Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième

Denise Grenier

▶ **To cite this version:**

Denise Grenier. Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1988. Français. NNT : . tel-00331264

HAL Id: tel-00331264
https://theses.hal.science/tel-00331264

Submitted on 16 Oct 2008

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université Joseph Fourier - Grenoble I

THESE

présentée par

Denise Grenier

pour obtenir le titre de Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble I
(arrêté ministériel du 5 juillet 1984)

mathématiques appliquées et informatique
didactique des mathématiques

Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième

soutenue le **08 juillet 1988** devant la commission d'examen :

président :	Charles Payan
examinateurs :	Daniel Alibert
	Gilbert Arsac
	Colette Laborde
	Sylvette Maury

Thèse préparée au sein du Laboratoire Structures Discrètes et Didactiques

LAJZEROWICZ Jeanine	Physique
LAJZEROWICZ Joseph	Physique
LAURENT Pierre-Jean	Mathématiques Appliquées
LEBRETON Alain	Mathématiques Appliquées
DE LEIRIS Joël	Biologie
LHOMME Jean	Chimie
LLIBOUTRY Louis	Géophysique
LOISEAUX Jean-Marie	Sciences Nucléaires I.S.N.
LUNA Domingo	Mathématiques Pures
MACHE Régis	Physiologie Végétale
MASCLE Georges	Géologie
MAYNARD Roger	Physique du Solide
OMONT Alain	Astrophysique
OZENDA Paul	Botanique (Biologie Végétale)
PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
PERRIER Guy	Géophysique
PIERRARD Jean-Marie	Mécanique
PIERRE Jean-Louis	Chimie Organique
RENARD Michel	Thermodynamique
RINAUDO Marguerite	Chimie CERMAV
ROSSI André	Biologie
SAXOD Raymond	Biologie Animale
SENGEL Philippe	Biologie Animale
SERGERAERT Francis	Mathématiques Pures
SOUCHIER Bernard	Biologie
SOUTIF Michel	Physique
STUTZ Pierre	Mécanique
TRILLING Laurent	Mathématiques Appliquées
VALENTIN Jacques	Physique Nucléaire I.S.N.
VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques Appliquées
VIALON Pierre	Géologie

PROFESSEURS de 2ème Classe

ADIBA Michel	Mathématiques Pures
ANTOINE Pierre	Géologie
ARMAND Gilbert	Géographie
BARET Paul	Chimie
BLANCHI J.Pierre	STAPS
BLUM Jacques	Mathématiques Appliquées
BOITET Christian	Mathématiques Appliquées
BORNAREL Jean	Physique
BRUANDET J.François	Physique
BRUGAL Gérard	Biologie
BRUN Gilbert	Biologie
CASTAING Bernard	Physique
CERFF Rudiger	Biologie
CHIARAMELLA Yves	Mathématiques Appliquées
COURT Jean	Chimie
DUFRESNOY Alain	Mathématiques Pures
GASPARD François	Physique
GAUTRON René	Chimie
GENIES Eugène	Chimie
GIDON Maurice	Géologie
GIGNOUX Claude	Sciences Nucléaires
GILLARD Roland	Mathématiques Pures
GIORNI Alain	Sciences Nucléaires
GONZALEZ SPRINBERG Gérardo	Mathématiques Pures
GUIGO Maryse	Géographie
GUMUCHAIN Hervé	Géographie
GUITTON Jacques	Chimie

HACQUES Gérard	Mathématiques Appliquées
HERBIN Jacky	Géographie
HERAULT Jeanny	Physique
JARDON Pierre	Chimie
JOSELEAU Jean-Paul	Biochimie
KERCKHOVE Claude	Géologie
LONGEQUEUE Nicole	Sciences Nucléaires I.S.N.
LUCAS Robert	Physique
MANDARON Paul	Biologie
MARTINEZ Francis	Mathématiques Appliquées
NEMOZ Alain	Thermodymamique CNRS - CRTBT
OUDET Bruno	Mathématiques Appliquées
PECHER Arnaud	Géologie
PELMONT Jean	Biochimie
PERRIN Claude	Sciences Nucléaires I.S.N.
PFISTER Jean-Claude	Physique du Solide
PIBOULE Michel	Géologie
RAYNAUD Hervé	Mathématiques Appliquées
RICHARD Jean-Marc	Physique
RIEDTMANN Christine	Mathématiques Pures
ROBERT Gilles	Mathématiques Pures
ROBERT Jean-Bernard	Chimie Physique
SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
SAYETAT Françoise	Physique
SERVE Denis	Chimie
STOECKEL Frédéric	Physique
SCHOLL Pierre-Claude	Mathématiques Appliquées
SUBRA Robert	Chimie
VALLADE Marcel	Physique
VIDAL Michel	Chimie Organique
VIVIAN Robert	Géographie
VOTTERO Philippe	Chimie

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE L' IUT 1

PROFESSEURS de 1ère Classe

BUISSON Roger	Physique IUT 1
DODU Jacques	Mécanique Appliquée IUT 1
NEGRE Robert	Génie Civil IUT 1
NOUGARET Marcel	Automatique IUT 1
PERARD Jacques	EEA. IUT 1

PROFESSEURS de 2ème classe

BOUTHINON Michel	EEA. IUT 1
CHAMBON René	Génie Mécanique IUT 1
CHEHIKIAN Alain	EEA. IUT 1
CHENAVAS Jean	Physique IUT 1
CHOUTEAU Gérard	Physique IUT 1
CONTE René	Physique IUT 1
GOSSE Jean-Pierre	EEA.IUT 1
GROS Yves	Physique IUT 1
KUHN Gérard, (Détaché)	Physique IUT 1
MAZUER Jean	Physique IUT 1
MICHOULIER Jean	Physique IUT 1
MONLLOR Christian	EEA.IUT 1
PEFFEN René	Métallurgie IUT 1
PERRAUD Robert	Chimie IUT 1
PIERRE Gérard	Chimie IUT 1
TERRIEZ Jean-Michel	Génie Mécanique IUT 1
TOUZAIN Philippe	Chimie IUT 1
VINCENDON Marc	Chimie IUT 1

PROFESSEURS DE PHARMACIE

AGNIUS-DELORD Claudine	Physique	Faculté La Tronche
ALARY Josette	Chimie Analytique	Faculté La Tronche
BERIEL Hélène	Physiologie et Pharmacologie	Faculté La Tronche
CUSSAC Max	Chimie Therapeutique	Faculté La Tronche
DEMENGE Pierre	Pharmacodynamie	Faculté La Tronche
FAVIER Alain	Biochimie	C.H.R.G.
JEANNIN Charles	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan
LATURAZE Jean	Biochimie	Faculté La Tronche
LUU DUC Cuong	Chimie Générale	Faculté La Tronche
MARIOTTE Anne-Marie	Pharmacognosie	Faculté La Tronche
MARZIN Daniel	Toxicologie	Faculté Meylan
RENAUDET Jacqueline	Bactériologie	Faculté La Tronche
ROCHAT Jacques	Hygiéne et Hydrologie	Faculté La Tronche
SEIGLE-MURANDI Françoise	Botanique et Cryptogamie	Faculté Meylan
VERAIN Alice	Pharmacie Galénique	Faculté Meylan

MEMBRES DU CORPS ENSEIGNANT DE MEDECINE

PROFESSEURS CLASSE EXEPTIONNELLE ET 1ère CLASSE

AMBLARD Pierre	Dermatologie	C.H.R.G.
AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie	C.H.R.G.
BEAUDOING André	Pédiatrie-Puericulture	C.H.R.G.
BEZEZ Henri	Orthopédie-Traumatologie	Hopital SUD
BONNET Jean-Louis	Ophtalmologie	C.H.R.G.
BOUCHET Yves	Anatomie	Faculté La Merci
	Chirurgie Générale et Digestive	C.H.R.G.
BUTEL Jean	Orthopédie-Traumatologie	C.H.R.G.
CHAMBAZ Edmond	Biochimie	C.H.R.G.
CHAMPETIER Jean	Anatomie-Topographique et Appliquée	C.H.R.G.
CHARACHON Robert	O.R.L.	C.H.R.G.
COLOMB Maurice	Immunologie	Hopital sud
COUDERC Pierre	Anatomie-Pathologique	C.H.R.G.
DELORMAS Pierre	Pneumophtisiologie	C.H.R.G.
DENIS Bernard	Cardiologie	C.H.R.G.
GAVEND Michel	Pharmacologie	Faculté La Merci
HOLLARD Daniel	Hématologie	C.H.R.G.
LATREILLE René	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
LE NOC Pierre	Bactériologie-Virologie	C.H.R.G.
MALINAS Yves	Gynécologie et Obstétrique	C.H.R.G.
MALLION Jean-Michel	Médecine du Travail	C.H.R.G.
MICOUD Max	Clinique Médicale et Maladies Infectieuses	C.H.R.G.
MOURIQUAND Claude	Histologie	Faculté La Merci
PARAMELLE Bernard	Pneumologie	C.H.R.G.
PERRET Jean	Neurologie	C.H.R.G.
RACHAIL Michel	Hépato-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
DE ROUGEMONT Jacques	Neurochirurgie	C.H.R.G.
SARRAZIN Roger	Clinique Chirurgicale	C.H.R.G.
STIEGLITZ Paul	Anestésiologie	C.H.R.G.
TANCHE Maurice	Physiologie	Faculté La Merci
VIGNAIS Pierre	Biochimie	Faculté La Merci

PROFESSEURS 2ème CLASSE

BACHELOT Yvan	Endocrinologie	C.H.R.G.
BARGE Michel	Neurochirurgie	C.H.R.G.
BENABID Alim Louis	Biophysique	Faculté La Merci
BENSA Jean-Claude	Immunologie	Hopital Sud
BERNARD Pierre	Gynécologie-Obstétrique	C.H.R.G.
BESSARD Germain	Pharmacologie	ABIDJAN
BOLLA Michel	Radiothérapie	C.H.R.G.
BOST Michel	Pédiatrie	C.H.R.G.
BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie Adultes	Hopital Sud
BRAMBILLA Christian	Pneumologie	C.H.R.G.
CHIROSSEL Jean-Paul	Anatomie-Neurochirurgie	C.H.R.G.
COMET Michel	Biophysique	Faculté La Merci
CONTAMIN Charles	Chirurgie Thoracique et Cardiovasculaire	C.H.R.G.
CORDONNIER Daniel	Néphrologie	C.H.R.G.
COULOMB Max	Radiologie	C.H.R.G.
CROUZET Guy	Radiologie	C.H.R.G.
DEBRU Jean-Luc	Médecine Interne et Toxicologie	C.H.R.G.
DEMONGEOT Jacques	Biostatistiques et Informatique Médicale	Faculté La Merci
DUPRE Alain	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
DYON Jean-François	Chirurgie Infantile	C.H.R.G.
ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie	Faculté La Merci
FAURE Claude	Anatomie et Organogénèse	C.H.R.G.
FAURE Gilbert	Urologie	C.H.R.G.
FOURNET Jacques	Hépato-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
FRANCO Alain	Médecine Interne	C.H.R.G.
GIRARDET Pierre	Anesthésiologie	C.H.R.G.
GUIDICELLI Henri	Chirurgie Générale et Vasculaire	C.H.R.G.
GUIGNIER Michel	Thérapeutique et Réanimation Médicale	C.H.R.G.
HADJIAN Arthur	Biochimie	Faculté La Merci
HALIMI Serge	Endocrinologie et Maladies Métaboliques	C.H.R.G.
HOSTEIN Jean	Hépato-Gastro-Entérologie	C.H.R.G.
HUGONOT Robert	Médecine Interne	C.H.R.G.
JALBERT Pierre	Histologie-Cytogénétique	C.H.R.G.
JUNIEN-LAVILLAUROY Claude	O.R.L.	C.H.R.G.
KOLODIE Lucien	Hématologie Biologique	C.H.R.G.
LETOUBLON Christian	Chirurgie Générale	C.H.R.G.
MACHECOURT Jacques	Cardiologie et Maladies Vasculaires	C.H.R.G.
MAGNIN Robert	Hygiène	C.H.R.G.
MASSOT Christian	Médecine Interne	C.H.R.G.
MOUILLON Michel	Ophtalmologie	C.H.R.G.
PELLAT Jacques	Neurologie	C.H.R.G.
PHELIP Xavier	Rhumatologie	C.H.R.G.
RACINET Claude	Gynécologie-Obstétrique	Hopital Sud
RAMBAUD Pierre	Pédiatrie	C.H.R.G.
RAPHAEL Bernard	Stomatologie	C.H.R.G.
SCHAERER René	Cancérologie	C.H.R.G.
SEIGNEURIN Jean-Marie	Bactériologie-Virologie	Faculté La Merci
SELE Bernard	Cytogénétique	Faculté La Merci
SOTTO Jean-Jacques	Hématologie	C.H.R.G.
STOEBNER Pierre	Anatomie Pathologique	C.H.R.G.
VROUSOS Constantin	Radiothérapie	C.H.R.G.

En premier lieu, je voudrais exprimer ma reconnaissance à Madame Colette Laborde pour sa compétence exemplaire dans le rôle difficile et complexe de Directrice de Recherche. C'est grâce aux encouragements qu'elle m'a prodigués, à sa grande disponibilité et à ses critiques toujours positives que ce travail a pu aboutir.

Je remercie Monsieur Charles Payan, Directeur de recherche CNRS à l'Université Joseph Fourier de Grenoble, d'avoir accepté de présider le jury de soutenance de cette thèse.

Je remercie également :

Monsieur Daniel Alibert, Attaché de recherche CNRS à l'Université Joseph Fourier de Grenoble,

Monsieur Gilbert Arsac, Professeur à l'Université Claude Bernard de Lyon,

Madame Sylvette Maury, Maître de Conférence à L'Université des Sciences et Techniques du Languedoc de Montpellier,

d'avoir accepté de faire partie du jury de soutenance de cette thèse.

Je voudrais signaler l'apport des échanges fructueux que j'ai pu avoir avec chacun des membres du jury. Ils m'ont permis de terminer cette recherche dans la confiance, en me donnant la possibilité, par leurs questions et leurs critiques constructives, de la situer dans différents cadres et de l'ouvrir à d'autres objectifs.

Je remercie Claude Comiti, Philippe Haug et Françoise Richard, de m'avoir aidée dans la rédaction finale du manuscrit.

Mon travail a été très souvent un travail d'équipe. Je remercie tout particulièrement Jean François Bonneville, Mireille Dupraz et Michel Guillerault, membres de l'équipe de didactique des mathématiques de Grenoble, qui m'ont apporté depuis quatre ans un soutien et une aide sans lesquels ce travail n'aurait pu être fait.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Jack Deguet-Morin, enseignant de Mathématiques au collège Champollion (Grenoble), qui a participé activement à ce travail en acceptant dans un premier temps d'être utilisateur de notre processus d'enseignement, puis dans un deuxième temps, de s'intégrer temporairement dans notre groupe de recherche.Son ouverture d'esprit et son intérêt pour ce travail ont été très précieux.

Je remercie également :

- les membres de l'équipe de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble, qui à un moment ou à un autre ont participé aux observations en classe;

- les enseignants de collège de l'Académie de Grenoble qui m'ont accueillie dans leur classe, dans le cadre des expérimentations que nous avons menées avec les élèves de classes de 6ème à 3ème.

Je remercie le service de reprographie de l'institut IMAG pour le soin et la rapidité avec lesquels il a réalisé cet ouvrage.

Le soutien moral de mon compagnon, de ma famille et de mes amis est venu compléter celui de l'environnement universitaire. Ils savent tous à quel point l'intérêt qu'ils ont porté à la réussite de ce travail m'a été précieux dans les moments difficiles. Je les remercie de tout coeur.

Table des Matières

Introduction

I. Choix de la notion étudiée 1
II. Cadre théorique et objets de notre recherche 2

III. Autres recherches sur la symétrie orthogonale 6
III.1. Etude de conceptions d'élèves 6
III.2. Construction de situations problèmes 7
III.3. Une séquence d'enseignement en classe de quatrième 8

IV. Spécificités de nos travaux et méthodologie de la recherche 9
IV.1. Etude de variables et analyse de l'objet d'enseignement 9
IV.2. Contenu mathématique de la séquence d'enseignement 10
IV.3. Du côté de l'ingénierie didactique 12

Chapitre I. Diagnostic des conceptions d'élèves de collèges

I. Présentation générale 15
II. Description et analyse de la tâche 16
II.1. Les raisons de notre choix 16
II.2. Analyse de la tâche 17
II.3. Analyse préalable des procédures des élèves 18

III. Observation d'élèves en situation d'interaction 19
III.1. Description de l'activité et dispositif expérimental 19
III.2. Résultats 20

IV. L'expérimentation "points-segments" 22
IV.1. Description et analyse de l'activité 22
IV.2. Analyse des taux de réussite aux items P et S 25
IV.3. Répartition des résultats selon les classes 40
IV. 4. Conclusion 43

Chapitre II. Etude systématique de quelques variables

I. Objectif de l'expérimentation 45
II. Résultats 50

II.1. Prise en compte de l'approximation du tracé 50
II.2. Regroupement de caractéristiques 51
II.3. Analyse des réponses aux items du groupe A 52
II.4. Analyse des réponses aux items du groupe B 53
II.5. Des items particuliers dans les groupes A et B 55
II.6. Analyse des réponses aux items du groupe C 56
II.7. Analyse des réponses aux items du groupe D 60

III. Conclusion 62

Chapitre III. Analyse de l'objet d'enseignement

I. Les différents aspects du concept 65
I.1. De l'objet culturel au concept mathématique 65
I.2. L'objet d'enseignement 66

II. L'objet d'enseignement vu à travers les manuels 67
II.1. Direction de notre analyse et choix des manuels 67
II.2. La diversité des intitulés des chapitres 68
II.3. Les activités préliminaires en relation avec la notion 69
II.4. Transformation de figures et axes de symétrie 70
II.5. Liens entre symétriques d'un point et d'une figure 77
II.6. Les propriétés mises en évidence 80
II.7. Le rôle des instruments 83
II.8. Un aperçu sur les types d'exercices proposés 83
II.9. Prise en compte de quelques éléments didactiques 85

III. Conclusion 86
Annexes du chapitre II 88
Annexes du chapitre III 93

Chapitre IV. Construction d'un processus d'enseignement

I. Objectifs de la séquence 101
II. Nos choix didactiques pour l'approche de la notion 102
II.1. Le cadre didactique 102
II.2. Le cadre théorique 102

III. Analyse des différentes phases du processus 103

III.1. 1ère phase : diagnostic des perceptions et conceptions des élèves 104
III.2. 2ème phase : remise en question des conceptions erronées 107
III.3. 3ème phase : utilisation analytique des propriétés de la droite de symétrie 109
III.4. 4ème phase : une situation de communication 112
III.5. 5ème phase : transformation de figures et transformation ponctuelle 115

IV. Eléments du deuxième processus d'enseignement 116
IV. 1. Objectif 116
IV.2. Quelques éléments du nouveau processus 117

Annexes 118

Introduction aux chapitres V à X **120**

Chapitre V. Une phase introductive à la symétrie orthogonale

I. Analyse des activités 121
I.1. Rappel des objectifs 121
I.2. Nos hypothèses sur les conceptions initiales des élèves 122
I.3. Analyse des deux tâches individuelles 122
I.4. Analyse des figures 124

II. Déroulement de la phase collective d'introduction 128
II.1. Moments essentiels du déroulement 128
II.2. Conclusion 128

III. Analyse des deux tâches individuelles 129
III.1. Réponses des élèves à la première question 129
III.2. Analyse de la cohérence des réponses aux deux tâches 131
III.3. Analyse des droites tracées 136
III.4. Conclusion 141

IV. Mise en groupe des élèves 142
Annexe 146

Chapitre VI. Remise en question des conceptions erronées

I. Description de la situation (première séquence) 147
I.1. Consigne et dispositif expérimental 147

I.2. Choix des figures 148

II. Résultats 150
II.1. Remarques générales sur le déroulement 150
II.2. Conceptions des élèves et variables influentes 151

III. Conclusion 166
III.1. Conceptions et procédures mises en oeuvre dans la tâche 166
III.2. Apprentissages apportés par l'activité 169

IV. Modifications apportées à la tâche pour la deuxième séquence 171
IV.1. Introduction de la propriété d'incidence 171
IV.2. Mise en jeu de la variable connexité de la figure 172
IV.3. Modifications des valeurs de quelques variables 172
IV.4. Ordre des figures 173
IV.5. Dispositif expérimental et plan de la séance 174

V. Analyse de la deuxième réalisation de l'activité 176
V.1. Réponses des groupes 176
V.2. Quelques éléments de la phase de bilan 178
V.3. Conclusion 181

Annexe 182

Chapitre VII. Utilisation analytique des propriétés de la droite de symétrie

I. Introduction 187
II. Analyse de l'activité 187
II.1. Analyse de la tâche 187
II.2. Choix des figures et des instruments 189
II.3. Analyse a priori des procédures des élèves 190
II.4. Consigne et organisation sociale 192

III. Analyse du déroulement de l'activité 193
III.1. Bilan des procédures et des instruments utilisés 193
III.2. Le sens de la tâche pour les élèves 197
III.3. Conclusion 201

IV. Modifications de l'activité 203

IV.1. Explicitation du contrat 203
IV.2. Familiarisation préalable avec le compas 203
IV.3. Les propriétés d'incidence 204
IV.4. Modifications de quelques variables de figures 204
IV.5. Rappel de l'organisation sociale 205

V. Analyse du déroulement de l'activité modifiée 205
V.1. Commentaires généraux sur le déroulement de la séance 206
V.2. Analyse des procédures des élèves 206
V.3. Conclusion 211
V.4. Institutionnalisation de la notion de médiatrice 212
V.5. Construction des droites de symétrie du rectangle 215

VI. Conclusion générale sur la situation 217
Annexes 219

Chapitre VIII. Deux situations de communication

I. Description de la première situation (1ère séquence) 223
I.1. Objectif 224
I.2. Dispositif expérimental 224
I.3. Description et analyse de la tâche 225

II. Analyse des messages des élèves 228
II.1. Description d'un élément de type S 228
II.2. Description d'un élément de type NS 233

III. Une nouvelle situation de communication (2ème séquence) 240
III.1. Elaboration d'une nouvelle tâche 240
III.2. Description de l'activité 240

IV. Analyse des messages 242
IV.1. Objectifs de l'analyse 242
IV.2. Messages pour des figures de type S 242
IV.3. Messages pour des figures de types NS 245
IV.4. Conclusion générale 249

Annexes 251

Chapitre IX. Transformation de figures

I. Description de l'activité de la première séquence 261
II. Analyse du déroulement de l'activité 268
II.1. La consigne énoncée par l'enseignant 268
II.2. Construction du symétrique de la demi-feuille de lierre 268
II.3. Construction du symétrique du drapeau 272

III. Modifications apportées à l'activité 285
III.1. Modifications générales concernant la 2ème séquence 285
III.2. Modifications de la tâche avec instruments 287

IV. Analyse de l'activité de construction avec papier calque 289
IV.1. Transition vers la transformation 289
IV.2. Construction de la figure symétrique 292
IV.3. Conclusion de l'activité avec calque 295

V. Conséquences des modifications de l'activité de construction avec instruments 295
V.1. La mise en oeuvre de la propriété d'orthogonalité 296
V.2. Les conséquences de l'absence de règle graduée 298
V.3. Conclusion 299
Annexes 300

Conclusion relative aux chapitres V à IX

I. Conditions d'émergence des propriétés de la symétrie orthogonale 305
I.1. La propriété du milieu : un obstacle 305
I.2. La propriété d'orthogonalité au centre des apprentissages 306
I.3. La complexité des propriétés d'incidence 307
I.4. Le paradoxe de la propriété d'équidistance 310

II. Les apprentissages constatés lors des deux séquences 311
II.1. Conceptions erronées déstabilisées 311
II.2. Evolution des outils disponibles 312

Chapitre X. Une étude des phases collectives

I. Introduction 313
I.1. à propos des situations d'institutionnalisation 313

1.2. phase de bilan 314
I.3. Objectif et contenu du chapitre 316
I.4. Organisation du chapitre 317

II. Bilan de l'activité de construction à main levée 317
II.1. Une même conception sous-jacente à toutes les réponses fausses 317
II.2. Analyse des phases de bilan 318
II.3. Conclusion 326
II.4. Les apprentissages constatés à travers une activité individuelle 327

III. Construction avec instruments ou la mise en oeuvre des propriétés de la droite de symétrie
III.1. Analyse de la phase de bilan de la 1ère séquence 329
III.2. Une renégociation de la tâche avec les élèves 337
III.3. Analyse de la phase collective de la 2ème séquence 348
III.4. Conclusion 357

IV. Discussion collective sur des messages d'élèves 359
IV.1. Deux messages de la première séquence 359
IV.2. Conclusion 364
IV.3. Trois messages de la deuxième séquence 365
IV.4. Conclusion 372

V. Transformation de figures 374
V.1. Introduction 374
V.2. Phase collective de la première séquence 374
V.3. Deuxième séquence 384

VI. Conclusion 392
VI.1. Le rôle de l'enseignant dans les phases collectives 392
VI.2. Quelques directions de recherche sur l'enseignant 395

Conclusion

I. Du point de vue de la notion de symétrie orthogonale 397
II. Evolution des connaissances par les situations problèmes 399
III. A propos d'autres concepts de géométrie 402
IV. Questions relatives au rôle de l'enseignant dans la classe 403

Références bibliographiques **407**

Introduction

La didactique des mathématiques se constitue peu à peu en France en un nouveau champ scientifique, en particulier par la mise en place de concepts théoriques qui lui sont propres. Notre recherche contribue au fonctionnement de quelques uns de ces concepts, dans le cadre de l'étude d'une notion mathématique particulière.

Les travaux présentés ici concernent une transformation géométrique, la symétrie orthogonale, dans son aspect d'objet d'enseignement au niveau du collège. Leur objectif est l'étude des connaissances des élèves de collège sur cette notion et des conditions d'évolution de ces connaissances en classe.

I. Choix de la notion étudiée

Les raisons qui ont motivé notre intérêt pour cette notion tiennent essentiellement à la multiplicité de ses aspects.

Avant d'être une notion mathématique, la symétrie est une notion familière. Elle a une *dimension culturelle et sociale,* en tant que relation intra ou interfigurale, que ne possèdent pas au même degré les autres transformations géométriques. Le mot *symétrie* fait partie du langage courant et a de nombreuses significations. H. Weyl (1964) évoque dans "symétrie et mathématique moderne" deux significations familières de ce mot. Dans une définition large, il peut désigner un état d'équilibre ou d'harmonie, liés à une certaine esthétique ou à une idée de "juste milieu". Dans un sens plus restreint, l'image de la balance associe la notion à la symétrie bilatérale, en particulier celle du corps humain. Cette deuxième définition est reliée au notions usuelles de symétrie-miroir ou symétrie-pliage.

Une autre raison de notre intérêt pour cette notion est *la place privilégiée du concept mathématique* parmi les transformations du plan. La symétrie orthogonale est une isométrie indirecte, à laquelle on peut réduire toutes les isométries du plan. En effet, elle engendre les rotations, les translations et les symétries glissées, qui peuvent être décrites comme des composées de deux ou trois symétries othogonales. Nous reviendrons sur le concept mathématique au chapitre III.

Une troisième raison se situe du côté de l'enseignement, lieu où l'objet culturel et le concept mathématique vont entrer en *interaction*. Certains aspects de l'objet familier peuvent correspondre à des propriétés du concept mathématique, mais d'autres peuvent se révéler inadaptés, voire incompatibles avec ces propriétés. Ceci pose la question de l'influence de l'objet culturel dans la formation des conceptions des élèves à propos de la notion mathématique. La perception va jouer un grand rôle, d'abord dans la formation des représentations de l'enfant sur la notion de symétrie *bilatérale*, puis dans celle des conceptions de l'élève sur le concept de symétrie *orthogonale*.

Enfin, les préoccupations de l'enseignement des transformations géométriques au collège se portent pour des raisons chronologiques d'abord sur cette transformation. En effet, depuis septembre 1986, la symétrie orthogonale est enseignée en classe de sixième (et non plus en quatrième comme c'était le cas dans les programmes de 1977) et c'est la seule transformation enseignée à ce niveau.

Nous allons préciser maintenant les questions que nous nous posons, en les replaçant dans le cadre théorique de notre recherche.

II. Cadre théorique et objets de notre recherche

II.1. Cadre théorique

Concepts relatifs aux connaissances des élèves

La détermination des conditions auxquelles doit satisfaire un processus d'enseignement sur une notion donnée doit prendre en compte l'état des connaissances des élèves avant cet enseignement. Nous prenons en effet pour hypothèse que l'élève a ses propres représentations de la notion et que celles-ci vont interférer avec les connaissances mises en jeu lors de l'enseignement.

La notion de *conception* (Vergnaud, 1984) rend compte de l'état des connaissances d'un élève relativement à un concept (mathématique). Elle s'exprime en particulier sous la forme d'un ensemble de règles d'action mises en oeuvre dans une classe de situations problèmes. G. Vergnaud a introduit le concept de *théorème-en-acte* pour permettre "d'exprimer la nature des relations découvertes par un enfant ou un élève quand il utilise une procédure nouvelle" et de "caractériser certaines opérations dites intuitives" (Vergnaud, op.cit.).

Nous faisons l'hypothèse en didactique qu'une conception a toujours un *domaine de validité* non vide, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble de situations problèmes qu'elle permet de résoudre. Plus son domaine de validité est grand, plus cette conception sera stable chez l'élève. Elle devient alors une véritable connaissance.

Que signifie en fait qu'une conception erronée persiste après l'enseignement ? Une explication possible est qu'elle n'est entrée en conflit à aucun moment avec une autre connaissance, au cours des apprentissages. Les deux connaissances coexistent alors dans le champ des connaissances de l'élève.

Une seconde possibilité est que, bien qu'elle ait été remise en question au cours de l'enseignement, elle n'ait pu être déstabilisée à long terme. Elle constitue alors un *obstacle* au sens de G. Brousseau. Le franchissement de cet obstacle peut être difficile et exiger un travail où le facteur *temps* intervient. Nous retrouvons le rôle important de ce facteur comme élément de la construction des connaissances (Vergnaud, 1981).

La théorie des situations dans une perspective constructiviste d'élaboration des connaissances

Notre conception sur la construction des connaissances donne une place très importante à l'activité de l'élève. Nous allons la préciser.

Deux éléments essentiels caractérisent l'apprentissage. Le premier concerne *l'interaction du sujet avec les situations* . Piaget a mis en évidence le rôle essentiel de l'activité du sujet dans la construction de ses connaissances. Ce point de vue constructiviste est très largement adopté en didactique : c'est dans l'action que se construisent les connaissances des élèves et c'est le fonctionnement de la connaissance qui en détermine la signification. L'action est "source et critère du savoir" (Vergnaud,1981).

Le second élément concerne les *interactions des sujets entre eux*. Les psychologues genevois (Doise et Mugny,1981) ont mis en évidence l'apport des situations d'interaction sociale, comme moteur dans les apprentissages, parce qu'elles favorisent les conflits socio-cognitifs. Mais elles obligent aussi à une explicitation des prises de décision des élèves, encore plus lorsque ceux-ci ont à fournir une solution commune. Citons N. Balacheff (1988) : "les situations dans lesquelles des élèves ont collectivement, en groupes restreints ou au niveau de la classe entière, à produire une solution commune à un problème, nécessitent la formation progressive d'un langage commun et adéquat aux objets et relations en jeu".

Dans ce contexte, *l'apprentissage est pour nous une modification des connaissances de l'élève que celui-ci doit produire lui-même et que l'enseignant doit provoquer.*

L'enseignant doit donc construire une situation d'apprentissage qui conduise l'élève à mettre en oeuvre ses connaissances et à en produire de nouvelles comme une réponse personnelle à une exigence du milieu et non à un désir de l'enseignant. La situation dans laquelle l'élève est placé doit donc être telle que la résolution du problème proposé demeure son propre problème et non celui de l'enseignant. L'activité par laquelle l'enseignant cherche à atteindre ce résultat est appelée par G. Brousseau *dévolution* du problème à l'élève.

Dans sa *théorie des situations*, qui propose une organisation des évènements didactiques, Guy Brousseau distingue trois types de situations dont la dévolution a pour objet de faire que l'élève donne lui-même un sens aux connaissances qu'il manipule. Il s'agit des situations d'action, de formulation et de validation. Une *situation d'action* se caractérise pour l'élève par des choix à faire, des décisions à prendre, qu'il n'est pas contraint d'expliciter ou de justifier. Au contraire, dans la *situation de formulation*, l'élève est astreint à expliciter ses actions pour les communiquer à d'autres élèves ou à l'enseignant. Il peut justifier ses actions et ses formulations, mais cette contrainte est la caractéristique de la *situation de validation.*

Mais l'enseignement ne peut être réduit à une organisation d'apprentissages. Comme l'écrit G. Brousseau (1987, p.47), "la prise en compte "officielle" par l'élève de l'objet de la connaissance et par le maitre de l'apprentissage de l'élève est un phénomène social très important et une phase essentielle du processus didactique. Cette double reconnaissance est l'objet de *l'institutionnalisation*".

Le rôle de l'enseignant ne se réduit donc pas à la construction de situations, il est aussi d'institutionnaliser les connaissances mises en jeu. Une situation d'institutionnalisation diffère des trois situations précédentes sur deux points essentiels. Dans celles-ci, l'enseignant a essentiellement la charge de la dévolution du problème à l'élève et il revient à l'élève de gérer le vrai et le faux pour en mener à bien la résolution. Au contraire des précédentes, la conduite de la situation d'institutionnalisation est sous la responsabilité de l'enseignant. Une telle situation a en effet pour objectif de donner un statut au savoir mis en jeu, afin de le rendre exportable en l'extrayant du contexte dans lequel il a été élaboré.

Certains éléments d'une situation problème ont une influence sur les procédures de résolution et sur les réponses des élèves, comme, par exemple, le contexte ou les caractéristiques des données du problème, les outils disponibles pour le résoudre. Nous appelons ces éléments les

variables de la situation. On peut repérer ces variables à partir des difficultés que les élèves rencontrent dans la résolution du problème et les réponses erronées qu'ils fournissent. Les *valeurs* de ces variables peuvent induire la mise en oeuvre d'une connaissance hors de son domaine de validité, ce qui conduit à l'erreur. L'*erreur* est donc pour le chercheur un indice des limites des connaissances des élèves. La connaissnace de l'erreur peut être, du point de vue de l'enseignement, un moyen pour faire évoluer ces connaissances.

La construction d'une situation didactique nécessite de connaître ces variables, dans le but de les utiliser comme moyens de contrôle du fonctionnement de cette situation par rapport aux apprentissages. Ce contrôle revient à fixer les valeurs de certaines de ces variables, comme *contraintes de la situation.* Dans les travaux en didactique, les situations d'institutionnalisation sont, du moins encore récemment, les moins étudiées de ce point de vue.

II.2. Objets de la recherche

Nous avons explicité les raisons pour lesquelles nous avons choisi la symétrie orthogonale comme objet d'étude (§I). Notre intérêt pour l'enseignement de cette notion est doublement justifié par :
- la durabilité de certaines conceptions erronées sur la notion chez les élèves de collège, constatée dans plusieurs recherches en France et à l'étranger;
- le très petit nombre de recherches, par contre, sur les conditions d'évolution des connaissances des élèves sur cette notion dans un processus d'enseignement en classe.

Nous précisons ces travaux au paragraphe III.

La théorie des situations n'a d'intérêt que si elle produit des situations reproductibles et communicables aux enseignants. Le contrôle de la dévolution des problèmes aux élèves et l'analyse du rôle de l'enseignant dans les phases collectives sont deux composantes de cette reproductibilité sur lesquelles nous ferons tout particulièrement porter notre étude.

Dans un premier temps, nous nous sommes posé la question suivante :

Peut-on élaborer une suite de situations problèmes susceptibles de remettre en question les conceptions erronées sur la symétrie orthogonale qui persistent chez les élèves après l'enseignement ?

En effet, la durabilité de ces conceptions laisse supposer qu'il n'est pas facile de créer les

conditions qui les remettent réellement en cause. L'élaboration d'une suite de situations problèmes ne suffit pas à déterminer un apprentissage. En particulier l'enseignant doit être pris en compte dans l'étude de tout processus d'enseignement, du point de vue de la dévolution des problèmes aux élèves et de l'institutionnalisation du savoir. Une autre question se pose :

Quels sont les moyens pédagogiques et didactiques dont dispose l'enseignant susceptibles de permettre la dévolution du problème à l'élève et une gestion des phases d'institutionnalisation adaptée aux objectifs d'apprentissage fixés? Quelles conditions sont nécessaires pour que ces moyens soient effectivement utilisables par l'enseignant ?

Nos travaux prétendent apporter quelques éléments de réponse à ces deux questions. Il nous faut maintenant expliciter en quoi ils sont différents ou complémentaires des travaux déjà existants pour ce qui concerne la symétrie orthogonale et le fonctionnement d'un processus d'évolution des connaissances sur cette notion.

III. Autres recherches en didactique sur la symétrie orthogonale

Plusieurs de ces recherches correspondent à une étude "diagnostic" des conceptions des élèves sur la notion avant et après l'enseignement en classe (III.1). D'autres consistent en l'élaboration et l'étude de situations problèmes isolées de la classe, c'est-à-dire ne s'inscrivant pas dans un processus d'enseignement et ne prenant pas en compte l'enseignant (III.2). Enfin, nous citerons deux études d'une séquence d'enseignement dans une classe de 4ème (ces travaux ont été réalisés avant les changements de programme de 1986) (III.3).

III.1. Etudes de conceptions d'élèves

Conceptions d'élèves sur les transformations du plan (K. Hart)

Dans le cadre d'un vaste projet de recherche, K.Hart et D. Kuchmann (Hart, 1981) ont repéré des régularités dans les réponses d'élèves anglais de 11 à 15 ans dans une tâche de construction à main levée d'image de figures par translation, symétries ou rotation. Ces régularités semblent liées à des caractéristiques particulières des figures ou de la feuille de papier sur laquelle elles sont dessinées. Les résultats de cette enquête, décrits dans Hart (op.cit.), nous ont permis de faire des hypothèses sur les conceptions des élèves sur la notion de symétrie orthogonale et sur l'influence de quelques variables dans la tâche proposée. Ces résultats ont servi de point de départ pour la première partie de notre recherche.

Comparaison transculturelle de conceptions d'élèves (B. Denys)

Une étude transculturelle avec des élèves français et japonais est menée par B. Denys (1985,1986) pour tenter de repérer l'influence du contexte socio-culturel sur l'apprentissage de cette notion. Des élèves français de collège et des élèves japonais d'âge et niveau scolaires correspondants ont résolu une même tâche de construction, très proche de celle que nous avons utilisée dans nos expérimentations. Les premiers résultats montrent que les mêmes types d'erreurs se retrouvent dans les deux populations française et japonaise, mais en moins grand nombre et à un âge plus bas chez les élèves japonais. Les conceptions initiales des élèves des deux populations sont donc comparables, mais il semble que l'enseignement et le contexte socio-culturel japonais permettent davantage le dépassement des conceptions erronées. Une étude est faite actuellement au Japon à ce sujet.

III.2. Construction de situations problèmes

Symétrie orthogonale et angles (E. Gallou)

Cette recherche utilise les contraintes d'un instrument de tracé pour permettre l'évolution des conceptions des élèves : ici un logiciel LOGO de tracé sur écran d'ordinateur. Bien souvent les élèves envisagent la symétrie orthogonale comme une isométrie directe, les procédures de type "translation objet-image" en sont un indice. Une séquence interactive de tracé de symétriques de figures a été conçue et réalisée, dans l'objectif de provoquer chez les élèves la prise de conscience du changement d'orientation constitutif de la symétrie orthogonale. On a joué sur les variables des tâches (nature des figures, position relative de la figure objet et de la droite de symétrie) pour provoquer une évolution des comportements des élèves (Gallou, 1985).

Nos expérimentations recouperont fortement les résultats de cette recherche, à propos des conceptions sous-jacentes aux tracés des élèves. Mais d'autres types de réponses apparaissent dus à l'environnement de travail (écran d'ordinateur) et aux contraintes du logiciel. Les situations construites ici se situent uniquement au niveau d'une géométrie de l'action et ne prennent pas en compte le rôle de l'enseignant.

Symétrie orthogonale et homogénéité du plan (Th. Bautier)

La mise en évidence des propriétés d'une transformation, lorsque celle-ci est considérée comme une relation entre deux configurations géométriques, privilégie les figures et, du même

coup, détruit l'homogénéité du plan, au sens que ces figures créent des vides et des pleins. Piaget et Garcia (1983) montrent les phénomènes curieux de non conservation des distances créés par la question des espaces vides et pleins chez des enfants. L'approche de la transformation par les figures relève donc d'une conception hétérogène du plan. Mais pour aborder la notion aux niveaux supérieurs, c'est-à-dire comme objet puis outil fonctionnel, les élèves doivent évoluer vers une conception plus homogène du plan. Cette homogénéisation implique le passage des relations intrafigurales aux relations interfigurales.

Th. Bautier (1986) étudie des situations problèmes qui permettent à l'élève de se construire une conception de la symétrie orthogonale ne faisant pas obstacle à une constitution ultérieure de l'homogénéité du plan. Il étudie deux caractéristiques des activités de construction d'images de figures par une symétrie orthogonale, qui paraissent essentielles pour cet objectif, à savoir :
- la configuration objet doit avoir plusieurs composantes connexes;
- la droite de symétrie ne doit pas être tracée.

La tâche choisie consiste à donner aux élèves la configuration objet et une partie de son image et à leur demander de construire la partie manquante de l'image, pour qu'elle soit superposable à la figure objet après retournement d'un calque. En l'absence de droite de symétrie, chaque composante connexe de la configuration objet ne peut être traitée séparément, comme c'est très souvent le cas lorsque la droite de symétrie est tracée. L'élève est ainsi obligé d'avoir recours aux relations entre les différentes composantes de la configuration objet et donc se poser le problème de la transformation de points du plan n'appartenant pas aux figures.

Une séquence de telles activités de construction a été proposée en dehors de la classe à des binômes d'élèves, puis en classe. Ces expérimentations ont confirmé l'hypothèse du rôle des variables connexité et distance entre les parties connexes de la figure-objet. De plus, alors que les tâches en jeu sont fondamentalement différentes, nos conclusions (développées aux chapitres I et II) rejoignent celles de cette recherche sur l'importance des variables liées à la nature et à la position des figures objets.

III.3. Une séquence avec l'enseignant en classe de quatrième

Instrumentation de la symétrie orthogonale (R. Gras)

R. Gras (1983) a réalisé une séquence en classe de quatrième de collège, dont les objectifs sont centrés sur l'acquisition fonctionnelle de trois notions : symétrie orthogonale, médiatrice et bissectrice. L'approche de ces notions est, dans un premier temps, manipulatoire, centrée

autour du "symétriseur", instrument qui produit des figures symétriques. Puis, à partir de l'observation du fonctionnement du symétriseur, les élèves doivent expliciter certaines propriétés de la transformation. Dans une deuxième étape, cet instrument sert à valider des constructions que l'élève a faites en anticipant le tracé qui serait obtenu avec la machine. Les contraintes et les limites apportées par le matériel jouent un rôle moteur pour l'élaboration d'autres outils, en particulier pour la mise en oeuvre des propriétés géométriques de la transformation.

Cette séquence se situait dans le cadre des projets de réforme des programmes au collège. C'est pourquoi les activités proposées sont tournées vers des manipulations et des transformations de figures, plus adaptées aux niveaux 6ème et 5ème, bien que l'enseignement ait été réalisé en 4ème. Un des résultats constaté par R. Gras est une meilleure réussite de ces élèves, par rapport à des élèves témoins, à un test de connaissance après l'enseignement. Un des arguments donnés pour expliquer cette réussite est l'aide apportée à l'élève par l'anticipation de la réponse que produirait le symétriseur.

R. Métrégiste (1984) a aussi réalisé des séquences sur les transformations géométriques, reprenant les transformateurs décrits par R. Gras et utilisant en plus des transformateurs numériques (calculettes préprogrammées) pour aboutir à la notion de fonction du plan. Il s'agissait donc d'amener les élèves à construire l'objet fonctionnel, tel qu'il était alors au programme de quatrième. Cet aspect de la transformation a disparu des nouveaux programmes.

Nous avons repris à notre compte l'idée de R. Gras de proposer un outil matériel accessible aux élèves pour initialiser la séquence d'enseignement (le pliage), puis de jouer sur les limites de cet outil pour inciter les élèves à mettre en oeuvre les propriétés géométriques de la droite de symétrie et de la transformation. Nous allons maintenant préciser nos choix du contenu mathématique, dans le processus que nous avons élaboré, et la méthodologie de notre recherche.

IV. spécificités de nos travaux et méthodologie de la recherche

IV.1. étude de variables et analyse de l'objet d'enseignement

Les travaux que nous venons de citer se situent tous dans une même problématique didactique, qui est aussi la nôtre, l'étude des connaissances des élèves et de l'évolution possible de ces connaissances grâce à des situations problèmes.

Un résultat commun à plusieurs de ces travaux est la persistance de conceptions erronées chez les élèves après un enseignement traditionnel. Les réponses d'élèves lors de la résolution de problèmes semblent se regrouper en quelques classes bien définies, ce qui laisse penser qu'elles sont induites par des caractéristiques de ces problèmes.

Pour élaborer des situations problèmes susceptibles de provoquer une évolution de ces conceptions, il est nécessaire de connaitre de manière précise les variables et les valeurs de ces variables qui jouent un rôle dans la situation. Les travaux de K. Hart répondent partiellement à cette question. Ils ont permis de repérer que les réussites des élèves dans des problèmes relatifs aux transformations dépendent fortement de caractéristiques liées aux figures et d'éléments définissant la transformation. En reprenant une des tâches proposée dans ces travaux et les résultats correspondants, nous avons réalisé dans un premier temps des expérimentations pour une étude systématique des valeurs de certaines variables et de leur influence sur les procédures et les réponses des élèves. Elles font l'objet des chapitres I et II.

Au vu des résultats de nos expérimentations, nous nous sommes posés la question de la manière dont ces variables et ces conceptions étaient prises en compte dans l'enseignement. Pour cela, nous avons fait une étude de huit manuels scolaires correspondant aux nouveaux programmes de 6ème. Cette étude, décrite au chapitre III, donne à penser que les conditions ne sont pas toujours réalisées en classe pour qu'une remis en question des connaissances erronées soit possible, ne serait-ce que parce qu'elles ne sont pas (assez) mises en contradiction avec d'autres connaissances.

Dans une deuxième étape, nous nous sommes intéressés à la construction d'un processus d'enseignement pour une classe de sixième, abordant la transformation conformément aux programmes officiels de 1986 (ch.IV).

IV.2. contenu mathématique de la séquence d'enseignement

Trois notions sont abordées dans ce processus, à savoir celles de droite de symétrie d'une figure, médiatrice d'un segment et transformation de figures, par le biais des constructions avec des outils matériels, puis avec les instruments usuels (règles, équerre, compas). Nous avons choisi de nous appuyer sur la notion de symétrie-pliage, familière à la majorité des élèves de cet âge, pour définir la notion de droite de symétrie d'une figure.

Dans un deuxième temps, l'interdiction de plier a pour but d'amener l'élève à anticiper le

résultat du pliage pour résoudre un problème de tracé (à main levée) de droites de symétrie de figures. Il s'agit de repérer, puis de remettre en question les conceptions des élèves qui se révèlent erronées et qui sont inférées par une perception de la symétrie axiale non adaptée à l'objet mathématique (ch.V,VI). Notre question est de savoir dans quelle mesure l'interaction d'élèves ayant des conceptions différentes suffit à cela et, sinon, quels moyens a l'enseignant pour le faire.

Puis, la mise en oeuvre des propriétés de la droite de symétrie est organisée dans le cadre de la résolution d'un problème de construction avec instruments (ch.VII). Il s'agit des propriétés que nous nommerons "milieu", "orthogonalité", "équidistance" et "incidence". Les noms donnés aux trois premières propriétés ne soulèvent aucune ambigüité. Nous nous devons de préciser par contre la dernière. La propriété d'incidence, telle que nous la nommerons désormais, se rapporte à des segments symétriques : deux segments symétriques ou leur prolongement se coupent sur l'axe de symétrie. Cette propriété découle de la propriété de conservation de l'alignement des points (commune à toutes les isométries) et de la propriété d'invariance des points de l'axe de la symétrie orthogonale.

On peut supposer que ces propriétés ne sont pas disponibles de la même manière chez les élèves. Aussi, nous avons défini des contraintes sur l'utilisation des instruments susceptibles de permettre la mise en oeuvre de chacune d'elles. Il s'agit pour nous d'analyser les effets de ces contraintes sur la mise en oeuvre des propriétés que nous venons de citer.

La notion de médiatrice est ensuite définie par l'enseignant à partir de la droite de symétrie d'un segment ou de deux points.

Une nouvelle situation problème est proposée aux élèves, dans laquelle la notion de droite de symétrie et ses propriétés doivent être utilisées pour résoudre un problème de communication entre eux (ch.VIII). Nous serons attentifs aux difficultés que la formulation de ces connaissances peuvent soulever chez les élèves.

La transition vers la transformation est réalisée à partir d'une tâche qui consiste à compléter une figure pour qu'elle admette une droite de symétrie. La symétrie orthogonale est ensuite abordée sous son aspect transformation de figures, dans une tâche de construction avec instruments (ch.IX). Les propriétés et la définition du symétrique d'un point sont issus de ce travail. La difficulté réside ici dans le passage de la conception de la symétrie comme une action d'un demi-plan dans l'autre à la transformation du plan dans le plan.

Dans ce processus, le sens de la notion se construit chez l'élève en partant de l'idée de

symétrie-pliage et d'une approche perceptive globale de la symétrie bilatérale, pour aboutir à un objet mathématique abordé de manière plus analytique par ses propriétés géométriques et ses actions sur les figures du plan et leurs points particuliers.

IV.3. Du côté de l'ingénierie didactique

Notre processus est constitué d'une suite ordonnée de situations problèmes construites dans le cadre de la théorie des situations didactiques. Nous faisons l'hypothèse qu'il est susceptible de déstabiliser certaines connaissances erronées des élèves et de construire de nouvelles connaissances relatives à l'objet d'enseignement.

Chaque situation problème est suivie d'une phase collective menée sous la responsabilité de l'enseignant. Ces phases collectives permettent dans un premier temps de valider (ou invalider) et d'homogénéiser les savoirs mis en oeuvre par les élèves lors des travaux en groupes ou individuels, puis dans un deuxième temps de fixer l'essentiel du savoir à retenir.

Ce processus a été réalisé dans une classe de 6ème d'un bon niveau (selon l'avis des enseignants de la classe), dans un collège de Grenoble, par l'enseignant de la classe à qui nous l'avons proposé, en en explicitant les objectifs d'apprentissage, le cadre théorique et les objectifs de recherche. L'enseignant n'ayant pas participé à son élaboration se présentait donc comme *utilisateur* de ce processus. Les séances ont été suivies par des observateurs, les échanges entre les élèves pendant les travaux de groupes ont été enregistrés et les interventions de l'enseignant filmées (ainsi qu'un des groupes d'élèves).

L'analyse du déroulement de cette première réalisation a montré des décalages entre les objectifs d'apprentissage prévus et ceux atteints. Ces décalages semblaient dus d'une part aux caractéristiques des situations problèmes proposées et, d'autre part, au rôle qu'avait exercé l'enseignant dans la dévolution des problèmes aux élèves et dans les phases collectives.

Dans un objectif de reproductibilité du processus proposé, il était nécessaire (nous ne disons pas suffisant) d'en modifier quelques éléments. Nous avons ainsi élaboré un second processus d'enseignement, en gardant la même structure pour la suite des situations problèmes et les *mêmes objectifs d'apprentissage*.

Les modifications avaient donc pour but d'améliorer l'adéquation à la fois de l'ensemble du processus et de chacune des situations problèmes aux objectifs d'apprentissage que nous nous étions fixés.

Du côtés des situations problèmes, les modifications ont portées sur les *variables et les contraintes de la situation.*

Du côté de l'enseignant, elles ont portées d'une part, sur *l'explicitation du contrat* avec les élèves pour certaines situations et, d'autre part, sur la *gestion des phases collectives.* L'enseignant ne se présente donc plus seulement comme utilisateur du processus. Il a cette fois participé activement à son élaboration, lors de réunions régulières avec le groupe de chercheurs.

Enfn, du côté du *temps*, il nous a semblé nécessaire d'augmenter les plages horaires imparties globalement pour chaque situation et la phase collective qui la suit. L'interaction entre élèves et la mise en place du débat dans la classe semblent nécessiter une phase de mise en route qu'il faut donc prévoir dans l'organisation de la séquence.

Le processus modifié a été réalisé l'année suivante dans une autre classe de 6ème d'un niveau analogue à la précédente, avec le même enseignant et dans le même collège.

L'analyse du déroulement de la deuxième séquence nous a permis de repérer les conséquences des modifications apportées aux situations problèmes sur les connaissances mise en oeuvre par les élèves. Pour établir la spécificité de ces modifications à la situation elle-même, nous avons étudié chacune d'elles de la manière suivante : analyse de ses effets lors de la réalisation de la première séquence, modifications apportées, analyse des effets de la situation modifiée dans la deuxième séquence et comparaison avec ceux de la situation précédente. Cette étude fait l'objet des chapitres VI à IX, chacun d'eux étant relatif à une situation problème. Au chapitre V, nous donnons un exemple d'utilisation d'une étude des conceptions des élèves de la classe sur la symétrie-pliage pour leur mise en groupe lors de la séquence.

L'analyse des phases collectives nous permet de faire des hypothèses sur les conditions qui permettent à l'enseignant d'avoir des moyens utilisables et efficaces pour gérer les phases collectives. Pour établir ces hypothèses, nous avons comparé les phases collectives des deux séquences qui ont suivi chacune des situations problèmes, en relevant ce qui nous semblait être différent d'une année à l'autre et ce qui, au contraire se répétait. Nous avons tenté de déterminer les causes de ces différences et de ces répétitions, par rapport, d'une part, aux connaissances effectivement mises en oeuvre par les élèves dans les situations problèmes et, d'autre part, aux décisions et choix de l'enseignant dans les phases collectives. Cette étude est l'objet du chapitre X. Elle permet d'ouvrir des pistes de rechèrche sur le rôle de l'enseignant dans les phases de bilan, en proposant quelques objets de réflexion à ce sujet.

Partie A

Cette partie correspond à la description des travaux de recherche préliminaires à la construction du processus d'enseignement réalisé pour des élèves de sixième :

- une étude des conceptions d'élèves de collège sur la symétrie axiale, avant et après l'enseignement en classe de quatrième (ch.I et II).

- une étude de l'objet mathématique et de l'objet d'enseignement à travers quelques manuels scolaires (ch.III).

Les annexes relatives à ces trois chapitres sont regroupées à la fin de cette partie.

