Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège

Nicolas Balacheff

▶ **To cite this version:**

Nicolas Balacheff. Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège. Modélisation et simulation. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1988. tel-00326426

HAL Id: tel-00326426

https://theses.hal.science/tel-00326426

Submitted on 3 Oct 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Joseph Fourier — Grenoble 1
Institut National Polytechnique de Grenoble

THESE

une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège

Thèse présentée pour obtenir le grade de docteur ès-sciences
didactique des mathématiques
par

Nicolas Balacheff

VOLUME 1

VOLUME 2

Soutenue le 5 février 1988 devant la commission d'examen :

président	J.P. Bertrandias
invité	J. Kuntzmann
examinateurs	G. Arsac, M. Chein, C. Houzel, C. Laborde, C. Payan, J. Rogalski

UNIVERSITE Joseph FOURIER (GRENOBLE I)

Président de l'Université :
M. PAYAN Jean Jacques

Année Universitaire 1987 - 1988

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE SCIENCES ET DE GEOGRAPHIE

PROFESSEURS DE 1ère Classe

ARNAUD Paul	Chimie Organique
ARVIEU ROBERT	Physique Nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S
AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
AYANT Yves	Physique Approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARJON Robert	Physique Nucléaire ISN
BARNOUD Fernand	Biochimie Macromoléculaire Végétale
BARRA Jean-René	Statistiques-Mathématiques Appliquées
BECKER Pierre	Physique
BEGUIN Claude	Chimie Organique
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude	Mathématiques Pures
BERARD Pierre	Mathématiques Pures
BERNARD Alain	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Pures
BILLET Jean	Géographie
BOELHER Jean-Paul	Mécanique
BONNIER Jane Marie	Chimie Générale
BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire ISN
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie Végétale
CAUQUIS Georges	Chimie Organique
CHARDON Michel	Géographie
CHIBON Pierre	Biologie Animale
COHEN ADDAD Jean-Pierre	Physique
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques Pures
CYROT Michel	Physique du Solide
DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DEMAILLY Jean-Pierre	Mathématiques Pures
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPORTES Charles	Chimie Minérale
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des Plasmas
DOUCE Roland	Physiologie Végétale
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques Pures
GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique,
GIRAUD Pierre	Géologie
HICTER Pierre	Chimie
IDELMAN Simon	Physiologie Animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
KAHANE André, détaché	Physique
KAHANE Josette	Physique
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques Appliquées

LAJZEROWICZ Jeanine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques Appliquées
LEBRETON Alain	Mathématiques Appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LHOMME Jean	Chimie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences Nucléaires I.S.N.
LUNA Domingo	Mathématiques Pures
MACHE Régis	Physiologie Végétale
MASCLE Georges	Géologie
MAYNARD Roger	Physique du Solide
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (Biologie Végétale)
PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
PIERRE Jean-Louis	Chimie Organique
RENARD Michel	Thermodynamique
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
ROSSI André	Biologie
SAXOD Raymond	Biologie Animale
SENGEL Philippe	Biologie Animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques Pures
SOUCHIER Bernard	Biologie
SOUTIF Michel	Physique
STUTZ Pierre	Mécanique
TRILLING Laurent	Mathématiques Appliquées
VALENTIN Jacques	Physique Nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
VIALON Pierre	Géologie

PROFESSEURS de 2ème Classe

ADIBA Michel	Mathématiques Pures
ANTOINE Pierre	Géologie
ARMAND Gilbert	Géographie
BARET Paul	Chimie
BLANCHI J.Pierre	STAPS
BLUM Jacques	Mathématiques Appliquées
BOITET Christian	Mathématiques Appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUANDET J.François	Physique
BRUGAL Gérard	Biologie
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CERFF Rudiger	Biologie
CHIARAMELLA Yves	Mathématiques Appliquées
COURT Jean	Chimie
DUFRESNOY Alain	Mathématiques Pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GENIES Eugène	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude	Sciences Nucléaires
GILLARD Roland	Mathématiques Pures
GIORNI Alain	Sciences Nucléaires
GONZALEZ SPRINBERG Gérardo	Mathématiques Pures
GUIGO Maryse	Géographie
GUMUCHAIN Hervé	Géographie
GUITTON Jacques	Chimie

HACQUES Gérard	Mathématiques Appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HERAULT Jeanny	Physique
JARDON Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKHOVE Claude	Géologie
LONGEQUEUE Nicole	Sciences Nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physique
MANDARON Paul	Biologie
MARTINEZ Francis	Mathématiques Appliquées
NEMOZ Alain	Thermodymamique CNRS - CRTBT
OUDET Bruno	Mathématiques Appliquées
PECHER Arnaud	Géologie
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude	Sciences Nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
PIBOULE Michel	Géologie
RAYNAUD Hervé	Mathématiques Appliquées
RICHARD Jean-Marc	Physique
RIEDTMANN Christine	Mathématiques Pures
ROBERT Gilles	Mathématiques Pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie Physique
SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
SAYETAT Françoise	Physique
SERVE Denis	Chimie
STOECKEL Frédéric	Physique
SCHOLL Pierre-Claude	Mathématiques Appliquées
SUBRA Robert	Chimie
VALLADE Marcel	Physique
VIDAL Michel	Chimie Organique
VIVIAN Robert	Géographie
VOTTERO Philippe	Chimie

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L' IUT 1

PROFESSEURS de 1ère Classe

BUISSON Roger	Physique IUT 1
DODU Jacques	Mécanique Appliquée IUT 1
NEGRE Robert	Génie Civil IUT 1
NOUGARET Marcel	Automatique IUT 1
PERARD Jacques	EEA. IUT 1

PROFESSEURS de 2ème classe

BOUTHINON Michel	EEA. IUT 1
CHAMBON René	Génie Mécanique IUT 1
CHEHIKIAN Alain	EEA. IUT 1
CHENAVAS Jean	Physique IUT 1
CHOUTEAU Gérard	Physique IUT 1
CONTE René	Physique IUT 1
GOSSE Jean-Pierre	EEA.IUT 1
GROS Yves	Physique IUT 1
KUHN Gérard, (Détaché)	Physique IUT 1
MAZUER Jean	Physique IUT 1
MICHOULIER Jean	Physique IUT 1
MONLLOR Christian	EEA.IUT 1
PEFFEN René	Métallurgie IUT 1
PERRAUD Robert	Chimie IUT 1
PIERRE Gérard	Chimie IUT 1
TERRIEZ Jean-Michel	Génie Mécanique IUT 1
TOUZAIN Philippe	Chimie IUT 1
VINCENDON Marc	Chimie IUT 1

PROFESSEURS DE PHARMACIE

AGNIUS-DELORD Claudine	Physique	Faculté La Tronche
ALARY Josette	Chimie Analytique	Faculté La Tronche
BERIEL Hélène	Physiologie et Pharmacologie	Faculté La Tronche
CUSSAC Max	Chimie Therapeutique	Faculté La Tronche
DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie	Faculté La Tronche
FAVIER Alain	Biochimie	C.H.R.G.
JEANNIN Charles	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan
LATURAZE Jean	Biochimie	Faculté La Tronche
LUU DUC Cuong	Chimie Générale	Faculté La Tronche
MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognosie	Faculté La Tronche
MARZIN Daniel	Toxicologie	Faculté Meylan
RENAUDET Jacqueline	Bactériologie	Faculté La Tronche
ROCHAT Jacques	Hygiéne et Hydrologie	Faculté La Tronche
SEIGLE-MURANDI Françoise	Botanique et Cryptogamie	Faculté Meylan
VERAIN Alice	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE MEDECINE

PROFESSEURS CLASSE EXEPTIONNELLE ET 1ère CLASSE

AMBLARD Pierre	Dermatologie	C.H.R.G.
AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie	C.H.R.G.
BEAUDOING André	Pédiatrie-Puericulture	C.H.R.G.
BEZEZ Henri	Orthopédie-Traumatologie	Hopital SUD
BONNET Jean-Louis	Ophtalmologie	C.H.R.G.
BOUCHET Yves	Anatomie	Faculté La Merci
	Chirurgie Générale et Digestive	C.H.R.G.
BUTEL Jean	Orthopédie-Traumatologie	C.H.R.G.
CHAMBAZ Edmond	Biochimie	C.H.R.G.
CHAMPETIER Jean	Anatomie-Topographique et Appliquée	C.H.R.G.
CHARACHON Robert	O.R.L.	C.H.R.G.
COLOMB Maurice	Immunologie	Hopital sud
COUDERC Pierre	Anatomie-Pathologique	C.H.R.G.
DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie	C.H.R.G.
DENIS Bernard	Cardiologie	C.H.R.G.
GAVEND Michel	Pharmacologie	Faculté La Merci
HOLLARD Daniel	Hématologie	C.H.R.G.
LATREILLE René	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
LE NOC Pierre	Bactériologie-Virologie	C.H.R.G.
MALINAS Yves	Gynécologie et Obstétrique	C.H.R.G.
MALLION Jean-Michel	Médecine du Travail	C.H.R.G.
MICOUD Max	Clinique Médicale et Maladies Infectieuses	C.H.R.G.
MOURIQUAND Claude	Histologie	Faculté La Merci
PARAMELLE Bernard	Pneumologie	C.H.R.G.
PERRET Jean	Neurologie	C.H.R.G.
RACHAIL Michel	Hépato-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie	C.H.R.G.
SARRAZIN Roger	Clinique Chirurgicale	C.H.R.G.
STIEGLITZ Paul	Anestésiologie	C.H.R.G.
TANCHE Maurice	Physiologie	Faculté La Merci
VIGNAIS Pierre	Biochimie	Faculté La Merci

PROFESSEURS 2ème CLASSE

BACHELOT Yvan	Endocrinologie	C.H.R.G.
BARGE Michel	Neurochirurgie	C.H.R.G.
BENABID Alim Louis	Biophysique	Faculté La Merci
BENSA Jean-Claude	Immunologie	Hopital Sud
BERNARD Pierre	Gynécologie-Obstétrique	C.H.R.G.
BESSARD Germain	Pharmacologie	ABIDJAN
BOLLA Michel	Radiothérapie	C.H.R.G.
BOST Michel	Pédiatrie	C.H.R.G.
BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie Adultes	Hopital Sud
BRAMBILLA Christian	Pneumologie	C.H.R.G.
CHIROSSEL Jean-Paul	Anatomie-Neurochirurgie	C.H.R.G.
COMET Michel	Biophysique	Faculté La Merci
CONTAMIN Charles	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
CORDONNIER Daniel	Néphrologie	C.H.R.G.
COULOMB Max	Radiologie	C.H.R.G.
CROUZET Guy	Radiologie	C.H.R.G.
DEBRU Jean-Luc	Médecine Interne et Toxicologie	C.H.R.G.
DEMONGEOT Jacques	Biostatistiques et Informatique Médicale	Faculté La Merci
DUPRE Alain	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
DYON Jean-François	Chirurgie Infantile	C.H.R.G.
ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie	Faculté La Merci
FAURE Claude	Anatomie et Organogénèse	C.H.R.G.
FAURE Gilbert	Urologie	C.H.R.G.
FOURNET Jacques	Hépato-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
FRANCO Alain	Médecine Interne	C.H.R.G.
GIRARDET Pierre	Anesthésiologie	C.H.R.G.
GUIDICELLI Henri	Chirurgie Générale et Vasculaire	C.H.R.G.
GUIGNIER Michel	Thérapeutique et Réanimation Médicale	C.H.R.G.
HADJIAN Arthur	Biochimie	Faculté La Merci
HALIMI Serge	Endocrinologie et Maladies Métaboliques	C.H.R.G.
HOSTEIN Jean	Hépato-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
HUGONOT Robert	Médecine Interne	C.H.R.G.
JALBERT Pierre	Histologie-Cytogénétique	C.H.R.G.
JUNIEN-LAVILLAUROY Claude	O.R.L.	C.H.R.G.
KOLODIE Lucien	Hématologie Biologique	C.H.R.G.
LETOUBLON Christian	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
MACHECOURT Jacques	Cardiologie et Maladies Vasculaires	C.H.R.G.
MAGNIN Robert	Hygiène	C.H.R.G.
MASSOT Christian	Médecine Interne	C.H.R.G.
MOUILLON Michel	Ophtalmologie	C.H.R.G.
PELLAT Jacques	Neurologie	C.H.R.G.
PHELIP Xavier	Rhumatologie	C.H.R.G.
RACINET Claude	Gynécologie-Obstétrique	Hopital Sud
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie	C.H.R.G.
RAPHAEL Bernard	Stomatologie	C.H.R.G.
SCHAERER René	Cancérologie	C.H.R.G.
SEIGNEURIN Jean-Marie	Bactériologie-Virologie	Faculté La Merci
SELE Bernard	Cytogénétique	Faculté La Merci
SOTTO Jean-Jacques	Hématologie	C.H.R.G.
STOEBNER Pierre	Anatomie Pathologique	C.H.R.G.
VROUSOS Constantin	Radiothérapie	C.H.R.G.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance à Monsieur le Professeur Jean Kuntzmann, initiateur de la recherche universitaire sur l'enseignement des mathématiques à l'Université de Grenoble 1. Il est l'un des pionniers du développement d'une véritable recherche scientifique dans ce domaine en France. C'est sous sa direction que j'ai conduit mes premiers travaux et que j'ai appris le métier de la recherche. L'expression de sa confiance et de ses critiques, ses suggestions toujours stimulantes, m'ont soutenu et guidé tout au long de la réalisation des travaux présentés ici.

Monsieur Charles Payan, Directeur de recherche au CNRS (Laboratoire LSD, Grenoble) a bien voulu accepter d'être mon directeur de thèse. Je le remercie vivement pour ses remarques vigilantes tout au long de la rédaction de cette thèse et le soutien amical qu'il a su m'apporter.

Je remercie Monsieur Jean Paul Bertrandias, Professeur à l'Université de Grenoble 1, qui me fait l'honneur de présider le jury de soutenance de cette thèse.

Je remercie :
Monsieur Gilbert Arsac, Professeur à l'Université Claude Bernard, Lyon
Monsieur Christian Houzel, Professeur à l'Université de Paris Nord
Monsieur Michel Chein, Professeur à l'Université de Languedoc, Montpellier
Madame Colette Laborde, Maître de conférence à l'Université de Grenoble 1,
Madame Janine Rogalski, Chargé de recherche au CNRS, Laboratoire de psychologie du développement et de l'éducation de l'enfant, Université de Paris V,
qui ont bien voulu accepter de faire partie du jury de soutenance de cette thèse.

Les travaux de recherche présentés ici n'auraient pu avoir lieu sans la participation de nombreuses personnes, chercheurs et enseignants, à la réalisation des expériences nécessaires.

Je tiens à remercier particulièrement :

- les membres de l'équipe de recherche en didactique des mathématiques et de l'informatique de l'Université de Grenoble 1.

- les membres de l'équipe de recherche de l'IREM de Lyon, animée par Gilbert Arsac et Michel Mante. C'est de notre collaboration que sont issues les expériences utilisées au chapitre VI.

- Claire Dupuis qui, lors de son séjour à Grenoble, m'a aidé activement pour la réalisation des expériences et la récolte des données utilisées au chapitre II.

- les enseignants qui m'ont accueilli dans leurs classes : Danièle Balacheff, Bernard Capponi, Gisèle Chapiron, Martine Cognée, Chantale Guidée, Marc Legrand, Martine Philippon.

Mes travaux de recherche ont mûri en même temps que se développait une communauté scientifique nouvelle, celle des chercheurs en didactique des mathématiques. Ils ont bénéficié des débats, des échanges vigoureux, des interrogations qui se sont développés au sein de cette communauté. Tout particulièrement mes entretiens avec Guy Brousseau ont eu un impact déterminant sur l'orientation de mes travaux, qu'il reçoive ici l'expression de ma reconnaissance. Je remercie vivement pour l'attention qu'ils ont bien voulu porter à mes travaux et leurs remarques stimulantes : Régine Douady, Georges Glaeser, Gérard Vergnaud.

Je remercie le service de reprographie de l'Institut IMAG pour son accueil toujours amical et tout le soin qu'il a apporté à la réalisation de cet ouvrage.

Si la réalisation d'une thèse doit beaucoup à l'environnement universitaire, on sait bien que rien ne serait possible sans la compréhension des proches confrontés à un travail toujours plus exigeant. Qu'il me soit permis d'exprimer ici une pensée affectueuse pour mon fils Boris et pour celle qui, depuis deux ans, n'a pas compté son temps pour m'aider dans la réalisation du manuscrit et qui a su, dans les moments de doute, m'apporter le réconfort.

Cette thèse leur est dédiée.

TABLE DES MATIERES

VOLUME 1

Introduction

I. Enseignement de la démonstration : position du problème 13
I.1. La démonstration : objet d'enseignement 13
I.2. Aspects du problème d'enseignement 17
II. Contenu des travaux de recherche présentés 21
II.1. Du côté de l'élève 21
II.2. Du côté du système didactique 24

Chapitre I : Explication, preuve et démonstration

I. Précisions sur le vocabulaire 27
I.1. Explication 28
I.2. Preuve 29
I.3. Démonstration 30
I.4. Raisonnement et processus de validation 31
II. Situation et processus de validation 32

II.1. Evidence du rôle de la situation 32
II.2. Situation de validation et situation de décision 33
II.3. L'interaction sociale comme moteur des processus de validation 36
II.4. Le désir de certitude comme moteur des processus de validation 39
III. La place du "sujet connaissant" 41
III.1. Introduction 41
III.2. Caractéristiques langagières des preuves et nature des connaissances 43
III.3. Remarques sur le concept de théorème-en-acte 49
IV. Niveaux et types de preuves 53
IV.1. "Problématique de l'efficacité" versus "problématique de la rigueur" 53
IV.2. Types de preuves 55
IV.2.1. L'empirisme naïf 56
IV.2.2. L'expérience mentale 56
IV.2.3. L'exemple générique 57
IV.2.4. L'expérience mentale 58
IV.3. Remarques sur les preuves intellectuelles et la démonstration 59
V. Dialectique de la validation 65
V.1. Preuves et réfutations 65
V.2. Le problème de la contradiction 68
V.3. Traitement des réfutations 72

Chapitre II : Preuves et contre-exemples : "les polygones"

I. Présentation de l'étude 75
I.1. Introduction 75

I.2. Description de la situation expérimentale 77
I.2.1. Le dispositif expérimental 77
I.2.2. Le champ conceptuel 78
I.2.3. Analyse a priori des procédures 81
I.2.4. Le recours à l'interaction sociale 84
I.3. Données globales sur les observations réalisées 86
I.3.1. La population des élèves observés 86
I.3.2. Le contrat expérimental 88
I.3.3. Problème posé et problème traité 90
I.3.4. Premières données sur la résolution du problème 91
a) Les solutions 91
b) La formulation des messages 93
II. Les types de preuves 101
II.1. Introduction 101
II.2. Les preuves pragmatiques 102
II.2.1. L'empirisme naïf 102
II.2.2. L'expérience cruciale 118
II.2.3. L'exemple générique 124
II.3. Les preuves intellectuelles 131
II.3.1. L'expérience mentale 131
II.3.2. Calcul sur des énoncés 143
II.4. Conclusions sur les types de preuve 146
II.4.1. La signification des processus de validation observés 146
II.4.2. Aspects langagiers et cognitifs 149
II.4.3. L'interaction sociale 151
II.4.4. L'exigence explicite de démonstration 152
III. Le traitement des contre-exemples 154
III.1. Introduction 154

III.2. Les types de traitements d'un contre-exemple 155
III.2.1. Les types de traitements retenus 155
III.2.2. Premières remarques à partir d'une vue globale et quantitative des décisions prises par les élèves 157
III.2.3. Abandon de la conjecture 162
III.2.4. La modification de la conjecture 168
III.2.5. Le contre-exemple traité comme une exception 176
III.2.6. L'introduction d'une condition 180
III.2.7. Les retours sur la définition 183
III.2.8. Le rejet du contre-exemple 187
III.3. Dynamique de la réfutation : trois études de cas. 192
III.4. Conclusion 200

Chapitre III : A propos du problème de la définition : retour sur "les polygones"

I. Introduction 207
II. Première observation : la genèse d'une problématique de la définition 210
II.1. Genèse d'une problématique de la définition 210
II.1.1. Bilan 210
II.1.2. L'absence d'une problématique de la définition 210
II.1.3. Le problème de la définiton posé d'emblée 213
II.2. Les types de définition et les conceptions 216
II.2.1. Fondements endogènes et exogènes 216
II.2.2. Un conflit de conceptions entre partenaires 218
II.2.3. La recherche de la bonne définition 221

II.2.4. Le jeu de la définition 223
II.3. Conclusion 227
III. Seconde observation : l'usage d'une information de référence 229
III.1. La construction d'un texte de référence 229
III.1.1. Le choix d'une définition de "polygone" et de "diagonale" 229
III.1.2. Le dispositif expérimental et sa mise en oeuvre 236
III.2. La résolution du problème 238
III.2.1. Les solutions, leurs fondements et leurs formulations 238
III.2.2. Le traitement des contre-exemples 255
III.3. Les fonctions du texte 266
III.3.1. Le texte porteur d'intention 267
III.3.2. Le texte et les questions de définition 269
IV. Conclusion 277

VOLUME 2

Chapitre IV : Deux études de cas

I. Les rectangles : contradictions et conceptions 281
I.1. L'objet de la recherche 281
I.2. Dispositif expérimental et analyse *a priori* 283
I.2.1. Présentation de la tâche et les conceptions attendues 283

I.2.2. Traitement des assertions suivant les conceptions mobilisées 286
I.2.3. Les contradictions et leurs conséquences 289
I.2.4. La population des élèves observés 290
I.3. Contradictions et comportements de "retour en arrière" 291
I.3.1. L'absence d'identification d'une contradiction 293
I.3.2. Contradictions attestées et suivies de "retours en arrière" 294
I.4. Preuves et réfutations des assertions *David* et *Suzanne* 296
I.4.1. La compréhension des assertions 296
I.4.2. Les preuves de *David* 297
I.4.3. Les réfutations de *David* et *Suzanne* 298
I.5. Evolution des preuves des assertions *Guy* et *Serge* 301
I.5.1. Une vérité d'évidence 301
I.5.2. Un changement de cadre 302
I.6. Un effet de contrat : l'exclusion des décimaux 308
I.6.1. La réduction aux entiers : le cas de *Brigitte* 308
I.6.2. L'exclusion des décimaux : le cas de *Louise* 310
I.7. Conclusion : du rôle central des conceptions 314
I.7.1. Les démarches de validation 314
I.7.2. Contradiction et évolution des conceptions 317
II. Le périmètre d'un triangle : un problème ouvert 321
II.1. Le cadre de la recherche 321
II.2. Dispositif expérimental et analyse *a priori* 322
II.2.1. Présentation de la tâche 322
II.2.2. Les procédures, leur validation et leur évolution 324
II.2.3. La population des élèves observés 330

II.3. Remarques sur la connaissance de périmètre 331
II.4. Les stratégies de résolution observées 333
II.4.1. Les stratégies de reproduction 333
II.4.2. Des démarches «exploratoires» 339
II.4.3. Les stratégies de réduction à l'échelle 350
II.5. Conclusions 352
II.5.1. L'obstacle des stratégies de reproduction 352
II.5.2. L'absence des démarches de validation 355
II.5.3. Un effet de contrat : les réfutations génératrices de contraintes 356
II.5.4. La recherche d'indices pertinents 357
II.5.5. Eléments en vue de la construction d'une situation didactique 358

Chapitre V : Dévolution d'un problème et construction d'une conjecture : la somme des angles d'un triangle

I. Introduction 361
I.1. La construction d'une situation de validation en cinquième 361
I.2. Remarques préalables sur une approche classique 364
II. Conceptions de l'angle et preuves du théorème 367
II.1. Définitions mathématiques et conceptions de l'angle 367
II.1.1. Les principales définitions 367
II.1.2. Une notion difficile 371
II.2. Des preuves du théorème sur la somme des angles d'un triangle 374
II.2.1. Des preuves pragmatiques 374
II.2.2. Preuves liées à l'angle comme

inclinaison d'une demi-droite sur une autre 377
II.2.3. Preuves liées à l'angle identifié à la rotation 385
II.2.4. Remarques sur évidence et intuition 387
III. Construction *a priori* de la séquence didactique 395
III.1. Plan d'ensemble de la séquence 395
III.2. Les conditions de la genèse de la conjecture 396
III.2.1. Constituer et stabiliser le milieu 396
III.2.2. Connaître la somme des angles d'un triangle 398
III.2.3. Une conjecture possible 400
III.3. La dévolution du problème 400
III.3.1. L'émergence d'un invariant 400
III.3.2. L'explicitation de la conjecture et la dévolution du problème de sa preuve 404
III.4. La fermeture de la situation 406
III.4.1. Des scénarios possibles 406
III.4.2. Une palette de preuves 408
IV. Analyse et mise en oeuvre expérimentale 411
IV.1. Remarques préliminaires 411
IV.2. Une observation dans une classe ordinaire 413
IV.2.1. Chronique de la séquence 413
IV.2.2. Analyse de la séquence 426
IV.3. Une observation dans une classe «expérimentale» 431
IV.3.1. Chronique de la séquence 432
IV.3.2. Analyse de la séquence 448
IV.4. La confrontation des deux observations 452
V. Conclusions 458
V.1. Un élément de robustesse : les conceptions des élèves 458
V.2. Le talon d'Achille de la situation : le contrat didactique 549

Chapitre VI : Dévolution d'un problème et débat de validation : un essai d'ingénierie didactique

I. Introduction : d'un besoin né de la pratique vers une question de recherche 465
II. Construction *a priori* de la séquence didactique 469
II.1. Les conditions d'un débat de validation 469
II.1.1. Organisation sociale de la séquence 469
II.1.2. Elaboration du contexte mathématique 473
II.2. Mise en place du dispositif expérimental 475
II.2.1. Première phase : introduction à la situation 476
II.2.2. Transition de phases 478
II.2.2. Deuxième phase : le débat collectif 478
III. Première observation : rencontre des contraintes de la pratique 480
III.1. Mise en place de l'observation 480
III.2. La première phase : l'activité «quasi-isolée» des équipes 482
III.2.1. Les interactions entre le professeur et les équipes, une approche globale 482
III.2.2. Les interactions entre le professeur et les équipes, leurs effets sur la dévolution 485
III.2.3. Remarques de synthèse sur les interactions entre le professeur et les équipes 495
III.2.4. Les productions des équipes 496
III.2.5. La phase de transition 505
III.3. La seconde phase : la production d'une solution commune 510
III.3.1. La remise en situation 510
III.3.2. Les critiques formulées 511

III.3.3. Une nouvelle période de résolution 517
III.3.4. La fermeture de la situation 521
III.4. Conclusion 525
IV. Seconde observation : ouverture du temps 528
IV.1. L'ouverture du temps, nécessité de la dévolutiuon 528
IV.1.1. Une activité isolée des équipes 529
IV.1.2. Ouverture de la durée du débat 530
IV.1.3. La mise en oeuvre du dispositif expérimental 531
IV.2. Première période : la critique des solutions produites 533
IV.2.1. Le message A : une solution trop simple 533
IV.2.2. Le message B : une solution trop complexe 538
IV.2.3. Le message C : un message difficile à comprendre 542
IV.2.4. Le message D : simple et clair 545
IV.2.5. La proposition de l'équipe E 546
IV.2.6. Remarques de synthèse sur la première période du débat : prouver versus argumenter 549
IV.3. Seconde période : la mise à l'épreuve des solutions 554
V. Conclusion 557
V.1. La responsabilité du professeur et les contraintes du système didactique 557
V.2. L'obstacle des interactions sociales et la rationalité des élèves 559

Conclusions

I. Processus de validation chez des élèves de Collège 563
I.1. Les types de preuve : hiérarchie et filiation 563
I.2. L'empirisme naïf 566
I.3. L'expérience cruciale 568

I.4. L'exemple générique et l'expérience mentale 569
I.5. Le traitement des réfutations 571
II. Eléments de la complexité du problème de l'enseignement de la démonstration 573
II.1. Le rôle de l'interaction sociale : démonstration et argumentation 573
II.2. Le problème de la dévolution 576
II.3. Un problème didactique : la construction de situations de débats sur la preuve 580

Références bibliographiques 583

Annexe : transcription des textes d'élèves donnés en illustration 593

INTRODUCTION

I : Enseignement de la démonstration : position du problème

I.1. La démonstration : objet d'enseignement

La notion de démonstration occupait jusqu'ici une place importante dans l'enseignement des mathématiques en France. Elle apparaissait lors de la troisième année du premier cycle de l'enseignement secondaire (classe de 4° de Collège), comme un véritable **objet d'enseignement**. Pour reprendre les termes du programme de 1971, l'objectif était de "faire comprendre aux élèves ce que sont des démonstrations et de leur apprendre à en rédiger ". Les instructions

ministérielles d'avril 1977 indiquaient de montrer "la différence entre une démonstration et une simple constatation expérimentale", et la circulaire fixant les objectifs de l'enseignement précisait qu' "habituer l'élève à s'exprimer clairement " recouvre entre autre chose : "exposer une démonstration ".

En revanche le mot «démonstration» a disparu de la formulation des programmes et de leurs commentaires dans la dernière réforme de l'enseignement de mathématiques (nous écrivons ces lignes en mai 1987, il s'agit des programmes fixés par l'arrêté ministériel du 14 novembre 1985). Ces programmes qui entreront en vigueur à la rentrée scolaire 1988 pour la classe de 4°, et 1989 pour la classe de 3°, stipulent que, pour la classe de 4°, les élèves devront "progressivement s'entraîner au raisonnement déductif ", et en classe de 3° qu'ils devront "s'entraîner constamment au raisonnement déductif ". Mais derrière cette référence au raisonnement déductif c'est bien de la démonstration qu'il est question ; en témoigne ce commentaire de l'inspection générale qui suggère de "ménager des séquences déductives motivantes, de plus en plus prolongées et de difficultés progressives au long des quatre années du collège ".

On peut penser que cette évolution est une réponse aux problèmes rencontrés dans l'enseignement de la démonstration dont nous parlerons plus loin. Nous ne discuterons pas ici de la pertinence de cette réponse, mais que la démonstration soit un objet d'enseignement à part entière ou qu'elle devienne un outil (non explicité) de l'activité mathématique des élèves, ne change rien au fait qu'elle constitue un thème spécifique et essentiel de l'apprentissage des mathématiques et de leur enseignement (voire de l'éducation mathématique) . Nous retrouvons d'ailleurs dans des manuels de 6° les plus récents les verbes «démontrer»,

«prouver», comme par exemple dans l'excellent ouvrage de Bareil et Zehren (Eds. Hachette, 1986) : "... tu démontreras [... c'est-à-dire...] tu prouveras par un raisonnement...".

De même que pour les autres savoirs ou savoir faire mathématiques, l'enseignement de la démonstration ne peut consister en un simple transfert dans la classe de ce qu'elle est dans la communauté scientifique. Pour devenir un contenu d'enseignement, les mathématiques doivent subir une transformation adaptative, la transposition didactique (Chevallard 1985), sous un ensemble de contraintes spécifiques du système didactique. Par le moyen de l'analyse des textes de programmes, des instructions ministérielles et des commentaires qui les accompagnent nous avons pu identifier les lignes de force de cette transformation (Balacheff 1982, pp.265-71). Avant d'en rendre compte, nous rappelons les deux principaux aspects de la démonstration relativement à la communauté scientifique :

- d'une part elle est un outil privilégié de preuve, elle renvoie à une pratique qui permet à la fois la communication et l'évaluation ;
- d'autre part elle est un objet d'étude pour le logicien ; elle reçoit alors une définition précise dans le cadre de théories formalisées.

Les textes que nous avons examinés conservent à la démonstration, dans leurs attendus les plus généraux, les caractéristiques et le sens qu'elle a dans la communauté mathématique. En particulier, elle est introduite comme outil de preuve dans l'activité scientifique du mathématicien. Mais ces mêmes textes sont à l'origine d'une transformation de fait par la présentation d'un modèle d'enseignement qui induit une réduction de la démonstration à un calcul logique. Nous rapportons ci-dessous deux citations qui en témoignent :

Les hypothèses ou les données étant consignées sur la figure même, par les moyens les plus propres à en assurer la vision et la portée immédiates, le maître déduirait lentement avec l'aide de la classe si possible; il résumerait à chaque instant les résultats acquis et les ferait formuler par les élèves eux-mêmes. Ceux-ci ne seraient plus déconcertés par l'assemblage des termes accumulés dans des énoncés synthétiques dont la formation serait en partie leur oeuvre. On s'arrêterait davantage aux plus importants : les théorèmes prendraient corps au moment opportun; on les fixerait d'ailleurs dans la mémoire par les procédés habituels.

Instruction du 2 septembre 1925

Guidé par le maître et réalisant d'abord des opérations concrètes appliquées à des objets donnés, l'enfant arrivera à acquérir la notion abstraite d'une opération de nature bien définie mais portant sur un élément indéterminé. Puis il deviendra capable d'imaginer qu'il applique une autre opération au résultat de la première sans l'avoir réalisée. Enfin, concevant la suite des mécanismes des opérations ainsi définies, il pourra prévoir certaines propriétés des résultats : il aura réalisé sa première démonstration.

Arrêté du 20 juillet 1960

De telles indications pour la pratique ne prennent pas en compte

l'engagement social de la démonstration dont nous montrerons qu'il joue un rôle essentiel dans la constitution de sa signification comme outil de preuve (chap. I). Elles privilégient la forme, érigeant d'une certaine façon la démonstration en modèle de l'activité mathématique... ce qu'elle est en fait pour la logique considérée comme science des méthodes en mathématique.

I.2. Aspects du problème d'enseignement

L'évaluation qui est faite par les enseignants de Collège est celle d'un "constat d'échec global en ce qui concerne la capacité des élèves de 4ème de mettre en forme une démonstration, en particulier en géométrie " (Gaud et Guichard 1984). Cet échec unanimement reconnu n'est pas propre à l'enseignement français : une étude réalisée par Senk (1985) aux Etats Unis d'Amérique, portant sur 2699 élèves sortant du Collège (hight school graduates), atteste que 85% d'entre eux ne maîtrisent pas la formulation d'une démonstration.

Cet échec est tour à tour imputé aux élèves, invoquant leur faiblesse ou leur manque de maturité logique, ou à l'enseignement. Mais le caractère durable de ces difficultés, leur résistance à des tentatives nombreuses d'innovation ou à la modification des programmes, nous invite à une étude plus approfondie du côté des élèves pour cerner la nature des problèmes rencontrés, et du côté du système didactique pour en examiner les contraintes et le fonctionnement au regard du projet d'enseignement de la démonstration.

Comment enseigne-t-on la démonstration ? "Généralement on fait des démonstrations devant les élèves, on leur demande ensuite de faire pareil. On sait les difficultés rencontrées. " (compte rendu du Groupe Premier Cycle, Journées Nationales APMEP, 1979). Ainsi, l'imitation est le moyen d'enseignement le plus répandu, dans une telle démarche le fait que la démonstration soit un outil de preuve, un moyen de valider un énoncé, est occulté au profit de la démonstration comme genre de discours dont est mis en valeur essentiellement la structure.

L'**évidence** permet de thématiser la façon dont les problèmes sont formulés dans la pratique : on se désespère de ce que les élèves ne ressentent pas le besoin de démontrer, s'en tenant par exemple en géométrie à l'évidence de la figure. Pour reprendre une formule forgée ailleurs (Petit, 1986), le rationalisme de la démonstration se heurterait à "cette sorte de sensualisme que soustend l'évidence". Le recours à l'injonction à démontrer ne permet qu'un dépassement bien fragile de cet obstacle. Pour traiter sur le fond ce problème, Chevallard et Tonnelle (1982) suggèrent de se placer sur le terrain même de l'évidence, partant des arguments de l'élève il s'agit de le conduire à une situation paradoxale dans laquelle il sera amené à les remettre en question. Il ne s'agit pas de recourir à la réfutation mais de faire prendre conscience de ce qu'il ne peut plus s'en tenir aux arguments d'évidence initiaux. En d'autres termes il s'agit de problématiser l'évidence. Si cette démarche offre des perspectives pour traiter l'obstacle de **l'évidence des faits** subjectivement affirmée par l'élève, elle nous paraît en revanche laisser entier celui que constitue **l'évidence qui s'impose à la raison**. Ce qui est alors mis en question est la rationalité des élèves qui jusqu'à l'avènement de la démonstration disposaient de moyens (acceptés de facto) pour «faire des mathématiques». Ce dernier type d'évidence relève de ce

que Fishbein (1982) nomme "cognitive belief" et qu'il décrit de la façon suivante : "intuitive intrinsic type of conviction, directly imposed by the **structure** of the situation itself " (p.11, c'est nous qui soulignons). Elle constitue par nature un obstacle fondamental au processus de validation que l'on souhaiterait voir mis en oeuvre. Cet obstacle ne peut être dépassé que par une évolution radicale des connaisances des élèves, nous en voyons un indice probant dans les observations réalisées au cours de l'une de nos premières études sur la preuve où les élèves manifestaient leur conscience de la nécessité d'expliciter une procédure pour l'établir, mais se heurtaient à leur incapacité à la saisir comme articulation d'opérations élémentaires (Balacheff 1982).

Cet obstacle de l'évidence serait-il dépassé, que resterait un autre obstacle qui tient au fonctionnement du système didactique. De façon implicite les situations d'enseignement en mathématique déchargent les élèves de la responsabilité du vrai. Cela est particulièrement remarquable lorsque le problème posé se présente sous la forme : «montrer que...». Dans une telle formulation l'énoncé en question est en fait affirmé vrai, ce qui est à découvrir est une démonstration. De plus le critère de recevabilité de cette démonstration n'est pas seulement qu'elle établisse la validité de l'énoncé en question, mais encore qu'elle satisfasse le professeur : la démonstration proposée peut être maladroite, confuse, incomplète voire insuffisante sans pourtant être fausse. Les critères de ces jugements ne sont pas susceptibles d'être totalement explicités. Dans ce contexte la démonstration apparaît comme une rhétorique spécifique de la classe de mathématique, elle se caractérise par ses formes langagières et sa structure. Un décalage important peut alors se créer entre ce qui fonde la conviction de l'élève quant à la validité d'une solution qu'il produit et ce qu'il produit à l'intention du professeur. Il s'agit pour lui de produire un

discours qui «fasse mathématique», au risque d'introduire des distorsions telles que l'on pourra avoir des doutes sur ses qualités de raisonnement (cf. "le cas de Pascal", ibid. ; ou "le cas de Grégory ", Paquelier 1985).

Par ailleurs ces obstacles à l'apprentissage de la démonstration sont renforcés par le fait que le plus souvent elle est demandée aux élèves dans un contexte d'évaluation où il s'agit d'abord de montrer au professeur que l'on sait des mathématiques, comme le confie cet élève anglais de 13 ans : "prouver quelque chose en maths signifie que vous avez su le faire et cela prouve combien vous êtes bon pour ces questions et que vous les avez comprises " (Galbraith 1979).

Ce tour d'horizon rapide des problèmes posés par l'enseignement de la démonstration indique une direction d'étude déjà adoptée pour d'autres notions mathématiques. Pour que la démonstration prenne du sens il est nécessaire qu'elle apparaisse aux élèves comme un outil efficace et fiable pour établir la validité d'une proposition. Pour y parvenir nous devons découvrir et prendre en compte la rationalité dont ils disposent initialement, savoir comment elle fonctionne et comment elle peut évoluer ; car c'est à partir de cette rationalité, avec ou contre elle, que les élèves construiront le sens de la démonstration. Le pas suivant est celui de la construction de situations qui assureraient le transfert aux élèves de la responsabilité du vrai. Comme l'écrit fort justement Brousseau (1986, p.359) : "la didactique se trouve devant le défi de produire des situations qui permettront à l'élève de mettre en oeuvre les savoirs et les connaissances mathématiques comme moyen effectif de convaincre (et donc de se convaincre) tout en le conduisant à rejeter les moyens rhétoriques qui ne sont pas de bonnes preuves ou réfutations ".

II : Contenu des travaux de recherche présentés

Les travaux de recherche que nous présentons ici concernent d'une part l'élève, étudié dans ses démarches en vue d'établir une proposition ou de traiter une réfutation, d'autre part le système didactique pour en étudier les contraintes et les spécificités comme lieu où prennent place ces démarches.

Dans un premier chapitre nous nous proposons, au plan théorique, d'analyser la complexité de la notion de preuve en mathématique. Il s'agit d'une étude du point de vue de son fonctionnement dans les pratiques et non de l'objet mathématique dont s'occupe par ailleurs le logicien. Les principaux aspects abordés sont ceux des relations des démarches de preuve aux connaissances, notamment dans leurs caractéristiques langagières, et aux situations qui en sont le lieu. Nous dégagerons différents types de preuve dont nous faisons l'hypothèse qu'ils prennent leur place dans la genèse de la démonstration, par ailleurs nous poserons le problème de la signification des contre-exemples, ou plus généralement des contradictions dans la résolution d'un problème.

II.1. Du côté de l'élève

Comme en atteste la revue bibliographique réalisée par Stein (1981) sur les travaux de recherche portant sur l'enseignement ou l'apprentissage

de la démonstration, la plus part d'entre eux s'en tient à une évaluation des compétences des élèves à élaborer une chaîne de déduction. Il s'agit en fait le plus souvent d'une évaluation de l'enseignement d'où il ressort essentiellement que même des élèves agés ne comprennent pas ce qu'est une démonstration ("a formal axiomatic proof ", Reynolds 1967). La démonstration est en fait considérée du point de vue du modèle du logicien, les moyens de la recherche consistent en des tests administrés sous la forme «papier-crayon», portant sur ce que l'on pourrait appeler des problèmes fermés. Les travaux de Bell (1976) ont permis une avancée importante en prenant comme base d'étude des problèmes plus ouverts et en ne se limitant pas à une étude en terme de réussite ou échec au regard de l'analyse logique des productions des élèves. Bell met notamment en évidence plusieurs niveaux d'empirisme, en fait de rationalité, qui conduisent à nuancer fortement les résultats jusque là obtenus. Cependant le corpus sur lequel il s'appuie est constitué de productions écrites et ne donne pas d'informations sur les processus qui sont à leur origine. Fisbein (1982) et Vinner (1983) abordent aussi ce problème de l'apprentissage de la démonstration, non du point de vue de la logique, mais en posant clairement le problème du sens qu'elle peut avoir pour l'élève, notamment dans une confrontation au «raisonnement empirique». Fisbein suggère que la conviction fondée sur une validation empirique et celle fondée sur la démonstration ne sont pas du même ordre et qu'elles peuvent cohabiter, mais nous y reviendrons. Ici encore, les moyens utilisés pour la recherche (des questionnaires) limitent la compréhension que nous pouvons avoir des productions des élèves.

Notre projet est d'élucider la place et le sens des processus de preuve mis en oeuvre dans la résolution d'un problème, notamment en examinant de quelle façon les élèves parviennent à la conviction de la validité de la

solution qu'ils proposent. Nous utilisons pour cela des situations d'interaction sociale qui minimisent l'intervention de l'observateur et donnent accès, par les débats qu'elles suscitent, à l'observation des processus qui soustendent les décisions prises par les élèves. Cette opération de recherche rapportée au chapitre II, utilise le problème du dénombrement des diagonales d'un polygone. Ce problème, au niveau auquel nous nous sommes placé (la classe 4°) constitue un problème ouvert pour les élèves. Dans une première modalité de l'observation nous avons soumis le problème sans fournir de documents, dans une seconde modalité les élèves disposaient d'un texte sur les polygones. Cette seconde opération de recherche est rapportée au chapitre III, la comparaison des deux modalités est essentiellement centrée sur le problème de la définition, en nous attachant à en éclairer le statut et le rôle dans l'activité de résolution de problème.

Le second point important des recherches que nous présentons sur ce thème est celui du traitement d'un contre-exemple dont nous soutenons qu'il est intrinsèquement lié à la preuve. Cette partie de nos travaux apportera des éléments à l'étude d'un problème fondamental dont Glaeser (1986, p. 147) souligne qu'il reste posé. En effet, la rencontre d'un contre-exemple constitue en mathématiques l'essentiel de ce que cet auteur appelle "contradiction factuelle", c'est à dire une contradiction qui "intervient lorsque les faits observés démentent les prévisions" (qu'il qualifie de "(pseudo)scientifiques"). Le problème désigné par Glaeser est celui de la connaissance de l'attitude des élèves dans la gestion d'une telle contradiction, en référence à ce que serait une gestion "compatible avec la science". Les quelques recherches que nous avons relevées sur cette question, notamment Burke (1984) et Bell (1976) s'en tiennent pour l'essentiel à examiner si le contre-exemple suffit à rejeter une proposition

soutenue par un élève. Le résultat est que c'est rarement le cas, et comme le souligne Galbraith (1979), dont les travaux font suite à ceux de Bell, plusieurs contre-exemples sont le plus souvent nécessaires pour être considérés comme significatifs par les élèves. Mais ces recherches, parce qu'elles ne prennent pas en compte les processus en jeu, sont insuffisantes pour éclairer le sens que les élèves peuvent donner à une réfutation dans un contexte de résolution de problème. Nous avons abordé cette question dans le contexte expérimental évoqué ci-dessus, les résultats sont présentés au chapitre II (§ III) et au chapitre III (§ III.2.2.).

Nous avons repris ces questions dans le cadre de deux études de cas que nous présentons au chapitre IV.

II.2. Du côté du système didactique

Il s'agit pour nous, dans le cadre de la théorie des situations didactiques (Brousseau 1986), et en nous appuyant sur nos recherches «du côté des élèves», d'analyser les caractéristiques d'un processus didactique dont la finalité est de poser des problèmes de preuve et d'amener les élèves à prendre la responsabilité de les résoudre et donc celle des moyens de validation qu'ils utilisent. Des processus de cet ordre ont déjà été conçus et étudiés dans le cadre de plusieurs recherches en didactique ; ils avaient pour objectif l'apprentissage d'une notion mathématique déterminée. Leur observation et leur analyse s'est faite en référence aux apprentissages visés s'attachant principalement aux indices des significations construites par les élèves. Notre objectif est sensiblement différent puisque nous étudierons les comportements des élèves non pour eux-mêmes mais comme des indices du fonctionnement des situations que nous avons mises en place.

La première opération de recherche, présentée au chapitre V, a porté sur l'étude des contraintes d'une situation dans laquelle des élèves de 5°, à qui la démonstration n'a donc pas encore été enseignée, aient à émettre une conjecture et à se saisir du problème d'en fournir une preuve. La conjecture que nous avons retenue est celle sur l'invariance de la somme des angles d'un triangle rectiligne. La possibilité d'un tel invariant ne devrait pas manquer de défier la conception, souvent présente à ce niveau, suivant laquelle la valeur de cette somme devrait dépendre de la «taille» du triangle ; ce défi constituerait alors un motif essentiel de l'engagement des élèves dans un processus de preuve, aussi bien pour établir la propriété que pour la réfuter. La complexité d'une telle situation tient à ce que d'une part le professeur ne peut lui même formuler la propriété, sauf à en tuer le caractère conjectural, et d'autre part à l'exigence de socialisation : il s'agit non seulement que les élèves s'approprient le problème mais encore qu'ils en partagent la signification.

Notre hypothèse principale, sur les situations didactiques visant à l'apprentissage de la démonstration, est que les élèves ne donneront leur véritable signification aux démarches de validation en mathématique que si elles apparaissent comme des moyens fiables et efficaces pour établir la vérité d'une proposition. A la suite de Brousseau nous voyons dans l'interaction sociale un élément déterminant de cette prise de conscience. L'objet de la seconde opération de recherche, présentée au chapitre VI, est d'étudier cette hypothèse en prenant en compte, dans la mesure du possible, les contraintes de la pratique. Ces travaux ont été développés en collaboration avec une équipe de l'IREM de Lyon engagée dans des recherches sur "la pratique du problème ouvert dans les classes " (Arsac et Mante 1983), dont la problématique était très proche de la notre ; nous expliciterons dans l'introduction à ce chapitre de quoi il retourne. Nous

mentionnons seulement ici que l'objectif de la situation mise en place n'est pas celui d'obtenir l'apprentissage d'une notion mathématique déterminée, mais de créer les conditions d'un débat de preuve dont l'issue sera sous la responsabilité des élèves. Notre analyse portera sur la complexité du fonctionnement d'une telle situation, notamment sur la nature des interactions entre les élèves et de leurs démarches de validation dans leurs relations aux mathématiques, et sur ce qu'une telle situation implique du point de vue de la responsabilité du professeur.

Chapitre I

EXPLICATION, PREUVE ET DEMONSTRATION

I. Précisions sur le vocabulaire

Les verbes *expliquer*, *prouver*, *démontrer*, sont souvent considérés comme synonymes dans la pratique de l'enseignement des mathématiques ; on peut s'en assurer aisément par une consultation rapide des manuels scolaires. S'en tenir à ces habitudes constitue à notre sens un obstacle aux recherches sur le domaine qui nous intéresse dans la mesure où elles conduisent à amalgamer différents niveaux d'activité des élèves qu'il est en fait nécessaire de distinguer, comme nous essaierons de le montrer, pour comprendre la complexité du problème de l'apprentissage de la démonstration. Nous proposons dans ce qui suit de préciser ce vocabulaire.

A la suite de Piaget (1970) nous dirons qu'*expliquer* , "sur le terrain des sciences déductives", c'est d'abord dégager les "raisons" pour "répondre à la question du pourquoi". Mais du point de vue même de la pratique des mathématiques donner des raisons d'un théorème, l'expliquer, et le démontrer relèvent de deux exigences distinctes. La première démarche fait appel à ce que les mathématiciens nomment le plus souvent «intuition» ; elle renvoie aux significations, c'est-à-dire à la compréhension de la validité d'une assertion, non au sens de la logique, mais au sens de ses relations avec le corps des connaissances mathématiques. C'est le sens de la remarque suivante de Bourbaki (1948, p.37 note1) : "tout mathématicien sait d'ailleurs qu'une démonstration n'est pas véritablement «comprise» tant qu'on s'est borné à vérifier pas à pas la correction des déductions qui y figurent, sans essayer de concevoir clairement les idées qui ont conduit à bâtir cette chaîne de déductions de préférence à tout autre". Les raisons, "en tant qu'organisation inférentielle de significations" (Halbwachs 1981) peuvent échapper à une démonstration par ailleurs irréprochable du point de vue de la logique. C'est ce dont témoigne par exemple l'aveu célèbre de Cantor quand il interpelle Dedekind à propos de la démonstration qu'il vient d'écrire : "je le vois mais je ne le crois pas" (cité par Cavailles 1962, p.211).

I.1. Explication

A la suite des linguistes, nous situons l'explication au niveau du sujet locuteur. C'est d'abord pour lui qu'elle établit et garantit la validité d'une proposition, elle prend racines dans ses connaissances et ce qui constitue sa rationalité, c'est-à-dire ses propres règles de décision du vrai. Lorsqu'elle s'exprime en un discours, l'**explication** vise à rendre intelligible à un autrui la vérité de la proposition déjà acquise pour le locuteur. Elle ne se

réduit pas nécessairement à une chaîne déductive, Miéville la décrit ainsi au terme d'une étude sur "Explication et discours didactique de la mathématique" : "elle vise à établir chez l'interlocuteur un système d'objets qui ont entre eux une certaine homogénéité. Ces objets se rencontrent, s'agencent, et dans leur affinité, déterminent l'organisation d'une explication qui s'oriente vers la découverte d'un savoir nouveau..."(Miéville 1981, p.150). Le support de l'explication est essentiellement la langue naturelle.

I.2. Preuve

Lorsqu'une explication est reconnue et acceptée, il convient pour la désigner de disposer d'un terme qui permette de marquer son détachement du sujet locuteur. En mathématique il est clair que le terme «démonstration», du fait de son acception très spécifique, ne convient pas. Nous retiendrons celui de **preuve**. Le passage de l'explication à la preuve fait référence à un processus social par lequel un discours assurant la validité d'une proposition change de statut en étant acceptée par une communauté. Ce statut n'est pas définitif, il peut évoluer dans le temps avec l'évolution des savoirs sur lesquels il s'appuie. Par ailleurs une preuve peut être acceptée par une communauté mais être refusée par une autre. On en a un exemple récent en mathématiques avec le «théorème des quatre couleurs» dont la preuve par Appel et Haken, qui n'est pas une démonstration au sens classique, est acceptée par certains mathématiciens, tel Swart (1980), et est refusée par d'autres, tel Tymoczko (1979) : "the reliability of the four-colour theorem is not of the same degree as that guaranteed by traditional proofs [*en français : démonstration*], for this reliability rests on the assessment of a complex set of empirical factors " (Tymoczko cité par Hanna 1983, p.85). Mais

l'acceptation de l'«explication» de Appel et Haken ne repose pas sur de simples critères de vérification logique : "the very reason those of us who have worked on reducibility testing are happy about Haken, Appel and Koch's reducibility results is that they have to a large extent been independently checked by the use of different programs on different computers " (Swart 1980, p.698).

I.3. Démonstration

Le type de preuve dominant en mathématiques a une forme particulière, il s'agit d'une suite d'énoncés organisée suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit à partir de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini. Nous appelons, suivant ici l'usage, **démonstrations** ces preuves. Ce qui caractérise les démonstrations comme genre de discours est leur forme strictement codifiée. En fait cette rigueur formelle doit être nuancée au regard de la pratique, par exemple certaines étapes de la démonstration peuvent ne pas être explicitées mais laissées aux bons soins du lecteur. Si en principe être une démonstration relève, pour un discours, de critères logiques, dans les faits les processus sociaux au sein de la communauté mathématique jouent un rôle important : "a proof becomes a proof after the social act of «accepting it as a proof». This is true of mathematics as it is of physics, linguistics, and biology " (Manin cité par Hanna 1983, p.71).

Nous prenons, en parlant de communauté mathématique, un point de vue naïf, ou disons du sens commun. Nous n'ignorons pas qu'au regard même de la démonstration cette communauté n'est pas monolithique. Des

doctrines s'opposent (méthode axiomatique, intuitionisme, formalisme, etc.), on en trouvera une discussion intéressante dans Hanna (1983). Mais comme le reconnaît cet auteur (ibid. p.64-65) ce qui divise les mathématiciens ce n'est pas la démonstration en tant que structure, mais le choix des axiomes logiques et mathématiques, aussi ne nous paraît-il pas nécessaire de retenir ces distinctions dans notre étude.

I.4. Raisonnement et processus de validation

Le mot «raisonnement» a, de façon usuelle, principalement deux acceptions que résume bien Blanché (1973, p.39) : "si le raisonnement, entendu comme acte de l'esprit, se rapproche de plus en plus de l'intuition à mesure que se concentre la pensée, inversement, quand celle-ci se détend dans son expression, verbale ou symbolique, il apparaît comme une certaine manière d'organiser le discours, pour devenir, à la limite, une suite d'opérations formelles exactement réglées, c'est-à-dire un calcul ". Dans l'étude qui nous intéresse cette double acception présente une difficulté car elle introduit lorsque l'on parle du raisonnement d'un individu une ambiguité évidente en ne distinguant pas clairement s'il s'agit de l'activité intellectuelle ou de l'explication produite.

Nous réserverons ici le mot **raisonnement** pour désigner l'activité intellectuelle, en général non complètement explicite, de manipulation d'informations, données ou acquises, pour produire de nouvelles informations. Nous désignerons par **processus de validation** cette activité lorsque sa finalité est de s'assurer de la validité d'une proposition et éventuellement de produire une explication (resp. une preuve ou une démonstration).

II : Situation et processus de validation

II.1. Evidence du rôle de la situation

Les précisions de vocabulaire que nous avons données au paragraphe précédent mettent en relief les dimensions sociales des preuves et des démonstrations en tant que produit d'un processus de validation.

Nous nous proposons maintenant d'aller plus loin en soutenant que la nature ou le niveau d'un processus de validation dépendent de façon essentielle de la situation, éventuellement d'interaction sociale, dans laquelle se trouve celui qui le met en oeuvre. Nous partirons pour cela d'une métaphore de Popper particulièrement éclairante :

> Lorsque j'achète un livre et que le libraire me rend vingt pence de monnaie, je suis "tout à fait certain" que les deux pièces ne sont pas des contre-façons [...] Si quelqu'un me demandait "êtes-vous certain que la pièce dans votre main est une pièce de dix pence ?", je lui *jetterais peut être à nouveau un coup d'oeil* et dirais "oui". Mais si quelque chose d'important dépendait de la vérité de mon jugement, je pense que je prendrais la peine de me rendre dans la banque la plus proche et de demander au caissier d'examiner la pièce ; et si la vie d'un homme en dépendait, j'essaierais même de voir le chief cashier de la banque d'Angleterre, et lui demanderais de certifier l'authenticité de la pièce"
>
> (Popper 1972, pp.89-90)

et Popper poursuit soutenant que "la 'certitude' d'une croyance n'est pas

tant fonction de l'intensité de cette dernière que de la *situation* : de ce que nous anticipons comme ses conséquences possibles." (ibid.)

L'absence de tout processus de validation, ou la mise en oeuvre d'un processus éventuellement solidement fondé théoriquement, est ainsi directement lié à l'analyse que l'individu fait de la situation. Un rôle central, éventuellement moteur, est joué par son évaluation du **risque** attaché à une décision qu'il doit prendre. Le processus de validation est ainsi d'abord lié à des fins pratiques : il s'agit de s'assurer les garanties nécessaires à un engagement dans l'action ; ici l'action de *décider* de la vérité d'une assertion. Quant à l'engagement à différents niveaux de validation il répond à une **économie de logique** "qui veut que l'on ne mobilise pas plus de logique qu'il n'en faut pour les besoins de la pratique" (Bourdieu, 1980, p.145).

II.2. Situation de validation et situation de décision

Le seul fait de soumettre un problème aux élèves ne suffit donc pas à garantir qu'ils s'engageront dans un processus de validation. Audibert (1982) dans une observation systématique d'un grand nombre d'élèves dans des activités de résolution de problèmes en géométrie relève d'ailleurs que très peu d'entre eux s'engagent dans un processus de production d'une preuve, et encore moins d'une démonstration. Lorsque la production de preuves ou, dans l'enseignement français à partir de la quatrième, de démonstrations est attendue des élèves, la nature ou le niveau des preuves produites, ou leur absence, ne prennent pour nous leur véritable signification que lorsque sont connues les caractéristiques des situations dans lesquelles ils se trouvent.

Notons d'abord que les processus de preuve ne sont pas constitutifs de toute activité mathématique des élèves et que toute situation didactique n'exige pas la présence de tels processus. Ainsi en est-il des phases d'appropriation des règles d'un jeu, du fonctionnement d'un matériel. Par exemple, dans la situation dite de "la course à 20" étudiée par Brousseau (1975), après l'exposition des règles les élèves sont invités à jouer. Chaque partie terminée est suivie d'une nouvelle partie sans autre exigence. Dans une telle situation, l'élève peut, pour jouer une partie, ignorer les précédentes, ne pas travailler ses décisions : **la situation tolère l'absence de validation**. Cependant pour des raisons qui leur appartiennent certains élèves voulant gagner chercheront des raisons, des preuves de la validité de leur stratégie. Dans ces situations, des succès ré-itérés peuvent instituer des règles d'action qui seront la source de théorèmes-en-acte (Vergnaud 1981, cf. aussi notre § III.3.) constitutifs et indicateurs des conceptions construites par les élèves.

C'est le cas aussi des situations dans lesquelles le sujet doit exécuter des algorithmes, des suites d'ordre, ou mettre en oeuvre des pratiques réglées par des *habitudes* pour lesquelles les questions de la validité et de la consistance ne se posent pas. Ces situations constituent ce que nous appellerons, en nous inspirant de Bourdieu (1980), des **sphères de pratique**. Les sphères de pratique constituent des domaines disjoints de mise en oeuvre des connaissances, tels qu' "il y a peu de chances que deux applications contradictoires des mêmes schèmes se trouvent confrontées" (ibid. p.145). De fait, elles n'exigent pas de contrôle des productions, toute erreur contingente d'exécution mise à part, parce que la situation porte a priori sur de «bons objets», de «bonnes relations», selon un contrat qui permet l'économie de l'examen des conditions de validité de l'action.

Dans ces cas, l'absence observée de mise en oeuvre de processus de validation ou le niveau des preuves éventuellement développées, ne peuvent être tenus pour significatif de la rationalité des élèves, parce que susceptibles d'être d'abord la conséquence d'un principe d'économie.

Nous nous intéresserons dans la suite aux **situations qui appellent des processus de validation.** Mais de telles situations ne conduisent pas nécessairement à la production de preuves de façon explicite, nous distinguons deux types de situations que nous présentons ci-dessous illustrées d'exemples :

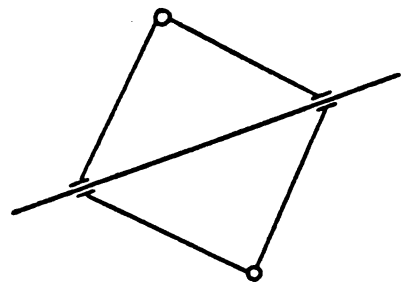
-reprenons le cas de "la course à 20"de Brousseau. Dans la dernière phase du jeu, appelée jeu de la découverte, la consigne demande à des équipes qui jouent, d'élaborer des propositions qui permettent de "gagner à coup sûr" (op. cit.). Un système de marques sanctionne la production d'*énoncés vrais* ("acceptés" (ibid.)) et d'*énoncés faux* ("prouvés faux" (ibid.)).

Les élèves se trouvent alors dans une **situation de preuve** au sens de Brousseau (1977). L'objectif en est la production d'une preuve (de la vérité ou de la fausseté) d'un énoncé. Cette situation contient organiquement la contrainte de mise en oeuvre de processus de validation.

- dans le cas de séquences didactiques décrites par Gras (1983) à propos de l'apprentissage de la symétrie orthogonale, après des situations consacrées à la familiarisation avec le symétriseur (il s'agit d'un dispositif mécanique permettant de réaliser une symétrie orthogonale, fig.1), les élèves sont invités à *anticiper*, à *prédire* , ce que sera l'image d'une figure donnée.

On se trouve alors dans ce que nous appellerons une **situation de décision.** Elle demande la mise en oeuvre de processus de validation sans

que pour autant soit exigée la production explicite de *preuves* . C'est une proposition vraie et non la preuve de cette proposition qui doit être produite.



Cet appareillage mécanique permet de réaliser une symétrie orthogonale. L'appareil est constitué d'un losange déformable glissant le long d'un axe placé suivant l'une de ses diagonales. Les deux sommets laissés libres peuvent porter une pointe sèche ou un crayon.

Figure 1

II.3. L'interaction sociale comme moteur des processus de validation

La mise en débat des décisions, l'injonction de garantir leur validité ou de la dénoncer, est l'un des principaux moyens permettant de transformer une situation de décision en une situation de preuve.

Dans une situation de décision, les opérations intellectuelles du raisonnement hypothético-déductif (en tant que système légitime et fiable de production d'informations) peuvent être mises en oeuvre sans que pour autant une preuve soit produite. Les contrôles logiques et sémantiques fonctionnent localement dans le cours de l'élaboration de la solution.

Eventuellement, en tant que mathématiciens, nous reconnaîtrons dans ce processus une organisation qui est de l'ordre de la démonstration; mais ici elle est dans le fonctionnement du sujet un outil et non un objet (Douady 1984). En revanche, les situations dans lesquelles des élèves ont collectivement, en groupes restreints ou au niveau de la classe entière, a produire une solution commune à un problème, nécessitent la formation progressive d'un langage commun et adéquat aux objets et relations en jeu ; elles nécessitent aussi l'élaboration, ou la reconnaissance, d'un système commun de décision et donc finalement de preuve au sein de la communauté ainsi constituée. Le caractère essentiel de cette dimension sociale, notamment dans des situations de communication entre pairs conduisant du «faire» au «faire faire», et leur rôle déterminant dans la construction des significations des connaissances mathématiques ont été mis en évidence par Brousseau (1986) qui en propose une modélisation dans le cadre de sa théorie des situations didactiques. Brousseau distingue plusieurs types de situations qui se caractérisent par la nature du fonctionnement intellectuel des élèves, nous rapportons ici ce qui concerne les situations de validation (ibid. p.358-9):

> Les situations de validation vont mettre en présence deux joueurs qui s'affrontent à propos d'un objet d'étude composé des messages et descriptions que l'élève a produits d'une part, et du milieu a-didactique qui sert de référent à ces messages d'autre part.
> Les deux joueurs sont alternativement un "proposant" et un "opposant" ; ils échangent des assertions, des preuves et des démonstrations à propos de ce couple "milieu/message". Ce couple est le nouveau dispositif, le milieu de la situation de validation. Il peut se présenter comme un problème accompagné de ses tentatives de solutions, comme une situation et son modèle, ou comme une réalité et sa description...
> Alors que l'informateur et l'informé ont des rapports dissymétriques avec le jeu (l'un sait une chose que l'autre

> ignore), le proposant et l'opposant doivent être dans des positions symétriques, aussi bien en ce qui concerne les informations et les moyens d'action dont ils disposent sur le jeu et sur les messages, qu'en ce qui concerne leurs rapports réciproques, les moyens de se sanctionner mutuellement et les enjeux vis-à-vis du couple milieu/message.

On ne peut cependant pas affirmer que le fait pour une situation d'avoir les caractéristiques d'une situation sociale soit une condition nécessaire, ni même suffisante pour assurer que des preuves seront produites :

- la condition n'est pas nécessaire parce que le risque dû à une incertitude peut conduire à un effort de synthèse des raisons, des conditions nécessaires à la validité, que réalise l'explicitation d'une preuve
- cette condition n'est pas non plus suffisante ; elle n'écarte pas la possibilité d'élèves qui refuseraient d'entrer dans ce jeu du débat. L'augmentation des enjeux, la force des injonctions peuvent ne pas suffire... Par ailleurs la notion de risque n'a pas de sens en soi mais relativement à un individu qui le reconnaît ou non et l'évalue plus ou moins important. Le risque reconnu, l'élève peut encore se montrer téméraire c'est-à-dire ne pas aller jusqu'au bout de ce qu'il reconnaîtrait nécessaire pour garantir sa décision.

En d'autres termes, on ne peut attendre de la situation qu'elle soit déterministe, nous distinguerons seulement les situations qui *tolèrent* l'absence de travail sur la validation, des situations qui *appellent* un tel processus.

Enfin, et Brousseau (ibid.) le signale effectivement, le fait de placer

les élèves dans une situation d'interaction sociale peut susciter des phénomènes de type social ou affectif assez puissants pour déplacer le débat hors du domaine cognitif qui nous intéresse. En particulier, dans la démarche de preuve, des arguments d'autorité peuvent se substituer à une argumentation portant sur les contenus. Du fait d'un engagement socio-affectif important, les élèves peuvent délibérément soutenir des énoncés faux ou refuser des énoncés vrais.

Pour que soit engagé un processus de preuve lors de la résolution d'un problème, il faut qu'il y ait *un risque dû à l'incertitude* et donc un *enjeu* qui vaille la peine que l'on cherche à s'assurer d'un résultat. Pour que les interlocuteurs aient intérêt à formuler la solution élaborée et à la discuter il faut que la situation contienne *un enjeu à la contradiction* , ce qui suppose *un enjeu à admettre* sans lequel le refus de la contradiction peut devenir une stratégie de défense. Ainsi la situation doit à la fois justifier et susciter la prise de conscience du risque qu'il y a à admettre un énoncé faux et de celui qu'il y a à refuser un énoncé vrai.

II.4. Le désir de certitude comme moteur des processus de validation

Dans les exemples qui précédent nous avons souligné le rôle joué par l'identification d'un risque dû à l'incertitude dans la motivation d'un individu pour produire des preuves ou mettre en oeuvre des processus de preuve. Une autre motivation est le *désir de certitude* , ce désir peut être gratuit, non nécessairement lié à un risque. Les enjeux peuvent être ceux d'une satisfaction intellectuelle, d'une curiosité pour la vérité qui peut animer les élèves. C'est en fait la problématique des innovations qui

cherchent à s'appuyer sur des *problèmes motivants* (problèmes qui susciteraient assez d'intérêt pour que les élèves acceptent ou veuillent d'eux mêmes en chercher la solution). C'est par exemple, sur ce désir de certitude, que s'appuie Brousseau (1986, p.449 sqq.) dans une situation en géométrie où il demande aux élèves de tracer les médiatrices d'un triangle sans se placer dans un cas particulier. Bien sûr, les élèves vont chercher à se placer dans le cas d'un "triangle scalène", mais la concourance tétue des médiatrices fera craindre le cas particulier ; l'incertitude étant entretenue par les tracés défectueux. Dans ce contexte apparaît une *conjecture* : les médiatrices d'un triangle sont concourantes; vouloir en faire un théorème, en avoir la certitude, repose sur un *désir de savoir* qui ne doit rien à une situation de risque, ni même dans ce cas à un quelconque intérêt pratique ; les élèves ne savent pas si une telle propriété pourra être utile à quoi que ce soit.

III : La place du "sujet-connaissant"

III.1. Introduction

Le fait d'avoir réuni les conditions les plus favorables à la mise en oeuvre par les élèves de processus de validation ne suffit évidemment pas à assurer la nature des preuves qui seront produites, ni même leur production.

L'histoire des mathématiques atteste qu'alors même que la démonstration est un outil de preuve reconnu et que le problème du vrai est au coeur de la démarche scientifique, ce n'est pas pour autant que les mathématiciens peuvent produire leur savoir en s'appuyant sur des preuves d'une égale nature. Par ailleurs, comme le souligne Arsac (1987) des moyens de preuve, pour établir le caractère nécessaire d'une proposition ou d'un résultat, existaient chez les mathématiciens de l'antiquité avant qu'ils ne disposent du modèle euclidien. En d'autres termes l'activité mathématique, reconnaissable comme telle, est antérieure à «l'invention» de la démonstration par les grecs.

De même faisons-nous l'hypothèse de la possibilité pour les élèves de construire des preuves des énoncés mathématiques qu'ils produisent, avant qu'ils ne maîtrisent la démonstration. La question qui nous occupe est celle de savoir quelle est la nature de ces preuves, si l'on peut mettre en évidence une hiérarchie du point de vue de la genèse de la démonstration, et quels sont les moyens de provoquer leur éventuelle évolution.

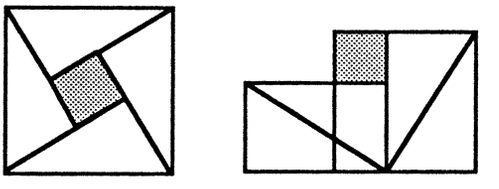
Mais par ailleurs, et c'est là une constatation banale, le seul fait de disposer de la démonstration comme outil de preuve ne suffit pas à garantir qu'elle pourra être utilisée. Revenons à l'histoire : l'apparition de la démonstration chez les grecs est contemporaine de "la définition des objets de la mathématiques à l'aide d'axiomes, de définitions, comme objets idéaux indépendant de l'expérience sensible " (ibid.) et de l'explicitation d' "énoncés généraux [...] sous des hypothèses précises précisant les assertions vraies pour les êtres mathématiques "(ibid.). De même la reconnaissance du caractère nécessaire d'une proposition passe chez l'enfant par une différenciation et une identification des objets de pensée et de leurs relations (Piaget 1983).

Un indicateur significatif de ces processus est celui des outils langagiers mis en oeuvre. Seule la prise de distance avec le «discours argumentatif naturel» (au sens d'Esperet et al. 1987) pour élaborer un «discours argumentatif formel» (ibid.), reposant sur un langage opératoire, permet le calcul sur les propositions et les relations qui caractérise les preuves d'un niveau élevé, notamment les démonstrations.

La construction de tels outils langagiers est ainsi indissociable de la construction de la connaissance elle-même. Un exemple bien connu est celui du développement de l'algèbre élémentaire marqué par trois périodes : une première période dans laquelle le support d'expression est la langue naturelle, puis une période où il est fait usage d'abréviations, enfin l'apparition de symboles spécifiques permettant véritablement le calcul sur les relations mises en signes.

III.2. Caractéristiques langagières des preuves et nature des connaissances

De façon cohérente avec les états les plus primitifs de la genèse d'une connaissance, états dans lesquels elle peut être décrite en terme de «schèmes d'action» au sens de la psychologie piagetienne, la forme la plus élémentaire d'expression d'une preuve est **l'ostention** : les opérations et les concepts qu'elle mobilise sont agis. Ils ne sont pas différenciés ni articulés. Ils sont donnés à voir. Cela ne signifie pas pour autant l'absence de tout langage, mais il n'est pas à ce niveau l'outil fondamental de transmission de la connaissance. Un exemple est rapporté par Arsac (1987) dans lequel la figure ci-dessous est présentée avec pour seule légende : "regarde".



Preuve de Bhascara du théorème de Pythagore

Figure 2

Un exemple classique d'une telle preuve par ostension est celle de la propriété selon laquelle la somme des n premiers entiers impairs est n^2, cette preuve consiste en la figure suivante (fig. 3).

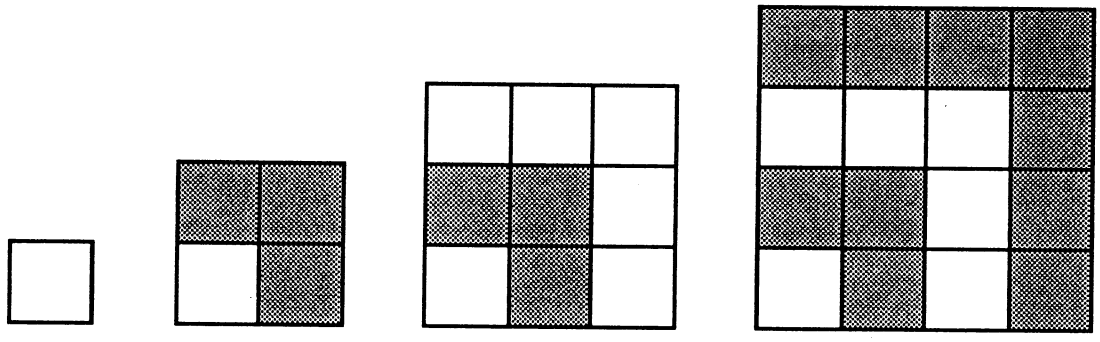


Figure 3

Ces preuves reposent sur la capacité de celui qui observe la figure à reconstruire les raisons que le locuteur a implicitement à l'esprit et qu'il ne sait autrement expliciter. Sémadéni (1984) qui recommande l'usage de tels preuves à l'école élémentaire en donne la caractérisation suivante :

> An action proof of a statement S should consist of the following steps :
> 1° Choose a special case of S. The case should be generic (that is without special features), not too complicated, and not too simple (trivial example may later be paticularly hard to generalize). Choose an inactive and/or iconic representation of this case or a paradigmatic example (in the sense of Freudenthal 1980).
> Perform certain concrete, physical actions (manipulating object, drawing pictures, moving the body etc.) so as to verify the statement in the given case.
> 2° Choose other examples, keeping the general schema permanent but varying the constants involved. In each case verify the statement, trying to use the same method as in 1°.
> 3° When you no longer need physical actions, continue performing them mentally until you are convinced that you know how to do the same for many other examples.
> 4° Try to determine the class of the cases for which this method work

Un rôle central est joué dans ce type de preuve par les

théorèmes-en-acte (Vergnaud 1981) qui consistent en des propriétés que le sujet utilise dans la résolution de problèmes sans pour autant être capable de les énoncer (nous discuterons ce concept important ci-dessous au § III.3.)

Nous appellerons **preuves pragmatiques** ces preuves recourant à l'action effective ou à l'ostension, et par contraste nous appellerons **preuves intellectuelles** les preuves qui se détachent de l'action et reposent sur des formulations des propriétés en jeu et de leurs relations. Ce détachement du pragmatique ne va pas de soi : la pratique interdite peut être évoquée et le discours rester très près de ce que le locuteur a vécu. Il s'exprimera dans **le langage de la familiarité** (Bourdieu 1980, p. 153) :

> langage qui ne connaît :"que les cas particuliers et les détails de l'intérêt pratique ou de la curiosité anecdotique, parlant toujours par noms propres de personnes ou de lieux [...] ce langage, que l'on n'adresse pas au premier venu passe sous silence tout ce qui va sans dire parce que cela va de soi"

L'action explicitée par ce langage porte la marque du temps et de la durée, la marque de celui qui agit et du contexte de son action. Néanmoins ce langage exige déjà un pas de côté pour que l'action puisse être décrite et expliquée, et donc prennent place ici les premiers moments d'une construction cognitive. Comme le suggère en fait Sémadéni, qui pense à une extension des preuves en acte, le passage aux preuves intellectuelles repose essentiellement sur la prise de conscience du caractère générique des situations d'abord envisagées. L'exemple ci-dessous (fig.4, tirée de Balacheff 1979) en est une illustration.

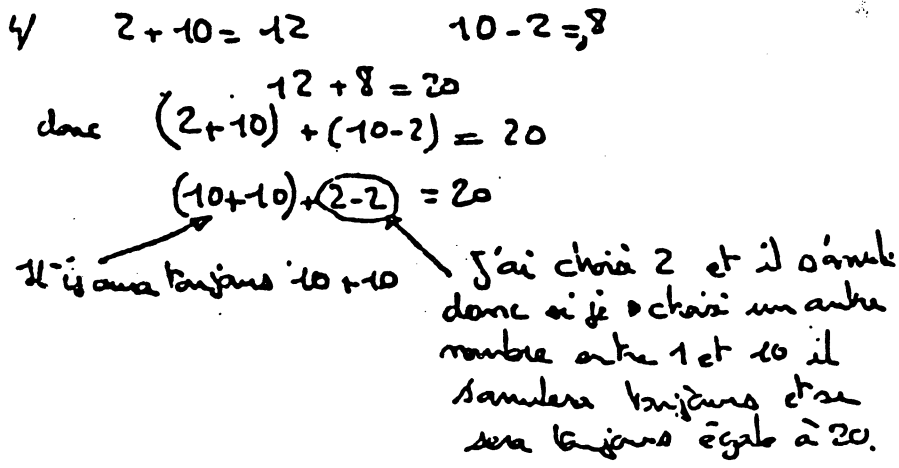


Figure 4

Le développement sur le terrain des preuves intellectuelles exige un changement de position, le locuteur doit prendre de la distance par rapport à l'action et au processus effectif de résolution du problème (rappelons que les élèves à qui on pose la question du pourquoi y répondent souvent en réitérant les opérations qu'ils ont réalisées pour résoudre le problème). La connaissance, jusque-là agie, devient l'objet de réflexions, de discours, voire de débats. Le langage de la familiarité, dont le support essentiel est la langue naturelle, permet une évolution dans cette direction. Mais il faut plus que cela pour élaborer des preuves «formelles», voire des démonstrations. Le langage doit devenir un outil pour le calcul logique et plus seulement moyen de communication. L'élaboration de ce langage fonctionnel requiert en particulier :

- une **décontextualisation**, abandon de l'objet actuel, lieu effectif de la réalisation des actions, pour accéder à la classe des objets indépendamment des circonstances annexes ou anecdotiques de leur apparition ;

- une **dépersonnalisation**, en détachant l'action de celui qui en a

été l'acteur et dont elle se doit d'être indépendante;

-une **détemporalisation**, dégageant les opération de leur date et de leur durée anecdotique; ce processus est celui fondamental du passage de l'univers des actions à celui des relations et des opérations (au sens piagetien).

Les langages fonctionnels se caractérisent, de façon plus ou moins importante, par l'introduction d'un lexique spécifique ou d'un symbolisme. Au niveau le plus élevé on trouverait une langue strictement symbolique. En fait, la pratique mathématique, pour des raisons d'économie, recourt à une association de la langue naturelle et de la langue symbolique, le *formalisme naïf* au sens de Bourbaki. Cette association correspond à une construction et à un fonctionnement linguistique spécifique (Laborde 1982).

L'élaboration de démonstrations requiert de plus un statut particulier des connaissances. Elles doivent être constituées en une véritable théorie qui doit être reconnue comme telle, c'est-à-dire acceptée par une communauté qui ne s'autorise plus à aller chercher où elle veut les arguments qu'elle utilise. La démonstration en mathématique s'appuie sur un corps de connaissances fortement institutionnalisé, ensemble de définitions, de théorèmes, de règles de déduction, dont la validité est socialement partagée. Ce principe est un des fondements de la rigueur mathématique.

Le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles, notamment la démonstration, repose ainsi sur trois pôles qui interagissent fortement :

- le pôle des connaissances,
- le pôle langagier, ou de la formulation,
- le pôle de la validation, ou des types de rationalité qui soustendent les preuves produites.

Le tableau ci-dessous illustre la correspondance entre ces différents pôles en référence aux hiérarchies qu'ils recouvrent ; il doit être reçu comme une indication sur des positions relatives approximatives et non sur des correspondances strictes entre les niveaux dans les différentes colonnes.

nature des conceptions	**formulation**	**validation**
pratiques (savoir-faire, théorème-en-acte)	ostension	preuves pragmatiques
	langage de la familiarité	
connaissances comme objet (savoir)	langage fonctionnel	preuves intellectuelles
connaissance théorique et reconnue (savoir-scientifique, théorème)	formalisme naïf	démonstration

III.3. Remarques sur le concept de théorème-en-acte

Le concept de théorème en acte a été introduit pour désigner "les propriétés des relations saisies et utilisées par le sujet en situation de résolution de problèmes, étant entendu que cela ne signifie pas pour autant qu'il est capable de les expliciter ou de les justifier" (Vergnaud 1981). L'utilisation du terme de théorème fait référence à un calcul sur des représentations, à des compositions déductives et à des inférences; ou encore elle évoque le fonctionnement, chez l'élève, de théories implicites. L'argument avancé par Vergnaud pour justifier la dénomination de théorème-en-acte est que "la plupart des opérations de pensée impliquées dans les problèmes [...] peuvent être décrites par des théorèmes" (Vergnaud 1983). On voit bien tout le parti que l'on peut tirer d'un tel concept pour une étude de la genèse des connaissances mathématiques, cependant son utilisation risque d'être parfois un peu rapide et de céder à l'attraction de la métaphore.

Si ce qui est observé chez l'élève est de l'ordre du **théorème-en-acte**, alors la réfutation de ce théorème devrait provoquer la prise de conscience de son existence , si ce n'est déjà le cas, et une remise en question. Il n'en est pas toujours ainsi :

- d'une part les actions du sujet ne sont pas nécessairement sous un contrôle de validation, comme par exemple dans le cas de la séquence de calculs suivante, que nous avons observée chez un élève de 15 ans (Mathieu 19-12-83) manifestant de grandes difficultés en calcul algébrique :

$$(Z+5)^2 -7<0 \qquad (Z-5)(Z+5)-7<0 \qquad (Z-5)(Z-2)<0 .$$

Les calculs sont exécutés de façon «automatique», ce serait aller trop loin

que de prétendre que les erreurs commises témoignent de théorèmes-en-acte.

- d'autre part ces actions peuvent ne pas être associées à une anticipation, elles sont présentes parce que substantiellement attachées à la situation. Par exemple dans le cas de la détermination du périmètre d'un triangle tronqué (fig.5, et cf. à ce sujet chap.IV § II et chap.VI) certains élèves tracent successivement des droites remarquables du triangle, d'autres font des mesures diverses puis des opérations sur les nombres obtenus ... "pour voir".

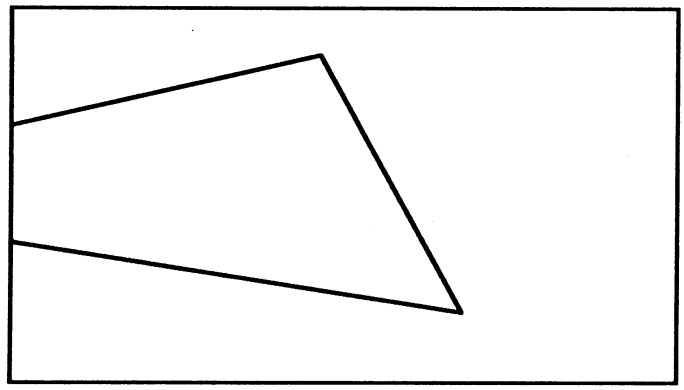
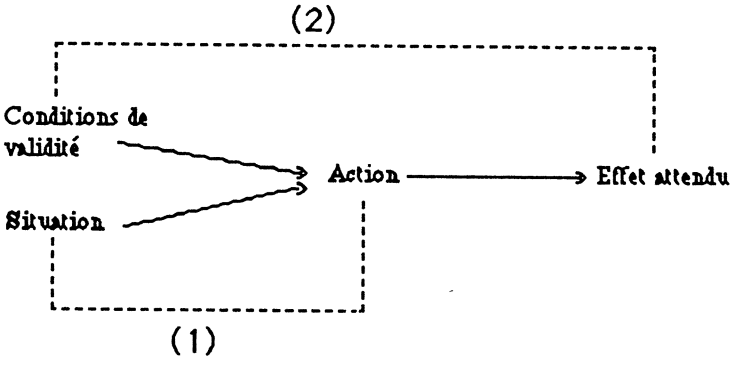


Figure 5

Il nous semble qu'il faut donc, pour attribuer à un observable de l'action des élèves le label de théorème-en-acte, ajouter une exigence : celle d'identifier les conditions de fonctionnement des opérations de pensée en question.

Considérons le schéma suivant :



Nous proposons de distinguer :

(1) le fonctionnement qui, centré sur le couple situation-action, occulte la prise en charge de l'effet attendu et celle des conditions de l'action. Le sujet ne s'assure pas de ce que son action est légitime ni de ce que son résultat sera celui qu'il souhaite;

(2) le fonctionnement prenant en compte les conditions de validité de l'action et de son adéquation aux effets attendus. Dans ce cas seulement il nous paraît pertinent de parler de théorème-en-acte.

Dans le premier cas nous parlerons de **règles d'action** dont le fonctionnement serait essentiellement celui d'une «routine» au sens de Saada-Robert (1983) spécifique d'une situation. L'échec de leur mise en oeuvre n'est pas repéré par l'élève qui ne dispose pas, ou ne mobilise pas, d'instruments de validation. En particulier, la confrontation effet-obtenu/effet-recherché n'a pas lieu parce que l'anticipation elle-même n'a pas lieu. Mais lorsque la prise de conscience de cet échec a

lieu, par exemple sous la pression des faits, le premier progrès décisif sera de poser le problème des conditions de validité de l'action ou de son adéquation. C'est cet évènement qui initiera la genèse du théorème-en-acte en engageant la construction du prédicat associé à l'action.

Par ailleurs la règle d'action qui se constitue ordinairement dans la pratique, peut en fait être la forme dégénérée d'un théorème(-en-acte). En effet la pratique routinière d'exercices conduit à instituer en habitude l'accomplissement de certaines opérations mathématiques et par économie entraîne l'occultation des conditions de validité et celle de la prise en charge de la validation du résultat obtenu. Cette dégénérescence est corrélative de la constitution des sphères de pratique.

IV. Niveaux et types de preuves

IV.1. "Problématique de l'efficacité" versus "problématique de la rigueur"

La constitution des mathématiques comme une science autonome se caractérise par la nature des questions qu'elle aborde et les moyens qu'elle met en oeuvre pour assurer la validité d'une assertion. Elle se détache des problèmes externes pour lesquels elle a pu proposer des outils de résolution, pour se consacrer à l'étude de concepts spécifiques issus de son développement interne. Cela se manifeste en particulier dans son histoire par une évolution des problématiques de preuve. Voici ce que Dahan et Peiffer (1982, p.114) écrivent des mathématiques égyptiennes : "comme celle des Babyloniens, la géométrie Egyptienne est pratique ; elle ne raisonne pas, mais cherche par tatônnements à établir des règles efficaces et satisfaisantes sur le plan de l'application, sans jamais être étudiée en soi. ". L'avènement de la démonstration sera d'abord une oeuvre de philosophes dans une rupture affirmée d'avec le monde sensible, rejettant l'observation pour fonder la vérité et la connaisance sur la raison. Le changement de problématique qui est ainsi attesté est celui du passage d'une "problématique de l'éfficacité" à une "problématique de la rigueur"

C'est à une rupture du même ordre que conduit, dans l'enseignement, l'introduction de la démonstration. Dans l'enseignement français, en géométrie, la classe de quatrième offre un bon exemple de ce

passage du pratique au théorique. La rupture entre géométrie pratique (celle de la règle et du compas, de la production de figure), en vigueur dans les deux premières années du Collège, et la géométrie (déductive) est celle d'un changement de statut épistémologique comme le montre bien Chevallard et Tonnelle. L'enquête (non publiée) qu'ils ont conduite sur la géométrie en fin de la classe de cinquième et en fin de la classe de quatrième, montre que de lieu du *tracé précis des figures* la géométrie devient le lieu de l'*étude des figures* . Cette rupture est d'abord unilatérale : elle est le fait du système didactique et constitue en fait un changement de contrat didactique dont la conséquence est un changement de statut de l'activité de l'élève, un changement de fonction. D'*élève-praticien* , tout orienté vers la maîtrise d'un savoir-faire, on passe à l'*élève-théoricien* dont la justification de l'activité est celle de connaître. C'est au nom de la connaissance que l'évidence est à rejeter pour fonder une vérité, et non au nom de la pratique. Il faut passer d'un lieu où le critère est celui de l'**efficacité**, à un autre où le critére est celui de la **rigueur**.

La distinction que nous venons de formuler met en évidence une caractéristique didactique inportante des situations d'enseignement qui est l'accès possible ou non à l'expérience. La réalisation matérielle d'une décision, ou celle du contenu d'une affirmation, permet des **preuves pragmatiques** lorsqu'elles sont produites par l'élève lui-même pour établir la validité d'une proposition. Lorsque cet accès à la réalisation n'est pas possible alors l'élève est contraint à des **preuves intellectuelles**. Ces preuves n'établissent pas de la même façon les propositions qu'elles soutiennent, elle n'ont pas non plus la même complexité :

- la preuve pragmatique est hypothéquée par la singularité de

l'évènement qui la constitue. Elle est de plus, tributaire d'un contingent matériel : outils imprécis, défaut de fonctionnement.

- la preuve intellectuelle mobilise une signification contre une autre, une pertinence contre une autre, une rationalité contre une autre.

Par ailleurs, la nature même de la dialectique associée à ces deux types de preuves est fondamentalement différente. En particulier la contradiction apportée par les *faits* n'a pas le même statut que celle apportée par le *discours* , même si celui-ci consiste à invoquer les faits, car elle peut être discutée en terme d'interprétation.

IV.2. Types de preuve

Nos premiers travaux de recherche (Balacheff 1978, 1979) et ceux de Bell (1976) nous conduisent à distinguer parmi les preuves pragmatiques et intellectuelles quatre principaux types dont nous faisons l'hypothèse qu'ils auront une place privilégiée dans la genèse cognitive de la démonstration : l'*empirisme naïf* , l'*expérience cruciale* , l'*exemple générique* et l'*expérience mentale* . Les premiers types ne permettent pas d'établir la vérité d'une assertion, il s'agit de preuves uniquement en référence à ceux qui les reconnaissent pour telles. Comme nous le montrons ci-dessous, il existe une rupture fondamentale entre les deux premiers types de preuve et les deux suivants. En effet, pour l'exemple générique et l'expérience mentale il ne s'agit plus de «montrer» que la proposition en question est vraie parce que «cela marche», mais d'établir le caractère nécessaire de sa validité en dégageant des raisons. C'est un changement radical dans la rationalité des élèves qui soustend ces preuves.

Par ailleurs, nous faisons l'hypothèse d'une hiérarchie sur ces types de preuve, dont rend compte l'ordre dans lequel nous les présentons ci-dessous. La place d'un type de preuve dans cette hiérarchie est déterminée par son niveau de prise en compte de l'exigence de généralité et par le niveau de conceptualisation des connaissances qu'il exige. Ainsi le passage de l'exemple générique à l'expérience mentale requiert le passage de l'action à l'action intériorisée, et une décontextualisation qui est la marque d'un progrès décisif dans la construction des connaissances. Ceci souligne le caractère indissociable de l'évolution des moyens de preuve, celle des connaissances et celle enfin des moyens langagiers (cf. § III.2.).

IV.2.1. L'empirisme naïf

L'empirisme naïf consiste à assurer la validité d'un énoncé après sa vérification sur quelques cas. Ce mode de validation très rudimentaire et, on le sait, insuffisant, est l'une des premières forme des processus de généralisation (Piaget 1978). Mais à propos d'un ensemble de problèmes posés à des élèves de 15 ans, Bell (1976, chap.9) relève que 25% d'entre eux fondent leurs réponses sur la seule vérification de quelques cas. On peut s'attendre à ce que l'empirisme naïf constitue constitue une forme résistante de généralisation.

IV.2.2. L'expérience cruciale

L'expression «expérience cruciale» nous vient de Francis Bacon (Novum Organum, 1620), elle désigne une expérimentation dont le résultat permet de choisir entre deux hypothèses, l'expérience ayant été

conçue de telle sorte que l'issue soit nettement différente suivant que l'une ou l'autre des deux hypothèses est vraie. Notons qu'en fait si cette expérience permet de rejeter une hypothèse, elle ne permet pas d'affimer que l'autre soit vraie.

Nous retenons cette même expression pour désigner un processus un peu différent qui consiste à vérifier une proposition sur un cas pour lequel "on ne se fait pas de cadeau" en affirmant que "si cela marche, alors cela marchera toujours". En voici un exemple tiré de Bell (1976, chap.10, p.12) : "Jayne shows a complicated polygon she can say definitely that the statement is true ". L'expérience cruciale servirait en quelque sorte à décider entre une proposition et sa négation. Ce type de validation se distingue de l'empirisme naïf en ce que l'individu pose explicitement le problème de la généralisation et le résout en pariant sur la réalisation d'un cas qu'il reconnaisse pour aussi peu particulier que possible.

IV.2.3. L'exemple générique

L'exemple générique consiste en l'explicitation des raisons de la validité d'une assertion par la réalisation d'opérations ou de transformations sur un objet présent non pour lui-même, mais en tant que représentant caractéristique d'une classe. La formulation dégage les propriétés caractéristiques et les structures d'une classe en restant attachée au nom propre et à l'exhibition de l'un de ses représentants. Nous en donnons ci-dessous un exemple tiré de Bezout (Notes sur l'arithmétique, 1832, p.23) :

> Le reste de la division d'un nombre par 2 ou par 5, est le même que le reste de la division de son dernier chiffre à droite par 2 ou par 5. Le reste de la division d'un nombre

> par 2x2 ou par 5x5, est le même que le reste de la division par 2x2 ou par 5x5 du même nombre exprimé par ses deux premiers chiffres à droite. Et ainsi de suite. Pour fixer les idées, nous considérerons le nombre 43728 et le diviseur 5x5. Le nombre 43728 est égal à 47700+28. Or 43700 est divisible par 5x5, car 43700 est le produit de 437 par 100, et 100 étant égal à 10x10, ou à 5x2x5x2, ou à 5x5x2x2, le facteur 100 est divisible par 5x5. Le reste de la division de 43728 par 5x5 ou 25 est donc le même que celui de 28 par 25.

IV.2.4. L'expérience mentale

L'expérience mentale invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier. Elle reste marquée par la temporalité anecdotique, mais les opérations et les relations fondatrices de la preuve sont désignées autrement que par le résultat de leur mise en oeuvre, ce qui était le cas pour l'exemple générique. Voici par exemple la preuve que Cauchy donne du théorème des valeurs intermédiaires dans son cours d'analyse de 1821 :

> ... il suffit de faire voir que la courbe qui a pour équation y=f(x) rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation y=b dans l'intervalle compris entre les ordonnées qui correspondent aux abscisses x_0 et X ; or c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise. En effet, la fonction f(x) étant continue entre les limites $x=x_0$ et x=X, la courbe qui a pour équation y=f(x) et qui passe 1° par le point correspondant aux coordonnées x_0, $f(x_0)$, 2° par le point correspondant aux coordonnées X et f(X), sera continue entre ces deux points ; et, comme l'ordonnée constante b de la droite qui a pour équation y=b se trouve comprise entre les ordonnées $f(x_0)$, f(X) des deux points que l'on considère,

> la droite passera nécessairement entre ces deux points, ce qu'elle ne peut faire sans rencontrer dans l'intervalle la courbe ci-dessus mentionnée.

Cette preuve relève de l'expérience mentale en ce qu'elle renvoie de fait à des théorèmes-en-acte éprouvés dans la pratique du tracé des courbes représentatives de fonctions continues usuelles, courbes en quelque sorte qui ne s'interrompent nul part (notons que Cauchy propose dans la note III à son cours une démonstration "directe et purement analytique" de ce théorème).

IV.3. Remarques sur les preuves intellectuelles et la démonstration

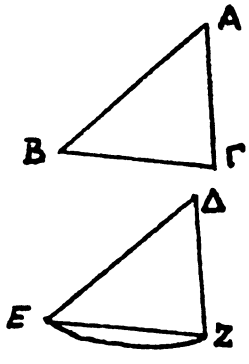
Le recours à l'expérience mentale marque véritablement le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles dans la mesure où ce ne sont plus des actions effectives, mais des actions intériorisées (au sens piagétien) qui sont mises en oeuvre. Les actions intériorisées se trouvent dans la genèse des opérations qui seront nécessaires à l'élaboration de preuves de niveau plus élevé. Les preuves reposant sur un exemple générique constituent un stade intermédiaire dans la mesure où la décision sur le caractère générique de l'exemple ne peut être prise qu'en connaissant l'usage qui en est fait : ou bien cet exemple est le lieu de réalisation des opérations effectives qui assurent la validité d'un énoncé, il est le moyen de les montrer, et alors nous le considérons du côté des preuves pragmatiques ; ou bien il fournit au locuteur un moyen pour exprimer sa preuve et alors nous le considérons du côté des preuves intellectuelles (cf. chap.II, § II.3.1.).

De l'expérience mentale à la démonstration on devrait reconnaître divers types de preuves intellectuelles qui diffèreront par leurs niveaux de décontextualisation, de détemporalisation et de dépersonnalisation évoqués plus haut, ainsi que par leur niveau de formalisme. Une analyse de ces preuves et leur typologie reste à faire. Du point de vue de la démonstration telle que nous l'entendons aujourd'hui comme structure du discours, un point crucial est le niveau de formalisation des connaissances qu'elle met en oeuvre.

Pour illustrer cela nous proposons de prendre l'exemple du théorème de géométrie élémentaire dit "deuxième cas d'égalité des triangles". Voici ci-dessous la *démonstration* classique des Eléments d'Euclide (traduction de Kayas 1978, pp.4-5) :

Soient **ABΓ** et **ΔEZ** deux triangles tels que l'on ait :

AB=ΔE, **AΓ=ΔZ** et **BAΓ=EΔZ**



Je dis qu'il est aussi **BΓ=EZ** et que ces deux triangles sont égaux et ont tous leurs autres éléments homologues égaux, c'est à dire que l'on aura aussi :

BΓ=EZ, ABΓ=ΔEZ et

AΓB=ΔZE

En effet, si l'on appliquait le triangle **ABΓ** sur le triangle **ΔEZ** de manière à faire coïncider d'abord les points **A** et **Δ**, puis les côtés **AB** et **ΔE**, le point **B** coïnciderait avec **E**, car **AB=ΔE**. Les côtés **AΓ** et **ΔZ** coïncideraient alors aussi, à cause de l'égalité entre les angles **BAΓ= EΔZ**,

de sorte que le point Γ, à son tour coïnciderait avec Z, car **AΓ = ΔZ.**
D'autre part, les points **B** et **E** ayant déjà coïncidé, les côtés **BΓ** et **EZ** coïncideront aussi, car, si d'une part **B** et **E** et d'autre part **Γ** et **Z** coïncident, mais les côtés **BΓ** et **EZ** ne coïncident pas, deux droites pourraient délimiter une aire, ce qui est impossible (*Ax.10*).
Nécessairement donc les côtés **BΓ** et **EZ** ne coïncideront et ils seront égaux (*Ax. 8*).
Par conséquent le triangle **ABΓ** tout entier coïncidera avec le triangle **ΔEZ** tout entier et il lui sera égal, et les angles restants de l'un coïncideront avec les angles restants de l'autre et ils seront respectivement égaux entre eux, à savoir :

ABΓ=ΔEZ et **BΓA=ΔZE**

Cette preuve par plusieurs aspects porte les marques de l'expérience mentale, il faut "appliquer", "faire coïncider", ces opérations qu'il s'agit de réaliser par la pensée n'ont pas de statut mathématique. C'est d'ailleurs le lot de la géométrie tant qu'elle ne disposera pas des transformations comme concepts mathématiques. Les "Nouveaux éléments de Géométrie" de Méray (1874) illustrent le progrès sur ce terrain, la preuve de ce théorème (ibid. p.60) se présente de façon analogue à celle des Eléments d'Euclide, mais les expressions "superposer les angles", "coïncider" y sont précisées :

"deux figures solides sont *égales* , quand on peut (au moins par la pensée) les amener à *coïncider* , c'est-à-dire à se confondre dans toutes leur parties" (ibid. p.3)

"*porter* un angle dans un plan et à partir d'une demi-droite donnée, c'est l'appliquer sur ce plan de telle sorte que l'un de ses côtés coïncide avec la demi-droite dont il s'agit, et qu'une demi-droite mobile, pivotant dans ce plan autour du sommet et d'une rotation de sens convenable identique à l'amplitude de l'angle, vienne s'appliquer précisément sur son second côté "(ibid. p.47)

Méray prend donc en compte explicitement les "mouvements" comme éléments de la construction de ses Eléments :

> "On a dit que l'idée de mouvement doit être bannie de la géométrie. Je proteste d'abord contre un tel byzantinisme ; puis je nie en rappelant que la superposition des figures, âmes de la géométrie, est inséparable, dans son essence, de la conception d'un certain *déplacement* pour le réaliser ; je riposte, en revenant à la théorie classique, de la perpendiculaire, où quelque demi-plan est assurément mis en *mouvement* autour de sa charnière."
> (Avertissement à la troisième édition, 1905)

Néanmoins les Nouveaux Eléments de Méray gardent fondamentalement la marque de l'expérience mentale par l'usage des verbes d'action, la référence à l'expérience et à un acteur. Comme le signale Th. Rousseau (in "Rapport de la sous-commission française de la CIEM sur l'enseignement secondaire", Bioche Ch., 1911, p.102) : "les professeurs ne se laissèrent pas convaincre. Les axiomes de la Géométrie d'Euclide leur semblaient faciles à admettre, parce que l'on conservait sur la plupart d'entre eux un silence prudent. Mais admettre les axiomes des déplacements et en particulier des translations comme un résultat d'expérience, leur paraissait comme l'aveu aux élèves de l'impuissance de la géométrie de se suffire à elle-même ". La constitution des transformations en concepts des mathématiques, d'abord en termes de *mouvement* , est l'oeuvre des géomètres du XIX° siècle dont Borel (cité par Rousseau, ibid. p.103) nous dit qu'ils "nous ont appris que : *la géométrie est l'étude du groupe des mouvements* ". Borel poursuit en indiquant le sens d'une évolution qui permettra l'élaboration de preuves se détachant de l'expérience mentale pour aller vers des démonstrations au sens moderne : "Substituer de plus en plus l'étude dynamique des phénomènes à leur étude statique est d'ailleurs une tendance essentielle de

l'esprit moderne ".

Nous donnons ci-dessous (fig.6) l'exemple d'une démonstration du "deuxième cas d'égalité des triangles", utilisant des transformations géométriques, tirée d'un ouvrage d'enseignement récent ("Mathématiques, classe de 5e", Paris : Hatier 1967).

En fait la constitution des transformations, notamment de la symétrie, en concept mathématique et en objet d'enseignement devait conduire à la disparition des "cas d'égalité des triangles" qui n'en devient plus qu'une application assez élémentaire. C'est ce qui est arrivé.

Précisons, pour finir, que ce que nous venons de décrire constitue une illustration de notre propos et non véritablement une étude historique de la conceptualisation des transformations en géométrie. En particulier nous nous en sommes tenu à un processus en quelque sorte interne à la géométrie sans prendre en compte des facteurs externes qui ont pu jouer un rôle essentiel comme le montrent Piaget et Garcia (1983) dans une étude du "développement historique de la géométrie ". Ils examinent notamment le rôle joué par l'algèbre, dont la citation suivante de Chasles (rapportée dans leur ouvrage, ibid. p.111) montre toute l'importance :

> "[...] en réfléchissant sur les procédés de l'Algèbre et en recherchant la cause des avantages immenses qu'elle apporte dans la Géométrie, ne s'aperçoit-on pas qu'elle doit une partie de ces avantages à la facilité des *transformations* que l'on fait subir aux expressions qu'on y introduit d'abord ? Transformations dont le secret et le mécanisme font la véritable science, et l'objet constant des recherches de l'analyste. N'était-il pas naturel de chercher à introduire pareillement en Géométrie pure des transformations analogues portant

directement sur les figures proposées et leurs propriétés."

Dans notre étude pour désigner les preuves des élèves qui iraient au-delà de l'expérience mentale, mais que nous ne pourions reconnaître véritablement comme des démonstrations, nous parlerons de **calcul sur des énoncés.**

2 Deuxième cas d'égalité

Soient deux triangles ABC, A'B'C' *tels qu'un angle de l'un soit égal à un angle de l'autre et que les côtés formant cet angle soient respectivement égaux :*

$$AB = A'B' ; \quad AC = A'C' ; \quad \widehat{A} = \widehat{A'}$$

Soit $A'B'C_2$ le triangle homologue de ABC dans une symétrie ou un produit de symétries axiales, ayant avec le triangle A'B'C' le côté commun A'B', et tel que $A'B'C_2$ et A'B'C' appartiennent au même demi-plan de frontière A'B' (9) :

par construction : $\widehat{B'A'C_2} = \widehat{BAC}$
par hypothèse : $\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}$
} donc $\widehat{B'A'C_2} = \widehat{B'A'C'}$

De même : $A'C_2 = AC$, $A'C' = AC$ } donc $A'C_2 = A'C'$

Les angles $\widehat{B'A'C_2}$ et $\widehat{B'A'C'}$ étant égaux (9), les demi-droites $A'C_2$ et A'C' d'origine A' sont confondues. Puisque $A'C_2 = A'C'$, les points C_2 et C' sont confondus ainsi que les triangles $A'B'C_2$ et A'B'C'.

CONCLUSION : Le triangle ABC égal à $A'B'C_2$ est alors égal au triangle A'B'C'.

Si deux triangles ont un angle égal, compris entre deux côtés respectivement égaux, ils sont égaux :

HYPOTHESE	CONCLUSION
$AB = A'B'$, $AC = A'C'$, $\widehat{A} = \widehat{A'}$	⟹ triangles ABC et A'B'C' égaux

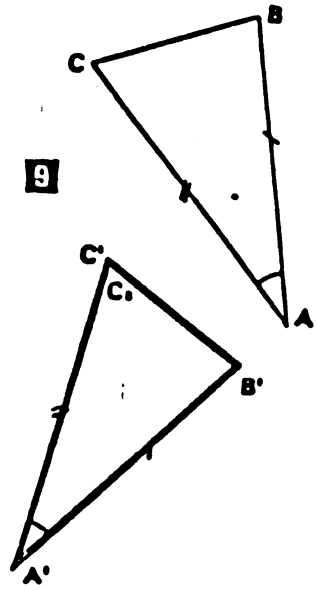


Figure 6

V. Dialectique de la validation

V.1. Preuves et réfutations

L'élaboration de preuves ne constitue que l'un des versants de la démarche de validation, un autre versant est celui de l'analyse critique des preuves, l'exploration des objets mathématiques dont la véritable nature est toujours questionnée. Comme l'histoire en témoigne la différenciation, la généralisation des concepts mathématiques n'est jamais terminée. Ainsi le concept de nombre, à la fois élémentaire et fondamental, n'a-t-il cessé de se transformer : les nombres entiers et rationnels positifs, nombres négatifs dont la nature est débattue jusqu'au XIX° siècle, construction des nombres réels au XIX° et plus récemment l'invention des réels non standards. De telles évolutions obligent à reprendre les preuves, à reconsidérer leur domaine de validité, à préciser les objets sur lesquels elles portent.

Cette dynamique du développement des mathématiques met en évidence un processus fondamental : la dialectique des preuves et des réfutations. Lakatos (1976) soutient à ce sujet une thèse radicale selon laquelle "les mathématiques non formelles, quasi empiriques, ne se développent pas par un accroissement continu du nombre des théorèmes indubitablement établis, mais dans l'amélioration incessante des conjectures grâce à la spéculation et à la critique, grâce à la logique des

preuves et des réfutations" (ibid. p.5).

Cette thèse ne fait pas l'unanimité. Elle est notamment battue en brèche par Dieudonné (1980) qui concède cependant que " l'évolution de la plupart des parties des mathématiques s'est faite suivant un même déroulement : il s'agit initialement d'objets que les mathématiciens estiment bien connaître «intuitivement», dont ils ne cherchent pas à analyser profondément la nature, et sur lesquels ils échafaudent des raisonnements qui leur paraissent échapper à toute objection [...] Dans une seconde phase apparaissent dans ces raisonnements prétendus «rigoureux» d'inquiétantes lacunes, voire des contradictions, ou encore des conséquences qui semblent tout à fait contraires à l'«intuition» que l'on croit avoir des objets considérés ; il devient alors nécessaire de revenir aux bases de ces raisonnements, pour définir avec plus de précision les objets que l'on étudie et les opérations permises sur eux. Mais souvent il reste, chez les initiateurs de ces réformes, un vestige de l'état d'esprit de leurs prédécesseurs, et l'on est surpris de constater qu'ils ont tendance à ne pas tenir compte des règles qu'ils ont eux-mêmes promulguées, et à se laisser entraîner par les vieilles «intuitions» à des conclusions erronées. C'est seulement lorsque la génération suivante s'astreint à respecter scupuleusement les règles de la déduction logique à partir d'un système *explicité* de propositions admises à la base (un «système d'axiomes») que la théorie acquiert un pouvoir de totale conviction, qui, contrairement à ce que prétendent certains, n'est plus jamais remis en question." (Dieudonné 1984, p.9-10)

Sans entrer dans ce débat, nous voudrions suggérer que ce qui est en question apparaît être finalement le domaine de validité du modèle de Lakatos. Il garde quoi qu'il en soit tout son intérêt pour qui s'intéresse à la

genèse des connaissances mathématiques. Nous retenons donc le modèle épistémologique que propose Lakatos, pour analyser des processus de preuve chez des élèves et leur évolution dans le cours de la construction de leurs connaissances mathématiques et, plus spécialement, dans celui de la résolution d'un problème. En effet, ce modèle est cohérent avec les théories développées par l'école genevoise sur la genèse des structures cognitives pour laquelle Piaget (1975) a montré le rôle central joué par la contradiction génératrice de déséquilibres dont le dépassement résulte en des constructions nouvelles. Par ailleurs les derniers travaux de Piaget (1983) sur la genèse du *nécessaire* montre le rôle essentiel joué par la prise en compte par le sujet des *possibles* : "elle [la nécessité] est solidaire de la constitution des possibles, ceux-ci engendrant des différenciations tandis que la nécessité est liée aux intégrations, d'où une équilibration de ces deux formations" (ibid. p.163).

Nous retenons donc que la prise d'une décision sur la validité d'un énoncé est légitimée par l'affirmation de son caractère *nécessaire* contre d'autres décisions *possibles* , même si cela n'apparaît pas de façon explicite. Ainsi le processus de validation, qu'il s'accomplisse ou non dans l'explicitation d'une preuve, est fondé sur une analyse du pour et du contre, sur la prise en charge de contradictions potentielles. Par là ce processus est essentiellement **dialectique**. Ce fait est encore plus évident dans un contexte de débat, dans le jeu des preuves et des réfutations. Par ailleurs, hors du contexte social, l'élaboration d'une preuve passe par une analyse critique et donc relève de la même dialectique : une preuve rigoureuse et définitive est une preuve qui ne sera pas réfutée. Voire, pour certains, une preuve qui ne serait pas réfutable.

V.2. Le problème de la contradiction

L'une des finalités d'un processus de preuve peut ainsi être exprimée comme étant d'assurer l'absence de contradictions formelles ou sémantiques dans la solution d'un problème. Mais le "fait" de la contradiction, alors porté au centre du débat de validation, présente une complexité qui ne se laisse pas réduire à la complexité logique.

En effet, la contradiction n'existe pas en soi mais relativement à un système cognitif. Par exemple, telle contradiction sera reconnue par l'enseignant, ou par l'observateur dans la situation expérimentale, mais ne le sera pas par l'élève :

> Ayant montré que la suite (u_n) admet une limite I vérifiant $I<1$, des étudiants traiteront dans l'expression :
>
> $$u_n^{n+1} + u_n^n + u_n^2 + u_n + 1$$
>
> d'une façon indépendante n en exposant et n en indice :
>
> $$\lim(u_n^{n+1} + u_n^n + u_n^2 + u_n + 1) = \lim(u_n^2 + u_n + 1) = I^2 + I + 1$$
>
> (Robert 1982)

Inversement une contradiction peut être attestée par les élèves alors que pour l'enseignant elle est inexistante :

> Pour des élèves de cinquième la somme des angles d'un triangle ne peut être égale à180° pour tout triangle, parce qu'un petit triangle ne peut avoir même somme d'angles qu'un triangle plus grand.
>
> (cf. Chapitre V)

> En cinquième, pour l'évaluation du volume d'un parallélépipède à l'aide de petits cubes, certains élèves, ayant décompté le nombre de cubes dans l'une des dimensions, considèrent qu'il faut en compter un de moins dans chacune des deux autres, *parce qu'on ne peut pas compter deux fois le cube du coin*.
>
> (Bodin 1980)

Dans ces exemples les raisons de l'identification ou de l'absence d'identification d'une contradiction, sont à chercher dans la nature même des connaissances mobilisées par les élèves.

Les deux derniers cas correspondent d'ailleurs à des situations de conflit cognitif sur lesquels s'appuient souvent les situations didactiques que nous concevons ; l'hypothèse étant que la prise de conscience de telles contradictions rend nécessaire l'évolution des conceptions de l'élève. On reconnait là la problématique constructiviste selon laquelle la contradiction est la source d'un déséquilibre dont la compensation est le moteur du progrès de la connaissance (dans le double processus de l'accomodation et de l'assimilation, voir à ce sujet les ouvrages classiques de Piaget). C'est encore dans cette perspective que s'inscrit l'épistémologie scientifique héritière de Popper. Cependant la reprise de cette problématique par Lakatos, pour ce qui concerne les mathématiques, fait apparaître que le dépassement des contradictions ne serait en fait que potentiellement source de progrès.

Dans le fonctionnement didactique, l'existence d'un savoir mathématique de référence (savoir scientifique ou savoir scolaire) donne à l'enseignant le pouvoir de décider du caractère effectivement contradictoire d'une situation. Il s'agira alors pour lui de rallier l'élève à

cette reconnaissance. Un problème didactique devient pour nous celui de savoir...

> *quelles sont les conditions nécessaires à la prise de conscience, par l'élève, d'une contradiction et à son dépassement ?*

Pour Piaget cette prise de conscience "ne se produit qu'au niveau où le sujet devient capable de dépassement" (1974, p. 161). Mais ce dépassement pouvant en fait consister en une véritable réorganisation des connaissances, la condition peut paraître un peu forte. Nous n'exigerons pas ce dépassement potentiel, mais nous retiendrons que son problème est posé : prendre conscience d'une contradiction c'est poser le problème du choix entre deux propositions : une affirmation et sa négation. Quelle que soit l'issue de ce choix, elle suppose que l'affirmation soit disponible et qu'elle soit susceptible d'être niée. La contradiction est ainsi dépendante d'une double construction. Nous soutenons l'idée que la prise de conscience ne se produira qu'au niveau où le sujet devient capable de cette double construction.

Une fois la contradiction identifiée par le sujet, son dépassement peut, quant à lui, n'être obtenu qu'après un long travail. Ainsi, dans le cas de la mesure des angles d'un triangle (voir à ce sujet chap.V), le dépassement de la contradiction évoquée plus haut passera par une reprise des conceptions de l'élève de la mesure d'un angle et de l'appropriation du postulat d'Euclide et de ses conséquences. La mise en relation des propositions "plus un triangle est grand plus la somme de ses angles est grande" et " la somme de tout triangle est 180°", si elle ouvre l'accès à la contradiction, ne suffit pas pour autant à son dépassement.

Par ailleurs la contradiction n'existe que par rapport à une attente déçue, à une conjecture infirmée. L'existence potentielle de l'affirmation ne suffit pas. Il faut qu'elle se trouve, comme le dirait Hadamard, au devant de la scène. Piaget mentionne lui-même que "la prise de conscience de la contradiction est bien plus aisée lorsqu'elle apparaît entre une prévision et une donnée extérieure qui lui inflige un démenti" (Ibid.). On peut constater ici que Piaget ne s'en tient pas aux seules conditions cognitives mais qu'il ouvre son analyse aux conditions liées à la situation. Il ne va cependant pas plus loin dans cette direction, du moins pour ce que nous avons pu lire.

La prise de conscience d'une contradiction suppose une prédiction, c'est-à-dire l'engagement effectif de l'élève sur une affirmation. Cela signifie son dégagement de l'action, un pas de côté grâce auquel l'action est considérée comme susceptible d'une réflexion, voire d'un discours. L'action n'est pas seulement agie. Produit d'un choix, elle est rapportée à ses conditions de validité et à ses effets. Elle est soumise à une finalité. La contradiction surgit de la non réalisation de cette finalité. Elle pose donc la question du choix et des conditions de l'action.

Nous retiendrons les conditions suivantes comme nécessaires à la prise de conscience d'une contradiction :

(i) existence d'un attendu : prédiction ou anticipation,

(ii) possibilité de construire l'affirmation associée à cet attendu et sa négation.

Il en découle que la contradiction est associée à un processus d'évaluation, explicite ou non, délibéré ou non, et de décision.

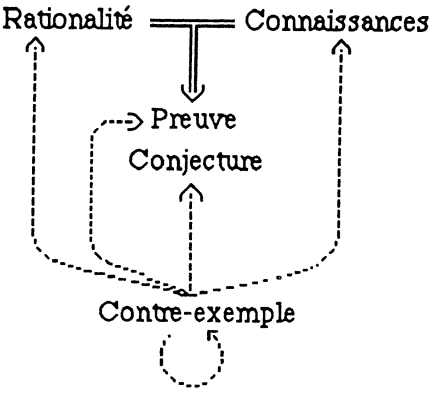
Pour que l'élève soit capable de ces anticipations il est nécessaire que ses connaissances constituent un modèle de la réalité afin de lui permettre un contrôle a priori de la situation-problème dans laquelle il se trouve.

V.3. Traitement des réfutations

La perception la plus répandue du contre-exemple, dans la classe de mathématique, est celle d'une catastrophe dont la conséquence est l'abandon pur et simple des positions conquises lors de la résolution du problème. L'univers de la classe de mathématique se révèle de ce point de vue plus manichéen que dialectique. L'analyse de l'activité du mathématicien, ou de la communauté des mathématiciens, comme nous la présente par exemple Lakatos, fait apparaître un fonctionnement bien différent et sûrement moins radical.

Prenant pour base l'analyse que propose Lakatos (1976), on peut différencier les conséquences d'un contre-exemple suivant qu'il rejaillit sur la conjecture, sur sa preuve, ou bien encore sur les connaissances ou leurs fondements rationnels. Il se peut même que le dépassement de la contradiction révélée par le contre-exemple passe par la critique et le rejet du contre-exemple lui-même. Le schéma ci-dessous explicitant la conjecture et sa preuve comme le produit conjoint des connaissances et de la rationalité d'un individu (traits pleins), résume les principales conséquences envisageables d'un contre-exemple (traits tirés); telles que l'amendement de la conjecture, la reprise d'une définition, le rejet du

contre-exemple, etc. .



Ce schéma a l'avantage de la clarté, il n'est cependant qu'une évocation de la multiplicité des retombées possibles d'un contre-exemple. Il nous suffira ici pour mettre en évidence un problème à notre sens fondamental et jusqu'ici occulté par les analyses didactiques (aussi bien que psychologiques).

Le caractère dialectique du développement des connaissances mathématiques, que Lakatos met en évidence pour ce qui concerne la phylogenèse et que nous connaissions déjà pour l'ontogenèse, a pour conséquence un problème qu'il ne souligne pas et qui ne pouvait échapper au didacticien : *qu'est ce qui détermine la légitimité du choix d'une réponse à un contre-exemple* ?

Les mathématiciens auxquels s'intéresse Lakatos semblent bien tous adhérer au même fond de rationalité. S'agissant d'élèves il n'en est plus de même : empirisme naïf ou expérience cruciale peuvent fonder des preuves et constituer les racines légitimes d'une conviction. Si donc nous nous

appuyons sur une contradiction révélée à l'élève pour obtenir que soient reconsidérés les fondements rationnels de sa conjecture et de sa preuve prétendue, comment éviter que le débat porte finalement sur la légitimité du contre-exemple ou sur un amendement à la conjecture. Ce qui peut apparaître tout à fait légitime à l'élève, puisqu'aprés tout cette même rationalité lui suffit pour faire face à de nombreuses situations pratiques qu'il rencontre par ailleurs.

Comment éviter que face à un contre-exemple que lui produit l'enseignant, l'élève ne déclare qu'il s'agit là d'un cas particulier alors que sa conjecture est fondée sur un empirisme naïf ? Ce problème garde toute son importance à des niveaux plus avancés de la scolarité où l'étudiant discutera la légitimité d'un contre-exemple alors que, pour nous, ce qui est en question c'est la conception qu'il a de la connaissance en jeu.

Fonder l'apprentissage, c'est-à-dire la conception des situations didactiques, sur la prise de conscience de contradictions par les élèves, sur une dialectique de la validation, nécessite que soit prise en charge cette incertitude sur la nature du dépassement d'une contradiction. S'il paraît assez clair qu'il n'y a pas de déterminisme strictement cognitif, quel est alors le rôle des caractéristiques de la situation ? Les interventions de l'enseignant et sa gestion du contrat didactique seront sûrement des éléments déterminants pour que soit jugée pertinente face à un contre-exemple la remise en question des connaissances plutôt que celle des fondements rationnels de la conjecture, ou encore la remise en question du contre-exemple lui-même plutôt que celle de la preuve.

