



HAL
open science

Étude dans les espaces de Hölder de problèmes aux limites et de transmission dans un domaine avec couche mince.

Omar Belhamiti

► **To cite this version:**

Omar Belhamiti. Étude dans les espaces de Hölder de problèmes aux limites et de transmission dans un domaine avec couche mince.. Mathématiques [math]. Université du Havre, 2008. Français. NNT : . tel-00330880

HAL Id: tel-00330880

<https://theses.hal.science/tel-00330880>

Submitted on 15 Oct 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Thèse

Présentée à

L'Université du Havre

Pour obtenir le grade de

Docteur en Mathématiques Appliquées

Par

Omar BELHAMITI

Etude dans les espaces de Hölder de problèmes aux limites
et de transmission dans un domaine avec couche mince.

Soutenue le 26 Mai 2008

Devant le jury :

Président :

M. B. BELAIDI , Professeur, Université de Mostaganem (Algérie).

Rapporteurs :

M. K. LEMRABET, Professeur, USTHB Alger (Algérie).

M. M. MOUSSAOUI, Professeur, Ecole Centrale de Lyon (France).

Examineurs :

M. A. AIBECHE, Professeur, Université de Sétif (Algérie).

M. M. AZIZ ALAOUI, Professeur, Université du Havre (France).

M. S. MAINGOT, Maître de Conférences, Université du Havre (France).

Directeurs

de thèse :

M. R. LABBAS, Professeur, Université du Havre (France).

M. A. MEDEGHRI, Maître de Conférences, Université
de Mostaganem (Algérie).

Table des matières

Remerciements	4
Introduction	5
0.1 Préambule	5
0.2 L'origine physique du problème	5
0.3 Cas général et formulation abstraite	7
0.4 Les résultats obtenus	8
0.4.1 Résultats d'existence	9
0.4.2 Résultats de régularité maximale	9
0.4.3 Résultats sur le passage à la limite	10
0.5 Contenu des chapitres	10
1 Rappels et lemmes techniques	12
1.1 La notion d'impédance et d'admittance	12
1.2 Les semi-groupes	13
1.2.1 Semi-groupe uniformément continu	13
1.2.2 Semi-groupe fortement continu	14
1.2.3 Semi-groupes analytiques	16
1.3 Rappel sur les espaces de Hölder et les petits Hölder à valeurs vectorielles . .	17
1.3.1 Cas d'un intervalle de \mathbb{R}	17
1.3.2 Cas d'un ouvert quelconque non vide de \mathbb{R}^n	18
1.3.3 Quelques propriétés	19
1.4 La mesurabilité au sens de Bochner	20
1.5 Les espaces d'interpolation	21
1.6 Lemmes techniques	23
2 Problème de transmission : cas scalaire	32
2.1 La résolution du problème (P_+^δ)	33
2.2 L'opérateur d'impédance	34
2.3 La résolution du problème (P_-^δ)	36
2.4 Retour au problème (P_+^δ)	37
2.5 Problème limite	38
3 Problème de transmission : cas abstrait	45
3.1 Problème et hypothèses	45
3.1.1 Représentation de la solution du problème (P_+^δ)	46
3.1.2 La solution stricte de (P_+^δ)	55

3.1.3	Régularité maximale pour u_+^δ	62
3.2	L'opérateur d'impédance T_δ	68
3.3	Représentation de la solution u_-^δ	73
3.3.1	Les conditions nécessaires et suffisantes	84
3.3.2	Régularité maximale	91
4	Le problème limite	100
4.1	Limites de u_-^δ et u_+^δ	101
4.2	Estimation de l'erreur	110
4.2.1	Estimation d'erreur pour les solutions strictes	110
4.2.2	Estimation d'erreur pour les solutions régulières	128
4.3	La limite de l'opérateur d'impédance quand $\delta \rightarrow 0$	143
4.4	La convergence de u_-^δ dans $C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$	146
4.5	Les conditions nécessaires et suffisantes	148
4.6	Régularité maximale	149
5	Exemples d'applications	150
5.0.1	Cas $E = C(\overline{G})$	151
5.0.2	Cas $E = L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$	153
	Bibliographie	156

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier Ahmed Medeghri et Rabah Labbas, mes directeurs de thèse pour leur soutien constant, leurs encouragements et pour leur disponibilité. J'ai pu bénéficier de leurs compétences, de leurs qualités humaines et de leurs conseils précieux tout au long de ces années de thèse.

Je remercie A. Medeghri « le grand frère » de thèse qui m'a fait confiance dès notre rencontre et qui m'a beaucoup guidé dans mes recherches.

J'ai particulièrement apprécié les apports de raisonnement très minutieux du professeur Rabah Labbas et ses nombreuses remarques toujours constructives. Cela a été un honneur pour moi qu'il ait accepté de diriger cette thèse.

J'ai pu bénéficié de nombreuses discussions mathématiques fructueuses avec Stéphane Maingot. Je le remercie vivement pour cela et pour l'honneur qu'il me fait d'être dans le jury de cette thèse.

J'exprime toute ma gratitude, au professeur Mohand Moussaoui d'avoir accepté d'être dans le jury et surtout d'en être rapporteur.

Cette thèse s'appuie beaucoup sur la thématique de recherche du professeur Keddour Lemrabet. Il en est l'inspirateur. Je tiens à le remercier vivement pour cela et pour être rapporteur.

Je remercie chaleureusement le professeur Benharrat Belaidi pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse.

Je remercie également les professeurs Aïssa Aibeche et Moulay Aziz Alaoui d'avoir acceptés de participer au jury de cette thèse.

Un grand merci à tous les doctorants et chercheurs du Laboratoire de Mathématiques Appliquées du Havre (le LMAH), à son directeur, le professeur Adnan Yassine, à tous mes collègues de l'Université de Mostaganem, plus particulièrement ceux du Laboratoire de Mathématiques Pures et Appliquées et de mon équipe "EDA", Cheggag M., Limam K., Bouziani F., Mezeghrani F. Z et Hammou H.

Naturellement, je tiens à remercier ma famille et ma belle-famille pour leur patience et leur indéfectible soutien, en particulier mon père, ma mère, mes frères, mes sœurs, beaux-frères et mes belles sœurs.

Une affection particulière à ma femme Mériem pour son soutien quotidien inestimable.

Et bien évidemment je n'oublie pas de citer mon frère et les amis de toujours qui m'ont soutenu et m'ont encouragé à continuer mon cursus universitaire, à savoir, Mustapha, T. Hennous, A. Zaiti, A. Ammor, S. Bouattou et les autres, qu'ils reçoivent ma sincère gratitude.

*Enfin, je voudrais dédier cette thèse à mon très cher père
et à la mémoire de mon grand-père Sidi Ahmed.*

Introduction

0.1 Préambule

Le travail accompli dans cette thèse a pour objectif d'étudier les problèmes aux limites et de transmission issus de modèles physiques et concrets lorsqu'ils sont écrits dans des domaines cylindriques. Le cas d'ouverts quelconques a été largement traité par divers auteurs (voir ci-dessous) dans le cadre Hilbertien par la méthode variationnelle.

La théorie des EDA (équations différentielles abstraites) est essentielle pour ces problèmes et s'adapte très bien à leur traitement. Un de ses grands avantages est qu'elle permet de les résoudre en fournissant une représentation explicite de la solution. D'autre part elle s'étend à toute une classe d'autres problèmes plus généraux posés dans divers espaces fonctionnels. De part les richesses des outils qu'elle utilise en analyse fonctionnelle (calcul fonctionnel de Dunford, théorie des semi-groupes, espaces d'interpolation, etc...), elle nous a permis d'avoir des résultats fins (conditions nécessaires et suffisantes pour la résolution, pour la régularité maximale et pour le passage à la limite).

0.2 L'origine physique du problème

En dimension 1

Le problème stationnaire de diffusion de la chaleur dans une tige hétérogène $(-1, \delta)$ constituée par un corps fixe $(-1, 0)$ et une couche mince $(0, \delta)$, est modélisé par les équations suivantes

$$\begin{cases} (u_-^\delta)''(x) + \mathbf{a} u_-^\delta(x) = g_-^\delta(x) & \text{sur }]-1, 0[\\ (u_+^\delta)''(x) + \mathbf{a} u_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) & \text{sur }]0, \delta[\end{cases}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta, \end{cases}$$

et les conditions de transmission

$$\begin{cases} p_- (u_-^\delta)'(0) = p_+ (u_+^\delta)'(0) \\ u_-^\delta(0) = u_+^\delta(0), \end{cases}$$

où $u_\pm^\delta(x)$ représente la température au point x , p_- , p_+ sont les coefficients de conductivité des corps $]-1, 0[$ et $]0, \delta[$ respectivement, $\mathbf{a} < 0$ est le coefficient d'échange avec l'extérieur,

g_{\pm}^{δ} les sources de chaleur, f_{-} la température au point $x = -1$ et f_{+}^{δ} le flux de chaleur en $x = \delta$.

En dimension 2

Le problème de la propagation de la chaleur dans une plaque homogène par morceaux $(-1, \delta) \times (-\pi, \pi)$, constituée par une jonction de deux corps, (le premier, $(-1, 0) \times (-\pi, \pi)$, le second, $(0, \delta) \times (-\pi, \pi)$, formant la couche mince) , s'écrit sous forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u_{-}^{\delta}(x, y) = \frac{\partial^2 u_{-}^{\delta}}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u_{-}^{\delta}}{\partial y^2}(x, y) = g_{-}^{\delta}(x, y) \quad \text{sur }]-1, 0[\times]-\pi, \pi[\\ \Delta u_{+}^{\delta}(x, y) = \frac{\partial^2 u_{+}^{\delta}}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u_{+}^{\delta}}{\partial y^2}(x, y) = g_{+}^{\delta}(x, y) \quad \text{sur }]0, \delta[\times]-\pi, \pi[\end{array} \right.$$

avec les conditions aux limites (de type mêlé)

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{-}^{\delta}(-1, y) = f_{-}(y) \quad y \in]-\pi, \pi[\\ u_{-}^{\delta}(x, -\pi) = u_{-}^{\delta}(x, \pi) = 0 \quad x \in]-1, 0[\\ u_{+}^{\delta}(x, -\pi) = u_{+}^{\delta}(x, \pi) = 0 \quad x \in]0, \delta[\\ \frac{\partial u_{+}^{\delta}}{\partial x}(\delta, y) = f_{+}^{\delta}(y) \quad y \in]-\pi, \pi[, \end{array} \right. \quad (1)$$

et les conditions de transmission

$$\left\{ \begin{array}{l} p_{-} \frac{\partial u_{-}^{\delta}}{\partial x}(0, y) = p_{+} \frac{\partial u_{+}^{\delta}}{\partial x}(0, y) \quad y \in]-\pi, \pi[\\ u_{-}^{\delta}(0, y) = u_{+}^{\delta}(0, y) \quad y \in]-\pi, \pi[. \end{array} \right.$$

On peut aussi considérer le même problème avec à la place des conditions mêlées (1), les conditions périodiques sur les bords $]-1, 0[\times \{\pm\pi\}$ et $]0, \delta[\times \{\pm\pi\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{-}^{\delta}(-1, y) = f_{-}(y) \quad y \in]-\pi, \pi[\\ u_{-}^{\delta}(x, -\pi) = u_{-}^{\delta}(x, \pi) \quad x \in]-1, 0[\\ \frac{\partial u_{-}^{\delta}}{\partial y}(x, -\pi) = \frac{\partial u_{-}^{\delta}}{\partial y}(x, \pi) \quad x \in]-1, 0[\\ u_{+}^{\delta}(x, -\pi) = u_{+}^{\delta}(x, \pi) \quad x \in]0, \delta[\\ \frac{\partial u_{+}^{\delta}}{\partial y}(x, -\pi) = \frac{\partial u_{+}^{\delta}}{\partial y}(x, \pi) \quad x \in]0, \delta[\\ \frac{\partial u_{+}^{\delta}}{\partial x}(\delta, y) = f_{+}^{\delta}(y) \quad y \in]-\pi, \pi[, \end{array} \right.$$

et s'intéresser au développement en série de Fourier par rapport à y . Naturellement, diverses autres conditions aux limites et de transmission s'inscrivent dans le cadre de cette étude.

En dimension quelconque

L'intervalle $(-\pi, \pi)$ peut être remplacé par un ouvert (régulier ou pas, borné ou pas) Ω de \mathbb{R}^{n-1} , $n > 2$.

0.3 Cas général et formulation abstraite

Utilisant la notation vectorielle usuelle

$$u^\delta(x, y) = u^\delta(x, \cdot)(y) = u^\delta(x)(y),$$

les problèmes précédents peuvent être formulés dans le cadre des équations différentielles abstraites, sous la forme suivante

$$(P_\delta) \begin{cases} (u^\delta)''(x) + Au^\delta(x) = g^\delta(x) & \text{sur }]-1, 0[\cup]0, \delta[\\ u^\delta(-1) = f_- \\ (u^\delta)'(\delta) = f_+^\delta \\ u^\delta(0^-) = u^\delta(0^+) \\ p_- (u^\delta)'(0^-) = p_+ (u^\delta)'(0^+), \end{cases} \quad (2)$$

où A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$, non nécessairement dense, inclus dans un espace de Banach complexe E , g^δ dans $C([-1, \delta]; E)$ et f_- , f_+^δ sont donnés dans E et vérifiant des conditions nécessaires et suffisantes qui seront indiquées dans la suite. Ici p_- et p_+ sont des coefficients positifs liés aux deux corps $]-1, 0[$ et $]0, \delta[$ respectivement, dépendent de δ .

A titre illustratif, l'opérateur A , précédemment, est l'action de dérivation seconde par rapport à y , complétée de conditions aux limites adéquates.

Beaucoup d'auteurs ont travaillé sur des problèmes de transmission. On cite, par exemple, K. Lemrabet [20] et [21], qui a utilisé des méthodes basées sur une estimation a priori établie directement par intégration par parties dans le cadre Hilbertien, ou bien G. Caloz, M. Costabel, M. Dauge et G. Vial [7] et [35], S. Nicaise [28], D. Mercier [26], qui ont utilisé la méthode variationnelle dans le cadre des espaces de Hilbert. A. Favini, R. Labbas, K. Lemrabet et S. Maingot [9] ont utilisé un changement d'échelle sur l'épaisseur de la couche mince pour transformer (2) en un problème dans un domaine fixe et ont obtenu des résultats d'existence, d'unicité et de régularité dans les espaces L^p , en utilisant la théorie des sommes d'opérateurs linéaires de Da Prato-Grisvard, dans le cadre des espaces de Sobolev construits sur L^p , $p \in [1, \infty]$. Ils ont considéré des données homogènes et ont supposé un second membre dans un espace d'interpolation, ce qui permet des applications concrètes dans des Banach quelconques. Le cas d'espace $L^p(-1, \delta; E)$, $p \in]1, \infty[$ avec le caractère UMD pour E est en cours de finalisation par G. Dore, A. Favini, R. Labbas et K. Lemrabet.

Dans notre travail, on traitera le problème (2) avec des conditions non homogènes dans le cadre des espaces de Hölder. Notre approche utilise la notion d'impédance caractérisée par un opérateur T_δ précisé ci-dessous. La résolution du problème

$$(P_+^\delta) \begin{cases} (u_+^\delta)''(x) + A u_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) & \text{sur }]0, \delta[\\ u_+^\delta(0) = \psi \\ (u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta, \end{cases} \quad (3)$$

où ψ est donné dans E permet de définir formellement l'opérateur d'impédance T_δ par

$$(u_+^\delta)'(0) = T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi),$$

ensuite, le problème global (2) est complètement décrit par le problème

$$(P_-^\delta) \begin{cases} (u_-^\delta)''(x) + A u_-^\delta(x) = g_-(x) & \text{sur }]-1, 0[\\ u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_-^\delta)'(0) = \frac{p_+}{p_-} T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, u_-^\delta(0)) = \frac{p_+}{p_-} T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, u_+^\delta(0)). \end{cases} \quad (4)$$

Ici la couche mince n'apparaît plus, car T_δ transporte avec précision l'effet de la couche mince. L'étude spécifique de T_δ , en particulier son développement (au voisinage de $\delta = 0$), est très important pour la suite de ce travail, puisqu'il nous permettra d'obtenir le problème limite quand $\delta \rightarrow 0$.

On supposera l'unique hypothèse d'ellipticité suivante :

$$\rho(A) \supset [0, +\infty[\text{ et } \exists C > 0 : \forall \lambda \geq 0, \quad \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{C}{1 + |\lambda|}, \quad (5)$$

où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A .

Il est bien connu que l'hypothèse (5) implique l'existence de $\theta_0 \in]0, \pi/2[$ et $r_0 > 0$ telle que

$$\rho(A) \supset S_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| \leq \theta_0\} \cup \overline{B(0, r_0)},$$

et l'estimation dans (5) reste encore vraie dans S_{θ_0} .

Remarque 0.1 *L'hypothèse (5) implique que $-(-A)^{1/2}$ est générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique pas nécessairement fortement continu en zéro [4].*

Dans ce travail on traitera le cadre Höldérien. On supposera

$$\begin{cases} g_- \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E) \\ g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E), \end{cases} \quad (6)$$

$0 < 2\alpha_0 < 1$. Notons que l'hypothèse d'Hölderianité dans (6) implique que :

$$g^\delta \in C^{2\alpha_0}([-1, \delta]; E) \text{ si et seulement si } g_-(0) = g_+^\delta(0). \quad (7)$$

En effet, pour x, x' proche de zéro, (par exemple $x < 0 < x'$), on a

$$\begin{aligned} \|g^\delta(x) - g^\delta(x')\|_E &\leq \|g^\delta(x) - g^\delta(0)\|_E + \|g^\delta(0) - g^\delta(x')\|_E \\ &\leq \|g_-(x) - g_-(0)\|_E + \|g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x')\|_E \\ &\leq C [(-x)^{2\alpha_0} + (x')^{2\alpha_0}] \\ &\leq C [(-x + x')^{2\alpha_0} + (x' - x)^{2\alpha_0}] \\ &\leq C (x' - x)^{2\alpha_0}. \end{aligned}$$

0.4 Les résultats obtenus

Dans tout ce travail, on supposera que

$$\begin{cases} g_- \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E) \\ g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E), \end{cases}$$

avec $0 < 2\alpha_0 < 1$, mais on ne supposera pas (compte tenu naturellement des caractéristiques différentes des deux corps) que

$$g_-(0) = g_+^\delta(0).$$

0.4.1 Résultats d'existence

A δ fixé petit on a montré les théorèmes d'existence suivants :

Théorème 0.1 Soient $\psi \in D(A)$ et $f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$. Alors le problème (3) admet une unique solution u_+^δ telle que

$$u_+^\delta \in C^2([0, \delta]; E) \cap C([0, \delta]; D(A))$$

si et seulement si

$$A\psi - g_+^\delta(0) \in \overline{D(A)} \text{ et } (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}.$$

Théorème 0.2 Soient $f_- \in D(A)$ et $f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$. Alors le problème (4) admet une unique solution u_-^δ telle que

$$u_-^\delta \in C([-1, 0]; D(A)) \cap C^2([-1, 0]; E)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} Af_- - g_-(-1) \in \overline{D(A)} \\ g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)} \\ (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

Observer la condition naturelle de compatibilité

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)}$$

qui signifie dans le cas physique mentionné ci-haut, pour $E = C_y([0, 1])$ par exemple, que l'application

$$y \longmapsto g_+^\delta(0, y) - g_-(0, y)$$

dans $C([0, 1])$ et vérifie de plus

$$g_+^\delta(0, 0) - g_-(0, 0) = g_+^\delta(0, 1) - g_-(0, 1) = 0.$$

En effet

$$\begin{cases} D(A) = \{\varphi \in C^2([0, 1]) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\} \\ \overline{D(A)} = \{\varphi \in C([0, 1]) : \varphi(0) = \varphi(1) = 0\} \\ A\varphi = \varphi''. \end{cases}$$

0.4.2 Résultats de régularité maximale

On a aussi obtenu les résultats de régularité maximale suivants.

Théorème 0.3 Soient $\psi \in D(A)$ et $f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $A\psi - g_+^\delta(0) \in D_A(\alpha_0, +\infty)$ et $(-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_A(\alpha_0, +\infty)$,
2. $Au_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$,
3. $(u_+^\delta)'' \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$,

$$4. (u_+^\delta)'' \in B((0, \delta); D_A(\alpha_0, +\infty)).$$

Ici (L'espace $B(D_A(\alpha_0, +\infty))$ désigne l'ensemble des u telles que, pour tout $x \in [0, \delta]$, $\|u(x)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)}$ reste borné).

Théorème 0.4 Soient $f_- \in D(A)$ et $f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $Af_- - g_-(-1) \in D_A(\alpha_0, +\infty)$, $g_-(0) - g_+^\delta(0) \in D_A(\alpha_0, +\infty)$ et $(-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_A(\alpha_0, +\infty)$,
2. $u_-^\delta \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; D(A))$,
3. $(u_-^\delta)'' \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$,
4. $(u_-^\delta)'' \in B(D_A(\alpha_0, +\infty))$.

0.4.3 Résultats sur le passage à la limite

On obtient ensuite le problème limite lorsque $\delta \rightarrow 0$ en montrant que u^δ converge vers une fonction v dans $C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$ quand $\delta \rightarrow 0$, solution du problème aux limites de type *Laplace-Beltrami*

$$\begin{cases} v''(x) + A v(x) = g_-(x) & \text{sur }]-1, 0[\\ v(-1) = f_- \\ v'(0) - Av(0) = l - L, \end{cases}$$

en supposant qu'il existe L dans $D_A(\alpha_0, \infty)$ et l dans $D_A(1/2 + \alpha_0, \infty)$ tels que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta} \int_0^\delta g_+^\delta(\tau) d\tau \right] = L$$

et

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta} f_+^\delta \right] = l.$$

0.5 Contenu des chapitres

Ce travail est organisé comme suit.

Le **chapitre 1** est consacré aux rappels et définitions. On commencera par donner la signification de l'opérateur d'impédance et son origine physique. On donnera aussi, pour la commodité du lecteur, les définitions de quelques espaces fonctionnels, en particulier les espaces de Hölder et leurs propriétés fondamentales, ainsi que, certains résultats classiques sur les espaces d'interpolation et sur la théorie des semi-groupes. On terminera ce chapitre par quelques lemmes techniques avec leurs preuves, très utiles pour la suite de notre travail.

Au **chapitre 2**, on fera l'étude du problème dans le cas scalaire

$$\begin{cases} (u^\delta)''(x) + z u^\delta(x) = g^\delta(x) & \text{sur }]-1, \delta[\\ z \in \Sigma_{\theta_0} = \{\lambda \in \mathbb{C}^* : |\arg \lambda| > \theta_0\}, \quad \theta_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ \begin{cases} u^\delta(-1) = f_- \\ (u^\delta)'(\delta) = f_+^\delta, \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^\delta(0^+) = u(0^-) \\ p_- (u^\delta)'(0^-) = p_+ (u^\delta)'(0^+). \end{cases}$$

Cette étude nous permettra d'avoir une idée sur l'écriture de l'opérateur d'impédance T_δ dans le cas scalaire,

$$\begin{aligned} (u_+^\delta)'(0) &= T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, u_+^\delta(0)) \\ &= T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, u_-^\delta(0)). \end{aligned}$$

Elle nous servira également pour mettre en œuvre le calcul fonctionnel de Dunford et ainsi obtenir une représentation explicite de la solution dans le cas abstrait.

Dans le **chapitre 3**, on se focalise sur l'étude du problème abstrait

$$(u^\delta)''(x) + A u^\delta(x) = g^\delta(x) \quad \text{sur }]-1, \delta[$$

avec les conditions aux limites et de transmission

$$\begin{cases} u^\delta(-1) = f_- \\ (u^\delta)'(\delta) = f_+^\delta \\ u^\delta(0^+) = u(0^-) \\ p_- (u^\delta)'(0^-) = p_+ (u^\delta)'(0^+), \end{cases}$$

où A vérifie (3.2). On montrera, grâce à la proposition suivante, que l'effet de la couche mince est complètement décrit par l'opérateur d'impédance :

Proposition 0.1 *On suppose que*

$$\sup \left\{ \left\| \frac{1}{\delta} f_+^\delta \right\|_E, \delta \in]0, 1] \right\} \leq l_+ < \infty,$$

alors, il existe une constante $K > 0$ indépendante de $\delta > 0$ telle que

$$1. \quad \forall \psi \in D_A(1/2 + \alpha_0, +\infty), \forall f_+^\delta \in E$$

$$\|T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi)\|_E \leq K \left(\|h_+^\delta\|_{C([0,1];E)} + l_+ + \|\psi\|_{D_A(1/2+\alpha_0,+\infty)} \right).$$

Lorsque

$$\sup \left\{ \|f_+^\delta\|_{D_A(1/2,+\infty)}, \delta \in]0, 1] \right\} \leq l_{+,1/2} < \infty$$

est bornée dans $D_A(1/2, +\infty)$, alors il existe une constante $K > 0$ indépendante de $\delta > 0$ telle que

$$2. \quad \forall \psi \in D(A), \forall f_+^\delta \in E$$

$$T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) \in D_A(1/2, +\infty),$$

et

$$\begin{aligned} \|T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi)\|_{D_A(1/2,+\infty)} &\leq K \left(\|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} + l_{+,1/2} + \|\psi\|_{D_A(1/2+\alpha_0,+\infty)} \right) \\ &\leq K \left(\frac{1}{\delta^{2\alpha_0}} \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} + l_{+,1/2} + \|\psi\|_{D_A(1/2+\alpha_0,+\infty)} \right). \end{aligned}$$

Ce résultat important nous permettra dans le chapitre suivant d'étudier le cas limite ($\delta \rightarrow 0$).

Le **chapitre 4** est consacré à l'étude du problème limite quand $\delta \rightarrow 0$.

Finalement, le **chapitre 5** contiendra quelques exemples d'applications concrètes en EDP pour illustrer notre théorie abstraite.

Chapitre 1

Rappels et lemmes techniques

1.1 La notion d'impédance et d'admittance

La condition d'impédance permet souvent de simplifier la résolution de problèmes physique. Historiquement, elle a été formulée pour la première fois par M.A. Leontovich [22] dans les années 40. Elle a été présentée initialement comme la condition aux limites modélisant la pénétration d'une onde dans un obstacle métallique imparfaitement conducteur. Cependant, on s'est aperçu par la suite qu'elle pouvait modéliser aussi d'autres situations, telles que celle d'un obstacle conducteur parfait recouvert d'une fine couche de diélectrique ou celle d'un obstacle conducteur parfait mais dont la surface est «rugueuse». Elle est depuis, largement utilisée comme condition aux limites effective pour la résolution de multiples problèmes de diffraction d'ondes électromagnétiques [1].

La condition d'impédance s'exprime alors sous la forme :

$$u(0) = Z (u'(0))$$

où Z_δ est l'opérateur d'impédance, de manière équivalente,

$$u'(0) = T (u(0))$$

avec $T = Z^{-1}$ est l'opérateur d'admittance.

La signification physique de la condition d'impédance peut s'exprimer comme une résistance, par exemple : La propagation de la chaleur dans deux corps à caractères différents mis bout à bout (voir figure 1.1).

La chaleur se propage plus vite dans le corps A que dans le corps B (ou inversement). Au niveau de la jonction une "résistance" du corps B à la propagation de la chaleur crée une "zone" d'obstacle plus ou moins forte dite " zone d'impédance".

De nombreux procédés utilisent des matériaux avec couche mince, comme par exemple :

1. L'étude et l'analyse des ondes émises par un téléphone portable : des chambres dont les murs, le sol et le plafond sont recouverts d'un matériau absorbant sous forme d'une couche mince, sont utilisées pour analyser les ondes émises par un dispositif (téléphone portable) sans que les réflexions sur les parois ne gênent l'expérience.
2. Le domaine de la furtivité radar : la peinture qui recouvre l'avion absorbe les ondes émises par un radar et lui permet de rester invisible.

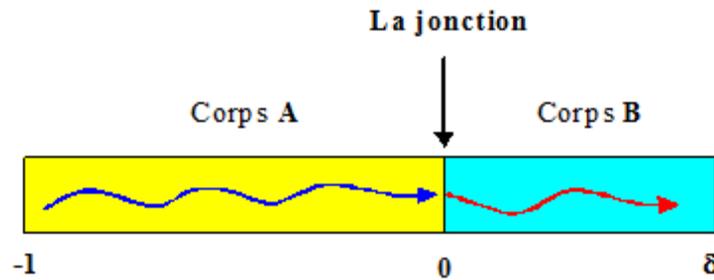


FIG. 1.1 – Propagation de la chaleur dans deux corps différents.

1.2 Les semi-groupes

Soit E un espace de Banach complexe, muni de la norme $\|\cdot\|_E$ et $L(E)$ désigne l'espace des opérateurs linéaires bornés sur E .

Dans la suite de ce travail, on désigne par

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : R(\lambda, A) = (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(E)\},$$

l'ensemble résolvant de l'opérateur A et

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$$

le spectre de A .

1.2.1 Semi-groupe uniformément continu

Définition 1.1 Une famille $T(t)$, $0 \leq t < \infty$, d'opérateurs linéaires bornés de E dans E est un semi-groupe d'opérateurs linéaires bornés si :

1. $T(t+s) = T(t)T(s)$ pour $t \geq 0$ et $s \geq 0$,
2. $T(0) = I$, (I est l'opérateur identité).

Remarque 1.1 Lorsque la première propriété est vraie pour $s, t \in \mathbb{R}$ alors on dit que $T(t)$ est un groupe.

Définition 1.2 On dit qu'un semi-groupe $T(t)$ d'opérateurs linéaires bornés est uniformément continu si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t) - I\|_{\mathcal{L}(E)} = 0.$$

Définition 1.3 On appelle générateur infinitésimal du semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$, l'opérateur A défini sur le domaine

$$D(A) = \left\{ \varphi \in E : \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(T(t)\varphi - \varphi)}{t} \text{ existe} \right\},$$

par

$$A\varphi = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)\varphi - \varphi}{t}, \quad \text{pour } \varphi \in D(A).$$

Théorème 1.1 *Un opérateur linéaire A est un générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu si et seulement si A est borné.*

Remarque 1.2 *Il est clair qu'un semi-groupe définit au plus un générateur infinitésimal.*

Le résultat suivant montre que la réciproque est vraie et qu'un semi-groupe linéaire est en fait caractérisé par son générateur infinitésimal.

Théorème 1.2 *Soient $(T(t))_{t \geq 0}$ et $(S(t))_{t \geq 0}$ deux semi-groupes uniformément continus de même générateur infinitésimal A . Alors*

$$T(t) = S(t)$$

pour tout $t \geq 0$.

(Le lien entre le semi-groupe et son générateur infinitésimal, est établi au moyen de la résolvente du générateur.)

Nous allons rappeler des propriétés fondamentales d'un semi-groupe uniformément continu $(T(t))_{t \geq 0}$ de générateur infinitésimal A .

Corollaire 1.1 *Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu d'un opérateur linéaire borné A . Alors on a les propriétés suivantes :*

1. *Il existe une constante $\omega > 0$ telle que*

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}.$$

2. *Il existe un unique opérateur linéaire borné tel que*

$$T(t) = e^{tA}.$$

3. *L'opérateur A est le générateur infinitésimal de $T(t)$.*
4. *L'application $t \mapsto T(t)$ est différentiable et*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

1.2.2 Semi-groupe fortement continu

Définition 1.4 *On dit qu'un semi-groupe $T(t)$ avec $0 \leq t < \infty$, d'opérateurs linéaires bornés est fortement continu si*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|T(t)\varphi - \varphi\|_E = 0, \quad \text{pour tout } \varphi \in E.$$

On dit aussi que $(T(t))_{t \geq 0}$ est un C_0 semi-groupe.

Théorème 1.3 *Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu. Il existe deux constantes réelles $M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ telles que*

$$\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}, \quad \text{pour } t \in [0, \infty[.$$

Théorème 1.4 Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu et A son générateur infinitésimal. Alors

1. Pour tout $\varphi \in E$ et $t \geq 0$, on a

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s) \varphi ds = T(t) \varphi$$

2. Pour tout $\varphi \in E$ et $t \geq 0$, on a

$$\int_0^t T(s) \varphi ds \in D(A) \quad \text{et} \quad A \int_0^t T(s) \varphi ds = T(t) \varphi - \varphi$$

3. Pour tout $\varphi \in D(A)$ et $t \geq 0$, $T(t) \varphi \in D(A)$, donc $T(t) \varphi$ est dérivable et on a

$$\frac{d}{dt} T(t) \varphi = AT(t) \varphi = T(t) A \varphi.$$

4. Pour tout $\varphi \in D(A)$ et $t \geq 0$, $s \geq 0$,

$$T(t) \varphi - T(s) \varphi = \int_s^t T(\tau) A \varphi d\tau = \int_s^t AT(\tau) \varphi d\tau$$

Corollaire 1.2 Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu $(T(t))_{t \geq 0}$ sur E , alors $D(A)$ est dense dans E et A est un opérateur fermé.

Remarque 1.3 D'après le corollaire, le graphe de A est un sous espace fermé du produit $E \times E$. Alors, on peut munir $D(A)$ d'une structure d'espace de Banach en considérant sur $D(A)$ la norme, dite norme du graphe, définie par : pour tout $\varphi \in D(A)$,

$$\|\varphi\|_{D(A)} = \|\varphi\| + \|A\varphi\|.$$

On sait que $\rho(A)$ est ouvert dans \mathbb{C} . Dans le cas général, tout peut arriver notamment $\rho(A) = \emptyset$.

Théorème 1.5 (Hille-Yosida) Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur fermé A , à domaine dense dans E , soit le générateur infinitésimal d'un semi-groupe fortement continu, est qu'il existe deux réels M et ω tels que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > \omega$, on a $\lambda \in \rho(A)$ et

$$\|(A - \lambda I)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n},$$

pour tout $n \geq 1$.

Théorème 1.6 Soient $(T(t))_{t \geq 0}$ un semi-groupe fortement continu sur E , ω_0 le taux de croissance exponentielle et A le générateur infinitésimal de $T(t)$. Alors,

1. Pour tout $\varphi \in E$ et $|\lambda| > \omega_0$, $p = \lambda + i\mu$, on a

$$(A - pI)^{-1} \varphi = \int_0^{+\infty} e^{-pt} T(t) \varphi dt$$

2. Pour tout $\varphi \in D(A)$ et $\gamma > \max(0, \omega)$, on a

$$\int_0^t T(s)\varphi ds = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{pt}(A - pI)^{-1}\varphi \frac{dp}{p}$$

Définition 1.5 Un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ dans E est appelé semi-groupe de contractions si

$$\forall t \geq 0 : \|T(t)\| \leq 1.$$

Définition 1.6 On dit qu'un C_0 semi-groupe $(T(t))_{t \geq 0}$ est différentiable si pour tout φ de E , la fonction $t \mapsto T(t)\varphi$ est différentiable de $]0, +\infty[$ dans E .

1.2.3 Semi-groupes analytiques

Définition 1.7 Soit le secteur $\Sigma = \{z \in \mathbb{C} : \theta_1 < \arg z < \theta_2 \text{ et } \theta_1 < 0 < \theta_2\}$ et pour $z \in \Sigma$, soit $T(z)$ est un opérateur linéaire borné. La famille $(T(z))_{z \in \Sigma}$ est dite semi-groupe analytique, si

1. $T(0) = I$.
2. $T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, Pour tout $z_1, z_2 \in \Sigma$.
3. $\lim_{z \rightarrow 0, z \in \Sigma} T(z)\varphi = \varphi$, Pour tout $\varphi \in E$.
4. $z \mapsto T(z)$ est analytique sur Σ .

Théorème 1.7 Soit $(T(t))_{t \geq 0}$ est un semi-groupe fortement continu uniformément borné. Soit A le générateur infinitésimal de $T(t)$ et zéro dans $\rho(A)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $T(t)$ se prolonge en un semi-groupe analytique sur le secteur $\Sigma_\theta = \{z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \theta\}$ et $\|T(z)\|$ est uniformément bornée sur tout sous secteur $\Sigma_{\tilde{\theta}}$ de Σ_θ avec $\tilde{\theta} < \theta$.
2. Il existe une constante C telle que pour tout $\sigma > 0$ et $\tau \neq 0$

$$\|R(\sigma + i\tau, A)\| \leq \frac{C}{\tau}.$$

3. Il existe $\vartheta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et une constante $M > 0$ tels que

$$\left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\arg z| < \frac{\pi}{2} + \vartheta \right\} \cup \{0\} \subset \rho(A)$$

et

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$$

pour $\lambda \in \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\arg z| < \frac{\pi}{2} + \vartheta \right\} \cup \{0\}$ et $\lambda \neq 0$.

4. $T(t)$ est différentiable pour $t > 0$ et il existe une constante C telle que

$$\|AT(t)\| \leq \frac{C}{t}$$

pour $t > 0$.

1.3 Rappel sur les espaces de Hölder et les petits Hölder à valeurs vectorielles

Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ un espace de Banach complexe et $\alpha \in]0, 1[$ un nombre fixé.

1.3.1 Cas d'un intervalle de \mathbb{R}

Soit I un intervalle quelconque de \mathbb{R} .

Définition 1.8 On désigne par

– $B(I; E)$, l'espace des fonctions bornées, muni de la norme

$$\|f\|_{B(I;E)} = \sup_{x \in I} \|f(x)\|_E.$$

– $C(I; E)$ l'espace des fonctions continues et bornées, muni de la norme

$$\|f\|_{C(I;E)} = \|f\|_{B(I;E)}.$$

– $C^k(I; E)$ avec $k \in \mathbb{N}$, l'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues et bornées, muni de la norme

$$\|f\|_{C^k(I;E)} = \sum_{i=0}^k \|f^{(i)}\|_{B(I;E)}.$$

– $C^\infty(I; E)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables.

Définition 1.9 Les espaces de Hölder des fonctions continues $C^\alpha(I; E)$ et $C^{k+\alpha}(I; E)$ avec $k \in \mathbb{N}$ sont définis par

$$C^\alpha(I; E) = \left\{ f \in B(I; E) : [f]_{C^\alpha(I;E)} = \sup_{x, y \in I; x > y} \frac{\|f(x) - f(y)\|_E}{(x - y)^\alpha} < +\infty \right\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^\alpha(I;E)} = \|f\|_{B(I;E)} + [f]_{C^\alpha(I;E)}$$

et

$$C^{k+\alpha}(I; E) = \{f \in C^k(I; E) : f^{(k)} \in C^\alpha(I; E)\}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{C^{k+\alpha}(I;E)} = \|f\|_{C^k(I;E)} + [f^{(k)}]_{C^\alpha(I;E)}.$$

Dans le cadre continu, le problème de la densité des domaines de certains opérateurs linéaires fermés se pose (ne se pose pas en général dans le cadre L^p , $p \in]1, \infty[$).

Les petites Hölder $h^\alpha(I; E)$ permettent de résoudre ce problème en particulier.

Définition 1.10 Le petit espace de Hölder des fonctions continues $h^\alpha(I; E)$ sont définis par

$$h^\alpha(I; E) = \left\{ f \in C^\alpha(I; E) : [f]_{C^\alpha(I;E)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\substack{x, y \in I; \\ 0 < |x-y| < \varepsilon}} \frac{\|f(x) - f(y)\|_E}{|x - y|^\alpha} = 0 \right\}$$

muni de la norme induite par celle de $C^\alpha(I; E)$.

1.3.2 Cas d'un ouvert quelconque non vide de \mathbb{R}^n

Soit Ω un ouvert quelconque non vide de \mathbb{R}^n .

Définition 1.11 On désigne par

– $B(\overline{\Omega}; E)$, l'espace des fonctions bornées, muni de la norme

$$\|f\|_{B(\overline{\Omega}; E)} = \sup_{x \in \Omega} \|f(x)\|_E.$$

– $C(\overline{\Omega}; E)$ l'espace des fonctions continues et bornées, muni de la norme

$$\|f\|_{C(\overline{\Omega}; E)} = \|f\|_{B(\overline{\Omega}; E)}.$$

– $C^k(\overline{\Omega}; E)$ avec $k \in \mathbb{N}$, l'espace des fonctions dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont continues et bornées, muni de la norme

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega}; E)} = \sum_{|\beta| \leq k} \|\partial^\beta f(x)\|_{B(\overline{\Omega}; E)}$$

où β un multi-indice.

– $C^\infty(\overline{\Omega}; E)$ l'espace des fonctions indéfiniment différentiables.

Définition 1.12 Les espaces de Hölder des fonctions bornées de Ω dans E , $C^\alpha(\overline{\Omega}; E)$ et $C^{k+\alpha}(\overline{\Omega}; E)$ avec $k \in \mathbb{N}$ sont définis par

$$C^\alpha(\overline{\Omega}; E) = \left\{ f \in B(\overline{\Omega}; E) : [f]_{C^\alpha(I; E)} = \sup_{x, y \in \Omega} \frac{\|f(x) - f(y)\|_E}{|x - y|^\alpha} < +\infty \right\},$$

on le muni de la norme

$$\|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega}; E)} = \|f\|_{B(\overline{\Omega}; E)} + [f]_{C^\alpha(\overline{\Omega}; E)}$$

et

$$C^{k+\alpha}(\overline{\Omega}; E) = \{f \in C^k(\overline{\Omega}; E) : \partial^\beta f(x) \in C^\alpha(\overline{\Omega}; E)\}, \quad |\beta| = k,$$

on le muni de la norme

$$\|f\|_{C^{k+\alpha}(\overline{\Omega}; E)} = \|f\|_{C^k(\overline{\Omega}; E)} + [\partial^\beta f(x)]_{C^\alpha(\overline{\Omega}; E)}$$

où β un multi-indice.

Définition 1.13 Les petits espaces de Hölder des fonctions continues $h^\alpha(\overline{\Omega}; E)$ sont définis par

$$h^\alpha(\overline{\Omega}; E) = \left\{ f \in C^\alpha(\overline{\Omega}; E) : [f]_{C^\alpha(I; E)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\substack{x, y \in \Omega; \\ 0 < |x - y| < \varepsilon}} \frac{\|f(x) - f(y)\|_E}{|x - y|^\alpha} = 0 \right\},$$

on le muni de la norme induite par celle de $C^\alpha(\overline{\Omega}; E)$.

On définit aussi $h^{k+\alpha}(\overline{\Omega}; E)$ (k un entier supérieur ou égal à 1),

$$h^{k+\alpha}(\overline{\Omega}; E) = \{f \in h^\alpha(\overline{\Omega}; E) : \partial^\beta f \in h^\alpha(\overline{\Omega}; E)\}$$

où β un multi-indice avec $|\beta| \leq k$.

1.3.3 Quelques propriétés

Soit Ω un ouvert quelconque non vide de \mathbb{R}^n (non nécessairement borné).

1. Les espaces de Hölder sont intermédiaires entre $B^1(\overline{\Omega}; E)$ et $B(\overline{\Omega}; E)$:

$$B^1(\overline{\Omega}; E) \subset C^\alpha(\overline{\Omega}; E) \subset B(\overline{\Omega}; E).$$

(pour $k \in \mathbb{N}$, $B^k(\overline{\Omega}; E)$ est le sous espace vectoriel de $C^k(\overline{\Omega}; E)$ dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre k sont bornées sur Ω).

2. Les fonctions de $C^\alpha(\overline{\Omega}; E)$ sont uniformément continues sur Ω .
3. Dans la définition de $C^\alpha(\overline{\Omega}; E)$, il suffit de supposer que $|x - y|^\alpha \leq \varepsilon$, avec ε est un nombre positif très petit, car pour $|x - y|^\alpha \geq \varepsilon$ on a toujours

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\|_E &\leq 2 \sup_{x \in \Omega} \|f(x)\|_E \\ &\leq 2 \frac{|x - y|^\alpha}{\varepsilon^\alpha} \sup_{x \in \Omega} \|f(x)\|_E \\ &\leq C |x - y|^\alpha. \end{aligned}$$

Proposition 1.1 *Tout fonction f de $C^\alpha(\Omega; E)$ avec $0 < \alpha \leq 1$ se prolonge en une fonction \tilde{f} de $C^\alpha(\overline{\Omega}; E)$. En particulier $C^\alpha(\Omega; E) \subset C(\overline{\Omega}; E)$.*

On pourrait résumer cette proposition, en écrivant $C^\alpha(\Omega; E) = C^\alpha(\overline{\Omega}; E)$.

Proposition 1.2 1. *On le muni de la norme $\|\cdot\|_\alpha$, $C^\alpha(\Omega; E)$ est un espace de Banach.*

2. *Si $\alpha \geq \beta$ alors $C^\alpha(\Omega; E) \subset C^\beta(\Omega; E)$ avec injection continue.*

3. *Si Ω est un ouvert borné et $\alpha > \beta$, l'inclusion $C^\alpha(\Omega; E) \subset C^\beta(\Omega; E)$ est compacte.*

Pour les petits espaces de Hölder :

1. Pour $\varepsilon \in]0, \alpha[$, on a

$$B^1(\overline{\Omega}; E) \subset h^\alpha(\overline{\Omega}; E) \subset C^\alpha(\overline{\Omega}; E) \subset h^{\alpha-\varepsilon}(\overline{\Omega}; E) \subset C^{\alpha-\varepsilon}(\overline{\Omega}; E) \subset B(\overline{\Omega}; E).$$

2. f est une fonction de $h^\alpha(\overline{\Omega}; E)$ si et seulement si

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0 : \forall x, y \in \Omega, \\ |x - y| \leq \varepsilon \implies \|f(x) - f(y)\|_E \leq C_\varepsilon |x - y|^\alpha \text{ et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} C_\varepsilon = 0. \end{cases}$$

Proposition 1.3 *Toute fonction f de $h^\alpha(\Omega; E)$, avec $0 < \alpha < 1$, se prolonge en une fonction \tilde{f} de $h^\alpha(\overline{\Omega}; E)$. On écrira $h^\alpha(\Omega; E) = h^\alpha(\overline{\Omega}; E)$.*

Pour un intervalle I quelconque de \mathbb{R} , on a la proposition suivante.

Proposition 1.4 *Soient $\alpha \in]0, 1[$ et $\theta > \alpha$ alors $h^\alpha(I; E)$ est la fermeture de $C^\theta(\Omega; E)$ dans $C^\alpha(I; E)$.*

On a aussi pour k entier supérieur ou égal à 1 :

$$\begin{cases} h^\alpha(\mathbb{R}^n; E) = \overline{C^k(\mathbb{R}^n; E)}^{C^\alpha(\mathbb{R}^n; E)} \\ h^\alpha(\overline{\Omega}; E) = \overline{C^k(\overline{\Omega}; E)}^{C^\alpha(\mathbb{R}^n; E)}. \end{cases}$$

Pour plus de détails sur les espaces de Hölder et les petits Hölder voir [23] et [36].

1.4 La mesurabilité au sens de Bochner

Soit E est un espace de Banach, muni de la norme $\|\cdot\|_E$.

Définition 1.14

Une fonction g de $[0, T]$ à valeurs dans E est dite étagée s'il existe une famille finie $(B_i)_{i \in I}$ d'ensembles mesurables dans $[0, T]$ et $(\omega_i)_{i \in I}$, $\omega_i \in E$ tels que :

1. $[0, T] = \cup_{i \in I} B_i$ $B_i \cap B_j = \emptyset$ $i \neq j$

2. $g(x) = \sum_{i \in I} \chi_{B_i} \omega_i$

où χ_{B_i} est la fonction caractéristique de B_i .

Définition 1.15 (mesurabilité au sens de Bochner)

On dira qu'une fonction g définie sur $[0, T]$ à valeur dans E est fortement mesurable au sens de Bochner s'il existe une suite $(g_n)_{n \geq 0}$ de fonctions étagées telle que $g_n(x)$ tend vers $g(x)$ dans E pour presque tout x de $[0, T]$ (i.e. $\|g_n(x) - g(x)\|_E$ tend vers zéro quand n converge vers l'infini). On dit alors que g est B -mesurable.

Définition 1.16 (intégrabilité au sens de Bochner)

On dira qu'une fonction g définie sur $(0, T)$ et à valeurs dans E est B -intégrable s'il existe une suite de fonctions étagées $(g_n)_{n \geq 0}$ telle que

1. Pour presque tout x , $g_n(x)$ converge vers $g(x)$ dans E quand n tend vers l'infini.

2. $\int_0^T \|g_n(x) - g(x)\|_E dx$ tend vers zéro quand n tend vers l'infini.

Théorème 1.8

Soit g définie sur $(0, T)$ à valeurs dans E et B -mesurable. Alors g est B -intégrable si et seulement si l'application qui à x de $(0, T)$ associe $\|g(x)\|_E$ est intégrable au sens de Lebesgue.

Définition 1.17

Soit g une fonction B -mesurable définie sur $(0, T)$. Alors, pour tout ensemble Lebesgue mesurable X de $(0, T)$, on définit :

$$\int_X g(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \chi_X(x) g_n(x) dx$$

où $(g_n)_{n \geq 0}$ est une suite de fonctions étagées satisfaisant :

1. $g_n(x)$ tend vers $g(x)$ pour presque tout x .

2. $\int_0^T \|g_n(x) - g(x)\|_E dx$ tend vers zéro quand n tend vers ∞ .

Proposition 1.5

Soit g une fonction B -mesurable définie sur $(0, T)$ à valeurs dans E . Alors, pour tout ensemble X de $(0, T)$, on a :

1. $\|\int_X g(x) dx\|_E \leq \int_X \|g(x)\|_E dx$.

2. L'application qui à g associe $\int_X g(x) dx$ est linéaire.

3. Si L est une forme linéaire continue sur E (i.e. $L \in E'$) alors

$$\left\langle L, \int_X g(x) dx \right\rangle = \int_X \langle L, g(x) \rangle dx.$$

Ici $\langle L, h \rangle = L(h)$.