Chapitre I

Diagnostic des conceptions d'élèves de collège

I. Présentation générale

I.1. Objectif global

L'objectif des trois expérimentations que nous décrivons était d'obtenir une meilleure connaissance des conceptions des élèves de collège à propos de la symétrie orthogonale, avant et après l'enseignement en classe.

Nous avons choisi de repérer ces conceptions à partir des procédures et des réponses d'élèves en situation de résolution de problème. La tâche commune aux trois expérimentaions consistait à tracer à main levée le symétrique d'une figure par rapport à une droite. Nous analysons cette tâche en II.

Dans un premier temps, nous avons cherché à déterminer les procédures des élèves, en les observant pendant la résolution d'un problème, en situation d'interaction à deux. Cette expérimentation est analysée au paragraphe III de ce chapitre.

Dans un deuxième temps, nous avons étudié de manière plus fine quelques variables qui semblent avoir une grande influence sur les procédures de résolution et les réponses des élèves. Deux expérimentations ont été réalisées à cet effet, dans lequelles les élèves étaient en situation de résolution individuelle, chacune d'elles étant spécifique de l'étude de variables particulières. Elles font l'objet du paragraphe IV de ce chapitre et du chapitre III.

Ces trois expérimentations ont été menées avec des élèves de 6ème à 3ème de différents collèges.

I.2. Les travaux de base

Pour nos recherches, nous nous sommes inspirés des travaux de D.Küchemann et K.Hart en Angleterre décrits dans (Hart,1981), qui apportent surtout une classification de certaines

figures géométriques selon leur complexité repérée par les réussites d'élèves de 13 à 15 ans à des tests. Mais, tels que les résultats sont décrits, d'une part nous n'avons pas de renseignement sur les procédures de résolution des élèves, et d'autre part, les changements de caractéristiques des figures d'un item à l'autre étaient trop nombreux pour pouvoir en déduire lesquelles jouaient un rôle sur les réponses des élèves.

Nous nous sommes également inspirés des travaux de R.Gras en France (1983), qui décrivent des activités en classe de 4ème autour de la notion de transformation et en particulier autour de la notion de symétrie orthogonale, avec le symétriseur.

Les expérimentations de K.Hart et de R.Gras mettent en évidence le rôle de plusieurs variables, à savoir :
- l'intersection de la figure initiale avec l'axe de symétrie
- les directions de l'axe et des éléments composant la figure-objet (horizontale, verticale, obliques),
- la position de la figure par rapport aux limites de la feuille (symétrique dans la feuille ou sortant du cadre de la feuille);
- le type de papier (blanc ou quadrillé).

Nous avons prise en compte ces variables dans l'élaboration des items proposés aux élèves lors des deux premières expérimentations. C'est une analyse systématique de certaines d'entre elles qui fait l'objet de notre troisième expérimentation.

II. Description et analyse de la tâche commune aux trois expérimentations

II.1. Les raisons de notre choix

La tâche proposée était une **tâche de construction à main levée** et il s'agissait pour les élèves de tracer le symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée. Cette tâche n'est pas usuelle dans le cadre scolaire, mais elle met en jeu la perception globale que les élèves ont de la figure symétrique d'une figure donnée : quelles sont sa position par rapport à la droite et à la figure-objet, sa direction, sa forme et sa dimension ? Elle permet de repérer si les élèves mettent en oeuvre globalement les propriétés du symétrique d'une figure par rapport à une droite, et évite d'éventuelles perturbations apportées par l'usage d'instruments de construction.

De plus, cette tâche est celle qu'avait choisie K.Hart dans la partie de ses recherches qui nous a

servi de base de travail et nous voulions vérifier et approfondir certains aspects de ses résultats.

Au moment où nous avons fait ces expérimentations, la symétrie orthogonale était enseignée en classe de 4ème, sous l'aspect analytique de transformation ponctuelle. L'aspect construction géométrique du symétrique d'une figure était pratiquement absent des exercices proposés aux élèves si l'on se fie aux quelques manuels que nous avons consultés. Cette tâche de construction peut donc amener les élèves qui ont déjà reçu un enseignement de la symétrie en classe (4ème et 3ème) à rechercher les propriétés de la symétrie qui sont utiles dans ce problème.

II.2. Analyse de la tâche

Il fallait donner une **définition** compréhensible par tous les élèves de collège : nous avons défini la figure symétrique par rapport à une droite comme celle qui se superpose parfaitement à la figure initiale si on plie le long de cette droite. Nous la nommerons parfois "définition-pliage". Pour résoudre le problème, les élèves pouvaient **imaginer le pliage** mais ne devaient pas plier. Ils devaient donc mettre en oeuvre des propriétés de la figure symétrique d'une figure par rapport à une droite pour résoudre le problème. Ces propriétés peuvent exister comme règles d'action chez les élèves sans pour autant que ceux-ci soient capables de les formuler.

Lors de la résolution du problème, une **approche perceptive globale** de l'ensemble figure-axe permet de déterminer l'emplacement approximatif de l'image. Cette approche est plus ou moins facile selon la nature de la figure et sa position par rapport à l'axe. Elle peut suffir dans certains cas pour effectuer le tracé de l'image, en particulier si la figure est proche de l'axe et ne le coupe pas. Lorque la figure est complexe ou coupe l'axe, une analyse peut être nécessaire.

Toute construction commence par le **choix d'un élément de la figure,** le plus souvent **un point** dans la feuille, matérialisé par l'emplacement où l'élève pose son crayon. Dans cette tâche, le point initial doit être choisi **relativement à l'axe** et au point objet auquel il correspond. Il faut le déterminer (au jugé) sur une perpendiculaire à l'axe, à égale distance de l'axe que le point objet.

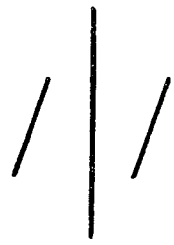
En adoptant cette procédure pour tous les points particuliers de la figure, puis en reliant correctement les points entre eux, on peut construire la figure symétrique. Le tracé se faisant

sans instruments, plus le point est proche de l'axe, plus la détermination au jugé de l'emplacement de son image est facile. Lorsque le point est loin de l'axe, il peut être plus facile d'utiliser la **propriété d'isométrie** de la transformation pour construire son image, en s'appuyant sur d'autres éléments de la figure déjà construits. Pour toute figure connexe, il est possible d'utiliser uniquement l'isométrie dès que l'on a déterminé un point et une direction, ou deux points. Le report des longueurs, angles, distances procède, là aussi, d'une détermination au jugé de leurs valeurs.

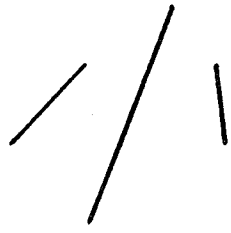
II.3. Analyse préalable des procédures des élèves

Nous faisons l'hypothèse que le point initial de la construction choisi par l'élève correspond à un point particulier de la figure objet (extrémité, sommet, centre). La détermination de ce point initial est soumise à l'influence de certaines variables, dont celles citées au §I.2.

Dans une approche perceptive globale, l'élève peut ensuite construire la figure uniquement par isométrie. Il doit alors faire des choix, les éléments ainsi déterminés n'étant pas uniques (par exemple, à partir d'une demi-droite, on peut construire deux angles égaux). L'axe n'étant alors plus pris en compte, d'autres variables ou conceptions vont jouer qui ne respectent pas forcément les propriétés relatives à l'axe. Ainsi, la mise en oeuvre de la conception erronée de la conservation des directions (repérée par K. Hart) est en contradiction avec le respect de la propriété d'équidistance à l'axe de deux points symétriques.



Dans un approche analytique de la figure, le tracé de chaque point passe par le choix de la direction du support de construction et d'une distance à l'axe. Mais si cette direction est fausse (par exemple, horizontale au lieu de perpendiculaire à l'axe, pour un axe oblique), l'isométrie peut ne plus être respectée (cas de la symétrie glissée qui n'est pas une isométrie).



Les remises en question par les élèves eux-mêmes de ces procédures erronées dépendent de la force de leurs conceptions sur la symétrie axiale.

Il est donc possible, par un choix approprié des contraintes de la tâche et des variables des figures, d'inférer, à partir des procédures et des réponses des élèves, les règles d'action qui les sous-tendent. C'est ce que nous avons tenté de faire dans ces trois expérimentations.

III. Observation d'élèves en situation d'interaction

III.1. Description de l'activité et dispositif expérimental

Notre première expérimentation avait pour objectif de **repérer les procédures de résolution** des élèves dans cette tâche. Pour cela, nous avons proposé une situation de travail en binôme (groupe de deux élèves), chaque binôme devant fournir une solution unique. Ce type de situation favorise les échanges entre les élèves qui doivent se mettre d'accord sur une solution commune, et permet de repérer les procédures et les connaissances mises en oeuvre dans l'élaboration de la solution.

La consigne était la suivante :
Vous devez vous mettre d'accord pour tracer à main levée le symétrique de chaque figure verte par rapport à la droite rouge.

La définition du symétrique d'une figure est celle évoquée en II.2.

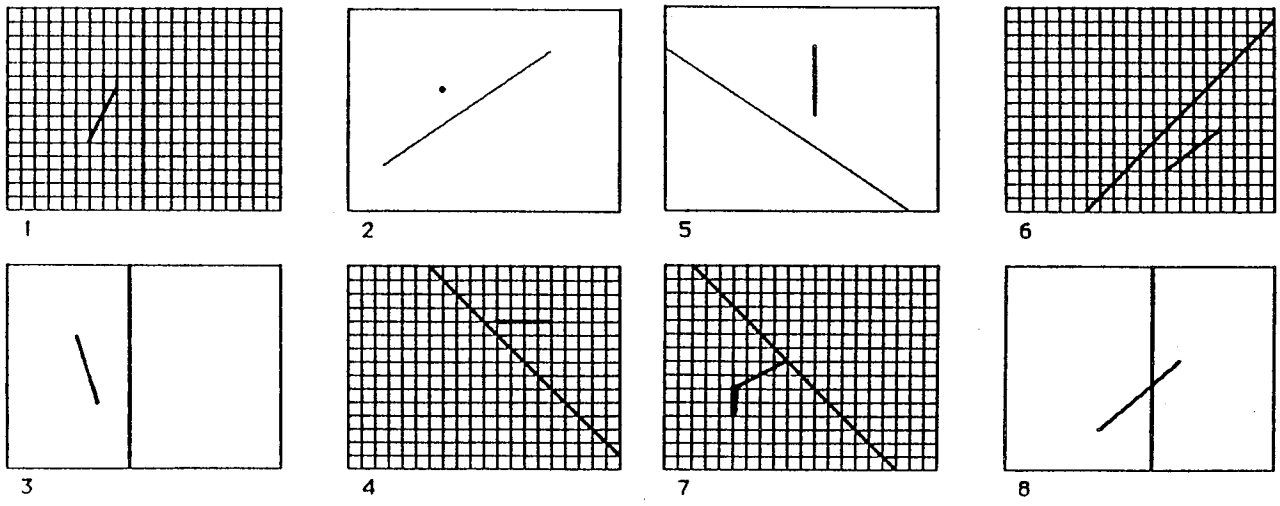
Les figures étaient composées de points ou segments, dans différentes directions dans la feuille et différentes positions par rapport à la droite de symétrie, sur papier blanc ou quadrillé (Grenier, 1985a).

Pour cette première expérimentation, nous avons pris six binômes d'élèves de classes de 4ème et 3ème d'un collège, choisis parmi des élèves volontaires de niveau moyen, en dehors de leurs heures de cours. Les élèves de la classe de 4ème n'avaient pas encore reçu l'enseignement concernant la symétrie orthogonale, ceux de la classe de 3ème avaient eu cet enseignement l'année précédente : nous voulions observer comment ces derniers réinvestissaient, dans ce type de tâche, les connaissances apprises.

Chaque binôme disposait d'un livret de huit items à résoudre, chaque item comportant une

figure composée d'une droite de symétrie et d'un objet (point, segments) dont il fallait prendre le symétrique. Nous avons placé un observateur auprès de chaque binôme : les deux élèves d'un binôme n'ayant qu'un seul livret, pas de brouillon et pour tout instrument un unique stylo, étaient contraints à des échanges oraux pour proposer une solution, l'argumenter ou la défendre, afin de se mettre d'accord sur une solution commune. Nous avons ainsi relevé les propositions et argumentations des élèves au cours de la résolution du problème et observé leurs procédures de résolution.

Les figures sont reproduites ci-après. L'explicitation de nos choix est décrite en détail dans l'article déjà cité.



III.2 les résultats

L'analyse détaillée de cette expérimentation a été publiée dans Grenier,1985a. Nous donnons ici les **hypothèses** qu'elle nous a permis de faire et les **questions** qu'elle a soulevées.

Il y conservation pour l'élève de la nature de l'objet initial (l'image d'un point est un point, l'image d'un segment est un segment). La conservation des longueurs est un invariant moins stable, qui peut entrer en conflit avec d'autres invariants. Le parallélisme de l'objet et de son symétrique a été plusieurs fois source de conflit entre les élèves des différents binômes. La

droite de symétrie matérialise sur la feuille deux demi-plans et la symétrie est perçue comme une transformation d'un demi-plan dans l'autre demi-plan, d'où les difficultés rencontrées lorsque le segment coupe la droite de symétrie.

La conception sous-jacente est que la figure symétrique est une figure de même forme et de même dimension située de l'autre côté et à la même "distance" de l'axe de symétrie. Cette "distance" est perçue globalement, comme une position d'équilibre (elle n'est pas forcément orthogonale à l'axe), les deux figures pouvant être translatées l'une de l'autre le long d'une direction horizontale. Nous préciserons cette conception dans les expérimentations suivantes.

Les directions verticales et horizontales dans la feuille jouent un rôle perturbateur dans la tâche. Elles induisent la mise en oeuvre de la règle d'action "la figure symétrique est sur la même ligne horizontale (ou verticale) que la figure-objet", plus encore semble-t-il sur le papier quadrillé qui matérialise ces directions. De plus, le papier quadrillé fait apparaître des procédures de comptage qui relèguent au second plan l'approche perceptive globale de la figure symétrique.

Plus généralement, l'évocation du pliage peut fournir des outils pour la recherche du symétrique d'une figure, mais ceux-ci semblent très limités. En particulier, lorsque le segment coupe l'axe, l'outil "pliage" a été remis en cause par des élèves, parce qu'il ne pouvait apporter la solution. Cette remarque présente un intérêt du point de vue des contraintes d'apprentissage. En donnant aux élèves un outil limité, nous les incitons à en découvrir d'autres plus efficaces. Nous reviendrons sur cet aspect de la "définition-pliage" lors de la construction du processus d'enseignement (ch.IV).

Ces observations ont permis de repérer un procédé de construction du symétrique d'un segment très répandu chez les élèves, consistant à déterminer l'image d'une des extrémités, puis, à partir de ce point, à tracer un segment dans une direction choisie : le symétrique de l'autre extrémité se déduit donc de la construction plutôt que d'en être le support. Ce procédé de construction met en jeu une analyse de la figure qui n'est pas celle habituellement utilisée dans l'enseignement. Ce résultat pose une question importante pour l'enseignement : l'élève peut-il réinvestir ses connaissances sur la construction du symétrique d'un point pour construire le symétrique de n'importe quelle figure ?
Pour tenter de répondre à cette question, nous avons élaboré une deuxième expérimentation reprenant la même tâche de construction, avec des élèves de classes de 6ème à 3ème en situation individuelle. Nous la décrivons maintenant.

IV. L'expérimentation "points-segments"

IV.1. Description et analyse de l'activité

IV.1.1. Objet de la recherche

Nous nous proposons dans ce qui suit d'étudier l'**hypothèse** suivante :

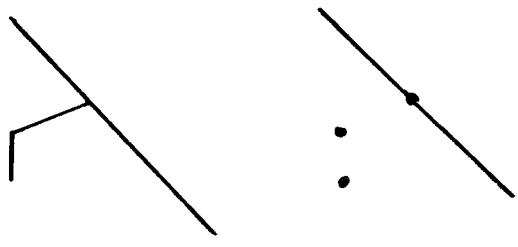
il ne suffit pas pour l'élève de savoir tracer le symétrique d'un point pour savoir tracer le symétrique de n'importe quelle figure.

Un argument en faveur de cette hypothèse provient des observations précédentes. Dans les procédures de construction des élèves, le segment image est souvent déterminé par un point et une longueur dans une direction choisie, plutôt que par deux points reliés par un segment.

Nous avons vu que certaines variables liées aux figures semblent jouer un rôle sur les procédures des élèves, en particulier, la direction de l'axe dans la feuille, l'intersection du segment avec l'axe et la direction du segment dans la feuille. Quel rôle vont-elles jouer par exemple pour une figure composée uniquement de points ? Cette question a un sens, car deux points situés sur une même horizontale ou sur une même verticale ne matérialisent pas de manière flagrante une direction privilégiée. D'autre part, une figure composée de points situés de part et d'autre de l'axe ne coupe pas l'axe de symétrie.

IV.1.2. Choix des items

Nous avons choisi de comparer directement les réponses d'un élève à un item composé de segments, à ses réponses à un item "analogue" composé seulement de points isolés qui sont les traces des extrémités des segments précédents. Dans cet item "analogue", la position des points dans la feuille et par rapport à l'axe est la même que celle des points privilégiés du segment. En voici un exemple. Dans toute la suite, les items du type du premier seront appelés items "segments" et les seconds, items "points".



Nous avons élaboré les items en prenant en compte trois variables dont nous avons choisi des valeurs qui nous semblent pertinentes pour notre objet de recherche. Ainsi :
- pour la direction de l'axe dans la feuille, que nous noterons AX, nous distinguerons trois valeurs, verticale, horizontale et oblique, notées respectivement V, H, O;
- pour l'intersection figure-axe, notée INTER, trois valeurs également : l'axe "ne coupe pas", "touche" ou "coupe" la figure, notées NC, T, C;
- enfin, pour la direction dans la feuille des segments composant la figure notée SEG, les valeurs V, H, O.

Les choix pour le type de papier (blanc ou quadrillé) ont été faits dans un deuxième temps. L'étude de cette variable ne sera faite dans cette expérimentation que sur certains items particuliers.

Quarante items "segments" ont été élaborés et répartis dans cinq livrets. Les huit items de chaque livret ont été repris sous forme de "points" dans un autre livret. Ainsi, chaque livret "segments" (notés de SA à SE) est formé d'items composés d'un axe de symétrie et, comme figures initiales, un segment ou deux segments adjacents; chaque livret "points" (noté de PA à PE) est la réplique exacte du premier, dans lequel ne sont tracées que les extrémités des segments : les figures initiales dans ce second livret sont donc des points (un, deux, ou trois points). Les items de chaque livret ont été numérotés de 1 à 8. Ainsi, par exemple, l'item SA3 est le troisième item du livret SA, PA3 étant l'item "points" qui lui est associé.

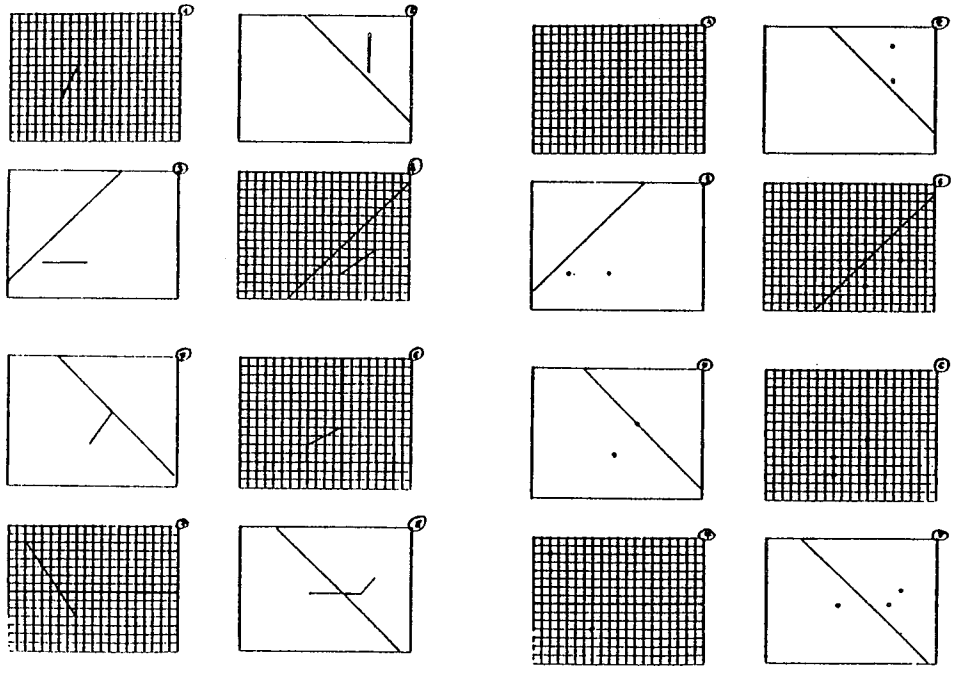
La répartition des 40 items a été faite de manière à ce que toutes les combinaisons de valeurs des variables AX, SEG et INTER que nous avons retenues se retrouvent dans chacun des livrets. Ainsi, par exemple, chaque livret contient un item où l'axe est oblique, le segment a une direction horizontale dans la feuille et ne coupe pas l'axe (ce qui correspond à la combinaison : AX=O, INTER=NC et SEG=H).

Nous donnons ci-dessous cette répartition, en fonction des valeurs des variables AX, INTER et SEG. Quelques valeurs ont été regroupées et des combinaisons n'ont pas été retenues, car le nombre des combinaisons possibles était trop élevé pour être repris dans un seul livret (cela aurait fait 27 items). Ainsi, les valeurs V et H de la variable AX ont été regroupées car il semble qu'elles soient analogues pour les élèves. De même, la combinaison AX=V, H et SEG=V,H n'est pas étudiée car, dans un tel cas, les règles d'action erronées sont dans leur domaine de validité (elles produisent la solution juste).

série	n° items de la série					valeurs des trois variables AX	INTER	SEG
1	A1 B3	B2	C1	D1	E1	V, H	NC	O
2	A6	B6	C5	D6	E5	V, H	T	O
3	A2	B5	C3	D2	E3	O	NC	V
4	A3	B1	C2	D3	E2	O	NC	H
5	A4	B4	C4	D4	E4	O	NC	O
6	A5	B7	C6	D5	E6	O	T	V,O
7	A7		C8	D7	E7	V, H	C	O
8	A8	B8	C7	D8	E8	O	C	H, O

Les items des livrets A et D sont identiques deux à deux au type de papier près (blanc ou quadrillé). Les items des livrets C et E également.
Une erreur lors de la composition des livrets fait que le livret B n'a pas d'item dans la série 7 et un item de plus dans la série 1, série dans laquelle les valeurs des variables AX et INTER rendent la tâche facile. Pour cela, nous attendons que le livret SB soit mieux réussi globalement que les autres livrets de type S.

Les livrets sont reproduits en annexes. Nous donnons seulement pour exemple ci-dessous, les items composant le livret PA et leurs correspondants composant le livret SA.



IV.1.3. Dispositif expérimental

Nous avons interrogé des élèves de collège de classes de 6ème à 3ème en situation de test individuel écrit dans le cadre de la classe. Nous leur avons donné successivement à chacun deux livrets : un livret de type S et le livret de type P correspondant. Pour la moitié des élèves,

le livret de type P a été distribué avant le livret de type S et pour l'autre moitié des élèves, dans l'ordre inverse. Ceci peut nous permettre de repérer si les résultats sont différents selon l'ordre de passage. Le premier livret était repris par l'enseignant avant la distribution du second.
Nous avons fait passer ces livrets dans cinq classes différentes, deux classes de 6ème et une classe de chacun des trois autres niveaux du collège. Les totaux des effectifs par classes et type de livrets sont donnés dans le tableau ci-dessous.

classe	6	5	4	3	totaux
A	10	4	4	4	22
B	8	5	5	5	23
C	9	5	5	4	23
D	9	4	5	5	23
E	9	4	5	4	22
totaux	45	22	24	22	113

IV.2. Analyse des taux de réussite aux items P et aux items S

Nous ferons d'abord une analyse comparée des réussites globales aux livrets S et P, puis une analyse des types de réponses aux items P et S en fonction des valeurs des variables AX, SEG et INTER, enfin quelques résultats différentiels selon les classes.

IV.2.1. Comparaison des réussites globales aux livrets S et P

a. Les réussites aux livrets S

Le tableau ci-dessous donne, pour chaque item des cinq livrets de type S, le nombre de bonnes réponses obtenues, toutes classes confondues.

nom du livret nombre d'élèves par livret	SA 22	SB 23	SC 23	SD 23	SE 22	
item n°1	20	13	20	20	21	
item n°2	16	22	12	16	13	
item n°3	12	20	12	14	13	
item n°4	18	17	11	18	12	
item n°5	9	12	17	10	20	
item n°6	22	22	5	21	7	
item n°7	11	10	6	14	8	
item n°8	10	9	7	10	7	
total des réussites par livret total des réponses par livret	118 176	125 184	90 184	123 184	101 176	total = 557 total = 904
pourcentage de réussite	67.0	67.9	48.9	66.8	57.4	%total = 61.6

Les livrets SA, SB et SD sont réussis de manière analogue par les élèves. SB est le mieux réussi, ce que nous attendions, puisqu'il comporte un item de plus (B3) dans la série 1 composée d'items "faciles" et un item de moins dans la série 7, composée d'items plus difficiles.

Par contre, la moins grand réussite aux livrets SE et SC n'était pas attendue. De plus, SE étant la réplique de SC, la différence de réussite globale entre les deux livrets (8.5%) ne peut donc s'expliquer par le seul jeu des variables AX, INTER et SEG. Une analyse plus fine de l'influence de la variable "type de papier" serait nécessaire pour conclure à ce sujet, mais les conditions ne sont pas réunies ici pour permettre cette analyse. (cette étude est faite dans la troisième expérimentation).

b. Les réussites aux livrets P

Le tableau ci-dessous est à lire comme le précédent.

nom du livret nombre d'élèves par livret	PA 22	PB 23	PC 23	PD 23	PE 22	
item n°1	21	14	19	19	19	
item n°2	17	20	17	16	15	
item n°3	17	20	17	17	17	
item n°4	19	18	16	20	15	
item n°5	13	16	19	17	19	
item n°6	20	20	10	21	10	
item n°7	17	13	14	19	18	
item n°8	19	17	18	19	16	
total des réussites par livret total des réponses par livret	143 176	138 184	130 184	148 184	129 176	total = 688 total = 904
pourcentage de réussite	81.3	75.0	70.7	80.4	73.3	%tot. = 76.1

Les livrets PA et PD sont mieux réussis que les trois autres, le livret PC étant, comme pour son équivalent de type S, le moins bien réussi des cinq. Mais l'écart maximum de réussite entre les cinq livrets P est moins grand que pour les livrets P (10.6% au lieu de 19%).

c. Comparaison des réussites globales aux livrets S et P

Les différences de taux de réussite entre les livrets S et les livrets P associés sont récapitulés ci-dessous.

nom du livret	A	B	C	D	E
pourcentage de réussite livrets S	67.0	67.9	48.9	66.8	57.4
pourcentage de réussite livrets P	81.3	75.0	70.7	80.4	73.3
différences de ces pourcentages	14.3	7.1	21.8	13.6	15.9

Chacun des livrets P est mieux réussi que le livret S qui lui est associé, la différence de réussite allant de 7.1% à 21.8%. Rappelons qu'ils ont été traités par les mêmes élèves dans la même plage horaire. Il semble donc que les livrets S ne soient pas équivalents aux livrets P du point de vue des réussites des élèves. Dans cette tâche, le traitement d'une figure "segments" est plus difficile que celui d'une figure "points".

La différence de réussite la moins grande se situe entre les livrets SB et PB. Or, le livret B est celui qui contient le plus d'items dont les caractéristiques sont supposées (une de nos hypothèses) ne pas changer les procédures des élèves dans le passage des segments aux points. A l'opposé, la différence de réussites entre les livrets SC et PC est très grande. Nous allons analyser les causes de ces différences, en considérant les items composant ces différents livrets.

Les questions que nous nous posons sont les suivantes :
(a) notre hypothèse que la tâche ne présente pas les mêmes difficultés pour des figures "points" et des figures "segments" est-elle vérifiée ?
(b) y a t'il une implication de la réussite aux items "segments" à celle aux items "points", et, si oui, pour quel type d'items ?
(c) quelles sont les variables qui provoquent des changements dans les réponses des élèves, entre les figures "segments" et les figures "points" ?

IV.2.2. Notre stratégie d'analyse des items

Nous avons choisi un **premier critère de regroupement** selon l'axe des réussites aux items S, parce que celles-ci forment une plus large bande que les réussites aux items P.

Des constatations immédiates :
- d'une part, les items S des séries 6 et 8 ont tous été réussis par moins de la moitié des élèves;
- d'autre part, ceux des séries 1 et 2 ont tous été réussis par plus des trois quarts des élèves.

Nous en déduirons un premier découpage selon cet axe en trois ensembles (NS et NP

indiquent respectivement le nombre de réussites aux items S et celui aux items P) :
Z1={items tels que NS≥17}, Z2={items tels que 10<NS<17}, Z3={items tels que NS≤10}

Le **second axe de découpage** prend en compte les différences de réussites entre un item S et l'item P correspondant. Cette différence est très faible (I NS-NP I≤2) pour tous les items du groupe Z1. Dans le groupe Z3, les séries 6 et 8 se situent de part et d'autre de la frontière correspondant à une différence de réussites égale à 6. De plus, les items de Z2 se situent tous en deçà de cette même frontière (NS-NP=6). Il semble se dégager quatre groupes :

G1 : grande réussite à la fois aux items S et P

G2 : réussite moyenne à la fois aux items S et P

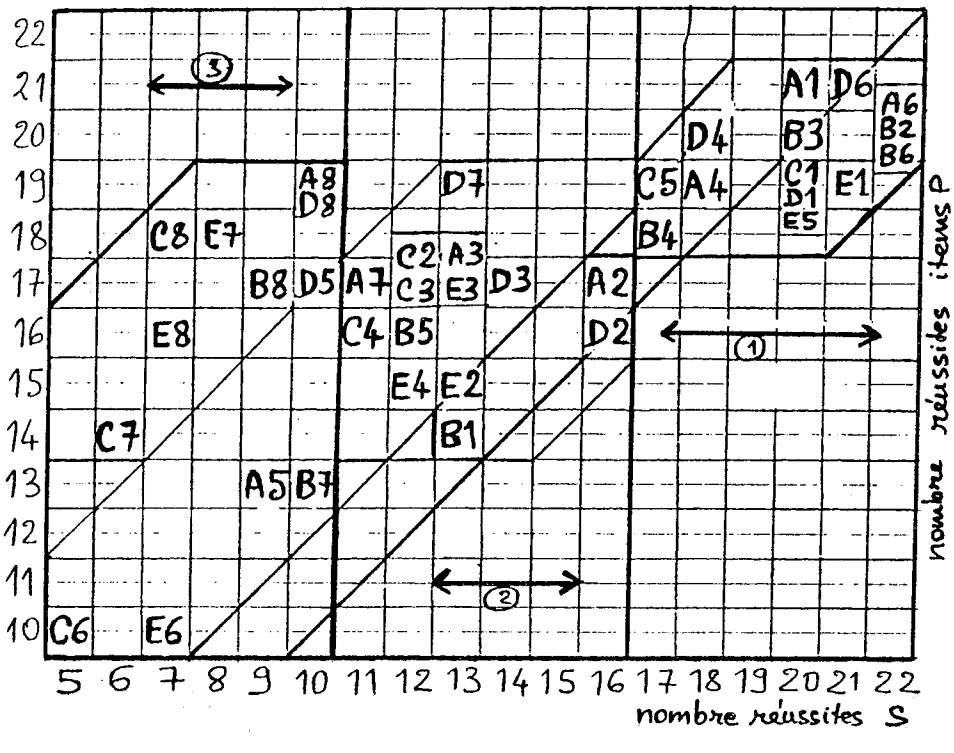
G3 : réussite très faible à la fois aux items S et P

G4 : grande réussite aux items S et faible réussite aux items P.

Voici leurs caractéristiques et leur composition.

groupe	valeurs de NS et NP-NS	n° items	n° série
G1	{ items tels que 17≤NS≤22 et -2≤NP-NS≤2 }	A1 B2 B3 C1 D1 E1 A6 B6 C5 D6 E5 A4 B4 D4	série1 série2 série5
G2	{ items tels que 11≤NS≤16 et 0≤NP-NS≤6 }	C4 E4 A2 B5 C3 D2 E3 A3 B1 C2 D3 E2 A7 D7	série 5 série3 série4 série7
G3	{ items tels que 5≤NS≤10 et 3≤NP-NS≤7 }	C6 E6 A5 B7 D5	série6
G4	{ items tels que 5≤NS≤10 et 8≤NP-NS≤11 }	B8 C8 E7 A8 C7 D8 E8	série7 série8

Ce découpage est représenté ci-après. Chaque item est indiqué par son numéro.



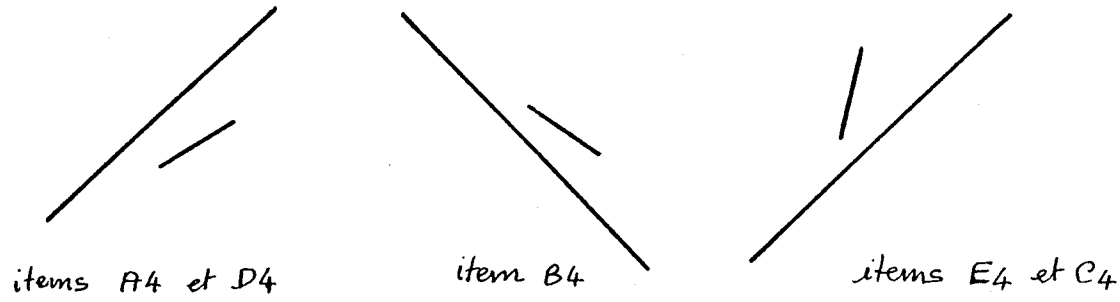
Nous allons maintenant analyser les caractéristiques des items de chacun des quatre groupes.

IV.2.3. Groupe G1 : une très grande réussite aux items S et P

Tous les items vérifiant les caractéristiques AX=V,H et INTER=NC, T se retrouvent dans le groupe 1. Ils sont réussis, à l'exception de l'item C5, par plus de 80% des élèves dans leur version S comme dans leur version P. Il semble donc que, lorsque l'axe est vertical ou horizontal dans la feuille et que la figure occupe un seul des demi-plans déterminés par l'axe, la tâche est facile pour les figures des deux types.

Ce groupe contient également trois des cinq items de la série 5 pour lesquels AX=O. Les deux autres items de cette catégorie (items C4 et E4) se retrouvent dans le groupe G2 des réussites moyennes. Examinons plus précisément les réussistes.

n° item	A4	D4	B4	E4	C4
NS	18	18	17	12	11
NP	19	20	18	15	16
NP-NS	1	2	1	3	5



Il semble donc qu'une autre variable joue un rôle pour l'élève dans cette tâche, provoquant une différence de réussite entre les items A4, B4, D4 d'une part et les items C4 et E4 d'autre part, aussi bien dans leur version S que dans leur version P. Nous analysons cette variable au paragraphe suivant. Remarquons seulement ici que le groupe G2 dans lequel on retrouve les items C4 et E4 est caractérisé essentiellement, dans la version S, par des segments verticaux ou horizontaux dans la feuille. Or ces deux items contiennent un segment dont la direction est proche d'une direction privilégiée (verticale), ce qui n'est pas le cas des items A4, B4 et D4.

IV.2.4. Groupe G2 : une réussite moyenne aux items S et P

a. L'influence combinée des variables AX et SEG

Le groupe G2 correspond à une réussite moyenne, pour les items S (de 55% à 73%) comme pour les items P (de 61% à 77%).
Tous les items vérifiant les caractéristiques AX=O, INTER=NC et SEG=V,H, sont dans ce groupe. La combinaison de la direction oblique de l'axe, des directions privilégiées du segment et de l'intersection de la figure avec l'axe est donc représentative d'un certain niveau de difficulté.

Nous y retrouvons aussi les deux items C4 et E4 que nous avons déjà évoqué, pour lesquels les variables AX et INTER ont les mêmes valeurs que les dix items précédents. L'hypothèse qui permettrait de les rattacher aux items précédents est que la direction du segment dans la feuille joue comme une variable continue : la "presque-verticalité" des segments dans C4 et E4 a pu jouer le même rôle que la verticalité. Cette hypothèse a un sens dans cette tâche de tracé à main levée qui met fortement en jeu une approche perceptive de la figure. Nous allons l'appuyer en montrant la correspondance des réponses erronées données par les élèves aux dix items pour lesquels le segment est vertical ou horizontal d'une part, et aux items C4 et E4 d'autre part.

Cette correspondance s'exprime ainsi : les réponses dans lesquelles le segment image est parallèle au segment-objet, représentent au moins la moitié des réponses erronées pour tous ces items (sauf E3). Ce résultat se lit dans le tableau ci-dessous (différence entre la dernière et l'avant dernière colonne).

n° item S	B1	C2	A2	D2	E2	B5	C3	A3	D3	E3	C4	E4
nombre de prolongements	4	6	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0
nbre de réponses parallèles autres	6	4	3	3	2	10	6	5	6	3	8	6
images autres (non parallèles)	0	1	3	2	4	1	5	5	3	6	4	4
total réponses fausses	10	11	6	7	9	11	11	10	9	9	12	10

Parmi les réponses de type "parallélisme", celles de type "prolongement" ont un statut particulier. La procédure qui les fournit consiste à choisir comme direction de support pour la construction celle matérialisée par le segment. Nous parlerons de **procédure de "rappel par prolongement".**

Pour les sept dernier items du tableau, le tracé du segment-image dans le prolongement du segment-objet est "interdit", c'est-à-dire, se situe hors des limites de la feuille. C'est la raison

pour laquelle il n'y a aucune répose de ce type pour ces items. Pourtant, le nombre des réponses de type "parallélisme" est aussi grand que pour les cinq autres. La règle d'action "le segment image est parallèle au segment objet" semble être suffisamment prégnante pour provoquer chez les élèves une adaptation de leurs procédures en fonction des possibilités de réponses à l'item.

La direction du segment dans la feuille pour C4 et E4 est suffisament proche de la verticale pour induire chez les élèves les mêmes types de réponses erronées.

En conclusion, pour les items de type S, la combinaison des caractéristiques AX=O et SEG=V,H semble induire la règle d'action "le segment image est parallèle au segment objet". Le nombre de réponses erronées de ce type est aussi important pour les items pour lesquels pour lesquels le prolongement est "interdit" que pour les autres. Il y a donc une adaptation des élèves à cette contrainte pour conserver le parallélisme du segment objet et du segment image.

b. Etude de la différence de réussite entre les items S et P

Pour répondre à la question, il nous faut regarder de plus près les réponses erronées aux items de type P correspondants. Le tableau ci-dessous est analogue à celui donné ci-dessus pour les items S.

n° item P	B1	C2	A2	D2	E2	B5	C3	A3	D3	E3	C4	E4
nombres de prolongements	5	5	0	1	4	0	0	0	0	0	0	0
nombres de parallèles autres	2	1	2	1	1	0	3	2	3	1	4	2
images non parallèles	2	0	3	3	2	7	3	3	3	4	3	5
total réponses fausses	9	6	5	5	7	7	6	5	6	5	7	7

Lorsque le prolongement est "interdit", les réponses de type "parallèles" sont minoritaires parmi les réponses fausses (15 sur 43). Au contraire, lorsque le prolongement est permis, elles sont majoritaires (22 sur 32).

Ainsi, lorsque le "rappel par prolongement" est permis, celui-ci est utilisé pour les figures "segments" et pour les figures "points". Lorsqu'il est interdit, d'autres procédures conservant le parallélisme de l'objet et de l'image sont mises en oeuvre pour les figures "segments", mais pas pour les figures "points". Il semble donc que la matérialisation par le tracé des segments des directions particulières dans la feuille provoquent une perturbation spécifique dans les procédures des élèves.

Plus précisément, nous avons relevé, pour chaque item, combien d'élèves, parmi ceux qui ont donné un segment image parallèle au segment objet pour l'item S (1ère ligne du tableau) ont donné une réponse d'un autre type pour l'item P (2ème ligne du tableau).

n° item	B1	C2	A2	D2	E2	B5	C3	A3	D3	E3	C4	E4
nbre de réponses "parallèles"à S	10	10	3	5	5	10	6	5	6	3	8	6
dont nbre de rép. **non** parallèles à P	7	5	2	3	1	8	3	4	3	3	5	3

Exemple de lecture : pour l'item B1, 10 élèves ont tracé un segment-image parallèle au segment-objet dans la version "segment" et 7 parmi ces 10 élèves ont donné une image non parallèle à ce même item dans sa version "points".

Il est clair que les réponses des élèves ne sont pas de même type pour les figures "segments" et pour les figures "points". Globalement, pour ces douze items, parmi les 77 réponses de type "parallélisme" à l'item S, 47 réponses sont de type différent à l'item P.

Ces résultats vont dans le sens de notre hypothèse de départ : les procédures des élèves ne sont pas les mêmes pour les figures "points" et pour les figures "segments". Nous allons voir dans les paragraphes suivants que cette hypothèses se confirme.

c. Deux items à part dans ce groupe

Deux autres items (A7 et D7) se retrouvent dans G2. Ils vérifient INTER=C, caractéristique qui rassemble tous les items du groupe G4. Si l'on se rapporte au nuage de points du graphique en début de paragraphe, ces deux items se situent à la frontière entre le groupe G2 et le groupe G4. Pour cette raison, il nous a semblé plus judicieux d'analyser ces items en même temps que ceux du groupe G4.

d. Conclusion sur les items de G2

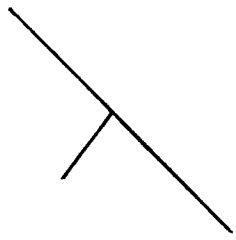
La combinaison des valeurs AX=0 et SEG=H,V induit chez les élèves l'utilisation des procédures de "rappel par prolongement" ou de "parallélisme". Cette caractéristique semble jouer un rôle aussi bien pour les items S que pour les items P. Cependant, lorsque le "rappel par prolongement est "interdit", c'est-à-dire donne une image hors du cadre de la feuille, son influence est bien moindre pour les items P, alors qu'elle reste très forte pour les items S. Ceci constitue un premier élément pour la vérification de notre hypothèse sur la différence des tâches pour l'élèves selon le type d'item.

IV.2.5. Hypothèse sur une nouvelle variable

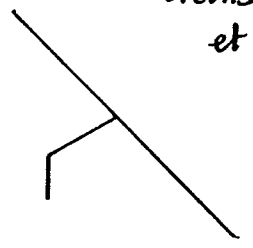
a. Une caractéristique commune aux items du groupe 3

Les items du groupe G3 ont en commun les caractéristiques : AX=O, SEG=O,V et INTER=T et ce sont les seuls items qui vérifient ces trois valeurs dans l'ensemble des items proposés.

items A5 et D5



items B7, C6 et E6



Les réponses erronées sont très majoritairement de type "parallélisme"pour le segment qui coupe l'axe. Bien que la valeur de l'angle aigu du segment avec l'axe soit grand (79°) pour les items A5 et D5, la confusion possible avec l'angle droit n'explique pas les constatations suivantes :

- on trouve ce type de réponses sur le papier quadrillé où l'on peut contrôler que cet angle n'est pas droit;
- un grand nombre des élèves qui ont prolongé le segment dans l'item S ont bien placé l'image du point correspondant à l'extrémité de ce segment dans l'item P, sur les deux papiers.

Les figures de ce groupe sont de deux types : un segment (items A5 et D5) et un bi-segment (items C6, B7 et E6) dont l'une des composantes est un segment vertical. Pour ces derniers, l'analyse des réponses révèle que, lorsque l'image du segment oblique est exacte, celle du segment vertical l'est aussi. Ceci est vérifié pour la quasi totalité des réponses justes à ces trois items (20 sur 22).

Une explication peut être que le point invariant est pris comme point de départ de la construction, et que la première difficulté à franchir est le choix de la direction du segment qui coupe l'axe. Si cette difficulté est surmontée, le changement de direction dans la symétrie est repérable et utilisé pour le tracé de l'image du segment vertical.

Ces éléments d'analyse permettent de penser qu'une autre variable joue un rôle non négligeable dans l'induction de procédures de type "prolongement". La grande valeur de l'angle aigu "segment-axe" permet de justifier le regroupement de ces cinq items. Nous étudierons l'hypothèse de l'influence de cette variable au chapitre III. Il nous faut maintenant examiner s'il y a des différences entre les réponses aux items S et celles aux items P.

b. Différence de réussite entre les items S et P

Le tableau suivant donne, pour chaque item :
- le nombre de réponses fausses à l'item (ligne 2) dont le nombre de réponses de type "prolongement" (ligne 3);
- parmi les élèves ayant prolongé le segment, ceux qui donnent une réponse d'un autre type à l'item "points" correspondant (ligne 4) et, parmi ces derniers, ceux qui donnent une réponse juste à cet item P (ligne 5);
- enfin, le nombre d'élèves ayant donné une réponse de type "parallélisme" aux items P, mais pas aux items S.

1	numéro des items	A5	D5	C6	B7	E6
2	nombres de réponses fausses	13	13	18	13	15
3	nbre de réponses prolongement du segment qui coupe l'axe	12	11	13	5	10
4	dont autres types de réponses à l'item P correspondant	6	8	6	5	5
5	dont réponses justes parmi ces "autres réponses"	5	6	6	2	4
6	réponse de type "parallèle" pour item P et non pour item S	0	0	1	1	4

Exemple, lecture de la colonne 1 :
Pour l'item A5, 13 réponses erronées ont été données à l'item S dont 12 sont de type "parallélisme". Parmi ces 12, 6 d'entre elles sont d'un autre type pour l'item P (c'est à dire image non parallèle à l'objet), dont 5 sont des réponses justes. Enfin, aucun élève n'a donné une réponse de type "parallélisme" à l'item P et "non parallélisme" à l'item S.

Les réponses de type "l'image du segment qui coupe l'axe lui est parallèle" sont très majoritaires parmi les réponses erronées, sauf pour l'item B7. Pour cet item, le papier quadrillé a induit une procédure de rappel horizontal chez cinq élèves, et on note que le parallélisme a quand même été utilisé, mais pour le segment vertical. Un grand nombre des élèves ayant prolongé le segment qui coupe l'axe donnent des réponses d'un autre type aux items P, et il s'agit souvent de la réponse juste (lignes 4 et 5).Très peu d'élèves ont donné une réponse de type "parallèle" pour un item P et d'un autre type pour l'item S, sauf pour l'item 6, pour lequel nous n'avons pas trouvé d'explication.

c. Conclusion

L'étude des répponses aux items du groupe G3 confirme ce que nous avions perçu dans le groupe G2 : il y a des différences dans les types d'erreurs faites par les élèves pour les figures "segments" et les figures "points". Nous avons repéré précédemment le rôle de la combinaison des valeurs SEG=H, V et AX=O dans ces changements de procédures. Cependant, une autre variable semble intervenir. L'hypothèse de l'influence de la valeur de l'angle aigu formé par les deux directions du segment et de l'axe est étudiée dans l'expérimentation suivante.

Il nous reste à étudier le rôle de la caractéristique INTER=C.

IV.2.6. Analyse de la caractéristique INTER=C

a. Caractéristiques des items de G4

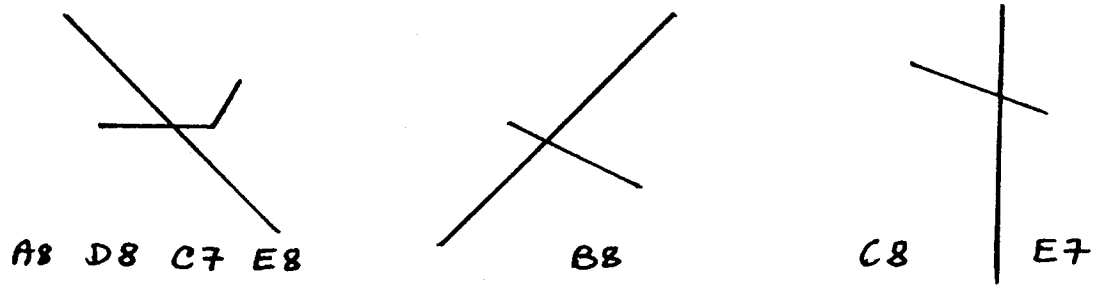
Ces items sont les moins bien réussis de tous ceux qui ont été soumis aux élèves dans leur version "segment" (moins de 50% de réussite). Ce sont aussi ceux qui produisent la plus grande différence de réussite avec les items P (NP-NS≥8). Il est remarquable que la caractéristique commune à tous ces items est la valeur INTER=C.

Cependant deux autres items ont cette même caractéristique et ne sont pas dans ce groupe : A7 et D7. Nous ferons deux remarques à leur sujet :

1) La "distance" de l'item A7 aux items du groupe 4 n'est pas grande puisque NS=11 et NP-NS=6, il se situe à la frontière et il est plausible de le rattacher à l'ensemble. Le problème est différent pour l'item D7, qui a été mieux réussi dans la version "segments" (NS=14) et a provoqué moins de différence de réussite de S à P (NP-NS=5).

2) Dans ces deux items, l'axe est vertical. Il est donc conforme à notre attente qu'ils soient mieux réussis que les autres items du groupe G4 pour lesquels l'axe est oblique. Mais l'on pouvait s'attendre à ce que les items C8 et E7 où l'axe est horizontal soient plus "proches" des items A7 et D7.

Deux types de figures-objets (de type S) se retrouvent ici : un segment oblique et un bi-segment composé d'un segment oblique et d'un segment horizontal. Nous avons reproduit ces items ci-dessous.



b. Comparaison des résultats aux items S et P

Le tableau suivant récapitule, pour chaque item, le nombre de réusite aux items de type S et P et la différence de ces nombres.

nature de la figure caractéristiques n° item	bi-segment AX = O et SEG=H A8	D8	E8	C7	segment seul AX = O B8	SEG=O , C8	AX = V , E7	AX = H A7	D7
NS	10	10	7	6	9	7	8	11	14
NP	19	19	16	14	17	18	18	17	19
NP-NS	9	9	9	8	8	11	10	6	5

Deux résultats peuvent être extraits directement de ce tableau :

1) Nous avons une confirmation que la caractéristique INTER=C crée à elle seule une grande difficulté pour les items S.

2) La non-équivalence des tâches pour les deux types de figures "segments" et "points" est flagrante : Sur les 203 réponses obtenues globalement à ces items, 82 d'entre elles seulement sont justes pour l'item S (40%°) et 157 pour l'item P (77%).

Etudions les réponses erronées.

c. Les items où la figure est un segment

Les réponses de type "parallélisme" sont majoritaires. Nous avons regroupé certains résultats dans le tableau ci-dessous :

- le nombre de réponses fausses à l'item P (ligne 3);
- le nombre de réponses fausses à l'item S (ligne 4) et, parmi elles, celles de type "parallélisme" (ligne 5);
- puis, le nombre de réponses d'un autre type à l'item P (ligne 6) dont le nombre de réponses justes (ligne 6);
- enfin, le nombre de réponses de type "parallélisme" à l'item P mais pas à l'item S (ligne 8).

1	n° item	B8	C8	E7	A7	D7	totaux
2	direction de l'axe dans la feuille (AX)	O	V	V	H	H	
3	nombre de réponses fausses à l'item P	6	5	4	5	4	24
4	nombre de réponses fausses à l'item S	14	16	14	11	9	64
5	dont nombre de réponse "parallèles"	10	12	8	6	4	40
6	autres types de réponse à l'item P	9	10	8	6	4	37
7	dont réponses justes	6	9	6	5	2	28
8	réponses "parallèles" à item P et non à item S	1	0	1	2	0	4

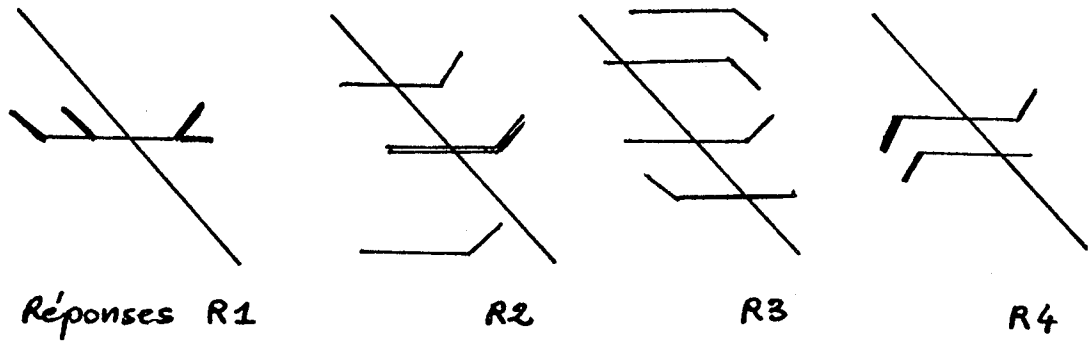
Les procédures de type "parallélisme", majoritaires pour les figures "segments" ne sont pas utilisées pour les figures "points". Or les directions des segments ne sont pas privilégiées. Nous avons la confirmation que la matérialisation de l'intersection de la figure avec l'axe crée une réelle difficulté.

La caractéristique INTER=C ne joue pas un rôle perturbateur pour les figures "points". Il semble que chaque point est considéré séparément par les élèves, dans son propre demi-plan. En effet, 37 élèves sur 40 ont donné une réponse différente à l'item S et à l'item P; 28 d'entre elles sont justes. Les élèves n'analysent donc pas une figure "segments" en points particuliers lorsque celle-ci coupe l'axe.

d. Les items dont la figure est un bi-segment

La majorité des réponses erronées sont caractérisées par un segment horizontal de même longueur que le segment horizontal de la figure objet. Il peut être parallèle ou confondu avec lui, recouvert ou prolongé. Mais on trouve aussi beaucoup de réponses pour lesquelles cette image n'est pas tracée. Dans toutes ces réponses, l'horizontale est la direction de support pour la construction du symétrique. La valeur de l'angle entre les deux segments est toujours conservée.

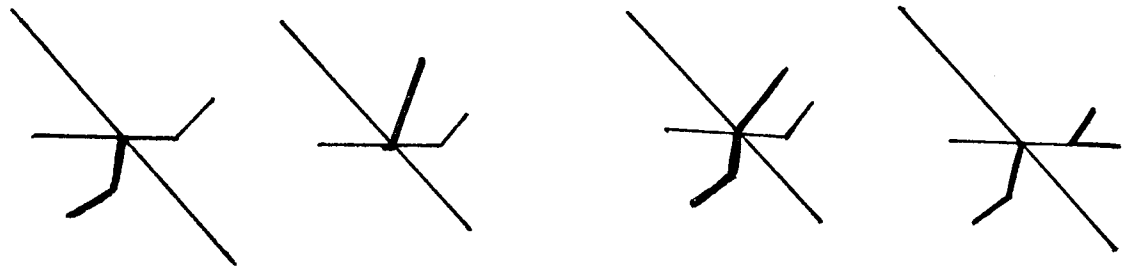
Nous reproduisons ci-dessous ces différentes réponses.



