



**HAL**  
open science

# Problème du voyageur de commerce relaxé : études algorithmiques et polyédrales

Armand Nacheff

► **To cite this version:**

Armand Nacheff. Problème du voyageur de commerce relaxé : études algorithmiques et polyédrales. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1988. Français. NNT : . tel-00329566

**HAL Id: tel-00329566**

**<https://theses.hal.science/tel-00329566v1>**

Submitted on 13 Oct 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# THÈSE

présentée par

**Armand NACHEF**

pour obtenir le grade de DOCTEUR  
de l'Université Scientifique Technologique et Médicale de GRENOBLE

**"INFORMATIQUE ET MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES"**  
*Option : "Recherche Opérationnelle"*

-----  
**PROBLEME DU VOYAGEUR DE COMMERCE**

**RELAXE :**

**ETUDES ALGORITHMIQUES ET POLYEDRALES**

**Thèse soutenue le 22 Janvier 1988 devant la commission d'examen :**

Président : C. BENZAKEN

Examineurs : Ph. CHRETIENNE  
R. EULER  
J. FONLUPT  
D. NADDEF  
A. SEBO



# UNIVERSITE Joseph FOURIER (GRENOBLE I)

Président de l'Université :  
M. PAYAN Jean Jacques

Année Universitaire 1987 - 1988

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE SCIENCES ET DE GEOGRAPHIE

### PROFESSEURS DE 1ère Classe

ARNAUD Paul	Chimie Organique
ARVIEU ROBERT	Physique Nucléaire I.S.N.
AUBERT Guy	Physique C.N.R.S
AURIAULT Jean-Louis	Mécanique
AYANT Yves	Physique Approfondie
BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
BARJON Robert	Physique Nucléaire ISN
BARNOUD Fernand	Biochimie Macromoléculaire Végétale
BARRA Jean-René	Statistiques-Mathématiques Appliquées
BECKER Pierre	Physique
BEGUIN Claude	Chimie Organique
BELORISKY Elie	Physique
BENZAKEN Claude	Mathématiques Pures
BERARD Pierre	Mathématiques Pures
BERNARD Alain	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Pures
BILLET Jean	Géographie
BOELHER Jean-Paul	Mécanique
BONNIER Jane Marie	Chimie Générale
BOUCHEZ Robert	Physique Nucléaire ISN
BRAVARD Yves	Géographie
CARLIER Georges	Biologie Végétale
CAUQUIS Georges	Chimie Organique
CHARDON Michel	Géographie
CHIBON Pierre	Biologie Animale
COHEN ADDAD Jean-Pierre	Physique
COLIN DE VERDIERE Yves	Mathématiques Pures
CYROT Michel	Physique du Solide
DEBELMAS Jacques	Géologie Générale
DEGRANGE Charles	Zoologie
DEMAILLY Jean-Pierre	Mathématiques Pures
DENEUVILLE Alain	Physique
DEPORTES Charles	Chimie Minérale
DOLIQUE Jean-Michel	Physique des Plasmas
DOUCE Roland	Physiologie Végétale
DUCROS Pierre	Cristallographie
FONTAINE Jean-Marc	Mathématiques Pures
GAGNAIRE Didier	Chimie Physique
GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique,
GIRAUD Pierre	Géologie
HICTER Pierre	Chimie
IDELMAN Simon	Physiologie Animale
JANIN Bernard	Géographie
JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
KAHANE André, détaché	Physique
KAHANE Josette	Physique
KRAKOWIAK Sacha	Mathématiques Appliquées

LAJZEROWICZ Jeanine  
LAJZEROWICZ Joseph  
LAURENT Pierre-Jean  
LEBRETON Alain  
DE LEIRIS Joël  
LHOMME Jean  
LLIBOUTRY Louis  
LOISEAUX Jean-Marie  
LUNA Domingo  
MACHE Régis  
MASCLE Georges  
MAYNARD Roger  
OMONT Alain  
OZENDA Paul  
PAYAN Jean-Jacques  
PEBAY-PEYROULA Jean-Claude  
PERRIER Guy  
PIERRARD Jean-Marie  
PIERRE Jean-Louis  
RENARD Michel  
RINAUDO Marguerite  
ROSSI André  
SAXOD Raymond  
SENGEL Philippe  
SERGERAERT Francis  
SOUCHIER Bernard  
SOUTIF Michel  
STUTZ Pierre  
TRILLING Laurent  
VALENTIN Jacques  
VAN CUTSEM Bernard  
VIALON Pierre

Physique  
Physique  
Mathématiques Appliquées  
Mathématiques Appliquées  
Biologie  
Chimie  
Géophysique  
Sciences Nucléaires I.S.N.  
Mathématiques Pures  
Physiologie Végétale  
Géologie  
Physique du Solide  
Astrophysique  
Botanique (Biologie Végétale)  
Mathématiques Pures  
Physique  
Géophysique  
Mécanique  
Chimie Organique  
Thermodynamique  
Chimie CERMAV  
Biologie  
Biologie Animale  
Biologie Animale  
Mathématiques Pures  
Biologie  
Physique  
Mécanique  
Mathématiques Appliquées  
Physique Nucléaire I.S.N.  
Mathématiques Appliquées  
Géologie

#### **PROFESSEURS de 2<sup>ème</sup> Classe**

ADIBA Michel  
ANTOINE Pierre  
ARMAND Gilbert  
BARET Paul  
BLANCHI J.Pierre  
BLUM Jacques  
BOITET Christian  
BORNAREL Jean  
BRUANDET J.François  
BRUGAL Gérard  
BRUN Gilbert  
CASTAING Bernard  
CERFF Rudiger  
CHIARAMELLA Yves  
COURT Jean  
DUFRESNOY Alain  
GASPARD François  
GAUTRON René  
GENIES Eugène  
GIDON Maurice  
GIGNOUX Claude  
GILLARD Roland  
GIORNI Alain  
GONZALEZ SPRINBERG Gérardo  
GUIGO Maryse  
GUMUCHAIN Hervé  
GUITTON Jacques

Mathématiques Pures  
Géologie  
Géographie  
Chimie  
STAPS  
Mathématiques Appliquées  
Mathématiques Appliquées  
Physique  
Physique  
Biologie  
Biologie  
Physique  
Biologie  
Mathématiques Appliquées  
Chimie  
Mathématiques Pures  
Physique  
Chimie  
Chimie  
Géologie  
Sciences Nucléaires  
Mathématiques Pures  
Sciences Nucléaires  
Mathématiques Pures  
Géographie  
Géographie  
Chimie

## PROFESSEURS DE PHARMACIE

AGNIUS-DELOLD Claudine	Physique	Faculté La Tronche
ALARY Josette	Chimie Analytique	Faculté La Tronche
BERIEL Hélène	Physiologie et Pharmacologie	Faculté La Tronche
CUSSAC Max	Chimie Therapeutique	Faculté La Tronche
DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie	Faculté La Tronche
FAVIER Alain	Biochimie	C.H.R.G.
JEANNIN Charles	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan
LATURAZE Jean	Biochimie	Faculté La Tronche
LUU DUC Cuong	Chimie Générale	Faculté La Tronche
MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognosie	Faculté La Tronche
MARZIN Daniel	Toxicologie	Faculté Meylan
RENAUDET Jacqueline	Bactériologie	Faculté La Tronche
ROCHAT Jacques	Hygiène et Hydrologie	Faculté La Tronche
SEIGLE-MURANDI Françoise	Botanique et Cryptogamie	Faculté Meylan
VERAIN Alice	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE MEDECINE

### PROFESSEURS CLASSE EXEPTIONNELLE ET 1ère CLASSE

AMBLARD Pierre	Dermatologie	C.H.R.G.
AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie	C.H.R.G.
BEAUDOING André	Pédiatrie-Puericulture	C.H.R.G.
BEZEZ Henri	Orthopédie-Traumatologie	Hopital SUD
BONNET Jean-Louis	Ophthalmologie	C.H.R.G.
BOUCHET Yves	Anatomie	Faculté La Merci
	Chirurgie Générale et Digestive	C.H.R.G.
BUTEL Jean	Orthopédie-Traumatologie	C.H.R.G.
CHAMBAZ Edmond	Biochimie	C.H.R.G.
CHAMPETIER Jean	Anatomie-Topographique et Appliquée	C.H.R.G.
	O.R.L.	C.H.R.G.
CHARACHON Robert	Immunologie	Hopital sud
COLOMB Maurice	Anatomie-Pathologique	C.H.R.G.
COUDERC Pierre	Pneumophtisiologie	C.H.R.G.
DELORMAS Pierre	Cardiologie	C.H.R.G.
DENIS Bernard	Pharmacologie	Faculté La Merci
GAVEND Michel	Hématologie	C.H.R.G.
HOLLARD Daniel	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
LATREILLE René	Bactériologie-Virologie	C.H.R.G.
	Gynécologie et Obstétrique	C.H.R.G.
LE NOC Pierre	Médecine du Travail	C.H.R.G.
MALINAS Yves	Clinique Médicale et Maladies Infectieuses	C.H.R.G.
MALLION Jean-Michel	Histologie	Faculté La Merci
MICOUD Max	Pneumologie	C.H.R.G.
	Neurologie	C.H.R.G.
MOURIQUAND Claude	Hépatogastro-Entérologie	C.H.R.G.
PARAMELLE Bernard	Neurochirurgie	C.H.R.G.
PERRET Jean	Clinique Chirurgicale	C.H.R.G.
RACHAIL Michel	Anesthésiologie	C.H.R.G.
DE ROUGEMONT Jacques	Physiologie	Faculté La Merci
SARRAZIN Roger	Biochimie	Faculté La Merci
STIEGLITZ Paul		
TANCHE Maurice		
VIGNAIS Pierre		

**PROFESSEURS 2ème CLASSE**

BACHELOT Yvan	Endocrinologie	C.H.R.G.
BARGE Michel	Neurochirurgie	C.H.R.G.
BENABID Alim Louis	Biophysique	Faculté La Merci
BENSA Jean-Claude	Immunologie	Hopital Sud
BERNARD Pierre	Gynécologie-Obstétrique	C.H.R.G.
BESSARD Germain	Pharmacologie	ABIDJAN
BOLLA Michel	Radiothérapie	C.H.R.G.
BOST Michel	Pédiatrie	C.H.R.G.
BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie Adultes	Hopital Sud
BRAMBILLA Christian	Pneumologie	C.H.R.G.
CHIROUSSEL Jean-Paul	Anatomie-Neurochirurgie	C.H.R.G.
COMET Michel	Biophysique	Faculté La Merci
CONTAMIN Charles	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
CORDONNIER Daniel	Néphrologie	C.H.R.G.
COULOMB Max	Radiologie	C.H.R.G.
CROUZET Guy	Radiologie	C.H.R.G.
DEBRU Jean-Luc	Médecine Interne et Toxicologie	C.H.R.G.
DEMONGEOT Jacques	Biostatistiques et Informatique Médicale	Faculté La Merci
DUPRE Alain	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
DYON Jean-François	Chirurgie Infantile	C.H.R.G.
ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie	Faculté La Merci
FAURE Claude	Anatomie et Organogénèse	C.H.R.G.
FAURE Gilbert	Urologie	C.H.R.G.
FOURNET Jacques	Hépto-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
FRANCO Alain	Médecine Interne	C.H.R.G.
GIRARDET Pierre	Anesthésiologie	C.H.R.G.
GUIDICELLI Henri	Chirurgie Générale et Vasculaire	C.H.R.G.
GUIGNIER Michel	Thérapeutique et Réanimation Médicale	C.H.R.G.
HADJIAN Arthur	Biochimie	Faculté La Merci
HALIMI Serge	Endocrinologie et Maladies Métaboliques	C.H.R.G.
HOSTEIN Jean	Hépto-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
HUGONOT Robert	Médecine Interne	C.H.R.G.
JALBERT Pierre	Histologie-Cytogénétique	C.H.R.G.
JUNIEN-LAVILLAULOY Claude	O.R.L.	C.H.R.G.
KOLODIE Lucien	Hématologie Biologique	C.H.R.G.
LETOUBLON Christian	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
MACHECOURT Jacques	Cardiologie et Maladies Vasculaires	C.H.R.G.
MAGNIN Robert	Hygiène	C.H.R.G.
MASSOT Christian	Médecine Interne	C.H.R.G.
MOUILLON Michel	Ophtalmologie	C.H.R.G.
PELLAT Jacques	Neurologie	C.H.R.G.
PHELIP Xavier	Rhumatologie	C.H.R.G.
RACINET Claude	Gynécologie-Obstétrique	Hopital Sud
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie	C.H.R.G.
RAPHAEL Bernard	Stomatologie	C.H.R.G.
SCHAERER René	Cancérologie	C.H.R.G.
SEIGNEURIN Jean-Marie	Bactériologie-Virologie	Faculté La Merci
SELE Bernard	Cytogénétique	Faculté La Merci
SOTTO Jean-Jacques	Hématologie	C.H.R.G.
STOEBNER Pierre	Anatomie Pathologique	C.H.R.G.
VROUSOS Constantin	Radiothérapie	C.H.R.G.

HACQUES Gérard  
 HERBIN Jacky  
 HERAULT Jeanny  
 JARDON Pierre  
 JOSELEAU Jean-Paul  
 KERCKHOVE Claude  
 LONGEQUEUE Nicole  
 LUCAS Robert  
 MANDARON Paul  
 MARTINEZ Francis  
 NEMOZ Alain  
 OUDET Bruno  
 PECHER Arnaud  
 PELMONT Jean  
 PERRIN Claude  
 PFISTER Jean-Claude  
 PIBOULE Michel  
 RAYNAUD Hervé  
 RICHARD Jean-Marc  
 RIEDTMANN Christine  
 ROBERT Gilles  
 ROBERT Jean-Bernard  
 SARROT-REYNAULD Jean  
 SAYETAT Françoise  
 SERVE Denis  
 STOECKEL Frédéric  
 SCHOLL Pierre-Claude  
 SUBRA Robert  
 VALLADE Marcel  
 VIDAL Michel  
 VIVIAN Robert  
 VOTTERO Philippe

Mathématiques Appliquées  
 Géographie  
 Physique  
 Chimie  
 Biochimie  
 Géologie  
 Sciences Nucléaires I.S.N.  
 Physique  
 Biologie  
 Mathématiques Appliquées  
 Thermodynamique CNRS - CRTBT  
 Mathématiques Appliquées  
 Géologie  
 Biochimie  
 Sciences Nucléaires I.S.N.  
 Physique du Solide  
 Géologie  
 Mathématiques Appliquées  
 Physique  
 Mathématiques Pures  
 Mathématiques Pures  
 Chimie Physique  
 Géologie  
 Physique  
 Chimie  
 Physique  
 Mathématiques Appliquées  
 Chimie  
 Physique  
 Chimie Organique  
 Géographie  
 Chimie

## MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L' IUT 1

### PROFESSEURS de 1<sup>ère</sup> Classe

BUISSON Roger  
 DODU Jacques  
 NEGRE Robert  
 NOUGARET Marcel  
 PERARD Jacques

Physique IUT 1  
 Mécanique Appliquée IUT 1  
 Génie Civil IUT 1  
 Automatique IUT 1  
 EEA. IUT 1

### PROFESSEURS de 2<sup>ème</sup> classe

BOUTHINON Michel  
 CHAMBON René  
 CHEHIKIAN Alain  
 CHENAVAS Jean  
 CHOUTEAU Gérard  
 CONTE René  
 GOSSE Jean-Pierre  
 GROS Yves  
 KUHN Gérard, (Détaché)  
 MAZUER Jean  
 MICHOUILLER Jean  
 MONLLOR Christian  
 PEFFEN René  
 PERRAUD Robert  
 PIERRE Gérard  
 TERRIEZ Jean-Michel  
 TOUZAIN Philippe  
 VINCENDON Marc

EEA. IUT 1  
 Génie Mécanique IUT 1  
 EEA. IUT 1  
 Physique IUT 1  
 Physique IUT 1  
 Physique IUT 1  
 EEA.IUT 1  
 Physique IUT 1  
 Physique IUT 1  
 Physique IUT 1  
 EEA.IUT 1  
 Métallurgie IUT 1  
 Chimie IUT 1  
 Chimie IUT 1  
 Génie Mécanique IUT 1  
 Chimie IUT 1  
 Chimie IUT 1





Frída et à Ritta



Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur Jean FONLUPT, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, de m'avoir accueilli dans son équipe et donné les moyens nécessaires à l'élaboration de cette thèse. C'est grâce à son soutien permanent et à ses idées remarquables que ce travail a pu être réalisé.

Je suis très sensible à l'honneur que me fait Monsieur Claude BENZAKEN, Professeur à l'Université Scientifique, Technologique et Médicale de Grenoble, en présidant le jury de cette thèse.

Que Messieurs Reinhardt EULER, Professeur à l'Université de Bretagne Occidentale, Brest, et Denis NADDEF, Maître de Conférence à l'Université des Sciences Sociales de Grenoble, trouvent ici tous mes remerciements pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse et pour les commentaires et les suggestions qu'ils m'ont apportés.

J'adresse également mes vifs remerciements à Messieurs Philippe CHRETIENNE, Professeur à l'Université Pierre et Marie Curie, Paris, et Andràs SEBO, Chercheur à l'Académie des Sciences Hongroise, pour l'honneur qu'ils me font en participant au jury.

Je remercie toutes les personnes de l'Institut de Mathématiques Appliquées, U.C.O. Angers, de m'avoir amicalement accepté dans leur équipe depuis plus qu'un an, facilitant ainsi l'achèvement de ma thèse. Je remercie en particulier Messieurs Yvon L'HOSPITALIER et Eric PINSON avec qui j'ai eu des discussions très profitables.

Je n'oublie pas l'équipe de Recherche Opérationnelle du laboratoire ARTÉMISS, IMAG, qui m'a accueilli et fourni une ambiance de travail très agréable. J'exprime ma vive sympathie à tous ses membres et ex-membres, d'une manière particulière à Messieurs Christophe LACOTE, Rémi LEQUETTE, Yves PAILLET, Jean-Yves TALON, Mesdames Josiane Carry et Myriam PREISSMANN.

Messieurs Michel BURLET et Jean-Pierre UHRY m'ont fait bénéficier de leur grande expérience dans le domaine de l'Optimisation Combinatoire. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

Je m'en voudrais enfin d'oublier le service de reprographie de l'IMAG, dirigé par Monsieur IGLESIAS, pour l'excellente qualité de leur travail et pour leur accueil toujours chaleureux.



## CHAPITRE 1

# INTRODUCTION ET GENERALITES

Les problèmes de prise de décision existent depuis fort longtemps et pourtant la recherche opérationnelle qu'ils incluent ne s'est développée que durant ce dernier siècle. La raison du caractère récent de ce développement est double :

1°) Les problèmes d'organisation de la cité et de la vie en commun (la direction et la gestion de grands systèmes d'hommes, de machines, de matériaux et d'argent dans l'Industrie, le Commerce, l'Administration, la Défense...) sont devenus de plus en plus complexes et la nécessité de développer des méthodes de résolution systématique n'était pas ressentie auparavant.

2°) L'introduction des ordinateurs dans notre monde a eu une influence profonde sur notre mode de raisonnement et d'appréhension des structures. Il est facile de constater que l'essor de la Recherche Opérationnelle a accompagné celui de l'Informatique et que l'ordinateur est devenu un outil indispensable pour la solution de la quasi-totalité des modèles de la Recherche Opérationnelle.

Les problèmes en Recherche Opérationnelle sont généralement appréhendés en deux phases successives : La "construction" du modèle puis sa "résolution" proprement dite.

La majorité des modèles construits se sont énoncés comme la maximisation ou la minimisation d'une fonction par rapport à un ensemble de contraintes (par exemple maximisation d'un profit ou minimisation d'un coût) et de ce fait on confond maintenant les notions de Recherche Opérationnelle et d'Optimisation. L'importance pratique des problèmes d'optimisation a nécessité la création d'outils mathématiques et algorithmiques qui ont été à l'origine de nouvelles théories prometteuses.

Le travail effectué dans cette thèse est entièrement consacré à une relaxation de l'un de ces modèles concrets qui n'est autre que le problème du voyageur de commerce non orienté, ce très classique problème est formulé de la façon suivante :

Un voyageur de commerce ayant  $n$  villes à visiter souhaite établir une tournée qui lui permette de passer une fois et une seule dans chaque ville pour finalement revenir à son point de départ, ceci en minimisant la longueur du chemin parcouru. Il s'agit donc, étant donné un graphe non orienté  $G = (V, E)$  et une application  $l : E \rightarrow \mathbb{R}$  qui à une arête  $e \in E$  associe sa "longueur"  $l(e)$ , de trouver un cycle ayant un nombre d'arêtes égal au nombre  $n$  de villes (passant une fois et une seule à tous les sommets qui représentent les villes), de longueur totale minimum.

Une manière équivalente de formuler ce problème est de se donner une matrice à  $n$  lignes et  $n$  colonnes dont l'élément  $L_{ij}$  de la  $i^{\text{ème}}$  ligne est la  $j^{\text{ème}}$  colonne est égal à :

- \* la longueur de l'arête  $e = \{i, j\}$  si  $e \in E$ .
- \*  $+\infty$  sinon .

Le problème consiste alors à trouver une permutation  $p$  sans cycle (i.e. non décomposable) de  $n$  objets telle que :

$$\sum_{i=1}^n L_{ip(i)} \text{ soit minimum.}$$

Un nombre impressionnant d'articles scientifiques concernant ce problème a été publié ces dernières décennies (voir [12]). Cependant cette formulation classique présente parfois quelques inconvénients majeurs car il se peut que  $G$  ne possède pas de tels cycles (hamiltoniens) et même s'il en possède, il se peut que le parcours d'un tel cycle ne soit pas le moyen le plus court de visiter chaque ville au moins une fois. Une façon pour contourner ces difficultés consiste à construire le graphe complet  $K_{|V|}$  sur le même ensemble de sommets de  $G$  et à affecter à chaque arête  $e = \{i, j\}$  de  $K_{|V|}$  une longueur égale à la longueur, dans  $G$ , de la plus courte chaîne entre les sommets  $i$  et  $j$ . La recherche d'un cycle qui passe au moins une fois par chaque sommet de  $G$  se ramène alors à la recherche d'un cycle hamiltonien sur  $K_{|V|}$ . Le premier ennui dans cette manière de résolution vient du fait qu'on risque, en passant au graphe complet, de transformer un problème facile en un problème difficile ; on sait par exemple trouver la tournée de coût minimum sur un arbre (graphe connexe sans cycle), il suffit d'emprunter chaque arête deux fois, mais en associant à cet arbre le graphe complet  $K_{|V|}$ , on finit par cacher toutes les propriétés intéressantes qui sont derrière sa

structure. Le second ennui vient de l'augmentation de la taille du problème : si l'on part avec un graphe ayant relativement peu d'arêtes (c'est souvent le cas des graphes qui ont beaucoup de sommets) et l'on passe au graphe complet, on augmente considérablement le nombre de ses variables [3,14]. Dans cette thèse, on étudie directement ce modèle sous sa forme relaxée (en passant au moins une fois sur chaque ville). Il sera connu dans la suite sous le nom du problème du voyageur de commerce relaxé (ou graphique).

## 1. Optimisation Combinatoire :

On peut plonger les problèmes du voyageur de commerce dans la très grande classe des problèmes d'optimisation combinatoire. Cette classe semble à première vue d'une trivialité déconcertante. Un coût (ou un poids) ayant été affecté à chaque élément d'un ensemble fini, il s'agit de trouver un élément de coût minimum (ou de poids maximum). Mathématiquement, un problème d'optimisation combinatoire est défini à partir d'un ensemble fini  $S$  et d'une application  $f : S \mapsto \mathbb{R}$ . Il s'agit de déterminer  $s \in S$  tel que :

$$f(s) = \min_{s \in S} f(s).$$

Lorsqu'il existe un ensemble  $E$  ( fini ) et une application :

$$c : E \mapsto \mathbb{R}$$

tels que :

$$\begin{aligned} \cdot S &\subseteq \mathcal{P}(E) \\ \cdot f(s) &= \sum_{e \in s} c(e) \end{aligned}$$

le problème d'optimisation combinatoire est dit "à fonction objective séparée" (il est facile de voir que les problèmes du voyageur de commerce sont à fonction objective séparée). La difficulté majeure de ce genre de problème réside surtout dans le nombre élevé de solutions. Ce nombre interdit l'utilisation de la méthode de résolution naïve qui consiste à regarder toutes les solutions et à prendre la "meilleure". Ainsi pour le "problème du voyageur de commerce classique" (décrit ci-dessus), le nombre de cycles hamiltoniens à comparer quand il y a  $n$  villes est égal à  $0,5 (n - 1)!$  (dans  $K_{71}$  par exemple le nombre de cycles hamiltoniens réalisables dépasse largement  $10^{100}$ ). Il est alors clair que cette idée triviale de recherche d'une solution par énumération de l'ensemble des cas, si elle est mathématiquement possible, conduit à des procédures d'une efficacité désastreuse et exhiber une procédure finie a parfois un intérêt nul sur



le plan opérationnel. Ainsi avec le besoin dans lequel on s'est trouvé d'apporter une solution au problème posé dans un temps raisonnable, le problème central en optimisation combinatoire est devenu celui de l'efficacité pratique des méthodes qu'elle met en œuvre. D'où une nécessité de pouvoir distinguer les algorithmes en les classant suivant leurs performances.

## 2. Complexité des Algorithmes :

C'est la théorie de la complexité qui, en donnant un sens précis au terme d'algorithme efficace et de problème difficile, a permis d'asseoir l'optimisation combinatoire sur une base théorique solide. Pour étudier la performance d'un algorithme dans cette théorie, on se place toujours dans le plus mauvais cas et on tente de lui associer une fonction de la taille du problème posé qui majore le nombre d'opérations nécessaires (la taille d'un problème est la longueur du codage le plus économique sur ordinateur).

L'idée de la caractérisation des algorithmes efficaces remonte à Edmonds (1965) qui a défini un algorithme efficace ou polynomial comme un algorithme par lequel le nombre  $f(n)$  d'opérations élémentaires, nécessaires pour résoudre un exemple de taille  $n$ , est borné par un polynôme en  $n$ . Si  $f(n)$  est inférieure ou égale à  $c n^k$ , où  $c$  et  $k$  sont des constantes, on dira que l'algorithme est en  $n^k$  ou encore qu'il a une complexité  $O(n^k)$ . Un problème sera dit polynômial ou facile s'il existe un algorithme polynômial qui le résout. Parmi les problèmes polynômiaux on trouve ceux du flot maximum, de l'arbre (ou l'arborescence) partiel de poids minimum, du plus court chemin, du couplage de poids maximum, du postier chinois etc...

On appelle "algorithme non déterministe" un algorithme qui, en plus des instructions usuelles, comporte des "instructions de choix". La classe des problèmes pouvant être résolus en un temps polynômial par un algorithme non déterministe est appelée la classe NP. Autrement dit, si pour chaque instruction de choix, le bon choix est effectué, le temps de calcul est polynômial.

La classe des problèmes NP-durs, a été définie comme la classe des problèmes pour lesquels on ne connaît pas d'algorithmes polynômiaux, mais qui possède la propriété que si un seul de ses problèmes était polynômial alors tous les problèmes de la classe NP seraient polynômiaux.

Un problème est dit NP-complet s'il est NP-dur et NP (en général on confond NP-dur et NP-complet). Certains mathématiciens pensent qu'on ne trouvera jamais

d'algorithme efficace pour résoudre tel type de problèmes. Cette conjecture n'est cependant pas confirmée; il est un fait qu'on n'a pas trouvé de méthode polynômiale pour arriver à la solution, mais on n'a pas démontré non plus qu'une telle méthode n'existe pas.

Cook [2] était le premier à prouver que la classe des problèmes NP-complets est non vide en démontrant que le problème de satisfaisabilité y appartient. Cette classe contient aujourd'hui un nombre très grand de problèmes (voir par exemple, Karp [10] ou l'ouvrage de Garey et Johnson [6]). Les problèmes du sac à dos, du stable de cardinalité maximum, du voyageur de commerce (classique et relaxé) sur un graphe quelconque, etc... sont tous NP-durs.

Il reste à remarquer qu'il existe encore des problèmes d'optimisation combinatoire qu'on ne sait classer ni dans la classe des problèmes polynômiaux ni dans la classe NP-dur (pour plus de précision sur cette théorie voir le chapitre correspondant dans [15]).

Dans une grande partie de cette thèse, nous exhibons des classes de graphes sur lesquels on démontre que le problème du voyageur de commerce relaxé est polynômial, i.e. nous définissons des classes de graphes telles que si  $G = (V,E)$  y appartient alors quelle que soit la fonction "longueur"  $l : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie sur les arêtes de  $G$ , ce problème pourra être résolu en un temps polynômial.

### 3. Polyèdres :

La théorie des polyèdres va jouer un rôle important dans cette thèse. On peut la décrire comme le lien entre l'optimisation combinatoire et la programmation linéaire qui, comme son nom l'indique, a pour objet l'étude et la résolution des "programmes linéaires" c'est-à-dire des problèmes d'optimisation dans lesquels la fonction objective aussi bien que les contraintes sont exprimées d'une manière linéaire. Il s'agit du modèle le plus célèbre de la recherche opérationnelle, ceci est certainement dû au fait que de nombreux problèmes concrets ont été modélisés comme des programmes linéaires.

C'est à Dantzig (1947) que revient le mérite d'avoir, le premier, proposé un algorithme, la méthode du simplexe, pour résoudre ces programmes [4]. Depuis, non seulement cette méthode s'est révélée efficace en pratique mais elle est devenue un outil mathématique très riche qui donne une vue pénétrante des méthodes

d'optimisation continue et qui constitue une technique fondamentale de l'optimisation combinatoire (mais bien qu'il ait été démontré que la programmation linéaire est un problème facile [9,11], l'algorithme du simplexe n'est pas polynômial en théorie).

Il peut paraître surprenant, à première vue, que les techniques les plus récentes en optimisation combinatoire fassent un usage très important de la programmation linéaire : en effet dans un cas le domaine des solutions est discret tandis qu'il est continu dans l'autre. Cependant le lecteur averti sait bien qu'en programmation linéaire l'ensemble dans lequel l'optimum est recherché est en fait discret puisqu'il s'agit de l'ensemble des solutions de base (dans le simplexe) qui correspondent aux sommets du polyèdre défini par les contraintes. Par conséquent, étant donné un problème d'optimisation combinatoire où toute solution peut être représentée par un point de  $\mathbb{R}^n$  (pour  $n$  donné), si on peut caractériser son polyèdre (l'enveloppe convexe de ses points) par des inéquations linéaires et si sa fonction objective peut être exprimée linéairement, le problème se ramènera à la résolution d'un simple programme linéaire (voir la figure 1.1 où  $n = 2$ ). Or, la plupart des problèmes d'optimisation combinatoire ont été formulés (de manière plus ou moins heureuse) comme des programmes linéaires en nombres entiers (dont les variables sont astreintes à prendre leurs valeurs dans l'ensemble des entiers naturels).

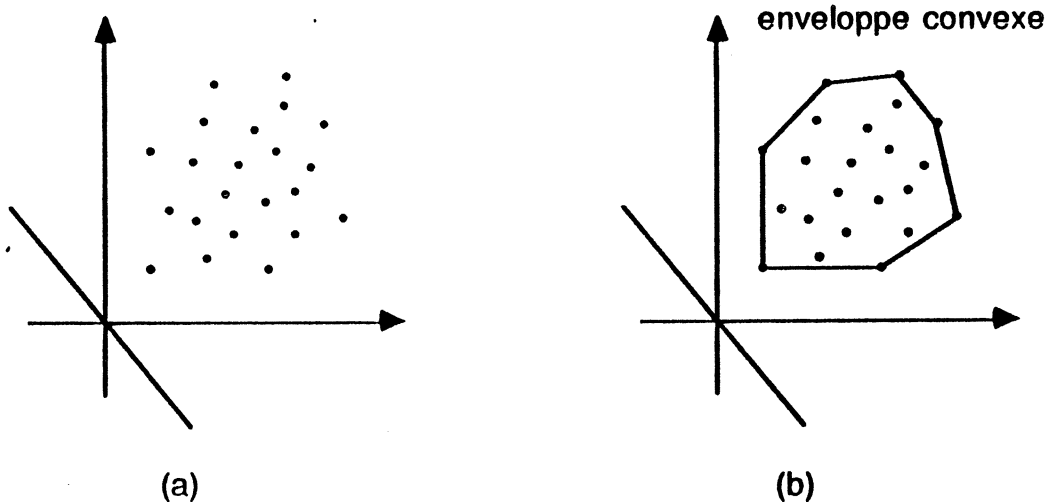


figure 1.1

Ce passage de l'optimisation sur un ensemble discret à l'optimisation sur un domaine convexe (en général plus facile) a été l'origine d'un nouvel essor de l'optimisation combinatoire et a permis d'envisager une nouvelle approche dans ce domaine, dite polyédrale. Cette approche qui consiste à ramener le problème discret à un programme linéaire en décrivant l'enveloppe convexe de ses solutions par des

inéquations linéaires a été l'origine d'une nouvelle classe d'algorithmes appelés les algorithmes de coupes. Parmi les polyèdres qui ont été largement étudiés, on trouve ceux associés au problème du voyageur de commerce, du sac à dos, du couplage, de l'arbre de poids minimum, etc ... [1,3,5,7,8,13] .

En général, si le problème d'optimisation combinatoire est polynômial il sera possible de donner la description linéaire complète de son polyèdre. Par contre, si le problème est NP-dur (comme le cas du problème du voyageur de commerce), l'espoir de donner une telle caractérisation deviendra très faible. Cependant, nous nous sommes intéressés dans cette thèse à la recherche de certaines classes d'inéquations (facettes) nécessaires pour décrire le polyèdre du problème du voyageur de commerce relaxé.

#### 4. Généralités et Présentation des résultats :

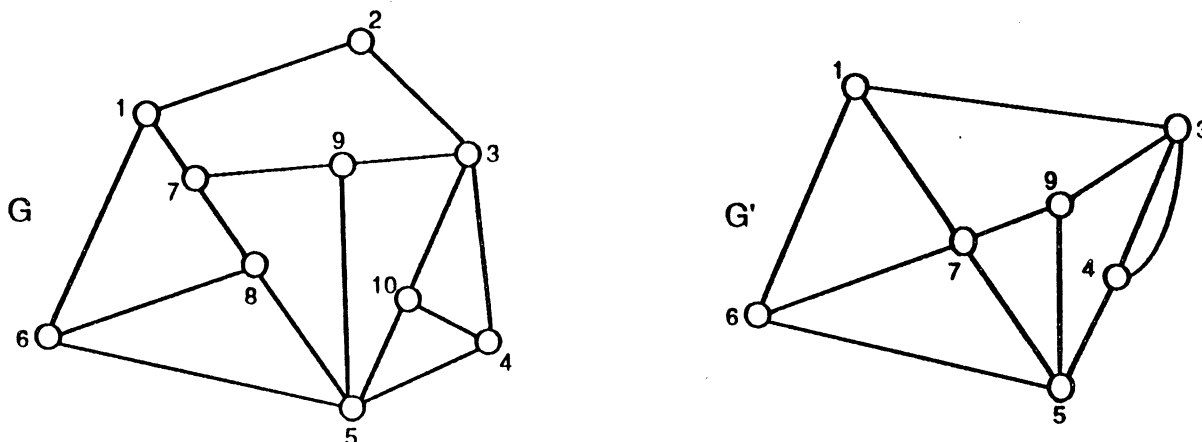
Dans ce qui suit nous donnons quelques définitions et notations communes à tous les chapitres.

Un graphe dont l'ensemble de sommets est  $V$  et l'ensemble d'arêtes est  $E$  sera noté  $G = (V, E)$ . Les graphes considérés sont (sauf indication contraire) finis, non orientés et simples. Une arête dont les extrémités sont  $v_i$  et  $v_j$  sera notée  $\{v_i, v_j\}$ .  $\mathcal{P}_2(V)$  désignera l'ensemble de toutes les paires  $\{v, v'\}$  pour  $v, v' \in V$  et  $v \neq v'$ . Le graphe  $(V, \mathcal{P}_2(V))$  sera appelé un graphe complet et noté par  $K_{|V|}$ .

Soit  $G = (V, E)$  un graphe quelconque, pour un ensemble de sommets  $S \subset V$  on note  $\gamma(S)$  l'ensemble des arêtes dont les deux extrémités sont dans  $S$  et  $\delta(S)$  l'ensemble des arêtes dont une et une seule extrémité est dans  $S$ , ce dernier s'appellera le cocycle défini par  $S$ . On appelle sous-graphe de  $G$  engendré (ou induit) par  $S$ , le graphe  $G_S = (S, \gamma(S))$ . Le sous-graphe de  $G$  induit par  $V \setminus S$  est parfois noté  $G \setminus S$  ( $G \setminus S = G_{V \setminus S} = (V \setminus S, \gamma(V \setminus S))$ ).

Si  $e = \{u, v\}$  est une arête de  $G$ , on note par  $G - \{e\}$  le graphe obtenu à partir de  $G$  en lui enlevant l'arête  $e$  :  $G - \{e\} = (V, E \setminus \{e\})$ , et par  $G \times \{e\}$  le graphe obtenu en contractant les 2 extrémités de  $e$  dans  $G$  :  $G \times \{e\} = (V \setminus \{u, v\} \cup \{v\}, E \setminus \{e\})$ .

On dit que  $G$  est réductible à un graphe  $G'$  (pas forcément simple) ou  $G$  contient  $G'$  comme mineur, si on peut obtenir  $G'$  à partir de  $G$  en lui appliquant répétitivement les deux opérations ci-dessus ( voir la figure 1.2 où  $G'$  est obtenu à partir de  $G$  en enlevant l'arête  $\{4,5\}$  et en contractant les arêtes  $\{1,2\}$ ,  $\{7,8\}$  et  $\{4,10\}$  ).



· figure 1.2

Et donc si on considère un sous-ensemble  $W$  de  $V$  tel que  $G_W$  est connexe, on pourra, en appliquant successivement l'opération qui consiste à contracter une arête, identifier tous les sommets de  $W$  en un sommet  $w$ . On notera par  $G \times W$  ou par  $G \times G_W$  le graphe ainsi obtenu.

Si l'on a une fonction coût  $c : E \mapsto \mathbb{R}$  qui à une arête  $e \in E$  associe son coût  $c(e)$  (ou  $c_e$ ) et un sous-ensemble  $F$  de  $E$ , on appellera coût de  $F$ , que l'on note  $c(F)$ , la somme des coûts des éléments de  $F$  :  $c(F) = \sum_{e \in F} c(e)$  et on notera par  $(G, c)$  le graphe  $G$  muni de l'application  $c$ .

Un ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$  est un demi-espace de  $\mathbb{R}^n$  si et seulement si, il existe un vecteur non nul  $a \in \mathbb{R}^n$  et un scalaire  $a_0$  tels que  $A = \{ x \in \mathbb{R}^n, a^T x \leq a_0 \}$ . Les ensembles  $A$  et  $H = \{ x \in \mathbb{R}^n, a^T x = a_0 \}$  seront appelés (respectivement) le demi-espace et l'hyperplan définis par l'inéquation  $a^T x \leq a_0$ .

Un polyèdre  $P \subset \mathbb{R}^n$  est une intersection finie de demi-espaces de  $\mathbb{R}^n$ . On peut donc le représenter comme étant un ensemble de points de  $\mathbb{R}^n$  vérifiant un nombre fini d'inéquations linéaires. La dimension de  $P$ , que l'on note  $\dim(P)$ , est celle de la variété affine de plus petite dimension qui le contient ( $\dim(P)$  est égal au nombre maximum de points affinement indépendants de  $P$  moins un).  $P$  est de pleine dimension si  $\dim(P) = n$  (ou s'il n'existe pas d'hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  qui le contient). S'il est borné, il sera appelé polytope.

Une inéquation  $\pi^T x \leq \pi_0$  est dite valide pour  $P$  si elle est vérifiée pour tout point  $x$  de ce polyèdre. Un sous-ensemble  $F \subset P$  est une face de  $P$  s'il existe une inéquation  $\pi^T x \leq \pi_0$  valide pour  $P$  telle que  $F = \{x \in P, \pi^T x = \pi_0\}$ . On dit que l'inéquation  $\pi^T x \leq \pi_0$  définit  $F$ . Si  $P = \{x \in \mathbb{R}^n, a_i^T x \leq b_i, i = 1, \dots, k\}$ , on peut démontrer qu'il existe un ensemble d'indices  $I \subset \{1, \dots, k\}$  tel que  $F = \{x \in P, a_i^T x = b_i \text{ pour } i \in I\}$ .  $F$  est dite face propre de  $P$  si  $F \neq P$ . Une facette  $F$  de  $P$  est une face propre de  $P$  de dimension maximale ( $\dim(F) = \dim(P) - 1$ ), par abus de langage on appellera aussi facette l'inégalité qui définit une facette. Un sommet de  $P$  est une face ne contenant qu'un seul élément de  $P$  (le mot "sommet" n'a pas le même sens dans les deux théories de graphes et de polyèdres).

Etant donné un ensemble  $E$  quelconque, on peut associer à un ensemble  $S$  de parties de  $E$  ( $S \subseteq \mathcal{P}(E)$ ) un ensemble  $X$  d'éléments de  $\{0,1\}^{|E|}$  de la façon suivante :

A tout élément  $s \in S$  on associe  $x^s \in X \subseteq \{0,1\}^{|E|}$  tel que  $x_e^s = 1$  si et seulement si  $e \in s$ . En d'autres termes  $X$  est l'ensemble des vecteurs caractéristiques des éléments de  $S$ . On utilisera parfois le terme de vecteur d'incidence ou de vecteur représentatif de  $s$  au lieu de vecteur caractéristique. On appelle enveloppe convexe de  $X$ , que l'on note  $\text{conv}(X)$ , le polyèdre ou le polytope défini par l'ensemble des combinaisons convexes des éléments de  $X$ .

On appelle polyèdre d'un problème d'optimisation combinatoire l'enveloppe convexe de l'ensemble de tous les vecteurs représentatifs de ses solutions réalisables.

On distingue les deux problèmes du voyageur de commerce non orienté suivants:

1°- Le problème classique, noté par TSP, où on cherche le cycle hamiltonien de  $(G,c)$  de coût minimum.

et 2°- Le problème relaxé, noté par GTSP, qui consiste à trouver la tournée la moins coûteuse dans  $(G,c)$  : une tournée est un cycle qui passe au moins une fois par chaque sommet du graphe (un cycle peut utiliser le même sommet ou la même arête plus d'une fois).

La longueur d'une tournée  $T = (v_1, e_1, \dots, v_k, e_k, v_1)$  est alors :  $c(T) = \sum c(e_i, i = 1, \dots, k)$ . On fait correspondre à chaque tournée un vecteur  $x = (x_e, e \in E)$ ,  $x \in \mathbb{N}^{|E|}$ , où  $x_e$  est le

nombre de fois qu'une tournée utilise l'arête  $e$ . En termes de  $x$ , la longueur d'une tournée est simplement  $\sum (c(e)x_e, e \in E)$ . Le vecteur  $x$  sera aussi appelé tournée. Si on note pour  $U \subset E$ ,  $x(U) = \sum (x_e, e \in U)$ , GTSP pourra se formuler comme le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$\text{GTSP : } \left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser } (\sum c(e) x_e, e \in E) \text{ sachant que} \\ x(\delta(S)) \geq 2 \text{ et pair } \forall S \subset V \text{ tel que } S \neq \emptyset \text{ et } \forall S \neq \emptyset \quad (1) \\ x_e \geq 0 \text{ et entier } \forall e \in E. \quad (2) \end{array} \right.$$

Le premier groupe de contraintes exprime le fait qu'une tournée intersecte tout cocycle de  $G$  un nombre pair non nul de fois. Une tournée  $T$  est donc un ensemble d'arêtes de  $G$  qui forment un graphe  $G_T$  connexe, eulérien (dont tous les sommets sont de degré pair) et éventuellement avec des arêtes multiples (c'est le cas où il existe des arêtes  $e$  telles que  $x_e > 1$ ).

C'est dans la double filiation, de la théorie des polyèdres et de celle de la complexité des algorithmes sur GTSP, que se situe l'essentiel des travaux présentés dans cette thèse. Le premier sujet qu'on a abordé dans notre recherche était la caractérisation du polyèdre de GTSP sur  $G$  dans le cas où  $G$  est un graphe série-parallèle. Caractériser le polyèdre d'un problème donné sur  $G$ , revient en fait à trouver le système complet et non redondant des inéquations linéaires (facettes) qui le définissent. Ce problème a été ouvert par Cornuéjols, Fonlupt et Naddef [3] après avoir présenté l'algorithme polynomial résolvant GTSP sur cette classe de graphe. Déterminer la forme analytique de toutes les facettes de ce polyèdre était un problème très difficile. Nous avons donc pensé de trouver une caractérisation sur la méthode de sa construction. Dans le second chapitre de cette thèse nous établissons un théorème de composition sur les polyèdres : si  $G$  admet un ensemble d'articulation  $\{s,p\}$  de cardinalité 2 on détermine  $\text{GTSP}(G)$ , l'enveloppe convexe des tournées de  $G$ , à partir de  $\text{GTSP}(\overline{G}_1)$  et de  $\text{GTSP}(\overline{G}_2)$  où  $\overline{G}_1$  et  $\overline{G}_2$  sont deux graphes appropriés aux 2 composantes connexes de  $G_{V \setminus \{s,p\}}$ . On en conclut ensuite la caractérisation de  $\text{GTSP}(G)$  quand  $G$  appartient à diverses classes de graphes en particulier à la classe des graphes série-parallèles.

