Asymptotiques de Weyl, champs magnétiques et potentiels dégénérés

Francoise Truc

▶ **To cite this version:**

Francoise Truc. Asymptotiques de Weyl, champs magnétiques et potentiels dégénérés. Mathématiques [math]. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 2008. tel-00326360

HAL Id: tel-00326360

https://theses.hal.science/tel-00326360

Submitted on 6 Oct 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

INSTITUT FOURIER

UMR 5582 CNRS-UJF
Université Joseph Fourier (Grenoble 1)

UNIVERSITE JOSEPH FOURIER
SCIENCES.TECHNOLOGIE.SANTÉ

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIPLÔME D'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES

ASYMPTOTIQUES DE WEYL, CHAMPS MAGNÉTIQUES ET POTENTIELS DÉGÉNÉRÉS

Françoise Truc

Soutenance à Grenoble le mardi 30 septembre à 14h, salle 4 devant le jury :

Anne Boutet de Monvel - Institut de Mathématiques de Jussieu
Bernard Helffer - Univ. Paris Sud
Didier Robert - Univ. de Nantes
Yves Colin de Verdière - Institut Fourier
Monique Combescure - Institut de Physique Nucléaire de Lyon
Alain Joye - Institut Fourier
San Vu'Ngoc - Univ. de Rennes

Au vu des rapports de Anne Boutet de Monvel, Bernard Helffer et Didier Robert

Remerciements

La première personne que je voudrais remercier, pour son soutien discret mais constant, est Yves Colin de Verdière. Grâce à lui, après plusieurs années d'interruption, j'ai pu reprendre la recherche, passer en douceur des systèmes hamiltoniens vus sous l'angle de l'analyse convexe à la géométrie symplectique pour finalement m'insérer dans l'équipe d'analyse semi-classique nouvellement formée. Je le remercie également d'avoir accepté de participer à ce jury.

L équipe s'est ensuite étoffée pour devenir l'équipe de physique mathéma tique , (encore plus) dynamique et accueillante , et je remercie tous ses membres (passés et actuels) pour les contacts et les discussions enrichissantes que les thés du mardi (devenus à présent du lundi) ont largement favorisés.

Je suis très reconnaissante envers Anne Boutet de Monvel, Bernard Helffer et Didier Robert qui ont bien voulu écrire un rapport sur ce mémoire. Je suis très honorée de leur présence à ce jury.

Je remercie chaleureusement Monique Combescure, Alain Joye et San Vu'Ngoc pour leur participation au jury.

Je voudrais aussi remercier Abderemane Morame pour ces diverses occasions de collaboration qui ont été si enrichissantes pour moi, et lui faire part de mon souhait qu'il y en ait encore beaucoup...

Pour terminer, je voudrais remercier mes collègues de l'UFR Economie-Stratégie-Entreprise pour la bonne ambiance générale de travail et pour l'occasion qui m'a eté donnée d'enseigner des sujets transversaux mêlant théorie des systèmes dynamiques et modélisation économique.

Enfin, du fond du coeur, merci à toute ma famille.

Table des matières

1 Présentation **3**
1.1 Curriculum Vitae 3
1.2 Liste des publications 4
1.3 Activités d'enseignement liées à un travail d'encadrement . . . 6
1.4 Activités liées à la recherche 7

2 Introduction **9**

3 Potentiels dégénérés **13**
3.1 L'approche taubérienne 13
3.2 La méthode du min-max 16
3.3 Asymptotique des valeurs propres 18
3.3.1 Homogénéité 18
3.3.2 Amélioration de la méthode "à la Born-Oppenheimer" 19
3.3.3 Energies moyennes 20
3.3.4 Application : Potentiels s'annulant sur une hypersurface 21

4 Bouteilles magnétiques **23**
4.1 Définition 23
4.2 Le cas euclidien 24
4.2.1 Les asymptotiques : version à grande énergie, version semi-classique 24
4.2.2 Laplacien de Dirichlet avec champ constant dans un cube 27
4.2.3 Pavage semi-classique de $\mathbb{R}^d$ en cubes "adaptés" à B . 28
4.3 Le cas du plan hyperbolique 28
4.3.1 Le cadre 28
4.3.2 Champ magnétique constant sur le demi-plan de Poincaré 29
4.3.3 Asymptotique à grande énergie 30
4.3.4 Changement de variables, changement de jauge, localisation, pavage 32

5 Problème de Neumann avec champ magnétique **35**
5.1 Problèmes liés à la supra-conductivité 35
5.2 Le spectre dans le cas du demi-espace, pour un champ constant et h=1 36

6 Un problème de bouteille magnétique en mécanique classique **39**
6.1 Equation de Lorentz et hamiltonien associé 39
6.2 Invariants adiabatiques 40
6.3 Trajectoires bornées 41
6.3.1 Le hamiltonien en coordonnées cylindriques 41
6.3.2 Le hamiltonien réduit et les lignes de champ 42
6.3.3 Changement d'échelle et variables d'action 44

7 Perspectives de recherche **49**

1 Présentation

1.1 Curriculum Vitae

- Nom Prénom : Bailly Françoise
- Nom marital : Truc
- Situation de famille : Mariée, 4 enfants.
- Adresse : 25 Boulevard Gambetta, 38000, Grenoble.
- Date de naissance : 19/10/55 .
- Situation professionnelle : Maître de Conférences à l'UFR Economie Stratégies Entreprise (ESE) de l'Université Pierre Mendès-France , Grenoble .
- Discipline : Mathématiques, section 26 .
- Date d'entrée en fonction : 1/10/90 .
- Années antérieures :
  - 88-90 ATER à l'Université de Grenoble 1.
  - 86-88 Mise en disponibilité pour suivre son conjoint
  - 79-86 Enseignement dans le secondaire, et parallèlement :
  - 81-84 doctorante au CEREMADE
  - 83 Doctorat de recherche opérationnelle , Université de Paris-Dauphine, Laboratoire des Mathématiques de la décision (CEREMADE).
  - Directeur : Ivar Ekeland
  - Titre : Nouvelles applications de la dualité en analyse non convexe.
  - Mention : très honorable.
- Remarque : j'ai été en situation de congé parental du 1/09/93 au 31/08/95 .

1.2 Liste des publications

Travaux en rapport avec ma thèse

[T1] *Problèmes variationnels non convexes en dualité*, Annales du séminaire de théorie spectrale et géométrie Chambéry-Grenoble, 1987-88, 91-107.

[T2] *Applications d'une méthode variationnelle à l'équation des coques et aux systèmes gyroscopiques,* Compte Rendu à l'Académie des Sciences, 315, Série 1, (1992), 285-288.

Publications ultérieures

[P1] *Trajectoires bornées d'une particule soumise à un champ magnétique symétrique et linéaire* , Annales de l'Institut Henri Poincaré (Physique Théorique), 64, (1996), 127-154.

[P2] *Semi-classical eigenvalue asymptotics for magnetic bottles* , Asymptotic Analysis, 15, (1997), 385-396 .

[P3] *Semi-classical eigenvalue asymptotics for a Schrödinger operator with a degenerate potential*, Asymptotic Analysis, 22(1), (2000), 39-49, en collaboration avec Abderemane Morame.

[P4] *Remarks on the spectrum of the Neumann problem with magnetic field in the half-space*, Journal of Mathematical Physics, 46, 1, 1-13, (2004), en collaboration avec Abderemane Morame.

[P5] *Accuracy of eigenvalues for a Schrödinger operator with a degenerate potential in the semi-classical limit* , Cubo, A Journal of Mathematics, 9 (2), (2007), 1-14, en collaboration avec Abderemane Morame.

[P6] *Born-Oppenheimer-type approximations for degenerate potentials. Recent results and a survey of the area*, Proceedings of the OTAMP conference, Birkhäuser, series Operator Theory :Advances and Applications, 415-425 (2008).

[P7] *Magnetic bottles on the Poincaré half-plane: spectral asymptotics* , à paraître dans Journal of Mathematics of Kyoto University, en collaboration avec Abderemane Morame.

Prépublication

[P8] *Magnetic bottles on geometrically finite hyperbolic hypersurfaces* , en collaboration avec Abderemane Morame.

http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00318791/en/

Autres publications

[A1] (Livre) Précis de Mathématiques et de statistiques , en collaboration avec J. Paul Truc , collection Etapes, Editions Nathan, 1994.

[A2] *Trajectoires bornées d'une particule soumise à un champ magnétique symétrique et linéaire* , Annales du séminaire de théorie spectrale et géométrie Chambéry-Grenoble 1991-92, 65-84.

[A3] *Spectral asymptotics for Schrödinger operators with a degenerate potential*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie Grenoble, 20, p 17-22.

1.3 Activités d'enseignement liées à un travail d'encadrement

Dans le cadre de mon enseignement à l'Université Pierre Mendès-France j'ai pris la charge d'un cours de master intitulé :

Master ICA (Information Cognition et Apprentissage)

Spécialité MASSS (Modélisation et Apprentissage Statistiques et Sciences Sociales)

- M1 : cours-TD " systèmes dynamiques linéaires"
- M2 : cours-TD" systèmes dynamiques non linéaires"

Cet enseignement est innovant du fait de son caractère transversal : les étudiants ont une assez solide culture mathématique, plutôt orientée vers les statistiques, et il s'agit de leur proposer des techniques de modélisation dans des domaines sociaux et économiques.

En 2ème année l'approfondissement des connaissances a pour objectif la réalisation d'un projet en équipe traitant d'un problème précis . Le traitement du problème est envisagé sous le double aspect, théorique et numérique. Cette année quatre projets ont pu se concrétiser, sur des problèmes de croissance monétaire (Tobin) et de macroéconomie (Goodwin, Ramsey). Les aspects les plus pertinents de ces études sont la recherche d'équilibres et de leur stabilité, selon la valeur des paramètres nombreux qui entrent en jeu.

Dans le cadre de la 2ème année j'ai également assuré l'encadrement et le suivi d'un mémoire de stage effectué chez Schneider dont la finalité était "fournir un outil visant à améliorer le management technique des projets au sein de la R&D".

J'ai pour projet cette année de proposer d'ouvrir cette formation aux étudiants de master ESE qui seraient éventuellement intéressés par la poursuite de la modélisation de problèmes économiques, modélisation qu'ils ont abordée en licence option AEM (Analyse économique et modélisation.)

1.4 Activités liées à la recherche

Je fais partie de l'équipe de Physique Mathématique de l'Institut Fourier. L'objectif de cette équipe est de renforcer l'interaction entre les mathématiques et la physique théorique (mécanique quantique et analyse semi-classique) et d'introduire de nouvelles interactions sur des sujets de physique macroscopiques (mécanique des fluides, turbulence) .

Mon principal sujet de recherche au sein de cette équipe concerne les asymptotiques de valeurs propres en régime semi-classique .

Je fais partie également du GDRE Mathématique et Physique Quantique dirigé par Monique Combescure, (CNRS Lyon). J'ai participé à de nombreux colloques et rencontres internationales dans ce cadre.

J'ai participé au programme "Analysis on Graphs and Applications" qui a eu lieu en Avril 2007 au Newton Institute (Cambridge) en tant que membre invité.

Je suis membre de la commission de spécialistes (26ème section) de l'Université Pierre Mendès France depuis 7 ans. Mon mandat a eté renouvelé en 2007 pour les 3 prochaines années.

J'ai écrit un rapport pour un article soumis à publication dans les Annales de l'Institut Fourier.

Missions avec conférences

2008: Operator Theory and Mathematical Physics, Bedlewo (Poland), 15-22 Juin, *Magnetic bottles in the Poincaré half-plane.*

2008: Workshop in memory of V. Geyler, Berlin, 25-27 Avril, *Magnetic bottles in the hyperbolic plane.*

2007: Séminaire tournant, Paris (IHP), 19/03, *Estimations semi-classiques des valeurs propres d'un opérateur de Schrödinger avec un potentiel dégénéré.*

2006: Operator Theory and applications in Mathematical Physics, Lund (Sweden), 16-22 Juin, *Born-Oppenheimer-type approximations for degenerate potentials.*

2005: Operator Theory and Spectral Analysis, Durham (LMS Symposium), 2-12 Août, *Accuracy on eigenvalues for Schrodinger Operator with a degenerate potential in the semiclassical limit.*

2005: Séminaire d'Analyse, Nantes, 8/04, *Remarques sur le spectre du problème de Neumann avec champ magnétique sur le demi espace.*

2005: Séminaire d'Analyse, Université de Marne la Vallée, 22/03, *Remarques sur le spectre du problème de Neumann avec champ magnétique sur le demi espace.*

2004: Operator Theory and applications in Mathematical Physics, Bedlewo, Pologne, 6-11 Juillet, *The spectrum of the Neumann problem with magnetic field in the half space.*

Exposés à l'Institut Fourier

2007: Séminaire de Physique Mathématique, *Asymptotique des valeurs propres pour les bouteilles magnétiques sur le demi-plan de Poincaré.* (2 exposés)

2006: Séminaire de Physique Mathématique, *Approximations de type Born-Oppenheimer pour des potentiels dégénérés.*

2005: Groupe de travail Physique Mathématique, *Une formule de trace pour le Hamiltonien de Landau perturbé.*

2003: Séminaire de Physique Mathématique, *Remarques sur le spectre du problème de Neumann avec champ magnétique en dimension 3.*

2002: Séminaire de théorie spectrale et géométrie, *Asymptotique du spectre pour des opérateurs de Schrödinger ayant un potentiel d'egénéré.*

2002: Groupe de travail semi-classique, *A propos d'un article de André Martinez.*

2002: Groupe de travail semi classique, *Quasi modes pour un opérateur de Schrodinger à potentiel dégénéré.*

2 Introduction

Ce mémoire présente plusieurs résultats d'analyse spectrale, qui s'appuient pour la plupart sur le principe variationnel du min-max. L'objectif principal est d'établir une formule de type Weyl pour certains opérateurs de Schrödinger. La formule asymptotique de Weyl établit un lien entre le nombre de valeurs propres inférieures à une certaine valeur λ et le volume, dans l'espace des phases, des trajectoires d'énergie inférieure à λ du problème classique sous-jacent. Plus précisément, considérons un potentiel V continu et à valeurs positives sur $\mathbb{R}^m$, et supposons de plus que $V(x)$ vérifie la condition

$$V(x) \to +\infty \quad \text{quand} \quad |x| \to +\infty \tag{2.1}$$

(on conviendra de dire qu'un tel potentiel $V(x)$ est non dégénéré). Alors pour toute valeur du paramètre h dans $]0,1]$, l'opérateur $H_h = -h^2\Delta + V$ défini sur $L^2(\mathbb{R}^m)$ est essentiellement auto-adjoint et à résolvante compacte ([57]). De plus, si l'on appelle $N(\lambda, H_h)$ le nombre de valeurs propres inférieures à une énergie fixée λ, on a le comportement asymptotique semi-classique suivant, quand $h \to 0$:

$$N(\lambda, H_h) \sim h^{-m}(2\pi)^{-m} v_m \int_{\mathbb{R}^m} (\lambda - V(x))_+^{m/2} dx \ . \tag{2.2}$$

Dans cette formule, dite asymptotique de Weyl semi-classique, v_m représente le volume de la boule unité dans $\mathbb{R}^m$, et la notation W_+ signifie que l'on prend la partie positive de W.

Si l'on pose $h = 1$ la formule précédente donne l' asymptotique à grande énergie de l'opérateur $H_1 = -\Delta + V$:

$$N(\lambda, H_1) \sim_{\lambda \to +\infty} (2\pi)^{-m} v_m \int_{\mathbb{R}^m} (\lambda - V(x))_+^{m/2} dx \ . \tag{2.3}$$

Dans les deux cas, le résultat établit la correspondance (asymptotique) entre le nombre de valeurs propres inférieures à λ et le volume, dans l'espace des phases, de l'ensemble $\{(x,\xi), \mathcal{H}(x,\xi) \leq \lambda\}$, où $\mathcal{H}(x,\xi) = \xi^2 + V(x)$, qui est le symbole principal de H_h, est aussi le Hamiltonien de la dynamique classique associée.

