite.
3. Le nombre d'individus dans la population à tout instant t est connu et modélisé par $N(t), t \geq 0$.
4. Chaque individu possède sa propre source de revenus liée à ses informations personnelles et au marché.
5. Les probabilités de survies et de maintien en services sont connues à tout instant et pour tout individu.

Récapitulatif des hypothèses propres au fonds de pension

Nous récapitulons ici les hypothèses entrant dans le cadre spécifique du fonctionnement du fonds de pension.

Hypothèses : 2.3 H_{fp}

1. Le gérant du fonds peut emprunter ou placer au taux sans risque, il peut également opérer sur tous les actifs du marché. Plus explicitement il peut vendre et acheter instantanément n'importe quel actif du marché selon la disponibilité de sa trésorerie. Les produits de la vente d'actif sont instantanément réinvestis en d'autres actifs. Les ventes figurent en valeurs négatives tandis que les achats sont les valeurs positives du portefeuille.
2. Le gérant du fonds partage la proportion ϕ de la variation instantanée de son surplus entre les membres et lui-même. ϕ est une constante positive et $\phi \leq 1$.

3. *Le zéro-coupon indexé sur l'inflation des prix, tient lieu de facteur d'actualisation pour les pensions et justifie ainsi le taux actuariel.*
4. *Les cotisations lorsqu'elles sont définies, sont proportionnelles aux revenus des individus.*
5. *Les pensions quelque soit leur définition, sont toujours et constamment revalorisées à l'indice des prix de la consommation.*
6. *Il n'y a pas de reversion de la pension dans un premier temps.*
7. *La faisabilité ou l'équilibre assuranciers ne sont pas pré remplis mais sont des critères ou objectifs de gestion.*
8. *En cotisations définies la proportion des revenus par unité de temps (heure, jour, semaine, ou toute autre unité , selon la variation retenue des revenus par exemples) à cotiser est connue. En prestations définies c'est la valeur instantanée de la pension pour une unité de temps du travail effectué qui est déterminée.*

La dernière hypothèse tient compte des cas où les pensions seraient déterminées de façon explicite par rapport aux revenus futurs non encore connus mais dont on connaît l'évolution probable. Toutes ces hypothèses fixent le cadre dans lequel il faudra déterminer les choix de gestion du fonds de retraite par un contrôle sur les variables de commande. Il n'est pas tenu compte dans ces hypothèses, des sources d'incertitudes de variables d'états de la nature ou de toute autre variable supplémentaire susceptible pourtant d'agir sur l'économie. Il s'agit, par exemple, de la probabilité que l'individu soit mâle ou femelle, appartienne à telle ou telle catégorie de travail ou des indicateurs économiques comme la croissance du marché, le Produit Intérieur Brut ou le chômage.

2.3.2 Contrôle du fonds de pension

L'optimisation sous contraintes et en temps continu relève de la programmation dynamique sous contraintes. Lorsque les contraintes d'inégalités sont prises en compte, les solutions peuvent s'obtenir par un programme numérique de dimension infinie. Toutefois, une difficulté de taille est la présence de processus aléatoires dans le programme. Même si l'espérance mathématique absorbe la dimension aléatoire des processus, il n'en reste pas moins que nous ne disposons pas, à l'instant t , d'expression explicite de cette espérance conditionnelle de valeurs futures. Pour contourner cette difficulté, on pourrait se tourner vers les équations aux dérivées partielles de Hamilton Jacobi Bellman dont la résolution sous l'espace des contraintes apporterait les solutions (sous certaines conditions de régularité, à voir ci dessous). Il est aussi possible de résoudre le programme stochastique par martingales. Mais cette dernière possibilité implique que le processus de la richesse soit autofinçant. Or, du fait de l'entrée des contributions, ce dernier n'est pas autofinçant. Boulier et al. (2001) ont obtenu une solution par martingales en transformant le processus de la richesse. Deelstra et al. (2002) également, en endogénéisant cette fois le processus des salaires obtiennent une solution optimale pour le minimum de pension à garantir pour des contributions définies. Nous adapterons la résolution par la méthode des équations de Hamilton Jacobi Bellman. Soit le programme (p_1) suivant :

$$(p_1) \left\{ \begin{array}{l} \underset{v \in \Omega}{Max} E \left[\int_0^T V(X, v, s) ds + R(X(T), T) \right] \\ \text{sujet à } dX_t = \mu_{X,t} dt + \sigma_{X,t} dZ \\ \text{et } X(0) = X_0 \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Avec :

- $Z = \begin{pmatrix} z \\ \omega_{\text{Pri}} \end{pmatrix}$
- $\mu_{X,t}$ et $\sigma_{X,t}$ les fonctions telles que $X(t)$ vérifie (2.6) ;
- v la commande qui se compose de $u(t)$ et de $c(t)$ ou $P(t)$, selon que nous soyons respectivement en prestations définies ou en cotisations définies ;
- V , la fonction d'utilité qui peut être de type HARA, simple, quadratique ou composée ;
- Ω le sous espace de $[0, T] \times R^{n+4}$ des commandes admissibles vérifiant, *a priori*, une partie au moins des contraintes d'égalité et d'inégalités représentées au tableau : 2.1 page : 194 du paragraphe : 2.1.1.

Relâchons par rapport aux exemples de contraintes du paragraphe : 2.1.1 page : 194, les limites unitaires des allocations sur actif risqué. Sur chaque actif du marché, le gérant du fonds est alors libre d'acheter ou de vendre au delà du niveau de sa richesse, mais néanmoins dans les limites de U_m , b_m , U_M et b_M des valeurs arbitraires définies comme dans le paragraphe sus cité 2.1.1 page : 194 avec seulement les inégalités par rapport à -1 et 1 en moins.

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (t, v) \in [0, T] \times R^{n+4}, \quad U_m \leq v_{i,t} \leq U_M, \quad 1 \leq i \leq n \\ \\ \text{et} \quad b_m \leq v_{i,t} \leq b_M, \quad i = n+1, n+2 \\ \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n+3} v_{i,t} = 1 \quad \text{ou} \quad v_{n+3,t} = v_{0,t} = 1 - \sum_{i=1}^{n+2} v_{i,t} \\ \text{et enfin} \quad v_{n+4,t} \geq 0 \\ \text{avec} \quad v_{n+4,t} = c(t) \quad \text{en} \quad \text{PD} \quad \text{ou} \quad v_{n+4,t} = P(t) \quad \text{en} \quad \text{CD} \end{array} \right\} \quad (2.19)$$

Pour chaque instant t dans $[0, T]$, le couple (t, v) de $[0, T] \times R^{n+4}$ est admissible lorsque les $n+3$ premiers éléments de v vérifient les conditions d'admissibilité de toute commande d'investissement $u(t)$ et que le dernier élément ($n+4^{\text{ième}}$) vérifie

la condition d'admissibilité de la pension $P(t)$ en CD ou de la cotisation $c(t)$ en PD.

Introduisons l'utilité indirecte J telle que :

$$J(X, Y, t) = \underset{v \in \Omega}{Max} E_t \left[\int_t^T V(X, v, s) ds + R(X(T), T) \right] \quad (2.20)$$

Nous considérons désormais uniquement les contraintes d'égalité pour les allocations "u" ($\sum u_i = 1$) et la positivité pour les flux de cotisation ou de pension lorsque nécessaire.

Alors Ω l'espace des solutions admissibles devient alors avec la relaxe des conditions d'inégalité :

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} (t, v) \in [0, T] \times R^{n+4}, \quad \sum_{i=1}^{n+3} v_{i,t} = 1 \quad \text{ou} \quad v_{n+3,t} = v_{0,t} = 1 - \sum_{i=1}^{n+2} v_{i,t} \\ \text{et} \quad v_{n+4,t} \geq 0 \\ \text{avec} \quad v_{n+4,t} = c(t) \quad \text{en PD} \quad \text{ou} \quad v_{n+4,t} = P(t) \quad \text{en CD} \end{array} \right\} \quad (2.21)$$

Considérons l'ensemble $L(\Omega)$ des applications de $[0, T]$ vers R^{n+4} , telles que leur graphe soit inclus dans Ω .

$$L(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} v : [0, T] \rightarrow R^{n+4} \\ t \mapsto v(t) \quad \text{tel que} \quad (t, v(t)) \in \Omega \end{array} \right\} \quad (2.22)$$

Par abus de langage, nous identifierons désormais $L(\Omega)$ à Ω lui même. La solution de la commande optimale v^* du programme (p_1) précédent, vérifie l'équation de Hamilton Jacobi Bellman suivante :

$$V(X, Y, v^*, t) + J_t + J_Y \mu_Y + \frac{1}{2} \text{trace} [J_{YY} \sigma_Y \sigma_Y^T] \quad (2.23)$$

$$+ \mu_X J_X + \frac{1}{2} [J_{XX} \sigma_X \sigma_X^T] + [J_{YX} \sigma_Y] \sigma_X^T = 0$$

Avec les conditions limites :

$$J(X, Y, T) = R(X, Y, T) \quad (2.24)$$

Et v^* élément de $L(\Omega)$, mais on dira par la suite que la commande optimale v^* appartient à Ω .

2.3.3 Commandes optimales

Pour unifier les écritures, nous allons introduire les variables indicatrices 1_L et 1_{Pri} telles que :

$$1_L = \begin{cases} 1 & \text{si l'étude porte sur le surplus} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{et } 1_{Pri} = \begin{cases} 1 & \text{si l'étude porte sur la richesse réelle} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec en outre

$$1_N = 1 - 1_L - 1_{Pri}$$

Si la précision n'est pas nécessaire, nous omettons les indices en L en rr ou N sur le portefeuille, le passif, les primes de risque ou les cotisation et pension, selon le numéraire. Par exemple nous considérerons :

$$\lambda = \lambda_{1_L L + 1_{Pri} rr}$$

Dans un premier temps nous ne regarderons que la commande d'investissement u . La condition d'optimalité du premier ordre sur l'équation de HJB 2.23 conduit à l'allocation optimale en actifs risqués (actions et obligations).

$$u^*_{ab} = \begin{cases} -\frac{1+\phi}{X} \frac{J_X}{J_{XX}} \Omega_{abN}^{-1} \sigma_{abN} \lambda - \frac{1+\phi}{X} \frac{1}{J_{XX}} \Omega_{abN}^{-1} \sigma_{abN} \sigma^T_Y J^T_{XY} \\ -\frac{\phi}{X} \Omega_{abN}^{-1} \sigma_{abN} \sigma^T_{LN} (1_L + L (1 - 1_L)) - (1 + \phi) \Omega_{abN}^{-1} \sigma_{abN} \begin{pmatrix} 1_{\text{Pri}} \sigma^T_G \\ -1_L \sigma^T_{LN} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.25)$$

Nous reprenons à présent la résolution de l'équation de H.J.B. 2.23 de la même manière que précédemment, mais en suivant un seul des $n + 2$ actifs risqués cette fois, exactement comme il est décrit par Merton (1971). Nous obtenons ainsi les allocations sur tout actif risqué i $1 \leq i \leq n + 2$, en rappelant que $i = n + 1$ et $i = n + 2$ correspondent aux actifs contingents, alors nous avons le résultat suivant sur le cas nominal seul :

$$u^*_i = -\frac{(1 + \phi) J_X}{X J_{XX}} \frac{\sigma_i \lambda}{\sigma_i \sigma_i^T} - \frac{(1 + \phi) \sigma_i \sigma_Y^T J^T_{XY}}{X J_{XX} \sigma_i \sigma_i^T} - \frac{\phi L \sigma_i \sigma_L^T}{X \sigma_i \sigma_i^T} \quad (2.26)$$

Seuls le dernier terme correspondant à la présence du passif et bien évidemment le partage ϕ , viennent sans surprise différencier ce résultat de celui de Merton (1971).

Remarque : 2.2 *Ces résultats sont complètement superposables au résultat global 2.25 par simple remplacement des volatilités correspondantes. Autrement dit en substituant les volatilités σ_{abN} de l'expression de u_{abN} par σ_i dans l'expression de*

u_i avec bien sûr Ω_{abN}^{-1} qui devient $\frac{1}{\sigma_i \sigma_i^T}$.

Les résultats sous les numéraires de l'indice des prix ou du passif s'obtiennent de manière analogue et vérifient la remarque précédente.

L'allocation d'actif pour le portefeuille réel présente un terme d'investissement sur le cash en plus par rapport aux autres portefeuilles. Par ailleurs, dans le cas de l'allocation d'actif pour le portefeuille de surplus, le coefficient des investissements relatifs au passif diffère des autres portefeuilles également. Ces différences sont dues au fait qu'en univers réel (respectivement en numéraire du passif) le cash prend une volatilité et induit ainsi une couverture supplémentaire relative à cette volatilité ou risque. Dans le cas du surplus, étant donné que la volatilité du cash est identique à celle du passif, la couverture du cash est fondamentalement identique à celle du passif au coefficient près, ce qui justifie la différence des coefficients. Ces allocations sont finalement très proches quel que soit le numéraire. Il apparaît aussi que le choix optimal équivaut à un investissement en trois ou quatre fonds :

1. le fonds f_1 : $\Omega_{abN}^{-1} \sigma_{abN} \lambda_{rr}$

avec respectivement λ et λ_L pour un calcul en nominal et en numéraire du Passif.

Sur ce fonds, va un investissement en proportion $\mu_{f_1} = -\frac{1+\phi}{X} \frac{J_X}{J_{XX}}$

2. les fonds f_{Y_i} : $\Omega_{abN}^{-1} \sigma_{abN} \sigma_{Y_i}^T$

avec un investissement en proportion $\mu_{f_{Y_i}} = -\frac{1+\phi}{X} \frac{J_X Y_i}{J_{XX}}$

3. le fonds f_{LN} : $\Omega_{abN}^{-1} \sigma_{abN} \sigma_{LN}^T$

avec un investissement $\mu_{f_{LN}} = -\frac{L\phi}{X}$.

En numéraire du Passif, l'investissement vaut plutôt : $\mu_{f_{LN}(\text{surplus})} = +\left(X_L - \frac{\phi}{1+\phi}\right) \frac{1+\phi}{X_L}$

4. et enfin le fonds f_G : $\Omega_{abN}^{-1} \sigma_{abN} \sigma_G^T$

avec un investissement en proportion $\mu_{f_G} = -(1 + \phi)$.

Ce fonds est évidemment nul pour le nominal et en numéraire du Passif.

Ce résultat, certes différent des deux fonds de Merton (1969) et Merton (1971) en économie purement stationnaire, n'en est pas très différent en y regardant de plus près. En effet, si nous ne considérons que le cas nominal sans volatilité de cash, le fonds 4 dégénère, de même que le fonds 3, en cas d'absence de partage du surplus ou de numéraire du passif, ce qui nous ramène aux fonds de Merton (1971). En restant évidemment dans le cas général, avant précision de la forme d'utilité ou du caractère ergodique du processus du taux. Nous développerons ultérieurement toutes les similitudes entre le modèle et les principaux résultats établis mais nous pouvons déjà ici faire un rapprochement avec Cairns et al. (2004) qui ont déduit un investissement en trois fonds dans un cas de cotisations définies avec présence de salaires non totalement duplicables par le marché. La présence d'un quatrième fonds (fonds 3 : f_{LN}) dans notre modèle est uniquement due à la prise en compte du passif ou plus exactement du partage de la variation du passif puisqu'il suffit de prendre $\phi = 0$ pour faire disparaître le quatrième fonds qui correspond donc à un investissement en vue d'une couverture des variations du passif. Par contre, leur volatilité du cash est équivalente à la volatilité du salaire puisqu'ils sont en numéraire du salaire. Comme le développent Cairns et al. (2004), nous remarquons d'abord que les investissements dans les fonds 3 et 4, ne dépendent pas de l'utilité et donc du critère d'optimisation et nous montrons également en annexe (paragraphe : B.3.2), que ces investissements correspondent à l'allocation optimale minimisant la variance du portefeuille $X(t)$. Enfin, en réécrivant l'équation de HJB avec les nouvelles expressions des commandes en fonction des utilités marginales, nous obtenons une E.D.P. sur l'utilité indirecte J , dont la résolution conduira à la solution finale du problème. Nous figurons cette équation après les simplifications d'usage et en gardant les formes originales des commandes de pension ou de cotisation.

$$\left\{ \begin{array}{l} V^* + J_t + \left(X - \frac{\phi L}{1+\phi} \right) J_X \mu_G + X J_X \sigma_{Pri} \lambda_{rr} + J_Y \mu_Y - \frac{J_X}{J_{XX}} J_{XY} \sigma_Y \lambda_{rr} \\ + \frac{1}{1+\phi} J_X (c - P) - (X - L) \frac{\phi r}{1+\phi} J_X - \frac{1}{2} \frac{J_X^2}{J_{XX}} \lambda_{rr}^T \lambda_{rr} - \frac{1}{2} \frac{1}{J_{XX}} J_{XY} \sigma_Y \sigma_Y^T J_{XY}^T + \frac{\phi L}{1+\phi} J_X \mu_L \\ - \frac{\phi L}{1+\phi} J_X \sigma_{LN} \lambda_{rr} + \frac{1}{2} J_{XX} \left(X - \frac{\phi L}{1+\phi} \right)^2 \eta_{Pri}^2 - \left(X - \frac{\phi L}{1+\phi} \right) \eta_{Pri} \sigma_Y J_{XY} + \frac{1}{2} \text{trace} [J_{YY} \sigma_Y \sigma_Y^T] \end{array} \right\} = 0 \quad (2.27)$$

Cette équation est très proche de celle obtenue par Menoncin et al. (2003) à la formulation du passif et à la présence de η_{Pri} prés. Dans leur proposition, la structure du passif (engagements) est individuelle et de ce fait directement exprimable en fonction des flux de cotisation ou de pension, ce qui apporterait quelques transformations supplémentaires. Pour la richesse nominale (respectivement le surplus), sans surprise la différence se situera au niveau de la présence de la volatilité du cash réel (respectivement du cash en numéraire du Passif) induisant en outre une prime de risque différente.

L'équation différentielle de H.J.B. relative au surplus :

$$\left\{ \begin{array}{l} V^* + J_t + \left(X_L - \frac{\phi}{1+\phi} \right) J_{X_L} \sigma_{LN} \lambda_L - \frac{1}{2} \frac{J_{X_L}^2}{J_{X_L X_L}} \lambda_L^T \lambda_L - \frac{J_{X_L}}{J_{X_L X_L}} J_{X_L Y} \sigma_Y \lambda_L \\ + \frac{1}{1+\phi} J_{X_L} (c_L - P_L) - (X_L - 1) \frac{\phi r}{1+\phi} J_{X_L} + J_Y \mu_Y + \left(X_L - \frac{\phi}{1+\phi} \right) J_{X_L} \mu_{G_L} + \frac{1}{2} J_{X_L X_L} \left(X_L - \frac{\phi}{1+\phi} \right)^2 \eta_{Pri}^2 \\ + \frac{1}{2} \text{trace} [J_{YY} \sigma_Y \sigma_Y^T] - \frac{1}{2} \frac{1}{J_{X_L X_L}} J_{X_L Y} \sigma_Y \sigma_Y^T J_{X_L Y}^T - \left(X_L - \frac{\phi}{1+\phi} \right) \eta_{Pri} \sigma_Y J_{X_L Y} + \frac{1}{2} J_{X_L X_L} \left(X - \frac{\phi}{1+\phi} \right)^2 \sigma_{LN} \sigma_{LN}^T \end{array} \right\} = 0 \quad (2.28)$$

et pour la richesse nominale cette équation devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} V^* + J_t + r X_N J_{X_N} + J_Y \mu_Y + \frac{1}{1+\phi} J_{X_N} (c_N - P_N) - (X_N - L_N) \frac{\phi r}{1+\phi} J_{X_N} \\ + \frac{\phi L_N}{1+\phi} J_{X_N} (\mu_{LN} - r - \sigma_{LN} \lambda) + \frac{\phi L_N}{1+\phi} \eta_{Pri} \sigma_Y J_{X_N Y} + \frac{1}{2} J_{X_N X_N} \left(\frac{\phi L_N}{1+\phi} \right)^2 \eta_{Pri}^2 \\ - \frac{J_{X_N}}{J_{X_N X_N}} J_{X_N Y} \sigma_Y \lambda + \frac{1}{2} J_{X_N X_N} \left(1 - \left(\frac{1}{1+\phi} \right)^2 \right) \phi^2 L_N^2 \sigma_{L_N} \sigma_{L_N}^T \\ - \frac{1}{2} \frac{1}{J_{X_N X_N}} J_{X_N Y} \sigma_Y \sigma_Y^T J_{X_N Y}^T - \frac{1}{2} \frac{J_{X_N}^2}{J_{X_N X_N}} \lambda^T \lambda + \frac{1}{2} \text{trace} [J_{Y Y} \sigma_Y \sigma_Y^T] \end{array} \right\} = 0 \quad (2.29)$$

Mais comme nous l'avons signalé plus haut, dans cette équation, nous n'avons mis l'accent que sur la commande d'investissement. Dans certains cas de choix des critères, il est possible d'aboutir en plus à un flux optimal de consommation comme dans le modèle de Merton (1969). Par exemple lorsque dans la fonction d'utilité V nous avons m non nul et l'un au moins des flux de consommation (cotisation et pension) non défini.

Pour la cotisation optimale (en cas PD) ou la pension optimale (en cas de CD), nous allons rajouter la contrainte de positivité de la cotisation ou de la pension. Les conditions de K.K.T. (Karush Kuhn Tucker) nous donnent, du fait de la dimension

particulière (unité) de la pension comme de la cotisation $\dim(c) = \dim(P) = 1$:

$$\begin{aligned} & \text{en PD} \\ c^* &= \begin{cases} V_c^{-1} \left[-\frac{J_X}{(1+\phi)} \right] & \text{si } V_c^{-1} \left[-\frac{J_X}{(1+\phi)} \right] > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.30}$$

ou en CD

$$P_* = \begin{cases} V_P^{-1} \left[\frac{J_X}{(1+\phi)} \right] & \text{si } V_P^{-1} \left[\frac{J_X}{(1+\phi)} \right] > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Sous réserve, bien sûr, de l'existence et de la non constance de la différentielle partielle de l'utilité par rapport à c ou P Avec la valeur optimale P^* de la pension instantanée totale du fonds en CD. Pour mieux se rendre compte de la portée de ces allocations stratégiques, nous allons les illustrer, avec des cas concrets de portefeuilles de fonds de pension, tout en faisant le rapprochement avec les résultats les plus courants en économie gaussienne.

3

Portefeuilles de fonds de pension dans une économie gaussienne

Dans ce chapitre, nous allons présenter des exemples concrets du modèle de fonds de pension développé. Nous ferons également le parallèle avec les principaux résultats d'allocation de portefeuille de fonds de pension de la littérature. Dans une économie marquée par des évolutions gaussiennes des différents rendements ou des taux, en présence, nous évoquerons les résultats en prestations définies, en cotisations définies et aussi ceux de modèle mixte. Nous regrouperons les résultats par le type de la fonction d'utilité et la caractéristique de l'horizon. Et donc comme Merton (1969) ou Menoncin et al. (2003), nous aborderons d'abord les résultats issus d'une utilité en horizon fini avant de généraliser aux résultats venant d'un horizon libre quelconque assimilable fini ou infini. Chaque résultat sera illustré par des simulations permettant de mieux rendre compte de sa portée. Les applications numériques se font essentiellement par simulations de Monte Carlo pour les différentes intégrales. Bien entendu nous commencerons par préciser le modèle spécifique du marché et de la population. Lorsque nécessaire, des simplifications seront apportées.

3.1 Modèle d'économie

Nous commencerons par une illustration des éléments constitutifs du marché comprenant les différents actifs et taux.

3.1.1 Structure du marché

Nous allons construire une structure de marché avec un taux d'intérêt gaussien. C'est une hypothèse qui, sans faire l'unanimité, est très souvent utilisée, notamment par Cairns et al. (2004), Menoncin et al. (2003) ou Boulier et al. (2001). (H_r)

Nous allons supposer le taux d'intérêts nominal suit un processus d'Ornstein Uhlenbeck issu du modèle de taux de Vasicek (1977).

$$dr = k(\theta - r)dt + \sigma_r dz$$

avec

(3.1)

$$k \geq 0, \text{ et } \theta > 0$$

et en outre σ_r constant.

(H_i)

Nous allons supposer une évolution en processus d'Ornstein-Uhlenbeck pour l'inflation également :

$$di = a(b - i) dt + \sigma_{inf}(t)dz(t)$$
(3.2)

avec

$b > 0$, et $a > 0$ et en outre σ_{inf} un vecteur ligne (n+3) constant.

Ce sont les formes issues des taux de Brennan et Xia (2000) et Menoncin et al. (2003).

Méthodologie

Nous faisons le choix d'une simulation de Monte-Carlo avec une moyenne sur un nombre de $N = 10\,000$ itérations à chaque période. Comme dans la presque totalité des simulations de processus d'Itô, nous partirons sur la base d'un schéma d'Euler, le Schéma d'Euler étant la représentation discrète et même directe du processus à partir de son E.D.S. comme nous allons le détailler. Si nous prenons par exemple le taux sans risque r suivant un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, les paramètres donnés et les valeurs recherchées sont annuelles tandis que les variations du temps sont quotidiennes. Il nous faudra alors exprimer en année, l'unité du temps, qui dans la discrétisation actuelle, correspond au jour ouvré. Pour ce faire, nous prendrons simplement $1/253$, comme unité temporelle en considérant 253 jours ouvrés par an. La discrétisation du taux par schéma d'Euler, à partir de l'E.D.S. 3.1, s'obtient :

1. en prenant un pas de $1/253$ pour dt ,
2. en remplaçant dz_t par $\sqrt{1/253}\epsilon_t$ avec ϵ_t un vecteur $(n+3,1)$ de représentation de la loi normale centrée réduite,
3. et enfin en substituant dr par $r(t+1)-r(t)$, t décrivant désormais les jours ouvrés.

Simulations

Nous donnons ici une simulation des taux d'inflation et d'intérêt instantanés avec les valeurs suivantes : $K = 5\%$, $\theta = 4\%$ et σ_r aléatoirement simulé de sorte que la variance $\sigma_r\sigma_r^T$ n'excède pas les 2% , $a = 2\%$, $b = 1,8\%$ et $ro = 3,2\%$ et $io = 1,45\%$. σ_{inf} est simulé sous le même principe que σ_r .

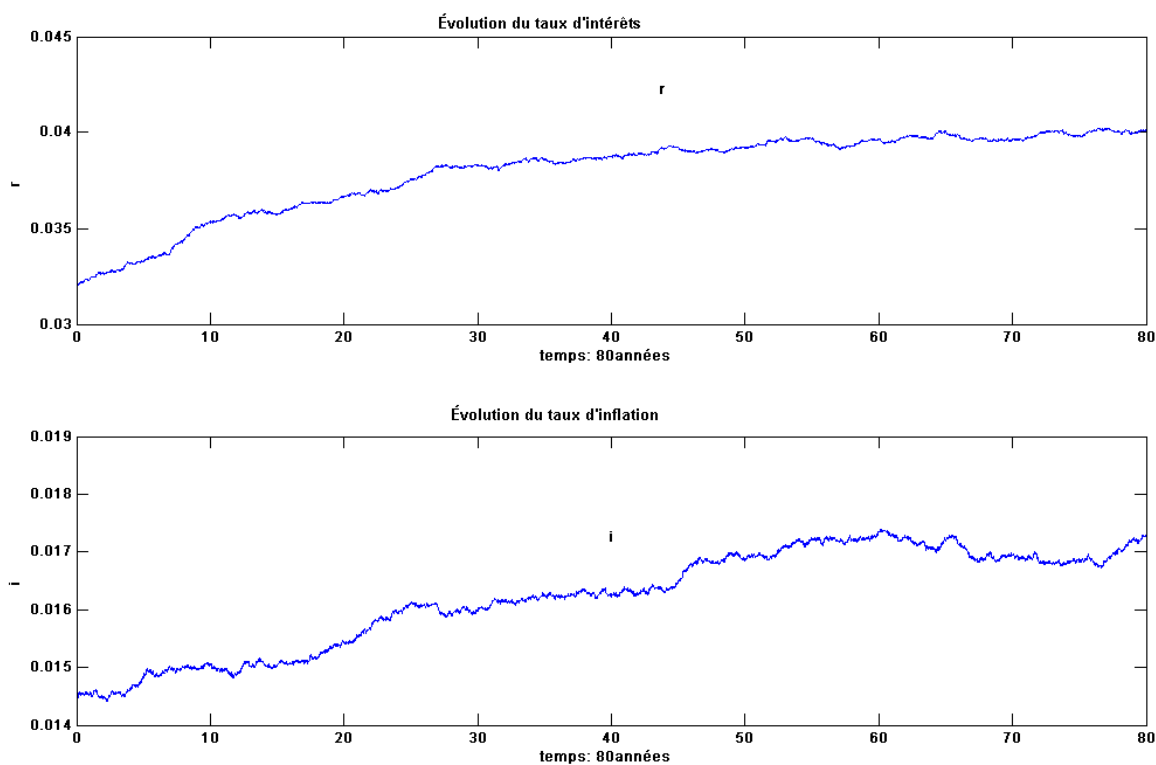


FIG. 3.1: simulation de r et i en valeurs journalières par jour ouvré sur 80 ans et suivant un processus d'Ornstein Uhlenbeck

Une discrétisation directe est aussi possible ici en utilisant l'expression fermée du taux (voir équation : D.2 en annexe :D). Nous reviendrons sur cette forme de discrétisation avec la simulation des zéro-coupons. Pour les variations des prix, nous penchons sans surprise pour le choix le plus simple du drift.

Hypothèse : 3.1 (H_{Pri})

Le drift des variations des prix est égal à l'inflation : $\mu_{Pri}(s) = i(s)$.

Nous rejoignons ainsi Brennan et Xia (2000) et Poncet et Lioui(2004, 2005). Nous donnons arbitrairement ou aléatoirement, suivant une loi uniforme :

- la valeur de 1% à la diffusion η_{Pri} de l'indice des prix de la consommation sur le brownien ω_{Pri} ;
- la valeur de 3% à la $n + 3^{\text{ième}}$ composante de la diffusion des prix sur le

brownien du marché z_t , les autres composantes étant nulles, hypothèse de Cholesky (hypothèse : 1.1, page : 163) oblige ;

– les valeurs suivantes à la prime de risque.

λ_a	λ_r	λ_{inf}	λ_{Pri}
4,9%	0,73%	0,58%	1,07%

Et avec les taux précédemment simulés nous avons les trajectoires suivantes pour le cash et l'indice des prix, suivant un schéma d'Euler.