Définition 1.18

Soit $1 \leq p \leq \infty$. On définit les espaces :

$$L_{\#}^p(0, T; E) = \left\{ g : [0, T] \mapsto E, B\text{-mesurable telle que la fonction } x \mapsto \|g(x)\|_E^p \text{ est Lebesgue intégrable} \right\},$$

si p est fini. On munit cet espace de la norme

$$\|g(x)\|_{L_{\#}^p(0, T; E)}^p = \left(\int_0^T \|g(x)\|_E^p dx \right)^{1/p}.$$

Si p est infini, alors on définit :

$$L_{\#}^{\infty}(0, T; E) = \left\{ g : [0, T] \mapsto E, B\text{-mesurable telle que la fonction } x \mapsto \|g(x)\|_E \text{ est mesurable, } \sup_{x \in [0, T]} \text{ess } \|g(x)\|_E \text{ soit fini} \right\}$$

on le munit de la norme

$$\|g(x)\|_{L_{\#}^{\infty}(0, T; E)} = \sup_{x \in [0, T]} \text{ess } \|g(x)\|_E.$$

Théorème 1.9 $L_{\#}^p(0, T; E)$, $p \in [1, \infty]$ muni de la norme précédente est un espace de Banach.

Pour les preuves des théorèmes précédents voir [30].

1.5 Les espaces d'interpolation

Soient $(E_0, \|\cdot\|_0)$ et $(E_1, \|\cdot\|_1)$ deux espaces de Banach s'injectant continûment dans un espace topologique séparé \mathcal{F} . En posant

$$\begin{cases} \|\varphi\|_{E_0 \cap E_1} = \|\varphi\|_{E_0} + \|\varphi\|_{E_1} & \text{si } \varphi \in E_0 \cap E_1 \\ \|\varphi\|_{E_0 + E_1} = \inf_{\varphi_i \in E_i, \varphi_0 + \varphi_1 = \varphi} (\|\varphi_0\|_{E_0} + \|\varphi_1\|_{E_1}) & \text{si } \varphi \in E_0 + E_1. \end{cases}$$

Il est alors connu que les espaces $(E_0 \cap E_1, \|\cdot\|_{E_0 \cap E_1})$ et $(E_0 + E_1, \|\cdot\|_{E_0 + E_1})$ sont des espaces de Banach.

Définition 1.19

Pour $p \in [1, \infty]$ et $\theta \in]0, 1[$, on définit l'espace intermédiaire noté $(E_0, E_1)_{\theta, p}$ entre $E_0 \cap E_1$ et $E_0 + E_1$, par

$$\varphi \in (E_0, E_1)_{\theta, p},$$

si et seulement si

1. $\forall t > 0, \exists u_0(t) \in E_0, \exists u_1(t) \in E_1$ tels que

$$\varphi = u_0(t) + u_1(t)$$

2. $t^{-\theta}u_0 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_0), t^{1-\theta}u_1 \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_1)$.

(Avec la modification usuelle pour le cas $p = \infty$).

Proposition 1.6

Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\varphi\|_{\theta,p} = \inf_{\substack{u_i: \mathbb{R}_+ \rightarrow E_i, i=0,1 : \\ \forall t > 0, u_0(t) + u_1(t) = \varphi}} \left(\|t^{-\theta}u_0\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, E_0)} + \|t^{1-\theta}u_1\|_{L_*^p(\mathbb{R}_+, E_1)} \right) \\ \text{si } \varphi \in (E_0, E_1)_{\theta,p}. \end{array} \right.$$

Alors

$$\left((E_0, E_1)_{\theta,p}, \|\cdot\|_{\theta,p} \right),$$

est un espace de Banach vérifiant

$$E_0 \cap E_1 \subset (E_0, E_1)_{\theta,p} \subset E_0 + E_1,$$

(avec injections continues).

Il existe plusieurs définitions équivalentes de ces espaces d'interpolation [25]. Citons en quelques unes :

Définition 1.20

1.

$$\varphi \in (E_0, E_1)_{\alpha,p} \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{R}, \exists u(t) \in E_0, \exists v(t) \in E_1 \quad : \quad x = u(t) + v(t) \\ e^{-\alpha} t u \in L^p(\mathbb{R}, E_0) \quad \text{et} \quad e^{(1-\alpha)} t v \in L^p(\mathbb{R}, E_1) \end{array} \right.$$

2.

$$\varphi \in (E_0, E_1)_{\alpha,p} \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall t > 0, \exists u(t) \in E_0 \cap E_1 \quad : \quad x = \int_0^{+\infty} u(t) \frac{dt}{t} \\ t^{-\alpha} u \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_0) \quad \text{et} \quad t^{1-\alpha} u \in L_*^p(\mathbb{R}_+, E_1) \end{array} \right.$$

3.

$$\varphi \in (E_0, E_1)_{\alpha,p} \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall t \in \mathbb{R}, \exists u(t) \in E_0 \cap E_1 \quad : \quad x = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) dt \\ e^{-\alpha} t u \in L^p(\mathbb{R}, E_0) \quad \text{et} \quad e^{(1-\alpha)} t u \in L^p(\mathbb{R}, E_1). \end{array} \right.$$

Notation 1.1 Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A) \subset E$ muni de sa norme du graphe :

$$\|x\|_{D(A)} = \|x\|_E + \|A x\|_E, \quad x \in D(A),$$

On notera

$$D_A(\alpha; p) = (D(A); E)_{1-\alpha,p}$$

où $p \in [1, +\infty]$ et $0 < \alpha < 1$.

Lorsque A vérifie certaines propriétés spectrales, on sait donner des caractérisations explicites de $D_A(\alpha, p)$ pour $p \in [1, +\infty]$ et $0 < \alpha < 1$, comme par exemple :

Cas 1.1 *Supposons que $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+^*$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\forall \lambda > 0 : \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{\mathcal{L}(E)} \leq \frac{C}{\lambda},$$

alors

$$D_A(\alpha, p) = \{\varphi \in E : t^\alpha A(A - tI)^{-1} \varphi \in L_*^p(\mathbb{R}_+; E)\}.$$

Ceci est démontré dans Grisvard dans [11].

Cas 1.2 *Si A génère un semi-groupe fortement continu et borné dans E*

$$D_A(\alpha, p) = \{\varphi \in E : t^{-\alpha}(e^{tA} - I)\varphi \in L_*^p(\mathbb{R}_+; E)\}.$$

Ceci est prouvé dans Lions [24].

Cas 1.3 *Si A génère un semi-groupe analytique borné dans E , alors*

$$D_A(\alpha, p) = \{\varphi \in E : t^{1-\alpha} A e^{tA} \varphi \in L_*^p(\mathbb{R}_+; E)\}.$$

Voir Butzer-Béreans [5].

1.6 Lemmes techniques

Dans cette section on va énoncer quelques lemmes techniques très utiles pour la suite de ce travail.

On considère A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$, γ une courbe simple joignant $\infty e^{i\theta_0}$ à $\infty e^{-i\theta_0}$ avec θ_0 choisi entre $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ telle que $\gamma \subset \rho(A) \setminus \mathbb{R}_+$ ($\rho(A)$ désigne l'ensemble résolvant de A) et le secteur

$$\Sigma_{\theta_0} = \{z : |z| \geq r_0 \text{ et } \theta_0 \leq \arg z \leq 2\pi - \theta_0\},$$

où $r_0 > 0$ fixé. Pour tout $z \in \Sigma_{\theta_0}$ et tout $x \in [-1, \delta]$, on pose

$$c_z(x) = \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta}, \quad s_z(x) = \frac{\sinh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta}.$$

Remarque 1.4 *Pour $z \in \gamma$, $|z| \geq r_0$, $\delta > 0$ et $x \in]-1, 0[\cup]0, \delta[$, on a*

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\sqrt{-z}\delta) > 0 \text{ et } \operatorname{Re}(\sqrt{-z}|x|) > 0 \\ |\arg(\sqrt{-z}\delta)| = |\arg(\sqrt{-z}x)| = \pi/2 - \theta_0/2 > 0 \\ \operatorname{Re}(\sqrt{-z}\delta) = \delta |z|^{1/2} \cos(\pi/2 - \theta_0/2) = \delta |z|^{1/2} \sin(\theta_0/2). \end{cases}$$

Lemme 1.1 *Pour tout complexes z_1 et z_2 différents de zéro, on a*

$$|z_1 + z_2| \geq (|z_1| + |z_2|) \cos\left(\frac{\arg(z_1) - \arg(z_2)}{2}\right).$$

Preuve. Soient z_1 et z_2 différents de zéro, on pose

$$\begin{cases} \alpha = \arg(z_1) \\ \beta = \arg(z_2), \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} |z_2 + z_1|^2 &= \left| |z_2| e^{i\alpha} + |z_1| e^{i\beta} \right|^2 \\ &= \left| |z_2| \cos \alpha + i |z_2| \sin \alpha + |z_1| \cos \beta + i |z_1| \sin \beta \right|^2 \\ &= (|z_2| \cos \alpha + |z_1| \cos \beta)^2 + (|z_2| \sin \alpha + |z_1| \sin \beta)^2 \\ &= |z_2|^2 \cos^2 \alpha + |z_1|^2 \cos^2 \beta + 2 |z_2| |z_1| \cos \alpha \cos \beta \\ &\quad + |z_2|^2 \sin^2 \alpha + |z_1|^2 \sin^2 \beta + 2 |z_2| |z_1| \sin \alpha \sin \beta \\ &= |z_2|^2 + |z_1|^2 + 2 |z_2| |z_1| (\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta), \end{aligned}$$

puisqu'on a

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta &= \cos(\alpha - \beta) \\ &= \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} |z_2 + z_1|^2 &= (|z_2|^2 + |z_1|^2) \left(\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} + \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ &\quad + 2 |z_2| |z_1| \left(\cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \right) \\ &= (|z_2|^2 + |z_1|^2 + 2 |z_2| |z_1|) \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \\ &\quad + (|z_2|^2 + |z_1|^2 - 2 |z_2| |z_1|) \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \\ &= (|z_2| + |z_1|)^2 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} + (|z_2| - |z_1|)^2 \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$|z_2 + z_1|^2 \geq (|z_2| + |z_1|)^2 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

■

Lemme 1.2 Pour tout complexe z tel que $|\arg(z)| \leq \theta < \pi/2$, on a

$$|\arg(1 - e^{-z}) - \arg(1 + e^{-z})| \leq \theta.$$

Preuve. Soit $z \in \mathbb{C}$, tel que $|\arg(z)| \leq \theta < \pi/2$, on a

$$\begin{aligned} 1 - e^{-z} &= 1 - e^{-\operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z} \\ &= 1 - e^{-\operatorname{Re} z} e^{-i \operatorname{Im} z} \\ &= 1 - e^{-\operatorname{Re} z} (\cos(\operatorname{Im} z) - i \sin(\operatorname{Im} z)) \\ &= 1 - e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z) + i e^{-\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z) \end{aligned}$$

alors

$$\arg(1 - e^{-z}) = \arctan\left(\frac{e^{-\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)}{1 - e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)}\right).$$

D'autre part, on obtient de la même manière

$$\arg(1 + e^{-z}) = -\arctan\left(\frac{e^{-\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)}{1 + e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)}\right),$$

donc

$$\begin{aligned} \arg(1 - e^{-z}) - \arg(1 + e^{-z}) &= \arctan\left(\frac{e^{-\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)}{1 - e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)}\right) \\ &\quad + \arctan\left(\frac{e^{-\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)}{1 + e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)}\right). \end{aligned}$$

L'égalité suivante

$$\arctan a + \arctan b = \arctan\left(\frac{a + b}{1 - ab}\right)$$

est vraie si $ab < 1$.

Puisque

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)}{1 - e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)} \frac{e^{-\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)}{1 + e^{-\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)} &= \frac{e^{-2\operatorname{Re} z} \sin^2(\operatorname{Im} z)}{1 - e^{-2\operatorname{Re} z} \cos^2(\operatorname{Im} z)} \\ &= \frac{e^{-2\operatorname{Re} z} [1 - \cos^2(\operatorname{Im} z)]}{1 - e^{-2\operatorname{Re} z} \cos^2(\operatorname{Im} z)} \\ &= \frac{e^{-2\operatorname{Re} z} - e^{-2\operatorname{Re} z} \cos^2(\operatorname{Im} z)}{1 - e^{-2\operatorname{Re} z} \cos^2(\operatorname{Im} z)} \\ &< 1, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \arg(1 - e^{-z}) - \arg(1 + e^{-z}) &= \arctan\left(\frac{2e^{-\operatorname{Re} z} \sin(\operatorname{Im} z)}{1 - e^{-2\operatorname{Re} z}}\right) \\ &= \arctan\left(\frac{\sin(\operatorname{Im} z)}{\sinh(\operatorname{Re} z)}\right) \end{aligned}$$

et comme $\operatorname{Re} z > 0$

$$\left| \frac{\sin(\operatorname{Im} z)}{\sinh(\operatorname{Re} z)} \right| \leq \frac{\sin|\operatorname{Im} z|}{|\operatorname{Im} z|} \frac{|\operatorname{Im} z|}{\operatorname{Re} z} \frac{\operatorname{Re} z}{\sinh(\operatorname{Re} z)} \leq \frac{|\operatorname{Im} z|}{\operatorname{Re} z} \leq \tan \theta$$

car

$$\begin{cases} \frac{\sin|\operatorname{Im} z|}{|\operatorname{Im} z|} \leq 1 \\ \frac{\operatorname{Re} z}{\sinh(\operatorname{Re} z)} \leq 1. \end{cases}$$

Par conséquent

$$\arg(1 - e^{-z}) - \arg(1 + e^{-z}) \leq \theta.$$

■

Le lemme suivant (très utile pour la suite) donne une minoration de $\left|1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right|$.

Lemme 1.3 *Il existe une constante $C_{\theta_0} > 0$ telle que pour tout $z \in \Sigma_{\theta_0}$ on a :*

$$\left| 1 + e^{-\sqrt{-z}} \right| \geq C_{\theta_0} = \min \left(1 - e^{-\frac{\pi}{2 \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2})}}, 1 - e^{-r_0^{1/2} \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2})} \right) > 0.$$

Preuve. Soit $z \in \gamma$ avec $|z| = r_0$ (on rappelle que r_0 est assez petit) on a

$$\left| 1 + e^{-\sqrt{-z}} \right| \geq 1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} = 1 - e^{-r_0^{1/2} \cos \nu} \geq 1 - e^{-r_0^{1/2} \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2})}$$

avec $\nu \in [-\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_0}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}]$.

Pour $z \in \gamma$ avec $|z| > r_0$, on a

$$\begin{aligned} \left| 1 + e^{-\sqrt{-z}} \right|^2 &= \left| 1 + e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} - i \operatorname{Im} \sqrt{-z}} \right|^2 \\ &= \left| e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \left(e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} + e^{-i \operatorname{Im} \sqrt{-z}} \right) \right|^2 \\ &= e^{-2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}} \left(e^{2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}} + 2 e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \cos(\operatorname{Im} \sqrt{-z}) + 1 \right) \\ &= \left(e^{-2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}} + 1 \right) + 2 e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \cos(\operatorname{Im} \sqrt{-z}). \end{aligned}$$

Maintenant, si $\operatorname{Re} \sqrt{-z} \leq \pi / [2 \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2})]$, alors

$$|\operatorname{Im} \sqrt{-z}| \leq \operatorname{Re} \sqrt{-z} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right) \leq \frac{\pi}{2},$$

ainsi

$$\cos(\operatorname{Im} \sqrt{-z}) \geq 0,$$

donc

$$\left| 1 + e^{-\sqrt{-z}} \right| \geq 1.$$

Si $\operatorname{Re} \sqrt{-z} \geq \pi / (2 \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}))$, on a

$$|\operatorname{Im} \sqrt{-z}| = \operatorname{Re} \sqrt{-z} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right) \geq \frac{\pi}{2},$$

$$\cos(\operatorname{Im} \sqrt{-z}) \leq 0,$$

et donc

$$\begin{aligned} \left| 1 + e^{-\sqrt{-z}} \right|^2 &\geq e^{-2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}} + 1 - 2 e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} = \left(1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \right)^2 \\ &\geq \left(1 - e^{-\frac{\pi}{2 \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2})}} \right)^2. \end{aligned}$$

On traite de la même manière le cas $z \in \Sigma_{\theta_0}$ avec $\arg(z) = \theta \in]\theta_0, 2\pi - \theta_0[$. ■

Lemme 1.4 *Il existe une constante $C_{\theta_0} > 0$ telle que pour tout $z \in \Sigma_{\theta_0}$ on a :*

$$\left|1 - e^{-\sqrt{-z}}\right| \geq C_{\theta_0} = \min \left(1 - e^{-\frac{\pi}{2 \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2})}}, 1 - e^{-r_0^{1/2} \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2})} \right) > 0.$$

Preuve. Soit $z \in \gamma$ avec $|z| = r_0$ (avec r_0 est assez petit) on a

$$\left|1 - e^{-\sqrt{-z}}\right| \geq 1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} = 1 - e^{-r_0^{1/2} \cos \nu} \geq 1 - e^{-r_0^{1/2} \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2})}$$

avec $\nu \in [-\frac{\pi}{2} + \frac{\theta_0}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}]$.

Pour $z \in \gamma$ avec $|z| > r_0$, on a

$$\begin{aligned} \left|1 - e^{-\sqrt{-z}}\right|^2 &= \left|1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} - i \operatorname{Im} \sqrt{-z}}\right|^2 \\ &= \left|e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \left(e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} - e^{-i \operatorname{Im} \sqrt{-z}}\right)\right|^2 \\ &= e^{-2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}} \left(e^{2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}} - 2e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \cos(\operatorname{Im} \sqrt{-z}) + 1\right) \\ &= \left(e^{-2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}} + 1\right) - 2e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \cos(\operatorname{Im} \sqrt{-z}). \end{aligned}$$

Maintenant, si $\operatorname{Re} \sqrt{-z} \geq \pi / (2 \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}))$, alors

$$|\operatorname{Im} \sqrt{-z}| = \operatorname{Re} \sqrt{-z} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right) \geq \frac{\pi}{2},$$

ainsi

$$\cos(\operatorname{Im} \sqrt{-z}) \leq 0,$$

donc

$$\begin{aligned} \left|1 - e^{-\sqrt{-z}}\right|^2 &\geq \left(1 + e^{-2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}}\right) - 2e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} + 2e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \\ &\geq \left(1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}}\right)^2 + 2e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \\ &\geq \left(1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}}\right)^2 \\ &\geq \left(1 - e^{-\frac{\pi}{2 \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2})}}\right)^2. \end{aligned}$$

Si $\operatorname{Re} \sqrt{-z} \leq \pi / (2 \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}))$, on a

$$|\operatorname{Im} \sqrt{-z}| \leq \operatorname{Re} \sqrt{-z} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2}\right) \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\cos(\operatorname{Im} \sqrt{-z}) \geq 0,$$

et donc

$$\begin{aligned} \left|1 + e^{-\sqrt{-z}}\right|^2 &\geq \left(e^{-2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}} + 1\right) - 2e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \\ &\geq \left(1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}}\right)^2 \\ &\geq \left(1 - e^{-\frac{\pi}{2 \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2})}}\right)^2. \end{aligned}$$

On traite de la même manière le cas $z \in \Sigma_{\theta_0}$ avec $\arg(z) = \theta \in]\theta_0, 2\pi - \theta_0[$. ■

Remarque 1.5 De la même façon, il existe C_{θ_0} indépendante de $\delta \in]0, 1]$ telle que

$$\left|1 \pm e^{-2\delta\sqrt{-z}}\right| \geq C_{\theta_0} > 0, \quad (1.1)$$

pour tout $z \in \Sigma_{\theta_0}$.

Pour tout $\xi \in [-1, 0]$ et $\delta \in]0, 1]$, on pose

$$\Delta_z(\xi, \delta) = \cosh \sqrt{-z}\delta \cosh \sqrt{-z}\xi - p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}\xi,$$

(cette expression apparaîtra dans les chapitres suivants).

Lemme 1.5 Pour tout $\delta \in]0, 1]$ et $z \in \Sigma_{\theta_0}$ on a

$$|\Delta_z(-1, \delta)| \geq \frac{(C_{\theta_0})^2}{4} \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} > 0. \quad (1.2)$$

Preuve. Soient $\delta \in]0, 1]$ et $z \in \Sigma_{\theta_0}$. En utilisant le lemme 1.1, on a

$$\begin{aligned} & 4|\Delta_z(-1, \delta)| \\ &= e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} \left| \left(1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right) \left(1 + e^{-2\sqrt{-z}}\right) + p \left(1 - e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right) \left(1 - e^{-2\sqrt{-z}}\right) \right| \\ &\geq e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} \left(\left| \left(1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right) \left(1 + e^{-2\sqrt{-z}}\right) \right| + p \left| \left(1 - e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right) \left(1 - e^{-2\sqrt{-z}}\right) \right| \right) \times \\ &\quad \left| \cos \left(\left| \frac{\arg(1 - e^{-2\delta\sqrt{-z}}) + \arg(1 - e^{-2\sqrt{-z}})}{2} - \frac{\arg(1 + e^{-2\delta\sqrt{-z}}) + \arg(1 + e^{-2\sqrt{-z}})}{2} \right| \right) \right|, \end{aligned}$$

d'autre part, par le lemme 1.2

$$\begin{aligned} & \left| \arg(1 - e^{-2\delta\sqrt{-z}}) + \arg(1 - e^{-2\sqrt{-z}}) - \arg(1 + e^{-2\delta\sqrt{-z}}) - \arg(1 + e^{-2\sqrt{-z}}) \right| \\ &\leq \left| \arg(1 - e^{-2\delta\sqrt{-z}}) - \arg(1 + e^{-2\delta\sqrt{-z}}) \right| + \left| \arg(1 - e^{-2\sqrt{-z}}) - \arg(1 + e^{-2\sqrt{-z}}) \right| \\ &\leq 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \right), \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} & 4|\Delta_z(-1, \delta)| \\ &\geq e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} \left(\left|1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right| \left|1 + e^{-2\sqrt{-z}}\right| + p \left|1 - e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right| \left|1 - e^{-2\sqrt{-z}}\right| \right) \sin(\theta_0/2) \\ &\geq e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} \left|1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right| \left|1 + e^{-2\sqrt{-z}}\right| \sin(\theta_0/2) \\ &\geq (C_{\theta_0})^2 \sin(\theta_0/2) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}. \end{aligned}$$

■

Remarque 1.6 *Il est important de noter qu' on a aussi la minoration*

$$|\Delta_z(-1, \delta)| \geq \frac{p (C_{\theta_0})^2}{4} \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} > 0. \quad (1.3)$$

En fonction de la dépendance de p par rapport à δ , on prendra l'une ou l'autre.

Lemme 1.6 *Pour tout $\xi \in [-1, 0]$, $\delta \in]0, 1]$ et $z \in \Sigma_{\theta_0}$ on a*

$$|\Delta_z(\xi, \delta)| \leq (1+p) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-\xi)}$$

et

$$|\partial_\xi \Delta_z(\xi, \delta)| \leq (1+p) |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-\xi)}.$$

Preuve. Pour tout $\xi \in [-1, 0]$, $\delta \in]0, 1]$ et $z \in \Sigma_{\theta_0}$ on a

$$\begin{aligned} |\Delta_z(\xi, \delta)| &= |\cosh \sqrt{-z}\delta \cosh \sqrt{-z}\xi - p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}\xi| \\ &\leq |\cosh \sqrt{-z}\delta \cosh \sqrt{-z}\xi| + p |\sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}\xi| \\ &\leq (1+p) \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\xi \\ &\leq (1+p) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta} e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}\xi} \\ &\leq (1+p) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-\xi)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} |\partial_\xi \Delta_z(\xi, \delta)| &= |z|^{1/2} |\cosh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}\xi - p \sinh \sqrt{-z}\delta \cosh \sqrt{-z}\xi| \\ &\leq |z|^{1/2} [|\cosh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}\xi| + p |\sinh \sqrt{-z}\delta \cosh \sqrt{-z}\xi|] \\ &\leq (1+p) |z|^{1/2} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\xi \\ &\leq (1+p) |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta} e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}\xi} \\ &\leq (1+p) |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-\xi)}. \end{aligned}$$

■

Lemme 1.7 *De la remarque 1.5 on tire l'existence d'une constante $C > 0$ indépendante de δ telle que*

$$\left\{ \begin{array}{l} |c_z(x)| = \left| e^{-\sqrt{-z}x} \left| \frac{1 + e^{-2\sqrt{-z}(\delta-x)}}{1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}} \right| \right| \leq C e^{-x|z|^{1/2} \sin(\theta_0/2)} \\ |s_z(x)| = \left| e^{-\sqrt{-z}(\delta-|x|)} \left| \frac{1 - e^{-2\sqrt{-z}|x|}}{1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}} \right| \right| \leq C e^{-(\delta-|x|)|z|^{1/2} \sin(\theta_0/2)} \\ |c_z(\delta-x)| = \left| e^{-\sqrt{-z}(\delta-|x|)} \left| \frac{1 + e^{-2\sqrt{-z}|x|}}{1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}} \right| \right| \leq C e^{-(\delta-|x|)|z|^{1/2} \sin(\theta_0/2)} \end{array} \right.$$

pour tout $x \in [-1, \delta]$.

Lemme 1.8 Soit A un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ non nécessairement dense alors :

$$\overline{D(A)} = \overline{D(\sqrt{-A})},$$

si $\sqrt{-A}$ existe.

Preuve. Il n'est pas difficile de prouver ce lemme.

On rappelle que :

$$D(A) \subset D(\sqrt{-A})$$

donc

$$\overline{D(A)} \subset \overline{D(\sqrt{-A})}.$$

cette inclusion est évidente.

D'autre part, soit $x \in \overline{D(\sqrt{-A})}$ alors

$$x = \lim_n x_n$$

où

$$x_n = (-A)^{-1/2} y_n \in D(\sqrt{-A})$$

et

$$x_n = (-A)^{-1/2} y_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} z^{-1/2} (A - z)^{-1} y_n dz$$

alors $x_n = (-A)^{-1/2} y_n \in \overline{D(A)}$ vu que l'intégrale existe et dont les éléments à l'intérieur sont dans $D(A)$. Par conséquent

$$x = \lim_n x_n \in \overline{D(A)}.$$

Pour une autre preuve de ce lemme voir M. Haase [13]. ■

Lemme 1.9 1. Il existe une constante $C > 0$ telle que pour chaque $z \in \gamma$ et $r > 0$, on a

$$|z \pm r| \geq Cr \text{ et } |z \pm r| \geq C|z|,$$

2. Soit $\nu \in]0, 1[$. Alors il existe $C > 0$ ne dépendant que de γ telle que pour chaque $r > 0$,

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{|r \pm z| |z|^\nu} |dz| \leq \frac{C}{r^\nu}.$$

Preuve. 1. Pour $z \in \gamma$ et $r > 0$, on a

$$\begin{aligned} |z \pm r| &\geq AB = r \sin \theta_0 \geq K r \\ &\geq CD = |z| \sin \theta_0 \geq K |z|. \end{aligned}$$

Pour A, B, C , et D voir figure (1.2).2. Pour $\nu \in]0, 1[$ et $r > 0$, on a

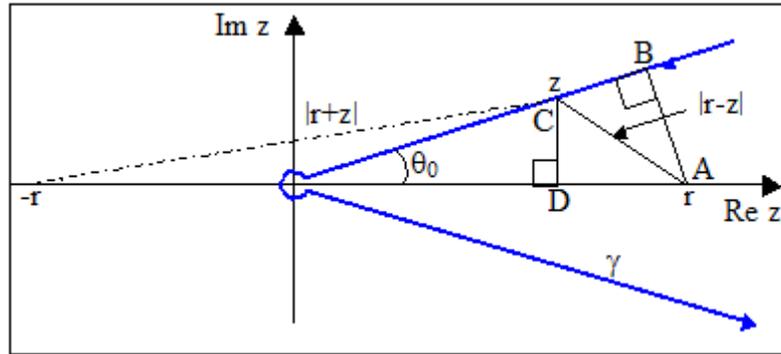


FIG. 1.2 - .

$$\int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z \pm r| |z|^{\nu}} = \int_{\gamma_r} \frac{|dz|}{|z \pm r| |z|^{\nu}} + \int_{\gamma \setminus \gamma_r} \frac{|dz|}{|z \pm r| |z|^{\nu}}$$

avec

$$\begin{cases} \gamma = \gamma_r \cup (\gamma \setminus \gamma_r) \\ \gamma_r = \{z \in \gamma : |z| \leq r\} \\ \gamma \setminus \gamma_r = \{z \in \gamma : |z| \geq r\}, \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} \frac{|dz|}{|z \pm r| |z|^{\nu}} &= \int_{\substack{z \in \gamma \\ |z| \leq r}} \frac{|dz|}{|z \pm r| |z|^{\nu}} \\ &\leq \frac{1}{K r} \int_0^r \frac{|dz|}{|z|^{\nu}} \leq \frac{1}{K r} [|z|^{1-\nu}]_0^r = \frac{1}{K r} r^{1-\nu} = \frac{K}{r^{\nu}}, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \setminus \gamma_r} \frac{|dz|}{|z \pm r| |z|^{\nu}} &= \int_r^{+\infty} \frac{|dz|}{|z \pm r| |z|^{\nu}} \\ &\leq \frac{1}{K} \int_r^{+\infty} \frac{|dz|}{|z|^{1+\nu}} = \frac{1}{K} \left[\frac{|z|^{-\nu}}{-\nu} \right]_r^{+\infty} = \frac{K}{r^{\nu}} \end{aligned}$$

voir aussi [19]. ■

Chapitre 2

Problème de transmission : cas scalaire

Dans tout ce chapitre θ_0 est fixé dans $]0, \frac{\pi}{2}[$. On pose

$$\begin{cases} \Sigma_{\theta_0} = \{\lambda \in \mathbb{C}^* : |\arg \lambda| > \theta_0\} \\ S_{\theta_0} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}^* : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \right\}. \end{cases}$$

On présente la méthode de résolution basée sur la notion d'impédance du problème à coefficient scalaire $z \in \Sigma_{\theta_0}$. Cette étude nous permettra de passer au cas opérateur.

Pour $z \in \Sigma_{\theta_0}$ (voir figure 2.1) :

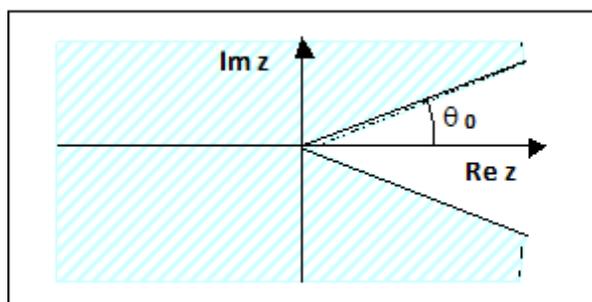


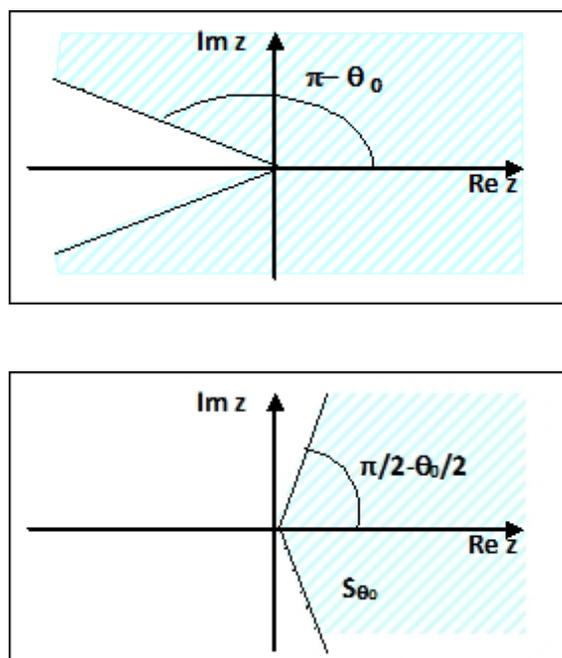
FIG. 2.1 – Le secteur Σ_{θ_0} .

On note que $-z \in \{\lambda \in \mathbb{C}^* : |\arg \lambda| < \pi - \theta_0\}$ (voir figure 2) :

et $\sqrt{-z} \in S_{\theta_0}$ (voir figure 2.2) :

Ici \sqrt{w} est la détermination principale de la racine carrée définie pour $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ et vérifiant

$$\operatorname{Re} \sqrt{w} > 0.$$

FIG. 2.2 – Le secteur S_{θ_0} .

On considère le problème aux limites et de transmission

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_-^\delta)''(x) + z u_-^\delta(x) = g_-(x) \quad \text{sur } (-1, 0) \\ (u_+^\delta)''(x) + z u_+^\delta(x) = g_+(x) \quad \text{sur } (0, \delta) \\ (cl) \left\{ \begin{array}{l} u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta \end{array} \right. \\ (ct) \left\{ \begin{array}{l} u_-^\delta(0) = u_+^\delta(0) \\ p_-(u_-^\delta)'(0) = p_+(u_+^\delta)'(0), \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

avec $z \in \Sigma_{\theta_0}$.

Notre méthode consiste à résoudre, d'abord le problème (P_+^δ) sur la couche mince $(0, \delta)$, afin d'obtenir une expression explicite de l'opérateur d'impédance T_δ , ensuite, on étudie le problème (P_-^δ) sur le domaine fixe $(-1, 0)$.

2.1 La résolution du problème (P_+^δ)

Le problème aux limites sur $[0, \delta]$ s'écrit

$$(P_+^\delta) \left\{ \begin{array}{l} (u_+^\delta)''(x) + z u_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) \quad \text{sur } (0, \delta) \\ u_+^\delta(0) = \psi \\ (u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta, \end{array} \right.$$

où δ est un paramètre dans $]0, 1]$, $z \in \Sigma_{\theta_0}$, f_+^δ est donnée dans un espace de Banach complexe E et $g_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$. ψ est un paramètre auxiliaire dans E déterminé plus loin.

La solution générale de l'équation sans le second membre est de la forme :

$$u_+^\delta(x) = Ae^{\sqrt{-z}x} + Be^{-\sqrt{-z}x}.$$

Par la méthode de la variation de la constante, on obtient

$$\begin{cases} A'(x)e^{\sqrt{-z}x} + B'(x)e^{-\sqrt{-z}x} = 0 \\ \sqrt{-z}A'(x)e^{\sqrt{-z}x} - \sqrt{-z}B'(x)e^{-\sqrt{-z}x} = g_+^\delta(x), \end{cases}$$

ainsi

$$\begin{cases} A(x) = \frac{1}{2\sqrt{-z}} \int_0^x e^{-\sqrt{-z}s} g_+^\delta(s) ds + A_0 \\ B(x) = -\frac{1}{2\sqrt{-z}} \int_0^x e^{\sqrt{-z}s} g_+^\delta(s) ds + B_0. \end{cases}$$

Donc

$$u_+^\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{-z}} \int_0^x \sinh \sqrt{-z}(x-s) g_+^\delta(s) ds + A_0 e^{\sqrt{-z}x} + B_0 e^{-\sqrt{-z}x},$$

et

$$(u_+^\delta)'(x) = \int_0^x \cosh \sqrt{-z}(x-s) g_+^\delta(s) ds + \sqrt{-z}A_0 e^{\sqrt{-z}x} - \sqrt{-z}B_0 e^{-\sqrt{-z}x}.$$

Les conditions aux limites donnent

$$\begin{cases} A_0 = -\int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{2\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} g_+^\delta(s) ds + \frac{1}{2\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta + \frac{e^{-\sqrt{-z}\delta}}{2 \cosh \sqrt{-z}\delta} \psi \\ B_0 = \int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{2\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} g_+^\delta(s) ds - \frac{1}{2\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta + \frac{e^{\sqrt{-z}\delta}}{2 \cosh \sqrt{-z}\delta} \psi. \end{cases}$$

Par conséquent, la solution du problème (P_+^δ) s'écrit

$$u_+^\delta(x) = -\int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, \tau) g_+^\delta(\tau) d\tau + \frac{\sinh \sqrt{-z}x}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta + \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \psi, \quad (2.2)$$

où, le noyau est donné par

$$K_{z,+}^\delta(x, \tau) = \begin{cases} \frac{\sinh \sqrt{-z}\tau \cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} & \text{si } 0 \leq \tau \leq x \\ \frac{\sinh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta-\tau)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} & \text{si } x \leq \tau \leq \delta. \end{cases}$$

2.2 L'opérateur d'impédance

La dérivée de u_+^δ , pour x dans $]0, \delta[$ est donnée par

$$\begin{aligned} (u_+^\delta)'(x) &= \int_0^x \frac{\sinh \sqrt{-z}s \sinh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad - \int_x^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad + \frac{\cosh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta - \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \psi. \end{aligned}$$

L'opérateur d'impédance T_δ est donc l'application

$$(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) \longrightarrow (u_+^\delta)'(0) = T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi),$$

avec

$$T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) = - \int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} g_+^\delta(s) ds + \frac{1}{\cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta - \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}\delta}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \psi.$$

Pour l'étude du comportement de cet opérateur, on a les propositions suivantes.

Proposition 2.1 *Pour*

$$\psi, f_+^\delta \in E, g_+^\delta \in C([0, \delta]; E), z \in \Sigma_{\theta_0},$$

on a

$$\|T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi)\|_E \leq C |z|^{1/2} \left[\frac{1}{|z|} \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} + \frac{1}{|z|^{1/2}} \|f_+^\delta\|_E + \|\psi\|_E \right].$$

où

$$C = \frac{2}{\sin(\theta_0/2) C_{\theta_0}},$$

(l'expression de C_{θ_0} est donnée au lemme 1.3 et C est une constante indépendante de δ).

Preuve. Soient $\psi, f_+^\delta \in E$ et $g_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$ on a :

$$\begin{aligned} & \|T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi)\|_E \\ & \leq \int_0^\delta \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - s)}{|\cosh \sqrt{-z}\delta|} ds \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\ & \quad + \frac{\|f_+^\delta\|_E}{|\cosh \sqrt{-z}\delta|} + |z|^{1/2} \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}{|\cosh \sqrt{-z}\delta|} \|\psi\|_E \\ & \leq \frac{(1 - e^{-2\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}) \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)}}{|z|^{1/2} \sin(\theta_0/2) |1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}|} \\ & \quad + \frac{2e^{-\sqrt{-z}\delta} \|f_+^\delta\|_E}{|1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}|} + |z|^{1/2} \frac{1 + e^{-2\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}}{|1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}|} \|\psi\|_E \\ & \leq \frac{2|z|^{1/2}}{|1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}|} \left[\frac{1}{2|z| \sin(\theta_0/2)} \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} + \frac{1}{|z|^{1/2}} \|f_+^\delta\|_E + \|\psi\|_E \right] \end{aligned}$$

en utilisant le lemme 1.3, on obtient

$$\|T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi)\|_E \leq \frac{2|z|^{1/2}}{C_{\theta_0} \sin(\theta_0/2)} \left[\frac{1}{|z|} \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} + \frac{1}{|z|^{1/2}} \|f_+^\delta\|_E + \|\psi\|_E \right].$$

■

2.3 La résolution du problème (P_-^δ)

Le problème avec condition d'impédance s'écrit

$$(P_-^\delta) \begin{cases} (u_-^\delta)''(x) + z u_-^\delta(x) = g_-(x) & \text{sur }]-1, 0[\\ u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_-^\delta)'(0) = pT_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, u_-^\delta(0)), \end{cases}$$

où $p = \frac{p_+}{p_-}$ et $z \in \Sigma_{\theta_0}$.

Comme pour (P_+^δ) , la solution du problème (P_-^δ) s'écrit :

$$u_-^\delta(x) = \int_{-1}^x \frac{\sinh \sqrt{-z}(x-s)}{\sqrt{-z}} g_-(s) ds + A_0 e^{\sqrt{-z}x} + B_0 e^{-\sqrt{-z}x}$$

et

$$(u_-^\delta)'(x) = \int_{-1}^x \cosh \sqrt{-z}(x-s) g_-(s) ds + \sqrt{-z} A_0 e^{\sqrt{-z}x} - \sqrt{-z} B_0 e^{-\sqrt{-z}x},$$

alors

$$\begin{cases} u_-^\delta(0) = - \int_{-1}^0 \frac{\sinh \sqrt{-z}s}{\sqrt{-z}} g_-(s) ds + A_0 + B_0 \\ (u_-^\delta)'(0) = \int_{-1}^0 \cosh \sqrt{-z}s g_-(s) ds + \sqrt{-z} A_0 - \sqrt{-z} B_0. \end{cases}$$

Par la condition d'impédance

$$\begin{aligned} (u_-^\delta)'(0) &= pT_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, u_-^\delta(0)) \\ &= -p \int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} g_+^\delta(s) ds \\ &\quad + \frac{p}{\cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta - \frac{p\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}\delta}{\cosh \sqrt{-z}\delta} u_-^\delta(0) \\ &= -p \int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} g_+^\delta(s) ds + \frac{p}{\cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta \\ &\quad + p \int_{-1}^0 \frac{\sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}s}{\cosh \sqrt{-z}\delta} g_-(s) ds \\ &\quad - \frac{p\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}\delta}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A_0 + B_0). \end{aligned}$$

et la condition en $x = -1$, on obtient

$$\begin{cases} A_0 = \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta}{2\Delta_z(-1, \delta)} \left(1 - p \frac{\sinh \sqrt{-z}\delta}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \right) f_- + \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta}{2\Delta_z(-1, \delta)} e^{\sqrt{-z}} G \\ B_0 = \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta}{2\Delta_z(-1, \delta)} \left(1 + p \frac{\sinh \sqrt{-z}\delta}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \right) f_- - \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta}{2\Delta_z(-1, \delta)} e^{-\sqrt{-z}} G. \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} G &= - \int_0^\delta \frac{p \cosh \sqrt{-z}(\delta-s)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} g_+^\delta(s) ds + \frac{p}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta \\ &\quad + \int_{-1}^0 \frac{p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}s - \cosh \sqrt{-z}s \cosh \sqrt{-z}\delta}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} g_-(s) ds. \end{aligned}$$

et, pour $\xi \in [-1, 0]$

$$\Delta_z(\xi, \delta) = \cosh \sqrt{-z}\xi \cosh \sqrt{-z}\delta - p \sinh \sqrt{-z}\xi \sinh \sqrt{-z}\delta.$$

Par conséquent, la solution du problème (P_-^δ) s'écrit :

$$\begin{aligned} u_-^\delta(x) &= \int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x, \tau) g_-(\tau) d\tau + \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} f_- \\ &\quad + \frac{p \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} f_+^\delta \\ &\quad - \int_0^\delta \frac{p \cosh \sqrt{-z}(\delta - \tau) \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} g_+^\delta(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2.3)$$

où

$$K_{z,-}^\delta(x, \tau) = \frac{-1}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} \begin{cases} \Delta_z(x, \delta) \sinh \sqrt{-z}(\tau+1) & \text{si } -1 \leq \tau \leq x \\ \Delta_z(\tau, \delta) \sinh \sqrt{-z}(x+1) & \text{si } x \leq \tau \leq 0. \end{cases}$$

2.4 Retour au problème (P_+^δ)

De (2.3) on déduit que

$$\begin{aligned} u_-^\delta(0) &= - \int_{-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} g_-(\tau) d\tau + \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta}{\Delta_z(-1, \delta)} f_- \\ &\quad + \frac{p \sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} f_+^\delta - \int_0^\delta \frac{p \cosh \sqrt{-z}(\delta - \tau) \sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} g_+^\delta(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

or

$$u_+^\delta(0) = u_-^\delta(0) = \psi,$$

et donc la solution complète du problème (P_+^δ) s'écrit

$$\begin{aligned} u_+^\delta(x) &= - \int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x, \tau) g_+^\delta(\tau) d\tau \\ &\quad - \int_{-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \sinh \sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} g_-(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{\Delta_z^+(x, \delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} f_+^\delta + \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} f_- \end{aligned}$$

avec le noyau

$$H_{z,+}^\delta(x, \tau) = \begin{cases} \frac{\Delta_z^+(\tau, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} & \text{si } 0 \leq \tau \leq x \\ \frac{\Delta_z^+(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - \tau)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} & \text{si } x \leq \tau \leq \delta. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \Delta_z^+(x, \delta) = \sinh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z} + p \cosh \sqrt{-z}x \sinh \sqrt{-z} \\ \text{pour } x \in [0, \delta]. \end{cases}$$

2.5 Problème limite

Dans cette section, on étudie le passage à la limite lorsque les coefficients p_- et p_+ vérifient

$$\frac{p_+}{p_-} = p = \frac{1}{\delta}.$$

On désigne également par h_+^δ la fonction suivante définie par

$$\xi \longmapsto h_+^\delta(\xi) = g_+^\delta(\delta\xi), \quad (2.4)$$

pour $\xi \in (0, 1)$.

On suppose que

$$\exists M > 0, \forall \delta > 0 : \max_{0 \leq \xi \leq 1} \|g_+^\delta(\delta\xi)\|_E = \|h_+^\delta\|_{C([0,1];E)} \leq M, \quad (2.5)$$

il est important de noter que la constante M est indépendante de δ .

Le théorème suivant donne la limite de l'opérateur T_δ quand $\delta \rightarrow 0$.

Proposition 2.2 *Soit $\psi \in E$. On suppose que*

1. $g_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$ vérifie (2.5) et qu'il existe L dans E tel que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta} \int_0^\delta g_+^\delta(\tau) d\tau \right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^1 h_+^\delta(\tau) d\tau \right) = L,$$

2. $f_+^\delta \in E$ et qu'il existe l dans E tel que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta} f_+^\delta \right) = l.$$

Alors

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta} T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) \right] = z\psi - L + l.$$

Preuve. Par le changement d'échelle (2.4), on a

$$\begin{aligned} T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) &= - \int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} g_+^\delta(s) ds + \frac{1}{\cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta - \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}\delta}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \psi \\ &= - \int_0^1 \frac{\delta \cosh \sqrt{-z}\delta(1 - t)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} h_+^\delta(t) dt + \frac{1}{\cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta - \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}\delta}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \psi \\ &: = T_\delta^*(h_+^\delta, f_+^\delta, \psi). \end{aligned}$$

Pour la limite de cet opérateur quand $\delta \rightarrow 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta} T_\delta^*(h_+^\delta, f_+^\delta, \psi) \right) &= - \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^1 \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta(1 - t)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} h_+^\delta(t) dt \right) \\ &\quad + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta \cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta \right) - \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}\delta}{\delta \cosh \sqrt{-z}\delta} \psi \right). \end{aligned}$$

Le premier terme est traité de la façon suivante

$$\begin{aligned}
& \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^1 \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta(1-t)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} h_+^\delta(t) dt \right) \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^1 \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta(1-t) - \cosh \sqrt{-z}\delta}{\cosh \sqrt{-z}\delta} h_+^\delta(t) dt \right) \\
&\quad + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^1 h_+^\delta(t) dt \right) \\
&= - \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\sqrt{-z} \int_0^1 \left[\int_0^t \frac{\delta \sinh \sqrt{-z}\delta(1-\tau)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} d\tau \right] h_+^\delta(t) dt \right) \\
&\quad + L
\end{aligned}$$

D'une part, on a

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\delta \sinh \sqrt{-z}\delta(1-\tau)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \right| &\leq C \frac{\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta(1-\tau)}{|\cosh \sqrt{-z}\delta|} \\
&\leq C \delta e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta\tau} \\
&\leq C
\end{aligned}$$

d'autre part, vu l'hypothèse (2.5), on a

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^t \frac{\delta \sinh \sqrt{-z}\delta(1-\tau)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} d\tau h_+^\delta(t) \right\|_E \\
&\leq C \int_0^t \frac{\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta(1-\tau)}{|\cosh \sqrt{-z}\delta|} d\tau \|h_+^\delta(t)\|_E \\
&\leq C \delta \int_0^t e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta\tau} d\tau \|h_+^\delta(t)\|_E \\
&\leq \frac{C}{|z|^{1/2}} \left(1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta t} \right) \|h_+^\delta(t)\|_E \\
&\leq \frac{C}{|z|^{1/2}} M,
\end{aligned}$$

grâce au théorème de la convergence dominée, on a

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^1 \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta(1-t)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} h_+^\delta(t) dt \right) = L.$$

Pour les deux derniers termes, on obtient facilement

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta \cosh \sqrt{-z}\delta} f_+^\delta \right) = l \quad \text{et} \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}\delta}{\delta \cosh \sqrt{-z}\delta} \psi \right) = -z \psi.$$

Par conséquent

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta} T_\delta^*(h_+^\delta, f_+^\delta, \psi) \right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta} T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) \right) = z \psi + l - L.$$

■

Ce deuxième théorème donne le problème correspondant à la solution limite de (2.3), quand $\delta \rightarrow 0$.

Théorème 2.1 Soit $\psi \in E$. On suppose que

1. $g_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$ vérifie (2.5) et qu'il existe L dans E tel que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta} \int_0^\delta g_+^\delta(\tau) d\tau \right) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^1 h_+^\delta(\tau) d\tau \right) = L,$$

2. $f_+^\delta \in E$ et qu'il existe l dans E tel que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta} f_+^\delta \right) = l.$$

Alors

1. u_-^δ converge simplement vers

$$v(x) = \int_{-1}^0 K_{z,-}(x, \tau) g_-(\tau) d\tau + \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} f_- + \frac{1}{\sqrt{-z}} \frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\Lambda_z(-1)} (l - L)$$

où

$$K_{z,-}(x, \tau) = \frac{-1}{\sqrt{-z} \Lambda_z(-1)} \begin{cases} \Lambda_z(x) \sinh \sqrt{-z}(\tau+1) & \text{si } -1 \leq \tau \leq x \\ \Lambda_z(\tau) \sinh \sqrt{-z}(x+1) & \text{si } x \leq \tau \leq 0 \end{cases}$$

et

$$\Lambda_z(x) = \cosh \sqrt{-z}x - \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}x.$$

2. v est l'unique solution stricte du problème de Laplace-Beltrami

$$\begin{cases} v''(x) + z v(x) = g_-(x) & \text{sur } (-1, 0) \\ v(-1) = f_- \\ v'(0) - z v(0) = l - L. \end{cases}$$

Preuve.