Une question naturelle vient alors à l'esprit: que se passe-t-il pour un opérateur de Schrödinger dont le spectre est discret sans que la condition (2.1) soit vérifiée? Dans ce cas, il se peut que le volume de $\{(x,\xi), \xi^2 + V(x) \leq \lambda\}$

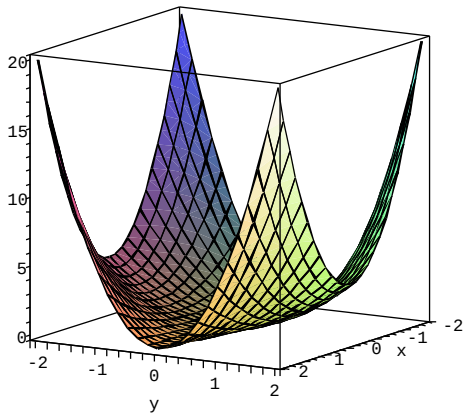

Figure 1: Le potentiel $V(x,y) = (1+x^2)\ y^2$.

soit infini, ce qui enlève son sens à la formule (2.2). Par exemple c'est le cas si l'on considère le potentiel suivant dans $\mathbb{R}^2$
$V(x,y) = (1+x^2)\ y^2$ (Figure 1) .
Les opérateurs étudiés ici rentrent dans le cadre de cette problématique.

D'une part nous étudions une classe de potentiels dégénérés au sens précisé plus haut ([70], [72]). Ces potentiels sont une généralisation de l'exemple précédent; ils sont de la forme

$V(x) = f(y)g(z),\ x = (y,z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p,$

$f \in C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}_+^*)\ g \in C(\mathbb{R}^p; \mathbb{R}_+),$ g homogène de degré a.

D'autre part nous considérons des opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique $H_h(A) = ((h\nabla - iA))^2$. On peut parler de dégénérescence au sens que le symbole principal de $H_h(A)$, qui est $\mathcal{H}(x,\xi) = (\xi - A(x))^2$, s'annule sur une variété non compacte de $T^*(\mathbb{R}^m)$. Si les propriétés du champ magnétique $B = dA$ permettent de définir la fonction de dénombrement $N(\lambda, H_h(A))$, la question se pose de trouver une alternative à la formule de Weyl. En particulier, quand le champ magnétique $B = dA$ satisfait à des conditions de type bouteille magnétique :

$$\|B(x)\| \to +\infty \ \text{ quand } \ |x| \to +\infty\ , \tag{2.4}$$

$H_h(A)$ est essentiellement auto-adjoint et à résolvante compacte sur $L^2(\mathbb{R}^m)$

([4]). L'asymptotique du spectre à grande énergie a été donnée par Y. Colin de Verdière [7]. Nous présentons la version semi-classique de ce résultat [69], ainsi qu'un travail récent traitant des bouteilles magnétiques dans le plan hyperbolique [73]. Ces asymptotiques peuvent être vues comme l'expression d'une densité d'état intégrée sur tout l'espace. Pour un champ constant $B = \sum_{j=1}^{r} b_j dx_j \wedge dy_j, \quad b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_r > 0$, la densité d'état est donnée (C_r est une constante universelle) par

$$\nu_B(\lambda) = C_r b_1 b_2 ... b_r \sum_{n_j \geq 0} \left(\lambda - \sum_{j=1}^{r} (2n_j + 1) b_j \right)_+^{d/2-r} .$$

Dans le cas du plan hyperbolique on a $r(x) = 1$ pour tout x et la définition de l'intensité $b(x)$ est légèrement différente car on doit tenir compte de la géométrie.

Un problème de même nature se pose dans le cadre de la théorie de la supra-conductivité. Pour un ouvert donné Ω de $\mathbb{R}^3$, minimiser la fonctionnelle de Ginzburg-Landau associée conduit en effet à étudier les propriétés spectrales de l'opérateur avec champ magnétique $H = ((\nabla - iA))^2$, avec une condition de "Neumann magnétique" à la frontière:

$$\nu(x) \cdot (\nabla - iA) u(x) = 0 \quad \forall x \in \delta\Omega \ .$$

Ceci provient du fait que $(0, \sigma A)$ est un point critique trivial de la fonctionnelle (σ est un paramètre permettant de varier l'intensité du champ), et que le hessien en ce point est du type ci-dessus.

Le champ magnétique $B = dA$ est supposé constant, et le spectre contient alors une partie absolument continue, qui est l'intervalle $[b, +\infty[$. ($b = \|B\|$ est l'intensité du champ). Cependant, si on considère le cas du demi-espace, c'est à dire pour (t, x, y) dans $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$, la réalisation de Neumann de l'opérateur avec champ magnétique

$$H = (D_t - A_1)^2 + (D_x - A_2)^2 + (D_y - A_3)^2,$$

avec $D_s = -i(\frac{\partial}{\partial s})$, et si l'on suppose que le champ magnétique n'est pas normal à la frontière $\delta\Omega = \{(0, x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, on sait que la borne inférieure du spectre est strictement inférieure à b ([47] ,[28]) . On peut alors prouver que la partie du spectre qui se trouve à gauche de b est constituée d'un nombre fini de valeurs propres, chacune étant de multiplicité infinie [71].

De plus, ce nombre tendant vers l'infini quand on fait tendre vers zéro l'angle entre le champ magnétique et la frontière $\delta\Omega$, cela donne lieu à une description asymptotique de type Weyl du nombre de valeurs propres plus petites qu'un réel fixé (inférieur à b) [71].

En dernière partie nous évoquerons la source de ces travaux, qui est un problème de bouteille magnétique, dans le cadre classique cette fois [68]. Le champ magnétique considéré est à symétrie axiale dans $\mathbb{R}^3$ et vérifie la condition (2.4). Y-a-t-il des trajectoires bornées, comme le suggèrent les simulations numériques ? Le quantifié de Weyl du hamiltonien est un opérateur à spectre discret : on retrouve ainsi le cas des bouteilles magnétiques déjà évoqué . Cependant dans le cadre classique il faut faire appel à la théorie de KAM. Les conditions d'application du théorème du twist de Moser permettent de conclure à l'existence d'un ouvert de conditions initiales pour lesquelles la trajectoire est bornée. La remarque intéressante est que le hamiltonien peut se lire comme une perturbation d'un hamiltonien "effectif" dont la quantification est un opérateur de Schrödinger muni du potentiel dégénéré

$$V(x,y) = B^2(x,0)\ y^2 \quad .$$

3 Potentiels dégénérés

3.1 L'approche taubérienne

Un bref aperçu historique permettra de comprendre comment le problème des potentiels dégénérés s'est posé à partir du cas non dégénéré.

En 1950 De Wet et Mandl [13] prouvent la formule (2.3) avec les hypothèses suivantes sur V :

1) $V(x) \geq 1$

2) V différentiable et $|\nabla V| = \circ(V)$

3) Il existe c et c' tels que :

$$c\Phi(V,\lambda) \leq \lambda\Phi'(V,\lambda) \leq c'\Phi(V,\lambda) \ .$$

($\Phi(V,\lambda) := \int_{\mathbf{R}^m}(\lambda - V(x))_+^{m/2}dx$)

Cette dernière condition, qui est globale, permet d'utiliser une technique taubérienne : on donne le comportement asymptotique de l'opérateur d'évolution de l' opérateur H_1 et on applique un theorème taubérien.

On peut trouver des raffinements de ce résultat dans les travaux de E.Titchmarsh, B.Levitan et A.Kostjucenko, ([67], [44], [42]), mais c'est G.Rosenbljum [60] qui affaiblit au maximum les hypothèses 2) et 3) sur V :

La condition 2) est remplacée par une condition sur le "module de continuité L^1" sur les cubes unité et par l'hypothèse suivante :

$$V(y) \leq C'V(x) \text{ si } |x-y| \leq 1 \ .$$

La condition 3) devient :

$$\sigma(2\lambda, V) \leq C\sigma(\lambda, V) \quad \text{(pour les grands } \lambda)$$

($\sigma(\lambda, V)$ désigne le volume de l'ensemble $\{x \in \mathbf{R}^m; V(x) < \lambda\}$).

M.Solomyak [64] fait alors la remarque suivante :

Lemme 3.1 *Soit V un potentiel positif homogène de degré a :*

$$V(x) \geq 0 \quad V(tx) = t^a V(x) \quad \forall t \geq 0 \quad (a > 0).$$

Si de plus $V(x)$ est strictement positif pour $x \neq 0$, le spectre de H_1 est discret et la formule (2.3) peut s'ecrire :

$$N(\lambda, H_1) \sim \gamma_{m,a}\lambda^{\frac{2m+am}{2a}} \int_{S^{m-1}} (V(x))^{-m/a}dx \tag{3.1}$$

($\gamma_{m,a}$ est une constante ne dépendant que des paramètres m et a.)

De ce lemme découle tout naturellement l'idée d'étudier le spectre de H_1 sans la condition de stricte positivité pour le potentiel (et donc dans des cas de dégénérescence). Voici les deux principaux résultats [64] :

Théorème 3.2 *Si V est un potentiel positif homogène de degré a tel que $J(V) = \int_{S^{m-1}} (V(x))^{-m/a} dx < \infty$, alors la formule 3.1 est encore vraie.*

Le second résultat traite d'un cas pour lequel l'intégrale $J(V)$ est infinie :

Théorème 3.3 *On suppose que le potentiel est de la forme :*
$V(x) = F(y,z)$, $y \in \mathbb{R}^n$, $z \in \mathbb{R}^p$, $n+p=m$, $m \geq 2$,
avec $F(sy,tz) = s^b t^{a-b} F(y,z)$ ($0 < a < b$) et $F(y,z) > 0$ pour $|z||y| \neq 0$.
On note $\lambda_j(y)$ les valeurs propres de l' opérateur $-\Delta_z + F(y,z)$ in $L^2(\mathbb{R}^p)$ et on pose $s = \frac{2b}{2+a-b}$,
alors :

$$\begin{aligned} si\ \frac{n}{b} > \frac{m}{a} \quad N(\lambda, H_1) &\sim \gamma_{n,s} \lambda^{\frac{2m+am}{2b}} \int_{S^{m-1}} \Sigma(\lambda_j(y))^{-n/s} dx \\ si\ \frac{n}{b} = \frac{m}{a} \quad N(\lambda, H_1) &\sim \frac{a(a+2)}{2b(a-b)} \gamma_{m,a} \lambda^{\frac{2m+am}{2b}} \ln \lambda \int_{S^{n-1}S^{p-1}} F(y,z)^{-m/a} dx. \end{aligned}$$

La preuve utilise des techniques variationnelles et les estimations spectrales de [60].

Cependant d'un point de vue heuristique on peut aussi placer cette étude dans le contexte de la théorie des opérateurs de Schrödinger à symbole opérateur.

C'est l'approche choisie par D.Robert dans [58]. Il devient ainsi possible d'explorer des situations où l'opérateur est à résolvante compacte sans pour autant que la condition $\lim_\infty V(x) = +\infty$ soit satisfaite. En particulier on obtient le développement asymptotique de $N(\lambda, H_1)$ correspondant au potentiel de deux variables $V(y,z) = y^{2k}(1+z^2)^l$, ($k > 0, l > 0$).

Les asymptotiques sont les suivantes :

Théorème 3.4

$$\begin{aligned} si\ \ k > l \quad N(\lambda, H_1) &\sim \gamma_1 \lambda^{\frac{l+k+1}{2l}} \\ si\ \ k = l \quad N(\lambda, H_1) &\sim \gamma_2 \lambda^{\frac{2k+1}{2k}} \ln \lambda \\ si\ \ k < l \quad N(\lambda, H_1) &\sim \gamma_3 \lambda^{\frac{2k+1}{2k}}. \end{aligned}$$

Dans ces formules les constantes γ_i ne dépendent que de k et de l. La constante γ_1 en particulier fait intervenir la trace de l'opérateur $(-\Delta_z + z^{2k})^{-(k+1)/2l}$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

En ce qui concerne les potentiels de deux variables il faut mentionner les résultats de B.Simon [61]. Il rappelle d'abord le théorème asymptotique dû à Weyl :

Théorème 3.5 *Soit H le Laplacien de Dirichlet sur un ouvert borné Ω dans $\mathbb{R}^2$. On a :*

$$N(\lambda, H) \sim \frac{1}{2}\lambda|\Omega|$$

et de là il considère des domaines Ω pour lesquels le volume (que l'on notera $|\Omega|$) est infini mais pour lesquels le spectre du Laplacien reste discret. Ces domaines sont du type suivant : $\Omega_\mu = \{(y,z); |y||z|^\mu \leq 1\}$.

Il se trouve que ce problème est relié à l'étude asymptotique du spectre des opérateurs de Schrödinger associés aux potentiels homogènes : $V(y,z) = |y|^\alpha |z|^\beta$.

Pour obtenir ces asymptotiques "non-Weyl", il utilise la formule de Feynman-Kac et le théorème taubérien de Karamata, mais l'argument principal est ce qu'il appelle les "sliced bread inequalities", qui peuvent s'interpréter en termes d'approximation de Born-Oppenheimer. Plus précisément, si l'on considère l'opérateur $H = -\Delta + V(y,z)$ sur $\mathbb{R}^{n+p}$, et si l'on note $\lambda_j(y)$ les valeurs propres de l'opérateur $-\Delta_z + V(y,z)$ sur $L^2(\mathbf{R}^p)$, les inégalités en question expriment la propriété suivante :

$$\text{Tr } e^{-tH} \leq \Sigma_j \; e^{-t(-\Delta_y + \lambda_j(y))}$$

(quand le second terme a un sens).

Dans le cas où z et y correspondent respectivement aux coordonnées électroniques et nucléaires, les $\lambda_j(y)$ sont effectivement les courbes de Born-Oppenheimer.

De cette propriété découlent alors les résultats couplés suivants :

Théorème 3.6 *Si $H = -\Delta + |y|^\alpha |z|^\beta$ et $\alpha < \beta$, alors*

$$N(\lambda, H) \sim c_\nu \lambda^{\frac{2\nu+1}{2}} \qquad (\nu = \frac{\beta+2}{2\alpha})$$

Corollaire 3.7 *si $H = -\Delta_{\Omega_\mu}$ ($\mu > 1$), alors* $N(\lambda, H) \sim c_\mu \lambda^{\frac{1}{2\mu+1}}$.

Théorème 3.8 *Si* $H = -\Delta + |y|^\alpha |z|^\alpha$, *alors* $\quad N(\lambda, H) \sim \frac{1}{\pi}\lambda^{1+\frac{1}{\alpha}} \ln \lambda$

Corollaire 3.9 *si* $H = -\Delta_{\Omega_\mu}$ *($\mu = 1$), alors* $\quad N(\lambda, H) \sim \frac{1}{\pi}\lambda \ln \lambda$.

La constante c_μ ne dépend que de μ, et la constante c_ν fait intervenir la trace de l' opérateur $(-\Delta_z + |z|^\beta)^{-\nu}$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

3.2 La méthode du min-max

Le résultat présenté ici [70] est fondé sur la méthode de Courant et Hilbert, le principe variationnel du min-max.

Cette méthode permet d'obtenir une asymptotique semi-classique des valeurs propres pour les potentiels dégénérés de la forme :

$$V(x) = f(y)g(z), \quad x = (y,z) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p, \quad n+p = m, \quad m \geq 2$$
$$f \in C(\mathbf{R}^n; \mathbf{R}_+^*), \quad g \in C(\mathbf{R}^p; \mathbf{R}_+),$$
$$\exists\ a > 0 \ \ t.q. \ \ g(tz) = t^a g(z) \ \ \forall t > 0, \quad g(z) > 0 \ \forall z \neq 0. \tag{3.2}$$

On généralise ainsi les résultats de [58] et de [64].

