



HAL
open science

Étude et développement d'un système de gravimétrie mobile

Bertrand de Saint-Jean

► **To cite this version:**

Bertrand de Saint-Jean. Étude et développement d'un système de gravimétrie mobile. Géophysique [physics.geo-ph]. Observatoire de Paris, 2008. Français. NNT: . tel-00326276

HAL Id: tel-00326276

<https://theses.hal.science/tel-00326276v1>

Submitted on 2 Oct 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

OBSERVATOIRE DE PARIS
ÉCOLE DOCTORALE D'ASTRONOMIE ET D'ASTROPHYSIQUE

THÈSE

présentée en vue d'obtenir le grade de Docteur, spécialité
« Astronomie et Astrophysique option Géodésie »

par

Bertrand de SAINT-JEAN

ÉTUDE ET DÉVELOPPEMENT D'UN SYSTÈME DE GRAVIMÉTRIE MOBILE

Thèse soutenue le 6 juin 2008 devant le jury composé de :

M.	BIANCALE, RICHARD	Président du jury
M.	FRANCIS, OLIVIER	Rapporteur
M.	BAYER, ROGER	Rapporteur
M.	BARRIOT, JEAN-PIERRE	Directeur de thèse
M.	VERDUN, JÉRÔME	CoDirecteur
M ^{me}	MAIA, MARCIA	Examinatrice
M.	DIAMENT, MICHEL	Examineur
M.	POLIDORI, LAURENT	Examineur

Travaux effectués au Laboratoire de Recherche en Géodésie (LAREG)
de l'Institut Géographique National (IGN)

À Thibault, Maud et ma famille ...

REMERCIEMENTS

Ce travail de thèse, proposé par Henri Duquenne, Ingénieur Général des Ponts et Chaussées, a été parrainé par l'Institut Géographique National (IGN) et le Groupe de Recherche de Géodésie Spatiale (GRGS), et a été réalisé au sein du Laboratoire de REcherche en Géodésie (LAREG) dirigé par Olivier Jamet. Sous la direction de Jean-Pierre Barriot, mes travaux ont été encadrés par Henri Duquenne, Jérôme Verdun et José Cali.

Tout d'abord, je tiens à remercier l'équipe avec laquelle nous avons développé le système « Limo-G ». Jean-Pierre Barriot qui m'a laissé une grande liberté et autonomie de travail. Henri Duquenne pour m'avoir fait confiance en m'accordant cette thèse. Je le remercie aussi pour m'avoir éclairé sur les points obscurs de la géodésie, de la topométrie mais aussi beaucoup appris sur le métier de chercheur, et je lui souhaite un prompt rétablissement. Je tiens également à remercier José Cali de m'avoir accompagné tout au long de ces travaux et d'avoir construit et manipulé non seulement le système mais aussi les outils pour son utilisation, Didier Rouxel et l'équipage de « la Zélée » du Service Hydrographique et Océanographique de la Marine (SHOM) pour leur aide lors de la mission à Sainte-Maxime et Jérôme Ammann de l'Institut de Physique du Globe de Paris pour nous avoir confié un gravimètre relatif pour nos mesures de référence.

Ensuite, je souhaite remercier les différents membres du jury qui ont acceptés avec enthousiasme de prendre le temps de lire ce manuscrit et d'évaluer mes travaux.

Enfin, je tiens à remercier très chaleureusement Jérôme Verdun qui m'a soutenu du premier jour de thèse à la soutenance, sans compter les heures. Grâce à lui, j'ai réalisé les finesses de la recherche scientifique, de l'enseignement et du partage de connaissances lors de congrès ou de cours. De ses bons conseils, son œil avisé et sa bienveillance, j'ai réussi à tirer le meilleur parti de mes travaux que je vous présente ici.

L'École Supérieure des Géomètres et Topographes (ESGT) et ses enseignants ont leur place ici aussi. Je les remercie en effet, et plus particulièrement Stéphane Durand, pour m'avoir laissé la possibilité d'effectuer quelques enseignements en

topométrie de précision. De même, je remercie les membres de l'École Nationale des Sciences Géographiques (ENSG) dont Serge Botton et Michel Kasser pour m'avoir donné l'opportunité d'enseigner.

Quelques années de thèse dans un laboratoire interdisent d'être seul. C'est pourquoi je souhaite remercier les membres du LAREG (permanents ou non) d'avoir été présents, Olivier Jamet pour m'avoir accueilli au laboratoire, David Coulot pour son soutien et ses conseils, Christiane Guérin pour m'avoir éclairé dans les méandres de l'administration, mais aussi Marie-Noëlle Bouin, Zuheir Altamimi, Olivier Bock qui par leurs travaux me donnent ce goût pour la recherche. Il ne faut pas oublier non plus tous les étudiants thésards qui sont passés par là, Karine Le Bail, Juliette Legrand, Arnaud Pollet, Samuel Nahmani, Alvaro Santamaria-Gomez, Leila Eissa et plus particulièrement Xavier Collilieux avec qui j'ai beaucoup échangé professionnellement mais aussi personnellement.

Merci à mes parents de m'avoir laissé la possibilité de faire le cursus que j'ai choisi tout au long de mes études et de m'avoir soutenu dans mes choix.

Finalement, je tiens à remercier mon épouse Maud qui me soutient et me supporte depuis le début de ce travail de thèse et mon fils Thibault qui est né lors de la rédaction finale de ce manuscrit.

Paris, mai 2008.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vii
PRÉFACE	1
1 OBJECTIFS ET TECHNIQUES DE LA GRAVIMÉTRIE MODERNE	3
1.1 INTRODUCTION	5
1.2 PANORAMA DE LA GRAVIMÉTRIE MODERNE	6
1.2.1 La gravimétrie spatiale	6
1.2.2 La gravimétrie terrestre statique	10
1.2.3 La gravimétrie terrestre mobile	13
1.3 LES ENJEUX DE LA GRAVIMÉTRIE MOBILE	16
1.4 ÉTAT DE L'ART EN GRAVIMÉTRIE MOBILE	21
1.4.1 Gravimètre scalaire sur plates-formes stabilisées	21
1.4.2 Les systèmes hybrides INS/GNSS	23
1.4.3 Systèmes à composants discrets	24
1.4.4 Gradiomètres embarqués	26
1.4.5 Origine et chronologie du projet « LIMO-G »	28
2 PRINCIPE ET MODÉLISATION DU SYSTÈME	31
2.1 RÉFÉRENTIELS, COORDONNÉES ET CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIEL	33
2.1.1 Référentiels	33
2.1.2 Vecteur position et notations	33
2.1.3 Changements de référentiels et angles d'Euler	33
2.1.4 Référentiel mobile et rotation instantanée	35
2.2 RÉFÉRENTIELS UTILISÉS EN GRAVIMÉTRIE MOBILE	39
2.2.1 Le référentiel de Copernic	39
2.2.2 Le référentiel géocentrique	39
2.2.3 Le référentiel terrestre	41
2.2.4 Le référentiel de navigation ou référentiel local géodésique	45
2.2.5 Le référentiel du véhicule.	46
2.2.6 Les référentiels de mesure	47
2.3 ÉQUATION DE NAVIGATION DANS LE RÉFÉRENTIEL TERRESTRE	47
2.3.1 Accélération cinématique	48
2.3.2 Accélération de rappel et accélération gravitationnelle	49
2.4 FILTRE DE KALMAN	50
2.4.1 Introduction	50
2.4.2 Un filtre linéaire par nature	51

2.4.3	Application aux systèmes non linéaires	55
2.4.4	Application au système de gravimétrie mobile	58
2.4.5	Implémentation du filtre	63
2.4.6	Forces et faiblesses du filtre de Kalman	65
3	COMPOSITION ET ÉTALONNAGE DU SYSTÈME LIMO-G	67
3.1	DESCRIPTION TECHNIQUE	69
3.1.1	Les accéléromètres pour la mesure de l'accélération de rappel . . .	69
3.1.2	Numérisation des signaux	72
3.1.3	Récepteurs GPS	75
3.1.4	Assemblage des éléments du Limo-G	77
3.2	ÉTALONNAGE DE LA CHAÎNE DE MESURE DES ACCÉLÉRATIONS	81
3.2.1	Description de la chaîne d'acquisition et fonction d'étalonnage . .	81
3.2.2	Principe de l'étalonnage par autocollimation	81
3.2.3	Protocole expérimental et mesures	84
3.2.4	Estimation de la fonction d'étalonnage	88
3.3	ORIENTATION DES MESURES ACCÉLÉROMÉTRIQUES	93
3.3.1	Objectif	93
3.3.2	Étalonnage géométrique du système Limo-G	93
3.3.3	Étalonnage gravimétrique du système de mesure	101
3.4	ÉTUDE DU BRAS DE LEVIER	104
3.4.1	Objectifs	104
3.4.2	Amplitude des effets du bras de levier	104
3.4.3	Précision de la détermination des effets de bras de levier	105
3.4.4	Applications numériques et conclusions	107
4	EXPÉRIMENTATION DU SYSTÈME LIMO-G	111
4.1	LA MISSION TERRESTRE DE DOMFRONT	113
4.1.1	Choix du lieu	113
4.1.2	Configuration de l'instrument et protocole expérimental	114
4.1.3	Traitement et analyse des mesures de position et d'attitude	116
4.1.4	Analyse des mesures de la mission terrestre de Domfront	124
4.1.5	Comparaison des mesures à la pesanteur de référence	127
4.2	LA MISSION MARINE DE SAINTE-MAXIME	131
4.2.1	Choix du lieu ; données gravimétriques de référence	131
4.2.2	Configuration de l'instrumentation ; protocole expérimental	133
4.2.3	Traitement et analyse des mesures de position et d'attitude	134
4.2.4	Génération de données semi-synthétiques	136
5	PERFORMANCES DU SYSTÈME LIMO-G	141
5.1	PRÉSENTATION DU PROFIL D'ÉTUDE	143
5.2	MATRICES DE VARIANCES-COVARIANCES DU FILTRE DE KALMAN	143
5.2.1	Matrice de variances-covariances du bruit de mesure	146
5.2.2	Matrice de variances-covariances du bruit de transition	146
5.3	EXPÉRIMENTATION DU FILTRE DE KALMAN	146
5.3.1	Modèle sans déviation de la verticale	147
5.3.2	Modèle avec déviation de la verticale	148

5.3.3	Introduction de mesures gyrométriques	153
5.4	CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS POUR L'ÉVOLUTION DU SYSTÈME	160
CONCLUSION GÉNÉRALE		163
A EXPRESSION DE L'ACCÉLÉRATION CINÉMATIQUE		165
B DÉVELOPPEMENTS MATHÉMATIQUES POUR LE FILTRE DE KALMAN		169
B.1	DÉRIVATION MATRICIELLE	171
B.1.1	Cas général	171
B.1.2	Application aux matrices de passage	172
B.2	EXPRESSION DE L'ÉQUATION DE MESURE DU FILTRE DE KALMAN	173
B.2.1	Termes liés à la position, à la vitesse et à l'accélération	174
B.2.2	Termes liés à l'attitude et à sa dérivée	176
B.2.3	Termes liés aux perturbations de pesanteur	177
C ANALYSE SADT DU LOGICIEL DE TRAITEMENT GRAVIMÉTRIQUE		179
D ANALYSE SADT DU FILTRE DE KALMAN		189
E MESURES D'ÉTALONNAGE		197
F MOINDRES CARRÉS MIXTES		205
F.1	THÉORIE GÉNÉRALE DES MOINDRES CARRÉS MIXTES	207
F.1.1	Estimation de la solution par moindres carrés	207
F.2	APPLICATION AU CALCUL DE LA MATRICE DE PASSAGE C_s^b	209
F.2.1	Ajout des paramètres d'étalonnage des accéléromètres	211
G SPLINE CUBIQUE		213
BIBLIOGRAPHIE		219

PRÉFACE

« Le système général des sciences et des arts est une espèce de labyrinthe, de chemin tortueux, où l'esprit s'engage sans trop connaître la route qu'il doit tenir. »

Jean le Rond d'Alembert

LES techniques actuelles de mesure de pesanteur terrestre, depuis les observations spatiales jusqu'aux mesures ponctuelles à la surface, couvrent un large spectre de longueurs d'onde du champs de gravité de la Terre. Les données acquises permettent non seulement la réalisation de modèles étendus de géoïde à haute résolution, mais aussi une meilleure compréhension des nombreux transferts de masse affectant la Terre.

Cependant, les couvertures spatiale et spectrale des mesures gravimétriques ne sont pas homogènes à la surface de la Terre. Certaines régions difficile d'accès sont quasiment vierges de toute mesure gravimétrique terrestre. De plus, la gamme des longueurs d'onde intermédiaires (10 à 100 km) est mal couverte par la gravimétrie terrestre et à ce jour non plus par la gravimétrie spatiale. La gravimétrie mobile depuis un véhicule terrestre, un bateau ou un avion apparaît donc comme la technique complémentaire capable de pallier les insuffisances des techniques gravimétriques actuelles.

C'est dans l'objectif de développer un système de gravimétrie mobile autonome que ce travail de thèse a été entrepris. Le système « Limo-G » (Light Moving Gravimetry system) est un gravimètre vectoriel absolu, composé de trois accéléromètres et d'un système GPS à quatre antennes, embarquable dans toutes sortes de véhicule (véhicule terrestre, bateau, avion), fiable, ergonomique et peu onéreux.

Un travail métrologique effectué au laboratoire et sur le terrain a permis de concevoir et de tester une méthode d'étalonnage du système Limo-G. Puis, une méthode originale de traitement conjoint des données accélérométriques et des données GPS a été développée et testée à partir de simulations issues de données réelles acquises lors d'un levé expérimental en mer.

Le présent manuscrit aborde tous les aspects du développement, de l'étalonnage et de l'exploitation du système Limo-G à travers cinq chapitres.

Le chapitre 1 brosse le portrait de la gravimétrie moderne, présente un état de l'art de la gravimétrie mobile et les spécificités de notre propre système.

Le chapitre 2 pose les bases mathématiques et physiques nécessaires à la modélisation du système et décrit les équations d'un filtre de Kalman pour le traitement des données du système Limo-G.

Le chapitre 3 comprend une description technique du système Limo-G et détaille les différentes manipulations d'étalonnage nécessaires pour l'utiliser.

Le chapitre 4 présente les résultats de l'analyse de deux levés gravimétriques, l'un terrestre, l'autre marin, réalisés avec le système sur des zones comprenant des données gravimétriques de référence. Les données acquises lors de ces levés ont également servi à la génération de mesure semi-synthétiques destinées à tester notre méthode de traitement indépendamment de tout résultat d'étalonnage.

Enfin le chapitre 5 présente différents cas de traitement de données pour divers modèles de champ de pesanteur, quantifie les performances du système en terme de précision de la restitution des trois composantes du vecteur accélération, de la pesanteur, et suggère des voies d'amélioration du système Limo-G.

Ce travail de thèse a donné lieu à un article de journal paru (SAINT-JEAN et al. 2005*b*), un article à paraître (SAINT-JEAN 2007), un acte de conférence (SAINT-JEAN et al. 2005*d*) et huit posters (CALI et al. 2005, 2006; SAINT-JEAN et al. 2005*a*; SAINT-JEAN et al. 2005*c*; SAINT-JEAN et al. 2005*e*; SAINT-JEAN et al. 2005*f,g*; SAINT-JEAN et al. 2006).

OBJECTIFS ET TECHNIQUES DE LA GRAVIMÉTRIE MODERNE

1

SOMMAIRE

1.1	INTRODUCTION	5
1.2	PANORAMA DE LA GRAVIMÉTRIE MODERNE	6
1.2.1	La gravimétrie spatiale	6
1.2.2	La gravimétrie terrestre statique	10
1.2.3	La gravimétrie terrestre mobile	13
1.3	LES ENJEUX DE LA GRAVIMÉTRIE MOBILE	16
1.4	ÉTAT DE L'ART EN GRAVIMÉTRIE MOBILE	21
1.4.1	Gravimètre scalaire sur plates-formes stabilisées	21
1.4.2	Les systèmes hybrides INS/GNSS	23
1.4.3	Systèmes à composants discrets	24
1.4.4	Gradiomètres embarqués	26
1.4.5	Origine et chronologie du projet « LIMO-G »	28

CE premier chapitre introductif se propose de brosser un tableau des différentes techniques de la gravimétrie moderne avant de détailler plus précisément la gravimétrie *mobile*, thème de mes travaux, et son rôle parmi les autres techniques de mesure de la pesanteur terrestre.

Après un état de l'art des systèmes de gravimétrie mobile développés à l'heure actuelle dans le monde, je décrirai l'origine et la chronologie du projet de développement d'un système de gravimétrie vectorielle mobile français baptisé « Limo-G ».

1.1 INTRODUCTION

La connaissance du champ de gravité terrestre est d'une importance capitale en géodésie, notamment pour la détermination des modèles de géoïde à haute résolution. Cependant, les domaines d'application de cette connaissance débordent très largement du simple cadre de la géodésie physique. En effet, les transferts de masse en surface et à l'intérieur de la Terre modifient le champ de gravité terrestre dans des proportions mesurables par les instruments modernes. Ainsi, en mesurant les variations spatiales et temporelles du champ de gravité à l'échelle de la Terre entière est-il aujourd'hui devenu possible non seulement de déterminer sa structure interne, mais aussi de suivre dans le temps toutes sortes de phénomènes tels les déformations consécutives aux grands séismes, les soubresauts d'un volcan, la circulation océanique, la répartition des précipitations ou l'évolution des calottes glaciaires.

La science à la base de l'étude de la gravité terrestre est la gravimétrie. Au sens étymologique, la gravimétrie (du latin « *gravis* », poids et du grec *μετρέω*, mesure) est la science de la mesure et de l'étude de la pesanteur terrestre constituée par l'accélération gravitationnelle exercée par la Terre et les astres proches du Système Solaire (la Lune, le Soleil et dans une moindre mesure, les autres planètes) et par l'accélération centrifuge due à la rotation de la Terre. C'est par la gravimétrie que nous accédons à la connaissance du champ de gravité de la Terre après correction des accélérations perturbatrices, qui rend compte de sa structure interne et des transferts de masse (TORGE 1989).

La gravimétrie a constamment évolué au rythme des progrès technologiques pour permettre la mesure du champ de gravité terrestre sur une gamme d'échelles spatiales de plus en plus étendue et une précision de plus en plus grande. Aujourd'hui, la pesanteur terrestre peut être mesurée de façon statique ou mobile, depuis le sol, en mer, dans les airs et depuis l'espace, ce qui assure une couverture homogène de notre planète. En revanche, les gammes de longueurs d'onde accessibles par les techniques de gravimétrie terrestre, marine, aéroportée et spatiale sont très différentes voire disjointes. La cartographie des variations de la gravité terrestre nécessite donc de combiner les mesures gravimétriques en provenance de différentes sources.

Le présent chapitre se propose de dresser un bilan des techniques de la gravimétrie actuelle depuis la gravimétrie spatiale jusqu'à la gravimétrie terrestre statique et mobile. Puis les enjeux de la gravimétrie mobile pour les sciences de la Terre en général et pour l'Institut Géographique National (IGN) en particulier, sont examinés en détail, notamment l'amélioration des modèles de géoïde qui résulterait de l'acquisition de nouvelles mesures par gravimétrie mobile. Enfin, une description des systèmes de gravimétrie mobile en cours de développement à l'heure actuelle et une présentation de notre propre projet de développement concluent le chapitre.

1.2 PANORAMA DE LA GRAVIMÉTRIE MODERNE

1.2.1 La gravimétrie spatiale

Dès le début de la conquête spatiale dans les années 60, l'analyse de l'orbite des satellites artificiels a rendu possible la cartographie des grandes longueurs d'onde du champ de gravité terrestre (supérieures à 800 km) à l'échelle de la Terre entière. Toute variation spatiale ou temporelle de la gravité perturbe sensiblement la trajectoire d'un satellite artificiel en orbite autour de la Terre. Dès lors, la mesure des perturbations d'orbite par des techniques de poursuite telle la télémétrie laser, permet de reconstituer les variations de gravité qui résultent de la structure interne réelle de la Terre. Par exemple, la présence d'un bourrelet équatoriale a pour effet une rotation du plan de l'orbite d'un satellite par rapport au plan équatorial ainsi qu'une rotation de l'orbite elle-même dans son plan. De même, toute variation latérale de la masse volumique de la Terre observée dans la lithosphère, ou tout transfert de masse tels ceux qui résultent de l'hydrologie ou du volcanisme entraînent des variations spatiales et/ou temporelles de la gravité décelables dans les perturbations d'orbite.

Ainsi s'est ouverte l'ère de la mesure du champ de gravité terrestre depuis l'espace ou gravimétrie spatiale. Cette technique donne également accès aux ondulations du géoïde mondial avec une précision métrique. Sa principale limitation provient de ce que les satellites utilisés doivent avoir une altitude supérieure à 800 km pour minimiser les effets du freinage atmosphérique très difficile à modéliser. La résolution spatiale obtenue par la seule technique des perturbations d'orbite ne peut donc pas descendre en dessous de 400 km.

Au milieu des années 70, le développement de l'altimétrie satellitaire a révolutionné notre connaissance du champ de gravité et du géoïde sur les océans. Chaque satellite altimétrique (fig. 1.1) embarque un radar qui émet un signal électromagnétique en direction de la surface de l'océan qui le réfléchit. L'analyse du temps d'aller/retour de ce signal permet de déterminer la distance qui sépare le satellite de la surface instantanée de l'océan. La trajectoire du satellite est déterminée par ailleurs grâce à l'orbitographie, ce qui permet de connaître la hauteur du satellite par rapport à un ellipsoïde de référence. La différence entre cette hauteur et la distance entre le satellite et l'océan correspond à l'ondulation de l'océan par rapport à l'ellipsoïde de référence. Une fois corrigée des phénomènes de marées et de la contribution des grands courants océaniques issue des modèles océanographiques, cette ondulation instantanée est transformée en une ondulation moyenne des océans qui correspond à l'ondulation du géoïde marin. La mise en œuvre de l'altimétrie satellitaire a permis de cartographier le champ de gravité terrestre sur les océans avec une précision comprise entre 4 et 10 mGal et le géoïde avec une précision inférieure au mètre. La résolution spatiale atteinte par cette technique se situe entre 5 et 10 km, soit une progression d'un ordre de grandeur par rapport à la technique des perturbations d'orbite. En revanche, l'altimétrie satellitaire devient inopérante en deçà de 50 km des côtes où, d'une part, la présence de réflexions sur les terres perturbent considérablement le fonctionnement du radar

et d'autre part, la validité des modèles de courants océaniques devient plus incertaine.



FIG. 1.1 – Vue du satellite JASON-2 utilisé pour l'altimétrie. © CNES, D. DUCROS, 2005.

En cette première décennie du 21^e siècle, la gravimétrie spatiale connaît un essor sans précédent grâce à la programmation de trois missions spatiales successives dédiées à la gravité terrestre. La première mission dénommée CHAMP (CHALLENGING Minisatellite Payload for geoscience and application, fig. 1.2) a été lancée le 15 juillet 2000 par l'Agence Spatiale Allemande (DLR, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt) sur proposition du centre de recherche de Potsdam (GFZ, Geo-ForschungsZentrum). Placé sur une orbite polaire à 400 km d'altitude, le satellite CHAMP est constamment positionné par les satellites de la constellation GPS.

L'analyse des perturbations d'orbite de CHAMP permet de reconstituer les ondulations du géoïde avec une précision de 10 cm pour 485 km de résolution spatiale. De telles performances ont pu être atteintes grâce à des mesures fines des forces de surface appliquées au satellite (amplitude de $10^{-9} m/s^2$) obtenues par le micro-accéléromètre STAR conçu par l'ONERA (Office National d'Études et de

Recherches Aérospatiales) en collaboration avec le CNES (Centre National d'Études Spatiales).

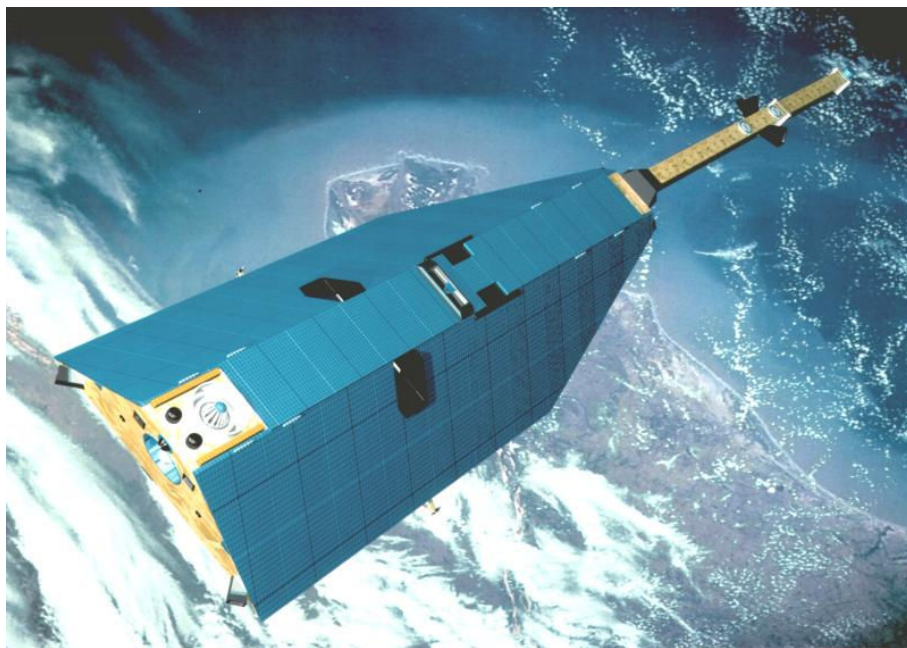


FIG. 1.2 – Vue du satellite CHAMP. © GFZ-Potsdam, Germany.

Après seulement 12 mois d'observation, les données du satellite CHAMP ont permis de déterminer un premier modèle du champ européen dénommé EIGEN (European Improved Gravity model of the Earth by New techniques) donné sous forme d'un développement en harmoniques sphériques jusqu'au degré 120 soit à 150 km de résolution spatiale.

La deuxième mission dénommée GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) a été lancée le 16 mars 2002 pour une durée de cinq ans extensible. Fruit d'une collaboration entre la NASA et la DLR, cette mission a pour objectif la cartographie du géoïde mondial, à un rythme mensuel ou décadaire, avec une résolution spatiale de 100 km et une précision centimétrique. Les applications principales de cette mission concernent le suivi de l'évolution des masses d'eau, de neige ou de glace mal connue à l'échelle mondiale, voire l'étude des déformations consécutives aux grands séismes tel le tremblement de terre de Sumatra en décembre 2004.

Le principe de la mesure repose sur l'utilisation de deux satellites jumeaux GRACE-A et GRACE-B (fig. 1.3) placés à une distance de 200 km sur des orbites polaires quasi-circulaires à 480 km d'altitude. Les deux satellites mesurent constamment la distance qui les sépare, dont sont déduites les perturbations relatives des orbites au micromètre près. Le premier modèle de champ mondial obtenu à partir des données de la mission GRACE a été publié à la fin de l'année 2003 par la NASA et le GFZ sous le nom de GGM02S (fig. 1.4, TAPLEY et al. 2005). Il consiste en un développement en harmoniques sphériques jusqu'au degré 160, soit 125 km de résolution spatiale. Le CNES publie également ses propres déterminations du champ de gravité mondial et les ondulations du géoïde à un rythme mensuel, mises à disposition sur le site du Bureau Gravimétrique International (BGI).

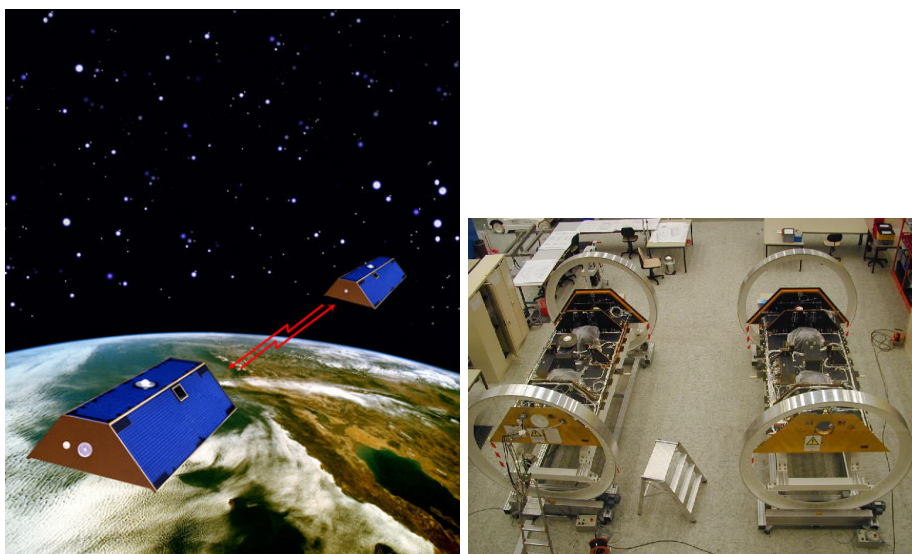


FIG. 1.3 – Vues des satellites GRACE : GRACE-A et GRACE-B. © NASA's Jet Propulsion Laboratory (JPL), USA et GFZ-Potsdam, Germany.

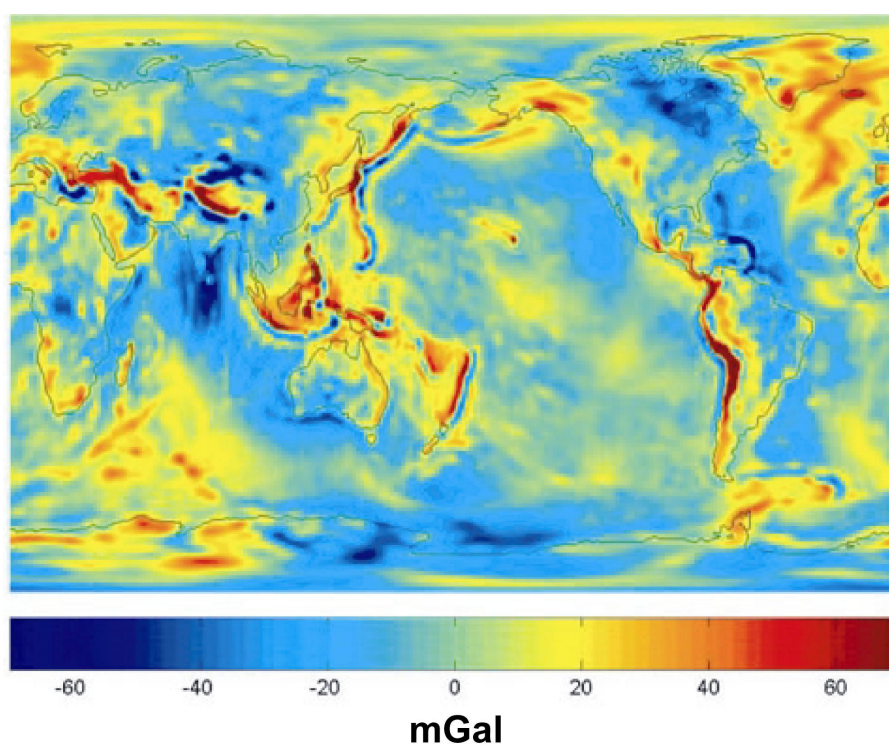


FIG. 1.4 – Anomalies à l'air libre du champ de pesanteur terrestre déduites après une année de mesures des satellites GRACE (modèle GGM02S). © University of Texas for Space Research et NASA.

La troisième mission spatiale dénommée GOCE (Gravity field and steady state Ocean Circulation Explorer mission, fig. 1.5) devrait être lancée en 2008 par l'Agence Spatiale Européenne (ESA). Cette mission utilise un satellite placé sur une orbite héliosynchrone à 250 km d'altitude, qui embarque un gradiomètre. Cet instrument enregistre les accélérations à partir de six accéléromètres placés à 50 cm de distance les uns des autres. La détermination des différences de l'accélération (amplitude de $10^{-12} m/s^2$) permet de reconstituer le tenseur des gradients de gravité constitué de neuf termes dont seuls six sont indépendants. Les objectifs de cette mission sont plus ambitieux que ceux de GRACE : cartographier le géoïde au centimètre près avec une résolution spatiale de 100 km.

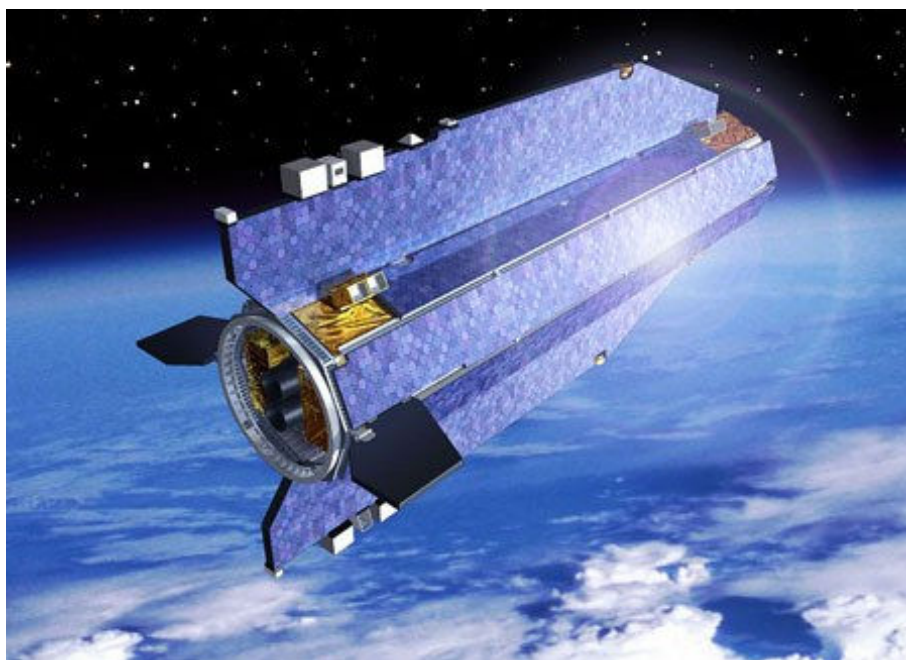


FIG. 1.5 – Vue du satellite GOCE. © ESA.

Aujourd'hui, les résolutions spatiales des modèles de champ de gravité terrestre ou du géoïde combinant les données de CHAMP, GRACE et l'altimétrie satellitaire atteignent couramment 130 km pour le champ statique et 485 km pour les variations mensuelles du champ. L'apport des données de GOCE devrait conforter et améliorer ces résolutions, si bien que la perspective d'obtenir par gravimétrie spatiale un modèle du champ de gravité mondial à moins de 10 mGal de précision ou un modèle de géoïde centimétrique à 100 km de résolution spatiale ne semble aujourd'hui pas déraisonnable.

1.2.2 La gravimétrie terrestre statique

Les mesures gravimétriques réalisées à la surface de la Terre donnent accès à la pesanteur terrestre avec une résolution directement fonction de la densité des points de mesure. Dès la fin de la seconde guerre mondiale, les développements technologiques ont suscité des progrès considérables en instrumentation marqués par l'apparition de gravimètres portables de grande précision. Il s'agit d'un instrument

qui mesure l'intensité de la pesanteur (gravimètre scalaire), soit par sa valeur absolue, soit par la variation de cette dernière depuis un point de mesure pris comme référence.

Ce dernier type d'instrument (fig. 1.6), qualifié de gravimètre relatif, a été largement utilisé en prospection minière et pétrolière et pour l'exploration géophysique. Le principe de la mesure repose sur l'utilisation d'un peson à ressort sensible aux variations de l'intensité de la pesanteur. La tension du ressort nécessaire pour ramener le peson à sa position d'équilibre est alors directement proportionnelle à la variation de l'intensité de la pesanteur depuis le dernier point de mesure. Utilisé dans de bonnes conditions (faibles bruits sismiques), un gravimètre relatif à peson peut atteindre une précision de 10^{-2} mGal. L'obtention d'une telle précision nécessite cependant la correction des mesures d'une dérive temporelle inhérente au capteur. En effet, les propriétés mécaniques de la plupart des ressorts, notamment le coefficient de raideur, varie en cours de fonctionnement, ce qui peut entraîner des dérives atteignant quelques milligals par jour. Le contrôle de la dérive suppose donc la réalisation d'un nombre suffisant de réoccupations en vue de son estimation lors du traitement des données.



FIG. 1.6 – Gravimètre relatif à peson du type CG-5. © Micro-g Lacoste Inc.

La mesure des variations temporelles de la pesanteur en des points fixes est réalisée avec un autre type de gravimètres relatifs, dits cryogéniques (fig. 1.7), à très faible dérive temporelle, de l'ordre du microgal par an. Ces derniers mesurent les variations de l'intensité de la pesanteur en détectant leurs effets sur le mouvement d'une sphère supraconductrice en lévitation. Un gravimètre relatif cryogénique atteint une précision de l'ordre du microgal. De par sa constitution, en particulier la présence du dispositif cryogénique, un tel instrument n'est pas aisément transportable et se destine plutôt à une utilisation en réseau pour étudier, entre autres exemples, la dérive du pôle et les mouvements verticaux de la croûte terrestre due aux marées terrestres et océaniques, sur des échelles de temps variant de quelques jours à plusieurs années.



FIG. 1.7 – Gravimètre à supraconducteur dans son enceinte cryogénique. © GWR Instruments Inc.

Les mesures de la valeur absolue de l'intensité de la pesanteur sont réalisées principalement à l'aide de gravimètres absolus dits balistiques. Ces derniers possèdent une chambre à vide dans laquelle un corps pesant est susceptible d'effectuer un mouvement de quasi chute libre. En mesurant simultanément les positions du corps dans la chambre et les instants associés, il est possible d'estimer la loi du mouvement (équation horaire) lors de sa chute afin d'en extraire la valeur de l'intensité de la pesanteur. La mesure de position repose sur une méthode interférentielle qui utilise un interféromètre de Michelson et une source de lumière laser pour un positionnement au nanomètre près. Le temps est mesuré par une horloge atomique au rubidium. Chaque mesure est constituée par une succession de chutes assurant ainsi la redondance nécessaire à l'obtention d'une bonne précision qui atteint le microgal pour les meilleurs instruments.

À l'origine, les gravimètres balistiques étaient particulièrement encombrants et donc plutôt destinés aux points gravimétriques fondamentaux et aux mesures des variations temporelles de la pesanteur. Cependant, une version transportable de ce gravimètre a été mise au point par la société américaine Micro-g sous le nom d'A10 (fig. 1.8). Protégé des vibrations du sol par un amortisseur dynamique, cet instrument permet des mesures de la pesanteur avec une précision de $10 \mu\text{Gal}$. Il peut servir à l'établissement de réseaux de contrôle et de rattachement des mesures gravimétriques tel celui constitué actuellement par le Service de Géodésie et de Nivellement (SGN) de l'IGN à partir des points du Réseau de Base Français (RBF).

Ainsi, la gravimétrie terrestre statique permet-elle de mesurer l'intensité de la



FIG. 1.8 – Gravimètre absolu balistique de type A10 utilisé par l'IGN. © Photo J. Verdun.

pesanteur terrestre avec une précision ultime d'un microgal, mais ce uniquement sur les régions accessibles. En réalité, la densité en points de mesure gravimétrique est extrêmement variable à la surface de la Terre où certaines régions d'accès difficile telles les chaînes de montagnes, les zones volcaniques, les déserts, les zones à végétation dense (forêt amazonienne) sont complètement vierges de toutes mesures gravimétriques. La connaissance de la pesanteur à partir des mesures terrestres statiques est donc très variable à la surface de la Terre depuis une méconnaissance totale jusqu'à une cartographie à moins d'un kilomètre de résolution.

1.2.3 La gravimétrie terrestre mobile

La gravimétrie mobile consiste à mesurer la pesanteur depuis un véhicule en mouvement tels une automobile, un bateau ou un avion. Dans ce cas, l'utilisation d'un capteur d'accélération (accéléromètre) aussi précis soit-il ne suffit plus pour mesurer la pesanteur. En effet, un capteur d'accélération ou accéléromètre est un dispositif de mesure de l'intensité de l'accélération du mobile sur lequel il est monté dans une direction particulière appelée direction sensible. Un accéléromètre, qui peut être un gravimètre classique, embarqué à bord d'un véhicule en mouvement ne peut distinguer l'accélération gravitationnelle de la Terre des accélérations propres du véhicule induites par le mouvement. En réalité, un accéléromètre mesure une accélération de rappel (« specific force ») qui correspond à la différence entre l'accélération totale du véhicule et l'accélération gravitationnelle de la Terre. Un système de gravimétrie mobile doit donc comporter, outre un ou plusieurs accéléromètres, un dispositif de mesure de l'accélération du véhicule par rapport à un référentiel inertiel et un dispositif de détermination de l'attitude du véhicule. Ces mesures complémentaires permettent alors de séparer l'accélération gravitationnelle de l'accélération totale.

Plusieurs configurations instrumentales sont possibles afin de constituer un sys-

tème autonome de gravimétrie mobile. La première idée mise en œuvre dans les systèmes de gravimétrie marine fut d'installer un gravimètre relatif à peson sur une plate-forme mécanique stabilisée (fig. 1.9). Ce dispositif maintient au cours des mesures l'axe sensible du gravimètre dans une direction proche de la verticale du lieu en compensant les variations d'attitude du véhicule porteur à partir de données d'accéléromètres et de gyromètres (deux paires d'accéléromètres/gyromètres pour une plate-forme « deux axes », trois pour une plate-forme « trois axes »). Le gyromètre fournit dans ce cas la vitesse angulaire correspondant à la composante du vecteur-rotation du véhicule par rapport à un référentiel inertiel dans la direction de l'axe sensible du gyromètre.



FIG. 1.9 – Gravimètre aérien/marin LaCoste&Romberg monté sur sa plateforme stabilisée. © Microg Lacoste Inc.

Il suffit alors de compléter l'instrumentation par un système de positionnement pour obtenir, par double différenciation, l'accélération totale du véhicule. Ce type de système fut employé lors des premières mesures de gravimétrie aéroportée dans les années 60, avec un radar altimétrique pour assurer le positionnement vertical de l'avion (NETTLETON, LACOSTE et HARRISON 1960).

Cependant, ce n'est qu'avec l'apparition du système de positionnement par GPS (Global Positioning System) dans les années 80, que la gravimétrie mobile scalaire a pu prendre tout son essor. Ainsi, les systèmes de gravimétrie mobile scalaire utilisés aujourd'hui par les entreprises de prospection comprennent-ils couramment un gravimètre relatif monté sur une plate-forme stabilisée couplée à une centrale inertielle de navigation et/ou un récepteur GPS pour assurer le positionnement. La plate-forme mécanique peut être remplacée par une plate-forme électronique liée rigidement au gravimètre dans laquelle les données des accéléromètres et des gyromètres sont utilisées pour ramener les mesures réalisées *in situ* dans la direction verticale.

La résolution et la précision des données de gravimétrie marine et de gravimétrie aéroportée dépendent fortement des conditions de mesure (vitesse du porteur, bathymétrie et état de la houle pour une acquisition marine ; altitude de vol, état des turbulences pour une acquisition aéroportée), de la qualité de l'estimation

des accélérations induites par le mouvement, ainsi que des procédures de filtrage destinées à minimiser l'effet du bruit de mesure. Un levé gravimétrique aéroporté réalisé dans de bonnes conditions permet d'obtenir, par exemple, une carte de la pesanteur à cinq kilomètres de résolution spatiale pour une précision de deux milligals (KREYE et al. 2006). Une telle résolution peut très vite se détériorer si l'acquisition a lieu à plus haute altitude (VERDUN et al. 2002 ; VERDUN et al. 2003) ou lorsque l'élimination d'un fort bruit de mesure dû à des turbulences a nécessité un filtrage plus vigoureux.

Bien que les systèmes de gravimétrie mobile à plate-forme soient aujourd'hui complètement opérationnels, ils n'en demeurent pas moins lourds, encombrants et coûteux. Par exemple, le prix d'un gravimètre aérien/marin Lacoste&Romberg atteint à l'heure actuelle 400 000 euros, ce qui se répercute inévitablement sur le coût des levés aéroportés proposés par les entreprises de prospection.

Parallèlement au développement de la gravimétrie mobile scalaire, de nombreuses innovations technologiques ont vu le jour dans le domaine des systèmes inertiels de navigation liés (« strapdown inertial navigation systems » ou « SINS »), c'est-à-dire rigidement fixé au véhicule porteur. Du point de vue instrumental, ces derniers ont des éléments identiques (accéléromètres et gyromètres) à ceux qui constituent les systèmes de gravimétrie mobile à plate-forme électronique. Un ensemble de trois accéléromètres à axes orthogonaux mesure les trois composantes de l'accélération de rappel, ramenées dans un référentiel géodésique local connaissant l'attitude du véhicule. Le fonctionnement d'un système de navigation repose alors sur un modèle du champ de pesanteur terrestre utilisé comme approximation du champ réel, qui, une fois ajouté à l'accélération de rappel, donne accès à l'accélération totale du véhicule, puis à la position par double intégration (SAVAGE 1998a,b).

Si le positionnement et le suivi de l'attitude sont maintenant assurés par des dispositifs autres tels des récepteurs GPS, il est possible d'utiliser les données issues des capteurs d'un système de navigation pour estimer l'accélération gravitationnelle de la Terre ou l'accélération de la pesanteur ; ainsi le principe de la gravimétrie mobile inertielle a-t-il vu le jour. Cette technique a essentiellement deux avantages comparés à la gravimétrie mobile classique : d'une part, elle permet d'estimer les trois composantes de l'accélération de la pesanteur et non plus la seule intensité ; d'autre part, les systèmes de navigation sont de plus en plus miniaturisés, ce qui conduit à une instrumentation plus légère et plus facile à mettre en œuvre.

Grâce aux progrès effectués dans la réalisation de capteurs inertiels, il est aujourd'hui possible de construire son propre système inertiel en utilisant les gyromètres et les accéléromètres de son choix, ce qui permet, d'une part, de choisir des capteurs adaptés à l'application souhaitée, et d'autre part, de minimiser les coûts. En effet, la gamme de prix d'un système inertiel de navigation s'étend actuellement de 90 000 à 160 000 euros.

En revanche, les procédures de traitement du signal en gravimétrie vectorielle inertielle sont en général beaucoup plus complexe qu'en gravimétrie mobile classique. Ces procédures consistent à combiner les données provenant de sources multiples (accéléromètres, gyromètres, GPS) à l'aide d'équations d'observation dé-

duites des principes généraux de la mécanique. Cette combinaison suppose une bonne connaissance des incertitudes associées à chaque type de mesures.

Ainsi, la gravimétrie vectorielle inertielle fait encore l'objet de nombreuses recherches et il n'existe, à ce jour, aucun consensus sur l'instrumentation et sur les méthodes de traitement les mieux adaptées à la mesure de la pesanteur terrestre.

1.3 LES ENJEUX DE LA GRAVIMÉTRIE MOBILE

La gravimétrie mobile est devenue aujourd'hui une technique indispensable pour la connaissance du champ de pesanteur terrestre à haute résolution. Elle permet, en effet, d'accéder aux longueurs d'onde intermédiaires du champ, comprises entre 10 et 200 km qui ne sont pas restituées par la gravimétrie terrestre statique, et encore hors de portée de la gravimétrie spatiale, et ce de façon homogène sur la Terre entière (fig. 1.10). Les progrès attendus en matière de résolution spatiale pour les futures missions de gravimétrie spatiale, en particulier, la mission GOCE permettent d'espérer un recouvrement partiel des gammes de longueurs d'onde accessibles par gravimétrie spatiale et gravimétrie aéroportée. Il sera alors possible de valider directement de nouvelles données spatiales à l'aide de grilles du champ de pesanteur terrestre acquises par gravimétrie aéroportée.

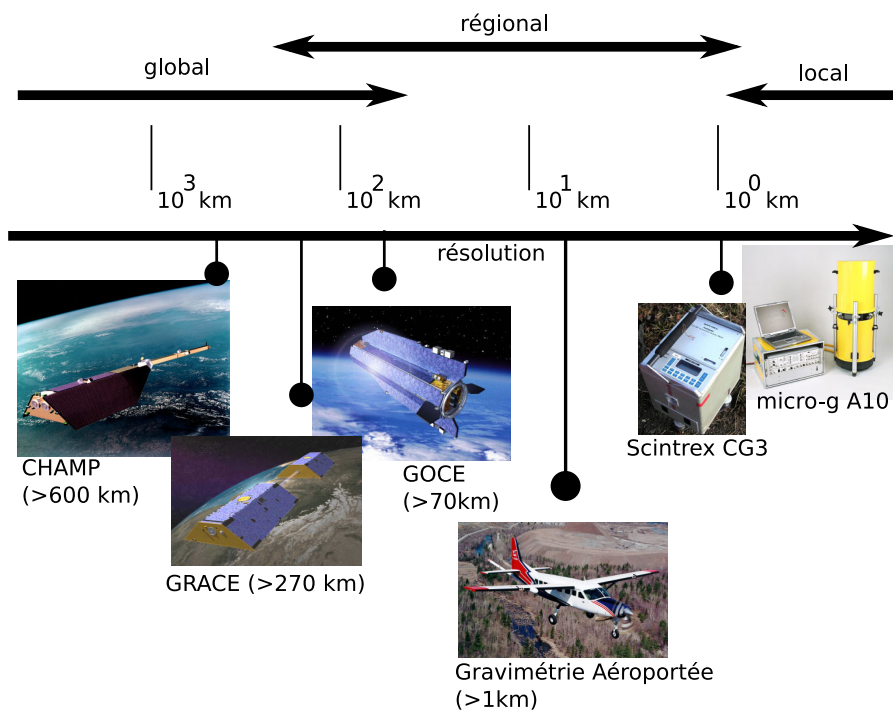


FIG. 1.10 – Résolutions spatiales et applications des différents systèmes gravimétriques actuels (KREYE *et al.* 2006).

Aujourd'hui, l'accès à la gamme de longueurs d'onde de 10 à 200 km est particulièrement intéressante pour l'exploration géophysique et la prospection minière et pétrolière (fig. 1.11). La cartographie du champ de pesanteur sur les chaînes de montagnes, les volcans, les îles et, à plus grande échelle, sur les marges con-

continentales peut s'avérer difficile voire impossible à réaliser par gravimétrie classique alors qu'un levé aéroporté sur des profils croisés à altitude constante permet d'obtenir rapidement une carte à résolution homogène dont l'interprétation est aisée. Certaines structures à l'interface terre/océan tels les prismes d'accrétion, les volcans de points chauds océaniques, les cordillères se prêtent tout particulièrement à une étude gravimétrique par gravimétrie aéroportée, qui dispense des combinaisons souvent délicates entre données gravimétriques marines et terrestres.

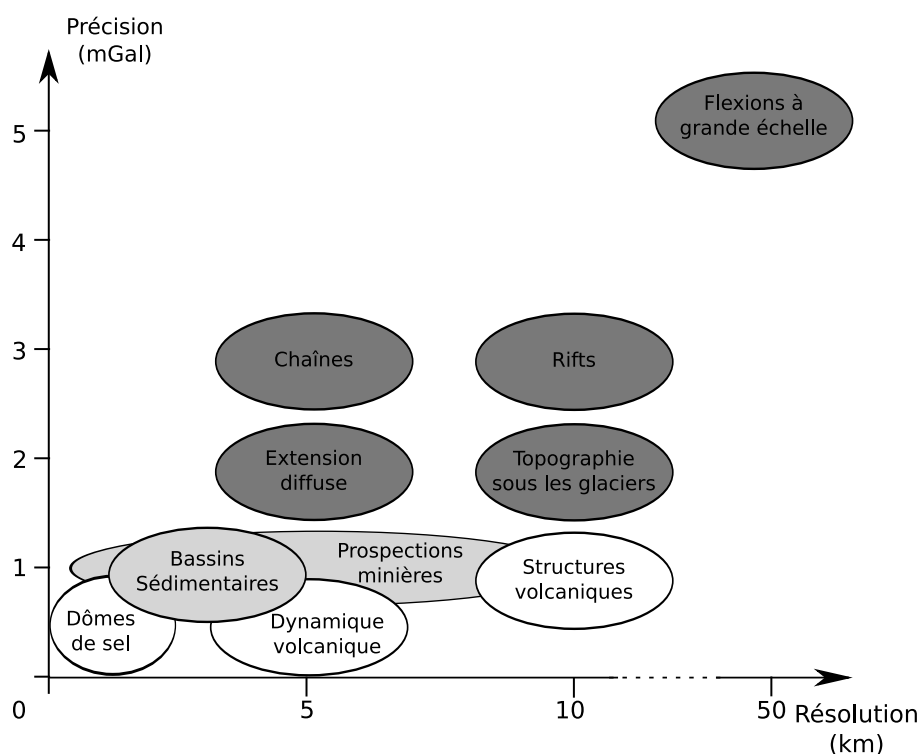


FIG. 1.11 – Résolutions et précisions en gravimétrie nécessaires pour différentes études structurales (HEIN 1995).

Concernant l'équipement géodésique de la France, les besoins en gravimétrie concernent d'une part les réseaux de nivellement et, d'autre part la réalisation de modèles de géoïde en vue du nivellement par GPS ou plus généralement par GNSS (Global Navigation Satellite System). En collaboration avec d'autres organismes, l'IGN et le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine (SHOM) mènent des recherches sur les surfaces de références verticales (surfaces d'altitude nulle, modèles de géoïde, niveau moyen des mers) qui requièrent également l'utilisation de données gravimétriques.

La gravimétrie nécessaire à l'établissement des réseaux de nivellement est généralement obtenue soit par des mesures relatives réalisées sur les repères de nivellement conjointement à la détermination des dénivelées géométriques, soit par interpolation d'une couverture gravimétrique dense existante. La précision et l'exactitude nécessaires sont de l'ordre de 0.1 à 1 mGal, hors de portée des systèmes mobiles actuels.

Les critères de qualité que doit respecter la couverture gravimétrique pour la réalisation d'un modèle de géoïde précis à haute résolution sont plus difficiles à

établir ; en effet, la relation entre anomalies de pesanteur et ondulation du géoïde est une formule intégrale complexe (intégrale de Stokes). Voici quelques conclusions tirées de simulations (fig. 1.12) réalisées par Henri Duquenne (*Communications personnelles*) :

- L'exactitude des mesures gravimétriques est critique. Par exemple, un biais d'un milligal sur l'ensemble des données provoque une erreur sur le géoïde de plusieurs mètres. Un biais de 5 mGal affectant un levé d'extension 110 km par 110 km (fig. 1.12a) provoque sur le géoïde une erreur atteignant localement 36 cm. Il est donc impératif de rattacher des mesures relatives, qu'elles soient terrestres, aéroportées ou marines, à un réseau de référence de qualité.
- La précision des mesures gravimétriques est moins cruciale. Un bruit gaussien d'écart-type 5 mGal affectant un levé d'extension 110 km par 110 km (fig. 1.12b) se traduit sur le géoïde par des déformations dont l'amplitude ne dépasse pas 4 cm. Ce phénomène heureux provient de ce que le noyau de l'intégrale de surface qui transforme les anomalies de pesanteur en ondulations du géoïde agit comme un filtre basse fréquence puissant. Une précision de 0.1 à 1 mGal sur la gravimétrie est donc complètement suffisante pour l'obtention d'un modèle de géoïde de précision 1 cm.

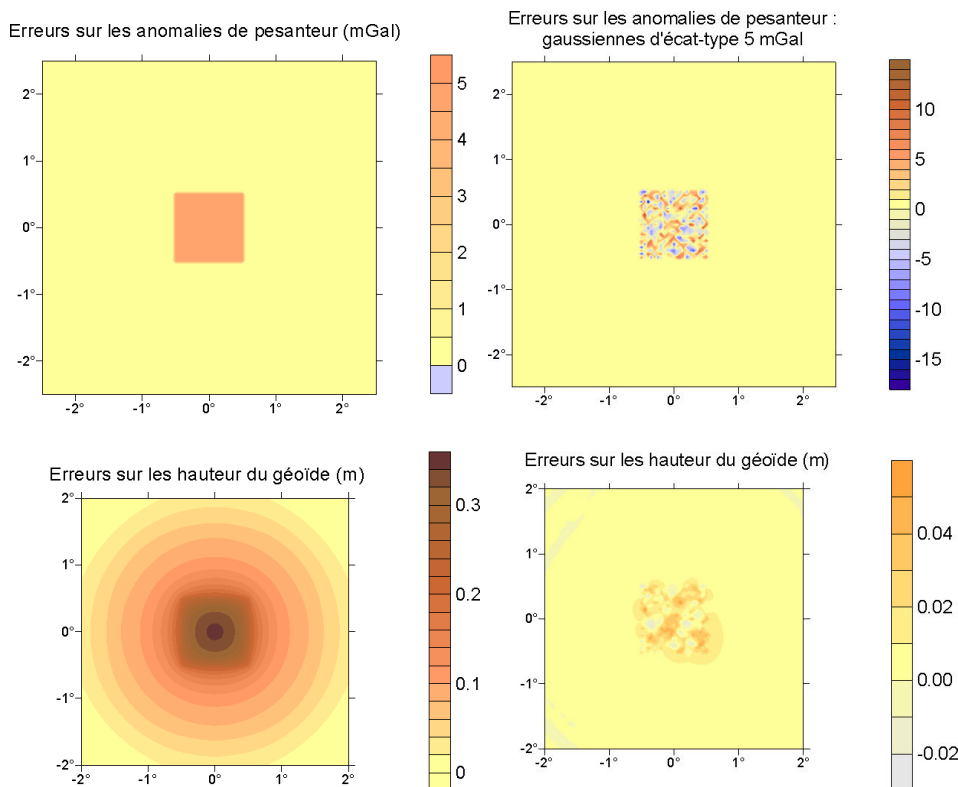


FIG. 1.12 – a) Influence d'un biais local de 5 mGal sur le géoïde. b) Influence d'une erreur aléatoire centrée sur le géoïde. *Communications personnelles.*

Concernant la densité des levés gravimétriques, on peut montrer que la distance D entre points gravimétriques est liée à l'écart-type de l'erreur sur le géoïde σ_N par la relation

$$D[km] = 3.2\sigma_N[cm].$$

Par exemple, un point tous les trois kilomètres est nécessaire pour obtenir un modèle de géoïde d'un centimètre de précision. Ce seuil de densité doit être respecté pour la zone couverte par le géoïde et ses marges qui peuvent s'étendre de 200 à 500 km suivant la variabilité du champ.

La figure 1.13 montre l'état de la couverture gravimétrique en France métropolitaine. Sur les terres émergées, la faible densité des points gravimétriques dans les régions montagneuses ne permet pas d'envisager la détermination d'un modèle de géoïde d'un centimètre de précision ; en revanche, elle est suffisante pour une précision comprise entre trois et cinq centimètres. En montagne, les mesures gravimétriques ont été réalisées presque exclusivement dans les vallées, ce qui est une source de biais pour le géoïde. En mer, la densité et la qualité des données marines est très variable. Certaines croisières anciennes sont connues pour être fausses et ne peuvent être corrigées que par comparaison à des données récentes, satellitaire, aériennes ou marines (DUQUENNE et al. 2002, 2003). En haute mer, il est possible de compléter voire de remplacer les données existantes par des anomalies de pesanteur déduite de l'altimétrie par satellite. Cependant, il a été prouvé à maintes reprises que les données altimétriques n'étaient pas fiables à moins de 50-75 km des côtes. Or cette bande côtière, souvent cruciale pour les calculs de géoïde en raison de la variabilité spatiale du champ, est peu fréquentée par les navires de gros tonnage équipés de gravimètres scalaires sur plates-formes stabilisées. En particulier, des lacunes importantes existent le long de la côte atlantique et de la Manche.

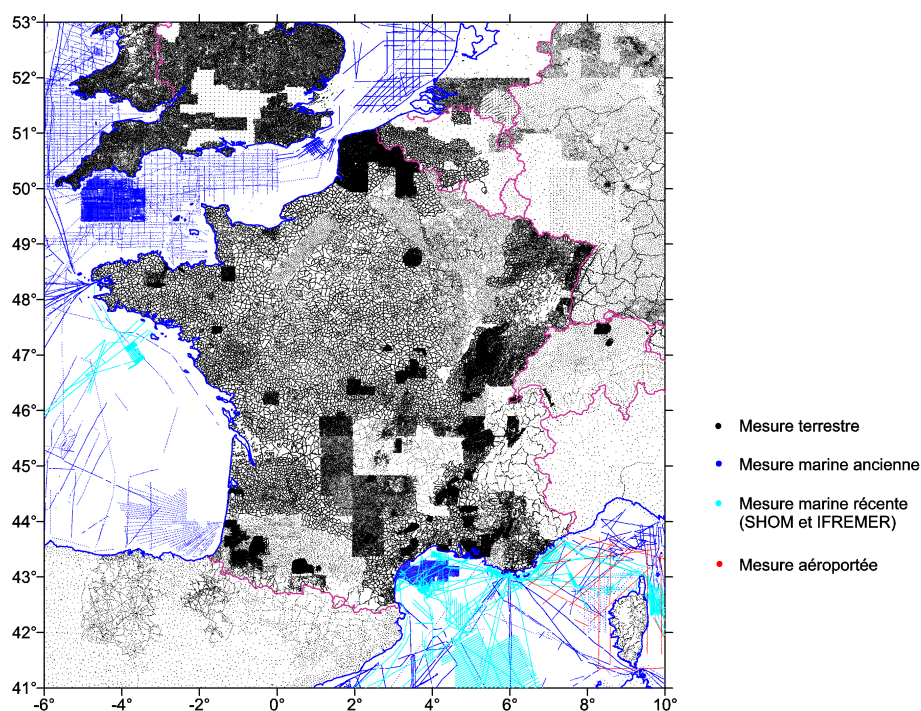


FIG. 1.13 – Données gravimétriques disponibles pour un calcul de géoïde en France métropolitaine (sources des données : BGI, SHOM, IFREMER).

La situation de la France métropolitaine n'en demeure pas moins extrêmement privilégiée comparée à celle de la Guyane, véritable désert gravimétrique (fig. 1.14). Deux mesures ont été effectuées à terre le long de la côte, mais il n'existe aucune

donnée ni à l'intérieur des terres, ni dans l'océan Atlantique à moins de 100 km. La situation des autres départements d'outre-mer est en général intermédiaire entre celle de la France métropolitaine et de la Guyane, bien qu'ils soient dans l'ensemble dépourvus de bons réseaux gravimétriques.

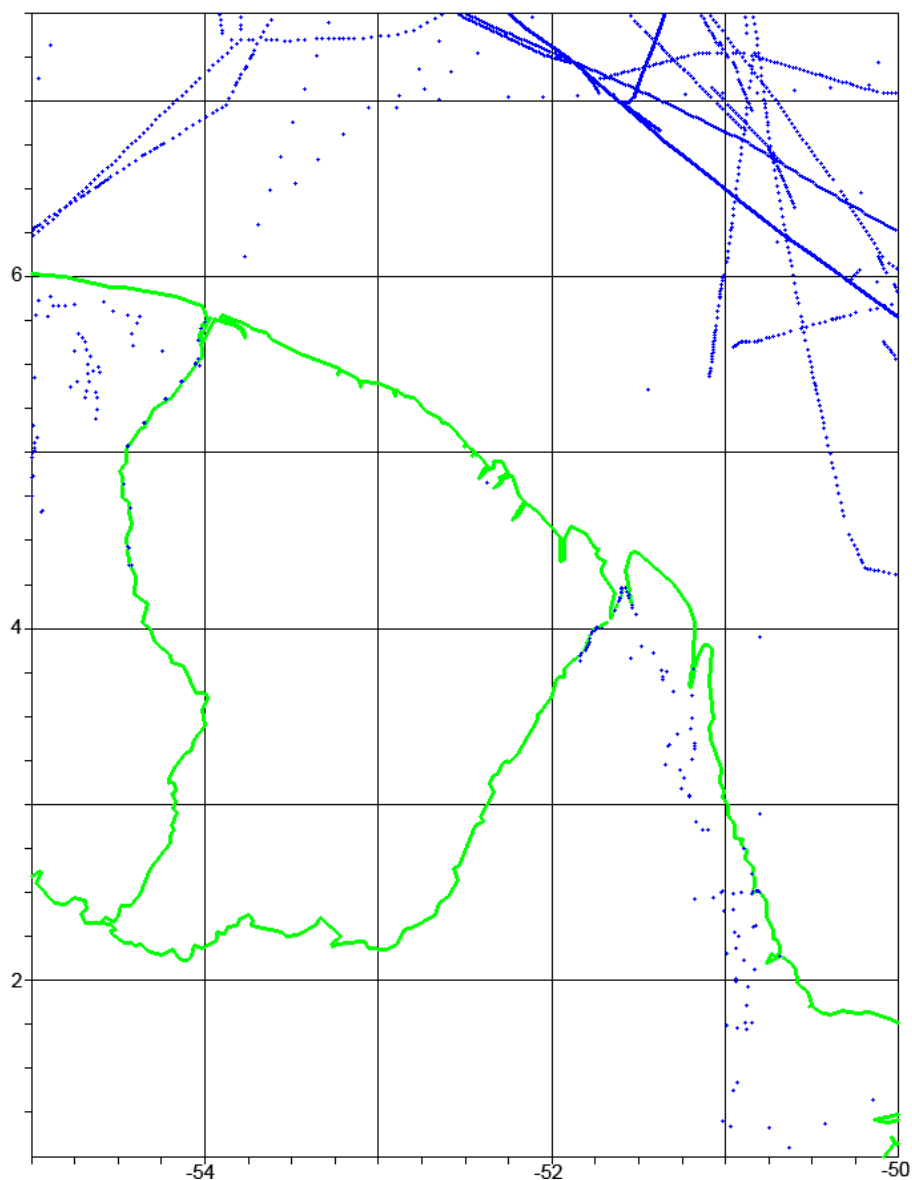


FIG. 1.14 – Couverture gravimétrique en Guyane (sources des données : BGI).

La gravimétrie mobile présente un grand intérêt pour combler les lacunes des couvertures gravimétriques existantes. La gravimétrie mobile « classique » à base de gravimètre aériens/marins sur plates-formes stabilisées est une technique mature utilisable en haute mer et dans les territoires étendus peu accessibles telle la Guyane ou les chaînes de montagnes.

En mer à proximité des côtes ou à terre dans des zones d'accès difficile peu étendues, un système de mesure maniable et bon marché monté sur divers véhicules légers (vedette hydrographique, automobile, petit avion ou drone) est une alternative des plus séduisantes.

1.4 ÉTAT DE L'ART EN GRAVIMÉTRIE MOBILE

Cette section se propose de décrire la composition et le principe des systèmes de gravimétrie mobile actuels, opérationnels et en cours de développement, dans le but de dresser un état de l'art aussi exhaustif que possible.

1.4.1 Gravimètre scalaire sur plates-formes stabilisées

La plupart des systèmes de gravimétrie mobile actuels sont constitués d'un gravimètre scalaire monté sur une plate-forme stabilisée. Le premier système de ce type a été utilisé par Lacoste dès 1965 (LACOSTE 1967; VALLIANT 1992). La plate-forme est constituée par un berceau mobile selon deux directions orthogonales, dites directions de roulis et de tangage, contenant le gravimètre et actionné par deux moteurs asservis en position. Les signaux de commande des moteurs sont élaborés à partir des informations issues de deux gyromètres à fibre optique montés sur le boîtier du gravimètre de sorte à maintenir l'axe sensible du gravimètre parallèle à la direction de précession des gyromètres. Cette direction évolue pour chaque gyromètre depuis le point de départ du véhicule, où elle est préalablement alignée sur la verticale du lieu lors de l'initialisation du système, sous l'effet d'un signal de commande généré à partir de deux accéléromètres mesurant les composantes de l'accélération horizontale. Une telle plate-forme, dite « deux axes », ne permet qu'un alignement suivant une direction estimée de la verticale du lieu. Elle n'est donc pas adaptée pour une détermination vectorielle de la pesanteur.

Ce mode de stabilisation peut présenter des défauts en présence d'accélération horizontales de grande amplitude. Lacoste a montré que le mouvement de la plate-forme était équivalent à celui d'un oscillateur dont le terme de forçage est lié à l'accélération horizontale et à sa dérivée première (LACOSTE 1967). Cet oscillateur est caractérisé par une période propre, appelée période de la plate-forme, et un facteur d'amortissement qui, idéalement, doit être à sa valeur critique (0.707).

Le défaut de stabilisation peut être limité en choisissant une période de la plate-forme inférieure à la plus grande période des accélérations horizontales du véhicule porteur. Ce réglage peut être effectué au préalable en fonction du type de véhicule utilisé et des périodes prévisibles des accélérations. Ainsi, l'amplitude maximale de l'erreur de mesure provenant d'un défaut de stabilisation est-elle toujours inférieure à la précision d'un gravimètre proprement dit.

Les principaux systèmes à plate-forme basés sur le gravimètre à peson de Lacoste&Romberg sont les suivants :

- le système « Air-Sea Gravity System II » proposé par la société MICRO-G LACOSTE (Lafayette, Colorado, USA), qui provient de la fusion de « Micro-g solutions » avec la société « Lacoste Romberg » fondée initialement par Lacoste ;
- les systèmes « UltraSys », « ZLS », « SeaSys » et « SAGE » utilisés par la société FUGRO-LCT (Houston, Texas, USA) ;
- le système de Lacoste à plate-forme « trois axes » utilisé par la société CARSON AEROGRAVITY (Perkasie, Pennsylvania, USA).

Les systèmes proposés par Fugro-LCT ne diffèrent pour l'essentiel que par la

technologie du système d'acquisition des mesures. En plus des gravimètres de La-coste, Fugro-LCT propose pour la gravimétrie marine deux autres types de gravimètres :

- le système « Bell BGM-3 » développé initialement par la société BELL AEROSPACE (Buffalo, N.Y., USA), basé sur un gravimètre à peson vertical ;
- le système « Bodenseewerk KSS31 » développé initialement par la société Bodenseewerke Geosystem GmbH (Überlingen, Allemagne) devenue aujourd'hui SICK MAIHAK GMBH (Reute, Allemagne).

L'entreprise de prospection américaine SANDER GEOPHYSICS LIMITED (Ottawa, Canada) utilise un système de gravimétrie aéroportée vectorielle baptisé « AIR-Grav » (AIRborne Gravity system) composé de trois accéléromètres à axes orthogonaux montés sur une plate-forme stabilisée mécanique trois axes utilisant des gyromètres laser à fibre optique (FERGUSON et HAMMADA 2000 ; SANDER et al. 2004). Cette plate-forme est particulièrement fiable de par la faible dérive des gyromètres laser. Ce système a été utilisé avec succès à bord d'avions et d'hélicoptères pour mesurer la composante verticale de la pesanteur à une résolution spatiale de deux kilomètres et une précision de l'ordre du milligal (BRUTON et al. 2001 ; FERGUSON et HAMMADA 2000).



FIG. 1.15 – Cessna 208B Grand Caravan utilisé pour les levés de gravimétrie mobile à l'aide du système AIRGrav (FERGUSON et HAMMADA 2000).

Pour l'ensemble de ces systèmes, la détermination des positions du véhicule porteur nécessaires en particulier pour l'estimation des accélérations induites par le mouvement, est réalisée à partir de données GPS (ou plus généralement GNSS) issue d'un récepteur bi-fréquence utilisé en mode différentiel à partir de stations GPS fixes à terre. Le point de mesure de l'accélération de rappel dans le véhicule porteur n'est en général pas confondu avec le ou les points du véhicule positionnés par GPS. Chaque système comprend donc un bras de levier à prendre en compte pour l'estimation du champ de pesanteur.

Le traitement des données issues de ces systèmes consiste à corriger les mesures

accélérométriques de l'accélération totale du porteur, déduites des positions, puis à éliminer le bruit à l'aide de filtres numériques passe-bas. La résolution spatiale du champ restitué est directement fonction de la bande passante du filtre (VERDUN et al. 2003). Une approche alternative a été proposée par ABBASI, BARRIOT et VERDUN (2007) qui repose sur l'estimation de la perturbation de pesanteur par une méthode d'inversion appliquée à des équations intégrales d'observation. Dans ce cas, le niveau de filtrage des données est fixé par la régularisation. L'avantage principal de cette méthode est qu'elle permet un traitement global prenant en compte une fonction de covariance réaliste du champ et la donnée d'un champ *a priori* et permettant une estimation rigoureuse de l'erreur d'estimation.

La précision interne des gravimètres à plate-forme stabilisée est en général évaluée en analysant les écarts de mesure au point de croisement ou lors de répétition de profils. Elle est limitée par l'incertitude sur l'estimation de l'accélération totale et, dans une moindre mesure, par les défauts de stabilisation. La précision moyenne de l'ensemble de ces dispositifs est de deux milligals à cinq kilomètres de résolution spatiale pour les levés marins ou aériens à basse altitude (KREYE et al. 2006) et diminue pour les levés de plus haute altitude (VERDUN et al. 2002).

Bien que largement utilisés pour les levés marins et aéroportés, ces dispositifs sont d'une mise en œuvre assez délicate de par leur taille et leur poids et les coûts de leur exploitation sont élevés (cf. §1.2.3).

1.4.2 Les systèmes hybrides INS/GNSS

Le principe des systèmes de gravimétrie vectorielle inertielle a été présenté au paragraphe §1.2.3. Il n'existe pas à l'heure actuelle de systèmes gravimétriques hybrides INS/GNSS exploités en production. Les dispositifs les mieux documentés sont développés et testés respectivement à l'université de l'état de l'Ohio et à l'institut de géodésie et de navigation des forces armées fédérales de Munich (FAF, University Munich). Le système allemand (KREYE, HEIN et ZIMMERMANN 2004; KREYE et al. 2006) comprend une centrale inertielle « SAGEM Sigma 30 » SAGEM DÉFENSE SÉCURITÉ (Paris), un récepteur GPS « Ashtech Z-Xtreme » (Thales Navigation devenu aujourd'hui MAGELLAN NAVIGATION, San Dimas, Californie, USA), ainsi qu'un récepteur mono-fréquence quatre antennes « Beeline L1/L1 » (fig 1.16) de NOVATEL (Calgary, Alberta, Canada).

La position du véhicule est calculée à partir des données GPS acquises en mode différentiel à partir de stations GPS fixes. Les données issues du récepteur quatre antennes permettent d'une part, l'estimation de l'attitude du véhicule et d'autre part, sont prises en compte lors du calcul de la position à partir du GPS bi-fréquence pour améliorer l'estimation des ambiguïtés entières. Les traitements des données GPS et des données issues de la centrale inertielle sont effectués en parallèle par filtrage de Kalman sans interaction pour obtenir respectivement l'accélération totale du véhicule et l'accélération de rappel dans un référentiel inertiel. Une procédure finale de filtrage réalise la combinaison de ces deux grandeurs pour aboutir à l'estimation du champ assorti de sa précision qui se situe entre deux et trois milligals pour une résolution spatiale de 0.5 km.

Le système américain (JEKELI et KWON 1999) est très similaire au système alle-

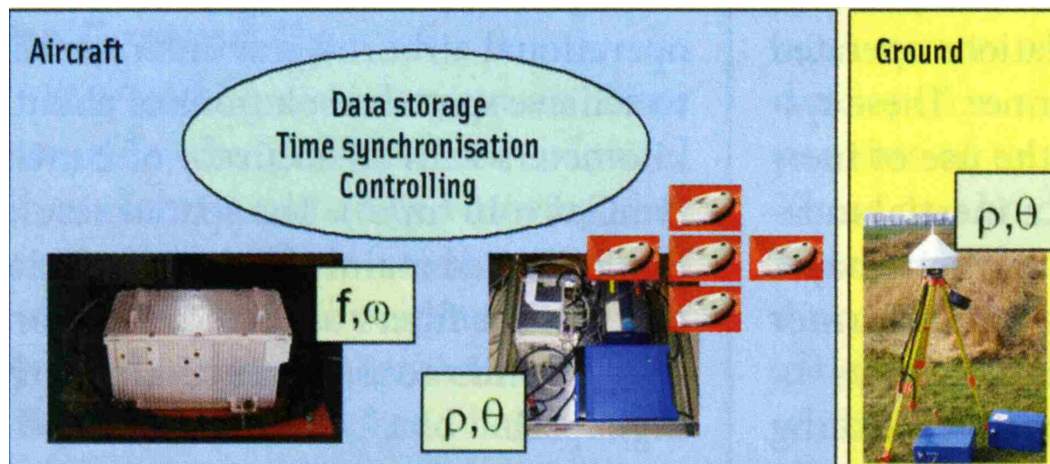


FIG. 1.16 – Composants du système de gravimétrie mobile développé par l'institut de géodésie et de navigation des forces armées fédérales de Munich (FAF), composé d'une centrale inertielle et d'un récepteur GNSS multi-antennes (KREYE, HEIN et ZIMMERMANN 2004).

mand dans sa composition et par les méthodes de traitement employées. Il comprend une centrale inertielle commercialisée par la société NORTHROP GRUMMAN NAVIGATION (Linthicum, Maryland, USA), récemment remplacée par la centrale inertielle « H764G » de marque HONEYWELL (Phoenix, Arizona, USA) ainsi que de récepteurs GPS de marque TRIMBLE (Sunnyvale, Californie, USA), NOVATEL et TOPCON (Livermore, USA). Les tests réalisés jusqu'à présent à bord de véhicules routiers (fig. 1.17) ont atteint une précision de deux à trois milligals pour une résolution spatiale de deux kilomètres (JEKELI et LI 2006).



FIG. 1.17 – Vues du système développé par l'université d'état de l'Ohio (JEKELI et LI 2006). À gauche le véhicule porteur et à droite, l'instrumentation embarquée, notamment les centrales inertielles Honeywell H764G.