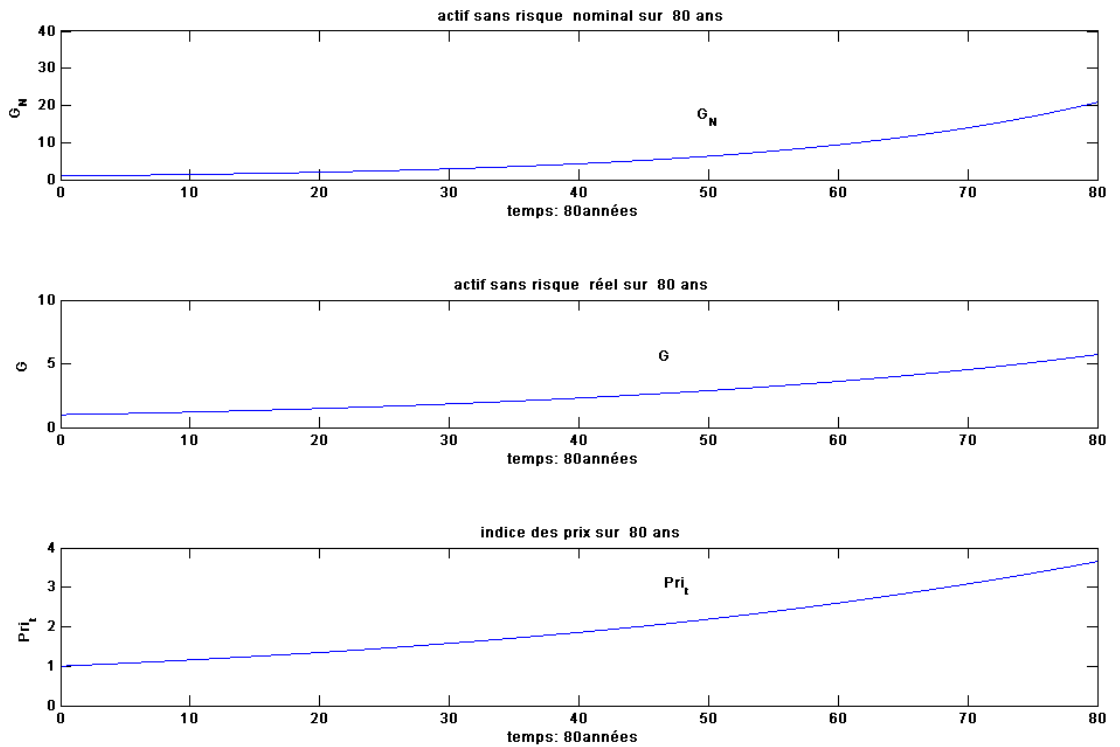


FIG. 3.2: simulation sur 80 ans du cash nominal et réel et du Prix

Proposition : 3.1 *Les hypothèses : (H_r) (hypothèse : 3.1.1, page : 230), (H_i) (hypothèse : 3.1.1, page : 230) , (H_A) (hypothèse : 2.1, page : 215) et (H_{Pri}) (hypothèse : 3.1, page : 232), avec les états limites, suffisent à la détermination*

des processus de tous les actifs du marché en A.O.A. Ainsi, nous avons :

- Pour le drift de tout actif risqué nominal $A_{iN}, 1 \leq i \leq n$:

$$\mu_{a_{iN}} = (\sigma_{a_{iN}} \lambda + r)$$

- Pour le zéro-coupon :

$$B(t, T) = \exp [A_r(\tau) - r_t C_r(\tau)] \quad (3.3)$$

avec $\tau = T - t$ et

$$C_r(\tau) = \frac{1}{k} [1 - e^{-k\tau}]$$

et

$$A_r(\tau) = \left(\theta - \frac{1}{k} \sigma_r \lambda - \frac{1}{2k^2} \sigma_r \sigma_r^T \right) (C_r(\tau) - \tau) - \frac{1}{4k} \sigma_r \sigma_r^T (C_r(\tau))^2$$

- Pour le zéro-coupon indexé :

$$B_i(t, T) = \exp [A(\tau) + i_t C_i(\tau) - r_t C_r(\tau)] \quad (3.4)$$

où $\tau = T - t$

$$C_i(\tau) = \frac{1}{a} [1 - e^{-a\tau}]$$

$$C_r(\tau) = \frac{1}{k} [1 - e^{-k\tau}]$$

et

$$A(\tau) = A_r(\tau) + A_i(\tau) + A_{i,r}(\tau) + A_{\text{Pri}}(\tau)$$

avec

$$A_i(\tau) = - \left(b - \frac{1}{a} \sigma_{\text{inf}} \lambda - \frac{1}{2a^2} \sigma_{\text{inf}} \sigma_{\text{inf}}^T \right) (C_i(\tau) - \tau) - \frac{1}{4a} \sigma_{\text{inf}} \sigma_{\text{inf}}^T (C_i(\tau))^2$$

et

$$A_{i,r}(\tau) = \left(-\frac{1}{ak} \sigma_{\text{inf}} \sigma_r^T \right) \left(\frac{1}{a+k} [1 - e^{-(a+k)\tau}] - C_r(\tau) - C_i(\tau) + \tau \right)$$

et encore

$$A_{\text{Pri}}(\tau) = \sigma_{\text{Pri}} [(C_r(\tau) - \tau) \sigma_r^T - (C_i(\tau) - \tau) \sigma_{\text{inf}}^T - \lambda \tau]$$

Preuve de la proposition : 3.1 *Les paramètres des diffusions, la prime de risque et les états limites étant exogènes au modèle les seuls éléments manquants pour cerner complètement les processus des actifs sont alors les drifts pour les actifs risqués fondamentaux et les actifs contingents eux mêmes. Le cash et les prix étant naturellement déduits de leur définition première (1.5).*

- *Pour le drift de tout actif risqué nominal $A_{iN}, 1 \leq i \leq n$ la démonstration découle directement du principe d'équilibre par arbitrage et de la définition de la prime du risque :*

$$\mu_{a_{iN}} - r = \sigma_{a_{iN}} \lambda$$

- *Pour les zéro-coupons : la formule du zéro-coupon nominal est la même que celle de Vasicek (1977) et peut aussi se déduire de celle du zéro-coupon indexé en prenant $\frac{\text{Pri}(T)}{\text{Pri}(t)} = 1$ ou en annulant à la fois l'inflation "i" et le paramètre de diffusion des prix σ_{Pri} . Nous établissons d'abord la définition des zéro-coupon (équations : 1.6 et 1.9), puis nous procédons par calcul direct par la méthode dite de "martingales" en utilisant les différentes propriétés des entités mathématiques en présence.*

Nous détaillons les calculs aboutissant aux formules des zéro-coupons en annexe (annexe : D). Les paramètres de diffusions des zéro-coupons sont :

- Pour le zéro-coupon classique :

$$\sigma_B = -\frac{(1 - e^{-k\tau})}{k} \sigma_r$$

- Pour le zéro-coupon indexé réel :

$$\sigma_{Bi} = \frac{(1 - e^{-a\tau})}{a} \sigma_i - \frac{(1 - e^{-k\tau})}{k} \sigma_r$$

La volatilité du zéro-coupon sur le taux d'intérêt est évidemment la même que celle du zéro-coupon de Vasicek (1977) tandis que celle du zéro-coupon indexé correspond à une différence de volatilités sur les taux d'inflation et d'intérêt. Or c'est effectivement cette différence de taux qui est à l'origine des valeurs réelles de tout actif. Nous simulons ici un seul actif risqué représentatif du marché, ayant la valeur initiale aléatoirement fixée à 47.6561 euros.

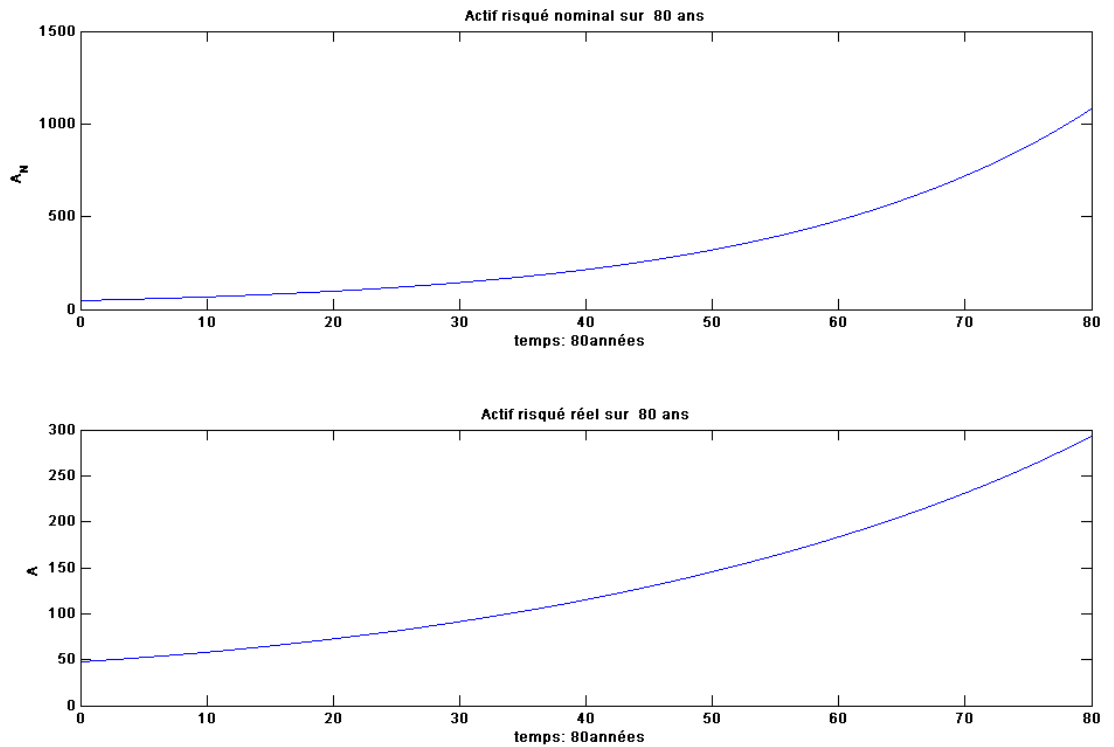


FIG. 3.3: Simulations sur 80 ans en jours ouvrés d'un actif risqué en nominal et en réel

Pour la simulation des obligations, nous pencherons cette fois pour une discrétisation directe à partir des formules (équations : 3.4 et 3.3). Dans cette forme de simulation, à chaque itération, l'obligation est directement exprimée avec sa formule. Nous donnons ici une simulation des zéro-coupons sur 80 ans d'échéance à partir des valeurs déjà utilisées pour les simulations des taux.

FIG. 3.4: simulation des zéro-coupons indexé et non sur 80 ans d'échéance

Le temps total moyen d'exécution des éléments du marché est de 500 secondes à peu près.

3.1.2 Passif

Pour une simulation de la population du fonds, nous faisons les choix suivants :

- Il y a trois individus dans la population ayant différents âges d'embauche, de retraite et âge à la date d'ouverture du fonds de pension.
- La fonction de survie suit une loi de Weibull Généralisée (équation : 3.5 suivante).
- Les pensions instantanées évoluent avec les salaires à partir d'une somme fixe individuelle b_{x_0} en début de participation au fonds et en PD.

La probabilité d'être toujours en vie à l'âge t_x , pour un individu d'âge x :

$$P(\tau_x \geq t_x) = \exp \left\{ 1 - \left(1 + \left(\frac{t_x}{\theta_w} \right)^{\nu_w} \right)^{1/\gamma_w} \right\}, \quad (\theta_w, \nu_w, \gamma_w > 0) \quad t_x \geq 0 \quad (3.5)$$

Et la densité de survie μ_{t_x} à t_x qui s'obtient par :

$$\frac{dP_{t_x}}{P_{t_x}} = \frac{d\mu_{t_x}}{P_{t_x}} = \frac{-\nu_w}{\gamma_w \theta_w} \left(1 - \left(\frac{t_x}{\theta_w} \right)^{\nu_w} \right)^{\frac{1-\gamma_w}{\gamma_w}} \left(\frac{t_x}{\theta_w} \right)^{\nu_w-1} \quad (3.6)$$

Nous donnons ici les valeurs de $N(t)$ de la population du fonds à $t = 0$.

Données $N(t_0)$	Abderhamane	Martin	David
ax	15	25	40
âge a l'embauche (ex)	25	26	30
âge de la retraite (ro)	65	70	60
b _{x0}	0,003	0,0024	0,007
S _{x0}	60	80	100
pix la part fixe du revenu cotisée	0,065	0,08	0,1

TAB. 3.1: tableau des données $N(t)$ de la population du fonds de pension

ax est l'âge à la mise en place (ou participation au) du fonds. S_{x_0} est le revenu journalier à la date de création ou participation au fonds.

Nous fixons désormais les paramètres de la loi de survie comme suit :

$$\nu_w = 1, \quad \theta_w = 75 \quad \text{et} \quad \gamma_w = 0,5 \quad (3.7)$$

La simulation des éléments liés au passif conduit aux éléments suivants, notamment pour les différentes formes de la pension et des cotisations et du passif lui-même.

Cependant pour des soucis de commodité, nous prenons les taux d'intérêts et d'inflation constants égaux à la moyenne des taux simulés dans la section précédente de simulation du marché. Nous réduisons également à 500, le nombre d'itérations de Monte-Carlo afin d'obtenir des résultats dans un temps de calculs raisonnable.

Pour les pensions instantanées en PD et les cotisations instantanées en CD, nous prenons des pensions indexés sur les salaires pour le temps de travail effectué et évoluant ensuite avec les prix selon la date de décaissement pour le maintien du pouvoir d'achat.

Les premiers résultats de simulations tels que les évolutions des salaires ou les pensions et cotisations définies sont sans surprises puisque prédéterminés.

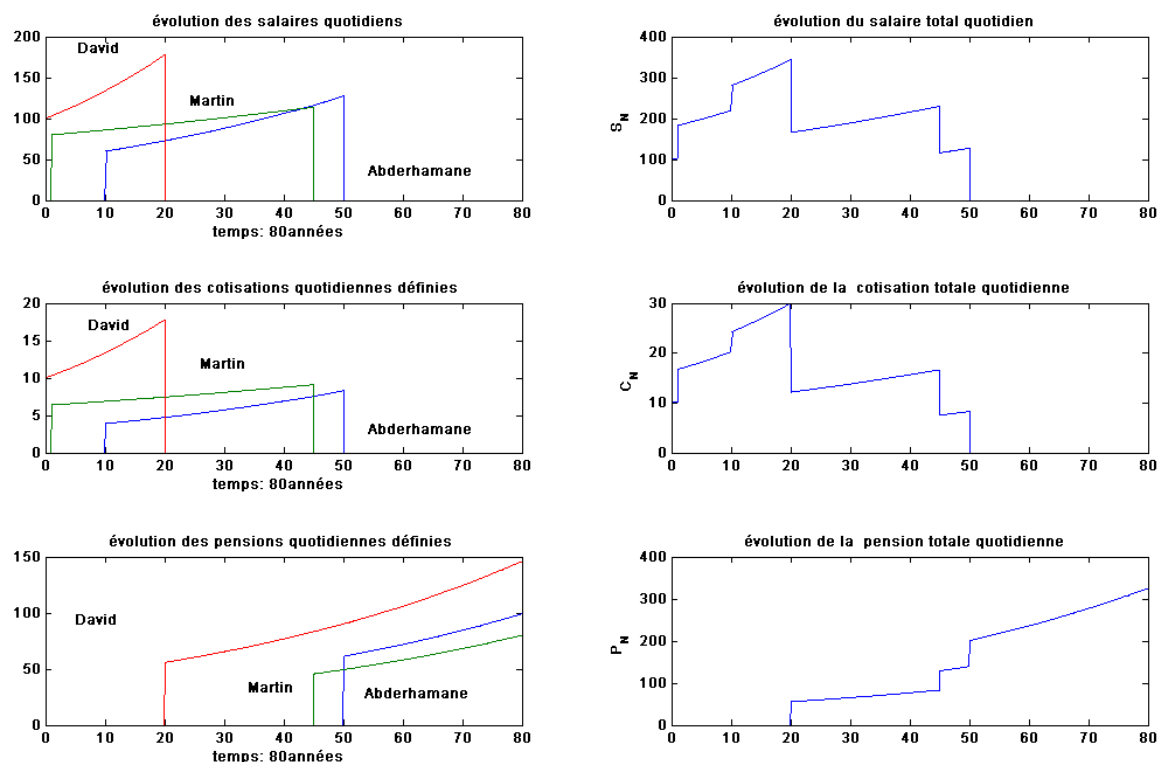


FIG. 3.5: simulation des salaires, des pensions en prestations définies, et cotisations en cotisations définies

Comme indiqué dans le tableau (3.1) de données $N(t)$ sur la population du fonds précédent, David est le plus âgé (40 ans) à la mise en place du fonds et est aussi le seul qui soit déjà en activité à cette date. Il commence avec un salaire quotidien de 100 unités monétaires et vingt ans après, à l'âge supposé de sa retraite à 60 ans, avec un salaire théorique quotidien de 177,4082 unités monétaires selon nos hypothèses d'évolution aléatoire des revenus. Martin, le puîné, est embauché une année après la mise en place du fonds de pension, à l'âge de 26 ans et avec un salaire de 80 unités monétaires. Ce qui l'amène à la retraite à 70 ans avec le salaire quotidien de 113,7453 unités monétaires. Abderhamane qui est le plus jeune, est embauché 10 ans après la mise en place du fonds et commence à participer à l'âge de 25 ans avec un salaire de départ de 60 unités monétaires. Juste avant la retraite, à 65 ans, son salaire sera théoriquement de 127,4933 unités monétaires.

Les cassures (brusques) dans les évolutions des revenus, témoignent des dates des entrées et des départs en retraites dans le fonds de pensions.

Les cotisations définies décrivent une parfaite homothétie avec les salaires individuels, du fait de leur adossement parallèle sur ces derniers. Quant aux pensions définies, bien qu'elles commencent naturellement juste à la retraite des individus elles se rapprochent plutôt de l'évolution des prix de la consommation, sur lesquels elles sont adossées. Avant d'observer leurs valeurs de plus près, nous allons d'abord donner les allures des valeurs d'équilibre des cotisations en prestations définies et des pensions en cotisations définies.

Remarque : 3.1 *David, l'aîné, prend sa retraite le plus tôt à un âge plutôt favorable par rapport aux plus jeunes. Cela est conforme à la tendance des réformes actuelles qui repoussent l'âge de la retraite pour les générations plus jeunes. Par contre le cadet, Abderhamane, prendra sa retraite plus tôt que Martin. Cela traduit un optimisme sur l'état futur des retraites, de leurs législations et réformes ou encore une supposition d'un fonds ayant à gérer plus d'un régime avec des règles différentes par régime.*

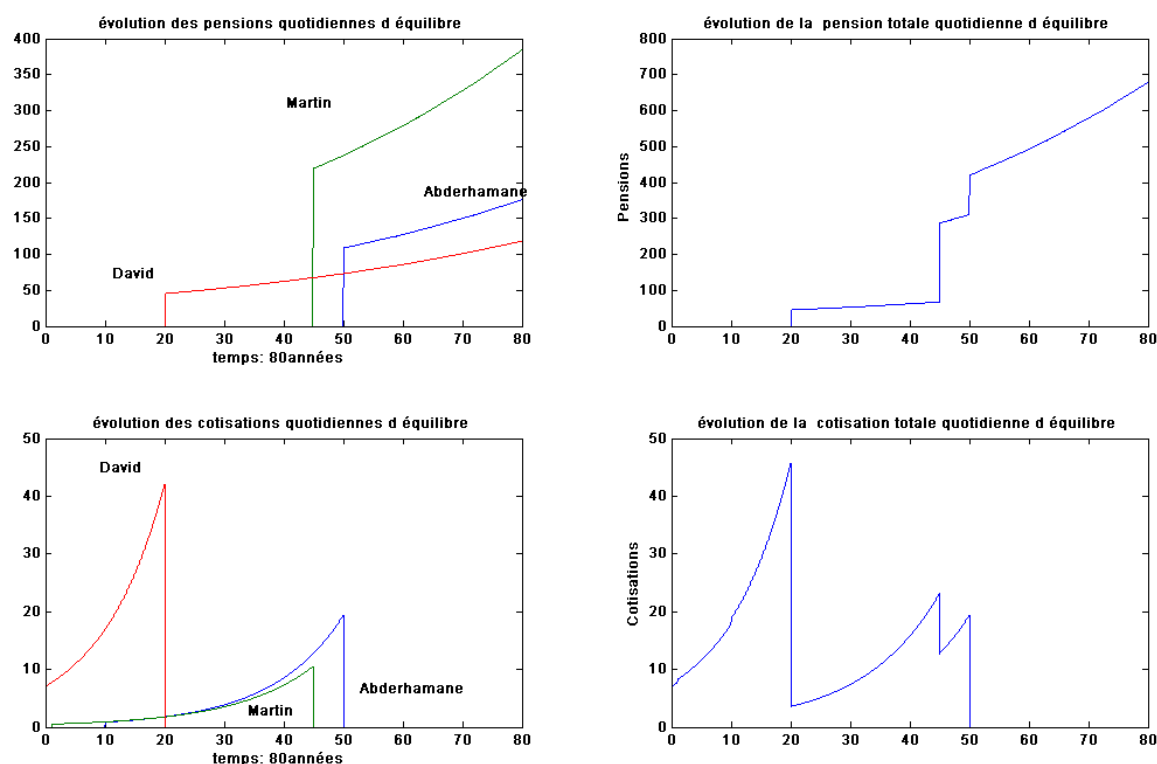


FIG. 3.6: simulation des cotisations d'équilibre en prestations définies et pensions d'équilibre en cotisations définies

Le premier constat frappant est le décalage des pensions d'équilibre en cotisations définies de Martin et des cotisations d'équilibre en prestations définies de David. Ceci est dû au calibrage de la probabilité de survie. Dans les équations : 1.40 et 1.39 (page : 184), les cotisations d'équilibre sont proportionnelles aux probabilités de survie, tandis que les pensions leur sont inversement proportionnelles. Martin ayant l'âge le plus reculé de prise de la retraite (70 ans) possède une probabilité de survie plus mince et donc des pensions d'équilibre plus grandes. David, quant à lui, est celui qui prend sa retraite le plus tôt (60 ans), ce qui lui donne à cet âge la plus grande probabilité de survie et donc la plus grande cotisation d'équilibre¹.

¹En effet, nous utilisons la même probabilité de survie sans distinction des générations mais seulement de l'âge. Lorsque nous changeons par exemple le paramètre γ_w de la probabilité de survie de 1/2 à 1/4 par exemple, la probabilité de survie à 70 ans passe de l'ordre de 7% à l'ordre du micron et donc les pensions d'équilibre de Martin passeraient également de l'ordre de la centaine d'unités monétaires à l'ordre du million d'unités monétaires.

Le deuxième constat concerne les pensions, aussi bien définies que d'équilibre, elles ne font que croître à partir de la retraite, au rythme des prix de la consommation sans tenir compte de la probabilité de survie. C'est uniquement dû au fait que nous évaluons les pensions à l'âge de la retraite où elles commencent à être effectives. Mais à partir de ce moment, nous ne considérons plus que leur valeur *absolue* éventuelle en cas de survie de l'individu. La probabilité de survie de l'individu est ici elliptique et n'entre en jeu que dans la distribution effective de ces valeurs de pensions, autrement dit dans l'évaluation du passif. Pour résumer, nous faisons la différence entre la valeur de la pension dont l'existence est soumise à la condition de survie de l'individu et la valeur actuelle des flux des futures pensions calculée avec les probabilités de survie de l'individu. Cette dernière valeur correspond évidemment au passif individuel.

Avant d'arriver à la simulation du passif du fonds envers sa population, nous allons nous focaliser sur la jonction des revenus avant et après retraite. En prestations définies, nous complétons simplement les salaires au delà de la retraites avec les pensions définies. En cotisations définies, les salaires sont complétés à partir de la retraite par les pensions d'équilibre.

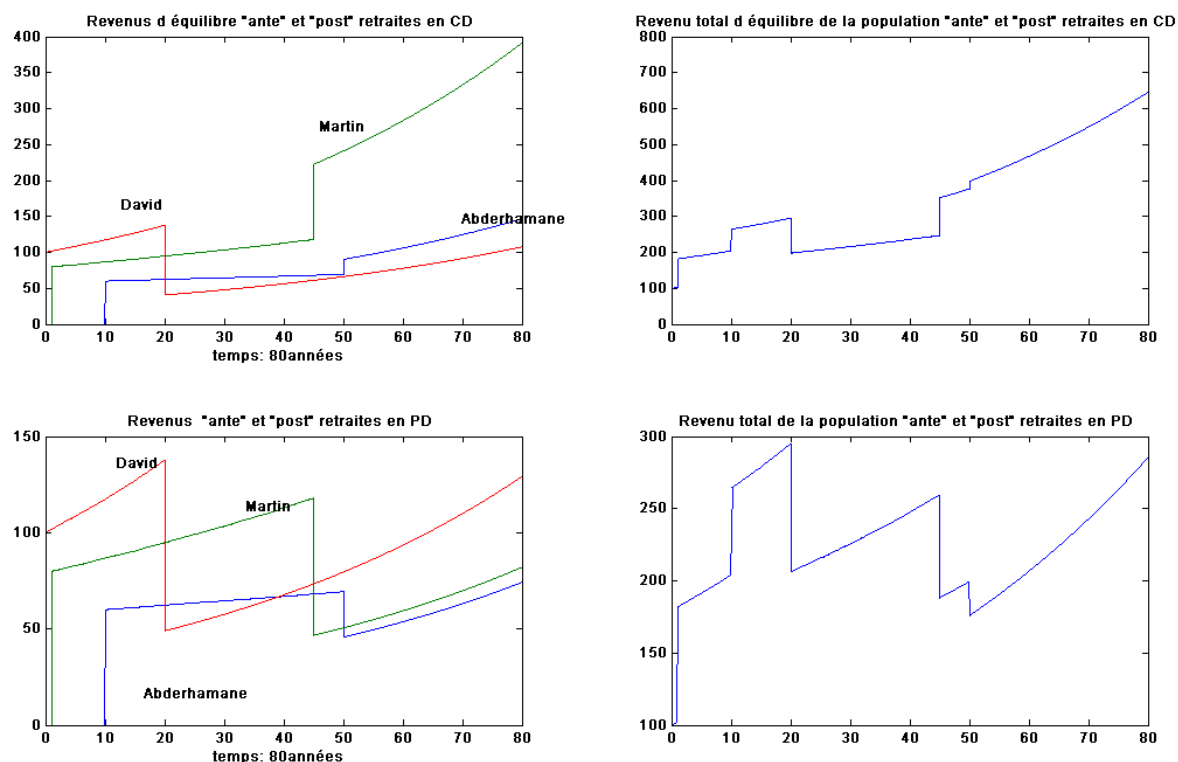


FIG. 3.7: simulation des revenus avant et après la retraite

À chaque départ en retraite, les revenus connaissent un décrochage le plus souvent vers le bas sauf pour Martin et Abderhamane en cotisations définies, du fait de la faible probabilité de survie à 70 ans et 65 ans.

La probabilité de survie est le ciment de la mutualisation du risque démographique assurantiel. Ainsi, la forte mortalité aux âges élevés profite aux survivants en matière de niveau de pension.

Comme la qualité des revenus à la retraite se mesure par le taux de remplacement¹, nous allons observer ces taux théoriques issus des simulations.

¹La première retraite rapportée sur le dernier salaire (voir paragraphe :1.3.1, page :36).

types	Abderhamane	Martin	David	moyenne
taux de remplacement d'équilibre en CD	129,91%	188,39%	29,62%	115,97%
taux de remplacement en PD	65,8%	39,51%	35,57%	46,96%

TAB. 3.2: Taux de remplacement de la population du fonds de pension

Les taux remplacement sont en moyenne très élevés en cotisations définies du fait de l'enjeu important tenu par la probabilité de survie. Les taux sont plus modestes en prestations définies mais restent quand même intéressants par rapport au taux minimum recommandé de 40% par l'O.I.T. pour une carrière complète (voir paragraphe :1.3.1, page :36). En prestations définies, comme en cotisations définies, David garde les taux les plus bas, mais ce score est dû au fait que la période de référence ou d'assurance¹ est incomplète. David n'a pas eu à cotiser pendant les premières années de travail.

Dans le strict respect des règles d'assurances et au seul regard de la qualité des pensions servies, on peut avancer que le fonds à cotisations définies est dans ce cas précis plus avantageux.

¹Période de travail donnant droit à des prestations de retraites.

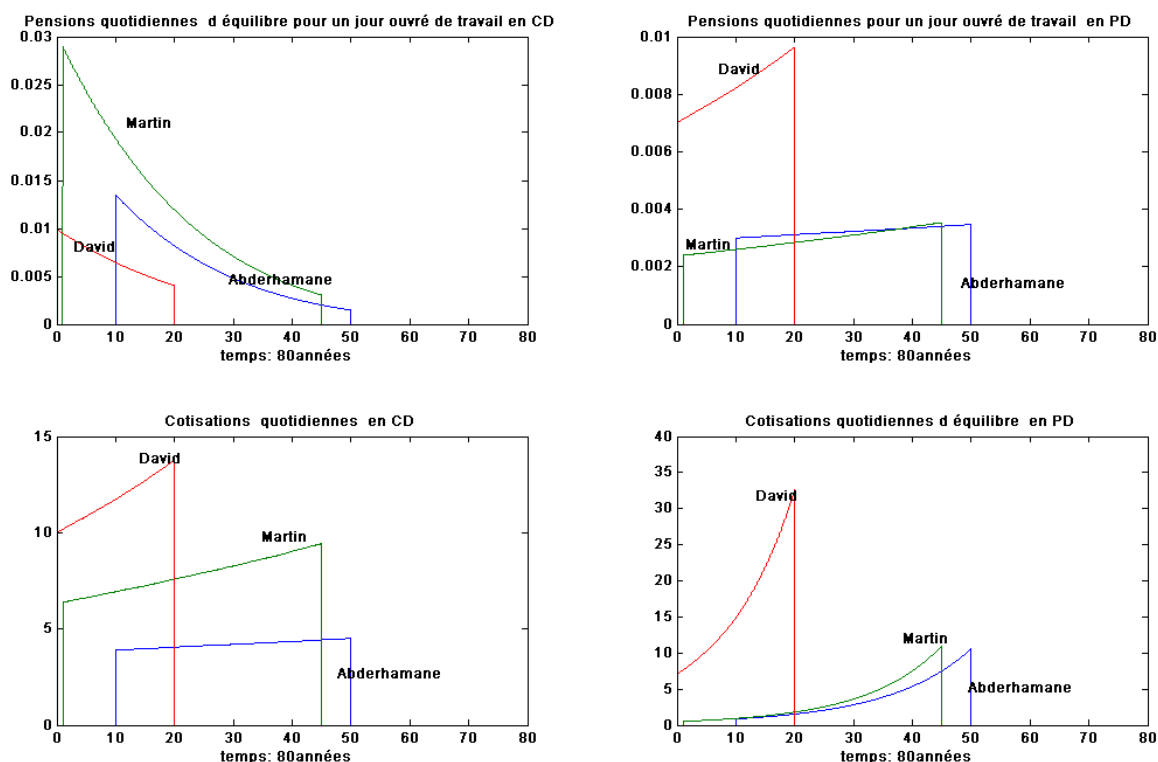


FIG. 3.8: Simulation des cotisations et pensions définies et d'équilibre

Avec des cotisations définies plutôt moins importantes que les cotisations d'équilibre en prestations définies, les pensions quotidiennes d'équilibre pour un jour ouvré de travail fourni restent plus importantes que leurs homologues définies. Mais bien évidemment, cette analyse repose sur le strict respect des règles et principes d'assurances, or les fonds à cotisations définies sont plutôt perçus dans la pratique, comme des outils financiers.

Sur le plan assurantiel, les pensions d'équilibres devraient être garanties aux membres du fonds à cotisations définies. Deelstra et al. (2002) étudient la garantie optimale en cotisations définies, mais sur un plan purement financier.

Du point de vue du gérant du fonds, étant donné la présence des aléas financiers en sus des aléas démographiques, l'élément qui a encore plus d'intérêt que les pensions, est le passif du fonds qui résume à tout instant le cumul des engagements

pris et qui restent à honorer.

Nous donnons le passif en prestations définies.

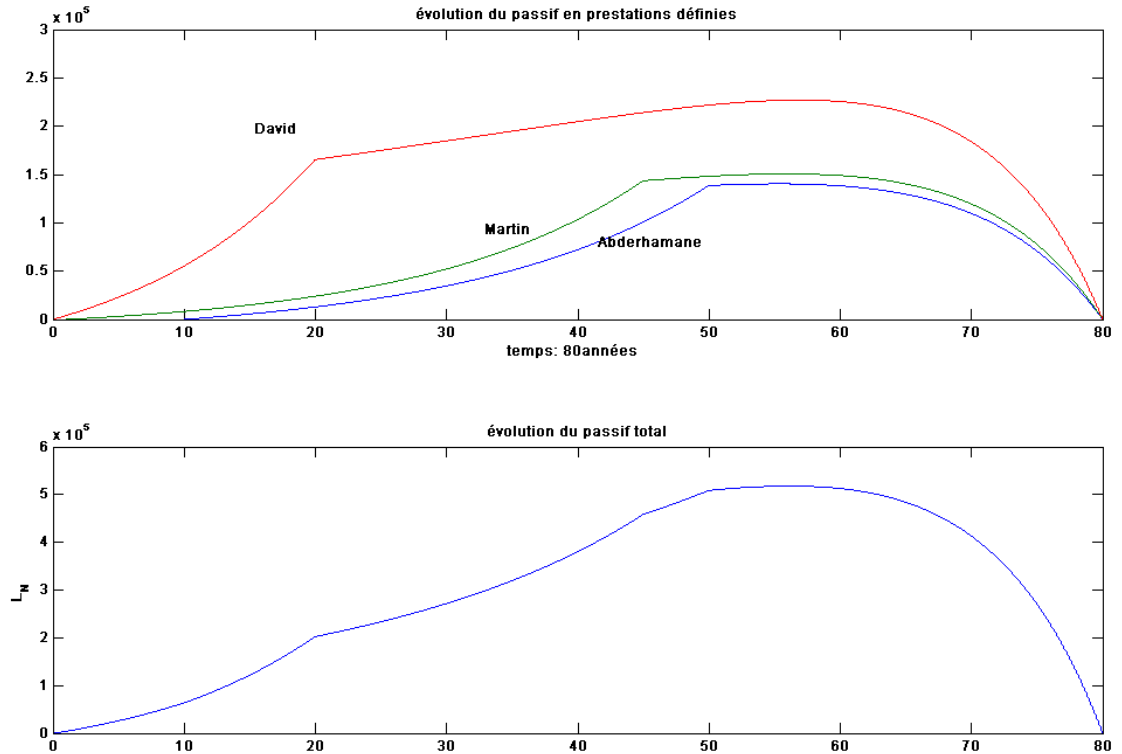


FIG. 3.9: Simulation du passif du fonds en prestations définies

Nous constatons que les engagements du fonds par rapport aux individus augmentent jusqu'à la retraite avant de régresser de manière curviligne du fait d'une part des probabilités de survie et des facteurs d'actualisation, mais aussi et surtout du paiement effectif des pensions qui réduisent les engagements. L'évolution des prix sur lesquels sont indexés les pensions font, par contre, grimper sensiblement les engagements même un peu après la retraite. Comme notre échéance de simulations, l'infini théorique pris à 80 ans de vie du fonds, est la même pour toute la population du fonds, les passifs s'arrêtent tous à la même date de mort commune à toute la population.

Cet infini théorique traduit une mort probable à 95 ans pour Abderhamane, 105 ans pour Martin et 120 ans pour David.

Nous donnons également le passif évalué à partir des pensions d'équilibre en cotisations définies.