L'hypothèse (3.2) assure que le spectre de l'opérateur $-\Delta_z + g(z)$ sur $L^2(\mathbf{R}^p)$ est constitué de valeurs propres positives, que l'on note μ_j. De plus :

Remarque 3.10 *Si* $f(y) \to +\infty$ *quand* $|y| \to +\infty$ *(condition 1), alors* $H_h = -h^2\Delta + V$ *est à résolvante compacte.*

Naturellement si f était supposée homogène, l'asymptotique serait donnée par le théorème (3.3). Les hypothèses faites ici sur f, outre la condition 1, concernent seulement sa régularité, qui doit être localement uniforme :

$$\exists\ b, c > 0 \ \ t.q. \ \ c^{-1} \leq f(y) \qquad et \tag{3.3}$$
$$|f(y) - f(y')| \leq \ cf(y)|y - y'|^b, \ \ \forall (y, y') \ t.q. \ |y - y'| \leq 1$$

.

Théorème 3.11 *On suppose vérifiées les conditions 1 et (3.3) sur f et l'hypothèse (3.2) pour g. Alors il existe $\sigma, \tau \in]0,1[$ tels que, pour tout $\lambda > 0$, on peut trouver $h_0 \in]0,1[$,et des constantes $C_1, C_2 > 0$ de sorte que l'on ait*

$$(1 - h^\sigma C_1) n_{h,f}(\lambda - h^\tau C_2) \leq N(\lambda; H_h) \leq (1 + h^\sigma C_1) n_{h,f}(\lambda + h^\tau C_2) \quad \forall h \in]0, h_0[$$

$$avec \quad n_{h,f}(\lambda) = h^{-n}(2\pi)^{-n} v_n \int_{\mathbf{R}^n} \Sigma_{j \in \mathbf{N}} [\lambda - h^{2a/(2+a)} f^{2/(2+a)}(y)\mu_j]_+^{n/2} dy \ .$$

On peut raffiner le résultat précédent moyennant des conditions supplémentaires sur f :

Théorème 3.12 *S'il existe de plus une constante C_3 telle que, pour tout $\mu > 1$:*

$$\int_{\{y,f(y)<2\mu\}} f^{-p/a}(y)dy \leq C_3 \int_{\{y,f(y)<\mu\}} f^{-p/a}(y)dy \ ,$$

on peut prendre $C_2 = 0$ dans le théorème (3.11) :

$$(1 - h^\sigma C_1)n_{h,f}(\lambda) \leq N(\lambda; H_h) \leq (1 + h^\sigma C_1)n_{h,f}(\lambda) \quad \forall h \in]0, h_0[\ .$$

Remarque 3.13 *Si de plus $f^{-p/a} \in L^1(\mathbf{R}^n)$ et $g \in C^1(\mathbf{R}^p \backslash \{0\})$, la formule (1.2) reste valable.*

La preuve du théorème (3.11) est basée sur un pavage de $\mathbf{R}^n$ en cubes $\{Q_r(r\gamma), \gamma \in \mathbb{Z}^n\}$ qui permet de relier le problème sur $\mathbf{R}^m$, via le principe du min-max, à des problèmes de Dirichlet et Neumann sur les cylindres de $\mathbf{R}^m$ ayant ces cubes pour base:

$$N(\lambda, H^D_{h,\gamma}) \leq N(\lambda, H_h) \leq N(\lambda, H^N_{h,\gamma})$$

$$H^D_{h,\gamma} \ = -h^2\Delta_y - h^2\Delta_z + f(y)g(z) \quad \text{sur} \quad Q_r(r\gamma) \times \mathbb{R}^p \quad ,$$

avec condition de Dirichlet au bord .

Dans chaque $Q_r(r\gamma)$ on majore $f(y)$ par $f(y^*_\gamma)$, (y^*_γ minimum pour f).

Par homogénéité de g on obtient que les v.p. de l'opérateur $-h^2\Delta_z + f(y^*_\gamma)\ g(z)$ sont les $\{(h^a f(y^*_\gamma))^\alpha\ \mu_j\ \}$ ($\alpha = 2/(2+a)$).

On peut alors minorer $N(\lambda, H_h)$ par la somme sur tous les cubes, de la somme pour tous les j de $N(\lambda - (h^a f(y^*_\gamma))^\alpha\ \mu_j,\ -h^2\Delta^D_{Q_r(r\gamma)})$.

La majoration se traite de façon analogue.

La preuve du théorème (3.12) repose quant à elle sur l'asymptotique du moment des valeurs propres μ_j, que l'on obtient en utilisant encore une fois le principe du min-max.

Pour conclure, on peut remarquer que si l'on connaît la croissance de f à l'infini, on peut donner l'ordre de grandeur (en puissances de h) de l'asymptotique du spectre :

Remarque 3.14 *S'il existe $k > 0$ et $C > 0$ tels que*
$\frac{1}{C}|y|^k \leq f(y) \leq C|y|^k$ *pour $|y| > 1$, alors*

$$\begin{aligned} &si \quad k > a \qquad N(\lambda, H_h) \approx h^{-m} \\ &si \quad k = a \quad N(\lambda, H_h) \approx h^{-m} \ln \tfrac{1}{h} \\ &si \quad k < a \quad N(\lambda, H_h) \approx h^{-n-\frac{pa}{k}} \end{aligned}$$

3.3 Asymptotique des valeurs propres

Le théorème (3.11), qui donne l'asymptotique du nombre de valeurs propres inférieures à λ de $\widehat{H}_h = -h^2\Delta + f(y)g(z)$, donne également une idée de ce que doit être le comportement asymptotique des valeurs propres elles-mêmes. On peut répondre de façon précise à cette question en utilisant des méthodes de type Born-Oppenheimer [72].

Les hypothèses sur le potentiel seront les suivantes :

$g \in C^\infty(\mathbf{R}^m \setminus \{0\})$ est homogène de degré $a > 0$, (condition (3.2))

$$\begin{array}{l} f \in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,\ (|f(y)|+1)^{-1}\partial_y^\alpha f(y) \in L^\infty(\mathbb{R}^n), \\ 0 < f(0) = \inf_{y\in\mathbb{R}^n} f(y), \\ f(0) < \liminf_{|y|\to\infty} f(y) = f(\infty), \\ \partial^2 f(0) > 0. \end{array} \tag{3.4}$$

La notation $\partial^2 f(0)$ désigne la matrice hessienne de f en 0.
En particulier le spectre de $\widehat{H}_h$ peut contenir du spectre essentiel.

3.3.1 Homogénéité

Quitte à diviser $\widehat{H}_h$ par $f(0)$ on peut supposer que $f(0) = 1$. Si l'on pose $\hbar = h^{2/(2+a)}$ et si l'on change z en $z\hbar$, l'homogénéité de g permet d'écrire :

$$sp\,(\widehat{H}_h) = \hbar^a\, sp\,(\widehat{H}^\hbar)\ , \quad \text{avec } \widehat{H}^\hbar = \hbar^2 D_y^2 + D_z^2 + f(y)g(z)\ . \tag{3.5}$$

On note encore par $(\mu_j)_{j>0}$ la suite croissante des valeurs propres de $D_z^2 + g(z)$ sur $L^2(\mathbb{R}^m)$.

En utilisant de nouveau l'homogénéité (3.2) on peut, pour tout y fixé, donner l'expression des valeurs propres de $Q_y = D_z^2 + f(y)g(z)$ sur $L^2(\mathbb{R}^m)$. Elles forment une suite $(\lambda_j(y))_{j>0}$, telle que : $\lambda_j(y) = \mu_j\, f^{2/(2+a)}(y)$.
On obtient ainsi :

$$\widehat{H}^\hbar \geq \hbar^2 D_y^2 + \mu_1 f^{2/(2+a)}(y) \quad \text{et} \tag{3.6}$$

$$\inf\ sp_{ess}(\widehat{H}^\hbar) \geq \mu_1 f^{2/(2+a)}(\infty)\ . \tag{3.7}$$

On se trouve dans la situation d'approximation de type Born-Oppenheimer décrite par A. Martinez dans [48] : le potentiel "effectif" est donné par $\lambda_1(y) = \mu_1\ f^{2/(2+a)}(y)$, qui est la première valeur propre de Q_y, et les propriétés de f impliquent que ce potentiel admet un puits unique et non dégénéré en $y = 0$, de valeur minimale μ_1. L'application du théorème 4.1 de [48] donne alors le résultat suivant :

Théorème 3.15 *Sous les hypothèses (3.2) et (3.4) il existe pour tout $C > 0$ un réel $h_0 > 0$ tel que, si $0 < \hbar < h_0$, l'opérateur $(\widehat{H}^\hbar)$ admet un nombre fini de valeurs propres $E_k(\hbar)$ dans $[\mu_1, \mu_1 + C\hbar]$, égal au nombre de valeurs propres e_k de $D_y^2 + \frac{\mu_1}{2+a} < \partial^2 f(0)\ y,\ y >$ dans $[0, +C]$, et telles que :*

$$E_k(\hbar) = \lambda_k(\widehat{H}^\hbar) \ = \ \lambda_k\left(\hbar^2 D_y^2 + \mu_1 f^{2/(2+a)}(y)\right) \ + \ \mathbf{O}(\hbar^2)\ . \tag{3.8}$$

Plus précisément $E_k(\hbar) = \lambda_k(\widehat{H}^\hbar)$ admet le développement asymptotique

$$E_k(\hbar) \ \sim \ \mu_1 \ + \ \hbar\ (\ e_k \ + \ \sum_{j\geq 1} \alpha_{kj}\hbar^{j/2}\ ). \tag{3.9}$$

La formule (3.9) implique

$$\lambda_k(\widehat{H}^\hbar) \ = \ \mu_1 \ + \ \hbar\lambda_k\left(D_y^2 + \frac{\mu_1}{2+a} < \partial^2 f(0)\ y\ ,\ y\ >\right) \ + \ \mathbf{O}(\hbar^{3/2})\ , \tag{3.10}$$

et quand $k = 1$ le reste $\mathbf{O}(\hbar^{3/2})$ peut être amélioré en $\mathbf{O}(\hbar^2)$.

De plus on peut définir un quasimode associé à chaque $E_k(\hbar)$, et son expression fait intervenir la fonction $\psi(y) \ = \ d(y, 0)$, où d est la distance d'Agmon associée à la métrique dégénérée $\mu_1\ f^{2/(2+a)}(y)\ dy^2$.

3.3.2 Amélioration de la méthode "à la Born-Oppenheimer"

La section précédente décrivait la situation en "fonds de puits". Peut-on avoir une information sur les valeurs propres de $\widehat{H}^\hbar$ proches de μ_j pour des $j > 1$?
C'est possible grâce au changement de variables $(y,\ z) \ \rightarrow \ (y,\ f^{1/(2+a)}(y)z)$. Le Jacobien de ce difféomorphisme étant $f^{m/(2+a)}(y)$, par le changement de fonctions test : $u \ \rightarrow \ f^{-m/(4+2a)}(y)u$, on aura une transformation unitaire.

Le calcul est le suivant

$$sp\ (\widehat{H}^\hbar) \ = \ sp\ (\widetilde{H}^\hbar) \tag{3.11}$$

où $\widetilde{H}^\hbar$ est l'opérateur auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ défini par

$$\begin{array}{l} \widetilde{H}^\hbar \ = \ \hbar^2 D_y^2 \ + \ f^{2/(2+a)}(y)\,(D_z^2 + g(z)) \\ +\hbar^2 \frac{2}{(2+a)f(y)}(\nabla f(y) D_y)(zD_z) \\ +i\hbar^2 \frac{1}{(2+a)f^2(y)}\,(|\nabla f(y)|^2 - f(y)\Delta f(y))\,[(zD_z) \ - \ i\frac{m}{2}] \\ +\ \hbar^2 \frac{1}{(2+a)^2 f^2(y)}|\nabla f(y)|^2[(zD_z)^2 \ + \ \frac{m^2}{4}] \end{array} \tag{3.12}$$

Il s'avère que dans cette expression le seul rôle significatif (à l'ordre 2 en $\hbar$) est joué par $\widetilde{H}_1^\hbar = \hbar^2 D_y^2 + f^{2/(2+a)}(y)\,(D_z^2 + g(z))$.

On obtient ainsi le :

Théorème 3.16 .

Sous les hypothèses (3.2) and (3.4), quelque soit l'entier $N > 0$ fixé, il existe une constante positive $h_0(N)$ vérifiant : pour tout $\hbar \in]0, h_0(N)[$, pour tout $k \leq N$ et tout $j \leq N$ tel que $\mu_j < \mu_1 f^{2/(2+a)}(\infty)$,
il existe une valeur propre $\lambda_{jk} \in sp\,(\widehat{H}^\hbar)$ telle que

$$| \lambda_{jk} - \lambda_k \left(\hbar^2 D_y^2 + \mu_j f^{2/(2+a)}(y)\right) | \leq \hbar^2 C\,. \tag{3.13}$$

En particulier, pour $k = 1$, on a

$$| \lambda_{j1} - \left[\mu_j + \hbar(\mu_j)^{1/2} \frac{tr((\partial^2 f(0))^{1/2})}{(2+a)^{1/2}}\right] | \leq \hbar^2 C\,. \tag{3.14}$$

Notation : pour un opérateur H la notation $\lambda_k(H)$ désigne sa k-ième valeur propre.

3.3.3 Energies moyennes

Il est possible de raffiner les résultats précédents (qui concernaient de basses énergies) en imposant les conditions supplémentaires suivantes :
$a \geq 2$, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ et $f(\infty) = \infty$. On obtient ainsi une localisation forte près des μ_j pour des niveaux d'énergie nettement plus élevés :

Théorème 3.17 . *On suppose vérifiées toutes les conditions précisées plus haut, et on considère j tel que $\mu_j \leq \hbar^{-2}$.*
Alors pour tout entier N, il existe une constante C (dépendant seulement de N) telle que, pour tout $k \leq N$, il existe une valeur propre
$\lambda_{jk} \in sp\,(\widehat{H}^\hbar)$ *vérifiant*

$$| \lambda_{jk} - \lambda_k \left(\hbar^2 D_y^2 + \mu_j f^{2/(2+a)}(y)\right) | \leq C\mu_j \hbar^2\,. \tag{3.15}$$

En particulier, pour $k = 1$ on a

$$| \lambda_{j1} - \left[\mu_j + \hbar(\mu_j)^{1/2} \frac{tr((\partial^2 f(0))^{1/2})}{(2+a)^{1/2}}\right] | \leq C\mu_j \hbar^2\,. \tag{3.16}$$

3.3.4 Application : Potentiels s'annulant sur une hypersurface

Les méthodes décrites précédemment s'appliquent à l'étude des opérateurs de Schrödinger sur $L^2(\mathbb{R}^d_s)$ ($d \geq 2$) définis par

$$P^h \;=\; -h^2\Delta \;+\; V(s) \tag{3.17}$$

où $V(s)$ est un potentiel ayant les propriétés suivantes :

$$\begin{array}{l} V \;\in\; C^\infty(\mathbb{R}^d\,;\,[0,+\infty[) \\ \liminf_{|s|\to\infty} V(s) \;>\; 0. \end{array} \tag{3.18}$$

On suppose de plus que $\Gamma \;=\; V^{-1}(\{0\})$ est une hypersurface régulière connexe et qu'il existe $m \in \mathbb{N}^\star$ and $C_0 > 0$ tel que l'on ait, pour tout s vérifiant $d(s,\,\Gamma) \;<\; C_0^{-1}$

$$C_0^{-1} d^{2m}(s,\,\Gamma) \;\leq\; V(s) \;\leq\; C_0\; d^{2m}(s,\,\Gamma) \tag{3.19}$$

($d(E,F)$ est la distance euclidienne entre E et F).

Moyennant le choix d'une orientation sur Γ et d'un vecteur normal unitaire $N(s)$ en chaque point $s \in \Gamma$, on peut définir sur Γ la fonction

$$f(s) \;=\; \frac{1}{(2m)!}\left(N(s)\frac{\partial}{\partial s}\right)^{2m} V(s)\,, \quad \forall\, s \;\in\; \Gamma\,. \tag{3.20}$$

Les propriétés (3.18) and (3.19) impliquent que $f(s) \;>\; 0, \quad \forall\, s \;\in\; \Gamma$.