Le second sujet qu'on a traité portait sur l'étude de la forme analytique de quelques facettes de  $\text{GTSP}(G)$  où  $G$  est un graphe quelconque. Notre choix de ce sujet venait du fait qu'on ne connaissait que très peu de facettes sur ce problème. Nous avons trouvé différentes formes de nouvelles facettes et on a pu regrouper une grande partie de ces inéquations dans 3 théorèmes de compositions. Le troisième

chapitre contient quelques propriétés sur les facettes de  $GTSP(G)$ , les 3 théorèmes de compositions et des classes très complexes de facettes qu'on ne peut pas obtenir par composition et qui nous montre la difficulté de la caractérisation complète de  $GTSP(G)$ , quand  $G$  est le graphe complet.

On s'est intéressé plus tard, à l'étude algorithmique de  $GTSP$ , en particulier à la caractérisation de quelques classes de graphes sur lesquels ce problème est polynomial. Nous avons défini un problème qui généralise  $GTSP$  et nous avons démontré que ce nouveau problème est polynomial sur les graphes de Halin, les graphes sans mineur  $K_5 - \{e\}$  (le graphe complet à cinq sommets moins une arête), les graphes ne contenant pas le prisme  $M_3$  comme mineur, etc... Nous présentons dans le chapitre 5 tous ces algorithmes polynomiaux et nous donnons une heuristique 0,5-approché pour  $GTSP$ . L'intérêt de cette heuristique dérive du théorème qui dit que,  $\forall \epsilon > 0$ , il ne peut exister d'algorithme  $\epsilon$ -approché pour  $TSP$  à moins que  $P=NP$ . Nous donnons aussi dans le chapitre 4 une nouvelle caractérisation des graphes  $GTSP$ -parfaits définis par Fonlupt et Naddef et qui ont la propriété intéressante qu'on peut les résoudre par la programmation linéaire en considérant seulement les contraintes linéaires de (1) et (2).

Enfin, une grande partie de ces résultats est parue dans les trois rapports de recherche suivants :

- [1] "Problème du voyageur de commerce graphique : Compositions des facettes et des polyèdres",  
avec J. FONLUPT  
ARTEMIS - IMAG R.T. n° 7 Septembre 1986
  
- [2] "Un algorithme polynômial pour le problème du voyageur de commerce sur une classe de graphes",  
avec J. FONLUPT  
ARTEMIS - IMAG R.T. n° 6 Septembre 1986
  
- [3] "Le problème du voyageur de commerce relaxé sur quelques classes de graphes",  
avec J. FONLUPT  
ARTEMIS - IMAG R.T. n° 23 Mai 1987  
IMA - UCO (Angers) C.I. 87.1.



**REFERENCES :**

- [1] H. CROWDER, E.L. JOHNSON, M.W. PADBERG,  
"Solving large-scale zero-one linear programming problems",  
Operations Research 31 (1983) 803-834.
- [2] S. A. COOK,  
"The complexity of theorem proving procedures",  
Proc. 3rd ACM, Symp. On Theory of Computing (1971) 151-158.
- [3] G. CORNUEJOLS, J. FONLUPT, D. NADDEF,  
"The traveling salesman problem on a graph and some related integer  
polyhedra",  
Math programming 33 (1985) 1-27.
- [4] G. B. DANTZIG,  
"Linear programming and extensions",  
Princeton University Press, (1963).
- [5] J. EDMONDS,  
"Maximum matching and polyhedron with 0-1 vertices",  
Journal of Research of National Bureau of Standards Section B, 1, 2 (1965)  
125-130.
- [6] M.R. GAREY, D.S. JOHNSON,  
"Computers and Intractability : A guide to the theory of NP-completeness",  
H. Freeman & Sons, San Francisco (1979).
- [7] M. GRÖTSCHEL, M.W. PADBERG,  
"On the symmetric traveling salesman problem I : inequalities",  
Math programming 16 (1979) 265-280.
- [8] M. GRÖTSCHEL, M.W. PADBERG,  
"On the symmetric traveling salesman problem II : lifting theorems and facets",  
Math programming 16 (1979) 281-302.

- [9] N. KARMARKAR,  
"A new polynomial-time algorithm for linear programming",  
Combinatorica 4 (1984), 373-395.
- [10] R. M. KARP,  
"Reducibility among combinatorial problems",  
in R. E. Miller and J. W. Thatcher eds, Complexity of Computer Computations  
(Plenum Press, New-York) (1972) 85-104.
- [11] L. G. KHACHIAN  
"A polynomial algorithm in linear programming",  
Soviet Mathematics Doklady 20 (1979) 191-194.
- [12] E. L. LAWLER, J. K. LENSTRA, A. H.G. RINNOY KAN, D. B. SHMOYS  
(editors),  
"The traveling salesman problem",  
John Wiley & Sons (1985).
- [13] J. F. MAURRAS,  
"Some results on the convex hull of the hamiltonian cycles of  
symmetric complete graphs",  
Combinatorial Programming, Methods and Applications, B. ROY Editor,  
179-190.
- [14] D. NADDEF,  
"Polyèdres et structures combinatoires", Thèse de doctorat ès sciences  
présentée à l'université scientifique et médicale de Grenoble (1983).
- [15] M. SAKAROVITCH,  
"Optimisation combinatoire", tome 2,  
Hermann (1984).



## CHAPITRE 2

## COMPOSITIONS DES POLYEDRES

## 1. Introduction et Définitions :

On peut faire correspondre à chaque programme linéaire en nombres entiers (P), son programme linéaire associé (P'), qu'on appelle aussi la relaxation linéaire du problème (P) :

(P) et (P') auront la même fonction objective et les contraintes de (P') seront les contraintes linéaires de (P) (on ignorera toutes les contraintes non linéaires de (P) en remplaçant, dans (P'),  $x_i \in \mathbb{N}$  par  $x_i \geq 0 \forall i$ ).

Ainsi, si on se donne un graphe connexe  $G = (V, E)$  et une application  $c : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  qui associe à chaque arête  $e \in E$  un coût  $c(e)$ , on pourra définir GTSP' la relaxation linéaire de (GTSP) de la manière suivante :

$$\text{GTSP}' : \begin{cases} \text{minimiser } (\sum c(e) x_e, e \in E) \text{ sachant que} \\ x(\delta(S)) \geq 2 \quad \forall S \subset V \text{ tel que } S \neq \emptyset \text{ et } \forall S \neq \emptyset \\ x_e \geq 0 \quad \forall e \in E. \end{cases}$$

La difficulté essentielle qui dérive de cette relaxation linéaire vient du fait que les solutions de base de GTSP' ne correspondent pas toutes à des tournées de GTSP (elles peuvent être des solutions fractionnaires et même parfois des solutions entières qui ne sont pas des tournées).

Il est évident que si on sait caractériser  $GTSP(G)$ , l'enveloppe convexe des tournées de  $G$  on pourra résoudre  $GTSP$  en résolvant le programme linéaire suivant :

$$\begin{array}{l} \parallel \\ \parallel \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{minimiser } (\sum c(e) x_e, e \in E) \text{ sachant que} \\ x \in GTSP(G) \end{array}$$

D'où l'intérêt de connaître la liste exhaustive des inéquations linéaires (facettes nécessaires pour définir ce polyèdre.

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux graphes ayant un ensemble d'articulation de cardinalité 2.

On suppose dans la suite que le graphe  $G = (V, E)$  est connexe et possède un ensemble d'articulation  $\{s, p\}$ , notre but va être la caractérisation du polyèdre  $GTSP(G)$  à partir des deux polyèdres  $GTSP(\overline{G}_1)$  et  $GTSP(\overline{G}_2)$  ( $\overline{G}_1$  et  $\overline{G}_2$  sont deux graphes appropriés aux composantes connexes de  $G \setminus \{s, p\}$  et seront définis plus tard).

On peut donc "séparer"  $G$  en deux composantes connexes (sous-graphes) :  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$  avec :

$$V_1 \cap V_2 = \{s, p\}, V_1 \cup V_2 = V, E_1 \cap E_2 = \emptyset \text{ et } E_1 \cup E_2 = E \text{ (voir figure 2.1).$$

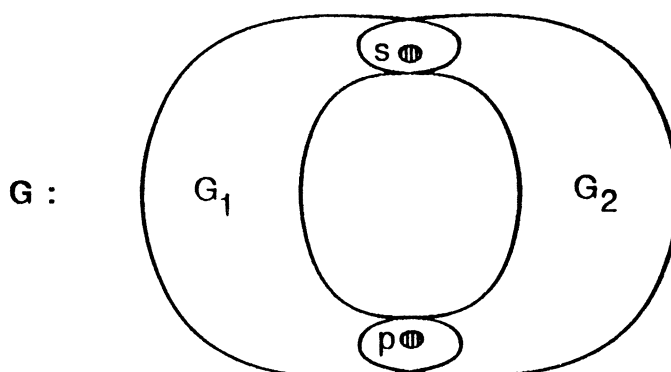


figure 2.1

On dira que  $G = (G_1, s, p, G_2)$ .

Le graphe partiel défini par les arêtes d'une tournée  $T$ , qui sont dans  $G_1$ , peut être décrit par le triplet  $(a,b,c)$  : "a" désigne la parité du degré de  $s$ , "b" désigne celle du degré de  $p$  et "c" est égal au nombre de composantes connexes de  $T$  dans  $G_1$  :

$a,b \in \{E,U\}$ , E signifie pair et U est mis pour impair (nous signalons qu'on utilise ces notations en concordance avec celles figurant dans [10]).

Les arêtes d'un tel graphe partiel seront appelées une tournée partielle.

On notera par  $(a,b,c) (G_1)$  la classe des tournées partielles de  $G_1$  décrites par  $(a,b,c)$  et par  $[a,b,c] (G_j)$  ou  $[a,b,c](G_j,l)$  la valeur de la tournée partielle de coût minimum dans la classe  $(a,b,c) (G_j)$ .

## 2. Mariages des Tournées Partielles :

### PROPOSITION 2.1

Pour obtenir une tournée, on a seulement 3 valeurs possibles de  $(a,b,c)$  qui sont :  $(E,E,1)$ ,  $(E,E,2)$  et  $(U,U,1)$ .

Démonstration :

Voir [10] où les auteurs considèrent 7 classes d'équivalence possibles :  $(U,U,1)$ ,  $(0,E,2)$ ,  $(E,0,2)$ ,  $(E,E,1)$ ,  $(E,E,2)$ ,  $(0,0,0)$  et  $(0,0,1)$ . Dans notre problème GTSP, on doit passer au moins une fois à chaque sommet et donc les cas  $(0,0,1)$  et  $(0,0,0)$  sont impossibles. On considère, en plus, 0 comme pair et on fait entrer ainsi les cas  $(E,0,2)$  et  $(0,E,2)$  dans  $(E,E,2)$ .  $\square$

### PROPOSITION 2.2

Une tournée optimale de  $G = (G_1,s,p,G_2)$  ne peut être obtenue qu'à partir des quatre mariages de tournées partielles suivants :

la meilleure de  $(U,U,1)(G_1)$  avec la meilleure de  $(U,U,1)(G_2)$ ,  
 la meilleure de  $(E,E,2)(G_1)$  avec la meilleure de  $(E,E,1)(G_2)$ ,  
 la meilleure de  $(E,E,1)(G_1)$  avec la meilleure de  $(E,E,2)(G_2)$   
 ou (inclusif)  
 la meilleure de  $(E,E,1)(G_1)$  avec la meilleure de  $(E,E,1)(G_2)$ .

Démonstration :

Une tournée est un graphe partiel connexe (éventuellement avec des arêtes multiples) dans lequel chaque sommet est de degré pair. Si on complète une tournée partielle de la classe  $(E,E,2)(G_1)$  par une autre de la classe  $(E,E,2)(G_2)$ , on obtiendra un graphe non connexe (qui ne correspondra pas à une tournée). D'autre part, si on a une tournée partielle appartenant à la classe  $(U,U,1)(G_1)$ , pour obtenir une tournée de  $G$ , on sera obligé de la compléter par une tournée partielle de  $(U,U,1)(G_2)$  sinon les sommets  $s$  et  $p$  seront de degré impair. Par conséquent on ne peut faire que les 4 mariages décrits ci-dessus.  $\square$

### Exemple 2.1

On considère le graphe  $G = (G_1, s, p, G_2)$  suivant avec des coûts égaux à 2 si l'arête est en trait gras et à 1 sinon (figure 2.2) :

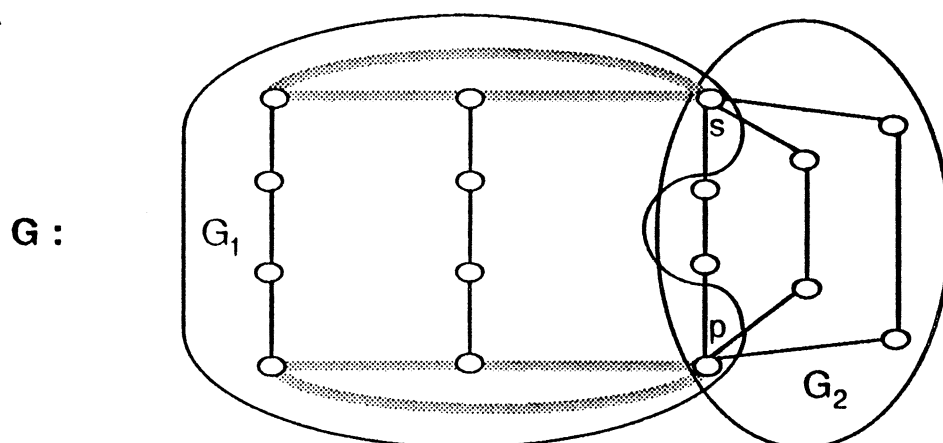


figure 2.2

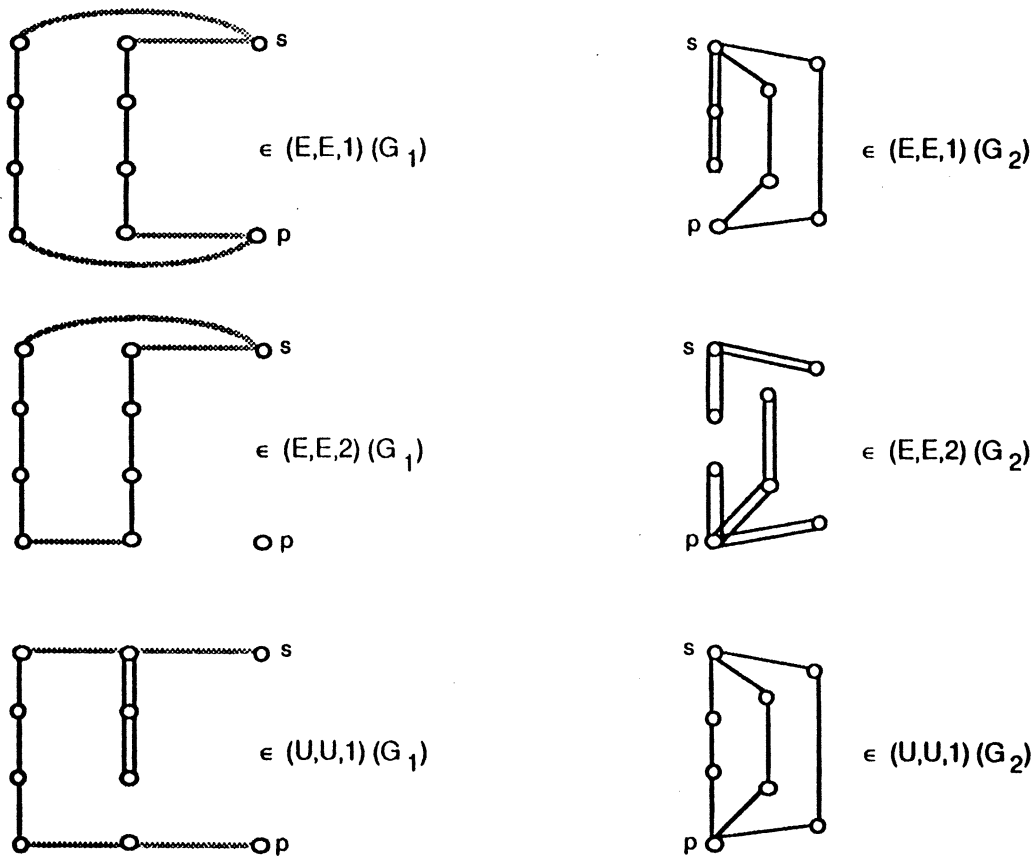


figure 2.3

Dans ce cas on a :

$$[E,E,1](G_1) = 14$$

$$[E,E,2](G_1) = 12$$

$$[U,U,1](G_1) = 15$$

$$[E,E,1](G_2) = 10$$

$$[E,E,2](G_2) = 12$$

$$[U,U,1](G_2) = 9.$$

Ces valeurs optimales peuvent correspondre aux tournées partielles de la figure 2.3.

D'après la proposition 2.2, on trouve que la valeur de la tournée minimum de  $G$  est égale à  $\min(15+9, 12+10, 14+12, 14+10) = 22$ . Elle correspond au mariage des deux tournées partielles minimum de  $(E,E,2)(G_1)$  et de  $(E,E,1)(G_2)$  (figure 2.4).



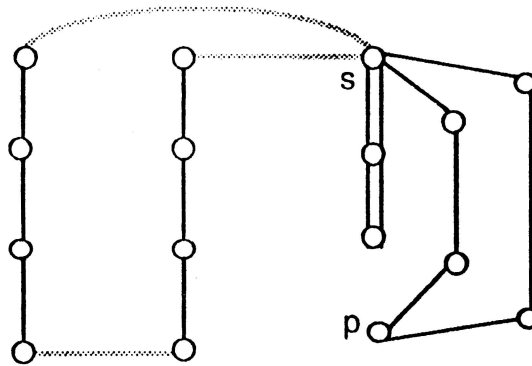


figure 2.4

### 3. Echange par un Petit Graphe :

On considère le graphe  $G = (G_1, s, p, G_2)$  de la figure 2.1.

Il est intuitif que les seules informations dont  $G_2$  (resp.  $G_1$ ) a besoin pour le calcul de la valeur de la tournée de coût minimum de  $G$  sont les valeurs :  $[E, E, 1](G_1)$  (resp.  $G_2$ ),  $[E, E, 2](G_1)$  (resp.  $G_2$ ) et  $[U, U, 1](G_1)$  (resp.  $G_2$ ).

On peut dire que, vu de  $G_2$  (resp.  $G_1$ ),  $G_1$  (resp.  $G_2$ ) se résume à ces trois valeurs. Ce qui nous a permis de soulever le problème suivant :

**(Pb)** : Etant donné  $G = (G_1, s, p, G_2)$ , pour tout  $G_1$  et quelle que soit la fonction coût définie sur les arêtes de  $G_1$ , remplacer  $G_2$  par un autre graphe plus petit  $g_2$  en mettant des coûts positifs ou nuls sur les arêtes de  $g_2$  de telle sorte que : si on prend la restriction sur  $G_1$  de n'importe quelle solution optimale de  $(G_1, s, p, G_2)$ , on pourra la compléter par une tournée partielle de  $g_2$  et obtenir une solution optimale de  $(G_1, s, p, g_2)$ . Autrement dit, on va trouver un graphe  $g_2$  qui remplace  $G_2$  d'une manière à ce que, si on résoud GTSP sur  $(G_1, s, p, g_2)$  on pourra retrouver la solution optimale sur  $(G_1, s, p, G_2)$  en faisant un retour en arrière.

Ce problème veut dire que pour  $i = 1, 2$ , il faut remplacer  $G_i$  par  $g_i$  tel que :

$$[E, E, 1](G_i) + M = [E, E, 1](g_i) \quad (1)$$

$$[E, E, 2](G_i) + M = [E, E, 2](g_i) \quad (2)$$

$$[U, U, 1](G_i) + M = [U, U, 1](g_i) \quad (3)$$

(M est une constante réelle).

Pour le résoudre, on va distinguer tous les cas possibles, qu'on peut avoir pour un  $(G_i, l)$  quelconque donné, qui sont les 6 cas suivants :

$$1^\circ \quad [E, E, 1] (G_i) \leq [E, E, 2] (G_i) \leq [U, U, 1] (G_i) \quad (4)$$

$$2^\circ \quad [E, E, 1] (G_i) \leq [U, U, 1] (G_i) \leq [E, E, 2] (G_i) \quad (5)$$

$$3^\circ \quad [U, U, 1] (G_i) \leq [E, E, 1] (G_i) \leq [E, E, 2] (G_i) \quad (6)$$

$$4^\circ \quad [U, U, 1] (G_i) \leq [E, E, 2] (G_i) \leq [E, E, 1] (G_i) \quad (7)$$

$$5^\circ \quad [E, E, 2] (G_i) \leq [U, U, 1] (G_i) \leq [E, E, 1] (G_i) \quad (8)$$

$$6^\circ \quad [E, E, 2] (G_i) \leq [E, E, 1] (G_i) \leq [U, U, 1] (G_i) \quad (9)$$

### 3.1- Etude des cas :

On va voir dans ce paragraphe que tous ces cas peuvent exister et on va démontrer que dans n'importe quel cas on pourra remplacer  $G_i$  par un petit graphe  $H$  muni d'une fonction coût bien précise.

#### Remarque 3.1

Si  $[E, E, 2] (G_i) \geq [E, E, 1] (G_i)$ , on pourra ne pas s'intéresser à la valeur exacte de  $[E, E, 2] (g_i)$  et se contenter de l'inégalité :  $[E, E, 2] (g_i) \geq [E, E, 1] (g_i)$  car on peut être sûr qu'on peut trouver une tournée optimale de  $G$  qui n'est pas formée d'une tournée partielle appartenant à  $(E, E, 2) (G_i)$   $i = 1$  ou  $2$ .

• D'après cette dernière remarque on constate que l'étude des deux cas (4) et (5) revient à l'étude du seul cas suivant :

$$[E, E, 1] (G_i) \leq [U, U, 1] (G_i)$$

et  $[E, E, 2] (G_i) \geq [E, E, 1] (G_i)$ .

Ici on peut remplacer  $G_i$  par un graphe  $g_i$  formé de deux chaînes à trois arêtes d'extrémités  $s$  et  $p$ , en affectant à chacune des six arêtes un coût positif ou nul égal à :

$$[U, U, 1] (G_i) - [E, E, 1] (G_i) = a \text{ (figure 2.4)}$$

INSTITUT IMAG  
 Informatique, Méthodes et Applications à l'Industrie  
 CNRS - IMAG - UMR 5175  
 MATHÉMATIQUES  
 38402 ST-MARTIN D'HERES CEDEX  
 FRANCE

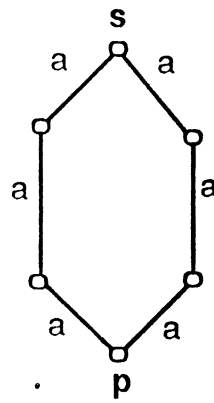


figure 2.4

On a ainsi :

$$\begin{aligned} [E,E,1](g_j) &= 6a = 6[U,U,1](G_i) - 6[E,E,1](G_i), \\ [U,U,1](g_j) &= 7a = 7[U,U,1](G_i) - 7[E,E,1](G_i), \\ [E,E,2](g_j) &= 8a = 8[U,U,1](G_i) - 8[E,E,1](G_i) \geq [E,E,1](G_i) \end{aligned}$$

et si on prend  $M = 6[U,U,1](G_i) - 7[E,E,1](G_i)$  on aura :

$$[E,E,1](G_i) + M = [E,E,1](g_j)$$

et  $[U,U,1](G_i) + M = [U,U,1](g_j)$ .

- Pour les mêmes raisons que ci-dessus, on ne s'intéressera pas à la valeur exacte de  $[E,E,2](G_i)$  dans (6), et on remplacera donc  $G_i$  par le graphe  $g_i$  de la figure 2.5, en affectant, sur les 4 arêtes de  $g_i$ , un coût positif ou nul égal à :

$$[E,E,1](G_i) - [U,U,1](G_i) = b$$

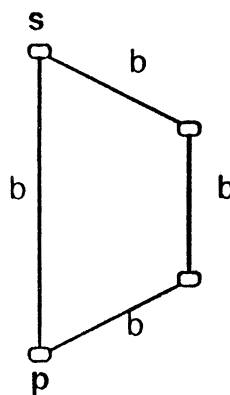


figure 2.5

Dans le nouveau graphe on a:

$$\begin{aligned} [E,E,1] (g_j) &= 4b = 4 [E,E,1] (G_i) - 4 [U,U,1] (G_i) \\ [E,E,2] (g_j) &= 4b = 4 [E,E,1] (G_i) - 4 [U,U,1] (G_i) \\ [U,U,1] (g_j) &= 3b = 3 [E,E,1] (G_i) - 3 [U,U,1] (G_i). \end{aligned}$$

En prenant  $M = 3 [E,E,1] (G_i) - 4 [U,U,1] (G_i)$  on tombe sur les égalités (1) et (3).

Dans les cas (7), (8) et (9) restant, on ne peut plus nous servir de la remarque 3.1 et on va être obligé de faire vérifier les 3 égalités (1), (2) et (3).

- On va partager (7) en deux sous-cas :

$$1^\circ) \quad [U,U,1] (G_i) \geq \frac{3[E,E,2](G_i) - [E,E,1] (G_i)}{2} \quad (10)$$

$$2^\circ) \quad [U,U,1] (G_i) \leq \frac{3[E,E,2](G_i) - [E,E,1] (G_i)}{2} \quad (11)$$

- Si  $G_i$  suit les conditions (7) et (10) on le remplacera par  $g_j$  formé d'une chaîne à 3 arêtes (figure 2.6), avec un coût positif égal à :

$$c = [E,E,2] (G_i) - [U,U,1] (G_i) \text{ si l'arête est en trait gras}$$

et à

$$d = \frac{[E,E,1] (G_i) - [E,E,2] (G_i)}{2} \text{ sinon}$$

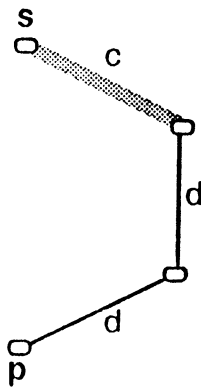


figure 2.6

(10)  $\Leftrightarrow c \leq d$ , on a donc :

$$[E,E,1](g_i) = 2c + 4d = 2[E,E,1](G_i) - 2[U,U,1](G_i)$$

$$[E,E,2](g_i) = 2c + 2d = [E,E,1](G_i) + [E,E,2](G_i) - 2[U,U,1](G_i)$$

$$[U,U,1](g_i) = c + 2d = [E,E,1](G_i) - [U,U,1](G_i)$$

Il existe  $M = [E,E,1](G_i) - 2[U,U,1](G_i)$  qui vérifie (1), (2) et (3).

- Si  $G_i$  vérifie (7) et (11), on le remplacera par  $g_i$ , le graphe de la figure 2.7, en mettant un coût positif égal à :

$$e = [E,E,1](G_i) - [U,U,1](G_i) \quad \text{si l'arête est en trait gras}$$

et à

$$f = [E,E,2](G_i) - [U,U,1](G_i) \quad \text{sinon}$$

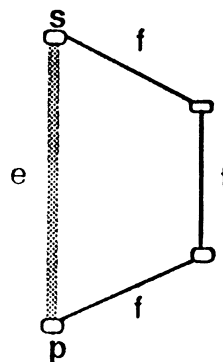


figure 2.7

$$(11) \Leftrightarrow 3f + e \leq 6f$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned}
 [E,E,1](g_i) &= 3f + e = [E,E,1](G_i) + 3[E,E,2](G_i) - 4[U,U,1](G_i) \\
 [E,E,2](g_i) &= 4f = 4[E,E,2](G_i) - 4[U,U,1](G_i) \\
 [U,U,1](g_i) &= 3f = 3[E,E,2](G_i) - 3[U,U,1](G_i).
 \end{aligned}$$

Pour vérifier les égalités (1), (2) et (3) il faut prendre :

$$M = 3[E,E,2](G_i) - 4[U,U,1](G_i).$$

- Dans le cas (8) on distingue aussi deux sous-cas :

$$1^\circ) \quad [U,U,1](G_i) \leq \frac{[E,E,1](G_i) + [E,E,2](G_i)}{2} \quad (12)$$

$$2^\circ) \quad [U,U,1](G_i) \geq \frac{[E,E,1](G_i) + [E,E,2](G_i)}{2} \quad (13)$$

Si  $G_i$  vérifie les conditions (8) et (12), on le remplacera par le graphe  $g_i$  (figure 2.8) en mettant comme coûts :

$$g = \frac{[E,E,1](G_i) + [E,E,2](G_i)}{2} - [U,U,1](G_i)$$

si les arêtes sont en trait gras et

$$h = [E,E,1](G_i) - [U,U,1](G_i)$$

sinon.

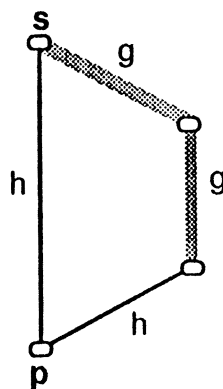


figure 2.8

( (12)  $\Rightarrow$  ( $g \geq 0$ ) et (8)  $\Rightarrow$  ( $h \geq 0$  et  $g \leq h$ ) ).

D'où les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} [E,E,1](g_i) &= 2g + 2h = 3[E,E,1](G_i) + [E,E,2](G_i) - 4[U,U,1](G_i) \\ [E,E,2](g_i) &= 4g = 2[E,E,1](G_i) + 2[E,E,2](G_i) - 4[U,U,1](G_i) \\ [U,U,1](g_i) &= 2g + h = 2[E,E,1](G_i) + [E,E,2](G_i) - 3[U,U,1](G_i) \end{aligned}$$

Pour avoir (1), (2) et (3) on prend :

$$M = 2[E,E,1](G_i) + [E,E,2](G_i) - 4[U,U,1](G_i)$$

. Si  $G_i$  vérifie les conditions (8) et (13), on le remplacera par le graphe  $g_i$  (figure 2.9) en mettant comme coûts :

$$k = \frac{[E,E,1](G_i) - [E,E,2](G_i)}{2}$$

si l'arête est en trait gras et

$$l = [U,U,1](G_i) - \frac{[E,E,1](G_i) + [E,E,2](G_i)}{2}$$

sinon.

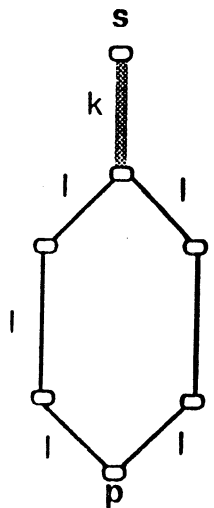


figure 2.9

(8)  $\Rightarrow (k \geq 0)$  et (13)  $\Rightarrow (l \geq 0)$

On trouve ainsi :

$$[E,E,1](g_i) = 2k + 6l = 6 [U,U,1](G_i) - 2 [E,E,1](G_i) - 4 [E,E,2](G_i) \quad (14)$$

$$[E,E,2](g_i) = 6l = 6 [U,U,1](G_i) - 3 [E,E,1](G_i) - 3 [E,E,2](G_i) \quad (15)$$

$$[U,U,1](g_i) = k + 7l = 7 [U,U,1](G_i) - 3 [E,E,1](G_i) - 4 [E,E,2](G_i) \quad (16)$$

Pour obtenir (1), (2) et (3) on prend :

$$M = 6 [U,U,1](G_i) - 3 [E,E,1](G_i) - 4 [E,E,2](G_i) \quad (17)$$

- Dans le cas (9), on procède comme pour les cas (8) et (13). On remplace  $G_i$  par  $g_i$  de la figure 2.9 avec les mêmes coûts qui restent positifs, et on retrouve (14), (15), (16) et (17) pour réobtenir (1), (2), (3).

Et donc, si on considère le graphe  $H = (V_H, E_H)$  (figure 2.10), quel que soit  $G = (G_1, s, p, G_2)$ , on peut trouver une fonction coût  $t : E_H \mapsto \mathbb{R}_+$  telle que : si on remplace  $G_2$  par  $H$ , la restriction sur  $G_1$  de n'importe quelle tournée optimale de  $G$  pourra être complétée sur  $(H)$  pour obtenir une tournée optimale de  $(G_1, s, p, H)$ , car tous les  $g_i$  obtenus sont des mineurs de  $H$ . De même on peut remplacer  $G_1$  par  $(H, u)$  où  $u$  est une fonction coût définie sur  $E_H$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  ( $u : E_H \mapsto \mathbb{R}_+$ ).  $\square$

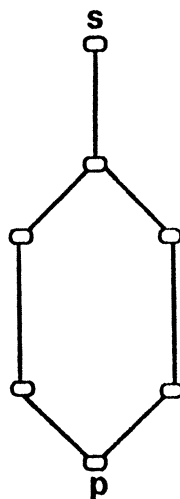


figure 2.10



#### 4. Modèle pour obtenir $GTSP(G)$ à partir de $GTSP(\overline{G}_1)$ et $GTSP(\overline{G}_2)$ :

Soient  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$  (voir figure 2.1) deux sous-graphes de  $G = (G_1, s, p, G_2)$ , munis des fonctions coûts :  $a : E_1 \mapsto \mathbb{R}_+$  et  $b : E_2 \mapsto \mathbb{R}_+$ , on peut trouver, d'après le paragraphe 3 deux fonctions :  $c, d : E_H \mapsto \mathbb{R}_+$  telles que :

$(G_1, a)$ , vu de  $(G_2, b)$ , se résume à  $(H, c)$  (figure 2.11)

et  $(G_2, b)$  vu de  $(G_1, a)$ , se résume à  $(H, d)$  (figure 2.12).

En particulier si on remplace  $(G_2, b)$  par  $(H, c)$  ou bien  $(G_1, a)$  par  $(H, d)$ , résoudre  $GTSP$  sur  $G = (G_1, s, p, G_2)$  revient à résoudre ce problème sur  $(G_1, s, p, G_2)$  ou sur  $(G_1, s, p, G_2)$ .

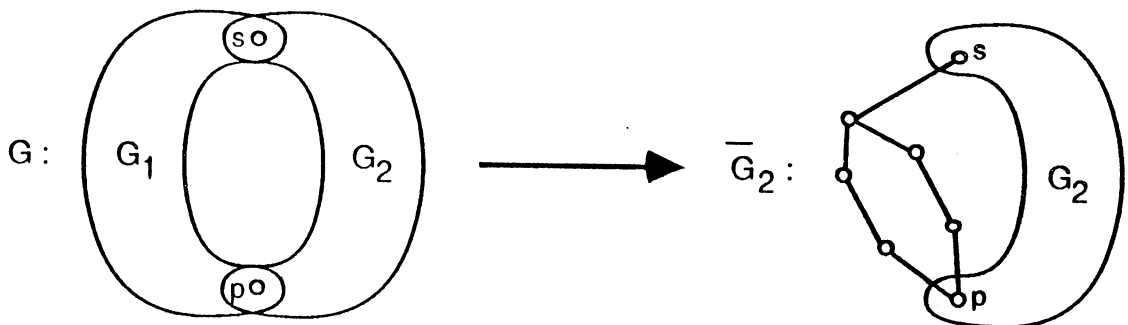


figure 2.11

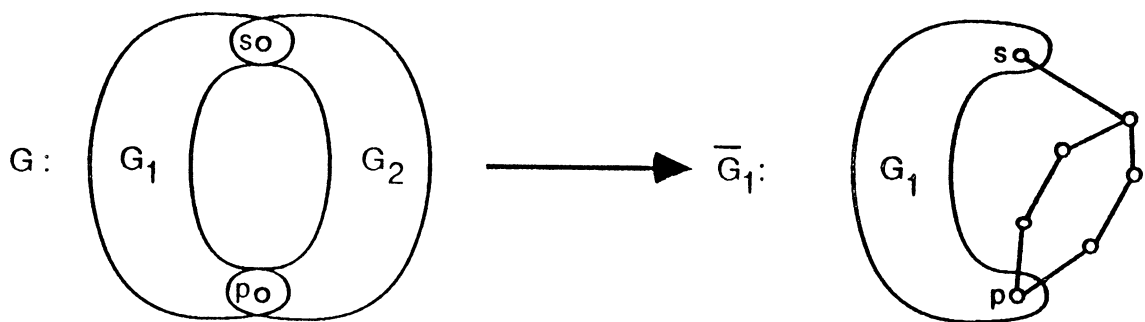


figure 2.12

Dans la suite on appellera  $\overline{G}_1$  le graphe  $(G_1, s, p, H)$  et  $\overline{G}_2$  le graphe  $(H, s, p, G_2)$ .

Le but de ce paragraphe est de démontrer que si on connaît le polyèdre de GTSP sur  $\overline{G}_1$  et sur  $\overline{G}_2$  on pourra le caractériser sur  $G$ .

On fait correspondre aux tournées partielles de  $(G_1, a)$  le vecteur  $x = (x_e, e \in E_1)$ ; à celles de  $(G_2, b)$  le vecteur  $y = (y_e, e \in E_2)$ ; à celle de  $(H, c)$  le vecteur  $z = (z_e, e \in H)$  et à celles de  $(H, d)$  le vecteur  $w = (w_e, e \in H)$ .

On définit  $\langle l, x \rangle_E$  comme :

$$\langle l, x \rangle_E = \sum_{e \in E} l(e) x_e.$$

Et on suppose que les polyèdres  $\text{GTSP}(\overline{G}_1)$  et  $\text{GTSP}(\overline{G}_2)$  sont définis par les systèmes des inéquations suivants, [4] :

$$\begin{aligned} \text{GTSP}(\overline{G}_1) = \langle a^i, x \rangle_{E_1} + \langle d^i, w \rangle_{E_H} \geq \alpha^i, \quad i = 1, \dots, I \quad (18) \\ (a^i : E_1 \mapsto \mathbb{R}_+, d^i : E_H \mapsto \mathbb{R}_+ \text{ et } \alpha^i \in \mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{GTSP}(\overline{G}_2) = \langle b^j, y \rangle_{E_2} + \langle c^j, z \rangle_{E_H} \geq \beta^j, \quad j = 1, \dots, J \quad (19) \\ (b^j : E_2 \mapsto \mathbb{R}_+, c^j : E_H \mapsto \mathbb{R}_+ \text{ et } \beta^j \in \mathbb{R}_+) \end{aligned}$$

Les contraintes décrites dans (18) et (19) forment les listes complètes et non redondantes des facettes définissant  $\text{GTSP}(\overline{G}_1)$  et  $\text{GTSP}(\overline{G}_2)$  respectivement.

Dans (18) (resp. 19), la facette qui correspond à l'indice  $i \in \{1, \dots, I\}$  (resp.  $j \in \{1, \dots, J\}$ ) sera appelée [i] (resp. [j]).

#### 4.1. Mélange des facettes (par combinaison conique) :

A chaque contrainte [i] (resp. [j]) on associe un coefficient réel  $\pi_i \geq 0$  (resp.  $\mu_j \geq 0$ ).

On a donc :  $\pi = (\pi_i, i = 1, \dots, I)$

et  $\mu = (\mu_j, j = 1, \dots, J)$

Soient :

$$a(\pi) = \sum_{i=1}^I \pi_i a^i \quad (20)$$

et

$$b(\mu) = \sum_{j=1}^J \mu_j b^j, \quad (21)$$

on note par  $[\pi, \mu]$  la contrainte mixte suivante :

$$[\pi, \mu] := \langle a(\pi), x \rangle_{E_1} + \langle b(\mu), y \rangle_{E_2} \geq 1 \quad (22)$$

Dans la suite on va noter, par  $[a, b, c](G, I)$ , la valeur de la meilleure tournée partielle dans la classe  $(a, b, c)(G)$  où  $G$  est muni de la fonction coût  $I : E \mapsto \mathbb{R}_+$ .

D'après la proposition 2.2 :

$$\begin{aligned} [i] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [U, U, 1](G_1, a^i) + [U, U, 1](H, d^i) \geq \alpha^i \quad (23.1) \\ [E, E, 2](G_1, a^i) + [E, E, 1](H, d^i) \geq \alpha^i \quad (23.2) \\ [E, E, 1](G_1, a^i) + [E, E, 2](H, d^i) \geq \alpha^i \quad (23.3) \\ [E, E, 1](G_1, a^i) + [E, E, 1](H, d^i) \geq \alpha^i \quad (23.4) \end{array} \right. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [j] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} [U, U, 1](G_2, b^j) + [U, U, 1](H, c^j) \geq \beta^j \quad (24.1) \\ [E, E, 2](G_2, b^j) + [E, E, 1](H, c^j) \geq \beta^j \quad (24.2) \\ [E, E, 1](G_2, b^j) + [E, E, 2](H, c^j) \geq \beta^j \quad (24.3) \\ [E, E, 1](G_2, b^j) + [E, E, 1](H, c^j) \geq \beta^j \quad (24.4) \end{array} \right. \end{aligned}$$

Pour simplifier les notations on pose  $\forall i = 1, \dots, I$  et  $\forall j = 1, \dots, J$  :

$$p^i = [U, U, 1](G_1, a^i) \quad (25.1)$$

$$q^j = [U, U, 1](G_2, b^j) \quad (25.2)$$

$$r^i = [E, E, 1](G_1, a^i) \quad (25.3)$$

$$s^j = [E,E,1] (G_2, b^j) \quad (25.4)$$

$$t^i = [E,E,2] (G_1, a^i) \quad (25.5)$$

$$u^j = [E,E,2] (G_2, b^j) \quad (25.6)$$

Et on définit (P) comme le système d'inéquations suivant :

$$\sum_{i=1}^I p^i \pi_i + \sum_{j=1}^J q^j \mu_j \geq 1 \quad (26.1)$$

$$\sum_{i=1}^I r^i \pi_i + \sum_{j=1}^J u^j \mu_j \geq 1 \quad (26.2)$$

$$(P) : \quad \sum_{i=1}^I t^i \pi_i + \sum_{j=1}^J s^j \mu_j \geq 1 \quad (26.3)$$

$$\sum_{i=1}^I r^i \pi_i + \sum_{j=1}^J s^j \mu_j \geq 1 \quad (26.4)$$

$$\pi_i \geq 0 \quad \mu_j \geq 0 \quad (26.5)$$

Les variables de ce système sont  $\pi_i$  et  $\mu_j$  et les coefficients sont :  $p^i, q^j, r^i, u^j, t^i$  et  $s^j$  où :  $i = 1, \dots, I$  et  $j = 1, \dots, J$ .

#### Lemme 4.1

Si  $(\pi, \mu) = (\pi_1, \dots, \pi_I, \mu_1, \dots, \mu_J)$  est une solution de (P) ( i.e. si  $(\pi, \mu)$  vérifie (26.1), (26.2), (26.3), (26.4) et (26.5) ), alors la contrainte mixte  $[\pi, \mu]$  sera une inéquation valide de GTSP(G) où  $G = (G_1, s, p, G_2)$ .

Démonstration :

Supposons qu'il existe une tournée  $(x^1, y^1)$  telle que, pour un  $(\pi, \mu)$  vérifiant toutes les contraintes de (P), on ait :

$$\langle a(\pi), x^1 \rangle_{E_1} + \langle b(\mu), y^1 \rangle_{E_2} < 1 \quad (27)$$

$$( (27) \Leftrightarrow ( \sum_{i=1}^I \pi_i \langle a^i, x^1 \rangle_{E_1} + \sum_{j=1}^J \mu_j \langle b^j, y^1 \rangle_{E_2} < 1 ) )$$

Si  $(x^1, y^1)$  est une tournée telle que  $x^1$  est dans la classe de  $(U, U, 1)(G_1)$  et  $y^1$  est dans la classe  $(U, U, 1)(G_2)$  on obtient (par définition) les deux inégalités suivantes :  $\langle a^i, x^1 \rangle \geq [U, U, 1](G_1, a^i) \forall i = 1, \dots, I$  et  $\langle b^j, y^1 \rangle \geq [U, U, 1](G_2, b^j) \forall j = 1, \dots, J$ , ce qui nous conduit à une contradiction avec (26.1) :

$$\begin{aligned} 1 > \sum_{i=1}^I \pi_i \langle a^i, x^1 \rangle_{E_1} + \sum_{j=1}^J \mu_j \langle b^j, y^1 \rangle_{E_2} &\geq \sum_{i=1}^I \pi_i [U, U, 1](G_1, a^i) + \sum_{j=1}^J \mu_j [U, U, 1](G_2, b^j) \\ &= \sum_{i=1}^I p_i \pi_i + \sum_{j=1}^J q_j \mu_j. \end{aligned}$$

Si  $(x^1, y^1)$  est telle que,  $x^1 \in (E, E, 1)(G_1)$  et  $y^1 \in (E, E, 2)(G_2)$ , c'est la contrainte (28.2) qui sera violée.