1. Pour $x \in [-1, 0]$ on a

$$\begin{aligned} u_-^\delta(x) &= -\frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \int_{-1}^x \frac{\sinh \sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z}} g_-(\tau) d\tau \\ &\quad - \int_x^0 \frac{\Delta_z(\tau, \delta) \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} g_-(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} f_- + \frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\delta \sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} f_+^\delta \\ &\quad - \int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - \tau) \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\delta \sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} g_+^\delta(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Le premier terme

$$\begin{aligned} &\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \int_{-1}^x \frac{\sinh \sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z}} g_-(\tau) d\tau \right] \\ &= \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} \int_{-1}^x \frac{\sinh \sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z}} g_-(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

pour le deuxième terme

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_x^0 \frac{\Delta_z(\tau, \delta) \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} g_-(\tau) d\tau \right] \\ &= \int_x^0 \frac{\Lambda_z(\tau) \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \Lambda_z(-1)} g_-(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

en utilisant la minoration (1.3), on a la majoration uniforme suivante

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\Delta_z(\tau, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \sinh \sqrt{-z}(x+1) \right| \\ &= \left| \frac{\cosh \sqrt{-z}\tau \cosh \sqrt{-z}\delta - \frac{1}{\delta} \sinh \sqrt{-z}\tau \sinh \sqrt{-z}\delta}{\Delta_z(-1, \delta)} \sinh \sqrt{-z}(x+1) \right| \\ &= \left| \frac{\delta \cosh \sqrt{-z}\tau \cosh \sqrt{-z}\delta - \sinh \sqrt{-z}\tau \sinh \sqrt{-z}\delta}{\delta \Delta_z(-1, \delta)} \sinh \sqrt{-z}(x+1) \right| \\ &\leq C \frac{|\delta \cosh \sqrt{-z}\tau \cosh \sqrt{-z}\delta - \sinh \sqrt{-z}\tau \sinh \sqrt{-z}\delta| e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}}{\delta \left(\frac{1}{\delta} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} \right)} \\ &\leq C \frac{\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\tau \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta + \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\tau \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}{\delta \left(\frac{1}{\delta} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} \right)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} \\ &\leq C \frac{(\delta+1) \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\tau \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} \\ &\leq C \frac{(\delta+1) e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}\tau} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} \\ &\leq C(\delta+1) e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau-x)} \leq 2C, \end{aligned}$$

d'où le résultat grâce au théorème de la convergence dominée.

Les termes suivants sont faciles à calculer

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} f_- \right) = \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} f_-,$$

et

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\delta \sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} f_+^\delta \right) = \frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \Lambda_z(-1)} l.$$

Pour le dernier terme

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - \tau)}{\delta \Delta_z(-1, \delta)} g_+^\delta(\tau) d\tau \right) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^1 \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta(1-s)}{\Delta_z(-1, \delta)} h_+^\delta(s) ds \right) \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^1 \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta(1-s) - 1}{\Delta_z(-1, \delta)} h_+^\delta(s) ds \right) \\
&\quad + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^1 \frac{1}{\Delta_z(-1, \delta)} h_+^\delta(s) ds \right) \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^1 \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta(1-s) - 1}{\Delta_z(-1, \delta)} h_+^\delta(s) d\tau \right) \\
&\quad + \frac{1}{\Lambda_z(-1)} L,
\end{aligned}$$

et par l'hypothèse (2.5), on a

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta(1-s) - 1}{\Delta_z(-1, \delta)} h_+^\delta(s) \right\|_E &\leq C e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1+\delta s)} \|h_+^\delta(s)\|_E \\
&\leq C e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \|h_+^\delta(s)\|_E \\
&\leq C e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} M,
\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - \tau)}{\delta \Delta_z(-1, \delta)} g_+^\delta(\tau) d\tau \right) = \frac{1}{\Lambda_z(-1)} L.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \rightarrow 0} u_-^\delta(x) &= - \int_{-1}^x \frac{\Lambda_z(x) \sinh \sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z} \Lambda_z(-1)} g_-(\tau) d\tau \\
&\quad - \int_x^0 \frac{\Lambda_z(\tau) \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \Lambda_z(-1)} g_-(\tau) d\tau \\
&\quad + \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} f_- + \frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \Lambda_z(-1)} (l - L).
\end{aligned}$$

2. Maintenant, il s'agit de montrer que

$$v'' + z v = g_-.$$

Calcul de v' :

$$\begin{aligned}
v'(x) &= \int_{-1}^x \frac{\sinh \sqrt{-z}x - \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}x}{\Lambda_z(-1)} \sinh \sqrt{-z}(\tau+1) g_-(\tau) d\tau \\
&\quad + \int_x^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}\tau - \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}\tau}{\Lambda_z(-1)} \cosh \sqrt{-z}(x+1) g_-(\tau) d\tau \\
&\quad + \sqrt{-z} \frac{\sinh \sqrt{-z}x - \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}x}{\Lambda_z(-1)} f_- \\
&\quad + \frac{\cosh \sqrt{-z}(x+1)}{\Lambda_z(-1)} (l - L).
\end{aligned}$$

Calcul de v'' :

$$\begin{aligned}
v''(x) &= \int_{-1}^x \frac{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}x - \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}x}{\Lambda_z(-1)} \sinh \sqrt{-z}(\tau+1) g_-(\tau) d\tau \\
&+ \int_x^0 \frac{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\tau - \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}\tau}{\Lambda_z(-1)} \sinh \sqrt{-z}(x+1) g_-(\tau) d\tau \\
&- z \frac{\cosh \sqrt{-z}x - \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}x}{\Lambda_z(-1)} f_- \\
&+ \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\Lambda_z(-1)} (l-L) \\
&+ g_-(x) \\
&= -z \int_{-1}^x \frac{\cosh \sqrt{-z}x - \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}x}{\sqrt{-z} \Lambda_z(-1)} \sinh \sqrt{-z}(\tau+1) g_-(\tau) d\tau \\
&- z \int_x^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}\tau - \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}\tau}{\sqrt{-z} \Lambda_z(-1)} \sinh \sqrt{-z}(x+1) g_-(\tau) d\tau \\
&- z \frac{\cosh \sqrt{-z}x - \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}x}{\Lambda_z(-1)} f_- \\
&- z \frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \Lambda_z(-1)} (l-L) \\
&+ g_-(x) \\
&= -z v(x) + g_-(x).
\end{aligned}$$

Valeurs au bord : en $x = -1$ la solution limite vaut

$$v(-1) = f_-,$$

et en $x = 0$

$$\begin{aligned}
v(0) &= \frac{1}{\sqrt{-z}} \int_{-1}^0 \frac{1}{\cosh \sqrt{-z} + \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}} \sinh \sqrt{-z}(\tau+1) g_-(\tau) d\tau \\
&+ \frac{1}{\cosh \sqrt{-z} + \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}} f_- \\
&+ \frac{1}{\sqrt{-z}} \frac{\sinh \sqrt{-z}}{\cosh \sqrt{-z} + \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}} (l-L)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
v'(0) &= -\sqrt{-z} \int_{-1}^0 \frac{\sinh \sqrt{-z}(\tau+1)}{\cosh \sqrt{-z} + \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}} g_-(\tau) d\tau \\
&+ \frac{z}{\cosh \sqrt{-z} + \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}} f_- \\
&+ \frac{\cosh \sqrt{-z}}{\cosh \sqrt{-z} + \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}} (l-L),
\end{aligned}$$

soit

$$v'(0) - z v(0) = l - L.$$

En conclusion v est la solution du problème de Laplace-Beltrami

$$\begin{cases} v''(x) + z v(x) = g_-(x) & \text{sur } (-1, 0) \\ v(-1) = f_- \\ v'(0) - z v(0) = l - L. \end{cases}$$

■

Chapitre 3

Problème de transmission : cas abstrait

On se propose dans ce chapitre d'étudier l'existence, l'unicité et la régularité maximale pour la solution stricte du problème lorsque le second membre de l'équation est assez régulier et f_- , f_+^δ vérifient certaines conditions de compatibilité naturelles liées aux équations, en se basant sur la construction explicite de la solution sous la forme d'intégrale de Dunford comme dans [15], [6] et [9].

3.1 Problème et hypothèses

On considère le problème aux limites et de transmission :

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_-^\delta)''(x) + Au_-^\delta(x) = g_-(x) \quad \text{sur } (-1, 0) \\ (u_+^\delta)''(x) + Au_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) \quad \text{sur } (0, \delta) \\ \left\{ \begin{array}{l} u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta \\ u_+^\delta(0) = u_-^\delta(0) \\ p_- (u_-^\delta)'(0) = p_+ (u_+^\delta)'(0), \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où A est un opérateur linéaire fermé de domaine $D(A)$ non nécessairement dense dans un espace de Banach complexe E , δ un paramètre dans $]0, 1]$, f_- et f_+^δ des constantes données dans E et g_- , g_+^δ vérifient l'hypothèse (6).

Comme dans le cas scalaire, pour la résolution du problème (3.1), on considère d'abord, le problème

$$(P_+^\delta) \quad \left\{ \begin{array}{l} (u_+^\delta)''(x) + A u_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) \quad \text{sur } (0, \delta) \\ u_+^\delta(0) = \psi \\ (u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta, \end{array} \right.$$

où ψ est un élément de E , ce qui donnera

$$(u_+^\delta)'(0) = T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) = T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, u_+^\delta(0)),$$

et ensuite, le problème

$$(P_-^\delta) \begin{cases} (u_-^\delta)''(x) + z u_-^\delta(x) = g_-^\delta(x) & \text{sur } (-1, 0) \\ u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_-^\delta)'(0) = pT_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, u_-^\delta(0)), \end{cases}$$

où $p = \frac{p_+}{p_-}$. L'opérateur d'impédance T_δ est donc l'application

$$(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) \longrightarrow (u_+^\delta)'(0) = T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi),$$

ce qui exprime concrètement l'effet dû à la couche mince $(0, \delta)$.

On suppose l'hypothèse d'ellipticité suivante :

$$\rho(A) \supset [0, +\infty[\text{ et } \exists C > 0 : \forall \lambda \geq 0, \quad \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{L(E)} \leq \frac{C}{1 + |\lambda|}, \quad (3.2)$$

où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A .

L'hypothèse (3.2) implique qu'il existe $\theta_0 \in]0, \pi/2[$ et $r_0 > 0$ telle que

$$\rho(A) \supset S_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}^* : |\arg(z)| \leq \theta_0\} \cup \overline{B(0, r_0)}, \quad (3.3)$$

et l'estimation dans (3.2) reste vraie dans S_{θ_0} (voir figure 3.1).

L'hypothèse (2.5) reste vraie pour le cas abstrait.

Remarque 3.1 *L'hypothèse (3.2) implique que $B = -(-A)^{1/2}$ est générateur infinitésimal de semi-groupe analytique pas nécessairement fortement continu en zéro,*

$$V(x) = e^{xB}.$$

voir [4].

3.1.1 Représentation de la solution du problème (P_+^δ)

On considère le problème :

$$(P_+^\delta) \begin{cases} (u_+^\delta)''(x) + A u_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) & \text{sur } (0, \delta) \\ u_+^\delta(0) = \psi \\ (u_+^\delta)''(\delta) = f_+^\delta, \end{cases}$$

en utilisant le calcul opérationnel de Dunford comme dans [15], [17] et [27] la solution du problème (P_+^δ) est donnée formellement par :

$$\begin{aligned} u_+^\delta(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma c_z(x) (A - zI)^{-1} \psi dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{s_z(x)}{\sqrt{-z}} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, \tau) (A - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau dz \\ &= d_+^\delta(x, A)\psi + n_+^\delta(x, A)f_+^\delta + v_+^\delta(x, A, g_+^\delta), \end{aligned} \quad (3.4)$$

avec le noyau de Green

$$K_{z,+}^{\delta}(x, \tau) = \begin{cases} \frac{s_z(\tau) c_z(x)}{\sqrt{-z} c_z(\delta)} & \text{si } 0 \leq \tau \leq x \\ \frac{s_z(x) c_z(\tau)}{\sqrt{-z} c_z(\delta)} & \text{si } x \leq \tau \leq \delta, \end{cases}$$

On rappelle que γ est la frontière de S_{θ_0} orientée de $\infty e^{i\theta_0}$ à $\infty e^{-i\theta_0}$ (voir figure 3.1) et la racine carrée de $-z$ est la détermination analytique définie sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

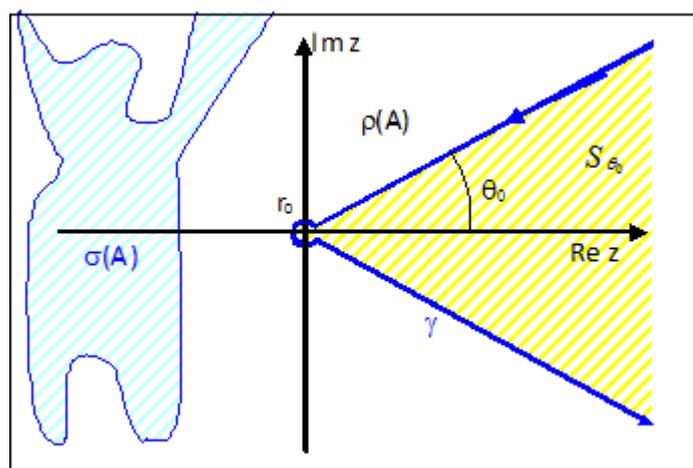


FIG. 3.1 – Le secteur S_{θ_0} et la courbe γ .

Pour la convergence absolue des intégrales, on a les propositions suivantes.

Proposition 3.1 Soit $g_+^{\delta} \in C([0, \delta]; E)$, il existe une constante K ne dépendant que de γ telle que, pour chaque $z \in \gamma$ et $x \in [0, \delta]$ on a

$$\|v_+^{\delta}(x, A, g_+^{\delta})\|_E \leq K \|g_+^{\delta}\|_{C([0, \delta]; E)}.$$

Preuve. Pour $z \in \gamma$ et $\forall x \in [0, \delta]$, grâce à l'hypothèse (3.2) et le lemme 1.7, on a

$$\begin{aligned}
& \|v_+^\delta(x, A, g_+^\delta)\|_E \\
& \leq C \int_\gamma \int_0^x \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \tau \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - x)}{|z|^{3/2} |\cosh \sqrt{-z} \delta|} d\tau |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\
& + C \int_\gamma \int_x^\delta \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - \tau)}{|z|^{3/2} |\cosh \sqrt{-z} \delta|} d\tau |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\
& \leq C \int_\gamma \int_0^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \tau} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - x)}}{|z|^{3/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} |1 + e^{-2\sqrt{-z} \delta}|} d\tau |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\
& + C \int_\gamma \int_x^\delta \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} x} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - \tau)}}{|z|^{3/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} |1 + e^{-2\sqrt{-z} \delta}|} d\tau |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\
& \leq C \int_\gamma \int_0^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} (x - \tau)}}{|z|^{3/2} |1 + e^{-2\sqrt{-z} \delta}|} d\tau |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\
& + C \int_\gamma \int_x^\delta \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau - x)}}{|z|^{3/2} |1 + e^{-2\sqrt{-z} \delta}|} d\tau |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\
& \leq C \int_\gamma \frac{1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} x}}{|z|^2 |1 + e^{-2\sqrt{-z} \delta}| \sin(\theta_0/2)} |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\
& + C \int_\gamma \frac{1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - x)}}{|z|^2 |1 + e^{-2\sqrt{-z} \delta}| \sin(\theta_0/2)} |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\
& \leq C \int_\gamma \frac{2 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} x} - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - x)}}{|z|^2 |1 + e^{-2\sqrt{-z} \delta}| \sin(\theta_0/2)} |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\
& \leq \frac{C}{\sin(\theta_0/2) C_{\theta_0}} \int_\gamma \frac{1}{|z|^2} |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \leq K \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)}.
\end{aligned}$$

■

Maintenant, on se concentre sur le premier terme $d_+^\delta(x, A)\psi$.

Proposition 3.2 1. Il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que de γ telle que

$$\forall \psi \in E \quad \forall x > 0 \quad \|d_+^\delta(x, A)\psi\| \leq C \|\psi\|_E,$$

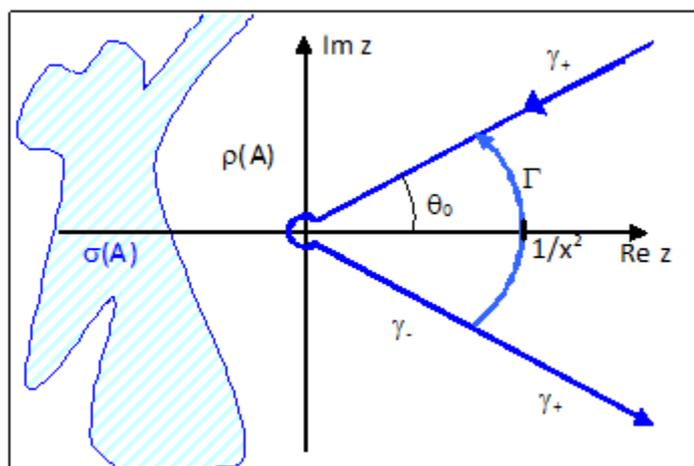
2. $d_+^\delta(x, A)\psi - \psi \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow 0^+$ si et seulement si $\psi \in \overline{D(A)}$,
3. $d_+^\delta(\cdot, A)\psi \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$ si et seulement si $\psi \in D_A(\alpha_0, +\infty)$, (pour cet espace d'interpolation, voir, par exemple Grisvard [12], p.664).

Preuve. 1. Pour $x > 0$, cette estimation est obtenue par un découpage de γ en

$$\begin{cases} \gamma_+ = \{z \in \gamma : |z| \geq 1/x^2\} \\ \gamma_- = \{z \in \gamma : |z| \leq 1/x^2\}. \end{cases}$$

On considère

$$\Gamma = \{z : |\arg(z)| \leq \theta_0 \text{ et } |z| = 1/x^2\},$$

FIG. 3.2 – Les courbes γ_+ et γ_- .

orienté positivement (voir figure 3.2). Alors

$$\begin{aligned}
 d_+^\delta(x, A)\psi &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} c_z(x) (A - zI)^{-1} \psi dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} c_z(x) (A - zI)^{-1} \psi dz \\
 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} c_z(x) (A - zI)^{-1} \psi dz \\
 &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} (c_z(x) - c_z(0)) (A - zI)^{-1} \psi dz \\
 &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_- \cup \Gamma} (A - zI)^{-1} \psi dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (A - zI)^{-1} \psi dz \\
 &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
 \end{aligned}$$

Il est clair que $I_3 = 0$ par analyticit  et

$$\begin{aligned}
 \|I_1\| &\leq C \int_{\gamma_+} \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - x)}{|z| |\cosh \sqrt{-z} \delta|} \|\psi\|_E |dz| \\
 &\leq C \int_{\gamma_+} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - x)}}{|z| |1 + e^{-2\sqrt{-z} \delta}|} |dz| \|\psi\|_E \\
 &\leq C \int_{\gamma_+} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} x}}{|z| C_{\theta_0}} \|\psi\|_E |dz| \\
 &\leq C \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma} d\sigma \|\psi\|_E \\
 &\leq C \|\psi\|_E,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|I_2\| &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} (c_z(x) - c_z(0)) (A - zI)^{-1} \psi dz \right\| \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \int_0^x -\sqrt{-z} s_z (\delta - \tau) (A - zI)^{-1} \psi d\tau dz \right\| \\
&\leq C \int_{\gamma_-} \int_0^x \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - \tau)}{|z|^{1/2} |\cosh \sqrt{-z} \delta|} d\tau |dz| \|\psi\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma_-} \int_0^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} \tau}}{|z|^{1/2} |1 + e^{-2\sqrt{-z} \delta}|} d\tau |dz| \|\psi\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma_-} \frac{x}{|z|^{1/2} C_{\theta_0}} |dz| \|\psi\|_E \\
&\leq C \int_{r_0}^{1/x^2} x \frac{d\rho}{\rho^{1/2}} \|\psi\|_E \leq C \|\psi\|_E
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|I_4\| &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (A - zI)^{-1} \psi dz \right\| \\
&\leq C \int_{\Gamma} \frac{1}{|z|} \|\psi\|_E |dz| \\
&\leq C \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{x^2} \frac{1}{x^2} d\alpha \|\psi\|_E \\
&\leq C \|\psi\|_E.
\end{aligned}$$

2. Grâce à l'identité de la résolvante, il est facile de voir que pour tout $y \in D(A)$, on a

$$\begin{aligned}
d_+^\delta(x, A) y &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} c_z(x) (A - zI)^{-1} y dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} c_z(x) \frac{(A - zI)^{-1} Ay}{z} dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} c_z(x) \frac{y}{z} dz,
\end{aligned}$$

le terme sans la résolvante est nul en intégrant à gauche de γ , alors

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} d_+^\delta(x, A) y = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(A - zI)^{-1} Ay}{z} dz = y.$$

Fixant un petit $\varepsilon > 0$. Pour $\psi \in \overline{D(A)}$, il existe $y_\psi \in D(A)$ tel que

$$\|\psi - y_\psi\| \leq \varepsilon.$$

Avec

$$d_+^\delta(x, A) \psi - \psi = (d_+^\delta(x, A) \psi - d_+^\delta(x, A) y_\psi) + (d_+^\delta(x, A) y_\psi - y_\psi) + (y_\psi - \psi),$$

par l'assertion 1), pour tout $(\psi - y_\psi) \in E$, on a

$$\|d_+^\delta(x, A)\psi - d_+^\delta(x, A)y_\psi\|_E \leq C \|\psi - y_\psi\|_E \leq \varepsilon,$$

on déduit que

$$d_+^\delta(x, A)\psi - \psi \rightarrow 0.$$

La réciproque de 2) est claire, puisque pour tout $x \in]0, \delta]$,

$$d_+^\delta(x, A)\psi \in D(A),$$

alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} d_+^\delta(x, A)\psi = \psi \in \overline{D(A)}$.

3. On rappelle que l'espace $D_A(\alpha_0, +\infty)$ est défini au chapitre 1.

Soient $\psi \in D_A(\alpha_0, +\infty)$ et $\xi, x \in [0, \delta]$ tels que $0 \leq \xi < x \leq \delta$, alors

$$\begin{aligned} d_+^\delta(x, A)\psi - d_+^\delta(\xi, A)\psi &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (c_z(x) - c_z(\xi)) \frac{A(A-z)^{-1}}{z} \psi dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|z| \geq \frac{1}{(x-\xi)^2}} (c_z(x) - c_z(\xi)) \frac{A(A-z)^{-1}}{z} \psi dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{|z| \leq \frac{1}{(x-\xi)^2}} (c_z(x) - c_z(\xi)) \frac{A(A-z)^{-1}}{z} \psi dz \end{aligned}$$

et grâce au lemme 1.7, on a

$$\begin{aligned} &\|d_+^\delta(x, A)\psi - d_+^\delta(\xi, A)\psi\| \\ &\leq C \int_{|z| \geq \frac{1}{(x-\xi)^2}} \frac{1}{|z|^{1+\alpha_0}} |dz| \|\psi\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\ &\quad + C \int_{|z| \leq \frac{1}{(x-\xi)^2}} \int_\xi^x \frac{1}{|z|^{1/2+\alpha_0}} d\tau |dz| \|\psi\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\ &\leq C (x - \xi)^{2\alpha_0} \|\psi\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\ &\quad + C \int_{|z| \leq \frac{1}{(x-\xi)^2}} \frac{(x - \xi)}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| \|\psi\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\ &\leq C (x - \xi)^{2\alpha_0} \|\psi\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)}. \end{aligned}$$

La preuve de la réciproque : on emploie l'approche des semi-groupes.

D'après la remarque 3.1, $-(-A)^{1/2}$ génère un semi-groupe analytique pas nécessairement fortement continu en zéro

$$\left(e^{-(-A)^{1/2}x} \right)_{x \geq 0}.$$

En utilisant l'intégrale de Dunford-Riesz

$$h(A) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma h(z) (A - zI)^{-1} dz,$$

on peut alors montrer que le terme $d_+^\delta(x, A)\psi$ peut être réécrit comme suit

$$\begin{aligned} d_+^\delta(x, A)\psi &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma c_z(x) (A - zI)^{-1} \psi dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{e^{-\sqrt{-z}x} \left(1 + e^{-2\sqrt{-z}(\delta-x)}\right)}{\left(1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}\right)} (A - zI)^{-1} \psi dz \\ &= \left(I + e^{-2\delta(-A)^{1/2}}\right)^{-1} \left(I + e^{-2(\delta-x)(-A)^{1/2}}\right) e^{-x(-A)^{1/2}} \psi. \end{aligned}$$

Grâce à Lunardi [23], p.59 et 60, l'opérateur

$$\left(I + e^{-2\delta(-A)^{1/2}}\right)$$

est bien défini et admet un inverse borné.

Par Sinestrari [31], proposition 1.2, p. 20 et théorème 3.1, p. 39, on déduit que

$$d_+^\delta(x, A)\psi \rightarrow \psi, \text{ quand } x \rightarrow 0 \text{ si et seulement si } \psi \in \overline{D(-(-A)^{1/2})} = \overline{D(A)}$$

et pour $x \in [0, \delta]$

$$d_+^\delta(\cdot, A)\psi \in C^{2\alpha_0}([0, \delta], E)$$

alors

$$\begin{cases} x \mapsto e^{-x(-A)^{1/2}} \in C^{2\alpha_0}([0, \delta], E) \\ x \mapsto e^{-(2\delta-x)(-A)^{1/2}} \in C^{2\alpha_0}([0, \delta], E) \end{cases}$$

alors

$$\psi \in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha_0, +\infty) = D_A(\alpha_0, +\infty),$$

(cette dernière égalité est due à la propriété de réitération d'interpolation de Lions [25]).

■

Maintenant, regardons le terme

$$n_+^\delta(x, A) f_+^\delta = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{s_z(x)}{\sqrt{-z}} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz,$$

pour f_+^δ donné.

Proposition 3.3 *Il existe une constante C indépendante de δ telle que*

1. *Pour tout $x \in [0, \delta]$ et $f_+^\delta \in E$, on a*

$$\|n_+^\delta(x, A) f_+^\delta\|_E \leq K \|f_+^\delta\|_E,$$

et $n_+^\delta(\cdot, A) f_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$.

2. *Si $f_+^\delta \in D_A(1/2 + \alpha_0, +\infty)$, alors pour tout $x \in [0, \delta]$, on a*

$$\|n_+^\delta(x, A) f_+^\delta\|_{D(A)} \leq C \|f_+^\delta\|_{D_A(\frac{1}{2} + \alpha_0, +\infty)}.$$

3. Soit $f_+^\delta \in D\left((-A)^{1/2}\right)$. Alors $An_+^\delta(x, A)f_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$ si et seulement si

$$(-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}.$$

4. Soit $f_+^\delta \in D\left((-A)^{1/2}\right)$. Alors $x \mapsto An_+^\delta(x, A)f_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$ si et seulement si

$$(-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha_0, +\infty) = D_A(\alpha_0, +\infty).$$

Preuve. 1. En utilisant les lemmes 1.3 et 1.7, on obtient

$$\begin{aligned} \|n_+^\delta(x, A)f_+^\delta\|_E &\leq K \int_\gamma \frac{|s_z(x)|}{|z|^{3/2}} \|f_+^\delta\|_E |dz| \\ &\leq K \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{3/2} C_{\theta_0}} \|f_+^\delta\|_E |dz| \\ &\leq K \int_\gamma \frac{1}{|z|^{3/2}} |dz| \|f_+^\delta\|_E \\ &\leq K \|f_+^\delta\|_E. \end{aligned}$$

2. Soient $x \in [0, \delta]$ et $f_+^\delta \in D_A(1/2 + \alpha_0, +\infty)$. Alors

$$\begin{aligned} \|A n_+^\delta(x, A)f_+^\delta\| &\leq C \int_\gamma \frac{|s_z(x)|}{|z|^{1/2}} \|A(A-zI)^{-1}f_+^\delta\|_E |dz| \\ &\leq C \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{1+\alpha_0} C_{\theta_0}} |dz| \|f_+^\delta\|_{D_A(\frac{1}{2}+\alpha_0, +\infty)} \\ &\leq C \int_\gamma \frac{1}{|z|^{1+\alpha_0}} \|f_+^\delta\|_{D_A(\frac{1}{2}+\alpha_0, +\infty)} |dz| \\ &\leq C \|f_+^\delta\|_{D_A(\frac{1}{2}+\alpha_0, +\infty)}. \end{aligned}$$

3. On remarque que, grâce aux propriétés d'inclusion, on a

$$D_A(1/2 + \alpha_0, +\infty) \subset D_A(1/2, 1) \subset D\left((-A)^{1/2}\right),$$

on en déduit que $f_+^\delta \in D\left((-A)^{1/2}\right)$.

4. Soient $\xi, x \in [0, \delta]$ tels que $0 \leq \xi < x \leq \delta$,

$$\begin{aligned} &A(n_+^\delta(x, A) - n_+^\delta(\xi, A))f_+^\delta \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|z| \geq \frac{1}{(x-\xi)^2}} \frac{\sinh \sqrt{-zx} - \sinh \sqrt{-z\xi}}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z\delta}} A(A-zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{|z| \leq \frac{1}{(x-\xi)^2}} \frac{\sinh \sqrt{-zx} - \sinh \sqrt{-z\xi}}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z\delta}} A(A-zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|z| \geq \frac{1}{(x-\xi)^2}} \frac{\sinh \sqrt{-zx} - \sinh \sqrt{-z\xi}}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z\delta}} A(A-zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{|z| \leq \frac{1}{(x-\xi)^2}} \int_\xi^x \frac{\cosh \sqrt{-zs}}{\cosh \sqrt{-z\delta}} A(A-zI)^{-1} f_+^\delta dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| A n_+^\delta(x, A) f_+^\delta - A n_+^\delta(\xi, A) f_+^\delta \right\| \\
\leq & C \int_{|z| \geq \frac{1}{(x-\xi)^2}} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} + e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\xi}}{|z|^{1+\alpha_0} |\cosh \sqrt{-z}\delta|} |dz| \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
& + C \int_{|z| \leq \frac{1}{(x-\xi)^2}} \int_\xi^x \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}s}{|z|^{1/2+\alpha_0} |\cosh \sqrt{-z}\delta|} ds |dz| \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
\leq & C \int_{|z| \geq \frac{1}{(x-\xi)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)} + e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-\xi)}}{|z|^{1+\alpha_0}} |dz| \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
& + C \int_{|z| \leq \frac{1}{(x-\xi)^2}} \int_\xi^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-s)}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} ds |dz| \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
\leq & C \left(\int_{|z| \geq \frac{1}{(x-\xi)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{1+\alpha_0}} + \int_{|z| \leq \frac{1}{(x-\xi)^2}} \frac{(x-\xi)}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| \right) \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
\leq & C (x-\xi)^{2\alpha_0} \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)}.
\end{aligned}$$

Comme pour le terme précédent $n_+^\delta(x, A)$, on peut montrer par le calcul de Dunford que le terme $n_+^\delta(x, A) f_+^\delta$ peut être réécrit comme suit

$$\begin{aligned}
& n_+^\delta(x, A) f_+^\delta \\
= & \left(I + e^{-2\delta(-A)^{1/2}} \right)^{-1} \left(I - e^{-2x(-A)^{1/2}} \right) e^{-(\delta-x)(-A)^{1/2}} (-A)^{-1/2} f_+^\delta,
\end{aligned} \tag{3.5}$$

ce qui donne, pour tout $x \in [0, \delta[$

$$\begin{aligned}
& A n_+^\delta(x, A) f_+^\delta \\
= & - \left(I + e^{-2\delta(-A)^{1/2}} \right)^{-1} \left(I - e^{-2x(-A)^{1/2}} \right) e^{-(\delta-x)(-A)^{1/2}} (-A)^{1/2} f_+^\delta.
\end{aligned}$$

Utilisons Sinestrari [31], proposition 1.2, p. 20 et le théorème 3.1, p. 39, on déduit que

$$A n_+^\delta(\cdot, A) f_+^\delta \in C([0, \delta]; E) \text{ si et seulement si } (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(-(-A)^{1/2})} = \overline{D(A)}$$

et

$$A n_+^\delta(\cdot, A) f_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$$

alors

$$(-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha_0, +\infty) = D_A(\alpha_0, +\infty) \tag{3.6}$$

Il est clair que (3.6) implique

$$f_+^\delta \in D_{\sqrt{-A}}(1 + 2\alpha_0, +\infty) = \left\{ \xi \in D((-A)^{1/2}) : (-A)^{1/2} \xi \in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha_0, +\infty) \right\}.$$

■

3.1.2 La solution stricte de (P_+^δ)

Dans cette sous-section on donne des conditions nécessaires et suffisantes sur les données, afin d'obtenir une unique solution stricte u_+^δ pour le problème (P_+^δ) telle que

$$u_+^\delta \in C^2([0, \delta]; E) \cap C([0, \delta]; D(A)).$$

Théorème 3.1 Soient $g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$ avec $0 < 2\alpha_0 < 1$, $\psi \in D(A)$ et $f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$ alors u_+^δ donnée par (3.4) est l'unique solution de (P_+^δ) satisfaisant :

$$u_+^\delta \in C([0, \delta]; D(A)) \cap C^2([0, \delta]; E)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} A\psi - g_+^\delta(0) \in \overline{D(A)} \\ (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

Preuve. 1. et 2. Grâce aux propositions 3.2, 3.3 et 3.1, il est facile de déduire que

$$u_+^\delta \in C([0, \delta]; E).$$

Maintenant, pour tout $x \in [0, \delta]$, on a

$$\begin{aligned} u_+^\delta(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma c_z(x) (A - zI)^{-1} \psi dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{s_z(x)}{\sqrt{-z}} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, \tau) (A - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau dz \\ &= d_+^\delta(x, A)\psi + n_+^\delta(x, A)f_+^\delta + v_+^\delta(x, A, g_+^\delta), \end{aligned}$$

elle peut être réécrite

$$\begin{aligned} u_+^\delta(x) &= d_+^\delta(x, A)\psi + n_+^\delta(x, A)f_+^\delta \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, \tau) (A - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau dz \\ &= d_+^\delta(x, A)\psi + n_+^\delta(x, A)f_+^\delta \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, \tau) (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)) d\tau dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{z \cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} g_+^\delta(x) dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{(A - zI)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz \\ &= d_+^\delta(x, A)\psi + n_+^\delta(x, A)f_+^\delta \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, \tau) (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)) d\tau dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{z \cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} g_+^\delta(x) dz + A^{-1}g_+^\delta(x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& Au_+^\delta(x) \\
= & d_+^\delta(x, A) (A\psi - g_+^\delta(0)) + An_+^\delta(x, A)f_+^\delta + d_+^\delta(x, A) (g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)) \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, \tau) A(A - zI)^{-1} [g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)] d\tau dz \\
& + g_+^\delta(x).
\end{aligned}$$

La proposition 3.2, pour tout $x \in [0, \delta]$ donne

$$\|d_+^\delta(x, A) [A\psi - g_+^\delta(0)]\|_E \leq C \|A\psi - g_+^\delta(0)\|_E,$$

$$\|d_+^\delta(x, A) [g_+^\delta(x) - g_+^\delta(0)]\|_E \leq C \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)},$$

et par l'assertion 2) de la proposition 3.3, on a

$$An_+^\delta(x, A)f_+^\delta \in C([0, \delta]; E).$$

Grâce à l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_0^x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\tau |\tau - x|^{2\alpha_0} d\tau \\
\leq & \left[\int_0^x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\tau d\tau \right]^{1-2\alpha_0} \left[\int_0^x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\tau |\tau - x| d\tau \right]^{2\alpha_0} \\
\leq & \left[\frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-zx}}{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \right]^{1-2\alpha_0} \left[\frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-zx} - 1}{(\operatorname{Re} \sqrt{-z})^2} \right]^{2\alpha_0} \\
\leq & \frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-zx}}{(\operatorname{Re} \sqrt{-z})^{1+2\alpha_0}} \left[\frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-zx} - 1}{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-zx}} \right]^{2\alpha_0} \leq C \frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-zx}}{|z|^{1/2+\alpha_0}}
\end{aligned}$$

et de la même manière, on a aussi

$$\int_x^\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - \tau) |\tau - x|^{2\alpha_0} d\tau \leq C \frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x)}{|z|^{1/2+\alpha_0}}.$$

Des deux estimations précédentes résulte la convergence absolue de

$$\begin{aligned}
& Av_+^\delta(x, A, g_+^\delta) + d_+^\delta(x, A)g_+^\delta(x) - g_+^\delta(x) \\
= & -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, \tau) A(A - zI)^{-1} [g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)] d\tau dz,
\end{aligned}$$

en effet

$$\begin{aligned}
& \left\| Av_+^\delta(x, A, g_+^\delta) + d_+^\delta(x, A)g_+^\delta(x) - g_+^\delta(x) \right\|_E \\
& \leq C \int_\gamma \int_0^\delta |K_{\sqrt{-z}}(x, \tau)| |\tau - x|^{2\alpha_0} d\tau \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} |dz| \\
& \leq C \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{1/2} |\cosh \sqrt{-z}\delta|} \int_0^x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\tau |\tau - x|^{2\alpha_0} d\tau |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\
& + C \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{1/2} |\cosh \sqrt{-z}\delta|} \int_x^\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - \tau) |\tau - x|^{2\alpha_0} d\tau |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\
& \leq C \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{1/2} |\cosh \sqrt{-z}\delta|} \frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}x}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\
& + C \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{1/2} |\cosh \sqrt{-z}\delta|} \frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\
& \leq C \int_\gamma \frac{1}{|z|^{1+\alpha_0} |1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}|} |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\
& \leq C \int_\gamma \frac{1}{|z|^{1+\alpha_0} C_{\theta_0}} |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\
& \leq C \int_\gamma \frac{|dz|}{|z|^{1+\alpha_0}} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \leq C \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)}
\end{aligned}$$

d'où la continuité.

Maintenant, on montre que

$$(u_+^\delta)''(\cdot) + Au_+^\delta(\cdot) = g_+^\delta(\cdot).$$

On rappelle que

$$\begin{aligned}
(u_+^\delta)'(x) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \sqrt{-z} s_z(\delta-x) (A-zI)^{-1} \psi dz \\
&+ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma c_z(\delta-x) (A-zI)^{-1} f_+^\delta dz \\
&+ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^x \frac{s_z(\tau) s_z(\delta-x)}{c_z(\delta)} (A-zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau dz \\
&- \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_x^\delta \frac{c_z(\delta-x) c_z(\tau)}{c_z(\delta)} (A-zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau dz,
\end{aligned}$$

les deux derniers termes ne sont pas clairement différentiables. Donc, si on fait un calcul formel de leurs dérivées, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}x \sinh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} g_+^\delta(x) dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A-zI)^{-1} g_+^\delta(x) dz \\
& = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (A-zI)^{-1} g_+^\delta(x) dz
\end{aligned}$$

ce qui n'est pas bien définie.

C'est pourquoi, afin de calculer $(u_+^\delta)''(x)$, on adapte la méthode utilisée par Tanabe dans [33] p. 70.

Soit ε un nombre positif très petit et x tels que

$$0 < \varepsilon \leq x \leq \delta - \varepsilon < \delta.$$

Alors

$$\begin{aligned} \left[(u_+^\delta)' \right]_\varepsilon(x) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \sqrt{-z} s_z(\delta - x) (A - zI)^{-1} \psi \, dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma c_z(\delta - x) (A - zI)^{-1} f_+^\delta \, dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^{x-\varepsilon} \frac{s_z(\tau) s_z(\delta - x)}{c_z(\delta)} (A - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau \, dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{x+\varepsilon}^\delta \frac{c_z(\delta - x) c_z(\tau)}{c_z(\delta)} (A - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau \, dz \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de voir que toutes ces intégrales sont absolument convergentes. En effet

$$\begin{aligned} \|I_1\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \sqrt{-z} s_z(\delta - x) (A - zI)^{-1} \psi \, dz \right\|_E \\ &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{s_z(\delta - x)}{\sqrt{-z}} (A - zI)^{-1} A\psi \, dz \right\|_E \\ &\leq C \int_\gamma \frac{|s_z(\delta - x)|}{|z|^{3/2}} \|A\psi\|_E \, |dz| \leq C \|\psi\|_{D(A)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|I_2\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma c_z(\delta - x) (A - zI)^{-1} f_+^\delta \, dz \right\|_E \\ &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{c_z(\delta - x)}{\sqrt{-z}} (A - zI)^{-1} (-A)^{1/2} f_+^\delta \, dz \right\|_E \\ &\leq C \int_\gamma \frac{|c_z(\delta - x)|}{|z|^{3/2}} \|(-A)^{1/2} f_+^\delta\|_E \, |dz| \leq C \|(-A)^{1/2} f_+^\delta\|_E. \end{aligned}$$

Les techniques utilisées dans la preuve de la proposition 3.1 donnent la convergence absolue de $I_3 + I_4$.

$$\left[(u_+^\delta)' \right]_\varepsilon(x) \rightarrow (u_+^\delta)'(x) \quad \text{fortement}$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Un calcul formel donne la dérivée de $\left[(u_+^\delta)' \right]_\varepsilon (x)$

$$\begin{aligned}
& \left(\left[(u_+^\delta)' \right]_\varepsilon \right)' (x) \\
= & -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma c_z(x) (A - zI)^{-1} (A\psi - g_+^\delta(0)) dz \\
& -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma s_z(x) \frac{A(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} f_+^\delta dz \\
& +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma [c_z(2x + \varepsilon) - c_z(2x - \varepsilon)] \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz \\
& -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma c_z(x) (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)) dz \\
& +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^{x-\varepsilon} \frac{s_z(\tau) c_z(x) A(A - zI)^{-1}}{c_z(\delta) \sqrt{-z}} [g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)] d\tau dz \\
& +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{x+\varepsilon}^\delta \frac{s_z(x) c_z(\tau) A(A - zI)^{-1}}{c_z(\delta) \sqrt{-z}} [g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)] d\tau dz \\
& +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{c_z(\delta - x) c_z(x + \varepsilon) A(A - zI)^{-1}}{c_z(\delta) z} [g_+^\delta(x + \varepsilon) - g_+^\delta(x)] dz \\
& +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{s_z(x - \varepsilon) s_z(\delta - x) A(A - zI)^{-1}}{c_z(\delta) z} [g_+^\delta(x - \varepsilon) - g_+^\delta(x)] dz \\
= & -d_+^\delta(x, A) (A\psi - g_+^\delta(0)) - An_+^\delta(x, A) f_+^\delta - d_+^\delta(x, A) (g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)) \\
& +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^{x-\varepsilon} \frac{s_z(\tau) c_z(x) A(A - zI)^{-1}}{c_z(\delta) \sqrt{-z}} [g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)] d\tau dz \\
& +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{x+\varepsilon}^\delta \frac{s_z(x) c_z(\tau) A(A - zI)^{-1}}{c_z(\delta) \sqrt{-z}} [g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)] d\tau dz \\
& +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{c_z(\delta - x) c_z(x + \varepsilon) A(A - zI)^{-1}}{c_z(\delta) z} [g_+^\delta(x + \varepsilon) - g_+^\delta(x)] dz \\
& +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{s_z(x - \varepsilon) s_z(\delta - x) A(A - zI)^{-1}}{c_z(\delta) z} [g_+^\delta(x - \varepsilon) - g_+^\delta(x)] dz \\
& +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma [c_z(2x + \varepsilon) - c_z(2x - \varepsilon)] \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz \\
= & \sum_{i=1}^8 I_i.
\end{aligned}$$

Grâce aux propositions 3.2, 3.3 et 3.1, les intégrales I_1, \dots, I_5 sont absolument convergentes.

Pour I_6 ,

$$\begin{aligned}
\|I_6\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{c_z(\delta-x)}{c_z(\delta)} \frac{c_z(x+\varepsilon)}{c_z(\delta)} \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} [g_+^\delta(x+\varepsilon) - g_+^\delta(x)] dz \right\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} \left| \frac{c_z(\delta-x)}{c_z(\delta)} \frac{c_z(x+\varepsilon)}{c_z(\delta)} \right| \frac{\varepsilon^{2\alpha_0}}{|z|} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} |dz| \\
&\leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\varepsilon}}{|1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}|} \frac{\varepsilon^{2\alpha_0}}{|z|} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} |dz| \\
&\leq C\varepsilon^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\varepsilon}}{|z|} |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq C\varepsilon^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}
\end{aligned}$$

On fait de même pour I_7 , on obtient

$$\begin{aligned}
\|I_7\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{s_z(x-\varepsilon)}{c_z(\delta)} \frac{s_z(\delta-x)}{c_z(\delta)} \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} [g_+^\delta(x-\varepsilon) - g_+^\delta(x)] dz \right\|_E \\
&\leq C\varepsilon^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}
\end{aligned}$$

Pour I_8

$$\begin{aligned}
\|I_8\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} [c_z(2x+\varepsilon) - c_z(2x-\varepsilon)] \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz \right\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} s_z(\delta-\tau) \frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} g_+^\delta(x) d\tau dz \right\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \left| \frac{s_z(\delta-\tau)}{\sqrt{-z}} \right| d\tau |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{\gamma} \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\tau}}{|z|^{1/2} |1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}|} d\tau |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\tau}}{|z|^{1/2}} |dz| d\tau \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \left[\int_{|z|\geq\frac{1}{\tau^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}\tau}}{|z|^{1/2}} |dz| + \int_{|z|\leq\frac{1}{\tau^2}} \frac{|dz|}{|z|^{1/2}} \right] d\tau \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \left[\frac{2\tau^{-1}}{\sin(\theta_0/2)} \int_1^\infty e^{-\sigma\sin(\theta_0/2)} d\sigma + \frac{1}{\tau} - \sqrt{r_0} \right] d\tau \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{2x-\varepsilon}^{2x+\varepsilon} \tau^{-1} d\tau \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)} \\
&\leq C \ln\left(\frac{2x+\varepsilon}{2x-\varepsilon}\right) \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)}
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & Au_+^\delta(x) - g_+^\delta(x) \\ = & d_+^\delta(x, A) (A\psi - g_+^\delta(0)) + An_+^\delta(x, A)f_+^\delta + d_+^\delta(x, A) (g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)) \\ & - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, \tau) A (A - zI)^{-1} [g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)] d\tau dz. \end{aligned}$$

Maintenant, on montre que $\left(\left[(u_+^\delta)' \right]_\varepsilon \right)' (x) + Au_+^\delta(x) - g_+^\delta(x) \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.
Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned} & \left(\left[(u_+^\delta)' \right]_\varepsilon \right)' (x) + Au_+^\delta(x) - g_+^\delta(x) \\ = & -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{x-\varepsilon}^x \frac{s_z(\tau) c_z(x) A (A - zI)^{-1}}{c_z(\delta) \sqrt{-z}} [g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)] d\tau dz \\ & -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_x^{x+\varepsilon} \frac{s_z(x) c_z(\tau) A (A - zI)^{-1}}{c_z(\delta) \sqrt{-z}} [g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)] d\tau dz \\ & +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{c_z(\delta - x) c_z(x + \varepsilon) A (A - zI)^{-1}}{c_z(\delta) z} [g_+^\delta(x + \varepsilon) - g_+^\delta(x)] dz \\ & +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{s_z(x - \varepsilon) s_z(\delta - x) A (A - zI)^{-1}}{c_z(\delta) z} [g_+^\delta(x - \varepsilon) - g_+^\delta(x)] dz \\ & +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma [c_z(2x + \varepsilon) - c_z(2x - \varepsilon)] \frac{A (A - zI)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz \\ = & \sum_{i=1}^5 J_i. \end{aligned}$$

On a déjà vu

$$\begin{aligned} \|J_3\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{c_z(\delta - x) c_z(x + \varepsilon) A (A - zI)^{-1}}{c_z(\delta) z} [g_+^\delta(x + \varepsilon) - g_+^\delta(x)] dz \right\|_E \\ &\leq C\varepsilon^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|J_4\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{s_z(x - \varepsilon) s_z(\delta - x) A (A - zI)^{-1}}{c_z(\delta) z} [g_+^\delta(x - \varepsilon) - g_+^\delta(x)] dz \right\|_E \\ &\leq C\varepsilon^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|J_5\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma [c_z(2x + \varepsilon) - c_z(2x - \varepsilon)] \frac{A (A - zI)^{-1}}{z} g_+^\delta(x) dz \right\|_E \\ &\leq C \ln \left(\frac{2x + \varepsilon}{2x - \varepsilon} \right) \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)}. \end{aligned}$$

Pour J_1

$$\begin{aligned}
& \|J_1\|_E \\
&= \left\| -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{x-\varepsilon}^x \frac{s_z(\tau) c_z(x) A(A-zI)^{-1}}{c_z(\delta) \sqrt{-z}} [g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)] d\tau dz \right\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} \int_{x-\varepsilon}^x \left| \frac{s_z(\tau) c_z(x)}{c_z(\delta)} \right| \frac{(x-\tau)^{2\alpha_0}}{|z|^{1/2}} d\tau |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{\gamma} \int_{x-\varepsilon}^x \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\tau)} (x-\tau)^{2\alpha_0}}{|1+e^{-2\sqrt{-z}\delta}| |z|^{1/2}} d\tau |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{x-\varepsilon}^x \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{(x-\tau)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\tau)}}{|z|^{1/2}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(x-\tau)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{1/2}} \right] (x-\tau)^{2\alpha_0} d\tau \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{x-\varepsilon}^x (x-\tau)^{2\alpha_0-1} d\tau \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \varepsilon^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

J_2 se traite comme J_1 , on obtient

$$\begin{aligned}
\|J_2\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_x^{x+\varepsilon} \frac{s_z(x) c_z(\tau) A(A-zI)^{-1}}{c_z(\delta) \sqrt{-z}} [g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)] d\tau dz \right\|_E \\
&\leq C \varepsilon^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

Il est clair que $(J_i)_{i=1..5}$ tends vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Finalement,

$$\left[(u_+^\delta)' \right]_\varepsilon(x) \rightarrow (u_+^\delta)'(x) \text{ fortement}$$

et

$$\left(\left[(u_+^\delta)' \right]_\varepsilon \right)'(x) + Au_+^\delta(x) - g_+^\delta(x) \rightarrow (u_+^\delta)''(x) + Au_+^\delta(x) - g_+^\delta(x) = 0$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

3.1.3 Régularité maximale pour u_+^δ

Dans le but de donner des résultats de régularité maximale de la solution u_+^δ , on écrit le théorème suivant.