On suppose enfin que la fonction f atteint son minimum en un nombre fini de points de Γ

$$\Sigma_0 \;=\; f^{-1}(\{\eta_0\}) \;=\; \{s_1,\ldots,\,s_{\ell_0}\}\,, \quad (\eta_0 \;=\; \min_{s\in\Gamma} f(s)\,) \tag{3.21}$$

et que la matrice hessienne de f en chaque point $s_j \;\in\; \Sigma_0$ est non dégénérée.
$Hess(f)_{s_j}$ possède alors $d-1$ valeurs propres strictement positives notées

$$\rho_1^2(s_j) \leq\; \ldots \;\leq\; \rho_{d-1}^2(s_j)\,, \qquad (\,\rho_l(s_j) \;>\; 0)\,.$$

Elles ne dépendent pas du choix de coordonnées. On pose

$$Tr^+(Hess(f_{s_j})) \;=\; \sum_{\ell=1}^{d-1} \rho_\ell(s_j)\,, \tag{3.22}$$

et on note $(\mu_j)_{j\geq 1}$ la suite croissante des valeurs propres de l'opérateur $-\,\dfrac{d^2}{dt^2} \;+\; t^{2m}$ sur $L^2(\mathbb{R})$.

Théorème 3.18 *Sous les hypothèses (3.17)-(3.22),*
pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$, *il existe* $h_0 \in]0,1]$ *et* $C_0 > 0$ *tels que,*
si $\mu_j << h^{-4m/(m+1)(2m+3)}$,
et si $\alpha \in \mathbb{N}^{d-1}$ *avec* $|\alpha| \leq N$,
alors $\forall\, s_\ell \in \Sigma_0$, $\exists\, \lambda^h_{j\ell\alpha} \in sp_d(P^h)$ *t.q.*

$$\left| \lambda^h_{j\ell\alpha} - h^{2m/(m+1)} \left[\eta_0^{1/(m+1)} \mu_j + h^{1/(m+1)} \mu_j^{1/2}\, \mathcal{A}_\ell(\alpha) \right] \right|$$

$$\leq h^2 \mu_j^{2+3/2m} C_0$$

où $\mathcal{A}_\ell(\alpha) = \dfrac{1}{\eta_0^{m/(2m+2)}(m+1)^{1/2}} \left[2\alpha\rho(s_\ell) + Tr^+(Hess(f_{s_\ell})) \right]$
et $\alpha\rho(s_\ell) = \alpha_1\rho_1(s_\ell) + \ldots \alpha_{d-1}\rho_{d-1}(s_\ell)$.

Les ordres de grandeur dans cette formule, malgré sa complexité, ont une réelle signification : le terme d'erreur est d'un ordre supérieur à celui de l'expression approchée de la valeur propre $\lambda^h_{j\ell\alpha}$.

4 Bouteilles magnétiques

4.1 Définition

Soit (M, g) une variété riemannienne connexe de dimension d et une 1-forme réelle $A = \sum_{j=1}^{d} a_j dx_j$ sur M. Pour $h \in]0, 1[$ on peut définir l'opérateur de Schrödinger (semi-classique) avec champ magnétique

$$\begin{array}{c} H_h(A) \ = \ (ih\ d + A)^\star (ih\ d + A)\ , \\ (ih\ d + A)u = ih\ du + Au\ ,\ \forall\ u\ \in\ C_0^\infty(M)\ . \end{array} \tag{4.1}$$

Le champ magnétique est la 2-forme exacte $B \ = \ dA$.
A la 2-forme B on peut associer un opérateur linéaire L_B sur l'espace tangent de la façon suivante :

$$B(X, Y) \ = \ g\ (L_B(X), Y) \quad \forall\ X\ ,\ Y\ \in TM \times TM\ . \tag{4.2}$$

L'intensité du champ magnétique **b** est alors

$$\mathbf{b} \ = \ \frac{1}{2} Tr\left((L_B^\star L_B)^{1/2}\right)\ . \tag{4.3}$$

On peut aussi donner une définition plus géométrique de $H_h(A)$. Elle fait intervenir une connexion hermitienne ∇ sur un fibré en droites complexes L au-dessus de M dont la courbure est iB. Cette connexion existe si la classe de cohomologie de $B/2\pi$ est entière.
Elle est donnée par $\nabla_X f = df(X) - iA(X)f$, où A est une 1-forme réelle telle que $B \ = \ dA$. On introduit alors sur $C_0^\infty(M; L)$ la forme quadratique $q(f) \ = \ \int_M \|\nabla f\|^2 dx$, et on lui associe par le procédé de Friedrich's un opérateur, qui est justement $H_h(A)$.

Remarque 4.1 *Changement de jauge*

Si $A' = A + d\phi$ est un autre potentiel magnétique associé à B, les opérateurs $H_h(A)$ et $H_h(A')$ sont unitairement équivalents.

Conséquences :

- Les spectres de $H_h(A)$ et de $H_h(A')$ sont les mêmes.
- L'invariance de jauge permet de donner un sens à la définition suivante :

Définition 4.2 *On dit que (M, h, B) est une bouteille magnétique si*

1) $H_h(A)$ est essentiellement auto-adjoint avec domaine $C_0^\infty(M; L)$

2) $H_h(A)$ est à résolvante compacte

La définition ne dépend pas du potentiel magnétique A choisi.

Les articles [4], puis [16], [40] mettent en évidence des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour que $H_h(A)$ soit à résolvante compacte.

4.2 Le cas euclidien

4.2.1 Les asymptotiques : version à grande énergie, version semi-classique

Si (M, g) est l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, l'opérateur défini en (4.1) s'écrit

$$H_h(A) = \sum_{j=1}^{d} (\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} - a_j)^2 \quad .$$

D'autre part il existe, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, une base orthonormée $(e_j(x))$ de $\mathbb{R}^d$ dans laquelle $B(x)$ s'exprime sous la forme

$$B(x) = \sum_{j=1}^{r(x)} b_j(x) dx_j \wedge dy_j, \quad b_1(x) \geq b_2(x) \geq ... \geq b_r(x) > 0 \ . \tag{4.4}$$

L'intensité du champ est la norme du vecteur $B(x) = (b_j(x))_j$. Les $b_j(x)$ sont les modules des valeurs propres non nulles de l'endomorphisme L_B associé à $B(x)$ et $2r(x)$ est son rang. En dimension impaire en particulier 0 est toujours valeur propre. On suppose de plus que B satisfait aux conditions suivantes :

- (B_1) $\lim_{\|x\|\to\infty} \|B(x)\| = \infty$
- (B_2) Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout x et tout x' vérifiant: $\|x - x'\| \leq 1$, $\|B(x)\| \leq C\|B(x')\|$
- (B_3) $M(x) = o(\|B(x)\|^{\frac{3}{2}})$ quand $\|x\| \to \infty$
  où $M(x) = \max_{|\beta|=2} \left(\sup_{\|x-x'\|\leq 1} \|D^\beta A(x')\|\right)$.

L'asymptotique à grande énergie de $N(\lambda, H_1(A))$ ($h = 1, \lambda \to +\infty$) est décrite par Y. Colin de Verdière dans [7] :

Théorème 4.3 *Sous les hypothèses* $(B_1 - B_3)$, $(\mathbb{R}^d, 1, B)$ *est une bouteille magnétique et*

$$N_B^{as}[\lambda(1 - o(1))] \leq N(\lambda, H_1(A)) \leq N_B^{as}[\lambda(1 + o(1))] \quad (\lambda \to +\infty) \ .$$

N_B^{as} *a pour expression:*

$$N_B^{as}(\lambda) = \sum_{r=1}^{[d/2]} C_{k,r} \sum_{(n_1,\ldots n_r)\in Z_r^+} \int_{A_r} (\lambda - \sum_{i=1}^{r}(2n_i + 1)b_i(x))_+^{k/2} \prod_{i=1}^{r} b_i(x)dx \ .$$

On a posé :

- $A_r = \{x \in R^d; r(x) = r\}$
- $C_{k,r} = \frac{\gamma_k}{(2\pi)^{k+r}}$, $\gamma_k =$ volume de la boule unité de R^k.

La version semi-classique de ce résultat est donnée dans [69].Il s'agit de déterminer un équivalent de $N(E, H_h)$ à E fixée pour h tendant vers zéro.

On remarque que $H_h(A) = h^2 H_1(A/h)$. $H_1(A/h)$ est l'opérateur de Schrödinger (non semi-classique) associé au champ magnétique $\frac{B}{h}$:

$$H_1(A/h) = \sum_{i=1}^{d} (\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{a_j}{h})^2 \ . \tag{4.5}$$

De ce fait, $N(E, H_h(A)) = N(\ \frac{E}{h^2},\ H_1(A/h)\ )$ pour toute énergie E fixée.

Il est alors possible d'adapter la méthode utilisée dans [7], d'où l'asymptotique suivante [69] :

Théorème 4.4 *Sous les hypothèses* $(B_1 - B_3)$, $(\mathbb{R}^d, h, B)$ *est une bouteille magnétique et on a, pour toute énergie* E*:*

$$\frac{1}{h^d} N_{hB}^{as}[E(1 - o(1))] \leq N(E, H_h(A)) \leq \frac{1}{h^d} N_{hB}^{as}[E(1 + o(1))] \quad (h \to 0) \ .$$

Remarques :

1) L'expression de N_B^{as} est plus explicite quand $d = 2$. On a alors $b_1(x) = \|B(x)\| = \mathbf{b}(x)$, et :

$$\frac{1}{h^d} N_{hB}^{as}(E) = \frac{1}{2\pi h^2} \int_{R^2} \mathbf{b}(x) \sum_{n\in\mathbb{N}} [E - (2n+1)h\mathbf{b}(x)]_0^+ dx \ . \tag{4.6}$$

$[\rho]_+^0$ est la fonction de Heaviside :

$$[\rho]_+^0 \ = \ \begin{cases} 1 \ , & \text{if} \quad \rho > 0 \\ 0 \ , & \text{if} \quad \rho \leq 0 \ . \end{cases}$$

2) Dans [49] H. Matsumoto retrouve ces résultats en étudiant le semi-groupe $\exp(-tH_h)$. Il obtient l'équivalent:

$$\text{Tr } (e^{-tH_h}) = \frac{1}{h^d} Z_{hB}(t)$$

où $Z_{hB}(t) = (4\pi t)^{-d/2} \displaystyle\int_{R^d} \prod_{i=1}^{r(x)} \frac{hb_i(x)}{\sinh hb_i(x)} dx$ est la transformée de Laplace de la fonction $N_{hB}^{as}(\lambda)$. Une étude en dimension 3 a été auparavant réalisée par H. Tamura [66] avec des résultats voisins. L'asymptotique ne fait intervenir que la norme du champ. Cependant, la méthode que ces deux auteurs emploie exige des hypothèses plus fortes sur le champ B, destinées à assurer que le semi-groupe soit à trace. On retrouve ici la philosophie évoquée dans le précédent chapitre : la méthode du min-max, qui étudie la forme quadratique au moyen de découpages et d'asymptotiques d'opérateurs simplifiés (ici ce seront des asymptotiques à champ constant dans des cubes) permet de réduire les hypothèses au minimum.

3) Les opérateurs vérifiant les hypothèses du théorème rentrent dans le cadre des opérateurs hypoelliptiques $\sum_{i=1}^d X_k^* X_k$ introduits par L. Hörmander [34], les champs de vecteurs X_k considérés étant réels.

4) Posons

$$\nu_{B(x)}(\lambda) = C_{k,r} \sum_{(n_1,\dots n_r)\in Z_r^+} (\lambda - \sum_{i=1}^r (2n_i+1)b_i(x))_+^{k/2} \prod_{i=1}^r b_i(x) \ .$$

Dans cette définition, les nombres k et r dépendent de x. La fonction $N_B^{as}(\lambda)$ s'écrit alors:

$$N_B^{as}(\lambda) = \int_{R^d} \nu_{B(x)}(\lambda) dx \ .$$

Dans le cas d'un champ constant, la fonction $\nu_B(\lambda)$ s'interprète comme la densité d'état pour l'opérateur de Schrödinger dans $\mathbb{R}^d$.

Nous donnons à présent quelques précisions sur ces deux éléments essentiels pour la preuve : les asymptotiques à champ constant dans un cube et le découpage approprié qui permet de s'y ramener.

4.2.2 Laplacien de Dirichlet avec champ constant dans un cube

Dans le cas d'un champ constant, la fonction $\nu_B(\lambda)$ permet d'estimer $N_{B,R}(\lambda)$,la fonction de dénombrement du spectre du problème de Dirichlet pour l'opérateur de Schrödinger avec le champ constant B dans le cube $[0,R]^d$. Nous rappelons l'estimation précise, donnée dans [7]:

Théorème 4.5 *Il existe une constante C ne dépendant que de d telle que, pour tout A avec $0 < A < R/2$, on ait:*

- $N_{B,R}(\lambda) \leq R^d \ \nu_B(\lambda)$.
- $N_{B,R}(\lambda) \geq (R-A)^d \ \nu_B(\lambda - C/A^2)$.

Ce résultat utilise le spectre des champs constants sur un tore et une méthode, due à Polya, qui permet d'approximer un pavage de $\mathbb{R}^d$ en cubes par un "grand" tore ([7], [9] et [10]).

Plus précisément on a :

Lemme 4.6 *Champ constant sur un tore*

Soit $B = \sum_{j=1}^{r} b_j dx_j \wedge dy_j$, $b_1 \geq ... \geq b_r > 0$ sur le tore $M = \mathbb{R}^d/\Gamma$, où $d = r + k$. On suppose que $\Gamma = \bigoplus_{j=1}^{r} \rho_j \mathbb{Z}^2 \ \oplus \Gamma_0$ avec Γ_0 réseau de $\mathbb{R}^k$ et que $b_j \rho_j^2 \in 2\pi\mathbb{Z}$. Alors

1) la classe de cohomologie de $B/2\pi$ est entière,

2) le spectre de $H_h(B)$ est constitué des valeurs propres

$\lambda = \sum_{i=1}^{r}(2n_i + 1)b_i + \mu$, où les n_i sont des entiers positifs, et μ est une valeur propre du Laplacien sur $\mathbb{R}^k/\Gamma_0$,

3) la multiplicité de λ est égale à la multiplicité de μ augmentée de $\prod_{i=1}^{r} \frac{b_i \rho_i^2}{2\pi}$.

4.2.3 Pavage semi-classique de $\mathbb{R}^d$ en cubes "adaptés" à B

Lemme 4.7 *Sous les hypothèses $(B_1 - B_3)$, et $\varepsilon > 0$ étant donné, il existe un pavage de $\mathbb{R}^d$ par des cubes $(\Omega_i)_{i\geq 0}$ (de taille inégale) de côté r_i , et des nombres $(a_i)_{i\geq 1}$ $(0 < a_i \leq r_i/2)$ tels que, si l'on note $M_i = \max_{\|\beta\|=2} \sup_{x\in\Omega_i} \|D^\beta a(x)\|$, on ait, pour tout x dans Ω_i et pour tout entier i strictement positif:*

i) $r_i^2 M_i \leq \varepsilon h \|B(x)\|^{1/2}$

ii) $M_i \leq \varepsilon^3 \|B(x)\|^{3/2}$

iii) $1/a_i^2 \leq M_{x,\varepsilon} = \max(\frac{4\varepsilon\|B(x)\|}{h}, 1/\varepsilon)$.

4.3 Le cas du plan hyperbolique

4.3.1 Le cadre

Si M est le plan hyperbolique $\mathbb{H} = \mathbb{R}\times]0, +\infty[$ muni de la métrique $g = \dfrac{dx^2 + dy^2}{y^2}$, alors $\rho_B = \widetilde{\mathbf{b}}\, dv$, où $dv = y^{-2}dxdy$ est la mesure riemannienne sur M. On a de ce fait $\widetilde{\mathbf{b}} = y^2\,(\partial_x A_2 - \partial_y A_1)$ et

$$H_1(A) \;=\; y^2(D_x - A_1)^2 \;+\; y^2(D_y - A_2)^2 \;. \tag{4.7}$$

On note $\mathbf{b} = |\widetilde{\mathbf{b}}|$.

Le cadre hyperbolique a été utilisé principalement pour l'étude du Laplacien de Maass, qui correspond au cas d'un champ magnétique constant [24], [18], [11] [14]. Dans [36] Y.Inahama et S.Shirai considèrent des champs magnétiques asymptotiquement constants et dans [38] ils considèrent des opérateurs de Pauli. Dans [35] N.Ikeda traite de la relation entre Laplacien de Maass et opérateurs de Schrödinger avec des potentiels de Morse.