Si  $(x^1, y^1)$  est telle que,  $x^1 \in (E, E, 2)(G_1)$  et  $y^1 \in (E, E, 1)(G_2)$ , c'est la contrainte (28.3) qui sera violée.

Si  $(x^1, y^1)$  est telle que,  $x^1 \in (E, E, 1)(G_1)$  et  $y^1 \in (E, E, 1)(G_2)$ , c'est la contrainte (28.4) qui sera violée.  $\square$

#### Lemme 4.2

Toute inéquation valide de GTSP(G) de la forme :

$$(\langle a, x \rangle_{E_1} + \langle b, y \rangle_{E_2} \geq 1, a : E_1 \mapsto \mathbb{R}_+ \text{ et } b : E_2 \mapsto \mathbb{R}_+)$$

peut s'écrire sous la forme (22) :

$$\sum_{i=1}^I \pi_i \langle a^i, x \rangle_{E_1} + \sum_{j=1}^J \mu_j \langle b^j, y \rangle_{E_2} \geq 1$$

où  $(\pi, \mu)$  est solution de (P).

Démonstration :

$(\langle a, x \rangle_{E_1} + \langle b, y \rangle_{E_2} \geq 1 ; a : E_1 \mapsto \mathbb{R}_+, b : E_2 \mapsto \mathbb{R}_+)$  est une face de  $GTSP(G)$  avec  $G = (G_1, s, p, G_2)$ . D'après le paragraphe 3, on peut trouver deux fonctions "c" et "d" sur  $H$  ( $c, d : E_H \mapsto \mathbb{R}_+$ ) et deux scalaires  $K_1$  et  $K_2$ , pour que les 2 inéquations :

$$(\langle a, x \rangle_{E_1} + \langle d, w \rangle_{E_H} \geq K_1) \quad \text{et} \quad (\langle b, y \rangle_{E_2} + \langle c, z \rangle_{E_H} \geq K_2),$$

soient des inégalités valides de  $GTSP(\overline{G_1})$  et de  $GTSP(\overline{G_2})$  respectivement.

En plus si :

a.1)  $[E, E, 1](G_1, a) \leq [E, E, 2](G_1, a)$ , on peut choisir la fonction "d" telle que :

$$\begin{aligned} [U, U, 1](G_1, a) &+ [U, U, 1](H, d) &= K_1, \\ [E, E, 2](G_1, a) &+ [E, E, 1](H, d) &\geq K_1, \\ [E, E, 1](G_1, a) &+ [E, E, 2](H, d) &\geq K_1 \\ \text{et} \quad [E, E, 1](G_1, a) &+ [E, E, 1](H, d) &= K_1. \end{aligned}$$

a.2)  $[E, E, 1](G_1, a) \geq [E, E, 2](G_1, a)$ , on peut choisir la fonction "d" telle que :

$$\begin{aligned} [U, U, 1](G_1, a) &+ [U, U, 1](H, d) &= K_1, \\ [E, E, 2](G_1, a) &+ [E, E, 1](H, d) &= K_1, \\ [E, E, 1](G_1, a) &+ [E, E, 2](H, d) &= K_1 \\ \text{et} \quad [E, E, 1](G_1, a) &+ [E, E, 1](H, d) &\geq K_1 \end{aligned}$$

b.1)  $[E, E, 1](G_2, b) \leq [E, E, 2](G_2, b)$ , on peut choisir la fonction "c" telle que :

$$\begin{aligned} [U, U, 1](G_2, b) &+ [U, U, 1](H, c) &= K_2, \\ [E, E, 2](G_2, b) &+ [E, E, 1](H, c) &\geq K_2, \\ [E, E, 1](G_2, b) &+ [E, E, 2](H, c) &\geq K_2 \\ \text{et} \quad [E, E, 1](G_2, b) &+ [E, E, 1](H, c) &= K_2 \end{aligned}$$

b.1)  $[E, E, 1](G_2, b) \geq [E, E, 2](G_2, b)$ , on peut choisir la fonction "c" telle que :

$$\begin{aligned} [U, U, 1](G_2, b) &+ [U, U, 1](H, c) &= K_2, \\ [E, E, 2](G_2, b) &+ [E, E, 1](H, c) &= K_2, \\ [E, E, 1](G_2, b) &+ [E, E, 2](H, c) &= K_2 \\ \text{et} \quad [E, E, 1](G_2, b) &+ [E, E, 1](H, c) &\geq K_2 \end{aligned}$$

Donc :

• si on est dans le cas a.1 (  $[E,E,1](G_1,a) \leq [E,E,2](G_1,a)$  ), il existe deux tournées  $(x^1, w^1)$  et  $(x^2, w^2)$  de  $\overline{G}_1$  :

(  $x^1 \in (U,U,1)(G_1,a)$ ,  $x^2 \in (E,E,1)(G_1,a)$ ,  $w^1 \in (U,U,1)(H,d)$  et  $w^2 \in (E,E,1)(H,d)$  )  
telles que :

$$\begin{aligned} [U,U,1](G_1,a) + [U,U,1](H,d) &= \langle a, x^1 \rangle_{E_1} + \langle d, w^1 \rangle_{E_H} = K_1 \\ \text{et } [E,E,1](G_1,a) + [E,E,1](H,d) &= \langle a, x^2 \rangle_{E_1} + \langle d, w^2 \rangle_{E_H} = K_1. \end{aligned}$$

Mais puisque  $(\langle a, x \rangle_{E_1} + \langle d, w \rangle_{E_H} \geq K_1)$  est une inégalité valide de  $GTSP(\overline{G}_1)$ , elle peut s'écrire comme une combinaison conique de facettes  $[i]$ ,  $i = 1, \dots, l$ , qui touchent le polyèdre en  $(x^1, w^1)$  et  $(x^2, w^2)$  :

( i.e. on peut trouver  $(\pi_1, \dots, \pi_l)$ ,  $\pi_i \geq 0$ , avec :

$$a = \sum_{i=1}^l \pi_i a^i, \quad d = \sum_{i=1}^l \pi_i d^i, \quad K_1 = \sum_{i=1}^l \pi_i \alpha^i,$$

$$\langle a, x^k \rangle_{E_1} + \langle d, w^k \rangle_{E_H} = \sum_{i=1}^l \pi_i (\langle a^i, x^k \rangle_{E_1} + \langle d^i, w^k \rangle_{E_H}) = \sum_{i=1}^l \pi_i \alpha^i = K_1, \quad k = 1, 2,$$

Soit :

$$\langle a^i, x^2 \rangle_{E_1} + \langle d^i, w^2 \rangle_{E_H} = r^i + [E,E,1](H, d^i) = \alpha^i \quad \forall i \text{ tel que } \pi_i > 0 \quad (28)$$

$$\text{et } \langle a^i, x^1 \rangle_{E_1} + \langle d^i, w^1 \rangle_{E_H} = p^i + [U,U,1](H, d^i) = \alpha^i \quad \forall i \text{ tel que } \pi_i > 0)$$

$$\text{donc } \langle a, x^1 \rangle_{E_1} = \langle a(\pi), x^1 \rangle_{E_1} = \sum_{i=1}^l p^i \pi_i \quad (29.1)$$

$$\text{et } \langle a(\pi), x^2 \rangle_{E_1} = \sum_{i=1}^l r^i \pi_i. \quad (29.2)$$

D'autre part, on a :

$$r^i + [E,E,1](H, d^i) \geq \alpha^i \quad \forall i = 1, \dots, l \quad (30)$$

car les inéquations [i] sont des facettes (donc elles sont valides pour  $GTSP(\overline{G}_1)$ ).

Ce qui signifie (d'après (28) et (30)) que :  $t^i \geq r^i \quad \forall i$  tel que  $\pi_i > 0$  et

$$\sum_{i=1}^I t^i \pi_i \geq \sum_{i=1}^I r^i \pi_i \quad (31)$$

• si on est dans le cas a.2 (  $[E,E,1](G_1,a) \geq [E,E,2](G_1,a)$  ), on trouvera qu'il existe trois tournées  $(x^1, w^1)$ ,  $(x^2, w^2)$  et  $(x^3, w^3)$  de  $\overline{G}_1$  :

$$(x^1 \in (U,U,1)(G_1,a), x^2 \in (E,E,2)(G_1,a), x^3 \in (E,E,1)(G_1,a), \\ w^1 \in (U,U,1)(H,d), w^2 \in (E,E,1)(H,d) \text{ et } w^3 \in (E,E,2)(H,d) )$$

telles que :

$$\langle a(\pi), x^1 \rangle_{E_1} = \sum_{i=1}^I p^i \pi_i \quad (32.1)$$

$$\langle a(\pi), x^2 \rangle_{E_1} = \sum_{i=1}^I t^i \pi_i \quad (32.2)$$

$$\langle a(\pi), x^3 \rangle_{E_1} = \sum_{i=1}^I r^i \pi_i. \quad (32.3)$$

• si on est dans le cas b.1 (  $[E,E,1](G_2,b) \leq [E,E,2](G_2,b)$  ), on démontre comme dans le cas a.1 qu'on peut trouver  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_J) \in \mathbb{R}_+^{|J|}$  tel qu'on puisse écrire la face  $(\langle b, y \rangle_{E_2} + \langle c, z \rangle_{E_H} \geq K_2)$  comme une combinaison conique de facettes [j] de  $GTSP(\overline{G}_2)$  :

$$b = b(\mu) = \sum_{j=1}^J \mu_j b^j, \quad c = c(\mu) = \sum_{j=1}^J \mu_j c^j \quad \text{et} \quad K_2 = \sum_{j=1}^J \mu_j \beta^j,$$

qu'il existe  $y^1 \in (U,U,1)(G_2,b)$  et  $y^2 \in (E,E,1)(G_2,b)$  tels que :

$$\langle b(\mu), y^1 \rangle_{E_2} = \sum_{j=1}^J q^j \mu_j \quad (33.1)$$

$$\langle b(\mu), y^2 \rangle_{E_2} = \sum_{j=1}^J s^j \mu_j \quad (33.2)$$



et que :

$$\sum_{j=1}^J u^j \mu_j \geq \sum_{j=1}^J s^j \mu_j. \quad (34)$$

• si on est dans le cas b.2 (  $[E,E,1](G_2,b) \geq [E,E,2](G_2,b)$  ), on démontre comme dans a.2 qu'il existe  $y^1 \in (U,U,1)(G_2,b)$ ,  $y^2 \in (E,E,2)(G_2,b)$  et  $y^3 \in (E,E,1)(G_2,b)$  tels que :

$$\langle b(\mu), y^1 \rangle_{E_2} = \sum_{j=1}^J q^j \mu_j \quad (35.1)$$

$$\langle b(\mu), y^2 \rangle_{E_2} = \sum_{j=1}^J u^j \mu_j \quad (35.2)$$

$$\langle b(\mu), y^3 \rangle_{E_2} = \sum_{j=1}^J s^j \mu_j. \quad (35.3)$$

Il faut maintenant distinguer les 4 manières de mixages possibles, qui dépendent des valeurs des deux fonctions a et b qui définissent la face ( $\langle a, x \rangle_{E_1} + \langle b, y \rangle_{E_2} \geq 1$ ). Ce sont les 4 possibilités suivantes :

1°)  $[E,E,1](G_1,a) \leq [E,E,2](G_1,a)$  et  $[E,E,1](G_2,b) \leq [E,E,2](G_2,b)$ , ( cas a.1 et b.1 )

2°)  $[E,E,1](G_1,a) \geq [E,E,2](G_1,a)$  et  $[E,E,1](G_2,b) \leq [E,E,2](G_2,b)$ , ( cas a.2 et b.1 )

3°)  $[E,E,1](G_1,a) \leq [E,E,2](G_1,a)$  et  $[E,E,1](G_2,b) \geq [E,E,2](G_2,b)$ , ( cas a.1 et b.2 )

4°)  $[E,E,1](G_1,a) \geq [E,E,2](G_1,a)$  et  $[E,E,1](G_2,b) \geq [E,E,2](G_2,b)$ , ( cas a.2 et b.2 )

1°) (cas a.1 et b.1) :

• ( (29.1) et (33.1) )  $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^I p^i \pi_i + \sum_{j=1}^J q^j \mu_j = \langle a(\pi), x^1 \rangle_{E_1} + \langle b(\mu), y^1 \rangle_{E_2} \geq 1$$

car  $(x^1, y^1)$  est une tournée de G et  $\langle a(\pi), x \rangle_{E_1} + \langle b(\mu), y \rangle_{E_2} = \langle a, x \rangle_{E_1} + \langle b, y \rangle_{E_2} \geq 1$  est une inéquation valide pour GTSP (G) par définition. Donc (26.1) est vérifiée.

. ( (29.2) et (33.2) )  $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^I r^i \pi_i + \sum_{j=1}^J s^j \mu_j = \langle a(\pi), x^2 \rangle_{E_1} + \langle b(\mu), y^2 \rangle_{E_2} \geq 1$$

car  $(x^2, y^2)$  est une tournée de G. Donc (26.4) est vérifiée.

. ( (26.4) et (34) )  $\Rightarrow$  (26.2)

. ( (26.4) et (31) )  $\Rightarrow$  (26.3)

Par conséquent on peut trouver un vecteur  $(\pi, \mu) \in (P)$  tel que  $a = a(\pi)$  et  $b = b(\mu)$ .

2°) (cas a.2 et b.1) :

( (32.1) et (33.1) )  $\Rightarrow$  (26.1),                      ( (32.2) et (33.2) )  $\Rightarrow$  (26.3),

( (32.3) et (33.2) )  $\Rightarrow$  (26.4)                      et ( (26.4) et (34) )  $\Rightarrow$  (26.2)

3°) (cas a.1 et b.2) :

( (29.1) et (35.1) )  $\Rightarrow$  (26.1),                      ( (29.2) et (35.2) )  $\Rightarrow$  (26.2),

( (29.3) et (35.3) )  $\Rightarrow$  (26.4)                      et ( (26.4) et (31) )  $\Rightarrow$  (26.3)

4°) (cas a.2 et b.1) :

( (32.1) et (35.1) )  $\Rightarrow$  (26.1),                      ( (32.2) et (35.3) )  $\Rightarrow$  (26.3),

( (32.3) et (35.2) )  $\Rightarrow$  (26.2)                      et ( (32.3) et (35.3) )  $\Rightarrow$  (26.4)

Donc  $\forall$  les deux fonctions a et b, on peut trouver un vecteur  $(\pi, \mu) \in (P)$  tel que :

$a = a(\pi)$  et  $b = b(\mu)$ .                       $\square$

#### THEOREME 4.1

L'inéquation  $[\pi, \mu] := ( \langle a(\pi), x \rangle_{E_1} + \langle b(\mu), y \rangle_{E_2} \geq 1 )$  forme une facette de GTSP(G) si et seulement si  $(\pi, \mu)$  est une solution de base de (P) ( autrement dit, on peut obtenir toutes les facettes de GTSP(G) à partir des solutions de base de (P) et toute solution de base de (P) est nécessaire pour la caractérisation complète de GTSP(G) ).

Démonstration :

Condition suffisante : ( si  $[\pi, \mu]$  est une facette alors  $(\pi, \mu)$  est un point extrême de (P) )

L'ensemble des contraintes mixtes  $[\pi, \mu]$  avec  $(\pi, \mu)$  solution réalisable de (P) caractérise entièrement GTSP(G), d'après le lemme 4.2.

Il nous reste à démontrer que si  $(\pi^1, \mu^1)$  n'est pas une solution de base de (P), alors : (  $\langle a(\pi^1), x \rangle_{E_1} + \langle b(\mu^1), y \rangle_{E_2} \geq 1$  ) ne pourra pas être une facette de GTSP(G). En effet,

supposons que  $(\pi^1, \mu^1)$  peut s'écrire comme une combinaison convexe de quelques points de (P) :

$$(\pi^1, \mu^1) = \sum_{l=2}^k \alpha_l (\pi^l, \mu^l) \quad \text{avec } \alpha_l \geq 0, \quad \sum_{l=2}^k \alpha_l = 1$$

i.e.

$$\pi^1_i = \sum_{l=2}^k \alpha_l \pi^l_i, \quad i = 1, \dots, I \quad \text{et} \quad \mu^1_j = \sum_{l=2}^k \alpha_l \mu^l_j, \quad j = 1, \dots, J.$$

Donc :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^I \pi^1_i \langle a^i, x \rangle_{E_1} + \sum_{j=1}^J \mu^1_j \langle b^j, y \rangle_{E_2} \geq 1 \\ \Rightarrow & \sum_{i=1}^I \sum_{l=2}^k \alpha_l \pi^l_i \langle a^i, x \rangle_{E_1} + \sum_{j=1}^J \sum_{l=2}^k \alpha_l \mu^l_j \langle b^j, y \rangle_{E_2} \geq 1 \\ \Rightarrow & \sum_{l=2}^k \alpha_l (\langle a(\pi^l), x \rangle_{E_1} + \langle b(\mu^l), y \rangle_{E_2}) \geq 1 = \sum_{l=2}^k \alpha_l \end{aligned}$$

$\langle a(\pi^l), x \rangle_{E_1} + \langle b(\mu^l), y \rangle_{E_2} \geq 1, \quad l = 2, \dots, k$  sont des faces de GTSP(G) car  $(\pi^l, \mu^l), \quad l = 2, \dots, k$  sont des solutions de (P) (lemme 4.1). Donc,

$$[\pi^1, \mu^1] := (\langle a(\pi^1), x \rangle_{E_1} + \langle b(\mu^1), y \rangle_{E_2} \geq 1)$$

ne peut pas être une facette, puisque GTSP(G) est de pleine dimension [2, §2] et elle est obtenue à partir d'une combinaison convexe de faces  $[\pi^l, \mu^l], \quad l = 2, \dots, k$ .

Condition nécessaire : (si  $(\pi, \mu)$  est un point extrême de  $(P)$  alors  $[\pi, \mu]$  est une facette)

Soient le vecteur  $(\pi^1, \mu^1)$  qui forme une solution réalisable de  $(P)$  et l'inéquation mixte  $[\pi^1, \mu^1]$  qui est valide pour GTSP  $(G)$  sans être une facette de ce polyèdre. On peut donc l'écrire comme une combinaison convexe d'autres faces (ou facettes) de GTSP  $(G)$ :  $[\pi^l, \mu^l]$  avec  $(\pi^l, \mu^l) \in (P)$ ,  $l=2, \dots, k$ , c'est à dire il existe des coefficients  $\alpha_l \geq 0$   $l=2, \dots, k$  avec  $\sum (\alpha_l, l=2, \dots, k) = 1$  tels que :

$$\begin{aligned} \langle a(\pi^1), x \rangle_{E_1} + \langle b(\mu^1), y \rangle_{E_2} &= \sum_{l=2}^k \alpha_l (\langle a(\pi^l), x \rangle_{E_1} + \langle b(\mu^l), y \rangle_{E_2}) \\ &\geq \\ 1 &= \sum_{l=2}^k \alpha_l \end{aligned}$$

Ce qui implique que :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^I \pi^1_i \langle a^i, x \rangle_{E_1} + \sum_{j=1}^J \mu^1_j \langle b^j, y \rangle_{E_2} &= \sum_{l=2}^k \alpha_l (\sum_{i=1}^I \pi^l_i \langle a^i, x \rangle_{E_1} + \sum_{j=1}^J \mu^l_j \langle b^j, y \rangle_{E_2}) \\ &= \sum_{i=1}^I (\sum_{l=2}^k \alpha_l \pi^l_i) \langle a^i, x \rangle_{E_1} + \sum_{j=1}^J (\sum_{l=2}^k \alpha_l \mu^l_j) \langle b^j, y \rangle_{E_2} \end{aligned}$$

Donc on peut écrire :  $\pi^1_i = \sum_{l=2}^k \alpha_l \pi^l_i$  et  $\mu^1_j = \sum_{l=2}^k \alpha_l \mu^l_j$ ,  $i = 1, \dots, I$  et  $j = 1, \dots, J$

ce qui veut dire que  $(\pi^1, \mu^1) = \sum_{l=2}^k \alpha_l (\pi^l, \mu^l)$  et que  $(\pi^1, \mu^1)$  n'est pas un point extrême

du polyèdre  $(P)$ .  $\square$

#### Remarque 4.1 \*\*

Soit  $(\pi^0, \mu^0)$  une solution de base de  $(P)$ ; puisque  $(P)$  contient exactement 4 inéquations autres que les  $(\pi_i \geq 0, \mu_j \geq 0)$ ,  $(\pi^0, \mu^0)$  ne peut avoir que : 1, 2, 3 ou 4 composantes non nulles, (le reste de ses composantes est égal à 0). Et donc une facette de  $G$  est obtenue en combinant respectivement 1,2,3 ou 4 facettes de  $G_1$  et de  $G_2$ .

Remarque 4.2 \*\*\*

En général, on peut trouver la description complète du polyèdre des problèmes d'optimisation combinatoire qu'on sait résoudre en un temps polynomial, comme dans le cas des problèmes de l'arbre de poids minimum, du couplage de poids maximum etc...

GTSP sur les graphes série-parallèles était un problème facile mais dont on ne savait pas caractériser le polyèdre (voir [2]). Or maintenant, puisqu'on sait calculer les coefficients  $p^i, q^j, r^i, u^j, t^i$  et  $s^j$  : (25.1), ..., (25.6) quand  $G$  est un graphe série-parallèle [2], la caractérisation de  $GTSP(G)$  par décomposition puis par composition, pour cette classe de graphe, découle immédiatement du théorème 4.1.

**REFERENCES**

- [1] M. BOULALA and J.P. UHRY,  
"Polytope des indépendants d'un graphe série-parallèle",  
Discrete Mathematics 27 (1979), 225-243.
  
- [2] G. CORNUEJOLS, J. FONLUPT, D, NADDEF  
"The Traveling Salesman Problem on a graph and some related integer  
polyhedra".  
Mathematical Programming 33 (1985) 1-27.
  
- [3] R. EULER, A.R. MAHJOUR,  
"On a composition of independence systems by circuit - identification",  
Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble -  
ARTEMIS R.R.501.
  
- [4] J. FONLUPT, A.R. MAHJOUR, J.P. UHRY,  
"Composition of graphs and the bipartite subgraph polytope".  
Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble -  
ARTEMIS, R.R. 459.
  
- [5] H. D. RATLIFF, A.S. ROSENTHAL,  
"Order-picking in a rectangular warehouse : solvable case of TSP".  
Operations research Vol. n°3, May-June 1



## CHAPITRE 3

## COMPOSITIONS DES FACETTES

## 1. Quelques propriétés sur les facettes de GTSP (G) :

On considère le graphe  $G = (G_1, s, p, G_2)$  et l'inéquation  $F := \langle a, x \rangle_{E_1} + \langle b, y \rangle_{E_2} \geq 1$  qui forme une face de GTSP(G) :

$$a : E_1 \mapsto \mathbb{R}_+, b : E_2 \mapsto \mathbb{R}_+, G_1 = (V_1, E_1) \text{ et } G_2 = (V_2, E_2).$$

Puisqu'une face est une inéquation valide, les 4 inéquations suivantes sont vérifiées :

$$[U, U, 1](G_1, a) + [U, U, 1](G_2, b) \geq 1 \quad (1.1)$$

$$[E, E, 2](G_1, a) + [E, E, 1](G_2, b) \geq 1 \quad (1.2)$$

$$[E, E, 1](G_1, a) + [E, E, 2](G_2, b) \geq 1 \quad (1.3)$$

$$[E, E, 1](G_1, a) + [E, E, 1](G_2, b) \geq 1 \quad (1.4)$$

**Propriété 1.1**

Si l'inéquation

$$\langle a, x \rangle_{E_1} + \langle b, y \rangle_{E_2} \geq 1 \quad (2)$$

forme une facette de GTSP(G), alors au moins deux des quatre inégalités (1.1), (1.2), (1.3) et (1.4) seront vérifiées avec égalité.

Démonstration :



1. Puisqu'une facette touche toujours le polyèdre, une des 4 inégalités ci-dessus est forcément serrée (vérifiée avec égalité).

2. Si une et une seule inégalité parmi les 4 est saturée, on suppose sans perte de généralité que les points appartenant à l'intersection de cette facette avec le polyèdre vérifient (1.1) avec égalité et (1.2), (1.3) et (1.4) avec inégalité stricte (i.e. si  $(x_1, y_1)$  est une tournée qui vérifie (2) avec égalité alors  $x_1 \in (U, U, 1)(G_1, a)$  et  $y_1 \in (U, U, 1)(G_2, b)$ ).

Alors pour  $\varepsilon > 0$  et petit, on considère l'inéquation suivante:

$$(1+\varepsilon) \langle a, x \rangle_{E_1} + (1-\varepsilon) \langle b, y \rangle_{E_2} \geq 1 + \varepsilon ([U, U, 1](G_1, a) - [U, U, 1](G_2, b)). \quad (3)$$

Il est facile à voir que (3) est valide pour  $GTSP(G)$ , et que tout point  $(x_1, y_1)$  vérifiant (2) avec égalité, vérifie aussi (3) avec égalité, ce qui veut dire que (3) contient (2). D'autre part  $GTSP(G)$  est de pleine dimension, et donc (2) ne peut plus être une facette, d'où la contradiction.  $\square$

Remarque 1.1 :

On peut trouver un graphe  $G = (G_1, s, p, G_2)$  et une facette de  $GTSP(G)$  :

$$\langle a, x \rangle_{E_1} + \langle b, y \rangle_{E_2} \geq 1$$

tels que exactement deux des inégalités (1.1), (1.2), (1.3) et (1.4) soient vérifiées avec égalité.

Considérons par exemple le graphe  $G$  de la figure 3.1 et la facette [1,3] :

$$\langle a, x \rangle_{E_1} + \langle b, y \rangle_{E_2} = 0,1 \sum (x_i, i = 1, \dots, 6) + 0,1 \sum (y_j, j = 1, 2, 3) \geq 1$$

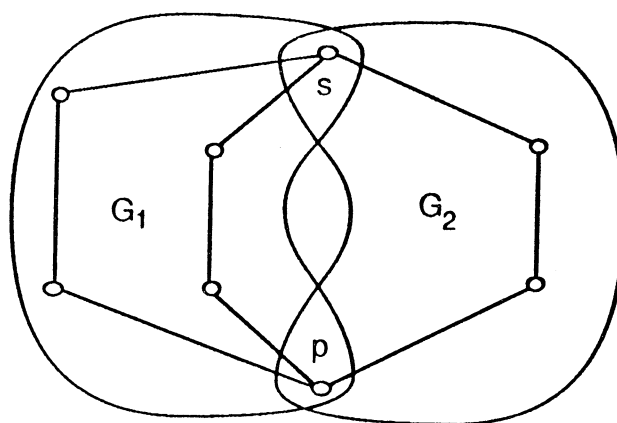


figure 3.1

En affectant à chaque arête de  $G$  un coût égal à 0,1 on trouve :

$$\begin{array}{ll} [E,E,1](G_1) = 0,6 & [E,E,1](G_2) = 0,6 \\ [E,E,2](G_1) = 0,8 & [E,E,2](G_2) = 0,4 \\ [U,U,1](G_1) = 0,7 & [U,U,1](G_2) = 0,3 \end{array}$$

Dans ce cas (1.1) et (1.3) sont vérifiées avec égalité tandis que (1.2) et (1.4) sont vérifiées avec inégalité stricte.

Et donc on ne peut pas améliorer la propriété 1.1.

### Propriété 1.2

Si  $F := (\langle a,x \rangle_{E_1} + \langle b,y \rangle_{E_2} \geq 1)$  est une facette de GTSP ( $G$ ) ( $G = (G_1, s, p, G_2)$ ) et si (1.4) est vérifiée avec égalité (i.e.  $[E,E,1](G_1) + [E,E,1](G_2) = 1$ ), alors (1.1) sera forcément vérifiée avec égalité (i.e.  $[U,U,1](G_1) + [U,U,1](G_2) = 1$ ).

Démonstration:

Supposons que  $[U,U,1](G_1) + [U,U,1](G_2) > 1$ , d'après la propriété 1.1 au moins l'une des inégalités (1.2) ou (1.3) est vérifiée avec égalité.

1. On étudie d'abord le cas où (1.2) et (1.3) sont toutes les deux serrées c'est à dire, quand :

$$\begin{array}{rcl} [U,U,1](G_1,a) + [U,U,1](G_2,b) & > & 1 \\ [E,E,2](G_1,a) + [E,E,1](G_2,b) & = & 1 \\ [E,E,1](G_1,a) + [E,E,2](G_2,b) & = & 1 \\ [E,E,1](G_1,a) + [E,E,1](G_2,b) & = & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} ([E,E,1](G_1,a) + [E,E,1](G_2,b) = [E,E,2](G_1,a) + [E,E,1](G_2,b)) \\ \Rightarrow ([E,E,1](G_1,a) = [E,E,2](G_1,a)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ([E,E,1](G_1,a) + [E,E,1](G_2,b) = [E,E,1](G_1,a) + [E,E,2](G_2,b)) \\ \Rightarrow ([E,E,1](G_2,b) = [E,E,2](G_2,b)) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ([U,U,1](G_1,a) + [U,U,1](G_2,b) > [E,E,1](G_1,a) + [E,E,1](G_2,b) ) \\ \Rightarrow ( [U,U,1](G_1,a) > [E,E,1](G_1,a) \text{ ou } [U,U,1](G_2,b) > [E,E,1](G_2,b) ), \end{aligned}$$

Si (  $[U,U,1](G_1,a) > [E,E,1](G_1,a)$  ) alors l'inéquation :

$$\langle a,x \rangle_{E_1} \geq [E,E,1](G_1,a) \quad (4)$$

est valide pour GTSP (G) et tous les points de GTSP (G) qui vérifient (2) avec égalité vérifient aussi (4) avec égalité, donc (4) contient la facette (2), d'où la contradiction.

Si (  $[U,U,1](G_2,b) > [E,E,1](G_2,b)$  ) on démontre de la même façon que l'inéquation :

$$\langle b,x \rangle_{E_2} \geq [E,E,1](G_2,b) \quad (5)$$

contient (2) et on trouve la contradiction.

2. On considère maintenant le cas où exactement une des deux inégalité (1.2) ou (1.3) est vérifiée avec égalité. Sans perte de généralité, supposons que :

$$\begin{aligned} [U,U,1](G_1,a) + [U,U,1](G_2,b) &> 1, \\ [E,E,2](G_1,a) + [E,E,1](G_2,b) &> 1, \\ [E,E,1](G_1,a) + [E,E,2](G_2,b) &= 1 \\ \text{et } [E,E,1](G_1,a) + [E,E,1](G_2,b) &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ([E,E,1](G_1,a) + [E,E,1](G_2,b) = [E,E,1](G_1,a) + [E,E,2](G_2,b) ) \\ \Rightarrow ( [E,E,1](G_2,b) = [E,E,2](G_2,b) ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ([E,E,1](G_1,a) + [E,E,1](G_2,b) < [E,E,2](G_1,a) + [E,E,1](G_2,b) ) \\ \Rightarrow ( [E,E,1](G_1,a) < [E,E,2](G_1,a) ) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ([U,U,1](G_1,a) + [U,U,1](G_2,b) > [E,E,1](G_1,a) + [E,E,1](G_2,b) ) \\ \Rightarrow ( [U,U,1](G_1,a) > [E,E,1](G_1,a) \text{ ou } [U,U,1](G_2,b) > [E,E,1](G_2,b) ), \end{aligned}$$

Si (  $[U,U,1](G_1,a) > [E,E,1](G_1,a)$  ), puisque (  $[E,E,2](G_1,a) > [E,E,1](G_1,a)$  ), (4) est une inéquation valide pour GTSP (G) et contient (2) qui est une facette.

Si (  $[U,U,1](G_2,b) > [E,E,1](G_2,b)$  ), puisque (  $[E,E,1](G_2,b) = [E,E,2](G_2,b)$  ), (5) est valide pour GTSP (G) et contient la facette (2), d'où la contradiction.  $\square$

**Définition 1.1**

Soit  $F := (\sum_{e \in E} f_e x_e \geq 1)$  une facette de  $G$ , on note par  $G_F = (V_F, E_F)$ , le graphe qui lui

correspond et qui est obtenu à partir de  $G$  en identifiant (contractant) tout couple de sommets  $x$  et  $y$  tel que :  $f_{e=(x,y)} = 0$ . On dira que  $F$  est définie par  $G_F = (V_F, E_F)$ .

**Définition 1.2**

Soit  $x_1 e_1 x_2 e_2 \dots x_k e_k x_{k+1}$  une chaîne élémentaire de  $G_F$ , ( $k \geq 1$ ), on l'appellera une chaîne de degré 2 et de longueur  $k$ , si  $\forall i = 2, \dots, k$  le degré de  $x_i$  dans  $G_F$  est égal à 2. Une telle chaîne sera notée par  $C_k$ .

**Propriété 1.3**

Dans une facette  $F := (\sum_{e \in E} f_e x_e \geq 1)$  de  $GTSP(G)$ , tous les  $f_e$  qui correspondent aux

arêtes d'une  $C_k$  de  $G_F$  sont égaux à une constante " $b$ "  $\in \mathbb{R}_+^*$  sauf éventuellement un seul coefficient égal à une constante " $a$ " telle que  $0 < a \leq b$ .

Démonstration :

Soit  $G_F = (G'_F, s, p, C_k)$  avec  $C_k = s e_1 x_2 e_2 \dots x_k e_k p$  et soient  $a_i, i = 1, \dots, k$ , les coefficients qui correspondent aux arêtes  $e_i$ , dans  $F$ , (figure 3.2).

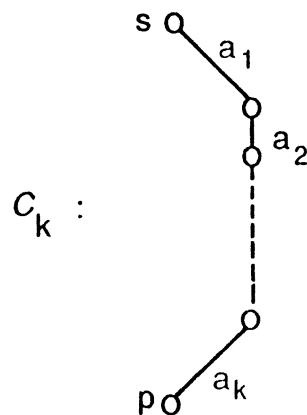


figure 3.2

Il est bien évident que si on permute les arêtes dans  $C_k$ , les valeurs  $[E,E,1](C_k, f_{C_k})$ ,  $[E,E,2](C_k, f_{C_k})$  et  $[U,U,1](C_k, f_{C_k})$  ne changent pas,  $f_{C_k} = (f_e, e \in C_k)$ .

Sans perte de généralité, faisons la démonstration de cette propriété en prenant  $k=3$ .

On suppose que  $F$  est définie par  $G_F = (G'_F, s, p, C_3)$ ,  $G'_F = (V'_F, E'_F)$ , et qu'elle s'écrit

sous la forme :  $\langle f_{G'_F}, x \rangle_{E'_F} + \sum_{i=1}^3 f_{e_i} y_i \geq 1$  où  $f_{G'_F} = (f_c, c \in E'_F)$ .

Si  $f_{e_1} = a$ ,  $f_{e_2} = b$  et  $f_{e_3} = c$  avec  $0 < a < b < c$  (figure 3.3), on a au plus 3 égalités, qui sont :

$$[U,U,1](G'_F, f_{G'_F}) + a + b + c = 1,$$

$$[E,E,1](G'_F, f_{G'_F}) + 2a + 2b = 1,$$

$$[E,E,2](G'_F, f_{G'_F}) + 2a + 2b + 2c = 1,$$

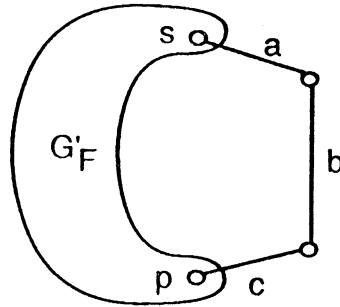


figure 3.3

ce qui donnent :

$$[U,U,1](G'_F, f_{G'_F}) + a + b + c = [E,E,1](G'_F, f_{G'_F}) + 2a + 2b \quad (6.1)$$

$$[E,E,1](G'_F, f_{G'_F}) + 2a + 2b = [E,E,2](G'_F, f_{G'_F}) + 2a + 2b + 2c \quad (6.2)$$

alors on aboutit à 2 équations (6.1) et (6.2) à 3 inconnues  $a, b$  et  $c$ , et on ne va pas pouvoir déterminer  $a, b$  et  $c$  d'une façon unique donc  $F$  n'est pas une facette (contradiction).

On est donc obligé d'avoir au moins une égalité entre a, b et c (c'est à dire on doit avoir  $a = b \neq c$  ou  $a \neq b = c$  ou  $a = b = c$ ).

. Si  $a = b < c$ , en prenant  $\sum_{e \in E} c_e x_e \geq 1$  une inéquation valide qui contient F, on ne pourra pas prouver que  $c_{e_1} = c_{e_2}$ , et donc F n'est pas une facette (contradiction).

. Si  $0 < a < b = c$ , grâce à (6.1) et (6.2), on peut déterminer a et b d'une façon unique :

$$a = [U,U,1](G'_F, f_{G'_F}) - [E,E,1](G'_F, f_{G'_F})$$

et

$$b = \frac{[E,E,1](G'_F, f_{G'_F}) - [E,E,2](G'_F, f_{G'_F})}{2} \quad \square$$

### Problème ouvert :

Soit  $\sum_{e \in E} f_e x_e \geq 1$  une facette de GTSP(G) et soit  $C_k = s e_1 x_2 e_2 \dots e_k p$  une chaîne

de degré 2 et de longueur k de  $G_F$ . Démontrer que  $\forall e_i \in C_k, f_{e_i} = b$  où b est une constante positive. i.e. prouver que  $a = b$  dans la propriété 1.3.

Sinon trouver un contre exemple.

## 2. Compositions des Facettes de GTSP(G) :

Le but de ce paragraphe est de trouver des nouvelles structures de facettes.

On considère les deux facettes  $F_1$  et  $F_2$  définies par les graphes  $G_{F_1}$  et  $G_{F_2}$  et on suppose que chacun de ces deux graphes contient une chaîne de degré 2 et de longueur k,  $k \geq 1$ , i.e.  $G_{F_1} = (G'_{F_1}, s, p, C_k)$  et  $G_{F_2} = (G'_{F_2}, s, p, C_k)$  avec  $G_{F_1} = (V_{F_1}, E_{F_1})$ ,  $G_{F_2} = (V_{F_2}, E_{F_2})$ ,  $G'_{F_1} = (V'_{F_1}, E'_{F_1})$ ,  $G'_{F_2} = (V'_{F_2}, E'_{F_2})$  et  $C_k = (V_{C_k}, E_{C_k})$  (figure 3.4).

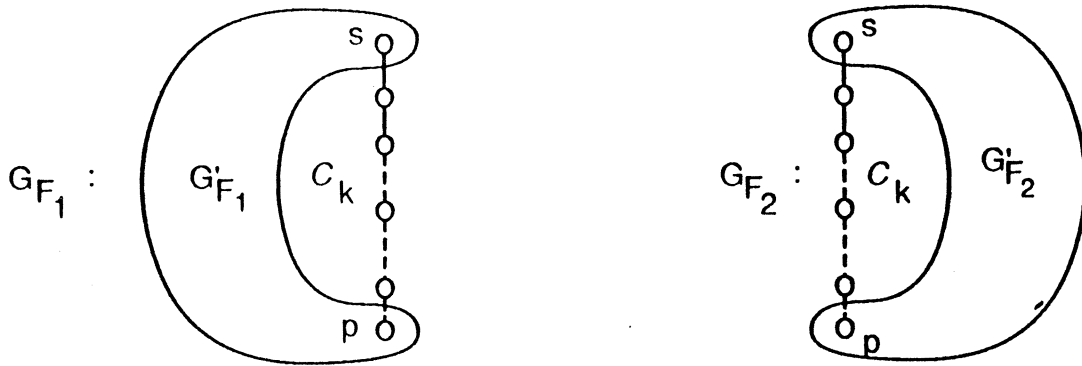


figure 3.4

$F_1$  et  $F_2$  s'écrivent de la manière suivante :

$$F_1 := ( \langle a, x \rangle_{E'_{F_1}} + c \times \sum_{e \in C_k} z_e \geq \alpha )$$

$$F_2 := ( \langle b, y \rangle_{E'_{F_2}} + d \times \sum_{e \in C_k} z_e \geq \beta )$$

où  $c, d, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ ,  $a$  et  $b$  sont des applications :  $a : E'_{F_1} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ ,  $b : E'_{F_2} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ ;  
 $x = (x_e, e \in E'_{F_1})$ ,  $y = (y_e, e \in E'_{F_2})$  et  $z = (z_e, e \in E_{C_k})$  sont les variables qui correspondent aux tournées partielles dans  $G'_{F_1}$ ,  $G'_{F_2}$  et  $C_k$  respectivement.

Dans les théorèmes qui vont suivre, on conserve les notations définies ci-dessus :

### THEOREME 2.1

Si les 6 égalités suivantes sont vérifiées :

$$[E, E, 1] (G'_{F_1}, a) + 2(k-1)c = \alpha, \quad (7.1)$$

$$[E, E, 2] (G'_{F_1}, a) + 2kc = \alpha, \quad (7.2)$$

$$[U, U, 1] (G'_{F_1}, a) + kc = \alpha, \quad (7.3)$$

$$[E, E, 1] (G'_{F_2}, b) + 2(k-1)d = \beta, \quad (7.4)$$

$$[E, E, 2] (G'_{F_2}, b) + 2kd = \beta \quad (7.5)$$

$$\text{et } [U, U, 1] (G'_{F_2}, b) + kd = \beta \quad (7.6)$$

alors l'inéquation  $F_{12}$  :

$$F_{12} := (d \times \langle a, x \rangle_{E'_{F_1}} + c \times \langle b, y \rangle_{E'_{F_2}} + c \times d \times \sum_{e \in C_k} z_e \geq d\alpha + c\beta - 2kcd)$$

sera une facette de  $GTSP(G)$  définie par le graphe  $G_{F_{12}}$  de la figure 3.5.

$$G_{F_{12}} = (G_{F_1}, s, p, G'_{F_2}) = (G'_{F_1}, s, p, G_{F_2}) = (V_{F_{12}}, E_{F_{12}}).$$

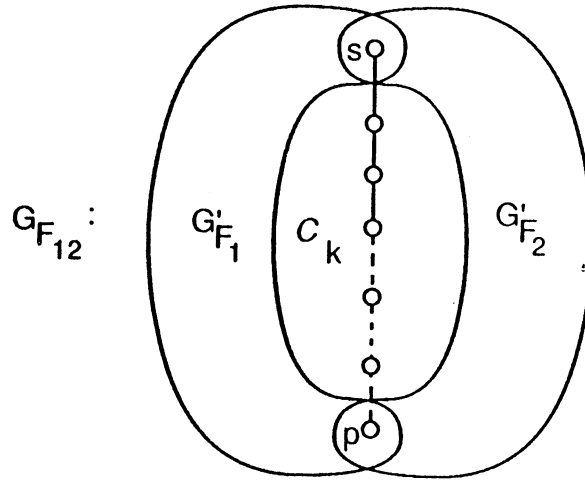


figure 3.5

Démonstration :

On note par  $(cb)$  et  $(da)$ , les deux applications suivantes :

$$\begin{array}{ll} (cb) : E'_{F_2} \mapsto \mathbb{R}_+^* & (da) : E'_{F_1} \mapsto \mathbb{R}_+^* \\ e \mapsto (cb)(e) = c \times b(e) & e \mapsto (da)(e) = d \times a(e). \end{array}$$

On affecte aux arêtes de  $G_{F_{12}}$  les poids  $f(e)$  définis à partir de la fonction  $f$ ,  
 $f : E_{F_{12}} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ ,

$$f(e) = \begin{cases} (cb)(e) & \text{si } e \in E'_{F_2} \\ (da)(e) & \text{si } e \in E'_{F_1} \\ c \times d & \text{si } e \in C_k \end{cases}$$

et donc on peut écrire  $F_{12}$  sous la forme :



$$F_{12} := \left( \sum_{e \in E_{F_{12}}} f(e) \text{ te } \geq A \right)$$

où  $t_e$  sont les variables qui correspondent aux arêtes de  $G_{F_{12}}$  et  $A = d\alpha + c\beta - 2kcd$ .

Dans la suite, on note par  $f'$  et  $f''$  les restrictions de  $f$  sur  $E_{F_1}$  et  $E_{F_2}$  respectivement.