Théorème 3.2 Soit $g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)$ avec $0 < 2\alpha_0 < 1$, $\psi \in D(A)$ et $f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $A\psi - g_+^\delta(0) \in D_A(\alpha_0, +\infty)$ et $(-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_A(\alpha_0, +\infty)$,
2. $u_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0,\delta];D(A))$,
3. $(u_+^\delta)'' \in C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)$,
4. $(u_+^\delta)'' \in B(D_A(\alpha_0, +\infty))$. (L'espace $B(D_A(\alpha_0, +\infty))$ désigne l'ensemble des u tels que, pour tout $x \in [0,\delta]$, $\|u(x)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)}$ reste borné).

Preuve. 1) et 2) D'après le théorème 3.1, on déduit que

$$u_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E),$$

puisque $C^2([0, \delta]; E) \subset C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$ et $D_A(\alpha_0, +\infty) \subset \overline{D(A)}$.

On rappelle que, pour $x \in [0, \delta]$

$$\begin{aligned} & Au_+^\delta(x) \\ &= d_+^\delta(x, A) (A\psi - g_+^\delta(0)) + An_+^\delta(x, A)f_+^\delta + d_+^\delta(x, A) (g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)) \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, \tau) A(A - zI)^{-1} [g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)] d\tau dz \\ &\quad + g_+^\delta(x). \end{aligned}$$

Puisque $A\psi - g_+^\delta(0) \in D_A(\alpha_0, +\infty)$, par l'assertion 2) de la proposition (3.2), on a Immédiatement

$$d_+^\delta(\cdot, A) (A\psi - g_+^\delta(0)) \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E),$$

de même que $(-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_A(\alpha_0, +\infty)$, par l'assertion 4) de la proposition (3.3), on a

$$An_+^\delta(\cdot, A)f_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E).$$

En outre, on pose

$$\begin{aligned} t(x) &= d_+^\delta(x, A) (g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)) \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, \tau) A(A - zI)^{-1} [g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)] d\tau dz \end{aligned}$$

Soient ξ, x tels que $0 \leq \xi < x \leq \delta$. En réécrivant les deux derniers termes, on a

$$\begin{aligned} & t(x) - t(\xi) \\ &= d_+^\delta(x, A) (g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)) - d_+^\delta(\xi, A) (g_+^\delta(0) - g_+^\delta(\xi)) \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, \tau) A(A - zI)^{-1} [g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)] d\tau dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(\xi, \tau) A(A - zI)^{-1} [g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(\xi)] d\tau dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\xi \int_\xi^x \frac{\sinh \sqrt{-z}(\delta - \tau) \sinh \sqrt{-z}\nu}{\cosh \sqrt{-z}\delta} A(A - zI)^{-1} [g_+^\delta(\nu) - g_+^\delta(\xi)] d\tau d\nu dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_x^\delta \int_\xi^x \frac{\sinh \sqrt{-z}\tau \cosh \sqrt{-z}(\delta - \nu)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} A(A - zI)^{-1} [g_+^\delta(\nu) - g_+^\delta(x)] d\tau d\nu dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{\sinh \sqrt{-z}\nu \cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} A(A-zI)^{-1} [g_+^{\delta}(\nu) - g_+^{\delta}(x)] d\nu dz \\
& +\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{\sinh \sqrt{-z}\xi \cosh \sqrt{-z}(\delta-\nu)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} A(A-zI)^{-1} [g_+^{\delta}(\nu) - g_+^{\delta}(\xi)] d\nu dz \\
& +\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x-\xi)}{z \cosh \sqrt{-z}\delta} A(A-zI)^{-1} [g_+^{\delta}(x) - g_+^{\delta}(\xi)] dz \\
& +\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{\sinh \sqrt{-z}(\delta-\nu)}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} A(A-zI)^{-1} [g_+^{\delta}(0) - g_+^{\delta}(\xi)] d\nu dz \\
& = \sum_{i=1}^6 I_i.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \|I_1\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-\tau)}}{|\cosh \sqrt{-z}\delta|} \left(\int_0^{\xi} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\nu (\nu - \xi)^{2\alpha_0} d\nu \right) d\tau |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}
\end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
& \leq C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-\tau)}}{|\cosh \sqrt{-z}\delta|} \left(\frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\xi}{|z|^{1/2+\alpha_0}} \right) d\tau |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau-\xi)}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} d\tau |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
& \leq C \int_{\xi}^x \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{(\tau-\xi)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau-\xi)}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(\tau-\xi)^2}} \frac{1}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| \right] d\tau \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
& \leq C \int_{\xi}^x \frac{1}{(\tau-\xi)^{1-2\alpha_0}} \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sigma \cos(\pi/2-\theta_0/2)}}{\sigma^{2\alpha_0}} d\sigma d\tau \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
& \quad + C \int_{\xi}^x \frac{(\tau-\xi)^{2\alpha_0-1} - r_0^{1/2-\alpha_0}}{1/2-\alpha_0} d\tau \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
& \leq C \int_{\xi}^x (\tau-\xi)^{2\alpha_0-1} d\tau \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \leq C(x-\xi)^{2\alpha_0} \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

Les termes I_2, I_3 et I_4 sont traités de la même manière que I_1

$$\begin{aligned}
\|I_5\|_E & \leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+\xi)}}{|z|} (x-\xi)^{2\alpha_0} |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
& \leq C(x-\xi)^{2\alpha_0} \int_{(x+\xi)\sqrt{r_0}}^{\infty} \frac{e^{-\sigma \cos(\pi/2-\theta_0/2)}}{\sigma} d\sigma \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
& \leq C(x-\xi)^{2\alpha_0} \int_{\varepsilon < (x+\xi)\sqrt{r_0}}^{\infty} \frac{e^{-\sigma \cos(\pi/2-\theta_0/2)}}{\sigma} d\sigma \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
& \leq C(x-\xi)^{2\alpha_0} \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|I_6\|_E &\leq C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}\nu}}{|z|^{1/2}} \xi^{2\alpha_0} d\nu |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{\xi}^x \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{\nu^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}\nu}}{|z|^{1/2}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{\nu^2}} \frac{1}{|z|^{1/2}} |dz| \right] \nu^{2\alpha_0} d\nu \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \int_{\xi}^x \nu^{2\alpha_0-1} d\nu \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C (x^{2\alpha_0} - \xi^{2\alpha_0}) \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C (x - \xi)^{2\alpha_0} \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

La réciproque : par le calcul fonctionnel de Dunford $u_+^{\delta}(x)$ peut être réécrit comme suit

$$\begin{aligned}
&u_+^{\delta}(x) \\
&= A^{-1}S^{-1} \left(I + e^{-2(-A)^{1/2}(\delta-x)} \right) e^{-(-A)^{1/2}x} (A\psi - g_+^{\delta}(0)) \\
&\quad + S^{-1} \left(I - e^{-2(-A)^{1/2}x} \right) e^{-(-A)^{1/2}(\delta-x)} (-A)^{-1/2} f_+^{\delta} \\
&\quad - S^{-1} \left(I + e^{-2(\delta-x)(-A)^{1/2}} \right) (-A)^{-1/2} \int_x^{\delta} \left(I - e^{-2\tau(-A)^{1/2}} \right) e^{-(x-\tau)(-A)^{1/2}} g_+^{\delta}(\tau) d\tau \\
&\quad - S^{-1} \left(I - e^{-2x(-A)^{1/2}} \right) (-A)^{-1/2} \int_x^{\delta} \left(I + e^{-2(\delta-\tau)(-A)^{1/2}} \right) e^{-(\tau-x)(-A)^{1/2}} g_+^{\delta}(\tau) d\tau. \\
&\quad + A^{-1}S^{-1} \left(I + e^{-2(-A)^{1/2}(\delta-x)} \right) e^{-(-A)^{1/2}x} g_+^{\delta}(0).
\end{aligned}$$

Grâce à Lunardi [23], p.59, l'opérateur

$$S^{-1} = \left(I + e^{-2\delta(-A)^{1/2}} \right)^{-1}$$

est bien défini. En utilisant Sinestrari [31], proposition 1.2, p. 20 et théorème 3.1, p. 39, on déduit que

$$u_+^{\delta}(\cdot) \in C([0, \delta]; E) \text{ si et seulement si } A\psi - g_+^{\delta}(0) \in \overline{D(A)}, \quad (-A)^{1/2} f_+^{\delta} \in \overline{D(A)}$$

et

$$u_+^{\delta}(\cdot) \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E) \text{ alors } \begin{cases} d_+^{\delta}(\cdot, A) (A\psi - g_+^{\delta}(0)) \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E) \\ n_+^{\delta}(\cdot, A) (-A)^{1/2} f_+^{\delta} \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E) \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} (-A)^{1/2} f_+^{\delta} \in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha_0, +\infty) = D_A(\alpha_0, +\infty) \\ A\psi - g_+^{\delta}(0) \in D_A(\alpha_0, +\infty). \end{cases}$$

3) est une conséquence de 2).

4) Il existe une constante $K > 0$, pour tout $x \in [0, \delta]$, on doit prouver que

$$\sup_{\lambda > 0} \left\| \lambda^{\alpha_0} A (A - \lambda I)^{-1} (Au_+(x) - g_+^{\delta}(x)) \right\|_E \leq K,$$

où K est indépendante de x .

Pour cela, on utilise l'identité suivante :

$$\begin{aligned}
& A(A - \lambda)^{-1} A (A - z)^{-1} \\
= & A(A - \lambda)^{-1} + zA(A - \lambda)^{-1} (A - z)^{-1} \\
= & A(A - \lambda)^{-1} + \left[\frac{A - A + z - \lambda}{z - \lambda} \right] z A(A - \lambda)^{-1} (A - z)^{-1} \\
= & A(A - \lambda)^{-1} - \left[\frac{(A - z)}{z - \lambda} - \frac{(A - \lambda)}{z - \lambda} \right] zA(A - \lambda)^{-1} (A - z)^{-1} \\
= & A(A - \lambda)^{-1} - \frac{zA}{z - \lambda} [(A - \lambda)^{-1} - (A - z)^{-1}] \\
= & \frac{z}{z - \lambda} A(A - z)^{-1} - \frac{\lambda}{z - \lambda} A(A - \lambda)^{-1}
\end{aligned} \tag{3.7}$$

pour tout $\lambda, z \in \rho(A)$.

Alors

$$\begin{aligned}
& \lambda^{\alpha_0} A(A - \lambda I)^{-1} (Au_+^\delta(x) - g_+^\delta(x)) \\
= & \lambda^{\alpha_0} A(A - \lambda I)^{-1} d_+^\delta(x, A) (A\psi - g_+^\delta(0)) \\
& + \lambda^{\alpha_0} A(A - \lambda I)^{-1} An_+^\delta(x, A) f_+^\delta \\
& + \lambda^{\alpha_0} A(A - \lambda I)^{-1} d_+^\delta(x, A) (g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)) \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, \tau) \lambda^{\alpha_0} A(A - \lambda I)^{-1} A(A - zI)^{-1} [g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)] d\tau dz \\
= & \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{\lambda^{\alpha_0} A(A - \lambda I)^{-1} A(A - z)^{-1}}{z} (A\psi - g_+^\delta(0)) dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}x}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{\lambda^{\alpha_0} A(A - \lambda I)^{-1} A(A - z)^{-1}}{\sqrt{-z}} f_+^\delta dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{\lambda^{\alpha_0} A(A - \lambda I)^{-1} A(A - z)^{-1}}{z} (g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)) dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, \tau) \lambda^{\alpha_0} A(A - \lambda I)^{-1} A(A - zI)^{-1} [g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)] d\tau dz \\
= & \frac{\lambda^{\alpha_0}}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{1}{z - \lambda} A(A - z)^{-1} (A\psi - g_+^\delta(0)) dz \\
& + \frac{\lambda^{\alpha_0}}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}x}{\sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{z}{z - \lambda} A(A - z)^{-1} f_+^\delta dz \\
& + \frac{\lambda^{\alpha_0}}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{1}{z - \lambda} A(A - z)^{-1} (g_+^\delta(0) - g_+^\delta(x)) dz \\
& - \frac{\lambda^{\alpha_0}}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, \tau) \frac{z}{z - \lambda} A(A - z)^{-1} [g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)] d\tau dz \\
= & (a) + (b) + (c) + (d),
\end{aligned}$$

les termes sans la résolvante disparaissent en intégrant à gauche de γ .
Grâce à l'assertion 2) du lemme 1.9, on a

$$\int_{\gamma} \frac{1}{|z - \lambda| |z|^{\alpha_0}} |dz| \leq \frac{C}{\lambda^{\alpha_0}}.$$

alors

$$\begin{aligned} \|(a)\|_E &\leq C \lambda^{\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z - \lambda|} \|A(A - z)^{-1} [A\psi - g_+^{\delta}(0)]\|_E |dz| \\ &\leq C \lambda^{\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{1}{|z - \lambda| |z|^{\alpha_0}} |dz| \|A\psi - g_+^{\delta}(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\ &\leq K \|A\psi - g_+^{\delta}(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)}. \end{aligned}$$

De la même manière, on obtient

$$\|(b)\|_E \leq C \left\| (-A)^{1/2} f_+^{\delta} \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)}.$$

Pour (c), on a

$$\begin{aligned} \|(c)\|_E &= \left\| \frac{\lambda^{\alpha_0}}{2i\pi} \int_{\gamma} c_z(x) \frac{A(A - z)^{-1}}{z - \lambda} (g_+^{\delta}(0) - g_+^{\delta}(x)) dz \right\|_E \\ &\leq C \lambda^{\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{|c_z(x)|}{|z - \lambda|} x^{2\alpha_0} |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \\ &\leq C \lambda^{\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z - \lambda|} x^{2\alpha_0} |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \\ &\leq C \lambda^{\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z - \lambda|^{1-\alpha_0} |z - \lambda|^{\alpha_0}} x^{2\alpha_0} |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \\ &\leq C \lambda^{\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{1-\alpha_0} \lambda^{\alpha_0}} x^{2\alpha_0} |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \\ &\leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{1-\alpha_0}} x^{2\alpha_0} |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \leq C \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)}. \end{aligned}$$

On note que l'inégalité de Hölder donne pour tout $z \in \gamma$

$$\int_0^{\delta} |K_{z,+}^{\delta}(x, \tau)| (\tau - x)^{2\alpha_0} d\tau \leq \frac{C}{|z|^{1+\alpha_0}},$$

donc

$$\begin{aligned} \|(d)\|_E &= \left\| \frac{\lambda^{\alpha_0}}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{\delta} K_{z,+}^{\delta}(x, \tau) \frac{zA(A - z)^{-1}}{z - \lambda} [g_+^{\delta}(\tau) - g_+^{\delta}(x)] d\tau dz \right\|_E \\ &\leq C \lambda^{\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{|z|}{|z - \lambda|} \int_0^{\delta} |K_{z,+}^{\delta}(x, \tau)| |\tau - x|^{2\alpha_0} d\tau |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha}([0, \delta]; E)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\lambda^{\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{|z|}{|z-\lambda|} \frac{1}{|z|^{1+\alpha_0}} |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C\lambda^{\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{1}{|z-\lambda|} \frac{1}{|z|^{\alpha_0}} |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)} \\
&\leq C \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha}([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

■

3.2 L'opérateur d'impédance T_δ

L'opérateur d'impédance T_δ présenté au début de la section précédente est donné par

$$(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) \longrightarrow (u_+^\delta)'(0) = T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi).$$

Puisque

$$x \mapsto v_+^\delta(x, A, g_+^\delta) = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, \tau) (A - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau dz$$

est $C^1([0, \delta]; E)$ pour tout $g_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$, alors pour chaque $x \in]0, \delta[$, $\psi \in E$, $f_+^\delta \in E$

$$\begin{aligned}
(u_+^\delta)'(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} s_z(\delta - x) \frac{A(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} \psi dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} c_z(\delta - x) (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, \tau) (A - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau \right) dz \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned} \tag{3.8}$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^\delta K_{z,+}^\delta(x, \tau) (A - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau \right) &= - \int_0^x \frac{s_z(\tau) s_z(\delta - x)}{c_z(\delta)} (A - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau \\
&\quad + \int_x^\delta \frac{c_z(\delta - x) c_z(\tau)}{c_z(\delta)} (A - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau.
\end{aligned}$$

Pour I_3 , le lemme 1.7 donne

$$\begin{aligned}
\|I_3\| &\leq C \int_{\gamma} \int_0^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\tau)}}{|z| |1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}|} d\tau \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta],E)} |dz| \\
&\quad + C \int_{\gamma} \int_x^\delta \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau-x)}}{|z| |1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}|} d\tau \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta],E)} |dz| \\
&\leq C \int_{\gamma} \frac{1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{3/2} \sin(\theta_0/2) C_{\theta_0}} \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta],E)} |dz| \\
&\quad + C \int_{\gamma} \frac{1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{3/2} \sin(\theta_0/2) C_{\theta_0}} \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta],E)} |dz| \\
&\leq C \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z|^{3/2}} \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta],E)} \leq C \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta],E)}.
\end{aligned}$$

Pour I_1 , on obtient

$$\begin{aligned}
\|I_1\| &\leq C \int_\gamma \frac{|s_z(\delta - x)|}{|z|^{1/2}} dz \|\psi\|_E \\
&\leq C \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-zx}}}{|z|^{1/2} |1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta}|} |dz| \|\psi\|_E \\
&\leq C \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-zx}}}{|z|^{1/2} C_{\theta_0}} |dz| \|\psi\|_E \\
&\leq C \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{x^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-zx}}}{|z|^{1/2}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{x^2}} \frac{1}{|z|^{1/2}} |dz| \right] \|\psi\|_E \\
&\leq C \left[\frac{2}{x} \int_1^\infty e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)} d\sigma + \left[\frac{1}{x} - \sqrt{r_0} \right] \right] \|\psi\|_E \leq C \|\psi\|_E.
\end{aligned}$$

Pour l'intégrale I_2 , le raisonnement est identique à l'assertion 1) de la proposition 3.2, en remplaçant x par $(\delta - x)$.

On suppose que

$$\left\{ \frac{1}{\delta} f_+^\delta : \delta \in]0, 1] \right\} \text{ est borné dans } E. \quad (3.9)$$

Par conséquent, il existe l_+ tel que

$$\sup_{\delta \in]0, 1]} \left(\left\| \frac{1}{\delta} f_+^\delta \right\|_E \right) \leq l_+.$$

On désigne également par h_+^δ la fonction suivante définie par. $\xi \in (0, 1)$

$$\xi \longmapsto h_+^\delta(\xi) = g_+^\delta(\delta\xi),$$

ce qui donne

$$\|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} = \|h_+^\delta\|_{C([0, 1]; E)},$$

et

$$\begin{aligned}
&\|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\
&= \max_{x \in [0, 1]} \|h_+^\delta(x)\|_E + \frac{1}{\delta^{2\alpha_0}} \sup_{x, \tau \in [0, 1], x \neq \tau} \frac{\|h_+^\delta(x) - h_+^\delta(\tau)\|_E}{|x - \tau|^{2\alpha_0}} \\
&\leq \frac{1}{\delta^{2\alpha_0}} \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, 1]; E)}.
\end{aligned} \quad (3.10)$$

Proposition 3.4 *Il existe une constante $K > 0$ indépendante de $\delta > 0$ tel que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall g_+^\delta \in C([0, \delta]; E), \forall \psi \in D_A(1/2 + \alpha_0, +\infty), \forall f_+^\delta \in E \text{ satisfait (3.9)} \\ \|T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi)\|_E \leq K \left(\|h_+^\delta\|_{C([0, 1]; E)} + l_+ + \|\psi\|_{D_A(1/2 + \alpha_0, +\infty)} \right). \end{array} \right.$$

Preuve. Soient $\psi \in D_A(1/2 + \alpha_0, +\infty)$ et $f_+^\delta \in E$. De la formulation (3.8), on obtient formellement l'expression explicite de

$$\begin{aligned} T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) &= (u_+^\delta)'(0) \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta c_z(\tau) (A - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma c_z(\delta) (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma s_z(\delta) \frac{A(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} \psi dz \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Immédiatement, on a

$$\begin{aligned} \|I_1\|_E &\leq C \int_\gamma \int_0^\delta |c_z(\tau)| \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)} d\tau |dz| \\ &\leq C \int_\gamma \frac{\|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)}}{|z|^{3/2}} |dz| \\ &\leq K \|h_+^\delta\|_{C([0,1];E)}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|I_3\|_E &\leq C \int_\gamma \frac{|s_z(\delta)|}{|z|^{1+\alpha_0}} \|\psi\|_{D_A(1/2+\alpha_0, +\infty)} |dz| \\ &\leq C \int_\gamma \frac{\|\psi\|_{D_A(1/2+\alpha_0, +\infty)}}{|z|^{1+\alpha_0}} |dz| \\ &\leq K \|\psi\|_{D_A(1/2+\alpha_0, +\infty)}. \end{aligned}$$

Le terme I_2 se traite, en considérant le découpage de γ en

$$\gamma_+^\delta = \left\{ z \in \gamma : |z| \geq \frac{1}{\delta^2} \right\}, \quad \gamma_-^\delta = \left\{ z \in \gamma : |z| \leq \frac{1}{\delta^2} \right\},$$

en utilisant (1.1) et (3.9), avec K une constante indépendante de δ telle que

$$\begin{aligned} \|I_2\| &\leq K \int_{\gamma_+^\delta} \frac{\delta e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} l_+}{|z|} |dz| + K \int_{\gamma_-^\delta} \frac{\delta e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} l_+}{|z|} |dz| \\ &\leq K l_+ + K \delta \int_{r_0}^{1/\delta^2} \frac{d\rho}{\rho} l_+ \\ &= K l_+ + K \delta (-2 \ln \delta - \ln r_0) l_+ \\ &\leq K l_+. \end{aligned}$$

■

Maintenant, on suppose que

$$\{f_+^\delta : \delta \in]0, 1[\} \text{ est bornée dans } D_A(1/2, +\infty). \quad (3.11)$$

Alors, il existe $l_{+,1/2}$ telle que

$$\sup_{\delta \in]0,1]} \|f_+^\delta\|_E \leq l_{+,1/2}.$$

Proposition 3.5 *Il existe une constante $K > 0$ indépendante de $\delta > 0$ telle que*

1.

$$\begin{cases} \forall g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E), \forall \psi \in D(A), \forall f_+^\delta \in D_A(1/2, +\infty) \text{ satisfait (3.11)} \\ T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) \in D_A(1/2, +\infty), \end{cases}$$

2.

$$\begin{aligned} \|T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi)\|_{D_A(1/2, +\infty)} &\leq K \left(\|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} + l_{+,1/2} + \|\psi\|_{D_A(1/2+\alpha_0, +\infty)} \right) \\ &\leq K \left(\frac{1}{\delta^{2\alpha_0}} \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, 1]; E)} + l_{+,1/2} + \|\psi\|_{D_A(1/2+\alpha_0, +\infty)} \right); \end{aligned}$$

Preuve. D'après l'identité (3.7), pour tout $\lambda, z \in \rho(A)$

$$A(A - \lambda I)^{-1}(A - zI)^{-1} = \frac{z}{z - \lambda}(A - zI)^{-1} - \frac{\lambda}{z - \lambda}(A - \lambda I)^{-1}.$$

On doit estimer successivement

$$\sup_{\lambda > 0} \|A(A - \lambda I)^{-1} I_i\|_E \quad i = 1, 2, 3.$$

On a

$$\begin{aligned} A(A - \lambda I)^{-1} I_1 &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta c_z(\tau) A(A - \lambda I)^{-1} (A - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta c_z(\tau) \frac{z}{z - \lambda} (A - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta c_z(\tau) \frac{\lambda}{z - \lambda} (A - \lambda I)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta c_z(\tau) \frac{z}{z - \lambda} (A - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau dz, \end{aligned}$$

la deuxième intégrale est égale à zéro en intégrant à gauche de γ . Alors

$$\begin{aligned} \|A(A - \lambda I)^{-1} I_1\|_E &\leq C \int_\gamma \int_0^\delta \frac{|c_z(\tau)|}{|z - \lambda|} \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} d\tau |dz| \\ &\leq C \int_\gamma \int_0^\delta e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}\tau} d\tau \frac{1}{|z - \lambda|} |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\ &\leq C \int_\gamma \frac{1}{|z - \lambda| |z|^{1/2}} |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)} \\ &\leq \frac{C}{\lambda^{1/2}} \|g_+^\delta\|_{C([0, \delta]; E)}, \end{aligned}$$

grâce au lemme 1.9. Donc

$$I_1 \in D_A(1/2, +\infty).$$

Pour le second terme

$$\begin{aligned} A(A - \lambda I)^{-1} I_2 &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} c_z(\delta) A(A - \lambda I)^{-1} (A - zI)^{-1} f_+^{\delta} dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} c_z(\delta) \frac{z(A - zI)^{-1}}{z - \lambda} f_+^{\delta} dz, \end{aligned}$$

et par le lemme 1.7

$$\begin{aligned} \|A(A - \lambda I)^{-1} I_2\|_E &\leq C \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta}}{|z - \lambda|} \|A(A - zI)^{-1} f_+^{\delta}\| |dz| \\ &\leq C \int_{\gamma} \frac{1}{|z - \lambda| |z|^{1/2}} |dz| l_{+,1/2} \\ &\leq \frac{C}{\lambda^{1/2}} l_{+,1/2}, \end{aligned}$$

donc

$$I_2 \in D_A(1/2, +\infty).$$

Pour I_3 , on l'écrit d'abord comme

$$I_3 = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \sqrt{-z} s_z(\delta) (A - zI)^{-1} \psi dz,$$

alors

$$\begin{aligned} A(A - \lambda I)^{-1} I_3 &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \sqrt{-z} s_z(\delta) A(A - \lambda I)^{-1} (A - zI)^{-1} \psi dz \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \sqrt{-z} s_z(\delta) \frac{z}{z - \lambda} (A - zI)^{-1} \psi dz \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \sqrt{-z} s_z(\delta) \frac{1}{z - \lambda} A(A - zI)^{-1} \psi dz \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \sqrt{-z} s_z(\delta) \frac{1}{z - \lambda} (A - zI)^{-1} A \psi dz \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|A(A - \lambda I)^{-1} I_3\|_E &\leq C \int_{\gamma} \frac{1}{|z - \lambda|} \frac{1}{|z|^{1/2}} \|\psi\|_{D(A)} |dz| \\ &\leq C \int_{\gamma} \frac{1}{|z - \lambda| |z|^{\alpha_0}} |dz| \|\psi\|_{D(A)} \\ &\leq \frac{K}{\lambda^{1/2}}, \end{aligned}$$

donc

$$I_3 \in D_A(1/2, +\infty).$$

■

On a montré que l'opérateur d'impédance T_δ est linéaire, bien défini et borné de

$$C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E) \times D_A(1/2, +\infty) \times D(A)$$

vers l'espace

$$D_A(1/2, +\infty).$$

D'autre part, il peut être réécrit comme

$$T_\delta = T_\delta^* \circ H_\delta$$

où H_δ est défini de

$$C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E) \times D_A(1/2, +\infty) \times D(A)$$

vers

$$C^{2\alpha_0}([0, 1]; E) \times D_A(1/2, +\infty) \times D(A),$$

par

$$H_\delta : (g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) \mapsto H_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) = (h_+^\delta, f_+^\delta, \psi)$$

et T_δ^* de

$$C^{2\alpha_0}([0, 1]; E) \times D_A(1/2, +\infty) \times D(A)$$

vers

$$D_A(1/2, +\infty),$$

$$T_\delta^* : (h_+^\delta, f_+^\delta, \psi) \mapsto T_\delta^*(h_+^\delta, f_+^\delta, \psi) = T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi).$$

Ces résultats importants nous permettrons par la suite d'étudier le problème limite quand $\delta \rightarrow 0$.

3.3 Représentation de la solution u_-^δ

On considère le problème de valeurs aux limites avec condition d'impédance sur l'intervalle $(-1, 0)$

$$(P_-^\delta) \begin{cases} (u_-^\delta)''(x) + Au_-^\delta(x) = g_-^\delta(x) & \text{sur } (-1, 0) \\ u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_-^\delta)'(0) = pT_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, u_-^\delta(0)). \end{cases}$$

Comme pour le problème (P_+^δ) , le calcul fonctionnel de Dunford donne formellement la représentation de la solution de ce problème sur l'intervalle $(-1, 0)$

$$\begin{aligned} u_-^\delta(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x, \tau) (A - zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{p}{c_z(\delta)} \frac{s_z(x+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ &- \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \frac{p}{c_z^2(\delta)} \frac{c_z(\tau) s_z(x+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau dz \\ &= d_-^\delta(x, A) f_- + w_-^\delta(x, A, g_-) + n_-^\delta(x, A) f_+^\delta + v_-^\delta(x, A, g_+^\delta), \end{aligned} \tag{3.12}$$

avec

$$K_{z,-}^{\delta}(x, \tau) = \frac{-1}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} \begin{cases} \Delta_z(x, \delta) \frac{s_z(\tau+1)}{c_z(\delta)} & \text{si } -1 \leq \tau \leq x \\ \Delta_z(\tau, \delta) \frac{s_z(x+1)}{c_z(\delta)} & \text{si } x \leq \tau \leq 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \Delta_z(\xi, \delta) = \cosh \sqrt{-z}\xi \cosh \sqrt{-z}\delta - p \sinh \sqrt{-z}\xi \sinh \sqrt{-z}\delta \\ \text{pour } \xi \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Puisque on a trouvé la représentation complète de u_-^{δ} , alors

$$\psi = u_+^{\delta}(0) = u_-^{\delta}(0).$$

La solution complète du problème (P_+^{δ}) est donnée formellement par

$$\begin{aligned} u_+^{\delta}(x) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{\delta} H_{z,+}^{\delta}(x, \tau) (A - zI)^{-1} g_+^{\delta}(\tau) d\tau dz & (3.13) \\ &- \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \sinh \sqrt{-z}(\tau + 1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\Delta_z^+(x, \delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_+^{\delta} dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- dz \end{aligned}$$

avec le noyau

$$H_{z,+}^{\delta}(x, \tau) = \begin{cases} \frac{\Delta_z^+(\tau, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} & \text{si } 0 \leq \tau \leq x \\ \frac{\Delta_z^+(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - \tau)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} & \text{si } x \leq \tau \leq \delta. \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \Delta_z^+(x, \delta) = \sinh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}\delta + p \cosh \sqrt{-z}x \sinh \sqrt{-z}\delta \\ \text{pour } x \in [0, \delta]. \end{cases}$$

On remarque que les deux derniers termes dans la représentation (3.12) décrivent avec précision l'effet de la couche mince $[0, \delta]$.

Pour la convergence absolue des intégrales, on les propositions suivantes.

Proposition 3.6 *Soit $g_- \in C([-1, 0]; E)$, il existe une constante K ne dépendant que de γ telle que pour chaque $z \in \gamma$, on a*

$$\forall x \in [-1, 0], \quad \|w_-^{\delta}(x, A, g_-)\|_E \leq K \|g_-\|_{C([-1, 0]; E)}.$$

Preuve. Pour $z \in \gamma$ et $\forall x \in [-1, 0]$, par l'hypothèse (3.2) et le lemme 1.5, on a

$$\begin{aligned}
& \|w_-^\delta(x, A, g_-)\|_E \\
& \leq C \int_\gamma \int_{-1}^0 |K_{z,-}^\delta(x, \tau)| \, d\tau \, |dz| \|g_-\|_{C([-1,0];E)} \\
& \leq C \int_\gamma \int_{-1}^x \frac{|\Delta_z(x, \delta)| \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau+1)}{|z|^{3/2} |\Delta_z(-1, \delta)|} d\tau \, |dz| \|g_-\|_{C([-1,0];E)} \\
& \quad + C \int_\gamma \int_x^0 \frac{|\Delta_z(\tau, \delta)| \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}{|z|^{3/2} |\Delta_z(-1, \delta)|} d\tau \, |dz| \|g_-\|_{C([-1,0];E)} \\
& \leq C \int_\gamma \int_{-1}^x \frac{4(1+p) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau+1)}}{|z|^{3/2} (C_{\theta_0})^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}} d\tau \, |dz| \|g_-\|_{C([-1,0];E)} \\
& \quad + C \int_\gamma \int_x^0 \frac{4(1+p) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-\tau)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{3/2} (C_{\theta_0})^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}} d\tau \, |dz| \|g_-\|_{C([-1,0];E)} \\
& \leq \frac{4C(1+p)}{(C_{\theta_0})^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \int_\gamma \int_{-1}^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\tau)}}{|z|^{3/2}} d\tau \, |dz| \|g_-\|_{C([-1,0];E)} \\
& \quad + \frac{4C(1+p)}{(C_{\theta_0})^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \int_\gamma \int_x^0 \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau-x)}}{|z|^{3/2}} d\tau \, |dz| \|g_-\|_{C([-1,0];E)} \\
& \leq C \int_\gamma \frac{2 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}|x|}}{|z|^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} |dz| \|g_-\|_{C([-1,0];E)} \\
& \leq C \int_\gamma \frac{1}{|z|^2} |dz| \|g_-\|_{C([-1,0];E)} \leq C \|g_-\|_{C([-1,0];E)}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.7 Soit $g_+^\delta \in C([0, \delta]; E)$, il existe une constante K ne dépendant que de γ telle que pour chaque $z \in \gamma$, on a

$$\forall x \in [-1, 0] \quad \|v_-^\delta(x, A, g_+^\delta)\|_E \leq K \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)}.$$

Preuve. Pour $z \in \gamma$ et $\forall x \in [-1, 0]$, par l'hypothèse (3.2) et le lemme 1.5, on a

$$\begin{aligned}
& \|v_-^\delta(x, A, g_+^\delta)\|_E \\
& \leq C \int_\gamma \int_0^\delta \frac{p \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-\tau) \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}{|z|^{3/2} |\Delta_z(-1, \delta)|} d\tau \, |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)} \\
& \leq C \int_\gamma \int_0^\delta \frac{4p e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-\tau)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{3/2} (C_{\theta_0})^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}} d\tau \, |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)} \\
& \leq C \int_\gamma \int_0^\delta \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau-x)}}{|z|^{3/2}} d\tau \, |dz| \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)} \leq C \|g_+^\delta\|_{C([0,\delta];E)}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 3.8 1. Il existe une constante K ne dépendant que de γ telle que

$$\forall f_- \in E \quad \forall x \in]-1, 0] \quad \|d_-^\delta(x, A)f_-\| \leq K \|f_-\|_E,$$

2. $d_-^\delta(x, A)f_- - f_- \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow -1^+$ si et seulement si $f_- \in \overline{D(A)}$,
 3. $d_-^\delta(\cdot, A)f_- \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$ si et seulement si $f_- \in D_A(\alpha_0, +\infty)$.

Preuve. 1. Pour $x \in [-1, 0]$, cette estimation est obtenue par un découpage de γ en

$$\begin{cases} \gamma_+ = \{z \in \gamma : |z| \geq 1/(x+1)^2\} \\ \gamma_- = \{z \in \gamma : |z| \leq 1/(x+1)^2\}, \end{cases}$$

on considère

$$\Gamma = \{z : |\arg(z)| \leq \theta_0 \text{ et } |z| = 1/(x+1)^2\},$$

orienté positivement (voir figure 3.2).

Alors

$$\begin{aligned} & d_-^\delta(x, A)f_- \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- dz + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- dz \\ & \quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \frac{\Delta_z(x, \delta) - \Delta_z(-1, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- dz \\ & \quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_- \cup \Gamma} (A - zI)^{-1} f_- dz - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (A - zI)^{-1} f_- dz \\ &= \sum_{i=1}^4 I_i. \end{aligned}$$

Il est clair que $I_3 = 0$ par analyticité et

$$\begin{aligned} \|I_1\|_E &\leq C \int_{\gamma_+} \frac{|\Delta_z(x, \delta)|}{|z| |\Delta_z(-1, \delta)|} \|f_-\|_E |dz| \\ &\leq C \int_{\gamma_+} \frac{(1+p) e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}}{|z| |\Delta_z(-1, \delta)|} |dz| \|f_-\|_E \\ &\leq C(1+p) \int_{|z| \geq \frac{1}{(x+1)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}}{|z|} |dz| \|f_-\|_E \\ &\leq C(1+p) \int_1^\infty \frac{2e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma} d\sigma \|f_-\|_E \leq C \|f_-\|_E, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|I_2\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \frac{\Delta_z(x, \delta) - \Delta_z(-1, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- dz \right\|_E \\ &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \int_{-1}^x \frac{\partial_x \Delta_z(\tau, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- d\tau dz \right\|_E \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_{\gamma_-} \int_{-1}^x \frac{|\partial_x \Delta_z(\tau, \delta)|}{|\Delta_z(-1, \delta)| |z|} d\tau |dz| \|f_-\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma_-} \int_{-1}^x \frac{(1+p) |z|^{1/2} e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} \tau} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta}}{|\Delta_z(-1, \delta)| |z|} d\tau |dz| \|f_-\|_E \\
&\leq C(1+p) \int_{\gamma_-} \int_{-1}^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1+\tau)}}{|z|^{1/2}} d\tau |dz| \|f_-\|_E \\
&\leq C(1+p) \int_{\gamma_-} \frac{(x+1)}{|z|^{1/2}} |dz| \|f_-\|_E \\
&\leq C(1+p) \int_{r_0}^{1/(x+1)^2} \frac{(x+1)}{\zeta^{1/2}} d\zeta \|f_-\|_E \\
&\leq C(1+p) (1 - (x+1) \sqrt{r_0}) \|f_-\|_E \leq C \|f_-\|_E
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\|I_4\| &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} (A - zI)^{-1} f_- dz \right\| \\
&\leq C \int_{\Gamma} \frac{1}{|z|} |dz| \|f_-\|_E \\
&\leq C \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\frac{1}{(x+1)^2} (x+1)^2} d\alpha \|f_-\|_E \leq C \|\psi\|_E.
\end{aligned}$$

2. Comme pour $d_+^\delta(\cdot, A)$, pour tout $y \in D(A)$, on a

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} d_-^\delta(x, A)y = y.$$

Fixant un petit $\varepsilon > 0$. Alors pour $f_- \in \overline{D(A)}$, Il existe $y_f \in D(A)$ tel que $\|f_- - y_f\| \leq \varepsilon$. Avec

$$d_-^\delta(x, A)f_- - f_- = (d_-^\delta(x, A)f_- - d_-^\delta(x, A)y_f) + (d_-^\delta(x, A)y_f - y_f) + (y_f - f_-),$$

par l'assertion 1), pour tout $(f_- - y_f) \in E$, on a

$$\|d_-^\delta(x, A)f_- - d_-^\delta(x, A)y_f\|_E \leq C \|f_- - y_f\|_E \leq \varepsilon,$$

on déduit que

$$d_-^\delta(x, A)f_- - f_- \rightarrow 0.$$

La réciproque de 2) est clair, puisque pour tout $x \in]-1, 0]$,

$$d_-^\delta(x, A)f_- \in D(A),$$

alors

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} d_-^\delta(x, A)f_- = f_- \in \overline{D(A)}.$$

3. Maintenant, soient $f_- \in D_A(\alpha_0, +\infty)$ et $\xi, x \in [-1, 0]$ tel que $-1 \leq \xi < x \leq 0$, alors

$$\begin{aligned}
& \left\| d_-^\delta(x, A)f_- - d_-^\delta(\xi, A)f_- \right\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z(x, \delta) - \Delta_z(\xi, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- dz \right\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_\xi^x \frac{\partial_x \Delta_z(\tau, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- d\tau dz \right\|_E \\
&\leq C \int_\gamma \int_\xi^x \frac{|\partial_x \Delta_z(\tau, \delta)|}{|\Delta_z(-1, \delta)| |z|^{1+\alpha_0}} d\tau \|f_-\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} |dz| \\
&\leq C(1+p) \int_\gamma \int_\xi^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}\tau} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}}{|\Delta_z(-1, \delta)| |z|^{1/2+\alpha_0}} d\tau |dz| \|f_-\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
&\leq C(1+p) \int_\gamma \int_\xi^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1+\tau)}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} d\tau |dz| \|f_-\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
&\leq C(1+p) \int_\xi^x \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{(1+\tau)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1+\tau)}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(1+\tau)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{1/2+\alpha_0}} \right] d\tau \|f_-\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
&\leq C(1+p) \int_\xi^x \left[\frac{2(1+\tau)^{-1+2\alpha_0}}{\sin^{1-2\alpha_0}(\theta_0/2)} \int_1^\infty \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma^{2\alpha_0}} d\sigma \right] d\tau \|f_-\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
&\quad + C(1+p) \int_\xi^x \left[\frac{1}{(1+\tau)^{1-2\alpha_0}} - (r_0)^{1/2-\alpha_0} \right] d\tau \|f_-\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
&\leq C \int_\xi^x (1+\tau)^{-1+2\alpha_0} d\tau \|f_-\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
&\leq C \left[(1+x)^{2\alpha_0} - (1+\xi)^{2\alpha_0} \right] \|f_-\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
&\leq C(x-\xi)^{2\alpha_0} \|f_-\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)}
\end{aligned}$$

La réciproque, comme pour $d_+^\delta(x, A)$, en utilisant le calcul fonctionnel de Dunford, le terme $d_-^\delta(x, A)f_-$ peut être réécrit comme suit

$$\begin{aligned}
& d_-^\delta(x, A)f_- \\
&= T^{-1} \left[\left(I + e^{-2|x|\sqrt{-A}} \right) \left(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right) + p \left(I - e^{-2|x|\sqrt{-A}} \right) \left(I - e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right) \right] e^{-(1+x)\sqrt{-A}} f_-
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
T &= \left[\left(I + e^{-2\delta(-A)^{1/2}} \right) \left(I + e^{-2(-A)^{1/2}} \right) + p \left(I - e^{-2\delta(-A)^{1/2}} \right) \left(I - e^{-2(-A)^{1/2}} \right) \right] \\
&= \left(I + e^{-2\delta(-A)^{1/2}} \right) \left(I + e^{-2(-A)^{1/2}} \right) \times \\
&\quad \left[I + p \left(I - e^{-2\delta(-A)^{1/2}} \right) \left(I - e^{-2(-A)^{1/2}} \right) \left(I + e^{-2\delta(-A)^{1/2}} \right)^{-1} \left(I + e^{-2(-A)^{1/2}} \right)^{-1} \right],
\end{aligned}$$

grâce à Lunardi [23], p.59, les deux opérateurs

$$\left(I + e^{-2\delta(-A)^{1/2}} \right)^{-1} \quad \text{et} \quad \left(I + e^{-2(-A)^{1/2}} \right)^{-1}$$

sont bien définis. Pour le reste, on pose

$$\Pi = p \left(I - e^{-2\delta(-A)^{1/2}} \right) \left(I - e^{-2(-A)^{1/2}} \right) \left(I + e^{-2\delta(-A)^{1/2}} \right)^{-1} \left(I + e^{-2(-A)^{1/2}} \right)^{-1}.$$

En adaptant la technique utilisée par Lunardi, on obtient

$$(I + \Pi)^{-1} = I - \Psi$$

si et seulement si

$$(I + \Pi)(I - \Psi) = (I - \Psi)(I + \Pi) = I$$

si et seulement si

$$\begin{cases} \Pi\Psi = \Pi - \Psi \\ \Psi\Pi = \Pi - \Psi, \end{cases}$$

avec

$$\Psi = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z}}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} dz$$

et

$$\Pi = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z}}{\cosh \sqrt{-z} \delta \cosh \sqrt{-z}} (A - zI)^{-1} dz$$

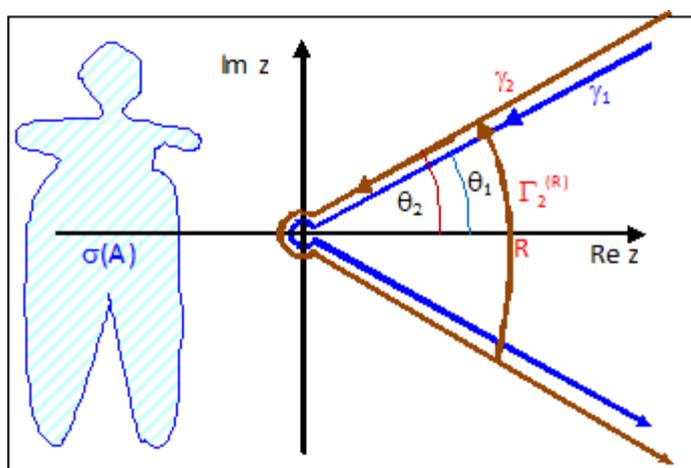
pour γ_1 et γ_2 voir la figure (3.3).

En faisant un découpage de γ_1 en

$$\begin{cases} \gamma_1^{(+)} = \{z \in \gamma_1 : |z| \geq R\} \\ \gamma_1^{(-)} = \{z \in \gamma_1 : |z| \leq R\}. \end{cases}$$

On considère

$$\begin{cases} \Gamma_1^{(R)} = \{z : |\arg(z)| \leq \theta_0 \text{ et } |z| = R\} \\ \gamma_1^{(R)} = \gamma_1^{(-)} \cup \Gamma_1^{(R)} \text{ est une courbe fermée.} \end{cases}$$



Alors

$$\begin{aligned} & \Pi\Psi \\ = & \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{p \sinh \sqrt{-\eta}\delta \sinh \sqrt{-\eta}}{\cosh \sqrt{-\eta}\delta \cosh \sqrt{-\eta}} \frac{p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - \eta I)^{-1} (A - zI)^{-1} d\eta dz. \end{aligned}$$

En utilisant l'identité suivante

$$\begin{aligned} (A - \eta I)^{-1} (A - zI)^{-1} &= \frac{(A - \eta) - (A - z)}{(z - \eta)} (A - \eta I)^{-1} (A - zI)^{-1} \\ &= \frac{1}{(z - \eta)} (A - zI)^{-1} - \frac{1}{(z - \eta)} (A - \eta I)^{-1}, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \Pi\Psi &= -\frac{1}{2i\pi} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{p \sinh \sqrt{-\eta}\delta \sinh \sqrt{-\eta}}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}}{\cosh \sqrt{-\eta}\delta \cosh \sqrt{-\eta}} \frac{(A - \eta I)^{-1}}{(z - \eta)} d\eta dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \int_{\gamma_2} \frac{p \sinh \sqrt{-\eta}\delta \sinh \sqrt{-\eta}}{\cosh \sqrt{-\eta}\delta \cosh \sqrt{-\eta}} \frac{p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{(A - zI)^{-1}}{(z - \eta)} d\eta dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}}{\Delta_z(-1, \delta)} \left[\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{p \sinh \sqrt{-\eta}\delta \sinh \sqrt{-\eta}}{\cosh \sqrt{-\eta}\delta \cosh \sqrt{-\eta}} \frac{(A - \eta I)^{-1}}{(\eta - z)} d\eta \right] dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{p \sinh \sqrt{-\eta}\delta \sinh \sqrt{-\eta}}{\cosh \sqrt{-\eta}\delta \cosh \sqrt{-\eta}} \left[\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{(A - zI)^{-1}}{(z - \eta)} dz \right] d\eta. \end{aligned}$$

On traite les termes entre crochets séparément, en effet

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{p \sinh \sqrt{-\eta}\delta \sinh \sqrt{-\eta}}{\cosh \sqrt{-\eta}\delta \cosh \sqrt{-\eta}} \frac{(A - \eta I)^{-1}}{(\eta - z)} d\eta \\ = & \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2^{(R)}} \frac{p \sinh \sqrt{-\eta}\delta \sinh \sqrt{-\eta}}{\cosh \sqrt{-\eta}\delta \cosh \sqrt{-\eta}} \frac{(A - \eta I)^{-1}}{(\eta - z)} d\eta \\ & - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_2^{(R)}} \frac{p \sinh \sqrt{-\eta}\delta \sinh \sqrt{-\eta}}{\cosh \sqrt{-\eta}\delta \cosh \sqrt{-\eta}} \frac{(A - \eta I)^{-1}}{(\eta - z)} d\eta \\ = & \frac{p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}}{\cosh \sqrt{-z}\delta \cosh \sqrt{-z}} (A - zI)^{-1} \\ & - \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_2^{(R)}} \frac{p \sinh \sqrt{-\eta}\delta \sinh \sqrt{-\eta}}{\cosh \sqrt{-\eta}\delta \cosh \sqrt{-\eta}} \frac{(A - \eta I)^{-1}}{(\eta - z)} d\eta. \end{aligned}$$

Ce dernier terme est nul grâce à la majoration suivante

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_2^{(R)}} \frac{p \sinh \sqrt{-\eta} \delta \sinh \sqrt{-\eta} (A - \eta I)^{-1}}{\cosh \sqrt{-\eta} \delta \cosh \sqrt{-\eta} (\eta - z)} d\eta \right\|_E \\
& \leq C \int_{\Gamma_2^{(R)}} \frac{p \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-\eta} \delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-\eta}}{|\cosh \sqrt{-\eta} \delta| |\cosh \sqrt{-\eta}|} \frac{|d\eta|}{|\eta - z| |\eta|} \\
& \leq C \int_{\Gamma_2^{(R)}} \frac{|d\eta|}{|\eta - z| |\eta|} \\
& \leq C \frac{2\theta_1}{R}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \int_{\gamma_1} \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z} (A - zI)^{-1}}{\Delta_z(-1, \delta) (z - \eta)} dz \\
& = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{\gamma_1^{(R)}} \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z} (A - zI)^{-1}}{\Delta_z(-1, \delta) (z - \eta)} dz \right] \\
& \quad - \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{\Gamma_1^{(R)}} \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z} (A - zI)^{-1}}{\Delta_z(-1, \delta) (z - \eta)} dz \right].
\end{aligned}$$

Le premier terme est nul par analyticité, car $\eta \in \gamma_2$ est extérieur de la courbe ferm e $\gamma_1^{(R)}$. Le second terme est nul aussi comme pour $\Gamma_2^{(R)}$.