1.4.3 Systèmes à composants discrets

Le principe de fonctionnement des systèmes à composants discrets est en tous points identiques à celui des systèmes hybrides INS/GNSS. La différence réside dans la composition du système dans lequel la centrale inertielle liée est remplacée

par un jeu de trois accéléromètres couplés à trois gyromètres et/ou un récepteur GPS à quatre antennes rigidement fixées sur le véhicule porteur. Les intérêts principaux sont de pouvoir choisir les capteurs implantés dans le système et leurs performances, de maîtriser le traitement des données directement issues des capteurs, ce qui est difficile en cas d'utilisation d'une centrale inertielle commerciale.

Plusieurs dispositifs de ce type sont en cours de développement, notamment au Canada et en Allemagne. Deux systèmes qui illustrent les technologies employées à l'heure actuelle sur ce type de dispositif sont actuellement bien documentés. Il est clair qu'un certain nombre de systèmes n'ont pas encore été décrits dans la littérature scientifique pour leur intérêt commercial.

Le premier système est développé à l'institut de guidage aérien (IFF, Institut of Flight Guidance) de l'Université Technique de Braunschweig (Technical University of Braunschweig, TUBS). Il est composé (KREYE et al. 2006; STELKENS-KOBSCHE 2004) d'un gravimètre scalaire mobile « Chekan-A » développé par l'institut ELEKTROPRIBOR (Saint-Petersbourg, Russie), qui comprend un capteur d'accélération à pendule monté sur une plate-forme inertielle liée comprenant trois accéléromètres et trois gyromètres (fig. 1.18).

Le positionnement est assuré par un récepteur GPS « Trimble 5700 » couplé à un altimètre barométrique. Les traitements de données GPS sont réalisés à l'aide du logiciel « Trimble Total Control » combiné avec « Wasoft/Viruell SK » développé par INGENIEURBÜRO WANNINGER (Radebeul, Allemagne). La précision de ce système a été estimée à un milligal pour une résolution spatiale comprise entre cinq et six kilomètres. L'ensemble du dispositif, très encombrant, est plutôt réservé aux gros-porteurs.

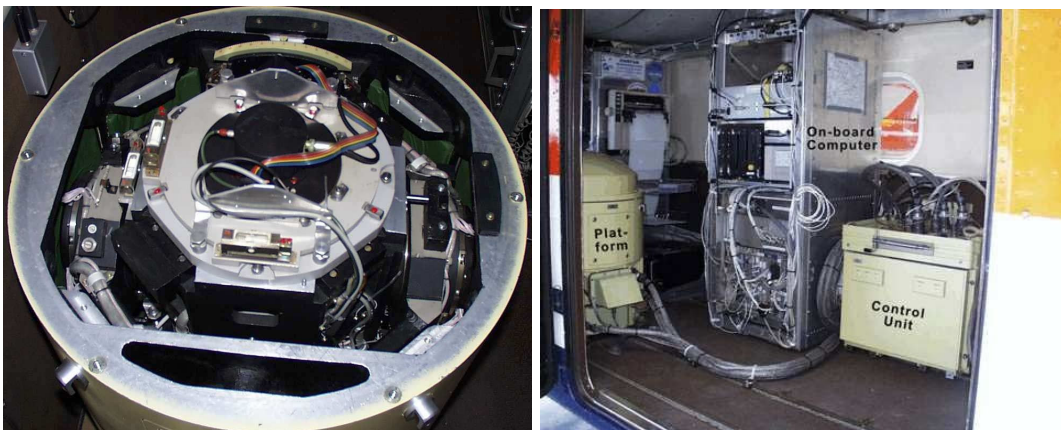


FIG. 1.18 – Vues du système développé par l'IFF (STELKENS-KOBSCHE 2004). La plate-forme inertielle supportant l'accéléromètre de précision et l'ensemble de l'installation dans l'avion porteur.

Le deuxième système baptisé « SAGS-4 » (Strapdown Airborne Gravimetry System 4, KREYE et al. 2006; MEYER, BOEDECKER et PFLUG 2003) est développé par l'académie Bavaroise des Sciences et des Humanités de Munich (Bavarian Academy of Sciences and Humanities, Munich). Dans ce système, la mesure de l'accélération de rappel est réalisée à l'aide de quatre accéléromètres « Q-Flex QA-3000 » commercialisés par la société HONEYWELL (Defense and Space Redmond Division, Redmond, Washington, USA) d'une précision d'un milligal. Trois des quatre ac-

céleromètres sont disposés de sorte que leurs axes géométriques soient orthogonaux. Un quatrième accéléromètre complète l'axe vertical de sorte à mesurer dans la direction opposée au premier. L'ensemble des accéléromètres est placé dans une enceinte thermorégulée (fig. 1.19) pour limiter les dérives des accéléromètres résultant des variations de température et protégée des vibrations par quatre amortisseurs à air.

L'attitude du système est déterminée par deux systèmes GPS multi-antennes « Ashtech 3DF » et « Beeline L1/L1 » de NOVATEL complétés par trois gyromètres à fibre optique. Le positionnement repose sur les données issues de deux récepteurs GPS bi-fréquence, un GPS « JNS 100 », compatible GLONASS, de la société JAVAD NAVIGATION SYSTEMS (San José, Californie, USA et Moscou, Russie) et un GPS « OEM4-G2 » de marque NOVATEL.

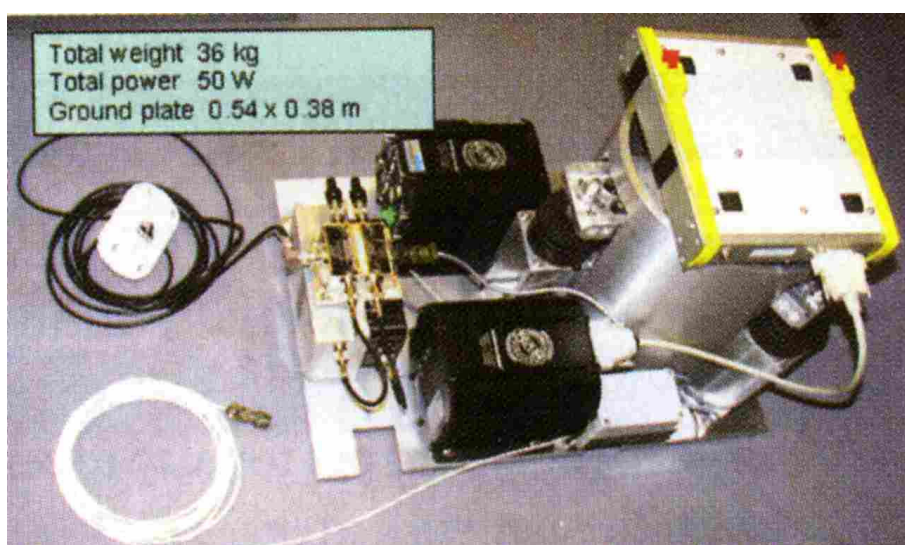


FIG. 1.19 – Unité accélérométrique SAGS-4. De gauche à droite, récepteur GPS, ordinateurs pour l'acquisition de l'ensemble des données des gyromètres et des accéléromètres dans l'enceinte thermorégulée et dont le mouvement est amorti par des amortisseurs à air (KREYE et al. 2006).

Les performances de ce système sont encore à l'étude ; vraisemblablement, la précision ultime devrait se situer au-delà de la précision des accéléromètres annoncée par le constructeur qui est d'un milligal.

1.4.4 Gradiomètres embarqués

Un autre instrument disponible pour la gravimétrie est le gradiomètre. La gradiométrie mobile présente un intérêt tout particulier en prospection où elle permet de détecter des variations de densité de courte longueur d'onde localisées dans la croûte supérieure. La société BELL GEOSPACE (Houston, Texas, USA) est particulièrement en avance dans le domaine des acquisitions gradiométriques marines et aéroportées, et publie une documentation abondante (LANE 2004) sur son instrumentation et les différents levés qu'elle a réalisés. Le système baptisé « Three Dimensional Full Tensor Gradient » (3D-FTG), a été développé initialement par la société « Lockheed Martin » (Bethesda, Maryland, USA) et utilisé pour la première

fois entre 1998 et 2002 pour des acquisitions marines dans le Golfe du Mexique et dans l'Atlantique nord. Le même système devenu « Air 3D-FTG », a ensuite été testé pour des acquisitions aéroportées en Amérique du nord et en Afrique. La longueur cumulée des profils marins et aéroportés réalisés avec ce système atteint aujourd'hui 60 000 km.



FIG. 1.20 – Vue du système « Three Dimensional Full Tensor Gradient » (3D-FTG). © Bell Geospace, USA.

Le capteur gradiométrique (fig. 1.20) est composé de trois disques mobiles en rotation autour de trois axes orthogonaux et montés sur une plate-forme mécanique stabilisée à cardan (MURPHY 2004). Chaque disque comporte deux paires d'accéléromètres mesurant chacune les accélérations dans des directions opposées. Lors de la mesure, les disques tournent à vitesse constante. Une combinaison linéaire adéquate des mesures accélérométriques de chacun des disques apparaît comme une somme de fonctions sinusoïdales en quadrature dont les amplitudes sont elles-mêmes des combinaisons linéaires des composantes du tenseur du champ de pesanteur. La mesure des amplitudes pour l'ensemble de trois disques permet de reconstituer les composantes du tenseur.

Ce système permet de déterminer le tenseur complet du champ de pesanteur, soit six composantes puisque ce dernier est symétrique, avec une précision de $5 \times 10^{-9} \text{ ms}^{-2}$ et une résolution spatiale comprise entre 400 et 600 m. En dehors des masses, seules cinq des six composantes de ce tenseur sont indépendantes. Compte-tenu de l'incertitude associée à la mesure, le système acquiert indifféremment les six composantes du tenseur. L'obtention d'une telle résolution spatiale en gradiométrie aéroportée a nécessité une altitude de vol très basse, de l'ordre de 80 m, ce qui interdit pour l'instant les acquisitions dans certaines régions telles les chaînes de montagnes.

D'un point de vue technologique, ce gradiomètre ne présente pas d'innovation particulière ; il s'appuie directement sur la technologie existante des accéléromètres.

1.4.5 Origine et chronologie du projet « LIMO-G »

La multiplicité des systèmes de gravimétrie mobile en cours de développement, que l'on peut classer en quatre catégories (fig. 1.21), témoigne d'une activité de recherche intense et active dans ce domaine à la fois sur les aspects instrumentaux et sur les méthodes de traitement du signal. Hormis certaines recherches autour des gravimètres à fontaine atomique qui demeurent pour l'essentiel très fondamentales, la France ne développe pas encore ses propres gravimètres.

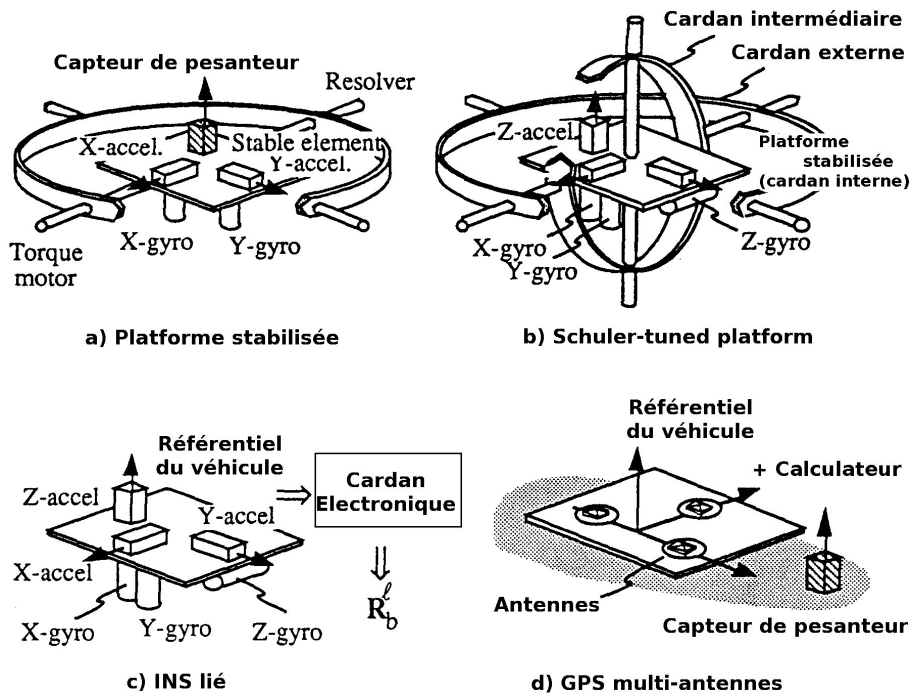


FIG. 1.21 – Différents systèmes de stabilisation en gravimétrie mobile (SCHWARZ et WEI 1995). Ces quatre catégories permettent de classer l'ensemble des systèmes actuellement développés. Les deux premiers (a et b) reposent sur la stabilisation mécanique du capteur. Ce capteur est généralement un gravimètre de Lacoste pour les systèmes de gravimétrie scalaire, mais il peut être remplacé par des accéléromètres comme dans le système AIRGrav. Pour les cas c et d, la stabilisation est logicielle, c'est-à-dire que le capteur d'accélération subit l'attitude du véhicule qui est compensée par le calcul. Ces capteurs sont dits « liés ». C'est le cas des accéléromètres de la centrale inertielle liée du projet américain (cas c, JEKELI et KWON 1999) et des accéléromètres du système « SAGS-4 » (cas d) qui diffèrent seulement par les capteurs (gyromètres pour le système américain, GPS quatre antennes pour le système allemand) utilisés pour la détermination de l'attitude.

Devant le défi technologique que représente la conception d'un système de gravimétrie mobile autonome et les bénéfices attendus (cf. §1.3), la communauté gravimétricienne française se devait d'apporter sa propre contribution afin de rester à la pointe de la recherche en géodésie physique.

Le projet de développement d'un système de gravimétrie mobile a débuté sous l'impulsion d'Henri Duquenne en 1999 alors professeur à l'école Supérieure des Géomètres et Topographes (ESGT) du Mans. Comme nous le verrons au chapitre 3, le système « Limo-G » (Light MOving Gravimetry system) est un gravimètre inertielle vectoriel léger à composants discrets qui est proche dans sa constitution

du système allemand « SAGS-4 », puisqu'il comprend trois accéléromètres à axes orthogonaux et un GPS quatre antennes.

La conception et la fabrication du système « Limo-G » ont été réalisées entre 1999 et 2002 à l'ESGT dans le cadre de projets de fin d'études d'élèves ingénieurs (GUETTE 2001; JACQUES 2002; VERMAST 1999; VIEL 2000; VLAMYNCK 1999). Certaines solutions technologiques ont été alors choisies concernant la disposition des accéléromètres, la numérisation des signaux et la régulation thermique de l'enceinte contenant le système. En 2004, une étude complète de la modélisation du système a été menée dans le cadre d'un diplôme d'études approfondies de l'Observatoire de Paris (MELACHROINOS 2004).

- À ce stade du développement, un certain nombre de tâches restaient à réaliser :
- le développement d'une méthode d'estimation du champ de pesanteur à partir d'une combinaison des mesures d'accélération et de positions réalisées par le système « Limo-G » ;
 - la mise au point d'un protocole d'étalonnage simultané des trois accéléromètres ;
 - la réalisation de campagnes de mesure à bord de différents porteurs sur des profils gravimétriques de référence ;
 - la validation du protocole d'étalonnage et de la méthode d'estimation du champ de pesanteur grâce aux mesures de référence ;
 - la mise en évidence d'éventuels défauts inhérents à l'instrumentation et la formulation de diverses propositions en vue de les corriger.

La suite de ce manuscrit décrit en détail les travaux réalisés pour ces différentes tâches. Le chapitre 2 pose les bases mathématiques et physiques nécessaires pour la modélisation du système et expose la théorie de la méthode de traitement basée sur un filtre de Kalman et développée dans ce travail.

Le chapitre 3 décrit en détail la composition du système Limo-G et compare deux méthodes d'étalonnage qui ont été spécifiquement mises au point et expérimentées pour le système Limo-G.

Le chapitre 4 présente deux campagnes d'essai réalisées sur des points ou profils gravimétriques de référence afin de tester le système et la méthode de traitement pour divers véhicules porteurs.

Enfin, le dernier chapitre décrit l'exploitation des données issues des deux campagnes d'essai afin de valider la méthode de traitement et d'évaluer quantitativement les performances du système.

PRINCIPE ET MODÉLISATION DU SYSTÈME 2

SOMMAIRE

2.1	RÉFÉRENTIELS, COORDONNÉES ET CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIEL	33
2.1.1	Référentiels	33
2.1.2	Vecteur position et notations	33
2.1.3	Changements de référentiels et angles d'Euler	33
2.1.4	Référentiel mobile et rotation instantanée	35
2.2	RÉFÉRENTIELS UTILISÉS EN GRAVIMÉTRIE MOBILE	39
2.2.1	Le référentiel de Copernic	39
2.2.2	Le référentiel géocentrique	39
2.2.3	Le référentiel terrestre	41
2.2.4	Le référentiel de navigation ou référentiel local géodésique	45
2.2.5	Le référentiel du véhicule.	46
2.2.6	Les référentiels de mesure	47
2.3	ÉQUATION DE NAVIGATION DANS LE RÉFÉRENTIEL TERRESTRE	47
2.3.1	Accélération cinématique	48
2.3.2	Accélération de rappel et accélération gravitationnelle	49
2.4	FILTRE DE KALMAN	50
2.4.1	Introduction	50
2.4.2	Un filtre linéaire par nature	51
2.4.3	Application aux systèmes non linéaires	55
2.4.4	Application au système de gravimétrie mobile	58
2.4.5	Implémentation du filtre	63
2.4.6	Forces et faiblesses du filtre de Kalman	65

LE problème de la gravimétrie mobile est de déterminer la pesanteur en un point donné, mobile par rapport à la Terre, à partir de mesures accélérométriques réalisées dans le véhicule porteur, de la position du véhicule à la surface de la Terre et de son orientation. Afin de résoudre ce problème, nous nous appuyerons sur la deuxième loi de Newton applicable dans un référentiel inertiel et sur les relations de changements de référentiels pour déterminer l'équation liant la pesanteur à l'accélération mesurée au niveau des accéléromètres.

Dans un premier temps, nous verrons les outils mathématiques nécessaires à l'expression des lois de la mécanique. Ensuite, nous détaillerons les caractéristiques des différents référentiels que nous utilisons dans la résolution de ce problème et leurs mouvements relatifs. Enfin, une fois tous ces outils mis en place, nous pourrons établir la relation dynamique qui servira de base au filtre de Kalman que nous avons développé.

2.1 RÉFÉRENTIELS, COORDONNÉES ET CHANGEMENT DE RÉFÉRENTIEL

2.1.1 Référentiels

En physique, un référentiel est un système de coordonnées de l'espace-temps qui comprend trois coordonnées d'espace et une coordonnée de temps. Ce référentiel est composé d'une base de trois vecteurs d'espace constituant un repère et d'un vecteur temps. Dans le cadre de cette étude, le vecteur temps reste invariant et unitaire, les termes « repère » et « référentiel » seront donc employés indifféremment.

Dans le cas général, la base d'un repère dit cartésien est constituée par trois vecteurs non coplanaires. On utilise le plus souvent deux types de référentiels :

- le référentiel orthogonal dont la base est constituée de vecteurs orthogonaux deux à deux,
- le référentiel orthonormé qui est un référentiel orthogonal dont les vecteurs de base sont de norme unitaire.

2.1.2 Vecteur position et notations

La position du point M étudié est repérée par le vecteur $X = \overrightarrow{OM}$ dont les composantes sont exprimées dans un référentiel donné d'origine O . Notre étude nous amène à considérer différents référentiels identifiés grâce à une lettre en exposant. Ainsi, un vecteur X exprimé dans un référentiel a sera-t-il désigné par

$$X^a = \begin{bmatrix} X_1^a \\ X_2^a \\ X_3^a \end{bmatrix}$$

où $X^a = X_1^a e_1 + X_2^a e_2 + X_3^a e_3$, avec (e_1, e_2, e_3) correspondant à la base de a et X_1^a, X_2^a et X_3^a correspondants aux coordonnées de X dans la base a .

La dérivée de ce vecteur par rapport au temps dans le référentiel a sera notée $\dot{X}_{/a}^a$ ou plus simplement \dot{X}^a . Il est également possible d'exprimer la dérivée de ce vecteur par rapport au temps dans un second référentiel b avec la notation $\dot{X}_{/a}^b$. De même, la dérivée seconde sera notée $\ddot{X}_{/a}^b$.

Les coordonnées du vecteur X et de ses dérivées peuvent être indifféremment exprimées dans un référentiel a ou b connaissant les mouvements relatifs entre ces référentiels. C'est le principe des changements de référentiels.

2.1.3 Changements de référentiels et angles d'Euler

Pour exprimer les composantes d'un vecteur position X dans un référentiel b en fonction de ses composantes dans un référentiel a , il est nécessaire de considérer une transformation composée de trois types d'éléments : la translation, l'échelle et l'orientation. Cette transformation s'exprime mathématiquement par :

$$X^b = EC_a^b(X_{ab}^a + X^a),$$

où X_{ab}^a est un vecteur de translation ; E est le facteur d'échelle et C_a^b une matrice de changement de base qui donne l'orientation relative des référentiels a et b .

La translation X_{ab}^a est un simple changement d'origine et le facteur d'échelle E est défini de façon générale comme unitaire car les bases sont normées. L'orientation relative des référentiels donnée par la matrice C_a^b est donc le point le plus délicat à considérer.

Plusieurs outils mathématiques permettent de décrire le changement d'orientation entre référentiels, tels que les cosinus directeurs, les quaternions ou encore les angles d'Euler. Il est nécessaire de considérer à présent deux cas :

- le cas général où les bases a et b sont quelconques ; la matrice C_a^b est alors une matrice de changement de base déterminée à partir des coordonnées des vecteurs de la base a exprimées dans la base b ;
- le cas particulier où les bases a et b sont orthonormées ; la matrice C_a^b est alors une matrice de passage orthogonale, exprimable à partir des cosinus directeurs ou des angles d'Euler.

Dans le cas d'un changement de référentiels orthogonaux, tout changement d'orientation peut être décomposé en une série de trois rotations (GOLDSTEIN 1964), la première autour d'un des axes du référentiel initial puis les deux suivantes autour des axes des référentiels intermédiaires obtenus par les deux autres rotations appliquées successivement (fig. 2.1).

Pour une simple rotation d'un angle θ autour d'un des axes du référentiel a (le premier (1), le deuxième (2) ou le troisième axe (3)), les matrices orthogonales de passage sont respectivement

$$R_{1,\theta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \quad R_{2,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\text{et } R_{3,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Une composition de ces rotations permet de définir la matrice de passage C_a^b pour calculer les coordonnées exprimées dans le référentiel b en fonction de celles exprimées dans le référentiel a . Par exemple, si le référentiel b est issu du référentiel a , par une rotation d'un angle α autour de 1 (premier axe du référentiel a) puis d'un angle β autour de 2' et enfin d'un angle γ autour de 3'' (deuxième et troisième axes de rotation appartenant aux référentiels intermédiaires issus respectivement de la deuxième puis de la troisième rotation), la matrice de transformation résultante est

$$\begin{aligned} C_a^b &= R_{3'',\gamma} R_{2',\beta} R_{1,\alpha} \\ &= R_{3,\gamma} R_{2,\beta} R_{1,\alpha} \\ \text{et ainsi } X^b &= C_a^b X^a. \end{aligned}$$

Si les référentiels a et b sont tous deux orthogonaux, la matrice de passage inverse C_b^a qui permet de passer du référentiel b vers le référentiel a est simplement

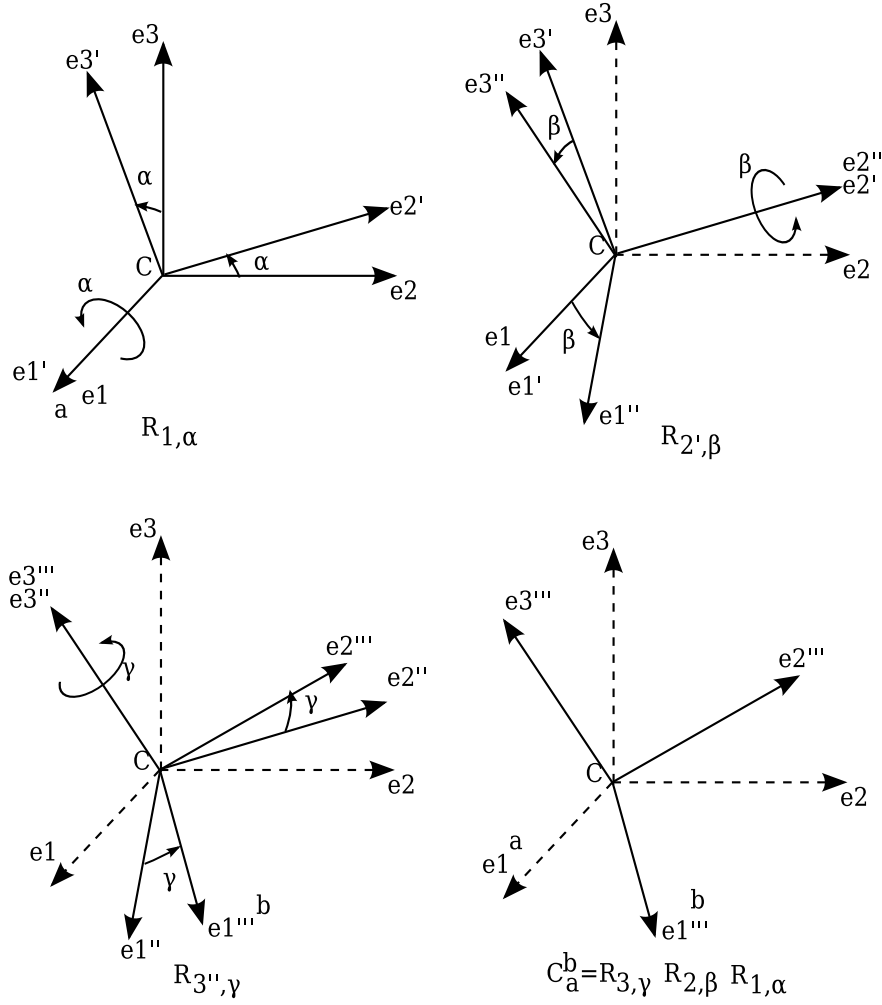


FIG. 2.1 – Définition des référentiels intermédiaires engendrés par les rotations $R_{1,\alpha}$ puis $R_{2',\beta}$ et $R_{3'',\gamma}$ du référentiel $a = Ce_1e_2e_3$ pour former le référentiel $b = Ce_1''e_2''e_3''$. La composition des rotations résultante est $C_a^b = R_{3'',\gamma}R_{2',\beta}R_{1,\alpha}$, écrite plus simplement sous la forme $C_a^b = R_{3,\gamma}R_{2,\beta}R_{1,\alpha}$.

égale à la transposée de C_a^b , il vient alors

$$\begin{aligned}
 X^a &= (C_a^b)^{-1}X^b \\
 &= (C_a^b)^T X^b \\
 &= C_b^a X^b.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Si l'un des référentiels n'est pas orthogonal, l'inverse de la matrice de passage C_a^b doit être calculée explicitement.

2.1.4 Référentiel mobile et rotation instantanée

Les référentiels peuvent être mobiles les uns par rapport aux autres. Nous n'envisagerons ici que le changement d'orientation. En effet, les variations de l'échelle et de la translation s'étudient simplement en calculant respectivement la dérivée par

rapport au temps du facteur d'échelle et du vecteur translation (vitesse de translation). Pour l'orientation, il est important de prendre en considération le vecteur rotation instantanée qui permet de caractériser à la fois la direction de l'axe de rotation et la vitesse de la rotation. En effet, considérons deux référentiels a et b en rotation l'un par rapport à l'autre d'un angle α selon le premier axe (fig. 2.1). Les coordonnées d'un vecteur X fixe sont exprimées indifféremment dans le référentiel $a = (Ce_1e_2e_3)$ ou le référentiel $b = (Ce_1e_2'e_3')$. Le passage d'un système de coordonnées à l'autre est effectué grâce à la relation de transformation (2.1)

$$\begin{aligned} X^a &= R_{1,-\alpha} X^b \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} X^b \end{aligned}$$

Considérons à présent que cet angle α varie en fonction du temps, soit $\alpha = \omega t$ où $\dot{\alpha} = \omega$ représente la vitesse angulaire de rotation du référentiel b par rapport au référentiel a considérée constante. En supposant que le vecteur X est fixe dans b , il vient :

$$\begin{aligned} \dot{X}^a &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega \sin \alpha & -\omega \cos \alpha \\ 0 & \omega \cos \alpha & -\omega \sin \alpha \end{bmatrix} X^b \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{bmatrix} R_{1,-\alpha} X^b \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{bmatrix} X^a. \end{aligned}$$

Cette relation permet d'obtenir les coordonnées du vecteur dérivé \dot{X} dans le référentiel a à partir de celle de X dans le même référentiel. Elle peut s'écrire sous la forme d'un produit vectoriel

$$\dot{X}^a = \omega_{ab}^a \wedge X^a$$

où $\omega_{ab}^a = [\omega, 0, 0]^T$ désigne le vecteur rotation du référentiel b par rapport au référentiel a projeté dans a .

Il est donc possible d'associer au vecteur ω_{ab}^a , la matrice 3×3 antisymétrique donnée par :

$$\Omega_{ab}^a = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{bmatrix}.$$

On peut donc écrire indifféremment :

$$\dot{X}^a = \Omega_{ab}^a X^a = \Omega_{ab}^a R_{1,-\alpha} X^b = \omega_{ab}^a \wedge X^a.$$

Cette relation se généralise au cas d'une rotation quelconque grâce à la décomposition de la matrice de passage C_b^a . En effet, il vient successivement

$$\begin{aligned}
\dot{X}^a &= \dot{C}_b^a X^b \\
&= \frac{d}{dt} (R_{1,-\alpha} R_{2,-\beta} R_{3,-\gamma}) X^b \\
&= (\dot{R}_{1,-\alpha} R_{2,-\beta} R_{3,-\gamma} + R_{1,-\alpha} \dot{R}_{2,-\beta} R_{3,-\gamma} + R_{1,-\alpha} R_{2,-\beta} \dot{R}_{3,-\gamma}) X^b \\
&= (\Omega_1^a R_{1,-\alpha} R_{2,-\beta} R_{3,-\gamma} \\
&\quad + R_{1,-\alpha} \Omega_2' R_{2,-\beta} R_{3,-\gamma} \\
&\quad + R_{1,-\alpha} R_{2,-\beta} \Omega_3'' R_{3,-\gamma}) X^b
\end{aligned} \tag{2.2}$$

où Ω_2' est la matrice antisymétrique de la deuxième rotation exprimée dans le premier référentiel intermédiaire et Ω_3'' celle de la troisième rotation exprimée dans le second référentiel intermédiaire. Il est nécessaire d'exprimer ces matrices dans le référentiel initial a . Pour cela, considérons deux référentiels 1 et 2 et le vecteur Y^2 donné par

$$Y^2 = \Omega_{12}^2 X^2$$

où X^2 est un vecteur quelconque. Il est clair que

$$Y^1 = \Omega_{12}^1 X^1.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
Y^2 &= C_1^2 Y^1 = \Omega_{12}^2 C_1^2 X^1 \\
\text{d'où } Y^1 &= C_2^1 \Omega_{12}^2 C_1^2 X^1 \\
\text{et } \Omega_{12}^1 &= C_2^1 \Omega_{12}^2 C_1^2.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Ainsi, la matrice Ω_2' peut être exprimée dans le référentiel a en considérant la matrice de passage $C_1^a = R_{1,-\alpha}$ par

$$\Omega_2^a = R_{1,-\alpha} \Omega_2' R_{1,-\alpha}^T.$$

De même, à partir de la relation $C_2^a = R_{1,-\alpha} R_{2,-\beta}$, la matrice Ω_3'' peut être exprimée dans le référentiel a par

$$\Omega_3^a = R_{1,-\alpha} R_{2,-\beta} \Omega_3'' R_{2,-\beta}^T R_{1,-\alpha}^T.$$

L'équation (2.2) peut donc être reformulée par :

$$\begin{aligned}
\dot{X}^a &= (\Omega_1^a R_{1,-\alpha} R_{2,-\beta} R_{3,-\gamma} + \Omega_2^a R_{1,-\alpha} R_{2,-\beta} R_{3,-\gamma} + \Omega_3^a R_{1,-\alpha} R_{2,-\beta} R_{3,-\gamma}) X^b \\
&= (\Omega_1^a + \Omega_2^a + \Omega_3^a) R_{1,-\alpha} R_{2,-\beta} R_{3,-\gamma} X^b \\
&= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1 \\ 0 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\omega_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & 0 \\ \omega_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) C_b^a X^b \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} C_b^a X^b.
\end{aligned}$$

La matrice

$$\Omega_{ab}^a = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

correspond donc à la matrice antisymétrique associée au vecteur-rotation $\omega_{ab}^a = [\omega_1, \omega_2, \omega_3]^T$ du référentiel b par rapport au référentiel a exprimé dans le référentiel a .

La relation générale de dérivation d'une matrice de passage orthogonale s'écrit donc :

$$\dot{C}_b^a = \Omega_{ab}^a C_b^a. \quad (2.4)$$

Il est possible d'obtenir une autre expression de \dot{C}_b^a en utilisant la relation (2.3) qui lie Ω_{ab}^a et Ω_{ab}^b par $\Omega_{ab}^a = C_b^a \Omega_{ab}^b C_a^b$. En utilisant (2.4), il vient

$$\begin{aligned} \dot{C}_b^a &= C_b^a \Omega_{ab}^b C_a^b C_b^a \\ &= C_b^a \Omega_{ab}^b, \end{aligned}$$

puisque $C_a^b C_b^a = I_3$ où I_3 désigne la matrice identité de dimension 3.

En remarquant que $\omega_{ab} = -\omega_{ba}$, il vient $\Omega_{ab}^b = -\Omega_{ba}^b$ d'où une deuxième relation donnant la dérivée de la matrice C_b^a ,

$$\dot{C}_b^a = -C_b^a \Omega_{ba}^b.$$

Soient deux référentiels a et b , avec b en rotation par rapport à a . Nous cherchons à déterminer la vitesse d'un point, en dérivant son vecteur position dans le référentiel a supposé fixe, il vient successivement :

$$\begin{aligned} X^a &= C_b^a X^b \\ \dot{X}^a &= \dot{C}_b^a X^b + C_b^a \dot{X}^b \\ &= C_b^a \Omega_{ab}^b X^b + C_b^a \dot{X}^b \quad \text{d'après (2.4)} \\ \text{d'où, } \dot{X}_{/a}^b &= C_a^b \dot{X}^a \\ &= \dot{X}^b + \Omega_{ab}^b X^b. \end{aligned}$$

Le terme de gauche correspond à la dérivée de la position par rapport au référentiel fixe a , exprimée dans le référentiel b . Le terme de droite est la somme de la dérivée temporelle du vecteur position exprimé dans le référentiel b , c'est-à-dire la vitesse du point étudié (vitesse relative) par rapport à b et d'une vitesse additionnelle liée au mouvement du référentiel b par rapport à a appelée vitesse d'entraînement. Cette vitesse correspond à la vitesse dans a d'un point fixe dans b qui coïncide avec le point étudié à un instant donné. La dérivée seconde de X^a correspond à l'accélération du point par rapport à a ; elle s'obtient en dérivant la vitesse :

$$\begin{aligned} \ddot{X}^a &= \dot{C}_b^a \Omega_{ab}^b X^b + C_b^a \dot{\Omega}_{ab}^b X^b \\ &\quad + C_b^a \Omega_{ab}^b \dot{X}^b + \dot{C}_b^a \dot{X}^b + C_b^a \ddot{X}^b \\ &= C_b^a \Omega_{ab}^b \Omega_{ab}^b X^b + C_b^a \dot{\Omega}_{ab}^b X^b \\ &\quad + 2C_b^a \Omega_{ab}^b \dot{X}^b + C_b^a \ddot{X}^b \quad \text{d'après (2.4)} \\ \text{d'où, } \ddot{X}_{/a}^b &= C_a^b \ddot{X}^a = \ddot{X}^b + 2\Omega_{ab}^b \dot{X}^b + \Omega_{ab}^b \Omega_{ab}^b X^b, \end{aligned} \quad (2.5)$$

où :

- \ddot{X}^b est l'accélération du point étudié par rapport à b , dite accélération relative,
- $2\Omega_{ab}^b \dot{X}^b$ est l'accélération de *Coriolis* et
- $\Omega_{ab}^b \Omega_{ab}^b X^b$ est l'accélération d'entraînement, c'est-à-dire l'accélération dans a d'un point fixe de b qui coïncide avec le point étudié à un instant donné.

2.2 RÉFÉRENTIELS UTILISÉS EN GRAVIMÉTRIE MOBILE

Les relations fondamentales en gravimétrie mobile reposent principalement sur la deuxième loi de Newton, qui s'applique dans un référentiel galiléen, dit aussi inertiel. Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel la première loi de Newton est vérifiée : « tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état » (LANDAU et LIFCHITZ 1969). De plus, un référentiel en mouvement de translation rectiligne, uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen, ainsi, les référentiels galiléens sont en mouvement rectiligne, uniforme les uns par rapport aux autres.

La suite de cette section est consacrée à la description détaillée de tous les référentiels utilisés dans la modélisation de notre système et leurs mouvements relatifs. Notre première tâche consistera à choisir un référentiel galiléen dans lequel appliquer la deuxième loi de Newton.

2.2.1 Le référentiel de Copernic

Expérimentalement, c'est le référentiel dans lequel la première loi de Newton est la mieux vérifiée. Son origine est placée au centre de masse du Système Solaire et ses axes sont orientés par des étoiles qui constituent la sphère des fixes. Cette sphère des fixes était composée d'étoiles dont les positions avaient été observées comme invariantes sur la voûte céleste (120 000 étoiles du catalogue Hipparcos), ainsi que de quasars (ARIAS, FEISSEL et LESTRADE 1991). À présent, d'après MCCARTHY et PETIT (2004), le service international pour la rotation de la Terre et les systèmes de référence (IERS, International Earth Rotation and Reference Systems Service) se base uniquement sur les observations par radio-interférométrie à très longue base (VLBI, Very Long Base Interferometry) de 667 objets célestes constitués de radiosources pour déterminer le référentiel céleste international (ICRF, International Celestial Reference Frame).

Ce référentiel est donc galiléen en négligeant l'attraction engendrée par l'étoile la plus proche : Proxima du Centaure, hypothèse tout à fait réaliste. Pour l'étude des phénomènes terrestres, ce référentiel centré à proximité du Soleil est remplacé par un référentiel plus adéquat, dont l'origine est placé au centre de la Terre.

2.2.2 Le référentiel géocentrique

Le référentiel géocentrique est construit avec son origine placée au centre de masse de la Terre et ses axes orientés sur la sphère des fixes, parallèlement aux axes du

référentiel de Copernic. Ce référentiel est quasi-inertiel pour de courtes périodes de temps comme nous le montrerons ci-après ; il est dénommé *i-frame* en anglais et les vecteurs ou matrices exprimés dans ce référentiel seront dotés de l'exposant i .

Le mouvement de la Terre dans le référentiel de Copernic est influencé par l'attraction des astres qui l'entourent tels que le Soleil. La Terre n'a donc pas un mouvement à vitesse uniforme dans ce référentiel, et donc un référentiel dont l'origine est liée à la Terre ne peut pas être inertiel en théorie. Cependant, les variations de vitesse dues à l'attraction du Soleil peuvent être négligées sur de courtes périodes de temps. Ainsi, sur de courtes durées, le mouvement de la Terre sur son orbite est-il quasiment rectiligne uniforme. Le référentiel géocentrique peut alors être considéré comme en translation rectiligne, uniforme par rapport au référentiel galiléen de Copernic ; il peut donc lui-même être considéré comme inertiel (GOLDSTEIN 1964) pour les mouvements de courte durée.

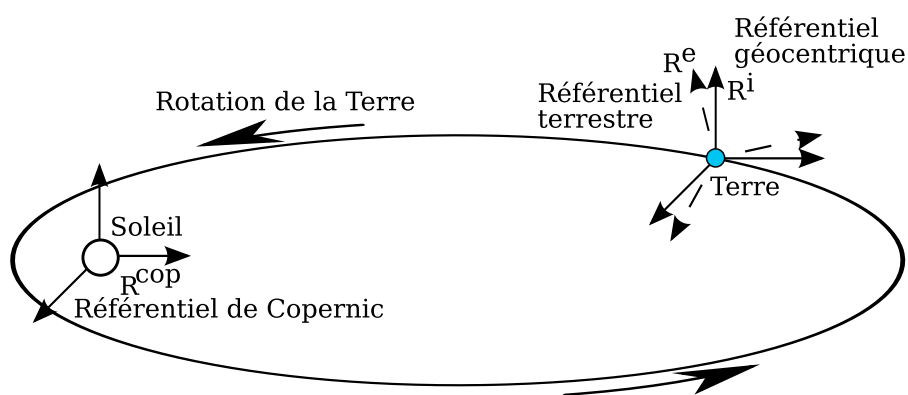


FIG. 2.2 – Représentation du référentiel inertiel de Copernic R^{cop} , du référentiel quasi-inertiel géocentrique R^i et du référentiel terrestre R^e . Le référentiel terrestre est en rotation par rapport au référentiel géocentrique suivant le troisième axe commun coïncidant avec l'axe des pôles moyen.

Dans le référentiel géocentrique, la seconde loi de Newton peut être appliquée : « l'accélération subie par un corps dans un référentiel galiléen est proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse m », ce qui se traduit mathématiquement par

$$m_{inertiel} \ddot{X}^i = F^i \quad (2.6)$$

où \ddot{X}^i est l'accélération cinématique (dérivée seconde de la position X^i) exprimée dans le référentiel quasi-inertiel géocentrique d'un point de masse inertielle $m_{inertiel}$ et F^i la résultante des forces appliquées à ce point.

La résultante F^i comprend en particulier la force gravitationnelle F_g définie par la troisième loi de Newton :

$$F_g = k \frac{m_{grave} M}{l^2} e_l$$

où M est la masse d'une particule source située à une distance l du point étudié, e_l le vecteur unitaire liant la particule source à la masse m_{grave} et k la constante de gravitation universelle. Le champ de gravitation G , correspondant à une accélération gravitationnelle par unité de masse, est alors défini par

$$G = \frac{F_g}{m_{grave}}.$$

L'équation de la dynamique (2.6) peut alors s'exprimer sous la forme

$$m_{\text{inertielle}}\ddot{X}_{/i} = m_{\text{grave}}G + F_{\text{autres}}$$

En accord avec le postulat d'équivalence formulé par Albert Einstein (1879-1955) stipulant l'égalité des masses inertielle $m_{\text{inertielle}}$ et grave m_{grave} , l'équation (2.6) peut s'exprimer simplement dans i par :

$$\ddot{X}^i = G^i + \frac{F_{\text{autres}}^i}{m}. \quad (2.7)$$

Le rapport F_{autres}^i/m est l'accélération a^i engendrée par les forces appliquées par unité de masse m autres que l'attraction gravitationnelle. Ces forces, appelées « specific forces », peuvent être de natures variées : des forces de frottements, la réaction du sol ou forces de rappel. Nous verrons que dans un accéléromètre, un corps d'épreuve subit une force de rappel qui s'oppose à la force gravitationnelle. Cette force de rappel ramenée à l'unité de masse sera dorénavant appelée accélération de rappel. Elle correspond directement au terme anglais « specific force ».

Le référentiel géocentrique n'est pas encore le plus adapté pour un corps se déplaçant à proximité de la surface de la Terre pour lequel d'autres référentiels sont nécessaires.

2.2.3 Le référentiel terrestre

Le référentiel terrestre appelé aussi *e-frame* (earth-frame en anglais), symbolisé par l'exposant e , est un référentiel lié à la Terre. De par sa rotation par rapport au référentiel géocentrique, le référentiel terrestre n'est pas inertielle.

Du point de vue pratique, tout référentiel terrestre (TRF, Terrestrial Reference Frame) correspond à une réalisation du système de référence terrestre (TRS, Terrestrial Reference System) dont

- l'origine C coïncide avec le centre de la Terre ;
- l'axe Z passe par le pôle international conventionnel (CIO, Conventional International Origin) ;
- l'axe X se situe à l'intersection du plan de l'équateur et du plan méridien de Greenwich et
- l'axe Y complète le trièdre de sorte à former un trièdre orthogonal direct.

Ces conventions ont été fixées par MORITZ et MUELLER (1987) et MCCARTHY et PETIT (2004).

Il existe différents TRF, réalisations de TRS, suivant les sources de données choisies. L'ITRF2005 est une réalisation issue de mesures effectuées sur un ensemble de 338 sites (ALTAMIMI et al. 2007). Ces mesures sont effectuées à l'aide de techniques de géodésie spatiale variées telles que

- le radio-positionnement par satellite : système de positionnement mondial (GPS, Global Positioning System), détermination d'orbite et radio-positionnement intégré par satellite (DORIS, Doppler Orbitography Radiopositioning Integrated by Satellite) ;
- la radio-interférométrie à très longue base (VLBI) et

- la télémétrie laser : tir laser sur satellites artificiels (SLR, Satellite Laser Ranging).

Le TRF employé dans le système GPS est le WGS84 (World Geodetic System). Ce dernier a été créé uniquement à partir des mesures GPS de 18 stations et exploité par l'agence nationale américaine de cartographie et d'imagerie (NIMA, National Imagery and Mapping Agency, 2000 ; 2002).

L'orientation de ces référentiels par rapport à un référentiel céleste tient compte de la précession et de la nutation de la Terre, ainsi que des mouvements du pôle. De plus, la vitesse de rotation de la Terre n'est pas constante. Dans le cadre de cette étude, les perturbations des mesures engendrées par ces phénomènes sont d'amplitude inférieure à la précision des accéléromètres du système gravimétrique. Ils seront donc négligés dans la suite.

Nous avons choisi d'exprimer les coordonnées des points dans le système géodésique RGF93 (Réseau Géodésique Français 1993). Ce dernier est associé à l'ellipsoïde du système géodésique de référence 1980 (GRS80, Geodetic Reference System 1980, MORITZ 1984). Cet ellipsoïde est une surface de révolution dont l'axe coïncide avec l'axe moyen des pôles et dont la vitesse angulaire de rotation ω_e autour de l'axe des pôles est fixée à une valeur conventionnelle constante. L'ellipsoïde correspond à une surface équipotentielle du champ de pesanteur normal (HOFMANN-WELLENHOF et MORITZ 2005) et ainsi constitue-t-il une représentation mathématique simple de la figure de la Terre. La forme de l'ellipsoïde est caractérisée par son aplatissement f donné par :

$$f = \frac{a - b}{a}$$

où a et b représentent respectivement le demi-grand axe et le demi-petit axe de l'ellipse méridienne.

Les caractéristiques de l'ellipse associée à GRS80 sont complètement déterminées par la donnée du demi-grand axe a et de trois paramètres physiques de la Terre (tab. 2.1) :

- sa constante gravitationnelle kM ,
- son facteur de forme dynamique J_2 et
- sa vitesse angulaire de rotation ω_e .

Il est ainsi possible de calculer la matrice de passage C_i^e du référentiel géocentrique au référentiel terrestre, le vecteur rotation instantanée correspondant ω_{ie}^e et la matrice de rotation antisymétrique associée (cf. §2.1.4) :

$$C_i^e = R_{3,\omega_e t} = \begin{bmatrix} \cos \omega_e t & \sin \omega_e t & 0 \\ -\sin \omega_e t & \cos \omega_e t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ matrice de passage,}$$

$$\omega_{ie}^e = \omega_{ie}^i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_e \end{bmatrix} \text{ vecteur rotation,}$$

$$\Omega_{ie}^e = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_e & 0 \\ \omega_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ matrice antisymétrique associée.}$$

Le référentiel terrestre est particulièrement adapté au positionnement d'objets à la surface de la Terre. Soit P un tel point, ses coordonnées dites cartésiennes peuvent être exprimées dans le trièdre orthonormé associé au référentiel terrestre $(CX^eY^eZ^e)$ par $[x^e, y^e, z^e]^T$. De plus, l'utilisation de l'ellipsoïde GRS80 permet de s'appuyer sur un ellipsoïde de référence pour déterminer des coordonnées géographiques.

Les coordonnées géographiques du point P^e sont la longitude λ et la latitude géographique φ accompagnées d'une hauteur h le long de la normale à l'ellipsoïde. La longitude λ est l'angle équatorial entre le plan du méridien de Greenwich et le plan méridien passant par P ; la latitude φ est l'angle entre la normale à l'ellipsoïde de référence passant par P et le plan de l'équateur (l'angle est défini comme positif pour l'hémisphère nord et négatif pour l'hémisphère sud (fig. 2.3)).

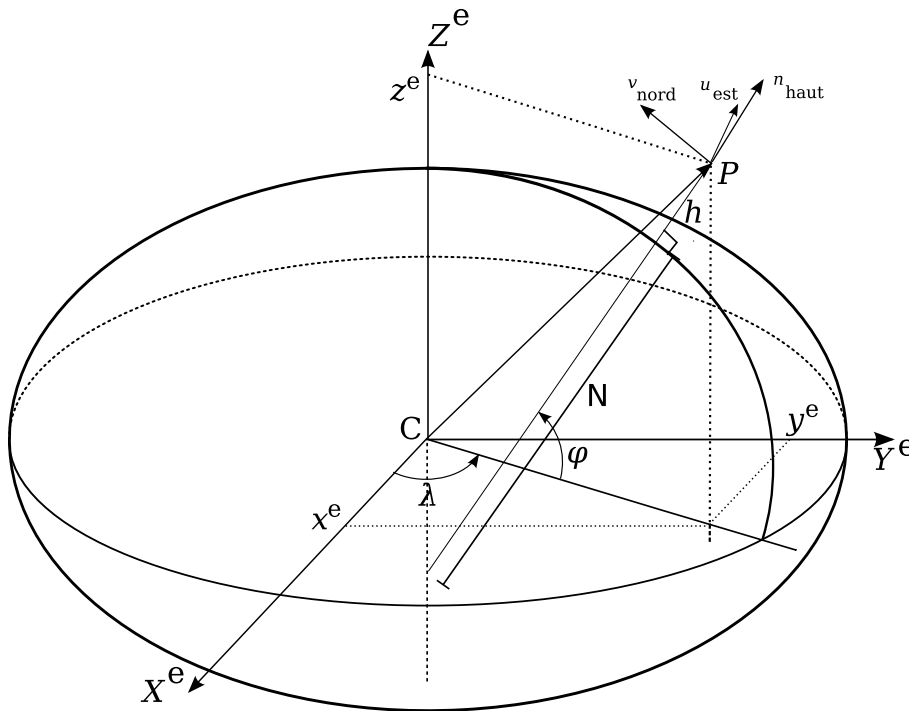


FIG. 2.3 – Définition du référentiel terrestre $(CX^eY^eZ^e)$ et du référentiel géodésique local dit aussi référentiel de navigation $(Pu^estv^nordn^haut)$ et représentation des coordonnées géographiques $[\lambda, \varphi, h]^T$ et cartésiennes $[x^e, y^e, z^e]^T$ du point P dans le référentiel terrestre.

Pour un même point P , il est donc possible d'exprimer ses coordonnées sous la forme cartésienne $[x^e, y^e, z^e]^T$ ou sous la forme géographique $[\lambda, \varphi, h]^T$. La connaissance de ces dernières permet de calculer directement les coordonnées cartésiennes (TORGE 1980) par :

$$\begin{cases} x^e &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ y^e &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ z^e &= (N(1 - e^2) + h) \sin \varphi \end{cases} \quad (2.8)$$

où N , appelée « grande normale », est le rayon de courbure de la section normale de l'ellipsoïde orthogonale au méridien (fig. 2.3). Ce rayon de courbure est donné

par

$$N = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}, \quad (2.9)$$

où a représente le demi-grand axe de l'ellipsoïde de référence, e la première excentricité qui s'exprime en fonction de l'aplatissement f de l'ellipsoïde par :

$$e^2 = 2f - f^2$$

et f l'aplatissement de l'ellipsoïde.

Paramètres de définition	Valeur
Rayon équatorial (a)	6378137 m
Constante Gravitationnelle (kM)	$3986008 \times 10^{-8} \text{ m}^3/\text{s}^2$
Facteur de forme dynamique (J_2)	108263×10^{-8}
Vitesse angulaire (ω_e)	$7292115 \times 10^{-11} \text{ rad/s}$
Paramètres dérivés	Valeur
Demi petit axe (b)	6356752.3141 m
Aplatissement (f)	0.00335281068118
1 ^{re} excentricité au carré (e^2)	0.00669438002290
Pesanteur normale équatoriale (γ_a)	9.7803267715 m/s^2
Pesanteur normale au pôle (γ_b)	9.8321863685 m/s^2

TAB. 2.1 – Valeurs des paramètres de définition et des paramètres dérivés de l'ellipsoïde de référence GRS 80 (MORITZ 1984).

La transformation des coordonnées géographiques en coordonnées cartésiennes est réalisée directement grâce aux relations (2.8). En revanche, la transformation inverse rigoureuse nécessite un calcul itératif (VANÍČEK 1986). Ce calcul utilise la distance r entre le demi-petit axe et le point P . Cette distance peut être calculée grâce aux coordonnées cartésiennes par

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (2.10)$$

ou grâce aux coordonnées géographiques par

$$r = (N + h) \cos \varphi. \quad (2.11)$$

Or, le rapport de (2.8) et (2.11) permet de calculer la latitude φ , avec la distance r déterminée au moyen de (2.10) par :

$$\varphi = \arctan \left(\frac{z^e}{r} \left(1 - \frac{e^2 N}{N + h} \right)^{-1} \right). \quad (2.12)$$

L'initialisation du calcul itératif se fait en choisissant une hauteur au-dessus de l'ellipsoïde h nulle et par (2.12), il est possible de calculer φ^0 . Ensuite, pour la $k^{\text{ième}}$ itération, sont évalués successivement le rayon de courbure $N^{(k)} = N(\varphi^{(k-1)})$ par (2.9) puis $h^{(k)} = h(\varphi^{(k-1)}, N^{(k)})$ par (2.11) et enfin $\varphi^{(k-1)} = \varphi(N^{(k)}, h^{(k)})$ par

(2.12). Les itérations sont effectuées tant que les précisions ϵ_φ et ϵ_h respectivement souhaitées sur la latitude et la hauteur ne sont pas atteintes :

$$|\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)}| < \epsilon_\varphi \text{ et } |h^{(k)} - h^{(k-1)}| < \epsilon_h.$$

Une fois φ et h déterminés, la longitude λ peut être calculée à l'aide de (2.8) par :

$$\lambda = 2 \arctan \left(\frac{y^e}{x^e + \sqrt{x^{e2} + y^{e2}}} \right).$$

Le point P est donc complètement déterminé dans le référentiel terrestre, soit par ses coordonnées cartésiennes, soit par ses coordonnées géographiques.

2.2.4 Le référentiel de navigation ou référentiel local géodésique

Comme son nom l'indique, le référentiel de navigation ou *n-frame* en anglais symbolisé par l'exposant n , est lié à la position du véhicule. Son origine est un point P du véhicule. Le second axe v_{nord} est orienté vers l'axe de rotation de la Terre, le troisième axe n_{haut} est normal à l'ellipsoïde orienté vers l'extérieur et le premier axe complète le trièdre direct avec l'axe u_{est} (fig. 2.3).

La différence entre la direction de la normale à l'ellipsoïde passant par P et la direction verticale en P (direction du fil à plomb) correspond à la déviation de la verticale. La déviation de la verticale est caractérisée par deux petits angles ζ et η (fig. 2.4) tels que le vecteur pesanteur g_P en P s'exprime par :

$$g_P^n = \begin{bmatrix} g_P \zeta \\ g_P \eta \\ g_P \sqrt{1 - \zeta^2 - \eta^2} \end{bmatrix}$$

où g_P est l'intensité de l'accélération de la pesanteur.

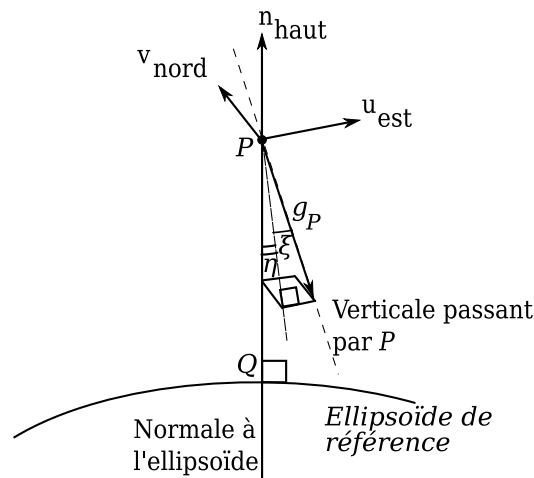


FIG. 2.4 – Représentation de la déviation de la verticale d'un angle η suivant l'axe nord-nud et ζ suivant un axe ouest-est (MORITZ et MUELLER 1987).

Le passage du référentiel terrestre au référentiel de navigation est une translation du vecteur joignant l'origine du référentiel terrestre C au point P, suivie d'une composée de rotations. L'orientation relative du référentiel de navigation peut être définie par rapport au référentiel terrestre par une première rotation autour de l'axe Z^e (fig. 2.3) d'un angle $\lambda + \pi/2$, puis d'une seconde rotation autour du nouvel axe $X^{e'}$ déduit de la première rotation soit u_{est} , d'un angle de $-\varphi + \pi/2$. Ainsi, la matrice de passage C_e^n est-elle donnée par :

$$C_e^n = R_1(-\varphi + \pi/2) R_3(\lambda + \pi/2) = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix}. \quad (2.13)$$

La rotation instantanée du référentiel de navigation par rapport au référentiel terrestre est donnée par la dérivée de la matrice de passage C_e^n qui permet de calculer la matrice antisymétrique Ω_{en}^n associée au vecteur rotation instantanée w_{en}^n grâce à l'équation (2.4). On peut définir également ce vecteur mécaniquement, en considérant une variation de latitude $\dot{\varphi}$ autour de l'axe u_{est} et une variation de longitude $\dot{\lambda}$ autour de l'axe Z^e , projetée dans le référentiel de navigation. Ainsi, il vient :

$$\omega_{en}^n = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\lambda} \cos \varphi \\ \dot{\lambda} \sin \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\varphi} \\ \dot{\lambda} \cos \varphi \\ \dot{\lambda} \sin \varphi \end{bmatrix},$$

et d'après le §2.1.4

$$\Omega_{en}^n = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\lambda} \sin \varphi & \dot{\lambda} \cos \varphi \\ \dot{\lambda} \sin \varphi & 0 & \dot{\varphi} \\ -\dot{\lambda} \cos \varphi & -\dot{\varphi} & 0 \end{bmatrix}.$$

2.2.5 Le référentiel du véhicule.

L'origine de ce référentiel (*b-frame* en anglais, symbolisé par l'exposant b) est la position P du véhicule comme pour le référentiel de navigation, mais son orientation dépend de l'attitude du véhicule. Ce référentiel permet de définir la position et l'orientation de l'instrumentation en particulier des accéléromètres et gyromètres supposés fixes dans le véhicule.

La matrice de passage permettant de passer du référentiel de navigation au référentiel du véhicule est déterminée par les différentes rotations qui définissent l'attitude du véhicule donnée par les angles de roulis, de tangage et de lacet. Pour passer du référentiel du véhicule au référentiel de navigation, il faut retirer le roulis $-\eta$ autour de l'axe 2 puis le tangage $-\chi$ autour de l'axe 1 et enfin le lacet $-\alpha$ autour du dernier axe, ce qui donne

$$C_b^n = R_3(-\alpha)R_1(-\chi)R_2(-\eta) \\ = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \eta - \sin \alpha \sin \chi \sin \eta & -\sin \alpha \cos \chi & \cos \alpha \sin \eta + \sin \alpha \sin \chi \cos \eta \\ \cos \alpha \sin \chi \sin \eta + \sin \alpha \cos \eta & \cos \alpha \cos \chi & \sin \alpha \sin \eta - \cos \alpha \sin \chi \cos \eta \\ -\cos \chi \sin \eta & \sin \chi & \cos \alpha \cos \eta \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

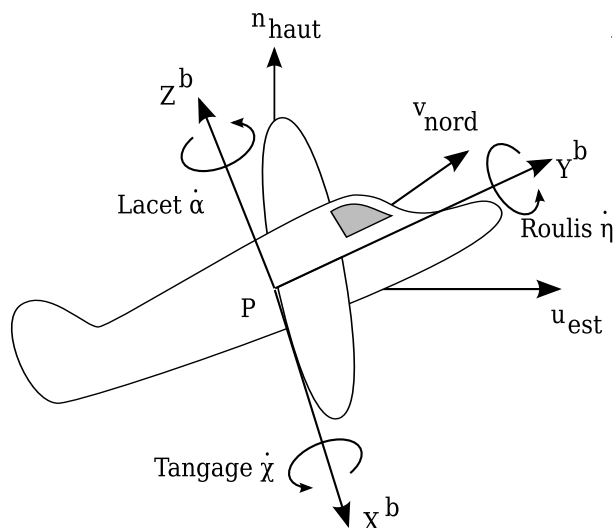


FIG. 2.5 – Représentation du référentiel lié au véhicule, ainsi que des rotations caractérisant l'attitude du véhicule.

Le vecteur rotation instantanée associé à cette rotation est donné par

$$\omega_{nb}^b = \begin{bmatrix} \dot{\chi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \text{ et } \Omega_{nb}^b = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\alpha} & \dot{\eta} \\ \dot{\alpha} & 0 & -\dot{\chi} \\ -\dot{\eta} & \dot{\chi} & 0 \end{bmatrix},$$

et la matrice antisymétrique s'en déduit d'après le §2.1.4.

2.2.6 Les référentiels de mesure

Enfin, chaque instrument peut être associé à un référentiel matérialisé par les axes sensibles des capteurs de même nature constituant l'instrument (*s-frame* en anglais, symbolisé par l'exposant *s*). Il existe ainsi deux référentiels dont les trièdres sont constitués par les axes sensibles respectivement des accéléromètres et des gyromètres. Ces référentiels ne sont plus forcément orthogonaux et les matrices de passage C_b^s doivent être déterminées au préalable par un protocole d'étalonnage adapté qui fait l'objet du chapitre 3, §3.3.

Les définitions des référentiels étant posées, il est à présent possible d'aborder l'étude des équations dynamiques qui lient les mesures de l'instrument à l'accélération de la pesanteur.

2.3 EQUATION DE NAVIGATION DANS LE RÉFÉRENTIEL TERRESTRE

Cette partie étudie l'équation de navigation issue de la seconde loi de Newton, adaptée au cas de la gravimétrie mobile. La seconde loi de Newton, équation (2.7), est vraie dans un référentiel inertiel et considérée vraie dans un référentiel quasi-inertiel. Un système de gravimétrie mobile acquiert les quantités suivantes :

- l'accélération cinématique d'un point fixe du véhicule porteur projetée dans le référentiel terrestre,
- l'accélération de rappel appliquée en un autre point fixe du mobile dans un référentiel de mesure grâce aux accéléromètres et
- les variations d'attitude dans le référentiel de navigation grâce à des gyromètres ou autres capteurs d'attitude tel le récepteur GPS multi-antennes.

Ces mesures sont donc effectuées dans différents référentiels et il est donc nécessaire de trouver la relation qui lie les différentes quantités mesurées au vecteur accélération de la pesanteur projeté dans le référentiel de navigation.

2.3.1 Accélération cinématique

Dans un premier temps, il est nécessaire de connaître l'accélération cinématique \ddot{X}^i d'un point de l'instrument dans le référentiel inertiel. Nous choisissons d'étudier le mouvement du point M , point de concours des trois axes sensibles des accéléromètres où est mesurée l'accélération de rappel. La position de ce point peut être définie par rapport à l'origine O du référentiel inertiel, par la relation

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PM},$$

où \overrightarrow{OC} est la position de l'origine du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique, distance considérée nulle par le choix du TRF fait au §2.2.3, \overrightarrow{CP} représente la position d'un point fixe du véhicule par rapport à la Terre, déterminée à l'aide d'un récepteur GPS ou de tout autre système de positionnement et \overrightarrow{PM} représente le vecteur qui sépare le point du véhicule dont la position est mesurée du point où l'accélération de rappel est mesurée. Ce vecteur est communément appelé le *bras de levier* et sera noté B , afin d'alléger les notations et le vecteur \overrightarrow{CP} sera noté P .

On peut alors exprimer le vecteur position $X = \overrightarrow{OM}$ du point M par

$$X = P + B.$$

Nous cherchons alors à déterminer l'accélération cinématique dans le référentiel géocentrique afin de pouvoir appliquer la seconde loi de Newton. Il faut donc dériver deux fois X^i par rapport au temps, c'est-à-dire ajouter les dérivées secondes \ddot{P}^i et \ddot{B}^i . Or ces vecteurs ne sont pas définis initialement dans le référentiel géocentrique, mais dans des référentiels plus adaptés. Le vecteur P est exprimé dans le référentiel terrestre par P^e et le bras de levier B est mesuré dans le référentiel du véhicule par B^b .

Le vecteur position X^i , exprimé dans le référentiel géocentrique, peut alors être décomposé de la façon suivante

$$X^i = C_e^i P^e + C_e^i C_n^e C_b^n B^b.$$

Afin d'obtenir l'accélération cinématique \ddot{X}^i , il est donc nécessaire de dériver cette position, en tenant compte des mouvements des différents référentiels les uns

par rapport aux autres (2.5). Ainsi, il vient :

$$\begin{aligned}\dot{X}^i &= \dot{C}_e^i P^e + C_e^i \dot{P}^e + \dot{C}_e^i C_b^e B^b + C_e^i \dot{C}_b^e B^b + C_e^i C_b^e \dot{B}^b \\ &= C_e^i \left(\Omega_{ie}^e P^e + \dot{P}^e + (\Omega_{ie}^e C_b^e + C_b^e \Omega_{eb}^b) B^b + C_b^e \dot{B}^b \right).\end{aligned}\quad (2.15)$$

Le bras de levier est par définition fixe dans le référentiel du véhicule considéré comme indéformable, sa dérivée \dot{B}^b est donc nulle. La dérivée seconde de la position nous permet d'obtenir l'accélération cinématique du véhicule. Cette dérivation est réalisée avec l'hypothèse que la Terre a une vitesse de rotation uniforme, le vecteur rotation instantanée est alors constant et sa dérivée nulle d'où une dérivée de la matrice antisymétrique $\dot{\Omega}_{ie}$ également nulle. Ainsi, il vient

$$\begin{aligned}\ddot{X}^i &= C_e^i (\ddot{P}^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{P}^e + \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e P^e) + C_e^i \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e C_n^e C_b^n B^b \\ &\quad + C_e^i C_n^e \Omega_{en}^n \Omega_{en}^n C_b^n B^b + C_e^i C_n^e C_b^n \Omega_{nb}^b \Omega_{nb}^b B^b \\ &\quad + C_e^i C_n^e \dot{\Omega}_{en}^n C_b^n B^b + C_e^i C_n^e C_b^n \dot{\Omega}_{nb}^b B^b + 2C_e^i \Omega_{ie}^e C_n^e \Omega_{en}^n C_b^n B^b \\ &\quad + 2C_e^i \Omega_{ie}^e C_n^e C_b^n \Omega_{nb}^b B^b + 2C_e^i C_n^e \Omega_{en}^n C_b^n \Omega_{nb}^b B^b \\ &= C_e^i (\ddot{P}^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{P}^e + \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e P^e + M_B B^b)\end{aligned}\quad (2.16)$$

où

$$\begin{aligned}M_B &= \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e C_n^e C_b^n + C_n^e \Omega_{en}^n \Omega_{en}^n C_b^n + C_n^e C_b^n \Omega_{nb}^b \Omega_{nb}^b \\ &\quad + C_n^e \dot{\Omega}_{en}^n C_b^n + C_n^e C_b^n \dot{\Omega}_{nb}^b \\ &\quad + 2\Omega_{ie}^e C_n^e \Omega_{en}^n C_b^n + 2\Omega_{ie}^e C_n^e C_b^n \Omega_{nb}^b + 2C_n^e \Omega_{en}^n C_b^n \Omega_{nb}^b\end{aligned}$$

est une matrice qui dépend de la position du véhicule ainsi que de ses mouvements. Le détail des calculs conduisant à cette relation est donné dans l'annexe A.

2.3.2 Accélération de rappel et accélération gravitationnelle

Conformément à la seconde loi de Newton, l'accélération cinématique \ddot{X}^i est décomposée en une accélération gravitationnelle G^i et une accélération de rappel a^i (2.7). Cette relation va nous permettre de relier les composantes de l'accélération de rappel mesurables par les accéléromètres à celles de l'accélération de la pesanteur dans le référentiel de navigation. Le passage du référentiel de mesure des accéléromètres au référentiel du véhicule s'effectue à l'aide de la matrice de passage à termes constants C_s^b du référentiel s constitué par les trois axes sensibles des accéléromètres au référentiel du véhicule b .

D'autre part, l'accélération gravitationnelle G est plus communément exprimée dans le référentiel de navigation par G^n .

L'équation de la dynamique $\ddot{X}^i = G^i + a^i$ peut donc être écrite sous la forme

$$\ddot{X}^i = C_e^i C_n^e G^n + C_e^i C_n^e C_b^n C_s^b a^s.\quad (2.17)$$

Or, le champ de pesanteur g^n est, par définition, l'attraction gravitationnelle G^n diminuée de l'accélération centrifuge due à la rotation terrestre, soit

$$g^n = G^n - C_n^e \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e P^e.\quad (2.18)$$

Avec les relations (2.16), (2.17) et (2.18), il vient

$$C_e^i C_n^e (g^n + C_e^n \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e P^e) + C_e^i C_n^e C_b^n C_s^b a^s = C_e^i (\ddot{P}^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{P}^e + \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e P^e + M_B B^b)$$

d'où l'expression de l'accélération de rappel

$$a^s = C_b^s C_n^b C_e^n (\ddot{P}^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{P}^e + M_B B^b - C_n^e g^n), \quad (2.19)$$

où

- C_b^s est la matrice à termes constants dans le temps déterminée par un étalonnage préalable (cf. chapitre 3)
- C_n^b est une matrice liée à l'attitude du véhicule
- C_e^n est une matrice liée à la position du véhicule dans le référentiel terrestre
- M_B est une matrice liée à :
 - l'attitude et ses variations dans le temps
 - la position et ses variations dans le temps.

L'équation (2.19) constitue donc l'équation d'observation du système gravimétrique valable à chaque instant d'acquisition des mesures accélérométriques et de position.

La détermination de la pesanteur g^n à partir de la mesure des composantes de l'accélération de rappel a^s et des mesures de positions et d'attitude apparaît donc comme un problème d'estimation non linéaire sur la base de l'équation d'observation (2.19).

Il est possible de résoudre ce problème d'estimation pour un nombre d'acquisitions arbitraire en utilisant une méthode récursive basée sur un filtre de Kalman. C'est donc à la description du principe général du filtrage de Kalman et son application à l'estimation de la pesanteur par l'équation (2.19) qu'est consacrée la section suivante.

2.4 FILTRE DE KALMAN

2.4.1 Introduction

Le filtre de Kalman est un estimateur permettant de calculer l'état instantané d'un système dynamique linéaire perturbé par un bruit blanc, à partir d'un état initial et de mesures également bruitées. Il permet trois types d'opérations :

- la prédiction lorsque l'état estimé est postérieur aux mesures ;
- le filtrage lorsque l'état est estimé à l'instant des mesures ;
- le lissage lorsque les mesures sont disponibles avant et après le temps correspondant à l'état estimé.

À la base, le filtre de Kalman est construit pour résoudre le problème du filtrage linéaire discret par une méthode récursive (ALAZARD 2005 ; GREWAL et ANDREWS 2001 ; WELCH et BISHOP 2006). Le caractère discret du filtre de Kalman facilite son implémentation sur un ordinateur. En outre, les mesures sont dans la plupart des cas échantillonnées à cadence régulière dans le temps ; le signal de mesure est donc

constitué d'échantillons discrets qui s'insèrent tout naturellement dans un filtrage à temps discret.

Le filtre de Kalman est *récuratif* : l'estimation des paramètres de l'état à un instant donné ne nécessite que des mesures à cet instant et les valeurs des paramètres de l'état à l'instant précédent. Ainsi, le filtre de Kalman peut-il être utilisé pour des applications « temps réel » telle la navigation.

Le filtre de Kalman est *optimal* : il permet de tirer parti de toutes les mesures disponibles à un instant donné en tenant compte de leur précision pour l'estimation des paramètres de l'état au même instant (MAYBECK 1979).

Dans une première partie, nous verrons les équations définissant la structure classique du filtre de Kalman, sa construction et son application dans un cadre linéaire. Ensuite, nous étendrons son étude aux systèmes non linéaires et, enfin, nous détaillerons l'application du filtre de Kalman à notre système de gravimétrie mobile.

2.4.2 Un filtre linéaire par nature

Objectifs d'un filtre de Kalman

Le filtre de Kalman permet d'étudier un système dynamique par l'intermédiaire des paramètres qui caractérisent son état.

Le système dynamique est d'abord caractérisé par une équation d'évolution temporelle de ses paramètres d'état ou modèle dynamique, qui s'écrit, sous forme discrète,

$$x_k = \Phi_{k-1:k}x_{k-1} + G_{k-1:k}u_{k-1} + w_{k-1:k}, \quad (2.20)$$

où,

- $x_{k-1}, x_k \in \mathbb{R}^n$ sont les vecteurs des n paramètres de l'état du système ou vecteurs d'état aux instants $k-1$ et k respectivement ;
- $\Phi_{k-1:k} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est la matrice de transition qui lie l'état à l'instant présent k à l'état à l'instant précédent $k-1$, en l'absence d'une fonction de commande et de bruits ;
- $u_{k-1} \in \mathbb{R}^l$ est le vecteur des l commandes (*optionnel*) ;
- $G_{k-1:k} \in M_{n,l}(\mathbb{R})$ est une matrice de commande liant la commande optionnelle u_{k-1} à l'état x_k ;
- $w_{k-1:k} \in \mathbb{R}^n$ est le bruit de la transition de l'état $k-1$ à l'état k .

Les commandes sont des entrées déterministes connues à l'avance. Le bruit de transition $w_{k-1:k}$ est un bruit supposé blanc, à distribution gaussienne et de matrice de variances-covariances $Q_{k-1:k}$:

$$p(w_{k-1:k}) \sim N(0, Q_{k-1:k}) \text{ et } E[w_{k-1:k}w_{k'-1:k'}^T] = Q_{k-1:k}\delta_{kk'}.$$

où $\delta_{kk'}$ est le symbole de Kronecker.

En plus du modèle dynamique (2.20), on dispose à chaque instant de mesures qui sont des fonctions des paramètres d'état du système dynamique, ce qui s'exprime par l'équation de mesure

$$z_k = H_k x_k + v_k, \quad (2.21)$$

avec,

- $z_k \in \mathbb{R}^p$ est le vecteur des p mesures à l'instant k ou vecteur de mesures ;
- $H_k \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ est la matrice de mesure à l'instant k qui permet de lier les mesures z_k aux paramètres de l'état x_k au même instant k et
- $v_k \in \mathbb{R}^p$ le bruit de mesure.

Le bruit de mesure v_k est un bruit blanc, à distribution gaussienne, de matrice de variances-covariances associée R_k , il est considéré indépendant du bruit de transition $w_{k-1:k}$:

$$p(v_k) \sim N(0, R_k), E[v_k v_k^T] = R_k \delta_{kk'}$$

$$\forall i, j, E(w_i v_j^T) = 0.$$

Enfin, le filtre de Kalman nécessite une estimation \hat{x}_1 du vecteur d'état initial x_1 , dont l'erreur est supposée à distribution gaussienne de matrice de variances-covariances P_1 également connue

$$p(x_1) \sim N(\hat{x}_1, P_1).$$

En outre, cette erreur est supposée indépendante du bruit de transition et du bruit de mesure.

Le filtre de Kalman suppose donc la connaissance du modèle dynamique (2.20) et de l'équation de mesure (2.21) qui forment le *modèle de Kalman* :

$$\begin{cases} x_k = \Phi_{k-1:k} x_{k-1} + G_{k-1:k} u_{k-1} + w_{k-1:k} \\ z_k = H_k x_k + v_k \end{cases} \quad (2.22)$$

Ce modèle permet d'estimer l'état $\hat{x}_k \in \mathbb{R}^n$ du système à l'instant k , dit état estimé. Cet état estimé résulte d'un filtrage si les mesures sont connues sur l'intervalle $\llbracket 1, k \rrbracket$ ou d'un lissage si les mesures sont connues à tout instant. Le lissage ne peut être réalisé qu'en traitement différé (post-traitement) pour lequel toutes les mesures sont connues, avant et après l'instant k d'estimation. L'état estimé \hat{x}_k , filtré ou lissé, est entaché d'une erreur e_k de matrice de variances-covariances P_k , par rapport à l'état *vrai* x_k

$$e_k = x_k - \hat{x}_k,$$

$$P_k = E[e_k e_k^T].$$

Éléments sur la théorie du filtrage de Kalman

Le filtre de Kalman est apparu en 1960 (KALMAN 1960 ; KALMAN et BUCY 1961) suite aux travaux précurseurs initiés par Kolmogorov en 1941 (KOLMOGOROV 1962) et Wiener en 1942 (WIENER 1949) sur l'estimation linéaire par minimisation de l'écart quadratique moyen.

En 1955, Follin (FOLLIN et CARLTON 1956) proposa une approche récursive du problème de l'estimation linéaire qui inspire très fortement les travaux de Bucy (BUCY et JOSEPH 1968) alors proche collaborateur de Kalman.