1.  $F_{12}$  est une face :

On a (d'après (7.1), (7.2) et (7.3)) :

$$\begin{aligned} [E,E,1](G_{F_1}, f') &= [U,U,1](G'_{F_1}, da) + kcd \\ &= [E,E,1](G'_{F_1}, da) + 2(k-1)cd \\ &= [E,E,2](G'_{F_1}, da) + 2kcd \end{aligned} \quad (8.1)$$

et d'après (7.4), (7.5) et (6.6) :

$$\begin{aligned} [E,E,1](G_{F_2}, f'') &= [U,U,1](G'_{F_2}, cb) + kcd \\ &= [E,E,1](G'_{F_2}, cb) + 2(k-1)cd \\ &= [E,E,2](G'_{F_2}, cb) + 2kcd \end{aligned} \quad (8.2)$$

((8.1) et (8.2))  $\Rightarrow$

$$([E,E,1](G_{F_1}, f') + [E,E,2](G'_{F_2}, cb) = [E,E,1](G_{F_2}, f'') + [E,E,2](G'_{F_1}, da) = B) \quad (9)$$

On vérifie facilement que  $B = A = (d\alpha + c\beta - 2kcd)$  et donc pour démontrer la validité de  $F_{12}$ , il suffit de prouver que  $B$  est égal au coût de la tournée minimum dans  $(G_{F_{12}}, f)$  qu'on note par  $f(T_{\min})$  :

$$\begin{aligned} \text{On sait que : } f(T_{\min}) = \text{Min } \{ & [E,E,1](G_{F_1}, f') + [E,E,2](G'_{F_2}, cb), \\ & [E,E,2](G_{F_1}, f') + [E,E,1](G'_{F_2}, cb), \\ & [E,E,1](G_{F_1}, f') + [E,E,1](G'_{F_2}, cb), \\ & [U,U,1](G_{F_1}, f') + [U,U,1](G'_{F_2}, cb) \} \end{aligned}$$

$$\bullet \quad [E,E,1](G_{F_1}, f') + [E,E,2](G'_{F_2}, cb) = B \quad \text{d'après (9)}$$

- $[E,E,2](G_{F_1},f) + [E,E,1](G'_{F_2},cb)$   
 $= [E,E,2](G'_{F_1},da) + [E,E,1](G'_{F_2},cb) + 2(k-1)cd$  (voir [9])  
 $= [E,E,2](G'_{F_1},da) + [E,E,1](G_{F_2},f'') = B$  d'après (7.4) et (9)
- $[E,E,1](G_{F_1},f) + [E,E,1](G'_{F_2},cb)$   
 $\geq [E,E,1](G_{F_1},f) + [E,E,2](G'_{F_2},cb) = B$  d'après (7.4), (7.5) et (9)
- $[U,U,1](G_{F_1},f) + [U,U,1](G'_{F_2},cb) \geq B$  car

$$[U,U,1](G_{F_1},f) = \text{Min} \{ [E,E,2](G'_{F_1},da) + kcd, \\ [U,U,1](G'_{F_1},da) + 2(k-1)cd \}$$

si  $[U,U,1](G_{F_1},f) = [E,E,2](G'_{F_1},da) + kcd$  alors

$$[U,U,1](G_{F_1},f) + [U,U,1](G'_{F_2},cb)$$

$$= [E,E,2](G'_{F_1},da) + [U,U,1](G'_{F_2},cb) + kcd$$

$$= [E,E,2](G'_{F_1},da) + [E,E,1](G_{F_2},f'') = B$$
 d'après (7.6) et (9)

si  $[U,U,1](G_{F_1},f) = [U,U,1](G'_{F_1},da) + 2(k-1)cd$  alors

$$[U,U,1](G_{F_1},f) + [U,U,1](G'_{F_2},cb)$$

$$= [U,U,1](G'_{F_1},da) + [U,U,1](G'_{F_2},cb) + 2(k-1)cd$$

$$= d\alpha + c\beta - 2cd$$
 d'après (7.3) et (7.6)
$$\geq d\alpha + c\beta - 2kcd = B$$

Donc  $F_{12}$  est une inéquation valide pour GTSP(G).

2.  $F_{12}$  est une facette :

Supposons qu'il existe une face  $\sum_{e \in E'_{F_{12}}} g(e) t_e \geq A$  qui contient  $F_{12}$ ,

puisque

$(A = [E,E,1](G_{F_1},f) + [E,E,2](G'_{F_2},cb))$  et ( $F_1$  est une facette) on conclut que :

$$g(e) = \begin{cases} m \times a(e) & e \in E'_{F_1} \\ m \times c & e \in E_{C_k} \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}_+^*$$

et puisque  $(A = [E,E,1](G_{F_2},f'') + [E,E,2](G'_{F_1},da))$  et ( $F_2$  est une facette) on conclut que:

$$g(e) = \begin{cases} n \times b(e) \\ n \times d \end{cases} \quad \begin{matrix} e \in E'_{F_2} \\ e \in E_{C_k} \end{matrix} \quad n \in \mathbb{R}^*_+$$

Donc si  $e \in E_{C_k}$  on a :  $(g(e) = nd = mc) \Rightarrow (m = kd \text{ et } n = kc \text{ où } k \in \mathbb{R}^*_+)$   
 $\Rightarrow (f(e) = g(e), \forall e \in E_{F_{12}})$   
 $\Rightarrow (F_{12} \text{ est une facette de } GTSP(G)).$  □

## THEOREME 2.2

si  $k \geq 2$  et si on a les six conditions suivantes:

$$[E,E,1](G'_{F_1,a}) + 2(k-1)c = \alpha, \quad (10.1)$$

$$[U,U,1](G'_{F_1,a}) + kc = \alpha, \quad (10.2)$$

$$[E,E,2](G'_{F_1,a}) > [E,E,1](G'_{F_1,a}), \quad (10.3)$$

$$[E,E,1](G'_{F_2,b}) + 2(k-1)d = \beta, \quad (10.4)$$

$$[U,U,1](G'_{F_2,b}) + kd = \beta, \quad (10.5)$$

$$[E,E,2](G'_{F_2,b}) > [E,E,1](G'_{F_2,a}) \quad (10.6)$$

l'inéquation  $F_{12}$  qui s'écrit sous la forme :

$$F_{12} := (d \times \langle a, x \rangle_{E'_{F_1}} + c \times \langle b, y \rangle_{E'_{F_2}} + c \times d \times \sum_{e \in C_k} z_e) \geq d\alpha + c\beta - 2(k-1)cd$$

sera une facette définie par  $G_{F_{12}}$  (figure 3.5),

$$G_{F_{12}} = (G_{F_1,s,p}, G'_{F_2}) = (G'_{F_1,s,p}, G_{F_2}) = (V_{F_{12}}, E_{F_{12}}).$$

Démonstration :

On note (comme dans la démonstration du théorème 2.1) par (cb) et (da), les deux applications suivantes :

$$(cb) : \begin{matrix} E'_{F_2} \mapsto \mathbb{R}^*_+ \\ e \mapsto (cb)(e) = c \times b(e) \end{matrix}$$

$$(da) : \begin{matrix} E'_{F_1} \mapsto \mathbb{R}^*_+ \\ e \mapsto (da)(e) = d \times a(e). \end{matrix}$$

On affecte aux arêtes de  $G_{F_{12}}$  les poids  $f(e)$  définis à partir de la fonction  $f$ ,  
 $f : E_{F_{12}} \mapsto \mathbb{R}_+^*$ ,

$$f(e) = \begin{cases} (cb)(e) & \text{si } e \in E'_{F_2} \\ (da)(e) & \text{si } e \in E'_{F_1} \\ c \times d & \text{si } e \in C_k \end{cases}$$

et donc on peut écrire  $F_{12}$  sous la forme :

$$F_{12} := \left( \sum_{e \in E_{F_{12}}} f(e) t_e \geq A \right)$$

où  $t_e$  sont les variables qui correspondent aux arêtes de  $G_{F_{12}}$  et  $A = d\alpha + c\beta - 2(k-1)cd$ .

Dans la suite, on note par  $f'$  et  $f''$  les restrictions de  $f$  sur  $E_{F_1}$  et  $E_{F_2}$  respectivement.

1.  $F_{12}$  est une face :

On a (d'après (10.1) et (10.2)) :

$$\begin{aligned} d\alpha &= [E, E, 1](G_{F_1}, f') = [U, U, 1](G'_{F_1}, da) + kcd \\ &= [E, E, 1](G'_{F_1}, da) + 2(k-1)cd \end{aligned} \quad (11.1)$$

et d'après (10.4) et (10.5) :

$$\begin{aligned} c\beta &= [E, E, 1](G_{F_2}, f'') = [U, U, 1](G'_{F_2}, cb) + kcd \\ &= [E, E, 1](G'_{F_2}, cb) + 2(k-1)cd \end{aligned} \quad (11.2)$$

((11.1) et (11.2))  $\Rightarrow$

$$([E, E, 1](G_{F_1}, f') + [E, E, 1](G'_{F_2}, cb) = [E, E, 1](G_{F_2}, f'') + [E, E, 1](G'_{F_1}, da) = B) \quad (12)$$

$$\text{où } B = A = (d\alpha + c\beta - 2(k-1)cd)$$

Donc pour démontrer que  $F_{12}$  est valide, il suffit de prouver que  $B$  est égal au coût de la tournée minimum dans  $(G_{F_{12}}, f)$  qu'on note par  $f(T_{\min})$  :

$$f(T_{\min}) = \text{Min} \{ [E,E,1](G_{F_1},f) + [E,E,1](G'_{F_2},cb), \\ [U,U,1](G_{F_1},f) + [U,U,1](G'_{F_2},cb), \\ [E,E,1](G_{F_1},f) + [E,E,2](G'_{F_2},cb), \\ [E,E,2](G_{F_1},f) + [E,E,1](G'_{F_2},cb) \}$$

- $[E,E,1](G_{F_1},f) + [E,E,1](G'_{F_2},cb) = B$  d'après (12)
- $[U,U,1](G_{F_1},f) + [U,U,1](G'_{F_2},cb) \geq B$  car
 
$$[U,U,1](G_{F_1},f) = \text{Min} \{ [E,E,2](G'_{F_1},da) + kcd, \\ [U,U,1](G'_{F_1},da) + 2(k-1)cd \}$$
- si  $[U,U,1](G_{F_1},f) = [E,E,2](G'_{F_1},da) + kcd$  alors
 
$$[U,U,1](G_{F_1},f) + [U,U,1](G'_{F_2},cb) \\ = [E,E,2](G'_{F_1},da) + [U,U,1](G'_{F_2},cb) + kcd \\ = [E,E,2](G'_{F_1},da) + [E,E,1](G'_{F_2},f'') \quad \text{d'après (11.2)} \\ \geq [E,E,1](G'_{F_1},da) + [E,E,1](G'_{F_2},f'') = B \quad \text{d'après (10.3) et (12)}$$
- si  $[U,U,1](G_{F_1},f) = [U,U,1](G'_{F_1},da) + 2(k-1)cd$  alors
 
$$[U,U,1](G_{F_1},f) + [U,U,1](G'_{F_2},cb) \\ = [U,U,1](G'_{F_1},da) + [U,U,1](G'_{F_2},cb) + 2(k-1)cd \\ = d\alpha + c\beta - 2cd \quad \text{d'après (11.1) et (11.2)} \\ \geq d\alpha + c\beta - 2(k-1)cd = B \quad \text{car } k \geq 2.$$
- $[E,E,1](G_{F_1},f) + [E,E,2](G'_{F_2},cb) \\ \geq [E,E,1](G_{F_1},f) + [E,E,1](G'_{F_2},cb) = B$  d'après (10.6) et (12)
- $[E,E,2](G_{F_1},f) + [E,E,1](G'_{F_2},cb) \\ = [E,E,2](G'_{F_1},da) + [E,E,1](G'_{F_2},cb) + 2(k-1)cd \quad \text{(voir [9])} \\ = [E,E,2](G'_{F_1},da) + [E,E,1](G'_{F_2},f'') = B \quad \text{d'après (11.2) et (12)}$

Donc  $F_{12}$  est une inéquation valide pour GTSP(G).

2.  $F_{12}$  est une facette :

Supposons qu'il existe une face  $\sum_{e \in E'_{F_{12}}} g(e) t_e \geq A$  qui contient  $F_{12}$ ,

puisque

$(A = [E, E, 1](G_{F_1}, f) + [E, E, 1](G'_{F_2}, cb))$  et ( $F_1$  est une facette) on conclut que :

$$g(e) = \begin{cases} m \times a(e) & e \in E'_{F_1} \\ m \times c & e \in E_{C_k} \end{cases} \quad m \in \mathbb{R}_+^*$$

et puisque  $(A = [E, E, 1](G_{F_2}, f') + [E, E, 1](G'_{F_1}, da))$  et ( $F_2$  est une facette) on conclut que:

$$g(e) = \begin{cases} n \times b(e) & e \in E'_{F_2} \\ n \times d & e \in E_{C_k} \end{cases} \quad n \in \mathbb{R}_+^*$$

Donc si  $e \in E_{C_k}$  on a :  $(g(e) = n d = m c) \Rightarrow (m = k d \text{ et } n = k c \text{ où } k \in \mathbb{R}_+^*)$   
 $\Rightarrow (f(e) = g(e), \forall e \in E_{F_{12}})$   
 $\Rightarrow (F_{12} \text{ est une facette de } GTSP(G)).$

□

### Remarque 2.1\*\*\* :

Dans toutes les facettes connues jusqu'à présent, si on prend n'importe quelle chaîne de degré 2 et de longueur  $k$ , ( $C_k, k \geq 1$ ), d'un graphe qui définit une facette (figure 3.4), on trouve que les conditions (7.1), ..., (7.6) du théorème 2.1 ou bien les conditions (10.1), ..., (10.6) du théorème 2.2 sont toujours vérifiées ; ceci donne un grand intérêt aux deux théorèmes précédents qui vont nous permettre de construire des nouvelles facettes de  $GTSP(G)$ .

Par exemple, dans une facette  $F$  associée au squelette d'une bicyclette ou d'une brouette [1,3],  $\forall \{s,p\} \subset \{1,2,\dots,n\}$  avec  $s \neq p$  (figure 3.6-a et b), si on note par  $C_k, k \geq 1$ , la chaîne de degré 2, de longueur  $k$  et d'extrémités  $s$  et  $p$ , il est facile de vérifier que les 6 conditions du théorème 2.1 sont satisfaites.

Et si on considère le cas où  $F$  est associée au squelette d'une configuration de  $k$ -chaînes [1],  $\forall \{s,p\} \subset \{0,1,\dots,n+1\}$ , si  $\{s,p\} \neq \{0,n+1\}$  (figure 3.6-c) on vérifie facilement que les conditions du théorème 2.1 sont satisfaites, mais si  $\{s,p\} = \{0,n+1\}$  ce sont les conditions du théorème 2.2 qui sont satisfaites.

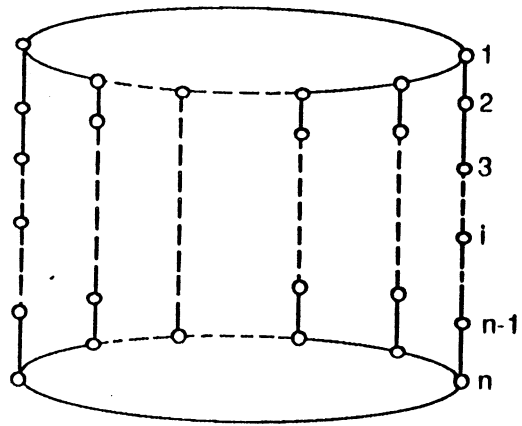


figure 3.6-a

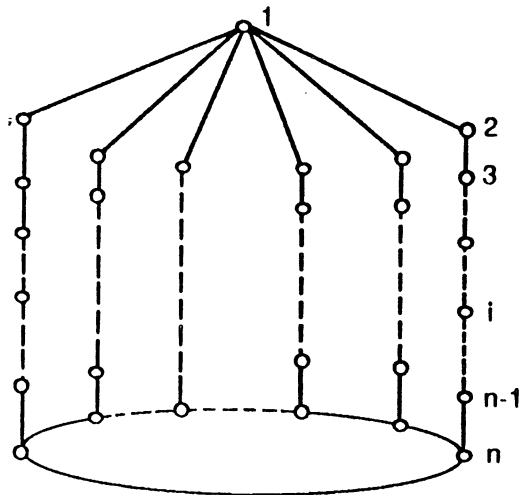


figure 3.6-b

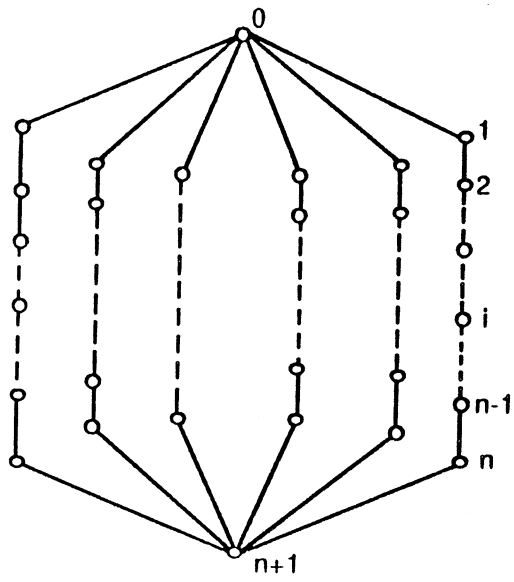


figure 3.6-c

Applications :

Considérons les graphes  $G_{F_1}$ ,  $G_{F_2}$  et  $G_{F_3}$  (figure 3.7) qui définissent les facettes  $F_1$ ,  $F_2$  et  $F_3$  [1],

$$F_1 := \left( \sum_{e \in E_{F_1}} f_e^1 x_e \geq 10 \right), F_2 := \left( \sum_{e \in E_{F_2}} f_e^2 x_e \geq 18 \right) \text{ et } F_3 := \left( \sum_{e \in E_{F_3}} f_e^3 x_e \geq 7 \frac{2}{3} \right)$$

les  $f_e^i$  sont reportés sur les arêtes dans la figure 3.7.

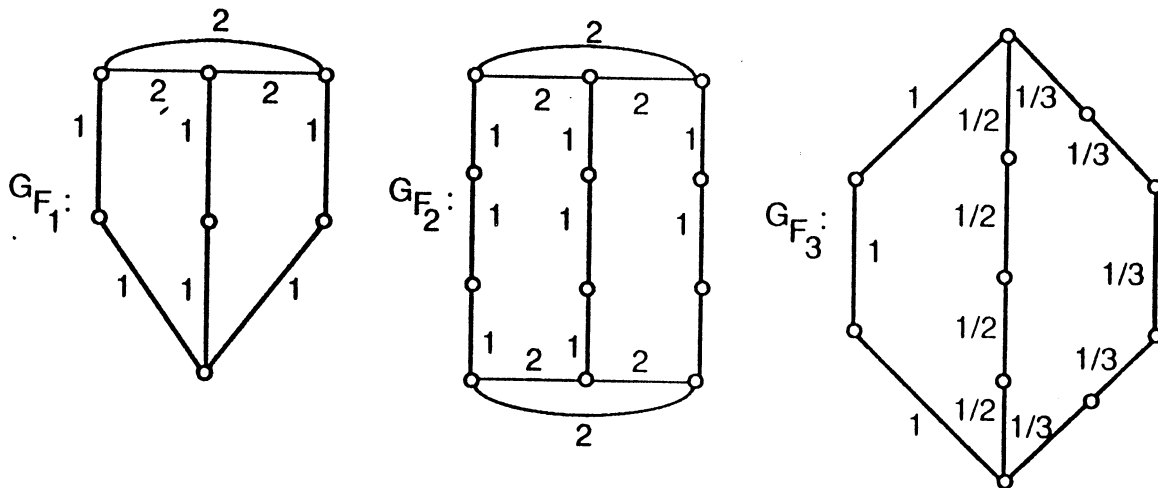


figure 3.7

En appliquant le théorème 2.1, 3 fois successivement, on peut conclure que les graphes  $G_{F_{11}}$ ,  $G_{F_{112}}$ , et  $G_{F_{1123}}$  définissent les facettes  $F_{11}$ ,  $F_{112}$  et  $F_{1123}$  respectivement (figure 3.8), où :

$$F_{11} := \left( \sum_{e \in E_{F_{11}}} f_e^{11} x_e \geq 16 \right),$$

$$F_{112} := \left( \sum_{e \in E_{F_{112}}} f_e^{112} x_e \geq 32 \right)$$

$$\text{et } F_{1123} := \left( \sum_{e \in E_{F_{1123}}} f_e^{1123} x_e \geq 41 \frac{1}{3} \right)$$



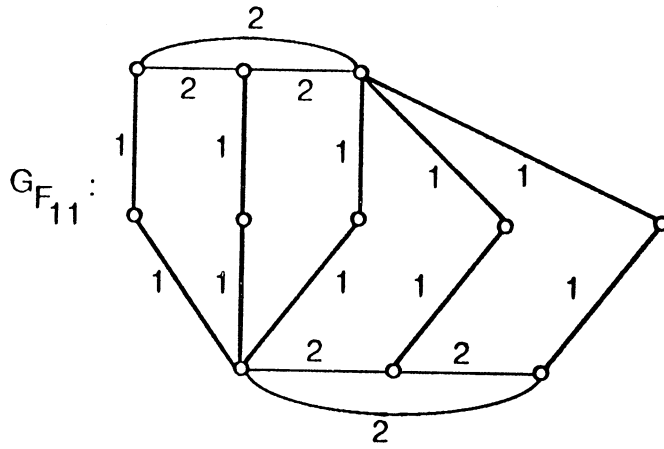


figure 3.8-a

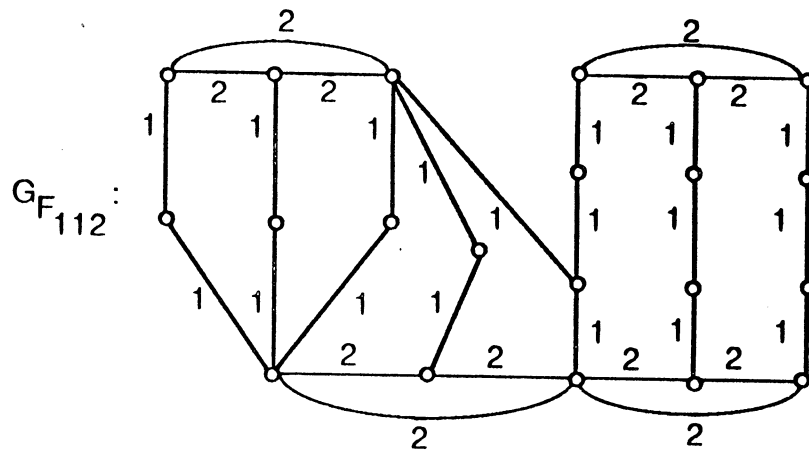


figure 3.8-b

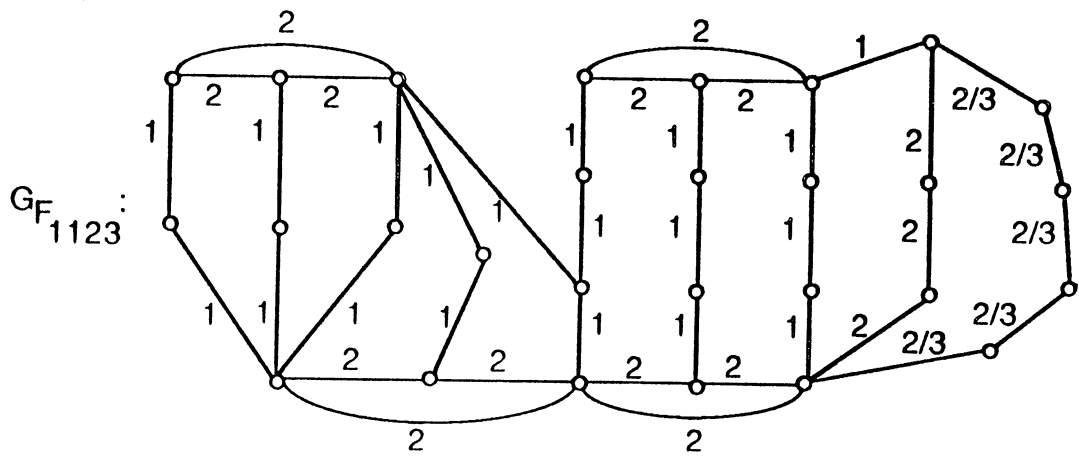


figure 3.8-c

en appliquant le théorème 2.2 sur  $F_{11233}$  et  $F_3$  et en prenant  $k=5$  on trouve que  $G_{F_{11233}}$  (figure 3.9) définit la facette  $F_{11233}$  :

$$F_{11233} := \left( \sum_{e \in E_{F_{11233}}} f_e^{11233} x_e \geq 51 \frac{1}{3} \right).$$

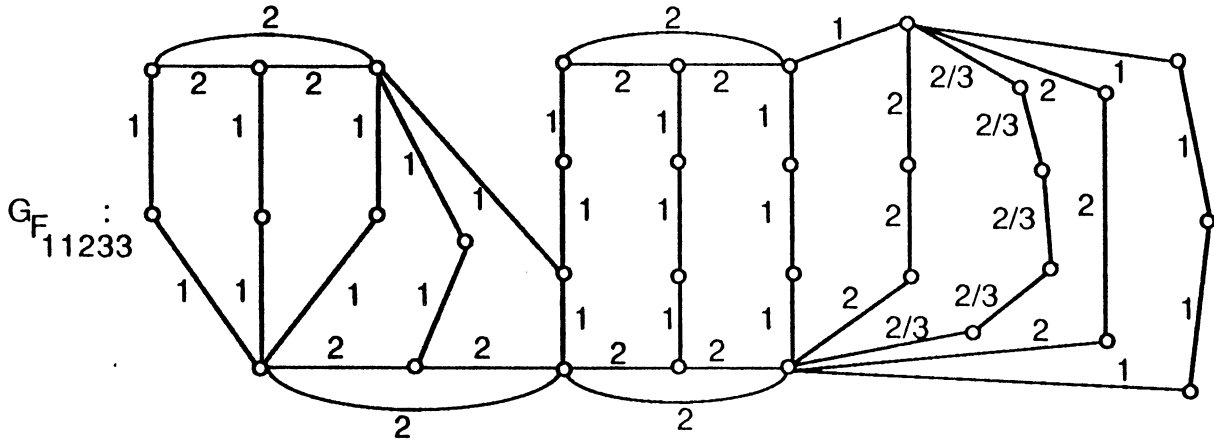


figure 3.9

Remarque 2.2 :

Les théorèmes 2.1 et 2.2 nous donnent les squelettes principaux des facettes; on peut généraliser les facettes ainsi obtenues, pour avoir des facettes sur les graphes complets. Par exemple, en partant de la facette  $(\sum_{e \in E_{F_1}} x_e \geq 16)$  définie par le graphe  $G_{F_1}$

( figure 3.10-a), on peut trouver que :  $(\sum_{e \in E_{F_1}} x_e + 2t \geq 16)$  est une facette définie par  $\overline{G}_{F_1}$

(figure 3.10-b) ( $t$  est la variable correspondant à l'arête  $(a,b)$ ).

D'une manière générale, si  $F := (\sum_{e \in E} f(e) x_e \geq a)$  est une facette définie sur un

graphe  $G = (V, E)$ , on peut lui associer une facette  $F' := (\sum_{e \in E} f(e) x_e + f(e') x_{e'} \geq a)$  définie

sur  $G' = (V, E \cup \{e'\})$  avec :

$$f(e') = \text{Max} \left\{ a - [U, U, 1](G, f), \frac{a - [E, E, 2](G, f)}{2} \right\}.$$

(On précise que dans le cas général le calcul de  $f(e')$  se fait en un temps exponentiel).

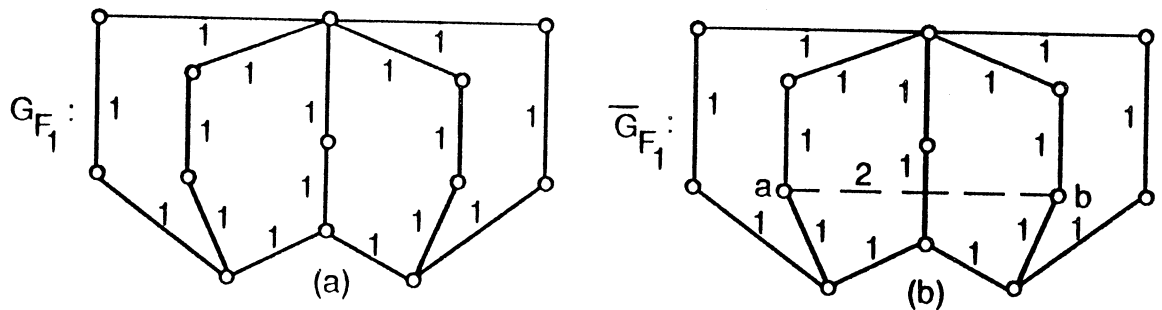


figure 3.10

Remarque 2.3 :

Etant donné un graphe quelconque  $G = (V, E)$ , pour obtenir une facette  $F$  de  $M$  GTSP( $G$ ), il faut trouver une partition de  $V$ , ( $V = \bigcup_{i=1} V_{B_i}$ ,  $V_{B_i} \cap V_{B_j} = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ) telle que les graphes  $B_i = (V_{B_i}, E_{B_i})$  soient connexes et telle que si on contracte les sommets appartenant à un même ensemble  $V_{B_i}$ , on obtiendra un graphe  $G_f$  qui définit une facette  $f$ , voir [1] pour plus d'explication.

### 3. Quelques Facettes et Techniques pour les trouver

On va donner dans ce paragraphe des structures de facettes qu'on ne peut pas retrouver à partir des théorèmes de compositions du paragraphe 2, on montre ainsi la complexité de quelques facettes définissant GTSP( $G$ ) et la difficulté de la caractérisation complète de ce polyèdres (dans le cas général).

### 3.1 - La multi-2-chaîne :

$\forall V_i, V_j \subset V$  on note par  $(V_i, V_j)$  l'ensemble des arêtes de  $G$  qui ont une extrémité dans  $V_i$  et une autre dans  $V_j$ ; et par  $G_{V_i}$ , le sous graphe de  $G$  défini par l'ensemble des sommets  $V_i$ .

On considère la configuration de la multi-2 chaîne qui est définie par la figure 3.11 et qui est telle que :

- (i) \*  $n_j \geq 2$  et entier  $\forall j=1, \dots, 2l$
- (ii) \*  $\{(A_i, i=1, \dots, l+2), (C_i, i=1, \dots, l), (B_j^i, j=1, \dots, 2l, i=1, \dots, n_j)\}$  forment une partition de  $V$ .
- (iii) \* Les sous graphes  $(G_{A_i}, i=1, \dots, l+2)$ ,  $(G_{C_i}, i=1, \dots, l)$  et  $(G_{B_j^i}, j=1, \dots, 2l, i=1, \dots, n_j)$  sont connexes et non vides. ( $l$  peut être pair ou impair).
- (iv) \*  $(|B_j^i, B_{j+1}^i| \geq 1, j=1, \dots, 2l, i=1, \dots, n_j)$ ,  $(|A_i, A_{i+1}| \geq 1, i=1, \dots, l+1)$ ,  $(|C_i, C_{i+1}| \geq 1, i=1, \dots, l-1)$ ,  $|A_1, C_1| \geq 1$ ,  $|A_{l+2}, C_l| \geq 1$ ,  $(|A_i, B_1^j| \geq 1, i=1, \dots, l-1; j=2i-1, 2i)$  et  $(|A_{i+2}, B_{n_j}^j| \geq 1, i=3, \dots, l+2; j=2i-1, 2i)$ .

L'inéquation de la multi-2-chaîne, définie par la configuration de la figure 3.11 est :

$$\sum_{e \in E} f_e x_e \geq a \text{ avec :}$$

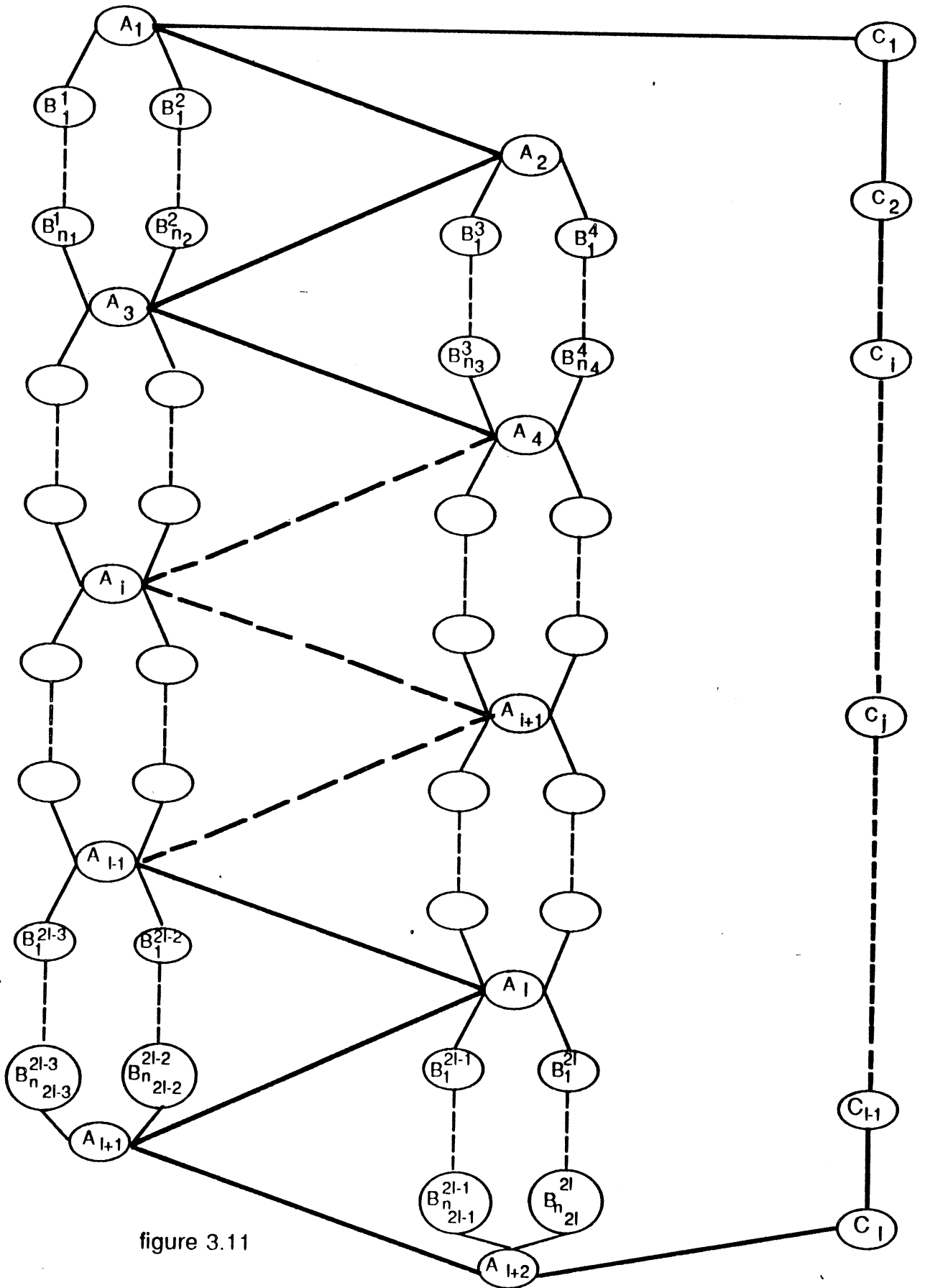


figure 3.11

$$f_e = \begin{cases} 1 & \text{si} & \left\{ \begin{array}{l} e \in (A_i, A_{i+1}), i=1, \dots, l+1 \\ e \in (C_i, C_{i+1}), i=1, \dots, l-1 \\ e \in (A_1, C_1) \\ e \in (A_{l+2}, C_l) \end{array} \right. \\ \frac{2}{n_j - 1} & \text{si} & \left\{ \begin{array}{l} e \in (B_i^j, B_{i+1}^j), j=1, \dots, 2l; i=1, \dots, n_j - 1 \\ e \in (A_i, B_i^j), i=1, \dots, l, j=2i-1, 2i \\ e \in (A_{i+2}, B_{n_j}^j), i=1, \dots, l, j=2i-1, 2i \end{array} \right. \\ 0 & \text{si} & \left\{ e \in (B_i^j, B_i^j), (A_i, A_i) \text{ ou } (C_i, C_i) \forall i, j \right. \end{cases}$$

et

$$a = 2 \left( l+1 + \sum_{i=1}^{2l} \frac{n_i + 1}{n_i - 1} \right)$$

### Remarque 3.1

On suppose ici que  $G$  n'a pas d'autres arêtes que celles citées dans (iv) et les  $(B_i^j, B_i^j)$ ,  $(A_i, A_i)$  et  $(C_i, C_i)$ , on peut généraliser cette inéquation en considérant le graphe complet et en donnant un coefficient  $f_e$  pour chaque arête  $e \in (V_i, V_j) \forall V_i, V_j \subset V [1]$ .

### **THEOREME 3.1**

L'inéquation de la multi-2-chaîne est une facette de  $GTSP(G)$ .

Démonstration :

Pour simplifier, on va faire la démonstration sur l'inéquation la plus simple de cette classe, définie par le graphe de la figure 3.12, l'extension de cette démonstration sera évidente.

Soit  $\sum_{e \in E} f_e x_e \geq a$ , l'inéquation définie par le graphe  $G = (V, E)$  (figure 3.12), avec :

$$f_e = \begin{cases} 1 & \text{si l'arête est en trait gras} \\ 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

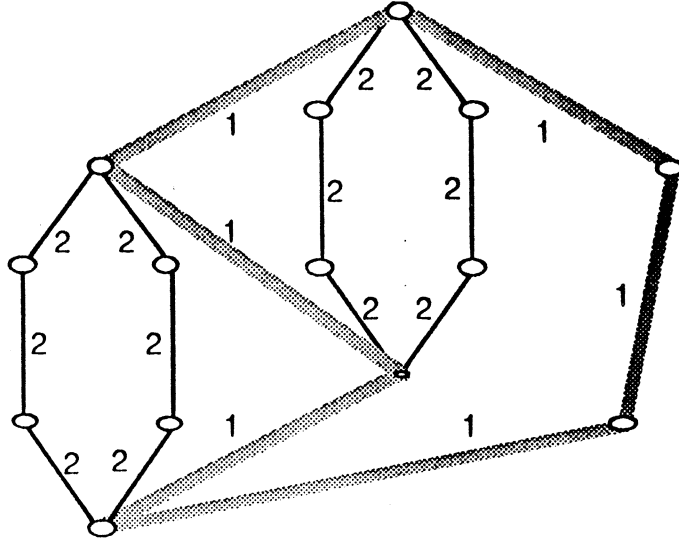


figure 3.12

On démonte facilement que la valeur de la tournée minimale dans ce graphe est égale à 30 et donc cette inéquation est valide pour GTSP(G).

Pour démontrer qu'elle forme une facette de GTSP(G), on va supposer qu'il existe une inéquation valide pour GTSP(G) qui la contient et qui s'écrit comme :  $\sum_{e \in E} c_e x_e \geq 30$ ,

et on va prouver que  $c_e = f_e \forall e$ .

En effet, les tournées des figures 3.13 et 3.14 vérifient l'inéquation  $\sum_{e \in E} c_e x_e \geq 30$

avec égalité :

les tournées de la figure 3.13 entraînent que  $c_e = a \forall e$  en trait gras, et celles de la figure 3.14 entraînent que  $c_e = b \forall e$  en trait standard.

Ce qui donne :

$$\begin{array}{l} 6a+12b = 30 \text{ (fig. 3.13)} \\ 4a+13b = 30 \text{ (fig. 3.14)} \end{array} \quad \parallel \Rightarrow \quad b=2a \text{ et } c_e = f_e \forall e \in E. \quad \square$$

figure 3.13

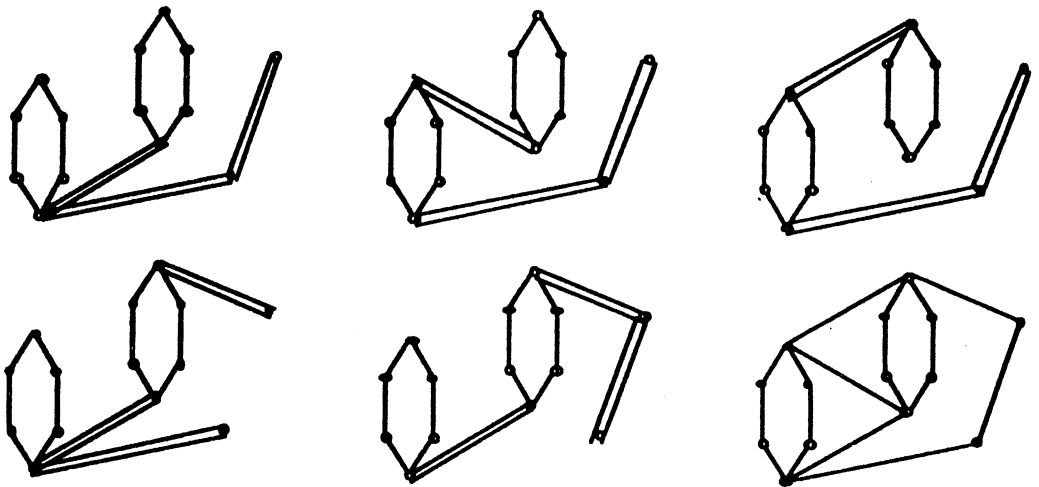
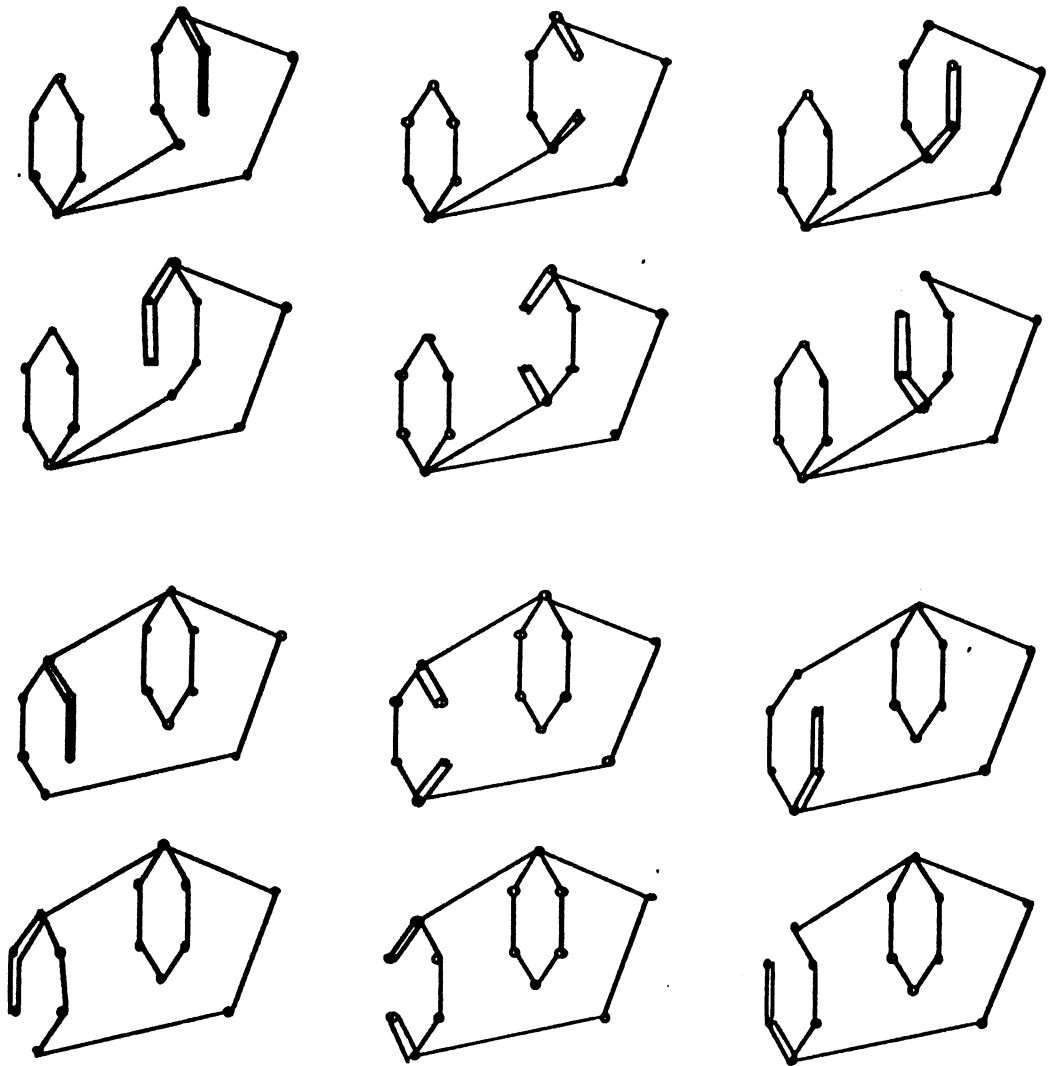


figure 3.14





### Remarque 3.2

On peut appliquer les théorèmes de compositions du paragraphe précédent sur cette nouvelle classe de facettes, par exemple, on peut remplacer, d'après le théorème 2.2, les deux chaînes de degré 2 ( $C_{(n_{2i+1}+1)}, C_{(n_{2i}+1)}$ ), qui sont entre  $A_i$  et  $A_{i+2}$  par  $2p_i$  chaînes de degré 2,  $p_i \in \mathbb{N}^*$ , et ceci  $\forall i=1, \dots, l$ .