Les conceptions mises en oeuvre dans ce cas sont la conservation de la nature et de la forme de la figure. Les procédures s'appuient sur les directions privilégiées dans la feuille et le parallélisme.

Un autre type de réponses erronées apparaît plus ponctuellement. Elles proviennent de façon évidente d'une analyse de la figure en deux parties situées de part et d'autre de l'axe. L'image du bi-segment est alors soit l'image d'une des parties (le tracé de l'autre partie est absent), soit une figure-image de nature différente de la figure-objet, car les images des deux parties se recollent mal.

Nous avons appelé ces réponses des **demi-symétries**. Elles sont reproduites ci-dessous.



Les difficultés liées aux caractéristiques INTER=C et SEG=O sont moins nombreuses pour les items P, ce que confirme les chiffres du tableau ci-dessous.

n° item	A8	D8	C7	E7
nombre de réponses fausses à l'item S	12	13	17	15
réponses fausses à l'item S et juste à l'item P	9	9	9	10

Or, pour résoudre le problème de l'item S, il est nécessaire d'analyser la figure en points particuliers. C'est précisément ce que fait la majorité des élèves avec les figures "points". Cette compétence n'est donc pas utilisée pour les items S.

IV.2.7. La réussite aux items S implique celle aux items P

L'implication "réussite à S ==> réussite à P" est vérifiée si le nombre d'élèves qui ont réussi à S et non à P est négligeable devant le nombre d'élèves qui ont réussi à P et non à S et devant le nombre d'élèves qui ont réussi à la fois à S et P.

Nous avons noté, dans la colonne correspondant à chaque item :
- S.nP le nombre d'élèves ayant donné une bonne réponse à l'item S et une réponse fausse à l'item P qui lui est associé;
- nS.P le nombre d'élèves ayant donné une réponse fausse à l'item de type S et une réponse juste à l'item P.
Les items ont été rangés selon la différence de réussite globale entre les items P et les items S (valeur NP-NS décroissante).

n° item	C8	E7	A8	D8	E8	B8	C7	D5	A7	C6
S.nP	1	1	0	0	0	2	1	0	0	1
nS.P	12	11	9	9	9	9	9	7	6	6
n° item	**A3**	**B5**	**C2**	**C3**	**C4**	**D7**	**A5**	**E3**	**B7**	**D3**
S.nP	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0
nS.P	5	4	6	5	6	6	5	5	4	3
n° item	**E4**	**E6**	**C5**	**D4**	**E2**	**A1**	**A2**	**A4**	**B1**	**B4**
S.nP	1	2	0	1	1	0	2	1	3	1
nS.P	4	5	2	3	3	1	3	2	4	2
n° item	**B3**	**D2**	**D6**	**B2**	**C1**	**D1**	**E5**	**A6**	**B6**	**E1**
S.nP	3	2	1	2	1	2	2	2	3	2
nS.P	3	2	1	1	0	1	1	0	1	0

La recherche de cette implication n'a pas de sens pour les items dont la différence de réussite NP-NS est presque nulle et qui ont été très bien réussis pour les deux types S et P. Pour cela, nous considérons à part les items pour lesquels I NP-NS I≤ 2.

a. Items pour lesquels I NP-NS I > 2

Dans le tableau ci-dessous, nous avons noté E l'ensemble des items de l'expérimentation. Les pourcentages sont calculés par rapport à l'ensemble des élèves, puis par rapport à l'ensemble des élèves ayant réussi à au moins un des deux types d'items.

items pour lesquels I NP-NS I > 2

a - sur l'ensemble des réponses

ensembles	E	S et nP	S et P	nS et P	nS et nP
nombres	497	16	205	145	131
pourcentages	100	3.2	41.2	29.2	26.4

b - sur l'ensemble des bonnes réponses à S ou P

ensembles	E	S et nP	S et P	nS et P
cardinaux	366	16	205	145
pourcentages	100	4.4	56	39.6

La proportion des élèves n'ayant pas réussi à P parmi les élèves ayant réussi à S est négligeable (16/221=7.2%) devant la proportion des élèves n'ayant pas réussi à S parmi les élèves ayant réussi à P (145/350=41.5%). De plus, les élèves ayant réussi à P et non à S sont 9 fois plus nombreux que ceux ayant réussi à S et non à P.
L'implication "réussite à S ===> réussite à P" est vérifiée pour tous les items présentant des difficultés liées aux valeurs combinées AX=O et INTER=C, ou à des valeurs particulières de SEG et (S,A), lorsque AX=O.

b. Items pour lesquels I NP-NS I≤ 2

Pour les autres items, les mêmes calculs donnent les résultats suivants :

sur l'ensemble des réponses

ensembles	E	S et nP	S et P	nS et P	nS et nP
cardinaux	407	29	306	30	42
pourcentages	100	7.1	75.2	7.4	10.3

sur l'ensemble des bonnes réponses à S ou P

ensembles	E	S et nP	S et P	nS et P
cardinaux	365	29	306	30
pourcentages	100	9.5	83.8	8.2

Ces tableaux montrent que l'implication ne peut pas être établie pour ces items. L'équivalence est plausible. Elle se traduit de la manière suivante : lorsque l'axe est vertical ou horizontal et que le segment est dans un seul demi-plan par rapport à l'axe, le tracé du symétrique d'un segment se situe à un même niveau de difficulté que lee tracé du symétrique de deux points. Ce qui ne signifie pas que les procédures de construction employées sont les mêmes pour le segment et les deux points, comme nous l'avons vu dans l'expérimentation précédente. Cette équivalence est vraie aussi lorsque l'axe est oblique, mais qu'aucune des valeurs des variables INTER, SEG et (S,A) n'induisent des procédures erronées, plus précisément, si le segment ne coupe pas l'axe et n'est pas dans une direction privilégié dans la feuille, et si l'angle "segment-axe" n'est pas trop grand.

IV.3. Répartition des résultats selon les classes

Il s'agit ici de repérer si des difficultés sont spécifiques d'une classe et si l'apprentissage les fait disparaître. Vu le petit nombre d'élèves interrogés, nous ferons éventuellement des réserves sur ces conclusions.

Nous ne parlerons pas des items de G1 qui ont été très bien réussis dans toutes les classes. Les difficultés les plus évidentes sont celles créées par les valeurs AX=O, INTER=C d'une part, et AX=O et SEG=V,H. Elles concernent essentiellement les items des groupes G2 et G4. Les caractéristiques des items du groupe G3 semblent faire jouer en plus la variable (S,A) que nous venons de définir. Elle est étudiée au chapitre II.

IV.3.1. Des difficultés qui subsistent après l'enseignement

a. La caractéristique INTER=C

Le tableau ci-dessous donne les réussites par classe aux deux types d'items vérifiant cette caractéristique. Nous rappelons que les classes de 6ème et 5ème n'avaient pas eu l'enseignement de la symétrie orthogonale en classe.

	item S				item P			
classe	6	5	4	3	6	5	4	3
totaux réussites	14	11	29	28	53	29	39	36
totaux réponses	82	39	43	39	82	39	43	39
% par classe	17.1	28.2	67.4	71.2	64.6	74.4	90.1	92.3

La réussite aux items P est grande même avant l'enseignement de la notion, et elle va en croissant de la 6ème à la 3ème. Une grande majorité des élèves de 6ème et de 5ème donnent une bonne réponse aux items P pour un axe oblique et une figure composée de points situés de part et d'autre de l'axe, certains situés sur une même horizontale. On peut penser que le contrôle perceptif jour un rôle important dans la détermination de l'emplacement des images des points.

Il n'en est pas de même pour les items de type S. Les élèves de 6ème et 5ème sont très influencés par la combinaison de ces caractéristiques. Or la perception globale de la figure est difficile lorsque le segment coupe l'axe ou lorsqu'il est dans une direction privilégiée dans la feuille et que l'axe est oblique. On constate que l'enseignement ne permet pas de résoudre toutes ces difficultés, puisque 30.5% des élèves de 4ème et 3ème n'ont pas réussi aux items S.

Enfin, il faut remarquer que la différence de réussite entre les items S et P reste supérieure à 20% après l'enseignement de la notion. On peut faire l'hypothèse que certains élèves des

classes de 4ème et 3ème continuent à utiliser le contrôle perceptif dans cette tâche au lieu de se servir des propriétés de la transformation ponctuelle.

b. Une combinaison de valeurs très perturbante dans cette tâche

Les items du groupe G sont mal réussis dans la version P comme dans la version S, et ceci est vrai à tous les niveaux, comme le montre le tableau ci-dessous. Ils vérifient AX=O, INTER=T, SEG=V,O.

	livret S				livret P			
classe	6	5	4	3	6	5	4	3
totaux réussites	8	7	12	14	17	11	19	16
totaux réponses	45	22	24	22	45	22	24	22

L'enseignement ne résout pas le problème posé par ces items, puisque 43.5% des élèves de 4ème et 3ème donnent une réponse fausse aux items S. Ils sont aussi très peu réussis par les élèves de deux autres classes, 76% d'entre eux échouent.

La réussite aux items P est moins bonne pour les items de ce groupe que pour ceux du groupe G4 (INTER=C). 24% des élèves échouent encore après l'enseignement (contre seulement 7.4% pour G4). Il n'est pas possible de déterminer quelle est la variable qui joue le plus ici, car dans ces items, elles prennent toutes des valeurs qui rendent la tâche difficile. De plus, l'introduction de la variable "angle segment-axe" comme variable de la tâche n'est qu'une hypothèse que nous ne pouvons pas vérifier dans cette expérimentation.

IV.3.2. Une difficulté franchie grâce à l'enseignement

Il nous reste à regarder les items du groupe G2 qui regroupaient essentiellement les items tels que AX=O et SEG=V,H (axe oblique et segment vertical ou horizontal).
Ce tableau est à lire comme les précédents.

	livret S				livret P			
item classe	6	5	4	3	6	5	4	3
totaux réussites	44	16	50	47	61	34	50	49
totaux réponses	108	53	58	52	108	53	58	52
% indicatifs	40.1	30.1	86.2	90.4	56.5	64.2	86.2	94.2

Nous trouvons à nouveau qu'une majorité d'élèves de 6ème et 5ème réussissent aux items P. Il semble que l'enseignement a permis aux élèves de 4ème et 3ème de résoudre le problème posé par les variables AX et SEG, lorsque INTER≠C, puisque globalement 88.2% de ces élèves ont donné une réponse juste. Nous rappelons que ce n'est pas vrai lorsque INTER=C, puisqu'il il subsiste une difficulté pour plus de 30% de ces élèves.

IV.4. Conclusion

Cette expérimentation nous a permis de vérifier la non-équivalence pour les élèves de la tâche de tracé du symétrique d'une figure, lorsque celle-ci est composée uniquement de points séparés ou lorsqu'elle est composée de segments.

Nous avons vérifié qu'une certaine compétence existe chez les élèves antérieurement à l'enseignement de la notion, pour le tracé du symétrique d'un ou de plusieurs points. Elle n'est pas réinvestie par les élèves lors du tracé du symétrique d'une figure composée d'un ou de deux segments, même par les élèves de 4ème et 3ème qui ont eu un enseignement sur la notion. Ce résultat est important car, dans l'enseignement, le passage de la construction du symétrique d'un point à celle du symétrique de n'importe quelle figure est souvent implicite et laissé à la charge de l'élève.

Les réussites des élèves dépendent à tous les niveaux des valeurs de variables liées à la figure et à son support. Certaines combinaisons de ces valeurs induisent des procédures erronées qui subsistent après l'enseignement. En particulier, l'intersection de la figure avec l'axe continue à provoquer des erreurs chez les élèves après l'enseignement. Une hypothèse est que certains élèves utilisent encore dans cette tâche le contrôle perceptif global de la figure pour effectuer le tracé, plutôt que l'outil transformation ponctuelle qui leur a été enseigné. Par contre, le rôle des directions privilégiées dans la feuille semble moins important après l'enseignement. On peut faire l'hypothèse que, au moins lorsque la figure n'occupe qu'un seul demi-plan par rapport à l'axe, l'enseignement permet d'aborder la figure de manière plus analytique et donc indépendamment de son support. Cet apprentissage semble lié à l'enseignement de la notion.

Une variable semble jouer aussi un rôle dans cette tâche, l'angle aigu que fait le segment avec l'axe (notée angle (S,A)). L'hypothèse que les valeurs de cette variable influent sur les procédures des élèves nous a permis d'expliquer l'analogie des procédures observées lorsque le segment est verticale ou presque vertical. Le rôle de la variable angle (S,A) est étudié de manière systématique dans l'expérimentation suivante, ainsi que celui du type de papier qui sert de support à la figure.

Chapitre II

Etude systématique de quelques variables

I. Objectif de l'expérimentation

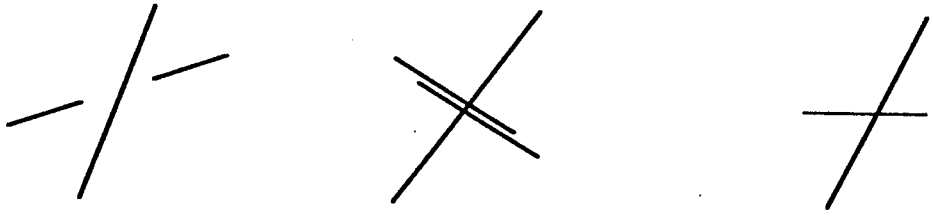
Cette expérimentation a été réalisée pour une étude systématique de l'influence de quelques variables repérées dans les deux premières expérimentations.

I.1. Une typologie des réponses des élèves

L'analyse des deux expérimentations précédentes nous a conduit à distinguer trois types de procédures d'obtention de l'image d'un point (Grenier, 1985b). Ces procédures peuvent être utilisées pour plusieurs points. Nous les avons illustrées ci-dessous pour un segment, dans des cas où les deux extrémités du segment-image sont déterminées par la même procédure.

- "rappel orthogonal": la détermination d'un point de la figure-image se fait le long d'une direction orthogonale à l'axe de symétrie.

- "rappel par prolongement" : cette procédure donne pour image d'un point, un point situé dans le prolongement d'une direction matérialisée par la figure-objet (il peut y avoir recouvrement d'une partie de la figure-objet lorsque la figure coupe l'axe de symétrie).



- "rappel horizontal" ou "rappel vertical" qui donnent pour point-image un point situé sur une même horizontale ou une même verticale que le point-objet.

Pour construire l'image d'un segment, les élèves ont utilisé au moins une fois l'un des trois types de rappel pour déterminer l'image d'une des extrémités du segment. Dans de nombreux cas, ils ont déterminé, à partir de ce point, un segment d'une longueur et dans une direction choisies. La deuxième extrémité du segment n'est alors pas déterminée avec la même procédure, elle se déduit de la construction.

Les rappels orthogonaux sont corrects dès que le report de la distance à l'axe de symétrie est exact. Les deux autres types de rappel vont donner, sauf dans quelques cas particuliers, des réponses fausses. Leur persistance dans le champ des procédures des élèves est en relation avec le caractère fréquent de leur validité dans l'enseignement en classe : pour les directions privilégiées de l'axe de symétrie et pour une figure-objet qui ne coupe pas l'axe, les trois procédures de rappel peuvent aboutir à une réponse juste.

Cette typologie met en jeu essentiellement la propriété d'orthogonalité de la transformation, sa présence ou son absence. La propriété d'égale distance ne permet pas en effet de discriminer les réponses des élèves, parce qu'elle est toujours prise en compte, sous la forme de "distance" le long de directions privilégiées.

I.2. Les variables étudiées

Pour pouvoir repérer l'influence d'une variable sur les réponses des élèves, indépendamment d'autres variables, il est nécessaire de fixer toutes celles qu'on n'étudie pas. Nous définissons ainsi les contraintes de la situation.

Dans cette expérimentation, nous avons fixé la nature de la figure-objet, nous avons choisi de prendre pour unique figure un segment. Rappelons que l'expérimentation précédente ("points -segments") était au contraire centrée sur la différence entre une figure "points" et une figure "segments".

D'autre part, nous avons choisi de permettre dans tous les cas les réponses de type "rappel horizontal ou vertical" et "rappel par prolongement" : la figure et l'axe de symétrie sont placés dans la feuille de façon à ce que ces types de réponses entrent dans le cadre de la feuille.

Les variables étudiées sont des variables que nous avons repérées plus ou moins précisément dans les expérimentations précédentes :
INTER, qui indique la position du segment par rapport aux demi-plans déterminés par l'axe de symétrie;

AX, qui indique la direction de l'axe de symétrie dans la feuille;
angle (S,A) qui correspond à la valeur de l'angle aigu non orienté que forme le segment avec l'axe de symétrie, nous le noterons;
PAP, le type de papier sur lequel est tracée la figure (blanc ou quadrillé).
La variable **SEG** intervient pour des valeurs particulières dues à des combinaisons de valeurs des variables angle (S,A) et AX.

I.3. Description des figures

Pour une étude des variables retenues, nous avons adopté les choix suivants.

Chaque figure est proposée sur les deux types de papier (blanc et quadrillé), afin de pouvoir directement étudier l'influence du papier quadrillé sur les réponses des élèves.

Chaque ensemble axe-segment est placé dans la feuille de manière à ce que l'axe de symétrie soit tracé dans quatre directions différentes, correspondant à des rotations respectivement de 45, 90 et 135 degrés de la figure présentée avec l'axe de symétrie vertical. Nous les notons respectivement V,G (45°), H, D (135°).

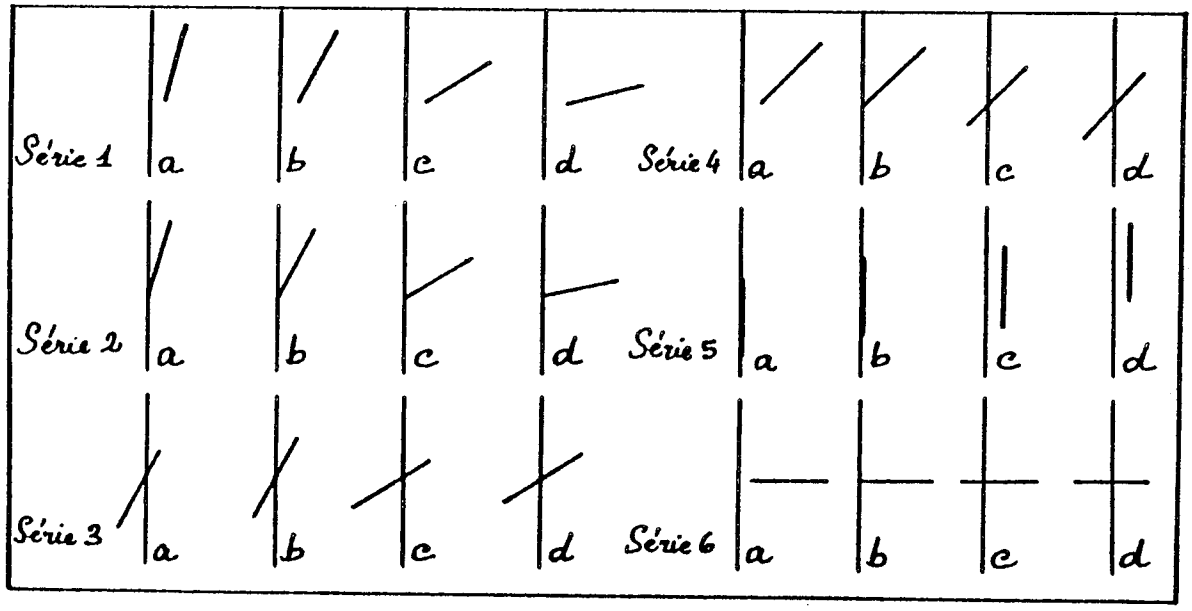
Nous avons choisi sept valeurs différentes pour l'angle (S,A), quatre valeurs non particulières:11°, 29°, 61° et 79° (ces valeurs sont telles que les extrémités des segments son situées sur les sommets des carrés du papier quadrillé), et les 3 valeurs "particulières": 0°, 45°, 90° (la valeur 45° ne devient particulière que pour les directions obliques de l'axe .

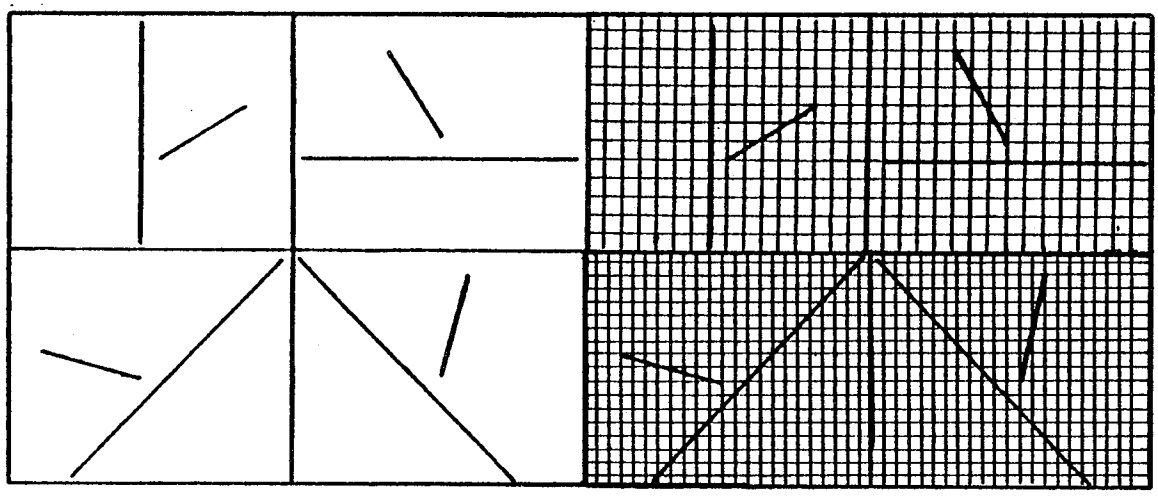
Enfin nous avons retenu quatre positions du segment par rapport aux demi-plans déterminés par l'axe de symétrie : segment ne coupant pas l'axe de symétrie, le coupant en une de ses extrémités, ou le coupant en son milieu ou en un point autre que son milieu. Pour l'angle (S,A) égal à 0°, le segment est présenté soit parallèle, soit confondu avec l'axe de symétrie.

Ceci donne, pour chaque direction de l'axe dans la feuille, et sur les deux types de papier choisis, 24 figures différentes que nous avons classé en six séries décrites ci-après dans la figure 7 ci-après.

série 1 : l'axe ne rencontre pas le segment, pour les 4 valeurs non particulières de l'angle (S,A).
série 2 : pour ces mêmes angles, et l'axe rencontrant le segment en une extrémité.
série 3 : pour deux valeurs de l'angle (s, a) et l'axe rencontrant le segment en son milieu ou en un autre point.
série 4 : pour l'angle (s , a) valant 45° et le segment dans les 4 positions par rapport aux demi-plans déterminés par l'axe de symétrie.
série 5 : segment parallèle ou confondu avec l'axe avec deux centrages différents dans la feuille.
série 6 : pour l'angle (s , a) valant 90° et le segment dans les quatre positions par rapport à l'axe .

les 24 figures de base





les 8 versions d'une figure de base

I.4. Analyse a priori des réponses des élèves

Nous pensons que d'une part, les élèves ne reconnaissent pas une figure si celle-ci a subi globalement une rotation dans la feuille et que, d'autre part, leurs procédures de résolution ne sont pas stables. Si ces hypothèses sont vraies, un élève qui a bien résolu un item où la figure est proposée avec l'axe de symétrie vertical va peut-être donner une réponse fausse si cette même figure se présente dans une direction différente (axe oblique). Deux explications sont alors possibles:
-la procédure utilisée par l'élève est valable pour l'item avec l'axe vertical et ne l'est plus lorsque l'axe est oblique;
-l'élève a utilisé deux procédures différentes pour résoudre chacun des deux items.

Si un grand nombre d'élèves tracent le segment-image en s'appuyant sur une seule extrémité de ce segment et la détermination de sa direction, les items où l'angle (S,A) est petit seront mieux réussis.

Les items sur papier quadrillé peuvent provoquer chez les élèves des procédures de comptage : on peut donc voir apparaître des réponses différentes pour un même item sur les deux types de papier (blanc et quadrillé). D'autre part, le papier quadrillé matérialisant les directions verticale et horizontale, les réponses de type "rappel horizontal" ou "rappel vertical" seront plus nombreuses sur ce type de support : or ces procédures donnent des réponses fausses lorsque l'axe a une direction oblique.

Enfin, la symétrie étant pour beaucoup d'élèves une transformation d'un demi-plan dans l'autre demi-plan, nous pensons que le problème posé par les items où le segment rencontre l'axe va provoquer une recherche de procédures de résolution particulières, d'autant plus que l'évocation du pliage permet difficilement dans ce cas d'inventer un outil efficace de résolution.

I.5. Description du dispositif expérimental

Les 24 items de base que nous venons de décrire ont donné, pour les quatre directions choisies de l'axe de symétrie, 96 items sur papier blanc et 96 items sur papier quadrillé. Ces 192 items ont été regroupés en 32 livrets différents, notés de A à P pour les 16 premiers et de A' à P' pour les 16 autres, et tels que :
-les livrets notés A à H contenaient chacun 12 items, six avec l'axe vertical et six avec l'axe horizontal, un item pris dans chacune des six séries décrites ci-dessus; enfin, six de ces items étaient tracés sur papier blanc, les six autres sur papier quadrillé.

-les livrets notés I à P étaient les répliques exactes des livrets A à H avec inversion du type de papier pour chaque item. Ainsi le livret I contenait les mêmes figures que le livret A et dans le même ordre, avec échange des types de papiers. Le livret B correspondait de la même façon avec le livret J, le livret C avec le livret K, et ainsi de suite.
-enfin, les livrets A' à P' contenaient exactement les mêmes figures respectivement que les livrets A à P, mais chacune ayant subi une rotation de 45 degrés vers la gauche dans la feuille de papier. Les axes de symétrie des items de ces livrets étaient donc tous dans les deux directions obliques étudiées.

Les 192 items différents apparaissaient exactement une fois dans deux livrets distincts. Chaque livret a été donné à dix élèves de chacun des quatre niveaux scolaires (6ème à 3ème) : nous avons ainsi obtenu 80 réponses différentes pour un item, équiréparties entre les élèves de 6ème à 3ème. Les élèves ont reçu successivement deux livrets, le premier pris dans la série A à P (figures avec axes de symétrie vertical ou horizontal) et le second, le livret "prime" correspondant (mêmes figures, mais ayant subi une rotation de 45 degrés à gauche). Nous avons distribué les livrets dans l'ordre de A à P, puis en reprenant à partir de A, en fonction du nombre d'élèves dans la classe. Lorsqu'un élève avait fini le premier livret, il nous le rendait et recevait le livret "prime" correspondant. L'expérimentation s'est déroulée à l'intérieur de la classe et dans un temps maximum d'une heure, chaque élève résolvant individuellement les items proposés. Nous avons fait passer ces livrets dans plusieurs classes différentes pour une population de160 élèves par niveau.

II. Résultats

II.1. Prise en compte de l'approximation du tracé

La tâche étant une tâche de construction à main levée, nous avons défini pour chaque item une **marge d'imprécision** à l'intérieur de laquelle la réponse donnée est considérée comme exacte. Ces imprécisions peuvent porter sur la longueur des segments composant l'image ou sur la direction de ces segments, mais les réponses correspondantes respectent l'idée globale de la symétrie (retournement, conservation de la forme, distance à l'axe). Nous avons classé ces réponses comme étant exactes, après avoir vérifié qu'elles ne pouvaient être interprétées comme des réponses fausses des types précédents.

II.2. Regroupement de caractéristiques pour une analyse des réussites

Pour l'analyse des réponses des élèves, nous avons regroupé les items de façon à pouvoir comparer :

- pour une même position du segment par rapport à l'axe (variable INTER), les réponses des élèves en fonction de la valeur de l'angle (S,A),d'une part et de la direction de l'axe dans la feuille, d'autre part (variable AX);
- pour une même figure, les résultats obtenus sur papier blanc et ceux sur papier quadrillé (variable PAP).

Les quatre groupes ainsi définis sont les suivants :

Groupe A : items où le segment ne rencontre pas l'axe, pour les six valeurs de l'angle (S,A) différentes de 0°, les quatre directions de l'axe de symétrie dans la feuille et les deux types de papier utilisés;

Groupe B: les items où le segment rencontre l'axe en une de ses extrémités, pour les six valeurs de l'angle (S,A), les quatre directions de l'axe de symétrie et les deux types de papier;

Groupe C : les items où le segment occupe les deux demi-plans déterminés par l'axe de symétrie, pour quatre valeurs de l'angle (S,A) : 29°,61°,45°,90°, les quatre directions de l'axe de symétrie et les deux types de papier;

Groupe D : les items où le segment est parallèle à l'axe de symétrie.

tableau récapitulatif

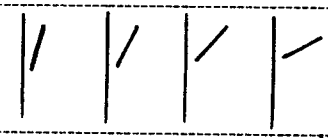
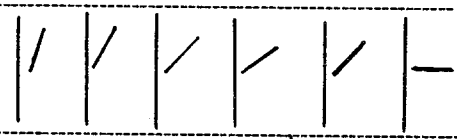
n°	INTER	AX	angle(S,A)	PAP	items
A	NC	4 valeurs	6 valeurs (≠0°)	2 val	série1 et 4a,6a
B	T	4 valeurs	6 valeurs (≠0°)	2 val	série 2 et 4b,6b
C	C	4 valeurs	4 valeurs (≠0°,11°,79°)	2 val	série 3 et 4c,4d, 6c,6d
D	2 valeurs	4 valeurs	une valeur : 0°	2 val	série 5

Chaque item ayant été résolu par 80 à 90 élèves, nous nous sommes autorisés à donner tous les résultats en pourcentages.

II.3. Analyse des réponses aux items du groupe A

II.3.1. Les taux de réussite des élèves

Le tableau ci-dessous contient les pourcentages des bonnes réponses obtenues à ces items.

	sur papier blanc (B)						sur papier quadrillé (Q)					
(S,A)	11°	29°	61°	79°	45°	90°	11°	29°	61°	79°	45°	90°
figures												
V	99	94	90	90	93	98	94	95	95	97	94	99
H	93	90	88	78	90	99	98	95	95	92	94	91
G	92	88	74	57	68	95	82	70	64	55	55	96
D	92	86	66	49	51	98	89	70	54	48	53	97

direction de l'axe de symétrie dans la feuille de papier. V : verticale, H : horizontale, G (rotation de 45° dans le sens positif), D (rotation de 135° dans le même sens)

Une lecture en ligne du tableau nous amène à deux constatations :
- la réussite des élèves est excellente lorsque l'axe est vertical ou horizontal, pour toutes les valeurs de l'angle (S, A) et sur les deux types de papier.
- elle décroît progressivement en fonction de la croissance des valeurs de (S,A) de11° à 79°, si l'on excepte la valeur 45°.

Une lecture en colonne nous amène à deux autres constatations :
- la réussite des élèves est excellente, quelque soit la direction de l'axe et le type de papier, pour les angles (S,A) valant 11° et 90°.
- pour les cinq autres valeurs de (S,A), le pourcentage d'erreurs croît dans le sens des directions V, H, G, D de l'axe de symétrie.

Pour (S,A)=45° et les directions G et D de l'axe, le pourcentage de réussite ne se situe pas entre ceux correspondant aux valeurs (S,A) égales à 29° et 61° comme nous pourrions l'attendre, mais entre ceux des angles 61° et 79°. Nous allons retrouver ce décalage par la suite et nous verrons qu'il est significatif de l'influence d'une combinaison particulières de deux variables (§II.5).

II.3.2. Les différents types d'erreurs

Nous nous intéressons aux erreurs faites par les élèves pour les items correspondant aux valeurs encadrées dans le tableau (les autres sont presque parfaitement réussis).

Le tableau suivant donne les pourcentages des principaux types d'erreurs rencontrés pour les valeurs 29°, 61° et 79° de l'angle (s, a) et les directions G et D de l'axe de symétrie.

papier blanc (B)						papier quadrillé (Q)						
29°		61°		79°		29°		61°		79°		valeur de (S,A)
G	D	G	D	G	D	G	D	G	D	G	D	direction de l'axe
0	4	0	2	0	0	19	10	10	21	5	5	rappels verticaux ou horiz.
0	4	19	24	26	43	0	5	16	16	28	29	prolongements ou parallèles
0	1	0	1	0	0	4	4	6	2	0	4	non-réponses
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	10	perpendiculaires à l'axe
12	14	26	34	43	51	30	30	36	46	45	52	total des réponses fausses

note :les pourcentages sont donnés par rapport aux nombre total d'élèves qui ont répondu à ces items. Le tableau ne donne pas toutes les réponses fausses obtenues, mais seulement celles que nous avons pu classer dans des types de réponses bien définis (en fait presque toutes, sauf quelques inclassables).

L'analyse du tableau montre que les réponses de type "prolongement" ou "parallèles" croissent avec l'angle (S,A), sur les deux types de papier. D'autre part, les réponses de type "rappels horizontaux ou verticaux" apparaissent massivement dans les items sur papier quadrillé : ce résultat confirme l'hypothèse que la matérialisation des directions privilégiées dans la feuille induisent des procédures de résolution différentes de celles utilisées sur papier blanc pour des figures identiques.

Nous allons retrouver ces premiers résultats dans les paragraphes suivants.

II.4. Analyse des réponses aux items du groupe B

Les tableaux suivants donnent, comme pour les items du groupe A, les pourcentages des réponses justes et les principaux types d'erreurs rencontrées pour les valeurs 29°,61° et 79° de l'angle (S,A) et les directions G et D de l'axe de symétrie.

réponses justes

	sur papier blanc (B)						sur papier quadrillé (Q)					
(S,A)	11°	29°	61°	79°	45°	90°	11°	29°	61°	79°	45°	90°
figures												
V	99	96	90	90	92	99	95	97	94	93	99	97
H	98	93	94	88	94	99	94	87	95	87	93	97
G	98	96	83	66	76	98	88	82	66	46	69	93
D	96	88	77	64	61	98	90	69	55	44	58	93

Principaux types d'erreurs

papier blanc (B)						papier quadrillé (Q)						
29°		61°		79°		29°		61°		79°		
G	D	G	D	G	D	G	D	G	D	G	D	valeur de (S,A)
												direction de l'axe
1	2	1	3	4	0	8	13	2	15	3	0	rappels verticaux ou horiz.
1	8	13	16	21	28	4	11	20	20	48	54	prolongements ou parallèles
0	2	1	1	7	8	3	3	8	4	1	2	grandes imprécisions
1	0	0	1	2	0	1	0	1	3	1	0	non réponses
4	12	17	23	34	36	18	31	34	45	54	56	total des réponses fausses

rappel: tous ces nombres sont des pourcentages par rapport au nombre total des élèves qui ont répondu à ces items.

Analyse des tableaux

Nous retrouvons tous les résultats énoncés pour la valeur INTER=NC au paragraphe précédent. En particulier, nous retrouvons une grande réussite aux items où l'axe de symétrie est vertical ou horizontal et à ceux pour lesquels l'angle (S,A) vaut 11° et 90° pour toutes les directions de l'axe et les deux types de papier. On retrouve la même décroissance des pourcentages de réussite lorsque l'angle prend les valeurs 11°,29°,61°,79° et l'axe de symétrie les directions G et D.

L'attraction provoquée chez les élèves par les directions horizontale et verticale du papier quadrillé se confirme et le tableau des erreurs montre bien l'influence du papier quadrillé sur ce type de réponses. Enfin, les réponses de type "prolongements ou parallèles" sont, dans ce cas

aussi, croissantes en même temps que l'angle (S,A).

Il semble donc que le problème est identique pour l'élève lorsque le segment a une extrémité sur l'axe ou ne touche pas l'axe. Mais nous ferons une remarque : dans les figures du groupe A, le segment se trouve à une faible distance de l'axe. Le résultat serait peut-être différent si cette distance était relativement grande. Pour nos items, les deux valeurs INTER=NC et INTER=T semblent équivalentes. Elles correspondent au fait que le segment occupe un seul des demi-plans délimités par l'axe de symétrie.

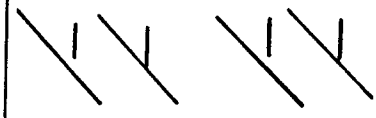
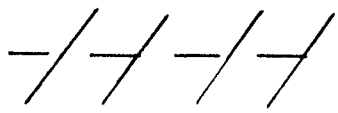
Nous allons étudier maintenant la valeur 45° de l'angle (S,A).

II.5. Des items particuliers dans les groupes A et B

Nous constatons, dans les tableaux relatifs à ces deux groupes, une même particularité pour la valeur 45° de l'angle (S,A), à savoir que le taux de réussite est plus faible que celui attendu, dans l'hypothèse d'une relation décroissante entre la valeur de cet angle et le taux de réussite des élèves. L'analyse des items correspondants nous en donne une explication.

En effet, lorsque l'angle (S,A) vaut 45 degrés et que l'axe est lui-même à 45° dans la feuille, le segment prend alors une direction privilégiée dans la feuille. Nous retrouvons la perturbation apportée par les valeurs H et V de la variable SEG, que nous avions déjà repérée dans les deux expérimentations précédentes.

Le tableau ci-dessous indique les pourcentages d'erreurs de types "parallélisme" ou "prolongement" rencontrées pour les directions G et D de l'axe de symétrie.

AX= G, SEG= V				AX = D SEG=H				
								figures
B	B	Q	Q	B	B	Q	Q	type de papier
15	13	35	28	27	33	42	37	total réponses de type "parallélisme"
32	24	45	31	49	39	47	42	total réponses fausses

La très grande majorité des erreurs correspond à un segment image parallèle au segment objet. Nous avons déjà rencontré cette règle d'action à plusieurs reprises. Les directions privilégiées du segment semblent induire fortement sa mise en oeuvre.

D'autre part, pour les quatre figures en question, ces erreurs sont plus nombreuses sur le papier quadrillé. L'influence du type de papier est remarquable dans ce cas.

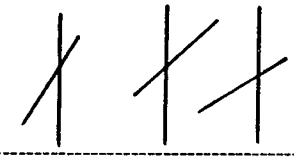
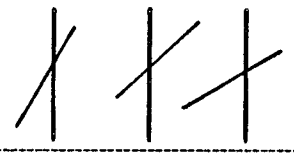
En analysant les tableaux de réussite précédents nous avons noté un décalage dans la décroissance des pourcentages de réussite par rapport à la valeur angle (S,A)=45°, pour les directions G et D de l'axe. L'explication en est la perturbation provoquée par la combinaison des caractéristiques angle (S,A)=45° et AX=G,D, qui donne au segment une direction privilégiée dans la feuille.

II.6. Analyse des réponses aux items du groupe C

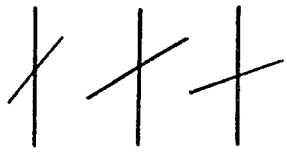
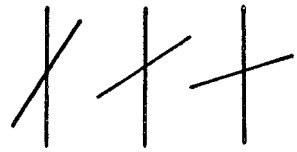
II.6.1. Les taux de réussite des élèves

Nous donnons ci-dessous séparément les pourcentages de réussite aux items où le segment est coupé en un point quelconque et ceux où l'axe de symétrie le coupe en son milieu.

items où l'axe coupe le segment en un point non particulier

	sur papier blanc			sur papier quadrillé		
(S,A)	29	45	61	29	45	61
figures						
V	78	75	67	79	80	66
H	73	56	57	70	65	47
G	75	72	60	68	57	48
D	74	65	59	65	50	44

items où l'axe coupe le segment en son milieu

	sur papier blanc			sur papier quadrillé		
(S,A)	29	45	61	29	45	61
figures						
V	83	82	63	89	81	70
H	81	70	55	86	80	60
G	84	74	47	79	60	43
D	83	57	44	78	53	37

Les élèves ont répondu de manière différente dans chacun des deux cas.

Nous constatons immédiatement une baisse sensible du taux de réussite à ces items par rapport à ceux des groupes précédents, même lorsque l'axe est vertical ou horizontal. Plus précisément, pour une même valeur de l'angle (S,A) et la même direction de l'axe dans la feuille, la réussite est moins grande que pour les items correspondants des groupes A et B (le lecteur peut vérifier facilement en reprenant les tableaux de réussite des paragraphes II.3 et II.4).

D'autre part, nous retrouvons, comme pour les items des groupes A et B, une décroissance du taux de réussite en fonction de la valeur de l'angle (S,A).

Cependant, contrairement aux groupes précédents, le taux de réussite aux items pour lesquels l'angle (S,A) vaut 45° se situe ici entre celui aux items pour lesquels cet angle vaut 29° et 61° Ceci ne signifie pas que la perturbation, constatée dans les groupes précédents, provoquée par les directions privilégiées du segment dans la feuille a disparue. Le taux de réussite très faible aux items pour lesquels l'angle vaut 69° conduit plutôt à supposer que la perturbation provoquée par cette variable angle (S,A) est renforcée lorsque le segment coupe l'axe.

Ces constatations sont vraies pour les deux types de papier.

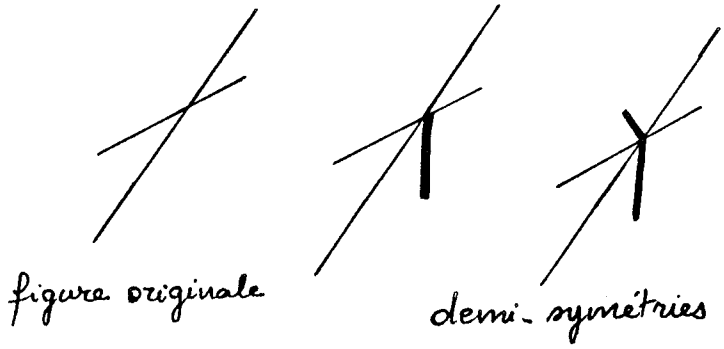
La valeur INTER=C crée donc une difficulté particulière pour les élèves, qui est reflétée par l'apparition d'un type d'erreurs nouveau type par rapport à ceux repérés dans les groupes A et B. Nous l'étudions maintenant.

II.6.2. Les réponses de type "demi-symétrie"

Nous avons déjà rencontré ce type de réponses erronées lors de l'expérimentation "points-segments". Elles sont de deux types. Dans le premier type, la réponse est le tracé de l'image d'une des parties du segment située dans un des demi-plans déterminés par l'axe de symétrie. L'autre partie n'est pas tracée. L'élève s'arrête au point d'intersection avec l'axe parce qu'il n'a pas su comment continuer le tracé.

Dans le second type, la réponse est un "segment brisé" de part et d'autre de l'axe. Elle correspond à une procédure de résolution en deux temps consistant à prendre le symétrique de chaque partie de segment située dans chacun des deux demi-plans définis par l'axe et à "recoller" les deux morceaux au niveau du point invariant. Mais les images des deux parties du

segment ne sont pas dans le prolongement l'une de l'autre, car elles ont été déterminées par des procédures différentes. L'image du segment n'est plus un segment. Ces types de réponses sont illustrées ci-après.



Elles témoignent de la difficulté soulevée par la caractéristique "la figure occupe les deux demi-plans définis par l'axe" (INTER=C). Ces réponses mettent en défaut la conception très répandue chez les élèves de la conservation de la nature objet par la transformation. Mais le contrôle perceptif ne fonctionne plus dans ce cas et il est possible que l'élève n'analyse pas la figure en un segment, mais en deux segments situés de part et d'autre de l'axe.

Les tableaux ci-dessous donnent les pourcentages de réponses de type "demi-symétrie" pour tous les items du groupe C, lorsque (S,A)≠90°.

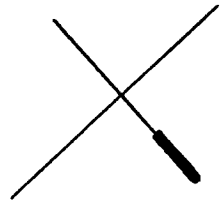
intersection en un point quelconque						**intersection au milieu du segment**					
	papier B			papier Q			papier B			papier Q		
(S,A)	29	45	61	29	45	61	29	45	61	29	45	61
V	4	6	4	5	4	5	1	2	1	1	4	5
H	1	5	4	9	4	9	0	5	3	4	2	8
G	9	2	4	6	5	8	0	1	2	1	6	5
D	10	3	1	7	1	7	3	4	3	5	11	5

Le papier quadrillé privilégie ce type de réponses, peut-être à cause des procédures de comptage qu'il induit et qui nuit à une perception globale de la figure.

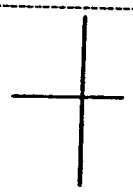
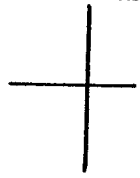
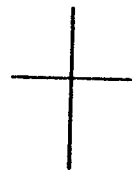
II.6.3. un détournement de la tâche

Nous avons classés à part les items où (S,A)=90°, afin de distinguer, parmi les réponses des élèves, celles qui consistent dans ces items à prolonger le segment de manière à obtenir une figure globalement symétrique par rapport à l'axe de symétrie. Nous avons bien sûr repéré des

réponses de type "prolongement" dans d'autres items, mais dans les cas précis où l'angle (S,A) vaut 90° et l'axe coupe le segment en un point qui n'est pas particulier, l'ensemble "figure-objet, figure-image" se confond globalement avec la bonne réponse. En voici un exemple. L'élève n'a tracé que le prolongement du segment. Ces différences dans les tracés sont repérables dans les productions des élèves, parce que ceux-ci avaient des crayons feutres produisant un trait large.



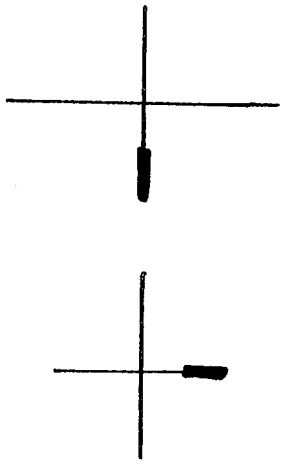
Le tableau ci-dessous indique les pourcentages des réponses justes et celui des réponses de type "prolongement".

	intersect. en un point quelconque				**intersection au milieu du segment**	
	papier B		papier Q		papier B	papier Q
item						
	juste	prol.	juste	prol.	juste	juste
V	40	13	48	17	59	65
H	33	24	41	23	69	67
G	38	20	48	23	55	51
D	38	18	45	25	58	53

Deux explications à ces réponses de type "prolongement".

L'élève a des hésitations à recouvrir un trait déjà existant alors qu'on lui demande de "tracer", et il va donc tracer seulement la partie du segment-image distincte de celle du segment-objet. Il peut avoir reconnu que le symétrique du segment est "plus que ça".

Une autre possibilité est la **confusion entre deux consignes :** tracer le symétrique d'une figure par rapport à une droite donnée ou rendre la figure globalement symétrique par rapport à cette droite ou dans la feuille de papier. Les commentaires écrits accompagnant les réponses de plusieurs élèves à ces items et aux items suivants apportent une confirmation du bien-fondé de notre question. Nous en donnons ci-après quelques exemples:



(5ème)-déjà commencé

(4ème)-la moitié de la symétrie est déjà tracée

(4ème)-une partie de la cymétrie est sur la droite du bas

(3ème)-je rajoute une longueur au plus petit segment pour qu'il soit symétrique à l'autre

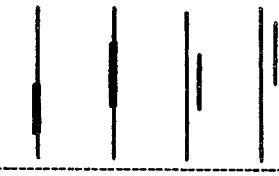
(5ème)-je ne peut raccourcir le trait qui est en haut

(5ème)-on allonge le petit trait et le grand trait on l'élargit

Dans ces exemples, aucun élève n'a tracé le symétrique du segment. Chaque élève a complété un tracé déjà commencé, cette interprétation de la figure par l'élève provenant de la difficulté à accepter que le segment occupe les deux demi-plans délimités par l'axe. Nous avions déjà rencontrée cette difficulté.

II.7. Analyse des réponses aux items du groupe D

Il s'agit des items pour lesquels le segment est parallèle ou confondu avec l'axe de symétrie. Le tableau ci-dessous donne les pourcentages des bonnes réponses obtenues à ces items.

	papier blanc				papier quadrillé			
figures								
V	73	83	98	95	69	86	99	99
H	72	81	98	97	79	89	99	98
G	73	81	98	88	72	80	99	82
D	76	80	95	92	78	81	96	85

Lorsque le segment est parallèle à l'axe, la réussite est très grande, quels que soient la direction de l'axe et le type de papier (plus de 90%); seuls les items sur papier quadrillé et avec l'axe oblique sont un peu moins réussis. Le principal type d'erreurs rencontré est le "rappel horizontal ou vertical" dû cette fois encore à la perturbation provoquée par les lignes du quadrillage de la feuille.

Par contre, lorsque le segment est confondu avec l'axe, on trouve beaucoup de "non-réponses" (absence de tracé) de la part des élèves, accompagnées de nombreux **commentaires** dont

nous reproduisons des exemples ci-dessous. Ces commentaires sont de deux sortes, ceux indiquant une impossibilité de l'élève à répondre à la question et ceux indiquant que le symétrique n'existe pas dans ces cas particuliers. En voici des exemples.

impossibilité pour l'élève à résoudre le problème

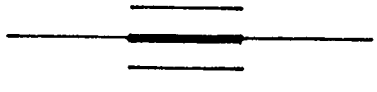
(5ème)-je ne comprend rien à cela
(5ème)-on ne peut pas le déplacer
(4ème)-je ne peux pas tracer la symétrie car il n'y a aucun point
(3ème)-ce qui me gène c'est que le segment se trouve sur la ligne

le problème n'a pas de solution

(6ème)-ce segment étant sur la droite il n'a pas de cimétrique
(6ème)-le segment ne peut pas avoir de contraire
(5ème)-remarque : ce dessin n'a pas de symétrie
(5ème)-impossible il ne peut pas y avoir de médiane
(4ème)-cette symétrie orthogonale n'existe pas
(3ème)-il n'y a pas de symétrique car le segment se trouve sur la droite

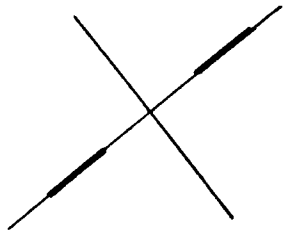
On peut constater que ces commentaires se retrouvent à tous les niveaux, de la 6ème à la 3ème. Ils ne laissent aucun doute quant au problème que ces figures ont posé à ces élèves.

La difficulté est grande, et certains élèves ont tracé une image en l'accompagnant d'un commentaire. En voici trois exemples.Un élève a dessiné un segment parallèle au segment donné (mais distinct de celui tracé) et son symétrique.



(5ème)-il faut rajouter ce que l'on veut car ce segment noir une fois plié sa simétrie est sur elle-même

Un autre élève s'est donné un nouvel axe de symétrie perpendiculaire à celui donné et a tracé le symétrique du segment par rapport à ce nouvel axe. Nous avons déjà rencontré cette manière de détourner le problème de l'intersection avec l'axe, dans la première expérimentation.



(5ème)-je plie sur la ligne verte

Dans cette troisème proposition, l'élève a tracé un segment qui s'appuie sur une des extrémités comme point invariant, mais distingue le segment image du segment donné.

(3ème)-pour faire ce dessin j'ai des difficultés car je sais qu'une symétrie n'est pas parallèle

Enfin, signalons que, même parmi les élèves qui ont donné une réponse exacte à ces items, beaucoup ont accompagné leur tracé d'un commentaire, comme si leur réponse demandait une **justification**. Nous pensons que pour l'élève, d'une part recouvrir un trait n'est pas tracer (or la consigne était de tracer) et que, d'autre part, la conception que le symétrique d'une figure est une figure différente de la figure donnée est forte.

III. conclusion

Cette troisième expérimentation confirme le rôle de la direction de l'axe dans la feuille sur les réussites des élèves, que nous avions repéré dans les deux premières expérimentations (ch.I). Nous analysons ce rôle par rapport à une conception, plutôt qu'en terme de perturbation due à une direction oblique de l'axe. Cette conception est que la symétrie axiale transforme une figure en une figure isométrique, de l'autre côté de l'axe, située sur une ligne de rappel horizontal ou vertical. Lorsque l'axe a lui-même une direction privilégiée dans la feuille, la règle d'action induite par cette conception peut conduire à une réponse juste. Lorsque l'axe est oblique, l'élève **ne change pas de procédure**, mais celle-ci n'est plus adaptée au problème. Cette variable ne produit donc pas un changement de procédure chez l'élève, mais révèle le caractère erroné de la règle d'action qu'il utilise.

Au contraire, nous avons constaté que les changements de valeurs de la variable angle (S,A) provoquent des changements de procédures chez les élèves. Les procédures de type "rappel par prolongement", pratiquement absentes pour un angle (S,A) petit, sont de plus en plus utilisées au fur et à mesure que l'angle croît, jusqu'à la valeur 90°. Pour cette valeur extrême la procédure ne disparait pas, mais elle se confond avec le rappel orthogonal et conduit à la réponse juste. On a ainsi une courbe des taux de réussite qui est décroissante strictement avec

la croissance de la valeur de l'angle (S,A), avec un saut pour la valeur 90° (retour à un très bon taux de réussite).

La direction du segment objet dans la feuille provoque aussi des changements de procédures. Comme nous n'avons étudié que trois valeurs discrètes de cette variable, nous ne pouvons parler de son influence sur la croissance ou décroisance du taux de réussite des élèves. Cependant, nous avons montré la perturbation apportée par les valeurs qui correspondent à des directions privilégiées dans la feuille. Il s'agit des valeurs SEG=V,H dans l'expérimentation "points-segments" et de la combinaison angle (S,A)=45° et AX=O dans la troisième expérimentation. La conception sous-jacente à ces changements de procédures est que l'image d'un segment vertical (respectivement horizontal) est un segment de même direction dans la feuille. Il y a donc conservation des directions privilégiées, la conservation des directions d'une manière générale étant un théorème en acte moins répandu.

Enfin, la conception de la symétrie comme transformation d'un demi plan dans l'autre demi plan (délimités par l'axe) est révélée par les difficultés que provoque l'intersection de la figure avec l'axe. Il n'y a pas de différence de taux de réussite chez les élèves lorsque l'axe coupe le segment en une de ses extrémités ou ne le coupe pas (mais la distance du segment à l'axe n'a jamais été très grande dans les items). Ce qui semble plutôt intervenir est la place de la figure par rapport à ces deux demi plans. Il y a un saut dans l'échec des élèves lorsque celle-ci les occupe tous les deux (INTER=C). Les réponses erronées de type "demi symétrie" montrent que certains élèves franchissent cette difficulté en considérant séparément chaque partie de la figure de part et d'autre de l'axe. Les commentaires écrits faits par d'autres élèves montrent que le problème peut aussi être déclaré sans solution.