On trouve aussi des résultats sur la distribution asymptotique des grandes valeurs propres dans ce contexte hyperbolique, mais pour des opérateurs sans champ magnétique [37]. La méthode est basée sur la représentation de Feynman-Kac pour le noyau de la chaleur et sur un théorème taubérien.

Comme on l'a déjà mentionné les techniques variationnelles inspirées du min-max présentent quant à elles l'avantage de ne rien exiger sur les propriétés du semi-groupe d'évolution. Nous obtenons ainsi la distribution asymptotique des grandes valeurs propres pour un certain type de bouteilles magnétiques en adaptant la méthode utilisée dans le cas euclidien quitte à remplacer le découpage en cubes par un découpage en rectangles adaptés à la géométrie hyperbolique.

La formule obtenue est très proche de (4.6), si l'on tient compte de la définition hyperbolique de l'intensité $\widetilde{\mathbf{b}}$ du champ magnétique.

De plus ces techniques étant locales, le résultat reste vrai pour de nombreuses surfaces d'aire infinie admettant $\mathbb{H}$ comme domaine fondamental.

Nous commençons par quelques résultats sur le spectre pour un champ magnétique constant.

4.3.2 Champ magnétique constant sur le demi-plan de Poincaré

Les premiers travaux sur le Laplacien de Maass sont dus à J. Elstrodt [18].

On considère le cas où $\widetilde{\mathbf{b}} = y^2(\partial_x A_2(x,y) - \partial_y A_1(x,y))$ est constant. On peut choisir une jauge telle que $A_2 = 0$, ce qui donne $A_1(x,y) = \widetilde{\mathbf{b}} y^{-1}$. On peut en fait prendre $A_1(x,y) = \mathbf{b}y^{-1}$, quitte à effectuer le changement $x \to -x$ qui est un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{H})$. On a

$$H_1(A^{\mathbf{b}}) \;=\; y^2(D_x - \mathbf{b}y^{-1})^2 \;+\; y^2 D_y^2\,, \quad \text{avec} \quad \mathbf{b} \geq 0 \quad \text{constant.} \tag{4.8}$$

Soit U l'opérateur unitaire

$$U \;:\; L^2(\mathbb{H}) \;\to\; L^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)\,, \quad Uf \;=\; y^{-1} f\,; \tag{4.9}$$

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$ est muni de la mesure de Lebesgue standard $dxdy$. On obtient ainsi

$$P_{\mathbf{b}} \;=\; U(H_1(A^{\mathbf{b}}))U^\star \;=\; (D_x - \mathbf{b}y^{-1})y^2(D_x - \mathbf{b}y^{-1}) \;+\; D_y y^2 D_y\,. \tag{4.10}$$

Une transformation de Fourier partielle conduit à $\mathrm{sp}(P_{\mathbf{b}}) \;=\; \bigcup_{\xi\in\mathbb{R}} \mathrm{sp}(P_{\mathbf{b}}(\xi))$,

où $P_{\mathbf{b}}(\xi)$ est l' opérateur sur $L^2(\mathbb{R}_+)$:

$$P_{\mathbf{b}}(\xi) f \;=\; (y\xi - \mathbf{b})^2 f(y) + D_y(y^2 D_y f)(y) \quad \forall\, f \;\in\; C_0^\infty(\mathbb{R}_+)\,. \tag{4.11}$$

De plus

$$\mathrm{sp}(P_{\mathbf{b}}(\xi)) \;=\; \mathrm{sp}(P_{\mathbf{b}}(1)) \quad \text{si} \quad \xi > 0 \;\text{, et}$$
$$\mathrm{sp}(P_{\mathbf{b}}(\xi)) \;=\; \mathrm{sp}(P_{\mathbf{b}}(-1)) \quad \text{si} \quad \xi \;<\; 0\,.$$

On montre alors le

Théorème 4.8 *Le spectre de $P_{\mathbf{b}}(\pm 1)$ est constitué d'une partie absolument continue et d'une partie discrète, et*

$$\begin{aligned}
\mathrm{sp}(P_{\mathbf{b}}(-1)) &= \mathrm{sp}_{ac}(P_{\mathbf{b}}(-1)) \;=\; \mathrm{sp}_{ac}(P_{\mathbf{b}}(1)) \;=\; [\mathbf{b}^2+\frac{1}{4},+\infty[\\
\mathrm{sp}(P_{\mathbf{b}}(1)) &= \mathrm{sp}_{ac}(P_{\mathbf{b}}(1)) \qquad \textit{si } \mathbf{b} \;\leq\; \frac{1}{2} \\
\mathrm{sp}_d(P_{\mathbf{b}}(1)) &= \{(2j+1)\mathbf{b}-j(j+1)\,;\; j \;\in\; \mathbb{N}\,,\; j<\mathbf{b}-\frac{1}{2}\} \quad \textit{si } \mathbf{b} \;>\; \frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Corollaire 4.9 *Le spectre de $H_1(A^{\mathbf{b}})$ est essentiel:* $\mathrm{sp}(H_1(A^{\mathbf{b}})) = \mathrm{sp}_{es}(H_1(A^{\mathbf{b}}))$.
Sa partie absolument continue est $\mathrm{sp}_{ac}(H_1(A^{\mathbf{b}})) \;=\; [\mathbf{b}^2+\frac{1}{4},+\infty[$.
La partie restante du spectre est vide si $0 \leq \mathbf{b} \leq 1/2$, *sinon elle est constituée d'un nombre fini de valeurs propres de multiplicité infinie :*

$$\mathrm{sp}_p(H_1 A^{\mathbf{b}}) \;=\; \{(2j+1)\mathbf{b}-j(j+1)\,;\; j \;\in\; \mathbb{N}\,,\; j<\mathbf{b}-\frac{1}{2}\} \quad \textit{si} \quad \frac{1}{2}<\mathbf{b}\,.$$

4.3.3 Asymptotique à grande énergie

On suppose

$$A_j(x,y) \;\in\; C^2(\mathbb{H};\mathbb{R})\,, \quad \forall\, j\,. \tag{4.12}$$

Il est connu que l'opérateur $H_1(A)$ défini par (4.7) est alors essentiellement auto-adjoint sur $L^2(\mathbb{H})$, voir par exemple [65].

On suppose de plus que l'opérateur vérifie les propriétés suivantes :

- $$\mathbf{b}(x,y) \;\to\; +\infty \quad \text{quand} \quad d(x,y) \;\to\; +\infty \tag{4.13}$$
  ($d(x,y)$ désigne la distance hyperbolique de (x,y) au point $(0,1)$).
- Il existe $C_0>0$ tel que, pour tout champ de vecteur X sur $\mathbb{H}$,
  $$|X\widetilde{\mathbf{b}}| \leq C_0(|\widetilde{\mathbf{b}}|+1)\sqrt{g(X,X)}\,. \tag{4.14}$$

Théorème 4.10 *Sous les hypothèses (4.12), (4.13) et (4.14)*
1) l'opérateur $H_1(A)$ est à résolvante compacte,

2) pour tout $\delta \in]\frac{1}{3},\frac{2}{5}[$, il existe une constante $C>0$ telle que,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{H}}(1-\frac{C}{(\mathbf{b}(m)+1)^{(2-5\delta)/2}})\mathbf{b}(m)\sum_{k=0}^{+\infty}[\lambda(1-C\lambda^{-3\delta+1})-\frac{1}{4}-(2k+1)\mathbf{b}(m)]_+^0\;dv$$

$$\leq\ N(\lambda, H_1(A))\ \leq \tag{4.15}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{H}}(1+\frac{C}{(\mathbf{b}(m)+1)^{(2-5\delta)/2}})\mathbf{b}(m)\sum_{k=0}^{+\infty}[\lambda(1+C\lambda^{-3\delta+1})-\frac{1}{4}-(2k+1)\mathbf{b}(m)]_+^0\ dv$$

Remarque

$[\rho]_+^0$ est la fonction de Heaviside (déjà mentionnée) :

$$[\rho]_+^0\ =\ \begin{cases} 1\ , & \text{if} \quad \rho > 0 \\ 0\ , & \text{if} \quad \rho \leq 0\ . \end{cases}$$

Si l'on compare ce résultat à celui obtenu par Colin de Verdière [7], et en particulier à la formule (4.6), on voit que la différence se trouve dans le décalage de $-\frac{1}{4}$ de l'énergie, qui vient directement de la géométrie du problème. Ce terme devient réellement significatif dans le corollaire suivant :

Corollaire 4.11 *Sous les hypothèses du théorème 4.10, et si la fonction* $\omega(\mu)\ =\ \int_{\mathbb{H}}[\mu-\mathbf{b}(m)]_+^0 dv$ *vérifie*

$$\exists\ C_1>0 \text{ s.t. } \forall\ \mu > C_1\ ,\ \forall\ \tau\ \in]0,1[\ ,\quad \omega\ ((1+\tau)\ \mu)-\omega(\mu)\leq C_1\ \tau\ \omega(\mu)\ , \tag{4.16}$$

alors

$$N(\lambda; H_1(A))\ \sim\ \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{H}}\mathbf{b}(m)\sum_{k\in\mathbb{N}}[\lambda-\frac{1}{4}-(2k+1)\mathbf{b}(m)]_+^0\ dv\ . \tag{4.17}$$

La propriété (4.16) est satisfaite par exemple si $\omega(\lambda)\ \sim\ \alpha\lambda^k \ln^j(\lambda)$ quand $\lambda\to+\infty$, avec $k>0$, ou avec $k=0$ et $j>0$.

En particulier on traite ainsi le cas de champs magnétiques du type $\mathbf{b}(x,y)\ =\ \left(\frac{x}{y}\right)^{2j}\ +\ g(y)$, où $j\ \in\ \mathbb{N}^\star$ et $g(y)\ =\ p_1(y)\ +\ p_2(1/y)$, les fonctions $p_1(s)$ et $p_2(s)$ étant polynomiales d'ordre ≥ 1 pour les grandes valeurs de s.

On a alors $\omega(\lambda)\ \sim\ \alpha\lambda^{\frac{1}{2j}}\ln(\lambda)$ quand $\lambda\to+\infty$.

Dans le paragraphe suivant on donne les éléments de la preuve du théorème 4.10, qui sont propres au contexte hyperbolique : transformation de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{H}$, contrôle du champ par un champ constant sur un rectangle approprié, découpage de $\mathbb{R}^2$ en de tels rectangles appropriés, tous éléments permettant d'utiliser la technique du min-max.

4.3.4 Changement de variables, changement de jauge, localisation, pavage

- On considère le difféomorphisme

  $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{H}$
  $(x, y) = \phi(x, t) = (x, e^t)$.
  Il induit un opérateur unitaire
  $\widehat{U} : L^2(\mathbb{H}; dv) \to L^2(\mathbb{R}^2; dxdt)$
  $(\widehat{U}f)(x, t) = e^{-t/2} f(x, e^t)$ pour tout $f \in L^2(\mathbb{H})$.

  La forme quadratique associée à $H_1(A)$ est donnée, pour tout $u \in L^2(\mathbb{H})$, par

  $$q(u) = \int_{\mathbb{H}^2} \left[|y(D_x - A_1)u|^2 + |y(D_y - A_2)u|^2 \right] \frac{dxdy}{y^2} \ .$$

  Elle s'écrit après calcul, en notant $\tilde{A}_i(x, t) = A_i(x, e^t), i = 1, 2$, et $w = \widehat{U}u$,

  $$q(u) = \widehat{q}^{\tilde{A}}(w) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[|e^t(D_x - \tilde{A}_1)w|^2 + |(e^{-t/2} D_t e^{t/2} - e^t \tilde{A}_2)w|^2 \right] dxdt \ .$$

  L'opérateur associé à $\widehat{q}^{\tilde{A}}$ est $\widehat{H}(\tilde{A}) = \widehat{U} H_1(A) \widehat{U}^{-1}$.
  On a $\widehat{H}(\tilde{A}) = e^{2t}(D_x - \tilde{A}_1)^2 + (D_t - e^t \tilde{A}_2)^2 + 1/4$. On voit ainsi apparaître le facteur $1/4$, qui est le prix à payer pour passer d'un problème dans $\mathbb{H}$ à un problème dans $\mathbb{R}^2$.

- Jauge

  On choisit un potentiel tel que $A_2 = 0$. Puisque

  $$\widetilde{\mathbf{b}} = y^2 (\partial_x A_2 - \partial_y A_1)$$

  on peut prendre

  $$A_1(x, y) = -\int_1^y \frac{\widetilde{\mathbf{b}}(x, s)}{s^2} ds$$

  La forme quadratique associée est

  $$\widehat{q}^{\tilde{A}}(w) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[|e^t(D_x - \tilde{A}_1)w|^2 + |D_t w|^2 + 1/4|w|^2 \right] dxdt \ .$$

- L'hypothèse (4.14) permet de contrôler le champ par un champ constant sur un rectangle approprié :

  On pose $\Omega(x_0, y_0, a, \varepsilon_0) := \{(x, y) \ / \ |x - x_0| \leq a\varepsilon_0 \ y_0, \ |y - y_0| \leq \varepsilon_0 y_0\}$.
  ($a > 0$ et $\varepsilon_0 > 0$ assez petit)

  Lemme 4.12 *Il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{H}$ avec $\mathbf{b}(x_0, y_0) > 1$, on ait*

  $$\frac{1}{C_1} \ \mathbf{b}(x_0, y_0) \leq \mathbf{b}(x, y) \leq C_1 \ \mathbf{b}(x_0, y_0) \quad \forall \ (x, y) \in \Omega(x_0, y_0, a, \varepsilon_0).$$

- Pavage

  Pour $\alpha \in \mathbb{Z}^2$, on note $K(\alpha)$ le rectangle

  $$K(\alpha) \ =] - \frac{e^{\alpha_2}}{2} + e^{\alpha_2}\alpha_1 \ , \ e^{\alpha_2}\alpha_1 + \frac{e^{\alpha_2}}{2}[\times] - \frac{1}{2} + \alpha_2 \ , \ \alpha_2 + \frac{1}{2}[\ . \quad (4.18)$$

  Ainsi $\mathbb{R}^2 = \cup_\alpha \overline{K}(\alpha)$ et $K(\alpha) \cap K(\beta) = \emptyset$ si $\alpha \neq \beta$. A cause du lemme 4.12, on peut scinder chaque $K(\alpha)$, (si nécessaire), en $M(\alpha)$ rectangles:

  $$\overline{K}(\alpha) \ = \ \cup_{j=1}^{M(\alpha)} \overline{K_{\alpha,j}} \ , K_{\alpha,j} \ =] - \frac{\epsilon_{\alpha,j} e^{t_{\alpha,j}}}{2} + x_{\alpha,j} \ , \ x_{\alpha,j} + \frac{\epsilon_{\alpha,j} e^{t_{\alpha,j}}}{2}[\times] - \frac{\epsilon_{\alpha,j}}{2} + t_{\alpha,j} \ , \ t_{\alpha,j} + \frac{\epsilon_{\alpha,j}}{2}[\ , \quad (4.19)$$

  avec

  $$\frac{1}{a_0(1 + \mathbf{b}^{\delta_0}(x_{\alpha,j}, e^{t_{\alpha,j}}) \ )} \ \leq \ \epsilon_{\alpha,j} \ \leq \ \frac{a_0}{(1 + \mathbf{b}^{\delta_0}(x_{\alpha,j}, e^{t_{\alpha,j}}) \ )} \ , \quad (4.20)$$

  et tels que $K_{\alpha,k} \cap K_{\alpha,j} = \emptyset$ si $k \neq j$.
  Ce lemme est l'équivalent hyperbolique du lemme 4.7 pour le cas euclidien.
  Le pavage $\mathbb{R}^2 = \cup_\alpha \overline{K}(\alpha)$ ainsi que son image sur $\mathbb{H}$ par le difféomorphisme ϕ sont représentés en figure 2 et figure 3.