### 3.2 - Techniques pour trouver des nouvelles facettes

#### **Définition 3.1**

Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  et une fonction coût  $a$ , définie sur les arêtes, ( $a: E \mapsto \mathbb{R}_+$ ). On note par  $T_a(G, s, p)$ , le vecteur formé des trois composantes :  $[E, E, 1](G, a)$ ,  $[E, E, 2](G, a)$  et  $[U, U, 1](G, a)$  calculées par rapport aux deux sommets  $s$  et  $p$  de  $G$  :

$$T_a(G, s, p) = \begin{pmatrix} [E, E, 1](G, a) \\ [E, E, 2](G, a) \\ [U, U, 1](G, a) \end{pmatrix}$$

Ce vecteur sera appelé : vecteur tension de  $(G, s, p)$ .

#### **Définition 3.2**

On considère le graphe  $(G, s, p)$  et la fonction coût  $a : E \mapsto \mathbb{R}_+$  et on appelle  $A$ ,  $B$  et  $C$  les 3 matrices dont les lignes correspondent aux tournées partielles minimum de type  $(E, E, 1)(G)$ ,  $(E, E, 2)(G)$  et  $(U, U, 1)(G)$  respectivement. On dit que  $a$  est définie d'une manière unique sur  $(G, s, p)$ , si l'une des matrices  $A$ ,  $B$  ou  $C$  est de rang égal à  $|E|$  ( $|E|$  est le nombre d'arêtes de  $G$ ).

**Définition 3.3**

Etant donnés les deux graphes  $G_1 = (V_1, E_1)$ ,  $G_2 = (V_2, E_2)$  et les deux fonctions coûts  $a_1$  et  $a_2$  définies d'une manière unique sur  $(G_1, s_1, p_1)$  et  $(G_2, s_2, p_2)$  respectivement,  $a_1 : E_1 \mapsto \mathbb{R}_+$ ,  $a_2 : E_2 \mapsto \mathbb{R}_+$ .

On dit que  $(G_1, s_1, p_1)$  et  $(G_2, s_2, p_2)$  sont équivalents si et seulement si :

$$T_{a_1}(G_1, s_1, p_1) = T_{a_2}(G_2, s_2, p_2) + M \times \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ où } M \in \mathbb{R}.$$

**THEOREME 3.2**

On considère l'inéquation :  $\langle a, x \rangle_{E_1} + \langle b, y \rangle_{E_2} \geq \alpha$  qui forme une facette définie par le graphe  $(G_1, s, p, G_2)$ , ( $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$ ). Et on suppose que  $b$  est définie d'une façon unique sur  $(G_2, s, p)$  et que :

$$\begin{aligned} [E, E, 1](G_1, a) + [E, E, 2](G_2, b) &= \alpha, \\ [E, E, 2](G_1, a) + [E, E, 1](G_2, b) &= \alpha, \\ \text{et } [U, U, 1](G_1, a) + [U, U, 1](G_2, b) &= \alpha \end{aligned}$$

S'il existe une fonction  $c$  définie d'une façon unique sur un graphe quelconque  $(G_3, s_3, p_3)$  ( $G_3 = (V_3, E_3)$ ) et si  $G_2$  et  $G_3$  sont équivalents i.e.

$$(T_b(G_2, s, p) = T_c(G_3, s_3, p_3) + M \times \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, M \in \mathbb{R}),$$

alors l'inéquation :  $\langle a, x \rangle_{E_1} + \langle c, z \rangle_{E_3} \geq \alpha - M$ , sera une facette définie par  $(G_1, s, p, G_3) = (G_1, s_3, p_3, G_3)$ .

Démonstration :

Aisée mais longue.



D'après le théorème précédent, il nous reste à trouver, d'une façon judicieuse, des graphes équivalents pour obtenir de nouvelles facettes. Pour éclaircir les idées on va donner l'exemple suivant :

### Exemple 3.1

On considère les deux graphes de la figure 3.15 munis d'un coût égal à 1 sur toutes les arêtes.

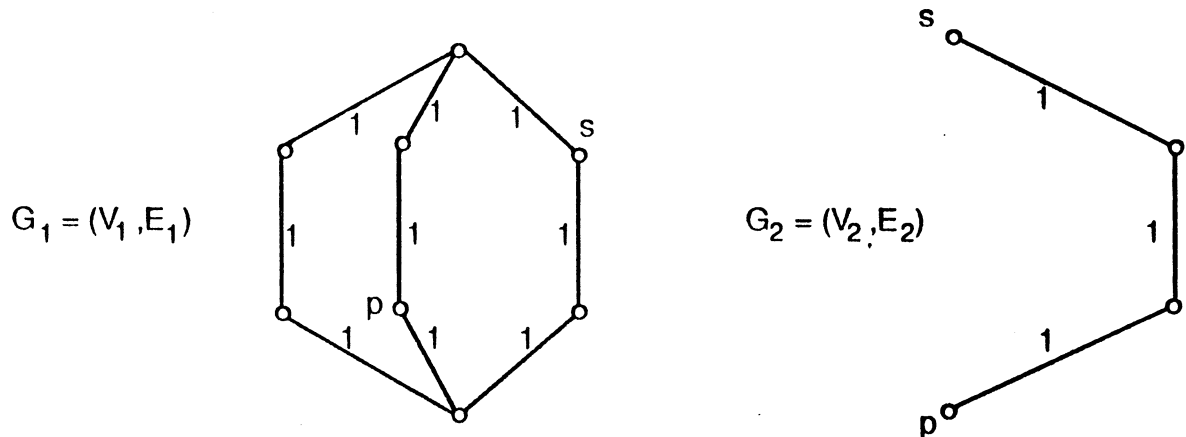


figure 3.15

On note par  $a_1$  et  $a_2$  les fonctions coûts définies sur  $E_1$  et  $E_2$  ( $a_i(e) = 1 \forall e \in E_i$   $i = 1, 2$ ).

Ces deux fonctions sont définies d'une manière unique sur  $(G_1, s, p)$  et  $(G_2, s, p)$  respectivement, car la matrice  $A_1$  qui correspond aux tournées partielles de type  $(E, E, 1)(G)$  est de rang :  $9 = |E_1|$ , et la matrice  $B_2$  qui correspond aux tournées partielles de type  $(E, E, 2)(G_2)$  est de rang :  $3 = |E_2|$ .

$$B_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix},$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{En plus, } T_{a_1}(G_1, s, p) = \begin{vmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \end{vmatrix}, \quad T_{a_2}(G_2, s, p) = \begin{vmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$\text{et } T_{a_1}(G_1, s, p) = T_{a_2}(G_2, s, p) + 4 \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

Donc  $(G_1, a_1)$  et  $(G_2, a_2)$  sont équivalents.

Considérons la facette  $\sum_{e \in E} x_e \geq 18$  définie par le graphe de la figure 3.16 - a, on

conclut, d'après le théorème 3.2 que :

$$\sum_{e \in E} x_e \geq 22$$

est une facette définie par le graphe de la figure 3.16 - b.

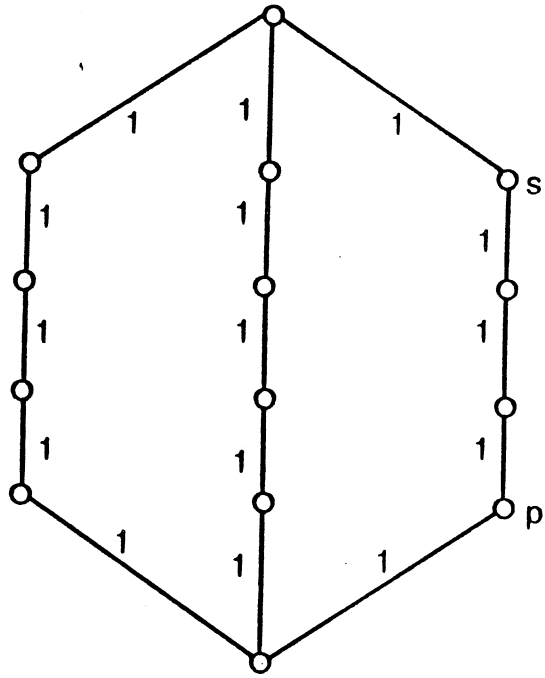


figure 3.16 - a

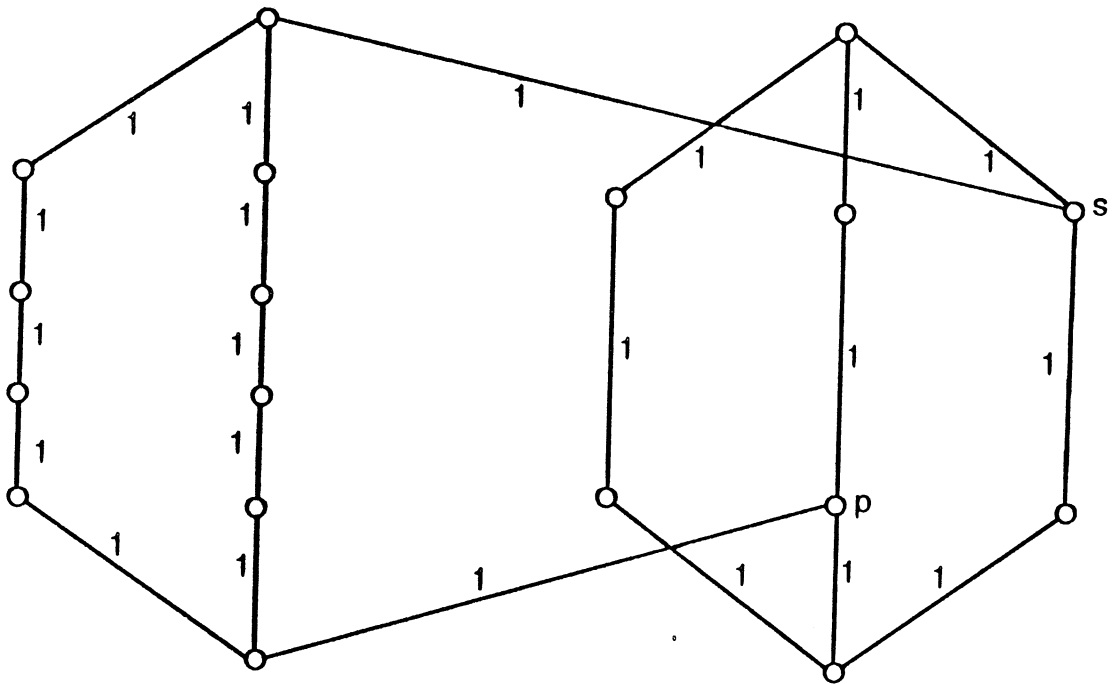


figure 3.16 - b

Exemple 3.2

On considère les deux graphes de la figure 3.17 munis des deux fonctions coûts  $a_1$  et  $a_2$  définies sur  $E_1$  et  $E_2$  respectivement (les valeurs de ces deux fonctions sont reportées sur les arêtes de la figure 3.17).

On peut démontrer facilement que  $a_1$  et  $a_2$  sont définies d'une manière unique sur  $(G_1, s, p)$  et  $(G_2, s, p)$  et que  $(G_1, a_1)$  et  $(G_2, a_2)$  sont équivalents.

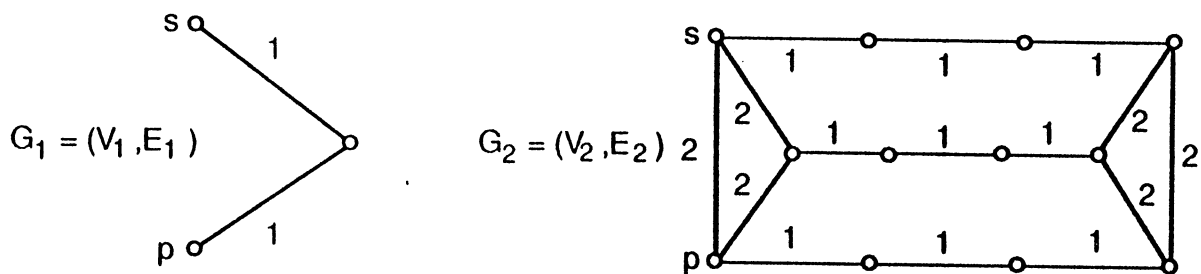


figure 3.17

D'autre part puisque l'inéquation :  $\sum_{e \in E} x_e \geq 10$  est une facette définie par le graphe de la figure 3.18 - a, on conclut du théorème 3.2 que l'inéquation :

$$\sum_{e \in E} f(e) x_e \geq 24$$

est une facette définie par le graphe de la figure 3.18 - b :

$$f(e) = \begin{cases} a_2(e) & \text{si } e \in E_2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

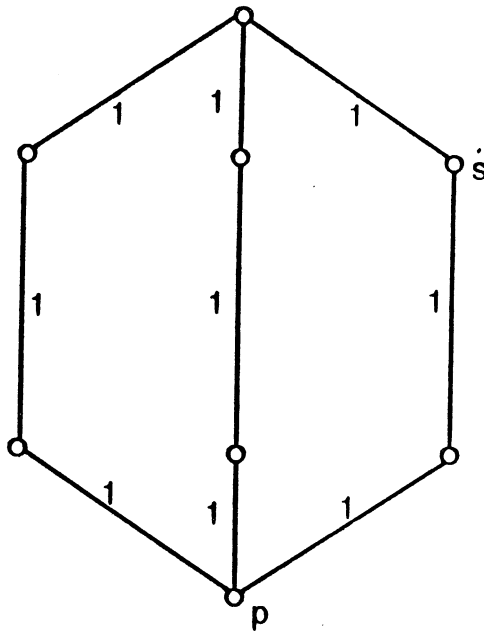


figure 3.18 - a

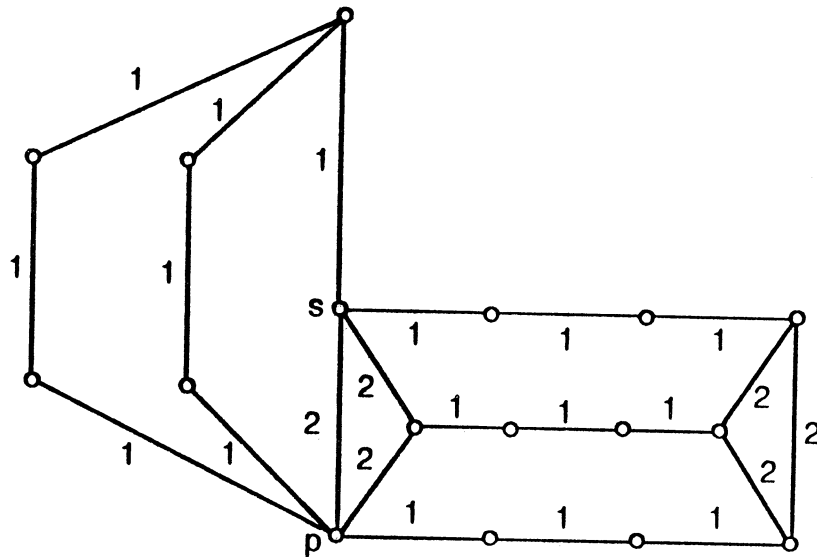


figure 3.18 - b

Remarque 3.3 :

On peut penser que si un graphe  $G$  définit une facette  $F$  (définition 1.1), alors  $F$  sera unique. Autrement dit, si  $G$  est un graphe quelconque, il définit au plus une facette. L'exemple suivant va contredire cette idée :

Considérons les deux inéquations  $F_1$  et  $F_2$ ,





Or il est facile de vérifier que  $F_1$  et  $F_2$  sont des facettes différentes et que les deux graphes  $G_1$  et  $G_2$  de la figure 3.19 sont isomorphes.

Remarque 3.4 :

Dans [1, théorème 3.3], on généralise les inéquations des peignes de "Grötschel, Padberg" (dans des cas particuliers) par les inéquations des  $k$ -chaînes. Récemment, il a été démontré qu'on peut généraliser des facettes de clique-tree "Grötschel, Pulleyblank [6]" par une extension de quelques facettes obtenues à partir des théorèmes 2.1 et 2.2 (voir Naddef [7] et Naddef, Rinaldi [8]).

Remarque 3.5 :

Nous avons voulu étudier le problème du voyageur de commerce graphique dans le cas où le graphe est orienté, on a appelé ce problème DTSP et on l'a formulé comme le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$\text{DTSP : } \left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser } (\sum l(e) x_e, e \in E) \text{ sachant que} \\ x(\delta(S)) \geq 1 \quad \forall S \subset V \text{ tel que } S \neq \emptyset \text{ et } \forall S \neq \emptyset \\ \sum_{e \in \partial^+(i)} x_e = \sum_{e \in \partial^-(i)} x_e \quad \forall i \in V \text{ (contraintes de flot)} \\ x_e \geq 0 \text{ et entier } \forall e \in E. \end{array} \right.$$

où  $\partial^+(i)$  est l'ensemble de arcs dont  $i$  est l'extrémité initiale et  $\partial^-(i)$  est celui des arcs dont  $i$  est l'extrémité terminale.

Malheureusement  $\text{DTSP}(G)$ , l'enveloppe convexe des tournées du graphe orienté  $G$ , n'est pas de pleine dimension (ceci est dû aux contraintes de flot). Il est facile de vérifier que si  $K_n$  est le graphe orienté complet à  $n$  sommets :

$$\dim \text{DTSP}(K_n) = (n-1)^2 < n(n-1) = \text{le nombre d'arcs de } K_n.$$

C'est la raison pour laquelle l'étude polyédrale du problème de voyageur de commerce relaxé est beaucoup moins intéressante sur les graphes orientés que sur les graphes non orientés.

## REFERENCES

- [1] G. CORNUEJOLS, J. FONLUPT, D. NADDEF  
 "The Travelling Salesman Problem on a graph and some related integer polyhedra".  
 Mathematical Programming 33 (1985) 1-27.
- [2] B. FLEISCHMANN,  
 "A cutting plane procedure for the TSP on road networks",  
 Universität Hamburg, September 1983.
- [3] B. FLEISCHMANN,  
 "A new class of cutting planes for the symmetric TSP",  
 Universität Hamburg, September 1983, revised May 1984
- [4] J. FONLUPT, A.R. MAHJOUB, J.P. UHRY,  
 "Composition of graphs and the bipartite subgraph polytope".  
 Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble -  
 ARTEMIS, R.R. 459.
- [5] M. GRÖTSCHEL, M. PADBERG,  
 "Polyhedral aspects of the travelling salesman problem I: Theory",  
 Universität Augsburg Preprint n°4 1983.
- [6] M. GRÖTSCHEL, W. PULLEYBLANK,  
 "Clique tree inequalities and the symmetric travelling salesman problem".  
 Institut für ökonometrie und operations research, Rheinische Friedrich -  
 Wilhelms - Universität, Report N°. 81196 - OR
- [7] D. NADDEF,  
 "The symmetric traveling salesman polytope I : Valid inequalities derived  
 from the graphical relaxation".  
 Rapport de Recherche 660-M (1987).
- [8] D. NADDEF, G. RINALDI,  
 "The symmetric traveling salesman polytope : A composition of valid  
 inequalities given by the graphical relaxation".  
 En préparation.

- [9] H. D. RATLIFF, A.S. ROSENTHAL,  
"Order-picking in a rectangular warehouse : solvable case of TSP".  
Operations research Vol. n°3, May-June 1

## CHAPITRE 4

## LES GRAPHES GTSP - PARFAITS

## 1. Introduction :

Fonlupt et Naddef [9] ont défini les graphes GTSP-parfaits comme étant les graphes pour lesquels l'enveloppe convexe des tournées de GTSP est complètement décrite par les inéquations qui déterminent le signe des variables et les inéquations de cocycle. Plus précisément, soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe quelconque, on lui associe le polyèdre  $P(G)$  défini de la manière suivante :

$$P(G) : \begin{cases} x(\delta(S)) \geq 2 & \forall S \subset V \text{ tel que } S \neq \emptyset \text{ et } V \setminus S \neq \emptyset \\ x_e \geq 0 & \forall e \in E \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$G$  sera appelé GTSP-parfait si et seulement si tout sommet du polyèdre  $P(G)$  correspond à une tournée de  $G$ .

Puis ils ont caractérisé la classe des graphes GTSP-parfaits en démontrant qu'un graphe est GTSP-parfait si et seulement si, il n'est pas réductible à  $M_1$ ,  $M_2$  ou  $M_3$  (figure 4.1) .

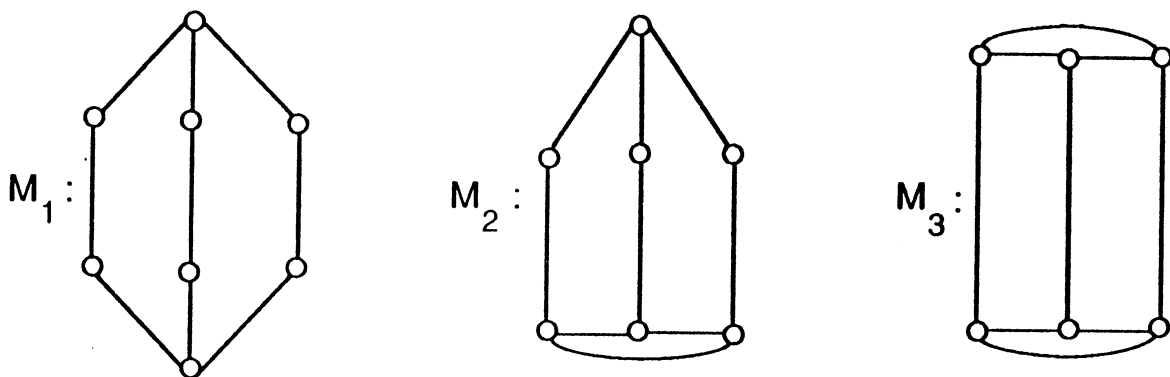


figure 4.1

Fleischmann [8] a donné un algorithme polynomial pour le problème de séparation du programme linéaire :

minimiser  $(\sum l(e) x_e, e \in E)$  sachant (1) et (2).

Le problème de séparation à l'étape  $n$  consiste à trouver la coupe  $\delta(S_{n+1})$  telle que :

$$x^n(\delta(S_{n+1})) < 2,$$

où  $x^n$  est la solution courante du programme linéaire  $P_n$ ,

$$P_n: \left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser } (\sum l(e) x_e, e \in E) \text{ sous les contraintes :} \\ x_e \geq 0 \quad \forall e \in E \\ x(\delta(S_i)) \geq 2 \text{ avec } \quad S_i \subset V, i=1, \dots, n \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad S_i \neq \emptyset, V \setminus S_i \neq \emptyset \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad S_i \neq S_j \text{ et } S_i \neq V \setminus S_j \text{ pour } i \neq j \end{array} \right.$$

on ajoute la contrainte  $x(\delta(S_{n+1})) \geq 2$  à celles de  $P_n$  et on obtient ainsi le programme linéaire  $P_{n+1}$  ( voir [4] ).

L'algorithme donné était bien plus rapide que n'importe quel algorithme basé sur la dualité (flot maximum - coupe minimum). On peut donc conclure d'après le résultat de Grötschel, Lovász et Schrijver [10] qu'il existe un algorithme polynomial pour résoudre le problème du voyageur de commerce sur les graphes qui n'ont pas comme mineurs  $M_1, M_2$  ou  $M_3$  (les auteurs de [10] montrent que si le problème de séparation est polynomial alors le problème d'optimisation combinatoire correspondant sera aussi polynomial même si son nombre de contraintes est exponentiel).

Notre but dans ce chapitre est de démontrer que si  $\hat{G}$  est un graphe admettant un ensemble d'articulation  $\{s,p\}$  de cardinalité 2 i.e.  $G = (G_1, s, p, G_2)$  et si  $G_1$  est un graphe GTSP-parfait alors  $G_1$ , vu de  $G_2$ , peut se résumer au graphe de la figure 4.2.

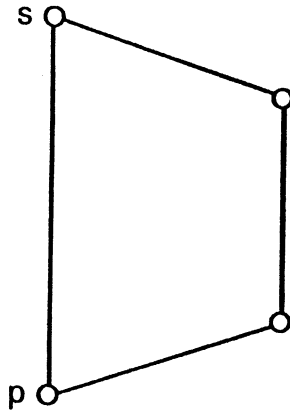


figure 4.2

On signale que dans le cas général, si  $G_1$  est un graphe quelconque on peut le remplacer par le graphe de la figure 2.10 mais pas par le graphe de la figure 4.2 (voir §3, chapitre 2).

## 2. Les Graphes GTSP-Parfaits :

On peut résumer les graphes 3-connexes qui ne contiennent pas  $M_3$  par la liste exhaustive suivante [5,9] :

- 1)  $K_i$  : le graphe complet à  $i$  sommets pour  $i = 1$  jusqu'à 5.
- 2)  $K_5 \setminus \{e\}$  : le graphe complet à 5 sommets moins une arête.
- 3)  $K_5 \setminus \{e, e'\}$  où les arêtes  $e$  et  $e'$  ne sont pas adjacentes.
- 4) Les roues  $W_n$  pour  $n \geq 3$  ( $W_n$  est le graphe à  $n+1$  sommets  $v_0, v_1, \dots, v_i, \dots, v_n$ , tel que  $G(\{v_1, \dots, v_i, \dots, v_n\})$  est le cycle sans corde de longueur  $n$  et le sommet  $v_0$  est adjacent à tous les autres sommets (voir figure 4.3). On appelle  $v_0$  le centre de la roue, les arêtes  $(v_0, v_i)$  ses rayons et les  $(v_i, v_{i+1})$  les arêtes de la jante.

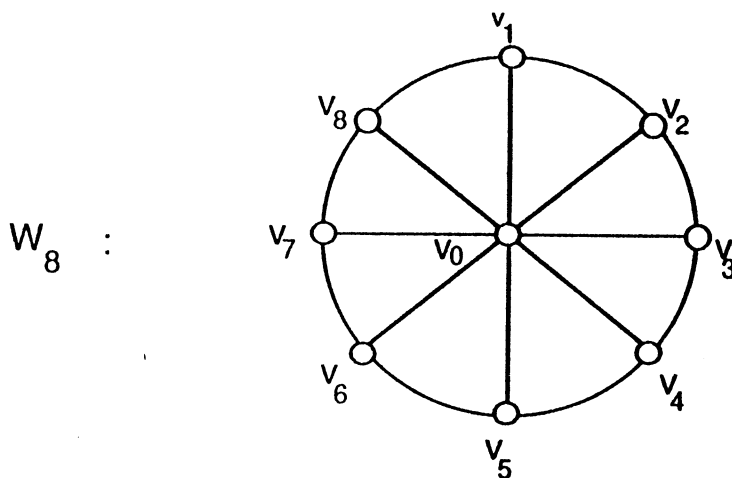


figure 4.3

5) Les hélices  $P_{3,n}$ ,  $P'_{3,n}$ ,  $P''_{3,n}$  et  $P'''_{3,n}$ ,  $n \geq 3$  ( l'hélice  $P_{3,n}$  est formé de trois sommets centraux  $v_0$ ,  $v'_0$  et  $v''_0$  qui forment un triangle et  $n$  autres sommets induisant un stable, reliés tous à chaque sommet central (voir figure 4.4). Une arête qui lie deux sommets centraux sera appelée une arête centrale. On note par  $P'_{3,n}$ ,  $P''_{3,n}$  et  $P'''_{3,n}$  les graphes obtenus à partir de  $P_{3,n}$  en enlevant 1, 2 ou 3 arêtes centrales.

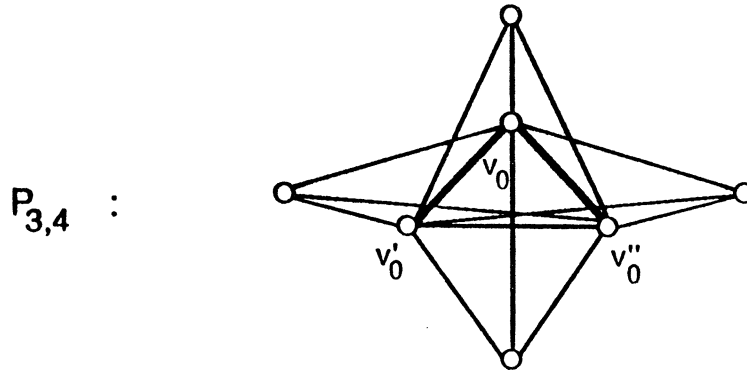


figure 4.4

Pour obtenir la classe  $\mathfrak{B}$  de tous les graphes sans mineurs  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ , les auteurs dans [9] définissent trois opérations ( $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3$ ) et un certain nombre de briques 2-connexes obtenues à partir des graphes 3-connexes non réductibles à  $M_3$ ; ils affirment qu'on peut générer la classe  $\mathfrak{B}$  tout entière en appliquant  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  et  $\Phi_3$  sur les briques qu'on peut décrire par :

1°) Les structures de roues qui sont les roues  $W_n$ ,  $n \geq 3$  et les graphes obtenus à partir de ces roues en remplaçant des arêtes de jante par des chaînes à trois arêtes.

2°) Les structures d'hélices qui sont les hélices  $P_{3,n}$ ,  $P'_{3,n}$ ,  $P''_{3,n}$ ,  $P'''_{3,n}$ ,  $n \geq 3$ ; puis les graphes obtenus à partir de ces hélices en remplaçant une, deux ou trois arêtes centrales par des chaînes de longueur trois ou bien en remplaçant une arête centrale  $e$  par une chaîne de longueur 3 et une arête non centrale non adjacente à  $e$  par une chaîne de longueur 2.

3°) Quelques graphes 2-connexes et 3-connexes obtenus à partir de  $K_i$ ,  $i = 1$  à 5 ( voir [9] ).

### L'opération $\Phi_1$ :

Si  $v$  est un point d'articulation de  $G = (V, E)$  et si  $V_1$  est l'ensemble de sommets d'une composante de  $G \setminus \{v\}$  alors  $G$  est dans la classe  $\mathfrak{B}$  si et seulement si  $G_1 = G_{V_1 \cup \{v\}}$  et  $G_2 = G_{V \setminus V_1}$  sont dans la classe  $\mathfrak{B}$ . On définit  $\Phi_1(G_1, v_1, G_2, v_2) = G$  i.e. l'opération qui identifie le sommet  $v_1$  de  $G_1$  et le sommet  $v_2$  de  $G_2$  pour construire le graphe  $G$ .

### L'opération $\Phi_2$ :

Soit  $G = (V, E)$  un graphe avec un ensemble d'articulation  $\{u, v\}$  de cardinalité 2 si  $G \setminus \{u, v\}$  a exactement deux composantes connexes qui ont comme ensembles de sommets  $V'$  et  $V''$  tels que  $|V'| \leq 2$  et  $|V''| \geq 2$  et  $(u, v) \notin E$ , on dit que  $\{u, v\}$  est un déconnectant de base (figure 4.5). Si  $|V'| = 2$  et  $G_{V'}$  est une chaîne à trois arêtes d'extrémités  $u$  et  $v$ , on appellera cette chaîne à trois la pseudo-arête  $(u, v)$ .

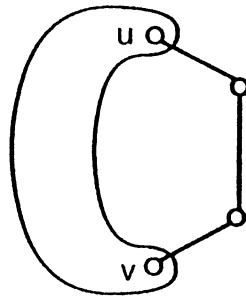


figure 4.5

Soient  $\bar{G}_1 = (\bar{V}_1, \bar{E}_1)$  et  $\bar{G}_2 = (\bar{V}_2, \bar{E}_2)$  deux graphes avec deux déconnectants de base respectifs  $\{u_1, v_1\}$  et  $\{u_2, v_2\}$  tels que  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2)$  sont deux pseudo-arêtes. On définit  $\Phi_2(\bar{G}_1, \bar{G}_2)$  comme le graphe  $G = (V, E)$  obtenu en effaçant les pseudo-arêtes  $(u_1, v_1)$  et  $(u_2, v_2)$  et en identifiant  $u_1$  avec  $u_2$  et  $v_1$  avec  $v_2$  (figure 4.6).

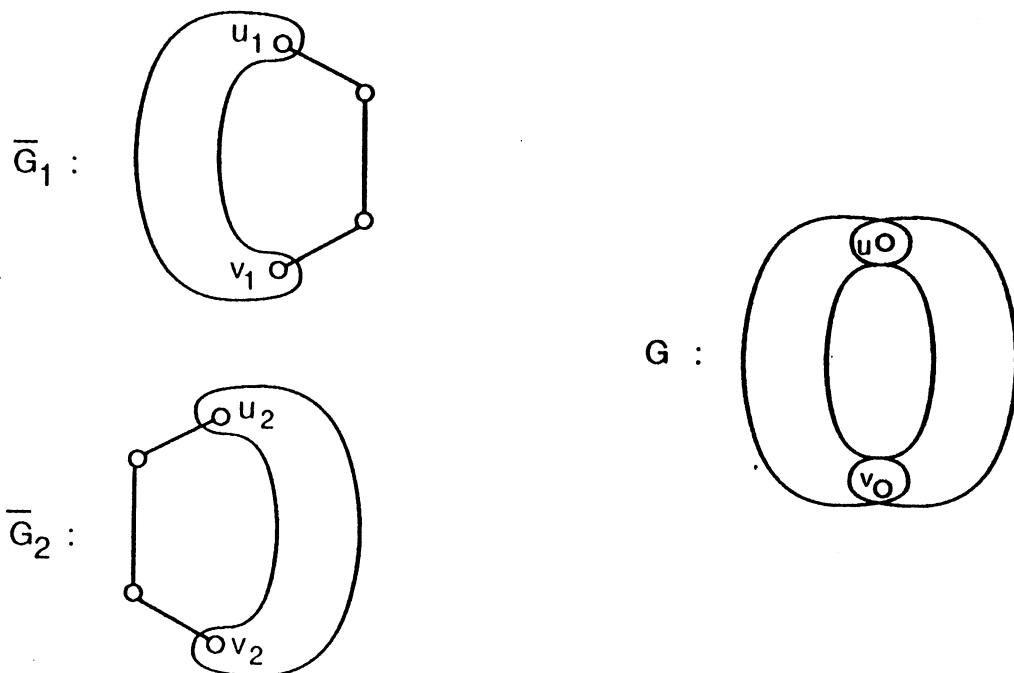


figure 4.6



### L'opération $\Phi_3$ :

Soit  $G' = (V', E')$  un graphe avec un ensemble déconnectant  $\{u,v\}$  de cardinalité 2 tel que  $(u,v) \notin E$ , on définit  $\Phi'_3(G') = G$  comme le graphe obtenu à partir de  $G'$  en ajoutant un nouveau sommet  $w$  et en le liant aux deux sommets  $u$  et  $v$  (figure 4.7).

Et on définit  $\Phi_3(G')$  comme le graphe obtenu à partir de  $G'$  en appliquant l'opération  $\Phi'_3$ .

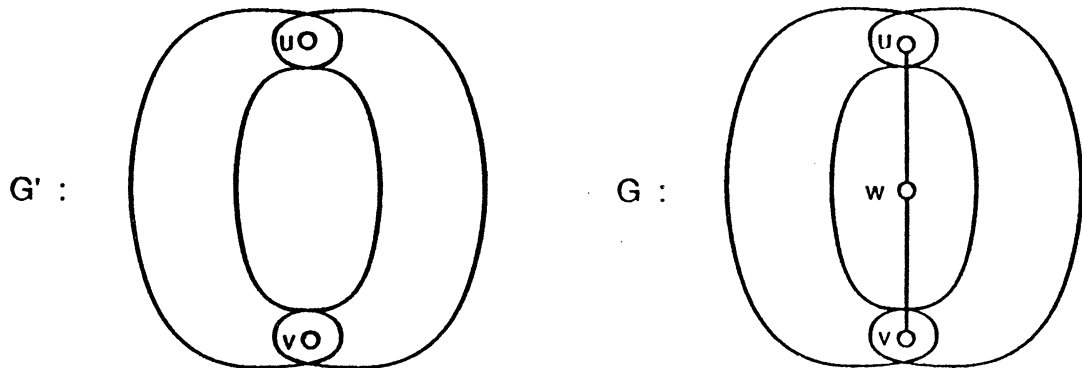


figure 4.7

## 2. Substitution d'un graphe par un graphe réduit :

On a vu au paragraphe 3 du chapitre 2 que si  $G = (G_1, s, p, G_2)$  (figure 2.1), les seules informations dont  $G_2$  (resp.  $G_1$ ) a besoin pour le calcul de la valeur de la tournée de coût minimum de  $G$  sont les valeurs :  $[E, E, 1] (G_1)$  (resp.  $G_2$ ),  $[E, E, 2] (G_1)$  (resp.  $G_2$ ) et  $[U, U, 1] (G_1)$  (resp.  $G_2$ ) et donc vu de  $G_2$  (resp.  $G_1$ ),  $G_1$  (resp.  $G_2$ ) se résume à ces trois valeurs. Ce qui nous a permis de soulever le problème suivant :

(Pb) : pour  $i = 1, 2$ , quelle que soit la fonction coût  $l_i : E_i \mapsto \mathbb{R}_+$  (définie sur les arêtes de  $G_i$ ), remplacer  $G_i$  par un autre graphe plus petit  $g_i$  muni d'une fonction coût telle que :

$$[E, E, 1] (G_i) + M = [E, E, 1] (g_i) \quad (3)$$

$$[E, E, 2] (G_i) + M = [E, E, 2] (g_i) \quad (4)$$

$$[U, U, 1] (G_i) + M = [U, U, 1] (g_i) \quad (5)$$

(M est une constante réelle).

Pour résoudre (Pb) on a distingué les 6 cas suivants :

$$1^\circ) \quad [E,E,1] (G_i) \leq [E,E,2] (G_i) \leq [U,U,1] (G_i) \quad (6)$$

$$2^\circ) \quad [E,E,1] (G_i) \leq [U,U,1] (G_i) \leq [E,E,2] (G_i) \quad (7)$$

$$3^\circ) \quad [U,U,1] (G_i) \leq [E,E,1] (G_i) \leq [E,E,2] (G_i) \quad (8)$$

$$4^\circ) \quad [U,U,1] (G_i) \leq [E,E,2] (G_i) \leq [E,E,1] (G_i) \quad (9)$$

$$5^\circ) \quad [E,E,2] (G_i) \leq [U,U,1] (G_i) \leq [E,E,1] (G_i) \quad (10)$$

$$6^\circ) \quad [E,E,2] (G_i) \leq [E,E,1] (G_i) \leq [U,U,1] (G_i) \quad (11)$$

et on a trouvé qu'on peut toujours munir le graphe  $H = (V_H, E_H)$  (figure 2.10) d'une fonction coût  $t_i : E_H \mapsto \mathbb{R}_+$  d'une manière à pouvoir remplacer  $(G_i, l_i)$  par  $(H, t_i)$ .

Le théorème qui va suivre nous montre que si  $G = (G_1, s, p, G_2)$  est un graphe de la classe  $\mathcal{B}$  muni d'une fonction coût quelconque, on trouvera toujours un graphe plus petit que  $(H)$  figure (2.10) et des coûts qu'on affectera aux arêtes de ce graphe pour qu'il puisse remplacer  $G_1$ .

### THEOREME 2.1 :

On considère le graphe  $G = (G_1, s, p, G_2)$  de la figure 2.1 et on suppose qu'il appartient à la classe  $\mathcal{B}$ , alors quelle que soit la fonction coût  $L$ , définie sur les arêtes de  $G$ , on pourra affecter des coûts aux quatre arêtes de  $C_3+\{e\}$  (figure 4.2) d'une façon à ce que : si on remplace  $G_1$  (resp.  $G_2$ ) par  $C_3+\{e\}$ , la restriction sur  $G_2$  (resp.  $G_1$ ) de n'importe quelle tournée optimale de  $G$  pourra être mixer avec une tournée partielle de  $C_3+\{e\}$  pour former une tournée optimale de  $(C_3+\{e\}, s, p, G_2)$  (resp.  $(G_1, s, p, C_3+\{e\})$ ).

Pour démontrer ce théorème on va voir que si  $G_i$  ne contient pas  $M_1$ ,  $M_2$  ou  $M_3$  comme mineurs, les cas (6), (7), (11) et (10) avec :

$$[U,U,1] (G_i) > \frac{[E,E,1](G_i) + [E,E,2] (G_i)}{2} \quad (12)$$

ne pourront pas exister et donc on pourra remplacer  $G_i$  par le graphe de la figure 4.2 (muni d'une fonction coût bien précise).

**Lemme 2.1**

On suppose que  $G_i = (V_i, E_i)$ ,  $i = 1$  ou  $2$ , est un graphe de la classe  $\mathfrak{B}$ , alors quelle que soit la fonction  $l_i : E_i \mapsto \mathbb{R}_+$ ,  $(G_i, l_i)$  ne pourra pas vérifier (12).

Démonstration :

$G = (G_1, u, v, G_2)$  peut être obtenu en appliquant l'opération  $\Phi_2$  sur les deux graphes  $\bar{G}_1$  et  $\bar{G}_2$  ( $G = \Phi_2(\bar{G}_1, \bar{G}_2)$ ) (voir figure 4.6). On sait en plus que :

(\*)  $G$  est dans la classe  $\mathfrak{B}$  si et seulement si  $\bar{G}_1$  et  $\bar{G}_2$  le sont,

et on va démontrer que si  $G$  est dans  $\mathfrak{B}$  alors l'inégalité suivante :

$$[U, U, 1](G_i) \leq \frac{[E, E, 1](G_i) + [E, E, 2](G_i)}{2} \quad (13)$$

sera vérifiée pour  $i = 1$  et  $2$ . En effet :

on sait d'après (\*) que  $\bar{G}_i$ ,  $i = 1$  et  $2$  sont aussi dans  $\mathfrak{B}$  ( $\bar{G}_i = (G_i, u, v, C_3)$ ), ce qui implique que les sommets "points extrêmes" de  $P(\bar{G}_i)$  correspondent tous à des tournées de  $\bar{G}_i$  [9]. Soient  $T_1$  et  $T_2$  deux tournées de  $\bar{G}_i$  qui correspondent aux valeurs  $[E, E, 1](G_i) + [E, E, 2](C_3)$  et  $[E, E, 2](G_i) + [E, E, 1](C_3)$  respectivement, on leur associe les deux vecteurs d'incidence  $x^1$  et  $x^2$  qui sont des points extrêmes de  $P(\bar{G}_i)$  et on suppose sans perte de généralité que :

$$\begin{aligned} x^1|_{C_3} &= (2, 2, 0) \\ \text{et} \quad x^2|_{C_3} &= (2, 2, 2) \end{aligned}$$

( $x^i|_{C_3}$  est la restriction de  $x^i$  sur  $C_3$ ,  $i = 1$  et  $2$ ) (figure 4.10).

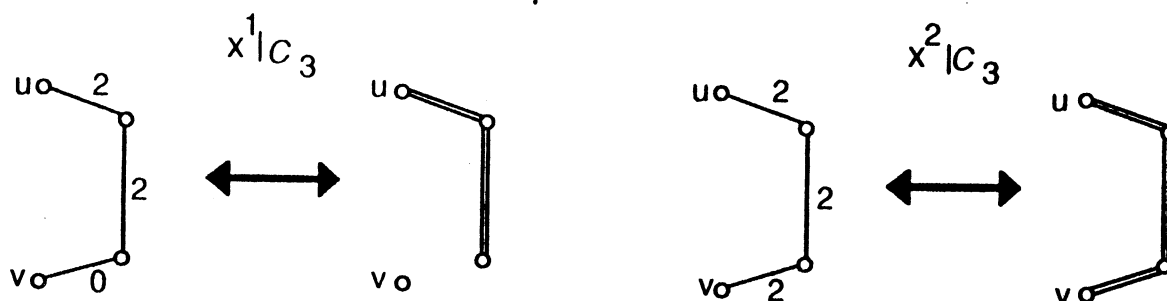


figure 4.10

Si on prend le point  $\bar{x}$  de  $P(\bar{G}_i)$  obtenu par une combinaison convexe de  $x^1$  et de  $x^2$  :

$$\bar{x} = \frac{x^1 + x^2}{2}$$

$\bar{x}$  ne peut pas être un sommet de  $P(\bar{G}_i)$  et donc il est dominé par un autre point  $x^3$  de ce polyèdre avec :  $x^3|_{C_3} = (1, 1, 1)$  car  $\bar{x}|_{C_3} = (2, 2, 1)$  et si  $\bar{x} = (\bar{x}|_{G_i}, \bar{x}|_{C_3})$  est un point de  $P(\bar{G}_i)$  alors  $y = (\bar{x}|_{G_i}, x^3|_{C_3})$  l'est aussi ( voir la figure 4.11 dans le cas le moins trivial :  $\sum (y_e, e \in \delta(X)) < 2 \Rightarrow \sum (\bar{x}_e, e \in \delta(Y)) < 2$ ).