L'influence sur les procédures des élèves des trois variables, direction du segment dans la feuille, intersection de la figure avec l'axe, angle aigu entre le segment et l'axe, révèle que la résolution du problème s'appuie sur une approche perceptive globale de la figure dans la feuille. Or, cette approche ne permet pas, dans certains cas, de trouver la solution. Dans une approche analytique où le segment serait analysé en deux points du plan reliés par un trait, ces variables ont un moins grand rôle. C'est ce qu'a montré l'expérimentation "points-segments".

Cependant, analyser la figure en points particuliers ne suffit pas pour résoudre le problème. En effet, les items sur papier quadrillé ne sont pas mieux réussis que ceux sur papier blanc. Or, le papier quadrillé induit la prise en compte des points particuliers de la figure : nous l'avons repéré en observant des élèves en résolution de problème (première expérimentation). Si cet effet du papier quadrillé est positif (abandon de la perception globale, analyse de la

figure en points), la matérialisation des lignes du quadrillage a, elle, un effet perturbateur : elle induit des procédures de comptage sur des lignes de rappel horizontal ou vertical, qui sont fausses dès que l'axe est oblique dans la feuille.

Toutes ces procédures de rappel horizontal, vertical ou par prolongement correspondent à la recherche d'une direction support de la construction de l'image d'un point. La propriété absente dans toutes ces procédures erronées est la propriété d'orthogonalité de la symétrie "orthogonale".

Enfiin, si la conservation de la nature de l'objet est acquise, la conservation des longueurs peut être "oubliée" dans certaines procédures. La propriété de conservation des angles de la figure est plus floue pour l'élève, mais elle est sous-jacente et est à relier au théorème en acte: "la figure-image a dans la feuille la même direction que la figure-objet" (un segment horizontal ne peut se transformer en un segment vertical !).

Certaines difficultés rencontrées par les élèves dans cette tâche semblent durables puisque nous retrouvons tous les types de réponses, dans les quatre niveaux scolaires observés, de la 6ème à la 3ème (ch.I). Il semble donc que l'apprentissage scolaire ne permette pas une remise en cause de toutes les conceptions erronées des élèves à propos de la symétrie orthogonale. Une des raisons probables à cet état de fait est qu'elles ont un domaine de validité non vide et peut être même assez large, c'est-à-dire qu'elles induisent des procédures de résolution qui donnent des réponses justes dans de nombreux problèmes. Par exemple les procédures de "rappel horizontal" fonctionnent dès que l'axe de symétrie est vertical.

Chapitre III

Analyse de l'objet d'enseignement

I. Les différents aspects du concept

I.1. De l'objet culturel au concept mathématique

A la réflection d'un objet dans un miroir ou à sa reproduction par pliage et calque, le mathématicien fait correspondre une transformation de figures par symétrie orthogonale par rapport à une droite (ou un axe), puis, à un niveau supérieur, une bijection involutive du plan dans le plan qui conserve les distances et change l'orientation.

L'objet culturel peut être précisé et décontextualisé par étapes qui correspondent aux différents niveaux auxquels on peut appréhender la transformation géométrique. On peut trouver trace de ces niveaux dans sa genèse en tant que concept mathématique.

Dans un premier temps, il s'agit de redéfinir la notion de symétrie axiale sans l'outil pliage (ou miroir). Ce premier pas vers le concept géométrique passe par la détermination des propriétés de la transformation. Il s'agit de se donner des outils mathématiques (en opposition aux outils matériels cités) pour la construction de symétriques de figures. Cette première étape permet, d'une part, de donner un sens à l'intersection de la figure avec l'axe par un extension de la définition de la symétrie-pliage et, d'autre part, de restreindre son application des objets de l'espace aux figures géométriques du plan (en relation au miroir). L'aspect perceptif de la notion est fortement en jeu dans cette étape. A ce niveau, la symétrie orthogonale est ***une relation entre deux configurations géométriques*** ou entre deux parties d'une configuration géométrique.

Une deuxième étape consiste à détacher le concept du contexte des figures, pour l'amener vers la transformation des points du plan. Cette démarche relève d'une homogénéisation du plan. La symétrie orthogonale prend un statut d'***objet fonctionnel***. Elle est définie comme une application bijective involutive qui conserve les distances, les angles (en particulier, l'alignement, le parallélisme et la perpendicularité), les rapports de projection et les aires. Par contre, elle change toutes les mesures d'angles en des mesures opposées, c'est-à-dire qu'elle change l'orientation des angles (propriété d'isométrie indirecte ou isométrie inverse). Enfin,

elle possède une infinité de points invariants (les points de l'axe de la transformation).

Une application du plan est définie chaque fois que l'on se donne une règle au moyen de laquelle on peut associer à tout point M du plan, un point et un seul M' de ce plan. Une isométrie est déterminée dès que l'on se donne, soit deux points distincts du plan et leurs images et le caractère inverse de l'isométrie, soit trois points du plan non colinéaires et leurs images. Cette isométrie est une symétrie orthogonale dès que deux couples de points associés forment un trapèze. La notion de ***médiatrice*** d'un segment joue un rôle privilégié dans la définition de l'image d'un point du plan.

Enfin, à un niveau supérieur, l'application bijective ainsi construite est utilisée comme ***outil fonctionnel*** pour la résolution de problèmes et la mise en évidence d'invariants ou de propriétés liées à des constructions.

Cette transformation occupe une place privilégiée parmi les isométries du plan, puisqu'on peut réduire celles-ci aux symétries orthogonales. Ainsi, la translation et la rotation sont des composées de deux symétries par rapport à des axes respectivement perpendiculaires à la direction de translation ou se coupant au centre de rotation. La symétrie glissée est la composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale et, donc, de trois symétries orthogonales.

I.2. L'objet d'enseignement

Jusqu'aux changements récents de programme (septembre 1986), la symétrie othogonale était présente dans l'enseignement comme objet fonctionnel au collège et, à un niveau supérieur, comme outil fonctionnel au lycée, pour la résolution de problèmes et la mise en évidence d'invariants.

Les changements de programmes ont nettement infléchi sa présentation au niveau du collège. Elle n'est plus enseignée comme objet fonctionnel, mais comme une relation entre deux configurations géométriques ou une relation entre deux parties d'une même configuration. Il s'agit de "transformation de figures planes" (expression employée dans les programmes et les commentaires) et non pas d'application ponctuelle comme auparavant (programmes de 1977). L'accent est mis beaucoup plus sur les manipulations, les constructions et "les propriétés se dégageant de ces constructions". De plus, l'enseignement de la symétrie orthogonale passe de la quatrième à la sixième. Elle devient ainsi la première transformation enseignée en sixième et la seule abordée dans cette classe.
Nous allons préciser les caractéristiques de l'objet d'enseignement actuel à partir d'une étude

de quelques manuels scolaires. Nous avons reproduit ci-dessous la partie "géométrie" du programme officiel de 6ème (1986).

programme officiel (extrait)

Travaux géométriques

3. Dans le plan, transformation de figures par symétrie orthogonale par rapport à une droite, en exploitant des problèmes nécessitant des manipulations, des dessins et des mesures :

- construction de l'image : d'un point, d'une figure simple;
- mise en évidence de la conservation des distances, de l'alignement, des angles et des aires;
- exemples d'utilisation de ces propriétés;
- constructions d'axes de symétrie (médiatrice, bissectrice...);
- construction de triangles isocèles, de quadrilatères possédant des axes de symétrie (rectangles, losanges ...);
- énoncé et utilisation de quelques propriétés caractéristiques des figures précédentes.

II. L'objet d'enseignement vu à travers les manuels

II.1. Directions de notre analyse et choix des manuels

Nous avons conduit la lecture de ces manuels dans l'objectif de l'élaboration d'un processus d'enseignement. Il s'agissait pour nous d'éclairer les points suivants : quelle est la place de la symétrie orthogonale dans l'enseignement, comment est-elle introduite (activités préliminaires, connaissances sur lesquelles elle s'appuie), quelles sont les grandes lignes du cours (les propriétés mises en avant, les exercices), est-elle réutilisée?

Nous avons aussi relevé, par rapport aux résultats des expérimentations précédentes (ch.I et II), quelles types de connaissance ces manuels produisent et comment sont mises en jeu les connaissances initiales des élèves avant l'appentissage. En particulier, nous avons regardé dans quelle mesure les variables que nous avons repéré précédemment sont prises en compte.

Nous avons choisi la lecture de quelques manuels scolaires correspondant aux nouveaux programmes de 6ème, mis en place en septembre 1986. Le choix de ces manuels a été fait en fonction de leur représentativité, mais aussi de leur originalité ou des différences intéressantes qu'ils permettaient de montrer dans l'approche du concept ou son développement.

Nous avons retenu les huit manuels suivants, nous utiliserons le sigles qui les accompagnent ci-dessous pour les désigner au cours de l'analyse.

Mathématiques 6°, H. Bareil, C. Zehren, Hachette.	BAZEH
Faire des mathématiques, A.Deledicq, C. Lassave, cedic Nathan	DELAS
Mathématiques 6°, collection Digamath, Didier	DIGA
Mathématiques 6°, collection Evariste, Delagrave	EVAR
Mathématiques classe de 6°, P.Aguilar, P. Louquet, L. Moulia, collection Pierre Louquet, Armand Colin	LOUQ
Jeomatri, IREM de Grenoble, Ophrys	JEOM
Connaitre et pratiquer les mathématiques, 6°, S. Pouts-Lajus, Nathan	POUTS
Mathématiques 6°, Irem de Strasbourg, collection collège, istra	STRAS

Nous ne prétendons pas faire une analyse complète et détaillée de chacun des manuels, notre objectif étant de cerner, à travers eux, les principales caractéristiques de l'objet d'enseignement. Aussi, les références ou citations que nous donnons sont-elles à prendre comme des exemples. Les citations sont reproduites en caractères plus fin. Les mots écrits en italiques ou en caractères gras, ou soulignés par les auteurs ont été reproduits ainsi.

Une première approche a consisté à regarder la place de la notion dans les manuels, à partir de la table des matières.

II.2. La diversité des intitulés des chapitres

Les présentations dans la table des matières des chapitres concernant la notion ne sont pas uniformes.

Certains manuels ont un chapitre unique intitulé "symétrie orthogonale" (STRAS, ch.13 et LOUQ, ch.14).

Dans deux autres, l'intitulé ne comporte que le mot "symétrie" (EVAR, ch.37 et DELAS, ch.G3), Ce terme est commenté dans DELAS par "figures symétriques, axes de symétrie". Dans EVAR, il est immédiatement entouré de deux chapitres, "pliages" et "axes de symétrie" (c'est le seul des huit manuels qui contient explicitement un chapitre "axe de symétrie").

Le terme "symétrie" est accolé à d'autres termes dans deux autres manuels, contenant chacun deux chapitres consacrés à la notion. Voici leurs intitulés respectifs :

(POUTS) *ch.21 - Symétrie. Figures superposables*
ch.22 - Symétrie. Constructions

(BAZEH) *ch.14 - Symétrie autour d'une droite*
ch.15 - Symétrie et constructions

JEOM contient un chapitre "des pliages" (ch.42), suivi de chapitres intitulés "les bissectrices", "des triangles", "des quadrilatères", où le pliage et les axes de symétrie sont utilisés pour caractériser des figures particulières.

Enfin, le mot symétrie n'apparait dans aucun titre de chapitre dans DIGA. Il faut lire les sous-titres des chapitres 4 et 5 pour le trouver, sous la forme "cercles et symétrie" (dans le chapitre "cercles et droites"), et "figures et symétrie" (dans le chapitre "triangles et quadrilatères").

En conclusion, dans les intitulés, le mot "orthogonal" est peu utilisé. Ce sont surtout les aspects *pliage, construction et figure*, qui sont mis en évidence. Ces titres sont en accord avec l'esprit du programme officiel. Nous allons voir que les contenus au contraire, sont très différents de ce point de vue, d'un manuel à l'autre.

II.3. Les activités préliminaires en relation avec la notion

a. Perpendicularité, équerre et compas

Les manuels comportent tous des activités de construction avec l'équerre de droites perpendiculaires à une autre droite. Les notions d'orthogonalité, de parallélisme, précédent les chapitres sur la symétrie orthogonale. Seul LOUQ contient un chapitre à part, intitulé "Orthogonalité et parallélisme. Médiatrice d'un segment", situé immédiatement après le chapitre "symétrie orthogonale". Nous en comprendrons les raisons en étudiant la manière dont la notion est introduite (§II.4).

La majorité d'entre eux présentent également des activités sur les distances mettant en oeuvre le compas comme outil de report de longueurs. Quelques manuels étudient le tracé et la reproduction d'angles.

On trouve la **construction d'une équerre par double pliage** dans plusieurs manuels. Il s'agit de faire le lien entre la superposition par pliage de deux segments de même origine et la propriété d'orthogonalité de ces deux segments à la droite de pliage (DIGA, DELAS, EVAR).

Cette activité est intéressante car elle permet d'établir un lien entre la superposition par pliage et la propriété d'orthogonalité de la symétrie par rapport à une droite.

b. Calque, superposition, retournement

Le calque est utilisé dans des exercices pour reproduire des figures. Certains manuels développent l'idée de superposition de deux figures. Ainsi, par exemple, POUTS définit "superposables" par "coïncident par glissement ou retournement". Puis, cette idée est précisée par des activités avec le papier calque dans le but de différencier le glissement et le retournement. De même, DELAS introduit aussi très largement, dans des activités de calque, déplacement et décalque, la superposition avec retournement ou glissement.

II.4. Transformation de figures et axes de symétrie

Dans les programmes officiels, deux grandes notions se dégagent à propos de la symétrie orthogonale, à savoir, la transformation de figures et la notion d'axe de symétrie d'une figure. Il n'est pas précisé quel lien doit être fait entre ces deux notions, ou comment s'appuyer sur l'une pour introduire l'autre. L'ordre dans lequel sont présentés la transformation et la notion d'axe de symétrie n'est pas le même selon les manuels. Nous allons analyser l'incidence du choix de cet ordre sur la manière d'introduire la symétrie.

D'autre part, la notion de médiatrice peut être définie à partir des objets de la symétrie orthogonale (symétrique d'un point, axe de symétrie),ou au contraire servir de support de définition à ces objets. Nous avons examiné les rapports entre ces trois notions dans les manuels choisis.

II.4.1. La transformation précède la notion d'axe de symétrie

Cette approche est majoritaire dans les manuels étudiés. Nous la trouvons dans six d'entre eux : EVAR, STRAS, LOUQ, JEOM, DELAS, POUTS Dans quatre de ces manuels, la médiatrice est définie avant les chapitres sur la symétrie orthogonale, dans le cadre d'activités de constructions avec l'équerre et le compas. Dans EVAR (p.156), elle est définie juste après la définition de deux points symétriques (comme perpendiculaire au milieu du segment joignant les deux points). Dans POUTS (p.133), sa définition est donnée au contraire juste avant celle de deux points symétriques qui s'appuie donc sur elle.

Dans les trois premiers manuels, la première définition concernant la notion est celle du symétrique d'un **point**, alors que dans les trois derniers, c'est celle du symétrique d'une **figure**.

a. La transformation ponctuelle

Dans EVAR, deux définitions de "deux points symétriques" sont données dans deux pages successives. La première est liée à la superposition par pliage :

EVAR (p.155) *Deux points qui coïncident par pliage autour d'une droite XY sont des **points symétriques** par rapport à cette droite XY ou autour de (XY).*
*Par exemple, F et F' sont **symétriques** par rapport à (XY).*
*Le milieu L de [FF'] est sur la droite XY **et** la droite FF' est perpendiculaire à la droite XY.*
*Le point A situé sur la droite XY coïncide avec lui-même par pliage autour de (XY): le point A a pour **symétrique** le point A*

La seconde définition est donnée à partir de la construction avec l'équerre et la règle graduée du symétrique d'un point (p.156). Le lien entre les deux définitions n'est pas fait dans ce chapitre, il faut se reporter pour cela à l'activité de construction d'une équerre par pliages successifs (p.53).

Dans une suite logique, viennent ensuite la construction du symétrique d'un point, puis celle d'une figure comme ensemble de points (p.157). Nous y reviendrons au §II.5.

L'axe de symétrie est défini ensuite, après une observation de **figures** stylisées (fleur, papillon, vase), par une **correspondance point par point.**

*Tu remarques que, par la symétrie autour de la droite D, chaque **point** de la figure a pour image un point de cette **même** figure.*

Les images présentées sont composées de segments, arcs et courbes complexes. Elles doivent donc être considérées ici comme un ensemble (infini) de points.

La définition donnée par STRAS est fondée sur la notion de médiatrice, introduite dans un chapitre précédent, intitulé "losange et médiatrice", situé assez loin (ch.7) du chapitre qui nous intéresse (ch.13) :

(p.191) *Le **symétrique** d'un point A par rapport à une droite d est :*
- le point B tel que d soit médiatrice de AB, si A n'appartient pas à d
- le point A lui-même si A appartient à d.

L'involution de la transformation est évoquée tout de suite après, justifiée par une référence à la définition. Enfin, les auteurs définissent l'**axe de symétrie d'un ensemble de points**, et non d'une figure.

> *On dit qu'un ensemble de points admet d pour **axe de symétrie** lorsque ces points sont soit situés sur d, soit associés par paires de points symétriques par rapport à d.*

La suite du chapitre poursuit cet objectif. Ainsi, les propriétés qui sont citées ensuite sont données par rapport à des ensembles de points. Le premier exercice de construction du symétrique d'une figure (il s'agit d'une figure polygonale) relève lui aussi de la construction de points : ceux-ci sont nommés (A, B, etc...) et la consigne est de construire les symétriques de ces points, et non le symétrique de la figure.

Il n'est question de figure que lorsqu'on aborde les axes de symétrie des losanges et des triangles isocèles.

Le choix de LOUQ est lui aussi de développer la transformation ponctuelle. Après une activité d'introduction où l'élève observe la correspondance de points et de segments par le pliage, les auteurs définissent ainsi la symétrie par rapport à une droite :

(p.126)

> ***définitions et propriétés***
> *Soit D une droite du plan P, on admet qu'il existe une correspondance entre les points du plan, appelée symétrie par rapport à la droite D, et qui a les propriétés suivantes :*
> *- tout point M du plan, situé hors de D, a pour correspondant un point M' et un seul, distinct de M;*
> *- tout point M de D a pour correspondant lui-même;*
> *- si A et B sont deux points quelconques du plan, A' et B' leurs correspondants, alors on a : d(A', B')=d(A, B).*

Dans le paragraphe suivant immédiatement la définition, intitulé "vocabulaire et notations", les auteurs définissent la "**propriété de réciprocité**" :

(p.126)

> *si M a pour symétrique M', alors M' a pour symétrique M. Cette propriété peut s'écrire :*
> ***si*** $S_D(M)=M'$ ***alors*** $S_D(M')=M$

Enfin, l'axe de symétrie d'une figure est défini au dernier paragraphe du chapitre (§VII), de la même manière que dans STRAS :

(p.130) *on dit qu'une figure F admet un axe de symétrie D, lorsqu'elle est confondue avec sa symétrique par rapport à D.*
on écrit dans ce cas : $S_D(F)=F$

Toutes ces définitions sont très formelles. Elles correspondent à celle donnée en classe de 4ème dans les programmes officiels précédents.

b. La transformation de figures

Trois autres manuels abordent la transformation avant l'axe de symétrie (JEOM, DELAS, POUTS), mais ils le font au moyen de transformation de **figures**.

JEOM définit deux figures symétriques à partir de l'observation du résultat du pliage d'un calque.

(p.147) *Tu vois deux cocottes qui se regardent.*
Prends une feuille de calque et reproduis la figure sans oublier la droite d.
Plie le calque autour de la droite d.
Qu'observes-tu ?
On dit que les deux cocottes sont SYMETRIQUES par rapport à la droite d.

Les auteurs décrivent ensuite deux constructions du symétrique d'un point avec instruments, en argumentant que, par le pliage, "la feuille va être bien vite abimée". Les figures ayant une droite de symétrie sont introduites par une tâche qui consiste à compléter une figure par symétrie autour de la droite de pliage.

La différence entre cette formulation et celles que nous venons de voir est flagrante. L'approche se fait à partir de manipulations et d'observations. Elle s'inscrit tout à fait dans les objectifs des nouveaux programmes et témoigne d'une volonté de rompre avec l'esprit de l'ancien programme de 4ème.

La démarche de DELAS est analogue à celle de JEOM. Après une activité de construction de symétriques de figures par pliage le long d'une droite, on propose à l'élève de constater que la droite de pliage est médiatrice de tous les couples de points symétriques. Suit une définition du symétrique d'un point à partir de la notion de médiatrice.

La définition de l'axe de symétrie d'une figure est introduite au dernier paragraphe : une figure admet un axe de symétrie si elle est sa propre symétrique par rapport à une droite (cette droite est l'axe de symétrie).

Enfin, dans POUTS, après avoir fait réaliser à l'élève une activité pour différencier les deux types de superpositions possibles, les auteurs donnent une définition de deux figures symétriques comme figures superposables par retournement. La définition de l'axe de symétrie d'une figure (F) est donnée tout de suite après : si l'on plie le long de cette droite, chaque point de (F) coïncide avec un point de (F). On constate que si la définition de deux figures symétriques est globale, celle de l'axe de symétrie est analytique.

Puis, l'auteur revient à la construction d'une figure symétrique, à travers des exercices avec papier calque et papier quadrillé ou pointé. Il y a ensuite un paragraphe réservé aux axes de symétrie de figures. Le lien entre les deux notions n'est pas explicité.

Il faut attendre le chapitre suivant (ch.22, "symétries/constructions") pour trouver la définition de la médiatrice et les deux constructions habituelles avec instruments du symétrique d'un point.

En conclusion, le choix d'une approche par la transformation ponctuelle semble lié à une intention de traiter la notion d'une manière assez formelle, présentant de grandes ressemblances avec celle des programmes précédents. Au contraire, le choix d'une approche par la transformation de figures marque une adaptation à l'esprit des nouveaux programmes.

II.4.2. L'axe de symétrie est abordé avant la transformation

L'approche de la notion par l'axe de symétrie d'une figure est, semble t-il, moins répandue. Nous l'avons trouvé dans deux manuels, BAZEH et DIGA.

Dans ces deux manuels, la définition de l'axe de symétrie d'une figure est donnée à partir d'activités sur le **cercle**.

Dans DIGA, elle est donnée dans le chapitre "cercles et droites" de la manière suivante. Tout d'abord, la médiatrice d'un segment est définie comme ensemble des centres des cercles passant par deux points donnés qui ont été construits au compas (p.80). On propose ensuite à l'élève d'observer la figure ainsi obtenue :

(p.81) *tu peux constater une "ressemblance" entre la partie tracée d'un côté de la droiteD et la partie qui est tracée de l'autre côté. En effet, si on imagine un "pliage" de la feuille selon la droite D, les deux parties viennent exactement se superposer.*

On dit que la figure est symétrique par rapport à la droite D, D ***est l'axe de symétrie.***

Il n'y a pas d'autre exemple de figures symétriques dans ce chapitre et les exercices de recherche d'axes de symétrie que l'on y trouve ne concernent que des figures simples composées de cercles et de segments.

Après avoir proposé d'examiner la correspondance de quelques points sur la figure précédente, la définition du symétrique d'un point est donnée dans ce même paragraphe à partir de la médiatrice :

Le symétrique d'un point M par rapport à une droite D est :
- le point M lui-même s'il appartient à D.
- sinon, le point N tel que D soit la médiatrice de M et N.

Les liens entre la notion d'axe de symétrie et celle de symétrique d'un point ne sont pas explicités. D'autre part, ces notions restent liées à des figures très particulières, du fait même de la place qui leur a été donnée.

Dans BAZEH, on rencontre la première expression "axe de symétrie" dès le chapitre 1, "longueurs et périmètres". L'activité proposée consiste à plier le long d'un diamètre d'un cercle, puis à constater :

(p.31) *Tu as obtenu deux demi-cercles qui se superposent*
Nous dirons que ce diamètre est axe de symétrie du cercle

Dans le chapitre 2, intitulé "des triangles avec un compas", on trouve une référence à la notion

d'axe de symétrie, dans le cadre d'une activité consistant à reproduire un triangle au compas (p.41). Il est signalé que, lors du tracé du troisième sommet, deux positions sont possibles et que la figure ainsi formée possède un axe de symétrie.

Enfin, au chapitre 12, intitulé "rectangles et carrés", le paragraphe II est consacré à "rechercher et utiliser des axes de symétrie" (pp.168-169). La médiatrice d'un segment ou de deux points est définie comme droite perpendiculaire au milieu.

Ainsi, dans ce manuel, la notion d'axe de symétrie, ses propriétés et son utilisation sont donc traités avant les deux chapitres sur la transformation. Contrairement au manuel précédent, un grand nombre de figures ayant des axes de symétrie (dallages, pavages, etc...) sont présentés en fin de chapitre (pp.174-175), ce qui permet de détacher la notion du contexte "rectangles et carrés".

Au chapitre 14 ("symétrie autour d'une droite"), **la définition de la figure symétrique d'une figure donnée s'appuie sur la notion d'axe de symétrie.** Elle vient après une activité de recherche d'axes de symétrie dans de nombreuses figures, que l'élève doit faire cette fois en **imaginant le pliage**. On demande à l'élève de dessiner la maison "jumelle" qui doit venir s'appuyer sur celle déjà dessinée tout au long d'une droite donnée.

(p.195) *"elle en sera la symétrique autour de la droite ".*

Dans l'exercice suivant, il est précisé de compléter une "moitié" de figure par symétrie autour d'une droite".

Un troisième exercice consiste à reproduire avec le papier calque une figure (oiseau stylisé) coupant l'axe de symétrie Δ. On indique à l'élève de retourner le calque en remettant la droite du calque sur celle déjà dessinée et deux points de l'axe sur eux mêmes. La définition du symétrique d'une figure s'appuie sur ce travail :

(p.196) *Dessine, avec le calque, un oiseau F' qui sera le symétrique de l'oiseau F autour de la droite Δ.*

La définition et les constructions du symétrique d'un point viennent ensuite, après des observations de points correspondants sur les deux figures F et F'.

II.4.3. Conclusion

L'introduction de la symétrie orthogonale se fait le plus souvent par son aspect transformation. Bien que les programmes évoquent la transformation de figures, il y a une tendance, dans plusieurs manuels, à revenir à la transformation ponctuelle de l'ensemble des points du plan, telle qu'elle était enseignée dans les anciens programmes, en classe de quatrième. C'est le cas des manuels EVAR, STRAS et LOUQ. L'axe de symétrie est même défini, dans EVAR et STRAS, pour un ensemble de points et par les propriétés de cet ensemble de points, plutôt que pour une figure.

L'approche de la notion par la transformation de figures correspond mieux, nous semble-t'il à l'esprit des nouveaux programmes. Nous l'avons trouvée dans JEOM, DELAS et POUTS. Les activités de pliage et de calque permettent d'appréhender la notion de manière perceptive, ce qui nous semble plus abordable pour un élève de sixième. Cependant, dans les manuels étudiés, le lien avec l'axe de symétrie n'est pas toujours mis en évidence. Il s'est présenté sous deux formes :
- l'axe de symétrie est une droite telle que la figure soit sa propre symétrique (DELAS);
- c'est la droite autour de laquelle on a complété une figure par symétrie (JEOM).

Enfin, l'introduction de la symétrie orthogonale par la notion d'axe de symétrie semble moins répandue. Dans les deux manuels où nous l'avons relevée (DIGA et BAZEH), elle est faite à partir d'une figure particulière, le cercle. La notion est rattachée à la possibilité de partager la figure en deux **parties** superposables par pliage ou par retournement. Nous retrouvons aussi, dans ces deux manuels, un des thèmes du nouveau programme : manipulations et constructions sur des figures. Par contre, le lien entre la notion d'axe de symétrie et de transformation est différent dans les deux manuels. Dans DIGA, les auteurs n'ont pas fait ce lien, parce qu'ils ont choisi d'introduire ensuite la transformation ponctuelle. Dans BAZEH, le passage à la transformation de figures se fait par une activité s'appuyant sur la notion d'axe de symétrie, qui consiste à "compléter une figure pour qu'elle admette une droite de symétrie".

Signalons enfin que le niveau de complexité des formulations pour les définitions semble lié au choix : transformation ponctuelle ou transformation de figures.

II.5. Les liens entre symétrique d'un point et symétrique d'une figure

On comprend l'intérêt de cette question si l'on se réfère aux résultats de notre expérimentation "points-segments" décrite au chapitre I. Un des résultats est qu'il ne suffit pas pour l'élève de

savoir construire le symétrique d'un ou de plusieurs points pour savoir construire le symétrique de n'importe quelle figure. Nous avons donc regardé comment les manuels traitent le passage de la construction avec les instruments du symétrique d'un point à celle du symétrique d'une figure.

Dans tous les manuels, la construtions du symétrique d'un point est bien explicitée. Les deux constructions classiques sont bien illustrées et données en général l'une à la suite de l'autre (équerre et compas). Par contre, la construction du symétrique d'une figure est peu souvent explicitée. Nous en avons relevé trois exemples qui montrent la grande différence avec laquelle cette question est traitée.

a. Le symétrique d'une figure n'est pas évoqué

EVAR n'emploie à aucun moment l'expression "symétrique d'une figure". Au chapitre "pliages" (pp.153-155), une première définition du symétrique d'un point est donnée. Le chapitre suivant, "symétrie" (pp.156-159), contient les définitions de deux points symétriques et du symétrique d'un point, ainsi que les deux constructions classiques du symétrique d'un point. Viennent ensuite des exercices dont l'objectif est de construire les symétriques des figures données. Mais les questions sont formulées de manière à ce que la tâche soit de "construire le symétrique de chacun des points ou des sommets" de ces figures. De plus, aucune indication n'est donnée pour savoir comment relier les sommets entre eux.

Dans les propriétés citées, il est question de la conservation de la distance entre deux points, de l'alignement des points et des angles. Enfin, dans le paragraphe suivant intitulé "axe de symétrie", il est dit que :

(p.158) *"par la symétrie autour de la droite D, chaque point de la figure a pour image un point de la même figure".*

Très logiquement, dans le paragraphe qui clôt le chapitre et qui est intitulé "important", on lit :
(p.158) *savoir construire le symétrique d'un point autour d'une droite*

Mais le symétrique d'une figure n'est jamais évoqué. C'est seulement dans les exercices communs aux trois chapitres que l'on lit la question "construis la figure symétrique autour de (d)..." (p.162).

C'est le seul des huit manuels qui entre dans ce cadre.

b. La construction du symétrique d'une figure est implicite

POUTS, dans le chapitre "symétries-figures superposables", définit d'abord deux figures symétriques comme superposables par retournement. Puis il propose de construire les symétriques de figures, par décalque, en utilisant comme repères des points sur un papier pointé. On va ainsi obtenir le symétrique de la figure entière, une indication est donnée en ce sens :

> *"Décalque chacune des figures et relie les points rouges de façon à obtenir le symétrique de la figure par rapport à l'axe (d)".*

Dans le chapitre suivant ("symétries-constructions") le paragraphe donnant les constructions du symétrique d'un point avec l'équerre ou le compas est suivi d'exercices demandant la construction de symétriques de figures, sans indications sur le passage du point à la figure.

Nous retrouvons cette démarche dans JEOM. Il semble que les activités avec le calque sont considérées comme suffisantes pour répondre à la question, lorsqu'on utilise la règle et l'équerre ou le compas.

c. La construction du symétrique d'une figure est explicitée

DELAS traite ce problème du passage du symétrique d'un point au symétrique d'une figure dans un paragraphe intitulé "comment faire".

> *"Comment tracer la figure symétrique d'une figure. ..d'un point M (à la règle ou au compas) ...d'un segment ... d'une demi-droite ... d'un cercle.*

Les procédés sont donnés sous la forme "il suffit de...", se ramenant à la construction de symétriques de points, à partir desquels on trace le segment, la droite ou le cercle de même rayon. Pour une figure quelconque, la construction est illustrée par un dessin. La figure est formée de segments, arc de cercles, cercles.

Les autres manuels se situent dans ces deux derniers cas. Le passage du point à la figure est plus ou moins expliqué et illustré. Ainsi, le commentaire que l'on trouve dans DIGA à ce sujet:

(p.109) *Ainsi, dans tous les cas précédents, tu as pu constater qu'il suffit, dans la pratique, de tracer les symétriques de un ou deux points pour obtenir les figures*

symétriques cherchées.
Quand on te demandera de tracer les symétriques de figures par rapport à une droite,... il faudra donc que tu commences par "décomposer" la figure pour appliquer les techniques de tracé précédentes.

D'une manière générale, les figures dont la construction du symétrique est détaillée sont une droite, des points alignés, un segment, plus rarement un cercle. Souvent, ces figures ne coupent pas l'axe.

II.6. Les propriétés mises en évidence

a. Les propriétés de l'axe de symétrie

Dans les manuels où l'axe de symétrie est défini en relation avec le pliage, il est proposé aux élèves de vérifier que celui-ci est perpendiculaire à quelques couples de points se correspondant dans le pliage. Les manuels qui définissent l'axe de symétrie d'un ensemble de points donnent des propriétés très générales. Nous en avons noté quelques-unes au paragraphe II.4. La propriété d'équidistance des points de toute paire de points symétriques est explicitée dans certains manuels pour la médiatrice, elle n'est pas décrite pour l'axe de symétrie d'une figure quelconque.

b. Les propriétés de la transformation

C'est sur ce thème que les manuels sont les plus semblables. A l'exception de DIGA et POUTS, tous les manuels ont un paragraphe "propriétés" plus ou moins important, dans lequel sont citées les propriétés de conservation des distances ou longueurs, des angles et de l'alignement des points. La conservation des aires est donnée par trois d'entre eux (BAZEH, DELAS, JEOM). JEOM cite en plus la conservation de l'orthogonalité et du parallélisme. BAZEH signale que deux droites symétriques se coupent sur l'axe.

Ces propriétés relatives à l'isométrie de la transformation sont introduites presque toujours après des activités de construction ou d'observation.

Dans certains manuels, elles sont **à admettre**; elles sont illustrées par des dessins, comme dans STRAS :

(p.191) *les figures ci-contre illustrent le fait que :*
- les symétriques de points alignés sont des points alignés; [...]
Nous admettrons que : par symétrie axiale, il y a conservation des alignements, des distances, des angles

ou bien, écrites sous la forme "on dit que...", dans POUTS :

(p.133) *On dit que la symétrie orthogonale conserve les longueurs [...] mais ce n'est pas tout! Elle conserve également les angles et les aires.*

Dans d'autres manuels, elles sont **à vérifier**; il est alors demandé aux élèves de constater sur le dessin, avec les instruments.

Enfin, ces propriétés sont parfois **argumentées,** par la superposition par pliage; nous en avons un exemple dans BAZEH :

(p.197) *Nous avons vu que la symétrie orthogonale par rapport à un droite équivaut à un retournement d'un calque autour de l'axe de symétrie. Il s'ensuit que* ***chaque figure a pour symétrique une figure superposable.***
... De là, notamment, les propriétés suivantes.

Le manuel DELAS utilise aussi cet argument :

(p.103) *une feuille transparente ne subissant aucun dommage dans le maniement (déchirure, étirage ou réduction), on constate que des figures superposables sont des figures ayant même forme et même dimension.*

(p.114) *La feuille ne subissant aucun dommage dans la manipulation, tu vois que des figures symétriques sont des figures ayant même forme et même dimension.*

Seul le manuel DIGA ne cite aucune de ces propriétés. Rappelons que la symétrie n'apparaît pas dans les titres de chapitres de ce manuel et qu'elle n'est étudiée qu'à travers l'étude des cercles et des triangles.

La non conservation des directions est peu explicitée. Elle est cependant signalée dans DELAS :

> *Attention!*
> *Deux figures "symétriques" sont "superposables" mais ne sont pas forcément "superposables par glissement". Bien qu'elles aient même forme et même dimension, elles n'ont pas même "orientation". Ainsi, l'image d'une main gauche dans un miroir est une main droite.*

Mais, par exemple, EVAR ne soulève pas du tout ce problème. Les mots employés "coïncidence", "superposition" ne s'accompagnent jamais de qualificatifs. Il est vrai que le papier calque n'est pas utilisé dans ce manuel, les activités introductives sont uniquement effectuées avec des pliages et des quadrillages. Il s'agit donc de "superposition par pliage". Dans le cours proprement dit, la propriété d'isométrie indirecte ne peut être mise en évidence, puisque la part faite aux transformations de figures (autres que le segment) est quasi nulle.

La construction du symétrique d'un point met en oeuvre **les propriétés de milieu, d'orthogonalité et d'équidistance** de la transformation. Nous entendons par là, de manière abrégée, les propriétés suivantes (M et M' sont deux points symétriques) :
- le milieu du segment MM' est sur l'axe de symétrie;
- M' est sur la perpendiculaire à l'axe de symétrie passant par M;
- M et M' sont équidistants de tout point de l'axe de symétrie.

Dans tous les manuels, ces trois propriétés sont données aux élèves, elles ne sont pas proposées à découvrir.

L'existence de points invariants est affirmée dans la plupart des manuels. ce sont des points qui sont leur "propre symétrique".

Cependant, POUTS n'en parle pas et le problème est rencontré par le lecteur à l'occasion d'un exercice (p.128, 2.1) consitant à calquer des points et à les reporter (sur papier pointé) pour tracer le symétrique d'une figure : l'un de ces points est situé sur l'axe, mais il n'est rien signalé à son sujet. Le report avec le calque est censé apporter l'information.

De même, DELAS n'évoque pas les points de l'axe, et cette question se pose pourtant lors de la résolution de plusieurs des exercices proposés en fin de chapitre (p.119-120).

II.7. Le rôle des instruments

Le calque ou le pliage permettent souvent d'aborder la notion de superposition de figures et de donner une première définition du symétrique d'un point ou d'une figure, ou de l'axe de symétrie d'une figure.

Les constructions avec règle, équerre et compas sont explicitées dans le cadre de deux problèmes, la construction de la médiatrice d'un segment et la construction du symétrique d'un point. Plusieurs méthodes sont données: avec la règle graduée et l'équerre, ou avec l'équerre et le compas (pour le report de longueurs), ou avec le compas seul (équidistance de deux points de la droite). Ce jeu sur les instruments est intéressant, parce qu'il permet de mettre en oeuvre des propriétés spécifiques de la transformation. Mais, d'une façon générale, les instruments ne sont pas utilisés pour permettre une découverte de ces propriétés, mais seulement pour les décrire et les faire utiliser.

II.8. Un aperçu sur les types d'exercices proposés

L'étude des exercices d'un manuel peut prendre des dimensions importantes. Nous essayerons seulement de cerner ce que les exercices mettent plus particulièrement en évidence.

Le nombre des exercices proposés est très variable, certains manuels en présentent tout au long du cours, d'autres en ont regroupés un grand nombre à la fin des chapitres. De plus, ces exercices ne sont pas de même importance. Il est donc difficile de comparer leur importance.

Ce qui est par contre remarquable est la diversité des niveaux de ces exercices, d'un manuel à l'autre. D'une manière générale, ceux qui ont choisi d'aborder la notion sous forme de transformation ponctuelle proposent des exercices plus formels et plus complexes que les autres. En voici un exemple, tiré de LOUQ (c'est le 5ème exercice de la série de 27 exercices donnés en fin du chapitre "symétrie orthogonale").

(p.131) *Soit D et D' deux droites sécantes en un point O. A est un point situé hors de D et de (n°14.5) D'.*

1° Construisez les points $B=S_D(A)$ et $C=S_{D'}(A)$.

2° Comparez OB et OC. Justifiez votre réponse.

Bien sûr, l'exercice se situe dans l'esprit du cours. Les 27 exercices de cette fin de chapitre sont pour la plupart formulés ainsi et de ce niveau de complexité. Quatre d'entre eux cependant

sont très différents (n°14.21 à 14.24). Ils consistent à reproduire les figures qui sont proposées et à tracer leur symétrique. Cependant, toutes ces figures sont données sur papier quadrillé et les axes de symétrie sont tous horizontaux : la tâche est donc essentiellement une tâche de dessin, qui ne met en oeuvre que l'isométrie. En effet, nous avons montré dans nos expérimentations précédentes que les procédures de comptage le long des carreaux remplacent efficacement les procédures utilisant le report des distances et l'orthogonalité à l'axe.

A l'opposé, certains manuels proposent une majorité d'exercices de manipulations et d'observation. Ainsi, JEOM utilise beaucoup le papier calque, le pliage et demande de répondre aux questions après avoir observé.

DIGA se situe de manière intermédiaire. Il propose d'abord de **reconnaitre** des axes de symétrie, reconnaitre si deux points sont symétriques par rapport à la droite donnée, puis de **construire** des axes de symétrie et des figures symétriques. Mais les figures sont peu variées (cercles, segments et triangles); la seule figure un peu différente, présentée sans désignation de ses points particuliers est dessinée sur papier quadrillé.

Dans la plupart de ces manuels, les figures sont déjà analysées, c'est-à-dire que leur points particuliers sont nommés (A,B,C, etc...) et, souvent, soit à cause du papier quadrillé, soit à cause de la forme de la question, on revient à la transformation ponctuelle.

Les activités proposées dans les manuels relèvent presque exclusivement de l'observation et de l'action, tant dans les "activités préliminaires" que dans les parties "cours" et même, les parties "exercices". La très grande majorité des exercices, sinon tous dans certains manuels, commencent par "dessine", "reproduis", "trace", "construis", "plie", "calque", "compare" et demandent ensuite de répondre à des questions après avoir observé la figure. Il y a peu de demande de justification.

La place donnée à la validation et à la formulation est restreinte. Parfois de manière très ponctuelle, l'élève doit "préciser", "compléter des phrases", "expliquer". Ainsi, par exemple, dans DELAS, on trouve des exercices de "description d'un programme de construction" et un exercice où la solution passe par un raisonnement et des argumentations :

(p.121) *Soit une symétrie d'axe D, mais tu ne connais pas cet axe. Es-tu capable de le trouver si je te donne une droite (xy) et sa symétrique (x'y') et que je te dis que (xy) et (x'y') se coupent en A ? Explique ton raisonnement.*

Dans LOUQ, on trouve aussi un exercice isolé d'initiation au raisonnement (n°14-12, à propos de l'image d'un cercle).

II.9. La prise en compte de quelques éléments didactiques

Une des questions que nous nous posions avant cette analyse de manuels concerne la prise en compte des connaissances initiales erronées très répandues et dont la durabilité est liée à la grandeur de leur domaine de validité.

Ainsi, alors que la conception qu'un axe de symétrie est vertical est répandue chez les élèves, on constate que, dans la plupart de ces manuels :
- pour toutes les activités préliminaires (pliage, première définition de points symétriques) et la définition ou la recherche d'axes de symétrie, les axes sont majoritairement verticaux ou horizontaux;
- pour la construction du symétrique d'un point, l'axe est oblique; mais il redevient vertical ou horizontal (sauf 45° sur papier quadrillé) pour la construction de symétriques de figures;
- les illustrations des paragraphes plus formels (définitions, propriétés) comportent des axes de symétrie obliques.

Il est intéressant de noter que le seul moment où, presque systématiquement, nous trouvons des axes obliques, est celui de la construction du symétrique d'un point ou de la médiatrice d'un segment. Car, justement, nous avons montré dans nos expérimentations (ch.I) que la direction oblique de l'axe dans la feuille ne joue pas un rôle aussi important quand la figure est composée uniquement de points que dans les autres cas. Il serait donc a priori plus pertinent de tracer les axes obliques lorsqu'on traite des figures que lorsqu'on traite de points.

Examinons maintenant l'utilisation du papier quadrillé. La construction du symétrique d'une figure sur papier pointé ou quadrillé, par rapport à un axe horizontal et vertical met surtout en jeu des procédures de comptage, qui se confondent ici avec celle utilisant l'orthogonalité. Or, nous avons vu combien cette propriété d'orthogonalité est peu présente dans les procédures des élèves. Le papier quadrillé empêche l'élève de repérer la procédure qui va aussi marcher pour du papier blanc et pour des axes obliques.

L'intersection de la figure avec l'axe de symétrie est une autre source de difficulté pour les élèves. Les manuels que nous avons consultés la prennent tous en compte à un moment ou un autre. Mais elle est rarement combinée à la direction oblique de l'axe dans la feuille.

Le manuel BAZEH est un peu différent des autres. Certains aspects nous ont paru intéressants:
- le pas de côté par rapport aux activités de manipulation, qui est fait en proposant des activités où l'on **imagine le pliage** sur un grand nombre de figures (recherche d'axes de symétrie) et qui sert de transition entre les activités préliminaires et la définition mathématique;
- l'explicitation d'un lien entre l'axe de symétrie d'une figure et la transformation de figures;
- l'introduction de la transformation de figures d'une manière **globale** et non analytique (cas de la transformation ponctuelle);
- une prise en compte (implicite) plus systématique des variables "direction de l'axe dans la feuille" et "intersection de la figure et de l'axe" dans les dessins proposés.

III. Conclusion

La place et l'importance de la notion diffère selon les manuels. Elle est cependant majoritairement développée pour elle même, et non dans le cadre de l'étude d'autres notions.

Son introduction se fait souvent par l'aspect transformation, mais il s'agit souvent de la transformation ***ponctuelle*** du plan, alors que le programme officiel évoque la transformation de figures. Cette définition de la transformation ponctuelle est parfois "déguisée" en transformation de figures, mais les figures sont nommées par leur points particuliers et les questions ou résultats se rapportent à ces points. En fait, l'approche globale de la figure ne se fait souvent que dans la partie préparatoire à l'introduction du concept mathématique, à travers les manipulations de figures par des pliages et calques. Cet aspect "transformation ponctuelle" est un reliquat des anciens programmes de quatrième : on trouve (même) des manuels qui présentent la symétrie orthogonale sous forme de bijection involutive du plan, ce qui nous semble difficile d'accès pour des élèves de 6ème.

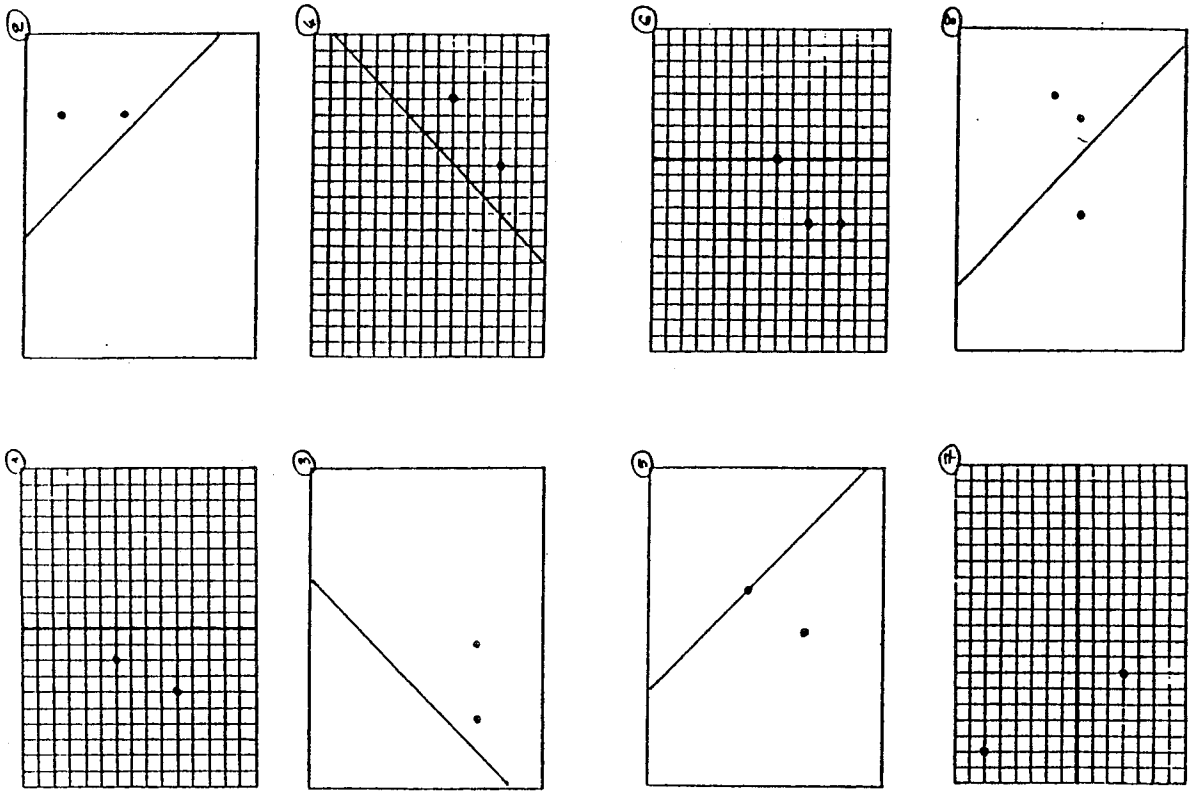
La majorité des manuels présentent ***la notion d'axe de symétrie de figures après la notion de transformation.*** Le lien entre ces deux notions n'est pas toujours explicité : on comprend qu'il ne soit pas facile à faire si c'est la transformation ponctuelle qui a été introduite. Peut-être dans le but justement de faire ce lien, certains manuels définissent l'axe de symétrie pour un ensemble de points plutôt que pour une figure.

Les ***propriétés*** de la transformation que nous avons repérées sont celles prévues au programme, présentées de façon plus ou moins abstraite. Dans tous les manuels, ces propriétés sont à admettre, elles sont parfois argumentées (par la superposition par le pliage), mais elles ne sont jamais proposées à la découverte des élèves dans le cadre de problèmes. On trouve essentiellement la conservation des distances, de l'alignement et des angles. Les

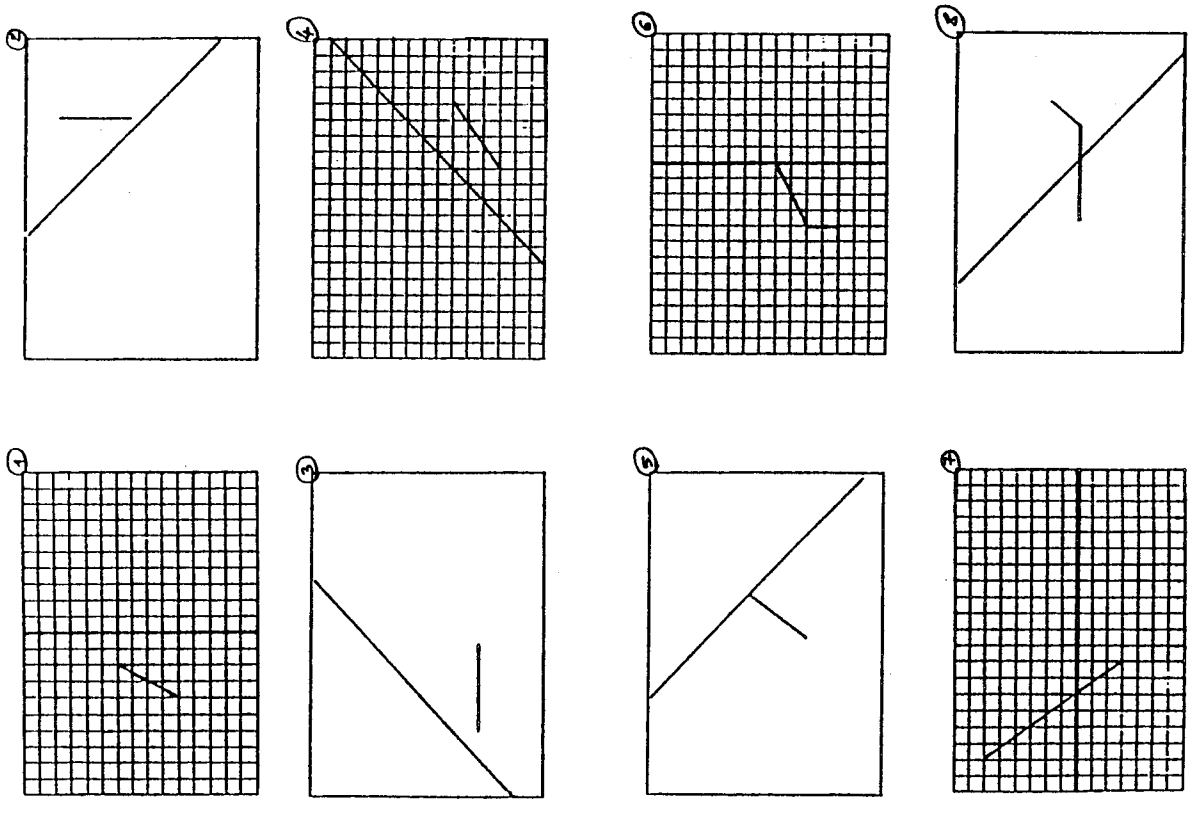
propriétés de la transformation mises en oeuvre pour la construction du symétrique d'un point sont placées sur un même plan de difficulté et elles aussi sont données aux élèves pour être utilisées.

En définitive, il semble que le changement de l'objet d'enseignement prévu par les nouveaux programmes, qui d'objet fonctionnel (en 4ème) devient relation intra ou inter figurale (en 6ème) ne soit pas toujours pris en compte dans les manuels scolaires que nous avons étudiés. Les manuels étudiés révèlent une dichotomie entre l'objet culturel et l'objet mathématique.