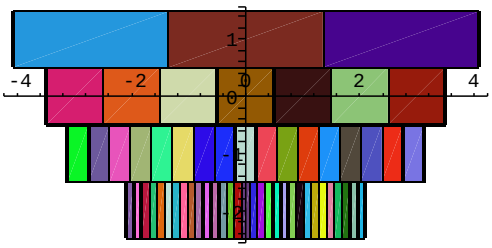

Figure 2: Pavage de $\mathbb{R}^2$ par les rectangles $\overline{K}(\alpha)$

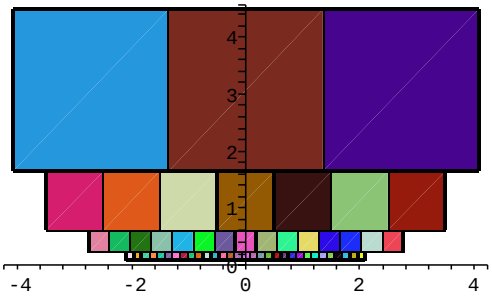

Figure 3: Pavage de $\mathbb{H}$ par les cubes $\phi(\overline{K}(\alpha))$

5 Problème de Neumann avec champ magnétique

5.1 Problèmes liés à la supra-conductivité

Dans le cadre de la théorie de la supra-conductivité on se pose le problème suivant : minimiser, pour un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$, et un potentiel $A \in H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$ donnés, la fonctionnelle de Ginzburg-Landau :

$$\mathcal{G}(\psi,\tilde{A}) = \int_\Omega |(\nabla - i\kappa\tilde{A})\psi|^2 + \frac{\kappa^2}{2}(|\psi|^2-1)^2 \, dx...$$

$$... + \kappa^2 \int_\Omega |\overrightarrow{rot}\tilde{A} - \sigma\overrightarrow{rot}A|^2 \, dx$$

sur l'ensemble des $(\psi,\tilde{A}) \in H^1(\Omega;\mathbb{C})\times H^1(\Omega;\mathbb{R}^d)$. κ et σ sont deux paramètres permettant de varier l'intensité du champ, et la dimension d est 2 ou 3.

$(0,\sigma A)$ se trouve être un point critique trivial de $\mathcal{G}(\psi,\tilde{A})$; étudier le Hessien de la fonctionnelle en ce point conduit alors (modulo les paramètres κ et σ) à étudier les propriétés spectrales de l'opérateur avec champ magnétique $H_h = ((h\nabla - iA))^2$, avec une condition de "Neumann magnétique" à la frontière:

$$\nu(x)\cdot(h\nabla - iA)u(x) = 0 \quad \forall x \in \delta\Omega \ .$$

Les propriétés de cet opérateur ont été beaucoup étudiées. On sait en particulier depuis les travaux de K.Lu et X.B.Pan [45]-[47] et de B.Helffer et A.Morame [26]-[28] que, à la différence du spectre de Dirichlet, la borne inférieure de son spectre peut être inférieure à $hb = h\inf_\Omega \|B\|$ où $B = dA$ est le champ magnétique. Cela est dû à la propriété fondamentale suivante, qui différencie le problème de Dirichlet de celui de Neumann :

On considère l'opérateur de Neumann sur $L^2(\mathbb{R}_+)$ défini par

$Q_x = D_t^2 + (t-x)^2$, et on note $\mu(x)$ sa première valeur propre. Alors

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} \mu(x) = \mu(x_0) = \Theta_0 < 1 \ .$$

Pour l'opérateur de Dirichlet la même quantité vaut 1.

Cela a pour conséquence que si $b \geq \Theta_0 \ b'$, où $b' = \ inf_{\delta\Omega}\|B\|$, la borne inférieure du spectre de Neumann est $h\Theta_0 \ b'$.

De plus, dans le cas où B est constant et non nul, tout état propre fondamental normalisé est localisé exponentiellement (pour h tendant vers 0) dans le voisinage des points de la frontière de courbure maximale (voir [26]

pour la dimension 2 et [27] pour la dimension 3). C'est ce phénomène qui est à l'origine de la supra-conductivité. Citons aussi les travaux de B.Helffer et S.Fournais, en particulier [19] qui concerne les développements asymptotiques des petites valeurs propres en dimension 2, et [20] sur les "champs critiques", qui gouvernent les transitions des états supraconducteurs aux états normaux. Cette liste de travaux sur le sujet est loin d'être exhaustive...

5.2 Le spectre dans le cas du demi-espace, pour un champ constant et h=1

On considère, pour (t, x, y) dans $\Omega = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$, la réalisation de Neumann de l'opérateur avec champ magnétique

$$H = (D_t - A_1)^2 + (D_x - A_2)^2 + (D_y - A_3)^2$$

avec $D_s = -i(\frac{\partial}{\partial s})$.

On note θ l'angle formé par le champ magnétique $B = dA$, vu comme un champ de vecteurs en dimension 3, et par la frontière $\partial\Omega$. On pose $b = \|B\|$.

On peut choisir pour potentiel vecteur A la 1-forme

$$A = b(x \sin\theta - t\cos\theta)dy$$

ce qui permet décrire l'opérateur H sous la forme

$$H_\theta^b = D_t^2 + D_x^2 + (D_y - b(x\sin\theta - t\cos\theta))^2 \ .$$

Par homogénéité on obtient :

$$\sigma(H_\theta^b) = b\sigma(H_\theta)$$

avec

$$H_\theta = D_t^2 + D_x^2 + (D_y - (x\sin\theta - t\cos\theta))^2 \ .$$

- $\theta = 0$

  Le spectre de l'opérateur de Neumann H_0 est absolument continu. Plus précisément :

$$\sigma(H_0) = \sigma_{ac}(H_0) = [b\Theta_0, +\infty[\ . \tag{5.1}$$

- $\theta = \frac{\pi}{2}$

  Le spectre de $H_{\frac{\pi}{2}}$ est encore absolument continu, mais

$$\sigma(H_{\frac{\pi}{2}}) = \sigma_{ac} = [b, +\infty[\ . \tag{5.2}$$

- $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

  Le spectre de H_θ n'est plus absolument continu, comme l'ont montré K. Lu and X-B. Pan [46], (voir aussi [27]).
  On montre dans ([72]) que :

  Théorème 5.1

$$\sigma(H_\theta^b) \cap]-\infty, b[= \{b\nu_1(\theta),\ b\nu_2(\theta), \ldots,\ b\nu_j(\theta),\ b\nu_{j+1}(\theta), \ldots\} \ . \tag{5.3}$$

  Chaque $b\nu_j(\theta)$ est une valeur propre de multiplicité infinie.

En effet on a $\sigma(H_\theta) = \bigcup_{\tau \in \mathbb{R}} \sigma(H_{\theta,\tau})$, où $H_{\theta,\tau}$ est la réalisation de Neumann sur $F = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$: $H_{\theta,\tau} = D_t^2 + D_x^2 + (\tau - (x\sin\theta - t\cos\theta))^2$.
De plus grâce au changement de variables $x \to x - \dfrac{\tau}{b\sin\theta}$,
on obtient pour tout τ : $\sigma(H_{\theta,\tau}) = \sigma(P_\theta)$, avec

$$P_\theta = D_t^2 + D_x^2 + (t\cos\theta - x\sin\theta)^2 \ ,$$

si bien que le spectre de H_θ est essentiel :

$$\sigma(H_\theta) = \sigma_{ess}(H_\theta) = \sigma(P_\theta). \tag{5.4}$$

On sait ([46], [27]) que

$$\inf\ \sigma(P_\theta) = \nu(\theta) < 1 = \inf\ \sigma_{ess}(P_\theta), \tag{5.5}$$

de sorte que P_θ admet un ensemble dénombrable de valeurs propres $(\nu_j(\theta))_{j\in I}$, $(I \subset \mathbb{N})$, contenues dans $[\nu(\theta), 1[$.

Pour $d \leq 1$ on désigne par $N(d,\ P_\theta)$ le nombre de valeurs propres de P_θ dans $]-\infty, d[$:

$$N(d,\ P_\theta) = Tr(E_{]-\infty,d[}(P_\theta)) = \sharp\{j;\ \nu_j(\theta) < d\} \ . \tag{5.6}$$

On a les résultats suivants [72] :

Théorème 5.2 *Pour tout* $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, *le nombre de valeurs propres de* P_θ *dans* $]-\infty,\ 1[$ *est fini, et il existe une constante* $C \geq 1$ *telle que*

$$N(1,\ P_\theta) \leq \frac{C}{\sin\theta}\ . \tag{5.7}$$

On voit que le majorant de $N(1,\ P_\theta)$ tend vers l'infini quand on fait tendre vers zéro l'angle θ que forme le champ magnétique avec la frontière. En considérant θ (ou plus exactement $\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{\cos\theta}}$) comme un paramètre semi-classique il est possible de donner une description asymptotique de type Weyl du nombre $N(d, P_\theta)$ pour $d < 1$ [72] :

Théorème 5.3 *Si* $d \in]\Theta_0,\ 1[$,
il existe une constante $C_d > 0$ *telle que*

$$\left| N(d, P_\theta)\ -\ \frac{1}{2\pi\sin\theta}\ \int_{\mathbb{R}} [d - \mu(x)]_+^{1/2} dx \right| \leq C_d\ . \tag{5.8}$$

L'expression fait clairement apparaître, comme dans le cas des potentiels dégénérés, un potentiel "effectif". Il s'agit ici de la fonction d'une variable $\mu(x)$, introduite au début, qui est responsable de la supra-conductivité.

6 Un problème de bouteille magnétique en mécanique classique

6.1 Equation de Lorentz et hamiltonien associé

La trajectoire dans $\mathbb{R}^3$ d'une particule de masse m, de charge e, soumise à un champ magnétique $\vec{B}$ est décrite par l'équation de Lorentz :

$$m\ddot{x} = e\dot{x} \wedge \vec{B} \ .$$

Il existe un lagrangien associé (pour $m = e = 1$) :

$$\mathcal{L}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}\ \dot{x}^2 + \dot{x} \cdot A(x) \ , \tag{6.1}$$

où A est un potentiel magnétique : $\overrightarrow{rot}A = \vec{B}$. Pour obtenir le hamiltonien correspondant, on écrit les moments conjugués

$$\xi_j = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_j} \tag{6.2}$$

ce qui s'écrit vectoriellement $\xi = \dot{x} + A(x)$ et on a alors :

$$\mathcal{H}(x, \xi) = \xi\dot{x} - \mathcal{L}(x, \dot{x}) \tag{6.3}$$

d'où $\mathcal{H}(x, \xi) = \frac{1}{2}(\xi - A(x))^2$. Quand $\vec{B}$ est un champ constant en temps et position le hamiltonien est intégrable, les trajectoires sont des hélices ayant pour axe une ligne de champ. Les trois quantités conservées lors du mouvement (les trois intégrales du mouvement) sont l'énergie (le hamiltonien lui-même), le rayon de Larmor $\rho = \frac{v_\perp}{B}$ et le moment magnétique $I = \frac{v_\perp^2}{2B}$ Les notations $v_\perp$ et B désignent respectivement la vitesse orthogonale à la direction du champ et la norme de $\vec{B}$.

Remarque

En appliquant la quantification de Weyl à $\mathcal{H}(x, \xi)$ on obtient l'opérateur de Schrödinger défini sur $L^2(\mathbb{R}^3)$

$$H_h(A) = \sum_{j=1}^{3} (\frac{h}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} - A(x_j))^2 \ .$$

Dans le cas où $\vec{B}$ est un champ constant le spectre de l'opérateur $H_h(A)$ est composé de valeurs propres de multiplicité infinie, ce sont les niveaux de Landau $\lambda_j(h) = h\ (2j + 1)\ B$.

6.2 Invariants adiabatiques

Considérons un champ magnétique qui varie lentement dans l'espace au sens qu'au cours d'une rotation de la particule le champ soit presque constant : la trajectoire parcourt approximativement un cercle dont le centre (le guiding center) se déplace lentement le long d'une ligne de champ, la période de rotation étant très petite.

Dans les conditions ci-dessus le hamiltonien dépend lentement des variables de position, sauf d'une (notée x_0); on peut l'exprimer sous la forme $\mathcal{H} = \mathcal{H}(x, \epsilon x_0, \xi, \xi_0)$, où ϵ est un petit paramètre.

Si le hamiltonien $\mathcal{H}_0(x, \xi)$ obtenu en fixant ϵx_0 et ξ_0 possède dans l'espace de phase des trajectoires fermées (avec une fréquence qui ne s'annule pas) on peut introduire les variables action-angle (I, ϕ). La variable d'action $I((x, \epsilon x_0, \xi, \xi_0)$ correspond au moment magnétique ; ce n'est plus une intégrale du mouvement comme dans le cas d'un champ constant, mais il résulte de la méthode de moyennisation ([2]) que c'est un invariant adiabatique, c'est-à-dire :

$$\exists c > 0 \ t.q. \ |I((x(t), \epsilon x_0(t), \xi(t), \xi_0(t)) - I((x(0), \epsilon x_0(0), \xi(0), \xi_0(0))| < \ c \ \epsilon$$

pour $0 \leq t \leq 1/\epsilon$.

A l'aide de transformations symplectiques on peut obtenir l'invariance de I à tout ordre ([43],[52]). De plus, dans le cas où le champ est une fonction convexe le long des lignes de champ (en tant que fonction de l'abcisse curviligne s) il existe un autre invariant, longitudinal, donné par $J = \oint \frac{v_\parallel^2}{B} ds$. En effet la trajectoire est alors réfléchie aux points s_1, s_2 tels que $IB(s_i) = \mathcal{H}$, et l'intégrale est calculée sur une oscillation complète [54].

M.Gardner [21] montre que cette quantité est invariante à tous ordres.

V.I.Arnold [3] s'est posé la question suivante : peut-on avoir non seulement un confinement adiabatique des particules mais un confinement réel? Considérant un champ magnétique à symétrie axiale il écrit le hamiltonien, à deux degrés de liberté, comme une perturbation d'un hamiltonien intégrable, pour lequel le mouvement dans l'espace des phases se situe sur un tore.

Sous une hypothèse de non dégénérescence (le rapport des fréquences varie avec le temps) il montre par la théorie de KAM que les tores invariants ne sont pas tous détruits après perturbation et il en déduit par des considérations de dimension que l'action I est un invariant adiabatique perpétuel.

La difficulté est de vérifier cette hypothèse, car le rapport des fréquences est d'un ordre petit. Arnold ne la vérifie que dans le cas où le hamiltonien s'écrit $\mathcal{H} = \frac{\xi_1^2+\xi_0^2}{2} + U(x_1, x_0)$ où le potentiel s'écrit : $U(x_1, x_0) = \frac{1}{2}x_1^2(1+\epsilon^2 x_0^2)$.

Une autre méthode consiste à utiliser un théorème de J.Moser [50] qui garantit l'existence de solutions périodiques pour des systèmes proches d'un système intégrable. M.Braun [6] a ainsi prouvé l'existence d'une région où les particules soumises au champ magnétique terrestre sont retenues indéfiniment.

Dans [68] nous utilisons le théorème de J.Moser pour obtenir un ouvert de conditions initiales pour lesquelles la trajectoire reste bornée dans le cas d'une particule soumise à un champ magnétique symétrique linéaire

$$\vec{B}(x, y, z) = (x, y, -2z) \ . \tag{6.4}$$

Ce champ est de type "bouteille magnétique": en effet la norme du champ tend à l'infini avec la position. Comme on l'a vu, l'opérateur obtenu par quantification de Weyl est à résolvante compacte. Le résultat de mécanique quantique paraît plus robuste en comparaison. Comme c'est souvent le cas il est plus ardu d'obtenir des informations sur les trajectoires classiques que sur le spectre de l'opérateur quantique...