L'idée fondamentale du filtre de Kalman discret est de construire une estimation optimale \hat{x}_k du vecteur x_k à l'instant k à partir d'une combinaison linéaire qui lie

- l'estimation $\hat{x}_{k/k-1}$ du vecteur x_k à l'instant k connaissant toutes les mesures dans l'intervalle $\llbracket 1, k-1 \rrbracket$ soit z_1, \dots, z_{k-1} ;
- les résidus sur les observations à l'instant k soit

$$r_k = z_k - H_k \hat{x}_{k/k-1}.$$

Cette combinaison linéaire s'écrit

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k/k-1} + K_k(z_k - H_k \hat{x}_{k/k-1}) \quad (2.23)$$

où K_k est une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{R})$ correspondant au gain de Kalman.

La détermination du gain de Kalman est réalisée par minimisation de l'écart quadratique moyen ϵ défini par

$$\epsilon = E[(x_k - \hat{x}_k)^T(x_k - \hat{x}_k)]$$

Kalman montra en 1960, à partir du principe d'orthogonalité (KALMAN 1960) que le gain satisfaisant cette condition s'exprime par

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1} \quad (2.24)$$

où $P_{k/k-1}$ est la matrice de variances-covariances de l'estimation $\hat{x}_{k/k-1}$ de l'état prédit à l'instant k donnée par

$$P_{k/k-1} = E[(x_k - \hat{x}_{k/k-1})(x_k - \hat{x}_{k/k-1})^T]$$

Il montra également que la matrice $P_{k/k-1}$ s'exprime en fonction de P_{k-1} par

$$P_{k/k-1} = \Phi_{k-1:k} P_{k-1} \Phi_{k-1:k}^T + Q_{k-1:k} \quad (2.25)$$

et que la matrice P_k se déduit de $P_{k/k-1}$ par

$$P_k = P_{k/k-1} - K_k H_k P_{k/k-1}. \quad (2.26)$$

Les équations (2.23), (2.24), (2.25) et (2.26) sont à la base de l'estimation récursive du vecteur d'état x_k par filtrage de Kalman.

Le problème de l'estimation de l'état x_k connaissant les mesures z_i , $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ peut être formulé dans le cadre plus classique de l'estimation linéaire par moindres carrés (SORENSEN 1970). Pour ce, il suffit de déterminer le vecteur d'état \hat{x}_k et le terme de transition $w_{k-1:k}$ qui minimisent la fonction coût quadratique définie par

$$\begin{aligned} L_k = & \frac{1}{2} (x_1 - \hat{x}_1)^T P_1^{-1} (x_1 - \hat{x}_1) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k (z_i - H_i x_i)^T R_i^{-1} (z_i - H_i x_i) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} w_{i:i+1}^T Q_{i:i+1} w_{i:i+1} \end{aligned}$$

avec la contrainte

$$x_k = Q_{k-1:k} x_{k-1} + w_{k-1:k}.$$

Le premier terme rend compte de l'incertitude sur l'état initial choisi *a priori*. Le deuxième terme est la forme quadratique classique des résidus pondérés. Enfin, le dernier terme rend compte directement du bruit de transition dans le modèle d'évolution du vecteur d'état et donc des paramètres.

Une solution récursive de ce problème d'optimisation peut être trouvée en remarquant que

$$L_k = L_{k-1} + \frac{1}{2}(z_k - H_k x_k)^T R_k^{-1} (z_k - H_k x_k) + \frac{1}{2} w_{k-1:k}^T Q_{k-1:k} w_{k-1:k}.$$

Ainsi, le filtrage de Kalman peut-il être considéré comme une méthode récursive pour la résolution d'un problème d'estimation linéaire à critère quadratique.

L'application du filtre de Kalman peut être divisée en deux phases. Une première dite de *prédiction* qui réalise une mise à jour de l'état par le modèle dynamique, puis une seconde dite de *correction* qui consiste en une nouvelle mise à jour de l'état prédit basée sur les mesures. Le filtre peut alors être considéré comme une suite de *prédictions/corrections* (figure 2.6). Nous allons développer à présent la mécanique du filtre, c'est-à-dire décrire les équations des phases de prédiction et de correction.

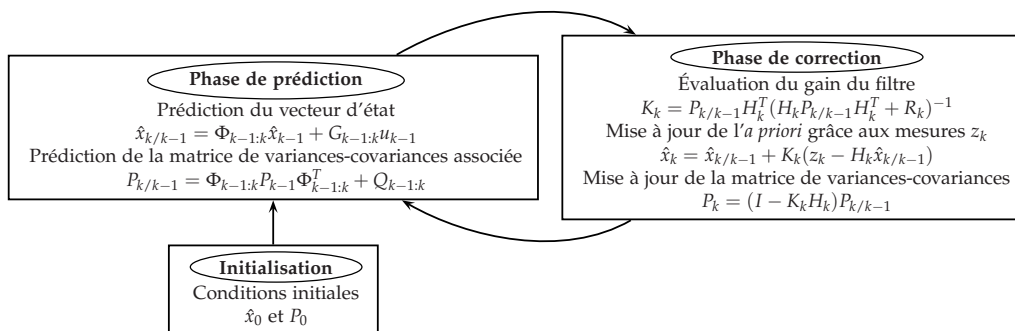


FIG. 2.6 – Schéma de fonctionnement du filtre de Kalman.

La mécanique du filtre

Prédiction L'étape de *prédiction* est régie par le modèle dynamique (2.20). Elle permet d'estimer l'état *a priori* $\hat{x}_{k/k-1}$ à l'instant k à partir de l'état à l'instant précédent $k-1$, c'est-à-dire une estimée à l'instant k , connaissant toutes les mesures dans l'intervalle $\{1, \dots, k-1\}$. De même, la matrice de variances-covariances P_{k-1} , associée à l'état $k-1$ est propagée à l'instant k pour obtenir la matrice de variances-covariances *a priori* associée à l'estimée $\hat{x}_{k/k-1}$:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k/k-1} &= \Phi_{k-1:k} \hat{x}_{k-1} + G_{k-1:k} u_{k-1} \\ P_{k/k-1} &= \Phi_{k-1:k} P_{k-1} \Phi_{k-1:k}^T + Q_{k-1:k}. \end{aligned}$$

L'état vrai est alors approché par cette prédiction à une erreur $e_{k/k-1}$ près dont la matrice de variances-covariances est $P_{k/k-1}$:

$$\begin{aligned} e_{k/k-1} &= x_k - \hat{x}_{k/k-1} \\ P_{k/k-1} &= E[e_{k/k-1} e_{k/k-1}^T]. \end{aligned}$$

Correction Une fois prédit grâce au modèle dynamique, cet état *a priori* peut être corrigé par les mesures du système à l'instant k , c'est la phase de *correction*. L'équation de mesure (2.21) permet de calculer les mesures *a priori* $H_k \hat{x}_{k/k-1}$ que l'on obtiendrait avec l'état *a priori* $\hat{x}_{k/k-1}$. La différence entre les mesures z_k et les mesures *a priori* $z_k - H_k \hat{x}_{k/k-1}$ est appelée *innovation* du filtre. Une fois pondérée par le gain du filtre K_k , elle permet de corriger la prédiction de l'état $\hat{x}_{k/k-1}$ avec l'équation

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k/k-1} + K_k(z_k - H_k \hat{x}_{k/k-1}).$$

La matrice K_k de taille (n, p) est le cœur du filtre de Kalman. Cette dernière est calculée en fonction de la matrice de variances-covariances des erreurs de l'état *a priori* $P_{k/k-1}$, de la matrice des mesures H_k , ainsi que de la matrice de variances-covariances du bruit de mesure R_k par

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1}.$$

Enfin, la matrice de variances-covariances *a priori* $P_{k/k-1}$ et le gain du filtre permettent d'obtenir la matrice de variances-covariances P_k de l'état estimé par

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k/k-1}.$$

Le filtre de Kalman ainsi développé suppose une dynamique du système linéaire : l'état à l'instant k est lié à l'état à l'instant $k - 1$ par une relation linéaire au bruit de transition et à la commande près et les mesures à l'instant k sont liées aux paramètres par une relation linéaire aux bruits de mesure près.

2.4.3 Application aux systèmes non linéaires

Les systèmes physiques sont en général non linéaires. Il est néanmoins possible de linéariser le modèle dynamique et l'équation de mesure afin de pouvoir appliquer le filtre de Kalman. L'idée est de déterminer les équations linéaires qui relient les petites perturbations des paramètres d'état par rapport à une trajectoire nominale dans l'espace des paramètres, supposée connue. Ces équations sont obtenues par linéarisation au premier ordre du modèle dynamique et de l'équation de mesure autour de la trajectoire nominale. Cette trajectoire nominale peut être connue à l'avance, tel le déplacement d'un navire qui suit un cap imposé ou calculée « à la volée » telle l'attitude du même navire. Les démonstrations complètes sont détaillées dans les ouvrages SORENSON (1970), GREWAL et ANDREWS (2001), JEKELI (2001), ALAZARD (2005), WELCH et BISHOP (2006) ou encore LE GLAND (2007).

Supposons que les paramètres d'état et les mesures soient échantillonnés à la période T . Le système physique non linéaire peut être décrit par un modèle dynamique et une équation de mesure qui s'expriment sous la forme

$$\begin{cases} x_k = f_{k-1:k}(x_{k-1}) + w_{k-1:k} \\ z_k = h_k(x_k) + v_k \end{cases}, \quad (2.27)$$

où $f_{k-1:k}$ et h_k sont des fonctions continues, différentiables de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ respectivement. La fonction $f_{k-1:k}(x) = [f_{k-1:k}^1(x) \cdots f_{k-1:k}^n(x)]^T$ permet

d'exprimer le vecteur d'état de n paramètres à l'instant k en fonction du vecteur d'état à l'instant $k - 1$ en l'absence de bruits. La fonction $h_k(x) = [h_k^1(x) \cdots h_k^p(x)]^T$ représente quant à elle les p fonctions liant le vecteur d'état à l'instant k aux p mesures au même instant.

Soit $\hat{x}_k, k \in \mathbb{N}$, la trajectoire *nominale* considérée comme une approximation de la trajectoire vraie et soient les perturbations δx_k et δz_k , respectivement du vecteur d'état x_k et du vecteur de mesure z_k , par rapport à cette trajectoire nominale, il vient

$$\delta x_k = x_k - \hat{x}_k \text{ et} \quad (2.28)$$

$$\delta z_k = z_k - h_k(\hat{x}_k). \quad (2.29)$$

L'équation (2.27) peut alors être linéarisée autour de la trajectoire nominale grâce à un développement de Taylor au premier ordre :

$$\begin{aligned} \delta x_k &= x_k - \hat{x}_k \\ &= f_{k-1:k}(x_{k-1}) + w_{k-1:k} - \hat{x}_k \text{ d'après (2.27)} \end{aligned}$$

or

$$f_{k-1:k}(x_{k-1}) = f_{k-1:k}(\hat{x}_{k-1}) + \left. \frac{\partial f_{k-1:k}(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1}} \delta x_{k-1} + o(\delta x_{k-1})$$

donc au 1^{er} ordre,

$$\delta x_k = \left. \frac{\partial f_{k-1:k}(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1}} \delta x_{k-1} + w_{k-1:k} - (\hat{x}_k - f_{k-1:k}(\hat{x}_{k-1})). \quad (2.30)$$

Le terme $\left. \frac{\partial f_{k-1:k}(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1}}$ correspond à la matrice jacobienne de la fonction $f_{k-1:k}$ au point \hat{x}_{k-1} . Cette relation peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\delta x_k = \Phi_{k-1:k} \delta x_{k-1} - \Delta \hat{x}_k + w_{k-1:k} \quad (2.31)$$

avec,

$$\Phi_{k-1:k} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial f_{k-1:k}^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_{k-1:k}^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_{k-1:k}^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f_{k-1:k}^n}{\partial x^n} \end{array} \right] \bigg|_{x=\hat{x}_{k-1}}$$

et

$$\Delta \hat{x}_k = \hat{x}_k - f_{k-1:k}(\hat{x}_{k-1}). \quad (2.32)$$

L'équation de mesure (2.29) peut également être linéarisée au même ordre d'approximation :

$$\begin{aligned} \delta z_k &= z_k - h_k(\hat{x}_k) \\ &= h_k(x_k) - h_k(\hat{x}_k) + v_k \text{ d'après (2.27)} \end{aligned}$$

soit, au 1^{er} ordre

$$\delta z_k = \left. \frac{\partial h_k(x)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_k} \delta x_k + v_k. \quad (2.33)$$

L'équation ainsi linéarisée peut alors s'exprimer sous la forme suivante

$$\delta z_k = H_k \delta x_k + v_k, \quad (2.34)$$

où H_k représente la matrice jacobienne de la fonction h_k au point \hat{x}_k :

$$H_k = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial h_k^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial h_k^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_k^p}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial h_k^p}{\partial x^n} \end{array} \right] \bigg|_{x=\hat{x}_k}.$$

On retrouve donc bien le système d'équations du modèle de Kalman (2.22), qui lie à présent non plus les paramètres d'état et les mesures, mais leurs perturbations par rapport à la trajectoire nominale :

$$\begin{cases} \delta x_k = \Phi_{k-1:k} \delta x_{k-1} - \Delta \hat{x}_k + w_{k-1:k} \\ \delta z_k = H_k \delta x_k + v_k. \end{cases} \quad (2.35)$$

Le terme $\Delta \hat{x}_k$ de (2.32) joue ici un rôle de commande (LE GLAND 2007). Ce terme est nul, si la trajectoire nominale obéit au modèle dynamique. En effet, dans ce cas,

$$\hat{x}_k = f_{k-1:k}(\hat{x}_{k-1}),$$

ce qui entraîne

$$\Delta \hat{x}_k = \hat{x}_k - f_{k-1:k}(\hat{x}_{k-1}) = 0.$$

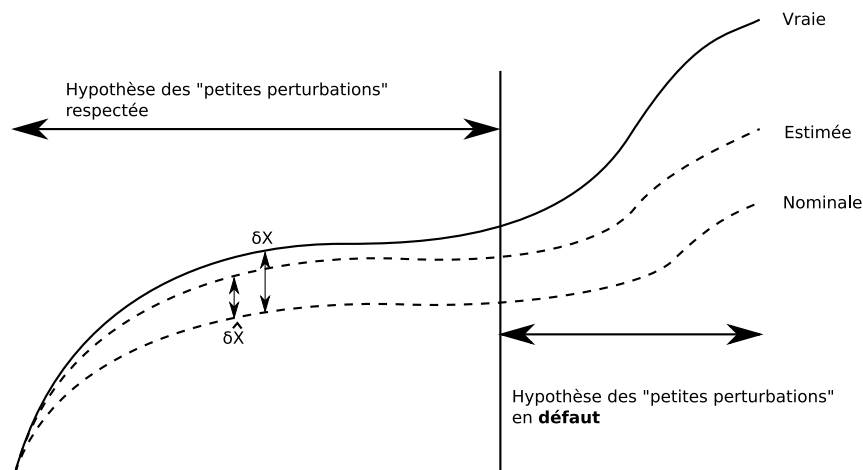


FIG. 2.7 – Représentation de l'évolution des perturbations δx et $\delta \hat{x}$ respectivement entre les trajectoires vraie et nominale et les trajectoires estimée et nominale en cas de dérive.

Dans ce cas, la trajectoire nominale est fixée de façon récursive par le modèle dynamique. S'il existe une dérive non prise en compte par le modèle dynamique,

cette trajectoire peut s'écarter sensiblement de la trajectoire vraie (fig. 2.7). L'hypothèse des petites perturbations qui a permis la linéarisation est alors mise en défaut, ce qui peut conduire à une divergence du filtre (SORENSEN 1970).

Une solution possible est de linéariser le modèle de Kalman autour d'un état estimé *in situ* à partir de l'état estimé précédent. C'est le principe du filtre de Kalman étendu que nous allons exposer à présent.

Le filtre de Kalman étendu a donc une formulation très proche de la précédente. L'état nominal \hat{x}_k à l'instant k n'est plus une donnée, mais une approximation $\hat{x}_{k/k-1}$ de l'état à l'instant k :

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k/k-1} = f_{k-1:k}(\hat{x}_{k-1}) \quad (2.36)$$

où $\hat{x}_{k/k-1}$ est l'état prédit à l'instant k par le modèle dynamique, connaissant les mesures jusqu'à l'instant $k-1$ et \hat{x}_{k-1} est l'état estimé à l'instant $k-1$. Une telle méthode permet de limiter les effets d'une dérive non prise en compte par le modèle dynamique (fig. 2.8). En revanche, la trajectoire nominale et donc les matrices $\Phi_{k-1:k}$, H_k et le gain de Kalman K_k ne peuvent plus être calculés à l'avance, ce qui ralentit les calculs pour les traitements temps réel. Cet inconvénient n'existe plus dans le cadre d'un traitement en temps différé.

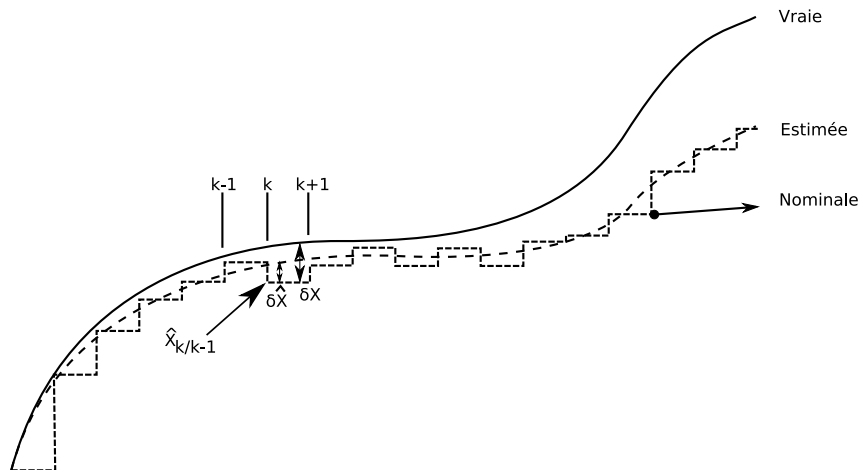


FIG. 2.8 – Représentation de l'évolution des perturbations δx et $\delta \hat{x}$ respectivement entre les trajectoires vraie et nominale et les trajectoires estimée et nominale pour le filtre de Kalman étendu.

2.4.4 Application au système de gravimétrie mobile

Le filtre de Kalman étendu que nous développons est articulé autour de l'équation de la dynamique (2.19) établie au §2.3.2. Cette relation permet de relier l'accélération de rappel a^s mesurée dans le référentiel des accéléromètres, aux vecteurs accélération \ddot{X}^e , vitesse \dot{X}^e et position X^e exprimés dans le référentiel terrestre et au vecteur accélération de la pesanteur g^n exprimé dans le référentiel de navigation par :

$$a^s = C_b^s C_n^b C_e^n (\ddot{X}^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}^e - C_n^e g^n)$$

où, rappelons-le,

- C_b^s est la matrice de passage du repère du véhicule vers celui des accéléromètres (matrice à termes constants) ;
- C_n^b est la matrice de passage du repère de navigation vers le repère du véhicule qui dépend de l'attitude (roulis η , tangage χ , lacet α) du véhicule définie par le vecteur attitude $\phi = [\eta, \chi, \alpha]^T$;
- C_e^n est la matrice de passage du repère terrestre vers le repère de navigation qui dépend de la position X^e du véhicule ;
- Ω_{ie}^e est la matrice antisymétrique caractérisant la vitesse de rotation de la Terre.

Les grandeurs physiques mesurées par notre système sont les vecteurs à trois composantes suivants :

- \bar{a}^s vecteur des mesures $[\bar{a}_1^s, \bar{a}_2^s, \bar{a}_3^s]^T$ des accéléromètres dans leur direction sensible ;
- \bar{X}^e vecteur position $[\bar{X}_1^e, \bar{X}_2^e, \bar{X}_3^e]^T$ du véhicule dans le référentiel terrestre déduit des mesures GPS ;
- $\bar{\phi}$ vecteur attitude $[\bar{\eta}, \bar{\chi}, \bar{\alpha}]^T$ du véhicule issu du système GPS quatre antennes.

Dans sa configuration actuelle, notre système ne possède pas de gyromètres qui permettraient de mesurer directement le vecteur des vitesses angulaires $\bar{\dot{\phi}} = [\bar{\dot{\eta}}, \bar{\dot{\chi}}, \bar{\dot{\alpha}}]^T$. Le vecteur des mesures est donc composé des trois vecteurs \bar{a}^s , \bar{X}^e et $\bar{\phi}$, de trois composantes chacun, soit neuf mesures. D'autre part, nous supposons ici que le terme de bras de levier a été préalablement corrigé.

Nous avons choisi de décrire l'état du système à un instant donné par les grandeurs \ddot{X}^e , \dot{X}^e , X^e , $\dot{\phi}$, ϕ , $\dot{p}g^n$, $p\dot{g}^n$ et pg^n soit huit vecteurs de trois composantes chacun pour un total de 24 paramètres. pg^n est la perturbation de pesanteur qui représente l'écart entre le vecteur accélération de la pesanteur g^n et la pesanteur normale γ^n calculée à partir de l'ellipsoïde de référence et de la position (HOFMANN-WELLENHOF et MORITZ 2005).

$$g^n = \gamma^n + pg^n$$

Le vecteur d'état x est donc défini par

$$x = [\ddot{X}^e, \dot{X}^e, X^e, \dot{\phi}, \phi, \dot{p}g^n, p\dot{g}^n, pg^n]^T.$$

L'accélération de rappel a^s peut donc être considérée comme une fonction h^{a^s} du vecteur d'état x :

$$h^{a^s} : \mathbb{R}^{24} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x = \begin{bmatrix} \ddot{X}^e \\ \dot{X}^e \\ X^e \\ \dot{\phi} \\ \phi \\ \dot{p}g^n \\ p\dot{g}^n \\ pg^n \end{bmatrix} \mapsto a^s = C_b^s C_n^b C_e^n (\ddot{X}^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}^e - C_n^e (\gamma^n + pg^n)). \quad (2.37)$$

Le modèle dynamique du système doit caractériser l'évolution temporelle des paramètres de l'état. Pour la transition entre les instants $k-1$ et k , nous avons choisi le modèle dynamique suivant :

$$\begin{bmatrix} \ddot{X}_k^e \\ \dot{X}_k^e \\ X_k^e \\ \dot{\phi}_k \\ \phi_k \\ \ddot{p}g_k^n \\ \dot{p}g_k^n \\ pg_k^n \end{bmatrix} = f_{k-1:k}(\ddot{X}_{k-1}^e, \dot{X}_{k-1}^e, X_{k-1}^e, \dot{\phi}_{k-1}, \phi_{k-1}, \dot{p}g_{k-1}^n, pg_{k-1}^n) + w_{k-1:k}$$

où $f_{k-1:k}$ est une fonction de $\mathbb{R}^{24} \rightarrow \mathbb{R}^{24}$ définie par

$$f_{k-1:k} : \begin{bmatrix} \ddot{X}_{k-1}^e \\ \dot{X}_{k-1}^e \\ X_{k-1}^e \\ \dot{\phi}_{k-1} \\ \phi_{k-1} \\ \ddot{p}g_{k-1}^n \\ \dot{p}g_{k-1}^n \\ pg_{k-1}^n \end{bmatrix} \mapsto \begin{cases} \ddot{X}_k^e &= \ddot{X}_{k-1}^e \\ \dot{X}_k^e &= \dot{X}_{k-1}^e + T\ddot{X}_{k-1}^e \\ X_k^e &= X_{k-1}^e + T\dot{X}_{k-1}^e + \frac{T^2}{2}\ddot{X}_{k-1}^e \\ \dot{\phi}_k &= \dot{\phi}_{k-1} \\ \phi_k &= \phi_{k-1} + T\dot{\phi}_{k-1} \\ \ddot{p}g_k^n &= \ddot{p}g_{k-1}^n \\ \dot{p}g_k^n &= \dot{p}g_{k-1}^n + T\ddot{p}g_{k-1}^n \\ pg_k^n &= pg_{k-1}^n + T\dot{p}g_{k-1}^n + \frac{T^2}{2}\ddot{p}g_{k-1}^n \end{cases} . \quad (2.38)$$

L'accélération est ici considérée comme constante à un bruit blanc gaussien près. La vitesse et la position sont déduites de l'accélération à l'aide de développements de Taylor d'ordre un et deux respectivement entre deux instants consécutifs $k-1$ et k , distants d'une période T . Plus précisément, soient $X^e(t)$, $\dot{X}^e(t)$ et $\ddot{X}^e(t)$ respectivement les vecteurs position, vitesse et accélération considérés comme fonctions du temps t . Les développements de Taylor de la vitesse et de la position entre les instants $t-T$ et t s'écrivent :

$$\begin{aligned} \dot{X}^e(t) &= \dot{X}^e(t-T) + T\ddot{X}^e(t-T) + o(T), \\ X^e(t) &= X^e(t-T) + T\dot{X}^e(t-T) + \frac{T^2}{2}\ddot{X}^e(t-T) + o(T^2). \end{aligned}$$

Pour $t = kT$, il vient

$$\begin{aligned} \dot{X}^e(kT) &= \dot{X}^e((k-1)T) + T\ddot{X}^e((k-1)T) + o(T), \\ X^e(kT) &= X^e((k-1)T) + T\dot{X}^e((k-1)T) + \frac{T^2}{2}\ddot{X}^e((k-1)T) + o(T^2), \end{aligned}$$

soit, sous forme discrétisée,

$$\begin{aligned} \dot{X}_k^e &= \dot{X}_{k-1}^e + T\ddot{X}_{k-1}^e + o(T), \\ X_k^e &= X_{k-1}^e + T\dot{X}_{k-1}^e + \frac{T^2}{2}\ddot{X}_{k-1}^e + o(T^2). \end{aligned}$$

Ces équations correspondent respectivement à la deuxième et troisième équations de (2.38).

La vitesse angulaire du véhicule $\dot{\phi}$ est considérée constante à un bruit blanc gaussien près, et l'attitude est obtenue comme précédemment, à l'aide d'un développement de Taylor au premier ordre entre les instants $k - 1$ et k . Enfin, comme pour l'accélération, la dérivée seconde de la perturbation de pesanteur $\dot{p}g^n$ est considérée constante à un bruit blanc gaussien près, la dérivée première et la perturbation de pesanteur sont donc calculées à l'aide d'un développement de Taylor au premier ordre puis au second entre les instants $k - 1$ et k .

Ces équations forment donc le modèle dynamique du système étudié et, conformément à la formulation des perturbations (2.31) par rapport à une trajectoire nominale, il vient

$$\begin{aligned}\delta\ddot{X}_k^e &= \ddot{X}_k^e - \dot{\ddot{X}}_k^e \\ \delta\dot{X}_k^e &= \dot{X}_k^e - \dot{\dot{X}}_k^e \\ \delta X_k^e &= X_k^e - \dot{X}_k^e \\ \delta\dot{\phi}_k &= \dot{\phi}_k - \dot{\dot{\phi}}_k \\ \delta\phi_k &= \phi_k - \dot{\phi}_k \\ \delta\dot{p}g_k^n &= \dot{p}g_k^n - \dot{\dot{p}g}_k^n \\ \delta p\dot{g}_k^n &= p\dot{g}_k^n - \dot{p}g_k^n \\ \delta p g_k^n &= p g_k^n - \dot{p}g_k^n\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \delta\ddot{X}_k^e \\ \delta\dot{X}_k^e \\ \delta X_k^e \\ \delta\dot{\phi}_k \\ \delta\phi_k \\ \delta\dot{p}g_k^n \\ \delta p\dot{g}_k^n \\ \delta p g_k^n \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ TI_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ \frac{T^2}{2}I_3 & TI_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & TI_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & TI_3 & I_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & \frac{T^2}{2}I_3 & TI_3 & I_3 \end{bmatrix}}_{\Phi_{k-1:k}} \begin{bmatrix} \delta\ddot{X}_{k-1}^e \\ \delta\dot{X}_{k-1}^e \\ \delta X_{k-1}^e \\ \delta\dot{\phi}_{k-1} \\ \delta\phi_{k-1} \\ \delta\dot{p}g_{k-1}^n \\ \delta p\dot{g}_{k-1}^n \\ \delta p g_{k-1}^n \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} \Delta\dot{\ddot{X}}_k^e \\ \Delta\dot{\dot{X}}_k^e \\ \Delta\dot{X}_k^e \\ \Delta\dot{\phi}_k \\ \Delta\dot{\phi}_k \\ \Delta\dot{p}g_k^n \\ \Delta p\dot{g}_k^n \\ \Delta p\dot{g}_k^n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} w_{k-1:k}^{\ddot{X}^e} \\ w_{k-1:k}^{\dot{X}^e} \\ w_{k-1:k}^{X^e} \\ w_{k-1:k}^{\dot{\phi}} \\ w_{k-1:k}^{\phi} \\ w_{k-1:k}^{p\dot{g}^n} \\ w_{k-1:k}^{\dot{p}g^n} \\ w_{k-1:k}^{p g^n} \end{bmatrix}}_{w_{k-1:k}}.\end{aligned}\tag{2.39}$$

De même, on peut lier les observations aux paramètres d'état. L'attitude et la position étant des paramètres mesurés, leurs relations sont donc des égalités à un bruit de mesure près. Par contre, la force spécifique peut être exprimée au bruit de mesure près, grâce à la fonction h^{a^s} liant l'état à l'instant k à la force spécifique a^s au même instant (2.37) :

$$\begin{aligned}\bar{\phi}_k &= \phi_k + v_k^\phi \\ \bar{X}_k^e &= X_k^e + v_k^{X^e} \\ \bar{a}_k^s &= h^{a^s}(x_k) + v_k^{a^s}\end{aligned}$$

où v_k^ϕ , $v_k^{X^e}$ et $v_k^{a^s}$ sont des bruits de mesures supposés blancs, gaussiens.

Tout comme pour le modèle dynamique, il est possible de formuler ces relations en fonction des perturbations. Le cas reste linéaire pour l'attitude et la position. En revanche, ce n'est pas le cas pour h^{a^s} , qui nécessite donc une linéarisation conformément à la formulation de (2.33) :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \delta\phi_k \\ \delta X_k^e \\ \delta a^s \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ \frac{\partial h^{a^s}}{\partial \dot{X}^e} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial \dot{X}^e} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial X^e} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial \phi} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial \phi} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial p\ddot{g}^n} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial p\ddot{g}^n} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial p\ddot{g}^n} \end{bmatrix}}_{H_k} \bigg|_{x=\hat{x}_k} \begin{bmatrix} \delta\ddot{X}_k^e \\ \delta\dot{X}_k^e \\ \delta X_k^e \\ \delta\phi_k \\ \delta p\ddot{g}_k^n \\ \delta p\ddot{g}_k^n \\ \delta p\ddot{g}_k^n \end{bmatrix}, \\ &+ v_k\end{aligned}\tag{2.40}$$

$$\text{avec } \begin{bmatrix} \delta\phi_k \\ \delta X_k^e \\ \delta a_k^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_k - \phi_k \\ \bar{X}_k^e - X_k^e \\ \bar{a}_k^s - h_k^{a^s}(\hat{x}_k) \end{bmatrix}.$$

La formulation des équations (2.39) et (2.40) permet bien de reconstituer le système d'équations du modèle de Kalman (2.35). Les expressions complètes des termes constituant la matrice H_k sont données dans l'annexe B.

La trajectoire nominale doit être suffisamment proche de la trajectoire vraie afin de légitimer la linéarisation. Dans le filtre de Kalman étendu, la trajectoire nominale est choisie comme la valeur *a priori* du vecteur d'état juste avant la phase de correction, $\hat{x}_k = \hat{x}_{k/k-1}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\delta x_k &= x_k - \hat{x}_k \\ &= x_k - \hat{x}_{k/k-1} \\ &= x_k - f_{k-1:k}(\hat{x}_{k-1})\end{aligned}$$

de même il est possible d'exprimer la variation de la nominale $\Delta \hat{x}_k$,

$$\begin{aligned}
 \Delta \hat{x}_k &= \hat{x}_k - f_{k-1:k}(\hat{x}_{k-1}) \\
 \text{or } \hat{x}_k &= f_{k-1:k}(\hat{x}_{k-1}) \\
 \text{donc } \Delta \hat{x}_k &= f_{k-1:k}(\hat{x}_{k-1}) - f_{k-1:k}(\hat{x}_{k-1}) \\
 &\stackrel{\text{Taylor, 1}^{\text{er}} \text{ordre}}{\simeq} \left. \frac{\partial f_{k-1:k}}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}_{k-1}} (\hat{x}_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) \\
 &= \Phi_{k-1:k} \delta \hat{x}_{k-1}
 \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
 \delta z_k &= z_k - h_k(\hat{x}_k) \\
 &= z_k - h_k(\hat{x}_{k/k-1}) \\
 &= z_k - h_k \circ f_{k-1:k}(\hat{x}_{k-1}).
 \end{aligned}$$

2.4.5 Implémentation du filtre

Le filtre de Kalman est ainsi complètement défini et peut alors être appliqué à des mesures réelles ou synthétiques. Nous allons donc aborder à présent les différentes phases du traitement effectuées par l'algorithme de calcul.

Initialisation

Le filtre utilisé est linéarisé à partir d'une trajectoire connue ou calculée dans notre cas. Nous utilisons en effet le vecteur d'état prédit comme point de linéarisation. Afin d'initier les itérations de l'algorithme de calcul, il est nécessaire de déterminer une approximation de ce premier état \hat{x}_1 ainsi que sa matrice de variances-covariances :

$$\hat{x}_1 = [\dot{X}_1^e, \ddot{X}_1^e, X_1^e, \dot{\phi}_1, \phi_1, \dot{p}g_1^n, \dot{p}g_1^n, pg_1^n]^T \text{ et } P_1.$$

De plus, il est important de déterminer les bruits de transition $w_{k-1:k}$ par la matrice de variances-covariances associée $Q_{k-1:k}$ et les bruits de mesure v_k par la matrice de variances-covariances R_k . Cette dernière est déterminée à partir des performances des capteurs implantés sur le système gravimétrique.

Prédiction et filtrage

Une fois l'initialisation effectuée, les itérations peuvent être enchaînées afin de réaliser les prédictions puis corrections conformément à l'algorithme du filtre de Kalman (fig. 2.6) dont l'analyse SADT est donnée dans l'annexe D.

Prérequis Afin de pouvoir calculer l'état à un instant k , il est nécessaire de connaître un ensemble de grandeurs qui peuvent être connues avant même l'acquisition des mesures. Il est donc nécessaire de calculer :

1. la matrice de transition $\Phi_{k-1:k}$, qui se trouve être constante dans notre cas (2.39);

2. la matrice d'observation H_k ; cette matrice ne peut être calculée, dans le cas d'un filtre étendu, que lorsque l'état précédent est complètement déterminé (2.40) : il est donc nécessaire à chaque itération de calculer chaque dérivée partielle $\frac{\partial h^a}{\partial x}$ avec comme données, l'état *a priori* $\hat{x}_{k/k-1}$;
3. les matrices de variances-covariances $Q_{k-1:k}$ et R_k ; dont la détermination est décrite en détail au chapitre 5.

Phase de prédiction Le filtre de Kalman s'applique sur les perturbations du vecteur d'état. Par conséquent, le premier calcul consiste à propager la perturbation et sa matrice de variances-covariances

$$\begin{aligned}\delta \hat{x}_{k/k-1} &= \Phi_{k-1:k} \delta \hat{x}_{k-1} - \Delta \hat{x}_k, \\ \text{et } P_{k/k-1} &= \Phi_{k-1:k} P_{k-1} \Phi_{k-1:k}^T + Q_{k-1:k}, \\ \text{avec } \Delta \hat{x}_k &= \Phi_{k-1:k} \delta \hat{x}_{k-1}.\end{aligned}$$

Phase de correction des perturbations Une fois la perturbation du vecteur d'état calculée *a priori*, elle doit être corrigée grâce aux mesures et au gain du filtre. Il est donc nécessaire de calculer la perturbation observée. Cette dernière est la différence entre les observations réelles et celles que l'on devrait obtenir par le vecteur d'état *a priori*, grâce à la fonction h (2.37) :

$$\begin{aligned}\delta z_k &= z_k - h(\hat{x}_{k/k-1}) \\ &= z_k - h \circ f_{k-1:k}(\hat{x}_{k-1}).\end{aligned}$$

Le gain du filtre est quant à lui calculé en fonction de la matrice de variances-covariances du vecteur d'état *a priori*, du bruit de mesure et de la matrice d'observation :

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T (H_k P_{k/k-1} H_k^T + R_k)^{-1}.$$

La perturbation du vecteur d'état peut alors être corrigée ainsi que sa matrice de variances-covariances :

$$\begin{aligned}\delta \hat{x}_k &= \delta \hat{x}_{k/k-1} + K_k (\delta z_k - H_k \delta \hat{x}_{k/k-1}), \\ P_k &= (I - K_k H_k) P_{k/k-1}.\end{aligned}$$

Ajustement du vecteur d'état Une fois la perturbation calculée et ajustée, il est nécessaire d'appliquer la perturbation au vecteur d'état nominal. Dans le cas du filtre étendu, la trajectoire nominale est définie à la « volée ». Il est donc nécessaire de propager l'état précédent à l'instant du traitement :

$$\begin{aligned}\hat{x}_k &= \hat{x}_k + \delta \hat{x}_k \\ &= f_{k-1:k}(\hat{x}_{k-1}) + \delta \hat{x}_k\end{aligned}$$

Le vecteur d'état ajusté \hat{x}_k , ainsi que l'ensemble des inconnues sont à présent complètement calculés grâce aux mesures à l'instant k et au résultat précédent (instant $k - 1$). Il est ainsi possible de passer à l'itération suivante jusqu'à traiter l'ensemble des données.

Lissage

La structure récursive du filtre de Kalman se prête tout particulièrement aux applications temps réel (positionnement dynamique, guidage). En post-traitement, il est possible de proposer une nouvelle estimation de l'état \hat{x}_k qui résulte de la combinaison pondérée des estimations issues d'un filtre aller et d'un filtrage retour obtenu en inversant la séquence des mesures.

Soit $\hat{x}_{k/N}$ l'estimation du vecteur d'état à l'instant k à partir de toutes les mesures z_i , $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $N > k$, disponibles à l'instant N et soit $P_{k/N}$ la matrice de variances-covariances associée. On peut obtenir une estimation optimale de x_k à partir

- de l'estimation \hat{x}_k obtenue par le filtre aller et
- de l'estimation $\hat{x}_{k/k+1}^r$ de l'état prédit à l'instant k en retour à partir des mesures disponibles entre les instants $k+1$ et N .

Cette estimation s'exprime par (JEKELI 2001)

$$\hat{x}_{k/N} = P_{k/N} (P_k^{-1} \hat{x}_k + P_{k/k+1}^r)^{-1} \hat{x}_{k/k+1}^r \quad (2.41)$$

où $P_{k/k+1}^r$ est la matrice de variances-covariances de l'estimation $\hat{x}_{k/k+1}^r$.

La matrice de variances-covariances correspondante $P_{k/N}$ s'exprime par

$$P_{k/N} = (P_k^{-1} + P_{k/k+1}^r)^{-1}.$$

L'avantage de cette combinaison est de profiter de la qualité de l'estimation par le filtre retour qui, en cas de bonne convergence du filtre, peut prendre comme état initial le dernier état estimé à l'instant N par le filtre aller. L'estimation $\hat{x}_{k/N}$ est qualifiée alors d'*estimation lissée*.

2.4.6 Forces et faiblesses du filtre de Kalman

Du point de vue pratique, les grandes forces du filtre de Kalman sont le caractère récursif qui autorise le traitement de gros volume de mesures sans contrainte de temps de calcul ou d'espace mémoire, et la possibilité d'obtenir la matrice de variances-covariances des paramètres en tout point. En contre-partie, le modèle d'évolution temporelle du vecteur d'état doit être particulièrement fidèle pour éviter toute divergence du filtre.

L'hypothèse de bruit blanc gaussien inhérente au filtre de Kalman peut s'avérer physiquement discutable pour les modèles d'évolution et le choix de l'écart-type du bruit de transition est plutôt délicat. Nous décrirons au chapitre 5 une méthode quantitative permettant de fixer cet écart-type.

Bien qu'il soit relativement facile d'obtenir un modèle cinématique satisfaisant pour rendre compte du mouvement d'un véhicule (mouvement à accélération constante dans notre cas), il n'en va pas de même pour les modèles décrivant l'attitude du véhicule et de la perturbation de pesanteur. En considérant en effet les estimations successives de la perturbation de pesanteur comme un échantillonnage spatial du champ réel, il est clair que la séquence obtenue correspond aux réalisations d'une variable aléatoire spatialisée dont la fonction de covariance doit correspondre à celle du champ réel.

Une construction plus judicieuse de l'équation d'évolution de la perturbation de pesanteur consisterait donc à construire un processus de Markov dont la fonction de covariance serait choisie parmi les modèles classiques de covariance du champ réel. Cette approche a été proposée pour la gravimétrie scalaire par JEKELI (2001); elle demande un certain nombre d'adaptations substantielles pour être appliquée au cas de la gravimétrie vectorielle.

COMPOSITION ET ÉTALONNAGE DU SYSTÈME LIMO-G

3

SOMMAIRE

3.1	DESCRIPTION TECHNIQUE	69
3.1.1	Les accéléromètres pour la mesure de l'accélération de rappel	69
3.1.2	Numérisation des signaux	72
3.1.3	Récepteurs GPS	75
3.1.4	Assemblage des éléments du Limo-G	77
3.2	ÉTALONNAGE DE LA CHAÎNE DE MESURE DES ACCÉLÉRATIONS	81
3.2.1	Description de la chaîne d'acquisition et fonction d'étalonnage	81
3.2.2	Principe de l'étalonnage par autocollimation	81
3.2.3	Protocole expérimental et mesures	84
3.2.4	Estimation de la fonction d'étalonnage	88
3.3	ORIENTATION DES MESURES ACCÉLÉROMÉTRIQUES	93
3.3.1	Objectif	93
3.3.2	Étalonnage géométrique du système Limo-G	93
3.3.3	Étalonnage gravimétrique du système de mesure	101
3.4	ÉTUDE DU BRAS DE LEVIER	104
3.4.1	Objectifs	104
3.4.2	Amplitude des effets du bras de levier	104
3.4.3	Précision de la détermination des effets de bras de levier	105
3.4.4	Applications numériques et conclusions	107

LE présent chapitre se propose de décrire en détail notre système gravimétrique, en particulier, les capteurs, leurs performances et leur étalonnage. Au chapitre précédent, nous avons montré que la détermination de la pesanteur à partir de la mesure de l'accélération de rappel en un point par des accéléromètres liés au véhicule porteur, nécessitait en plus l'estimation de la position, la vitesse, l'accélération et l'attitude de ce dernier. Notre système comprend donc, outre trois

accéléromètres non coplanaires pour la mesure des trois composantes de l'accélération de rappel, un récepteur GPS à quatre antennes pour le positionnement et la détermination de l'attitude du véhicule porteur.

Ce chapitre débute par la description des accéléromètres, leur principe physique, l'acquisition et la numérisation de leurs mesures et leur étalonnage. Le passage du référentiel matérialisé par les axes sensibles des trois accéléromètres au référentiel du véhicule suppose la détermination de l'orientation de ces axes sensibles. Le protocole de mesure utilisé et les résultats obtenus seront présentés en détail.

Enfin l'influence du bras de levier sur les mesures d'accélération, qui résulte de la non-coïncidence entre le point où est mesurée l'accélération de rappel et le point dont la position est déterminée par GPS est étudiée à partir de simulations.

3.1 DESCRIPTION TECHNIQUE

3.1.1 Les accéléromètres pour la mesure de l'accélération de rappel

Les accéléromètres qui composent le système de gravimétrie mobile Limo-G sont développés par la société Honeywell/AlliedSignal sous la référence Q-Flex QA 3000-020 (fig 3.1). Ces accéléromètres ont déjà été utilisés sur des satellites, des avions, des missiles ou encore sur le gravimètre mobile développé par BOEDECKER et al. (1995). Leur précision est de l'ordre du milligal grâce à une grande immunité aux vibrations du système porteur. Ces caractéristiques (tab. 3.1) en font donc de bons candidats pour une utilisation embarquée en gravimétrie mobile.



FIG. 3.1 – Vue de l'accéléromètre QA 3000-020 (photographie constructeur).

Performances	
Plage d'entrée	$[-60 g, +60 g]$
Résolution	$< 1 \mu g$
Biais	$< 4 mg$
Facteur d'échelle	1.20 à 1.46 mA/g
Défaut d'alignement axe sensible	$< 1 mrad$
Résistance aux chocs	150 g
Bande passante	$> 300 Hz$
Géométrie	
Diamètre	$< 40 mm$
Hauteur	$< 25 mm$
Poids	$71 \pm 4 g$

TAB. 3.1 – Principales caractéristiques des accéléromètres Q-Flex QA 3000-20. g correspond ici à la valeur de la pesanteur dans les laboratoires de test Honeywell, soit $9.80708 ms^{-2}$.

Le capteur accélérométrique QA 3000-020 est analogique (ALLIEDSIGNAL 1999), c'est-à-dire que le signal qui représente l'accélération subie le long de son axe sensible correspond à la variation d'une grandeur physique, en l'occurrence l'intensité d'un courant électrique en sortie du capteur. Pour exploiter ce signal en post-traitement, il est converti en un signal numérique à l'aide d'un convertisseur analogique/numérique que nous détaillerons au § 3.1.2.

Le fonctionnement du capteur accélérométrique peut être schématisé selon la figure 3.2. Une masse d'épreuve montée sur une lame flexible en quartz est maintenue en équilibre dans le champ magnétique généré par un électro-aimant. Le

maintien de l'équilibre est contrôlé par le système capacitif du détecteur de position. Sous l'effet d'une accélération, cet équilibre est rompu car la masse d'épreuve se déplace avec un retard par rapport à l'enveloppe du capteur, en raison de son inertie et de la flexion de la lame. Le système capacitif détecte l'écart de position entre la masse d'épreuve et le chassis et fournit à l'électro-aimant le courant nécessaire pour ramener la lame flexible dans sa position d'équilibre. La force nécessaire à cette compensation correspond à la composante de l'accélération subie dans la direction sensible de l'accéléromètre. L'intensité du courant fourni à l'électro-aimant pour rétablir l'équilibre est proportionnelle à la force de compensation à un biais près, c'est-à-dire à l'accélération, ce qui se traduit mathématiquement par

$$i = K_a a + B_a \quad (3.1)$$

où i est l'intensité du courant de sortie, a la composante de l'accélération suivant l'axe sensible, K_a un facteur d'échelle et B_a un biais.

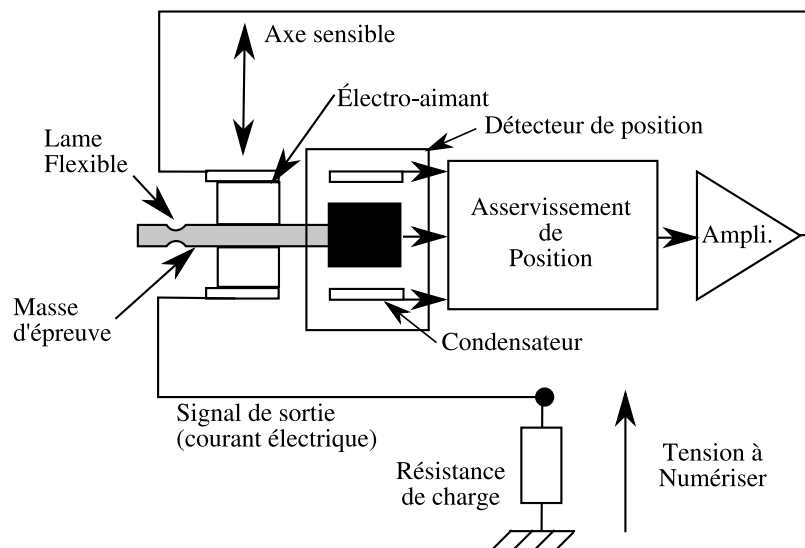


FIG. 3.2 – Schéma de principe d'un accéléromètre QA 3000-020. Le condensateur est utilisé en tant que détecteur de position capacitif et la tension aux bornes de la résistance de charge est proportionnelle à l'intensité du courant électrique en sortie du capteur.

Dans un cas idéal, l'axe sensible est confondu avec l'axe géométrique de l'accéléromètre. Les défauts de fabrication font que ces deux axes ne sont pas confondus. Le constructeur annonce un défaut d'alignement inférieur au milliradian (tab. 3.1).

Les accéléromètres incluent un capteur linéaire de température dans leur chassis dont l'intensité de sortie est de $298 \mu A$ pour une température de $20^\circ C$, avec un facteur de conversion de $1 \mu A/^\circ C$. Ce capteur permet de surveiller l'évolution de la température du capteur accélérométrique qui influence la mesure de l'accélération. En effet, le biais et le facteur d'échelle varient avec la température. Ces variations sont évaluées à l'aide des courbes d'étalonnage réalisées lors de la fabrication (3.3).

D'après ces étalonnages, on peut constater que la température influence le biais de plusieurs milligals par degré Celsius (-7 , -4 voire $+5 mGal/^\circ C$) et le facteur d'échelle peut varier jusqu'à 0.01% par degré pour un facteur initial de $1.28 mA/g$.

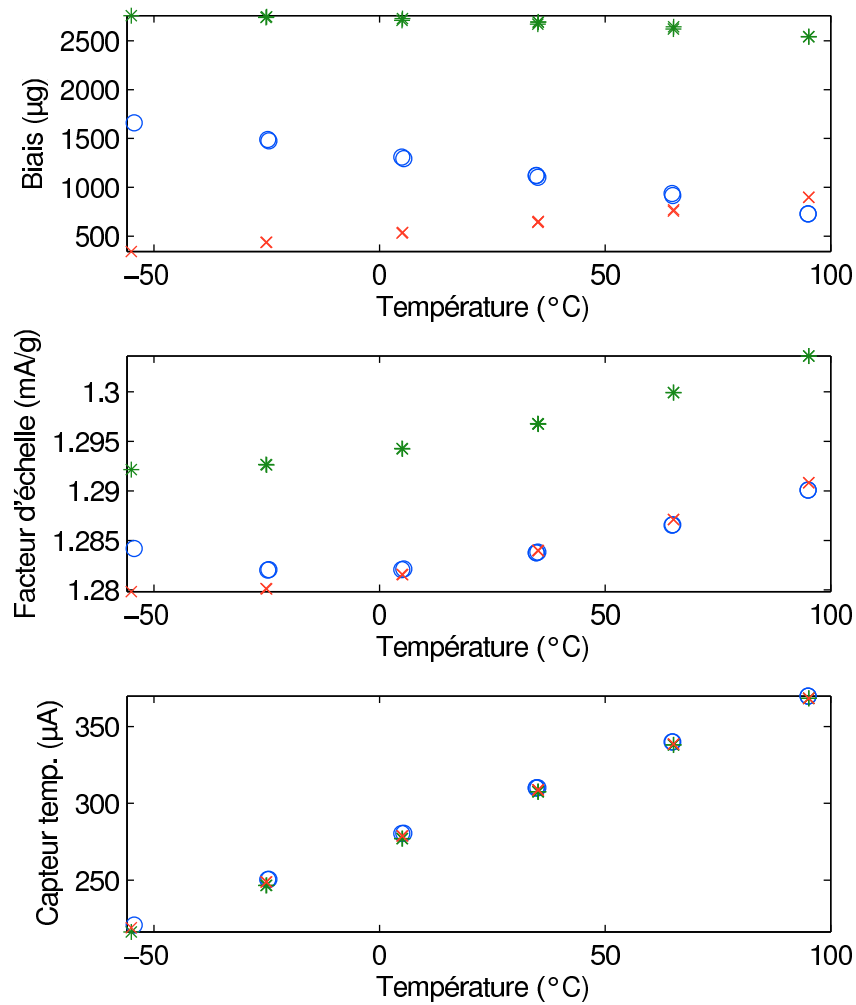


FIG. 3.3 – Courbes d'étalonnage en température des trois accéléromètres QA 3000-020 (données constructeur). (o) bleu pour l'accéléromètre n°207, (*) verte pour l'accéléromètre n°210 et (x) rouge pour le n°219. Le premier graphique présente la dépendance du biais en fonction de la température, le second du facteur d'échelle et le dernier l'intensité en sortie du capteur de température.

Compte-tenu de l'influence de la température, il est indispensable de modéliser les variations du biais et du facteur d'échelle en fonction de la température ou du moins limiter ces variations en utilisant les accéléromètres à température constante dans une enceinte thermorégulée.

3.1.2 Numérisation des signaux

Les accéléromètres QA 3000-020 ont été développés afin d'être utilisés sur différents types de porteurs, leur plage de mesure est donc particulièrement étendue $[-60g, +60g]$ (g étant la valeur de la pesanteur dans les laboratoires de test AlliedSignal soit 9.80708 ms^{-2}).

Dans le cadre d'une utilisation en gravimétrie mobile pour des levés terrestres, marins et aéroportés, une plage de mesure de $[0, 2g]$ est amplement suffisante (BRUTON 2000). Pour un facteur d'échelle K_a , l'intensité du courant de sortie varie alors dans la gamme $[0, 2K_a g]$.

La numérisation des signaux est effectuée à l'aide d'un numériseur équipé d'un Convertisseur Analogique-Numérique (CAN) qui transforme une tension électrique en une valeur numérique codée sur plusieurs bits. La longueur du mot binaire utilisé pour le codage de la valeur numérique, image de la tension, caractérise la résolution du numériseur. La sortie du capteur d'accélération étant un courant, il est nécessaire de convertir ce dernier en une tension avant de pouvoir réaliser sa numérisation. C'est le rôle de la résistance de charge (fig. 3.2) placée à la sortie du capteur d'accélération aux bornes de laquelle la tension est proportionnelle à l'intensité du courant de sortie du capteur d'accélération.

Dans un premier temps, il est nécessaire de calculer cette résistance de charge (VLAMYNCK 1999). Elle dépend de la plage d'intensités du courant de sortie des accéléromètres, et de la plage de tensions acceptées par le numériseur. Ce dernier accepte une plage de mesure de $[-5 \text{ V}, 5 \text{ V}]$ (tab. 3.4). Il est alors possible de calculer la résistance de charge par la loi d'Ohm et la relation (3.1). Ainsi,

$$R_{charge} = \frac{\Delta U}{K_a \Delta a}$$

où R_{charge} est la résistance de charge, ΔU la largeur de la gamme de tension, K_a le facteur d'échelle de chaque accéléromètre et Δa la largeur de la gamme des accélérations à mesurer. Le calcul des résistances de charge (tab. 3.2) est donc basé sur la connaissance du facteur d'échelle K_a tiré de l'étalonnage usine de chacun des accéléromètres.

Accéléromètre	facteur d'échelle K_a	Résistance de charge
1 (ref. 207)	1.282628 mA/g	3898Ω
2 (ref. 210)	1.295474 mA/g	3859Ω
3 (ref. 219)	1.282611 mA/g	3898Ω

TAB. 3.2 – Calcul des résistances de charge en fonction des facteurs d'échelles K_a donnés par le constructeur, pour une gamme d'accélérations de largeur $2g$ et une gamme de tension de largeur 10 V .

Le montage électronique a été effectué à l'aide de deux résistances montées en parallèles dont la résistance équivalente est de 4602 Ω , ce qui garantit que la largeur de la gamme de tensions aux bornes de la résistance de charge reste toujours légèrement supérieure à 10 V, largeur de la plage de tensions d'entrée du numériseur. Il est alors possible de calculer le facteur d'échelle associé à la tension pour chacun des accéléromètres (tab. 3.3).

Accéléromètre	Facteur d'échelle en tension K_T	Largeur de la gamme de tension
1 (ref. 207)	5.3 $\mu\text{V}/\text{mGal}$	10.42 V
2 (ref. 210)	5.3 $\mu\text{V}/\text{mGal}$	10.52 V
3 (ref. 219)	5.3 $\mu\text{V}/\text{mGal}$	10.41 V

TAB. 3.3 – Facteurs d'échelles en tension K_T associés à chaque accéléromètre par l'utilisation d'une résistance de 4602 Ω et largeurs maximales de tension pour une gamme de mesure de $[0, 2g]$, en considérant la valeur de la pesanteur des laboratoires Honeywell égale à 9.80708 m/s^2 .

Le facteur d'échelle K_T permet de relier la résolution δ_{acc} de la mesure d'accélération au nombre de bits n utilisés pour la numérisation par

$$\delta_{acc} = \frac{\delta U}{K_T} = \frac{\Delta U}{2^n * K_T}$$

où δU est la résolution en tension correspondant à n bits pour une plage de tensions de largeur ΔU . Ainsi, pour une résolution δ_{acc} inférieure à une résolution maximale δ_{acc}^{max} de 0.2 mGal, soit 1/5 de la résolution des accéléromètres, il vient

$$\begin{aligned} \delta_{acc} &\leq \delta_{acc}^{max} \\ \frac{\Delta U}{K_T * 2^n} &\leq \delta_{acc}^{max} \\ 2^n &\geq \frac{\Delta U}{\delta_{acc}^{max} K_T} \\ \text{d'où } n &\geq \frac{\ln\left(\frac{\Delta U}{\delta_{acc}^{max} K_T}\right)}{\ln(2)}, \end{aligned}$$

soit pour une gamme de tension de largeur 10 V, un facteur d'échelle en tension de 5.3 $\mu\text{V}/\text{mGal}$ et une résolution en accélération inférieure à deux dixièmes de milligal :

$$n \geq \frac{\ln\left(\frac{10}{0.2 \times 10^{-5} 5.3 \times 10^{-1}}\right)}{\ln(2)} \quad (3.2)$$

$$\text{soit } n \geq 23.2. \quad (3.3)$$

Pour une résolution inférieure à deux dixièmes de milligal, il est donc nécessaire de coder la mesure sur au moins 24 bits. Avec un tel numériseur, la résolution est donc inférieure à 0.12 mGal par *unité numérique*.

Le système Limo-G utilise un numériseur Titan de la société AGEODAGIS, qui offre une gamme d'entrée de 10 V et numérise les signaux d'entrée sur 24 bits. Ce numériseur présente d'autres avantages :

- l’acquisition 24 bits est effectuée sur trois voies distinctes permettant ainsi de numériser en parallèle les signaux issus des trois accéléromètres ;
- les fréquences d’échantillonnage possibles sont 250 Hz, 125 Hz, 62.5 Hz ou encore 31.25 Hz ;
- la sauvegarde des mesures est réalisée sur une mémoire interne de 8 Mo (tab. 3.4).

Performances	
Nombre de voies 24 bits	3
Nombre de voies 16 bits	16
Plage d’entrée (24 bits)	[-5 V,+5 V]
Plage d’entrée (16 bits)	[0 V,10 V]
Fréquences principales d’acquisition	250 Hz ; 125 Hz 62.5 Hz ; 31.25 Hz
Résolution temporelle (synchro. GPS)	1 ms
Mémoire interne	8 Mo
Tension d’utilisation	[9 V,18 V]
Géométrie	
Dimensions	260 × 190 × 150 mm
Poids	4 kg

TAB. 3.4 – Principales caractéristiques du numériseur Titan (données constructeur, AGECODAGIS 2007).

En plus des trois voies 24 bits pour l’acquisition des signaux des trois accéléromètres, le numériseur comprend 16 voies de 16 bits. La fréquence de ces voies est 128 fois plus faible que la fréquence principale et ne permet donc qu’un seul enregistrement tous les 128 échantillons des voies principales. Ces voies auxiliaires ont été réservées aux signaux de température interne des accéléromètres ainsi qu’aux capteurs de température de l’enceinte thermorégulée (fig.3.4).

Le numériseur Titan a été conçu à l’origine pour des capteurs sismologiques : la numérisation est donc déclenchée à la suite d’un évènement tel qu’un séisme engendrant une brusque variation du signal d’entrée. Le numériseur a été modifié selon les recommandations du constructeur pour permettre une numérisation en continu. La taille de l’enregistrement continu est donc limité uniquement par la mémoire de l’appareil de 8 Mo, qui mémorise les signaux de l’ensemble des voies.

Les signaux numérisés sont datés avec précision à l’aide d’une horloge interne au numériseur. Cette horloge est synchronisée avec le temps GPS à l’aide d’un récepteur GPS complémentaire dans le dispositif de synchronisation (fig. 3.4). Ainsi, l’ensemble des données acquises sont-elles datées sur une même échelle de temps GPS.

Comme les accéléromètres, le numériseur Titan est sensible aux variations de température. Son facteur d’échelle en température est de $60 \mu\text{V}/^\circ\text{C}$ avec la carte de numérisation CS 5321. Le facteur d’échelle du numériseur étant de $5.3 \mu\text{V}/\text{mGal}$ (tab. 3.3), l’influence des variations de température sur le seul numériseur est de l’ordre de $11.3 \text{ mGal}/^\circ\text{C}$, d’où la nécessité absolue de maintenir le numériseur à température constante.

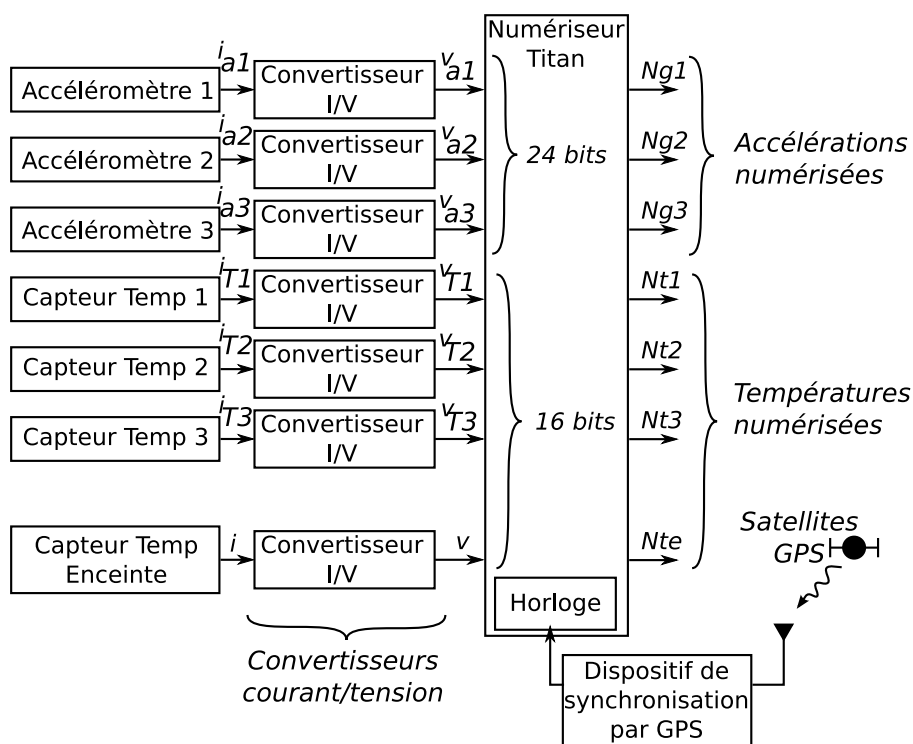


FIG. 3.4 – Schéma illustrant la chaîne d'acquisition et de numérisation des signaux.

3.1.3 Récepteurs GPS

Le système de gravimétrie mobile est équipé d'un récepteur GPS monofréquence à 12 canaux de type ADU2 auquel sont branchées quatre antennes commercialisé par la société Ashtech nouvellement nommée Magellan (fig. 3.5).

La première antenne dite maîtresse permet de calculer la position et la vitesse du véhicule en mode naturel par une estimation basée sur les pseudo-distances. Les signaux des trois autres antennes, permettent de calculer l'attitude du véhicule à l'aide d'un traitement par différences de phase entre les lignes de bases liant l'antenne maîtresse aux trois autres antennes. Ce dispositif permet d'obtenir en temps réel les angles de roulis, tangage avec une précision de 0.4° et le lacet ou azimuth à une précision de 0.2° (tab. 3.5) avec le montage des antennes de type aviation (fig. 3.6) sur un châssis couvrant une surface d'un mètre carré (fig. 3.7). Les données GPS sont également enregistrées à une fréquence de 2 Hz pour un éventuel traitement en temps différé.

Afin d'accroître la précision du positionnement, le système peut être également utilisé en mode différentiel en exploitant les mesures de phase. Pour ce, il suffit de réaliser les mesures conjointement à celles d'une station GPS de référence qui joue le rôle de pivot. Un traitement en temps différé en mode différentiel cinématique permet alors de calculer la ligne de base entre la station de référence et l'une des quatre antennes de récepteur ADU2 et d'en déduire la position de cette dernière avec une précision d'un centimètre sur la position et de 1 cm/s sur la vitesse.

Il existe enfin un mode différentiel dit « temps réel » permettant d'obtenir la position avec une précision intermédiaire de trois mètres.

Le système ADU2 remplit donc le double rôle de système de positionnement

et de détermination d'attitude. Il est possible de compléter les données GPS du système Limo-G par des mesures de position issues d'une centrale inertielle de navigation ou par les données d'un récepteur GPS supplémentaire bifréquence. Nous avons utilisé cette dernière configuration pour tous les levés réalisés avec le système Limo-G (cf. chapitre 4).

Le numériseur Titan est aussi doté d'une antenne GPS de synchronisation de son horloge interne sur le temps GPS.



FIG. 3.5 – Photographie du récepteur ADU2 d'Ashtech, par le constructeur.

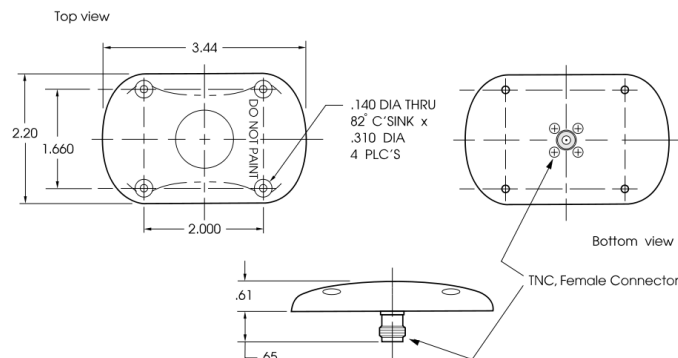


FIG. 3.6 – Schéma des antennes de type aviation utilisées par l'ADU2 ASHTECH 1996.

La détermination de l'attitude d'un véhicule peut être réalisée de façon plus précise (au centième de degré) à l'aide d'une centrale d'attitude équipée de gyromètres. L'ajout d'une telle centrale au système Limo-G n'est pas souhaitable compte-tenu du coût et de l'encombrement d'un tel dispositif. En revanche, les données du GPS quatre antennes pourraient être combinées à celles de trois gyromètres à axes orthogonaux afin d'assurer une meilleure estimation de l'attitude du véhicule porteur. Les gyromètres peuvent en effet fonctionner dans tous milieux avec une précision à court terme, de par leur dérive, d'un ordre de grandeur meilleure à celle du système ADU2.

En complément, le système ADU2 fournit une estimation stable de l'attitude avec une précision de quelques dixièmes de degré en l'absence de masque. Une

combinaison astucieuse des deux types de données dans un processus d'estimation, tel un filtre de Kalman, permettrait vraisemblablement d'améliorer la détermination de l'attitude.

Nous étudierons quantitativement l'amélioration apportée par les mesures issues de gyromètres dans le chapitre 5.

Performances	
Précision d'attitude (antennes sur le montage 1 × 1m)	
Azimuth	0.4° statique, 0.2° dynamique
Roulis/Tangage	0.8° statique, 0.4° dynamique
Précision du positionnement	
Mesure isolée	100 m
Différentiel temps réel (optionnel)	2 m (2D rms) ; 3 m (3D rms)
Post-traitement	1 cm + 2 ppm
Précision vitesse (PDOP<4)	1 cm/seconde
Temps d'accrochage	
Démarrage à chaud	< 3 minutes
Démarrage à froid	< 6 minutes
Fréquence d'acquisition	2 Hz
Tension d'utilisation	[12 V, 32 V]
Consommation	14 Watts
Température d'utilisation	[-40°C, +65°C]
Vitesse maximale	550 m/s
Altitude maximale	18 000 m
Géométrie	
Dimensions	220 × 100 × 200 mm
Poids	2.31 kg

TAB. 3.5 – Principales caractéristiques de l'ADU2 fournies par le constructeur ASHTECH 1996.

3.1.4 Assemblage des éléments du Limo-G

Nous venons de voir les différents éléments qui composent notre système :

- accéléromètres ;
- numériseur ;
- châssis d'antennes ;
- récepteurs GPS.

Nous allons aborder à présent l'assemblage de ces différents éléments afin de réaliser le système de gravimétrie mobile.

Les trois accéléromètres du système gravimétrique sont disposés selon les trois faces d'un tétraèdre régulier (fig 3.8) en aluminium usiné avec précision. Chaque accéléromètre peut être monté sur chacune des faces grâce à trois vis qui maintiennent le boîtier de l'accéléromètre sur trois appuis rectifiés (fig. 3.9). Ces trois appuis quasi-ponctuels matérialisent le plan de référence horizontal de chaque accéléromètre.



FIG. 3.7 – Vue des quatre antennes du récepteur GPS ADU2 lors de l'étalonnage géométrique sur le toit de l'ENSG.

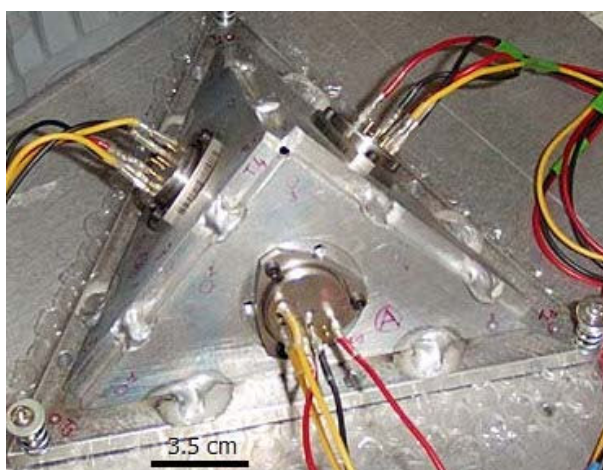


FIG. 3.8 – Photographie du tétraèdre des accéléromètres.

Le montage permet donc de rendre ce plan de référence parallèle au plan de chaque face du tétraèdre et ainsi l'axe géométrique de l'accéléromètre est-il orthogonal au plan de la face qui le supporte. Les axes géométriques des accéléromètres ainsi disposés doivent être orthogonaux aux imperfections d'usinage près, chose que nous estimerons quantitativement par des mesures optiques dans la suite.

L'utilisation d'un tel tétraèdre permet de répartir la mesure de l'accélération de façon plus équitable entre chaque accéléromètre. Si l'instrument est placé au repos sur une surface nivelée, les trois accéléromètres mesurent la même valeur d'accélération (VLAMYNCK 1999), ce qui ne surcharge pas un accéléromètre par rapport aux autres.

Le tétraèdre supportant les accéléromètres est rigidement fixé sous le chassis des antennes (fig. 3.10), ce qui rend notre système complètement lié au véhicule porteur. Ce montage est léger (inférieur à 40 kg) et regroupe tous les capteurs exceptés les capteurs de température externe.

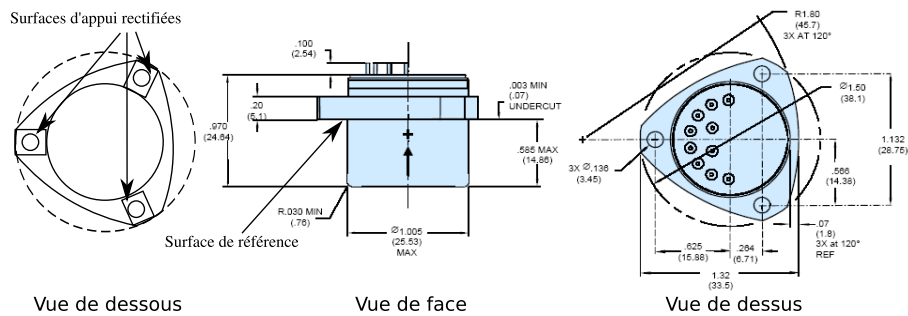


FIG. 3.9 – Plan des accéléromètres complété par une vue de dessous illustrant les surfaces quasi-ponctuelles d'appui.

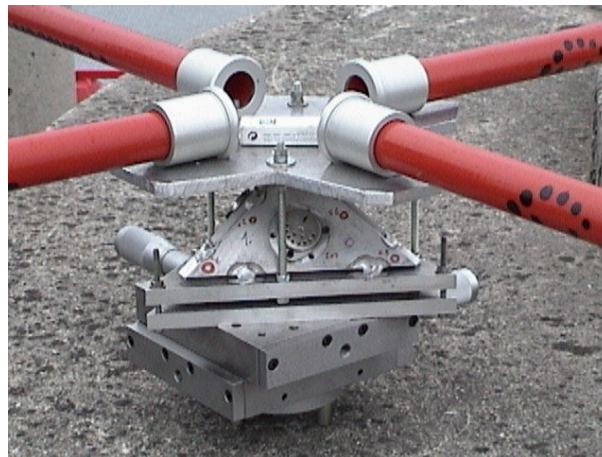


FIG. 3.10 – Photographie de l'ensemble tétraèdre d'accéléromètres et chassis d'antennes réalisée lors de l'étalonnage géométrique à l'ENSG.

Nous avons vu précédemment que les accéléromètres et le numériseur sont sensibles aux variations de température. Une première solution est de mesurer les variations de température grâce aux différents capteurs internes des accéléromètres puis de corriger les mesures à partir de courbes d'étalonnage. La détermination de cette correction peut s'avérer complexe car affectant à la fois les biais et facteurs d'échelle des trois accéléromètres ainsi que le numériseur. Une seconde solution consiste à effectuer les mesures dans un environnement dont la température est maintenue constante. C'est cette dernière que nous avons choisie.

Les accéléromètres et la chaîne d'acquisition (convertisseurs courant/tension et numériseur) sont placés à l'intérieur d'une enceinte calorifugée et thermorégulée par un système de chauffage. Le système d'alimentation est formé de batteries d'accumulateurs placées à l'extérieur du boîtier isotherme. Les récepteurs GPS ainsi que l'ordinateur recevant les données acquises sont placés à l'extérieur de l'enceinte thermorégulée auquel ils sont reliés via des câbles, généralement à l'abri dans le véhicule (fig. 3.11).

Il convient de noter que le dispositif de régulation de la température ne comprend qu'un élément chauffant (résistance chauffante). Le refroidissement de l'enceinte ne peut donc être contrôlé.



FIG. 3.11 – Montages possibles sur véhicule terrestre ou marin réalisés avec le système Limo-G.

3.2 ÉTALONNAGE DE LA CHAÎNE DE MESURE DES ACCÉLÉRATIONS

Le but de cet étalonnage est de déterminer la relation liant la valeur de l'accélération mesurée le long de l'axe sensible d'un accéléromètre à son image numérique codée sur 24 bits comprise entre 0 et $2^{24} - 1 = 16\,777\,215$. L'étalonnage du constructeur ne peut être exploité puisqu'il ne concerne que l'intensité du courant de sortie des accéléromètres. D'autre part, les courbes d'étalonnage (fig. 3.3) ont été déterminées à partir d'une dizaine de points de mesures entre -50°C et $+100^{\circ}\text{C}$, ce qui est beaucoup trop large par rapport à la gamme de température où le système va être employé.

Nous allons donc décrire la procédure d'étalonnage des accéléromètres que nous avons mise en œuvre lors d'une manipulation en février 2005 à l'ESGT.

3.2.1 Description de la chaîne d'acquisition et fonction d'étalonnage

Les accéléromètres et le numériseur sont étalonnés indépendamment par les constructeurs. L'objectif ici est d'étalonner l'ensemble de la chaîne d'acquisition du système : accéléromètre, convertisseur courant/tension et numériseur (fig. 3.12).

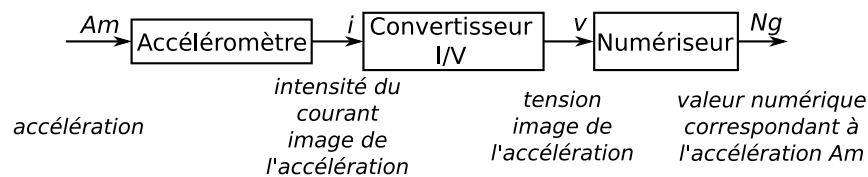


FIG. 3.12 – Schéma de principe de la chaîne d'acquisition d'une accélération. A_m est l'accélération à déterminer et N_g est la valeur numérique en sortie du numériseur. La chaîne comprend donc l'accéléromètre qui fournit le courant d'intensité i , le convertisseur courant/tension fournissant la tension v et le numériseur.

L'étalonnage de la chaîne d'acquisition permet de déterminer une fonction d'étalonnage pour chaque accéléromètre. Cette fonction doit permettre pour chaque accéléromètre, de convertir la valeur numérique N_g obtenue en sortie du numériseur en une accélération A_m , ce qui se traduit mathématiquement par :

$$A_m = f_T(N_g),$$

où f_T désigne la fonction d'étalonnage pour la température T .

3.2.2 Principe de l'étalonnage par autocollimation

La détermination expérimentale de la fonction d'étalonnage nécessite l'acquisition de couples (A_{m_i}, N_{g_i}) , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ de cette dernière, ce qui suppose la connaissance de l'accélération mesurée par l'accéléromètre. Dans ce but, les accéléromètres sont montés sur une plate-forme inclinable à l'aplomb d'un point où la pesanteur g est préalablement connue. Pour une inclinaison d'angle α (fig. 3.13) de la plate-forme

par rapport à la verticale, l'axe géométrique de l'accéléromètre coïncide avec la direction le long de laquelle l'accélération vaut

$$Am = g \cos \alpha. \quad (3.4)$$

L'accéléromètre peut donc ainsi réaliser de façon statique des mesures dans toute la gamme d'accélération $[g \cos \alpha_{max}, g]$ où α_{max} est l'angle d'inclinaison maximal.