Alors

$$\begin{aligned}
\Pi\Psi & = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{p \sinh \sqrt{-\eta} \delta \sinh \sqrt{-\eta}}{\cosh \sqrt{-\eta} \delta \cosh \sqrt{-\eta}} \frac{p \sinh \sqrt{-\eta} \delta \sinh \sqrt{-\eta}}{\Delta_\eta(-1, \delta)} (A - \eta I)^{-1} d\eta \\
& = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z}}{\cosh \sqrt{-z} \delta \cosh \sqrt{-z}} (A - zI)^{-1} dz \\
& \quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_2} \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z}}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} dz \\
& = \Pi - \Psi.
\end{aligned}$$

Avec les mêmes techniques, on obtient

$$\Psi\Pi = \Pi - \Psi.$$

Par Sinestrari [31], proposition 1.2, p. 20 et théorème 3.1, p. 39, on déduit que

$$d_-^\delta(x, A)f_- \rightarrow f_-, \text{ quand } x \rightarrow -1 \text{ si et seulement si } f_- \in \overline{D(-(-A)^{1/2})} = \overline{D(A)}$$

et

$$d_-^\delta(x, A)f_- \in C^{2\alpha_0}([-1, 0], E) \text{ alors } f_- \in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha_0, +\infty) = D_A(\alpha_0, +\infty).$$

■

Proposition 3.9 *Il existe une constante C ne dépendant que de γ telle que*

1. Pour tout $x \in [-1, 0]$ et $f_+^\delta \in E$, on a

$$\|n_-^\delta(x, A)f_+^\delta\|_E \leq C \|f_+^\delta\|_E,$$

et $n_-^\delta(\cdot, A)f_+^\delta \in C([-1, 0]; E)$.

2. Si $f_+^\delta \in D_A(1/2 + \alpha_0, +\infty)$, alors pour tout $x \in [-1, 0]$

$$\|n_-^\delta(x, A)f_+^\delta\|_{D(A)} \leq C \|f_+^\delta\|_{D_A(\frac{1}{2} + \alpha_0, +\infty)}.$$

3. Soit $f_+^\delta \in D((-A)^{1/2})$. Alors $An_-^\delta(x, A)f_+^\delta \in C([-1, 0]; E)$ si et seulement si

$$(-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}.$$

4. Soit $f_+^\delta \in D((-A)^{1/2})$. Alors $An_-^\delta(\cdot, A)f_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$ si et seulement si

$$(-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha_0, +\infty) = D_A(\alpha_0, +\infty).$$

Preuve. 1. En utilisant la proposition (1.5) et le lemme (1.7), on obtient

$$\begin{aligned} \|n_-^\delta(x, A)f_+^\delta\|_E &\leq C \int_\gamma \left| \frac{p s_z(x+1)}{c_z(\delta)} \right| \frac{1}{|z|^{3/2} |\Delta_z(-1, \delta)|} \|f_+^\delta\|_E |dz| \\ &\leq C \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{3/2} |\Delta_z(-1, \delta)|} \|f_+^\delta\|_E |dz| \\ &\leq C \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{3/2}} \|f_+^\delta\|_E |dz| \\ &\leq C \int_\gamma \frac{1}{|z|^{3/2}} \|f_+^\delta\|_E |dz| \\ &\leq C \|f_+^\delta\|_E. \end{aligned}$$

2. Soient $x \in [-1, 0]$ et $f_+^\delta \in D_A(1/2 + \alpha_0, +\infty)$. Alors

$$\begin{aligned} \|An_-^\delta(x, A)f_+^\delta\|_E &\leq Cp \int_\gamma \left| \frac{s_z(x+1)}{c_z(\delta)} \right| \frac{1}{|z|^{1+\alpha_0} |\Delta_z(-1, \delta)|} |dz| \|f_+^\delta\|_{D_A(\frac{1}{2} + \alpha_0, +\infty)} \\ &\leq Cp \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{1+\alpha_0} |\Delta_z(-1, \delta)|} |dz| \|f_+^\delta\|_{D_A(\frac{1}{2} + \alpha_0, +\infty)} \\ &\leq C \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{1+\alpha_0}} |dz| \|f_+^\delta\|_{D_A(\frac{1}{2} + \alpha_0, +\infty)} \\ &\leq C \int_\gamma \frac{1}{|z|^{1+\alpha_0}} |dz| \|f_+^\delta\|_{D_A(\frac{1}{2} + \alpha_0, +\infty)} \\ &\leq C \|f_+^\delta\|_{D_A(\frac{1}{2} + \alpha_0, +\infty)}. \end{aligned}$$

3. On remarque que, grâce aux propriétés d'inclusion, on a

$$D_A(1/2 + \alpha_0, +\infty) \subset D_A(1/2, 1) \subset D\left((-A)^{1/2}\right),$$

en déduit que $f_+^\delta \in D\left((-A)^{1/2}\right)$,

$$\begin{aligned} \|An_-^\delta(x, A)f_+^\delta\|_E &= \left| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{p \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} (-A)^{1/2} f_+^\delta dz \right| \\ &\leq C \int_\gamma \frac{p \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}{|z| |\Delta_z(-1, \delta)|} \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_E |dz| \\ &\leq C \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}}{|z| e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}} \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_E |dz| \\ &\leq C \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|} |dz| \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_E \\ &\leq C \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_E. \end{aligned}$$

4. Soient ξ, x tels que $-1 \leq \xi < x \leq 0$, on a

$$\begin{aligned} &\|An_-^\delta(x, A)f_+^\delta - An_-^\delta(\xi, A)f_+^\delta\|_E \\ &\leq C \int_\gamma \int_\xi^x \frac{p \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau+1)}{|z|^{1/2+\alpha_0} |\Delta_z(-1, \delta)|} d\tau |dz| \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\ &\leq C \int_\gamma \int_\xi^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-\tau)}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} d\tau |dz| \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\ &\leq C \int_\xi^x \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{(\delta-\tau)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-\tau)}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(\delta-\tau)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{1/2+\alpha_0}} \right] d\tau \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\ &\leq C \int_\xi^x (\delta-\tau)^{2\alpha_0-1} d\tau \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\ &\leq C [(\delta-\xi)^{2\alpha_0} - (\delta-x)^{2\alpha_0}] \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\ &\leq C (x-\xi)^{2\alpha_0} \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)}. \end{aligned}$$

Comme pour le terme précédent $d_-^\delta(x, A)$, on peut montrer par le calcul de Dunford que le terme $n_-^\delta(x, A)f_+^\delta$ peut être réécrit comme suit

$$n_-^\delta(x, A)f_+^\delta = T^{-1}p \left(I - e^{-2(x+1)\sqrt{-A}} \right) e^{-(\delta-x)\sqrt{-A}} (-A)^{-1/2} f_+^\delta,$$

avec

$$T = \left(I + e^{-2\sqrt{-A}} \right) \left(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right) + p \left(I - e^{-2\sqrt{-A}} \right) \left(I - e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right),$$

et T^{-1} est bien défini (voir la preuve de la proposition 3.8), pour tout $x \in [-1, 0]$ on a

$$An_-^\delta(x, A)f_+^\delta = T^{-1}p \left(I - e^{-2(x+1)\sqrt{-A}} \right) e^{-(\delta-x)\sqrt{-A}} (-A)^{1/2} f_+^\delta,$$

par Sinestrari [31], proposition 1.2, p. 20 et théorème 3.1, p. 39, on déduit que

$$An_-^\delta(\cdot, A)f_+^\delta \in C([-1, 0]; E) \text{ si et seulement si } (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(-(-A)^{1/2})} = \overline{D(A)}$$

et

$$An_-^\delta(\cdot, A)f_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$$

alors

$$(-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha_0, +\infty) = D_A(\alpha_0, +\infty).$$

■

3.3.1 Les conditions nécessaires et suffisantes

On se concentre sur les solutions strictes u_-^δ sur $[-1, 0]$ et u_+^δ sur $[0, \delta]$.

Proposition 3.10 Soient $g_- \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$ et $g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$ avec $0 < 2\alpha_0 < 1$. On suppose que

$$\begin{cases} u_-^\delta \in C^2([-1, 0]; E) \cap C([-1, 0]; D(A)) \\ u_+^\delta \in C^2([0, \delta]; E) \cap C([0, \delta]; D(A)), \end{cases}$$

alors on a nécessairement

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)}. \quad (3.14)$$

Preuve. Si pour tout $x \in [-1, \delta]$, $u(x) \in D(A)$, on a

$$u'(0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{u(\tau) - u(0)}{\tau} \in \overline{D(A)}$$

de même pour

$$u''(0) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{u(2\tau) - 2u(\tau) + u(0)}{\tau^2} \in \overline{D(A)},$$

donc, on déduit que

$$\begin{cases} (u_-^\delta)''(0) = g_-(0) - Au_-^\delta(0) \in \overline{D(A)} \\ (u_+^\delta)''(0) = g_+^\delta(0) - Au_+^\delta(0) \in \overline{D(A)}, \end{cases}$$

de plus

$$\begin{aligned} (u_-^\delta)''(0) &= g_-(0) - Au_-^\delta(0) = g_-(0) - Au_+^\delta(0) \\ &= g_-(0) - g_+^\delta(0) + (u_+^\delta)''(0), \end{aligned}$$

par conséquent

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)}.$$

■

D'abord, on commence par supposer que

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in D_A(\alpha_0, +\infty). \quad (3.15)$$

(Le cas $g_+^\delta(0) - g_-(0) = 0$ est inclus dans (3.15)). Alors on a

Théorème 3.3 Soient $g_- \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$ et $g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$ avec $0 < 2\alpha_0 < 1$. On suppose que

$$\begin{cases} f_- \in D(A) \\ f_+^\delta \in D(\sqrt{-A}), \end{cases}$$

alors

1. u_-^δ de la représentation (3.12) est la solution du problème (P_-^δ) sur $] -1, 0[$.
2. $u_-^\delta \in C([-1, 0]; D(A)) \cap C^2([-1, 0]; E)$ si et seulement si $Af_- - g_-(-1) \in \overline{D(A)}$, $g_+^\delta(0) - g_-(0) \in D_A(\alpha_0, +\infty)$ et $(-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}$.

Preuve. 1. et 2. Comme pour u_+^δ , grâce aux propositions 3.8, 3.9 et 3.6, il est facile de voir que

$$u_-^\delta \in C([-1, 0]; E)$$

Maintenant, pour tout $x \in [-1, 0]$, on a

$$\begin{aligned} Au_-^\delta(x) &= d_-^\delta(x, A)(Af_- - g_-(-1)) + An_-^\delta(x, A)f_+^\delta \\ &\quad + d_-^\delta(x, A)(g_-(-1) - g_-(x)) + Av_-^\delta(x, A, g_+^\delta) \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x, \tau) A(A - zI)^{-1} (g_-(\tau) - g_-(x)) d\tau dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} g_-(x) dz \\ &\quad + g_-(x). \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 3.8, on obtient une constante C indépendante de δ telle que, pour $Af_- - g_-(-1) \in \overline{D(A)}$ et $x \in [-1, 0]$, on a

$$\|d_-^\delta(x, A)(Af_- - g_-(-1))\|_E \leq C \|Af_- - g_-(-1)\|_E,$$

pour $g_-(-1) - g_-(x) \in E$ et $x \in [-1, 0]$, on a

$$\|d_-^\delta(x, A)[g_-(-1) - g_-(x)]\| \leq C \|g_-(-1) - g_-(x)\|_E$$

et par l'assertion 3) de la proposition 3.9, on a

$$An_-^\delta(x, A)f_+^\delta \in C([-1, 0]; E).$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} k(x) &= Av_-^\delta(x, A, g_+^\delta) \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x, \tau) A(A - zI)^{-1} (g_-(\tau) - g_-(x)) d\tau dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} g_-(x) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{\delta} \frac{p}{c_z^2(\delta)} \frac{c_z(\tau) s_z(x+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A-zI)^{-1} [g_+^{\delta}(\tau) - g_+^{\delta}(0)] d\tau dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-1}^0 K_{z,-}^{\delta}(x, \tau) A(A-zI)^{-1} (g_-(\tau) - g_-(x)) d\tau dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \sinh \sqrt{-z} (x+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} (g_-(x) - g_-(0)) dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{p}{c_z^2(\delta)} \frac{s_z(\delta) s_z(x+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A-zI)^{-1} (g_+^{\delta}(0) - g_-(0)) dz \\
&= \sum_{i=1}^4 I_i
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_0^{\delta} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - \tau) \tau^{2\alpha_0} d\tau \leq C \frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta}{|z|^{1/2+\alpha_0}}$$

et

$$\int_{-1}^0 |K_{z,-}^{\delta}(x, \tau)| |x - \tau|^{2\alpha_0} d\tau \leq \frac{C}{|z|^{1+\alpha_0}}.$$

Pour I_1

$$\begin{aligned}
&\|I_1\|_E \\
&\leq Cp \int_{\gamma} \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (x+1)}{|z|^{1/2} |\Delta_z(-1, \delta)|} \left[\int_0^{\delta} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - \tau) \tau^{2\alpha_0} d\tau \right] |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\
&\leq Cp \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} \sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta}{|\Delta_z(-1, \delta)| |z|^{1+\alpha_0}} |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\
&\leq \frac{Cp}{(C_{\theta_0})^2 \sin(\frac{\theta_0}{2})} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}|x|}}{|z|^{1+\alpha_0}} |dz| \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\
&\leq C \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)}
\end{aligned}$$

De même pour I_2

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-1}^0 K_{z,-}^{\delta}(x, \tau) A(A-zI)^{-1} (g_-(\tau) - g_-(x)) d\tau dz \right\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} \int_{-1}^0 |K_{z,-}^{\delta}(x, \tau)| |\tau - x|^{2\alpha_0} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)} \\
&\leq C \int_{\gamma} \frac{|dz|}{|z|^{1+\alpha_0}} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)} \\
&\leq C \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|I_3\| &\leq Cp \int_\gamma \left| \frac{s_z(\delta) s_z(x+1)}{c_z^2(\delta)} \right| \frac{1}{|z| |\Delta_z(-1, \delta)|} |x|^{2\alpha_0} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq Cp \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}}{|z| |\Delta_z(-1, \delta)|} |x|^{2\alpha_0} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq Cp |x|^{2\alpha_0} \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}|x|}}{|z|} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

On se concentre sur la dernière intégrale I_4 . On observe que cette intégrale est singulière quand

$$x \rightarrow 0^-$$

si le terme $g_+^\delta(0) - g_-(0)$ est juste dans E , puisque on voit que

$$\left| \frac{1}{c_z^2(\delta)} \frac{s_z(\delta) s_z(x+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} \right| = O\left(e^{-c|z|^{1/2}|x|}\right).$$

Mais

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in D_A(\alpha_0, +\infty)$$

alors

$$\begin{aligned}
\|I_4\| &\leq C \int_\gamma \frac{p}{|c_z^2(\delta)|} \frac{|s_z(\delta)| |s_z(x+1)|}{|z| |\Delta_z(-1, \delta)|} \|A(A - zI)^{-1} [g_+^\delta(0) - g_-(0)]\|_E |dz| \\
&\leq C \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re}\sqrt{-z}|x|}}{|z|^{1+\alpha_0}} |dz| \|g_+^\delta(0) - g_-(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
&\leq C \|g_+^\delta(0) - g_-(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)}
\end{aligned}$$

d'où la continuité sur l'intervalle fermé $[-1, 0]$.

Maintenant, pour prouver que

$$(u_-^\delta)''(\cdot) + Au_-(\cdot) = g_-(\cdot),$$

on utilise la même méthode que pour u_+^δ . ■

Ensuite, on suppose juste que

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)}.$$

On a le résultat optimal suivant.

Théorème 3.4 *On suppose que : $g_- \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$, $g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$ et $f_- \in D(A)$, $f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$ avec $0 < 2\alpha_0 < 1$. Alors*

1. u_-^δ de la représentation (3.12) est la solution du problème (P_-^δ) sur $] -1, 0[$.
2. $u_-^\delta \in C([-1, 0]; D(A)) \cap C^2([-1, 0]; E)$ si et seulement si $Af_- - g_-(-1) \in \overline{D(A)}$, $g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)}$ et $(-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}$.

Preuve. Si on tient compte de nos résultats précédents, il est suffisant de montrer que l'application

$$x \mapsto I_4(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} (g_+^{\delta}(0) - g_-(0)) dz$$

appartient à $C([-1, 0]; E)$ si et seulement si $g_+^{\delta}(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)}$. Ce résultat n'est pas évident et nécessite l'explication suivante.

Soient

$$\begin{cases} \xi^{\delta} = g_+^{\delta}(0) - g_-(0) \\ \Psi(x, z, \delta) = \frac{\sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}}, \end{cases}$$

pour $x \in [-1, 0]$, $z \in \gamma$ et $\delta \in]0, 1]$. On écrit

$$\begin{aligned} \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta \cosh \sqrt{-z}}{p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}} &= \frac{1}{p} \frac{(e^{\sqrt{-z}\delta} + e^{-\sqrt{-z}\delta})(e^{\sqrt{-z}} + e^{-\sqrt{-z}})}{(e^{\sqrt{-z}\delta} - e^{-\sqrt{-z}\delta})(e^{\sqrt{-z}} - e^{-\sqrt{-z}})} \\ &= \frac{1}{p} \frac{(1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta})(1 + e^{-2\sqrt{-z}})}{(1 - e^{-2\sqrt{-z}\delta})(1 - e^{-2\sqrt{-z}})} \\ &= \frac{1}{p} + \frac{2(e^{-2\sqrt{-z}\delta} + e^{-2\sqrt{-z}})}{p(1 - e^{-2\sqrt{-z}\delta})(1 - e^{-2\sqrt{-z}})} \\ &= \frac{1}{p} + \chi(z, \delta). \end{aligned}$$

Grâce au lemme technique 1.4, on a

$$\begin{aligned} \left| (1 - e^{-2\sqrt{-z}\delta})(1 - e^{-2\sqrt{-z}}) \right| &\geq \left| 1 - e^{-2\sqrt{-z}\delta} \right| \left| 1 - e^{-2\sqrt{-z}} \right| \\ &\geq \left(1 - e^{-\frac{\pi}{2 \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2})}} \right)^2 = C_{\theta_0}^2 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\left| (p+1)(1 - e^{-2\sqrt{-z}\delta})(1 - e^{-2\sqrt{-z}}) + 2(e^{-2\sqrt{-z}\delta} + e^{-2\sqrt{-z}}) \right| \quad (3.16) \\ &= \left| p(1 - e^{-2\sqrt{-z}\delta})(1 - e^{-2\sqrt{-z}}) + (1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta})(1 + e^{-2\sqrt{-z}}) \right| \\ &\geq (C_{\theta_0})^2 \sin(\theta_0/2), \end{aligned}$$

on déduit que

$$|\chi(z, \delta)| \leq \frac{2}{pC_{\theta_0}^2} \left(e^{-2\delta \sin(\theta_0/2)|z|^{1/2}} + e^{-2 \sin(\theta_0/2)|z|^{1/2}} \right), \quad (3.17)$$

pour tout $z \in \gamma$. Par conséquent, pour tout $x \in [-1, 0[$,

$$\begin{aligned}
I_4(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\cosh \sqrt{-z}\delta \cosh \sqrt{-z} + p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}} (A - zI)^{-1} \xi^\delta dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z} \left[1 + \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta \cosh \sqrt{-z}}{p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}} \right]} (A - zI)^{-1} \xi^\delta dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \Psi(x, z, \delta) \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{p} + \chi(z, \delta) \right]} (A - zI)^{-1} \xi^\delta dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \frac{p}{(p+1)} \int_\gamma \Psi(x, z, \delta) (1 - \tilde{\chi}(z, \delta)) (A - zI)^{-1} \xi^\delta dz,
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\tilde{\chi}(z, \delta) &= \frac{\chi(z, \delta)}{\frac{p+1}{p} + \chi(z, \delta)} \\
&= \frac{2 \left(e^{-2\sqrt{-z}\delta} + e^{-2\sqrt{-z}} \right)}{(p+1) \left(1 - e^{-2\sqrt{-z}\delta} \right) \left(1 - e^{-2\sqrt{-z}} \right) + 2 \left(e^{-2\sqrt{-z}\delta} + e^{-2\sqrt{-z}} \right)}.
\end{aligned}$$

En utilisant (3.17) et (3.16), on obtient

$$|\tilde{\chi}(z, \delta)| \leq \frac{2}{(C_{\theta_0})^2 \sin(\theta_0/2)} \left(e^{-2\delta \sin(\theta_0/2)|z|^{1/2}} + e^{-2 \sin(\theta_0/2)|z|^{1/2}} \right),$$

donc

$$\begin{aligned}
I_4(x) &= \frac{p}{(p+1)} \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \Psi(x, z, \delta) (A - zI)^{-1} \xi^\delta dz \\
&\quad - \frac{p}{(p+1)} \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \Psi(x, z, \delta) \tilde{\chi}(z, \delta) (A - zI)^{-1} \xi^\delta dz \\
&= \frac{p}{(p+1)} (J(x) - K(x)).
\end{aligned}$$

Ainsi on a

$$x \mapsto J(x) \in C([-1, 0]; E) \text{ si et seulement si } \xi^\delta \in \overline{D(A)},$$

En effet, on peut écrire que

$$\begin{aligned}
J(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \Psi(x, z, \delta) (A - zI)^{-1} \xi^\delta dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} \Psi(x, z, \delta) (A - zI)^{-1} \xi^\delta dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_+} \Psi(x, z, \delta) (A - zI)^{-1} \xi^\delta dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_-} (\Psi(x, z, \delta) - \Psi(0, z, \delta)) (A - zI)^{-1} \xi^\delta dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_- \cup \Gamma} (A - zI)^{-1} \psi dz - \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma (A - zI)^{-1} \xi^\delta dz,
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} \gamma_+ = \{z \in \gamma : |z| \geq 1/x^2\} \\ \gamma_- = \{z \in \gamma : |z| \leq 1/x^2\} \end{cases}$$

et

$$\Gamma = \{z : |\arg(z)| \leq \theta_0 \text{ et } |z| = 1/x^2\},$$

orienté positivement (voir figure 3.2). En procédant comme pour la preuve de la proposition 3.2, on obtient l'existence d'une constante $C > 0$ indépendante de δ , telle que

$$\forall x \in [-1, 0[: \|J(x)\| \leq C \|\xi^\delta\|_E.$$

Ce dernier résultat nous permet de conclure que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} J(x) = g_+^\delta(0) - g_-(0) \text{ si et seulement si } g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)}.$$

D'autre part $K(x)$ est bien défini dans E puisqu'on a

$$\begin{aligned} |\Psi(x, z, \delta)| &\leq \frac{\left(1 + e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta}\right) \left(1 + e^{-2\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x+1)}\right)}{|1 - e^{-2\sqrt{-z}\delta}| |1 - e^{-2\sqrt{-z}}|} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}x} \\ &\leq \frac{1}{(C_{\theta_0})^2} e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}x} \leq \frac{1}{(C_{\theta_0})^2}, \end{aligned}$$

pour tout $x \in [-1, 0]$.

Ainsi

$$\begin{aligned} \|K(x)\|_E &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \Psi(x, z, \delta) \tilde{\chi}(z, \delta) (A - zI)^{-1} \xi^\delta dz \right\|_E \\ &\leq C \int_\gamma |\Psi(x, z, \delta)| |\tilde{\chi}(z, \delta)| |dz| \|\xi^\delta\|_E \\ &\leq \frac{2C}{(C_{\theta_0})^4 \sin(\theta_0/2)} \int_\gamma \frac{\left(e^{-2\delta \sin(\theta_0/2)|z|^{1/2}} + e^{-2 \sin(\theta_0/2)|z|^{1/2}}\right)}{|z|} |dz| \|\xi^\delta\|_E \\ &\leq \frac{2C}{(C_{\theta_0})^4 \sin(\theta_0/2)} \int_\gamma \frac{e^{-2\delta \sin(\theta_0/2)|z|^{1/2}} \left(1 + e^{-2(1-\delta) \sin(\theta_0/2)|z|^{1/2}}\right)}{|z|} |dz| \|\xi^\delta\|_E \\ &\leq \frac{2C}{(C_{\theta_0})^4 \sin(\theta_0/2)} \int_\gamma \frac{e^{-2\delta \sin(\theta_0/2)|z|^{1/2}}}{|z|} |dz| \|\xi^\delta\|_E \leq K \|\xi^\delta\|_E \end{aligned}$$

on déduit la convergence absolue.

Il est très important de savoir exactement la valeur de $I_4(0)$ quand on a cette condition de compatibilité

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)}.$$

On a

$$J(0) = g_+^\delta(0) - g_-(0),$$

on doit calculer

$$\begin{aligned} K(0) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \Psi(0, z, \delta) \tilde{\chi}(z, \delta) (A - zI)^{-1} \xi^\delta dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{2 \left(e^{-2\sqrt{-z}\delta} + e^{-2\sqrt{-z}} \right)}{p \left(1 - e^{-2\sqrt{-z}\delta} \right) \left(1 - e^{-2\sqrt{-z}} \right) + \left(1 + e^{-2\sqrt{-z}\delta} \right) \left(1 + e^{-2\sqrt{-z}} \right)} (A - zI)^{-1} \xi^\delta dz. \end{aligned}$$

En utilisant le calcul fonctionnel de Dunford pour réécrire $K(0)$

$$\begin{aligned} K(0) &= 2T^{-1} \left(I + e^{-2\sqrt{-A}(1-\delta)} \right) e^{-2\delta\sqrt{-A}} \xi^\delta \\ &= 2T^{-1} \left(I + e^{-2(-A)^{1/2}(1-\delta)} \right) e^{-2\delta(-A)^{1/2}} \left(g_+^\delta(0) - g_-(0) \right) \end{aligned}$$

avec

$$T^{-1} = \left[\left(I + e^{-2\delta(-A)^{1/2}} \right) \left(I + e^{-2(-A)^{1/2}} \right) + p \left(I - e^{-2\delta(-A)^{1/2}} \right) \left(I - e^{-2(-A)^{1/2}} \right) \right]^{-1}$$

qui est bien défini (la preuve de la proposition 3.8).

Par conséquent

$$I_4(0) = \frac{p}{(p+1)} \left[1 - 2T^{-1} \left(I + e^{-2(-A)^{1/2}(1-\delta)} \right) e^{-2\delta(-A)^{1/2}} \right] \left(g_+^\delta(0) - g_-(0) \right).$$

■

3.3.2 Régularité maximale

Pour la régularité maximale, on a le théorème suivant.

Théorème 3.5

Soient $g_- \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$ et $g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$ avec $0 < 2\alpha_0 < 1$, $f_- \in D(A)$ et $f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $Af_- - g_-(-1)$, $g_-(0) - g_+^\delta(0)$ et $(-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_A(\alpha_0, +\infty)$,
2. $u_-^\delta \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; D(A))$,
3. $(u_-^\delta)'' \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$,
4. $(u_-^\delta)'' \in B(D_A(\alpha_0, +\infty))$.

Preuve.

1) Déjà vu au théorème 3.4.

2) et 3) Du théorème 3.3, en déduit que

$$u_-^\delta \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E),$$

car $C^2([-1, 0]; E) \subset C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$ et $D_A(\alpha_0, +\infty) \subset \overline{D(A)}$.

On rappelle que, pour $x \in [-1, 0]$

$$\begin{aligned} Au_-^\delta(x) &= d_-^\delta(x, A) (Af_- - g_-(-1)) + Aw_-^\delta(x, A, g_-) + d_-^\delta(x, A) g_-(-1) \\ &\quad + An_-^\delta(x, A) f_+^\delta + Av_-^\delta(x, A, g_+^\delta), \end{aligned}$$

grâce aux propositions 3.8 et 3.9, on a

$$d_-^\delta(\cdot, A)(Af_- - g_-(-1)) \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E),$$

$$An_-^\delta(\cdot, A)f_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E).$$

Pour tous ξ, x tels que $0 \leq \xi < x \leq \delta$,

$$\begin{aligned} & Av_-^\delta(x, A, g_+^\delta) - Av_-^\delta(\xi, A, g_+^\delta) \\ = & -\frac{p}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \int_\xi^x \frac{\cosh \sqrt{-z}(\tau+1)}{\Delta_z(-1, \delta)} \cosh \sqrt{-z}(\delta - \nu) A(A - zI)^{-1} [g_+^\delta(\nu) - g_+^\delta(0)] d\tau d\nu dz \\ & -\frac{p}{2i\pi} \int_\gamma \int_\xi^x \frac{\cosh \sqrt{-z}(\tau+1) \sinh \sqrt{-z}\delta}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} A(A - zI)^{-1} g_+^\delta(0) dz \\ = & (a'') + (b''). \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} & Aw_-^\delta(x, A, g_-) + d_-^\delta(x, A)g_-(-1) - Aw_-^\delta(\xi, A, g_-) + d_-^\delta(\xi, A)g_-(-1) \\ = & -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^\xi \frac{\Delta_z(x, \delta) - \Delta_z(\xi, \delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} \sinh \sqrt{-z}(\tau+1) A(A - zI)^{-1} [g_-(\tau) - g_-(\xi)] d\tau dz \\ & -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_\xi^x \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} \sinh \sqrt{-z}(\tau+1) A(A - zI)^{-1} [g_-(\tau) - g_-(x)] d\tau dz \\ & -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_x^0 \int_\xi^x \frac{\Delta_z(\tau, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \cosh \sqrt{-z}(\nu+1) A(A - zI)^{-1} [g_-(\tau) - g_-(x)] d\nu d\tau dz \\ & +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_\xi^x \frac{\Delta_z(\tau, \delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} \sinh \sqrt{-z}(\xi+1) A(A - zI)^{-1} [g_-(\tau) - g_-(\xi)] d\tau dz \\ & +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z(x, \delta) - \Delta_z(\xi, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} [g_-(-1) - g_-(\xi)] dz \\ & +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_x^0 \frac{\Delta_z(\tau, \delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} \sinh \sqrt{-z}(\xi+1) A(A - zI)^{-1} [g_-(x) - g_-(\xi)] d\tau dz \\ & -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z(x, \delta)}{z\Delta_z(-1, \delta)} \cosh \sqrt{-z}(\xi+1) A(A - zI)^{-1} [g_-(x) - g_-(\xi)] dz \\ & -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{p \sinh \sqrt{-z}\delta \sinh \sqrt{-z}(\xi+1)}{z\Delta_z(-1, \delta)} A(A - zI)^{-1} [g_-(x) - g_-(\xi)] dz \\ & +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_\xi^x \frac{p \sinh \sqrt{-z}\delta \cosh \sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} A(A - zI)^{-1} [g_-(x) - g_-(0)] dz \\ & +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_\xi^x \frac{p \sinh \sqrt{-z}\delta \cosh \sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} A(A - zI)^{-1} g_-(0) dz \\ & +g_-(x) - g_-(\xi) \\ = & \sum_{i=1}^{10} I'_i + g_-(x) - g_-(\xi). \end{aligned}$$

On commence par $(b'') + I'_{10}$: on a

$$\begin{aligned}
& \|(b'') + I'_{10}\|_E \\
&= \left\| \frac{p}{2i\pi} \int_\gamma \int_\xi^x \frac{\cosh \sqrt{-z}(\tau+1) \sinh \sqrt{-z}\delta}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} A(A-zI)^{-1} [g_-(0) - g_+^\delta(0)] dz \right\|_E \\
&\leq Cp \int_\gamma \int_\xi^x \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau+1) \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}{|z|^{1/2+\alpha_0} |\Delta_z(-1, \delta)|} \|g_-(0) - g_+^\delta(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} |dz| \\
&\leq Cp \int_\gamma \int_\xi^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\tau}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} d\tau |dz| \|g_-(0) - g_+^\delta(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
&\leq C \int_\xi^x \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{\tau^2}} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\tau}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{\tau^2}} \frac{|dz|}{|z|^{1/2+\alpha_0}} \right] d\tau \|g_-(0) - g_+^\delta(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
&\leq C \int_\xi^x \frac{1}{\tau^{1-2\alpha_0}} d\tau \|g_-(0) - g_+^\delta(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \leq C(x-\xi)^{2\alpha_0} \|g_-(0) - g_+^\delta(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)}.
\end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
& \|(a'')\|_E \\
&\leq Cp \int_\gamma \int_\xi^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau+1)}}{|\Delta_z(-1, \delta)|} \left(\int_0^\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-\nu) \nu^{2\alpha_0} d\nu \right) d\tau |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\
&\leq Cp \int_\gamma \int_\xi^x e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau-\delta)} \left(\frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}{|z|^{1/2+\alpha_0}} \right) \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} d\tau |dz| \\
&\leq Cp \int_\xi^x \left(\int_{|z| \geq \frac{1}{\tau^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}|\tau|}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{\tau^2}} \frac{|dz|}{|z|^{1/2+\alpha_0}} \right) d\tau \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\
&\leq Cp \int_\xi^x \tau^{2\alpha_0-1} d\tau \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \leq C(x-\xi)^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)}.
\end{aligned}$$

Par le lemme 1.6, on a

$$\begin{aligned}
& \|I'_1\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^\xi \int_\xi^x \frac{\partial_\nu \Delta_z(\nu, \delta) \sinh \sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} A(A-zI)^{-1} [g_-(\tau) - g_-(\xi)] d\nu d\tau dz \right\|_E \\
&\leq C \int_\gamma \int_\xi^x \frac{|\partial_\nu \Delta_z(\nu, \delta)|}{|z|^{1/2} |\Delta_z(-1, \delta)|} \left(\int_{-1}^\xi \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau+1) (\tau-\xi)^{2\alpha_0} d\tau \right) d\nu |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)} \\
&\leq C(p+1) \int_\gamma \int_\xi^x e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1+\nu)} \left(\frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\xi+1)}{(\operatorname{Re} \sqrt{-z})^{1+2\alpha_0}} \right) d\nu |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\nu-\xi)}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} d\nu |dz| \|g_{-}\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C \int_{\xi}^x \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{(\nu-\xi)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\nu-\xi)}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(\nu-\xi)^2}} \frac{1}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| \right] d\nu \|g_{-}\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C \int_{\xi}^x \left[\int_1^{\infty} \frac{e^{-\sigma \cos(\pi/2-\theta_0/2)}}{\sigma^{2\alpha_0} (\nu-\xi)^{1-2\alpha_0}} d\sigma + \left(\frac{1}{(\nu-\xi)^{1-2\alpha_0}} - r_0^{1/2-\alpha_0} \right) \right] d\nu \|g_{-}\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C \int_{\xi}^x (\nu-\xi)^{2\alpha_0-1} d\nu \|g_{-}\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C (x-\xi)^{2\alpha_0} \|g_{-}\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}.
\end{aligned}$$

De la même manière, on obtient

$$\|I'_2\| \leq C (x-\xi)^{2\alpha_0} \|g_{-}\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}.$$

Pour I'_3 , on a

$$\begin{aligned}
&\|I'_3\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_x^0 \int_{\xi}^x \frac{\Delta_z(\tau, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \cosh \sqrt{-z}(\nu+1) A(A-zI)^{-1} [g_{-}(\tau) - g_{-}(x)] d\nu d\tau dz \right\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} \int_x^0 \int_{\xi}^x \frac{|\Delta_z(\tau, \delta)|}{|\Delta_z(-1, \delta)|} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\nu+1) (\tau-x)^{2\alpha_0} d\nu d\tau |dz| \|g_{-}\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C(1+p) \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\nu+1)} \int_x^0 \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\tau (\tau-x)^{2\alpha_0} d\tau}{|\Delta_z(-1, \delta)|} d\nu |dz| \|g_{-}\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C(1+p) \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\nu+1)} \sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}x}{|\Delta_z(-1, \delta)| |z|^{1/2+\alpha_0}} d\nu |dz| \|g_{-}\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C(1+p) \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\nu+1)} e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|\Delta_z(-1, \delta)| |z|^{1/2+\alpha_0}} d\nu |dz| \|g_{-}\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C(1+p) \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\nu)}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} d\nu dz \|g_{-}\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C(1+p) \int_{\xi}^x \left[\int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\nu)}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| \right] d\nu \|g_{-}\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C \int_{\xi}^x \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{(x-\nu)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\nu)}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(x-\nu)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{1/2+\alpha_0}} \right] d\nu \|g_{-}\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C \int_{\xi}^x \left[\frac{(x-\nu)^{2\alpha_0-1}}{\sin^{1-2\alpha_0}(\theta_0/2)} \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)}}{\sigma^{2\alpha_0}} 2d\sigma + (x-\nu)^{2\alpha_0-1} - r_0^{1/2-\alpha_0} \right] d\nu \|g_{-}\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C \int_{\xi}^x \frac{1}{(x-\nu)^{1-2\alpha_0}} d\nu \|g_{-}\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \leq C (x-\xi)^{2\alpha_0} \|g_{-}\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}.
\end{aligned}$$

Le même raisonnement donne l'höderianité de I'_4

$$\begin{aligned}
\|I'_5\| &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z(x, \delta) - \Delta_z(\xi, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} [g_-(-1) - g_-(\xi)] dz \right\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_\xi^x \frac{\partial_x \Delta_z(\tau, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} [g_-(-1) - g_-(\xi)] d\tau dz \right\|_E \\
&\leq C \int_\gamma \int_\xi^x \frac{|\partial_x \Delta_z(\tau, \delta)|}{|z| |\Delta_z(-1, \delta)|} (\xi + 1)^{2\alpha_0} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)} \\
&\leq C(p + 1) \int_\gamma \int_\xi^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau+1)}}{|z|^{1/2}} (\tau + 1)^{2\alpha_0} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)} \\
&\leq C \int_\xi^x \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{(\tau+1)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau+1)}}{|z|^{1/2}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(\tau+1)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{1/2}} \right] (\tau + 1)^{2\alpha_0} d\tau \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)} \\
&\leq C \int_\xi^x \left[\frac{2(\tau + 1)^{-1}}{\sin(\theta_0/2)} \int_1^\infty e^{-\sigma \sin(\theta_0/2)} d\sigma + \frac{1}{(\tau + 1) - \sqrt{r_0}} \right] (\tau + 1)^{2\alpha_0} d\tau \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)} \\
&\leq C \int_\xi^x (\tau + 1)^{2\alpha_0 - 1} d\tau \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)} \\
&\leq C [(x + 1)^{2\alpha_0} - (\xi + 1)^{2\alpha_0}] \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)} \\
&\leq C(x - \xi)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)}
\end{aligned}$$

Pour I'_6

$$\begin{aligned}
\|I'_6\| &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_x^0 \frac{\Delta_z(\tau, \delta)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} \sinh \sqrt{-z} (\xi + 1) A(A - zI)^{-1} [g_-(x) - g_-(\xi)] d\tau dz \right\|_E \\
&\leq C \int_\gamma \int_x^0 \frac{|\Delta_z(\tau, \delta)|}{|z|^{1/2} |\Delta_z(-1, \delta)|} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\xi + 1) (x - \xi)^{2\alpha_0} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)} \\
&\leq C \int_\gamma \int_x^0 \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau-\xi)}}{|z|^{1/2}} (x - \xi)^{2\alpha_0} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)} \\
&\leq C \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}|x-\xi|} - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}|\xi|}}{|z|} (x - \xi)^{2\alpha_0} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)} \\
&\leq C(x - \xi)^{2\alpha_0} \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}|x-\xi|}}{|z|} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)} \\
&\leq C(x - \xi)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)},
\end{aligned}$$

On obtient les mêmes estimations pour I'_7 et I'_8 .

$$\begin{aligned}
\|I'_7\| &\leq C \int_\gamma \frac{|\Delta_z(x, \delta)|}{|z| |\Delta_z(-1, \delta)|} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\xi + 1) (x - \xi)^{2\alpha_0} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)} \\
&\leq C(1 + p) (x - \xi)^{2\alpha_0} \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}|x-\xi|}}{|z|} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)} \\
&\leq C(x - \xi)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|I'_8\| &\leq Cp \int_{\gamma} \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\xi + 1)}{|z| |\Delta_z(-1, \delta)|} (x - \xi)^{2\alpha_0} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq Cp (x - \xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} |\xi|}}{|z|} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C (x - \xi)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}.
\end{aligned}$$

pour I'_9

$$\begin{aligned}
\|I'_9\| &= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{p \sinh \sqrt{-z} \delta \cosh \sqrt{-z} (\tau + 1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} A(A - zI)^{-1} [g_-(x) - g_-(0)] d\tau dz \right\|_E \\
&\leq Cp \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau + 1)}{|z|^{1/2} |\Delta_z(-1, \delta)|} |x|^{2\alpha_0} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq Cp \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} |\tau|}}{|z|^{1/2}} |x|^{2\alpha_0} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C \int_{\xi}^x \left[\int_{|z| \geq \frac{1}{\tau^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} |\tau|}}{|z|^{1/2}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{\tau^2}} \frac{|dz|}{|z|^{1/2}} \right] |\tau|^{2\alpha_0} d\tau \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C \int_{\xi}^x |\tau|^{2\alpha_0-1} d\tau \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C (x^{2\alpha_0} - \xi^{2\alpha_0}) \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C (x - \xi)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

La réciproque : on peut alors montrer par le calcul fonctionnel de Dunford que $u_-^{\delta}(x)$ peut être réécrit comme suit

$$\begin{aligned}
u_-^{\delta}(x) &= T^{-1} T_x e^{-(1+x)\sqrt{-A}} f_- \\
&\quad - \frac{1}{2} T^{-1} T_x \int_{-1}^x \left(I - e^{-2\sqrt{-A}(\tau+1)} \right) e^{-(x-\tau)\sqrt{-A}} (-A)^{-1/2} g_-(\tau) d\tau \\
&\quad - \frac{1}{2} T^{-1} \left[I - e^{-2(x+1)\sqrt{-A}} \right] \int_x^0 T_{\tau} e^{-(\tau-x)\sqrt{-A}} (-A)^{-1/2} g_-(\tau) d\tau \\
&\quad + p T^{-1} \left[I - e^{-2(x+1)\sqrt{-A}} \right] e^{-(\delta-x)\sqrt{-A}} (-A)^{-1/2} f_+^{\delta} \\
&\quad - p T^{-1} \left[1 - e^{-2(x+1)\sqrt{-A}} \right] \int_0^{\delta} e^{-(\tau-x)\sqrt{-A}} \left(1 + e^{-2(\delta-\tau)\sqrt{-A}} \right) (-A)^{-1/2} g_+^{\delta}(\tau) d\tau,
\end{aligned}$$

avec

$$T_x = \left(I + e^{-2|x|\sqrt{-A}} \right) \left(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right) + p \left(I - e^{-2|x|\sqrt{-A}} \right) \left(I - e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right)$$

et

$$T = \left(I + e^{-2\sqrt{-A}} \right) \left(I + e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right) + p \left(I - e^{-2\sqrt{-A}} \right) \left(I - e^{-2\delta\sqrt{-A}} \right),$$

comme pour la preuve de la proposition 3.8, l'opérateur

$$T^{-1} = \left[\left(I + e^{-2\delta(-A)^{1/2}} \right) \left(I + e^{-2(-A)^{1/2}} \right) + p \left(I - e^{-2\delta(-A)^{1/2}} \right) \left(I - e^{-2(-A)^{1/2}} \right) \right]^{-1}$$

est bien défini. En utilisant encore Sinestrari [31], proposition 1.2, p. 20 et théorème 3.1, p. 39, on déduit que

$$u_-^\delta(\cdot) \in C([-1, 0]; E) \text{ si et seulement si } \begin{cases} A\psi - g_+^\delta(0) \in \overline{D(A)} \\ (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)} \\ g_-(0) - g_+^\delta(0) \in \overline{D(A)}, \end{cases}$$

et

$$u_-^\delta(\cdot) \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} (-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_{\sqrt{-A}}(2\alpha_0, +\infty) = D_A(\alpha_0, +\infty) \\ Af_- - g_-(-1) \in D_A(\alpha_0, +\infty) \\ g_-(0) - g_+^\delta(0) \in D_A(\alpha_0, +\infty). \end{cases}$$

4. On montre que

$$\sup_{\lambda > 0} \left\| \lambda^{\alpha_0} A (A - \lambda I)^{-1} (Au_-(x) - g_-(x)) \right\|_E \leq C$$

où C indépendante de x .

On a

$$\begin{aligned} & \lambda^{\alpha_0} A (A - \lambda I)^{-1} [Au_-^\delta(x) - g_-(x)] \\ &= \lambda^{\alpha_0} A (A - \lambda I)^{-1} d_-^\delta(x, A) (Af_- - g_-(-1)) \\ & \quad + \lambda^{\alpha_0} A (A - \lambda I)^{-1} Aw_-^\delta(x, A, g_-) \\ & \quad + \lambda^{\alpha_0} A (A - \lambda I)^{-1} d_-^\delta(x, A) g_-(-1) \\ & \quad + \lambda^{\alpha_0} A (A - \lambda I)^{-1} An_-^\delta(x, A) f_+^\delta \\ & \quad + \lambda^{\alpha_0} A (A - \lambda I)^{-1} Av_-^\delta(x, A, g_+^\delta) \\ & \quad - \lambda^{\alpha_0} A (A - \lambda I)^{-1} g_-(x) \\ &= (a') + (b') + (c') + (d') + (e') + (f'), \end{aligned}$$

comme au théorème 3.2, l'identité (3.7) reste vraie

$$A(A - \lambda)^{-1} A(A - z)^{-1} = \frac{z}{z - \lambda} A(A - z)^{-1} - \frac{\lambda}{z - \lambda} A(A - \lambda)^{-1}$$

pour tout $\lambda, z \in \rho(A)$ et les termes sans la résolvante disparaissent par l'intégration à gauche de γ .

Par le lemme 1.9, on a

$$\begin{aligned} \|(a')\|_E &= \left\| \frac{\lambda^{\alpha_0}}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{z}{z - \lambda} (A - z)^{-1} (Af_- - g_-(-1)) dz \right\|_E \\ &\leq C \lambda^\alpha \int_\gamma \frac{|\Delta_z(x, \delta)|}{|\Delta_z(-1, \delta)|} \frac{A(A - z)^{-1}}{|z - \lambda|} (Af_- - g_-(-1)) dz \\ &\leq \frac{4C(p+1)\lambda^\alpha}{(C_{\theta_0})^2 \sin(\frac{\theta_0}{2})} \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}}{|z - \lambda| |z|^\alpha} |dz| \|Af_- - g_-(-1)\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ &\leq C \lambda^\alpha \int_\gamma \frac{1}{|z - \lambda| |z|^\alpha} |dz| \|Af_- - g_-(-1)\|_{D_A(\alpha, +\infty)} \\ &\leq C \|Af_- - g_-(-1)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)}. \end{aligned}$$

De la même manière. on obtient

$$\|(d')\| \leq C \left\| (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)}.$$

Le terme (e') peut être réécrit

$$\begin{aligned} (e') &= -\frac{\lambda^{\alpha_0}}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \frac{p z c_z(\tau) s_z(x+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta) c_z^2(\delta)} \frac{A(A-zI)^{-1}}{z-\lambda} [g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(0)] d\tau dz \\ &\quad - \frac{\lambda^{\alpha_0}}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \frac{p c_z(\tau) s_z(x+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta) c_z^2(\delta)} \frac{zA(A-zI)^{-1}}{z-\lambda} g_+^\delta(0) dz \\ &= (e')_1 + (e')_2, \end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} &\|(e')_1\|_E \\ &= \left\| \frac{\lambda^{\alpha_0}}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \frac{p z c_z(\tau) s_z(x+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta) c_z^2(\delta)} \frac{A(A-zI)^{-1}}{z-\lambda} [g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(0)] d\tau dz \right\|_E \\ &\leq Cp\lambda^{\alpha_0} \int_\gamma \int_0^\delta \frac{|z|^{1/2}}{|\Delta_z(-1, \delta)|} \left| \frac{c_z(\tau) s_z(x+1)}{c_z^2(\delta)} \right| \frac{|\tau|^{2\alpha_0}}{|z-\lambda|} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} d\tau |dz| \\ &\leq Cp\lambda^{\alpha_0} \int_\gamma \frac{|z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}}{|\Delta_z(-1, \delta)| |z-\lambda|} \left[\int_0^\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - \tau) |\tau|^{2\alpha_0} d\tau \right] \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} |dz| \\ &\leq Cp\lambda^{\alpha_0} \int_\gamma \frac{|z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}}{|\Delta_z(-1, \delta)| |z-\lambda|} \frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta}{|z|^{1/2+\alpha_0}} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} |dz| \\ &\leq \frac{4Cp\lambda^{\alpha_0}}{(C_{\theta_0})^2 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} |dz|}{|z-\lambda| |z|^{\alpha_0}} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\ &\leq C\lambda^{\alpha_0} \int_\gamma \frac{|dz|}{|z-\lambda| |z|^{\alpha_0}} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\ &\leq C \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \end{aligned}$$

Le reste peut être réécrit

$$\begin{aligned} &(b') + (c') + (e')_2 + (f') \\ &= \frac{\lambda^{\alpha_0}}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x, \tau) \frac{zA(A-zI)^{-1}}{z-\lambda} [g_-(\tau) - g_-(x)] d\tau dz \\ &\quad + \frac{\lambda^{\alpha_0}}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{A(A-zI)^{-1}}{z-\lambda} [g_-(-1) - g_-(x)] dz \\ &\quad - \frac{\lambda^{\alpha_0}}{2i\pi} \int_\gamma \frac{p s_z(\delta)}{\Delta_z(-1, \delta) c_z^2(\delta)} \frac{s_z(x+1)}{z-\lambda} \frac{A(A-zI)^{-1}}{z-\lambda} [g_-(x) - g_-(0)] dz \\ &\quad - \frac{\lambda^{\alpha_0}}{2i\pi} \int_\gamma \frac{p s_z(\delta)}{\Delta_z(-1, \delta) c_z^2(\delta)} \frac{s_z(x+1)}{z-\lambda} \frac{A(A-zI)^{-1}}{z-\lambda} [g_-(0) - g_+^\delta(0)] dz. \\ &= \sum_{i=1}^4 J_i \end{aligned}$$

Pour le premier terme, on utilise l'estimation suivante

$$\int_{-1}^0 |K_{\sqrt{-z}}(x, \tau)| |\tau - x|^{2\alpha_0} d\tau \leq \frac{C}{|z|^{1+\alpha_0}},$$

(voir [6], page 376), alors

$$\begin{aligned} \|J_1\|_E &= \left\| \frac{\lambda^{\alpha_0}}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x, \tau) \frac{zA(A-zI)^{-1}}{z-\lambda} [g_-(\tau) - g_-(x)] d\tau dz \right\|_E \\ &\leq C\lambda^{\alpha_0} \int_\gamma \frac{|z|}{|z-\lambda|} \left[\int_{-1}^0 |K_{z,-}^\delta(x, \tau)| (\tau-x)^{2\alpha_0} d\tau \right] dz \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\ &\leq C\lambda^{\alpha_0} \int_\gamma \frac{1}{|z-\lambda||z|^{\alpha_0}} dz \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \leq C \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}. \end{aligned}$$

Pour J_2 , on a

$$\begin{aligned} \|J_2\|_E &\leq C\lambda^{\alpha_0} \int_\gamma \frac{|\Delta_z(x, \delta)|}{|\Delta_z(-1, \delta)|} \frac{(x+1)^{2\alpha_0}}{|z-\lambda|} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\ &\leq C\lambda^{\alpha_0} \int_\gamma \left| \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \right| \frac{(x+1)^{2\alpha_0}}{|z-\lambda|^{1-\alpha_0} |z|^{\alpha_0}} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\ &\leq C \frac{\lambda^{\alpha_0}}{\lambda^{\alpha_0}} \int_\gamma \frac{(x+1)^{2\alpha_0} e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{1-\alpha_0}} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\ &\leq C \int_{|z| \geq \frac{1}{(x+1)^2}} \frac{(x+1)^{2\alpha_0} e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{1-\alpha_0}} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\ &\quad + C \int_{|z| \leq \frac{1}{(x+1)^2}} \frac{(x+1)^{2\alpha_0}}{|z|^{1-\alpha_0}} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\ &\leq C \left[\int_1^\infty \frac{e^{-\sigma \cos(\pi/2-\theta_0/2)}}{\sigma^{1-2\alpha_0}} d\sigma + 1 \right] \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \leq C \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}. \end{aligned}$$

De la même manière, on traite J_3 .

$$\begin{aligned} \|J_4\|_E &\leq Cp\lambda^{\alpha_0} \int_\gamma \left| \frac{s_z(\delta) s_z(x+1)}{\Delta_z(-1, \delta) c_z^2(\delta)} \right| \frac{1}{|z-\lambda||z|^{\alpha_0}} |dz| \|g_-(0) - g_+^\delta(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\ &\leq Cp\lambda^{\alpha_0} \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}|x|}}{|z-\lambda||z|^{\alpha_0}} |dz| \|g_-(0) - g_+^\delta(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\ &\leq Cp\lambda^{\alpha_0} \int_\gamma \frac{|dz|}{|z-\lambda||z|^{\alpha_0}} \|g_-(0) - g_+^\delta(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \leq C \|g_-(0) - g_+^\delta(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)}. \end{aligned}$$

■

Chapitre 4

Le problème limite

On retourne à notre problème aux limites et de transmission sur $[-1, \delta]$

$$\left\{ \begin{array}{l} (u_-^\delta)''(x) + Au_-^\delta(x) = g_-(x) \quad \text{sur } (-1, 0) \\ (u_+^\delta)''(x) + Au_+^\delta(x) = g_+^\delta(x) \quad \text{sur } (0, \delta) \\ \left\{ \begin{array}{l} u_-^\delta(-1) = f_- \\ (u_+^\delta)'(\delta) = f_+^\delta \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} u_+^\delta(0) = u_-^\delta(0) \\ p_- (u_-^\delta)'(0) = p_+ (u_+^\delta)'(0), \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.1)$$

et on se propose d'étudier le passage à la limite quand $\delta \rightarrow 0$ (recherche du problème limite de (4.1), ...), lorsque, naturellement les données du problème ont une certaine dépendance en δ qu'on précisera.