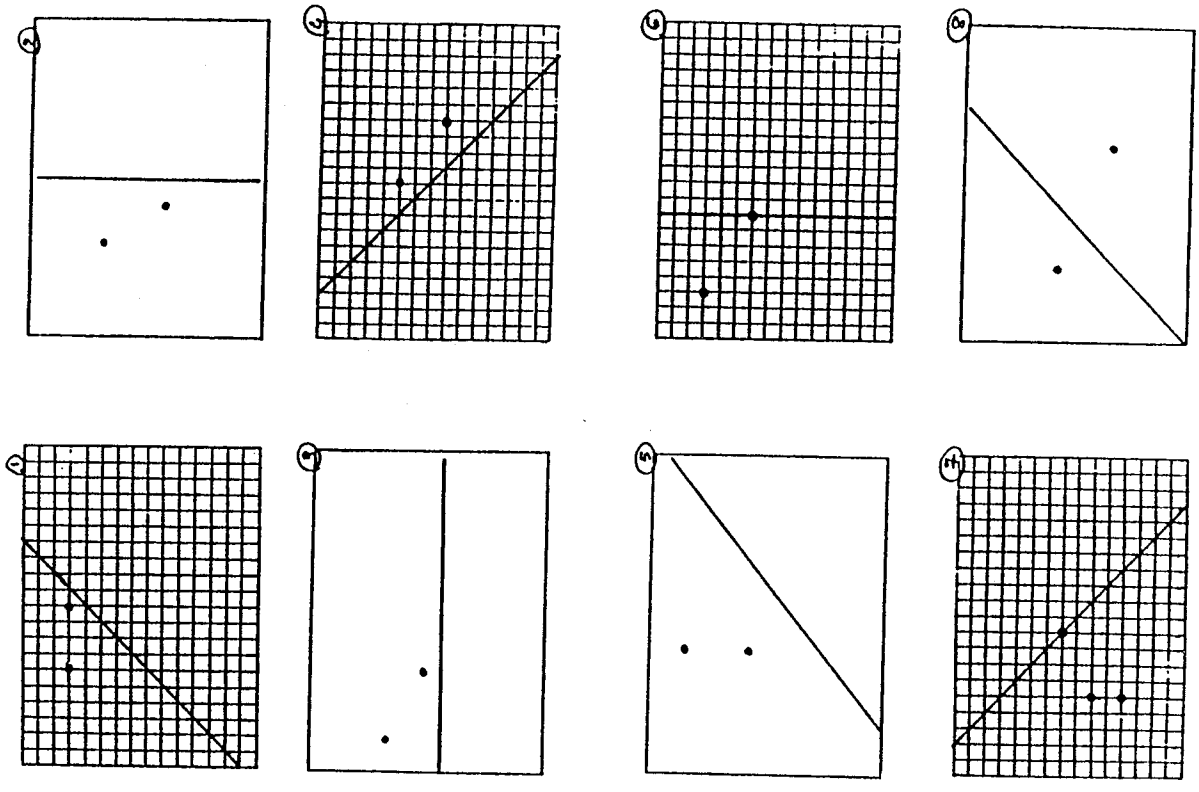
Livret PA



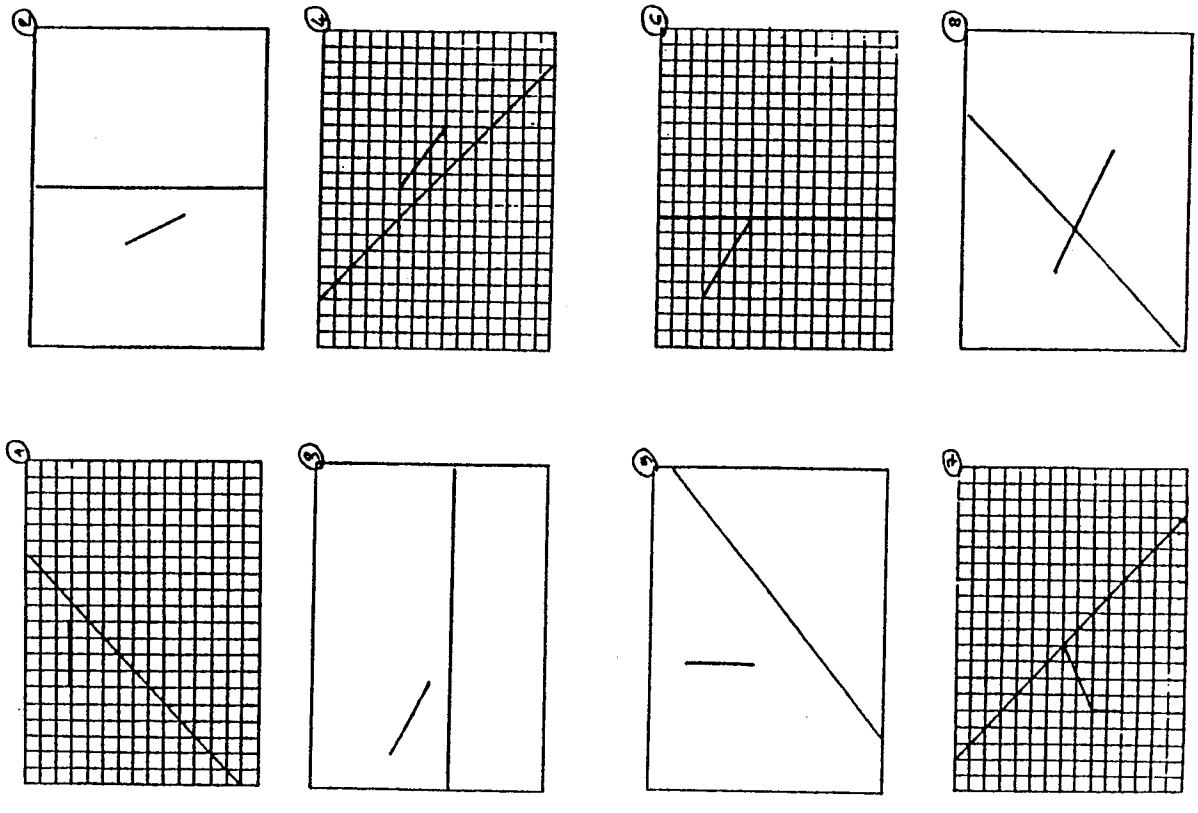
Livret SA



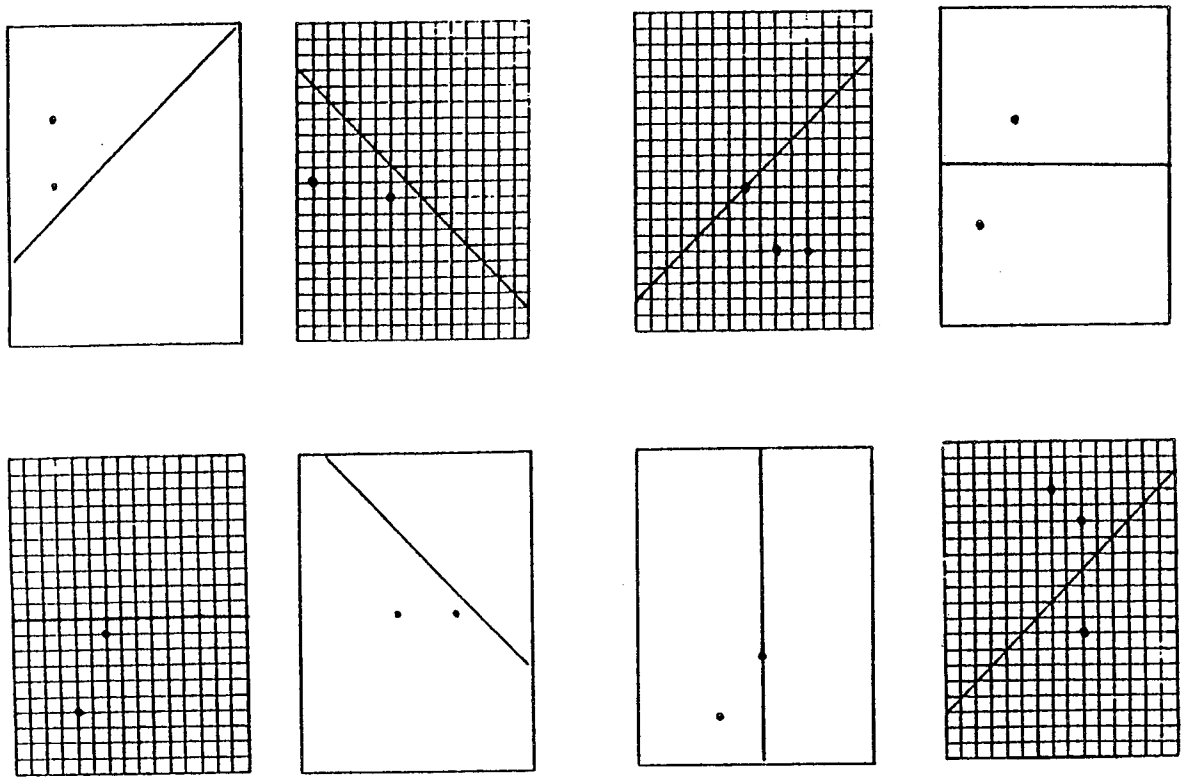
Livret PB



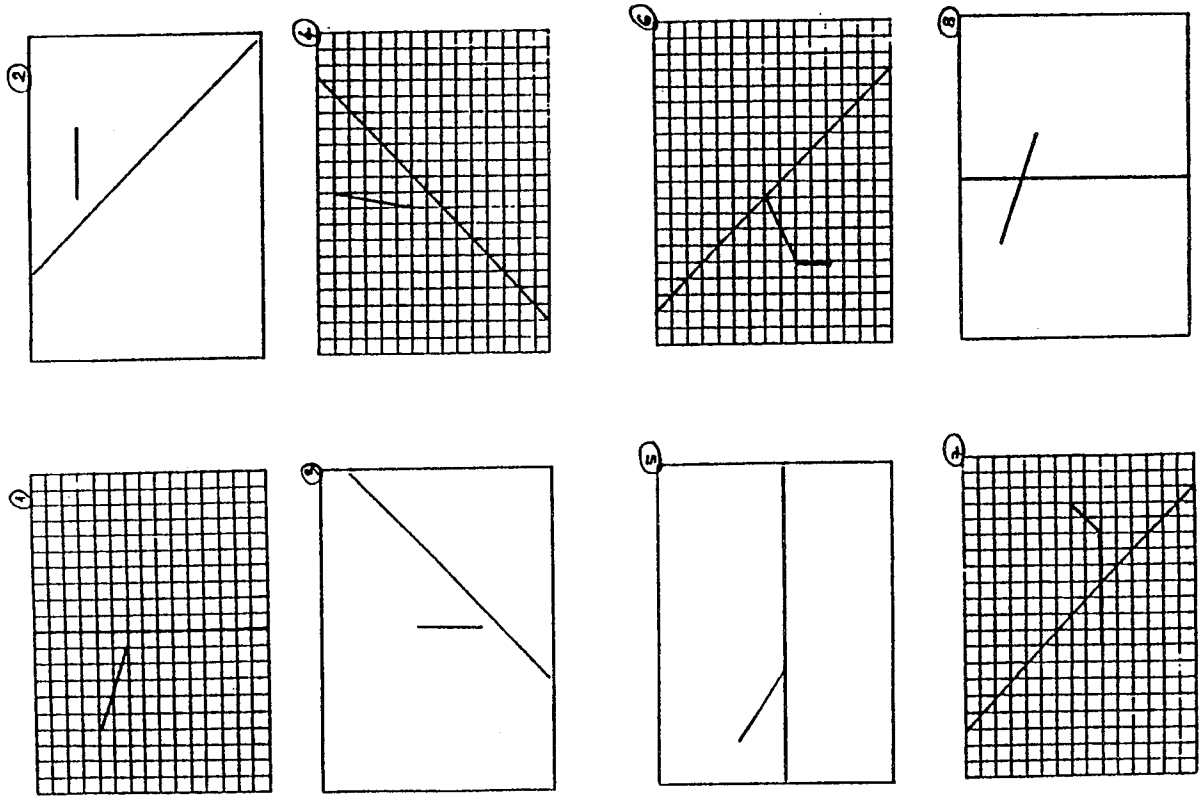
Livret SB



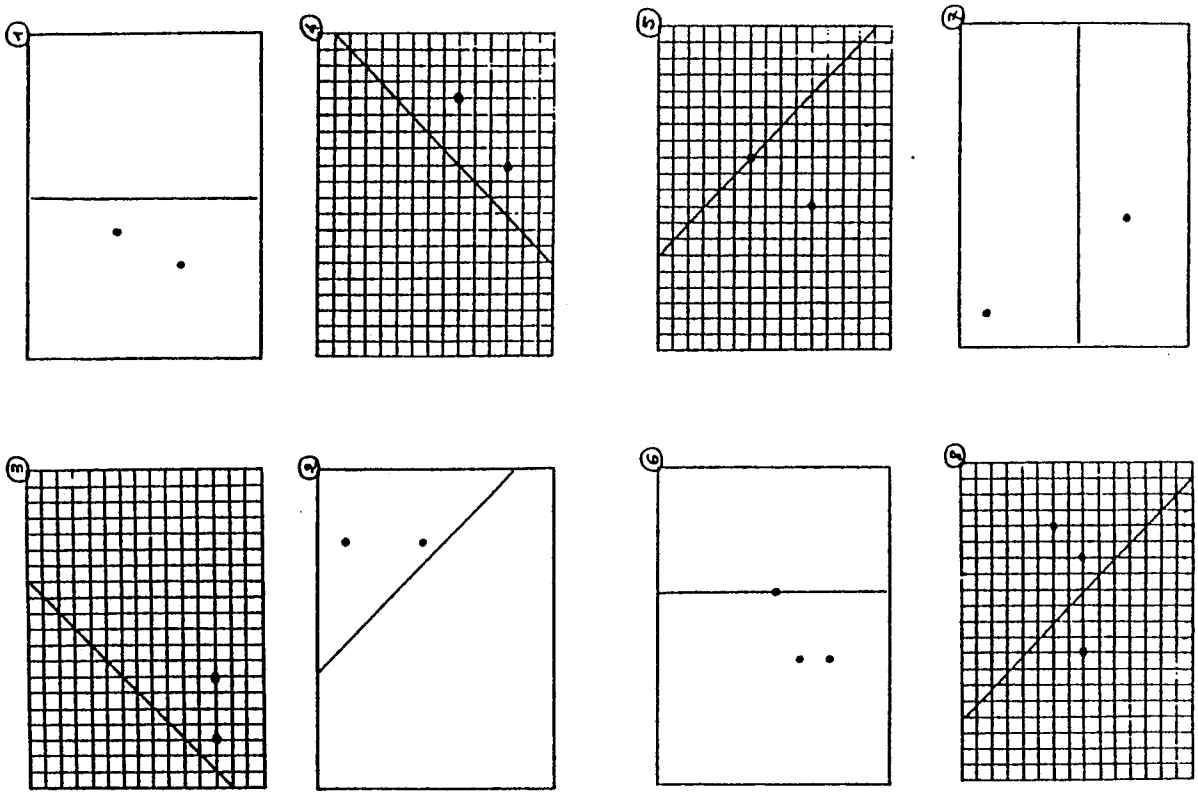
Livret PC



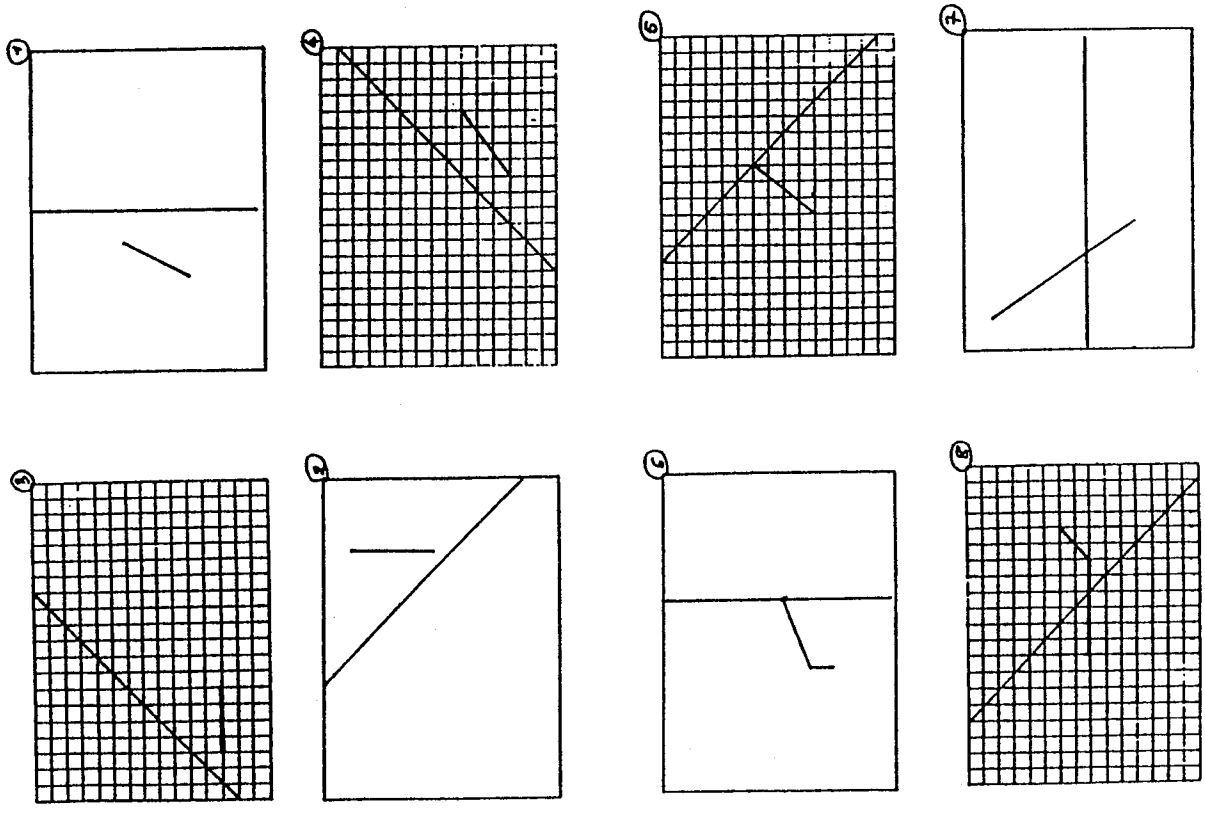
Livret SC



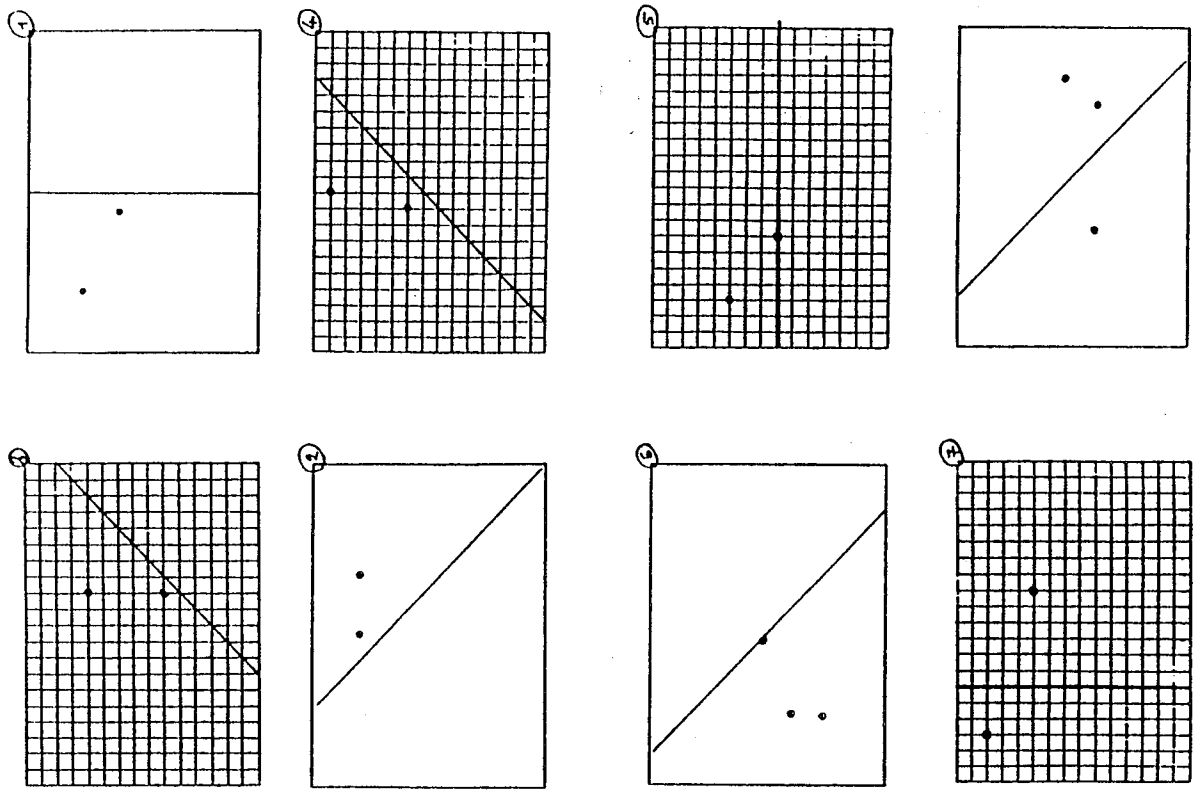
Livret PD



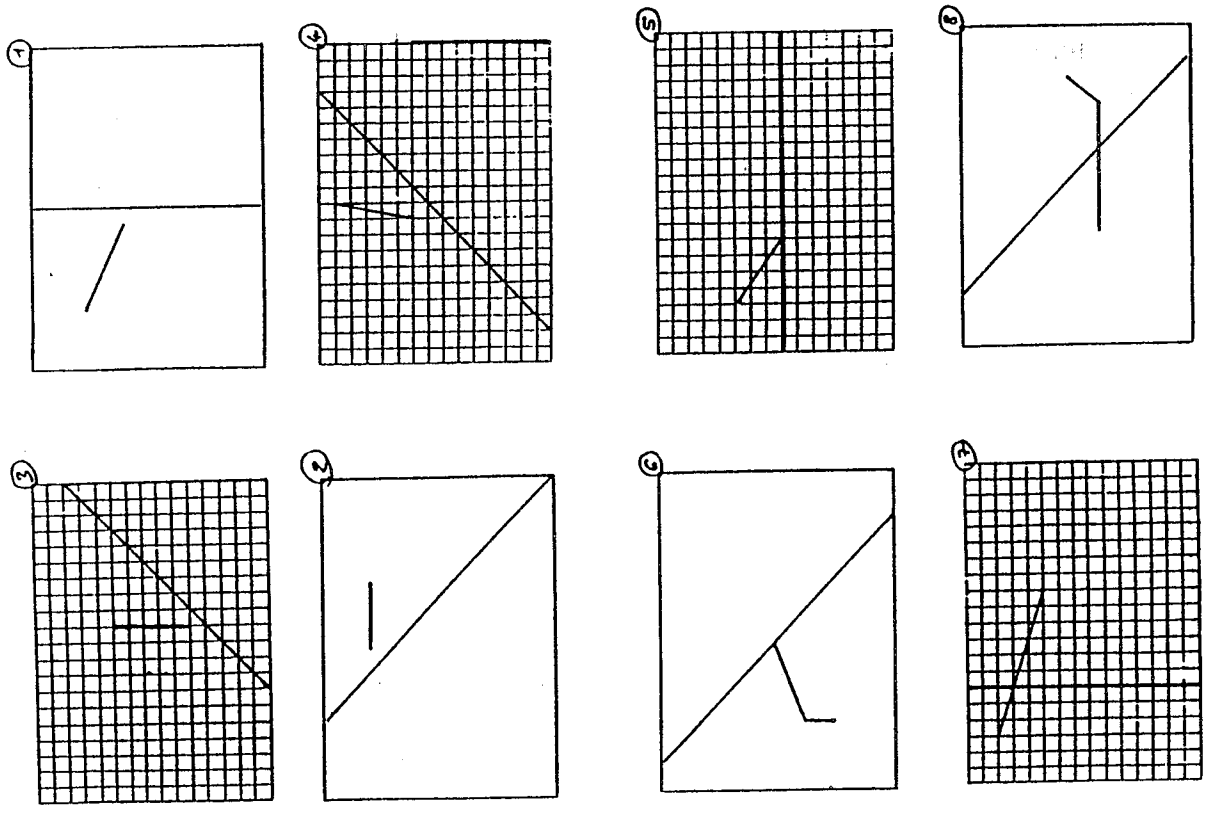
Livret SD



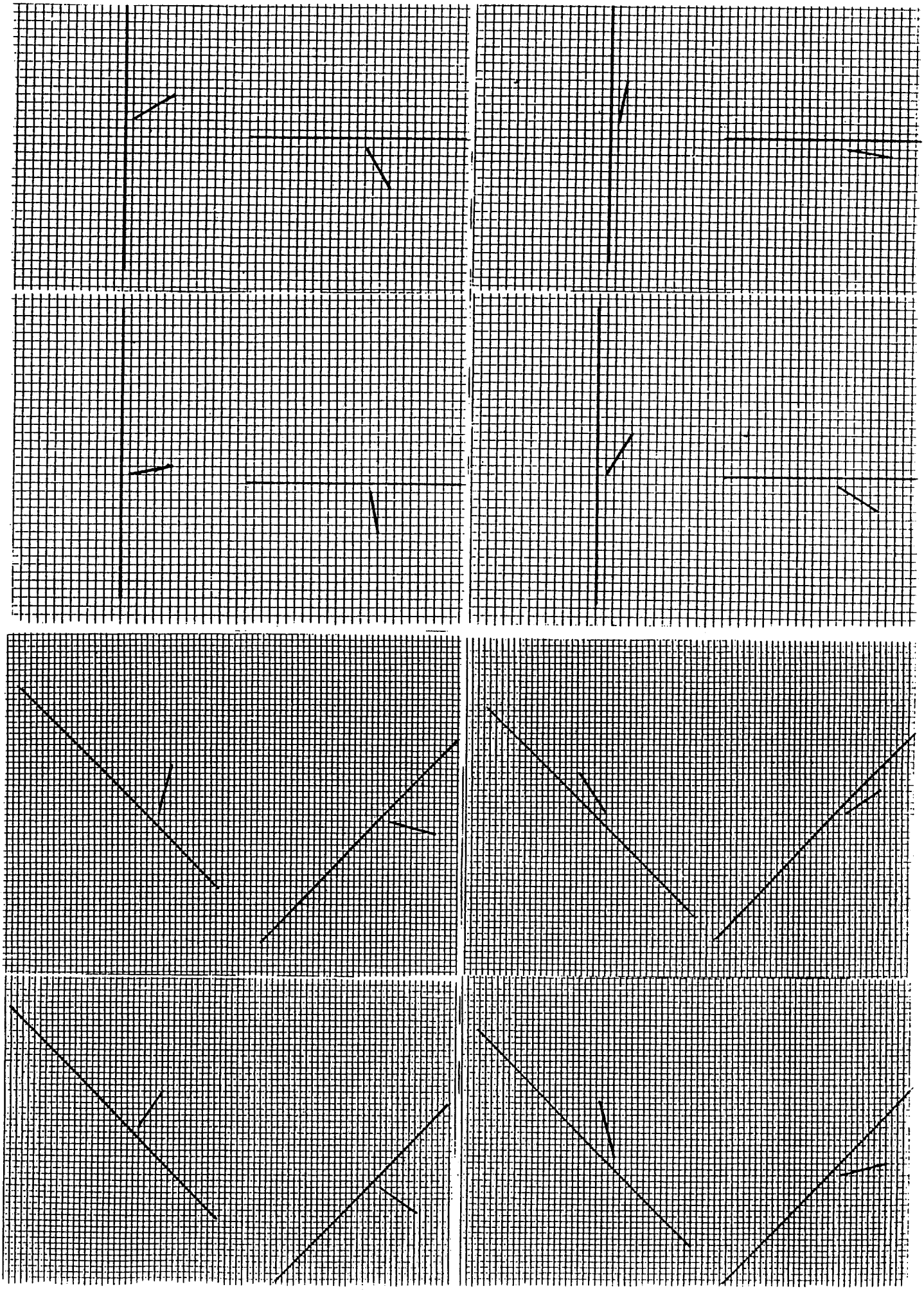
Livret SE



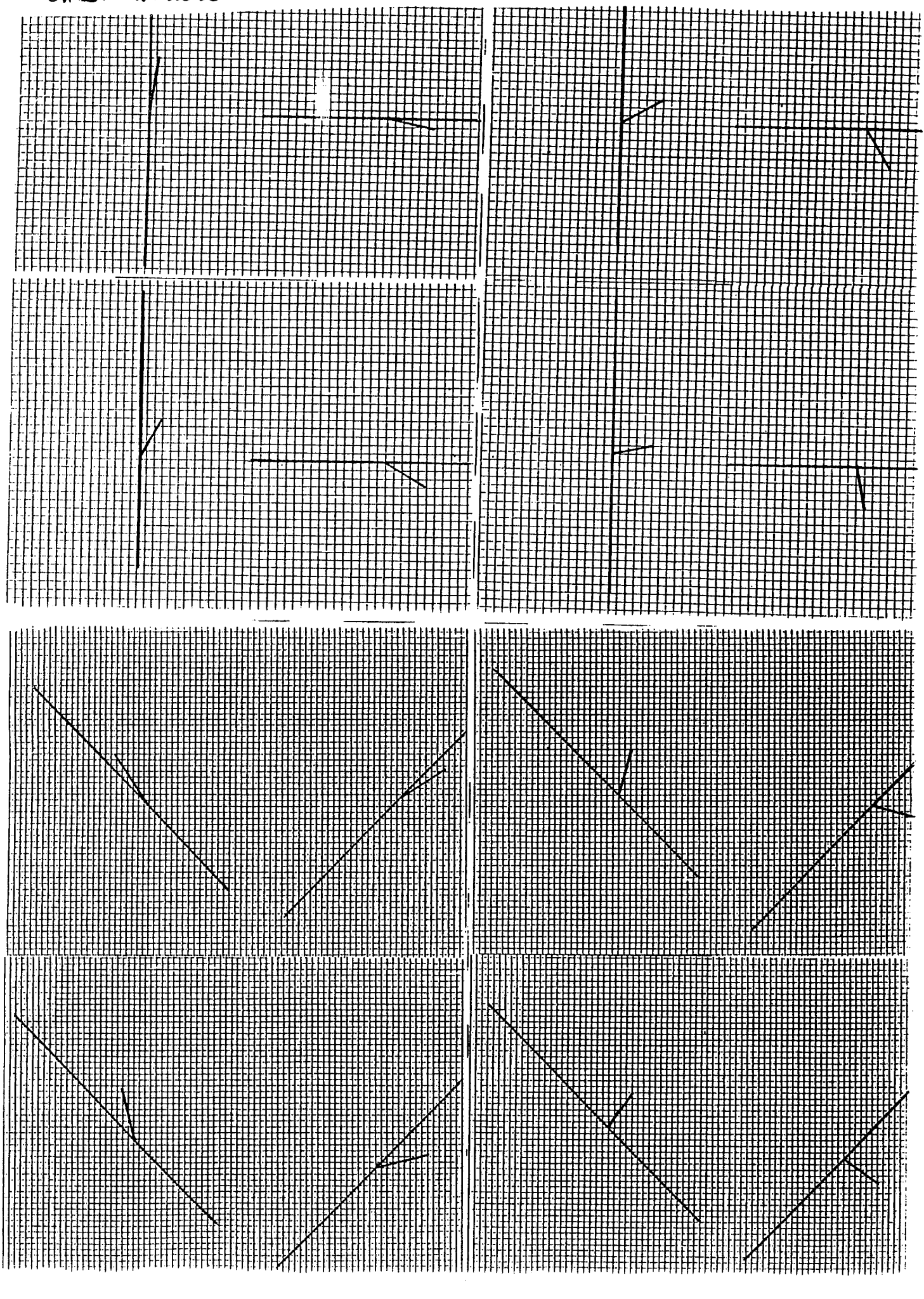
Livret PE



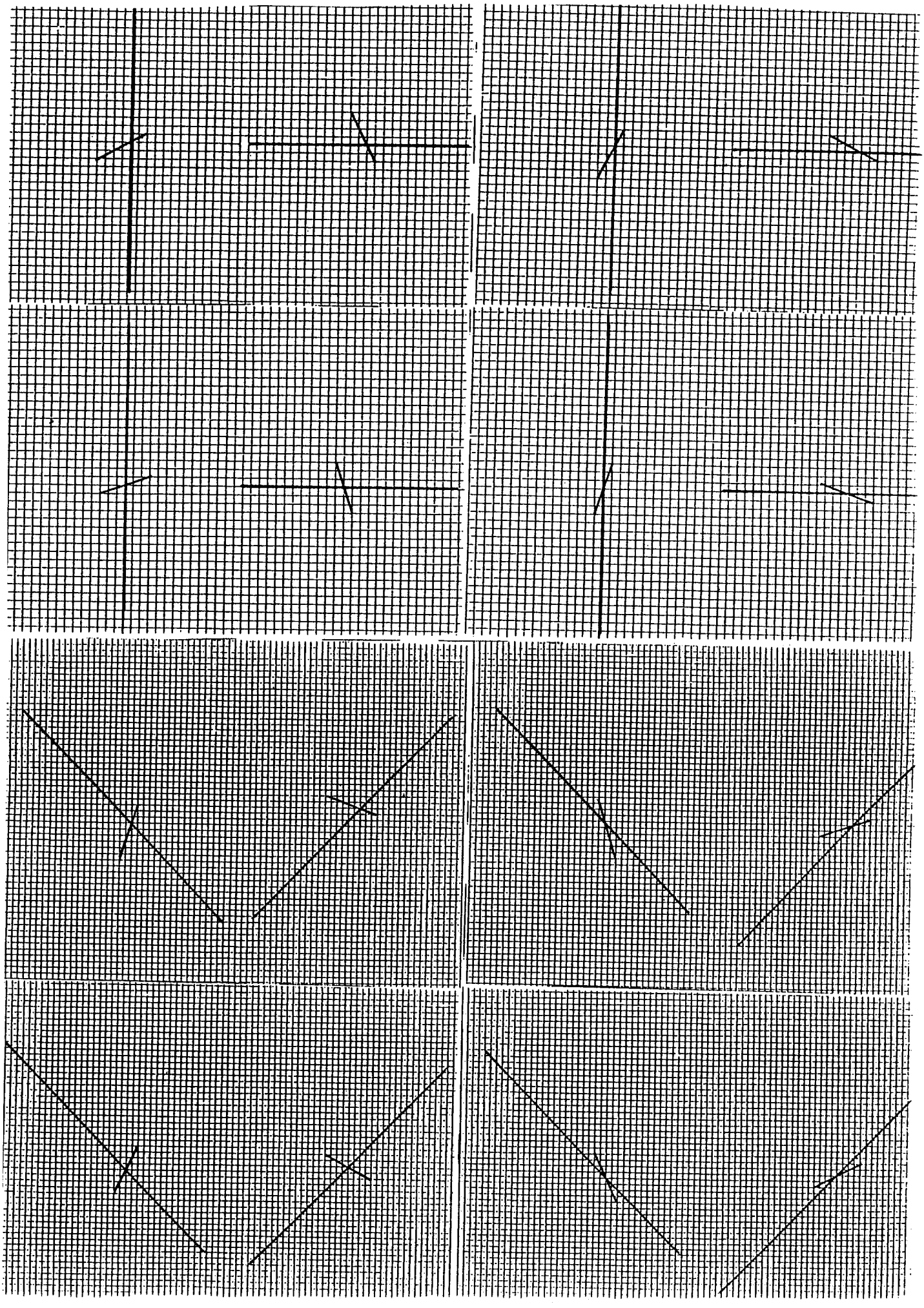
ch. II. Série 1



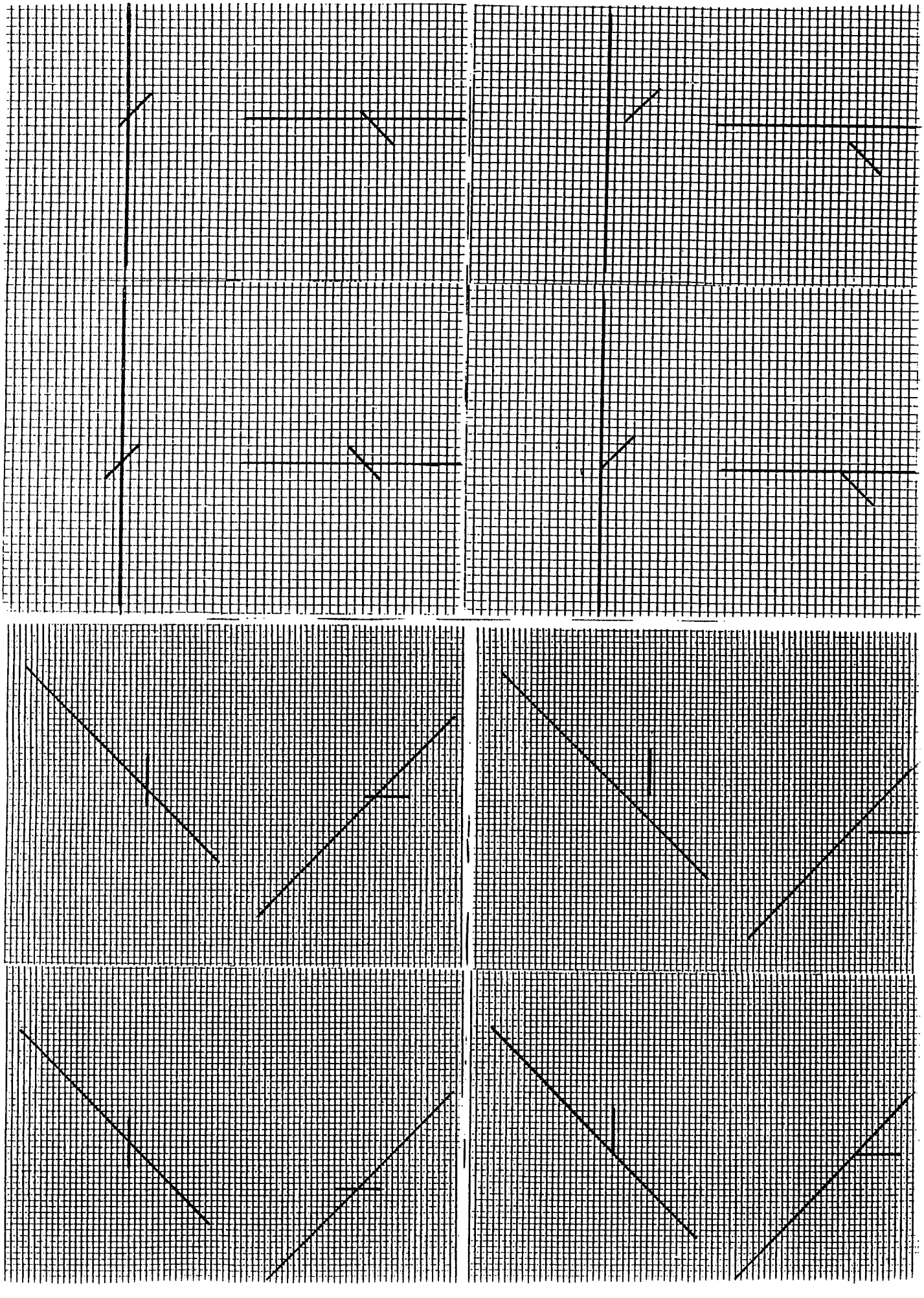
Ch. II. série 2



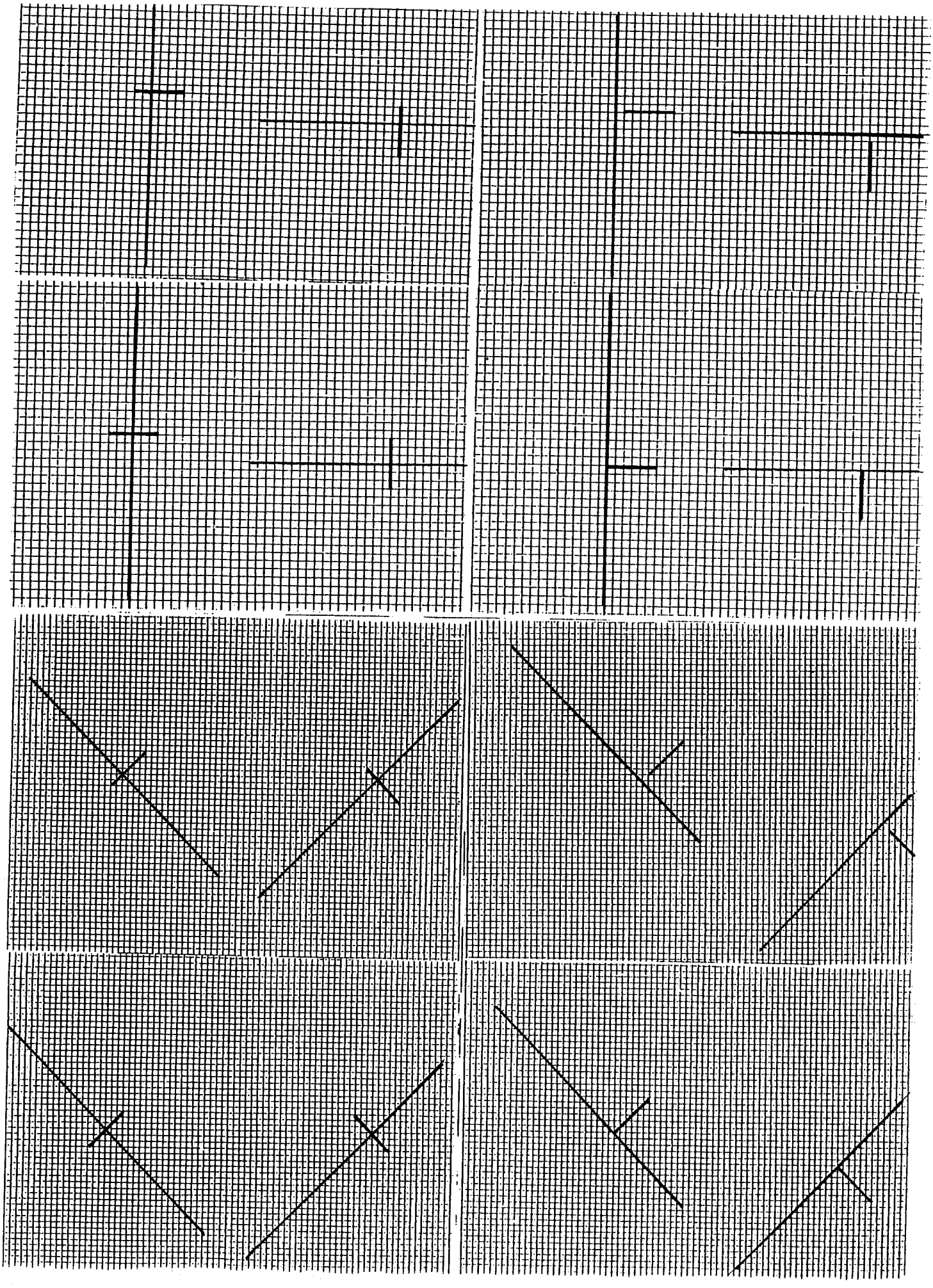
ch II. série 3



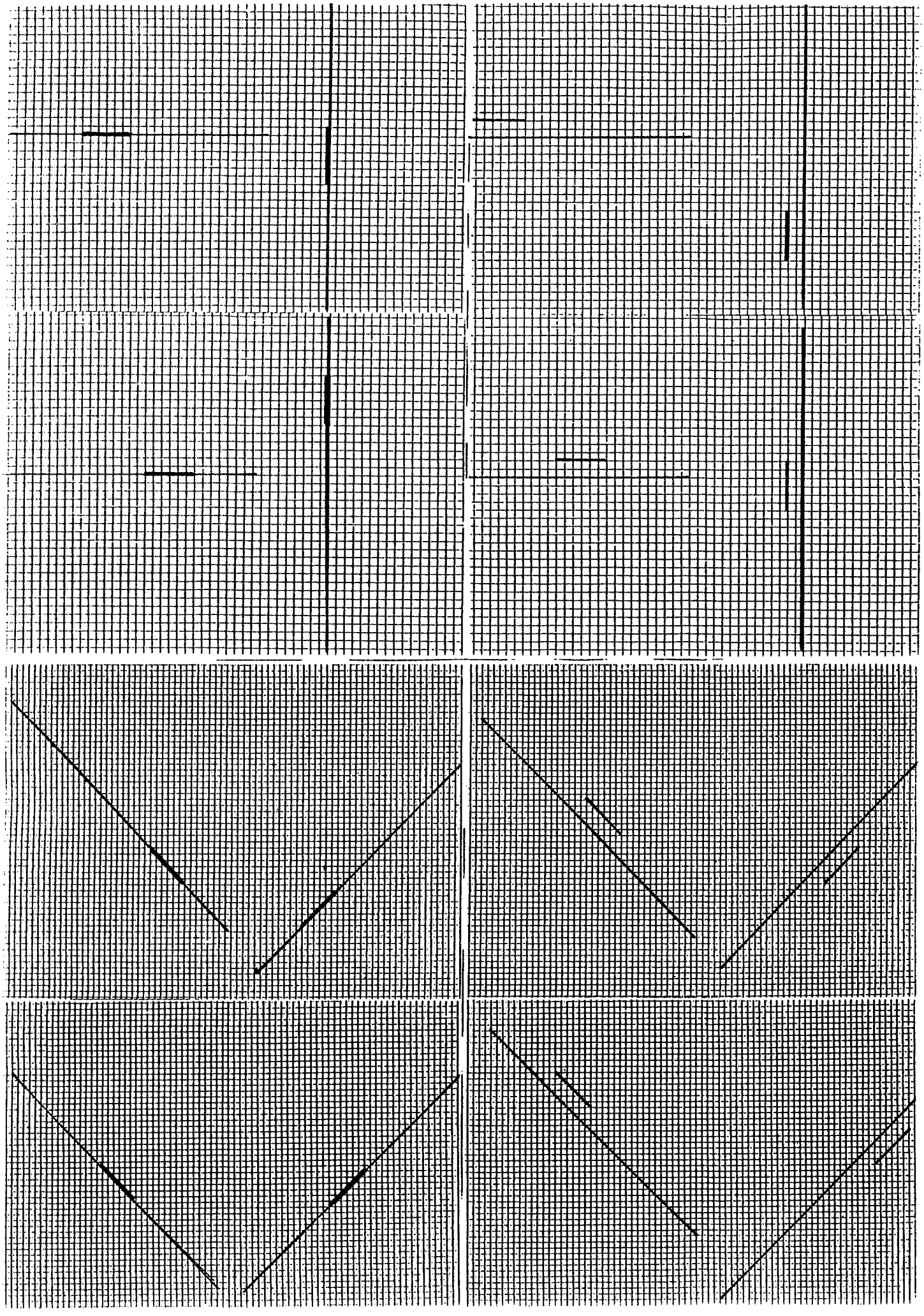
ch. II. série 4



ch. II. série 6



ch II. série 5



Partie B

Cette deuxième partie contient les chapitres IV à X :

Chapitre IV : construction théorique du processus d'enseignement

Chapitres V à IX : étude du fonctionnement des cinq situations problèmes constituant le processus. Chaque chapitre contient l'analyse du déroulement des deux réalisations d'une situation problème, ainsi que les conséquences sur les connaissances mises en oeuvre des modifications apportées de la première à la seconde réalisation.

Chapitre X : une étude des phases collectives dans les directions suivantes :
- le contenu d'enseignement effectif et les objectifs atteints par rapport aux objectifs fixés;
- le rôle de l'enseignant et l'influence de ses choix sur le déroulement de ces phases.

Chapitre IV

Construction d'un processus d'enseignement

Nous présentons ici les cinq phases du processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale que nous avons construit et réalisé dans une classe de 6ème (élèves de 11-12 ans) en 1985 dans un collège de Grenoble.

L'objectif général de la séquence, en accord avec l'esprit des nouveaux programmes qui étaient en cours d'élaboration (mis en place en septembre 1986), est donné au paragraphe I. Le choix didactique que nous avons fait pour l'approche de la notion est explicité en II. Nous montrons son originalité par rapport à ce que proposent les manuels scolaires et les recherches didactiques sur la notion. En III, nous décrivons les cinq phases du processus, en explicitant pour chacune d'elles d'une part, ses objectifs propres et l'organisation sociale de la classe et, d'autre part, une analyse didactique des tâches proposées.

I. Objectif de la séquence

Pour répondre aux deux questions que nous posons dans l'introduction de notre travail, nous avons élaboré, puis analysé le fonctionnement d'une suite de situations problèmes susceptibles de faire évoluer les connaissances des élèves et de déstabiliser certaines conceptions erronées.

Les objectifs d'apprentissage du processus sont en accord avec les nouveaux programmes de 6ème. Au moment où nous avons élaboré ce processus (1985), le programme officiel, en cours d'élaboration, présentait deux aspects nouveaux par rapport aux anciens programmes :
- le passage de la fonction du plan à une transformation de configurations géométriques;
- le rôle central des figures et l'importance donnée aux manipulations, dessins, mesures et constructions, dans la transformation de figures et la construction de droites de symétrie.

L'objectif est donc double. Du point de vue du chercheur, il s'agit de faire une étude didactique de ce processus, et donc de vérifier nos hypothèses sur le fonctionnement des situations. Du point de vue de l'enseignant, il s'agit de remplir les objectifs d'apprentissage que l'enseignant est en droit d'attendre dans le cadre d'un cours en classe de sixième.

II. Nos choix didactiques pour l'approche de la notion

II.1. Le cadre didactique

Ce processus vise à construire la notion de symétrie orthogonale en tant que transformation de figures, en cela il correspond à l'esprit des nouveaux programmes. Il s'appuie sur le fait que la notion de figure symétrique est fortement ancrée culturellement chez les élèves. Nous avons fait le choix, à partir de cette notion générale (ce terme recouvre a priori plusieurs types de symétrie), de préciser l'idée de figure admettant une droite de symétrie, à partir de laquelle nous avons introduit ensuite la transformation de figures. Ce choix correspond à une prise en compte par l'enseignement des perceptions initiales des élèves de la classe sur cette notion.

Ce choix présente une double originalité, par rapport à la présentation proposée par les manuels scolaires et par rapport aux différentes situations élaborées dans les recherches didactiques sur la notion.

Originalité par rapport aux manuels

L'ordre suivi n'est donc pas l'ordre habituel qui présente la notion de figure symétrique par rapport à une droite comme un cas particulier relevant d'un résultat de la transformation. Nous avons vu, dans l'étude des manuels présentée au chapitre III, que l'introduction de la notion de symétrie consiste souvent en une série d'activités manipulatoires autour du pliage ou du papier calque, ayant pour but l'introduction de la transformation de figures.

Originalité par rapport aux recherches en didactiques

Nous l'avons développée dans l'introduction. Les différents travaux ne présentent pas la construction d'un processus complet d'enseignement sur la symétrie orthogonale.

II.2. Le cadre théorique

La conception du processus s'inscrit dans le cadre de la théorie des situations didactiques de G. Brousseau (1981). Cette théorie distingue a priori quatre grands types de situations, en fonction du type d'interaction que les élèves ont avec le savoir et avec l'enseignant : situations d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation. La confrontation de l'élève à ces quatre types d'activité est considérée comme minimale pour qu'il produise et s'approprie des connaissances sur une notion.

Cependant, nous avons introduit des phases dites **phases de bilan** qui correspondent à un débat collectif des élèves avec l'enseignant sur les productions des élèves. Nous avons tenu à les distinguer des situations d'institutionnalisation proprement dites, parce qu'il nous semblait que, par leur définition même, celles-ci ne pouvaient regrouper tout ce qui se passe dans une phase de bilan. Ce choix de différencier les phases de bilan des phases d'institutionnalisation est argumenté au chapitre X, lors d'une étude faite à partir de l'observation de leur déroulement, étude dans laquelle nous essayons de définir des indicateurs de reconnaissance (pour nous) d'une phase d'institutionnalisation.

Les situations de validation sont absentes en tant que telles, mais notre processus comprend malgré tout des **moments de validation**. En particulier, la confrontation entre deux binômes d'élèves à la fin de la situation de communication est un moment où les élèves décodeurs vont devoir défendre leur solution (si celle-ci ne correspond pas à celle des codeurs). Des moments de validation peuvent aussi être repérés dans les phases de bilan collectif, lorsque la classe prend position par rapport à la production d'un élève ou d'un groupe d'élèves, en dehors de toute intervention de l'enseignant.

Les situations que nous proposons aux élèves ont été définies essentiellement par les variables et les contraintes qui sont supposées permettre d'assurer des apprentissages précis. C'est un autre aspect de la théorie des situations que nous abordons là, qui concerne la modélisation de ces situations. L'analyse du déroulement des activités en classe doit nous permettre de contrôler le champ de ces variables et, éventuellement, d'en proposer des modifications. Enfin, la didactique disposant de peu d'outils d'analyse pour les situations comprenant l'enseignant, nous choisirons de conclure l'étude de leur déroulement par des propositions de pistes de recherche à leur sujet et au sujet de l'enseignant.

III. Analyse des différentes phases du processus

Notre intention est de jouer sur les tâches et sur les contraintes de ces tâches pour permettre une évolution des connaissances des élèves.

Après une phase de diagnostic des connaissances des élèves de la classe et de mise en place du milieu (phase 1), les trois phases suivantes avaient pour objectif d'apprendre aux élèves à utiliser les propriétés de la droite de symétrie d'une figure pour la construire. Nous cherchons d'abord à permettre l'utilisation en acte par les élèves de ces propriétés; leur explicitation en est

faite ensuite par l'enseignant (bilan de la phase 3), puis par les élèves dans une situation de communication (phase 4). Dans la phase 5, il s'agit de faire mettre en oeuvre par les élèves les propriétés de la transformation qui seront ensuite explicitées par l'enseignant, puis réutilisées comme outils de construction.

L'organisation générale et la répartition dans le temps sont décrites en fin de ce chapitre (annexes A et B).

III.1. Phase 1 : diagnostic des perceptions des élèves de la symétrie-pliage

III.1.1. Choix d'une définition "locale"

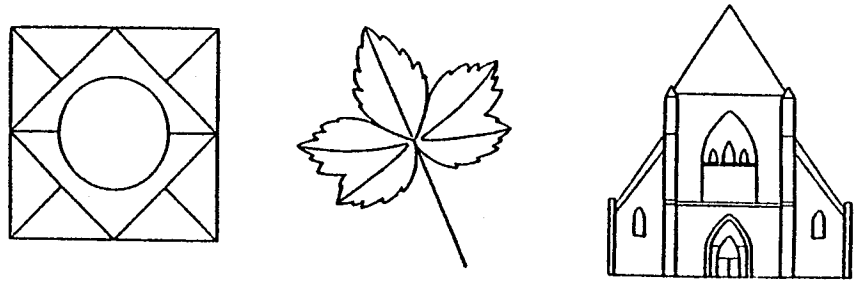
La construction par les élèves de la notion mathématique de symétrie axiale et de ses propriétés doit se faire au fur et à mesure du déroulement du processus. Il est donc nécessaire que l'enseignant et les élèves se mettent d'accord, au départ, sur une définition d'une figure ayant une droite de symétrie. Nous avons commencé la séance par une activité collective ayant pour but d'aboutir à cette "définition de travail locale" (intérieure à la classe).

Nous avons fait le choix d'identifier la propriété de symétrie axiale d'une figure à la possibilité de superposer deux parties de la figure par **pliage** le long d'une droite. La définition donnée est la suivante : "Si on plie le long de la droite, les deux parties de la figure se superposent exactement". Les raisons de ce choix tiennent à la familiarité des élèves avec les activités de pliage, qu'ils ont pratiquées en classe pour la reproduction de figures identiques, ou à travers des jeux ou des constructions en papier. Nous parlerons parfois, dans notre analyse de la propriété de "symétrie-pliage".

Cette définition tient lieu de référence pour résoudre les problèmes posés, mais aussi de moyen de validation. Le pliage ne présente pas pour les élèves de mécanismes complexes, car l'opération matérielle est simple. Mais l'interdiction de plier oblige l'élève à anticiper le résultat du pliage et cette activité n'est pas facile a priori. Comme moyen de contrôle, cette définition par le pliage est d'usage limité, caractéristique qui est ici une qualité car elle peut créer une motivation chez les élèves pour la remplacer par des moyens plus efficaces.