Chapitre II

PREUVES ET CONTRE-EXEMPLES : "LES POLYGONES"

I : Présentation de l'étude

I.1. Introduction

L'expérience dont nous présentons ici la conception et l'analyse a été élaborée pour reprendre les thèses de Lakatos dans le cadre de la résolution d'un problème par des élèves. Il s'agit d'élucider la place et la nature des démarches de preuve dans la résolution d'un problème, en examinant notamment le rôle des contre-exemples et de leur traitement par des élèves.

Il est bien sûr hors de question, au niveau du premier cycle qui

nous intéresse ici, de reprendre le problème de l'établissement de la formule d'Euler pour les polyèdres. Ne serait-ce que parce que la maîtrise du domaine conceptuel correspondant échapperait complètement aux élèves. Mais nous avons voulu cependant rester assez près de ce type de problème pour nous limiter essentiellement à la discussion de l'hypothèse d'un parallélisme entre les processus à l'œuvre au niveau d'un individu et ceux décrits par Lakatos.

Pour cela nous avons retenu le problème de la découverte et de l'établissement d'une formule de dénombrement des diagonales d'un polygone quelconque. Comme moyen d'investigation des procédures utilisées par les élèves nous avons retenu une situation d'interaction sociale entre deux élèves avec une communication invoquée. Nous discuterons ce choix dans le paragraphe ci-dessous, de même que nous expliquerons celui du domaine conceptuel retenu et que nous ferons l'étude a priori des solutions que les élèves peuvent apporter à ce problème.

La première modalité que nous avons utilisée consiste à proposer le problème aux élèves sans leur fournir la définition de polygone et diagonale. Ce choix a été fait pour donner la possibilité d'observer la (re)construction de ces concepts dans le cours de la résolution, notamment en relation avec les réfutations. Nous avons cherché de cette façon à nous placer dans un contexte aussi proche que possible de celui de l'objet d'étude de Lakatos qui, avec les problèmes de preuve, pose ceux de la constitution des connaissances mathématiques.

La modalité dans laquelle des définitions seront fournies aux élèves sera aussi étudiée. Son compte rendu fera l'objet du chapitre suivant.

Dans le présent chapitre nous rendons compte des processus de preuve observés et de leur évolution, des différents types de traitements des réfutations et enfin des problèmes liés à la définition.

I.2. Description de la situation expérimentale

I.2.1. Le dispositif expérimental

Les élèves travaillent par deux, ils ne disposent que d'un seul stylo et d'autant de papier qu'ils le désirent. L'observateur leur explique qu' *il s'agit de rédiger un texte qui sera envoyé à des camarades du même niveau scolaire, par lequel il s'agit de* :

> **donner un moyen qui permette dès que l'on connaît le nombre des sommets d'un polygone, de calculer le nombre de ses diagonales.**

ces dernières lignes sont inscrites sur une feuille qui est laissée à la disposition des élèves pendant toute la durée de l'observation.

Il est indiqué aux élèves qu'ils disposent d'autant de temps qu'ils le désirent : ils décideront eux-mêmes du moment où ils considèrent le problème comme résolu.

En fait, ceci constitue la **première partie** de l'expérience. Après qu'un message ait été proposé par les élèves, l'observateur invoque des difficultés que pourraient rencontrer les élèves interlocuteurs à mettre en

œuvre le moyen de calcul proposé, pour certains polygones. Notamment, les configurations ci-après (fig.1), devraient être systématiquement proposées.

L'ensemble de l'expérimentation est enregistré, parfois seulement elle aura pu être filmée. C'est à partir des notes prises par l'observateur, de l'ensemble des productions écrites des élèves et de la transcription des enregistrements que sont conduites nos analyses.

P_5 à sommets alignés P_4 croisé

Figure 1

I.2.2. Le champ conceptuel

Au niveau qui nous intéresse, la classe de 4e, les polygones ont davantage un statut d'objet culturel que celui d'un objet d'enseignement. Ils sont rarement mentionnés dans les manuels scolaires de ce niveau, du moins pour ceux correspondant aux programmes 1979 (arrêté du 16 novembre 1978) en vigueur dans les classes que nous avons observées (l'observation a eu lieu dans le cours du second trimestre de l'année scolaire 1979-1980). Lorsqu'ils sont mentionnés il s'agit d'un préambule à la présentation d'autres objets géométriques (le parallélogramme notamment) qui seront, eux, de véritables objets d'enseignement.

En revanche les polygones ont pu être un objet d'étude à l'Ecole Elémentaire, principalement au CE1 : on les observe, on compte leurs côtés et leurs sommets, on différencie leur forme, on les nomme. Voici, par exemple, comment sont décrites dans ERMEL (1978, p. 160) les activités sur les formes planes :

> " La comparaison de formes planes diverses, par les observations qu'elle suscite, conduira les enfants à expliciter les critères retenus dans les classements effectués. Parmi ces derniers on privilégiera ceux relatifs à : la convexité, la rectitude des arêtes, le nombre d'arêtes (côtés) ou de sommets, les relations entre les côtés (isométrie, parallélisme, orthogonalité), les éléments de symétrie, etc... "

Suivent un paragraphe "Classement des formes planes", puis un autre "Classement des formes polygonales" et enfin "Classement des quadrilatères". Les polygones sont les figures qui ont des "côtés droits" (ibid. p.161).

En fait, l'enjeu de l'étude des polygones est, à ce niveau, pour l'essentiel la mise en pratique de l'usage, voire de l'élaboration de définitions. Par exemple selon Bassis (1984, p.115), à propos d'une séquence proposée sur les polygones :

> " Chaque conduite de classement aboutit à la formulation par les enfants de désignations ramassées d'ensembles, désignation ayant valeur de DEFINITION, parce que ne se contentant pas d'être juxtaposition de propriétés descriptives, mais conduisant de très près à des propriétés nécessaires et suffisantes."

Nous avons plus précisément examiné ce qu'il en était, au collège et

pour les classes de 6e, 5e et 4e, en reprenant les ouvrages de la collection E. Gallion (OCDL Hatier, éditions respectivement des années 1977, 1978 et 1979). Ces ouvrages ont été utilisés pour l'enseignement au collège de Moirans, dont sont issus 4 des 14 binômes d'élèves que nous avons observés.

- **en 6e** : le mot "diagonale" apparaît à propos du parallélogramme, il est montré ainsi que "côté", "parallélogramme", "sommet" et "centre", sur une figure. Les diagonales se coupent au centre de la figure (op.cit. p. 27). Le mot "polygone" apparaît dans une section intitulée "périmètre" (ibid. p. 39). Un polygone concave est montré, son périmètre est défini.

- **en 5e** : le mot "polygone" apparaît dans un exercice de classement d'objets (op. cit.p. 117). Il s'agit d'une section sur les partitions. Octogone et heptagone réguliers ont été mentionnés (ibid. p. 40) à propos d'une activité de confection de volumes. Il est demandé aux élèves de retrouver l'étymologie des noms de ces polygones.

- **en 4e** : toute une section porte le nom "*vocabulaire sur des polygones* " (op.cit. p. 20 sq.). Il s'agit d'une section de "*révision sur ce vocabulaire* " (p. 20). Les premières activités portent sur l'observation de polygones réguliers (hexagone, octogone puis carré). Un polygone concave apparaît dans une activité où l'on demande de dénombrer les sommets, puis dans une autre activité les élèves ont à distinguer quadrilatère croisé et non croisé. Les termes "sommet", "côté", et "diagonale" sont ensuite introduits sur l'exemple d'un quadrilatère. Les exercices qui suivent ne portent que sur le quadrilatère. Seul le mot "diagonale" réapparaîtra dans la suite du texte, à propos de propriétés du losange (ibid. p. 118), du rectangle (ibid. p. 214), et du parallélogramme (ibid. p. 216).

Nous n'avons trouvé (sans cependant faire de recherche au-delà de la bibliothèque de l'IREM de Grenoble, soit une douzaine d'ouvrages) qu'un seul autre manuel scolaire de 4e, aux éditions Magnard, qui consacre une section aux polygones. Le "Livre du Professeur" précise qu'il s'agit d'une "leçon utile de mise au point sur la désignation des polygones " (op. cit. p. 54). Dans un autre ouvrage; Jéomatri chez Ophris (1979) ni le mot "polygone", ni le mot "diagonale" ne sont utilisés (pour le parallélogramme on parlera de milieu de bipoints). En fait, la plupart des ouvrages consultés utilisent sans le redéfinir le mot "diagonale" à propos des propriétés caractéristiques du parallélogramme et éventuellement d'autres quadrilatères : carré, losange (Delagrave 1979, Hachette 1979, La Capitelle 1979, A. Colin 1979).

Malgré quelques petits sursauts de vitalité, les polygones sont devenus de vieux objets. Ils sont tout au plus un cadre pour l'introduction de quelques quadrilatères particuliers dont l'étude sera approfondie.

Ceci nous a conduit à soutenir l'hypothèse que les élèves pourront mobiliser assez rapidement des conceptions de polygone et diagonale, avec cependant la tendance à privilégier les polygones réguliers ou le prototype du parallélogramme (qui devrait conduire à ce que nous appellerons les diagonales diamètres (diagonales-qui-se-coupent-en-leur-milieu).

I.2.3. Analyse a priori des procédures

Notation : dans toute la suite **f** désigne l'application $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui fait correspondre au nombre des sommets d'un polygone, le nombre de ses diagonales ; et s : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ l'application qui au nombre de sommets d'un polygone fait correspondre le nombre des diagonales en un sommet.

Un peu dans la situation des solides pour Euler au XVIIIe siècle les polygones seront pour les élèves des objets familiers, a priori non problèmatiques. Comme les polyèdres de Platon, les polygones réguliers jouant ici un rôle privilégié.

Dans le cas où les élèves mobiliseraient une conception "classique" de polygone et diagonale nous nous attendons principalement à trois types de propositions :

f(n) = n(n-3)/2, fondée sur la remarque de l'invariance du nombre des diagonales en chaque sommet du polygone, et de ce que la sommation de ces nombres conduit à compter deux fois chaque diagonale.

$\mathbf{f(n)=(n-3)+\sum_{p=3}^{p=n}(n-p)}$, fondée sur une procédure de dénombrement systématique des diagonales d'un polygone en parcourant son bord dans un sens déterminé. Dans la suite cette solution sera désignée par $f(n)=\Sigma\mathcal{S}n$ où $\mathcal{S}n$ désigne la suite des nombres de diagonales en chaque sommet rencontré au fil de ce parcours.

f(n)=f(n-1)+(n-2), fondée sur la construction du polygone P_n (i.e. polygone à n sommets) à partir du polygone P_{n-1}. Une solution analogue, exprimée par une formule de récurrence, peut être issue de l'observation de la suite des couples : (nombre de sommets, nombre de diagonale). L'analyse des "différences successives" peut conduire à f'(n)=f'(n-1) + a(n) et a(n)=a(n-1)+1 ; avec les valeurs initiales : f'(3)=0 et a(3)=0.

Enfin on peut envisager la solution : $\mathbf{f(n)=c^2_n - n}$, mais elle suppose une approche combinatoire dont l'apparition est peu probable chez les élèves de 4e. D'abord pour la raison évidente que les formules de

dénombrement sont hors de leur portée, mais aussi parce qu'une conception combinatoire de polygone (ensemble abstrait muni d'une relation d'incidence) est peu plausible à ce niveau.

Bien qu'équivalentes du point de vue mathématique, ces solutions sont très différentes quant à leur signification pour les élèves. Elles mobilisent des analyses différentes, de type dénombrement ou de type énumération, et un engagement différent des conceptions de polygone et de diagonale.

Par ailleurs, on peut s'attendre à des refus d'accepter des diagonales extérieures au polygone dans le cas de polygones concaves. Ces solutions pourraient alors être aménagées en les complètant d'une condition de convexité.

Dans le cas où les élèves mobiliseraient des conceptions fortement marquées par le prototype du parallélogramme ou par les polygones réguliers, nous envisageons des solutions du type f(n)=n/2. Cela suppose une conception de "diagonale" comme diamètre du polygone. Bien sûr un telle solution est réfutée par un quelconque polygone qui aurait un nombre impair de sommets. Le traitement de cette réfutation nous semble complètement ouvert : introduction d'une condition, explicitation d'une définition qui "sauve" la conjecture, modification de la conjecture, etc. . Un objet de notre recherche est justement de préciser ce qui détermine le choix de l'un de ces traitements.

Enfin, nous avons envisagé deux solutions qui pourraient être issues de la conjugaison d'un empirisme naïf à l'observation des cas d'un polygone à 5 sommets ou à 7 sommets. Il s'agit, respectivement, de f(n)=n

et de f(n)=2n. On remarquera la fragilité de ces procédures qui sont réfutées par tout autre polygone que celui qui leur a donné naissance. D'autres conjectures "fragiles" supposent l'examen de polygones ayant un grand nombre de sommets, par exemple f(n)=3n qui est vérifiée par le seul P_9. Il est peu probable que les élèves aillent jusque là.

I.2.4. Le recours à l'interaction sociale

Nous avons utilisé comme outil expérimental dans cette étude une situation d'interaction et de communication. Ce type de situation utilisé depuis plusieurs années dans divers travaux (Balacheff et Laborde 1985a, 1985b) donne un accés particulièrement efficace aux conceptions des élèves et aux procédures qu'ils utilisent.

La caractéristique principale de cette situation est que les élèves ont pour **tâche commune** de résoudre **ensemble** un problème. Les interactions entre pairs permettent l'extériorisation des conceptions, des projets et des prises de décision des élèves, indépendamment de toute intervention d'un expérimentateur.

Nous faisons donc l'hypothèse, pour la première partie de l'expérience, d'un fonctionnement des élèves dans une situation quasi-isolée, ce qui n'exclut pas l'existence d'un contrat expérimental dont nous devrons faire l'analyse. (Nous entendons par contrat expérimental l'ensemble des règles le plus souvent implicites qui régissent les rapports entre les différents partenaires dans la situation observée, y compris l'observateur lui-même. Cette notion est directement tirée de celle du

contrat didactique forgée par Brousseau (1986)).

Les élèves ne disposent que d'**un seul stylo** : cette contrainte très artificielle est un élément important de la situation. Elle est un obstacle à l'organisation de la recherche en un travail séparé et indépendant de chacun des élèves puis à une confrontation de leurs productions ; cette confrontation est le plus souvent rendue délicate par la difficulté de chacun à entrer dans la solution de l'autre, tout en soutenant son propre projet. En revanche le fait de ne disposer que d'un seul moyen d'écriture oblige les élèves à une confrontation constante pour le choix d'une stratégie, d'une opération à réaliser, ou pour déterminer des critères communs pour accepter ou refuser une assertion.

Une telle situation réalise une situation de validation au sens de Brousseau, dont nous avons décrit plus haut les caractéristiques (chap.I).

Par ailleurs, la situation d'interaction sociale favorise les conflits socio-cognitifs qui, comme le soulignent Mugny et Doise (1981), porteront à la mise en évidence de contradictions plus facilement que les situations de fonctionnement individuels où les contradictions peuvent être occultées par les distances temporelles entre les faits qui les révèlent.

Enfin, tel que le problème est soumis aux élèves, il est fait référence à la communication avec des pairs, élèves du même niveau scolaire. La situation est ce que nous appelons une situation de **communication invoquée** car ces pairs sont absents, il n'y aura pas de feedback sur le message émis (contrairement aux situations de communication réalisée, cf. par exemple Balacheff 1982). Ce contexte finalise de façon à la fois plus précise et plus intrinsèque l'activité et la

production des élèves. Le fait que la procédure de calcul décrite doive être utilisée par d'autres élèves, inconnus, sur lesquels les émetteurs n'ont pas de contrôle devrait favoriser la prise de conscience, et la prise en charge, des problèmes de la généralisation. De même devrait être favorisée une problématique de la fiabilité qui peut donner naissance à des mises à l'épreuve sévères de la solution proposée, et peut être même à l'entrée dans une problématique de la preuve.

Nous faisons donc l'hypothèse que cette situation expérimentale réunit les conditions d'interaction sociale, les conditions cognitives et les conditions situationnelles, nécessaires à l'apparition des processus que nous voulons observer.

I.3. Données globales sur les observations réalisées

Notation : dans toute la suite nous noterons P_n un polygone à n sommets.

I.3.1. La population des élèves observés

Nous avons observé 14 binômes d'élèves de collèges de l'agglomération grenobloise, soit dans le courant du second trimestre 1980-1981, soit dans le courant du second trimestre 1981-1982. Le niveau scolaire est celui de la classe de 4e pour 13 des binômes, le quatorzième (Pierre et Mathieu) a été observé au début du mois de juillet 1980, à la fin de la scolarité de 5°.

Ces observations n'ont été possibles que grâce à la collaboration bénévole des enseignants et à celle volontaire des élèves. Ces derniers se constituant en binôme au grè de leurs affinités, il y a sûrement là une faiblesse méthodologique. Elle nous était imposée par les conditions même de la recherche à ce moment (cependant la richesse des résultats obtenus nous conduit à ne pas lui accorder trop d'importance).

Les observations ont été réalisées dans l'enceinte des établissements scolaires, mais en dehors de la classe. Le moment choisi dans la journée, pas très confortable, dépendait essentiellement de la disponibilité des élèves : "entre midi et deux heures", à la suite des cours de l'après-midi (mais avant le départ du car du ramassage scolaire). Nous avons cependant disposé de deux heures. Le temps de travail des binômes a été en moyenne de $1h^1/_2$.

Nous donnons ci-après la liste des binômes observés avec les précisions de date et de lieu.

4e			
Antoine et Damien	26 mai 1982	CES des Eaux Claires	Grenoble
Christophe et Bertrand	15 février 1982	CES La moulinière	Domène
Blandine et Isabelle	3 février 1982	CES Pablo Picasso	Echirolles
Evelyne et Christine	28 janvier 1982	CES Le Vergeron	Moirans
Georges et Olivier	3 février 1982	CES Pablo Picasso	Echirolles
Hamdi et Fabrice	28 janvier 1982	CES Le Vergeron	Moirans
Laurent et Lionel	15 février 1982	CES La moulinière	Domène
Lydie et Marie	3 février 1982	CES Pablo Picasso	Echirolles
Martine et Laura	31 mars 1981	CES Pablo Picasso	Echirolles
Nadine et Elisabeth	12 mars 1981	CES Gérard Philipe	Fontaine
Naïma et Valérie	18 février 1982	CES Le Vergeron	Moirans
Olivier et Stéphane	18 février 1982	CES Le Vergeron	Moirans
Pierre et Philippe	12 mars 1981	CES Gérard Philipe	Fontaine
5e			
Pierre et Mathieu	8 juillet 1981	CES Stendhal	Grenoble

I.3.2. Le contrat expérimental

Le dispositif expérimental que nous avons mis en place comprend deux parties bien différentes, le passage de l'une à l'autre se faisant au prix d'une rupture du contrat expérimental : changement dans le rôle de l'observateur qui sort de sa "neutralité" pour produire des contre-exemples.

Quelques propos, en fait assez peu nombreux au regard du volume des données recueillies, montrent que le fonctionnement des élèves au cours de la première partie n'est pas totalement isolé de l'observateur, mais seulement "quasi-isolé".

L'observateur a pu être pour certains d'entre eux, un personnage de référence à qui l'on demande ce que l'on a le droit de faire (ce qui va dans le sens d'une explicitation du contrat expérimental) ou un arbitre vers qui on peut se tourner :

- Hamdi et Fabrice demandent s'ils ont le droit de faire des dessins (Ham 17) et s'il faut considérer un polygone quelconque (Ham 38),

- Lydie et Marie demandent si elles peuvent utiliser des exemples (Lyd 6.8),

- Olivier et Stéphane se tournent vers l'observateur pour lui demander la définition de polygone (Sté 16) et si la solution doit être donnée "*en général* " (Sté 46),

- Pierre et Philippe se tournent vers l'observateur pour chercher son assentiment sur un résultat (Phi 33) ou sur une définition (Pie 44),

- Lydie et Marie cherchent chez l'observateur un arbitrage de leur conflit de conception (fin de la phase I),

- Naïma et Valérie laissent ouvert leur conflit au sujet de P_5 (considéré ou non comme un polygone) et s'en remettent à l'observateur (fin de la phase I).

Pour certains élèves, la situation d'observation modifie le sens même de la tâche. Ainsi, Pierre et Mathieu (principalement Pierre) n'entrent pas véritablement dans une démarche de validation parce qu'ils attendent que l'observateur révèle la bonne solution ; c'est une situation de devinette. (cf. § II.2.1.). Pour d'autres binômes la forme de l'intervention de l'observateur durant la seconde partie de l'expérimentation, transforme la nature de leur activité. Pour Antoine et Damien qui l'explicitent et de fait pour Naïma et Valérie, la situation devient un jeu de la définition dans lequel ils se défendent contre les contre-exemples produits par l'observateur (voir pour plus de détails le chap III,§ II.2.4.).

Pour la plupart des autres élèves, la rupture de contrat ne paraît pas affecter de façon essentielle leur comportement. Certes, les polygones produits par l'observateur comme contre-exemples portent la marque de son autorité, mais cela n'empêche pas le rejeter ces réfutations.

En fait cette dimension de la situation prend une place normale dans notre analyse dès lors que nous reconnaissons l'importance des caractères situationnels dans les démarches de validation (chap. I).

Ainsi le contrat expérimental n'est pas un biais dans notre étude mais un élément à part entière et inévitable que nous prenons en compte dans tous les aspects de notre analyse.

I.3.3. Problème posé et problème traité

Le problème posé aux élèves, du moins de notre point de vue, est un problème de dénombrement. Il entretient, ce qui est fréquent en combinatoire, des relations étroites avec un problème d'énumération. Mais le problème traité par les élèves sera celui qu'ils vont reconstruire dans le cadre du dispositif expérimental que nous avons conçu, à partir de l'énoncé qui leur est soumis et de leurs conceptions attachées au domaine mathématique en question.

Nous notons que l'énumération des diagonales d'un polygone est fortement sous-jacente à l'une des solutions possibles, celle que nous avons notée $\Sigma \mathcal{P}$n.

Le glissement vers le problème de l'énumération est le plus souvent dû aux difficultés rencontrées par certains binômes pour décider de ce que sont les diagonales d'un polygone, et pour les tracer. Ainsi la première production de Naïma et Valérie est un texte qui indique comment tracer les diagonales de P_6. De la même façon la première production de Lydie et Marie est la définition de diagonale. Après tout, comme Christophe le fait remarquer à Bertrand, après le tracé des diagonales d'un polygone, les interlocuteurs "*les comptent après, c'est pas bien pratique, mais...*" (Chr 200).

Lorsque les élèves sont allés jusqu'à soumettre une telle solution à l'observateur, celui-ci a fait remarquer qu'il ne s'agit pas d'un "moyen de calcul". Les élèves ont alors repris la résolution du problème et sont allés jusqu'à une solution au problème de dénombrement.

Naïma et Valérie, comme Lionel et Laurent, ne prennent pas d'emblée en compte qu'il faut produire un moyen de calcul pour tous les polygones. Les premières donnent un résultat pour P_6, les seconds pour P_5. L'observateur fait remarquer que le problème posé n'est pas résolu, les élèves reprendront alors leurs recherches qu'ils mèneront jusqu'à fournir une solution pour "les" polygones (en référence à leurs conceptions).

Enfin, des aspects habituels du contrat didactique en 4e apparaissent dans le contrat expérimental tel qu'il est reconstruit par les élèves. Georges et Olivier, comme Martine et Laura, soulignent qu'il s'agit de produire un moyen de calcul et non sa preuve ou des explications. On conçoit que la question se pose effectivement car le produit d'une activité scolaire est en général à ce niveau moins la production d'un résultat mathématique que celui de sa validation.

I.3.4. Premières données sur la résolution du problème

a) Les solutions

Le tableau ci-dessous rend compte des diverses solutions apportées par les élèves au problème du dénombrement des diagonales.

Ce tableau met en évidence que plus de la moitié des binômes sont parvenus à ce que nous appellerions une solution correcte. Un seul cependant est parvenu à la solution classique $f(n) = n(n-3)/2$ dès la première partie de la solution.

Ces résultats confortent l'analyse a priori que nous avions faite des procédures et des conceptions que les élèves mobiliseraient. Même la solution f(n)=2n, non présente dans le tableau, est apparue : elle a été fortement défendue par Christophe face à Bertrand. La prégnance du modèle du parallélogramme pour les diagonales, explique la dominance des solutions du type f(n)=n/2.

Binôme	**Première partie**	**Deuxième partie**
Christophe et Bertrand	n(n-3)/2	
Hamdi et Fabrice	n^2	n(n-3)/2
Lionel et Laurent	n	n(n-3)/2
Nadine et Elisabeth	f(n+1)=f(n)+a(n+1)	
Martine et Laura	$\sum$ Sn	
Olivier et Stéphane	$\sum$ Sn	
Georges et Olivier	$\sum$ Sn	
Pierre et Philippe	n.s(n)	
Lydie et Marie	n/2	
Naïma et Valérie	n/2	
Antoine et Damien	n/2	
Blandine et Elisabeth	n/2 ou n-1/2	
Evelyne et Christine	n/2 ou n	
Pierre et Mathieu	n	n/2 ou n-2

La colonne la plus à droite indique la solution au terme de la seconde partie de l'observation lorsque les solutions apportées par les élèves ont consisté en une modification radicale de leur conjecture initiale (voir § III pour l'analyse détaillée du traitement des réfutations).

Parmi d'autres observations à propos de ce même problème (Borenson 1986, Vertes 1983) dont nous avons eu tardivement connaissance, nous avons relevé une solution qui a échappé à notre analyse a priori, et qui n'apparaît pas dans nos observations. Il s'agit de $f(n)=1/2\ n^2 - 1\,1/2\ n$. Cette solution est proposée par deux élèves anglais,

Andy et Mike, travaillant ensembles. Elle a pour origine l'analyse des différences successives des nombres de diagonales : "*Andy remarked that since second differences were constant it should mean that the formula would be a quadratic* "(Vertes 1983, p.18). Notons que pour des raisons liées au contenu de leur enseignement, cette remarque ne pouvait apparaître parmi nos binômes. Mike poursuit en notant que pour la suite des carrés entiers cette seconde différence est 2, il en conclut : "*So the formula must be 1/2 n ^{2} or something like it* " (ibid.). Un ajustement empirique conduit à la formule citée plus haut ; elle est confirmée sur le cas de l'octogone.

b) <u>La formulation des messages</u>

Les solutions du type f(n)=n/2 n'ont pas posé de problèmes de formulation particuliers. Les élèves ont utilisé des expressions comme " *Si le nombre des sommets du polygone est pair, il faut diviser ce nombre en deux, et on obtient le nombre de ses diagonales* " (extrait du message de Christine et Evelyne), nous ne les rapporterons pas ici.

En revanche les élèves soutenant les autres solutions (n(n-3)/2, f(n+1)=f(n)+a(n+1), $\Sigma \mathcal{P}$n) ont rencontré des difficultés importantes. L'essentiel de ces difficultés réside dans l'élaboration de moyens de désignation des relations, d'éléments de calcul ou de résultats intermédiaires. Le recours à la langue naturelle est peu adapté, mais aucun élève n'utilisera l'outil algébrique.

Pour **f(n) = n(n-3)/2** :

Hamdi et Fabrice produisent un message confus marqué par de fortes ambiguités ou des implicites importants. Les différents éléments engagés dans le calcul ne sont pas distingués :

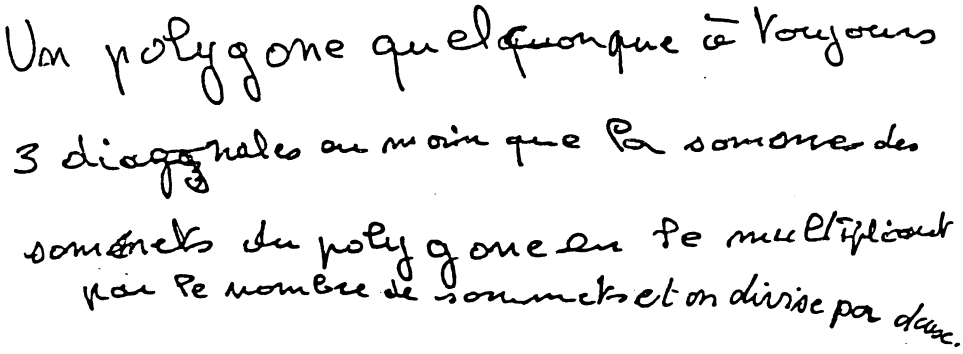


Figure 2 : message de Hamdi et Fabrice

Christophe et Bertrand mêlent dans leur texte la description du moyen de calcul et des éléments de sa justification. Non dégagé du contexte de sa découverte, le moyen de calcul est en quelque sorte expliqué. On en distingue bien les différents éléments, bien que subsiste des ambiguités, par exemple quant à ce que désigne l'expression "*le nombre des diagonales* " :

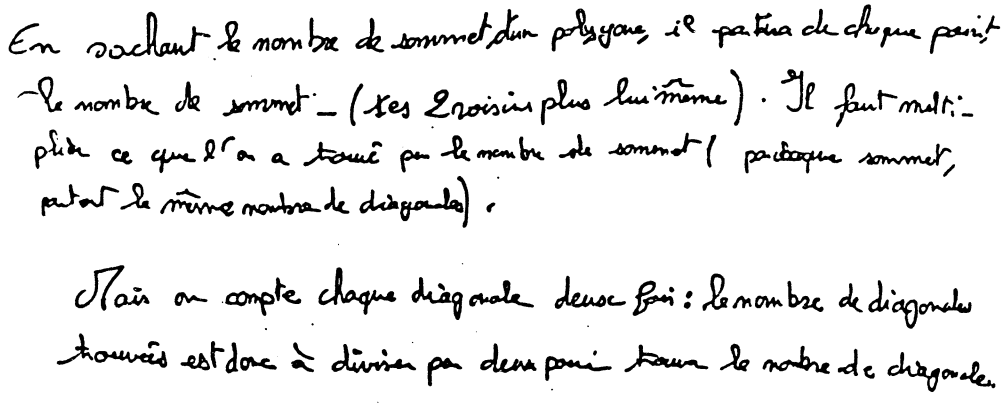


Figure 3 : message de Bertrand et Christophe

En revanche Lionel et Laurent ne parviennent pas à une telle expression. Ils "montrent" le calcul à réaliser par le moyen de plusieurs exemples. Cela ne les satisfait pas, ils cherchent une expression générale et synthétique. Ils se heurtent alors au problème de la désignation des éléments intermédiaires du calcul :

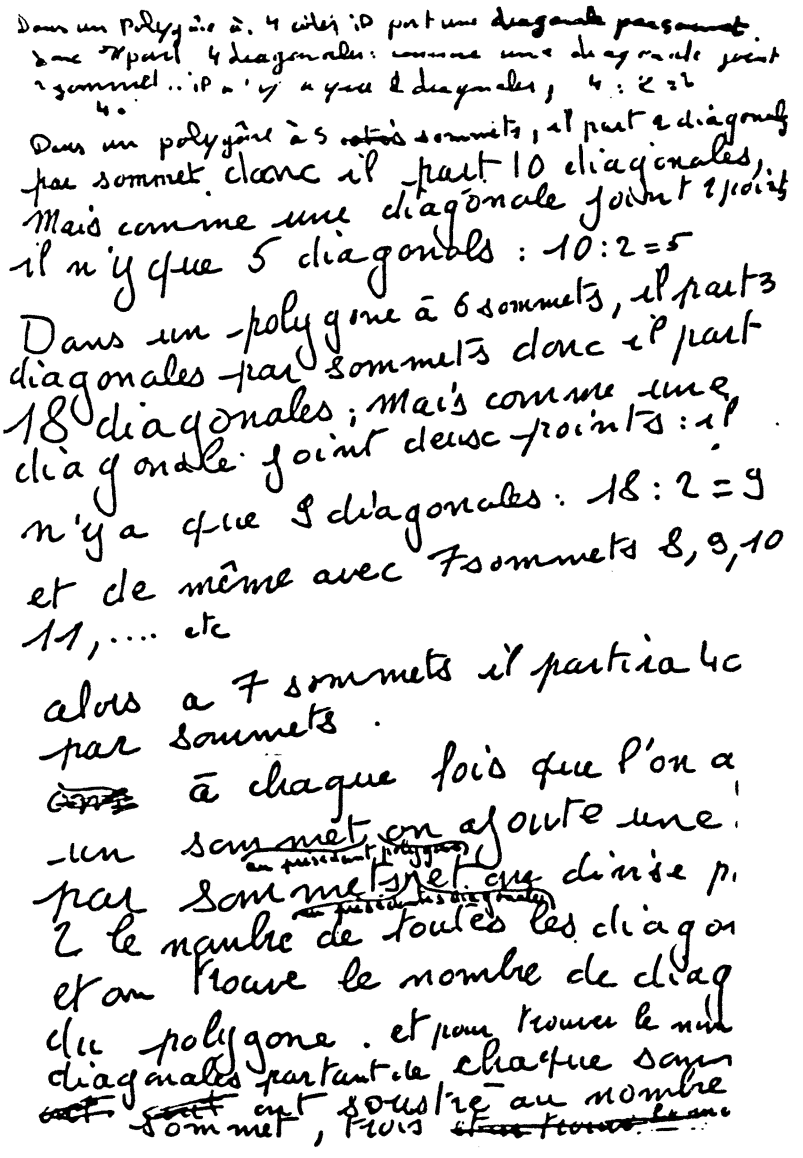


Figure 4 : message de Lionel et Laurent

Pour **f(n+1) = f(n) + a(n+1)** :

Nadine et Elisabeth donnent à voir la relation de récurrence par le moyen d'exemples. Les règles du calcul ne sont pas explicitées, elles doivent être extraites des divers cas qui sont montrés :

Une figure à 4 cotés nous fait trouver 2 diagonales. Pour une figure à 5 côtés nous trouvons 5 diagonales. Nous avons ajouté 1 coté à la figure précédente et 3 diagonales. Pour 6 cotés nous trouvons 9 diagonales. Donc on rajoute 1 diagonale de plus que celles ajoutées à la figure précédente lorsqu'on rajoute un coté.

ex: 4 cotés ⇒ 2 diagonales

3 cotés ⇒ 2 diagonales + 3 autres = 5 Diagonales

6 côtés ⇒ 3 diagonales + 6 autres = 9 Diagonales

7 côtés ⇒ 9 Diagonales + 5 autres = 14 Diagonales ...

10 cotés ⇒ 21 Diagonales (figure à 9 cotés) + 9 autres = 35 Diagonales

. etc...

Figure 5 : message de Nadine et Elisabeth

Pour $\Sigma \mathcal{P}$**n** :

L'expression de cette solution se heurte aux problèmes spécifiques de la formulation d'une itération. Plusieurs éléments d'un tel calcul (description des opérations à répéter, initialisation, contrôle de fin

d'itération) ne sont pas décrits par les élèves. Si l'on s'en réfère à des travaux portant spécifiquement sur l'itération (Méjias 1985) cela tient pour l'essentiel à ce que les contraintes propres à la communication en langue naturelle et entre opérateurs humains "*laisse la possibilité à de nombreux implicites dans les algorithmes et dans leurs interprétations* " (ibid. p.73)

Olivier et Stéphane précisent assez clairement l'initialisation du calcul et la fin de l'itération, en revanche ils ont des difficultés à exprimer l'itération elle-même et l'ensemble des opérations sur lesquelles elle porte :

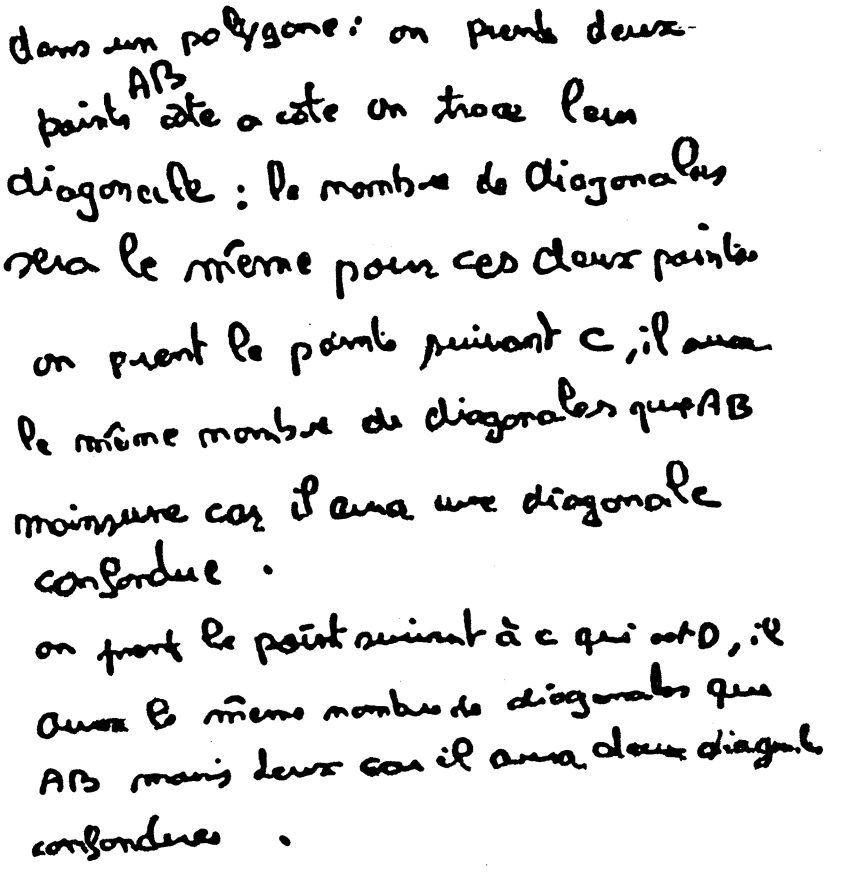


Figure 6 : message d'Olivier et Stphane

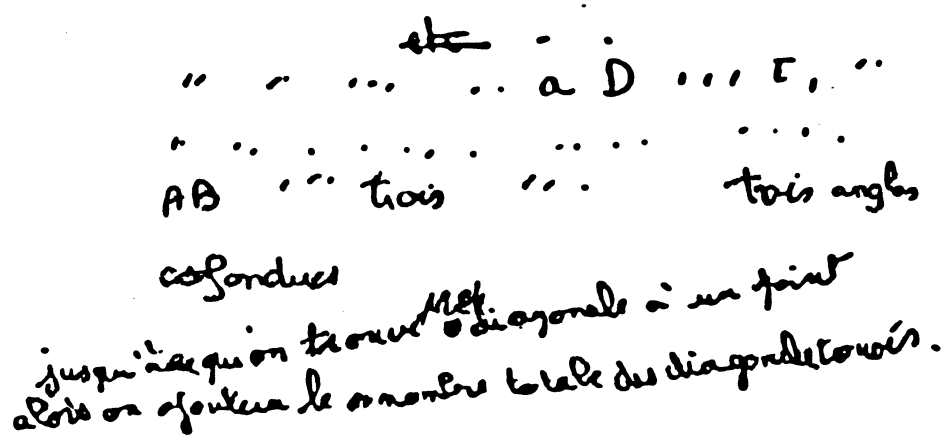


Figure 6 bis : suite du message d'Olivier et Stéphane

Martine et Laura laissent implicites les conditions de fin de calcul :

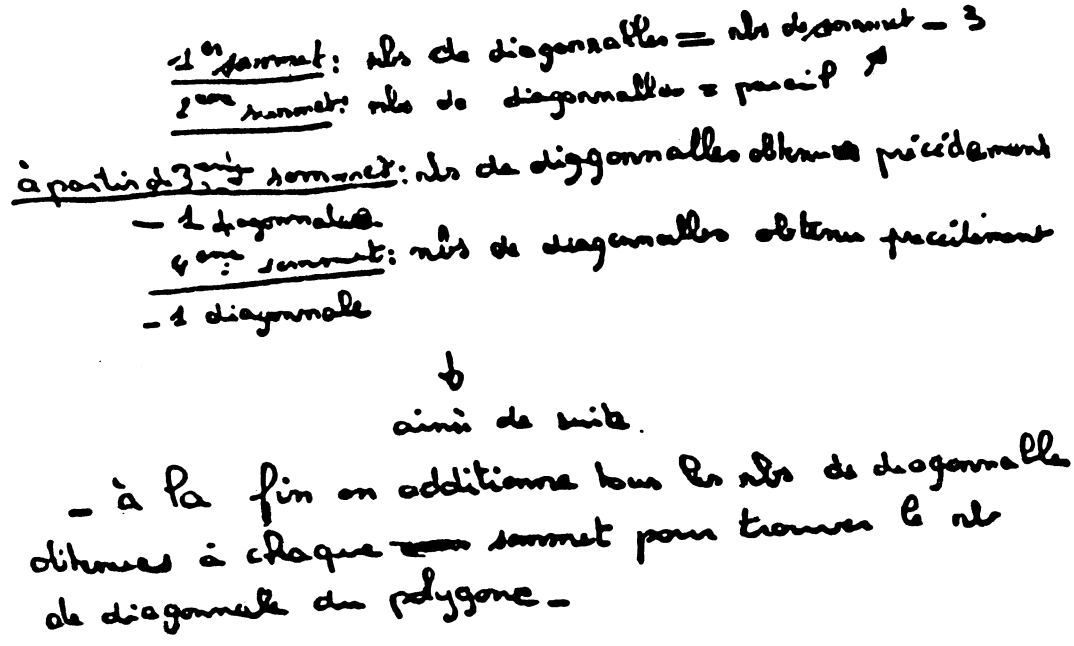


Figure 7 : message de Martine et Laura

Si Georges et OLivier donnent des indications sur l'initialisation et la fin du calcul itératif, en revanche ils sont très confus sur les opérations à

itérer :

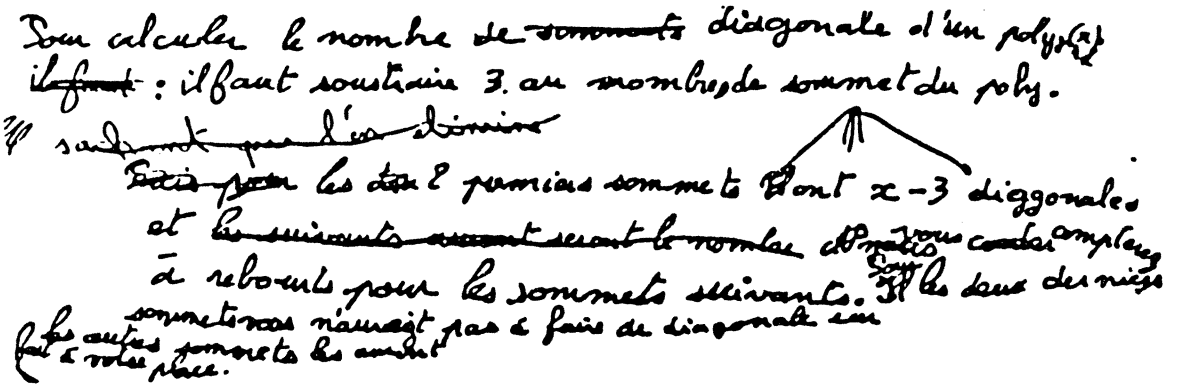


Figure 8 : message de Georges et Olivier

pour **f(n)=n.s(n)** :

Signalons enfin, que Pierre et Philippe ne parviennent pas à exprimer la solution qu'ils soutiennent, **f(n)=n.s(n)**, autrement qu'en la donnant à voir au travers d'exemples :

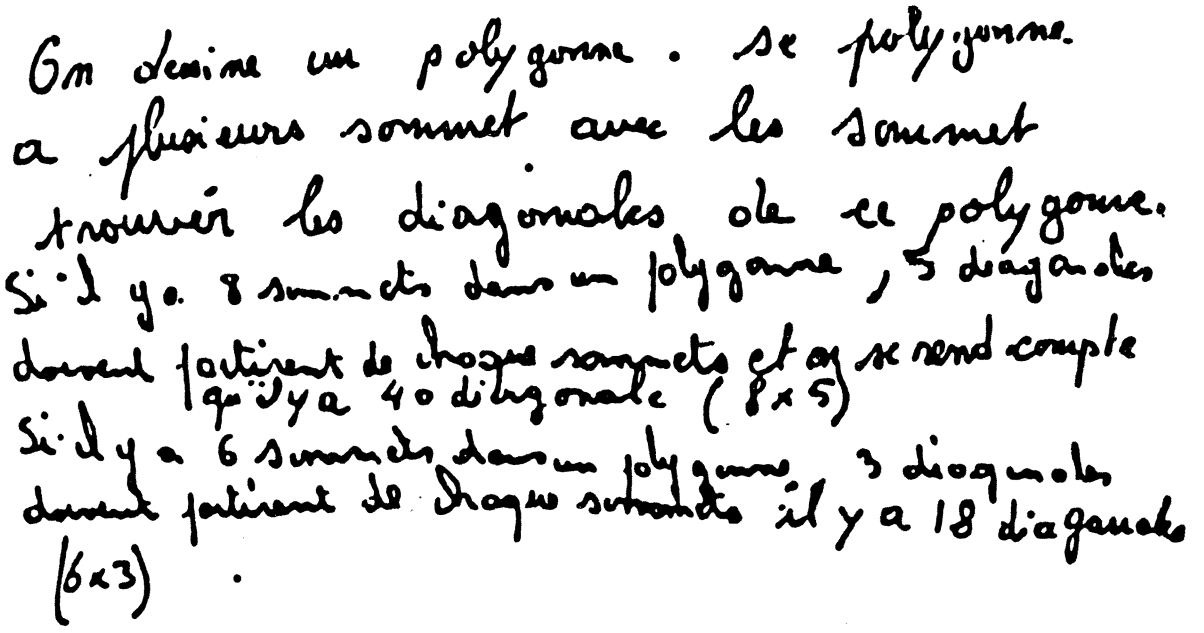


Figure 9 : message de Pierre et Philippe

Nous mettrons en évidence dans la suite, notamment dans la prochaine section (§ II), l'important décalage qui existe entre l'image que peuvent donner ces productions, et la réalité des processus de résolution mis en œuvre, notamment les démarches de validation.

II : Les types de preuve

II.1 Introduction

Nous nous intéressons ici aux démarches de validation d'énoncés qui apparaissent aux yeux des élèves au moins comme des conjectures, c'est-à-dire ceux qu'ils considèrent de façon significative, et non à toutes les spéculations qui sont apparues sans pour autant être véritablement prises en considération. Par ailleurs nous ne retenons que la première partie de l'observation. Tous les élèves sont à ce moment dans les mêmes conditions expérimentales : il n'y a aucune intervention de l'observateur dans la résolution du problème.

Le tableau ci-après donne une image globale des différents types de preuve rencontrés (dans la colonne "expérience cruciale" de ce tableau nous avons mentionné le polygone qui est le lieu de cette expérience ; de même pour l'"exemple générique" nous avons indiqué le polygone utilisé. Par ailleurs ce tableau ne rend compte d'aucune chronologie, excepté lorsqu'une flèche de gauche à droite explicite un mouvement qualitatif des validations, pour une conjecture particulière).

Nous donnons dans la suite le détail des analyses pour chacun des binômes, en les organisant autour des principaux types de preuve.

Binômes	Types de preuve Empirisme naïf	Expérience cruciale	Exemple générique	Expérience mentale	Calcul sur des énoncés
Lio-Lau	f(n)=n				
Pie-Phi	f(n)=n.s(n)				
Naï-Val	f(n) =n/2				
Pie-Mat	f(n)=n				
Nad-Eli		f(n) fonction de f(n-1), P_{10}			
Géo-Oli	f(n)=2f(n-1)	Oli, P_{14}	$\mathcal{S}$n sur P_6		
Mar-Lau		Lau, P_{10}	$\mathcal{S}$n sur P_6		
Eve-Chri	f(n)=n/2 ---------->			f(n)=n/2	
Bla-Isa			f(n)=n-3, sur P_7	f(n)=n/2 ou n-1/2(*)	
Lyd-Mar	Lyd : f(n)=n/2		pas de formule pour les concaves		
Ber-chr	Chr : f(n)=2n	Chr, P_8		f(n)=n(n-3)/2 Ber ------>	
Oli-Sté		Sté, P_8	$\mathcal{S}$n sur P_8	s(n)=n-3 ---------->	
Ant-Dam					f(n)=n/2
Ham-Fab					$f(n) = n^2$

(*) avec un support générique ou langage de la familiarité.

II.2. Les preuves pragmatiques

II.2.1. l'empirisme naïf

Nous rattachons à ce type les démarches marquées par l'absence d'indices d'un processus de validation. Les conjectures sont tirées de l'examen de peu de cas, le problème de leur validité **n'est pas abordé** .

En revanche les élèves montrent, dans les faits ou par leurs propos, leur confiance en ces assertions.

Sur les 14 binômes étudiés, 6 se rattachent à ce type.

Par ailleurs nous rendons compte d'un cas où, sur la base d'un empirisme naïf, un élève tient pour une assertion face à une autre fondée sur une preuve-expérience mentale (binôme de Christophe et Bertrand). Enfin nous montrons dans un cas le passage d'un empirisme naïf à une preuve-expérience mentale (binôme d'Evelyne et Christine).

Christophe (et Bertrand)

Cet exemple concerne Christophe et non le binôme de Christophe et Bertrand.

Du résultat obtenu pour P_7, Christophe induit directement : " *7 et 7 : 14 ! [..] vous devrez trouver le double de ses sommets* " (Chr 302-314). Cette assertion est pourtant en contradiction avec ce qui a été antérieurement réalisé pour P_5 (5 diagonales ont été tracées, Ber 27), mais les deux résultats ne sont pas rapprochés.

Christophe ne peut imposer cette solution car "*il ne l'a pas démontrée* " (Ber 303) et comme il le reconnaît : "*Ouais, j'sais.... c'est qu'on a pas l'droit d'y inventer* " (Chr 340). Alors que Bertrand développe des arguments pour f(n)=n.(n-3)/2 (il est vrai, en s'appuyant essentiellement sur P_7), Christophe maintient sa conjecture. Il trouvera même la solution de Bertrand un peu "*compliquée* " (Chr 471) et maintiendra à nouveau son assertion naïve : "*on obtient le nombre de*

sommets multiplié par 2, donc si on a 7 sommets ça fera 14, et on sait très bien qu'y aura 14 diagonales " (Chr 475-477).

Il s'agit ici d'un exemple caractéristique de l'empirisme naïf : d'un seul cas Christophe induit une conjecture (fausse et aisément réfutable). Il la maintient face à Bertrand sans la remettre en question (cf. ci-dessous, expérience cruciale § II.2.2.).

Lydie (et Marie)

De l'examen d'un seul quadrilatère, Lydie tire la conjecture f(n)=n/2 : "*4 côtés et 2 diagonales..... ça fait qu'on divise par 2* " (Lyd 119). Elle défend ensuite cette conjecture contre tout contre-exemple par des contraintes ad hoc, voire en ne l'acceptant pas comme polygone.

Lydie impose sa solution car Marie ne parvient pas à en proposer une autre et finalement abandonne (cf. § III.2.3.a.). Cependant elle émet une réserve en même temps qu'elle propose sa solution à l'observateur : "*c'est pas sûr que ça marche pour tout aussi ! Peut être que pour les nombres pairs. J'sais pas.* " (Lyd 311-317)

Le désir de Lydie de s'imposer à Marie constitue le principal obstacle à sa sortie de l'empirisme naïf. Ce désir est trop fort pour que les réfutations soient prises en compte autrement que par des ajustements ad hoc qui les tiennent à l'écart. Cependant après le renoncement de Marie, Lydie montre son incertitude et invisage le problème de la validité de f(n)=n/2. Elle n'entre cependant pas dans une démarche de validation. Elle s'en remet à l'observateur.

Lionel et Laurent

Les élèves examinent des représentations de P_5 et concluent : "*il y a 5 diagonales différentes [...] Eh ben ! on l'a prouvé* " (Lio 135-141). "*Prouvé* " signifie ici que le nombre des diagonales de P_5 est le résultat d'une procédure rigoureuse de dénombrement : "*on cherche ... tous les quadrilatères qu'existent ... en polygone ABCDE et comme [on] sait quadrilatère : 2 diagonales [..] après toutes les diagonales de chaque quadrilatère et on enlève celles qui sont communes [...] et on trouve* " "*les diagonales différentes ... Toutes les diagonales* " (Lio 144-150 puis Lau 151).

Cette explication concerne le dénombrement des diagonales de P_5 et non l'assertion f(n)=n. Cette assertion est directement inférée, mais pas explicitée, par les élèves à partir de ce seul cas. Elle est attestée lorsque l'observateur soumet le cas de P_6 : "*ben, y aura 6 diagonales !* " (Lio 170).

Le message proposé par les élèves est présenté ci-dessous (fig.10). Il s'agit ici d'un cas exemplaire d'empirisme naïf où f(n)=n est le produit d'une généralisation, à partir de sa seule forme, de l'énoncé "*y a 5 sommets et 5 diagonales* " (Lau 140).

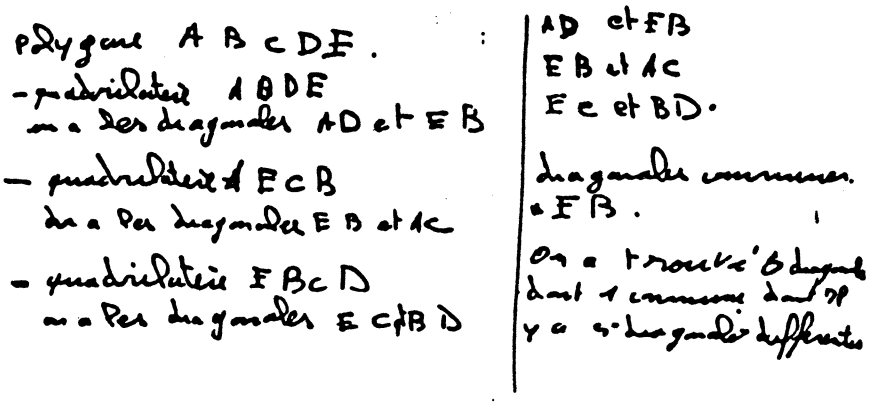


Figure 10

On peut penser qu'à ce moment Lionel et Laurent ne traitent pas le problème que nous pensions leur avoir posé, mais plutôt celui de savoir compter les diagonales d'un polygone quelconque. Dans ce cas P_5 peut prendre pour eux une valeur générique : ils sont capables de mettre en oeuvre la même procédure sur tout autre polygone.

Cela n'enlève rien au caractère d'assertion naïve de f(n)=n tel qu'il est attesté par Lionel dont la conviction à ce moment fait peu de doute. (Cependant après une intervention de l'observateur, les élèves abandonneront cette solution et s'engageront dans une autre direction qui les conduira à f(n)=n.(n-3)/2 avec des démarches de validation d'un niveau plus élevé. cf. § II.4.1.).

Pierre et Mathieu

Après un débat très important autour du problème de savoir ce qu'est une diagonale (cf. Chap.III), et diverses propositions, l'assertion f(n) = n/2 est tirée de l'examen de P_4, P_6 et P_8 : "*avec un carré, avec un truc de 8 et un truc de 6, eh ben, ça doit toujours s'diviser par 2* " (Mat 207). Le contre-exemple P_5 produit par Pierre est traité par un aménagement ad hoc de l'assertion : "*pair on divise par 2... impair on en enlève 1* " (Pie 215), qui est confirmé par une vérification laborieuse et litigieuse sur P_7. Le caractère ad hoc de cet aménagement confirme l'empirisme naïf qui préside à l'activité des deux élèves (fig.11).

En fait pour Pierre il s'agit là d'une "*théorie* " (Pie 229) que Mathieu peut réfuter s'il n'en est pas d'accord ; une conjecture pour laquelle il déclare qu'il "*ne pense pas certainement que c'est ça, mais [qu'] il faut toujours essayer au lieu d'en rester au même point* " (Pie 251).

Cependant ces élèves n'entreprennent pas d'autre démarche de validation. Il s'agit bien de ce que nous avons appelé une conjecture naïve.

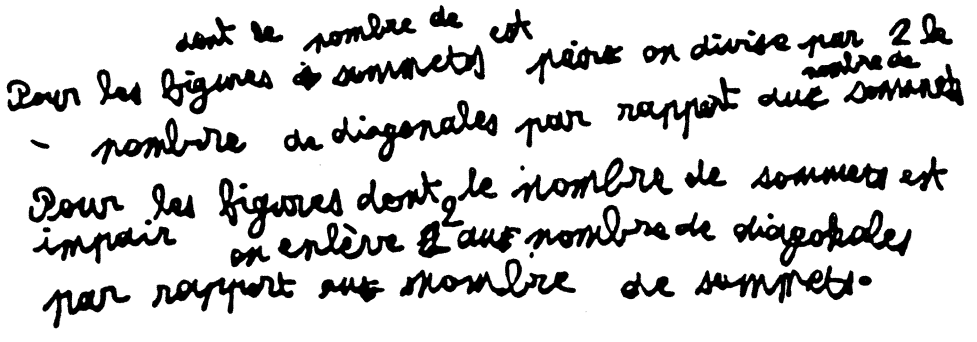


Figure 11

Sans la réfuter, Mathieu refuse la conjecture précédente au nom d'un principe : "*faudrait que la règle s'applique à tous les cas* " (Mat 214). De l'examen de P_5 et P_7 sur les représentations ci-dessous...

Figure 12

... il tire la conjecture f(n)=n, exprimée de la façon suivante :

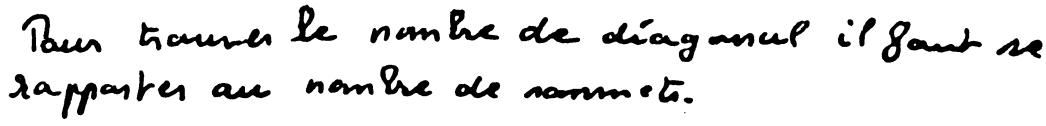


Figure 13

Là encore il s'agit d'une conjecture naïve : "*moi, j'pense que c'est plutôt [....] qu'il y a autant de diagonales que de sommets* " (Mat 300-302).

Les deux conjectures sont alors concurrentes, "*y faut en choisir une* " (Mat 302). Pierre propose une stratégie pour sortir d'une telle situation : "*on va marquer chacune de nos théories et on essaiera de barrer celles qui sont fausses* " (Pie 235). Cette proposition n'est pas suivie, mais elle signifie que l'empirisme naïf n'est pas intrinsèque à ces deux élèves (l'acuité des débats de définition en est aussi un indice, cf. Chap.III, § II.2.2.).

Au lieu d'engager un débat de preuve, les élèves s'en remettent à l'observateur. Pierre aimerait bien avoir la solution et pour Mathieu : "*p't'être qu'on croit qu'on a tout raté, ou.... ou p't'être très bien réussi* " (Mat 330).

Ce fatalisme de Mathieu et cette impatience de Pierre peuvent constituer des obstacles essentiels à leur sortie d'un empirisme naïf. A ceci s'ajoute la lecture de la situation comme une situation de devinette : "*c'est un jeu.... vaut mieux tenter* " (Mat 338), bien qu'il présente peu d'intérêt de "*tenter n'importe quoi* " (Pie 339).

Pierre et Philippe

Les élèves tirent de l'examen de P_6 et P_8 que le nombre de diagonales sera respectivement de la forme 6x3 et 8x5 (bien que cela soit en contradiction avec les tracés effectués et des résultats initialement obtenus pour P_6). L'assertion induite est f(n)=n.s(n); mais elle n'est pas explicitée : "*on sait pas comment l'expliquer* " (Phi 467). Un second indice qu'il s'agit bien d'une assertion naïve, est que lorsque l'observateur leur soumet le cas de P_9, les élèves mettent en oeuvre le calcul 9x6 , après avoir évalué s(9) en un sommet, et concluent : "*y en a 54, ben c'est l'même procédé* " (Pie 569).

Voici le texte que les élèves remettent à l'observateur :

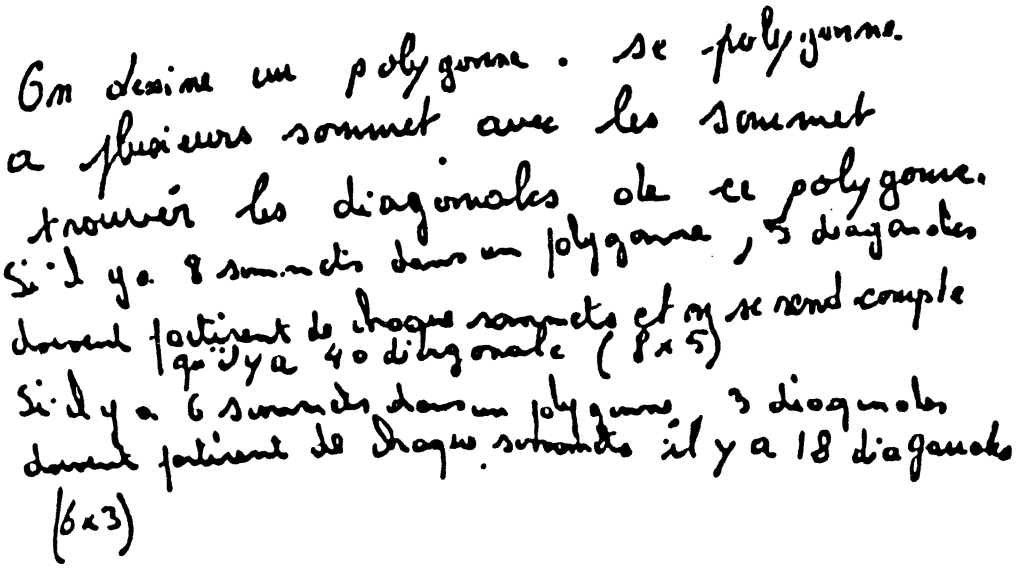


Figure 14

Ce jugement d'empirisme naïf, au moins dans le cas de Philippe qui

est le moteur de la résolution, doit peut-être être nuancé : Philippe tire essentiellement des expériences sur P_6 et P_8, que le nombre de diagonales est le même en chaque sommet d'un polygone donné. Le fait que f(n) = n.s(n) est déduit de ce que f(n) est obtenu en additionnant s(n) en chaque sommet : "*y en a 5 qui partent par chaque point : 5-10-15-20-25-30-35-40* " (Phi 367). Mais s(n) lui-même doit être recalculé pour chaque polygone à partir d'une représentation (sur une représentation de P_9 convexe qui leur est soumise, seules les diagonales issues de deux des sommets seront tracées).

A la fin de la résolution du problème, Philippe se demande s'il "*y a pas d'autres formes de polygone* " (Phi 467). Mais lorsque l'observateur propose une réalisation de P_9 présentant des sommets paraissant alignés, il la refuse. Cela peut être un indice du caractère générique de P_6 et P_8 comme représentants de figures ayant un "*milieu* " (Phi 19) ou un "*centre* " (Pie 44).

Un obstacle à l'entrée effective dans un processus de validation (ou au moins de vérification) peut résider dans la force d'évidence du modèle multiplicatif et dans celle tirée de la conception de polygone en vigueur dans le binôme, conjuguées à la condition d'invariance du nombre des diagonales en chaque sommet d'un polygone.

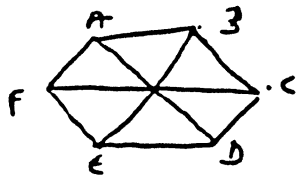
Naïma et Valérie

A la suite d'un long échange sur ce qu'est une diagonale, les élèves se mettent d'accord sur une conception de type "diamètre". Elles trouvent 3 diagonales dans P_6, l'examen du carré les conduit à l'assertion : "*6 sommets y en a 3 [..] dans un carré, y a que 4 côtés, y en a que 2 : c'est la*

moitié " (Naï 110-114). La première étape de formulation de leur solution est le texte reproduit ci-après (fig.15).

L'observateur ayant manifesté, à propos de P_8, que ce texte ne satisfait pas à la consigne (il ne donne pas de moyen de calcul) les élèves reconsidèrent leur formulation. L'explicitation de f(n)=n/2, par le détour du domaine de définition de la division par 2 dans ℕ, les conduit à poser le problème du domaine de validité de leur assertion. Le point de vue des deux élèves est différent, pour l'une P_5 est un cas où : "*ça marche pas* " (Naï 261), pour l'autre "*c'est pas un polygone* " (Val 264).

La question n'est pas tranchée lorsqu'elles remettent leur solution à l'observateur (fig.16).



Polygone ayant 6 sommets et 3 diagonales.

Procédé :

A → D
B → E
E → F

Tracer une droite issue d'un sommet et celle qui coupe le 2ème sommet opposé

Refaire ce procédé à chaque sommet.

Figure 15

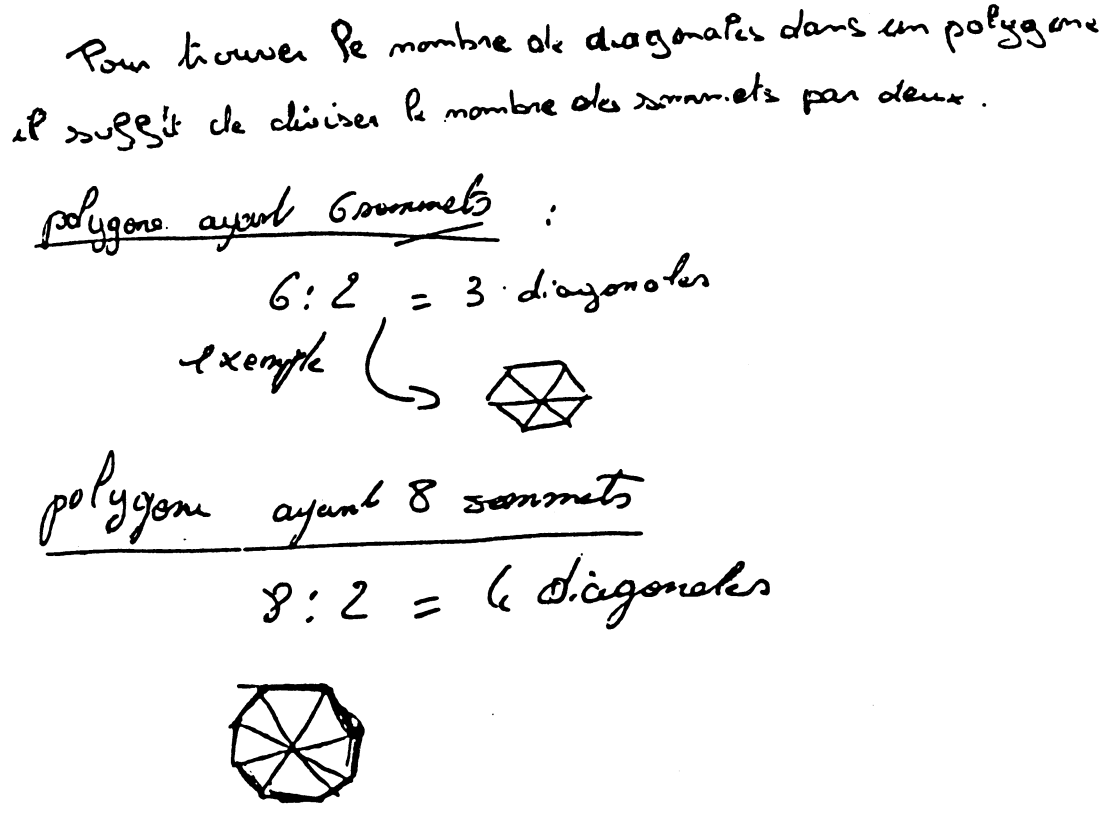


Figure 16

Cette formulation est obtenue après un premier texte qui prenait le support générique de P_8 : "*ça montre* " (Val 219), mais rejeté par Naïma parce qu' "*y faut faire un truc général* " (Naï 230).

On peut considérer que la validation de la solution de Naïma et Valérie, est à la frontière de l'empirisme naïf et de l'exemple générique. L'importance du débat de définition dès les premiers moments de la résolution, puis la prise en compte du problème du domaine de validité (à partir de celui de la division par 2 dans $\mathbb{N}$), militent contre l'empirisme naïf. Cependant l'absence de débat sur les raisons de la validité de l'assertion s'oppose au rattachement à un niveau supérieur de validation.

Un obstacle à cette émergence du problème de la preuve, peut être la force de l'évidence tirée des conceptions de polygone (régulier) et diagonale (diamètre) qui sous-tendent l'activité des élèves.

Evelyne et Christine

A partir de l'examen de P_8 Evelyne induit l'assertion f(n)=n/2 qui est ensuite confirmée par P_4 : "*y en aura 2, donc c'est toujours [...] divisé par 2* " (Eve 58-62). Une vérification sur P_6 "*simplement pour voir* " (Eve 74) permet de conclure "*donc c'est toujours divisé par 2 [....] oui, mais il faut donc que le nombre soit pair* " (Eve 85-86).

Alors que la restriction aux polygones pairs apparaît chez Evelyne comme une restriction ad hoc (adaptation au domaine de définition de la division par 2 dans ℕ), elle conduit Christine à soulever des problèmes de définition, notamment à partir des contre-exemples P_7 et P_3 (cf. ChapIII, § II.2.3.).

Faute de pouvoir faire face à ces problèmes, les élèves produisent la conjecture naïve suivante :

Quand on connaît le nombre des sommets d'un polygone il suffit de diviser par 2 ce nombre et on obtient le nombre de ses diagonales.
Le nombre des sommets doit être pair.

Figure 17

Mais ce message ne sera pas soumis à l'observateur, au nom d'un principe évoqué par Evelyne : "*ça doit pas être ça, parce que là [dans l'énoncé] on dit pas que le polygone ... les sommets sont pairs* " (Eve 140). C'est ainsi une clause implicite du contrat expérimental, tel qu'il est lu par les élèves, qui est le moteur d'une reprise de l'analyse de la conjecture initiale.

La question de la définition est au centre de cette analyse qui conduit à considérer comme polygone "*une figure géométrique où chaque côté est parallèle à un autre : les côtés sont parallèles deux à deux* " (Chr 216).

L'assertion f(n)=n/2 a alors pour preuve une expérience mentale qui s'appuie essentiellement sur cette définition. Cette validation demande que soit imaginée la mise en relation des sommets (extrêmités des côtés) par les diagonales : "*ça va toujours... tu vois... du côté correspondant à l'autre côté parallèle* " (Chr 197-199). De plus, à Evelyne qui souhaiterait que soit stipulé que "*le nombre des sommets faut qu'y soit pair* " (Eve 200), Christine oppose la définition qui implique un appariement des sommets : "*si on dit qu'un polygone est ... un truc où les côtés sont toujours parallèles deux à deux ... y a pas besoin de préciser* " (Chr 201).

Dans cet échange entre les élèves, l'expérience-mentale évoquée par Christine a le support de P_8. Cependant elle ne s'appuie pas essentiellement sur ce polygone, mais sur la capacité d'Evelyne à imaginer le mise en relation des sommets indépendamment d'une représentation effective.

Ainsi, le fait d'en rester à un empirisme naïf n'était pas une caractéristique intrinsèque de la rationalité d'Evelyne et Christine, mais bien le résultat de leur renoncement à traiter le difficile problème de la définition et des raisons de la validité de leur conjecture. Pour passer à un niveau supérieur de preuve, il leur fallait expliciter les objets en jeu dans la résolution du problème, ainsi que leurs relations. Elles y parviennent en en restant toutefois à des formes de formulation très proches de

l'ostension.

Georges et Olivier

A la faveur d'erreurs de dénombrement les élèves ont obtenu la suite double : (4,2), (5,4), (6,8). Georges en déduit : "*chaque fois tu multiplies par 2* " (Geo 140) et il annonce pour P_7 : "*maintenant j'suis sûr, y va en avoir 16* "(Geo 140). En fait le dénombrement sur P_7 ne sera pas conduit à son terme à cause de sa complexité. Les élèves changeront de procédure.

Cette expérience sur P_7 pourrait apparaître comme une expérience cruciale destinée à valider définitivement l'assertion naïve de Georges. Il ne s'agit cependant pas de cela :

- cette expérience permet d'évaluer la validité du passage du pas n au pas n+1 dans la récurrence que Georges soutient : f(n+1)=2f(n). Pour cela, dans la situation présente, P_7 ne peut être remplacé par un autre polygone. Il s'impose naturellement et nécessairement après P_4, P_5 et P_6;

- mais la validation envisagée se rattache à l'empirisme naïf, car les raisons de la conservation de la relation dans le passage du rang n au rang n+1, et son caractère de généralité ne sont pas examinés. (cf. au contraire, le cas de Nadine et Elisabeth au paragraphe suivant).

Nous considérons cependant qu'il y a ici plus que l'empirisme naïf, qui se serait contenté des trois premiers cas envisagés. La conjecture est mise à l'épreuve. Cela suggère de considérer à part du "raisonnement direct" des catégories du **raisonnement par récurrence**. Le présent cas illustrerait la première de ces catégories.

L'empirisme naïf : conclusion

Plutôt qu'une caractéristique des élèves que nous avons observés, l'empirisme naïf apparaît comme un état dans lequel ils se trouvent et demeurent pour des raisons liées à la situation ou à leurs rapports à la connaissance elle-même.

Le fait que les binômes ne dépassent pas ce niveau de l'empirisme naïf peut être décrit en terme d'obstacle.

L'intéraction sociale comme source d'obstacle :

Le désir d'avoir raison contre le partenaire peut s'opposer à la prise en charge des problèmes de validation. Ainsi Christophe soutien la conjecture f(n)=2n (qui est vérifiée dans le seul cas de P_7) contre celle de Bertrand, sans marquer ni incertitude, ni volonté de chercher une validation. Lydie défend pied à pied son assertion f(n)=n/2 contre Martine, par des arguments ad hoc face aux réfutations. Dans ces deux cas les élèves profitent des difficultés de leurs partenaires pour pousser leur propre solution. Ils ne s'associent pas véritablement à un effort collectif de résolution.

L'interaction sociale peut constituer aussi un obstacle lorsqu'elle met en présence des individus dont les conceptions sont très différentes. C'est le cas de Pierre et Mathieu dont les conceptions de polygone et diagonale sont essentiellement différentes. La complexité de l'unification de leurs points de vue et l'intensité affective du conflit constituent un obstacle à leur prise en charge des problèmes de preuve. Ces problèmes sont évoqués, comme ceux du choix entre deux solutions, mais le conflit est tel qu'il favorise une lecture de la situation en terme de jeu dans lequel il n'y a pas grand chose à perdre. Pierre et Mathieu s'en remettent à l'observateur.

L'évidence comme obstacle :

Il s'agit en fait de la conjugaison de deux circonstances : d'une part un lien étroit entre une conception et une assertion (ou une conjecture), apporte à cette dernière la force de l'évidence ; d'autre part l'incapacité à expliciter les conceptions en vigueur. C'est le cas de Lionel et Laurent, et à propos de f(n)=n/2 c'est aussi celui de Lydie, de Naïma et Valérie, et initialement d'Evelyne et Christine.

Certes les fondements des solutions apportées sont essentiellement empiriques, pris dans une connaissance agie de polygone (polygone pair régulier) et diagonale (diamètre). Mais le lien très direct entre les conceptions et l'assertion peut être "compris" par les élèves, cependant que l'explicitation des raisons exigerait qu'ils entrent dans une procédure de définition des objets d'une grande complexité. Le cas d'Evelyne et Christine illustre bien cette difficulté, leurs formulations en restent à des formes très proches de l'ostension. Naïma et Valérie quant à elles ne parviendront pas à régler ce problème de définition (pas même en règlant leur différent au sujet du contre-exemple P_5).

Une forme primitive de la récurrence :

Le cas de Georges et Olivier demande une mention particulière dans cette conclusion. Leur solution est le résultat de l'examen systématique de P_4, P_5, P_6, suivi d'une vérification sur ce que nous pourrions appeler le polygone successeur : P_7. Nous proposons de considérer cette procédure comme une **forme primitive de la récurrence**, relevant cependant fondamentalement de l'empirisme naïf puisqu'aucune analyse des raisons n'est abordée ou envisagée.

II.2.2. L'expérience cruciale

Nous rattachons à ce type les démarches marquées par une volonté délibérée de mettre à l'épreuve une proposition en l'appliquant à un nouveau polygone.

Contrairement au cas de l'empirisme naïf le problème de la généralisation est pris en charge et est traité, bien qu'en restant fondamentalement dans un cadre empiriste.

L'expérience cruciale a été observée dans 5 binômes comme un moyen de validation, soit pour valider une proposition (Nadine et Elisabeth), soit comme instrument dans le débat de validation entre les deux élèves d'un même binôme.

Christophe et Bertrand (1)

Ce binôme, déjà exemplaire par le cas d'empirisme naïf que présente Christophe, l'est ici encore : en effet, l'expérience cruciale va remplir sa fonction originelle dans le différent qui oppose les deux élèves.

Deux assertions sont en présence : $f_1(n)=2n$ (Christophe) et $f_2(n)=n(n-3)/2$ (Bertrand). Le rôle de l'expérience proposée par Christophe sur P_8 n'est pas d'établir sa solution, dont il est convaincu, mais de trancher son différent avec Bertrand : il calcule $f_2(8)$ et confie que pour ce polygone : "*ça fait pas 20 à [son] avis* " (Chr 534). Bertrand, qui s'en tient d'abord à des principes : "*tu l'as pas démontré, t'as pas l'droit de le dire* " (Ber 539), accepte finalement le jugement de cette expérience. Le

résultat donne tort à Christophe qui en est bien étonné ("*Ouais, ben dis donc...*", Chr 575). Il renonce définitivement à sa conjecture.

Christophe et Bertrand (2)

Bertrand aborde la résolution du problème par l'examen de P_5 d'où il tire l'assertion : dans tout polygone, chaque sommet a 2 voisins. La validité de cette assertion tient à sa conception de polygone (convexe) pour laquelle P_5 a une valeur générique. Expliciter cette assertion signifie expliciter la définition de polygone, ce qui est particulièrement complexe puisqu'il lui faudrait aussi envisager ce qui n'est pas un polygone de ce point de vue. Cependant cette assertion est essentielle pour fonder cette autre : "*[en un sommet] on peut tracer les diagonales jusqu'à chaque sommet sauf ceux qui sont à côté* " (Ber 35) qui conduira à s(n)=n-2. Aussi lorsque Christophe fait mine de douter, Bertrand, à défaut d'une explicitation des raisons, propose une expérience cruciale : "*vas-y, fais en un là, à beaucoup de côtés, tu vas voir. Chaque point il a 2 voisins dans un polygone, même dans n'importe quelle figure* " (Ber 129, il ajoutera cependant : "*fais en pas un concave* "). Ceci suffit à obtenir l'adhésion de Christophe. Les deux élèves rédigent ensemble le texte présenté ci-dessous (fig.18).

Dans un polygone, chaque point a 2 voisin.
Joignons d'un point tous les autres points
sauf ses voisins (on obtiendra les diagonales partant de ce
point) Si on fait cela pour toutes les autres points, on aura toutes les
diagonale de ce polygone.

Figure 18

Georges et Olivier

Malgré l'exemple générique sur lequel est fondée l'assertion f(n)=$\Sigma\mathcal{S}$n, et à la construction duquel il a collaboré, Olivier conserve un doute : "*c'est pas simple, parce que ça change. Là ... au cas où y en avait 7, c'était l'double ... Parce que là ... 6, moi j 'dis : t'aurais pensé 6, ça aurait 12. Et puis ça fait pas 12... ça en fait 9* " (Oli 326). Pour vaincre ce doute, Georges propose à Olivier une expérience cruciale sur P_{14} : "*moi, j'sais pas, tu prends 14 sommets [....] y a deux 11 au début, un 10, un 9 [...]* " (Geo 327-329-341). Il construit ainsi $\mathcal{S}$14. Olivier vérifie que cette suite de nombres a 14 termes et manifeste sa certitude : "*c'est bon, ça marche [....] Maintenant faut expliquer ça* " (Oli 346-348). Cette certitude est acquise bien qu'il n'y ait pas eu de vérification effective sur une représentation de P_{14}. Par ailleurs la rapidité de la construction de $\mathcal{S}$14 et du comptage du nombre de ses termes, écarte l'hypothèse d'une expérience mentale qui mettrait en correspondance les termes de $\mathcal{S}$14 et les sommets d'un polygone P_{14} fictif. La propriété qui fonctionne ici comme un théorème en acte : "$\mathcal{S}$n a n termes", a été mise en évidence par les représentations utilisées pour P_7 et P_6 (fig. 19).

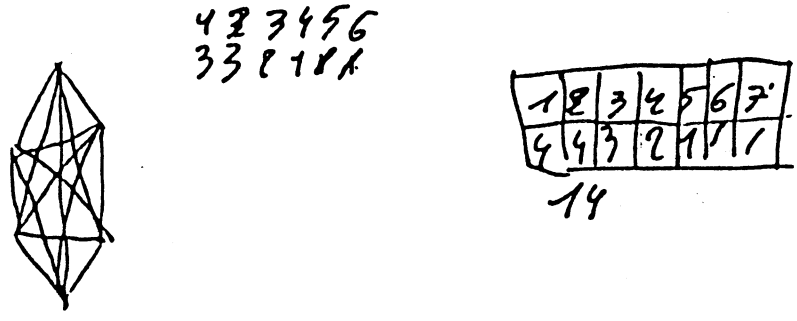


Figure 19

Elle a ensuite été vérifiée par Olivier pour le cas de P_8 pour lequel la même représentation n'avait pas été utilisée. Il suffit alors, pour Olivier, que le résultat de la procédure $\mathcal{S}14$ partage avec la procédure pragmatique (i.e. sur une représentation du polygone) cette propriété qui a acquis à ses yeux le statut d'une propriété caractéristique.

Martine et Laura

Les élèves ont ensemble établi la procédure qui permet d'obtenir $\mathcal{S}n$ en la fondant sur un exemple générique (cf. II.2.3.). Cependant, Laura qui a toujours été plus incertaine dans la mise en oeuvre effective de la procédure, souhaite soumettre cette solution à une expérience cruciale : "*on va faire une immense figure pour vérifier* " (Lau 198). Martine juge inutile cette "vérification " ("*tu exagères* ", Mar 201). Laura confirme, sur un ton un peu humoristique, la valeur critique qu'elle accorde à cette expérience : "*parce que... suppose qu'à la fin t'en trouves 2. Non mais ça s'peut pas...*" (Lau 203, le dernier commentaire signifie que l'hypothèse de 2 diagonales est une plaisanterie, non que la procédure va donner a priori un bon résultat).

L'expérience a lieu sur P_{10} concave. A nouveau Laura se perd dans le tracé des diagonales. Martine lui vient en aide pour achever le calcul : Laura est alors convaincue (la procédure permet à la fois de produire $\mathcal{S}n$ et de contrôler le tracé des diagonales de P_n). Elle propose de passer à la description de la procédure.

Olivier et Stéphane

Bien qu'ayant collaboré à la construction de cette solution, Stéphane met en doute la validité de $\mathbf{f(n)=\Sigma\, \mathcal{P}_n}$ pour calculer le nombre des diagonales de P_n. Pour en décider, il propose une expérience à laquelle il accorde une valeur critique : "*on va voir si c'est juste c'que tu dis. Là on le fait avec 8* " (Sté 548). (P_8 est pourtant l'exemple générique sur lequel est fondé $\Sigma\, \mathcal{P}_n$). La construction de $\mathcal{P}_n$ est vérifiée pas à pas : "*on a fait 1-2-3-4-5 [...], ça fait 10. Alors là tu dirais qu'y en a 4.... hein, ah, j'l'ai remarqué c'lui là : 2-3-4, t'as raison..... quand on arrive là, t'as dit qu'y en a que 3..... c'lui là on l'a déjà fait : 1-2-3, t'as raison..... quand on arrive là, y en a que 2 : 1-2, t'as raison..... y en a qu'un, hum..... ouais, c'est ça* " (Sté 552-554).

La conviction de Stéphane n'est acquise définitivement qu'après cette expérience cruciale.

Nadine et Elisabeth

De l'examen de P_4, P_5, P_6 les élèves induisent la conjecture :

f(n+1)=f(n)+ a(n+1) et a(n+1)=a(n)+1 avec f(4)=2 et a(5)=3.

Avant d'en faire la vérification ils annoncent pour P_7 : "*on doit en ajouter 5, normalement* " (Nad. 56) et "*normalement avec 7 on devrait trouver 14 diagonales, si jamais ça marchait* " (Nad 60).

L'expérience est positive sur P_7 convexe, mais avant cela elle avait échoué pour P_7 concave : "*si ça s'trouve suivant la figure on trouve pas le même nombre de diagonales [....] faudrait sans angles* " (Nad 74). Aussi,

au moins pour Nadine, cette validation par l'expérience sur P_7 est insuffisante (contrairement à ce que nous avons observé plus haut chez Georges et Olivier): "*Normalement, si t'as toujours juste... à 8 côtés on devrait en trouver 6 de plus* " (Nad 85). Elle s'en remet à une expérience cruciale pour décider : "*essaie une fois avec 15 et puis si ça marche, ben ça veut dire qu'ça marche avec les autres* " (Nad 91). En fait cette expérience est réalisée sur P_{10}, car P_{15} apparaît a priori comme trop complexe : "*alors normalement ça fait.... 10 côtés on devrait trouver 35 diagonales* " (Nad 98). L'expérience réalisée confirme ce résultat.

Les difficultés rencontrées dans la mise à l'épreuve initiale sur P_7 ont conduit à souhaiter cette expérience-cruciale, plaçant ainsi de façon manifeste ce type de validation à un niveau supérieur : il prend en charge explicitement le problème de la généralisation.

L'expérience cruciale : conclusions

Dans tous les cas observés l'expérience cruciale est bien l'évaluation d'une proposition pour un polygone particulier avec le projet délibéré d'une mise à l'épreuve. Et donc, de fait, la prise en compte du problème de la généralisation.

Cet objectif est explicite chez Nadine et Elisabeth qui confortent ainsi une conjecture initialement fondée sur ce que nous avons appelé une récurrence primitive.

Mais pour presque tous les binômes, l'expérience cruciale a de plus une fonction dans l'interaction : elle est utilisée pour emporter la conviction de l'un des partenaires, moins convaincu que l'autre (ou pas

convaincu du tout). Dans le cas du binôme Christophe et Bertrand, elle remplit de façon évidente sa fonction originelle de sélection entre deux hypothèses. Mais cette fonction est analogue dans les autres cas : souvent présentée comme un défi de l'un des partenaires, le rôle de cette mise à l'épreuve est moins d'établir la conjecture que de la rejeter.

II.2.3. L'exemple générique

Nous rattachons à l'exemple générique le cas des binômes dans lesquels la démarche de preuve s'applique à dégager les **raisons** de la validité d'une assertion ou d'une conjecture, en s'appuyant sur la représentation d'un polygone particulier. Le caractère générique de l'exemple utilisé tient à ce que, dans la démarche des élèves, il n'est manifestement pas examiné pour lui-même mais pour expliciter un modèle d'action qui fonde la conjecture. L'ostension est ici le moyen privilégié de formulation.

Nous développons ci-dessous l'analyse des 5 cas de ce type de validation que nous avons relevés :

Martine et Laura

L'origine de la construction de la suite $\mathcal{S}n$ pour dénombrer les diagonales d'un polygone P_n est d'une part le souci des élèves de ne compter qu'une fois chaque diagonale, d'autre part la représentation qu'ils utilisent qui permet de garder la mémoire des résultats partiels (fig. 20). Cette construction est expliquée sur le cas de P_6 :

quand tu pars, au premier sommet... tu comptes tous les sommets

sauf 3. Puisque c'est les 3 là, donc tu peux pas les prendre [...] c'est ceux qui sont à côté. Donc au premier coup tu en a 3... au deuxième coup tu en as autant [...] au troisième coup t'en as une de moins... t'en as 2 [...] ouais, après j'sais pas (Lau 95-99).
ben t'en as qu'une [...] tu les comptes qu'une fois (Mar 100-102).

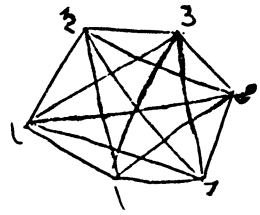


Figure 20

Après une reprise de ce processus de calcul par Laura sur P_7, $\Sigma \mathcal{S}n$ est formulée pour tout polygone :

donc au premier... sommet, c'est le nombre de sommets moins 3 [....] au deuxième pareil, puis après, à partir... du troisième sommet, eh ben on enlève 1 [....] et on additionne le tout "
(Lau 135-139-143).

Cette validation de $\mathcal{S}n$ sur P_6 ne suffit cependant pas à Laura (on peut le comprendre compte tenu de ses difficultés, cf. ci-dessus , Lau 99), elle souhaite donc examiner un nouvel exemple : P_8. Cette vérification est inutile à Martine qui ponctue la vérification en chaque sommet d'un "*normalement [on doit trouver..]* ", qui vise autant à montrer sa conviction qu'à emporter celle de Laura. (cf. § II.2.2.).

Olivier et stéphane

L'idée de la construction de la suite $\mathcal{S}n$ est issue de l'énumération systématique des diagonales de P_8. C'est sur ce même polygone que $\mathcal{S}n$ est

explicitée et expliquée : "*Les 2 points qu'on prendra pour le départ [...] font 5, et après, à chaque fois qu'on prend 2 points, ça fait 1 de moins* " (Oli 407-409), cette dernière assertion est fondée en raison : "*une diagonale de moins parce que [...] plus on continue, plus elles seront confondues* " (Oli 411-413). L'explicitation de cette raison recourt à l'exemple générique de P_8 :

Sté : *A, ça sera 5 points*

Oli : *B, 5 points et les autres 4 points*

Sté : *donc C ce sera 5 points [....] moins 1, puisqu'il y aura CA, donc 4 points*

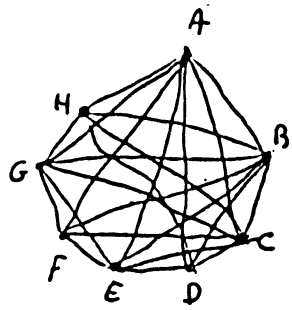


Figure 21

Oli : *D, ce sera 3 points, parce qu'y aura A et B, E ce sera, ça sera automatiquement 3 points parce qu'y aura A,B,C [...] F ce sera 2 points*

Sté : *mais E, ce sera pas 3 points. E, hein ?*

Oli :*ouais, 2 points*

Sté :*ouais, F ce sera 1 point [...] et G y en aura plus,*

Oli :*non et G y en aura plus et H encore moins*

(Sté 414- Oli 430)

En fait, Olivier pense qu'il aurait suffit de prendre pour support le cas de P_4, "*c'est plus facile [en prenant..] le moins de points possible pour voir* " (Oli 434-443). A cette occasion il explicite le caractère générique qu'il accorde à l'exemple utilisé : "*mais justement, t'expliques là, et [....] t'essaies de voir si c'est ça, là-dessus* " (Oli 438-439) : l'exemple générique donne à voir les raisons.

Malgré cela, un peu plus tard, Stéphane propose une mise à l'épreuve de cette conjecture (cf. § II.2.2.).

Georges et Olivier :

La construction de la suite $\mathcal{S}$n vient en réponse à "*un problème* " (Geo 209) soulevé par Georges alors qu'il étudie la proposition f(n)=n.s(n) : "*elles [les diagonales] se retrouvent* " (Geo 198).

Le problème d'une validation porte de façon essentielle sur celle du premier terme de $\mathcal{S}$n. Avec le support générique de P_6, les élèves établissent que ce premier terme sera de la forme n-3 :

Regarde,... comment tu sais qu'au début y en a 3 : parce que chaque fois t'as [...] parce que t'as ton machin de départ où tu vas faire partir les flêches et puis tes autres machins qui sont reliès. Alors en tout ça fait 3 points reliés (Geo 296-298).

ou plus clairement :

Les 2 segments qui sont à côté du point que tu peux faire, peuvent pas avoir de diagonales, parce qu'ils sont comme ça. Donc, c'est ceux d'à côté [....] si t'en prends un y en a déjà 2 d'à côté sont éliminés. Y t'reste les deux autres .'fin le ... le reste (Oli 299-301).

Ce point établi, la suite de la construction de $\mathcal{S}$n est validée sur P_6. Sur cet exemple générique a lieu la confrontation d'un modèle d'action qui reste implicite et d'une réalisation. Cette confrontation consiste, après avoir annoncé le nombre de diagonales en chaque sommet, en la vérification sur une réalisation, pas à pas :

"*Alors, attends. Alors là, j'suis sûr y en a 2. Là 1 [...] là rien du tout, rien du tout, alors on va voir.* [il vient de constituer la table des

valeurs de $\mathcal{P}6$ et se reporte à une représentation de P_6].

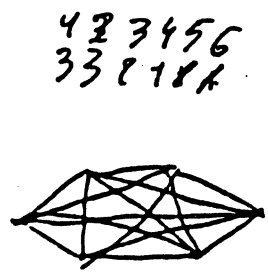


Figure 22

Pour ces deux là, j'en ai 3 chacune. Pour le troisième... j'en ai 1-2 : qu'est-ce que je t'avais dit ? [...] que la quatrième, j'en ai qu'une, c'est celle là [....] et pour la cinquième, là [....] j'en ai aucune. Pour la sixième j'en ai aucune, eh ben j'ai trouvé, parce que je regarde [...] tu vois, si t'en a 8, y en aura 5-4-3- 2-1 toc et toc, toujours ! " (Geo 307-319).

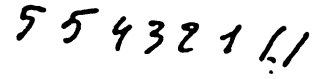


Figure 23

L'expression de cette validation est l'ostension : c'est vrai parce que l'on voit que c'est vrai. "*Y a pas à dire, ça marche* " (Geo 453). On pourrait voir ici l'une des formes de l'expérience cruciale. Nous avons écarté cette classification pour les raisons suivantes :

- la recherche et la formulation de raisons pour le calcul du premier terme de $\mathcal{P}$n ;
- la vérification pas à pas qui témoigne d'une volonté d'analyse de $\mathcal{P}$n : "*pour les deux derniers sommets vous n'aurez pas à faire de diagonales car les autres sommets les auront faites à votre place* " (Geo 429).

Certes, il n'y a pas d'explications formulées sur la construction des termes successifs de $\mathcal{P}$n. Mais, à un stade primitif, la construction de $\mathcal{P}$n

est explicitement une réponse à l'exigence de ne compter qu'une fois chaque diagonale. La validité, par construction, du passage d'un terme de $\mathcal{P}n$ au suivant peut rester implicite (ou plutôt ne s'expliciter que dans l'action, par ostension, comme c'est le cas sur l'exemple générique P_6).

Cependant, cette preuve fondée sur un exemple générique n'emporte pas la conviction d'Olivier. Il ne se rendra qu'à l'évidence d'une expérience cruciale avec P_{14} (cf. II.2.2.).

Blandine et Isabelle

Sur l'exemple de P_7, Isabelle explique pourquoi il y a n-3 diagonales en chaque sommet d'un polygone P_n. L'expression de cette propriété dans le cas général et l'explicitation des raisons sur P_7 sont menées en parallèle (fig 25), ce qui atteste de la valeur générique de l'exemple :

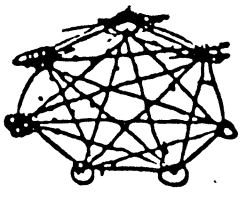


Figure 24

Ben, y a chaque fois..... le nombre de points moins 3 de diagonales et tu multiplies par le nombre de points..... regarde ça fait....., admettons x le nombre de.... sommets.... après.... ça fait x-3 puisque bon.... y a 1-2-3..... tu les barres [elle barre 3 sommets adjacents sur la représentation de P_7, fig. 24] ... peuvent pas être..... ça fait pas diagonale..... x-3 multiplié par x égale le nombre de diagonales." (Isa 34-36-46).

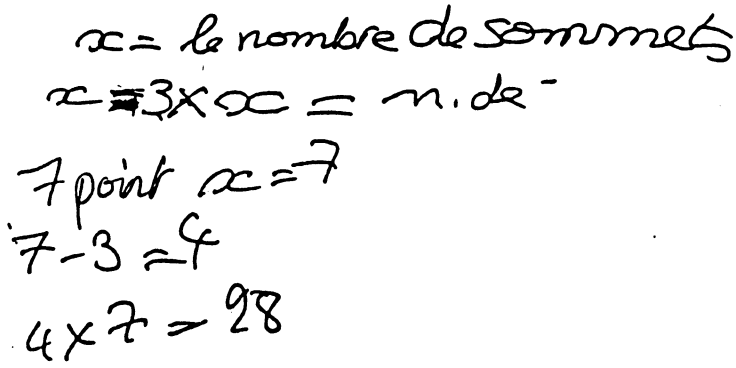


Figure 25

Cette assertion est refutée puis abandonnée.

L'exemple générique : conclusions

Dans les trois premiers cas, l'exemple générique est utilisé pour établir la validité de la proposition f(n) = $\Sigma \mathcal{S}$n (ou au moins de $\mathcal{S}$n comme suite de nombres permettant de compter les diagonales d'un polygone). Mais la preuve ainsi obtenue n'emporte jamais la conviction des deux élèves, même si une apparente collaboration les a réunis. C'est en fait, dans chacun de ces cas, une expérience cruciale qui a vaincu les doutes du partenaire sceptique.

La difficulté de ces preuves est qu'elles nécessitent que les interlocuteurs soient d'accord sur le caractère générique de l'exemple utilisé, et donc qu'ils partagent les mêmes conceptions des objets en jeu ; faute de quoi, l'explication développée apparaît comme essentiellement liée à un cas particulier. Dans ce contexte empirique, le recours à l'expérience cruciale comme moyen dans le débat de validité, apparaît légitime.

De plus, dans le cas de $\mathcal{P}$n, un débat sur le terrain des raisons serait particulièrement difficile, comme l'attestent les problèmes de formulation du message correspondant. En effet, il exige notamment l'expression d'une itération et donc un système de représentation qui est très complexe en langue naturelle ou exigeant un haut niveau de conceptualisation pour être formulé dans une langue plus formelle (qui en réduirait la complexité au plan langagier). Cette complexité peut constituer un obstacle à l'évolution des types de preuve utilisée, vers un niveau plus élevé.

II.3. Les preuves intellectuelles

II.3.1. L'expérience mentale

Pour rattacher à cette catégorie la démarche de preuve d'un binôme nous exigeons que l'explication des raisons, qui fondent la validité de la proposition, repose sur l'analyse des propriétés des objets en jeu. Ces propriétés ne sont plus attestées sur des représentants, mais formulées dans leur généralité. L'action est intériorisée, invoquée dans le discours qui explicite les arguments, les preuves.

Nous ne reprenons pas ci-dessous le cas d'Evelyne et Christine que nous avons déjà présenté (cf. § II.2.1.), nous le retiendrons cependant pour la synthèse de cette section.

Lydie et Marie

Marie, comme Lydie, exclut les diagonales non intérieures au

polygone. Cela la conduit à soutenir qu'il est impossible de trouver un moyen de calcul valide pour tout polygone : une légère déformation suffit à modifier le nombre des diagonales et donc il est toujours possible d'opposer un contre-exemple à quelque solution que ce soit. C'est ainsi explicitement une expérience mentale qui fonde son explication ; elle l'exprime ainsi :

> *C'est impossible de calculer ce machin.... parce que y suffit... qu'il ait un côté qui trinque là... non convexe, quoi, et puis.... les calculs y sont faux.... c'est obligé* (Mar 300-302).

Blandine et Isabelle

Les élèves établissent l'assertion dont nous reproduisons ci-dessous la formulation (fig. 26). Cette assertion est, de façon essentielle, fondée sur la conception de diagonale en vigueur dans leur activité :

(i) "*c'est une droite qui joint "un sommet" ... au sommet opposé* " (Isa 86)

(ii) "*c'est une droite qui passe par le milieu* " (Blan 67)

(iii) "*de chaque point il ne part qu'une diagonale* " (Isa 70).

Une telle conception assure de façon évidente l'appariement des sommets d'un polygone pair. Son explicitation et celle de f(n)=n/2 sont d'ailleurs concomitantes.

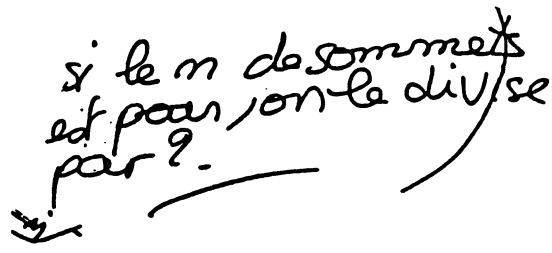


Figure 26

Dans le cas d'un polygone impair, il apparaît qu'il "*y a un point qui reste seul, il n'a pas de diagonale* " (Isa 79). En revanche les autres sommets sont appariés par des diagonales, comme pour les polygones pairs, aussi les élèves proposent-ils : "*[on enlève] 1 pour que ça fasse un nombre pair [...] puis après [on] divise par 2* " (Isa 155, Blan 158). L'explication prend en partie appui sur une représentation disponible de P_6 pour expliciter le passage d'un polygone pair à un polygone impair :

> "*Mettons, ce point, il a pas de diagonale ? [...] y peut pas avoir de diagonale, puisqu'il a pas d'point opposé.... le sommet opposé c'est lui-même* " (Isa 140-142).

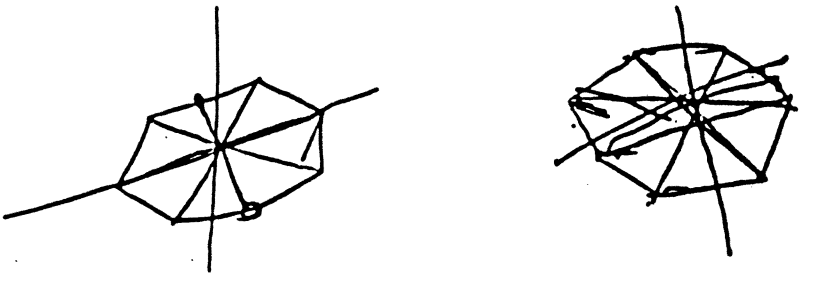


Figure 27

Mais la signification de P_6 n'est pas celle d'un exemple générique. La représentation utilisée est ici le support graphique pour l'expérience-mentale, passage de P_{2n} à P_{2n+1}, sur laquelle elle s'appuie pour fonder son assertion. Isabelle ne s'intéresse que localement à ce qui est une propriété du sommet "supplémentaire " d'un polygone impair quelconque.

Olivier et Stéphane

La construction d'une preuve de l'assertion ci-dessous est le résultat d'une recherche d'explications, longue et délibérée, à s(n)=n-3.

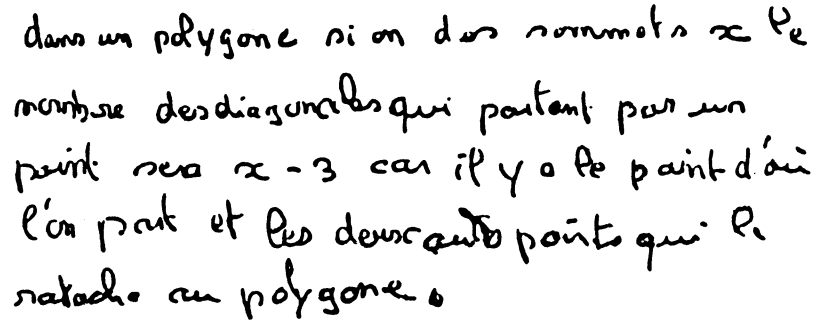


Figure 28

La première explication s'appuie sur l'exemple générique P_6 : "*il y a les 2 points où ils sont raccordés.... ça c'est déjà annulé : il en reste 3, c'est normal* " (Sté 108). Elle est formulée de la façon suivante :

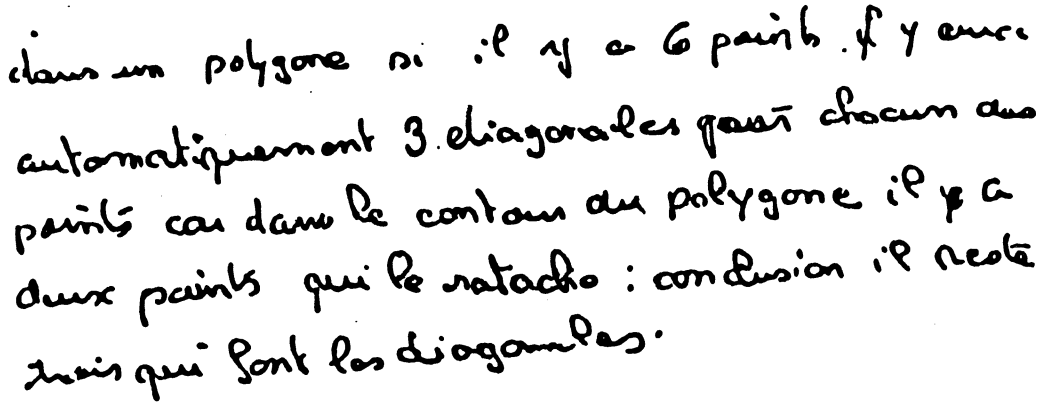


Figure 29

Mais l'expression d'une explication sur un exemple est rejetée comme preuve : "*là on fait un exemple ... on devrait pas faire d'exemples ... ça devrait être pour en général* " (Sté 158).

Olivier propose d'introduire des lettres au lieu de nombres : "*tu mets x points* " (Oli 161), le texte précédent est modifié et prend la forme suivante (fig.30).

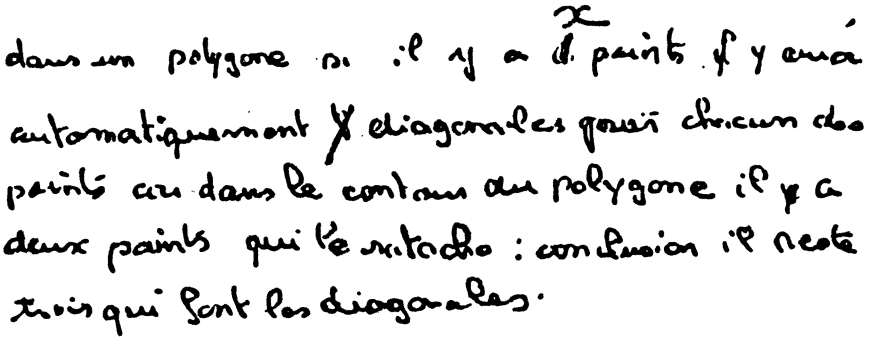
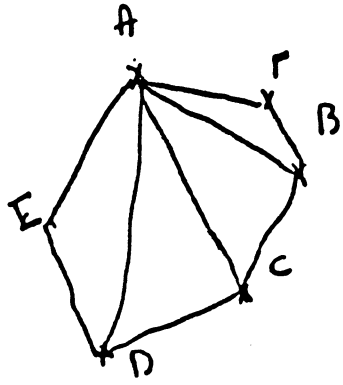


Figure 30

Mais le remplacement de 6 par x et de 3 par y, ne rendent pas compte de la relation entre le nombre de sommets et le nombre de diagonales. Les élèves orientent alors leurs recherches dans d'autres directions. Comme Olivier le suggère "*il y a pas qu'une explication* " (Oli 169).

La tentative suivante (fig. 31) emprunte les formes de la rhétorique de la géométrie. Cette explication est en fait la formulation d'une expérience-mentale. Il faut voir au delà du schéma d'une part un sommet et ceux qui lui sont adjacents, et, d'autre part, les autres sommets. Ce dessin ne représente pas un P_6 : Stéphane a "*fait un truc* " (Sté 172) qui se trouve avoir 6 sommets. Ce n'est donc pas un exemple générique mais la représentation d'une configuration quelconque (un sommet, les sommets adjacents, les autres sommets). Par ailleurs ce sont les "*points restants* " que ce texte donne à imaginer et non D,C,B.

Si les points ne sont pas alignés.



A qui est entouré de E et de F va obligatoirement placer ses diagonales aux D C B qui sont les points restant.

Figure 31

Olivier et Stéphane donnent à l'observateur les deux textes ci-dessus. Celui-ci manifeste à propos d'une représentation de P_8 que ces textes ne permettent pas de calculer le nombre des diagonales d'un polygone. Mais la représentation des élèves est telle qu'ils reprennent le problème de la validation de s(n)=n-3 : "*c'est facile à comprendre, c'est difficile à expliquer* " (Sté 257). Sur ce cas de P_8, Stéphane explique à nouveau que : "*A, c'est l'point... qui est à l'extrémité des 2 autres points, donc ça ne*

forme pas une... diagonale " (Sté 257). Mais il s'agit d'un cas particulier et il "*faut ça en général* " (Sté 269). A propos de P_8 Olivier écrit la phrase suivante qui décrit le calcul qui est fait :

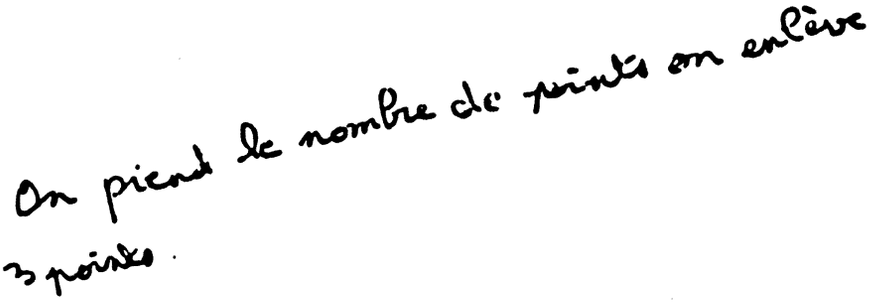


Figure 32

... et il ajoute : "*tu prends 10 points ça sera toujours pareil.... 50 ça sera pareil* " (Oli 270). C'est ce qui déclenche chez Stéphane la prise de conscience de la relation entre le "*x* " et le "*y* " évoqués dans le texte initial : "*le nombre des diagonales par points.... sera x-2 [Olivier : -3], ben x-3, avec le point quoi* " (Sté 279-281, Oli 280). Mais il ne s'agit là que de la formulation de la relation ; il reste à "*démontrer pourquoi on enlève 3* " (Oli 282).

Une nouvelle tentative de "preuve géométrique" analogue à celle ci-dessus échoue car elle ne conduit qu'à l'énumération systématique des diagonales. Stéphane revient à l'examen de P_8, à propos duquel il formule une explication de s(n)=n-3 : "*on enlève 3 au polygone car.... y a le point de départ et les 2 points qui les entourent [....] il en reste 5.... de ce point de départ, on trace... 5 diagonales* " (Sté 397). C'est en fait la décontextualisation de cette explication qui conduit un peu plus tard, après la construction de $\mathcal{P}$n (cf. § II.2.3.), au texte que nous avons reproduit au début de ce paragraphe (fig.28).

Cette explication fonde bien s(n)=n-3 comme en atteste Stéphane : "*moins 3 t'sais, c'est parce qu'il y a le point et les deux autres points.... qui*

les raccrochent [...] ça prouve déjà que ça fait moins 3 " (Sté 558-560). Elle a ses racines dans la connaissance pratique des objets en jeu dans le problème ,et de ce fait elle relève essentiellement de l'expérience mentale, avec le support éventuel d'exemples génériques. Pour atteindre un niveau supérieur de validation il faudrait qu'Olivier et Stéphane s'appuient sur des définitions de polygone et diagonale, ce qu'ils ne perçoivent pas. Ils ont un modèle d'action qui ne se constitue pas en un modèle théorique (explicite).

Bertrand et Christophe

Ce qui suit est une présentation de la démarche de preuve de Bertrand pour f(n)=n(n-3)/2, et non de Christophe (pour ce dernier cf. § II.2.1. et II.2.2.). Cette démarche illustre un stade intermédiaire entre les validations fondées sur l'exemple générique ou l'expérience mentale, et le niveau que nous avons appelé calcul sur des énoncés (cf. § II.3.2.). Pour montrer ce passage nous reprenons à sa source la construction de l'assertion.

Première étape :

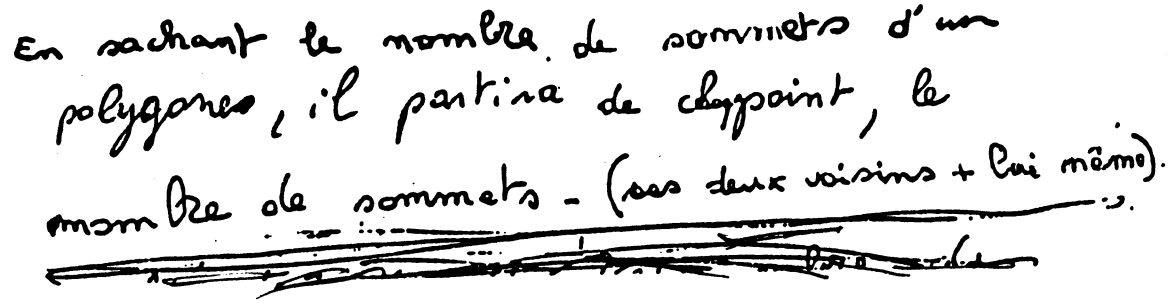


Figure 33

Cette formulation est obtenue par effacement de la référence à P_7 dans la formulation ci-dessous produite initialement :

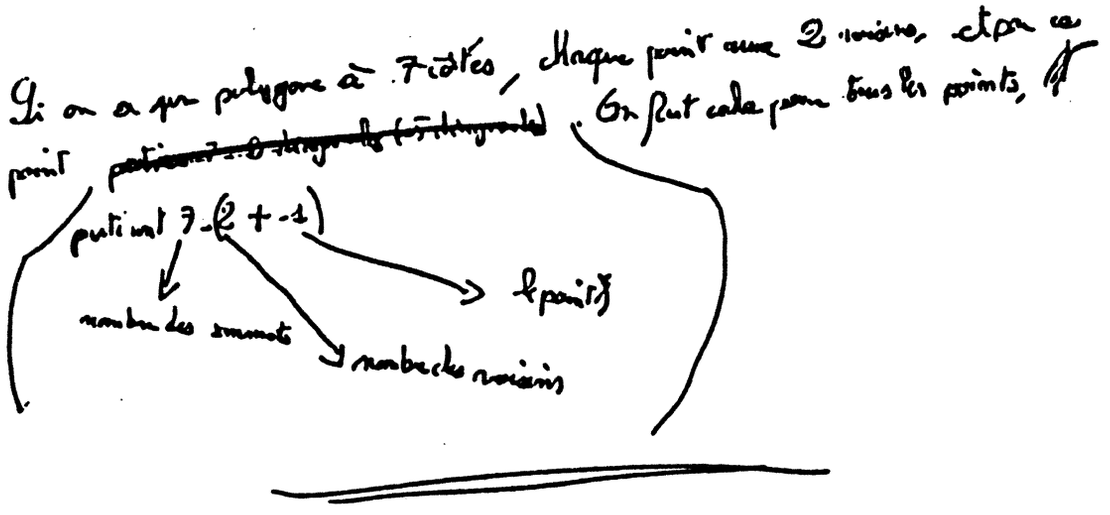


Figure 34

Comme on peut le constater, cette dernière assertion a été construite en deux temps :

- d'abord, en s'appuyant sur les propositions suivantes :

(i) *on peut tracer les diagonales jusqu'à chaque sommet sauf ceux qui sont à côté* (Ber 35),

(ii) *chaque point il a deux voisins dans un polygone, même dans n'importe quelle figure* (Ber 129).

Bertrand en déduit : "*on a un polygone, à 7 côtés, par exemple,.... chaque point aura 2 voisins et il aura [...] 5 diagonales* " (Ber 201-2....). En fait il n'utilise pas de représentation de ce polygone. P_7 est un moyen langagier dans l'explication à Christophe de s(n)=n-2 (n-2 est à ce moment donné à voir dans le passage de 7 à 5).

-ensuite Christophe obtient que P_7 soit tracé. L'assertion s(n)=n-2 est alors réfutée, mais Bertrand identifie l'origine de la réfutation et modifie s(n)=n-2 en s(n)=n-3 :

(iii) *on a oublié lui-même ... on peut pas tracer une diagonale jusqu'à lui-même* (Ber 222).

Le nouveau texte fait apparaître comment est calculé le nombre des diagonales en un sommet.

Enfin f(n)=n(n-3), qui apparaîtra dans l'état final du texte, est déduit par Bertrand d'une raison qu'il explicite clairement :

(iv) *multiplier ce que l'on trouve par le nombre de points, parce que ce sera la même chose en partant de chaque point* (Ber 272).

La validation de cette conjecture repose à la fois sur des raisons en tant que **propriétés** des objets en jeu dans le problème (propositions ii) et sur des raisons qui sont en fait l'évocation d'**actions** spécifiques du problème (propositions i et iii : tracé des diagonales; proposition iv : ce que l'on fait en partant de chaque point). Cette validation, qui est une analyse de l'assertion f(n)=n(n-3), repose ainsi encore largement sur l'expérience mentale.

A la suite d'une vérification obtenue par Christophe, cette assertion est réfutée par P_7. L'analyse de la réfutation conduit Bertrand à découvrir que "*chaque diagonale est comptée 2 fois* " (Ber 388). Pour expliquer cette raison à Christophe, il revient au tracé des diagonales en prenant le support d'une représentation de P_7 dont les sommets ont été désignés par des lettres : "*AF tu l'as comptée que 2 fois.... quand tu traces par A toutes les diagonales et quand tu traces par F toutes les diagonales* " (Ber 392).

La solution est modifiée en f(n)=n(n-3)/2. Son expression (fig. 35) fait apparaître des éléments de validation.

En se plaçant du côté de Bertrand, cette assertion a les caractères

d'un théorème. Elle est analysée en ses raisons. Mais les conceptions de polygone et diagonale sont fondamentalement liées à l'expérience pratique du tracé de ces **objets** géométriques. C'est par l'intermédiaire de cette pratique que polygone et diagonale entretiennent des relations, et non au sein d'une théorie. Nous laissons donc ce type de validation dans la catégorie expérience-mentale.

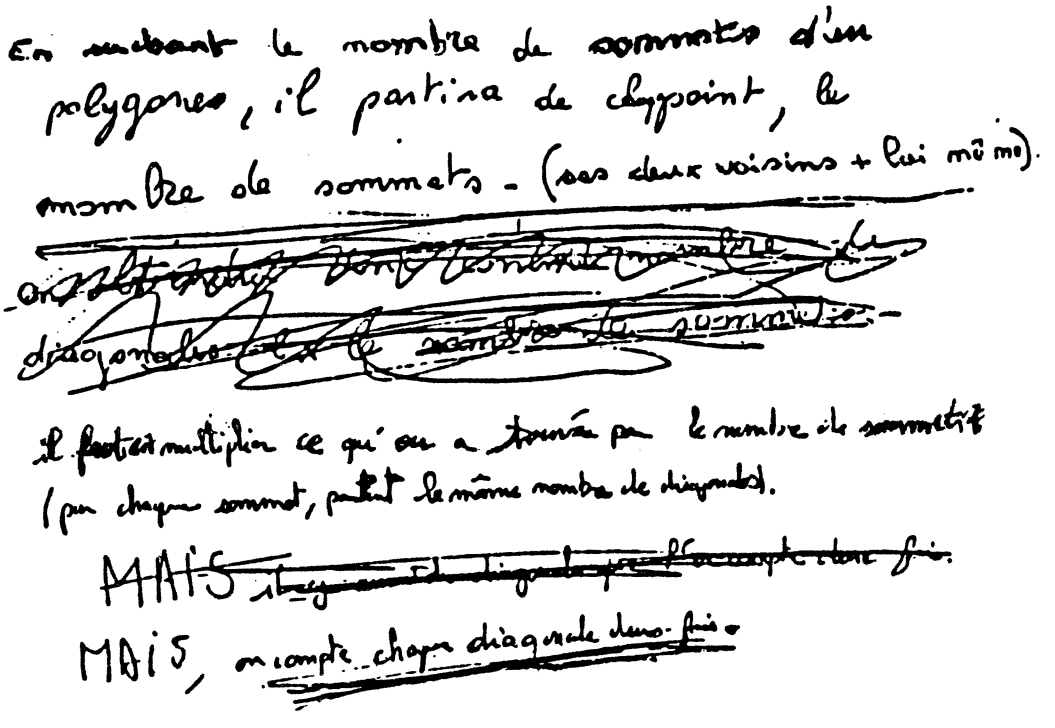


Figure 35

L'expérience mentale : conclusions

L'expérience-mentale apparaît bien comme un moyen pour fonder les solutions proposées, dans un effort d'explication. Elle se dégage des situations particulières. La décontextualisation, comme en attestent Olivier et Stéphane, est le processus essentiel de généralisation. Les conceptions engagées sont essentiellement fondée sur l'expérience

perceptive et l'action. Les raisons développées sont liées à des **actions**, éventuellement intériorisées, sur des **objets**; telle Marie qui invoque la déformation des polygones.

L'expression d'une expérience mentale requiert des constructions cognitives et langagières complexes :

- au plan langagier la difficulté est d'exprimer des opérations sur un objet abstrait (une classe d'objet). Cette formulation doit être opératoire pour permettre la construction d'une preuve. Un processus élémentaire de décontextualisation est l'effacement des marques du particulier dans une formulation. Mais, comme on le voit dans le cas d'Olivier et Stéphane un tel processus ne préserve pas nécessairement l'expression des relations.

Il faut aux élèves les moyens d'exprimer les propriétés des objets concernés. Le moyen le plus souvent utilisé place l'expérience mentale dans la filiation de l'exemple générique. Il consiste à s'appuyer sur des individus (cas particuliers), non comme les représentants d'une classe d'objets mais comme des outils dans l'expression langagière : P_6 tracé par Stéphane pour sa preuve géométrique n'est pas un exemple générique de polygone. Il signifie polygone.

- les difficultés langagières sont en fait indissociables de difficultés sur le terrain des conceptions des élèves.

La décontextualisation requiert que soit désignée la classe des objets en jeu et que soient formulées des caractéristiques opératoires sur lesquelles viendra s'appuyer l'expérience mentale. Il faut pour cela différencier les éléments pertinents, identifier les opérations qui les

mettent en jeu. La complexité de cette structuration constructive des conceptions en jeu, peut s'opposer aux élaborations langagières. Ainsi il est difficile à Stéphane, sans recourir à l'ostension, d'expliciter ce qui distingue un sommet, de ses voisins, des autres sommets (la distinction pertinente serait celle de côté et diagonale parmi les segments définis par deux sommets). La même difficulté est rencontrée par Bertrand pour expliciter qu'une diagonale est comptée deux fois (la distinction pertinente est entre sommet et extrémité), ou par Christine pour relier f(n)=n/2 à sa définition de polygone.