6.3 Trajectoires bornées

6.3.1 Le hamiltonien en coordonnées cylindriques

Le champ défini par (6.4) étant symétrique, l'expression du hamiltonien en coordonnées cylindriques est plus naturelle. On a (en considérant le champ B comme une 2-forme) $B = d(-r^2 z) \wedge d\theta$,
d'où le choix du potentiel vecteur $A = (A_r, A_\theta, A_z) = (0, -rz, 0)$.
Les lignes de champ sont caractérisées par $\theta =$ constante et $r^2 z =$constante.
Les moments conjugués (donnés par (6.2)) s'écrivent

$$(\xi_r, \xi_\theta, \xi_z) = (\dot{r}, r^2(\dot{\theta} - z), \dot{z}) \ ,$$

ce qui , via la formule (6.3), donne

$$\mathcal{H}(r, \theta, z, \xi_r, \xi_\theta, \xi_z) = \frac{1}{2}(\xi_r^2 + \xi_z^2) + \frac{1}{2r^2}(\xi_\theta + r^2 z)^2 \ . \tag{6.5}$$

En écrivant la seconde équation de Hamilton

$$\dot{\xi}_\theta = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} \tag{6.6}$$

on observe l'existence d'une intégrale première du mouvement, qui est ξ_θ.

La symétrie a permis de réduire la dimension. Nous sommes ramenés à l'étude du hamiltonien à 2 degrés de liberté :

$$\mathcal{H}_M(r,z,\xi_r,\xi_z) = \frac{1}{2}(\xi_r^2+\xi_z^2) + \frac{(M+r^2z)^2}{2r^2} \ . \tag{6.7}$$

6.3.2 Le hamiltonien réduit et les lignes de champ

La quantité $M = \xi_\theta$ est fixée par les conditions initiales, ainsi que l'énergie E (c'est la valeur du hamiltonien, qui est aussi une constante du mouvement). M est éventuellement négative. Considérons la ligne de champ (L_M) définie par $r^2z = -M$. Il existe un point Ω_M unique pour lequel la norme B sur (L_M) est minimale . A chaque point $P(r,z)$ nous pouvons alors associer un nouveau système de coordonnées (u,v) :

- v est la distance de $P(r,z)$ à la ligne de champ (L_M)
- u est l'abcisse curviligne de la projection de P sur (L_M), Ω_M étant choisi comme origine.

Notons $k(u)$ la courbure de (L_M) au point $(u,0)$ et posons :

$$\mathcal{H}_0(u,v,\xi_u,\xi_v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\xi_u^2}{[1+vk(u)]^2} + \xi_v^2 + B^2(u,0)v^2\right). \tag{6.8}$$

On peut alors exprimer le hamiltonien $\mathcal{H}_M(u,v,\xi_u,\xi_v)$, obtenu à partir de l'expression (6.7) après passage aux nouvelles coordonnées, comme une perturbation de $\mathcal{H}_0(u,v,\xi_u,\xi_v)$ de la façon suivante :

Proposition 6.1 *Pour toutes conditions initiales telles que*

$$E < 2|M|^{4/3} \quad \text{et} \quad E < \frac{\epsilon^2}{16}|M|^{2/3} \quad \text{(CI)}$$

- *la distance v de la trajectoire à la ligne de champ (L_M) est d'au plus ϵ*
- *il existe une constante C (ne dépendant que de E et de M) telle que*

$$|\mathcal{H}_M(u,v,\xi_u,\xi_v) - \mathcal{H}_0(u,v,\xi_u,\xi_v)| < C\epsilon^3$$

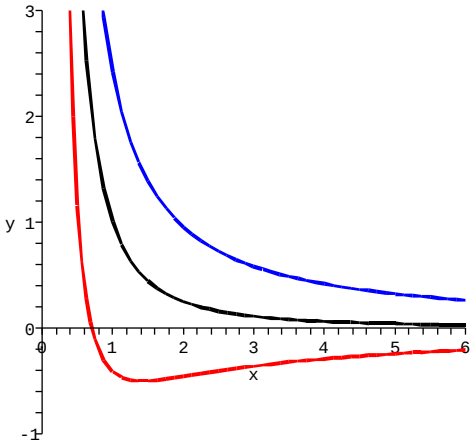

Figure 4: La bande $\mathcal{B}$ et la ligne de champ (L_M)

Remarques

1) La première condition est une conséquence de la seconde pour ϵ assez petit.

2) La proposition repose sur le fait que l'inégalité $\frac{(M+r^2z)^2}{2r^2} < E$ contraint la trajectoire à rester dans une bande $\mathcal{B}$ autour de (L_M) (voir figure 4).

3) Le hamiltonien $\mathcal{H}_u = \frac{1}{2}\left(\xi_v^2 + B^2(u,0)v^2\right)$ représente à u fixé l'énergie d'un oscillateur harmonique . L'action correspondante, qui est (à un facteur 2π près) l'aire de l'ellipse $\mathcal{H}_u = cte$ parcourue par le point de coordonnées (v, ξ_v) a pour expression

$$I_u = \frac{\xi_v^2 + B^2(u,0)v^2}{2\ B(u,0)}\ .$$

4) On remarque que la condition (CI) entraîne

$$B(u,0)I_u < \ \frac{\epsilon^2}{16}|M|^{2/3} + C\epsilon^3\ ,$$

si bien que, sous réserve que I_u soit minorée indépendamment du temps, on obtiendra une borne pour $B(u,0)$ et donc pour la trajectoire puisque $B(u,0)$ grandit avec u.

6.3.3 Changement d'échelle et variables d'action

On pose

$u = \epsilon u_1,\ v = \epsilon v_1,\ \xi_u = \epsilon\ \xi_{u_1},\ \xi_v = \epsilon\ \xi_{v_1},\ \mathcal{H}_M = \epsilon^2\ \mathcal{K}_M,\ E = \epsilon^2 E'$.

Après plusieurs transformations symplectiques (ou si l'on préfère le langage de la mécanique, des changements de variable canoniques) on obtient des coordonnées action-angle (I, J, ϕ, ψ) explicites telles que

Théorème 6.2

$$\mathcal{K}_M(u_1, v_1, \xi_{u_1}, \xi_{v_1}) = \mathcal{K}_M(I, J, \phi, \psi) = E' + B(\epsilon u_1, 0)\,[I + c(\epsilon J) + \mathcal{O}(\epsilon)]\ , \tag{6.9}$$

où la fonction $c(\epsilon J)$ *a une dérivée seconde non nulle sur un intervalle du type* $]A, +\infty[$.

La variable d'action I est, au facteur ϵ^{-2} multiplicatif près la variable I_u définie plus haut. Pour les points de la trajectoire situés sur la ligne de champ, on retrouve bien le moment magnétique $I = \frac{v_\perp^2}{2B}$ mentionné au début. La seconde variable d'action est une fonction $J(c)$, qui est l'aire délimitée par la courbe $\mathcal{C}_c$ d'équation : $\frac{1}{2}\ \xi_{u_1}^2 - c\ B(\epsilon u_1, 0)\ =\ E'$. Si l'on note B_M la valeur minimale de B sur (L_M), cette courbe est fermée pour les valeurs de $c \in]-\frac{E'}{B_M}, 0[$ (voir Figures 5 et 6).

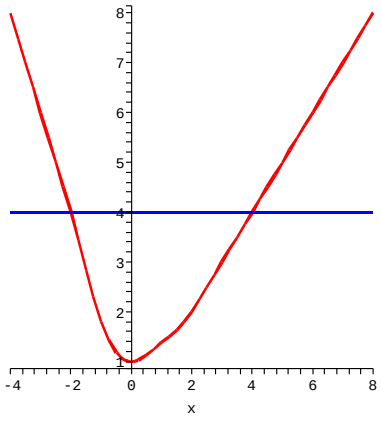

Figure 5: Le champ $B(u)$

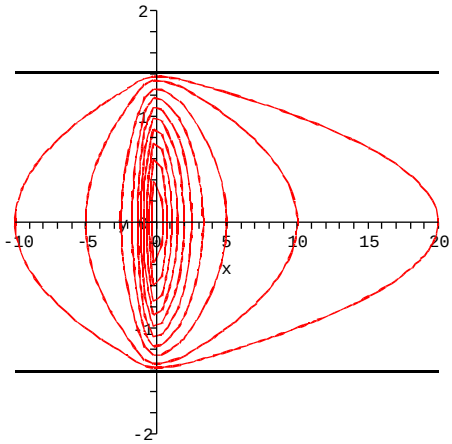

Figure 6: Courbes $\mathcal{C}_c$

On a

$$J(c) = \oint_{\mathcal{C}_c} \xi_{u_1} du_1 = \epsilon^{-1} \int_{u_{\min}}^{u_{\max}} \sqrt{2[E' + cB(u,0)]} du$$

. Pour obtenir le développement (6.9) il faut vérifier que $(\epsilon J)(c)$ est croissante sur $]-\frac{E'}{B_M}, 0[$, puis montrer que sa dérivée est aussi croissante sur un intervalle du type $]a, 0[$. Cela vient du comportement de $B(u)$ à l'infini. Sur la figure 6 on a $E' = B_M = 1$; les courbes $\mathcal{C}_c$ délimitent une aire de plus en plus grande quand c croît de $-0,9$ à $-0,1$.

Le théorème (6.2) a pour conséquence que $c''(\epsilon J)$ ne s'annule qu'en un nombre fini de valeurs $J_1, ...J_p$. Nous pouvons alors appliquer le théorème de Moser sur chacun des anneaux $\mathcal{A}(\epsilon J_k, \epsilon J_{k+1})$ et sur tout anneau extérieur aux cercles $J = J_1$ et $J = J_p$.

Sur un tel anneau il est possible d'exprimer l'action J comme une fonction du nouveau temps ϕ . On montre que le difféomorphisme de l'anneau $(J(0), \psi(0)) \to (J(2\pi), \psi(2\pi))$ vérifie la condition de Moser (voir [50], [51]). En effet elle s'exprime ici par la condition que $c''(\epsilon J)$ ne s'annule pas. La condition de Moser est équivalente à la condition de non dégénérescence faible utilisée par Arnold dans [3]. L'intérêt est qu'elle est explicitement vérifiable dans cette étude.

On obtient alors qu'il existe une infinité de courbes invariantes par ce difféomorphisme. Ces courbes engendrent des tores invariants ; ils feuillettent la surface d'énergie $\mathcal{H} = E$ et toute trajectoire commençant entre deux tores reste entre ces tores. En conséquence la quantité I_u est un invariant adiabatique perpétuel.

Le résultat est le suivant :

Théorème 6.3 *Soit M fixé . Il existe $\epsilon_0 > 0$ et $K > 0$ tels que la trajectoire de la solution est bornée, si les conditions suivantes sont satisfaites*

$$(CI) \quad E < \frac{\epsilon^2}{16}|M|^{2/3}$$

$$(CI)' \quad I_u(0) > 2K\epsilon^3$$

pour un $\epsilon < \epsilon_0$.

Les conditions (CI) et $(CI)'$ sont compatibles. Elle expriment la nécessité que les vitesses soient petites en comparaison des positions et que la vitesse orthogonale à la ligne de champ ne soit pas trop faible par rapport à l'énergie totale. En particulier cela exclut le cas $z(0) = \dot{z}(0) = \dot{\theta}(0) = 0$, qui correspond à un départ sur la ligne de champ (L_0) (la droite $\theta = \theta(0), z = 0$) avec une vitesse parallèle à cette ligne. En effet la trajectoire dans ce cas n'est pas bornée, elle fuit le long de (L_0), qui peut être vue comme le fonds de puits pour le potentiel dégénéré $V(u, v) = B(u, 0)\ v^2$.

Les figures des pages suivantes représentent le tracé d'une trajectoire obtenue par simulation numérique. Les conditions initiales sont $M_0(1, 1, 0)$ et $V_0(0, 15; -0, 25; 0, 25)$. Lorsque la trajectoire s'éloigne suffisamment de l'origine la bande $\mathcal{B}$ dans laquelle elle est comprise (si l'on considère un plan de coupe vertical) apparaît nettement. La simulation paraît montrer que les fuites vers le bas sont bornées : le pas de l'hélice diminue mais la particule se stabilise puis est renvoyée vers l'origine sur une autre hélice.

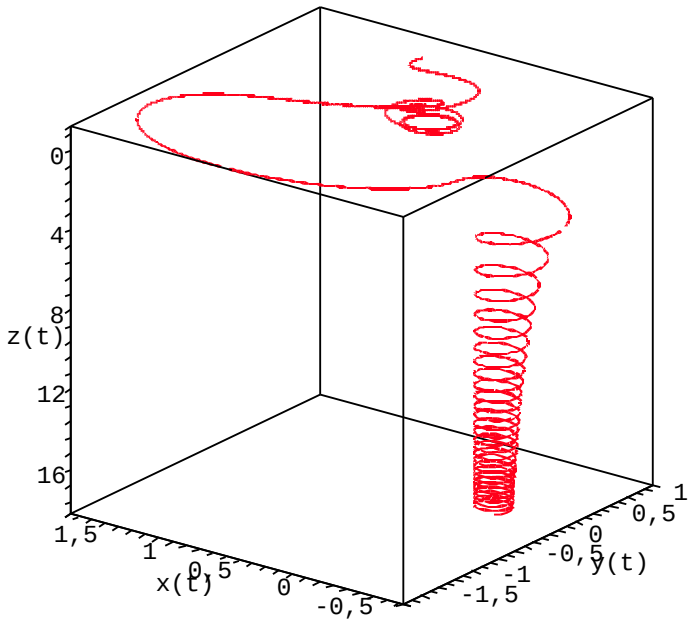

Figure 7: Trajectoire

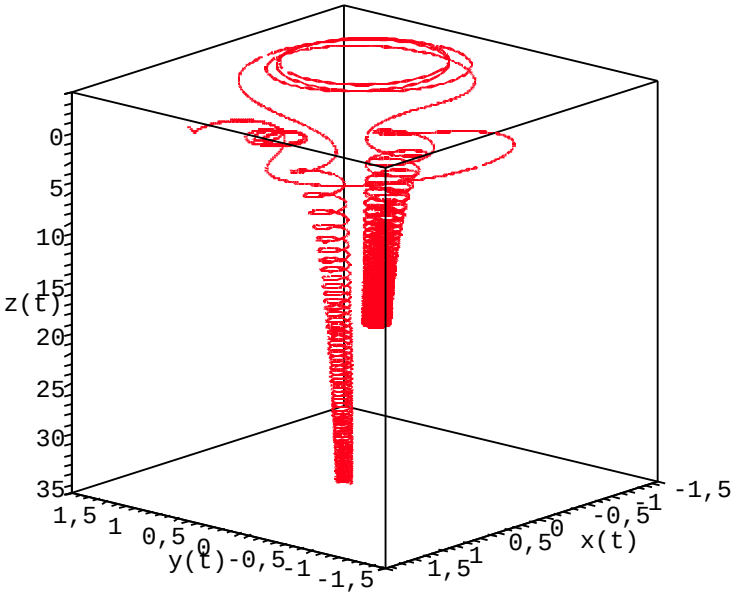

Figure 8: Trajectoire (suite)

7 Perspectives de recherche

- Le travail que nous venons d'évoquer donne envie d'en savoir plus. En effet on sait donner une réponse (partielle) quand le champ est symétrique car les tores invariants issus du hamiltonien non perturbé empêchent la fuite de la particule. Dans le cas non symétrique l'espace de phase est de dimension 6, la surface d'énergie est de dimension 5 et les tores n'ont plus de rôle limitatif. Il serait intéressant de savoir s'il y a une dérive exponentiellement faible dans ce cas, comme les travaux de Nekhoroshev et Georgilli semblent l'indiquer [53],[22]. Le travail de G.Benettin et P.Sempio [5] va dans ce sens, en définissant trois échelles de temps pour un tel mouvement.

- En ce qui concerne l'opérateur de Neumann magnétique il existe des asymptotiques pour la première valeur propre dans le cas d'un champ constant. Si le domaine Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ on obtient ([19] [26]) le développement

$$\lambda_1(h) = \Theta_0 bh - k_{max} C_1 h^{3/2} + \mathcal{O}(h^{7/4}) \ .$$

  Dans cette formule Θ_0 est le minimum de la fonction $\mu(x)$ définie en section 4.1, b est la norme du champ, C_1 est une constante universelle et k_{max} est la valeur maximale de la courbure de la frontière $\partial\Omega$. Mais que se passe-t-il pour un champ variable? Le résultat établi dans [26] est le suivant, dans le cas $b > \Theta_0 b'$ (en gardant les définitions de la section 4.1 et en supposant que le champ restreint ła frontière admet un unique minimum non dégénéré) :

$$\lambda_1(h) = \Theta_0 b' h + \mathcal{O}(h^{3/2}) \ .$$

  Dans un travail récent, avec les hypothèses précédentes, Nicolas Raymond [55] donne le terme du développement d'ordre supérieur. Ce terme fait intervenir la courbure , la dérivée normale de B et la dérivée tangentielle d'ordre 2. Que se passe -t-il en dimension 3?