$x^3$  est donc une tournée qui correspond forcément à la valeur  $[U, U, 1](G_i) + [U, U, 1](C_3)$  i.e.  $[U, U, 1](G_i) = \sum (l_i(e) x^3_e, e \in E_i)$  et  $[U, U, 1](C_3) = \sum (l_i(e) x^3_e, e \in E_{C_3})$ . D'autre part puisque :

$$\sum (l_i(e) \bar{x}_e, e \in E_i) = \frac{[E, E, 1](G_i) + [E, E, 2](G_i)}{2}$$

et  $\sum (l_i(e) x^3_e, e \in E_i) \leq \sum (l_i(e) \bar{x}_e, e \in E_i)$ , on peut conclure que si  $G$  est dans  $\mathcal{B}$  (13) sera toujours vérifié (i.e. pour  $i=1$  et  $2$  on aura :

$$[U, U, 1](G_i) \leq \frac{[E, E, 1](G_i) + [E, E, 2](G_i)}{2} . \quad \square$$

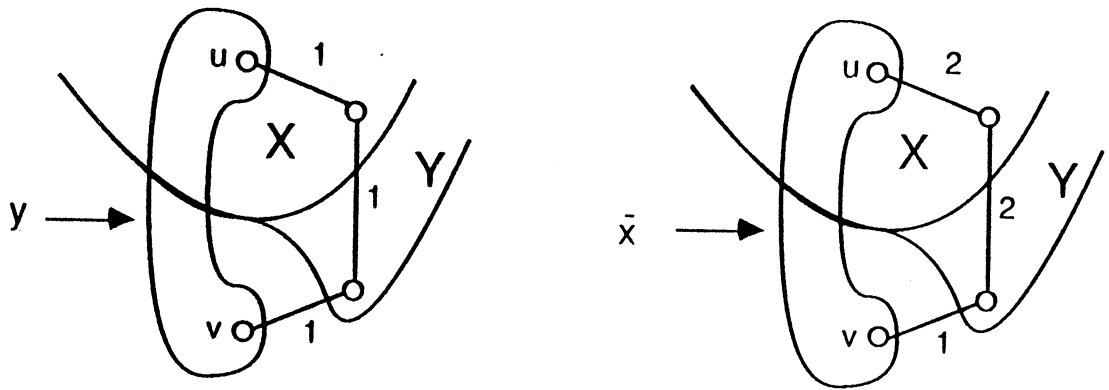


figure 4.11

**Lemme 2.2**

On suppose que  $G_i = (V_i, E_i)$ ,  $i = 1$  ou  $2$ , est un graphe de la classe  $\mathcal{B}$ , alors quelle que soit la fonction  $l_i : E_i \mapsto \mathbb{R}_+$ ,  $(G_i, l_i)$  ne pourra vérifier ni (6) ni (7) avec des inégalités strictes.

Démonstration :

On va démontrer qu'il n'est pas possible d'avoir simultanément les deux inéquations strictes suivantes:

$$[E, E, 1](G_i) < [E, E, 2](G_i) \quad (14)$$

$$\text{et} \quad [E, E, 1](G_i) < [U, U, 1](G_i). \quad (15)$$

Sans perte de généralité, on va faire la démonstration pour  $i = 1$ . Soit  $x^*$  une tournée telle que :  $x^*|_{G_1}$  correspond à la valeur  $[E, E, 1](G_1)$ ,

1°) Si  $x^*_{\{s,p\}} = 2$  ( $\{s,p\}$  est l'arête d'extrémités  $s$  et  $p$  qui existe éventuellement), il est facile de voir que la tournée partielle  $x'|_{G_1}$

définie par :

$$x'_e = \begin{cases} x^*_e & \text{si } e \in E_1 \setminus \{\{s,p\}\} \\ 0 & \text{si } e = \{s,p\} \end{cases}$$

est de type (E, E, 2) et par conséquent on a :  $[E, E, 2](G_1) \leq [E, E, 1](G_1)$  (i.e. (14) est violée).

2°) Si  $x_{\{s,p\}}^* = 1$ , on constatera que la tournée partielle  $x''|_{G_1}$  définie par :

$$x''_e = \begin{cases} x^*_e & \text{si } e \in E_1 \setminus \{s,p\} \\ 0 & \text{si } e = \{s,p\} \end{cases}$$

est de type (U,U,1) et par conséquent on obtiendra l'inégalité :

$$[U,U,1](G_1) \leq [E,E,1](G_1) \text{ ce qui viole (15).}$$

3°) Si  $x_{\{s,p\}}^* = 0$ , on prouvera que l'une aux moins des deux inégalités (14) ou (15) ne sera pas vérifiée :

Sans perte de généralité nous allons faire la démonstration en supposant que  $G_1$  est une roue et on laissera au lecteur l'extension directe de cette démonstration dans le cas général.

En effet : ( $G_1 = W_n$ )

-S'il existe une arête  $e \in \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  (figure 4.12 - a) telle que  $x_e^* = 2$  on pourra choisir judicieusement  $e' \in E_1$  telle que  $x_{e'}^* = 2$  et telle que la tournée partielle  $x'''$  définie par :

$$x'''_e = \begin{cases} x^*_e & \text{si } e \in E_1 \setminus \{e'\} \\ 0 & \text{si } e = e' \end{cases}$$

soit de type (E,E,2), ce qui contredit (14).

-Si  $x_e = 0$  ou  $1 \forall e \in \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ , on aura forcément  $x_{e_1} = x_{e_2} = x_{e_3} = x_{e_4} = 1$  (figure 4.12 - b) et on trouvera une contradiction avec (15) car la tournée partielle  $x''''$  définie par :

$$x''''_e = \begin{cases} x^*_e & \text{si } e \in E_1 \setminus \{e_2, e_3\} \\ 0 & \text{si } e = e_2 \\ 2 & \text{si } e = e_3 \end{cases}$$

est de type (U,U,1) et  $\sum (l_e x^*_e, e \in E_1) \geq \sum (l_e x''''_e, e \in E_1)$  (après avoir supposé sans perte de généralité que :  $l_{e_2} \geq l_{e_3}$ ).  $\square$

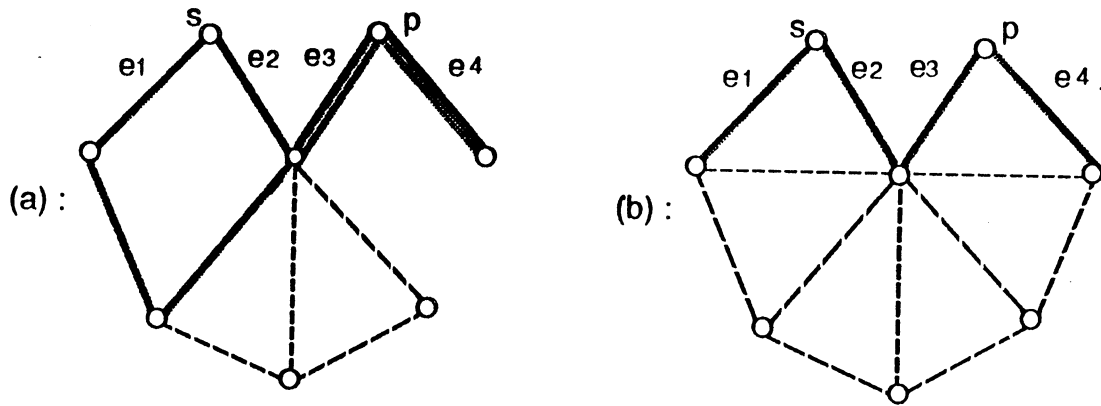


figure 4.12

Démonstration du théorème 2.1 :

- . Si  $(G_i, l_i)$  vérifie (8) , on remplacera  $G_i$  par  $C_3 + \{e\}$  (figure 4.13)
- . Si  $(G_i, l_i)$  vérifie (9) avec :

$$[U, U, 1] (G_i) \geq \frac{3[E, E, 2](G_i) - [E, E, 1] (G_i)}{2} \quad (16)$$

on le remplacera par  $C_3$  (figure 4.14)

- . Si  $(G_i, l_i)$  vérifie (9) avec :

$$[U, U, 1] (G_i) \leq \frac{3[E, E, 2](G_i) - [E, E, 1] (G_i)}{2} \quad (17)$$

on le remplacera par  $C_3 + \{e\}$  (figure 4.10)

- . Si  $(G_i, l_i)$  vérifie (10) et (13), on le remplacera par  $C_3 + \{e\}$  (figure 4.13)

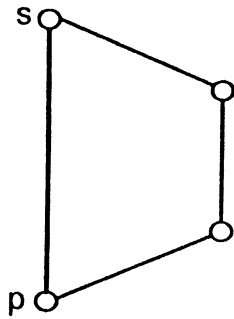


figure 4.13

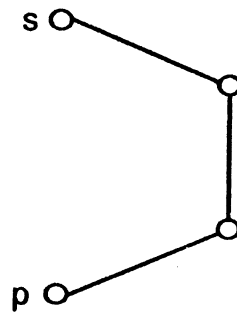


figure 4.14

( voir § 3, chapitre 2)

On conclut donc, d'après les lemmes 2.1 et 2.2 que  $\forall G_i$  il peut être remplacé soit par  $C_3 + \{e\}$ , soit par  $C_3$  mais  $C_3$  est un mineur de  $C_3 + \{e\}$  d'où le théorème.  $\square$

### Remarque 2.1

On a vu au début de ce chapitre qu'on peut résoudre GTSP sur la classe  $\mathfrak{B}$  par la programmation linéaire, on peut donc envisager la recherche d'un algorithme combinatoire (n'utilisant pas la programmation linéaire) pour résoudre GTSP sur cette classe de graphe. Dans le chapitre suivant nous entamons ce problème en décrivant un algorithme de programmation dynamique polynomial qui donne toujours l'optimum de GTSP sur une classe de graphe plus générale que la classe  $\mathfrak{B}$ .



**REFERENCES :**

- [1] C. BERGE,  
"Graphes", Gauthier-Villars
  
- [2] M. BOULALA, J.P. UHRY,  
"Polytope des indépendants d'un graphe série-parallèle",  
Discrete Mathematics 27 (1979), 225-243.
  
- [3] G. CORNUEJOLS, J. FONLUPT, D. NADDEF,  
"The travelling salesman problem on a graph and some related integer polyhedra",  
Mathematical Programming 33 (1985) 1-27.
  
- [4] H. CROWDER, E.L. JOHNSON and M.W. PADBERG,  
"Solving large scale zero-one linear programming problems",  
Operations Research 31 (1983) 803-834.
  
- [5] G. A. DIRAC,  
"Some results concerning the structure of graphs",  
Canad. Math. Bull. 6(1963) 183-210.
  
- [6] A. ELNACHEF, J. FONLUPT,  
"Problème du voyageur de commerce graphique : compositions des facettes et  
des polyèdres",  
Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble - ARTEMIS  
R.T. n°7 Septembre 1986.
  
- [7] A. ELNACHEF, J. FONLUPT,  
"Un algorithme polynomial pour le problème du voyageur de commerce sur une  
classe de graphe",  
Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble - ARTEMIS  
R.T. n°6 Septembre 1986.
  
- [8] B. FLEISCHMANN,  
"A cutting plane procedure for the travelling salesman problem on road networks",  
Universität Hamburg, September 1983.

- [9] J. FONLUPT, D. NADDEF,  
"The travelling salesman problem in graphs with some excluded minors",  
Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble - ARTEMIS  
R.R. 557 Septembre 1985.
- [10] M. GRÖTSCHHEL, L. LOVASZ, A. SCHRIJVER,  
"The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization",  
Combinatorica 1 (1981) 169-197.
- [11] D. RATLIFF, A. ROSENTHAL,  
"Order-picking in a rectangular warehouse : a solvable case on the travelling  
salesman problem",  
Operations Research 31(1983) 507-521



## CHAPITRE 5

# LE PROBLEME DU VOYAGEUR DE COMMERCE GENERALISE SUR LES GRAPHES DE HALIN ET LES GRAPHES NON REDUCTIBLES A $M_3$

## 1. Introduction :

Nous allons donner une variation de GTSP dans laquelle, le coût  $c_e$  de l'arête  $e$  n'est pas linéaire avec le nombre de fois qu'une tournée utilise cette arête.

Etant donné un graphe connexe non orienté  $G = (V, E)$  et une application  $\mathbf{c} : E \mapsto \mathbb{R}_+^3$  qui associe à chaque arête  $e \in E$  un vecteur  $(c_0(e), c_1(e), c_2(e))$  de  $\mathbb{R}_+^3$ , on définit un nouveau problème qu'on appellera le problème du voyageur de commerce généralisé et qu'on notera par GETSP.

Ce problème consiste à trouver un cycle  $T \subset E$  qui passe au moins une fois par chaque sommet de  $G$  et de longueur  $\sum_{e \in E} c(e)$  minimum, où :

$$c(e) = \begin{cases} c_0(e) & \text{si } T \text{ ne passe pas par } e \\ c_1(e) & \text{si } T \text{ passe une et une seule fois par } e \\ c_2(e) & \text{si } T \text{ passe 2 fois par } e \end{cases}$$

Autrement dit, si on fait correspondre à chaque cycle  $T$  un vecteur  $x = (x_e, e \in E)$  appartenant à  $\{0,1,2\}^{|E|}$  et tel que  $x_e$  désigne le nombre de fois que la tournée  $T$  passe par  $e$ , la longueur de  $T$  sera  $\sum_{e \in E} c(e)$ , où :

$$c(e) = \begin{cases} c_0(e) & \text{si } x_e = 0 \\ c_1(e) & \text{si } x_e = 1 \\ c_2(e) & \text{si } x_e = 2 \end{cases}$$

Remarque 1.1 :

Si on associe à chaque arête de  $G$  le vecteur  $(0, c(e), 2c(e))$ , résoudre GETSP sur  $G$  muni de ces vecteurs coûts, revient alors à résoudre GTSP sur ce graphe muni de l'application  $c : E \mapsto \mathbb{R}_+$ . Et donc, GETSP est une généralisation de GTSP.

Remarque 1.2 :

Dans le cas où le graphe  $G$  admet un ensemble d'articulation de cardinalité 2 c'est à dire  $G = (G_1, s, p, G_2)$  (figure 2.1). On procède à la résolution de GETSP sur ce graphe muni de la fonction coût  $\mathbf{c} : E \mapsto \mathbb{R}_+^3$ , de la façon suivante :

- On remplace d'abord le graphe  $G_2$  par une arête d'extrémités  $s$  et  $p$ , qu'on note  $f_2$ , on obtient le graphe  $G'_1$  (figure 5.1) et on résoud 3 fois GETSP sur ce nouveau graphe :

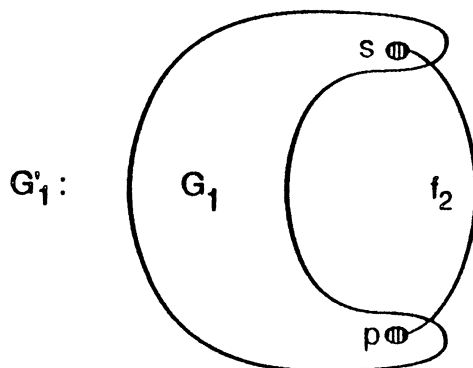


figure 5.1

- La première fois en posant :

$$c_0(f_2) = 0,$$

$$c_1(f_2) = M$$

et  $c_2(f_2) = M$

(  $M$  est un entier très grand ).

C'est à dire en obligeant la tournée optimale  $T_2$  de ne pas passer par l'arête  $f_2$ . On notera par  $M_2$ , le coût de  $T_2$  qui est égal à  $[E, E, 1] (G_1, \mathbf{C})$  (voir chapitre 2).

- La seconde fois en posant :

$$\begin{aligned} c_0(f_2) &= M, \\ c_1(f_2) &= 0 \\ \text{et } c_2(f_2) &= M \quad (M \text{ est un entier très grand}). \end{aligned}$$

Dans ce cas la tournée optimale  $T_1$  de  $G'_1$  passe obligatoirement une et une seule fois par  $f_2$ . Le coût de  $T_1$ , qu'on note  $M_1$ , correspond donc à la valeur  $[U, U, 1] (G_1, \mathbf{C})$  (chapitre 2).

- La troisième fois en posant :

$$\begin{aligned} c_0(f_2) &= M, \\ c_1(f_2) &= M \\ \text{et } c_2(f_2) &= 0 \quad (M \text{ est un entier très grand}). \end{aligned}$$

La tournée optimale obtenue, notée  $T_0$ , passe donc deux fois par  $f_2$ , elle a comme coût  $M_0$  égal à  $\text{Min} ([E, E, 1] (G_1, \mathbf{C}), [E, E, 1] (G_2, \mathbf{C}))$ .

• On remplace ensuite le sous-graphe  $G_1$  de  $G$  par l'arête  $f_1$  d'extrémités  $s$  et  $p$ , on obtient ainsi le graphe  $G'_2$  de la figure 5.2,

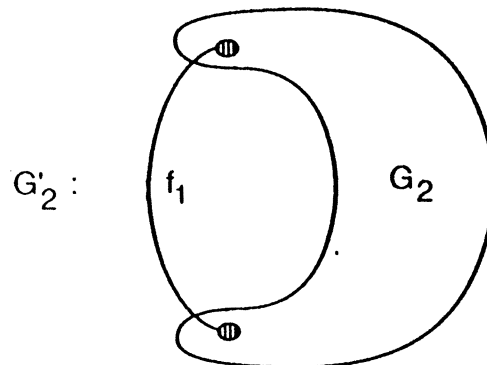


figure 5.2

puis on résoud GETSP une et une seule fois sur  $G'_2$  en posant :

$$\begin{aligned} c_0(f_1) &= M_0, \\ c_1(f_1) &= M_1 \\ \text{et } c_2(f_1) &= M_2, \end{aligned}$$

et on note par  $T'$  la solution optimale de ce problème

On déduit finalement  $T_{opt}$ , la tournée optimale sur  $G$ , de  $T'$  et de l'une des tournées  $T_0$ ,  $T_1$  ou  $T_2$ .  $T_{opt}$  est en effet obtenue par le mixage de la restriction sur  $G_2$  de  $T'$  avec la restriction sur  $G_1$  de  $T_k$ , avec :

$$k = \begin{cases} 0 & \text{si } T' \text{ ne passe pas par } f_1 \\ 1 & \text{si } T' \text{ passe une et une seule fois par } f_1 \\ 2 & \text{si } T' \text{ passe deux fois par } f_1 \end{cases}$$

Remarque 1.3 :

Si  $G$  admet un point d'articulation  $s$  i.e.  $G = (G_1, s, G_2)$  (figure 5.3),

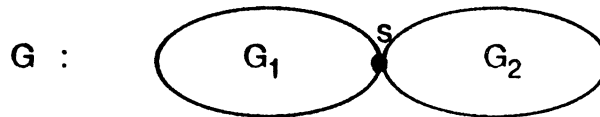


figure 5.3

résoudre GETSP sur  $G$  revient à résoudre ce problème sur  $G_1$  puis sur  $G_2$  car la tournée optimale de  $G$  n'est autre que la réunion des deux tournées optimales de  $G_1$  et de  $G_2$ . On peut donc supposer dans la suite que  $G$  est 2-connexe.

Remarque 1.4 :

Si  $G$  admet des arêtes multiples, on peut le transformer en un graphe simple. En effet :

si  $e_1$  et  $e_2$  sont deux arêtes multiples d'extrémités  $s$  et  $p$  (figure 5.4-a) avec :

$$C(e_1) = (c_0(e_1), c_1(e_1), c_2(e_1)) \text{ et } C(e_2) = (c_0(e_2), c_1(e_2), c_2(e_2)),$$

on peut leur remplacer par l'arête simple  $e$  d'extrémités  $s$  et  $p$  (figure 5.4-b) en associant à cette arête le vecteur  $C(e) = (c_0(e), c_1(e), c_2(e))$  avec :

$$c_0(e) = c_0(e_1) + c_0(e_2)$$

$$c_1(e) = \text{Min} \{ c_0(e_1) + c_1(e_2), \\ c_1(e_1) + c_0(e_2), \\ c_2(e_1) + c_1(e_2), \\ c_1(e_1) + c_2(e_2) \}$$

$$c_2(e) = \text{Min} \{ c_0(e_1) + c_2(e_2), \\ c_2(e_1) + c_0(e_2), \\ c_2(e_1) + c_2(e_2), \\ c_1(e_1) + c_1(e_2) \}$$

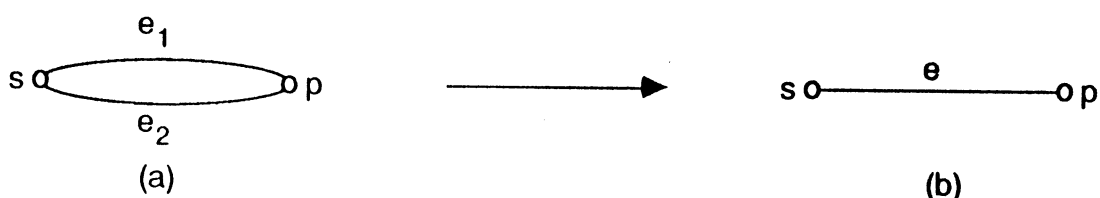


figure 5.4

Ainsi si on a  $m$  arêtes multiples ( $m \in \mathbb{N}^*$ ), on peut les réduire 2 à 2 en une arête simple après  $m - 1$  opérations.

Remarque 1.5 :

Soit  $G = (V, E)$  un graphe quelconque muni de l'application  $\mathbf{C} : E \mapsto \mathbb{R}_+^3$ , on peut remplacer tout sous-graphe de  $G$  formant une chaîne  $\mathcal{C}$  d'extrémités  $s$  et  $p$ , de longueur  $k$  ( $k \in \mathbb{N}^*$ ), par une arête simple  $e$  d'extrémités  $s$  et  $p$ . En effet, si  $\mathcal{C} = (s, e_1, x_1, e_2, \dots, x_{k-1}, e_k, p)$  avec  $e_i \in E$ ,  $i = 1, \dots, k$ , il suffit d'associer à l'arête  $e$  le vecteur coût  $\mathbf{C}(e) = (c_0(e), c_1(e), c_2(e))$  avec :

$$c_0(e) = \text{Min}_{j=1, \dots, k} ( \sum_{i=1, \dots, k; i \neq j} c_2(e_i) + c_0(e_j) )$$

$$c_1(e) = \sum_{i=1}^k c_1(e_i)$$



$$c_2(e) = \sum_{i=1}^k c_2(e_i) .$$

## 2. Réduction d'un graphe :

Soit  $G$  un graphe quelconque, on s'intéresse aux deux décompositions suivantes de ce graphe :

(2.i) Si  $G$  a un point d'articulation  $v$ , on notera par  $V_1, V_2, \dots, V_k$  les ensembles de sommets des composantes connexes de  $G \setminus \{v\}$  et on remplacera  $G$  par les 2 graphes

$G_1$  et  $G_2$  qui sont les sous-graphes de  $G$  induits par  $V_1 \cup \{v\}$  et  $(\bigcup_{i=2}^k V_i) \cup \{v\}$

respectivement.  $G_1$  et  $G_2$  seront appelés les deux  $v$ -composantes de  $G$ .

(2.ii) Si  $G$  a un ensemble d'articulation  $\{u,v\}$  (de cardinalité 2), on notera par  $V_1, V_2, \dots, V_k$  les ensembles de sommets des composantes connexes de  $G \setminus \{u,v\}$  et on remplacera  $G$  par  $G_1$  et  $G_2$  qui sont les sous-graphes de  $G$  induits par  $V_1 \cup \{u,v\}$  et par

$(\bigcup_{i=2}^k V_i) \cup \{u,v\}$  et auxquels on ajoute l'arête  $\{u,v\}$ .  $G_1$  et  $G_2$  sont les deux

$\{u,v\}$ -composantes de  $G$ .

On peut donc appliquer récursivement les procédures (2.i) et (2.ii) sur n'importe quel graphe  $G$  pour terminer avec une liste de graphes 3-connexes.

En utilisant le parcours descente d'abord, on peut savoir si le graphe  $G = (V,E)$  est connexe et détecter les points d'articulations de  $G$  en  $O(|V|+|E|)$  [1]. Si  $G$  est 2-connexe, on peut détecter les paires d'articulations et décomposer  $G$  en sous-graphes 3-connexes en  $O(|E|)$  [14]. Et donc les décompositions (2.i) et (2.ii) décrites ci-dessus peuvent s'exécuter en  $O(|V|+|E|)$ .

On conclut des cinq remarques du paragraphe 1 et des deux décompositions (2.i) et (2.ii) que quel que soit le graphe  $G$ , on peut :

- le réduire à l'arête simple  $e$  de la figure 5.4-b ou à un graphe 3-connexe,
- résoudre GETSP sur le graphe 3-connexe ainsi obtenu
- et déduire la solution de GETSP sur  $G$  par le procédé de retour arrière.

Cette réduction peut se présenter par la procédure récursive suivante :

```

procédure REDUCTION ( $G$ ); { le graphe  $G$  est le paramètre de cette procédure, sans
                                perte de généralité il est supposé sans point d'articu-
                                lation (voir la remarque 1.3 et la décomposition (2.i)) }
si  $G$  n'est pas 3-connexe ni isomorphe au graphe de la figure 5.4-b alors
    ◦ chercher un ensemble d'articulation de  $G$  de cardinalité 2, qu'on note  $\{s,p\}$  ;
    ◦ décomposer  $G$  en deux  $\{s,p\}$ -composantes  $G_1$  et  $G_2$  ; { voir (2.ii) }
    ◦ REDUCTION ( $G_1$ ) ; { premier appel récursif}
    ◦ REDUCTION ( $G_2$ ) ; { deuxième appel récursif}
    ◦ résoudre trois fois GETSP sur  $G'_1$  ; { voir la remarque 1.2 et la figure 5.1 ;
                                                on obtient ainsi les coûts  $M_0$ ,  $M_1$  et
                                                 $M_2$ , des trois tournées optimales }
    ◦ remplacer le graphe initial  $G$  par  $G'_2$  en posant  $\mathbf{C}(f_2) = (M_0, M_1, M_2)$  ;
                                                { voir la figure 5.2 et la remarque 1.2 }
    ◦ si le graphe  $G$  obtenu contient des sommets de degré 2 alors
        | on remplace tout sous-graphe de  $G$  formant une chaîne d'extrémités  $u$ 
        | et  $v$  par une arête simple  $e$  d'extrémités  $u$  et  $v$  { voir la remarque 1.5 }
    finsi ;
    ◦ si  $G$  admet des arêtes multiples alors
        | on le transforme en un graphe simple { comme dans la remarque 1.4 }
    finsi ;
finsi ;
finprocédure .
  
```

Nous illustrons cette séquence de réductions sur le graphe de la figure 5.5 (voir la figure 5.6).

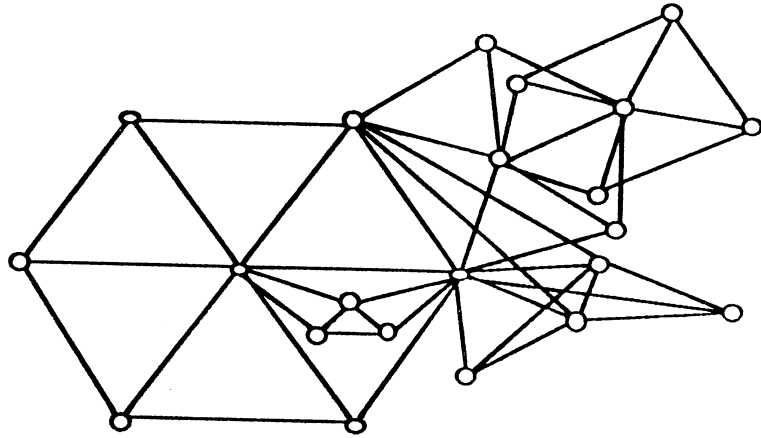


figure 5.5

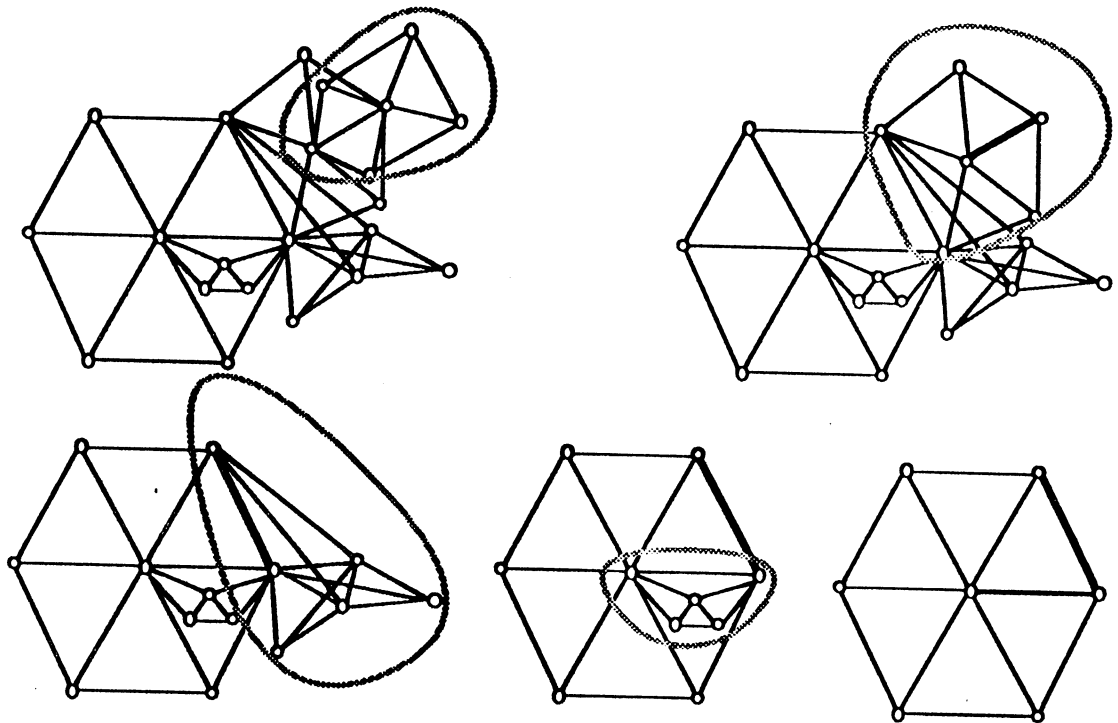


figure 5.6

### 3. Structures Irréductibles faciles pour GETSP :

On cherche dans ce paragraphe les graphes 3-connexes sur lesquels on peut résoudre GETSP.

1°) Si  $m$  est le nombre d'arêtes d'un graphe  $G$ , le nombre de tournées de ce graphe sera inférieur à  $3^m$  car quelles que soient la tournée  $T$  et l'arête  $e$  de  $G$ ,  $T$  passe 0, 1 ou 2 fois par  $G$  (ce qui correspond à trois possibilités). On en déduit que si  $m$  est tel que :  $3^m$  n'est pas très grand on pourra résoudre GETSP sur  $G$  par une énumération complète et donc on sait résoudre GETSP sur les graphes ayant un nombre petit d'arêtes.

2°) GETSP est un problème facile sur les roues :

Il faut d'abord signaler que le nombre de tournées dans une roue (figure 5.7) est exponentiel.

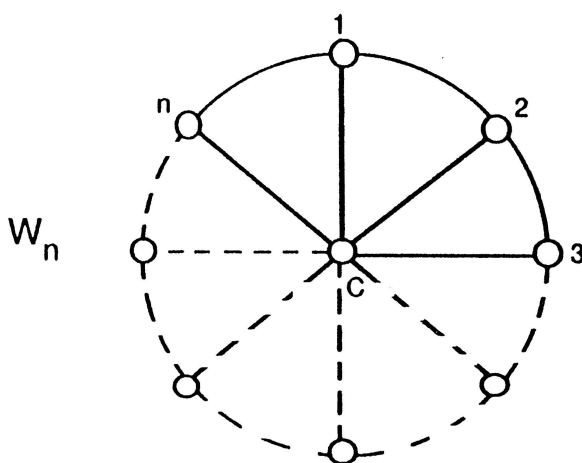


figure 5.7

En effet : le nombre d'arbres dans une roue  $W_{n+1}$  est égal au déterminant de la  $n \times n$ -matrice suivante (voir [1, page 48]) :

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & & & \vdots \\ 0 & & & -1 & 3 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

or la valeur de ce déterminant est :

$$\left[ \left( \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] - 2$$

où  $[a]$  représente le plus petit entier plus grand ou égal au réel  $a$  (voir annexe 1).

Et donc, pour résoudre GETSP sur des tels graphes on est obligé de trouver un algorithme polynomial différent de l'énumération explicite.

L'algorithme qu'on va donner se base sur la programmation dynamique et on peut le voir comme une généralisation de l'algorithme qui trouve la tournée de coût minimum sur les graphes de ramassage scolaire [11] ou sur les graphes série-parallèles [3].

Soit  $W_n$  la roue de rayons  $r_k$  et d'arêtes de jante  $j_k$ ,  $k=1, \dots, n$  (figure 5.8), on désigne par  $G^i$ ,  $i=2 \dots n$ , le sous-graphe de  $W_n$  engendré par les sommets  $C, 1, 2, \dots, i$  (voir la figure 5.9). Soit  $TG^i$  le graphe partiel défini par les arêtes appartenant à la fois à  $G^i$  et à une tournée  $T$  de  $W_n$ , on l'appellera une tournée partielle de  $W_n$  et on pourra le décrire par le quadruplet  $(a, b, c, d)$ , où  $d$  est un entier positif égal au nombre de composantes connexes de  $TG^i$  et où  $a, b$  et  $c$  appartiennent à  $\{E, U, O\}$  et contiennent les informations sur les sommets  $1, i$  et  $C$  respectivement .

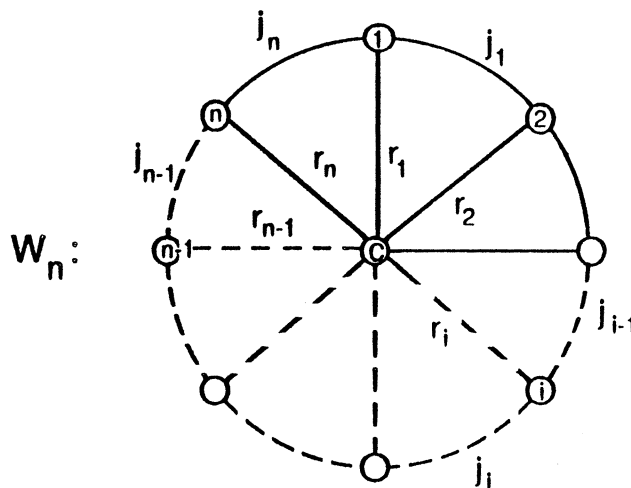


figure 5.8

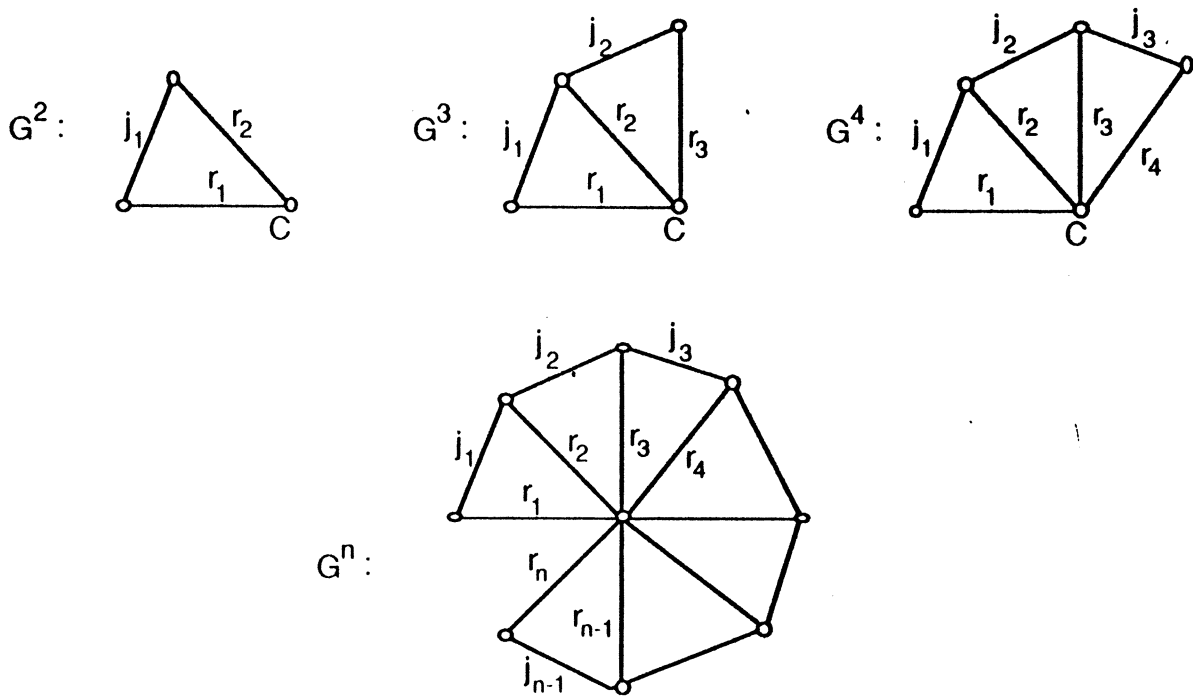


figure 5.9

- a (resp. b,c) =
- E si  $d_{T_G^i}(1)$  (resp.  $i,C$ ) est pair et si le sommet 1 (resp.  $i,C$ ) se trouve dans la même composante connexe dans  $T_G^i$  que les sommets  $i$  ou  $C$  (resp. 1 ou  $C$ ; 1 ou  $i$ )
  - O si  $d_{T_G^i}(1)$  (resp.  $i,C$ ) est pair et si le sommet 1 (resp.  $i,C$ ) ne se trouve ni avec  $i$  ni avec  $C$  (resp. ni 1 ni  $C$ ; ni 1 ni  $i$ ) dans la même composante connexe de  $T_G^i$
  - U si le degré du sommet 1 (resp.  $i,C$ ) est impair dans  $T_G^i$ .

On notera par  $(a,b,c,d) (G^i)$  la classe des tournées partielles de  $G^i$  décrites par le quadruplet  $(a,b,c,d)$  et par  $[a,b,c,d] (G^i)$  la valeur de la tournée partielle de coût minimum dans la classe  $(a,b,c,d) (G^i)$ .

Nous posons le problème suivant :

**(Pb 3.1)** Pour tout quadruplet  $(a,b,c,d)$  possible, calculer  $[a,b,c,d] (G^{i+1})$  en fonction de  $[a,b,c,d] (G^i)$ ,  $c_0(j_i)$ ,  $c_1(j_i)$ ,  $c_2(j_i)$ ,  $c_0(r_{i+1})$ ,  $c_1(r_{i+1})$  et  $c_2(r_{i+1})$ . (Sous-entendu les  $[a,b,c,d] (G^k)$  sont calculés par rapport aux sommet 1,  $k$  et  $C \forall k = 2, \dots, n$ ).

On commence par chercher toutes les valeurs possibles du quadruplet  $(a,b,c,d)$  :

**PROPOSITION 3.1**

Le quadruplet  $(a,b,c,d)$  ne peut prendre que les onze valeurs suivantes :

- |                |                |               |
|----------------|----------------|---------------|
| 1°) (E,E,O,2)  | 2°) (E,O,E,2)  | 3°) (O,E,E,2) |
| 4°) (U,U,E,1)  | 5°) (U,E,U,1)  | 6°) (E,U,U,1) |
| 7°) (U,U,O,2)  | 8°) (U,O,U,2)  | 9°) (O,U,U,2) |
| 10°) (E,E,E,1) | 11°) (O,O,O,3) |               |

(voir la figure 5.10 où on donne un exemple de chacune de ces valeur)

Démonstration :

La tournée partielle  $T_{G^i}$  ne peut pas avoir plus que 3 composantes connexes. En effet, supposons qu'elle a 4 composantes connexes, ceci veut dire qu'au moins l'une de ces composantes ne contient pas le sommet 1, ni  $i$ , ni  $C$  et par conséquent la tournée  $T$  de  $G$  ne pourra jamais être connexe. Donc "d" ne peut prendre que les valeurs 1, 2 ou 3.

D'autre part, on sait que tous les sommets de  $T$  sont pairs donc quel que soit le sommet  $v$  de  $G^i$  différent de 1,  $i$  ou  $C$ , il doit avoir un degré pair. Or, puisque le nombre de sommets impairs dans un graphe est pair on ne peut avoir que les 4 cas suivants sur la parité de 1,  $i$  et  $C$  :

- 1°) 1,  $i$  et  $C$  sont pairs
- 2°) 1 et  $i$  sont impairs,  $C$  est pair
- 3°) 1 et  $C$  sont impairs,  $i$  est pair
- 4°)  $i$  et  $C$  sont impairs, 1 est pair.

On en déduit que :

$d = 3$  implique que 1,  $i$  et  $C$  se trouvent dans 3 composantes connexes différentes et la tournée partielle  $T_{G^i}$  appartient forcément à la classe  $(O,O,O 3)$ .

$d = 2$  implique que l'un des sommets 1,  $i$  ou  $C$  se trouve tout seul dans une composante connexe de  $T_{G^i}$  et les deux autres sommets se trouvent ensemble dans

une autre composante. Donc  $T_{G^i}$  ne peut appartenir qu'à l'une des classes  $(E,E,O,2)$ ,  $(E,O,E,2)$ ,  $(O,E,E,2)$ ,  $(U,U,O,2)$ ,  $(U,O,U,2)$  ou  $(O,U,U,2)$ .

$d = 1$  implique que  $T_{G^i}$  appartient à l'une des classes  $(E,E,E,1)$ ,  $(U,U,E,1)$ ,  $(U,E,U,1)$  ou  $(E,U,U,1)$ .  $\square$

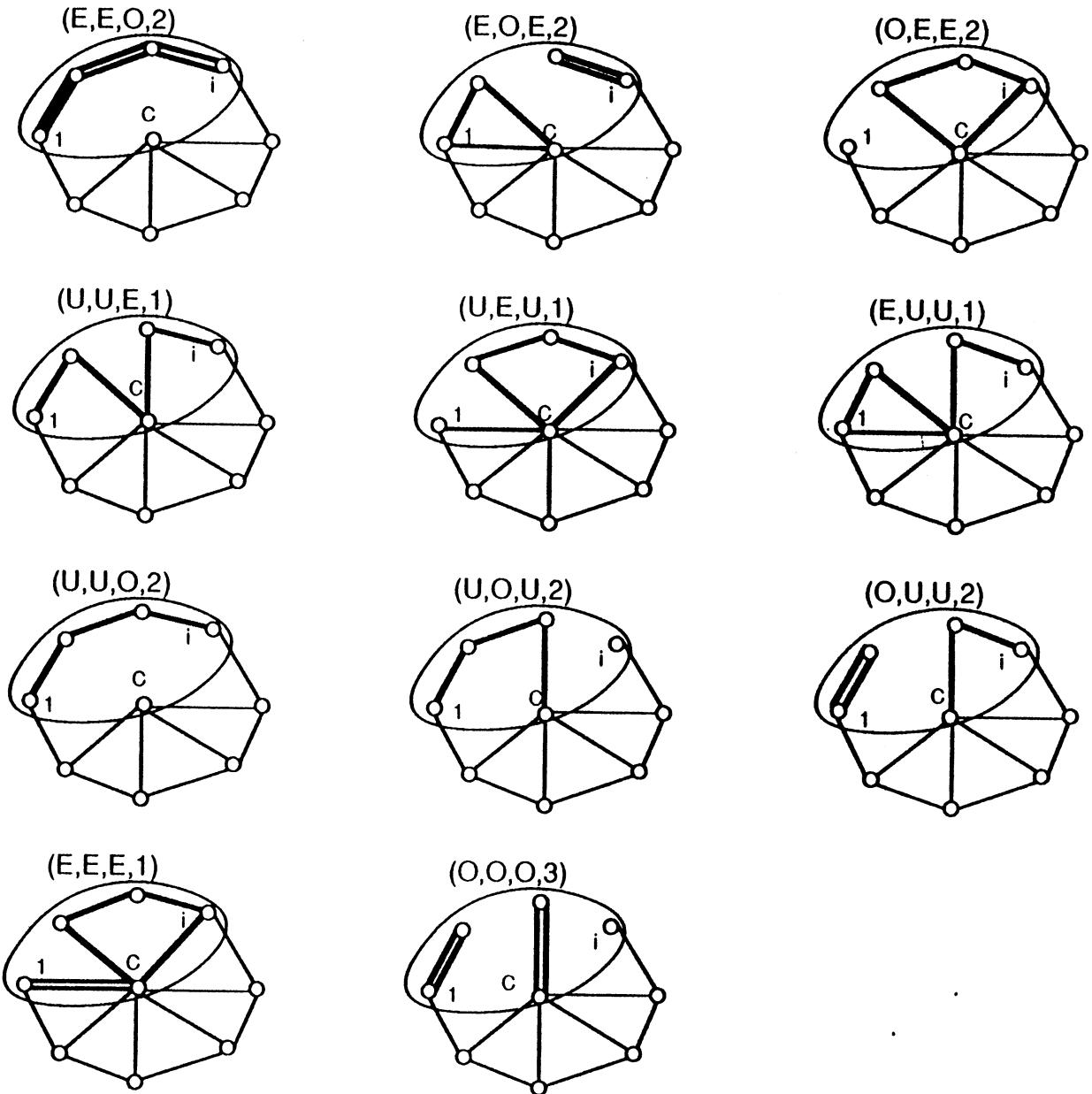


figure 5.10



**Conclusion 3.1 :**

Le problème du voyageur de commerce généralisé est polynomial sur les roues. Autrement dit, si  $W_n$  est une roue à  $n+1$  sommets, les formules de récurrences de la proposition A2.1 (annexe 2) résolvent Pb3.1. Et donc on peut trouver l'optimum de GETSP sur  $W_n$  en un temps linéaire par rapport à  $n$ , en appliquant un algorithme de programmation dynamique qui a comme états les sous-graphes  $G^k$ ,  $k = 2, \dots, n$ , comme variables d'état les 11 valeurs du quadruplet  $[a, b, c, d]$ , comme variables de décision à l'étape  $k$  les valeurs qui correspondent au nombre de fois que la tournée doit passer par les arêtes  $j_{k-1}$  et  $r_k$  et comme équations de récurrences les équations des propositions A2.1 et A2.2 de l'annexe 2.