II.3.2. Calcul sur des énoncés

Nous retenons ici des preuves qui ne doivent rien à l'expérience. Ce sont des constructions intellectuelles fondées sur des théories plus ou moins formalisées, plus ou moins explicitées, des notions en jeu dans la résolution du problème. Ces preuves apparaissent comme le résultat d'un calcul inférentiel sur des énoncés. Elles s'appuient sur des définitions, ou des propriétés caractéristiques explicites.

Nous présentons ci-après les deux cas observés qui se rattachent à ce type de preuve.

Antoine et Damien

L'assertion soutenue par ces élèves (fig.36) est fondée sur les définitions adoptées pour polygone et diagonale : "*les diagonales passent toutes par le même milieu* " (Ant 167) et "*faut qu'les côtés soient parallèles deux à deux* " (Ant 175). Ces fondements sont attestés lorsqu'est

soulevé le problème du domaine de validité en relation avec le domaine de définition de la division par 2 dans ℕ :

et ouais, alors, si c'est pas un nombre pair ça marche pas " (Ant 220), "*ça peut pas être un nombre [im]pair, puisqu'on a dit que les côtés devaient être parallèles 2 à 2* (Dam 221).

Damien pense que "*ça doit pouvoir se démontrer [...] en disant que de chaque côté, comme il part une diagonale et que chaque côté est relié à un autre côté... c'est démontrable facilement* " (Dam 246-248). Cependant, la conviction des élèves étant acquise, cette preuve ne sera pas explicitée.

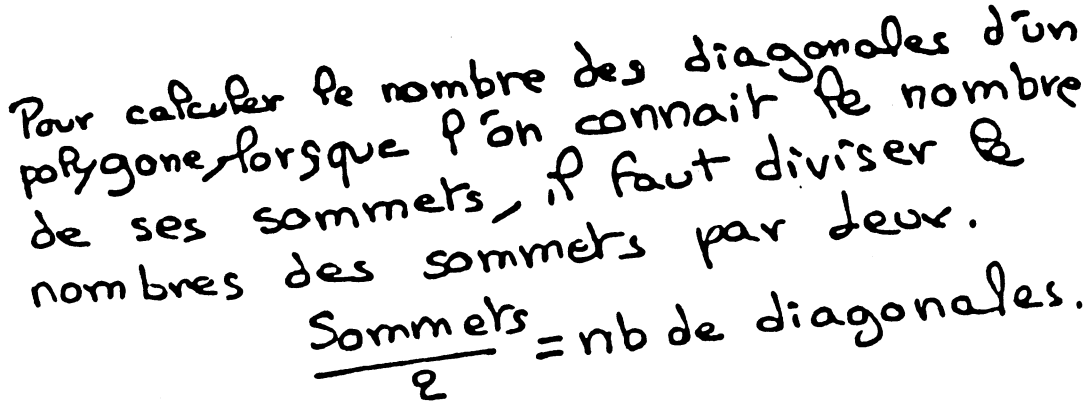


Figure 36

Hamdi et Fabrice

Les élèves tracent un polygone P_7, mais pas ses diagonales. Ils s'accordent sur le fait que pour un sommet : "*[il y] a autant de diagonales que de sommets* " (Fab 28), d'où ils déduisent que "*c'est l'carré des sommets* " (Fab 50).

dès que l'on connait le nombre des sommets on
prend son x^2 ce qui est égal aux nombres de diagonales.

Figure 37

Il ne s'agit là que d'une conjecture sur laquelle l'incertitude des élèves ne tient pas au calcul qui y a conduit, mais aux doutes sur la définition de diagonale qui est utilisée. Ils émettent le souhait de consulter des documents pour chercher "*un renseignement sur le triangle* " (Fab 91) ou "*la définition de la diagonale* " (Ham 92). Cependant cette conjecture est assez solide pour qu'ils en viennent, sans marquer de surprise, à déclarer qu'à "*4 côtés il y a 16 diagonales* " (Ham 70-80, on remarque que P_4 réfute leur conjecture quelle que soit l'acception de diagonale). La réfutation viendra de l'évocation puis de la vérification sur le rectangle (cf. § III.2.4.).

Calcul sur des énoncés : conclusion

Nous tirons de l'observation de ces deux cas, deux remarques quant aux raisons qui nous ont conduit à les rattacher à ce type de preuve.

Antoine et Damien ne vont pas jusqu'à l'explicitation complète d'une démonstration de leur assertion, mais les fondements de leur conviction résident explicitement dans l'analyse de leurs définitions et des propriétés

qui en découlent. Leur assertion a les caractères d'un théorème.

Dans le cas de Hamdi et Fabrice l'analyse est moins facile parce que les indices explicites sont moins abondants. Cependant il est clair que leur conjecture ne doit rien à l'expérience (qui la réfuterait), mais qu'elle est issue de leur définition de diagonale d'où il découle immédiatement et de façon erronée que s(n)=n : une diagonale joint deux sommets, donc de chaque sommet il part autant de diagonale qu'il y a (d'autres) sommets (cela devrait cependant conduire à s(n)=n-1, puisque côtés et diagonales ne sont pas distingués). La force de l'évidence est ici un obstacle à l'explicitation complète de la preuve.

II. 4. Conclusions sur les types de preuve

II.4.1. La signification des processus de validation observés

Un résultat essentiel de notre recherche est que les démarches de validation observées ne caractérisent pas de façon intrinsèque les élèves. Elles ne prennent de sens qu'en référence à la nature et au statut de leurs connaissances, dans la perspective des interactions sociales au sein du binôme, et dans celle de leur lecture de la situation.

En particulier plus de la moitié des binômes (8 sur les 14), au moins pendant un temps, soutiennent une conjecture sans l'appui identifiable d'une quelconque validation. Quatre binômes resteront même sur cette position au cours de la première partie de l'observation. Mais cet

empirisme naïf attesté lors de la résolution du problème ne suffit pas à caractériser la rationalité de ces binômes. Par exemple, chez Pierre et Mathieu l'empirisme naïf cohabite avec des projets théoriques ambitieux (cf. § II.2.1., Pie 235). Cet empirisme apparaît essentiellement lié aux interactions sociales qui peuvent bloquer l'émergence de démarches de preuve, comme dans le cas de Lydie et Marie, ou aux rapports avec la connaissance elle-même.

La force d'évidence des relations entre une solution et les conceptions qui la sous-tendent, de l'ordre de ce que Fishbein (1982, p.11) appelle "intrisic type of conviction", peut constituer un obstacle à la mise en oeuvre de procédures de validation. Il peut paraître abusif, dans ces circonstances, de parler d'empirisme naïf ; c'est par exemple le cas de la solution f(n)=n/2 appuyée sur une conception polyèdre-régulier-pair et diagonale-diamètre.

Par ailleurs, un même binôme pour une solution, ou plusieurs solutions successivement envisagées, peut présenter des comportements relevant de niveaux de preuve différents.

C'est par exemple le passage de l'empirisme naïf à l'expérience-mentale d'Evelyne et Christine pour la solution f(n)=n/2, puis leur recours à l'expérience cruciale et enfin à l'analyse des raisons pour fonder l'extension de leur solution aux polygones impairs au cours de la seconde partie de l'observation :

Après la réfutation de leur conjecture par P_5 régulier,
Evelyne et Christine explicitent leurs définitions de
polygone et diagonale : "*Un polygone est une figure*

géométrique qui peut avoir n'importe quel nombre de sommet mais dont les côtés doivent être égaux " (prot. p. 16), "*Une diagonale est une droite qui passe par un sommet d'un polygone et qui coupe la surface de ce dernier en deux* "(prot. p. 19). Elles cherchent ensuite une solution pour les polygones impairs. Sur une configuration d'un P_5 régulier elles identifient 5 diagonales (i.e. axes de symétrie) d'où elles tirent la conjecture f(n)=n pour les polygones impairs : " *si il est impair le nombre des sommets est égal au nombre des diagonales* " (prot. p. 28). Elles se propose de recourir à une **expérience cruciale** pour établir cette nouvelle conjecture : "*on va vérifier encore un coup. On prend par exemple ... le truc à 17 côtés* " (Chr 477). Mais une telle réalisation est hors de portée, elles se rabattent sur P_{11}, puis finalement Christine conclut sans avoir à faire de dessin : " *Mais c'est évident qu'il y en ait 11, puisqu'il y en a 1 en chaque sommet* "(Chr 524). La seconde partie de la conjecture se trouve ainsi **fondée en raison.**

C'est aussi le cas de Lionel et Laurent qui abandonnent leur solution f(n)=n (tirée de la seule observation de P_5) à la suite d'une réfutation par l'observateur, et parviennent à la nouvelle solution f(n)=n(n-3)/2 en la fondant sur l'analyse de raisons :

A la suite de la réfutation de leur solution par l'observateur, Lionel et Laurent reprennent complètement la résolution du problème. D'abord, ils s'intéressent à la situation en chaque sommet et attestent, par leurs assertions concernant P_4,

P_5 ,P_6 et P_7, de la mise en oeuvre de la règle : en chaque sommet le nombre de diagonales de P_n est n-3 ("*à 7 côtés, il devrait y en avoir 4 normalement* ", Lau 218). D'où ils tirent que le nombre de diagonale est de la forme f(n)=n.s(n) : " *2 par chaque, comme y a 5 points ça en fait 10 qui partent normalement* " (Lau 248), puis de la forme f(n)=n.s(n)/2 : " *et comme y en a 5, ça fait divisé par 2* "(Lau 250).La conjecture est ensuite confirmée sur P_6. Une dernière vérification sur P_7 a valeur d'**expérience cruciale**, reste que ... " *comment on pourrait y dire ça ?* ". Les fondements de s(n)=n-3, qui n'est pas explicité mais montré sur des exemples, restent **empiriques** cependant que les élèves dégagent **les raisons** du passage de n.(n-3) à n.(n-3)/2 : " *comme deux diagonales rejoint deux points ... deux diagonales seront confondues* " (Lau 428). Ainsi leur conjecture a des fondements mixtes. Il faudra un long travail pour qu'ils parviennent à la formulation : " *pour trouver le nombre de diagonales partant de chaque sommet, on soustrait au nombre de sommets : 3* "(Lau 700).

II.4.2. Aspects langagiers et cognitifs

Dans une première analyse, il apparaît nettement que l'absence de moyens langagiers opératoires constitue un obstacle à l'émergence de preuves de niveau élevé. Ainsi l'expression de l'expérience mentale pour fonder une solution devra parfois recourir à des exemples dont la fonction est de désigner, montrer, des objets ou des relations. Dans sa construction,

l'expérience mentale reste enracinée dans le langage de la familiarité. Dans le même temps, cela place l'exemple générique dans sa genèse.

Le recours à l'exemple générique lui-même atteste de la volonté de fonder en raison la solution proposée, mais cette volonté se heurte aux difficultés de l'expression opératoire (calculable) des objets en jeu et de leurs relations (c'est le cas par exemple de Lionel et Laurent cités ci-dessus). Soulignons qu'il ne s'agit pas ici d'une complexité strictement langagière mais aussi cognitive. Les élèves n'ont pas seulement des difficultés de mise en mot des preuves qu'ils apporteraient, mais aussi celle de la reconnaissance et de l'explicitation des concepts en jeu. Le travail sur la définition sur lequel nous reviendrons plus loin, parfois associé à des niveaux très bas de validation (comme dans le cas de Pierre et Mathieu), atteste de ce que la complexité est aussi d'ordre cognitif.

En fait, processus langagier et construction cognitive interagissent dialectiquement dans le cours de la résolution du problème. Ils constituent ensemble une limite potentielle au développement du processus de preuve.

L'expression de la solution $\Sigma \mathcal{P}_n$ montre bien comment la complexité de l'expression langagière peut conduire les élèves à recourir à l'exemple générique, limitant aini de fait le niveau de la preuve.En effet, il faut pour cette solution exprimer une itération, la contrôler (nombre de pas de calcul et terminaison), dans un contexte langagier dans lequel les élèves ne disposent d'aucun outil adapté. L'exemple générique devient un moyen de **montrer** la procédure de calcul et ses fondements.

De même l'évolution de l'expérience mentale vers un calcul sur des énoncés se fait dans un double mouvement de construction langagière et

cognitive. L'élaboration cognitive consistant pour l'essentiel en la construction des propositions nécessaires au calcul, la construction langagière permettant de se détacher de la marque du particulier et de l'action.

II.4.3. L'interaction sociale

L'interaction sociale, dans les conditions expérimentales que nous avons conçues, a joué un rôle essentiel.

Certes, elle a pu constituer un obstacle au développement de démarches de validation, comme nous l'avons relevé, à propos de l'empirisme naïf, lorsque la relation entre les élèves était telle que tout moyen de s'imposer à l'autre pouvait paraître bon.

Mais elle a été dans le même temps, pour certains binômes, un moteur essentiel de l'évolution par les prises de conscience qu'elle a provoqué en obligeant les élèves à justifier ou expliciter mutuellement les décisions qu'ils prenaient.

Enfin, c'est l'interaction sociale qui donne sa signification à l'expérience cruciale. Ce type de validation prend toute sa place dans un conflit sur la validité d'un énoncé qui ne peut être dépassé en accédant à un niveau supérieur de preuve (c'est le cas de $\Sigma \mathcal{P}_n$ et de la construction de la récurrence). L'expérience cruciale est alors une mise à l'épreuve (démarche de validation ou d'invalidation) qui est d'abord une réponse pragmatique à un conflit social. Elle a aussi une signification au plan cognitif car elle correspond à une prise en charge du problème de la

généralisation, sous l'angle un peu particulier de l'existence de réfutations potentielles. L'ensemble des possibles est envisagé par l'un des partenaires sous la pression du doute.

Ces observations sur l'expérience cruciale nous ont conduit à la retirer de la filiation de la démonstration. Certes, elle se trouve, dans une tentative de hiérarchisation, à un niveau supérieur à celui de l'empirisme naïf, mais peut-être pas dans la genèse de l'exemple générique. L'expérience cruciale se trouverait sur un rameau parallèle. Déterminée dans sa fonction par les interactions sociales, elle peut apparaître "parallèlement" à d'autres types de preuves lorsque la tension entre les élèves ne peut être réduite sur le terrain des raisons.

II.4.4. L'exigence explicite de démonstration

On aurait pu s'attendre à ce que des élèves de quatrième manifestent de façon assez importante, dans le contexte d'une telle observation, l'exigence d'une démonstration comme élément constitutif du contrat (didactique ou expérimental) attaché à la résolution du problème. En fait les références à la démonstration sont peu nombreuses : " *[Peut-être faut il] faire une démonstration comme on en faisait en classe* . " (Naï 118), " *faut que ... j'explique comment j'ai fait ?* "(Sté 184). Ainsi, c'est moins comme moyen de preuve que comme obligation liée au contrat que la démonstration est invoquée. C'est ce statut juridique que Bertrand exploite contre Christophe qui veut imposer la conjecture f(n)=2n : "*On l'a pas démontré , on a pas le droit d'faire ça* "(Ber 307), Christophe en conviendra à contre coeur : " *Ouais, j'sais. C'est ça. C'est qu'on a pas le droit d'y inventer* "(Chr 340).

Des allusions ont été faites quant à la démonstration comme outil de preuve, mais elles sont restées sans suite : " *qu'est -ce qu'on en sait si c'est tous les triangles ... il faudrait le démontrer* " (Eve-Chr, Chr 301, puis elle passe à autre chose), " *faut démontrer pourquoi on enlève 3 points ...* "(Oli 282) ; ou encore " *c'est démontrable facilement* " (Dam 248, cf. § II.3.2.).

L'exigence de démonstration posée a priori n'apparaît donc pas comme un moteur dans le développement des démarches de validation. Mais comme en atteste ce qui précède, cela ne permet pas d'affirmer pour autant que les élèves ne ressentent pas le besoin d'élaborer des preuves. Ce besoin, lorsqu'il se fait jour, est satisfait par d'autres moyens, les élèves se plaçant d'abord à un niveau cohérent avec d'une part leur incertitude et les exigences perçues de la situation et d'autre part compatible avec les élaborations cognitives et langagières disponibles.

III : Le traitement des contre-exemples

III.1. Introduction

Les réfutations ont été présentes d'une part sous la forme de contre-exemples produits ou reconnus par les élèves eux-mêmes au cours de la première phase de la résolution du problème, d'autre part sous la forme de contre-exemples opposés par l'observateur aux solutions qu'ils soutiennent. Dans les deux cas nous retenons l'opposition des contre-exemples à ce qui est au moins une conjecture. Nous écartons la confrontation de propositions, simples spéculations, à des situations qui les réfutent. Ces dernières contradictions, éventuellement reconnues par les élèves, ont à notre sens un autre statut à la fois dans le cours de la résolution du problème et dans les démarches de validation.

L'analyse de Lakatos nous a conduit à attendre comme conséquences d'une réfutation l'une des décisions suivantes (Chap.I, § V.3.) :

- un retour sur la conjecture, pour sa modification ou son rejet global ;

- un retour sur la résolution du problème ou sur la preuve déjà explicitée, notamment pour retrouver un lemme caché qui serait ensuite intégré à la conjecture sous forme d'une condition. Ce retour peut aussi provoquer le rejet de la conjecture elle-même, ou permettre la mise en évidence de conceptions erronées. Cette analyse des fondements de la conjecture peut conduire à identifier la contradiction ou l'erreur fondamentale dont la réfutation n'est que la conséquence.

- un retour sur les connaissances sous-jacentes au problème étudié, ou sur les fondements rationnels de la conjecture.

- enfin, la discussion du contre-exemple pour le mettre à l'écart, voire même lui dénier le statut de contre-exemple.

III.2. Les types de traitements d'un contre-exemple

III.2.1. Les types de traitements retenus

En référence aux catégories issues de l'analyse épistémologique et historique, nous avons identifié dans les comportements des élèves les types suivants :

l'abandon de la conjecture : il correspond aux cas dans lesquels les élèves renoncent à leur conjecture soit pour abandonner la résolution du problème (c'est par exemple le cas de Pierre et Mathieu), soit pour reprendre la recherche d'une solution le plus souvent dans une direction radicalement différente de la direction initiale (c'est typiquement le sort de la conjecture f(n)=n).

modification de la conjecture : elle correspond à une analyse nouvelle de la situation en s'appuyant sur la conjecture réfutée ou sur le contre-exemple lui-même (c'est le cas de la recherche de solutions spécifiques aux polygones impairs à la suite de la réfutation de f(n)=n/2 ou du passage de f(n)=n(n-3) à la solution f(n)=n.(n-3)/2).

modification ad hoc de la conjecture : il s'agit d'une modification de la conjecture à partir d'une mise en relation directe du résultat calculé à partir de la conjecture initiale, et du résultat observé sur le contre-exemple. La modification ad hoc relève de l'empirisme naïf.

l'introduction d'une condition : il s'agit là encore, d'une modification de la conjecture. Mais cette modification tient ici à l'analyse de son domaine de validité, soit à partir de l'analyse du contre-exemple (condition qui écartera la classe des objets dont il est un représentant), soit à partir de celle des fondements de la conjecture (on retrouve ici le fait de tourner en condition un lemme réfuté).

notification d'une exception : dans ce cas, le contre-exemple est en quelque sorte incorporé à la conjecture en lui accordant un traitement spécifique. Nous retiendrons aussi le cas où le contre-exemple est rejeté, mais où sa mise à l'écart est spécifiée dans la formulation de la conjecture. Quoiqu'il en soit, le contre-exemple est ici accepté en tant que polygone.

reprise de la définition : il s'agit des cas où la production du contre-exemple conduit les élèves à reconsidérer explicitement leurs conceptions, voire à expliciter une définition de polygone ou de diagonale. Dans ce dernier cas, cette formulation est en général associée à celle de la conjecture dans le message produit.

rejet du contre-exemple : ce type de conséquence concerne deux situations bien différentes. Soit les élèves ne reconnaissent pas le contre-exemple comme recevable parmi les concepts concernés par le problème, et ils l'écartent. Soit ils produisent une interprétation au terme de laquelle la configuration rencontrée n'est plus un contre-exemple (par exemple

lorqu'ils découvriront une diagonale masquée dans la représentation ci-contre, fig 38).

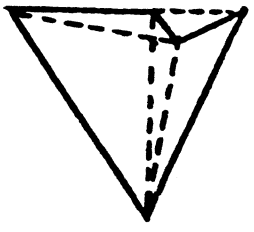


Figure 38

On remarquera que la conséquence d'un contre-exemple, dans notre expérience, n'a jamais été la remise en question des fondements rationnels de la solution proposée. Même lorsque celle-ci est le produit d'un empirisme naïf. En revanche les autre conséquences possibles d'une réfutation ont trouvé, sous des formes diverses, une réalisation parmi les faits que nous avons observés.

III.2.2. Premières remarques à partir d'une vue globale et quantitative des décisions prises par les élèves.

Les phases I et II de l'observation n'ont pas le même statut, bien sûr de par la différence des positions prises par l'observateur, mais aussi du fait du temps consacré à chacune d'entre-elles. Dans la mesure où chaque binôme avait toute liberté pour décider du moment où clore son travail de résolution du problème (c'est-à-dire du moment où il le considère comme résolu), le temps laissé disponible pour la deuxième phase a été très variable : de cinq minutes à une demi-heure. Les conditions matérielles même de l'expérimentation (le plus souvent entre deux cours ou à l'heure du déjeuner) ne permettaient pas de normaliser la durée, et donc le contenu, de la phase II.

Nous donnons ci-dessous, pour chacune des deux phases, la

répartition des traitements des contre-exemples suivant le type. Seulement 10 binômes sur les 14 apparaissent dans la phase I; la réfutation n'a pas joué de rôle en tant que telle pour quatre d'entre eux : Lionel et Laurent, Martine et Laura, Naïma et Valérie, Pierre et Philippe. Cela tient à trois raisons bien différentes suivant les cas :

- soit les élèves ont d'emblée soutenu une conjecture juste en référence à leurs conceptions de polygone et de diagonale, ou ont acquis une conviction qui écarte les remises en question (Martine et Laura, Lionel et Laurent),

- soit ils s'en remettent à l'observateur pour trancher leur différent face à une réfutation (Naïma et Valérie),

- soit ils n'identifient pas de contradictions dans le cours de leur activité (Pierre et Philippe, cf. § III.2.1., ces élèves qui soutiennent f(n)=n.s(n) ne réalisent aucun dessin qui puisse mettre en évidence la contradiction).

Le tableau associé à la phase II est complété en faisant apparaître pour chaque binôme (sous la forme d'un point à l'endroit convenable) les types de traitement des contre-exemples apparus dans la phase I et qui n'apparaîtraient pas à nouveau. Par ailleurs, dans le cas de Lydie et Marie, l'information apportée est notée entre parenthèses car ces deux élèves ne sont pas parvenues à se mettre d'accord sur le traitement du contre-exemple qui leur est soumis par l'observateur. Lydie, qui défend la conjecture f(n)=n/2 qu'elle a soutenue jusque là, milite pour l'introduction d'une condition, cependant que Marie souhaite que la conjecture soit rejetée au profit d'une nouvelle tentative de résolution.

Traitements des contre-exemples, phase I

	Ant Dam	Ber Chr	Bla Isa	Eve Chr	Geo Oli	Ham Fab	Lyd Mar	Nad Eli	Oli Sté	Pie Mat	T	n
Abandon de la conjecture		1	2		3	1	1		1	2	**11**	**7**
Modif de la conjecture		3	1		1	1				2	**8**	**5**
Exception					1						**1**	**1**
Condition				1			1	1	1		**4**	**4**
Reprise de définition	1		2							1	**4**	**3**
Rejet du contre.exemple	1			1			2	1		2	**7**	**5**

T: nombre d'occurences d'un type. n : nombre de binômes concernés.

Traitement des contre-exemples, phase II

	Ant Dam	Ber Chr	Bla Isa	Eve Chr	Geo Oli	Ham Fab	Lyd Mar	Nad Eli	Oli Sté	Pie Mat	Pie Phi	Naï Val	Mar Lau	Lio Lau	T	n
Abandon de la conjecture		-	-		-	1	-		-	2				2	**5**	**3**
Modif de la conjecture		-	-	1	-	2				-			1	2	**6**	**4**
Exception			1		2	2							1		**6**	**4**
Condition			1	1		1	(1)	-	-			3		1	**7**	**5**
Reprise de définition	1		-	3					1	-		3			**8**	**4**
Rejet du contre.exemple	-	2		1		1	(1)	-	4	-	2	-	1		**11**	**6**

T: nombre d'occurences d'un type. n : nombre de binômes concernés.

Ces deux tableaux mettent en évidence des différences importantes entre les phases I et II. Mais ce ne sont pas les différences que nous attendions initialement.

C'est dans la phase I que domine l'abandon de la conjecture face à un contre-exemple, et non dans la phase II comme on aurait pu le penser a priori en considérant le poids du contrat expérimental : il pouvait conférer au contre-exemple une valeur qu'il n'a pas lorsqu'il est le produit de l'activité des élèves, ou qu'il est rencontré par hasard. En revanche, le rejet du contre-exemple domine dans la phase II. Ce fait est à rapprocher d'une présence nettement plus forte des **exceptions** dans cette phase (5 contre un seul dans la phase I pour les mêmes binômes).

En dehors d'une explication propre aux interactions dans cette situation expérimentale, on peut avancer les remarques suivantes :

- l'abandon de la conjecture a lieu face à des conjectures fragiles (vérifiées par au plus un cas, quelle que soit la conception sous jacente de polygone) il s'agit de : $f(n)=n$ (vérifiée par P_5) ; $f(n) = 2n$ (vérifiée par P_7) ; $f(n)=n^2$ (vérifiée par aucun polygone et cependant soutenue par Hamdi et Fabrice ...)

- le rejet d'un contre-exemple s'appuie sur des conjectures fortes soit qu'elles aient été solidement établies (au regard des conceptions des élèves), soit qu'elles soient correctes [$f(n)=n.(n-3)/2$; $f(n)=\Sigma \mathcal{S}_n$, ou $f(n+1)=f(n)+a(n+1)$]. Ces solutions sont le fait de 9 cas sur les 11 cas rencontrés au cours de la phase II.

Par ailleurs, le tableau précédent met en évidence la faible présence

du traitement d'un contre-exemple comme une exception. Cela peut tenir à une conception globale des mathématiques. Nous y reviendrons plus loin (§ III.2.5).

Lorsque le nombre de contre-exemples traités, dans la phase I ou dans la phase II, est grand, il est intéressant d'examiner comment ces traitements se distribuent suivant les différents types. On remarque alors deux catégories de binômes :

- stabilité dans le traitement (peu de catégories différentes) : Bertrand et Christophe, Naïma et Valérie, Olivier et Stéphane. L'origine de cette stabilité est assez différentes pour chacun de ces trois binômes, mais facilement identifiable :

Naïma et Valérie jouent au jeu de la définition. Face à chaque contre-exemple produit par l'observateur, elles enrichissent la définition de nouvelles clauses, ou bien elles formulent une condition (ce qui procède chez elles de la même stratégie).

Bertrand (et Christophe) fait évoluer la conjecture vers f(n)=n(n-3)/2 par des modifications successives. Le succès local de ces modifications (fondées sur une analyse des sources de la réfutation) conduit les élèves à s'en tenir à ce traitement.

Enfin, Olivier et Stéphane, après le succès d'un premier rejet des contre-exemples (produits par l'observateur) au nom de la définition, s'en tiennent à cette tactique. Lorsqu'elle sera mise en échec ils opteront pour un retour sur la définition dont l'objectif est nettement, à nouveau, le rejet du contre-exemple.

La stabilité dans le choix du traitement d'un contre-exemple suggère une raison d'économie (relativement à une situation donnée) : l'efficacité reconnue des premières décisions prises leur confère un caractère dominant.

- diversité dans la nature des décisions prises : Pierre et Mathieu, Evelyne et Christine et Hamdi et Fabrice. L'origine des décisions prises est trop complexe pour être rapportée ici en quelques mots, aussi nous nous proposons d'examiner plus loin en détail les cas de ces trois binômes (§ III.3).

Nous allons dans ce qui suit, pour chaque type de traitement d'un contre-exemple, examiner les circonstances des décisions prises par les élèves pour tenter de comprendre les origines et la signification de leurs choix pour le traitement d'un contre-exemple.

III.2.3. L'abandon de la conjecture

Le tableau ci-après donne une vue d'ensemble. Il indique pour les binômes concernés, la conjecture en jeu, le contre-exemple produit, et la phase de l'observation au cours de laquelle à lieu cet évènement. On remarquera pour les binômes Pierre et Mathieu, et, Hamdi et Fabrice une reprise au cours de la phase II d'une conjecture déjà apparue dans la phase I (respectivement $f(n)=n$ et $f(n)=n^2$). Pour le premier de ces binômes cela tient à une évolution de leur conception de diagonale qui permet une reprise de leur conjecture initiale (cf. § III.3., et ci-dessous en a) et b)), pour le second la conjecture est d'abord rejetée puis reprise pour être présentée, faute de mieux, à l'observateur (cf. § III.3.)

Binôme	Conjecture	Contre-exemple	Phase
(Ber)-Chr	2n	P_8	I
Bla-Isa	n/2	P_9	I
	n(n-3)	P_7	I
Geo-Oli	2f(n-1)	P_7	I
	(n/2).s(n)	P_7	I
(Geo)-Oli	2n	P_6	I
Ham-Fab	n^2	P_4	I
	n^2	P_5	II
Lio-Lau	n	P_6	II
	[n(n-3)/2]-1	P_9	II
(Lyd)-Mar	modèle linéaire	P_{12}	I
Oli-Sté	n/2	P_6	I
(Pie)-Mat	n	P_4	I
	n/2 ou n-1	P_7	I
	n	P_5*	II
	n/2 ou n-2	P_6	II

(* il s'agit de P_5 à points alignés, cf. figure 38)

Une analyse plus fine de l'abandon de la conjecture, montre que se dégagent deux types de circonstances :

- soit un abandon d'emblée, dès la production du contre-exemple,
- soit un abandon consécutif à l'analyse des sources de la réfutation.

a) <u>l'abandon d'emblée</u> :

Cette décision est prise le plus souvent dans un contexte d'empirisme naïf. Cette attitude est cohérente : l'observation de quelques polygones suffit à construire une conjecture, un seul contre-exemple en provoque l'abandon :

- Christophe soutient la conjecture f(n)=2n sur le fondement d'un empirisme naïf, mais elle est rejetée par Bertrand sur le cas de P_8. Reçue comme le résultat d'une expérience cruciale par Christophe (cf. § II.2.2.) cette réfutation provoque naturellement l'abandon de la conjecture.

- La même conjecture soutenue par Olivier (du binôme Geo-Oli) sur la base d'un empirisme naïf est abandonnée dès sa réfutation par P_6.

- Quant à Lionel et Laurent dont la conjecture f(n)=n est fondée sur le seul cas de P_5 (cf. § II.2.1.) ils renoncent devant la réfutation par P_6 que produit l'observateur : "*ben on s'est trompé* " (Lau 204-206). A la suite de cela ils reprendront la résolution sur des bases nouvelles et indépendantes de ce qu'ils ont fait initialement.

- Dans le cas de Pierre et Mathieu , à l'empirisme naïf se conjugue une lecture de la situation comme jeu de devinette (cf. § II.2.1.). L'énoncé d'une conjecture et son abandon ont lieu au gré des exemples et des contre-exemples. A cela s'ajoute leurs réticences face à une conjecture qui exprimerait des formules différentes pour différentes classes de polygones : "*j'hésite parce que justement, j'arrive pas à en formuler une pour les deux. **Une seule** valable pour les deux.* " (Mat 261-263).

Ainsi la conjecture f(n)=n/2 ou n-1, suivant la parité de n, soutenue par Pierre, est réfutée par une configuration de P_7 sur laquelle Mathieu fait apparaître 7 diagonales. De cela Mathieu tire f(n)=n que Pierre accepte d'emblée, abandonnant sa conjecture initiale (" *en fait, maintenant j' suis sûr qu'il y a autant de diagonales que de sommets* ", Pie. 293). Il reprendra sa conjecture initiale en la modifiant un peu lorsque cette

nouvelle conjecture aura été réfutée par l'observateur par un polygone P_5 à points alignés présentant 3 diagonales. Cette autre conjecture est réfutée à son tour par l'observateur et est finalement abandonnée. (Mathieu a une position différente de Pierre, il cherche des solutions propres aux ensembles de polygones suggérés par les contre-exemples. Mais il échoue et s'en remet aux décisions de Pierre).

Deux autres binômes se rattachent à cette catégorie, mais leur abandon de la conjecture procède d'une démarche différente. D'abord leur conjecture est **déduite** d'une conception, éventuellement implicite, et non d'une simple observation, mais elle est marquée d'une forte incertitude qui invite finalement à une vérification dont surgira le contre-exemple :

- Hamdi et Fabrice proposent $f(n)=n^2$ à l'observateur. Face au contre-exemple P_5 produit par ce dernier, ils abandonnent leur conjecture : "*la deuxième phrase c'est juste alors* " (Ham 258, il s'agit de l'assertion : " *selon le nombre de sommets du polygone chaque sommet à 1 ou plusieurs diagonales* "). Cet abandon est dû aux incertitudes initiales quant aux conceptions de polygone et diagonale, liées à cette conjecture (cf. ci-aprés).

- Marie (du binôme Lyd et Mar) propose un modèle proportionnel qui "*normalement* " (Mar 173-175) devrait rendre compte des relations entre nombre de sommets et nombre de diagonales d'un polygone. Elle ne

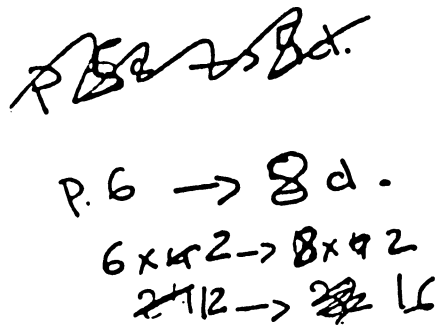


Figure 39

s'engage dans une vérification que sous la pression de Lydie. L'examen d'un polygone P_{12} réfute sa conjecture, Marie l'abandonne : "*bon , ben en tout cas ... mon machin c'était faux* " (Mar 274).

b) L'analyse puis l'abandon :

Dans les cas qui suivent, l'abandon de la conjecture est le résultat d'une analyse des origines de la réfutation. Cette analyse, comme l'illustrent les exemples ci-dessous, fournit les bases de la poursuite de la résolution.

- Blandine et Isabelle : la réfutation par P_9 de f(n)=n/2 fait apparaître qu'un sommet reste isolé (Isa 27). Les élèves modifient alors explicitement leur conception de diagonale et abandonnent cette conjecture. Leur nouvelle conjecture f(n)=n(n-3) rencontre le contre-exemple P_7 ci-contre. A nouveau, les élèves reprennent le problème de la définition de diagonale. Le polygone P_4 va jouer un rôle prototypique : "*de chaque point il ne part qu'une diagonale* " (Isa 70). La conjecture est alors

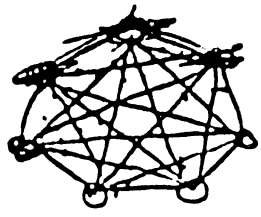


Figure 40

abandonnée pour un retour à la conjecture initiale (que suggère P_4) dont le domaine de validité est cette fois limité aux polygones pairs. Les élèves s'engagent dans la recherche d'une formule pour les polygones impairs.

- Georges et Olivier induisent la conjecture f(n)=2 f(n-1) (§ II.1.1.). Mise à l'épreuve sur P_7, elle est abandonnée. L'analyse des sources de cette réfutation conduit les élèves à l'invariance du nombre des diagonales en chaque sommet d'un polygone.

La nouvelle conjecture f(n)=n s(n) est examinée du point de vue de son domaine de validité. Elle est modifiée en f(n)=(n/2)s(n) mais la division par 2 suggère la réfutation par P_7. La nouvelle conjecture est alors abandonnée. La recherche est reprise avec pour guide de ne pas compter deux fois les diagonales : " *mais attends une seconde, parce que après elles se retrouvent. ... [...] ... hum, y a un problème* " (Geo 198, 209)

- Hamdi et Fabrice tirent leur conjecture initiale, $f(n)=n^2$, non d'une expérience mais de leur conception de polygone et diagonale (cf. § II.3.2.). L'incertitude sur ces conceptions les amène à en chercher une confirmation dans l'examen de P_4 qui apparaît alors comme un contre-exemple. La conjecture initiale est abandonnée au profit d'une reprise de la résolution sur la base de conceptions renouvelées des objets en jeu. Mais en fait ils y reviendront ... (cf. ci-dessus)

- Lionel et Laurent , dont la conjecture f(n)=n(n-3)/2 est réfutée par l'observateur (P_5 à points alignés), cherchent une adaptation à la classe d'objets suggérée. Ils conjecturent f(n)=(n(n-3)/2)-1. Cette solution

apparaît peu satisfaisante parce qu'elle heurte le principe d'une solution unique pour l'ensemble des polygones : "*faut trouver un truc qui marche à tous les coups* " (Lio 965). Les élèves approfondissent l'analyse de la réfutation et mettent en évidence qu'il ne peut y avoir de solution pour les polygones concaves : "*là, j'vois pas comment on pourrait faire ... tu vois ? Non, parce que ça dépend d'la forme* " (Lau 970). Ils abandonnent cet aménagement de la conjecture.

- Olivier et Stéphane conjecturent f(n)=n/2 sur la base d'une analyse de diagonale et de sa confirmation par P_4 (Oli 8). La réfutation par P_6 , à la suite d'une vérification, évoque d'abord que cette conjecture "*ne marche pas pour tous* " (Sté 11) mais l'analyse de cette réfutation provoque l'abandon de la conjecture :"*ça marche pas ce truc* " (Oli 41).

- Pierre et Mathieu ont une démarche essentiellement empirique. Cependant, le début de leur activité est marqué par une interrogation, surtout de la part de Mathieu, sur la définition de diagonale. La conjecture f(n)=n est soutenue par Mathieu sur la base d'une conception erronée de diagonale (axe de symétrie d'un polygone régulier). Rejetée par Pierre au nom de sa propre conception, elle est finalement abandonnée après un examen du carré. Ce polygone d'une part réfute la conjecture et d'autre part conduit à reconsidérer la conception sous-jacente de diagonale (Mat 110). Cette remise en question conduit à l'abandon.

III.2.4. La modification de la conjecture

La modification de la conjecture apparaît dans les deux phases de l'observation comme une réponse également possible à la réfutation.

Le tableau ci-dessous donne une vue d'ensemble selon les binômes concernés :

Binôme	Conjecture	Contre-exemple	Phase
Ber-(Chr)	s(n)=n-2	P_7	I
(Ber)-Chr	n(n-3)	P_7	I
Bla-Isa	n/2	P_{2n+1}	I
Eve-Chr	n/2	P_5	II
Geo-Oli	n.s(n)	P_5	I
Ham-Fab	n^2	P_4	II
	n(n-3)	P_6	II
Lio-Lau	n(n-3)/2	P_5	II
	n(n-3)/2	P_5	II
Nad-Eli	f(n)+a(n+1)	P_5	II
Pie-Mat	n/2	P_5	I

Nous distinguons trois types principaux de modification :

- les modifications ad hoc, essentiellement empiriques ; elles consistent en une adaptation de la conjecture à des caractères de surface du contre-exemple (i.e. non attachés à une analyse sur le fond).

- les modifications fondées en raison, résultats d'une analyse de la réfutation. Nous distinguerons, dans cette dernière catégorie, le cas des modifications de la conjecture qui consistent à proposer une solution spécifique pour la classe des objets représentés par le contre-exemple (modulo une caractéristique reconnue pertinente).

a) les modifications ad hoc

Ces modifications s'appuient sur la reconnaissance d'une relation

entre un fait attesté par le contre-exemple et le fait attendu, sans entrer dans les origines mêmes de la réfutation. La conjecture est alors modifiée en conséquence. La source de la nouvelle conjecture étant l'observation d'un cas, sans l'analyse de ses raisons, ses fondements sont tous au plus ceux d'une expérience cruciale.

- Lorsque la conjecture initiale ($f(n)=n^2$) de Hamdi et Fabrice est réfutée par P_4 , la première suggestion de Fabrice est que f(n) "*c'est le nombre de sommets au carré moins ...*" (Fab 152) rendant compte de ce que f(4) était supérieur au nombre de diagonales observées dans P_4.

Pour les mêmes élèves, un peu plus tard, le passage de f(n)=n(n-3) à f(n)=n(n-3)/2 est une adaptation de la conjecture qui prend en compte directement la relation évidente entre le nombre de diagonales calculé et celui observé pour P_6. Bien que, ce qui pourrait constituer la raison, "*les diagonales, elles vont dans les deux sens* " (Fab 440), soit évoqué, il n'y a pas de mise en relation avec la modification de la conjecture. Fabrice lui-même, doute : "*j'crois pas qu'c'est juste* " (Fab 461), c'est une expérience cruciale sur P_{16} qui permet de décider : "*prends en un autre, combien tu veux ? On en prend un grand, hein... 16 côtés on va faire* " (Ham 462).

- Dans le cas de Lionel et Laurent, le caractère ad hoc de l'adaptation de leur conjecture f(n)=n(n-3) à sa réfutation par P_5 , est plus manifeste (dia. p. 10). Cette adaptation est confirmée sur P_6 , puis mise à l'épreuve d'une expérience cruciale sur P_7 : "*essaie avec 7 [...] 28 divisé par 2, 14 normalement.... on va essayer* " (Lio 257, Lau 260-262). La vérification

est réalisée sur le tracé.

Le caractère ad hoc de cette adaptation paraît confirmé dans la forme même d'une première rédaction du message (fig.41).

Ce que confirme encore les propos suivants :

Pourquoi tu veux diviser par 2, c'est ça qu'ils vont pas comprendre (Lio 396)

Y faut diviser par 2 parc'qu'on... croit qu'avec 4 ça marche, et avec 5 aussi, et avec 6 aussi (Lau 399)

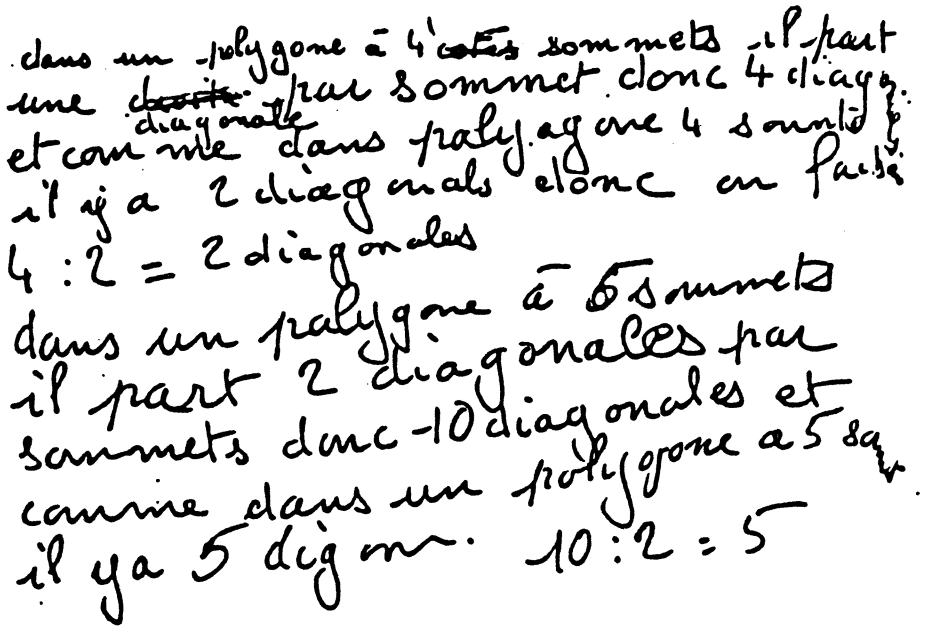


Figure 41

b) les modifications fondées en raison

Ces modifications sont le résultat d'une analyse de la réfutation en relation avec la conjecture et ses fondements :

- Bertrand et Christophe en sont un exemple banal, lorsque leur conjecture s(n)=n-2 est modifiée en s(n)=n-3 dès lors qu'ils ont identifié qu'"*on a oublié lui- même* " (Ber 222, c'est-à-dire le sommet dont sont issues les diagonales que l'on dénombre).

Un autre cas observé pour ce binôme montre la mise en œuvre d'une analyse moins triviale. Les élèves soutiennent f(n)=n(n-3) que réfute le cas P_7. Bertrand identifie que cette réfutation vient de ce que les diagonales sont comptées deux fois : "... *on retranche le nombre de sommets à ce que l'on a trouvé parce que la diagonale AF, eh ben ça fait la diagonale FA* "(Ber 287) d'où il tire une première modification f(n)=n(n-3)-n . Cette proposition, pour laquelle la réfutation est maintenue, est abandonnée au profit de f(n)=n(n-3)/2 car "*il y aurait des diagonales comptées deux fois* "(Ber 384) et " *ça revient donc à faire la division par deux* " (Chr 403).

- Georges et Olivier soutiennent f(n)=n.s(n) à partir de l'observation de ce que le nombre des diagonales d'un polygone est le même en chaque sommet. La réfutation apportée par P_5 est l'occasion d'une analyse qui permet d'identifier que les diagonales sont comptées deux fois, "*après elles se retrouvent [...] y a un problème* " (Geo 198-209). Cette remarque conduit à ne conserver que la moitié des diagonales, sur le cas de P_6 cela correspond à une interprétation

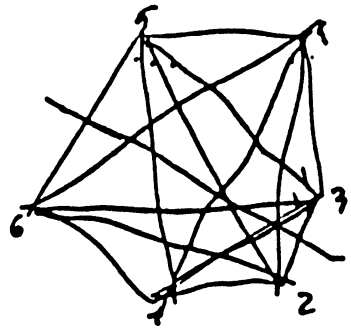


Figure 42

géométrique de f(n)=(n/2)s(n) que P_7 ne permettra pas. Aussi cette solution sera-t-elle abandonnée.

- Hamdi et Fabrice soutenaient f(n)=n(n-3)/2 mais tenaient P_4 et P_3 à l'écart. Lorsque l'observateur atteste que cette relation est satisfaite par P_4, les élèves sont obligés d'admettre ce polygone dans le domaine de validité de leur solution et donc de modifier leur conjecture.

c) Production de solutions spécifiques

Cette catégorie de modifications de la conjecture réfutée signifie que le contre-exemple est pris en compte comme une information sur son domaine de validité. La conjecture est maintenue sur un domaine en général non précisé. Pour le domaine caractérisé (souvent implicitement) par le contre-exemple, les élèves proposent une solution spécifique qui peut être une adaptation locale de la conjecture initiale, ou une solution originale pour ce domaine. Les fondements de cette modification peuvent être empiriques ou au contraire être le fruit d'une analyse et de démarches de preuve évoluées.

- Blandine et Isabelle soutiennent initialement f(n)=n/2 qui est réfutée par les polygones impairs. Les élèves cherchent alors une solution spécifique pour ces polygones et parviennent à f(n)=n/2 ou (n-1)/2, suivant la parité.

- Pour Evelyne et Christine qui écartaient les polygones impairs et soutenaient f(n)=n/2, le contre-exemple P_5 produit par l'observateur fait autorité (Chr 216).

Cette prise en compte des polygones impairs les oblige à reconsidérer leur conception de diagonale (axe de symétrie passant par un sommet, fig.43). Cela réduit cependant les polygones aux figures régulières (il doit y avoir une diagonale par sommet). Elles en déduisent f(n)=n pour les polygones impairs.

Une diagonale est une droite qui passe par un de ses sommets d'une figure géométrique et qui coupe la surface de ce dernier en deux.

Figure 43

- Pierre et Mathieu soutiennent cette même conjecture, f(n)=n/2, sur une base empirique. Le contre-exemple P_5 est suscité par l'analyse des contraintes dûes à la division par 2 dans $\mathbb{N}$. Le traitement de cette réfutation donne lieu à un vif débat où apparaissent les issues suivantes :

(1) rejet de la conjecture (Mat 132)

(2) traitement de P_5 comme une exception (Pie 133)

(3) rejet de P_5 en tant que polygone (Mat 135)

(4) extension du concept de diagonale (Pie 153)

La décision finalement prise est de chercher une solution spécifique des

polygones impairs (Mat 168, Pie 169), les possibilités précédentes sont respectivement écartées pour les raisons suivantes :

(1') f(n)=n/2 est trop "convaincante" sur les polygones pairs (association 2 à 2 des sommets par une diagonale) pour être écartée,

(2') le caractère peu satisfaisant du statut d'exception en mathématique, "*d'habitude une théorie ça s'applique pour tous les cas* " (Mat 236),

(3') analyse étymologique de polygone qui ne permet pas d'écarter P_5 :"*Poly : plusieurs. Gone : côté* " (Pie 2),

(4') caractère trop ad hoc de l'extension envisagée du concept de diagonale (considérer des demi-diagonales).

Cependant cette décision heurte, pour Mathieu, le principe général d'une solution unique à un problème. C'est-à-dire ici le principe d'une seule formule pour l'ensemble des polygones (Mat 236). L'adaptation choisie est ad hoc à la configuration réalisée pour P_5 : f(n)=n/2 ou n-1 . Une telle décision est conforme à l'empirisme naïf qui finalement domine l'activité de ce binôme.

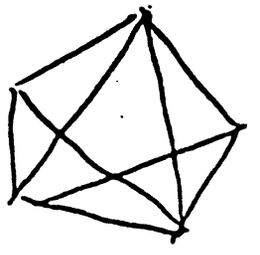


Figure 44

- Lionel et Laurent envisagent une modification de leur conjecture f(n)=n(n-3)/2 pour la classe des objets représentée par le polygone concave produit par l'observateur. Leur conception de diagonale leur fait considérer ce polygone effectivement comme un contre-exemple. Mais la réticence à une solution qui ne serait pas unique, les conduit à de nouvelles analyses qui finalement débouchent sur une autre décision (cf. § III.2.3.b. et III.2.6.).

- Nadine et Elisabeth, en revanche, ne se sortent pas de la même situation. Elles soutiennent sur la base d'une expérience cruciale : f(n+1)=f(n)+a(n+1), que contredit un P_5 à points alignés produit par l'observateur. Elles reprennent alors la résolution pour cette classe d'objets :"*[ceux qui ont] un sommet vers l'intérieur* " (Nad 175). Elles envisagent une solution (au bénéfice d'un concours de circonstance) qu'elles n'explicitent pas complètement : "*Tu marques : donc 2 de moins que ... une figure à 5 côtés sans sommets à l'intérieur [...] donc 3 de moins qu'une figure à 6 côtés sans aucun à l'intérieur, puis après à 7 donc 4 de moins qu'une figure à 7 côtés* ... " (Nad 201). Mais, en considérant d'autres contre-exemples possibles, elles réalisent qu'il y aurait une infinité de formules. Elles ne concluent pas.

III.2.5. Le contre-exemple traité comme une exception

Le tableau ci-après donne une vue d'ensemble de la répartition entre les binômes, de ce type de traitement ($P_{><}$ désigne le quadrilatère croisé) :

Binôme	Conjecture	Contre-exemple	Phase
Bla-isa	n/2 ou (n-1)/2	P_3	II
Geo-Oli	$\Sigma \mathcal{P}$ n	P_3	II
		P_5	II
Ham-Fab	n^2	P_4	II
		P_3	II
	n(n-3)/2	$P_{><}$	II
Mar-Lau	$\Sigma \mathcal{P}$ n	$P_{><}$	II
Exception versus rejet :			
Naï-Val	n/2	P_5	I
Pie-Mat	n/2	P_5	I

Ce type de traitement d'un contre-exemple est apparu le plus rare. Il est même pratiquement absent de la première phase de l'observation (1 seul cas). Cette rareté, comme nous le verrons, peut être comprise comme le signe d'une conception globale des mathématiques : un énoncé mathématique ne souffre pas d'exceptions.

- Blandine et Isabelle traitent le triangle que l'observateur oppose à leur conjecture comme un cas particulier parce qu'il "*n'a pas de diagonales* " (Isa 184).

- Georges et Olivier écartent de la même façon ce contre-exemple. Mais ils en conçoivent une certaine gène et cherchent du côté de l'observateur une confirmation : "*un triangle combien ça a de diagonales ?* " (Geo 561). Ce traitement du contre-exemple comme une exception, se traduit en fait par l'expression d'une condition réduisant le domaine de validité de la solution : "*à partir de 4... les triangles sont des cas particuliers* " (Geo 508-510).

Pour ce même binôme le contre-exemple P_5 à points alignés apparaît d'abord comme "*encore un cas particulier* " (Oli 590). Seulement "*ça fait beaucoup d'exceptions* " (Oli 625) et pourtant "*c'est peut être la bonne solution, même s'il y a des exceptions* " (Oli 645).

La conjecture défendue par Georges et Olivier était fondée à la fois sur un exemple générique et sur une expérience cruciale (cf. § II.2.3. et II.2.3.) ce qui la rend peut être particulièrement résistante aux réfutations et favorise leur traitement comme des exceptions. Le doute ne s'installera effectivement que lorsque les deux élèves envisageront d'autres polygones concaves. Ils en resteront cependant au statut d'exception, faute de pouvoir trouver une solution spécifique de ces nouveaux objets.

- Hamdi et Fabrice envisagent la réfutation par le triangle (Ham 212) et l'écartent parce qu'"*un polygone quelconque y peut pas avoir zéro diagonales* " (Ham 222). Lorsque l'observateur leur oppose P_4 ils le traitent comme "*un cas exceptionnel* " (Fab 279). Ces deux polygones garderont ce statut même lorsqu'ils ne seront pourtant plus des réfutations à la conjecture en jeu : "*sauf les cas particuliers ... les triangles et les quadrilatères* " (Ham 389, Fab 392 ; la conjecture est f(n)=n(n-3)/2). Il faudra que l'observateur atteste de ce que ces polygones conviennent. Cependant Fabrice résistera à accepter le triangle car "*toutes façons ... dans l'triangle y a pas de diagonales, ça ne nous intéresse pas* " (Fab 553).

Ces élèves considèrent à nouveau comme exceptions les associations de polygones que leur oppose l'observateur : "*ça marche pour tous sauf pour les [...] polygones ... ayant ...un ... point au milieu* " (Ham 588, Fab 595). Le fait que ces polygones aient un statut d'exception est sans ambiguité, les élèves l'énoncent clairement à l'intention de leurs interlocuteurs invoqués : "*ils savent pas quels sont les cas exceptionnels* " (Fab 615). Finalement ils énonceront cela sous la forme d'une condition déterminant le domaine de validité de la conjecture : "*ça ne marche pas quand il y a un sommet qui relie plusieurs figures à la fois* " (Fab 692).

- Martine et Laura confontées par l'observateur a un $P_{><}$ cherchent d'abord une interprétation analogue à celle qui leur a permis de traiter le cas de P_5 à points alignés, "*effet encore parfait du hasard* " (Lau 439) qui "*prouve que notre formule, elle marche pas à tous les coups* " (Lau 429). Elles produiront finalement une solution spécifique de ces polygones traités de fait comme des exceptions : "*quand la figure présente déjà les diagonales d'une autre figure [...] On trouve le nombre de diagonales de l'autre figure* " (Lau 533).

Les élèves des deux binômes suivants ne parviennent pas à se mettre d'accord sur le statut d'exception d'un contre-exemple considéré en envisageant le domaine de validité de f(n)=n/2 qui est la conjecture qu'ils soutiennent :

- Pour Naïma et Valérie , "*ça va pas marcher pour tous* " (Naï 249). Elles envisagent P_5 mais s'opposent à son sujet. Faut-il le rejeter : "*c'est pas un polygone* "(Val 264) ou le traiter comme une exception : " *5, hop, c'est pas possible* " (Naï 269). Les élèves s'en remettent à l'observateur pour trancher. Il produit un nouveau polygone impair. Cependant que pour Valérie "*ça n'existe pas* " (Val 282), pour Naïma, l'observateur fait autorité : "*s'il te le donne* " (Naï 283). En fait sont confrontées d'une part l'idée d'une vérité parfois mise en défaut, d'autre part l'exigence d'une vérité sans failles; ce dernier point de vue dominera, conduisant à poser le problème de la définition (cf. Chap.III § II.2.4.).

- Pierre et Mathieu ont une discussion très vive au sujet de la réfutation de f(n)=n/2 par P_5. Pour Pierre "*le truc de 5, il fait exception à la règle* " (Pie 133), Mathieu pour sa part suggère que peut être "*ça existe pas un truc de 5* " (Mat 135) (notons que cela permettrait d'avoir une solution valide pour tous les polygones). Comme nous l'avons déjà noté ci-dessus (§ III.2.4.c.) le statut d'exception pour P_5 est écarté, car si pour Pierre "*y en a des exceptions en mathématiques* " (Pie 239), pour Mathieu en revanche "*en mathématiques y en a pas* " (Mat 238) ou au moins il "*y en a moins qu'en grammaire* " (Mat 240).

III.2.6. L'introduction d'une condition

L'introduction d'une condition répond à deux problématiques bien différentes du traitement de la réfutation. Pour les uns il s'agit de sauver la conjecture en tenant à l'écart les objets dont le contre-exemple est un représentant, pour les autres il s'agit de trouver dans l'analyse de la solution les sources de la réfutation et de s'y opposer par une condition.

Binôme	Conjecture	Contre-exemple	Phase
Bla-Isa	n/2 ou (n-1)/2	P_6	II
Eve-Chr	n/2	P_7	I
		P_5	II
Ham-Fab	n(n-3)/2	$p_{><}$	II
Lio-Lau	[n(n-3)/2]-1	$P_{><}$	II
Lyd-Mar	n/2	P_{2n+1}	I
Nad-Eli	f(n)+a(n+1)	P_7	I
Naï-Val	n/2	P_7	II
		P_8	II
		P_8	II
	s(n) croissante	P_7	I

a) Condition privilégiant l'analyse du contre-exemple

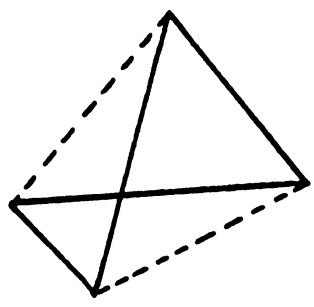


Figure 45

- Hamdi et Fabrice introduisent une condition qui est la mise à l'écart de la classe des objets représentés par le contre-exemple ci-contre (fig.45), en la caractérisant par une propriété : "*sauf ceux qui ont [...] un point milieu* " (Ham 616, Fab 617). Cette propriété

n'entretient pas de relations avec les fondements mêmes de la conjecture. En fait, comme nous l'avons noté ci-dessus, ces contre-exemples ont un statut d'exception.

- Lionel et Laurent viennent d'abandonner une tentative d'adaptation de leur conjecture face à une réfutation, lorsque l'observateur produit $P_{><}$. Ils suggèrent d'abord que ce n'est pas un polygone (Lio 1015), puis ils explicitent une condition. Cette condition, exprimée en des termes vagues, signifie que le domaine de validité de la conjecture doit être réduit : "*faut pas que ce soit des polygones particuliers* " (Lio 1031).

- Nadine et Elisabeth rejettent les diagonales non intérieures au polygone. Confrontées par hasard à un P_7 concave, elles écartent de fait ce type de configuration : " *faudrait sans angle* "(Nad 74). Mais cette condition n'est pas formulée dans leur message. Lorsque l'observateur les confrontera à nouveau à un polygone concave, elles changeront de décision et s'orienteront vers la recherche d'un solution spécifique (cf. § III.2.4.c.).

- Naïma et Valérie soutiennent leur solution f(n)=n/2 contre la pression des contre-exemples de l'observateur, en produisant des conditions ad hoc. C'est une stratégie de défense qui se construit au cours de l'interaction durant la seconde phase de l'observation : "*j'm'en fiche, j'réponds des conditions* " (Val 504). Ces conditions apparaissent dans leur message comme les clauses d'une définition : "*tous les cotés de même longueur* ", "*ses côtés devant être disposés en cercle* ", "*d'un sommet ne part qu'une droite* ", comme le déclare Valérie : "*une condition de plus !* " (Val 550).

b) Condition privilégiant l'analyse de la conjecture

- La conjecture de Blandine et Isabelle est réfutée par l'observateur qui produit un polygone concave. Isabelle refuse les diagonales extérieures : "*faut qu'c'soit à l'intérieur. Hum,on a dit qu'ça se coupait que par un seul point* "(Isa 206). Les élèves étudient diverses configurations sans parvenir à une solution pour les polygones concaves, ils énoncent alors la condition de convexité qui sauve la conjecture "*y faut qui soit convexe [...] puis c'est tout* "(Bla 224). Cette condition est en relation avec la définition explicitée pour diagonale et non avec une simple observation du contre-exemple.

- Evelyne introduit une condition de parité qui réduit le domaine de validité de la conjecture à celui de la division par 2 dans $\mathbb{N}$: "*Donc, c'est toujours divisé par deux [...] Oui, mais il faut donc que le nombre soit pair* " (Eve 85-86). Cependant les élèves sont réticentes à accepter cette restriction : "*ça doit pas être ça, parce que là [dans l'énoncé] on dit pas que le polygone il est ... les sommets sont pairs* " (Eve 140).

Cette lecture de la situation, conduit les élèves à formuler leur solution en s'en tenant, implicitement, aux objets ayant un nombre pair de sommets. Cette condition sera explicitée pour faire face à la réfutation de l'observateur qui implique l'acceptation des polygones impairs. C'est l'insatisfaction de produire une solution limitée par une condition qui conduira Evelyne et Christine à rechercher une solution spécifique pour les polygones impairs (cf. § III.2.4.c.).

- Lydie impose à Marie sa solution, f(n)=n/2, puis émet des réserves sur une validité qu'elle avait jusque là âprement défendue : "*c'est pour les*

nombres pairs que j'ai fait " (Lyd 338). En fait l'expression de cette restriction, qui tient à la reconnaissance du domaine de définition de la division par 2 dans $\mathbb{N}$, est une invitation faite à Marie de poursuivre la recherche pour la classe des polygones impairs.

- Olivier et Stéphane soutiennent que le nombre des diagonales d'un polygone augmente lorsque le nombre de ses sommets augmente. La vérification sur une configuration de P_7 qui présente des points alignés réfute cette conjecture. La source de cette réfutation étant identifiée, les élèves introduisent une condition : *"faut l'dire ça : si les points sont pas alignés* " (Sté 77). Cette condition jouera ensuite un rôle central face aux contre-exemples produits par l'observateur.

III.2.7. Les retours sur la définition

Binôme	Conjecture	Contre-exemple	Phase
Ant-Dam	n	P_4	I
	n/2	P_8	II
Bla-Isa	n/2	P_9	I
	n(n-3)	P_7	I
Eve-Chr	n/2	P_5	II
	n/2 ou n	P_8	II
		$P_{concave}$	II
Naï-Val	n/2	P_7	II
		P_8	II
Oli-Sté	$\Sigma \mathcal{P}$ n	$P_{><}$	II
(Pie)-Mat	n/2	P_5	I

Nous reviendrons plus loin, de façon globale, sur "le problème de la définition" (Chap.III) en liaison avec la résolution du problème, et avec

l'évolution des conceptions sous-jacentes des élèves. Nous nous intéressons ici seulement à la reprise de la définition dans un contexte de réfutation. Dans la plupart des cas (5 sur les 7) ce problème de la définition a été abordé d'emblée par les élèves.

- L'incertitude initiale d'Antoine et Damien les conduit à poser énergiquement le problème de la définition : "*on peut aller chercher loin comme ça [...] si on a pas les données exactes* " (Dam 75-77). La définition qu'ils tirent d'un P_8 régulier prototypique leur permet de rejeter les polygones impairs : "*ça peut pas être un nombre impair, puisqu'on a dit que les côtés devaient être parallèles deux à deux* " (Dam 221). Face à un P_8 concave opposé par l'observateur ils enrichissent leur définition d'une clause ad hoc à la configuration présentée : "*[les diagonales] se coupent en un seul point* " (Dam 342) et encore faut-il "*qui soit au milieu de la figure* " (Ant 343, Dam 356). Ce primat de la définition tient à la lecture que les élèves font de la situation : " *la règle du jeu dit que c'est nous le professeur. C'est eux "[les deux adultes présents pendant l'expérience] on leur dit ... un polygone ... un polygone c'est ce que l'on a donné et lui [l'observateur] doit trouver si notre définition est valable* " (Ant-Dam 383)

- Blandine et Isabelle se posent d'emblée le problème de savoir ce que sont un polygone et une diagonale. Le premier contre-exemple P_9 à la conjecture f(n)=n/2 conduit à préciser diagonale : "*[elles] relient deux par deux [les sommets]* " (Blan 18) et joignent un sommet au sommet opposé ("*c'est au côté opposé, écoute ,la diagonale de ça* ",Isa 75). La nouvelle conjecture f(n)=n(n-3) est à son tour réfutée par P_7, ce qui conduit à

préciser encore la définition en référence au quadrilatère : "*de chaque point il ne part qu'une diagonale* " (Isa 70). C'est sur cette nouvelle définition que la conjecture f(n)=n/2, reprise, est solidement fondée.

- Evelyne et Christine envisagent le problème de la définition à la suite de la réfutation de leur conjecture f(n)=n/2 par le triangle : "*un polygone c'est [...] une figure géométrique à [...] au moins 4 côtés* " et "*qui a un nombre de sommets qui est pair, parce que le triangle ça a pas de diagonales* " (Chr110-113, Eve 112). Mais cette définition est abandonnée parce que trop ad hoc ou restrictive (Eve 140). Le parallélogramme sera retenu dans la suite comme prototype de polygone : "*on dit qu'un polygone , c'est un truc où les côtés sont toujours parallèles 2 à 2* " (Chr 201). Le choix d'une définition tient à un impératif méthodologique : "*sinon on peut rien faire* " (Eve 535). Le contre-exemple P_5 opposé par l'observateur fait immédiatement porter le questionnement sur ce choix : "*on sait pas ce que c'est qu'un polygone* " (Chr 245) et finalement "*un polygone ça a n'importe quel nombre de côtés ... mais c'est régulier* " (Chr 270). Un nouveau contre-exemple P_8 non convexe sera écarté parce que non conforme à cette définition qui est alors explicitée dans le texte même du message. Les réfutations successivement produites par l'observateur prennent exclusivement leur sens relativement à ce problème : "*faudrait d'jà qu'on sache ce que c'est un polygone, une diagonale, exactement la définition* " (Chr 696).

- Naïma et Valérie soutenaient la conjecture f(n)=n/2 . Face à sa réfutation par l'observateur, Valérie soulève d'emblée le problème de la définition comme un préalable : "*faudrait p't'être savoir la définition d'un polygone* " (Val 285). La lecture de la situation apparaît alors d'essayer de

découvrir la définition : "*y va pas t'la donner ... tu dois essayer de trouver* " (Naï 289-291), car "*la définition d'un polygone elle nous serait absolument nécessaire* " (Val 331). Face a de nouvelles réfutations, elles expliciteront une définition et la feront évoluer par des clauses ad hoc (cf. § III.2.6.a.). Les élèves ne sont pas dupes de ce qu'"*[elles ne savent] même pas la définition d'un polygone* " (Val 442). Simplement, la définition proposée "*c'est c'qu'on pense* " (Naï 444). Une telle centration sur la définition est aussi dûe à ce que ces élèves pensent qu'il leur faut "*trouver quelque chose pour tous les polygones* " (Naï 353). Or, une autre stratégie les conduirait soit à accepter des exceptions, soit à différencier les solutions suivant les types de polygones.

- Pour Olivier et Stéphane le contre-exemple $P_{><}$ paraît un peu douteux. Ils se tournent vers l'observateur pour demander : "*c'est quoi la définition du polygone* " (Sté 791) parce que "*si on sait pas ce que c'est un polygone, ça ira pas* " (Sté 795). Sans cette définition il leur serait difficile de se défendre des contre-exemples, notamment pour savoir s'ils sont légitimes, sinon de "*toutes façons , [l'observateur] trouvera toujours des trucs* " (Sté 801).

- Pierre et Mathieu ont eu dès le début de la résolution de ce problème des différents sur leurs conceptions mutuelles de polygone et diagonale. Confrontés à la réfutation par P_5 de leur conjecture f(n)=n/2, ils reviennent à ce débat de conception, tentant d'expliciter leurs définitions respectives. Il s'agit pour eux de comprendre ce contre-exemple qui est bien reconnu comme tel, pour trouver les moyens d'une solution nouvelle sur la base d'une conception partagée (cf. Chap.III § II.2.2.).

III.2.8. Le rejet du contre-exemple

Ce type de traitement de la réfutation est le plus répandu dans nos observations. Il apparaît au moins une fois dans l'activité de 11 des 14 binômes. Par ailleurs sa présence est un peu plus forte dans la phase II de l'observation dans laquelle il s'agit de se défendre contre les réfutations opposées par l'observateur.

Binôme	Conjecture	Contre-exemple	Phase
Ant-Dam	n/2	P_{2n+1}	I
Ber-Chr	n(n-3)/2	P_5	II
		$P_{><}$	II
Eve-Chr	n/2	P_3	I
	n/2 ou n	P_3	II
Ham-Fab	n(n-3)/2	P_3	II
Lyd-(Mar)	n/2	P_{127}	I
Lyd-Mar	n/2	P_7	I
Mar-Lau	$\Sigma \mathcal{P}$ n	P_5	II
Nad-Eli	f(n)+a(n+1)	P_3	I
Oli-Sté	$\Sigma \mathcal{P}$ n	P_6	II
		P_5	II
		$P_{><}$	II
Pie-Mat	n/2	P_5	I
	n/2 ou n-1	P_5	I
Pie-Phi	n.s(n)	P_{10}	II

Tous les rejets d'un contre-exemple ne peuvent être mis sur le même plan, nous distinguons principalement trois catégories :

- le contre-exemple est rejeté parce que son analyse révèle qu'il ne réfute pas la conjecture mais qu'il repose en fait sur une interprétation

erronée. Cette possibilité d'analyse était offerte par le P_5 à points alignés proposé par l'observateur;

- le contre-exemple est rejeté en référence à une conception précise de polygone qui a éventuellement été formulée sous la forme d'une définition;

- le contre-exemple est rejeté parce que considéré comme pathologique, sans que pour autant il y ait un débat de conception, encore moins de définition;

a) Mise en évidence d'une interprétation erronée

- Bertrand et Christophe découvrent la diagonale cachée dans la configuration de P_5 à points alignés tracée par l'observateur. Ils évoquent qu'il serait bon de signaler aux interlocuteurs qu'une telle configuration est possible. La même attitude est d'emblée adoptée, mais sans succès, face à la réfutation par $P_{><}$ (Le temps ne permet pas aux élèves de s'engager dans une autre voie).

- Martine et Laura rejettent de même le contre-exemple P_5 à points alignés après avoir découvert la diagonale cachée (et cela, bien que l'observateur insiste en mentionnant qu'alors la diagonale passe par 3 sommets et pas seulement par 2).

- Olivier et Stéphane rejettent de la même façon P_5 à points alignés en découvrant les diagonales manquantes. Rappelons que par ailleurs ces élèves avaient très tôt introduit une condition écartant les configurations à points alignés (§ III.2.6.b.)

b) Rejet en référence aux conceptions de polygones et diagonales :

- Antoine et Damien ont fondé en raison leur conjecture, f(n)=n/2, sur la définition adoptée pour polygone (cf. § III.2.7.). Les réfutations potentielles, envisagées à partir du domaine de définition de la division par 2 dans ℕ, sont écartées par cette définition.

- Pierre et Mathieu écartent une première configuration de P_5 parce que ce n'est pas celle d'un polygone régulier : "*les côtés sont pas tout à fait égaux* " (Math.63). Lors d'un nouvel examen de P_5, Mathieu suggère que "*p't'être ça existe pas un truc de 5* " (Mat 135) mais "*ça s'rait trop beau* " (Pie 136). Ainsi la simple mise à l'écart n'est pas possible. Les difficultés avec ce contre-exemple seront en partie dépassées en reconsidérant la définition de diagonale (cf. Chap.III § II.2.2.).

- Pierre et Philippe sont en désaccord sur le traitement d'un polygone P_{10}, concave, soumis par l'observateur, dont 3 sommets sont (par hasard) alignés. Pour Philippe, ce polygone est à écarter, mais Pierre discute cette perception : "*non ! ce n'est pas dans le même axe* " (Pie 547). En fait, pour Pierre il n'y a pas de difficultés avec une telle configuration, il met en œuvre son calcul : "*6 fois 9, ça fait* ..." (Pie 539).

- Olivier et Stéphane rejettent une première configuration de P_5 en invoquant la contrainte pour un polygone de pas présenter de sommets alignés. Les autres contre-exemples produits par l'observateur sont analysés comme des assemblages de figures :

C'est pas un polygone (Oli 768)

Attends, un polygone c'est quelque chose ... y a un truc [...] là c'est pas un polygone, c'est deux ... c'est deux triangles ... bizarre ... y devrait y avoir encore une ... [à l'observateur] et ça, c't'un polygone ?

(Sté 769-771)

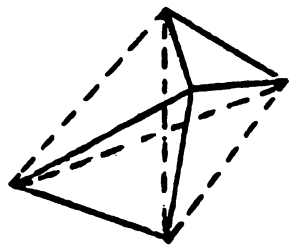


Figure 46

Pour s'opposer à ces contre-exemples les élèves sont amenés à soulever le problème de la définition (cf. III.2.7.). C'est en référence à la définition qu'ils élaborent que les contre-exemples sont rejetés : " *y faut pas que d'un point [...] partent plus de deux autres points* "(Sté 832).

c) Rejet du contre-exemple considéré comme pathologique :

- Evelyne et Christine écartent le triangle comme contre-exemple à leur conjecture, f(n)=n/2, parce que "*le triangle ça a pas de diagonale* " (Chr 113). Elles se limiteront ensuite aux polygones pairs. Lorsque le triangle sera à nouveau considéré comme contre-exemple, elles l'écarteront définitivement : "*le triangle c'est pas un polygone* " (Chr 473). Cette mise à l'écart, d'abord liée au "problème du zéro" (cf. § III.4.), conduit finalement à une remise en question des conceptions sous-jacentes.

- Hamdi et Fabrice tiennent aussi le triangle à l'écart, bien que l'observateur (comme pour le carré) ait attesté de ce que ce polygone satisfaisait la conjecture : "*toutes façons [...] dans l'triangle comme y a pas de diagonales, ça ne nous intéresse pas* " (Fab 553). Hamdi cependant,

sans s'imposer, n'est pas de cet avis : "*ça marche pour tous* " (Ham 550).

- Lydie et Marie sont en désaccord profond quant à la solution au problème proposée par Lydie (cf. § II.2.1.). Le rejet des contre-exemples est une position de principe adoptée par Lydie. Ainsi, un P_{127}, invoqué contre f(n)=n/2, est rejeté parce que "*ça n'existe pas les trucs à 127 côtés* " (Lyd 287). Elle va jusqu'à mettre Marie au défi de le tracer : "*tu me le montres, je veux bien te croire* " (Lyd 289). Face aux contre-exemples suivants elle produit des contraintes ad hoc ; pour P_7 : "*normalement ça a qu'un truc une diagonale* " (Lyd 144, i.e. une seule diagonale par sommet) ; pour P_{12} : "*c'est pas possible qu'il y ait plus de diagonales que de sommets ... tu dis n'importe quoi* " (Lyd 262).

- Nadine et Elisabeth écartent d'emblée le triangle parce qu'il n'a pas de diagonales : "*on peut commencer qu'à partir de 4 côtés parce que, à 3 côtés, les diagonales y en a pas, parce que ça fait un triangle* " (Nad 131). Il ne s'agit pas à proprement parler du traitement d'un contre-exemple mais de celui du problème de l'extension de la procédure f(n+1)=f(n)+a(n+1) aux conditions limites. Mais comme le triangle n'a pas de diagonale, il ne pourrait servir de point de départ à la récurrence.

- Naïma et Valérie écartent le contre-exemple P_5 à leur conjecture : "*c'est pas un polygone* " (Val 256). Mais Naïma n'est pas d'accord avec cette décision "*qui te dit que c'est pas un polygone* " (Naï 256). Elles se mettent d'accord en limitant le domaine de validité de leur solution, f(n)=n/2, aux polygones pairs. Pour l'une c'est une restriction à un sous-ensemble des polygones; pour l'autre, seules les figures ayant un nombre pair de sommets sont des polygones (cf. Chap.III § II.2.4.).

III.3. Dynamique de la réfutation : trois études de cas

Après cette revue détaillée des types de traitement d'une réfutation nous nous proposons d'examiner la place de ces traitements dans le processus de résolution du problème. Nous avons retenu pour cela, les trois cas dans lesquels nous avons noté la plus grande diversité dans les types de traitements.

Lorsque le nombre des contre-exemples traités par les élèves est grand, mais avec peu de types de traitements différents, nous retenons l'hypothèse d'un principe d'économie qui conduit les élèves à s'en tenir à un traitement qui a connu un certain succès.

Pour les trois cas que nous présentons ci-dessous,nous nous attacherons à rechercher les principes qui ont éventuellement sous-tendus les démarches des élèves.

Evelyne et Christine

Ces élèves construisent et soutiennent la solution f(n)=n/2 d'abord sur la base d'un **empirisme naïf**, puis sur celle d'une **expérience mentale** (cf. § II.4.1.). Cette dernière validation s'appuie de façon essentielle sur la définition de polygone mise en avant par la discussion de la réfutation de leur solution par P_7.

Deux points de vue s'opposent : celui de l'**introduction d'une condition** et celui de la **reprise de la définition**. C'est cette dernière position qui est adoptée au nom d'une clause du contrat expérimental

évoquée par Evelyne. Selon elle, si une condition devait être formulée, elle serait mentionnée par l'énoncé du problème. En d'autres termes, il n'appartient pas aux élèves de réduire l'ensemble des polygones, mais de savoir ce qu'ils sont et de produire une solution valide pour tous.

Mais, de fait, la définition adoptée réduit l'ensemble des polygones à ceux pour lesquels f(n)=n/2 est valide : " *si on dit qu'un polygone est ... un truc où les cotés sont toujours parallèles deux à deux ... ben y a pas besoin de préciser. Faut seulement diviser par deux* "(Chr 201).

La réfutation par le triangle n'est pas traitée de la même façon, c'est-à-dire en référence à la définition. Il est **rejeté comme polygone** parce qu'il n'a pas de diagonales. Les élèves attachent au triangle un caractère pathologique qui détermine leur décision.

Le contre-exemple P_5, parce qu'il est produit par l'observateur, s'impose comme polygone. La définition initiale est rejetée pour la **nouvelle définition** : "*un polygone ça a n'importe quel nombre de cotés. C'est sûr ... Mais c'est régulier* "(Chr 270). L'**introduction d'une condition** est alors inévitable pour sauver la conjecture. Mais les polygones impairs étant des polygones à part entière, les élèves cherchent une solution pour le dénombrement de leurs diagonales.

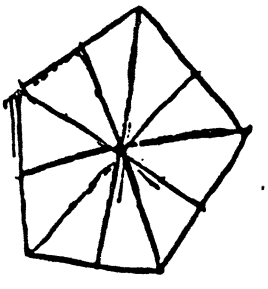


Figure 47

Cette solution est fondée sur une acception de diagonale comme "axe de symétrie" qui conduit à la configuration ci-contre pour un P_5 régulier. La solution f(n)=n fondée sur une **expérience mentale** puis **en raison** (calcul sur des énoncés) est retenue (cf. § II.4.). L'incertitude qui demeure est en fait une incertitude sur les prémisses : les définitions de

polygone et de diagonale. C'est sur ce terrain des définitions que sont traités les contre-exemples produits ensuite par l'observateur. Cette définition sera même explicitée dans le message :

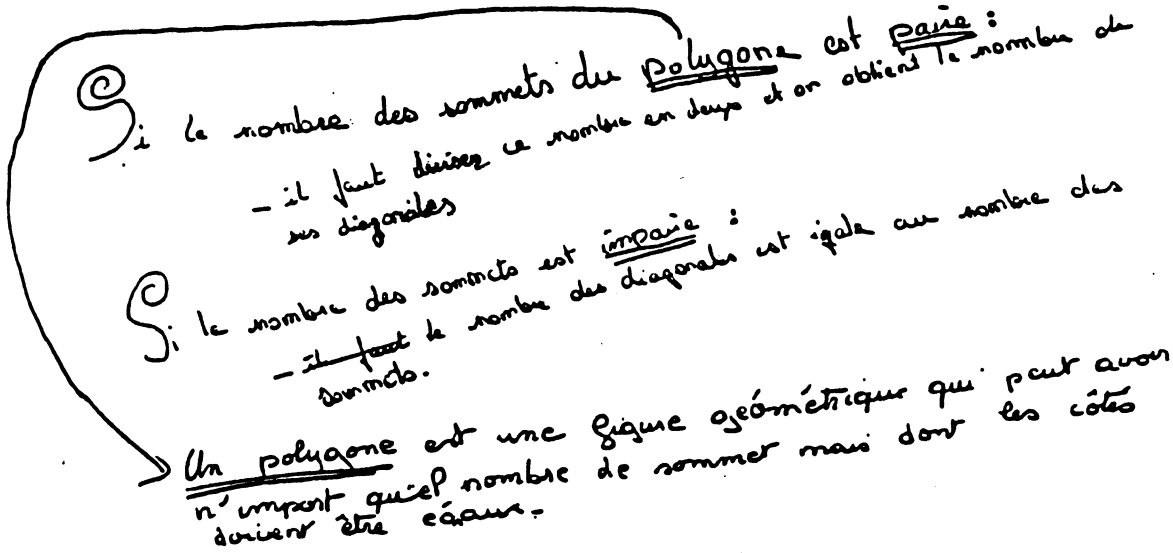


Figure 48

* Pour Evelyne et Christine, le traitement d'un contre-exemple est subordonné à une problématique globale de la définition à laquelle conduit le premier contre-exemple rencontré dans le contexte d'une lecture du contrat expérimental (excluant l'introduction de conditions). Seul le triangle échappe à cette problématique du fait de son caractère fortement pathologique. Traité comme un monstre (au sens de Lakatos), il est rejeté.

Hamdi et Fabrice

Se fondant sur leur conception de polygone et diagonale, les élèves

soutiennent la conjecture $f(n)=n^2$. A la suite de sa réfutation par P_4 , ils tentent d'abord de modifier cette conjecture, puis ils la soumettent finalement à l'observateur. Le contre-exemple P_5 produit par ce dernier provoque l'**abandon de la conjecture**.

Ces deux réfutations ont pour effet de mettre en avant la question de savoir ce qu'est un polygone : "*il aurait pu nous donner une définition* ..."(Ham 228).

La reprise de la résolution a pour base une conception générale et apparemment correcte de polygone (convexe). Elle conduit à $f(n)=n(n-3)$. Cette conjecture, soumise à l'observateur, est réfutée par P_6 . Hamdi et Fabrice la modifient en $f(n)=n(n-3)/2$. Cette **modification** est confirmée par sa mise en oeuvre sur P_5 , elle est ensuite soumise à une **expérience cruciale** sur P_{16} : "*j'crois pas que c'est juste* " (Fab 461), "*prends en un autre. Combien tu veux ? On prend un grand, hein ... 16 côtés on va faire* ..." (Ham 462). En fait il n'y aura pas de confrontation du résultat du calcul et de celui d'une expérience qui n'est d'ailleurs pas réalisée. Le message des élèves est à ce moment celui reproduit ci-après (fig. 49).

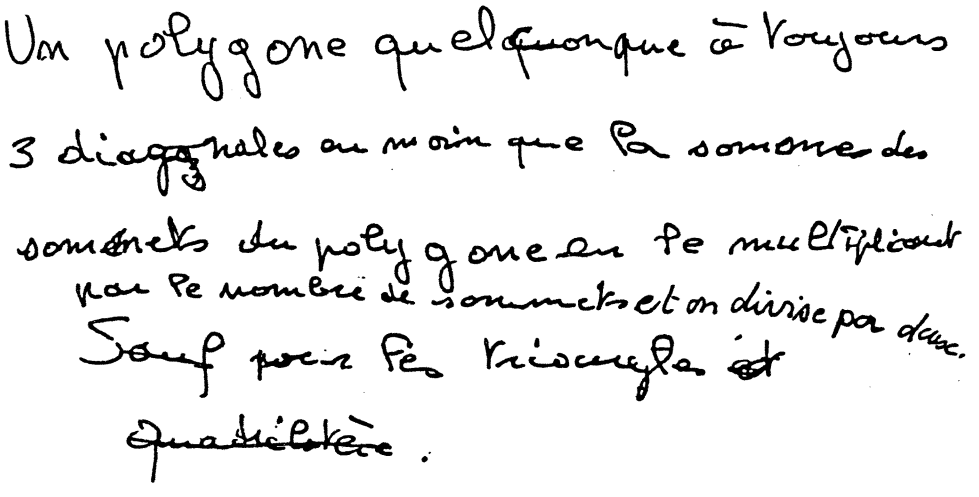


Figure 49

Fabrice tient à ce que les quadrilatères soient maintenus à l'écart. Ce n'est qu'aprés que l'oservateur ait attesté que la conjecture est valide pour un trapèze, qu'il change d'avis. En revanche, Fabrice refuse de revenir sur le statut de contre-exemple pour le triangle. Rappelons sa position : " *dans l'triangle commme il n'y a pas de diagonales, ça ne nous intéresse pas* " (Fab 553).

Les contre-exemples ensuites opposés par l'observateur sont les assemblages de polygones ci-dessous :

Figure 50

Fabrice les **refuse** d'abord comme polygones, cependant que Hamdi les traite comme **exceptions**. Puis il se souvient : "*c'est un machin croisé ça...*" (Ham 566). Dés lors ces contre-exemples sont acceptés comme polygones. La tâche des élèves devient de formuler une **condition** qui les écarte : "*ça marche pas pour ceux qui ont un point au milieu* "(Fab 682). Cette condition n'est pas mise en relation avec les fondements initiaux de la conjecture (ceux qui justifient s(n)=n-3) mais est une adaptation ad hoc (et particulièrement heureuse) aux contre-exemples.

* L'abandon de leur conjecture initiale par Hamdi et Fabrice tient à leur incertitude sur les conceptions qui fondent cette solution. Cette même incertitude conduit à soulever le problème de la définition.

La modification de f(n)=n(n-3) s'impose parce que le contre-exemple P_6 ne peut être contesté comme polygone, mais cette modification est ad hoc. En revanche les contre-exemples produits par la suite par l'observateur ne conduisent pas à de nouvelles modifications. Ils sont rejetés. En effet, leur traitement par une condition n'est pas autre chose qu'un rejet dans la mesure où son contenu est determiné de façon ad hoc et non en référence aux fondements de la conjecture.

L'analyse des objets (référence ou retour aux conceptions), commande le traitement des réfutations au détriment peut-être d'une analyse des fondements de la conjecture. C'est-à-dire d'une problématique de la preuve.

Pierre et Mathieu

Ces deux élèves s'opposent vivement sur leurs conceptions de polygone et de diagonale. Pour Pierre, "polygone" est pris dans son acception générale (poly-gone) mais "diagonale" signifie oblique ou, au moins, il exclut les diagonales parallèles à un côté du polygone. Pour Mathieu,"polygone" est limité à polygone régulier et "diagonale" à diamètre (sur les conceptions de Pierre et Mathieu cf. Chap.III § II.2.2.). Un moment Mathieu a considéré comme diagonales les axe de symétrie d'un polygone régulier soutenant la conjecture f(n)=n. Cette proposition est rejetée par Pierre au nom de sa propre conception, puis elle est finalement abandonnée après un examen du carré.

La première conjecture soutenue par les élèves, f(n)=n/2 , est réfutée par P_5 . Comme nous l'avons montré plus haut (§ III.2.4.c.) le traitement de cette réfutation est l'objet d'un débat aux composantes multiples. Il est

soustendu à la fois par des considérations de contenu (ce qu'est ou n'est pas un polygone, une diagonale), d'opportunité ou de principe.

Le débat de principe porte sur le fait d'accepter ou non des exceptions, ou d'accepter une formule qui ne s'exprimerait pas en une unique expression algébrique. Il pèse de façon importante sur les décisions des élèves. Il pousse Mathieu à chercher une solution commune aux polygones pairs et impairs, en réfutant celle soutenue par Pierre (f(n)=n/2 ou n-1). Pierre en vient à la conception classique de diagonale (Pie 273-274) et se rallie à la solution f(n)=n que Mathieu tire des configurations ci-contre de P_5 et P_7. Sans s'expliquer sur les raisons de son changement de position, Pierre retient cette formule pour tout polygone (Pie 293).

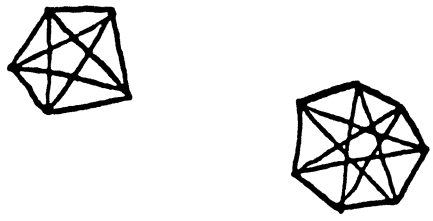


Figure 51

Bien que leur incertitude soit grande, les élèves ne s'engagent pas dans une démarche de preuve. Sous l'impulsion de Pierre, la situation est prise comme un jeu de devinette :

[aux observateurs] ben alors donnez la réponse . (Pie 337)

'tes façons c'est qu'un jeu alors ... vaut mieux tenter (Mat 338)

Ouais, mais si on tente n'importe quoi aussi ... (Pie 339)

Ben, si on tente n'importe quoi, on s'ra trompé, hein ? C'est pas ... pas une montagne (Mat 340)

Non, mais j'aimerais savoir la réponse [...] J'ai horreur d'avoir des problèmes sans réponse, moi (Pie 341-343)

Ben, on nous la dira après ! (Mat 344)

Lorsque l'observateur oppose à f(n)=n le polygone P_5 à points alignés, Mathieu doute d'abord qu'il s'agisse d'un polygone, puis il s'engage dans la recherche d'une **solution spécifique** pour cette catégorie d'objets. Pierre par contre, s'en tenant à sa lecture de la situation, **abandonne** f(n)=n pour revenir à sa proposition initiale. Une nouvelle réfutation par P_6 non convexe le conduit à un **abandon définitif**. Mathieu tentera encore un moment une analyse des contre-exemples pour **trouver une solution.**

* Le conflit de conception entre Pierre et Mathieu favorise un débat de définition qui privilégie le traitement des contre-exemples par un **retour sur la définition.** Un accord étant trouvé sur le terrain des conceptions, sur celui des principes généraux de l'activité mathématique (pas d'exception, solution unique), et l'idée qu'il y a toujours une solution à un problème mathématique, conduisent au dépassement des réfutations par la recherche de solutions spécifiques, puis d'une solution s'exprimant par une formule commune à l'ensemble des polygones.

Le principe de ne laisser aucun polygone à l'écart pousse Mathieu à la recherche d'une solution, éventuellement spécifique pour les polygones concaves.

Quant à Pierre, la succession de ses abandons de conjectures est la conséquence de sa conception de la situation comme une situation de "jeu de devinette". Ces abandons relèvent d'un empirisme naïf (de circonstance) que nous avons relevé en analysant les démarches de preuve (cf. § II.2.1.).

III. 4. Conclusions

Trois facteurs apparaissent déterminants du choix des élèves quant au traitement des réfutations :

- **l'analyse en référence au problème lui-même** : elle donne une place centrale à la discussion sur la nature, et partant sur la définition, des objets en jeu dans la résolution du problème. Cette analyse peut conduire à chacun des types de traitement que nous avons envisagés. Aucun n'est privilégié a priori. Le choix du traitement peut alors être compris par l'examen de conditions locales ou spécifiques des conceptions des individus. La nature de ce choix peut évoluer au cours de la résolution : reprise de la définition suivie de la recherche de conditions ou d'aménagements de la conjecture réfutée dans le cas où les conceptions sont stabilisées.

Le choix entre l'introduction d'une condition et la recherche d'une solution spécifique, ou la modification de la conjecture, a des origines non triviales auxquelles nos données ne permettent pas d'accéder. L'introduction d'une condition prendrait un sens profond si elle provenait d'une analyse des fondements de la conjecture, c'est rarement le cas de ce que nous avons observé. En revanche, il semble que si la condition écarte un ensemble très significatif de polygones (au sens des conceptions des élèves) alors il lui est préféré la recherche d'une modification de la conjecture (extension aux polygones impairs de la conjecture f(n)=n/2 , recherche d'une solution pour les polygones non convexes).

- **l'analyse en référence à une conception globale des mathématiques** peut inhiber certains traitements des réfutations : refus

du statut d'exception, réticence à une solution qui ne s'exprimerait pas par une formule unique.

- **l'analyse en référence à la situation** joue un rôle analogue à la précédente, mais elle est dépendante des caractéristiques de la situation. Elle intègre notamment la lecture, par les élèves, du contrat expérimental. Cela a pu conduire des binômes à privilégier certains traitements des réfutations : jeu de la définition, abandons successifs dans un "jeu de devinette", ou en a inhibé d'autres : refus d'introduire une condition non suggérée par l'énoncé.

Le rôle joué par le contrat expérimental ne doit cependant pas être surestimé. Notamment nous remarquons que le caractère dominant du traitement du contre-exemple comme une exception, ou de son rejet, dans la phase II confirme les résultats trouvés par ailleurs sur le fait qu'en général un seul contre-exemple n'est pas suffisant pour que les élèves renoncent à une conjecture (Burke 1984, Galbraith 1979). Le fait que nous retrouvons là un comportement relevé dans d'autres contextes expérimentaux suggère que ces traitements du contre-exemple ne sont pas essentiellement dûs au contrat expérimental comme on aurait pu le soupçonner. Par ailleurs les autres types de traitement apparaissent de façon sensiblement égale dans les deux phases.

C'est le caractère dominant de l'une de ces trois analyses qui détermine le choix d'un traitement. La conception des mathématiques et la lecture de la situation ont un rôle dominant, elle peuvent radicalement privilégier ou inhiber certains traitements. En revanche lorsque la situation paraît isolée de l'observateur, et que l'analyse est faite de façon intrinsèque au problème, il n'y a pas de traitement qui soit a priori

privilégié. Notons cependant que, dans notre situation, l'attention portée aux objets, et donc à la définition, est assez naturellement suscitée par la nature combinatoire du problème choisi.

La nature de la conjecture défendue pourrait, a priori, déterminer l'ensemble des traitements possibles d'une éventuelle réfutation. L'hypothèse étant que si la conjecture est fausse, son abandon, sa modification ou la reprise d'une définition seront finalement prépondérants ; si la conjecture est juste alors devrait dominer le rejet du contre-exemple qui en quelque façon serait le produit d'une mauvaise interprétation.

On peut effectivement constater que des conjectures telles que f(n)=n ou f(n)=2n sont abandonnées à la suite de réfutations. En fait ces conjectures sont particulièrement fragiles dans la mesure où elles ne sont vérifiées que par un seul polygone. Il en va autrement avec une conjecture vérifiée par un ensemble significatif de polygones, comme dans le cas de f(n)=n/2. Qu'elles soient ou non implicites, les origines de la conjecture f(n)=n/2, sont la conception de polygone comme polygone régulier ayant un nombre pair de sommets et celle de diagonale comme diamètre, dont le parallélogramme est un exemple prototypique.

Le tableau ci-après permet de rapprocher les types de validation et les types de traitement de la conjecture f(n)=n/2, qui a été soutenue par la moitié des binômes. A la lecture de ce tableau, il n'apparaît pas qu'un type de traitement soit privilégié, que les validations relèvent de l'empirisme naïf ou de l'expérience mentale.

Validation	Binôme	Phase	Traitement
Empirisme naïf	Lyd.-Mar.	1	rejet du contre-exemple
		2	condition
	Naï.-Val.	1	exception vs rejet
		2	reprise de la définition
		2	condition
	Oli.-Sté.	1	abandon de la conjecture
	Pie.-Mat.	1	rejet du contre-exemple
		1	reprise de définition
		1	exception vs rejet
		1	modif de la conjecture
		1/2	abandon de la conjecture
Expérience mentale	Bla.-Isa.	1	abandon de la conjecture
		1	reprise de la définition
		1	modification ad hoc
		2	exception
		2	condition
	Eve.-Chr.	1	condition
		1	rejet du contre-exemple
		2	reprise de la définition
		2	modif de la conjecture
Calcul sur des énoncés	Ant.-Dam.	1	rejet du contre-exemple
		1/2	reprise de la définition

Reste à examiner ce qu'il advient d'une conjecture "juste", qui fait, de plus, a priori référence à une conception acceptable de polygone. Il s'agit dans notre observation des conjectures : $f(n)=n(n-3)/2$, $f(n)=\Sigma \mathcal{P}_n$ et $f(n)=f(n)+a(n+1)$. Elles ont été soutenues par la moitié des binômes.

Validation	Binôme	Conjecture	Phase	Traitement
Empirisme naïf	Ham.-Fab.	n(n-3)/2	2	condition
			2	exception
			2	rejet du contre-exemple
Expérience cruciale	Nad.-Eli.	f(n)+a(n+1)	2	modif. de la conjecture
			2	rejet du contre-exemple
	Geo.-Oli.	$\Sigma\mathcal{S}$n	2	exception (P_3)
	Mar.-Lau.	$\Sigma\mathcal{S}$n	2	exception ($P_{><}$)
			2	rejet du contre-exemple
Exemple générique	Oli.-Sté	$\Sigma\mathcal{S}$n	2	reprise de la définition
			2	rejet du contre-exemple
Expérience mentale	Ber.-Chr.	n(n-3)/2	2	rejet du contre-exemple
Calcul sur des énoncés	Lio.-Lau.	n(n-3)/2	2	modification ad hoc
			2	modif. de la conjecture

Ces conjectures sont le résultat d'un processus qui a occupé toute la première phase de l'observation, soit qu'elles aient été construites déductivement, soit qu'elles soient le résultat d'une interaction entre des conjectures successives et leurs réfutations. La confrontation à des contre-exemple a lieu principalement dans la seconde phase de l'observation, il s'agit d'objets produits par l'observateur : configuration masquant une diagonale, objet non polygone, etc. .

Un premier traitement dominant est le rejet du contre-exemple (de P_5 à points alignés qui exigeait que soit découverte la diagonale cachée, ou du triangle) en s'appuyant sur une analyse de la réfutation en référence

aux conceptions des élèves.

Une autre forme de traitement dominant est de donner au contre-exemple un statut d'exception ou d'introduire une condition. Cette dernière forme peut en fait consister, comme chez Hamdi et Fabrice ou Lionel et Laurent, en la mise à l'écart de situations particulières.

Ainsi les traitements apparaissent nettement moins diversifiés que dans le cas de la conjecture f(n)=n/2 . Indépendamment des niveaux de validation qui ne paraissent pas jouer un rôle déterminant, on peut penser que la robustesse des conceptions sous-jacentes et l'existence d'un domaine de validité de taille significative, conduisent à privilégier un traitement tenant à l'écart les contre-exemples éventuels qui apparaissent de fait plus ou moins pathologiques. En revanche nous avons remarqué que dans le cas de f(n)=n/2 la limitation aux polygones pairs est associée à une situation de forte incertitude sur la définition, qui est souvent remise en question à la suite des réfutations.

Chapitre III

A PROPOS DU PROBLEME DE LA DEFINITION : RETOUR SUR "LES POLYGONES"

I : Introduction

Nous avons adopté dans l'étude précédente, pour des raisons théoriques (Chap. II, § I.1.), la position d'observer la résolution d'un problème par des élèves sans qu'ils disposent pour cela de moyens documentaires. Il s'agissait notamment de se placer dans les meilleures conditions pour une étude des thèses de Lakatos dans un contexte de résolution de problèmes. Les nombreuses solutions du type f(n)=n/2 au problème de dénombrement des diagonales d'un polygone que nous avons utilisé, conduisent naturellement à penser que si les élèves avaient disposé d'une définition de "polygone" et de "diagonale", leurs productions auraient été différentes. En particulier ces solutions fausses n'auraient

vraisemblablement pas été produites.

Plusieurs binômes de notre première expérience ont soulevé la question de la définition de "polygone" et de "diagonale". Nous analysons ci-dessous comment ils sont entrés dans cette problématique et comment elle a évolué au cours de la résolution du problème. Nous nous proposons ensuite de comparer ces comportements à ceux observés dans le cadre d'une reprise de notre dispositif expérimental dans une nouvelle modalité. La modification du dispositif initial consiste à mettre à la disposition des élèves un document donnant (notamment) les définitions de polygone et de diagonale.

Nous n'abordons pas ici l'étude du problème fondamental de la définition en mathématique "car elle nous amènerait à faire un exposé critique de l'ensemble de la science mathématique, ce qui exigerait de nombreux volumes, à supposer que l'on puisse trouver un auteur ayant les compétences suffisantes pour les écrire."(Borel, 1948, p.25). Nous n'aborderons pas non plus, dans toute sa généralité, le problème de la définition dans l'enseignement mathématique, cela dépasserait encore les limites de notre travail. Nous nous en tiendrons, à partir de notre approche expérimentale, à propos du problème du dénombrement des diagonales d'un polygone, à examiner le rôle de la définition ou d'une problématique de la définition dans l'établissement d'une conjecture et de sa preuve éventuelle. L'émergence d'une telle problématique, son évolution et son contenu, sont des phénomènes dont l'analyse est constitutive d'une étude des processus de preuve.

Nous prenons ici la notion de **définition** au sens naïf par opposition à une acception formelle dans laquelle la définition est une abréviation

permettant une économie de mots. Une définition sera ici, pour nous, un discours, un texte visant à éclairer et à fixer le sens d'un mot. Le point de vue que nous adoptons est cohérent avec ce qui ressort de façon très immédiate des comportements observés lors de la première expérience : les élèves reviennent à la définition parce qu'ils veulent élucider le problème de la signification d'un mot. Il est aussi cohérent avec la fonction de la définition que met en évidence Vinner (1976) chez de jeunes étudiants en mathématique ; pour la majorité d'entre eux une définition a une valeur lexicale, elle explique avec des mots la signification d'autres mots. Enfin, ce point de vue est cohérent avec l'usage pratique de la définition chez les mathématiciens : elle permet que deux interlocuteurs se comprennent bien, c'est-à-dire parlent de la même chose (Borel, ibid.).

II : Première observation, la genèse d'une problématique de la définition

II.1. Genèse d'une problématique de la définition

II.1.1. Bilan

Sur les 14 binômes que nous avons étudiés lors de notre première expérience, 6 ne sont à aucun moment entrés dans une problématique de la définition, 6 autres ont en revanche posé d'emblée le problème de savoir ce qu'est un polygone, une diagonale. Enfin, 2 binômes ont seulement évoqué le problème de la définition sans véritablement s'engager dans son traitement ; nous les rattachons à la première catégorie avec laquelle ils partagent, de plus, le fait de soutenir une solution correcte.

II.1.2. L'absence d'une problématique de la définition

Les six binômes qui n'entrent à aucun moment dans une problématique de la définition, ni n'explicitent une définition de «polygone» ou «diagonale», ont en commun le fait de soutenir une solution correcte au problème proposé :

Binôme	Conjecture	Type de preuve
Bertrand et Christophe	n(n-3)/2	Expérience mentale
Georges et Olivier	$\Sigma \mathcal{P}$n	Exemple générique
Laurent et Lionel	n(n-3)/2 (partie II)	Calcul sur des énoncés
Martine et Laura	$\Sigma \mathcal{P}$n	Exemple générique
Nadine et Elisabeth	f(n-1) + a(n)	Expérience cruciale
Pierre et Philippe	n.s(n)	Empirisme naïf

On remarque que tous les types de preuve sont représentés, on ne peut donc chercher là l'explication de l'absence d'une problématique de la définition. Aussi nous nous tournons vers un examen des conceptions de polygone et diagonale que les élèves ont manifestées.

Ces binômes partagent tous une conception classique de polygone et de diagonale, lorsqu'il s'agit de polygones convexes. Lorsqu'un polygone concave se présente, certains d'entre eux écartent la diagonale extérieure, amendant leur solution d'une condition de convexité (Geo- Oli, Lau-Lio, Nad-Eli).

Dans certains binômes un échange a pu avoir lieu à propos des conceptions, notamment pour ce qui concerne la notion de diagonale ; mais cet échange n'a jamais débouché sur le problème de l'expression d'une définition. Tout se passe comme si les élèves disposaient de conceptions assez **robustes et partagées** pour que leur explicitation ne soit pas nécessaire.

Un seul binôme, Hamdi et Fabrice, qui soutient une solution "correcte" (élaborée au cours de la seconde phase), f(n)=n(n-3)/2 sur la base d'une expérience cruciale, a abordé le probléme de la définition. Ce binôme avait initialement soutenu une conjecture particulièrement

fragile : $f(n)=n^2$, à partir d'une conception combinatoire de polygone qui ne distinguait pas "côté" de "diagonale". La réfutation de cette conjecture par le carré, et l'incertitude sur le cas du triangle, ont fait prendre conscience à ces deux élèves de la précarité de leurs conceptions en l'imputant au contrat expérimental : "*il aurait pu nous donner une définition* " (Ham 228). Cependant, dans la suite, le problème de la définition ne sera pas à nouveau évoqué. Les élèves se sortent de cette situation en s'appuyant sur une conception qui, une fois différenciés "côté" et "diagonale" ("*le côté y sert pas dans la diagonale* ", Fab 127), est une conception classique de polygone et de diagonale. Le traitement des réfutations ne conduira pas à remettre en question les conceptions associées à la solution, mais soit à mettre à l'écart des contre-exemples, soit à l'introduire d'une condition.

Enfin, un autre binôme, Olivier et Stéphane, qui soutient la conjecture $\Sigma\mathcal{P}_n$, a évoqué la question de savoir ce que sont polygone, puis diagonale, dans les premiers instants de la résolution. Mais il n'entre pas véritablement dans une problématique de la définition, bien que vers la fin de la séquence le problème soit posé :

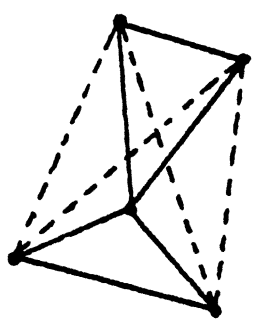


Figure 1

"*C'est idiot, si on ne sait pas ce que c'est un polygone, ça ira pas* "(Sté 791). Il s'agit plutôt d'une marque de désespoir face à des contre-exemples d'allure pathologique (figure ci-contre) que les deux élèves voudraient récuser comme polygones. "*C'est pas un polygone ... c'est deux triangles* " (Sté 771). La définition leur permettrait de se sortir d'une situation (la seconde phase) où l'observateur semble avoir toute liberté du choix des

contre-exemples.

II.1.3. Le problème de la définition posé d'emblée

Six binômes ont posé, dès les premiers instants de la résolution du problème, la question de savoir ce qu'est un polygone, ou ce qu'est une diagonale. Cette question de la définition a ensuite joué pour ces élèves un rôle essentiel à la fois dans la résolution du problème et dans leur démarche de validation.

De plus, les six binômes, au terme de leur activité, soutiennent la conjecture $f(n)=n/2$ pour les polygones ayant un nombre pair de sommets ; amendée éventuellement d'une solution spécifique pour les polygones ayant un nombre impair de sommets.

Binôme	**Conjecture**	**Type de preuve**
Antoine et Damien	n/2	Calcul sur des énoncés
Blandine et Isabelle	n/2 ou (n-1)/2	Expérience mentale
Evelyne et Christine	n/2 ou n	Expérience mentale
Lydie et Marie	n/2	Empirisme naïf
Naïma et Valérie	n/2	Empirisme naïf
Pierre et Mathieu	n/2 ou n-2	Empirisme naïf

Là encore des types de validation de nature trés différente sont représentés, aussi c'est du côté de l'analyse des conceptions et de leur statut que nous nous tournons.

Pour ces binômes, la question initiale se prolonge en une véritable problématique de la définition (au sens où, non seulement ils se posent la question de la définition, mais aussi soulèvent des question plus larges sur

sa fonction) qui est entretenue par des conflits que les élèves ne parviennent pas à dépasser :

- **conflit entre les conceptions** mobilisées de "polygone" et de "diagonale" : pour certains binômes le retour à l'étymologie du mot "polygone" conduit à une conception classique (c'est-à-dire conforme à la définition habituelle en mathématiques) en conflit avec une conception de "diagonale" issue de l'exemple prototypique du parallélogramme (du carré, ou du rectangle) qui attribue aux diagonales la propriété de se couper en leur milieu, ou au moins d'être concourrantes, (Ant-Dam, Pie-Mat, Bla-Isa).

- **conflit de conception entre les élèves** (Lyd-Mar, Pie-Mat).

- **conflit suscité par une réfutation** : pour sauver leur conjecture les élèves se placent sur le terrain de la définition, cherchant à en caractériser les objets pour lesquels elle est valide (Eve-Chr, Naï-Val).

Le caractère dominant de cette problématique est parfois renforcé par une conception globale du rôle de la définition dans une activité mathématique, ou par la lecture du contrat expérimental par les élèves :

- **la définition fixe des bases communes** pour la résolution d'un problème :

> *Faut qu'on leur explique c'que c'est pour nous un polygone [...] parce que dans c'cas là pour eux un polygone pour eux ça peut être ça... heu... j'sais pas quoi* (Dam 275-277)

Faudrait d'abord chercher c'que c'est qu'un polygone (Pie 167)
La définition d'un polygone, elle nous serait absolument nécessaire ... (Val 331)
On donne les définitions d'abord (Lyd 59) ;

On sait pas exactement les définitions, on ... on peut rien faire ... (Chr 866), *Si on avait su la définition de la diagonale et du polygone, on aurait pas été obligé d'en chercher une. Alors on aurait pu trouver plus rapidement la question qu'était posée* (Eve 867), *Si on change quelque chose dans la définition, ça change tout* (Chr 868)

- la situation est lue comme **un jeu de la définition** :

La règle du jeu dit que c'est nous le professeur. C'est eux [l'observateur et une autre personne présente durant l'observation] on leur dit ... un polygone c'est c'qu'on a donné et lui [l'observateur] doit trouver si notre définition est valable (Dam 509)

[La définition] y va pas t'la donner [...] tu dois essayer d'la trouver " (Naï 289-291) confie Naïma à Valérie. Aux réfutations de l'observateur elles opposent l'addition de nouvelles clauses à la définition, ou des conditions définitoires, comme autant de défis aux réfutations à venir "*maintenant vous pouvez rien faire, hein?* " (Val 440).

II.2. Les types de définition et les conceptions

II.2.1. Fondements endogènes et exogènes

Des indices des conceptions mobilisées par les élèves dans la résolution du problème peuvent être relevés dans leurs choix et dans leur traitement des informations, dans le meilleur des cas dans certaines explicitations. En effet, de telles explicitations n'ont véritablement lieu qu'au sein de binômes qui entrent dans une problématique de la définition. Pour les autres, les conceptions de polygone et de diagonale sont essentiellement présentes en acte dans la résolution du problème. Il s'agit d'une conception classique de polygone convexe. Pour ce qui est de la conception de diagonale, certains de ces binômes excluent les diagonales "extérieures" des polygones concaves (contre-exemples soumis par l'observateur) soit explicitement, soit par une condition les mettant à l'écart, soit en recherchant pour ces polygones une solution spécifique (Geo-Oli 623, Lio-Lau 1031, Nad-Eli 102).

Dans les binômes où elles sont explicitées, les définitions sont une forme d'institutionnalisation. Elles fixent le statut des conceptions relativement à la résolution du problème. Mais la recherche du contenu de la définition peut avoir deux sortes fondements :

- **des fondements endogènes** : les élèves cherchent à expliciter une conception de polygone et de diagonale en référence essentiellement à des exigences de fondements de la conjecture ;

- **les fondements exogènes** : les élèves cherchent à reconstituer des références reconnues culturellement ou par rapport au savoir scolaire.

La définition qu'il « faudrait» connaître.

Les marques principales de fondements exogènes sont le recours à l'**étymologie** (Ant-Dam 21, Eve-Chr 24, Pie-Mat 2) et le recours à l'**exemple prototypique** (Ant-Dam 65 et 70, Bla-Isa 67, Eve-Chr 706, Naï-Val 10, Pie-Mat 15). Dans ce dernier cas il s'agit d'asseoir la conception de diagonale. L'exemple prototypique le plus souvent utilisé est celui du parallélogramme (éventuellement du rectangle ou du carré).

Le recours à l'étymologie devrait conduire à une conception classique de polygone. En fait, dans la situation que nous avons observée, il n'en est rien. Le prototype du parallélogramme conduit, pour la diagonale, au respect de la contrainte : "*Faut qu'elles passent toutes par le milieu. Par le même milieu* " (Ant 70) qui ramène à la conception de polygone quasi-régulier et éventuellement régulier : "*On croyait que ça f'sait une espèce de roue, avec simplement des sommets* " (Eve 847).

Quant aux fondements endogènes, ils montrent, quoiqu'il en soit, la prégnance du modèle prototypique du parallélogramme chez certains élèves de quatrième, même s'il n'est pas complètement explicité : "*Une droite... partant d'un sommet... eh ben... et allant au sommet opposé* " (Lyd 30), "*On va prendre chaque sommet... joindre le sommet d'en face* " (Naï 21) et plus loin "*en général ça coupe en un point au milieu* " (Val 65), "*Il faut qu'ça passe toujours au même endroit [les diagonales]* " (Mat 15).

De même que leurs conceptions, les définitions qu'élaborent les élèves ne restent pas figées aprés leur première formulation. Elles évoluent dans le cours de la résolution du problème, notamment sous la

pression de conflits de conceptions entre partenaires, ou sous celle des réfutations rencontrées dans l'une ou l'autre des deux phases. Nous avons déjà présenté ce type de traitement des réfutations par "un retour sur la définition" (chap.II, § III.2.7.). Nous analysons ci-dessous trois cas particulièrement représentatifs de la façon dont certains élèves que nous avons observés évoluent au sein de leur problèmatique de la définition. Notamment nous remarquerons comment leurs décisions sont dépendantes de la reconnaissance d'un modèle extérieurement reconnu de polygone.

II.2.2. Un conflit de conception entre partenaires : Pierre et Mathieu

La question de savoir ce qu'est un polygone est posée dès les premiers instants de la résolution du problème. La référence étymologique faite par Pierre laisse penser à une conception classique : "*une face qui a plusieurs côtés. Gone : côtés, Poly : plusieurs* " (Pie 2). Pierre trace ensuite un polygone concave quelconque (fig. 2)."*Une face qui a plusieurs côtés...ça peut être dans n'importe quel sens* " (Pie 4). En fait, une limitation sévère est apportée au domaine des objets considérés, par la conception très forte que Pierre a de diagonale. "Diagonale" est, pour lui, synonyme d'"oblique". Il suit en cela un usage commun fortement répandu et même reconnu ("EN DIAGONALE. Traverser une rue en diagonale : en biais, obliquement"; deuxième sens de diagonale selon le dictionnaire Robert, 1977).

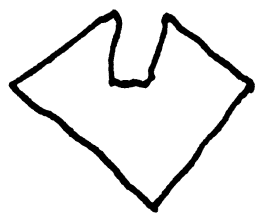


Figure 2

Mathieu ne se prononce pas sur la conception de polygone explicitée

par Pierre, mais de fait il se ramène au traitement de polygones convexes réguliers. Sa conception de diagonale, pour ce problème, est celle à la fois de diamètre et d'axe de symétrie. "*Faut qu'ça passe toujours au même endroit* " (Mat 15) et " *Qu'les deux côtés puissent se mettre l'un sur l'autre* " (Mat 20).

La différence de conception entre les deux élèves est bien identifiée par Pierre comme l'une des difficultés pour la résolution commune du problème : "*C'est pratiquement la même [idée] sauf que les diagonales c'est pas exactement la même chose* " (Pie 77).

La conception de Mathieu le conduit à dénombrer autant de diagonales que de sommets dans P_4, P_6 et P_8 réguliers, prenant en compte les axes de symétries de ces figures (fig. 3).

Pierre, en conformité avec sa propre conception, rejette ces configurations ; c'est-à-dire qu'il rejette les verticales et les horizontales. Face à cette proposition, Mathieu revient sur son dénombrement et y renonce, mais en se plaçant en référence au prototype du carré qui n'a que deux diagonales.

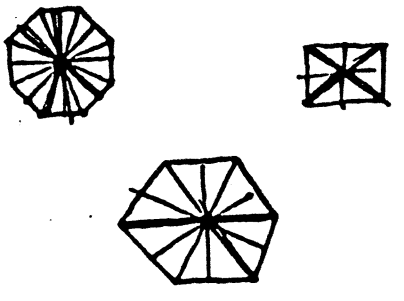


Figure 3

Ce moment de conflit pose le problème de la définition : "*J'crois que diagonale ça veut dire : ça joint deux points opposés* " (Pie 111) mais la conception de Pierre est très forte, et traçant une verticale sur sa feuille de papier, face à lui, en dehors de tout polygone, il affirme "*Mais ça c'est pas une diagonale* " (Pie 119). Mathieu fait alors remarquer que cela n'a pas de sens. Ainsi dans la représentation ci-contre de P_5 : "*C'est tout des diagonales* " (Mat 128), car la verticalité n'est pas conservée si on déplace la feuille (fig. 4). Pierre n'en convient pas : "*Non, ça [...] ça reste toujours une ligne droite... tu as beau placer dans tous les sens... pourra pas m'dire qu'c'est une diagonale* " (Pie 129). Il a déplacé à ce moment la signification qu'il attache à diagonale, d'"oblique" elle est devenue "non parallèle à un côté de la figure". Ainsi P_5 reste un contre-exemple à la conjecture soutenue par le binôme : f(n)=n/2. Pierre envisage alors d'étendre le concept de diagonale en proposant des demi-diagonales. Mathieu proteste "*Parce que tu veux t'trouver avec une demi diagonale* " (Mat 147) ; Pierre confirme son intention, donnant à la définition son statut logique (fixer une signification relativement à une problématique) : "*Exactement y a pas d'raison. C'est mon droit* " (Pie 152).

Figure 4

A ce moment de la résolution du problème le conflit de conception entre les élèves est clairement ouvert. La décision sur une définition serait un moyen reconnu d'en découdre : " *Mais faudrait d'abord chercher c'que c'est qu'un polygone* " (Pie 167). Les élèves envisagent même de se débarrasser de P_5 (lieu essentiel de leur conflit) en le mettant à l'écart

comme Mathieu a pu un instant l'évoquer "*p't'être que ça existe pas un truc de 5* " (Mat 135).

Revenant à l'examen d'une configuration de P_5, Pierre constate que s'il maintient son critère définitoire (c'est-à-dire le rejet des diagonales parallèles à un côté de la figure) : "*dans c'cas tout l'monde est une ligne droite* " (Pie 276). Il renonce alors à la conception qu'il a jusque-là défendue et, sans plus d'explication, il paraît se rallier à la conception de Mathieu, soutenant mordicus la conjecture f(n)=n.

Aucun des deux élèves ne relève de contradiction entre la signification acceptée pour diagonale pour P_5 et la signification "axe de symétrie" jusqu'alors soutenue par Mathieu.

Le conflit étant localement dépassé, le problème de la définition ne sera plus soulevé face aux nouvelles réfutations. Pierre et Mathieu s'en tiendront à des modifications ou à des rejets de la conjecture (cf. § II.2.1. et III.3).

II.2.3. La recherche de la bonne définition :Evelyne et Christine

Evelyne et Christine se posent d'emblée la question : "*C'est quoi un polygone ? Tu sais ? ...*" (Eve 21) puis elles se tournent vers l'observateur. Leur retour sur l'étymologie évoque une conception classique de polygone, mais une conception de diagonale "diamètre et axe de symétrie" limite de fait la recherche aux polygones réguliers pairs. La conjecture soutenue est f(n)=n/2.

Il y a cependant une forte incertitude "*Faut qu'on soit sûres que ce soit bien des diagonales ce qu'on a fait* " (Eve 107). La recherche d'une définition, par les deux élèves, est alors la recherche de la « bonne définition » de polygone et de diagonale.

La référence dominante est celle au parallélogramme à laquelle s'ajoute la nécessité, pour un polygone, d'avoir des diagonales. Le triangle est ainsi mis à l'écart : "*un nombre de sommets qui est pair, parce que le triangle ça a pas de diagonales* " (Chr 113). De plus la contraine : "*les côtés sont parallèles deux à deux* " (Chr 168), écarte les polygones impairs qui constituent des contre-exemples importants à leur conjecture : "*parce que, regarde, quand il y a 7 côtés, ben y a toujours un qui sera pas parallèle ... à un autre ... parce qu'y sera pas en face* " (Chr 168, suite) et "*Donc y faut qu'y soit pair* " (Eve 200).

La précarité de leur situation n'échappe pas aux élèves : "*si au moins on savait ce qu'c'est une diagonale et un polygone* " (Chr 203). Les choix qu'ils ont fait avaient pour fonction d'assurer la cohérence du système conjecture-conception, en s'appuyant sur une définition adaptée et plausible. Mais lorsque l'observateur oppose le contre-exemple P_5, Evelyne et Christine remettent, sans hésitation, leurs conceptions en question : "*Ben moi, j'pense qu'un polygone ... ça a n'importe quel nombre de sommets* " (Chr 251) mais quasi réguliers : "*Il faut que les côtés soient égaux, hein ?* " (Eve 265). C'est le concept de diagonale qui va être étiré (au sens de Lakatos,1976, p.126 sq.) pour conserver une cohérence avec les diagonales des polygones pairs jusque là considérés : "*Il faut que la diagonale parte du sommet et qu'elle aille droit devant elle ... qu'elle partage l'angle ... la figure en deux* " (Eve 390-393). Pour les

polygones impairs leur conjecture devient f(n)=n, par ailleurs les triangles et les trapèzes sont mis à l'écart car ils ne sont pas nécessairement réguliers (Chr 457-458).

Les élèves ne conviennent de leur solution que parce qu'elles sont "*parties du principe qu'un polygone c'est une figure géométrique qui peut avoir n'importe quel nombre de sommets, mais dont les côtés doivent être égaux* " (Chr 568) " *et du moment qu'ils sont égaux, il est régulier* " (Eve 570).