Dans ce travail, à titre illustratif, on se focalisera sur ce passage à la limite lorsque les coefficients (de conductivité) p_- et p_+ vérifient

$$\frac{p_+}{p_-} = p = \frac{1}{\delta}.$$

D'autres cas de dépendance en δ peuvent être considérés.

On rappelle le problème (P_-^δ)

$$(P_-^\delta) \left\{ \begin{array}{l} (u_-^\delta)''(x) + Au_-^\delta(x) = g_-(x) \quad \text{sur } (-1, 0) \\ u_-^\delta(-1) = f_-, \\ (u_-^\delta)'(0) = \frac{1}{\delta} T_\delta(u_-^\delta(0), f_+^\delta, g_+^\delta), \end{array} \right.$$

et sa solution donnée, pour $x \in [-1, 0]$, par

$$\begin{aligned} u_-^\delta(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x, \tau) (A - zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\delta} \frac{s_z(x+1)}{c_z(\delta)} \frac{1}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\delta} \int_0^\delta \frac{c_z(\tau) s_z(x+1)}{c_z^2(\delta)} \frac{1}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau dz \\
& = d_-^\delta(x, A) f_- + w_-^\delta(x, A, g_-) + n_-^\delta(x, A) f_+^\delta + v_-^\delta(x, A, g_+^\delta),
\end{aligned}$$

avec

$$K_{z,-}^\delta(x, \tau) = \frac{-1}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} \begin{cases} \Delta_z(x, \delta) \frac{s_z(\tau+1)}{c_z(\delta)} & \text{si } -1 \leq \tau \leq x \\ \Delta_z(\tau, \delta) \frac{s_z(x+1)}{c_z(\delta)} & \text{si } x \leq \tau \leq 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \Delta_z(x, \delta) = \cosh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}\delta - \frac{1}{\delta} \sinh \sqrt{-z}x \sinh \sqrt{-z}\delta \\ \text{pour } x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Dans la suite de ce chapitre, on commence d'abord par étudier la convergence simple des représentations complètes de u_-^δ sur $[-1, 0]$ et u_+^δ sur $[0, \delta]$ celle de l'opérateur d'impédance T_δ quand $\delta \rightarrow 0$, ensuite par faire une étude détaillée du problème limite correspondant à la solution limite de u_-^δ .

4.1 Limites de u_-^δ et u_+^δ

Pour $x \in [-1, 0]$ et $z \in \gamma$, Il est facile de voir que $K_{z,-}^\delta(x, \tau)$ tend simplement quand $\delta \rightarrow 0$ vers

$$K_{z,-}(x, \tau) = \frac{-1}{\sqrt{-z} \Lambda_z(-1)} \begin{cases} \Lambda_z(x) \sinh \sqrt{-z}(\tau+1) & \text{si } -1 \leq \tau \leq x \\ \Lambda_z(\tau) \sinh \sqrt{-z}(x+1) & \text{si } x \leq \tau \leq 0. \end{cases}$$

avec

$$\Lambda_z(x) = \cosh \sqrt{-z}x - \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}x.$$

Les estimations suivantes sont très utiles pour la suite.

Lemme 4.1 *Il existe des $C > 0$ (ne dépendant que de γ), tel que pour tout $x \in [-1, 0]$ et $z \in \gamma$, on a*

$$\begin{cases} |\Lambda_z(x)| \leq C \left(1 + |z|^{1/2}\right) e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} \\ |\partial_x \Lambda_z(x)| \leq C |z|^{1/2} \left(1 + |z|^{1/2}\right) e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} \\ |\Lambda_z(-1)| \geq C \left(1 + |z|^{1/2}\right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}. \end{cases}$$

Preuve. Soit $z \in \Sigma_{\theta_0}$. En utilisant le lemme 1.1, on a

$$\begin{aligned}
2|\Lambda_z(-1)| & = \left| \left(e^{\sqrt{-z}} + e^{-\sqrt{-z}} \right) + \sqrt{-z} \left(e^{\sqrt{-z}} - e^{-\sqrt{-z}} \right) \right| \\
& = e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \left| \left(1 + e^{-2\sqrt{-z}} \right) + \sqrt{-z} \left(1 - e^{-2\sqrt{-z}} \right) \right| \\
& \geq e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \left[\left| 1 + e^{-2\sqrt{-z}} \right| + \left| \sqrt{-z} \right| \left| 1 - e^{-2\sqrt{-z}} \right| \right] \times \\
& \quad \left| \cos \left(\frac{\arg(1 + e^{-2\sqrt{-z}}) - \arg(\sqrt{-z} (1 - e^{-2\sqrt{-z}}))}{2} \right) \right|
\end{aligned}$$

$$\geq C_{\theta_0} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \left(1 + |z|^{1/2}\right) \times \left| \cos \left(\frac{\arg(1 + e^{-2\sqrt{-z}}) - \arg(1 - e^{-2\sqrt{-z}})}{2} - \frac{\arg(\sqrt{-z})}{2} \right) \right|,$$

d'autre part, grâce au lemme 1.2, on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \arg(1 + e^{-2\sqrt{-z}}) - \arg(1 - e^{-2\sqrt{-z}}) - \arg(\sqrt{-z}) \right| \\ & \leq \left| \arg(1 + e^{-2\sqrt{-z}}) - \arg(1 - e^{-2\sqrt{-z}}) \right| + \left| \arg(\sqrt{-z}) \right| \\ & \leq 2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta_0}{2} \right), \end{aligned}$$

donc

$$|\Lambda_z(-1)| \geq \frac{C_{\theta_0}}{2} \left(1 + |z|^{1/2}\right) \sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}$$

(on rappelle que $\sin \left(\frac{\theta_0}{2} \right) > 0$). ■

On supposera que

$$\begin{cases} \exists L \in E : \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta} \int_0^\delta g_+^\delta(\tau) d\tau \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_0^1 h_+^\delta(s) ds \right] = L \\ \exists l \in D(\sqrt{-A}) : \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\delta} f_+^\delta - l \right\|_{D(\sqrt{-A})} = 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

et

$$\begin{cases} \left\{ \int_0^1 \|h_+^\delta(s)\| ds, 0 < \delta \leq 1 \right\} \text{ est borné dans } E \\ \left\{ f_+^\delta, \delta \in]0, 1] \right\} \text{ est borné dans } E. \end{cases} \quad (4.3)$$

La proposition suivante donne les solutions limites de u_-^δ et u_+^δ .

Proposition 4.1 *On suppose $f_- \in D(A)$, $g_- \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$. Soient $g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$ avec $0 < 2\alpha_0 < 1$ et $f_+^\delta \in D(\sqrt{-A})$ vérifiant les hypothèses (4.2) et (4.3). Alors*

◆ u_-^δ donnée par (3.12) tend simplement quand $\delta \rightarrow 0$ vers

$$\begin{aligned} u_-(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} (A - zI)^{-1} f_- dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^0 K_{z,-}(x, \tau) (A - zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}\Lambda_z(-1)} (A - zI)^{-1} (l - L) dz. \end{aligned}$$

sur $[-1, 0]$,

◆ u_+^δ donnée par (3.13) tend simplement quand $\delta \rightarrow 0$ vers

$$\begin{aligned} u_+ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\Lambda_z(-1)} (A - zI)^{-1} f_- dz \\ &- \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^0 \frac{\sinh \sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Lambda_z(-1)} (A - zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz \\ &+ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z}\Lambda_z(-1)} (A - zI)^{-1} (l - L) dz. \end{aligned}$$

dans E .

Preuve.

◆ On rappelle que la représentation formelle de u_-^δ , pour $x \in [-1, 0]$ et $\delta \in]0, 1]$:

$$\begin{aligned}
u_-^\delta(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} Af_- dz \\
&+ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x, \tau) (A - zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz \\
&+ \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\delta \sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\
&- \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - \tau) \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\delta \sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau dz \\
&= d_-^\delta(x, A) f_- + w_-^\delta(x, A, g_-) + n_-^\delta(x, A) f_+^\delta + v_-^\delta(x, A, g_+^\delta).
\end{aligned}$$

En utilisant la minoration (1.3) et les hypothèses, il est clair que pour $x \in [-1, 0]$

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta \rightarrow 0} d_-^\delta(x, A) f_- &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} Af_- dz \right] \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} Af_- dz.
\end{aligned}$$

En effet, on a, d'une part

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} = \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)},$$

et l'estimation uniforme

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \right| \\
&= \left| \frac{\cosh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}\delta - \frac{1}{\delta} \sinh \sqrt{-z}x \sinh \sqrt{-z}\delta}{\Delta_z(-1, \delta)} \right| \\
&= \left| \frac{\delta \cosh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}\delta - \sinh \sqrt{-z}x \sinh \sqrt{-z}\delta}{\delta \Delta_z(-1, \delta)} \right| \\
&\leq C \frac{|\delta \cosh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z}\delta - \sinh \sqrt{-z}x \sinh \sqrt{-z}\delta|}{\delta \left(\frac{1}{\delta} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} \right)} \\
&\leq C \frac{\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta + \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}{\delta \left(\frac{1}{\delta} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} \right)} \\
&\leq C \frac{(\delta + 1) \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}} \\
&\leq C \frac{(\delta + 1) e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}} \\
&\leq C (\delta + 1) e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} \leq 2C,
\end{aligned}$$

et, d'autre part

$$\left\| \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} Af_- \right\|_E \leq \frac{2C}{|z|^2} \|Af_-\|_E,$$

d'où le résultat pour le premier terme grâce au théorème de la convergence dominée.

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} w_-^\delta(x, A, g_-) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x, \tau) (A - zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz \right] \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^0 K_{z,-}(x, \tau) (A - zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz, \end{aligned}$$

pour tout $x \in [-1, 0]$, on a

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{-1}^0 K_{z,-}^\delta(x, \tau) (A - zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau \right\|_E \\ & \leq C \int_{-1}^x \left| \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \right| \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau + 1)}{|z|^{3/2}} d\tau \|g_-\|_{C([-1, 0]; E)} \\ & \quad + C \int_x^0 \left| \frac{\Delta_z(\tau, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \right| \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (x + 1)}{|z|^{3/2}} d\tau \|g_-\|_{C([-1, 0]; E)} \\ & \leq 2C \left[\int_{-1}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau+1)}}{|z|^{3/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}} d\tau + \int_x^0 \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau+1)}}{|z|^{3/2} e^{6 \operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}} d\tau \right] \|g_-\|_{C([-1, 0]; E)} \\ & \leq \frac{2C}{|z|^{3/2}} \left[\int_{-1}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau+1)}}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}} d\tau + e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} \int_x^0 e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau+1)} d\tau \right] \|g_-\|_{C([-1, 0]; E)} \\ & \leq \frac{2C}{|z|^2} \left[e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} + e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \right] \|g_-\|_{C([-1, 0]; E)} \\ & \leq \frac{2C}{|z|^2} \left[1 + e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} \right] \|g_-\|_{C([-1, 0]; E)} \leq \frac{4C}{|z|^2} \|g_-\|_{C([-1, 0]; E)}, \end{aligned}$$

d'où le résultat pour le deuxième terme.

Pour le troisième terme, on obtient

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} n_-^\delta(x, A) f_+^\delta &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\delta} \frac{\sinh \sqrt{-z} (x + 1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \right] \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z} (x + 1)}{\sqrt{-z} \Lambda_z(-1)} (A - zI)^{-1} \left[\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} f_+^\delta \right] dz \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z} (x + 1)}{\sqrt{-z} \Lambda_z(-1)} (A - zI)^{-1} l dz, \end{aligned}$$

et par (3.9), on a

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{\delta} \frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1)}{z \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} (-A)^{1/2} f_+^\delta \right\|_E \\
& \leq C \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}{|\Delta_z(-1, \delta)| |z|^{3/2}} \left\| \frac{1}{\delta} f_+^\delta \right\|_E \\
& \leq C \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}}{|z|^{3/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}} \left\| \frac{1}{\delta} f_+^\delta \right\|_E \\
& \leq C \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)}}{|z|^{3/2}} \left\| \frac{1}{\delta} f_+^\delta \right\|_E \\
& \leq \frac{C}{|z|^{3/2}} l_+,
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

Le dernier terme se traite différemment,

$$\begin{aligned}
& v_-^\delta(x, A, g_+^\delta) \\
& = -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - \tau) \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\delta \sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau dz \\
& = -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^1 \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta(1-s) \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} h_+^\delta(s) ds dz,
\end{aligned}$$

d'une part, la deuxième l'hypothèse de la proposition, nous permet d'avoir la majoration uniforme suivante

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^1 \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta(1-s) \sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} h_+^\delta(s) ds \right\|_E \\
& \leq C \int_0^1 \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta(1-s) \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}{|\Delta_z(-1, \delta)| |z|^{3/2}} \|h_+^\delta(s)\|_E ds \\
& \leq \frac{C}{|z|^{3/2}} \int_0^1 \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta(1-s)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)}}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}} \|h_+^\delta(s)\|_E ds \\
& \leq \frac{C}{|z|^{3/2}} \int_0^1 e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta s - x)} \|h_+^\delta(s)\|_E ds \\
& \leq \frac{C}{|z|^{3/2}} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} \int_0^1 \|h_+^\delta(s)\|_E ds \leq \frac{C}{|z|^{3/2}},
\end{aligned}$$

alors grâce au théorème de la convergence dominée, on a

$$\begin{aligned}
& \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^1 \frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1) \cosh \sqrt{-z}\delta(1-s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} h_+^\delta(s) ds dz \right) \\
& = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1)}{\sqrt{-z}} (A - zI)^{-1} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^1 \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta(1-s)}{\Delta_z(-1, \delta)} h_+^\delta(s) ds \right) dz,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_0^1 \frac{\cosh \sqrt{-z} \delta (1 - \tau)}{\Delta_z(-1, \delta)} h_+^\delta(\tau) d\tau \right] \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_0^1 \frac{\cosh \sqrt{-z} \delta (1 - \tau) - \Delta_z(-1, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} h_+^\delta(\tau) d\tau \right] + \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_0^1 h_+^\delta(\tau) d\tau \right] \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_0^1 \frac{\cosh \sqrt{-z} \delta (1 - \tau) - \Delta_z(-1, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} h_+^\delta(\tau) d\tau \right] + L \\
&= L,
\end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\cosh \sqrt{-z} \delta (1 - \tau) - \Delta_z(-1, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} h_+^\delta(\tau) \right\|_E \\
&\leq C \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta (1 - \tau) + |\Delta_z(-1, \delta)|}{|\Delta_z(-1, \delta)|} \|h_+^\delta(\tau)\|_E \\
&\leq C \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta (1 - \tau)} + (1 + p) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta + 1)}}{|\Delta_z(-1, \delta)|} \|h_+^\delta(\tau)\|_E \\
&\leq C \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta \tau} + (1 + p) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|\Delta_z(-1, \delta)|} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} \|h_+^\delta(\tau)\|_E \\
&\leq C \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta \tau} + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{\frac{1}{\delta} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta + 1)}} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} \|h_+^\delta(\tau)\|_E \\
&\leq C \frac{1 + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{\frac{1}{\delta}} e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \|h_+^\delta(\tau)\|_E \\
&\leq C \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} + \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)}{\frac{1}{\delta}} \|h_+^\delta(\tau)\|_E \\
&\leq C (2\delta + 1) \|h_+^\delta(\tau)\|_E \leq 3C \|h_+^\delta(\tau)\|_E,
\end{aligned}$$

grâce au théorème de la convergence dominée, quand $\delta \rightarrow 0$, on obtient

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} v_-^\delta(x, A, g_+) = -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z} (x + 1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1)} (A - zI)^{-1} L dz.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
u_-(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} (A - zI)^{-1} f_- dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^0 K_{z,-}(x, \tau) (A - zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z} (x + 1)}{\sqrt{-z} \Lambda_z(-1)} (A - zI)^{-1} (l - L) dz.
\end{aligned}$$

◆ On rappelle que pour $x \in [0, \delta]$

$$\begin{aligned} u_+^\delta(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z^+(x, \delta)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x, \tau) (A - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_- dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \sinh \sqrt{-z}(\tau + 1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz, \end{aligned}$$

où le noyau

$$H_{z,+}^\delta(x, \tau) = \begin{cases} \frac{\Delta_z^+(\tau, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} & \text{si } 0 \leq \tau \leq x \\ \frac{\Delta_z^+(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - \tau)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1, \delta)} & \text{si } x \leq \tau \leq \delta, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \Delta_z^+(x, \delta) = \sinh \sqrt{-z}x \cosh \sqrt{-z} + \frac{1}{\delta} \cosh \sqrt{-z}x \sinh \sqrt{-z} \\ \text{pour } x \in [0, \delta]. \end{cases}$$

On a les majorations uniformes suivantes

$$\left| \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} \right| \leq C \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x)}}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta + 1)}} \leq C e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1+x)} \leq C e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}},$$

d'après l'hypothèse (4) sur f_+^δ , il existe une constante K telle que

$$\sup_{\delta \in]0,1]} (\|f_+^\delta\|_E) \leq M,$$

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\Delta_z^+(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} f_+^\delta \right\|_E \\ &\leq C \frac{\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} + \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)|} \|f_+^\delta\|_E \\ &\leq C \frac{(\delta + 1) \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta + 1)}} \|f_+^\delta\|_E \\ &\leq C \frac{(\delta + 1) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta + 1)}} \|f_+^\delta\|_E \\ &\leq C (\delta + 1) e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x)} M \leq 2C, \end{aligned}$$

et

$$\left\| \int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x, \tau) (A - zI)^{-1} g_+^\delta(\tau) d\tau \right\|_E = \left\| \int_0^1 \delta H_{z,+}^\delta(x, \delta s) (A - zI)^{-1} h_+^\delta(s) ds \right\|_E$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \left\| \int_0^x \delta \frac{\Delta_z^+(\delta s, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} h_+^\delta(s) ds \right\|_E \\
&\quad + C \left\| \int_x^1 \delta \frac{\Delta_z^+(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - \delta s)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} h_+^\delta(s) ds \right\|_E \\
&\leq C \int_0^x \frac{(\delta + 1) \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta s \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}}{|z|^{3/2} |\Delta_z(-1, \delta)|} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x)} ds \|h_+^\delta\|_{C([0,1];E)} \\
&\quad + C \int_x^1 \frac{(\delta + 1) \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}}{|z|^{3/2} |\Delta_z(-1, \delta)|} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - \delta s)} ds \|h_+^\delta\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq C \int_0^x \frac{(\delta + 1) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta s} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{\frac{1}{\delta} |z|^{3/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta + 1)}} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x)} ds \|h_+^\delta\|_{C([0,1];E)} \\
&\quad + C \int_x^1 \frac{(\delta + 1) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} x} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{\frac{1}{\delta} |z|^{3/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta + 1)}} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - \delta s)} ds \|h_+^\delta\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq \frac{C \delta (\delta + 1)}{|z|^{3/2}} \left[\int_0^x e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta s - x)} ds + \int_x^1 e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x - \delta s)} ds \right] \|h_+^\delta\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq \frac{C \delta (\delta + 1)}{|z|^{3/2}} \left[\frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta x - x)}}{\delta |z|^{1/2}} + \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x - \delta x)}}{\delta |z|^{1/2}} \right] \|h_+^\delta\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq \frac{C (\delta + 1)}{|z|^2} \left[1 + e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} x (1 - \delta)} \right] \|h_+^\delta\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq \frac{C (\delta + 1)}{|z|^2} \left[1 + e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} x} \right] \|h_+^\delta\|_{C([0,1];E)} \\
&\leq 2C \frac{1 + e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^2} \|h_+^\delta\|_{C([0,1];E)}.
\end{aligned}$$

Grâce au théorème de la convergence dominée, on obtient les résultats suivants.

Pour le premier terme, on obtient

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\Delta_z^+(x, \delta)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \right) \\
&= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z} x \cosh \sqrt{-z} + \frac{1}{\delta} \cosh \sqrt{-z} x \sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} f_+^\delta dz \right) \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} l dz
\end{aligned}$$

Pour les deux derniers termes, on a

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} A f_- dz = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\Lambda_z(-1)} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} A f_- dz,$$

et

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^0 \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \sinh \sqrt{-z}(\tau + 1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz \right) \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^0 \frac{\sinh \sqrt{-z}(\tau + 1)}{\sqrt{-z} \Lambda_z(-1)} (A - zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz.
\end{aligned}$$

Le deuxième terme se traite différemment, en utilisant le changement de variable $\tau = \delta s$

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x, \tau) g_+^\delta(\tau) d\tau \right\|_E \\
&= \left\| \int_0^1 \delta H_{z,+}^\delta(x, \delta s) h_+^\delta(s) ds \right\|_E \\
&\leq C \int_0^x \frac{(1+\delta) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta s} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)} \|h_+^\delta(s)\|_E ds \\
&\quad + C \int_x^1 \frac{(1+\delta) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} x} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta(1-s)} \|h_+^\delta(s)\|_E ds \\
&\leq C(1+\delta) \left(\int_0^x \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta s)}}{|z|^{1/2}} \|h_+^\delta(s)\|_E ds + \int_x^1 \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta s-x)}}{|z|^{1/2}} \|h_+^\delta(s)\|_E ds \right) \\
&\leq C(1+\delta) \left(\frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-\delta)x}}{|z|^{1/2}} \int_0^x \|h_+^\delta(s)\|_E ds + \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{1/2}} \int_x^1 \|h_+^\delta(s)\|_E ds \right) \\
&\leq C(1+\delta) \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{1/2}} \int_0^1 \|h_+^\delta(s)\|_E ds,
\end{aligned}$$

par l'hypothèse (2), il existe M tel que

$$\left\| \int_0^\delta H_{z,+}^\delta(x, \tau) g_+^\delta(\tau) d\tau \right\|_E \leq C \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{1/2}} M \leq C \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}} M.$$

Et

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^1 H_{z,+}^\delta(x, \delta s) (A - zI)^{-1} h_+^\delta(s) ds dz \\
&= -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^x \frac{\delta \sqrt{-z} \Delta_z^+(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} h_+^\delta(s) ds dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_x^1 \frac{\delta \sqrt{-z} \Delta_z^+(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - \delta s)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} h_+^\delta(s) ds dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^x \frac{\delta \sqrt{-z} \Delta_z^+(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - \delta s)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} h_+^\delta(s) ds dz \\
&\quad +\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^x \frac{\delta \sqrt{-z} \Delta_z^+(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - \delta s)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} h_+^\delta(s) ds dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sqrt{-z} (A - zI)^{-1}}{z} \left[\delta \int_0^x \sinh \sqrt{-z} (x - \delta s) h_+^\delta(s) ds \right] dz \\
&\quad -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\delta \sqrt{-z} \Delta_z^+(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} \left[\int_0^1 \cosh \sqrt{-z}(\delta - \delta s) h_+^\delta(s) ds \right] dz,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\delta \sqrt{-z} \Delta_z^+(x, \delta) (A - zI)^{-1}}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{1}{z} \left[\int_0^1 \cosh \sqrt{-z} (\delta - \delta s) h_+^\delta(s) ds \right] dz \right) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z} (A - zI)^{-1}}{\Lambda_z(-1)} L dz, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \left\| \delta \int_0^x \sinh \sqrt{-z} (x - \delta s) h_+^\delta(s) ds \right\|_E &\leq \delta \int_0^x e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} (x - \delta s)} \|h_+^\delta(s)\|_E ds \\ &\leq \delta e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} x} \int_0^x \|h_+^\delta(s)\|_E ds, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{\delta}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^1 H_{z,+}^\delta(x, \delta s) (A - zI)^{-1} h_+^\delta(s) ds dz \right) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z} (A - zI)^{-1}}{\Lambda_z(-1) \sqrt{-z}} L dz. \end{aligned}$$

■

4.2 Estimation de l'erreur

Cette section est consacrée à l'étude des estimations d'erreurs dans deux situations. Naturellement, on supposera toujours que

$$\begin{cases} g_- \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E) \\ g_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E), \end{cases}$$

ou d'une manière équivalente

$$\begin{cases} g_- \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E) \\ h_+^\delta \in C^{2\alpha_0}([0, 1]; E). \end{cases}$$

Dans cette section on supposera que,

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta} f_+^\delta - l = O(\delta) \\ L - h_+^\delta(0) = O(\delta^2) \\ h_+^\delta = O(\delta^2), \end{cases} \quad (4.4)$$

4.2.1 Estimation d'erreur pour les solutions strictes

Ici on supposera les conditions nécessaires et suffisantes d'existence et d'unicité de solution stricte, liées aux conditions aux limites

$$\begin{cases} f_- \in D(A), Af_- - g_-(-1) \in \overline{D(A)} \\ f_+^\delta \in D(\sqrt{-A}), (-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}, \end{cases}$$

et celle liée à la nature même du problème de transmission sur l'interface

$$g_-(0) - g_+^\delta(0) \in \overline{D(A)}.$$

Naturellement, il est nécessaire de faire des hypothèses sur le comportement des données en fonction du paramètre δ .

Dans ce paragraphe on supposera que

$$\exists L \in E : \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta} \int_0^\delta g_+^\delta(\tau) d\tau \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_0^1 h_+^\delta(s) ds \right] = L, \quad (4.5)$$

et

$$\exists l \in D(\sqrt{-A}) : \lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\delta} f_+^\delta - l \right\|_{D(\sqrt{-A})} = 0. \quad (4.6)$$

Proposition 4.2 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\begin{aligned} & \|u_-^\delta - u_-\|_{C([-1,0];E)} \\ & \leq C \delta^2 \left(\|Af_- - g_-(-1)\|_E + \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} + \frac{1}{\delta} \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \right. \\ & \quad \left. + \|g_-(0) - h_+^\delta(0)\|_E + \frac{1}{\delta^2} \|L - h_+^\delta(0)\|_E + \frac{1}{\delta} \left\| \frac{1}{\delta} f_+^\delta - l \right\|_{D(\sqrt{-A})} + \|l\|_{D(\sqrt{-A})} \right), \end{aligned}$$

pour $x \in [-1, 0]$.

Preuve. On rappelle que

$$\begin{aligned} & u_-^\delta(x) - u_-(x) \\ & = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \left[\frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} \right] \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (Af_- - g_-(-1)) dz \\ & \quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \left[\frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} \right] \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (g_-(-1) - g_-(x)) dz \\ & \quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^x \left[\frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} \right] \sinh \sqrt{-z}(\tau + 1) \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_-(\tau) - g_-(x)) d\tau dz \\ & \quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_x^0 \left[\frac{\Delta_z(\tau, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(\tau)}{\Lambda_z(-1)} \right] \sinh \sqrt{-z}(x + 1) \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_-(\tau) - g_-(x)) d\tau dz \\ & \quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \left[\frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} \right] \cosh \sqrt{-z} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (g_-(x) - g_-(0)) dz \\ & \quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \frac{\sinh \sqrt{-z}(x + 1) \cosh \sqrt{-z}(\delta - \tau)}{\delta \Delta_z(-1, \delta)} \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(0)) d\tau dz \\ & \quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \left[\frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} \right] \cosh \sqrt{-z} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (g_-(0) - g_+^\delta(0)) dz \\ & \quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}(x + 1)}{\Lambda_z(-1)} \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (L - g_+^\delta(0)) dz \\ & \quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}(x + 1)}{\sqrt{-z}} (A - zI)^{-1} \left[\frac{f_+^\delta}{\delta \Delta_z(-1, \delta)} - \frac{l}{\Lambda_z(-1)} \right] dz. \end{aligned}$$

Pour tout $x \in [-1, 0]$, on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
& \left| \delta \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta - \sinh \sqrt{-z} \delta \right| \\
&= \left| (\sqrt{-z})^2 \int_0^\delta \int_0^s (\sinh \sqrt{-z} t + t \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} t) dt ds \right| \\
&\leq C |z| \int_0^\delta \int_0^s |\sinh \sqrt{-z} t + t \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} t| dt ds \\
&\leq C |z| \int_0^\delta \int_0^s (1 + t |z|^{1/2}) \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} t dt ds \\
&\leq C |z| \int_0^\delta \int_0^s (1 + t |z|^{1/2}) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} t} dt ds \\
&\leq C |z| \int_0^\delta \int_0^s (1 + s |z|^{1/2}) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} s} dt ds \\
&\leq C |z| \int_0^\delta s (1 + s |z|^{1/2}) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} s} ds \\
&\leq C |z| \int_0^\delta \delta (1 + \delta |z|^{1/2}) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} ds \\
&\leq C |z| \delta^2 (1 + \delta |z|^{1/2}) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} \\
&\leq C |z| \delta^2 (1 + |z|^{1/2}) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} \right| &= \left| \frac{\delta \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta - \sinh \sqrt{-z} \delta}{\delta \Delta_z(-1, \delta) \Lambda_z(-1)} \sinh \sqrt{-z} (x+1) \right| \\
&\leq C \frac{|\delta \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta - \sinh \sqrt{-z} \delta|}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)| |\Lambda_z(-1)|} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (x+1) \\
&\leq C \frac{|z| \delta^2 (1 + |z|^{1/2}) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta}}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)| |\Lambda_z(-1)|} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} (x+1)} \\
&\leq C \frac{|z| \delta^2 (1 + |z|^{1/2})}{(1 + |z|^{1/2}) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} (2+\delta)}} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} (x+1+\delta)} \\
&\leq C |z| \delta^2 e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} (1-x)}.
\end{aligned}$$

Pour le premier terme, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \left[\frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} \right] \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (Af_- - g_-(-1)) dz \right\|_E \\
&\leq C \int_\gamma \left| \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} \right| \frac{1}{|z|^2} \|Af_- - g_-(-1)\|_E |dz| \\
&\leq C \delta^2 \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} (1-x)}}{|z|} \|Af_- - g_-(-1)\|_E |dz| \\
&\leq C \delta^2 \|Af_- - g_-(-1)\|_E.
\end{aligned}$$

Pour le deuxième et le troisième termes, on a

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left[\frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} \right] \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (g_-(-1) - g_-(x)) dz \right\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} \left| \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} \right| \frac{|x+1|^{2\alpha_0}}{|z|^2} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C\delta^2 \int_{\gamma} |z| e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)} \frac{|x+1|^{2\alpha_0}}{|z|^2} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C\delta^2 \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)}}{|z|} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \leq C\delta^2 \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}, \\
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-1}^x \left[\frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} \right] \sinh \sqrt{-z} (\tau + 1) \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_-(\tau) - g_-(x)) d\tau dz \right\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_{-1}^x \left| \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} \right| \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau + 1)}{|z|^{3/2}} |\tau - x|^{2\alpha_0} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C\delta^2 \int_{\gamma} \int_{-1}^x |z| e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)} \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau + 1)}{|z|^{3/2}} |\tau - x|^{2\alpha_0} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C\delta^2 \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)}}{|z|^{1/2}} \left(\int_{-1}^x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau + 1) |\tau - x|^{2\alpha_0} d\tau \right) |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)},
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder pour l'expression entre parenthèses, on obtient

$$\begin{aligned}
& \leq C\delta^2 \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)}}{|z|^{1/2}} \left(\frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (1+x)}{|z|^{1/2+\alpha_0}} \right) |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C\delta^2 \int_{\gamma} \frac{e^{2\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{1+\alpha_0}} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \leq C\delta^2 \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}.
\end{aligned}$$

On fait de même pour le quatrième terme.

Pour le cinquième terme, on a

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left[\frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} \right] \cosh \sqrt{-z} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (g_-(x) - g_-(0)) dz \right\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} \left| \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} \right| \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}}{|z|^2} |x|^{2\alpha_0} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C\delta^2 \int_{\gamma} |z| e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)} \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}}{|z|^2} |x|^{2\alpha_0} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C\delta^2 \int_{\gamma} e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|} |x|^{2\alpha_0} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C\delta^2 \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|} |x|^{2\alpha_0} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \leq C\delta^2 \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}.
\end{aligned}$$

Le sixième terme donne

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{\delta} \frac{\cosh \sqrt{-z} (\delta - \tau)}{\delta \Delta_z(-1, \delta)} \sinh \sqrt{-z} (x+1) \frac{(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_+^{\delta}(\tau) - g_+^{\delta}(0)) d\tau dz \right\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^1 \frac{\delta \sinh \sqrt{-z} (x+1) \cosh \sqrt{-z} \delta (1-s)}{\delta \Delta_z(-1, \delta)} \frac{(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (h_+^{\delta}(s) - h_+^{\delta}(0)) ds dz \right\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} \int_0^1 \frac{\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (x+1) \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta (1-s)}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)|} \frac{|s|^{2\alpha_0}}{|z|^{3/2}} ds |dz| \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \int_{\gamma} \int_0^1 \frac{\delta e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta (1-s)}}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1+\delta)} |z|^{3/2}} |s|^{2\alpha_0} ds |dz| \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \int_{\gamma} \frac{\delta e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} x}}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta}} \int_0^1 \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta (1-s)}}{|z|^{3/2}} ds |dz| \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \delta \int_{\gamma} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} x} \int_0^1 \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta s}}{|z|^{3/2}} ds |dz| \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \delta \int_{\gamma} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} x} \int_0^1 \frac{ds}{|z|^{3/2}} |dz| \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \delta \int_{\gamma} \frac{1}{|z|^{3/2}} |dz| \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \delta \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \leq C \delta^2 \left(\frac{1}{\delta} \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \right)
\end{aligned}$$

Pour le septième terme, on trouve

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left[\frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} \right] \cosh \sqrt{-z} \frac{(A-zI)^{-1}}{z} (g_-(0) - g_+^{\delta}(0)) dz \right\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} \left| \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} \right| \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}}{|z|^2} |dz| \|g_-(0) - g_+^{\delta}(0)\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} \delta^2 \frac{|z| e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}}{(1+|z|^{1/2}) |z|^2} |dz| \|g_-(0) - g_+^{\delta}(0)\|_E \\
&\leq C \delta^2 \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} x}}{|z|^{3/2}} |dz| \|g_-(0) - g_+^{\delta}(0)\|_E \leq C \delta^2 \|g_-(0) - g_+^{\delta}(0)\|_E
\end{aligned}$$

D'une façon analogue, on trouve pour le huitième terme

$$\left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z} (x+1)}{\Lambda_z(-1)} \frac{(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (L - h_+^{\delta}(0)) dz \right\|_E \leq C \delta^2 \left(\frac{1}{\delta^2} \|L - h_+^{\delta}(0)\|_E \right).$$

En utilisant (4.4) et l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
& \left| 1 - \frac{\Delta_z(-1, \delta)}{\Lambda_z(-1)} \right| \\
& \leq C \frac{\left| \int_0^\delta \sinh \sqrt{-z} s ds \right| + |z|^{1/2} \left| \int_0^\delta \frac{s \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} s - \sinh \sqrt{-z} s}{s^2 \sqrt{-z}} ds \right|}{|\Lambda_z(-1)|} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \\
& \leq C \frac{\left| \int_0^\delta \sinh \sqrt{-z} s ds \right| + \int_0^\delta \left| \frac{s \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} s - \sinh \sqrt{-z} s}{s^2} \right| ds}{(1 + |z|^{1/2})} \\
& \leq C \frac{\int_0^\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} s ds + |z| \int_0^\delta e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} s} ds}{(1 + |z|^{1/2})} \\
& \leq C \frac{\int_0^\delta e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} s} ds + |z| \int_0^\delta e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} s} ds}{(1 + |z|^{1/2})} \\
& \leq C \delta \frac{1 + |z|}{(1 + |z|^{1/2})} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} \leq C \delta \left(\frac{1}{|z|^{1/2}} + |z|^{1/2} \right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta},
\end{aligned}$$

et de plus

$$\begin{aligned}
& \frac{f_+^\delta}{\delta \Delta_z(-1, \delta)} - \frac{l}{\Lambda_z(-1)} \\
& = \frac{1}{\Delta_z(-1, \delta)} \left[\frac{1}{\delta} f_+^\delta - \frac{\Delta_z(-1, \delta)}{\Lambda_z(-1)} l \right] \\
& = \frac{1}{\Delta_z(-1, \delta)} \left[\left(\frac{1}{\delta} f_+^\delta - l \right) + \left(1 - \frac{\Delta_z(-1, \delta)}{\Lambda_z(-1)} \right) l \right],
\end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z} (x+1)}{z} (A - zI)^{-1} \left[\frac{(-A)^{1/2} f_+^\delta}{\delta \Delta_z(-1, \delta)} - \frac{(-A)^{1/2} l}{\Lambda_z(-1)} \right] dz \right\|_E \\
& \leq C \int_\gamma \frac{\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (x+1)}{|z|^2 \delta |\Delta_z(-1, \delta)|} \left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^\delta - l \right) \right\|_E |dz| \\
& \quad + C \int_\gamma \frac{\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (x+1)}{|z|^2 \delta |\Delta_z(-1, \delta)|} \left| 1 - \frac{\Delta_z(-1, \delta)}{\Lambda_z(-1)} \right| \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_E |dz| \\
& \leq C \delta \int_\gamma \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} (x+1)}}{|z|^2 e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta+1)}} \left(\left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^\delta - l \right) \right\|_E + \left| 1 - \frac{\Delta_z(-1, \delta)}{\Lambda_z(-1)} \right| \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_E \right) |dz| \\
& \leq C \delta \int_\gamma \frac{1}{|z|^2} \left(\left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^\delta - l \right) \right\|_E + \left| 1 - \frac{\Delta_z(-1, \delta)}{\Lambda_z(-1)} \right| \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_E \right) |dz|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\delta \int_{\gamma} \frac{1}{|z|^2} \left(\left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right) \right\|_E + \delta \left(\frac{1}{|z|^{1/2}} + |z|^{1/2} \right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_E \right) |dz| \\
&\leq C\delta^2 \left(\frac{1}{\delta} \left\| \frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right\|_{D(\sqrt{-A})} + \|l\|_{D(\sqrt{-A})} \right).
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.3 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\begin{aligned}
&\|Au_-^{\delta} - Au_-\|_{C([-1,0];E)} \\
&\leq C\delta \left(\|Af_- - g_-(-1)\|_E + \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} + \frac{1}{\delta} \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} + \|g_-(0) - h_+^{\delta}(0)\|_E \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\delta} \|L - h_+^{\delta}(0)\|_E + \left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right) \right\|_E + \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_E \right)
\end{aligned}$$

pour $x \in [-1, 0]$.

Preuve. On applique A à l'expression de $(u_-^{\delta}(x) - u_-(x))$, on a

$$\begin{aligned}
&Au_-^{\delta}(x) - Au_-(x) \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} t(x) \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} (Af_- - g_-(-1)) dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} t(x) \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} (g_-(-1) - g_-(x)) dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-1}^x t(x) \sinh \sqrt{-z} (\tau + 1) \frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_-(\tau) - g_-(x)) d\tau dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_x^0 t(\tau) \sinh \sqrt{-z} (x + 1) \frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_-(\tau) - g_-(x)) d\tau dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} t(x) \cosh \sqrt{-z} \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} (g_-(x) - g_-(0)) dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{\delta} \frac{\sinh \sqrt{-z} (x + 1) \cosh \sqrt{-z} (\delta - \tau)}{\delta \Delta_z(-1, \delta)} \frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_+^{\delta}(\tau) - g_+^{\delta}(0)) d\tau dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} t(x) \cosh \sqrt{-z} \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} (g_-(0) - g_+^{\delta}(0)) dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z} (x + 1)}{\Lambda_z(-1)} \frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (L - g_+^{\delta}(0)) dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z} (x + 1)}{\sqrt{-z}} A(A-zI)^{-1} \left[\frac{f_+^{\delta}}{\delta \Delta_z(-1, \delta)} - \frac{l}{\Lambda_z(-1)} \right] dz,
\end{aligned}$$

où

$$t(x) = \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)}.$$

Pour tout $x \in [-1, 0]$, on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
& |t(x)| \\
&= \left| \frac{\delta \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta - \sinh \sqrt{-z} \delta}{\delta \Delta_z(-1, \delta) \Lambda_z(-1)} \sinh \sqrt{-z} (x+1) \right| \\
&\leq C \frac{|\delta \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta - \sinh \sqrt{-z} \delta|}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)| |\Lambda_z(-1)|} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (x+1) \\
&\leq C \frac{\delta |z|^{1/2} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta + |\sinh \sqrt{-z} \delta|}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)| |\Lambda_z(-1)|} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (x+1) \\
&\leq C \frac{\delta |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} + \frac{1}{2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} |1 - e^{-2\sqrt{-z} \delta}|}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} (1 + |z|^{1/2}) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (x+1) \\
&\leq C \frac{\delta |z|^{1/2} + |z|^{1/2} \left| \int_0^\delta e^{-2\sqrt{-z}s} ds \right|}{e^{2\operatorname{Re} \sqrt{-z}} (1 + |z|^{1/2})} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} \\
&\leq C \delta e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)}.
\end{aligned}$$

Pour le premier et le deuxième terme, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma t(x) \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} (Af_- - g_-(-1)) dz \right\|_E \\
&\leq C \int_\gamma |t(x)| \frac{1}{|z|} \|Af_- - g_-(-1)\|_E |dz| \\
&\leq C \delta \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)}}{|z|} \|Af_- - g_-(-1)\|_E |dz| \leq C \delta \|Af_- - g_-(-1)\|_E, \\
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma t(x) \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} (g_-(-1) - g_-(x)) dz \right\|_E \\
&\leq C \int_\gamma |t(x)| \frac{|x+1|^{2\alpha_0}}{|z|} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C \delta \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)}}{|z|} |x+1|^{2\alpha_0} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C \delta \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)}}{|z|} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \leq C \delta \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}.
\end{aligned}$$

Le troisième terme se traite de la façon suivante

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^x t(x) \sinh \sqrt{-z} (\tau+1) \frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_-(\tau) - g_-(x)) d\tau dz \right\|_E \\
&\leq C \int_\gamma \int_{-1}^x |t(x)| \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau+1)}{|z|^{1/2}} |\tau-x|^{2\alpha_0} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C \delta \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)}}{|z|^{1/2}} \left(\int_{-1}^x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau+1) |\tau-x|^{2\alpha_0} d\tau \right) |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)},
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder pour l'expression entre parenthèses, on obtient

$$\begin{aligned}
&\leq C \delta \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)}}{|z|^{1/2}} \left(\frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(1+x)}{|z|^{1/2+\alpha_0}} \right) |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C \delta \int_{\gamma} \frac{e^{2\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{1+\alpha_0}} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C \delta \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}.
\end{aligned}$$

De la même manière, on traite le quatrième terme.

Le cinquième terme se fait en utilisant l'Hölderianité de g_-

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} t(x) \cosh \sqrt{-z} \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} (g_-(x) - g_-(0)) dz \right\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} |t(x)| \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}}{|z|} |x|^{2\alpha_0} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C \delta \int_{\gamma} e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|} |x|^{2\alpha_0} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C \delta \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|} |x|^{2\alpha_0} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \leq C \delta \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}.
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse (4.4) et l'Hölderianité de h_+^{δ} , on obtient pour le sixième terme

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{\delta} \frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1) \cosh \sqrt{-z}(\delta-\tau) A(A-zI)^{-1}}{\delta \Delta_z(-1, \delta) \sqrt{-z}} (g_+^{\delta}(\tau) - g_+^{\delta}(0)) d\tau dz \right\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^1 \frac{\sinh \sqrt{-z}(x+1) \cosh \sqrt{-z}\delta(1-s) A(A-zI)^{-1}}{\Delta_z(-1, \delta) \sqrt{-z}} (h_+^{\delta}(s) - h_+^{\delta}(0)) ds dz \right\|_E \\
&\leq C \delta \int_{\gamma} \int_0^1 \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta(1-s)} s^{2\alpha_0}}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1+\delta)} |z|^{1/2}} ds |dz| \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \delta \int_0^1 \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta s-x)}}{|z|^{1/2}} |dz| s^{2\alpha_0} ds \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \delta \int_0^1 \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta s}}{|z|^{1/2}} |dz| s^{2\alpha_0} ds \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \delta \int_0^1 \left(\int_{|z| \geq \frac{1}{(\delta s)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta s}}{|z|^{1/2}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(\delta s)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{1/2}} \right) s^{2\alpha_0} ds \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \delta \int_0^1 \frac{s^{2\alpha_0}}{\delta s} ds \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \delta \left(\int_0^1 s^{2\alpha_0-1} ds \right) \frac{1}{\delta} \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \delta \left(\frac{1}{\delta} \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \right)
\end{aligned}$$

Le septième et huitième terme sont traités en adaptant la preuve du théorème 3.4, on trouve

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} t(x) \cosh \sqrt{-z} \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} (g_-(0) - h_+^{\delta}(0)) dz \right\|_E \\ & \leq C \delta \|g_-(0) - h_+^{\delta}(0)\|_E \end{aligned}$$

et

$$\left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z} (x+1)}{\Lambda_z(-1)} \frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (L - h_+^{\delta}(0)) dz \right\|_E \leq C \delta \left(\frac{1}{\delta} \|L - h_+^{\delta}(0)\|_E \right)$$

Pour le dernier terme, on a

$$\frac{f_+^{\delta}}{\delta \Delta_z(-1, \delta)} - \frac{l}{\Lambda_z(-1)} = \frac{\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l}{\Delta_z(-1, \delta)} + \left(\frac{1}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{1}{\Lambda_z(-1)} \right) l$$

alors

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z} (x+1)}{z \Delta_z(-1, \delta)} A(A-zI)^{-1} (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right) dz \right\|_E \\ & \leq C \int_{\gamma} \frac{\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (x+1)}{|z| \delta |\Delta_z(-1, \delta)|} \left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right) \right\|_E |dz| \\ & \leq C \int_{\gamma} \frac{\delta e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} (x+1)}}{|z| e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta+1)}} \left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right) \right\|_E |dz| \\ & \leq C \delta \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta-x)}}{|z|} |dz| \left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right) \right\|_E \\ & \leq C \delta \left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right) \right\|_E \end{aligned}$$

puisque $(-A)^{1/2} l \in \overline{D(A)}$, l'autre terme se fait en adaptant la technique de la preuve du théorème 3.4, on obtient

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z} (x+1)}{z} \left(\frac{1}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{1}{\Lambda_z(-1)} \right) A(A-zI)^{-1} (-A)^{1/2} l dz \right\|_E \\ & \leq C \delta \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_E. \end{aligned}$$

■

Proposition 4.4 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\begin{aligned} & \|u_+^{\delta} - u_+\|_{C([-1,0];E)} \\ & \leq C \delta \left(\|Af_- - g_-(-1)\|_E + \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} + \|g_-(0) - h_+^{\delta}(0)\|_E \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\delta} \|L - h_+^{\delta}(0)\|_E + \frac{1}{\delta^2} \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} + \left\| \frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right\|_E + \|l\|_E \right) \end{aligned}$$

pour $x \in [0, \delta]$.