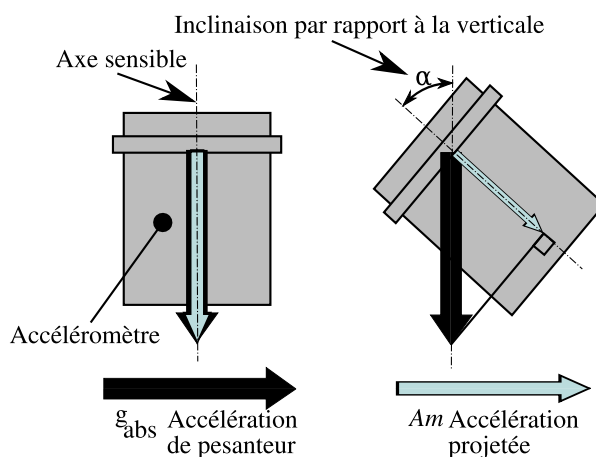


FIG. 3.13 – Inclinaison de l'axe sensible de l'accéléromètre. Dans cette figure, axe sensible et axe géométrique de l'accéléromètre sont supposés confondus.

Cependant, l'axe sensible de l'accéléromètre n'est pas confondu avec son axe géométrique. Si β désigne l'angle entre l'axe géométrique et la projection de l'axe sensible dans le plan vertical (fig. 3.14), la relation (3.4) devient

$$Am = g \cos(\alpha - \beta),$$

et ce défaut d'alignement est estimé inférieur à 1 *mrad* par le constructeur (tab. 3.1).

L'accélération de référence Am , peut donc être calculée connaissant l'inclinaison de l'accéléromètre. Cette dernière doit être mesurée avec précision telle que la précision résultante sur l'accélération Am soit inférieure à la résolution des accéléromètres soit un milligal. J'utilise dans ce but une méthode optique dite d'autocollimation.

L'autocollimation est une méthode permettant de déterminer la position du foyer d'un système optique. Elle nécessite, en plus du système, l'utilisation d'un miroir plan et d'une source ponctuelle de lumière. Le système optique utilisé ici est la lunette d'un théodolite. Dans cette lunette, une source lumineuse projette l'image du réticule à l'infini sur un miroir qui renvoie cette image au foyer de la lunette si cette dernière est bien réglée (observation au foyer) et si le miroir visé est perpendiculaire à l'axe optique de la lunette, c'est-à-dire lorsque l'axe optique du miroir est parallèle à celui de la lunette. Dans ce cas, le réticule et son image sont parfaitement confondus dans la lunette de visée du théodolite. Une fois la visée d'autocollimation réalisée, la lecture de l'angle zénithal Dz sur le théodolite permet de déterminer l'inclinaison du miroir visé (fig. 3.14).

La relation entre l'angle α d'inclinaison du miroir par rapport à la verticale de la distance zénithale mesurée au théodolite est donnée par :

$$\alpha = \pi - Dz$$

d'où il vient

$$\begin{aligned} Am &= g \cos(\pi - Dz - \beta) \\ &= -g \cos(Dz + \beta), \end{aligned} \quad (3.5)$$

et par là-même, il est possible d'établir la relation d'erreur σ_{Am} sur l'accélération Am et l'erreur σ_{Dz} sur la distance zénithale :

$$\sigma_{Am} = g |\sin(Dz + \beta)| \sigma_{Dz}. \quad (3.6)$$

La précision nominale du théodolite est de 10^{-4} gr soit $0.324''$ ou 1.571×10^{-6} rad, $1.571 \mu\text{rad}$. L'erreur maximale sur l'accélération Am est donc de

$$\begin{aligned} \sigma_{Am}^{max} &= 10 \times 1.571 \times 10^{-6} m/s^2 \\ &= 1.571 mGal \end{aligned}$$

Il n'est donc pas possible d'obtenir une précision d'un milligal avec une seule mesure d'autocollimation. Le nombre n_{obs}^{min} minimum d'observations à réaliser, en supposant que les mesures successives sont indépendantes est donc tel que :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{Am}^{max}}{\sqrt{n_{obs}^{min}}} &\leq 1 mGal \\ n_{obs}^{min} &\geq \left(\frac{1.571}{1}\right)^2 = 2.5 \\ \text{soit } n_{obs}^{min} &= 3. \end{aligned}$$

En pratique, nous verrons que le nombre de mesures d'autocollimation réalisées pour une inclinaison donnée n'a jamais été inférieure à 10, ce qui conduit à une précision nominale sur l'accélération Am de 0.5 mGal.

3.2.3 Protocole expérimental et mesures

Les trois accéléromètres du système accélérométrique sont étalonnés en une seule manipulation. Ils sont montés sur une même plateforme inclinable placée à l'intérieur d'une enceinte thermorégulée (fig. 3.15). Afin de pouvoir mesurer l'inclinaison des accéléromètres par celle de la plateforme, cette dernière est équipée d'un miroir excentré pour permettre des mesures d'autocollimation.

Une première étape consiste à rendre les axes géométriques des trois accéléromètres parallèle à l'axe optique du miroir sur lequel l'autocollimation est réalisée. Cette étape nécessite une lunette nadiro-zénithale (fig. 3.15) dont l'axe optique est préalablement verticalisé par un nivellement de la lunette.

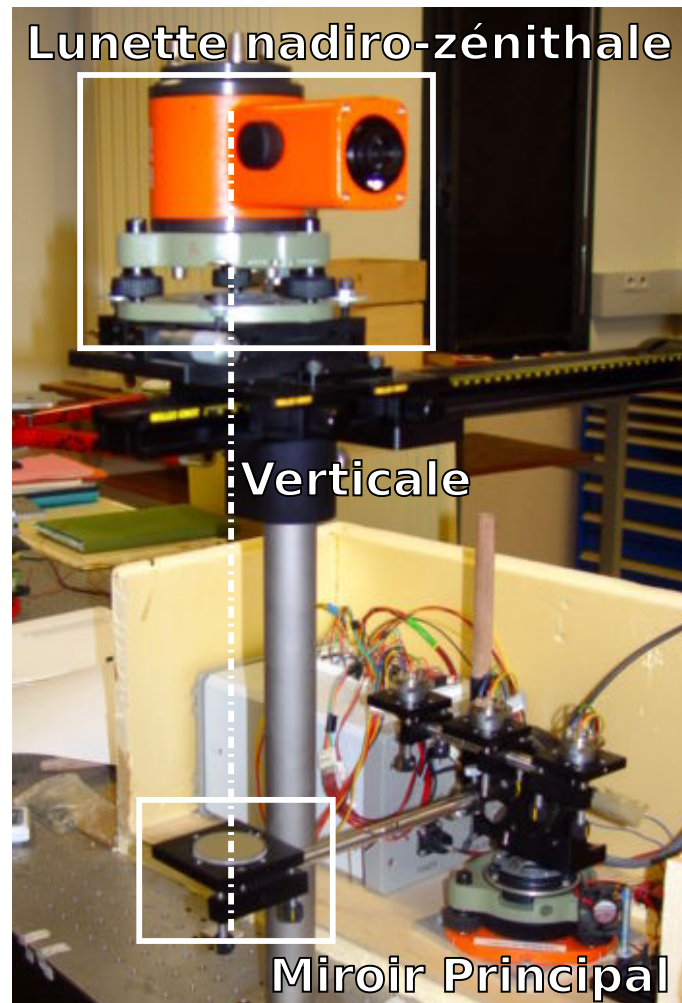


FIG. 3.15 – Vue du montage de la lunette nadiro-zénithale permettant de verticaliser l'axe optique du miroir principal. Ce dernier est lié à la plate-forme supportant les trois accéléromètres dans l'enceinte thermorégulée qui est ouverte sur cette vue.

L'autocollimation à l'aide de la lunette nadiro-zénithale est réalisée tout d'abord sur le miroir excentré. Il n'est pas possible de verticaliser directement les accéléromètres par une visée d'autocollimation. Aussi, la méthode employée ici revient à horizontaliser la face d'appui des miroirs dont la normale coïncide avec l'axe géométrique de l'accéléromètre. Dans ce but, chaque accéléromètre est monté sur un support optique orientable par trois vis (fig. 3.16). L'orientation du support est réglée en remplaçant chaque accéléromètre par un miroir dont la verticalité est obtenue par autocollimation à l'aide de la lunette nadiro-zénithale.

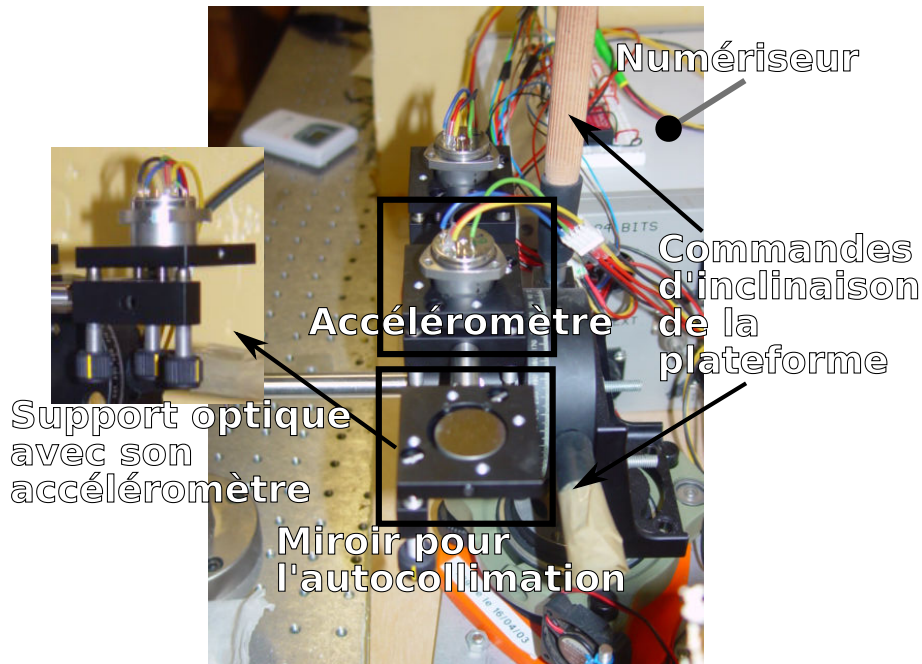


FIG. 3.16 – Vue du montage des accéléromètres sur leur support. Le premier support présente le miroir utilisé afin de réaliser la mesure d'autocollimation nécessaire pour horizontaliser le support optique qui contiendra l'accéléromètre.

Chaque accéléromètre est alors replacé sur son support sans modification de l'orientation de ce dernier. Ainsi, l'axe géométrique de chaque accéléromètre est-il rendu parallèle à celui du miroir excentré. L'inclinaison mesurée grâce au miroir déporté est donc identique à celle des axes géométriques des accéléromètres.

Les mesures d'inclinaison réalisées par autocollimation sur le miroir excentré sont effectuées à l'aide du théodolite (a) monté sur trépied (fig. 3.17). Cette figure montre l'enceinte thermorégulée (c), le miroir excentré (b) solidaire de la plateforme sur laquelle l'autocollimation est réalisée ainsi que les commandes déportées qui permettent d'incliner la plate-forme.

La procédure d'étalonnage a été réalisée sur une durée de trois jours. Différentes inclinaisons entre les angles zénithaux Dz extrêmes 109° et 140° ont été observées (tab. 3.6, Annexe E). Cette restriction est due à la géométrie de l'enceinte dont la hauteur limite la rotation de la plate-forme et à l'élévation maximale du théodolite sur son trépied pour les distances zénithales faibles. Une vingtaine de mesures de l'angle zénithal Dz associées à chaque inclinaison est effectuée par autocollimation sur le miroir principal. Ces mesures sont réalisées avec repointage et

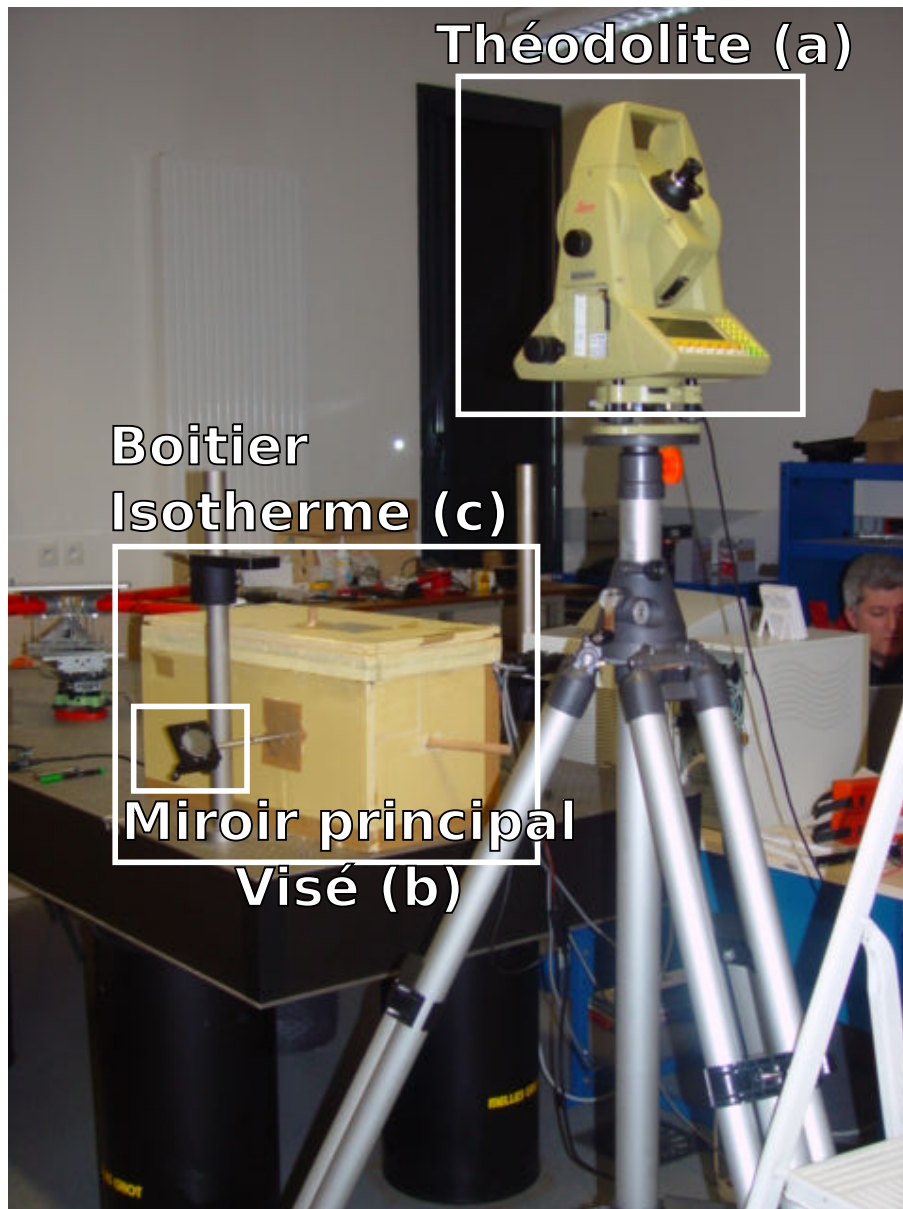


FIG. 3.17 – Vue illustrant la mesure d'inclinaison des accéléromètres. Le théodolite (a) monté sur trépied et positionné sur l'axe optique du miroir visé (b) par autocollimation mesure son inclinaison. Cette inclinaison est identique à celle des accéléromètres dans le boîtier isotherme (c).

double retournement du théodolite afin de limiter les erreurs systématiques, notamment l'erreur de tourillonnement. L'écart-type de la moyenne des mesures de l'angle zénithal reste inférieur à 3 dmgr soit 4 μ rad ce qui est supérieur à l'erreur nominale (1.1571 μ rad, §3.2.2) d'un facteur 2.5. Par (3.6) et les valeurs extrêmes de Dz , l'écart-type de la mesure de l'accélération imposée Am se situe entre 2.9 mGal et 4.3 mGal.

Durant ces mesures, la chaîne d'acquisition des accélérations enregistre la valeur numérique Ng en sortie du numériseur. La fréquence d'échantillonnage de l'accélération par le numériseur étant bien plus élevée que celle de l'inclinaison par théodolite, les données d'accélération sont bien plus nombreuses. Afin de ne pas avoir de données redondantes, et pour augmenter la précision des mesures, chaque mesure d'inclinaison est associée à un ensemble de 80 mesures d'accélérations réparties autour de l'instant de la mesure au théodolite, après resynchronisation des données, soit 40 mesures avant et après une mesure d'autocollimation. Ces 80 mesures sont prises sur un intervalle de temps de 2.56 s pour une fréquence d'échantillonnage du numériseur de 32.25 Hz ; le recouvrement est alors impossible car les mesures d'inclinaison sont espacées d'au moins 8 secondes. Ainsi, est-il possible d'effectuer l'analyse statistique des mesures numérisées des accéléromètres avec la numérisation du Titan.

Nous observons qu'en moyenne, l'écart-type d'une mesure accélérométrique est de l'ordre de 40 *unités numériques* (tab. 3.6), soit un écart-type sur une moyenne de 80 mesures de 4.47 *unités numériques*. Cette précision peut être encore accrue car chaque inclinaison est mesurée une vingtaine de fois. Ainsi, c'est un ensemble d'approximativement 1200 mesures qui permettent d'atteindre une précision de 1.15 *unités numériques* pour la moyenne soit un écart-type de 0.10 mGal, étant donnée la résolution du numériseur décrit précédemment.

À présent, nous connaissons pour chaque inclinaison, l'accélération Am imposée ainsi que la valeur numérisée Ng correspondant à cette accélération et leurs précisions σ_{Am} et σ_{Ng} . Il est alors possible de déterminer la fonction d'étalonnage permettant de lier ces grandeurs.

3.2.4 Estimation de la fonction d'étalonnage

Selon les recommandations du constructeur, la fonction d'étalonnage pour une température donnée est une fonction polynôme. Puisque la température est contrôlée dans l'enceinte des accéléromètres, et la plage des mesures restreinte à trois températures de fonctionnement rapprochées, nous choisissons un polynôme de degré 1 selon le modèle

$$f_T(N_g) = b + kN_g$$

où b et k sont respectivement le biais et le facteur d'échelle de la fonction d'étalonnage. Le même raisonnement est effectué sur chacun des accéléromètres.

Soient b^0 , k^0 et β^0 les premières approximations des paramètres b , k et β respectivement alors, pour chaque observation (Dz_i, Ng_i) , la fonction d'étalonnage s'écrit

$$g_{abs} \cos(Dz_i + \nu_{Dz_i} + \beta^0 + \Delta\beta) + (b^0 + \Delta b) + (k^0 + \Delta k)(Ng_i + \nu_{Ng_i}) = 0, \quad (3.7)$$

Jour 1		9 février 2005
Mesures d'inclinaison		
Nombre d'inclinaisons		16
Nombre de mesures par inclinaison		[[10, 17]]
Angles zénithaux (gr)		[131.21,153.53]
Écart-type par mesure (mgr)		[0.3,1.3]
Accélération associée A_m (mGal)	[461 819.76,729 120.50]	
Écart-type d'accélération (mGal)		[4.27,17.49]
Acquisition Numériseur		
Nombre de mesures par angle		[[800, 1360]]
Écart-type par mesure (<i>unités</i>)		[5.30,108.68]
Jour 2		10 février 2005
Mesures d'inclinaison		
Nombre d'inclinaisons		25
Nombre de mesures par inclinaison		[[13, 21]]
Angles zénithaux (gr)		[121.18,156.60]
Écart-type par mesure (mgr)		[0.2,1.1]
Accélération associée A_m (mGal)	[320 451.92,735 155.39]	
Écart-type d'accélération (mGal)		[3.04,14.27]
Acquisition Numériseur		
Nombre de mesures par angle		[[1040, 1680]]
Écart-type par mesure (<i>unités</i>)		[23.07,60.54]
Jour 3		11 février 2005
Mesures d'inclinaison		
Nombre d'inclinaisons		16
Nombre de mesures par inclinaison		[[14, 17]]
Angles zénithaux (gr)		[109.07,153.40]
Écart-type par mesure (mgr)		[0.5,5.4]
Accélération associée A_m (mGal)	[432 474.39,729 656.50]	
Écart-type d'accélération (mGal)		[6,.94,56.11]
Acquisition Numériseur		
Nombre de mesures par angle		[[1120, 1360]]
Écart-type par mesure (<i>unités</i>)		[2.49,78.76]

TAB. 3.6 – Récapitulatif des mesures effectuées durant les trois jours d'étalonnage. Pour le premier jour, 16 mesures d'inclinaisons ont été réalisées avec pour chaque inclinaison, entre 10 et 17 mesures d'autocollimation. L'angle zénithal mesuré varie de 131.21 gr à 153.53 gr pour un écart-type par mesure de 0.3 à 1.3 mgr. Pour ces inclinaisons, l'accélération suivant l'axe géométrique est comprise entre 461 819.76 et 729 120.50 mGal pour un écart-type compris entre 4.27 à 17.49 mGal. La sortie du numériseur, pour pour chaque inclinaison, enregistre donc entre 800 et 1360 mesures pour un écart-type de 5.30 à 108.68 unités numériques. La même lecture du tableau peut être faite pour les jours 2 et 3.

où, v_{Dz_i} et v_{Ng_i} correspondent respectivement aux résidus sur les observations Dz_i et Ng_i et Δb , Δk , $\Delta\beta$ les corrections à appliquer aux paramètres approchés b^0 , k^0 et β^0 . En ne conservant que les termes du premier ordre de l'équation (3.7), nous obtenons

$$g_{abs} \cos(Dz_i + \beta^0) - g_{abs} \sin(Dz_i + \beta^0)v_{Dz_i} - g_{abs} \sin(Dz_i + \beta^0)\Delta\beta + b^0 + \Delta b + k^0 Ng_i + Ng_i \Delta k + k^0 v_{Ng_i} = 0. \quad (3.8)$$

Cette relation peut être exprimée sous forme matricielle en posant

$$A = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & Ng_i & -g_{abs} \sin(Dz_i + \beta^0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} \Delta b \\ \Delta k \\ \Delta\beta \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} -g \sin(Dz_1 + \beta^0) & (0) & k^0 & (0) \\ & \ddots & & \ddots \\ (0) & & -g \sin(Dz_N + \beta^0) & (0) & k^0 \end{bmatrix},$$

$$V = \begin{bmatrix} v_{Dz_1} \\ \vdots \\ v_{Dz_N} \\ v_{Ng_1} \\ \vdots \\ v_{Ng_N} \end{bmatrix}$$

et $W = \begin{bmatrix} \vdots \\ g_{abs} \cos(Dz_i + \beta^0) + b^0 + k^0 Ng_i \\ \vdots \end{bmatrix}$

Ainsi, l'équation (3.8) peut-elle être écrite sous la forme matricielle

$$W + BV + AX = 0$$

Les termes b et k peuvent être estimés par moindres carrés mixtes en minimisant la forme quadratique

$$\Phi(V, \Lambda, X) = V^T P V - 2\Lambda^T (W + BV + AX)$$

où P est la matrice de poids des observations et Λ le vecteur des multiplicateurs de Lagrange. La solution peut être aisément déterminée en utilisant les relations suivantes (LEICK 1990, annexe F),

$$\begin{aligned} \hat{X} &= -(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W \\ \hat{\Lambda} &= -M^{-1} (W + AX) \\ \hat{V} &= P^{-1} B^T \Lambda, \end{aligned}$$

où M est une matrice de pondération déduite de la matrice de poids P issue des variances des mesures Dz_i et Ng_i (FOTOPOULOS 2005) et B par

$$M = (BP^{-1}B^T) \text{ avec}$$

$$P^{-1} = C_v = \begin{bmatrix} \sigma_{v_{Dz_1}}^2 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \sigma_{v_{Dz_N}}^2 & & & \\ & & & \sigma_{v_{Ng_1}}^2 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & \sigma_{v_{Ng_N}}^2 \end{bmatrix} \cdot$$

où σ_{Dz_i} et σ_{Ng_i} pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ sont respectivement les écarts-types sur les mesures d'angles zénithaux et les valeurs numérisées d'accélération obtenues selon la méthode §3.2.3.

La matrice de variances-covariances des paramètres C_x peut être calculée par

$$C_x = \sigma_0^2 (A^T M^{-1} A)^{-1},$$

$$\text{où } \hat{\sigma}_0^2 = \frac{\hat{V}^T P \hat{V}}{N - 3}$$

représente le facteur unitaire de variance de l'estimation.

Le calcul des paramètres b, k, β est réalisé par un processus itératif à partir d'une solution arbitraire (b^0, k^0, β^0) qui est arrêté lorsque le critère suivant est vérifié

$$|(V^T PV)^{(k)} - (V^T PV)^{(k-1)}| < \epsilon$$

où $(V^T PV)^{(k)} - (V^T PV)^{(k-1)}$ représente la différence entre la somme des carrés des résidus pondérés entre les itérations k et $k-1$.

Les résultats obtenus pour les trois jours de mesures sont reportés dans la table 3.7 pour trois températures de travail différentes (24.8°C pour le premier jour, 31°C pour le deuxième et 23°C pour le troisième).

Les résultats de cet étalonnage confirment la dépendance en température du biais et du facteur d'échelle pour l'ensemble des trois accéléromètres. Les valeurs estimées du défaut d'alignement de l'axe sensible projeté sur le plan vertical sont sensiblement supérieures à celle annoncée par le constructeur (un milliradian), ce qui indique que ce paramètre doit être systématiquement estimé. Les incertitudes importantes sur les estimations du biais et du facteur d'échelle résultent au moins en partie de la gamme limitée d'angles d'inclinaison (de 105° à 160° par pas de 1° environ).

En conséquence, pour atteindre une précision compatible avec celle des accéléromètres (un milligal), le dispositif d'étalonnage doit être modifié pour permettre l'exploitation d'une gamme beaucoup plus large d'angles d'inclinaison, idéalement sur le cercle complet.

		b	k	β	σ_b	σ_k	σ_β	σ_0^2
		mGal	mGal/10 ⁶	mrad	mGal	mGal/10 ⁶	mrad	
Jour 1	acc. 1	-29979.79	237431.37	-0.38	163.48	24.07	0.13	1.29
	acc. 2	-29820.51	237216.20	-0.35	48.94	6.59	0.04	1.57
	acc. 3	-28438.74	237183.21	-4.18	148.48	20.88	0.12	0.61
413 valeurs	acc. 1	-32706.67	235850.52	1.40	168.78	24.69	0.13	1.38
	acc. 2	—	—	—	—	—	—	—
	acc. 3	-28267.61	237882.56	1.65	157.02	22.32	0.13	0.69
195 valeurs	acc. 1	-31110.72	237593.99	-5.82	152.32	22.27	0.12	1.11
	acc. 2	-30436.19	237350.02	-5.40	46.87	6.26	0.04	1.43
	acc. 3	-29864.74	235005.66	3.71	155.80	21.92	0.13	0.68

TAB. 3.7 – Résultats de l'estimation par moindres carrés mixtes des paramètres de la fonction d'étalonnage. Le second accéléromètre a été déconnecté le second jour.

3.3 ORIENTATION DES MESURES ACCÉLÉROMÉTRIQUES

3.3.1 Objectif

L'objectif de cet étalonnage est d'obtenir la matrice de passage C_s^b du référentiel de l'instrument (s-frame) au référentiel du véhicule (b-frame). Deux méthodes différentes sont présentées ici.

La première méthode dite *géométrique* est basée sur des mesures de topométrie de précision et de mesures GPS. Cet étalonnage permet d'orienter les axes géométriques des accéléromètres à l'aide de mesures externes effectuées sur le tétraèdre supportant les accéléromètres. Le traitement de cet étalonnage géométrique est basé sur les mesures GPS et topométriques réalisées sur le système en 2004 (MELACHROINOS 2004).

La seconde méthode dite *gravimétrique* repose sur des mesures statiques réalisées à l'aide du système complet, monté dans son enceinte thermorégulée, en un point où la pesanteur est connue tout en contrôlant l'attitude du dispositif. Cet étalonnage permet de déterminer l'orientation des axes sensibles des accéléromètres.

3.3.2 Étalonnage géométrique du système Limo-G

Dispositif de mesure et protocole expérimental

Le dispositif nécessaire à la réalisation de cet étalonnage est installé sur le toit de l'École Nationale des Sciences Géographiques (fig. 3.18). Il consiste en huit piliers géodésiques équipés d'une embase leur permettant d'accueillir indifféremment une antenne GPS ou un tachéomètre. De plus, un neuvième pilier plus massif sert de support à l'antenne de la station GPS permanente de Marne-La-Vallée (MLVL) intégrée dans le Réseau GPS Français de l'IGN.



FIG. 3.18 – Vue du chantier pour les mesures GPS et de topométrie.

La première étape du protocole expérimental a consisté à enregistrer les données GPS de sept récepteurs, dont les antennes avaient été préalablement installées sur les huit piliers géodésiques, conjointement aux données GPS du récepteur ADU2 à une fréquence de 1 Hz sur une durée de trente minutes à une heure. Toutes les

données ainsi acquises devaient permettre le positionnement relatif des quatre antennes de l'ADU2 par rapport aux sept des huit antennes installées sur les piliers et à l'antenne de la station MLVL.

La deuxième étape du protocole expérimental est directement inspirée de techniques de topométrie de précision. L'idée de cette méthode consiste à déterminer les coordonnées des vecteurs normaux aux faces du tétraèdre à partir des équations du plan des faces du tétraèdre estimées à partir de cinq points répartis sur chacune des faces.

Pour ce, des mesures d'angles et distances ont été réalisées à partir des huit piliers précédemment équipés d'antennes GPS sur 15 points répartis sur les trois faces à raison de cinq points par face à l'aide d'un tachéomètre (fig. 3.19).

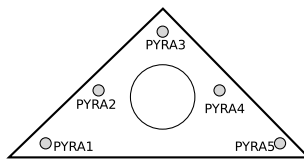


FIG. 3.19 – Schéma de la face A avec les cinq cibles associées à cette face.

Les mesures d'angles ont été référencées sur trois points éloignés et ont consisté en plusieurs visées successives incluant le double retournement du tachéomètre pour corriger l'erreur systématique de tourbillonnement.

Enfin, des mesures de contrôle de l'orientation des axes géométriques des faces du tétraèdre ont pu être réalisées sur deux des trois faces du tétraèdre en remplaçant les accéléromètres par des miroirs pour permettre des visées d'autocollimation.

Traitement des données GPS

Étape 1 Positionnement des huit piliers.

Dans une première étape, les huit piliers ont été positionnés par un traitement des données GPS en mode différentiel en utilisant la station MLVL pour pivot (fig. 3.20).

Les calculs ont été réalisés à l'aide du logiciel LEICA GEO OFFICE 1.1.0.0. Étant donné la faible longueur des sept lignes de base (quelques mètres) et la durée d'observation (30 minutes à 1 heure), les précisions obtenues sur les coordonnées sont de l'ordre du centimètre après ajustement à l'aide de MICROSEARCH GEOLAB 2001.9.20.0 (tab. 3.8).

Étape 2 Positionnement des quatre antennes de l'ADU2.

Dans une deuxième étape, les quatre antennes du récepteur ADU2 ont été positionnées par le même traitement en utilisant cette fois-ci sept des huit piliers comme pivots. Les coordonnées des 14 lignes de base joignant chaque pilier à deux antennes (fig. 3.21) ont donc pu être estimées au cours de cette étape. De part la redondance des observations, les coordonnées géographiques des centres de phase des quatre antennes de l'ADU2 données CAL1, CAL2, CAL3 et CAL4 ont

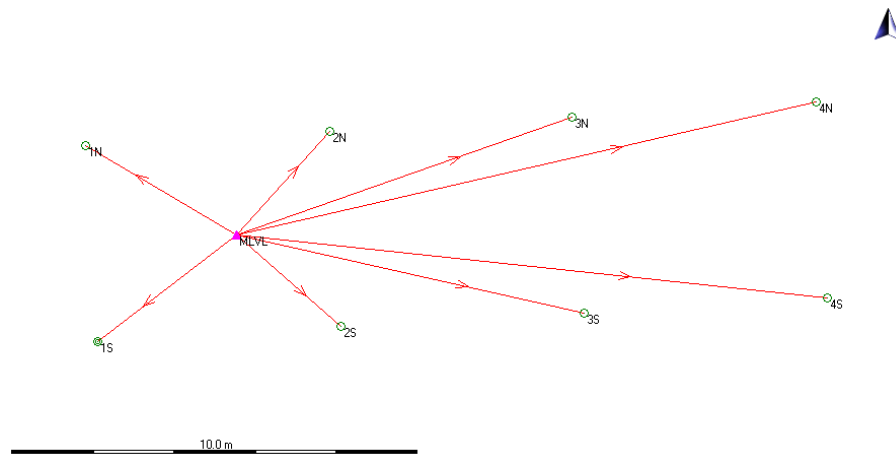


FIG. 3.20 – Schéma représentant les huit lignes de base dont les coordonnées ont été estimées lors du traitement GPS.

Station	Latitude	Longitude	Hauteur
Station	écart-type	écart-type	écart-type
1N	N 48° 50' 27.8689"	E 2° 35' 14.1244"	160.526 m
	0.0006"	0.0006"	0.002 m
1S	N 48° 50' 27.7135"	E 2° 35' 14.1397"	160.753 m
	0.0007"	0.0006"	0.002 m
2N	N 48° 50' 27.8811"	E 2° 35' 14.4185"	160.548 m
	0.0005"	0.0004"	0.002 m
2S	N 48° 50' 27.7263"	E 2° 35' 14.4332"	160.562 m
	0.0005"	0.0004"	0.002 m
3N	N 48° 50' 27.8933"	E 2° 35' 14.7111"	160.583 m
	0.0005"	0.0004"	0.002 m
3S	N 48° 50' 27.7381"	E 2° 35' 14.7264"	160.757 m
	0.0004"	0.0004"	0.002 m
4N	N 48° 50' 27.9061"	E 2° 35' 15.0047"	160.657 m
	0.0008"	0.0006"	0.002 m
4S	N 48° 50' 27.7509"	E 2° 35' 15.0196"	160.650 m
	0.0008"	0.0006"	0.002 m
MLVL (fixe)	N 48° 50' 27.7981"	E 2° 35' 14.3073"	160.484 m
	0.0000"	0.0000"	0.000 m

TAB. 3.8 – Coordonnées des huit piliers géodésiques dans le système RGF93 obtenues à partir d'un traitement GPS en mode différentiel avec la station MLVL pour pivot. La station MLVL est la référence fixe et son incertitude est imposée nulle. Les écarts-types sur la position des piliers 1N à 4S sont de quelques millimètres en hauteur et dixièmes de millisecondes d'arc soit quelques millimètres en horizontale.

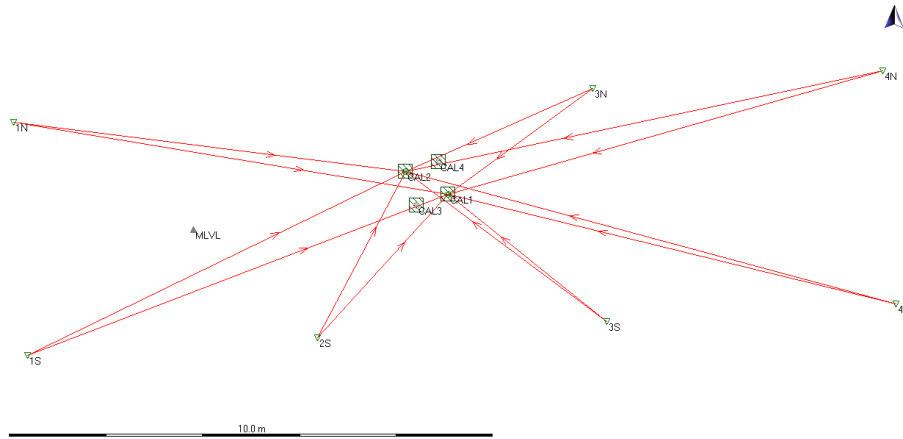


FIG. 3.21 – Schéma représentant les 14 lignes de base utilisées pour l'estimation de la position du centre de phase des antennes lors du traitement GPS.

Antenne	Latitude écart-type	Longitude écart-type	Hauteur écart-type
CAL1	N 48° 50' 27.82213" 0.00042"	E 2° 35' 14.56671" 0.00032"	160.901 m 0.001 m
CAL2	N 48° 50' 27.83689" 0.00042"	E 2° 35' 14.52277" 0.00035"	160.896 m 0.001 m
CAL3	N 48° 50' 27.81484" 0.00044"	E 2° 35' 14.53340" 0.00034"	160.899 m 0.001 m
CAL4	N 48° 50' 27.84376" 0.00045"	E 2° 35' 14.55615" 0.00036"	160.900 m 0.001 m

TAB. 3.9 – Coordonnées géographiques dans le système RGF93 des centres de phase des quatre antennes de l'ADU2 déterminées par moindres carrés à l'aide du logiciel MICROSEARCH GEOLAB 2001.9.20.0.

pu être estimées par moindres carrés en utilisant le logiciel MICROSEARCH GEOLAB 2001.9.20.0 (tab. 3.9).

Puis, ces coordonnées ont été converties en coordonnées planes dans une projection conique, conforme de Lambert locale pour laquelle la station MLVL a pour coordonnées (E=5000.000 m, N=10000.000 m). Chaque point CAL est donc repéré par les coordonnées (E,N,h) dans un référentiel local appelé *l-frame* (tab. 3.10).

Antenne	E écart-type (m)	N écart-type (m)	h écart-type (m)
CAL1	5000.44028 0.00036	9999.77300 0.00031	160.877 0.001
CAL2	4999.55389 0.00036	10000.23019 0.00031	160.877 0.001
CAL3	4999.76599 0.00039	9999.55202 0.00026	160.878 0.001
CAL4	5000.22917 0.00039	10000.43472 0.00027	160.876 0.001

TAB. 3.10 – Coordonnées des centres de phase des quatre antennes de l'ADU2 dans une projection de Lambert locale.

Étape 3 Estimation de la matrice de passage C_b^l du référentiel local au référentiel du véhicule.

Le référentiel du véhicule (*b-frame*) a donc pu être construit à partir des antennes CAL1, CAL2 et CAL4 avec les conventions suivantes :

1. le point CAL1 est pris comme origine du système ; les points CAL1 et CAL2 forment l'axe longitudinal du référentiel repéré par le vecteur unitaire u_y ;
2. le vecteur unitaire u_z est construit normal au plan formé par les points CAL1, CAL2 et CAL4 ;
3. le vecteur u_x complète les vecteur u_y et u_z afin que la base (u_x, u_y, u_z) soit directe.

Ainsi, la base (u_x, u_y, u_z) forme une base orthonormée directe.

Si V_{CAL1} , V_{CAL2} et V_{CAL4} désignent les vecteurs contenant les coordonnées (E,N,h) des points CAL1, CAL2 et CAL4 respectivement, alors, il vient :

$$\begin{aligned}
 u_y^l &= \frac{V_{CAL2} - V_{CAL1}}{\|V_{CAL2} - V_{CAL1}\|}, \\
 u_z^l &= \frac{(V_{CAL4} - V_{CAL1}) \wedge u_y^l}{\|(V_{CAL4} - V_{CAL1}) \wedge u_y^l\|}, \\
 u_x^l &= u_y^l \wedge u_z^l.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

La matrice 3×3 dont les colonnes sont constituées par les coordonnées des vecteurs u_x , u_y et u_z dans le référentiel local correspond à la matrice de passage

C_b^l :

$$\begin{aligned} C_b^l &= [x^l \ y^l \ z^l] \\ &= \begin{bmatrix} 0.45840 & -0.88874 & 0.00095 \\ 0.88874 & 0.45840 & 0.00135 \\ -0.00163 & 0.00023 & 1.00000 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Cette matrice étant orthogonale par construction, il résulte :

$$\begin{aligned} C_l^b &= C_b^{l^{-1}} \\ &= C_b^{lT} \\ &= \begin{bmatrix} 0.45840 & 0.88874 & -0.00163 \\ -0.88874 & 0.45840 & 0.00023 \\ 0.00095 & 0.00135 & 1.00000 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Traitement des mesures de topométrie

Les coordonnées des 15 points ont été déterminées dans le référentiel local par moindres carrés à l'aide du logiciel MICROSEARCH GEOLAB 2001.9.20.0 (tab. 3.11).

Puis, les coordonnées des points PYR ont pu être exprimées dans le référentiel du véhicule (tab.3.12) à l'aide de la relation suivante

$$PYRXY^b = C_l^b PYRXY^l$$

avec $X=A,B,C$ et $Y \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$.

Pour chaque face, un plan d'approximation a été déterminé par son équation à l'aide des cinq points $PYRX_1, PYRX_2, PYRX_3, PYRX_4$ et $PYRX_5$ pour $X=A,B,C$ donnant ainsi les coordonnées des vecteurs unitaires normaux n_A, n_B, n_C aux faces A, B et C respectivement dans le référentiel du véhicule (tab. 3.13). L'ordre des faces a été choisi de sorte que la base orthonormée (n_A, n_B, n_C) soit directe (fig. 3.22).

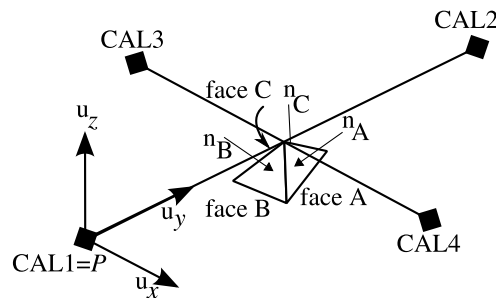


FIG. 3.22 – Schéma du montage du trièdre de faces A, B et C sous le réseau des quatre antennes dont les centres de phase sont CAL1, CAL2, CAL3 et CAL4. Le réseau d'antennes permet de construire le référentiel du véhicule ($CAL1u_xu_yu_z$). La position CAL1 est aussi référencée dans ce manuscrit comme la position P.

Point	E	N	h
	écart-type (m)	écart-type (m)	écart-type (m)
PYRA ₁	5000.052	10000.040	160.757
	0.001	0.001	0.001
PYRA ₂	5000.023	10000.023	160.782
	0.001	0.001	0.002
PYRA ₃	4999.995	10000.004	160.803
	0.001	0.001	0.001
PYRA ₄	4999.966	10000.021	160.780
	0.001	0.001	0.002
PYRA ₅	4999.935	10000.036	160.756
	0.001	0.001	0.001
PYRB ₁	5000.007	9999.923	160.759
	0.001	0.001	0.001
PYRB ₂	5000.007	9999.957	160.784
	0.002	0.001	0.001
PYRB ₃	5000.004	9999.991	160.807
	0.001	0.001	0.001
PYRB ₄	5000.032	10000.007	160.783
	0.001	0.001	0.001
PYRB ₅	5000.060	10000.025	160.760
	0.001	0.001	0.001
PYRC ₁	4999.929	10000.020	160.757
	0.001	0.001	0.001
PYRC ₂	4999.958	10000.004	160.781
	0.001	0.001	0.001
PYRC ₃	4999.987	9999.990	160.804
	0.001	0.001	0.001
PYRC ₄	4999.989	9999.957	160.781
	0.001	0.001	0.001
PYRC ₅	4999.990	9999.922	160.758
	0.001	0.001	0.001

TAB. 3.11 – Coordonnées des points PYR du tétraèdre dans le référentiel local MICROSEARCH GEOLAB 2001.9.20.0.

Point	Composante suivant (m)		
	u_x	u_y	u_z
PYRA ₁	0.060	0.467	-0.120
PYRA ₂	0.032	0.485	-0.096
PYRA ₃	0.001	0.501	-0.074
PYRA ₄	0.003	0.535	-0.098
PYRA ₅	0.002	0.569	-0.121
PYRB ₁	-0.065	0.454	-0.118
PYRB ₂	-0.035	0.469	-0.093
PYRB ₃	-0.006	0.487	-0.071
PYRB ₄	0.021	0.470	-0.094
PYRB ₅	0.050	0.453	-0.118
PYRC ₁	-0.015	0.568	-0.120
PYRC ₂	-0.015	0.534	-0.096
PYRC ₃	-0.015	0.502	-0.073
PYRC ₄	-0.043	0.485	-0.096
PYRC ₅	-0.073	0.468	-0.119

TAB. 3.12 – Coordonnées des points PYR du tétraèdre dans le référentiel du véhicule.

Vecteur normal	Composante suivant (m)		
	u_x	u_y	u_z
n_a^b	-0.70168	-0.40540	-0.58592
n_b^b	0.00156	0.81420	-0.58058
n_c^b	0.70049	-0.41397	-0.58133

TAB. 3.13 – Coordonnées des vecteurs normaux dans le référentiel du véhicule.

La matrice C_s^b s'exprime alors par

$$\begin{aligned} C_s^b &= [n_A^b \ n_B^b \ n_C^b] \\ &= \begin{bmatrix} -0.70168 & 0.00156 & 0.70049 \\ -0.40540 & 0.81420 & -0.41397 \\ -0.58592 & -0.58058 & -0.58133 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

La réunion des vecteurs n_A , n_B et n_C dans la base (n_A, n_B, n_C) constitue notre approximation de la base du référentiel de l'instrument ou *s-frame* déterminée par une méthode purement géométrique. Les visées d'autocollimation sur les faces A et C accessibles ont révélées des écarts angulaires entre la normale vraie et son estimation de 3.3 mrad et 7.3 mrad.

L'erreur causée par un écart angulaire θ sur la mesure d'une accélération a est de $a\theta^2/2$. En supposant que l'accéléromètre mesure une accélération égale à la valeur moyenne de la pesanteur terrestre (9.81 m/s^2) et que l'angle entre son axe sensible et son axe géométrique atteint 1 mrad (valeur maximale donnée par le constructeur), on peut estimer que les erreurs maximales causées par des écarts angulaires de 4.4 mrad et 8.3 mrad atteignent respectivement 9 mGal et 34 mGal. De telles erreurs demeurent inacceptables dans l'objectif d'obtenir une précision finale d'un milligal.

De plus, l'amélioration de la précision des coordonnées obtenues par GPS, qui pourrait résulter de raffinements tels l'augmentation de la durée d'observation, l'utilisation d'orbites précises et de paramètres d'antennes absolus ou l'estimation de paramètres troposphériques, ne peut atteindre un facteur 10.

Ces résultats ont suscité la recherche d'une nouvelle méthode de détermination de la matrice de passage C_s^b dont le protocole expérimental n'utilise pas de données de topométrie et limite au maximum les données externes au système.

3.3.3 Étalonnage gravimétrique du système de mesure

Dispositif et protocole expérimental

Comme précédemment, l'étalonnage est statique, c'est-à-dire que les mesures sont effectuées en inclinant l'accéléromètre au-dessus d'un point où la pesanteur a été préalablement mesurée. Le dispositif est maintenant utilisé dans sa configuration de travail avec le système ADU2 et les accéléromètres montés sur leur pyramide et placés dans l'enceinte thermorégulée. L'inclinaison des accéléromètres est déterminée par l'attitude du véhicule mesurée par le récepteur quatre antennes qui permet de déterminer la matrice de passage C_n^b du référentiel de navigation au référentiel du véhicule. Ainsi, l'équation d'observation qui lie la pesanteur aux mesures des accéléromètres s'exprime mathématiquement par

$$C_s^b a^s = C_n^b g, \quad (3.12)$$

où a^s est la mesure d'accélération le long de l'axe sensible et g le vecteur pesanteur au point de mesure.

Les mesures ont été effectuées pour des positions variées du système de mesure (fig. 3.23), avec des angles de tangage compris entre -48° et 47° et des angles de

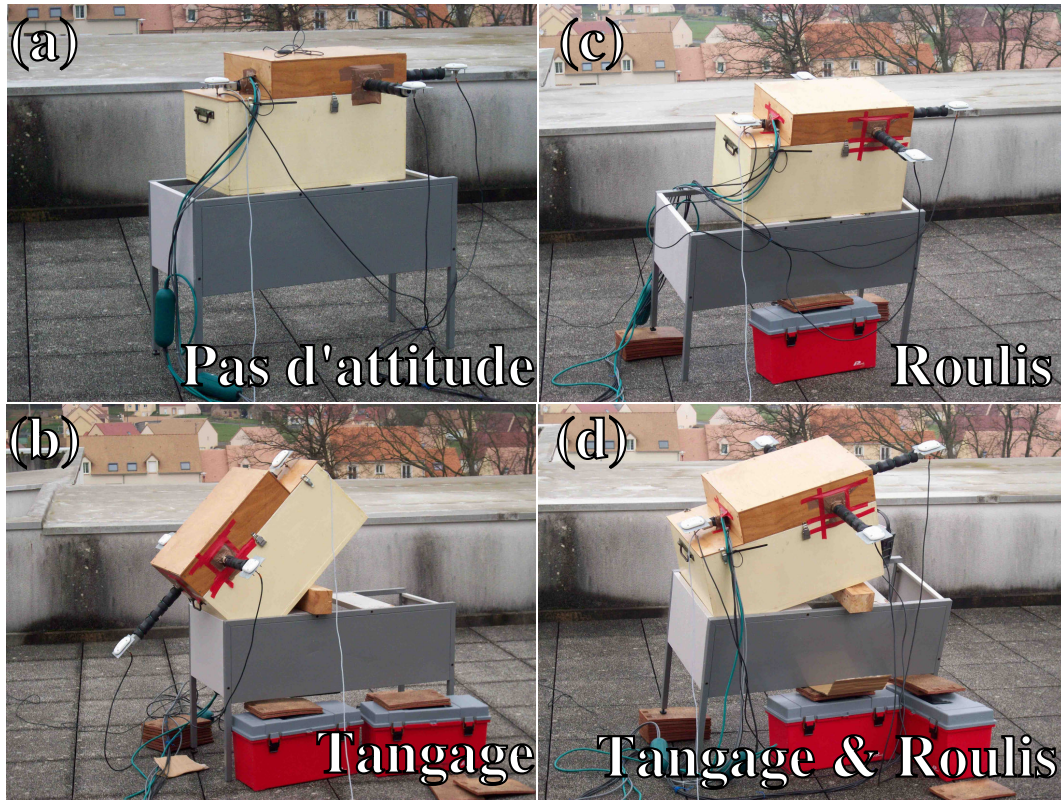


FIG. 3.23 – Vue de quatre positions pour l'étalonnage gravimétrique, sans attitude imposée (a), en présence de tangage (b), en présence de roulis (c) et une dernière avec roulis et tangage (4).

roulis entre -30° et 18° répartis sur 45 mesures distinctes. Chaque position, appelée aussi session statique est déterminée à partir d'enregistrements de dix minutes pour l'attitude et les accélérations, soit approximativement 600 mesures d'attitude et 75 000 mesures d'accélération par session statique.

Traitement des données

Le traitement de ces mesures est réalisé à l'aide d'une résolution par moindres carrés mixtes, comme pour la détermination de la fonction d'étalonnage au chapitre précédent. L'équation d'observation (3.12) peut être écrite pour chaque observation i des accélérations a_{1i}^s , a_{2i}^s et a_{3i}^s déterminées par les sorties du numériseur converties à l'aide des paramètres de l'étalonnage précédent (tab. 3.7), des attitudes (azimuth α , tangage η et roulis χ) aux mêmes instants et de la pesanteur au point de mesure g_{lieu} . Pour chaque observation, la relation liant les accélérations et les attitudes s'écrit

$$C_s^b \begin{bmatrix} a_{1i}^s \\ a_{2i}^s \\ a_{3i}^s \end{bmatrix} = C_n^b(\alpha_i, \eta_i, \chi_i) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g_{lieu} \end{bmatrix},$$

où l'expression de $C_n^b(\alpha_i, \eta_i, \chi_i)$ est donnée au chapitre précédent (2.14). La pesanteur du lieu g_{lieu} a été déterminée par un rattachement gravimétrique effectué en 1999, à l'aide d'un gravimètre relatif Scintrex CG-3M, à une mesure absolue par le gravimètre FG5#206 et déterminée à $980\,852\,737.8 \pm 3.4 \mu\text{Gal}$.

La détermination des neuf éléments de la matrice C_s^b a été effectuée par moindres carrés mixtes (cf. Annexe F), qui, après normalisation, s'écrit

$$C_s^b = \begin{bmatrix} -0.73993 & 0.02195 & 0.67911 \\ -0.37373 & 0.83115 & -0.42423 \\ -0.55931 & -0.55563 & -0.59903 \end{bmatrix}$$

Les écarts d'orientation des axes des accéléromètres déterminés par les deux méthodes d'étalonnage sont de 3.2° pour le premier accéléromètre, 2.1° pour le second et 1.7° pour le troisième.

Ces écarts importants ont des sources diverses. Nous avons mentionné auparavant le défaut d'axe sensible des accéléromètres. Ce défaut rentre dans cet écart, mais étant de l'ordre de quelques milliradians, il ne l'explique pas entièrement. L'écart provient vraisemblablement de la méthode d'étalonnage géométrique utilisée. En effet, cette méthode ne permet d'estimer que l'orientation de l'axe géométrique des accéléromètres par rapport au référentiel de navigation construit sur les centres de phase des antennes 1, 2 et 4 de l'ADU2 tandis que la méthode gravimétrique oriente les axes sensibles des accéléromètres par rapport au référentiel de navigation.

Un dernier paramètre peut encore influencer cet étalonnage. Les mesures effectuées ont été réalisées en février 2008 tandis que les fonctions d'étalonnage ont été déterminés en février 2005. Il est donc possible que ces fonctions ne soient plus valables à cause d'un changement des caractéristiques des composants avec le temps. C'est pourquoi, les mesures précédentes ont été utilisées lors d'une seconde résolution par moindres carrés mixtes, pour déterminer la matrice de passage C_s^b et les biais et facteurs d'échelle des accéléromètres.

Cette seconde estimation permet de déterminer 15 paramètres : les neuf éléments de la matrice de passage, les trois biais des trois accéléromètres et les trois facteurs d'échelle. La nouvelle matrice de passage s'écrit

$$C_s^b = \begin{bmatrix} -0.74042 & 0.02307 & 0.67761 \\ -0.36946 & 0.83094 & -0.42317 \\ -0.56149 & -0.55589 & -0.60147 \end{bmatrix}$$

et les biais et facteurs d'échelle ont aussi été rassemblés dans la table 3.14. L'orientation des axes des accéléromètres reste cohérente avec celle définie précédemment. En effet, l'écart d'orientation est de 0.28° pour le premier accéléromètre, 0.07° pour le deuxième et 0.17° pour le dernier. Comme précédemment, les écarts avec les orientations déterminées à l'aide de l'étalonnage géométrique varient entre 1.8° et 3.4° .

Nous pouvons observer que ces résultats (tab. 3.14) ont un écart-type important qui est dû principalement aux conditions de mesures et à la faible étendue des inclinaisons étudiées et au nombre d'enregistrements exploités.

L'ensemble de ces résultats d'étalonnage indique clairement qu'un étalonnage gravimétrique au début de chaque mission gravimétrique est préférable à un étalonnage géométrique unique, compte-tenu de l'incertitude sur l'orientation des axes sensibles par rapport aux axes géométriques des accéléromètres, d'une part,

	b mGal	k mGal/million	σ_b mGal	σ_k mGal/million
acc. 1	-34759.62	236819.20	1038.49	275.91
acc. 2	-36489.40	236465.97	1439.10	436.01
acc. 3	-32765.71	236618.88	1764.28	503.33

TAB. 3.14 – Résultats de l'estimation par moindres carrés mixtes des paramètres de la fonction d'étalonnage estimée conjointement avec les éléments de la matrice de passage C_s^b .

et d'autre part, sur l'incertitude dans la détermination des paramètres b et k de chaque accéléromètre.

Pour ce, le dispositif doit être placé dans une enceinte maintenue à température constante sur une table orientable à l'aplomb d'un point gravimétrique de référence. La table orientable permet d'imposer différentes attitudes sur une grande étendue d'angles de roulis et de tangage ($\pm 40^\circ$). De plus, l'azimuth du dispositif doit être tel que l'ensemble des quatre antennes de l'ADU2 soit orienté dans la direction où la constellation GPS est la plus riche.

3.4 ÉTUDE DU BRAS DE LEVIER

3.4.1 Objectifs

L'équation (2.16) du chapitre 2 comporte une accélération $M_B B^b$ liée au bras de levier B du système de mesure qui s'exprime par

$$\begin{aligned}
M_B B^b = & [C_e^i \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e C_n^e C_b^n + C_e^i C_n^e \Omega_{en}^n \Omega_{en}^n C_b^n + C_e^i C_n^e C_b^n \Omega_{nb}^b \Omega_{nb}^b \\
& + C_e^i C_n^e \dot{\Omega}_{en}^n C_b^n + C_e^i C_n^e C_b^n \dot{\Omega}_{nb}^b \\
& + 2C_e^i \Omega_{ie}^e C_n^e \Omega_{en}^n C_b^n + 2C_e^i \Omega_{ie}^e C_n^e C_b^n \Omega_{nb}^b + 2C_e^i C_n^e \Omega_{en}^n C_b^n \Omega_{nb}^b] B^b. \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Cette accélération comporte huit termes liés aux coordonnées du bras de levier dans le référentiel du véhicule (b -frame). La présence des matrices de rotation antisymétriques Ω_{ie}^e , Ω_{en}^n et Ω_{nb}^b indique que cette accélération dépend de la rotation de la Terre, du mouvement du véhicule ainsi que de son attitude. Afin d'obtenir une précision de l'ordre du $mGal$ sur la mesure de g , il est indispensable d'estimer les effets du bras de levier sur la mesure. Cette influence est étudiée ici grâce à des simulations afin de déterminer les termes prépondérants.

3.4.2 Amplitude des effets du bras de levier

La simulation sur laquelle s'appuie notre estimation de l'effet de bras de levier est basée sur l'analyse des mesures de position et d'attitude de différentes missions gravimétriques aéroportées (BOEDECKER et al. 1995; BRUTON 2000; DUQUENNE et al. 2003).

L'attitude du véhicule est tout d'abord définie par les équations donnant respectivement l'évolution du lacet α , du tangage χ et du roulis η donnée ci-après

$$\begin{aligned} \text{lacet } \alpha &= 0.050(1 + b(t)) \cos(2\pi t/40), \\ \text{tangage } \chi &= 0.005(1 + b(t)) \cos(2\pi t/15), \\ \text{roulis } \eta &= 0.050(1 + b(t)) \cos(2\pi t/40 + \pi/4), \end{aligned} \quad (3.14)$$

où b est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et d'écart-type égal à $1/15^{\text{eme}}$ de l'amplitude de l'angle d'attitude correspondant, afin de simuler les perturbations atmosphériques. Ce modèle synthétique n'est valable que pour des trajectoires réelles proches de trajectoire rectiligne.

Le tableau 3.15 présente les résultats du calcul des amplitudes des termes de bras de levier pour une mission gravimétrique aéroportée dans un avion volant vers l'Est et à une vitesse de 300 km/h à altitude constante. Ce calcul indique l'existence de deux termes prépondérants (amplitude supérieure au milligal), fonctions de l'attitude du véhicule qui devront être corrigés.

		Moyenne mGal	Écart type mGal	Min. mGal	Max mGal
Terme 1	$C_e^i C_n^e C_b^n \dot{\Omega}_{nb}^b B^b$	1.289	106.671	-278.807	299.683
Terme 2	$C_e^i C_n^e \Omega_{en}^n C_b^n B^b$	0.000	0.000	0.000	0.000
Terme 3	$C_e^i C_n^e C_b^n \Omega_{nb}^b \Omega_{nb}^b B^b$	-0.801	1.462	-6.847	1.949
Terme 4	$C_e^i C_n^e \Omega_{en}^n \Omega_{en}^n C_b^n B^b$	0.000	0.000	0.000	0.000
Terme 5	$2C_e^i \Omega_{ie}^e C_n^e C_b^n \Omega_{nb}^b B^b$	0.000	0.041	-0.108	0.099
Terme 6	$2C_e^i C_n^e \Omega_{en}^n C_b^n \Omega_{nb}^b B^b$	0.000	0.007	-0.019	0.018
Terme 7	$2C_e^i \Omega_{ie}^e C_n^e \Omega_{en}^n C_b^n B^b$	0.000	0.000	0.000	0.000

TAB. 3.15 – Analyse de l'amplitude de la composante verticale des termes liés au bras de levier (3.13) pour la simulation d'un levé gravimétrique par un avion volant vers l'Est avec une attitude définie par (3.14). Le bras de levier est imposé à un mètre de long et son orientation est telle que ses composantes soient égales dans chacune des directions du référentiel du véhicule (droite, avant, haut) : $[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]^T$.

Le terme 1 et dans une moindre mesure le terme 3 doivent être pris en compte pour obtenir une restitution de la pesanteur à quelques milligals de précision.

3.4.3 Précision de la détermination des effets de bras de levier

La précision de la détermination des termes de bras de levier dépend de la capacité du système à restituer l'attitude du véhicule porteur. Je me propose ici d'étudier la précision des deux termes prépondérants identifiés lors de la simulation qui dépendent de 12 paramètres. Ces paramètres ne sont pas seulement les trois angles d'attitude α , χ , η et leurs dérivées premières $\dot{\alpha}$, $\dot{\chi}$, $\dot{\eta}$ et secondes $\ddot{\alpha}$, $\ddot{\chi}$, $\ddot{\eta}$ ainsi que des composantes indépendantes du temps B_1 , B_2 , B_3 du bras de levier B dans le référentiel du véhicule.

Soit $C_m(t)$ la matrice de variances-covariances du vecteur à 12 composantes :

$$[\alpha, \chi, \eta, \dot{\alpha}, \dot{\chi}, \dot{\eta}, \ddot{\alpha}, \ddot{\chi}, \ddot{\eta}, B_1, B_2, B_3]^T$$

à l'instant t . Conformément à la loi de propagation de la variance, les matrices de variances-covariances C_{T_1} et C_{T_3} respectives des vecteurs T_1 et T_3 , peuvent être exprimées par :

$$\begin{aligned} C_{T_1}(t) &= P_{T_1} C_m(t) P_{T_1}^T, \\ C_{T_3}(t) &= P_{T_3} C_m(t) P_{T_3}^T, \end{aligned}$$

où $P_{T_i}, i = 1, 3$ sont les matrices (12×3) de propagation correspondantes aux termes 1 et 3 et donnés par :

$$P_{T_i} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial T_i^1}{\partial X} & \frac{\partial T_i^2}{\partial X} & \frac{\partial T_i^3}{\partial X} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, i = 1, 3;$$

$$\text{où } X = \alpha, \chi, \eta, \dot{\alpha}, \dot{\chi}, \dot{\eta}, \ddot{\alpha}, \ddot{\chi}, \ddot{\eta}, B_1, B_2, B_3.$$

Choisir la matrice $C_m(t)$ de variances-covariances du vecteur X est une tâche ardue car ses paramètres sont corrélés dans le temps et dans l'espace. Notre objectif est donc de choisir cette matrice de variances-covariances sur des critères qualitatifs.

Tout d'abord, le bras de levier a ses composantes constantes et déterminées par un étalonnage de précision au laboratoire ; il n'est donc pas corrélé à l'attitude du système.

Les angles d'attitude sont déterminés par la mesure des coordonnées des lignes de bases séparant les quatre antennes du système de positionnement GPS. Puisque ces antennes sont très proches (écartement de l'ordre du mètre), les signaux GPS qu'elles reçoivent sont très corrélés, ils subissent en effet les mêmes perturbations ionosphériques et troposphériques et dans une certaine mesure, les mêmes multitrajets. Cependant, cette corrélation spatiale n'est pas totale puisque des lignes de base sont déterminées à partir des différences de phase des signaux GPS reçus par les quatre antennes. Autrement dit, la corrélation spatiale entre les angles d'attitude est plus faible que celle affectant les données GPS permettant de les calculer.

Les perturbations atmosphériques du signal GPS varient faiblement en une période d'échantillonnage (0.5 s), ce qui entraîne une forte corrélation des données GPS et donc des angles d'attitude en temps. En revanche, la corrélation temporelle des angles d'attitude est réduite par différentiation numérique, qui suggère que les dérivées des angles d'attitude sont bien moins corrélées en temps que les angles d'attitude eux-mêmes.

Par conséquent, la réduction des corrélations temporelles et spatiales entre les angles d'attitude et leurs dérivées première et seconde apporte une augmentation de leur propre variance. Afin de surestimer ces variances, on fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de corrélation en temps ou en espace entre les angles d'attitude et leurs dérivées. Sous ces hypothèses, la matrice de variances-covariances $C_m(t)$ peut être exprimée sous la forme

$$C_m(t) = \begin{bmatrix} C_\alpha & (0) & (0) & (0) \\ (0) & C_\chi & (0) & (0) \\ (0) & (0) & C_\eta & (0) \\ (0) & (0) & (0) & C_B \end{bmatrix}$$

où C_α , C_χ , C_η et C_B sont les matrices de variances-covariances 3×3 des vecteur $[\alpha \dot{\alpha} \ddot{\alpha}]^T$, $[\chi \dot{\chi} \ddot{\chi}]^T$, $[\eta \dot{\eta} \ddot{\eta}]^T$ et $[B_1 B_2 B_3]^T$.

La matrice de variances-covariances C_B est simplement égale à

$$C_B = \sigma_B^2 I_3,$$

où σ_B^2 est la variance des termes B_1 , B_2 et B_3 du bras de levier.

Les matrices de variances-covariances C_θ , $\theta = \alpha, \chi, \eta$ ont sur leur diagonale les variances de θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$ (termes diagonaux), et aussi les termes de covariances (termes non diagonaux). Le calcul numérique de $\dot{\theta}$ à l'instant t peut être effectué avec suffisamment de précision pour notre application par

$$\dot{\theta} = \frac{\theta(t + \delta t) - \theta(t - \delta t)}{2\delta t},$$

où δt correspond à un petit incrément temporel.

Conformément à nos choix précédents, les quantités θ aux instants $t - \delta t$ et $t + \delta t$ ne sont pas supposées corrélées. Dans ce cas, la variance $\sigma_{\dot{\theta}}^2$ de $\dot{\theta}$ peut être exprimée comme une fonction de la variance σ_θ^2 de θ comme

$$\sigma_{\dot{\theta}}^2 = \frac{2\sigma_\theta^2}{4\delta t^2} = \frac{\sigma_\theta^2}{2\delta t^2}.$$

Ainsi, la variance de $\sigma_{\ddot{\theta}}^2$ de $\ddot{\theta}$ peut être déduite de $\sigma_{\dot{\theta}}^2$ puis de σ_θ^2 par

$$\sigma_{\ddot{\theta}}^2 = \frac{\sigma_{\dot{\theta}}^2}{2\delta t^2} = \frac{1}{2\delta t^2} \left[\frac{\sigma_\theta^2}{2\delta t^2} \right] = \frac{\sigma_\theta^2}{4\delta t^4}.$$

Les matrices de variances-covariances C_θ , $\theta = \alpha, \chi, \eta$ peuvent finalement s'exprimer sous la forme

$$C_\theta = \sigma_\theta^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\delta t^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4\delta t^4} \end{bmatrix}.$$

3.4.4 Applications numériques et conclusions

Les matrices de variances-covariances C_{T_1} et C_{T_3} ont été calculées avec le logiciel de calcul formel MAXIMA 5.12.0. Une application numérique a été réalisée en utilisant les paramètres d'attitudes définis précédemment (3.14). Bien que ces valeurs soient estimées dans le cas de levés aéroportés, elles peuvent néanmoins être utilisées pour évaluer l'influence des variations d'attitude sur les incertitudes des termes de bras de levier 1 et 3.

Étant donné les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned}
 B_1 = B_2 = B_3 &= 1/\sqrt{3} \text{ m} = 0.577 \text{ m} \\
 \hat{\chi} &= 0.005 \text{ rad} \\
 \dot{\hat{\chi}} &= 0.0012 \text{ rad/s} \\
 \ddot{\hat{\chi}} &= 0.00087 \text{ rad/s}^2 \\
 \hat{\alpha} = \hat{\eta} &= 0.050 \text{ rad} \\
 \dot{\hat{\alpha}} = \dot{\hat{\eta}} &= 0.0070 \text{ rad/s} \\
 \ddot{\hat{\alpha}} = \ddot{\hat{\eta}} &= 0.0070 \text{ rad/s}^2
 \end{aligned}$$

et choisissant la variance des termes d'attitude égaux :

$$\sigma_\theta = \sigma_\alpha = \sigma_\chi = \sigma_\eta \text{ [rad]}$$

et celle des composantes du bras de levier dans le repère de navigation,

$$\sigma_B = \sigma_{B_1} = \sigma_{B_2} = \sigma_{B_3} \text{ [m]}$$

nous obtenons pour variance de la composante verticale des termes de bras de levier dans le référentiel de navigation, respectivement $\sigma_{T_{1,haut}}$ et $\sigma_{T_{3,haut}}$:

$$\sigma_{T_{1,haut}} = 2.8\sigma_\theta^2 + 2.2 \times 10^{-6}\sigma_B^2 \text{ et} \quad (3.15)$$

$$\sigma_{T_{3,haut}} = 8.9 \times 10^{-5}\sigma_\theta^2 + 5.0 \times 10^{-9}\sigma_B^2. \quad (3.16)$$

Afin d'obtenir la précision souhaitée de 1 mGal pour la détermination des termes 1 et 3, $\sigma_{T_{1,haut}}$ et $\sigma_{T_{3,haut}}$ doivent être inférieurs à 0.3 mGal. Dans le plan $(\sigma_B, \sigma_\theta)$, les termes (3.15, 3.16) représentent deux ellipses dont le demi-grand axe et le demi-petit axe valent respectivement :

$$\begin{aligned}
 \hat{\sigma}_B^{T_1} &= \frac{0.3 \times 10^{-5}}{\sqrt{2.2 \times 10^{-6}}} \\
 &= 2 \text{ mm} \\
 \hat{\sigma}_\theta^{T_1} &= \frac{0.3 \times 10^{-5}}{\sqrt{2.8}} \\
 &= 0.18 \times 10^{-5} \text{ rad} \approx 0.4'', \text{ pour (3.15)} \\
 \hat{\sigma}_B^{T_3} &= \frac{0.3 \times 10^{-5}}{\sqrt{5 \times 10^{-9}}} \\
 &= 42 \text{ mm} \\
 \hat{\sigma}_\theta^{T_3} &= \frac{0.3 \times 10^{-5}}{\sqrt{8.5 \times 10^{-5}}} \\
 &= 3.2 \times 10^{-4} \text{ rad} \approx 66'' \text{ pour (3.16)}.
 \end{aligned}$$

Ces deux ellipses (fig. 3.24) définissent deux régions dans le plan $(\sigma_B, \sigma_\theta)$ dans lesquelles les couples $(\sigma_B, \sigma_\theta)$ respectent les conditions :

$$\begin{aligned}
 \sigma_{T_{1,haut}} &\leq 0.3 \text{ mGal} \\
 \sigma_{T_{3,haut}} &\leq 0.3 \text{ mGal}.
 \end{aligned}$$

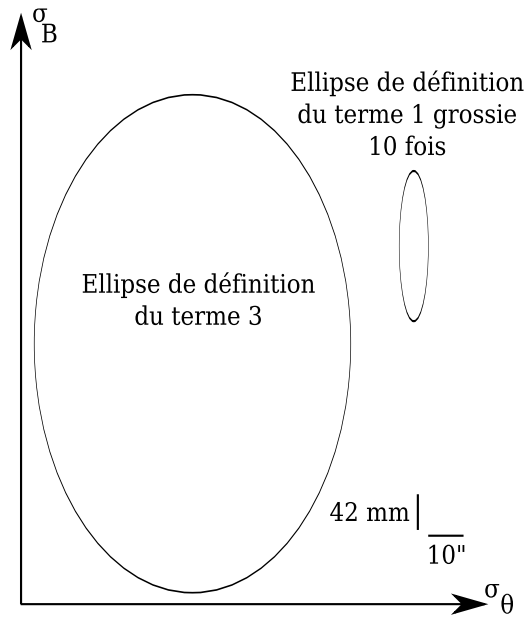


FIG. 3.24 – Ellipses définissant les régions dans lesquelles les termes 1 et 3 n'influencent pas la mesure.

Ces résultats suggèrent que, dans le cas d'un bras de levier parfaitement connu (c'est-à-dire tel que $\sigma_B = 0$), la précision nécessaire sur la détermination des angles d'attitude, pour obtenir la limite des 1 *mGal* souhaitée, est de 0.4'' pour le terme 1 et de 66'' pour le terme 3.

Clairement, de telles précisions ne peuvent être atteintes pour une mesure ponctuelle avec le système de détermination d'attitude ADU2 dont la précision est de 0.2°.

Une solution pour atteindre de telles précisions est d'augmenter le temps d'intégration. Si N désigne le nombre de mesures qui permet d'atteindre une précision $\sigma_{\overline{obs}}$ de 0.4'' à partir d'un dispositif de précision σ_{obs} de 0.2°, alors

$$\sigma_{\overline{obs}} = \frac{\sigma_{obs}}{\sqrt{N}}$$

d'où

$$\begin{aligned} N &= \left(\frac{\sigma_{obs}}{\sigma_{\overline{obs}}} \right)^2 = \left(\frac{0.2 * 3600}{0.4} \right)^2 \\ &= 3240000. \end{aligned}$$

À une fréquence d'échantillonnage de 2 *Hz*, il faudrait 450 heures pour obtenir une précision sur l'attitude compatible avec une précision d'un milligal sur la correction du bras de levier.

Cette simulation suggère que le système ADU2 seul ne permet pas une estimation du bras de levier à un milligal de précision.

Une première solution consisterait à compléter l'instrument par un ensemble de trois gyromètres de précision qui permettrait une estimation de l'attitude comme une combinaison pondérée des mesures de l'ADU2 et des mesures gyrométriques.

Dans ce cas, le dispositif doit être modifié substantiellement pour pouvoir accueillir ces gyromètres.

Une seconde solution serait de considérer l'effet de bras de levier comme un paramètre supplémentaire à estimer au même titre que la pesanteur dans le traitement final des données.

EXPÉRIMENTATION DU SYSTÈME LIMO-G 4

SOMMAIRE

4.1	LA MISSION TERRESTRE DE DOMFRONT	113
4.1.1	Choix du lieu	113
4.1.2	Configuration de l'instrument et protocole expérimental	114
4.1.3	Traitement et analyse des mesures de position et d'attitude	116
4.1.4	Analyse des mesures de la mission terrestre de Domfront	124
4.1.5	Comparaison des mesures à la pesanteur de référence	127
4.2	LA MISSION MARINE DE SAINTE-MAXIME	131
4.2.1	Choix du lieu ; données gravimétriques de référence	131
4.2.2	Configuration de l'instrumentation ; protocole expérimental	133
4.2.3	Traitement et analyse des mesures de position et d'attitude	134
4.2.4	Génération de données semi-synthétiques	136

LE système Limo-G a été expérimenté à deux reprises en conditions réelles au cours de deux levés gravimétriques réalisés en 2006 :

- un levé routier dans le village de Domfront-en-Champagne proche du Mans ;
- un levé marin au large de Sainte-Maxime dans le golfe de Saint-Tropez.

Ces deux missions gravimétriques ont été complètement dédiées à des tests d'ergonomie, de fiabilité et de performance du système Limo-G grâce notamment à des mesures gravimétriques de référence disponibles sur les zones d'expérimentation.

Le présent chapitre se propose de décrire en détail le déroulement de ces deux missions, qui illustrent la mise en œuvre du système et les résultats de comparaisons entre les mesures du système Limo-G et les mesures de référence. Enfin, nous expliquerons comment les mesures de la mission marine de Sainte-Maxime ont été utilisées pour la génération de données semi-synthétiques en vue de la validation de notre méthode de traitement.

4.1 LA MISSION TERRESTRE DE DOMFRONT

Cette première mission a été réalisée en février 2006 à bord d'une camionnette. Elle a permis d'éprouver les performances du système lors d'une acquisition sur route.

4.1.1 Choix du lieu

Dans un premier temps, il a été nécessaire de choisir une zone d'étude sur route. Le profil routier idéal doit être court pour permettre la réalisation du levé dans la journée, dégagé afin de limiter les masques qui occultent la visibilité des antennes GPS entraînant une perte de signal et une dégradation de la position et de l'attitude estimées, et surtout doit présenter un relief suffisant pour observer une variation de la pesanteur d'une dizaine de milligals au moins sur le profil. Enfin, ce profil doit se situer à proximité du Mans afin de faciliter le rattachement à la base gravimétrique de l'ESGT, dans l'objectif de la réalisation d'un levé en gravimétrie relative pour obtenir des mesures de référence. Tous ces critères ont permis de choisir la ville de Domfront-en-Champagne qui satisfait la plupart de ces exigences (fig. 4.1).