Mais là encore, elles ont conscience de ce que la définition qu'elles avancent est incertaine : " *Ben faudrait d'jà qu'on sache ce que c'est... un polygone... une diagonale. Exactement la définition* " (Chr 696). Dans une certaine mesure les contre-exemples proposés par l'observateur ne leur paraissent pas légitimes, dès lors, elles les traitent comme elles peuvent : "*d'après la définition qu'on a* " (Chr 698).

Pour Christine et Evelyne la connaissance de la définition est un préalable nécessaire à la résolution d'un problème de mathématique. Leur quête d'une définition est guidée par le besoin de fonder leur conjecture en s'efforçant de reconstituer ce que sont polygone et diagonale au sein d'un savoir reconnu : " *Les diagonales c'est fait pour trouver le milieu de la figure* " (Chr 722).

II.2.4. Le jeu de la définition : Naïma et Valérie

Les élèves abordent le problème en évoquant l'exemple à valeur prototypique de l'hexagone : "*Un polygone c'est à 6 côtés* " (Naï 10). Elles

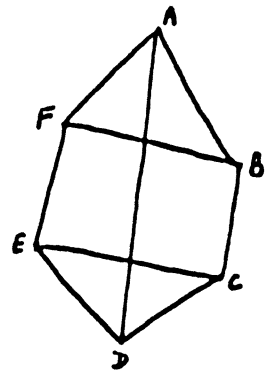


Figure 5

rencontrent alors une difficulté pour tracer les diagonales qui doivent joindre un sommet au "*sommet d'en face* " (Naï 21). Elles réalisent la configuration ci-contre (fig. 5). Cette difficulté est levée par la référence à la contrainte prototypique du parallélogramme, renforcée par le cas du carré : "*Ouais, mais en général ça coupe en un point au milieu* " (Val 65), " [dans un carré] *ça s'coupe en un point* " (Val 71).

La conception classique de diagonale est évoquée et explorée. "*Ouais, ben c'est p't'être des droites qui doivent partir d'un sommet* " (Naï 74), "*et qui va à un autre sommet* " (Val 75). Mais la réalisation (fig. 6) sur P_6 donne une figure complexe qui fait rire les élèves : les diagonales sont trop nombreuses. Dès lors leur conception sera celle de diagonale- diamètre.

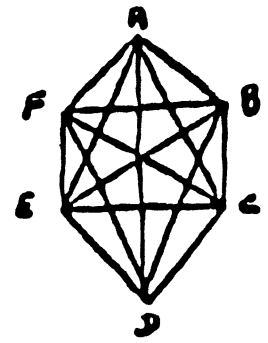


Figure 6

Elles proposent alors un message qui indique comment tracer les diagonales d'un polygone, mais qui ne donne pas de moyens de calcul.

L'observateur le leur fait remarquer. Elles reprennent la résolution du problème, mais une hésitation subsiste sur ce qu'est une diagonale.Une façon de lever leur indétermination consiste à inscrire les diagonales tracées dans des quadrilatères (des "*carrés* ", Naï 208). C'est ce que représente le quadrilatère "1-2-5-6" dans la

configuration suivante (fig. 7).

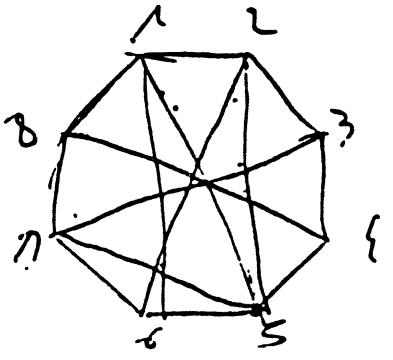


Figure 7

Naïma et Valérie soutiennent la conjecture f(n)=n/2 mais envisagent d'emblée la réfutation par P_5. Valérie suggère que "*c'est pas un polygone* " (Val 256), ce que Naïma conteste : "*qui te dit que c'est pas un polygone* " (Naï 257). Les élèves ne tranchent pas leur différent et s'en remettent à l'observateur. C'est alors qu'apparaît explicitement une problématique de la définition comme moyen de sortir de la difficulté, et que la situation bascule vers un jeu de devinette : " *faudrait p't'être savoir la définition d'un polygone* " (Val 285), mais " *y va pas t'la donner [...] tu dois essayer de la trouver* " (Naï 289-291).

Une référence à l'étymologie : " *Poly ça veut dire plusieurs et Gone ça veut dire sommets : plusieurs sommets* " (Naï 298), leur interdit de rejeter les polygones impairs comme elles en ont la tentation : " *Si ça s'trouve c'en est pas [un]* " (Val 374, à propos de P_7).

Pour assurer la validité de leur conjecture la première idée est alors d'ajouter une condition : "*cela ne marche que pour les polygones ayant un nombre pair de sommets* " (prot. p.13), mais la contrainte reconnue de trouver une solution pour tous les polygones : "*faut trouver quelque chose pour tous les polygones*" (Naï 353), conduit de la définition de polygone à celle des objets du domaine de validité de la conjecture. Cette conduite sera conservée dans la suite, face à chaque contre-exemple produit par

l'observateur (fig. 8). En fait cette lecture du contrat expérimental (la définition est à deviner) est faite à la lumière d'une conception globale de ce que peut être la solution à un problème mathématique : un énoncé vrai au domaine de validité ne souffrant pas de restriction, tous les objets de l'univers concerné y sont acceptés.

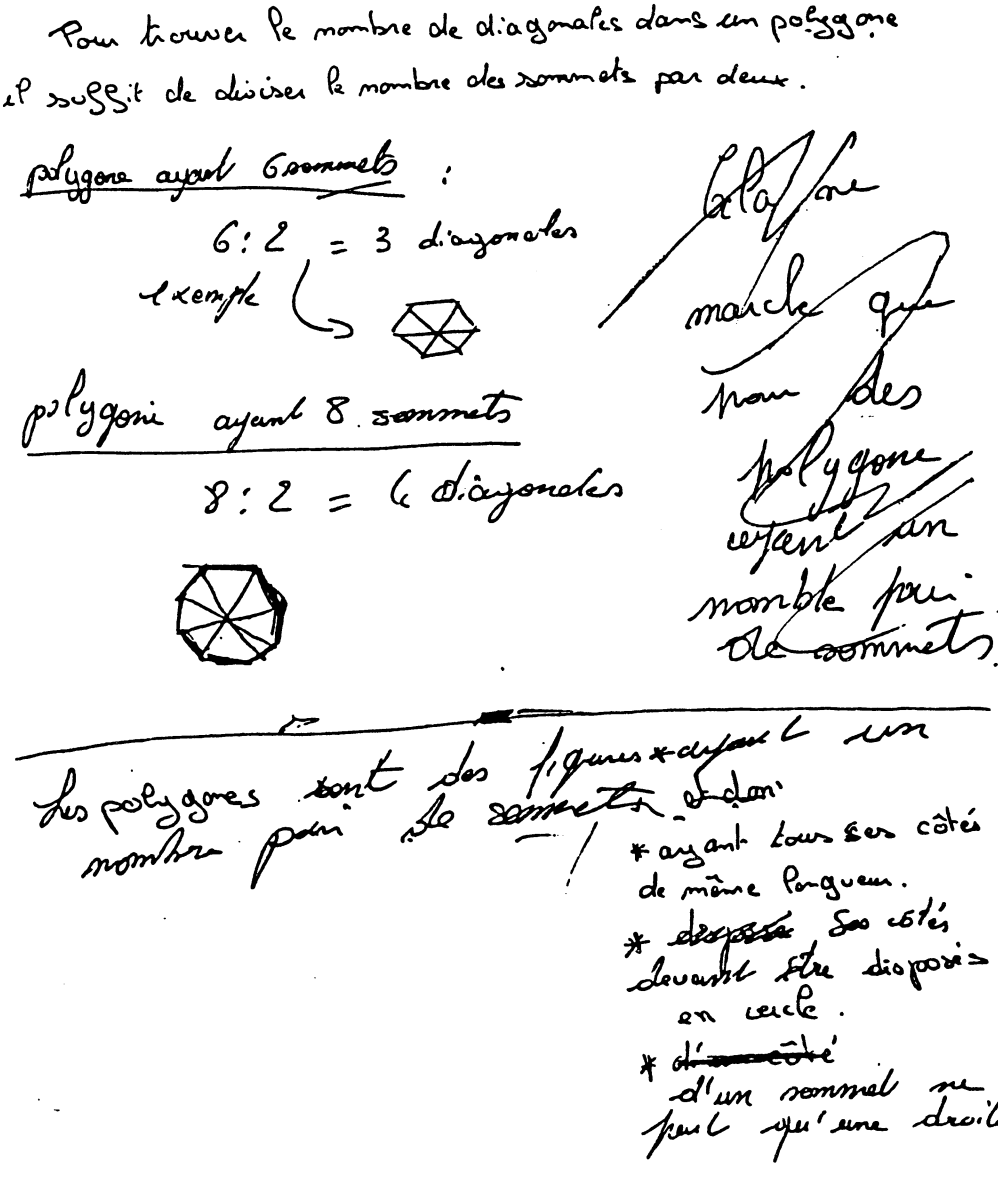


Figure 8

II.3. Conclusion

L'apparition d'une problématique de la définition semble moins liée à la nature des fondements rationnels de la résolution du problème, qu'à la robustesse des conceptions des élèves. C'est ainsi que la moitié d'entre eux, s'appuyant sur des conceptions réputées classiques de polygone et diagonale, n'abordera pas la question de la définition. En revanche tous ceux qui s'appuient sur la conception "fragile" de diagonale-diamètre associée ou non à polygone régulier, soulèveront le problème de la définition sous l'impulsion soit d'un conflit de conception entre les élèves, soit de réfutations sévères (de f(n) = n/2 par des polygones impairs).

Cette problématique se développe dans un système de contraintes que sont : les conceptions des élèves, la conjecture en question, l'existence d'un savoir ou de pratiques mathématiques de référence.

L'origine du caractère dominant de l'une ou l'autre de ces contraintes échappe actuellement à l'analyse que nous avons pu conduire. On peut évoquer l'hypothèse d'un principe de moindre risque qui conduit à privilégier la contrainte la plus menacée : nécessité d'une conception commune (Pierre et Mathieu), conforter la conjecture (Naïma et Valérie), conformité a un savoir de référence (Evelyne et Christine).

Mais au-delà de ce qui semble être une même problématique de la définition, nous observons que les issues peuvent être très différentes. Ainsi Lydie et Marie, comme Pierre et Mathieu, rencontrent un conflit de

conception, mais contrairement à ces derniers, elles ne parviennent pas à un consensus, bien que le problème soit clairement posé : " *elle, ses diagonales, c'est pas les mêmes que les miennes. Alors il y a un problème"* (Mat 325). Ou Blandine et Isabelle, comme Evelyne et Christine, posent la question de savoir ce qu'est un polygone, mais s'en tireront par une extension ad hoc du concept de diagonale qui leur permet de maintenir leur conjecture en l'adaptant aux polygones impairs (de chaque sommet il ne part qu'une diagonale qui le joint au sommet "opposé" au sens d'une symétrie, les polygones impairs ont un sommet qui n'a pas d'opposé. Il échappe aux élèves que ceci ne vaut que pour le cas de figure qu'elles ont examiné).

III : Seconde observation, l'usage d'une information de référence

L'étude que nous allons présenter a été conduite au sein d'une équipe de chercheurs en didactique des mathématiques (C. Laborde, M. Guillerault, M. Dupraz) et de linguistes (R. Bouchard, J. Lachcar) collaborant à une opération de recherche sur la lecture de textes mathématiques dans le cadre d'une «Action Thématique Programmée» du CNRS. L'objectif général de cette opération de recherche était «de dégager les spécificités des textes écrits et oraux dues au contenu mathématique et d'identifier les problèmes qui en découlent dans le transfert et l'acquisition des connaissances mathématiques en situation scolaire ou universitaire».

Dans ce cadre nous nous sommes intéressé au rôle du texte dans une activité de résolution de problème.

III.1. La construction d'un texte de référence

III.1.1. Le choix d'une définition de "polygone" et de "diagonale"

Avant de procéder à la construction du texte lui-même nous avons

recherché dans divers manuels scolaires, de sixième, de cinquième et de quatrième, les définitions de polygone et de diagonale qui pouvaient être proposées aux élèves. Nous avons pu constater, à partir d'un corpus pourtant limité, l'importante hétérogénéité de ces définitions et de leur présentation. Nous en donnons ci-dessous un aperçu :

"Une ligne polygonale est une succession de segments consécutifs du plan : [AB], [BC], ...,[KL].
Une ligne polygonale fermée est appelée polygone.
[...]
Un segment qui joint deux sommets non consécutifs est une diagonale."

(Bellecave, Ed. F. Nathan, 4°, 1983)

"A_1, A_2, A_3, ..., A_n sont n points du plan ($\mathcal{P}$) ; $n \geq 3$

A_1, A_2, A_3 ne sont pas alignés, ainsi que A_2, A_3, A_4 ; ... ; A_{n-1}, A_n, A_1 ; A_n, A_1, A_2

Le polygone A_1, A_2,...,A_n est l'ensemble $[A_1A_2] \cup [A_2A_3] \cup \ldots \cup [A_nA_1]$

[...]

Lorsque le polygone n'est pas croisé, le mot polygone désigne aussi la surface limitée par $[A_1A_2] \cup [A_2A_3] \cup \ldots \cup [A_nA_1]$ "

(Thirioux, Ed. Magnard, 4°, 1979)

" 1) Ligne polygonale (ou ligne brisée)
On appelle ligne polygonale (ou ligne brisée) toute suite de segments, telle que deux segments consécutifs aient une extrémité commune et n'aient pas le même support.
[...]
2) Polygone
On appelle polygone toute ligne polygonale fermée.
Par extension, on appelle aussi polygone la portion de plan limitée par une ligne polygonale. [...]
On appelle diagonale d'un polygone tout segment de droite joignant deux sommets non consécutifs. "

(Such et Borel, Ed. Technique et Vulgarisation, 5°, 1982)

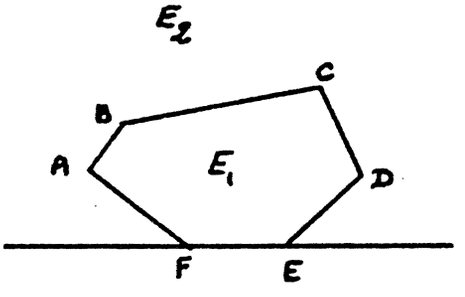
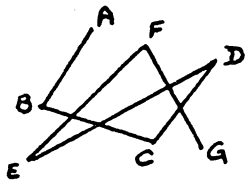


Figure 9

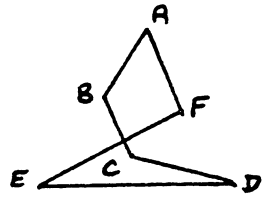
"Cette figure représente une ligne brisée fermée ABCDEFA, réunion des segments [AB], [BC], [CD], [DE], [EF] et [FA] que nous désignons par L.
La ligne L est telle que deux segments consécutifs ont un seul point commun, deux segments non consécutifs aucun points communs.
Les points autres que ceux de L se répartissent en deux sous-ensembles du plan E_1 et E_2 de frontière commune L. La réunion de E_1 et de L s'appelle **polygone**.
Les points A, B, C, D, E et F sont les **sommets** du polygone.
Les segments [AB], [BC], [CD], [DE], [EF] et [FA] sont les **côtés** du

polygone, il y en a autant que de sommets.
Tout segment de droite joignant deux sommets non consécutifs est une **diagonale** du polygone : par exemple [AC] est une diagonale. [...]
Remarque 1) on donne parfois le nom de polygone à la ligne brisée fermée qui constitue la frontière du polygone.

(Agnado, Ed. La Capitelle, 5°, 1978)



Ligne brisée ouverte



Ligne brisée fermée

= polygone

"Définition : « deux segments sont adjacents » signifie que : une extrémité de l'un est aussi extrémité de l'autre, et leur intersection est réduite à une extrémité commune.
Définition : l'ensemble constitué par une suite de segments adjacents est une ligne brisée. Une ligne brisée peut être ouverte ou fermée. Une ligne brisée fermée est un polygone. [...]

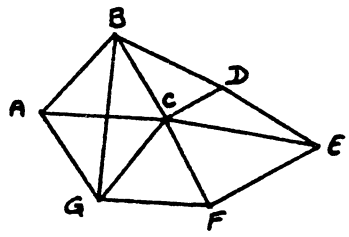


Figure 10

Définition : dans le polygone ABCDEFG dessiné ci-contre :
. [AB] est un côté (il y en a 7)
. D est un sommet
. B et C sont deux sommets consécutifs
.[DF] est une diagonale, [BD] aussi.
Une diagonale est un segment joignant deux sommets non consécutifs.

(Deledicq et Lassave, Ed. CEDIC, 6°, 1981)

Les différences entre ces textes se situent à plusieurs niveaux :

- à celui de la **nature** même des concepts en question, un polygone pouvant être une région du plan (Agnado) ou le bord de cette région. Dans ce dernier cas il s'agit soit d'une ligne brisée fermée (Bellecave, Deledicq), soit d'une union de segments vérifiant certaines propriétés (Thirioux). La notion de diagonale n'est pas systématiquement présentée avec celle de polygone, cela tient probablement à ce que certaines de ces leçons ne sont le plus souvent que des préliminaires à l'étude de polygones particuliers, notamment le parallélogramme. Lorsque le mot diagonale est défini c'est toujours comme segment joignant deux sommets non consécutifs.

- à celui du **langage**, en effet ces textes recourent dans des proportions différentes au langage symbolique et à la langue naturelle. En fait, nous avons pu noter que, sauf en de rares exceptions (comme l'ouvrage de Thirioux cité ci-dessus), la langue naturelle est largement dominante. Des représentations graphiques de polygones sont utilisées soit comme illustration de la définition, soit comme élément de sa formulation (Bellecave, Agnado). Dans ce dernier cas les polygones représentés ont le statut d'exemples prototypiques. Certains manuels recourent aux représentations graphiques avec les deux types d'utilisation (Deledicq).

- à celui du **co-texte**, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de typographie et de mise en page : caractères gras, italiques, texte souligné, encadrés, mise en valeur des paragraphe, etc. .

A la suite de cet examen de quelques manuels scolaires nous avons pris le parti de concevoir un texte qui ne se limite pas à donner les seules définitions de polygone et de diagonale. Nous souhaitions que cette information soit à retrouver parmi d'autres, en particulier celles

concernant les différents types de polygones (convexe, concave, croisé) sur lesquels les élèves observés lors de la première expérience s'étaient posé des questions. Par ailleurs nous avons cherché à construire un texte ne présentant pas aux yeux des élèves d'originalité particulière. En quelque sorte, un texte relevant de ce qui nous apparaissait comme un modèle dominant. Nous avons ainsi retenu les principes suivants :

- définir un polygone comme une ligne brisée fermée ;
- caractériser la diagonale par le fait qu'elle est un segment joignant deux sommets non consécutifs d'un polygone ;
- caractériser les polygones convexes, concaves et croisés ;
- donner une définition de sommet qui permette de régler le problème de la nature de l'intersection de deux côtés d'un polygone croisé en dehors de leurs extrémités ;
- ne pas réduire le texte aux seules informations utiles à la résolution du problème ;
- privilégier la langue naturelle ;
- utiliser les représentations graphiques aussi bien au titre d'illustration qu'à celui d'exemples prototypiques ;

.

Nous donnons ci-après le texte que nous avons rédigé, nous le désignerons par «*Texte* » dans la suite. On notera que les définitions principales (polygone, diagonale) sont mises particulièrement en valeur, notamment par leur introduction par l'avertisseur « définition », en gras dans le *Texte* . Les autres termes définis sont seulement signalés pas le fait d'être soulignés, nous suivons en cela une pratique fréquente des textes scolaires. En fait, rappelons qu'ici il ne s'agit ici, en quatrième, que de rappels de définitions.

Le *Texte* proposé aux élèves

Polygones

L'ensemble constitué par une suite de segments adjacents est une ligne brisée.

Une ligne brisée peut être ouverte ou fermée, par exemple :

Fig.1 : ligne brisée ouverte

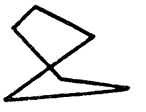


Fig.2 : ligne brisée fermée

Définition : on appelle polygone une ligne brisée fermée.

Les polygones qui ont deux cotés se coupant ailleurs qu'en leurs extrémités, s'appellent polygones croisés (figure 3). On distingue aussi les polygones convexes (figure 4) et non convexes (figure 5)

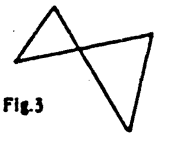


Fig.3

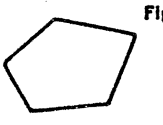
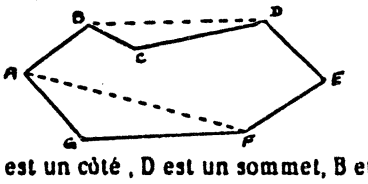


Fig.4

Fig.5

Les segments constituant le polygone s'appellent les côtés, l'extrémité commune à deux côtés adjacents s'appelle un sommet.

Pour nommer un polygone on donne un nom à chacun de ses sommets. Le polygone se nomme alors par la suite des noms de ses sommets dans l'ordre où on les rencontre en le parcourant, par exemple voici le polygone ABCDEFG :



Dans ce polygone [AB] est un côté , D est un sommet, B et C sont deux sommets consécutifs. Ce polygone a 7 sommets et 7 côtés.

Définition : On appelle diagonale un segment joignant deux sommets non consécutifs.

Par exemple dans le polygone ABCDEFG, le segment [AF] est une diagonale, [BD] aussi.

Dans un polygone qui n'est pas croisé on parle de "l'angle en E du polygone", cet angle est saillant, par contre l'angle en C du polygone est rentrant.

On remarque que dans un polygone convexe tous les angles sont saillants.

III.1.2. Le dispositif expérimental et sa mise en oeuvre

Le dispositif expérimental que nous avons utilisé a les mêmes caractéristiques générales que celui utilisé pour l'étude précédente (chap.II, § I.2.) dont il est la reprise avec pour nouvelle modalité le fait de mettre à la disposition des élèves le *Texte* que nous venons de présenter. Le *Texte* est donné aux élèves sans remarques particulières, avec celui donnant l'énoncé du problème dans les mêmes conditions que lors de la première expérience. L'observation comporte à nouveau deux phases, l'observateur intervenant dans la seconde phase en donnant des contre-exemples. Nous sommes convenu de soumettre aux élèves les cas du triangle, d'un pentagone à sommets alignés (fig.11) et d'un quadrilatère croisé.

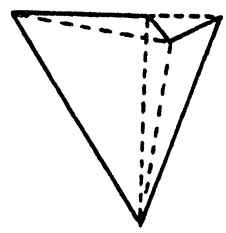


Figure 11

Pour ce qui concerne l'analyse a priori du champ conceptuel et des procédures de résolution possibles nous renvoyons le lecteur au chapitre précédent (chap. II, § I.2.2. et I.2.3.). Dans la présente modalité nous nous attendons à ce que le *Texte* empêche que soient mobilisées des conceptions de type «polygone-régulier» et «diagonale-diamètre», et donc qu'avec elles disparaissent les solutions f(n)=n/2 observées dans la cadre de la première modalité. De même le *Texte* devrait conduire les élèves à accepter les diagonales extérieures et à prendre en compte les polygones concaves ou croisés. Nous pensons que les élèves étant conduits à poser le problème de la validité de leur solution pour un univers de polygones plus complexe (convexes, concaves, croisés), les types de preuves mis en

oeuvre seront de niveau plus élevé.

L'observation que nous avons réalisée a eu lieu au collège de Corenc, en juin 1986, avec les élèves d'une classe de quatrième. Nous donnons ci-dessous la liste des binômes observés avec l'indication du membre de notre équipe qui a réalisé l'observation proprement dite :

Binôme	**Observateur**
Béatrice et Sylvie	Claire Margolinas
Bénédicte et Sandra	Mireille Dupraz
Cécile et Emmanuelle	Jean-François Bonneville
Christophe et Olivier	Colette Laborde
Isabelle et Juliette	Nicolas Balacheff
Laurence et Anne-Laure	Jean-François Bonneville
Loïc et Marc	Maria Paulo
Mabouba et Sihem	Nicolas Balacheff
Rémi et Christophe	Michel Guillerault
Sandrine et Carine	Maria Paulo
Stéphanie et Julie	Mireille Dupraz

L'observation s'est déroulée en deux fois, chaque fois les binômes observés étaient réunis dans une même salle de classe. Cela a parfois eu pour effet de créer une « émulation » qui s'est traduite par quelques remarques des élèves qui se demandaient si leurs camarades avaient trouvé une solution, ou notaient avec curiosité qu'ils avaient « déjà » fini. Nous n'avons pas réalisé une analyse fine de ces remarques ou de ces comportements dans la mesure où ils ne nous sont pas apparus jouer un rôle déterminant relativement aux phénomènes que nous étudions.

III.2. La résolution du problème

III.2.1. Les solutions, leurs fondements et leurs formulations

a) Les données générales

Le tableau ci-dessous présente les solutions que nous avons relevées parmi les 11 binômes observés. Nous donnons successivement la solution proposée par les élèves à l'issue de la première partie de l'observation, puis celle éventuellement issue des interactions avec l'observateur au cours de la seconde partie.

Binôme	Première partie	Seconde partie
Isabelle et Juliette	n.(n-3)/2	
Bénédicte et Sandra	n.s(n)/2	
Laurence et Anne-Laure	n.(n-3)	
Mabouba et Sihem	n ou n.s(n)	
Cécile et Emmanuelle	f(n+1)=f(n)+a(n+1)	
Stéphanie et Julie	2n	f(n+1) = f(n)+a(n+1)
Rémi et Christophe	$\Sigma \mathcal{S}$n	
Loïc et Marc	(n+3)+(n-3)+(n-4)+ (n-4)+... +(n-p)+(n-p)+...	solution de la première partie ou $\Sigma \mathcal{S}$n
Christophe et Olivier	n.(n-1)	le nombre de côtés opposés.
Béatrice et Sylvie		
Sandrine et Carine.		

Deux faits ressortent principalement de la lecture de ce tableau :

- d'une part, la disparition des solutions du type f(n)=n/2, nombreuses dans la première expérience où elles étaient alors liées à la conception polygone-régulier ou diagonale-diamètre. Il faut voir ici la marque de la nouvelle modalité expérimentale. la définition de diagonale, par sa référence au caractère de consécutivité des sommets, écarte la conception diagonale-diamètre. Quant à la notion de polygone, les exemples donnés en illustration s'opposent à la réduction aux polygones réguliers ou conexes.

- d'autre part, tous les binômes ne parviennent pas à produire une solution. Deux d'entre eux s'en reconnaissent incapables. Dans le cas de Béatrice et Sylvie l'échec est lié à l'exigence qu'elles reconnaissent de donner une formule :

- [résoudre] d'une manière générale, c'est dur (Béa 243)
- ... parce que chaque fois ça change (Syl 244)
-là y a aucun repère ... c'est chaque fois différent ... des fois c'est moins, des fois c'est plus, des fois c'est le même. enfin, c'est jamais pareil (Béa 250)
-parce que chaque fois ce nombre grandit, le nombre de diagonales grandit (Syl 257)
-ouais, mais c'est à intervalles réguliers (Béa 258)

De même Sandrine et Carine ne parviennent pas à trouver une formule qui conviendrait pour l'ensemble des polygones : "*je n'ai pas trouvé la solution parce que la méthode X x2 + 2 ne marche pas avec les polygones qui ont plus de 9 sommets* " (message).

Pour le reste, il n'y a pas de faits notables. Les solutions proposées sont du même type que celles observées au cours de la première expérience.

Le tableau ci-dessous montre, pour les binômes qui ont produit une solution, les types de validation que nous avons relevés, au cours de la première partie de l'expérience, pour la solution finale ou d'éventuelles solutions intermédiaires.

	Empirisme naïf	**Expérience cruciale**	**Exemple générique**	**Expérience mentale**	**Calcul sur des énoncés**
Sté-Jul	2n				
Rem-Chr	$\mathcal{P}$n				
Loï-Mar	n/2 ou n-1				
	$\mathcal{P}$n				
Chr-Oli	n.(n-1)				
Ben-San	n.s(n)/2				
Mab-Sih	n ou n.s(n)	← n.s(n)			
Cec-Emm		f(n+1)= f(n)+a(n+1)			
Isa-Jul			n.(n-3)/2		
Ann-Lau			n.(n-3)		

b) L'empirisme naïf et l'expérience cruciale

L'empirisme naïf de Stéphanie et Julie est tout à fait caractéristique. Il s'allie à une difficulté à maîtriser la relation « être le double de ...», ou « être la moitié de ...» pour conduire dans les premiers moments de la résolution à f(n)=2n. Après une tentative sur polygone P_8 convexe, les élèves en viennent à P_4 et concluent :

on en a 4, ça nous en donne 2. Si ou en a 6 ... (Sté 61)
attends on va vérifier (Jul 62)
donc ça en fait 10, donc pour 5 ... pour 5 ç'en fait 10 (Sté 81)
tu doubles : le nombre de diagonales est égale au double du nombre de sommets (Jul 83)
non regarde ... le nombre de diagonales, si y en a 2, c'est égal au double (Sté 84)
ben, 2 diagonales, c'est qu'y en a 4 de sommets, ben ... (Jul 89)
10 diagonales, c'est qu'y en a 10 ! (Sté 90)
5 ! (Jul 91)
c'est que le nombre de diagonales est égal au double du nombre de sommets (Jul 97)
on a trouvé un truc, on sait pas si c'est juste (Sté 102).

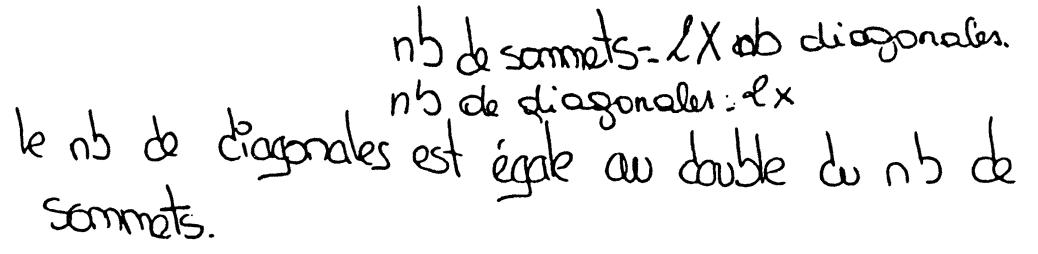


Figure 12

Elles ne prendront conscience de leur erreur de formulation que plus tard, au cours de la seconde partie de l'observation (cf. § III.2.2.b). La rapidité avec laquelle cette solution est produite peut suggérer un empirisme de circonstance, essentiellement attaché à la situation vue comme une situation de devinette. Notre avis est que ses racines sont plus profondes, nous en voyons un indice dans les propos suivants des élèves :

elles sont justes les solutions [des autres] et nous, elles sont justes (Sté 114)

toute façon j'crois qu'c'est juste (Jul 129)

d'après les deux cas qu'on a fait (Sté 130)

Cet empirisme naïf est confirmé par leur traitement des réfutations (§ III.2.2.b. et III.2.2.d-e.) et leurs démarches de résolution au cours de la seconde partie de l'observation.

Loïc et Marc formulent une conjecture dès leurs premières observations sur un polygone P_4 et des polygones P_5 convexe et concave que représentent respectivement les figures 4 et 5 du *Texte* , et sur lesquels ils trouvent 4 diagonales :

si c'est un chiffre pair tu divises par 2 pour trouver les diagonales, si c'est un chiffre impair t'enlèves un : ça peut marcher, le seul moyen d'savoir c'est ...tu traces les diagonales (Loï 67).

Cette solution est réfutée par une vérification sur le polygone P_7 que représente la figure 6 du *Texte* . Ces élèves explicitent bien qu'ils n'envisagent pas d'autres issues qu'une validation pragmatique "*le seul moyen de savoir, c'est ... tu traces les diagonales* ". (Loï 67). La solution qui sera formulée provient de la constatation sur P_5 que le parcourt du polygone dans un sens déterminé donne, pour les trois premiers sommets rencontrés, les nombres de diagonales (5-3), (5-3), puis (5-4). Ils prolongent cela par l'affirmation de (5-4) diagonales sur le quatrième sommet. Ils valident cette solution sur P_4 : (4-3)+(4-3)+(4-4)+(4-4)=2 : "*ça marche, ça marche ! ben, on a trouvé* " (Mar 513). Aucune contradiction avec ce qui a été déjà obtenu sur P_5(4 diagonales) n'est attestée (cf. à ce sujet § III.2.2.b.) :

pour les 2 premiers angles, t'enlèves 3, pour les 2 suivants t'en enlèves un de plus, et ainsi de suite (Mar 481)

Leur texte (fig.13) exprime de la même façon cette procédure de calcul. Aucun problème de formulation n'est soulevé. En particulier ce qui serait lié au nombre de pas de cette itération. Marc s'étonne : "*c'qui m'semble étrange c'est que la solution elle soit si compliquée* " (Mar 479). Cet empirisme naïf paraît renforcé par la prise en compte du caractère prototypique des figures fournies par le *Texte* qui constituent l'essentiel des exemples traités par ces élèves, le rôle de P_4 irait dans le même sens.

Ils envisageront une expérience cruciale sur un polygone P_8 concave mais ils ne parviendront pas à contrôler l'énumération de ses diagonales.

Dans un polygone pour trouver le nombre de diagonales qui partent du 1er sommet, on enlève au nombre total de sommets, le sommet lui même et les sommets consécutifs.
Pour le 2ème sommet on fait de même, mais pour le 3ème on enlève une diagonale en plus et pour le 4ème on fait de même et ainsi de suite pour tous les sommets restants.

Figure 13

Chez Mabouba et Sihem, le rôle prototypique des exemples du *Texte* est beaucoup plus net. De l'examen du polygone P_7 concave, que représente la figure 6 du *Texte*, elles tirent f(n)=n.s(n). Pour Sihem toute vérification, comme le sollicite Mabouba, est inutile :

-tu peux prendre un truc à 20 côtés, tu trouveras pareil, tu prends un sommet, tu regardes combien il a de diagonales et tu multiplies le nombre de diagonales par le nombre de sommets (Sih 58).

Devant la resistance de Mabouba, Sihem propose le recours à une expérience cruciale sur "*n'importe quel exemple* " (Sih 64). Elle trace un polygone P_{11} concave, mais les élèves n'examineront la situation qu'en un seul sommet :

- *8 x 11, 88. Bon, ben c'est ça, hein* (Sih 66)
- *c'est ça ? Bon alors on va faire la règle* (Mab 67)

Les 88 diagonales ne sont pas effectivement énumérées. La fonction de cette expérience cruciale est de régler un conflit entre les deux élèves, elle n'exclut pas de nouvelles tentatives de preuve ou des vérifications. Notamment un nouvel essai sur un polygone P_5 réfute cette solution. Les élèves se proposent alors de "*faire le cas pour tous les machins* " (Sih 119), c'est-à-dire pour toutes les figures du *Texte* . Toutefois elles ne parviennent pas à conclure pour les polygones croisés (figure 3 du *Texte*) et donnent leur solution (fig. 14) :

f(n)= si le polygone est convexe alors n sinon n.s(n)

Une nouvelle vérification sur un polygone P_4 réfute cette solution, mais cette fois les élèves se tournent vers l'observateur. Dans cette démarche les illustrations du *Texte* dont la fonction est de montrer ce que signifient «polygone convexe» et «polygone croisé» peuvent avoir joué un rôle de prototype se constituant en obstacle au dépassement de l'empirisme naïf.

Polygone convexe :

Dans 1 polygone convexe, on compte le nb de sommets qu'il y a et on a obligatoirement le même nb de diagonales.

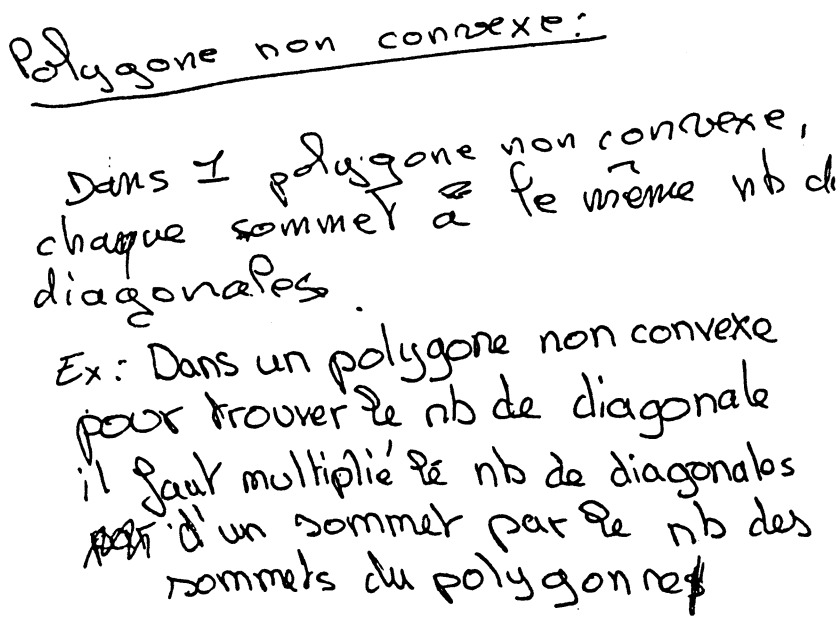


Figure 14

Cécile et Emmanuelle construisent une solution à partir des figures du *Texte* , notamment la figure 6 (polygone à 7 sommets) dont le caractère prototypique est d'abord mis en doute :

c'est confondu (Emm 102)

c'est pas obligé, si c'avait été là, c'aurait pas été confondu. C'est au hasard que ça s'trouve (Céc 103)

mais elle y est pas l'autre ! (Emm 106)

tu vois, imagine, si ce point il aurait été là [...] on aurait pu tracer et puis là aussi. Ben, c'est le hasard qu'c'soit ... (Céc 107-109)

Le débat pour savoir si la propriété de convexité doit être prise en compte est du même ordre. Il montre la prise en compte d'une intention des auteurs en relation avec la résolution du problème :

il a souligné non-convexe, donc ça veut peut-être dire quelque chose ? (Emm 164).

La solution proposée, f(n)=f(n+1)+a(n+1), est élaborée et validée sur les

exemples fournis par le *Texte* . En particulier les élèves s'assurent de ce que la convexité n'intervient pas dans le calcul du nombre des diagonales. La mise en oeuvre de cette solution sur le polygone P_8 nous paraît être moins une validation par une expérience cruciale que la vérification de la faisabilité de la procédure proposée :

-c'qu'y a c'est qu'si t'en as plein d'côtés, y va falloir qu'tu fasses tout ça (Céc 533)

-au nombre tu rajoutes ... pour l'prochain, je sais que quand y aura 8 eh ben là ... on était à 5, y doit y en avoir 6. Ca doit faire 20, tu paries ! Attends, tu vas voir, on vérifie ... (Emm 534)

Cette démarche d'Emmanuelle serait plutôt à rattacher à une forme primitive de la récurrence (cf. chap.II, § II.2.1.), mais le contexte d'interaction peut évoquer l'expérience cruciale. C'est ce que nous avons retenu car au moins pour Emmanuelle la conviction est acquise avant cette nouvelle vérification. Mais ces élèves n'iront pas jusqu'à la formulation de leur solution : *on a trouvé, mais on sait pas l'expliquer* (Emm 817). En fait ces élèves ne considèrent pas leur moyen de calcul comme une solution acceptable parce qu'il "*faut savoir celui d'avant pour faire [...] et si ça s'trouve on l'sait pas. Y vont pas nous l'dire.[...] si on dit 18 comme ça et qu'tu sais l'17, tu peux pas faire selon ça* " (Céc 642-4-6). Leur objectif, manifestement hérité de leur lecture du contrat expérimental, est de trouver une formule : "*de toute façon y doit bien y avoir un truc, autrement y nous donneraient pas ça à faire quand même* " (Céc 1013).

Rémi et Christophe , à partir du *Texte* , énoncent deux propriétés, puis abordent l'examen du polygone P_7 concave (que représente la figure 6 du *Texte*) :

normalement y doit y avoir... 2 diagonales de moins que de sommet

en partant par chaque point [...] y a 2 sommets consécutifs (Rém 23-5-7)

Si y a une diagonale qui passe par là, c'est la même que celle qui passe par là, par ce point ici (Rém 27)

alors on va compter [dans P_7] toutes les diagonales. ...faut pas compter deux fois la même ... (Rém 43)

Les élèves souhaiteraient trouver une formule liant le nombre des sommets au nombre des diagonales valides pour tout polygone, mais des couples (7,14), (5,5) ils tirent la conclusion qu'il n'y a pas de régularité :

ça fait pas du tout pareil, tu vois ... là on a trouvé le double de diagonales que le nombre de sommets [...] et là le même nombre. Alors faudrait essayer avec 6. Seulement on risque de trouver chaque fois ... un truc différent (Rém 136-142)

Ceci est renforcé par le fait que sur un polygone P_6 convexe (qu'ils prennent pour un polygone à 7 sommets). Ils trouvent 9 diagonales :

c'est qu'en fait, on trouve pas du tout les mêmes résultats (Rém 196)

non ! ben [f(n) = 2n] c'était une coïncidence je pense (Chr 197)

Leur solution consiste en la construction de la suite $\mathcal{S}_n$, son fondement est essentiellement empirique, bien que des constituants d'une preuve possible aient-été énoncés : " *sur tous nos exemples, ça nous a montré qu'c'est bon* " (Rém 675).

Dans l'expression de leur solution (fig.15) l'itération est implicite dans "*en comptant chaque fois un sommet de plus ...* ", quant à la condition d'arrêt elle a été aperçue mais elle n'est pas explicitée.

alors, quand on arrive à O, ben on s'arrête, voilà, ça y est. On a fini (Rém 488).

Cette condition d'arrêt doit être "vue" sur l'exemple qui est donné de P_6.

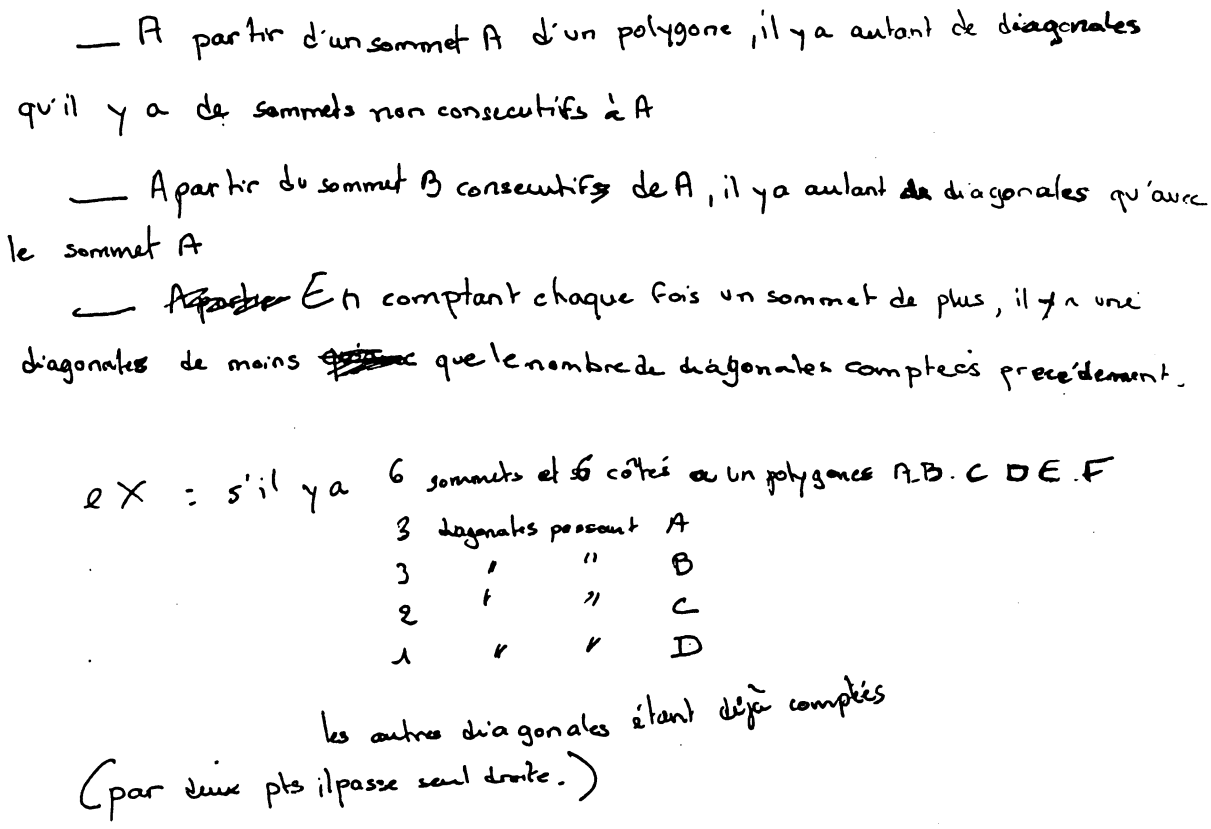


Figure 15

Bénédicte et Sandra , après avoir lu le *Texte* , examinent les polygones P_7 et P_5 que représentent respectivement les figures 6 et 5 du *Texte* . Elles affirment l'invariance du nombre de diagonales en chaque sommet d'un polygone, sans toutefois donner le moyen de le calculer, "*y ont pas tous les mêmes... ça m'énerve* " (San 196). Après cela elles affirment le modèle multiplicatif, f(n)=n.s(n), à propos du cas de P_7 , puis elles font une modification liée à la remarque que des diagonales sont «confondues» :

28 diagonales, c'est pas possible ! (Bén 207)

ben si, hein ! Si pour chaque sommet y en ce 4 (San 208)

oui, mais elles sont confondues... si tu dis que DF c'est une

diagonale, FD c'est une diagonale (Bén 209)
regardes dans un carré comme ça...ou dit que ce soit un carré, t'as 2 diagonales et tu dis pas qu't'en as 4 parce que t'as celle-là et celle-là, c'est les mêmes (Bén 242)
ouais, ben donc 28 divisé par 2 (San 243)

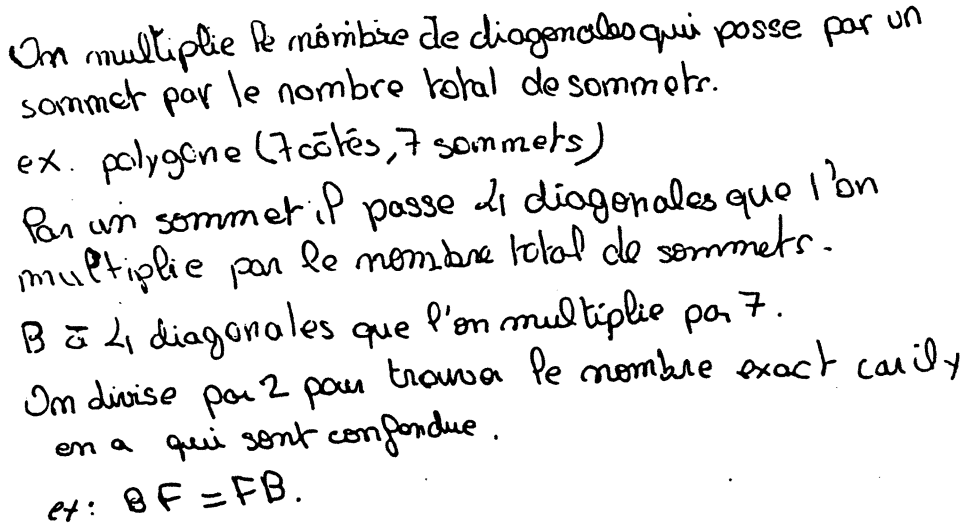


Figure 16

Le message (fig. 16) donne à voir ce procédé de calcul sur le cas de P_7. Cependant il nous semble que moins que celle d'exemple générique, c'est la valeur prototypique de P_7 qui est prise en compte. Les élèves sont vraiment dubitatives :

ça fait bizarre ! (San 255)
ben ouais, mais moi j'ai rien trouvé d'autre (Bén 256)
on a sûrement faux de toute façon (San 280).

Christophe et Olivier sur le polygone P_7 concave que représente la

figure 6 du *Texte* , font un dénombrement des diagonales issues d'un sommet. Ils tirent de cela :

> *c'est obligé, de A le nombre de diagonales est le nombre de côtés moins un* (Oli).

Ils ne distinguent pas côtés et diagonales, bien qu'ils aient lu le *Texte* . Par ailleurs le mot côté est mis là pour le mot sommet.

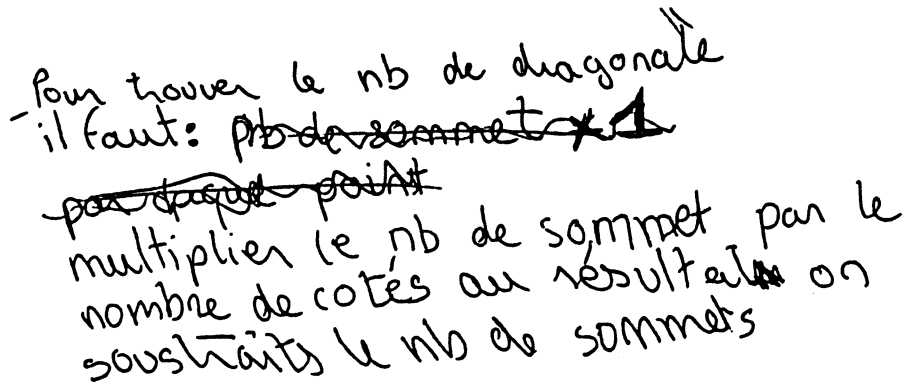


Figure 17

Les élèves concluent sur une solution (fig. 17) se proposant de faire une vérification qu'ils ne réaliseront pas :

> *il faut multiplier le nombre de sommets par le nombre de côtés moins 1...ou regarde si ça marche partout, sur tous les polygones* (Oli).

Les polygones en question sont ceux qui sont utilisés pour l'illustration du*Texte*.

c) L'exemple générique

Isabelle et Juliette construisent une solution en s'appuyant essentiellement sur un polygone P_6 à propos duquel elles explicitent les définitions et les relations entre les différents éléments impliqués dans la résolution du problème :

d'après la règle (Jul 113)

on appelle diagonale un segment joignant 2 sommets non consécutifs (Isa 114)

donc, il y a donc 3 diagonales issues d'un sommet (Jul 117)

à chaque fois il y en aura pareil (Isa 118)

ouais, mais si on fait un polygone, ça dépend s'il est concave ou convexe (Jul 142)

ouais, ben faut faire les deux ! (Isa 151)

non, regarde : on appelle diagonale un segment joignant deux côtés non consécutifs (Jul 154)

ça va ... ça va ... , non parce que j'avais pas lu ça. Non parce que là ça fait une diagonale aussi [figure 6] (Jul 156)

de toutes façons, c'est toujours la même chose ... à chaque fois qu'on prendra un sommet, y aura 3 diagonales qui partiront de ce sommet [...] c'est vrai parce que si on prend le point E, il aura pour sommets consécutifs F et D, donc gna... gna (Jul 178-80)

La mise en oeuvre sur P_6 réfute l'anticipation f(6)=6x3 et conduit, par une correction ad hoc, à f(6)=(6x3)/2 :

il y a 6 sommets, 6 x 3... 18, il y a 3 diagonales par sommet et on divise par 2 [...] parce que la moitié des diagonales sont identiques (Jul 368-84)

Mais les élèves reconnaissent que "*c'est que si y a 6 sommets que ça*

marche " (Isa 427) et que "*il faut faire dans un cas général* " (Jul 428). A partir de l'examen de P_4, P_5 et P_6 elles déduisent s(n)=n-3 qu'elles vérifient sur P_7 :

> *ça fait l'espace de 3 chaque fois, 3+3 ça fait 6 ... 2+3, 5 ... 1+3, 4 à chaque fois. T'as vu ? On rajoute 3 pour ... trouver le nombre, 2 et 3 : 5 ; 1 et 3 : 4 ; 3 et 3 : 6* (Isa 467)
>
> *et on va voir à 7 ... 7côtés* (Jul 468)
>
> *4 diagonales* (Isa 473)
>
> *à chaque fois ça augmente de 3* (Isa 477)

Elles rédigent ensuite la solution (fig. 18) effaçant toute référence à l'exemple qui a servi à son élaboration pour "*le faire dans le cas général* " (Isa 493).

Nous relevons dans ce binôme à la fois une démarche de généralisation délibérée, attestée notamment par la rédaction de la solution, et un empirisme naïf au terme du quel les élèves paraissent s'en remettre à la confirmation de leur solution sur quelques exemples. Cette contradiction est dépassée si l'on attribue une valeur générique au polygone P_6 sur lequel la solution est construite et sur lequel les élèves ont manifestement « raisonné ». Comme nous l'avons déjà relevé (chap.II, § II.2.3.), dans un contexte d'intéraction sociale la pratique de vérification n'est pas exclue par une validation utilisant un exemple générique.

Pour trouver le nombre de diagonales d'1 polygone qui a xc sommet on diminue le nombre de sommets de ce polygone par 3 et on obtient le nombre de diagonales pour 1 sommet.

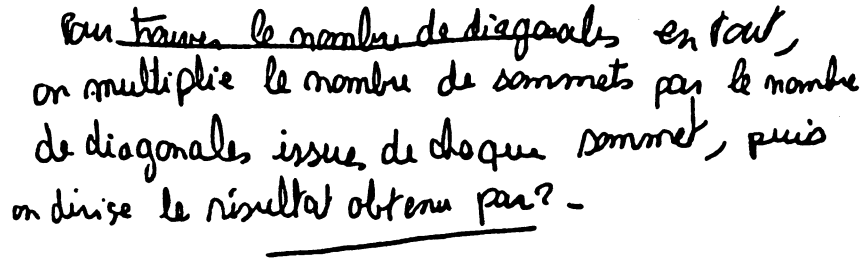


Figure 18

Laurence et Anne-Laure examinent les figures 3, 4 et 5 du *Texte* , avec comme référence la définition de diagonale. Puis sur le cas de P_7 (figure 6), elles expriment le nombre de diagonales en chaque sommet d'un polygone. Le souci de généralisation est très fort, il exige la suppression de toute référence à un nombre précisé :

tu prends le nombre de sommets, bon, t'enlèves le sommet que tu prends, donc ça t'en fait 6 tout autour. Tu enlèves les 2 consécutifs et tu sais qu'il en passera 4. Et c'est comme ça pour chaque sommet (Ann 159)

il faut mettre - 3 parce que... (Ann 169)

mais y faut pas mettre de nombre en fait (Lau 170)

ben si on peut mettre des nombres (Ann 171)

ben non, parce que ce serait un exemple, ce serait pas un contre-exemple

(Lau 172)

ouais, ce serait un exemple pas généralisé (Ann 179)

y a toujours que 2 angles qui sont consécutifs, c'est obligé donc (Ann 192).

Mais comme nous venons de le rappeler, la preuve fondée sur l'exemple

générique est accompagnée de vérification ou d'expériences cruciales destinées à convaincre un partenaire hésitant. Après que la première partie du texte (fig.19) ait été rédigée, Anne-Laure montre son hésitation :

ouais mais ça ne nous dit pas si c'est bon (Ann 443)

on va voir si c'est bon dans cui-là (Ann 455, sur un polygone P_6)

dans ceux-là, y a pas de problème. C'est bon dans les convexes (Ann 455)

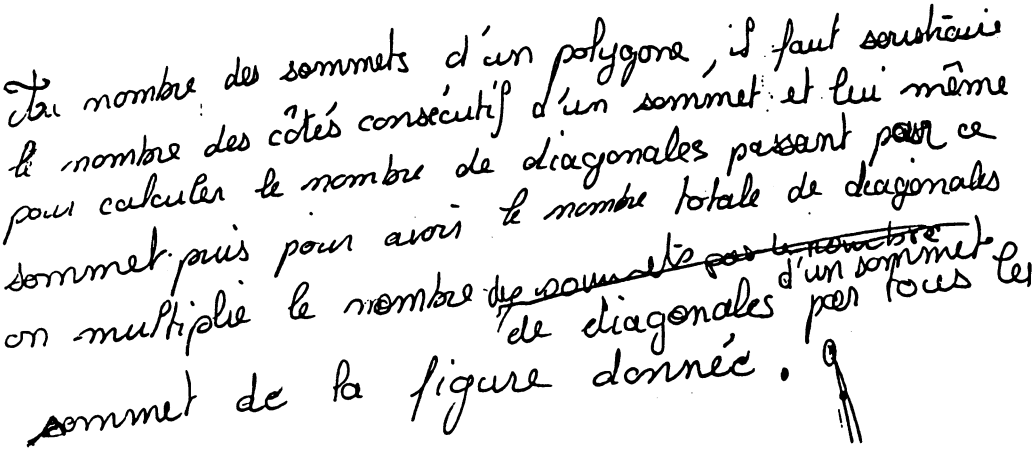


Figure 19

Une autre vérification est faite avec un polygone P_6 non convexe "*et dans les non convexes ça va. C'est bon ! Reste à savoir si c'est bon dans les croisés* " (Ann 467). Ce problème ne sera pas traité. Les élèves expriment le modèle multiplicatif : "*pour avoir le nombre de diagonales on multiplie par tous les sommets* " (Lau 533). A nouveau une vérification est menée sur un P_8 concave, mais il ne s'agit en fait que de constater sur ce dessin que les relations utilisées sont confirmées sans pour cela aller jusqu'au bout de la vérification. Le fait que des diagonales soient comptées deux fois est remarqué, mais accepté ; il s'agit de diagonales confondues : *ça c'est une diagonale et l'autre ... ben l'autre elle est comme ça, ben y en a 2,*

hein : ça fait un et deux (Lau 611).

III.2.2. Le traitement des contre-exemples

a) Les données générales

Nous avons utilisé pour la présente analyse les mêmes catégories que celles utilisées au chapitre précédent. Les tableaux ci-dessous montrent comment sont repartis les traitements des réfutations au cours des deux phases de l'observation.

Première partie de l'observation

	Sté Jul	Rém Chr	Chr Oli	Ben San	Loï Mar	Mab Sih	Cec Emm	Isa Jul	Ann Lau
Abandon de la conjecture			1						
Motif de la conjoncture				1		1			
Exception		1							

Remarque : introduction d'une condition, reprise de la définition et rejet du contre-exemple n'apparaissent pas dans cette première phase

Seconde partie de l'observation

	Sté Jul	Rém Chr	Chr Oli	Ben San	Loï Mar	Mab Sih	Cec Emm	Isa Jul	Ann Lau
Abandon de la conjoncture	2	.							
Motif de la conjoncture				.	1	.			
Exception	1	1		1	1	1		1	
Condition	1	.							
Définition									
Rejet du contre-exemple	1	1	1	2		1		2	3

Deux faits sont principalement mis en évidence :

- d'une part, très peu de contre-exemples apparaissent au cours de la première phase, contrairement à ce que nous avions observé dans la première modalité (chap.II, § III.2.2.). Cela tient à l'évidence au fait que la plupart des solutions sont correctes, quoique de fondements empiriques ; nous voyons là un effet essentiel du *Texte* .qui a conduit à la disparition de conceptions qui étaient à la source de conjectures «fragiles».

- d'autre part, les réfutations rencontrées au cours de l'une ou l'autre des deux phases ne renvoient pas à une reprise des définitions. Rappelons qu'au cours de la première expérience le problème de la définition avait été abordé d'emblée par la plupart des élèves qui le soulevaient à la rencontre d'une réfutation. En revanche dans la présente expérience la plupart des élèves ont d'abord lu le*Texte* qui leur était fourni, cela a pu être suffisant pour fixer leurs conceptions de polygone et diagonale, au

moins pour la durée de la résolution de ce problème.

Par ailleurs il apparaît, comme lors de la première expérience, que les abandons et modifications de conjecture dominent la première phase alors qu'en revanche ce sont les exceptions ou rejet du contre-exemple qui dominent la seconde. Il faut voir ici les traces respectives du triangle et du pentagone concave à sommets alignés, pour ce dernier le rejet correspond à la découverte de la « diagonale cachée ».

b) L'abandon de conjecture

Stéphanie et Julie soutiennent d'abord la conjecture f(n)=2n (alors qu'en fait elles envisageaient initialement f(n)=n/2), face aux contre-exemples de l'observateur elles se défendent de façon ad hoc (cf. § III.2.2.e.) notamment en réduisant leur solution aux seuls polygones convexes. C'est après avoir noté leur erreur de formulation (elles écrivent d'abord : "*nb de sommets=2 x nb diagonales* " puis "*le nb de diagonales est égal au double du nb de sommets* ", cf. fig.12), et parce qu'elles se posent la question d'une solution commune aux polygones convexes et non convexes, qu'elles s'engagent dans la recherche d'une nouvelle solution.

non, c'est égal à la moitié du nombre de sommets (Jul 221)

on s'est toute trompée ! (Sté 228).

Mais ce renoncement à une solution remise en question, si elle paraît légitime dans cet exemple, n'en est peut-être pas moins le témoin d'un comportement empirique («abandon d'emblée», chap.II, § III.2.3.a). En effet, ces élèves vont parvenir à f(n)=n.(n-3)/2 sans la formuler complètement (en en attestant la mise en oeuvre sur les polygones P_7, P_6 et P_5), mais elles abandonnent cette solution parce qu'elle leur paraît réfutée par P_4 :

ouais, mais regarde aussi, puisqu'on avait trouvé 2 [dans P_4], on va pas en trouver une, puisque...(Sté 389)

ouais, mais regarde pour 4 ça marche pas ! (Sté 391).

Ces deux élèves avaient initialement trouvé deux diagonales pour P_4, ce qui est apparant sans qu'un véritable dénombrement soit nécessaire, mais comme elles reconnaissent s'être "*toute trompée* " dans les premiers cas étudiés, il leur semble que pour P_4 aussi le nombre de diagonales du premier dénombrement serait à diviser par deux... ce qui donnerait 1 diagonale et serait évidemment faux. Les élèves se tourneront alors vers une nouvelle solution : f(n+1)=f(n)+a(n+1).

Christophe et Olivier partent de l'analyse du contre-exemple que l'observateur oppose à leur solution, f(n)=n.(n-1), pour élaborer une nouvelle solution : "*ouais, mais dans le triangle, tous les côtés sont tout le temps consécutifs* ". Ceci les conduit, après un retour au *Texte* , à affirmer la distinction entre côté et diagonale. Après un examen de deux polygones P_5 et P_6 convexes ils proposent : *le nombre de diagonales est le nombre de côtés opposés dans un polygone* . Cette solution paraît d'autant plus satisfaisante qu'elle permet de résoudre le problème que pose le cas du triangle : "*pas de côtés opposé, pas de diagonale* ".

Loïc et Marc, eux aussi, abandonnent leur conjecture à la suite de sa réfutation. Mais cela est l'objet d'un débat très vif dans lequel il apparait que le renoncement à une solution est coûteux, l'adjonction de conditions ad hoc est en fait la marque d'une négociation. A propos de P_5 concave que leur oppose l'observateur, les élèves calculent (5-3)+(5-3)+(5-4)+(5-4), soit 6 diagonales, ce qui est en contradiction

avec ce qu'ils ont dénombré sur la figure. Marc, qui soutenait principalement cette solution, va la défendre en proposant une explication ad hoc à son échec :

j'crois qu'c'est pour les angles rentrants que ça marche pas (Mar 648)

à partir de 5 la théorie marche pas (Loï 663)

En effet elle avait été validée sur P_4 : (4-3)+(4-3)+(4-4)+(4-4)=2. Pour sa part Loïc soutient $\Sigma\mathcal{P}n$, les deux solutions sont confrontées sur le cas de P_6. Bien que sa solution soit réfutée, Marc résiste :

et pourquoi ça fait un changement si brusque ? Pourquoi ça tombe d'un seul coup ? " (Mar 714)

Il dénonce là le traitement apparemment particulier des deux premiers termes de $\mathcal{P}n$ d'autant que sa solution lui paraît fondée :

la théorie est quand même bonne ! regarde ... c'est normal que t'en enlève 3 en tout ... regarde ... c'est t'as le tien, t'as celui sur lequel on parle " (Mar 803).

et les côtés consécutifs (Loï 804)

ensuite au deuxième [...] c'est la même chose, parce que [...] y sont consécutifs [...] le troisième, t'en enlèves 1, parce qu'y a celui d'avant [...] le quatrième c'est pareil (Mar 807-13, 817)

non ! le quatrième t'en enlèves 2 ! (Loï 819)

non, mais oh ...j'te parle là, des trucs impairs (Mar 819)

oui, mais regarde ... pour le quatrième ... disons le quatrième c'est D [sur P_7] on avait déjà ... comme y a qu'un côté consécutif pour ... un segment, avec un segment ... y a qu'un côté consécutif à celui-là ... donc on en enlève, en fait, on en enlèvera (Loï 822).

Mais Loïc ne parvient pas au terme de son explication. Marc s'impatiente.

Loïc valide concrètement sa solution sur un P_5 convexe qui prend vraisemblablement là le statut d'exemple générique :

oh ben alors c'est pareil [...] c'est pareil pour les impairs...pour les pairs, alors ? (Mar 839-840)

c) Modifications de la conjecture

Les modifications de la conjecture, peu nombreuses, que nous avons observées sont tout à fait cohérentes avec les démarches de validation empirique qui dominent les comportements des élèves observés durant cette expérience. Il s'agit de modification ad hoc visant à effacer les effets indésirables des réfutations.

C'est par exemple le cas de Marc dans la situation ci-dessus qui pour se sortir d'une contradiction (sa procédure conduit à énoncer qu'un sommet, dans le cas d'un poygone impair, aurait -1 diagonale) propose de laisser un sommet de côté dans le cas des polygones impairs ; en effet dans le cas du triangle on a dans ce cas f(3)=(3-3)+(3-3)=0.

C'est aussi le cas de Mabouba et Sihem qui modifient leur conjecture initiale «f(n)=n.s(n)», en la conjecture «f(n)=si le polygone est convexe alors n sinon n.s(n)» qui permet de dépasser la contradiction attestée par P_5 convexe.

Cet aménagement ad hoc peut voisiner avec ce qui pourrait en être les raisons, sans que pour autant les élèves s'appuient sur ces dernières. C'est le cas de Bénédicte et Sandra qui transforment leur conjecture f(n)=n.s(n) en f(n)=n.s(n)/2, leur référence au carré souligne le caractère

adapté de cette transformation :

28 diagonales, mais c'est pas possible ! (Bén 207)
ben si hein, ! Si pour chaque sommet y en a 4 ... (San 208)
oui, mais si elles sont confondues ... A ... Si tu dis que DF c'est une diagonale, FD c'est une diagonale (Bén 209)
oui, mais regarde ... dans un ... dans un carré, comme ça ... on dit qu'ce soit un carré ... t'as 2 diagonales et tu dis pas qu't'en as 4 parce que t'as celle là et celle là ... c'est les mêmes (Bén 242)
ouais ... ben donc 28 divisé par deux (San 243).

d)Le statut d'exception et l'introduction d'une condition

Nous souhaitons considérer ici ensemble le traitement d'un contre-exemple comme une exception et l'introduction d'une condition. Pour donner du sens à ce choix nous commençons par un exemple ; Marc envisage de rejeter le triangle :

mais c'est avec les polygones ! ah ben oui, c'est ... c'est un polygone (Mar 525)
eh ben ça marche pas [...] parce qu'on arrive à -1 [...] c'est un cas particulier ! C'est l'exception qui confirme la règle ! [...] y faut qu'ce soit superieur à 3 les angles (Mar 333-Loï 342).

En fait, à un cas près que nous présenterons à la fin de ce paragraphe, l'introduction d'une condition a lieu à propos du cas du triangle. Contrairement à ce que nous avons souvent observé lors dans la première modalité, le triangle n'est pas rejeté comme contre-exemple car le *Texte* l'impose comme un authentique polygone. Il est considéré comme un cas particulier dont le sort est réglé par l'introduction d'une condition ou d'une restriction adhoc du domaine de validité de la conjecture :

Stéphanie et Julie : "*y a pas de diagonales donc [...] cette règle s'applique aux figures de plus de 4 sommets ... alors d'au moins 4 sommets* " (Jul 148, Sté 153)

Remi et Christophe : "*ça marche pas parce qu'on peut pas tracer des diagonales dans un triangle, donc y faut signaler un polygone, ben ... au dessus [...] un polygone qui a 3 côtés* " (Rem 696, Chr 697)

Ce dernier binôme avait traité de façon analogue le cas de P_4, moins du fait d'une contradiction que de leur incapacité à dépasser leur connaissance de ce que P_4 a deux diagonales qui est perçu d'emblée et s'oppose curieusement à la mise en place de leur solution (il s'agit de $\Sigma \mathcal{P}n$) soit : *on va faire au-dessus de 4 côtés parce que 4 côtés on sait qu'y a toujours 2 diagonales* (Rém 268).

Bénédicte et Sandra : "*mais y a pas de diagonales [...] dans un triangle [...] au moins qu'y ait 4 côtés au moins [...] faudrait qu'ce soit dans une figure qui ait 4 côtés* " (Ben 282-San 290)

Mabouba et Sihem (Mab 543-Sih 554) protestent que le triangle n'a pas de diagonales parce qu'"*ils sont tous consécutifs ces machins* " et elles réduisent le domaine de validité de leur solution "*c'que j'veux dire c'est...on part seulement à partir de...4 sommets* " (Sih 554).

Isabelle et Julie réduisent de même le domaine de validité de leur solution, envisagent de plus des polygones de 1 ou 2 sommets qui seraient alors exclus :
on commence les polygones à partir de 4. Ceux qui sont en dessous de 4, y sont...c'est pas possible (Isa 637)

y peut pas y avoir des figures qui ont 2 ? (Jul 650)
non, c'est pas possible...ben un 1, c'est obligé évidemment ! (Isa 651).

En dehors de ceux cités ci-dessus qui correspondent au traitemement du cas du triangle, le seul cas d'introduction d'une condition est celui de Stéphanie et Julie . Ces élèves cherchent à défendre leur conjecture, mais sans la remettre en question. La condition introduite a un caractère tout à fait ad hoc, ce qui est cohérent avec l'empirisme naïf qui fonde la solution f(n) = 2n que proposent ce élèves :

- *c'est faux c'que j'ai dit* (Jul 167)
- *c'est pour les figures convexes qu'on a dit nous* (Sté 168)

e) Le rejet du contre-exemple

Ce traitement d'une réfutation n'a été observé que dans le cours de la deuxième partie de l'observation. Il concerne principalement le polygone P_5 dans une configuration « cachant une diagonale » et un polygone croisé P_4 dont la figure 3 du*Texte* fournit une représentation.

Pour deux binômes ce rejet traduit un comportement d'évitement de la remise en question de leur solution à propos d'un polygone P_4 croisé :

Stéphanie et Julie : "*elle marche pas, on va l'éliminer celui-là* " (Sté 641)

ou à propos du triangle qu'ils rejettent :

Christophe et Olivier *"oui, mais dans le triangle, tous les côtés sont tout le temps consécutifs "* (Oli)

Pour les autres binômes le rejet est fondé sur une analyse du contre-exemple et la mise en évidence d'une interprétation erronée (diagonale cachée, ou interprétation du point de croisement du polygone croisé). Pour deux d'entre eux cette analyse est conduite en référence à leur conception de diagonale qui distingue une diagonale AB de la diagonale BA. Cette distinction est bien mise en évidence par les décisions prises par les élèves :

Pour Mabouba et Sihem cette conception a un caractère problématique qu'elles ne tranchent pas, ni lorsqu'elles rencontrent le contre-exemple P_4 à leur conjecture f(n) = n.s(n) :

y en a qu'deux ! Peut pas y en avoir 4 parce qu'ils sont confondus... (Mab 533)

ni quand l'observateur leur propose un P_5 à points alignés :

ben y'z'ont tous une diagonale les sommets et en plus celle là elle est confondue, regarde ... (Mab 595)
ouais, ben c'est pour ça ! (Sih 596)
... la diagonale du sommet B, elle est confondue avec la diagonale de D; celle de C, elle est confondue avec celle de E (Mab 597)
ben ouais, y en a qui sont confondues ... (Sih 598)

Anne et Laurence ont attesté de cette conception lors de l'élaboration de leur solution f(n)=n.(n-3), elles la confirment face au quadrilatère que l'observateur leur oppose comme contre-exemple :

on les compte, en fait si tu regardes comme ça, t'en vois qu'deux

(Ann 662)

mais elles sont confondues (Lau 663)

quand on r'garde comme ça on en voit 2, mais nous on en trouve 4. On trouve celle qui fait par là et celle qui fait par là (Ann 670).

Le traitement des contre-exemples par Isabelle et Juliette va un peu plus loin dans la mesure où il a lieu en référence aux fondements de leur solution, même si ceux-ci ne sont pas explicités. Rappelons que cette solution f(n)=n.(n-3)/2, s'appuie essentiellement sur un exemple générique. Ainsi le polygone P_5 présentant une configuration de sommets alignés, est rejeté après un nouvel examen de la procédure de calcul :

on s'est trompé quelque part ...bon attends (Isa 673)

mais là, ça marchait pourtant là (Jul 674)

attends on va refaire un autre de 5 sommets (Jul 678)

5, donc on est pareil que là, et là on a multiplié par 2, pourquoi ?

Parce qu'y avait ... à chaque sommet (Jul 688)

2 diagonales (Isa 689)

et après on a divisé par 2 ... est égal à 10 ... et après...on divise par 2, ça fait 5, ... (Jul 692)

y en a : 1-2-3-4 ...y en manquait une (Jul 720)

Une démarche analogue conduit au rejet de P_4 croisé, le problème est celui de l'interprétation du «croisement» :

on s'est trompées (Isa 743)

pour les polygones croisés, ben ça marche pas (Jul 754)

puis vient la question de savoir si

ça c'est un sommet ? [...] parce que si c'était pas un sommet, ça marcherait (Jul 782-792)

ben ouais, ça c'est pas un sommet...parce que c'est la [figure]

numéro 4 (Isa 806)

Nous ne considérons pas dans ce dernier cas qu'il s'agisse d'un véritable retour sur la définition, comme on peut être tenté d'en juger dans une première approche, car le problème soulevé a un caractère très local; c'est celui d'une interprétation d'une configuration et non de la mise en question des conceptions des élèves engagées dans la résolution du problème.

III.3. Les fonctions du Texte

Tous les binômes observés ont abordé la résolution du problème par une lecture préalable du *Texte* .

Ce comportement peut très bien être interprété comme un effet du contrat expérimental : le *Texte* doit servir puisqu'il est fourni par l'observateur. Nous avons relevé des propos des élèves qui vont assez clairement dans ce sens : "*s'ils nous l'ont donné, c'est bien qu'y a qu'une chose...alors, attends, on va bien le relire* " (Stéphanie et Julie, Sté 244).

L'usage qui en est fait ensuite, dans le cours de la résolution, a deux types d'origine, exogène ou endogène, de façon analogue avec ce que nous avons relevé pour l'entrée dans une problématique de la définition dans l'expérience précédente. Les origines endogènes correspondent à un recours au *Texte* à la suite de questions soulevées par la résolution du problème, notamment pour ce qui concerne la définition de diagonale, ou par des conflits d'interprétation entre les élèves mais cela est beaucoup

plus rare. Les origines exogènes participant du contrat expérimental, elles attribuent au *Texte* une fin relativement à la résolution du problème.

C'est autour de ces deux types d'origine que nous organisons notre analyse.

III.3.1. Le *Texte* porteur d'intention

Certains élèves ont pu chercher dans le *Texte* les marques d'une intention des auteurs directement liée à la résolution du problème. Comme le souligne Stéphanie citée ci-dessus, le *Texte* doit bien servir à quelque chose. Ainsi la mise en page, l'usage des italiques, de caractères gras ou d'autres procédés, la typographie, peuvent être pris par les élèves comme des indices : "*oui, mais regarde, il a souligné là : convexe ... on distingue aussi les polygones ...*" (Emm 164).

La valeur prototypique accordée aux exemples que nous avons mise en évidence plus haut à propos des démarches empiriques va dans ce sens. En voici une autre indication, dûe au binôme Stéphanie et Julie, à la suite de la réfutation de leur conjecture par un quadrilatère croisé; elles ont cherché à étendre leur solution :" *et puis ils se débrouilleront s'ils croisent plus d'une fois ! Non, mais, puisqu'on nous a donné un exemple où y s'croisent une fois, ça devrait aller. Hein ?* " (Sté 767).

Par ailleurs comme nous l'avons noté en étudiant les solutions proposées et leurs fondements, le polygone concave P_7 présenté par la figure 6 du *Texte* est utilisé par la majorité des binômes comme un polygone quelconque « type ». Ce statut qui lui serait conféré par sa

fonction qui est de « montrer » les différents éléments d'un polygone : sommet, côté, diagonale. Rappelons que lors de la première expérience c'est P_4, notamment le carré ou le parallélogramme, et les polygones P_5 ou P_6 qui avaient eu cette fonction prototypique.

Ce recours à la Figure 6 du *Texte* pouvait inviter les élèves à ne pas distinguer le cas des polygones convexes de celui des concaves, au moins parce que les diagonales extérieures sont explicitement admises : *le segment AF est une diagonale, AD aussi. Ah ouais, donc ça peut aussi être exterieur* (Rémi 15).

Cette distinction est cependant faite plusieurs fois a priori comme une conséquence des distinctions apportées par le*Texte* au niveau des définitions. Ainsi Stéphanie et Julie se posent d'emblée la question après la lecture du *Texte* : "*il est convexe ou non convexe le polygone ?* " (Jul 13-15), pour s'en tenir d'abord aux convexes : "*d'abord vaut mieux déjà essayer d'trouver avec convexe* " (Syl 342) et lorsque leur solution sera réfutée :

il est pour tous les convexes, mais pas celui-là, celui-là, regarde, c'est la figure 3. (Jul 646)
ah ben voilà ! (Sté 647)
c'est un polygone croisé ! (Jul 648)
Ah ouais, il est pas pour les polygones croisés ... ben voilà (Sté 649).

Ce rôle des représentations graphiques utilisées dans le*Texte* est bien illustrée par la résolution du problème par Mabouba et Sihem. Ces élèves tirent de leur lecture, principalement à la suite de l'exemple de la

figure 6 : "j'*sais pas si j'ai bien compris, mais regarde 7 sommets, j'crois qu't'as 7 diagonales. Mais j'suis pas sûre, parce que...*" (Mab 22). En fait de l'examen de P_7 elles tireront f(n)=n.s(n). Elles se proposent de "*faire le cas pour tous les machins* " (Sih 119) après avoir constaté la réfutation par le polygone P_5 convexe que représente la figure 4, mais elles renoncent parce qu'elles ne comprennent pas la figure 3 : "*c'est pas facile, mais croisé. J'y pige rien !* " (Mab 132). Elles s'en tiennent alors à f(n)=n. pour les polygones convexes et f(n)=n.s(n) pour les polygones concaves. La figure 5, P_5 concave, n'est pas examinée, vraisemblablement parce qu'elle appartient à la même classe d'objets que P_7. Mais tout n'est pas réglé : "*on a pas terminé : les polygones croisés* " (Sih 477). Cependant ce cas est éludé, Mabouba produit un argument ad hoc : "*on prend polygone en général. On va pas prendre chaque cas, non ?* " (Mab 478), alors que par ailleurs leur solution distingue au moins deux cas : convexe et concave.

III.3.2. Le *Texte* et les questions de définition

Relativement à la définition, une première fonction du *Texte* est d'avoir fourni un point de départ à la résolution du problème :

> *deux minutes, j'vais d'jà lire ça ! Ca peut peut être nous aider...*
> (Loï 185)
> *ouais ça c'est ... ça c'est important, ouais !* (Mar 192)
> *c'est bien c'que j'disais, c'est une histoire de côtés consécutifs*
> (Mar 194)

La résolution a ensuite lieu sous le contrôle de la définition pour la plupart des binômes (Rémi et Christophe, Loïc et Marc, Christophe et

Olivier, Bénédicte et Sandra, Cécile et Emmanuelle, Isabelle et Juliette, Anne et Laurence, Béatrice et Sylvie). Elle conduit essentiellement les élèves à analyser ce qui se passe en un sommet d'un polygone. Le cas d'Isabelle et Juliette en est un bon exemple :

> *alors on va faire les diagonales [...] donc faut procéder par sommet, ou prendre un sommet ...* (Jul 11-15).

Puis elles reviennent à la définition :

> *regarde, on appelle diagonale un segment joignant deux sommets non consécutifs* (Jul 55)

Elles recherchent alors les diagonales sous le contrôle de cette définition :

> *bon d'après la règle* (Jul 113)
>
> *on appelle diagonale un segment joignant deux sommets non consécutifs* (Isa 114)
>
> *alors, définition d'une diagonale...donc AE, AD, AC, sont des diagonales* (Jul 115)
>
> *donc il y a 3 diagonales issues d'un sommet* (Jul 117)
>
> *à chaque fois y en aura pareil* (Isa 118)

Ou encore, pour un autre binôme :

> *à partir d'un sommet A [...] d'un polygone, il y a autant de diagonales qu'il y a de sommets non consécutifs au sommet A* (Rém 479-481).

Cette orientation de la résolution explique que la moitié des solutions observées soient du type f(n)=n.s(n). Plusieurs binômes s'écartent de cette voie parce qu'ils sont confrontés au problème de ne compter qu'une fois chaque diagonale. Ce problème apparaît le plus souvent sous la forme du problème des « diagonales confondues » sur lequel, comme le dit Olivier : "*ils [les auteurs] disent pas* ". En l'absence d'éléments du *Texte*

permettant de décider certains binômes accepteront de compter deux fois les diagonales (Mabouba et Sihem, Anne et Laurence), d'autres ne trancheront pas (Christophe et Olivier, Cécile et Emmanuelle). Nous rapportons ci-dessous le dialogue de Cécile et Emmanuelle qui ont identifié des diagonales ayant plus d'un point d'intersection dans la figure 6, puis se trouvent confrontées à la figure 5 où elles ne trouvent que 3 diagonales :

ouais, mais si c'est confondu ça compte peut être aussi (Céc 147)
et ben non ! (Emm 148)
ça peut compter mais... (Emm 150)

on appelle diagonale un segment joignant deux sommets consécutifs (Céc 151)
c'est p't'être un cas particulier (Emm 156)

Dans le registre de la définition, la seconde fonction du *Texte* est d'être un élément de référence pour des questions d'interprétation issues de réfutations ou de conflits entre les élèves. En fait cet usage sera peu fréquent car les principales sources de difficulté que nous avions identifiées lors de la première expérience (les définitions de diagonale et polygone) semblent à peu près taries par la donnée d'un texte dès le début de la résolution du problème.

La principale origine d'un retour au texte sur un problème de définition est le traitement du cas du triangle. Lors de la première expérience le fait que le triangle soit un polygone a été plusieurs fois remis en question parce qu'il n'avait pas de diagonales (il était alors soit rejeté, soit traité comme une exception). Dans la présente observation, l'absence de diagonales est expliquée par la définition fournie par le *Texte* : *quand y*

a un triangle...y a pas de diagonales parce que les côtés sont tous consécutifs (Rem 500). Une telle explication est proposée par Rémi et Christophe, Loïc et Marc, Anne et Laurence, Christophe et Olivier, Mabouba et Sihem. Ceci écarte bien sûr le traitement du cas du triangle par son rejet comme polygone, il s'en suivra sa mise à l'écart comme exception ou par l'introduction d'une condition (§ III.2.2.d.)

Les autres retours au texte sur des problèmes de définition, sont peu nombreux nous les donnons ci-dessous :

Loïc et Marc, après avoir traité les réfutations soumises par l'observateur, se posent le problème du cas du segment :

un segment, avec un segment y a qu'un côté [en fait : sommet] consécutif à celui-là (Loïc 842)
non ! mais c'est pas une figure, un segment ! (Mar 843)
c'est un polygone, y'a 2 angles ! (Loïc 844)
et alors ? un polygone, c'est à partir de 3 angles (Mar 845)
regarde la fiche qu'on a eu (Loïc 848)
donc, il est pas brisé ton segment, hein ! (Mar 849)
non, ça fait rien (Loïc 850)

et ils en resteront là ...

Mabouba et Sihem , à propos de la figure ci-dessous, ont un différent sur ce qu'est un quadrilatère.

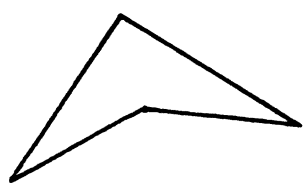


Figure 20

- j'te dis qu'c'est un quadrilatère ! (Sih 300)

faut que je me souvienne de la définition ... attends ... quadrilatère (Mab 301)

non, mais ça ça a rien à voir ! Parce que c'est avec ... les ... (Sih 302)

mais oui, mais ça, c'est pas un quadrilatère ! C'est un polygone, c'est pas un quadrilatère ... un quadrilatère c'est ... (Mab 303)

un polygone à 4 côtés ... c'est un quadrilatère, à 5 c'est un pentagone ... à 6 c'est un hexagone, ou j'sais pas trop quoi ... à 8, c'est un octogone ... à 10 ... décagone (Sih 304)

bon t'as raison ! Après qu'est-ce tu veux faire (Mab 305)

Il peut être intéressant de noter ici que ce polygone a présenté des difficultés dans un passé lointain. Heath (1925, p.188) mentionne que Proclus considérait le polygone représenté par la figure ci-dessus comme un paradoxe de la géométrie : un tri-angle à quatre côtés. A l'origine de la position de Proclus se trouvait la non reconnaissance de l'angle rentrant comme étant un angle. Ce n'est cependant pas une difficulté de cet ordre qui conduit Mabouba à protester, mais plus certainement le modèle prototypique du quadrilatère convexe.

Se posant le problème du décompte des diagonales dans la « ligne brisée fermée » que représente la figure 2, Cécile et Emmanuelle reviennent à la définition des polygones croisés :

ça c'est pas un sommet ça, là ! (Céc 292)

attends, polygone ... polygones qui ont 2 côtés qui se coupent ailleurs qu'en leurs extrémités, s'appellent polygones croisés. On distingue aussi les polygones...peut-être que c'est un sommet (Emm 293).

l'extrémité commune de 2 côtés adjacents s'appelle sommet. Ca c'est pas les côtés adjacents ... attends, ça c'est ça ... là, ça ... ça c'est

l'côté on a dit. Tout ça. Ca c'est un côté, ça c'est un autre (Céc 294)
et y sont pas adjacents, donc ça c'est pas un sommet et là ça fait pareil (Céc 296)

Mais la question initale n'est pas tranchée. Elles y reviennent à propos de la configuration ci-contre :

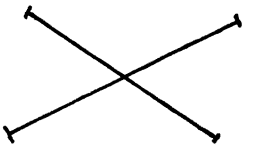


Figure 21

quoique ... c'est 2 segments ... puisque c'est 2 segments consécutifs [...] par exemple ça s'croise et ces 2 segments qui s'croisent [...] et ben ça, ça formera un segment, et ça aussi (Emm 307-11)
ça forme 4 segments en tout ! (Emm 315)
mais j'sais pas, c'est bizarre quand même (Céc 318)
ouais, mais alors à ce moment là ça en f'rait 4. Oh moi j'pense pas, hein... (Céc 322)
les polygones qui ont 2 côtés qui s'coupent ailleurs qu'en leurs extrémités s'appellent polygones croisés... (Emm 323)
l'extremité commune à 2 côtés adjacents s'appelle le sommet. C'est pas une extrémité ! tu vois, tu vois, voilà ! L'extremité ils disent, l'extrémité commune ... ça c'est pas une extrémité, tu vois ? Donc c'est pas un sommet. Tu vois ? (Céc 324)
l'extrémité commune de 2 côtés adjacents s'appelle le sommet. Ouais t'as raison ! (Céc 328)
6, donc en principe, ben ... avec 6 sommets il y a [dans la figure 2]... (Emm335).

Anne et Laurence font une analyse très fine du *Texte* pour décider de ce qu'est un polygone quelconque :

- *c'est en général, hein* (Lau 349)

- ah oui, tous les deux c'est des polygones [figures 4 et 5 du Texte] (Ann350)

- ben justement, il faut faire en fonction d'un polygone (Lau 351)

- et ben non, justement, d'un polygone normal puisque ceux-là ils les appellent ... si ils avaient mis ... ils ont pas dû mettre un polygone ... quand ils parlent d'un polygone, c'est obligatoirement pas un convexe puisqu'ils s'appellent polygones convexes ... ils disent pas tout le temps convexe [...] polygone convexe, tu vois, polygone croisé : c'est leur nom [...] alors que si ils mettent un polygone, eh ben c'est un polygone quelconque sinon ils auraient mis polygone croisé puisque là ... donc c'est un polygone qui n'est pas ... c'est pas un comme ça (Ann 352,354-5)

- Un polygone quelconque c'est quoi ? C'est une ligne brisée fermée, regarde ... (Ann 362)

- si les sommets sont saillants y en aura moins [de diagonales] que si les sommets ne sont pas saillants (Lau 365)

- 5 sommets, quand t'enlèves 2, ça fait 5-4-3 normalement y devrait passer 3 diagonales par un seul sommet (Ann 374)

- mais si jamais tu as enlevé 3, les 2 côtés consécutifs et celui-là, ben alors celui-là [le croisé] il est faux ...tu peux pas tracer une ligne partant de ce sommet puique tu l'as enlevé (Lau 375)

- c'est comment un polygone quelconque (Ann 384)

- c'est ceux-là qui sont particuliers, c'est ces 2 là [figures 4 et 5 du Texte] qui sont particuliers et en fait ... parce qu'une ligne brisée fermée c'est ça ! En général c'est ça ...et les 2 ... particuliers c'est ces 2 là. Celui-là il est particulier et celui-là aussi (Ann 397)

- mais ça, parce qu'ils l'ont fait croisé, mais il aurait pu ne pas le faire croisé (Lau 402)

- mais s'ils l'ont fait croisé, c'est bien qu'ils l'ont fait exprès, ça veut

dire que ces 2 là y sont particuliers et que celui-là il est quelconque...c'est ça puique c'est marqué ! ça c'est une ligne brisée fermée, bon...ces 2 là ils sont quelconques : c'est-à-dire une ligne brisée fermée mais convexe et non-convexe et celui-là qui est ... (Ann 403)

- *mais une ligne brisée c'est ça par exemple là, la ligne elle est brisée, elle est fermée, c'est pas obligé qu'elle soit croisée* (Lau 404)
- *ben si elle est pas croisée, elle est particulière alors* (Ann 405)
- *ben non, y disent pas croisé là, y disent brisée* (Lau 406)
- *eh ben une ligne brisée fermée, c'est ça !* (Ann 407)
- *pas obligé* (Lau 408)
- *si, c'est 2 particulières ... oui ... mais particulières* (Ann 409)
- *oui mais aussi des lignes brisées* (Lau 410)
- *ouais,* (Ann 411)
- *moi j'te dis que la ligne est brisée ... ils auraient dit croisé ... ligne croisée brisée* (Lau 412)
- *mais non, brisée et fermée, d'habitude c'est ça. Normalement c'est ça et ça, c'est les 2 particuliers ça* (Ann 413)
- *et pourquoi ?* (Lau 414)
- *ben parce qu'ils le marquent; mais j'sais pas ... alors si tu parts là d'dans on saura jamais ! donc ça fait* ... (Ann 415).

Cette analyse trés précise du *Texte* répond à un besoin essentiellement issu de la résolution du problème (origine endogène) : il s'agit de repérer les objets sur lesquels porte le problème. Mais nous notons qu'elle se développe en prenant fortement en compte les auteurs comme système cognitif producteur du texte auquel ils attribuent une cohérence.

IV : Conclusion

Les deux modalités expérimentales de notre étude sur la résolution du problème du dénombrement des diagonales d'un polygone, contrastent trés fortement quant aux procédures de validation que les élèves ont mises en oeuvre.

La seconde modalité, dans laquelle ils disposent d'un texte de référence, est essentiellement dominée par des démarches empiriques (7 binômes sur les 11 que nous avons observés), les preuves intellectuelles de niveau élevé en sont totalement absentes. Ce renforcement de l'empirisme nous paraît être dû à l'usage qui est fait des représentations graphiques dans le *Texte* . Pour de nombreux binômes les exemples donnés prennent un caractère prototypique ; c'est notamment le cas de la figure 6 qui représente un polygone P_7 concave et certaines de ses diagonales. Les figures 3, 4 et 5 jouent un rôle analogue.

Pour ce qui concerne les réfutations, nous remarquons qu'elles sont pratiquement inexistantes dans la première partie de l'observation dans la seconde modalité. Mais pour cette même partie de l'observation dans la première modalité, les réfutations concernaient principalement les conjectures s'appuyant sur une conception de type diagonale-diamètre qui était réfutée par des polygones ayant un nombre impair de sommets, or ces conceptions sont écartées par les définitions fournies par le *Texte* . En revanche la deuxième partie de l'observation, dans les deux modalités, est

dominée par le traitement des contre-exemples comme exception ou par leur rejet. Le triangle est traité d'une façon analogue dans les deux modalités au sens où les élèves reconnaissent qu'il n'a pas de diagonales mais non que le nombre de ses diagonales soit zéro. Les définitions données par le*Texte* , dans la seconde modalité, écartant la possibilité de rejeter le triangle comme polygone, il est tenu à l'écart comme une exception, ou plutôt en introduisant une condition qui réduit le domaine de validité de la conjecture.

Le problème de la définition se pose de façon très différente dans les deux modalités de notre expérience :

- dans la première, une problématique de la définition apparaît nettement chez plusieurs binômes. Ce phénomène est moins lié à la nature des fondements rationnels de la résolution du problème, qu'à la non-robustesse des conceptions des élèves. C'est ainsi que la moitié d'entre eux, s'appuyant sur des conceptions réputées classiques de polygone et diagonale, n'abordera pas la question de la définition. En revanche tous ceux qui s'appuient sur la conception «fragile» du type diagonale-diamètre associée ou non à polygone-régulier, soulèveront le problème de la définition sous l'impulsion soit d'un conflit de conception entre les élèves, soit de réfutations «sévères» (par exemple de f(n)=n/2 par des polygones impairs). Comme nous l'avons indiqué plus haut (§ II.4.), le problème de la définition, et sa résolution éventuelle, prend forme dans un système de contraintes que sont : les conceptions des élèves, la conjecture en question, l'existence d'un savoir ou de pratiques mathématiques de référence.

- dans la seconde, les définitions qui ont été données jouent un rôle déterminant puisque nous voyons disparaître toute trace des conceptions

erronées de polygone et diagonale si fréquentes dans la première modalité. Des conflits de conception surgissent encore, par exemple à propos de ce qu'est un polygone quelconque, sur la nature du croisement en dehors de leurs extrémités de deux côtés d'un polygone croisé, etc. , mais ils ne conduisent plus à un problème de définition en tant que tel : la définition est donnée, elle n'est pas remise en question. En revanche se posent des problèmes d'interprétation du *Texte* qui peuvent opposer les deux élèves d'un binôme, et même faire apparaître un tiers : l'auteur du *Texte* . En effet dans une première phase, pour résoudre un conflit de conception ou une question d'interprétation issue de la résolution du problème, les élèves paraissent s'en tenir à ce que nous pourrions appeler «la lettre du texte». Ceci pourrait s'exprimer en disant que les élèves cherchent à comprendre le texte, ou encore à ajuster leurs conceptions à un sens du texte qui exiterait en soi et qu'ils s'efforcent de reconstruire. Si la pression se fait importante, par exemple parce que les élèves ne débouchent pas sur un accord concernant le sens du texte, alors sont prises en compte les intentions de l'auteur qui seront invoquées pour ou contre une interprétation donnée.

En conclusion, nous pensons que le fait de fournir une information de référence, s'il modifie sensiblement les «performances» éventuelles au regard de la justesse des solutions fournies, ne conduit pas en revanche comme on aurait pu l'attendre (dans le cadre de notre expérience) à une élévation du niveau des processus de preuve engagés dans la résolution du problème ; nous avons même remarqué ici le renforcement des preuves empiriques principalement à cause de la présence du *Texte* et du caractère prototypique des exemples qu'il fournit.

Une recherche à venir sur ce thème devrait prendre en compte deux

types de phénomènes dont nous avons ici observé des indices trop faibles pour une conclusion ayant une portée générale :

- l'évolution des élèves d'une lecture du texte comme porteur d'une signification «objective», vers le texte comme reflet des conceptions de son auteur. Ou encore une évolution d'une problématique que peut traduire la question «qu'est-ce que cela veut dire ? », vers une problématique qu'exprimerait la question «qu'est-ce que l'auteur veut dire ? ».

- la prise en compte du texte comme porteur d'indications sur les intentions de l'auteur, ou peut être de celui qui a fourni le texte, relativement au problème soumis ou à la situation dans laquelle prend place sa résolution.

L'hypothèse, que nous paraît soutenir notre expérience, est que la construction du sens d'un texte (la lecture) dépend de la finalité de cette élaboration. Il n'y aurait donc pas un sens a priori d'un texte mathématique engagé dans une relation didactique, mais un sens spécifique à la fois des conceptions du lecteur et des caractéristiques de la situation de lecture (notamment au sens du contrat didactique).

Chapitre IV

DEUX ETUDES DE CAS

I : Les rectangles : contradictions et conceptions

I.1. L'objet de la recherche

Nous nous proposons dans ce qui suit d'analyser les processus de preuve et le traitement des contradictions dans un domaine conceptuel à la fois plus classique et plus sensible, au sens des mathématiques scolaires, que celui des polygones que nous avons étudié jusqu'ici.

Le domaine conceptuel concerné est celui de la mesure des longueurs et des surfaces. Plus précisément la tâche que nous présentons ci-dessous, consiste en un ensemble d'assertions sur les relations entre aire et

périmètre de rectangles. Ce domaine présente a priori de sérieuses difficultés qui sont principalement de deux ordres :

- d'une part, les difficultés liées aux propriétés spécifiques de la dimensionnalité : passage " d'opérations de compensations "additives" – suffisantes pour assurer des réponses de conservation des longueurs – aux compensations "multiplicatives" – nécessaires pour travailler sur la conservation des surfaces" (Rogalski 1982, p. 347-8);

- d'autre part, celles liées aux nécessaires "processus de différenciation et de coordination : différenciation de propriétés simultanément présentes dans un objet ou une figure (la longueur du bord / la surface intérieure [...]) et coordination de ces propriétés de façon non seulement qualitative mais quantitative, aboutissant aux «équations aux dimensions» "(ibid., p. 348).

La résistance de ces difficultés nous fait attendre la mobilisation par les élèves de conceptions erronées, ou au moins insuffisantes. La tâche, reprise de Walsch (1983) est conçue de telle façon que si les conceptions mobilisées ne sont pas correctes alors certaines des réponses aux questions posées seront contradictoires. Ces contradictions devraient être repérables par les élèves ; nous analyserons alors leurs traitements dans le cadre de notre problématique d'étude des processus de preuve.

Nous porterons notamment notre attention sur les comportements de "retour en arrière" que l'organisation de la tâche en une suite d'assertions à évaluer devrait nous permettre de repérer.

Rappelons que de tels comportements ne vont pas de soi. Dans une recherche (à l'aide d'un questionnaire sur des inéquations) sur les comportements de "retour en arrière" après la découverte d'une contradiction, Hitt (1978) relève que sur 72 élèves (sur 300 qu'il

interroge) produisant des réponses contradictoires, seulement 29 reviennent en arrière dans le traitement du questionnaire. De plus, 13 d'entre eux fourniront encore une réponse erronée, ce qui nous invite à nuancer l'affirmation de l'auteur qui déduit de ses calculs "que le retour en arrière est significativement favorable à la réussite " (ibid. p. 105). Nous y reviendrons dans notre conclusion de cette section (§ I.7.2.).

I.2. Dispositif expérimental et analyse *a priori*

I.2.1. Présentation de la tâche et les conceptions attendues

a) <u>présentation de la tâche</u>

Nous avons utilisé pour cette étude une **situation d'interaction** entre deux élèves de 4° (et de 5°, cf. § I.2.4.) auxquels était proposée la tâche ci-dessous à réaliser en commun :

> *Dans une classe, les élèves travaillent sur l'aire et le périmètre d'un rectangle. Voici ce qu'en disent certains d'entre eux :*
>
> *David : deux rectangles qui ont le même périmètre ont la même aire .*
>
> *Suzanne : deux rectangles qui ont la même aire ont le même périmètre .*
>
> *Guy : si on augmente le périmètre d'un rectangle son aire augmente aussi.*
>
> *Serge : si on augmente l'aire d'un rectangle son périmètre augmente aussi.*

Brigitte : tous les rectangles qui ont une aire de 36cm ^{2} ont un périmètre qui ne fait pas moins de 24cm.

Louise : pour tout rectangle il en existe un autre qui a la même aire mais dont le périmètre est plus grand.

Que pensez-vous de ce que raconte chacun de ces élèves : êtes-vous d'accord ou non ?
Expliquez pourquoi.

Pour traiter cette suite d'assertions les élèves ne disposent d'aucun matériel si ce n'est de papier à volonté et d'un unique stylo (rappelons que cette contrainte a pour but de favoriser l'explicitation des conceptions des élèves et des fondements de leurs décisions (cf. à ce sujet chap.II, § I.2.4).

Le temps est ouvert : il n'y a pas de limite fixée a priori.

L'observateur ne doit pas intervenir dans l'activité des élèves. En revanche, il le peut après que ceux-ci aient décidé qu'ils ont accompli leur tâche. Le but de cette intervention éventuelle est de recueillir des informations complémentaires, dans certains cas de relancer une activité jugée interrompue prématurément.

La question finale, «expliquer pourquoi», peut susciter l'identification du contrat expérimental au contrat didactique (il ne faut pas oublier que l'expérimentation a lieu dans l'enceinte du collège et que l'observateur peut toujours être soupçonné de collusion avec l'enseignant). Dans cette situation aucune régulation n'est apportée par une communication invoquée qui inviterait à une réussite selon des critères plus intrinsèques (cf. chap.II, § I.2.4.). Cependant nous pensons que la force des conflits de conception attendus assurera une centration suffisante

des élèves sur la recherche d'explications pertinentes plutôt que tournées vers la satisfaction de l'observateur.

b) Les conceptions attendues

Nous avons organisé l'analyse des prises de décision des élèves sur la validité de ces assertions, relativement à deux pôles des conceptions possibles à propos d'aire et de périmètre d'un rectangle. Le premier, $\mathcal{C}_1$, est une conception dans laquelle les élèves confondent aire et surface, périmètre et contour ; le second, $\mathcal{C}_2$, est ce que l'on pourrait appeler une conception arithmétique dans laquelle les assertions sont traitées en référence aux formules de calcul de l'aire et du périmètre. D'autre conceptions peuvent être envisagées notamment celle de l'aire comme invariant par découpage et recollement de surfaces (Perrin et Douady 1986), nous ne la mettons cependant pas sur le même plan que les précédentes car nous pensons qu'elle jouera un rôle très marginal dans cette situation dans la mesure où cette conception n'est pas mobilisée dans les activités que les élèves observés ont pu rencontrer en classe ; il est nous paraît peu probable que nous la voyons apparaître de façon opératoire dans la présente tâche (sauf peut-être dans le cas du traitement de l'assertion *Louise* , cf.§ I.2.2.).

-$\mathcal{C}_1$: cette conception, dont Perrin et Douady (1986) montrent qu'elle est très résistante aux apprentissages qui pourtant la prennent en compte, a vraisemblablement son origine dans les significations attachées par l'usage courant au lexique utilisé. Signalons pour mémoire que selon le dictionnaire "Robert" de la langue française (édition 1977), et en se limitant aux significations «géométriques» : *Aire* est "une portion limitée

de surface, nombre qui la mesure" ; *Périmètre* est une "ligne qui délimite le contour d'une surface plane", alors que *contour* désigne la "limite extérieure d'un objet, d'un corps".

Dans cette conception domine la notion de *forme* : "ensemble des contours d'un objet" ou encore "apparence extérieure donnant à un objet ou à un être sa spécificité". Selon une telle conception toute modification de l'aire implique une modification du périmètre et réciproquement, puisque toute modification du contour implique une modification de la forme et de la surface et donc finalement de l'aire. Par exemple, une augmentation du périmètre signifiant un allongement du contour aura pour conséquence nécessaire une augmentation de la surface et donc de l'aire.

-$\mathcal{C}_2$: dans cette conception *Aire* et *Périmètre* désignent les nombres respectivement associés à la surface et au contour d'un rectangle. Pour un rectangle de dimensions données a et b , l'aire A est donnée par la formule $A = a\,b$ et le périmètre P est donné par la formule $P = 2(a + b)$. Mais l'accès à ces formules est insuffisant pour caractériser ce type de conception. Nous demandons qu'au-delà d'une description des moyens de calcul de A et P ,elles puisse être considérée comme établissant des *relations fonctionnelles* entre les quatre nombres a, b, A, P .

I.2.2. Traitement des assertions suivant les conceptions mobilisées

En référence à chacune de ces conceptions on peut conjecturer ce que peuvent être les évaluations des élèves que nous observerons, pour

chacune des assertions proposées, en faisant l'hypothèse d'une mise en oeuvre cohérente des deux conceptions que nous envisageons (cf. tableau page suivante).

	$\mathfrak{C}_1$	$\mathfrak{C}_2$
David	oui	non
Suzanne	oui	non
Guy	oui	non
Serge	oui	non
Brigitte	----	oui
Louise	non	oui

Selon $\mathfrak{C}_1$, les preuves de la vérité des énoncés *David* à *Serge* peuvent consister en des expériences mentales impliquant le "bon sens". Par exemple : si on agrandit le périmètre alors la région délimitée sera plus grande et donc il en sera de même de son aire. En revanche le cas de *Brigitte* est plus incertain : soit cette assertion est considérée comme non pertinente parce que tous les rectangles de $36cm^2$ ont le même périmètre, il suffit alors de vérifier que pour l'un d'entre eux ce périmètre est supérieur ou égal à 24 cm , soit les élèves cherchent des décompositions distinctes de 36 comme y invite (implicitement) l'énoncé, ils seront alors conduit à des contre-exemples aux premiers énoncés qu'ils ont acceptés. Dans ce dernier cas nous nous attendons à ce qu'ils remettent en question la conception de type $\mathfrak{C}_1$ qu'ils ont mobilisée. Le rejet de *Louise* est possible dans le cadre de cette conception car tout rectangle de même aire qu'un rectangle donné aura à coup sûr même périmètre. Ce rejet ne conduit donc pas nécessairement à la manipulation d'exemples qui réfuteraient les

premières assertions.

Selon $\mathfrak{C}_2$ les assertions *David* à *Serge* sont fausses, elles peuvent être réfutées par des contre-exemples construits à partir des formules (avec des contraintes du type aire ou périmètre constant). Les assertions *Brigitte* ou *Louise* sont vraies et doivent être établies. On peut imaginer que des exemples ayant suffit à rejeter les premiers énoncés, les élèves se contentent d'exemples pour accepter les deux derniers. Voici ce que nous envisagions a priori comme types de preuves susceptibles d'être construites :

- le cas de *Brigitte* : la conjecture de la vérité de cette assertion peut provenir d'essais qui, éventuellement, suggèreraient même que le carré est le rectangle d'aire 36 cm^2 de plus petit périmètre, pourvu toute fois que le carré soit accepté comme rectangle.Une preuve algébrique est difficile mais pas hors de portée comme c'est le cas de l'étude des variations de $a + 36/a$. Un point de départ en serait la conjecture que les deux côtés d'un tel rectangle ne peuvent pas avoir simultanément une mesure inférieure à 6 cm, dans ce cas l'aire du rectangle serait inférieure à 36 cm^2, et donc que l'un a une mesure inférieure à 6 cm et l'autre une mesure supérieure à 6 cm :

$a = 6-\varepsilon_1$ et $b = 6+\varepsilon_2$, comme $ab = 36$ il vient :
$(6- \varepsilon_1)(6- \varepsilon_2)=36$
$36-6\ \varepsilon_1+6\ \varepsilon_2- \varepsilon_2\varepsilon_1=36$
$6(\varepsilon_2- \varepsilon_1)= \varepsilon_2\varepsilon_1$ d'où l'on tire $\varepsilon_2- \varepsilon_1>0$
comme $a+b = 6-\varepsilon_1+6+ \varepsilon_2=12+(\varepsilon_2- \varepsilon_2)$
on en déduit : $a+b > 12$ et $2(a+b)>24$

On peut cependant douter qu'une preuve d'une telle complexité soit

construite par les élèves, bien qu'à leur portée au plan des principes (i.e. au sens des programmes scolaires en vigueur).

- le cas de *Louise* : outre des preuves issues de l'empirisme naïf (constat sur quelques cas), une preuve-expérience mentale du type suivant serait à la portée des élèves. On considère le rectangle de dimensions (L,l), avec L>l, à partir duquel on construit le rectangle (2L,l/2). Le schéma ci-dessous "montre" bien cette transformation, qui s'appuie sur l'invariance de l'aire par découpage et recollement :

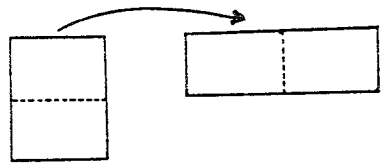


Figure 1

L'aire (ou le produit) est trivialement conservée, quant au périmètre son augmentation résulte de l'inégalité : 2L+l/2>L+l/2+l/2, puisque L>l. En revanche les preuves issues de l'étude de $a + A/a$ sont hors de portée des élèves de collège.

I.2.3. Les contradictions et leurs conséquences

Nous ne prévoyons pas a priori, et de façon précise, de contradictions à partir d'une conception de type $\mathcal{C}_2$. Fonctionnant dans le cadre algébrique ou numérique, cette conception devrait assurer l'accés à des évaluations correctes de chacunes des assertions.

En revanche pour une conception de type $\mathcal{C}_1$, on peut penser que les élèves déclareront vraies les quatres premières assertions. Le traitement de l'assertion *Brigitte* devrait alors conduire à des contradictions et à la

remise en question de ces premières évaluations. En suivant notre analyse du traitement d'un contre-exemple (cf. Chap. II, § IV.3.), les possibilités seraient :

- la reprise de l'énoncé, mais celle-ci est exclue.En effet, le contrat expérimental implique (implicitement) que tout énoncé doit être accepté ou rejeté, mais non modifié ;

- le rejet du contre-exemple lui-même est peu plausible : l'un au moins des éléments du couple de rectangles contre-exemple n'est pas un carré ;

- une reprise de la preuve initiale est aussi peu plausible du fait du caractère global du contre-exemple et de ce qu'il est exclu d'amender d'une condition l'énoncé initial ;

- dans le cas d'une première approche du type empirisme naïf on pourrait envisager une reprise des fondements rationnels de la décision initiale. Mais nous pensons que la force du contraste entre la conviction initiale et l'évidence de la réfutation conduira plutôt à la remise en question de la conception $\mathcal{C}_1$ qui soustend la décision initiale. Cette remise en question devrait conduire à traiter les assertions en s'appuyant sur le modèle algébrique associé aux formules.

I.2.4. La population des élèves observés

Nous avons observé 6 binômes d'élèves de collège de l'agglomération grenobloise, dans le courant du troisième trimestre de l'année scolaire 1981-1982. Le niveau scolaire est celui de la classe de 4° pour 4 des binômes, de 5° pour les autres.

Ces observations n'ont été possibles que grâce à la collaboration

bénévole des enseignants et à celle, volontaire, des élèves. Ces derniers se constituant en binôme au gré de leurs affinités.

Nous donnons ci-après la liste des binômes observés avec les précisions de date et de lieu :

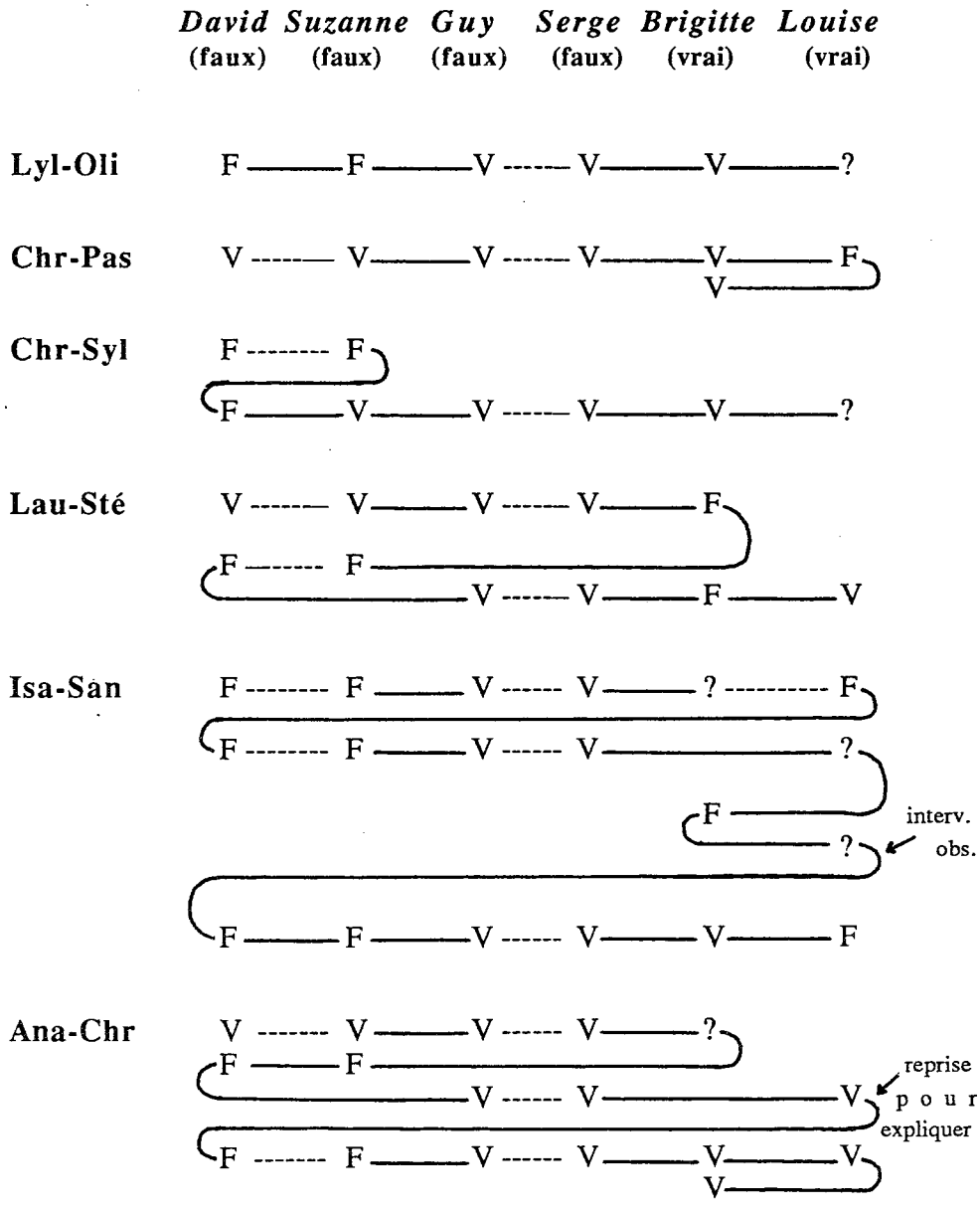
4e			
Anaïk et Christine	30 avril 1982	CES le Vergeron	Moirans
Christophe et Pascal	30 avril 1982	CES le Vergeron	Moirans
Laurent et Stéphane	4 mai 1982	CES le Vergeron	Moirans
Lylian et Olivier	4 mai 1982	CES le Vergeron	Moirans
5e			
Christine et Sylvie	18 mai 1982	CES la Moulinière	Domène
Isabelle et Sandrine	11 mai 1982	CES la Moulinière	Domène

Les observations ont été réalisées dans l'enceinte des établissements scolaires, mais en dehors de la classe. Le moment choisi dans la journée, pas très confortable, dépendait essentiellement de la disponibilité des élèves : «entre midi et deux heures», à la suite des cours de l'après-midi (mais avant le départ du car du ramassage scolaire).

Le temps de travail des binômes a été en moyenne de 45 minutes.

I.3. Contradictions et comportements de "retour en arrière"

Pour chacun des binômes observés nous avons représenté ci-après (figure 2) le parcours de la suite des assertions qu'il a effectué. Nous avons ordonné ces binômes suivant l'ordre croissant du nombre de leurs "retours en arrière".



"------" signifie que les assertions sont traitées parallèlement
"F" est mis pour Faux, "V" pour Vrai, "?" pour l'absence de décision

Figure 2

I.3.1. L'absence d'identification d'une contradiction

Lylian et Olivier après un débat contradictoire, dû à une conception de type $\mathfrak{C}_1$ mobilisée par Olivier, rejettent les assertions *Davis* et *Suzanne* à la suite d'un contre-exemple construit par Lylian

En revanche ces élèves ne relèvent pas de contradiction entre leur évaluation positive de l'assertion *Guy* et les exemples de rectangles qu'ils produisent en traitant le cas de *Louise* . La raison peut en être que la mise en relation de l'énoncé "si on augmente le périmètre d'un rectangle alors son aire augmente" et de l'énoncé "pour tout rectangle d'aire donnée il en existe un autre de même aire mais de périmètre plus grand" ne va pas de soi. Un obstacle à cette mise en relation peut résider dans la différence de structure syntaxique des deux énoncés, et l'opposition entre une formulation dynamique et une formulation statique.

Christophe et Pascal s'appuient de façon cohérente tout au long de leur traitement des assertions sur une conception de type $\mathfrak{C}_1$. A la faveur d'un contre-sens sur l'assertion *Brigitte* qu'ils rejettent (ils comprennent que le périmètre devrait être inférieur ou égal à 24cm, cf. § I.6.1.), ils ne perçoivent aucune contradiction. Quant au traitement de *Louise* , il conduit à une décision cohérente avec $\mathfrak{C}_1$: cet énoncé est rejeté parce que les rectangles "*doivent avoir le même périmètre mais pas disposé pareil* " (texte).

Le retour en arrière après le traitement de *Louise* n'a lieu que pour une reprise de *Brigitte* un moment laissée en suspend.

I.3.2. Contradictions attestées et suivies de "retours en arrière"

Christine et Sylvie mobilisent explicitement une conception de type $\mathcal{C}_1$ à propos du traitement de *David* :

> *moi j'crois qu'ils ont le même périmètre parce que regarde : tu fais comme ça deux rectangles qui ont la même aire, tu peux les superposer* ... (Chr 166).

Mais plus loin, lors du traitement de *Suzanne* , Christine réalise et s'exclame :

> *Eh ! Regarde c'qu'on a pas fait attention [...] regarde là : on a pris exactement les mêmes longueurs, or c'est pas obligé qu'on a les mêmes longueurs [...] attends, on va prendre 17, là 3 [l'autre mesure déjà choisie est 14], quelque chose qui fasse 17 ... sais pas moi ... y a 8 et 9 ... ils auront l'même périmètre* " [...] "*ils auront pas la même aire* (Chr 178, 180-2,puis Syl 183).

Cette prise de conscience est liée au passage dans le cadre numérique, elle n'implique pas nécessairement le rejet de la conception de type $\mathcal{C}_1$ qui a été mobilisée initialement.

Laurent et Stéphane, au moment du traitement de *Brigitte* , prennent conscience de ce que plusieurs rectangles de même aire peuvent avoir des périmètres différents :

> *ben regarde, parce que là on trouve la même aire ... on se contredit . Parce que, regarde ... là, on trouve pareil et ils ont pas le même périmètre que là. Et pourtant ils ont la même aire* (Lau 71)
> *donc les autres ils sont faux* (Sté 72)
> *...on s'est tout trompé au début ...* (Lau 73)

David et *Suzanne* sont alors rejetées en produisant des contre-exemples.

Isabelle et Sandrine interprètent *David* et *Suzanne* comme affirmant que pour un rectangle donné, aire et périmètre sont égaux : elles rejettent ces assertions. Mais le traitement de *Louise* les conduit par hasard à produire le rectangle (6,3) qui vérifie : $6\times3=2(6+3)$. Elles reviennent alors sur *David* car "*des fois il a raison ...*" (San 24), puis elles traitent à nouveau la suite des assertions.

Leur second retour en arrière est dû à une intervention de l'observateur qui leur fait prendre conscience de leur contre-sens initial. L'ensemble des assertions est à nouveau traité.

Anaïk et Christine prennent conscience d'une contradiction lors de leur traitement de *Brigitte* :

parce qu'ils ont la même aire, ils ont pas le même périmètre ceux là.

Donc ça [les premières assertions] c'est faux (Ana 43)

Les assertions *David* et *Suzanne* sont alors réfutées à l'aide des exemples produits pour *Brigitte* . Un nouveau retour en arrière aura lieu après le traitement de *Louise* , mais son origine est la demande formulée au terme de l'activité : "*maintenant il faut expliquer pourquoi ...*"(Chr 96).

Les **retours en arrière** observés conduisent bien à une reprise des réponses initialement fournies, mais on ne peut pas dire pour autant qu'il y ait un remise en question de la conception correspondante qui ouvrirait la possibilité du passage à une conception de type $\mathcal{C}_2$. Pourtant les élèves vont produire des exemples numériques, et parfois même s'appuyer sur les formules pour réfuter *David* et *Suzanne* (voir à ce sujet § I.4.3.). Mais il peut ne s'agir que d'un changement de cadre, au sens de Douady (1984).

Ici, passage du cadre perceptif et qualitatif de la forme à celui quantitatif des formules. Ce changement initie la différenciation périmètre-contour et aire-surface, mais la recherche de paires de nombres à somme constante n'implique pas le rejet d'une conception de type $\mathcal{C}_1$ (cf. à ce sujet le cas de Christine et Sylvie § I.5.2.)

I.4. Preuves et réfutations des assertions *David* et *Suzanne*

I.4.1. La compréhension des assertions

Lors de leur première lecture,la plupart des binômes (5 sur les 6 observés, cf. figure 2) considèrent que les assertions *David* et *Suzanne* sont analogues : "*la même question, mais au contraire* "(Syl 197). En conséquence, sans nouvel examen, ils attribuent à l'assertion *Suzanne* la même valeur de vérité qu'à l'assertion *David* . Ce n'est que lors de la reprise de ces assertions que ces élèves prendront conscience de ce que "*David et Suzanne ne disent pas la même chose* "(San 177).

Cette identification, l'une à l'autre, des deux assertions peut être interprétée comme un témoignage de la mobilisation d'une conception de type $\mathcal{C}_1$: aire et périmètre d'un rectangle jouant des rôles symétriques.