Preuve. On rappelle que

$$\begin{aligned}
& u_+^\delta(x) - u_+ \\
= & \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma q(x) \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (Af_- - g_-(-1)) dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^0 q(x) \sinh \sqrt{-z} (\tau + 1) \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_-(\tau) - g_-(0)) d\tau dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma q(x) \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (g_-(-1) - g_-(0)) dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma q(x) \cosh \sqrt{-z} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (g_-(0) - g_+^\delta(0)) dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z} \Lambda_z(-1)} (A - zI)^{-1} (L - g_+^\delta(0)) dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^x \frac{\Delta_z^+(\tau, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)) d\tau dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_x^\delta \frac{\Delta_z^+(x, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - \tau)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(x)) d\tau dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \left(\frac{\cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} - 1 \right) \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (g_+^\delta(x) - g_+^\delta(0)) dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} \left(\frac{\Delta_z^+(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} f_+^\delta - \frac{\sinh \sqrt{-z}}{\Lambda_z(-1)} l \right) dz \\
= & \sum_{i=1}^9 J_i.
\end{aligned}$$

où

$$q(x) = \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{1}{\Lambda_z(-1)}.$$

Pour tout $x \in [0, \delta]$, on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{1}{\Lambda_z(-1)} \right| \\
= & \left| \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x) \Lambda_z(-1) - \Delta_z(-1, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta) \Lambda_z(-1)} \right| \\
\leq & C \frac{\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x) |\Lambda_z(-1)| + \delta |\Delta_z(-1, \delta)|}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)| |\Lambda_z(-1)|} \\
\leq & C \frac{\delta e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x)} (1 + |z|^{1/2}) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} + e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} (\delta + |1 - e^{-2\sqrt{-z} \delta}|)}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta + 1)} (1 + |z|^{1/2}) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \frac{\delta e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} x} \left(1 + |z|^{1/2}\right) + \left(\delta + 2|z|^{1/2} \left| \int_0^\delta e^{-2\sqrt{-z}s} ds \right| \right)}{\left(1 + |z|^{1/2}\right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}} \\
&\leq C \delta \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} x} \left(1 + |z|^{1/2}\right) + \left(1 + 2|z|^{1/2}\right)}{\left(1 + |z|^{1/2}\right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}} \leq 3C \delta e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}}.
\end{aligned}$$

Pour le premier terme, on obtient

$$\begin{aligned}
\|J_1\|_E &\leq C \int_\gamma \left| \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{1}{\Lambda_z(-1)} \right| \frac{1}{|z|^2} \|Af_- - g_-(-1)\|_E |dz| \\
&\leq 3C \delta \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^2} \|Af_- - g_-(-1)\|_E |dz| \leq C \delta \|Af_- - g_-(-1)\|_E.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on a pour le deuxième terme

$$\begin{aligned}
&\|J_2\|_E \\
&\leq \int_\gamma \int_{-1}^0 \left| \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{1}{\Lambda_z(-1)} \right| \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau + 1) \frac{|\tau|^{2\alpha_0}}{|z|^{3/2}} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} d\tau |dz| \\
&\leq 3C \delta \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{3/2}} \int_{-1}^0 \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau + 1) |\tau|^{2\alpha_0} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq 3C \delta \int_\gamma e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \left(\frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} \right) \frac{1}{|z|^{3/2}} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} |dz| \\
&\leq 3C \delta \int_\gamma \frac{1}{|z|^{2+\alpha_0}} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \leq C \delta \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}.
\end{aligned}$$

Pour J_3

$$\begin{aligned}
&\|J_3\| \\
&\leq C \int_\gamma \left| \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{1}{\Lambda_z(-1)} \right| \frac{1}{|z|^2} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq 3C \delta \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^2} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \leq C \delta \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)},
\end{aligned}$$

de la même manière

$$\|J_4\|_E \leq C \delta \|g_-(0) - g_+^\delta(0)\|_E.$$

Par l'hypothèse (4.4), le cinquième terme se fait de la manière suivante

$$\begin{aligned}
& \|J_5\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z} (A - zI)^{-1}}{\Lambda_z(-1) \sqrt{-z}} (L - h_+^\delta(0)) dz \right\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} \frac{1}{|\Lambda_z(-1)|} \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}}{|z|^{3/2}} |dz| \|L - h_+^\delta(0)\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{(1 + |z|^{1/2}) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} |z|^{3/2}} |dz| \|L - h_+^\delta(0)\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} \frac{1}{|z|^2} |dz| \|L - g_+^\delta(0)\|_E \leq C \delta \left(\frac{1}{\delta} \|L - h_+^\delta(0)\|_E \right).
\end{aligned}$$

Les estimations suivantes sont très utiles pour traité le sixième terme,

$$\begin{aligned}
|\sinh \sqrt{-z}ts| &\leq \frac{se^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}ts}}{2} \left| 1 - e^{-2\sqrt{-z}ts} \right| \\
&\leq |z|^{1/2} se^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}ts} \left| \int_0^t e^{-2\sqrt{-z}\zeta s} d\zeta \right| \\
&\leq ts |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}ts},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\Delta_z(-1, ts)| &= |t \cosh \sqrt{-z}ts \cosh \sqrt{-z} + \sinh \sqrt{-z}ts \sinh \sqrt{-z}| \\
&\leq (t+1) \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}ts \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \\
&\leq (t+1) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}ts} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|\delta \Delta_z^+(\delta s, \delta)| &= \left| \int_0^\delta [\sinh \sqrt{-z}ts \cosh \sqrt{-z} + t\sqrt{-z}\Delta_z(-1, ts)] dt \right| \\
&\leq \int_0^\delta |\sinh \sqrt{-z}ts \cosh \sqrt{-z} + t\sqrt{-z}\Delta_z(-1, ts)| dt \\
&\leq \int_0^\delta \left(|\sinh \sqrt{-z}ts| \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} + t|z|^{1/2} |\Delta_z(-1, ts)| \right) dt \\
&\leq \int_0^\delta \left(ts |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}ts} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} + t|z|^{1/2} |\Delta_z(-1, ts)| \right) dt \\
&\leq \int_0^\delta t |z|^{1/2} (s+t+1) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}ts} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} dt \\
&\leq \int_0^\delta t(2+t) |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}ts} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} dt \\
&\leq \int_0^\delta \delta(2+\delta) |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta s} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} dt \\
&\leq \delta^2(2+\delta) |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta s+1)}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
& \|J_6\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{\frac{x}{\delta}} \frac{\delta^2 \Delta_z^+ (\delta s, \delta) \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\delta \sqrt{-z} \Delta_z (-1, \delta)} (A - zI)^{-1} \left(h_+^{\delta}(s) - h_+^{\delta}\left(\frac{x}{\delta}\right) \right) ds dz \right\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} \int_0^{\frac{x}{\delta}} \frac{\delta^2 |\Delta_z^+ (\delta s, \delta)| \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x)}{\delta |\Delta_z (-1, \delta)| |z|^{3/2}} \left| s - \frac{x}{\delta} \right|^{2\alpha_0} ds |dz| \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \int_{\gamma} \int_0^{\frac{x}{\delta}} \frac{\delta^3 (2 + \delta) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta s + 1)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x)}}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta + 1)} |z|} \left| \frac{x}{\delta} \right|^{2\alpha_0} ds |dz| \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \frac{\delta^3 (\delta + 2)}{\delta^{2\alpha_0}} \int_{\gamma} \int_0^{\frac{x}{\delta}} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta s - x)}}{|z|} |x|^{2\alpha_0} ds |dz| \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \frac{\delta^3 (\delta + 2)}{\delta^{2\alpha_0}} \int_{\gamma} \frac{1 - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{\delta |z|^{3/2}} |x|^{2\alpha_0} |dz| \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \frac{\delta^2 (\delta + 2)}{\delta^{2\alpha_0}} \int_{\gamma} \frac{1}{|z|^{3/2}} |dz| \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C\delta \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)}
\end{aligned}$$

En utilisant l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
|\cosh \sqrt{-z}(\delta - \tau)| &\leq |z|^{1/2} \int_0^{\delta} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(t - \tau) dt \\
&\leq |z|^{1/2} \int_0^{\delta} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - \tau) dt \\
&\leq \delta |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - \tau)},
\end{aligned}$$

le septième terme donne

$$\begin{aligned}
& \|J_7\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} \int_x^{\delta} \frac{|\Delta_z^+ (x, \delta)| |\cosh \sqrt{-z}(\delta - \tau)|}{|z|^{3/2} |\Delta_z (-1, \delta)|} |\tau - x|^{2\alpha_0} \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} d\tau |dz| \\
&\leq C \int_{\gamma} \int_x^{\delta} \frac{\delta |z|^{1/2} |\Delta_z^+ (x, \delta)| e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - \tau)}}{|z|^{3/2} |\Delta_z (-1, \delta)|} |\tau - x|^{2\alpha_0} \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} d\tau |dz| \\
&\leq C \int_{\gamma} \int_x^{\delta} \frac{\delta (\delta + 1) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - \tau)}}{|z| \delta |\Delta_z (-1, \delta)|} |\tau - x|^{2\alpha_0} \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} d\tau |dz| \\
&\leq C \int_{\gamma} \int_x^{\delta} \frac{\delta (\delta + 1) e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau - x)}}{|z|} |\tau - x|^{2\alpha_0} \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} d\tau |dz| \\
&\leq C\delta (\delta + 1) \int_x^{\delta} \left(\int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau - x)}}{|z|} |dz| \right) |\tau - x|^{2\alpha_0} d\tau \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq C\delta (\delta + 1) \int_x^{\delta} (\tau - x)^{2\alpha_0} d\tau \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
&\leq C\delta (\delta + 1) \delta^{2\alpha_0 + 1} \|g_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \leq C\delta^2 (\delta + 1) \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)}.
\end{aligned}$$

Pour J_8 , on a

$$\begin{aligned}
& \|J_8\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left(\frac{\cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} - 1 \right) \frac{(A - zI)^{-1}}{z} \left(h_+^\delta \left(\frac{x}{\delta} \right) - h_+^\delta(0) \right) dz \right\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} \left| \frac{\cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} - 1 \right| \frac{1}{|z|^2} \left(\frac{x}{\delta} \right)^{2\alpha_0} |dz| \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \int_{\gamma} \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x)}{|\Delta_z(-1, \delta)|} \frac{1}{|z|^2} |dz| \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \int_{\gamma} \frac{\delta e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x)}}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta + 1)}} \frac{1}{|z|^2} |dz| \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \delta \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^2} |dz| \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \leq C \delta \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)}
\end{aligned}$$

Pour le dernier terme, on a

$$\begin{aligned}
& \left| \delta \Delta_z^+(x, \delta) \Lambda_z(-1) - \sinh \sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta) \right| \\
&\leq C (\delta + 1) \left(1 + |z|^{1/2} \right) \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \\
&\quad + C \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \left(\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta + \frac{1}{\delta} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} |\sinh \sqrt{-z}\delta| \right) \\
&\leq C (\delta + 1) \left(1 + |z|^{1/2} \right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \\
&\quad + C e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \left(e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta} + \frac{1}{\delta} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}}{2} \left| 1 - e^{-2\sqrt{-z}\delta} \right| \right) \\
&\leq C \left((\delta + 1) \left(1 + |z|^{1/2} \right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} + e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta} \left(1 + \frac{|z|^{1/2}}{\delta} \left| \int_0^\delta e^{-2\sqrt{-z}s} ds \right| \right) \right) e^{2\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \\
&\leq C \left((\delta + 1) \left(1 + |z|^{1/2} \right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} + e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta} \left(1 + |z|^{1/2} \right) \right) e^{2\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \\
&\leq C \left(1 + |z|^{1/2} \right) \left[(\delta + 1) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} + e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta} \right] e^{2\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \\
&\leq C \left(1 + |z|^{1/2} \right) (\delta + 2) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta} e^{2\operatorname{Re} \sqrt{-z}},
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\delta \Delta_z^+(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\sinh \sqrt{-z}}{\Lambda_z(-1)} \right| &= \left| \frac{\delta \Delta_z^+(x, \delta) \Lambda_z(-1) - \sinh \sqrt{-z} \Delta_z(-1, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta) \Lambda_z(-1)} \right| \\
&\leq C \delta \frac{\left(1 + |z|^{1/2} \right) (\delta + 2) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta} e^{2\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)| |\Lambda_z(-1)|} \\
&\leq C \delta \frac{\left(1 + |z|^{1/2} \right) (\delta + 2) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta} e^{2\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{\left(1 + |z|^{1/2} \right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta + 2)}} \\
&\leq C \delta (\delta + 2),
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
& \|J_9\|_E \\
&= \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} \left[\frac{\delta \Delta_z^+(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \left(\frac{1}{\delta} f_+^\delta - l \right) + \left(\frac{\delta \Delta_z^+(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\sinh \sqrt{-z}}{\Lambda_z(-1)} \right) l \right] dz \right\|_E \\
&\leq C \int_\gamma \frac{1}{|z|^{3/2}} \left[\left| \frac{\delta \Delta_z^+(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \right| \left\| \frac{1}{\delta} f_+^\delta - l \right\|_E + \left| \frac{\delta \Delta_z^+(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\sinh \sqrt{-z}}{\Lambda_z(-1)} \right| \|l\|_E \right] |dz| \\
&\leq C \int_\gamma \frac{1}{|z|^{3/2}} \left[\delta (\delta + 1) e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)} \left\| \frac{1}{\delta} f_+^\delta - l \right\|_E + \delta (\delta + 3) \|l\|_E \right] |dz| \\
&\leq C \delta (\delta + 2) \int_\gamma \frac{1}{|z|^{3/2}} |dz| \left(\left\| \frac{1}{\delta} f_+^\delta - l \right\|_E + \|l\|_E \right) \leq C \delta \left(\left\| \frac{1}{\delta} f_+^\delta - l \right\|_E + \|l\|_E \right).
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.5 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\begin{aligned}
& \|Au_+^\delta - Au_+\|_{C([-1,0];E)} \\
&\leq C \delta \left(\|Af_- - g_-(-1)\|_E + \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} + \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \right. \\
&\quad \left. + \|g_-(0) - g_+^\delta(0)\|_E + \|L - g_+^\delta(0)\|_E + \left\| (-A)^{1/2} \frac{1}{\delta} f_+^\delta \right\|_E + \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_E \right)
\end{aligned}$$

pour $x \in [0, \delta]$.

Preuve. On applique l'opérateur A à l'expression de $(u_+^\delta(x) - u_+)$ de la preuve précédente on a

$$Au_+^\delta(x) - Au_+ = \sum_{i=1}^9 I_i,$$

on rappelle que

$$q(x) = \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{1}{\Lambda_z(-1)}.$$

Pour tout $x \in [0, \delta]$, on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
& |q(x)| \\
&= \left| \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta-x) \Lambda_z(-1) - \Delta_z(-1, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta) \Lambda_z(-1)} \right| \\
&\leq C \frac{\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x) |\Lambda_z(-1)| + \delta |\Delta_z(-1, \delta)|}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)| |\Lambda_z(-1)|} \\
&\leq C \frac{\delta e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta-x)} \left(1 + |z|^{1/2} \right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} + e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta} \left(\delta + \left| 1 - e^{-2\sqrt{-z}\delta} \right| \right)}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} \left(1 + |z|^{1/2} \right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \frac{\delta e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} \left(1 + |z|^{1/2}\right) + \left(\delta + 2|z|^{1/2} \left| \int_0^\delta e^{-2\sqrt{-z}s} ds \right| \right)}{\left(1 + |z|^{1/2}\right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}} \\
&\leq C \delta \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} \left(1 + |z|^{1/2}\right) + \left(1 + 2|z|^{1/2}\right)}{\left(1 + |z|^{1/2}\right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}} \\
&\leq C \delta \left(2 + e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}\right) e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \\
&\leq 3C \delta e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}}
\end{aligned}$$

Pour le premier terme, on obtient

$$\begin{aligned}
&\|I_1\|_E \\
&\leq C \int_\gamma |q(x)| \frac{1}{|z|} \|Af_- - g_-(-1)\|_E |dz| \\
&\leq 3C \delta \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|} \|Af_- - g_-(-1)\|_E |dz| \leq C \delta \|Af_- - g_-(-1)\|_E
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned}
&\|I_2\|_E \\
&\leq \int_\gamma \int_{-1}^0 |q(x)| \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau + 1) \frac{|\tau|^{2\alpha_0}}{|z|^{1/2}} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq 3C \delta \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1/2}} \int_{-1}^0 \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau + 1) |\tau|^{2\alpha_0} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq 3C \delta \int_\gamma e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \left(\frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} \right) \frac{1}{|z|^{1/2}} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} |dz| \\
&\leq 3C \delta \int_\gamma \frac{1}{|z|^{1+\alpha_0}} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \leq C \delta \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|I_3\| &\leq C \int_\gamma |q(x)| \frac{1}{|z|} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq 3C \delta \int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \leq C \delta \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}.
\end{aligned}$$

Puisque $g_-(0) - g_+^\delta(0) \in \overline{D(A)}$ et $L - h_+^\delta(0) \in \overline{D(A)}$, le quatrième et le cinquième termes sont traités en adaptant la preuve du théorème 3.4, on obtient

$$\|I_4\|_E \leq C \delta \|g_-(0) - g_+^\delta(0)\|_E,$$

et

$$\|I_5\|_E \leq C \delta \left(\frac{1}{\delta} \|L - h_+^\delta(0)\|_E \right).$$

Pour le sixième terme, on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
|\delta \Delta_z^+(\delta s, \delta)| &= \left| \int_0^\delta [\sinh \sqrt{-z} t s \cosh \sqrt{-z} + t \sqrt{-z} \Delta_z(-1, t s)] dt \right| \\
&\leq C \int_0^\delta |\sinh \sqrt{-z} t s \cosh \sqrt{-z} + t \sqrt{-z} \Delta_z(-1, t s)| dt \\
&\leq C \int_0^\delta \left(\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} t s \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} + t |z|^{1/2} |\Delta_z(-1, t s)| \right) dt \\
&\leq C \int_0^\delta \left(e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} t s} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} + t |z|^{1/2} (t+1) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} t s} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \right) dt \\
&\leq C \int_0^\delta \left(1 + t(t+1) |z|^{1/2} \right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} t s} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} dt \\
&\leq C \int_0^\delta \left(1 + 2 |z|^{1/2} \right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta s} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} dt \leq 2C\delta \left(1 + |z|^{1/2} \right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta s+1)}, \\
\|I_6\|_E &\leq C \int_\gamma \int_0^{\frac{x}{\delta}} \frac{\delta^2 |\Delta_z^+(\delta s, \delta)| \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x)}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)| |z|^{1/2}} \left| s - \frac{x}{\delta} \right|^{2\alpha_0} ds |dz| \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \int_\gamma \int_0^{\frac{x}{\delta}} \frac{\delta^2 \left(1 + |z|^{1/2} \right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta s+1)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x)}}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)| |z|^{1/2}} \left(\frac{x}{\delta} - s \right)^{2\alpha_0} ds |dz| \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \int_\gamma \int_0^{\frac{x}{\delta}} \frac{\delta^2 \left(1 + |z|^{1/2} \right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta s+1)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x)}}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} |z|^{1/2}} \left(\frac{x}{\delta} - s \right)^{2\alpha_0} ds |dz| \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \frac{\delta^2}{\delta^{2\alpha_0}} \int_\gamma \int_0^{\frac{x}{\delta}} \frac{\left(1 + |z|^{1/2} \right)}{|z|^{1/2}} e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta s)} (x - \delta s)^{2\alpha_0} ds |dz| \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \frac{\delta^2}{\delta^{2\alpha_0}} \int_0^{\frac{x}{\delta}} \left(\int_\gamma \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta s)}}{|z|^{1/2}} |dz| + \int_\gamma e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta s)} |dz| \right) (x - \delta s)^{2\alpha_0} ds \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \frac{\delta^2}{\delta^{2\alpha_0}} \int_0^{\frac{x}{\delta}} \left(\int_{|z| \geq \frac{1}{(x-\delta s)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta s)}}{|z|^{1/2}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(x-\delta s)^2}} \frac{|dz|}{|z|^{1/2}} \right) (x - \delta s)^{2\alpha_0} ds \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\quad + C \frac{\delta^2}{\delta^{2\alpha_0}} \int_0^{\frac{x}{\delta}} 2 \frac{\int_{\sqrt{r_0}(x-\delta s)}^\infty \sin(\theta_0/2) \sigma e^{-\sigma} d\sigma}{(x - \delta s)^2 \sin^2(\theta_0/2)} (x - \delta s)^{2\alpha_0} ds \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C \frac{\delta}{\delta^{2\alpha_0}} x^{2\alpha_0} \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\quad + C \frac{\delta}{\delta^{2\alpha_0}} \left(\frac{2\sqrt{r_0}}{\sin(\theta_0/2)} x^{2\alpha_0} + \frac{2}{\sin^2(\theta_0/2)} x^{2\alpha_0-1} \right) \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
&\leq C\delta \left(\frac{1}{\delta} \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \right).
\end{aligned}$$

On fait de même pour le septième terme, on obtient

$$\|I_7\|_E \leq C\delta \left(\frac{1}{\delta} \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \right),$$

et

$$\begin{aligned}
& \|I_8\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} \left| \frac{\cosh \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}(\delta - x)}{\Delta_z(-1, \delta)} - 1 \right| \frac{|x|^{2\alpha_0}}{|z|} |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\
& \leq C \int_{\gamma} \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x)}{|\Delta_z(-1, \delta)|} \frac{|x|^{2\alpha_0}}{|z|} |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\
& \leq C \int_{\gamma} \frac{\delta e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta - x)}}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta + 1)}} \frac{|x|^{2\alpha_0}}{|z|} |dz| \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\
& \leq C \delta \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|} |dz| |x|^{2\alpha_0} \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \\
& \leq C \delta \|g_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)} \leq C \delta \left(\frac{1}{\delta} \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0, 1]; E)} \right).
\end{aligned}$$

Pour le dernier terme, on a

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{A(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} \left(\frac{\Delta_z^+(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} f_+^\delta - \frac{\sinh \sqrt{-z}l}{\Lambda_z(-1)} l \right) dz \\
& = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} (-A)^{1/2} \left(\frac{\Delta_z^+(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} f_+^\delta - \frac{\sinh \sqrt{-z}l}{\Lambda_z(-1)} l \right) dz \\
& = -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\delta \Delta_z^+(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} \frac{A(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^\delta - l \right) dz \\
& \quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \left(\frac{\delta \Delta_z^+(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\sinh \sqrt{-z}}{\Lambda_z(-1)} \right) \frac{A(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (-A)^{1/2} l dz \\
& = I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

On a $(-A)^{1/2} f_+^\delta \in \overline{D(A)}$ et $(-A)^{1/2} l \in \overline{D(A)}$, I_1 et I_2 sont traités en adaptant la preuve du théorème 3.4, on trouve

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} (-A)^{1/2} \left(\frac{\Delta_z^+(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} f_+^\delta - \frac{\sinh \sqrt{-z}l}{\Lambda_z(-1)} l \right) dz \right\|_E \\
& \leq C \delta \left(\left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^\delta - l \right) \right\|_E + \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_E \right).
\end{aligned}$$

■

4.2.2 Estimation d'erreur pour les solutions régulières

Ici on supposera les conditions de régularité maximale de la solution, liées aux conditions aux limites

$$\begin{cases} f_- \in D(A), Af_- - g_-(-1) \in D_A(\alpha_0, +\infty) \\ f_+^\delta \in D(\sqrt{-A}), (-A)^{1/2} f_+^\delta \in D_A(\alpha_0, +\infty) \end{cases} \quad (4.7)$$

et celle liée à la nature même du problème de transmission sur l'interface

$$g_-(0) - g_+^\delta(0) \in D_A(\alpha_0, +\infty). \quad (4.8)$$

Naturellement, il est nécessaire de faire des hypothèses sur le comportement des données en fonction du paramètre δ .

Dans ce paragraphe on supposera que

$$\begin{cases} \exists L \in D_A(\alpha_0, +\infty) : \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta} \int_0^\delta g_+^\delta(\tau) d\tau \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_0^1 h_+^\delta(s) ds \right] = L \\ \exists l \in D_A\left(\frac{1}{2} + \alpha_0, +\infty\right) : \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta} f_+^\delta \right] = l. \end{cases} \quad (4.9)$$

Proposition 4.6 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\begin{aligned} & \|u_-^\delta - u_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\ & \leq C\delta^2 \left(\|Af_- - g_-(-1)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} + \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} + \frac{1}{\delta} \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \right. \\ & \quad + \|g_-(0) - g_+^\delta(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} + \frac{1}{\delta^2} \|L - g_+^\delta(0)\|_E \\ & \quad \left. + \frac{1}{\delta} \left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^\delta - l \right) \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} + \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \right) \end{aligned}$$

pour $x \in [-1, 0]$.

Preuve. On rappelle que, pour tout ξ, x tels que $-1 \leq \xi < x \leq 0$,

$$\begin{aligned} & u_-^\delta(x) - u_-(x) - u_-^\delta(\xi) + u_-(\xi) \\ & = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (t(x) - t(\xi)) \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (Af_- - g_-(-1)) dz \\ & \quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (t(x) - t(\xi)) \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (g_-(-1) - g_-(\xi)) dz \\ & \quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^\xi (t(x) - t(\xi)) \sinh \sqrt{-z}(\tau + 1) \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_-(\tau) - g_-(\xi)) d\tau dz \\ & \quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_\xi^x t(x) \sinh \sqrt{-z}(\tau + 1) \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_-(\tau) - g_-(x)) d\tau dz \\ & \quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_x^0 \int_\xi^x t(\tau) \cosh \sqrt{-z}(s + 1) (A - zI)^{-1} (g_-(\tau) - g_-(x)) ds d\tau dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{\xi}^x t(\tau) \sinh \sqrt{-z} (\xi + 1) \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_-(\tau) - g_-(\xi)) d\tau dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (t(x) - t(\xi)) \cosh \sqrt{-z} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (g_-(0) - g_-(x)) dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_x^0 t(\tau) \sinh \sqrt{-z} (\xi + 1) \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_-(\xi) - g_-(x)) d\tau dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} t(x) \cosh \sqrt{-z} (\xi + 1) \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (g_-(x) - g_-(\xi)) dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} t(\xi) \cosh \sqrt{-z} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (g_-(\xi) - g_-(x)) dz \\
& - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{\delta} \int_{\xi}^x \frac{\cosh \sqrt{-z} (s + 1) \cosh \sqrt{-z} (\delta - \tau)}{\delta \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} (g_+^{\delta}(\tau) - g_+^{\delta}(0)) ds d\tau dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (t(x) - t(\xi)) \cosh \sqrt{-z} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (g_-(0) - g_+^{\delta}(0)) dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{\cosh \sqrt{-z} (s + 1)}{\Lambda_z(-1)} (A - zI)^{-1} (L - g_+^{\delta}(0)) ds dz \\
& + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \cosh \sqrt{-z} (s + 1) (A - zI)^{-1} \left[\frac{f_+^{\delta}}{\delta \Delta_z(-1, \delta)} - \frac{l}{\Lambda_z(-1)} \right] ds dz
\end{aligned}$$

où

$$t(x) = \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)}.$$

Pour tout $x \in [-1, 0]$, on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
|\delta \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta - \sinh \sqrt{-z} \delta| &= \left| (\sqrt{-z})^2 \int_0^{\delta} s \sinh \sqrt{-z} s ds \right| \\
&\leq C |z| \int_0^{\delta} s \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} s ds \\
&\leq C |z| \int_0^{\delta} \delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta ds \\
&\leq C |z| \delta^2 \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta \\
&\leq C |z| \delta^2 e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& |(t(x) - t(\xi))| \\
&= \left| \frac{\delta \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta - \sinh \sqrt{-z} \delta}{\delta \Delta_z(-1, \delta) \Lambda_z(-1)} (\sinh \sqrt{-z} (x + 1) - \sinh \sqrt{-z} (\xi + 1)) \right| \\
&= \left| \frac{\delta \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta - \sinh \sqrt{-z} \delta}{\delta \Delta_z(-1, \delta) \Lambda_z(-1)} \sqrt{-z} \int_{\xi}^x \cosh \sqrt{-z} (s + 1) ds \right| \\
&\leq C \frac{|\delta \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta - \sinh \sqrt{-z} \delta|}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)| |\Lambda_z(-1)|} |z|^{1/2} \int_{\xi}^x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (s + 1) ds \\
&\leq C \frac{|z| \delta^2 e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta}}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)| |\Lambda_z(-1)|} |z|^{1/2} \int_{\xi}^x e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} (s+1)} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\delta^2 \frac{|z| e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)| |\Lambda_z(-1)|} |z|^{1/2} \int_{\xi}^x e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}s} ds \\
&\leq C\delta^2 \frac{|z| e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)| |\Lambda_z(-1)|} |z|^{1/2} (x - \xi) \\
&\leq C\delta^2 \frac{|z| e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{(1 + |z|^{1/2})} |z|^{1/2} (x - \xi) \leq C\delta^2 |z| (x - \xi)^{2\alpha_0} e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
|t(x)| &= \left| \frac{\delta \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta - \sinh \sqrt{-z}\delta}{\delta \Delta_z(-1, \delta) \Lambda_z(-1)} \sinh \sqrt{-z}(x+1) \right| \\
&\leq C \frac{|\delta \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta - \sinh \sqrt{-z}\delta|}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)| |\Lambda_z(-1)|} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1) \\
&\leq C \frac{|z| \delta^2 e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)| |\Lambda_z(-1)|} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1) \\
&\leq C\delta^2 \frac{|z| e^{-2\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{(1 + |z|^{1/2})} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1) \\
&\leq C\delta^2 |z|^{1/2} e^{-2\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)
\end{aligned}$$

Pour le premier terme, on obtient

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (t(x) - t(\xi)) \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (Af_- - g_-(-1)) dz \right\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} \left| \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} - \frac{\Delta_z(\xi, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} + \frac{\Lambda_z(\xi)}{\Lambda_z(-1)} \right| \frac{\|Af_- - g_-(-1)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)}}{|z|^{2+\alpha_0}} |dz| \\
&\leq C\delta^2 \int_{\gamma} |z| (x - \xi)^{2\alpha_0} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{2+\alpha_0}} \|Af_- - g_-(-1)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} |dz| \\
&\leq C\delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1+\alpha_0}} |dz| \|Af_- - g_-(-1)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
&\leq C\delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \|Af_- - g_-(-1)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)}.
\end{aligned}$$

Le deuxième terme donne

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (t(x) - t(\xi)) \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (g_-(-1) - g_-(\xi)) dz \right\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} |t(x) - t(\xi)| \frac{|\xi + 1|^{2\alpha_0}}{|z|^2} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)} \\
&\leq C \int_{\gamma} \delta^2 |z| (x - \xi)^{2\alpha_0} e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \frac{|\xi + 1|^{2\alpha_0}}{|z|^2} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)} \\
&\leq C\delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)} \\
&\leq C\delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)}.
\end{aligned}$$

Le troisième terme se traite de la façon suivante

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-1}^{\xi} (t(x) - t(\xi)) \sinh \sqrt{-z} (\tau + 1) \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_-(\tau) - g_-(\xi)) d\tau dz \right\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_{-1}^{\xi} |t(x) - t(\xi)| \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau + 1) \frac{|\tau - \xi|^{2\alpha_0}}{|z|^{3/2}} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \int_{\gamma} \delta^2 |z| (x - \xi)^{2\alpha_0} e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \left(\int_{-1}^{\xi} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau + 1) |\tau - \xi|^{2\alpha_0} d\tau \right) \frac{|dz|}{|z|^{3/2}} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder pour l'expression entre parenthèses, on obtient

$$\begin{aligned}
& \leq C \delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \left(\frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (1 + \xi)}{|z|^{1/2 + \alpha_0}} \right) \frac{1}{|z|^{1/2}} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \xi}}{|z|^{1 + \alpha_0}} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}.
\end{aligned}$$

Pour le quatrième terme, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{\xi}^x t(x) \sinh \sqrt{-z} (\tau + 1) \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_-(\tau) - g_-(x)) d\tau dz \right\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x |t(x)| \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau + 1) \frac{|\tau - x|^{2\alpha_0}}{|z|^{3/2}} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta^2 |\xi - x|^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{|z| e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)}}{(1 + |z|^{1/2})} \int_{\xi}^x e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau+1)} d\tau \frac{|dz|}{|z|^{3/2}} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta^2 |\xi - x|^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{|z| e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)}}{(1 + |z|^{1/2})} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} - e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\xi+1)}}{|z|^{1/2}} \frac{|dz|}{|z|^{3/2}} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)}}{|z|^{3/2}} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{e^{2\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{3/2}} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

Pour le cinquième, le sixième, le septième et le huitième terme, on trouve

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_x^0 \int_{\xi}^x t(\tau) \cosh \sqrt{-z} (s+1) (A-zI)^{-1} (g_-(\tau) - g_-(x)) ds d\tau dz \right\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_x^0 \int_{\xi}^x |t(\tau)| e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)} \frac{|\tau-x|^{2\alpha_0}}{|z|} ds d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_x^0 \int_{\xi}^x \delta^2 |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-1)} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau+1) \frac{|\tau-x|^{2\alpha_0}}{|z|} ds d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta^2 \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-1)}}{|z|^{1/2}} \int_x^0 \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau+1) |\tau-x|^{2\alpha_0} d\tau ds |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta^2 \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-1)}}{|z|^{1/2}} \frac{2 \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z} x}{|z|^{1/2+\alpha_0}} ds |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta^2 \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-x)}}{|z|^{1+\alpha_0}} ds |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta^2 \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\xi-x)}}{|z|^{1+\alpha_0}} ds |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta^2 (x-\xi) \int_{\gamma} \frac{1}{|z|^{1+\alpha_0}} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta^2 (x-\xi)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{\xi}^x t(\tau) \sinh \sqrt{-z} (\xi+1) \frac{(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_-(\tau) - g_-(\xi)) d\tau dz \right\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x |t(\tau)| \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\xi+1) \frac{|\tau-\xi|^{2\alpha_0}}{|z|^{3/2}} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta^2 \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{|z| e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-\tau)}}{(1+|z|^{1/2})} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\xi+1) \frac{|x-\xi|^{2\alpha_0}}{|z|^{3/2}} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta^2 (x-\xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\tau}}{|z|} d\tau e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\xi} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta^2 (x-\xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+\xi)}}{|z|^{3/2}} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta^2 (x-\xi)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (t(x) - t(\xi)) \cosh \sqrt{-z} \frac{(A-zI)^{-1}}{z} (g_-(0) - g_-(x)) dz \right\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} |t(x) - t(\xi)| \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \frac{|x|^{2\alpha_0}}{|z|^2} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta^2 \int_{\gamma} \frac{|z| (e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)} - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-\xi)})}{(1+|z|^{1/2})} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \frac{|x|^{2\alpha_0}}{|z|^2} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\delta^2 \int_{\gamma} \int_{\xi}^x e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-\tau)} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \frac{|x|^{2\alpha_0}}{|z|} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C\delta^2 \int_{\gamma} \int_{\xi}^x e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\tau} \frac{|x|^{2\alpha_0}}{|z|} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C\delta^2 \int_{\gamma} \int_{\xi}^x e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x} \frac{|x|^{2\alpha_0}}{|z|} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C\delta^2 (x - \xi) \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|} |x|^{2\alpha_0} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C\delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_x^0 t(\tau) \sinh \sqrt{-z} (\xi + 1) \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_-(\xi) - g_-(x)) d\tau dz \right\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} \int_x^0 |t(\tau)| e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\xi+1)} \frac{|x - \xi|^{2\alpha_0}}{|z|^{3/2}} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C\delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \int_x^0 \frac{|z| e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-\tau)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\xi+1)}}{(1 + |z|^{1/2}) |z|^{3/2}} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C\delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \int_x^0 e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-\tau)} d\tau \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\xi+1)}}{|z|} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C\delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \left[e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}} - e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)} \right] \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\xi+1)}}{|z|^{3/2}} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C\delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{1}{|z|^{3/2}} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C\delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

Pour le neuvième et dixième terme, on a

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} t(x) \cosh \sqrt{-z} (\xi + 1) \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (g_-(x) - g_-(\xi)) dz \right\|_E \\
&\leq C \int_{\gamma} |t(x)| e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\xi+1)} \frac{|x - \xi|^{2\alpha_0}}{|z|^2} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C \int_{\gamma} \delta^2 \frac{|z| e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)}}{(1 + |z|^{1/2})} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\xi+1)} \frac{|x - \xi|^{2\alpha_0}}{|z|^2} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C\delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\xi+x)} \frac{|dz|}{|z|^{3/2}} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C\delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} t(\xi) \cosh \sqrt{-z} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (g_-(\xi) - g_-(x)) dz \right\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} |t(\xi)| \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \frac{|x - \xi|^{2\alpha_0}}{|z|^2} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C\delta^2 \int_{\gamma} \frac{|z| e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)}}{(1 + |z|^{1/2})} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}} \frac{(x - \xi)^{2\alpha_0}}{|z|^2} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C\delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}x}}{|z|^{3/2}} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C\delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

Le onzième et le douzième terme donnent

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\delta}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^1 \int_{\xi}^x \frac{\cosh \sqrt{-z} (s+1) \cosh \sqrt{-z} \delta (1 - \zeta)}{\delta \Delta_z(-1, \delta)} (A - zI)^{-1} (h_+^{\delta}(\zeta) - h_+^{\delta}(0)) ds d\zeta dz \right\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_0^1 \int_{\xi}^x \frac{\delta \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (s+1) \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta (1 - \zeta) |\zeta|^{2\alpha_0}}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)| |z|} ds d\zeta |dz| \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_0^1 \int_{\xi}^x \frac{\delta e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta (1 - \zeta)} |\zeta|^{2\alpha_0}}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} |z|} ds d\zeta |dz| \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
& \leq C\delta \int_{\gamma} \int_0^1 \int_{\xi}^x e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta \zeta} \frac{|\zeta|^{2\alpha_0}}{|z|} ds d\zeta |dz| \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
& \leq C\delta (x - \xi) \int_{\gamma} \int_0^1 \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta \zeta}}{|z|} d\zeta |dz| \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
& \leq C\delta (x - \xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{1}{|z|^{3/2}} d\zeta |dz| \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\
& \leq C\delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \left(\frac{1}{\delta} \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (t(x) - t(\xi)) \cosh \sqrt{-z} \frac{(A - zI)^{-1}}{z} (g_-(0) - g_+^{\delta}(0)) dz \right\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} |t(x) - t(\xi)| \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}}{|z|^{2+\alpha_0}} |dz| \|g_-(0) - g_+^{\delta}(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
& \leq C \int_{\gamma} \delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \frac{1}{|z|^{1+\alpha_0}} |dz| \|g_-(0) - g_+^{\delta}(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
& \leq C\delta^2 (x - \xi)^{2\alpha_0} \|g_-(0) - g_+^{\delta}(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)}.
\end{aligned}$$

Le treizième terme se traite en utilisant l'hypothèse (4.4)

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{\cosh \sqrt{-z}(s+1)}{\Lambda_z(-1)} (A-zI)^{-1} (L-h_+^{\delta}(0)) ds dz \right\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)}{|\Lambda_z(-1)|} \frac{1}{|z|} ds |dz| \|L-g_+^{\delta}(0)\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}s}}{|z|^{3/2}} ds |dz| \|L-g_+^{\delta}(0)\|_E \\
& \leq C(x-\xi) \int_{\gamma} \frac{1}{|z|^{3/2}} |dz| \|L-g_+^{\delta}(0)\|_E \\
& \leq C\delta^2(x-\xi)^{2\alpha_0} \left(\frac{1}{\delta^2} \|L-g_+^{\delta}(0)\|_E \right)
\end{aligned}$$

Pour le dernier terme, en utilisant (4.4) et l'estimation suivante

$$\left| 1 - \frac{\Delta_z(-1, \delta)}{\Lambda_z(-1)} \right| \leq C\delta \left(\frac{1}{|z|^{1/2}} + |z|^{1/2} \right) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta},$$

on a

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \cosh \sqrt{-z}(s+1) (A-zI)^{-1} \left[\frac{f_+^{\delta}}{\delta \Delta_z(-1, \delta)} - \frac{l}{\Lambda_z(-1)} \right] ds dz \right\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)}{|z|^{3/2+\alpha_0} |\Delta_z(-1, \delta)|} ds \left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right) \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} |dz| \\
& \quad + C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)}{|z|^{3/2+\alpha_0} |\Delta_z(-1, \delta)|} \left| 1 - \frac{\Delta_z(-1, \delta)}{\Lambda_z(-1)} \right| ds \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} |dz| \\
& \leq C\delta \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)}}{|z|^{3/2+\alpha_0} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}} ds \left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right) \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} |dz| \\
& \quad + C\delta \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)}}{|z|^{3/2+\alpha_0} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}} ds \left| 1 - \frac{\Delta_z(-1, \delta)}{\Lambda_z(-1)} \right| \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} |dz| \\
& \leq C\delta \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-\delta)}}{|z|^{3/2+\alpha_0}} ds \left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right) \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} |dz| \\
& \quad + C\delta \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-\delta)}}{|z|^{3/2+\alpha_0}} ds \left| 1 - \frac{\Delta_z(-1, \delta)}{\Lambda_z(-1)} \right| \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} |dz| \\
& \leq C\delta \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta)}}{|z|^{3/2+\alpha_0}} ds \left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right) \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} |dz| \\
& \quad + C\delta \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-\delta)}}{|z|^{3/2+\alpha_0}} ds \left| 1 - \frac{\Delta_z(-1, \delta)}{\Lambda_z(-1)} \right| \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} |dz|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\delta(x-\xi) \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\delta)}}{|z|^{3/2+\alpha_0}} |dz| \left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right) \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
&\quad + C\delta(x-\xi) \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}(x-\delta)}}{|z|^{3/2+\alpha_0}} \delta \left(\frac{1}{|z|^{1/2}} + |z|^{1/2} \right) e^{\operatorname{Re}\sqrt{-z}\delta} |dz| \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
&\leq C\delta^2(x-\xi)^{2\alpha_0} \left(\frac{1}{\delta} \left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right) \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \right) \\
&\quad + C\delta^2(x-\xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \left(\frac{1}{|z|^{2+\alpha_0}} + \frac{1}{|z|^{1+\alpha_0}} \right) |dz| \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
&\leq C\delta^2(x-\xi)^{2\alpha_0} \left(\frac{1}{\delta} \left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right) \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} + \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \right).
\end{aligned}$$

■

Proposition 4.7 *Il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\begin{aligned}
&\|Au_-^{\delta} - Au_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
&\leq C\delta \left(\|Af_- - g_-(-1)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} + \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} + \frac{1}{\delta^2} \|h_+^{\delta}\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \right. \\
&\quad + \|g_-(0) - g_+^{\delta}(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} + \frac{1}{\delta} \|L - h_+^{\delta}(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
&\quad \left. + \frac{1}{\delta} \left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right) \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} + \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \right)
\end{aligned}$$

pour $x \in [-1, 0]$.