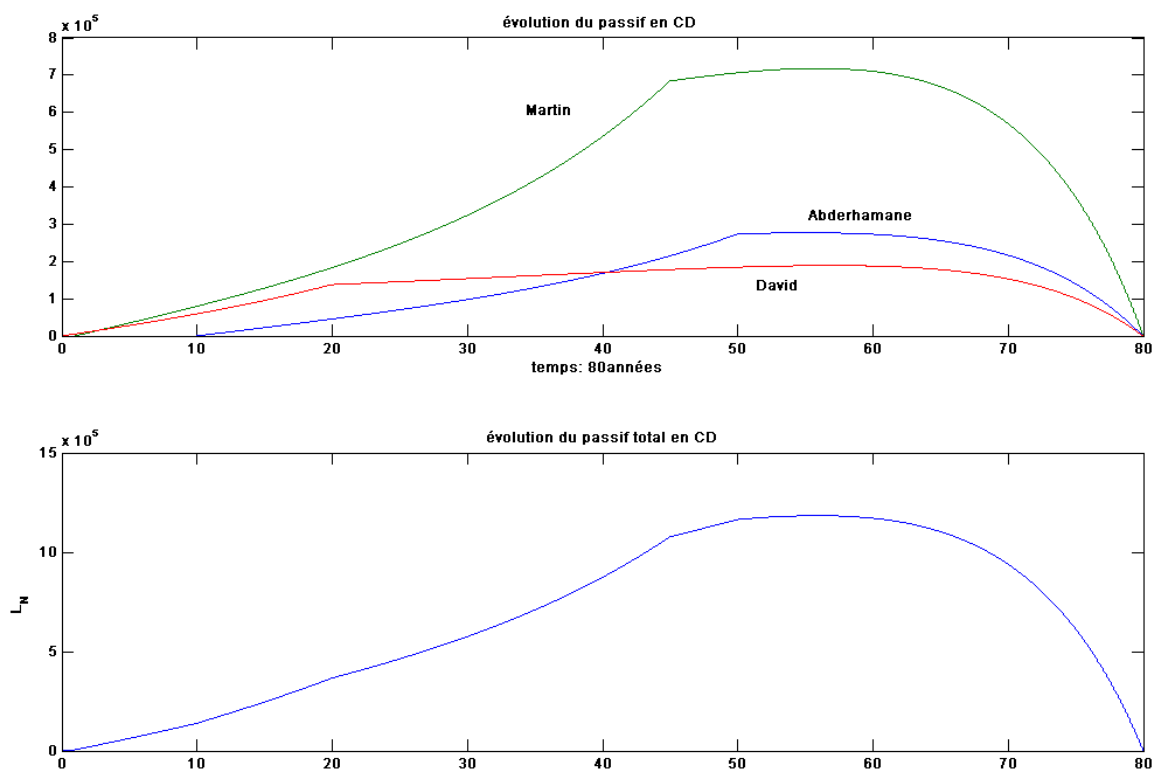


FIG. 3.10: Simulation du passif du fonds en cotisations définies

Du fait de l'effet, déjà rappelé plus haut, de la mutualisation du risque de mortalité, Martin ayant la date de départ en retraite la plus élevée, accède à la pension la plus haute mais aussi est celui envers lequel le fonds accumule le plus d'engagements.

Les exemples suivants traiterons du contrôle des risques du marché qui sont eux non mutualisables et tout aussi déterminants en gestion de fonds de pension.

3.2 Analyse en horizon fini

La gestion du fonds de pension est souvent confrontée à des impératifs d'échéance. Il peut s'agir, entre autres, d'un mandat de gestion limité dans le temps ou tout simplement d'un cap que se fixe le gérant avec des objectifs. Dans de tels cas, l'horizon de gestion est fixe et prédéterminé.

La particularité intéressante dans un horizon fini est la justification d'une utilité sur la richesse finale. On s'intéresse à la situation finale du fonds à l'horizon et la gestion actuelle se fait en respect des contraintes temporelles et pour une optimalité à l'horizon.

3.2.1 Conditions d'optimalité en horizon fini

Soit donc $g = 0$ et $m = 0$ dans V qui est alors nul et fait porter l'optimisation sur le leg.

Par ailleurs dans ce type de gestion, nous reconsidérerons les flux de consommation sous l'hypothèse simplificatrice suivante.

Hypothèses : 3.1 *Utilité finale*

Lorsque l'utilité porte sur la richesse finale, alors :

– le partage de la variation du surplus n'existe pas :

$$(\phi \equiv 0) ;$$

– le flux instantané d'échange entre la cotisation et la pension est nul :

$$c(t) - P(t) = 0 .$$

Cette hypothèse, très restrictive, sur la consommation du fonds puisqu'elle annule tout flux externe au portefeuille, traduit un système de fonds où les cotisations récoltées égalent les pensions à payer et où la stratégie du fonds ne permet pas de partage de variation du surplus. Dans les faits, une telle situation est plutôt propre aux fonds individuels à cotisations définies et avant l'âge de la retraite. La richesse

initiale inclut toutes les cotisations futures et les pensions sont nulles puisque inexistantes encore. C'est l'hypothèse utilisée par Devolder (2002), Haberman et al. (2004) ou Boulier et al. (2001). Nous retiendrons que dans un cas de cotisations définies sans minimum garanti, le fonds peut revêtir un caractère individuel et donc l'utilité de la richesse finale sera celle du membre du fonds.

La condition limite de l'utilité indirecte est :

$$J(X, Y, T) = e^{-\varphi T} \frac{X_T^\gamma}{\gamma} e^{c_{YT} Y} \quad (3.8)$$

Avec c_{YT} , une constante liée à l'aversion pour le risque, des opérateurs. Mais comme nous avons défini un model bifactoriel basé essentiellement sur les taux (hypothèse : H_r et H_i), nous réduisons le vecteur des variables d'états Y , aux seuls taux r et i . Pour rejoindre une formulation de l'utilité très proche de celle utilisée par Cairns et al. (2004) dans un cas monofactoriel sur le taux d'intérêt.

$$J(X, r, i, T) = e^{-\varphi T} \frac{X_T^\gamma}{\gamma} e^{r c_{1T} + i c_{2T}} \quad (3.9)$$

Naturellement, nous nous dirigerons vers une utilité à tout instant avant l'horizon de la forme :

$$J(X, r, i, t) = e^{-\varphi t} \alpha(t) \frac{(X_t + d(t))^\gamma}{\gamma} e^{r c_1(t) + i c_2(t)} \quad (3.10)$$

avec α , d , c_1 et c_2 des fonctions continues et dérivables du temps, respectant les conditions limites suivantes :

$$\lim_{t \rightarrow T} \alpha(t) = \alpha(T) = 1, \quad (3.11)$$

$$\lim_{t \rightarrow T} d(t) = d(T) = 0 ,$$

$$\lim_{t \rightarrow T} c_1(t) = c_1(T) = c_{1T} ,$$

$$\lim_{t \rightarrow T} c_2(t) = c_2(T) = c_{2T}$$

3.2.2 Solutions

Les solutions concerneront les allocations optimales pour le portefeuille de fonds de pension mais aussi l'utilité optimale du critère de choix.

Utilité optimale

Les résultats obtenus sur l'utilité indirecte, avec des taux en processus d'Ornstein Uhlenbeck, sont quasi identiques pour tous les numéraires à la fonction $\alpha(t)$ près. Nous détaillerons donc α_N pour une utilité sur le nominal et α_L pour le cas du numéraire passif. La notation par défaut est α et s'utilise pour le numéraire du prix. Nous donnons les solutions issues de la résolution du programme (p_1) à travers la résolution de l'équation différentielle partielle de H.J.B. sur la base de l'utilité et des hypothèses précédentes.

$$c_1(t) = \frac{\gamma}{k} + \left[c_{1T} - \frac{\gamma}{k} \right] e^{-k(T-t)}$$

$$c_2(t) = -\frac{1_{Pri}\gamma}{a} + \left[c_{2T} - \frac{1_{Pri}\gamma}{a} \right] e^{-a(T-t)}$$

et $d = 0$

(3.12)

Posons en outre :

$$c_{1,2}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{1}{\gamma-1} \lambda_{rr}^T \lambda_{rr} - \frac{1}{\gamma-1} (c_2 \sigma_i \lambda_{rr} + c_1 \sigma_r \lambda_{rr}) + \frac{1}{\gamma} (c_1 k\theta + c_2 ab) + \sigma_{Pri} \sigma_{Pri}^T \\ -\frac{\varphi}{\gamma} - \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma(\gamma-1)} \left(\frac{1}{2} c_1^2 \sigma_r \sigma_r^T + \frac{1}{2} c_2^2 \sigma_i \sigma_i^T + c_1 c_2 \sigma_r \sigma_i^T \right) + \frac{1}{2} (\gamma + 1) (\eta_{Pri}^2) + \sigma_{Pri} \lambda_{rr} \end{cases} \quad (13)$$

$$c_{1,2,L}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{1}{\gamma-1} \lambda_L^T \lambda_L - \frac{1}{\gamma-1} (c_2 \sigma_i \lambda_L + c_1 \sigma_r \lambda_L) + \frac{1}{\gamma} (c_1 k\theta + c_2 ab) - \mu_{LN} + \sigma_{LN} \lambda_L \\ -\frac{\varphi}{\gamma} - \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma(\gamma-1)} \left(\frac{1}{2} c_1^2 \sigma_r \sigma_r^T + \frac{1}{2} c_2^2 \sigma_i \sigma_i^T + c_1 c_2 \sigma_r \sigma_i^T \right) + \frac{1}{2} (\gamma + 1) (\eta_{Pri}^2 + \sigma_{LN} \sigma_{LN}^T) \end{cases} \quad (14)$$

et

$$c_{1,2,N}(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{1}{\gamma-1} \lambda^T \lambda - \frac{1}{\gamma-1} (c_2 \sigma_i \lambda + c_1 \sigma_r \lambda) + \frac{1}{\gamma} (c_1 k\theta + c_2 ab) \\ -\frac{\varphi}{\gamma} - \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma(\gamma-1)} \left(\frac{1}{2} c_1^2 \sigma_r \sigma_r^T + \frac{1}{2} c_2^2 \sigma_i \sigma_i^T + c_1 c_2 \sigma_r \sigma_i^T \right) \end{cases} \quad (15)$$

alors

$$\alpha(t) = \gamma \int_t^T c_{1,2}(s) ds + 1 ; \quad \alpha_L(t) = \gamma \int_t^T c_{1,2,L}(s) ds + 1 \quad \text{et} \quad \alpha_N(t) = \gamma \int_t^T c_{1,2,N}(s) ds + 1 \quad (16)$$

Nous n'avons pas ici les mêmes conditions que Cairns et al. (2004) pour qui la condition à une solution a été l'annulation de la composante non duplicable du numéraire incarné par le salaire.

Allocations optimales

Les allocations optimales en actifs risqués s'écrivent alors :

$$u_{ab}^* = \frac{1}{1-\gamma} \Omega_{abN}^{-1} \sigma_{abN} \begin{bmatrix} \sigma_i^T c_2(t) \\ + \sigma_r^T c_1(t) \\ + \hat{\lambda} \end{bmatrix} + \Omega_{abN}^{-1} \sigma_{abN} \begin{pmatrix} 1_{\text{Pri}} \sigma_{\text{Pri}}^T \\ + 1_{\text{L}} \sigma_{\text{LN}}^T \end{pmatrix} \quad (17)$$

Avec $\hat{\lambda} = \lambda_N 1_N + \lambda_{\text{rr}} 1_{\text{Pri}} + \lambda_L 1_L$, le circonflexe étant en générale pour préciser que l'élément est à prendre avec son expression correspondante au numéraire d'usage.

Nous avons approximativement les mêmes résultats par choix du numéraire. Seules changent les primes du risque selon le numéraire et la couverture contre les variations du passif en numéraire du passif qui se transforme en couverture contre les prix en numéraire des prix et qui disparaît sans surprise en nominal.

Nous constatons également que les allocations sont indépendantes du niveau de la valeur du fonds. Elles tiennent compte directement des sources d'incertitudes à travers les volatilités et les primes de risques sans passer par la richesse.

En ne gardant qu'un numéraire qui soit le passif, ou les prix, nous retrouvons une forte similitude de l'allocation 17 avec le résultat en trois fonds de Cairns et al. (2004), bien que le numéraire y soit le salaire et malgré l'absence de l'inflation des prix dans leur modélisation. Cairns et al. (2004) ont opté pour une structure monofactorielle en contributions définies avec une actualisation en t des contributions futures. Comme dans nos démarches, les contributions y sont des proportions constantes des revenus aléatoires non couverts par les actifs du marché incomplet. Par analogie à nos hypothèses où les flux de consommation sont nuls, dès que nous annulons le processus des cotisations futures actualisées, l'allocation optimale de

Cairns et al. (2004) devient aussitôt indépendante du niveau du fonds et rejoint notre résultat (17) sur ce premier point. Comme nous l'avons fait en statique (paragraphe :4.2.2, page : 125) mais aussi avec les résultats généraux présentés plus haut (paragraphe :2.3.3 et B.3.2), nous pouvons à l'image de Cairns et al. (2004), subdiviser le résultat global en plusieurs autres résultats issus de petits programmes d'optimisation.

Ainsi, en minimisant la variance du portefeuille sous numéraire, nous obtenons bien les résultats :

$$\Omega_{abN}^{-1} \sigma_{abN} \begin{pmatrix} 1_{\text{Pri}} \sigma_{\text{Pri}}^T \\ + 1_L \sigma_{LN}^T \end{pmatrix}$$

Ce qui vaut à cette équation l'assignation de la stratégie contre le risque du numéraire par Cairns et al. (2004) qui ont obtenu le même résultat. Lorsque nous ajoutons la maximisation de l'espérance des gains sur les actifs à la minimisation de la variance du portefeuille nominal, nous avons le résultat :

$$\frac{1}{2} \Omega_{abN}^{-1} \sigma_{abN} \lambda \tag{18}$$

On en déduit comme Cairns et al. (2004), que l'allocation constante :

$$\frac{1}{1 - \gamma} \Omega_{abN}^{-1} \sigma_{abN} \lambda \tag{19}$$

est la couverture du risque contre les actifs risqués du marché et permettant en outre l'efficience du portefeuille. Grasselli (2006) souligne que c'est l'allocation optimale constante dite de Merton, puisque c'est exactement l'allocation obtenue en stationnaire dans les développements originaux de Merton (1971). Ici aussi, en annulant les volatilités des taux, nous obtenons cette allocation en nominal.

Le terme restant :

$$\frac{1}{1-\gamma} \Omega_{abN}^{-1} \sigma_{abN} \begin{bmatrix} \sigma_i^T c_2(t) \\ + \sigma_r^T c_1(t) \end{bmatrix} \quad (20)$$

correspond à la couverture contre le risque dû aux deux variables d'état supplémentaires r et i et bien sûr dans la formulation de Cairns et al. (2004) la volatilité de i n'apparaît pas puisque le modèle est monofactoriel. Il est intéressant de souligner la proximité des entités $c_1(t)\sigma_r$ et $c_2(t)\sigma_{inf}$ avec les volatilités des zéros-coupon.

Si nos résultats sont quasi identiques à ceux de Cairns et al. (2004) avec un taux en processus d'Ornstein-Uhlenbeck, ils le sont encore tout autant à ceux de Menoncin et al. (2003) avec le numéraire du prix. Les seules différences viennent du fait que Menoncin et al. (2003), considèrent directement la part de la richesse à investir et non la proportion de la richesse du fonds ; par ailleurs, Menoncin et al. (2003) prennent la matrice σ_a , comme Cairns et al. (2004) prennent la matrice σ_{abN} carrée et inversible. Mais cette dernière condition contraint Menoncin et al. (2003) à annuler l'effet du taux pour avoir des résultats. Même en annulant les volatilités σ_r et σ_{inf} des taux et en considérant à la fois le numéraire des prix et un nouveau multiple $X(t)$ à notre allocation de l'équation : (17), pour avoir des parts plutôt que des proportions, nous n'aurons pas encore rigoureusement le même résultat d'allocation que Menoncin et al. (2003). Pour y parvenir, il faudrait appliquer à leur modélisation la condition $\phi = 0$ et une optimisation sur le portefeuille seul puisque Menoncin et al. (2003) optimisent la richesse augmentée de la réserve prospective.

Simulations

Nous donnons la simulation des résultats sur 60 ans en considérant le seul actif risqué. Pour ses simulations, nous avons pris les valeurs : $c1T = 2,5\%$, $c2T = 2\%$

et $\gamma = 0,02\%$ et aussi $X_o = 100$, $L_o = 60$ en unités monétaires. Nous divisons par quatre la valeur de la prime de risque précédemment donnée, afin de ne pas trop avantager les actions par rapport aux autres actifs. Tous les autres éléments du marché comme du passif gardant les valeurs précédemment simulées. La faible valeur de γ , nous donne un coefficient d'aversion relative pour le risque (RRA) $1 - \gamma$ très proche de l'unité tout en rapprochant d'avantage l'utilité CRRA à une utilité logarithmique obtenue pour $\gamma = 0$. Nous avons donc des opérateurs plutôt risquophobes.

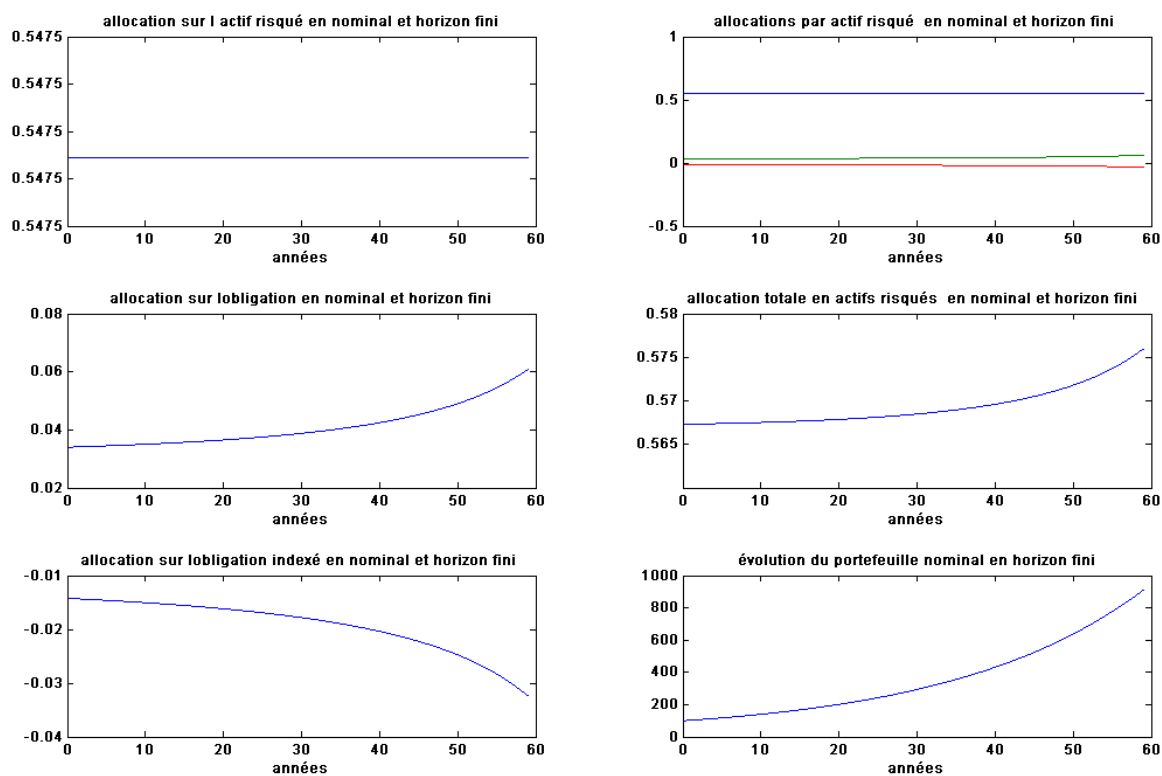


FIG. 11: Simulation de l'allocation optimale en actifs risqués et de la richesse nominale en horizon fini de 60 ans

Nous voyons bien que l'allocation sur l'actif risqué est quasi constante. Cette allocation admet pourtant bien des variations portées par c_1 et c_2 , comme le démontre l'expression de l'allocation sur un seul actif (équation : 2.26). Mais ces variations restent de l'ordre de 10^{-4} et sont peu visibles à côté de l'allocation sur

la couverture de l'actif risqué (équation : 19) ou allocation de Merton.

La croissance de l'allocation totale en actifs risqués nous révèle que, malgré la croissance de la richesse, le gérant du fonds continue à investir toujours plus en actifs risqués. Ce comportement découle sans doute du fait que les consommations sont absentes du modèle. Le gérant du fonds alloue une part relativement importante de sa richesse à l'actif risqué (autour des 54,75%). L'allocation sur le zéro-coupon classique, qui est relativement modeste (de l'ordre de 3,4% initialement), croît et double presque sa valeur vers l'échéance. Pour allocation optimale, le gérant devra donc investir sur le zéro-coupon quand sa valeur augmentera. Il en est ainsi parce que l'allocation sur le zéro coupon, comme le zéro-coupon, lui-même, doivent leur augmentation dans le temps à un facteur commun : $e^{-(T-t)}$. L'allocation sur le zéro-coupon indexé est, quant à elle, plutôt décroissante vers l'échéance ou l'horizon. Mais ceci reste tout à fait compatible avec la première explication puisque cette allocation est négative. En valeur absolue, le gérant du fonds investit encore plus sur le zéro-coupon indexé à mesure que sa valeur augmente. Les allocations sur les zéros-coupons varient plus que l'allocation sur l'actif risqué, parce que les volatilités des zéros-coupon dans l'équation : 2.26 (page : 223) sont déjà variable et endogènes tandis que la volatilité de l'actif risqué est constante et exogène. Au total donc le gérant du fonds emprunte sur le zéro-coupon indexé et sur le cash pour investir sur le zéro-coupon classique et l'actif risqué fondamental qui sont plus volatils mais plus rentables aussi. En l'absence de flux de consommation, la principale préoccupation semble être l'accroissement de la richesse qui va alors de paire avec l'accroissement de l'allocation totale en actifs risqués. Le fonds gardera les mêmes tendances quel que soit le numéraire.

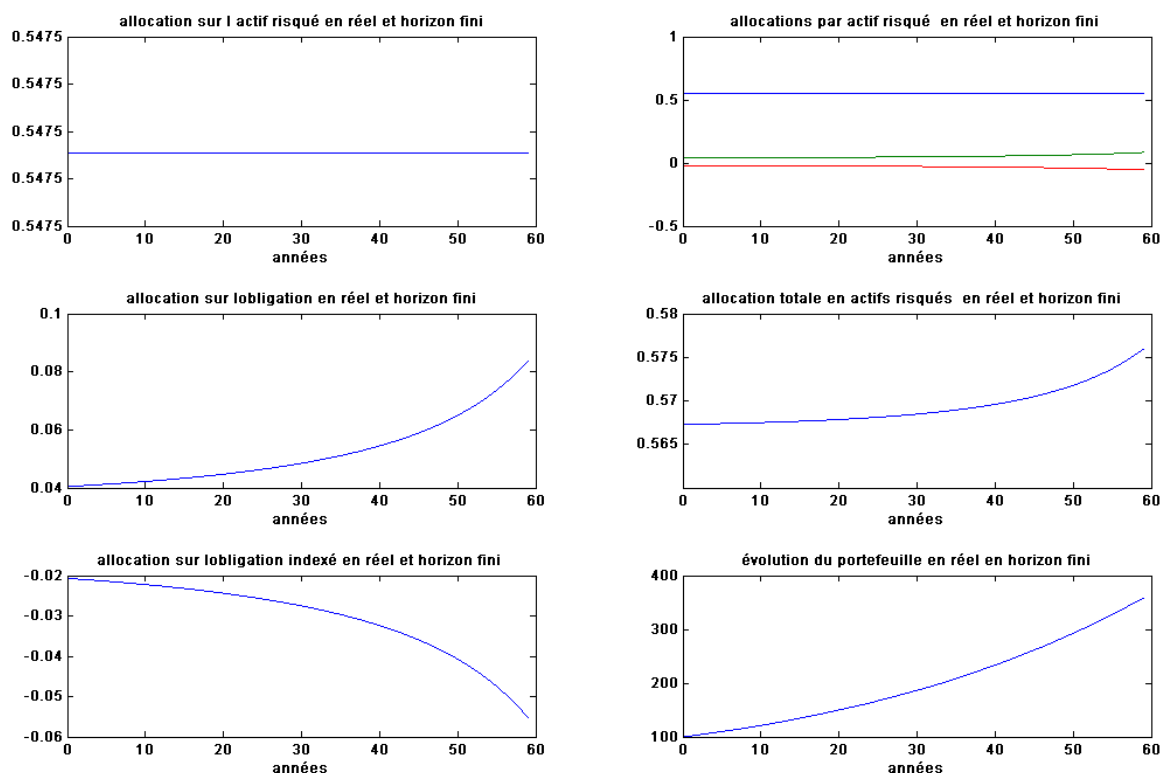


FIG. 12: Simulation de l'allocation optimale en actif risqué et de la richesse réelle en horizon fini de 60 ans

En valeurs réelles, l'allocation sur l'unique actif risqué fondamental, reste la même qu'en nominale. Mais sur le zéro-coupon, le cas réel présente un investissement légèrement moindre et fait plus confiance en valeur absolue, en tout cas, au zéro-coupon indexé.

Avec près de 71,1% du surplus investi sur l'actif risqué, le cas du numéraire du passif semble le plus avide de rentabilité haute. Comme on le voit sur le graphe qui suit, seul l'allocation sur le zéro-coupon indexé reste très proche des autres cas de numéraire, avec un investissement initial autour de -2% pendant que l'investissement sur le zéro-coupon commence à près de 7%.

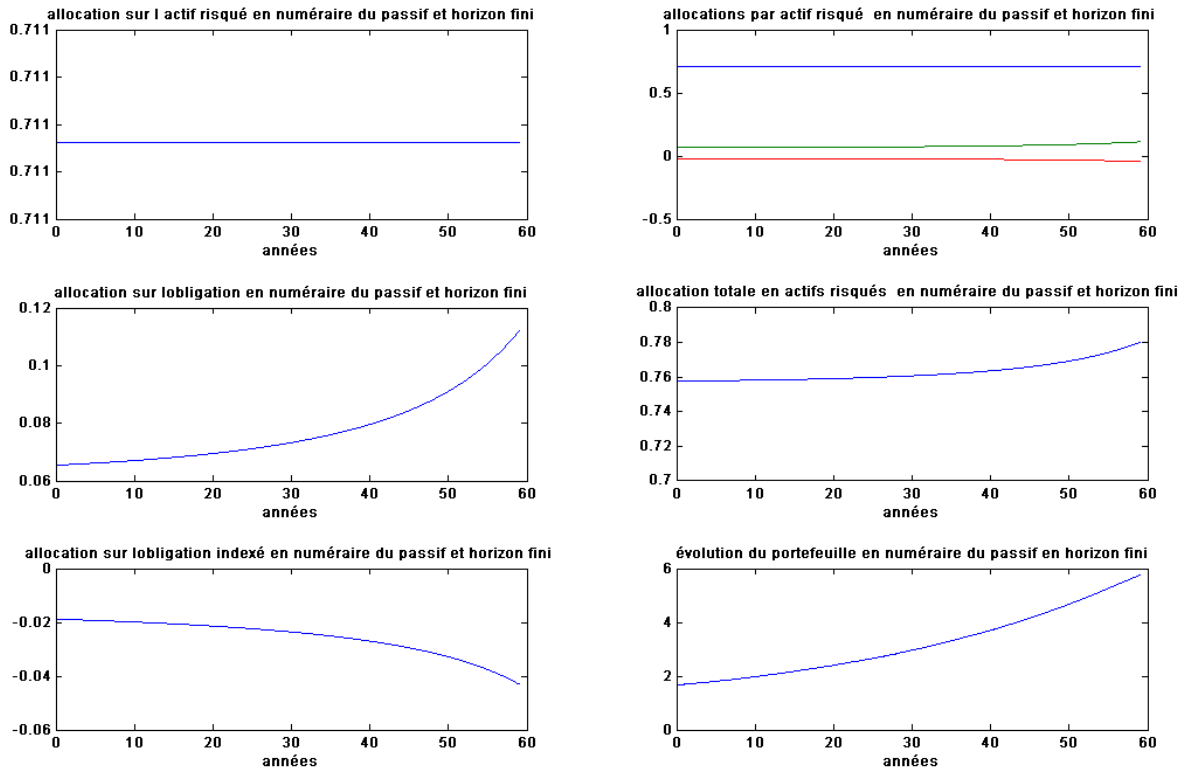


FIG. 13: Simulation de l'allocation optimale en actif risqué et de la richesse en numéraire du passif en horizon fini de 60 ans

Dans les trois types de numéraire, nous avons toujours au moins une allocation qui reste quasi identique pour deux types de numéraires et seule l'allocation sur l'obligation indexée reste très proche pour tous les types de numéraires.

Lorsque les consommations seront prises en compte, comme en horizon libre, nous pouvons parier avoir des tendances différentes, ne serait-ce que sur la recherche systématique de la meilleure rentabilité. Du fait de l'absence d'opportunité d'arbitrage, une meilleure rentabilité est nécessairement liée à une plus forte volatilité. Il serait alors adéquat de mieux cerner ici le risque de faillite ou la probabilité de ruine du fonds de pension.

2.3 Probabilité de ruine du fonds de pension

Plutôt que de considérer directement la probabilité que le fonds ait un niveau final nul ou négatif, nous allons considérer la probabilité générale, à tout instant t que le fonds ait un niveau nominal inférieur à une valeur nominale x donnée. Le cas particulier de la ruine à terme étant obtenu par $t = H$ et $x = 0$. Nous prenons uniquement la valeur nominale, les probabilités issues des autres valeurs s'obtenant de manière identique.

Rappelons l'expression de la richesse nominale (équation : 2.3) à t :

$$\frac{dX_N}{X_N} = (u_{ab}^T \sigma_{abN} \lambda + r_t) dt + u_{ab}^T \sigma_{abN} dz_t$$

et

$$X_N(t) = X_N(0) \exp \left\{ \int_0^t (u_{ab}^T \sigma_{abN} \lambda + r_s + \frac{1}{2} u_{ab}^T \Omega_{abN} u_{ab}) ds + \int_0^t u_{ab}^T \sigma_{abN} dz_s \right\} \quad (21)$$

Dés à présent, nous voyons de cette dernière équation que X_N est une exponentielle et ne peut être négative ou nulle que si, et seulement si, la valeur initiale $X_N(0)$ est négative ou nulle. Nous considérons pour la suite que $X_N > 0$ et $x > 0$. x sera alors un seuil test pour X_N .

Connaissant l'expression du taux r :

$$r(t) = \theta (1 - e^{-kt}) + r_0 e^{-kt} + k \int_0^t e^{-k(t-u)} \sigma_r dz_u \quad (22)$$

Et de l'allocation u_{ab} , nous tirons les intégrales :

$$\int_0^t u_{ab}^T \sigma_{abN} \lambda + r_s ds = \left[\begin{array}{l} c_{2T} e^{-aT} \frac{1}{a} (e^{at} - 1) \sigma_i \lambda \\ \frac{1}{1-\gamma} \left(\begin{array}{l} + (\frac{\gamma}{k} + (c_{1T} - \frac{\gamma}{k}) e^{-kT} \frac{1}{k} (e^{kt} - 1)) \sigma_r \lambda + \lambda^T \lambda t \\ + \theta t - (r_0 - \theta) \frac{1}{k} (e^{-kt} - 1) + k \int_0^t \int_0^s e^{-k(s-u)} \sigma_r dz_u ds \end{array} \right) \end{array} \right] \quad (23)$$

et

$$\int_0^t \left(\frac{1}{2} u_{ab}^T \Omega_{abN} u_{ab} \right) ds = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-\gamma} \right)^2 \left[\begin{array}{l} c_{2T}^2 e^{-2aT} \frac{1}{2a} (e^{2at} - 1) \sigma_i \sigma_i^T + \lambda^T \lambda t \\ + \left(\begin{array}{l} (\frac{\gamma}{k})^2 + (c_{1T} - \frac{\gamma}{k})^2 e^{-2kT} \frac{1}{2k} (e^{2kt} - 1) \\ + 2 (\frac{\gamma}{k}) (c_{1T} - \frac{\gamma}{k}) e^{-kT} \frac{1}{k} (e^{kt} - 1) \end{array} \right) \sigma_r \sigma_r^T \\ + 2 c_{2T} e^{-aT} \frac{1}{a} (e^{at} - 1) \sigma_i \lambda \\ + 2 (\frac{\gamma}{k} + (c_{1T} - \frac{\gamma}{k}) e^{-kT} \frac{1}{k} (e^{kt} - 1)) \sigma_r \lambda \\ + 2 c_{2T} \left[\begin{array}{l} (\frac{\gamma}{k}) e^{-aT} \frac{1}{a} (e^{at} - 1) + \\ (c_{1T} - \frac{\gamma}{k}) e^{-(a+k)T} \frac{1}{a+k} (e^{(a+k)t} - 1) \end{array} \right] \sigma_i \sigma_r^T \end{array} \right] \quad (24)$$

$$\text{on a : } \int_0^t \int_0^s e^{-k(s-u)} \sigma_r dz_u ds = \frac{1}{k} \int_0^t (1 - e^{-k(t-s)}) \sigma_r dz_s$$

posons

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_{XN}(t) &= \int_0^t (u_{ab}^T \sigma_{abN} \lambda + r_s + \frac{1}{2} u_{ab}^T \Omega_{abN} u_{ab}) ds - \int_0^t \int_0^s e^{-k(s-u)} \sigma_r dz_u ds \\ \tilde{\sigma}_{XN}(t) &= \int_0^t u_{ab}^T \sigma_{abN} dz_s + \frac{1}{k} \int_0^t (1 - e^{-k(t-s)}) \sigma_r dz_s \end{aligned} \quad (25)$$

on a :

$$\text{Var}(\tilde{\sigma}_{XN}(t)) = \begin{bmatrix} \int_0^t (u_{ab}^T \Omega_{abN} u_{ab}) ds \\ + \frac{1}{k^2} \int_0^t (1 - e^{-k(t-s)})^2 \sigma_r \sigma_r^T ds \\ + \frac{2}{k} \int_0^t (1 - e^{-k(t-s)}) u_{ab}^T \sigma_{abN} \sigma_r^T ds \end{bmatrix}$$

Remarque : 3.2 $\tilde{\mu}_{XN}(t)$ est en fait le véritable drift de la richesse X_N puisqu'il est débarrassé du facteur aléatoire du taux r . Ce facteur aléatoire est reporté sur $\tilde{\sigma}_{XN}(t)$ qui devient alors la véritable volatilité.