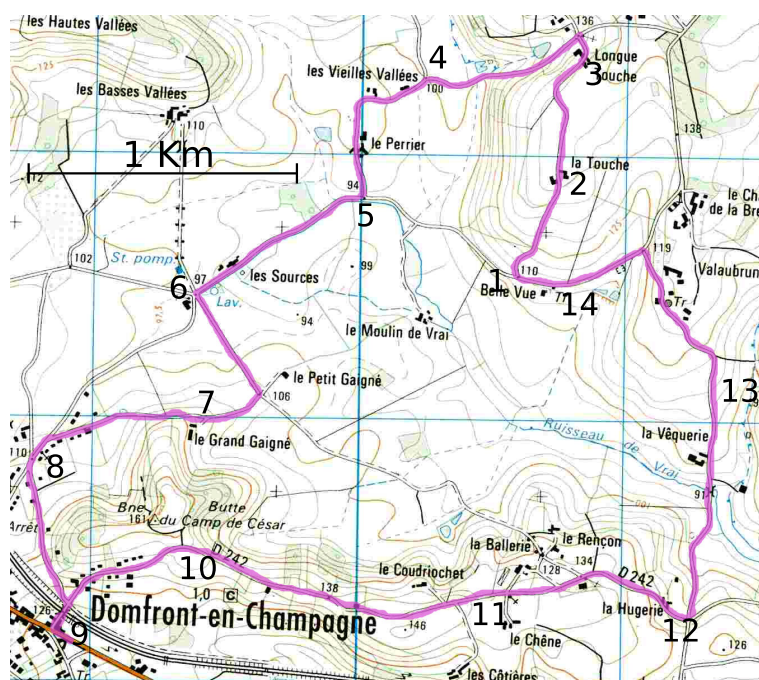


FIG. 4.1 – Carte du profil gravimétrique de Domfront-en-Champagne. Le circuit suivi apparaît surligné ; chaque station gravimétrique est repérée par son numéro. La station 1 correspond à la base gravimétrique secondaire rattachée à la base de l'ESGT. Cette base a été déterminée en avril 1999 à l'aide du gravimètre absolu FG5#206 (Micro-g Solutions Inc.). La valeur de la pesanteur est estimée à 980856.4908 ± 0.0034 mGal. Carte 1718O de Beaumont-sur-Sarthe ©IGN.

Le profil choisi consiste en une boucle de 10 km dont l'altitude varie entre 90 et 140 m (altitudes du système IGN69) dépourvu de masques importants exceptés certains bosquets de plusieurs mètres de haut qui limitent la qualité du signal GPS sur de courtes portions du parcours (inférieures à 50 m).

4.1.2 Configuration de l'instrument et protocole expérimental

Le système Limo-G sur camionnette

Le boîtier du système Limo-G contenant les accéléromètres et le numériseur, équipé des quatre antennes GPS du système ADU2 et de l'antenne de réception du temps GPS, a été placé sur le toit du véhicule (fig. 4.2) où son alimentation est assurée par des batteries d'accumulateurs disposées dans l'habitacle. Deux micro-ordinateurs ont assuré respectivement l'enregistrement des données GPS de l'ADU2 et celui des mesures d'accélération numérisées ; ils sont alimentés par la batterie propre du véhicule.



FIG. 4.2 – Vue de la camionnette transportant le système Limo-G. On distingue le réseau des quatre antennes du récepteur ADU2.

Enfin, un récepteur GPS bifréquence a complété le dispositif afin d'obtenir une seconde détermination de la position à comparer à celle obtenue par le récepteur ADU2. L'antenne de ce dernier a été placée sur le boîtier du système à une cinquantaine de centimètres des quatre antennes du système ADU2.

Mesures gravimétriques et de position

Pour cette première mission de test, les mesures gravimétriques de référence ont été acquises par nos soins à l'aide d'un gravimètre relatif Scintrex CG-3M (fig. 4.3) aimablement prêté par l'Institut de Physique du Globe de Paris (tab. 4.1 et 4.2). Les points gravimétriques ont été matérialisés et positionnés par GPS différentiel afin de permettre leur réoccupation.

Un total de quatorze points gravimétriques régulièrement espacés ont été mesurés le long du profil et rattachés à la base gravimétrique de l'ESGT. L'ensemble des résultats de ce levé ont été rassemblés dans les tables 4.1 et 4.2.

L'acquisition dynamique à l'aide du système Limo-G a consisté à parcourir le profil à faible vitesse (environ 5-6 km/h, fig. 4.12) en stationnant durant une dizaine de minutes sur les points gravimétriques de référence (acquisition de type « Stop & Go », GERLACH, DOROBANTU et ROTHACHER 2005). Ce mode d'acquisition



FIG. 4.3 – Vue du gravimètre Scintrex CG-3M Autograv de l'IPGP.

Station	Correction de marée (mGal)	Correction de dérive (mGal)	Variations de la pesanteur Valeur	Écart-type (mGal)
2	-0.065	0.007	-8.154	0.005
3	-0.064	0.010	-4.757	0.003
4	-0.065	0.014	2.731	0.005
5	-0.066	0.017	3.812	0.006
6	-0.067	0.021	3.551	0.004
7	-0.069	0.025	-2.064	0.003
8	-0.070	0.026	1.233	0.003
9	-0.071	0.027	-1.794	0.004
10	-0.071	0.036	-6.568	0.003
11	-0.069	0.041	-7.430	0.003
12	-0.065	0.045	-3.172	0.003
13	-0.058	0.049	-0.688	0.006
14	-0.042	0.056	-0.841	0.003
1	-0.068	0.062	0.000	0.009

TAB. 4.1 – Table des variations de la pesanteur depuis la station n°1 déterminées par gravimétrie relative. Suite à une opération de rattachement, la variation de pesanteur entre la base gravimétrique de l'ESGT et la station n°1 a été estimée à 14.163 ± 0.010 mGal. La dérive du gravimètre pour ce levé a été estimée à 0.008 mGal/h soit 0.192 mGal/jour. Cette dernière a été déterminée à partir des réoccupations de la station n°1.

Station	Pesanteur	
	Valeur	Écart-type (mGal)
1	980870.654	0.010
2	980862.500	0.011
3	980865.897	0.010
4	980873.385	0.011
5	980874.466	0.012
6	980874.205	0.011
7	980868.590	0.010
8	980871.887	0.010
9	980868.860	0.011
10	980864.086	0.010
11	980863.224	0.010
12	980867.482	0.010
13	980869.966	0.012
14	980869.813	0.010

TAB. 4.2 – Table des valeurs absolues de la pesanteur aux 14 points gravimétriques de référence. Les valeurs de g ont été obtenues par $g = g_{ref} + \Delta g_{rel}$ où g_{ref} la valeur de la pesanteur à la station 1 et Δg_{rel} la variation de pesanteur depuis la station 1 jusqu'à la station mesurée. L'écart-type σ sur g a été calculé par $\sigma = \sqrt{\sigma_{g_{ref}}^2 + \sigma_{\Delta g_{rel}}^2}$ où $\sigma_{g_{ref}}$ et $\sigma_{\Delta g_{rel}}$ représentent respectivement les écarts-types sur g_{ref} et Δg_{rel} .

devait permettre de contrôler régulièrement les mesures du système pour mettre en évidence d'éventuels biais et dérives indétectables lors d'une utilisation statique au laboratoire. La fréquence d'acquisition des mesures accélérométriques a été fixée à 31.25 Hz pour l'ensemble du levé c'est-à-dire durant les phases statiques et dynamiques. Ainsi, ce levé a-t-il permis d'acquérir 243 200 mesures des trois composantes de l'accélération de rappel réparties en 16 phases statiques.

Outre la mesure du temps GPS par une antenne dédiée pour la synchronisation des acquisitions, le récepteur GPS quatre antennes ADU2 a fonctionné en continue durant tout le levé à la fréquence de 1 Hz conjointement à un récepteur GPS bifréquence LEICA 500 réglé à la même fréquence. Une antenne *pivot* (fig. 4.4) placée sur le point gravimétrique n°1 et équipée du même type de récepteur a également fonctionné durant tout le levé à une fréquence de 1 Hz.

4.1.3 Traitement et analyse des mesures de position et d'attitude

Détermination des positions

L'estimation des positions du véhicule a été réalisée par un traitement GPS en mode différentiel (détermination de la ligne de base pivot/camionnette) cinématique réalisé en temps différé.

Les coordonnées du pivot ont été préalablement déterminées par un traitement GPS en mode différentiel statique à partir de la station GPS permanente du Mans, intégrée au réseau national de stations GPS permanentes RGP (Réseau GPS Perma-



FIG. 4.4 – Installation du pivot sur le point gravimétrique n°1.

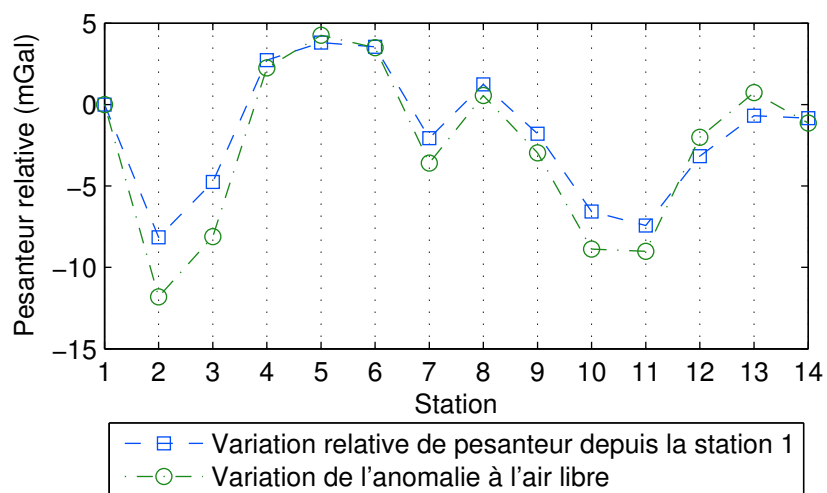


FIG. 4.5 – Variation de la pesanteur depuis la station n°1 mesurée sur le profil de Domfront et comparée à celle de l'anomalie à l'air libre déduite de l'altitude des stations sur le même profil ; la valeur du gradient vertical de la pesanteur a été fixée à 0.3 mGal/m.

ment de l'IGN) et située à moins de 20 km du pivot à l'aide du logiciel LEICA GEO OFFICE 1.1.0.0 (tab. 4.3).

Station	Latitude	Longitude	Hauteur
Pivot	48°7'2.5545" N	0°3'7.5748" E	155.15 m
MANS	48°1'7.0090" N	0°9'19.0137" E	167.99 m

TAB. 4.3 – Coordonnées du pivot dans le système RGF93 placé sur le point gravimétrique n°1 du profil de Domfront-en-Champagne et déterminées à partir de la station GPS permanente du MANS. L'antenne de la station du MANS est installée sur le toit de l'ESGT et les données ont été récupérées sur le serveur internet du RGP. La précision est centimétrique pour les coordonnées géographiques et de quelques centimètres pour la hauteur.

Puis, les coordonnées de l'antenne 1 du récepteur GPS ADU2 ont été estimées à l'aide du logiciel WAYPOINT GRAFNAV/GRAFNET 7.60 à raison d'une estimation par seconde. Le même traitement a été utilisé pour déterminer les coordonnées de l'antenne bifréquence (tab. 4.4 et 4.5 puis fig. 4.6 et 4.7).

L'analyse des résultats de positionnement lors des 16 phases statiques (tab. 4.4 et 4.5) indique que la précision des coordonnées obtenues à partir du récepteur ADU2 pour des sessions statiques courtes (inférieure à 10 mn) est comprise entre 2 et 7 cm. Cette précision est améliorée d'un facteur compris entre 3 et 10 sur les coordonnées déduites des données du récepteur GPS bifréquence (tab. 4.5 et fig. 4.8). En mode dynamique, 96.5% des coordonnées obtenues à partir des données du récepteur ADU2 ont un écart-type inférieur à 30 cm. Cette précision obtenue pour des lignes de base courtes (inférieures à 3 km) se dégradera irrémédiablement pour des lignes de base plus longues. Suivant le type d'applications envisagées, il conviendra donc d'utiliser le système Limo-G avec un système de positionnement supplémentaire tel un récepteur GPS bifréquence ou une centrale inertielle de navigation pour une précision de 3 à 10 fois meilleure.

Ainsi, le système Limo-G seul peut-il convenir pour un levé marin ou aérien d'échelle moyenne dédié à des études structurales, mais doit être complété par un système de positionnement pour un levé de détail.

Détermination de l'attitude

L'attitude du véhicule est déterminée en temps réel à l'aide du logiciel d'exploitation ADUsoft du récepteur ADU2. Les mesures sont rassemblées par date d'acquisition dans un fichier au format « texte » (fig. 4.9). Un indicateur numérique permet de savoir si la mesure est valable ou erronée selon des critères propres au constructeur. Ces critères ont rejetés 5.36% des mesures de cette mission terrestre. De plus, la fréquence d'échantillonnage ne s'avère pas constante ; ainsi sur ce levé constitué de 8120 mesures d'attitude, on a détecté 89 sur ou sous-échantillonnages (1.1%). Une analyse de la précision réelle du système pour la détermination des attitudes a pu être menée grâce aux mesures acquises durant les phases stationnaires du profil de Domfront (fig. 4.11) qui a confirmé les valeurs de précisions données par le constructeur.

Station	Longitude (dms) Écart-type (m)	Latitude (dms) Écart-type (m)	Hauteur (m) Écart-type (m)	Ambiguïtés
1	48°07'02.22164" 0.049	0°03'07.81634" 0.017	157.08 0.03	Fixées
2	48°07'18.16077" 0.059	0°03'13.71622" 0.033	196.43 0.04	Fixées
3	48°07'32.12485" 0.104	0°03'15.44011" 0.070	184.18 0.07	Non Fixées
4	48°07'26.14176" 0.047	0°02'48.60745" 0.029	149.79 0.04	Fixées
5	48°07'11.19402" 0.047	0°02'38.24958" 0.033	143.23 0.04	Fixées
6	48°06'57.75162" 0.028	0°02'09.13616" 0.022	145.67 0.03	Fixées
7	48°06'43.60678" 0.030	0°02'08.60352" 0.023	169.21 0.03	Fixées
8	48°06'40.13771" 0.053	0°01'44.64797" 0.043	155.31 0.06	Fixées
9	48°06'15.71089" 0.029	0°01'50.81111" 0.024	166.95 0.03	Fixées
10	48°06'23.90021" 0.055	0°02'21.21978" 0.051	186.86 0.08	Non Fixées
11	48°06'21.94169" 0.040	0°02'59.51062" 0.034	187.14 0.05	Fixées
12	48°06'21.61095" 0.050	0°03'40.96548" 0.041	163.15 0.07	Fixées
13	48°06'44.19324" 0.058	0°03'44.10557" 0.039	155.50 0.08	Non Fixées
14	48°07'06.15494" 0.071	0°03'29.16467" 0.049	167.14 0.07	Non Fixées
15	48°07'01.46259" 0.036	0°03'13.00012" 0.022	160.68 0.04	Fixées
16	48°07'02.47719" 0.035	0°03'07.55654" 0.021	157.14 0.03	Fixées

TAB. 4.4 – Coordonnées dans le système RGF93 de l'antenne maîtresse du système ADU2, monofréquence au cours des 16 phases statiques.

Station	Longitude (dms) Écart-type (m)	Latitude (dms) Écart-type (m)	Hauteur (m) Écart-type (m)	Ambiguïtés
1	0°03'07.78524" 0.003	48°07'02.20889" 0.005	157.24 0.01	Fixées
2	0°03'13.70218" 0.004	48°07'18.15193" 0.007	196.59 0.01	Fixées
3	0°03'15.40136" 0.007	48°07'32.13413" 0.009	184.29 0.03	Fixées
4	0°02'48.61337" 0.010	48°07'26.14874" 0.010	149.73 0.03	Fixées
5	0°02'38.23360" 0.004	48°07'11.20741" 0.004	143.07 0.01	Fixées
6	0°02'09.12252" 0.004	48°06'57.74635" 0.006	145.65 0.01	Fixées
7	0°02'08.60754" 0.004	48°06'43.62113" 0.004	169.24 0.01	Fixées
8	0°01'44.65439" 0.004	48°06'40.15250" 0.007	155.44 0.01	Fixées
9	0°01'50.82659" 0.003	48°06'15.70966" 0.005	167.16 0.01	Fixées
10	0°02'21.21526" 0.004	48°06'23.89691" 0.006	186.86 0.01	Fixées
11	0°02'59.51803" 0.004	48°06'21.93489" 0.007	187.27 0.02	Fixées
12	0°03'40.95606" 0.004	48°06'21.58619" 0.006	163.93 0.01	Fixées
13	0°03'44.13426" 0.005	48°06'44.21173" 0.007	154.77 0.01	Fixées
14	0°03'29.17482" 0.005	48°07'06.17187" 0.006	166.86 0.01	Fixées
15	0°03'13.01341" 0.004	48°07'01.47570" 0.005	161.04 0.01	Fixées
16	0°03'07.58407" 0.003	48°07'02.48514" 0.004	157.44 0.01	Fixées

TAB. 4.5 – Coordonnées dans le système RGF93 de l'antenne bifrèquence au cours des 16 phases statiques.

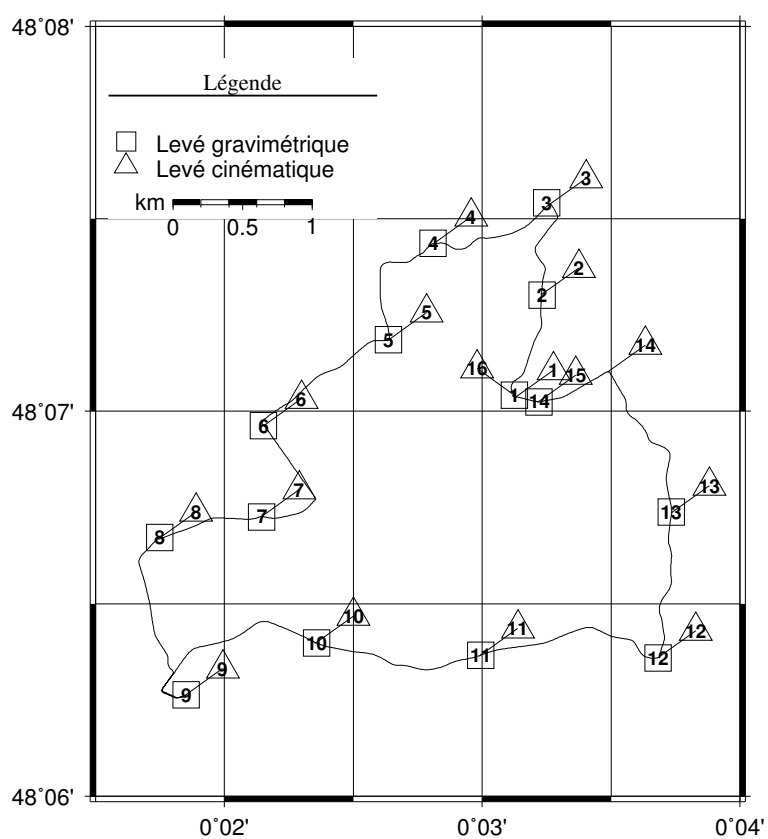


FIG. 4.6 – Carte du profil réalisé à Domfront-en-Champagne présentant les stations gravimétriques ainsi que le profil parcouru.

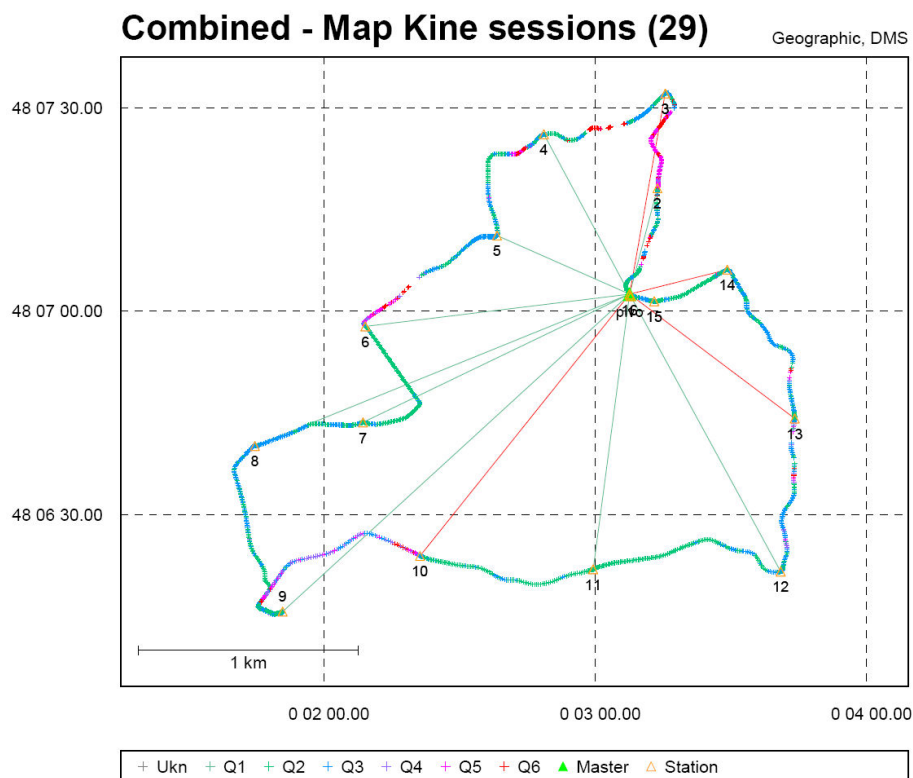


FIG. 4.7 – Carte du profil réalisé à Domfront-en-Champagne issue du logiciel WAYPOINT GRAFNAV/GRAFNET 7.60. Elle montre la trajectoire déterminée à partir du récepteur ADU2 (trait continu), ainsi que les différentes lignes de base joignant le pivot aux stations gravimétriques déterminées à l'aide des mesures issues du récepteur GPS bifréquence bifréquence.

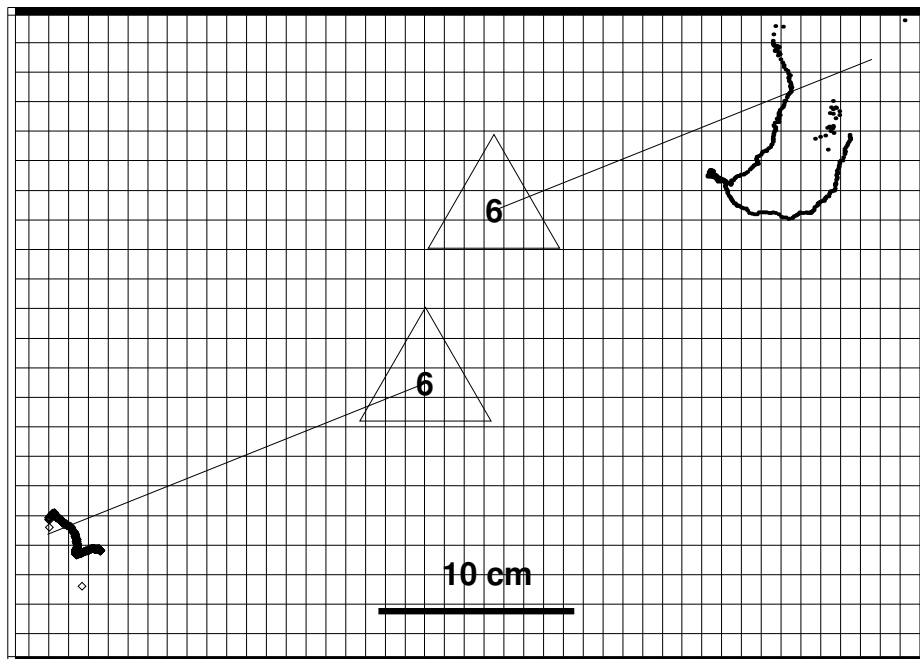


FIG. 4.8 – Positions estimées de l'antenne 1 du récepteur ADU2 (en haut et à droite) comparées à celles de l'antenne du récepteur bifréquence (en bas et à gauche) lors de l'arrêt à la station n°6. Cette figure montre la plus grande dispersion des positions obtenues du récepteur ADU2 (≈ 3 cm) par rapport à celles de l'antenne du récepteur bifréquence (≈ 1 cm). La distance entre les deux antennes est de l'ordre de 50 cm.

```
[...]
478271.00    102.6656    2.2126    2.5628    0.0021    0.0304    0
478272.00    102.6446    1.9540    2.4674    0.0024    0.0353    0
478273.00    102.4972    2.3028    2.5676    0.0020    0.0351    0
478274.00    102.7715    0.0000    0.0000    0.0023    0.0434    1
478275.00    102.6632    2.3158    2.6221    0.0024    0.0343    0
478276.00    102.7526    2.8360    2.6156    0.0033    0.0374    0
[...]
```

FIG. 4.9 – Exemple de fichier au format « texte » délivré par ADUsoft. Avec de gauche à droite le temps en seconde de la semaine, l'azimut, le tangage, le roulis en degré, l'erreur sur la ligne de base (BRMS) et l'erreur sur la mesure (MRMS) en mètres et un indicateur numérique nul par défaut et à 1 pour les valeurs erronées.

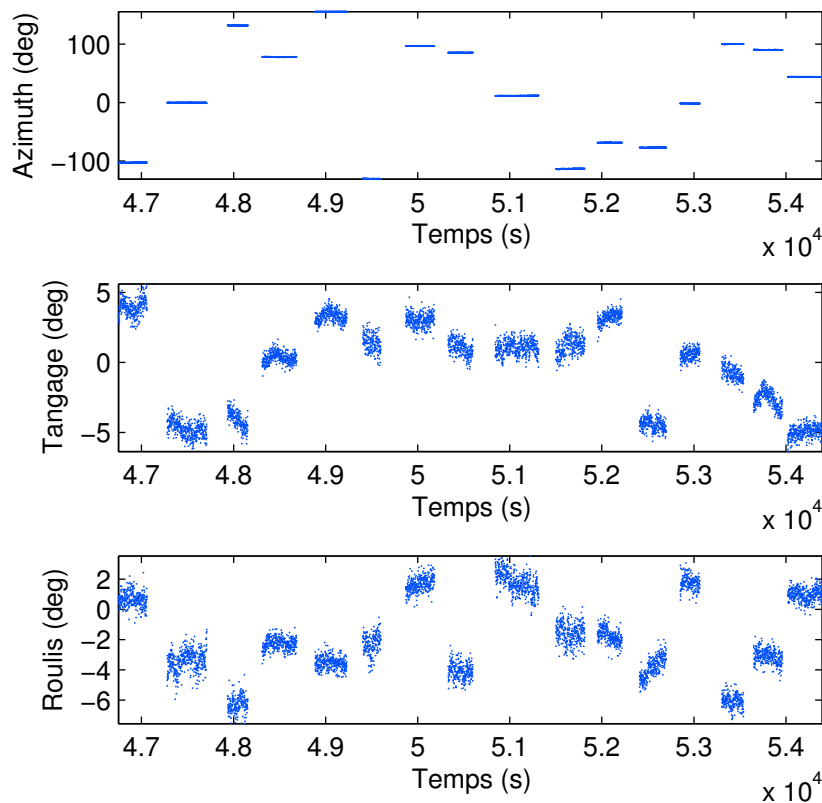


FIG. 4.10 – Dispersion des mesures d'angle d'attitude durant les phases statiques déterminées par le système ADU2. Les mesures d'azimuth (fig. 4.11) sont les moins dispersées des trois.

4.1.4 Analyse des mesures de la mission terrestre de Domfront

Méthodologie

L'analyse des mesures de la mission terrestre de Domfront a consisté à comparer les mesures de pesanteur de référence à celles acquises par le système Limo-G lors des phases statiques. Pour ce, l'ensemble des enregistrements d'accélération a tout d'abord été découpé afin d'isoler les mesures correspondantes aux 16 phases statiques du levé.

Une analyse spectrale des mesures d'accélération (fig. 4.13 et 4.14) a indiqué la présence d'un bruit important dans la gamme [7 Hz, 13 Hz] avec plus particulièrement, deux pics marqués aux fréquences 10 Hz et 12.5 Hz correspondant à la rotation du moteur de la camionnette.

Ce bruit est pour l'essentiel attribuable aux vibrations de la structure du véhicule observables même à l'arrêt lorsque le moteur tourne.

L'analyse spectrale des mesures d'attitude (fig. 4.15) a révélé le fort niveau de bruit affectant l'estimation du roulis et du tangage comparé à celui de l'azimuth.

Afin d'éliminer ce bruit, un filtrage passe-bas à une fréquence de coupure de 0.02 Hz a été appliqué sur les 3 mesures d'accélération et les 3 angles d'attitude avant toute comparaison aux mesures de pesanteur de référence (fig. 4.16 et 4.17). Ce type de filtrage est couramment utilisé sur les systèmes de gravimétrie mobile

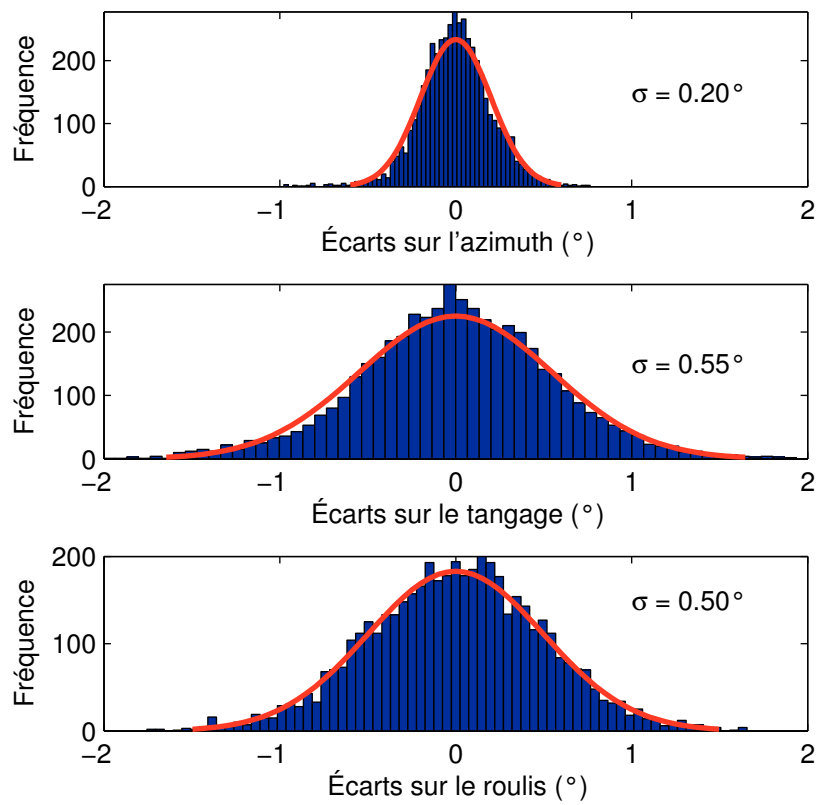


FIG. 4.11 – Dispersion des écarts à la moyenne des angles d'azimuth, de tangage et de roulis sur l'ensemble des 16 phases statiques. Les écarts-types mesurés sont tout à fait conformes à ceux annoncés par le constructeur (0.4° pour l'azimuth en statique et 0.8° pour le tangage et le roulis).

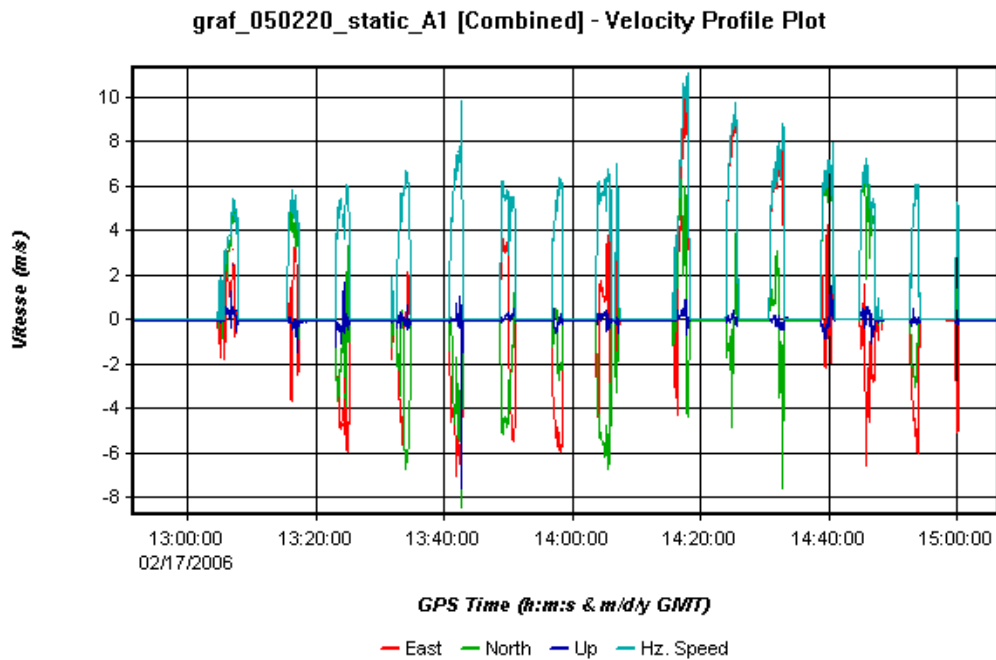


FIG. 4.12 – Graphe des vitesses du centre de phase de l'antenne maîtresse au cours du levé. Les phases à vitesse proches de 0 aux incertitudes de mesures près correspondent aux phases statiques.

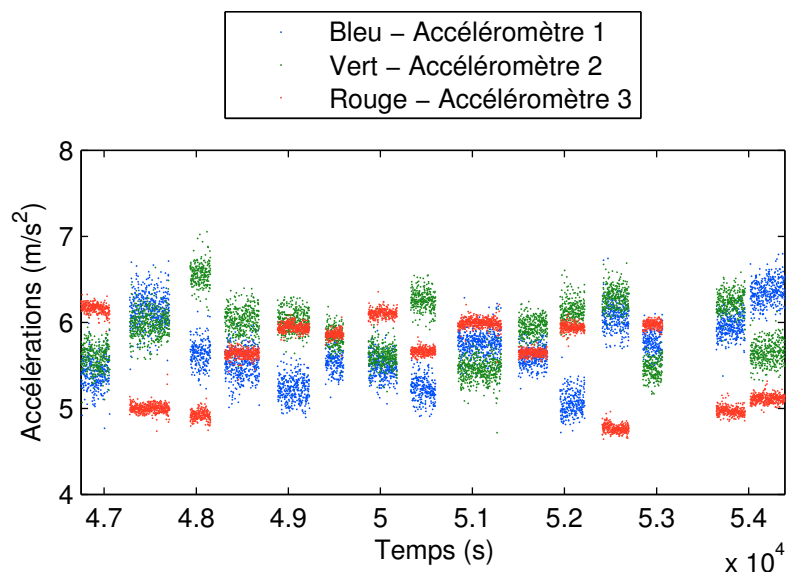


FIG. 4.13 – Graphique des accélérations relevées le long du profil parcouru. Ces accélérations sont brutes, exprimées en m/s^2 , pour chacun des trois accéléromètres.

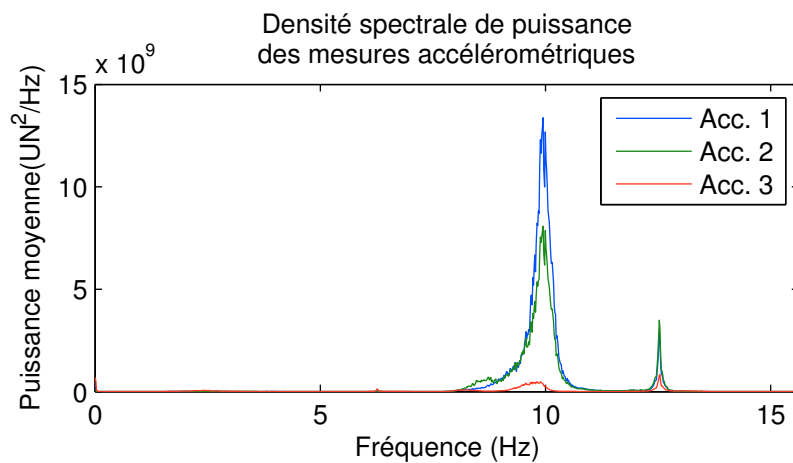


FIG. 4.14 – Analyse fréquentielle des mesures accélérométriques lors d'une phase statique, véhicule à l'arrêt, moteur allumé.

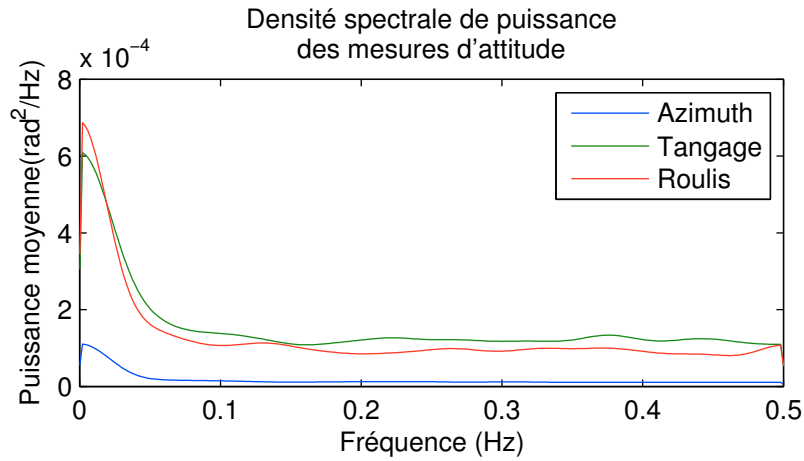


FIG. 4.15 – Analyse fréquentielle des mesures d'attitude lors d'une phase statique, véhicule à l'arrêt, moteur allumé.

actuels et son efficacité éprouvée (BASTOS et al. 2000 ; BRUTON et al. 2001 ; GLENNIE et al. 2000 ; KREYE et al. 2006).

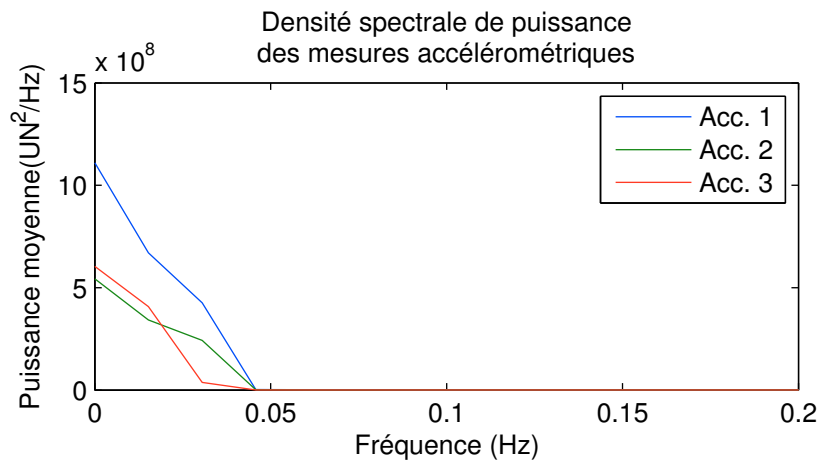


FIG. 4.16 – Analyse fréquentielle des mesures accélérométriques après l'application d'un filtre passe-bas à 0.02 Hz.

4.1.5 Comparaison des mesures à la pesanteur de référence

L'estimation \bar{g}^n du vecteur accélération de la pesanteur par le système Limo-G s'exprime en fonction du vecteur des angles d'attitude $\bar{\phi}$ et du vecteur des mesures accélérométriques \bar{a}^s par

$$\bar{g}^n = C_b^n(\bar{\phi}) C_s^b \bar{a}^s$$

où $C_b^n(\bar{\phi})$ est la matrice de passage du référentiel de navigation au référentiel du véhicule calculée à partir de son attitude lors de chaque phase statique.

Le vecteur \bar{g}^n est constitué des trois composantes \bar{g}_E , \bar{g}_N et \bar{g}_u de g suivant les directions est, nord et verticale respectivement. La comparaison a consisté à comparer sur les 16 phases statiques les valeurs mesurées de la norme du vecteur \bar{g}^n ,

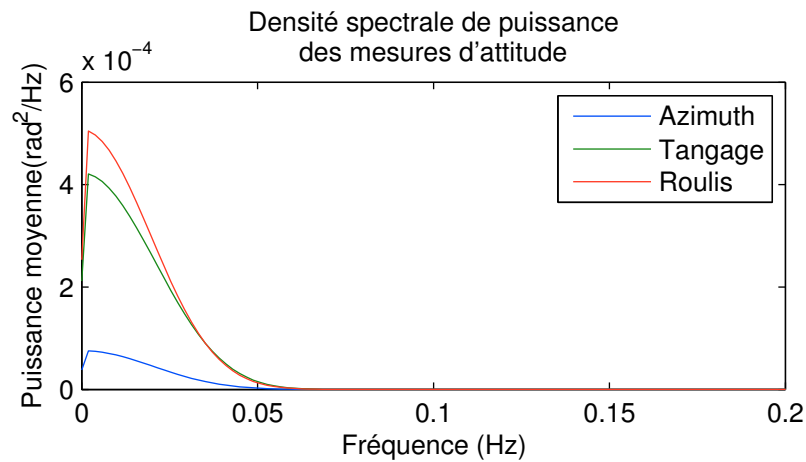


FIG. 4.17 – Analyse fréquentielle des mesures d'attitude après l'application d'un filtre passe-bas à 0.02 Hz.

soit $\sqrt{g_E^2 + g_E^2 + g_u^2}$ avec celles des mesures de référence obtenues par gravimétrie relative. Les résultats de cette comparaison ont été rassemblés dans le tableau 4.6.

Les cas 1, 2 et 3 correspondent aux différentes déterminations des coefficients d'étalonnage (biais b et facteurs d'échelle k) et de la matrice de passage C_s^b (chap. 3) utilisés dans la comparaison :

- pour le cas 1, biais et facteurs d'échelle résultent d'un étalonnage statique au laboratoire (§3.2.4) et la matrice de passage issue de l'étalonnage géométrique décrit au §3.3.2 ;
- pour le cas 2, biais et facteurs d'échelle sont identiques à ceux du cas 1 ; en revanche, la matrice C_s^b provient de l'étalonnage gravimétrique décrit au §3.3.3 ;
- pour le cas 3, biais, facteurs d'échelle et matrice de passage C_s^b sont étalonnés simultanément selon la méthode décrite gravimétrique du §3.3.3.

Les valeurs d'étalonnage du cas 2 ont été prises comme valeurs de référence dans le tableau 4.6. Les écarts observés aux valeurs de référence se sont révélés particulièrement importants et résultent vraisemblablement de variations des coefficients d'étalonnage et de l'orientation des axes sensibles des accéléromètres entre les manipulations d'étalonnage et la mission terrestre de Domfront.

Afin de confirmer cette hypothèse, nous avons procédé à une nouvelle estimation des coefficients d'étalonnage et de la matrice C_s^b à partir des données acquises sur les 16 sessions statiques par un étalonnage gravimétrique analogue à celui du cas 3, mais basé sur de nouveaux critères de minimisation des écarts entre valeurs mesurées de la pesanteur et valeurs de référence. Les écarts minimisés sont respectivement les écarts entre la composante \bar{g}_U de \bar{g} et la valeur de référence (cas 4, 6 et 8) et ceux entre la norme de \bar{g} et la valeur de référence (cas 5, 7 et 9).

Les critères de minimisation choisis correspondent respectivement à la minimisation de :

- la moyenne des écarts (cas 4 et 5) ;
- le maximum des valeurs absolues des écarts, autrement dit, la norme l^∞ (cas 6 et 7) ;

	biais			facteur d'échelle			écarts angulaire sur les vecteurs de C_s^b			écarts des mesures à la référence $\epsilon, \sigma_\epsilon$ mGal
	b_1	b_2	b_3	k_1	k_2	k_3	D1	D2	D3	
Cas 2	-31247.11	-30134.98	-28851.76	236984.63	237284.78	236691.47	-	-	-	2896 6
Cas 1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	3.2285	2.0857	1.6957	21735 8
Cas 3	-3512.52	-6354.43	-3913.95	-165.43	-818.81	-72.59	0.2764	0.0673	0.1751	-3759 4
Cas 4	0.38	2.85	4.54	-7.92	5.43	12.14	0.5966	1.2148	0.7891	268 8
Cas 5	4.25	-1.01	4.55	-10.15	4.40	10.10	0.7661	1.2314	1.6815	0 12
Cas 6	0.32	5.00	-0.92	-15.02	-20.95	3.57	0.6962	0.2110	0.8141	585 2
Cas 7	2.66	2.49	-0.82	-13.07	6.67	14.41	0.6203	1.0405	0.8714	10 2
Cas 8	11.13	11.15	-28.99	-4.62	8.36	6.64	0.4318	1.4187	0.8931	350 2
Cas 9	-30.06	-30.73	-3.83	-29.65	8.99	8.16	0.3992	1.1699	1.2799	-15 2

TAB. 4.6 – Tableau des écarts aux valeurs de référence (dernière colonne) à partir de différentes déterminations des biais (b), facteurs d'échelle (k) et orientation des axes sensibles (matrice C_s^b). Les valeurs d'étalonnage du cas 2 sont prises comme référence de sorte que toutes les autres valeurs correspondent à des différences avec ce cas. À partir du cas 4, les valeurs d'étalonnage obtenues correspondent à de nouvelles estimations à partir des 2417 mesures acquises sur 16 phases statiques, filtrées à l'aide du filtre passe-bas de fréquence de coupure 0.02 Hz.

- la somme des valeurs absolues des écarts, autrement dit, la norme l^1 (cas 8 et 9).

L'ensemble de ces calculs a été réalisé au moyen d'algorithmes génétiques à partir d'une population de 20 individus présentant un taux de mutation uniforme de 0.5 (MATLAB R2007A, THE MATHWORKS). Le choix de ces paramètres a été préalablement validé sur des données synthétiques.

Les résultats obtenus (tab. 4.6) indiquent qu'il est possible de ramener les écarts dans l'ordre de 10 mGal (cas 5, 7 et 9) à condition de modifier significativement les coefficients d'étalonnage et les éléments de la matrice C_s^b liés à l'orientation des axes sensibles. D'un point de vue purement expérimental, les conditions d'acquisitions des mesures (véhicule à l'arrêt sur un terrain à faible variation de dénivelée dont l'attitude a peu varié) ne sont pas très favorables à un étalonnage gravimétrique complet qui nécessite l'exploration d'une large gamme d'angles d'attitude. Il est donc vraisemblable que les mêmes calculs réalisés à partir de données enregistrées depuis une table orientable sur laquelle reposerait le dispositif et dont les variations d'attitude atteindraient plusieurs dizaines de degrés, devraient permettre de ramener ces écarts en dessous du milligal.

À ce stade, il nous faut donc admettre que les coefficients d'étalonnage ont bel et bien changé entraînant du même coup une nouvelle détermination de l'orientation des axes sensibles de par l'estimation conjointe.

Une analyse plus approfondie des résultats suggère tout d'abord une élimination des cas 4, 6 et 8 pour lesquels les écarts (268, 585 et 350 mGal) sont inacceptables.

Les différences entre les biais et facteurs d'échelle du cas 3 et du cas 2 sont particulièrement importants (-3512, -6354 et -3914 mGal), comparés à celles obtenues pour les autres cas, alors que les différences entre les orientations des axes sensibles sont comparables dans tous les cas excepté le cas 1.

Comme évoqué au chapitre 3, l'étalonnage gravimétrique simultané des coefficients d'étalonnage et de la matrice C_s^b ne permet donc pas une détermination précise des biais et facteurs d'échelle.

Les différences d'orientation les plus importantes avec le cas de référence sont celles du cas 1 (3.23° , 2.09° et 1.70°) dans lequel la matrice C_s^b est déterminée par une méthode géométrique. Cette méthode ne doit donc pas être retenue.

Examinons à présent plus en détail les biais obtenus dans les cas 5, 7 et 9, les plus favorables. Les différences en valeur absolue avec le cas 2 s'échelonnent entre 0.8 et 30 mGal ce qui est compatible avec une variation de température de l'enceinte comprise entre 0.04 et 1.5°C en prenant un coefficient de température pour l'ensemble constitué des accéléromètres et de la chaîne d'acquisition de 20 mGal/ $^\circ\text{C}$ (chapitre 3).

Il est donc clair que la stabilité en température de l'enceinte n'est pas suffisante pour garantir celle des coefficients d'étalonnage qui soit compatible avec une précision de 1 mGal.

Recommandations pour l'instrument et son étalonnage

La présente analyse montre clairement que la stabilité de l'enceinte thermorégulée contenant l'instrument Limo-G doit être améliorée pour atteindre au moins $1/20^{\circ}$ de degré celsius soit 0.05°C autour d'une température de travail identique à celle obtenue lors de l'étalonnage, afin de correspondre aux spécifications du système Limo-G. Le remplacement de l'enceinte actuelle par une nouvelle comprenant des dispositifs de chauffage et de refroidissement devra donc être envisagé dans une version future du système.

D'autre part, la manipulation d'étalonnage la plus précise est celle dans laquelle l'estimation des biais et facteurs d'échelle est séparée de l'estimation de l'orientation des axes sensibles des accéléromètres. L'estimation des biais et facteurs d'échelle devra donc être réalisée avec les accéléromètres placés dans l'enceinte thermorégulée à la température de travail selon la méthode décrite au chapitre 3.

Les coefficients d'étalonnage obtenus dans cette manipulation peuvent alors être utilisés pour l'étalonnage gravimétrique du système (§3.3.3) conduisant à la détermination de la matrice de passage C_s^b . L'emploi d'une table orientable est indispensable pour cette manipulation.

Nous recommandons également de procéder à une vérification systématique de l'étalonnage du système sur la zone de levé par la méthode employée dans cette analyse (point de référence au port en gravimétrie marine, sur la zone de stationnement de l'avion en gravimétrie aéroportée) qui peut conduire le cas échéant à une modification des valeurs d'étalonnage qui devra rester légère.

4.2 LA MISSION MARINE DE SAINTE-MAXIME

La mission marine de Sainte-Maxime s'est déroulée sur une semaine au mois d'avril 2006 en collaboration avec le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine (SHOM). Ce dernier a mis à notre disposition une vedette ainsi qu'un équipage de trois personnes (deux navigateurs et un mécanicien) parfaitement rompus à l'acquisition de données bathymétriques. La vedette a pour l'occasion quitté son port d'attache situé à Toulon pour rejoindre celui de Sainte-Maxime.

4.2.1 Choix du lieu ; données gravimétriques de référence

Le choix du golfe de Sainte-Maxime comme zone d'étude a été justifié par la présence des 10 profils gravimétriques de la campagne SHOM GMO1 (LEQUENTREC-LALANCETTE, ROUXEL et LENAMOURIC 2006) dont le plus proche est situé à moins de 15 km du port de Sainte-Maxime (fig. 4.18). Parmi les 10 profils figurent 7 orientés sud-ouest-nord-est d'une soixantaine de kilomètres recoupés par 3 traverses plus courtes dont 8 points de croisement. L'anomalie gravimétrique sur cette zone varie entre -86.63 mGal et 33.76 mGal offrant ainsi une gamme de mesure suffisamment large pour éprouver les performances du système Limo-G.

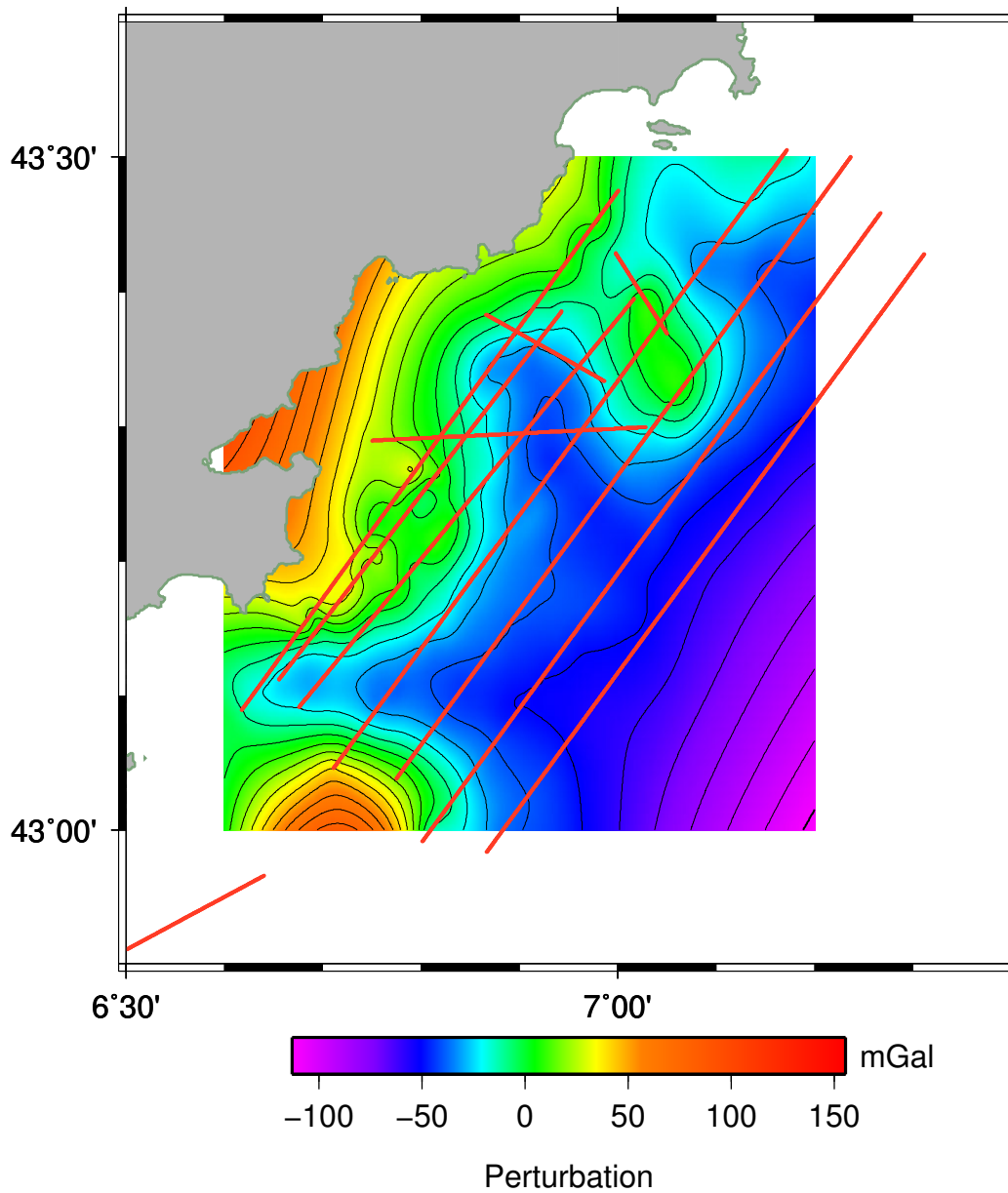


FIG. 4.18 – Carte de l'anomalie gravimétrique dans la région proche du golfe de Sainte-Maxime issue de la campagne SHOM GMO1 dont les profils sont représentés par les lignes rouges.

4.2.2 Configuration de l'instrumentation ; protocole expérimental

La configuration de l'instrumentation est en tout point identique à celle utilisée lors de la mission terrestre de Domfront-en-Champagne. Afin de limiter les masques que constituent le pont, les mâts et les gardes corps de la vedette, l'enceinte thermorégulée contenant l'instrumentation a été fixée sur une plate-forme arrimée au portique arrière de la vedette.



FIG. 4.19 – Vue de la vedette et du système Limo-G monté sur le portique.

Les ordinateurs de commande et d'acquisition, ainsi que les récepteurs GPS (ADU2 et GPS bifréquence) ont été placés à l'intérieur de la cabine. Les différents câbles de liaison ont été attachés sur le pont de la vedette et les différentes connexions rendues étanches par des boîtiers d'étanchéification.

L'ensemble du système a été alimenté par ses propres batteries d'accumulateurs, le rendant ainsi indépendant de tout système d'alimentation électrique extérieur.

Une station GPS pivot a été installée sur le toit de la capitainerie toute proche du point d'amarrage de la vedette (fig. 4.20). Le protocole d'acquisition débute par la mise en route de cette dernière, puis le récepteur ADU2, le récepteur de temps et le récepteur bi-fréquence du système Limo-G sont enclenchés, la vedette restant à quai. La fréquence d'échantillonnage des acquisitions GPS bi-fréquence a été fixée à 1 Hz. Le récepteur ADU2 fonctionne quant à lui à une fréquence de 2 Hz. L'acquisition des accélérations débute simultanément à celles des données GPS à une fréquence de 31.25 Hz.

Afin d'obtenir un point de contrôle supplémentaire, le point d'amarrage du bateau a été rattaché à une base gravimétrique par l'équipe du SHOM (valeur de g : $980\,485.08 \pm 0.01$ mGal). Ce point peut également permettre d'effectuer l'étalonnage gravimétrique du système Limo-G *in situ* décrit au chapitre 3.

Une fois toutes les acquisitions lancées, la vedette peut débiter sa route. L'entrée sur un profil de mesure est signalée par le navigateur. Ce dernier contrôle en permanence le cap du navire grâce au système de positionnement propre de la



FIG. 4.20 – Installation du pivot sur le toit de la capitainerie du port de Sainte-Maxime.

vedette constitué d'une centrale inertielle couplée à un récepteur GPS en tenant compte des vents dominants et des courants. La vitesse de croisière sur les profils a été maintenue à 5 km/h.

Les conditions météorologiques se sont avérées excellentes durant deux jours, ce qui nous a permis de naviguer sur deux profils NO-SE et deux traverses (fig. 4.21). Le levé ainsi réalisé correspond à 5 h de mesure effective totalisant 1 865 617 mesures d'accélération et 35 049 mesures GPS (tab. 4.7).

Date	Heure		Profil réalisé	Sens du parcours
	Départ	Arrivée		
04/04/06	06h16	07h31	To1	Aller
04/04/06	07h40	08h49	To1	Retour
06/04/06	08h15	09h13	Po1A	Aller
06/04/06	09h16	09h51	Po1B	Aller
06/04/06	10h02	10h12	To2	Aller
06/04/06	10h17	11h03	Po2	Aller

TAB. 4.7 – Date des profils levés lors de la missions effectuée au large de Sainte-Maxime. Le profil Po1 est scindé en Po1A et Po1B due à une avarie.

4.2.3 Traitement et analyse des mesures de position et d'attitude

Le traitement des données GPS issues des deux récepteurs bi-fréquence a été réalisé à l'aide du logiciel LEICA GEO OFFICE 1.1.0.0 en mode différentiel cinématique. La station pivot a été préalablement rattachée au réseau géodésique RGF93 par positionnement relatif avec les stations Porquerolles (PQRL), Marseille (MARS), Aix-en-Provence (AXPV), Grasse (GRAC), Cannes (CNNS) et Nice Côte d'Azur (NICA) du RGP (tab. 4.8).

Le positionnement de l'antenne maîtresse de l'ADU2 (fig. 4.22) a été effectué par le logiciel WAYPOINT GRAFNAV/GRAFNET 7.60 en mode différentiel cinématique par rapport au même pivot.

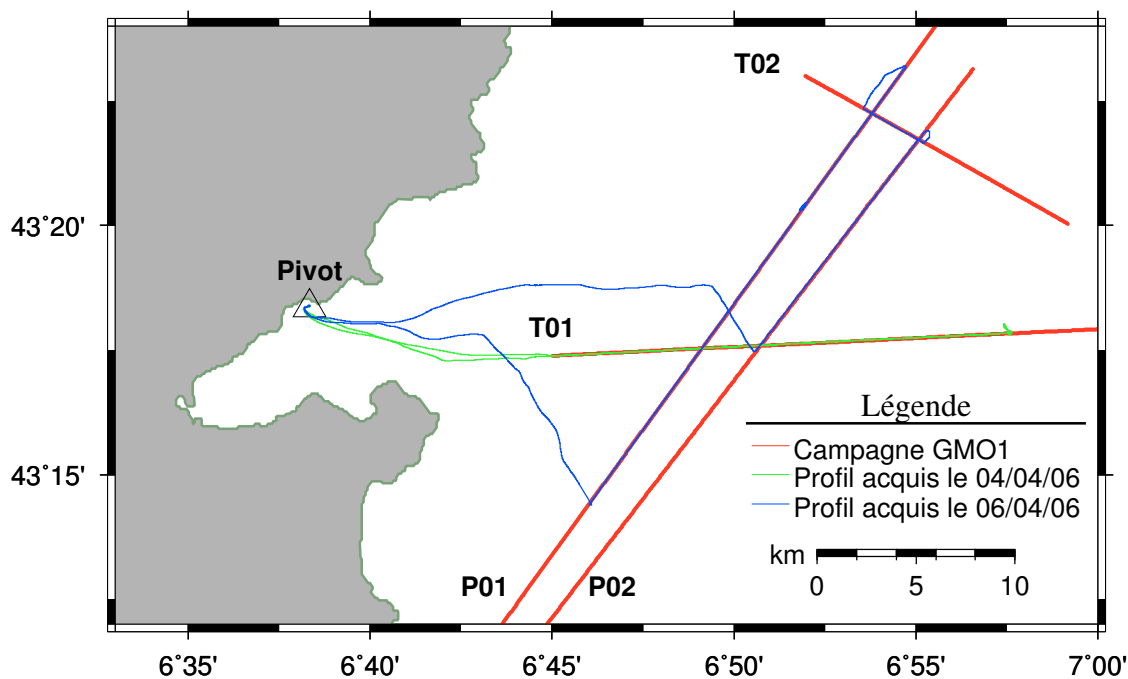


FIG. 4.21 – Carte des profils effectués sur la zone d'étude.

Station	Latitude Écart-type	Longitude Écart-type	Hauteur Écart-type
Détermination du 04/04/06	43°18'21.847" N	6°38'20.810" E	55.45 m
Détermination du 06/04/06	43°18'21.847" N	6°38'20.810" E	55.52 m

TAB. 4.8 – Coordonnées du pivot situé sur le toit de la capitainerie en RGF93. La précision sur la latitude et la longitude est de l'ordre du centimètre ; elle atteint plusieurs centimètres sur la hauteur.



FIG. 4.22 – Vue du système Limo-G sur le pont de la vedette en cours d'acquisition.

La détermination de l'attitude a été effectuée en temps réel par le logiciel ADU-soft selon une procédure identique à celle utilisée pour la mission terrestre de Domfront-en-Champagne. La figure 4.23 illustrent les variations d'attitude de la vedette en cours d'acquisition, de même la figure 4.24 illustre les accélérations enregistrées par les accéléromètres pour la même portion de profil de 20 s.

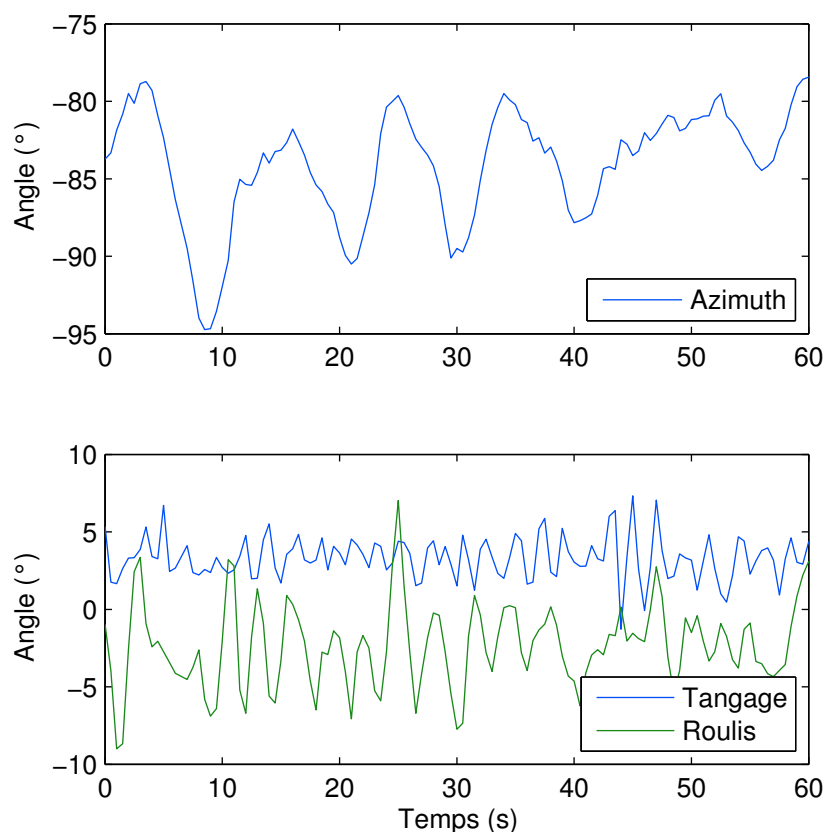


FIG. 4.23 – Graphique des attitudes relevées le long d'un profil marin de 20 s, du 04/04/06, échantillonné à 2 Hz, sans filtrage.

4.2.4 Génération de données semi-synthétiques

Motivation

Nous avons évoqués au chapitre 3 les difficultés rencontrées lors de l'étalonnage du système, en particulier la détermination de la matrice C_s^b , et la possible variation des paramètres d'étalonnage (biais et facteur d'échelle des accéléromètres) dans le temps. Afin de disposer de mesures de référence qui permettent de tester notre méthode de traitement indépendamment des résultats de l'étalonnage, nous avons utilisé les données acquises lors de la mission de Sainte-Maxime pour générer des mesures d'accélération semi-synthétiques. L'idée est d'obtenir des mesures simulées d'accélération correspondant à l'équation de mesure du système (2.19) à partir des mesures de position et d'attitude réellement acquises et des données gravimétriques de référence. De telles mesures sont indépendantes de la qualité

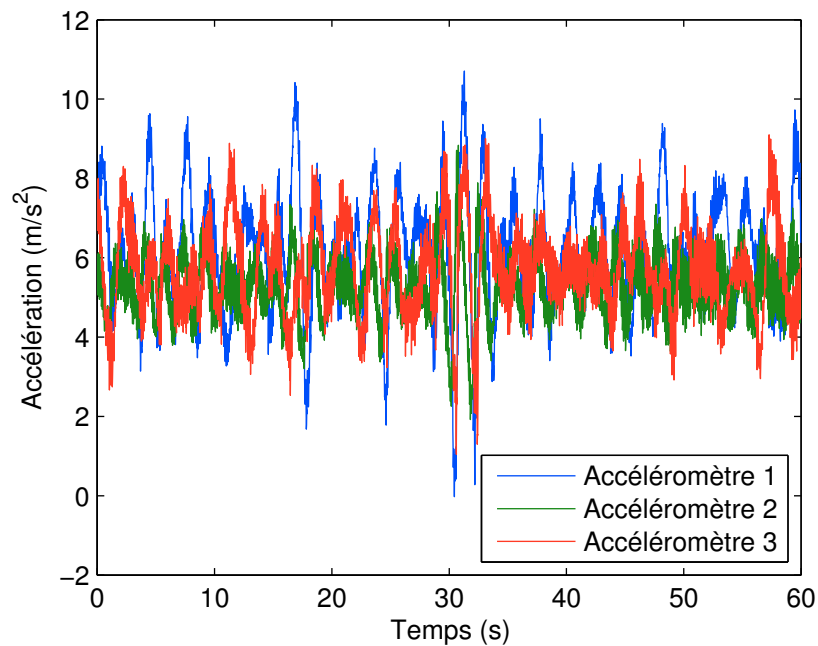


FIG. 4.24 – Graphique des accélérations relevées le long d'un profil marin de 20 s, du 04/04/06, échantillonné à 62.5 Hz sans filtrage.

des capteurs d'accélération (biais et facteurs d'échelle) et de la matrice de passage C_s^b du référentiel de l'instrument au référentiel du véhicule.

Elles peuvent donc permettre d'étudier les performances du système et de la méthode de traitement, c'est-à-dire la précision dans la restitution de la pesanteur dans un cas réel, compte-tenu de la qualité du positionnement et de la détermination d'attitude obtenue par le traitement des données GPS.

Méthodologie, exemples

Mesures disponibles

Sur l'ensemble des profils, nous avons à notre disposition :

- les mesures de position \bar{X}^e déduites des mesures GPS ;
- les mesures d'attitude $\bar{\phi}$ fournies par les mesures de l'ADU2 traitées par ADUsoft ;
- les mesures de l'anomalie de pesanteur transformées en perturbations de pesanteur $p\bar{g}$.

On rappelle que les mesures de position et d'attitude ont été préalablement filtrées avec un filtre passe-bas de fréquence de coupure 0.02 Hz afin d'éliminer les bruits parasites haute fréquence.

Génération des paramètres du vecteur d'état

Les 24 paramètres du vecteur d'état constitués par les 3 composantes respectives des vecteurs position X^e , vitesse \dot{X}^e et accélération \ddot{X}^e , les 3 angles d'attitude (lacet, tangage, roulis) ϕ et leurs dérivées premières $\dot{\phi}$, ainsi que les 3 composantes de la perturbation de pesanteur $p\bar{g}$ et leurs dérivées premières $p\dot{\bar{g}}$ et secondes $p\ddot{\bar{g}}$ peuvent

être générés sur chaque profil à partir des mesures \bar{X}^e , $\bar{\phi}$ et $p\bar{g}$ grâce à une méthode d'interpolation par spline cubique (Annexe G).

Cette méthode permet non seulement l'interpolation des paramètres à intervalles de temps fixés, mais aussi d'en calculer les dérivées premières et secondes. On obtient ainsi une suite de vecteurs d'état

$$\tilde{x}_k = [\tilde{X}^e, \tilde{X}^e, \tilde{X}^e, \tilde{\phi}, \tilde{\phi}, p\tilde{g}, p\tilde{g}, p\tilde{g}]^T,$$

$k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ où N est le nombre d'instantants d'interpolation sur l'ensemble des profils.

Génération des mesures d'accélération

Les mesures de l'accélération de rappel peuvent alors être générée à partir de l'équation de mesure (2.19) à laquelle a été ajoutée un bruit blanc gaussien d'écart-type un milligal modélisant le bruit de mesure des accéléromètres. Ces mesures sont qualifiées de semi-synthétiques ; elles résultent en effet d'une trajectoire réelle et supposent seulement la nullité du biais et du facteur d'échelle de chaque accéléromètre. Ces mesures simulées ne prennent en compte que les mouvements du véhicule et un bruit parasite d'un milligal. Mais sur le véhicule, de nombreuses vibrations, tel celles engendrées par un moteur, viennent perturber la mesure de l'accéléromètre (fig. 4.25 et 4.26).

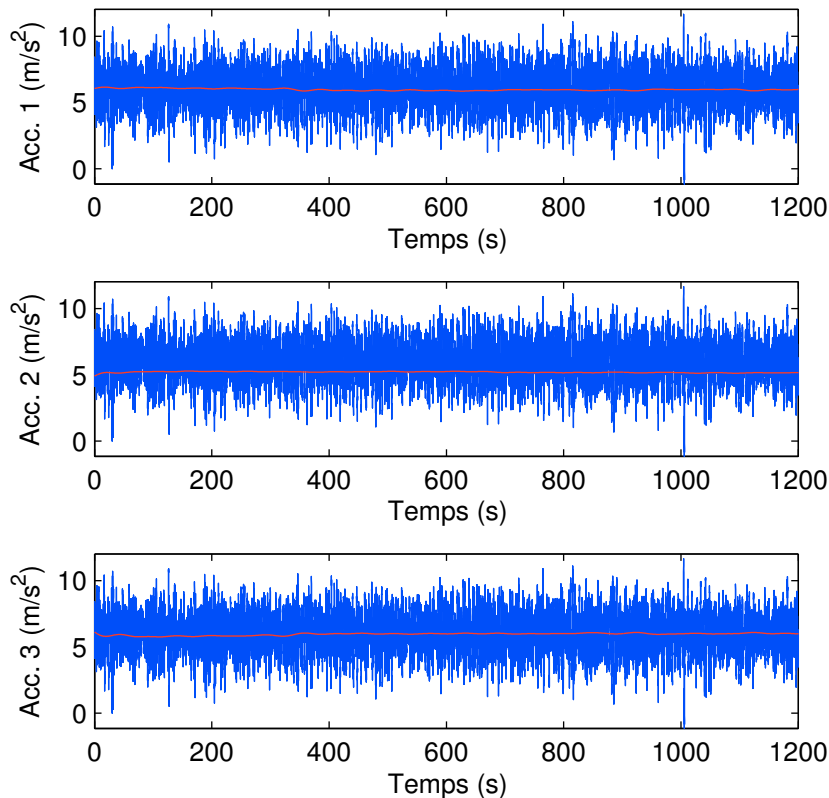


FIG. 4.25 – Comparaison sur un même profil entre accélérations simulées et accélérations mesurées puis filtrées à 0.02 Hz (avec biais et facteurs d'échelle optimaux issus de l'analyse à l'aide d'algorithmes génétiques).

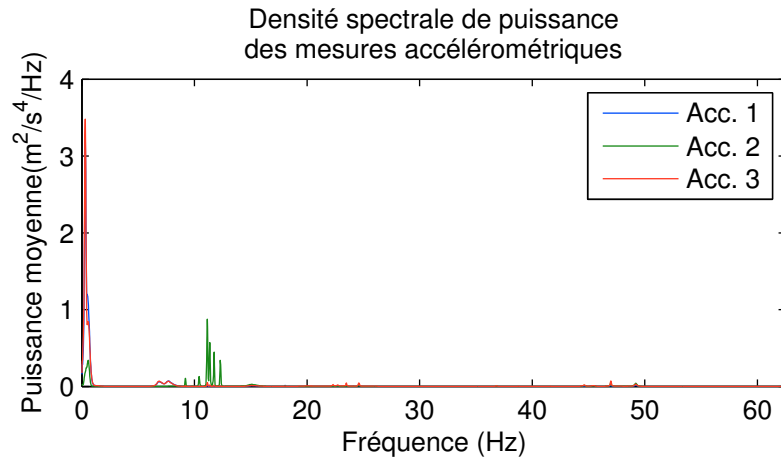


FIG. 4.26 – Analyse fréquentielle des mesures accélérométriques lors des levés marins. La présence d'un bruit important dans la gamme [7 Hz, 15 Hz] montrent encore la nuisance due aux vibrations du moteur du véhicule.

Application à l'estimation du bruit de transition pour le filtre de Kalman

Nous avons vu au chapitre 2 que la mise en œuvre du filtre de Kalman nécessitait la connaissance de la matrice de variances-covariances $Q_{k-1:k}$ du bruit de transition entre les instants k et $k + 1$. L'obtention d'une telle matrice est particulièrement délicate. En effet, le bruit de transition rend compte de l'erreur de modélisation du phénomène étudié qui provient, par exemple, de l'approximation qui consiste à considérer l'accélération constante entre deux instants d'échantillonnage consécutifs. L'estimation *a priori* de l'amplitude de ce bruit est difficile à partir de critères simplement qualitatifs.

En revanche, il est possible de mettre à profit les mesures du vecteur d'état obtenues par interpolation pour réaliser une estimation quantitative de la matrice $Q_{k-1:k}$.

Soit \tilde{x}_k , $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, la suite des vecteurs d'état à 24 paramètres obtenus par interpolation des mesures selon la méthode décrite précédemment. L'erreur de modélisation \tilde{e}_k peut alors s'exprimer à chaque instant par

$$\tilde{e}_k = \tilde{x}_k - \Phi_{k-1:k} \tilde{x}_{k-1}$$

où $\Phi_{k-1:k}$ est la matrice de transition de l'instant $k - 1$ à l'instant k . Posons $v = [e_1, \dots, e_N]^T$; v représente le vecteur des erreurs de modélisation. En supposant le bruit de transition stationnaire au 2^e ordre, il est possible d'estimer la matrice $Q_{k-1:k}$, indépendante du temps dans cette hypothèse, par

$$Q_{k-1:k} = Q = \text{Var}(v) = E[vv^T] - E[v]E[v]^T.$$

Cette méthode peut être appliquée sur chaque profil pris séparément ou sur l'ensemble des profils d'une campagne pour une estimation globale du bruit de transition. Le bruit de transition étant supposé gaussien, il est entièrement déterminé statistiquement par la donnée de la matrice Q .

Ainsi, pour la perturbation de pesanteur simulée $p\tilde{g}$, il est possible de vérifier que le bruit de transition est gaussien (fig. 4.27) et d'un écart-type de 0.6 ng ($6 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}^2$).

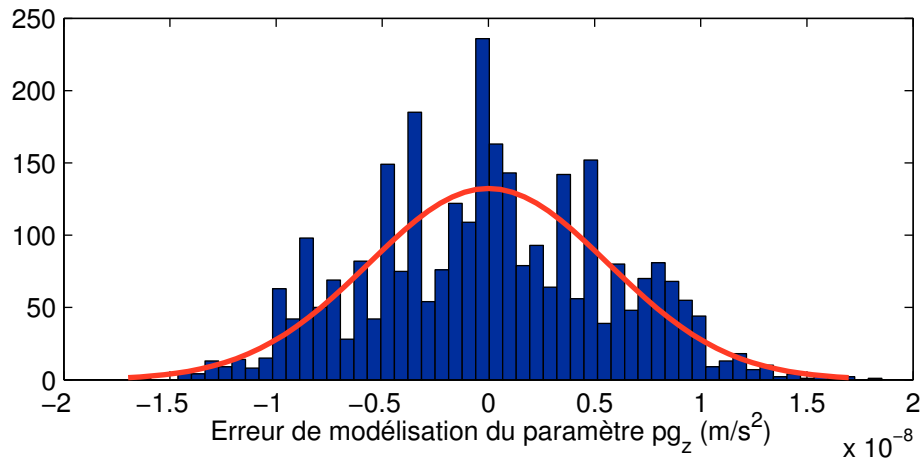


FIG. 4.27 – dispersion des erreurs de modélisation de la perturbation de pesanteur suivant la verticale pg_z .

SOMMAIRE

5.1	PRÉSENTATION DU PROFIL D'ÉTUDE	143
5.2	MATRICES DE VARIANCES-COVARIANCES DU FILTRE DE KALMAN	143
5.2.1	Matrice de variances-covariances du bruit de mesure	146
5.2.2	Matrice de variances-covariances du bruit de transition	146
5.3	EXPÉRIMENTATION DU FILTRE DE KALMAN	146
5.3.1	Modèle sans déviation de la verticale	147
5.3.2	Modèle avec déviation de la verticale	148
5.3.3	Introduction de mesures gyrométriques	153
5.4	CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS POUR L'ÉVOLUTION DU SYSTÈME .	160

LE but du présent chapitre est double : il s'agit d'une part de valider la méthode de traitement par filtrage de Kalman (chapitre 2) à partir de simulations sur des données semi-synthétiques (chapitre 4) et, d'autre part, de proposer des voies d'amélioration du système LIMO-G par une étude quantitative de la précision du système paramétrée par les précisions des capteurs qui le constituent.