Par ailleurs trois des binômes font d'abord un contre-sens sur l'assertion *David,* comprenant qu'elle signifie que pour un rectangle

donné le périmètre et l'aire sont égaux. Seul le binôme Isabelle-Sandrine restera sur ce contre-sens, les autres en viendront rapidement au sens attendu, après une nouvelle lecture (Christine-Sylvie, Laurent-Stéphane).

I.4.2. Les preuves de *David*

L'assertion *David* , et avec elle l'assertion *Suzanne* , est d'emblée acceptée sur la base d'une conception de type $\mathfrak{C}_1$:

Christine et Sylvie :
parce que regarde, là, tu peux les superposer l'un sur l'autre. Ils font la même surface (Chr 39)
exactement la même surface ... la même aire (Syl 40)

Christophe et Pascal rédigent l'explication suivante : *David : oui, car ils ont le même périmètre donc ils sont isométriques, sinon ils n'auraient pas la même aire , car la surface est délimitée par le périmètre donc comme le périmètre est [le] même, l'aire est le même.*

Laurent et Stéphane :
ben oui, deux rectangles ont le même périmètre, donc ils ont la même aire (Lau 23)
Lylian et Olivier acceptent d'emblée l'assertion David, en s'interrogeant cependant : *ça vient automatiquement ... mais pourquoi* ... (Lyl 20).

Anaïk et Christine ont accepté la validité de *David* et *Suzanne* sans s'expliquer, l'étonnement qu'elles manifestent lors du traitement de l'assertion *Brigitte* confirme les fondements de type $\mathcal{C}_1$ de leur évaluation initiale.

Les preuves de la validité de *David* et *Suzanne* sont donc des preuves intellectuelles. Au sens où les élèves **déduisent** des significations qu'ils accordent à *Aire* et *Périmètre* le "théorème" : deux rectangles de même aire, ou de même périmètre, sont identiques. Il ne nous semble cependant pas qu'il s'agisse là d'un théorème-en-acte, que les épreuves de la pratique auraient tôt fait de réfuter, mais plutôt du corrolaire d'un principe (implicite) suivant lequel si deux formes sont différentes alors le sont aussi les mesurent qui leurs sont associées.

I.4.3. Les réfutations de *David* et *Suzanne*

Les acceptations initiales de *David* et *Suzanne* ne résistent pas en général à la réfutation qui lui est opposée à la suite du traitement de *Brigitte* . Seuls Christophe et Pascal dont l'interprétation de l'assertion *Brigitte* conduit à en accepter la validité, ne seront pas amenés à une remise en question permettant son rejet.

Dans ce qui suit «**construire** un contre-exemple» signifie la recherche délibérée de deux paires de nombres de même somme ou même produit, ce qui suppose la reconnaissace des formules associées à aire et périmètre d'un rectangle.

Christine et Sylvie construisent des contre-exemples à *David* , mais

elles s'enlisent à propos de *Suzanne* dans une procédure de découpage de rectangles (qui conserverait l'aire en modifiant le périmètre). Une régression importante a alors lieu : les élèves acceptent l'assertion *Suzanne* par défaut d'un contre-exemple qu'elles ne parviennent pas à expliciter : "*on sait pas l'faire* "(Chr 292), "*ben, on dit oui ...* "(Syl 294).

Anaïk et Christine cherchent deux rectangles à périmètre constant : "*pour David , il suffit de mettre un exemple là ... comme périmètre on va mettre 24 et 24* "(Ana 97). La réfutation de *Suzanne* résulte de la construction des exemples pour *Brigitte* .

Isabelle et Sandrine font d'abord un contre-sens sur l'assertion *David* que Sandrine exprime clairement :

> *David des fois il a raison, ça dépend... on a pris un exemple que le périmètre c'était 12, et l'aire c'était 18, alors là il a faux... mais on a pris aussi un autre exemple où le périmètre c'était 18 et l'aire 18 aussi... alors il peut avoir aussi raison* (San 25)

Elles réaliseront leur contre-sens et rejetteront alors les assertions *David* et *Suzanne* :

> *si le périmètre est égal à un autre périmètre d'un autre rectangle* (Isa 172)
>
> *les aires sont pas* (San 173)
>
> *mais les aires ne sont pas les mêmes* (Isa 174)
>
> *à moins que ça soit les deux mêmes, mais enfin ... les aires elles peuvent pas être les mêmes ... et donc, ben David il a toujours faux* (San 175)

Pour Olivier la mobilisation des formules ne suffit pas au rejet des assertions *David* et *Suzanne* : " *tu mets : la longueur plus la largeur sera*

la même pour les deux. Donc l'aire sera la même " (Oli 37), ce qui peut constituer dans le cadre numérique l'expression d'une conception de type $\mathcal{C}_1$. C'est Lylian qui construit deux contre-exemples que finalement Olivier acceptera.

Laurent et Stéphane tirent de l'analyse de l'assertion *Brigitte* les réfutations de *David* , puis ils construisent un contre-exemple à l'assertion *Suzanne* .

Si tous les élèves qui rejettent les assertions *David* et *Suzanne* le font sur la base de contre-exemples qu'ils construisent, comme en témoignent les propos d'Isabelle et Sandrine ou de Lylian et Olivier, cela ne signifie pas pour autant le rejet des conceptions du type $\mathcal{C}_1$. La manipulation d'un modèle numérique, voire algébrique, est en fait soumis aux lois spécifiques de ce type de conceptions (l'analyse du traitement des deux assertions suivantes, *Guy* et *Serge* , éclairera ce point). A ce propos R. Douady nous signale que le théorème-en-acte qui soustend les décisions des élèves ne peut être rejeté qu'après un travail important et spécifique, cependant pour certaines classes qu'elle a pu observer dans sa recherche cela n'a pas été suffisant.

I.5. Evolution des preuves des assertions *Guy* et *Serge*

I.5.1. Une vérité d'évidence

Lors de leur premier traitement, les assertions *Guy* et *Serge* sont reçues par tous les binômes comme des évidences. Elles sont vraies par raisons nécessaires, quoique les binômes aient des difficultés à expliciter ces raisons : "*c'est bête parce que c'est évident [...] comment on peut y démontrer ?* "(Chr 134-6, du binôme Anaïk- Christine). Seuls Christophe et Pascal vont aller jusqu'à une explicitation :

> *oui, car la délimitation de la surface va être augmentée donc la surface va être augmentée aussi* (texte) ;

ceci concerne l'assertion *Guy* ; pour l'assertion *Serge* , ces élèves ajoutent : "*oui : inverse de Guy* ".

Cette vérité d'évidence a ses racines dans une conception de type $\mathfrak{C}_1$ dont les élèves sont à peu près incapables de formuler les éléments et leurs relations. Lors de la première approche cette évidence les dispense de fournir des preuves, il n'en sera pas de même après que l'analyse de l'assertion *Brigitte* ait produit des exemples contre les deux premiers énoncés et ait peut être introduit un certain sentiment d'incertitude.

I.5.2. Un changement de cadre

a) Le passage au cadre numérique

Le traitement de l'assertion *Brigitte*, la recherche de contre-exemples aux assertions *David* et *Suzanne* , ont mis en valeur les définitions numériques d'*Aire* et de *Périmètre*. C'est dans ce cadre que les élèves vont essayer de fonder leur évaluation des assertions *Guy* et *Serge* . Ce besoin de fondements peut avoir sa source dans l'incertitude liée aux "retours en arrière", à défaut il s'agit au moins de répondre à la question du "pourquoi" qui fait partie de la tâche.

Les preuves produites par les élèves recourent soit à des exemples génériques, soit à des arguments en langue naturelle, soit encore au langage algébrique (mais nous consacrerons une section particulière à ce dernier cas) :

Laurent et Stéphane établissent avec le support d'un exemple générique la validité de l'assertion *Guy* . Ils considèrent l'exemple du rectangle (2,4) : "*2+2+4+4=12, 2x4=8* " , à partir duquel ils construisent le rectangle (3,4) : "*4+4+3+3=14, 4x3=12* " et "*tu as augmenté le périmètre, t'as augmenté la largeur [...] là 4 fois 3 ça fait 12 et donc ça a augmenté parce que là ça faisait que 8* " (Lau 83-7) et "*donc c'est vrai* " (Sté 88).

Anaïk et Christine fondent leur acceptation de la validité des assertions *Guy* et *Serge* sur des propriétés arithmétiques qu'elles explicitent :

quand tu augmentes le périmètre, les nombres tu les augmentes ...

là, les nombres qui se multiplient ... qui s'ajoutent [...] ben oui, parce que quand tu augmentes le périmètre, la longueur et la largeur augmentent. Donc lorsqu'on les multiplie tous les deux, ça augmente aussi. (Ana 137-141).

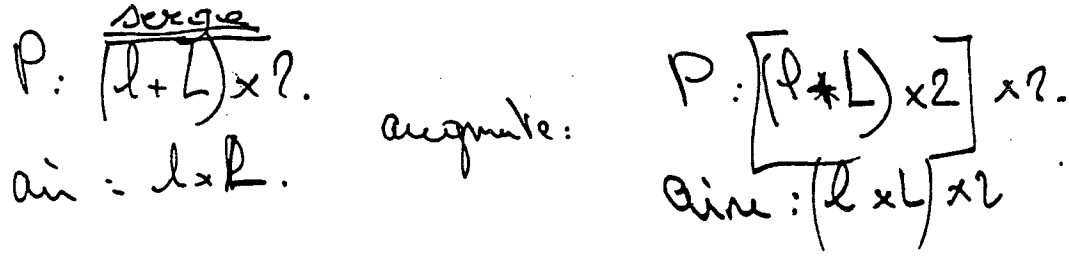


Figure 3

Pour Isabelle et Sandrine (fig. 3) "*si on augmente les dimensions, ça change aussi pour l'aire . C'est forcé* "(Isa 28). Cette conviction est ensuite expliquée dans le cadre numérique :

si on augmente le [périmètre] [...] son aire, elle augmente aussi, si par exemple là, regarde ... [...] si tu augmentes, tu fais par exemple fois 2 ... (San 195)

mais si tu augmentes le périmètre ... pas les longueurs (Isa 196)

eh ben ça fait tout, le périmètre ... ton périmètre est multiplié par 4 ... et ton aire ... (San 197)

Dans ce **cadre numérique**, les propriétés arithmétiques utilisées peuvent résulter d'une utilisation des formules d'aire et de périmètre sous le contrôle sémantique d'une conception de type $\mathfrak{C}_1$, ou de la mise en

oeuvre d'un théorème-en-acte arithmétique : si on augmente une somme (resp. un produit) alors **chacun** des termes (resp. des facteurs) est augmenté. Loin d'être écartées, les conceptions de type $\mathcal{C}_1$ se trouveraient renforcées par leur conjugaison avec ce théorème-en-acte ; ainsi par le relais des dimensions du rectangle l'augmentation du périmètre oblige à une augmentation de la surface. Pourtant ceci est contradictoire avec l'assertion *Brigitte* qui affirme l'existence de rectangles de même aire mais de périmètres différents, et plus encore avec la production de contre-exemples par les élèves eux-mêmes aux deux premières assertions.

b) L'usage du langage algébrique

Lylian et Olivier voudraient s'expliquer sur la validité de *Guy* et *Serge* en utilisant le calcul littéral :

> *on va mettre des lettres là, on va pas mettre des chiffres. On va essayer d'y voir avec des lettres. Alors le périmètre on dit qu'c'est* a +b . *C'est* a *la longueur,* b ... *alors le périmètre c'est égal à* a +b ... *alors on augmente le périmètre de* c , *alors :* a +b+ c ... *et là , là , l'aire c'est* a *par* b. *Et ça augmente de ... on ferait mieux d'y faire avec des chiffres, parce que avec les lettres, on va s'paumer là d'dans* (Lyl 57)

Ils s'essaient sur des cas particuliers, mais cela ne les satisfait pas :

> *on y a même pas démontré ,mais tu vois avec les chiffres ça démontre [...] On a même pas de contre-exemple [...] Ben, on en a pas besoin. Là faut démontrer avec les lettres parce que ... bon, aire est égale à ... on va mettre* a *par* b *plus 6 ... alors le périmètre est égal à* a +b *par 2 ... normalement ça devrait être, j'sais pas quoi ..., plus [...] ça augmente c'est sûr. C'est obligé qu'ça augmente. J'vois*

pas bien la démonstration ... (Lyl 70, 72,80 et Oli 71)

Christine et Sylvie ont la conviction que si on modifie le périmètre ou l'aire d'un rectangle, alors ses dimensions seront modifiées : "*là ça sera plus du tout les mêmes mesures, si on augmente le périmètre* "(Syl 339). L'idée qu'une augmentation du périmètre implique une modification de la forme et donc des mesures du rectangle, a ses racines dans une conception de type $\mathfrak{C}_1$. Elle va être assez forte pour pervertir l'usage des règles du calcul algébrique. Le calcul est sous le contrôle des significations liées à ces conceptions, prenant en charge une dimension temporelle liée aux actions nécessaires à la transformation de l'objet *rectangle* (nous le mettons en valeur par l'usage de caractères gras dans la transcription ci-dessous. Ce dialogue accompagne la rédaction d'un texte, fig. 4) :

- *le périmètre* a *et l'aire* b ... *on augmente le périmètre* a, *par exemple* +2 (Syl 354)
- ***pour l'instant*** , *son aire elle augmente pas* (Chr 357)
- *pour l'instant son aire elle augmente pas ?! [...] Mais si, euh ... si on augmente le périmètre, il faut changer longueur et largeur du rectangle ; ça marchera plus [...] si tu laisses ton* a, *ton* b *[...] donc l'aire changera obligatoirement ... et on sait pas si ...elle augmente ou si ... elle diminue ... mais j'pense qu'elle augmentera si on ajoute* (Syl 358)
- *obligatoirement ? Tu l'as prouvé ? T'as fait tous les cas ... Tout, t out, tout ?* (Chr 368)
- *si on ajoute c'est obligatoirement ... si on ajoute elle va pas baisser* (Syl 369)
- *ah ouais, parce que si t'ajoutes au périmètre il faut aussi*

ajouter à l'aire (Chr 370)

- *mais non, si t'ajoutes au périmètre,* ***l'aire elle bouge pas*** (Syl 371)
- *il faut changer les chiffres* (Chr 374)
- ***ça va changer*** *les chiffres [...] donc l'aire elle* ***changera*** (Syl 375-381)

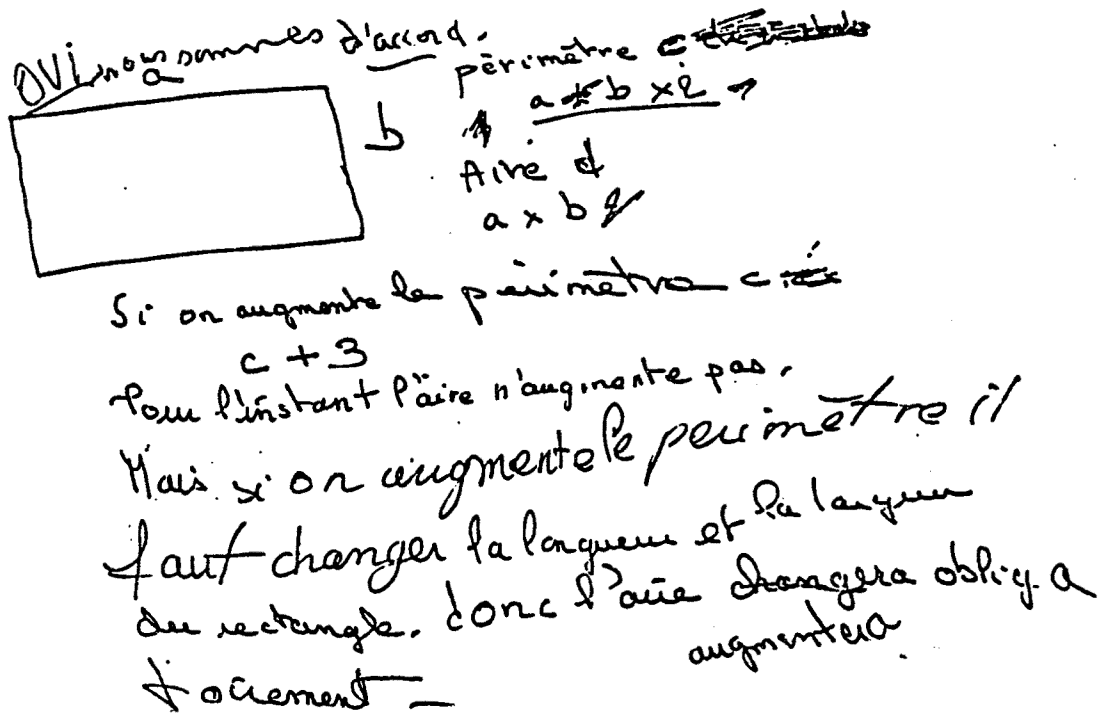


Figure 4

Le langage algébrique, ou plus exactement le calcul littéral, fournit un moyen langagier pour exprimer les raisons de la validité de l'assertion *Guy* . Christine et Sylvie «racontent» par ce moyen les relations entre aire, périmètre et dimensions dans la transformation qu'elles envisagent, telles qu'elles les conçoivent dans le cadre de la conception de type $\mathfrak{C}_1$ qui

soustend leur activité. Les textes qu'elles produisent en témoignent clairement (fig. 4 et 5). Pour le cas de l'assertion *Serge* elles concluront que "*c'est pareil que là [assertion Guy]* " (Chr 498).

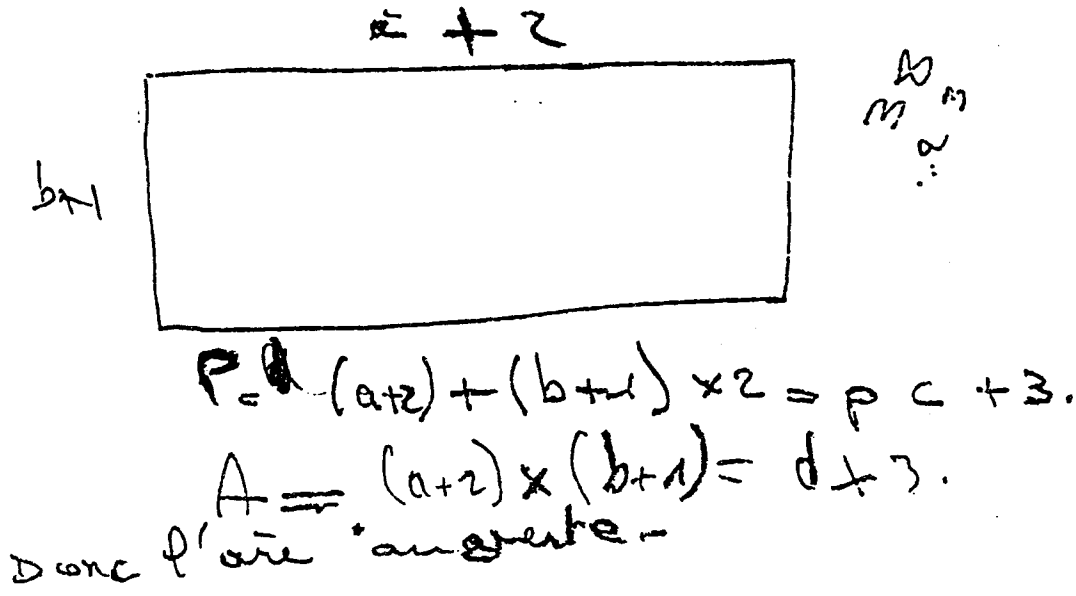


Figure 5

I.6. Un effet de contrat : l'exclusion des décimaux

I.6.1. La réduction aux entiers : le cas de *Brigitte*

Comme y invite assez naturellement l'énoncé de l'assertion *Brigitte* , les binômes cherchent des rectangles différents de même aire 36 cm^2 . Ils ramènent ce problème à celui de la recherche des diviseurs de 36 :

Laurent et Stéphane rejettent l'assertion *Brigitte* à la suite d'un contre-sens. Ils cherchent des diviseurs de 36 et constatent que les périmètres des rectangles correspondants ne sont pas égaux à 24 : " *3 fois 12 égal 36 ... [...] ouais, mais après c'est faux parce que, regarde, eh ben [...] ça fait 30, donc c'est faux* "(Lau 55, Sté 56-60). Cependant ils constatent que des rectangles de même aire ont des périmètres différents, cela les renvoie à l'évaluation des premières assertions.

Christophe et Pascal n'envisagent qu'une seule décomposition multiplicative de 36, et une seule décomposition additive de 24 :

pour faire 36 faudrait qu'il y ait 9 et 4. Pour faire 24 faudrait qu'il y ait 8 et 4. Donc c'est plus (Chr 59)

Le rectangle (9,4) ayant une dimension supérieure au rectangle (8,4) son périmètre serait à coup sûr supérieur, ce qui leur suffit pour conclure.

Christine et Sylvie , après avoir vérifié la validité de *Brigitte* pour les rectangles (9,4) et (12,3), ont bien pour projet : "*cherchons tous les diviseurs de 36* " (Chr 549). Mais faute de temps, et aussi parce qu'elles se découragent, elles ne réalisent pas leur projet : "... *ça*

on sait pas l'expliquer ... on comprend, mais ... "(Chr 557).

Isabelle et Sandrine constatent que l'assertion *Brigitte* est vérifiée par les rectangles (9,4) et (36,1). Elles concluent alors : "*Brigitte a juste* "(San 264), puis elles passent à la suite. Cette évaluation relève d'un empirisme naïf, mais il faut préciser que, comme Christine et Sylvie, ces élèves sont un peu lasses de cette activité et souhaiteraient en finir.

Lylian et Olivier cherchent des décompositions de 36. Ils marquent une courte hésitation à propos de la décomposition (6,6) :

[6 et 6] ... ouais, c't'un carré. C'est même pas un rectangle (Lyl 89)
ouais, mais c'est un rectangle particulier (Oli 90)
c't'un rectangle particulier. Alors on va essayer avec 9 et 4 ...
(Lyl 91)

Après ces quelques essais, l'assertion *Brigitte* est acceptée. Le fondement empirique (naïf) suffit à emporter la conviction des élèves : "*bon, ben là c'est bon . On va pas en mettre une infinité* "(Oli 101).

Anaïk et Christine évoquent une propriété qui pourrait, comme nous l'avons montré plus haut, être à la source d'une preuve de l'assertion *Brigitte* :

ben ça, j'vois pas comment on peut parce que c'est les deux plus petits côtés qu'on peut avoir ça [6 et 6] ... on peut en avoir un plus petit , mais l'autre est forcément plus grand que 6. (Ana 165)
6 c'est le côté le plus petit que l'on peut trouver pour 36 (Ana 178)
les plus petits chiffres qu'on peut donner qui donnent 36 ... si on les ajoutent ils donnent pas plus de ... pas moins de 24 (Chr 207)

Elles rédigent ensemble l'explication suivante :

les plus petits chiffres qui multipliés donnent 36, en les ajoutant ne donnent pas moins de 24. ex : 6x6=36 6+6+6+6=24

Qu'ils procèdent ou non d'un empirisme naïf, les binômes observés limitent leur recherche aux diviseurs entiers de 36. Cette limitation atteste d'une fermeture de fait de l'espace des nombres envisagés à celui des nombres entiers. Cette hypothèse est renforcée par les propos de certains binômes lors de leur traitement de l'assertion *Louise* ...

I.6.2. L'exclusion des décimaux : le cas de *Louise*

L'assertion *Louise* est souvent mal comprise. Certains élèves pensent d'abord que ce qui est affirmé par *Louise* est que le périmètre d'un rectangle donné serait plus grand que son aire. Cette acception de l'assertion s'oppose au théorème-en-acte arithmétique selon lequel le produit magnifie plus que la somme :

> *mais ça ne se peut pas ... l'aire elle est toujours plus grande que le périmètre* (Syl 571)
> *le périmètre peut être égal mais pas plus grand [que l'aire]* (San 106).

Cependant tous les élèves en viendront à une acception correcte, quoique dans certains cas grâce à une intervention de l'observateur (après que les élèves aient déclaré avoir terminé leur activité) :

Christophe et Pascal, pris dans une conception de type $\mathfrak{C}_1$, proposent *"qu'ils [les rectangles] doivent avoir le même périmètre mais pas disposé pareil* "(texte) ; mais ils ne concluent pas véritablement sur l'assertion *Louise* .

Christine et Sylvie cherchent deux rectangles de même aire mais dont l'un ait le périmètre plus petit que l'autre ; ce qui est assuré dès que les périmètres sont différents. Ce seul cas ne leur permet pas de conclure : "*moi, j'sais pas ... à mon avis, moi je s'rais d'accord. Parce que ...* "(Chr 596). Les élèves en restent là.

Anaïk et Christine , de la même façon, reprenant les rectangles produits pour l'assertion *Brigitte* , se contentent de constater que deux rectangles de même aire ont des périmètres différents :

ben c'est vrai. Regarde là ... ils ont la même aire tous les trois et ils font tous les trois : ... 36 cm² [...] leur périmètre, là c'est ... ça fait 6+6+6+6 [...] donc ça fait 24 ... c'ui-là ça fait 15 et 15, ça fait 30 (Ana 89, 91-4)

maintenant faut expliquer pourquoi (Chr 96)

Elles expliquent donc que l'assertion *Louise* est vraie, mais en en transformant la signification : "*on peut trouver plusieurs chiffres qui multipliés ensembles ont la même solution mais lorsqu'on les ajoute donnent des résultats différents* "(texte).

Isabelle et Sandrine partent elles aussi d'un rectangle d'aire 36 cm², se contentant de constater que pour deux rectangles différents "*le périmètre, y en a un qui est plus grand ...* "(San 299).

Alors que les élèves déclarent avoir terminé, l'observateur leur soumet le cas du rectangle (5,1). Elles soutiennent qu'il n'y aura pas de rectangle de périmètre plus grand "*puisque c'est un nombre premier* "(San 321). Elles envisagent les nombres décimaux, mais finalement les écartent comme peu plausibles :

mais avec les nombres à virgule ... (Isa322)

moi ça m'étonne ... j'pense que non [...] moi j'suis sûr qu'il y en a

pas (San 323-9)

Lylian et Olivier choisissent une aire : 54 cm^2 et cherchent des rectangles ayant cette aire là. Ils trouvent notamment le rectangle (54,1) pour lequel ils affirment :

j'crois qu'c'est l'plus gros qu'on peut prendre : on prend 54 de longueur, 1 de largeur : 54 plus 1, 55, par 2 ça fait 110 (Lyl 150)

quand on a 1, c'est l'plus grand truc qu'on peut avoir ... quand il y a 1 dans la largeur, on obtient le plus grans périmètre (Lyl 171).

Lylian envisage de sortir du domaine des entiers :

j'pense que c'est ça ... ouais... j'sais pas si on s'occupe des décimaux (Lyl 171).

L'observateur, parce que les élèves prétendent en avoir terminé, les libère de cette hésitation en leur proposant le rectangle (8,1) puis (16,^{1}/2). Olivier saisit la façon dont cet exemple a pu être produit : "*multiplié par 2 là, et on divise par 2 ici ; ça revient au même* "(Oli 180). Lylian retient d'abord que cela ne conserve pas le rectangle : "*non ça revient pas au même, puisqu'on a un périmètre plus grand* "(Lyl 181). Plus qu'à la conservation de l'aire, Lylian est d'abord attaché à expliquer pourquoi de cette façon le périmètre va augmenter :

plus la largeur est petite, parce que ça va faire un gros nombre à la longueur. Quand on ajoute la largeur à l'autre y en aura plus de la longueur et on pourra multiplier par 2 ; ça fera vachement plus. [...] j'ai compris mais j'arrive pas tellement à y démontrer. J'arrive pas à expliquer. (Lyl 184).

Laurent et Stéphane produisent le rectangle (6,1) à la suite du rectangle (3,2) et concluent :

regarde, ils ont la même aire et ils ont pas le même périmètre

(Lau 108)

on a fini (Sté 109)

L'observateur reprend le rectangle (6,1) que les élèves viennent de construire pour leur demander ce qu'il en est dans ce cas de l'assertion *Louise* . Stéphane se demande alors :

on peut utiliser les chiffres à virgule ? (Sté 119)

ça va pas nous aider ... ça m'étonnerait (Lau 120)

comment tu vas en trouver d'autres ? (Sté 121)

non, on peut pas (Lau 122)

on peut pas (Sté 123)

L'observateur soumet alors le rectangle (12,1/2). Les élèves saisissent la procédure qui a pu conduire à cet exemple :

on peut ... avec tous les rectangles on doit pouvoir [...] on va multiplier la longueur par 2 [...] on divise la largeur par 2

(Lau 147-9,151).

Mais lorsque l'observateur leur demande s'ils sont sûr de cela, les élèves s'accordent pour répondre : "*on peut faire un autre exemple encore* "(Lau 153).

Les comportements de réponse des élèves, comme leurs réactions aux éventuelles sollicitations de l'observateur, confirment la fermeture du problème sur les nombres entiers qui déjà s'annonçait dans le traitement de l'assertion *Brigitte* . Cette réduction est propre au cadre numérique : le cadre perceptif et qualitatif de la "forme" renvoyant (de façon non explicitée ...) à un continuum de dimensions. Cette réduction est vraisemblablement moins spécifique du cadre numérique comme tel, que d'un principe tacite du contrat expérimental (en fait pseudo contrat didactique) que nous n'avions pas envisagé a priori.

I.7. Conclusion : du rôle central des conceptions

I.7.1. Les démarches de validation

a) La nécessité de fournir des preuves

A l'exception de Christophe et Pascal, les binômes observés ont tout à fait pris en compte la consigne : "Expliquez pourquoi".

Christophe et Pascal affichent un certain fatalisme *"faut espérer que c'est juste* "(Chr 62). Pourtant ces élèves ont manifesté à certains moments de leur activité leur conscience de ne pas fournir de preuves comme peut-être il conviendrait : "*mais on n'a rien prouvé* "(Chr 10, à propos de l'assertion *David*). En fait, ce binôme qui a parcouru assez rapidement l'ensemble des assertions, s'en remet au jugement de l'observateur.

Pour ce qui concerne les autres binômes, le désir de preuve souvent explicité se heurte à la complexité du domaine conceptuel sur lequel portent les assertions (notamment pour ce qui est des assertions *Brigitte* et *Louise*) :

> *ça on sait pas l'expliquer ... on comprend, mais ...* (Chr 557, assertion *Brigitte* et *Louise*)
> *j'sais pas comment on peut l'expliquer* (Ana 167, assertion *Serge*)
> *moi j'ai compris, mais j'arrive pas tellement à l'expliquer* (Lyl 184, assertion *Louise*)

b) Les types de preuves

La production de preuves, notamment pour satisfaire à la consigne, apparaît attachée à une norme quant à la forme, ou au moins à une image des mathématiques. Certains élèves explicitent assez clairement leur perception de ces contraintes :

là faut démontrer avec des lettres ... (Lyl 70)
il y aurait fallu faire toutes les démonstrations et tout [...] toute façon on peut pas, on a pas pris les axiomes, tout ça ...
(Oli 155-161)
on pourrait faire des énoncés, tout ça ... on peut faire compliqué, ça dépend [...] on pourrait mettre des phrases, p't'être que ce serait mieux (Lau 129)

Alliées à la complexité du domaine conceptuel, nous pensons que ces exigences sont un obstacle à dépasser le niveau de l'**empirisme naïf** souvent observé. A défaut de pouvoir fournir les preuves intellectuelles qu'ils souhaiteraient, les élèves se contentent de quelques exemples qui suffisent à emporter leur conviction, notamment dans le cas des assertions *Brigitte* et *Louise* . Par ailleurs, rien dans la situation ne les invite à aller plus loin, comme l'ont peut être noté Christophe et Pascal.

Il en va autrement des quatre premières assertions qui expriment des propriétés relationnelles plus que quantitatives. Les preuves données initialement de la validité des assertions *David* et *Suzanne* sont fondées en raison, dérivées des propriétés d'*Aire* et *Périmètre* au sens d'une conception de type $\mathfrak{C}_1$.

La réfutation des deux premières assertions conduit à reprendre la question de la preuve des deux suivantes. Leur validité d'abord évidente, fondée sur une conviction primitive au sens du "cognitive belief" (Fishbein 1982), est reconsidérée sur la base d'outils reconnaissables mettant en relation dimensions du rectangle, aire et périmètre. On relève alors divers niveaux de preuve, de l'**exemple générique** (Laurent et Stéphane) au **calcul sur des énoncés** (Anaïk et Christine). La tentative la plus remarquable est celle de la construction d'une **preuve formelle** avec les outils langagiers du calcul algébrique, particulièrement les tentatives de Lylian et Olivier (élèves de 4°) et de Christine et Sylvie (élèves de 5°). Ces tentatives échouent à cause de la prégnance du modèle d'action que constituent les conceptions de type $\mathfrak{C}_1$, et aussi de leur complexité cognitive :

- Lylian et Olivier ne parviennent pas à exprimer dans le langage algébrique les relations entre dimensions, aire et périmètre d'un rectangle ;

- Christine et Sylvie utilisent le langage algébrique sous le contrôle sémantique de conceptions marquées par le **temps** et l'**action**. Il s'agit pour elles moins d'une *transformation* , passage d'un rectangle à un autre, que de la *déformation* (active et dynamique) d'un rectangle donné. Il y a peut être là un effet de la formulation des assertions *Guy* et *Serge* qui recourt au verbe d'action «augmenter».

Ainsi le niveau des preuves que les élèves peuvent produire a pour limite le niveau ou la nature des conceptions mises en jeu. Les conceptions de type $\mathfrak{C}_1$ qu'ils mobilisent, s'expriment au mieux en terme d'actions intériorisées et non en un système théorique fondé sur des relations. Les élèves ont une connaissance familière des concepts d'aire et de périmètre,

opératoire dans un sens très restrictif (au sens de production des mesures), mais non constituée théoriquement pour donner accés à des preuves de niveau formel.

Les **contre-exemples** peuvent être reconnus comme des moyens de preuve de la fausseté des assertions *David* et *Suzanne* :

pour David il suffit de mettre un exemple (Ana 97)
on a trouvé un contre-exemple pour celui-là. C'est faux (Lyl 54)

Mais pour d'autres élèves l'utilisation d'un contre-exemple se heurte à l'interdit sur l'utilisation d'exemples comme moyens de preuve. Ainsi Christine et Sylvie se posent la question, à propos de l'assertion *David* , de savoir comment "*prouver qu'on est pas d'accord* "(Syl 130), bien qu'elles aient produit un (contre-) exemple. Elles évitent finalement de résoudre ce problème en affirmant une nuance entre ce qui serait nécessaire à une preuve et ce qui l'est à la consigne : "*faut pas l'prouver, faut l'expliquer* "(Syl 154).

I.7.2. Contradiction et évolution des conceptions

a) Des contradictions non identifiées

La contradiction entre l'acceptation des assertions *David* et *Suzanne* , et la production, pour l'assertion *Brigitte* , de plusieurs rectangles de même aire mais de périmètres différents a été relevée par la plupart des élèves (à la seule exception du binôme Christophe et Pascal). En revanche la contradiction à laquelle devrait conduire l'acceptation de l'assertion *Brigitte* et celle de l'assertion *Guy* n'est pas relevée.

Nous suggérons qu'une opposition de l'ordre statique/dynamique place ces deux assertions dans des sphères de pratique distinctes. Dans l'une, *Guy* , il s'agit de déformer un rectangle donné, dans l'autre, *Brigitte* , il s'agit de s'intéresser à plusieurs rectangles de même aire mais de périmètres différents. La centration des élèves n'est pas du même ordre dans l'un et l'autre cas. Le caractère contradictoire de l'acceptation des deux énoncés peut être occulté.

b) Le dépassement des contradictions : un enthousiasme limité

Comme nous l'avons noté lors de l'analyse des "retours en arrière", le dépassement des contradictions soulevées par le traitement de *David-Suzanne* et *Brigitte* ne signifie pas nécessairement un progrès décisif. En effet, une forme minimale de dépassement est le rejet de la validité des assertions *David* et *Suzanne* , il ne requiert pas le rejet ou la modification des conceptions sousjacentes à l'acceptation initiale.

Bien sûr on peut penser qu'est réfuté le «théorème» : des rectangles de même aire, ou même périmètre, sont identiques. Mais les autres propriétés des conceptions de type $\mathcal{C}_1$, fondamentalement liées à la notion de "forme" ne sont pas remises en question. En particulier l'idée suivant laquelle si on augmente l'aire alors le périmètre augmente. C'est d'ailleurs la résistance de ce modèle qui conduit à l'acceptation des assertions *Guy* et *Serge* . Cette résistance peut même se trouver renforcée dans le cadre numérique par le théorème-en-acte : si on augmente une somme (resp. un produit) alors chacun des termes (resp. des facteurs) est augmenté.

Ces propriétés font des conceptions de type $\mathcal{C}_1$ de bons candidats

pour constituer des obstacles épistémologiques dans l'acquisition des concepts d'aire et de périmètre de figures planes. Douady et Perrin (1984), dans la mise en oeuvre d'une séquence didactique sur ces concepts en classe de 6°, attestent de la résistance de ces conceptions à un processu didactique visant pourtant leur disparition : "même si les élèves ont établi qu'aire et périmètre pouvaient varier dans des sens différents, ils ont tendance à recourir à nouveau à la comparaison des longueurs pour comparer les aires de formes géométriques simples. "(ibid. p. 18). Par ailleurs, cette résistance des conceptions de type $\mathcal{C}_1$ n'est pas spécifique de notre enseignement, Burton (1984) rapporte, pour la même tâche, que la plupart des élèves d'une classe d'élèves d'une quinzaine d'années acceptait l'assertion *Guy* , avec des argumentations telles que : "*What Guy has to say about enlarging the circumference to make the area bigger is true because the circumference is the outside , so obviously if you enlarge the outside the area is bound to get bigger* ." (Dionne 15 ans, ibid. p.13).

La prise de conscience de l'existence d'une contradiction reste sûrement un évènement décisif, tant pour la résolution d'un problème que, plus généralement, pour l'apprentissage. Mais son dépassement ne constitue pas d'emblée un progrés. Une raison que nous avons mise en évidence lors de l'étude de la "situation polygone", est la grande ouverture dans les traitements possibles (voir à ce sujet chap.II, § III). Dans la situation présente l'ouverture était moins grande ; elle se réduisait à la reprise des preuves ou à celle des conceptions sous-jacentes, mais ces reprises ont pu n'avoir qu'un caractère local (par exemple ad hoc au rejet des deux premières assertions), essentiellement parce que le problème fondamental posé par l'existence de la contradiction n'est pas posé.

Le traitement du contre-exemple a lieu à un niveau superficiel, il supprime le fait de la contradiction, pas ses racines.

II : Le périmètre d'un triangle : un problème ouvert

II.1. Le cadre de la recherche

Les observations et les analyses présentées ici prennent place dans un projet assez vaste sur l'étude des problèmes didactiques soulevés par l'enseignement de la démonstration en 4°. Ce projet, auquel nous sommes associé, est développé par une équipe de l'IREM de Lyon (cf. chap. VI, § I.).

Au coeur du projet se trouve la recherche des caractéristiques ou des contraintes spécifiques de séquences didactiques adaptées à l'apprentissage de la démonstration. Nous avons reconnu comme une étape indispensable et préalable à la conception d'une telle séquence, l'étude approfondie des comportements des élèves face aux situations-problème utilisées. Pour cela, nous avons eu recours comme moyen expérimental aux situations d'interaction sociale avec, pour cadre théorique, celui issu de nos propres recherches.

II.2. Dispositif expérimental et analyse *a priori*

II.2.1. Présentation de la tâche

Le domaine mathématique retenu est celui de la géométrie, le problème choisi devant satisfaire a priori les critères reconnus par le groupe lyonnais dans le cadre de sa problématique de recherche (Arsac et Mante 1983, p.8) :

> "Nous appelons **problème ouvert** un problème qui possède les caractéristiques suivantes :
> - énoncé court ;
> - l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de questions intermédiaires, ni de problèmes du genre «montrer que»). En aucun cas cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des résultats présentés en cours ;
> - le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi peuvent-ils prendre facilement «possession» de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution. "

Notons que les deux dernières caractéristiques définissent essentiellement le "problème ouvert" par opposition à une conception dominante du problème scolaire en mathématique. La problématique développée par le groupe lyonnais est d'abord celle de la recherche d'une rupture avec l'ordinaire du contrat didactique en vue de rétablir dans la

classe de «véritables» pratiques mathématiques (chap.VI, § I)

Nous avons retenu, comme moyen pour l'observation, l'utilisation de situations d'interactions entre deux élèves ayant pour tâche commune la résolution d'un problème. Les contraintes propres à cette situation sont celles que nous avons présentées ci-dessus (chap.II, § I.2.4.).

Nous avons de plus placé les élèves dans un contexte de communication invoquée avec des élèves de même niveau scolaire. Cette fiction vise à finaliser leur activité en référence à des exigences de validité intrinsèques, par opposition à la recherche de la satisfaction de l'observateur. Ce dispositif permet par ailleurs une première évaluation de celui qui sera mis en place dans la séquence didactique que nous envisageons, en vue d'obtenir un fonctionnement des élèves quasi-isolé de l'enseignant (cf. chap.VI, § II.1.1.).

Dans le cadre de ces contraintes nous avons établi le texte suivant définissant la consigne et le problème à résoudre :

Rédiger à l'intention de camarades (non présents) un message donnant la description des opérations à réaliser pour calculer le périmètre d'un triangle en partie masqué :

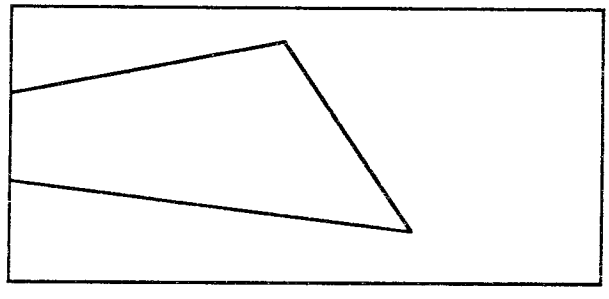


Figure 1

Pour réaliser cela les élèves disposent : d'un seul crayon, de papier à volonté, d'un « triangle tronqué » (comme le représente la figure 1, cf. aussi l'annexe à ce chapitre). Ils disposent aussi d'un petit matériel : rapporteur, règle graduée, équerre, compas, machine à calculer «quatre opérations».

Le temps est ouvert : il n'y a pas de limite fixée a priori. Au cours d'une première phase, dont en fait les élèves fixent le terme en indiquant à l'observateur qu'ils considèrent avoir résolu le problème, ce dernier ne doit intervenir en aucune façon. Dans une seconde phase, selon la même procédure que celle utilisée dans la situation "polygones" (chap.II, § I.2.1.), l'observateur propose des contre-exemples préparés selon l'analyse a priori que nous présentons ci-après. Il s'agit d'analyser les traitements que les élèves feront de ces réfutations et l'évolution éventuelle de leurs démarches de validation.

II.2.2. Les procédures, leur validation et leur évolution

Pour résoudre le problème proposé deux grandes catégories de solutions sont envisageables : d'une part les isométries qui visent à la reconstitution de la figure, d'autre part les similitudes qui visent la reproduction d'une figure semblable mais réalisable sur une seule feuille de papier. Ces deux catégories peuvent être croisées avec deux types de stratégies : celles qui visent à la reconstitution du bout manquant et celles qui visent à la reconstitution du triangle tout entier.

Une solution s'impose de façon très naturelle, elle consiste à assembler autant de feuilles de papier qu'il est nécessaire pour

reconstituer le triangle en en prolongeant les côtés. Cette solution primitive sera écartée par une négociation, entre l'observateur et les élèves, au cours de laquelle l'observateur fera apparaître le coût de cette procédure dans le cas où les côtés du triangle sont presque parallèles, il faudrait alors une place immense pour réaliser une telle reconstitution.

Quelle que soit la procédure utilisée deux problèmes sont à résoudre pour en assurer la validité : d'abord garantir qu'elle permet effectivement la construction d'une figure isométrique ou semblable à celle donnée (ou au «bout manquant»), ensuite garantir qu'elle soit opératoire quelle que soit la figure sur laquelle elle est mise en oeuvre (i.e. quelle que soit sa «taille»).

La situation proposée a bien les caractéristiques d'une situation "problème ouvert" dans la mesure où tous les élèves devraient pouvoir s'engager dans la résolution du problème proposé, mais où par ailleurs ils ne disposent pas de connaissances directement applicables qui fourniraient une solution. En effet au moment où est réalisée l'expérience, en février 1984, les élèves de quatrième observés ne disposent pas des outils mathématiques nécessaires pour fonder simplement ces procédures. Nous savons en revanche qu'ils ont étudié les propriétés du parallélogramme et qu'ils ont traité en 5° des problèmes d'agrandissement ou réduction d'une figure.

Nous décrivons ci-dessous plus précisément les isométries envisageables, la description mathématique qui est donnée ne doit pas faire penser qu'il s'agit de ce que nous attendons des élèves. Notre propos est seulement ici d'en donner une caractérisation et un commentaire relativement aux procédures correspondantes que les élèves sont

susceptibles de mettre en oeuvre effectivement.

a) Les isométries

Les **translations** ont pour objectif de « ramener » le triangle dans la feuille. On peut distinguer : les translations parallèles à un bord de la feuille de papier, les translations dans la direction d'un des côtés du triangle, les translations de direction quelconque.

Nous n'attendons pas de la part des élèves la proposition d'une telle procédure qui s'exprimerait en terme de transformation ; ils peuvent en revanche procéder à une reproduction par un report isométrique des angles et des segments, nous considérons cela comme un cas particulier de similitude (cf. ci-dessous).

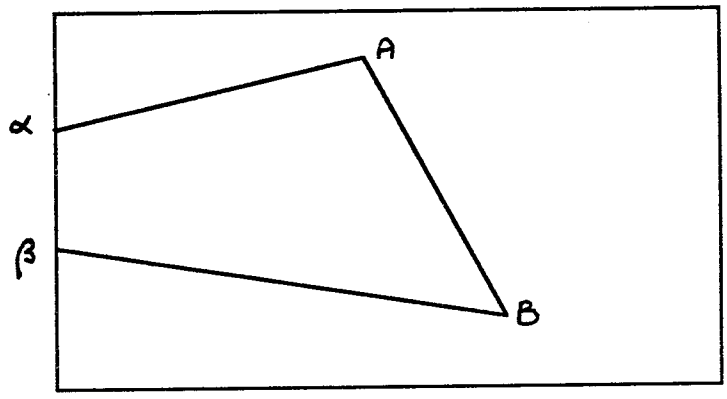


Figure 2

Les **symétries orthogonales** d'axe αβ ou AB (fig. 2), ou d'axe quelconque : le premier type de symétrie est en fait assez complexe à utiliser puisqu'il faut s'appuyer sur des propriétés d'angle, dans les deux autres cas on peut se contenter d'utiliser des transformés de points (très

probablement α,β, A, ou B).

Ce type de procédure correspondrait chez les élèves à l'utilisation du pliage avec pour projet de «rabattre» dans la feuille le «bout manquant» ou le triangle entier. Dans ce cas nous parlerons de **rabattement** et non de symétrie. Une preuve peut consister notamment en une expérience mentale explicitant les propriétés de conservation des longueurs ou des mesures d'angles dans ce «transport» de la figure.

Les **symétries centrales** de centre le milieu de $\alpha\beta$ ou de AB, ou de centre quelconque : le premier type de symétrie est ici encore plus complexe que les autres puisqu'il exige de recourir à la propriété de parallélisme entre une droite et son image, dans les deux autres cas on peut se contenter d'utiliser des transformés de points (très probablement α,β, A, ou B).

Les deux premières procédures peuvent apparaître sous la forme de la construction d'un **parallélogramme**. Le triangle à reconstituer (ou éventuellement le «bout manquant») étant compris comme un demi-parallélogramme ; dans ce cas les élèves disposeraient des propriétés mathématiques nécessaires pour valider cette construction.

Enfin, les **rotations** doivent être mentionnées, mais nous pensons qu'il y a peu de chance pour qu'elles soient utilisées dans cette situation.

Ces procédures peuvent être mises en défaut par l'observateur en proposant des les mettre en oeuvre sur un triangle «trop grand» pour être reproduit sur une seule feuille. Les élèves peuvent dépasser cette difficulté en proposant l'itération de leur procédure, mais la reconnaissance du coût de tels aménagements, analogue à celui de la procédure de prolongement, ou la prise de conscience de ce qu'il est

toujours possible de trouver un triangle « trop grand », peuvent conduire à une évolution vers les procédures de type similitude (ou plus probablement « réduction à une échelle convenable »). C'est ce que nous attendons.

b) Les similitudes

Les procédures du type similitude que nous envisageons sont les suivantes :

- une **homothétie de rapport convenable** qui permet de «ramener» le triangle dans la feuille de papier ; cette stratégie exige la maîtrise de la transformation et des opérateurs qui en découlent sur les mesures des longueurs, notamment les opérateurs inverses. On peut distinguer les homothéties de centre quelconque de celles qui utilisent l'un des sommets connus du triangle comme centre. En effet, dans ce dernier cas il y a conservation des supports des côtés.

- les **homothéties de rapport 1/2** peuvent apparaître plus facilement du fait du statut un peu particulier du rapport de proportionnalité 1/2. Ces dernières procédures peuvent être mise en oeuvre de fait et validée par les élèves en utilisant les propriétés dites de «la droite du milieu d'un triangle» ou encore celle de «"conservation du milieu" par projection parallèle» qui est vue au moment de l'étude du parallélogramme . Il est possible de tracer cette droite en utilisant le milieu du côté connu et sa propriété de parallélisme par rapport à l'un des deux autres côtés.

Nous attendons plus probablement la proposition de **réduction à une échelle convenable** (qui sont de fait des réalisations d'homothéties dans lesquelles la transformation géométrique n'est pas identifiée en tant que telle). Le cas de l'échelle 1/1, ou **reproduction**, doit être distingué, il

permet de reproduire le triangle dans la feuille à partir d'un report d'angles et de longueurs.

Dans le cas où les élèves proposeraient une réduction à une échelle déterminée, l'observateur proposera un cas de figure la mettant en défaut. Cette réfutation peut être dépassée en prescrivant l'itération de la procédure, ou en ne spécifiant pas par avance l'échelle (ou le rapport) mais en donnant une indication pour la recherche d'un rapport ad hoc à chaque cas de figure.

Une telle procédure de "réduction à l'échelle" peut être fondée sur une expérience mentale s'appuyant sur le théorème-en-acte, très tôt disponible (Audibert 1982, p.171), suivant lequel on obtient un triangle semblable à un triangle donné en en conservant les angles dans le processus de «reproduction». Une description envisageable a priori d'un procédé effectif pourrait être du type suivant :

> Par un point P du côté tronqué AX (fig.3), tracer la parallèle au second côté tronqué BY, cette droite coupe AB en Q. Le triangle APQ est semblable (au sens naïf) au triangle complet pour des raisons de parallélisme et de conservation d'angle, par ailleurs le rapport AQ/AB fournit l'échelle à laquelle le triangle APQ « reproduit » le triangle complet. Il reste à mesurer avec toute la précision possible le périmètre du triangle APQ puis à le multiplier par l'inverse du coefficient d'échelle trouvé pour obtenir le périmètre du triangle tronqué.

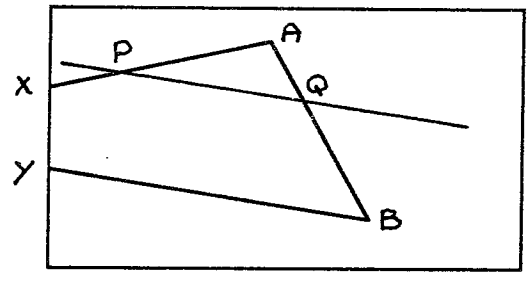


Figure 3

Le processus de validation peut porter plus précisément sur les points suivants : similitude du triangle APQ et du triangle complet, nature du rapport AQ/AB. Notons que ces questions trouvent leur origine dans la situation de communication qui exige que l'on soit non seulement capable de faire une réduction à une échelle convenable mais que de plus il soit possible de décrire avec précision les opérations nécessaires en assurant leur validité.

Le processus que nous envisageons est donc ici celui d'une mathématisation du concept naïf (i.e. du sens commun) de réduction à l'échelle. Sa théorisation a lieu à la fois sous la pression des exigences de preuve (la procédure doit être valide pour tout triangle) et des exigences de communication (la procédure doit être réalisable à partir d'une description verbale).

II.2.3. La population des élèves observés

Nous avons observé 8 binômes d'élèves de collège de l'agglomération lyonnaise, dans le courant du deuxième trimestre de l'année scolaire 1983-1984. Le niveau scolaire est celui de la classe de 4°.

Ces observations ont été réalisées par les membres de l'équipe de recherche sur le "problème ouvert" de l'IREM de Lyon. Les élèves étaient volontaires pour participer à cette observation, ils se sont constitués en binôme au grè de leurs affinités.

Nous donnons ci-après la liste des binômes observés avec les précisions de date et de lieu, ainsi que le nom de l'observateur.

Carrine et Yasmina	7 février 84	Collège Lassagne	G. Chapiron
Christophe et Franck	2 février 84	Collège de Thoissey	M. Philippon
Fabrice et Hervé	7 février 84	Collège Lassagne	M. Mante
Patricia et Sophie	2 février 84	Collège de Thoissey	M. Philippon
Philippe et Stéphane	31 janvier 84	Collège "les Iris"	Y. Guichard
Stéphane et Caroline	28 février 84	Collège Mauvert	G. Germain
Stéphane et Christophe	27 janvier 84	Collège Tonkin	G. Germain
Yann et Nathalie	9 février 84	Collège des Battières	G. Arsac

Les observations ont été réalisées dans l'enceinte des établissements scolaires, mais en dehors de la classe. Le moment choisi dans la journée, pas très confortable, dépendait essentiellement de la disponibilité des élèves : «entre midi et deux heures», à la suite des cours de l'après-midi.

Le temps de travail des binômes a été en moyenne de 90 minutes.

II.3. Remarques sur la connaissance de périmètre

La plupart des élèves marque un embarras avec la définition d'un moyen de calcul du périmètre d'un triangle. Certains d'entre eux vont assez rapidement retrouver qu'il s'agit de la mesure du contour, la somme des mesures des côtés. Mais trois binômes connaissent de sérieuses difficultés : Christophe et Franck, Stéphane et Christophe, Philippe et Stéphane. Ces derniers mettront d'ailleurs beaucoup de temps avant de se fixer sur une signification correcte :

c'est la hauteur c'qu'il faut faire pour connaître le périmètre d'un triangle (Phi 99)

π ,on l'emploie dans les triangles ?... (Phi 245)

j'sais pas, l'périmètre des triangles j'ai pas appris (Sté 246)

hauteur par π sur 2, non ? (Phi 267)

Ils abandonneront, à juste titre, cette direction car "*y a trois hauteurs maintenant, c'est ça qui est embêtant* " (Sté 331), et, en prenant le cercle comme référence, ils en viendront à ce que "*le périmètre c'est toute la longueur* " (Sté 360).

Stéphane et Christophe évoquent une formule voisine de celle de l'aire du triangle : "*pour trouver le périmètre d'un triangle normal, s'il était pas tronqué, c'est base par hauteur divisé par trois, non ?* "(Sté 48). Pour Christophe : "*ça fait longtemps qu'on a pas vu ça* "(Chr 71), l'observateur interviendra pour leur dire ce qu'est le périmètre du triangle : la somme des mesures des trois côtés.

De même, Christophe et Franck évoquent d'abord ce qui est en fait la formule de l'aire d'un triangle.

L'embarras des élèves tient à ce que la plupart pense qu'il "*y a bien une formule* "(Chr 44). Ce qui détermine le périmètre d'un triangle est un peu trop simple, son statut mathématique est incertain ; réaliser des mesures ne paraît pas satisfaisant. Un binôme d'élèves, observé par G. Arsac au cours de phase de préparation de cette étude, atteste bien de cette difficulté :

- *il faut ajouter les côtés ; on a le périmètre approximatif. Mais il y a une formule ...*
- *on sait que A+B+C=180°*
- *mais je ne vois pas comment déterminer le périmétre à partir de ça*
- *quelle est la formule pour le rectangle ?*
- *c'est L+l*

Plusieurs fois tout au long de leur recherche, ils regretteront :

- *mais tant qu'on a pas la formule*

- *mais on mesure et on ajoute ...*

- *ça me paraît un peu ...* [sous entendu : *approximatif ...*]

L'un des élèves dira explicitement que ce qui le gène c'est que "*pour avoir le périmètre, le seul moyen, c'est de mesurer* ".

En fait la notion de périmètre est à ce niveau, la classe de 4°, à peine un objet mathématique, sûrement pas un objet d'enseignement. Comme le confiait Christophe ci-dessus, les élèves l'ont perdue de vue. Pour la retrouver ils ne se laissent pas d'emblée guider par leur connaissance «du sens commun» qui les conduirait à la mesure du contour ; ils pensent au caractère technique des mathématiques : il doit exister une formule (nécessairement un peu sophistiquée).

II.4. Les stratégies de résolution observées

II.4.1. Les stratégies de reproduction

a) Le prolongement des côtés

La stratégie de reconstitution du triangle par prolongement des côtés apparaît d'emblée chez tous les binômes. En fait, le choix d'une telle stratégie semble indépendant du problème précis qui a été posé. Il s'agit d'abord pour les élèves de reconstituer le triangle, éventuellement de vérifier que le problème a un sens : "*on va déjà vérifier si c'est pas parallèle ... [et donc] prolonger les deux droites jusqu'à ce qu'elles se croisent* " (Her 30 puis Fab 43). La recherche du « bout manquant » s'impose comme un préalable à tout autre opération.

Cette stratégie, valide mais éventuellement coûteuse, est écartée par une intervention de l'observateur qui en négocie l'abandon (cf. § II.2.2.). Certains élèves vont en conclure "*c'est faux c'qu'on a mis* "(Sté 102). Cette interprétation de l'intervention de l'observateur peut infléchir les recherches ultérieures à partir de raisons non intrinsèques, par exemple :

on peut peut-être reproduire rien que la deuxième partie (Pat 283)
ça fait pas très mathématique, non plus (Sop 284)

La résolution du problème par prolongement des côtés étant abandonnée, deux stratégies sont ensuite principalement utilisées par les élèves, elles visent à accéder au triangle complet pour pouvoir en mesurer le périmètre : la **reproduction** du triangle sur une nouvelle feuille de papier (Patricia et Sophie, Carinne et Yasmina, Christophe et Franck), ou le **rabattement** dans la feuille par pliage autour du côté complet (Stéphane et Caroline, Yann et Nathalie).

b) <u>La reproduction du triangle</u>

Dans la mesure où les élèves n'envisagent pas d'autres cas possibles, le document qui leur est donné (Annexe) suggère assez fortement que, placé autrement, le triangle tiendrait tout entier dans la feuille. La stratégie de reproduction apparaît ainsi de façon assez naturelle. Le rabattement que nous présentons plus loin n'en est qu'une modalité. Ces stratégies de reproduction se trouvent dans la filiation directe de celle qui consiste à prolonger les côtés :

<u>Patricia et Sophie</u> ont procédé par décalque du triangle initial sur une nouvelle feuille : "*on peut le refaire carrément sur une feuille* "(Sop

76), le message consistant à indiquer aux camarades : "*on marque qu'on dessine, puis on mesure* "(Pat 85).

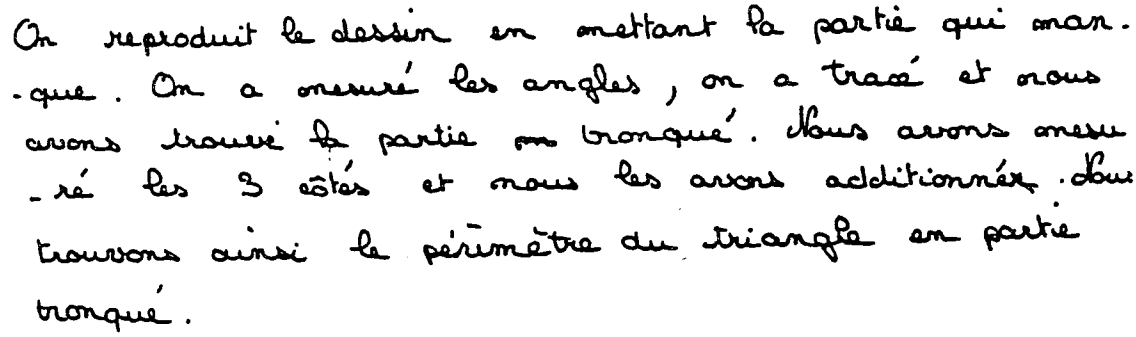


Figure 4

L'observateur oppose à cette solution un triangle trop grand pour être reproduit de cette façon. Les élèves abandonnent alors leur solution :

oui, ça va pas tenir [...] on va être obligé de trouver une autre solution (Sop 149)

donc, on ne peut pas reproduire le dessin. Hein , c'est faux (Pat 154)

Les élèves s'orientent vers d'autres solutions en examinant les propriétés géométriques de la partie visible de la figure.

Carinne et Yasmina reproduisent le triangle à partir des données de la longueur du côté connu, et de la mesure des angles connus.

L'observateur soumet leur solution à un triangle trop grand. Les élèves constatent que leur solution ne convient pas, mais elles en restent là. L'observateur les invite à "*compléter* " leur méthode (Obs 361), mais les élèves renoncent : "*oui, mais vous dites que ça doit tenir sur une feuille* "(Yas 362). Elles ne poursuivent pas leur recherche : "*on va arriver au même résultat* "(Yas 371). La contrainte énoncée par Yasmina

n'a jamais été formulée par l'observateur, celle-ci la tire (dans un contexte de reproduction) de l'interdiction de prolonger les côtés pour reproduire le triangle en utilisant plusieurs feuilles.

Christophe et Franck s'engagent dans la reproduction de leur triangle mais :

y va en manquer un tout petit peu (Chr 76)

c'est pas assez grand (Chr 81)

Ils y parviennent cependant et calculent le périmètre du triangle dont ils disposent, mais ils ne retiennent pas cela comme une solution. Ils comprennent en fait la consigne comme la demande d'une formule : "... *voilà, alors donnant la description. Faut trouver une formule là, pour ça* ..."(Chr 89)

c) Le rabattement du triangle

Le rabattement du triangle autour du côté complet revient à sa reproduction tout entier dans la feuille. Il apparaît en fait comme un aménagement de la stratégie précédente ; il s'agit, par pliage, de s'en tenir à n'utiliser qu'une seule feuille de papier.

Stéphane et Caroline se proposent de "*plier la feuille sur le trait* " (Sté 147). Ils ont quelques problèmes de réalisation et finalement, en s'appuyant sur le côté complet, ils indiquent de reporter les angles puis de prolonger les côtés pour reconstituer le triangle. On peut remarquer (fig. 5) l'indication donnée pour un contrôle de la réalisation, sur la somme des angles d'un triangle. Simplement les élèves "*[pensent] que c'est ça* "(Sté 315). Ils ne cherchent aucun moyen de s'assurer de leur solution aussi, lorsque l'observateur soumet leur solution à un grand triangle, ils concèdent que "*si ça se trouve on s'est trompé* "(Car 346)

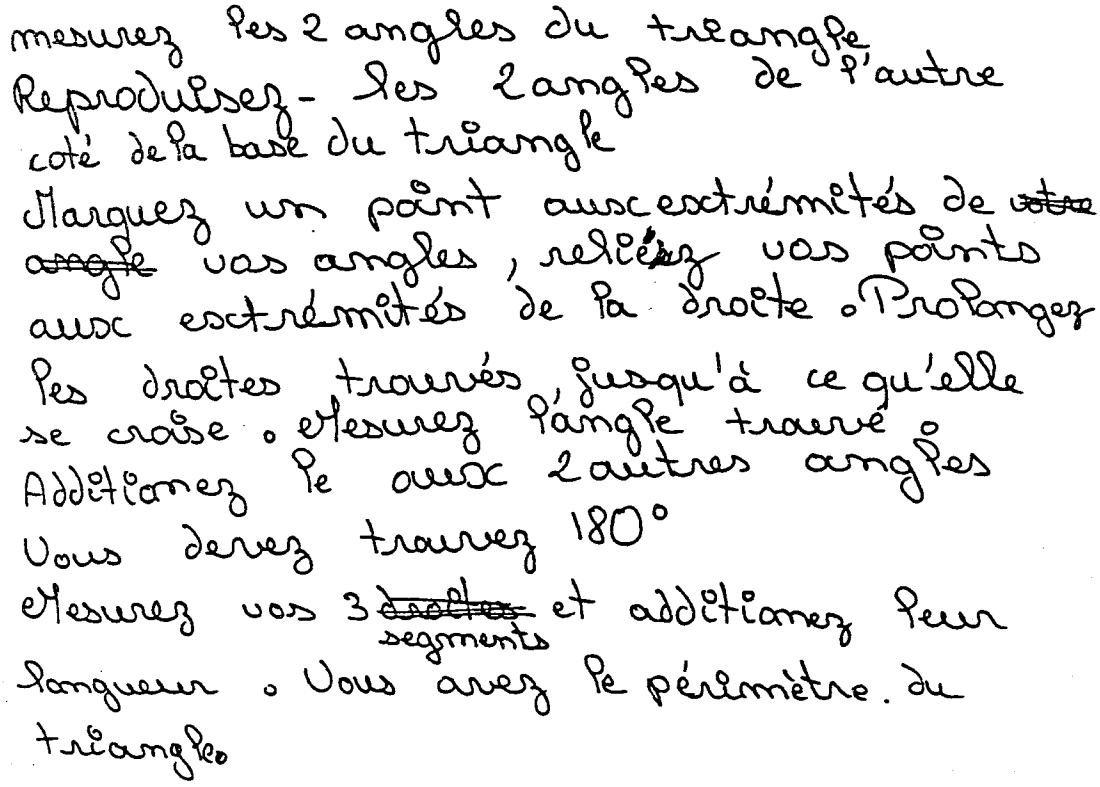


Figure 5

Ils envisagent un aménagement de leur solution, en pliant la feuille de façon à ce que le prolongement des côtés du triangle soit possible en restant sur la feuille. Il s'agit cette fois d'effectuer effectivement ces actions : "*tu plies. Tu mesures là, et puis tu mesures ce qui reste de l'autre côté et puis tu as le périmètre* "(Sté 379). Cette stratégie paraît meilleure parce que sa validité semble plus générale (i.e. non réduite au seul triangle donné en exemple) : "*c'est ce qu'on aurait dû faire tout à l'heure* "(Car 380). Ils fondent la validation de leur solution sur le théorème sur la somme des angles d'un triangle qui garantit la valeur du troisième angle,

c'est-à-dire la reconstitution du « bout manquant » auquel il est identifié :

bien sûr, parce que ... on reproduit ... les mêmes degrés pour les angles, donc ... si les deux angles ont le même degré ... ben le troisième a forcément le même degré que celui qu'on trouve pas ... donc on cherche ce qui manque (Car 421)

parce qu'on additionne les trois angles, on trouve 180 degrés [...] alors déjà au début on additionne ceux-là, puis on doit avoir combien on trouve là, si on, trouve ça (Sté 422-424)

L'observateur oppose à cette solution un nouveau triangle : "*ouais, mais là y a pas assez de place, là tu continues* "(Sté 427). Les élèves proposent ainsi l'itération du pliage (cette fois de l'autre côté de la feuille) qui permet effectivement de faire face à toute situation. L'observation s'arrête ici pour des raisons horaires.

Pour Yann et Nathalie , le rabattement par pliage autour du côté connu est clairement une stratégie pour reconstituer le triangle, alors que le prolongement des côtés en dehors de la feuille a été interdit par l'observateur :

si on la plie, on a le droit de continuer de l'autre côté ? (Yan 27)

voilà et maintenant on cacule le périmètre (Nat 29)

Le texte de leur message (fig. 6) est la description de cette procédure :

- Refaire la figure donnée sur une autre feuille
- plier du côté complet
- Rallonger les deux autres côtés jusqu'à qu'ils se croisent en un point
- Mesurer et calculer le périmètre

Figure 6

Lorsque l'observateur soumet leur solution à un grand triangle, les élèves renoncent à la solution qu'ils ont proposée : "*ben ça va pas, bon, ben faut trouver autre chose* "(Yan 59). Ils cherchent un autre moyen de reproduction qui exploiterait mieux la page (fig.7).

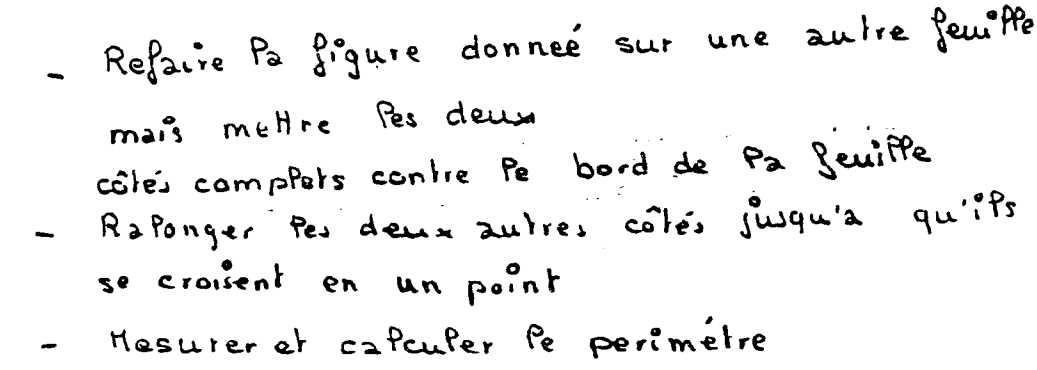


Figure 7

L'observateur soumet cette solution à un nouveau triangle : "*c'est compliqué cette histoire* "(Yan 76) ; ils abandonnent alors cette direction de recherche.

II.4.2. Des démarches «exploratoires»

a) Un changement d'orientation

Reproduction et rabattement sont apparus comme deux stratégies de base avec le même objectif de reproduire le triangle complet (i.e. à l'échelle 1/1) pour réaliser des mesures puis calculer le périmètre.

Ces stratégies sont disqualifiées par les réfutations de l'observateur, les élèves s'orientent alors vers une tentative de connaissance du «bout

manquant » à partir des éléments accessibles de la figure donnée. Il s'agit le plus souvent d'une exploration des éléments géométriques remarquables de la figure, en relation avec ce que les élèves savent des droites remarquables d'un triangle, ou encore de tentatives de «localisation spatiale » du sommet manquant. Un glissement fréquent du problème a lieu vers la mesure des angles connus en vue de déterminer le troisième angle du triangle, puisqu'aprés tout c'est un «angle» de la figure qui est caché.

Les comportements des élèves sont dominés par deux types de projets : d'une part localiser le sommet manquant, d'autre part trouver des relations entre les « éléments mesurables » de la figure qui permettrait de calculer le périmètre.

b) L'exploration des éléments remarquables

Stéphane et Christophe, après le rejet de leur stratégie initiale par l'observateur, abandonnent l'idée de reconstituer le «bout manquant » : "*il faudrait arriver ... combien ça mesure là, ce qui manque, sans tracer ...* "(Sté 85). Ils essaient une première stratégie pour évaluer à quelle distance les côtés du triangle vont se rencontrer (cf. § II.4.2.c) mais ils échouent. Ils entreprennent alors une exploration dans diverses directions.

En mesurant les angles accessibles et en utilisant le théorème sur la somme des angles d'un triangle, ils déduisent la valeur du troisième angle. Ils vérifient le résultat obtenu sur une reconstitution du triangle : " *maintenant on a une sorte de petite preuve* "(Sté 240), quoique "*ça nous dit pas les longueurs* "(Chr 287). Aussi cette direction est-elle abandonnée.

Une autre idée d'exploration est évoquée : "*attends, si on essaie de faire quelque chose avec les diagonales* "(Sté 313), il s'agit des diagonales du quadrilatère que forme la figure donnée, mais cette direction est abandonnée à son tour :"*ça donnera rien parce que c'est pas les diagonales du triangle* "(Chr320).

Stéphane et Christophe passeront ensuite au voisinage d'une solution en évoquant la réduction du triangle (cf. § II.4.3.), mais finalement ils transformeront totalement le sens du problème comme en témoigne leur message, reproduit ci-dessous, où ils décrivent une procédure de reproduction d'une figure analogue à celle du triangle tronqué, seules des mesures d'angles sont données (fig. 8).

Pour Stéphane et Caroline "*on pourrait tracer des hauteurs ou des médiatrices ...* "(Sté 108) et " *c'est pas les médianes ? Quand tu parts du sommet, euh ... elles se croisent aux deux tiers de la distance ... un truc comme ça ... ouais ...* "(Car 109). Mais elles ne poursuivent pas dans ce sens, s'en tenant au rabattement.

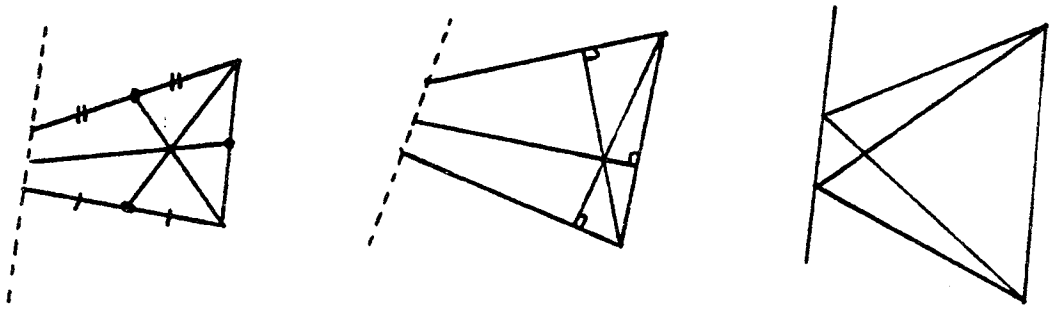
Carine et Yasmina : "*si on cherchait avec les médiatrices, les angles circonscrits: tu sais, qui passent par les trois sommets. Je me dis qu'on aurait obligatoirement l'autre ... mais si on trouve une médiatrice, c'est qu'on trouve le milieu, c'est donc qu'on trouve tout* "(Yas 219). Aussi elles abandonnent cette direction de recherche pour revenir à la reproduction du triangle (cf. ci-dessus).

On nous donne un triangle quelconque nommé ABCD

On prend un point C sur la feuille. On prend l'angle du point C. On reporte cette mesure sur le point C de la feuille blanche et on trace l'angle C de 69°. Ce qui nous donne on mesure l'angle D et on reporte cette mesure sur Cy et on trace l'angle D de Cy et Cz (59°) 89° qui vient couper Cz en X. Comme la somme des angles d'un triangle est égale à 180° l'angle X est égale à 36°. À partir du triangle XCD on prolonge CD du côté de D. En reprenant la figure de départ on prolonge CD et le segment tracé qui vient le coupe tout les deux on mesure $\widehat{D}$ et on le reporte sur le prolongement de CD. On trace l'angle de 17° jusqu'à ce qu'il coupe le triangle XCD en un segment AB. On obtient un triangle en jaune tracé ABCD.

Figure 8

Philippe et Stéphane, après s'être fixés sur une définition de périmètre, s'intéressent au centre du cercle circonscrit au triangle, et finalement à la recherche du «centre» du triangle. Leurs projets ne sont pas explicités, on les saisit à travers leurs nombreuses allusions au centre de la figure et grâce aux croquis (fig.9) sur lesquels ils s'appuient (leur protocole est particulièrement difficile à utiliser)



Figures 9

Interrompus par l'observateur pour des raisons horaires, ils ne parviendront pas à leurs fins .

Christophe et Franck envisagent plusieurs directions avant de réaliser des tracés qui, semble-t-il, devraient permettre de retrouver le «bout manquant » :

t'essaies la médiatrice ? (Chr 165)

ça nous donnerait peut-être la pointe, mais pas le périmètre aussi (Chr 167)

ou

[les hauteurs] je crois ... elles se coupent tous au même endroit normalement (Chr 210)

quand c'est comme ça [i.e. la figure incomplète], on en connaît deux ... on connaît pas l'autre aussi (Chr 251)

Les élèves tracent des figures (fig. 10), ou plutôt des segments remarquables de la figure et s'essaient à diverses conjectures qu'ils confrontent à la mesure du périmètre du triangle reconstitué, par exemple :

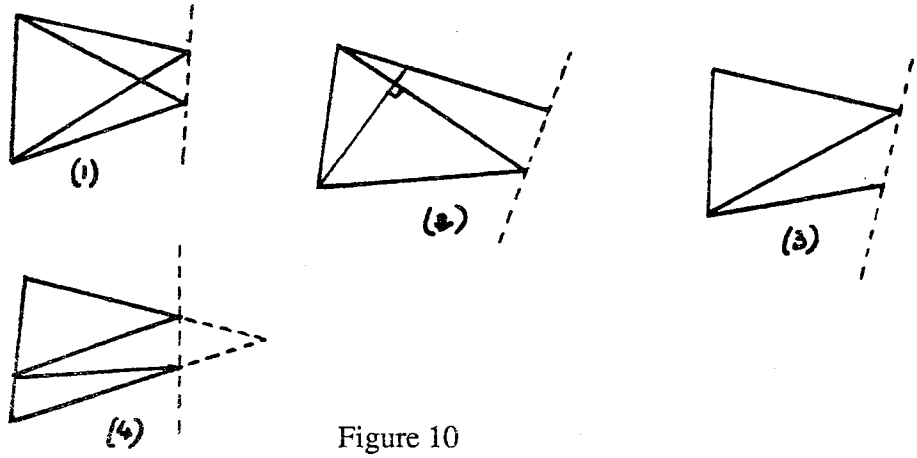


Figure 10

Ces essais sont l'objet de mises à l'épreuve. Ainsi, pour celui correspondant à la figure 10 (4) :

regarde j'ai calculé celui-là ... le périmètre du petit là [...] et puis j'y ai multiplié par deux, et on trouverait presque ça ... le périmètre du grand ... Alors il faudrait qu'on regarde si ça marche avec [...] l'autre petit qu'on a fait (Chr 446-8, 450)

Ils font alors des essais sur d'autres figures :

ça va pas ça, on trouve presque mais pas ... (Chr 484)

on trouve jamais la même chose (Fra 497)

c'est peut-être au hasard que ça se trouve pareil (Chr 504)

attends, ah oui, puis de toute façon on pourrait ... au lieu de prendre celui-là, on aurait très bien pu prendre celui-là [...] ouais, c'était un hasard quoi ... bon alors, faut recommencer (Chr 508-512)

Globalement ces directions de recherche sont abandonnées en reprenant le contrôle de ce que signifie «périmètre» : "*ah ben non, ça c'est à l'intérieur. Le périmètre c'est ce qui est là* "(Chr 655).

Dans les deux dernières figures il y avait un essai de reconnaissance du «bout manquant», mais à défaut d'une tentative de preuve, les élèves identifient a priori les raisons d'un échec de ces directions de recherche :

> *si on fait comme ça là et puis ça, on avait dit ça nous donnerait la pointe. C'est ce qui manquait là quoi ...* (Chr 808)
> *attends, fais voir l'autre... là quand on avait ... mais là, ça dépend où on y coupe* (Chr 818)
> *ah ouais, donc c'est pas ça ... faudrait que ça marche en général* (Fra 819)

Patricia et Sophie , après que leurs solutions initiales (prolongement et reproduction) aient été réfutées, s'engagent dans une nouvelle direction : "*l'important c'est de trouver l'angle qui est après* "(Pat 618). Elles mesurent les angles accessibles et tirent la mesure du troisième angle de ce que la somme des angles d'un triangle est égale à 180°. Ces calculs sont abandonnés car "*ça nous donne pas le périmètre* "(Pat 200). Pourtant "*y doit sûrement y avoir une solution avec les angles* "(Pat 285) ou "*y a peut-être pas de solution* "(Pat 296) et "*je ne sais pas si d'avoir les angles ça nous avance à grand chose [...] ça serait un triangle isocèle ça irait* " (Pat 300-309).

c) Une nouvelle lecture de la situation

Les stratégies évoquées ci-dessous ont en commun le projet de connaître où se trouve le «bout manquant», mais cette fois le triangle est compris comme la donnée de deux demi-droites qui se «rapprochent» et

finalement se rejoignent. Les élèves cherchent à quantifier la façon dont s'effectue se rapprochement en mesurant à intervalle fixe la longueur d'un segment découpé par ces deux demi-droites sur une parallèle au côté connu. Il s'agit donc d'une lecture essentiellement différente de la situation géométrique.

Stéphane et Christophe ont pour projet de "*voir de combien ça réduit tous les 8cm* "(Sté 128), de cette façon "*peut-être qu'on arriverait à savoir à combien de centimètres ça se croise* "(Chr 130). Mais Stéphane utilise une procédure fausse, il trace un segment en prenant un point sur chaque côté à 8cm des sommets connus. Il affirme que "*de toute façon ça réduira toujours de 4,80 tous les 8cm* "(Sté 148).

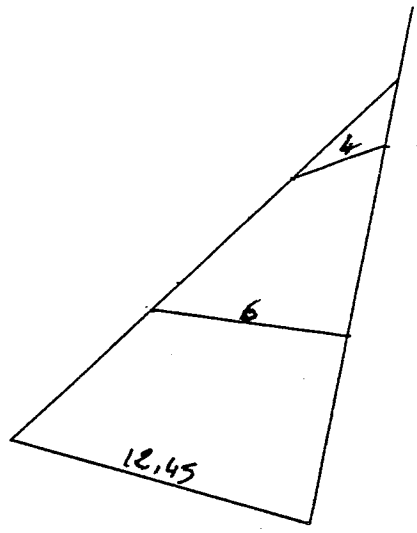


Figure 11

Christophe n'est pas convaincu : "*j'sais pas, peut-être pas obligatoirement* " (Chr 190). Stéphane réalise alors une vérification en prolongeant les côtés du triangle, sa conjecture est réfutée car la diminution qu'il constate n'est que de 4cm : "*on va voir quelque chose, combien ça réduit ... 4 ... donc 0,80 [...] non ça va pas ... je trouve qu'il*

faut revenir à tout à l'heure [...] faut essayer de savoir combien il fait cet angle "(Sté 207-9). Cette stratégie de résolution est donc finalement abandonnée.

Patricia et Sophie, à la fin de leur recherche, envisagent une stratégie analogue : "*je vais graduer [...] puis je vais essayer de voir de combien ça réduit tous les combien* "(Pat 339-345), mais elles ne mènent pas ce projet à son terme.

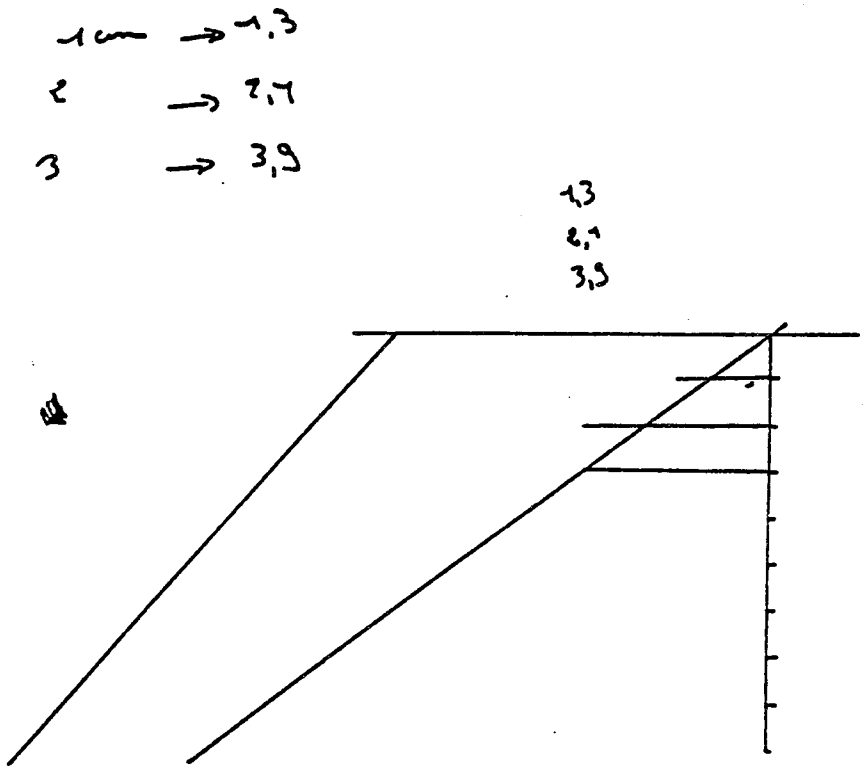


Figure 12

"*ça va pas si on continue* "(Pat 349), mais "*puis de toute façon on aurait pas pu, puisque tu sais pas jusqu'où ça va* "(Sop 350) ... "*non ça marche pas* " (Pat 356).

Elles en resteront là.

Fabrice et Hervé envisagent, assez vaguement une stratégie de ce type : "*et en traçant des parallèles partout, des parallèles aux côtés ... on pourra trouver* "(Her 150). Mais cette direction de recherche est d'emblée abandonnée : "*pareil on aura pas assez de place* "(Her 154). En effet, cette nouvelle stratégie ne prendrait pas en compte la nature des réfutations opposées aux solutions précédentes.

Yann et Nathalie après que leurs solutions initiales (rabattement et reproduction) aient été réfutées, s'engagent dans une nouvelle voie. Ils constituent un réseau de parallèles, comme sur la figure 13.

ça fait tout le temps 4 de moins [...] ça doit marcher, non ... normalement ? (Yan81)

c'est proportionnel, ça fait que, euh ... (Yan 85)

on fait 7,8 divisé par 4, puisque c'est tout le temps 4mm de moins. Puis on trouvera certainement l'endroit où ça se croise, dans combien de ... (Yan 87)

ça fait que si on continue des deux côtés de 19,5cm , ils vont se croiser ... normalement (Yan 90)

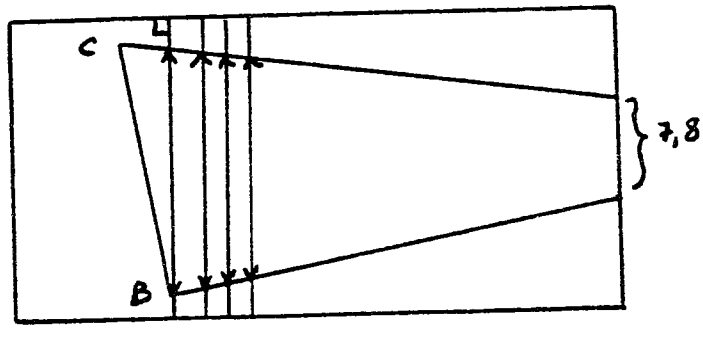


Figure 13

Pour vérifier cette stratégie il reconstituent par ailleurs le triangle complet (fig.14)

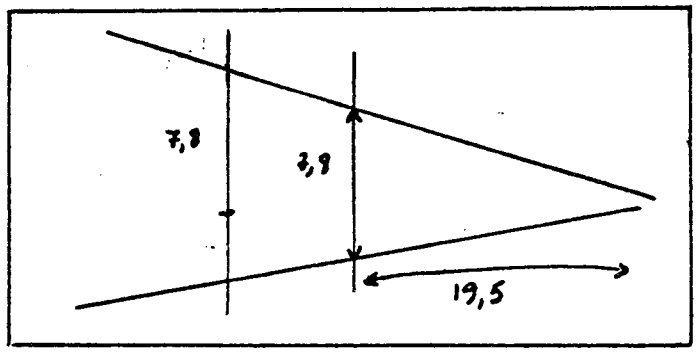


Figure 14

théoriquement si ça marche ce que je dis, ça doit faire 19,5. Il reste au moins 19,5 ? Bien sûr ... [...] c'est 100 virgule j'sais pas trop quoi ... Eh ben ça marche pas (Yan 102-3)

Cependant Yann est tout à fait convaincu de l'efficacité de sa méthode, et avant de l'abandonner il attribue d'abord son échec aux erreurs de tracé (ce qui est le cas quant aux reports des angles ...) :

pourtant, ça devrait marcher normalement. A chaque centimètre, ça descend de 4mm. Ca devrait marcher ... ou c'est du hasard ? Ou alors c'est qu'on a mal tracé ? Ou que j'ai mal tracé (Yan 105)

finalement ...

faut trouver un autre truc (Yan 108)

Ils s'arrèteront là , Yann étant toujours persuadé de cette solution sans toutefois trouver où est l'origine de la contradiction attestée par le tracé :

c'est pas normal, ça peut pas être dû au hasard tout le long que ça fasse 4,5mm (Yan 110)

Notons cependant qu'il s'agit là de la découverte d'une solution pour le triangle dont ils disposent et non encore d'une solution générale.

II.4.3. Les stratégies de réduction à l'échelle

Nous attendions ces stratégies à la suite de la réfutation de stratégies de type «reproduction» par des triangles «trop grands». En fait, leur mise en oeuvre n'a été observée que pour le binôme Fabrice-Hervé. Le binôme de Stéphane et Christophe est seulement passé au voisinage de cette solution. Nous les présentons ci-dessous :

Stéphane et Christophe décident de faire "*un modèle réduit ... deux fois plus petit, sans mesurer. On va partir des angles seulement, sans mesurer* "(Sté 354). Mais en fait il s'agit de construire une maquette pour une exploration du triangle «entier» : "*si on trouve quelque chose pour celui-là, faudra le refaire sur celui-là, pour voir si c'est vraiment juste* " (Sté 352). La relation entre le périmètre du «modèle réduit» et celui du triangle initial ne peut être établie car les élèves s'interdisent toute mesure de longueur sur la figure d'origine : "*si on arrive à refaire la figure sans s'occuper de mesurer les côtés, après on les mesure là ... on les aura pas mesuré là-dessus ...* "(Sté 362).

Cet interdiction de mesurer (le périmètre) directement sur la figure originale est présente au point que ces élèves recourent à des stratagèmes pour ne pas succomber à la tentation : "*il est où le truc d'origine ? Bon, ben, planque le ... comme ça on risquera pas de le mesurer* "(Sté 419). Cette stratégie échoue, les élèves en reviennent à des constructions pour lesquelles ils n'utilisent que la donnée des angles de la figure initiale. Tout se passe comme si la demande de l'observateur de ne pas prolonger les côtés du triangle pour en mesurer le périmètre avait inhibé tout recours à des mesures de longueurs sur cette figure.

En revanche pour Fabrice et Hervé la réduction du triangle initial est une stratégie adaptée au fait que l'on peut toujours être confronté au cas de

figure d'un triangle trop grand : "*faudrait faire un tout petit dessin* "(Fab 156) ...

en diminuant la longueur, regarde ! (Fab 156)

et après en multipliant (Fab 159)

ouais après on multiplierait par là ... (Her 160)

en divisant, en divisant le côté par deux (Fab 161)

Le taux de réduction peut être adapté au cas de figure traité : "*mettons qu'on le divise par 5 et après on le multiplie par 5* "(Fab 196) ; et lors de la mise en oeuvre de la procédure les élèves envisagent, si la division par 5 n'est pas suffisante, de diviser encore par 2. Il s'agit bien d'une réduction à l'échelle, comme en témoigne le texte de leur message, pour laquelle les élèves envisagent un rapport ad hoc (fig.15).

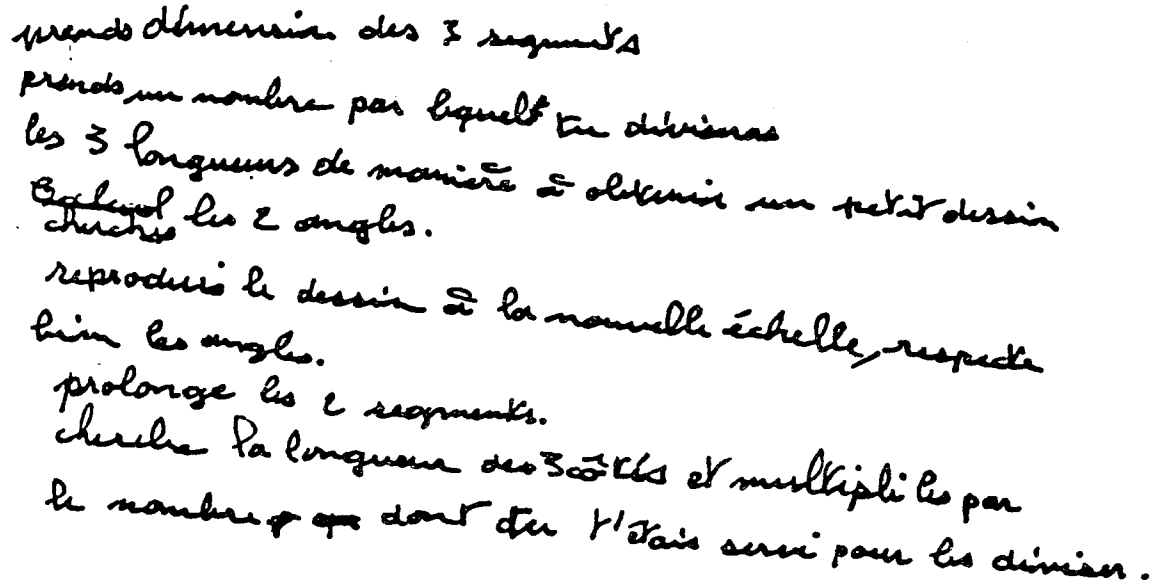


Figure 15

La validité de cette figure est de façon évidente reconnue pour tout triangle. A l'observateur qui demande si ils sont sûrs de leur solution, les élèves répondent : "*même si c'est un truc comme ça ... t'y réduis, t'y*

réduis, tu dois bien avoir la place d'y faire ... " (Her 327).

II.5. conclusions

II.5.1. L'obstacle des stratégies de reproduction

Nous distinguons parmi les solutions produites par les élèves, d'une part les choix stratégiques qui correspondent à une orientation globale de la résolution, et d'autre part les procédures effectivement produites qui en sont des réalisations. Les stratégies dominantes sont celles de reconstitution du triangle ; les procédures utilisées sont celles de prolongement des côtés, de rabattement et de reconstruction du triangle entier. Ces deux dernières procédures sont vraisemblablement induites par le cas de figure initial proposé aux élèves (cf. Annexe) et dont, en général, ils ne se détacheront pas (cf. § II.5.2). Le choix de ce cas de figure avait été fait pour ne bloquer a priori aucune des procédures, correctes ou non, susceptibles d'être utilisées.

Les stratégies de réduction du triangle selon une échelle convenable (§ II.2.2.b) n'apparaissent que dans un seul binôme. Peut être faut-il voir là, à nouveau, un effet du cas de figure initialement proposé qui oriente les élèves fortement vers l'idée d'une reproduction. Mais de plus, une telle stratégie exige des élèves une construction intellectuelle complexe dans laquelle ils doivent envisager non seulement la transformation du triangle initial, mais encore le retour par la transformation réciproque.

Le schéma suivant (fig.16) donne une idée des stratégies et des

procédures successivement produites par les binômes ; la coupure notée // signifie le passage par une phase d' exploration à la recherche d'indices pertinents (cf. § II.5.4) :

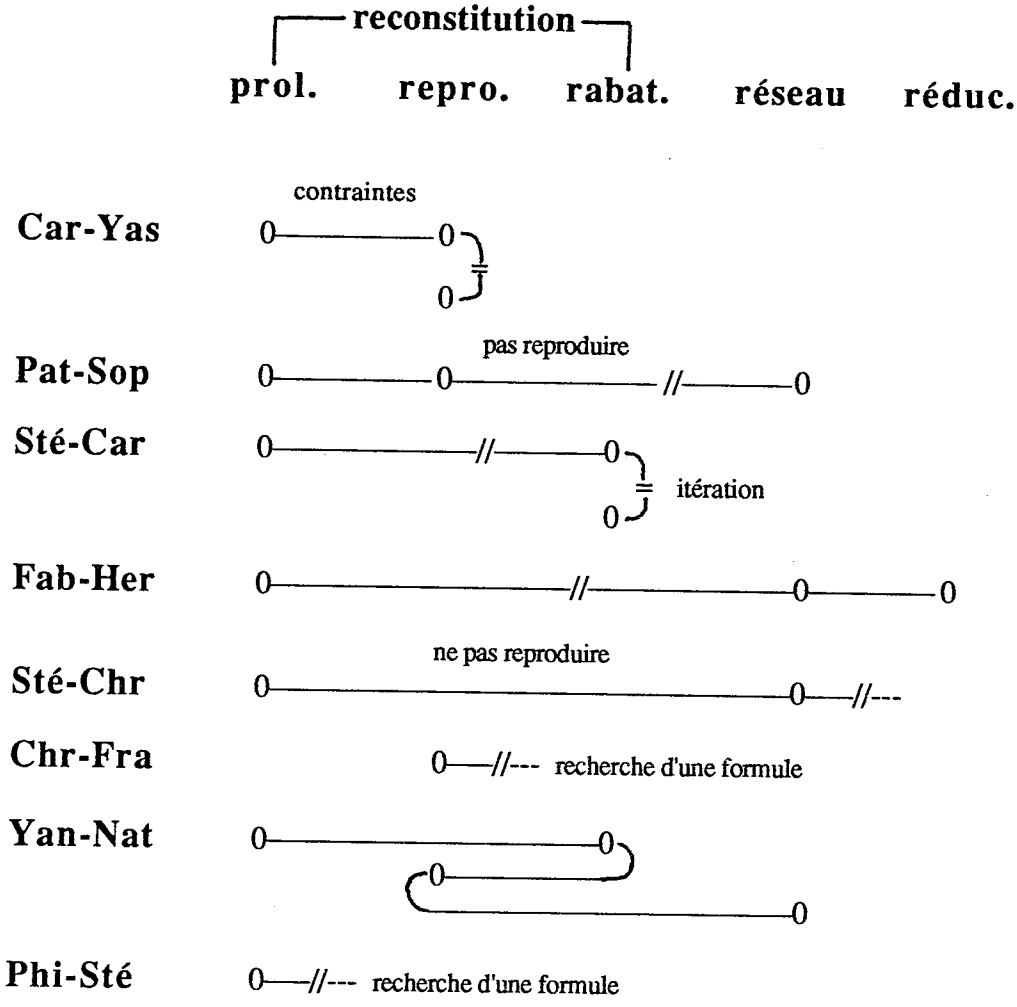


Figure 16

Une première période de la résolution du problème est donc bien caractérisée par le recours à une stratégie de reconstitution du triangle tronqué, plus précisément la procédure de prolongement des côtés du

triangle tronqué.

La réfutation de cette procédure est, pour la moitié des binômes observés, suivie de la proposition d'une nouvelle solution relevant de la même stratégie (cf. fig.16). L'objectif des élèves reste de reconstituer le triangle pour en mesurer le contour et ainsi obtenir le périmètre. Cela signifie notamment que l'argument avancé pour la mise à l'écart de la solution initiale, qui indique que l'on peut rencontrer des triangles arbitrairement grands, donc en particulier non reproductibles sur une seule feuille, n'est pas retenu quant au fond par les élèves.

Deux binômes en restent à cette stratégie après de nouvelles réfutations : Stéphane et Caroline qui adaptent leur solution, le rabattement du triangle, en en proposant l'itération, et, Carine et Yasmina qui restent bloquées sur leur solution, reproduction du triangle (cf. § III.5.3.).

Pour les autres binômes, une nouvelle réfutation d'une solution relevant de la stratégie de reproduction est suivie de son abandon. Ces élèves retiennent d'abord que leur solution est fausse, comme certains l'explicitent. Mais «fausse» peut avoir ici une valeur scolaire plus que logique : la stratégie de reproduction est disqualifiée plutôt que réfutée par son incapacité à satisfaire l'observateur. Le contre-exemple ne serait alors pas compris comme tel, mais seulement comme la justification du refus de l'observateur.

Une seconde phase de la résolution de ce problème consiste alors en l'exploration de propriétés de la figure, principalement en relation avec les propriétés du triangle. Cette phase est longue et plus ou moins confuse.

Rares seront les binômes qui finalement produiront effectivement une nouvelle solution (un nouveau message).

II.5.2. L'absence de démarches de validation

Aucun des binômes que nous avons observé n'est entré dans une démarche de validation.

Pour ce qui concerne la procédure initiale de prolongement des côtés, l'absence de telles démarches explicites peut tenir au caractère d'évidence de sa validité. Pour les autres solutions il en va autrement : de fait, les procédures de reproduction ou de rabattement sont validées par leur succés sur le cas de figure proposé. Cela signifie que les élèves n'envisagent pas d'autres cas possibles, notamment d'autres triangles plus grands, dont la reproduction sur une seule feuille serait impossible, ou alors ils n'en tirent pas les conséquences. Cela peut être dû à ce qu'ils considèrent le triangle donné comme un prototype des triangles pour lesquels la procédure doit être valide (cf. à propos de l'effet d'exemples donnés, chap. III, § III.3.2.)

Pour ce qui est des procédures produites au terme de la phase d'exploration, on peut seulement constater que les problèmes de preuve ne sont pas posés. Il semble que la plupart des binômes ont été pris de court par le temps et la fatigue, mais nous remarquons que pour Fabrice et Hervé qui sont allés jusqu'à la production effective d'un nouveau message, la sollicitation de l'observateur qui les interroge sur les sources de leur certitude les conduit en fait à expliciter leur sentiment d'évidence.

II.5.3. Un effet de contrat : les réfutations génératrices de contraintes

Le rejet par l'observateur de la procédure de prolongement des côtés ne constitue pas véritablement, comme nous l'avons déjà souligné, une réfutation mais plutôt une disqualification de cette procédure. La conséquence en est de conduire les élèves à rechercher dans de nouvelles réfutations auxquelles ils sont confrontés d'éventuelles indices de contraintes sur la situation problème :

- pour Patricia et Sophie la réfutation de la procédure de prolongement et de celle de reproduction, signifie que ce type de stratégie est interdit : " *donc on ne peut pas reproduire le dessin. Hein, c'est faux ...* " (Pat 154), et puis : "*ça fait pas très mathématique non plus* " (Sop 284).

- Carine et Yasmina comprennent cette réfutation comme l'exigence que la reproduction du triangle tienne sur une seule feuille. Ainsi lorsqu'après une exploration infructueuse de la figure, les élèves en reviennent à la reproduction, la réfutation de cette solution par l'observateur leur paraît illégitime : "*mais vous nous dites que ça doit tenir sur une feuille* "(Yas 362). Cette contrainte (jamais formulée ou évoquée par l'observateur) est issue de leur interprétation de la réfutation initiale, et de leur incapacité à sortir d'une stratégie de reproduction. Elles se défendent donc sur le terrain de la signification de la tâche, en fait du contrat, avant de finalement renoncer.

- pour Stéphane et Christophe la mise à l'écart du prolongement signifie qu'il ne "*faut pas prolonger* "(Chr 84), ce qui disqualifie pour eux

la stratégie de reconstitution.

- Christophe et Franck interprètent la réfutation de leur solution, par reproduction, comme l'indication qu'il ne faut pas recourir à des mesures directes, mais qu'il "*faut trouver une formule* "(Chr 89).

- Philippe et Stéphane suivront la même voie.

Ces deux binômes avaient initialement été très préoccupés par la recherche d'une formule du périmètre du triangle.

II.5.4. La recherche d'indices pertinents

Après que leurs solutions initiales aient été réfutées, la stratégie de reconstitution du triangle paraissant disqualifiée, les élèves (sauf le binôme Yann et Nathalie) semblent démunis, sans moyens de poursuivre dans une direction déterminée. Ils s'orientent vers un examen plus ou moins systématique de la figure, réalisant des tracés, des mesures et des opérations «pour voir». Cette quête paraît peu structurée sinon par des indices non intrinsèquement liés au problème :

- **retour sur les savoirs scolaires récents** qui pourraient être utiles, notamment les droites remarquables du triangle, le cercle circonscrit. Ces élèves sont en classe de 4° et ces notions occupent une place centrale dans le programme de géométrie. Signalons que nous avons rencontré des conduites analogues chez des élèves plus agés, de la classe de seconde, au cours de la pré-expérimentation : "*c'qu'on a appris ça doit bien servir à quelque chose* " (Pierre, 2°), "*j'ai pas tellement d'idées ... j'vais faire du Chasles pour voir* "(Mathieu, 2°).

- **utilisation du matériel** mis à leur disposition et qui doit donc être utile : "*on s'est encore jamais servi du compas ... ça pourrait peut-être servir à quelque chose* "(Sté 294). De même la présence du rapporteur et l'identification du «bout manquant» à un angle de la figure, ont favorisé les recherches centrées sur la mesure des angles. De telles démarches sont par ailleurs renforcées par le fait qu'elles donnent accés à une connaissance non triviale de la figure, à savoir la mesure du troisième angle du triangle. Mais, comme nous l'avons observé lors de la pré-expérimentation, ne pas mettre de rapporteur pourrait avoir un effet « inverse » : "*les angles ça va pas marcher parce que t'avais pas prévu de rapporteur* "(Mathieu, 2°).

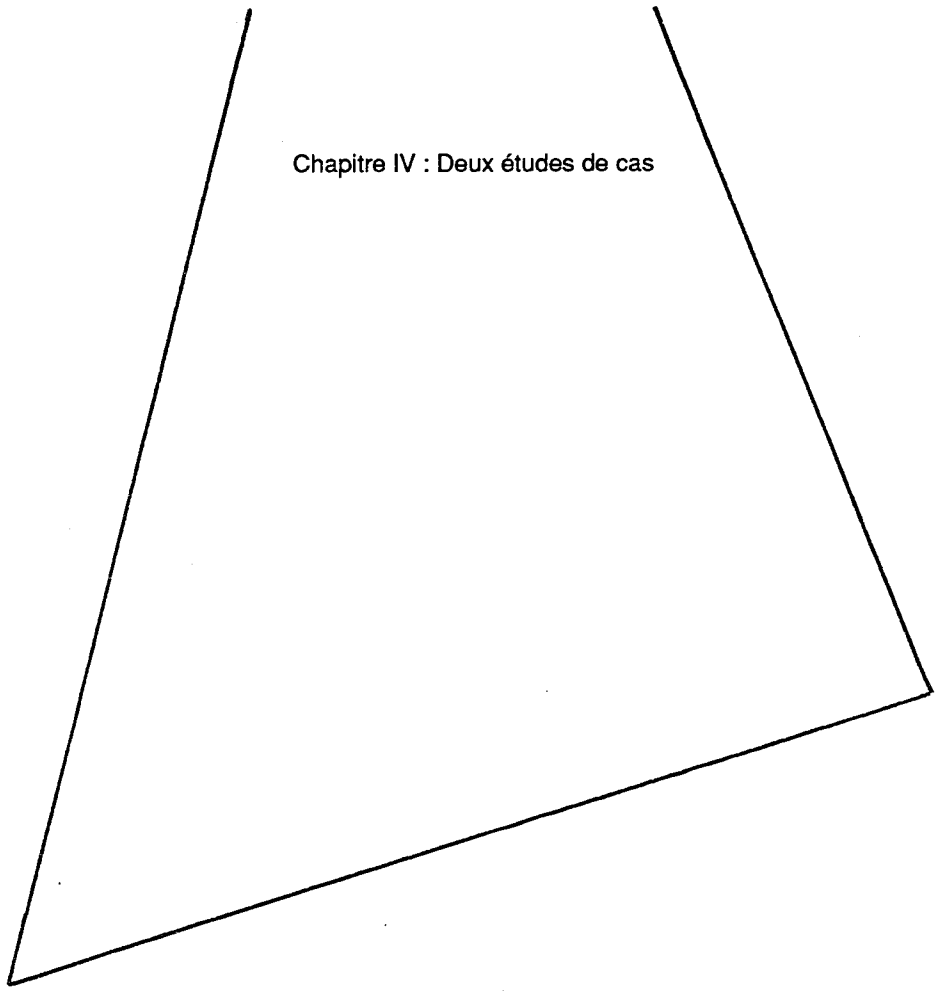
Ces explorations sont très longues et occupent une part importante de la durée de la résolution du problème. Développées dans une démarche de type essais-erreurs, elles donnent lieu à des spéculations qui ne résistent pas à un examen même superficiel. Les élèves les abandonnent très facilement.

II.5.5. Eléments en vue de la constrution d'une situation didactique

Cette étude de cas avait pour objectif de préparer la construction et l'analyse de la situation didactique que nous présentons au chapitre VI. Elle montre la sensibilité du processus de résolution de problème, et de la signification donnée par les élèves aux réfutations, aux caractéristiques de la situation telles qu'ils les perçoivent. Nous avions lors de l'étude de la situation polygone (chap.II) noté le rôle éventuellemnt joué par la situation ; il est ici particulièrement mis en relief à la suite des interventions de l'observateur à l'encontre des procédures de

prolongement. Pour éviter une telle intervention lors de la reprise de cette situation-problème dans le cadre de la situation didactique que nous envisageons, nous tenterons de bloquer la procédure de reproduction par la contrainte introduite dans la formulation même du problème de n'utiliser qu'une seule feuille.

Par ailleurs cette étude nous conduit à reconsidérer les hypothèses faites sur le "problème ouvert " que nous avions adoptées dans le cadre de notre collaboration avec le groupe de recherche de l'IREM de Lyon. S'il est vrai que tous les élèves s'engagent activement dans la résolution du problème proposé, en revanche lorsqu'ils sont à bout de ressource ils recherchent des indices inducteurs d'une solution possible dans les enseignements mathématiques récents, voire dans les caractéristiques de la situation en tant qu'elle peut avoir été organisée avec des intentions particulières. Ces comportements marquent une distance avec l'hypothèse de «véritables» activités mathématiques qui seraient rendues possibles par le "problème ouvert". Le problème n'existe pas en tant que tel, ils est dans une situation qui lui donne du sens et peut éventuellement induire des solutions. La tendance des élèves est donc de refermer le problème en référence aux pratiques usuelles qui veut que le problème est lié aux intentions de ceux qui le proposent. Leur activité, leur «logique», doivent être considérées en situation. Ce fait important, que nous avons déjà relevé dans les études précédentes (chap.II § I.3.2., chap.III § III.3.1.), signifie que le milieu dans lequel ils opèrent ne peut être considéré comme a-didactique (Brousseau 1986, p.296 sqq.). La dévolution d'un problème a donc des limites dont l'étude sera pour partie l'objectif de nos analyses de la situation didactique reprenant cette situation-problème (chap.VI).



Annexe

Figure proposée aux élèves (réduction 70%)

Chapitre V

DEVOLUTION D'UN PROBLEME ET CONSTRUCTION D'UNE CONJECTURE

"LA SOMME DES ANGLES D'UN TRIANGLE"

I : Introduction

I.1. La construction d'une situation de validation en cinquième

Notre objectif est d'analyser les contraintes liées à la réalisation d'une situation dans laquelle des élèves, qui n'ont pas encore étudié la notion de démonstration, aient à émettre une conjecture et à considérer le

problème d'en fournir une preuve. Nous avons retenu pour cela l'étude d'une séquence didactique particulière, en classe de cinquième.

Une première contrainte sur une telle situation de validation est que les élèves aient effectivement la responsabilité de la formulation de la conjecture. En effet, si elle était énoncée par le professeur, alors elle perdrait aussitôt son véritable caractère de conjecture pour les élèves. Ils ne pourraient la considérer que comme un énoncé vrai et pas seulement fortement plausible. Par ailleurs le problème pourrait devenir celui de la recherche d'une preuve convenue et non celui de l'établissement de la vérité d'un énoncé. Rappelons de plus que le statut de conjecture pour un énoncé est un statut très fort. Il ne s'agit pas d'une simple spéculation, mais d'un énoncé sur la vérité duquel l'ensemble de la classe s'engage. Il faut donc qu'il ait été formulé par elle et que se forme un consensus sur cette formulation. Cela ne signifie pas pour autant que l'ensemble de la classe ait une position unique sur sa validité, les recherches peuvent porter aussi bien sur des preuves que sur des contre-exemples.

La complexité de la réalisation d'une telle situation tient à l'exigence de socialisation : il s'agit non seulement que les élèves s'approprient le problème individuellement mais encore qu'ils en partagent la signification.

Le problème, s'il ne peut être formulé par le professeur, ne peut alors que provenir de la confrontation des élèves à une situation spécifique de la conjecture visée. Nous considérons avec Mach (1908) que la source d'un problème est "le désaccord entre les pensées et les faits, ou le désaccord des pensées entre elles" (ibid., p. 254). Mais il faut que ce désaccord soit inévitablement remarqué par les élèves, qu'il soit nettement

reconnu, pour que le problème puisse être formulé. Pour cela une situation favorable est notamment celle où les élèves disposent de conceptions erronées ou incomplète mais assez stables, associées à des théorèmes-en-acte assez solides pour que la confrontation aux faits ou à d'autres conceptions conduisent effectivement à des questions. Ces conceptions doivent être telles qu'elles permettent des anticipations susceptibles d'être réfutées.

La formulation d'une conjecture peut être d'une grande complexité par les constructions cognitives qu'elle demande, par la reconnaisance des objets de savoir et des relations qu'elle requiert. Nous souhaitons au niveau qui nous intéresse (la classe de cinquième) minimiser la part prise par ces problèmes de formulation, tant au plan de la langue naturelle qu'à celui celui des constructions symboliques.

Sous ces contraintes nous avons retenu le théorème sur l'invariance de la somme des mesures des angles d'un triangle. D'une part, l'idée de la possibilité d'un tel invariant ne devrait pas manquer de défier la conception répandue chez les élèves de ce niveau (cf. ci-dessous § II.1.2.), selon laquelle la valeur de cette somme dépend de la « taille » du triangle. Nous concevrons une situation permettant cette confrontation. D'autre part nous pensons que la formulation de la proposition : « la somme (des mesures) des angles d'un triangle est 180° », est d'une faible complexité langagière ; elle devrait être à portée d'élèves de cinquième.

Enfin cette propriété est susceptible de preuves variées par leur contenu et par leur niveau, dont nous présenterons ci-dessous les principaux types. Cette richesse permet d'envisager de parcourir l'ensemble du processus de la construction de la conjecture jusqu'à son

établissement comme théorème, quelle que soit par ailleurs la diversité des classes que nous pourrons observer.

I.2. Remarques préalables sur une approche classique

Une autre origine du choix de ce problème est une observation d'une situation de classe portant sur la somme des mesures des angles d'un triangle, rapportée par des étudiants (F. Barrachin et P. Bouchet) de notre cours de didactique des mathématiques en 1983.

Ces étudiants avaient assisté à une leçon suivant un schéma classique, pour le théorème qui nous intéresse, qui consiste à appuyer l'énoncé de la conjecture sur une constatation expérimentale, puis à demander aux élèves d'en admettre la vérité faute de pouvoir en établir la preuve (au niveau concerné de la classe de cinquième).

Voici ce qu'ils rapportent :

> Le professeur fait tracer à chaque élève un triangle, et mesurer les angles à l'aide d'un rapporteur. Il apparaît alors des difficultés de mesure de plusieurs types :
> - les enfants ne savent pas placer le zéro du rapporteur ;
> - ils ne comprennent pas pourquoi il faut aligner le rapporteur sur un côté du triangle ;
> - si le triangle est plus petit que le rapporteur ils ne comprennent pas pourquoi il faut prolonger les côtés du triangle pour lire l'angle .
>
> [...] Le professeur fait calculer la somme des angles, et chacun va marquer ses résultats au tableau. Les élèves

> remarquent d'eux-même que les résultats sont souvent autour de 179°, 180°, 181°, 182°, avec une prédominance de 182°.
> Le professeur fait refaire les mesures à ceux qui ont trouvé une somme éloignée de 180° (165°, 228°, ...).
> Le cours suivant commence par une reprise du cours précédent : les élèves recommencent le même travail. Cette fois ils trouvent tous une somme des angles comprise entre 178° et 184°, et la moyenne des résultats est de 182° [...] (nous avons entendu plusieurs élèves di à leurs voisins pendant qu'ils mesuraient les angles, qu'il fallait trouver 182°).
> [...] Puis le professeur annonce que la somme des angles d'un triangle est de 180°, d'où de vives réactions de la part des élèves. Ils sont sceptiques et invoquent les arguments suivants : "on ne trouve pas 180° en mesurant", "si le triangle est grand ça devrait faire plus", "l'an prochain on nous dira que c'est 183°". Le premier argument est celui apparu le plus massivement.

Il s'agit là d'une approche très répandue : après quelques mesures, le fait que le résultat devrait être 180° est révélé, accompagné ou non de la présentation d'une preuve. Le fondement de cette approche tient à une conception simpliste de la relation entre l'action et la pensée qui fait attendre l'émergence naturelle de la conjecture de l'observation de quelques mesures, bien que le plus souvent les mesures ne permettent pas effectivement d'obtenir le résultat sur lequel porte l'institutionnalisation. Comme le montre la séquence d'enseignement rapportée ci-dessus, les choses ne sont pas si simples. Les conceptions des élèves, qui ne sont pas ici suffisamment prises en compte, résistent fortement à leur transformation. Nous faisons l'hypothèse que l'idée selon laquelle les grandeurs associées à un triangle sont des fonctions croissantes de sa «taille», constitue, du fait de sa validité pour l'aire et le périmètre, une véritable connaissance qui ici s'érige en obstacle. Par ailleurs, le contrat didactique

et avec lui l'idée de l'existence de réponses convenues ou ad hoc, crée un obstacle d'une autre nature en conduisant des élèves à régler leur conduite sur des indices non intrinsèques à la connaissance visée. Le problème se pose alors de la signification du théorème pour les élèves lorsqu'il leur sera donné pour tel, notamment la question de savoir de quelle façon il prendra place parmi leurs connaissances antérieures et le statut de la preuve apportée finalement par l'enseignant.

L'un des objectifs de l'opération de recherche que nous présentons ici est de montrer comment l'analyse didactique éclaire cette complexité et apporte des éléments de réponse quant aux conditions de la construction d'une conjecture dans la classe et à son établissement comme théorème.

II : Conceptions de l'angle et preuves du théorème

II.1. Définitions mathématiques et conceptions de l'angle

II.1.1. Les principales définitions

Une étude historique de la notion d'angle dépasserait le cadre du travail dans lequel nous nous sommes engagé. Notre propos se limite ici à dessiner les contours de cette notion en relevant quelques jalons historiques, nous examinerons ensuite les conceptions des élèves et les preuves possibles du théorème qui nous intéresse.

Nous laissons délibérément de côté les définitions algébriques et les considérations sur les mesures des angles, de même que les notions d'angle orienté ou d'angle de vecteurs; en quelque sorte, nous nous limitons à la géométrie plane élémentaire. De même nous avons laissé de côté la discussion sur la confusion que l'on peut parfois rencontrer entre les notions d'angle et de mesure d'angle.

Nous distinguons quatre types principaux de définitions, nous situerons les définitions modernes de l'angle en terme de classe d'équivalence relativement à ces types :

- l'angle, **inclinaison d'une droite sur une autre**

C'est la définition classique des *Eléments d'Euclide* ; on en trouve diverses formulations dans les multiples éditions des "Eléments", nous avons choisi de rapporter ici la traduction en français la plus récente due à Kayas (1978, p.1) :

"l'*angle plan* est l'inclinaison mutuelle de deux lignes coplanaires qui se rencontrent sans être colinéaires "

Comme le souligne Smith (1925, p. 277) cette définition exclut les angles $n\pi$. Nous ajouterons qu'elle incite à ne considérer que des angles de mesure inférieure à 180°. La définition des Eléments a été soumise à de nombreuses critiques et a connu diverses reformulations (cf. par exemple à ce propos Carroll 1885, Heath 1956 p.176 sqq).

- l'angle, **figure formée par deux demi-droites**

Smith (ibid.) attribue cette conception à Aristote. En voici, par exemple, une formulation issue d'une édition tardive des éléments de Legendre (1875, p.2) :

"La figure formée par deux droites AB et AC, qui se coupent, s'appelle angle. Le point A est le sommet de l'angle ; les lignes AB et AC en sont les côtés"

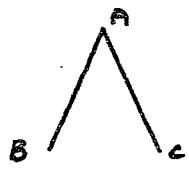


Figure 1

Cet énoncé assez imprécis rend bien compte du type de définition qui dominera dans l'enseignement avant la première guerre mondiale (Berdonneau 1981, p.215 sqq). En voici une formulation plus précise, classiquement rapportée, due à Hilbert (1899, p.21) :

"**Définition.** Soient h et k deux demi-droites différentes d'un plan α, issues d'un point O et appartenant à des droites différentes.

> L'ensemble des demi-droites h et k est appelé un *angle* ; nous le désignons par $\sphericalangle(h, k)$ ou par $\sphericalangle(k, h)$.
> Les demi-droites h et k sont les *côtés* de l'angle et le point O est le *sommet* [1].

A la suite de cela Hilbert note que "cette définition exclut les angles plats et concaves" (ibid.), puis il introduit les notions d'intérieur et d'extérieur d'un angle.

Cette conception réapparaît récemment sous la définition de l'angle adoptée en classe de troisième lors de la réforme des programmes de 1970, l'*angle géométrique* (par opposition à l'angle du sens commun) étant défini comme une classe de couples isométriques de demi-droites de même origine (Berdonneau op. cit.).

- l'angle, **région du plan**

Nous proposons de distinguer deux types différents de définition rattachés à cette conception. Un type que nous qualifions de dynamique, comme la définition de Henrici que rapporte Carroll (1885, p.74) :

> "The part of a pencil of half-rays, described by a half-ray turning about its end point from one position to another is called an angle";

et un type statique comme la définition de Bertrand de Genève (1812) que rapporte Fourrey (1938, p.44) :

> "on appelle angle la partie du plan limitée par deux droites partant d'un même point"

Cette conception de l'angle connaît son appogée avec l'introduction dans l'enseignement des "Mathématiques Modernes" de la notion de *secteur angulaire* . L'angle étant alors défini comme une classe de secteurs superposables.

- l'angle, **rotation**

Bien qu'elle aussi très ancienne, Heath (1956, p.177) suggère Carpus d'Antioche comme l'un de ses précurseurs, cette définition ne s'imposera pas véritablement dans l'enseignement. Au moment du débat moderniste sur le renouvellement de l'enseignement des mathématiques, elle est défendue par certains mathématiciens. Notamment, Choquet (1964, p.97) après avoir envisagé les différentes conceptions de l'angle, propose ...