La probabilité de ruine se note :

$$p(X_N(t) \leq x) = p\left(\tilde{\sigma}_{XN}(t) \leq \ln\left(\frac{x}{X_N(0)}\right) - \tilde{\mu}_{XN}(t)\right) \quad (26)$$

Soit à présent :

$$A_x(t) = \ln\left(\frac{x}{X_N(0)}\right) - \tilde{\mu}_{XN}(t) \quad (27)$$

si $A_x(t) < 0$ alors :

$$p(\tilde{\sigma}_{XN}(t) \leq A_x(t)) \leq p\left(|\tilde{\sigma}_{XN}(t)| \geq \frac{|A_x(t)|}{[\text{Var}(\tilde{\sigma}_{XN}(t))]^{\frac{1}{2}}}\right)$$

et comme $|\tilde{\sigma}_{XN}(t)|$ est Borel - mesurable et évidemment non négative ;
par l'inégalité de Chebychev nous avons en définitive :

$$p(\tilde{\sigma}_{XN}(t) \leq A_x(t)) \leq \frac{[\text{Var}(\tilde{\sigma}_{XN}(t))]}{A_x(t)^2}$$

si par contre $A_x(t) \geq 0$ alors :

$$p(\tilde{\sigma}_{XN}(t) \leq A_x(t)) = 1 - p(\tilde{\sigma}_{XN}(t) > A_x(t))$$

$$\text{or } p(\tilde{\sigma}_{XN}(t) > A_x(t)) \leq p(|\tilde{\sigma}_{XN}(t)| \geq |A_x(t)|)$$

et toujours par l'inégalité de Chebychev nous tirons :

$$p(\tilde{\sigma}_{XN}(t) \leq A_x(t)) \geq 1 - \frac{[\text{Var}(\tilde{\sigma}_{XN}(t))]}{A_x(t)^2}$$

Au total donc, la probabilité de ruine est, soit majorée par

$$\frac{[Var(\tilde{\sigma}_{XN}(t))]}{A_x(t)^2}$$

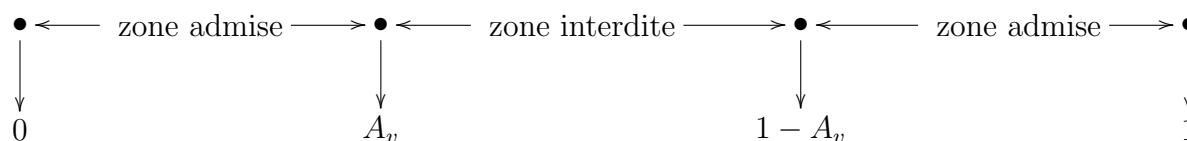
ou minorée par

$$1 - \frac{[Var(\tilde{\sigma}_{XN}(t))]}{A_x(t)^2}$$

. Ce résultat n'a d'intérêt que si le terme $\frac{[Var(\tilde{\sigma}_{XN}(t))]}{A_x(t)^2}$ est plus petit que l'unité puisque la comparaison se fait par rapport à une probabilité. Lorsque cette condition est remplie, il subsiste alors une zone interdite à la probabilité de ruine.

Posons $A_v = \frac{[Var(\tilde{\sigma}_{XN}(t))]}{A_x(t)^2}$. Avec la condition $0 \leq A_v \leq 1$ et le résultat précédent, la probabilité de ruine ne pourra jamais tomber dans l'intervalle $]A_v, 1 - A_v[$.

Remarque : 3.3 La fonction A_x (équation :27) précédente est croissante en x qui est le seuil. Donc lorsque le seuil est élevé la probabilité sera dans l'espace proche de l'unité donnant une forte probabilité de ruine. Inversement les faibles valeurs de x , sont susceptibles de donner des probabilités faibles. Ce qui est plutôt reconfortant.



Il y a deux zones admises pour la probabilité de ruine, de même amplitude A_v et situées aux extrémités. Elles sont séparées, au milieu, par une zone interdite à la probabilité de ruine et d'amplitude $1 - 2A_v$.

Le résultat s'il ne donne pas la probabilité exacte de la ruine, au moins permettra d'en connaître les limites. Nous en dégageons une portée possible à travers les simulations suivantes.

Simulations de la probabilité de ruine

Nous considérons tout d'abord un cas avec un petit seuil égal à 5% de la richesse initiale. Le tout, dans la même même structure de marché que précédemment.

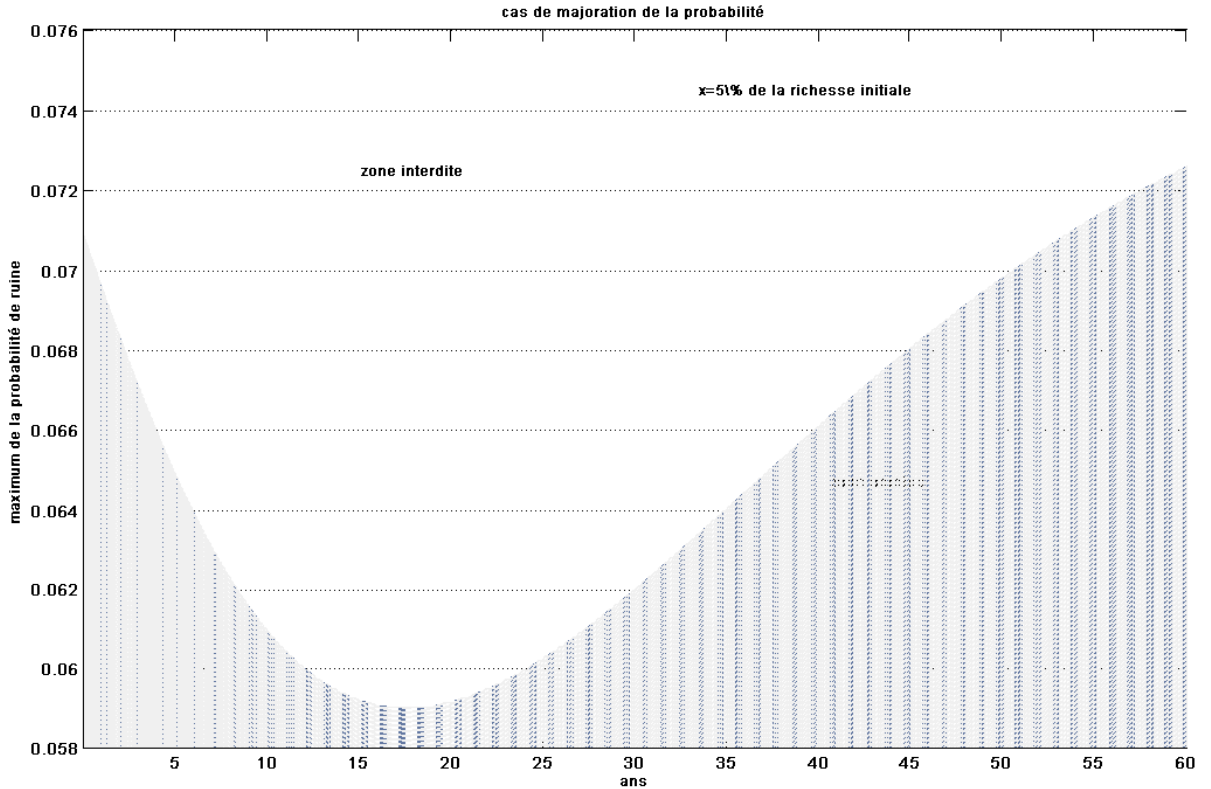


FIG. 14: Cas de majoration de la probabilité de ruine avec un seuil égal à 5% de la richesse initiale

Les limites de la probabilité de ruine ne fluctuent pas de façon monotone, comme on pourrait s'y attendre avec l'accroissement du niveau de la richesse. Cette forme de fluctuation est, en fait, plutôt liée aux variations de la variance du portefeuille, d'après les définitions même de ces limites.

Le seuil étant bas, la probabilité reste dans un seul cas de majoration sur toute la période. Par ailleurs, la limite maximale pour la probabilité d'être en dessous du seuil fixé, à tout instant, reste inférieure de l'ordre des 7%. C'est une faible probabilité, certes, mais rapportée aussi à un faible seuil également. Nous allons

voir les résultats pour le cas d'un seuil élevé et même évoluant dans le temps. Nous allons prendre 10 fois la valeur finale du portefeuille fonds comme seuil.

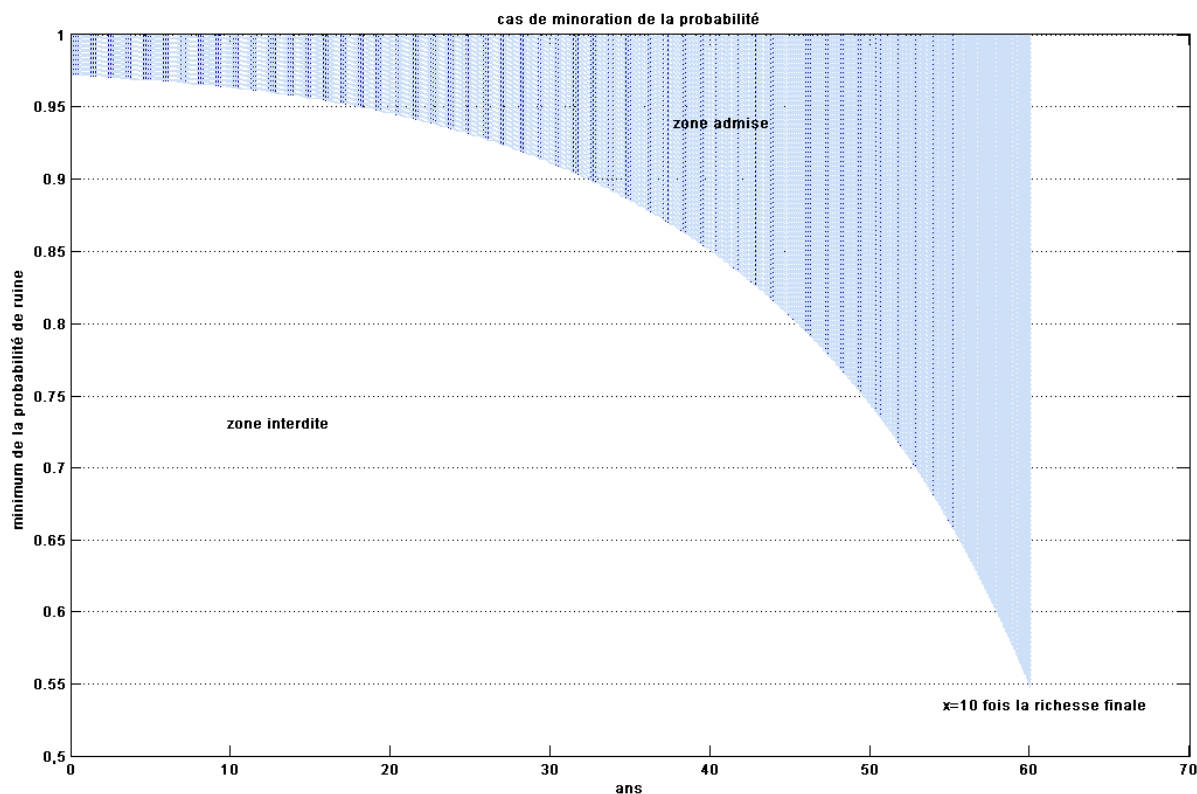


FIG. 15: Cas de minoration de la probabilité de ruine avec un seuil égal à 10 fois la richesse finale

Dans ce cas, les limites de la probabilité semblent plutôt liées à l'augmentation du niveau de la richesse. Nous voyons que la probabilité de ruine semble presque certaine en début de période puisque comprise entre 96% et 100%. Les possibilités s'élargissent considérablement ensuite atteignant les 50% en fin de période.

Les cas où la probabilité de ruine passe d'une forme de limitation à une autre dans une même période d'étude, sont possibles mais inexploitable. En effet, un tel cas suppose que la grandeur $A_x(t)$ change de signe dans l'intervalle d'étude, passant alors nécessairement par des valeurs proches du zéro¹. Or les limites sont des inverses de $A_x(t)$. Ce qui nous donne des limites de la probabilité de ruine de

¹Par le théorème des valeurs intermédiaire.

loin au delà de $[0, 1]$. Ces limites restent vraies mais elle le sont également pour toute autre probabilité.

Pour avoir une forme exacte de la probabilité de ruine qui reste exploitable en toute situation, des concessions sur la structure du marché sont nécessaires.

Probabilité de ruine en économie stationnaire

Sous certaines conditions, il est possible d'obtenir une probabilité précise identique à celle obtenue par Menoncin et al. (2003). Nous allons considérer une économie stationnaire avec une seule source d'incertitudes et des taux constants. Par conséquent la prime du risque et les volatilités sont unidimensionnelles.

L'allocation optimale est, dans ce cas, identique à celle de Merton (1969) et vaut :

$$u_a^* = \frac{1}{1 - \gamma} \frac{\lambda}{\sigma_a} \quad (28)$$

Le drift et la volatilité précédents (équation : 25) de la richesse nominale se réécrivent :

$$\tilde{\mu}_{XN} = \mu_{XN} = \frac{1}{1-\gamma} t \lambda^2 + r t + \frac{1}{2} \frac{1}{(1-\gamma)^2} t \lambda^2$$

et

$$\tilde{\sigma}_{XN} = \sigma_{XN} = \frac{1}{1-\gamma} \lambda z_t = \frac{1}{1-\gamma} \lambda \sqrt{t} \varepsilon_t$$

Avec ε_t une réalisation à t de la loi normale centrée réduite.

La probabilité de ruine (équation : 26) précédente devient alors :

$$P\left(\varepsilon_t \leq \frac{1-\gamma}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{t}} \ln\left(\frac{x}{X_0}\right) - \lambda \sqrt{t} - r \frac{1-\gamma}{\lambda} \sqrt{t} - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{1-\gamma} \sqrt{t}\right) \quad (30)$$

Soit la fonction suivante :

$$P(X_N(t) \leq x) = F_{ruine X_N}(x, t) \quad (31)$$

La probabilité de ruine se note avec la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite notée $F_{0,1}$:

$$F_{ruine X_N}(x, t) = F_{0,1} \left(\frac{1-\gamma}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{t}} \ln \left(\frac{x}{X_0} \right) - \lambda \sqrt{t} - r \frac{1-\gamma}{\lambda} \sqrt{t} - \frac{1}{2} \frac{\lambda}{1-\gamma} \sqrt{t} \right) \quad (32)$$

En regardant les dérivées partielles de la " fonction de ruine", nous voyons que la probabilité de ruine est une fonction croissante suivant le seuil de ruine x et décroissante suivant le temps¹. Nous reprenons les deux seuils précédemment utilisés.

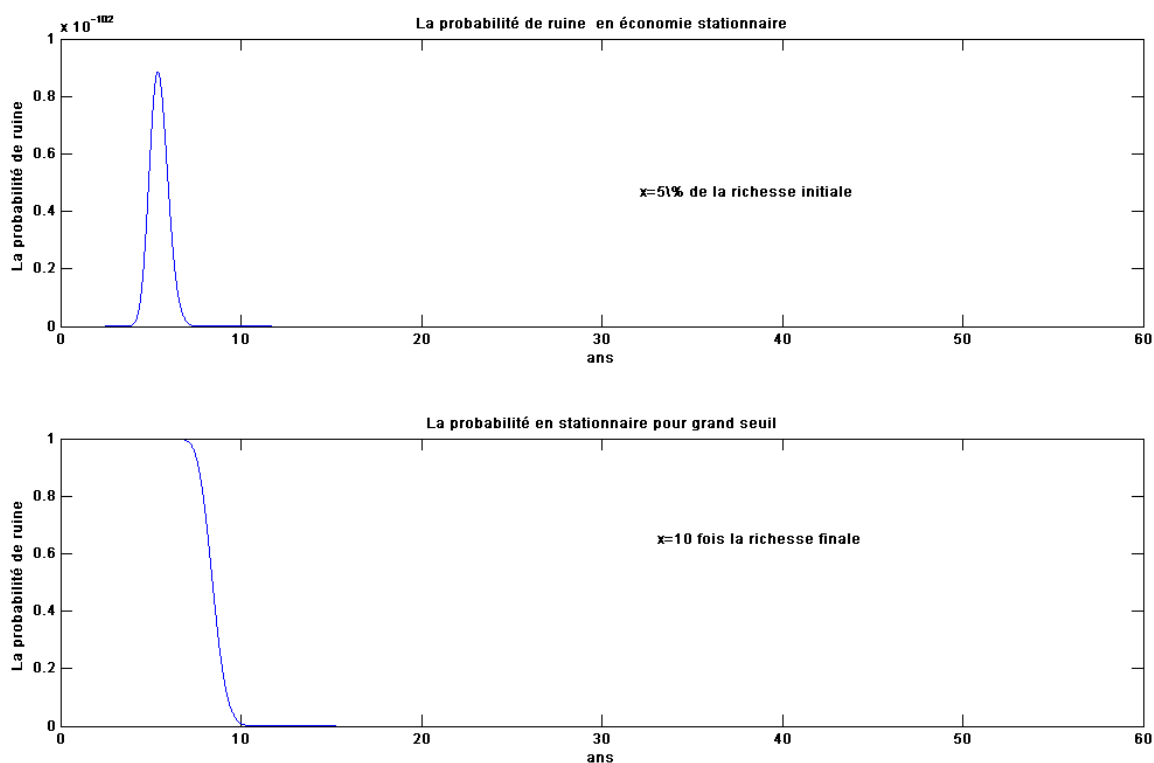


FIG. 16: Probabilité de ruine à des seuils différents

La probabilité de ruine en stationnaire reste très proche des valeurs extrêmes.

¹La fonction $-\frac{1-\gamma}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{t}} \ln \left(\frac{x}{X_0} \right) - t \left(\lambda + r \frac{1-\gamma}{\lambda} + \frac{1}{2} \frac{\lambda}{1-\gamma} \right)$ étant négative.

Pour un seuil égal à 5% de la richesse initiale, la probabilité de ruine est de l'ordre de 10^{-100} en début de période. Avec un grand seuil égal à 10 fois la valeur finale du niveau du fonds, la probabilité de ruine est d'abord certaine en début de période puis dégénère vers la 10^{ième} année.

Une économie avec un taux constant qui est dite stationnaire, permet également de manière simultanée : la liberté de l'horizon et la détermination de commandes optimales spécifiques.

3 Analyse en horizon libre

Avant de tirer des résultats suivis de leurs illustrations dans ce nouveau cadre, nous commencerons naturellement par définir le cadre lui même.

3.1 Formalisme en horizon libre

Dorénavant, nous allons considérer une seule source d'incertitudes issues d'un seul actif risqué fondamental A_N du marché suivant un brownien géométrique ($\mu_{a_N} = \mu$ et $\sigma_{a_N} = \sigma$ des réels constants). Le marché compte un taux sans risque r et une inflation i constants. Un tel marché est alors stationnaire et le zéro-coupon non indexé est proportionnel au cash tandis que l'indexé s'obtient aussi en fonction du cash via les prix et l'inflation :

•

$$G_N(t) = e^{rt}$$

•

$$B(t, T) = e^{-r(T-t)} = e^{-rT} G_N(t)$$

•

$$B_i(t, T) = \exp[-(r - i + \sigma_{Pr i} \lambda)(t - T)]$$

Le gérant du fonds ne cherche à investir que sur l'actif risqué et le cash. Nous allons, par ailleurs, considérer les restrictions suivantes selon le numéraire :

En richesse nominale : • La population est fermée et stable.

- L'inflation comme les volatilités de l'indice des prix de la consommation sont nulles.
- Et le passif comme la pension (ou la cotisation) définie instantanée sont constants.

En richesse réelle : Par rapport au nominal, Les volatilités des prix sont non nulles, mais nous considérons toujours un passif et une pension (ou une cotisation) définie constants en valeurs réelles.

En numéraire du passif : Cette fois le passif évolue librement selon les hypothèses de départ tandis que la pension (ou la cotisation) définie instantanée est constante en numéraire du passif.

En cas de prestations définies, considérant la différentielle de la pension (équation :1.28), la constance de la pension instantanée en nominal découle directement des nullités du taux d'inflation et des volatilités du prix. En valeur réelle également, cette constance vient de la même équation : 1.28. L'avantage de l'univers réel sur le nominal est que cette constance est naturelle en réel tandis qu'elle est forcée par l'annulation de l'inflation en nominal. Mais cette annulation en nominal reste toute fois justifiée par le besoin de garder nominales les valeurs et donc de les faire évoluer en absence d'inflation. Par contre, en cas de cotisations définies, cette constance implique des cotisations indexées sur les prix plutôt que sur les salaires. Pour pouvoir obtenir un résultat avec des cotisations qui sont définies sur les salaires, il faudrait opérer en numéraire du salaire comme Cairns et al. (2004). La constance de la pension instantanée en prestations définies (respectivement de la cotisation instantanée en cotisations définies) et en numéraire du passif est une hypothèse moins plausible en étude individuelle mais possible en

collective. En effet, le passif individuel est le produit de la pension instantanée et de la rente viagère continue à partir de l'instant présent de l'individu (équation : 1.29, page : 177). Or la rente viagère est forcément fonction du temps puisqu'elle diminue dans le temps jusqu'à dégénérer à l'aide de la probabilité de mortalité mais aussi grâce à la fonction d'actualisation qui est incarnée en l'occurrence par le zéro-coupon indexé (voir équations : 1.16 et 1.15, page : 171). En gestion collective, par contre, il est fort possible d'avoir une pension instantanée proportionnelle au passif à tout instant, sous la condition d'une population stable gardant les mêmes caractéristiques à tout moment. C'est l'hypothèse courante aussi bien en modélisation discrète qu'en temps continu (voir sous-paragraphes : 3.1.2, page : 79 et 2.2.2, page : 67). La constance du passif en nominal tient aussi de la stabilité de la population. En univers réel, cette constance traduit soit un cas individuel après la retraite soit un cas de population stable évoluant avec les prix uniquement. Nous prenons alors dans l'utilité V , $\gamma = 1$ et l'horizon T positif complètement libre pouvant atteindre l'infini. En prestations définies, du fait du port du risque par le gérant du fonds, l'utilité pourrait être la sienne, mais la présence de la réduction des cotisations aléatoires amène les membres du fonds à supporter une part des risques également $(E \left\{ \int_0^{+\infty} [gX(t) - m[c(t) - \bar{c}(t)]^2] e^{-\rho(t)} dt \right\})$. De même en cotisations définies, le risque incombe aux participants du fonds, mais en cas de gestion collective, le gérant gagnerait beaucoup à limiter les pensions à payer $(E \left\{ \int_0^{+\infty} [gX(t) - m[P(t) - \bar{P}(t)]^2] e^{-\rho(t)} dt \right\})$. Les utilités sont donc attribuables aussi bien au gérant du fonds qu'aux membres du fonds de pension, mais nous allons garder le gérant puisqu'il est l'investisseur. Il s'agirait donc d'un gérant très soucieux de la satisfaction de ces clients, au point que cette satisfaction affecte beaucoup sa propre satisfaction des investissements. Nous recherchons comme solution de l'équation : 2.28, une utilité indirecte de la forme polynômiale

suivante :

$$J(X, t) = e^{-\varphi t} [AX^2 + BX + C]$$

3.2 Résultats

Après résolution, nous obtenons les premiers résultats suivants sur les paramètres A, B et C :

$$A = m(1 + \phi)^2 \begin{bmatrix} \varphi + \lambda^2 - 2r + \frac{2r\phi}{1+\phi} \\ + 1_L \begin{pmatrix} 2\mu_{LN} - 2\sigma_{LN} \lambda_L^T \\ -3\sigma_{LN}^2 - 3\eta_{Pri}^2 \end{pmatrix} \\ + 1_{Pri} \begin{pmatrix} 2i - 2\sigma_{Pri} \lambda_{rr}^T \\ -2\sigma_{Pri}^2 - 3\eta_{Pri}^2 \end{pmatrix} \end{bmatrix} \quad (33)$$

Pour B :

$$B = \frac{g + \frac{2A}{(1+\phi)} \left[(\bar{c} - \bar{P}) - \phi 1_L \begin{pmatrix} \mu_{LN} - \sigma_{LN} \lambda_L^T \\ -2\sigma_{LN}^2 - 2\eta_{Pri}^2 \end{pmatrix} + L \phi 1_{Pri} \begin{pmatrix} i - \sigma_{Pri}^2 \\ -2\eta_{Pri}^2 \end{pmatrix} \right]}{r - 1_L(\mu_{LN} - \sigma_{LN} \lambda_L^T - 2\sigma_{LN}^2) - 1_{Pri}(i - \sigma_{Pri} \lambda_{rr}^T - \sigma_{Pri}^2) - (1_{Pri} + 1_L) \left(\frac{r\phi}{1+\phi} - 2\eta_{Pri}^2 \right)} \quad (34)$$

Et pour C :

$$C = \left\{ \begin{array}{l} \frac{B^2}{4\varphi} \left[\frac{1}{m(1+\phi)^2} - \frac{\lambda^2}{A} \right] \\ + \frac{B}{(1+\phi)\varphi} \left[\begin{array}{l} (\bar{c} - \bar{P}) + L \phi 1_{\text{Pri}} \begin{pmatrix} i - \sigma_{\text{Pri}}^2 \\ -\eta_{\text{Pri}}^2 \end{pmatrix} \\ -\phi 1_{\text{L}} (-\mu_{\text{LN}} + \sigma_{\text{LN}} \lambda_L^T + \sigma_{\text{LN}}^2 + \eta_{\text{Pri}}^2) \end{array} \right] \\ \frac{\phi}{1+\phi} \left[r L (1 - 1_{\text{Pri}} - 1_{\text{L}}) + \left(\frac{A\phi}{1+\phi} \right) (1_{\text{Pri}} L \eta_{\text{Pri}}^2 + 1_{\text{L}} (\eta_{\text{Pri}}^2 + \sigma_{\text{LN}}^2)) \right] \end{array} \right. \quad (35)$$

Les commandes optimales sont alors :

$$u^* = \begin{cases} \left(-\frac{\phi}{X_t} 1_L \right) \frac{\sigma_{LN}}{\sigma_a} \\ - (1 + \phi) \left[1 + \frac{B}{2AX_t} \right] \frac{\lambda}{\sigma_a} \\ + \frac{(1+\phi)}{\sigma_a} \begin{pmatrix} 1_L \sigma_{LN} \\ + 1_{Pri} \sigma_{Pri} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (36)$$

la cotisation optimale dans le cas d'un fonds de Prestations Définies sera

$$c^* = \bar{c} + \frac{1}{4m(1+\phi)} [2AX_t + B]$$

et la pension optimale dans le cas d'un fonds de Cotisations Définies sera

$$P^* = \bar{P} - \frac{1}{4m(1+\phi)} [2AX_t + B]$$

Ces résultats sont très proches de ceux de Reichlin (2000) en prenant le cas nominal avec $\phi = 0$ et $\sigma_{LN} = 0$ et pour un fonds à prestations définies et en reconsidérant une pension instantanée P comme le produit de la pension et de l'inflation i . Des résultats de Reichlin (2000), nous transitons vers ceux de Boulier et al. (1993) par simple annulation du paramètre m et de la cotisation d'équilibre. Lorsque nous poussons encore plus loin les simplifications, avec par exemple $\sigma_{Pri} = \eta_{Pri} = 0$, il s'en suit par déduction que $\sigma_{LN} = 0$, alors les résultats seront totalement identiques quelque soit le numéraire choisi.

3.3 simulations

Selon que le numéraire choisi et le type de fonds de pension, nous allons varier les valeurs des paramètres traduisant l'environnement démographique et financier, à travers la consommation du portefeuille (cotisations diminuées des pensions) mais aussi le poids de cette consommation dans le critère d'optimalité. Ces variations, selon les effets qu'elles auront sur les résultats de gestion du portefeuille, nous renseigneront sur la sensibilité de la stratégie optimale par rapport l'environnement économique.

Simulations en valeurs nominales

Nous donnons les simulations en valeurs nominales avec $\phi = 2\%$, $\varphi = 3\%$, $Lo = 60$ unités monétaires et $Xo = 100$ unités monétaires. Les taux sont les moyennes des taux calculés plus haut en simulation du marché. Nous redonnons quand même les valeurs de 12% à la prime du risque λ et de 20% à la volatilité de l'actif risqué. Nous fixons, pour le cas nominal en prestations définies, une emphase totale sur l'équilibre des coûts dans le critère d'optimisation avec $m = 1$ et $g = 0$. Le gérant ne se préoccupe que de la satisfaction des membres. Les paramètres de la consommation étant pour la pension $P = 18$ unités monétaires avec une cotisation

d'équilibre à $\bar{c} = 10$ unités monétaires.

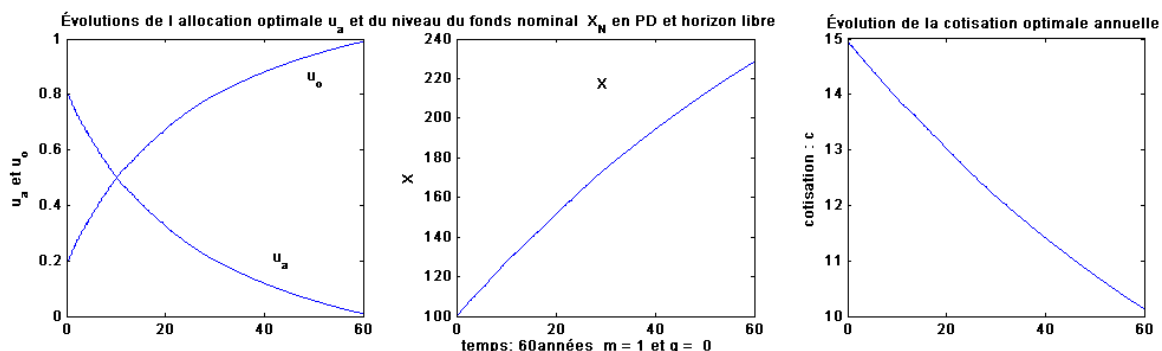


FIG. 17: Simulations en PD et horizon libre sur 60 années

L'allocation sur l'actif risqué décroît, tandis que l'allocation sur le cash comme le niveau de la richesse augmentent. L'apposition, de l'allocation sur le cash et de l'allocation risquée, dessine une queue de poisson avec un croisement vers la 17^{ième} année du fonds. Cet instant, correspond à un investissement faisant exactement la moitié de la richesse du fonds de pension en actif risqué et l'autre moitié sur le cash. Désormais en partant de ce point, la composition du portefeuille comportera plus de cash que d'actif risqué. Du point de vue de la richesse, ce point correspond au moment où la richesse atteint la moitié de sa valeur maximale. Contrairement aux résultats en horizon fini, en horizon libre, la prise de risque du fonds diminue quand sa richesse augmente. Les investissements s'orientent progressivement vers le cash plus stable, plus sûr et plus solvable. Au départ 80,81% de la valeur du fonds sont alloués sur l'actif risqué en investissant donc 19,19% de la valeur en cash. Mais lorsque la richesse prend de l'importance, la stratégie se désintéresse du tout profit et s'oriente vers la sécurité. À l'échéance donc la stratégie optimale préconise un investissement total en cash (100%). Ce comportement risquophobe est très proche de l'approche classique de gestion de fonds de pension, comme indiquée par Turbot (1997). Néanmoins, Cairns, Blake et Dowd (2000) ont démontré que l'approche classique est sous optimale par rapport à une approche sous critère d'op-

timalité. La cotisation optimale requise diminue elle aussi avec le temps. La prise en compte des seuls coûts dans le critère de gestion¹, joue beaucoup dans la baisse de la cotisation qui atteint la valeur d'équilibre recherchée ($\bar{c} = 10$ unités monétaires) à l'échéance. La progression du niveau du fonds assure mieux le paiement de la pension grâce aux retours sur investissements et soulage les membres du fonds du paiement de cotisations onéreuses. Nous espérons un cas opposable avec augmentation cette fois des pensions en cotisations définies. Nous inversons, cette fois, l'ordre des grandeurs avec des cotisations définies supérieures à la pension d'équilibre, et fixées à $c = 13$ unités monétaires. La pension d'équilibre est alors fixée à $\bar{P} = 10$ unités monétaires. Par ailleurs, si nous laissons toujours une large priorité aux coûts, avec une importance à 90% ($m = 0,9$), nous réintroduisons néanmoins la valeur du fonds dans le critère d'optimisation avec un poids de 10% ($g = 0,1$). Notre gérant porte ici un plus grand intérêt à la minimisation de ses coûts.