5.1 PRÉSENTATION DU PROFIL D'ÉTUDE

Notre étude porte sur l'un des profils de la campagne GMO_1 du SHOM mesuré lors de la mission de Sainte-Maxime (fig. 5.1). L'ensemble des paramètres du vecteur d'état

$$[\ddot{X}_k^e, \dot{X}_k^e, X_k^e, \dot{\phi}_k, \phi_k, p\ddot{g}_k^n, p\dot{g}_k^n, pg_k^n]^T, k \in \llbracket 1, N \rrbracket$$

et les observations

$$[\bar{X}_k^e, \bar{\phi}_k, \bar{a}_k^s]^T, k \in \llbracket 1, N \rrbracket$$

ont été générés avec un intervalle de temps de 0.5 s sur une portion de profil de 5.5 km. selon la méthode de simulation décrite au chapitre 4 (annexe G et PRESS et al. 1992).

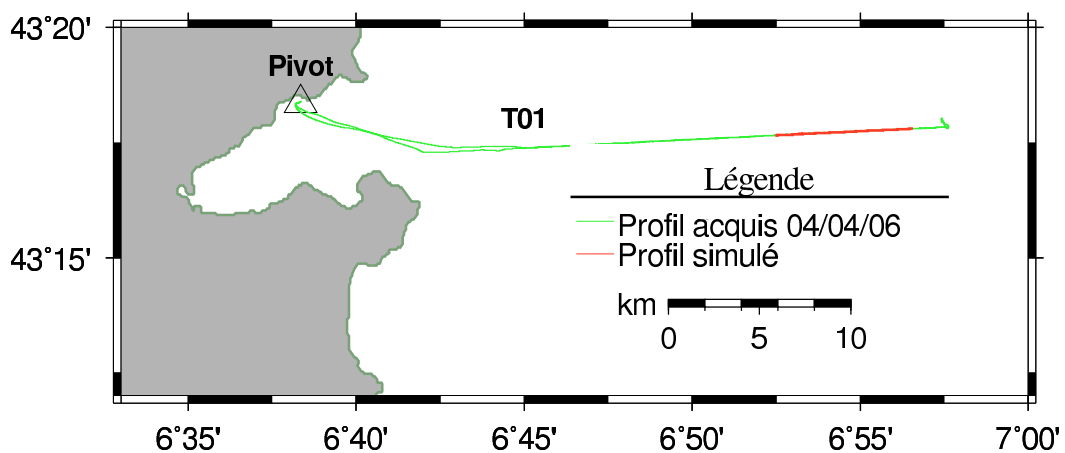


FIG. 5.1 – Carte montrant le profil de la campagne GMO_1 lors de notre mission de Sainte-Maxime (profil vert). La portion de profil surlignée en rouge est celle utilisée pour notre étude.

Les mesures de position (fig. 5.2, 5.3 et 5.4) et d'attitude (fig. 5.5) ont été filtrées à l'aide du filtre passe-bas à 0.02 Hz de fréquence de coupure décrit au chapitre précédent pour éliminer les bruits haute fréquence.

La variation totale de la perturbation de pesanteur sur le profil d'étude est de 20 mGal (fig. 5.6) et présente un maximum.

Ce sont ainsi 2199 échantillons de mesures qui vont pouvoir être soumis à notre méthode de traitement.

5.2 MATRICES DE VARIANCES-COVARIANCES DU FILTRE DE KALMAN

L'algorithme du filtre de Kalman nécessite la détermination de la matrice de variances-covariances du bruit de mesure et celle du bruit de transition. Nous avons choisi de conserver ces matrices constantes, indépendantes du temps pour tout le traitement.

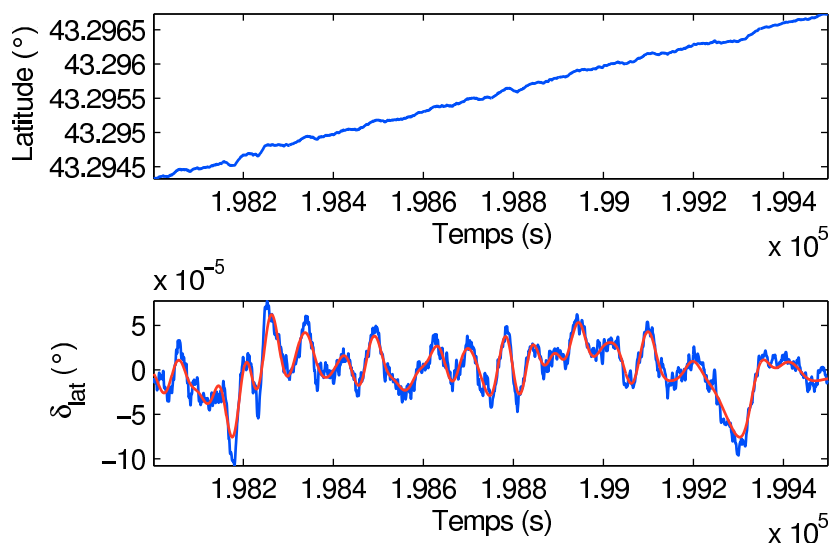


FIG. 5.2 – Profils bruts et filtrés de la latitude en degrés. La première courbe présente les variations de latitude en fonction du temps tandis que la seconde présente les mêmes variations après retrait d'une même tendance affine pour les données brutes et filtrées.

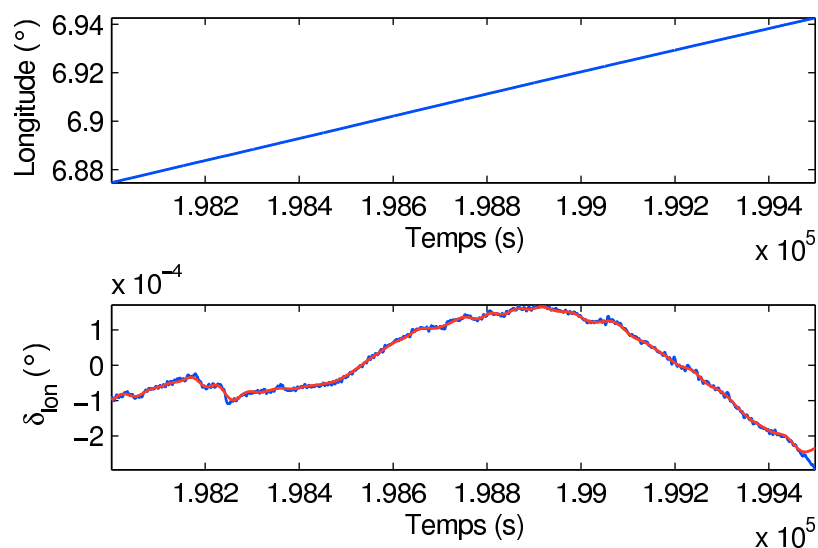


FIG. 5.3 – Profils bruts et filtrés de la longitude en degrés. La première courbe présente les variations de longitude en fonction du temps tandis que la seconde présente les mêmes variations après retrait d'une même tendance affine pour les données brutes et filtrées.

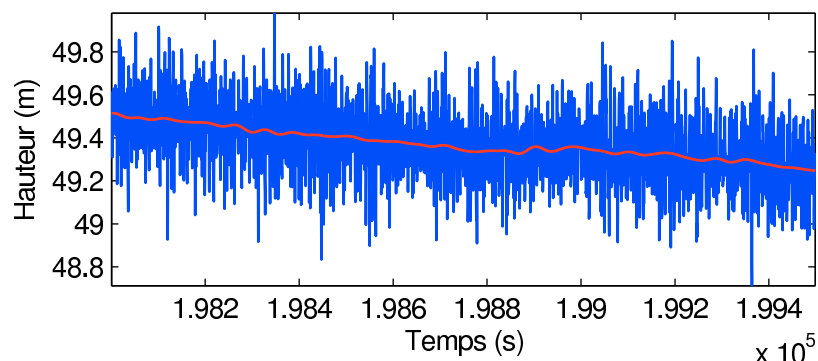


FIG. 5.4 – Profil brut et filtré de la hauteur ellipsoïdale en mètres.

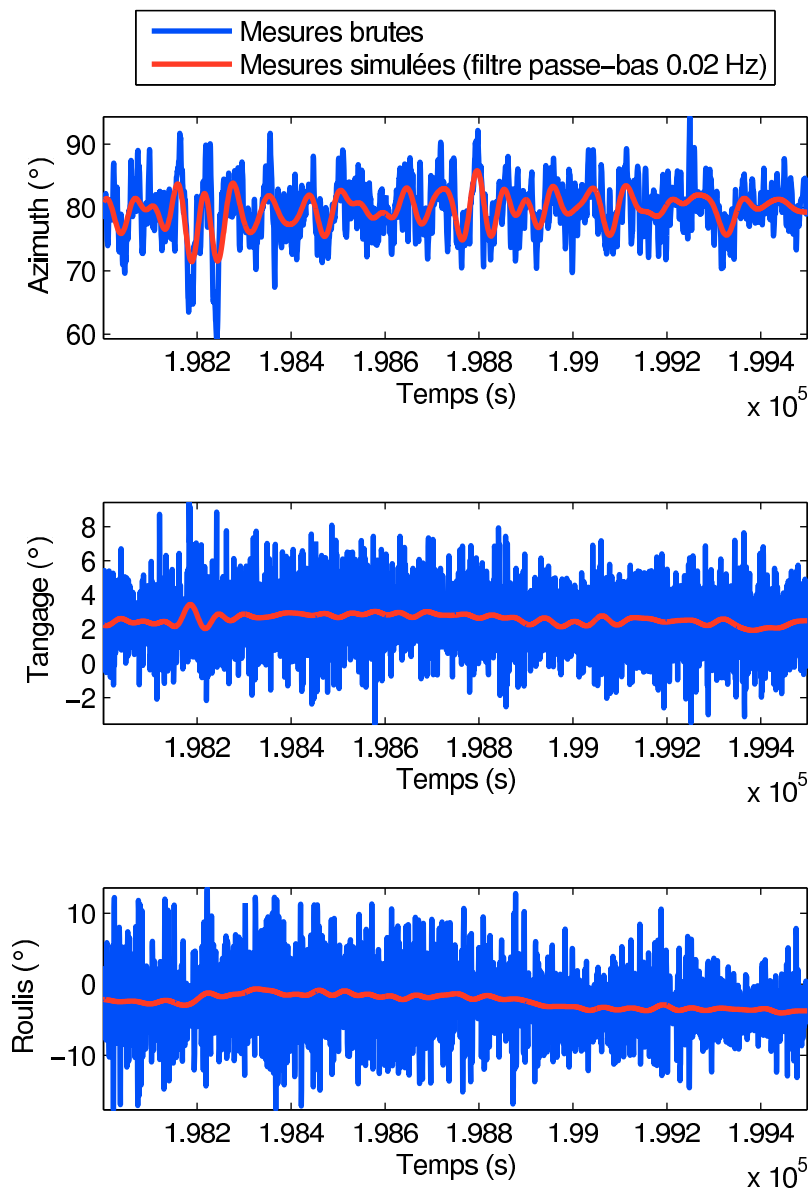


FIG. 5.5 – Profils bruts et filtrés de l'attitude (azimuth, roulis et tangage) en degrés.

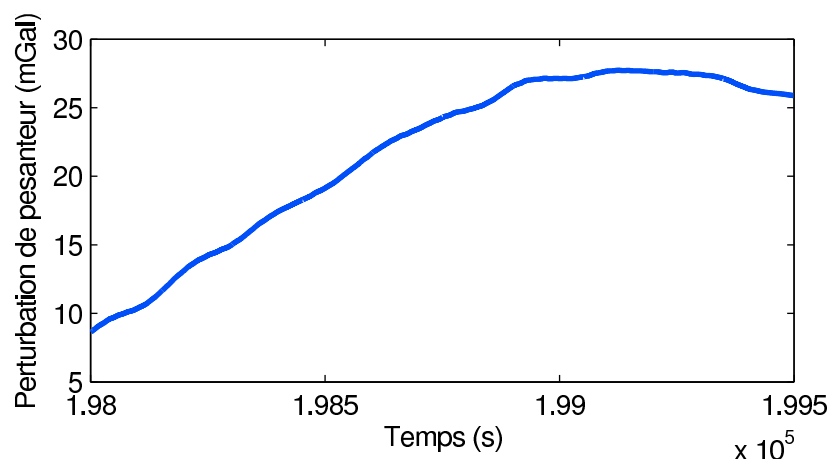


FIG. 5.6 – Profil de la perturbation de pesanteur observable sur le profil d'étude.

5.2.1 Matrice de variances-covariances du bruit de mesure

La matrice de variances-covariances $R \in M_{9,9}(\mathbb{R})$ du bruit de mesure est imposée par les performances des capteurs à notre disposition. Nous supposons les bruits sur les mesures de position, d'attitude et d'accélérations indépendantes. La matrice R est donc diagonale et calculée à partir

- de la précision σ_{X^e} des trois composantes de la position estimées à 5 cm à l'aide du logiciel WAYPOINT GRAFNAV/GRAFNET 7.60 (2006) ;
- de la précision σ_ϕ des trois composantes de l'attitude en sortie de l'ADU2 soit 0.2° (0.0035 rad) sur l'azimut et 0.4° (0.0070 rad) sur le roulis et le tangage selon le constructeur, données qui s'avèrent cohérentes avec les résultats de la mission de Domfront traitée précédemment (chapitre 4) ;
- de la précision σ_{a^s} de la mesure accélérométrique à 0.1 mGal correspondant à une moyenne sur 100 mesures d'accélération.

Ainsi, la matrice de variances-covariances R du bruit de mesure est donnée par

$$\begin{aligned}
 R = R_k &= \begin{bmatrix} \sigma_\alpha^2 & & & & (0) \\ & \sigma_\chi^2 & & & \\ & & \sigma_\eta^2 & & \\ & & & \sigma_{X^e}^2 I_3 & \\ (0) & & & & \sigma_{a^s}^2 I_3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 0.0035^2 & & & & (0) \\ & 0.0070^2 & & & \\ & & 0.0070^2 & & \\ & & & 0.05^2 I_3 & \\ (0) & & & & 0.1e^{-5^2} I_3 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

5.2.2 Matrice de variances-covariances du bruit de transition

La matrice de variances-covariances du bruit de transition concerne tous les 24 paramètres du vecteur d'état. Cette dernière est obtenue à partir des paramètres simulés selon la méthode décrite au §4.2.4. Par construction, la matrice Q est pleine et rend compte des corrélations entre les 24 paramètres. Le tableau 5.1 rassemble les écarts-types du bruit de transition sur les 24 paramètres.

Le bruit de transition sur la composante verticale de la perturbation de pesantueur est de quelques nanogals (tab. 5.1) soit 100 000 fois moins que celui observé pour la composante verticale de l'accélération totale du véhicule. On peut donc estimer que le rapport entre signal utile et signal perturbateur est de l'ordre de $1/100\ 000^e$ pour ce profil.

5.3 EXPÉRIMENTATION DU FILTRE DE KALMAN

L'ensemble des simulations présentées ici sont destinées à éprouver les performances de la méthode de traitement pour divers modèles de champ de pesantueur. Nous envisageons également le gain en précision qui pourrait résulter de l'ajout de mesures gyrométriques complémentaires.

Paramètre	Écart type du bruit de transition
$\ddot{X}_{x,y,z}^e$ (m/s ²)	470.10 ⁻⁶ , 196.10 ⁻⁶ , 518.10 ⁻⁶
$\dot{X}_{x,y,z}^e$ (m/s)	117.10 ⁻⁶ , 49.10 ⁻⁶ , 129.10 ⁻⁶
$X_{x,y,z}^e$ (m)	19.10 ⁻⁶ , 8.10 ⁻⁶ , 21.10 ⁻⁶
$\dot{\phi}_{\alpha,\chi,\eta}$ (°/s)	10.10 ⁻³ , 738.10 ⁻⁶ , 852.10 ⁻⁶
$\phi_{\alpha,\chi,\eta}$ (°)	2.10 ⁻³ , 184.10 ⁻⁶ , 213.10 ⁻⁶
$p\dot{g}_{E,N,U}^n$ (m/s ² /s ²)	6.10 ⁻¹² , 6.10 ⁻¹² , 135.10 ⁻⁹
$p\dot{g}_{E,N,U}^n$ (m/s ² /s)	1.10 ⁻¹² , 1.10 ⁻¹² , 34.10 ⁻⁹
$p\dot{g}_{E,N,U}^n$ (m/s ²)	274.10 ⁻¹⁵ , 274.10 ⁻¹⁵ , 6.10 ⁻⁹

TAB. 5.1 – Table des écarts-types du bruit de transition sur les différents paramètres du vecteur d'état. Le bruit de transition sur les différents paramètres du vecteur d'état.

Chaque simulation débute par un descriptif du modèle de champ sur le profil d'étude puis les écarts entre le champ estimé par le filtre de Kalman et le modèle utilisé pour la simulation sont analysés.

Les paramètres initiaux et leur matrice de variances-covariances associée correspondent au premier vecteur d'état généré pour la simulation.

5.3.1 Modèle sans déviation de la verticale

Pour cette première simulation, la perturbation de pesanteur représentée figure 5.6 est supposée être celle mesurable suivant la direction n_{haut} du référentiel de navigation, ce qui revient à confondre la verticale du lieu avec la normale à l'ellipsoïde de référence.

Les caractéristiques du bruit de mesure sont celles indiquées au §5.2.1. Les résultats du filtrage *aller* (prédiction) et *retour* (filtrage) pour l'estimation de la perturbation de pesanteur, sont représentés sur la figure 5.7.

On distingue nettement le régime transitoire sur le filtrage *aller* d'une durée inférieure à 400 s. Ce régime transitoire n'est pas présent sur le filtrage *retour* puisqu'il prend comme vecteur d'état initial le dernier estimé lors du filtrage *aller*. Le résultat de l'estimation combinée de la perturbation de pesanteur à partir des filtrages *aller* et *retour* est représenté figure 5.8.

On peut constater la réduction de l'amplitude du régime transitoire ainsi que l'adéquation générale de l'estimation avec le modèle de référence avec une précision de 3.3 mGal (amplitude des barres d'erreur à 3σ de ± 10 mGal). Cette adéquation est confirmée par l'analyse des écarts entre perturbation estimées et perturbation de référence qui caractérisent l'exactitude du système. Ces derniers ont une moyenne de -0.34 mGal avec une dispersion de 0.41 mGal.

Ainsi, bien que la précision obtenue est moins bonne que celle annoncée dans les spécifications du système Limo-G (1 mGal), l'exactitude en revanche est tout à fait satisfaisante.

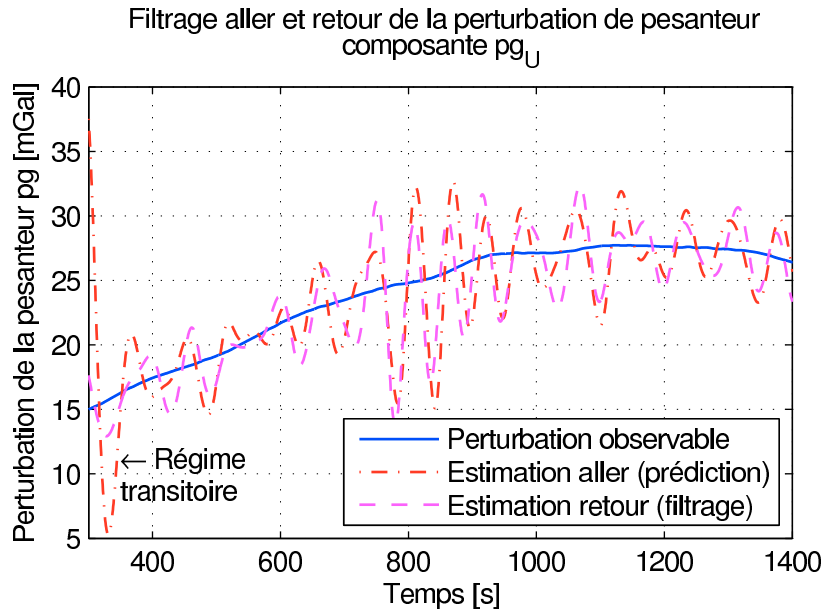


FIG. 5.7 – Estimations de la perturbation de pesanteur à partir des filtrages aller et retour. Il est à noter que le choix d'un vecteur d'état initial éloigné de la réalité augmente la durée du régime transitoire sans modifier le résultat final de l'estimation.

5.3.2 Modèle avec déviation de la verticale

Pour cette deuxième simulation, le modèle de champ comprend une déviation de la verticale caractérisée par les angles ζ et η mesurés respectivement dans les plans (u_{est}, n_{haut}) et (v_{nord}, n_{haut}) du référentiel de navigation (fig. 2.4). Les composantes du vecteur accélération de la pesanteur dans le référentiel de navigation s'expriment alors par

$$\begin{aligned} g_E &= g\zeta \\ g_N &= g\eta \\ g_U &= g\sqrt{1 - \zeta^2 - \eta^2} \end{aligned}$$

où g est la norme de l'accélération de pesanteur.

Les composantes de la perturbation de pesanteur sont alors données par

$$\begin{aligned} pg_E &= g\zeta \\ pg_N &= g\eta \\ pg_U &= g\sqrt{1 - \zeta^2 - \eta^2} - \gamma \end{aligned}$$

où γ désigne l'accélération de la pesanteur normale au point de mesure.

Dans cette simulation, les valeurs des angles de déviation de la verticale ont été choisies constantes, égales à $10''$ ($\zeta = \eta = 10''$). Les résultats de l'estimation des trois composantes de la déviation de la verticale sont indiqués figures 5.9, 5.10 et 5.11.

On peut constater que l'estimation de la composante pg_U est réalisée avec une précision et une exactitude comparables à celles de la première simulation (fig. 5.8

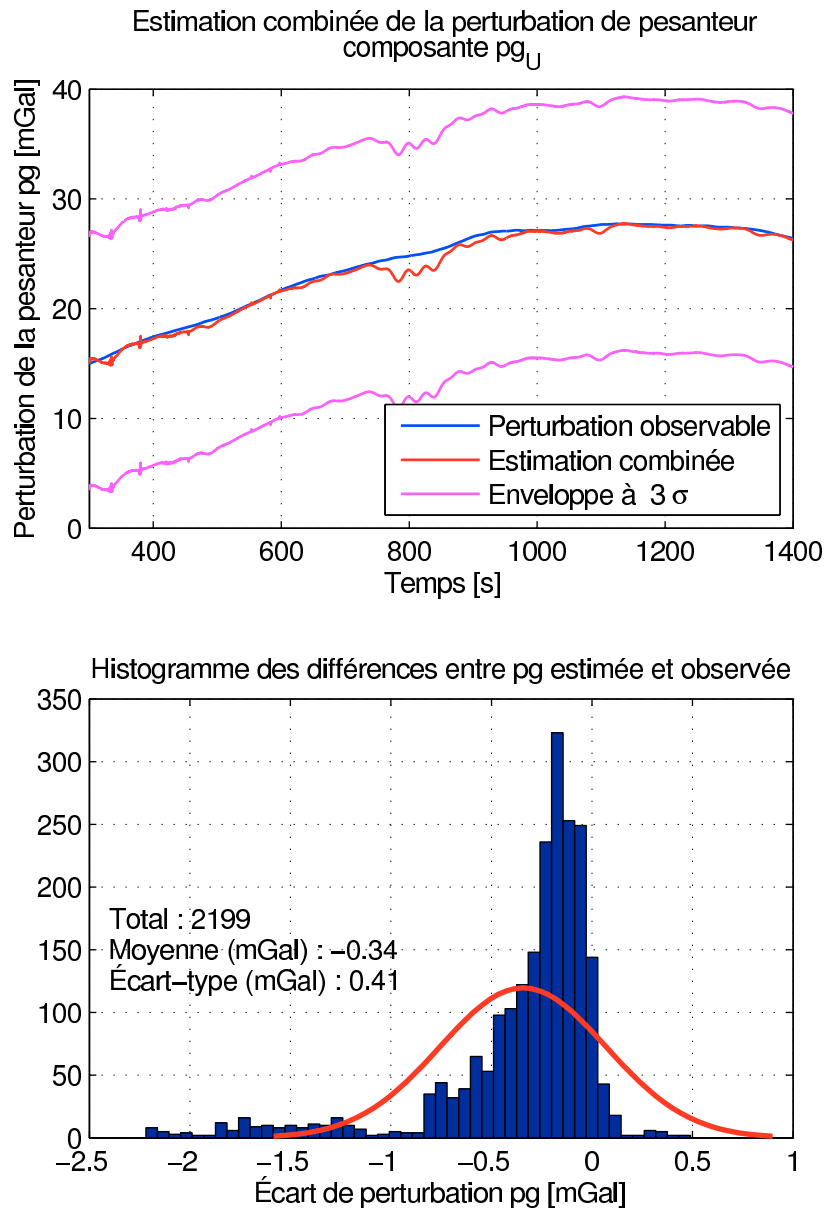


FIG. 5.8 – Estimation de la perturbation de pesanteur à partir d'une combinaison pondérée des estimations obtenues par les filtres aller puis retour (équation (2.41)) et histogramme des écarts entre la perturbation estimée et son modèle de référence sur 2199 estimations. L'écart-type sur la détermination de la perturbation de pesanteur qui caractérise la précision du système est de 3.3 mGal. L'analyse des écarts à la référence révèle que l'exactitude de l'estimation de la perturbation de pesanteur est dans l'ordre du milligal (-0.34 ± 1.23 mGal à 3σ .)

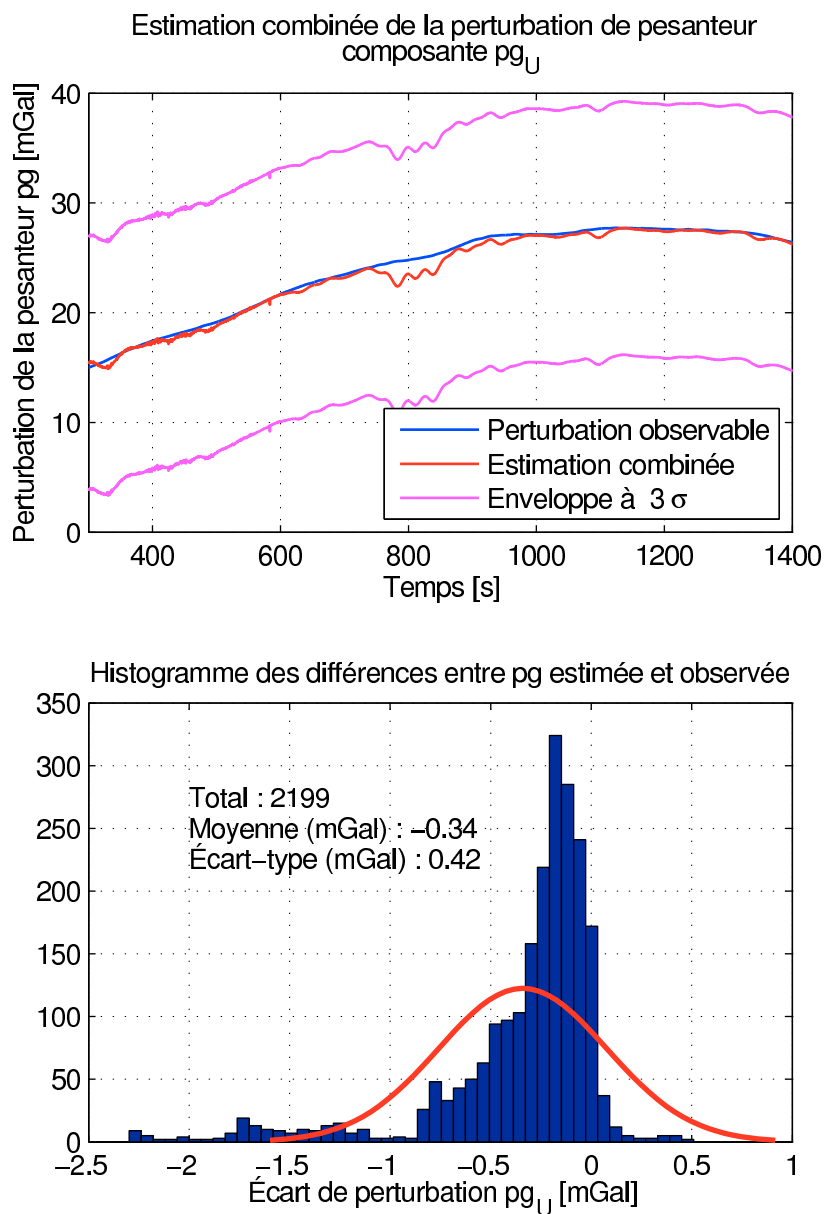


FIG. 5.9 – Estimation de la perturbation de pesanteur pg_U et histogramme des écarts entre la perturbation estimée et son modèle de référence. Ce cas a été calculé avec une déviation de la verticale de $10''$.

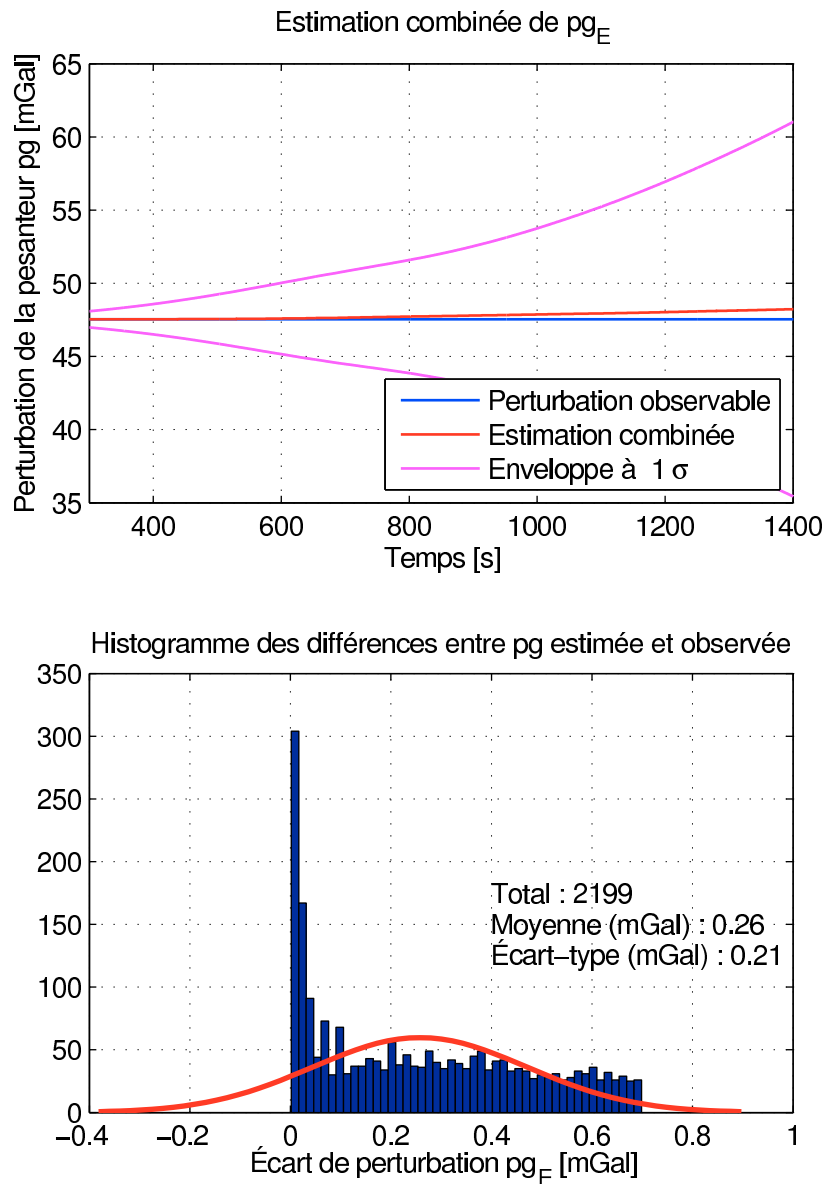


FIG. 5.10 – Estimation de la perturbation de pesanteur pg_E et histogramme des écarts entre la perturbation estimée et son modèle de référence. Ce cas a été calculé avec une déviation de la verticale de $10''$. On constate ici une divergence progressive de l'estimation et de sa précision.

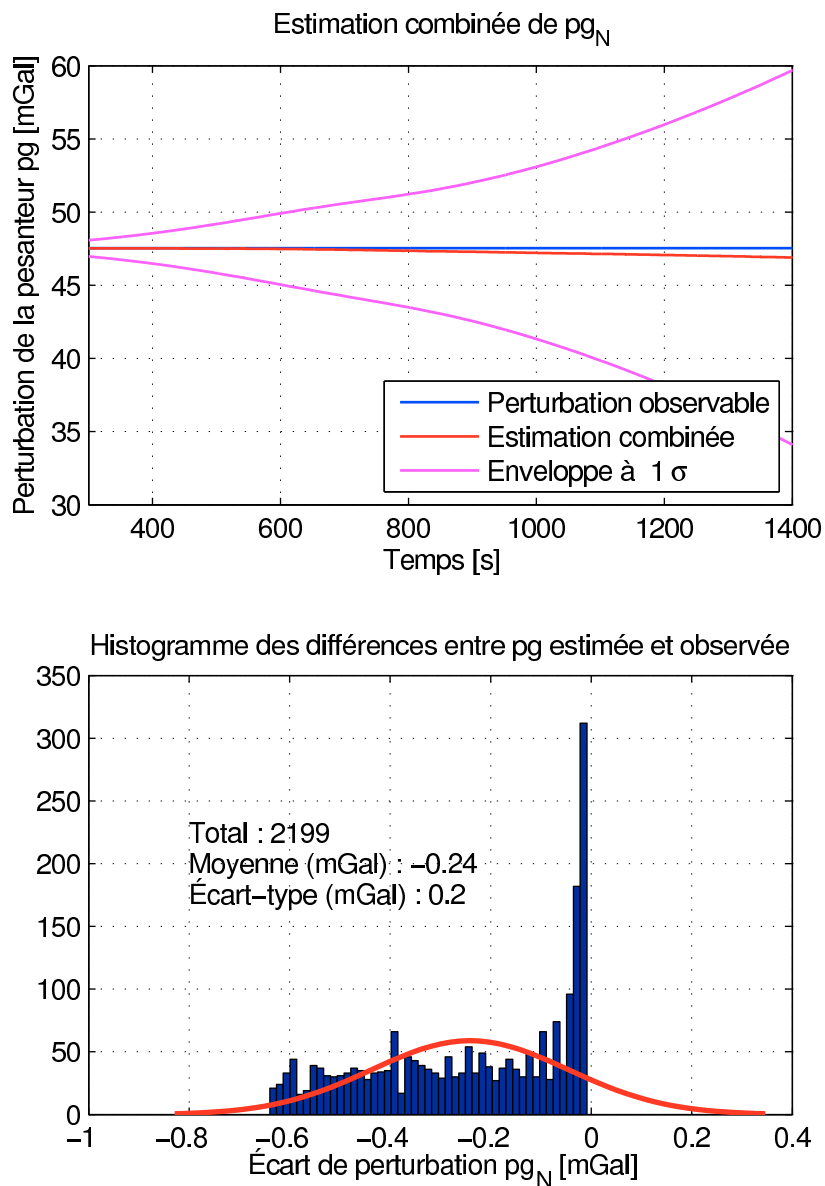


FIG. 5.11 – Estimation de la perturbation de pesanteur pg_N et histogramme des écarts entre la perturbation estimée et son modèle de référence. Ce cas a été calculé avec une déviation de la verticale de $10''$. Le phénomène de divergence constaté sur pg_E se répète à l'identique pour pg_N .

et 5.9). En revanche, les estimations des composantes pg_E et pg_N présentent un écart par rapport à la référence qui tend à s'amplifier conjointement à un accroissement considérable de l'incertitude sur les estimations (fig. 5.10 et 5.11).

Cet accroissement est le signe que le filtre conduit à une divergence des estimations de pg_E et pg_N qu'il ne peut donc restituer compte-tenu des précisions des capteurs de position et d'attitude et de la précision des accéléromètres. Une étude paramétrique de l'évolution de la restitution des composantes de pg par le filtre en fonction des précisions des capteurs a montré qu'une amélioration de la précision de détermination de l'attitude d'un facteur supérieur à 50 permettrait de stabiliser le filtre (fig. 5.12, 5.13 et 5.14) tout en améliorant sensiblement l'exactitude de l'estimation.

Une telle amélioration des mesures d'attitude nécessite de remplacer le dispositif actuel par une centrale d'attitude dédiée ou de compléter le dispositif actuel par des capteurs complémentaires tels des gyromètres.

5.3.3 Introduction de mesures gyrométriques

Dans cette simulation, le vecteur de mesure a été complété par des mesures gyrométriques donnant une valeur directe des dérivées par rapport au temps de l'azimuth $\dot{\alpha}$, du tangage $\dot{\chi}$ et du roulis $\dot{\eta}$, soit

$$z_k = [\bar{\phi}, \bar{\phi}, \bar{X}^e, \bar{a}^s]$$

où $\phi = [\alpha, \chi, \eta]$ est le vecteur d'attitude et $\dot{\phi}$ sa dérivée par rapport au temps.

La prise en compte des mesures gyrométriques a nécessité la modification du modèle de mesure (2.40), en particulier de la matrice de mesure H_k comme suit

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{\phi}_k \\ \delta\phi_k \\ \delta X_k^e \\ \delta a^s \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ \frac{\partial h^{a^s}}{\partial \dot{X}^e} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial \dot{X}^e} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial X^e} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial \dot{\phi}} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial \phi} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial \dot{p}g^n} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial p g^n} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial p g^n} \end{bmatrix}}_{H_k} \Big|_{x=\hat{x}_k} \begin{bmatrix} \delta \dot{X}_k^e \\ \delta \dot{X}_k^e \\ \delta X_k^e \\ \delta \dot{\phi}_k \\ \delta \phi_k \\ \delta \dot{p}g_k^n \\ \delta p g_k^n \\ \delta p g_k^n \end{bmatrix} + v_k$$

La précision des mesures gyrométriques a été fixée d'après les données du constructeur « Bullier automation » concernant des gyromètres à fibre optique VG951A (tab. 5.2). Ce type de gyromètres pourrait aisément s'adapter sur la plate-forme actuelle du système Limo-G. Les précisions des autres capteurs sont restées inchangées par rapport à la deuxième simulation (tab. 5.3).

Les résultats de l'estimation des composantes pg_U , pg_E et pg_N sont indiqués respectivement dans les figures 5.15, 5.16 et 5.17.

L'exactitude de l'estimation de pg_U est améliorée d'un facteur 2 comparée à celle obtenue par le système sans gyromètre (fig. 5.9). En revanche, la précision des estimations est comparable dans les deux cas.

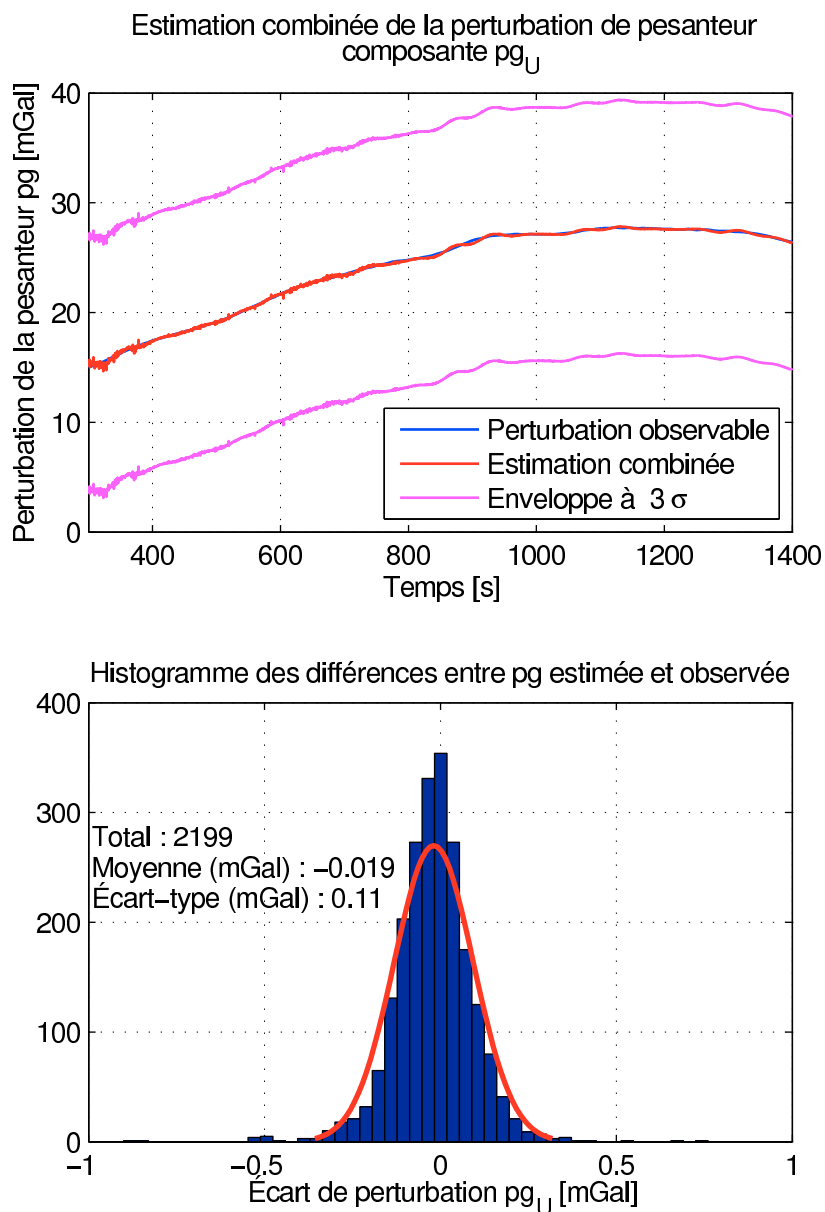


FIG. 5.12 – Estimation de la perturbation de pesanteur pg_U et histogramme des écarts entre la perturbation estimée et son modèle de référence. Ce cas a été calculé avec une déviation de la verticale de $10''$ et la mesure d'attitude a été améliorée d'un facteur 50. Il n'y a pas d'amélioration substantielle de la précision des estimations de pg_U . En revanche, l'exactitude est améliorée d'un facteur 4 (0.11 mGal au lieu de 0.42 mGal).

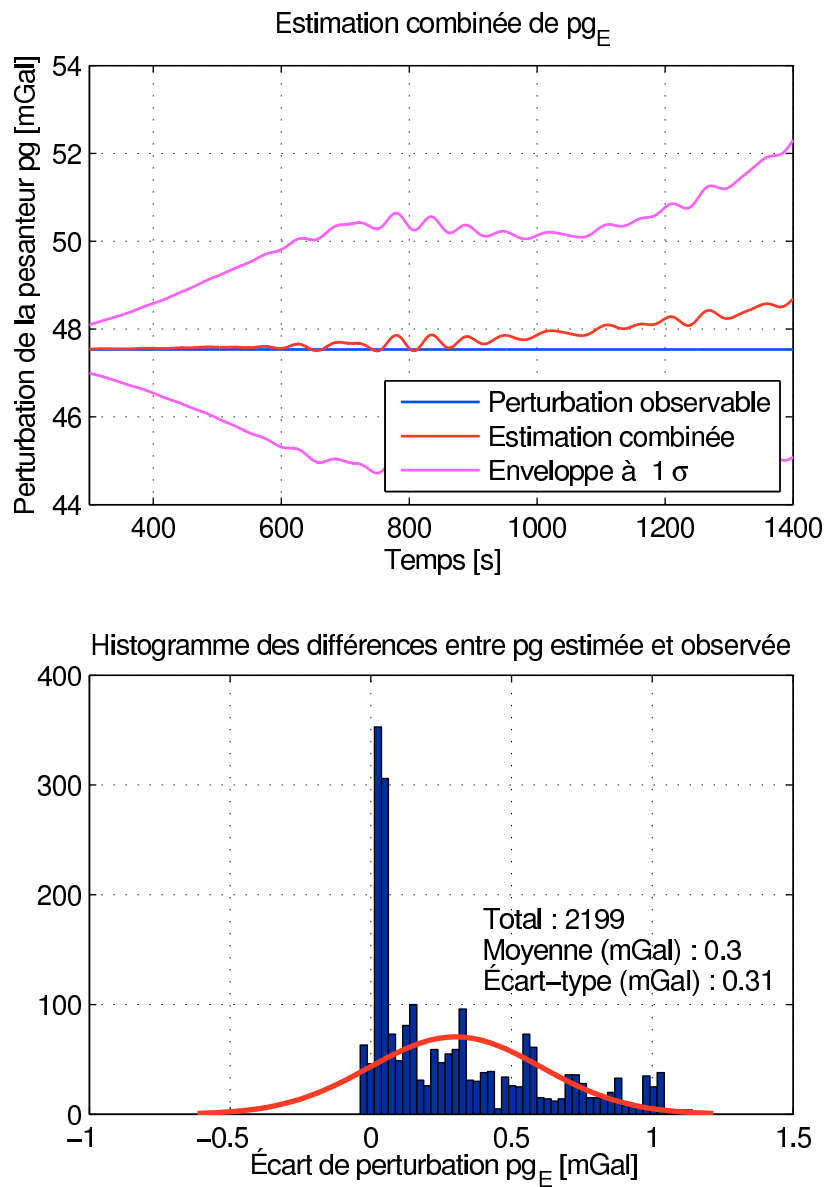


FIG. 5.13 – Estimation de la perturbation de pesanteur pg_E et histogramme des écarts entre la perturbation estimée et son modèle de référence. Ce cas a été calculé avec une déviation de la verticale de $10''$ et la mesure d'attitude a été améliorée d'un facteur 50. La stabilisation de l'estimation pg_E est maintenue, mais se dégrade en fin de profil.

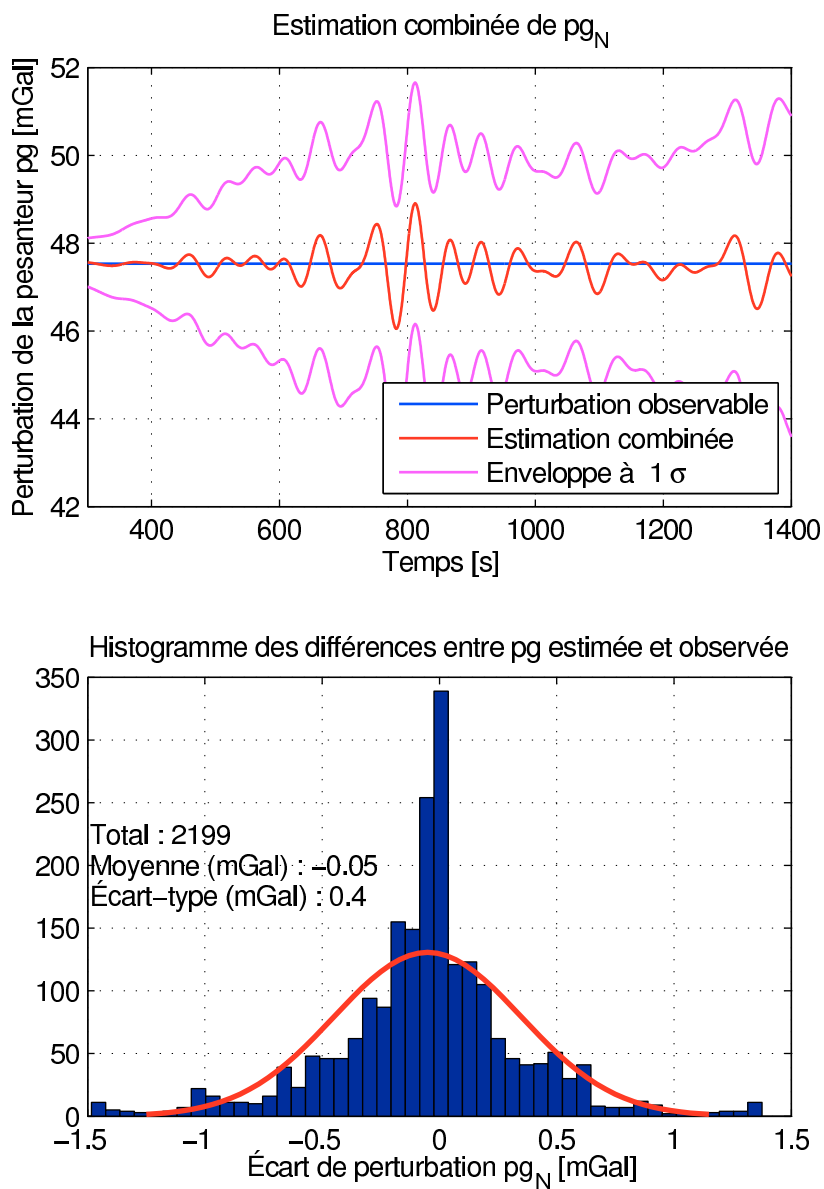


FIG. 5.14 – Estimation de la perturbation de pesanteur pg_N et histogramme des écarts entre la perturbation estimée et son modèle de référence. Ce cas a été calculé avec une déviation de la verticale de $10''$ et la mesure d'attitude a été améliorée d'un facteur 50. La stabilisation de l'estimation de pg_N est ici bien réalisée.

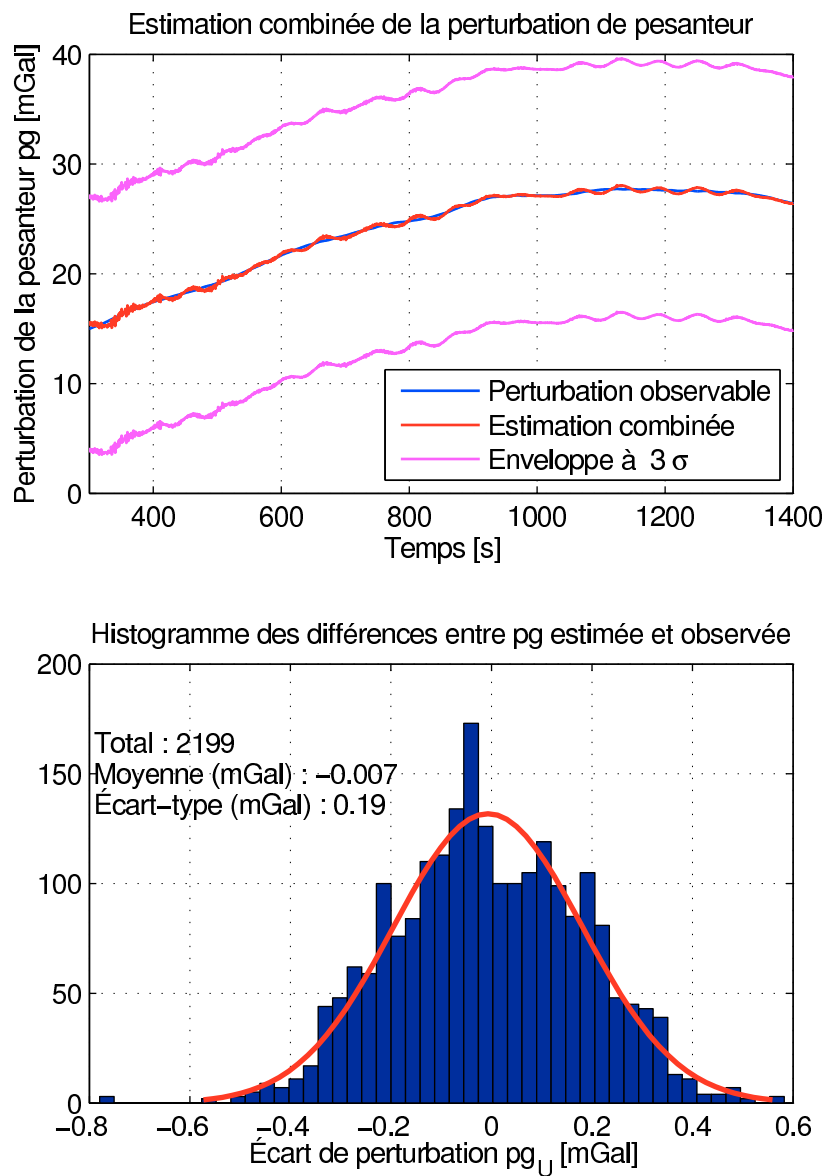


FIG. 5.15 – Estimation de la perturbation de pesanteur pg_U et histogramme des écarts entre la perturbation estimée et son modèle de référence. Ce cas a été calculé avec une déviation de la verticale de $10''$, avec des mesures gyrométriques.

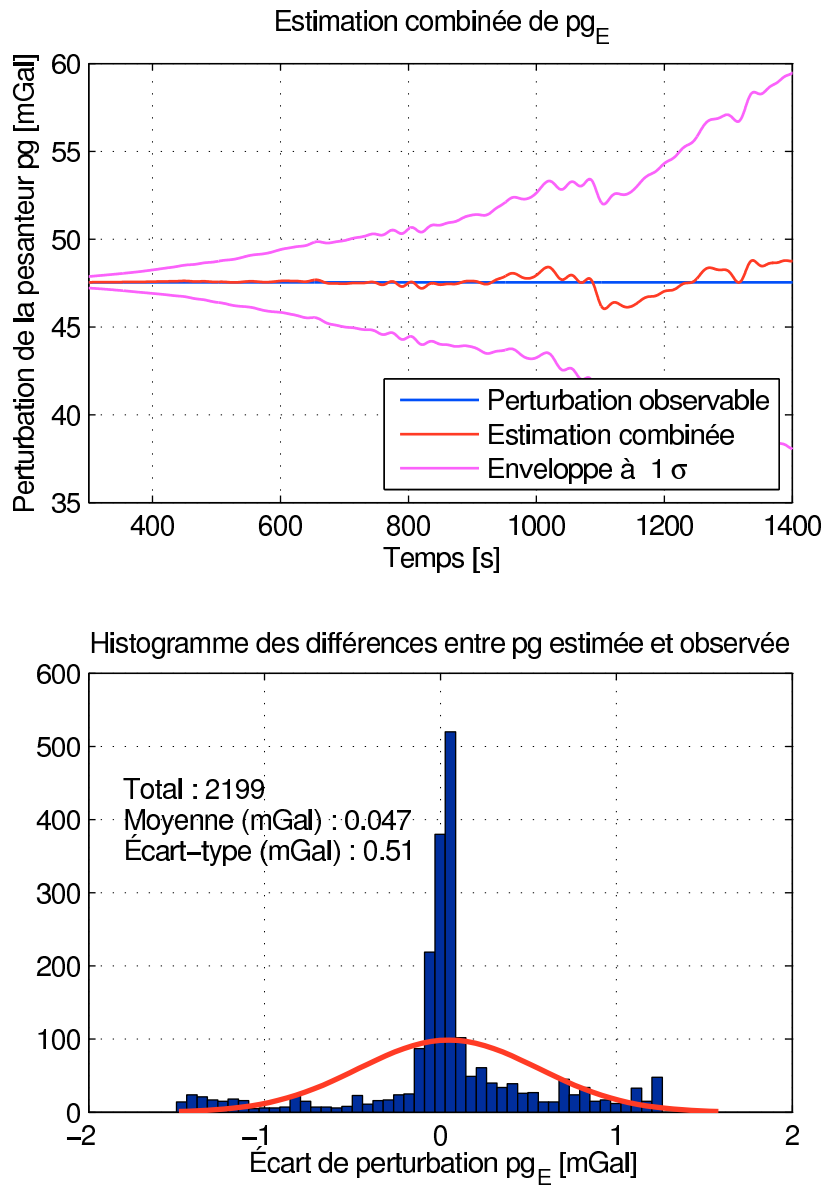


FIG. 5.16 – Estimation de la perturbation de pesanteur pg_E et histogramme des écarts entre la perturbation estimée et son modèle de référence. Ce cas a été calculé avec une déviation de la verticale de $10''$, avec des mesures gyrométriques. On constate une divergence des estimations de pg_E moins régulière que dans la figure 5.10, mais bel et bien présente.

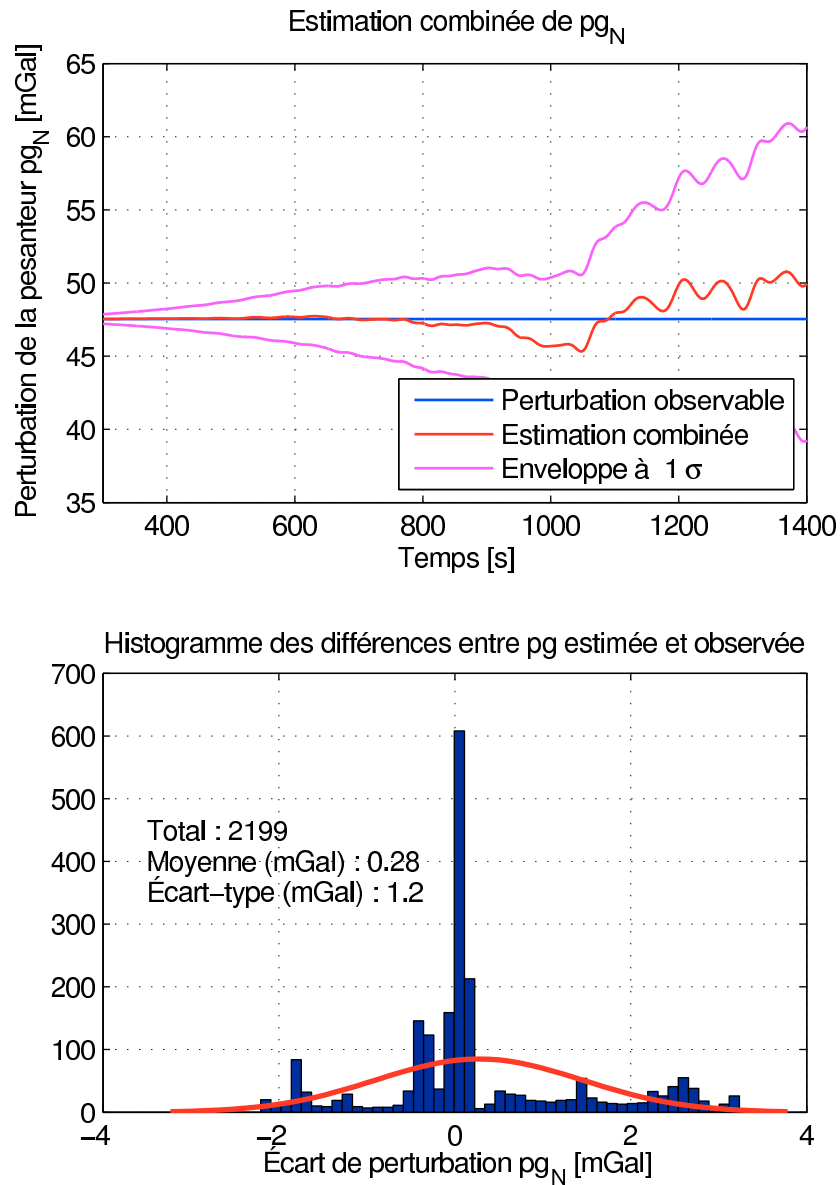


FIG. 5.17 – Estimation de la perturbation de pesanteur pg_N et histogramme des écarts entre la perturbation estimée et son modèle de référence. Ce cas a été calculé avec une déviation de la verticale de $10''$, avec des mesures gyrométriques. À nouveau, les estimations de pg_N subissent une divergence qui n'est pas compensée par les seules mesures gyrométriques.

Performances	
biais	1°/h
stabilité du gain	0.03%
bruit	0.007 mV
domaine	±80°/s
temp.	[-30°C,70°C]
chocs admis	40g, 1 ms
sortie analogique	±3 V
gain	24 mV/°/s
variation du gain	0.05%
Géométrie	
poids	550 g
dimensions	150 × 31 mm

TAB. 5.2 – Principales caractéristiques des gyromètres VG951A de la société « Bullier automation ».

Mesure	Précision
variation d'attitude $\bar{\phi}_{\alpha,\chi,\eta}$	$3 \cdot 10^{-4}^\circ/\text{s}$
azimuth $\bar{\phi}_\alpha$	0.2°
roulis, tangage $\bar{\phi}_{\chi,\eta}$	0.4°
position $\bar{X}_{x,y,z}^e$	0.05 m
accélération de rappel $\bar{a}_{1,2,3}^s$	0.1 mGal

TAB. 5.3 – Tableau des précisions des mesures.

On constate également que les estimations de pg_E et pg_N (fig. 5.16 et 5.17) présentent une divergence, certes moins régulière que dans le cas du système seul (fig. 5.10 et 5.11), mais signalant néanmoins la déstabilisation du filtre.

Il est donc clair que le simple ajout de gyromètres ne permet pas de stabiliser le filtre pour la détermination des composantes pg_E et pg_N de la perturbation de pesanteur. ce phénomène est d'autant plus probable que les simulations présentées supposent des mesures gyrométriques exemptes de toute erreur. Or il faudra tenir compte des biais propre de chaque gyromètre qui pourraient, par exemple, entrer comme nouveaux paramètres du vecteur d'état du filtre.

L'évolution du biais d'un gyromètre peut être modélisée par un processus de Markov de premier ordre (JEKELI 2001) dans l'équation d'évolution du filtre de Kalman. Cependant, l'introduction de ces nouveaux paramètres risquent fort de détériorer la détermination des autres, en particulier celle de pg_E et pg_N .

5.4 CONCLUSIONS ET RECOMMANDATIONS POUR L'ÉVOLUTION DU SYSTÈME

Les simulations présentées dans ce chapitre ont montré que le système Limo-G fonctionne en gravimétrie mobile scalaire avec une précision comprise entre 3 et 4 mGal et une exactitude de l'ordre du milligal. La restitution des deux autres

composantes de la pesanteur est rendue impossible par la précision du dispositif de restitution de l'attitude (récepteur à quatre antennes ADU2) qui n'est pas suffisamment améliorée par l'introduction simple de mesures gyrométriques dans le processus de traitement actuel.

Il n'est pas question pour des raisons de coût et d'ergonomie de doter le système Limo-G d'une centrale d'attitude « haut de gamme » environ 10 fois plus précise que le récepteur ADU2. Nous suggérons plutôt le développement d'une méthode de traitement combinée qui utiliserait comme observables les différences de phase des signaux GPS acquis par les antennes du récepteur ADU2 et les vitesses angulaires issues des gyromètres. Cette combinaison pourrait être réalisée par un filtre de Kalman dédié ou bien s'intégrer directement au filtre propre du système Limo-G nous préservant ici de l'estimation préalable des angles d'attitude par un autre logiciel.

Un autre point délicat qui n'est pas abordé dans ces simulations concerne la nécessaire prise en compte de l'effet de bras de levier. Nous avons montré au chapitre 3 que le calcul direct des effets de bras de levier exigeait une précision sur les angles d'attitude hors de portée des dispositifs actuels. La solution la plus raisonnable pour corriger les effets de bras de levier serait de les introduire en tant que paramètres supplémentaires dans le processus d'estimation de la pesanteur sous la forme d'une accélération perturbatrice.

Les évolutions nécessaires du système Limo-G, mises en évidence dans ce travail, concernent essentiellement la détermination de l'attitude avec l'introduction de gyromètres et la modification de la méthode de traitement pour combiner dans un même traitement les différences de phase GPS et les mesures de vitesses angulaires.

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'ÉTUDE et le développement du système de gravimétrie mobile Limo-G a constitué une expérience des plus enrichissantes qui a accru notre expertise dans la conception et la réalisation de systèmes gravimétriques. Bien que n'ayant pu atteindre tous ses objectifs initiaux (un milligal sur les trois composantes de la pesanteur), ce travail de thèse a rendu le système Limo-G complètement opérationnel, depuis l'acquisition de données jusqu'au traitement permettant la restitution de la pesanteur ; il a également mis en évidence certaines insuffisances du dispositif actuel et proposé des voies d'amélioration concrètes pour descendre en dessous du milligal de précision.

La première grande avancée de ce travail est la mise au point d'une méthode d'étalonnage fiable du système Limo-G sans laquelle les mesures du système sont biaisées. La réalisation d'un système peu encombrant exige l'utilisation d'accéléromètres miniatures dont les coefficients d'étalonnage varient avec la température de plusieurs dizaines de milligals par degré. Notre méthode d'étalonnage comprend une estimation des coefficients d'étalonnage au laboratoire, suivi de la détermination de l'orientation des axes sensibles des accéléromètres par un étalonnage gravimétrique. Nous préconisons pour la réalisation de ce dernier l'utilisation d'une table orientable portant le dispositif qui permette la réalisation de mesures pour différentes attitudes extrêmes. Nous recommandons également le contrôle des coefficients d'étalonnage et de l'orientation des axes sensibles sur la zone de levé à partir de points gravimétriques de référence selon la méthode d'étalonnage gravimétrique mixte que nous avons proposée. Enfin, la stabilité en température de l'enceinte thermorégulée du système actuel n'est pas suffisante pour garantir le milligal de précision. Il est donc indispensable de remplacer l'enceinte actuelle par une nouvelle dont la stabilité en température atteigne 0.01°C .

La deuxième grande avancée suscitée par cette étude est le développement d'une méthode de traitement basée sur un filtre de Kalman, validée sur des données synthétiques et mis en œuvre par des simulations sur des données semi-synthétiques issues d'un levé marin. Les simulations ont montré que la précision du système actuel pour la restitution d'une composante de la pesanteur varie entre 3 et 4 mGal pour une durée d'intégration correspondant à 100 mesures d'accélération et que l'exactitude du système est de l'ordre du milligal. En revanche, la restitution des trois composantes à la même précision nécessiterait l'amélioration de la détermination de l'attitude d'un facteur 50, ce qui ne peut être réalisé par l'introduction simple de mesures gyrométriques dans le processus de traitement actuel. Les développements futurs du système Limo-G devront donc se concentrer sur la détermination de l'attitude en explorant éventuellement la voie consistant à combiner mesures de phase GPS et mesures gyrométriques et sur l'estimation des

effets de bras de levier par un calcul indirect qui ne nécessite pas une connaissance préalable de l'attitude.

Enfin, la méthode de traitement présentée dans ce travail repose sur le filtrage de Kalman dont nous avons mentionné les limites, en particulier pour la prise en compte des fonctions de covariance raisonnables du champ de pesanteur. Le filtrage de Kalman présente l'avantage de fournir une solution explicite dans le cadre des systèmes linéaires gaussiens, calculable de façon récursive, ce qui permet de traiter un nombre quelconque de mesures réparties sur un profil ou sur plusieurs profils croisés pour former une grille. Il serait intéressant pour cette application d'explorer la classe très générale de modèles de Markov à espace d'état, qui inclut le modèle gaussien, mais se généralise aux systèmes non linéaires à bruits non gaussiens.

Compte-tenu des résultats obtenus dans ce travail, nous pensons que la finalisation du système Limo-G avec ses spécifications initiales n'est pas déraisonnable et suscitera dans un futur proche des développements méthodologiques particulièrement intéressants.

EXPRESSION DE L'ACCÉLÉRATION CINÉMATIQUE

A

Où l'on développe l'expression de l'accélération cinématique en tenant compte de la présence d'un bras de levier.

Depuis la position X^i , il est possible de déterminer l'accélération cinématique \ddot{X}^i grâce à une double différenciation par rapport au temps. L'expression (2.15)

$$X^i = C_e^i P^e + C_e^i C_n^e C_b^n B^b.$$

dérivée une première fois donne donc la vitesse \dot{X}^i :

$$\begin{aligned} \dot{X}^i &= \dot{C}_e^i P^e + C_e^i \dot{P}^e \\ &\quad + \dot{C}_e^i C_n^e C_b^n B^b + C_e^i \dot{C}_n^e C_b^n B^b \\ &\quad + C_e^i C_n^e \dot{C}_b^n B^b + C_e^i C_n^e C_b^n \dot{B}^b. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Or, le bras de levier est fixe dans le repère du véhicule, sa dérivée \dot{B}^b est donc nulle. De plus, la dérivée des matrices de passage \dot{C}_e^i , \dot{C}_n^e et \dot{C}_b^n peut être exprimée grâce à la matrice antisymétrique de la rotation correspondante (2.4). Ainsi, il vient

$$\begin{aligned} \dot{C}_e^i &= C_e^i \Omega_{ie}^e, \\ \dot{C}_n^e &= C_n^e \Omega_{en}^n \text{ et} \\ \dot{C}_b^n &= C_b^n \Omega_{nb}^b. \end{aligned}$$

La vitesse (A.1) se simplifie donc par

$$\begin{aligned} \dot{X}^i &= C_e^i (\Omega_{ie}^e P^e + \dot{P}^e \\ &\quad + \Omega_{ie}^e C_n^e C_b^n B^b + C_n^e \Omega_{en}^n C_b^n B^b \\ &\quad + C_n^e C_b^n \Omega_{nb}^b B^b). \end{aligned}$$

Il est à présent possible de dériver à nouveau cette équation afin d'obtenir l'accélération cinématique recherchée. On obtient ainsi,

$$\begin{aligned} \ddot{X}^i &= \dot{C}_e^i \left(\Omega_{ie}^e P^e + \dot{P}^e + \Omega_{ie}^e C_n^e C_b^n B^b + C_n^e \Omega_{en}^n C_b^n B^b + C_n^e C_b^n \Omega_{nb}^b B^b \right) \\ &\quad + C_e^i \left(\dot{\Omega}_{ie}^e P^e + \Omega_{ie}^e \dot{P}^e + \ddot{P}^e \right. \\ &\quad + \dot{\Omega}_{ie}^e C_n^e C_b^n B^b + \Omega_{ie}^e \dot{C}_n^e C_b^n B^b + \Omega_{ie}^e C_n^e \dot{C}_b^n B^b + \Omega_{ie}^e C_n^e C_b^n \dot{B}^b \\ &\quad + \dot{C}_n^e \Omega_{en}^n C_b^n B^b + C_n^e \dot{\Omega}_{en}^n C_b^n B^b + C_n^e \Omega_{en}^n \dot{C}_b^n B^b + C_n^e \Omega_{en}^n C_b^n \dot{B}^b \\ &\quad \left. + \dot{C}_b^n C_b^n \Omega_{nb}^b B^b + C_n^e \dot{C}_b^n \Omega_{nb}^b B^b + C_n^e C_b^n \dot{\Omega}_{nb}^b B^b + C_n^e C_b^n \Omega_{nb}^b \dot{B}^b \right). \end{aligned}$$

Aux simplifications précédentes, vient s'ajouter la rotation de la Terre considérée constante. Dans ce cas, la dérivée de la matrice antisymétrique Ω_{ie}^e liée à la rotation de la Terre est nulle. Ainsi, on retrouve l'expression de l'accélération cinématique (2.16) :

$$\begin{aligned} \ddot{X}^i &= C_e^i \Omega_{ie}^e \left(\Omega_{ie}^e P^e + \dot{P}^e + \Omega_{ie}^e C_n^e C_b^n B^b + C_n^e \Omega_{en}^n C_b^n B^b + C_n^e C_b^n \Omega_{nb}^b B^b \right) \\ &\quad + C_e^i \left(\Omega_{ie}^e \dot{P}^e + \ddot{P}^e \right. \\ &\quad + \Omega_{ie}^e C_n^e \Omega_{en}^n C_b^n B^b + \Omega_{ie}^e C_n^e C_b^n \Omega_{nb}^b B^b \\ &\quad + C_n^e \Omega_{en}^n \Omega_{en}^n C_b^n B^b + C_n^e \dot{\Omega}_{en}^n C_b^n B^b + C_n^e \Omega_{en}^n C_b^n \Omega_{nb}^b B^b \\ &\quad \left. + C_n^e \Omega_{en}^n C_b^n \Omega_{nb}^b B^b + C_n^e C_b^n \Omega_{nb}^b \Omega_{nb}^b B^b + C_n^e C_b^n \dot{\Omega}_{nb}^b B^b \right). \end{aligned}$$

puis

$$\ddot{X}^i = C_e^i (\ddot{P}^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{P}^e + \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e P^e + M_B B^b)$$

où

$$\begin{aligned} M_B = & \Omega_{ie}^e \Omega_{ie}^e C_n^e C_b^n + C_n^e \Omega_{en}^n \Omega_{en}^n C_b^n + C_n^e C_b^n \Omega_{nb}^b \Omega_{nb}^b \\ & + C_n^e \dot{\Omega}_{en}^n C_b^n + C_n^e C_b^n \dot{\Omega}_{nb}^b \\ & + 2\Omega_{ie}^e C_n^e \Omega_{en}^n C_b^n + 2\Omega_{ie}^e C_n^e C_b^n \Omega_{nb}^b + 2C_n^e \Omega_{en}^n C_b^n \Omega_{nb}^b. \end{aligned}$$

DÉVELOPPEMENTS MATHÉMATIQUES POUR LE FILTRE DE KALMAN

B

SOMMAIRE

B.1	DÉRIVATION MATRICIELLE	171
B.1.1	Cas général	171
B.1.2	Application aux matrices de passage	172
B.2	EXPRESSION DE L'ÉQUATION DE MESURE DU FILTRE DE KALMAN	173
B.2.1	Termes liés à la position, à la vitesse et à l'accélération	174
B.2.2	Termes liés à l'attitude et à sa dérivée	176
B.2.3	Termes liés aux perturbations de pesanteur	177

B.1 DÉRIVATION MATRICIELLE

Le formulation de l'équation de mesure du filtre de Kalman décrit au chapitre 2 conduit à la dérivation de matrices par rapport à un vecteur, tel la dérivation de la matrice $C_e^n(X^e)$ par rapport au vecteur X^e . Ce type de calcul appelé dérivation matricielle est décrit dans DURAND (2002). Dans le cas général, la dérivation matricielle permet de calculer la dérivée d'une matrice $F \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ par rapport à une matrice $X \in M_{n,q}(\mathbb{R})$ (§B.1.1). Nous verrons au §B.1.2 comment ce type de calcul peut s'appliquer concrètement dans le cas où X est un vecteur de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

B.1.1 Cas général

Soit F une fonction matricielle différentiable :

$$F : \mathbb{R}^{n \times q} \longrightarrow \mathbb{R}^{m \times p}$$

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nq} \end{bmatrix} \longmapsto F(X) = \begin{bmatrix} a_{11}(X) & \cdots & a_{1p}(X) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(X) & \cdots & a_{mp}(X) \end{bmatrix}.$$

La matrice $F(X)$ peut être exprimée sous une forme vectorisée d'ordre mp par

$$\text{vec}(F(X)) = \begin{bmatrix} a_{11}(X) \\ \vdots \\ a_{m1}(X) \\ \vdots \\ a_{1p}(X) \\ \vdots \\ a_{mp}(X) \end{bmatrix}.$$

Afin de calculer $dF(X)$, différentielle de la fonction matricielle F par rapport à X , nous commençons par dériver la matrice vectorisée $\text{vec}(F(X))$ sachant que $\text{vec}(dF(X)) = d\text{vec}(F(X))$. La matrice $DF(X)$ déterminée par la dérivation du vecteur $\text{vec}(F(X))$, par rapport aux variables x_{ij} , $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, q \rrbracket$ de X , est une matrice de $M_{mp, nq}(\mathbb{R})$ donnée par

$$DF(X) = \frac{d\text{vect}(F(X))}{d\text{vec}(X)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial a_{11}(X)}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial a_{11}(X)}{\partial x_{nq}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{m1}(X)}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial a_{m1}(X)}{\partial x_{nq}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{1p}(X)}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial a_{1p}(X)}{\partial x_{nq}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial a_{mp}(X)}{\partial x_{11}} & \cdots & \frac{\partial a_{mp}(X)}{\partial x_{nq}} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

La matrice $DF(X)$ sera dorénavant appelée dérivée matricielle de $F(X)$. Elle peut alors être utilisée dans les calculs impliquant la différentielle $dF(X)$. Nous allons détailler le calcul spécifique de la dérivée d'une multiplication de la matrice $F(X)$ par un vecteur constant quelconque $u = [u_1, \dots, u_p]^T$ de dimension p , constant par rapport au vecteur X .

Sachant que

$$F(X)u = [u_1 I_3 \quad \dots \quad u_p I_3] \text{vec}(F(X)),$$

il résulte

$$\begin{aligned} d(F(X)u) &= d([u_1 I_3 \quad \dots \quad u_p I_3] \text{vec}(F(X))) \\ &= [u_1 I_3 \quad \dots \quad u_p I_3] d(\text{vec}(F(X))) \\ &= [u_1 I_3 \quad \dots \quad u_p I_3] DF(X). \end{aligned}$$

De même, il est possible de déterminer la dérivation d'une fonction matricielle composée, couramment rencontrée lors de changements de repères. Soit F une fonction matricielle différentiable en C ,

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^{n \times q} &\longrightarrow \mathbb{R}^{m \times p} \\ X &\longmapsto F(X), \end{aligned}$$

et supposons que G soit une fonction matricielle différentiable en $B = F(C)$,

$$\begin{aligned} G : \mathbb{R}^{m \times p} &\longrightarrow \mathbb{R}^{r \times s} \\ F(X) &\longmapsto G(F(X)). \end{aligned}$$

alors il est possible de calculer la dérivée matricielle de la fonction matricielle composée

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^{n \times q} &\longrightarrow \mathbb{R}^{r \times s} \\ X &\longmapsto G(F(X)). \end{aligned}$$

différentiable en C par la relation

$$DH(C) = DG(B)DF(C).$$

Cette formule s'appelle la règle de « dérivation matricielle en chaîne ».

B.1.2 Application aux matrices de passage

La dérivation matricielle est appliquée ici pour calculer la dérivée de la matrice de passage C_e^n du référentiel de navigation vers le référentiel terrestre par rapport à la position X_g du véhicule, exprimée en coordonnées géographiques et donc représentable par la donnée du vecteur de $M_{3,1}(\mathbb{R})$, (λ, ϕ, h) .