> d' "identifi[er] les angles aux rotations autour d'un point O ; on montr[e] ensuite que le choix de O n'importe pas"

Et pourtant Heath (donc dès le début de ce siècle) note : "it is remarkable however that nearly all of the text-book wich give definitions different from those in group 2 [angle comme rotation] add to them something pointing to a connexion between an angle and rotation : a striking indication that the essential nature of an angle is closely connected with rotation" (op. cit. p.179)

Ce que Papy (1967, p.289) exprime dans un raccourcit saisissant par :

> "ANGLE=ROTATION
>
> qui a perdu son CENTRE !"

II.1.2. Une notion difficile

"La notion d'angle est sans doute celle qui soulève le plus de discussions et de difficultés dans l'enseignement de la géométrie" (Choquet 1964, p.96). Si la reconnaissance de ces difficultés fait l'unanimité, il n'en va pas de même des solutions qui peuvent être apportées, notamment pour ce qui concerne la définition. En atteste par exemple le foisonnement de formulations que l'on peut trouver dans les manuels scolaires en usage depuis le début du siècle qui sont autant de tentatives pour résoudre ce difficile problème d'enseignement (cf. à ce sujet l'étude de Berdonneau 1981, pp. 215-224).

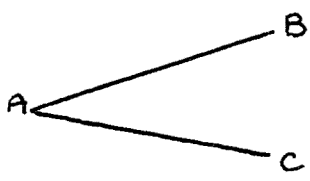


Figure 2

La principale difficulté tient au développement chez les élèves d'une conception de l'angle issue de son identification à la figure qui le représente sur un feuille de papier ou au tableau, comme par exemple la représentation ci-contre (fig. 2). L'angle est alors conçu comme la donnée de deux segments ayant une extrémité commune et des supports distincts. Avec une telle conception deux figures qui diffèrent par la seule longueur des segments qui les constituent, apparaissent comme représentant deux angles différents. Cette conception est très résistante et très répandue. On a pu penser qu'elle découlait des définitions mêmes qui était utilisées, comme par exemple la définition de Legendre citée ci-dessus. Pour cette raison certains manuels stigmatisaient l'erreur possible en stipulant que :

"la grandeur d'un angle dépend uniquement de son ouverture et non de la longueur de ses côtés, qui, théoriquement, doivent être

considérés comme illimités"(Thuret, 1934, Précis de Géométrie, Paris : Nathan).

Ce genre de remarque a à peu prés disparu des manuels récents dans lesquels l'angle est défini comme classe d'équivalence de secteurs angulaires ou de couples de demi-droites d'extrémité commune.

Pourtant cette conception de l'angle chez les élèves de la fin de l'enseignement primaire et du début de l'enseignement secondaire reste présente, c'est un fait bien connu des enseignants. Il semble cependant peu étudié.

Nous prenons ici comme référence l'étude de Close (1982). Cet auteur mentionne les travaux de Giles (1981, p.11) qui atteste de la présence de cette conception chez la moitié de 4881 sujets examinés sur une tâche de classement d'un ensemble d'angles suivant leur taille. Pour sa propre recherche Close a proposé à 87 élèves anglais de 11 à 12 ans, relevant d'un enseignement ordinaire, un questionnaire sur les angles comprenant les items ci-dessous ; elle obtient 53 réponses fausses pour l'item 1, et 49 réponses fausses pour l'item 2 (Close op. cit. p.120, 122).

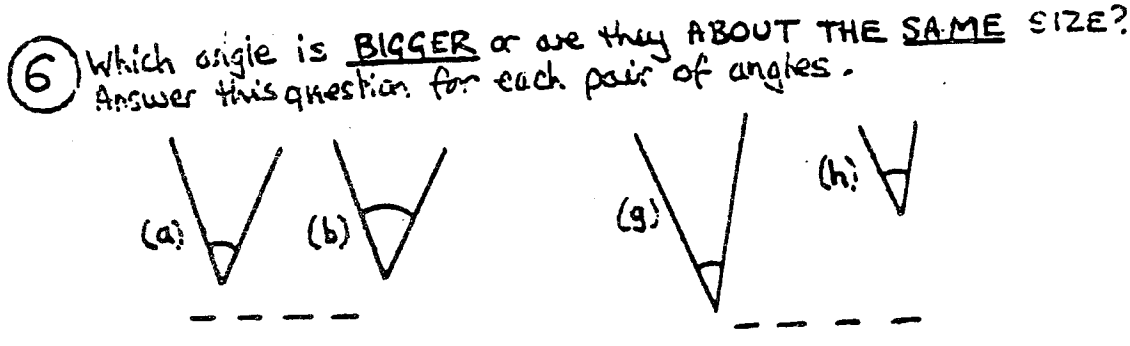


Figure 3

Dans l'usage courant de la langue française, le mot « angle » a pour synonymes « coin » ou « encoignure », il désigne une région relativement bien déterminée. On peut sans trop d'ambiguité fixer un rendez-vous « à l'angle d'une rue », il ne viendra alors pas à l'idée de se placer ailleurs qu'au voisinage du carrefour correspondant. De même en mathématiques, si l'on demande à un élève de montrer un angle d'un polygone, on attendra de lui qu'il désigne un région assez précise ; l'usage conduira à considérer que le point A de la figure ci-dessous (fig. 4) se trouve dans un angle du polygone représenté, mais pas le point B.

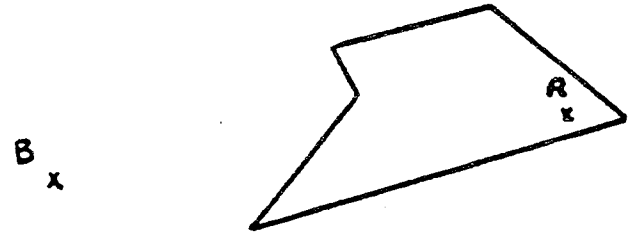


Figure 4

Ainsi l'usage commun, en français, et la signification mathématique du mot « angle » sont en contradiction. A défaut d'une étude analogue à celle de Close que nous venons de rapporter, ce constat nous conduit à faire l'hypothèse que, comme les jeunes anglais, les élèves français de cinquième auront une conception qui privilégie l'identification du concept d'angle à sa représentation géométrique.

II.2. Des preuves du théorème sur la somme des angles d'un triangle

Nous nous appuyons dans cette section sur quelques exemples historiques mais, comme au paragraphe précédent, il ne s'agit pour nous que de s'assurer de quelques points de repère qui apporteront à notre propos le renfort d'exemples de preuves ou de débats effectivement apparus dans les pratiques mathématiques ou dans l'enseignement des mathématiques.

Après avoir décrit les preuves pragmatiques que nous avons pu repérer, nous présenterons des preuves intellectuelles en les regroupant en deux catégories suivant les types de conceptions de l'angle qui les soutendent : inclinaison d'une droite sur une autre ou rotation.

II.2.1. Des preuves pragmatiques

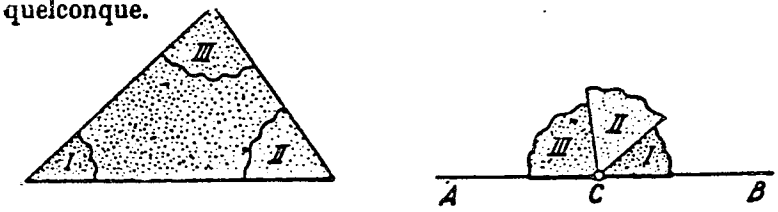
a) La mesure

Un premier type de preuve pragmatique, qui relève de l'empirisme naïf, consiste à réaliser les mesures et les calculs utiles pour quelques triangles et à conclure que la propriété observée sur ces quelques cas sera toujours vérifiée. Il nous semble que l'usage d'une telle preuve est facilement disqualifié par la mise en évidence l'inévitable incertitude sur les mesures.

b) Le découpage

Une preuve pragmatique classique consiste à tracer un triangle sur du papier, à le découper pour en séparer les trois angles, puis à les associer de façon adjacente comme l'illustre la figure ci-dessous (fig. 5). On remarque que cette preuve relève comme la précédente d'un empirisme naïf et est susceptible d'erreurs pratiques tout autant que le recours à la mesure ; les découpages des élèves sont le plus souvent incertains et les assemblages approximatifs. Une autre objection nous semble être qu'il n'est pas évident que d'une part pour les élèves les notions d' « angle » et d' « angles d'un triangle » soient identiques, et que d'autre part ce découpage assure pour eux de façon évidente la conservation des propriétés.

62. — Découpez en papier de couleur un triangle irrégulier quelconque.



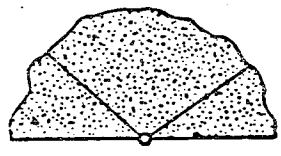
Déchirez le coin I du triangle et collez-le sur votre page en plaçant l'un des côtés sur une droite AB. Collez à la suite le coin II puis le coin III. Où finit exactement ce dernier ?

Vous avez ainsi additionné les trois angles du triangle : *Combien de degrés vaut le total ?*

Remarque: Les triangles découpés par les élèves de la classe sont tous différents de forme et de grandeur. Si le travail a été fait avec soin, le résultat sera le même pour tous.

Conclusion:

La somme des angles d'un triangle vaut un demi-tour, soit 180°.

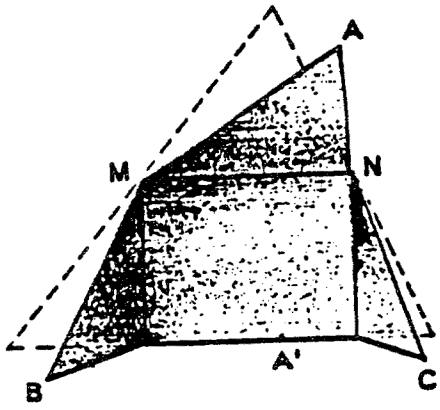
63. —  **Découpez une figure de ce genre et faites un triangle qui ait pour angles les trois angles.**

Extrait de "Géométrie", L. Grosgurin,
Ouvrage pour la 5° primaire (1944 à Genève)

Figure 5

c) Le pliage

Un triangle ayant été tracé sur une feuille de papier, il s'agit de le découper puis de le plier de la façon suivante : amener le sommet A sur le côté qui lui est opposé en pliant autour des milieux (qui peuvent être déterminés par pliage) des côtés qui lui sont adjacents, puis rabattre les «coins» du trapèze obtenu vers l'intérieur. La figure ci-dessous (fig.6) extraite d'un manuel de sixième illustre bien cette manipulation.



18

2e PROCÉDÉ : Sur le second triangle ABC, déterminer les milieux M, de AB, N de AC, et plier le triangle autour de MN (FIG. 18). A vient en A′ sur BC; plier le triangle BMA′ de façon que B vienne en A′, et le triangle CNA′ de façon que C vienne en A′. Vérifier que les trois angles de ABC sont ainsi construits en A′.
Conclure : **« La somme des angles d'un triangle est égale à... » (Cette propriété sera démontrée plus tard.)**

Extrait de Mathématiques 6°
Collection E. Riche, 1969, Paris : Hatier

Figure 6

II.2.2. Preuves liées à l'angle comme inclinaison d'une demi-droite sur une autre

a) Les origines

Le théorème sur la somme des angles d'un triangle est réputé pythagoricien. C'est à l'école pythagoricienne que l'on attribue non seulement la démonstration générale mais aussi sa découverte (Caveing 1977, p. 557). Selon Geminus, cité par Caveing : "les anciens étudiaient le théorème des deux angles droits dans chaque espèce particulière de triangles, d'abord dans l'équilatéral, ensuite dans l'isoscèle, et en dernier lieu dans le triangle scalène, mais les géomètres postérieurs démontraient le théorème général que dans un triangle quelconque les trois angles intérieurs sont égaux à deux droits" (ibid. p. 558).

Il nous intéresse ici de rapporter la tentative de reconstruction de cette démarche que propose Heath (1956), à la suite de Henkel et Cantor auxquels il se réfère. Ayant rappelé que des triangles équilatéraux ou des hexagones réguliers étaient utilisés pour réaliser des pavages, Heath poursuit :

> "it would then be clear that six angles equal to an angle of an equilateral triangle are equal to four right angles, and therefore that the three angles of an equilateral triangle are equal to two right angles [la réalisation de pavages met en évidence que deux moitiés de triangles équilatéraux peuvent être associés pour former un rectangle...] Next it would be inferred, as the result of drawing the diagonal of *any* rectangle and observing the equality of the triangles forming the two halves, that the sum of the angles of *any* right-angle triangle is equal to two right angles, and hence (the two congruent right-angled triangles being then placed so as to form one

> isoscele triangle) that the same is true of *any isosceles* triangle. Only the last step remained, namely that of observing that *any* triangle could be regarded as the half of a rectangle or simply that any triangle could be divided into two right-angled triangles, whence it would be inferres that in general the sum of the angles of any triangle is equal to two right angles."(ibid. p.318-9)

Il faut noter que Heath considère lui-même cette reconstruction comme très spéculative.

b) <u>La preuve d'Euclide</u>

La preuve la plus classique est celle que l'on trouve dans les Eléments d'Euclide, liée à la conception de l'angle comme inclinaison d'une droite sur une autre est la preuve suivante (selon Kayas, 1978) :

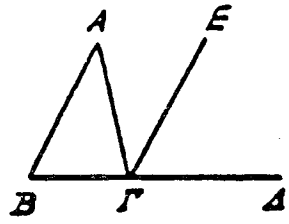


Figure 7

"Soit le triangle **ABΓ**; prolongeons son côté **BΓ** jusqu'au point **Δ**. Je dis que l'on a :

$\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{\Gamma AB} + \widehat{AB\Gamma}$

et $\widehat{AB\Gamma} + \widehat{B\Gamma A} + \widehat{\Gamma AB} = 2\ dr$

Du point **Γ** nous menons la droite **ΓE//AB**.

La droite **AΓ** étant une sécante des parallèles **AB** et **ΓE**, elle forme avec elles des angles alternes-internes égaux : $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{A\Gamma E}$

De même la droite **BΔ** étant une sécante des parallèles **AB** et **ΓE**, les angles correspondants sont égaux : $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{E\Gamma\Delta}$.

Ajoutons ces deux égalités membre à membre ; il vient :

$$\widehat{AB\Gamma} + \widehat{BA\Gamma} = \widehat{A\Gamma\Delta} ;$$

et en ajoutant le même angle **AΓB** :

$$\widehat{AB\Gamma} + \widehat{BA\Gamma} + \widehat{A\Gamma B} = \widehat{A\Gamma\Delta} + \widehat{A\Gamma B}.$$

Mais

$$\widehat{A\Gamma\Delta} + \widehat{A\Gamma B} = 2\ dr$$

d'où

$$\widehat{AB\Gamma} + \widehat{BA\Gamma} + \widehat{A\Gamma B} = 2\ dr$$

Clairaut (1753), réalisant son projet de montrer comment on parvient à la découverte et au fondement d'un théorème mathématique, donne une explication « intuitive » des origines de la preuve de ce théorème. Il s'agit de l'exposé d'une expérience-mentale qui s'appuie essentiellement sur la conception de l'angle comme inclinaison d'une droite sur une autre (Heath, op. cit. p.321 attribue cette idée à Proclus) :

> "Reprenons le triangle ABC. On sent que la grandeur de l'angle C doit résulter de celle des angles A & B ; car qu'on augmentât, ou qu'on diminuât ces angles, la position des lignes CA, BC changeroit, & par conséquent, l'angle C, que ces lignes font entr'elles. Or si cet angle dépend de la grandeur des angles A & B, on doit présumer que ce que les angles A & B renferment de degrés doit déterminer le nombre de degrés que doit renfermer l'angle C, & qu'ainsi il pourra servir de vérification aux opérations qu'on aura faites pour déterminer les angles A & B, puisqu'on sera sûr qu'on aura bien mesuré les angles A & B, si, en mesurant ensuite l'angle C, on lui trouve le nombre de degrés qui lui conviendra relativement à la grandeur des angles A & B.
>
> Pour trouver comment de la grandeur des angles A & B, on peut conclure celle de l'angle C, examinons ce qui arriveroit à cet angle, si les lignes AC, BC, venoient à se rapprocher, ou à s'écarter l'une de l'autre. Supposons, par exemple, que BC tournant autour du point B, s'écarte de AB, pour s'approcher de BE, il est clair que pendant que BC tourneroit, l'angle B s'ouvriroit continuellement ; & qu'au contraire, l'angle C se resserre de plus en plus ; ce qui d'abord pourroit faire présumer que, dans ce cas, la diminution de l'angle C égaleroit l'augmentation de l'angle B, & qu'ainsi la somme des trois angles A, B, C, seroit toujours la même, quelle que fut l'inclinaison des lignes AC, BC, sur la ligne AE. " (ibid. pp. 63-64)

Clairaut précise ensuite que "cette induction présumée porte avec elle sa démonstration "(ibid.), puis il expose la démonstration classique des Eléments.

Cette preuve d'Euclide est celle que l'on trouve le plus classiquement dans les ouvrages scolaires français avant la réforme des "Mathématiques Modernes". Les deux schémas ci-dessous (fig. 8) résument assez clairement pour le lecteur averti, les deux principales variantes que l'on rencontre dans les ouvrages (en fait la figure de droite illustre une preuve généralement attribuée à l'école pythagoricienne ; Heath op. cit. p.320) :

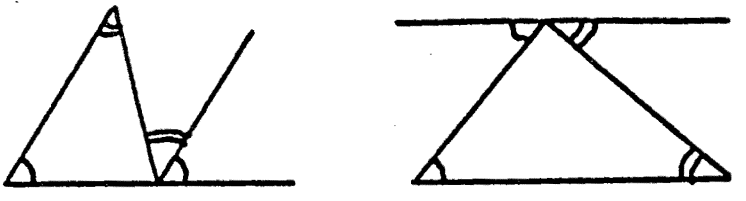


Figure 8

Une présentation plus récente de ces preuves consiste à utiliser les transformations géométriques (fig.9), mais d'un point de vue heuristique il s'agit bien de la preuve classique : les transformations sont là pour « transporter » les angles de façon adjacente autour d'un même sommet. Dans une certaine mesure ces preuves pourraient être comprises dans la filiation des preuves pragmatiques par découpage ou par pliage que nous avons rappelées ci-dessus.

SOMME DES ÉCARTS DES ANGLES GÉOMÉTRIQUE D'UN TRIANGLE

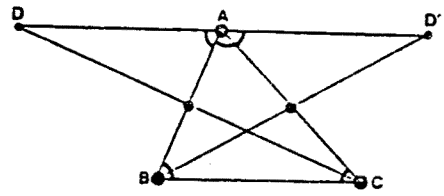


fig. 15

Soit un triangle (A, B, C), désignons par S la symétrie centrale par rapport au milieu de (A, B) et S' la symétrie par rapport au milieu de (A, C) soient :

$$D = S(C) \quad \text{et} \quad D' = S'(B)$$

C et D sont donc dans deux demi-plans différents de bord commun (AB) les secteurs angulaires saillants fermés de bords [A, D) et [A, B) pour l'un et [A, B) et [A, C) pour l'autre sont alors adjacents donc

$$E(\widehat{DAB}) + E(\widehat{BAC}) = E(\widehat{DAC}) \quad \text{avec} \quad \widehat{DAB} = \widehat{ABC}$$

car ils ont des représentants isométriques par S.

Mais de la même manière la symétrie centrale S' permet d'obtenir

$$\widehat{CAD'} = \widehat{ACB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD'} = -\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD}$$

donc D' et D sont dans deux demi-plans distincts de bord commun (AC) les deux secteurs angulaires saillants fermés de côtés [A, D) et [A, C) pour l'un, [A, C) et [A, D') pour l'autre sont donc adjacents et on a :

$$E(\widehat{DAC}) + E(\widehat{CAD'}) = E(\widehat{DAD'}) = k$$

En utilisant la relatic $E(\widehat{DAC}) = E(\widehat{BAC}) + E(\widehat{ABC})$ on obtient finalement :

$$E(\widehat{BAC}) + E(\widehat{ABC}) + E(\widehat{ACB}) = k$$

THÉORÈME

La somme des écarts angulaires des angles géométriques d'un triangle est égale à l'écart angulaire k d'un angle plat.

Extrait de Mathématiques 3°
Collection Queysanne-Revuz
1972, Paris : Fernand Nathan

Figure 9

c) La critique de Legendre

Nous ne pouvons clôre le paragraphe sur la preuve d'Euclide sans mentionner les critiques dont elle a été l'objet de la part de nombreux mathématiciens au cours de l'histoire. En fait, il s'agit d'une critique du fondement essentiel de cette preuve, à savoir le *postulatum* ou cinquième postulat d'Euclide : "si une sécante rencontre deux droites en faisant des angles internes et du même côté de la sécante ayant une somme inférieure à deux angles droits, ces deux droites prolongées indéfiniment se rencontrent du côté où se trouvent les angles dont la somme est inférieure à deux angles droits"(traduction de Kayas, 1978). On pourra à ce sujet se reporter à l'étude très complète de Pont (1986).

Legendre, notamment, s'employa une vingtaine d'année à essayer d'établir ce théorème en se passant du postulat d'Euclide, en reprenant la démonstration dans chacune des douzes éditions de ses éléments (Le Rest 1982, p.144-8). Dans la première édition de ses éléments (1794) Legendre donne une preuve qu'il n'utilisera plus par la suite : "on se donne un segment et deux angles, le triangle qui s'en suit est alors connu et le troisième angle est fonction des deux autres (sans être fonctions du segment pour raison d'homogénéité). Pour déterminer cette fonction, on montre que dans un triangle rectangle, la somme des trois angles est de deux droits ; pour un triangle quelconque, sécable par une hauteur en deux triangles, le résultat est immédiat ". Bkouche (1984) souligne que la justification par l'analyse de ce qu'un angle est fonction des deux autres peut poser problème, il voit là une raison de l'abandon par Legendre de cette première tentative dans les éditions suivantes. On la retrouve cependant dans la note II à la douzième édition des éléments. Legendre (1794) explique ainsi son objectif :

> La théorie des parallèles une fois établie, il s'ensuit comme conséquence très immédiate que la somme des trois angles d'un triangle est égale à deux droits. Ce théorème est cité partout comme une vérité constante et pour ainsi dire triviale : cependant il n'étoit pas à l'abri de toute atteinte tant que la théorie des parallèles n'étoit pas pleinement démontrée. La liaison est telle entre le théorème et le postulatum, que si on eût pu démontrer le théorème sans le secours du postulatum, celui-ci eût été une suite nécessaire de l'autre et la théorie des parallèles auroit été complètement démontrée : mais jusqu'à présent on n'a pu y parvenir

Il est classique de rappeler, à ce sujet, la preuve qu'il donne de la proposition XIX du livre I, "dans tout triangle, la somme des trois angles est égale à deux angles droits" (voir en annexe sa reproduction). Nous en donnons ci-dessous les grandes lignes en reprenant la présentation de Le Rest (ibid.) :

> "Legendre part d'un triangle ABC avec AB>AC>BC puis il construit le point I de BC tel que CI=IB, le point C' de AI tel que AC'=AB et le point B4 de AB tel que AB'=2AI.

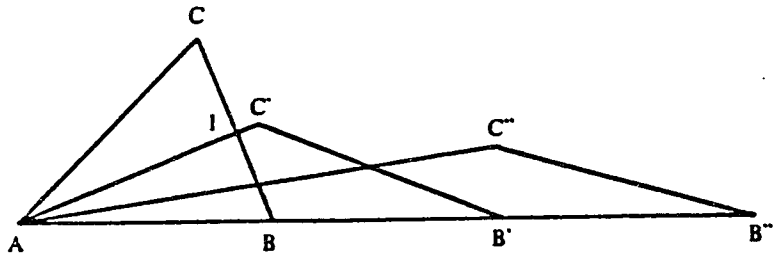


Figure 10

> Soient A, B, C les angles du triangle ABC et A', B', C' ceux du triangle AC'B'. Legendre montre par les cas d'égalité des triangles que
>
> A+B+C=A'+B'+C' et que A'<(A/2)
>
> Puis il applique la même construction au triangle AC'B'

et obtient un triangle AC"B" dont les angles sont notés A", B", C" et vérifient :

A'+B'+C'=A"+B"+C" et A"<(A'/2)

En « *continuant indéfiniment la suite des triangles* » on parvient dit Legendre à un triangle abc dont l'angle a est « *moindre que tout angle donné* ». Si on construit à partir de ce triangle abc le triangle suivant a'b'c', la somme des angles a'+b' étant égale à l'angle a «*on voit que la somme des trois angles du triangle a'b'c' se réduit pesque au seul angle c'* ».

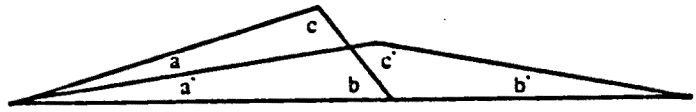


Figure 10 bis

« *Mais on peut concevoir que le triangle a'b'c' varie dans ses angles et ses côtés de manière à représenter les triangles successifs qui naissent ultérieurement de la même construction et se rapprochent de plus en plus de la limite où les angles a' et b' seraient nuls* ». A la limite les points a'b'c' sont en ligne droite et la somme des angles se réduit à deux droits. Cette démonstration très astucieuse et très visuelle suppose implicitement que toute droite puisse se prolonger indéfiniment et elle achoppe sur une supposition où intervient l'infini ..." (ibid. p.145-6).

Cette preuve est fausse. Selon Pont (1986, p.446-7) le premier à relever l'erreur de Legendre est Steiner en 1824 : ce qu'elle "contient repose essentiellement sur le principe d'une apparente évidence, que, «lorsque la limite d'un angle A est zéro, la limite de la distance au côté AC d'un point quelconque B du côté AB est aussi égale à zéro» ; ce qui revient à dire qu'à la limite le point B tombe sur AC. Or, il est facile de prouver que ce principe ne saurait être admis ".

II.2.3. Preuves liées à l'angle identifié à la rotation

Une preuve de la propriété de la somme des angles du triangle peut être donnée en s'appuyant sur la conception qui consiste à identifier l'angle avec la rotation. Nous donnons ici la démonstration que propose Choquet (1964) dont nous avons rappelé plus haut la définition. Cette démonstration, qui utilise fortement une formule de Chasles sur les angles (ici orientés), concerne en fait une propriété plus générale des polygones ; le théorème qui nous intéresse en est un corollaire (fig.11).

59. SOMME DES ANGLES D'UN POLYGONE FERMÉ PLAN

Soit P un polygone fermé plan de n sommets, c'est-à-dire une suite $(a_1, a_2, ..., a_n)$ de points de Π, définie à une permutation circulaire près.

On supposera ici que, pour tout i, $a_i \neq a_{i+1}$ (donc aussi $a_n \neq a_1$); on pose alors δ_i = la demi-droite $D(a_i, a_{i+1})$.

On appelle *angle extérieur* de P au sommet a_i l'angle $\widehat{\delta_{i-1}\delta_i}$; on appelle *angle* de P en a_i l'angle $\widehat{a_{i-1}a_ia_{i+1}}$.

Proposition 59.1. La somme des angles extérieurs de tout polygone fermé plan est 0.

Démonstration. En effet, d'après la relation de Chasles
$\widehat{\delta_1\delta_2} + \widehat{\delta_2\delta_3} + ... + \widehat{\delta_n\delta_1} = \widehat{\delta_1\delta_1} = 0.$

Corollaire 59.2. La somme des angles de tout polygone fermé plan est 0 *ou* ϖ *suivant que le nombre n de ses sommets est pair ou impair.*

En effet soit δ'_{i-1} la demi-droite $D(a_i, a_{i-1})$; on a $\widehat{\delta_{i-1}\delta'_{i-1}} = \varpi$

Donc $\widehat{a_{i-1}a_ia_{i-1}} = \widehat{\delta'_{-1}\delta_{i-1}} + \widehat{\delta_{i-1}\delta_i} = \varpi + \widehat{\delta_{i-1}\delta_i}$

La somme de ces angles vaut donc $n\varpi + 0 = 0$ ou ϖ suivant que n est pair ou impair (puisque $\varpi + \varpi = 0$).

En particulier la somme des angles d'un triplet (a_1, a_2, a_3) est ϖ; lorsqu'on aura défini la notion d'orientation, on précisera ce résultat en montrant que les trois angles d'un tel triplet ont même orientation.

Figure 11

Une preuve de même inspiration heuristique est possible à un niveau plus élémentaire, sous la forme d'une expérience-mentale comme celle

exposée dans l'extrait ci-dessous par le méthodologue genevois Grosgurin (1926).

58. Passons, dans cette question, de l'expérimentation pure au raisonnement.

On sait que deux angles opposés par le sommet (fig. 1) sont égaux (N° 37).

Prenons un triangle quelconque (fig. 2). Supposons une aiguille de montre en 1. Je la fais tourner de l'angle A (position 2). Puis je la fais glisser de 2 en 3 et tourner de l'angle B — ou plutôt de son égal, opposé par le sommet (position 4). Enfin je la fais glisser de 4 en 5 et tourner de l'angle C (position 6).

Au départ, en 1, l'aiguille pointait vers midi, à la fin vers six heures. Elle a donc tourné[1], tout en parcourant les trois angles, d'un demi-tour[2].

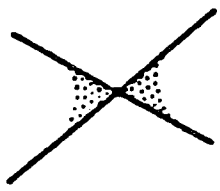


Fig. 1

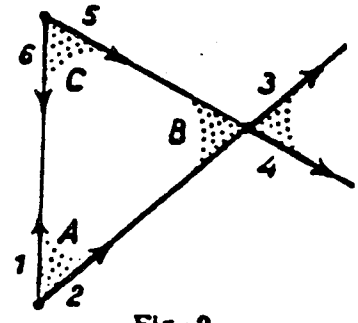


Fig. 2

[1] Au tableau noir, le maître simule l'aiguille par un crayon. Remarquer que les trois rotations sont de même sens, celui des aiguilles d'une montre.

[2] Cette démonstration, si on en admet le principe, permet de simplifier en certains points les débuts de la géométrie raisonnée. Elle est peut-être — pour l'élève — plus frappante que la démonstration classique au moyen d'une parallèle à un côté du triangle par le sommet opposé, parce qu'elle reprend l'idée de la génération des angles par rotation.

Figure 12

Cette expérience-mentale est le plus souvent rejetée car elle conduirait à établir que la somme des angles d'un triangle sphérique est aussi 180°... il suffit pour l'amender de préciser qu'elle n'est valide que pour les triangles rectilignes.

II.2.4. Remarques sur évidence et intuition

Le théorème sur la somme des angles d'un triangle est souvent pris comme exemple à l'appui de thèses sur les fondements de l'évidence ou sur le caractère intuitif de certaines preuves. En relation avec les conceptions de l'angle que nous avons évoquées plus haut, nous en donnons ci-dessous deux exemples que nous discuterons ensuite dans un dernier paragraphe. Les deux explications proposées, dues l'une à E. Fishbein, l'autre à F. Halbwachs, sont tout à fait différentes en ce qu'elles reposent sur deux conceptions différentes de l'angle. Chez Fishbein on retrouve l'explication de Clairaut et l'angle comme inclinaison de demi-droites, chez Halbwachs on trouve l'angle identifié à la rotation.

a) <u>E. Fishbein, la vérité intrinsèque</u>

Fishbein (1982) est intéressé au rôle et à la signification de l'**intuition** dans les mathématiques et spécialement dans leur enseignement. « Intuition » ne désigne pas ici l'intuition du sens commun, mais une véritable connaissance du sujet : "an intuition is a *form of knowledge* . It has the rôle of a programme of action -- but it is a cognition [...] An intuition cannot be built by mere verbal explorations nor by blindly practising solving procedures. An intuition can be elaborated only in the frame of practical situations as a result of the personal involvement of the learner in solving genuine problems raised by

the practical situations "(ibid. p. 12).

L'intuition au sens de Fishbein apparaît donc comme un concept très voisin des concepts de "modèle implicite" ou "modèle pour l'action" forgés par Brousseau (1986) ou celui de "théorème-en-acte" forgé par Vergnaud (chap.II, § III.3.). Les relations entre ces différents concepts, issus de problématiques différentes mais également engagés dans le processus de théorisation en didactique des mathématiques, n'ont pas jusqu'ici été étudiées. Il serait important que cela soit fait. Quoiqu'il en soit, ce n'est pas ici le lieu, nous nous limitons à une analyse de l'usage que Fishbein fait du concept d'intuition dans une réflexion critique sur la notion de preuve ; en particulier pour ce qui concerne la preuve du théorème sur la somme des angles d'un triangle :

> Let us consider again the theorem : « The sum of the angles of a triangle is equal to two right angles ».
> Let us now draw a segment AB and the perpendiculars MA and NB to the segment. The angles MAB and NBA are right angles. We can «create» a triangle by «inclining» MA and NB. So, it can be seen that the angle APB «accumulates» what is «lost» by the angle MAB and NBA when «inclining» MA and NB. (Figure 13)

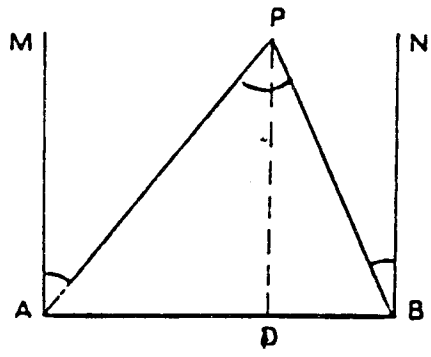


Figure 13

Of course this is not mathematical language. It is rather a

story about lines and angles, but a story which can catch the spirit, which can impose itself as *intrinsically* true. The same story can be translated into the form of a mathematical proof. Consequently the formal necessity and the intrinsic necessity will coincide.

I expose that procedure to a group of master's students. One of the students presented the following technique which, he said, is more srikingly intuitive and easier to understand. You cut a triangle out of a piece of paper. Let ABC be that triangle. Then you fold the triangle ADE, DBG and EHC so as to make the angles 1, 2 and 3 fit as in the Figure 7. You can see that their sum equals two right angles.

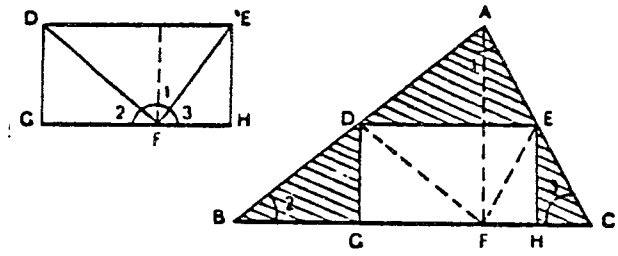


Figure 14

I do not agree with the above technique for the following reason. To «grasp intuitively» does not simply mean to «see». In the example with the sum of the angles of a triangle what you have to grasp is not merely that, in a particular case, by joining the angles *practicaly* you will get two right angles. The problem is to grasp intuitively *why* that constant effect is *necessarily* conserved, imposed, in the variable condition of a non-determined triangle. Intuitively it must be a problem of compensation. Therefore the matter is not of showing practically that in a particular example the angles fit as the theorem predicted. What we have to « see » is that, in *variable conditions , by the way of compensation* , the sum *must* be conserved. And this I think is better suggested by my procedure because (a) a triangle appears as a particular case in a changeable situation ; (b) the

> compensation leading to a constant result can directly be grasped ; (c) we are behaviorally unvolved not in merely collecting angles but, rather, in a process of transformation which leaves constant the sum of the triangles ; (d) this representation can be translated directly into a formal proof. The formal proof and the intuitive interpretation are perfectly congruent. (ibid. pp. 17-18)

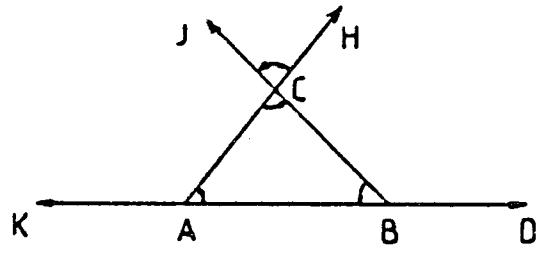
b) F. Halbwachs, le transfert de signification

Le propos de Halbwachs (1981) est la recherche de l'articulation entre les "significations et les raisons en tant qu'organisation inférentielle de ces significations" (ibid. p. 199). Il souligne que la raison (R) d'une assertion (A) ne réside pas dans sa preuve déductive ou inductive ; la raison de A n'étant pas sa preuve mais ce qui permet "de la *comprendre* sur le plan des coordinations entre significations. La raison R fonde, non la vérité de A, mais son statut psychologique, en ce sens que la signification de A va être fondée sur la signification de R, et que la découverte de ce type de relation va fonder une intelligibilité nouvelle, et en particulier donner une nouvelle dimension à la nécessité de A" (ibid. p. 200).

Cette réflexion théorique appliquée à la propriété de la somme des angles d'un triangle, conduit Halbwachs aux critiques et aux réflexions suivantes :

> La démonstration d'Euclide qui est généralement donnée dans l'enseignement sous telle ou telle variété de forme, est statique et artificielle [...] C'est l'application purement logique de théorèmes antérieurs, dont l'enchaînement est parfaitement convaincant. Mais la *raison d'être* de la propriété échappe, ce qui montre qu'on est dans le domaine structural (enchaînement de

composition et de propositions). Pour montrer comment transcender ce point de vue, donnons ce qui paraît évidemment être la "raison".:
Il faut d'abord rendre le problème dynamique et constructif en précisant (ou modifiant) la notion d'*angle* : un angle peut être conçu comme portion de plan balayée par une demi-droite pivotant autour d'un point fixe, ce qui met au premier plan un *mouvement* .
[...]
Ceci dit (voir fig.15), on part de la demi-droite ABD, on pivote d'un angle Â autour du point A (counterclockwise) et on vient en ACH. Puis on pivote d'un angle C autour du point C (counterclockwise) et on vient en BCJ. Enfin on pivote d'un angle B autour du point B (counterclockwise) et on vient en BAK . On a donc additionné les trois angles pris dans le même sens, et au total on est passé de la demi-droite ABD à la demi-droite BAK, c'est-à-dire que l'on arrive sur la droite de départ, mais avec changement de sens, ce qui représente l'angle plat (soit π ou deux droits).
Ici contrairement à la démonstration d'Euclide, le passage de la donnée à la conclusion s'est opérée en faisant "fonctionner" la définition dynamique de l'angle [...] Il n'y a plus seulement enchaînement logique de propositions (ou comme on dit "transfert de vérité"), mais en même temps et parallèlement *transfert de signification* . (ibid. p. 201-202)



« "Raison" du théorème de la somme des angles »

Figure 15

c) De l'unité des preuves et des conceptions

Les deux « explications » que nous venons de rapporter sont données par chacun des auteurs comme rendant compte de la nature cognitive et épistémologique fondamentale de la propriété démontrée. Comme le dit Halbwachs, de sa *raison d'être* . Il serait légitime à ce moment de se poser la question, ou plutôt de la poser à chacun des auteurs, de savoir des deux explications laquelle est la plus intrinsèquement liée à la propriété et pourquoi. Mais F. Halbwachs est décédé depuis peu, cependant on peut essayer d'imaginer ce que serait leur réponse. Elle nous semble découler directement des fondements théoriques de chacun de ces deux auteurs : il n'y a pas de preuve intrinsèquement signifiante. Le caractère signifiant tient à la nature des relations entre l'explication (ou la preuve) et les connaissances du sujet. Chacune des deux explications est signifiante, porteuse de raisons, pour chacun des auteurs du fait de leur propre intuition (au sens de Fishbein). Le fondement de chacune de ces explications tient à leur enracinement dans une conception de l'angle qui leur est propre.

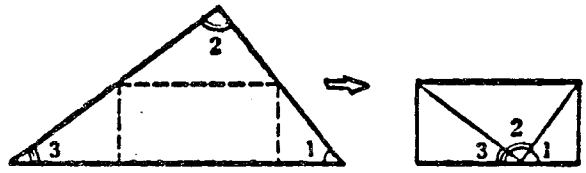
En revanche les propositions faites par ces deux auteurs sont pour nous l'expression d'une mise en question fondamentale de la nature des relations entre les conceptions des élèves et les fondements de la preuve euclidienne classique. L'objection ne nous paraît pas être, comme le suggère Halbwachs, que la preuve d'Euclide soit statique, mais que les conceptions (les savoirs tels qu'ils sont appropriés par les élèves) ne permettent pas d'en constituer les raisons au sens d'une *organisation inférentielle des significations* . Nous formulons l'hypothèse que c'est dans ce décalage entre preuve et connaissance que réside l'obstacle à la constitution des raisons, et donc à la compréhension.

Pour ce qui est de la preuve d'Euclide, nous suggèrerions que la construction auxiliaire qu'elle demande se « comprend » dès que l'on « comprend » que le théorème sur l'égalité de certains angles déterminés par une sécante sur un couple de parallèles permet une mise en relation des angles ou leur « transport ». Ce même transport est obtenu, par des découpages ou des pliages, pour des preuves pragmatiques.

Ce qui est mis en relief par les critiques de Halbwachs et Fishbein est ce que nous pourrions appeler le décalage entre la valeur déclarative de ce dernier théorème (assertions sur des égalités d'angle) et sa valeur opératoire. Cette valeur opératoire, ou encore cette signification du théorème, n'est à notre sens constructible par les élèves que dans un fonctionnement de la connaissance qui est le plus souvent absent des pratiques scolaires.

Pour ces mêmes raisons on ne peut, comme le fait Fishbein, rejeter une explication sous le seul argument qu'elle ne rend pas compte de la nature intuitive de la propriété (ce qui signifierait que la propriété possède une nature intuitive déterminée ou intrinsèque). Nous suggérons que l'explication en question n'est pas signifiante pour l'auteur, mais qu'elle peut l'être pour l'étudiant qui la propose au regard des significations qu'il attache à la notion d'angle ou à la propriété ; par exemple pour de jeunes chinois rompus aux pratiques du pliage de papier, cette preuve (fig. 16) peut prendre du sens en prenant appui sur un théorème-en-acte éprouvé par la pratique selon lequel le pliage autour du milieu des côtés d'un triangle permet le rabattement d'un sommet sur le troisième côté.

我们按下图做一个实验：把三角形的三个角沿虚线折过去，三个角正好组成一个平角。



由上可知，三角形的内角和是180°。

Figure 16

En revanche nous adhérons à la remarque de cet auteur selon laquelle ce qui constitue le caractère signifiant n'est pas le recours à l'action, qui n'est pas plus intuitive en soi (contrairement semble-t-il à ce que suggère Halbwachs). C'est bien une hypothèse pédagogique de ce genre qui tend à substituer au dogmatisme des preuves intellectuelles celui de preuves pragmatiques tout aussi peu signifiantes au regard des connaissances des élèves.

III : Construction *a priori* de la séquence didactique

III.1. Plan d'ensemble de la séquence

Notre objectif est de construire une séquence didactique qui assure la dévolution, aux élèves d'une classe de cinquième, de la responsabilité de construire la conjecture « la somme des angles d'un triangle est constante et égale à 180° » et d'en proposer une preuve.

Nous faisons l'hypothèse que la conception initiale dominante dans la classe sera que « plus un triangle est grand plus la valeur de la somme de ses angles est grande ». C'est cette conception, dont nous pensons qu'elle sera assez résistante, qui servira de point d'appui à la construction de notre séquence : la conjecture résultant de sa mise en contradiction. Par ailleurs il sera nécessaire d'assurer la disqualification du recours aux mesures comme moyen de preuve pragmatique pour permettre l'exigence légitime de preuves intellectuelles.

La dévolution du problème ne signifie pas seulement son appropriation par chaque élève, mais encore qu'il soit reconnu en tant que tel par la classe qui en prend la responsabilité collective. La séquence devra donc assurer cette socialisation.

Enfin, il faudra garantir l'achèvement du processus dans un temps compatible avec le fonctionnement du système didactique. En fait il s'agit là d'une contrainte particulièrement difficile à satisfaire, au plan théorique et pratique, nous l'examinerons à la fin de la présentation de cette séquence. Le problème soulevé est celui de la fermeture de la situation et de l'institutionalisation.

III.2. Les conditions de la genèse de la conjecture

III.2.1. Constituer et stabiliser le milieu

Il s'agit en premier lieu de trouver les conditions dans lesquelles la mesure des angles d'un triangle et la manipulation de ces nombres, pourront être introduits sans qu'il soit nécessaire d'expliciter l'objectif didactique qui est finalement visé.

Au niveau qui nous intéresse, la classe de cinquième (et au moment de cette étude, le deuxième trimestre de l'année scolaire1983-84) la suite des leçons sur les angles fournit un cadre naturel possible.

Des activités de mesure des angles d'un triangle peuvent être introduites aisément, car il est ordinaire que le professeur renouvelle les situations en les complexifiant un peu ou en changeant le contexte. Il n'est donc pas nécessaire de justifier autrement cette introduction. Par ailleurs, commencer la séquence par des questions de mesure permet de s'assurer de la maîtrise suffisante, et préalablement nécessaire, des instruments et

des techniques correspondantes : usage du rapporteur, technique de mesure des angles d'un triangle (prolongement éventuel des côtés), manipulation des nombres obtenus. Cette « entrée » permettra au professeur de vérifier que les élèves disposent d'une base d'action solide.

Cette situation initiale est définie pour les élèves de la façon suivante :

- l'enseignant demande que chaque élève trace un triangle, qu'il en mesure les angles, puis qu'il fasse la somme des résultats obtenus ;
- l'enseignant justifie cette activité en expliquant qu'il s'agit de poursuivre l'étude de l'usage du rapporteur et de la mesure des angles ;
- à l'issue de cette activité l'enseignant recense et note au tableau, sous la forme d'un histogramme, les résultat obtenus. Il demande un commentaire aux élèves .

A ce moment tous les résultats proposés par les élèves sont acceptables et doivent être acceptés sans distinction. En effet, il s'agit des résultats de mesures effectivement réalisées et non de donner la « vraie » valeur de la somme des angles d'un triangle. Leur diversité n'a pas de signification particulière dans ce contexte. Elle peut résulter aux yeux des élèves de ce que des triangles différents ont été dessinés, bien que certains élèves soient susceptibles d'évoquer le fait de l'incertitude des mesures.

Le commentaire demandé est très ouvert a priori. Il n'est là en quelque sorte que pour "achever" la première activité ; il serait en effet très difficile de passer sans transition de la réalisation de l'histogramme à l'activité suivante. Ce commentaire peut porter sur la dispertion des valeurs attestées par le graphique, notamment en mentionnant l'intervalle

numérique dans lequel elles se trouvent.

Au regard de l'objectif visé, la situation ainsi construite ne constitue pas une situation d'action, sa fonction est de **constituer et stabiliser le milieu** dans lequel le problème va ultérieurement être formulé, elle ne vise pas à mobiliser de conceptions spécifiques de ce problème.

III.2.2. Connaître la somme des angles d'un triangle

A la suite de cette première activité, il est nécessaire de différencier ce qui tient à l'incertitude des mesures, de ce qui est expliqué par les conceptions erronées des élèves dans la variété des résulats obtenus. Pour cela il faut que toute la classe soit confrontée à la mesure des angles d'un même triangle, et que puisse être engagées les conceptions sur la relation entre la taille d'un triangle et la somme des mesures de ses angles.

Ceci est l'objet de la deuxième activité définie pour les élèves de la façon suivante :

- l'enseignant remet àchaque élève une copie d'un même triangle ;
- il demande à chaque élève de formuler ***un pari*** *sur la somme des mesures des angles de ce triangle et de l'inscrire sur une feuille de papier qui sera récoltée ;*
- l'enseignant demande ensuite que chaque élève mesure les angles du triangle donné puis qu'il calcule la somme des nombres obtenus ;
- à l'issue de cette activité l'enseignant recense et note au tableau, sous la forme d'un histogramme, les résultat obtenus ;
- pour chaque élève les résultats sont confrontés aux paris, un commentaire est demandé à l'élève ;
- l'enseignant demande des commentaires sur l'histogramme à la

classe .

Le triangle proposé (dont on trouvera une reproduction en annexe 1 à ce chapitre) est assez grand, et « quelconque », pour favoriser l'engagement des conceptions attendues. En effet, le premier triangle dessiné par les élèves occupe rarement plus de la moitié de leur page.

Pour décider de leur pari les élèves peuvent recourir à une évaluation perceptive de la mesure des angles (qu'ils ont parfois pu pratiquer en classe, notamment pour la reconnaissance des angles de 45° ou 90°), et à la comparaison du triangle qui leur est proposé avec leur triangle initial. C'est de cette dernière procédure que nous pensons que seront issus les paris sur des nombres très sensiblement plus grands que ceux obtenus au cours de la première activité.

Le commentaire demandé à chaque élève, sur la comparaison de son pari au résultat obtenu, a pour but de porter à son attention le décalage éventuel entre ces deux nombres.

La situation ainsi réalisée a cette fois les caractéristiques d'une **situation d'action** : elle permet la mobilisation des conceptions qui interviendront comme modèle d'action ou de décision dans l'étude à venir. Aucune question de validation n'est encore soulevée : le décalage entre pari et mesure peut légitimement apparaître comme contingent, lié au choix particulier des triangles. Il ne fait pas nécessairement problème.

Les commentaires sur l'histogramme, demandés à la classe, doivent conduire à l'explicitation de l'exigence que tous les élèves aient trouvé la même mesure pour le même triangle. Les différences qui ne manqueront

pas d'apparaître seront expliquées par les incertitudes sur les mesures ; incertitudes propres aux instruments ou dues aux pratiques. L'enseignant le souligne.

III.2.3. Une conjecture possible

A ce stade de la séquence, la conjecture sur l'invariance de la somme des mesures des angles d'un triangle n'a pas de raisons d'avoir été formulée. Eventuellement présente à l'esprit de quelques élèves, elle n'est sûrement pas partagée par la classe.

Nous avons en revanche réalisé les conditions de sa genèse :

- les conceptions des élèves qui seront à l'origine de la conjecture ont été sollicitées et le milieu dans lequel elle prendra place a été constitué ;
- le fait de l'incertitude des mesures a été reconnu, le problème de la connaissance de la somme des angles d'un triangle déterminé est donc posé. La disqualification de la mesure comme moyen de connaître cette somme légitimera l'exigence de preuves intellectuelles de la conjecture attendue.

III.3. La dévolution du problème

III.3.1. L'émergence d'un invariant

La phase suivante a pour objectif la formulation du problème de l'invariance de la somme des mesures des angles d'un triangle, puis la naissance de la conjecture sur l'égalité de cette somme à 180°. La

dévolution de ce problème à la classe signifie non seulement que les élèves se l'approprient individuellement mais aussi qu'il soit placé sous la responsabilité collective. Cette **socialisation** est une condition du débat de preuve que nous souhaitons finalement faire naître dans la communauté de la classe.

Pour amener la question de l'invariance de la somme des angles d'un triangle il est nécessaire que les élèves aient à réaliser ces mesures et ces calculs pour plusieurs triangles. Le nombre d'expériences effectivement réalisables étant très limité, le choix des triangles est donc très important. Par ailleurs ces expériences n'ont de sens que si les élèves engagent effectivement leurs conceptions : la conjecture et le problème de sa preuve naîtront de la confrontation, au niveau des individus et au niveau de la classe, de conceptions suivant lesquelles d'une part la somme des angles d'un triangle est dépendante de la forme du triangle et d'autre part du résultat des mesures qui situeront cette somme au voisinage de 180°.

Pour cela nous avons retenu les trois types de triangles représentés par la figure ci-dessous (fig. 17, une reproduction à 70% se trouve en annexe 2 à ce chapitre), dont nous faisons l'hypothèse qu'ils doivent favoriser cette confrontation. Les triangles **A** et **B** ont été choisis pour le caractère provocateur de la combinaison de la forme des angles et de la taille du triangle. Dans le cas du triangle **A** ces deux éléments agissent dans le même sens, sollicitant l'idée que la somme des angles devrait être assez grande, pour le triangle **B** au contraire ces deux caractères agissent de façon contradictoire pouvant rendre problématique l'évaluation de la somme. Le contraste des formes peut être un obstacle à décider que les triangles auraient la même somme d'angles. De plus, les formes de ces triangles sont assez peu habituelles pour que l'on puisse attendre que les

paris qui seront demandés, n'aillent pas de soi et conduisent les élèves à des raisonnements non triviaux qui engagent leurs conceptions.

Le triangle **C** est très sensiblement plus petit que les triangles rencontrés jusque là, il devrait susciter des paris très inférieurs à 180°.

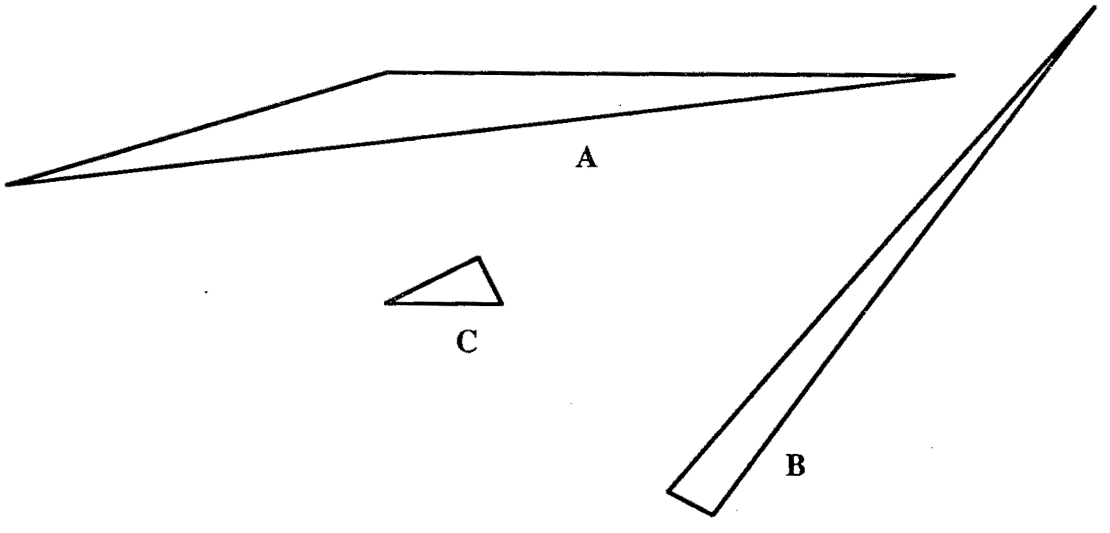


Figure 17

Pour favoriser l'explicitation des conceptions et l'émergence des conflits cognitifs nous organisons l'activité des élèves en équipes : chaque équipe, créée sur des critères d'affinité, doit se mettre d'accord sur une évaluation a priori de la somme des angles pour chacun des triangles. L'exigence d'un pari unique pour le groupe réalise les conditions d'une **situation de décision** (ce n'est pas la production d'une preuve commune qui est demandée mais la production d'une décision), la confrontation des points de vue devrait amener à la proposition d'explications fondées sur les conceptions de chacun.

La situation est définie pour les élèves, associés en équipes de trois ou quatre (selon les effectifs de la classe), de la façon suivante :

- l'enseignant remet à chaque équipe une copie de chacun des trois triangles ;

- il demande à chaque groupe de formuler un pari sur la somme des mesures des angles pour chacun des triangles puis d'inscrire ce pari sur une feuille de papier qui sera récoltée ;

- l'enseignant demande aux équipes de mesurer les angles pour chaque triangle, et de calculer la somme des nombres obtenus ;

- à l'issue de cette activité l'enseignant recense et note au tableau, sous la forme d'un histogramme pour chaque triangle, les résultat proposés ;

-pour chaque équipe les résultats sont confrontés aux paris et un commentaire est demandé par l'enseignant

Le recensement des mesures, avec la réalisation d'un histogramme pour chacun des triangles, est l'occasion pour chacun des groupes d'une confrontation des paris aux résultats des mesures. Le commentaire demandé, comme dans les situations précédentes, a pour fonction de favoriser l'explicitation des conceptions et de souligner la contradiction éventuelle entre pari et mesure.

A la suite de cela, le professeur demande aux élèves s'ils ont des remarques particulières à formuler après l'examen des trois histogrammes et à la lumière des commentaires qui ont été faits. Une telle question semble-t-il très ouverte est justifiée par l'exigence, éventuellement implicite, que chacun des triangles doit avoir une valeur précise pour la somme des mesures de ses angles qui lui donne du sens.

Le problème de la connaissance de cette valeur doit être posé.

III.3.2. L'explicitation de la conjecture et la dévolution du problème de sa preuve

Par l'intérêt que les élèves peuvent avoir (pour la comparer à leur pari) à connaître la valeur de la somme des angles des triangles qui leur ont été proposés, les mesures réalisées au cours du travail en équipe de la troisième activité devrait être d'une assez bonne précision et donc donner des résultats dans un voisinage proche de 180°. Par ailleurs, la seconde activité, en posant le problème de la valeur de cette somme pour un triangle commun à l'ensemble de la classe, devrait elle aussi mettre en relief des valeurs proches de 180°. Pour ces raisons nous pensons que si la conjecture de l'invariance de la somme des angles d'un triangle est formulée, 180° est un bon candidat, éventuellement comme valeur moyenne (et entière...), pour que soit réalisé sur lui un consensus de la classe. Cela peut être favorisé par la «connaissance» que pourrait avoir certains élèves du théorème. Nous envisageons alors deux situations :

- la valeur 180° est remarquable, mais des élèves continuent à soutenir qu'il est possible de trouver un triangle dont la somme des angles serait différente ;

- la conjecture est exprimée par certains élèves ou groupes d'élèves, et est partagée sans ambiguité par l'ensemble de la classe.

Dans ce dernier cas l'insuffisance déjà reconnue du recours aux instruments pour connaître la somme des mesures des angles d'un triangle doit permettre à l'enseignant de poser le problème de la preuve.

En fait, nous faisons l'hypothèse que la robustesse des conceptions

initiales assurera la présence dans la classe de prises de position pour et contre la validité de la proposition. Nous nous attendons donc à nous trouver dans le premier cas.

Pour obtenir que 180° soit considérée comme une conjecture, le professeur demande aux élèves qui en doutent ...

> *de chercher à construire un triangle dont la somme des mesures des angles soit très différente de 180°.*

A ceux qui soutiennent que cela est impossible il demande d'établir que l'égalité à 180° est nécessaire. Ne prenant pas parti, il laisse la possibilité à la proposition en question de se constituer en conjecture sous la responsabilité de la classe.

Il existe bien sûr un risque pour qu'à la suite d'un tel processus les élèves accueillent le fait que 180° est la somme des angles d'un triangle avec une conviction suffisante pour ne pas ressentir le besoin de preuves. Nous pensons cependant que les tensions qui auront été entretenues entre les deux camps, pour et contre la conjecture, légitiment que le professeur insiste pour qu'une preuve soit recherchée. Quoiqu'il en soit ce risque nous paraît *a priori* bien limité.

Dans les deux situations que nous venons d'envisager les élèves se trouvent dans une **situation de validation** où il leur appartient de produire une (ou des) preuves de la conjecture, ou de la réfuter. Le professeur n'a pas la responsabilité de la validité de la conjecture, sa charge dans le déroulement de la séquence n'a jamais été définie que comme celle de renouveler les situations et d'assurer le maintien d'un

objectif de connaissance.

III.4. La fermeture de la situation

III.4.1. Des scénarios possibles

La dévolution du problème signifie le transfert à la classe de la responsabilité du vrai. Mais rien ne permet de garantir que les élèves, en particulier du niveau de la classe de cinquième, pourront effectivement construire cette preuve dans un délai compatible avec le fonctionnement du système didactique, ni de quelle nature cette preuve sera finalement (cf. § III.4.2.).

Ainsi le **problème de la fermeture de la situation** est posé.

Il n'est pas possible d'assurer a priori une solution déterminée à ce problème, au moins dans le cadre actuel des connaissances en didactique. En revanche nous pouvons envisager des «Fins » possibles et les discuter au regard de la connaissance construite par les élèves. Une question centrale dans cette discussion est en fait celle de l'institutionnalisation et de son statut cognitif.

Nous envisageons principalement trois types de scénarios possibles, le dernier présentant une alternative :

(i) **les élèves se sont mis d'accord** sur une preuve de la

conjecture. Alors il reste au professeur à l'entériner. Cela suppose que la preuve est acceptable de son point de vue. Le contrat didactique initial, après avoir été rompu pour permettre la dévolution du problème, doit être renoué : si la preuve n'est pas acceptable alors le professeur doit en négocier l'abandon ou l'amendement ;

(ii) **les élèves ne sont pas parvenus à un accord**, alors le professeur doit intervenir pour reconnaître les preuves acceptables et rejeter les autres. Il y aura nécessairement une négociation, éventuellement dans deux directions : d'une part pour faire accepter la réfutation des preuves fausses (et en tirer les conséquences), d'autre part pour faire accepter que des preuves différentes soient reconnues ;

(iii) **les élèves ne parviennent pas à une solution**, alors l'enseignant doit aménager une issue. Pour cela deux possibilités s'offrent à lui :

- soit il propose une preuve de la conjecture. Il faudra pour que cette preuve soit acceptable par la classe qu'elle prenne en compte les conceptions de la notion d'angle que les élèves auront attestées et les directions de recherche qu'ils auront adoptées. De même, le niveau de la preuve devra être compatible avec celui auquel les élèves se seront éventuellement situés dans leurs tentatives : preuve expérience- mentale, exemple générique, ou inférences classiques de la géométrie plane. Cet enracinement dans leurs efforts de résolution du problème est une condition pour que la preuve proposée puisse être acceptée : la dévolution du problème a pour contre-partie implicite que la solution du problème soit «raisonnablement » à portée de la classe.

- soit il propose d'accepter la conjecture pour vraie , laissant ouvert le problème de sa preuve. On semble retrouver là la position

classique parfois adoptée dans les classes : « vous montrerez plus tard que ... cette année, on admettra ... ». Cependant ici la situation est radicalement différente de ce qu'elle est usuellement dans la mesure où l'assertion en question n'a pas seulement été constatée ou entendue par les élèves, elle a été construite comme une conjecture, mise en question, problématisée. Son caractère de vérité potentielle a été mis en débat. C'est la production d'une preuve après un effort de résolution qui est repoussé à plus tard. La proposition faite par l'enseignant prend une valeur pratique (la recherche doit avoir une fin dans un délai acceptable) et non de principe (comme affirmation que «les élèves ne peuvent pas comprendre»).

Nous pensons que cette dernière option pourra le plus souvent être évitée à moins d'une classe disons, « très faible ». De l'expérience-mentale à la démonstration plusieurs types de preuves sont disponibles, s'appuyant sur des conceptions différentes de la notion d'angle ou sur des significations différentes de la conjecture. Cette palette de preuves, que nous envisageons ci-dessous, permet d'aménager des issues en nombre suffisant.

III.4.2. Une palette de preuves

Au moment où nous avons construit cette situation didactique il existait peu d'éléments permettant d'affirmer a priori quelles seraient les preuves constructibles par les élèves. Cette situation était acceptable dans la mesure où en revanche nous nous étions assuré que la palette de ces preuves est assez étendue tant par les types, au sens des stratégies de résolution et et en référence aux diverses conceptions de l'angle, que par les niveaux. Par ailleurs nous avons souligné que la contrainte de

constructibilité d'une preuve par les élèves eux-mêmes n'est pas une condition *sine qua non* de « réussite » de la situation que nous proposons. Sans reprendre l'analyse que nous avons déjà présentée des preuves possibles nous allons évoquer ici celles qui pourraient venir en clôture de la situation.

Il est peu plausible que des preuves pragmatiques soient proposées par les élèves : le recours à la mesure est disqualifié par la construction de la séquence ; quant au découpage et au pliage ils sont étrangers aux pratiques usuelles de la classe. L'expérience cruciale impliquerait un consensus des élèves sur ce qu'est un triangle quelconque, elle se heurterait à une mise en garde cent fois formulée par le professeur contre les figures particulières, notamment le triangle. Pour cette raison nous la croyons peu susceptible d'apparaître dans le contexte de cette situation.

Par ailleurs, il nous semble peu probable, au niveau de la classe de cinquième, que des preuves «euclidiennes» ou s'appuyant sur l'angle comme rotation soient proposées par les élèves. Par contre de telles preuves pourraient être fournies par l'enseignant, à un niveau convenable, en s'assurant de leur compatibilité avec les conceptions de l'angle attestées par les élèves et en fonction des types de recherches qu'ils auront engagées (respectant ainsi un principe d'unité des preuves et des conceptions). Pour les preuves euclidiennes on connaît les présentations classiques, pour les preuves relevant de l'angle comme rotation on peut suggérer une expérience mentale du type de celle proposée par Grosgurin (§ II.2.3.), ou la version ci-après tirée d'un manuel polonais (fig. 18).

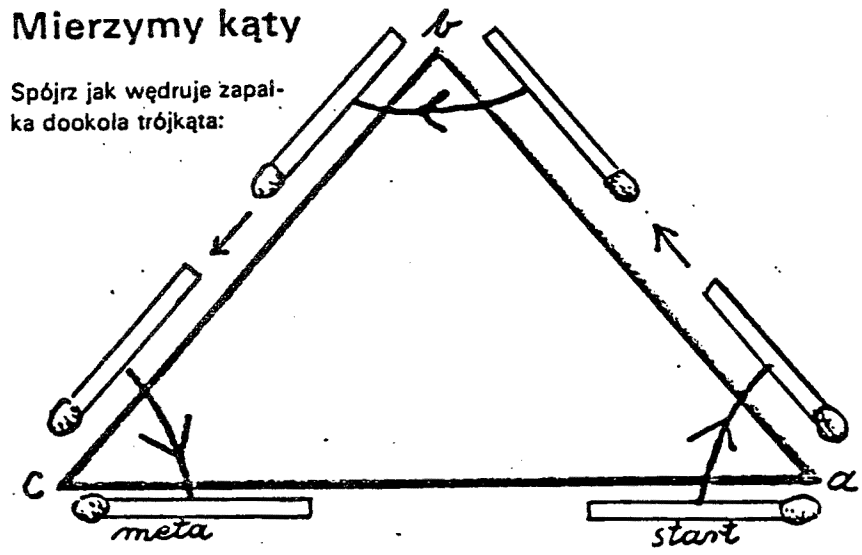


Figure 18

Pour ce qui est des preuves intellectuelles que les élèves pourraient produire eux-mêmes on peut penser à celles qui s'appuient sur le postulat qu'un triangle rectangle est la « moitié » d'un rectangle. La source de cette preuve, d'un point de vue heuristique, est l'idée de rechercher un lien avec le fait acquis que la somme des angles d'un rectangle est 4 fois 90°, soit 360°. Tout triangle peut ensuite être considéré comme « décomposable » en triangles rectangles en traçant l'une de ses hauteurs ; il est possible que les élèves considèrent les deux cas d'une hauteur intérieure au triangle et d'une hauteur extérieure (fig. 19).

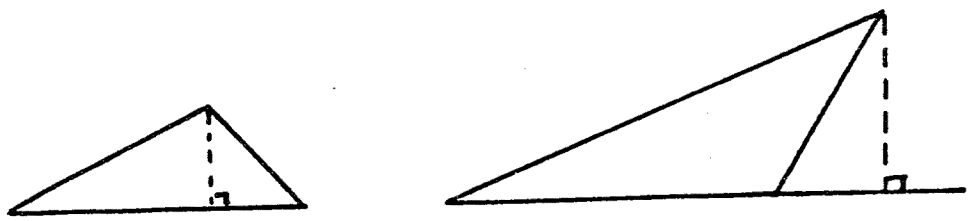


Figure 19

IV : Analyse et mise en oeuvre expérimentale

IV.1. Remarques préliminaires

Le problème de la mise en oeuvre d'une recherche expérimentale se heurte, en didactique, à plusieurs obstacles qui viennent s'ajouter aux contraintes spécifiques de l'objet d'étude.

Nous ne nous étendrons pas longuement sur ces aspects de notre recherche, mais il convient d'en faire mention ici dans la mesure où ils ont pu conditionner notre accés à l'observation, et partant sa conception même.

Il n'existe pas au niveau du collège, d'observatoire ou de véritable laboratoire permettant l'observation didactique, un lieu qui permette la mise en oeuvre de dispositifs expérimentaux parfois importants et le recueil de données. Un tel lieu existe pour l'Ecole Elémentaire dans le cadre de l'école J. Michelet à Talence, associé à l'IREM de Bordeaux, cet outil exceptionnel pour la recherche expérimentale en didactique est le produit de la volonté courageuse d'un chercheur : Guy Brousseau. Ailleurs, la possibilité d'expériences repose essentiellement sur la collaboration généreuse d'enseignants, d'élèves et de chefs d'établissement attentifs et intéressés au développement de nos travaux.

Cette situation précaire a des conséquences matérielles évidentes, mais aussi et de façon plus cachée, elle a des conséquences au plan théorique. Il n'est pas toujours possible que l'enseignant soit totalement associé au projet de recherche ; ce qui constituerait un fonctionnement normal. Se pose alors le problème essentiel de son introduction aux objectifs et à la problématique de l'expérience, celui de son appropriation des différents aspects de la situation didactique à mettre en oeuvre et de leurs motivations. Ceci ne peut être que le résultat d'une négociation qui engage les conceptions propres à l'enseignant pour ce qui concerne les processus d'apprentissage, le fonctionnement didactique mais aussi l'évaluation de la pertinence du dispositif qui lui est proposé.

La réalisation pratique de l'expérience est sous la responsabilité de l'enseignant, il s'agit là d'une contrainte déontologique. Mais il nous paraît par ailleurs que la recherche expérimentale en didactique n'est possible que si le dispositif expérimental utilisé est négociable avec l'ensiegnant en prenant en compte les contraintes de la pratique professionnelles et le fonctionnement du système didactique. Le dispositif doit pouvoir prendre sa place dans un processus d'enseignement qui le dépasse, qui est né avant lui et se poursuivra après lui. Par ailleurs il doit prendre une place raisonnable dans le temps.

Dans le cas qui nous occupe la réalisation de l'expérience devait occuper au plus deux séances ordinaires de classe (environ 55 minutes) ; il faut reconnaître que le théorème sur la somme des angles d'un triangle, qui ne figurait pas à ce moment là dans les programmes de cinquième, ne pouvait raisonnablement occuper plus de temps. L'observation a été conduite dans deux collèges de l'agglomération grenobloise, à Domène et à Echirolles, avec des enseignants volontaires. L'ensemble de la séquence

a été filmé, il n'y avait pas d'autres observateurs dans la classe que l'opérateur de la caméra. Les analyses que nous présentons ici ont été réalisées à partir de la transcription, que nous avons réalisée, des enregistrements vidéo.

IV.2. Une observation dans une classe ordinaire

Une première observation a eu lieu dans une classe de cinquième « ordinaire » du collège de Domène (prés de Grenoble) en Mars 1983. La classe comportait 25 élèves. Le scénario de la séquence avait été discuté en détail avec le professeur, nous avons observé et filmé deux séances de 50 minutes environ.

IV.2.1. Chronique de la séquence

(D1) L'activité des élèves est introduite en référence aux activités courantes :

> Prof (1) : *aujourd'hui on va continuer le travail qu'on a fait jusqu'à présent : les mesures des angles. Voilà ce que je demande : vous allez tracer un triangle, chacun trace un triangle sur son cahier ... puis vous mesurez chacun des angles de ce triangle. Quand vous aurez fini, vous ferez la somme de ces trois mesures. Ensuite je recenserai les résultats.*

Alors que les élèves se sont mis au travail, le professeur les visite. Il complète la consigne de quelques remarques adressées à la classe, dans le

but de préciser quelques points de pratique éventuellement relevés en visitant les élèves :

Prof (4) : *vous donnez la mesure en degrés, de chacun de ces angles*
Prof(9) : *si vous voyez pas très clairement, prolongez les côtés*

Certaines interventions ont pour but de porter à l'attention de la classe des points jugés importants liés aux difficultés de certains élèves. C'est en fait le dialogue commencé avec l'un des élèves qui est rendu public :

"La taille du rapporteur" :

Prof (11) : *si on a pas le même rapporteur on a pas le même écartement ?*
La classe (12) : *si, si ... obligé*
Prof (13) : *on mesure en quelle unité [...] en degré. Est-ce que le degré sur vos ... c'est une question intéressante [à la classe] est-ce que le degré sur le rapporteur de Karelle est le même que le degré sur le rapporteur de Murielle ?*
La classe (14) : *mais bien sûr*
Karelle (15) : *ben, comme y en a un qui est plus grand que l'autre on arrivera pas au même endroit.*
Prof (16) : *je comprends pas très bien ce que tu veux dire. S'il y en a un qui est plus grand que l'autre ... ?*
Karelle (17) : *si il y en a un qui mesure ici, il aura pas le même que là*
Prof (18) : *est-ce que c'est la distance entre les deux demi-droite que tu mesures Karelle, quand tu mesures avec un rapporteur ? Est-ce que c'est la longueur que tu mesures ?*

Karelle (19) : *non*

Prof (20) :*c'est l'ouverture de l'angle. Est-ce que si je dessine un angle comme ça [au tableau] est-ce qu'il change cet angle lorsque je prolonge les côtés ?*

La classe (21) : *non*

Prof (22) : *c'est toujours le même angle. C'est pas la longueur ici que tu mesures Karelle, c'est l'ouverture de l'angle [il illustre d'un geste au tableau]*

"La désignation des angles" :

Prof (23-24) : *[à X] tu m'écris AB égal 120° [à la classe] si vous ave nommé les sommets du triangle vous pouvez les appeler ... si vous avez appelé les sommets du triangle A,B,C, comment vous pouvez appeler les angles ?*

La classe [avec le professeur] (25) : *A-B-C* ... [Prof : comme les ?] ... *sommets*

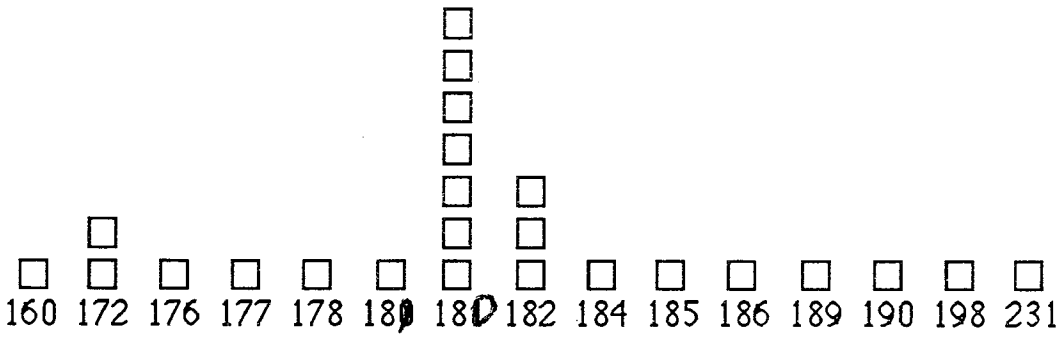
Prof (26) : *qu'est-ce qu'on désigne par AB d'habitude ?*

La classe (27) : *les segments*

Prof (28) : *les segments plutôt, alors c'est pas possible de désigner un angle avec cette notation là*

Les interventions auprès des élèves ont pour objectif de les encourager à travailler, ou de repréciser la consigne ; comme par exemple pour cet élève qui a tracé trois angles indépendants sur sa feuille au lieu du triangle demandé.

(D2) La récolte des résultats donne lieu à l'histogramme ci-dessous :



Le professeur accepte sur un ton égal tous les résultats, sans remarques. Cependant les propositions 160° et 231° provoquent de vives réactions dans la classe, alors que les autres résultats ont plutôt été reçus dans l'indifférence. L'élève qui a proposé 231° modifiera son résultat en 180°, ce que le professeur accepte avec suspicion.

Après quoi le professeur invite la classe à des remarques. En général il se contente de répéter les phrases, les montrant en quelque sorte à la classe. Dans quelques cas, il laisse échapper un jugement ou une correction :

- *ça se passe tout entre 150 et 200* (San 84)

  Prof (93) : *c'est une remarque intéressante*

- *il y a beaucoup de 180* (Ele 92)

- *tous les 180, ils ont un angle plat* (Ele 97)

  Prof (98) : *180° correspond à un angle plat*

- il y a plusieurs triangles, ils ont pas les mêmes angles mais ils ont la même somme (Ele 99-100)

Prof (101) : *tu trouves qu'ils ont la même somme ?*

- dans les 180 (Ele 102)

(D3) La transition vers la phase suivante est réalisée à partir de cette dernière remarque :

Prof (103) : *parmi les élèves qui ont trouvé 180, est-ce qu'ils avaient tous dessiné le même triangle ?*

Un élève (104) : *non, p't'être pas, hein*

Le professeur introduit alors l'activité suivante :

Prof (105) : *Voilà ce que je vais vous demander de faire maintenant. Vous aviez choisi votre triangle et vous aviez mesuré les angles de* ***ce*** *triangle . Et bien cette fois-ci je vais vous donner à tous le* ***même*** *triangle. Vous allez recommencer l'exercice, mais avec le même triangle pour tous.*

Un élève (106) : *pour voir si on trouve le même ?*

A la suite de cette dernière remaruqe des avis partagés ("oui", "non") sont exprimés, notamment un élève affirme :"*il y a toujours un ou deux millimètres qui s'échappent* "(Ele 117). Le professeur complète ensuite la consigne :

Prof (124-140) : *vous allez faire un pari avant de commencer ... vous pariez sur la somme des angles de ce triangle ... sur les petites feuilles que je distribue, vous m'inscrivez le pari. Et si possible, si*

vous avez une raison, vous l'indiquez ... je relève les feuilles avant que vous commenciez les mesures ... vous faites chacun pour vous, pas avec votre voisin si possible ... vous trichez pas,vous donnez les mesures que vous trouvez. Vous trichez pas pour que cela corresponde à vos paris.

(D4) Au recensement des résultats, chaque mesure est confrontée au pari, et chaque élève est appelé à faire un commentaire. Nous indiquons ci-dessous les couples (pari, mesure) suivis du commentaire de l'élève (ou de sa répétition éventuelle par le professeur lorsque l'élève est inaudible) :

Isa 143	(180, 180)	*tu avais mis à vue d'oeil*
Mur 150	(180, 180)	*[elle a évalué chaque angle]*
Seb 152	(270, 180)	*l'angle il me paraissait plus grand que quand j'ai mesuré*
Chr 158	(260, 180)	*il te paraissait plus grand que quand tu as mesuré*
San 162	(180, 180)	
Flo 164	(180, 182)	*tu t'es trompée de deux degrés*
San' 166	(250, 181)	*déjà le triangle grand et ensuite un angle qui faisait grand*
		[rires dans la classe]
Fra 174	(180, 180)	
Yan 174	(180, 180)	*à vue d'oeuil*
Dav 175	(260, 163)	*cet angle t'a influencé*
Jea 185	(220, 180)	*parce que l'angle ... c'est un peu plus grand qu'un angle*

droit

Bar 193 (160, 180) *j'ai vu qu'il y avait deux petits angles alors j'ai dit ça fra moins de 180*

Car 197 (180, 180)

Kar 198 (180, 180)

Dom 199 (250, 180) *le triangle il est trop grand ... et puis l'autre il était petit*

Lud 207 (180, 180)

Kar' 209 (180, 180)

Phi 213 (180, 180) *il y a un angle droit et deux aigus*

Phi' 217 (180, 180) *tu dis toi c'est obligatoirement 180 [agitation dans la classe]*

Val 221 (184, 181) *les trois angles n'ont pas le même degré*

Eri 222 (440, 180) *le triangle te paraissait grand [rires dans le classe]*

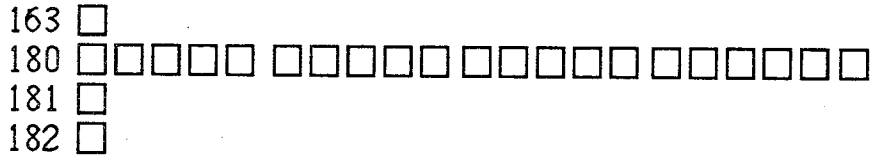
Abd 225 (185, 180)

Kar" 227 (180, 180)

Rac 229 (180, 180)

Ald 231 (180, 180) *mais j'croyais que c'était un angle droit et les deux autres c'était 45°*

Au tableau le professeur a représenté l'histogramme des mesures :



Il appelle alors les élèves à des remarques :

- *si on les met ensemble ça fait un angle plat* (Ele 237)

- *163 c'est surprenant* (Ele 240)

- *440 c'est une grosse erreur* (Ele 243)
- *parce qu'un angle ça va jusqu'à 360* (Ele 245)
- *mais la somme !* (Ele 246)
- *si ça dépasserait 360, les angles ils devraient être obtus* (Ele 251)
- *il devrait y avoir au moins un rentrant* (Isa 257)

Ces remarques ne prennent pas en compte le fait que tous les élèves avaient le même triangle. Le professeur intervient pour amener la classe à considérer ce point :

Prof (258-260) : *quelqu'un avait dit qu'on devrait trouver la même chose. Alors est-ce que tout le monde trouve la même chose ? [« la classe » : non !] Est-ce que ce serait normal qu'on trouve la même chose ou pas ?*

La classe est partagée entre "oui" et "non", quelques élèves expriment des avis plus précis :

- *le petit triangle qui peut être pareil que le grand, mais simplement c'est les angles qu'il faut regarder ; c'est pas la longueur ... ce qui m'a choqué c'est la grandeur* (Dom 263-267)

Prof (272) : *est-ce qu'on devrait absolument trouver tous le même*

résultat ?

- en ayant des mesures bien précises (Ele 275)

- ils ont dû mal mettre le rapporteur (Ele 281)

- ils ont lu à 1 degré prés (Prof 284)

A la suite de cela, et sous la pression de certains élèves, le professeur demande à David (auteur de la mesure 163°) de recommencer ses mesures : "*regarde un peu puisqu'il y en a qui estiment que tu poses mal ton rapporteur* "(Prof 287). David avouera "*avoir mal lu* " (Dav 298).

(D5) La première séance de classe s'arrête ici, le professeur indique que le travail sera pousuivi lors de la séance suivante, deux jours après.

(D6) La reprise a lieu en annonçant la poursuite de l'activité de mesure des angles d'un triangle :

Prof (300-5) : *on va continuer le travail concernant la mesure des angles d'un triangle et la somme de ces trois mesures ... cette fois -ci je vais vous en donner trois ... vous aurez les mêmes trois triangles, et vous aurez à mesurer les angles et à faire la somme de ces mesures. Vous aurez aussi, avant, comme la dernière fois, à faire un pari sur la somme des mesures pour chacun des triangles. Et une petite particularité encore, c'est que vous n'allez pas travailler seuls, vous allez travailler par groupes de trois [...] je vous donne d'abord les trois triangles et vous avez à faire un pari, alors ne commencez pas à prendre les rapporteurs tout de suite [...] vous faites un pari pour chaque triangle, pour le groupe, si vous n'êtes pas d'accord vous en discutez*

Les groupes se forment par affinité, le professeur suit leur activité, il les visite mais sans intervention, notamment dans leurs débats. Chaque groupe donne les résultats de ses mesures, et est confronté aux paris qu'il a effectué.

(D7) Des commentaires sont demandés sur la confrontation des paris aux mesures. Nous indiquons ci-dessous les couples (pari, mesure) pour chacun des triangles A, B, C, suivis du commentaire du groupe d'élèves (ou de sa répétition éventuelle par le professeur lorsque ce commentaire est inaudible) :

Group 311 (130, 180) (130, 177) (130, 180)
fallait parier, on a parié ... grande ouverture ... il y en avait des p'tites, alors ça pouvait être égaux aux autres
Group 335 (200, 180) (180, 180) (180, 180)
cet angle, le grand là qui nous a trompé [...] j'croyais qu'il faisait déjà 180
Group 349 (175, 184) (130, 177) (30, 180)
le triangle il était p'tit ... alors tu as pensé 30 pour ce triangle
Group 370 (180, 180) (180, 180) (180, 180)
Group 376 (180, 180) (180, 181) (180, 180)
Group 386 (180, 182) (180, 177) (180, 180)
Group 390 (180, 180) (180, 180) (60, 180)
il était p'tit
Group 398 (180, 180) (180, 180) (180, 180)

Le professeur a représenté au tableau les histogrammes donnant la répartition des résultats des mesures pour chacun des triangles :

Triangle A :

180□□□□□□
182□
184□

Triangle B :

177□□□
180□□□□
181□

Triangle C :

180□□□□□□□□

(D8) Le professeur appelle de nouveau les élèves à faire des remarques sur les résultats qui ont été obtenus et qui figurent au tableau :

- *il y en a beaucoup qui ont trouvé 180 pour le C* (Kar 406)
- *ben, tout le monde* (Ele 408)

- *dans tous les triangles qu'on a mesuré c'est tout dans les alentours de 180* (Ele 410) ...
- *170 et 180* (Ele 411)

- *pour le B il y a des différences comme ça parce qu'il est plus petit et qu'il faut prolonger les traits bien droits et* ... (Ele 414)
- [mais le professeur fait remarquer que c'est le C qui est le petit triangle]
- *le C est le même que la grande figure, ce sont les mêmes angles* (propos d'élèves répétés par le professeur, 419-421)

Aucune autre remarque ne venant, le professeur relance le débat en s'attachant à favoriser des interventions qui conduiraient à la formulation

de la conjecture :

> Prof (425) : *et maintenant si je vous donnais un triangle que je choisisse ... est-ce que vous pourriez parier sur la somme des mesures des angles de ce triangle*
> La classe (426) : *oui, oui*
> Prof (427) : *est-ce que quelqu'un saurait me dessiner un triangle dont la somme des angles est très loin de 180°*
> La classe (428) : *non, non*
> Prof (429) : *par exemple 150° ... qui est-ce qui pourrait en dessiner un*
> Un élève : *peut-être*

Des élèves invoquent que l'on a trouvé 187°, mais d'autres font remarquer que cela est lié à des erreurs de mesures (Ele 434-5). L'un d'entre eux (Ele 436) exprime que "*si on est bien précis, c'est obligé* " que la mesure soit de 180°. Le professeur exerce une pression un peu plus forte pour favoriser l'apparition de la controverse dont on peut, dans la confusion des interventions, relever des indices :

> Prof (437) : *toi tu dis c'est obligé. C'est obligé, mais, est-ce qu'en voyant les résultats tu es sûr, sûr, sûr que c'est parfaitement 180° ?*
> La classe [partagée] : *oui-non*

Devant cette incertitude le professeur rappelle sa demande d'un triangle dont la somme des angles serait de 150° ou à défaut d'une preuve que cette somme est toujours de 180°. Un élève propose alors un triangle dont la somme des angles serait de 4° :

Un élève (450) : *... de 4 ...*
Prof (451) : *je ne comprends pas de quoi tu parles, tu as tracé un triangle ?*
L'élève (452) : *oui et en tout j'ai 4 ...*
Prof (453) : *4 degré, la somme des angles 4 degrés, je vais voir*

Un élève (463) : *moi j'ai trouvé 6 degrés*
Prof (464) : *6 degrés, fais voir ... oui ... mesure moi celui-là là ... celui-là ... c'est presque un angle ...*
Karen (465) : *droit ...*
Prof (466) : *droit comme dit Karen ... celui-là là ... celui-là ... ?*
L'élève (467) : *ah ouais ...*

Prof (468, il reprend un élève) : *à ton avis un triangle ne peut pas dépasser 180°*
Un élève (469-71) : *un petit peu plus ... quand on s'est trompé comme mesure*
Un élève (476-78) : *on peut dessiner n'importe quoi ... ça sera égal à ... 180 ... un peu plus un peu moins ...*
Un élève (480) : *on peut mettre moins même, on peut faire des triangles qui soient plus petits ... je pense*
Un élève (487) : *c'est pas le triangle, c'est les angles qui comptent*

Ludovic propose une explication qu'il a préparée, il est mal compris mais il tente de s'expliquer :

si on trouve des mesures différentes [de 180°] c'est que ... les angle ils sont mal mesurés. Les secteurs des angles continuent à l'infini et

on trouvera toujours 180° à la somme des angles des triangles
(Lud 500)

La classe bruyante est partagée, des "oui", des "non", alors que la sonnerie marquant la fin de la séquence retentit il règne une certaine confusion. Un élève prétend avoir trouvé un triangle dont la somme des angles serait de 130°.

(D9) Le professeur conclut faisant un bilan de l'activité et en annonçant sa poursuite lors de la prochaîne séance (qui ne peut avoir lieu que deux semaines après à cause des vacances de Pâques) :

Prof (511) : *nous on a trouvé des triangles dont la somme des angles étaient entre 177° et 187°. Et bien essayez de me trouver des triangles dont la somme des angles est très loin de ça ; si c'est possible. Si vous n'y arrivez pas, essayez de voir si vous pouvez conclure quelque chose, ou essayez de me montrer quelque chose . Essayez de continuer ce travail*

IV.2.2. Analyse de la séquence

Certainement parce qu'elle fait de façon évidente suite à des activités analogues sur la mesure d'angle, la phase de constitution du milieu (D1) joue bien son rôle. Les élèves s'engagent dans l'activité sans remarques. En revanche les interventions du professeur sont nombreuses. Elles ont pour objectif d'éviter des erreurs ou des difficultés qui sont évaluées comme une gène potentielle pour le développement de la séquence. Elles consistent à exploiter collectivement des observations faites auprès de

certains élèves, mais reconnues comme des indices de difficultés dont la mise en évidence et le traitement présentent un intérêt général (remarques sur la taille du rapporteur, la désignation des angles).

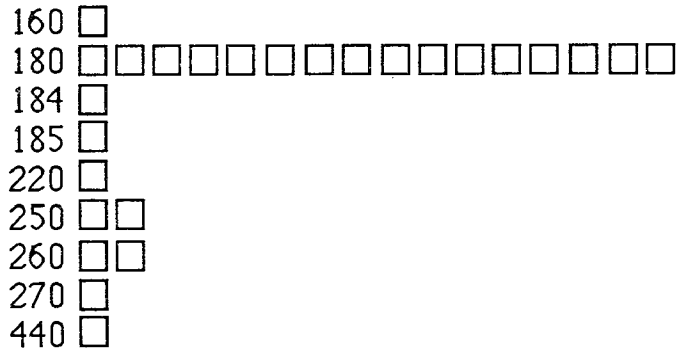
Lorsque les résultats sont proposés (D2), le professeur les reçoit effectivement sans commentaires. En fait on peut considérer qu'il les accepte, si l'on apprécie sa neutralité dans le contexte des relations ordinaires dans la classe. On est dans une situation classique, la tâche n'est pas autre chose qu'une tâche technique : le professeur est en charge de ses responsabilités habituelles. Mais lorsque des commentaires sont demandés à la classe, son attitude est moins neutre ; certaines de ses remarques pourraient même constituer des indices pour des activités ultérieures (par exemple : Prof 93). Cela restera cependant sans conséquences comme le montrera la suite de l'observation.

Le fait notable est que « la classe » va réagir vivement à l'énoncé de certaines valeurs proposées comme somme des angles d'un triangle : 160° et 231°. Pourtant nous constatons ensuite que 7 élèves proposent des valeurs très éloignées de 180° (plus de 200°). Ces réactions apparemment importantes peuvent provenir du groupe des élèves qui ont obtenu un résultat au voisinage de 180° ; ce groupe est majoritaire (il y a 18 élèves entre 176° et 182°) et il peut se considérer comme représentant une normalité.

Un comportement de conformisme, lié à la production d'une «norme» dès les premières mesures récoltées lors de cette première activité, peut expliquer que de 7 résultats égaux à 180° au cours de la première phase, on passe à 18 paris sur 180° lors de la deuxième phase (D3 et D4). Cela ne signifie pas que cette valeur ait pris du sens sur le

fond, c'est-à-dire quant à ce qui concerne la reconnaissance du caractère nécessaire de l'invariant.

Le schéma ci-dessous donne la répartition des paris lors de la deuxième activité :



Les paris au-delà de 180° ont pour origine soit la prise en compte de la présence d'un angle « grand » dans le triangle proposé, soit la comparaison de la taille de ce triangle au triangle préalablement tracé par les élèves. En revanche tous les paris sur 180° ne signifient pas que cette valeur ait été reconnue comme valeur a priori de la somme des angles d'un triangle (cf. par exemple Isa 143, Yan 174, Ald 231). Dans un seul cas le caractère nécessaire de cette valeur est attesté (Phi' 217) et provoque une agitation dans la classe dont l'origine n'est pas identifiable, mais qui est un indice de ce que « la question des 180° » pourra être l'objet d'un débat.

Une seule valeur est rejetée par des manifestations bruyantes de « la classe », il s'agit de 440°. Ce n'est pas ici la valeur de la somme des angles d'un triangle qui est en jeu, mais la considération de ce qu'est une valeur possible de la mesure d'un angle. Comme le montre l'échange qui suit (Ele

245-257), cette valeur ne pourrait dépasser 360° ; et il en est de même de la somme des angles qui a été définie à partir de la juxtaposition (sans chevauchement) de secteurs angulaires.

Le problème de décider de la valeur de la somme des angles du triangle donné n'est pas soulevé, bien qu'il ait été évoqué *a priori* par un élève comme un but plausible de l'activité (Ele 106). C'est le professeur qui le relance (Prof 272), les quelques remarques faites par les élèves montrent que l'idée de l'incertitude des mesures est présente dans la classe. Mais il n'y a pas d'institutionnalisation de ce fait. La fin imminente de la séance a peut être précipité les choses.

Au terme de cette séance (D5), le professeur indique seulement que le travail sera poursuivi ; mais sans préciser de quel travail il s'agit. Implicitement et évidemment, c'est un travail sur la mesure des angles d'un triangle. Le terrain est prêt, mais la conjecture n'est pas née.

La troisième phase (D6 et D7) montre qu'effectivement la conception erronée qui lie la taille d'un triangle à la valeur de la somme de ses angles, est assez forte pour résister au débat collectif devant des cas de figure assez «troublants». Le comportement de conformisme éventuellement adopté lors de la phase précédente est fortement ébranlé. Mais ce n'est pas cette seule conception qui est en jeu, on note en particulier un groupe qui parie 180° pour A et B mais pas pour C jugé trop petit (Groupe 390), ou un autre qui ne parie pas 180° pour A parce qu'il a un angle obtus (Groupe 335).

Dans cette situation la classe se sépare en deux :

- 4 équipes (c'est-à-dire environ 12 élèves) n'ont pas accédé à la

conjecture selon laquelle 180° est la somme des angles d'un triangle. Cependant, pour deux d'entre elles 180° est en quelque sorte une valeur privilégiée (Groupe 335 et 390) ; pour une autre est présente une certaine idée d'invariance alliée à une prise en compte de la taille des triangles, un compromis qui conduit au pari de 130° pour chacun des trois triangles.

- 4 autres équipes semblent acquises à ce que la somme des angles d'un triangle soit 180°.

Le fait que 180° soit le résultat effectivement obtenu dans la majorit des cas (18 mesures sur les 24 effectuées) est un indice du caractère convenu de cette valeur ; il est assez vraisemblable que les élèves ont d'abord trouvé des valeurs au voisinage de 180° puis qu'ils les ont corrigées.

Si le fait que la somme des angles d'un triangle est 180° est bien formulé par plusieurs élèves, la conjecture n'est cependant pas encore reconnue comme telle ; le problème de sa preuve n'est pas posé.

Les pressions du professeur (D8) se heurtent à une impasse. Son intervention (Prof 437) vise à obtenir qu'un élève au moins pose le problème de la preuve qu'il pourrait ainsi reprendre et institutionnaliser. En fait l'obstacle est peut-être à ce moment un consensus fort dans la classe sur la validité du résultat en question ; les élèves ne comprennent pas d'emblée ce que l'on attend d'eux. La pression exercée en réclamant un triangle de 150° a le poids de l'autorité du professeur et par là ébranle les élèves les plus fragiles.

Le succès de cette pression (certains élèves vont chercher des triangles dont la somme des angles soit très éloignée de 180°) légitime que

le professeur introduise l'exigence d'une preuve comme élément d'une alternative (fournir un exemple ou une preuve que cela est impossible) ce qui peut préserver la dévolution à la classe de la responsabilité de la formulation de la conjecture et du problème de sa preuve (D9). Ainsi l'autorité du professeur devient-elle un outil pour réussir la dévolution qui impliquerait pourtant essentiellement son abdication (momentanée). Mais nous reviendrons, sur ce point semble-t-il contradictoire, dans la conclusion de cette étude.

La fermeture de la situation n'a pu avoir lieu dans le cadre des deux séances de classe que nous avons observées. Lorsque les élèves sont revenus des vacances de Pâques, ils avaient tous renoncé à construire un triangle dont la somme des angles serait différente de 180°. Le professeur a alors clos la séquence en apportant la «preuve pythagoricienne» (cf. § II.2.2.b., l'étude des angles à côtés parallèles avait été faite par ailleurs), nous ne disposons pas d'éléments suffisants pour évaluer le statut de cette preuve pour les élèves, le problème des effets de l'institutionnalisation reste donc posé.

IV.3. Une observation dans une classe «expérimentale»

Cette seconde observation a eu lieu au collège d'Echirolles en Janvier 1984, dans une classe où était conduite une recherche visant à renouveler les relations entre professeur et élèves, et entre les élèves eux-mêmes, pour créer «les conditions d'un débat scientifique dans la classe». Cette tentative originale était conduite dans le cadre des activités du groupe de recherche "Apprentissage de Raisonnement" de l'IREM de

Grenoble (Capponi 1986).

La réalisation de la séquence a occupé deux séances consécutives de 50 minutes environ avec une classe de cinquième de 23 élèves.

Le professeur en charge de la classe, membre du groupe de recherche de l'IREM de Grenoble, a assuré son enseignement avec un autre membre de ce groupe. Les élèves avaient donc ce jour là deux enseignants simultanément. Cette situation n'était pas exceptionnelle, elle correspondait à une forme de travail collectif de ce groupe de recherche à laquelle les élèves étaient habitués. En fait, tout s'est passé comme s'il y avait dans la classe un seul professeur mais deux voix : chacune s'effaçant devant les interventions de l'autre. Les phénomènes spécifiques de notre étude ne nous ont pas paru affectés par cette présence bicéphale, nous avons donc pris la parti de présenter cette observation et son analyse en confondant nos deux collègues en une seule et même personne : le professeur.

En revanche la démarche pédagogique originale de ce groupe de recherche, par ses références constantes aux règles du "débat scientifique" (Capponi et al. 1986), fait de cette classe un lieu particulier. Notre hypothèse était que la différence avec une « classe ordinaire » porte principalement sur les conditions de la dévolution, ici *a priori* facilitée, mais que les conditions cognitives de la construction de la conjecture ne seraient pas modifiées.

IV.3.1. Chronique de la séquence

(E1) L'activité est introduite d'emblée, sans références

particulières aux activités antérieures de la classe ; elle succède de fait à des séances consacrées à l'étude des angles et de leur mesure :

> Prof (1) : *vous allez tracer un triangle sur votre cahier ... très différents les uns des autres [...] la dimension que vous voulez, la forme que vous voulez. Et assez grand, parce que vous allez mesurer les angles du triangle et il faut quand même pas qu'il soit trop petit [...] j'en ai dessiné plusieurs formes [au tableau] , mais vous faites un seul triangle [...] Une fois que vous les avez tracés vous appelez les sommets A, B, et C.*

Les élèves réalisent les figures demandées. Mais avec une tendance trop marquée, pour certains, à se conformer au modèle tracé au tableau. le professeur intervient pour que les élèves prennent des distances par rappport à ces exemples :

> (Prof 2-3) : *[j'] ai dessiné deux triangles au tableau, il y en a beaucoup qui se croient obligés de dessiner deux triangles [...] vous dessinez un seul triangle mais de la forme que vous voulez. J'ai mis deux formes au tableau mais vous pouvez ...*"

puis il complète la consigne :

> Prof (3-11) : *une fois que vous avez fait ça [le dessin] vous appelez A, B, et C ... les trois sommets du triangle ... et puis vous les mesurez et puis à côté de votre triangle vous écrivez les mesures [...] bon, quand vous avez mesuré les trois angles [...] je pense que tout le monde a trouvé ... vous faites la somme des trois mesures*

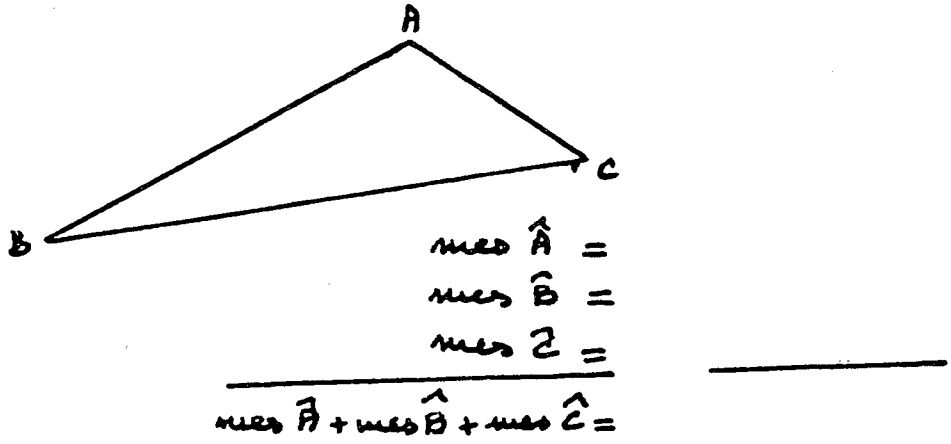
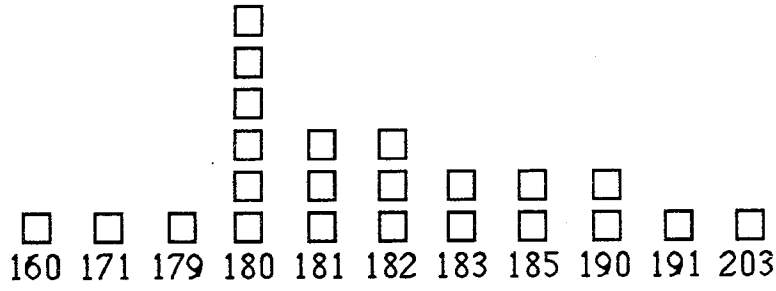


Figure 20

Au tableau figure un modèle de présentation (Fig. 20). Certains élèves rencontrent des difficultés dans l'usage du rapporteur, le professeur leur donne des conseils puis fait une intervention à l'intention de la classe :

> Prof (10) : *regardez bien les mesures que vous trouvez. Si elles correspondent bien à des angles aigus ou obtus. On a appris hier à les reconnaître en les regardant [...] alors vous regardez vos mesures.*

(E2) La récolte des résultats donne lieu à l'histogramme ci-dessous :



Le professeur reçoit ces résultats sans commentaires particuliers, sauf pour ce qui concerne deux propositions que, de fait, il refuse :

Un élève (15) : *moi m'sieur, j'avais 185,5*
Prof (16) : *à 0,5 prés, tu sais ... avec les erreurs du ... hein, c'est difficile ... alors ...*
Un élève (18) : *180,5*
Prof (19) : *180,5 tu m'as donné quoi ? 180, qu'est ce que vous en pensez entre 180,5 et 180 ... ou 185,5 et 185*
Un élève (20) : *on arrondit*
Prof (21) : *et on arrondit pourquoi ? Parce que c'est plus simple ou est-ce qu'il y a ...*
Un élève (22) : *pour faire le calcul*
Un élève (23) : *c'est un peu compliqué pour le faire*
Prof (24) : *c'est un peu trop compliqué, c'est vrai que ça nous compliquerait un peu la vie. Tu n'as pas d'autre raisons pour, heu ... arrondir , non ...*

Par ailleurs, deux résultats provoquent des réactions dans la classe : 163° et 203°. Une élève demande :

- comment elle a trouvé 203 [...] parce qu'il y a presque tout le temps dans les 180 (Ele 27-31)

Un débat s'engage sans que l'élève concerné ait répondu directement à cette interpellation :

- il a peut être pris un grand triangle (Ele 32)
- moi aussi j'ai fait un grand triangle [et obtenu un résultat proche

de 180°] (Ele 35)

- c'est pas ça, il a dû se tromper parce que si on fait un grand triangle dans le haut automatiquement en bas ça sera plus petit (Ele 36)

- lui il dit que le triangle s'il est gros en haut, il doit être petit en bas. Moi j'sais pas si c'est vrai ... Il peut être parfaitement assez grand parce que plus il est grand plus la mesure augmente (Ele 42)

- non (proteste « la classe », 43)

- tous les triangles qu'on a fait là, ils ont 180 de ... quand on les ajoute [...] 203 c'est trop exagéré (Ele 45-46)

- j'pense que c'est faux parce qu'il dit le triangle on l'fait grand ; mais si on l'fait grand en haut, en bas il sera petit (Ele 49)

- moi j'pense qu'il a un angle aigu et qu'il a mal mesuré. Quand il a pris [le rapporteur] de l'autre côté, alors au lieu de lui donner, j'sais pas ..30, ça lui donne 150 ... (Ele 53)

Prof (58) : *ça c'est pas impossible, parce que quand je suis passé dans ... pas mal d'entre vous, vous mettiez ... votre zéro, vous l'mettiez sur le 180, du coup ça vous donnait un angle ...*

- je dis que ce qui a dit ... que le triangle est plus grand, ça fait un plus gros nombre, c'est faux parce que moi j'ai ... il a fait un triangle plus grand que celui de David, et j'trouve plus petit ... (Ele 59)

Prof (62) : *donc ça aurait pas de relation [i.e. la taille et le résultat]*

(E3) Le professeur fait le bilan du débat pour ensuite passer à l'activité suivante :

Prof (64) : *il y en a parmi vous qui pensent que ça doit être toujours la même chose [...] mais il y en a d'autres qui ne sont pas d'accord ; bon, y en a qui disent s'il a trouvé quelque chose de différent c'est peut-être parce qu'il s'est trompé, et puis y en a d'autres qui disent ,*

ben suivant qu'on fait un triangle plus grand ou plus petit , ben les angles vont changer. Et pour le moment on n'est pas tous d'accord, on dit pas tous la même chose.

Un élève demande que le résultat 203° soit vérifié, mais le professeur résiste en invoquant le contrat « du débat scientifique » explicitement établi dans cette classe :

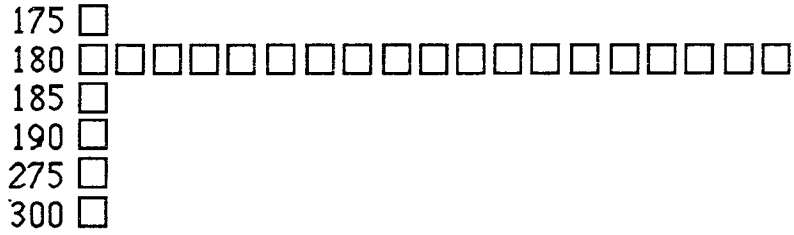
Prof (68) : *je vous ai déjà expliqué que si vous étiez deux ou trois à penser quelque chose et que toute la classe pensait le contraire vous aviez pas à vous écraser en disant : non, non, ça doit être comme les autres. Vous pouvez très bien avoir raison à trois contre les autres. Donc qu'il soit seul à trouver 203 ne prouve pas automatiquement que c'est lui qui s'est trompé.*

Il présente l'activité suivante :

Prof (79 - 81) : *bon alors on va vous donner maintenant à tous le même triangle. On les a photocopié, vous allez refaire la même chose, remesurer les trois angles, et refaire la somme des trois mesures [...] vous essayez à vue de nez ... je demande qu'on mesure pas ... je vous donne un papier sur lequel vous marquez votre nom et votre prénom [...] sur le papier il y a marqué «je parie que la somme des angles d'un triangle vaut : ... », et vous complétez.*
Vous ne le dites pas tout haut [...] pour ce triangle [...] vous regardez bien le triangle que vous avez devant vous ... à vue de nez vous essayez de savoir combien font chaque angle et combien vaut la somme.

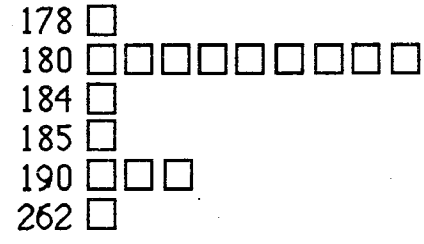
(E4) Lors de la récolte des résultats deux histogrammes sont tracés au tableau,l'un pour les paris, l'autre pour le résultat des mesures et de la sommation. Le professeur n'assure pas la confrontation du pari au résultat pour chacun des élèves.

Histogramme des paris :



Cet histogramme ne rend pas compte de certaines nuances exprimées par les élèves sur leur feuillet au moment de leur pari. Ont été assimilés à 180° les paris tels que "*au plus 180°* "(3 fois) ou "*180° en moyenne* "(3 fois), ou encore cette explication pour 175° : "*le premier vaut 35°, le deuxième 90 et le troisième 40* ".

Histogramme des mesures :



Pour 262° des élèves ont ri, le professeur est alors intervenu pour à nouveau rappeler le contrat dans le cadre duquel la classe travaille :

Prof (85) :*vous savez que l'on a déjà dit plusieurs fois que quand quelqu'un dit quelque chose de bizarre on ne rit pas parce que ce n'est pas intéressant ... si ça se trouve c'est elle qui a raison.*

(E5) A ce moment la sonnerie signale la fin de la séance, la séance suivante a lieu après la récréation d'une dizaine de minutes. Au moment de la reprise les élèves sont assemblés en équipe de trois ou quatre. Au tableau figurent les trois histogrammes : celui de la "première expérience", celui des paris et des mesures de la "deuxième expérience". La consigne est alors donnée, elle n'appelle pas à de simples commentaires sur les résultats présentés :

Prof (86 - 88) : *dans chaque groupe vous discutez silencieusement pour pas qu'on entende ... qu'est-ce que vous avez envie de dire à ce sujet là et puis dans deux minutes on fait la mise en commun de ce que vous avez discuté entre vous [...] alors vous discutez doucement en disant, voilà, avec ces expériences on a envie de dire autre chose. Vous vous rappelez on était pas tout à fait d'accord ... vous essayez d'en discuter entre vous et si vous êtes d'accord vous essayez de réfléchir à une phrase qui permettra d'expliquer aux autres.*

Les groupes fournissent les phrases suivantes que le professeur inscrit au tableau :

(A) En regardant le tableau on voit que la moyenne est pratiquement 180°

(B) Nous ne sommes pas d'accord car deux pensent 190° et deux pensent 180°

(C) Quel que soit le triangle la somme des trois sommets est toujours

180°

(D) Quel que soit le triangle la somme ne dépasse jamais 180°

(E) Quelle que soit la grandeur du triangle la somme des angles est 180°

Tous les groupes ne fournissent pas une phrase, le professeur ouvre cependant le débat :

Prof (115) : *est-ce qu'il y a des phrases qui sont écrites au tableau sur lesquelles vous êtes pas du tout d'accord ... vous pouvez donner une raison pour laquelle vous êtes pas d'accord.*

Des réactions avaient déjà eu lieu lors de la proposition des phrases. Par exemple, à propos de la phrase (A) un élève avait lancé : "*qu'est-ce t'en sais ?* " (Ele 104). Le groupe producteur de (E) rejette la phrase (B) au nom de leur propre énoncé, mais le professeur trouve cela insuffisant et passe la parole à des élèves qui prétendent avoir une preuve :

- oui, j'ai une preuve parce qu'un triangle [...] en fait c'est un demi-tour (Ele 122)

- je pense que un triangle là, ça fait 180°, c'est un demi-tour, et si on a aussi celui-là, ça fait un tour complet (Ele 126, il trace au tableau la fig. 21). «La classe» accepte cette explication. Les auteurs de (B) résistent. Leurs contradicteurs leur répondent :

- si on arrive pas à les convaincre, eh ben eux ... nous convaincre que ça fait 190 (Ele 134)

Figure 21

Une autre tentative d'explication :

> *- ça ça fait 180 ... et ça sera 360 ... ça forme un cercle*
> (Ele 138, Fig. 22)

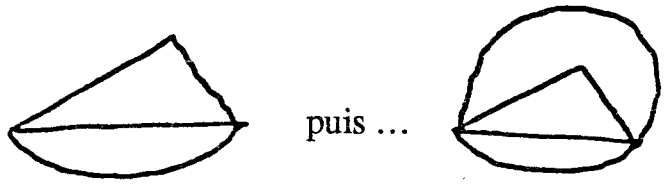


Figure 22

Le professeur intervient à nouveau, mais cette fois pour se dégager du débat sur les phrases (B) et (E) sur lesquelles il n'y a pas unanimité :

> Prof (139) : *bien, pour le moment il y a donc une proposition de certains qui nous disent c'est 180 et ils nous ont donné une explication, qu'ils ont appelée une preuve : parce que dans un triangle ça fait un demi-tour et si j'fais deux demi-tours ou un demi cercle en dessous ça fait un tour complet.*
> *Est-ce qu'il y a éventuellement d'autres phrases qui sont au tableau avec lesquelles vous n'êtes pas d'accord ... vous pouvez expliquer mieux*
> La classe (140) : *C*
> Prof (141) : *la phrase C qu'est-ce qu'elle dit ?*
> Un élève lit le texte de (C) qui figure au tableau.
> Prof (143) : *qu'est-ce que tu penses de cette phrase ? Toi tu dis ce n'est pas toujours 180, c'est une moyenne. Alors est-ce que tu as*

quelque chose pour expliquer ça ... est-ce que tu peux convaincre ... y a une équipe qui dit en moyenne, c'est vous, y en a qui disent toujours. Toi tu dis, j'suis pas d'accord avec ceux qui mettent c'est toujours. Est-ce que tu peux ... quelque chose pour essayer de les convaincre, sur quoi tu t'appuies pour ...
L'élève (144) : *le rapporteur c'est pas très précis. On est pas obligé de trouver 180 ...*

Un autre élève propose une preuve pour 180, le professeur lui demande de la présenter au tableau :

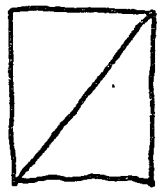


Figure 23

- si on a un carré [il dessine un rectangle] Un carré, si on compte les angles, 4 de 90° ça fait 360°, c'est ça . Et un triangle 180° [il trace les deux moitiés du rectangle comme ci-contre et les montre] donc un triangle ça fait bien 180° (Ele 150)

Dans la classe : *ah oui c'est ça qu'on voulait expliquer* (Ele 151)

Cette solution est rédigée par les élèves, nous la recueillerons à la fin de l'observation (Fig. 25).

Mais certains élèves ne sont toujours pas d'accord, le professeur les invite à essayer de convaincre leurs camarades, ce à quoi ils répondent :

- on a trouvé 190 parce qu'on a mesuré (Ele 159)
Prof (161) : *et à chaque fois tu as trouvé 190 ... dans le premier triangle et dans le triangle qu'on vous a donné ?*

- *ouais, on a mesuré alors ...* (Ele 162)

Le professeur n'insiste pas, il fait le bilan de la situation à ce moment là et propose d'aller plus loin :

> Prof (163) : *il y a des arguments qui ont été développés, par exemple : on a fait plusieurs fois la mesure ... tombé sur 190, donc il y croit. Et puis il y en a un certain nombre qui sont venus au tableau faire des explications pour convaincre les autres [...] On va essayer d'aller un peu plus loin, on va faire encore des expériences pour arriver à se mettre au clair, parce qu'on est pas encore tous tous d'accord pour le moment.*

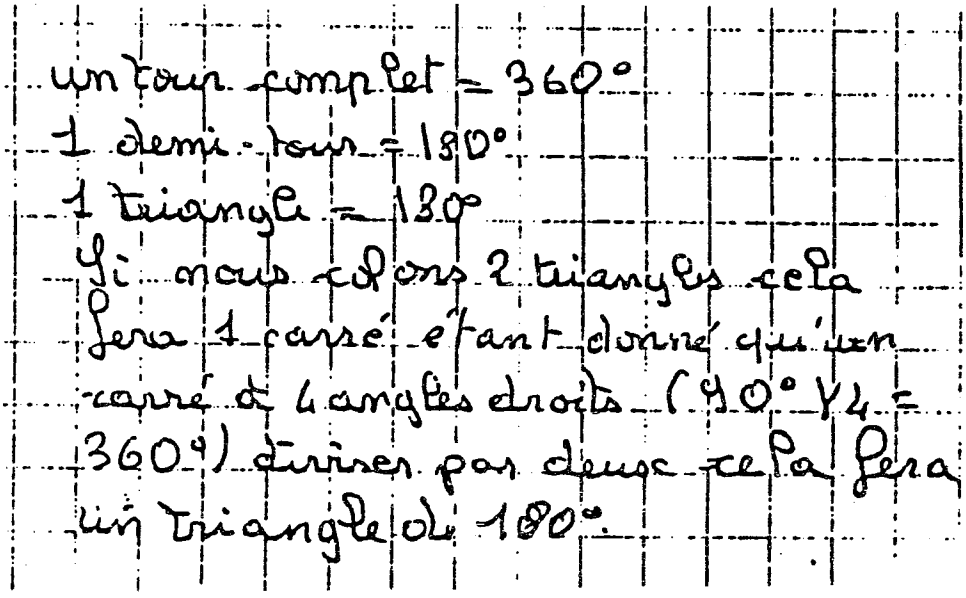


Figure 24

(E6) Le professeur présente l'activité suivante, les élèves restent réunis en équipes comme dans la phase précédente :

Prof (163 - 8) : *Alors on va distribuer les triangles et à nouveau vous faites pas de mesures [...] vous utilisez pas vos rapporteurs [...] on vous demande encore de mettre vos noms et puis ensuite, que pensez vous de la somme de chacun de ces triangles. Alors vous allez répondre ce que vous en pensez ... quand vous êtes déjà bien d'accord entre vous, alors vous donnez cette réponse [...] si vous arrivez pas à vous mettre d'accord, et bien vous mettez : on arrive pas à se mettre d'accord, il y en a deux qui pensent ceci, il y en a deux qui pensent cela [...] et vous mesurez pas, hein [...] vous pouvez donner des noms aux triangles, les appeler A, B, C pour les différencier.*

(E7) L'élaboration d'un pari et la réalisation des mesures prend un temps assez long. Puis chaque groupe est invité à donner le résultat de ses mesures. Cette fois les résultats sont confrontés aux paris. Nous indiquons ci-dessous les couples (pari, mesure) pour chacun des triangles A, B, C, suivis du commentaire du groupe d'élèves (ou de sa répétition éventuelle par le professeur lorsque ce commentaire est inaudible) :

Groupe 169 (190, 190) (180, 180) (165, 165)

je veux dire que ... les mesures du gros, du petit et du pointu ... elles sont très proches

Groupe 195 (180, 180) (180, 180) (180, 180)

ils font tous 180, peu importe la forme ... est-ce que c'est confirmé par vos mesures ? [...] ouais

Groupe 180 (180, 180) (180, 180) (180, 180)

ils sont pas d'accord, ils disent que c'est de 190 à 180 ... c'est la même position que tout à l'heure [...] alors vous vous êtes mis d'accord sur 180, vos mesures qu'est-ce qu'elles disent [...] elles

confirment ce que vous avez dit
Groupe 184 (180, 180) (180, 180) (180, 180)
Groupe 185 (180, 180) (180, 180) (180, 180)

Seuls les résultats des mesures sont portés au tableau, ils sont notés sans que soit tracé un histogramme. Le professeur n'a pas interrogé tous les groupes, deux ne sont pas recensés au tableau ; nous avons retrouvé leur pari sur leur feuillet : pour l'un "*la somme est à 190° . 180°* ", pour l'autre "*ils font 180°* "

Le professeur appelle les élèves à faire des remarques sur les résulats qui ont été obtenus :

- si on les compare ... la E [il s'agit des mesures présentées ci-dessus] ... ils disent les triangles ils font 180° et comparé à la A .. on pense qu'ils doivent se fier à la grandeur (Ele 192)

Cette position, reformulée, est soumise à la classe. Celle-ci paraît accepter, le professeur souligne alors qu'il n'y a pas unanimité :

Prof (197) : *il semble qu'il y a ici des avis différents, il y en a qui disent 180, il y en a qui disent 190 ... est-ce qu'il y en a qui ont trouvé des façons pour convaincre les autres de ce qu'ils pensent ?*
- c'est 180, c'est toujours la même chose, vous dites c'est 180 : c'est la moitié d'une forme géométrique (Prof 199)
- m'sieur, un triangle c'est déjà la moitié d'une forme géométrique ... pourquoi ils disent c'est la moitié [...] alors tu dis, qu'est-ce que ça a à voir de parler de formes géométriques puisqu'un triangle c'est déjà une forme géométrique (Ele 200, Prof 203)

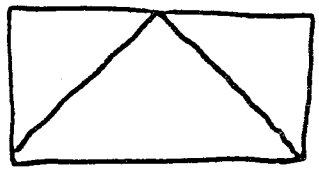


Figure 25

Prof (205) : *vous regardez bien si le premier dessin qui est fait au tableau . Si c'est la même chose que ce qu'on a dit tout à l'heure* (puis le professeur rappelle la preuve précédente)
- si ! ...c'est différent parce qu'il y en a trois au lieu d'y en avoir deux
(Ele 206)
- celui-là il est plus grand que ces deux là. Si on les met à côté ce sera pareil que ça (Ele 211)

(E8) Le professeur intervient à nouveau ; en fait il va s'agir là d'un long commentaire ou de la reformulation des tentatives de preuve des élèves. La séances se terminera là-dessus :

Prof (214) : *moi je ne sais pas ... je vais vous donner un tout petit peu mon avis. Moi je vois une différence entre les deux choses qui sont là, c'est que là il y a un rectangle, il l'a coupé en deux puis il a obtenu un triangle. Est-ce que ce triangle il a pas quelque chose d'un peu particulier ?*
Un élève (215) : *oui m'sieur, il a un angle droit*
Prof (216) : *il a un angle de 90°. Et ici, est-ce qu'il a quelque chose d'un petit peu différent, dans sa méthode ... ici, qu'est-ce que ça montre dans ce cas particulier? S'il y a un triangle qui a un angle de 90°, alors on peut toujours fabriquer une sorte de rectangle, et puis ce qui a été fait ici ça à l'air de montrer que ça marche pour ce rectangle là, et il est bien particulier parce qu'il a un angle de 90° et on peut pas faire la même chose ici, alors ici qu'est-ce que ça montre ce que tu viens de faire ... écoute ici il y a une proposition au tableau*

qui est différente de ce qu'il y a là haut, tu essaies de montrer ce que ça montre . Tu peux expliquer mieux ...
[inaudible]
Prof (216) : *là tu reviens à ton idée, c'est la moitié d'une forme géométrique. Tu nous a dit tout à l'heure un triangle lui même c'est une forme géométrique, donc ça nous avance peut-être pas à grand chose ...*
[inaudible]
Prof (218) : *c'qui m'semble ici, c'est que son dessin ... regardez bien un peu le dessin qui est proposé ici ... elle a dessiné un triangle qui était comme celui qu'on vous avait donné ... il lui a donc pas imposé d'avoir un angle droit ... elle l'a dessiné comme on vous l'avait donné ... et puis elle a fabriqué autour de ça ... alors ce qu'elle a envie de dire ici, c'est que là, ces quatre angles là ils sont droits, alors qu'est-ce que tu peux en déduire sur ton triangle de départ . Est-ce que tu peux dire quelque chose sur ton triangle de départ ... parce que là, c'coup-ci on a coupé le triangle en trois morceaux*
[inaudible]

(E9) Le professeur clot ensuite la séquence en laissant ouvert le problème de la décision sur la validité de la conjecture :

Prof (218) : *alors il me semble que là où on en est, pour le moment, personne n'est arrivé vraiment à convaincre les autres ... c'est-à-dire que chacun a apporté ses arguments qui vont dans un sens ... on reviendra dessus la prochaîne fois.*

IV.3.2. Analyse de la séquence

La première phase (E1) est introduite sans justifications particulières de l'activité mise en place, cela est sûrement acceptable aux yeux des élèves dans la mesure où elle fait suite à des activités de mesure d'angles; le professeur n'a pas à se justifier de ce qui peut apparaître comme un simple changement d'« habillage ». La consigne est présentée en deux temps, d'abord le tracé du triangle, puis la mesure de ses angles et le calcul de la somme de ces nombres. Chacune de ces phases est accompagnée d'interventions qui anticipent des erreurs qui sont jugées a priori non pertinentes au regard des objectifs de la situation et visent à les éviter.