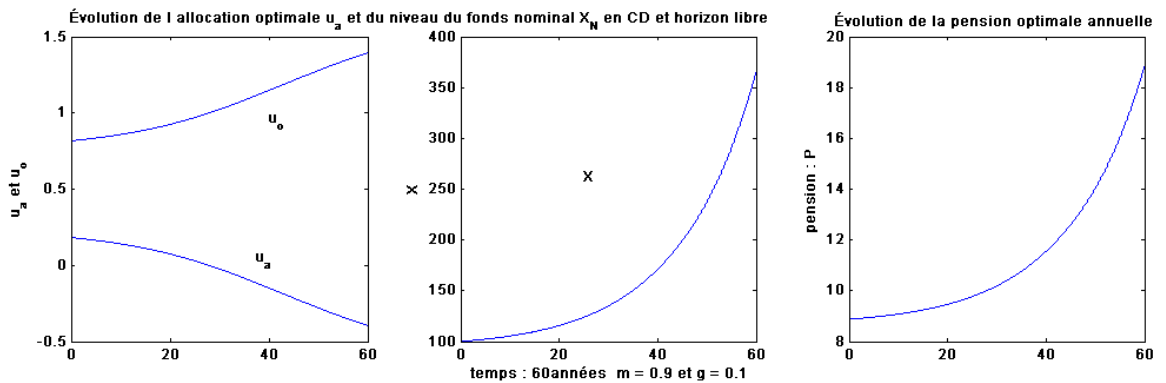


FIG. 18: Simulations en CD et horizon libre sur 60 années

Comme attendu, l'allocation sur le cash augmente avec la richesse et même les pensions, tandis que, la part risquée du portefeuille diminue progressivement. La stratégie optimale du fonds préconise un investissement de plus en plus important de la richesse disponible en cash. Le gérant commencera même à vendre des actifs risqués autour de la trentième année pour réinvestir en cash. La stratégie reste

¹ $g = 0 \quad m = 1$

payante, puisque le niveau des pensions est considérablement amélioré avec une cotisation fixe et donc des retours sur investissements de plus en plus intéressants.

Cas en numéraire des prix

Pour les cas de numéraire des prix, nous fixons la pension réelle en PD à 5,9 unités monétaires réelles avec une cotisation d'équilibre de 5,5 unités monétaires réelles et la cotisation réelle en CD à 5 unités monétaires réelles avec une pension d'équilibre de 8 unités monétaires réelles. La volatilité des prix sur le marché σ_{Pri} est maintenue à 2% tandis que leur volatilité η_{Pri} reste à 1%, tout le reste étant maintenu comme dans le cas nominal correspondant, et donc en PD nous maintenons un objectif de gestion centré uniquement sur la maîtrise des coûts avec $m = 1$ et $g = 0$.

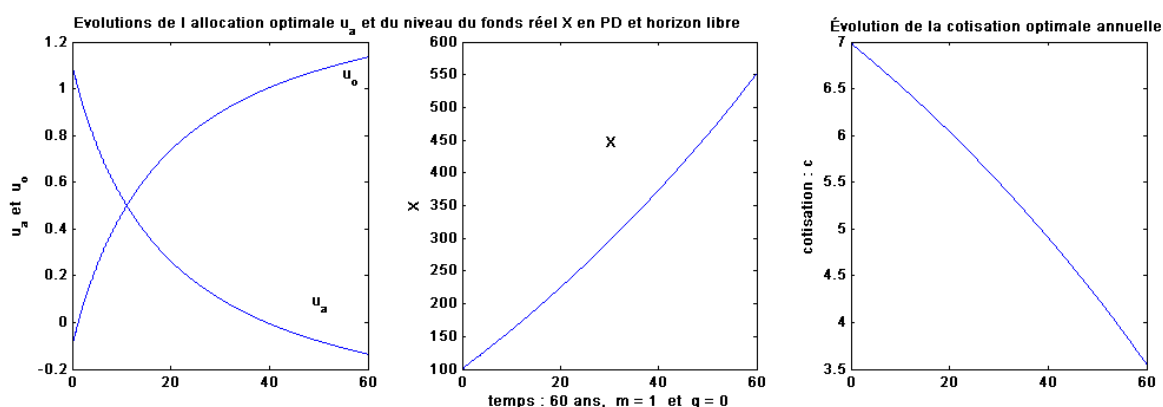


FIG. 19: Simulations en PD, numéraire des prix et Horizon libre sur 60 années

En début de période la stratégie optimale consiste à un emprunt de 10% de la richesse disponible pour investir en actif risqué, mais très vite la part du cash reprend le dessus vers la onzième année du fonds. La même tendance s'observe en CD malgré la prise en compte cette fois du niveau du fonds dans le critère de gestion ($g = 10\%$ et $m = 90\%$).

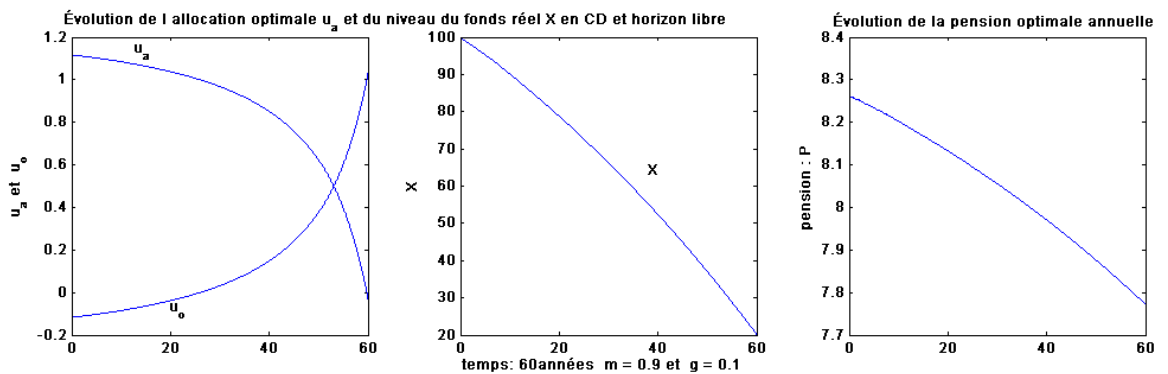


FIG. 20: Simulations en numéraire des prix et Horizon libre sur 60 années

En CD, si la monotonie des fonctions d'allocation en cash ou en actif risqué est conservée, leurs concavités, elles, sont inversées. Par conséquent, le point de concourt des allocations du portefeuille est plutôt repoussé vers l'échéance à la 52^{ème} année. L'allocation du portefeuille en actif risqué étant désormais concave, la part risquée dans le fonds diminue plus lentement et les niveaux en actif risqué et en cash ne s'égalent que vers un horizon lointain. La stratégie préconise ici un transfert progressif des avoirs risqués vers le sans risque, de manière plus lissée. La valeur du fonds est quand même décroissante du fait de la décroissance des cotisations, malgré une constance réelle de la pension. En PD comme en CD, la tendance générale est maintenue sur les allocations du portefeuille. La stratégie optimale du fonds alloue progressivement plus en cash qu'en actif risqué. Autrement dit, l'allocation risquée du portefeuille diminue au profit de son allocation sans risque.

Cas en numéraire du passif

Nous allons observer la stratégie optimale du fonds de pension en numéraire du passif. Nous partons des valeurs suivantes :

μ_{LN}	P_L	c_L	\bar{P}_L	\bar{c}_L	X_o	m	g
1,63%	0,04	0,004	0,003	0,03	50%	100%	0

Ainsi, en prestations définies, notre pension équivaut à 4% du passif du fonds avec une cotisation d'équilibre à 3% de ce passif. La cotisation en cotisations définies fait 0,4% du passif avec une pension d'équilibre à 0,3%. Le surplus initial est de 50% en CD comme en PD. Nous partons ainsi, avec un portefeuille n'atteignant que la moitié du passif.

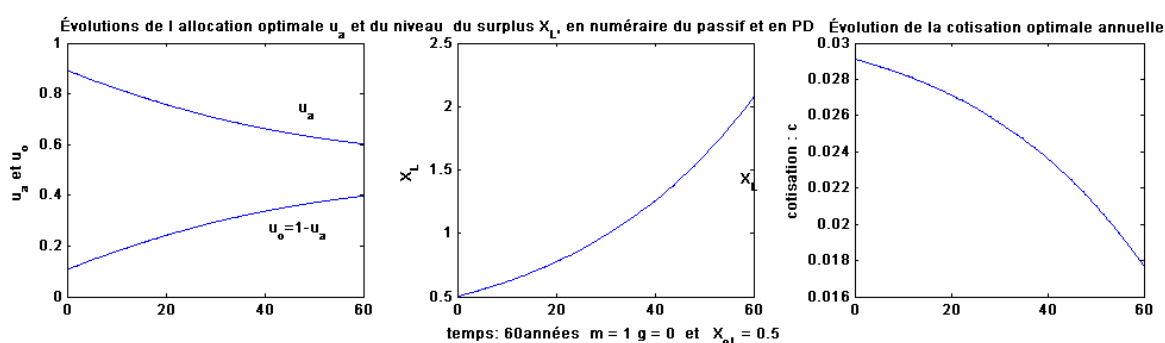


FIG. 21: Simulations en numéraire du passif et Horizon libre sur 60 années

En prestations définies et numéraire du passif, la tendance générale de croissance de la part du cash dans le fonds et la décroissance de la cotisation et de la part risquée s'observent. Comme pour tous les autres cas de PD précédemment exposés, le niveau du fonds croît avec le temps. Ainsi :

- L'allocation du portefeuille en actif risqué passe de 90% initialement à 60% à 60 ans d'activité.
- La cotisation optimale décroît des 2,8% initiaux à 1,8% à la fin.
- Le surplus du fonds augmente des 50% du passif à 203%.

En cotisations définies, par contre, toutes les tendances ne seront pas conservées.

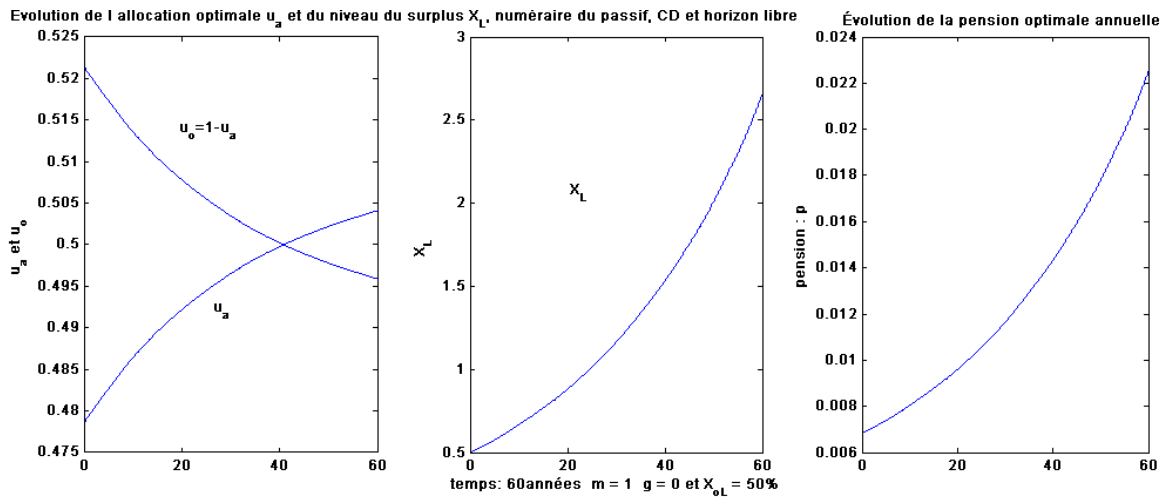


FIG. 22: Simulation en numéraire du passif et Horizon libre sur 60 années

En Cotisations définies et numéraire du passif, la donne est complètement renversée, puisque l'allocation en actif risqué est croissante avec le portefeuille.

- L'allocation du portefeuille en actif risqué hausse de 48% initialement à 50,4% à la fin.
- La pension optimale croît des 0,68% initiaux à 2,23% en fin d'étude.
- Le surplus du fonds augmente de 50% du passif à 262%.
- Seule l'allocation du portefeuille en cash diminue de 52% à 49,6%.

En définitive, seules les flux de consommation optimale gardent invariablement les mêmes tendances quelque soit le cas d'étude avec une diminution de la cotisation optimale en PD. Ces tendances sont heureuses puisque l'optimisation porte essentiellement sur la maîtrise de ces consommations ($m = 100\%$). La stratégie optimale soulage les membres du fonds en PD avec des cotisations toujours en baisse.

En CD la stratégie assure toujours des pensions proches de la pension d'équilibre, mais avec parfois une diminution du pouvoir d'achat avec la baisse de la pension optimale, la population étant stable.

Dans tous les cas exposés, il ressort que les résultats restent en parfaite adéquation avec les critères d'optimisation dont ils sont les réponses. Mais, ces résultats,

tous différents, s'inscrivent dans une très grande diversité qui traduit la sensibilité du modèle aux éléments de l'environnement financier ou démographique.

Nous pouvons aussi remarquer, sans calculer la probabilité de ruine, que le niveau du fonds est toujours resté positif, même s'il décroît dans le cas réel en CD.

Conclusion

Nous avons fait le choix d'apporter de nouveaux développements, au delà de la simple synthèse, dans la présentation de la modélisation en temps continu de préférence. Ces développements ont été introduits avec les modélisations dynamiques discrètes qui ont beaucoup traité aussi des cas pratiques courants de gestion de fonds de pension. C'est ainsi que nous avons tenu compte dans le marché d'outils plus adéquats pour l'actualisation des flux indexés. Il s'agit bien sûr des obligations sans coupon indexées sur une inflation salariale ou sur les prix de la consommation. Cette opération s'inscrit en fait dans un développement plus global qui s'articule en deux phases :

1. La première phase est la généralisation en temps continu des modélisations pratiques du passif en dynamique discrète, avec le choix ici de la méthode du "Unit Credit" qui sied aux règles comptables générales européennes (IAS/IFRS) ou nord américaines (F.A.S.B. 87). Cette généralisation se fait, si nous osons l'expression, dans la pure tradition de la finance en temps continu. Autrement dit, dans le cadre de la théorie de l'équilibre du marché, en l'occurrence dans le respect de l'absence d'opportunité d'arbitrage (A.O.A.). Et c'est précisément les actualisations de flux indexés en A.O.A., qui aboutissent naturellement à la création d'outils tels que les obligations indexées sans coupon.
2. La deuxième phase est l'intégration du passif dans la dynamique du portefeuille et du marché.

Nous avons introduit deux nouveaux numéraires selon les besoins. Le numéraire des prix de la consommation nous permet à l'instar de Menoncin et al. (2003) de tenir compte explicitement des valeurs réelles des actifs ou autres éléments. Le numéraire du passif, quant à lui, s'est avéré être une manière simple d'incorporer naturellement le passif dans nos développements et de nous permettre de nous focaliser directement sur le surplus du fonds sans compliquer d'avantage les calculs. En effet, tenir compte véritablement du surplus en prenant séparément l'actif et le passif du fonds aurait conduit à la manipulation d'une variable d'état supplémentaire.

Pour être en adéquation avec la réalité nous avons, comme Cairns et al. (2004), permis aux processus de salaires individuels de garder une dimension indépendante du marché. Pour le processus des prix de la consommation, dans la même vision que Brennan et Xia (2000), une source d'incertitude indépendante y a été associée également. Ces spécificités rendent notre marché seulement localement complet avec ses deux taux stochastiques : le taux d'intérêts et le taux d'inflation instantanés.

Sur le plan démographique, la recherche d'une meilleure adéquation à la réalité nous a amené à évoluer en groupe ouvert avec des entrées comme des sorties libres du fonds de pension, contrairement à l'usage le plus courant en étude de fonds de pension. Ainsi, à partir d'une faisabilité et d'un équilibre assuranciel individuels, nous avons poursuivi les développements en vue d'une gestion collective du fonds de pension. Nous avons quand même gardé en option la possibilité de basculer à tout moment en groupe fermé avec une population stable ou assimilable à un seul individu. Par ailleurs, nous avons opté pour une évaluation du passif de la forme "Unit Credit", plus en conformité avec les normes comptables internationales.

Avec une forme de mixage des critères d'optimisation les plus courants, nous avons, malgré toutes les singularités de la modélisation, abouti à des résultats qui restent dans le canevas des résultats jusque là observés dans la littérature. Les

particularités observés sont significativement dues à des écarts d'hypothèses de départ. Ainsi, en horizon limité, nous obtenons une allocation optimale indépendante du niveau du fonds mais tributaire de la prime du risque, des volatilités des numéraires comme des actifs. Surtout, l'allocation est variable dans le temps à travers les taux. En horizon libre et en économie stationnaire, cette fois, l'allocation est liée au niveau du fonds. Dans tous les cas, nous avons vu que l'allocation est un ensemble de petites couvertures optimales contre les différents risques et associées à une forme d'efficience du portefeuille.

Nous nous sommes également intéressé à une forme généralisée de la probabilité de ruine du fonds. Les formules fermées issues des probabilités de ruine devraient permettre de poursuivre les développements dans le sens de la *Value at Risk* du fonds de pension par exemple.

D'autres développements intéressants pourraient être menés à la suite du présent travail, notamment en complétant l'allocation stratégique même optimale par une allocation tactique. Par ailleurs, des résultats avec des taux non gaussiens ou même avec une modélisation basée sur d'autres formes de structures par termes des taux, pourraient être particulièrement intéressants.

Pour pousser plus loin encore la quête du réalisme dans la modélisation, les contraintes d'égalité sur les variables dans le programme d'optimisation pourraient évoluer en contraintes d'inégalités plus réalistes. De plus, les valeurs des paramètres dans les simulations gagneraient à être issues de méthodes statistiques d'estimation à partir de véritables données.

Une autre étude statistique à apporter serait la modélisation du processus $N(t)$ du nombre d'individus de la population qui est resté libre alors que sa détermination en loi aurait sans doute permis des applications plus larges, notamment dans le sens du rapprochement des équilibres assuranciers et financiers. Ce rapprochement a fait l'objet d'étude par Devolder et Hainaut (2006). Un cas de possibilité de

Conclusion

reversion de la pension avec des probabilités de survie multi-têtes, est une forme si pratique que son intégration nous semble encore plus imminente pour tout prochain développement.

Conclusion Générale

Épilogue

Les systèmes de retraites dans leur organisation comme dans leur modélisation sont très diversifiés. Nous avons, dans cette thèse, présenté ces deux aspects en suivant à chaque fois un ou plusieurs caractères jugés importants.

Ainsi, il nous est révélé des systèmes de retraites naturellement classés par pays où cohabitent souvent les trois formes d'organisation de la retraite : capitalisation, répartition et subvention. La cohabitation peut se faire par régimes séparés comme en France où le régime général du privé comme du public est en répartition tandis que la capitalisation jusque là marginale (7% du capital total des retraites) est dispersée en plusieurs régimes privés ou publics. Une retraite de subvention servie aux plus démunis est gérée en régime quasi-isolé par un fonds de de solidarité vieillesse (F.S.V.). Par contre en Suède, on trouve dans le même régime principal une retraite de base servie aux salariés les plus démunis, allouée par le régime en premier pilier et une retraite en répartition en deuxième pilier. Au sommet on trouve en troisième pilier une retraite par capitalisation avec 2,5% sur les 18% des salaires bruts cotisés pour les seules retraites. Bien qu'il ne soit pas possible de trouver des systèmes de retraites identiques dans deux pays différents, il a néanmoins été possible de regrouper les différents systèmes sur certains critères communs. Ainsi, on trouve au sein des pays les plus développés et précisément ceux qui sont membres de l'Organisation de Coopération et de Développement Économiques (O.C.D.E.), des systèmes élaborés servant des retraites avec un taux de remplacement minimum de 40%, qui est le seuil recommandé par l'organisation internationale du travail (O.I.T.) par la convention numéro 102 adoptée en 1952. Par contre, tous ces pays sont exposés à de sérieux risques démographiques du fait du ralentissement de la croissance de la population et de son vieillissement. En effet, la moyenne dans les pays membres de l'O.C.D.E. du taux de fécondité par

femme en âge de procréer est passé de 2,72 en 1970 à 1,56 en 2003, c'est à dire en dessous du seuil de renouvellement de 2,1.

Dans les pays en voie de développement, la population est jeune et croît vite, mais les systèmes de retraites restent peu efficaces. En effet, ces pays souffrent d'un manque aigu de structures pouvant garantir des retraites à la population. Leurs systèmes de retraites ont des couvertures souvent limitées aux seuls fonctionnaires de l'État. Dans tous les cas, la couverture excède rarement les salariés du privé et du public confondus, or la majeure partie de la population active oeuvre dans l'informel, jusqu' à 80% dans les pays du Grand-Maghreb et du Moyen Orient comme le montre la banque Mondiale (Robalino et al. 2005).

Malgré toutes ces difficultés, il existe pourtant au moins sur le plan théorique des solutions autant pour les risques démographiques que pour la structuration des systèmes de retraites.

Nous nous sommes intéressé à la gestion de certains risques micro-économiques en retraites qui relèvent des risques de gestion et plus précisément le risque financier qui est non mutualisable et le risque d'assurance comprenant le risque démographique qui est lui mutualisable. En restreignant notre domaine aux seules retraites par capitalisation nous avons proposé une synthèse des modélisations courantes de ces risques.

En univers discret, les modélisations présentent plutôt des méthodes de gestion des fonds de pension en prestations définies, très pratiques et élaborées sur l'évaluation du passif et le respect de l'équilibre actuariel et assurantiel.

Mais ces modèles restent le plus souvent, assez superficiels sur les développements financiers qui trouvent plutôt leurs solutions en temps continu.

En temps continu aussi, nous nous sommes focalisé d'avantage sur un aspect de la modélisation des caisses de retraites : l'allocation stratégique optimale du portefeuille.

Conclusions sur les structures de retraite et leurs modélisations

Nous avons fait le point sur l'organisation des systèmes de retraites sans pour autant épuiser le sujet. De nombreuses ouvertures restent possibles en termes d'orientations de futurs développements. Des ouvertures plus larges encore existent également sur les modélisations présentées de systèmes de retraites par capitalisation.

Bilan sur la situation des retraites

Bien que sa population soit l'une des moins menacées des pays de l'O.C.D.E., avec un taux de fécondité autour de 1,8 contre une moyenne de 1,56 et une croissance de la population positive et stabilisée à 0,59%, la France garde un taux de dépenses des pensions rapportées au produit intérieur brut, stabilisé certes, mais parmi les plus importants à 13%. Cette inflation se justifie sans doute par la part très importante de la population âgée, 37% contre 26,6% en moyenne en O.C.D.E. en 2005. Ce ratio est d'autant plus inquiétant que la retraite se gère essentiellement par répartition en France, pays qui risque donc d'être à court de cotisants à l'avenir. La solidarité intergénérationnelle est un pilier central dans le système de retraites français. La répartition, principale forme de retraite en France, est essentiellement gérée dans le privé au sein du régime général d'assurance sociale, par la Caisse Nationale d'Assurance Vieillesse qui est régie par le parlement et l'exécutif. À côté, subsiste un régime par points, répartitaire également, complémentaire et obligatoire géré par les caisses ARRCO et AGIRC.

Pourtant le point commun du système de retraites français avec la plupart des autres systèmes n'est pas la solidarité intergénérationnelle mais plutôt le caractère obligatoire des régimes par répartition. En effet mis à part quelques rares pays

comme la Chine ou la Roumanie, il existe dans chaque pays au moins un régime de retraites obligatoire pour une certaine catégorie de la population. Ce régime peut être entièrement capitalisé comme en Australie ou au Chili, il peut aussi être privé comme au Mexique comme il peut aussi avoir simplement un noyau capitalisé comme au Danemark. Dans les pays en voie de développement, c'est souvent le seul régime existant couvrant parfois les seuls salariés du privé formel et du public comme au Niger.

Le diagnostic étant posé, nous voyons bien que les difficultés dépassent les giron nationaux de définition des systèmes de retraites, pour s'étendre à des zones géographiques, économiques ou socio-culturelles bien plus vastes. On peut se poser alors la question de savoir si les solutions d'ordre micro-économiques basées sur la seule gestion des systèmes de retraites, jusque là proposées, sont suffisantes. Il serait sans doute utile d'analyser d'avantage toute forme d'efforts consentis ou à consentir à des niveaux aussi élevés que le niveau de portée des difficultés. Cette nouvelle analyse devra probablement inclure d'avantage les facteurs macro-économiques influant sur les états des retraites, mais aussi les impacts macro-économiques également, de ces états.

Extensions en dynamique discrète

La modélisation dynamique discrète nous fournit les outils pratiques et techniques de la gestion des retraites. En fonds de pension à prestations définies, les méthodes varient selon la manière de réguler les cotisations pour satisfaire l'équilibre actuariel et assuranciel. La méthode dite "Unit Credit" comprenant le calcul du passif connu sous l'appellation "Actuarial Benefits Obligations", est la norme pour les nouvelles règles comptables IAS/IFRS (Devolder et Goffin 2006) et depuis 1987 les règles comptables FASB 87 aux États-Unis (Leibowitz et Langetieg 1989). Sous ce principe, chaque cotisation vaut la valeur actualisée de la pension viagère

due pour l'unité de travail fourni correspondant à cette cotisation. L'importance comptable de cette mesure fait que nous l'avons choisie pour l'évaluation du passif dans les développements en statique comme en temps continu. Si, dans ce travail, nous avons fait le choix de reporter les développements importants dans les modélisations en temps continu, il n'en reste pas moins que la modélisation dynamique discrète peut apporter des solutions fort intéressantes. En tout cas, les solutions éventuelles ne souffriraient pas d'une discrétisation supplémentaire comme en temps continu, pour l'analyse numérique.

Puisque la distribution discrète se prête naturellement aux développements numériques, il serait certainement bénéfique d'étendre vers des solutions numériques en modélisation discrète, les problèmes n'admettant pas de solutions fermées explicites en dynamique continue.

Perspectives en économie statique et en temps continu

Sous hypothèses gaussiennes des différentes rentabilités, la modélisation en statique ou en temps continu, met d'abord en place la stratégie du portefeuille incorporant l'intégration des actifs du marché et du passif dans le portefeuille. Avec les critères d'optimalité, nous tenons compte de la sensibilité au risque des investisseurs. Les allocations optimales sont alors tirées et permettent le calcul des probabilités de ruine d'une part et les simulations mesurant la portée du modèle d'autre part. Comme évoqué en conclusion de la partie (paragraphe : 3.3, page : 283), il reste à aller plus loin encore dans l'implication de l'expérience à travers des inférences statistiques dans la modélisation financière mais aussi dans la modélisation démographique et la modélisation du risque mutualisable de la mortalité. Cette plus grande intégration de nouveaux éléments devra se faire bien sûr avec

des développements supplémentaires sur le respect des équilibres financiers, assuranciers et démographiques.

A

A.1 Organisation des retraites

A.1.1 Tableaux récapitulatifs

sources : OCDE ; Banque Mondiale ; Insee ; Ined ; Union Européenne ; Eurostat ; Caussat et Lelièvre (2004) ; Kalisch et Aman (1998) ; Social Security Administration (2005a) ; Social Security Administration (2006b) ; Social Security Administration (2005b) ; Social Security Administration (2006a) ; Sneijers (2005) ; Robalino et al. (2005).

Les années en indice correspondent aux années de mesure de la caractéristique exprimée.

TAB. A.1: Tableau récapitulatif des systèmes de retraites de quelques pays du monde : pension forfaitaire de base

Pays	Pension forfaitaire de base		
	ressources	conditions	caractéristiques
pays membres de l'OCDE			
Allemagne	pas de pension forfaitaire		
Australie	États	résidents	65 ans
Danemark		nationaux	65 ans
Canada		résidents	65 ans
États-Unis		faibles ressources	65 ans
Japon	cotisation/État	conditions de ressources	65 ans
France	cotisations/taxes	faibles ressources	65 ans
Pays-Bas	cotisation/État	65 ans	condition de durée
Suède	État(25%)	65 ans	faibles ressources
Turquie	État	65 ans	faibles ressources
pays d'Europe hors OCDE			
Russie	cotisation/État	60 ans	évolue à 80 ans
Malte	cotisation/État	61 ans	condition de durée
Pologne	cotisation/État	65 ans	condition de ressources
pays d'Afrique sub-saharienne			
Tanzanie	cotisation	60 ans	générationnel
Niger	pas de pension forfaitaire		
Sénégal	cotisation	55 ans	générationnel
pays d'Asie-Pacifique			
Chine	cotisation/États	couverture	50 à 60 ans
Inde	État	65 ans	faibles ressources
Turkménistan	État	67 ans	si exclu
pays d'Amérique et Caraïbes			
<i>Suite à la page suivante...</i>			

Pays	Pension forfaitaire de base		
	ressources	conditions	caractéristiques
Brésil	État	65 ans	faibles ressources
Chili	cotisations/État	65 ans	générationnel/ressources/cotisations
Vénézuela	pas de pension forfaitaire		
pays du Grand Maghreb et du Moyen Orient			
Algérie	État	60 ans	ressources/cotisations
Egypte	cotisations/État	60 ans	ressources/cotisations
Israël	cotisations/État	67 ans	ressources/cotisations

TAB. A.2: Tableau récapitulatif des systèmes de retraites de quelques pays du monde : répartition

Pays	Répartition		
	cotisations	couverture	caractéristiques
pays membres de l'OCDE			
Allemagne	12% du revenu	générale	points/décote/surcote
Australie	quelques caisses particulières		
Danemark	pas de répartition		
Canada	4.95%	générale	obligatoire/volontaire
États-Unis	6.2%	générale	paliers de ressources
Japon	9%	générale	base
France	14%	générale	base/complémentaire
Pays-Bas	17.9%	entreprise	décote
Suède	16%	obligatoire	neutralité actuarielle
Turquie	9%	obligatoire	55 ans
pays d'Europe hors OCDE			
Russie	20% employeur	général-privé	obligatoire
Malte	10%	général	obligatoire
Pologne	2.46%	obligatoire	neutralité actuarielle
pays d'Afrique sub-saharienne			
Tanzanie	pas de répartition		
Niger	1.6%	obligatoire (salariés)	base
Sénégal	5.6%	obligatoire	à points
pays d'Asie-Pacifique			
Chine	10 à 20%	obligatoire/volontaire	base
Inde	gratuites	employeur	gestion d'État
Turkménistan	1%	général	62 ans
pays d'Amérique et Caraïbes			
Brésil	7.65% → 11%	obligatoire	étagée
Chili	18.84%	générationnel	étagé
Vénézuela	1.93%	obligatoire/général	privé/public
pays du Grand Maghreb et du Moyen Orient			
Algérie	7%	obligatoire	base
Egypte	10%	obligatoire/base	2étages
Israël	environ 3%	obligatoire	général

TAB. A.3: Tableau récapitulatif des systèmes de retraites de quelques pays du monde : capitalisation

Pays	Capitalisation	
	type	caractéristiques
pays membres de l'OCDE		
Allemagne	volontaire	privé
Australie	obligatoire	large couverture
Danemark	obligatoire/volontaire	base/complémentaire
Canada	obligatoire/volontaire	privé/public
États-Unis	obligatoire/volontaire	privé/public
Japon	obligatoire/volontaire	privé/public
France	volontaire	privé
Pays-Bas	privé	réglementation d'État
Suède	2.5% obligatoire /volontaire	privé/public
Turquie	volontaire	privé
pays d'Europe hors OCDE		
Russie	public (1 ^{ère} pension en 2013)	
Malte	volontaire	privé
Pologne	7.3%	obligatoire/public
pays d'Afrique sub-saharienne		
Tanzanie	10%	public (CD+PD)
Niger	volontaire	privé (prévoyance)
Sénégal	volontaire	privé (prévoyance)
pays d'Asie-Pacifique		
Chine	obligatoire/volontaire	liée à la répartition souvent
Inde	8.33% employeur	obligatoire
Turkménistan	≥ 4%	volontaire/privé
pays d'Amérique et Caraïbes		
Brésil	volontaire	privée
Chili	10%	obligatoire/volontaire/privé
Vénézuéla	obligatoire (1990)	privé
pays du Grand Maghreb et du Moyen Orient		
Algérie	volontaire	privée
Egypte	volontaire	privée
Israël	volontaire	privé

Dans le tableau de caractéristiques démographiques qui va suivre :

- La fécondité est en nombre moyen d'enfants par femme en âge de procréer.
- La croissance définit le pourcentage annuel de croissance de la population à l'année en indice.
- L'espérance de vie est à la naissance.
- La dépendance traduit le nombre de personnes au dessus des 65 ans en pourcentage de la population totale à l'année en indice.
- La projection est celle du taux de dépendance à l'année en indice.