La fonction matricielle C_e^n est donc définie par

$$\begin{aligned} C_e^n : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3} \\ (\lambda, \phi, h) &\longmapsto C_e^n(\lambda, \phi, h). \end{aligned}$$

Or, dans notre étude, la position est exprimée dans le système de coordonnées cartésiennes $X^e = [x^e, y^e, z^e]^T$ dans le référentiel géocentrique. Ces coordonnées cartésiennes dépendent des coordonnées géographiques $X_g^e = [\lambda, \varphi, h]^T$ par la fonction vectorielle J :

$$J : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(\lambda, \varphi, h) \longmapsto \begin{cases} x^e &= (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ y^e &= (N + h) \cos \varphi \sin \lambda \\ z^e &= (N(1 - e^2) + h) \sin \varphi \end{cases}$$

qui représente la transformation des coordonnées géographiques (λ, φ, h) aux coordonnées cartésiennes (x^e, y^e, z^e) . La matrice jacobienne de cette transformation est donnée par :

$$DJ(X_g^e) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^e}{\partial \lambda} & \frac{\partial x^e}{\partial \varphi} & \frac{\partial x^e}{\partial h} \\ \frac{\partial y^e}{\partial \lambda} & \frac{\partial y^e}{\partial \varphi} & \frac{\partial y^e}{\partial h} \\ \frac{\partial z^e}{\partial \lambda} & \frac{\partial z^e}{\partial \varphi} & \frac{\partial z^e}{\partial h} \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

De plus, puisque la matrice jacobienne de la réciproque d'une fonction est l'inverse de la matrice jacobienne de cette fonction, DJ^{-1} est la matrice jacobienne de la fonction déterminant les coordonnées géographiques X_g^e en fonction des coordonnées cartésiennes X^e .

Ainsi, il est possible de déterminer la différentielle de la fonction matricielle $C_e^n(\lambda, \varphi, h)$ en X^e par rapport aux variables x^e, y^e et z^e par

$$DC_e^n(J^{-1}(X^e)) = DC_e^n(X_g^e)DJ^{-1}(X^e).$$

d'après la règle de la dérivation en chaîne.

La dérivée de $C_e^n u$, où le vecteur u de $M_{3,1}(\mathbb{R})$ ne dépend pas de la position X , peut alors s'exprimer par

$$d(C_e^n u) = [u_1 I_3 \ u_2 I_3 \ u_3 I_3] DC_e^n(X_g^e) DJ^{-1}(X^e).$$

B.2 EXPRESSION DE L'ÉQUATION DE MESURE DU FILTRE DE KALMAN

L'étude de l'équation de mesure du filtre de Kalman au chapitre 2 fait apparaître une matrice $H_k \in M_{9,24}(\mathbb{R})$ donnée par

$$H_k = \begin{bmatrix} 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ 0_3 & 0_3 & I_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 & 0_3 \\ \frac{\partial h^{a^s}}{\partial \ddot{X}^e} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial \dot{X}^e} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial X^e} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial \dot{\phi}} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial \phi} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial \dot{p}g^n} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial p g^n} & \frac{\partial h^{a^s}}{\partial p g^n} \end{bmatrix}$$

où h^{a^s} est la fonction liant l'accélération de rappel a^s aux 24 paramètres du vecteur d'état. Cette fonction s'exprime mathématiquement par

$$h^{a^s} : \mathbb{R}^{24} \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$x = \begin{bmatrix} \ddot{X}^e \\ \dot{X}^e \\ X^e \\ \phi \\ \dot{\phi} \\ p\dot{g}^n \\ pg^n \\ pg^n \end{bmatrix} \mapsto a^s = C_b^s C_n^b C_e^n (\ddot{X}^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}^e - C_e^n (\gamma^n + pg^n)).$$

Le calcul explicite de la matrice H_k nécessite donc huit dérivations matricielles que nous allons expliciter à présent.

B.2.1 Termes liés à la position, à la vitesse et à l'accélération

Les dérivées partielles de h^{a^s} par rapport à l'accélération \ddot{X}^e et par rapport à la vitesse \dot{X}^e restent triviales car la fonction dépend linéairement de ces paramètres. Ainsi

$$\frac{\partial h^{a^s}}{\partial \ddot{X}^e} = C_b^s C_n^b C_e^n$$

et

$$\frac{\partial h^{a^s}}{\partial \dot{X}^e} = C_b^s C_n^b C_e^n \times 2\Omega_{ie}^e.$$

La dérivée partielle de h^{a^s} par rapport à la position est plus délicate à traiter. En effet, la position intervient indirectement dans la fonction h^{a^s} par l'intermédiaire de la matrice de passage C_e^n du référentiel terrestre au référentiel de navigation, donnée par

$$C_e^n(X^e) = \begin{bmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & \cos \varphi \\ \cos \varphi \cos \lambda & \cos \varphi \sin \lambda & \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

et par l'intermédiaire de la pesanteur normale γ^n qui dépend de la position. Ainsi, la dérivée partielle de h^{a^s} par rapport à la position s'exprime-t-elle par

$$\begin{aligned} \frac{\partial h^{a^s}}{\partial X^e} &= \frac{\partial}{\partial X^e} (C_b^s C_n^b C_e^n (\ddot{X}^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}^e - C_e^n (\gamma^n + pg^n))) \\ &= C_b^s C_n^b \frac{\partial C_e^n}{\partial X^e} (\ddot{X}^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}^e) - C_b^s C_n^b \frac{\partial \gamma^n}{\partial X^e}. \end{aligned}$$

Le premier terme peut être calculé grâce à la dérivation matricielle exposée au SB.1.1.

Ainsi, en posant $u = \ddot{X}^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}^e$, il est possible d'exprimer le premier terme de cette dérivée partielle par

$$C_b^s C_n^b \frac{\partial C_e^n}{\partial X^e} (\ddot{X}^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}^e) = C_b^s C_n^b [u_1 I_3 \ u_2 I_3 \ u_3 I_3] DC_e^n(X_g^e) DJ^{-1}(X^e)$$

où $DJ^{-1}(X^e)$ est l'inverse de la jacobienne (B.2) et $DC_e^n(X_g^e)$ est la dérivée matricielle de C_e^n par rapport à la position X_g^e exprimée en coordonnées géographiques. Cette matrice $M_{9,3}(\mathbb{R})$ obtenue par (B.1) est composée des dérivées partielles de chaque élément de C_e^n (B.3) par rapport aux coordonnées géographiques λ , φ et h . Ces deux jacobiniennes ont été calculées formellement à l'aide du logiciel MAXIMA 5.12.0 et s'expriment par (B.4) et (B.5).

$$DC_e^n(X_g^e) = \begin{bmatrix} -\cos \lambda & 0 & 0 \\ \sin \varphi \sin \lambda & -\cos \varphi \cos \lambda & 0 \\ -\cos \varphi \sin \lambda & -\sin \varphi \cos \lambda & 0 \\ -\sin \lambda & 0 & 0 \\ -\sin \varphi \cos \lambda & -\cos \varphi \sin \lambda & 0 \\ \cos \varphi \cos \lambda & -\sin \varphi \sin \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

$$DJ(X^e) = \begin{bmatrix} -\cos \varphi \left(\frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} + h \right) \sin \lambda & \frac{ae^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi \cos \lambda}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} - \sin \varphi \left(\frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} + h \right) \cos \lambda & \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \left(\frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} + h \right) \cos \lambda & \frac{ae^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi \sin \lambda}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} - \sin \varphi \left(\frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} + h \right) \sin \lambda & \cos \varphi \sin \lambda \\ 0 & \cos \varphi \left(\frac{a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi}} + h \right) + \frac{ae^2(1-e^2) \cos \varphi \sin^2 \varphi}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} & \sin \varphi \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Il est à présent nécessaire de déterminer le second terme, dépendant de la pesanteur normale. Ce terme γ^n est fonction de la position et peut être calculé grâce aux formules de Somigliana de 1929 (HOFMANN-WELLENHOF et MORITZ 2005) pour le calcul de la pesanteur normale sur un ellipsoïde

$$\gamma_0 = \gamma_a \frac{1 + k \sin^2 \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}},$$

puis à la hauteur h par

$$\gamma^n = \gamma_0 - \frac{2\gamma_a}{a} \left(1 + f + m + \left(-3f + \frac{5m}{2} \right) \sin^2 \varphi \right) h + 3 \frac{\gamma_a h^2}{a^2}$$

où les constantes sont fonction de l'ellipsoïde de référence (tab. 2.1)

- γ_a est la pesanteur normale équatoriale ;
- γ_b est la pesanteur normale au pôle ;
- e est la première excentricité
- a est le demi grand axe
- b est le demi petit axe
- k est un facteur dépendant de l'ellipsoïde et des valeurs de la pesanteur normale au pôle et à l'équateur $(b\gamma_b - a\gamma_a)/(a\gamma_b)$;
- m est une quantité dynamique associée à l'aplatissement gravimétrique $\omega_e^2 a^2 b / kM$.

Il est alors possible de calculer la dérivée de la pesanteur normale γ^n par rapport à la position exprimée en coordonnées géographiques X_g^e . Ensuite, la jacobienne (B.5) permet d'exprimer cette dérivée par rapport aux coordonnées cartésiennes X^e . Ainsi,

$$\frac{\partial \gamma^n}{\partial X^e} = \frac{\partial \gamma^n}{\partial X_g^e} DJ(X_g^e)$$

avec

$$\frac{\partial \gamma^n}{\partial X_g^e} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \gamma^n}{\partial \lambda} \\ \frac{\partial \gamma^n}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial \gamma^n}{\partial h} \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} \frac{\partial \gamma^n}{\partial \lambda} &= 0 \\ \frac{\partial \gamma^n}{\partial \varphi} &= \frac{e^2 \gamma_a \cos \varphi \sin \varphi (1 + k \sin^2 \varphi)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2 \gamma_a k \cos \varphi \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \\ &\quad - \frac{4 \gamma_a \left(\frac{5m}{2} - 3f\right) h \cos \varphi \sin \varphi}{a} \\ \frac{\partial \gamma^n}{\partial h} &= \frac{6 \gamma_a h}{a^2} - \frac{2 \gamma_a \left(\left(\frac{5m}{2} - 3f\right) \sin^2 \varphi + m + f + 1\right)}{a} \end{aligned}$$

Cette dernière relation permet de calculer le terme

$$C_b^s C_n^b \frac{\partial \gamma^n}{\partial X^e}$$

complétant ainsi l'expression de la dérivée partielle $\frac{\partial h^{a^s}}{\partial X^e}$.

B.2.2 Termes liés à l'attitude et à sa dérivée

À présent, déterminons les termes liés à l'attitude ϕ et sa première dérivée $\dot{\phi}$. La fonction h^{a^s} ne dépendant pas de ce dernier paramètre, sa dérivée partielle par rapport à $\dot{\phi}$ est nulle.

$$\frac{\partial h^{a^s}}{\partial \dot{\phi}} = 0_3.$$

En revanche, elle dépend indirectement de l'attitude ϕ (azimuth α , tangage χ et roulis η) du véhicule par la matrice de passage C_n^b du référentiel de navigation au référentiel du véhicule qui vaut

$$\begin{aligned} C_n^b &= C_b^{n-1} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \eta - \sin \alpha \sin c \sin \eta & -\sin \alpha \cos \chi & \cos \alpha \sin \eta + \sin \alpha \sin \chi \cos \eta \\ \cos \alpha \sin \chi \sin \eta + \sin \alpha \cos \eta & \cos \alpha \cos \chi & \sin \alpha \sin \eta - \cos \alpha \sin \chi \cos \eta \\ -\cos \chi \sin \eta & \sin \chi & \cos c \cos \eta \end{bmatrix}^{-1} \end{aligned}$$

La dérivation matricielle dans ce cas précis est plus aisée que la précédente car ne nécessitant pas de changement de variable. Ainsi, la dérivée peut s'exprimer par

$$\frac{\partial h^{a^s}}{\partial \phi} = C_b^s \frac{\partial C_n^b}{\partial \phi} C_e^n (\ddot{X}^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}^e - C_e^n (\gamma^n + p g^n)).$$

Soit le vecteur $v = C_e^n (\ddot{X}^e + 2\Omega_{ie}^e \dot{X}^e - C_e^n (\gamma^n + p g^n))$, la dérivée partielle précédente peut s'exprimer sous la forme

$$\frac{\partial h^{a^s}}{\partial \phi} = C_b^s [v_1 I_3 \ v_2 I_3 \ v_3 I_3] DC_n^b(\phi).$$

La dérivée matricielle $DC_n^b(\phi)$ par rapport à l'attitude ϕ de la matrice de passage C_n^b peut alors être calculée formellement par

$$DC_n^b(\phi) = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \sin \chi \sin \eta - \sin \alpha \cos \eta & -\sin \alpha \cos \chi \sin \eta & -\cos \alpha \sin \eta - \sin \alpha \sin \chi \cos \eta \\ -\cos \alpha \cos \chi & \sin \alpha \sin \chi & 0 \\ \cos \alpha \sin \chi \cos \eta - \sin \alpha \sin \eta & \sin \alpha \cos \chi \cos \eta & \cos \alpha \cos \eta - \sin \alpha \sin \chi \sin \eta \\ \cos \alpha \cos \eta - \sin \alpha \sin \chi \sin \eta & \cos \alpha \cos \chi \sin \eta & \cos \alpha \sin \chi \cos \eta - \sin \alpha \sin \eta \\ -\sin \alpha \cos \chi & -\cos \alpha \sin \chi & 0 \\ \cos \alpha \sin \eta + \sin \alpha \sin \chi \cos \eta & -\cos \alpha \cos \chi \cos \eta & \cos \alpha \sin \chi \sin \eta + \sin \alpha \cos \eta \\ 0 & \sin \chi \sin \eta & -\cos \chi \cos \eta \\ 0 & \cos \chi & 0 \\ 0 & -\sin \chi \cos \eta & -\cos \chi \sin \eta \end{bmatrix}$$

B.2.3 Termes liés aux perturbations de pesanteur

Enfin, il est possible de déterminer les dérivées partielles de h^{a^s} par rapport aux perturbations de pesanteur. Puisque la fonction h^{a^s} ne dépend ni de $\dot{p}g^n$, ni de $p\dot{g}^n$, seule l'ultime dérivée partielle doit être calculée, les autres étant nulles. Ainsi, il vient

$$\begin{aligned} \frac{\partial h^{a^s}}{\partial \dot{p}g^n} &= 0_3 \\ \frac{\partial h^{a^s}}{\partial p\dot{g}^n} &= 0_3 \\ \frac{\partial h^{a^s}}{\partial pg^n} &= -C_b^s C_n^b. \end{aligned}$$

ANALYSE SADT DU LOGICIEL DE TRAITEMENT GRAVIMÉTRIQUE

C

L'ANALYSE fonctionnelle de la chaîne de traitement des données issues de l'instrumentation développée, réalisée par la méthode SADT (Structured Analysis and Design Technic). C'est le résultat de cette analyse qui est présenté dans cette annexe.

Analyse SADT sur le traitement dynamique des mesures accélérométriques

Relecteurs :

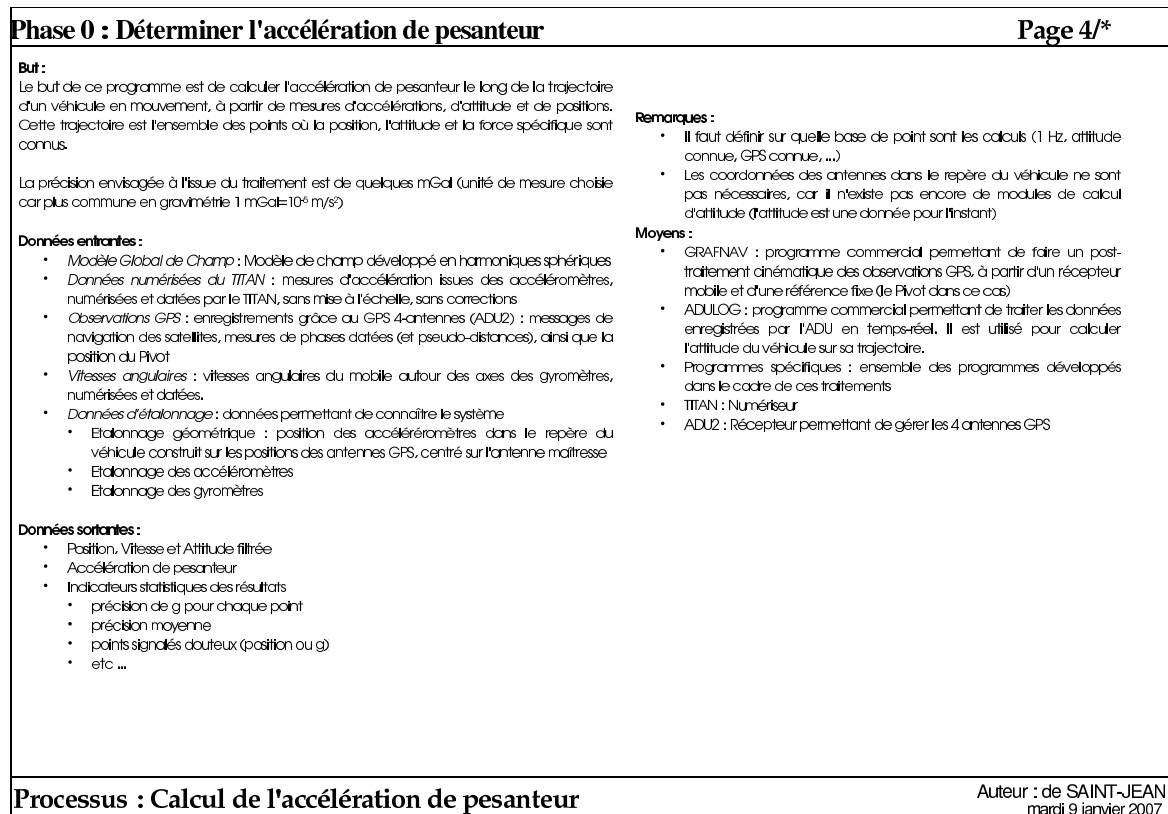
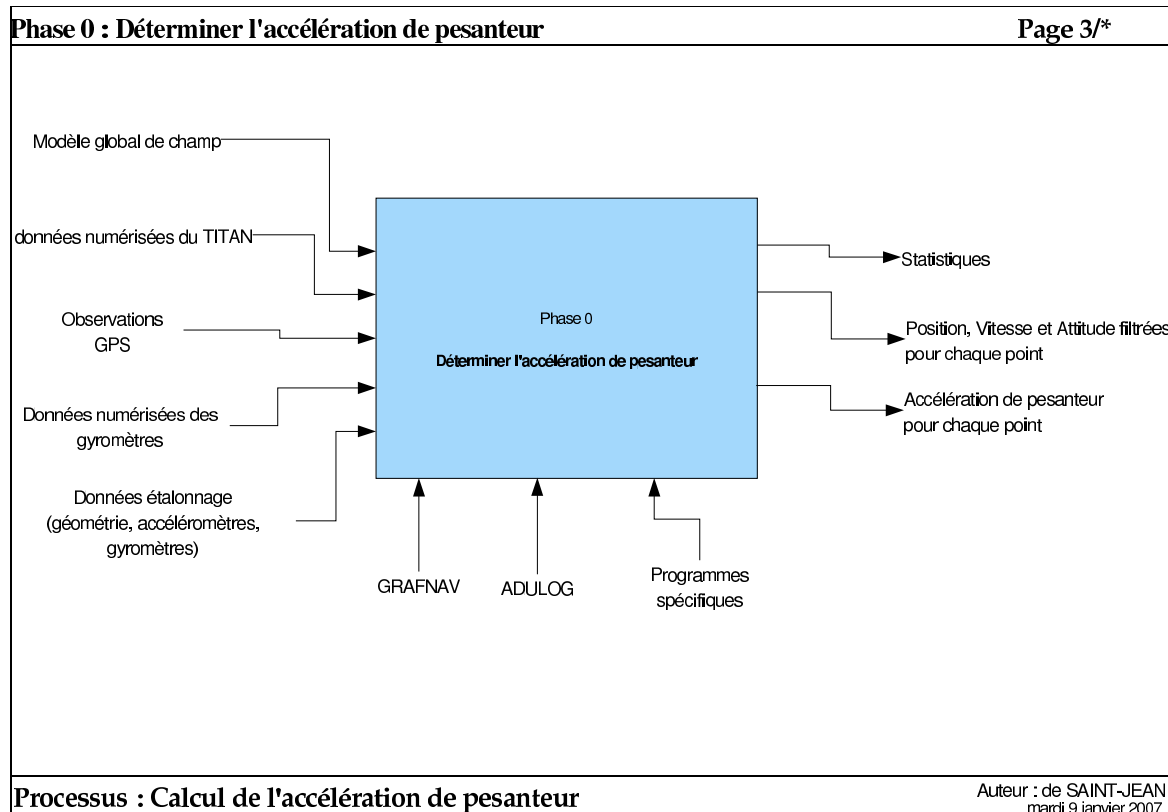
- Henri Duquenne
- Jérôme Verdun

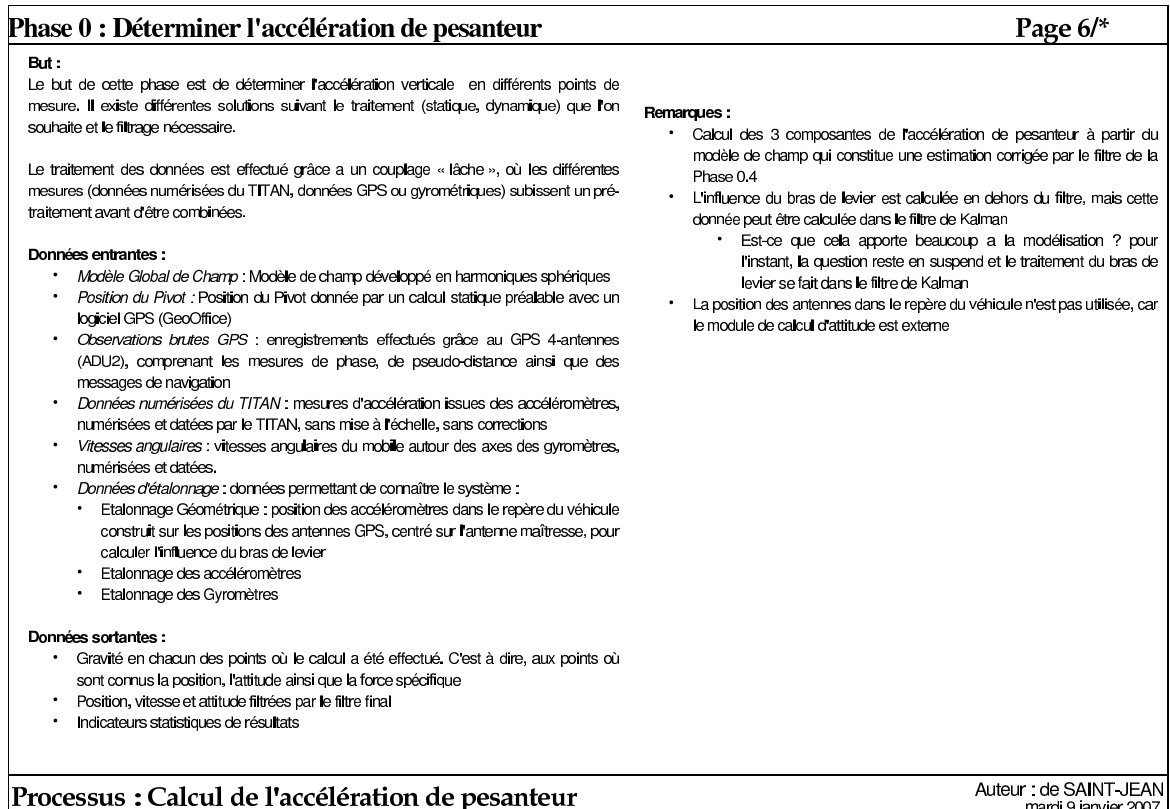
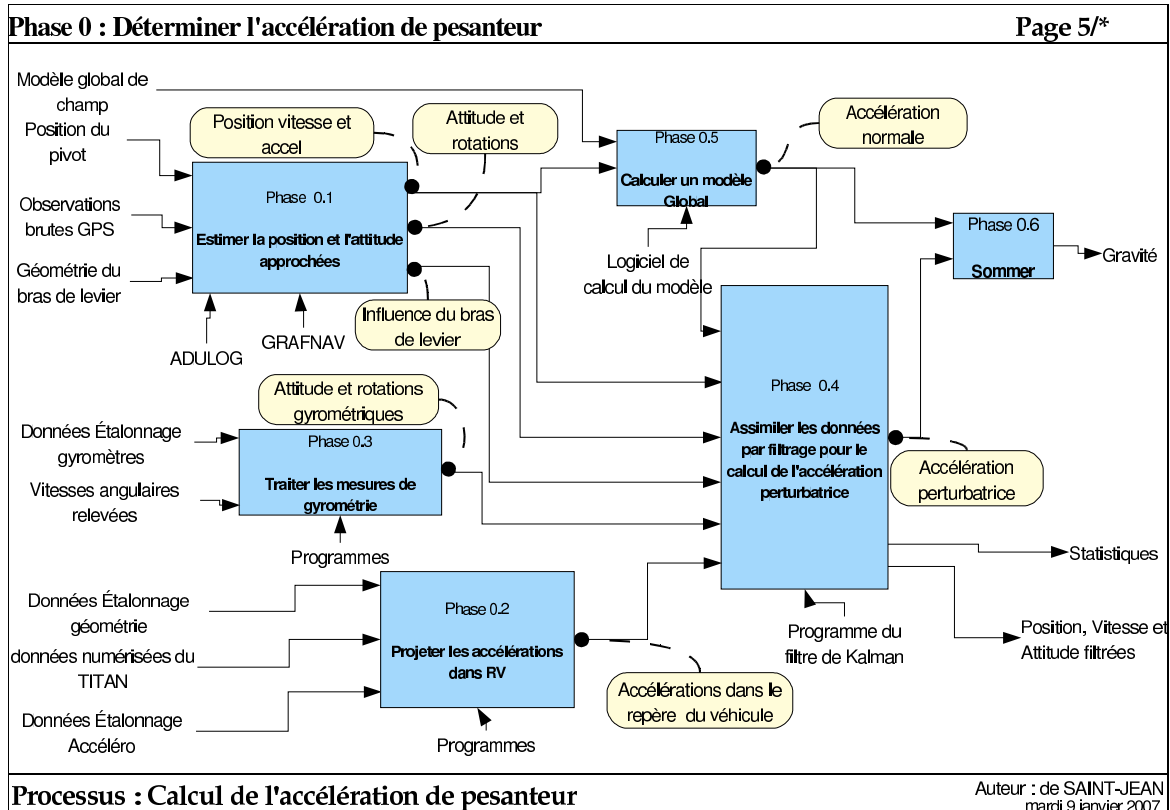
Version :

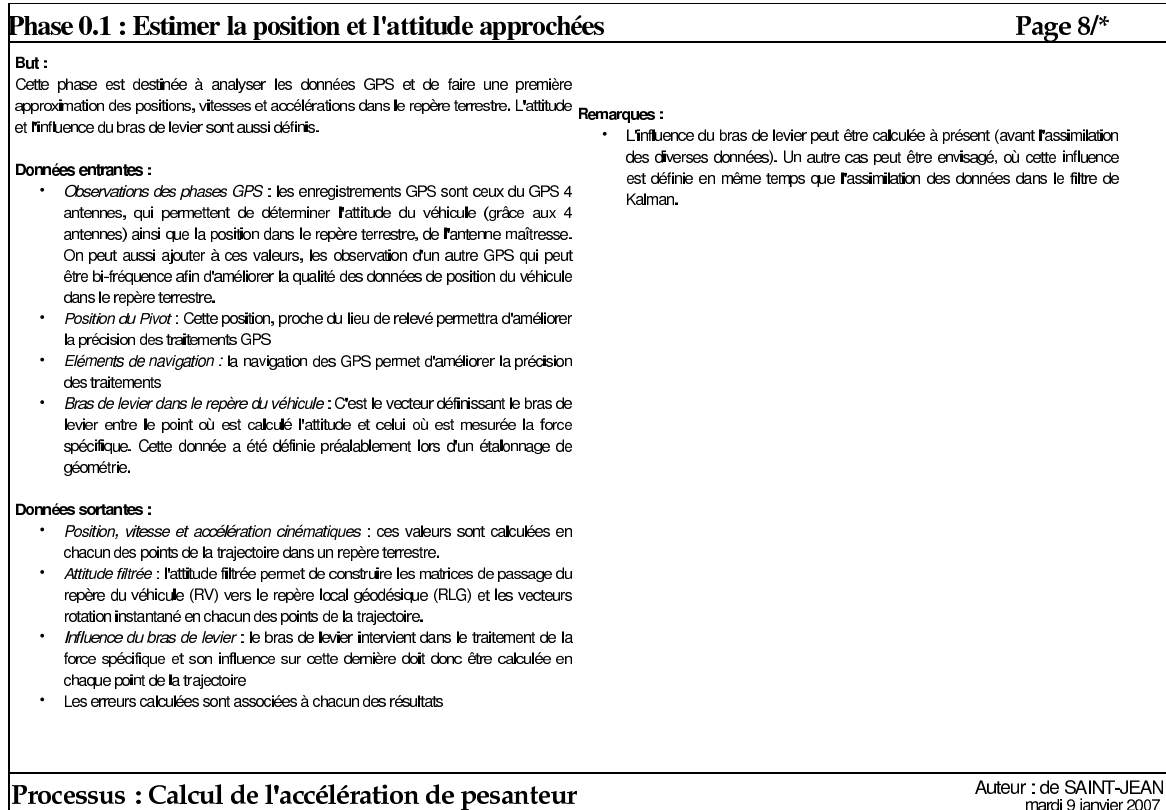
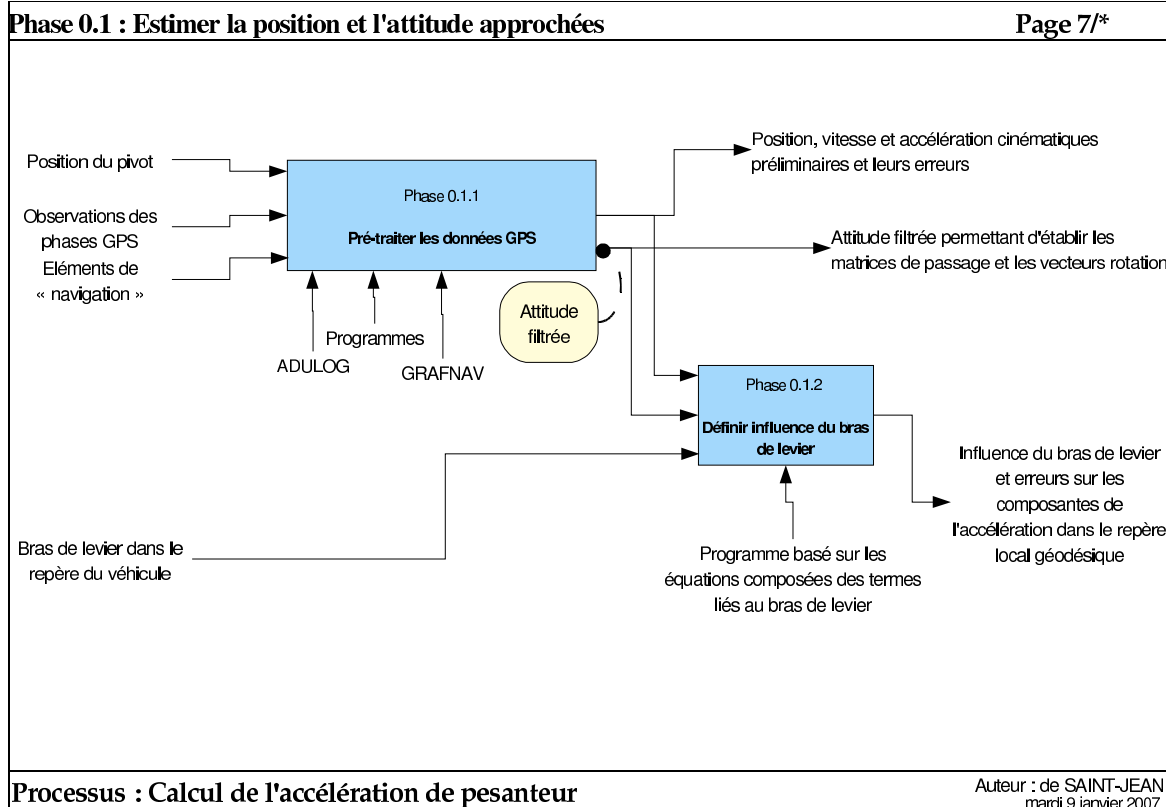
- v3
- Suite à la réunion du 18/12/2006

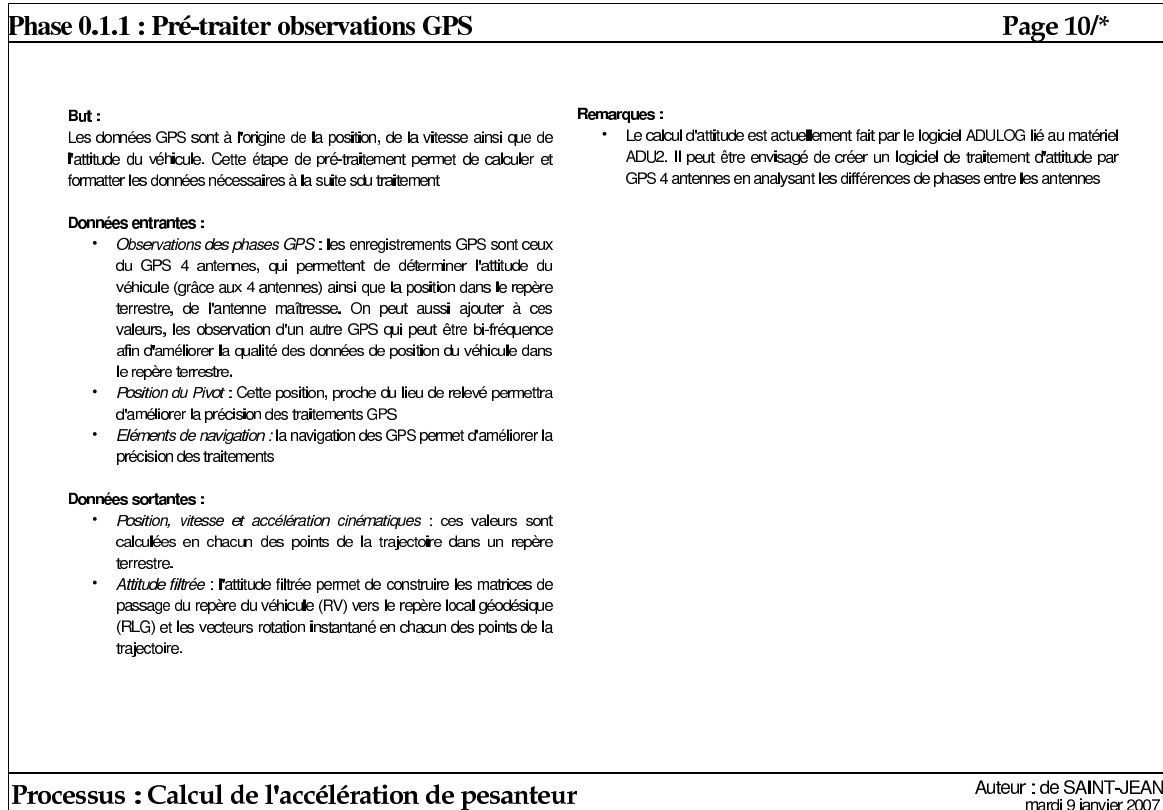
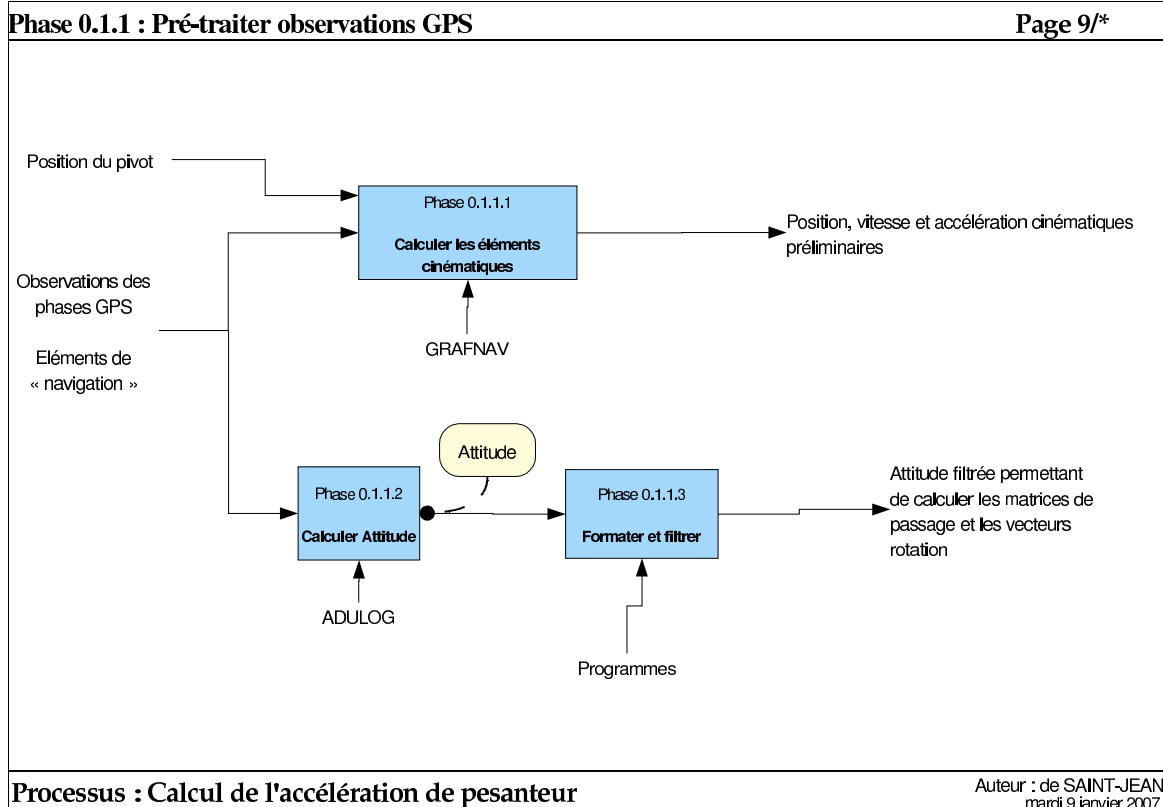
Remarques :

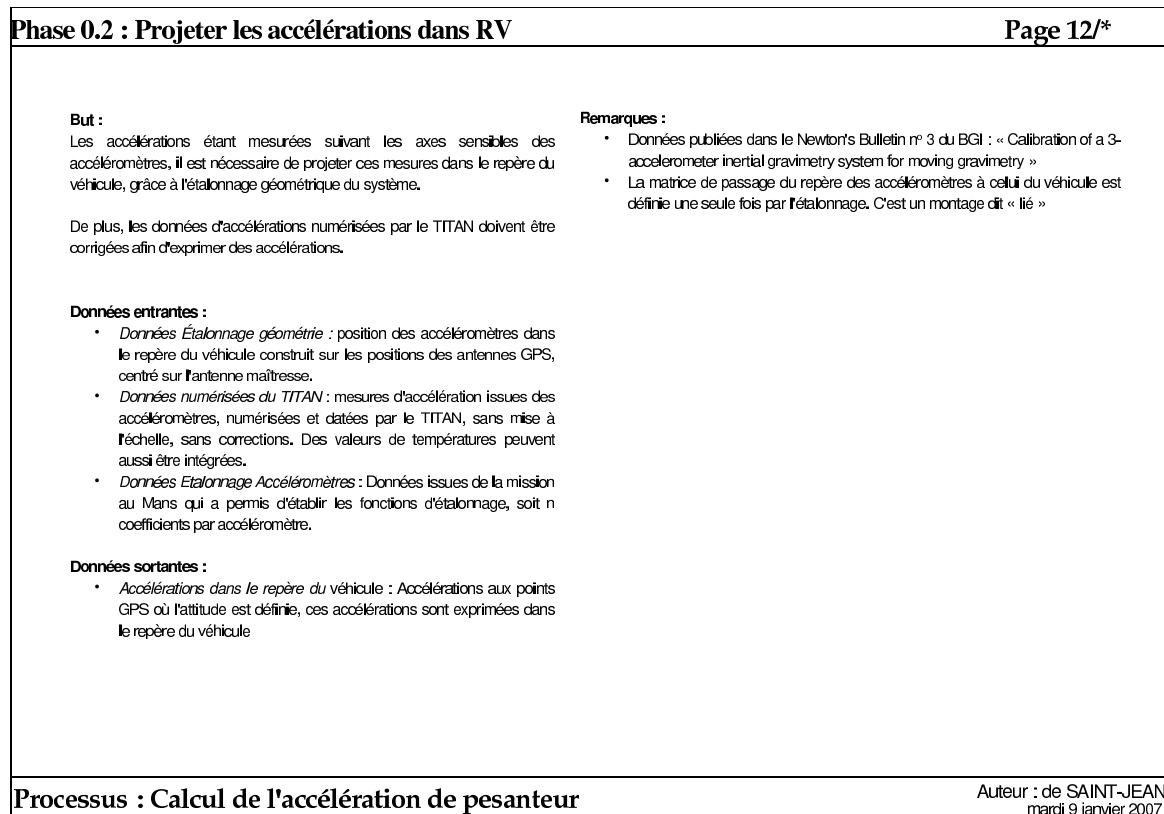
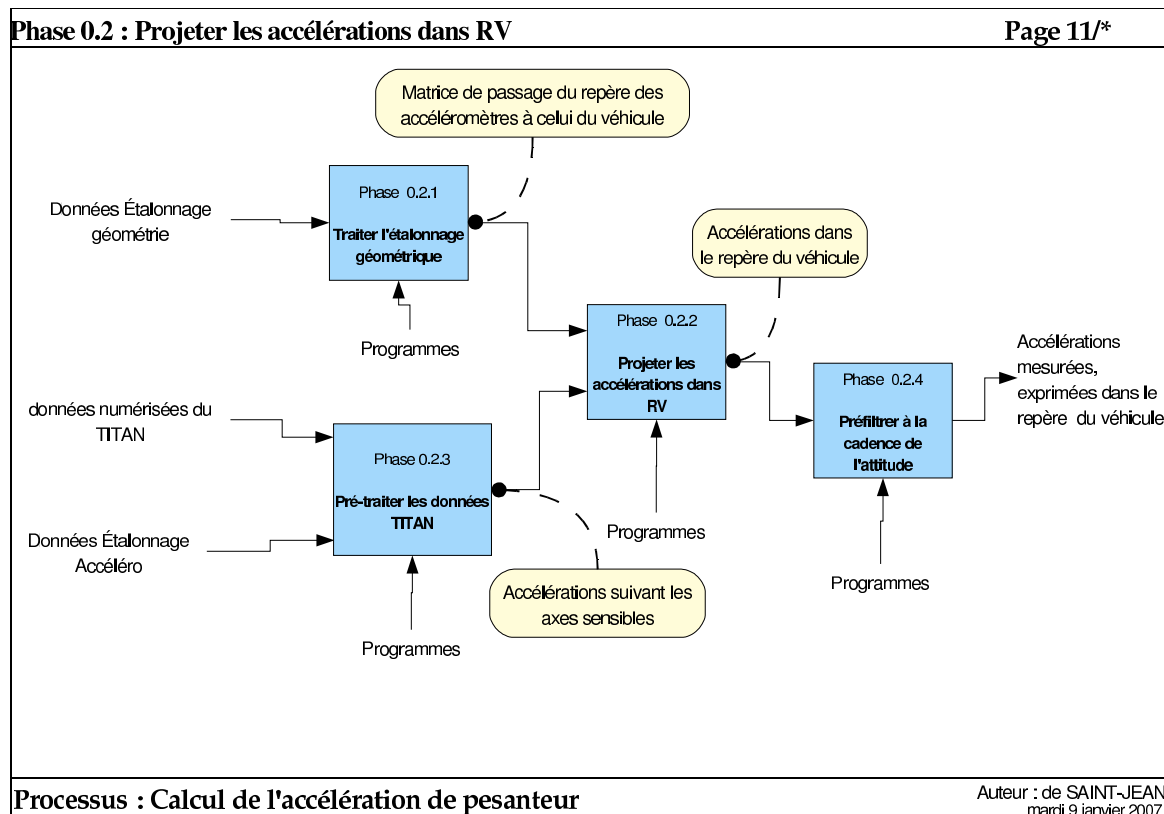
Page Vide





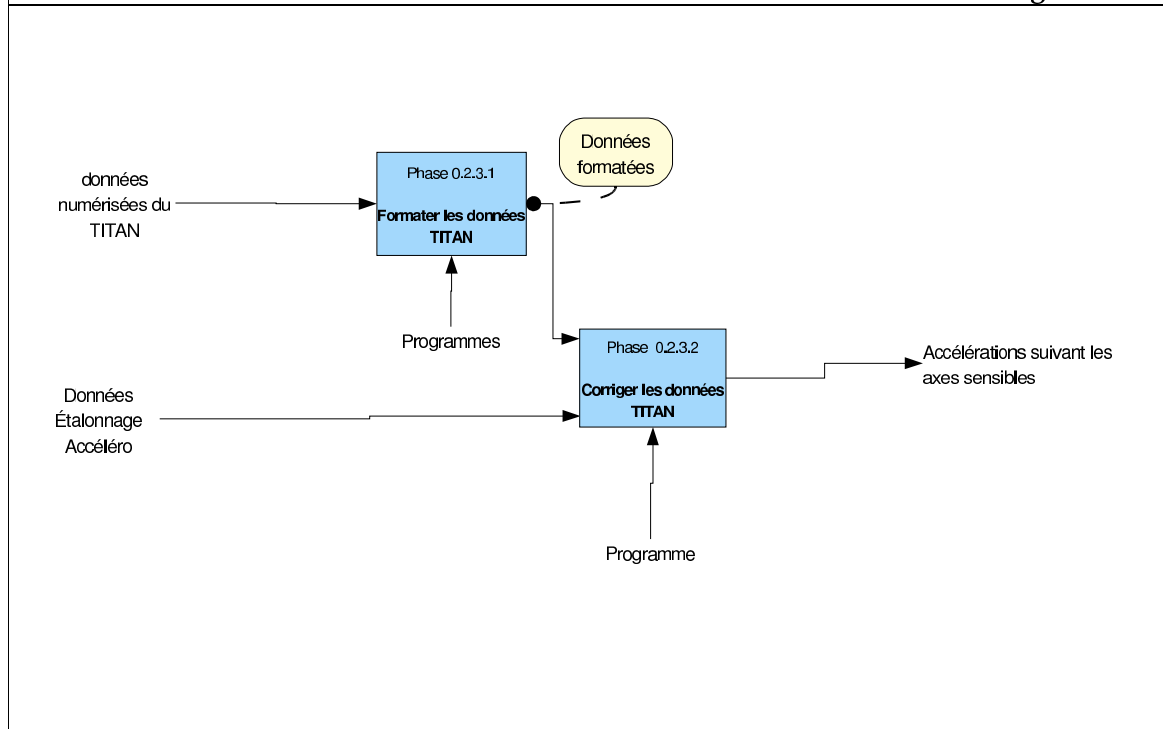






Phase 0.2.3 : Pré-traiter les données TITAN

Page 13/*



Processus : Calcul de l'accélération de pesanteur

Auteur : de SAINT-JEAN
mardi 9 janvier 2007

Phase 0.2.3 : Pré-traiter les données TITAN

Page 14/*

But :

Les données issues du TITAN sont des valeurs d'accélération mais l'unité de mesure n'est pas définie. De plus, les fichiers de sortie ne sont pas standards. Il est donc nécessaire de formater les fichiers de sorties puis de corriger les valeurs produites afin de refléter des accélérations dans le repère lié aux accéléromètres (suivant leur axe sensible)

Remarques :**Données entrantes :**

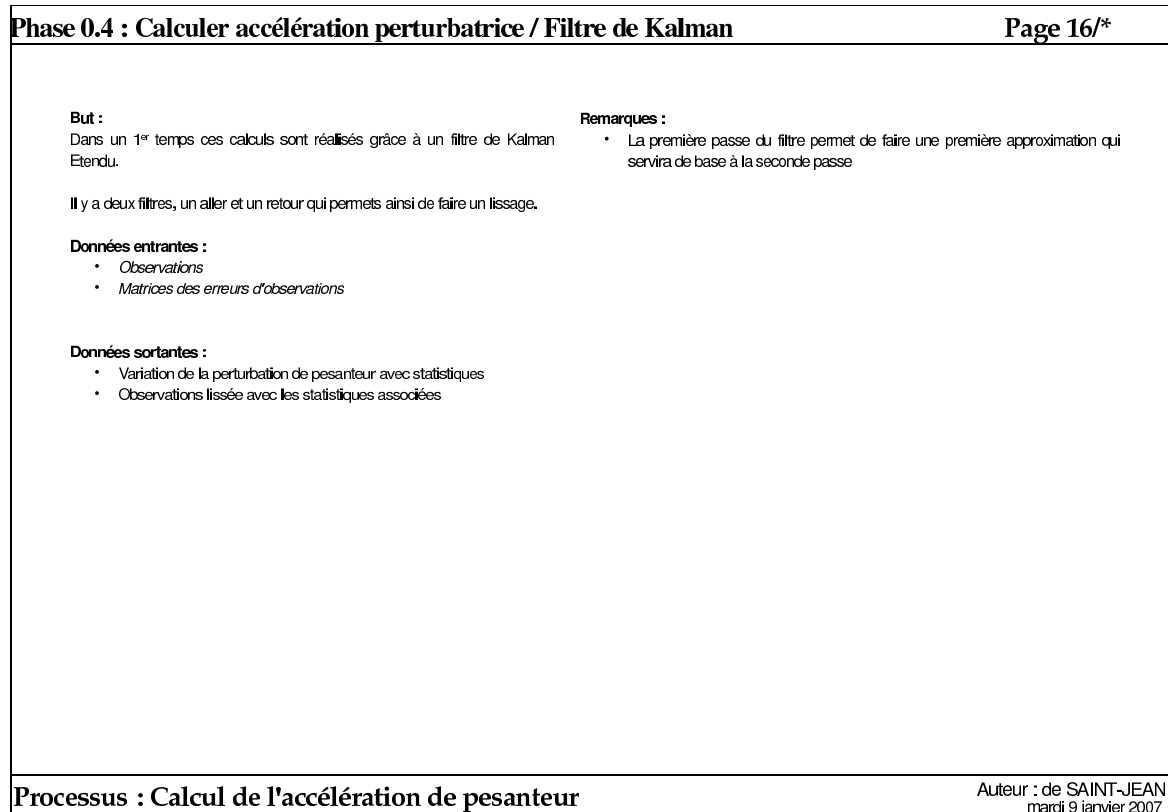
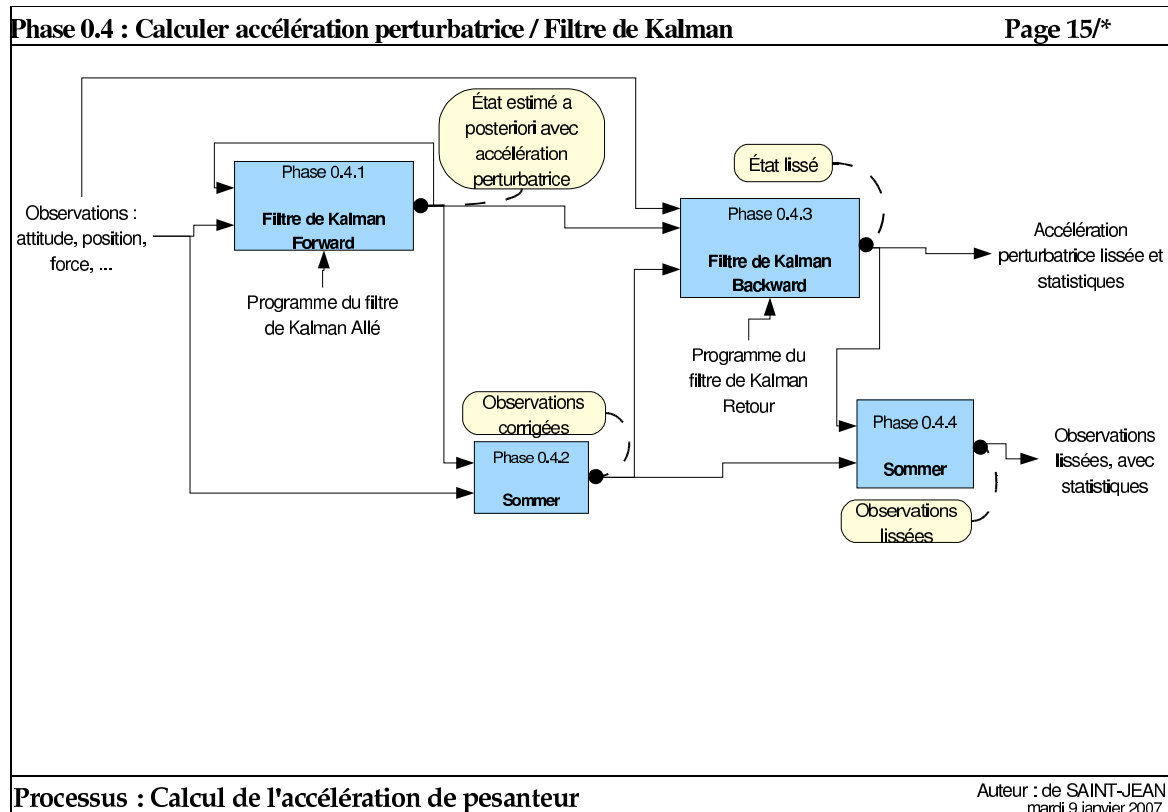
- *Données numérisées du TITAN* : mesures d'accélération issues des accéléromètres, numérisées et datées par le TITAN, sans mise à l'échelle, sans corrections.
- *Données Etalonnage Accéléromètres* : Données issues de la mission au Mans qui a permis d'établir les fonctions d'étalonnage, soit n coefficients par accéléromètre.

Données sortantes :

- *Accélérations suivant les axes sensibles* : Accélérations exprimées en une unité connue (le mGal par choix) suivant la direction des axes sensibles des accéléromètres

Processus : Calcul de l'accélération de pesanteur

Auteur : de SAINT-JEAN
mardi 9 janvier 2007

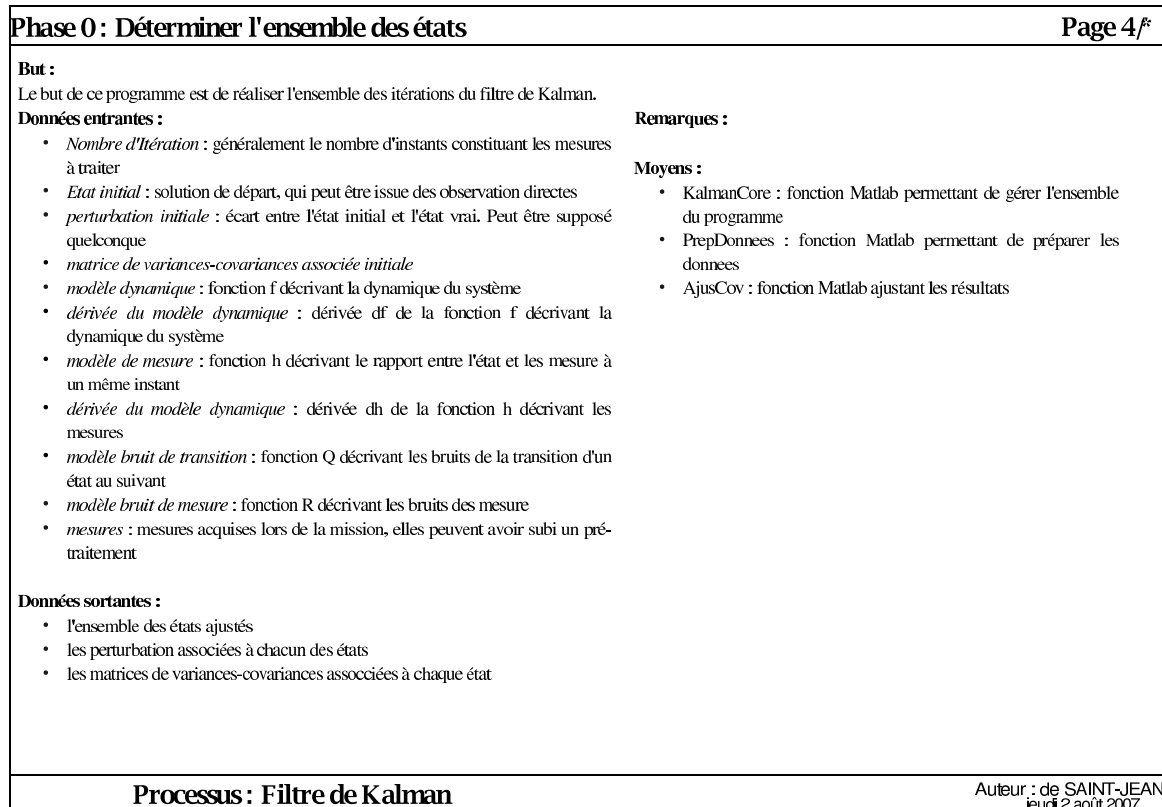
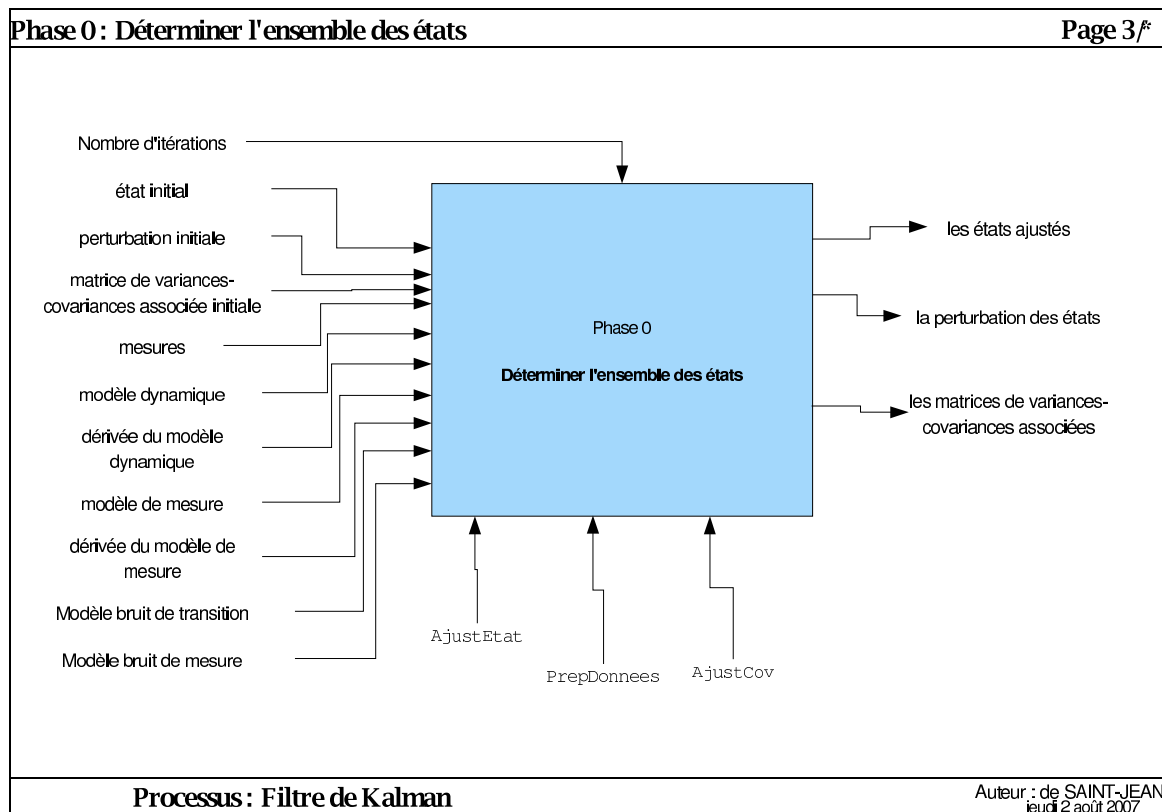


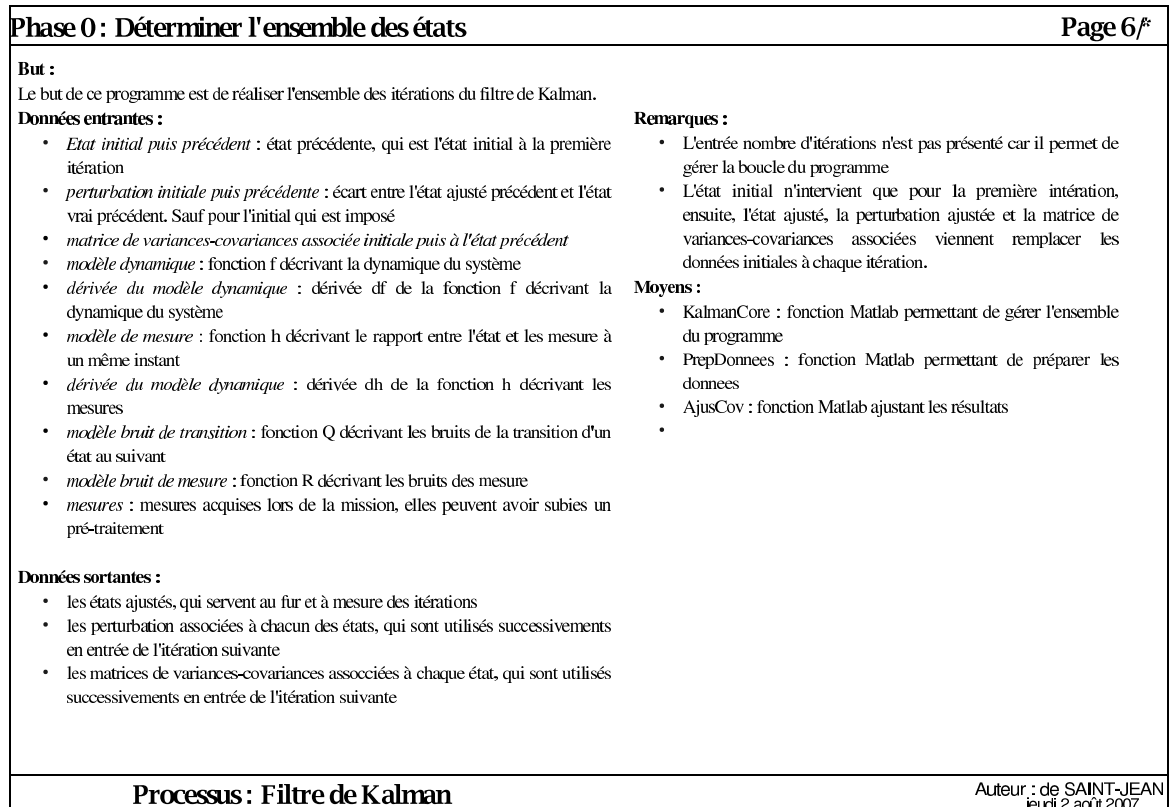
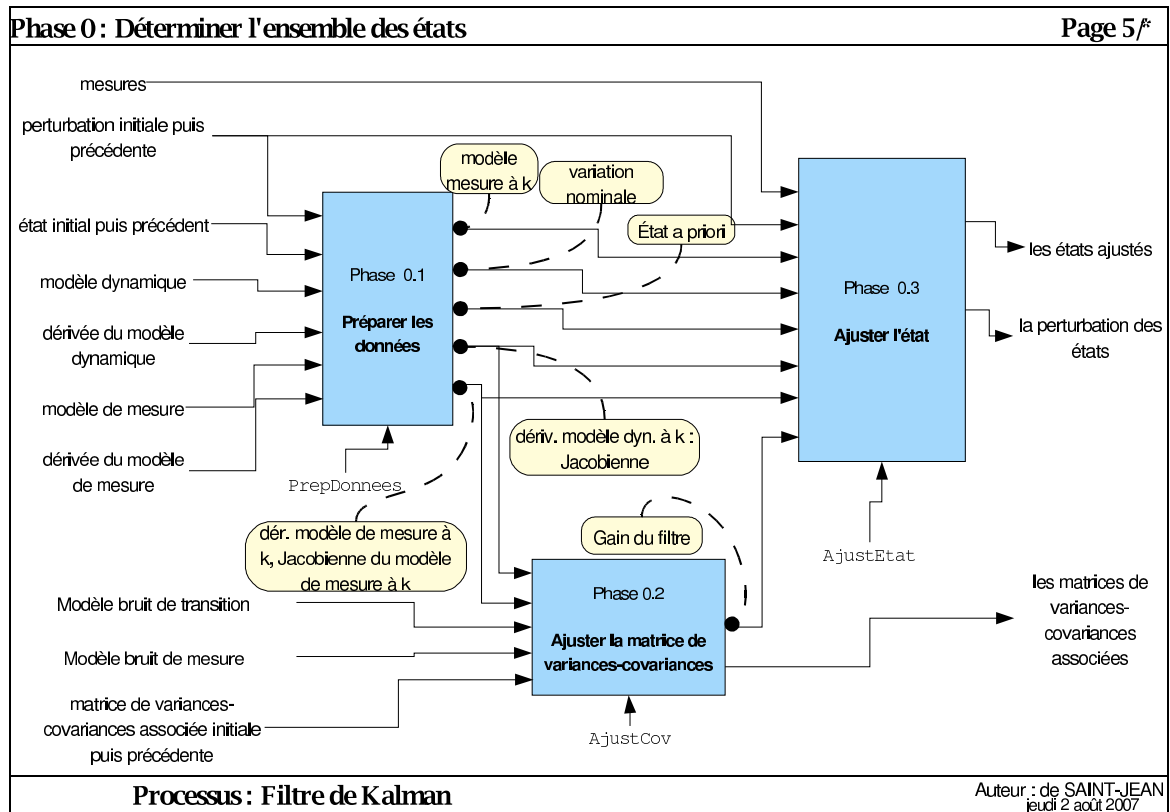
ANALYSE SADT DU FILTRE DE KALMAN **D**

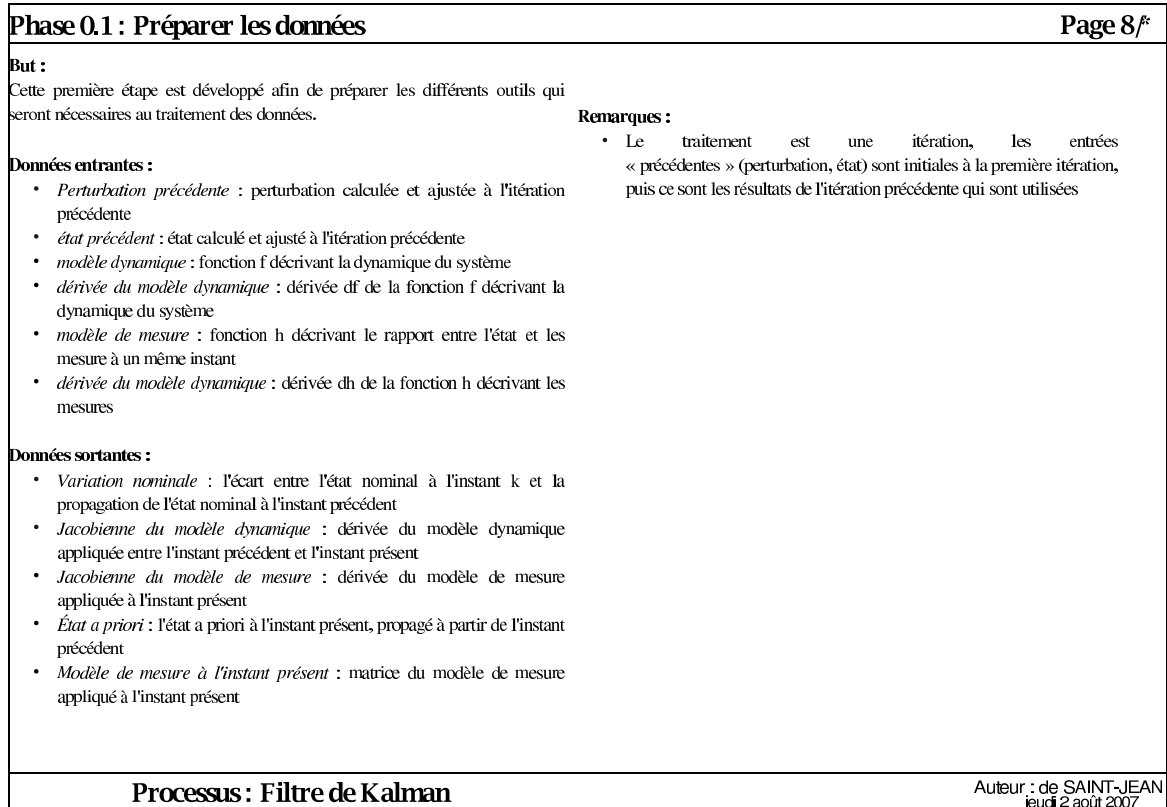
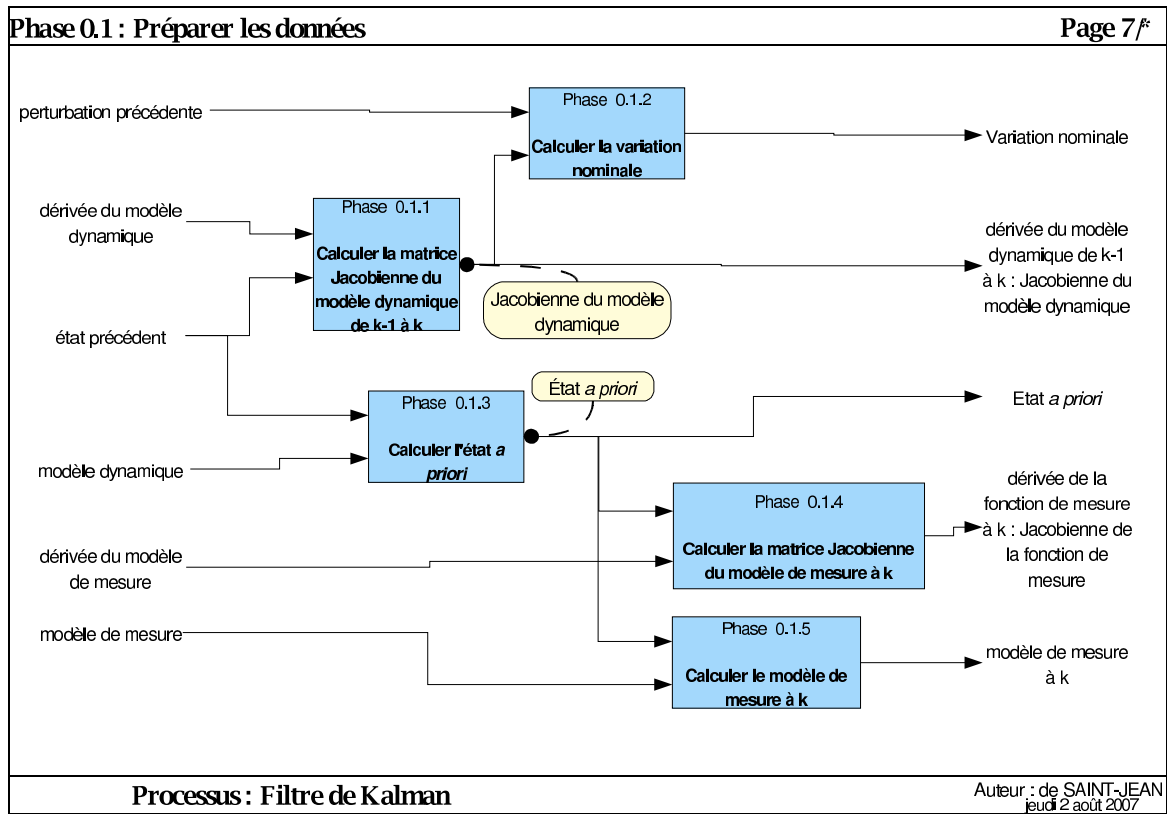
L'ANALYSE fonctionnelle de l'algorithme du filtre de Kalman a été réalisée par la méthode SADT (Structured Analysis and Design Technic). C'est le résultat de cette analyse qui est présenté dans cette annexe.