L'une de ces interventions (Prof 1-3) illustre bien ce que l'on appelle classiquement un paradoxe du contrat didactique (Brousseau 1984, p.46), en fait du processus de dévolution : pour que l'activité « réussisse », il faut que les élèves produisent des triangles quelconques, pour cela le professeur leur montre des exemples (devant libérer les élèves des modèles prototypiques), mais par ailleurs il ne faut pas que les élèves reproduisent ces exemples. De plus, cette idée d'un modèle à suivre, et donné par le professeur, est renforcée par la mise en page proposée au tableau (Fig. 20) et à laquelle les élèves devraient se tenir. Cette dernière intervention à pour seul but d'éviter des erreurs contingentes qui seraient dues à une mauvaise gestion des données.

La collecte des résultats (E2) a lieu sans interventions particulières du professeur, ni réactions des élèves ; sauf dans le cas des valeurs extrêmes proposées : 160° et 203°. Cette dernière valeur est discutée. Les élèves s'engagent d'emblée dans un débat sur son acceptation (Ele 32, Ele

42) ou son rejet (Ele 35 et suivants). Les arguments pour le rejet sont de deux types, des arguments sur le fond (Ele 36) ou faisant référence à une normalité qui s'élabore (Ele 45-46). Cela ne signifie pas que 180° soit reconnu comme somme des angles d'un triangle quelconque, mais plutôt que la loi normale qui émerge du tracé de l'histogramme marginalise les résultats extrêmes.

Le professeur fait peu d'interventions, mais elles portent assez nettement sur la validité des assertions (Prof 58 et 62). Si le débat était poursuivi, il pourrait conduire au rejet de la conception erronée (Ele 59), portant ainsi la première phase de cette séquence au-delà de ce que nous avions prévu. Ce risque est reconnu par le professeur qui reprend le contrôle de la situation et intitutionnalise un désaccord qui préserve les débats de validation attendus plus loin. Mais les élèves résistent à cette rupture, et c'est en rappelant les règles de conduite en vigueur dans la classe (Prof 68) que le professeur reprend le contrôle de la situation et qu'il permet le passage à l'activité suivante. On peut penser, dans ce contexte, que du côté des élèves l'intervention du professeur signifie que des valeurs très différentes de 180° doivent rester plausibles.

La seconde phase (E3) est introduite en insistant sur le caractère individuel de l'activité, par ailleurs le professeur donne une indication un peu lourde sur une stratégie possible pour réaliser le pari sur la somme des angles du triangle, qui consiste à évaluer la valeur de chacun des angles (Prof 79-81). Cette suggestion pourrait occulter la conception erronée dont nous attendions la mobilisation, en effet la confrontation du pari et de la mesure peut alors simplement conduire les élèves à penser à une erreur dans leur évaluation de chacun des angles.

On remarque (E4) que les paris privilégient nettement 180°, ce qui peut être l'indice d'un comportement de conformisme ; quant aux paris différents de 180° leur origine est indéterminée et le reste puisque ces élèves ne seront pas invités à commenter le décalage éventuel entre leur pari et le résultat de leurs mesures. Une réaction amusée de « la classe » à l'énoncé de 262° est rejetée par le professeur qui rappelle que le contrat établi implique le respect de toute production mathématique, sauf à pouvoir la rejeter par des arguments intellectuels.

La mise en place qui suit (E5) est très différente de ce qui avait été prévu dans le scénario initial, mais est conforme aux habitudes de travail collectif de cette classe. Ce travail collectif ne devrait pas modifier sensiblement le déroulement de la séquence. En revanche, il n'en va pas de même des commentaires demandés aux élèves conformément à ce qui était prévu à ce moment de la situation. Ces commentaires s'inscrivent ici dans le cadre des règles de fonctionnement "scientifique" en vigueur dans cette classe (comme réalisation du projet du groupe de recherche de l'IREM de Grenoble, op. cit.). Ils sont compris comme la production de phrases qui devront ensuite être réfutées ou prouvées dans le cadre d'une organisation convenue du débat de validation.

Tous les groupes ne vont pas produire de phrases, cela est une conséquence à la fois de la gestion du temps et de l'activité des élèves, tous doivent être occupés : il est difficile de faire attendre ceux qui sont parvenus assez tôt à une production.

Les élèves ont des difficultés à formuler leurs preuves, mais aussi à accepter ou à retenir pour les examiner effectivement, les arguments qui sont produits. Le professeur prend alors des décisions dans la gestion du

débat, se dégageant d'un échange jugé infructueux pour faire place à un autre. Il assure en quelque sorte une mise à plat des tentatives de preuve ou de réfutation, sans que soient prises des décisions sur leur validité.

Cette seconde phase de la situation n'a en fait pas rempli la fonction qui était attendue :

- des énoncés, de l'ordre de la conjecture dont la construction n'était prévue qu'à l'étape suivante, sont d'emblée discutés, sans que leur statut soit bien clair. Ils peuvent n'être que de simples spéculations ;
- le problème de la connaissance de la somme des angles du triangle examiné n'est pas soulevé. Quant aux considérations sur la précision des mesures, elles ont été écartées par les remarques du professeur au cours de la première phase.

La troisième phase (E6) peut de ce fait avoir perdu une partie de sa fonction, surtout si l'on considère qu'elle vient interrompre intempestivement un débat de preuve qu'elle était justement chargée de susciter. Nous observons (E7) une adoption de fait de la conjecture par l'ensemble de la classe, puisque 5 groupes sur les 7, c'est-à-dire 17 élèves, font le pari que la somme des angles est 180°, puis « trouvent » 180° comme résultat des mesures et du calcul ; quant aux deux autres groupes il paraissent adopter l'idée que le résultat obtenu doit être au voisinage de 180° (par exemple Groupe 169). Dans ce contexte, où la classe semble avoir atteint un consensus sur la somme des angles d'un triangle, la production de preuves est une réponse aux pressions du professeur qui s'appuie sur le contrat explicitement en vigueur et qui souligne qu'il n'y a pas une stricte unanimité.

Des propositions sont faites mais il n'y a pas véritablement de débat

entre les élèves : la responsabilité de la validité de la conjecture n'est pas dévolue à la classe, ou bien la conviction des élèves est trop forte pour qu'ils s'engagent dans une démarche de validation. Les preuves sont maladroitement ou incomplètement formulées, mais il n'y a pas de travail sur cette formulation. Les élèves en sont privés par l'enseignant qui assume cette tâche et finalement vide de son sens l'interaction recherchée. On peut cependant penser que la proposition preuve qui s'appuie sur le découpage du rectangle en deux triangles rectangles emporte l'adhésion de «la classe». La critique émise par le professeur n'a pas de portée évidente.

Comme dans le cas précédent la fermeture de la situation n'a pu avoir lieu dans le cadre des deux séances de classe que nous avons observées. Lors de la séance de classe suivante (à laquelle nous n'avons pas assisté) le professeur, considérant les propositions de preuves trop peu satisfaisantes, a alors clos la séquence en demandant aux élèves d'admettre la conjecture et remettant à plus tard la production d'une preuve. Il nous a cependant rapporté que les élèves avaient en général trouvé convaincante la preuve consistant en la décomposition d'un rectangle, mais cela ne constitue pas une information assez précise pour conclure quant au statut cognitif de cette institutionnalisation.

IV.4. La confrontation des deux observations

Les observations que nous avons réalisées ont eu lieu dans le contexte de pratiques très différentes : celui d'une classe, disons ordinaire (au sens propre du terme), et celui d'une classe qui est le terrain d'une

recherche-action dont l'objectif est l'autonomie intellectuelle des élèves et leur initiation au débat scientifique.

Il nous a fallu négocier la réalisation de l'expérience dans ces deux contextes, c'est-à-dire la rendre acceptable et lui donner du sens relativement aux pratiques professionnelles des enseignants qui en assuraient la mise en oeuvre. Dans la classe « ordinaire » (la classe D) le principal problème était celui de l'introduction d'un type d'interaction nouveau, tant avec le professeur qu'entre les élèves, dont le point crucial devait être la réussite de la dévolution à la classe du problème de la preuve de la conjecture. Comme cela nous a été fait remarquer par la suite, le caractère de nouveauté d'une telle situation pouvait à lui seul constituer une source d'échec à la mise en oeuvre de notre séquence. En revanche, la seconde classe (la classe E), paraissait *a priori* offrir un contexte plus favorable, puisque les élèves y étaient systématiquement introduits à la notion de conjecture et au débat de validation, notamment à la nécessité mathématique et sociale des preuves.

Dans les deux classes, l'initialisation de la séquence s'est déroulée de façon analogue, que le lien avec les activités précédentes de la classe ait été explicité ou non. Les deux enseignants ont eu l'initiative d'interventions qui visent à assurer un fondement pratique solide. Ils contribuent à «constituer et stabiliser le milieu» dans lequel le problème va ultérieurement être construit.

Après la récolte des résultats, les élèves de la classe D font quelques remarques. Cette activité n'avait pour fonction que d'achever, de façon à vrai dire assez artificielle, la première phase. Elle a pu n'apparaître aux yeux des élèves que comme un moment du rite scolaire. En revanche, dans

la classe E, s'amorce un débat qui a pour objet de rejeter une mesure qui paraît trop différente des autres. Par là les élèves manifestent qu'ils adhèrent effectivement aux règles de fonctionnement mises en place dans la classe, et que le professeur rappelle justement pour mettre un terme à la discussion (§ IV.3.1., E3). En fait, il veut par là préserver le déroulement de la séquence en évitant une formulation prématurée de la conjecture. On peut remarquer que rien ne s'opposerait à ce que le cas de cette mesure (effectivement grossièrement erronée) soit totalement réglé. En effet, cela aurait seulement pour effet de renforcer un phénomène apparu dans les deux classes et que nous n'avions pas anticipé : la création d'une norme dès la production des premières mesures, « on doit trouver aux environs de 180° » ; les élèves des deux classes manifestent leur amusement lorsque l'on s'en écarte trop. Mais il ne s'agit nullement, pour ce qui concerne « la classe » de la conjecture dont nous visons la construction. La vérification des résultats extrêmes, et leur correction peut être faite sans risque, si cela est à la demande des élèves.

Ce fait remarquable de **la création d'une norme** dès l'examen des premières mesures est attesté par les manifestations que nous venons de rappeler, mais aussi par le renforcement des paris sur 180° lors de l'activité suivante et plus encore par l'écrasante majorité de 180° comme valeur calculée, aussi bien dans la classe D que dans la classe E. Ce dernier indice est le plus significatif car il implique qu'il y a eu des corrections «vers 180°» de résultats initialement obtenus. Cela ne veut cependant pas dire que les élèves sont acquis à l'idée que la somme des angles d'un triangle quelconque est 180°. Ainsi dans la classe D, 21 élèves sur les 25 «trouvent» 180° pour le triangle proposé, mais lors de la troisième activité et après une discussion certains d'entre eux se rallient à une valeur différente pour l'un des trois triangles (puisqu'alors de tels

paris sont le fait de 12 élèves). Le conformisme à l'origine de ces premières réponses est essentiellement fragile car il ne les fonde pas sur de véritables connaissances, il ne suffira pas à faire face aux situations suivantes où il cèdera la place aux conceptions des élèves qui, bien qu'erronées, constituent au contraire de véritables connaissances.

Au terme de cette deuxième phase, les objectifs fixés ont été atteints de façons inégales :

- les commentaires demandés aux élèves ne conduisent pas de façon «naturelle» à expliciter l'exigence que tous aient trouvé le même résultat, même dans la classe où cette question avait été évoquée *a priori* (D3, Ele 106). Elle est soulevée par le professeur dans la classe D pour conduire essentiellement à des remarques sur la précisions des mesures, mais elle ne sera pas évoquée dans la classe E. Dans cette dernière le problème de l'incertitude des mesures a été « réglé » dès la première activité sous l'autorité du professeur. En fait, lorsque les commentaires sont demandés, les élèves des deux classes traitent d'abord un ensemble de nombres sans véritablement le relier à la tâche précise qui a été proposée. Dans la classe E les règles de débat explicitées font obligation aux élèves de produire "une phrase assez précise tendant à cerner «le fait général» observé" (Capponi 1986, p.30), ce qui conduit à occulter l'objet de l'activité proposée : mesurer et calculer la somme des angles d'un triangle déterminé.

- en revanche l'objectif de mobilisation des conceptions, dû à la nécessité d'une décision *a priori* (pour le pari) sur la somme des angles d'un triangle, a été atteint. Cela est attesté dans la classe D où chaque élève est explicitement confronté au décalage éventuel entre son pari et le résultat de son calcul. Dans la classe E, l'examen de l'histogramme des paris montre que des conceptions erronées ont dû être mobilisées, leur

présence avait été par ailleurs attestée dès la première phase (§ IV.3.1. E2, Ele 32). Mais cette mobilisation n'a pas le renfort de l'explicitation puisque les élèves ne seront pas individuellement confrontés au décalage éventuel entre leur pari et la mesure qu'ils ont proposée.

La troisième phase atteste de la résistance de la conception qui lie la somme des angles d'un triangle à sa taille, notamment dans la classe D. Dans la classe E cette résistance semble n'être le fait que d'un groupe d'élèves, quoique pour les autres on ne puisse assurer qu'il ne s'agit pas de la production d'une réponse convenue : 180° est dans cette classe particulièrement mis en valeur et des éléments pour prouver que c'est là la somme des angles de tout triangle ont été apportés. Dans les deux classes cette troisième phase est l'objet d'un travail important de la part du professeur car elle doit conduire à la construction et à la reconnaissance de la conjecture, puis à poser le problème de sa preuve. Mais ces deux classes évoluent d'une façon très différente l'une de l'autre en raison principalement de la nature du contrat didactique et de son évolution plus qu'en raison de l'évolution des élèves sur le terrain des connaissances :

- dans la classe D : le travail du professeur porte sur la construction de la conjecture, pour cela il apporte un soutien marqué aux élèves qui n'ont pas la conviction que 180° est la valeur de la somme des angles d'un triangle. Ce travail vise dans le même temps à donner aux élèves la responsabilité et le devoir de donner une preuve, puisque l'alternative est de produire un triangle dont la somme des angles serait très éloignée de 180° ou de produire une preuve que cela est impossible. Pour cela, le professeur utilise sa position par rapport au savoir pour donner une légitimité aux élèves qui doutent de la validité de la conjecture : en prenant leur parti, il préserve l'idée d'une égale plausibilité, de son point de vue, des deux positions. Pour reprendre l'expression de Brousseau (1984a,

p.189-90) le professeur *dissimule* son savoir pour pouvoir légitimer la recherche d'un triangle dont la somme des angles serait 150°.

- dans la classe E : le problème de la preuve s'est imposé de façon prématurée au regard de la stratégie que nous avions prévue. Elle peut n'apparaître que comme une activité convenue conforme aux pratiques de validation explicitement en vigueur dans cette classe. Par ailleurs le droit explicite à avoir éventuellement raison seul contre tous permet à certains élèves de rester sur leurs positions, les « enjeux à accepter » paraissent nuls. Les paris lors de la troisième phase, les mesures évidemment et massivement corrigées vers 180°, nous conduisent à l'hypothèse que l'énoncé sur la somme des angles d'un triangle a été désamorcé en tant que conjecture : le problème de la preuve ne s'enracine pas dans une problématique de validité d'une véritable conjecture. Les élèves ne s'engagent d'ailleurs pas dans un débat sur les différentes preuves proposées ; ils sont convaincus et montrent peu d'intérêt pour leur comparaison ou leur critique. C'est le professeur qui accomplira ce travail nécessaire.

V : Conclusions

V.1. Un élément de robustesse : les conceptions des élèves

C'est la présence, pas nécessairement massive, et la résistance d'une conception selon laquelle «la somme des angles d'un triangle est une fonction croissante de sa "taille"», qui donnent à la situation sa robustesse. Nous faisons l'hypothèse que la présence de cette conception, «contre» laquelle les situations que nous avons mises en place sont construites, est le garant essentiel de la reproductibilité de la séquence proposée. En fait, il s'agit moins de la résistance de cette conception que du fait qu'elle se constitue autour d'un véritable théorème-en-acte (faux) présent en tant que tel dans les décisions au moment des paris, et engagé dans le débat de validation. La construction de la conjecture contre ce théorème-en-acte assure justement l'authenticité de son caractère conjectural.

En effet, l'existence, fondée sur cette conception, d'un doute sur l'égalité à 180° de la somme des angles d'un triangle face à une conviction contraire, qui prend de plus en plus d'ampleur, permet la constitution de ce fait en une véritable conjecture et légitime que le problème de sa preuve soit posé. Par ailleurs, la résistance de la conception erronée limite les comportements de conformisme : un tel comportement est fortement destabilisé par une situation qui apparaît suffisamment différente de celle

qui lui a donné naissance. Ainsi, lors du pari sur des triangles atypiques, les conceptions erronées reprennent le dessus. Ceci tient à ce que les comportements de conformisme sont d'abord la production de réponses «convenues» ou supposées telles par les élèves, ils ne rendent pas compte de véritables connaissances.

V.2. Le talon d'Achille de la situation : le contrat didactique

Comme le montre assez nettement l'observation réalisée dans la classe E, les situations proposées et donc la signification même des comportements et des productions des élèves, sont fortement sensibles aux interventions du professeur. Elles ont de même une sensibilité importante au *modus vivendi* de la classe dont nous ne connaissions pas les caractéristiques a priori.

Par exemple l'idée que toute activité de la classe implique l'existence de comportements ou de réponses attendus par le professeur est très probablement à la source de la création d'une norme, ou de réponses « conformes » dès la première situation, quelle que soit la classe observée. Ceci étant renforcé par la réticence que pourraient avoir des élèves à rester en marge de ce qui apparaîtrait comme le comportement dominant ; ce que Watzlawick désigne comme "le désir ardent et inébranlable d'être en accord avec le groupe" (1976, p.91) et qui peut conduire à renoncer à la réalité pour le confort "d'être en harmonie avec le groupe"(Ibid.)

C'est là le principal risque d'échec de la situation, car si la conjecture est produite comme un énoncé convenu alors elle perd l'essentiel de sa signification, et partant l'authenticité du débat de preuve est fortement hypothéquée. Nous avons déjà dit comment cela excluait que le professeur soit producteur de cet énoncé, mais cela fait aussi peser des contraintes fortes sur l'institutionnalisation de la conjecture construite par les élèves. Cette construction doit en fait conduire à un consensus vrai et problématique (tension entre les "pour" et les "contre"), puis à la désignation par la classe de la recherche d'une preuve comme une tâche commune ; l'institutionnalisation se limitant à marquer cet état, en quelque sorte à l'entériner pour la communauté de la classe. Le fait que la séquence construite conduise à une situation ayant les caractéristiques d'une situation de preuve repose essentiellement sur la création de ce désir collectif de savoir (auquel adhèrerait chacun des élèves). L'exigence d'authenticité de ce désir constitue le maillon fragile de notre construction par sa sensibilité aux interventions du professeur.

Ainsi les règles adoptées dans la classe E, qui régissent explicitement le débat, si elles permettent la régulation de l'interaction sociale, contiennent aussi en elles-mêmes les sources de difficultés à la mise en place d'une véritable situation de preuve. Notamment le débat contradictoire s'appuyant largement sur l'obligation de convaincre, allié à la légitimité d'une solitude dans la vérité, ouvre la possibilité à refuser d'être convaincu. Au débat de la preuve dont l'enjeu est le savoir, se substitue un jeu social dont l'enjeu est d'être ou de ne pas être convaincu. L'explicitation de règles a pour conséquence possible, mais parfois essentielle, de créer un vide juridique : ici l'absence de règles qui font obligation d'avouer que l'on est convaincu. Par ailleurs, cette législation n'est opératoire que si elle est surveillée : les lois rendent nécessaires les

juges. Satisfaire la loi peut signifier d'abord satifaire le juge. Dans notre cas l'existence de règles explicites, bien que précisant un fonctionnement "scientifique", peut provoquer le glissement vers la production de preuves ou d'arguments en fonction de leur capacité à satisfaire le professeur avant les exigences intrinsèques au problème de validité.

Cela ne signifie pas qu'aucune règle ne doive exister, ne serait-ce que parce que "des règles sont *tenues* d'émerger et tout échange, en particulier dans l'interaction humaine, réduit invariablement les possibilités jusque-là ouvertes aux deux partenaires" (Watzlawick 1976 p. 97). Le problème est celui de la possibilité, des conditions et de la signification de leur explicitation.

Il ne s'agit pas non plus que le professeur se désengage : la situation ne peut fonctionner sans lui. Elle a besoin de ce qu'il est, de sa position par rapport au savoir. Aini que le souligne Brousseau (1984b, p.4-6), il est et demeure responsable. Comme nous l'avons observé, les élèves peuvent avoir des positions très différentes sur la validité de la propriété en question : ceux qui savent déjà, ceux qui rejettent, ceux qui doutent, ceux qui adopteraient volontiers une position majoritaire, ceux qui ne sont pas intéréssés. Face aux élèves qui soutiennent que la somme des angles d'un triangle est invariante, d'autres élèves peuvent prétendre à l'existence d'un cas particulier même s'ils sont incapables d'en produire un. Nous sommes dans une situation de conflit essentiellement intellectuel, aucun feedback matériel ne peut venir contredire l'une ou l'autre des positions adoptées. En revanche, cette incapacité à produire un contre-exemple à la propriété peut donner de l'intérêt à la recherche d'une preuve intellectuelle qui trancherait le débat. Cette problématique de preuve et de réfutation ne peut se développer que si la propriété (ou thèse) et sa contradiction

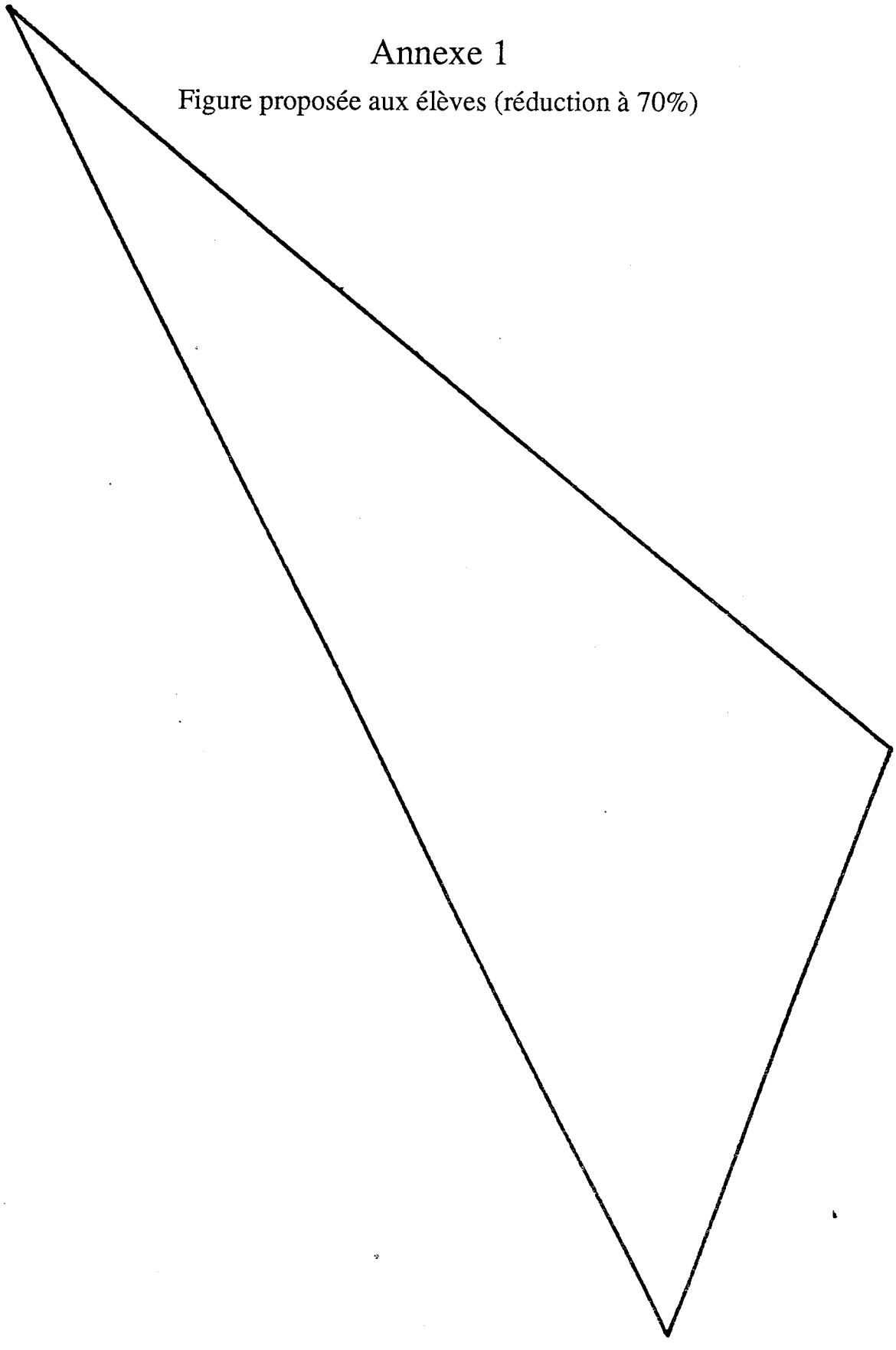
(antithèse) ont une égale potentialité attestée. Elles doivent être défendues de façon assez équilibrée dans la classe pour que puisse se mettre en place une authentique dialectique de la validation. C'est ce que le professeur permet en donnant une légitimité à la recherche d'un triangle dont la somme des angles serait très différente de 180°.

La «vérité» devient problématique non parce que le professeur ne décide pas, mais parce qu'il atteste qu'il est prêt à soutenir ou à donner un statut à la thèse et à l'antithèse. Il donne en quelque sorte un statut à l'incertitude, et dans le même temps marque l'intérêt qu'il y aurait à « savoir ». Ceci assure que l'énoncé en question n'est pas une simple spéculation, mais bien une conjecture.

Si donc la conjecture a ses racines principalement dans la remise en question des savoirs, des conceptions de chacun des élèves, mais aussi dans la résolution de l'incertitude (due aux mesures), notre recherche montre qu'elle ne conquiert pleinement son statut que dans une négociation sociale qui en atteste à la fois l'intérêt et le caractère problématique. Cette négociation recouvre à la fois des processus de dévolution et d'institutionnalisation dans lesquels le professeur joue un rôle central, nous l'examinerons dans un cadre différent au chapitre suivant.

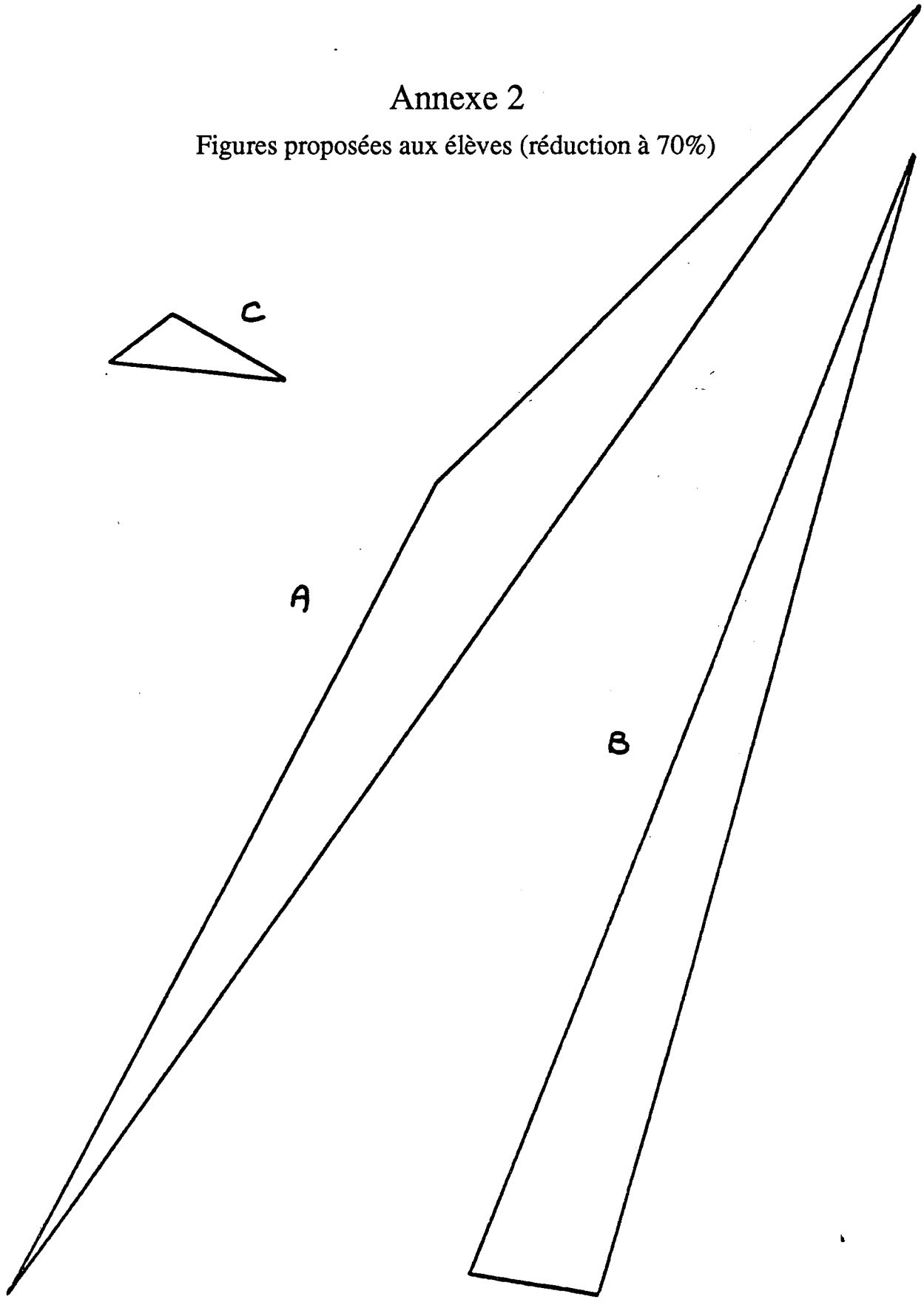
Annexe 1

Figure proposée aux élèves (réduction à 70%)



Annexe 2

Figures proposées aux élèves (réduction à 70%)



Chapitre VI

DEVOLUTION D'UN PROBLEME ET DEBAT DE VALIDATION

UN ESSAI D'INGENIERIE DIDACTIQUE

I : Introduction

D'un besoin né de la pratique vers une question de recherche

Jusqu'à 1983 nos préoccupations de recherche sur la démonstration ne s'étaient développées que dans des opérations de recherche au niveau de l'étude de l'objet d'enseignement ou de l'épistémologie de la preuve en mathématique (notamment avec la réalisation, en collaboration avec J.M. Laborde, de l'édition fançaise de l'ouvrage de Imre Lakatos,1976 :

"Proofs and refutations"). Nos recherches expérimentales portaient essentiellement sur l'étude des fonctionnements rationnels (construction d'une preuve, traitement d'un contre-exemple,...) au niveau d'un individu dans des situations d'interaction sociale.

Pour aller au coeur du problème dans sa signification didactique il nous fallait aborder le problème de l'enseignement de la démonstration au plan expérimental, c'est-à-dire dans la classe, et étudier les phénomènes qui en sont spécifiques dans le jeu des interactions entre les élèves et l'enseignant à propos de cet apprentissage.

Une telle entreprise ne pouvait être conduite par une personne seule, le cadre nécessaire devait être celui d'une équipe intégrant à la fois des chercheurs professionnels (c'est-à-dire consacrant à cette tâche l'essentiel de leur activité), et des enseignants. Le besoin de cette collaboration paraît évident si l'on considère qu'il faut concevoir et réaliser le dispositif *en classe* , mais nous verrons qu'elle a de plus contribué de façon essentielle au développement de la problématique et des outils conceptuels de cette recherche.

La constitution de cette équipe a été possible après notre rencontre avec une équipe de l'IREM de Lyon dont le thème de recherche était : le "problème ouvert". Cette équipe animée par Gilbert Arsac et Michel Mante, comprenait : Gisèle Chapiron,Gilles Germain, Yves Guichard, Martine Philippon et Dominique Pichod. Le "problème ouvert", pour reprendre un description qu'en donne Arsac, était d'abord une «pratique», "c'est-à-dire une innovation apparue à l'IREM de Lyon dans un contexte de formation continue" (Arsac 1985). Le but de l'équipe était de "placer les élèves dans la situation la plus typique de l'activité de recherche

mathématique, c'est-à-dire affronter un problème dont l'énoncé les place, toutes proportions gardées dans la situation du chercheur (il s'agit ici du chercheur en mathématiques)" (Ibid.). Le "problème ouvert" était le moyen d'atteindre ce but ; nous en rappelons ci-dessous la caractérisation formelle qu'en donne l'équipe de l'IREM de Lyon :

> " Nous appelons **problème ouvert** un problème qui possède les caractéristiques suivantes :
> - énoncé court ;
> - l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution (pas de question intermédiaire ni de problèmes du genre "montrer que"). En aucun cas cette solution ne doit se réduire à l'utilisation ou l'application immédiate des résultats présentés en cours ;
> - le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité. Ainsi peuvent-ils prendre facilement « possession » de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution. "
>
> (Arsac et Mante 1983, p.8)

Cette démarche était toute entière incluse dans une problématique de formation, l'essentiel de l'activité du groupe "problème ouvert" étant l'animation de stages de formation continue d'enseignants sur ce thème. Elle s'est heurtée très rapidement à deux questions fondamentales qui sont à la source de notre rencontre et de notre collaboration, et qui ont conduit le groupe à entrer dans une problématique de recherche :

(i) comment transmettre à d'autres enseignants la «pratique du problème ouvert ?

(ii) comment assurer la reproductibilité des phénomènes que les membres de l'équipe pensaient avoir identifié dans leur classe ?

Un premier constat, issu des interactions avec les enseignants en formation, était que l'objectif didactique initial du groupe "ne pouvait pas

être atteint par la seule vertu d'un énoncé, mais qu'il fallait aussi adapter la «gestion de la classe» à ce but" (Arsac 1985). Les motivations à la source de l'innovation de l'équipe du "problème ouvert", relèvent d'une part du souci de permettre l'accès des élèves à une véritable rationalité scientifique, en fait à une rationalité mathématique, et d'autre part de la reconnaissance que le jeu «ordinaire» des interactions dans la classe s'oppose à cette évolution.

C'est à ce moment du développement de la problématique de l'équipe qu'a eu lieu notre rencontre : le problème de l'enseignement de la démonstration devenait notre problème commun de recherche. L'idée de l'équipe de Lyon étant que "le problème ouvert pouvait être le moyen idéal d'apprentissage de la démonstration et de faire de cette conjecture l'objet d'une recherche" (ibid.). Les questions, envisagées pour un projet à long terme, que nous abordons ensemble sont :

- quelles sont les conditions didactiques permettant d'identifier les démarches de preuve spécifiques des mathématiques ?

- quelles sont les conditions de reproductibilité de ces situations ?

Avec le développement de recherches au plan épistémologique sur l'origine de démonstration en mathématiques et nos propres travaux sur les processus intellectuels à l'oeuvre chez les élèves, notre groupe avait quelques atouts pour aborder ces questions (cf. sur les aspects historiques : Arsac, 1987). Ainsi avons nous entamé un travail théorique et expérimental dont le présent texte rend compte en partie, avec pour objectif d'affiner la problématique, finalement assez grossière, dont nous sommes partis.

II : Construction *a priori* de la séquence didactique

II.1. Les conditions d'un débat de validation

II.1.1. Organisation sociale de la séquence

Notre hypothèse initiale (qui est développée au chapitre I) est qu'une situation ayant pour objectif de donner du sens à la démonstration comme outil de preuve en mathématique, et d'en faire un objet d'étude, doit permettre :

- d'une part le transfert de la responsabilité de la validité d'une production mathématique du professeur vers les élèves, ce que nous appelons la dévolution du problème ;

- d'autre part de constituer un projet commun à l'ensemble de la classe dont la réalisation justifiera un débat sur les critères de validité de la production envisagée. C'est moins la résolution du problème lui-même qui est visée que ce que sa résolution collective permettra de mettre en évidence des processus de validation en mathématique.

a) Une situation de communication invoquée

Pour ce qui concerne le premier objectif nous avons retenu de placer l'activité mathématique des élèves dans le contexte d'une situation de

communication invoquée : il s'agira d'élaborer à l'intention d'élèves de même niveau scolaire, mais non présents, un message donnant les moyens de résoudre un problème mathématique déterminé. Dans une telle situation, les critères de réussite peuvent être envisagés et déterminés par les élèves producteurs du message en fonction de l'évaluation de l'efficacité et de la fiabilité de leur production et non en fonction d'attentes potentielles de l'enseignant qui met en place cette situation. Nous faisons l'hypothèse que ce déplacement de la référence quant à la validité de la production devrait suffire à assurer la réussite de la dévolution de la responsabilité du vrai que nous recherchons. Bien sûr, les élèves peuvent refuser d'entrer dans cette fiction, le rôle de l'enseignant est d'en permettre la mise en place et de la maintenir tout au long du déroulement de la séquence. La réussite de cette entreprise dépend donc de la négociation d'un contrat entre l'enseignant et les élèves, au terme duquel ceux-ci doivent accepter la responsabilité de leur production mathématique.

Notre analyse des données de l'observation de la situation de communication invoquée sera conduite autour des questions suivantes :

- à quel jeu les élèves ont ils joué, jeu de la communication, jeu de la validation, et quelle est la distance de ce jeu à celui envisagé par nous a priori ?

- comment le professeur a-t-il obtenu que la fiction sur laquelle repose la situation soit présente de façon effective et non comme la pseudo-réalité d'un jeu didactique convenu en cachant éventuellement un autre ?

- comment, enfin, le contrat localement mis en place en viendra à son terme ? C'est-à-dire comment chacun, professeur et élèves, reprendra sa place relativement au savoir ; comment le professeur attestera de la fin de

cette activité.

b) Les niveaux d'interaction sociale

Pour ce qui concerne le second objectif, la constitution d'un projet commun, il est nécessaire que les élèves s'engagent individuellement dans la production d'une solution mais aussi qu'ils collaborent à un projet collectif.

Il y a dans une telle situation une tension inévitable entre les intérêts et les motivations individuelles, et, les intérêts et les objectifs collectifs. D'autre part, le problème ne peut être soumis à la classe toute entière pour que soit d'emblée engagé un processus collectif de résolution, il serait alors peu probable pour des raisons tenant à des différences inter-individuelles que tous les élèves soient également partie prenante de ce processus. Enfin, nous pensons que le débat aura plus de sens si les élèves ont à prendre des décisions sur des propositions concurrentes. Pour ces raisons nous avons décidé de constituer la classe en petites équipes ayant chacune en charge de faire une proposition, la production collective devant finalement être la reprise ou le prolongement de l'une d'entre elles. Afin d'affirmer le caractère collectif des productions nous retenons le principe d'un porte-parole, pris parmi les membres de l'équipe à son initiative, chargé de présenter une proposition commune pour la résolution du problème posé, mais aussi, plus tard, de formuler des critiques ou des remarques sur les différentes propositions. L'existence d'un porte-parole oblige à des échanges, à des argumentations qui participent au fondement des solutions proposées mais préparent aussi les débats de validation à venir.

Une question ouverte est celle de savoir la part que prendront les processus de preuve spécifiquement mathématiques dans une telle situation d'interaction sociale qui peut, par ailleurs, susciter d'autres niveaux d'argumentation, par exemple liés au contexte de communication.

L'analyse des données de l'observation des interactions sociales sera conduite autour des points clés ou des questions suivantes :

- comment la situation de communication est-elle prise en compte dans les débats de validation ?

- quelle est la nature des débats observés, notamment leurs rapports aux mathématiques ?

Une question centrale est celle de savoir ce qui, dans ce dispositif, garantit l'entrée des élèves dans une véritable démarche de validation. Nous pensons que le fonctionnement en petites équipes peut assurer de façon raisonnable l'engagement des élèves, susciter leur intérêt à fournir une solution qui sera non seulement correcte mais encore sera susceptible d'être retenue comme base de la solution collective finale. En revanche, ce dernier aspect peut se constituer en obstacle au bon fonctionnement de la situation au niveau d'interaction plus globale de la classe. En effet, le désir d'une équipe d'élèves de voir sa proposition retenue peut la conduire à refuser toute critique, serait-elle fondée, ou à critiquer de mauvaise foi les productions des autres équipes, ou encore à faire porter sa cririque sur des aspects non pertinents du point de vue du contenu mathématique de la situation sur le fond. Un tel comportement devrait être limité dans la mesure où l'objectif de production d'un message fiable et efficace est constitutif à la fois de l'activité des groupes et de celle de la classe toute entière. On peut en revanche prévoir que des messages d'une égale qualité seront farouchement débattus et défendus. Nous ne préjugeons pas de l'issue d'une telle situation qui, par ailleurs, ne nous paraît pas évitable.

Il s'agit là d'une question ouverte pour l'observation.

II.1.2. Elaboration du contexte mathématique

Le problème mathématique retenu pour cette opération de recherche est celui que nous avons étudié au chapitre IV. Il s'agit de rédiger un message qui décrive ce qu'il est suffisant de réaliser pour calculer le périmètre d'un triangle dont une partie est masquée, ce que nous apellerons par la suite «le triangle tronqué». Nous renvoyons le lecteur au paragraphe II.2.2. du chapitre IV pour la présentation de ce problème et des procédures susceptibles d'en permettre la résolution. Des observations que nous avons conduites, dans une situation expérimentale hors d'un processus d'enseignement, nous retenons ici essentiellement le caractère dominant des procédures de reproduction et notamment l'effet que pourrait avoir la disqualification de la procédure de prolongement (chap.IV, § II.5.3.). Aussi avons-nous décidé une modification de l'énoncé du problème de façon à ce que la contrainte de ne pas prolonger les côtés du triangle pour en calculer le périmètre, soit intrinsèque à la situation proposée. Voici ce nouvel énoncé :

> *Rédiger à l'intention de camarades non présents un message indiquant ce qu'il faut faire pour connaître le périmètre d'un triangle, n'importe lequel, dont il manque un morceau. Comme matériel les camarades auxquels vous proposerez ce message disposeront d'une seule feuille sur laquelle sera dessiné un triangle dont il manque un morceau et du même matériel que vous (règle, etc.)*

La figure ci-après (fig.1) donne une image réduite du triangle fourni en exemple aux élèves, on en trouvera une reproduction en annexe au chapitre IV.

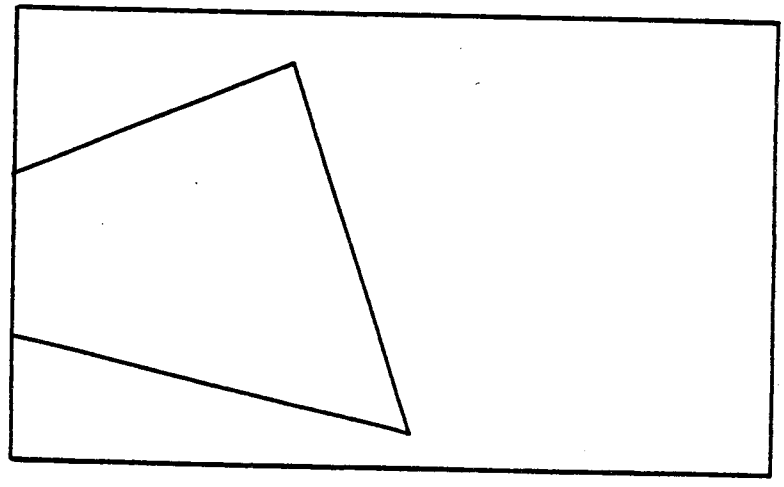


Figure 1

Une première contrainte, que nous voulions voir satisfaite, nous semble devoir l'être avec un tel problème : à peu d'exceptions près les élèves pourront engager un processus de résolution, au moins avec l'une des stratégies de reproduction que le triangle donné en exemple permet d'utiliser. L'observation dont nous avons présenté l'analyse au chapitre IV, nous conforte sur ce point. Nous avons aussi constaté la possibilité de solutions erronées nombreuses, leur présence peut être un moteur du débat de preuve en montrant qu'il est nécessaire de dépasser les sentiments d'évidence.

Nous pensons que la confrontation des diverses solutions que permet la situation didactique mise en place, la nécessité de faire des choix, conjuguées à la vigilance sur la validité de la solution finalement retenue devrait permettre aux élèves d'aller au-delà de ce que nous avons pu observer au niveau des productions des binômes tant pour ce qui concerne les productions que pour ce qui concerne leurs fondements. En particulier, l'analyse critique des messages proposés devrait permettre un détachement du caractère prototypique pris éventuellement par le cas de figure donné en exemple et donc la prise en compte de la contrainte «n'importe lequel».

II.2. Mise en place du dispositif expérimental

Nous nous plaçons en classe de quatrième.

Le dispositif expérimental que nous mettons en place pour réaliser la situation didactique dont nous venons de présenter les caractéristiques, comprend deux parties bien distinctes : d'abord une phase d'activité des équipes qui se termine avec la proposition d'une solution (un message) par chacune, ensuite une phase de débat au sein de la classe à l'issue de laquelle doit être produit un message commun.

II.2.1. Première phase : introduction à la situation

a) Présentation du contexte de communication

L'enseignant présente la situation de communication en indiquant, avant d'expliciter l'énoncé du problème, qu'il s'agit de se mettre d'accord pour communiquer un message à une autre classe. Il souligne qu'il n'y aura qu'un seul message pour l'ensemble de la classe. Les propositions des équipes seront affichées et feront l'objet d'un débat dont sera issu le choix de la solution collective.

b) Constitution des équipes

La classe est organisée en équipes de 3 ou 4 élèves (suivant les effectifs de la classe). Ces groupes sont constitués par l'enseignant ou par affinité, ce qui risque dans ce dernier cas de provoquer la constitution d'une équipe hétérogène des «laissés pour compte». Chaque équipe doit désigner un porte-parole qui assurera les relations entre elle et le reste de la classe, ou entre elle et l'enseignant. Ainsi, si les élèves souhaitent poser une question, cela n'est possible que si cette question apparaît comme collective et est formulée par le porte-parole de l'équipe.

c) Description de la tâche

Une fois cette organisation mise en place, le professeur présente le "**problème du périmètre du triangle tronqué**". L'énoncé de ce problème (cf. ci-dessus) est écrit au tableau, il est lu par l'enseignant et chaque équipe en possède une copie. Le professeur souligne que les correspondants invoqués n'auront que la feuille de papier sur laquelle se

trouve tracé un «triangle tronqué» et aucune feuille de papier supplémentaire pour résoudre le problème. Il s'agit ainsi de bloquer la procédure de prolongement des côtés.

Le professeur explique la signification des expressions «triangle dont il manque un morceau» et «périmètre», en donnant le même statut à ces deux informations. La décision d'une telle intervention a été faite à la suite de la pré-expérimentation qui a mis en évidence les lacunes des élèves sur la notion de périmètre. Le fait d'expliquer la première expression, que les élèves comprennent en général très bien, banalise un peu l'explication de la seconde et permet de ne pas la faire apparaître comme une indication sur la solution qui pourrait privilégier les procédures de reproduction.

Chaque équipe dispose d'un ensemble de matériels : 2 rapporteurs, 2 règles, 2 équerres, 2 compas, 4 styllos à bille, 1 machine à calculer type "4 opérations". Il est indiqué que les correspondants invoqués auront à leur disposition le même matériel. De plus il est distribué à chaque équipe du papier blanc non transparent à volonté, 4 copies de l'énoncé du problème et une copie d'un «triangle tronqué». Toutes le équipes ont la même figure en exemple.

d) La position de l'enseignant

Après cette présentation, les élèves sont invités à se mettre au travail. Dès ce moment les équipes sont dans une situation isolée du professeur dans le sens où celui-ci doit limiter ses interventions à des aspects purement matériels : fourniture de papier ou de moyens nécessaires à l'affichage des messages. Il ne doit à aucun moment y avoir d'interventions sur le contenu.

II.2.2.Transition de phases

Les messages sont affichés dès que les équipes en ont décidé ainsi. Dès qu'une équipe a affiché son message elle est invitée à étudier ceux qui sont déjà affichés et à formuler par écrit les critiques ou remarques qu'elle désire faire. Le but de cette activité est du point de vue des élèves de préparer le débat, pour le professeur il s'agit de *remplir le temps* laissé libre par le décalage entre les réalisations des équipes. Reste le problème de la premiere équipe qui fait une proposition, elle est invitée à patienter (avec pour hypothèse qu'une autre équipe, au moins, ne tardera pas à faire à son tour une proposition...).

Le professeur joue un rôle de facteur pour faire circuler les critiques, et les réponses à ces critiques, entre les équipes qui ont terminé leur proposition de message.

Il est décidé que l'entrée dans la phase de débat se fera dès que 4 messages sur les 6 attendus seront disponibles. Cependant il est laissé à l'appréciation du professeur d'attendre ou non que l'ensemble des solutions soit proposé, selon ce qu'il évalue de leur état d'avancement et en fonction du temps disponible d'autre part. Ainsi la passage au débat collectif a lieu sur une décision de l'enseignant qui retient ou provoque ce passage selon son appréciation de l'état de la classe.

II.2.3. Deuxième phase : le débat collectif

Cette seconde phase est donc consacrée au choix d'un message commun à la classe qui sera «collectivement» adressé aux interlocuteurs invoqués. Il s'agit parmi les (au moins) quatre messages proposés de

dégager ou, à partir de ceux-là, de construire le message qui sera «effectivement» transmis. Chaque équipe doit analyser l'ensemble des propositions et se prononcer sur chacune.

Dans cette organisation du débat c'est le *rejet* qui peut apparaître premier de façon naturelle, au yeux des élèves, dans la mesure où cette activité est présentée comme un débat critique. Ce rejet doit reposer sur des raisons explicitables que la classe, et notamment l'équipe concernée, doit accepter. Le professeur garantit le fonctionnement de cette règle.

Si plusieurs messages subsistent comme également acceptables à l'issue de cette phase :

- ou bien certains d'entre-eux proposent une stratégie de reproduction, dans ce cas le professeur s'appuyant sur la situation de communication invoquée propose une mise à l'épreuve sur un nouveau cas de figure (ce qui suppose que la contrainte «n'importe quel triangle» a été prise en compte). Ce cas de figure, un triangle «trop grand» devrait conduire au rejet de ces solutions.

- ou bien aucune contradiction ne peut être légitimement apportée, le professeur demande alors aux élèves de faire un choix. Le message retenu est celui qui emporte le plus grand nombre d'adhésions. Nous ne préjugeons pas dans ce cas des arguments qui seront avancés.

III : Première observation : rencontre des contraintes de la pratique

III.1. Mise en place de l'observation

La première mise en oeuvre de la séquence didactique que nous venons de décrire a eu lieu dans une classe de quatrième d'un collège de la région lyonnaise, placée sous la responsabilité de l'un des enseignants de notre équipe.

A la suite d'une estimation du temps nécessaire au déroulement de la séquence, et en tenant compte des contraintes propres à la classe dans laquelle l'observation devait avoir lieu, nous avons décidé d'une réalisation sur deux séances de 1h30 sur deux jours consécutifs. Grossièrement on pouvait penser que la première phase et un premier examen des productions occuperaient la première séance et que le débat conduisant à la production d'une solution collective occuperait la seconde séance. Bien sûr, toute latitude était laissée au professeur pour décider de ce qui était opportun, notamment de consacrer éventuellement la totalité de la première séance à la phase de travail «quasi-isolé» des équipes. Quoi qu'il en soit l'expérience des enseignants de «l'équipe problème ouvert» et les résultats de l'étude préalable sur la résolution du problème utilisé laissaient penser que ces contraintes temporelles ne seraient pas trop sévères.

La classe de 24 élèves a été organisée en équipes de 4 élèves qui se sont constituées par affinité. Une conséquence en a été la constitution d'une équipe plus hétérogène que les autres, composée d'élèves socialement plus isolés. L'expérience avait été présentée par le professeur quelques jours auparavant en indiquant qu'il s'agissait d'une opération dans le cadre d'une étude des problèmes d'enseignement des mathématiques.

Chaque équipe a été observée par l'un des membres de notre équipe qui d'une part réalisait un enregistrement sonore des discussions des élèves, d'autre part tenait une chronique de l'activité de l'équipe. Le professeur lui-même a été enregistré grâce à un petit magnétophone qu'il portait sur lui. Quant à la classe dans son ensemble elle a été filmée et l'un d'entre nous était chargé de tenir une chronique de l'ensemble des évènements.

Le compte-rendu des observations et les analyses que nous présentons ci-dessous ont été réalisés à partir des données ainsi recueillies. Cependant tous les enregistrements, ou toutes les chroniques, n'ont pu être disponibles de la même façon, nous disposons des protocoles de 4 équipes sur les 6 observées. Pour cette raison nous n'avons pas pu analyser en détail l'activité de tous les élèves.

III.2. La première phase : l'activité «quasi-isolée» des équipes

III.2.1. Les interactions du professeur et des équipes, une approche globale

Le professeur introduit la situation selon le scénario que nous avons conçu, il omet seulement d'indiquer que les messages seront affichés pour pouvoir être discutés ; peut être parce qu'il ne voit là qu'une modalité pratique dont le rôle dans la situation est assez auxiliaire.

Pendant que les élèves travaillent à la résolution du problème, le professeur circule parmi eux pour s'assurer de leur compréhension de la consigne et du problème qui leur est soumis. Il est vigilant au bon fonctionnement pratique de la situation. Nous avons identifié trois types d'interventions :

- celles qui cherchent à s'assurer que les élèves sont actifs et que cette activité est collective,
- celles qui visent à garantir que les consignes sont respectées pour ce qui concerne la situation de communication et le problème lui-même,
- celles qui visent à stimuler les élèves notamment lorsque, parvenus (selon le professeur) au terme de la résolution du problème, ils tardent à s'engager dans la rédaction d'un message.

Cette première phase d'activité a duré environ 1 heure 20. Pendant

cette période nous avons recensé 74 interventions du professeur auprès des équipes, cette quantité d'interventions (environ une intervention toutes les minutes) contraste avec la consigne acceptée par l'enseignant d'assurer un fonctionnement autonome, isolé, des élèves. Un examen plus fin montre que le contenu d'une intervention peut être décomposé en plusieurs «items», chaque item correspondant à des fonctions différentes dont nous retenons essentiellement les types ci-dessous :

- rappel de consigne ;
- sondage (comme : "*où en êtes vous ?* ") ou enquête plus précise (comme : "*quand vous aurez mesuré, qu'est-ce que vous allez faire ?* ") ;
- injonction de retour sur l'énoncé (notamment lorsque le professeur constate que les élèves utilisent une procédure de prolongement des côtés du triangle) ;
- intervention directe pour souligner que les interlocuteurs ne disposeront que d'une seule feuille de papier ;
- incitation à rédiger un message ;

Nous avons recensé 129 items pendant les 80 minutes d'activité de résolution du problème. Ceci est un indicateur de l'intensité de la circulation d'informations du professeur vers les équipes.

Les interventions impliquant le plus fortement le contenu sont celles qui visent à obtenir le respect de la contrainte de ne pas utiliser de feuilles de papier supplémentaires pour prolonger les côtés du triangle. Ces interventions peuvent aller d'une injonction au retour à l'énoncé : "*une autre feuille ? Vous avez bien lu l'énoncé ?* " (à l'équipe 3), jusqu'à une intervention directe comme la suivante (à l'équipe 2) :

-vous avez bien relu l'énoncé ? Oui ?
- si tu prolonges là, qu'est-ce qui se passe ? Qu'est-ce qu'il te faut ?
-si tu leur dis de prolonger, comment est-ce qu'ils vont faire s'ils n'ont qu'une seule feuille ?
-d'accord vous pouvez vous en servir du prolongement, mais pour vérifier. Mais il faut trouver autre chose.

Un autre thème d'intervention du professeur sur le contenu de l'activité des élèves est le fait que la procédure doit être valide pour n'importe quel triangle ; la plupart des équipes ne prennent pas en compte cette contrainte :

de toute façon c'est n'importe quel triangle. Donc que ce soit la même figure ou pas... ça doit s'appliquer sur n'importe quel triangle. (à l'équipe 5)

Professeur : *qui te dit que c'est le même triangle.*
Un élève : *c'est pas le même triangle qu'ils ont ?*
Professeur : *de toute façon c'est pour n'importe quel triangle*
(à l'équipe 6)

Au sens du professeur, exerçant sa responsabilité d'enseignant, ces interventions avaient pour objectif de garantir le bon fonctionnement de la situation sans cependant remettre en question les objectifs de notre recherche et dans le respect des contraintes que nous avions fixées a priori, ou du moins dans leur esprit.

Il est important de signaler qu'à l'issue de l'observation de cette

première phase les observateurs partageaient le sentiment d'une «réussite» au sens d'une activité des élèves à la fois «bien orientée» par rapport à la situation et à peu près «autonome». L'étude de la résolution de ce problème en situation d'interaction sociale, rapportée au chapitre IV, nous avait appris l'effet possible d'un blocage de la procédure de prolongement, par l'observateur, sur les représentations que les élèves se forgent de la situation, c'est-à-dire du contrat expérimental, mais ici nous considérions que les effets de ces interventions seraient attenués dans la mesure où elles renvoyaient à une contrainte explicite de l'énoncé. Le professeur souhaitait seulement protéger les élèves contre leurs inattentions, il ne pensait donc pas remettre en question sur le fond la signification de la situation.

C'est cette hypothèse que nous allons examiner en étudiant de plus près l'effet des interventions du professeur dans l'activité des équipes.

III.2.2. Les interactions entre le professeur et les équipes, leurs effets sur la dévolution

Nous examinerons ici le cas des équipe 1, 2, 3 et 6 pour lesquelles nous avons des données complètes.

Dans ce qui suit t_0 désigne l'instant à partir du quel l'activité «autonome» des équipes a commencé, après que le professeur ait présenté la situation.

a) Equipe 1

t_0+04 Les élèves s'adressent à l'enseignant pour lui demander de combien de temps ils disposent pour résoudre le problème, et "*si on peut mettre des lettres* ". Le professeur les renvoie à eux mêmes, attestant ainsi d'une rupture que les élèves n'ont pas encore reconnue : "*vous ne pouvez pas répondre tout seuls ? Qu'est-ce que vous en pensez ? [un élève : on peut] Eh ben, faites le...* "

t_0+13 Alors que les élèves travaillaient ensemble à la reconstitution du triangle : "*d'abord il faut trouver le triangle* ", le professeur revient s'enquérir : "*vous avez trouvé quelque chose et tout le monde est d'accord avec ce que vous avez trouvé ?* "., A la suite cette intervention l'un d'entre eux propose une nouvelle direction de recherche en utilisant les bissectrices ; mais finalement : "*ça sert à rien* ".

t_0+17 Le professeur s'enquiert à nouveau : "*où est-ce que vous en êtes là ?* ", les élèves : "*on cherche d'autres solutions* ". Le professeur les rappelle à l'ordre sur la consigne : "*qu'est-ce qu'on vous dit ?... «rédiger à l'intention d'un camarade»...*". A la suite de cela l'équipe abandonne sa quête initiale, elle s'engage dans la rédaction de sa solution initiale : la reproduction du triangle.

t_0+27 Le professeur vient s'enquérir d'où en est la rédaction de la solution : "*ça y est vous avez terminé ? Alors vous allez le recopier sur une affiche* ". Les élèves se proposent alors de "*retravailler un peu [leur formulation] pour que ce soit plus clair* "

t_0+40 Le professeur s'enquiert de l'état d'avancement de la rédaction de l'affiche et intervient sur sa réalisation : "*tu écris plus gros parce qu'il faut que ça soit bien de loin* ".

(t_0+43 affichage du message de l'équipe 3)

t_0+46 Les élèves font appel au professeur : "*on sait pas si ça va là ?* ", il s'agit de formulations concernant les angles et leurs mesures. Le professeur se refuse à prendre position et renvoie les élèves à la situation de débat à venir : "*c'est pas moi qui vais vous le dire, c'est vos camarades quand ils liront. Ils verront si c'est compréhensible ou pas* ".

(t_0+49 affichage du message de l'équipe 6)

t_0+58 Le professeur pousse les élèves d'un "*c'est bien laborieux là !* " qui a pour effet d'accélérer la mise au point du texte, bien que l'accord sur la rédaction ne soit pas réalisé au sein du groupe.

t_0+60 Le texte des élèves vient d'être affiché. Ils se demandent alors : "*faut qu'on fasse le deuxième problème ? Y a un deuxième problème ?* ". Ils ne s'intéressent pas d'emblée aux deux autres message affichés. Ils ne le feront qu'à la suite d'une intervention du professeur : "*essayez de regarder déjà ce que vous en pensez. Vous notez par écrit, peut être ce que vous en pensez* ". Les élèves en viendront à l'idée de vérifier les solutions proposées en les mettant, en oeuvre "*pour voir si ça marche* ".

Deux autres interventions brèves (t_0+63, t_0+80) ont pour fonction d'entretenir cette activité de critique des messages produits par les autres équipes.

b) Equipe 2

t_0+12 Le professeur constate que les élèves sont engagés dans une procédure de reconstitution du triangle en en prolongeant les côtés, il engage un dialogue pour en provoquer l'abandon :

- *qu'est-ce qu'il te faut là pour pouvoir prolonger ?*
- *il faut une seconde feuille*
- *qu'est-ce qu'on te dit dans l'énoncé ?*
- *une seule feuille*
- *vous pouvez vous en servir peut-être du prolongement, mais pour vérifier. Mais il faut trouver autre chose.*

Les élèves se lancent ensuite dans une exploration des données numériques qu'ils peuvent réunir en faisant diverses mesures, d'angle ou de longueur, sur la figure. Ils cherchent à déduire de ces calculs une «règle» pour le calcul du périmètre.

t_0+25 Le professeur passe pour s'enquérir de l'avancement de la recherche : "*une fois que vous aurez mesuré, qu'est-ce que vous allez faire ?* ". Les élèves poursuivent leur exploration, ils remarquent que la partie connue a un périmètre d'environ 36cm et que l'angle du bout manquant fait environ 36°. Ils pensent ainsi avoir trouvé la règle cherchée.

t_0+33 Le professeur s'enquiert à nouveau de ce qui a été trouvé. Les

élèves expliquent vaguement qu'ils ont trouvé des résultats : périmètre, mesure d'angles. Le professeur les pousse alors à passer à la rédaction : "*alors ça y est ? Ben vous notez tout ça, hein* ". Les élèves s'engagent alors dans la rédaction de leur solution :

> *En prenant la continuation du triangle inachevé et en calculant les 3 angles (75°, 70°, 36°) puis en les soustrayant aux 2 angles du triangle achevé on trouve 36 qui est le périmètre du triangle inachevé.*

t_0+43 Le professeur passe pour inciter à l'affichage du message

(t_0+43 affichage du message de l'équipe 3)

t_0+48 Le professeur repasse pour l'affichage mais note à ce moment l'incertitude des élèves : "*vous êtes sûres de vous quand même ?* ". A quoi une élève répond : "*pas tellement* ".

(t_0+49 affichage du message 6)

t_0+50 Incitation du professeur à terminer : "*essayez peut-être déjà de rédiger ce que vous avez fait* ". Les élèves entreprennent la rédaction d'un nouveau texte (l'observateur relève que rien n'indique pourquoi la solution initiale a été abandonnée).

t_0+55 Injonction du professeur à la rédaction : "*vous voulez quand même essayer de l'écrire ?* ". Mais les élèves reconnaissent : "*on a pas encore trouvé* ".

(t_0+59 affichage du message 1)

t_0+61 Le professeur pousse à l'écriture : "*c'est prêt ? Je vous donne une feuille ; d'accord ?* ". les élèves se lanceront alors activement dans la rédaction d'un texte qui porte sur le calcul de la valeur de l'angle du «bout manquant» sans utiliser de feuille auxilliaire.

(t_0+72 affichage du message 4)

t_0+79 Le professeur accentue sa pression pour obtenir la production d'un texte.

La rédaction du texte ne sera terminée que le lendemain, lors de la deuxième séance. Encore cela sera-t-il le résultat d'une forte pression exercée par le professeur : "*alors vous marquez une phrase, on l'affiche et vous regardez les autres. D'accord ?* ".

c) <u>Equipe 3</u>

t_0+05 Le professeur intervient pour demander aux élèves de relire l'énoncé alors qu'ils se sont déjà engagés dans la rédaction d'un texte indiquant de prolonger les côtés du triangle. Mais ces injonctions ne suffisent pas à leur faire prendre conscience de la contrainte de n'utiliser qu'une seule feuille ; le professeur se fait plus explicite : "*vos camarades sont obligés de prendre une autre feuille ?* ", à quoi les élèves répondent : "*ah, mais, ils disposent d'une feuille... ben ouais, ils ont cette feuille plus celle là* ". Le professeur rappelle alors la contrainte : "*non, une seule*

feuille sur laquelle sera dessiné un triangle ".

Les élèves infléchissent ensuite leur stratégie pour satisfaire cette contrainte, il s'agit de plier la feuille sur laquelle est dessiné le triangle et de prolonger au verso les côtés. Pour la figure qui a été fournie, cela permet effectivement de reconstituer «le bout manquant».

t_0+09 Lorsque le professeur repasse au voisinage de leur groupe, les élèves l'interpellent : " *On peut plier la feuille ? On peut plier comme ça ? C'est autorisé ?* ". Le professeur repart sans rien dire, mais... qui ne dit mot consent : ce silence est pris pour un assentiment d'autant plus que l'enseignant était intervenu explicitement sur la procédure précédente. Dès qu'il s'est éloigné, l'un des élèves insiste : "*mets, mets : on plie la feuille* ".

t_0+15 Les élèves interpellent à nouveau le professeur : "*on va demander au prof si ça va...* ". Ils lui demandent si on peut se servir d'un compas car "*s'il y a un compas c'est pas pour rien* ". Le professeur refuse de prendre position : "*ben, vous vous servez des instruments dont vous avez besoin* ", puis il les incite à rédiger un message. Les élèves, quant à eux, voudraient savoir "*si ça va comme ça ? Si on marque tout ?* ". La «reproduction» ayant été réalisée, un élève déclare "*ben maintenant il faut faire le périmètre* ", ce que le professeur entérine implicitement : "*alors vous calculez le périmètre* ".

Après le départ du professeur les élèves mesurent le périmètre du triangle, mais ils ont des doutes : "*ça me paraît un petit peu simple* ", "*il y a un piège* ", "*et puis il n'y aurait pas de rapporteur* ", "*c'est pour tromper l'adversaire* ", et encore : "*il y a d'autres exercices* ","*s'il nous ont mis deux heures, c'est pas pour rien* ".

t_0+19 Le professeur revient visiter ces élèves pour leur demander s'ils sont prêts à afficher leur texte. A ce moment un élève qui relit l'énoncé et s'arrête sur «n'importe lequel», lui pose la question : "*les autres ils vont avoir le même dessin que nous ?* ", à quoi le professeur répond : "*ça il faut que ça soit vrai pour n'importe quel triangle* ". A la suite de cela les élèves ne vont pas plus longtemps s'intéresser à la mesure des côtés, sans pour autant remettre en question leur solution.

Les interventions suivantes sont des injonctions à terminer la rédaction du texte et à réaliser l'affiche (t_0+28, t_0+30, t_0+34). Les élèves ont quelques doutes sur leur production : "*c'est pas mathématique...* ", "*ce que je comprends pas, c'est qu'on a trouvé sans faire de calculs...* ". Ils sont les premier à afficher leur texte à t_0+43.

A la suite de cela (t_0+52) le professeur les invite à "*noter ce qu'ils pensent* " des autres messages, puis il interviendra à nouveau (t_0+58) pour stimuler leur activité critique, ou pour des raisons de discipline (t_0+72).

d) Equipe 6

t_0+01 L'équipe fait appel au professeur pour lui demander si le problème consiste à reproduire le triangle : "*faudrait qu'on refasse sur une autre feuille et qu'on termine ce qui manque ?* ", ce que le professeur entérine en précisant qu'il faut que les élèves soient d'accord pour faire cela. En fait la proposition et l'interpellation du professeur sont à l'initiative d'un élève, que nous désigneront dans la suite par E3, et n'a pas

été discuté au sein du groupe. E3 développera sa stratégie sans interaction avec les autres élèves de l'équipe, qui par ailleurs ne protestent pas.

t_0+02 Le professeur intervient à nouveau pour souligner qu'il s'agit d'un travail collectif.

t_0+03 E3 interpelle le professeur pour savoir si "*on a le droit de mettre des noms aux angles* ". Le professeur renvoie le groupe à lui même pour cette décision.

t_0+16 E3 interpelle le professeur pour savoir comment lire l'indication des mesures sur le rapporteur. Une discussion s'ouvre entre les élèves qui obtiennent la réponse grâce à l'un d'entre eux qui à la suite de cela s'investira plus dans la résolution du problème aux côtés de E3.

t_0+20 E3 interpelle le professeur pour savoir si la somme des angles d'un triangle est égale à 190°, celui-ci renvoie les élèves à eux-mêmes soulignant qu'il s'agit "*d'un travail de groupe* ". L'un des élèves apporte la réponse, c'est 180°. Cette valeur "*arrange* " E3 qui voulait utiliser cette propriété pour vérifier sa solution. Sûr de son fait il la propose aux autres en rappelant qu'il s'agit d'un travail de groupe pour imposer le passage à la rédaction.

t_0+27 Le professeur passe pour enjoindre le groupe à rédiger sa solution : "*bon, alors, vous avez trouvé donc une solution. Vous abordez le message... vous finissez le message* ". E3 impose la rédaction de sa solution contre une proposition d'un autre élève (reproduction en utilisant

le compas et non le rapporteur) qui poursuivra un moment ses recherches de son côté.

t_0+39 Le professeur s'enquiert de l'avancement du travail de rédaction, il constate qu'il y a une solution concurrente mais il ne renvoie pas le groupe à lui-même pour choisir. De fait il soutient E3 : "*faites en dèjà un, puis après si vous pensez que vous pouvez en faire un deuxième on verra.* "

t_0+45 Le professeur demande aux élèves de rédiger une affiche.

Les interventions suivantes invitent les élèves à la critique des messages déjà affichés (t_0+53, t_0+55, t_0+60).

t_0+66 E3 appelle le professeur pour signaler que l'un des messages est faux : il donne 12,9cm comme mesure du côté complet «au lieu» de 13cm. Le professeur en tire parti pour rappeler la contrainte du problème : "*qui te dit que c'est le même triangle [...] de toute façon c'est pour n'importe quel triangle* ". E3 en déduit qu'il importe peu que les mesures soient justes mais ne remet pas en question sa propre solution : "*regardez «les mesures sont fausses» c'est pas grave ça, puisque vous dites c'est n'importe quel triangle [...] ben y a pas besoin de parler de mesures* ". Ce que le professeur confirme en soulignant une critique qui par ailleurs leur est faite : "*c'est bien ce qu'on te dit, oui, il ne fallait pas parler de mesure dans le message* ".

Ce problème va préoccuper E3 qui en appellera encore au professeur (t_0+68, t_0+70) pour finalement accepter : "*si vous dites qu'il est*

quelconque, y a pas besoin de parler de mesures ".

III.2.3. Remarques de synthèse sur les interactions entre le professeur et les équipes

Les interventions du professeur ont été essentiellement motivées par le souci d'assurer un bon fonctionnement de la situation d'une part en tenant compte du temps disponible, d'autre part en évitant des dérives qui seraient dues à l'absence de prise en compte par les élèves des contraintes fixées : la contrainte «une seule feuille de papier» et l'exigence d'une solution pour «n'importe quel triangle».

Ces contraintes n'ont effectivement pas été prises en compte d'emblée par la plupart des élèves, mais en contre-partie les interventions du professeur constituent un obstacle à la réussite du processus de dévolution du problème. Le comportement de l'équipe 3 en atteste clairement. Cet obstacle trouve un renfort dans l'empressement du professeur à susciter la rédaction d'un message puis son affichage dès qu'il estime que la solution d'une équipe (ou ce qu'il identifie comme tel) a une maturité suffisante. De fait il les décharge ainsi de la responsabilité de la validité de la solution qu'ils proposent. Cet effet est aussi très évident dans l'équipe 2 qui finalement ne «produit» quelque chose que pour répondre à l'exigence pressante du professeur. (Ceci est confirmé par les notes d'observation dont nous disposons pour les équipes 4 et 5).

Les interactions avec l'équipe 6 montrent que le professeur peut être conduit à son insu à apporter un soutien à la position de leader d'un élève. Plus généralement il intervient sans avoir les moyens de connaitre la signification de l'état qu'il prend en compte pour décider d'une

intervention auprès d'une équipe; notamment lorsqu'il considère comme une solution ce qui n'est peut-être encore pour les élèves qu'une proposition.

III.2.4. Les productions des équipes

a) Equipe 1

Les élèves cherchent le périmètre du triangle donné en en prolongeant les côtés, puis ils abandonnent cette solution, sans raisons apparentes, pour une reproduction isométrique du triangle tronqué sur une autre feuille puis sa reconstitution. Ils cherchent ensuite d'autres solutions, peut être plus géométriques ou plus mathématiques, par exemple en utilisant les bissectrices.

Ils ne prendront conscience qu'il s'agit de résoudre le problème pour un triangle quelconque qu'au terme de la période de critique de cette première phase, lorsque le débat dans l'équipe se portera sur la présence de mesures dans le message.

Bien que le problème de "*faire rentrer le triangle dans la feuille* " soit évoqué il ne conduit pas à remettre en question la solution qui a été proposée (fig.2).

La situation de communication invoquée a été perdue de vue par cette équipe qui est surtout animée d'un esprit de compétition vis à vis des autres groupes d'élèves.

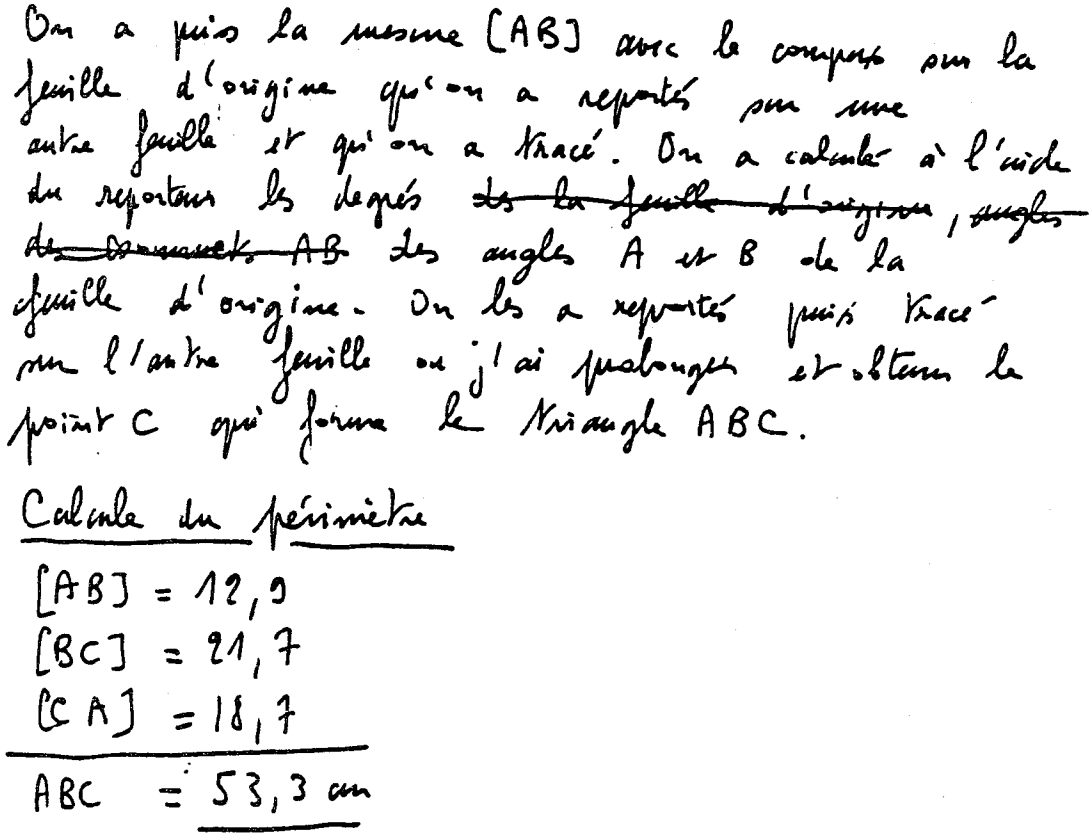


Figure 2

b) Equipe 2

Les élèves cherchent d'abord à reconstituer le triangle en en prolongeant les côtés, puis ils tentent une reproduction isométrique sans y parvenir parce que le triangle peut être trop grand: "*la reproduction ne*

tiendra pas ". Ils cherchent alors à découvrir une «règle» entre les mesures des longueurs et des angles, ou d'un «rapport» entre le triangle entier et la partie connue, ou encore entre le «périmètre» de la partie connue et la mesure de l'angle manquant. L'objectif des élèves est de "*trouver une règle [...] la meilleure et qui soit pas trop compliquée* ".

Tout au long de la résolution du problème, la solution du pliage est présente dans cette équipe, examinée par un élève ou par un autre, mais jamais véritablement discutée collectivement.

Après une première règle que les élèves spéculent mais abandonnent sans s'en expliquer (la mesure du périmètre de la partie connue serait égal à celle en degré de l'angle du bout manquant), ils produisent une solution qui consiste à tirer parti du théorème sur la somme des angles d'un triangle. Puis, à défaut du prolongement interdit (ratures sur leur texte, fig.3), ils proposent la reconstitution du bout manquant par son rabattement sur la feuille où est tracée la partie donnée du triangle, c'est ce que décrit leur message (fig. 3) qui ne sera produit qu'au début de la séance suivante (le lendemain).

On sait que la somme des 3 angles d'un triangle est égale à 180°
On sait que les angles
$\widehat{CAB} = 85°$
$\widehat{ABC} = 60°$
Alors on fait $85° + 60° = 145°$
et $180° - 145° = 35°$
Donc l'angle C doit être égale à 35°

Figure 3

Puis on fait glisser cet angle le long du triangle inachevé. Prendre 1 point de l'une des extremités inachevées du triangle puis à partir de ce point faire un angle de 35° puis faire de même pour l'autre extremité, puis tracer -

Figure 3 (suite)

Dans ce groupe, la situation de communication est bien prise en compte, le message doit être transmis à d'autres élèves, "*qui ne sont pas des élèves de la classe* ", ces autres qui "*n'ont que ce morceau là* ", qui "*vont pas l'inventer l'autre feuille* ".

c) Equipe 3

Les élèves s'engagent d'abord dans la reconstitution du triangle en en prolongeant les côtés, mais cette solution est rejetée par le professeur qui cependant renforce l'idée d'une reproduction. Les élèves conservent donc leur stratégie initiale mais ils l'aménagent, en respectant la contrainte de n'utiliser qu'une seule feuille de papier, en proposant de plier la feuille comme l'indique le texte de leur message (fig.4).

Une première version du texte fait apparaître la mesure du côté connu, elle a été abandonnée pour tenir compte de la contrainte «n'importe lequel». Ce côté initialement désigné par AB est ensuite désigné pour préserver la généralité par "*le côté entièrement tracé* ".

Cette activité des élèves prend bien place dans une situation de

communication invoquée, l'évaluation de la faisabilité de la procédure qu'ils proposent se faisant en invoquant des opérateurs fictifs. La contrainte «une seule feuille» renforce cette prise en compte de la communication avec d'autres élèves.

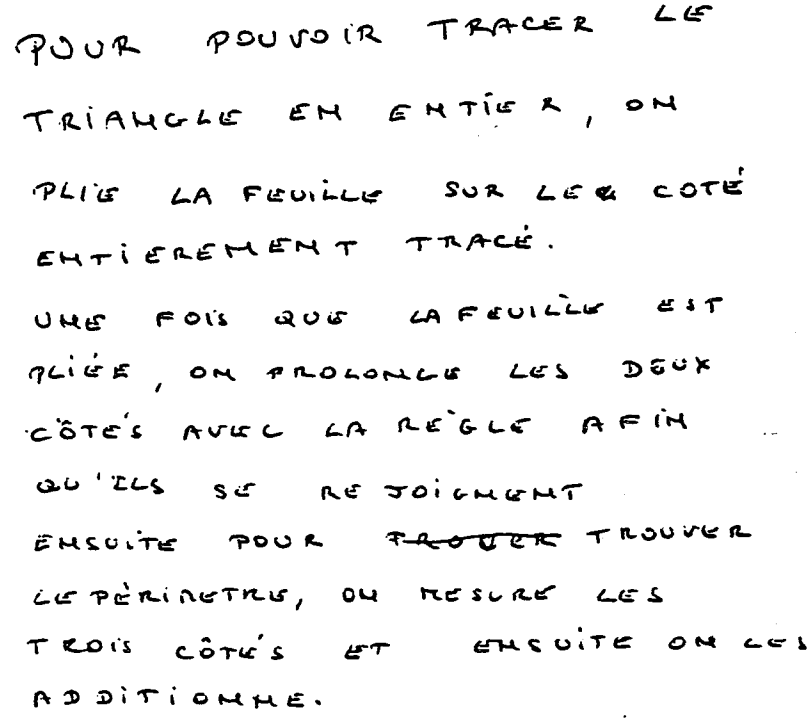


Figure 4

d) Equipe 4

Les élèves s'engagent d'abord dans une procédure de prolongement des côtés du triangle tronqué, mais l'un d'entre-eux s'y oppose : "*mais eux, ils n'ont qu'une feuille : tu sais lire !* ". Le triangle est cependant reproduit pour en calculer le périmètre et disposer ainsi d'un moyen de vérification d'autres solutions éventuelles. La quête pour

d'autres solutions passe par un inventaire des connaissances mathématiques disponibles : médiane, médiatrice, bissectrice, et celui des outils à leur disposition : règle, compas, rapporteur, calculatrice.

En fait une première solution, le pliage, est importée d'une équipe voisine, l'équipe 3. Les élèves l'abandonnent pour revenir à une idée exprimée par l'un d'entre eux : "*il faut tracer les médiatrices car le point de rencontre des médiatrices est à égale distance de tous les points* ". Ils proposent la solution ci-dessous (fig.5) avec beaucoup de scepticisme, mais "*il vaut mieux faire n'importe quoi que rien du tout* ".

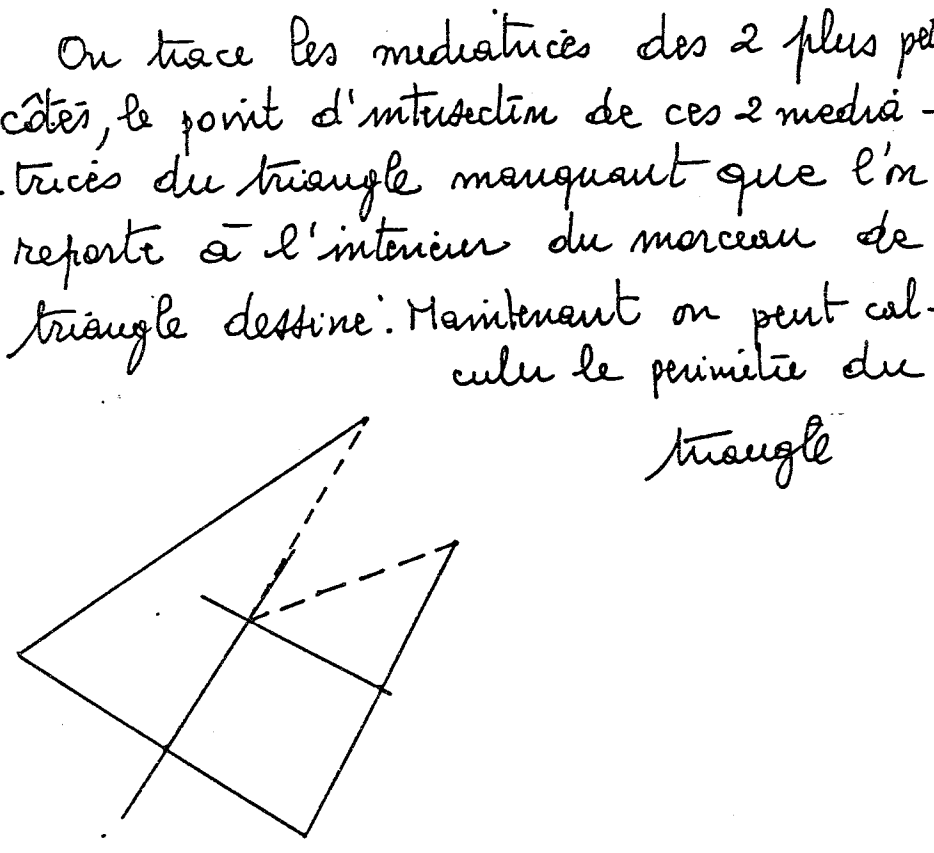


Figure 5

e) Equipe 5

Les élèves s'engagent d'abord dans une procédure de reconstitution du triangle en en prolongeant les côtés, mais ils l'abandonnent à la suite de l'injonction du professeur de relire l'énoncé. Il adopte alors une stratégie de rabattement du bout manquant à l'aide d'une symétrie par rapport au côté connu. Cette solution est élaborée à la suite d'un tour d'horizon de problèmes déjà résolus en classe :

- si ça se trouve il faut tracer une droite, tu sais comme on avait fait le P et le A

- ah, oui, comme on avait fait, une sorte de losange quoi ".

L'objectif est de trouver "*la droite où le sommet sera...* "

- tu sais dans l'interro, on avait un truc comme ça, il fallait trouver le centre... par les trois médiatrices

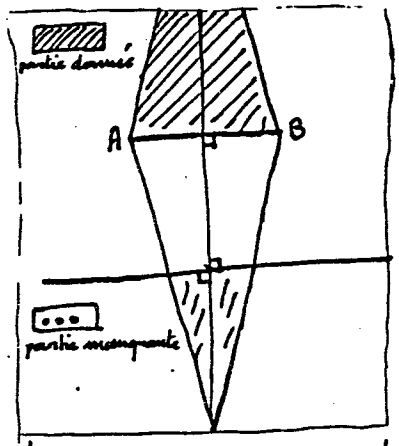
- le sommet il va être sur la médiatrice

Bien que la figure accompagnant le texte soit particulière, le fait que la procédure doive convenir pour un triangle quelconque est toujours présent : "*il faut pas trouver le même périmètre, il faut savoir comment il faut faire. C'est pas pareil* ". Ils font plusieurs vérifications qui réfutent leur solution, ils la proposent cependant (fig. 6).

f) Equipe 6

D'emblée un élève du groupe, E3, dont nous avons rapporté ci-dessus la position de leader, propose une reproduction isométrique du triangle sur une autre feuille : "*il faut le reproduire sur une autre feuille et dire comment on l'a construit* ". Cette procédure n'est pas remise en question, elle donne lieu au message reproduit ci-après (fig.7).

J'AI tracé la médiatrice du Segment [AB] (la basse du triangle). J'ai reproduit la partie donnée (Symétrie). ~~J'ai p~~



Je prolonge ma médiatrice et je rejoints mes deux côtés sur la médiatrice en un seul point. Ce qui me permet de trouver la partie manquante.

Figure 6

On a calculé la somme de l'angle
$\widehat{ABC} = 85°$ $\widehat{BCA} = 36°$ $\widehat{CAB} = 59°$
On a reproduit le segment [AB] = 13 cm
" " " la figure donnée avec le rapporteur et à partir de la figure représentée
On a terminé l'angle C de 36°

AC = 21,5 cm
BC = 18,4 cm
AB = 13 cm

Calcul du périmètre
Somme des 3 segments
= 52,9 cm.

Figure 7

g) Remarques de synthèse sur la résolution du problème

La procédure de reconstitution par prolongement des côtés est utilisée d'emblée par l'ensemble des équipes. En général, elle est abandonnée à la suite de la prise en compte de la contrainte de ne pas utiliser de feuilles auxiliaires, due à une intervention du professeur ou plus rarement à l'initiative des élèves. L'évolution se fait alors vers des stratégies de reproduction : reproduction isométrique ou rabattement.

Dans plusieurs équipes, comme nous l'avions observé lors de l'étude préalable, des équipes se livrent à la recherche d'indices pertinents ou à l'exploration de leur connaissances mathématiques ou du matériel disponible pour élaborer une solution qui paraîtrait peut-être plus «mathématique». Le tableau suivant (fig.8) illustre l'évolution des solutions (la marque // indique une phase d'«exploration», chap.IV, § II.5.2.).

La confrontation de ce tableau à celui que nous avons réalisé pour l'étude préalable (chap.IV, fig.16) montre que les équipes en sont restées à des procédures de reproduction. Il faut voir là la marque des interventions du professeur qui, dès qu'il a identifié que les élèves disposent de ce qui pourrait, à son sens, constituer une solution, est intervenu pour susciter sa rédaction. Or, les premières solutions envisagées par les élèves sont des reproductions.

Comme lors de l'étude préalable, nous relevons l'absence de processus de validation. Mais ici, l'obstacle à la mise en oeuvre de telles processus tient moins à un sentiment d'évidence des élèves qu'à la situation : l'intervention du professeur pour inciter à la rédaction d'un

message dessaisit les élèves de la responsabilité de la décision sur le fait qu'ils disposent d'une solution. Implicitement l'intérêt marqué par le professeur invite à considérer cette solution comme acceptable.

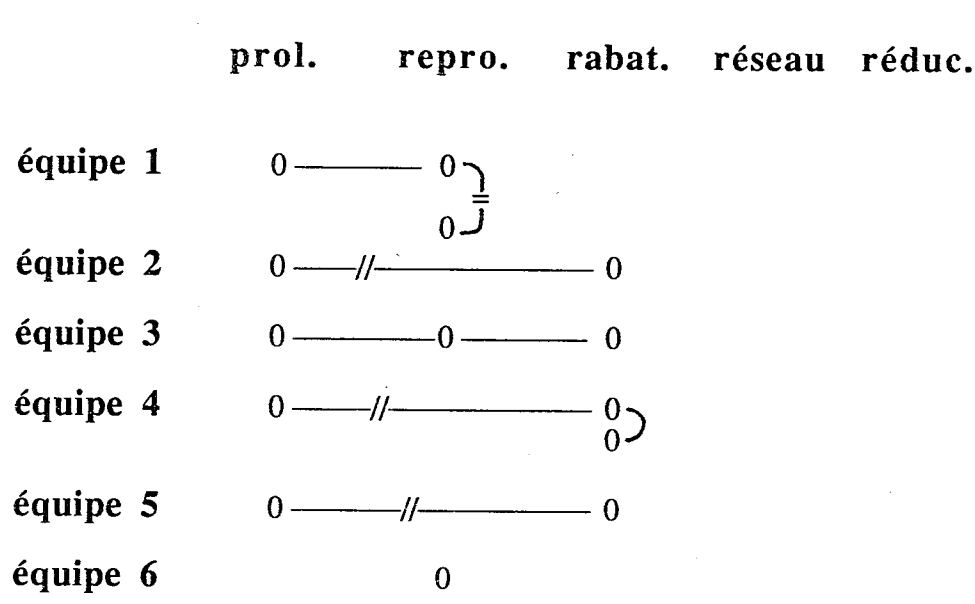


Figure 8

III.2.5. La phase de transition

Le premier message est affiché par l'équipe 3 à t_0+43. Il est suivi de l'affichage des messages des équipes 6 et 1, respectivement à t_0+49 puis t_0+59. Le temps qui reste disponible pour la séance est trés court (environ 20 minutes), par ailleurs les autres équipes semblent proche d'une

conclusion et d'un affichage possible de leur proposition. Le professeur décide donc d'attendre la réalisation de toutes les affiches et de reporter à la séance du lendemain la phase du débat qui doit conduire au message collectif. En fait les équipes 4 et 5 afficheront leur texte à t_0+72 et t_0+80, l'équipe 2 n'affichera sa solution que le lendemain.

Aux premières équipes à avoir affiché leur message, pour combler le temps de leur attente, le professeur demande de prendre connaissance des solutions déjà proposées et de formuler par écrit leurs critiques éventuelles. Il fait lui-même circuler ces critiques parmi les équipes. Au terme de la séance (t_0+80) il élargit cette consigne à l'ensemble de la classe comme une façon de conclure et d'annoncer l'activité à venir :

> *Par écrit vous notez si les messages vous semblent acceptables, par écrit parce que vous risquez d'oublier... par écrit les critiques que vous avez pour chaque message. Après, la classe décidera du message qui sera conservé ou pas. Tel message ne convient pas expliquez pourquoi. Il faut que le porte-parole ait toutes les raisons... Que ce soit solide comme raisons...*

Nous donnons ci-dessous un compte-rendu de la production de critiques pour les trois équipes qui ont disposé d'un temps suffisant, c'est-à-dire les trois premières à avoir produit un message. L'ordre dans lequel nous les présentons est celui dans lequel chacune est entrée dans cette phase.

a) Les critiques dans l'équipe 3

L'équipe rejette les messages qui comportent des mesures : "*si le triangle de l'autre classe... n'a pas le même triangle... eh bien les mesures ne seront pas les mêmes* ". Cette critique reprend celle que ce groupe avait prise en compte pour lui-même lorsque, par souci de généralité, il a écarté l'indication des mesures dans son propre message. Le message affiché par l'équipe 1, qui lui aussi ne comporte pas de données numériques, les conforte dans cette position.

A la suite de l'affichage des messages des équipes 6 et 1, un des élèves note : "*eh ben moi, j'crois qu'on est les seuls à pas avoir pris des mesures. Y a que nous qui auront juste* ". Un autre prétend que cela n'a pas d'importance, proposant de donner au cas particulier le statut d'un exemple générique : "*attends, les mesures ça fait rien parce que regarde : ils remplacent les mesures donc ils peuvent prendre les mesures* ".

Un des élèves du groupe évoque la possibilité d'un très grand triangle, très différent de celui qui leur a été donné, qui mettrait en échec la solution de l'équipe 1. Cet argument n'est pas véritablement explicité ni non plus repris contre le propre message de l'équipe 3.

b) Les critiques dans l'équipe 6

Le message 3 qui a été le premier affiché est bien accepté : "*le groupe 3 a trouvé une solution plutôt simple. Ils ont fait le système du pliage, ils ont prolongé les deux droites A et B pour trouver le point C* ".

Lorsque le message 1 est affiché ils se reconnaissent : "*c'est pareil*

que nous ", mais ils constatent que les mesures proposées sont «fausses». Pour signifier leur critique, ils invoquent la situation de communication, attestant de la prise en compte du caractère de généralité attendu de la procédure qui doit être produite : "*si vous reproduisez correctement, vous trouverez que vos mesures sont fausses et si l'élève absent n'a pas la feuille de départ, il se mélangera les pinceaux* ". Cependant cette critique n'est pas maintenue après que le professeur ait insisté sur le fait qu'il s'agissait d'un triangle : "*si vous dites qu'il est quelconque, y a pas besoin de mesures* ". Elle est abandonnée au profit de remarques sur la forme : "*assez bonne interprétation, mauvais français passant du pronom je à on...* ".

Le message 4 n'est pas véritablement vérifié, les élèves apprécient le recours aux notions mathématiques : "*c'est bien, ils utilisent bien les médiatrices, ce qu'on a fait en cours. C'est bien, c'est bon* ". Pour la même raison le message 5 est d'emblée accepté.

c) Les critiques dans l'équipe 1

Ces élèves ne rentrent véritablement dans l'activité de critique qu'après que l'un d'entre eux ait émis l'idée de faire ce que proposent les messages pour "*voir si ça marche* ". Ils émettent sur les messages 6 et 3 les critiques suivantes :

> message 6 : "*il est presque entièrement constitué de nombres, de chiffres, il n'y a pas beaucoup de phrases* ". et puis "*ils disent ABC alors qu'on connaît même pas le point C. Donc le 6 il est pas bon.* ".
> message 3 : "*on a même pas le résultat du périmètre [...] ouais, c'est vrai, normalement fallait y mettre.* "

Ce dernier message est finalement adopté, mais "*ils auraient pu mettre... non pas la mesure des segments mais le résultat pour savoir s'ils l'avaient bien fait* ". Quant au message 4 il est approuvé : "*c'est pas mal* ", sans plus de commentaires.

d) Remarques de synthèse sur cette phase de critique

Cette phase intermédiaire de critique se déroule dans un contexte un peu incertain. Sauf peut-être l'équipe 1 qui décide de mettre les solutions affichées à l'épreuve d'une vérification, cette critique n'a pas véritablement lieu dans la perspective de la réalisation des opérations décrites par les messages. La référence de cette critique est d'abord la problématique au sein de laquelle s'est trouvée la résolution du problème par chacune des équipes ; en particulier, le souci d'une rédaction pour un cas général qui conduit à poser le problème de l'indication des mesures et du calcul éventuel du périmètre. Ainsi, le problème de la «faisabilité» des procédures décrites par les messages, comme instrument de validation, n'est pas véritablement soulevé.

On peut dire que le problème de la généralisation est pris de façon «formelle», sur des indices «superficiels», l'indication des mesures, et non sur les fondements intrinsèques aux procédures visées, le triangle pourrait être trop grand pour être reproduit. Cette dernière remarque est faite dans un groupe mais n'est pas suivie d'effet.

III.3. La seconde phase : la production d'une solution commune

III.3.1. La remise en situation

Cette seconde phase, qui doit conduire à la production d'une solution commune à la classe, a donc lieu le lendemain de la précédente. Le professeur reconstitue d'abord le cadre de l'activité en rappelant de quoi il s'agit et en proposant le moyen de restaurer la continuité d'un processus qui a été artificiellement interrompu. Il s'agit de remettre les élèves en situation :

> *je rappelle bien le contrat qu'on avait passé, hein, si vous voulez : «envoyer un message à une autre classe». Il fallait rédiger un message à envoyer à une autre classe... très important. [...] On en était là donc, à savoir quel message allait être accepté, quel message allait être rejeté par la classe. [...] Et pour faire ce travail, je vous avais demandé déjà de réfléchir à quel message... quel message vous alliez rejeter dans chacun des groupes. C'est le travail que vous aviez commencé. Alors pour vous remettre un petit peu dans le bain de ce que vous aviez fait hier, je vais vous laisser, je sais pas, 5 à 10 minutes... [...] Il faudrait donc que chacun, dans chaque groupe, réfléchisse à quel message... quel message il va rejeter et pourquoi.*

Le professeur n'introduit donc pas d'emblée le fait qu'il y aura un débat pour une solution collective au problème qui est proposé. L'accent est mis sur le fait que des messages devront être éliminés. Mais les élèves

ayant perdu de vue que l'objectif est celui de la production d'un texte collectif l'enjeu peut devenir non pas de retenir un meilleur message, ou de se servir de ce qui est proposé pour la production d'un meilleur message, mais de critiquer les solutions proposées comme autant de solutions possibles mais par rapport auxquelles les élèves n'ont pas d'engagement. Le professeur, visitant les équipes, a le souci de bien rappeler cette consigne ; par exemple à l'équipe 6 :

> *Pensez bien que tout à l'heure le porte-parole devra expliquer, donner les raisons pour lesquelles tel message est rejeté.*

III.3.2. Les critiques formulées

Nous n'examinerons pas ici l'activité des élèves pendant les 10 minutes qui ont précédé la phase de mise en commun des critiques. Cette activité a pu être très différente d'un groupe à l'autre en fonction de sa cohésion et de son avancement dans la résolution du problème. Certaines équipes avaient dès la veille engagé l'activité critique sur les premiers messages affichés (cf. le rapport de recherche de Lyon, à paraître).

Le professeur jugeant "*qu'il y en a qui ont à peu près terminé, qui ont vu à peu près tous les messages* ", donne à tour de rôle la parole à chacun des porte-parole pour les messages pris dans l'ordre chronologique de leur affichage. Les critiques sont d'abord enregistrées sans que soient permis des commentaires dans la classe, ou des réactions de la part des auteurs des messages concernés : " *chaque porte-parole dira ce qui a été dit dans son groupe* ". Ensuite : "*il faut que toute la classe réagisse, dise si elle est d'accord ou pas [...] Toute la classe doit être d'accord pour savoir si elle rejette ou si elle accepte ce message [...] Il faut*

donner des raisons valables "

Nous rapportons les critiques dans l'ordre où le professeur a sollicité les groupes.

Message 3

équipe 1 : *il n'y a pas de calculs et même pas le résultat du périmètre. On ne sait pas de quel côté il parle, préciser le côté.*
équipe 2 : *ça va parce que ça s'applique à n'importe quel triangle*
équipe 6 : *c'est une solution simple, ils ont adopté le système de pliage. Ils ont obtenu le point C.*
équipe 5 : *pas assez précis*
équipe 4 : *on est pas d'accord car si le triangle est plus grand que celui-là y tient presque toute la feuille. On pourra pas la plier, quoi.*

Après l'énoncé de ces critiques le professeur pose le problème de la décision à prendre : "*finalement alors ce message vous semble... rejeter, convenir ?* ". Devant l'indécision de la classe, il propose de revenir sur cette question plus tard : "*alors on verra après les autres. Bon, on va passer au deuxième* ". Avant de passer à l'énoncé des critiques sur la proposition suivante (message 6), le professeur insiste sur l'objectif de l'activité, le choix d'un message, en même temps qu'il donne les indices d'une évolution possible vers une autre activité qu'il ne précise pas encore :

Il va falloir que vous en choisissiez un, hein, après les discussions. Peut être après un travail, il y aura peut-être autre chose à chercher, mais souvenez-vous bien qu'il va falloir que vous choisissiez, pour envoyer un message à une autre classe. Donc rappelez vous bien de

cet objectif.

Les critiques de la proposition de l'équipe 6 sont ensuite formulées :

Message 6

équipe 4 : *il est mal expliqué car on ne sait pas comment ils trouvent l'angle de 36° là, après on ne comprend pas tellement*
équipe 3 : *si le triangle n'est pas le même, le périmètre ne sera pas le même*
équipe 2 : *c'est pas bon parce qu'ils disent qu'on a reproduit le segment, la figure, sur une autre feuille [...] On a reproduit la figure, puis il fallait se servir que d'une feuille et puis là ils se sont servis de plusieurs feuilles*
équipe 1 : *mal expliqué, et 36° trouvé sans chercher le point C*
équipe 5, ne formule pas de critique

Le professeur ouvre la possibilité aux élèves concernés de s'exprimer : "*les intéressés ont-ils quelque chose à dire ?* ", puis en l'absence de réactions il passe au message suivant : "*on reviendra après... peut-être globalement sur chacun* "

Message 1

équipe 6, ne formule pas de critique
équipe 5 : *ils se servent de deux feuilles*
équipe 3 : *il y a aussi les mesures*
équipe 2 : *eux c'est pareil, ils ont fait comme nous [...] ils ont refait la moitié du triangle... donc ils ont aussi une feuille*

équipe 4 : *ils se sont servis d'une autre feuille alors qu'on en a pas*

Message 4

équipe 1 : *ils disent pas comment trouver C*
équipe 6 : *c'est bien, ils utilisent bien les médiatrices, celles qu'on a fait en cours*
équipe 5 : *bien, mais pour les médiatrices, ils disent pas sur le bout ou sur un autre endroit*
équipe 3 : *il y a un seul côté de connu, on peut pas savoir pour l'autre, pour prendre le milieu*
équipe 2, ne formule pas de critique

Message 5

équipe 1 : *il n'y a pas de base dans un triangle, on comprend pas ce qu'on a reproduit*
équipe 4 : *lui il est faux car si le triangle est trop grand ils auront pas assez de place*
équipe 3 : *c'est un isocèle qu'ils ont fait. Ils disent pas comment calculer le périmètre*
équipe 2 : *c'est mélangé son explication, on comprend pas bien [...] ils ont pris un triangle particulier, pas un triangle quelconque*
équipe 6, ne formule pas de critique

Message 2

équipe 1, ne formule pas de critique

équipe 5 : *c'est une bonne explication on trouvera toujours*
équipe 6 : *c'est pas tellement claire*
équipe 4 : *la fin est pas clair, on sait pas comment ils trouvent le point là*
équipe 3 : *je comprend pas, comment ils ont fait pour reproduire le point*

Les critiques que nous venons de rapporter sont celles qui ont été formulées publiquement par les porte-parole, cela ne rend pas compte des débats éventuels au sein des équipes qui sont à leur origine. Notamment certaines critiques évoquées lors de ces débats ne seront pas formulées (cf. le rapport de recherche de Lyon, à paraître).

Une fois terminé ce tour d'horizon il resterait à faire la synthèse qui permettrait de dégager une solution commune à la classe. Mais toutes les solutions discutées ayant été l'objet de critiques sévères, l'enseignant anticipe une stratégie dont la maturation chez les élèves pourrait être longue : il s'agit de dégager, au-delà des solutions elles-mêmes, des «idées» qui soustendent certaines d'entre-elles et qui pourraient permettre de conduire à une solution nouvelle. Il pousse la classe dans ce sens :

si on fait le bilan de tout ce qui a été dit... qu'est-ce que vous allez faire ? Vous avez un message à envoyer, qu'est-ce que vous proposez de faire ? Bon est-ce qu'il y en a un qui vous semble complètement satisfaisant ? [...] Dans ce qu'il m'a semblé entendre, il n'y en avait point qui était parfait, hein ? Il n'y en avait point où tout le monde a dit «eh bien c'est parfait ! Ca va très bien ... c'est celui-ci qui va très bien, qui marche, qu'on va envoyer tout de suite». Bon qu'est-ce que vous proposez de faire ?

Des élèves de l'équipe 1 proposent *"un vote à main levée "*, mais ils ne sont pas suivis par le professeur qui poursuit :

> *malgré tout, il y a quand même des idées qui semblent intéressantes dans plusieurs messages, alors je pense qu'il y aurait là certainement à retravailler sur certaines idées. Alors qu'est-ce que vous proposez comme idée intéressante sur laquelle on pourrait essayer de s'orienter et de travailler ?*

Les élèves proposent la reprise de certaines solutions mais cette tentative paraît vaine au professeur, il engage donc résolument les élèves dans une autre direction :

> *non. Je ne vous demande pas de numéro de message, je demande des idées, hein ? Je vais marquer au tableau ce que vous me dites. On verra après on choisira.*

Remarques de synthèse sur les critiques formulées

Outre les critiques de l'expression des messages ou liées à leur déchiffrage, la plus grande part rend compte d'abord des questions que se sont posées les équipes pendant la résolution du problème : critiques portant sur le nombre de feuilles utilisées ou sur la présence d'indications numériques. Ici pourrait se trouver l'origine d'un débat sur la validité de chacune des solutions pour tout triangle, une critique formulée par l'équipe 4 sur les messages 5 et 3 pouvant alors remettre en question les procédures de reproduction en soulevant l'objection d'un triangle «trop grand».

Il faudrait pour cela que le débat puisse se développer et qu'il n'en reste pas à l'inventaire qui a été fait. Le vote proposé par un élève, et prévu dans la construction a priori de la situation expérimentale, aurait été un moyen de poursuivre et d'organiser le débat, par exemple par des explications de vote. Mais le professeur s'y refuse parce qu'il ne perçoit pas que l'issue puisse en être acceptable : "*je ne voyais pas très bien sur qui ils allaient voter, c'est ça qui m'ennuyait... sur quels critères cela allait être* ".

De fait, le processus de dévolution ne peut avoir lieu, non parce que les élèves ne prendraient pas la responsabilité de l'évaluation de leurs solutions, mais parce que le professeur s'y refuse au nom de sa propre responsabilité quant à la nature mathématique des activités des élèves dans la classe.

III.3.3. Une nouvelle période de résolution

Les élèves proposent, comme cela a été demandé, des idées à partir desquelles la résolution du problème pourrait être reprise :

équipe 4 : *les médiatrices*
Professeur : *c'est-à-dire les médiatrices ça te fait penser... le message 5... alors peut-être les médiatrices*
équipe 2 : *les angles*
Professeur :*vous pensez que les angles ça peut-être une idée intéressante, on va quand même la noter*
équipe 1 : *la dimension des segments*
Professeur :*il me semble que j'ai entendu pas mal de chose qui vous semblent convenir, donc il faudrait reprendre ces idées... pas*

repartir depuis le départ... je veux bien que vous repartiez depuis le départ, mais enfin ce n'est peut-être pas très utile
équipe 6 : *le pliage était bien...*
Professeur : *le pliage de la feuille était bien ?*
équipe 2 et 4 : *ça dépend du triangle*
Professeur : *vous dites ça dépend de la grandeur de la feuille... ça dépend du triangle... bon, on vous avait bien dit que c'était pour n'importe quel triangle ? [...] Je veux bien marquer pliage. Est-ce que vous pensez que le pliage ça peut être une méthode ? Bon pliage...*
équipe 6 : *angle et mesure des segments*
Professeur : *alors donc les angles plus la mesure des segments*

A partir de cela le professeur relance l'activité de résolution du problème dans la classe en cherchant à la fois à favoriser la direction qui lui paraît la plus féconde et à assurer que l'ensemble des idées proposées soient prises en compte :

il y en a qui m'ont dit que les médiatrices ça semble intéressant, donc essayer de retravailler sur les médiatrices... en utilisant donc les médiatrices essayez de résoudre le problème qui vous est posé... on va refaire un message, si vous voulez refaire le même travail que vous avez fait hier... mais en partant pas tout à fait comme hier, car vous avez déjà des idées qui sont sorties. Alors on va essayer de répartir le travail, je ne sais pas là moi... il y a trois idées...

Ces trois idées sont :

- l'utilisation des médiatrices,
- la mesure des angles et des segments,

- la reproduction du triangle.

Il ne reprend donc pas en compte la proposition du pliage.

Les équipes reprennent la résolution du problème, mais avec une certaine incertitude quant à l'objectif de cette activité. Certaines tentent effectivement d'exploiter les «idées» qui ont été proposées, d'autres repartent des messages affichés ou reconsidèrent leur propre solution.

Le professeur a des difficultés à gérer cette hétérogénéité, il intervient dans l'activité des équipes de façon très différente selon l'évaluation qu'il fait de la fécondité des tentatives qu'il relève ; ainsi à propos du message 3 :

- pour l'équipe 1 qui le critique : "*il faut que ce soit un certain triangle* ", et propose un contre-exemple, le professeur suggère de réserver cette remarque : "*gardez bien votre contre-exemple, quand on en reparlera* ". Faisant allusion ainsi à une poursuite du débat critique sur les messages.

- pour l'équipe 6 qui le soutient : "*le système du pliage c'est vraiment précis* ", le professeur réoriente l'activité passant outre cette remarque : "*de toutes façons là, pour l'instant c'est pas le travail que vous aviez à faire. Ce que vous avez à faire, c'est chercher de nouvelles idées pour arriver à un message qui convienne* ".

Dans la plupart des équipes les élèves sont dans ce que nous avons appelé une phase d'exploration, mais sans grands résultats, de leurs connaissances mathématiques éventuellement en relation avec le problème ou d'éléments remarquables d'un triangle, notamment les médiatrices. Mais la plupart d'entre eux se décourage. Le professeur s'appuie sur les équipes 1 et 2 qui paraissent avoir suffisamment avancé et pouvoir

articuler des propositions. Il les incite fortement à rédiger une affiche. La nouvelle proposition de l'équipe 1 consiste en fait, tenant compte de la contrainte sur le nombre de feuilles, à modifier leur solution initiale en faisant réaliser la reproduction du triangle non sur une feuille auxiliaire mais au dos de la feuille d'origine.

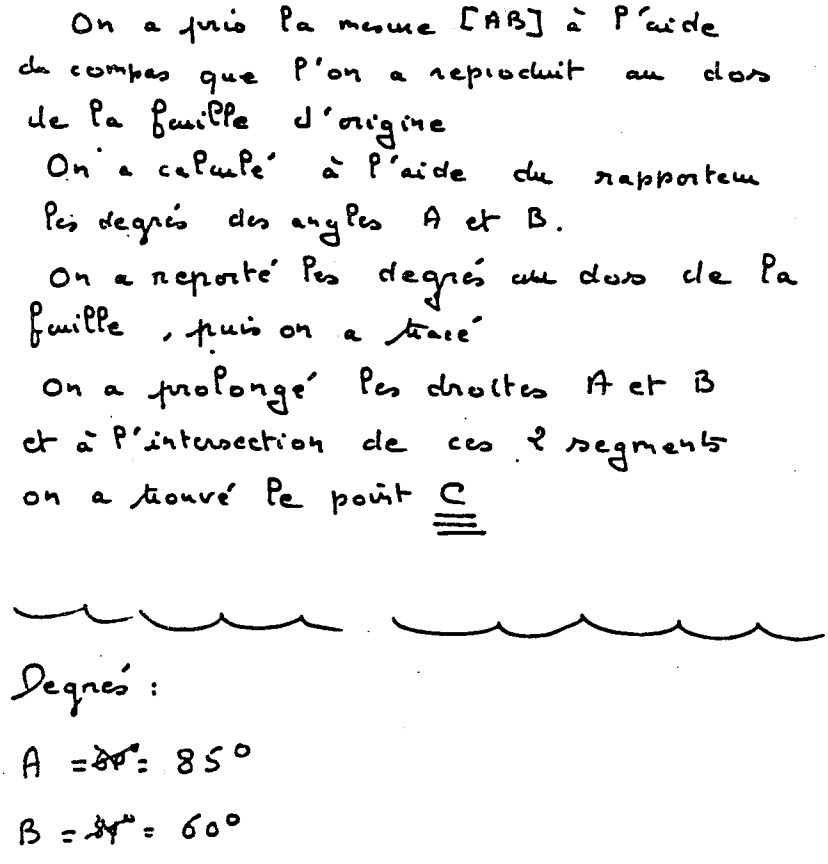
L'équipe 2 élabore une nouvelle solution à partir de la critique du message 3 : "*le pliage, comme ça on pourra leur montrer que si le triangle est trop grand, eh ben on pourra pas plier* ". La remarque à l'origine de leur nouvelle production est "*que le pliage ça marche quand c'est la moitié de la feuille* " :

- on leur dira que le système de pliage marche que si le triangle veut bien rentrer dans la feuille.
- ça ne marche pas quand le triangle est vraiment trop grand, un peu plus grand que la moitié de la feuille
- si le triangle est ... là ça marche [...] bien sûr si les angles sont très rapprochés les uns des autres
- si ça a un rapport avec les angles
- les angles doivent être inférieurs à une certaine mesure [...] il faut que ce soit inférieur à 150°
- le système de pliage marche quand les deux angles additionnés sont inférieurs à 155° [...] c'est pour ça que le triangle d'origine dont les angles font 87° et 60°... 147° inférieur à 155°, ça marche
- pour que ça marche il faut que les deux angles additionnés soient inférieurs à 160°
- si ça fait 161° ça ne marche pas, pourquoi ?
- parce que.

Ainsi l'équipe 2 en est à la formulation d'une conjecture, elle entrerait peut-être dans une démarche de preuve si la pression du professeur pour que cette «solution» soit rédigée et proposée dès ce moment n'était pas très forte : "*ça peut être intéressant... ce que vous faites là comme construction, il faudra l'expliquer* ". Les élèves en resteront là.

III.3.4. La fermeture de la situation

Dès que l'équipe 1 a terminé la rédaction de son texte (fig.9), pressé par le temps (74 minutes se sont écoulées), le professeur demande son affichage et propose à la classe de revenir à une activité de critique.


On a pris la mesure [AB] à l'aide du compas que l'on a reproduit au dos de la feuille d'origine
On a calculé à l'aide du rapporteur les degrés des angles A et B.
On a reporté les degrés au dos de la feuille, puis on a tracé
On a prolongé les droites A et B et à l'intersection de ces 2 segments on a trouvé le point C

Degrés :
A = 85°
B = 60°

Figure 9

Le professeur :

bon, il y a un nouveau... enfin un message qui a été un peu changé là. Donc s'il y en a qui ne sont pas entrain d'écrire quelque chose, qui veulent réagir là-dessus... qui ont quelque chose à dire là-dessus, vous le regardez... lisez

Les équipes expriment alors des critiques, sauf l'équipe 2 qui est occupée à la rédaction de son texte :

équipe 4 : *c'est juste*
équipe 6 : *c'est comme nous*
équipe 5 : *comme méthode ça marche, mais pas assez précisé... lesquel c'est A, B et C*
[équipe 1 : *il n'y a qu'un seul segment tracé*]
mais les deux autres pour les différencier ?
équipe 3 : *c'est bien*

Le professeur reprend alors au vol une affirmation venue d'un élève : "*le message... il te semble convenir pour n'importe quel triangle ?* ". A la suite de quoi l'équipe 1 intervient pour préciser : " *plus petit que la feuille* ", ce qu'ils proposent de rajouter à le suite de leur texte. Le professeur les reprend : "*tu viens de rajouter qu'il soit plus petit que la feuille, mais s'il est plus grand ?* ". Cette solution aménagée ne lui convient manifestement pas, il tente alors de relancer le débat pour obtenir le rejet de cette solution :

-bon alors, il vous semble correct ce message ?
-vous avez plus rien à dire là-dessus ?
-il marche pour n'importe quel triangle ?

-il marche ? Il convient ? Vous avez vérifié ?
-c'est le message qu'on va communiquer à une autre classe ?

Les réactions des élèves ont lieu dans une certaine confusion. Le professeur n'attend pas que ce débat s'organise, il sollicite l'intervention de l'équipe 2 dont il attend qu'elle propose sa propre solution. A défaut de pouvoir produire un texte qui serait affiché il demande à ces élèves de s'expliquer oralement. Les élèves de l'équipe 2 sont très intimidés. Ils n'arrivent pas à se faire entendre. Le professeur reprend une à une leurs phases et les reformule à l'intention de la classe :

vous avez fait des pliagezs ?
successifs ? Non ? C'est ça ?
[...] donc leur système marche jusqu'à ce que les angles fassent [...] 160°, c'est ça ? Oui ?
je crois qu'en fait c'était parti du fait que ça marchait pour n'importe quel triangle
[...] vous aviez dit que le pliage ne marche pas pour n'importe quel triangle
[...] ça marche quand le triangle n'est pas trop grand, alors elles ont essayé de trouver un système qui marchait quand les triangles étaient de plus en plus grands [...] et c'est pour ça qu'elles ont trouvé jusqu'à ce que les 2 angles fassent [...] la somme fasse 160°
[...] elles sont parties d'un très grand triangle
[...] bon, elles ont plié donc, et continué, et puis ben là, ça se... ça se coupe à peu près au bout, hein ? Parce que c'est 160° et si ça se coupait pas au bout qu'est-ce qui se passerait ?
[...] bon, c'est peut-être une méthode, oui... bon, alors est-ce que votre... ce système vous semble bon ?

[...] essayez de voir sur un dessin si ça marche tout le temps, parce que moi je vois qu'il reste 5 minutes et je ne sais pas du tout quel message vous allez envoyer !

Les équipes se remettent quelques instants au travail à la suite de cette présentation. Le professeur circule parmi elles pour les stimuler. Mais très rapidement il s'adresse à nouveau à la classe pour solliciter qu'une décision soit prise. Il est pressé par le temps :

bon alors, qu'est-ce qu'on va faire ?
qu'est-ce que vous allez faire ?
qu'est-ce que vous décidez de retenir comme message ? De rejeter ?

Les élèves s'expriment tous en même temps, dans une certaine confusion. Ils ne disposent pas de processus collectif de décision. Des remarques telles que "*elles sont fausses* ", "*pas assez précis* ", "*ils disent pas comment trouver le périmètre* ", sont faites ; mais elles ne sont reprises ni par le professeur, ni par l'ensemble les élèves.

Finalement le professeur prend acte qu'aucune solution n'est retenue, ni le texte de l'équipe 1, ni la proposition formulée oralement par l'équipe 2. Cette situation ne connaîtra pas de suite ultèrieurement, la classe reviendra à l'ordinaire de son activité sans que les élèves manifestent d'intérêt pour ce qui leur a peut-être paru être un intermède dans le cours habituel des choses.

III.4. Conclusion

Deux contraintes ont essentiellement pesé sur la mise en oeuvre de la séquence que nous avions conçue :

- d'une part une contrainte temporelle qui conduit le professeur à des interventions qui ont pour but de garantir que l'ensemble du processus pourra se dérouler à l'intérieur de l'espace de temps qui a été prévu (deux séances d'environ 1h30) et qui ne peut être modifié.