Dans une telle approche, la propriété de la droite de symétrie mise en évidence est celle du partage de la figure en parties identiques, chacune dans un demi-plan par rapport à la droite de pliage.

Trois figures ont été affichées au tableau avec la consigne pour les élèves de répondre à la question "qu'est-ce-que ces trois figures ont en commun?". Nous les reproduisons ci-dessous.



Les caractéristiques de ces figures permettaient également d'expliciter avec les élèves les propriétés suivantes :
-il y a différentes directions possibles des droites de symétrie d'une figure dans la feuille,
-une figure peut avoir plusieurs droites de symétrie.

III.1.2. Une activité individuelle en deux temps

a. Objectif de l'activité

L'objectif de cette phase est de connaître les connaissances initiales des élèves de la classe à propos de la notion de symétrie-pliage et le degré de stabilité de ces connaissances. Nous avons proposé aux élèves une double tâche de reconnaissance et de tracé à main levée qui met en jeu la perception globale de la droite de symétrie d'une figure.

Les figures sont déterminées de façon à faire jouer le rôle de l'approche perceptive sur les connaissances des élèves. En particulier, la conception que la figure symétrique et la figure objet se déduisent par rappels horizontaux dans la feuille peut induire que les droites de symétrie ont une direction privilégiée, la verticale. De même, les règles d'action donnant pour figure symétrique une figure identique, mais obtenue aussi bien par translation, symétrie glissée ou demi-tour que par une symétrie orthogonale, peut induire une identité entre une droite partageant la figure en deux parties identiques et une droite de symétrie.

Nous avons vu le rôle important des variables liées à la position de la figure et de la droite de

symétrie dans la feuille dans la tâche de construction à main levée de figures symétriques. Nous analyserons si ces variables jouent un rôle dans la tâche de construction des droites de symétrie. Par exemple, la propriété de symétrie d'un rectangle est elle reconnue si le rectangle a ses côtés non parallèles aux bords de la feuille ?

Enfin, cette phase de diagnostic nous permettait d'organiser la classe de façon à favoriser les échanges, en formant des groupes contenant des élèves qui avaient manifesté des conceptions différentes dans cette tâche.

b. Description de l'activité

Elle comporte deux tâches, qui se rapportent au même jeu de figures.

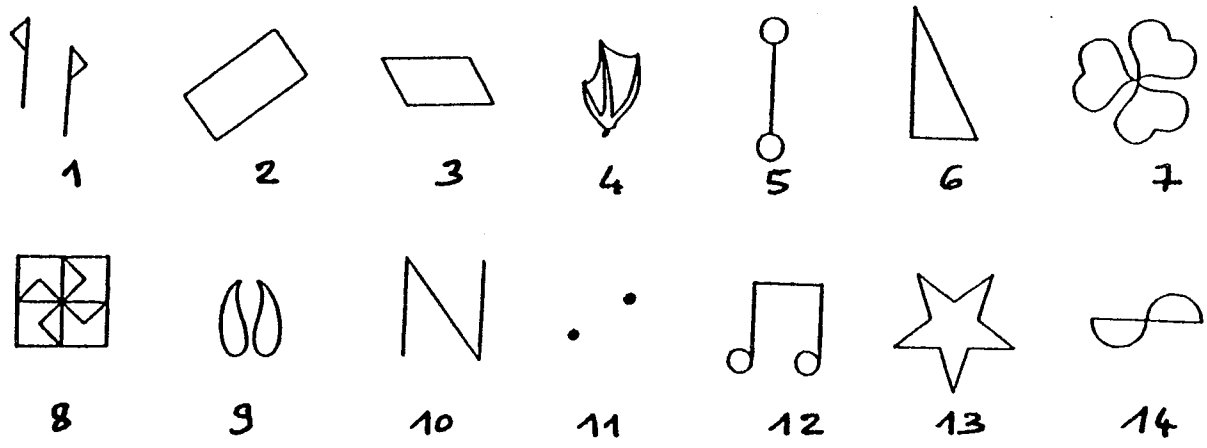
La première consiste à reconnaitre si une figure est symétrique, en répondant à la question "cette figure a-t-elle une symétrie du même type que celles qu'on vous a montrées?". Cette phase doit se dérouler rapidement pour nous permettre de repérer quelles sont les figures qui, **perceptivement** pour les élèves, admettent une symétrie-pliage, et celles qui n'en n'admettent pas. Les trois figures de la phase collective précédente sont restées affichées au tableau. Les élèves ont donc une référence constante à la définition sur laquelle ils doivent s'appuyer.

Cette première tâche individuelle met en jeu une reconnaissance globale de forme : la figure et le support sont considérés dans leur ensemble. **Cette tâche ne constitue un problème que si le pliage est interdit** : dans ce but, en plus de l'interdiction de plier donnée par l'enseignant, un moyen de dissuasion a consisté à tracer les figures sur carton. L'élève doit donc imaginer le résultat du pliage pour répondre à la question. Les cartons sur lesquels sont tracées les figures peuvent être manipulés (en particulier tournés) à volonté.

La deuxième tâche consiste à construire à main levée toutes les droites de symétrie de chaque figure s'il en existe. L'élève reçoit un deuxième jeu de figures identique au précédent. Il n'a donc pas sous les yeux les réponses de la tâche précédente. L'interdiction de plier oblige l'élève à anticiper le tracé. La recherche des droites de symétrie va l'amener à analyser la figure en étudiant, par exemple, la correspondance deux à deux d'éléments (sommets, angles, segments). L'élève se construit une représentation interne de la droite qui satisfait ou non à la partition en deux parties identiques d'une figure symétrique.

Dans ces deux tâches, l'approche de la figure est différente et cela peut amener l'élève à donner des réponses contradictoires d'une tâche à l'autre. Ces réponses doivent nous permettre de repérer les conceptions initales les plus répandues, ce qu'elles ont d'incomplet ou de contradictoire et leur stabilité.

Les figures de l'activité sont reproduites ci-dessous.

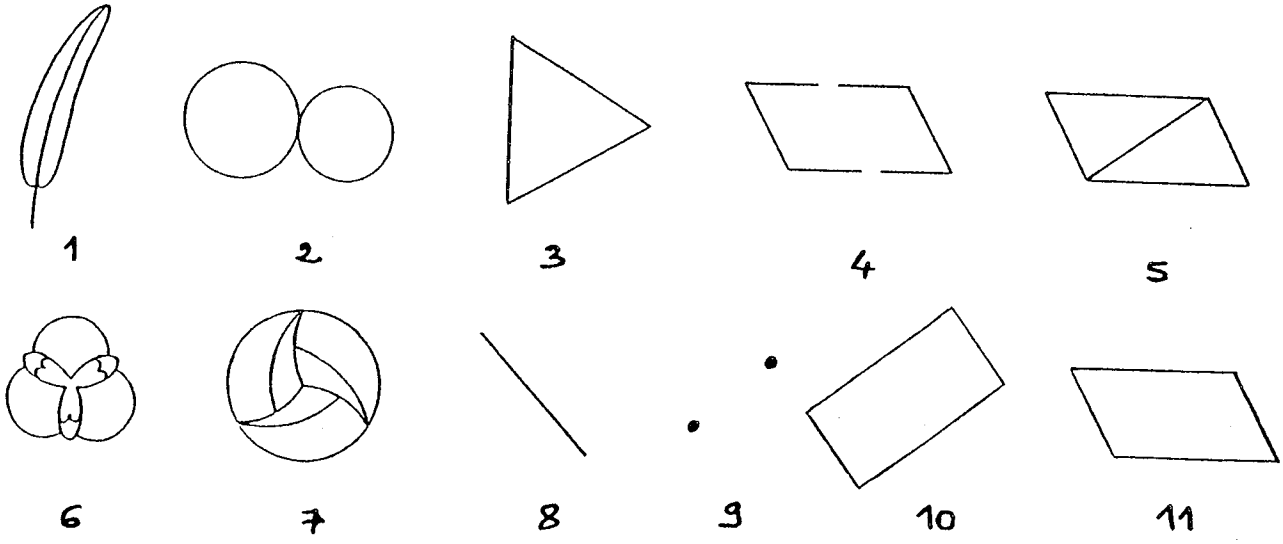


III.2. Phase 2 : remise en question des perceptions et conceptions erronées

Nous avons de nouveau donné aux élèves la tâche de construction à main levée des droites de symétrie si elles existent. Le pliage est interdit pour les raisons déjà évoquées.

Nous avons cherché à déstabiliser les conceptions erronées :

a. par le choix de figures ayant des caractéristiques susceptibles de permettre l'apparition des erreurs vues en phase 1. Ces caractéristiques sont des valeurs de variables liées à certaines propriétés des figures et à leur orientation dans la feuille. Nous avons ainsi retenu :
- des figures pouvant être décomposées en deux parties identiques mais ne présentant pas de symétrie orthogonale : il s'agissait de déstabiliser la conception erronée qu'une droite qui partage une figure en deux parties identiques est forcément une droite de symétrie; ces figures sont de deux types, figure régulière autour d'une ligne centrale (figure 1) et figures présentant une symétrie centrale (figures 4, 5, 7, 11), ces dernières étant orientées dans la feuille de manière à provoquer des procédures de "rappel horizontal";
- des figures ayant une ou plusieurs droites de symétrie, en particulier des droites de symétrie horizontale ou obliques par rapport aux bords de la feuille : il s'agissait de déstabiliser la conception très répandue qu'une droite de symétrie est verticale (figures 2, 3, 6, 8, 9, 10).
Les figures étaient dessinées dans cette direction dans la feuille.



b. par l'organisation sociale du travail en classe

Elle était choisie pour favoriser les interactions dans la classe puisque la composition des groupes n'était pas faite au hasard, mais de façon à privilégier la discussion. On a fait en sorte que dans un groupe soient présents des élèves ayant manifesté des conceptions différentes lors de la phase 1.

Les élèves travaillent d'abord par groupes de quatre et doivent se mettre d'accord pour chaque figure sur une réponse commune, le représentant d'un groupe devant pouvoir éventuellement défendre sa solution en l'argumentant, au moment de la mise en commun. Les élèves ne disposent pas d'arguments de preuve à ce moment de la séquence, puisque le seul dont ils disposeraient facilement est interdit. Mais, des éléments des figures peuvent être mis en relation, ou leur emplacement remis en question. Nous attendons surtout des arguments de type perceptif.

Pendant le travail en groupe, l'enseignant a pour rôle de veiller au bon déroulement de l'activité, sans porter aucun jugement sur les productions des élèves.

Ensuite, chaque groupe doit envoyer un représentant au tableau exposer sa réponse; en cas de désaccord entre ces réponses le représentant de chacun des groupes a pour tâche de défendre la solution du groupe en l'argumentant. Il peut y avoir alors un débat qui s'engage entre les élèves.

On ne peut garantir que l'issue d'un tel débat se fasse de façon satisfaisante sur le plan des mathématiques si l'enseignant ne le gère pas. C'est lui qui finalement peut mettre en évidence les aspects erronés d'une solution sur laquelle toute la classe serait d'accord; c'est lui qui peut intervenir pour que soit reconnue une solution correcte non reconnue comme telle par la classe, en utilisant éventuellement en dernier recours le pliage comme moyen de validation.

Cette deuxième phase doit donc se terminer par un débat entre groupes dont la conclusion sera tirée sous contrôle de l'enseignant. Le rôle de l'enseignant ne se borne pas à cela, il récapitule ensuite les aspects importants à retenir de l'activité dans une phase d'institutionnalisation, en insistant sur le fait que les propriétés ainsi soulignées par lui seraient réutilisées dans la suite :
- une ligne de symétrie est forcément une droite;
- une figure peut avoir plusieurs droites de symétrie et donc celles-ci peuvent être "obliques";
- une droite de symétrie passe par le milieu de deux points correspondants et elle est perpendiculaire à la droite joignant ces deux points.

La tâche de "tracé à main levée" n'exige pas un usage analytique des propriétés de la droite de symétrie (milieu, orthogonalité, équidistance) mais plutôt un respect global de celles-ci : il suffit que la droite de symétrie passe "au milieu" de la figure et qu'elle ne soit pas trop "penchée" par rapport à la droite joignant deux points homologues.

D'autre part, la tâche de construction à main levée ne peut mettre en oeuvre de façon naturelle ni les relations d'incidence (deux segments symétriques se coupent sur la droite de symétrie), ni l'équidistance des points de la droite de toute paire de points symétriques.

III.3. Phase 3 : utilisation analytique des propriétés de la droite de symétrie

Une troisième phase était donc nécessaire pour que ces propriétés soient mises en œuvre de façon plus opératoire; il fallait concevoir des situations-problèmes dans lesquelles elles étaient les instruments de solution. Les expérimentations précédentes ont montré que la propriété du milieu est privilégiée par les élèves. Il nous fallait construire des tâches rendant impossible son emploi et exigeant au contraire l'usage des autres propriétés moins présentes chez les élèves : orthogonalité, invariance des points de la droite de symétrie, équidistance des points de la droite de symétrie de toute paire de points symétriques. Pour cela, nous avons choisi de jouer sur les variables des figures et sur les contraintes de la tâche (instruments permis) (Laborde, 1985).

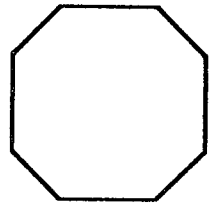
A ce niveau, les élèves savaient utiliser quatre instruments : la règle graduée, la règle non

graduée, l'équerre et le compas. On a demandé aux élèves de tracer avec les instruments fournis les droites de symétrie de figures données sur du carton rigide.

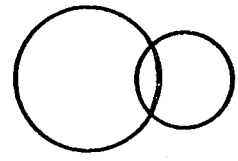
Analysons les actions possibles avec chaque instrument dans cette tâche. La règle graduée permet de construire la droite de symétrie dès que l'on connaît deux paires de points symétriques. C'est alors uniquement la propriété du milieu qui est mise en oeuvre. La règle non graduée met en oeuvre les propriétés d'incidence, par la construction de l'intersection de deux segments symétriques. Elle permet de construire la droite de symétrie dès que l'on connaît deux paires de points symétriques, à condition que ceux-ci ne forment pas un rectangle. L'équerre permet de déterminer la direction d'une droite perpendiculaire à une autre droite et passant par un point donné. La propriété d'orthogonalité est alors utilisée conjointement avec une autre propriété, celle qui sert à déterminer le point par lequel est mené la droite perpendiculaire. Le compas permet de déterminer au moins deux points de la droite de symétrie dès qu'on a une paire de points symétriques. C'est la propriété d'équidistance des points de la droite de symétrie de toute paire de points symétriques qui est mise en oeuvre.

Les figures (dessinées sur carton rigide) et les instruments fournis étaient les suivants :

groupe de figures 1 règle graduée et équerre

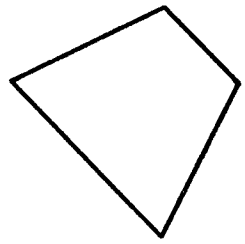


octogone

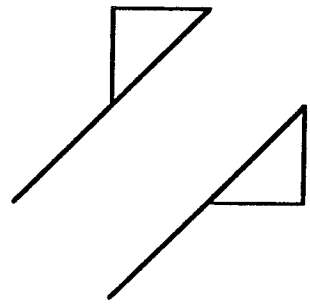


cercles sans leur centre

groupe de figures 2 règle **non** graduée et équerre

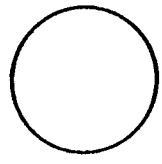


trapèze isocèle

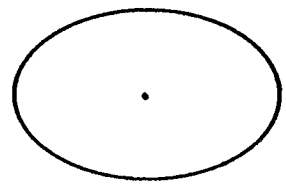


drapeaux

groupe de figures 3 règle **non** graduée et compas



cercle sans centre



ellipse avec centre

Dans chacun de ces cas il faut exhiber au moins une paire de points symétriques ce qui nécessite une anticipation de la position de la droite de symétrie. La tâche précédente de tracé à main levée peut constituer une aide à cette anticipation. Si ces points symétriques sont en évidence sur la figure, c'est à dire déjà marqués, cela nécessite leur reconnaissance. C'est le cas de toutes les figures exceptée l'ellipse. Si comme dans le cas de l'ellipse, ils doivent être le résultat d'une construction exigeant encore la mise en œuvre de propriétés de la symétrie la tâche est beaucoup plus difficile pour les élèves; elle demande une étape de construction non seulement supplémentaire mais aussi relative à des éléments non prévus dans l'énoncé, exigence rare dans le déroulement coutumier d'une classe de ce niveau.

explicitation des propriétés mises en jeu dans les ensembles figures-instruments

La règle graduée suffit pour tracer les droites de symétrie de l'octogone (propriété du milieu), mais on peut utiliser aussi l'équerre (propriétés du milieu et orthogonalité). Par contre, la droite de symétrie des deux cercles ne peut être tracée de manière simple qu'en utilisant à la fois la règle graduée et l'équerre. Pour les figures du groupe 2, deux types de construction sont possibles : avec la règle non graduée et l'équerre (propriété d'incidence et d'orthogonalité) ou seulement la règle non graduée, en déterminant les points d'intersection de deux paires de segments symétriques (propriétés d'incidence).

Pour ces quatre figures, les paires de points symétriques sont déjà construites. Ce n'est plus vrai pour les figures suivantes.

La détermination d'une droite de symétrie du cercle s'obtient avec le compas en utilisant les propriétés d'équidistance de deux points quelconques du cercle. Il faut donc savoir au préalable que deux points quelconques du cercle sont symétriques. La consigne est de tracer toutes les droites de symétrie, or le cercle en possède une infinité. Nous pensons que ce problème ne constitue pas un obstacle dans la tâche, et que les élèves reconnaissent que dès qu'on a le centre, on peut les construire toutes facilement. Pour construire une droite de symétrie de l'ellipse avec le compas, il faut déterminer un point, autre que le centre déjà donné, qui soit équidistant de deux points symétriques situés sur l'ellipse. Mais ces points sont eux-mêmes à construire comme points équidistants du centre de l'ellipse, ce qui rend la tâche difficile.

L'organisation sociale était la même que dans la phase précédente, la composition des groupes est identique à celle de la phase précédente.

Après la confrontation des résultats organisée comme dans la deuxième phase, l'enseignant devait introduire, dans la phase d'institutionnalisation, la notion de médiatrice en la reliant aux constructions faites pour le cercle et l'ellipse.

III.4. Phase 4 : une phase de communication

Les trois premières phases de ce processus sont des situations d'action, c'est-à-dire que les connaissances investies dans les problèmes n'ont pas à être formulées. Reconnaître ou savoir construire la droite de symétrie d'une figure ne relève pas du même fonctionnement des connaissances que la désigner à l'aide de l'expression "droite de symétrie" ou décrire en mots les étapes de sa construction. Les finalités et la dimension sociale de ce type de situations ont été très finement étudiées par C. Laborde (1982, 1985).

Les expressions utilisées par les élèves pour désigner la droite de symétrie, comme par exemple "droite du milieu" ou "droite qui partage la figure en deux" sont en général comprises par les autres élèves, parce qu'entre eux les implicites fonctionnent bien. Mais elles peuvent aussi provoquer des erreurs du fait de leur ambigüité. Par exemple, les droites partageant un rectangle en deux parties identiques sont de types différents, les deux principaux étant une droite de symétrie ou une diagonale. Elles peuvent aussi aboutir de manière erronée à la reconnaissance de droites de symétrie dans le parallélogramme.

La capacité à formuler une connaissance fait partie de l'apprentissage de cette connaissance. Nous nous référons ici à la théorie des situations déjà citée et, plus particulièrement au rôle des situations de formulation dans l'apprentissage. La situation de communication entre élèves que nous proposons dans cette quatrième phase du processus d'enseignement est un exemple de situation de formulation. Son objectif est de permettre aux élèves de prendre conscience des ambiguités de leur langage et de la nécessité d'un langage commun.

III.4.1. Organisation de l'activité

Ai et Bi sont deux partenaires d'un jeu. Ai (resp. Bi) désigne un groupe de deux élèves dans la situation que nous avons réalisée (ce pourrait être un seul élève ou un groupe plus grand d'élèves). Les élèves sont répartis dans deux salles différentes, sans aucun contact direct, chaque binôme Ai (placé dans une salle A) étant en correspondance avec le binôme Bi (placé dans une autre salle B). Ai a une feuille de papier sur laquelle est dessinée une figure avec un élément supplémentaire tracé dans une autre couleur que celle de la figure même. Cet élément

supplémentaire est suivant les cas soit une droite de symétrie (nous le noterons dans la suite par "élément de type S"), soit une droite passant par le centre de symétrie mais qui n'est pas une droite de symétrie (nous le désignerons par "élément de type NS"). Bi a une feuille de papier sur laquelle est tracée une figure semblable de dimensions différentes mais sans élément supplémentaire. Chacun des deux binômes sait que l'autre a une figure semblable à la sienne, mais de dimension différente et que la figure de Ai possède un élément supplémentaire. La tâche de Ai consiste à décrire cet élément dans un message écrit destiné à Bi pour que Bi puisse le reconstruire sur sa figure uniquement à l'aide du message.

III.4.2. L'enjeu

La finalité de communication est assurée par le fait qu'une activité de Bi est subordonnée aux informations transmises par Ai. Comme Ai et Bi sont partenaires, Ai a intérêt à veiller à la qualité de ses informations et de leur expression pour que Bi réussisse l'activité de tracé. Le critère de réussite pour les élèves étant la justesse du décodage du message de Ai par rapport à ce qu'il est supposé décrire (et non la justesse du message).

III.4.3. Les choix sur les variables et les contraintes

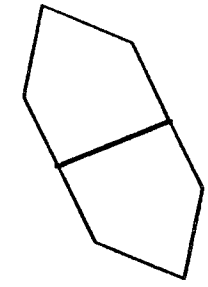
Le choix des dimensions différentes pour les figures de Ai et de Bi empêche Ai de transmettre la position de la droite de symétrie au moyen de mesures et l'oblige soit à la désigner par droite de symétrie soit à expliciter les propriétés de cette droite.

Le choix de figures possédant aussi une symétrie centrale oblige de plus Ai à expliciter les propriétés d'orthogonalité pour ne pas produire un message ambigu, dans lequel l'élément décrit pourrait aussi bien être une droite de symétrie qu'une droite "partageant la figure en deux parties égales" c'est à dire passant par le centre de symétrie. Dans le cas où l'élément est droite de symétrie, la formulation de ses propriétés ou l'utilisation de l'expression "droite de symétrie" sont des outils performants.

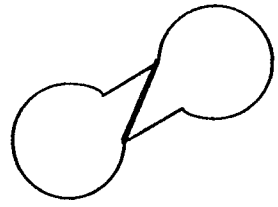
Enfin le choix d'éléments supplémentaires qui ne sont pas des droites de symétrie, mais qui partagent la figure en deux parties identiques (éléments de type NS) a pour objectif de renforcer la prise de conscience des élèves de la spécificité des droites de symétrie; en effet on pouvait s'attendre à ce que la description de ces éléments par "droite qui partage en deux parties égales" serait interprétée par au moins un groupe d'élèves comme une droite de symétrie (élément de type S). L'enseignant pourrait alors faire discuter collectivement à toute la

classe ce cas d'échec dans la communication.

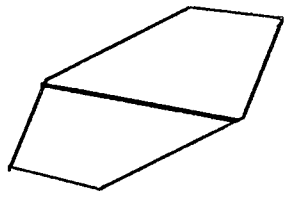
Dans la description que nous venons de faire, Ai est émetteur et Bi récepteur. Dans l'organisation de la classe, afin de donner la même tâche à tous les élèves (codage et décodage) chacun des binômes était tout d'abord émetteur, puis récepteur. De plus, pour favoriser au moment du décodage l'apparition d'échanges autour de la différence entre un élément de type NS et un élément de type S, les figures du couple (Ai, Bi) étaient choisies telles que l'une avait un élément de type S et l'autre un élément de type NS.



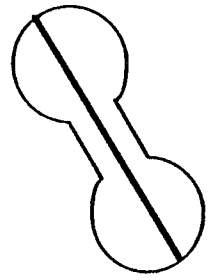
A1 A5



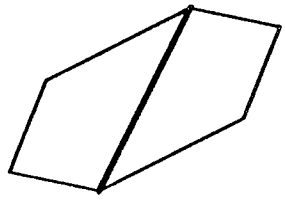
B1 B5



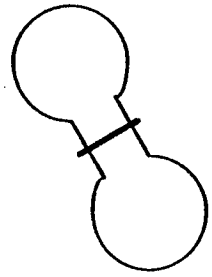
A2 A7



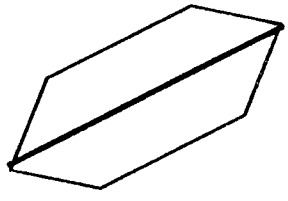
B2 B7



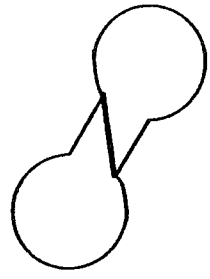
A3



B3



A4 A6



B4 B6

Les phases que nous venons de décrire avaient pour objet la droite de symétrie d'une figure. A ce moment de la séquence, les élèves sont censés savoir reconnaître si une figure admet une droite de symétrie, construire une telle droite en mettant en oeuvre ses propriétés ou utiliser la notion ou sa formulation pour résoudre un problème. Nous allons maintenant aborder avec les élèves l'objet "transformation de figures", en leur permettant de réinvestir les connaisances qu'ils viennent d'acquérir sur la droite de symétrie.

III.5. Phase 5 : transformation de figures et transformation ponctuelle

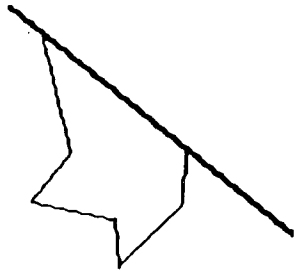
L'objectif de cette phase est de mettre en oeuvre avec les élèves les procédures de construction du symétrique d'une figure par rapport à une droite donnée. C'est donc la transformation de figures qui est abordée maintenant.

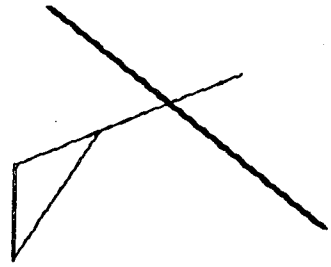
Nous avons donné aux élèves les quatre instruments de construction, puisque dans cette phase, il s'agissait de permettre la mise en oeuvre des principales procédures de construction du symétrique.

Construire le symétrique d'une figure ne signifie rien pour l'élève au début de cette phase. Une première tâche est donc demandée, consistant à compléter une figure pour qu'elle soit symétrique par rapport à une droite donnée. Nous introduisons ainsi un lien entre la notion de droite de symétrie et celle de transformation. Le symétrique d'une figure sera ensuite défini en s'appuyant sur ce travail des élèves.

Pour mener cette tâche à bien, il est nécessaire au préalable de décomposer la figure en éléments simples (segments, arêtes, arcs, sommets, points particuliers) dont il suffit de déterminer les symétriques pour reconstruire entièrement la figure. Ceci nécessite que l'élève reconnaisse que le tracé des symétriques de ces éléments permet de construire la figure complète, par exemple que l'image d'un segment est un segment dont les extrémités sont les symétriques des celles du segment objet. Il faut aussi réinvestir les connaissances sur les propriétés de la droite de symétrie d'une figure pour la construction du symétrique d'un point par rapport à une droite.

Les variables de la figure qui jouent dans cette tâche sont essentiellement la position relative de la figure et de la droite et l'orientation des éléments de la figure par rapport à la droite de symétrie. Les figures choisies sont les suivantes :





L'organisation de la classe est la même que dans les phases 2 et 3, c'est-à-dire un travail de groupe (toujours composé des mêmes élèves) suivi d'un débat dans la classe, et enfin l'institutionnalisation par l'enseignant des propriétés principales du symétrique d'une figure par rapport à une droite.

IV. Eléments du deuxième processus d'enseignement

IV.1. objectif

La réalisation et l'analyse du déroulement de la première séquence révèlent des décalages entre les objectifs d'apprentissage prévus et ceux effectivement mis en jeu. C'est ce que nous étudions dans les chapitres suivants. Dans un deuxième temps, nous proposons donc des modifications dans les situations du processus, en gardant les **mêmes objectifs d'apprentissage** que pour la première séquence. En effet, notre objectif de recherche est de contrôler au mieux les enjeux de chacune des situations, étape nécessaire du point de vue de leur reproductibilité. Ces modifications seront explicitées tout au long des chapitres suivants, puisqu'elles ne se justifient que par rapport aux résultats obtenus lors de la première séquence.

Nous avons donc élaboré un nouveau processus d'enseignement, avec l'objectif qu'il soit plus adapté aux apprentissages visés. Ce processus a été réalisé durant l'année scolaire 1986-87 (elle suit celle de la première réalisation), dans le même collège, avec le **même enseignant** et des élèves d'une classe de sixième, tous différents de ceux de l'année précédente. L'enseignant a pris une part très active dans l'élaboration de la deuxième séquence et son expérience de la séquence précédente a contribué en partie aux nouveaux choix qui ont été faits.

IV. 2. Quelques éléments du nouveau processus

Les choix de progression dans la notion et les activités proposées aux élèves sont les mêmes que dans le processus précédent, c'est-à-dire que nous retrouvons toutes les situations dans le même ordre, avec le même objectif global et la même organisation de travail (groupes et binômes, phases de bilan). Ce sont essentiellement les contraintes des situations et les variables des tâches proposées qui diffèrent. Par contre, dans cette nouvelle séquence, la mise en groupes des élèves (phase 1) a été effectuée sur la base d'une analyse PNL (Programmation Neuro Linguistique), dans le cadre d'une recherche effectuée par quelques membres de notre équipe, en liaison avec notre recherche didactique sur la symétrie orthogonale (Dupraz, 1988). La PNL est une pratique psychologique qui étudie la manière dont nous utilisons les informations qui proviennent de notre environnement. La mise en groupe qui en a résulté ne sera pas décrite ici.

Enfin, du point de vue de l'organisation globale du processus, deux modifications générales importantes ont été apportées :
- le temps est pratiquement doublé pour chacune de phases (sauf la phase préliminaire de diagnostic);
- des activités individuelles ont été insérées avec pour objectif de mieux contrôler les apprentissages des élèves.

Nous expliciterons, au moment voulu, les raisons de ces modifications.

Le plan et l'organisation générale de cette seconde séquence sont résumés à la fin de ce chapitre, en annexe B.

Annexe A

Organisation de la première séquence, nov. déc. 85 collège Champollion, une classe de 6ème de 28 élèves

Dans ce collège, chaque unité de cours dure 55mn. Les séances ont été placées à la suite dans le cadre normal des plages horaires réservées aux mathématiques ou à des ateliers de soutien.

Nous avons indiqué, pour chaque séance, son contenu général, l'organisation sociale des élèves (individuel (I), en groupes (G) ou en binômes (B), ou en travail collectif (C)) et la durée. Dans une même séance, le partage du temps correspond à une prévision.

séance	intitulé		date et horaires	durée
1	définition de travail (20mn. environ) et diagnostic (35mn. environ)	C I	19/11/85 (matin)	55mn.
2	déstabilisation des conceptions erronées travail en groupe et phase de bilan	G+C	21/11/85 (matin)	2 fois 55mn.
3	utilisation analytique des propriétés de la droite de symétrie, travail en groupe et bilan institutionnalisation de la médiatrice	G+C		
4	situation de communication, travail en binômes, puis groupes (confrontation des réponses)	B+G	21/11/85 (après-midi)	55mn.
5	transformation de figures, travail en groupe, puis bilan	G+C	28/11/85 (après-midi)	55mn.
6	transformation de figure : suite du bilan et institutionnalisation, exercices individuels	C+I	05/12/85 (après-midi)	55mn.

L'enseignant a décidé, au cours du déroulement de la séquence, de rajouter une séance pour compléter les phases 3 et 4, pour lesquelles il n'était pas satisfait. Cette séance se situe dans le temps entre les séances 4 et 5 de notre plan initial. Elle a duré 55mn. Elle s'est déroulée en deux parties, toutes les deux collectives :
- un retour sur la construction des droites de symétrie du cercle et la médiatrice;
- une discussion sur les contenus de deux messages d'élèves.

Une activité individuelle-test a été soumise à ces élèves l'année suivante (ils se retrouvaient alors presque tous dans la même classe de 5ème, avec le même enseignant de mathématiques que l'année précédente). Elle a eu lieu le 6 février 1987 et a duré 55mn.

Annexe B

Organisation de la deuxième séquence, mars-avril 87
collège Champollion, une classe de 6ème de 24 élèves. Tous les élèves sont nouveaux par rapport à l'année précédente. L'enseignant est le même.

Comme pour la première séquence, les séances ont été placées à la suite dans le cadre normal des plages horaires réservées aux mathématiques ou à des ateliers de soutien.

La durée totale de cette séquence est presque le double de la précédente.

séance	intitulé	type	date et horaires	durée
1	diagnostic PNL pour mise en groupe	I		
2a	définition de travail (20mn. environ) déstabilisation des conceptions erronées travail en groupe et phase de bilan	C G+C	12/03/87	2 fois 55mn.
2b	travail individuel contrôle	I	17/03/87	55mn.
3a	utilisation analytique des propriétés de la droite de symétrie, travail en groupe et bilan institutionnalisation de la médiatrice	G+C	19/03/87	2 fois 55mn.
3b	travail individuel contrôle	I	24/03/87	55mn.
4	situation de communication, travail en binômes, puis groupes (confrontation des réponses), puis phase collective de débat sur des messages	B+G C	02/04/87	55mn.
4'	travail collectif sur les deux activités individuelles du 17/03 et 24/03	C	07/04/87	55mn.
5	transformation de figures, travail en groupe, puis bilan	G+C	09/04/87	2 fois 55mn.
6a	transformation de figure : exercice individuel	I	10/04/87	55mn.
6b	correction collective de l'exercice précédent	C	29/04/87	55mn.
	(année scolaire suivante)			
7	activité individuelle-test	I	23/10/87	55mn.

Introduction aux chapitres V à X

Les chapitres V à X concernent l'analyse des deux réalisations du processus d'enseignement que nous venons de présenter.

Nous avons fait le choix d'une présentation des séquences qui n'est pas linéaire dans le temps. Ce choix appelle une justification et nécessite que le plan des chapitres en question soit explicité.

Notre recherche s'est centrée sur l'élaboration et le contrôle de situations-problèmes constituant un processus complet d'enseignement pour une classe de sixième. Ce contrôle porte sur les apprentissages liés à la situation-problème. Pour cela, il est nécessaire, à un moment donné, d'étudier la situation-problème pour elle-même, en la replaçant essentiellement par rapport aux connaissances supposées des élèves.

Nous analysons donc chacune des situations du processus séparément de la manière suivante. Après une analyse a priori de l'activité, nous donnons les résulats de son déroulement effectif lors de la première séquence. Les modifications faites à partir de ces résultats sont décrites ensuite, ainsi que nos hypothèses sur leurs conséquences dans le déroulement du processus. Puis nous analysons le déroulement de cette situation modifiée lors de la deuxième séquence d'enseignement, en étudiant sa conformité par rapport aux objectifs d'apprentissage visés. Des éléments de la phase de bilan sont parfois insérés dans cette analyse, lorsqu'ils permettent de l'éclairer ou de renforcer un résultat.

Les phases de bilan et d'institutionnalisation (nous préciserons ces mots au moment voulu) sont regroupées dans un chapitre à part (ch.X). Elles sont présentées de manière à étudier :
- d'une part, le rapport entre leur déroulement et ce qui s'est passé dans les travaux des groupes, lors de la résolution des situations-problèmes;
- d'autre part, certaines caratéristiques des interventions de l'enseignant pendant la séquence et son rôle dans les phases collectives; il s'agit ici de proposer des éléments pour une recherche sur l'enseignant dans la classe.

Chapitre V

Une phase introductive à la symétrie axiale

Cette phase comprend une activité collective suivie d'une double activité individuelle et a pour objectif global l'établissement d'une définition d'une figure admettant une droite de symétrie.

Le paragraphe I contient l'analyse préalable de chacune de ces activités. Au paragraphe II, nous donnons les éléments essentiels du déroulement de l'activité collective et une première analyse des réponses des élèves aux deux tâches individuelles. Au paragraphe III, nous avons conduit une analyse plus fine de ces réponses afin d'en tirer les conclusions sur les conceptions des élèves de la classe sur la notion de "figure admettant une symétrie-pliage" et sur les variables qui ont joué dans ces tâches. Enfin, nous expliquons en IV comment, nous avons constitué les binômes et les groupes d'élèves pour la séquence à partir de leurs réussites et de leurs types de réponses, en vue de favoriser l'interaction sociale.

I. Analyse des activités

I.1. Rappel des objectifs

Il s'agit de la première séance de la séquence d'enseignement. L'objectif de la phase collective est d'instaurer une "définition de travail" à l'intérieur de la classe qui tienne lieu de référence pour les élèves et pour l'enseignant pour les activités suivantes. Plus précisément, il s'agit de se mettre d'accord sur ce qu'est une figure admettant une droite de symétrie, au moyen de l'évocation du pliage. Nous parlerons de la propriété de symétrie-pliage d'une figure.

L'activité individuelle qui suit a pour objectif de repérer les conceptions initiales des élèves de la classe à propos de cette propriété. Elle vient immédiatement après la phase collective. Les réponses des élèves apporteront des informations sur les liens qui existent entre la définition qui vient d'être établie avec l'enseignant et la perception des élèves de la symétrie-pliage.

I.2. Nos hypothèses sur les conceptions initiales des élèves

Les résultats de nos expérimentations précédentes nous ont conduits à faire les hypothèses suivantes :

"La reconnaissance d'une symétrie-pliage dans une figure est liée chez les élèves à la possibilité d'un partage de la figure, le long d'une droite, en deux parties isométriques situées en "équilibre" de part et d'autre de cette droite. Cette perception de la symétrie-pliage dépend de certaines propriétés géométriques de la figure et de sa position dans la feuille sur laquelle elle est tracée."

Nous allons préciser cela dans le cadre de l'analyse des tâches et des figures proposées.

Nous parlerons désormais de "parties égales" au lieu de "parties isométriques". Deux raisons au moins justifient ce choix. Tout le monde peut se mettre facilement d'accord sur la signification de l'expression "parties égales" qui est habituelle. Ensuite, dans le cadre de ce processus d'enseignement, c'est l'expression employée par les élèves et l'enseignant.

I.3. Analyse des deux tâches individuelles

Les élèves doivent dans un premier temps répondre à la question "cette figure a-t-elle une symétrie du même type que celle qu'on vous a montrée?". La question est posée pour une série de 14 figures que nous décrivons au paragraphe I.4. Cette activité doit se dérouler rapidement dans le temps si l'on veut savoir quelles sont les figures qui, **perceptivement** pour les élèves, admettent une symétrie-pliage et celles qui n'en n'admettent pas.

Dans cette première tâche, ce qui est mis en jeu est une reconnaissance globale de forme, et la figure et son support sont considérés dans leur ensemble. Les variables qui peuvent intervenir sont les suivantes :

- la **régularité** de la figure, définie par les propriétés géométriques suivantes : la figure admet un centre de symétrie, ou une symétrie de rotation d'ordre n (figure invariante par rotation de $2\pi/n$, $n>2$), ou encore comporte des parties translatées l'une de l'autre, ou présente une symétrie glissée. Chacune de ces propriétés donne à la figure une certaine "régularité". Ces propriétés géométriques peuvent induire chez l'élève l'idée de l'existence d'une droite de symétrie dans une figure qui n'en admet pas.

-la **position** de la figure dans la feuille (direction de ses éléments par rapport aux directions verticale et horizontale); dans les expérimentations précédentes, nous avons montré le rôle important, dans la tâche de construction de la figure symétrique, de la direction de l'axe de symétrie dans la feuille. Nous supposons que cette variable a aussi une influence dans cette tâche. Par exemple, la prédominance chez l'élève de la direction privilégiée verticale peut nuire à la reconnaissance des droites de symétrie d'un rectangle dont les côtés ne sont pas parallèles aux bords de la feuille. Inversement, elle peut conduire l'élève à penser qu'un parallélogramme ayant des côtés horizontaux ou verticaux dans la feuille admet une droite de symétrie.

-la **complexité** de la figure, donnée par le nombre et le type des éléments la composant, et les relations intra-figurales; une figure composée d'éléments ni circulaires, ni polygonaux peut être perçue comme ne pouvant avoir une propriété de symétrie.

La deuxième tâche proposée aux élèves consiste à "construire (à main levée) toutes les droites de symétrie de chaque figure". Ce travail s'effectue sur un autre jeu de figures, mais identique au précédent. L'élève n'a pas la possibilité de consulter les réponses qu'il a données précédemment. L'interdiction de plier oblige à **anticiper le tracé**. Dans cette deuxième tâche, la perception de la figure dans sa globalité ne suffit plus car il faut agir sur elle. Pour déterminer l'emplacement de la droite de symétrie, l'élève va devoir reconnaitre les points par lesquels elle passe, ou mettre en correspondance des éléments de la figure (segments, points remarquables, courbes).

Dans cette deuxième tâche, l'approche de la figure est donc plus analytique. Cela peut conduire l'élève à donner une réponse contradictoire avec la réponse précédente. En effet, nous pensons que les règles d'action mises en jeu par l'élève dans les deux tâches (reconnaissance d'une symétrie-pliage et tracé des droites de symétrie) ne sont pas forcément les mêmes. Elles sont dans les deux cas très liées à la perception, mais elles sont différentes lorsqu'il s'agit d'observer une figure ou d'agir sur elle. Une contradiction dans les deux réponses de l'élève peut être induite par une évolution de sa perception d'une tâche à l'autre, ou une approche différente de la figure. Cette contradiction peut nous permettre de repérer les règles d'action plus spécifiquement mises en oeuvre dans chacune des deux tâches.

Nous faisons l'hypothèse que la position de la figure dans la feuille joue un rôle moins important dans la tâche de tracé, parce qu'une approche plus analytique de la figure la dissocie de son support. Par contre, le nombre de droites de symétrie va jouer un rôle dans la réussite, puisqu'il faut les tracer toutes. Enfin, la recherche d'une droite partageant la figure en deux parties égales peut être influencée par la parité du nombre d'éléments identiques de la figure: il

est plus facile d'imaginer un tel partage lorsqu'on a quatre cercles que lorsqu'on en a cinq.

Cette double activité individuelle doit permettre également que la symétrie-pliage soit reconnue par les élèves parmi les autres isométries.

I.4. Analyse des figures

I.4.1. Les variables

En résumé, par rapport à nos hypothèses (développées en I.2 et I.3), les variables qui nous semblent pertinentes sont de deux types.

a. variables spécifiques à la figure :
Nature : la nature géométrique de la figure, qui indique si la figure est composée des lignes circulaires ou polygonales (segments, arcs de cercles, points) ou non;
Propriété : les propriétés géométriques particulières : symétrie centrale (S.C.), invariance par rotation (R), translation de deux éléments (T), symétrie glissée (S.G.);
Nombre : le nombre de droites de symétrie;
Parité : la parité du nombre d'éléments identiques dans la figure : pair impair

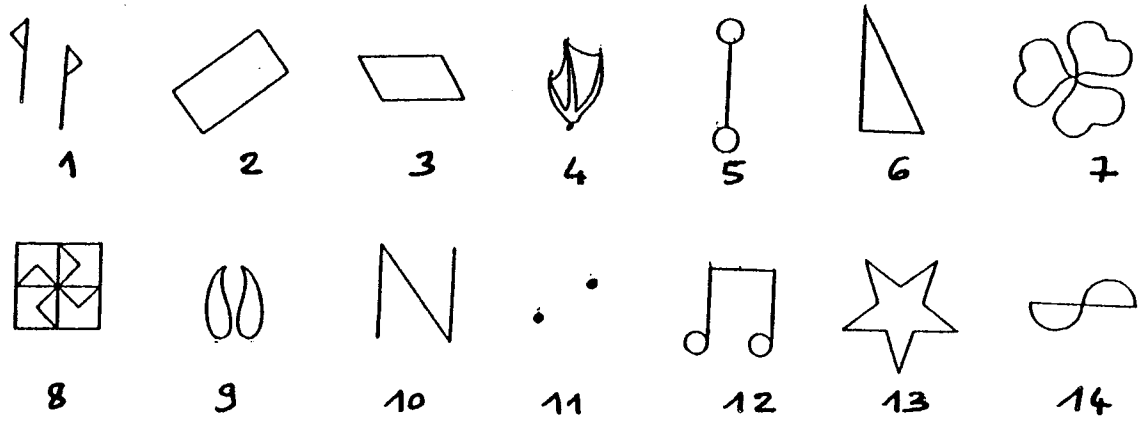
b. variables liées à la position de la figure dans la feuille :
AX : la direction des droites de symétrie de la figure par rapport aux bords de la feuille: verticale (V), horizontale (H), oblique (O);
SEG : la direction de segments composant la figure par rapport aux bords de la feuille : verticale (V), horizontale (H), oblique (O).

Nous appelerons **caractéristiques d'une figure** les valeurs de ces variables. La même caractéristique peut, par exemple, faciliter la reconnaissance d'une droite de symétrie dans une figure ou, au contraire, induire l'idée de l'existence d'une symétrie-pliage pour une figure qui n'a pas cette propriété.

Nous décrivons dans le tableau ci-dessous les figures par rapport à ces variables. Les noms qui leur sont donnés sont destinés à suivre plus facilement notre analyse. Les élèves n'en disposaient pas.

groupe	n°	nom de la figure	Nature	Propriétés	Nombre	Parité	Axe	Segment
G1	5	haltère	oui	SC	2	pair	V,H	V
	13	étoile	oui	R5	5	impair	V,O	H
	9	patte de sanglier	non		1	pair	V	
G2	11	deux points	oui	SC	2	pair	O	
	2	rectangle	oui	SC	2	pair	O	O
	7	fleur d'oxalis	non	R3	3	impair	O	
G3	3	parallélogramme	oui	T	0	pair		H
	12	croche	oui	T	0	pair		V,H
	1	drapeaux	oui	SG	0	pair		V
	8	motif géométrique	oui	R4	0	pair		V,H
	14	demi-cercles	oui	SC	0	pair		H
	10	N	oui	SC	0	pair		V
G4	6	triangle rectangle	oui		0	**impair**		V,H
	4	patte de canard	non		0	**impair**		

note : nous appellerons **item x** l'exercice correspondant à la figure x. De cette manière, nous pourrons parler par exemple de la réussite à l'item 1 et des caractéristiques de la figure 1.
Les figures sont reproduites ci-dessous.



I.4.2. Figures ayant au moins une droite de symétrie

La tâche de reconnaisance de la symétrie-pliage devrait être plus facile pour les figures du groupe G1 que pour celles du groupe G2, à cause de la présence d'une droite de symétrie verticale dans la feuille.

D'autres caractéristiques jouent de manière spécifique à l'intérieur de chacun des groupes. En particulier, le partage de la figure en deux parties égales est moins accessible pour les figures 13 (étoile) et 11 (deux points isolés) que pour les autres figures de ces groupes.

L'item 7 (fleur d'oxalis) présente une combinaison de caractéristiques qui nous fait supposer qu'il sera, dans un premier temps, le moins réussi des items de ces deux groupes : courbes non circulaires, nombre impair d'éléments identiques, droites de symétrie obliques.

La reconnaissance d'une symétrie-pliage dans le rectangle (fig.2) peut être perturbée par les directions obliques dans la feuille de ses droites de symétrie.

Dans la tâche de tracé des droites de symétrie, le nombre des droites de symétrie doit jouer un rôle. Nous faisons l'hypothèse que certaines d'entre elles sont mieux perçues que d'autres, à cause de leur direction dans la feuille. Pour cette raison, les items 13 (étoile) et 7 (oxalis) ne seront peut-être pas entièrement résolus.

Les deux droites de symétrie de la figure 5 (haltère) ont des statuts différents. La médiatrice du segment est facile à trouver. Mais la droite qui contient le segment et coupe les deux cercles ne correspond pas à un partage de la figure en deux parties égales (dans quelle partie situer le segment ?). La figure 11 présente une caractéristique analogue.

Pour le rectangle, nous attendons, outre les deux droites de symétrie, que deux autres droites particulières soient proposées : les diagonales.

I.4.3. Figures n'ayant pas de droite de symétrie

Les figures du groupe G3 présentent une combinaison de trois caractéristiques qui induisent fortement, dans un premier temps, la reconnaissance erronée d'une symétrie-pliage : elles présentent des segments verticaux ou horizontaux, un élément qui se reproduit un nombre pair de fois et une propriété géométrique particulière qui leur donnent une très grande régularité. Ces deux dernières caractéristiques ne sont pas indépendantes.

Lors de la phase de tracé, la conviction de l'existence de droites de symétrie peut éventuellement persister. Cependant, pour la figure 1 (drapeaux), le tracé d'une droite verticale passant entre les deux drapeaux matérialise un "décalage" horizontal entre les deux parties de la figure, ce qui peut jouer en faveur d'une remise en question de la réponse. Le problème est différent pour la figure 14, car celle-ci est telle que si on la plie le long de la médiatrice du segment, les deux demi-cercles se rejoignent pour faire un cercle, ce qui peut renforcer la réponse de l'élève.

Pour la figure 8 (motif géométrique), lorsqu'on trace l'une des quatre droites de symétrie du carré, on se rend compte que les éléments n'ont pas de correspondant de l'autre côté de la droite. Cela peut suffire à remettre en question la propriété de symétrie-pliage de la figure.

La figure 12 (croche) présente deux éléments identiques "verticaux", translatés l'un de l'autre le long d'une ligne horizontale. Une procédure de "rappel horizontal" associée à la mise en oeuvre de la conservation des directions permet de reconstruire cette figure. Ces mêmes procédures induisent pour le parallélogramme (figure 3) l'existence de droites parallèles aux côtés. Or, nous avons vu combien ces procédures sont répandues chez les élèves et stables dans le temps. Ces items risquent de provoquer un grand nombre d'erreurs.

Les figures du groupe G4 sont caractérisées par l'absence de propriétés géométriques particulières et l'unicité des éléments composant la figure. L'item 4 (patte de canard) est très facile à résoudre, car il ne présente aucune régularité. La présence de segments dans des directions privilégiées, dans la figure 6 (triangle rectangle) peut induire, dans un premier temps, l'idée qu'il existe une symétrie-pliage. Mais, au moment du tracé de cette droite de pliage, l'impossibilité de partager la figure en deux parties égales doit aboutir à une remise en question de la première impression.

II. Déroulement de la phase collective d'introduction

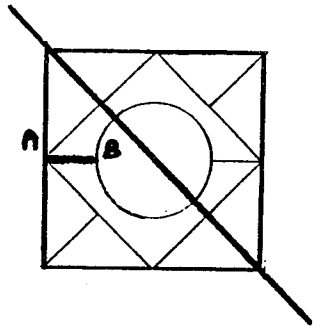
II.1. Moments essentiels du déroulement

Cette phase s'est déroulée assez rapidement parce que les élèves ont très vite reconnu la propriété commune aux trois figures.

A la question de l'enseignant "qu'est ce que ces trois figures ont en commun ?", un élève a répondu assez vite dans le sens attendu, suivi par beaucoup d'élèves. Voici les principales idées qui ont émergé.

- *Le dessin d'église, il est symétrique, c'est-à-dire si on les plie; les morceaux de la feuille l'une sur l'autre, ça sera la même chose, quoi.*
- *[...] mais, ils le sont tous, tous ! Ils sont tous symétriques.*
- *[...] Si on plie en deux ... ça va se rejoindre, [...] se toucher ... superposer.*

Les droites de symétrie de chacune des figures ont ensuite été montrées par les élèves sur les figures affichées au tableau. Une des droites proposées n'était pas une droite de symétrie. Il s'agit de la droite oblique reproduite ci-dessous.



Le débat qui s'est engagé autour de cette droite a permis aux élèves de pointer des moyens de se convaincre sans utiliser le pliage de la validité d'une proposition. Un élève a montré le segment AB en disant "ça en est pas une [droite de symétrie], parce que ce trait ne peut pas être mis sur un autre". Puis il a montré, à la demande de l'enseignant, où devait se retrouver ce segment lorsqu'on pliait le long de cette droite. En conclusion, il est dit que "si on plie sur la droite de symétrie, les deux parties doivent se superposer exactement".

II.2. Conclusion

Ce bref résumé montre que tous les éléments pour la "définition de travail" ont été apportés par les élèves eux-mêmes : ce sont eux qui ont parlé de deux parties, de pliage et de superposition.

Nous en concluons que cette propriété de "symétrie-pliage" d'une figure est accessible aux élèves et qu'ils vont donc pouvoir l'utiliser facilement dans la suite de la séquence. D'autre part, le débat sur la "fausse" droite de symétrie a été l'occasion de donner un exemple d'analyse d'une figure dans le but d'étudier la correspondance de certains éléments entre eux.

III. Analyse des deux tâches individuelles

III.1. Les réponses des élèves à la première question

Il s'agit de la tâche de reconnaissance de la propriété de symétrie-pliage dans une figure. Elle nous permet de repérer quelles sont les figures qui perceptivement pour les élèves admettent une droite de symétrie. Nous avons totalisé le nombre de réponses erronées par item dans le tableau ci-dessous. Rappelons qu'il y a 28 élèves dans la classe.

figures admettant des droites de symétrie:								
n° figure	n°5	n°9	n°13	n°2	n°11	n°7		
nombre de réponses"non"	3	5	7	7	12	12		
figures n'admettant pas de droites de symétrie:								
n°figuren°4	n°14	n°6	n°1	n°10	n°8	n°12	n°3	
nombre de réponses"oui"	1	2	5	5	5	5	7	9
nombre de non-réponses	0	0	0	0	1	1	0	0

Une première analyse du tableau montre qu'aucun item n'est résolu par tous les élèves, bien qu'il soit réussi par la majorité d'entre eux. Le problème était donc accessible aux élèves, sans pour autant être trop simple. Nous allons considérer les items selon leur catégorie par rapport à la propriété de symétrie-pliage.

a. figures admettant des droites de symétrie

Les groupes G1 et G2 se retrouvent bien de part et d'autre dans le tableau. Or, c'est la direction des droites de symétrie dans la feuille qui les différencie. La propriété de symétrie-pliage est donc mieux reconnue lorsque une des droites de symétrie est verticale dans la feuille que lorsqu'elles sont toutes obliques. Cependant, la réussite est la même pour certains items des deux groupes, ce qui nous amène à étudier d'autres variables.

Dans le groupe G1, les items 5 et 9 sont mieux réussis que l'item 13. Or le partage de la figure

en deux parties égales est plus évident pour les figures 5 et 9 que pour la figure 13 composée d'un nombre impair d'éléments identiques. D'autre part, la figure 5 est composée de cercles et segments, éléments géométriques plus réguliers que ceux de la figure 9.