Preuve. On rappelle que, pour tout ξ, x tels que $-1 \leq \xi < x \leq 0$,

$$\begin{aligned}
&Au_-^{\delta}(x) - Au_-(x) - Au_-^{\delta}(\xi) + Au_-(\xi) \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (t(x) - t(\xi)) \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} (Af_- - g_-(-1)) dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (t(x) - t(\xi)) \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} (g_-(-1) - g_-(\xi)) dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-1}^{\xi} (t(x) - t(\xi)) \sinh \sqrt{-z}(\tau+1) \frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_-(\tau) - g_-(\xi)) d\tau dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{\xi}^x t(x) \sinh \sqrt{-z}(\tau+1) \frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_-(\tau) - g_-(x)) d\tau dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_x^0 \int_{\xi}^x t(\tau) \cosh \sqrt{-z}(s+1) A(A-zI)^{-1} (g_-(\tau) - g_-(x)) ds d\tau dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{\xi}^x t(\tau) \sinh \sqrt{-z}(\xi+1) \frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_-(\tau) - g_-(\xi)) d\tau dz
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (t(x) - t(\xi)) \cosh \sqrt{-z} \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} (g_-(0) - g_-(x)) dz \\
& -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_x^0 t(\tau) \sinh \sqrt{-z} (\xi + 1) \frac{A(A-zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (g_-(\xi) - g_-(x)) d\tau dz \\
& -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} t(x) \cosh \sqrt{-z} (\xi + 1) \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} (g_-(x) - g_-(\xi)) dz \\
& -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} t(\xi) \cosh \sqrt{-z} \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} (g_-(\xi) - g_-(x)) dz \\
& -\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^{\delta} \int_{\xi}^x \frac{\cosh \sqrt{-z} (s+1) \cosh \sqrt{-z} (\delta - \tau)}{\delta \Delta_z(-1, \delta)} A(A-zI)^{-1} (g_+^{\delta}(\tau) - g_+^{\delta}(0)) ds d\tau dz \\
& +\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (t(x) - t(\xi)) \cosh \sqrt{-z} \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} (g_-(0) - g_+^{\delta}(0)) dz \\
& +\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{\cosh \sqrt{-z} (s+1)}{\Lambda_z(-1)} A(A-zI)^{-1} (L - g_+^{\delta}(0)) ds dz \\
& +\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \cosh \sqrt{-z} (s+1) A(A-zI)^{-1} \left[\frac{f_+^{\delta}}{\delta \Delta_z(-1, \delta)} - \frac{l}{\Lambda_z(-1)} \right] ds dz \\
& = \sum_{i=1}^{14} I_i.
\end{aligned}$$

où

$$t(x) = \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)}.$$

Pour tout $x \in [-1, 0]$, on a les estimations suivantes

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\Delta_z(x, \delta)}{\Delta_z(-1, \delta)} - \frac{\Lambda_z(x)}{\Lambda_z(-1)} \right| \\
& = \left| \frac{\delta \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta - \sinh \sqrt{-z} \delta}{\delta \Delta_z(-1, \delta) \Lambda_z(-1)} \sinh \sqrt{-z} (x+1) \right| \\
& \leq C \frac{|\delta \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta - \sinh \sqrt{-z} \delta|}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)| |\Lambda_z(-1)|} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (x+1) \\
& \leq C \frac{\delta |z|^{1/2} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta + |\sinh \sqrt{-z} \delta|}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)| |\Lambda_z(-1)|} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (x+1) \\
& \leq C \frac{\delta |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} + e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} |1 - e^{-2\sqrt{-z} \delta}|}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta+1)} (1 + |z|^{1/2}) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (x+1) \\
& \leq C \frac{\delta |z|^{1/2} + 2 |z|^{1/2} \left| \int_0^{\delta} e^{-2\sqrt{-z} s} ds \right|}{e^{2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}} (1 + |z|^{1/2})} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} (x+1)} \\
& \leq 3C \delta e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z} (1-x)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& |t(x) - t(\xi)| \\
& \leq C \frac{|\delta \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z} \delta - \sinh \sqrt{-z} \delta|}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)| |\Lambda_z(-1)|} |z|^{1/2} \int_{\xi}^x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (s+1) ds \\
& \leq C \frac{\delta |z|^{1/2} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta + |\sinh \sqrt{-z} \delta|}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)| |\Lambda_z(-1)|} |z|^{1/2} \int_{\xi}^x \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (s+1) ds \\
& \leq C \frac{\delta |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} + \frac{1}{2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} |1 - e^{-2\sqrt{-z} \delta}|}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} (1 + |z|^{1/2}) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}} |z|^{1/2} \int_{\xi}^x e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)} ds \\
& \leq C \frac{\delta |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} + |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} \left| \int_0^{\delta} e^{-2\sqrt{-z}s} ds \right|}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} (1 + |z|^{1/2}) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}} |z|^{1/2} (x - \xi) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} \\
& \leq C (x - \xi)^{2\alpha_0} \frac{\delta |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta} + \delta |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta}}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)} (1 + |z|^{1/2}) e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}} |z|^{1/2} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+1)} \\
& \leq C |z|^{1/2} \delta (x - \xi)^{2\alpha_0} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-1)}.
\end{aligned}$$

Pour le premier terme, on obtient

$$\begin{aligned}
& \|I_1\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} |t(x) - t(\xi)| \frac{\|Af_- - g_-(-1)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)}}{|z|^{1+\alpha_0}} |dz| \\
& \leq C \int_{\gamma} |z|^{1/2} \delta (x - \xi)^{2\alpha_0} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-1)} \frac{1}{|z|^{1+\alpha_0}} \|Af_- - g_-(-1)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} |dz| \\
& \leq C \delta (x - \xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-1)}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| \|Af_- - g_-(-1)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
& \leq C \delta (x - \xi)^{2\alpha_0} \|Af_- - g_-(-1)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)}.
\end{aligned}$$

Pour le terme I_2 , on a

$$\begin{aligned}
& \|I_2\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} |t(x) - t(\xi)| \frac{|\xi + 1|^{2\alpha_0}}{|z|} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \int_{\gamma} |z|^{1/2} \delta (x - \xi)^{2\alpha_0} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-1)} \frac{|\xi + 1|^{2\alpha_0}}{|z|} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta (x - \xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-1)}}{|z|^{1/2}} |dz| |\xi + 1|^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta (x - \xi)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder pour le troisième terme, on trouve

$$\begin{aligned}
& \|I_3\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_{-1}^{\xi} |t(x) - t(\xi)| \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau + 1) \frac{|\tau - \xi|^{2\alpha_0}}{|z|^{1/2}} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_{-1}^{\xi} \delta (x - \xi)^{2\alpha_0} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-1)} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau + 1) |\tau - \xi|^{2\alpha_0} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta (x - \xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-1)} \int_{-1}^{\xi} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau + 1) |\tau - \xi|^{2\alpha_0} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta (x - \xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-1)} \left(\frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (1 + \xi)}{|z|^{1/2+\alpha_0}} \right) |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta (x - \xi)^{2\alpha_0} \int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x+\xi)}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta (x - \xi)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

Pour I_4 , on a

$$\begin{aligned}
& \|I_4\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x |t(x)| \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau + 1) \frac{|\tau - x|^{2\alpha_0}}{|z|^{1/2}} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq 3C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \delta e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau + 1) \frac{|\tau - x|^{2\alpha_0}}{|z|^{1/2}} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq 3C \delta \int_{\gamma} \int_{\xi}^x e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(1-x)} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau+1)} \frac{|\tau - x|^{2\alpha_0}}{|z|^{1/2}} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau+x)}}{|z|^{1/2}} |\tau - x|^{2\alpha_0} d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta \int_{\xi}^x \left(\int_{\gamma} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\tau+x)}}{|z|^{1/2}} |dz| \right) |\tau - x|^{2\alpha_0} d\tau \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta \int_{\xi}^x \frac{|\tau - x|^{2\alpha_0}}{(\tau + x)} d\tau \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta |\xi - x|^{2\alpha_0} \int_{\xi}^x \frac{1}{(\tau + x)} d\tau \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta (x - \xi)^{2\alpha_0} \ln \left(\frac{2x}{\xi + x} \right) \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta (x - \xi)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}
\end{aligned}$$

De la même manière on traite les intégrales I_6, I_7, I_8, I_9 et I_{10} .

$$\begin{aligned}
& \|I_5\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_x^0 \int_{\xi}^x |t(\tau)| e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)} |\tau - x|^{2\alpha_0} ds d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_x^0 \int_{\xi}^x \delta e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-1)} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau + 1) |\tau - x|^{2\alpha_0} ds d\tau |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \delta e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-1)} \int_x^0 \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\tau + 1) |\tau - x|^{2\alpha_0} d\tau ds |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \delta e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-1)} \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z} x}{|z|^{1/2+\alpha_0}} ds |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-x)}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} ds |dz| \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta \int_{\xi}^x \left(\int_{|z| \geq \frac{1}{(x-s)^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-s)}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{(x-s)^2}} \frac{1}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| \right) ds \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta \int_{\xi}^x \frac{1}{(x-s)^{1-2\alpha_0}} ds \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)} \\
& \leq C \delta (x-\xi)^{2\alpha_0} \|g_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1,0];E)}.
\end{aligned}$$

Pour I_{11} , on obtient

$$\begin{aligned}
& \|I_{11}\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_0^{\delta} \int_{\xi}^x \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (s+1) \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - \tau)}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)|} |\tau|^{2\alpha_0} ds d\tau |dz| \|g_+\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)}}{\delta |\Delta_z(-1, \delta)|} \left(\int_0^{\delta} \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z} (\delta - \tau) |\tau|^{2\alpha_0} d\tau \right) ds |dz| \|g_+\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)}}{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}} \left(\frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z} \delta}{|z|^{1/2+\alpha_0}} \right) ds |dz| \|g_+\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
& \leq C \int_{\xi}^x \left(\int_{|z| \geq \frac{1}{s^2}} \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}|s|}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{s^2}} \frac{|dz|}{|z|^{1/2+\alpha_0}} \right) ds \|g_+\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
& \leq C \int_{\xi}^x \frac{1}{s^{1-2\alpha_0}} ds \|g_+\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
& \leq C (x^{2\alpha_0} - \xi^{2\alpha_0}) \|g_+\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
& \leq C (x - \xi)^{2\alpha_0} \|g_+\|_{C^{2\alpha_0}([0,\delta];E)} \\
& \leq C \frac{(x - \xi)^{2\alpha_0}}{\delta^{2\alpha_0}} \|h_+\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \leq C \delta (x - \xi)^{2\alpha_0} \left(\frac{1}{\delta^2} \|h_+\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \right).
\end{aligned}$$

Le douzième et le treizième terme donnent

$$\begin{aligned}
& \|I_{12}\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} |t(x) - t(\xi)| \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}}}{|z|^{1+\alpha_0}} |dz| \|g_-(0) - g_+^{\delta}(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
& \leq C \int_{\gamma} |z|^{1/2} \delta (x - \xi)^{2\alpha_0} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(x-1)} \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}}{|z|^{1+\alpha_0}} |dz| \|g_-(0) - g_+^{\delta}(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
& \leq C \delta (x - \xi)^{2\alpha_0} \|g_-(0) - g_+^{\delta}(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \|I_{13}\|_E \\
& = \left\| \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{\cosh \sqrt{-z}(s+1)}{\Lambda_z(-1)} A(A - zI)^{-1} (L - h_+^{\delta}(0)) ds dz \right\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)}{|\Lambda_z(-1)| |z|^{\alpha_0}} ds |dz| \|L - h_+^{\delta}(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}s}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} ds |dz| \|L - h_+^{\delta}(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
& \leq C \int_{\xi}^x \left(\int_{|z| \geq \frac{1}{s^2}} \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}s}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| + \int_{|z| \leq \frac{1}{s^2}} \frac{1}{|z|^{1/2+\alpha_0}} |dz| \right) ds \|L - h_+^{\delta}(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
& \leq C \int_{\xi}^x \frac{1}{|s|^{1-2\alpha_0}} ds \|L - h_+^{\delta}(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
& \leq C (x^{2\alpha_0} - \xi^{2\alpha_0}) \|L - h_+^{\delta}(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
& \leq C \delta (x - \xi)^{2\alpha_0} \left(\frac{1}{\delta} \|L - h_+^{\delta}(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \right).
\end{aligned}$$

Pour le dernier terme, en utilisant (4.4), on obtient

$$\begin{aligned}
& \|I_{14}\|_E \\
& \leq C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)}{|z|^{1/2+\alpha_0} |\Delta_z(-1, \delta)|} ds \left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right) \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} |dz| \\
& \quad + C \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)}{|z|^{1/2+\alpha_0} |\Delta_z(-1, \delta)|} \left| 1 - \frac{\Delta_z(-1, \delta)}{\Lambda_z(-1)} \right| ds \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} |dz| \\
& \leq C \delta \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)}}{|z|^{1/2+\alpha_0} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}} ds \left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right) \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} |dz| \\
& \quad + C \delta \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s+1)}}{|z|^{1/2+\alpha_0} e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(\delta+1)}} ds \left| 1 - \frac{\Delta_z(-1, \delta)}{\Lambda_z(-1)} \right| \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} |dz|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C\delta \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-\delta)}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} ds \left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right) \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} |dz| \\
&\quad + C\delta \int_{\gamma} \int_{\xi}^x \frac{e^{\operatorname{Re} \sqrt{-z}(s-\delta)}}{|z|^{1/2+\alpha_0}} ds \left| 1 - \frac{\Delta_z(-1, \delta)}{\Lambda_z(-1)} \right| \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} |dz| \\
&\leq C\delta (x - \xi)^{2\alpha_0} \left(\frac{1}{\delta} \left\| (-A)^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} - l \right) \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} + \left\| (-A)^{1/2} l \right\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \right).
\end{aligned}$$

■

4.3 La limite de l'opérateur d'impédance quand $\delta \rightarrow 0$

On a déjà montré (au chapitre 3) que l'opérateur d'impédance T_{δ} est linéaire, bien défini et borné de

$$C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E) \times D_A(1/2, +\infty) \times D(A) \longrightarrow D_A(1/2, +\infty).$$

D'autre part, il peut être réécrit sous la forme :

$$T_{\delta} = T_{\delta}^* \circ H_{\delta}$$

où H_{δ} et T_{δ}^* sont définis par

$$\begin{aligned}
H_{\delta} : C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E) \times D_A\left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \times D(A) &\longrightarrow C^{2\alpha_0}([0, 1]; E) \times D_A\left(\frac{1}{2}, +\infty\right) \times D(A) \\
(g_+^{\delta}, f_+^{\delta}, \psi) &\mapsto H_{\delta}(g_+^{\delta}, f_+^{\delta}, \psi) = (h_+^{\delta}, f_+^{\delta}, \psi)
\end{aligned}$$

où on effectue le changement d'échelle

$$h_+^{\delta}(s) = g_+^{\delta}(\delta s), \quad s \in [0, 1],$$

et

$$\begin{aligned}
T_{\delta}^* : C^{2\alpha_0}([0, 1]; E) \times D_A(1/2, +\infty) \times D(A) &\longrightarrow D_A(1/2, +\infty) \\
(h_+^{\delta}, f_+^{\delta}, \psi) &\mapsto T_{\delta}^*(h_+^{\delta}, f_+^{\delta}, \psi) = T_{\delta}(g_+^{\delta}, f_+^{\delta}, \psi).
\end{aligned}$$

On supposera que

$$\begin{cases}
\exists L \in D_A(\alpha_0, +\infty) : \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} g_+^{\delta}(\tau) d\tau \right] = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_0^1 h_+^{\delta}(s) ds \right] = L \\
\exists l \in D_A\left(\frac{1}{2} + \alpha_0, +\infty\right) : \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} \right) = l \\
\exists h_+ \in D_A(\alpha_0, +\infty) : \lim_{\delta \rightarrow 0} h_+^{\delta}(0) = h_+.
\end{cases} \quad (4.10)$$

et

$$\left\{ \frac{1}{\delta} f_+^{\delta} : \delta \in]0, 1] \right\} \text{ est borné dans } E. \quad (4.11)$$

Proposition 4.8 Soient $g_+^{\delta} \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$ avec $0 < 2\alpha_0 < 1$, $\psi \in D(A)$ et $f_+^{\delta} \in D(\sqrt{-A})$ vérifiant les hypothèses (4.10), (4.11) et $(A\psi - g_+^{\delta}(0)) \in D_A(\alpha_0, +\infty)$. Alors

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta} T_{\delta}(g_+^{\delta}, f_+^{\delta}, \psi) \right] = A\psi - L + l.$$

Preuve. On rappelle que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^\delta \frac{\cosh \sqrt{-z}(\delta - \tau)}{\delta \cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} (g_+^\delta(\tau) - g_+^\delta(0)) d\tau dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\delta \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} (-A)^{1/2} f_+^\delta dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}\delta}{\delta \cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (A\psi - g_+^\delta(0)) dz \end{aligned}$$

et par le changement de variables $\tau = \delta s$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta} T_\delta(g_+^\delta, f_+^\delta, \psi) &= -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_0^1 \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta(1-s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} (h_+^\delta(s) - h_+^\delta(0)) ds dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\delta \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} (-A)^{1/2} f_+^\delta dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}\delta}{\delta \cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (A\psi - h_+^\delta(0)) dz \\ &: = \frac{1}{\delta} T_\delta^*(h_+^\delta, f_+^\delta, \psi) \\ &= I_1 + I_2 + I_3 \end{aligned}$$

Pour I_1 , on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^1 \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta(1-s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} (h_+^\delta(s) - h_+^\delta(0)) ds \right\|_E \\ &\leq C \int_0^1 \frac{\cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta(1-s)}{|\cosh \sqrt{-z}\delta| |z|} s^{2\alpha_0} ds \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\ &\leq \frac{C}{|\cosh \sqrt{-z}\delta| |z|} \left(\int_0^1 \cosh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta(1-s) s^{2\alpha_0} ds \right) \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\ &\leq \frac{C}{|\cosh \sqrt{-z}\delta| |z|} \left(\frac{\sinh \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}{|z|^{1/2+\alpha_0} \delta^{1+2\alpha_0}} \right) \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\ &\leq C \frac{1 - e^{-2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}}{|z|^{3/2+\alpha_0} \delta^{1+2\alpha_0}} \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\ &\leq C \frac{\int_0^\delta e^{-2 \operatorname{Re} \sqrt{-z}s} ds}{|z|^{1+\alpha_0} \delta^{1+2\alpha_0}} \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\ &\leq C \frac{1}{|z|^{1+\alpha_0} \delta^{2\alpha_0}} \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \\ &\leq C \frac{1}{|z|^{1+\alpha_0}} \left(\frac{1}{\delta} \|h_+^\delta\|_{C^{2\alpha_0}([0,1];E)} \right) \end{aligned}$$

Grâce au théorème de la convergence dominée

$$\begin{aligned}
& \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_0^1 \frac{\cosh \sqrt{-z}\delta (1-s)}{\cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} (h_+^{\delta}(s) - h_+^{\delta}(0)) ds dz \right) \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (A - zI)^{-1} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\int_0^1 (h_+^{\delta}(s) - h_+^{\delta}(0)) ds \right) dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} (L - h_+) dz \\
&= L - h_+
\end{aligned}$$

Due à l'hypothèse (4.11), il existe l_+ tel que

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{\delta \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} (-A)^{1/2} f_+^{\delta} \right\|_E &\leq \frac{C}{|z|^{3/2} |\cosh \sqrt{-z}\delta|} \left\| (-A)^{1/2} \frac{1}{\delta} f_+^{\delta} \right\|_E \\
&\leq C \frac{e^{-\operatorname{Re} \sqrt{-z}\delta}}{|z|^{3/2}} \left\| \frac{1}{\delta} f_+^{\delta} \right\|_{D(\sqrt{-A})} \\
&\leq \frac{C}{|z|^{3/2}} l_+.
\end{aligned}$$

par la convergence dominée, on a

$$\begin{aligned}
& \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{\delta \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}\delta} (A - zI)^{-1} (-A)^{1/2} f_+^{\delta} dz \right) \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (-A)^{1/2} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\delta} f_+^{\delta} \right) dz \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (-A)^{1/2} l dz \\
&= l.
\end{aligned}$$

Pour le dernier terme, on a

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{\sinh \sqrt{-z}\delta}{\delta \cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (A\psi - h_+^{\delta}(0)) \right\|_E \\
&\leq C \left| \frac{\sinh \sqrt{-z}\delta}{\delta \cosh \sqrt{-z}\delta} \right| \frac{1}{|z|^{3/2+\alpha_0}} \|A\psi - h_+^{\delta}(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
&\leq C \left| \frac{1 - e^{-2\sqrt{-z}\delta}}{\delta} \right| \frac{1}{|z|^{3/2+\alpha_0}} \|A\psi - h_+^{\delta}(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
&\leq C \left| \frac{\int_0^{\delta} e^{-2\sqrt{-z}s} ds}{\delta} \right| \frac{1}{|z|^{1+\alpha_0}} \|A\psi - h_+^{\delta}(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)} \\
&\leq C \frac{1}{|z|^{1+\alpha_0}} \|A\psi - h_+^{\delta}(0)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
& \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z}\delta}{\delta \cosh \sqrt{-z}\delta} \frac{(A - zI)^{-1}}{\sqrt{-z}} (A\psi - h_+^{\delta}(0)) dz \right) \\
&= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} (A\psi - h_+) dz \\
&= A\psi - h_+.
\end{aligned}$$

■

4.4 La convergence de u_-^{δ} dans $C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$

Théorème 4.1 Soient $g_-^{\delta} \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$, $g_+^{\delta} \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]; E)$ avec $0 < 2\alpha_0 < 1$, $f_- \in D(A)$ et $f_+^{\delta} \in D(\sqrt{-A})$, vérifiant (4.7), (4.8) et (4.9).

Alors il existe une unique $u_- \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$ telle que

1.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \|Au_-^{\delta} - Au_-\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)} = 0$$

2. u_- est la solution du problème de Laplace-Beltrami

$$\begin{cases} u_-''(x) + A u_-(x) = g_-(x) & \text{sur }]-1, 0[\\ u_-(-1) = f_- \\ u_-'(0) - Au_-(0) = l - L. \end{cases}$$

Preuve.

1) On a ce résultat grâce à la proposition 4.7.

2) Maintenant, pour $x \in [-1, 0]$, on veut trouver le problème correspondant à la représentation u_- , pour cela la dérivée de u_- s'écrit

$$\begin{aligned}
u_-'(x) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\partial_x \Delta_z(x)}{\Delta_z(-1)} (A - zI)^{-1} f_- dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-1}^x \frac{\partial_x \Delta_z(x)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1)} \sinh \sqrt{-z}(\tau + 1) (A - zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_x^0 \frac{\Delta_z(\tau)}{\Delta_z(-1)} \cosh \sqrt{-z}(x + 1) (A - zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}(x + 1)}{\Delta_z(-1)} (A - zI)^{-1} (l - L) dz
\end{aligned}$$

avec

$$\partial_x \Delta_z(x) = \sqrt{-z} [\sinh \sqrt{-z}x - \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}x].$$

De même que pour u_-^δ , si on fait un calcul formel de la dérivée des termes en g_- , on obtient entre autres les termes suivants

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}x - \sqrt{-z} \cosh \sqrt{-z}x}{\Delta_z(-1)} \sinh \sqrt{-z}(x+1) (A-zI)^{-1} g_-(x) dz \\ & + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\cosh \sqrt{-z}x - \sqrt{-z} \sinh \sqrt{-z}x}{\Delta_z(-1)} \cosh \sqrt{-z}(x+1) (A-zI)^{-1} g_-(x) dz \\ = & \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (A-zI)^{-1} g_+^\delta(x) dz \end{aligned}$$

ce qui n'est pas bien définie.

C'est pourquoi, afin de calculer $u_-''(x)$, on adapte la méthode utilisée par Tanabe dans [33] p. 70, comme pour u_+^δ et u_-^δ .

Soit ε est un nombre positif très petit et x tels que

$$-1 < \varepsilon - 1 \leq x \leq -\varepsilon < 0.$$

On obtient

$$[u_-']_\varepsilon(x) \rightarrow u_-'(x) \text{ fortement}$$

et

$$([u_-']_\varepsilon)'(x) + Au_-(x) - g_-(x) \rightarrow u_-''(x) + Au_-(x) - g_-(x) = 0$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Les conditions aux limites :

En $x = -1$

$$\begin{aligned} u_-(-1) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma (A-zI)^{-1} f_- dz = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{A(A-zI)^{-1}}{z} f_- dz \\ &= f_- \end{aligned}$$

En $x = 0$

$$\begin{aligned} u_-(0) &= \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{1}{\Delta_z(-1)} (A-zI)^{-1} f_- dz \\ &\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \int_{-1}^0 \frac{\sinh \sqrt{-z}(\tau+1)}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1)} (A-zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz \\ &\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{\sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z}\Delta_z(-1)} (A-zI)^{-1} (l-L) dz \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
u'_-(0) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{z}{\Delta_z(-1)} (A - zI)^{-1} f_- dz \\
&\quad - \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-1}^0 \frac{z \sinh \sqrt{-z} (\tau + 1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1)} (A - zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}}{\Delta_z(-1)} (A - zI)^{-1} (l - L) dz \\
&= \frac{A}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{1}{\Delta_z(-1)} (A - zI)^{-1} f_- dz \\
&\quad - \frac{A}{2i\pi} \int_{\gamma} \int_{-1}^0 \frac{\sinh \sqrt{-z} (\tau + 1)}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1)} (A - zI)^{-1} g_-(\tau) d\tau dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}}{\Delta_z(-1)} (A - zI)^{-1} (l - L) dz \\
&= Au_-(0) - \frac{A}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\sinh \sqrt{-z}}{\sqrt{-z} \Delta_z(-1)} (A - zI)^{-1} (l - L) dz \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\cosh \sqrt{-z}}{\Delta_z(-1)} (A - zI)^{-1} (l - L) dz \\
&= Au_-(0) + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} (A - zI)^{-1} (l - L) dz \\
&= Au_-(0) + \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{A(A - zI)^{-1}}{z} (l - L) dz \\
&= Au_-(0) + (l - L).
\end{aligned}$$

Finalement, le problème correspondant à la solution limite u_- s'écrit

$$\begin{cases} u''_-(x) + A u_-(x) = g_-(x) & \text{sur }]-1, 0[\\ u_-(-1) = f_- \\ u'_-(0) - Au_-(0) = l - L, \end{cases}$$

(Problème de *Laplace-Beltrami*). ■

4.5 Les conditions nécessaires et suffisantes

Dans suite de cette sous-section on donne des conditions nécessaires et suffisantes sur les données, afin d'obtenir une unique solution stricte u_- pour le problème (LB) telles que

$$u_- \in C^2([-1, 0]; E) \cap C([-1, 0]; D(A)).$$

On suppose que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} h_+^{\delta}(0) = h_+ \text{ dans } E. \quad (4.12)$$

Théorème 4.2 Soient $g_-^{\delta} \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$ avec $0 < 2\alpha_0 < 1$, $f_- \in D(A)$, $h_+ \in E$, $L \in E$ et $l \in D(\sqrt{-A})$, alors

$$u_- \in C([-1, 0]; D(A)) \cap C^2([-1, 0]; E)$$

si et seulement si

$$\begin{cases} Af_- - g_-(-1) \in \overline{D(A)} \\ g_-(0) - h_+ \in \overline{D(A)} \\ h_+ - L \in \overline{D(A)} \\ (-A)^{1/2} l \in \overline{D(A)}. \end{cases}$$

La preuve de ce théorème est déduite de la preuve du théorème 3.4.

4.6 Régularité maximale

On suppose que l'hypothèse (4.10) est vérifiée, on a le théorème suivant.

Théorème 4.3 Soient $g_- \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$ avec $0 < 2\alpha_0 < 1$, $f_- \in D(A)$, $h_+ \in D_A(\alpha_0, +\infty)$, $L \in D_A(\alpha_0, +\infty)$ et $l \in D(\sqrt{-A})$ alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.

$$\begin{cases} Af_- - g_-(-1) \in D_A(\alpha_0, +\infty) \\ g_-(0) - h_+ \in D_A(\alpha_0, +\infty) \\ h_+ - L \in D_A(\alpha_0, +\infty) \\ (-A)^{1/2} l \in D_A(\alpha_0, +\infty). \end{cases}$$

2. $u_- \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; D(A))$,

3. $u''_- \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; E)$.

La preuve de ce théorème est déduite de la preuve du théorème 3.5.

Chapitre 5

Exemples d'applications

Dans cette section on applique les résultats trouvés sur des exemples concrets.
On considère le problème aux limites suivant

$$(P^\delta) \begin{cases} \frac{1}{b_\delta} \operatorname{div} (b_\delta \nabla U^\delta) = G^\delta & \text{sur } \Omega^\delta \\ U^\delta = 0 & \partial\Omega^\delta \setminus \Gamma^\delta \\ \partial_\xi U^\delta = 0 & \Gamma^\delta, \end{cases}$$

où δ est un petit paramètre donné dans $]0, 1]$, Ω^δ est le cylindre $] -1, \delta[\times G$ de \mathbb{R}^n des variables (ξ, η) , G est un domaine ouvert régulier de \mathbb{R}^{n-1} , $\Gamma^\delta = \{\delta\} \times G$ et b_δ est une fonction définie par

$$b_\delta(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \in] -1, 0[, \\ 1/\delta & \text{si } \xi \in]0, \delta[. \end{cases}$$

Ce problème, représente par exemple, la propagation de la chaleur entre le corps fixe

$$\Omega_- =] -1, 0[\times G,$$

et une couche mince

$$\Omega_+^\delta =]0, \delta[\times G,$$

(supposée avec conductivité infinie).

On note par U_-^δ et G_- les restrictions respectives de U^δ et G^δ sur Ω_- , et par U_+^δ et G_+^δ les restrictions de U^δ et G^δ sur Ω_+^δ .

La famille (P^δ) est équivalente au problème aux limites et de transmission suivant

$$\left(\begin{cases} \begin{cases} \Delta U_-^\delta = G_- & \text{sur } \Omega_- \\ \Delta U_+^\delta = G_+^\delta & \text{sur } \Omega_+^\delta \end{cases} \\ \text{(bc)} \begin{cases} U_-^\delta = 0 & \partial\Omega_- \setminus \Gamma^0 \\ U_+^\delta = 0 & \partial\Omega_+^\delta \setminus (\Gamma^0 \cup \Gamma^\delta) \\ \partial_\xi U_+^\delta = 0 & \Gamma^\delta \end{cases} \\ \text{(tc)} \begin{cases} U_-^\delta = U_+^\delta & \Gamma^0 \\ \partial_\xi U_-^\delta = \frac{1}{\delta} \partial_\xi U_+^\delta & \Gamma^0 \end{cases} \end{cases}, \quad (5.1)$$

où $\Gamma^0 = \{0\} \times G$ et $\partial\Omega_+^\delta$ sont les frontières de Ω_+^δ .

Maintenant, on applique notre théorie sur les cas suivants.

5.0.1 Cas $E = C(\overline{G})$

Soit $E = C(\overline{G})$ avec la norme sup. En utilisant les notations classiques

$$\begin{cases} u^\delta(\xi)(\eta) = U^\delta(\xi, \eta) := U^\delta(\xi)(\eta) & \text{pour } (\xi, \eta) \in]-1, \delta[\times G \\ g^\delta(\xi)(\eta) = G^\delta(\xi, \eta) := G^\delta(\xi)(\eta) & \text{pour } (\xi, \eta) \in]-1, \delta[\times G, \end{cases}$$

notre problème (5.1) peut être réécrit sous forme du problème abstrait suivant

$$(P^\delta) \begin{cases} (u^\delta)''(\xi) + Au^\delta(\xi) = g^\delta(\xi) & \text{sur }]-1, \delta[\setminus \{0\} \\ u^\delta(-1) = 0 \text{ et } (u^\delta)'(\delta) = 0 \\ u^\delta(0^-) = u^\delta(0^+) \text{ et } (u^\delta)'(0^-) = p(u^\delta)'(0^+), \end{cases}$$

où $p = 1/\delta$ et A est un opérateur linéaire fermé défini par

$$\begin{cases} D(A) = \{ \varphi \in C(\overline{G}) : \Delta\varphi \in C(\overline{G}) \text{ et } \varphi = 0 \text{ sur } \partial G \} \\ (A\varphi)(\eta) = \Delta\varphi(\eta) \end{cases}$$

où Δ est le Laplacien sur G (sur la variable η). Il est bien connu que le domaine $D(A)$ est tel que

$$\begin{cases} \overline{D(A)} = \{ \varphi \in C(\overline{G}) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial G \} \neq E \\ D(A) \neq \{ \varphi \in C^2(\overline{G}) : \partial_\xi \varphi = 0 \text{ et } \varphi = 0 \text{ sur } \partial G \} & \text{si } n > 2 \\ D(A) = \{ \varphi \in C^2(\overline{G}) : \partial_\xi \varphi = 0 \text{ et } \varphi = 0 \text{ sur } \partial G \} & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

(Voir l'exemple concret donné dans Labbas [16], (p.96, section 3).

Les propriétés spectrales de A , en particulier l'hypothèse (3.2) découle de H.B. Stewart [32] pour un opérateur elliptique plus général. D' autre part, en utilisant Lunardi [23], (voir p. 97 et p. 108, Théorème 3.1.29), on a

$$D_A(\alpha_0, +\infty) = \{ \varphi \in C^{2\alpha_0}(\overline{G}) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial G \} \text{ avec } 0 < 2\alpha_0 < 1.$$

Par conséquent tous nos résultats précédents s'appliquent à cet exemple avec $f_+^\delta = f_- = 0$ et

$$\begin{cases} g_- = g^\delta|_{[-1,0]} \in C^{2\alpha_0}([-1,0]; C(\overline{G})) \\ g_+^\delta = g^\delta|_{[0,\delta]} \in C^{2\alpha_0}([0,\delta]; C(\overline{G})), \quad (0 < 2\alpha_0 < 1). \end{cases}$$

On rappelle que les propriétés anisotropiques entre la fonction concrète G_- et la fonction g_- est spécifié par

$$\begin{aligned} g_- &\in C^{2\alpha_0}([-1,0]; C(\overline{G})) \\ \iff &\begin{cases} G_- \in C([-1,0] \times \overline{G}) \text{ et} \\ G_-(\cdot, \eta) \in C^{2\alpha_0}([-1,0]) \text{ uniformément par rapport à } \eta \in \overline{G} \end{cases} \end{aligned}$$

et réciproquement

$$\begin{aligned} g_- &\in C([-1,0]; C(\overline{G})) \cap B(0, \delta; D_A(\alpha_0, +\infty)) \\ \iff &\begin{cases} G_- \in C([-1,0] \times \overline{G}) \\ G_-(\xi, \cdot) \in C^{2\alpha_0}(\overline{G}) \text{ uniformément par rapport à } \xi \in [0, \delta] \text{ et} \\ G_-(\xi, \sigma) = 0 \text{ pour } \sigma \in \partial G. \end{cases} \end{aligned}$$

(voir Lemme 6.2, p.63, dans E. Sinestrari [31]). Ici, $B(0, \delta; D_A(\alpha_0, +\infty))$ est l'espace de Banach des fonctions bornées de $[0, \delta]$ à $D_A(\alpha_0, +\infty)$ avec la norme

$$\|g_-\|_{B(0, \delta; D_A(\alpha_0, +\infty))} = \sup_{\xi \in [0, \delta]} \|g_-(\xi)\|_{D_A(\alpha_0, +\infty)}.$$

La première condition de compatibilité

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in \overline{D(A)}$$

signifie que

$$\eta \mapsto G_+^\delta(0, \eta) - G_-(0, \eta) \in C(\overline{G}) \text{ et } G_+^\delta(0, \sigma) - G_-(0, \sigma) = 0 \text{ pour } \sigma \in \partial G \quad (5.2)$$

et la deuxième condition

$$g_+^\delta(0) - g_-(0) \in D_A(\alpha_0, +\infty)$$

signifie que

$$\eta \mapsto G_+^\delta(0, \eta) - G_-(0, \eta) \in C^{2\alpha_0}(\overline{G}) \text{ et } G_+^\delta(0, \sigma) - G_-(0, \sigma) = 0 \text{ pour } \sigma \in \partial G \quad (5.3)$$

Donc on obtient le théorème suivant (correspondant au théorème 3.2 la solution U^δ sur la couche mince) quand $n > 2$.

Théorème 5.1 *On suppose que*

$$G_+^\delta \in C([0, \delta] \times \overline{G}) \text{ et } G_+^\delta(\cdot, \eta) \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]) \text{ uniformément par rapport à } \eta \in \overline{G}$$

Alors il existe une unique solution

$$U_+^\delta \text{ sur } [0, \delta]$$

pour (5.1) telle que

$$\begin{cases} \xi \mapsto \Delta_\eta U_+^\delta(\xi, \eta) \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]) \text{ uniformément par rapport à } \eta \in \overline{G} \\ \xi \mapsto \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U_+^\delta(\xi, \eta) \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]) \text{ uniformément par rapport à } \eta \in \overline{G} \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} \eta \mapsto \Delta_\eta U_+^\delta(0, \eta) - G_+^\delta(0, \eta) \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]) , \\ G_+^\delta(0, \sigma) = G_+^\delta(\delta, \sigma) = 0 \text{ pour } \sigma \in \partial G \end{cases}$$

Et le théorème correspondant à 3.5.

Théorème 5.2 *On suppose que*

$$\begin{cases} G_- \in C([-1, 0] \times \overline{G}) \text{ et } G_-(\cdot, \eta) \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]) \text{ uniformément par rapport à } \eta \in \overline{G} \\ G_+^\delta \in C([0, \delta] \times \overline{G}) \text{ et } G_+^\delta(\cdot, \eta) \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]) \text{ uniformément par rapport à } \eta \in \overline{G} \\ G_+^\delta(0, \sigma) - G_-(0, \sigma) = 0 \text{ pour } \sigma \in \partial G. \end{cases}$$

Alors il existe une unique solution

$$U_-^\delta \text{ sur } [-1, 0]$$

de (5.1) telle que

$$\begin{cases} \xi \mapsto \Delta_\eta U_-^\delta(\xi, \eta) \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]) \text{ uniformément par rapport à } \eta \in \overline{G} \\ \xi \mapsto \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U_-^\delta(\xi, \eta) \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]) \text{ uniformément par rapport à } \eta \in \overline{G} \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} \eta \mapsto G_-(-1, \eta) \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]) \text{ , } G_-(-1, \sigma) = 0 & \sigma \in \partial G \\ \eta \mapsto G_+^\delta(0, \eta) - G_-(0, \eta) \in C^{2\alpha_0}(\overline{G}) \text{ et} \\ G_+^\delta(0, \sigma) - G_-(0, \sigma) = 0 & \sigma \in \partial G. \end{cases}$$

Pour les résultats du problème limite quand $\delta \rightarrow 0$, on a le théorème suivant.

Théorème 5.3 (Problème limite) *On suppose que*

$$\begin{cases} G_- \in C([-1, 0] \times \overline{G}) \text{ et } G_-(\cdot, \eta) \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]) \text{ uniformément par rapport à } \eta \in \overline{G} \\ G_+^\delta \in C([0, \delta] \times \overline{G}) \text{ et } G_+^\delta(\cdot, \eta) \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]) \text{ uniformément par rapport à } \eta \in \overline{G} \\ G_+^\delta(0, \sigma) - G_-(0, \sigma) = 0 \text{ pour } \sigma \in \partial G. \end{cases}$$

vérifiant, il existe $L(\cdot) \in \{\varphi \in C^{2\alpha_0}(\overline{G}) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial G\}$ telle que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta} \int_0^\delta g_+^\delta(\tau, \eta) d\tau \right] = L(\eta).$$

Alors, il existe une unique $U \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; C(\overline{G}))$ telle que

$$\begin{cases} G_-(-1, \cdot) \in \{\varphi \in C^{2\alpha_0}(\overline{G}) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial G\} \\ G_+^\delta(0, \sigma) - G_-(0, \sigma) \in \{\varphi \in C^{2\alpha_0}(\overline{G}) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial G\} \end{cases}$$

si et seulement si

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \partial_\xi^2 U_-^\delta(\cdot, \eta) - \partial_\xi^2 U(\cdot, \eta) \right\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0])} = 0, \text{ uniformément par rapport à } \eta \in \overline{G}$$

et U est l'unique solution stricte du problème de Laplace-Beltrami

$$\begin{cases} \Delta U(\xi, \eta) = G_-(\xi, \eta) & \text{sur }]-1, 0[\times G \\ U = 0 & \text{sur } \partial\Omega_- \setminus \Gamma^0 \\ \partial_\xi U - \partial_\eta^2 U = -L & \text{sur } \Gamma^0. \end{cases}$$

(le problème de Laplace-Beltrami).

5.0.2 Cas $E = L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$

Maintenant, on considère le cas $E = L^p(G)$, $1 \leq p < \infty$. Notre problème (5.1) peut être formulé comme suite

$$(P^\delta) \begin{cases} (u^\delta)''(\xi) + Au^\delta(\xi) = g^\delta(\xi) & \text{sur }]-1, \delta[\setminus \{0\} \\ u^\delta(-1) = 0 \text{ et } (u^\delta)'(\delta) = 0 \\ u^\delta(0^-) = u^\delta(0^+) \text{ et } (u^\delta)'(0^-) = p(u^\delta)'(0^+), \end{cases}$$

où A est un opérateur linéaire fermé défini par

$$\begin{cases} D(A) = W^{2,p}(G) \cap W_0^{1,p}(G) \\ (A\varphi)(\eta) = \Delta\varphi(\eta) \end{cases}$$

où Δ est le Laplacien sur G (sur la variable η). Il est bien connu que les propriétés spectrales de A , en particulier l'hypothèse (3.2) découle de Agmon-Douglis-Nirenberg [2] pour un opérateur elliptique plus général. D'autre part, en utilisant Triebel [34] (voir p. 321), on a

$$\begin{cases} D_A(\alpha_0, +\infty) = (L^p(G), D(A))_{\alpha_0, +\infty} = \{\varphi \in B_{p,+\infty}^{2\alpha_0}(G) : \varphi = 0 \text{ on } \partial G\} \\ \text{si } (2\alpha_0 - 1/p) > 0, \end{cases},$$

(on peut également caractériser l'espace d'interpolation dans les autres cas

$$(2\alpha_0 - 1/p) < 0 \text{ et } (2\alpha_0 - 1/p) = 0.$$

L'espace Besov $B_{p,+\infty}^{2\alpha_0}(G)$ est bien défini dans [34] (p. 310). Par conséquent tous nos résultats précédents s'appliquent à cet exemple avec $f_+^\delta = f_- = 0$ et

$$\begin{cases} g_- = g_-^\delta|_{[-1,0]} \in C^{2\alpha_0}([-1,0]; L^p(G)) \\ g_+^\delta = g_+^\delta|_{[0,\delta]} \in C^{2\alpha_0}([0,\delta]; L^p(G)), \quad (0 < 2\alpha_0 < 1). \end{cases}$$

On obtient alors le théorème suivant (correspondant au théorème 3.2 pour la solution U^δ sur la couche mince) dans le cas $L^p(G)$.

Théorème 5.4 *On suppose que $(2\alpha_0 - 1/p) > 0$ et*

$$G_+^\delta(\cdot, \cdot) \in C_\xi([0, \delta]; L_\eta^p(G)) \text{ et } G_+^\delta(\cdot, \eta) \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]) \text{ pour p.p. } \eta \in G.$$

Alors il existe une unique solution

$$U_+^\delta \text{ sur } [0, \delta]$$

de (5.1) telle que

$$\begin{cases} \xi \mapsto \Delta_\eta U_+^\delta(\xi, \eta) \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]) \text{ pour p.p. } \eta \in G \\ \xi \mapsto \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U_+^\delta(\xi, \eta) \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]) \text{ pour p.p. } \eta \in G \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} \eta \mapsto \Delta_\eta U_+^\delta(0, \eta) - G_+^\delta(0, \eta) \in B_{p,+\infty}^{2\alpha_0}(G), \\ G_+^\delta(0, \sigma) = G_+^\delta(\delta, \sigma) = 0 \quad \sigma \in \partial G \end{cases}$$

Et le théorème correspondant au théorème 3.5.

Théorème 5.5 *On suppose que $(2\alpha_0 - 1/p) > 0$ et*

$$\begin{cases} G_-(\cdot, \cdot) \in C_\xi([-1, 0]; L_\eta^p(G)), G_-^\delta(\cdot, \eta) \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]) \text{ pour p.p. } \eta \in G \\ G_+^\delta(\cdot, \cdot) \in C_\xi([0, \delta]; L_\eta^p(G)) \text{ et } G_+^\delta(\cdot, \eta) \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]) \text{ pour p.p. } \eta \in G. \end{cases}$$

Alors il existe une unique solution

$$U_-^\delta \text{ sur } [-1, 0]$$

de (5.1) telle que

$$\begin{cases} \xi \mapsto \Delta_\eta U_-^\delta(\xi, \eta) \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]) & \text{pour p.p. } \eta \in G \\ \xi \mapsto \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} U_-^\delta(\xi, \eta) \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]) & \text{pour p.p. } \eta \in G \end{cases}$$

si et seulement si

$$\begin{cases} \eta \mapsto G_-(-1, \eta) \in B_{p,+\infty}^{2\alpha_0}(G), G_-(-1, \sigma) = 0 & \sigma \in \partial G \\ \eta \mapsto G_+^\delta(0, \eta) - G_-(0, \eta) \in B_{p,+\infty}^{2\alpha_0}(G) \\ \text{et } G_+^\delta(0, \sigma) - G_-(0, \sigma) = 0 & \sigma \in \partial G. \end{cases}$$

Pour les résultats du problème limite quand $\delta \rightarrow 0$, on a le théorème suivant.

Théorème 5.6 (Problème limite) *On suppose que $(2\alpha_0 - 1/p) > 0$ et*

$$\begin{cases} G_-(\cdot, \cdot) \in C_\xi([-1, 0]; L_\eta^p(G)), G_-^\delta(\cdot, \eta) \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]) & \text{pour p.p. } \eta \in G \\ G_+^\delta(\cdot, \cdot) \in C_\xi([0, \delta]; L_\eta^p(G)) \text{ et } G_+^\delta(\cdot, \eta) \in C^{2\alpha_0}([0, \delta]) & \text{pour p.p. } \eta \in G. \end{cases}$$

vérifiant, il existe $L(\cdot) \in \{\varphi \in B_{p,+\infty}^{2\alpha_0}(G) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial G\}$ telle que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\delta} \int_0^\delta g_+^\delta(\tau, \eta) d\tau \right] = L(\eta).$$

Alors, il existe une unique $U \in C^{2\alpha_0}([-1, 0]; L^p(G))$ telle que

$$\begin{cases} G_-(-1, \cdot) \in \{\varphi \in B_{p,+\infty}^{2\alpha_0}(G) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial G\} \\ G_+^\delta(0, \cdot) - G_-(0, \cdot) \in \{\varphi \in B_{p,+\infty}^{2\alpha_0}(G) : \varphi = 0 \text{ sur } \partial G\}, \end{cases}$$

si et seulement si

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left\| \partial_\xi^2 U_-^\delta(\cdot, \eta) - \partial_\xi^2 U(\cdot, \eta) \right\|_{C^{2\alpha_0}([-1, 0])} = 0, \text{ pour p.p. } \eta \in G,$$

et U est l'unique solution stricte du problème de Laplace-Beltrami

$$\begin{cases} \Delta U(\xi, \eta) = G_-(\xi, \eta) & \text{sur }]-1, 0[\times G \\ U = 0 & \text{sur } \partial\Omega_- \setminus \Gamma^0 \\ \partial_\xi U - \partial_\eta^2 U = -L & \text{sur } \Gamma^0. \end{cases}$$

(le problème de Laplace-Beltrami).

Remarque 5.1

1. Par la même méthode, nous pouvons également appliquer notre théorie dans les cas non homogènes.
2. Il est important de remarquer que la solution globale U^δ n'a pas une régularité maximale globale sur $[-1, \delta]$.

Bibliographie

- [1] **Aïdi M. and Lavergnat J.** : Comparison of Luebbers and Maliuzhinets Wedge Diffraction Coefficients in Urban Channel Modelling, Progress In Electromagnetics Research, PIER 33, pp 1-28, 2001.
- [2] **Agmon S, Douglis A. and Nirenberg L.** : *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions I*, Comm.. Pure Appl. Math., 12, 623-725, 1959, II, 17, 35-92, 1964
- [3] **Belhamiti O., Labbas R., Lemrabet K. and Medeghri A.** : Study of boundary value and transmission problems in the Hölder spaces, Appl. Math. Comput (2008), doi :10.1016/J.AMC.2008.03.003.
- [4] **Balakrishnan A.V.** : *Fractional powers of closed operators and the semigroups generated by them*, Pacif. J. Math. 10, pp 419-437, 1960.
- [5] **Butzer P. L.; Berens H.** : *Semi-groups of Operators and approximation*, Springer-Verlag, 1967.
- [6] **Da Prato G., Grisvard P.** : *Sommes d'opérateurs linéaires et équations différentielles opérationnelles*. J. Math. Pures Appl. IX Ser. 54, pp 305-387, 1975.
- [7] **Caloz G., Costabel M., Dauge M. and Vial G.** : *Asymptotic expansion of the solution of an interface problem in a polygonal domain with thin layer*. Asymptotic Analysis Vol. 50, n° 1/2, pp 121-173, 2006.
- [8] **Dore G., Favini A., Labbas R., Lemrabet K. and Maingot S.** : *A Transmission Problem in a Thin Layer, Part I, Sharp Estimates*, to appear.
- [9] **Favini A., Labbas R., Lemrabet K. and Maingot S.** : *Study of The limit of Transmission Problems in a Thin Layer by The Sum Theory of Linear Operators*, Rev. Mat. Complut. 18 ; Num 1,pp 143-176, 2005.
- [10] **Favini A., Labbas R., Maingot S., Tanabe H., Yagi A.** : *Etude unifiée de problèmes elliptiques dans le cadre höldérien*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I341, pp 485-490, 2005.
- [11] **Grisvard P.** : *Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications*, J. Math. pures et appl. 45, pp 143-290, 1966.
- [12] **Grisvard P.** : *Spazi di Tracce e Applicazioni*, Rendiconti di Matematica (4) Vol. 5, série VI, p. 657-729, 1972.
- [13] **Haase M.** : *The Functional Calculus for Sectorial Operators and Similarity Methods*, Thesis, Universität Ulm, Germany, 2003.
- [14] **Krein S. G.** : *Linear differential equations in Banach space*, American Mathematical Society, volume 29, 1971.

- [15] **Labbas R.** : *Problèmes aux limites pour une équation différentielle abstraite de type elliptique*, Thèse d'état, Université de Nice, 1987.
- [16] **Labbas R.** : *Some results on the Sum of Linear Operators with Nondense domains*, Annali di Matematica pura ed Applicata (IV), Vol. CLIV, pp. 91-97, 1989.
- [17] **El Haial A. and Labbas R.** : *On the Ellipticity and Solvability of Abstract Second-order Differential Equation*. Electronic Journal of Differential Equations, 57, pp 1-18, 2001.
- [18] **Labbas R., Terreni B.** : *Sommes d'opérateurs linéaires de type parabolique*, 1^{ère} Partie. Boll. Un. Math. Ital. 1-B (7), pp 545-569, 1987.
- [19] **Labbas R., Terreni B.** : *Sommes d'opérateurs linéaires de type parabolique*, 2^{ème} Partie. Boll. Un. Math. Ital. 2-B (7), pp 141-162, 1988.
- [20] **Lemrabet K.** : *Etude globale d'un problème de transmission dans un polygone ou un polyèdre*, Thèse 3^{ème} cycle, Université de Nice, 1976.
- [21] **Lemrabet K.** : *Régularité de la solution d'un problème de transmission*, J.Math. pures et appl.,56 ; pp 1-38, 1977.
- [22] **Leontovich M.A.** : *Approximate boundary conditions for the electromagnetic field on the surface of a good conductor*, Investigations on radiowave propagation, Part II, Moscow, Academy of Sciences, 1948.
- [23] **Lunardi A.** : *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Birkhäuser, 1995.
- [24] **Lions J. L.** : *Théorème de trace et d'interpolation*, I et II Annali. S. N. S. di Pisa, vol. 13, 1959, page 389-403 et vol. 14, pp 317-331, 1960.
- [25] **Lions J. L., Peetre J.** : *Sur une classe d'espace d'interpolation*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., vol. 19, pp 5-86, 1964.
- [26] **Mercier D.** : *Problèmes de transmission sur des réseaux polygonaux pour des systèmes d'EDP*, Annales de la Faculté des sciences de Toulouse, 6ème série, tome 10, n°1, p. 107-162, 2001.
- [27] **Mezeghrani F. Z.** : *Problème a deux points pour une équation différentielle opérationnelle du second ordre*. Thèse de Magister, université d'Oran, 1992.
- [28] **Nicaise S.** : *Polygonal interface problems*, Séries "Methoden und Verfahren der Mathematischen Physik", 39,. Peter Lang Verlag, 1993.
- [29] **Pay A.** : *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 119, 1983.
- [30] **Rakotoson J. E. et Rakotoson J. M.** : *Analyse fonctionnelle appliquée aux équations aux dérivées partielles*, Presses Universitaires De France, 1999.
- [31] **Sinestrari E.** : *On the abstract Cauchy problem of parabolic type in space of continuous functions*, J. Math. Anal. App. 66, pp 16-66, 1985.
- [32] **Stewart H. B.** : *Generation of analytic semi-groups by strongly elliptic operator under general boundary conditions*, Trans. Amer. Math. Soc. 259, pp 299-310, 1980.
- [33] **Tanabe H.** : *Equations of Evolution*, Monographs and Studies in Mathematics 6, Pitman, London-San Francisco-Melbourne, 1979.

- [34] **Triebel H.** : *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators*, North-Holland, amsterdam, 1978.
- [35] **Vial G.** : *Multiscale analysis and approximate boundary conditions for a problem with thin layer in a corner domain*, Thèse de Doctorat, Université de Rennes, 2003.
- [36] **Zuily Cl., Queffelec H.** : *Eléments d'analyse pour l'Agrégation*, Masson, Paris, 1995.

Résumé :

On considère une famille $(P_\delta)_{\delta>0}$ de problèmes aux limites et de transmission dans un domaine avec couche mince, écrit sous la forme d'une équation différentielle d'ordre deux abstraite de type elliptique. Une nouvelle approche pour la résolution de $(P_\delta)_{\delta>0}$ est présentée dans ce travail utilisant le concept physique d'impédance. Cette méthode est différente de celle qui utilise un changement d'échelle sur la couche mince voir [9]. Elle permet d'obtenir un problème direct et simplifié où l'effet de la couche mince se retrouve complètement décrit par l'opérateur d'impédance. Les techniques employées sont essentiellement basées sur le calcul fonctionnel de Dunford, la théorie des semi-groupes, l'interpolation et quelques idées des travaux de [15], [8] et [10]. On obtient des résultats nouveaux d'existence, d'unicité et de régularité maximale dans les espaces de Hölder pour δ fixé et ensuite on étudie le passage à la limite quand $\delta \rightarrow 0$ de $(P_\delta)_{\delta>0}$. Ce travail complète ainsi ce qui a été obtenu dans le cadre L^p , voir [9].

Mots clés : *Equations différentielles abstraites de type elliptique, problèmes de transmission, espaces de Hölder, interpolation, semi-groupes, puissances fractionnaires d'opérateur, calcul fonctionnel de Dunford.*

Abstract :

We consider a family $(P_\delta)_{\delta>0}$ of boundary value and transmission problems in a domain with thin layer, written in the form of second order abstract differential equation of elliptic type. A new approach for the resolution of $(P_\delta)_{\delta>0}$ is presented in this work using the physical concept of impedance. This method is different of the one performing a rescaling in the thin layer, see [9]. It leads to obtain direct and simplified problems. Where the thin layer effect is completely described by the impedance operator. The techniques employed are primarily based on the functional calculation of Dunford, the semigroups theory, the interpolation and some ideas of work in [15], [8] and [10]. We obtain existence, uniqueness and maximal regularities new results in the Hölder spaces for the fixed δ and then we study the limit passage when $\delta \rightarrow 0$ of $(P_\delta)_{\delta>0}$. This work complete thus what was obtained in the framework L^p , see [9].

Key words : *Abstract differential equation of elliptic type, Transmission problems, Hölder spaces, interpolation, semigroups, fractional powers of operator, Dunford operational calculus.*

A ma très chère mère ...

Il y a des dates qu'on n'oublie guère et justement le dimanche 27 avril 2008 en est une, car c'est le jour où tu nous quitté pour l'éternel et pour un monde meilleur laissant un grand vide dans nos cœurs.

Lundi 26 Mai 2008 en est une autre ...

Puisse Dieu le tout-puissant et miséricordieux accueillir ma aimée mère en son vaste paradis et lui accorder sa sainte miséricorde, repose en paix, chère mère, ton sourire est gravé à jamais dans nos cœurs.

"Les êtres ne meurent pas quand on les enterre. Ils meurent quand on les oublie."

"A Dieu nous appartenons et à lui nous retournons."