- d'autre part son désir d'une issue positive. L'ensemble du processus doit, quoiqu'il en soit, se terminer avec la production d'une solution qui soit acceptable aux yeux de l'enseignant. Cette contrainte que nous n'avions pas envisagée véritablement est le corollaire de ce que nous pourrions appeler la **responsabilité épistémologique de l'enseignant.**

Ces contraintes ont pour conséquence, issue des décisions que le professeur prend pour les respecter, de s'opposer au processus de dévolution de la situation-problème au cours de la première phase. Pour assurer que le temps nécessaire ne sera pas trop important, il intervient pour que soient faites des propositions dès qu'il estime que les productions des élèves ont une maturité suffisante. Par ailleurs les interventions visant à obtenir la prise en compte de la contrainte sur le nombre de feuille de papier, ou de l'expression «n'importe quel triangle» de l'énoncé, entretiennent la relation de dépendance des élèves à une évaluation du professeur sur leurs productions. Ils n'ont, de fait, pas de raisons d'entrer dans un processus de validation.

Ces mêmes contraintes constituent un obstacle au fonctionnement de la deuxième phase. Après que les critiques aient été successivement

produites, le professeur ne peut laisser le débat se développer parce qu'il ne perçoit pas que l'issue puisse en être positive au moins à l'intérieur de l'espace de temps dont il dispose. Ainsi il se refuse à procéder à des votes sur les solutions proposées, alors même que certains élèves le suggèrent. Le débat, selon l'analyse que nous en faisions a priori, devait permettre soit de retenir une solution (éventuellement amendée), soit de fournir les bases d'une reprise de la résolution en posant le problème d'une solution valide quelle que soit la taille du triangle. Le professeur tente de faire l'économie de ce processus, dont il évalue le résultat trop incertain, en demandant aux élèves des «idées» pour aller au-delà de ce qui a été proposé. D'une certaine façon, il peut penser préserver une **histoire**, en tant que suite d'évènements : première proposition de solutions, critiques, suggestions de nouvelles pistes. Mais la signification cognitive des comportements des élèves est profondément transformée. On reconnaît là un phénomène du type de celui désigné par Brousseau (1986, p.289) sous le nom d'«effet Topaze» : «la réponse que doit donner l'élève est déterminée à l'avance, le maître choisit les questions auxquelles cette réponse peut-être donnée. Evidemment les connaissances nécessaires pour produire ces connaissances changent, leur signification aussi». Ce phénomène, comme le souligne par ailleurs Brousseau, a pour origine essentielle la gestion par le professeur de son incertitude sur l'issue des situations d'enseignement en termes de production de comportements de réponse des élèves.

Du côté des élèves les objectifs de la situation sont confus. De la production d'une solution collective préparée par l'activité des équipes, ils passent à une activité d'évaluation des productions qui peut paraître d'abord une confrontation des performances de chacun, le contexte de communication invoqué devenant une mise en scène sans substance au

regard du problème à traiter. Enfin, les productions ne semblant satisfaire personne, il faut bien se remettre à la tâche, reprendre la résolution, mais le statut de cette nouvelle phase est incertain. Des équipes cherchent à exploiter les «idées» qui ont été recensées, mais elles ne débouchent pas ; d'autres préfèrent repartir des solutions déjà proposées ou de leur propre solution. De cette confusion résulte une nette démobilisation des élèves qui n'échappe pas au professeur qui confie à un observateur : "*là ils ne cherchent plus, ils sont prêts à accepter n'importe quel message... alors qu'ils avaient des arguments contre... ils ne les ressortent pas* ".

L'issue du débat à venir paraît dans ce contexte encore plus incertaine qu'auparavant, le professeur confie à l'observateur qui tient la chronique de la classe : "*ce que j'ai peur,c'est que s'il y a une mise au point, ils ne s'écoutent pas tellement [...] c'est ça le problème, il y en a toujours qui ne s'écoutent pas* ". Par ailleurs, il voit avec inquiétude se maintenir des solutions qu'il ne souhaite pas : "*dans l'équipe 1, ils sont susceptibles de faire la reproduction, ça pose problème* ". C'est vraisemblablement là la raison qui le pousse à obtenir que l'équipe 2 propose sa solution qui, à défaut d'être correcte, permet de poser le problème de la taille du triangle.

IV : Seconde observation : ouverture du temps

IV. 1. L'ouverture du temps, condition de la dévolution

La mise en oeuvre d'une seconde observation a été décidée en reprenant dans ses grandes lignes le dispositif déjà utilisé, mais en tirant parti des leçons de la première observation. Une première modification porte sur l'organisation de la séquence, elle consiste en l'ouverture du temps dont la gestion par le professeur nous est apparue comme le principal obstacle à la dévolution de la situation-problème et la production de solutions valides, au moins aux yeux des élèves. La seconde modification porte sur le niveau scolaire, cette nouvelle observation a lieu en classe de troisième. En effet, les observations des élèves de quatrième (chap.IV, et ci-dessus § III) peut laisser penser que le manque, a priori, d'outils mathématiques adaptés constitue un obstacle à l'apparition des comportements attendus. Ce ne devrait pas être le cas des élèves de troisième qui ont notamment eu un enseignement de la démonstration. Par ailleurs, comme nous l'ont montré des sondages faits en troisième et en seconde, cela ne devrait pas modifier le caractère ouvert du problème retenu. L'hypothèse qui soustend cette modification est que la démonstration devrait être mobilisée, au cours du débat, comme un outil adapté pour valider les solutions proposées.

La modification de l'organisation de la séquence consiste en deux

décisions sur la forme de l'intervention du professeur dans le fonctionnement du dispositif.

IV.1.1. Une activité isolée des équipes.

Les équipes ont la complète responsabilité de décider du moment où elles considèrent leurs solutions comme acceptables. Le professeur ne devrait de ce fait intervenir en aucune façon dans leur activité. Cette mise en retrait du professeur sera attestée par le fait qu'il ne circule pas dans la classe et qu'il n'exerce aucun contrôle sur le déroulement et l'organisation de l'activité des élèves. Il s'agit d'une rupture importante avec les habitudes de la classe (en dehors des situations d'évaluation).

On prend ainsi le risque que des équipes s'engagent dans des directions totalement erronées, notamment en ne prenant pas en compte la contrainte sur le nombre de feuilles de papier ou sur la validité de la solution pour «n'importe quel triangle». Pour limiter cette dérive possible, chaque équipe dispose, dans cette modalité, d'une consigne écrite. Nous estimons que dans le cas où certains groupes s'égareraient ainsi, leur solution serait remise en question lors du débat collectif qui devrait susciter un retour sur la consigne pour la formulation des critiques.

Le fait que le temps soit ouvert explicitement du côté des élèves ne signifie pas pour autant qu'il l'est effectivement, au sens où nous n'aurions pas a priori d'idées sur la durée de la phase de résolution. L'étude préalable (chap.IV) et la première observation permettent de penser que dans le cours de la première heure trois ou quatre solutions seront disponibles. L'objectif de la situation étant une production commune à la

classe, il n'est par ailleurs pas nécessaire que toutes les équipes parviennent à une solution. En revanche, nous sommes assurés que toutes se seront suffisamment appropriées le problème, en s'efforçant de le résoudre, pour qu'elles puissent s'engager dans un débat sur les propositions faites. Rappelons que le désir affirmé par le professeur lors de la première situation, que toutes les équipes donnent une solution, était lié à sa pratique et à son évaluation de ses relations aux élèves, non aux contraintes de fonctionnement de la situation elle-même.

Ainsi nous pensons que la phase initiale de résolution peut correspondre à la première séance (environ 50 minutes) dans la mise en oeuvre du dispositif expérimental.

Comme dans la première modalité lorsque les premières solutions auront été affichées, et alors que toutes les équipes n'auront pas terminé, le professeur organisera un échange de critiques par écrit.

IV.1.2. Ouverture de la durée du débat.

Au niveau du débat le temps est ouvert par le fait que nous ne décidons pas a priori du moment où il devra se terminer. La fin du débat, c'est-à-dire la fin du travail de production d'une solution commune à la classe, doit avoir lieu sur une décision prise collectivement.

Le débat sur les diverses propositions sera géré pour permettre des retours sur les arguments formulés. Pour cela, le professeur organisera **la mémoire de la classe** en notant au tableau les arguments successifs (Capponi 1986). Chaque argument sera discuté par la classe, y compris par l'équipe productrice du message. Le terme du débat sur chacun des

messages sera le fait d'une décision collective, attestée par le professeur, suivant laquelle il sera accepté, refusé ou retenu sous la réserve de modifications.

Le rôle du professeur dans cette situation est de distribuer la parole et de s'assurer que les décisions sont clairement prises par la classe ; il exprime ce qui paraît être une synthèse des positions des équipes et l'inscrit au tableau si aucun des élèves ne s'y oppose. Comme dans la première modalité, chaque équipe s'exprimera par l'intermédiaire d'un porte-parole dont le rôle a été précisé : il doit rapporter la décision ou le commentaire de l'équipe et si l'unanimité n'est pas faite, rendre compte des points de vue différents.

Rappelons que si plusieurs messages subsistent comme également acceptables :

- ou bien certains d'entre-eux proposent une stratégie de reproduction, dans ce cas le professeur s'appuyant sur la situation de communication invoquée propose une mise à l'épreuve sur un nouveau cas de figure (ce qui suppose que la contrainte «n'importe quel triangle» a été prise en compte). Ce cas de figure, un triangle «trop grand» devrait conduire au rejet de ces solutions.

- ou bien aucune contradiction ne peut être légitimement apportée, le professeur demande alors aux élèves de faire un choix. Le message retenu est celui qui emporte le plus grand nombre d'adhésions. Nous ne préjugeons pas dans ce cas des arguments qui seront avancés.

IV.1.3. La mise en oeuvre du dispositif expérimental.

L'observation dont nous présentons ci-dessous l'analyse a eu lieu

dans un collège de l'académie de Lyon, dans le département de l'Ain. La mise en oeuvre a les mêmes caractéristiques que celle de la première observation, en tenant compte des modifications ci-dessus.

La classe de troisième observée est organisée, par l'enseignant qui recourt habituellement au travail en groupe, en 5 équipes (A, B, C, D, E) de 4 élèves. Nous avons prévu d'observer le processus, en fonction des disponibilités de l'équipe de recherche et des contraintes de l'enseignant, au cours de trois séances d'environ 50 minutes ; la première séance étant consacrée à la résolution du problème en équipe, les suivantes au débat (en fait c'est au cours d'une quatrième séance, pour laquelle nous ne disposerons que du compte-rendu de l'enseignant, que la séquence se terminera).

Les données sur les trois premières séances ont été recueillies avec les mêmes moyens que lors de l'observation du dispositif dans la première modalité.

Nous nous limiterons ici à l'analyse du débat lors des séances 2 et 3. Le processus de production d'une solution dans chaque équipe n'a pas présenté de particularités par rapport à ce que nous avions pu observer lors de l'étude préalable (chap.IV) ou lors de la première expérimentation. Quatre équipes sont parvenues à une solution. Une équipe (E) a rédigé ce qu'elle a fait, à la demande du professeur, afin de marquer sa contribution à l'effort collectif.

IV. 2. Première période : la critique des solutions produites.

Dans la suite, les interventions des équipes sont rapportées en les identifiant relativement au protocole ; ainsi, C9 désigne une intervention de l'équipe C qui est la neuvième dans le protocole.

IV. 2. 1. Le message A : une solution trop simple

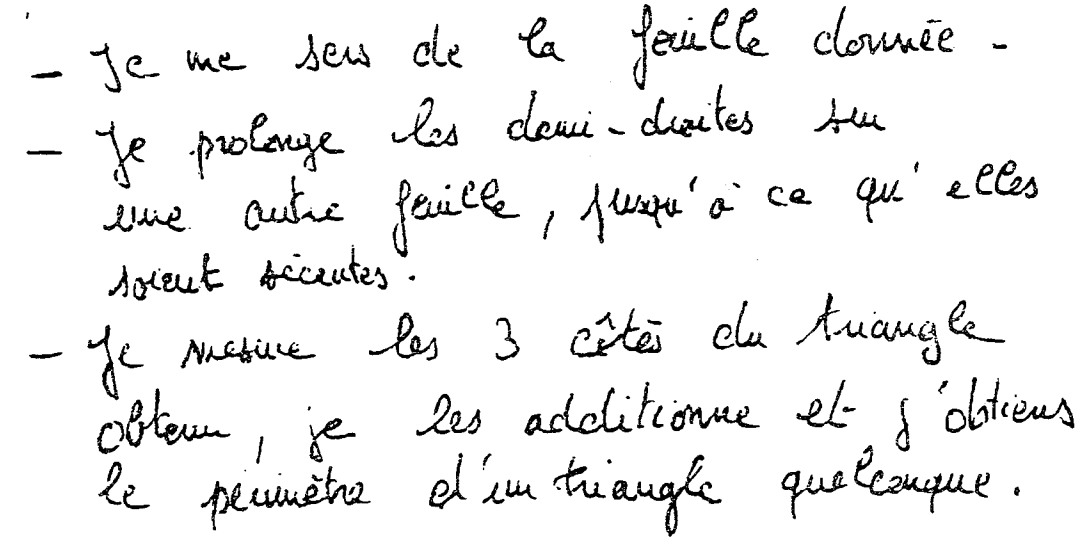


Figure 10

Cette proposition est acceptée par deux équipes :

C9 : *on accepte le message car nous pensons qu'il est réalisable et qu'il marche dans tous les cas*

D79 : *on est tous d'accord pour l'accepter [...] car il est simple,*

clair et facile à réaliser

Mais il est rejeté, pour les mêmes raisons, par une équipe :

B20 : *nous refusons tout le message car nous le trouvons trop facile. Les mesures ne sont pas toujours justes*

Enfin une équipe propose des modifications :

E53 : *On est trois à faire une modification. C'est parce que, après "jusqu'à ce qu'elles soient sécantes ", et après c'est :"je mesure les trois côtés du triangle obtenu". On pourrait penser, pour quelqu'un qui a jamais calculé un périmètre que c'est les côtés qu'on vient de tracer.*

Le débat contradictoire, qui porte d'abord sur l'argument de simplicité, atteste de la référence au contrat didactique : parce que cette activité de résolution de problème a lieu dans la classe de mathématique, la solution doit être d'une certaine complexité, sans quoi elle offrirait peu d'intérêt :

B224 : *Je trouve que c'est **trop** simple... je veux dire, ils démontrent pas comment trouver le périmètre d'un triangle, ils disent juste... ils tracent des droites. Tout le monde peut le faire.*

La solution adoptée doit attester de connaissances mathématiques, conformément aux habituelles fonctions didactiques de la résolution de problèmes qui a d'ordinaire une fonction d'évaluation. En revanche, on peut remarquer que la contrainte de n'utiliser qu'une seule feuille de

papier, qui pourrait ici être légitimement rappelée, n'est pas utilisée pour critiquer ce message (l'observateur de l'équipe B rapporte qu'elle est cependant apparue dans l'équipe sans pour autant être rapportée au niveau de la classe).

Le soutien apporté à cette solution est de l'ordre du bon sens :

E275 : *s'il dit que c'est trop facile, c'est qu'il a réussi à le faire, donc il n'a pas à marquer qu'il a refusé.*

A225 : *ben oui, justement, c'est pas parce qu'il est simple qu'on peut pas le réaliser, au contraire.*

Mais d'autres élèves sont gagnés à l'argument de l'équipe B :

C230 : *pour un problème comme ça c'est trop simple [...] quant on voit ce message, pis quand on voit celui-ci [messageB] on pourra deviner que les maths c'est des machins compliqués.*

Un second argument contre cette solution est celui de la précision des mesures : *l'inconvénient c'est les mesures* (C241). Cet argument est jugé trop général : *c'est toujours faux les mesures* (A245). Mais il est repris par B à l'appui de sa critique initiale :

B250 : *ben justement, c'est pas simple, clair et facile. Quand on met deux trucs comme ça, on n'aura jamais les mêmes mesures. Ça peut pas être clair.*

L'équipe B trouve alors un renfort dans de nouvelles critiques qui, d'une part, reprennent cet argument de la réalisation :

E336 : *«facile à réaliser», moi j'trouve pas que c'est vrai parce que bon, ben, avec deux feuilles comme ça, ça bougera tout le temps sauf s'ils les scotchent*

D338 : *il n'y a pas de scotch sur la table*

et d'autre part soulèvent des arguments de preuve :

E356 : *est-ce que quelqu'un a cherché si c'était réalisable dans tous les cas*

C363 : *si ils ont prouvé ce qu'ils disent, y s'appuient sur des exemples*

A364 : *non, on s'appuie pas sur des exemples seulement. Ça tombe sous le sens presque [...] quand on a un dessin sur une feuille, c'est pas difficile de prolonger ou de reproduire*

C367 : *non, je suis pas d'accord, parce que par exemple, si on a un triangle qui, dont les ... les bouts ne peuvent pas se rejoindre, juste à l'infini, je sais pas où ... ton mètre de papier, y va ...*

E368 : *ben oui, imaginez qu'y ait deux côtés parallèles ... ben dans ce cas là*

$A_1$369 : *a ce compte là, c'est pas un triangle*

E370 : *ben d'accord, mais tu as quand même comme sur la figure trois côtés, trois segments*

D372 : *ça c'est le problème de la grandeur, c'est ça [...] Si c'est trop grand ce sera difficile à réaliser*

$A_1$378 : *non, pas dans tous les cas, dans certains cas quoi, dans une ... dans j'sais pas*

E 379 : *si tu prends ce message , y sera toujours réalisable, mais des fois on aura des problèmes ... si ... pour les joindre quoi,*

mais y sera toujours réalisable

$A_1$382 : *y disent dans tous les cas, mais ça va être dur avec ce que l'on a sur la table*

$C_4$383 : *ah, mais tu t'autocritiques là, hein*

$A_1$386 : *mais c'est pas moi qui ait marqué ça*

L'équipe A se rend à cette argumentation qui disqualifie leur solution mais ne la réfute pas :

A 407 : *je suis pas tout à fait d'accord parce que avec notre méthode ça pourrait pas marcher à tous les coups ... euh, quoi, parce que euh ... c'est question matérielle, quoi. C'est pas question que le message est ... je l'approuve pas ...*

Comme nous l'avons déjà indiqué, bien que ce qui est en question soit le nombre de feuilles de papier, cette contrainte de la situation n'est ni relevée, ni utilisée par les élèves contre la solution proposée par l'équipe A. La synthèse réalisée par le professeur est que : *[le message est] accepté, mais à modifier [pour des] problèmes de mesures* . Cette synthèse est acceptée par l'ensemble des élèves.

Ce débat sur le message A a été marqué par un désaccord d'un élève sur la nature même du problème à résoudre :

C16 : *Je le refuse parce que je pense que c'est le périmètre du quadrilatère initial [...] C'est quand même le périmètre du triangle dont il manque un morceau, donc moi je pense qu'y manque un morceau de triangle et c'est, euh... un triangle*

dont il manque un morceau, c'est un quadrilatère.

Les autres élèves du groupe C interviennent : *on essaie de la persuader, mais il n'y a rien à faire* . L'élève en question se range finalement à l'avis général mais sans rien céder de son point de vue :

C143 : *Ben, je veux bien accepter ce que vous dites, mais je resterai sur ma position. [...] on perd du temps, alors je veux bien accepter comme ça [...] Moi je veux trouver le périmètre d'un quadrilatère mais à partir du périmètre d'un triangle, parce que je crois que chaque quadrilatère a son triangle... enfin en rallongeant un segment.*

Elle jouera par la suite le jeu de la résolution du problème tel que l'ensemble de la classe le comprend.

IV. 2. 2. Le message B : une solution trop complexe

Ce message (fig. 11) n'est accepté que par une seule équipe :

C504 : *alors nous acceptons, car ce qu'ils avancent est prouvé et expliqué [...] Mais il y a des modifications . [...] Alors premièrement, il faudrait [...] un vocabulaire plus précis. A la première lecture on comprend pas toujours. Deuxième modification : des précisions sur le triangle HAB*

Cette complexité de la solution proposée par l'équipe B motive en revanche le rejet des autres équipes.

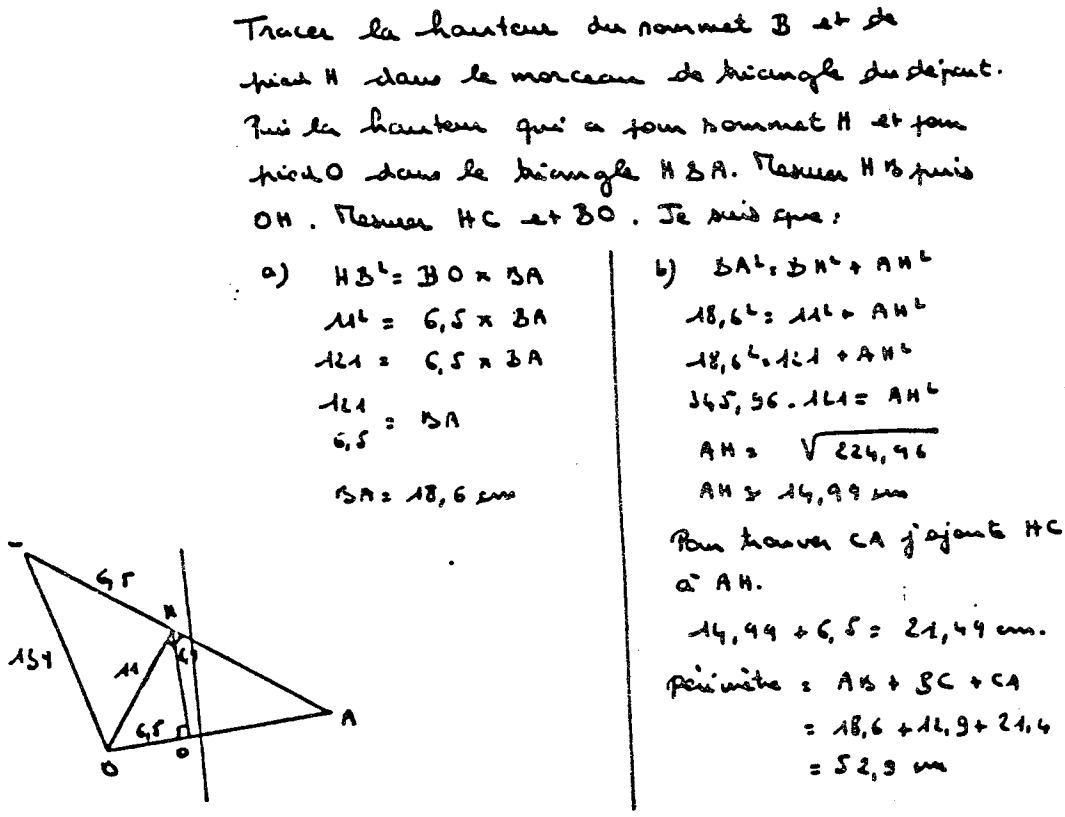


Figure 11

E 434 : *alors, nous on est tous d'accord sur le fait … qu'on refuse le message […] Alors refusé : premièrement il est trop compliqué […] trop compliqué, pas assez clair […] Bon ensuite pour expliquer un cas général, ils se servent de mesures. Nous, on est pas d'accord avec eux. Enfin … […] Ils ne doivent pas se servir de mesures*

D458 : *alors c'est pareil, on refuse tous. On est tous d'accord pour refuser […] alors parce que d'abord le message est trop compliqué et puis c'est plus un message, c'est le problème en entier. Ils font le problème […] ils calculent, ils font déjà tous les calculs*

A480 : *refusé car trop compliqué [...] Ils font quatre mesures pour trouver trois longueurs [...] ce qui entraîne les mesures sont fausses [...] Ils prennent un cas précis*

L'équipe B défend sa solution, arguant d'abord que la présence de calculs en facilite la compréhension, puis qu'au-delà du cas particulier il faut voir le cas général : l'exemple doit être compris comme un exemple générique. Elle reçoit sur ce point le soutien de l'équipe C :

B623 : *c'est un exemple*
A625 : *oui, mais justement tu aurais du mettre : "exemple"*
B624 : *Nous on prouve ce qu'on avance [...] Alors que les autres, ils prouvent pas ce qu'ils disent*
C629 : *c'est un exemple, c'est tout. Bon ils ont bien le droit de se servir de mesures [...]Après tu dis "se servir de cette solution dans tous les cas"*
E647 : *ce message, il devrait pouvoir s'adapter à n'importe quel triangle et là ...*
E673 : *quand t'as un exercice de maths à faire, ils vont pas te mettre un exemple pour faire tracer une figure [...] Oui, il faudrait mettre ça en cas général*
D715 : *[c'est] prouvé dans ce cas précis, mais dans les autres ?*
C718 : *ça sera pareil dans les autres*

Les élèves de l'équipe B se rendront à ces arguments, se promettant de refaire le message :

B762 : *y a qu'à le modifier pour un cas général [...] oui, c'est un exemple précis que l'on a fait là*

Le professeur fera la synthèse dans ce sens, reprenant les suggestions des deux équipes :

D676 :*faudrait refaire le message [...] avec la même méthode*
C686 : *la méthode est bonne autant en profiter*

Ainsi la possibilité d'un exemple générique est tout à fait rejetée.

La critique de D laisse entendre que le message doit donner les moyens de calcul aux interlocuteurs sans cependant «tout révéler». Tout se passe comme si l'activité des interlocuteurs, dans le contexte didactique, n'aurait de sens que si elle impliquait un travail, que si le message ne livre pas sa signification d'emblée :

D566 : *si tu nous avais dit déjà,là, calculer la longueur, je sais pas quoi... BA en t'aidant des trucs... Pythagore, on aurait su faire !*

Mais ces élèves reconnaîtrons que : *c'est facile quand même, puisqu'ils nous mettent déjà tout* (D592).

Reste le problème des mesures qui n'est pas seulement soulevé parce qu'elles signifient le recours à un cas particulier :

E688 : *ben, je ne vois pas pourquoi ils font quatre mesures pour trouver trois longueurs, c'est faux*
A690 :*pourquoi, du même coup, ne pas mesurer tout de suite les côtés du triangle ? A quoi ça sert de faire un petit truc pour*

calculer... pour trouver les grands côtés ? Pourquoi ne pas le faire tout de suite ?

D705 : *c'qu'il y a c'est qu'ils font une mesure pour rien*

B710 : *c'est pas une catastrophe qu'on fait une mesure pour rien*

En arrière plan de la critique de A il y a vraisemblablement la défense de sa propre solution que B avait fortement attaquée comme étant trop simple. Mais ces critiques sont sans suite, peut-être parce que la décision de demander que les calculs soient enlevés les désamorce.

IV. 2. 3. Le message C : un message difficile à comprendre

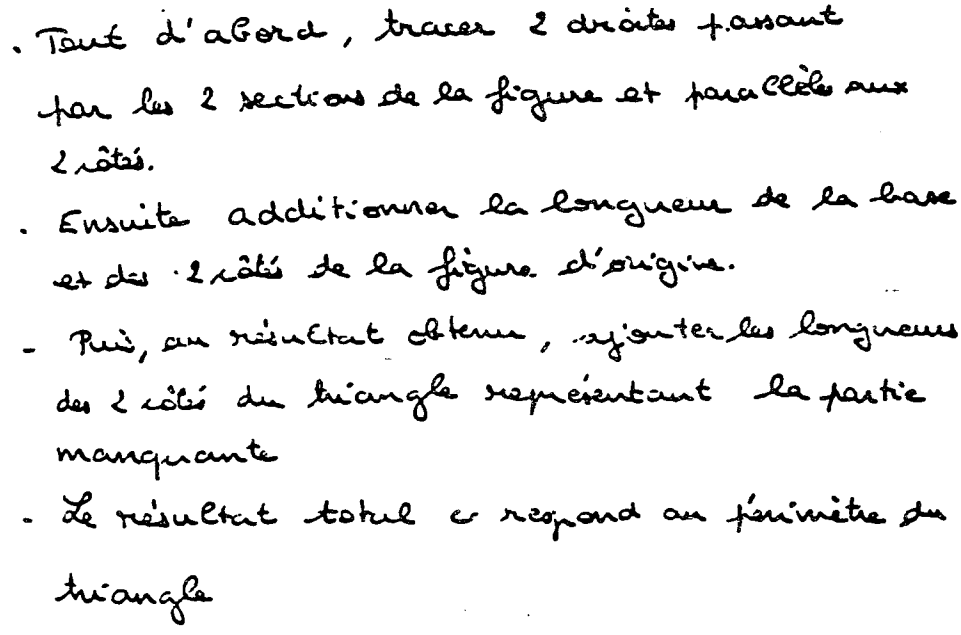


Figure 12

Toutes les équipes, mêmes celles qui acceptent ce texte mentionnent des difficultés de décodage :

A783 : *nous le refusons tous car le message est incompréhensible*

E793 : *alors nous on le refuse tous [...] On a essayé de le dessiner le dessin là et ça marche pas !*

D810 : *alors nous on accepte. Mais il y en a deux qui acceptent tout le message en entier et deux qui feraient des modifications. [...] On rajouterait dans la première phrase à la fin : «est parallèle avec les deux côtés sélectionnés»[...] pour préciser [...] Parce que, bon, on peut très bien faire autrement, c'est-à-dire là quand ils disent, heu... est parallèle aux deux côtés, on peut très bien les faire parallèles à la base. On ne sait ce qu'ils veulent, ça ne marche pas sinon.*

B834 : *accepté, car leur explication est juste, mais dure à comprendre dans la première lecture... explication...*

L'équipe E reviendra immédiatement sur son rejet : *alors nous on s'est rendu compte que le dessin était bon, on s'était trompé en traçant [...] Ben, on raye tout ce qu'on a dit [...] on accepte* (E857). Après cela, cette équipe ne participera plus au débat.

Le débat sur ce message se limite à l'opposition de l'équipe A qui cependant "*aurait bien voulu accepter si [elle] avait pu comprendre* (A877), et :

A902 : *Ben, bien sûr, mais nous comme on l'a déjà fait... on a déjà fait ce problème, on comprend c'qu'on... ce qu'il faut faire, mais dans votre message moi je n'y comprendrais pas si je n'avais rien, heu! Si on m'avait donné la petite phrase là... pour faire le périmètre prenez ce message, heu! C'aurait été dur. Finalement, c'est pas bien clair ce que vous dites.*

L'équipe E trouve que "*ce n'est pas un bon argument* "(E916), quand à D elle apporte son soutien à cette solution : *nous on avait pas essayé cet exemple, moi j'avais pas essayé, et ben j'ai fait suivant ce qu'il avait dit et j'ai bien compris* (D914),*on arrive à calculer le périmètre de ce triangle grâce à ce message* (D993).

L'équipe C apporte une expérience mentale à l'appuie de sa solution :

C940 : *Ben si on avait un triangle en papier, on peut déplier le bout... il faut imaginer ça... un triangle en papier, vous pliez le bout donc il est par dessus... on a la figure à l'intérieur de... ce qu'on avait au départ*

Alors que le message présente une procédure qui repose sur l'utilisation d'une symétrie centrale (construction d'un demi parallélogramme), l'explication qui est donnée oralement met en oeuvre une symétrie orthogonale (le pliage). Personne ne le relève dans la classe.

L'équipe A pose alors le problème de la preuve, l'expérience mentale ne faisant que décrire la procédure d'une façon plus générale : *mais t'es vraiment sûr que ça donne le bout qui manque ?* (A941). Mais cette question reste sans suite, l'équipe C affirme sa conviction. Sa solution a d'abord reçu la sanction de la pratique : *ben à la première lecture c'est vrai, c'est par... il faut un croquis [...] L'explication peut être juste puisqu'ils ont tous réussi presque* (C971).

Ce message est accepté par l'ensemble de la classe sous réserve des modifications demandées par l'équipe A.

IV. 2. 4. Le message D : simple et clair

Seuls deux élèves de l'équipe C s'opposent à cette solution (fig.13), lui reprochant un manque de précision :

C1047 : *ils nomment des lettres qu'ils nous disent pas où les placer. Nous on sait pas où les placer*

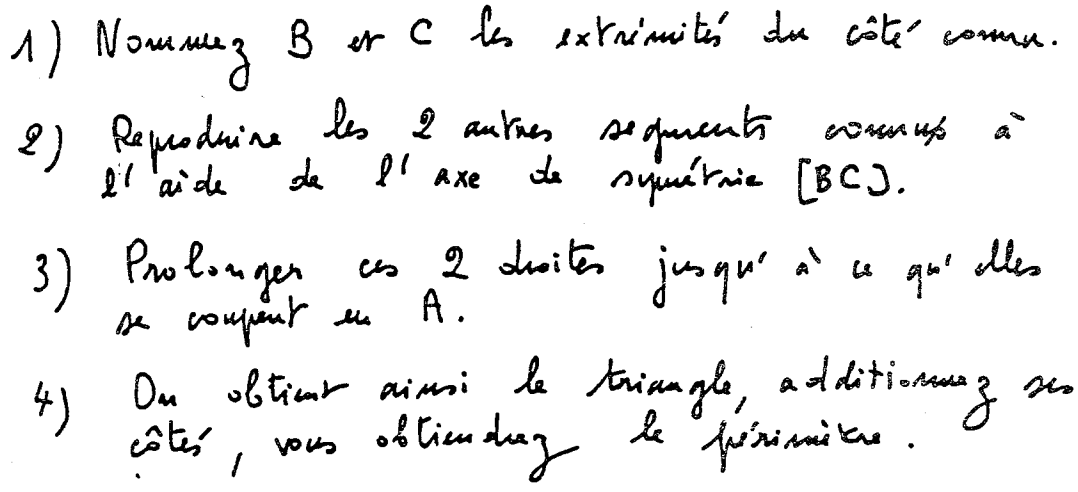


Figure 13

Ils accepteront finalement à la condition que des précisions soient apportées sur le placement des lettres. Tous les autres élèves acceptent cette solution :

E1022 : *accepté car réalisable*
C1026 : *alors nous il y en a deux qui acceptent [...] car le dessin est réalisable et compréhensible*
A1058 : *accepté car simple, clair et précis*

B1060 : *accepté car facile à comprendre et simple à réaliser*

Un court échange a lieu à la suite d'une réserve émise par deux élèves de l'équipe C qui demandent des " *précisions pour la première partie.* " (C1026) :

D1111 : *on a mis sur le segment connu, c'est-à-dire on connaît un seul segment, mais que tu mettes B en haut ou B en bas ça n'a aucune importance*

C1116 : *disons qu'il faut préciser : seul segment connu entier*

Le message est ensuite accepté à l'unanimité, le professeur mentionnant cependant dans sa synthèse qu'une modification serait à apporter : *accepté car pas de problèmes [...] mais modifications quand même .*

IV. 2. 5. La proposition de l'équipe E

Comme le rappelle le professeur, la proposition de l'équipe E ne constitue pas un «message», mais une contribution de cette équipe à la recherche d'une solution (fig. 14).

Les prises de position des élèves sont confuses car ils ne se savent pas décider véritablement du statut de cette production. Leurs critiques auraient du sens s'il s'agissait d'une solution :

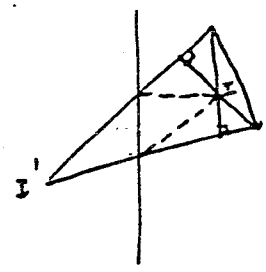
D1167 : *nous on le refuse parce que le dessin est faux [...] Le triangle n'est pas isocèle en A, ni en B, ni en C.*

C1169 : *il nous ont fait un dessin pour expliquer la situation, le*

placement des points, mais l'interlocuteur au téléphone, ou je ne sais pas où, il aura pas le dessin [...] Ca marche pas le dessin [...] refusé : irréalisable

B1188 : *nous on n'a pas d'avis [...] car l'explication est dure à comprendre et compliquée. On ne parle pas de périmètre, parce qu'ils n'ont pas fini mais c'est peut-être juste*

Nous avons tracé le segment reliant les points A et C.
ABC ~~est un triangle isocèle~~ rectangle.
On trace les hauteurs issues de A, B et C, concourantes en I.
Nous avons relié I à C et à D.
I' est le ~~projeté~~ symétrique de I par la symétrie orthogonale autour de (CD).



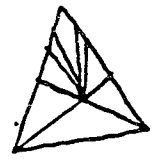


Figure 14

L'équipe A ne s'exprime pas sur cette solution et un débat s'engage à

propos de la phrase «ABC est un triangle isocèle» :

D1202 : *refusé car dessin faux et ils prennent un cas précis [...] Eh ben ils se sont servis de ce dessin pour dire que c'était un triangle isocèle. Mais si on prend un autre dessin ce sera pas obligatoirement isocèle.*

C1206 : *oui peut-être que les hauteurs ne seront pas concourantes et puis...*

E1208 : *c'est pas un message de toute façon. "ABC est un triangle isocèle en A", on peut très bien le rayer car ça sert absoluement à rien [...] faut pas se battre sur le problème qu'il est isocèle ou pas parce que ça n'a aucune importance.*

L'ambiguité de l'objet du débat est attestée par l'embarras du professeur à définir ce que les élèves ont à prendre comme décision : *bon, je vous propose de ne pas passer trop de temps sur cette affiche puisqu'elles n'ont jamais dit qu'elles proposaient un message. Alors qu'est-ce que vous retenez de leur message ?* (Prof 1228).

L'équipe E tente d'expliciter sa solution, le professeur pousse à ce que une décision soit prise. Ce qui est bien difficile car pour certains "*c'est faux* " (D1232), mais pour d'autres "*on peut pas dire que c'est faux, c'est pas fini* " (B1235).

Devant cette incertitude sur ce qu'il est possible de faire, le professeur choisit d'en rester là avec la période de critique des productions initiales, pour passer à une seconde période que nous analysons au paragraphe suivant.

IV. 2. 6. Remarques de synthèse sur la première période du débat : prouver versus argumenter

a) La situation de communication

La situation de communication invoquée est effectivement prise en compte par le élèves dans leur critique des messages. Le thème dominant de ces critiques est en effet la possibilité de comprendre et mettre en oeuvre la procédure qui est décrite. La question de sa validité qui est parfois soulevée ne l'est que dans un second temps. L'équipe C est celle qui paraît le plus attachée à cet aspect de la situation, invoquant les contraintes de la communication :

- à propos du message B :

C528 : *il en faut des lettres, parce qu'autrement on va tous planter [...] Nos interlocuteurs comment ... téléphoniques ... ont des messages ... ils auront pas les calculs qu'on a sous les yeux.*

E559 : *faut se mettre à la place de quelqu'un qui sait pas ...*

- à propos du «message» E :

C1169 : *il nous ont fait un dessin pour expliquer la situation, le placement des points, mais l'interlocuteur au téléphone, ou je ne sais pas où, il aura pas le dessin [...] Ça marche pas le dessin [...] refusé : irréalisable*

- et même à propos du message C :

A910 : *ben tu peux pas expliquer au tableau, par exemple tu donnes ce message à quelqu'un qui n'a jamais vu heu... qui n'a jamais entendu parler de ce problème, tu lui donnes ça tu dis, heu...*

calcule le périmètre d'un certain, heu... triangle où il manque un morceau. J'sais pas s'il va comprendre.

C920 : *il faut qu'il soit compréhensible pour tout le monde*

Le débat à propos du message B et de sa complexité mobilise des arguments prenant en compte explicitement les compétences des interlocuteurs éventuels :

D566 : *si tu nous avais... si tu nous avais dit déjà, là, calculer la longueur, je sais pas quoi... BA en t'aidant de trucs... Pythagore, on aurait su faire*

A572 : *le périmètre pour... on apprend à le calculer en 6°, admettons. Et là, les formules, on les apprends en 3° [...] et ben tu peux pas sortir cette formule en 6°*

B577 : *on est pas en 6° là, on est en classe de 3°!*

E580 : *on leur donne le message A, alors que celui-là...*

A581 : *si tu leur sors ça je veux pas dire la panique, hein ?*

C583 : *en tous cas c'est un élève de notre niveau, puisque : "... à l'intention d'un élève non présent... "*

E584 : *pas forcément...*

Cet échange en restera là, interrompu par le professeur : *laissons tomber ce problème de savoir si le camarade en question est dans telle ou telle classe...* (Prof588). Il revient à la demande qu'une décision soit prise.

b) <u>La situation de validation et le débat</u>

Il n'y a pas de dévolution de la situation de validation, du moins au sens où nous l'entendions lors de l'analyse a priori. Pour le préciser et

poursuivre notre analyse, il est nécessaire d'introduire ici une distinction entre **argumenter** et **prouver**. Nous reprenons la distinction proposée par Moeschler (1985 p.46-47) :

> "Un discours argumentatif n'est pas un discours apportant à proprement parler des preuves, ni un discours fonctionnant sur les principes de la déduction logique. En d'autres termes, argumenter ne revient pas à démontrer la vérité d'une assertion, ni à indiquer le caractère logiquement valide d'un raisonnement."
> "Argumenter revient donc à donner des raisons pour telle ou telle conclusion. Les raisons constituent, lorsqu'elles sont énoncées, autant d'arguments. Une argumentation consiste donc en une relation entre un ou des arguments et une conclusion. Le nombre des arguments n'est pas nécessairement limité à un seul, [...]"
> " On voit donc se profiler une deuxième caractéristique des arguments (outre le fait qu'ils puissent être en nombre variable) : leur **degré de force**."
> "Un argument définit toujours une classe de **contre-arguments**, comme une conclusion définit une conclusion inverse. Un discours argumentatif, et c'est là une hypothèse de départ importante, se place toujours par rapport à un contre-discours effectif ou virtuel. L'argumentation est à ce titre indissociable de la polémique. Défendre une thèse ou une conclusion revient toujours à la défendre contre d'autres thèses ou conclusions, de même qu'entrer dans une polémique n'implique pas seulement un désaccord (sur la forme ou sur le fond), mais surtout la possession de contre-arguments. Cette propriété qu'à l'argumentation d'être soumise à la réfutation me semble être une de ses caractéristiques fondamentales et la distingue nettement de la démonstration ou de la déduction, qui, à l'intérieur d'un système donné, se présente comme irréfutable"

Notons que Moeschler dit de la démonstration seulement qu'elle se «présente» comme irréfutable, dans une note à ce texte il exprime que ce caractère d'infaillibilité n'est que la marque d'un "prétention scientifique"

(ibid. note 1). Mais nous pensons que l'utilisation du terme *réfutation* , à propos de l'argumentation est trop fort. Comme le souligne cet auteur le rejet d'un argument peut avoir lieu sur des bases sans liens logiques avec l'argument rejeté. Préférant laisser la réfutation dans le même registre de rationalité que la démonstration, nous préfèrerons parler d'*objection* à un argument. Pour le reste, les distinctions de Moeschler nous donnent un cadre qui nous semble plus approprié que celui de la preuve pour comprendre le débat que nous avons observé et le décrire.

Les élèves se sont effectivement engagés dans un débat dont l'objectif est de décider pour chacun des messages s'il est accepté, refusé ou à modifier. Mais ce débat ne pose pas véritablement le problème de la validité des solutions proposées ; lorsque ce problème est évoqué, il n'est pas repris par l'ensemble de la classe.

Nous observons essentiellement un échange d'arguments sur la simplicité (messages A et D) ou la complexité (messages B et C). Le contexte de communication invoqué renforce la légitimité de cette discussion, les messages doivent être compréhensibles, par ailleurs elle peut trouver son origine dans l'effort de chacune des équipes pour s'approprier les solutions des autres. Mais ce qui marque essentiellement qu'il s'agit d'argumentations au sens de Moeschler, et non d'un débat de preuve, est l'absence de liens logiques entre les arguments et le fait que s'en tenant à un objectif, refuser ou accepter une solution, les équipes peuvent passer d'un registre d'argumentation à un autre éventuellement contradictoire. Par exemple, contre le message B, l'équipe D exprime d'abord un refus parce qu'il est trop compliqué, puis parce qu'il est trop explicite, enfin elle transforme son argument pour, à partir des mêmes faits (la présence de calculs), reprocher à cette solution de s'appuyer sur

un cas particulier. Les arguments invoqués peuvent être étrangers aux mathématiques ou aux exigences de la situation, ainsi en est-il des arguments exprimant que le message A est trop simple ou que le message B est trop explicite. Il en est de même de l'objection à un argument, par exemple dans le cas du rejet de l'argument de l'équipe B contre le message A qui serait illégitime selon l'équipe E, ou du rejet de la critique du message C par l'équipe A. Par ailleurs, chaque équipe ayant à la fois à évaluer les messages des partenaires et à défendre ses propres positions, le débat peut prendre un tour polémique. En particulier, lors de l'opposition de l'équipe B au message A, puis celle de l'équipe A au message B.

Un obstacle à l'entrée dans des démarches de preuve peut être le caractère d'évidence des solutions proposées pour le triangle sur lequel elles sont mises en oeuvre (prolongement pour le message A, parallélogramme pour le message C, symétrie pour le message D). Le fait de poser le problème de la présence des mesures, ou d'objecter le recours à un «cas précis», a un caractère formel plus que logique. En effet *le fait d'exiger de «faire général», ne signifie pas que le problème de la généralisation soit posé* . Il s'agit plutôt d'un argument de forme (même dans le cas de la critique du message B), tout semble se passer comme si le passage au général pouvait consister en l'effacement des marques du particulier alors que les fondements restent essentiellement ceux de l'empirisme naïf (dans le cas du message B la «méthode» est considérée comme bonne sans discussion à partir de l'examen d'un seul cas).

IV.3. Seconde période : le mise à l'épreuve des solutions

Au terme de la première période les messages A, B, C, et D ont été acceptés sous réserve de modifications qui tiennent non à leur validité mais à des reprises souhaitées de leur formulation. Le professeur, comme nous l'avions décidé, propose, en invoquant la situation de communication, de mettre en oeuvre les procédures décrites par les messages sur un nouveau triangle. Ce triangle est assez «grand» pour mettre en échec les procédures de reproduction proposées.

Mais avant que les élèves s'engagent dans cette activité, il relit la consigne, mettant à cette occasion l'accent sur la contrainte : "*ils disposent d'une feuille. D'une seule feuille* ".

Les messages sont mis à l'épreuve successivement. Nous n'avons pu observer que la discussion sur les messages A et D, les messages B et C ont été discutés lors d'une quatrième séance sur laquelle nous ne disposons que de quelques notes de compte-rendu du professeur.

Message A

Ce message est rejeté au nom de la contrainte matérielle qui est cette fois prise en compte par les élèves :

C1353 : *ben, disons que le message il marcherait si on avait une feuille en plus. [...] On peut pas le faire ... il faudrait une autre feuille*

A1418 : *oui, mais nous on est d'accord avec le "refusé".*

L'équipe A justifie son erreur :

A1422 : *refusé car manque de matériel [...] parce que, au début, on nous avait donné des feuilles, tout, alors on pensait qu'on pouvait l'utiliser... et puis, on avait peut-être mal lu le message qui disait qu'on avait une feuille et juste le matériel.*

Cependant deux élèves de l'équipe E maintiennent leur soutien à cette solution :

E1442 : *ouais, mais s'ils la coupent, à ce moment là, c'est comme s'ils donnent une autre feuille, comme si ils avait une autre*

Le professeur décide de suspendre la décision sur cette solution : *je vous propose de conclure, puisque toute la classe n'est pas complètement d'accord, par un petit point d'interrogation. La majorité de la classe le refuse, deux élèves continuent à penser qu'ils l'acceptent, mais comme personne n'a persuadé les autres...*

Message D

Ce message est aussi rejeté parce qu'il est mis en échec par le triangle proposé par le professeur, mais les élèves de l'équipe D n'acceptent pas facilement ce rejet :

D1465 : *tout à l'heure il était réalisable*

D1492 : *nous on l'a refait le message avec l'autre feuille, c'est pas notre faute s'ils nous en donnent une plus petite.*

E1493 : *oui, mais c'est un triangle quelconque [...] Y faut que ça*

marche dans tous les cas. Ici ça marche pas

L'équipe D accepte ce rejet mais sans véritablement comprendre la signification de la généralisation :

D1501 : *ça prouve que ça marche pas avec n'importe quel triangle, c'est tout*

D1550 : *tout à l'heure il a bien marché là, pourquoi il n' a pas marché ici ... ce serait un coup du hasard*

Les messages B et C

La solution proposée par le message B a été rejeté parce qu'*il y a des cas où il est pas possible de tracer les hauteurs* . De la même façon le message C est rejeté parce que réfuté par le triangle fourni par le professeur.

Un élève propose un aménagement de la solution de l'équipe C qui consiste à itérer la procédure dans le cas où le triangle est «trop grand».

Lorsque le professeur demande aux élèves s'ils sont *sûrs que ça marche* , certains répondent que *oui parce qu'on l'a fait dans beaucoup de cas* . Ainsi il n'y a pas eu, au cours de cette séquence, d'évolution sur le terrain des démarches de preuve. Ce n'est que parce que le professeur soulève le problème explicitement que les élèves fournissent une preuve en s'appuyant sur les propriétés du parallélogramme.

V. Conclusion

V.1. La responsabilité du professeur et les contraintes du système didactique

Pour faire apparaître le caractère d'outil de preuve de la démonstration en mathématique il est nécessaire d'obtenir la dévolution aux élèves de la responsabilité de leurs productions. Cette hypothèse initiale n'est pas réfutée par les observations que nous avons réalisées. Au contraire, elles montrent clairement que le seul fait de «poser un problème» ne suffit pas à garantir que les élèves en ont la charge, il faut encore organiser une situation, c'est-à-dire une mise en scène de leur activité, qui légitime par sa finalité que le professeur restera extérieur aux décisions qui seront prises sur la validité de leur solution.

Mais cette exigence est contradictoire avec la responsabilité épistémologique que le professeur conserve quel que soit le contrat qu'il aura négocié avec les élèves pour obtenir cette dévolution. Il a, quoi qu'il en soit, la responsabilité de la signification mathématique des activités des élèves, il devra à un moment ou à un autre traiter les erreurs, obtenir que des productions mathématiquement acceptables soient produites. Cette contrainte, qui vient du fait que la classe de mathématique est une situation institutionnelle d'enseignement, est à l'origine de ce que Brousseau (ibid.)

appelle "l'effet Topaze" dont nous avons relevé la présence lors de la première observation, et qui se manifeste encore lors de la seconde observation lorsque le professeur demande finalement qu'une démonstration soit produite. Dans ce dernier cas la demande, qui est faite à l'initiative du professeur et n'était pas prévue dans le déroulement de la séquence, n'a pas de réelle signification au regard de ce que les élèves estiment nécessaire pour la résolution du problème ; elle est nécessaire au professeur pour lui permettre de conclure de façon acceptable du point de vue de sa responsabilité d'enseignant de mathématique.

Une seconde contrainte qui apparaît dans nos observations est celle du temps. L'ouverture du temps du côté des élèves est nécessaire au processus de dévolution, toute fermeture a priori a pour corollaire une fermeture du problème car elle sera lue par les élèves comme une indication sur les connaissances à mettre en oeuvre dans la résolution du problème (qui peut apparaître alors comme une simple «application» de ce qu'ils savent). Mais le temps didactique est nécessairement fermé par l'organisation scolaire et l'exigence des programmes (Chevallard 1985). Aussi, le professeur pourra être conduit à modifier ses questions, à apporter des informations ad hoc modifiant éventuellement la nature du problème initial, pour obtenir la fin d'une activité dans une durée acceptable.

Si nous acceptons avec l'équipe de l'IREM de Lyon l'hypothèse que le «problème ouvert» puisse être un moyen privilégié pour l'apprentissage de la démonstration, c'est-à-dire pour l'appropriation par les élèves de la notion de démonstration comme un moyen de preuve, nous affirmons en revanche que l'expression «problème ouvert» ne doit pas être prise au sens commun. Si le problème doit apparaître **ouvert du côté des élèves**

pour leur permettre de s'engager dans une «véritable» activité de recherche, il doit en revanche être **fermé du côté du professeur** pour être compatible avec les contraintes de fonctionnement du système didactique.

Pour satisfaire à ces contraintes nous devons documenter de façon précise l'ensemble des procédures de résolution susceptibles d'apparaître dans une situation-problème donnée et prévoir les moyens d'un traitement des solutions erronées dans le cadre même de la situation. Il s'agit là d'une problématique classique des recherches en didactique auquel correspond le développement de ce que nous appelons l'"analyse a priori" (Brousseau 1986). Cela seul peut permettre de réduire l'incertitude du professeur et éviter le recours à des procédés didactiques ad hoc dont l'effet Topaze est un révélateur. Mais de plus, nous devons pouvoir faire une évaluation assez précise du temps nécessaire au déroulement du processus didactique, le prenant en compte comme une variable sur laquelle le professeur devra avoir une information fiable et, éventuellement, la possibilité d'une action. Il s'agit là d'un point essentiel au regard de la signification des recherches en didactique pour la pratique de l'enseignement.

V.2. L'obstacle des interactions sociales et la rationalité des élèves

Le contexte d'interaction sociale que nous avons mis en place, lors de la seconde observation, a partiellement joué le rôle que nous en attendions, d'une part en assurant la dévolution aux élèves du problème de la

construction d'un moyen de calcul du périmètre du triangle tronqué (ils sont bien entrés dans la situation de communication), d'autre part en permettant un débat sur la recevabilité des productions. Ce débat s'est développé sans que les élèves cherchent à s'appuyer sur le professeur pour prendre leurs décisions, il y a donc bien eu dévolution aux élèves de la responsabilité de leur production.

Mais ce contexte d'interaction sociale s'est constitué en obstacle au développement des débats de preuve que nous attendions. En effet, le jeu social à d'abord conduit à un débat d'argumentation au sens de Moeschler, qui se caractérise par la recherche d'arguments aussi bien du côté du contrat didactique (solution trop simple), que de celui de la situation de communication (efficacité, lisibilité). Nous pensons que les rares critiques au plan mathématique se placent aussi dans ce registre de l'argumentation, elles s'ajoutent aux autres arguments, ce qui peut expliquer qu'elles ne soient pas véritablement développées, ni coordonnées. On notera d'ailleurs que dans la seconde partie du débat, où la contrainte d'un triangle quelconque est effectivement prise en compte, les réfutations ne sont pas complètement acceptées. Certains élèves se soumettent d'ailleurs à contre-coeur cherchant à préserver l'intérêt de leur production.

Enfin, nous voulons souligner que l'absence de démarches de preuve au sens des mathématiques ne doit pas nécessairement conduire à mettre en question la rationalité des élèves. Nous pouvons d'ailleurs constater que, comme le rapporte le professeur, lorsque cela leur sera demandé les élèves (de la seconde expérience,classe de troisième) seront capables techniquement de produire une démonstration.

Des obstacles à l'apparition de ces démarches, alors que la

dévolution du problème a été obtenue lors de la seconde expérience, nous paraissent être de deux ordres :

- pour ce qui concerne l'absence de prise en compte de la contrainte de produire une solution pour n'importe quel triangle. Ce phénomène nous paraît trop général pour que l'on accepte de considérer qu'il s'agisse seulement d'un problème de lecture de l'énoncé. En revanche nous pensons que l'on trouve là un effet de la présentation du problème analogue à celui que nous avons observé lors de la résolution du problème du dénombrement des diagonales d'un polygone par des élèves qui disposaient d'un texte de référence. En effet, nous avons non seulement donné l'énoncé du problème du périmètre du triangle tronqué, mais encore nous avons fourni aux élèves une figure «à titre d'exemple», en fait tout ce passe comme si cette figure jouait un rôle de prototype et de ce fait occultait la contrainte exprimée par l'énoncé : il suffit de valider la solution sur le prototype.

- par ailleurs, le problème porte sur la construction d'un outil dans un contexte de pratique : cet outil devra être fiable et efficace pour le calcul du périmètre d'un triangle tronqué. L'entrée des élèves dans cette problématique peut s'opposer à leur entrée dans une problématique de la rigueur qui les conduirait, d'eux-mêmes, à s'engager dans la recherche d'une démonstration (cf. chap.I, § IV.1.). Comme le montre Fishbein (1982) les deux types de rationalité, empirique et mathématique, peuvent coexister chez un même individu. La situation-problème que nous avons utilisée a pu privilégier une validation empirique qui appuie la reconnaissance du vrai sur une accumulation de vérifications.

CONCLUSIONS

I : Processus de validation chez des élèves du Collège

I.1. Les types de preuve : hiérarchie et filiation

Les résultats, dont nous allons présenter ici la synthèse, portent sur la genèse de la preuve dans la résolution d'un problème en mathématique, ce que l'on désigne dans les termes de la psychologie par *micro-genèse* . Cela signifie que nous nous sommes limité à l'étude de processus de courte durée au regard de ce que requiert un véritable apprentissage. Les sujets sur lesquels a porté notre étude ont entre 12 et 15 ans, ce qui correspond dans l'enseignement français aux classes de 5°, 4° et 3°.

Les quatre principaux types de preuve (empirisme naïf, expérience cruciale, exemple générique et expérience mentale, cf. chap.I) que nous avons retenus, nous ont permis de différencier et d'analyser les processus

de validation engagés par les élèves que nous avons observés. Comme nous le montrons au chapitre II, ils ne caractérisent pas intrinsèquement ce que l'on pourrait appeler la rationalité des élèves, en particulier dans un même processus de résolution d'un problème plusieurs niveaux de preuve ont pu être observés pour un même binôme d'élèves (chap.II, § II.4.1.).

La signification de ces processus de validation ne peut être saisie sans un examen approfondi de la signification des conceptions que les élèves mobilisent, mais non plus sans celle de la lecture qu'ils font de la situation dans laquelle ils se trouvent. Ainsi notre étude conforte-t-elle l'hypothèse que nous avons retenue sur le rôle de la situation comme déterminant essentiel du niveau des preuves (chap.I, § II.1.). Par ailleurs, l'image globale que les élèves ont des mathématiques, de ce qui est licite ou ne l'est pas, joue un rôle important, notamment dans leur traitement des réfutations.

Nous avons pu montrer que l'analyse des caractéristiques de l'expression langagière des preuves ne suffit pas à en préciser le niveau. En particulier, l'expérience mentale, parce qu'elle peut recourir dans sa formulation au *langage de la familiarité* (chap.I, § II.2.) utilisant dans une forme primitive des «noms propres» (par exemple le nom d'un polygone particulier, chap.II) peut apparaître porter les marques d'un niveau de preuve inférieur : l'exemple générique. C'est finalement la connaissance du processus de production de la preuve qui permet de prendre une décision sur sa validité effective et son niveau. Il en va de même de la distinction entre l'empirisme naïf et l'usage de l'exemple prototypique (mis en évidence au chapitre III). Enfin la signification de l'expérience cruciale sera très différente selon qu'elle sera un moyen de décider de la validité d'une assertion ou un moyen de trancher un conflit entre les

élèves.

L'hypothèse que nous avions retenue d'une hiérarchie entre les types de preuve est elle aussi confortée. Mais l'analyse des processus de validation observés permet d'aller plus loin en attestant d'une rupture entre d'une part l'empirisme naïf et l'expérience cruciale et d'autre part l'exemple générique et l'expérience mentale. Cette rupture peut être caractérisée comme celle du passage d'une vérité affirmée sur la base d'une constatation de fait, à celle d'une vérité fondée en raison. Il s'agit d'un véritable changement de problématique, c'est-à-dire de la façon même d'envisager et de formuler le problème de la validité d'une assertion. La source de ce changement peut résider dans le désir de lever une incertitude, mais un obstacle fréquent à sa réalisation effective vient de la nature des conceptions dont disposent les élèves des notions mathématiques en jeu, ou encore des moyens langagiers qu'ils sont susceptibles de construire (ou dont ils disposent).

Nous reconnaissons par ailleurs une filiation entre empirisme naïf et expérience cruciale, lorsque celle-ci est utilisée aux fins de preuve. Le passage du premier au second type de preuve correspond à la prise de conscience de l'exigence d'assurer la généralité de la conjecture soutenue (chap.II, § II.2.). Cependant ces deux types relèvent d'une même rationalité empirique (i.e. tirée de l'expérience) selon laquelle l'accumulation des faits fonde la conviction dans la validité d'une assertion (Fishbein 1982, p.17). Une autre filiation est celle de l'exemple générique et de l'expérience mentale. Le passage, du premier type de preuve au second, repose sur une construction langagière qui implique une reconnaissance et une différenciation des objets et des relations en jeu dans la résolution du problème, c'est-à-dire une construction cognitive.

L'exemple générique constitue un stade transitoire dans le passage des preuves pragmatiques aux preuves intellectuelles, dans la mesure où il requiert toujours une négociation sur le caractère générique de l'exemple utilisé. Cette fragilité incite à une évolution vers l'expérience mentale qui se dégage du particulier (chap.II, § II.2.3).

Nous avons relevé dans nos observations des références à la démonstration, mais il ne s'agit en général que d'évoquer l'obligation de principe de produire une preuve «mathématique». Ou plus exactement, en référence à l'activité en cours, de marquer l'exigence d'une formulation qui serait reconnaissable comme étant mathématique (chap.II, § II.4.4). La tentative de certains élèves d'établir une preuve en réinvestissant des outils mathématiques se heurte à la difficulté de leur donner une signification dans le cadre spécifique du problème à résoudre (chap.IV, § I.7.1).

I.2. L'empirisme naïf

Les sources de l'empirisme naïf tel que nous avons pu les observer renvoient à deux types très différents de phénomènes : l'évidence des faits et l'évidence de raison.

Dans le premier cas nous pouvons considérer qu'il s'agit d'une manifestation de pragmatisme empirique selon lequel les élèves «se contentent» effectivement de l'observation. Ce comportement peut être favorisé par certaines lectures de la situation (par exemple comme «jeu de devinette», chapII : Pierre et Mathieu, § III.3.) ou par les conflits entre les

élèves qui peuvent les conduire à se tourner vers l'observateur (ou l'enseignant) plutôt que de s'engager dans un processus plus élaboré de validation (chap. II, § II.2.1).

Tout différent est le cas de l'empirisme naïf dont la source est l'évidence de raison. Il ne s'agit plus alors d'un simple pragmatisme empirique, mais d'une conviction en la validité d'une assertion, certes tirée de l'observation, mais dont l'analyse est fondée sur des conceptions qui ne s'explicitent pas, qui ne sont pas analysées par le sujet lui-même (cf. le cas de f(n)=n/2 au chap.II § II.2.1., ou chap.IV § I.5.1.). C'est ce que Fishbein désigne par «cognitive belief».

La distinction entre ces deux formes d'empirisme ne peut être faite à partir du seul examen des productions des élèves, pour cela est nécessaire l'analyse du processus de production qui seul peut montrer les origines de l'empirisme observé.

De même sommes-nous amené à distinguer l'empirisme naïf de la reconnaissance par l'élève de la valeur prototypique d'un exemple (chap.III, § IV). Cette distinction ne peut, elle aussi, être faite à partir des seules productions des élèves qui, dans les deux cas, paraissent fonder sur quelques exemples la validité de leur assertion. Mais la valeur de l'exemple prototypique est radicalement différente dans la mesure où le problème de la généralisation est alors effectivement pris en compte par l'élève qui le résout en faisant l'hypothèse que l'exemple apporté par un document fourni (chap.III), ou donné avec le problème (chap.IV, § II), est un représentant fidèle des objets sur lesquels porte l'assertion en question. Il s'agit là d'un phénomène essentiel du point de vue de la didactique, qui met en question l'utilisation d'exemples à des fins d'enseignement et leur

signification pour les élèves. Certes de tels exemples permettent de montrer des propriétés, mais aussi ils reçoivent un statut de fait qui peut faire obstacle au développement de processus de preuve plus élaborés.

Se trouve ainsi posé le problème didactique de l'usage des définitions par ostension ; il reste à en étudier les implications quant aux conceptions que les élèves développent sur le procédé lui-même et sa validité.

I.3. L'expérience cruciale

L'expérience cruciale marque bien une étape importante dans la prise en compte de la validité d'une assertion en posant le problème de la généralisation. Elle est une réponse empirique qui fonde la conviction de certains élèves. Son origine peut être la prise de conscience de l'insuffisance de la vérification initiale sur quelques exemples et l'impossibilité, en termes cognitifs ou langagiers, où se trouvent les élèves d'aller au-delà. Un exemple significatif est le cas des solutions par «récurrence» observées dans la résolution du problème du dénombrement des diagonales d'un polygone (chap.II, § II.2.2.).

Mais alors que l'empirisme naïf disparaît lorsque sont mises en oeuvre les preuves intellectuelles, l'expérience cruciale subsiste à la façon d'un procédé ultime pour assurer la conviction, notamment lorsque l'assertion a été fondée sur un exemple générique. Nous trouvons là un exemple de cohabitation opératoire entre pragmatisme empirique et rationalisme logique que met en évidence Fishbein (op. cit.) et dont il considère qu'il s'agit de deux types de rationalité d'ordre et de validité

pratique différente dans la mesure où le pragmatisme empirique garde sa fonctionnalité dans la pratique quotidienne, extérieure aux mathématiques.

Comme nous l'avons écrit plus haut, l'expérience cruciale prend une signification différente dans l'interaction sociale où elle devient un moyen de trancher un conflit sur la validité d'une assertion, ou sur le choix entre deux conjectures. Nous ne la considérons plus alors véritablement comme un moyen de preuve, sauf lorsqu'elle constitue de fait une réfutation d'une assertion. En revanche, elle apporte un soutien à l'une des solutions proposées, ne la validant pas pour autant ; sa fonction essentielle est alors de permettre la défense contre une opposition. On peut remarquer justement dans ces circonstances que d'autre explications de la validité de l'assertion en question sont disponibles (Georges contre Olivier, Bertrand contre Christophe, chap.II § II.2.2).

I.4. L'exemple générique et l'expérience mentale

Nous avons dit comment nous envisageons que l'exemple générique et l'expérience mentale entretiennent des relations de filiation, la dernière pouvant être mise en relation avec l'exemple générique dans un processus de décontextualisation qui requiert notamment l'effacement des marques du particulier (chap.II, § II.3.1.). Nous insistons sur le fait que ce processus, qui peut apparaître en première analyse pour essentiellement langagier, requiert des constructions cognitives complexes pour dégager les objets mis en jeu dans la preuve et leurs relations. Cette complexité explique pour partie que nous ayons observé dans la construction d'une

expérience mentale que certaines propositions intermédiaires ont des fondements plus primitifs (exemple générique, voire empirisme naïf, chap.II § II.4.1.).

A partir de l'expérience mentale, les processus de décontextualisation, détemporalisation, dépersonnalisation pourront se poursuivre, permettant l'expression de preuves consistant en un «calcul sur des énoncés» marquant le passage d'actions intériorisées et désignées, à un calcul sur des relations. Nous avons cependant rarement observé un tel processus (chap.II, § II.3.2.). Un phénomène de cet ordre a pu être observé à propos des problèmes sur aire et périmètre d'un rectangle (chap.IV, § I.) dans le passage au cadre numérique qui permet une expression et un calcul sur des relations. Cependant les élèves se heurtent au problème de la construction de la signification des écritures qu'ils manipulent en référence au problème qu'ils traitent. Ceci confirme encore notre hypothèse de l'unité des aspects langagiers et cognitifs.

Ces analyses nous conduisent à soutenir l'hypothèse que le passage de l'expérience mentale au calcul sur des énoncés requiert non seulement les processus évoqués ci-dessus, mais encore la constitution en une théorie des conceptions mises en jeu par les élèves. Théorie, qui, seule, permettrait un véritable calcul. Nous devons noter ici que la durée relativement brève des situations que nous avons observées s'oppose vraisemblablement à des constructions aussi complexes.

I.5. Le traitement des réfutations

Nous avons retrouvé dans l'analyse du traitement des réfutations, rencontrées par les élèves dans le cours de la résolution du problème ou qui leurs sont opposées par l'observateur, l'essentiel des possibilités que nous tirions de notre analyse du modèle proposé par Lakatos (1976). Le point important est celui des critères de choix entre les issues face à une réfutation ; Lakatos n'apporte pas de réponse dans son étude rendant compte essentiellement de leur ouverture. Pour ce qui concerne les élèves nous avons mis en évidence principalement deux facteurs (chap.II, § III.4.) : la conception globale qu'ils ont des mathématiques et leur lecture de la situation. Ces deux facteurs peuvent inhiber ou au contraire favoriser certains traitements contre d'autres. En revanche, lorsque l'analyse de la réfutation a lieu en référence au problème, le choix apparaît très ouvert. Nous ne pouvons, à partir de nos seules observations et des moyens théoriques dont nous disposons actuellement, donner d'indications générales sur ce qui conduit un élève à préférer modifier sa conjecture, introduire une condition ou, par exemple, reconsidérer le domaine de validité, ou encore la définition des objets concernés.

Le seul point sur lequel nous pensons pouvoir avancer une hypothèse est celui qui concerne le rôle joué par la «robustesse» des conceptions mobilisées par les élèves. Alliée à un domaine de validité de «taille» significative de la conjecture en question, cette robustesse conduit à privilégier des traitements revenant à la mise à l'écart du contre-exemple : exception, exclusion du domaine de validité des objets dont le contre-exemple paraît être un représentant, etc. .

Le traitement d'une réfutation ne conduit pas nécessairement à une remise en question des fondements de la conjecture comme on pouvait le penser à priori, notamment lorsque celle-ci est fondée sur un empirisme naïf. En effet, à ce type de fondement correspond, de façon cohérente, ce que nous appelons un *traitement ad hoc* du contre-exemple. Il consiste à prendre en compte dans le contre-exemple des caractéristiques qui ne sont pas mises en relation avec ce qui fonde la conjecture. Nous avons relevé notamment : l'abandon d'emblée de la conjecture (chap.II, § III.2.3.a), les modifications ad hoc de la conjecture (chap.II, § III.2.4.a), l'introduction d'une condition issue d'une analyse exclusive du contre-exemple (chap.II, § III.2.6.a), le rejet du contre-exemple déclaré pathologique (chap.II, § III.2.8.c). Ces traitements visent en quelque sorte à l'élimination du fait de la contradiction sans rechercher ce qui pourrait en constituer les origines dans le processus de résolution du problème. Ainsi le fait d'entrer dans une dialectique de la validation ne suffit-il pas à lui seul à permettre une évolution des processus de preuve engagés. L'étude que nous avons réalisée au chapitre IV montre bien que le progrès ne peut provenir que d'une problématisation du sens de la contradiction, ou encore d'une remise en question ou d'une réorganisation des conceptions des élèves qui ne va pas de soi.

II : Eléments de la complexité du problème de l'enseignement de la démonstration

II.1. Le rôle de l'interaction sociale : démonstration et argumentation

L'interaction sociale joue un rôle central dans notre approche des problèmes de l'enseignement de la démonstration. D'une part parce que notre analyse de la démonstration met en évidence la nécessité du contexte social pour construire sa signification comme moyen de preuve. En effet, elle se caractérise dans la communauté mathématique non seulement par sa structure spécifique, mais encore par le fait qu'elle est un moyen privilégié de validation et de communication. D'autre part parce que nous avons retenu l'hypothèse du rôle moteur de l'interaction sociale dans le développement des processus de validation (chap.I, § II.3.).

Ce point de vue n'est pas rejeté par nos travaux expérimentaux, mais ils montrent la complexité des phénomènes liés aux situations dont la conception découle de son adoption. Certes l'interaction sociale a favorisé le développement de processus de validation, les élèves engagés dans la résolution d'un problème commun devant pour leur pairs s'expliquer ou se justifier de leurs choix. Mais nous avons pu observer que tout appariement d'élèves (chap.II), ou toute situation de débat (chap.VI) ne suscite pas nécessairement des interactions favorables. Au contraire, dans

certains cas l'interaction sociale a pu constituer un obstacle lorsque les élèves du fait de leur engagement comme personne, ou de par leur incapacité à coordonner leurs points de vue respectifs, ne sont pas parvenus à dépasser leur conflit. Notamment ces interactions ont pu favoriser le renforcement de l'empirisme naïf (chap.II, § II.2.1.) ou justifier le recours à l'expérience cruciale comme moyen d'obtenir l'adhésion d'un partenaire (chap.II, § II.2.2.) au détriment de l'utilisation de moyens de preuve d'un niveau plus élevé pourtant disponibles pour le proposant.

D'aucuns pourraient suggérer qu'il s'agit là d'un effet de l'interaction sociale dont une ingénierie didactique plus fine pourrait permettre de venir à bout (par un appariement adéquat des élèves, ou un jeu sur les contraintes de la situation), il s'agit d'un problème complexe qui reste à étudier. En revanche, un obstacle d'une toute autre nature est apparu qui est spécifique de l'interaction sociale ; il s'agit des démarches d'argumentation : " démarche par laquelle une personne – ou un groupe – entreprend d'amener un auditoire à adopter une position par le recours à des représentations – des arguments – qui visent à montrer la validité ou le bien fondé. " (Oléron 1983, p.4). L'argumentation est ainsi constitutive des processus de validation engagés dans un contexte social. Mais, reprenant la distinction proposée par Moeschler (1985, et cf. notre chap.VI, § IV.2.6.) nous ne considérons pas que l'argumentation s'identifie à la preuve.. Comme le note Oléron (op. cit.) l'objet de l'argumentation est d'obtenir l'adhésion de l'interlocuteur au bien fondé de ce qui est soutenu, ce qui ne pose pas nécessairement le problème de sa vérité. L'argumentation comme acte social se caractérise par le caractère ouvert des moyens auxquels elle recourt : "tandis que la démonstration, sous sa forme la plus parfaite, est une enfilade de structures et de formes

dont le déroulement ne saurait être récusé, l'argumentation a un caractère non-contraignant. Elle laisse à l'auteur l'hésitation, le doute, la liberté de choix ; même quand elle propose des solutions rationnelles, aucune ne l'emporte à coup sûr. " (Perelman 1970, p.41).

Au niveau qui nous intéresse, celui de l'élève, cette prééminence de l'argumentation dans un processus de validation dans un contexte social, tient à son antériorité dans le développement de l'enfant. Elle est liée de façon opératoire à sa socialisation dans le cours de laquelle diverses situations d'interaction (pas seulement scolaires, bien sûr) lui ont permis de développer et d'éprouver des formes de discours et des stratégies argumentatives efficaces. Ce sont ces modèles qui seront les premiers mobilisés dans les situations de validation que nous utilisons (dans nos recherches, mais plus généralement dans les processus didactiques mis en oeuvre aux fins de recherche ou d'enseignement). Nous avons observé (chap.VI) comment les conduites correspondant à ces modèles constituent un obstacle essentiel à l'entrée des élèves dans des démarches de preuve spécifiques des mathématiques, pour lesquelles les «arguments» utilisés et les règles d'inférence ne peuvent être pris que dans un ensemble bien précisé sur lequel il existe un consensus de la communauté concernée.

Cette prégnance des démarches argumentatives naturelles nous suggère que le traitement ad hoc d'une réfutation puisse ne pas seulement avoir une signification spécifique de l'activité mathématique, mais corresponde à une conduite dans laquelle prime la mise à l'écart de ce qui serait vu comme une **objection** et ne serait donc pas traité comme une **réfutation** significative d'une contradiction. Ce qui serait en question ne serait plus alors la rationalité, même contextualisée (i.e. en situation), des élèves, mais une référence implicite à un mode d'interaction.

Ces analyses éclairent d'une façon nouvelle la complexité du problème de l'enseignement de la démonstration. Il ne s'agit plus de le formuler seulement en terme de construction cognitive, mais de prendre en compte la négociation de l'entrée des élèves dans un jeu d'interaction sociale ayant des règles spécifiques. En effet, les démarches argumentatives ont leur validité et leur efficacité dans bien des domaines de la vie sociale (comme les négociations politiques ou celles dans le milieu familial, pour ne citer que deux exemples) où elles respectent "des contraintes minimales de mise en forme du discours, directement reliées à la représentation des «exigences fonctionnelles» de la situation " (Esperet et al. 1987, p.21). Le caractère fonctionnel et adapté à ces autres situations, ainsi souligné, nous conduit à soutenir que le problème n'est pas d'obtenir le rejet, par les élèves, des modèles correspondants au profit du modèle mathématique de la preuve (ce qui relèverait d'un volontarisme scientiste qu'il conviendrait au moins de discuter), mais d'en préciser le domaine opératoire.

II.2. Le problème de la dévolution

Une seconde hypothèse importante qui soustend nos travaux est celle d'un nécessaire transfert de responsabilité du vrai dans la classe, de l'enseignant vers les élèves (introduction, § II.2.), pour que la démonstration puisse être reconnue et vécue par les élèves comme un véritable moyen de preuve. Nous avons cherché à obtenir cette dévolution dans deux contextes : celui de la construction d'une conjecture (sur la somme des angles d'un triangle, chap.V), et celui de la résolution d'un problème dans une mise en scène particulière (recherche d'un moyen de

calcul du périmètre d'un triangle tronqué, chap.VI). De telles situations, utilisées dans le cadre d'un processus didactique, ont en particulier deux finalités : une finalité du **premier ordre** qui est celle de la résolution par les élèves d'un problème déterminé, une finalité du **second ordre** qui est celle que l'organisateur de la situation lui assigne en terme d'objectif d'enseignement (objectif à terme plus ou moins lointain, Laborde 1986). Nous utiliserons cette distinction pour analyser les phénomènes liés à la dévolution.

L'objet du processus de dévolution est d'obtenir que les comportements, les choix, les décisions des élèves soient motivés par les finalités du premier ordre. Cela ne peut être obtenu que si l'élève entre dans le «jeu» qui lui est proposé par l'enseignant, s'il accepte, explicitement ou non, d'ignorer les finalités du second ordre qui, par nature des processus didactiques, existent nécessairement : les activités organisées dans le cadre de l'enseignement ont d'abord une finalité d'apprentissage. Au-delà des difficultés pour obtenir la dévolution (cf. à ce sujet Brousseau 1986, pp.314-325), nos travaux mettent en évidence deux contraintes pour assurer le maintien du contrat ainsi passé de fait entre les élèves et l'enseignant :

- la situation doit permettre aux élèves de rester autonomes, de gérer et contrôler eux-mêmes leur activité. Si tel n'est pas le cas, ils chercheront dans l'analyse des finalités du second ordre à trouver les moyens de débloquer leur situation ; soit qu'ils y cherchent des indications sur ce qui est attendu d'eux, soient qu'ils se tournent vers l'enseignant (chap.II § I.3.2., chap.III § III.3.1., chap.IV § II.5.3-4).

- l'enseignant doit avoir des garanties a priori sur la compatibilité de la durée de l'activité des élèves avec l'organisation du temps imposée par le système didactique. Il doit de même avoir des garanties sur la nature de

leurs activités, celle des solutions qu'ils apporteront au problème proposé. Il y va de sa responsabilité comme **enseignant de mathématique**. Faute de quoi, il est amené à des interventions qui remettent en question la signification même de la situation en mettant fin au contrat localement passé avec les élèves. Lorsque les comportements des élèves sont en fait cohérents et pertinents relativement à une lecture peut-être non attendue de la situation mais légitime (chap.VI, § III.4.), toute intervention de l'enseignant conduit à perdre la possibilité de réaliser les finalités du second ordre, ce qui n'est possible que si la réalisation de celles du premier ordre repose sur une activité «vraie» des élèves (ibid. pp315-6).

Par ailleurs les séquences didactiques que nous avons construites et mises en oeuvre appartiennent, du point de vue de la dévolution, à deux grandes classes : la première consiste à provoquer et à problématiser un conflit socio-cognitif (Doise et Mugny 1981) dans la classe à propos d'une conjecture dont la signification profonde est une remise en question des conceptions des élèves (chap.V), la seconde consiste à construire une fiction, un «jeu» portant sur un problème à résoudre ; l'enjeu du débat de validation est la validité des solutions apportées sans pour autant mettre en question les conceptions des élèves (chap.VI).

Ces deux classes de situations renvoient à des problèmes distincts du point de vue de la preuve : dans le premier cas est posé le problème de **savoir**, la problématique correspondante étant celle de la **rigueur** ; dans le second cas est posé le problème du **faire**, la problématique correspondante étant celle de l'**efficacité**. Nous avons discuté cette opposition dans notre analyse de la preuve en référence à un problème global d'apprentissage (chap.I, § IV.1.), cette distinction s'impose ici au niveau local des situations.

Dans la seconde classe de situation, la validation ne porte pas seulement sur le problème de la vérité, mais encore sur celui de l'effectivité et de la communicabilité des solutions proposées. Ainsi, plusieurs registres de validation sont mobilisables qui favorisent le développement de démarches argumentatives, déjà sollicitées par la dimension sociale de ces situations, et pas seulement de preuve. Ces registres, n'ayant pas a priori de hiérarchie pour les élèves, peuvent tenir à l'écart les problèmes de preuve que l'on cherche à susciter. Le recours à ce type de situations a pour objectif d'obtenir la dévolution en finalisant la résolution d'un problème non relativement à l'enseignant mais relativement à des pairs (d'où le choix de la situation de communication invoquée, chap.VI), dès lors que l'on reconnaît que des demandes du type «montrer que...» ou «trouver que...» impliquent que les élèves agiront d'abord pour découvrir ce que l'enseignant a «caché», ce détour par la fiction du jeu est légitime.

Mais de telles situations placent en quelque sorte les démarches de validation mathématique en concurrence avec d'autres outils, disponibles et légitimes, d'avec lesquels il conviendra de les distinguer dans la mesure où la finalité de second ordre est l'apprentissage de la preuve, voire de la démonstration. Elles paraissent donc mal adaptées car elles augmentent la complexité de l'enseignement, et peuvent se constituer éventuellement en obstacle à la réalisation de l'objectif visé. On peut cependant poser le problème de l'existence d'un jeu de contraintes qui permettrait de privilégier les démarches de preuve mathématique et de tenir à l'écart les autres aspects de la validation (efficacité, effectivité, communicabilité, etc.).

II.3. Un problème didactique : la construction de situations de débat *sur* la preuve

L'analyse que nous avons développée au paragraphe précédent met en évidence un fait que nous n'avions pas pris en compte initialement : la construction de preuves en mathématiques est constitutive de la construction de connaissances. Cela constitue une partie de sa spécificité : la production des mathématiciens est d'abord celle d'un savoir, elle exige une élaboration théorique pour laquelle la démonstration est outil privilégié qui, d'une part, permet de valider un savoir nouveau, et, d'autre part participe à la réorganisation des savoirs anciens qui l'accueillent en montrant comment s'établissent les liens. Aussi soutenons-nous que l'apprentissage de la démonstration doit se faire dans le même mouvement que celui des mathématiques elles-mêmes. Il ne peut être «isolé» à des fins d'enseignement comme cela peut être le cas pour d'autres notions. Un outil didactique spécifique de cet apprentissage serait alors les situations de conflit socio-cognitif du type de celle étudiée au chapitre V.

Le problème qui se pose est que si nous disposons de moyens théoriques pour aborder la construction de telles situations (Brousseau 1986), il s'agit en fait de situations de validation au regard de la solution d'un problème déterminé. En revanche, elles ne constituent que des situations d'action (au sens de Brousseau, ibid.) si on prend le point de vue de la preuve en mathématiques. En effet, pour reprendre la distinction entre outil et objet proposée par Douady (1984), les moyens de preuve utilisés par les élèves dans ces situations fonctionnent comme des outils et non comme des objets au sens où les élèves les mettent en oeuvre sans les

considérer explicitement, ni les mettre en question. En effet, quelle que soit la pression exercée par le débat de validation, voire par les réfutations, les élèves que nous avons observés ne mettent pas en question les règles de validation mobilisées pour fonder leur position. Or le processus didactique ne peut se passer de l'explicitation des connaissances dont il vise l'acquisition par les élèves et la constitution en un savoir. En effet, pour qu'une construction intellectuelle propre à un individu puisse être institutionnalisée (acquérir un statut social) "il est nécessaire, au préalable, qu'elle ait fonctionné **comme telle** dans des débats scientifiques et dans les discussions entre élèves " (Brousseau 1981, pp.51-52 – c'est nous qui soulignons –, cf. aussi à ce sujet Douady, ibid. pp.14-17).

La complexité de l'apprentissage de la démonstration apparaît telle que nous ne prétendons pas construire des situations qui permettraient à l'élève seul de construire l'outil de preuve qu'est la démonstration, le problème est de construire des situations qui le problématisent. La démonstration objet technique apporté par l'enseignant, de façon adéquate, prendrait alors toute sa signification. La construction de situations qui permettraient des **débats sur la preuve**, et pas seulement des débats de preuve, la détermination de leurs caractéristiques et de leur contraintes sont des problèmes ouverts pour la recherche didactique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Arsac G., Mante M., 1983, Des «problèmes ouverts» dans nos classes du premier cycle. *Petit X* **2**, pp.5-33

Arsac G., 1985, Exposé au séminaire du DEA de "Didactique des Disciplines Scientifiques", Grenoble Université 1

Arsac G., 1987, *L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique* (à paraître) in *Recherches en Didactique des Mathématiques*

Audibert G., 1982, *Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane* . Thèse d'état, Université des Sciences et Techniques du Languedoc

Balacheff N., 1978, Une utilisation et une étude de la classification proposée par A.W. Bell pour l'étude des preuves formulées par des élèves. *Séminaire de pédagogie des mathématiques* **1**, Grenoble : Institut IMAG

Balacheff N., 1979, quelques aspects du sens donné à une explication en mathématiques par des élèves de 10-11 ans. *Séminaire de pédagogie des mathématiques* 7, Grenoble : Institut IMAG

Balacheff N., 1982, Preuve et démonstration au collège. *Recherches en didactique des mathématiques* . **3**, 3, pp.261-304

Balacheff N., Laborde C., 1985, Langage symbolique et preuves dans l'enseignement mathématique : une approche socio-cognitive. in Mugny G., *psycologie sociale du développement cognitif.* Berne : Ed. Peter Lang

Bassis O., 1984, *Mathématique : les enfants prennent le pouvoir.* Paris : Fernand Nathan, coll. Education

Bell A., 1976, *The learning of general mathematical strategies* . Ph. D. Université de Notthingam

Bell A., 1979, The learning of process aspects of mathematics. *Educational Studies in Mathematics* **10**, pp. 361-387

Berdonneau C., 1981, *Quelques remarques sur l'introduction à la géométrie démontrée à travers les manuels en usage dans l'enseignement post-élémentaire en France au vingtième siècle* . Thèse de troisième cycle, Université de Paris VII

Bkouche R., 1984, *Les démonstrations de Legendre du postulat des parallèles*

Blanché R., 1973, *Le raisonnement* . Paris : PUF

Bodin A., 1980, *Mise au point d'un questionnaire. Observation. Entretiens de binômes et individuels* DEA de Didactique des mathématiques. Université de Strasbourg

Borel E., 1948, La définition en mathématiques. in Le Lyonnais F., *Les grands courants de la pensée mathématique.* Paris : Cahiers du sud

Borenson H., 1986, Teaching the Process of Mathematical Investigation. *Arithmetic Teacher* **33**, 8, pp.36-38

Bourbaki N., 1948, L'architecture des mathématiques. *in* Le Lionnais : *Les grands courants de la pensée mathématique*. Edition des cahiers du sud

Bourdieu P., 1980, *Le sens pratique* . Paris : Ed. de Minuit

Brousseau G., 1975, *Etude de l'influence des conditions de validation sur l'apprentissage d'un algorithme* . IREM de Bordeaux

Brousseau G., 1977, L'étude des processus d'apprentissage en situations scolaires. *Cahier IREM* **18**, IREM de Bordeaux

Brousseau G., 1981, Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques* **2**, 1

Brousseau G., 1984a, Etudes de questions d'enseignement. Un exemple la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique* **45**. Université de Grenoble 1

Brousseau G., 1984b, Le rôle du maître et l'institutionnalisation. *Actes de la III° Ecole d'été de didactique des mathématiques* . Université de Grenoble 1

Brousseau G., 1984c, Le rôle central du contrat didactique dans l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques.*Actes de la III° Ecole d'été de didactique des mathématiques* . Université de Grenoble 1

Brousseau G., 1986, *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques* . Thèse d'état Université de Bordeaux 1

Burke M.J., 1984, *The use of counterexample logic by adolescent* . Ph. D., The University of Wisconsin – Madison

Burton L., 1984, *Thinking Things Through : Problem solving in Mathematics* . Oxford : B. Blackwell

Capponi M. T. et al., 1986, *Apprentissage du raisonnement* . IREM de Grenoble

Carroll L., 1885, *Euclid and his Modern Rivals* . New York : Dover Publication Inc., 1973

Cavaillès J., 1962, *Philosophie des mathématiques* . Paris : Hermann

Caveing M., 1977, *La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque* . Tome II. Université de Lille, 1982

Chevallard Y., Tonnelle J., 1982, Evidence et démonstration. *Actes de la III° Ecole d'été de didactique des mathématiques* . Ed. A. Rouchier, Orléans

Chevallard Y., 1985, *La transposition didactique* . Grenoble : La Pensée Sauvage

Choquet G., 1964, *L'enseignement de la géométrie* . Paris : Hermann

Clairaut, 1753, *Elémens de géométrie* . A Paris chez David

Close G. S., 1982, *Children's understanding of angle at the primary / secondary transfer age* . Master of Science, Polytechnic of the South Bank

Dahan-Delmedico A., Peiffer J., 1982, *Routes et dédales.* Paris : Etudes vivantes

Dieudonné J., 1980, Les grandes lignes de l'évolution des mathématiques. *Séminaire de philosophie des mathématiques.* IREM de Paris Nord

Dieudonné J., 1984, Préhistoire de la topologie algébrique. *Sans tambour ni trompette.* IREM de Lyon

Doise W., Mugny G., 1981, *Le développement social de l'intelligence.* Paris : Interédition

Douady R., 1984, *Jeux de cadre et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques* . Thèse d'état, Université de Paris VII

Douady R., Perrin M.J., 1984, Aires de surface plane,*Petit X* **8**, pp. 5-30

Ermel, 1978, *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire.* tome 1. Paris : OCDL

Espéret E., Coirier P., Coquin D., Passerault J.M., 1987, L'implication du locuteur dans son discours : discours argumentatif formel et naturel.*Argumentation.* Bruxelles

Fishbein E., 1982, Intuition and Proof . *For the Learning of Mathematics* **3**, 2, pp. 9-18 et 24

Fourrey E., 1938, *Curiosités Géométriques* . Paris : Lib. Vuibert

Freudenthal H., 1980, *Weeding and sowing : preface to a science of mathematical education.* Dordrecht : Reidel Publ. Co.

Galbraith P.L., 1979, *Pupils proving* . Shell Centre for Mathematics Education, Université de Nottingham

Gaud D., Guichard J.P., 1984, Apprentissage de la démonstration. *Petit X* **4**, pp.5-25

Giles G., 1981, *School mathematics under examination : 3. Factors affecting the learning of mathematics.* University of Stirling

Glaeser G., 1986, *La didactique expérimentale des mathématiques* , 2° partie : la conception génétique. Université Louis Pasteur, IREM, Strasbourg.

Gras R., 1983, Instrumentation de notions mathématiques. Un exemple : la symétrie. *Petit X* **1**

Grosgurin L., 1926, *Enseignement de la géométrie. Méthodologie* . Paris : Payot & Cie

Halbwachs F., 1981, Significations et raisons dans la pensée scientifique. *Archives de Psychologie* **XLIX**, 190, pp.199-229

Hanna G., 1983, Rigorous proof in mathematics education. *Curriculum Series* **48**, The Ontario Institut for Studies in Education

Heath T. L., 1956, *Euclid's Elements* . Vol. I. New York : Dover Publication Inc.

Heath T. L., 1925, *The thirteen books of Euclid's Elements* . New York : Dover Publication Inc., 1956

Hilbert D., 1899, *Les fondements de la géométrie* . Paris : Dunod, 1971.

Hitt F., 1978, *Comportement de "retour en arrière" après la découverte d'une contradiction* .Thèse de troisième cycle, Université de Strasbourg

Kayas G. J., 1978, *Les éléments d'Euclide* . Paris : Editions du CNRS

Laborde C., 1982, *Langue naturelle et écriture symbolique* . Thèse d'état, Université de Grenoble 1

Laborde C., 1984, Exposé sur la géométrie. *Actes de la III° Ecole d'été de didactique des mathématiques* . Ed. IMAG Grenoble

Laborde C., 1986, Divers aspects de la dimension sociale dans les recherches en didactique des mathématiques. *Colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique.* Marseille-Luminy. Eds. Université 1 de Grenoble

Lakatos I., 1976, Preuves et réfutations. Paris : Hermann Ed., 1985

Legendre A. M., 1875, *Eléments de Géométrie* avec additions et modifications de M. A. Blanchet. Paris : Lib. Firmint-Didot

Le Rest E., 1982, « Il faut que j'y pense encore », (Les axiomes de la géométrie). *in* : *La rigueur et le calcul* . Ouvrage Collectif. Paris : Ed. CEDIC

Mach H., 1908, La connaissance et l'erreur. Paris : Flammarion

Mejias B., 1985, *Difficultés conceptuelles dans l'écriture d'algorithmes itératifs chez des élèves de Collège.* Thèse de 3° cycle, Université de Grenoble 1.

Miéville D., 1981, Explication et discours didactique de la mathématique. *Revue européenne des sciences sociales* et *Cahiers Vilfredo Pareto* **XIX**, 56, pp.115-152

Moeschler J., 1985, *Argumentation et conversation.* Paris : Hatier-Crédif

Oléron P., 1983, *L'argumentation.* Paris : PUF

Papy , 1967, *Mathématique Moderne* , Tome III : Voici Euclide. Paris : M. Didier

Paquelier Y., 1985, Argumentation et démonstration : analyses de quelques phénomènes de persuasion dans l'enseignement mathématique. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique.* **70**, Université de Grenoble I

Petit B., 1986, L'évidence. *Revue trimestrielle de droit civil* **3**, pp. 486-503

Perelman Ch., 1970, *Le champ de l'argumentation.* Bruxelles : Presses universitaires

Perrin M. J., Douady R., 1984, Aires de surfaces planes (première partie). *Petit X* **6**,pp.5-33

Perrin M. J., Douady R., 1985, Aires de surfaces planes (première partie). *Petit X* **8**,pp.5-30

Perrin M. J., Douady R., 1986, Conceptions des élèves à propos d'aires de surfaces planes. *Actes du Colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique* . CIRM Marseille-Luminy. pp.92-101

Piaget J. et al., 1970, *L'explication dans les sciences.* Paris : Flammarion

Piaget J., 1974, *Recherches sur la contradiction* , Vol.2 : les relations entre affirmations et négations. Paris : PUF

Piaget J., 1975, L'équilibration des structures cognitives. *Etudes d'épistémologie cognitive* Vol.XXXIII, Paris : PUF

Piaget J., 1978, Recherches sur la généralisation. *Etudes d'épistémologie cognitive* Vol.XXXVI, Paris : PUF

Piaget J., 1983, *Le possible et le nécessaire* , Vol.2 : l'évolution du nécessaire chez l'enfant. Paris : PUF

Piaget J., Garcia R., 1983, *Psychogenèse et histoire des sciences.* Paris : Flammarion

Pont J.C., 1986, *L'aventure des parallèles* . Berne : Peter Lang

Popper K. R., 1972, *La connaissance objective* . Bruxelles : Ed. Complexe, 1978

Robert A., 1982, *L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur.* Thèse d'état, Université de Paris VII

Reynolds J., 1967, *The development of the concept of proof in grammar school pupils.* Ph. D. University of Nottingham, School of Education

Rogalski J., 1982, L'acquisition des notions relatives à la dimentionalité des mesures spatiales (longueur, surface). *Recherches en didactique des mathématiques* **3**, 3, pp.343-396

Saada-Robert M., 1983, *Histoire fonctionnelle d'un schème élémentaire* (à paraître)

Sémadéni Z., 1984, Action proofs in primary mathematics teaching and in teacher training. *For the learning of mathematics* **4**, 1, pp.32-4

Senk S., 1985, How well do students write proofs ? *Mathematics teacher*

Smith D. E., 1925, *History of Mathematics* , Vol. II. New York : Dover Publication Inc. 1958

Stein M., 1981, Bibliography on proof in mathematics teaching *ZDM*

Swart E.R., 1980, The philosophical implications of the four-color problem.*The American Mathematical Monthly* **87**, 9, pp.697-707

Tonnelle J., 1982, Evidence et démonstration en géométrie. *Actes de la III° Ecole d'été de didactique des mathématiques* . Ed. IREM d'Orléans.

Vergnaud G., Rouchier A. et al., 1983, Une expérience didactique sur le concept de volume en classe de cinquième. *Recherches en didactique des mathématiques* , Vol. IV n°1

Vergnaud G., 1981, Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Actes du V° colloque du groupe Psychology of Mathematics Education* , Grenoble : Ed. IMAG

Vergnaud G., 1983, Pourquoi une perspective épistémologique est-elle nécessaire pour la recherche sur l'enseignement des mathématiques ? *Actes de la V° rencontre annuelle PME-NA* . Montréal : Ed. J.C. Bergeron, UQAM

Vertes R.N., 1983, Diagonals of a Polygon. *Mathematics Teaching* **12**, pp. 17-19

Vinner S., 1976, The naïve concept of definition in mathematics. *Educational Studies in Mathematics Education* 7 4, pp.413-429

Vinner S., 1983, The notion of proof–some aspects of student's views at the senior hight level. *Actes du VII° colloque du groupe Psychology of Mathematics Education* , Ed. R. Hershkovitz, Weismann Institut of Science Rehovot

Walsch W., 1983, *Mathematische Aufgaben für die Klassen 6 bis 10* . Berlin : Volk und Wissen Volkseigener Verlag

Watzlawick P., 1978, *La réalité de la réalité* . Paris : Seuil

ANNEXE

Transcription des textes d'élèves donnés en illustration

Remarque : le symbole / signifie un changement de ligne dû à la largeur du papier utilisé par les élèves. Le symbole // signifie un alinéa volontaire. Nous avons noté entre crochets des parties de texte ajoutées après coup par les élèves, qui apparaît dans l'original au-dessus, ou au-dessous, de la ligne courante. Lorsque cela est utile nous avons concervé la mise en page en colonne utilisée par certains élèves. L'orthographe des textes originaux a été respectée.

Chapitre I

Figure 4, page 46

> Il y aura toujours 10+10 //
> J'ai choisi 2 et il s'anule / donc si je choisi un autre / nombre entre 1 et 10 il / sanulera toujours et se / sera toujours égale à 20 //

Chapitre II

Figure 2, page 94

> Un polygone quelconque à toujours / 3 diagonales au moin que la somme des / sommets du polygone en le multipliant / par le nombre de sommets et on divise par deux.//

Figure 3, page 94

En sachant le nombre de sommet d'un polygone, il partira de chaque point, / le nombre de sommet - (ses 2 voisins plus lui-même). / Il faut multi- / plier ce que l'on a trouvé par le nombre de sommet (chaque sommet, / partent le même nombre de diagonales). //
Mais on compte chaque diagonale deux fois : le nombre de diagonales / trouvées est donc à diviser par deux pour trouver le nombre de diagonales. //

Figure 4, page 95

Dans un polygone à 4 côtés il part une diagonale par sommet./ donc Il part 4 diagonales : comme une diagonale joint / 2 sommet..il n'y a que 2 diagonales ; 4:2=2 //
4. //
Dans un polygone à 5 ~~côtés~~ sommets, il part 2 diagonales / par sommet donc il part 10 diagonales,/ mais comme une diagonale joint 2 points / il n'y a que 5 diagonals : 10:2=5 //
Dans un polygone à 6 sommets, il part 3 / diagonales par sommets donc il part / 18 diagonales ; mais comme une / diagonale joint deux points : il / n'y a que 9 diagonales : 18:2=9 / et de même avec 7 sommets 8, 9, 10 / 11, ...etc //
alors a 7 sommets il partira 4 diagonales / par sommets. //
à chaque fois que l'on a joint / un sommet [au présédant polygone] on ajoute une diagonale / par sommets [au présédantes diagonales] et on divise par / 2 le nombre de toutes les diagonales / et on trouve le nombre de diagonale / du polygone . et pour trouver le nombre de / diagonales partant de chaque sommets / ont soustré au nombre de / sommet, trois. //

Figure 5, page 96

Une figure à 4 côtés nous fait trouver 2 diagonales. Pour une figure à / 5 côtés nous trouvons 5 diagonales. Nous avons ajouté 1 côté à la figure / précédante et 3 diagonales. Pour 6 côtés nous trouvons 9 diagonales. //
Donc on rajoute 1 diagonale de plus que celles ajoutées à la figure / précédante lorsqu'on rajoute un côté. //

ex : 4 côtés ⇒ 2 diagonales //

5 côtés ⇒ 2 diagonales + 3 autres= 5 diagonales //

6 côtés ⇒ 5 diagonales + 4 autres= 9 diagonales //
7 côtés ⇒ 9 diagonales + 5 autres= 14 diagonales //
10 côtés ⇒ 27 diagonales (figure à 9 côtés) + 8 autres= 35 diagonales //
etc...//

Figure 6, pages 97-98

dans un polygone : on prent deux / points [AB] côte a côte on trouve leur / diagonale : le nombre de diagonales / sera le même pour ces deux points. //
on prent le points suivant C, il aura / le même nombre de diagonales que AB / moins une car il aura une diagonale / confondue.//
on prent le point suivant à C qui est D, il / aura le même nombre de diagonales que / AB moins deux car il aura deux diagonales / confondues.//
" " " .....à D .....E, ...//
".....//
AB.....trois.....trois angles / confondus //
jusqu'à ce qu'on trouve une diagonale à un point / alors on ajoutera le nombre totale des diagonale trouvés.//

Figure 7, page 98

1er sommet : nbs de diagonnalles = nbs de sommet - 3 //
2ème sommet : nbs de diagonnalles = pareil //
à partir du 3ème sommet : nbs de diagonnalles obtenu précédement / - 1 diagonnale. //
4ème sommet : nbs de diagonnalles obtenu précédement / - 1 diagonnale //
ainsi de suite. //
- à la fin on additionne tous les nbs de diagonnalles / obtenues à chaque sommet pour trouver le nb / de diagonnale du polygone.//

Figure 8, page 99

Pour calculer le nombre de ~~sommets~~ diagonale d'un polygone (x) / ~~il faut~~ : il faut soustraire 3 au nombres de sommet du poly. / ~~sachant que l'on élimine~~ //
~~Fais pour~~ les 2 premiers sommets ont x-3 diggonales / et ~~les suivants auront seront le nombre Nous~~ vous ~~conter~~ compterez / à

rebours pour les sommets suivants. Il les deux derniers / les autres sommets les auront / fait à votre place. //

Figure 9, page 99

On dessine un polygone. se polygonne / a plusieurs sommet avec les sommet / trouver les diagonales de ce polygone. //
Si il y a 8 sommets dans un polygone, 5 diagonales / doivent partirent de chaque sommets et on se rend compte / qu'il y a 40 diagonales (8x5) //
Si il y a 6 sommets dans un polygone, 3 diagonales / doivent partirent de chaque sommets il y a 18 diagonales / (6x 3). //

Figure 10, page 105

polygone ABCDE.//
-quadrilatère ABDE //
on a les diagonales AD et EB //
-quadrilatère AECB //
on a les diagonales EB et AC //
-quadrilatère EBCD //
on a les diagonales EC et BD //

AD et EB //
EB et AC //
EC et BD. //
diagonales communes. //
*EB //
On a trouvé 6 diagonales / dont 1 commune donc il / y a 5 diagonales différentes //

Figure 11, page 107

Pour les figures [dont le nombre de] sommets [est] paire on divise par 2 le / - nombre de diagonales par rapport aux [nombre de] sommets //
Pour les figures dont le nombre de sommets est / impair on enlève 2 au nombre de diagonales / par rapport au nombre de sommets.//

Figure 13, page 108

Pour trouver le nombre de diagonal il faut se / rapporter au nombre de sommets. //

Figure 14,page 109

(cf. transcription de la figure 9, page 99)

Figure 15, page 111

Polygone ayant 6 sommets et 3 diagonales.//
Procédé ://
A ⟶ D Tracer une droite issue d'un /sommet et [*illisible*]
B ⟶ E ~~celle ci~~ [qui] ~~feront~~ [coupe] ~~le~~ [son] sommet / opposé //
C ⟶ F Refaire ce procédé à chaque / sommet.//

Figure 16, page 112

Pour trouver le nombre de diagonales dans un polygone / il suffit de diviser le nombre des sommets par deux.//
polygone ayant 6 sommets : //
6:2=3 diagonales //
exemple //
polygone ayant 8 sommets //
8:2= 4 diagonales //

Figure 17,page 113

Quand on connait le nombre des sommets d'un polygone / il suffit de diviser par 2 ce nombre et on obtient / le nombre de ses diagonales.// le nombre des sommets doit être paire. //

Figure 18, page 119

Dans un polygone, chaque point à 2 voisin.//
Joignons d'un point tous les autres points / sauf ses voisins (on obtiendra les diagonales partant de ce / point.) Si on fait cela pour tous les autres points, on aura toutes les / diagonale de ce polygone. //

Figure 25, page 130

x=le nombre de sommets / x=3x x= n.de //
7 point x=7 //
7-3= 4 //
4x 7=28 //

Figure26, page 132

si le n de sommets / est pair, on le divise / par 2. //

Figure 28, page 134

dans un polygone si on des sommets x le / nombre des diagonales qui partent par un / point sera x-3 car il y a le point d'où / l'on part et les deux autres points qui le / ratache. au polygone. //

Figure 29, page 134

dans un polygone si il y a 6 points.il y aura / automatiquement 3 diagonales pour chacun des / points car dans le contour du polygone il y a / deux points qui le ratache : conclusion il reste / trois qui font les diagonales. //

Figure 30, page 135

dans un polygone si il y a 6 [x] points. il y aura / automatiquement 3 [y] diagonales pour chacun des / points car dans le contour du polygone il y a deux points qui le ratache : conclusion il reste / trois qui font les diagonales. //

Figure 31, page 136

Si les points ne sont / pas alignés.//
A qui est entouré de E et de F va / obligatoirement placé ses diagonales / sur DCB qui sont les points restant. //

Figure 32, page 137

on prend le nombre de points on enlève / 3 points. //

Figure 33, page 138

En sachant le nombre de sommets d'un / polygone, il partira de chaque point, le / nombre de sommets-(ses deux voisins + lui-même). //

Figure 34, page 139

Si on a un polygone à 7 côtés, chaque point aura 2 voisins, et par ce / point [partiront 7 [nombre des sommets]-(2 [nombre des voisins] + 1[le point]].On fait cela pour tous les points. //

Figure 35, page 141

En sachant le nombre de sommets d'un / polygone, il partira de chaque point, le / nombre de sommets - (ses deux voisins + lui-même).//
il faut [*illisible*] multiplier ce qu'on a trouvé par le nombre de sommets / (par chaque sommet, partent le même nombre de diagonales).//
MAIS, on compte chaque diagonale deux fois. //

Figure 36, page 144

Pour calculer le nombre des diagonales d'un / polygone, lorsque l'on connait le nombre / de ses sommets, il faut diviser le / nombres des sommets par deux.//
$\frac{\text{sommets}}{2}$ = nb de diagonales. //

Figure 37, page 145

dès que l'on connait le nombre des sommets on / prend son x^2 ce qui est égal aux nombres de diagonales. //

Figure 41, page 171

dans un polygone à 4 côtés sommets il part / une droite [diagonale] par sommet donc 4 diagonales / et comme dans polyagone 4 sommets / il y a 2 diagonales donc en faites 4:2 = 2 diagonales //
dans un polygone à 5 sommets / il part 2 diagonales par / sommets donc 10 diagonales et / comme dans un polygone a 5 sommet / il y a 5 diagonale. 10:2=5 //

Figure 43, page 174

Une diagonale est une droite qui passe par ~~le~~ [un] sommet / d'une ~~figure géométrique~~ [polygone] et qui coupe la surface / de ce dernier en deux. //

Figure 48, page 194

Si le nombre des sommets du polygone est paire ://
- ~~il faut~~ diviser ce nombre en deux et on obtient le nombre de / ses

diagonales //
Si le nombre des sommets est impaire ://
- il faut Le nombre des diagonales est égale au nombre des / sommets.//
Un polygone est une figure géométrique qui peut avoir / n'import quel nombre de sommet mais dont les côtés / doivent être égaux. //

Figure 49, page 195

Un polygone quelconque à toujours / 3 diagonales au moin que la somme des / sommets du polygone en le multipliant / par le nombre de sommets et on divise par deux./ Sauf pour les triangles ~~et~~ / ~~quadrilatère.~~ //

Chapitre III

Figure 8, page 226

Pour trouver le nombre de diagonales dans un polygone / il suffit de diviser le nombre des sommets par deux.//
polygone ayant 6 sommets : //
6:2 = 3 diagonales //
exemple //
polygone ayant 8 sommets : //
8:2 = 4 diagonales //

Cela ne / marche que / pour des / polygone/ ayant un / nombre pair / de sommets.//

Les polygones sont des figures * ayant un / nombre pair de sommets //
*ayant tous ses côtés de même longueur ~~et dont~~ //
*~~disposé~~ Ses côtés / devant être disposés / en cercle.//
*~~d'un côté~~ //
d'un sommet ne part qu'une droite. //

Figure 12, page 241

nb de sommets = 2 x nb diagonales.//
nb de diagonales : 2x //
le nb de diagonales est égale au double du nb / de sommets. //

Figure 13, page 243

Dans un polygone pour trouver le nombre de / diagonales qui partent du 1er sommet, on enlève / au nombre total de sommets, le sommet / lui même et les sommets consécutifs.//
Pour le 2ème sommet on fait de même, mais / pour le 3ème on enlève une diagonale en plus / et pour le 4ème on fait de même et ainsi de / de suite pour tous les sommets restants. //

Figure 14, page 245

Polygone convexe : //
Dans 1 polygone convexe, on compte le / nb de sommets qu'il y a et on a / obligatoirement le même nb de diagonales.//
Polygone non convexe : //
Dans 1 polygone non convexe, / chaque sommet a le même nb de / diagonales.//
Ex : Dans un polygone non convexe / pour trouver le nb de diagonale / il faut multiplié le nb de diagonales / par d'un sommet par le nb des / sommets du polygone / //

Figure 15, page 248

- A partir d'un sommet A d'un polygone, il y a autant de diagonales / qu'il y a de sommets non consecutifs à A //
- A partir du sommet B consecutif de A, il y a autant de diagonales qu'avec / le sommet A //
- ~~A partir~~ En comptant chaque fois un sommet de plus, il y a une / diagonale de moins ~~qu'avec~~ que le nombre de diagonales comptées précédement.//
ex : s'il y a 6 sommets et 6 côtés a un polygone ABCDEF //
3 diagonales passant A //
3 " " B //
2 " " C //
1 " " D //
les autres diagonales étant déjà comptées / (par deux points il passe seul droite.) //

Figure 16, page 249

On multiplie le nombre de diagonales qui passe par un / sommet par

le nombre total de sommets.//
ex : polygone (7côtés, 7 sommets) //
Par un sommet il passe 4 diagonales que l'on / multiplie par le nombre total de sommets.//
B à 4 diagonales que l'on multiplie par 7.//
On divise par 2 pour trouver le nombre exact car il y / en a qui sont confondue.//
ex : BF=FB //

Figure 17, page 250

Pour trouver le nb de diagonale / il faut : ~~nb de sommet x 1~~ / ~~par chaque point~~ //
multiplier le nb de sommet par le / nombre de côtés au résultat on / soustraits le nb de sommets //

Figure 18, pages 252-253

Pour trouver le nombre de diagonales d'1 / polygone qui a x sommet on diminue le / nombre de sommets de ce polygone par 3 et on / obtient le nombre de diagonales pour 1 sommet //
Pour trouver le nombre de diagonales en tout, / on multiplie le nombre de sommets par le nombre / de diagonales issues de chaque sommet, puis / on divise le résultat obtenu par 2. //

Figure 19, page 254

Au nombre des sommets d'un polygone, il faut soustraire / le nombre des côtés consécutif d'un sommet et lui même / pour calculer le nombre de diagonales passant par ce / sommet puis pour avoir le nombre totale de diagonales / on multiplie le nombre ~~des sommets par le nombre~~ de diagonales [d'un sommet] par tous les / sommet de la figure donnée. //

Chapitre IV § I

Figure 4,page 306

OUI nous sommes d'accord.//
périmètre c //
a+bx 2 1 //
Aire d //

a x b 2 //
Si on augmente le périmètre c //
c+3 //
Pour l'instant l'aire n'augmente pas.//
Mais si on augmente le périmètre il / faut changer la longueur et la largeur / du rectangle. donc l'aire ~~changera~~ [augmentera] obliga / toirement - //

Figure 5, page 307

P=(a+2)+(b+1) x 2 = p c + 3.//
A=(a+2) x (b+1) = d + 3.//
donc l'aire augmente- //

Chapitre IV § II

Figure 4, page 335

On reproduit le dessin en mettant la partie qui man-/ -que. On a mesuré les angles, on a tracé et nous / avons trouvé la partie [*illisible*] tronqué. Nous avons mesu / -ré les 3 côtés et nous les avons additionnér. Nous / trouvons ainsi le périmètre du triangle en partie / tronqué. //

Figure 5, page 337

mesurez les 2 angles du triangle / /
Reproduisez-les 2 angles de l'autre / coté de la base du triangle //
Marquez un point aux extrémités de ~~votre~~ / ~~angle~~ vos angles, reliez vos points / aux extrémités de la droite. Prolongez / les droites trouvés jusqu'à ce qu'elle / se croise. Mesurez l'angle trouvé.//
Additionnez le aux 2 autres angles //
Vous devez trouvez 180° //
Mesurez vos ~~droites~~ [segments] et additionnez leur / longueur. Vous avez le périmètre .du / triangle. //

Figure 6,page 338

- Refaire la figure donnée sur une autre feuille //
- plier du côté complet //
- Ralonger les deux autres côtésjusqu'a qu'ils se / croisent en un point //

- Mesurer et calculer le périmètre //

Figure 7, page 339

- Refaire la figure donnée sur une autre feuille / mais mettre les deux / côtés complets contre le bord de la feuille //
- Ralonger les deux autres côtés jusqu'a qu'ils / se croisent en un point //
- Mesurer et calculer le périmètre //

Figure 8, page 342

on nous donne un trian / gle nommé ABCD //
On prend un point [C] sur la feuille. on prend l'angle du point C. On repporte cette mesure / sur le point C de la feuille blanche et on trace l'angle C de 59° ce qui nous donne / Cy et Cz (59°) //
on mesure l'angle D et on repporte cette mesure sur Cy et on trace l'angle de D de / 15° qui vient couper Cz en X. Comme la somme de angles d'un triangle est égale à / 180° l'angle X est égale à 36°. A partir du triangle XCD on prolonge CD du côté / de D.En reprenant la figure de Départ on prolonge CD et le segment tronqué qui vont : se couper tout les deux en P' on mesure P' et on le repporte sur le prolongement de CD.//
on trace l'angle de 17° jusqu'à ce qu'il coupe le triangle XCD en un segment AB.//
on obtient un triangle en partie tronqué ABCD. //

Figure 15, page 351

prends dimensions des 3 segments //
prends un nombre par lequel tu diviseras / les 3 longueurs de manière à obtenir un petit dessin //
~~Calcules~~ [cherche] les 2 angles.//
reproduis le dessin à la nouvelle échelle, respecte : bien les angles.//
prolonge les 2 segments.//
cherche la longueur des 3 côtés et multipli les par / le nombre dont tu t'étais servi pour les diviser. //

Chapitre V

Figure 3, page 372

Which angle is BIGGER or are they ABOUT THE SAME SIZE ? //
Answer this question for each pair of angles.

Figure 24, page 443

un tour complet = 360° //
1 demi-tour = 180° //
1 triangle = 180° //
Si nous colons 2 triangles cela / fera 1 carré étant donné qu'un / carré à 4 angles droits (90° x 4 = / 360°) diviser par deux cela fera / un triangle de 180°

Chapitre VI

Remarque : Les textes manuscrits reproduits en illustration dans ce chapitre ne sont pas ceux des élèves, mais la copie «fidèle», par un observateur, de l'affiche qu'ils ont réalisée. La mise en page et les ratures éventuelles ont été respectées.

Figure 2, page 497

On a pris la mesure [AB] avec le compas sur la / feuille d'origine qu'on a reportés sur une / autre feuille et qu'on a tracé. On a calculé à l'aide / du reporteur les degrés ~~ds la feuille d'origine~~, ~~angles~~ / ~~des sommets AB~~ des angles A et B de la / feuille d'origine. On les a reportés puis tracé / sur l'autre feuille ou j'ai prolonger et obtenu le / point C qui forme le triangle ABC.//
Calcule du périmètre //
[AB] = 12,9 //
[BC] = 21,7 //
[CA] = 18,7 //

ABC = 53,3 cm //

Figure 3, pages 498-499

On sait que la somme des 3 angles d'un triangle est égale à 180° //
On sait que les angles //

$\widehat{CAB}$ = 85° //

$\widehat{ABC} = 60°$ //
Alors on fait 85° + 60° + 145° //
et 180° - 145° = 35° //
Donc l'angle C doit être égale à 35° //
~~Puis on fait glisser cet angle le long du triangle inachevé.~~//
Prendre 1 point de l'une des extrémités inachevées du triangle / puis à partir de ce point faire un angle de 35° puis faire / de même pour l'autre extrémité, puis tracer. //

Figure 4, page 500

Pour pouvoir tracer le / triangle en entier, on / plie la feuille sur le côté / entièrement tracé.//
Une fois que la feuille est / pliée, on prolonge les deux / côtés avec la règle afin / qu'ils se rejoignent //
Ensuite pour ~~trouer~~ trouver / le périmètre, on mesure les / trois côtés et ensuite on les additionne. //

Figure 5, page 501

On trace les médiatrices des 2 plus petits / côtés, le point d'intersection de ces 2 media- / -trices du triangle manquant que l'on / reporte à l'intérieur du morceau de / triangle dessiné :
Maintenant on peut cal- / culer le périmètre du triangle //

Figure 6, page 503

J'AI tracé la médiatrice / du segment [AB] (la base du / triangle).
J'ai reproduit la / partie donnée (symétrie). ~~J'ai p~~ //
Je prolonge ma / médiatrice et je / rejoints mes deux / côtés sur la médiatrice / en un seul point. Ce / qui me permet de / trouver la partie manquante. //

Figure 7, page 503

On a calculé la somme de l'angle //

$\widehat{ABC} = 85°$ $\widehat{BCA} = 36°$ $\widehat{CAB} = 59°$ //
On a reproduit le segment [AB] = 13 cm //
" " " la figure donnée avec le / rapporteur et à partir de la figure représentée //
On a terminé l'angle C de 36° //

AC = 21,5 cm //
BC = 18,4 cm //
AB = 13 cm //
Cacul du périmètre //
Somme des 3 segments //
= 52,9 cm. //

Figure 9, page 521

On a pris la mesure [AB] à l'aide / du compas que l'on a reproduit au dos / de la feuille d'origine //
On a calculé à l'aide du rapporteur / les degrés des angles A et B //
On a reporté les degrés au dos de la / feuille, puis on a tracé //
On a prolongé les droites A et B / et à l'intersection de ces 2 segments / on a trouvé le point C //
Degrés : //
A = ~~80~~°=85° //
B=~~84~~°=60° //

Figure 10, page 533

- Je me sers de la feuille donnée . //
- Je prolonge les demi-droites sur / une autre feuille, jusqu'à ce qu'elles / soient sécantes . //
- Je mesure les trois côtés du triangle / obtenu, je les additionne et j'obtiens / le périmètre d'un triangle quelconque //

Figure 11, page 539

Tracer la hauteur du sommet B et de / pied H dans le morceau du triangle du départ.//
Puis la hauteur qui a pour sommet H et pour / pied O dans le triangle HBA. Mesurer HB puis / OH. Mesurer HC et BO. Je sais que : //

a) $HB^2 = BO \times BA$ //
$11^2 = 6,5 \times BA$ //
$121 = 6,5 \times BA$ //

$\frac{121}{6,5} = BA$ //

$BA = 18,6$ cm //

b) $BA^2 = BH^2 + AH^2$ //
$18,6^2 = 11^2 + AH^2$ //
$18,6^2 = 121 + AH^2$ //

$345,96 - 121 = AH^2$ //

$AH = \sqrt{224,96}$ //

$AH \simeq 14,99$ cm //

AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT D'ETAT

Vu les dispositions de l'Article 5 de l'Arrêté du 16 avril 1974,

Vu les rapports de M. C. Hongel, Professeur, Uni. Paris Nord

M. D. Chein, Professeur, USTL Montpellier

M. J. Rogalski, C.R., CNAS Paris

M. J.P. Bertrandias, Professeur, USTMG

M. Nicolas BALACHEFF est autorisé à présenter une thèse en vue de l'obtention du grade de DOCTEUR D'ETAT ES SCIENCES.

Fait à Grenoble, le 14 JAN. 1988

Le Président de l'I.N.P.G.

Georges LESPINARD
Président
de l'Institut National Polytechnique
de Grenoble

G. LESPINARD
P.O. le Vice-Président,

Le Président de l'U.S.T.M.G.

J.J PAYAN

Pour trouver CA j'ajoute HC / à AH.//
14,99 + 6,5 = 21,44 cm.//
périmètre = AB + BC + CA //
= 18,6+12,9+21,4 //
= 52,9 cm //

Figure 12, page 542

. Tout d'abord, tracer 2 droites passant / par les 2 sections de la figure et parallèle aux / 2 côtés.//
. Ensuite additionner la longueur de la base / et des 2 côtés de la figure d'origine.//
.Puis, au résultat obtenu, ajouter les longueurs / des 2 côtés du triangle représentant la partie / manquante //
. le résultat total correspond au périmètre du / triangle

Figure 13, page 545

1) Nommez B et C les extrémités du côté commun.//
2) Reproduire les 2 autres segments connus à / l'aide de l'axe de symétrie [BC].//
3) prolonger ces 2 droites jusqu'à ce qu'elles / se coupent en A.//
4) On obtient ainsi le triangle, additionnez ses / côtés, vous obtiendrez le périmètre. //

Figure 14, page547

Nous avons tracé le segment reliant / les points A et C.//
~~ABC est un triangle isocèle / en A.~~//
On trace les hauteurs issues de / A, B et C, concourantes en I.//
Nous avons relié I à C et à D.//
I' est le ~~projeté~~ [symétric] de I par la / symétrie orthogonale autour de CD.//