- Dans le cadre des bouteilles magnétiques en géométrie hyperbolique il est possible de généraliser le résultat obtenu sur le demi-plan de Poincaré aux variétés hyperboliques à géométrie finie. Dans le cas où ces variétés sont de volume infini, il s'agit de variétés comportant des cusps et des entonnoirs, et la méthode du min-max peut s'adapter [74].

Le cas des variétés hyperboliques compactes a déjà été traité dans le cadre plus général des variétés riemanniennes compactes [8]. Pour le cas des variétés hyperboliques non compactes de volume fini on peut se référer à [23].

Il serait intéressant aussi d'étudier le cas tri-dimensionnel. Quelles propriétés du champ permettraient-elles d 'obtenir une asymptotique dans le demi-espace hyperbolique?

Enfin, d'un point de vue plus géométrique on aimerait comprendre ce que le facteur 1/4, qui provient de la géométrie hyperbolique, devient si l'on considère une autre métrique.

- Il existe encore un autre genre de question pour les bouteilles magnétiques : peut-on définir un opérateur avec champ magnétique sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ de sorte qu'il soit essentiellement auto-adjoint? Plus précisément quel genre de croissance au bord de Ω le champ magnétique doit-il avoir pour qu'il ne soit pas nécessaire de donner des conditions au bord pour avoir unicité de l'extension auto-adjointe? En effet on peut penser que la trajectoire classique ne "voit" pas le bord, ce qui se traduit par la notion de complétude classique. Il faudrait ainsi étudier les conditions qui correspondent à la notion de complétude quantique, de façon identique à l'étude de l'opérateur de Schrödinger sur la demi-droite faite dans [56].

  Ces questions d'extensions auto-adjointes se posent aussi dans le cadre de graphes infinis.

- L'équation de Ginzburg-Landau $-\Delta u = \frac{1}{\epsilon^2} u(1-|u|^2)$ dans $\mathbb{R}^2$ admet, pour tout entier naturel d non nul, une solution radiale, qui est de la forme $u_{d,\epsilon}(r,\theta) = e^{i\theta} f_d(\frac{r}{\epsilon})$.
  La fonction f_d est l'unique solution non constante du problème
  $-f'' - \frac{f'}{r} + d^2 \frac{f}{r^2} = f(1-f^2)$ sur $[0,+\infty[$
  $\lim_{+\infty} f(r) = 1, \quad f(0) = 0, \quad f \geq 0$.

  On peut définir l'opérateur linéarisé autour de $u_{d,\epsilon}$

$$L_{d,\epsilon} w = \Delta w + \frac{w}{\epsilon^2}(1 - |u_{d,\epsilon}^2|) - \frac{2}{\epsilon^2}\, u_{d,\epsilon}.w\; u_{d,\epsilon}$$

La solution radiale est stable pour $d = 1$ au sens que la forme quadratique associée à $L_{d,\epsilon}$ est définie positive. Cela n'est plus le cas pour $d > 1$, il existe une valeur propre négative au moins. On peut s'intéresser aux valeurs propres $\lambda(\epsilon)$ de l'opérateur conjugué

$$\mathcal{L}_{d,\epsilon} = e^{-id\theta} L_{d,\epsilon} e^{id\theta} \ .$$

Existe-t-il une valeur propre de $\mathcal{L}_{d,\epsilon}$ qui tend vers 0 quand ϵ tend vers 0? Cela n'est pas connu pour les valeurs de n telles que $2 \leq n \leq 2d-2$. Cette question revient à chercher si l'équation $\mathcal{L}_{d,1} w = 0$ a une solution sur $\mathbb{R}^2$ bornée à la fois en 0 et à l'infini.Ce genre d'information est crucial pour construire des solutions de l'équation de Ginzburg-Landau.

Bibliographie

[1] J.W. Anderson : Hyperbolic Geometry, Springer, New York 1999.

[2] V.I. Arnold : Dynamical systems, Springer Verlag,Encyclopaedia of Math Sc, 3, 1988.

[3] V.I. Arnold : Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial dynamics, Russ. Math. Survey, 18, 6, (1963), 85-190.

[4] J. Avron, I. Herbst, B. Simon : Schrödinger operators with magnetic fields, Duke. Math. J., 45 (1978), 847-883.

[5] G. Benettin, P. Sempio : Adiabatic invariants and trapping of a point charge in a strong non-uniform magnetic field, Nonlinearity,7 (1994), 281-303.

[6] M. Braun : Particle motions in a magnetic field, Journal of Diff.Equ, 8, (1970), 294-332.

[7] Y. Colin de Verdière : L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques, Comm. Math. Phys., 105, (1986), 327-335.

[8] Y. Colin de Verdière : Quasi-modes sur les variétés riemanniennes, Invent. Math, 43,(1) (1977), 15-52.

[9] Y. Colin de Verdière : L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques bi-dimensionnelles, Prépublications de l'Institut Fourier, 33 (1985).

[10] Y. Colin de Verdière : Minorations de sommes de valeurs propres d'un domaine et conjecture de Polya, Séminaire de Théorie spectrale et Géométrie, (1984-85).

[11] A. Comtet : On the Landau Levels on the hyperbolic space, Ann. Phys., 173, (1987), 185-209.

[12] J-P. Demailly : Champs magnétiques et inégalités de Morse pour la d"-cohomologie, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 35, (1985), 189-229.

[13] J.S. de Wet and Mandl : On the asymptotic distribution of eigenvalues, Proc. Roy. Soc. London Ser., 200 (1950), 572-580.

[14] S. Doi, A. Iwatsuka, T. Mine : The uniqueness of the integrated density of states for the Shrodinger operators with magnetic fields, Mathematische Zeitschrift, 237, (2001), 335-371.

[15] S. Dozias : Clustering for the spectrum of h-pseudodifferential operators with periodic flow on an energy surface, J. Funct. Anal. 145,(1997), 296-311.

[16] A. Dufresnoy : Un exemple de champ magnétique dans $\mathbb{R}^{\nu}$, Duke. Math. J. 50, (1983), 729-734.

[17] N. Dunford, J. T. Schwartz : Linear operator, II, Spectral Theory, John Wiley & sons, New York 1971.

[18] J. Elstrodt : Die Resolvente zum Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischem Ebene, I, II, III. Math. Ann., 203, (1973), 295-330, Math. Z., 132, (1973), 99-134, Math. Ann., 208, (1974), 99-132.

[19] S. Fournais, B. Helffer : Accurate eigenvalue asymptotics for the magnetic Neumann Laplacian, . Annales de l'Institut Fourier, 56,1 (2006), 1-67.

[20] S. Fournais, B. Helffer : On the third critical field in Ginzburg-Landau theory, .Comm. Math. Phys. 266 (1), (2006), 153-196.

[21] M. Gardner : The adiabatic invariant of periodic classical systems, . Phys.Rev. 115 (1959), 791-794.

[22] A. Giorgilli : Rigorous results on the power expansions for integrals of a hamiltonian system near an elliptic equilibrium, Ann. Inst. Henri Poincaré 48, (4), (1988), 423-439.

[23] S. Golénia, S. Moroianu : Spectral analysis of magnetic Laplacians on conformally cusp manifolds, arξiv :math0707780v4, 2007.

[24] C. Grosche : The path integral on the Poincaré upper half-plane with magnetic field and for the Morse potential, Ann. Phys., 187, (1988), 110-134.

[25] B. Helffer : Introduction to the semiclassical analysis for the Schrödinger operator and applications, Springer lecture Notes in Math., 1336, (1988).

[26] B. Helffer, A. Morame : Magnetic bottles in connection with superconductivity, J. of Functional Anal., 185 (2001), 604-680.

[27] B. Helffer, A. Morame : Magnetic bottles for the Neumann problem: the case of dimension 3, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), Vol. 112, (1), (2002), 71-84.

[28] B. Helffer, A. Morame : Magnetic bottles for the Neumann problem: curvature effects in the case of dimension 3 (general case), Ann. Sc. Ec. Norm. Sup., 37, (4), (2004), 105-170.

[29] B. Helffer, D. Robert : Propriétés asymptotiques du spectre d'opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathbb{R}^n$., Comm. in P.D.E., 7, (7), (1982), 795-882.

[30] B. Helffer, D. Robert : Comportement semi-classique du spectre des hamiltoniens quantiques hypoelliptiques, Annales ENS Pise IV, 9,(3), (1982), 405-431.

[31] B. Helffer, J. Sjöstrand : Multiple wells in the semi-classical limit, I, Comm. in P.D.E., 9, (4), (1984), 337-408.

[32] B. Helffer, J. Sjöstrand : Puits multiples en mecanique semi-classique, VI, Ann. Institut H. Poincaré, Phys. Theor., 46,(4),(1987), 353-372.

[33] L. Hörmander : The Weyl calculus of pseudo-differential operators, Comm. Pure Appl. Math., 32, (1979), 359-443.

[34] L. Hörmander : Hypoelliptic second order differential equations, Acta. Math., 119, (1967), 147-171.

[35] N. Ikeda : Brownian Motion on the Hyperbolic plane and Selberg Trace Formula, J. Func. Anal., 163, (1999), 63-110.

[36] Y. Inahama, S. Shirai : The essential spectrum of Schrödinger operators with asymptotically constant magnetic fields on the Poincaré upper-half plane, J. Math. Phys., 44, (2003), 89-106.

[37] Y. Inahama, S. Shirai : Eigenvalue asymptotics for the Schrödinger operators on the hyperbolic plane, J. Func. Anal., 211, (2004), 424-456.

[38] Y. Inahama, S. Shirai : Spectral properties of Pauli operators on the Poincaré upper-half plane, J. math. Phys., 44, (2003), 2451-2462.

[39] V. Ivrii : Microlocal analysis and precise spectral asymptotics, Springer, Berlin 1998.

[40] A. Iwatsuka : Magnetic Schrödinger operators with compact resolvent, J. Math. Kyoto. Univ., 26, (3), (1986), 357-374.

[41] S. Kim, C. Lee : Supersymmetry-Based Approach to Quantum Particle. Dynamics on a curved Surface with Non-zero Magnetic Field, Ann. Phys., 296, (2002), 390-405.

[42] A.G. Kostjucenko : Asymptotic distribution of the eigenvalues of elliptic operators, Soviet Math. Dokl., 5, (1964), 1171-1175.

[43] M. Kruskal : Asymptotic theory of Hamiltonian and other systems with all solutions nearly periodic, Journal of Math. Phys. 3, (1962), 806-829 .

[44] B.M. Levitan : On the asymptotic behavior of Green's function and its expansion in eigenvalues of Schrödinger's equation, Math.USSR-Sb.41, 83, (1957), 439-458.

[45] K. Lu, X-B. Pan : Estimates of the upper critical field for the Ginzburg-Landau equations of superconductivity, Physica D 127, (1999), 73-104.

[46] K. Lu, X-B. Pan : Eigenvalue problems of Ginzburg-Landau operator in bounded domains, Journal of Math. Physics, Vol. 40, (6), (1999), 2647-2670.

[47] K. Lu, X-B. Pan : Surface nucleation of superconductivity in 3-dimension, J. of Differential Equations 168 (2), (2000), 386-452.

[48] A. Martinez : Développement asymptotiques et effet tunnel dans l'approximation de Born-Oppenheimer, Ann. Inst. Henri Poincaré, 49, (3), (1989), 239-257.

[49] H. Matsumoto : Semiclassical asymptotics of eigenvalue distributions for Schrödinger operators with magnetic fields, Comm. in Partial Diff. Eq, 19, (1994), 719-759.

[50] J. Moser : On invariant curves of area preserving mappings of an annulus, Nachr. Acad. Wiss. II Gottingen, Math. Phys. Klasse, (1962), 1-20.

[51] J. Moser : Stable and Random motions in dynamical systems, Annals of math studies. Princeton University Press, (1973), 1-20.

[52] A.I. Neistadt : The separation of motions in systems with rapidly rotating phase, J. Appl. Math. Mech.,48, (1984), 133-139.

[53] N.N. Nekhoroshev : An exponential estimate of the time of stability of nearly-integrable hamiltonian systems, Russ.Math.Surveys,32, (1977), 1-65.

[54] T.G. Northrop : The adiabatic motion of charged particles, Wiley Interscience Publishers New York, 1963.

[55] N. Raymond : Sharp asymptotics for the Neumann Laplacian with variable magnetic field :Case of dimension 2, preprint, 2008.

[56] M. Reeds, B. Simon : Methods of Modern Mathematical Physics II, Academic press, New York, 1978.

[57] M. Reeds, B. Simon : Methods of Modern Mathematical Physics IV, Academic press, New York, 1978.

[58] D. Robert : Comportement asymptotique des valeurs propres d'opérateurs du type de Schrödinger à potentiel dégénéré, J. Math. Pures et Appl., 61, (1982), 275-300.

[59] D. Robert : Autour de l'approximation semi-classique, Progress in Math., Birkhäuser, Berlin 1986.

[60] G. V. Rozenbljum : Asymptotics of the eigenvalues of the Schrödinger operator, Math. USSR Sbornik, (Eng. trans.), 22, (3), (1974), 349-371.

[61] B. Simon : Nonclassical eigenvalue asymptotics, J. of Funct. Analysis, 53, (1983), 84-98.

[62] B. Simon : Semi-classical analysis of low lying eigenvalues I, Ann. Inst. H. Poincaré, 38, (1983), 295-307.

[63] J. Sjöstrand : On the eigenvalues of a class of hypoelliptic operators, IV, Ann. Inst. Fourier Grenoble, 30, (1980), 109-169.

[64] M. Z. Solomyak : Asymptotics of the spectrum of the Schrödinger operator with nonregular homogeneous potential, Math. USSR Sbornik, (Eng. trans.), 55, (1), (1986), 19-37.

[65] M. Shubin : The essential Self-adjointness for Semi-bounded Magnetic Schrödinger operators on Non-compact Manifolds, J. Func. Anal., 186, (2001), 92-116.

[66] H. Tamura : Asymptotic distribution of eigenvalues for Schrödinger operators with magnetic fields, Nagoya Math. J. 105, (1987), 40-69.

[67] E.C. Titchmarsh : On the asymptotic distribution of eigenvalues, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), 5, (1954), 228-240.

[68] F. Truc : Trajectoires bornées d'une particule soumise à un champ magnétique linéaire, Annales de l'IHP (Physique théorique), 64, (1996), 127-154.

[69] F. Truc : Semi-classical asymptotics for magnetic bottles, Asympt.Anal., 15, (1997), 385-395.

[70] A. Morame, F. Truc : Semiclassical Eigenvalue Asymptotics for a Schrödinger Operator with Degenerate Potential, Asymptotic Anal., 22, (1), (2000), 39-49.

[71] A. Morame, F. Truc : Remarks on the spectrum of the Neuman problem with magnetic field in the half-space, Journal of Mathematical Physics, 46, (1), (2005), 1-13. http://www-fourier.ujf-grenoble.fr20/PREP/

[72] A. Morame, F. Truc : Accuracy on eigenvalues for a Schrödinger Operator with a Degenerate Potential in the semi-classical limit, Cubo, A Mathematical Journal, 9, (2), (2007), 1-14. http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00079167/en/

[73] A. Morame, F. Truc : Magnetic bottles on the Poincaré half-plane : spectral asymptotics, à paraître dans J. Math. Kyoto Univ. http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00195370/en/

[74] A. Morame, F. Truc : Magnetic bottles on geometrically finite hyperbolic surfaces, http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00318791/en/

[75] F. Truc : Born-Oppenheimer-type approximations for a degenerate potential : recent results and a survey on the area, Proceedings of OTAMP 2006, Birkhaüser, 415-425.