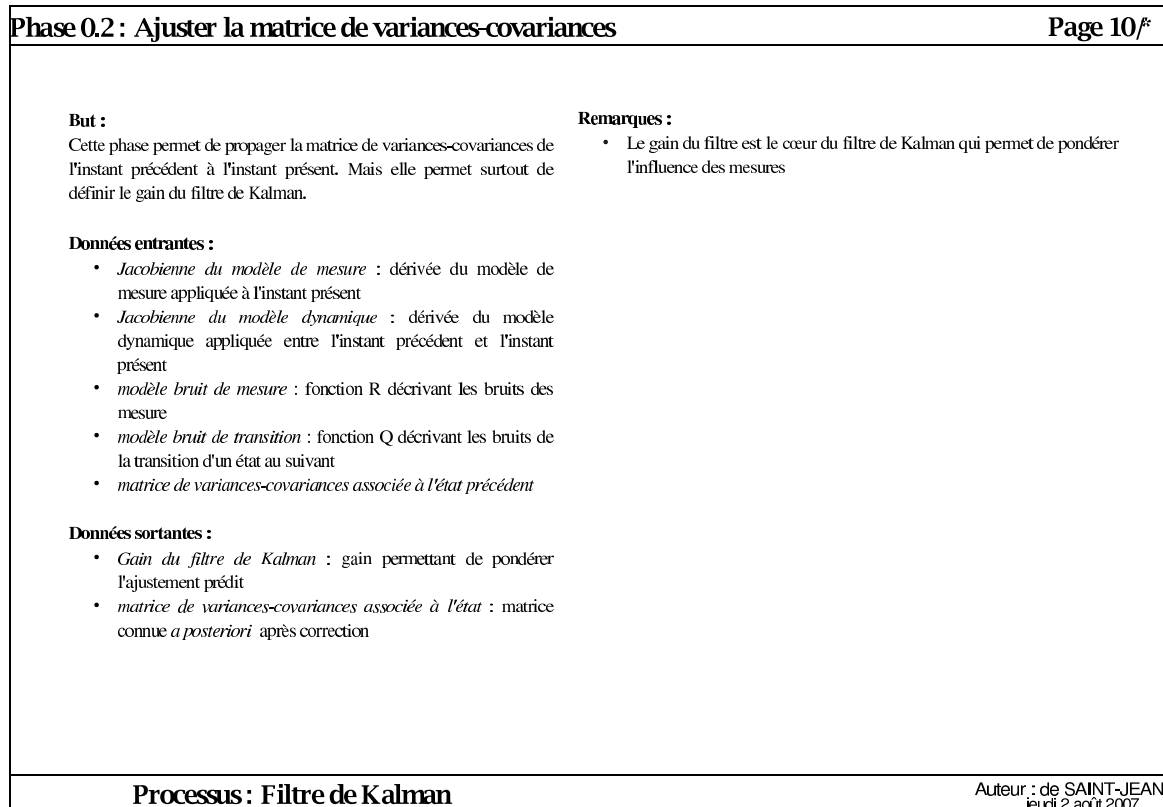
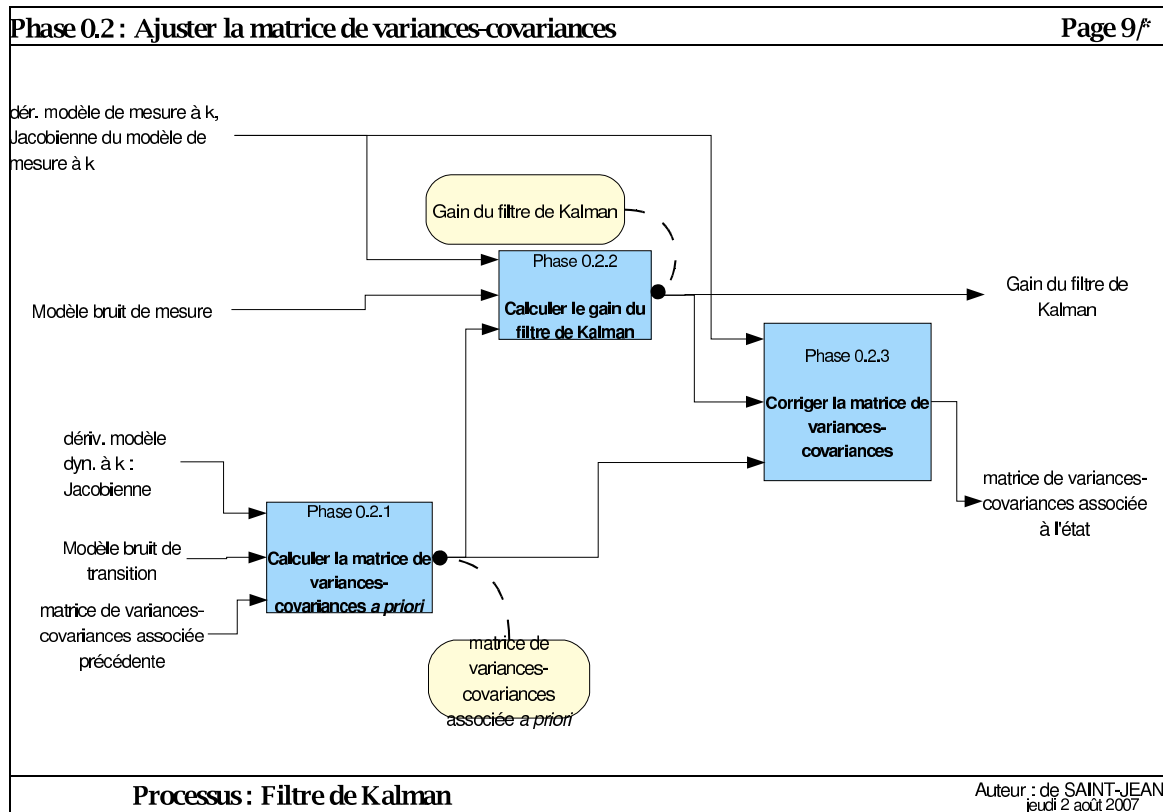
Présentation	Page 1/°
<h2>Analyse SADT sur le filtre de Kalman</h2>	
•Relecteurs :	•Version :
• Henri Duquenne	• v1
• Jérôme Verdun	
Remarques :	
Version d'essai du kit	
Processus : Filtre de Kalman	Auteur : de SAINT-JEAN jeudi 2 août 2007

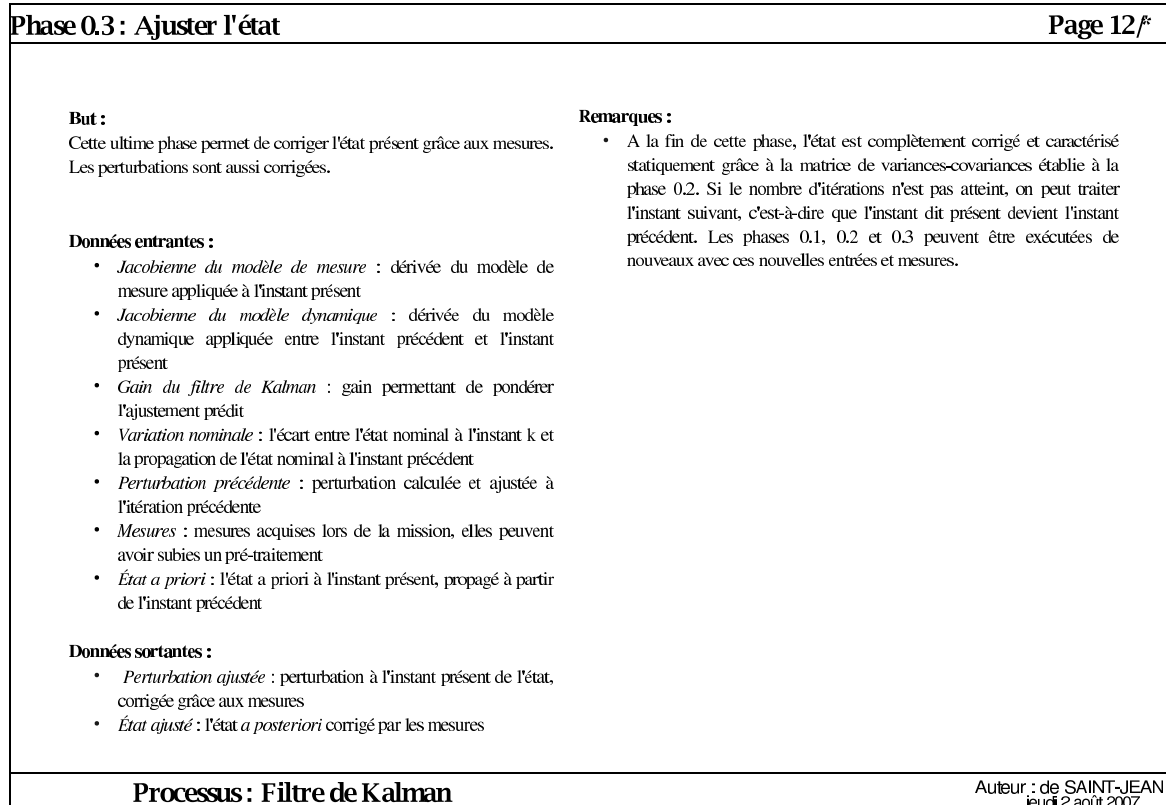
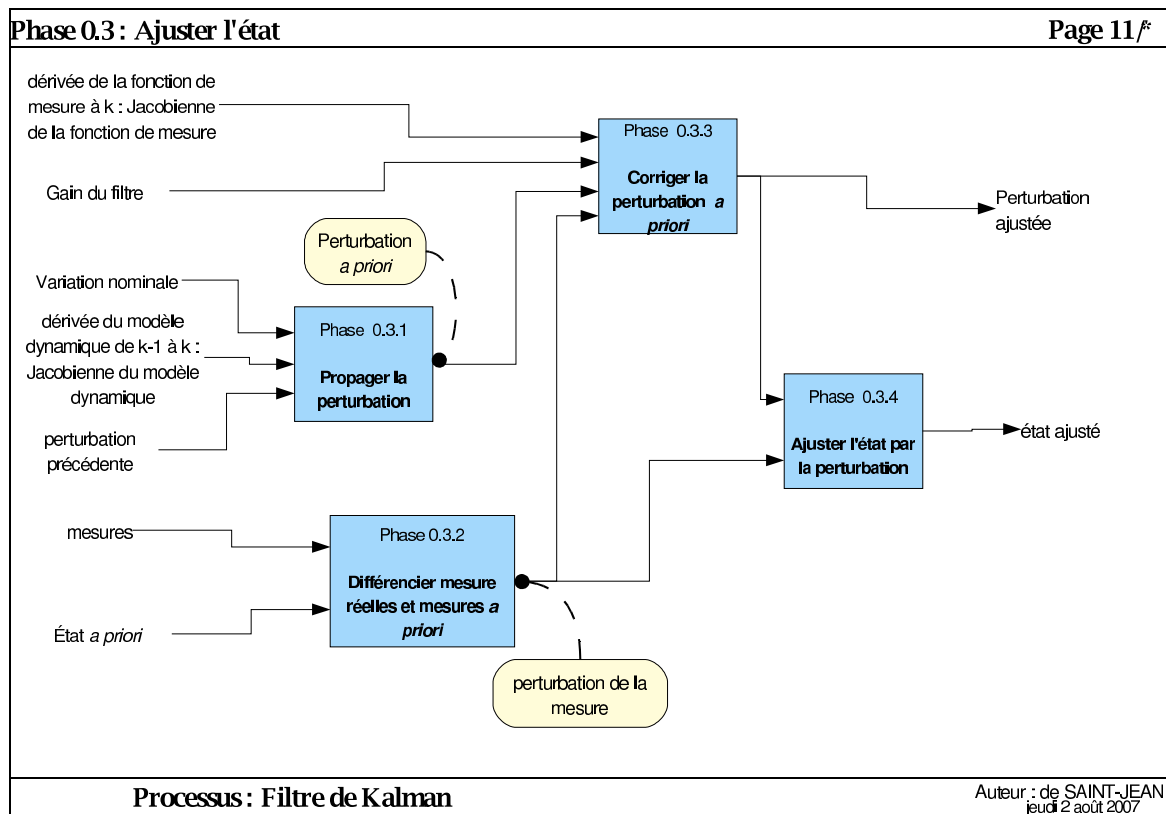
Présentation	Page 2/°
<p><i>Page Blanche</i></p>	
Processus : Filtre de Kalman	Auteur : de SAINT-JEAN jeudi 2 août 2007











MESURES D'ÉTALONNAGE

E

L'ÉTALONNAGE de la chaîne d'acquisition a nécessité trois jours de mesures. Pour chaque inclinaison de la plateforme supportant les accéléromètres, de nombreuses mesures d'angle de cette inclinaison et de l'accélération le long de l'axe sensible ont été acquises afin de déterminer la fonction d'étalonnage de chaque accéléromètre.

Vous trouverez dans cette annexe les résultats des mesures de chaque inclinaison effectuée, chaque jour, avec

- l'inclinaison, son appellation et le nombre de mesures d'angle ;
- le nombre d'accélération mesurées ;
- la moyenne de la mesure sur l'accéléromètre 1 en *Unités Numériques* ;
- l'écart-type sur une mesure d'accélération et sur la moyenne des mesures ;
- de même pour les accéléromètres 2 et 3 ;
- la moyenne de l'angle zénithal dans cercle droit, puis dans cercle gauche et le défaut de tourillonnement ;
- l'inclinaison moyenne en grades ;
- l'écart-type sur une mesure d'angle zénithal puis sur la moyenne des mesures ;
- l'accélération moyenne de la pesanteur calculée le long de l'axe géométrique, en fonction de l'inclinaison ;
- l'écart-type sur la mesure de l'accélération de la pesanteur le long des axes géométriques pour une mesure d'angle zénithal puis pour la moyenne des mesures.

Analyse de la journée du 09 février 2005

```

**** Analyse du fichier du 050209
Incli. : 1 Nom : oSM5 Nb ang. : 16
      Nb acc : 1280
      Moy acc1 (UN) : 2776421.
      Std de acc1 (UN) : 33.81 (0.95)
      Moy acc2 (UN) : 2812277.
      Std de acc2 (UN) : 34.01 (0.95)
      Moy acc3 (UN) : 2762060.
      Std de acc3 (UN) : 33.93 (0.95)
      Dz1 : 144.3626, Dz2 : 255.6346, Zo : -0.0014
      Dz (gr) : 144.3640
      Std Dz (gr) : 0.0010 (0.0003)
      Moy de gravité (mGal) : 629532.27
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 12.09 ( 3.02)

*****
Incli. : 2 Nom : oSM6 Nb ang. : 10
      Nb acc : 800
      Moy acc1 (UN) : 2836457.
      Std de acc1 (UN) : 33.13 (1.17)
      Moy acc2 (UN) : 2872620.
      Std de acc2 (UN) : 33.36 (1.18)
      Moy acc3 (UN) : 2822325.
      Std de acc3 (UN) : 33.14 (1.17)
      Dz1 : 145.5809, Dz2 : 254.4185, Zo : -0.0003
      Dz (gr) : 145.5812
      Std Dz (gr) : 0.0011 (0.0003)
      Moy de gravité (mGal) : 643796.84
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 12.70 ( 4.02)

*****
Incli. : 3 Nom : oSM7 Nb ang. : 13
      Nb acc : 1040
      Moy acc1 (UN) : 2888757.
      Std de acc1 (UN) : 59.89 (1.86)
      Moy acc2 (UN) : 2925189.
      Std de acc2 (UN) : 59.93 (1.86)
      Moy acc3 (UN) : 2874834.
      Std de acc3 (UN) : 60.54 (1.88)
      Dz1 : 146.6532, Dz2 : 253.3440, Zo : -0.0014
      Dz (gr) : 146.6546
      Std Dz (gr) : 0.0004 (0.0001)
      Moy de gravité (mGal) : 656182.76
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 4.47 ( 1.24)

*****
Incli. : 4 Nom : oSM8 Nb ang. : 15
      Nb acc : 1200
      Moy acc1 (UN) : 2939588.
      Std de acc1 (UN) : 41.81 (1.21)
      Moy acc2 (UN) : 2976280.
      Std de acc2 (UN) : 42.18 (1.22)
      Moy acc3 (UN) : 2925879.
      Std de acc3 (UN) : 41.76 (1.21)
      Dz1 : 147.7151, Dz2 : 252.2827, Zo : -0.0011
      Dz (gr) : 147.7162
      Std Dz (gr) : 0.0004 (0.0001)
      Moy de gravité (mGal) : 668247.90
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 4.26 ( 1.10)

*****
Incli. : 5 Nom : oSM9 Nb ang. : 14
      Nb acc : 1120
      Moy acc1 (UN) : 2999897.
      Std de acc1 (UN) : 51.47 (1.54)
      Moy acc2 (UN) : 3036887.
      Std de acc2 (UN) : 51.81 (1.55)
      Moy acc3 (UN) : 2986449.
      Std de acc3 (UN) : 51.86 (1.55)
      Dz1 : 148.9959, Dz2 : 251.0016, Zo : -0.0013
      Dz (gr) : 148.9972
      Std Dz (gr) : 0.0004 (0.0001)
      Moy de gravité (mGal) : 682558.62
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 4.41 ( 1.18)

*****
Incli. : 6 Nom : SM10 Nb ang. : 14
      Nb acc : 1120
      Moy acc1 (UN) : 3047622.
      Std de acc1 (UN) : 107.36 (3.21)
      Moy acc2 (UN) : 3084846.
      Std de acc2 (UN) : 107.03 (3.20)
      Moy acc3 (UN) : 3034390.
      Std de acc3 (UN) : 108.68 (3.25)
      Dz1 : 150.0280, Dz2 : 249.9696, Zo : -0.0012
      Dz (gr) : 150.0292
      Std Dz (gr) : 0.0010 (0.0003)
      Moy de gravité (mGal) : 693887.56
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 10.99 ( 2.94)

*****
Incli. : 7 Nom : SM11 Nb ang. : 14
      Nb acc : 1120
      Moy acc1 (UN) : 3094734.
      Std de acc1 (UN) : 30.39 (0.91)
      Moy acc2 (UN) : 3132187.
      Std de acc2 (UN) : 30.61 (0.91)
      Moy acc3 (UN) : 3081722.
      Std de acc3 (UN) : 30.67 (0.92)
      Dz1 : 151.0631, Dz2 : 248.9349, Zo : -0.0010
      Dz (gr) : 151.0641
      Std Dz (gr) : 0.0008 (0.0002)
      Moy de gravité (mGal) : 705065.21
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 8.89 ( 2.38)

*****
Incli. : 8 Nom : SM12 Nb ang. : 15
      Nb acc : 1200
      Moy acc1 (UN) : 3196100.
      Std de acc1 (UN) : 33.09 (0.96)
      Moy acc2 (UN) : 3234033.
      Std de acc2 (UN) : 33.34 (0.96)
      Moy acc3 (UN) : 3183593.
      Std de acc3 (UN) : 33.34 (0.96)
      Dz1 : 153.3526, Dz2 : 246.6466, Zo : -0.0004
      Dz (gr) : 153.3530
      Std Dz (gr) : 0.0010 (0.0003)
      Moy de gravité (mGal) : 729120.50
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 10.01 ( 2.58)

*****
Incli. : 9 Nom : SM13 Nb ang. : 13
      Nb acc : 1040
      Moy acc1 (UN) : 2554845.
      Std de acc1 (UN) : 10.21 (0.32)
      Moy acc2 (UN) : 2589519.
      Std de acc2 (UN) : 10.43 (0.32)
      Moy acc3 (UN) : 2539656.
      Std de acc3 (UN) : 10.30 (0.32)
      Dz1 : 140.0293, Dz2 : 259.9680, Zo : -0.0013
      Dz (gr) : 140.0306
      Std Dz (gr) : 0.0006 (0.0002)
      Moy de gravité (mGal) : 576914.38
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 7.63 ( 2.12)

*****
Incli. : 10 Nom : SM14 Nb ang. : 12
      Nb acc : 960
      Moy acc1 (UN) : 2490011.
      Std de acc1 (UN) : 8.05 (0.26)
      Moy acc2 (UN) : 2524334.
      Std de acc2 (UN) : 8.22 (0.27)
      Moy acc3 (UN) : 2474625.
      Std de acc3 (UN) : 8.17 (0.26)
      Dz1 : 138.8036, Dz2 : 261.1948, Zo : -0.0008
      Dz (gr) : 138.8044
      Std Dz (gr) : 0.0005 (0.0001)
      Moy de gravité (mGal) : 561528.88
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 5.94 ( 1.71)

*****
Incli. : 11 Nom : SM15 Nb ang. : 12
      Nb acc : 960
      Moy acc1 (UN) : 2440234.
      Std de acc1 (UN) : 8.06 (0.26)
      Moy acc2 (UN) : 2474285.
      Std de acc2 (UN) : 8.11 (0.26)
      Moy acc3 (UN) : 2424701.
      Std de acc3 (UN) : 8.10 (0.26)
      Dz1 : 137.8732, Dz2 : 262.1244, Zo : -0.0012
      Dz (gr) : 137.8744
      Std Dz (gr) : 0.0004 (0.0001)
      Moy de gravité (mGal) : 549720.59
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 5.65 ( 1.63)

*****
Incli. : 12 Nom : SM16 Nb ang. : 12
      Nb acc : 960
      Moy acc1 (UN) : 2376026.
      Std de acc1 (UN) : 10.01 (0.32)
      Moy acc2 (UN) : 2409722.
      Std de acc2 (UN) : 10.10 (0.33)
      Moy acc3 (UN) : 2360310.
      Std de acc3 (UN) : 9.83 (0.32)
      Dz1 : 136.6863, Dz2 : 263.3115, Zo : -0.0011
      Dz (gr) : 136.6874
      Std Dz (gr) : 0.0003 (0.0001)
      Moy de gravité (mGal) : 534480.41
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 4.29 ( 1.24)

*****
Incli. : 13 Nom : SM17 Nb ang. : 15
      Nb acc : 1200
      Moy acc1 (UN) : 2311722.
      Std de acc1 (UN) : 7.06 (0.20)
      Moy acc2 (UN) : 2345079.

```

Std de acc2 (UN) : 6.87 (0.20)
 Moy acc3 (UN) : 2295838.
 Std de acc3 (UN) : 6.95 (0.20)
 Dz1 : 135.5122, Dz2 : 264.4877, Zo : -.0001
 Dz (gr) : 135.5122
 Std Dz (gr) : 0.0013 (0.0003)
 Moy de gravité (mGal) : 519208.04
 Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 17.47 (4.51)

Incl. : 14 Nom : SM18 Nb ang. : 17
 Nb acc : 1360
 Moy acc1 (UN) : 2256156.
 Std de acc1 (UN) : 6.23 (0.17)
 Moy acc2 (UN) : 2289203.
 Std de acc2 (UN) : 6.12 (0.17)
 Moy acc3 (UN) : 2240128.
 Std de acc3 (UN) : 5.87 (0.16)
 Dz1 : 134.5070, Dz2 : 265.4907, Zo : -.0011
 Dz (gr) : 134.5082
 Std Dz (gr) : 0.0008 (0.0002)
 Moy de gravité (mGal) : 506019.22
 Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 10.91 (2.65)

Incl. : 15 Nom : SM19 Nb ang. : 16
 Nb acc : 1280
 Moy acc1 (UN) : 2189902.
 Std de acc1 (UN) : 6.30 (0.18)
 Moy acc2 (UN) : 2222572.
 Std de acc2 (UN) : 6.38 (0.18)
 Moy acc3 (UN) : 2173713.
 Std de acc3 (UN) : 6.22 (0.17)
 Dz1 : 133.3226, Dz2 : 266.6758, Zo : -.0008
 Dz (gr) : 133.3234
 Std Dz (gr) : 0.0006 (0.0002)
 Moy de gravité (mGal) : 490295.47
 Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 8.41 (2.10)

Incl. : 16 Nom : SM21 Nb ang. : 14
 Nb acc : 1120
 Moy acc1 (UN) : 2070115.
 Std de acc1 (UN) : 5.54 (0.17)
 Moy acc2 (UN) : 2102072.
 Std de acc2 (UN) : 5.30 (0.16)
 Moy acc3 (UN) : 2053642.
 Std de acc3 (UN) : 5.34 (0.16)
 Dz1 : 131.2117, Dz2 : 268.7856, Zo : -.0014
 Dz (gr) : 131.2130
 Std Dz (gr) : 0.0007 (0.0002)
 Moy de gravité (mGal) : 461869.76
 Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 10.19 (2.72)

Analyse de la journée du 10 février 2005

```

**** Analyse du fichier du 050210
Incli. : 1 Nom : IM30 Nb ang. : 13
      Nb acc : 1040
      Moy acc1 (UN) : 1940583.
      Std de acc1 (UN) : 30.82 (0.96)
      Moy acc2 (UN) : 124697.
      Std de acc2 (UN) : 6.43 (0.20)
      Moy acc3 (UN) : 1923315.
      Std de acc3 (UN) : 31.00 (0.96)
      Dz1 : 128.9499, Dz2 : 271.0473, Zo : -0.0014
      Dz (gr) : 128.9513
      Std Dz (gr) : 0.0003 (0.0001)
      Moy de gravité (mGal) : 430843.07
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 4.26 ( 1.18)

*****
Incli. : 2 Nom : IM31 Nb ang. : 15
      Nb acc : 1200
      Moy acc1 (UN) : 1614689.
      Std de acc1 (UN) : 39.74 (1.15)
      Moy acc2 (UN) : 124733.
      Std de acc2 (UN) : 2.95 (0.09)
      Moy acc3 (UN) : 1596861.
      Std de acc3 (UN) : 40.24 (1.16)
      Dz1 : 123.4724, Dz2 : 276.5248, Zo : -0.0014
      Dz (gr) : 123.4738
      Std Dz (gr) : 0.0004 (0.0001)
      Moy de gravité (mGal) : 353526.20
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 5.52 ( 1.42)

*****
Incli. : 3 Nom : IM32 Nb ang. : 13
      Nb acc : 1040
      Moy acc1 (UN) : 1475273.
      Std de acc1 (UN) : 29.85 (0.93)
      Moy acc2 (UN) : 124734.
      Std de acc2 (UN) : 3.26 (0.10)
      Moy acc3 (UN) : 1457254.
      Std de acc3 (UN) : 30.13 (0.93)
      Dz1 : 121.1862, Dz2 : 278.8107, Zo : -0.0015
      Dz (gr) : 121.1878
      Std Dz (gr) : 0.0002 (0.0001)
      Moy de gravité (mGal) : 320451.92
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 3.05 ( 0.85)

*****
Incli. : 4 Nom : IM33 Nb ang. : 15
      Nb acc : 1200
      Moy acc1 (UN) : 2002729.
      Std de acc1 (UN) : 39.80 (1.15)
      Moy acc2 (UN) : 124735.
      Std de acc2 (UN) : 2.62 (0.08)
      Moy acc3 (UN) : 1985559.
      Std de acc3 (UN) : 40.07 (1.16)
      Dz1 : 130.0179, Dz2 : 269.9792, Zo : -0.0015
      Dz (gr) : 130.0193
      Std Dz (gr) : 0.0003 (0.0001)
      Moy de gravité (mGal) : 445564.70
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 4.55 ( 1.17)

*****
Incli. : 5 Nom : IM34 Nb ang. : 16
      Nb acc : 1280
      Moy acc1 (UN) : 2066128.
      Std de acc1 (UN) : 46.44 (1.30)
      Moy acc2 (UN) : 124737.
      Std de acc2 (UN) : 3.10 (0.09)
      Moy acc3 (UN) : 2049088.
      Std de acc3 (UN) : 46.61 (1.30)
      Dz1 : 131.1178, Dz2 : 268.8795, Zo : -0.0014
      Dz (gr) : 131.1192
      Std Dz (gr) : 0.0010 (0.0003)
      Moy de gravité (mGal) : 460593.44
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 14.25 ( 3.56)

*****
Incli. : 6 Nom : IM35 Nb ang. : 18
      Nb acc : 1440
      Moy acc1 (UN) : 2132633.
      Std de acc1 (UN) : 26.70 (0.70)
      Moy acc2 (UN) : 124738.
      Std de acc2 (UN) : 3.85 (0.10)
      Moy acc3 (UN) : 2115737.
      Std de acc3 (UN) : 26.70 (0.70)
      Dz1 : 132.2826, Dz2 : 267.7145, Zo : -0.0015
      Dz (gr) : 132.2840
      Std Dz (gr) : 0.0007 (0.0002)
      Moy de gravité (mGal) : 476361.15
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 9.67 ( 2.28)

*****
Incli. : 7 Nom : IM36 Nb ang. : 18
      Nb acc : 1440
      Moy acc1 (UN) : 2193702.
      Std de acc1 (UN) : 49.26 (1.30)
      Moy acc2 (UN) : 124738.
      Std de acc2 (UN) : 3.25 (0.09)
      Moy acc3 (UN) : 2176944.
      Std de acc3 (UN) : 49.99 (1.32)
      Dz1 : 133.3638, Dz2 : 266.6341, Zo : -0.0010
      Dz (gr) : 133.3648
      Std Dz (gr) : 0.0006 (0.0001)
      Moy de gravité (mGal) : 490847.98
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 8.47 ( 2.00)

*****
Incli. : 8 Nom : IM37 Nb ang. : 17
      Nb acc : 1360
      Moy acc1 (UN) : 2256535.
      Std de acc1 (UN) : 37.25 (1.01)
      Moy acc2 (UN) : 124739.
      Std de acc2 (UN) : 2.84 (0.08)
      Moy acc3 (UN) : 2239928.
      Std de acc3 (UN) : 37.68 (1.02)
      Dz1 : 134.4868, Dz2 : 265.5103, Zo : -0.0014
      Dz (gr) : 134.4883
      Std Dz (gr) : 0.0007 (0.0002)
      Moy de gravité (mGal) : 505756.57
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 9.18 ( 2.23)

*****
Incli. : 9 Nom : IM38 Nb ang. : 18
      Nb acc : 1440
      Moy acc1 (UN) : 2318498.
      Std de acc1 (UN) : 29.20 (0.77)
      Moy acc2 (UN) : 124739.
      Std de acc2 (UN) : 3.63 (0.10)
      Moy acc3 (UN) : 2302041.
      Std de acc3 (UN) : 29.50 (0.78)
      Dz1 : 135.6063, Dz2 : 264.3911, Zo : -0.0013
      Dz (gr) : 135.6076
      Std Dz (gr) : 0.0007 (0.0002)
      Moy de gravité (mGal) : 520454.07
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 8.61 ( 2.03)

*****
Incli. : 10 Nom : IM39 Nb ang. : 20
      Nb acc : 1600
      Moy acc1 (UN) : 2379547.
      Std de acc1 (UN) : 44.57 (1.11)
      Moy acc2 (UN) : 124740.
      Std de acc2 (UN) : 2.95 (0.07)
      Moy acc3 (UN) : 2363249.
      Std de acc3 (UN) : 44.94 (1.12)
      Dz1 : 136.7208, Dz2 : 263.2764, Zo : -0.0014
      Dz (gr) : 136.7222
      Std Dz (gr) : 0.0006 (0.0001)
      Moy de gravité (mGal) : 534929.19
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 7.94 ( 1.77)

*****
Incli. : 11 Nom : IM40 Nb ang. : 16
      Nb acc : 1280
      Moy acc1 (UN) : 2432750.
      Std de acc1 (UN) : 47.39 (1.32)
      Moy acc2 (UN) : 124722.
      Std de acc2 (UN) : 13.37 (0.37)
      Moy acc3 (UN) : 2416596.
      Std de acc3 (UN) : 47.43 (1.33)
      Dz1 : 137.7035, Dz2 : 262.2938, Zo : -0.0013
      Dz (gr) : 137.7049
      Std Dz (gr) : 0.0010 (0.0002)
      Moy de gravité (mGal) : 547555.87
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 12.20 ( 3.05)

*****
Incli. : 12 Nom : IM41 Nb ang. : 21
      Nb acc : 1680
      Moy acc1 (UN) : 2493618.
      Std de acc1 (UN) : 28.80 (0.70)
      Moy acc2 (UN) : 124717.
      Std de acc2 (UN) : 8.05 (0.20)
      Moy acc3 (UN) : 2477635.
      Std de acc3 (UN) : 29.01 (0.71)
      Dz1 : 138.8399, Dz2 : 261.1571, Zo : -0.0015
      Dz (gr) : 138.8414
      Std Dz (gr) : 0.0007 (0.0001)
      Moy de gravité (mGal) : 561996.03
      Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 8.34 ( 1.82)

*****
Incli. : 13 Nom : IM42 Nb ang. : 18
      Nb acc : 1440
      Moy acc1 (UN) : 2554497.
      Std de acc1 (UN) : 26.54 (0.70)
      Moy acc2 (UN) : 124743.

```

```

Std de acc2 (UN) : 3.07 (0.08)
Moy acc3 (UN) : 2538698.
Std de acc3 (UN) : 26.54 (0.70)
Dz1 : 139.9897, Dz2 : 260.0071, Zo : -0.0016
Dz (gr) : 139.9913
Std Dz (gr) : 0.0007 (0.0002)
Moy de gravité (mGal) : 576423.83
Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 9.02 ( 2.13)

*****
Incli. : 14 Nom : IM43 Nb ang. : 16
Nb acc : 1280
Moy acc1 (UN) : 2615373.
Std de acc1 (UN) : 38.63 (1.08)
Moy acc2 (UN) : 124743.
Std de acc2 (UN) : 3.77 (0.11)
Moy acc3 (UN) : 2599766.
Std de acc3 (UN) : 38.89 (1.09)
Dz1 : 141.1559, Dz2 : 258.8412, Zo : -0.0014
Dz (gr) : 141.1573
Std Dz (gr) : 0.0008 (0.0002)
Moy de gravité (mGal) : 590862.21
Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 9.97 ( 2.49)

*****
Incli. : 15 Nom : IM44 Nb ang. : 16
Nb acc : 1280
Moy acc1 (UN) : 2669910.
Std de acc1 (UN) : 37.57 (1.05)
Moy acc2 (UN) : 124744.
Std de acc2 (UN) : 3.69 (0.10)
Moy acc3 (UN) : 2654486.
Std de acc3 (UN) : 37.37 (1.04)
Dz1 : 142.2141, Dz2 : 257.7834, Zo : -0.0013
Dz (gr) : 142.2154
Std Dz (gr) : 0.0011 (0.0003)
Moy de gravité (mGal) : 603791.69
Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 13.06 ( 3.27)

*****
Incli. : 16 Nom : IM45 Nb ang. : 15
Nb acc : 1200
Moy acc1 (UN) : 2728408.
Std de acc1 (UN) : 23.07 (0.67)
Moy acc2 (UN) : 124744.
Std de acc2 (UN) : 3.23 (0.09)
Moy acc3 (UN) : 2713186.
Std de acc3 (UN) : 23.04 (0.67)
Dz1 : 143.3646, Dz2 : 256.6327, Zo : -0.0014
Dz (gr) : 143.3659
Std Dz (gr) : 0.0004 (0.0001)
Moy de gravité (mGal) : 617662.79
Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 5.04 ( 1.30)

*****
Incli. : 17 Nom : IM46 Nb ang. : 13
Nb acc : 1040
Moy acc1 (UN) : 2782613.
Std de acc1 (UN) : 60.06 (1.86)
Moy acc2 (UN) : 124745.
Std de acc2 (UN) : 3.77 (0.12)
Moy acc3 (UN) : 2767590.
Std de acc3 (UN) : 60.54 (1.88)
Dz1 : 144.4455, Dz2 : 255.5514, Zo : -0.0016
Dz (gr) : 144.4471
Std Dz (gr) : 0.0004 (0.0001)
Moy de gravité (mGal) : 630512.67
Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 4.68 ( 1.30)

*****
Incli. : 18 Nom : IM47 Nb ang. : 16
Nb acc : 1280
Moy acc1 (UN) : 2834881.
Std de acc1 (UN) : 36.45 (1.02)
Moy acc2 (UN) : 124745.
Std de acc2 (UN) : 3.47 (0.10)
Moy acc3 (UN) : 2820057.
Std de acc3 (UN) : 36.57 (1.02)
Dz1 : 145.5035, Dz2 : 254.4935, Zo : -0.0015
Dz (gr) : 145.5050
Std Dz (gr) : 0.0003 (0.0001)
Moy de gravité (mGal) : 642911.14
Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 3.21 ( 0.80)

*****
Incli. : 19 Nom : IM48 Nb ang. : 15
Nb acc : 1200
Moy acc1 (UN) : 2888434.
Std de acc1 (UN) : 36.42 (1.05)
Moy acc2 (UN) : 124744.
Std de acc2 (UN) : 3.39 (0.10)
Moy acc3 (UN) : 2873819.
Std de acc3 (UN) : 36.72 (1.06)
Dz1 : 146.6031, Dz2 : 253.3942, Zo : -0.0014
Dz (gr) : 146.6045

Std Dz (gr) : 0.0005 (0.0001)
Moy de gravité (mGal) : 655607.84
Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 5.87 ( 1.51)

*****
Incli. : 20 Nom : IM49 Nb ang. : 17
Nb acc : 1360
Moy acc1 (UN) : 2944207.
Std de acc1 (UN) : 49.36 (1.34)
Moy acc2 (UN) : 124747.
Std de acc2 (UN) : 3.19 (0.09)
Moy acc3 (UN) : 2929821.
Std de acc3 (UN) : 49.25 (1.34)
Dz1 : 147.7695, Dz2 : 252.2299, Zo : -0.0003
Dz (gr) : 147.7698
Std Dz (gr) : 0.0011 (0.0003)
Moy de gravité (mGal) : 668851.79
Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 11.93 ( 2.89)

*****
Incli. : 21 Nom : IM50 Nb ang. : 17
Nb acc : 1360
Moy acc1 (UN) : 2998001.
Std de acc1 (UN) : 50.18 (1.36)
Moy acc2 (UN) : 124748.
Std de acc2 (UN) : 3.33 (0.09)
Moy acc3 (UN) : 2983843.
Std de acc3 (UN) : 50.29 (1.36)
Dz1 : 148.9088, Dz2 : 251.0892, Zo : -0.0010
Dz (gr) : 148.9098
Std Dz (gr) : 0.0008 (0.0002)
Moy de gravité (mGal) : 681591.47
Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 9.40 ( 2.28)

*****
Incli. : 22 Nom : IM51 Nb ang. : 18
Nb acc : 1440
Moy acc1 (UN) : 3046889.
Std de acc1 (UN) : 36.70 (0.97)
Moy acc2 (UN) : 124749.
Std de acc2 (UN) : 3.69 (0.10)
Moy acc3 (UN) : 3032943.
Std de acc3 (UN) : 36.76 (0.97)
Dz1 : 149.9619, Dz2 : 250.0349, Zo : -0.0016
Dz (gr) : 149.9635
Std Dz (gr) : 0.0008 (0.0002)
Moy de gravité (mGal) : 693171.95
Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 8.32 ( 1.96)

*****
Incli. : 23 Nom : IM52 Nb ang. : 18
Nb acc : 1440
Moy acc1 (UN) : 3098086.
Std de acc1 (UN) : 38.19 (1.01)
Moy acc2 (UN) : 124715.
Std de acc2 (UN) : 5.54 (0.15)
Moy acc3 (UN) : 3084374.
Std de acc3 (UN) : 38.12 (1.00)
Dz1 : 151.0901, Dz2 : 248.9076, Zo : -0.0012
Dz (gr) : 151.0912
Std Dz (gr) : 0.0005 (0.0001)
Moy de gravité (mGal) : 705355.81
Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 5.82 ( 1.37)

*****
Incli. : 24 Nom : IM53 Nb ang. : 18
Nb acc : 1440
Moy acc1 (UN) : 3335690.
Std de acc1 (UN) : 59.54 (1.57)
Moy acc2 (UN) : 124750.
Std de acc2 (UN) : 3.45 (0.09)
Moy acc3 (UN) : 3323204.
Std de acc3 (UN) : 59.61 (1.57)
Dz1 : 156.6047, Dz2 : 243.3932, Zo : -0.0010
Dz (gr) : 156.6058
Std Dz (gr) : 0.0007 (0.0002)
Moy de gravité (mGal) : 761677.02
Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 6.63 ( 1.56)

*****
Incli. : 25 Nom : IM54 Nb ang. : 16
Nb acc : 1280
Moy acc1 (UN) : 3223859.
Std de acc1 (UN) : 46.30 (1.29)
Moy acc2 (UN) : 124750.
Std de acc2 (UN) : 3.31 (0.09)
Moy acc3 (UN) : 3210749.
Std de acc3 (UN) : 46.37 (1.30)
Dz1 : 153.9403, Dz2 : 246.0571, Zo : -0.0013
Dz (gr) : 153.9416
Std Dz (gr) : 0.0009 (0.0002)
Moy de gravité (mGal) : 735155.39
Std Gravi (g*cos(Dz))(mGal) : 9.45 ( 2.36)

*****

```


MOINDRES CARRÉS MIXTES

F

SOMMAIRE

F.1	THÉORIE GÉNÉRALE DES MOINDRES CARRÉS MIXTES	207
F.1.1	Estimation de la solution par moindres carrés	207
F.2	APPLICATION AU CALCUL DE LA MATRICE DE PASSAGE C_s^b	209
F.2.1	Ajout des paramètres d'étalonnage des accéléromètres	211

L'ESTIMATION des paramètres par moindres carrés mixtes est nécessaire chaque fois qu'il n'existe pas de relation explicite entre observations et paramètres. Ce type d'estimation a été utilisé pour la détermination de la fonction d'étalonnage des accéléromètres (§3.2.4) et pour la détermination de la matrice de passage C_s^b par étalonnage gravimétrique (§3.3.3).

Cette annexe se propose de présenter les résultats généraux de l'estimation par moindres carrés mixtes et son application à la détermination de la matrice de passage C_s^b du référentiel de l'instrument au référentiel du véhicule.

F.1 THÉORIE GÉNÉRALE DES MOINDRES CARRÉS MIXTES

Soit L_a le vecteur de n observations et X_a le vecteur des p paramètres (LEICK 1990). On suppose que les observations et les paramètres sont liés par une relation implicite de la forme

$$F(L_a, X_a) = 0$$

où F est une fonction de $\mathbb{R}^{n \times p}$ dans \mathbb{R}^r .

On suppose également connue la matrice de poids P qui s'exprime en fonction de la matrice de variances-covariances des observations par :

$$P = \sigma_0^2 \Sigma_{L_b}^{-1}$$

où σ_0 est le facteur unitaire de variance *a priori*.

Linéarisation

Soit X_0 une première approximation du vecteur des paramètres ; l'écart x entre les paramètres à estimer et cette approximation est donné par

$$x = X_a - X_0.$$

Soit L_b le vecteur des observations effectivement réalisées ; alors, le vecteur v des résidus s'écrit

$$v = L_a - L_b.$$

La relation implicite entre observations et paramètres peut alors s'écrire

$$F(L_b + v, X_0 + x) = 0$$

qui peut se linéariser au point (L_b, X_0) par

$$AX + BV + W = 0 \tag{F.1}$$

où

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)_{L_b, X_0}, \quad A \in M_{rp}(\mathbb{R}) \\ B &= \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right)_{L_b, X_0}, \quad B \in M_{rn}(\mathbb{R}) \\ W &= F(L_b, X_0), \quad W \in M_{r1}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

F.1.1 Estimation de la solution par moindres carrés

Le problème de la recherche de la solution qui minimise $V^T P V$ sachant la relation (F.1) vérifiée se ramène à un problème d'optimisation sous contraintes. On montre que ce problème se ramène à la recherche de la solution \hat{x} qui minimise la forme quadratique

$$\Phi(v, k, x) = v^t P v - 2k^T (Ax + Bv + W)$$

où k est un vecteur de r multiplicateurs de Lagrange. La recherche de la solution \hat{x} se ramène donc à la résolution du système linéaire suivant aux inconnues \hat{v} , \hat{k} , \hat{x}

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi^T}{\partial v} = P\hat{v} - B^T \hat{k} = 0 \quad (\text{F.2})$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi^T}{\partial k} = B\hat{v} + A\hat{x} + W = 0 \quad (\text{F.3})$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Phi^T}{\partial x} = -A^T \hat{k} \quad (\text{F.4})$$

qui se résoud par

$$\hat{v} = P^{-1} B^T \hat{k} \text{ d'après (F.2)} \quad (\text{F.5})$$

$$BP^{-1} B^T \hat{k} = -(A\hat{x} + W) \text{ après substitution dans (F.3)} \quad (\text{F.6})$$

$$\text{d'où } \hat{k} = -M^{-1}(A\hat{x} + W) \quad (\text{F.7})$$

où $M = BP^{-1} B^T$ et finalement

$$A^T M^{-1}(A\hat{x} + W) = 0$$

par substitution dans (F.4). Ce qui donne

$$\hat{x} = -(A^T M^{-1} A)^{-1} A^T M^{-1} W$$

d'où

$$\hat{X} = X_0 + \hat{x}.$$

La matrice de variances-covariances des paramètres $\Sigma_{\hat{x}}$ s'exprime en fonction du facteur unitaire de variance *a posteriori* $\hat{\sigma}_0^2$ par

$$\Sigma_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 (A^T M^{-1} A)^{-1}$$

$$\text{où } \hat{\sigma}_0^2 = \frac{v^T P v}{n - p}$$

Le calcul de la solution \hat{X} est réalisé par itération à partir d'une solution initiale X_0 . À chaque itération, la quantité $\hat{v}^T P \hat{v}$ correspond à la somme des carrés des résidus normalisés. Un critère d'arrêt possible du processus d'estimation consiste à évaluer la différence entre $\hat{v}^T P \hat{v}^{(k)}$ obtenu à l'itération k et $\hat{v}^T P \hat{v}^{(k+1)}$ à l'itération $k + 1$; on doit vérifier alors que

$$|\hat{v}^T P \hat{v}^{(k-1)} - \hat{v}^T P \hat{v}^{(k)}| < \epsilon$$

où ϵ est un nombre fixé arbitrairement petit.

F.2 APPLICATION AU CALCUL DE LA MATRICE DE PASSAGE C_s^b

La matrice C_s^b est la matrice de passage du référentiel de l'instrument au référentiel du véhicule. Son estimation suppose donc la détermination de ses neuf éléments

$$C_s^b = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix},$$

La relation qui lie l'accélération de rappel a^s mesurée par les accéléromètres à la pesanteur est donnée par

$$C_s^b \begin{bmatrix} a_1^s \\ a_2^s \\ a_3^s \end{bmatrix} = C_n^b(\alpha, \chi, \eta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix} \quad (\text{F.8})$$

où a_1^s, a_2^s, a_3^s sont les mesures d'accélération le long de chacun des trois axes sensibles, α, χ, η sont respectivement l'azimuth, le roulis et le tangage mesurés et g la mesure scalaire de pesanteur au point considéré. Toutes ces mesures sont réalisées aux instants k correspondants à diverses attitudes.

Ainsi, pour chaque instant k , nous disposons des mesures effectuées ainsi que de leur précision. Il reste donc à construire les matrices de (F.1) afin de résoudre le problème d'estimation des éléments de la matrice C_s^b par moindres carrés mixtes.

Dans un premier temps, construisons ces éléments pour une unique observation k , dont on omettra l'indice. Grâce à la connaissance de C_n^b (2.14), il est possible de calculer formellement

$$C_n^b = R_2(\eta)R_1(\chi)R_3(\alpha),$$

(F.8) peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} C_{11}a_1^s + C_{12}a_2^s + C_{13}a_3^s - g \sin \eta \cos \chi &= 0 \\ C_{21}a_1^s + C_{22}a_2^s + C_{23}a_3^s + g \sin \chi &= 0 \\ C_{31}a_1^s + C_{32}a_2^s + C_{33}a_3^s + g \cos \eta \cos \chi &= 0. \end{aligned} \quad (\text{F.9})$$

Par linéarisation de cette fonction, nous pouvons déterminer les corrections à apporter à une solution initiale de C_s^b en fonction des observations effectuées et de leur précision, ainsi (F.9) devient

$$\begin{aligned} (C_{11} + \delta C_{11})(a_1^s + \nu_{a_1^s}) + (C_{12} + \delta C_{12})(a_2^s + \nu_{a_2^s}) + (C_{13} + \delta C_{13})(a_3^s + \nu_{a_3^s}) \\ - (g + \nu_g)(\sin \eta \cos \chi + (\cos \eta \cos \chi)\nu_\eta - (\sin \eta \sin \chi)\nu_\chi) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (C_{21} + \delta C_{21})(a_1^s + \nu_{a_1^s}) + (C_{22} + \delta C_{22})(a_2^s + \nu_{a_2^s}) + (C_{23} + \delta C_{23})(a_3^s + \nu_{a_3^s}) \\ + (g + \nu_g)(\sin \chi + (\cos \chi)\nu_\chi) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (C_{31} + \delta C_{31})(a_1^s + \nu_{a_1^s}) + (C_{32} + \delta C_{32})(a_2^s + \nu_{a_2^s}) + (C_{33} + \delta C_{33})(a_3^s + \nu_{a_3^s}) \\ + (g + \nu_g)(\cos \eta \cos \chi - (\sin \eta \cos \chi)\nu_\eta - (\cos \eta \sin \chi)\nu_\chi) = 0. \end{aligned}$$

où $\delta C_{11}, \dots, \delta C_{33}$ correspondent aux corrections à apporter aux paramètres et $\nu_{a_1^s}, \dots, \nu_\eta$ correspondent aux résidus.

Pour un instant k , il est possible de déterminer, en ne considérant que les termes de premier ordre, le vecteur X_k des corrections des paramètres

$$X_k = [\delta C_{11}, \delta C_{12}, \delta C_{13}, \delta C_{21}, \delta C_{22}, \delta C_{23}, \delta C_{31}, \delta C_{32}, \delta C_{33}]^T,$$

la matrice A_k des dérivées partielles de la relation F.9 par rapport aux paramètres

$$A_k = \begin{bmatrix} a_1^s & a_2^s & a_3^s & (0) & & & & & \\ & & & a_1^s & a_2^s & a_3^s & & & \\ & (0) & & & & & a_1^s & a_2^s & a_3^s \end{bmatrix},$$

le vecteur V_k des résidus des observations

$$V_k = [\nu_{a_1^s}, \nu_{a_2^s}, \nu_{a_3^s}, \nu_g, \nu_\alpha, \nu_\chi, \nu_\eta]^T$$

la matrice B_k des dérivées partielles de la relation F.9 par rapport aux observations

$$B_k = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & -\sin \eta \cos \chi & 0 & g \sin \chi \sin \eta & -g \cos \chi \cos \eta \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \sin \chi & 0 & g \cos \chi & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & \cos \eta \cos \chi & 0 & -g \sin \chi \cos \eta & -g \cos \chi \sin \eta \end{bmatrix},$$

et enfin les écarts W_k

$$W_k = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^s \\ a_2^s \\ a_3^s \end{bmatrix} + g \begin{bmatrix} -\sin \eta \cos \chi \\ \sin \chi \\ \cos \eta \cos \chi \end{bmatrix}.$$

Ces expressions ne sont valables que pour une unique observation k . Les matrices et vecteurs utilisés par les moindres carrés mixtes sont donc construits à partir des termes précédemment déterminés

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_k \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} \text{ et } X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_k \\ \vdots \\ X_N \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & & & & \\ & \ddots & & (0) & \\ & & B_k & & \\ (0) & & & \ddots & \\ & & & & B_N \end{bmatrix} \text{ et } V = \begin{bmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_k \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix}$$

et

$$W = \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_k \\ \vdots \\ W_N \end{bmatrix}.$$

SPLINE CUBIQUE

G

CETTE annexe se propose de décrire l'algorithme d'interpolation par spline qui a servi à générer les données de simulation (chapitre 4) à partir des mesures acquises lors de la mission marine de Sainte-Maxime.

Soit à interpoler la fonction numérique de classe C^2

$$y : t \in \mathbb{R} \mapsto y(t) \in \mathbb{R}$$

à partir de la connaissance de N points $y_i = y(t_i)$, $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ aux instants $t_1 < t_2 < \dots < t_N$; ce problème peut se ramener à la recherche d'une spline \hat{y} , c'est-à-dire une fonction définie par morceaux telle que, pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$,

$$\hat{y}(t) = \hat{y}_i(t) = A_i(t)y_i + B_i(t)y_{i+1} + C_i(t)y''_i + D_i(t)y''_{i+1}$$

où y''_i et y''_{i+1} désignent respectivement les dérivées secondes de $y(t)$ aux points t_i et t_{i+1} ; $A_i(t)$, $B_i(t)$ d'une part, et $C_i(t)$, $D_i(t)$ d'autre part correspondent à des polynômes en t de degrés 1 et 3 respectivement. La fonction $\hat{y}(t)$ est appelée spline de degré 3 dite aussi spline cubique.

Des conditions $A_i(t_i) = 1$, $A_i(t_{i+1}) = 0$ et $C_i(t_i) = C_i(t_{i+1}) = D_i(t_i) = D_i(t_{i+1}) = 0$, il résulte pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$A_i(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i}.$$

Le polynôme $B_i(t)$ vérifie sur ce même intervalle $B_i(t_i) = 0$ et $B_i(t_{i+1}) = 1$; on peut donc choisir $B_i(t)$ égal à $1 - A_i(t)$ sur $[t_i, t_{i+1}]$; d'où pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$B_i(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}.$$

De plus, en remarquant que $\hat{y}''(t) = C''_i(t)y''_i + D''_i(t)y''_{i+1}$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, on peut choisir pour tout $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$C''_i(t) = A_i(t)$$

$$D''_i(t) = B_i(t).$$

En intégrant ces deux équations sachant que d'une part

$$C_i(t_i) = C_i(t_{i+1}) = 0,$$

et que d'autre part

$$D_i(t_i) = D_i(t_{i+1}) = 0,$$

il vient, tous calculs faits, pour $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$C_i(t) = \frac{(t_{i+1} - t)^3}{6(t_{i+1} - t_i)} + \frac{1}{6}(t_{i+1} - t_i)(t - t_{i+1});$$

$$D_i(t) = \frac{(t - t_i)^3}{6(t_{i+1} - t_i)} - \frac{1}{6}(t_{i+1} - t_i)(t - t_i).$$

La fonction \hat{y}_i ainsi calculée correspond donc à la restriction de \hat{y} à l'intervalle $[t_i, t_{i+1}]$.

Il faut à présent déterminer les N dérivées secondes y''_i , $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ qui permettent de calculer les fonctions \hat{y}_i , en exploitant la continuité des dérivées premières des fonctions \hat{y}_i . Cette condition se traduit au point t_i par

$$\hat{y}'_{i-1}(t_i) = \hat{y}'_i(t_i)$$

qui revient, tous calculs faits à,

$$\begin{aligned} & \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + \frac{1}{6}(t_i - t_{i-1})y''_{i-1} + \frac{1}{3}(t_i - t_{i-1})y''_i \\ &= \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} - \frac{1}{6}(t_{i+1} - t_i)y''_{i+1} - \frac{1}{3}(t_{i+1} - t_i)y''_i. \end{aligned}$$

Cette égalité peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{t_{i+1} - t_i}{6}y''_{i+1} + \frac{t_{i+1} - t_{i-1}}{3}y''_i + \frac{t_i - t_{i-1}}{6}y''_{i-1} = \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \quad (\text{G.1})$$

pour $i \in \llbracket 2, N-1 \rrbracket$ qui correspond à $(N-2)$ équations linéaires aux inconnues y''_i , $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Pour déterminer toutes les inconnues, il est nécessaire d'en fixer deux qui sont en général y''_1 et y''_N .

Les N dérivées secondes y''_i , $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ sont donc solutions d'un système d'équations linéaires (G.1) qui s'exprime matriciellement par

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & \frac{t_i - t_{i-1}}{6} & \frac{t_{i+1} - t_{i-1}}{3} & \frac{t_{i+1} - t_i}{6} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y''_1 \\ \vdots \\ y''_{i-1} \\ y''_i \\ y''_{i+1} \\ \vdots \\ y''_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y''_1 \\ \vdots \\ \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} \\ \vdots \\ y''_N \end{bmatrix}.$$

On peut, de façon équivalente, fixer les dérivées premières y'_1 et y'_N aux instants t_1 et t_N respectivement en remarquant que

$$\begin{aligned} y'_1 &= y'(t_1) = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} - \frac{1}{3}(t_2 - t_1)y''_1 - \frac{1}{6}(t_2 - t_1)y''_2 \\ y'_N &= y'(t_N) = \frac{y_N - y_{N-1}}{t_N - t_{N-1}} + \frac{1}{3}(t_N - t_{N-1})y''_N + \frac{1}{6}(t_N - t_{N-1})y''_{N-1} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} y''_1 &= \frac{3}{t_2 - t_1} \left(\frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} - y'_1 \right) - \frac{1}{2}y''_2 \\ y''_N &= \frac{3}{t_N - t_{N-1}} \left(-\frac{y_N - y_{N-1}}{t_N - t_{N-1}} + y'_N \right) - \frac{1}{2}y''_{N-1}. \end{aligned}$$

La première et la deuxième équation du système linéaire (G.1) doivent alors être remplacées respectivement par les deux équations ci-dessus.

La résolution du système permet d'obtenir l'ensemble des dérivées secondes y''_i , $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ qui permettent de fixer successivement

– la dérivée seconde $\hat{y}''(t)$ sur tous les intervalles $[t_i, t_{i+1}]$

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1}], \hat{y}''(t) = \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} y''_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} y''_{i+1},$$

– la dérivée première $\hat{y}'(t)$

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_i, t_{i+1}], \hat{y}'(t) &= \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} + \left(-\frac{(t_{i+1} - t)^2}{2(t_{i+1} - t_i)} + \frac{1}{6}(t_{i+1} - t_i) \right) y''_i \\ &+ \left(\frac{(t - t_i)^2}{2(t_{i+1} - t_i)} - \frac{1}{6}(t_{i+1} - t_i) \right) y''_{i+1}, \end{aligned}$$

– la fonction interpolée

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_i, t_{i+1}], \hat{y}(t) &= \frac{t_{i+1} - t}{t_{i+1} - t_i} y_i + \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} y_{i+1} \\ &+ \left(\frac{(t_{i+1} - t)^3}{6(t_{i+1} - t_i)} + \frac{1}{6}(t_{i+1} - t_i)(t - t_{i+1}) \right) y''_i \\ &+ \left(\frac{(t - t_i)^3}{6(t_{i+1} - t_i)} - \frac{1}{6}(t_{i+1} - t_i)(t - t_{i+1}) \right) y''_{i+1}. \end{aligned}$$

BIBLIOGRAPHIE

- ABBASI, M. J. BARRIOT, and J. VERDUN (2007). "Airborne LaCoste & Romberg gravimetry: A space domain approach". in: *Journal of Geodesy* 81.4 (Apr. 2007). pp. 269–283. DOI: 10.1007/s00190-006-0107-z.
- AGECODAGIS (2007). *Seismological recorders Titan. User manual*. URL: <http://www.agecodagis.com/WebData/Pdf/Docs/tsp.pdf>.
- ALAZARD, D. (2005). *Introduction au filtre de Kalman : notes de cours, exercices corrigés, sessions MATLAB*. École Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace. URL: <http://personnel.supaero.fr/alazard-daniel/>.
- ALLIEDSIGNAL (1999). *Q-Flex Accelerometer Handbook*.
- ALTAMIMI, Z. X. COLLILIEUX, J. LEGRAND, B. GARAYT, and C. BOUCHER (2007). "ITRF2005: A new release of the International Terrestrial Reference Frame based on time series of station positions and Earth Orientation Parameters". in: *Journal of Geophysical Research* 112.B11 (Sept. 2007). pp. 9401–+. DOI: 10.1029/2007JB004949.
- ARIAS, E. M. FEISSEL, and J.-F. LESTRADE (1991). *The IERS extragalactic Celestial Reference Frame and its tie with HIPPARCOS*. tech. rep. 7. IERS.
- ASHTECH (1996). *ADU2 Operation and Reference Manual*. Ashtech.
- BASTOS, L. P. TOMÉ, T. CUNHA, and M. J. FERNANDES (2000). "Gravity anomalies from airborne measurements-experiments using a low cost IMU device". in: *Gravity, Geoid and Geodynamics 2000: GGG2000 IAG International Symposium*. ed. by M. G. SIDERIS. vol. 123. Springer.
- BELL GEOSPACE (2008). *3D Full Tensor Gradiometer (FTG)*. [En ligne; Page disponible le 10-mars-2008]. URL: <http://www.bellgeo.com>.
- BOEDECKER, G. F. LEISMÜLLER, T. SPOHNHOLTZ, J. CUNO, and K. H. NEUMAYER (1995). "Accelerometer / GPS Integration for Strapdown Airborne Gravimetry: First Test Results". in: *Gravity and Geoid*. ed. by H. SUNKEL and I. MARSON. vol. 113. Graz, Austria: Springer. pp. 177–186.
- BRUTON, A. Y. HAMMADA, S. FERGUSON, K. SCHWARZ, M. WEI, and J. HALPENNY (2001). "A Comparison of Inertial Platform, Damped 2-axis Platform and Strapdown Airborne Gravimetry". in: *International Symposium on Kinematic Systems in Geodesy, Geomatics and Navigation (KIS2001)*.
- BRUTON, M. A. (2000). "Improving the Accuracy and Resolution of SINS/DGPS Airborne Gravimetry". PhD thesis. University of Calgary.
- BUCY, R. and P. JOSEPH (1968). *Filtering for stochastic processes with applications to guidance*. John Wiley & Sons.
- CALI, J. B. de SAINT-JEAN, J. VERDUN, H. DUQUENNE, S. MELACHROINOS, and J.-P. BARRIOT (2005). "A new strapdown system for moving gravimetry". Poster -

- Journée Gravimétrie Spatiale CNES. Poster - AGU Fall meeting 2005. Dec. 2005.
- CALL, J., B. de SAINT-JEAN, J. VERDUN, H. DUQUENNE, S. MELACHROINOS et J.-P. BARRIOT (2006). « Un nouveau système lié pour la gravimétrie mobile ». Poster - Journée Gravimétrie Spatiale CNES. Poster - Journées de la Recherche IGN. Mar. 2006.
- CARSON AEROGRAVITY (2008). [En ligne; Page disponible le 10-mars-2008]. URL: <http://www.aerogravity.com>.
- DUQUENNE, H. A. V. OLESEN, R. FORSBERG, and A. GIDSKEHAUG (2002). "Improvement of the gravity field and geoid around Corsica by aerial gravimetry". in: *Gravity and Geoid 2002 - 3rd Meeting of the IGGC*. ed. by I. TZIAVOS. pp. 167–172.
- (2003). « Amélioration du champ de pesanteur et du géoïde autour de la Corse par gravimétrie aéroportée ». Dans : *C. R. des activités de recherche 2002 du LGG* 101. P. 64–74.
- DURAND, J.-F. (2002). *Éléments de calcul matriciel et d'analyse factorielle de données*. Université Montpellier II.
- ELEKTROPRIBOR (2008). [En ligne; Page disponible le 10-mars-2008]. URL: <http://www.elektropribor.spb.ru>.
- FERGUSON, S. and Y. HAMMADA (2000). "Experiences with AIRGrav: results from a new airborne gravimeter.". in: *Gravity, Geoid and Geodynamics 2000: GGG2000 IAG International Symposium*. ed. by M. G. SIDERIS. vol. 123. Springer.
- FOLLIN, J. W. and A. G. CARLTON (1956). "Recent developments in fixed and adaptive filtering". in: *AGARDOgraph*. 21.
- FOTOPOULOS, G. (2005). "Calibration of geoid error models via a combined adjustment of ellipsoidal, orthometric and gravimetric geoid height data". in: *Journal of Geodesy* 79.1 - 3 (June 2005). pp. 111–123. DOI: 10.1007/s00190-005-0449-y.
- FUGRO-LCT (2008). *ZLS, UltraSys, SeaSys and SAGE*. [En ligne; Page disponible le 10-mars-2008]. URL: <http://www.lct.com>.
- GERLACH, C. D. DOROBANTU, and M. ROTHACHER (2005). "Results of a combined INS/GPS experiment for geodetic application". in: *Navigation* 53.212 (Oct. 2005). pp. 31–47.
- GLENNIE, C. L. K. P. SCHWARZ, A. M. BRUTON, R. FORSBERG, O. A. V. and K. KELLER (2000). "A comparison of stable platform and strapdown airborne gravity". in: *Journal of Geodesy* 74.5 (July 2000). pp. 383–389. DOI: 10.1007/s0019000000082.
- GOLDSTEIN, H. (1964). *Mécanique classique*. Presses Universitaires de France.
- GREWAL, M. S. and A. P. ANDREWS (2001). *Kalman Filtering: Theory and Practice Using Matlab*. 2^e ed. Wiley-Interscience.
- GUETTE, J. (2001). « La gravimétrie aéroportée guidée : mission méditerranéenne et étalonnage du système d'acquisition ». Mémoire de fin d'études. École Supérieure des Géomètres et Topographes.
- HEIN, G. W. (1995). "Progress in airborne gravimetry: Solved, open and critical problems". in: *Proceedings of the IAG Symposium on Airborne Gravity Field De-*

- termination, IUGG XXI General Assembly, Boulder, Colorado, USA, 2-14 July 1995.* Boulder, Colorado. pp. 3-11.
- HOFMANN-WELLENHOF, B. and H. MORITZ (2005). *Physical geodesy*. Springer.
- HONEYWELL (2008). [En ligne; Page disponible le 10-mars-2008]. URL: <http://www.honeywell.com/>.
- INGENIEURBÜRO WANNINGER (2008). [En ligne; Page disponible le 10-mars-2008]. URL: <http://www.wasoft.de/>.
- JACQUES, M. (2002). « La gravimétrie aéroportée guidée : automatisation de l'é-talonnage et premiers essais sur un véhicule ». Mémoire de fin d'études. École Supérieure des Géomètres et Topographes.
- JAVAD NAVIGATION SYSTEMS (2008). [En ligne; Page disponible le 10-mars-2008]. URL: <http://www.javad.com>.
- JEKELI, C. (2001). *Inertial navigation systems with geodetic applications*. ed. by BERLIN . NEW YORK. de Gruyter. ISBN: 3-11-015903-1.
- JEKELI, C. and J. H. KWON (1999). "Results of airborne vector (3-D) gravimetry". in: *Geophys. Res. Lett.* 26.23 (Dec. 1999). pp. 3 533-3 536. DOI: 10.1029/1999GL010830.
- JEKELI, C. and X. LI (2006). *INS/GPS vector gravimetry along roads in western Montana*. tech. rep. 477. Geodetic science and surveying department of geological sciences, the Ohio state university.
- KALMAN, R. E. (1960). "A new approach to linear filtering and prediction problems". in: *J. of Basic Eng.* 82.D. pp. 35-45.
- KALMAN, R. E. and R. S. BUCY (1961). "New results in linear filtering and prediction theory". in: *J. of Basic Eng.* 83.D. pp. 95-108.
- KOLMOGOROV, A. N. (1962). "Interpolation and extrapolation of stationary time series". in: RM-3090-PR, The RAND Corporation, Santa Monica, California.
- KREYE, C. G. HEIN, and B ZIMMERMANN (2004). "Evaluation of airborne gravimetry integrating GNSS and strapdown INS observations". in: *Gravity, Geoid and Space Missions*. ed. by C. JEKELI, L. BASTOS, and J. FERNADES. vol. 129. Springer.
- KREYE, C. H. NIEDERMEIER, R. HEYEN, T. STELKENS-KOBSCH, and G. BOEDECKER (2006). "Galileo and the Earth gravity field using GNSS for airborne gravimetry - An overview". in: *InsideGNSS* 1.8. pp. 53-65.
- LACOSTE, L. J. B. (1967). "Measurement of Gravity at Sea and in the Air". in: *Reviews of Geophysics* 5.2. pp. 477-526.
- LANDAU, L. et E. LIFCHITZ (1969). *Mécanique*. 3^e éd. Éditions MIR.
- LANE, R. ed. (2004). *Airborne Gravity 2004 - Abstracts from the ASEG-PESA Airborne Gravity 2004 Workshop*. Geoscience Australia Record 2004/18.
- LE GLAND, F. (2007). *Introduction au Filtrage en temps discret. Filtrage de Kalman, Filtrage Particulaire, Modèles de Markov Cachés*. Université de Rennes 1, Master Recherche STI.
- LEICA GEO OFFICE 1.1.0.0 (2004). Logiciel de calcul GPS pour la topographie et le génie civil.
- LEICK, A. (1990). *GPS Satellite Surveying*. Wiley.
- LEQUENTREC-LALANCETTE, M., D. ROUXEL et C. LENAMOURIC (2006). *Géoiide européen : contribution SHOM. Mesures gravimétriques marines acquises par le N/O*

- Le Suroît, traitées et validées par le SHOM*. Rap. tech. EPSHOM/CH/GG/NP N°449. Service Hydrographique et Océanographique de la Marine.
- MAGELLAN NAVIGATION (2008). [En ligne; Page disponible le 10-mars-2008]. URL: <http://www.pro.magellangps.com/>.
- MATLAB R2007A, THE MATHWORKS (2007). Logiciel de calcul.
- MAXIMA 5.12.0 (2007). Logiciel libre de calcul formel, descendant sous licence GNU GPL du package Macsyma. Mai 2007.
- MAYBECK, P. S. (1979). "Stochastic models, estimation, and control". in: Academic Press, Inc. chap. 1 - Introduction, pp. 1–16.
- MCCARTHY, D. D. and G. PETIT (2004). *IERS Conventions (2003)*. tech. rep. 32. IERS. pp. 21–32.
- MELACHROINOS, S. (2004). « Le développement d'un système de gravimétrie mobile ». Mém.de maîtr. Observatoire de Paris.
- MEYER, U. G. BOEDECKER, and H. PFLUG (2003). *Airborne navigation and gravimetry ensemble & laboratory (ANGEL) : an application to airborne gravity data in the Skagerrak*. tech. rep. GeoForschungsZentrum Potsdam.
- MICRO-G LACOSTE (2008). *Air-Sea Gravity System II*. [En ligne; Page disponible le 10-mars-2008]. URL: <http://www.microglacoste.com/airsea.htm>.
- MICROSEARCH GEOLAB 2001.9.20.0 (2001). Logiciel de compensation GPS et mesures conventionnelles. Sept. 2001.
- MORITZ, H. (1984). "Geodetic reference system 1980". in: *Bulletin Géodésique* 58.3 (Sept. 1984). pp. 388–398. URL: <http://dx.doi.org/10.1007/BF02519014>.
- MORITZ, H. and I. I. MUELLER (1987). *Earth rotation : theory and observation*. New York : Ungar, 1987.
- MURPHY, C. A. (2004). "The Air-FTG airborne gravity gradiometer system". in: *Airborne Gravity 2004 - Abstracts from the ASEG-PESA Airborne Gravity 2004 Workshop*. ed. by R. LANE. Geoscience Australia Record 2004/18. pp. 7–14.
- NATIONAL IMAGERY AND MAPPING AGENCY (2000). *Department of Defense World Geodetic System 1984, Its Definition and Relationships With Local Geodetic Systems*. tech. rep. 8350.2. National Geospatial-Intelligence Agency.
- (2002). *Addendum to NIMA TR 8350.2: Implementation of the World Geodetic System 1984 (WGS 84) Reference Frame G1150*. tech. rep. National Geospatial-Intelligence Agency.
- NETTLETON, L. L. L. J. B. LACOSTE, and J. C. HARRISON (1960). "Tests of airborne gravity meters". in: *Geophysics* 25. pp. 181–202.
- NORTHROP GRUMMAN NAVIGATION (2008). [En ligne; Page disponible le 10-mars-2008]. URL: <http://www.northropgrumman.com/>.
- NOVATEL (2008). [En ligne; Page disponible le 10-mars-2008]. URL: <http://www.novatel.com/>.
- PRESS, W. H. S. A. TEUKOLSKY, W. T. VETTERING, and B. P. FLANNERY (1992). "Numerical Recipes in C: The Art of Scientific Computing". in: 2^e ed. Cambridge University Press. chap. Cubic Spline Interpolation, pp. 113–116. ISBN: 0521431085.
- SAGEM DÉFENSE SÉCURITÉ (2008). [En ligne; Page disponible le 10-mars-2008]. URL: <http://www.sagem-ds.com/>.

- SAINT-JEAN, B. de (2007). « Étude et développement d'un système de gravimétrie mobile ». Dans : *Bulletin d'Information Scientifique et Technique de l'IGN* 76. Sous presse.
- SAINT-JEAN, B. de, J. VERDUN, S. MELACHROINOS, H. DUQUENNE, J. CALI et J.-P. BARRIOT (2005a). « Analyse du bras de levier en gravimétrie mobile ». Poster - Journée Gravimétrie Spatiale CNES. Poster - Journée Gravimétrie Spatiale CNES. Mai 2005.
- SAINT-JEAN, B. de, J. VERDUN, H. DUQUENNE, J.-P. BARRIOT, and J. CALI (2005c). "Calibration of a 3-accelerometer inertial gravimetry system for moving gravimetry". Poster - Journée Gravimétrie Spatiale CNES. Poster - Dynamic Planet 2005. Aug. 2005.
- SAINT-JEAN, B. de, J. VERDUN, H. DUQUENNE, J.-P. BARRIOT, and J. CALI (2005b). "Calibration of a 3-accelerometer inertial gravimetry system for moving gravimetry". in: *Newton's Bulletin* 3 (Dec. 2005). pp. 4-7. URL: <http://bgi.cnes.fr:8110/Saint-Jean.pdf>.
- SAINT-JEAN, B. de, S. MELACHROINOS, J. VERDUN, H. DUQUENNE, J. CALI, and J.-P. BARRIOT (2005e). "Fine analysis of lever arm effects in moving gravimetry". Poster - European Geosciences Union, General Assembly 2005. Poster - European Geosciences Union, General Assembly 2005. Apr. 2005.
- SAINT-JEAN, B. de, J. VERDUN, H. DUQUENNE, J.-P. BARRIOT, S. MELACHROINOS, and J. CALI (2005d). "Fine analysis of lever arm effects in moving gravimetry". in: *Dynamic Planet - IAG Symposium*. ed. by P. TREGONING and C. RIZOS. vol. 130. Springer. pp. 809-816.
- SAINT-JEAN, B. de, J. VERDUN, H. DUQUENNE et J. CALI (2005f). « Étalonnage d'un système de mesure accélérométrique pour la gravimétrie mobile ». Poster - Journée Gravimétrie Spatiale CNES. Poster - Journée Gravimétrie Spatiale CNES. Mai 2005.
- (2005g). « Étalonnage d'un système de mesure accélérométrique pour la gravimétrie mobile ». Poster - Journées de la Recherche IGN. Poster - Journées de la Recherche IGN. Mar. 2005.
- SAINT-JEAN, B. de, J. VERDUN, H. DUQUENNE, J.-P. BARRIOT, J. CALI, and D. ROUXEL (2006). "Test missions for mobile gravimetry". Poster - Journées de la Recherche IGN. Poster - International Gravity Field Service 2006. Aug. 2006.
- SANDER GEOPHYSICS LIMITED (2008). *AIRGrav*. [En ligne; Page disponible le 10-mars-2008]. URL: <http://www.sgl.com/>.
- SANDER, S. M. ARGYLE, S. ELIEFF, S. FERGUSON, V. LAVOIE, and L. SANDER (2004). "The AIRGrav airborne gravity system". in: *Airborne Gravity 2004 - Abstracts from the ASEG-PESA Airborne Gravity 2004 Workshop*. ed. by R. LANE.
- SAVAGE, P. G. (1998a). "Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design Part 1: Attitude Algorithms". in: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 21.1 (Jan. 1998). pp. 19-28.
- (1998b). "Strapdown Inertial Navigation Integration Algorithm Design Part 2: Velocity and Position Algorithms". in: *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* 21.2 (Mar. 1998). pp. 208-221.

- SCHWARZ, K.-P. and M. WEI (1995). "Some unsolved problems in airborne gravimetry". in: *Gravity and Geoid*. ed. by H. SUNKEL and I. MARSON. vol. 113. Graz, Austria: Springer. pp. 131–150.
- SICK MAIHAK GMBH (2008). *Bodenseewerk KSS31*. [En ligne; Page disponible le 10-mars-2008]. URL: <http://www.sick-maihak.com/>.
- SORENSEN, H. W. (1970). "Least-squares estimation: from Gauss to Kalman". in: *IEEE Spectrum* 7 (July 1970). pp. 63–68.
- STELKENS-KOBSCH, T. (2004). "The Airborne Gravimeter CHEKAN-A at the Institute of Flight Guidance (IFF)". in: *Gravity, Geoid and Space Missions*. ed. by C. JEKELI, L. BASTOS, and J. FERNADES. vol. 129. Springer.
- SUNKEL, H. and I. MARSON, eds. (1995). *Gravity and Geoid*. vol. 113. Graz, Austria: Springer.
- TAPLEY, B. et al. (2005). "GGM02 - An improved Earth gravity field model from GRACE". in: *Journal of Geodesy* 79.8 (Nov. 2005). pp. 467–478. DOI: 10.1007/s00190-005-0480-z.
- TOPCON (2008). [En ligne; Page disponible le 10-mars-2008]. URL: <http://www.topconpositioning.com/>.
- TORGE, W. (1980). *Geodesy*. ed. by BERLIN : NEW YORK. Walter de Gruyter. ISBN: 0-89925-561-2.
- (1989). *Gravimetry*. ed. by BERLIN : NEW YORK. Walter de Gruyter. ISBN: 0-89925-561-2.
- TRIMBLE (2008). [En ligne; Page disponible le 10-mars-2008]. URL: <http://www.trimble.com/>.
- VALLIANT, H. (1992). in: *Handbook of Geophysical Exploration at Sea*. ed. by R. A. GEYER. CRC Press. chap. 7 - The Lacoste & Romberg Air/Sea Gravimeter: An Overview, pp. 141–176.
- VANIČEK, P. (1986). *Geodesy: the concepts. Second edition*. Elsevier Science Publishers.
- VERDUN, J. R. BAYER, É. E. KLINGELÉ, M. COCARD, A. GEIGER, and M. E. HALLIDAY (2002). "Airborne gravity measurements over mountainous areas by using a LaCoste & Romberg air-sea gravity meter". in: *Geophysics* 67.3. pp. 807–816. DOI: 10.1190/1.1484525.
- VERDUN, J. É. E. KLINGELÉ, R. BAYER, M. COCARD, A. GEIGER, and H.-G. KAHLE (2003). "The alpine Swiss-French airborne gravity survey". in: *Geophys. J. Int.* 152. pp. 8–19. DOI: 10.1046/j.1365-246X.2003.01748.x.
- VERMAST, J. (1999). « La gravimétrie aéroportée guidée : intégration du GPS ». Mémoire de fin d'études. École Supérieure des Géomètres et Topographes.
- VIEL, N. (2000). « La gravimétrie aéroportée guidée : mise en oeuvre de la chaîne d'acquisition ». Mémoire de fin d'études. École Supérieure des Géomètres et Topographes.
- VLAMYNCK, E. (1999). « La gravimétrie aéroportée guidée : intégration des accéléromètres ». Mémoire de fin d'études. École Supérieure des Géomètres et Topographes.
- WAYPOINT GRAFNAV/GRAFNET 7.60 (2006). Logiciel de post-traitement de données GPS cinématique.

- WELCH, G. and G. BISHOP (2006). *An Introduction to the Kalman Filter*. tech. rep. Chapel Hill, NC, USA: Department of Computer Science University of North Carolina at Chapel Hill Chapel Hill, NC 27599-3175. URL: <http://www.cs.unc.edu/~welch/kalman/kalmanIntro.html>.
- WIENER, N. (1949). *Extrapolation, interpolation and smoothing of stationary time series, with engineering applications*. note: Originally issued in Feb 1942 as a classified Nat. Defense Res. Council Rep. New York: Technology Press and Wiley.

Titre Étude et développement d'un système de gravimétrie mobile

Auteur Bertrand de SAINT-JEAN

Résumé Les techniques actuelles de mesure de pesanteur terrestre, depuis les observations spatiales jusqu'aux mesures ponctuelles en surface, couvrent un large spectre de longueurs d'onde du champ de gravité de la Terre. Ces données acquises permettent non seulement la réalisation de modèles étendus de géoïde, mais aussi une meilleure compréhension des transferts de masse affectant la Terre.

Cependant, les couvertures spatiale et spectrale des mesures gravimétriques ne sont pas homogène à la surface de la Terre et certaines régions difficiles d'accès sont quasiment vierges de toute mesure. De plus, la gamme des longueurs d'onde intermédiaires (10/100 km) est mal couverte par la gravimétrie terrestre ou spatiale. La gravimétrie mobile depuis un véhicule terrestre, un bateau ou un avion apparaît donc comme la technique complémentaire capable de pallier les insuffisances des techniques gravimétriques actuelles.

C'est dans l'objectif de développer un système de gravimétrie mobile autonome que ce travail a été entrepris. Le système « Limo-G » (LIght MOving Gravimetry system) est un gravimètre vectoriel absolu, composé de trois accéléromètres et d'un système GPS à quatre antennes, embarquable dans toutes sortes de véhicule, fiable, ergonomique et peu onéreux.

Un travail métrologique effectué au laboratoire et sur le terrain a permis de concevoir et de tester une méthode d'étalonnage de l'instrument. Puis, une méthode originale de traitement conjoint des données accélérométriques et des données GPS a été développée et testée à partir de simulations issues de données réelles acquises lors d'un levé expérimental en mer. Les résultats de ces simulations indiquent que les performances du système Limo-G permettent de mesurer la pesanteur au milligal. Les améliorations nécessaires pour accroître la précision ont aussi été mises en évidence et validées par simulation.

Mots-clés gravimétrie mobile, accéléromètre, filtrage de Kalman, gravimétrie vectorielle

Title Design and analysis of a mobile gravimetry system

Author Bertrand de SAINT-JEAN

Abstract Actual measurement techniques of the gravity field, from space to surface observations, cover a wide range of spatial resolutions of the Earth gravity field. Those data are not only used to determine high resolution geoid models, but also help to understand mass transfers inside the Earth.

Nevertheless, spatial and spectral extends of gravity measurements are not homogeneous on Earth's surface and for some isolated areas, measurements are missing. Furthermore, the intermediary spatial resolutions (10/100 km) are still badly covered by the terrestrial and space gravimetry. The mobile gravimetry from a terrestrial vehicle, a boat or a plane, appears to be the complementary technique to compensate for the lack of current gravimetry techniques.

The primary objective of this work is the development of an autonomous mobile gravimetry system. The « Limo-G » (LIght MOving Gravimetry) system is an absolute vector gravimeter, consisted of three accelerometers and a GPS system with four antennas. It can be loaded on every kind of vehicles, is reliable, ergonomic and quite cheap.

Metrologic surveys have been done in laboratory and on field to design and to test a calibration method of the instrument. Then, an original treatment method combining accelerometers and GPS data has been developed and tested from synthetic data based on real data acquired from an experimental survey at sea. The results of those simulations indicate that the Limo-G system reaches the milligal accuracy. The appropriate changes needed of the system to improve the accuracy of the gravity estimations have been underlined and validated using synthetic data.

Keywords moving gravimetry, accelerometer, Kalman filtering, vector gravimetry