TAB. A.4: Tableau récapitulatif des systèmes de retraites de quelques pays du monde : démographie

Pays	démographie				
	fécondité	croissance	espérance de vie	dépendance	projections dépendance
pays membres de l'OCDE					
Allemagne	1.34 ₍₂₀₀₃₎	-0.01 ₍₂₀₀₄₎	78.4 ₍₂₀₀₃₎	37.5 ₍₂₀₀₅₎	45.2 ₍₂₀₂₀₎
Australie	1.76 ₍₂₀₀₂₎	1.2 ₍₂₀₀₄₎	80.3 ₍₂₀₀₃₎	24.1 ₍₂₀₀₅₎	35.3 ₍₂₀₂₀₎
Danemark	1.76 ₍₂₀₀₃₎	0.26 ₍₂₀₀₄₎	77.22 ₍₂₀₀₃₎	28.6 ₍₂₀₀₅₎	40.9 ₍₂₀₂₀₎
Canada	1.52 ₍₂₀₀₂₎	0.9 ₍₂₀₀₄₎	75.3 ₍₂₀₀₃₎	22.6 ₍₂₀₀₅₎	33.8 ₍₂₀₂₀₎
États-Unis	2.03 ₍₂₀₀₃₎	0.99 ₍₂₀₀₄₎	77.22 ₍₂₀₀₃₎	20.9 ₍₂₀₀₅₎	29.1 ₍₂₀₂₀₎
Japon	1.38 ₍₂₀₀₃₎	0.05 ₍₂₀₀₄₎	81.8 ₍₂₀₀₃₎	32 ₍₂₀₀₅₎	50.5 ₍₂₀₂₀₎
France	1.89 ₍₂₀₀₃₎	0.29 ₍₂₀₀₄₎	79.4 ₍₂₀₀₃₎	37 ₍₂₀₀₅₎	51.4 ₍₂₀₂₀₎
Pays-Bas	1.75 ₍₂₀₀₃₎	0.32 ₍₂₀₀₄₎	78.6 ₍₂₀₀₃₎	25.3 ₍₂₀₀₅₎	35.3 ₍₂₀₂₀₎
Suède	1.71 ₍₂₀₀₃₎	0.4 ₍₂₀₀₄₎	80.2 ₍₂₀₀₃₎	33.5 ₍₂₀₀₅₎	45.5 ₍₂₀₂₀₎
Turquie	2.46 ₍₂₀₀₂₎	1.52 ₍₂₀₀₄₎	68.7 ₍₂₀₀₃₎	16.1 ₍₂₀₀₅₎	24.2 ₍₂₀₂₀₎
pays d'Europe hors OCDE					
Russie	1,3 ₍₂₀₀₅₎	0,3% ₍₂₀₀₃₎	65,4 ₍₂₀₀₅₎	1,5% ₍₂₀₀₃₎	13,3% ₍₂₀₁₅₎
Malte	1,5 ₍₂₀₀₅₎	1% ₍₂₀₀₃₎	78,3 ₍₂₀₀₅₎	11,1% ₍₂₀₀₃₎	18,3% ₍₂₀₁₅₎
Pologne	1,8 ₍₂₀₀₅₎	0,5% ₍₂₀₀₃₎	74,3 ₍₂₀₀₅₎	10,9% ₍₂₀₀₃₎	14,9% ₍₂₀₁₅₎
pays d'Afrique sub-saharienne					
Tanzanie	5 ₍₂₀₀₅₎	3% ₍₂₀₀₃₎	46,0 ₍₂₀₀₅₎	2,4% ₍₂₀₀₃₎	3,7% ₍₂₀₁₅₎
Niger	7,9 ₍₂₀₀₅₎	3,2% ₍₂₀₀₃₎	44,3 ₍₂₀₀₅₎	1,6% ₍₂₀₀₃₎	2% ₍₂₀₁₅₎
Sénégal	5 ₍₂₀₀₅₎	1,9% ₍₂₀₀₃₎	55,6 ₍₂₀₀₅₎	2,5% ₍₂₀₀₃₎	3,4% ₍₂₀₁₅₎
pays d'Asie-Pacifique					
Chine	0,9 ₍₂₀₀₅₎	1,6% ₍₂₀₀₃₎	71,5 ₍₂₀₀₅₎	9,8% ₍₂₀₀₃₎	14,4% ₍₂₀₁₅₎
Inde	3,1 ₍₂₀₀₅₎	1,9% ₍₂₀₀₃₎	63,1 ₍₂₀₀₅₎	4,1% ₍₂₀₀₃₎	6,2% ₍₂₀₁₅₎
Turkménistan	2,8 ₍₂₀₀₅₎	2,2% ₍₂₀₀₃₎	62,4 ₍₂₀₀₅₎	3,8% ₍₂₀₀₃₎	4,4% ₍₂₀₁₅₎
pays d'Amérique et Caraïbes					
Brésil	2,3 ₍₂₀₀₅₎	1,8% ₍₂₀₀₃₎	70,3 ₍₂₀₀₅₎	4,9% ₍₂₀₀₃₎	7,8% ₍₂₀₁₅₎
Chili	2 ₍₂₀₀₅₎	1,5% ₍₂₀₀₃₎	77,9 ₍₂₀₀₅₎	6,6% ₍₂₀₀₃₎	10,5% ₍₂₀₁₅₎
pays du Grand Maghreb et du Moyen Orient					
Egypte	3,3 ₍₂₀₀₅₎	2,1% ₍₂₀₀₃₎	69,8 ₍₂₀₀₅₎	3,8% ₍₂₀₀₃₎	5,5% ₍₂₀₁₅₎
<i>Suite à la page suivante...</i>					

Annexe A.

Pays	démographie				
	fécondité	croissance	espérance de vie	dépendance	projections dépendance
Israël	2,9(2005)	1,6%(2003)	79,7(2005)	8,7%(2003)	11,5%(2015)

TAB. A.5: Tableau récapitulatif des systèmes de retraites de quelques pays du monde : observations

Pays	observations		
pays membres de l'OCDE			
Allemagne	1 ^{ère} loi : 1889	dernière réforme : 2005	13.4%(2003) du Pib
Australie	1 ^{ère} loi : 1908	dernière réforme : 1999	indexation sur prix, capital et rente
Danemark	1 ^{ère} loi : 1891	dernière réforme : 1986	fonds de pension - indexation sur salaire
Canada	1 ^{ère} loi : 1927	répartition avec investissements des excédents en réserves	indexation sur prix
États-Unis	1 ^{ère} loi : 1935		indexation sur prix
Japon	1 ^{ère} loi : 1941		indexation sur prix
France	1 ^{ère} loi : 1910	dernière réforme : 2003	indexation sur prix
Pays-Bas	1 ^{ère} loi : 1901	dernière réforme : 2006	indexation sur salaire minimum
Suède	1 ^{ère} loi : 1913	dernière réforme : 2000	indexation salaire/prix
Turquie	1 ^{ère} loi : 1949	dernière réforme : 1999	indexation sur prix
pays d'Europe hors OCDE			
Russie	1 ^{ère} loi : 1922	dernière réforme : 2005	indexation sur salaire moyen national
Malte	1 ^{ère} loi : 1956	dernière réforme : 1987	indexation sur prix
Pologne	1 ^{ère} loi : 1927	dernière réforme : 2004	indexation sur variations prix > 5%
pays d'Afrique sub-saharienne			
Tanzanie	1 ^{ère} loi : 1964	dernière réforme : 1998	fonds de pension
Niger	1 ^{ère} loi : 1967	indexation par décret sur prix et salaire minimum salaire moyen	
Sénégal	1 ^{ère} loi : 1975	points - surcote/décote : ±5%	
pays d'Asie-Pacifique			
Chine	1 ^{ère} loi : 1951	absence de système national de sécurité sociale	
Inde	1 ^{ère} loi : 1952	prévoyance obligatoire (12% du salaire)	
Turkménistan	1 ^{ère} loi : 1956	indexation sur le salaire moyen national	
pays d'Amérique et Caraïbes			
Brésil	1 ^{ère} loi : 1923	dernière réforme : 1999	indexation sur prix
Chili	1 ^{ère} loi : 1924	depuis 1981, la répartition est remplacée par la capitalisation	
Vénézuéla	1 ^{ère} loi : 1940	capital si faibles cotisations	
pays du Grand Maghreb et du Moyen Orient			
Algérie	1 ^{ère} loi : 1949	2.5% de la moyenne des 5 meilleures années	
Egypte	1 ^{ère} loi : 1950	gouvernement : 1% du salaire total national sur déficit	
Israël	1 ^{ère} loi : 1953	cotisations indexées sur la moyenne nationale	

B

B.1 Principaux résultats et développements relatifs au marché financier

Nous allons reprendre ici les principaux fondements des développements en marché financier. Notre démarche consiste à les insérer en A.O.A., dans un marché qui n'exclut pas le caractère incomplet. Nous considérons alors toute la structure initiale du marché admise dans la formalisation en temps continu.

B.1.1 Le prix de marché du risque

La mise en évidence de la prime du risque en A.O.A. se fait par le lemme de Farkas et nous suivons de près la démarche de Quittard-Pinon (1998, p.317). Reconsidérons alors σ_N la matrice $(n+2, n+3)$ des diffusions des $n+2$ actifs risqués du marché. Nous complétons arbitrairement, σ_N en $\tilde{\sigma}_N$ $(n+3, n+3)$, par une dernière ligne σ_{Pri} correspondant à la diffusion de l'actif $Pri(t)$ et nous retenons μ_N comme le vecteur $(n+3, 1)$ des rendements des $n+2$ actifs risqués complété du rendement "r" de l'actif sans risque G_N . Soit Λ l'ensemble des allocations admissibles telles que :

$$\Lambda = \{u \in \mathbb{R}^{n+3}, u^T \mathbf{1}_{n+3} = 1\} \quad (\text{B.1})$$

Et donc pour tout u , élément de Λ , nous tirons l'allocation sur G_N telle que :

$$u_{n+3} = 1 - u_{(1:n+2)}^T \mathbf{1}_{n+2}$$

l'équation : $u_{(1:n+2)}^T \sigma_N = 0$ admet au moins une solution. La solution la plus triviale étant le vecteur nul. Alors

$$u^T \tilde{\sigma}_N = 0 \quad (\text{B.2})$$

admet au moins une solution dans Λ .

Condition de l'absence d'opportunité d'arbitrage

Pour toute solution u_0 de l'équation (B.2) précédente sur Λ , l'A.O.A. nous impose d'avoir nécessairement (voir Quittard-Pinon 1998, p.292)

$$u_0^T (\mu - r \mathbf{1}_{n+3}) = 0 \quad (\text{B.3})$$

Pour reprendre grossièrement la démonstration, nous considérons un intervalle dt de temps infiniment petit où nous avons l'événement B.2 sans avoir B.3. Supposons par exemple alors que $u_0^T (\mu - r \mathbf{1}_{n+3}) < 0$. Notre opérateur peut alors acheter à découvert un portefeuille de $n+3$ actifs différents de valeur en t de X_t , et de composition $\theta(t)$ tel que chaque actif $A_i(t)$ soit en nombre $\theta_i(t)$:

$$\theta_i(t) = \frac{u_{0i}(t) X(t)}{A_i(t)} \quad (\text{B.4})$$

Nous avons bien en t

$$\theta^T(t) A(t) = X(t) \quad (\text{B.5})$$

Comme le portefeuille ainsi constitué est sans risque par hypothèse ($u^T \tilde{\sigma}_N = 0$ B.2), l'opérateur est certain de devoir en $t+dt$ la valeur :

$$X_{t+dt} = X_t e^{\int_t^{t+dt} u_0^T \mu(s) ds} \quad (\text{B.6})$$

Il ira alors réinvestir son portefeuille au taux sans risque et capitaliser ainsi :

$$X_{t+dt} = X_t e^{\int_t^{t+dt} r(s) ds} \quad (\text{B.7})$$

Du fait de la différence $u_0^T (\mu - r \mathbf{1}_{n+3}) < 0$, notre opérateur encaissera alors la différence entre B.7 et B.6 en $t+dt$ et aura ainsi gagné de la richesse sans mise de

fonds initiale, ce qui est contraire à l'A.O.A.

Mise en évidence de la prime de risque

En somme, nous avons alors l'implication suivante en cas de A.O.A. :

$$u_0^T \tilde{\sigma}_N = 0 \Rightarrow u_0^T (\mu - r \mathbf{1}_{n+3}) = 0 \quad (\text{B.8})$$

Rappelons d'abord que le lemme de Farkas nous assure que un et un seul des systèmes suivant admet une solution :

–

$$\tilde{\sigma}_N^T \lambda_N = (\mu - r \mathbf{1}_{n+3}) \quad (\text{B.9})$$

pour λ_N positif ;

– et

$$u_0^T \tilde{\sigma}_N \geq 0 \Rightarrow u_0^T (\mu - r \mathbf{1}_{n+3}) < 0 \quad (\text{B.10})$$

Or l'équation B.8 étant en totale contradiction avec B.10 puisque $u_0^T \tilde{\sigma}_N = 0$ signifie aussi $u_0^T \tilde{\sigma}_N \geq 0$, mais $u_0^T (\mu - r \mathbf{1}_{n+3}) = 0$ est contraire à $u_0^T (\mu - r \mathbf{1}_{n+3}) < 0$. Alors B.9 admet donc une solution λ_N positive. La matrice $\tilde{\sigma}_N$ étant symétrique par définition et la matrice $\tilde{\sigma}_N^T \rho \tilde{\sigma}_N = \Omega_{a,n,r,i,pri}$ étant inversible d'autre part alors l'équation (B.9) qui peut s'écrire encore :

$$\tilde{\sigma}_N^T \rho \tilde{\sigma}_N \lambda_N = \Omega_{a,n,r,i,pri} \lambda_N = \tilde{\sigma}_N^T \rho (\mu - r \mathbf{1}_{n+3}) \quad (\text{B.11})$$

, admet une unique solution λ_N .

λ_N ainsi mise en évidence est la prime de risque du marché en A.O.A.

B.1.2 Univers risque-neutre et risque réel neutre

Dans le modèle d'arbitrage dont nous usons, les primes de risque et volatilités des actifs étant exogènes, nous admettons qu'elles soient \mathfrak{S}_t mesurables et satisfont aux conditions de Novikov suivantes :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[\exp \left\{ (1/2) \int_0^T \lambda_{N,t}^T \lambda_{N,t} dt \right\} \right] < \infty \\ & \text{et} \\ & \mathbb{E} \left[\exp \left\{ (1/2) \int_0^T [\lambda_{N,t} - \sigma_{\text{Pri},t}^T]^T [\lambda_{N,t} - \sigma_{\text{Pri},t}^T] dt \right\} \right] < \infty \end{aligned} \tag{B.12}$$

Ces conditions nous serviront dans la révélation des nouvelles mesures de probabilité.

Nouvelles Probabilités

Sur l'espace filtré $(A, \mathfrak{S}, \mathbf{P})$ muni de la probabilité historique \mathbf{P} , nous pouvons définir de nouvelles probabilités.

Proposition : B.2 *Nouvelles probabilités Q et Q_{Pri}*

Soient les fonctions aléatoires $f, g, \text{ et } h$ suivantes :

$$\begin{aligned} f &= \exp \left\{ (1/2) \int_{[0, H]} \lambda_{N,t}^T dz_t - (1/2) \int_{[0, H]} \lambda_{N,t}^T \lambda_{N,t} dt \right\}, \\ g &= \exp \left\{ (1/2) \int_{[0, H]} [\lambda_{N,t} - \sigma_{\text{Pri},t}^T]^T dz_t - (1/2) \int_{[0, H]} [\lambda_{N,t} - \sigma_{\text{Pri},t}^T]^T [\lambda_{N,t} - \sigma_{\text{Pri},t}^T] dt \right\} \\ & \text{et} \\ h &= \exp \left\{ - (1/2) \int_{[0, H]} \sigma_{\text{Pri}} dz_t - (1/2) \int_{[0, H]} \sigma_{\text{Pri}} \sigma_{\text{Pri}}^T dt \right\} \end{aligned} \tag{B.13}$$

f, g et h sont bien définies et \mathfrak{S} mesurables.

Définissons à présent les mesures Q et Q_{Pri} , telles que pour tout événement A

de A , nous ayons :

$$\begin{aligned}
 Q(A) &= \int_A f \, dP \\
 \text{et} & \\
 Q_{\text{Pri}}(A) &= \int_A g \, dP
 \end{aligned}
 \tag{B.14}$$

Q et Q_{Pri} sont des mesures absolument continues par rapport à la mesure de probabilité historique P , elles lui sont équivalentes et f comme g définissent leurs densités respectives de Radon-Nikodym par rapport à P . Enfin Q et Q_{Pri} sont des mesures de probabilités et h est la densité de Radon-Nikodym de Q_{Pri} par rapport à la mesure Q .

Preuve de la proposition : B.2 de la proposition B.2

Correction du risque et du risque réel

Ces nouvelles probabilités étant définies elles vont désormais servir à immuniser l'univers du risque et du risque réel à travers le théorème de Girsanov.

Proposition : B.3 Correction du risque

Le processus aléatoire z_Q défini tel que :

$$z_Q = z + \int_{[0,H]} \lambda_{N,t} \, dt
 \tag{B.15}$$

est un processus de Wiener associé à la probabilité Q .

Sous la probabilité Q , la valeur nominale actualisée au taux d'intérêt de tout actif ne versant pas de dividende, est une martingale. Par conséquent, tous les actifs du marché sans dividende, ont le même rendement espéré égal au taux sans risque, rendement de l'actif sans risque nominal.

La probabilité Q rend l'univers insensible au risque, elle corrige donc le risque.

Preuve de la proposition : B.3 de la proposition B.3

Du fait de la condition de Novikov (B.12) vérifiée par la prime de risque et de la forme de la densité de Radon-Nikodym "f" de la probabilité Q, nous déduisons par le théorème de Girsanov que le processus z_Q est un processus de Wiener associé à la probabilité Q. Pour tout actif de valeur nominale en t $F_{N,t}$ ne versant pas de dividende et ayant l'équation différentielle stochastique sous la probabilité historique P suivante :

$$\frac{dF_{N,t}}{F_{N,t}} = \mu_F(F_{N,t}, t) dt + \sigma_F(F_{N,t}, t) dz_t \quad (\text{B.16})$$

l'équation différentielle de l'actif sous la probabilité Q :

$$\frac{dF_{Nt}}{F_{Nt}} = r_t dt + \sigma_F(F_{Nt}, t) dz_Q \quad (\text{B.17})$$

On y voit bien que le rendement espéré de tout actif hors dividende est égal au taux sans risque, rendement de l'actif sans risque.

En prenant directement la valeur actualisée de l'actif sous Q, nous avons :

$$\frac{d(F_{Nt} \delta(t))}{F_{Nt} \delta(t)} = \sigma_F(F_{Nt}, t) dz_Q \quad (\text{B.18})$$

Cette équation traduit bien que la valeur nominale actualisée de tout actif ne versant pas de dividende est une martingale sous la probabilité corrigée du risque¹.

$$F_{Nt} \delta(t) = E_Q [F_{N,H} \delta(H) / \mathfrak{F}_t] \quad (\text{B.19})$$

Univers risque réel neutre

La proposition précédente s'applique aux valeurs nominales des actifs, pour le cas des valeurs réelles nous avons la proposition 1.1.

¹Une manière plus élégante d'aboutir au même résultat peut consister à la résolution de l'équation fondamentale de valorisation des actifs financiers sous la probabilité Q et à travers le théorème de Feynman Kac (voir Quittard-Pinon (1998, p.322)).

Nous donnons ici la démonstration de cette proposition.

Preuve de la proposition : B.4 de la proposition 1.1

Comme en univers risque -neutre, nous déduisons par Girsanov le processus de Wiener $z_{Q_{Pri}}$ associé à la probabilité Q_{Pri} :

$$\begin{aligned} z_{Q_{Pri}} &= z + \int_{[0,H]} [\lambda_{N,t} - \sigma_{Pri,t}^T] dt \\ &= z_Q - \int_{[0,H]} \sigma_{Pri,t}^T dt \end{aligned} \quad (B.20)$$

Lorsque nous exprimons sous Q , les différentielles des valeurs réelles de tout actif "F" nous avons :

$$\frac{dF_t}{F_t} = [r_t - (\mu_{Pri} - \sigma_{pri}^T \lambda_{N,t}) + \sigma_{pri} \sigma_{pri}^T - \sigma_F \sigma_{pri}^T] dt + (\sigma_F - \sigma_{pri}) dz_Q \quad (B.21)$$

Et même dans le cas où le marché serait complet avec l'actif $Pri(t)$ présent dans le marché et disponible comme indice sur l'inflation obéissant à l'A.O.A., nous aurons :

$$\frac{dF_t}{F_t} = (\sigma_{pri} \sigma_{pri}^T - \sigma_F \sigma_{pri}^T) dt + (\sigma_F - \sigma_{pri}) dz_Q \quad (B.22)$$

Nous voyons que dans tous les cas la probabilité corrigée du risque nominal Q , ne corrige pas le risque réel puisque sous cette probabilité, les espérances attendues du prix réel des actifs sans dividendes dépendent de la volatilité de l'actif. Par contre en écrivant ces équations sous Q_{Pri} nous obtenons en marché incomplet :

$$\frac{dF_t}{F_t} = [r_t - (\mu_{Pri} - \sigma_{pri}^T \lambda_{N,t})] dt + (\sigma_F - \sigma_{pri}) dz_{Q_{Pri}} \quad (B.23)$$

Et lorsque le marché est complet :

$$\frac{dF_t}{F_t} = (\sigma_F - \sigma_{pri}) dz_{Q_{Pri}} \quad (B.24)$$

Il apparaît que dans tous les cas les actifs sans dividendes ont la même espérance attendue identique à celle de l'actif sans risque et comparable à un taux réel d'intérêt

$$[r_t - (\mu_{Pri} - \sigma_{pri}^T \lambda_{N,t})]$$

. La probabilité Q_{Pri} corrige alors le risque réel et comme pour les auteurs Menoncin et al. (2003).

Dans le cas complet, le drift est nul et la valeur réelle de tout actif est alors une martingale sous la probabilité corrigée du risque réel.

$$F_t = E_{Q_{Pri}} [F_H / \mathfrak{S}_t] \tag{B.25}$$

B.2 Environnement démographique et passif

Différentielle du passif Pour établir la différentielle du passif individuel donnée à l'équation : 1.32, nous allons d'abord adopter les écritures simplificatrices suivantes pour alléger le document :

- $B_x(t)$ est simplifié en B dans les écritures différentielles,
- $L_x(t)$ est simplifié en L dans les écritures différentielles,
- $B_i(t, T)$ est simplifié en B_i dans les écritures différentielles,
- $\sigma_{B_i}(t, T)$ est simplifié en σ_{B_i} dans les écritures différentielles,
- $\sigma_{B_x}(t, T)$ la volatilité de la pension instantanée $B_x(t)$ sur le brownien z, est simplifiée en σ_B dans les écritures différentielles,
- enfin, $\eta_{B_x}(t, T)$ la volatilité, s'il y a lieu, de la pension instantanée $B_x(t)$ sur le brownien ω_{Pri} , est simplifiée en η_B dans les écritures différentielles.

La différentielle stochastique du passif individuel par le lemme d'Itô (voir Quittard-

Pinon 1998, page :184) est :

$$dL = \begin{cases} L_t dt + L_B \mu_B dt + L_{B_i} \mu_{B_i} dt + L_{BB} \eta_{Pri}^2 dt + L_{BB} \sigma_B \sigma_B^T dt + L_{BB_i} \sigma_B \sigma_{B_i}^T dt \\ + L_{B_i B_i} \sigma_{B_i} \sigma_{B_i}^T dt + L_B \sigma_B dz + L_{B_i} \sigma_{B_i} dz + L_B \eta_B d\omega_{Pri} \end{cases}$$

(B.26)

À partir des définitions et différentielles des différents éléments en jeu (équations : 1.26, 1.28, 1.29), nous tirons les valeurs des éléments précédents :

$$L_t = -\frac{\mu_x^{(\tau)}(t)}{p^{(\tau)}(\tau_x \geq t)} L \qquad L_B \mu_B = \left(\mu_{Pri}(t) + \frac{b_x(t)}{B_x(t)} \right) L$$

$$L_{B_i} \mu_{B_i} = -\mu_{B_i}(t, t_{r_o}) L$$

$$L_{BB} = L_{BB} \eta_{Pri}^2 = L_{BB} \sigma_B \sigma_B^T = 0$$

$$L_{BB_i} \sigma_B \sigma_{B_i}^T = -\sigma_{Pri} \sigma_{B_i}^T L$$

$$L_{B_i B_i} \sigma_{B_i} \sigma_{B_i}^T = \sigma_{B_i} \sigma_{B_i}^T L$$

$$L_B \sigma_B = \sigma_{Pri} L$$

$$L_{B_i} \sigma_{B_i} = \sigma_{B_i} L$$

$$L_B \eta_B = \eta_{Pri} L$$

(B.27)

Au total donc, nous avons bien la différentielle du passif (équation : 1.32).

B.3 Stratégie et contrôle du portefeuille

B.3.1 Établissement de l'évolution de la richesse

Dans un premier, nous allons raisonner en terme de nombre d'actifs et de prix d'actifs dans le portefeuille avant d'en déduire les proportions respectives.

Soient :

- $N_i(t)$; ($1 \leq i \leq n + 3$) le nombre d'actifs i détenus dans le portefeuille à l'instant t ; y compris l'actif sans risque ($i=n+3$) et les zéro-coupon ($i=n+1$, $i=n+2$).
- $A_{N,i}(t)$; ($1 \leq i \leq n + 3$) le prix de marché à l'instant t de l'actif i .
- $A_{N,n+1}(t) = B_N(t)$ le prix de marché à l'instant t du zéro-coupon nominal.
- $A_{N,n+2}(t) = B_{Pri}(t)$ le prix de marché à l'instant t du zéro-coupon indexé sur l'inflation.
- $A_{N,n+3}(t) = G_N(t)$ le prix de marché à l'instant t du cash nominal.

À l'instant t , la valeur $X_N(t)$ du portefeuille est de :

$$X_N(t) = \sum_{i=1}^{n+3} N_i(t) A_{N,i}(t) \quad (\text{B.28})$$

Simultanément, le fonds reçoit la cotisation totale $c(t)$, dépense la pension totale $P(t)$ ainsi que les frais et intéressements $\phi(X_N(t) - L_N(t))$, pour financer ses opérations le fonds vend des actifs si besoin (contributions insuffisantes pour couvrir tous les frais). Le solde est aussitôt réinvesti en actifs du marché en attendant la période infinitésimale suivante.

Soit donc :

$$X_N(t^+) = \sum_{i=1}^{n+3} N_i(t^+) A_{N,i}(t) + (c(t) - P(t)) - \phi(X_N(t) - L_N(t)) \quad (\text{B.29})$$

et donc à l'instant $t+h$:

$$X_N(t+h) = \sum_{i=1}^{n+3} N_i(t+h) A_{N,i}(t+h) \quad (\text{B.30})$$

en faisant la différence entre les instants t et $t+h$; la variation du portefeuille donne :

$$\begin{aligned} X_N(t+h) - X_N(t) &= \sum_{i=1}^{n+3} N_i(t+h) A_{N,i}(t+h) - \sum_{i=1}^{n+3} N_i(t) A_{N,i}(t) \\ &= \sum_{i=1}^{n+3} N_i(t) [A_{N,i}(t+h) - A_{N,i}(t)] + \sum_{i=1}^{n+3} [N_i(t+h) - N_i(t)] A_{N,i}(t) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n+3} [N_i(t+h) - N_i(t)] [A_{N,i}(t+h) - A_{N,i}(t)] \end{aligned} \quad (\text{B.31})$$

Dans la dernière équation, le premier terme correspond à la variation sur la période des prix des actifs. Le second terme correspond à la variation du portefeuille (plus exactement la variation de sa composition) entre les instants t et t^+ . En fait ce terme correspond à la création des flux exogènes : $(c(t) - P(t)) - \phi(X_N(t) - L_N(t))$ et au réinvestissement du solde. Enfin le dernier terme correspond à la variation de ces flux de t^+ à $t+h$. En définitive donc les deux derniers termes correspondent aux variations totales des flux exogènes entre t et $t+h$. Nous considérons que h correspond au plus petit intervalle de temps durant lequel les valeurs c et P ne varient pas à l'intérieur du portefeuille (même si elles varient en fait hors portefeuille). Dans la pratique on pourrait par exemple considérer que h est un jour ouvré et les cotisations et pensions sont versées quotidiennement. Alors on va avoir le même principe que le principe d'autofinancement (voir Merton (1971) ou Quittard-Pinon (1998, p.192)), sauf qu'ici nous avons un flux exogène entrant $c(t)$ assimilable aux

revenus dans Merton (1971). L'ensemble des flux entrants et sortants, revenus et dépenses, une fois regroupés, peuvent constituer un seul flux aléatoire que nous appellerons consommation du portefeuille.

$$\begin{aligned}
 & (c(t) - P(t))h - \phi((X_N(t+h) - X_N(t)) - (L_N(t+h) - L_N(t))) \\
 &= \sum_{i=1}^{n+3} [N_i(t+h) - N_i(t)] A_{N,i}(t) + \sum_{i=1}^{n+3} [N_i(t+h) - N_i(t)] [A_{N,i}(t+h) - A_{N,i}(t)]
 \end{aligned} \tag{B.32}$$

Au total donc en faisant tendre h vers 0 et en notant que $:u_i(t)X_N(t) = N_i A_i$; on obtient l'évolution de la richesse donnée en équations :2.2.

B.3.2 Minimisation de la variance dans les résultats

En considérant le portefeuille réel dans les équations 2.2, nous tirons la variance en séparant les termes contenant l'allocation en actifs risqués u_{ab} :

$$\begin{aligned}
 V(X) &= \frac{X^2}{(1+\phi)^2} (u_{ab}^T \Omega_{abN} u_{ab} + 2 u_{ab}^T \sigma_{abN} \sigma_G^T) + 2 \frac{\phi L X}{(1+\phi)^2} (u_{ab}^T \sigma_{abN} \sigma_L^T) \\
 &\quad - 2 \frac{\phi(X-L)X}{(1+\phi)^2} (u_{ab}^T \sigma_{abN} \sigma_{Pri}^T) + \Theta(X, L, \phi, G, A)
 \end{aligned} \tag{B.33}$$

avec l'égalité :

$$\begin{aligned}
 \Theta(X, L, \phi, G, A) &= \frac{X^2}{(1+\phi)^2} (\sigma_G \sigma_G^T) + 2 \frac{\phi L X}{(1+\phi)^2} (\sigma_G \sigma_L^T) + 2 \frac{\phi^2 L^2}{(1+\phi)^2} \sigma_L \sigma_G^T \\
 &\quad + \frac{X^2}{(1+\phi)^2} (\eta_{Pri}^2) - 2 \frac{\phi(X-L)X}{(1+\phi)^2} (\eta_{Pri}^2) + \frac{\phi(X-L)^2}{(1+\phi)^2} (\sigma_{Pri} \sigma_{Pri}^T) \\
 &\quad + \frac{\phi(X-L)}{(1+\phi)^2} (\eta_{Pri}^2) - 2 \frac{\phi(X-L)X}{(1+\phi)^2} (\sigma_G \sigma_{Pri}^T) - 2 \frac{\phi^2(X-L)L^2}{(1+\phi)^2} (\sigma_L \sigma_{Pri}^T)
 \end{aligned} \tag{B.34}$$

Avec la condition du premier ordre sur la différentielle de la variance et en tenant

compte du fait que $\sigma_G = -\sigma_{Pri}$ et que $\sigma_L = \sigma_{LN} - \sigma_{Pri}$ nous tirons l'allocation optimale pour une simple minimisation de la variance du portefeuille :

$$u_{ab}^v = -\frac{\phi L}{X} \Omega_{abN}^{-1} (\sigma_{abN} \sigma_{LN}^T) - (1 + \phi) \Omega_{abN}^{-1} (\sigma_{abN} \sigma_G^T) \quad (\text{B.35})$$

Nous voyons bien que cette allocation est exactement la réunion des deux fonds (3) et (4) du résultat 2.25 page : 223.

C

C.1 Détermination des flux d'équilibre de cotisation et de pension

Nous faisons la démonstration dans un cas de prestations définies, le cas de cotisations définies s'obtenant par la même démarche. Pour tirer les cotisations d'équilibres, il nous faut pouvoir extraire la différentielle par rapport à t sous le signe de l'espérance ou nous séparer du signe de l'espérance afin de pouvoir accéder librement aux différentielles stochastiques dans l'expression (1.38). En optant pour la deuxième méthode, notre première étape consistera à appliquer le théorème de Fubini qui nous permettra de permuter les ordres d'intégration et de calculer directement l'espérance afin d'obtenir une expression différentiable en t .

Pour t, u et s fixés, $0 \leq t \leq u \leq s \leq t_{ro}$, nommons les vecteurs colonnes aléatoires réels $(n+5, 1)$ "x", "x'" et "y" tels que :

- pour $1 \leq i \leq n+3$ nous avons :

$$\begin{aligned} - x_i &= z_i(s) - z_i(t) \\ - x'_i &= z_i(u) - z_i(t_o) \\ - y_i &= z_i(t) - z_i(t_o) \end{aligned}$$

- pour $i = n+4$

$$\begin{aligned} - x_{n+4} &= \omega_{Pri}(s) - \omega_{Pri}(t) \\ - x'_{n+4} &= \omega_{Pri}(u) - \omega_{Pri}(t_o) \\ - y_{n+4} &= \omega_{Pri}(t) - \omega_{Pri}(t_o) \end{aligned}$$

- et enfin pour $i = n+5$

$$\begin{aligned} - x_{n+5} &= \omega_{Sx}(s) - \omega_{Sx}(t) \\ - x'_{n+5} &= \omega_{Sx}(u) - \omega_{Sx}(t_o) \\ - y_{n+5} &= \omega_{Sx}(t) - \omega_{Sx}(t_o) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que pour tout i tel que $1 \leq i \leq n+5$, x_i suit une loi $\mathcal{N}(0, \sqrt{s-t})$, x'_i suit une loi $\mathcal{N}(0, \sqrt{u-t_o})$ et y_i suit une loi $\mathcal{N}(0, \sqrt{t-t_o})$.