**Remarque 3.1 :**

Il existe plusieurs algorithmes pour résoudre GETSP sur les roues, l'intérêt de l'algorithme qu'on vient de décrire est double : d'abord sa complexité ( $O(n)$ ), ensuite sa souplesse pour une généralisation, on peut utiliser en effet, ses même variables d'état pour la résolution des graphes 3-connexes et pas 4-connexes qu'on peut construire systématiquement.

Cependant, on aurait pu résoudre ce problème par une méthode qui se sert des algorithmes polynomiaux résolvant GETSP sur les graphes série-parallèles car :

il n'existe que  $n$  tournées  $T_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , de  $W_n$ , qui utilisent toute les arêtes de jante de cette roue (une telle tournée  $T_i$  consiste à prendre une et une seule fois chaque arête de jante et deux fois le rayon  $r_i$ ). D'autre part, on sait qu'une roue moins une arête de jante forme un graphe série-parallèle, on résoud donc  $n$  fois GETSP sur  $W_n - \{j_k\}$  pour  $k = 1, \dots, n$ , et à chaque fois on suppose qu'on obtient la tournée optimale  $T_{n+k}$ . On en déduit la tournée minimale de  $W_n$  qui est la tournée de coût minimum dans l'ensemble  $\{T_i, i = 1, \dots, 2n\}$ .

L'inconvénient de cet algorithme est qu'il est en  $O(n^2)$  car il nous faut résoudre  $n$  fois un algorithme en  $O(n)$  sur les graphes série-parallèles.

**3°) GETSP est un problème facile sur les hélices :**

Soit  $H_n$  l'hélice de la figure 5.11. On désigne par  $G^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , le sous-graphe de  $H_n$  engendré par les sommets  $C, C', C'', 1, 2, \dots, i-1$  et  $i$ . Soit  $TG^i$  le graphe partiel

défini par les arêtes appartenant à la fois à  $G^i$  et à la tournée  $T$ , on l'appellera une tournée partielle de  $H_n$  et on pourra le décrire par le quadruplet  $(a,b,c,d)$ , où  $d$  est un entier positif égal au nombre de composantes connexes dans  $TG^i$  et où  $a, b$  et  $c$  appartiennent à  $\{E,U,O\}$  et contiennent les informations sur les sommets  $C, C'$  et  $C''$  respectivement :

- |                 |   |
|-----------------|---|
| a (resp. b,c) = | <ul style="list-style-type: none"> <li>E si <math>d_{TG^i}(C)</math> (resp. <math>C', C''</math>) est pair et si le sommet <math>C</math> (resp. <math>C', C''</math>) se trouve dans la même composante connexe que le sommet <math>C'</math> ou <math>C''</math> (resp. <math>C</math> ou <math>C''</math>; <math>C</math> ou <math>C'</math>) dans <math>TG^i</math></li> <li>O si <math>d_{TG^i}(C)</math> (resp. <math>C', C''</math>) est pair et si <math>C</math> (resp. <math>C', C''</math>) ne se trouve pas avec <math>C'</math> ni avec <math>C''</math> (resp. <math>C</math> ni <math>C''</math>; <math>C</math> ni <math>C'</math>) dans la même composante connexe de <math>TG^i</math></li> <li>U si le degré du sommet <math>C</math> (resp. <math>C', C''</math>) est impair dans <math>TG^i</math>.</li> </ul> |
|-----------------|---|

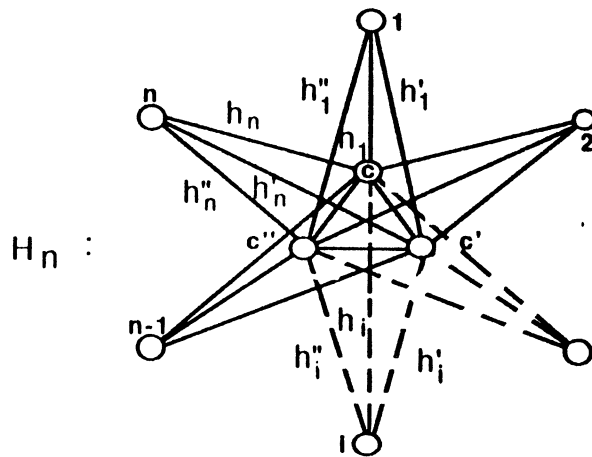


figure 5.11

Nous établissons le problème suivant :

**(Pb 3.2)** Pour tout quadruplet  $(a,b,c,d)$  possible, calculer  $[a,b,c,d](G^{i+1})$  en fonction des  $[a,b,c,d](G^i)$ ,  $c_0(h_{i+1})$ ,  $c_1(h_{i+1})$ ,  $c_2(h_{i+1})$ ,  $c_0(h'_{i+1})$ ,  $c_1(h'_{i+1})$ ,  $c_2(h'_{i+1})$ ,  $c_0(h''_{i+1})$ ,  $c_1(h''_{i+1})$  et  $c_2(h''_{i+1})$  (figure 5.12).

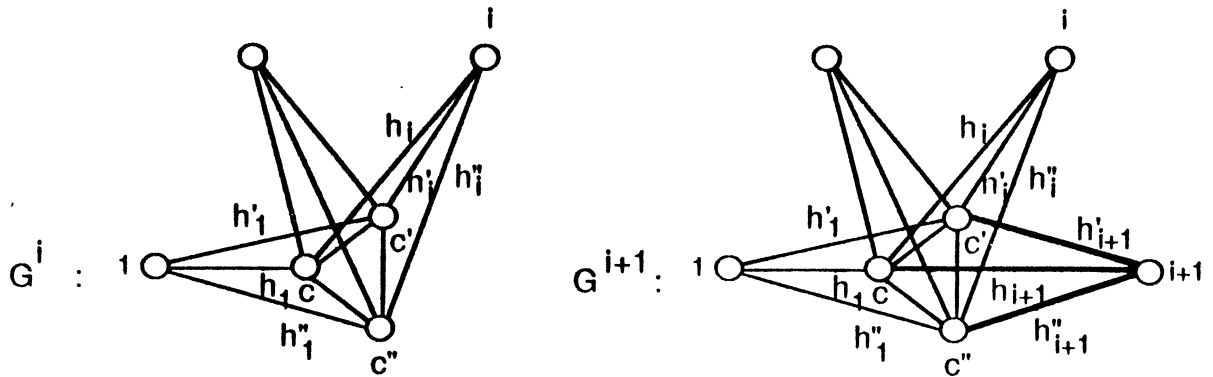


figure 5.12

On démontre comme pour les roues que  $(a,b,c,d)$  ne peut prendre que les onze valeurs de la proposition 3.1 et que GETSP est polynomial sur  $H_n$ . L'algorithme polynomial est un algorithme de programmation dynamique ayant comme étapes les  $G^i, i = 1, \dots, n$ , et comme formules de récurrences les équations des propositions A2.3 et A2.4 de l'annexe 2.

#### 4°) GETSP est polynomial sur les hélices généralisées :

On considère l'hélice généralisée  $H_n^l$  qui est formée de  $n+l$  sommets  $y_1, y_2, \dots, y_l$  et  $x_1, x_2, \dots, x_n$  où les sommets  $y_i, i = 1, \dots, l$  forment une clique, les sommets  $x_j, j = 1, \dots, n$  forment un stable et où  $x_j$  et  $y_i$  sont adjacents quel que soit  $j = 1, \dots, n$  et quel que soit  $i = 1, \dots, l$ . On remarque que pour  $l=3$ ,  $H_n^3$  n'est autre que l'hélice  $H_n$  traitée ci-dessus.

Si  $l$  n'est pas très grand, on pourra résoudre GETSP sur  $H_n^l$  par un algorithme en  $O(n)$ , qui généralise l'algorithme que nous avons décrit sur les hélices ; il suffit de remplacer le quadruplet qui contient les informations sur les 3 sommets centraux de  $H_n$  par un  $l+1$ -uplet contenant les informations sur les  $l$  sommets  $y_1, \dots, y_l$  et de prendre comme étapes de l'algorithme de programmation dynamique les  $n$  sous-graphes de  $H_n^l, H_i^l, i = 1, \dots, n$ .

#### 5°) GETSP est polynomial sur la grille ayant un nombre petit de lignes :

Soit  $G_n^k$  une grille à  $k$  lignes et  $n$  colonnes (voir la figure 5.13), on peut calculer, de la même façon la tournée optimale de GETSP sur  $G_n^k$ , en prenant comme étapes de l'algorithme les  $n$  sous-graphes  $G_i^k, i = 1, \dots, n$  et comme états au  $i^{\text{ème}}$  étape toutes

les valeurs du  $k+1$ -uplet contenant les informations sur les sommets de la  $j^{\text{ème}}$  colonne. La complexité de cet algorithme est en  $O(2^k \cdot n)$ , donc linéaire en  $n$  si  $2^k$  n'est pas très grand.

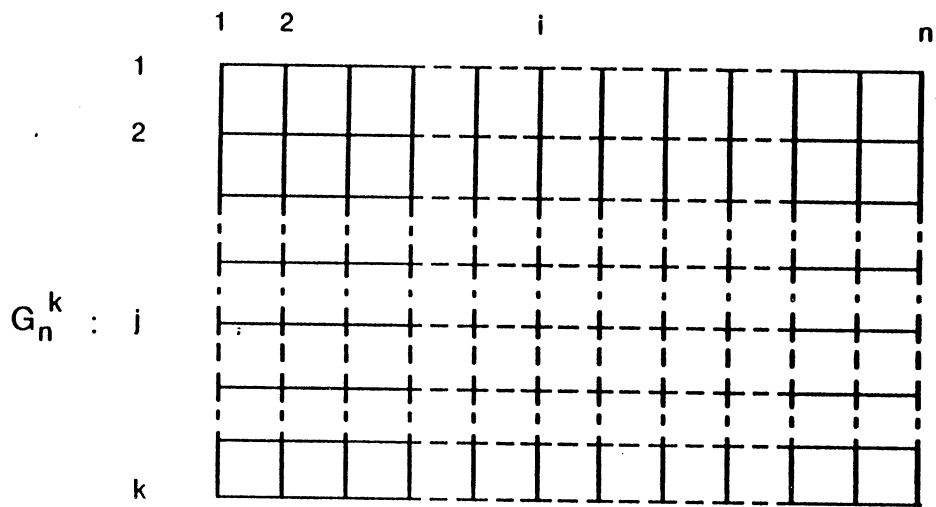


figure 5.13

6°) GETSP est un problème facile sur les graphes de Halin :

Un graphe de Halin  $\mathcal{H}$  est construit de la manière suivante :

On part d'un arbre  $\mathcal{A}$  ayant  $k$  sommets de degré 1 et sans sommets de degré 2, on le plonge dans le plan sans faire croiser deux de ses arêtes et on lui ajoute  $k$  nouvelles arêtes formant un cycle élémentaire  $\mathcal{C}$  ayant comme sommets les sommets de  $\mathcal{A}$  de degré 1, de façon à ce que le graphe  $\mathcal{H}$  résultant reste planaire (figure 5.14). Nous écrivons  $\mathcal{H} = \mathcal{A} \cup \mathcal{C}$ .

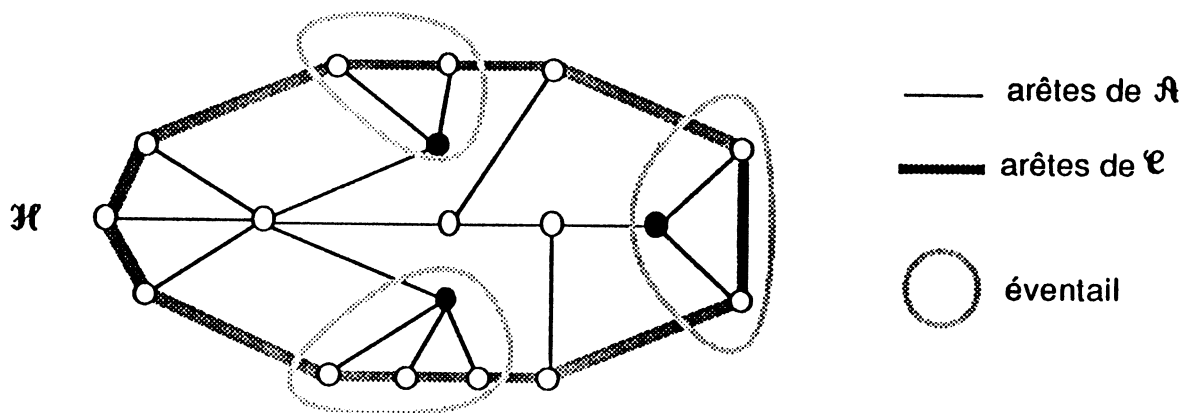


figure 5.14

Les graphes de Halin possèdent des propriétés très intéressantes (voir par exemple [13,15]). Cornuéjols, Naddef et Pulleyblank [6] ont démontré que TSP est polynomial sur ces graphes. Nous étendons leur résultat ici pour démontrer que GETSP l'est aussi.

La roue est le graphe de Halin le plus simple, son arbre de départ est une étoile formée d'un sommet  $v$  relié à  $n$  autres sommets de degré 1. Soient  $\mathcal{H} = \mathcal{A} \cup \mathcal{C}$  un graphe de Halin qui n'est pas une roue (on suppose que  $\mathcal{A}$  a au moins 2 sommets de degré plus grand ou égal que 3) et  $w$  un sommet de degré strictement plus grand que un dans  $\mathcal{A}$  adjacent à un et un seul sommet de degré différent de 1 dans  $\mathcal{A}$ , en notant par  $\mathcal{C}(w)$  l'ensemble des sommets de  $\mathcal{A}$  de degré 1 qui sont adjacents à  $w$ , il est facile de voir que le sous-graphe de  $\mathcal{C}$  induit par  $\mathcal{C}(w)$  est une chaîne (connexe). Le sous-graphe de  $\mathcal{H}$  induit par  $\{w\} \cup \mathcal{C}(w)$  sera appelé un éventail de centre  $w$ . Dans la figure 5.14 les sommets en noir sont les centres des éventails qui sont entourés par des courbes en pointillé.

Quelques lemmes utiles:

### Lemme 3.1

Tout graphe de Halin qui n'est pas une roue admet au moins deux éventails.

### Lemme 3.2

Si  $\mathcal{E}$  est un éventail d'un graphe de Halin  $\mathcal{H}$  alors le graphe réduit  $\mathcal{H} \times \mathcal{E}$  restera un graphe de Halin.

On peut trouver la démonstration de ces deux lemmes dans [6].  $\square$

Pour résoudre GETSP sur un graphe de Halin  $\mathcal{H}$  on peut distinguer les 2 cas suivants :

- 1°)  $\mathcal{H}$  est une roue
- 2°)  $\mathcal{H}$  n'est pas une roue.

Le premier cas a déjà été résolu ci-dessus. Nous ne nous intéresserons dans la suite qu'à la résolution du second :

On sait d'après le lemme 3.1 que  $\mathcal{H}$  a au moins deux éventails; soient  $\mathcal{E}$  un

éventail quelconque de  $\mathcal{H}$ ,  $v$  le centre de  $\mathcal{E}$  et  $u_1, u_2, \dots, u_r$ , avec  $r \geq 2$ , les sommets de  $\mathcal{E}(v)$  numérotés dans l'ordre de leur apparition sur  $\mathcal{E}$  en suivant le sens positif ;  $u_1$  et  $u_r$  seront appelés respectivement l'origine et l'extrémité de  $\mathcal{E}$ . On peut remarquer que le cocycle  $\delta(V(\mathcal{E}))$  contient exactement 3 arêtes  $j, k$  et  $l$  qui forment un couplage dans  $\mathcal{H}$  et qui sont incidentes à l'origine le centre et l'extrémité de  $\mathcal{E}$  (figure 5.15).

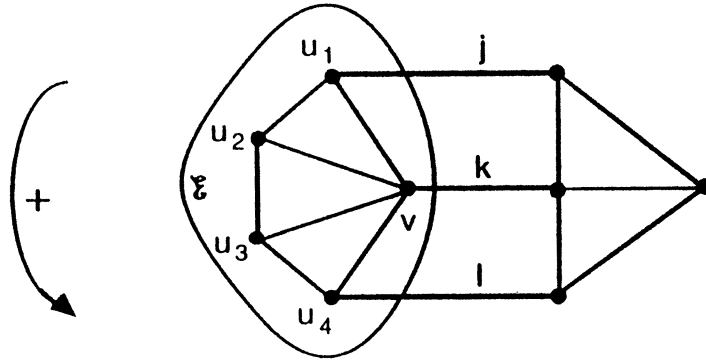


figure 5.15

Nous pouvons donc former une famille d'ensembles gigognes "nested" de sommets de  $\mathcal{H}$  à partir de l'algorithme suivant :

### Algorithme 3.1 :

$\mathcal{H}$  est un graphe de Halin. On cherche un éventail  $\mathcal{E}_1$  dans  $\mathcal{H}$  qu'on contracte. Le graphe obtenu reste un graphe de Halin (lemme 3.2) et il contient d'après le lemme 3.1 un autre éventail  $\mathcal{E}_2$  qu'on contracte. On répète ce processus (en appelant  $\mathcal{E}_i$  le  $i^{\text{ème}}$  éventail contracté) jusqu'à ce qu'on réduise le graphe à une roue. On considère ensuite la roue obtenue moins une arête de jante comme un éventail et on le contracte pour obtenir une boucle.

Par un procédé de retour en arrière, on emboîte les sommets de  $\mathcal{H}$  qui ont été contractés ensemble et on se retrouve avec une famille d'ensembles gigognes de sommets de  $\mathcal{H}$  qu'on appelle boîtes. La boîte qui correspond à  $\mathcal{E}_i$  sera notée  $\mathcal{B}_i, \forall i$ . Le centre, l'origine et l'extrémité de la boîte  $\mathcal{B}_i$  sont le centre, l'origine et l'extrémité de l'éventail  $\mathcal{E}_i$ . (On montre dans la figure 5.16 une telle famille de boîtes gigognes,  $v, u_1, \dots, u_r$  sont le centre, l'origine et l'extrémité de la boîte  $\mathcal{B}_3$ ).

On distingue deux sortes de boîtes, celles qui sont des éventails (voir la boîte  $\mathcal{B}_1$  sur la figure 5.16) et celles qui ne le sont pas comme la boîte  $\mathcal{B}_3$  (fig. 5.16).

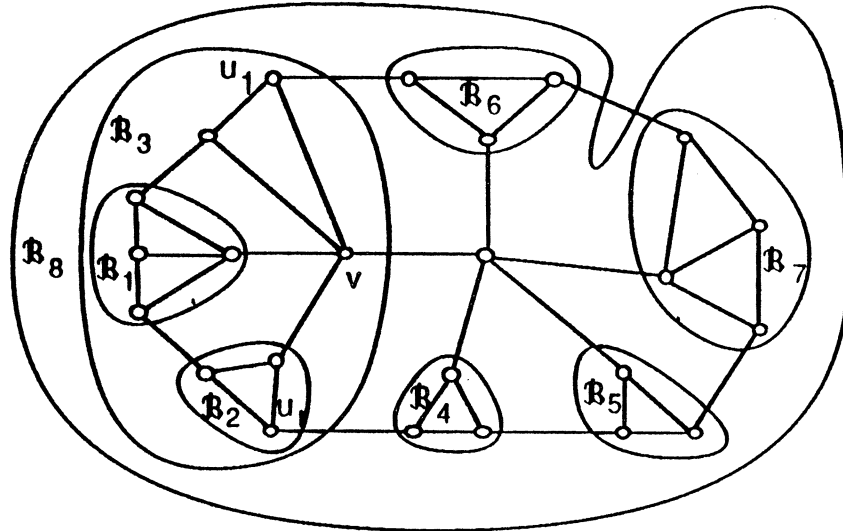


figure 5.16

.Si la boîte  $\mathcal{B}_i$  n'est pas un éventail, elle contient forcément d'autres boîtes et donc on peut représenter  $\mathcal{B}_i$  par son centre  $C$  et par les boîtes  $\mathcal{B}_{ij}$ ,  $j = 1, \dots, m$ , qui sont directement incluses dans  $\mathcal{B}_i$  (directement incluse veut dire qu'il n'existe pas de boîte  $\mathcal{B}$  contenue dans  $\mathcal{B}_i$  telle que  $\mathcal{B}_{ij}$  est contenue dans  $\mathcal{B}$ ),  $C$  est relié au centre de  $\mathcal{B}_{ij}$  par l'arête  $e_j$ ,  $\forall j = 1, \dots, m$  et l'extrémité de  $\mathcal{B}_{ij}$  est reliée à l'origine de  $\mathcal{B}_{i,j+1}$  par l'arête  $u_j$   $\forall j = 1, \dots, m$ . On considère parfois un sommet comme une boîte fictive dans ce cas l'origine, l'extrémité et le centre de cette boîte sont confondus (voir la figure 5.17 où  $\mathcal{B}_{i3}$  et  $\mathcal{B}_{im}$  sont des sommets).

On désigne par  $G^j$ ,  $j = 1, \dots, m$ , le sous-graphe de  $\mathcal{B}_i$  engendré par  $C$  et les sommets des boîtes  $\mathcal{B}_{i1}, \dots, \mathcal{B}_{ij}$  (sous-entendu  $\mathcal{B}_i = G^m$  sur la figure 5.17). Soient  $T$  une tournée de  $\mathcal{H}$  et  $T_G$  le graphe partiel défini à partir des arêtes commune à  $T$  et  $G^j$ . On peut décrire  $T_G$  par le quadruplet  $(a,b,c,d)$  où  $d \in \{1,2,3\}$  désigne le nombre de composantes connexes de  $T_G$  et  $a,b,c \in \{E,U,O\}$  contiennent les informations sur  $u_1$  l'origine de  $\mathcal{B}_{i1}$ , l'extrémité  $u_j$  de  $\mathcal{B}_{ij}$  et le centre  $C$  respectivement.

- a (resp. b,c) =
- E si le degré de  $u_1$  (resp.  $u_j, C$ ) est pair dans  $T_{G^i}$  et si  $u_1$  (resp.  $u_j, C$ ) se trouve dans une même composante connexe de  $T_{G^i}$  que  $u_j$  ou  $C$  (resp.  $u_1$  ou  $C$ ;  $u_1$  ou  $u_j$ )
  - O si le degré de  $u_1$  (resp.  $u_j, C$ ) est pair dans  $T_{G^i}$  et si  $u_1$  (resp.  $u_j, C$ ) ne se trouve avec ni  $u_j$  ni avec  $C$  (resp.  $u_1$  ni  $C$ ;  $u_1$  ni  $u_j$ ) dans une même composante connexe de  $T_{G^i}$
  - U si le degré du sommet  $u_1$  (resp.  $u_j, C$ ) est impair dans  $T_{G^i}$

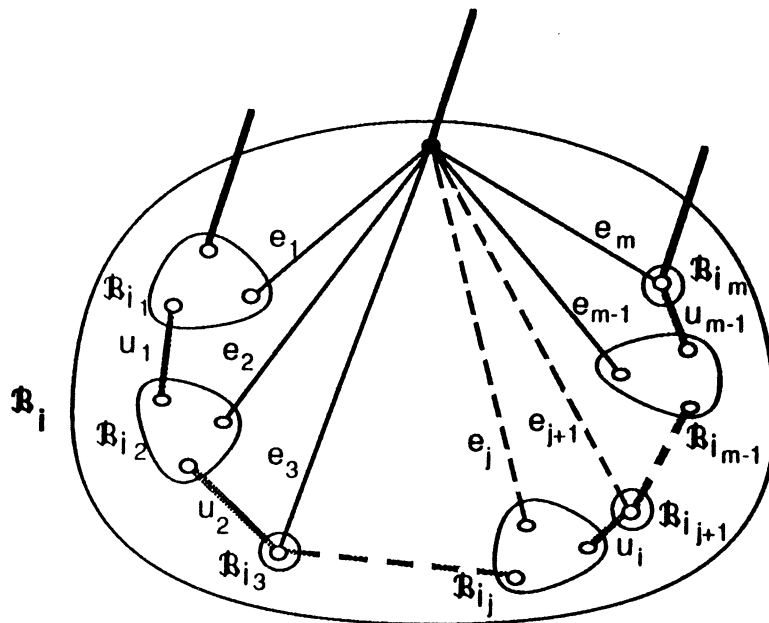


figure 5.17

On peut remarquer comme dans le cas des hélices et des roues que le quadruplet  $(a,b,c,d)$  appartient à l'ensemble:

$$A = \{ (E,E,O,2), (E,O,E,2), (O,E,E,2), (U,U,E,1), (U,E,U,1), (E,U,U,1), \\ (U,U,O,2), (U,O,U,2), (O,U,U,2), (E,E,E,1), (O,O,O,3) \}$$

qui est de cardinalité 11.

On notera par  $[a,b,c,d] (G^i)$  la valeur de la tournée partielle de coût minimum dans la classe  $(a,b,c,d) (G^i)$ ,  $\forall (a,b,c,d) \in A$ . Et nous posons le problème suivant :



$\forall (a,b,c,d) \in A$ , calculer  $[a,b,c,d](G^{j+1})$  en fonction de  $[a,b,c,d](G^j)$ ,  $[a,b,c,d](\mathcal{B}_{ij+1})$ ,  $c_0(e_{j+1})$ ,  $c_1(e_{j+1})$ ,  $c_2(e_{j+1})$ ,  $c_0(u_j)$ ,  $c_1(u_j)$  et  $c_2(u_j)$ .

Pour résoudre ce problème on distinguera deux cas :

1° cas) si  $\mathcal{B}_{ij+1}$  est une boîte fictive formée d'un seul sommet, on calculera  $[a,b,c,d](G^{j+1})$ ,  $\forall (a,b,c,d) \in A$  à partir des équations des récurrences de la proposition A2.1 (annexe 2).

2° cas) si  $\mathcal{B}_{ij+1}$  est une boîte réelle, on calculera  $[a,b,c,d](G^{j+1})$ ,  $\forall (a,b,c,d) \in A$  à partir des équations des récurrences de la proposition A3.1 (annexe 3) .

On conclut donc que GETSP est polynomial sur les graphes de Halin car calculer  $[a,b,c,d](G^i)$  à partir de  $[a,b,c,d](G^{i-1})$   $\forall (a,b,c,d)$  et  $\forall i$ , demande un nombre constant d'opérations qui ne dépend pas du nombre de sommets de  $G^i$  (pour cela on utilise les formules de la proposition A3.1 (annexe 3) en faisant 68 comparaisons et 198 additions). Donc si  $\mathcal{H}$  a  $n$  sommets on fera au plus  $266n$  opérations avant de trouver sa tournée optimale et par conséquent l'algorithme décrit est en  $O(n)$ .  $\square$

#### 4. Conséquences et remarques :

Dans ce paragraphe, nous allons tirer des résultats trouvés ci-dessus quelques conséquences sur la complexité de GETSP quand on restreint ce problème sur une classe donnée de graphes.

##### 1° conséquence :

GETSP est polynomial sur la classe des graphes qui ne contiennent pas le mineur  $M_3$  (voir la figure 5.18) .

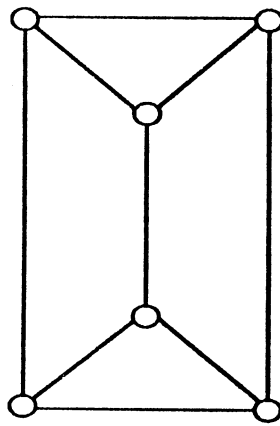
$M_3$  :

figure 5.18

Nous commençons par caractériser cette classe de graphe qu'on appelle (L) :

Dirac [7] a trouvé la liste exhaustive des graphes 3-connexes maximaux qui ne sont pas réductibles à  $M_3$  (maximal au sens que si on ajoute une arête "e" à  $G \in (L)$ , le graphe  $G \cup \{e\}$  obtenu contiendra  $M_3$  comme mineur). Cette liste est formée des graphes de la figure 5.19 qui sont :

- 1) Les graphes complets  $K_n, \forall n \leq 5$ .
- 2) Les roues  $W_n, \forall n \geq 3$ .
- 3) Les hélices  $P_{3,n}, \forall n \geq 3$ .

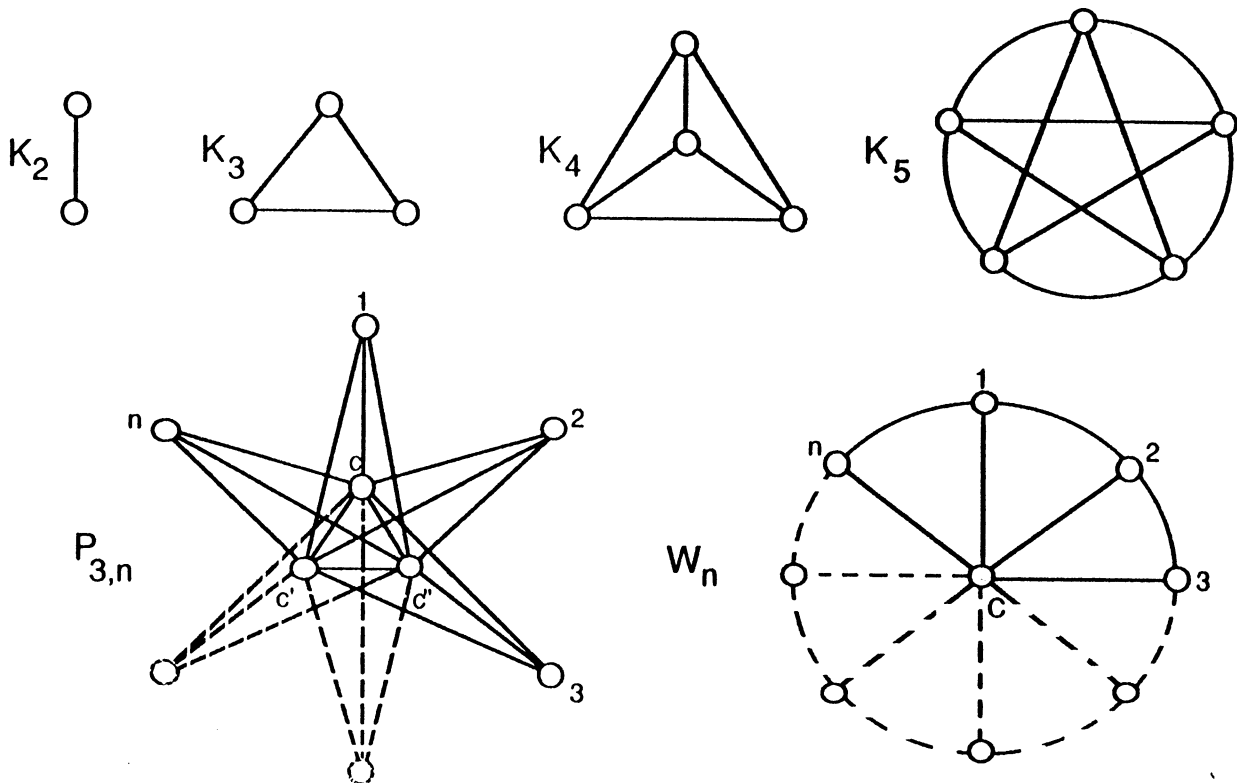


figure 5.19

Pour caractériser tous les graphes de (L) à partir des graphes 3-connexes de Dirac, on a besoin des deux définitions suivantes :

**Définition 4.1** (l'opération 1-somme)

Soient  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$  deux graphes distincts, on suppose que  $|V_i| \geq 2, i=1,2$ .

On appelle 1-somme de  $G_1$  et  $G_2$  (par rapport à  $v_1 \in V_1$  et  $v_2 \in V_2$ ) le graphe  $G$  obtenu en identifiant les sommets  $v_1$  et  $v_2$  (figure 5.20), on note  $G = G_1 \llbracket 1 \rrbracket G_2$ . Le nouveau sommet  $v$  obtenu par identification de  $v_1$  et  $v_2$  est un point d'articulation de  $G$  (i.e.  $G \setminus \{v\}$  n'est pas connexe).

**Définition 4.2** (l'opération 2-somme)

Soient  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$  deux graphes distincts, on suppose que  $|V_i| \geq 3, i=1,2$ .

On appelle 2-somme de  $G_1$  et  $G_2$  (par rapport à  $e_1 \in E_1$  et  $e_2 \in E_2$ ) le graphe  $G$  obtenu en identifiant les arêtes  $e_1$  et  $e_2$  et bien sûr les extrémités de  $e_1$  et  $e_2$  (figure 5.21), on note  $G = G_1 \llbracket 2 \rrbracket G_2$ . Les extrémités de la nouvelle arête  $e$  obtenue par identification de  $e_1$  et  $e_2$  forment un ensemble d'articulation de  $G$ .

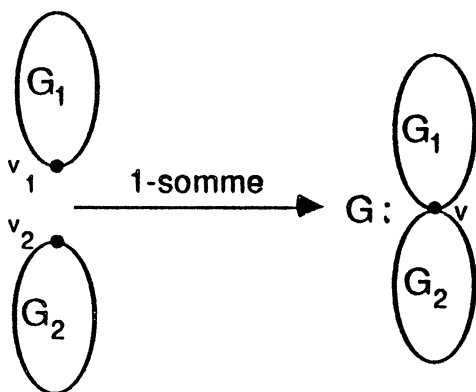


figure 5.20

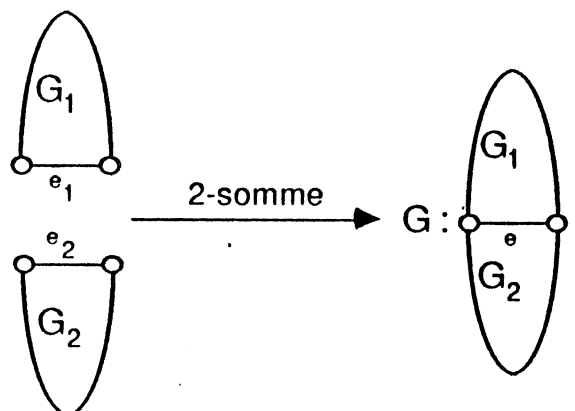


figure 5.21

**PROPOSITION 4.1**

Soit  $G$  un graphe quelconque obtenu par l'opération de 1-somme ou 2-somme sur deux graphes 3-connexes  $G_1$  et  $G_2$  ( $G = G_1 \llcorner 1 \llcorner G_2$  ou  $G_1 \llcorner 2 \llcorner G_2$ ) alors  $G$  est maximal dans  $(L)$  si et seulement si  $G_1$  et  $G_2$  le sont aussi.

La démonstration est triviale dans le sens qui dit que si  $G$  est maximal dans  $(L)$  alors  $G_1$  et  $G_2$  sont dans  $(L)$  et maximaux dans cette classe. On s'intéresse donc au sens inverse et on va prouver que si  $G_1$  et  $G_2$  sont maximaux dans  $(L)$  ceci entraîne que  $G \in (L)$  et est maximal :

- $G$  appartient à  $(L)$  :

Si  $G$  contient le mineur  $M_3$ , on trouvera forcément ce mineur dans l'un des deux graphes  $G_1$  ou  $G_2$  puisque  $M_3$  est 3-connexe (d'où la contradiction).

- $G$  est maximal dans  $(L)$  :

(on s'intéresse seulement aux cas où  $G_1$  et  $G_2$  sont des roues ou des hélices)

Si  $G$  n'est pas maximal dans  $(L)$ , on pourra rajouter une arête  $e$  entre deux sommets  $x$  et  $y$  de  $G$  sans avoir le mineur  $M_3$  dans le graphe obtenu.

$x$  et  $y$  ne peuvent pas appartenir au même graphe  $G_1$  ou  $G_2$  sinon on contredit l'hypothèse que  $G_1$  et  $G_2$  sont maximaux.

Si  $x$  est dans  $G_1$  et  $y$  dans  $G_2$  on distingue les deux cas suivants :

1° cas)  $G = G_1 \llcorner 1 \llcorner G_2$

En contractant les sommets de  $G_1$  par exemple, on obtient le graphe  $G_2$  auquel on a ajouté une arête, mais puisque  $G_2$  est maximal dans  $(L)$  on peut conclure que le nouveau graphe contient  $M_3$  comme mineur.

2° cas)  $G = G_1 \llcorner 2 \llcorner G_2$

$G$  admet un seul ensemble d'articulation de cardinalité 2 ; en lui rajoutant l'arête  $\{x,y\}$  il devient 3-connexe, mais ce graphe n'est pas une roue ni une hélice et donc il contient le mineur  $M_3$  d'après Dirac [7]. □

Pour trouver la tournée minimum de GETSP sur un graphe  $G = (V,E)$  maximal dans  $(L)$ , on réduit ce graphe à l'arête simple de la figure 5.4-b ou à un graphe 3-connexes isomorphe à l'une des structures de la figure 5.19 ; ceci on utilisant la

procédure récursive "REDUCTION" du paragraphe 2. On résout GETSP sur le graphe réduit puis on fait un retour en arrière pour retrouver la solution sur  $G$  le "graphe de départ". On remarque que les graphes  $G'_i$ ,  $i = 1$  et  $2$ , qu'on a à résoudre dans la procédure "REDUCTION" correspondent à l'une des structures 3-connexes de Dirac.  $G'_i$ ,  $i = 1$  ou  $2$ , est donc soit un graphe complet à moins que 5 sommets, soit une roue  $W_n$ ,  $n \geq 3$ , soit une hélice  $P_{3,n}$ ,  $n \geq 3$ . Et dans chacun de ces cas on sait résoudre GETSP (voir le paragraphe précédent).

D'après les formules de récurrences des propositions A2.1, A2.2 et A2.3 de l'annexe 2, on peut calculer (par la programmation dynamique) en un temps linéaire en  $n$  la tournée optimale de  $W_n$  ou de  $H_n$ . D'autre part la réduction du graphe  $G$  appartenant à  $(L)$  demande un nombre d'opérations en  $O(|V|+|E|)$  (voir paragraphe 2), c'est-à-dire en  $O(|V|)$  quand  $G$  appartient à  $(L)$  car le nombre d'arêtes dans une roue  $W_n$  est égal à  $2n$  et dans une hélice  $H_n$  est  $3(n+1)$ . On en conclut qu'on peut trouver l'optimum de GETSP sur  $G$  en un temps linéaire par rapport à  $|V|$ .  $\square$

2° conséquence :

GETSP est polynomial sur la classe des graphes qui ne contiennent pas le mineur  $K_5 - \{e\}$  (figure 5.22).

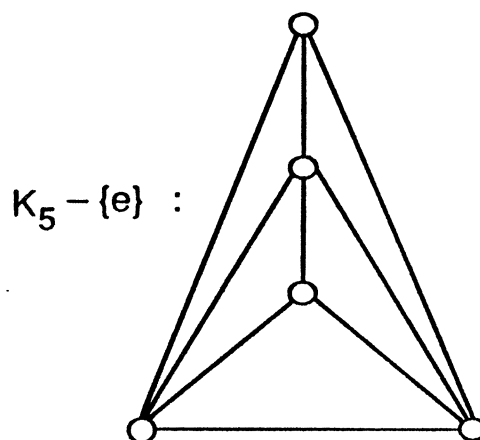


figure 5.22

Wagner a démontré que tout graphe maximal dans la classe des graphes non réductibles à  $K_5 - \{e\}$  (figure 5.22) peut être obtenu en répétant les applications des opérations 1-somme et 2-somme sur les graphes 3-connexes de la figure 5.23 [2,18].

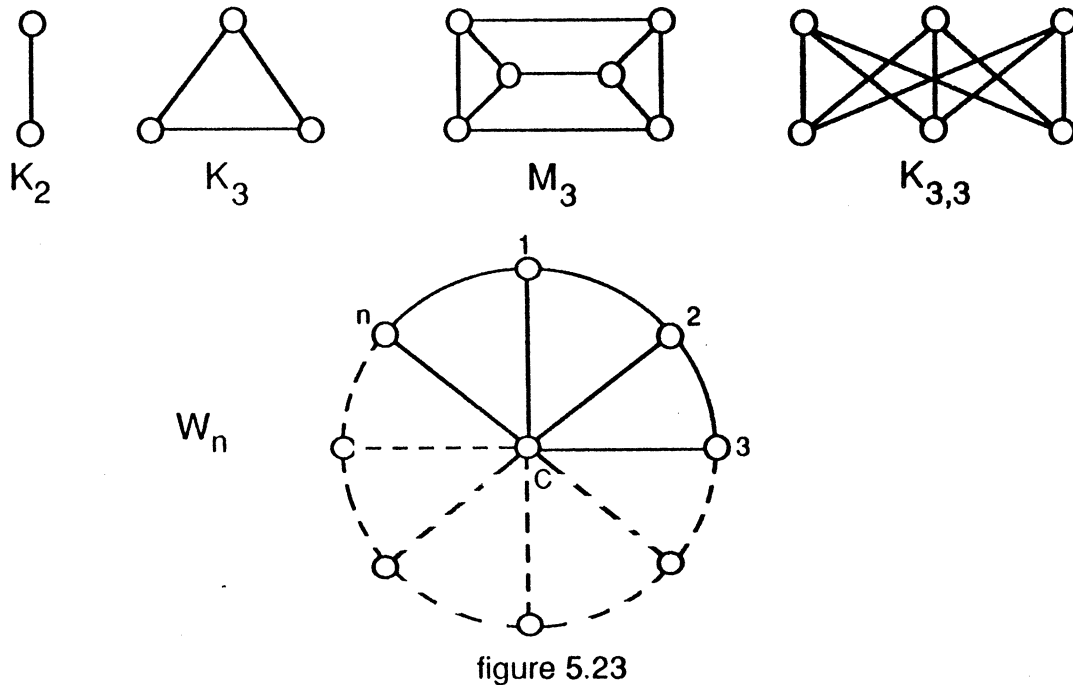


figure 5.23

On peut remarquer que la roue  $W_n$  est le seul graphe ayant beaucoup de sommets parmi les graphes de la figure 5.23 ce qui veut dire que l'algorithme de réduction et de programmation dynamique qu'on vient de décrire résoud à fortiori GTSP sur la classe des graphes sans mineur  $K_5 - \{e\}$ .

Il serait donc intéressant de trouver des classes de graphes qui contiennent à la fois les graphes non réductibles à  $M_3$  et ceux non réductibles à  $K_5 - \{e\}$  et qu'on peut construire par l'opération de 1-somme ou de 2-somme à partir des graphes 3-connexes sur lesquels GETSP est polynomial ; on peut envisager par exemple la caractérisation des graphes sans mineur  $M_3 + \{e\}$  (figure 5.24).

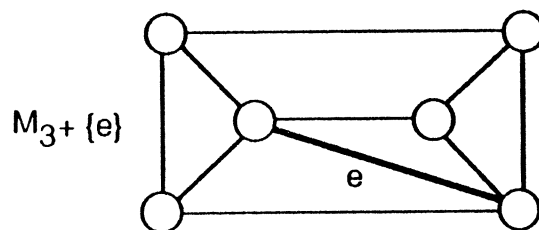


figure 5.24

Remarque 4.1 :

La classe (L) des graphes sans mineur  $M_3$  contient la classe des graphes série-parallèles i.e. les graphes ne contenant pas le mineur  $K_4$  car on peut obtenir  $K_4$  à partir de  $M_3$  en contractant les arêtes d'une clique de cardinalité 3 dans ce dernier graphe. De même il est évident que (L) contient aussi la classe des graphes sans mineurs  $M_1$ ,  $M_2$  ni  $M_3$  (voir la figure 4.1). Et donc, la première conséquence développée ci-dessus généralise les résultats qui consiste à résoudre polynomialement GTSP sur les graphes série-parallèles [5] puis sur les graphes GTSP-parfaits [12].