Dans le groupe G2, l'item 2 se différencie des autres items par sa nature géométrique : le rectangle est une figure familière en géométrie, ce qui n'est pas le cas de la fleur d'oxalis ni même de la figure "deux points" pour les élèves de cet âge. La très mauvaise réussite à l'item 7 confirme le rôle perturbateur de la combinaison des caractéristiques : axes obliques, courbes ni curvilignes ni polygonales et répétition en nombre impair d'un élément.

En regroupant les items selon ces trois variables, on obtient un classement par réussite non décroissante.

direction de l'axe	V,H items 5, 9 et 13			O (oblique) items 2, 7, 11			
nombre d'éléments	pair item 5, 9		impair item 13	pair item2, 11		impair item 7	
nature géométrique	oui 5	non 9	oui 13	non	oui 2	non 11	oui	non 7

Vu le petit nombre d'élèves, ce classement permet seulement de faire des constatations sur la force de certaines combinaisons de ces trois variables. Ainsi, la figure symétrique "évidente" est une figure composée de lignes polygonales ou circulaires, ayant un nombre pair d'éléments identiques et placée telle que l'une de ses droites de symétrie soit verticale. A l'opposé, la propriété de symétrie-pliage d'une figure sera difficilement reconnue si celle-ci est composée d'éléments ni polygonaux ni circulaires, d'un nombre impair d'éléments identiques et a toutes ses droites de symétrie obliques dans la feuille.

Nous allons analyser maintenant les réponses aux items de la seconde catégorie.

b. figures n'admettant pas de droite de symétrie

La réussite presque totale des élèves à l'item 4 (patte de canard) était attendue. C'est la seule figure ne présentant aucune régularité (ni éléments curvilignes ou polygonaux, ni répétition d'éléments) ni aucun élément dans une direction privilégiée dans la feuille. La combinaison de ces caractéristiques semble faciliter la reconnaissance immédiate de l'assymétrie de la figure.

L'excellente réussite à l'item 14 (demi-cercles) est plus inattendue, car sa propriété de symétrie

centrale et la présence d'un segment horizontal pouvait induire l'idée de l'existence d'une droite de symétrie. Elle apporte la confirmation que la définition de symétrie-pliage a bien été comprise par les élèves et n'est pas, en particulier, confondue avec la symétrie centrale.

Le partage de la figure en deux parties égales le long d'une direction verticale est possible pour toutes les figures du groupe G3. Cependant, deux items sont sensiblement moins réussis que les autres. Ils correspondent aux figures pour lesquelles deux éléments identiques se correspondent dans une **translation le long d'une direction horizontale**. Ce fait est à mettre en relation avec la fréquence des procédures erronées de type "rappel horizontal" utilisées par les élèves dans les tâches de construction de symétriques de figures par rapport à une droite.

On peut aussi établir une telle correspondance le long d'une direction horizontale pour certains éléments des figures 8 et 10. Plus précisément, il s'agit des sommets du carré dans la figure 8 et des extrémités des segments verticaux pour la figure 10. Il n'existe pas de telle correspondance pour aucun élément des figures 1 et 6. En particulier les deux parties égales de la figure 1 sont en "décalage horizontal".

Ce rapport à la direction horizontale permet d'expliquer, d'une part la réussite aux items 14, 1 et 6 et, d'autre part, l'échec aux items 12 et 3. Les items 8 (motif) et 10 (N) se situent de manière intermédiaire par rapport à ces caractéristiques. En effet, certains de leurs éléments se correspondent sur une ligne de rappel horizontal, tandis que d'autres sont, au contraire, en décalage relativement à cette direction.

Il semble donc que certaines combinaisons des variables "propriété géométrique" et "direction d'éléments de la figure" peuvent induire chez les élèves l'existence de droites de symétrie dans des figures qui n'en admettent pas. En particulier, la combinaison qui donne des éléments identiques translatés le long d'une direction horizontale est très perturbante.

Nous allons examiner maintenant comment ces combinaisons jouent dans une tâche de tracé.

III.2. Analyse de la cohérence des réponses aux deux tâches

III.2.1 Réponses cohérentes et réponses contradictoires

Dans un premier temps, nous avons étudié la cohérence des réponses des élèves aux deux questions, reconnaissance d'une symétrie-pliage et tracé des droites de symétrie, de la manière

suivante. Nous avons relevé, pour chaque figure et chaque élève :
-la réponse (oui-non) à la question de reconnaissance de la symétrie-pliage;
-le maintien ou non de cette opinion lors de la deuxième activité, s'exprimant par le fait que l'élève a tracé au moins une droite de symétrie juste ou déclaré qu'il n'y en a aucune.

Pour une figure donnée, nous noterons OO (pour "oui-oui") lorsque l'élève a répondu oui à la première question et qu'il a tracé ensuite au moins une droite de symétrie (même s'il ne les a pas tracées toutes). Les autres types de réponses sont notées de manière analogue NN, ON et NO.

Une réponse de type OO ou NN correspond à une **réponse cohérente** de l'élève dans le sens où celui-ci n'a pas changé d'avis d'une tâche à l'autre. Une telle réponse peut être juste ou fausse : ainsi, dans le cas d'une réponse OO, les droites tracées peuvent être éventuellement fausses : nous parlerons d'une réponse cohérente fausse. Une réponse cohérente **juste** est de type OO pour une figure admettant des droites de symétrie (sous réserve que les droites tracées soient justes) et NN pour une figure n'en admettant pas.

Des réponses contradictoires de type ON ou NO indiquent un changement de point de vue de l'élève, d'une tâche à l'autre, sur les propriétés de symétrie d'une figure. Elles correspondent forcément à une réponse fausse à l'une des deux questions et juste à l'autre, sauf si, dans le cas NO, les droites tracées sont toutes de "fausses" droites de symétrie. Signalons que, pour les figures n'admettant pas de droite de symétrie, les réponses de type ON témoignent d'une analyse de la figure, car elles vont à l'encontre de la consigne de "tracer".

III.2.2 confirmation de la non-équivalence des deux tâches

Nous avons noté "x" lorsque l'élève n'a donné aucune réponse. Ce tableau récapitule le nombre des réponses cohérentes, justes ou fausses et le nombre de réponse contradictoires pour chacune des figures.

n° figure	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
bonne réponse	N	O	N	N	O	N	O	N	O	N	O	N	O	N
cohérentes justes	23	20	16	26	25	23	14	20	21	22	15	19	21	25
cohérentes fausses	1	3	6	1	0	0	6	2	1	2	4	6	5	2
contradictoires	4	5	6	1	3	5	8	5	6	3	9	3	2	1

Deux conclusions se déduisent immédiatement de ce tableau.

a. la pertinence des figures

Aucun des 14 items n'a été parfaitement bien résolu par les 28 élèves : ceci signifie, que ces figures ont toutes posé un problème lors de l'une au moins des deux activités. Mais le nombre de réponses cohérentes justes varie entre 14 et 26 : les deux tâches proposées n'étaient donc ni trop simples, ni trop complexes. Certains items ont produit des réponses cohérentes fausses, mais leur nombre reste très petit devant celui des réponses cohérentes justes.

b. la pertinence des deux tâches

Tous les items ont provoqué des réponses contradictoires. Il ne peut s'agir d'un oubli des élèves sur la définition de la symétrie-pliage, puisque les résultats de la phase collective étaient restés affichés au tableau. Il s'agit bien d'une analyse différente de la figure. La répartitions des réponses contradictoires montre que les difficultés sont très inégales selon les items : les figures 4 et 14 ont provoqué très peu de réponses contradictoires; au contraire, les figures 7 et 11 en ont provoqué chez de nombreux élèves.

III.2.3. Signification des réponses contradictoires

Nous avons relevé, pour chaque item, le nombre d'élèves ayant donné des réponses contradictoires lors des deux activités.

nombres de réponses de type ON ou NO (28 élèves)								
a - figures admettant des droites de symétrie								
numéro de la figure			13	5	2	9	7	11
nombre de réussites à la 1ère tâche			21	25	21	23	16	16
nombre de réponses de type NO			2	3	4	4	6	8
nombre de réponses de type ON			0	0	1	2	2	1
b - figures n'admettant pas de droites de symétrie								
numéro de la figure	4	14	12	10	1	6	8	3
nombre de réussites à la 1ère tâche	27	26	21	22	23	23	22	19
nombre de réponses de type ON	0	0	1	3	4	5	3	3
nombre de réponses de type NO	1	1	2	0	0	0	2	3
réponse XO (X : non-réponse)	0	0	0	0	0	0	1	0
réponse XN	0	0	0	1	0	0	0	0

Ce tableau appelle quelques commentaires immédiats :

- il y a au moins une réponse contradictoire à chacun des items et au moins trois pour onze des quatorze items : les deux tâches sont bien différentes.
- les changements de réponses ne sont pas exactement liés aux réussites à la première tâche : les variables que nous avons retenues interviennent donc de manière différente dans les deux tâches;
- les changements de réponses vont majoritairement dans le sens de la bonne réponse. Nous analysons les cas particuliers ci-dessous.

Nous avons mené l'analyse de ces contradictions pour chacune des deux catégories d'items.

a. figures admettant des droites de symétrie

Deux items ont provoqué un grand nombre de changement de réponses, il s'agit des items 11 (deux points) et 7 (fleur d'oxalis). Ce qui signifie que leur propriété de symétrie-pliage a été reconnue seulement lors de la tâche de tracé. Ces deux figures ont en commun qu'aucune droite de symétrie n'a une direction privilégiée. Ce résultat est à rapprocher de celui obtenu pour la figure 2 (rectangle). En effet, alors que la figure en elle-même est très connue des élèves, quatre d'entre eux n'ont reconnu les droites de symétrie qu'au moment du tracé.

Il y a donc eu une analyse différente de la figure entre les deux tâches. Celle-ci semble provoquer chez certains élèves une prise d'indépendance par rapport au support : la figure est analysée indépendamment de sa position dans la feuille. Signalons, cependant, que nous n'avons pas vu les élèves changer l'orientation de leur feuille sur la table.

Malgré tout, six élèves n'ont, à aucun moment, reconnu une symétrie dans la figure 7 (fleur d'oxalis). La raison en est peut-être le statut des courbes composant la figure. Ce même argument permet d'expliquer pourquoi, quatre élèves ont reconnu la propriété de symétrie-pliage de la figure 9 seulement lors de la tâche de tracé, bien que celle-ci présente une droite de symétrie verticale.

Les réponses aux items 5 (haltère) et 13 (étoile) sont cohérentes. Ce résultat s'explique aisément pour l'item 5 par l'excellente réussite à la première tâche. Cependant, cinq élèves n'ont reconnu à aucun moment une symétrie axiale dans la figure 13, alors qu'elle admet une droite de symétrie verticale. Cette figure est composée d'un nombre impair d'éléments identiques. Le rôle de cette variable est donc encore sensible dans cette tâche de tracé.

En conclusion, la position de la figure dans la feuille joue un rôle moins important dans la tâche de tracé, à cause d'une approche plus analytique de la figure. Ce n'est pas le cas de la

parité du nombre d'éléments identiques. En effet, lorque ce nombre est impair, des difficultés semblent persister au moment du tracé.

b. figures n'admettant pas de droite de symétrie

Les items 4 (patte de sanglier) et 14 (demi-cercles) étaient très bien réussis lors de la première tâche. Cette réussite est stable. La réussite est presque totale pour les items 6 (triangle rectangle) et 1 (drapeaux). Les cinq élèves qui avaient perçu une symétrie axiale dans la figure 6 lors de la tâche de reconnaissance sans tracé ont tous modifié leur réponse au moment de tracer. Nous attribuons ce résultat au fait que le partage de la figure en deux parties égales n'est pas réalisable.

La raison qui a fait changer d'avis quatre élèves pour la figure 1 est forcément autre. On peut supposer que la droite imaginée était verticale et que son tracé matérialise très bien le "décalage horizontal" dont nous avons parlé précédemment. Cette caractéristique résiste moins à l'analyse pour la figure 10 (N) que pour la figure 8 (motif). Cette dernière figure est composée de segments horizontaux se correspondant dans une translation horizontale.

Les items 12 (croche) et 3 (parallélogramme) restent les plus mal réussis. En effet, il y a très peu de changements de réponse pour l'item 12 et, s'il y en a plus pour l'item 3, ils vont dans les deux sens (réponses de type NO et ON). Finalement, six élèves, pour chacun de ces deux items, ont accepté le tracé des "fausses" droites de symétrie. Nous les examinons au paragraphe suivant.

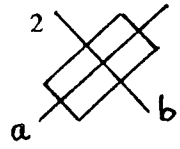
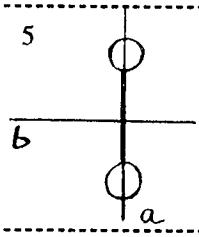
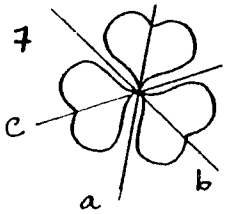
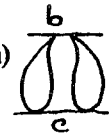
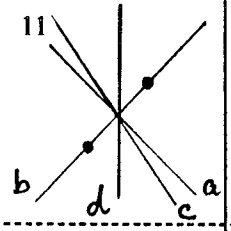
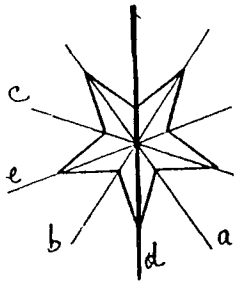
III.2.4. Conclusion

Les deux tâches de reconnaissance et de tracé des droites de symétrie d'une figure ne sont pas les mêmes pour les élèves. Il semble que l'obligation d'agir sur une figure conduit l'élève à l'aborder de manière plus analytique (ainsi, la figure est considérée indépendamment de son support), tandis que la reconnaissance de la propriété de symétrie-pliage repose plus sur une approche perceptive de celle-ci. Nous avons montré que certaines combinaisons de caractéristiques des figures jouent un rôle essentiel dans chacune des deux tâches, ce rôle étant facilitateur ou au contraire perturbateur selon les cas.

Dans l'objectif d'une évolution des connaissances des élèves, ces deux activités, combinées à un jeu sur les variables liées aux figures, semblent bien adaptées pour faire émerger les perceptions et les conceptions erronées des élèves à propos de la propriété de symétrie-pliage.

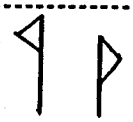
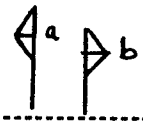
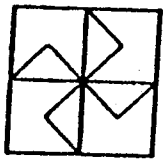
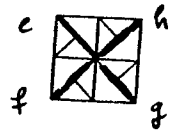
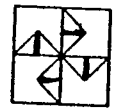
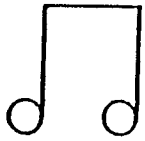
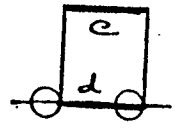
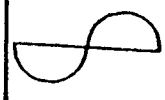
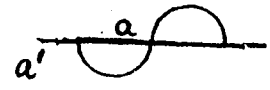
III.3. Analyse des tracés de droites

Les deux tableaux qui suivent donnent les réponses des élèves aux deux tâches et les droites de symétrie tracées.

figures	OO toutes tracées	ont tracé seulement certaines	NO droites justes	" droites fausses "	ON	NN
2 	20 20	0	3 2 ont tracé (a) 1 a tracé (b)	1 1 a tracé:	1	3
5 	25 17	3 ont tracé (a) 4 ont tracé (b) 1 a tracé 2 faux axes: 2 diamètres	1 1 a tracé (b)	2 1 a tracé les 4 diamètres V et H. 1 a retracé le segment	0	0
7 	14 11	3 ont tracé (a)	6 4 ont tracé (a), (b) et (c) 1 a tracé (a) 1 a tracé (c)	0	2	6
9	21 21	0	2 2 ont tracé (a) 	2 1 a tracé (b) et (c): 1 a tracé 4 courbes:	2	1
11 	15 6	5 ont tracé (a) 2 ont tracé (b) 1 a tracé(c)et(b) 1 a tracé(c)et(d)	8 2 ont tracé (a)et(b) 2 ont tracé (a) 4 ont tracé (b)	0	1	4
13 	21 8	3 ont tracé 4 droites 1 a tracé(a),(b),(c) 1 a tracé (a) et (b) 4 ont donné (d) 1 a donné (a) 1 a donné (b) 1 a donné (f) 1 a donné(f),(g),(d)	2 1 a tracé 5 droites 1 a tracé(a,b,d,e) 	0	0	5

exemple de lecture du tableau : pour la fleur d'oxalis (figure 7), 14 élèves ont reconnu tout de suite qu'il y a au moins une droite de symétrie; parmi eux 11 les ont toutes tracées et 3 n'ont tracé que (a); 6 élèves n'ont reconnu cette symétrie que lors du tracé (colonne NO) et parmi eux, 4 ont tracé les trois droites (a), (b), (c), un élève a tracé seulement (a) et un autre a tracé seulement (c). Enfin, 2 élèves ont changé d'avis et n'ont rien tracé (colonne ON) et 6 autres n'ont à aucun moment vu de droites de symétrie dans la figure.

Résultats obtenus pour les figures n'ayant pas d'axe de symétrie (28 élèves)

figures	NN	ON	OO	NO	
1 	23	4	1 1 a tracé (a) et (b) 	0	
3	16	3	6 3 ont tracé (a) 1 a tracé (b) 1 a tracé (c) 1 a tracé(c) et (d)	3 1 a tracé (a) et (e) 1 a tracé (f) 1 a retracé les 4 côtés	
4	26	0	1 a tracé (a)	1 a tracé 2 courbes (b) et (c)	
6	23	5	0	0	
8 	20	3	2 1 a tracé (a),(b),(c)et(d) 1 a tracé (e),(f),(g)et(h) 	2 1 a tracé (a)et(b) 1 a tracé : 	XO: 1
10	22	3	2 1 a tracé (a) 1 a tracé (b) et (c)	0	XN: 1
12 	19	1	6 3 ont tracé (a) 1 a tracé (a) et (b) 1 a tracé (c) et (d) 1 a tracé (c),(e) et (f)	2 2 ont tracé (a)  note: (d) forme avec (e), (c) et (f) un rectangle	
14 	25	0	2 1 a tracé (a) 1 a tracé (a') 	1 1 a tracé (a) note : (a) = segment	

III.3.1. Figures admettant des droites de symétrie

Nous avons classé les figures selon le nombre de leurs droites de symétrie (ligne 1).

	numéro de la figure	9	2	5	11	7	13
1	nombre d'axes de symétrie dans la figure	1	2	2	2	3	5
2	nombre d'élèves n'ayant tracé aucun axe	3	4	0	5	8	5
3	nombre d'élève ayant tracé des axes incorrects	2	1	3	1	0	1
4	nombre d'élèves ayant tracé au moins un bon axe	23	23	26	22	20	22
5	nombre d'élèves ayant tracé tous les axes	23	20	17	8	15	9

Les résultats de la ligne 2 du tableau ont fait l'objet du paragraphe précédent : il concerne la réussite des élèves à la tâche de tracé.

a. les "fausses" droites de symétrie

Il y en a eu très peu (ligne 3). Précisons qu'elles ont toutes été tracées par des élèves différents. Les tracés erronés pour les figures 9 et 13 sont des lignes courbes, ce qui laisse supposer qu'il n'est pas évident a priori pour tous les élèves que la ligne de pliage est forcément une droite. Nous reviendrons sur ce point au chapitre suivant.

La diagonale du rectangle n'est proposée qu'une fois, nous l'attendions plus, mais la familiarité de la figure a pu jouer en faveur de cette réussite. Une seule droite verticale est proposée pour les "deux points" : les directions privilégiées semblent moins perturbantes dans une tâche de tracé lorsque la figure n'est composée que de points. Ce résultat est conforme à celui de l'expérimentation "point-segment" décrite précédemment.

Les "fausses" droites de symétrie tracées pour la figure 5 (haltère) traduisent la difficulté à considérer que le segment est sur la droite. Le tracé de diamètres des cercles correspond à une analyse de la figure en deux cercles, le segment étant "oublié".

b. le nombre de droites de symétrie tracées

La double symétrie du rectangle (figure 2) est reconnue dès que sa symétrie l'est. Il n'en est pas de même pour les figures 5 (haltère) et 11 (deux points), pour lesquelles un grand nombre d'élèves ne tracent qu'une seule des deux droites de symétrie. Ces deux droites ont

des statuts différents. L'une contient le segment ou passe par les deux points, elle nous semblait a priori plus difficile à reconnaitre que l'autre, médiatrice du segment ou du bi-point.

La figure 13 (étoile) a un très grand nombre de droites de symétrie. Sur 23 élèves qui en ont tracé, neuf seulement les ont tracé toutes. Nous avons relevé le nombre de fois où chacune des cinq droites a été tracée par les 14 autres élèves.

dénomination de la droite	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
nombres de fois où elle a été tracée	6	6	3	9	4

La droite verticale (d) a été tracée plus souvent que les autres. Nous avons une confirmation que la propriété de symétrie axiale est majoritairement reconnue grâce à la droite verticale. Les droites (c) et (e) sont peu reconnues. Leurs directions sont pourtant proches de l'horizontale, mais en conséquence très éloignées de la verticale. Les droites (a) et (b), relativement proches de la direction verticale, se situent dans la moyenne pour le nombre de tracés.

De même, pour la figure 7 (oxalis), nous constatons que, parmi les cinq élèves ne donnant pas tous les axes de symétrie, l'axe le plus proche de l'orientation verticale (a) a été tracé par quatre d'entre eux.

Ceci confirme qu'une droite de symétrie est d'autant plus difficile à reconnaître pour l'élève, que l'angle qu'il forme avec la direction verticale est grand. Ce constat est à mettre en relation avec un des résultats de nos expérimentations précédentes : le rôle essentiel joué par la variable "valeur de l'angle segment-axe" dans la construction du symétrique d'un segment par rapport à une droite.

III.3.2. Figures n'admettant pas de droites de symétrie

Le tableau ci-dessous indique le nombre d'élèves ayant tracé des "fausses" droites de symétrie pour ces figures.

n° figure	6	1	10	4	14	8	12	3
nombre d'élèves ayant tracé des droites	0	1	2	2	3	5	8	9

Nous retrouvons un cas de ligne courbe pour la figure 4 (patte de canard), qui rappelle les lignes courbes tracées par un élève pour la figure 9 (patte de sanglier). Cependant, ces types de tracés sont isolés (alors que le tracé était à main levée).

Le seul item qui est parfaitement réussi lors de la deuxième tâche est précisément le seul pour lequel il est impossible de tracer une droite partageant la figure en deux parties égales.

Pour les figures 1 (drapeaux), 10 (N) et 14 (demi-cercles), aucune droite verticale n'est proposée comme droite de symétrie. Ces figures ont en commun que les éléments qui pourraient se correspondre deux à deux ne sont pas situés le long d'une direction horizontale. Il semble donc que ce "décalage horizontal", que nous avons explicité précédemment, va dans le sens d'une absence de symétrie de la figure.

De nombreuses droites ont été proposées pour trois figures : 8 (motif), 12 (croche) et 3 (parallélogramme).

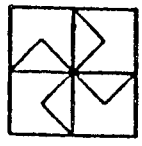


fig. 8

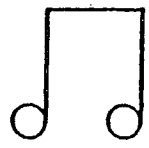


fig. 12

fig. 3

Pour le parallélogramme, tous les tracés proposés par les élèves étaient attendus, ils passent tous par le centre de symétrie de la figure, en la partageant en deux parties égales. La diagonale (a) est la droite la plus souvent tracée. Elle partage le parallélogramme en deux triangles ayant une forme plus familière que ceux obtenus par le tracé de l'autre diagonale (e). Le tracé de (d) est induit par la conception du parallélisme des éléments correspondants dans une symétrie et les règles d'action liées aux procédures de "rappel horizontal". Les droites (b), (c) ont des directions privilégiées dans la feuille, (f) a une direction moyenne entre la verticale et la parallèle à des côtés.

Nous retrouvons ces mêmes conceptions et règles d'action dans les réponses données pour la figure 12 (croche) : parmi les huit élèves qui ont proposé des droites de symétrie, six ont tracé la droite (a). Les réponses des deux autres élèves n'étaient pas attendues. La droite (d) est la droite de symétrie des deux cercles considérés séparément. Les droites (c), (e) et (f) sont des éléments de la figure orientés verticalement et horizontalement. Ces droites ont donc comme caractéristique commune une direction privilégiée dans la feuille.

La complexité de la figure 8 (motif) est due au grand nombre d'éléments la composant et à sa propriété de symétrie de rotation d'ordre 4 qui induit l'existence de droites de symétrie. Les tracés suivent certains segments de la figure ((e), (f), (g) et (h)) ou sont droites de symétrie de

certains éléments de la figure (les quatre hauteurs des petits triangles). Nous retrouvons aussi les droites de symétrie du carré (droites (a), (b), (c) et (d)).

III.4. Conclusion

Dans la tâche de reconnaissance de l'existence de droites de symétrie dans une figure, la perception joue un grand rôle. Dans un premier temps, l'élève cherche à partager la figure en deux parties égales, par une droite verticale passant par le "milieu de la figure". Deux variables jouent un rôle essentiel dans cette tâche : la position de la figure dans la feuille (et donc la direction des droites de symétrie) et la parité du nombre d'éléments identiques dans la figure. Ainsi, un élève reconnait facilement la propriété de symétrie axiale d'une figure admettant une droite de symétrie verticale et composée d'un nombre pair d'éléments identiques. Mais aussi, la reconnaissance de la propriété de symétrie axiale du rectangle dépend de sa position dans la feuille.

Une combinaison particulière de valeurs de ces deux variables conduit à une caractéristique de la figure liée au support et que nous avons nommé "décalage horizontal". Deux éléments identiques de la figure sont "décalés horizontalement" si la direction des droites les reliant est oblique. Cette caractéristique joue contre la reconnaissance d'une symétrie axiale. Ainsi, deux points obliques dans la feuille n'ont pas de droite de symétrie.
Par contre, une figure composée de segments translatés horizontalement est perçue comme admettant une droite de symétrie verticale. La présence de segments dans des directions particulières dans la feuille peut aussi induire l'existence d'une droite de symétrie.

Dans la tâche de tracé des droites de symétrie, la figure est analysée plus localement. Une conséquence est une moins grande influence de la position de la figure dans la feuille. Par exemple, dans le cas du rectangle et des deux points, la reconnaissance de la propriété de symétrie axiale est reconnue au moment du tracé par certains élèves. Cependant, la grandeur de l'angle que fait une droite de symétrie avec la direction verticale joue sur la reconnaissance de celle-ci.

La propriété de symétrie de rotation d'ordre n de la figure joue un doubble rôle : lorsque n est pair, elle induit l'existence de droites de symétrie dans une figure n'en n'admettant pas; lorsque n est impair, elle pose un problème au moment du tracé des droites de symétrie de la figure car celles-ci coupent l'un des éléments et passent au "milieu" des autres paires.

Lorsque tous les éléments de la figure se correspondent dans une translation horizontale, la

tâche de tracé ne remet pas en question la "fausse" droite de symétrie. La perception forte et très répandue d'une symétrie axiale dans la figure "parallélogramme avec deux côtés horizontaux" ne change pas lors de la tâche de tracé.

Nous retrouvons, dans la recherche de droites de symétrie d'une figure, des conceptions et des règles d'action que nous avions repéré dans la tâche de construction à main levée du symétrique d'une figure. Ainsi, les règles d'action "un point et son symétrique sont sur une même horizontale" et "un segment et son symétrique sont parallèles ou translatés" induisent dans cette tâche l'existence d'une symétrie axiale pour une figure comportant des segments parallèles pouvant être déduits par "rappel horizontal".

IV. La mise en groupe des élèves

composition des binômes

Nous voulions favoriser les échanges d'arguments et les interactions entre les élèves. Pour cela, il nous fallait former des groupes avec des élèves ayant des conceptions différentes voire contradictoires, mais en évitant que l'un d'entre eux ne soit isolé par ses conceptions ou par son niveau de compréhension. Les réponses des élèves aux deux tâches individuelles nous ont servi de base pour cette organisation de la classe.

Pour éviter l'isolement d'un élève, nous avons formé d'abord 14 binômes, chacun composé de deux élèves ayant soit une réussite globale analogue, soit un même nombre de réponses contradictoires, ou encore les mêmes réponses contradictoires à certaines figures. Au contraire, afin de favoriser les échanges et les interactions, chaque groupe de quatre élèves a été formé en choisissant deux de ces binômes aussi différents l'un de l'autre que possible, tout en évitant les trop grands écarts de niveau entre les élèves.

Cette mise en groupe n'est donc pas entièrement descriptible en termes de règles reproductibles mécaniquement. Il s'agissait seulement pour nous d'optimiser au mieux les conditions de travail.

Les deux tableaux suivants ont servi à la composition des binômes, puis des groupes.

Le premier indique, d'une part, le nombre d'élèves ayant donné des réponses cohérentes justes et, d'autre part, les élèves (désignés par leur numéro) qui ont donné des réponses contradictoires.

Dans le tableau suivant, nous avons regroupé les élèves (numérotés de 1 à 28) selon le nombre total de réponses contradictoires (lecture en ligne) et le nombre total de bonnes réponses cohérentes (lecture en colonne).

	élèves ayant donné des réponses contradictoires pour chacune des figures		
	réponses justes	réponses contradictoires	
n° item	nombre de réponses justes stables	numéros des élèves ayant donné une réponse contradictoire à cet item	total de ces élèves
1	23	4-11-16-22	4
2	20	4-6-13-20-27	5
3	16	3-8-9-10-16-27	6
4	26	3	1
5	25	4-16-27	3
6	23	10-11-12-16-25	5
7	14	1-5-9-13-15-16-18-23	8
8	20	3-4-13-16-19-27	6 (5+1 NR, élève n°3)
9	21	3-4-13-16-20-27	6
10	22	3-4-13-16	4 (3+1 NR, élève n°3)
11	15	4-6-12-13-15-16-19-27-28	9
12	19	4-10-11	3
13	21	8-23	2
14	25	27	1

Nous avons tout d'abord classé les élèves en trois groupes.

- groupe 1 : ceux qui ont eu au moins douze bonnes réponses cohérentes et pas plus de deux réponses contradictoires aux deux activités (intérieur du rectangle en haut à gauche dans le premier tableau); ces élèves ont donc très bien résolu les deux questions.
- groupe 2 : ceux qui ont moins de sept bonnes réponses cohérentes ou plus de quatre réponses contradictoires; il s'agit des élèves qui ont rencontré le plus de difficultés dans les deux activités.
- groupe 3 : les élèves "moyens" qui se situent entre ces deux groupes.

comparaison par élève du nombre de réponses cohérentes justes et du nombre de réponses contradictoires :

chaque élève, repéré par son numéro, est situé en fonction du nombre de ses réponses contradictoires (en abscisse) et du nombre de ses réponses cohérentes justes (en ordonnée).

	nombre de réponses contradictoires (de 0 à 9)										
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	totaux
14	7-14 17-21										4
13		1-18 28									3
12	2-24 26	5-22 25	9								7
11		8	15-19 20-23	11							6
10			6			3					2
9				10							1
8								27			1
7									4		1
6							13			16	2
5											0
4			12								1

exemple de lecture : l'élève numéro 3 a donné 5 réponses contradictoires et 10 réponses cohérentes justes.

Nous obtenons ainsi 14 élèves dans le groupe 1, 8 élèves dans le groupe 2 et 6 élèves dans le groupe 3. Dans chacun de ces groupes, nous avons constitué des binômes en nous référant au tableau 2, de telle sorte que les deux élèves mis ensemble aient des réponses de même types sur quelques items au moins.

Les sept binômes du groupe 1 ont été ensuite mis en relation avec les sept binômes des groupes 2 et 3, suivant le principe indiqué plus haut. Une autre contrainte a été prise en compte, celle de compatibilité entre les élèves. L'enseignant a simplement vérifié que les binômes et groupes ainsi formés puissent fonctionner.

groupe 1 : (7, 14) (2, 17) (24, 28) (22, 25) (1, 18) (5, 26) (9, 21)
groupes 2 et 3 : (8, 23) (6, 20) (10, 11) (15, 19) (3, 4) (13, 16) (12, 27)

Nous avons ainsi obtenu sept groupes de quatre élèves, formés chacun de deux binômes.

Enfin, en prévision du déroulement de la situation de communication prévue dans la séquence, nous avons partagé les binômes en deux classes A et B, chaque binôme A d'un groupe étant en relation avec le binôme B de ce même groupe. Pour que les niveaux des élèves des classes A et B soient analogues, nous avons alterné les binômes des groupes 1 et ceux des groupes 2 et 3.

Le tableau 4 ci-dessous donne la composition des groupes ainsi définis.

composition des groupes								
n° groupe	1	2	3	4	5	6	7	salle
n° élèves par binômes	(2,17) (6,20)	(13,16) (5,26)	(7,14) (8,23)	(3,4) (1,18)	(9,21) (12,27)	(15,19) (22,25)	(24,28) (10,11)	A B

Annexe relative au paragraphe IV

première séquence

activités individuelles de la première séance

Tableau des réponses de chaque élève pour chaque figure.

Nous avons noté "X" lorsque l'élève n'a donné aucune réponse. Les réponses contradictoires (de type NO ou ON) ont été encadrées.

réponses des élèves pour chaque figure

n° figure / n°élève	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	NN	OO	NN	NN	OO	NN	(ON)	NN	OO	NN	OO	NN	NN	NN
2	NN	OO	NN	NN	OO	NN	NN	NN	OO	NN	OO	NN	NN	NN
3	OO	NN	(NO)	(NO)	OO	NN	OO	XO	(ON)	XN	OO	NN	OO	NN
4	(ON)	(NO)	NN	NN	(NO)	NN	OO	(ON)	(NO)	(ON)	(NO)	(NO)	OO	NN
5	NN	OO	OO	NN	OO	NN	(NO)	NN	OO	NN	OO	NN	OO	NN
6	NN	(ON)	NN	NN	OO	NN	NN	NN	OO	NN	(NO)	OO	NN	NN
7	NN	OO	NN	NN	OO	NN	OO	NN	OO	NN	OO	NN	OO	NN
8	NN	OO	(ON)	NN	OO	NN	OO	NN	OO	NN	NN	NN	(NO)	NN
9	NN	OO	(ON)	NN	OO	NN	(NO)	NN	OO	NN	OO	NN	OO	NN
10	NN	OO	(ON)	NN	OO	(ON)	OO	OO	OO	NN	OO	(ON)	OO	OO
11	(ON)	OO	OO	NN	OO	(ON)	OO	NN	OO	NN	OO	(NO)	OO	NN
12	NN	NN	OO	NN	OO	(ON)	NN	OO	NN	OO	(NO)	NN	NN	OO
13	NN	(NO)	OO	OO	OO	NN	(ON)	(ON)	(NO)	(ON)	(ON)	OO	NN	NN
14	NN	OO	NN	NN	OO	NN	OO	NN	OO	NN	OO	NN	OO	NN
15	NN	OO	OO	NN	OO	NN	(NO)	NN	OO	NN	(NO)	NN	OO	NN
16	(ON)	NN	(NO)	NN	(NO)	(ON)	(NO)	(NO)	(NO)	(ON)	(NO)	NN	OO	NN
17	NN	OO	NN	NN	OO	NN	OO	NN	OO	NN	OO	NN	OO	NN
18	NN	OO	NN	NN	OO	NN	(NO)	NN	OO	NN	OO	NN	OO	NN
19	NN	OO	NN	NN	OO	NN	NN	(ON)	OO	NN	(NO)	NN	OO	NN
20	NN	(NO)	NN	NN	OO	NN	OO	NN	(NO)	NN	OO	OO	OO	NN
21	NN	OO	NN	NN	OO	NN	OO	NN	OO	NN	OO	NN	OO	NN
22	(ON)	OO	NN	NN	OO	NN	NN	NN	OO	NN	OO	NN	OO	NN
23	NN	OO	NN	NN	OO	NN	(NO)	NN	OO	NN	OO	OO	(NO)	NN
24	NN	OO	NN	NN	OO	NN	OO	NN	OO	NN	NN	OO	OO	NN
25	NN	OO	NN	NN	OO	(ON)	OO	NN	OO	NN	NN	NN	OO	NN
26	NN	OO	OO	NN	OO	NN	OO	NN	OO	NN	NN	NN	OO	NN
27	NN	(NO)	(NO)	NN	(NO)	NN	NN	(NO)	(ON)	OO	(NO)	OO	OO	(NO)
28	NN	OO	NN	NN	OO	NN	OO	NN	OO	NN	(NO)	NN	OO	NN
bonne réponse	N	O	N	N	O	N	O	N	O	N	O	N	O	N

Chapitre VI

Phase de remise en question des conceptions erronées

Cette phase se situe après celle de diagnostic des conceptions erronées. L'activité de la première séquence est décrite au paragraphe I. L'analyse de son déroulement effectif fait l'objet des paragraphes II et III. Au paragraphe IV, nous explicitons les modifications que nous avons apportées à cette activité, dans le cadre de l'élaboration de la deuxième séquence. L'analyse du déroulement de la nouvelle activité et des conséquences des modifications proposées est donnée au paragraphe V.

I. Description de la situation (première séquence)

I.1. La consigne et le dispositif expérimental

Les deux questions soumises aux élèves sont les mêmes que celles de la phase précédente. Mais, dans cette phase, elles sont posées dans le même temps et sont écrites en dessous de chacune des figures proposées :

> ***Cette figure a-t-elle une symétrie du même type que celles qu'on vous a montrées ? OUI - NON***
> ***Si oui, tracez toutes les droites de symétrie de la figure.***

Cette double question est posée pour onze figures distribuées l'une après l'autre par l'observateur. Ce sont les élèves qui décident s'ils ont terminé le travail à propos d'une figure. L'observateur reprend alors la figure et distribue la figure suivante, mais il peut, sur la demande des élèves, redonner toute figure déjà traitée. Les figures sont tirées d'une enveloppe, dans un ordre quelconque.

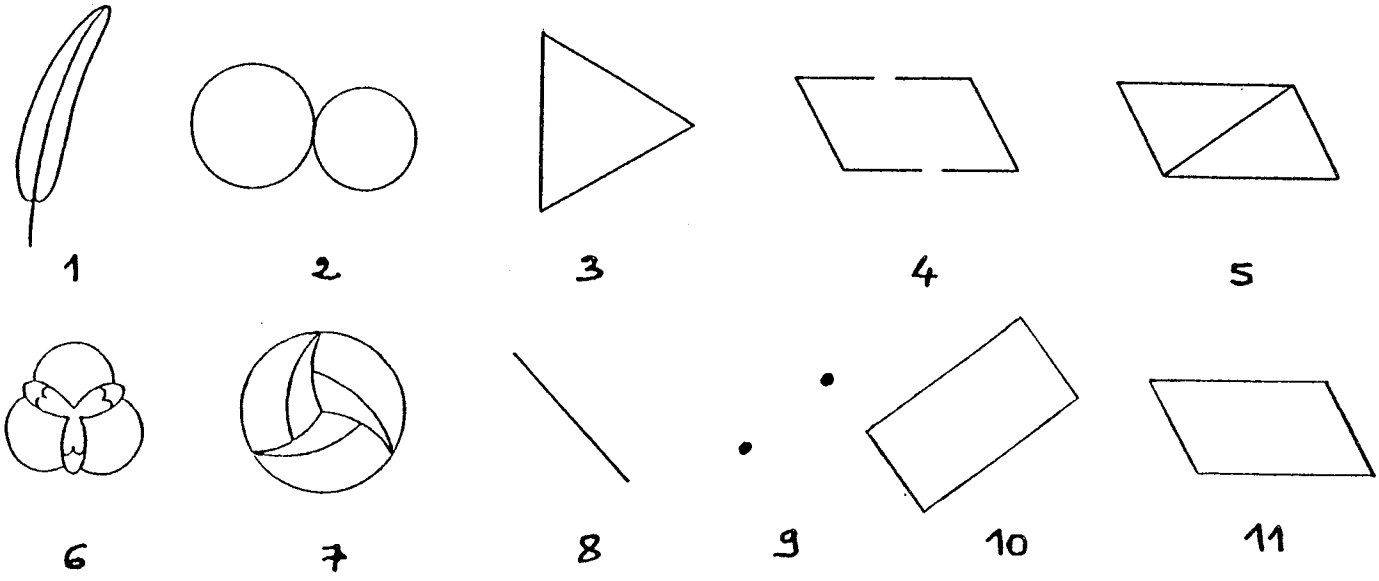
Ceci constitue la première partie de cette séance. Il est prévu de laisser tous les groupes terminer l'activité, sauf si l'un d'eux a beaucoup de retard sur les autres. La décision est laissée à l'enseignant, qui juge en fonction du temps qu'il souhaite réserver pour le bilan prévu dans cette même séance.

I.2. Choix des figures

Onze figures sont proposées successivement aux élèves. Parmi elles, se trouvent trois figures de la phase de diagnostic précédente qu'il nous a semblé nécessaire de porter à la discussion en groupe. Il s'agit des figures "rectangle", "deux points" et "parallélogramme" pour lesquelles nous n'avons modifié aucune caractéristique. D'autres figures de cette phase auraient pu être reprises, puisque très peu d'entre elles ont été parfaitement réussies. Mais une certaine nouveauté dans le problème est indispensable si l'on veut que les élèves acceptent de s'y investir.

Huit autres figures ont donc été choisies, dont les caractéristiques correspondent à celles qui semblent influencer le plus les réponses des élèves. Le travail en groupe devrait provoquer des échanges et des remises en question, les difficultés non résolues devant être portées ensuite au débat collectif. C'est en ce sens que cette phase doit permettre de déstabiliser les conceptions erronées.

Chacune des onze figures est tracée sur une demi-feuille de carton 21x29.7. Nous les avons reproduites ci-dessous après réduction, numérotées dans l'ordre que nous avions choisi pour la phase de bilan.



Explicitons nos choix des huit nouvelles figures.

I.2.1. Courbure d'une droite de symétrie

La nervure centrale de la plume (figure 1) peut être perçue comme ligne de symétrie possible de la figure. Elle a été construite comme ligne des milieux des bi-points situés à l'intersection des deux courbes extérieures et d'une droite horizontale. Il existe donc une correspondance des points deux à deux par une procédure de rappel horizontal. L'invalidation de cette proposition passe par la reconnaissance du changement de convexité de la courbure de la ligne ou par l'évocation de l'impossibilité à plier le long d'une courbe.

1.2.2. Un partage non trivial en deux parties identiques

La première démarche de l'élève dans la recherche d'une droite de symétrie est un partage de la figure en deux parties identiques. L'intérêt de l'item 2 est d'obliger l'élève à analyser la figure autrement qu'en deux cercles, partage d'autant plus attendu que les deux cercles admettent une tangente commune intérieure verticale dans la feuille.

I.2.3. Parité de l'ordre d'une symétrie de rotation

Trois figures présentent une symétrie de rotation d'ordre 3 : le triangle équilatéral (fig.3), la fleur de palmier-dattier (fig.6) et l'hélice (fig.7). L'objectif est de relativiser l'influence de cette caractéristique dans la reconnaissance de l'existence de droites de symétrie. En effet, pour conclure à ce sujet, il faut analyser en plus la propriété de symétrie de l'élément de base de la figure. Les éléments composant la figure 7 peuvent provoquer un conflit au niveau perceptif : le cercle est une figure admettant une infinité de droites de symétrie et les trois éléments n'ont aucune propriété de symétrie propre. Le travail en groupe devrait provoquer des échanges mettant en jeu les éléments pertinents de l'analyse d'une figure dans cette tâche.

I.2.4. Direction des droites de symétrie dans la feuille

La présence de la figure "segment" (fig.8) se situe dans la perspective de l'introduction de la droite de symétrie comme médiatrice, prévue dans une phase suivante de la séquence. La direction de cette figure dans la feuille est choisie oblique pour les mêmes raisons que les figures "rectangle" et "deux points". Le travail concerté en groupe modifie-t-il le rapport des

élèves avec cette variable ?

I.2.5. Variantes sur le parallélogramme

Enfin, nous proposons deux variantes de la figure "parallélogramme" (fig.11) qui matérialisent chacune un partage particulier de la figure en deux parties identiques. Il s'agit des figures 4 et 5. De plus, le tracé d'une diagonale dans la parallélogramme rompt la perception du parallélisme des côtés non horizontaux (fig.5). Ces caractéristiques induisent l'existence de "fausses" droites de symétrie particulières, que nous avons repérées dans la phase de diagnostic. Etablir des liens entre ces trois figures peut conduire les élèves vers des arguments qui mettent en jeu la propriété d'orthogonalité de la symétrie axiale.

II. Les résultats

II.1. Remarques générales sur le déroulement

Nous avons résumé dans un tableau, situé à la fin de ce chapitre (annexe 1), les principales stratégies et les productions des groupes pour chacune des figures. Nous ferons ici quelques remarques générales.

La réussite globale est très bonne, puisque les productions sont très majoritairement justes. Il y a donc eu certains apprentissages depuis la phase de diagnostic. Les échanges observés pendant les travaux des groupes révèlent que cette réussite n'allait pas de soi et que l'interaction entre les élèves a généralement bien fonctionné. Nous rapportons un grand nombre de ces échanges dans l'analyse détaillée que nous menons au paragraphe II.2.

Cependant, le travail en groupe n'a pas résolu toutes les difficultés. Nous verrons que celles qui subsistent correspondent en majorité à des conceptions que nous avions déjà repérées chez les élèves. Elles doivent être portées au débat lors de la phase de bilan.

L'activité semble donc adaptée aux objectifs prévus, la tâche se révèlant ni trop simple, ni trop complexe. Nous allons maintenant décrire les conceptions que l'activité a mis en jeu et comment ces conceptions ont été déstabilisées ou, au contraire, renforcées par les discussions entre les élèves.

II.2. Conceptions et perceptions des élèves et variables influentes

II.2.1. La ligne de symétrie d'une figure n'est pas courbe

Les réponses des élèves et les discussions dans les groupes à propos de la figure 1 (plume) montrent que le problème, s'il est posé, est bien résolu. Dans les productions finales des groupes, six d'entre eux donnent la bonne réponse. Seul le groupe 7 a recouvert et prolongé la ligne courbe de la nervure centrale de la plume, mais cette réponse est remise en cause au moment de la phase de bilan, avant même que la discussion ne commence. Dans ce groupe, l'argument de réfutation n'est pas directement lié à la courbure de la ligne, mais plutôt au fait que les deux parties ne sont pas égales.

groupe 7 *C- eh ! elle est pas symétrique, c'est plus petit là, regarde !*
(en montrant le haut de la figure)

Cependant, le problème de la courbure a été soulevé dans trois groupes. Nous donnons ici les arguments échangés par les élèves à ce sujet.

groupe 1 *- Y'en a pas.*
- Si, y'en a un, celui du milieu, il est déjà fait.
- Mais il ne faut pas que ça soit de travers! Une symétrie, c'est droit !

Ce terme "droit" semble bien se rapporter ici à l'idée de "non courbe" : en effet, la direction des droites de symétrie n'a pas posé de problème dans ce groupe pour aucun des items suivants.

groupe 2 *- Y en a une, ici (en montrant la nervure).*
- Non, comment tu fais ?
- Elle est courbe, montre.
- Y en a pas ! *(et un peu plus tard, lors du retour sur les figures):*
V- On va vérifier qu'on est d'accord. Il faut que tu expliques devant nous.
S- Si on plie, le trait va devenir comme ça (il montre le changement de convexité de la ligne de la nervure).

groupe 6 *- C'est oui !*
- Moi, je dis que c'est non...regarde, quand tu replies là, c'est plus large...
- Il faudrait qu'elle soit droite...

Dans la phase de bilan , ce problème n'a pas été soulevé. Tous les groupes étaient d'accord sur la non-symétrie de la figure et l'enseignant est passé très vite à la figure suivante.

II.2.2. Un théorème en acte très répandu : une droite de symétrie passe par le "milieu" de la figure

Le mot "milieu" apparaît comme un mot clé dans la tâche de construction d'une droite de symétrie. Mais ce mot semble très polysémique et a des significations chez les élèves qu'il n'est pas toujours facile de cerner. Il peut désigner :
- le milieu d'un segment ou d'un bi-point;
- un point remarquable d'une figure : centre d'un cercle, point d'intersection des diagonales d'un parallélogramme;
- une droite partageant la figure en deux parties égales;
- une ligne des "milieux", telle la nervure de la plume (figure 1), c'est-à-dire passant par les milieux des bi-points se correspondant horizontalement.

Voici quelques exemples qui illustrent ces différents sens.

Pour la fleur de palmier-dattier, dans le groupe 4, le mot "milieu" désigne une droite ou une ligne et non un point. Nous retrouvons un sens analogue de ce mot dans les expressions utilisées dans le groupe 1 pour la figure "triangle équilatéral".

groupe 1 - *Tiens* ***y'en a une là, au milieu,*** *au milieu, au milieu.*

Pour cette même figure, dans le groupe 2, il est difficile de savoir si le mot "milieu" désigne un point (le milieu d'un côté), ou une droite qui partage la figure en deux parties identiques.

groupe 2 *(un élève explique comment tracer les trois axes)*
V - Tu pars à chaque fois des angles et ***tu pars au milieu.***

En tout cas, dans le groupe 1, au sujet de la figure "plume" (voir extrait du protocole au paragraphe précédent), un élève désigne la nervure :

- Si, y en a un, celui du milieu, ***il est déjà fait.***

Le trait matérialisant la nervure correspond à la ligne des milieux des bi-points situés le long d'une direction horizontale sur les deux courbes formant la plume.

Dans la mise en commun avec l'enseignant, nous retrouvons ce mot à propos d'un grand nombre de figures, pour désigner l'emplacement de la droite.

Pour les deux cercles, l'élève désigne la droite de symétrie:

- Il y en a une, horizontale, qui coupe en même temps les deux cercles par leur milieu.

Lors du tracé de la droite de symétrie qui contient le segment (figure 8), à la question de l'enseignant "où passe le trait ?", un élève répond :

- Par le milieu du trait.

Cette expression ve revenir à plusieurs reprises dans les arguments que l'élève échange avec l'enseignant. Outre le problème de l'épaisseur du trait (nous l'analysons plus loin), nous retrouvons ici une signification du mot milieu comme ligne de partage d'une figure en deux parties égales.

Enfin, un élève a explicité l'emplacement des droites de symétrie du rectangle à la classe en ces termes :

(pour l'une des droites) : *-passe par le milieu de la longueur*

(et pour l'autre) : *- passe par le milieu de la largeur.*

La "longueur" et la "largeur" du rectangle sont des bandes et non des côtés, et le "milieu de la longueur" est une droite.

Signalons que, si dans le cadre d'une situation d'action, les différents sens donnés à ces mots fonctionnent bien entre les élèves, ce n'est plus vrai dans une situation de formulation. C.Laborde (1982) a montré les difficultés soulevées par les différentes significations du mot "bord" dans une situation de communication entre élèves en géométrie.

En conclusion, le mot "milieu" renvoie chez les élèves à un point d'équilibre ou une ligne d'équilibre, ce qui explique sa relation étroite avec la droite de symétrie d'une figure. La propriété du milieu de la droite de symétrie d'une figure est donc très présente tant dans les procédures utilisées par les élèves pour la tracer, que dans les expressions utilisées pour désigner son emplacement. Cette propriété va de soi pour les élèves : elle n'est jamais remise en question, ni discutée.

Il n'en est pas de même pour la propriété d'orthogonalité, comme nous allons le voir maintenant.

II.2.3. La propriété d'orthogonalité est peu utilisée

Le tracé des médiatrices du segment et du bi-point (figures 8 et 9) exigeait le choix d'une direction de droite. En effet, la propriété d'unidimensionnalité dans le plan de ces deux figures entraîne l'insuffisance des procédures de recherche des milieux. D'autre part, du fait que les médiatrice de ces deux figures étaient obliques dans la feuille, les directions orthogonales (au segment et au bi-point) ne peuvent être confondues avec les directions privilégiées dans la feuille.
Lors des échanges concernant ces deux figures, les élèves explicitent la prise en compte du "milieu" dans la plupart des groupes, comme l'illustrent cet extrait :

groupe 6 *-Oui, y en a une, tu traces au milieu.*
Les élèves ne sont pas satisfaits du tracé et l'expriment à l'enseignant qui passe près d'eux.
- Monsieur, on l'a mal tracée, pas au milieu, que fait-on ?

Par contre, aucun élève n'a explicité à un moment ou à un autre du travail en groupe le choix de la direction de la droite. Et pourtant, les directions de toutes les droites tracées sont très proches de la direction orthogonale au segment.

La propriété d'orthogonalité est donc sous-jacente dans les procédures de construction des droites de symétrie de ces deux figures, mais elle n'est jamais explicitée.

Lors du travail sur le parallélogramme, le groupe 3 a soulevé un problème qui est lié à la propriété d'orthogonalité.

groupe 3 *C- Oui, y en a, c'est celui qu'il nous a donné l'autre fois.*
E propose une droite (diagonale), puis après reflexion,
Il faut que ce soit carré.

Nous ferons deux remarques :
- Cette expression renvoie à la recherche d'angles droits dans la figure. Nous avons vu le prégnance de segments perpendiculaires dans une figure dans la perception d'une symétrie axiale, surtout lorsqu'ils ont des directions privilégiées (triangle rectangle, croche).
- Pour réfuter la droite de symétrie proposée, la démarche des élèves consiste à exprimer ce qu'il faudrait changer dans la figure. Nous avons retrouvé cette démarche à plusieurs reprises.

Le mot "carré" peut se rapporter soit à un des angles au sommet du parallélogramme, soit à

l'angle que forment les deux diagonales. Les figures ayant cette caractéristique sont des quadrilatères particuliers. L'un d'eux, le losange, a été explicitement évoqué dans le groupe 7, pour la figure 5 (parallélogramme avec diagonale), en réponse à un élève qui proposait comme droite de symétrie la diagonale non tracée :

groupe 7 *-Et comme ça ?*

- Non, c'est ce que j'ai vu, mais, non, ***Il faudrait que ce soit un losange.*** *Mais là, comme c'est, les traits sont plus longs là et plus courts là.*

L'argument fait appel à la différence des longueurs des côtés de la figure, qui rend impossible la correspondance des deux segments par symétrie.

En résumé, contrairement à la propriété du milieu, la propriété d'orthogonalité n'est jamais évoquée par les élèves, sous une forme ou une autre. Mais elle est sous-jacente aux procédures de tracé des médiatrices du bi-point et du segment, figures pour lesquelles il était nécessaire de déterminer, à un moment donné, une direction de droite. Cette propriété est donc présente dans le champ des règles d'action mises en oeuvre par les élèves dans cette tâche. Cependant, nous allons voir dans le paragraphe suivant les limites de son utilisation.

II.2.4. Les rappels horizontaux ou verticaux et le parallélisme, sources d'erreurs

Bien qu'un seul groupe (groupe 6) donne une réponse finale fausse pour la figure 4, la résolution des items 4 (parallélogramme coupé), 5 (parallélogramme avec diagonale) et 11 (parallélogramme) a provoqué des conflits et des remises en question dans plusieurs groupes. Nous analysons ci-dessous ce qui s'est passé dans deux groupes à propos de ces figures.

a. ce qui s'est passé dans le groupe 2

Les figures ont été traitées dans l'ordre des numéros 11, 4 et 5.