Appelons $f_{x,x',y}(x, x', y)$, la densité conjointe du triplet (x, x', y) de variables aléatoires et $f_{x, x', y/z_t}(x, x', y/z_t)$ la densité conjointe conditionnelle à la filtration \mathfrak{S}_t commune des browniens z_t , $\omega_{Pri}(t)$ et $\omega_{Sx}(t)$.

Soient à présent les vecteurs colonnes :

- 1_n unité¹ de dimension $(n, 1)$, pour tout entier naturel n ;
- $1_{n,n+k}$ de dimensions $(n+k, 1)$, pour tous entiers naturels n et k , tel que les n premiers éléments sont tous égaux à l'unité et les k derniers tous nuls.

Le taux d'intérêt est gaussien par hypothèse et est fonction de "x'" en l'occurrence². En explicitant les processus de salaire et d'escompte H_t^s , nous tirons les égalités qui suivent. Pour la cotisation actualisée :

¹Tous les éléments sont égaux à l'unité.

²Nous reviendrons dans les résultats sur l'expression gaussienne du taux d'intérêt en utilisant l'une des expressions du taux du paragraphe : 1.1.1, page : 156.

$$c_x(s) {}_{s-t}p^{(\tau)}_t H_t^s = \pi S_x(t) {}_{s-t}p^{(\tau)}_t \exp \left\{ \begin{array}{l} \int_t^s \left(\begin{array}{l} \mu_{S_x}(u) - r(u, x') - \\ \frac{1}{2} (\sigma_{S_x} \sigma_{S_x}^T + \eta_{S_x}^2 + \lambda^T \lambda) \end{array} \right) du \\ + (\sigma_{S_x} + \lambda^T) (z(s) - z(t)) \\ + \eta_{S_x} (\omega_{S_x}(s) - \omega_{S_x}(t)) \end{array} \right\}$$

posons

$$\tilde{\mu}_{S_x}(u) = \mu_{S_x}(u) - \frac{1}{2} (\sigma_{S_x} \sigma_{S_x}^T + \eta_{S_x}^2 + \lambda^T \lambda)$$

nous pouvons réécrire

$$c_x(s) {}_{s-t}p^{(\tau)}_t H_t^s = \pi S_x(t) {}_{s-t}p^{(\tau)}_t \exp \left\{ \begin{array}{l} \int_t^s (\tilde{\mu}_{S_x}(u) - r(u, x')) du \\ + (\sigma_{S_x} + \lambda^T) (1_{n+3, n+5}^T x) \\ + \eta_{S_x} ((1_{n+5} - 1_{n+4, n+5})^T x) \end{array} \right\}$$

$$= \pi S_{x_0} \exp \left\{ \begin{array}{l} \int_{t_0}^t \left(\begin{array}{l} \mu_{S_x}(u) \\ -\frac{1}{2} (\sigma_{S_x} \sigma_{S_x}^T + \eta_{S_x}^2) \end{array} \right) du \\ + \sigma_{S_x} (1_{n+3, n+5}^T y) \\ + \eta_{S_x} ((1_{n+5} - 1_{n+4, n+5})^T y) \end{array} \right\} {}_{s-t}p^{(\tau)}_t \exp \left\{ \begin{array}{l} \int_t^s (\tilde{\mu}_{S_x}(u) - r(u, x')) du \\ + (\sigma_{S_x} + \lambda^T) (1_{n+3, n+5}^T x) \\ + \eta_{S_x} ((1_{n+5} - 1_{n+4, n+5})^T x) \end{array} \right\} \quad (C.1)$$

Et pour la pension actualisée :

$$\begin{aligned}
 & b_x(s) {}_{s-t}p_t^{(\tau)} \frac{{}_{t r_0 - s}p_s^{(\tau)}}{B_i(s, t r_0)} \bar{a}_{t r_0} H_t^{t r_0} = \\
 & \frac{b_{x_o}}{S_{x_o}} S_x(t) {}_{s-t}p_t^{(\tau)} \frac{{}_{t r_0 - s}p_s^{(\tau)}}{B_i(s, t r_0)} \bar{a}_{t r_0} \exp \left\{ \begin{aligned} & \int_t^s \left(\begin{aligned} & \mu_{S_x}(u) - r(u, x') - \\ & \frac{1}{2} (\sigma_{S_x} \sigma_{S_x}^T + \eta_{S_x}^2 + \lambda^T \lambda) \end{aligned} \right) du \\ & + (\sigma_{S_x} + \lambda^T) (z(s) - z(t)) \\ & + \eta_{S_x} (\omega_{S_x}(s) - \omega_{S_x}(t)) \end{aligned} \right\} \\
 & = \frac{b_{x_o}}{S_{x_o}} S_x(t) {}_{s-t}p_t^{(\tau)} \frac{{}_{t r_0 - s}p_s^{(\tau)}}{B_i(s, t r_0)} \bar{a}_{t r_0} \exp \left\{ \begin{aligned} & \int_t^s \left(\begin{aligned} & \mu_{S_x}(u) - r(u, x') - \\ & \frac{1}{2} (\sigma_{S_x} \sigma_{S_x}^T + \eta_{S_x}^2 + \lambda^T \lambda) \end{aligned} \right) du \\ & + (\sigma_{S_x} + \lambda^T) (1_{n+3, n+5}^T x) \\ & + \eta_{S_x} ((1_{n+5} - 1_{n+4, n+5})^T x) \end{aligned} \right\} \tag{C.2}
 \end{aligned}$$

Nous avons encore pour la même égalité les nouvelles écritures suivantes :

$$\begin{aligned}
 & b_x(s) s - t p^{(\tau)} \frac{t r_0 - s p^{(\tau)}}{B_i(s, t r_0)} \bar{a}_{t r_0} H_t^{t r_0} = \\
 & b_{x_o} \frac{t r_0 - t p^{(\tau)}}{B_i(s, t r_0)} \bar{a}_{t r_0} \exp \left\{ \begin{array}{l} \int_{t_o}^t \left(\begin{array}{l} \mu_{Sx}(u) - \\ \frac{1}{2} (\sigma_{Sx} \sigma_{Sx}^T + \eta_{Sx}^2) \end{array} \right) du \\ + \sigma_{Sx} (z(t) - z(t_o)) \\ + \eta_{Sx} (\omega_{Sx}(t) - \omega_{Sx}(t_o)) \end{array} \right\} \exp \left\{ \begin{array}{l} \int_t^s \left(\begin{array}{l} \tilde{\mu}_{Sx}(u) - r(u, x') \end{array} \right) du \\ + (\sigma_{Sx} + \lambda^T) (z(s) - z(t)) \\ + \eta_{Sx} (\omega_{Sx}(s) - \omega_{Sx}(t)) \end{array} \right\} \\
 & = b_{x_o} \frac{t r_0 - t p^{(\tau)}}{B_i(s, t r_0)} \bar{a}_{t r_0} \exp \left\{ \begin{array}{l} \int_{t_o}^t \left(\begin{array}{l} \mu_{Sx}(u) - \\ \frac{1}{2} (\sigma_{Sx} \sigma_{Sx}^T + \eta_{Sx}^2) \end{array} \right) du \\ + \sigma_{Sx} (1_{n+3, n+5}^T y) \\ + \eta_{Sx} ((1_{n+5} - 1_{n+4, n+5})^T y) \end{array} \right\} \exp \left\{ \begin{array}{l} \int_t^s \left(\begin{array}{l} \tilde{\mu}_{Sx}(u) - r(u, x') \end{array} \right) du \\ + (\sigma_{Sx} + \lambda^T) (1_{n+3, n+5}^T x) \\ + \eta_{Sx} ((1_{n+5} - 1_{n+4, n+5})^T x) \end{array} \right\}
 \end{aligned}
 \tag{C.3}$$

Considérons à présent les fonctions numériques continues et positives suivantes :

$$[0, t_{ro}] \times [0, t_{ro}] \times R^{n+5} \times R^{n+5} \rightarrow R$$

$$(t, s, x, x', y) \mapsto f_c(t, s, x, x', y)$$

$$f_c(t, s, x, x', y) =$$

$$\pi S_{x_0 s-t} p_t^{(\tau)} \exp \left\{ \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} \mu_{Sx}(u) - \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_{Sx} \sigma_{Sx}^T \\ + \eta_{Sx}^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} du \right. \\ \left. + \sigma_{Sx} (1_{n+3, n+5}^T y) \right. \\ \left. + \eta_{Sx} \left((1_{n+5} - 1_{n+4, n+5})^T y \right) \right\} \exp \left\{ \int_t^s \begin{pmatrix} \mu_{Sx}(u) - r(u, x') - \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_{Sx} \sigma_{Sx}^T \\ + \eta_{Sx}^2 \\ + \lambda^T \lambda \end{pmatrix} \end{pmatrix} du \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} \sigma_{Sx} \\ + \lambda^T \end{pmatrix} (1_{n+3, n+5}^T x) \right. \\ \left. + \eta_{Sx} \left((1_{n+5} - 1_{n+4, n+5})^T x \right) \right\}$$

(C.4)

et pour la pension :

$$[0, t_{ro}] \times [0, t_{ro}] \times R^{n+5} \times R^{n+5} \rightarrow R$$

$$(t, s, x) \mapsto f_b(t, s, x, x', y) =$$

$$b_{x_0 s-t} p_t^{(\tau)} \frac{t_{r_0-s} p_s^{(\tau)}}{B_i(s, t_{r_0})} \exp \left\{ \int_{t_0}^t \begin{pmatrix} \mu_{Sx}(u) - \\ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_{Sx} \sigma_{Sx}^T \\ + \eta_{Sx}^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} du \right. \\ \left. + \sigma_{Sx} (1_{n+3, n+5}^T y) + \right. \\ \left. \eta_{Sx} \left((1_{n+5} - 1_{n+4, n+5})^T y \right) \right\} \bar{a}_{t_{r_0}} \exp \left\{ \int_t^s (\tilde{\mu}_{Sx}(u) - r(u, x')) du \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} \sigma_{Sx} + \\ \lambda^T \end{pmatrix} (1_{n+3, n+5}^T x) \right. \\ \left. + \eta_{Sx} \left((1_{n+5} - 1_{n+4, n+5})^T x \right) \right\}$$

(C.5)

En vertu de l'égalité (1.38) et de la définition intégrale de l'espérance mathématique (comme de l'espérance mathématique conditionnelle), la série d'égalités et d'équivalences suivantes se vérifie :

$$\begin{aligned}
 & E \left[\int_t^{t_{r_0}} c_x(s) {}_{s-t}p^{(\tau)} H_t^s ds \middle/ \mathfrak{S}_t \right] = \\
 & E \left[\int_t^{t_{r_0}} b_x(s) {}_{s-t}p^{(\tau)} \frac{{}_{t_{r_0}-s}p^{(\tau)}}{B_i(s, t_{r_0})} ds \bar{a}_{t_{r_0}} H_t^{t_{r_0}} \middle/ \mathfrak{S}_t \right] \\
 & \Leftrightarrow \\
 & \int_{R^{n+5}} \int_{R^{n+5}} \int_{[t, t_{r_0}]} f_c(t, s, x, x', y) f_{x, x', y/z_t} \left(x, x', y/z_t \right) ds dy dx = \\
 & \int_{R^{n+5}} \int_{R^{n+5}} \int_{[t, t_{r_0}]} f_b(t, s, x, x', y) f_{x, x', y/z_t} \left(x, x', y/z_t \right) ds dy dx \\
 & \Leftrightarrow \tag{C.6} \\
 & \int_{R^{n+5} \times R^{n+5}} \int_{[t, t_{r_0}]} f_{c, x, x', y}(t, s, x, x', y) ds d(x, x', y) = \\
 & \int_{R^{n+5} \times R^{n+5}} \int_{[t, t_{r_0}]} f_{b, x, x', y}(t, s, x, x', y) ds d(x, x', y) \\
 & \Leftrightarrow \\
 & \int_{R^{n+5} \times R^{n+5} \times [t, t_{r_0}]} f_{c, x, x', y}(t, s, x, x', y) d(s, x, x', y) = \\
 & \int_{R^{n+5} \times R^{n+5} \times [t, t_{r_0}]} f_{b, x, x', y}(t, s, x, x', y) d(s, x, x', y) \\
 & \Leftrightarrow \\
 & \int_{R^{n+5} \times R^{n+5} \times [t, t_{r_0}]} f_{c, x, x', y}(t, \nu) d(\nu) = \\
 & \int_{R^{n+5} \times R^{n+5} \times [t, t_{r_0}]} f_{b, x, x', y}(t, \nu) d(\nu)
 \end{aligned}$$

Par hypothèse, la valeur actuelle probable des pensions futures en PD étant définie, alors ces expressions sont toutes finies et on pourra alors appliquer le théorème de

Fubini pour intervertir l'ordre des intégrations.

$$\int_t^{t_{r_0}} E [c_x(s) {}_{s-t}p^{(\tau)} {}_tH_t^s / \mathfrak{S}_t] ds = \int_t^{t_{r_0}} E \left[b_x(s) {}_{s-t}p^{(\tau)} \frac{{}_{t_{r_0}-s}p^{(\tau)} {}_s\bar{a}_{t_{r_0}} H_t^{t_{r_0}}}{B_i(s, t_{r_0})} / \mathfrak{S}_t \right] ds \quad (C.7)$$

Par ailleurs, les variables "x", "x'" et "y" étant tous par définition du brownien, indépendantes des browniens¹ z, $\omega_{P_{ri}}$ et ω_{S_x} dont elles sont des accroissements, il s'ensuit que l'espérance conditionnelle est en fait une simple espérance.

$$\int_t^{t_{r_0}} E [c_x(s) {}_{s-t}p^{(\tau)} {}_tH_t^s] ds = \int_t^{t_{r_0}} E \left[b_x(s) {}_{s-t}p^{(\tau)} \frac{{}_{t_{r_0}-s}p^{(\tau)} {}_s\bar{a}_{t_{r_0}} H_t^{t_{r_0}}}{B_i(s, t_{r_0})} \right] ds \quad (C.8)$$

Posons à présent que :

$$Y_1(t, s, x, x', y) = \left\{ \begin{array}{l} \int_{t_0}^t \left(\begin{array}{l} \mu_{S_x}(u) - \\ \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} \sigma_{S_x} \sigma_{S_x}^T \\ + \eta_{S_x}^2 \end{array} \right) \end{array} \right) du + \int_t^s \left(\begin{array}{l} \mu_{S_x}(u) - r(u, x') - \\ \frac{1}{2} \left(\begin{array}{l} \sigma_{S_x} \sigma_{S_x}^T \\ + \eta_{S_x}^2 + \\ \lambda^T \lambda \end{array} \right) \end{array} \right) du \\ + \sigma_{S_x} (1_{n+3, n+5} \circ y) + \eta_{S_x} ((1_{n+5} - 1_{n+4, n+5}) \circ y) \\ + \left(\begin{array}{l} \sigma_{S_x} + \\ \lambda^T \end{array} \right) (1_{n+3, n+5} \circ x) + \eta_{S_x} ((1_{n+5} - 1_{n+4, n+5}) \circ x) \end{array} \right\}$$

L'égalité en tout instant t avant la retraite de l'équilibre actuariel s'écrit désormais :

$$\int_t^{t_{r_0}} \pi S_{x_0} {}_{s-t}p^{(\tau)} E [\exp \{Y_1\}] ds = \int_t^{t_{r_0}} b_{x_0} {}_{s-t}p^{(\tau)} \frac{{}_{t_{r_0}-s}p^{(\tau)} {}_s\bar{a}_{t_{r_0}}}{B_i(s, t_{r_0})} E [\exp \{Y_1\}] ds \quad (C.9)$$

¹Elles sont alors markoviennes.

Or Y_1 est gaussien et donc l'espérance de son exponentiel est :

$$E[\exp\{Y_1\}] = \exp\left\{E[Y_1] + \frac{1}{2}Var[Y_1]\right\}$$

Avec une seconde application de "Fubini", l'espérance est alors :

$$E[Y_1] = \int_{t_0}^t \left(\mu_{Sx}(u) - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_{Sx} \sigma_{Sx}^T \\ + \eta_{Sx}^2 \end{pmatrix} \right) du + \int_t^s \left(\mu_{Sx}(u) - E[r(u, x')] - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_{Sx} \sigma_{Sx}^T \\ + \eta_{Sx}^2 + \\ \lambda^T \lambda \end{pmatrix} \right) du$$

et la variance :

$$Var[Y_1] = (2(\sigma_{Sx} \sigma_{Sx}^T + \eta_{Sx}^2) + \lambda^T \lambda) + Var\left(\int_t^s r(u, x') du\right)$$

Rappelons que si $h_1(t, s)$ est une fonction analytique, ou une fonction de classe C^2 sur $[t, t_{ro}]$ vérifiant l'existence d'une fonction $h_2(s)$ telle que : $\frac{\partial^2(h_1(t, s))}{\partial t^2} < h_2(s)$ et $\int_t^{t_{ro}} |h_2(s)| ds < \infty$. Alors par la formule des accroissements finis, nous aurons :

$$\frac{\partial \left(\int_t^{t_{ro}} h_1(t, s) ds \right)}{\partial t} = -h_1(t, t) + \int_t^{t_{ro}} \frac{\partial(h_1(t, s))}{\partial t} ds \quad (C.10)$$

Par application de ce dernier résultat à l'égalité (C.9) et en simplifiant notamment grâce à cette même égalité sus citée, nous obtenons enfin le résultat annoncé de la proposition.

D

D.1 Valeurs des zéros-coupon

Le facteur d'actualisation en univers historique défini en équations : 1.7 et 1.8, présente l'avantage de ramener des calculs définis en univers risque neutre vers l'univers historique permettant une meilleure maniabilité du fait du caractère standard du processus de Wiener associé. Comme Deelstra et al. (2002) nous allons user de ce facteur pour l'évaluation de nos actifs contingents. Rappelons dans ce contexte, les définitions des zéros-coupon (équations :1.9).

$$B(t, T) = E_Q \left[\frac{G_N(t)}{G_N(T)} / \mathfrak{F}_t \right] = E \left[H_T^t / \mathfrak{F}_t \right]$$

et (D.1)

$$B_i(t, T) = E_Q \left[\frac{\text{Pri}(T)}{\text{Pri}(t)} \frac{G_N(t)}{G_N(T)} / \mathfrak{F}_t \right] = E \left[\frac{\text{Pri}(T)}{\text{Pri}(t)} H_T^t / \mathfrak{F}_t \right]$$

Explicitons les processus $r(s)$, $i(s)$ et H_T^t . $r(s)$ et $i(s)$ suivent des processus d'Ornstein Uhlenbeck et leurs expressions¹ suivent :

$$r(s) = \theta - (\theta - r_t) e^{-k(s-t)} + \int_t^s e^{-k(s-u)} \sigma_r^T dz_u$$

et (D.2)

$$i(s) = b - (b - i_t) e^{-a(s-t)} + \int_t^s e^{-a(s-u)} \sigma_{\text{inf}}^T dz_u$$

Pour le processus, il s'agit naturellement d'un processus en brownien géométrique :

$$H_T^t = \exp \left\{ \int_t^T - \left(r(s) + \frac{1}{2} \lambda^T \lambda \right) ds - \int_t^T \lambda^T dz_s \right\} \quad (D.3)$$

¹L'intégration de ces processus se fait par différentiation et intégration d'Itô d'un processus $y = -(-r_t)e^{kt}$ pour $r(s)$ et $y = -(b - i_t)e^{at}$ pour $i(s)$, (voir Quittard-Pinon 1998, p.188)

D.1.1 Zéro-coupon nominal sur le taux d'intérêt

D'après donc les définitions précédentes, en calculant l'intégrale du taux $r(s)$ de t au terme T à l'intérieur de l'espérance de l'exponentielle, le zéro-coupon nominal se note :

$$B(t, T) = E \left[\exp \left\{ \begin{array}{l} -\theta (T - t) - \frac{(\theta - r_t)}{k} [e^{-k(T-t)} - 1] - \frac{1}{2} \lambda^T \lambda (T - t) \\ - \int_t^T \left(\int_t^s e^{-k(s-u)} \sigma_r^T dz_u \right) ds - \int_t^T \lambda^T dz_s \end{array} \right\} \right] \quad (D.4)$$

Nommons I la double intégrale en dz et ds , son calcul par fubini ou par intégration par parties nous est donné dans Quittard-Pinon (1998, p.199) et donne :

$$I = -\frac{1}{k} \int_t^T [e^{-k(T-u)} - 1] \sigma_r^T dz_u \quad (D.5)$$

Au total donc notre zéro-coupon s'écrit :

$$B(t, T) = E [\exp \{Y\}] \quad (D.6)$$

Avec alors :

$$Y = \left\{ \begin{array}{l} -\theta (T - t) - \frac{(\theta - r_t)}{k} [e^{-k(T-t)} - 1] - \frac{1}{2} \lambda^T \lambda (T - t) \\ + \frac{1}{k} \int_t^T [e^{-k(T-u)} - 1] \sigma_r^T dz_u - \int_t^T \lambda^T dz_s \end{array} \right\} \quad (D.7)$$

Y est gaussien et alors nous pouvons appliquer le résultat sur l'espérance des lois log-normales :

$$B(t, T) = \exp \left\{ E[Y] + \frac{1}{2} Var[Y] \right\} \quad (D.8)$$

On a :

$$E[Y] = -\theta (T - t) - \frac{(\theta - r_t)}{k} [e^{-k(T-t)} - 1] - \frac{1}{2} \lambda^T \lambda (T - t) \quad (D.9)$$

Et comme pour z_t un brownien standard et f, g deux fonctions mesurables, nous avons le résultat suivant :

$$\int_t^T f dz_u \int_t^T g dz_s = \int_t^T fg du \quad (D.10)$$

Alors la variance de Y devient :

$$Var[Y] = \left[\begin{array}{l} \lambda^T \lambda (T - t) + \frac{2}{k} \sigma_r \lambda (T - t) + \frac{2}{k^2} \sigma_r \lambda [e^{-k(T-t)} - 1] \\ + \frac{1}{k^2} \sigma_r \sigma_r^T [(T - t) - \frac{1}{2k} [e^{-2k(T-t)} - 1] + \frac{2}{k} [e^{-k(T-t)} - 1]] \end{array} \right] \quad (D.11)$$

Avec le changement de variable :

$$(T - t) = \tau \quad (D.12)$$

, le zéro-coupon s'écrit donc :

$$B(t, T) = \exp [A_r(\tau) - r_t C_r(\tau)]$$

avec

$$C_r(\tau) = \frac{1}{k} [1 - e^{-k\tau}] \quad (D.13)$$

et

$$A_r(\tau) = \left(\theta - \frac{1}{k} \sigma_r \lambda - \frac{1}{2k^2} \sigma_r \sigma_r^T \right) (C_r(\tau) - \tau) - \frac{1}{4k} \sigma_r \sigma_r^T (C_r(\tau))^2$$

Nous retrouvons ainsi la formule de Vasicek (1977).

Par différenciation d'Itô, nous tirons les drift et diffusions de l'expression géo-

métrique du zéro-coupon :

$$\begin{aligned}\sigma_B(t, T) &= -\sigma_r C_r(\tau) = -\frac{1}{k} [1 - e^{-k\tau}] \sigma_r \\ \text{et} \\ \mu_B(t, T) &= r - \sigma_r \lambda C_r(\tau) = r - \frac{\sigma_r \lambda}{k} [1 - e^{-k\tau}]\end{aligned}\tag{D.14}$$

Nous voyons bien que notre zéro-coupon respecte la relation d'A.O.A. sur le drift des actifs du marché et la prime de risque et le taux sans risque :

$$\mu_B(t, T) - r = \sigma_B(t, T) \lambda\tag{D.15}$$

D.1.2 Zéro-coupon indexé sur l'inflation des prix

Le calcul du zéro-coupon indexé reprend la même démarche et utilise les mêmes résultats (D.8, D.5 et D.10) que pour le zéro-coupon nominal classique. Nous partons donc de la définition :

$$B_i(t, T) = E \left[\exp \left\{ \int_t^T (i(s) - r(s) - \frac{1}{2} \lambda^T \lambda - \frac{1}{2} \sigma_{\text{Pri}} \sigma_{\text{Pri}}^T - \frac{1}{2} \eta_{\text{Pri}}^2) ds - \int_t^T \lambda^T dz_s + \int_t^T \sigma_{\text{Pri}} dz_s + \int_t^T \eta_{\text{Pri}} d\omega_{\text{Pri}} \right\} \right]\tag{D.16}$$

Il s'écrit alors :

$$B_i(t, T) = E[\exp\{Y_i\}]\tag{D.17}$$

avec

$$\begin{aligned}
 Y_i = & \left\{ \begin{aligned} & -\theta (T - t) - \frac{(\theta - r_t)}{k} [e^{-k(T-t)} - 1] - \frac{1}{2} \lambda^T \lambda (T - t) \\ & + \frac{1}{k} \int_t^T [e^{-k(T-u)} - 1] \sigma_r^T dz_u - \int_t^T \lambda^T dz_s \end{aligned} \right\} \\
 & + \left\{ \begin{aligned} & b (T - t) + \frac{(b - i_t)}{a} [e^{-a(T-t)} - 1] - \frac{1}{2} \int_t^T (\sigma_{\text{Pri}} \sigma_{\text{Pri}}^T + \eta_{\text{Pri}}^2) ds \\ & - \frac{1}{a} \int_t^T [e^{-a(T-u)} - 1] \sigma_{\text{inf}}^T dz_u + \int_t^T \sigma_{\text{Pri}} dz_s + \int_t^T \eta_{\text{Pri}} d\omega_{\text{Pri}} \end{aligned} \right\}
 \end{aligned} \tag{D.18}$$

comme Y_i est aussi gaussien comme pour le zéro-coupon simple nous avons :

$$B_i(t, T) = \exp \left\{ E[Y_i] + \frac{1}{2} \text{Var}[Y_i] \right\} \tag{D.19}$$

En réutilisant donc les mêmes notations et définitions du zéro-coupon simple, le zéro-coupon indexé s'écrit :

$$B_i(t, T) = \exp [A(\tau) + i_t C_i(\tau) - r_t C_r(\tau)]$$

où

$$C_i(\tau) = \frac{1}{a} [1 - e^{-a\tau}]$$

et

$$C_r(\tau) = \frac{1}{k} [1 - e^{-k\tau}]$$

et

$$A(\tau) = A_r(\tau) + A_i(\tau) + A_{i,r}(\tau) + A_{\text{Pri}}(\tau)$$

avec

$$A_i(\tau) = - \left(b - \frac{1}{a} \sigma_{\text{inf}} \lambda - \frac{1}{2a^2} \sigma_{\text{inf}} \sigma_{\text{inf}}^T \right) (C_i(\tau) - \tau) - \frac{1}{4a} \sigma_{\text{inf}} \sigma_{\text{inf}}^T (C_i(\tau))^2$$

et

$$A_{i,r}(\tau) = \left(-\frac{1}{ak} \sigma_{\text{inf}} \sigma_r^T \right) \left(\frac{1}{a+k} [1 - e^{-(a+k)\tau}] - C_r(\tau) - C_i(\tau) + \tau \right)$$

et encore

$$A_{\text{Pri}}(\tau) = \sigma_{\text{Pri}} [(C_r(\tau) - \tau) \sigma_r^T - (C_i(\tau) - \tau) \sigma_{\text{inf}}^T - \lambda \tau] \tag{D.20}$$

Ici aussi l'A.O.A. est respectée avec les drift et diffusions suivantes :

$$\sigma_{B_i}(t, T) = [C_i(\tau) \sigma_{\text{inf}} - C_r(\tau) \sigma_r]$$

et (D.21)

$$\mu_{B_i}(t, T) = [C_i(\tau) \sigma_{\text{inf}} \lambda - C_r(\tau) \sigma_r \lambda + r] = \sigma_{B_i}(t, T) \lambda + r$$

..

Index

- captype , 30
- Aggregate Entry Age Normal*, 90
- Aggregate Frozen Initial Liability*, 90
- Aggregate Unit Credit*, 89
- Entry Age Normal*, 87
- Individual Aggregate methode*, 91
- Supplemental Cost*, 88
- Traditional Unit credit*, 84
- Unit credit*, 82
- Value at Risk*(VaR), 141
- arbitrage pricing theory*, 57
- absence d'opportunité d'arbitrage, 57,
66, 158, 259, 303
- A.O.A., 64, 158, 163–165, 170, 174,
179, 234, 283, 302, 304, 308,
329, 331
- actif du fonds, xiv, 66, 74, 112, 116,
133, 191
- analyse monopériodique, 111
- arbitrage, 57
- aversion pour le risque, 123, 250
- aversion absolue pour le risque, 69,
71, 150, 211
- aversion relative pour le risque, 71,
256
- brownien, 157, 162, 166, 233, 317, 323
- brownien géométrique, 71, 269, 326
- brownien standard, 156, 161, 170,
179, 328
- calcul, 7, 326
- calcul actuariel, 55
- calcul de pension, 84, 89, 152, 170
- calcul en répartition, 20
- calcul stochastique, 66, 70, 170, 327,
329
- capitalisation, 13, 25
- cash, $G(t)$, 97, 98, 163, 166
- cash réel, 226
- cash-passif, 205
- choix de portefeuille, 8, 9, 211
- coefficient
- coefficient d'aversion pour le risque,
voir aversion pour le risque
- coefficient d'importance relative, 120

-
- coefficient de partage, 152
 - coefficient de tolérance au risque,
 - voir tolérance au risque, voir
 - tolérance au risque
 - coefficient psychologique, 195
 - composition du portefeuille, 191, 276
 - contrainte, 219
 - contrainte d'inégalité, 285
 - contrainte d'égalité, 70, 153, 193, 221, 285
 - contrainte de positivité, 70, 221, 227
 - contrainte de rentabilité, xvi, 9, 122, 143
 - contrôle de fonds de pension, 95, 121, 210
 - cotisation d'équilibre, 82, 84, 90, 94, 184, 275, 276
 - cotisation instantanée, 172
 - cotisations définies, 99, 106, 172, 249
 - covariance
 - covariance de rendement instantané, 160
 - coût
 - coût de la vie, 56
 - coût de pension, 13, 81, 87, 88
 - frais de transaction, 95, 156
 - coûts
 - frais de transaction, 8
 - critère
 - critère d'allocation, 143
 - critère d'efficience, 122
 - critère d'optimisation, 68, 72, 122, 210, 211, 225, 277
 - critère quadratique, 95
 - critère d'utilité, 69, 73
 - critère d'équilibre, 68
 - critère de gestion, 202, 218
 - CRRA, xvi
 - date
 - date d'embauche
 - âge d'embauche, 79, 84, 87, 169, 180, 190, 216, 238
 - date de mise en place du fonds
 - âge à la mise en place du fonds, 79, 84, 87, 169, 180, 190, 216, 238, 239
 - date de mort
 - âge de mort, 247
 - date de retraite
 - âge de retraite, xv, 39, 169, 180, 190, 216, 238, 241
 - date de versement, 14, 117, 118
 - déficit, 93

- densité de maintien, 179
- discrétisation, 231
 - schéma d'Euler, 231
- discrétisation directe, 232
- distribution
 - distribution de pension, 243
 - distribution discrète, 6, 152
- drift, 157, 179, 185, 197, 235, 262, 267
- droite, 9
- duration, 65
- dynamique
 - dynamique du fonds, 59
 - formalisation dynamique, 6
 - modélisation dynamique continu, 145
 - modélisation dynamique continue, 144
 - modélisation dynamique discrète, 141
- décomposition de Cholesky, 167, 168
- désutilité, 69
 - désutilité quadratique, 8, 95
- écart type, 102
- échéance, 133, 249
 - horizon, 114, 127, 131, 138
 - retraite, 182
 - échéance d'obligation, 164, 212, 215
 - échéance de simulation, 237, 247
- économie, 16, 19, 211, 230
- efficience, 8, 95
 - efficience du marché, 64
 - efficience du portefeuille, 254
- équation
 - équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (H.J.B.), 151, 219, 221
 - équation différentielle stochastique (E.D.S.), 157, 164
- équilibre
 - équilibre actuariel, 109, 144, 180, 182, 323
 - équilibre financier, 150
- équilibre général, 158, 159
- espace
 - espace des contraintes, 219
 - espace filtré, 156
- évaluation, 66, 89
 - taux d'évaluation, 75
 - évaluation d'actif, 66, 155, 156, 332
 - évaluation du passif, 65, 131, 177
- évaluations
 - Évaluations discrètes, 64
- fonction CRRA, 71, 211, 214, 256
- fonction d'utilité, 211–214, 220, 229
- fonction HARA, 71, 72, 150

- formule des accroissements finis, 324
- formule du zéro-coupon, 235
- formules de la contribution normale,
92
- gain, 69, 93, 185
 espérance de gain, 254
 gain certain équivalent, 122, 211
- goût du risque, 9, 69, 123, 136
- immunisation, 9, 65
- indice des prix de la consommation,
 $Pri(t)$, 162, 215, 232, 233
- inflation, 159–161, 163, 230, 231
- intégration, 70, 210, 261, 322
 espérance d'intégrale, 211, 316
 simulation d'intégrales, 229
- Karush Kuhn Tucker, (K.K.T.), 227
- lois Balladur, xiii
- lois Fillon, xiii
- marché, 10, 162
 actif du marché, 81, 96
 actifs du marché, 114
 marché complet, 64, 112, 118, 158
 marché financier, 14, 57, 74, 155
 marché incomplet, 163, 165, 170,
 179
- risque de marché, 60, 68
- risque du marché, 104, 143
- structure du marché financier, 112,
 131
- taux du marché, 74, 95
- martingale, 151, 166
- martingales, 219
- mesure de probabilité, 143
- mesure de qualité, 16
- mesure du risque, 143
- méthode
 méthode collective, 89
- modèle, 230
 modèle continu, xix, 155
 modèle discret, xviii, 73
 modèle statique, xviii, 63, 111
 risque de modèle, 60, 62
- modèle de taux, 157, 159
- modèle monofactoriel, 250, 253
- modélisation, voir modèle
- mutualisation, 89
- notations actuarielles, 152
- obligation, 237
 obligation indexée, 164, 238, 259
 obligation zéro-coupon, 164, 238
- obligation zéro-coupon, 163