Problème ouvert :

On a vu que quel que soit le graphe 2-connexe  $G$ , on peut le décomposer en répétant l'application de l'opération (2.ii) du paragraphe 2 pour terminer avec des composantes 3-connexes. Et si on sait résoudre GETSP sur les composantes obtenues on saura le résoudre sur  $G$  ; autrement dit, soient  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes quelconques et  $G_{12}$  le graphe obtenu par l'opération 2-somme à partir de ces 2 graphes i.e. ( $G_{12} = G_1 \llcorner G_2$ ) alors GETSP est polynomial sur  $G_{12}$  si et seulement si, il est polynomial sur  $G_1$  et sur  $G_2$ .

On définit maintenant l'opération 3-somme suivante :

Soient  $G_1 = (V_1, E_1)$  et  $G_2 = (V_2, E_2)$  deux graphes distincts, on suppose que  $|V_i| \geq 4$ ,  $i = 1, 2$  et que les extrémités des arêtes  $e_{ij}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , appartenant à  $E_i$  forment une clique de  $G_i$  de cardinalité 3 pour  $i = 1$  et 2. On appelle 3-somme de  $G_1$  et  $G_2$  (par rapport à  $e_{11}, e_{12}, e_{13} \in E_1$  et  $e_{21}, e_{22}, e_{23} \in E_2$ ) le graphe  $G$  obtenu en identifiant les arêtes  $e_{1j}$  et  $e_{2j}$ ,  $j = 1, 2, 3$  et bien sûr les extrémités de  $e_{1j}$  et  $e_{2j}$  (figure 5.25), on note  $G = G_1 \llcorner G_2$ . Les trois sommets de la nouvelle clique forment un ensemble d'articulation de  $G$ .

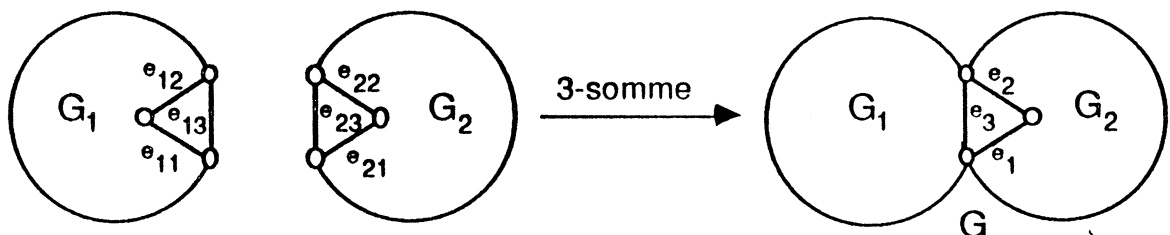


figure 5.25

Et on se pose le problème suivant, qui cherche à étendre le résultat trouvé sur les ensembles d'articulation de cardinalité 2 aux ensembles d'articulation de cardinalité 3 :

Supposons qu'on sait résoudre GETSP sur  $G_1$  et  $G_2$ , est-ce qu'on sait le résoudre sur  $G = G_1 \llbracket 3 \rrbracket G_2$  ?

## 5. Comparaisons entre GTSP et TSP :

### 5.1 Heuristiques

Un algorithme approximatif  $\mathbf{A}$  pour résoudre un problème d'optimisation combinatoire (P) (de type minimisation) est un algorithme qui permet d'associer aux données de chaque problème particulier "I" de (P) une solution réalisable  $s_I(\mathbf{A})$  de coût  $f(s_I(\mathbf{A}))$ . Soit  $s_I$  la solution minimale du problème particulier "I" et  $f(s_I)$  le coût de cette solution. L'algorithme  $\mathbf{A}$  sera appelé une " $\epsilon$ -approximation" si et seulement si :

$$\text{Sup}_{"I" \in (P)} \frac{f(s_I(\mathbf{A})) - f(s_I)}{f(s_I)} \leq \epsilon .$$

Sahni et Gonzalez [17] ont démontré que pour tout  $\epsilon$  fini, il ne peut exister une  $\epsilon$ -approximation pour TSP (le problème du voyageur de commerce classique) à moins que  $P = NP$ . Cependant on démontre, dans ce paragraphe, qu'il existe une 0,5-approximation pour GTSP (le problème du voyageur de commerce relaxé) en donnant un algorithme qu'on peut voir comme une version de celui de Christofidès [4] sur les graphes non complets (Christofidès a traité TSP sur les graphes complets munis d'une fonction coût vérifiant l'inégalité triangulaire).



**Algorithme 5.1 :**

1°) Etant donné un graphe  $G = (V, E)$  et une fonction coût  $c: E \mapsto \mathbb{R}_+$ , on détermine par un algorithme glouton un ensemble d'arêtes  $E'$  tel que  $(V, E')$  soit un arbre de poids minimum.

2°) Soit  $V' \subset V$  l'ensemble de sommets de degré impair dans  $(V, E')$  et  $G' = (V', \mathcal{P}_2(V'))$  le graphe complet défini à partir des sommets de  $V'$  et auquel on associe une fonction coût  $c': \mathcal{P}_2(V') \mapsto \mathbb{R}_+$  qui, à une arête  $\{v, v'\} \in \mathcal{P}_2(V')$ , fait correspondre  $c'(\{v, v'\}) \in \mathbb{R}_+$  égal à la valeur de la plus courte chaîne entre  $v$  et  $v'$  dans  $G$ . On détermine un couplage parfait de poids minimum dans  $(G', c')$  c'est à dire un sous-ensemble  $E''$  d'arêtes de  $\mathcal{P}_2(V')$  2 à 2 non adjacentes tel que  $\sum (c(e), e \in E'')$  soit minimum.

3°) Soit  $E'''$  le sous-ensemble de  $E$  formé de toutes les chaînes de  $G$  correspondant au couplage  $E''$  dans  $G'$  (on sait que chaque arête  $\{v, v'\}$  de  $G'$  est en correspondance avec une chaîne  $\mathcal{C}$  d'extrémités  $v$  et  $v'$  dans  $G$  telle que :

$$\sum (c(e), e \in \mathcal{C}) = c'(\{v, v'\}).$$

On considère le graphe  $\mathcal{G} = (V, T)$  où  $T = E' \oplus E'''$  (le symbole  $\oplus$  signifie que  $T$  contient l'union de  $E'$  et de  $E'''$  et si une arête  $e$  figure à la fois dans  $E'$  et  $E'''$ , elle sera répétée dans  $T$ ).  $\mathcal{G}$  est un graphe partiel de  $G$  (éventuellement avec des arêtes multiples), eulérien (tous ses sommets sont de degré pair par construction), et donc on peut ordonner les arêtes de ce graphe de manière à obtenir une tournée de  $G$ .

**THEOREME 5.1**

L'algorithme 5.1 ci-dessus est une 0,5-approximation de GTSP.

Démonstration :

Soit  $\mathcal{T}$  la tournée de coût minimum dans  $G$ . Il faut qu'on démontre que :

$$\sum_{e \in E'} c(e) + \sum_{e \in E''} c(e) \leq 1,5 \sum_{e \in \mathcal{T}} c(e).$$

Puisque  $(V, \mathcal{C})$  est connexe, il contient forcément un arbre qui couvre  $G$ , de poids supérieur à celui de l'arbre  $(V, E')$ , donc :

$$\sum_{e \in E'} c(e) \leq \sum_{e \in \mathcal{C}} c(e).$$

Il nous reste à démontrer que :

$$\sum_{e \in E''} c(e) \leq 0,5 \sum_{e \in \mathcal{C}} c(e).$$

En effet, soient  $v_1, v_2, \dots, v_{2k}$  les sommets de  $V'$  dans l'ordre où on les rencontre (la première fois) quand on parcourt la tournée  $\mathcal{C}$ , (les  $v_i$  sont distincts  $\forall i = 1, \dots, 2k$ ). On note par  $\mathcal{C}(v_i, v_j)$  la chaîne de  $\mathcal{C}$  que l'on emprunte pour aller de  $v_i$  à  $v_j$ , ce qui veut dire qu'on a l'égalité suivante :

$$\sum_{e \in \mathcal{C}} c(e) = \sum_{e \in \mathcal{C}(v_1, v_2)} c(e) + \sum_{e \in \mathcal{C}(v_2, v_3)} c(e) + \dots + \sum_{e \in \mathcal{C}(v_{2k-1}, v_{2k})} c(e) + \sum_{e \in \mathcal{C}(v_{2k}, v_1)} c(e)$$

Mais on sait par définition de l'application  $c'$  que :

$$c'(\{v_i, v_j\}) \leq \sum_{e \in \mathcal{C}(v_i, v_j)} c(e) \quad \forall v_i, v_j \in V'$$

Donc,

$$c'(\{v_1, v_2\}) + c'(\{v_2, v_3\}) + c'(\{v_3, v_4\}) + \dots + c'(\{v_{2k-1}, v_{2k}\}) + c'(\{v_{2k}, v_1\}) \leq \sum_{e \in \mathcal{C}} c(e)$$

Or, les arêtes de rang impair ( $\{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}, \dots, \{v_{2k-1}, v_{2k}\}$ ) constituent un couplage de coût supérieur à  $\sum (c(e), e \in E'') = \sum (c(e), e \in E''')$ , ainsi que les arêtes de rang pair ( $\{v_2, v_3\}, \{v_4, v_5\}, \{v_6, v_7\}, \dots, \{v_{2k}, v_1\}$ ). D'où l'inégalité :

$$2 \sum_{e \in E'} c(e) \leq \sum_{e \in \mathcal{C}} c(e). \quad \square$$

Utilisant les résultats des paragraphes précédents, on peut envisager d'autres heuristiques pour GTSP. Soit  $G = (V, E)$  un graphe quelconque muni d'une fonction

coût  $c: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ . On peut extraire de  $G$  quelques arêtes (si possible de coût élevé) pour le transformer en un graphe de Halin, un graphe sans mineur  $M_3$  ou bien sans mineur  $K_5 - \{e\}$ . On résoud ensuite sur le graphe obtenu GTSP d'une façon optimale et on obtient une solution approchée de GTSP sur  $G$ .

*Problème ouvert :*

Soit  $G$  un graphe 3-connexe muni d'une fonction coût sur ses arêtes. Le problème de trouver un graphe de Halin de poids minimum couvrant tous les sommets de  $G$  est-il polynomial ou NP-complet ?

## 5.2 Récapitulation

### 5.2.1 Problèmes faciles

TSP est polynomial sur :

- (i) la classe des graphes de Halin : [6]
- (ii) la classe des graphes sans mineurs  $K_5 - \{e\}$  : [2]
- (iii) la classe des graphes sans mineur  $M_3$  :  
 il suffit de remarquer que l'hélice  $P_{3,n}$  n'est hamiltonien que si  $n = 3$  et dans ce cas aucune arête centrale ne peut appartenir à un cycle hamiltonien de  $P_{3,3}$ , donc résoudre TSP sur les hélices  $P_{3,n}$  revient à résoudre TSP sur  $K_{3,3}$ . Et on peut déduire de [2] que TSP est polynomial sur les graphes non réductibles à  $M_3$ .

Et on vient de démontrer dans les paragraphes 2, 3 et 4 de ce chapitre que GTSP est aussi polynomial sur ces 3 classes de graphes ( (i), (ii) et (iii) ).

### 5.2.2 polyèdres

On sait caractériser le polytope des cycles hamiltoniens sur les graphes appartenant à l'une des 3 classes (i), (ii) et (iii) ci-dessus [2,6]

Quant au polyèdre des tournées de GTSP sur les graphes de la classe (ii) ou (iii), il peut être caractérisé par composition en appliquant le théorème 4.1 du chapitre 2. Mais on n'a pas encore réussi à déterminer ce polyèdre sur les graphes de Halin, nous pensons qu'il nous faut un théorème de composition qui tient compte des ensembles d'articulation de cardinalité 3, ceci va faire l'objet d'un prochain papier qui généralise les résultats connus actuellement.

## REFERENCES

- [1] A. V. AHO, J. E. HOPCROFT, J. D. ULLMAN,  
"Data Structures and Algorithms",  
Addison-Wesley Publishing Company, June 1983.
- [2] G. BARAHONA, M. GRÖTSCHEL,  
"The Travelling Salesman Problem for graphs not contractible to  $K_5 - \{e\}$ ",  
Mathematisches Institut - Universität Augsburg, preprint n° 77 June 1985.
- [3] M. BOULALA and J.P. UHRY,  
"Polytope des indépendants d'un graphe série-parallèle",  
Discrete Mathematics 27 (1979), 225-243.
- [4] N. CHRISTOFIDÈS,  
"Worst-case Analysis of a New Heuristic for The Travelling Salesman Problem",  
Report 388 (1976), Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon  
University, Pittsburg.
- [5] G. CORNUEJOLS, J. FONLUPT, D. NADDEF,  
"The Traveling Salesman Problem on a graph and some related integer  
polyhedra"  
Mathematical Programming 33 (1985) 1-27.
- [6] G. CORNUEJOLS, D. NADDEF, W.R. PULLEYBLANK,  
"Halin graphs and the travelling salesman problem",  
Mathematical Programming 26 (1983) 287-294.
- [7] G. A. DIRAC,  
"Some results concerning the structure of graphs",  
Canad. Math. Bull. 6(1963) 183-210.
- [8] A. ELNACHEF, J. FONLUPT,  
"Problème du voyageur de commerce graphique : compositions des facettes et  
des polyèdres",  
Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble - ARTEMIS  
R.T. n°7 Septembre 1986.

- [9] A. ELNACHEF, J. FONLUPT,  
"Un algorithme polynomial pour le problème du voyageur de commerce sur une classe de graphe",  
Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble - ARTEMIS  
R.T. n°6 Septembre 1986.
- [10] J. FONLUPT, A.R. MAHJOUR, J.P. UHRY,  
"Composition of graphs and the bipartite subgraph polytope",  
Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble - ARTEMIS,  
R.R. 459 Octobre 1984.
- [11] J. FONLUPT, A. NACHEF,  
"Le problème du voyageur de commerce relaxé sur quelques classes de graphes",  
Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble - ARTEMIS  
R.T. n°23 Mai 1987.  
Institut de Mathématiques Appliquées - U.C.O. - Angers. C.I. 87 - 1 Juin 1987.
- [12] J. FONLUPT, D. NADDEF,  
"The Travelling Salesman problem in graphs with some excluded minors",  
Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble- ARTEMIS  
R.R. 557 September 1985.
- [13] R. HALIN,  
"Studies on minimally  $n$ -connected graphs",  
D.J.A. Welsh ed., Combinatorial mathematics and its applications (Academic  
Press, New York 1971) 129-136.
- [14] J. E. HOPCROFT, R. E. TARJAN,  
"Dividing a graph into triconnected components",  
SIAM Journal of Computing 2 (1973) 135-158.
- [15] W.R. PULLEYBLANK,  
"The matching rank of Halin graph",  
R.R. 210 IMAG, Université Scientifique et Médicale de Grenoble (1980).
- [16] H. D. RATLIFF, A.S. ROSENTHAL,  
"Order-picking in a rectangular warehouse : solvable case of TSP".  
Operations research Vol. n°3, May-June 1

- [17] S. SAHNI, T. GONZALEZ,  
"P-complete approximation problems",  
J. Assoc. Comp. Mach. 23 (1976) 555-565.
- [18] K. WAGNER,  
"Bermerkungen zu Hadwigers Vermutung",  
Mathematische Annalen 141 (160) 433-451.

## ANNEXE 1

On sait que chaque arbre d'un graphe quelconque  $G = (V,E)$  peut correspondre à une tournée de GTSP dans  $G$  (il suffit de prendre chaque arête de l'arbre deux fois). Donc si on arrive à démontrer que le nombre d'arbres dans la roue  $W_n$  (figure 5.7) est exponentiel, on en déduira que le nombre de tournées dans ce graphe est aussi exponentiel.

Or le nombre d'arbres dans  $W_n$  est égal à  $I_n$ , le déterminant d'ordre  $n$  suivant :

$$I_n = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & & & \vdots \\ 0 & & & -1 & 3 & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & \vdots \\ 0 & & & & & & & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Calcul de  $I_n$  :

$$I_n = 3 H_{n-1} + U_{n-1} + (-1)^n V_{n-1} \quad \text{avec :} \quad (1)$$



$$H_{n-1} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & & & \\ 0 & & & -1 & 3 & & & \\ \vdots & & & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 3 & & \end{vmatrix} \quad \text{(déterminant d'ordre } n-1)$$

$$U_{n-1} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & & & \\ 0 & & & -1 & 3 & & & \\ \vdots & & & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & & & & 0 \\ 0 & & & & & & & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 3 & & \end{vmatrix} \quad \text{(déterminant d'ordre } n-1)$$

$$V_{n-1} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & & & \\ \vdots & & & & & \ddots & & \\ \vdots & & & & & & & 0 \\ \vdots & & & & & & & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 3 & -1 & & \end{vmatrix} \quad \text{(déterminant d'ordre } n-1)$$

D'autre part on peut trouver que :

$$H_{n-1} = 3 H_{n-2} - H_{n-3} \quad (2)$$

$$U_{n-1} = -H_{n-2} - 1 \quad (3)$$

$$V_{n-1} = (-1)^{n-1} (H_{n-2} + 1) \quad (4)$$

(1), (3) et (4)  $\Rightarrow$

$$I_n = 3 H_{n-1} - 2 H_{n-2} - 2 \quad (5)$$

(2) et (5)  $\Rightarrow$

$$I_n = H_n - H_{n-2} - 2 \quad (6)$$

Si on pose :

$$F_n = H_n - H_{n-2} \quad (7)$$

on pourra écrire :

$$I_n = F_n - 2 \quad (8)$$

(2) et (7)  $\Rightarrow$

$$F_n - 3 F_{n-1} + F_{n-2} = 0 \quad (10)$$

Pour déterminer  $F_n$  on calcule les racines de l'équation du second ordre suivante:

$$r^2 - 3r + 1 = 0$$

On trouve :

$$r' = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad r'' = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$$

D'où :

$$F_n = A \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

$$\begin{array}{l} F_3 = H_3 - H_1 = 18 \\ F_4 = H_4 - H_2 = 55 - 8 = 47 \end{array} \quad \left| \Rightarrow A = 1 \text{ et } B = 1 \right.$$

Puisque  $F_n$  est toujours entier et le nombre :

$$\left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

est strictement plus petit que 0,382, on en déduit que :

$$F_n = \left[ \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \quad \text{et} \quad I_n = \left[ \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] - 2$$

où  $[a]$  est égal au plus petit entier plus grand ou égal à "a".

## ANNEXE 2

## 1. Résolution de (Pb 3.1; chapitre 5) :

PROPOSITION A2.1

Les formules de récurrences suivantes sont vérifiées (voir (Pb 3.1) et la figure 5.9) :

$$[E,E,O,2] (G^{i+1}) = [E,E,O,2] (G^i) + c_2 (j_i) + c_0 (r_{i+1})$$

$$[E,O,E,2] (G^{i+1}) = \text{Min} \{ [E,E,E,1] (G^i) + c_0 (j_i) + c_0 (r_{i+1}), \\ [E,O,E,2] (G^i) + c_2 (j_i) + c_0 (r_{i+1}) \}$$

$$[O,E,E,2] (G^{i+1}) = \text{Min} \{ [E,E,O,2] (G^i) + c_0 (j_i) + c_0 (r_{i+1}), \\ [O,E,E,2] (G^i) + c_2 (j_i) + c_0 (r_{i+1}), \\ [O,E,E,2] (G^i) + c_0 (j_i) + c_0 (r_{i+1}), \\ [O,E,E,2] (G^i) + c_2 (j_i) + c_2 (r_{i+1}), \\ [O,O,O,3] (G^i) + c_2 (j_i) + c_2 (r_{i+1}), \\ [O,U,U,2] (G^i) + c_1 (j_i) + c_1 (r_{i+1}) \}$$

$$[U,U,E,1] (G^{i+1}) = \text{Min} \{ [U,U,E,1] (G^i) + c_1 (j_i) + c_0 (r_{i+1}), \\ [U,U,E,1] (G^i) + c_1 (j_i) + c_2 (r_{i+1}), \\ [U,U,O,2] (G^i) + c_1 (j_i) + c_2 (r_{i+1}), \\ [U,E,U,1] (G^i) + c_0 (j_i) + c_1 (r_{i+1}), \\ [U,O,U,2] (G^i) + c_2 (j_i) + c_1 (r_{i+1}) \}$$

$$[U,E,U,1] (G^{i+1}) = \text{Min} \{ [U,U,E,1] (G^i) + c_1 (j_i) + c_1 (r_{i+1}), \\ [U,U,O,2] (G^i) + c_1 (j_i) + c_1 (r_{i+1}), \\ [U,E,U,1] (G^i) + c_2 (j_i) + c_0 (r_{i+1}), \\ [U,E,U,1] (G^i) + c_0 (j_i) + c_2 (r_{i+1}), \\ [U,E,U,1] (G^i) + c_2 (j_i) + c_2 (r_{i+1}), \\ [U,O,U,2] (G^i) + c_2 (j_i) + c_2 (r_{i+1}) \}$$

$$\begin{aligned}
[E,U,U,1] (G^{i+1}) = \text{Min} \{ & [E,E,E,1] (G^i) + c_2 (j_i) + c_1 (r_{i+1}), \\
& [E,E,E,1] (G^i) + c_0 (j_i) + c_1 (r_{i+1}), \\
& [E,E,O,2] (G^i) + c_2 (j_i) + c_1 (r_{i+1}), \\
& [E,O,E,2] (G^i) + c_2 (j_i) + c_1 (r_{i+1}), \\
& [E,U,U,1] (G^i) + c_1 (j_i) + c_0 (r_{i+1}), \\
& [E,U,U,1] (G^i) + c_1 (j_i) + c_2 (r_{i+1}) \}
\end{aligned}$$

$$[U,U,O,2] (G^{i+1}) = [U,U,O,2] (G^i) + c_1 (j_i) + c_0 (r_{i+1})$$

$$\begin{aligned}
[U,O,U,2] (G^{i+1}) = \text{Min} \{ & [U,E,U,1] (G^i) + c_0 (j_i) + c_0 (r_{i+1}), \\
& [U,O,U,2] (G^i) + c_2 (j_i) + c_0 (r_{i+1}) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[O,U,U,2] (G_{i+1}) = \text{Min} \{ & [E,E,O,2] (G^i) + c_0 (j_i) + c_1 (r_{i+1}), \\
& [O,E,E,2] (G^i) + c_2 (j_i) + c_1 (r_{i+1}), \\
& [O,E,E,2] (G^i) + c_0 (j_i) + c_1 (r_{i+1}), \\
& [O,O,O,3] (G^i) + c_2 (j_i) + c_1 (r_{i+1}), \\
& [O,U,U,2] (G^i) + c_1 (j_i) + c_0 (r_{i+1}), \\
& [O,U,U,2] (G^i) + c_1 (j_i) + c_2 (r_{i+1}) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E,E,E,1] (G^{i+1}) = \text{Min} \{ & [E,E,E,1] (G^i) + c_2 (j_i) + c_0 (r_{i+1}), \\
& [E,E,E,1] (G^i) + c_0 (j_i) + c_2 (r_{i+1}), \\
& [E,E,E,1] (G^i) + c_2 (j_i) + c_2 (r_{i+1}), \\
& [E,E,O,2] (G^i) + c_2 (j_i) + c_2 (r_{i+1}), \\
& [E,O,E,2] (G^i) + c_2 (j_i) + c_2 (r_{i+1}), \\
& [E,U,U,1] (G^i) + c_1 (j_i) + c_1 (r_{i+1}) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[O,O,O,3] (G^{i+1}) = \text{Min} \{ & [E,E,O,2] (G^i) + c_0 (j_i) + c_0 (r_{i+1}), \\
& [O,O,O,3] (G^i) + c_2 (j_i) + c_0 (r_{i+1}) \}
\end{aligned}$$

La preuve de cette proposition est simple intuitive mais fastidieuse à rédiger. Nous la développons pour une seule formule de récurrence (la seconde par exemple) et nous laissons au lecteur le soin de vérifier le reste des formules.

Démonstration :

$[E,O,E,2] (G^{i+1})$  est la valeur de la tournée partielle  $\mathcal{J}_{G^{i+1}} \in (E,O,E,2) (G^{i+1})$  de coût minimum (les sommets 1,  $i+1$  et C sont pairs, 1 et C se trouvent dans la même

composante connexe de  $\mathcal{T}_{G^{i+1}}$  et  $i+1$  se trouve dans une autre composante connexe ).

Si 1 est de degré impair dans  $\mathcal{T}_{G^i}$ , il restera impair dans  $\mathcal{T}_{G^{i+1}}$ , de même s'il n'est pas avec C dans une même composante connexe de  $\mathcal{T}_{G^i}$ , il ne pourra jamais se retrouver avec C dans une même composante connexe de  $\mathcal{T}_{G^{i+1}}$  à moins que  $\mathcal{T}_{G^{i+1}}$  soit connexe. Et donc  $[E,O,E,2] (G^{i+1})$  ne peut s'obtenir qu'à partir de  $[E,E,E,1] (G^i)$  et  $[E,O,E,2] (G^i)$ .

Si  $\mathcal{T}_{G^i}$  est de type (E,E,E,1), pour que  $\mathcal{T}_{G^{i+1}}$  soit de type (E,O,E,2) il ne faut pas que cette tournée partielle passe par  $j_i$  ni par  $r_{i+1}$ .

Si  $\mathcal{T}_{G^i}$  est de type (E,O,E,2), pour que  $\mathcal{T}_{G^{i+1}}$  soit de type (E,O,E,2) il faut qu'elle passe 2 fois par  $j_i$  et 0 fois par  $r_{i+1}$ . D'où l'égalité suivante :

$$[E,O,E,2] (G^{i+1}) = \text{Min} \{ [E,E,E,1] (G^i) + c_0 (j_i) + c_0 (r_{i+1}), \\ [E,O,E,2] (G^i) + c_2 (j_i) + c_0 (r_{i+1}) \} . \quad \square$$

On peut donc calculer d'après cette dernière proposition  $[a,b,c,d] (G^n) \forall$  le quadruplet (a,b,c,d).

La roue  $W_n$  s'obtient à partir de  $G^n$ , en lui rajoutant l'arête de jante  $j_n$  qui a comme extrémités les sommets 1 et n. On obtient donc la solution minimale de GETSP sur  $W_n$  en calculant le minimum trouvé par la proposition A2.2 suivante :

### PROPOSITION A2.2

La valeur de la tournée optimale de GETSP sur  $W_n$  est égale à :

$$V_{\min} (W_n) = \text{Min} \{ [E,E,E,1] (G^n) + c_2 (j_n), \\ [E,E,E,1] (G^n) + c_0 (j_n), \\ [E,O,E,2] (G^n) + c_2 (j_n), \\ [O,E,E,2] (G^n) + c_2 (j_n), \\ [U,U,E,1] (G^n) + c_1 (j_n) \}$$

La vérification de la proposition A2.2 est laissée au lecteur.

## 2. Résolution de (Pb 3.2; chapitre 5) :

### PROPOSITION A2.3

Les formules de récurrences suivantes sont vérifiées (voir (Pb 3.2) et la figure 5.12) :

$$\begin{aligned}
 [E,E,O,2] (G^{i+1}) = \text{Min} \{ & [E,E,O,2] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\
 & [E,E,O,2] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_0 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\
 & [E,E,O,2] (G^i) + c_0 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\
 & [E,E,O,2] (G^i) + c_0 (h_{i+1}) + c_0 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
 & [U,U,O,2] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\
 & [O,O,O,3] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}) \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [U,U,E,1] (G^{i+1}) = \text{Min} \{ & [E,E,O,2] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
 & [E,O,E,2] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
 & [E,O,E,2] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\
 & [O,E,E,2] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
 & [O,E,E,2] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\
 & [U,U,E,1] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\
 & [U,U,E,1] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_0 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
 & [U,U,E,1] (G^i) + c_0 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
 & [U,U,E,1] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
 & [U,U,E,1] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_0 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\
 & [U,U,E,1] (G^i) + c_0 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\
 & [U,U,E,1] (G^i) + c_0 (h_{i+1}) + c_0 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
 & [U,E,U,1] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_1 (h''_{i+1}), \\
 & [U,E,U,1] (G^i) + c_0 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_1 (h''_{i+1}), \\
 & [E,U,U,1] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_1 (h''_{i+1}), \\
 & [E,U,U,1] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_0 (h'_{i+1}) + c_1 (h''_{i+1}), \\
 & [U,U,O,2] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_0 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
 & [U,U,O,2] (G^i) + c_0 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
 & [U,U,O,2] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
 & [U,O,U,2] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_1 (h''_{i+1}), \\
 & [U,O,U,2] (G^i) + c_0 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_1 (h''_{i+1}), \\
 & [O,U,U,2] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_1 (h''_{i+1}), \\
 & [O,U,U,2] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_0 (h'_{i+1}) + c_1 (h''_{i+1}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [E,E,E,1] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
& [E,E,E,1] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\
& [O,O,O,3] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[U,U,O,2] (G^{i+1}) = \text{Min } \{ & [E,E,O,2] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\
& [U,U,O,2] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\
& [U,U,O,2] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_0 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\
& [U,U,O,2] (G^i) + c_0 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\
& [U,U,O,2] (G^i) + c_0 (h_{i+1}) + c_0 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
& [O,O,O,3] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E,E,E,1] (G^{i+1}) = \text{Min } \{ & [E,E,O,2] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_0 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
& [E,E,O,2] (G^i) + c_0 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
& [E,E,O,2] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
& [E,O,E,2] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\
& [E,O,E,2] (G^i) + c_0 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
& [E,O,E,2] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
& [O,E,E,2] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\
& [O,E,E,2] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_0 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
& [O,E,E,2] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
& [U,U,E,1] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
& [U,U,E,1] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\
& [U,E,U,1] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_1 (h''_{i+1}), \\
& [U,E,U,1] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_0 (h'_{i+1}) + c_1 (h''_{i+1}), \\
& [E,U,U,1] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_1 (h''_{i+1}), \\
& [E,U,U,1] (G^i) + c_0 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_1 (h''_{i+1}), \\
& [U,U,O,2] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
& [U,O,U,2] (G^i) + c_1 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_1 (h''_{i+1}), \\
& [O,U,U,2] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_1 (h'_{i+1}) + c_1 (h''_{i+1}), \\
& [E,E,E,1] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\
& [E,E,E,1] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_0 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
& [E,E,E,1] (G^i) + c_0 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
& [E,E,E,1] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
& [E,E,E,1] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_0 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\
& [E,E,E,1] (G^i) + c_0 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\
& [E,E,E,1] (G^i) + c_0 (h_{i+1}) + c_0 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}), \\
& [O,O,O,3] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}) \}
\end{aligned}$$



$$[O,O,O,3] (G^{i+1}) = \text{Min} \{ [O,O,O,3] (G^i) + c_2 (h_{i+1}) + c_0 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\ [O,O,O,3] (G^i) + c_0 (h_{i+1}) + c_2 (h'_{i+1}) + c_0 (h''_{i+1}), \\ [O,O,O,3] (G^i) + c_0 (h_{i+1}) + c_0 (h'_{i+1}) + c_2 (h''_{i+1}) \}$$

On peut obtenir les formules de récurrences de :

- $[E,O,E,2] (G^{i+1})$  et  $[O,E,E,2] (G^{i+1})$  par symétrie par rapport  $[E,E,O,2] (G^{i+1})$
- $[U,E,U,1] (G^{i+1})$  et  $[E,U,U,1] (G^{i+1})$  par symétrie par rapport  $[U,U,E,1] (G^{i+1})$
- $[U,O,U,2] (G^{i+1})$  et  $[O,U,U,2] (G^{i+1})$  par symétrie par rapport  $[U,U,O,2] (G^{i+1})$ .

On remarque que  $H_n = G^n$  et la valeur de la tournée optimale de  $H_n$  n'est autre que  $[E,E,E,1] (G^n)$ .

## ANNEXE 3

Calcul de la tournée minimale sur le graphe de HALIN  $\mathcal{H}$  :

PROPOSITION A3.1

Les équations de récurrences suivantes sont vérifiées (voir figure 5.17):

$$[E,E,O,2] (G^{j+1}) = \text{Min} \{ [E,E,O,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,E,O,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\ [E,E,O,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,E,E,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}) \}$$

$$[E,O,E,2] (G^{j+1}) = \text{Min} \{ [E,E,O,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,O,E,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\ [E,O,E,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,O,E,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\ [E,U,U,1] (G^j) + c_1 (u_j) + [U,O,U,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_1 (e_{j+1}), \\ [E,E,E,1] (G^j) + c_0 (u_j) + [E,O,E,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\ [E,E,E,1] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,O,E,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}), \\ [E,E,E,1] (G^j) + c_2 (u_j) + [O,E,E,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}), \\ [E,E,E,1] (G^j) + c_2 (u_j) + [O,O,O,3] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}) \}$$

$$[O,E,E,2] (G^{j+1}) = \text{Min} \{ [E,E,O,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [O,E,E,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\ [E,E,O,2] (G^j) + c_0 (u_j) + [E,E,E,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\ [O,E,E,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,E,O,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\ [O,E,E,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,E,E,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}), \\ [O,E,E,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [O,E,E,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\ [O,E,E,2] (G^j) + c_0 (u_j) + [E,E,E,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\ [O,U,U,2] (G^j) + c_1 (u_j) + [U,E,U,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_1 (e_{j+1}), \\ [O,O,O,3] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,E,E,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}) \}$$

$$[U,U,E,1] (G^{j+1}) = \text{Min} \{ [U,U,E,1] (G^j) + c_1 (u_j) + [U,U,E,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}), \\ [U,U,E,1] (G^j) + c_1 (u_j) + [U,U,O,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \}$$

$$\begin{aligned}
& [U,E,U,1] (G^j) + c_0 (u_j) + [E,U,U,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_1 (e_{j+1}), \\
& [U,E,U,1] (G^j) + c_2 (u_j) + [O,U,U,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_1 (e_{j+1}), \\
& [U,U,O,2] (G^j) + c_1 (u_j) + [U,U,E,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [U,O,U,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,U,U,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_1 (e_{j+1}) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[U,E,U,1] (G^{j+1}) = \text{Min} \{ & [U,U,E,1] (G^j) + c_1 (u_j) + [U,E,U,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_1 (e_{j+1}), \\
& [U,E,U,1] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,E,O,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [U,E,U,1] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,E,E,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}), \\
& [U,E,U,1] (G^j) + c_2 (u_j) + [O,E,E,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [U,E,U,1] (G^j) + c_0 (u_j) + [E,E,E,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [U,U,O,2] (G^j) + c_1 (u_j) + [U,E,U,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_1 (e_{j+1}), \\
& [U,O,U,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,E,E,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E,U,U,1] (G^{j+1}) = \text{Min} \{ & [E,E,O,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,U,U,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_1 (e_{j+1}), \\
& [E,O,E,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,U,U,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_1 (e_{j+1}), \\
& [E,U,U,1] (G^j) + c_1 (u_j) + [U,U,E,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}), \\
& [E,U,U,1] (G^j) + c_1 (u_j) + [U,U,O,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [E,E,E,1] (G^j) + c_0 (u_j) + [E,U,U,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_1 (e_{j+1}), \\
& [E,E,E,1] (G^j) + c_2 (u_j) + [O,U,U,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_1 (e_{j+1}) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[U,U,O,2] (G^{j+1}) = \text{Min} \{ & [U,U,O,2] (G^j) + c_1 (u_j) + [U,U,E,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}), \\
& [U,U,O,2] (G^j) + c_1 (u_j) + [U,U,O,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[U,O,U,2] (G^{j+1}) = \text{Min} \{ & [U,U,E,1] (G^j) + c_1 (u_j) + [U,O,U,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_1 (e_{j+1}), \\
& [U,E,U,1] (G^j) + c_0 (u_j) + [E,E,O,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [U,E,U,1] (G^j) + c_0 (u_j) + [E,E,E,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}), \\
& [U,E,U,1] (G^j) + c_0 (u_j) + [E,O,E,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [U,E,U,1] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,O,E,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}), \\
& [U,E,U,1] (G^j) + c_2 (u_j) + [O,E,E,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}), \\
& [U,E,U,1] (G^j) + c_2 (u_j) + [O,O,O,3] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [U,U,O,2] (G^j) + c_1 (u_j) + [U,O,U,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_1 (e_{j+1}), \\
& [U,O,U,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,E,O,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [U,O,U,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,E,E,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}), \\
& [U,O,U,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,O,E,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[O,U,U,2] (G^{j+1}) = \text{Min} \{ & [E,E,O,2] (G^j) + c_0 (u_j) + [E,U,U,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_1 (e_{j+1}), \\
& [E,E,O,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [O,U,U,2] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_1 (e_{j+1}), \\
& [O,E,E,2] (G^j) + c_0 (u_j) + [E,U,U,1] (\mathcal{B}_{ij+1}) + c_1 (e_{j+1}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [O,E,E,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [O,U,U,2] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_1 (e_{j+1}), \\
& [O,U,U,2] (G^j) + c_1 (u_j) + [U,U,E,1] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}), \\
& [O,U,U,2] (G^j) + c_1 (u_j) + [U,U,O,2] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [O,O,O,3] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,U,U,1] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_1 (e_{j+1}) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E,E,E,1] (G^{j+1}) = \text{Min} \{ & [E,E,O,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,E,E,1] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [E,O,E,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,E,E,1] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [E,U,U,1] (G^j) + c_1 (u_j) + [U,E,U,1] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_1 (e_{j+1}), \\
& [E,E,E,1] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,E,O,2] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [E,E,E,1] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,E,E,1] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}), \\
& [E,E,E,1] (G^j) + c_2 (u_j) + [O,E,E,2] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [E,E,E,1] (G^j) + c_0 (u_j) + [E,E,E,1] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}) \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[O,O,O,3](G^{j+1}) = \text{Min} \{ & [E,E,O,2] (G^j) + c_0 (u_j) + [E,E,O,2] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [E,E,O,2] (G^j) + c_0 (u_j) + [E,E,E,1] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}), \\
& [E,E,O,2] (G^j) + c_0 (u_j) + [E,O,E,2] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [E,E,O,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,O,E,2] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}), \\
& [E,E,O,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [O,E,E,2] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}), \\
& [E,E,O,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [O,O,O,3] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [O,E,E,2] (G^j) + c_0 (u_j) + [E,E,O,2] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [O,E,E,2] (G^j) + c_0 (u_j) + [E,E,E,1] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}), \\
& [O,E,E,2] (G^j) + c_0 (u_j) + [E,O,E,2] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [O,E,E,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,O,E,2] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}), \\
& [O,E,E,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [O,E,E,2] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}), \\
& [O,E,E,2] (G^j) + c_2 (u_j) + [O,O,O,3] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [O,U,U,2] (G^j) + c_1 (u_j) + [U,O,U,2] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_1 (e_{j+1}), \\
& [O,O,O,3] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,E,O,2] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}), \\
& [O,O,O,3] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,E,E,1] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_0 (e_{j+1}), \\
& [O,O,O,3] (G^j) + c_2 (u_j) + [E,O,E,2] (\mathfrak{B}_{ij+1}) + c_2 (e_{j+1}) \}
\end{aligned}$$

La vérification de cette dernière proposition sera laissée au lecteur.

Soit  $m$  le nombre de boîtes trouvées par l'algorithme 3.1 (chapitre 5) ; on calcule  $[a,b,c,d] (\mathfrak{B}_i)$ ,  $\forall (a,b,c,d)$  pour  $i = 1, \dots, m$ , ce calcul se fait par ordre de  $i$  croissant, (on commence avec la boîte  $\mathfrak{B}_1$  et on finit avec  $\mathfrak{B}_m$ ) ; autrement dit, on ne traite la boîte  $\mathfrak{B}_i$  que si  $\mathfrak{B}_i$  est un éventail ou si toutes les boîtes contenues dans  $\mathfrak{B}_i$  ont été traitées.

On calcule à la fin la tournée optimale de GETSP sur  $\mathcal{H}$  à partir des 11 valeurs de  $[a,b,c,d] (\mathfrak{B}_m)$  (voir les formules de la proposition A2.2 (annexe 2)).



## TABLE DES MATIÈRES

-----

<b>Chapitre 1 : INTRODUCTION ET GENERALITES .....</b>	<b>2</b>
1. Optimisation Combinatoire .....	4
2. Complexité des Algorithmes .....	5
3. Polyèdres .....	6
4. Généralités et Présentation des Résultats .....	8
REFERENCES .....	13
<b>Chapitre 2 : COMPOSITIONS DES POLYEDRES .....</b>	<b>15</b>
1. Introduction et Définitions .....	15
2. Mariages des Tournées Partielles .....	17
Proposition 2.1 .....	17
Proposition 2.2 .....	17
3. Echange par un Petit Graphe .....	19
3.1. Etude des cas .....	20
4. Modèle pour obtenir GTSP à partir de GTSP ( $\bar{G}_1$ ) et GTSP ( $\bar{G}_2$ ) .....	27
4.1. Mélange des facettes (par combinaison conique) .....	27
Lemme 4.1 .....	31
Lemme 4.2 .....	32
Théorème 4.1 .....	37
REFERENCES .....	41

<b>Chapitre 3 : COMPOSITIONS DES FACETTES</b> .....	42
1. Quelques Propriétés sur les Facettes de GTSP (G) .....	42
Propriété 1.1 .....	42
Propriété 1.2 .....	44
Propriété 1.3 .....	46
Problème Ouvert .....	48
2. Composition des Facettes de GTSP (G) .....	48
Théorème 2.1 .....	49
Théorème 2.2 .....	53
3. Quelques Facettes et Techniques pour les trouver .....	61
3.1. La multi-2-chaîne .....	62
Théorème 3.1 .....	64
3.2. Techniques pour trouver des Nouvelles Facettes .....	67
Théorème 3.2 .....	68
REFERENCES .....	76
<b>Chapitre 4 : LES GRAPHES GTSP - PARFAITS</b> .....	78
1. Introduction .....	78
2. Les Graphes GTSP-Parfaits .....	80
Théorème 2.1 .....	84
Lemme 2.1 .....	85
Lemme 2.2 .....	87
REFERENCES .....	91

<b>Chapitre 5 : LE PROBLEME DU VOYAGEUR DE COMMERCE</b>	
<b>GENERALISE SUR LES GRAPHS DE HALIN ET</b>	
<b>LES GRAPHS NON REDUCTIBLES A <math>M_3</math> ..... 93</b>	
1. Introduction .....	93
Remarque 1.1 .....	94
Remarque 1.2 .....	94
Remarque 1.3 .....	96
Remarque 1.4 .....	96
Remarque 1.5 .....	97
2. Réduction d'un graphe .....	98
Procédure REDUCTION(G) .....	99
3. Structures irréductibles facile pour GETSP.....	100
1°) GETSP sur les petits graphes .....	101
2°) GETSP sur les roues .....	101
3°) GETSP sur les hélices .....	106
4°) GETSP sur les hélices généralisées .....	108
5°) GETSP sur la grille .....	108
6°) GETSP sur les graphes de Halin.....	109
Lemme 3.1 .....	110
Lemme 3.2 .....	110
Algorithme 3.1 .....	111
4. Conséquences et Remarques .....	114
Définition 4.1 .....	116
Définition 4.2 .....	116
PROPOSITION 4.1 .....	117
5. Comparaisons entre GTSP et TSP .....	121
5.1. Heuristiques .....	121
Algorithme 5.1 .....	122
Théorème 5.1 .....	122
5.2. Récapitulation .....	124
REFERENCES .....	126



<b>Annexe 1</b> .....	<b>129</b>
<b>Annexe 2</b> .....	<b>133</b>
<b>Annexe 3</b> .....	<b>139</b>

AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT 3ème CYCLE, DOCTORAT-INGENIEUR, DOCTORAT USTMG

Vu les dispositions de l'Arrêté du 16 avril 1974,

Vu les dispositions de l'Arrêté du 5 juillet 1984,

Vu les rapports de M. EULER.....

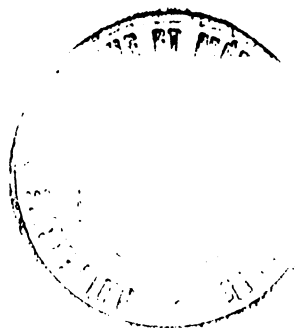
M. NADDEF.....

M. Armand NACHEF..... est autorisé  
à présenter une thèse en vue de l'obtention du ..Doctorat..de..l'USTMG  
Informatique...et...Mathématiques..Appliquées.....

16 JAN. 1989

Grenoble, le.....

Le Président de l'Université Scientifique  
Technologique et Médicale



*J.J. Payan*  
J.J. PAYAN