- optimisation de coûts, 69, 104, 212, 214
- option, xv
- organisation des systèmes de retraites, 3, 11, 16, 296
- paramètre, 63, 65, 66, 106, 132, 147, 153, 163, 196, 275, 285
- paramètre de diffusion, 166, 168, 170, 179, 197, 202, 207, 232, 235
- paramètre démographique, 96
- passif, xv, 9, 56, 62, 65, 67, 78, 82, 86, 89, 191, 197, 202, 210, 224, 226, 230, 238, 247, 270, 292, 309
- numéraire du passif, 205, 225, 258, 270, 279, 284
- passif total, 89, 90, 132, 187
- pension d'équilibre, 184, 276
- pension discrète, 79
- pension instantanée, 152, 173–176, 178
- portefeuille optimal, xvi, 9, 122
- prestations définies, 8, 25, 58, 71, 82, 103, 106
- prime de risque, λ , 97, 113, 158, 164, 230, 233, 235
- principe d'assurances, 246
- principe de la retraite, 12, 14
- probabilité de maintien, 76, 78, 149, 169, 172, 217
- probabilité de mortalité, voir probabilité de survie
- probabilité de ruine, 137, 260
- probabilité de survie, 14, 79, 151, 217, 238, 286
- processus, 8, 285
- processus aléatoire, 8, 210, 234, 306
- processus auto regressif, 8, 95
- processus d'Itô, 231
- processus d'Ornstein Uhlenbeck, 152, 230, 231
- processus de cotisations, 104
- processus de wiener, 161, 306, 308
- processus gaussien, 97
- Radon-Nikodym, 307
- réforme de retraite, 30
- relation d'équilibre, 57, 66, 82, 83, 87, 88, 94, 184
- rendement, 75, 81, 98, 156, 302, 306
- rentabilité, 9, 69, 96, 100, 114, 120, 134
- rentabilité du surplus, 120
- rente
- rente périodique, 82

-
- rente temporaire, 87
 - rente viagère, 77–79, 89, 182
 - rente viagère continue, 152, 171, 271
 - rente viagère continue différée, 184
 - répartition, 12, 13, 16
 - risque, 58, 63, 64, 70, 89, 102–104, 143
 - régime complémentaire, 22
 - régime général, 17
 - stationnaire
 - population stationnaire, 76
 - économie stationnaire, 150, 225, 254, 267, 268
 - statique, 6
 - modèle statique, 158
 - modélisation statique, 111
 - économie statique, 112, 121, 151, 170, 189
 - évaluation statique, 65
 - stratégie
 - stratégie de portefeuille, 191, 198, 206, 208, 311
 - stratégie optimale, 60, 210
 - structure, 35
 - structure de population, 31
 - structure de retraite, 30, 41
 - structure du marché, 66, 74, 81, 112, 122, 155, 230
 - structure par termes des taux, 156
 - surplus, 93, 133
 - système de retraite, 11, 14, 16, 35
 - taux, 8, 21, 74, 208, 240, 284
 - structure par termes des taux, 156
 - taux actuariel, 75, 218
 - taux d'accroissement de la population, 52
 - taux d'activité, 33
 - taux d'actualisation, 84
 - taux d'escompte, 104, 211, 212
 - taux d'inflation, 74, voir modèle
 - detaux, voir inflation, 215, voir inflation
 - taux d'intérêt, 64, 66, 156, 157, voir modèle de taux, 185, 215, 230, 260
 - taux d'évaluation, 64, 65
 - taux de cotisation, 41
 - taux de dépendance, 49, 299
 - taux de dépenses des pensions, 53
 - taux de fécondité, 32, 35, 46
 - taux de remplacement, 16, 36
 - taux de remplacement, 244
 - taux plein, 20
 - taux salarial, 84

- taux sans risque, 71, 76, 217, 269
- théorème de Girsanov, 306–308
- tolérance au risque
 - coefficient de tolérance au risque, 112, 122
- univers
 - univers certain, 163
 - univers de probabilité, 165
 - univers forward-neutre, 166, 170
 - univers incertain, 211
 - univers risque neutre, 66, 163–165, 305
 - univers risque réel neutre, 165, 305
- universalité, 4, 14, 15, 42
- universel, 3, 38
- utilité, 211, 225, 227
 - fonction d'utilité, 69, voir fonction d'utilité, voir fonction d'utilité, 251, 256, 271
 - moyenne-variance, 112
 - utilité CRRA, 213
 - utilité finale, 249
 - utilité HARA, voir fonction Hara, voir fonction d'utilité
 - utilité indirecte, 221, 250, 271
 - utilité marginale, 225
 - utilité quadratique, 71
- valeur
 - valeur *in fine*, 118
 - valeur actualisée, 66, 104, 117, 133, 151, 182, 211
 - valeur actuarielle, 63, 187
 - valeur actuelle, 89, 117, 133, 179, 186
 - valeur actuelle probable, 56
 - valeur collective, 188
 - valeur continue, 70
 - valeur d'équilibre, 184, 185, 187, 212, 214, 241
 - valeur de marché, 156
 - valeur du fonds, 133, 253
 - valeur escomptée, 212
 - valeur espérée, 93, 94
 - valeur espérées, 8
 - valeur forward, 185
 - valeur future, 67, 212, 219
 - valeur future probable, 66
 - valeur instantanée, 218
 - valeur intuitives, 106
 - valeur nominale, 148, 152, 260
 - valeur optimale, 228
 - valeur probable, 86
 - valeur réelle, 148, 160, 199, 236, 258, 270, 284

valeur théorique, 133

Bibliographie

- Aitken, W. H. (1994), *A problem-solving approach to pension funding and valuation*, second edn, ACTEX Publications.
- Albrecht, P. (1993), Shortfall returns and shortfall risk, 4th afir international colloquium, pp. 87–110.
- Arthur, G. (1989), ‘Actuaries pension funds and investment’. Institute of Actuaries.
- Balbas1, A., Garrido, J. et Mayoral, S. (2002), Coherent risk measures in a dynamic framework. Preliminary version.
- Battocchio, P., Menoncin, F. et Scaillet, O. (2003), ‘Optimal asset allocation for pensium funds under mortality risk during the accumulation and decumulation phases’, *HEC Geneve and FAME* .
- Besley, T. et Prat, A. (2003), Pension fund governance and the choice between defined benefit and defined contribution plans.
- Bielecki, T. R., Pliska, S. R. et Sheu, S.-J. (2004), Risk sensitive portfolio management with cox, ingersoll & ross interest rates : the hjb equation.
- B.I.T (2000), ‘Quatre-vingt-dix pour cent de la population mondiale n’ont pas de régimes de retraite’, *Global Action on Aging* ((BIT/00/14)).
- Blake, D. (1998), ‘Pension schemes as options on pension fund assets : implications for pension management’, *Insurance : Mathematics and Economics* (23), 263–286.

- Blake, D. (1999), 'Portfolio choice models of pension funds and life assurance companies : Similarities and differences', *The Geneva Papers on Risk and Insurance* **24**(3), 327–357.
- Blake, D., Cairns, A. et Dowd, K. (2004), The impact of occupation and gender on pensions from defined contribution plans.
- Boero, G. et Torricelli, C. (1994), A comparative evaluation of alternative models of the term structure of interest rates, 5th afir international colloquium, pp. 671–708.
- Bosch-Princep Manuela, Pierre Devolder, D.-f. I. (2002), 'Risk analysis in asset-liability management for pension fund', *Insurance Mathematics ,Economics* .
- Boulier, J.-F. et Dupré, D. (2002), *Gestion financière des fonds de retraite*, seconde edn.
- Boulier, J.-F., Florens, D. et Trussant, E. (1993), 'fonds de retraite : quelle stratégie d'investissement ?', *Quants* (12).
- Boulier, J.-F., Huang, S. J. et Taillard, G. (2001), 'Optimal management under stochastic interest rates : the case of a protected defined contribution pension fund', *Insurance : Mathematics and Economics* (28), 173–189.
- Brennan, M. J. et Xia, Y. (2000), *Dynamic asset allocation under inflation*.
- Buffeteau, S. et Godefroy, P. (2006), Prospective des départs en retraite pour les générations 1945 à 1975. Données sociales-La société française.
- Cairns, A. J. (1994), *An introduction to stochastic pension plan modelling*, Department of Actuarial Mathematics and Statistics,, Heriot-Watt University, Riccarton, Edinburgh, EH14 4AS United Kingdom. Presented to the workshop on Interest Rate Risk, Vancouver.
- Cairns, A. J. (1996), *Continuous-time pension-fund modelling*, Department of

Actuarial Mathematics and Statistics, Heriot-Watt University, Riccarton,
Edinburgh, EH14 4AS, United Kingdom.

Cairns, A. J. (2000), *A multifactor model for the term structure and indication
for long-term risk management with an extension to the equities market*,

Department of Actuarial Mathematics and Statistics, Heriot-Watt

University, Edinburgh, EH14 4AS, United Kingdom E-mail :

A.Cairns@ma.hw.ac.uk Internet : www.ma.hw.ac.uk. First version :

February 26, 1999. This version : January 3, 2000.

Cairns, A. J. (2003), Interest-rate models. Prepared for the Encyclopaedia of
Actuarial Science.

Cairns, A. J. (2003 b), 'Pension-fund mathematics'. Prepared for the
Encyclopaedia of Actuarial Science.

Cairns, A. J. (n.d.), *Pension-fund mathematics*, Department of Actuarial
Mathematics and Statistics,, Heriot-Watt University, Riccarton, Edinburgh,
EH14 4AS United Kingdom.

Cairns, A. J., Blake, D., Dawson, P. et Dowd, K. (2005), Pricing the risk on
longevity bonds.

Cairns, A. J., Blake, D. et Dowd, K. (2000), 'Optimal dynamic asset allocation
for defined pension plans'.

Cairns, A. J., Blake, D. et Dowd, K. (2004), 'Stochastic lifestyling : optimal
dynamic asset allocation for defined pension plans'.

Cairns, A. J. G. et Huang, H.-C. (2004), 'Valuation and hedging of limited price
indexed liabilities', *B.A.J.* **III**(10), 627–663.

Cairns, A. J. et Huang, H.-C. (2005), 'On the control of defined-benefit pension
plans', *Insurance : Mathematics and Economics* **III**(10), 627–663.

- Cairns, A. J. et Rosas, S. A. G. (2004), 'A family of term-structure models with stochastic volatility', *Actuarial Mathematics and Statistics* .
- Carvalho-Pinheiro, V. (2004), Funded pension schemes for government workers : Proposal for study, *in* 'Third OECD/INPRS Conference on Private Pensions in Asia', OECD, Manila, Philippines.
- Caussat, L. et Lelièvre, M. (2004), Les systèmes de retraite en europe à l'épreuve des changements démographiques. Laurent Caussat et Michèle Lelièvre font partie de la Direction de la recherche, des études, de l'évaluation et des statistiques (Drees) au ministère des Affaires sociales, du Travail et de la Solidarité.
- Caussat, L. et Lelièvre, M. (2005), 'Les réformes des systèmes de retraite dans les pays d'europe du sud', *études et résultats* (450).
- Chang, S.-C. et Cheng, H.-Y. (2002), 'Pension valuation under uncertainties : Implementation of a stochastic and dynamic monitoring system', *The Journal of Risk and Insurance* **69**(2), 171–192.
- Charpentier, F. (1996), *Les fonds de pension*.
- Chen, R.-R. et Scott, L. (1992), 'Pricing interest rate options in a two-factor cox ingersoll ross model of the term structure', *The review of financial studies* **5**(4), 613–636.
- Cipra, T. (2002), 'Life table for czech pension funds', *Insurance Mathematics ,Economics* .
- Committee, U. E. S. P. (2005), Privately managed pension provision, Technical report, Union Européenne.
- C.O.R. (2000), Comparaison des projections des dépenses de retraite dans les rapports de m. charpin et m. teulade, Bilan critique des travaux sur les

-
- régimes de retraite et diagnostic sur la situation des régimes Réunion plénière du 05 Septembre 2000, Conseil d'orientation des retraites. FICHE N° 1.
- C.O.R. (2005a), Allongement de la durée d'assurance et âges de départ, pénibilité, décompte de la durée, conditions de départ. les comptes de la sécurité sociale de septembre 2006, Document de travail, n'engage pas le Conseil Document N° 8, Conseil d'orientation des retraites. Direction de la sécurité sociale (extraits sur les comptes de la CNAV et les prestations vieillesse).
- C.O.R. (2005b), Les projections selon différents scénarios démographiques, Document de travail, n'engage pas le Conseil Document N° 2, Conseil d'orientation des retraites. Projections financières (suite).
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E. et Ross, S. A. (1985a), 'An intertemporal general equilibrium model of asset prices', *Econometrica* **53**(2), 363–384.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E. et Ross, S. A. (1985b), 'A theory of the term structure of interest rates', *Econometrica* **53**(2), 385–407.
- Cox, S. H. et Pedersen, H. W. (1998), 'Currency risk models in insurance ; a mathematical perspective', *General insurance convention and astin colloquium* .
- Davis, E. P. (2002a), 'The european pension management industry', *The Pensions Institute, Discussion Paper* (0212). The PENSIONS INSTITUTE Birkbeck College, University of London, 7-15 Gresse St. London W1T 1LL, UK <http://www.pensions-institute.org>.
- Davis, E. P. (2002b), The european pension management industry. The PENSIONS INSTITUTE Birkbeck College, University of London, 7-15 Gresse St. London W1T 1LL, UK <http://www.pensions-institute.org>.
- Deelstra, G., Grasselli, M. et Koehl, P.-F. (2000), Optimal investment strategies in a cir framework.

- Deelstra, G., Grasselli, M. et Koehl, P.-F. (2002), 'Optimal design of the guarantee for defined contribution funds', *Journal of Economic Dynamics and Control* .
- Devolder, P. (2002), 'Stochastic optimal control of annuity contracts', *Insurance Mathematics ,Economics* .
- Devolder, P. et Goffin, V. (2006), Ias norms and pension funding : from level methods to unit credit valuation.
- Devolder, P. et Hainaut, D. (2004), The annuity puzzle revisited : a deterministic version with lagrangian methods.
- Devolder, P. et Hainaut, D. (2006), Management of a pension fund under mortality and financial risks.
- Donohue, R. J. (n.d.), 'Bond duration', *CCIM, Regent School Press* .
- Dryden, L. et Hancock, M. (1992), 'The myth of index-linked bond duration an examination of the interest rate risk characteristics of index related securities', *The quartelry journal of the institute of actuaries of australia* .
- Dufresne, D. (1988), 'Moments of pension contributions and fund levels when rates of return are random', *Journal of the Institute of Actuaries* (115), 535–544.
- Dufresne, D. (1989), 'Stability of pension systems when rates of return are random', *Insurance : Mathematics and Economics* (8), 71–76.
- Dufresne, D. (1990), 'The distribution of a perpetuity, with applications to risk theory and pension funding', *Scandinavian Actuarial Journal* pp. 39–79.
- EM-Lyon (2006), 'New trends in finance and risk management'. Workshop on Pension Funds.
- Fama, E. F. (1970), 'Efficient capital markets : A review of theory and empirical work', *The Journal of Finance* **25**(2), 383–417. Papers and Proceedings of

-
- the Twenty-Eighth Annual Meeting of the American Finance Association
New York, N.Y. December, 28-30, 1969.
- Fama, E. F. et Blume, M. (1966), 'Filter rules and stock market trading', *Journal of Business* **39**(1), 226–241.
- Filipovi, D. et Zabczyk, J. (2002), 'Markovian term structure models in discrete time', *The Annals of Applied Probability* **12**(2), 710729.
- Gençay, R., Selçuk, F. et Ulugülyagci, A. (2002), High volatility, thick tails and extreme value theory in value-at-risk estimation.
- Grasselli, M. (2006), Méthodes récentes de gestion des fonds de retraite.
- Haberman, S. (1992), 'Pension funding with time delays : a stochastic approach', *Insurance : Mathematics and Economics* (11), 179–189.
- Haberman, S. (1994), 'Autoregressive rates of return and the variability of pension fund contributions and fund levels for a defined benefit pension scheme', *Insurance : Mathematics and Economics* (14), 219–240.
- Haberman, S., Vigna, E. et Russell, G. (2002), 'Investment choices post retirement in a defined contribution pension scheme', *Insurance Mathématiques ,Economics* .
- Haberman, S., Vigna, E. et Russell, G. (2004), Optimal investment choices post retirement in a defined contribution pension scheme.
- Haugen, R. A. (1989), 'Pension management in the context of corporate risk management', *the journal of portfolio management* pp. 72–78.
- Heath, D., Jarrow, R. et Morton, A. (1992), 'Bond pricing and the term structure of interest rates : a new methodology for contingent claims valuation', *Econometrica* **60**, 77–105.
- Hervé, F. (2004), 'Les fonds de pension protègent-ils les investisseurs des évolutions du marché?', *Cahier du FARGO* (1060101). LEG FARGO

Centre de recherche en Finance, Architecture et Gouvernance des
Organisations UMR CNRS 5118.

Huber, C. (n.d.), Modèles pour des durées de survie.

Jarrow, R. et Yildirim, Y. (2001), A simple model for valuing default swaps when
both market and credit risk are correlated.

Jarrow, R. et Yildirim, Y. (2002), Pricing treasury inflation protected securities
and related derivatives using an hjm model. August 31, 2000 revised
February 19, 2002.

Jarrow, R., Yildirim, Y. et Janosi, T. (2001), Estimating default probabilities
implicit in equity prices. Revised January 17, 2003.

Jarrow, R., Yildirim, Y., Protter, P. et Cetin, U. (2002), Modeling credit risk
with partial information.

J.Sikorav, M. (1996), 'Allocation tactique d'actifs : à la recherche de valeur',
Quants (21).

Kalisch, D. W. et Aman, T. (1998), systemes de retraite : le processus de reforme
dans les pays de l'ocde, documents de travail sur le vieillissement document
de travail awp 3.4 f, Organisation de Coopération et de Développement
Economiques. Préserver la prospérité dans une société vieillissante : le projet
horizontal de l'O.C.D.E. sur les implications politiques du vieillissement.

Leibowitz, M. L. et Kogelman, S. (1991), 'Asset under shortfall constraints', *The
Journal Of Portfolio Management* .

Leibowitz, M. L., Kogelman, S. et N.Bader, L. (1992), 'Asset performance and
surplus control : a dual-shortfall approach', *The Journal Of Portfolio
Management* .

Leibowitz, M. L. et Langetieg, T. C. (1989), 'Shortfall risk and asset allocation

-
- decision : a simulation analysis of stock and bond risk profiles', *The Journal Of Portfolio Management* .
- Leo, S. et Fachhochschule, K. (2000), Lineare portfoliooptimierung mit target-shortfall-probability-vektor.
- Lintner, J. (1965), 'The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets', *The Review of Economics and Statistics* **47**(1), 13–37.
- MacDonald, B.-J. et Cairns, A. J. (2004), Dc pension plans for all : what if?
- Markowitz, H. (1952), 'Portfolio selection', *The Journal of Finance* **7**(1), 77–91.
- McCarthy, D. (2005), The optimal allocation of pension risks in employment contracts, Research Report 272 Corporate Document Services 272, Department for Work and Pensions. A report of research carried out by Dr. David McCarthy of the Tanaka Business School at Imperial College London on behalf of the Department for Work and Pensions.
- Mekkaoui-DE-Freitas, N. E. (1999), *Fonds de pension et marchés financiers*, economie et innovations edn.
- Menoncin, F., Battocchio, P. et Scaillet, O. (2003), 'Mortality risk and real optimal asset allocation for pensium funds', *HEC Geneve and FAME* .
- Menoncin, F., Battocchio, P. et Scaillet, O. (2006), Optimal asset allocation for pension funds under mortality risk during the accumulation and decumulation phases.
- Merton, R. (1969), 'Lifetime portfolio selection under uncertainty : the continuous-time case', *The Review of Economics and Statistics* **51**(3), 247–257. The Review of Economics and Statistics est actuellement (2005) publié par The MIT Press.
- Merton, R. (1971), 'Optimum consumption and portfolio rules in a

- continuous-time model', *Journal of Economic Theory* **51**(3), 373–413. Reçu le 30/09/1970.
- Moreau, I. (2000), 'Retraites dans le monde : des régimes peu nombreux et mal gérés'.
- O.C.D.E. (2004), *Ageing and employment policies*, number 53429, OECD Publications Paris, 2, rue André-Pascal, 75775 PARIS CEDEX 16, chapter Norway, pp. 20–35. ISBN 92-64-02045-4.
- O.C.D.E. (2005), 'Accroître les chances de chacun : pour une politique sociale active au bénéfice de tous'.
- O.C.D.E. (2006*a*), *OECD factbook*, chapter Ageing societies, pp. 18–20. ISBN 92-64-03561-3.
- O.C.D.E. (2006*b*), *OECD factbook*, chapter Health/quality of life, pp. 200–203. ISBN 92-64-03561-3.
- O.C.D.E. (2006*c*), *Oecd guidelines on funding and benefit security*, Technical report, OECD. These Guidelines are published by the OECD for public consultation.
- O.C.D.E. (2006*d*), *Oecd guidelines on pension fund asset management recommendation of the council*, Technical report, OECD. These guidelines, prepared by the OECD Insurance and Private Pensions Committee and Working Party on Private Pensions, were adopted by the OECD Council on 26 January 2006.
- O.C.D.E. (2006*e*), *Pension markets in focus*, Technical Report Issue 3, OECD.
- Owadally, M. I. (1998), *The dynamics and control of pension funding*, thesis submitted for the degree of doctor of philosophy, Département of Actuarial Science and Statistics School of Mathematics The City University London, England.

-
- Palacios, R. et Whitehouse, E. (2006), 'Civil-service pension schemes around the world', *Social Protection Discussion Paper : the World Bank* (0602).
- Pedersen, H. W., Shiu, E. S. W. et Thorlacius, A. E. (1989), 'Arbitrage-free pricing of interest-rate contingent claims', *Transactions of Society of Actuaries* **41**.
- Petauton, P. (1996), *Théorie et pratique de l'assurance vie*, deuxième edn. ouvrage recommandé par l'institut des actuaires français.
- Piñera, J. (2001), 'Liberating workers : The world pension revolution', *Cato's Letter* (15).
- Piermay, M. (2002), 'Pratiques actuarielles et évolutions comptables', *Risques* (52).
- Pison, G. (2005), 'Tous les pays du monde (2005)', *Population & sociétés* (414). Annonce 25e Congrès international de la population, Tours, 18 au 23 juillet 2005.
- Pochart, C., Taillard, G. et Veltman, H. (1997), 'Fonds de pension à cotisations définies', *Quants* (27).
- Poncet, P. et Lioui, A. (2004), 'General equilibrium real and nominal interest rates', *Journal of Banking ,Finance* (28), 1569–1595.
- Poncet, P. et Lioui, A. (2005), 'General equilibrium pricing of cpi derivatives', *Journal of Banking ,Finance* (29), 1265–1294.
- Programme des Nations Unis pour le développement (2005), Rapport mondial sur le développement humain 2005, Technical report, Nations Unies-PNUD, Programme des Nations Unis pour le développement
1 UN Plaza, New York, 10017, États-Unis. Publié par ECONOMICA 49, rue Hericart 75015 Paris France ISBN 2-7178-5114-3.

- Quittard-Pinon, F. (1998), *Marché des capitaux et théorie financière*, deuxième edn.
- Rabemananjara, R. (n.d.), ‘Choix optimal de portefeuille. ”comment maîtriser le risque?’’, *Quants* (3).
- Reichlin, A. (2000), Alm for defined-benefit pension funds : Simultaneous management of contributions and investments.
- Robalino, D. A., Whitehouse, E., N.Mataoanu, A., Musalem, A. R., Sherwood, E. et Sluchynsky, O. (2005), Pensions in the middle east and north africa time for change, Orientations in development series, The World Bank.
- Rodriguez, R. J. (2003), Bond duration, maturity, and concavity : a closer second look.
- S., B. (1989), Driving the pension fund, Applications of Mathematics in Insurance, Finance and Actuarial Work, London.
- S., K. C. (1992), ‘Caveats in immunization of pension liabilities’, *The Journal Of Portfolio Management* .
- Sharpe, W. F. (1964), ‘Capital asset prices : A theory of market equilibrium under conditions of risk’, *The Journal of Finance* **19**(3), 425–442.
- Sharpe, W. F. et Tint, L. G. (1990), ‘Liabilities : a new approach’, *The journal of portfolio management* pp. 5 –10.
- Siegmann, A. (2003), Optimal investment policies for defined benefit pension funds, Research Memorandum WO 728/0308, De Nederlandsche Bank NV Research Department, De Nederlandsche Bank NV Research Department P.O. Box 98 1000 AB AMSTERDAM.
- Sneijers, P. (2005), Pension funds statistics, Technical report, Eurostat.
- Social Security Administration (2005a), Social security programs throughout the world : Africa, 2005, Technical Report 13-11803, Social Security

Administration United States, Social Security Administration Office of Policy Office of Research, Evaluation, and Statistics 500 E Street, SW, 8th Floor Washington, DC 20254.

Social Security Administration (2005*b*), Social security programs throughout the world : Asia and the pacific, 2004, Technical Report 13-11802, Social Security Administration United States, Social Security Administration Office of Policy Office of Research, Evaluation, and Statistics 500 E Street, SW, 8th Floor Washington, DC 20254.

Social Security Administration (2006*a*), Social security programs throughout the world : europe, 2006, Technical Report 13-11801, Social Security Administration United States, Social Security Administration Office of Policy Office of Research, Evaluation, and Statistics 500 E Street, SW, 8th Floor Washington, DC 20254.

Social Security Administration (2006*b*), Social security programs throughout the world : the americas, 2005, Technical Report 13-11803, Social Security Administration United States, Social Security Administration Office of Policy Office of Research, Evaluation, and Statistics 500 E Street, SW, 8th Floor Washington, DC 20254.

Solari, T. (2002), séminaire : Lyon , Lausanne, Université de Lausanne.

Sundaresan, S. et Zapatero, F. (1997), 'Valuation, optimal asset allocation and retirement incentives of pension plans', *The review of Financial studies* **10**(3).

Talfi, M. (2007), Organisation des systèmes de retraite et modélisation des fonds de pension, Thèse de doctorat, Laboratoire de Sciences Actuarielle et Financière (S.A.F.) Université Claude Bernard Lyon1-France, talfim@yahoo.fr.

- The Social Protection Committee (2005), Privately managed pension provision, Technical report.
- Tobin, J. (1947), 'Liquidity preference and monetary policy', *The Review of Economic Statistics* **29**(2), 124–131.
- Turbot, P. (1997), *les fonds de pension*, number 3247, Que sais je.
- Union Européenne (2006), Synthesis report on adequate and sustainable pensions, commission staff working document 304, Union Européenne-Community Statistics on Income and Living Conditions.
- Vasicek, O. (1977), 'An equilibrium characterisation of the term structure', *Journal of Financial Economics* (5), 177–188.
- Vernière, L. (2000), 'Évolutions et réformes du système de retraite en Allemagne', *Question Retraites* (2000-32).
- Vinsonhaler, C., Ravishanker, N., Vadiveloo, J. et Rasoanaivo, G. (n.d.), 'Multivariate analysis of pension plan : mortality data', *North American Actuarial Journal* **5**(2).
- Vyncke, D., Goovaerts, M., Dhaene, J. et Vanduffel, S. (2002), Optimal portfolio selection for cash-flows with bounded capital at risk.
- Wagner, W. H. . (1988), 'The many dimensions of risk', *the journal of portfolio management* pp. 35–39.
- Wilkie, A. (1985), 'Portfolio selection in the presence of fixed liabilities : a comment on 'the matching of assets to liabilities'', *Journal of the Institute of Actuaries* (112), 229–277.
- Zimbidis, A. et Greece, A. (2002), 'The optimal design, of robust automatic controller for cross-financing the stochastic increments in life expectancy via an adaptive investment strategy', *Insurance Mathematics ,Economics* .

Zimbidis, A. et Haberman, S. (1993), 'Delay, feedback and variability of pension contributions and fund levels', *Insurance : Mathematics and Economics* (13), 271–285.

Résumé

Des nombreux aspects des fonds de pension, nous nous intéressons ici à leur modélisation et à l'organisation des systèmes de retraites dans le monde.

Dans une première partie, nous présentons les différentes organisations de systèmes de retraites et la modélisation des fonds de pension en général suivie de la modélisation dynamique discrète avec la modélisation statique comme cas particulier de la discrète. Ainsi, nous constatons que les différents systèmes de retraites sont caractérisés par une grande diversité, mais restent néanmoins regroupés sous trois grands groupes qui se croisent souvent. Ce sont : les retraites par répartition, les retraites par capitalisation et les retraites par subvention. Nous introduisons la modélisation des systèmes de retraites par capitalisation en commençant par donner une vision générale incorporant une typologie des risques de fonds de pension. Nous présentons ensuite les méthodes pratiques et courantes de la modélisation en temps discret.

La deuxième partie de la thèse accueille les développements de la modélisation en temps continu. Dans une économie dynamique et un marché non nécessairement complet, avec une expression stochastique des évolutions de l'inflation et des prix, nous usons du zéro-coupon nominal et du zéro-coupon indexé sur les prix de la consommation. Grâce aux outils et principes des assurances, des valeurs actuarielles des flux continus de cotisations et pensions sont fournies.

Tout en faisant le lien avec les résultats issus de la littérature, nous appuyons, aussi bien en première partie qu'en deuxième, les portefeuilles optimaux de fonds de pension avec leurs probabilités de ruine, par des illustrations à travers des exemples concrets et des simulations numériques.

Presentation of Retirement Funds and Modelisation of the Pension Funds

Abstract

Pension funds have many aspects, all interesting to be studied. We have chosen to work on their modelisation and also to present a panorama on the retirement systems and their organization worldwide.

In the first part of the thesis, we analyse that the three main modes of the retirement systems, that is the redistribution mode, the capitalization mode and the retirement by subvention, although they may seem very different, can be organized simultaneously. Our view on the retirement systems is through an insurance and financial point of view and we give of course, special attention to the french system. Then, we move to how pension fund modelisations are made up to now and we give on an analysis on pension funds risks. We then, introduce the currently used modelisations that are the modelisations in an dynamic discrete-time. We illustrate with examples and we build a static-time modeling case like a particular case of the dynamic discrete-time. Concerning the static-time, we take time to study the ruin probability of the pension funds firm.

In the second part of the thesis, we deal again, in a continuous time framework, with all the insurance principles and practical ways of the discrete time. But we go further by incorporating the usual insurance tools in a financial framework. The pension fund population is taken in a restriction free way. We use the feasibility condition, the insurance equilibrium and the mortality probability. We have two stochastic rates : the spot interests rate and the inflator rate. We put both the consumer price index and the fund's liability on the center of the economy by using them as numeraire, one after the other. In an incomplete market, due to the non-hedgeable dimensions of the consumer price index in one hand and the salaries in the other hand, we come to results, in some cases. Our results are consistent to the pension funds optimal allocation literature. Again, we study the ruin probability of the pension funds firms from many points of view.

Discipline

Spécialité de sciences actuarielle et financière.

Mots clés

Retraites, fonds de pension, allocation optimale, passif, actif, système de retraites, régime de retraite, capitalisation, répartition, probabilité de mortalité, faisabilité, réserve mathématique, équilibre assurantiel, équilibre actuariel, évaluation d'actif, stratégie optimale, fonction d'utilité, rente viagère, rente temporaire, commutateur, taux actuariel, mathématiques actuarielles, arbitrage, marché complet, prix d'équilibre, inflation, obligation, obligation indexée, actions, cash, annuités, surplus, "Aggregate Cost Methods", "Entry Age Normal", "Unit Credit", "Individual Aggregate", cotisation d'équilibre, pension d'équilibre, gestion collective, portefeuille, processus stochastique, martingales.

Unité de préparation

Thèse préparée au laboratoire de Sciences Actuarielles et Financières (S.A.F. numéro EA 2429) à l'Institut de Science Financière et d'Assurances (I.S.F.A.) de l'Université Claude Bernard de Lyon1. L'institut est rattaché à l'école doctorale de Management Information et Finance (M.I.F.).



Université Claude Bernard
Institut de Science Financière et d'Assurances





INSTITUT DE SCIENCE FINANCIERE ET D'ASSURANCES

Domaine Scientifique de Gerland

50 Avenue Tony Garnier

69366 LYON CEDEX 07

Tél. (33) 04.37.28.74.40 – Fax (33) 04.37.28.76.32 – E-mail : isfa@univ-lyon1.fr

École Doctorale Management, Information, Finance (M.I.F.)

Manufacture des Tabacs

6 Cours Albert Thomas

69008 Lyon

Téléphone : (+33) 04 78 78 76 67 / 76 68

Télécopie : (+33) 04 78 78 76 66

E-mail : edmif@univ-lyon3.fr