(Le parallélogramme)

Emilie *- Il y en au moins deux (E montre les deux droites parallèles aux côtés et passant par le centre)*

Laure *- Si tu plies, ça va revenir*

Stéphane *- On va tracer, d'accord*

Emilie *- Tu mets "oui"*

Mais Stéphane ne trace pas la droite attendue par Emilie, il a tracé une droite verticale !

Emilie *- Non, c'est pas ça. au fait, il y en a pas. On s'est trompé! Regarde si tu*

plies!

Stéphane - On s'est trompé, mais il y en a une parallèle.

Et il montre à nouveau une des deux premières droites (celle parallèle aux côtés non horizontaux).

Virginie - Mais non !

Stéphane barre alors la droite et le "oui"

Laure - Tu mets "non".

Stéphane entoure le "non" sur la feuille. Les élèves semblent maintenant tous d'accord.

C'est donc à propos des droites proposées par deux élèves que le conflit s'est engagé, et non à cause d'un désaccord sur leur existence. Ces droites sont de types différents, l'une est parallèle à deux côtés de la figure et l'autre est verticale dans la feuille. La recherche d'arguments pour réfuter la proposition d'Emilie va en fait conduire Stéphane à remettre en question sa propre proposition, puis la propriété de symétrie axiale de la figure. Il n'y a pas vraiment d'arguments formulés, mais plutôt des échanges qui semblent se jouer sur la perception, l'anticipation du résultat du pliage.

Cette déstabilisation n'est pas assurée, comme le montre les échanges concernant la figure 4, abordée cinq items plus loin.

(le parallélogramme coupé)

Stéphane -Oui!

(X) - Ben, non, ça fait comme l'autre, à part que.

Stéphane - Si, il y en a une, parallèle aux deux machins, comme ça, j'en suis sûr! (Il montre une droite parallèle aux deux côtés non horizontaux, passant par le centre).

Virginie - Mais non, c'est la même que l'autre. (fait référence à la figure précédente).

Stéphane -Non !

Emilie - C'est la même, sauf qu'il y a des traits en moins.

Virginie - Tu marques non, c'est de plus en plus facile !

Contrairement à Virginie, Stéphane ne reconnait pas l'identité des figures 4 et 11 par rapport à la propriété de symétrie. La réponse est choisie à la majorité mais Stéphane n'est pas convaincu et, deux items plus loin, le problème de l'existence de droites de symétrie est posé à nouveau pour la figure 5 (parallélogramme avec diagonale). Il est également résolu par décisison majoritaire et au moment de la récapitulation faite par le groupe, Stéphane va proposer à nouveau une droite de symétrie pour le parallélogramme (figure 5).

Les réponses données ne font donc pas l'unanimité des élèves. Au niveau du fonctionnement de l'interaction, on constate qu'il n'y a pas vraiment volonté de convaincre, mais qu'il s'agit

plutôt d'échanges d'informations. Finalement, le groupe est passé de la perception d'une symétrie axiale dans les trois figures à la reconnaissance qu'elles n'admettent pas de droites de symétrie. C'est une démarche inverse qui a eu lieu dans le groupe 6 que nous examinons maintenant.

b. ce qui s'est passé dans le groupe 6

Les figures ont été traitées dans l'ordre des numéros 4, 5 et 11. Pour la première figure (parallélogramme coupé), les élèves ont déclaré immédiatement qu'il n'y avait pas de droite de symétrie. Mais au moment de la vérification globale de leurs réponses, décidée par eux avant la mise en commun, l'un des élèves essaie de plier le long de la droite passant au milieu des deux segments coupés et conclut que c'est une droite de symétrie. Le groupe va acquiescer et rectifier sa réponse. L'item qui suit est l'item 5 (parallélogramme avec diagonale). Un élève propose la diagonale. Mais elle va être refusée après qu'un autre élève ait désigné l'emplacement d'un des sommets après pliage le long de cette droite. Son argument suffit à mettre les élèves d'accord. Enfin, l'item 11 (parallélogramme) abordé sept items plus loin, n'a soulevé aucune difficulté particulière.

Nous ferons là aussi deux constatations. La première est la difficulté pour les élèves de se convaincre de l'absence de droites de symétrie dans ces figures. La réponse d'un élève est facilement remise en question par un autre, que cette réponse soit juste ou fausse. L'une des raisons est la faiblesse des arguments formulés.

La seconde constatation est que l'évocation du résultat du pliage ne permet pas toujours de remettre en question la droite proposée. Il n'y a pas de contradiction perçue entre les deux informations : la droite est oblique et les deux sommets mis en correspondance sont sur une même horizontale.
Signalons enfin que, dans le groupe 7, un lien entre ces trois figures a été fait par rapport à la tâche. Les figures ont été abordées l'une à la suite de l'autre dans l'ordre des numéros 11, 5 et 4. Après avoir reconnu que la figure 11 (parallélogramme) n'avait pas de droite de symétrie, le solution pour la figure 5 (parallélogramme avec diagonale) est venue d'une comparaison avec la précédente :

- C'est pareil ! [...] ***C'est pas un trait qui va changer quelque chose.***

Ce qui ne convainc pas tous les élèves. Mais pour la figure 4 (parallélogramme coupé), de nouveau il est fait référence aux figures précédentes :

- Celle-là ***non plus.***

Les perturbations provoquées par les caractéristiques de ces trois figures sont importantes. Lorsque la diagonale est tracée, elle est proposée immédiatement et, lorsque deux des côtés sont particularisés (parallélogramme coupé), c'est une droite passant par les "trous" ainsi construits qui est proposée (groupes 2 et 6). Les hésitations et discussions reprennent pour chacune des trois figures. Les élèves ne reconnaissent pas en général qu'il s'agit de la même figure du point de vue de cette tâche.

La phase de bilan collectif révèle aussi ces difficultés. L'enseignant ayant choisi de traiter les items dans l'ordre de leurs numéros, les figures 4 et 5 ont été abordées à la suite l'une de l'autre et la figure 11 vers la fin de cette phase.

Pour la figure 4 (parallélogramme coupé), l'argument de l'égalité des côtés deux à deux va persuader très longtemps un élève de l'existence d'une droite de symétrie. La mesure des distances est privilégiée. Les arguments de réfutation donnés par d'autres élèves font référence aux sommets de la figure (les angles "vont dépasser") et au rappel horizontal reliant un des sommets de la figure et son symétrique. Mais ils ne parviennent pas à convaincre l'élève et c'est le résultat du pliage, finalement permis en dernier recours par l'enseignant, qui va lui montrer que la droite qu'il propose ne convient pas.

Au cours de la discussion, les élèves évoquent une image dans l'espace, celle du livre ouvert vu en perspective. Cette analogie pose le problème de la définition de travail que nous avons donnée : la matérialisation du pliage oblige à quitter le plan et à passer dans l'espace. Au moment de cette phase, l'élève ne maîtrise pas les propriétés liées à la transformation (égales distances et orthogonalité). Il doit passer par l'espace pour vérifier que les deux parties sont superposables. L'utilisation de cette analogie montre qu'il existe un problème de convention sur les signifiants en jeu dans cette figure : il s'agit d'une figure géométrique plane lue par l'élève comme une représentation plane d'un objet de l'espace. Nous reviendrons sur ce problème au paragraphe 9.

Cette analogie aurait du lancer le débat dans la classe, puisque l'élève qui avait proposé la droite qui était l'objet du débat voyait, lui, la figure dans le plan. Mais l'enseignant a tranché en affirmant que ce n'était pas un représentation en perspective.

Pour l'item 5 (parallélogramme avec diagonale), traité immédiatement après dans le bilan, il n'y a pas eu de discussion. L'argument avancé pour justifier que cette figure n'a pas de droite de symétrie a consisté à dire que "c'est exactement comme l'autre avant". Cet argument met en jeu une reconnaissance globale de forme (dimensions analogues, même orientation des côtés).

Il n'est pas pertinent ici et ne reflète pas les discussions relevées pendant les travaux des groupes. Mais le très long débat sur la figure précédente est probablement une des raisons qui a poussé l'enseignant à passer rapidement sur cet item.

De même pour le parallélogramme (fig.11), le bilan n'a soulevé aucun des problèmes rencontrés pendant le travail en groupe.

II.2.5. Directions privilégiées des droites de symétrie

Les échanges entre les élèves lors de la résolution des items 2 (deux cercles) et 3 (triangle équilatéral) confirment que la reconnaissance d'une droite de symétrie est liée à sa direction dans la feuille.

A propos de la figure 2 (deux cercles),le fait que la droite verticale ne "marche" pas implique pour un élève du groupe 2 qu'il n'y en a pas d'autre.

Laure *-(immédiatement)* ***là, y en a pas***
Virginie *- si, il y en a*
Emilie *- qu'une aussi*
Laure ***- où vous la voyez ? parce que ce rond là, il est plus petit que là***
Un des élèves lui montre la droite de symétrie (horizontale)
Laure *- ah, oui !*

Nous retrouvons la même règle d'action implicite chez des élèves des groupes 5 et 7.

groupe 5 *- y en a pas !*
-non, y en a pas, parce que les deux cercles, ils sont pas de même rayon.
-oui, mais, regarde ! Si tu imagines le milieu, ça, ça ira là et ça, ça ira là.
-Ah, oui ! Y en a une là !

groupe 7 *- Oui !* *- Non, ah, si !*
Claire - Ah ! Je croyais... (elle montre le pliage par rapport à une droite verticale).

Le simple fait de montrer la droite de symétrie suffit à convaincre l'élève de son erreur. L'organisation géographique des quatre élèves autour de la figure est intéressante de ce point

de vue, parce que les directions particulières liées au repère de chacun diffèrent d'un élève à l'autre. De même, pour la figure 3 (triangle équilatéral), les élèves reconnaissent plus difficilement les droites obliques dans la feuille.

Par exemple, Laure (groupe 2) est restée un long moment en désaccord avec les autres élèves du groupe. Elle a reconnu celle qui est horizontale dans la feuille, mais déclare qu'elle "ne comprend pas" pour les deux autres droites. Or c'est elle qui a proposé la première droite. Il faut que l'un des élèves explique à nouveau pour qu'elle accepte leur solution. Mais lors du retour sur les figures, Laure remet tout en question :

*L- **Je ne vois pas celle-là et celle-là !***

Virginie et Emilie vont arriver à la convaincre en montrant que la procédure de tracé est la même pour les trois droites. L'argument de preuve consiste ici à décrire la construction de la droite.

Emilie *- C'est les mêmes. Tu pars à chaque fois des angles et tu pars au milieu. Tu peux partir d'ici et tu peux partir d'ici, donc ça marche !*

Laure *- Ah, d'accord !*

Dans le groupe 3 aussi, Cécile va d'abord reconnaitre la droite horizontale, puis les autres plus tard.Dans le groupe 4, les élèves dans un premier temps n'en n'ont tracé qu'une: la droite horizontale. Et c'est seulement lors d'une vérification qu'une discussion s'engage, parce qu'Eric déclare qu'il y en 3. Mélanie n'est pas d'accord et, malgré l'insistance d'Eric, reste sur sa position jusqu'à ce que Franck intervienne en marquant avec l'ongle une des autres droites, puis l'autre. Tous tombent alors d'accord sur la validité des trois droites. C'est donc la matérialisation des droites (marquées avec l'ongle) qui provoque le changement de point de vue chez Mélanie.

Dans le groupe 6 aussi, les élèves en ont vu une, puis plusieurs. Seuls les groupes 5 et 7 ont donné tout de suite le nombre 3.

Nous retrouvons aussi cette difficulté dans les arguments échangés par les élèves du groupe 4 pour la figure 6 (fleur de palmier-dattier). Le lecteur peut lire ces échanges dans le paragraphe II.2.6 où ils sont reproduits pour illustrer un autre résultat.

Aucun problème n'a été soulevé dans la phase de bilan avec l'enseignant sur la question des directions des droites de symétrie. Il semblerait que les échanges lors du travail en groupe aient

permis aux élèves sinon de reconnaitre les droites, au moins d'accepter la pluralité des directions des droites de symétrie dans la feuille.

II.2.6. La propriété de symétrie d'une figure est liée à la parité du nombre de ses éléments identiques

La figure 6 (fleur de palmier-dattier) admet trois droites de symétrie qui sont chacune à la fois droite de symétrie d'un des éléments composant la figure et droite de symétrie de la figure composée des deux autres éléments.

Cette caractéristique a soulevé des difficultés dans trois groupes.
Un élève du groupe 1 exprime le problème en ces termes :

> *- Je suis pas d'accord, moi. Ces deux traits : là, y'en a qu'un et là y'en a deux. Pour quelle raison ?*

En fait, une partie de la droite coupe un arc de cercle, tandis que l'autre en coupe deux. Bien qu'un autre élève ait plié selon les 3 droites pour le convaincre, il reste sceptique.

Dans le groupe 6, un élève s'interroge sur la validité de la droite, alors que celle-ci est montrée avec le doigt. Il semble que, dans ce cas, l'anticipation du tracé de la droite ne suffit pas à la faire reconnaitre.

Les arguments échangés dans le groupe 4, à propos de cette même figure, illustrent autant les difficultés de reconnaissance soulevées par le statut particulier de ces droites que celles liées à leur direction dans la feuille. Nous allons les suivre un moment.

Dans un premier temps, les élèves sont tous d'accord sur le tracé d'une seule droite de symétrie (la droite verticale). Ce n'est que lors de la phase de vérification générale qu'Eric va reconnaitre les deux autres droites, approuvé par Sylvie.

Eric - *Eh ! attends une seconde ! Là, y en a 3 ! une, deux, trois !*
Sylvie - *Ah ! il a raison !*

Mais Franck n'est pas d'accord et Sylvie n'est pas sûre d'elle. Une longue conversation va s'engager pendant laquelle Sylvie et Mélanie vont se rallier alternativement à Franck et à Eric.

Franck - *Mais attends, quand tu plies sur ce côté là, elle viendra pas sur ce côté là.*
Sylvie - *Ah, ben, ouais, hein !*
Eric - *Attends, attends,* ***si celle-là, elle est juste****...(phrase en suspens)*
Mélanie - *(complètant la phrase de Eric)* ***pourquoi pas les autres ! [...]***
Franck - *Non, regarde, celle là, tu la plies dans ce sens là.*
Eric - *Ouais, et alors ?*
Franck - *Si tu mets une diagonale, là, si tu plies comme ça, ça viendra pas...*
Eric - *T'as rien compris, toi ! Si tu mets une diagonale ici, et ben, tu la plies comme ça !*
X - *pour celle là aussi, regarde (montre la verticale).*
Mélanie - *Non, celle là, elle est juste.*
Eric - *Il faut en rajouter deux !*

Sylvie va alors faire référence à une figure déjà rencontrée et Mélanie va se rallier à Sylvie pour tenter de convaincre Eric qu'il n'y en a pas d'autre.

Sylvie - *Mais, ça va faire pareil pour le carré-triangle-j'sais-pas-trop-quoi là....parce que celui là, on pouvait pas le faire.*
Mélani - ***Y en avait deux à celui-là, et y avait quatre parties, donc quand y en a trois, c'est un chiffre impair.***
Sylvie - ***Ca fait y en a pas !***

Le nombre impair de parties égales conduit ici les élèves à conclure qu'il ne peut pas exister plusieurs droites de symétrie. Mais la droite verticale ne semble pas remise en question.

La question n'est pas réglée dans la groupe et Eric revient à la charge. Excédés, les autres élèves vont finalement proposer de plier le long de la droite proposée par Eric, dans l'espoir de le convaincre qu'il a tort !

Mélanie - *Bon,* ***on va plier. Ah, mais si, il a raison !*** *Eh ! Il a raison !*
Sylvie - *Mais non, vous y tenez !*
Franck - *Mais lui, il veut mettre une diagonale.*
Eric - *Une diagonale comme ça, oui ! et alors ?*
Franck - *Attends, attends. On la trace avec l'ongle, on verra bien. Tu la plies donc en travers.*
Mélanie - *Si, si, c'est juste !*
Sylvie - *Si, il a raison.*
Eric - *Tu vois, hein ! Et puis c'est pareil pour l'autre aussi, hein encore.*
Mélanie - *Attends, attends, on va vérifier.*
Eric - *Si, c'est obligé, c'est pas la peine.*

Mélanie - *Oui, c'est obligé. [...]*
Sylvie - *On a rectifié !*

Il a donc fallu matérialiser la droite, en la marquant avec l'ongle, pour renverser la situation : cet argument avait pour but de réfuter la droite, il va au contraire permettre de la valider. Signalons que le bilan collectif n'a évoqué aucun des problèmes rencontrés pendant le travail en groupe.

II.2.7. L'existence d'une droite de symétrie confondue avec une partie de la figure ne tient qu'à l'épaisseur des tracés

Ce problème s'est posé dans quelques groupes et lors de la phase de bilan à propos de la droite de symétrie contenant le segment (figure 8). Un seul groupe ne donne qu'une droite de symétrie, le groupe 4, et c'est la médiatrice du segment. Pour les six groupes qui ont donné la droite contenant le segment, quatre d'entre eux ont tracé un trait recouvrant celui-ci et se prolongant au delà de ses extrémités, les deux autres groupes ont tracé un trait le prolongeant seulement sans le recouvrir.

Une analyse des échanges entre les élèves montre que la droite partage en deux le segment dans le sens de la longueur.

groupe 6 - ***Le demi-trait revient sur l'autre demi-trait***

groupe 7 *Un élève montre le segment.*
M-Mais non, c'est déjà un trait.
*G-**Tu fais dans le trait. On peut le diviser en deux.***

Le bilan collectif révèle que la droite qui contient le segment n'est reconnue comme droite de symétrie que parce qu'elle passe par le "milieu de l'épaisseur" du segment. Cette épaisseur est un argument en faveur de l'existence de la droite de symétrie. Il s'en suit que le segment n'est pas confondu avec la droite et que celle-ci est la droite de symétrie de la bande représentant le segment. La droite de symétrie, elle, ne semble pas avoir d'épaisseur.

Le dialogue entre l'enseignant et les élèves sur le "milieu de l'épaisseur" n'a pas permis d'éclaircir le problème de l'existence de la droite de symétrie qui contient le segment. Mais ce problème est difficile à traiter avec des élèves de 6ème.

Nous retrouvons un argument analogue pour l'existence et le lieu de la droite de symétrie passant par les deux points (figure 9), lors du travail en groupe. Un élève du groupe 1 dit qu'il faut traverser les deux points. Les élèves du groupe 4 évoquent une "moitié de bille" et ceux du groupe 6, "la moitié du rond". Ce qui nous montre que dans ces trois groupes, les points ont une surface.

Dans la phase de bilan, alors qu'un élève pose la question de la légitimité de "traverser les points", l'enseignant répond que ce sont bien des points :

- Ce sont bien deux points, on les a faits assez gros pour que vous les voyez bien.

Mais, lorsqu'un autre élève demande à si la droite s'arrête avant le point ou traverse le point, l'enseignant répond qu'elle "traverse très franchement".

Ces arguments amènent à se poser le problème du statut de la droite de symétrie dans la figure pour l'élève. Si la droite de symétrie peut passer au milieu de l'épaisseur d'un trait ou d'un point, quelle que soit cette épaisseur, c'est qu'elle n'a pas le même statut matériel que les éléments composant la figure. Elle semble rester en dehors de la figure qu'elle ne modifie pas, même lorsqu'elle est tracée.

II.2.8. Les parties disjointes ou "bien séparées" d'une figure sont analysées parfois séparément

Cela est surtout vrai lorsque chacune des parties est elle-même une figure symétrique. Nous donnons ci-dessous un résumé de ce qui s'est passé dans le groupe 4, à propos de la figure "deux cercles" (figure 2). Trois analyses différentes de la figure vont aboutir à trois réponses diférentes.

Dans un premier temps, Franck déclare qu'il n'y a pas de droite de symétrie car un des cercles est plus petit que l'autre. Les autres élèves vont se ranger à son avis. C'est l'analyse en deux cercles inégaux qui prime.

Lors de la vérification, Sylvie trace les diamètres verticaux des deux cercles en disant :

- Mais, il y en a plein, plein !

Elle analyse, elle, la figure, en deux figures séparées, mais Eric n'est pas d'accord car "les deux figures sont attachées".

Finalement, le groupe va proposer trois droites de symétrie : les diamètres verticaux des deux cercles et la bonne droite de symétrie, que l'un des élèves a reconnu.

Durant la phase de bilan, la question de savoir s'il s'agit d'une seule figure ou de deux figures est résolue par un argument erroné : "les deux ronds sont attachés". Le problème ne semble donc pas avoir été résolu, puisqu'un tel argument peut laisser entendre que deux cercles disjoints forment deux figures distinctes.

II.2.9. Les analogies avec des objets dans le plan ou dans l'espace ont une incidence sur les réponses des élèves

Les deux points de la figure 9 étaient dessinés au feutre et avaient donc une certaine épaisseur. C'est peut-être ce qui a conduit certains élèves à les associer à des ronds, des roues ou même des billes ! Ces extraits de dialogues montrent que ceux-ci "coupent une roue" ou "plient une bille" sans que cela pose problème.

groupe 2 *- il y en a deux, une qui coupe les deux* ***roues***
- il faut passer sur les ***ronds***

groupe 4 *F- Une là ! (montre celle passant par les deux points)*
E- Non, ici ! Mais, t'es fou, toi ! Ici ! (montre la médiatrice du bi-point)
F- Et ben, si t'en mets une là, tu peux les plier l'une par dessus l'autre, tu coupes la moitié de la ***bille****...elle se rabat sur l'autre.*

Pour la figure 7 (rosace), l'analogie avec une balle a conduit à la représentation d'un axe dans l'espace (groupe 3); dans le groupe 5, un élève a évoqué la courbure de "lames de faux" pour déclarer qu'il n'y a pas de droite de symétrie. Voici des extraits de dialogue à ce sujet.

groupe 3 *E- ça dépend si il faut faire pour la balle entière.*
S- Balle entière.
E- Alors, y en a une infinité !
E- Alors, par rapport aux trois parties du rond, y en a une infinité comme ça (elle fait tourner la feuille autour du centre).
groupe 5 *AL montre les courbes et parle de lames de faux. : Y en a pas, c'est courbe.*

L'analogie avec la balle amène à une réponse fausse. Par contre, l'analogie avec les lames de faux est pertinente, car l'absence de droite de symétrie dans la figure provient de la disymétrie

de chacun des trois éléments identiques la composant.

L'utilisation de ces mots analogiques ou métaphoriques n'apporte pas toujours une solution au problème géométrique posé. Ce sont des moyens d'expression qui font référence à des objets physiques familiers. Ces analogies sont plus ou moins pertinentes pour la situation et peuvent conduire à des réponses fausses. Nous avons vu comment la perception du parallélogramme comme une représentation plane en perspective d'un livre ouvert a conforté l'élève dans sa conviction de l'existence d'une droite de symétrie.

II.2.10. Rapports établis entre certaines figures

absence de lien entre un segment et deux points isolés

Il ne semble pas y avoir de rapport pour les élèves entre la détermination des droites de symétrie d'un segment et celle des droites de symétrie d'un bi-point. Aucun argument n'a été utilisé, ni pour comparer, ni pour différencier ces deux figures. Cette constatation rejoint un des résultats que nous avions obtenu lors de l'expérimentation "points-segments", à savoir qu'un élève n'établit pas une relation directe entre une figure et ses points particuliers dans une tâche de construction à main levée du symétrique d'une figure par rapport à une droite.

analogie des trois parallélogrammes dans cette tâche

Les élèves ont fait de nombreuses propositions de droites de symétrie. Une analyse des échanges dans les différents groupes montre que des liens sont établis parfois entre les figures 4 et 11 (parallélogramme coupé et parallélogramme), plus rarement entre la figure 5 (parallélogramme avec diagonale) et ces deux dernières. Ceci pourrait s'expliquer par une analyse de la figure 5 en deux triangles adjacents plutôt qu'en un parallélogramme avec une diagonale. En effet, les droites suggérées par les élèves pour les figures 4 et 11 sont parallèles aux côtés des parallélogrammes, ou verticales. Ces mêmes droites ne conviennent pas pour la figure 5.

III. Conclusion

III.1. Conceptions et procédures mises en oeuvre dans la tâche

Une règle d'action très utilisée est que la droite de symétrie partage la figure en deux parties égales : c'est aussi, de manière plus globale, la "droite des milieux", une ligne d'équilibre de la

figure. Elle conduit les élèves à reconnaitre (de manière erronée) une symétrie axiale dans les figures suivantes.

fig. 1

fig. 4

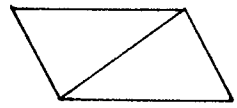


fig. 5

fig.11

La matérialisation des directions horizontale et verticale (éléments de la figure dans ces directions) ou de directions parallèles (éléments de la figure parallèles entre eux) va privilégier la recherche de droites à égale distance relativement à ces directions.

Lors de cette recherche, l'anticipation du résultat du pliage va provoquer la remise en cause des lignes de symétrie courbes, et donc aboutir à la négation d'une symétrie pour la figure 1. Par contre, le partage en deux parties identiques fonctionne bien pour les trois autres figures. Il est donc nécessaire de faire intervenir une autre règle d'action pour remettre en question l'existence des droites de symétrie pour ces trois figures.

Ce théorème en acte conduit à une analyse de la figure en "**deux** parties **identiques**". Il va donc apporter des difficultés lorsque la figure présente des éléments non isométriques mais de même nature géométrique, ou des éléments identiques mais en nombre impair. C'est le cas pour les figures ci-dessous :

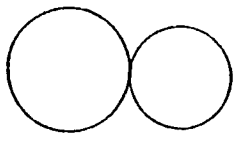


fig. 2

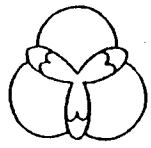


fig. 6

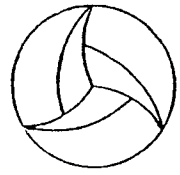


fig.7

Une telle analyse aboutit à conclure que ces trois figures n'admettent pas de droite de symétrie, mais pour des raisons différentes pour la figure 2 d'une part et les figures 6 et 7 d'autre part :
-la figure 2 est composée de deux cercles non identiques : c'est l'isométrie qui est en jeu;
-les figures 6 et 7 ont un nombre impair d'éléments : le partage en deux ne "marche" pas.

Pour résoudre le problème, l'élève doit changer de point de vue et mener une analyse différente de la figure pour être en mesure de fournir des arguments justes à l'existence ou non de droites de symétrie.

Lorsque les éléments de même nature ne sont pas isométriques (figure 2), l'analyse qui permet de construire la bonne réponse est complexe, car elle implique de mettre de côté la décomposition évidente de la figure. Lorsque les éléments repérables sont identiques, mais en nombre impair (figures 6 et 7), il faut chercher la propriété de symétrie de ces éléments.

Dans le cas de la figure 6, l'analyse "gagnante" consiste à reconnaître le statut particulier de ces droites de symétrie : chacune est à la fois droite de symétrie de paires d'éléments identiques (qui sont donc symétriques l'un de l'autre) et droite de symétrie de l'élément restant. Pour la figure 7, il faut reconnaitre que l'absence de symétrie axiale des trois éléments identiques entraine l'absence de droites de symétrie dans la figure. La tâche a été mieux réussie pour la figure 7 que pour la figure 6.

La mise en oeuvre de la "propriété du milieu" suffit pour tracer à main levée les droites de symétrie des trois figures précédentes. Par contre, ce n'est plus vrai pour les figures 8 et 9 pour lesquelles le tracé des médiatrices oblige à choisir une direction à partir du milieu du segment ou du bi-point, direction qui n'est induite par aucun élément de ces figures.

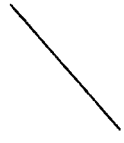


fig.8

fig. 9

Cette direction (orthogonale au segment ou au bi-point) ne peut être confondue avec aucune autre. Or, le choix de tous les groupes a abouti à des tracés très proches des médiatrices, avec une bonne précision pour une construction à main levée. La "perpendicularité" n'ayant jamais été explicitée ni donnée comme argument de choix pendant le travail des groupes, nous concluons qu'elle est implicite chez les élèves et qu'elle est très liée à un contrôle perceptif de la direction des droites. Or, ce contrôle perceptif fonctionne tant qu'aucune perturbation n'intervient sur la perception globale de la figure dans la feuille.

Enfin, il existe chez les élèves une conception de la droite de symétrie comme élément ne s'intégrant pas à la figure, ayant donc un statut à part. En effet, il ressort de certains arguments

échangés que la droite de symétrie n'a pas d'épaisseur, et son tracé semble moins "matériel" que les éléments de la figure. Une telle représentation est intéressante, car elle peut permettre de considérer la notion de droite de symétrie indépendamment des figures du plan. Mais, d'un autre point de vue, elle soulève le problème du statut pour les élèves des points ou éléments invariants dans le pliage. La mise en commun avec l'enseignant a montré que les deux points isolés (fig. 9) ou le segment (fig. 8) sont partagés par la droite plutôt que d'en faire partie. Ils sont donc invariants globalement (les deux parties du disque-point ou les deux demi-épaisseurs du segment sont symétriques).

Deux questions restent ouvertes : l'existence de la droite est-elle liée à la seule épaisseur du segment et l'invariance point par point est elle une notion accessible à des élèves de classe de 6ème ?

Les élèves ont rencontré également des difficultés qui sont spécifiques des figures géométriques. Ainsi, il y a parfois une difficulté à considérer comme une seule figure des figures composées d'éléments disjoints (problème de l'homogénéisation de l'espace). D'autre part, l'utilisation de symboles et d'images analogiques comme moyens pour évoquer la figure, échanger des arguments, peut aboutir à des réponses erronées, si l'analogie n'est pas pertinente. Nous en avons vu des exemples pour les deux points isolés et la rosace.

III.2. Apprentissages apportés par l'activité

L'évolution du champ conceptuel de la notion de symétrie-pliage depuis la phase de diagnostic témoigne de certains apprentissages.

Initialement, une conception répandue est que la droite de symétrie d'une figure est verticale. Un des apprentissages constatés est la reconnaissance de droite de symétrie dans différentes directions dans la feuille. Une particularité de cette situation qui a pu intervenir dans cet apprentissage est la situation géographique des élèves autour de la figure. Dans cette activité, la position de la figure (et de la feuille) n'est la même pour aucun des élèves du groupe. Les droites de symétrie ont donc des directions relatives pour chaque élève, par rapport à ses directions privilégiées propres, la verticale étant alors repérée par rapport à son corps. Cette contrainte est intéressante dans la mesure où elle peut permettre de différencier cette direction de celles liées aux bords de la feuille.

Cette situation géographique des élèves autour de la figure a certainement permis de faire émerger les droites de symétrie qui n'avaient pas été vues tout de suite pour les figures

suivantes :

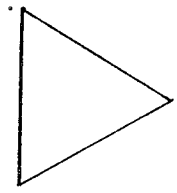


fig. 3

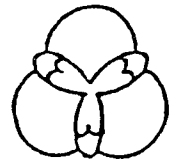


fig. 6

La variable "direction dans la feuille" joue un rôle malgré tout dans le cas d'une figure complexe. Par exemple, dans le cas des figures à motifs ternaires (triangle, rosace), les droites obliques dans la feuille sont moins facilement reconnues.

Un deuxième apprentissage consiste en un affinement de la perception de la droite de symétrie comme droite partageant la figure en deux parties identiques. Les élèves ont rencontré à ce sujet le problème de la nécessité de la pertinence de l'analyse de la figure. Ils ont rencontré des figures composées de deux éléments de même nature mais non isométriques, ou composées de trois éléments identiques, qui admettaient une droite de symétrie. Cet affinement revient à une prise de conscience que les deux parties identiques ne sont pas forcément évidentes.

Par contre, la propriété d'orthogonalité n'est pas reconnaissable dans cette activité. Nous constatons seulement qu'elle n'est pas respectée dans certains tracés de droites proposés par les élèves (parallélogramme). Elle n'est pas non plus utilisée à des moments où elle pourrait permettre d'invalider une réponse erronée : les élèves préfèrent évoquer le résultat anticipé du pliage. D'autre part, pour les tracés des médiatrices du segment et du bi-point (obliques dans la feuille), il est difficile de savoir si c'est la propriété d'orthogonalité qui a induit les procédures de tracé, ou si c'est le contrôle perceptif très facile qui a permis aux élèves de réussir à ces items.

D'un point de vue général, l'activité a rempli en grande partie ses objectifs. Elle a permis de remettre en question des perceptions de symétrie-pliage erronées ou trop restreintes, et de préciser avec les élèves la notion mathématique de droite de symétrie d'une figure par rapport à la notion culturelle de symétrie bilatérale, qui semble très répandue.

Lors de l'élaboration de la deuxième séquence d'enseignement, nous avons apporté quelques modifications à cette activité. Ces modifications et leurs objectifs font l'objet du paragraphe IV que nous abordons maintenant.

IV. Modifications apportées à la tâche pour la 2ème séquence

IV.1. Introduction de la propriété d'incidence

La propriété "deux segments se correspondant dans la symétrie se coupent sur la droite de symétrie" n'a pas été mise en jeu dans l'activité précédente. Les caractéristiques des figures que nous avons choisies ne sont pas adaptées pour cela. En effet, pour cinq des six figures qui en admettent, aucune des droites de symétrie ne passe par un point invariant "marqué", c'est-à-dire reconnaissable comme tel sur la figure. La construction à main levée ne prend en compte que les milieux des segments ou les milieux de courbes. Quant aux centres des cercles et au milieu du bi-point, ils sont à déterminer entièrement au jugé. Seules les droites de symétrie du triangle équilatéral passent par les sommets. Mais dans ce cas, les points situés sur la droite sont plus identifiables comme sommets que comme points d'intersection de deux segments.

Les propriétés d'incidence font partie de celles que nous voulons établir avec les élèves dans la séquence. Notre question est de savoir si on peut les introduire dans la tâche de construction à main levée. Dans cet objectif, nous avons choisi les deux figures suivantes :

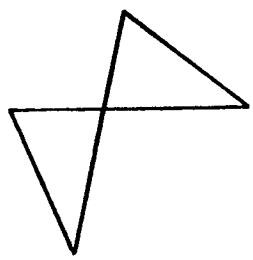


fig.a

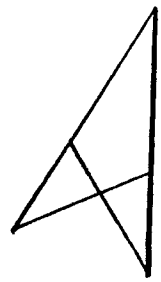


fig.b

Pour ces deux figures, les points invariants sont des supports de construction donnés : la droite de symétrie de la figure (b) passe par deux points bien identifiables de la figure, celle de la figure (a) passe aussi par un point d'intersection bien marqué et doit être en plus déterminée par une direction.

Nous faisons l'hypothèse que les élèves vont faire passer la droite de symétrie par les points d'intersection des segments. Mais le statut de ces points ne sera pas pour autant reconnu : cil revient à l'enseignant de désigner aux élèves les relations d'incidence sous-jacentes lors de la phase de bilan.

IV.2. Mise en jeu de la variable connexité de la figure

Cette variable n'a pas été prise en compte si l'on considère que les deux seules figures non connexes de l'activité sont composées de parties qui ont un statut particulier : deux points isolés et deux lignes polygonales non fermées (parallélogramme coupé) qui forment une figure pouvant être perçue comme connexe. Or un problème s'est posé à propos de la figure "deux cercles" à ce sujet. Notre intention est donc de faire expliciter les éventuelles difficultés attachées à de telles figures. Nous avons choisi les deux figures suivantes :

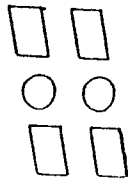


fig. c

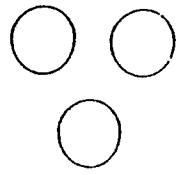


fig. d

Dans la figure (c), la direction horizontale de la ligne des centres des cercles et la disposition en parallélogramme des éléments qui composent la figure peuvent induire l'existence d'une droite de symétrie. Ceci est renforcé par le fait que les cercles sont déconnectés des autres éléments.

Les éléments identiques composant la figure (d) admettent une infinité de droites de symétrie. La non connexité et le nombre impair de ces éléments peut induire une analyse de la figure en trois figures indépendantes admettant chacune une droite de symétrie verticale.

IV.3. Modification des valeurs de quelques variables

Il n'est pas raisonnable dans une séance de classe en temps limité de donner aux élèves un trop grand nombre d'items. Nous avons donc choisi de supprimer les cinq figures suivantes :
- le rectangle et le triangle équilatéral (fig.10 et 3), parce qu'ils mettaient en jeu essentiellement la direction des droites de symétrie dans la feuille, variable dont l'influence est dépassée dans le travail en groupe pour ces deux items (§II.2.5);
- le segment et les deux points isolés (fig.8 et 9) parce que, d'une part, les médiatrices des deux figures sont reconnues par les élèves sans difficulté et correctement tracées (§II.2.3), et que, d'autre part, la question de l'existence des autres droites de symétrie ne peut être résolue à l'occasion d'une telle tâche (§II.2.7);
- l'item 7 (hélice), parce qu'il a été très bien résolu.

Deux items sont inchangés, il s'agit des items 1 (plume) et 6 (fleur de palmier-dattier).

Quatre figures sont conservées après modification de leur position dans la feuille. La figure 2 (deux cercles) est placée dans la feuille de telle manière que la droite de symétrie soit oblique. Les trois parallélogrammes (figures, 4,5 et 11) sont placés de telle manière que deux de leurs côtés parallèles sont verticaux. L'objectif est de repérer si les difficultés sont les mêmes que lorsque cette direction est horizontale. Signalons que les caractéristiques précédentes (deux côtés parallèles horizontaux) sont présentes dans la figure (c) que nous avons rajoutée.

Enfin, deux figures ont été rajoutées, (figures (e) et (f) ci-dessous), dans l'objectif d'une étude PNL réalisée par d'autres chercheurs en liaison avec la symétrie, avec les élèves de la classe.

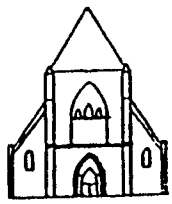


fig.e

fig.f

La résolution de l'item (e) ne devrait poser aucun problème et donc ne devrait pas jouer un rôle particulier dans le déroulement de l'activité. La figure (f) a une propriété de symétrie centrale.

IV.4. Ordre des figures

Dans cette deuxième séquence, les items sont donnés aux élèves un à un dans l'ordre de leur numéro décrit ci-dessous. La dénomination des figures est un moyen pour nous de les mémoriser tout au long de cette analyse : les élèves ne disposaient que des numéros des figures. Les analogies et les différences des items par rapport à ceux de la séance précédente sont résumés ci-dessous, les figures sont reproduites à la fin de ce paragraphe.

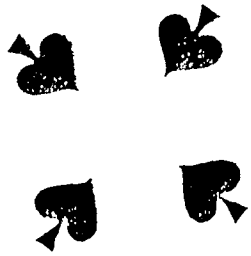
n°	dénomination	rapport aux précédents items
1	plume	identique
2	trois cercles disjoints	nouvelle figure, connexité
3	papillon	nouvelle figure, relations d'incidence
4	motif	nouvelle figure, connexité et parallélisme horizontal
5	deux cercles tangents	droite de symétrie oblique
6	parallélogramme avec diagonale	direction différente de celle de la séquence précédente
7	parallélogramme	pour les trois parallélogrammes : deux côtés verticaux
8	parallélogramme à bords coupés	
9	fleur de palmier-dattier	identique
10	église	nouvelle figure; une droite de sym. verticale
11	yin-yang	nouvelle figure, symétrie centrale
12	tente	nouvelle figure, relations d'incidence

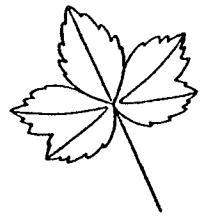
IV.5. Dispositif expérimental et plan de la séance

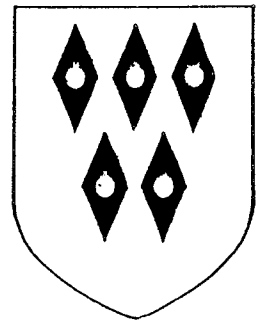
Le dispositif expérimental est identique au précédent : les élèves travaillent par groupes de quatre et doivent fournir une solution commune. La consigne est la même. Nous rappelons que le temps imparti pour la séance est le suivant (110 mn) : 1ère partie (séance collective), 10 à 15 mn; 2ème partie (activité de groupe), 40 à 45 mn; 3ème partie (bilan et institutionnalisation), 50 à 60 mn.

modifications dans l'activité collective préliminaire

L'activité collective pour introduire la notion de droite de symétrie d'une figure est identique à la précédente en ce qui concerne la question posée aux élèves et la "définition de travail" qui en est l'aboutissement. Mais deux des trois figures sont différentes, seule la "feuille" est inchangée. Les deux nouvelles figures sont une figure admettant une droite de symétrie verticale (blason) et une figure non connexe présentant 4 droites de symétrie toutes obliques. Lors de cette activité collective, il est convenu avec l'enseignant de faire réaliser effectivement les pliages le long des droites proposées par les élèves. Ceci n'a pas été fait dans la séquence précédente. L'anticipation du résultat du pliage étant la référence dans cette première activité, il est plus sûr pour l'élève d'avoir vu sa réalisation effective. Les trois figures sont reproduites ci-dessous.







aménagements dans la phase de bilan

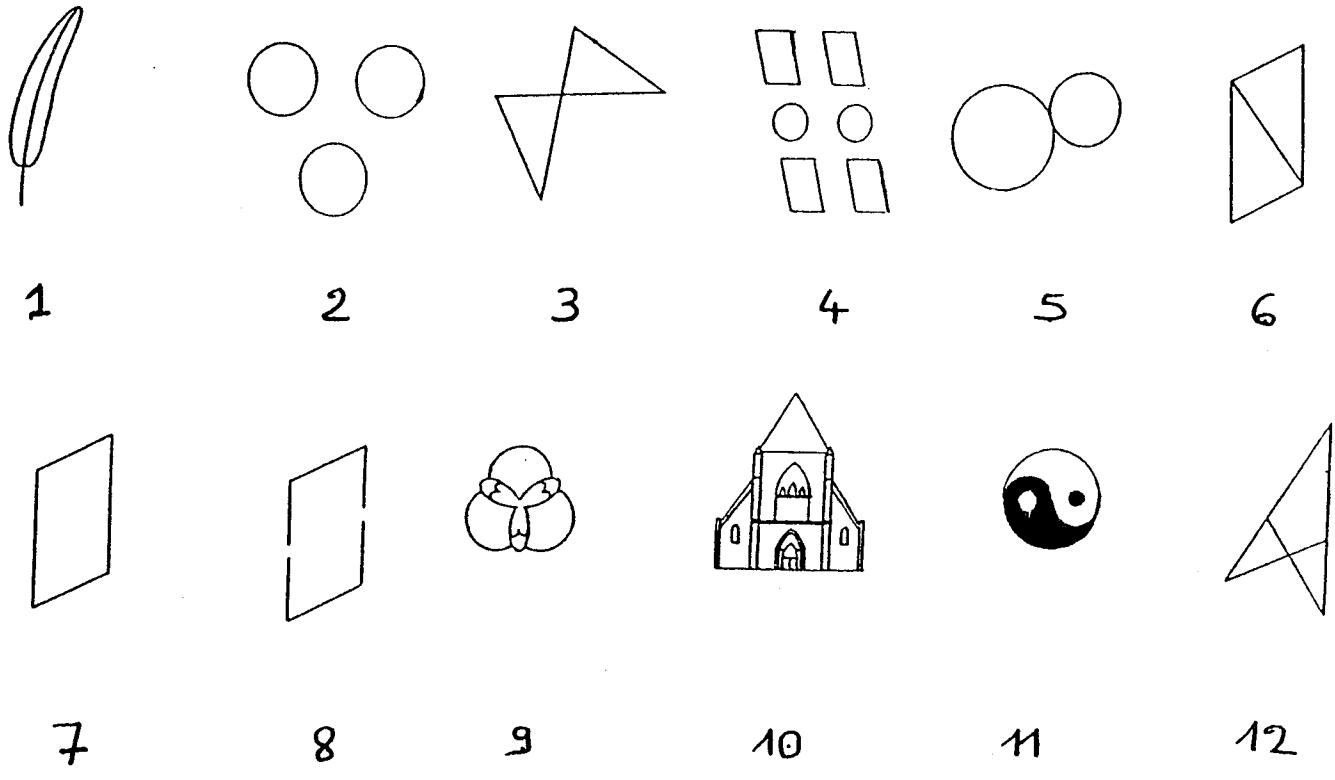
Une heure de mise en commun, c'est long. Aussi faut-il organiser des changements de rythmes ou trouver un moyen de dynamiser la classe. D'autre part, il est nécessaire de permettre que toutes les procédures erronées soient extériorisées. Pour cela, nous avons décidé avec l'enseignant de veiller aux points suivants :

- dans chaque groupe, la parole sera donnée à tour de rôle pour chaque figure. Ainsi, tous les

élèves du groupe sont concernés directement.

- pour une figure, l'enseignant demandera d'abord à tous les groupes leurs réponses (le nombre des droites de symétrie), sans permettre aucun commentaire, et seulement ensuite à la classe la justification de cette réponse. Ceci devrait permettre aux élèves d'argumenter sur les réponses des autres groupes.

figures de l'activité de groupe (deuxième séquence)



V. Analyse de la deuxième réalisation de l'activité

Nous avons centré notre analyse sur l'apport des modifications de la situation par rapport à la première séquence. Nous ne développons pas les échanges des élèves pendant le travail de groupe, mais nous donnons un résumé commenté des réponses fournies (§V.1). Par contre, il nous a semblé intéressant de faire une analyse de la phase de bilan avec l'enseignant, en fonction des objectifs spécifiques de cette réalisation par rapport à la précédente (§V.2).

V.1. Réponses des groupes

V.1.1. Résultats bruts

Le tableau ci-dessous donne, pour chaque item, la réponse proposée par chacun des six groupes, c'est-à-dire le nombre de droites de symétrie de la figure.

groupe	1	2	3	4	5	6	commentaires	réponse juste
items								
1	0	0	0	0	0	0		0
2	3	3	3	1	3	3	gr.4 n'a tracé que la verticale	3
3	1	1	1	1	1	1		1
4	2	2	2	2/0	2/0	2	gr.4 et 5 : barrées lors vérification	0
5	1	1	1	1	1	1		1
6	0	0	0	0	0	0		0
7	0	0	0	0	0	0		0
8	0	0	0	1/0	0	0	gr.4 : droite barrée tout de suite	0
9	3	3	3	3	3	3		3
10	1	1	1	1	1	1		1
11	0	0-2	0	2	2	1/0	gr.2 : choix laissé selon couleur	0
12	1	1	1	1	1	1		1

note : "2/0" veut dire que deux droites ont été tracées, puis barrées. Nous trouvons de tels cas pour les items 4,8 et 11. Pour l'item 11, le groupe 2 a donné deux réponses, selon que les couleurs noir-blanc étaient à considérer différentes ou non.

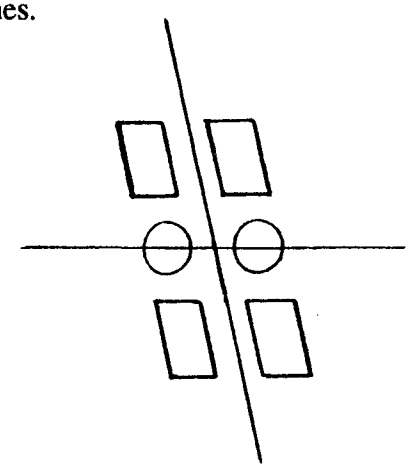
V.1.2. Analyse des productions et des procédures

Neuf des douze items sont réussis par tous les groupes. Cette réussite était attendue pour les items 1,3,10 et 12. Nous avons explicité les raisons de la présence de chacun de ces quatre items dans cette phase. En particulier, le rôle essentiel des items 3 et 12 se situe dans la phase de bilan. Notons que pour l'item 1 (plume), le groupe 5 a d'abord tracé une ligne de symétrie (nervure prolongée en conservant la courbure) qui n'a été remise en question puis barrée que lors de la vérification globale en fin du travail du groupe.

L'item 5 (deux cercles) a été très bien résolu, ce qui confirme que la difficulté de la direction oblique de la droite de symétrie est surmontée dans le travail de groupe. L'item 9 est aussi très bien résolu. Cependant, on retrouve dans le groupe 6 la prégnance de la verticale, qui a été tracée la première, les deux autres droites l'ayant été un peu plus tard. La aussi, les différentes directions sont reconnues au cours du travail en groupe.

a. translation horizontale de segments parallèles

La réussite totale aux items 6, 7 et 8 nous conduit à faire deux remarques. La première concerne l'influence des directions privilégiées dans la feuille. Lors de la séquence précédente, les trois parallélogrammes présentaient dans la feuille deux côtés parallèles horizontaux. Les conflits entre les élèves avaient été grands pour décider s'il y avait ou non des droites de symétrie dans ces figures. Il semble que lorsque ces côtés sont verticaux, l'absence de symétrie axiale est reconnue plus facilement. Entre autres différences, la représentation d'un objet de l'espace est moins évidente dans cette position.C'est bien cette variable qui joue puisque la figure 4 présentant des éléments égaux horizontaux formant une figure globale en parallélogramme est la moins réussie : tous les groupes ont proposé les deux mêmes "fausses" droites de symétrie ci-dessous, même si deux d'entre eux ont rectifié leur réponse au moment de la vérification globale de leurs réponses. Des liens ont été établis par certains élèves entre les différents parallélogrammes.



Nous avons là une nouvelle confirmation que la combinaison d'éléments parallèles deux à deux et d'éléments horizontaux induit très fortement une perception de symétrie axiale.

b. variable connexité de la figure

Les réponses aux items 2 et 4 ne permettent pas de repérer l'influence de cette variable. En effet, les droites tracées dans la figure 4 séparent les quatre parallélogrammes la composant, mais l'une coupe les cercles en deux parties et ces deux droites sont tracées l'une comme

l'autre. La figure est donc bien considérée globalement et non par parties disjointes. De même, les questions soulevées pour la figure 2 ne sont pas en rapport avec cette variable.

c. parité du nombre d'éléments identiques

Il semble que c'est plus la parité du nombre des éléments identiques qui a joué pour la figure 2. En effet, on constate à nouveau que la reconnaissance des droites non verticales n'est pas immédiate dans trois groupes sur six. Elle n'est même pas du tout apparue dans le groupe 4 qui n'a tracé que la droite verticale. Dans les groupes 1 et 6, elles n'ont été tracées que plus tard. Nous avons la confirmation du rôle perturbateur de la combinaison des variables direction des droites dans la feuille et parité du nombre d'éléments identiques.

d. influence des couleurs sur la propriété de symétrie d'une figure

Le problème soulevé par la figure 11 n'était pas attendu, parce que cette figure intéressait surtout une recherche PNL en liaison avec la nôtre, et nous n'avions pas assez étudié ses caractéristiques. Sa double coloration a soulevé de nombreux problèmes pour les élèves. En voici des exemples :

-si on tient compte de la couleur, il n'y a pas de symétrique, sinon il y en a 2 (groupe 2)
- on ne tient pas compte des couleurs (groupe 5, a tracé deux droites)

Lors de la phase de bilan, l'enseignant a réglé ce problème en remplaçant la figure par la même sans différences de fonds. Le problème a alors été immédiatement résolu.

V.2. Quelques éléments de la phase de bilan (deuxième séquence)

Nous donnons seulement les éléments qui correspondent à ce qui devait être mis en évidence par l'enseignant lors de la phase collective.

V.2.1. Le statut particulier des droites de symétrie des motifs ternaires

Le statut particulier des droites de symétrie de la figure 2 a été relevé par un élève dans la phase de bilan

les deux ronds se superposent et les deux moitiés de cercle aussi.

Cette caractéristique est reprise par l'enseignant pour toute la classe :

> *un cercle comme ici, il est coupé en deux, alors que [...] ces deux cercles ne sont pas coupés en deux, ils se superposent.*

Il aurait été intéressant ici de faire la différence avec une figure possédant aussi une symétrie de rotation d'ordre 3 mais n'admettant pas de droite de symétrie. Mais il n'y avait pas ce type de figure dans l'ensemble de celles proposées aux élèves.

V.2.2. Les propriétés d'incidence n'ont pas été explicitées

Les items 3 (papillon) et 12 (tente) devaient permettre, lors de la phase de bilan, de faire expliciter aux élèves la propriété qu'ils avaient tous utilisée comme règle d'action : le point d'intersection de deux segments symétriques est situé sur la droite de symétrie. L'objectif n'a pas été atteint parce que le débat à propos de la figure 3 s'est centré sur une analyse de la figure en deux triangles, puis sur l'identification par les élèves des sommets des triangles qui se correspondent dans le pliage. Une conséquence est que le point situé sur la droite de symétrie n'est pas étiqueté comme le point d'intersection de deux segments symétriques, mais comme un point de la figure qui est sur la droite de symétrie. De même, lors du bilan sur la figure 12, c'est la propriété d'invariance des deux points qui a été mise en évidence.

Or, le rôle de l'enseignant était ici primordial pour permettre que cette propriété de deux segments symétriques soit exhibée. Celui-ci a laissé la discussion s'installer autour d'une figure 3 analysée en deux triangles. Le travail de mise en correspondance des sommets de ces deux triangles a été demandé par l'enseignant dans l'objectif d'en venir à l'intersection des deux segments, mais ce n'était pas possible avec cette analyse de la figure. De plus, pour la figure 12, le temps investi a été près court pour des raisons de contraintes horaires.

V.2.3. Les difficultés de prise en compte de la "perpendicularité"

Lors du bilan sur la figure 4 (motif hélice), les deux droites de symétrie erronées sont tracées au tableau sur la demande de l'enseignant. Cette décision a permis de rassembler les élèves autour du débat sur la validité de ces droites.

La première droite mise au débat est la droite oblique. L'enseignant reformule le problème soulevé par quelques élèves, issus des groupes qui ont rectifié leur erreur pendant la phase de vérification.

explique pourquoi ça ne se superpose pas. Là, si on plie, qu'est ce qui va se passer ?

L'argument de Mathieu (groupe 5), puis celui d'un autre élève de la classe montrent que leur réfutation est liée à une absence d'orthogonalité dans la figure :

- *il n'y a pas d'angle droit*

- *la figure n'a pas d'angle droit*

Cette formulation peut s'interpréter en termes de propriété géométrique de la figure. Pour préciser cela, l'enseignant pose une question, mais celle-ci va rester sans réponse :

où le veux tu, ton angle droit ?

L'enseignant pose alors le problème en termes de transformation de points :

Si on voulait avoir le symétrique...enfin le point qui corresponde à celui-là, où se trouverait-il si cette droite était une droite de symétrie ?

Les réponses des élèves contiennent des termes comme "plus haut", "au-dessus" qui montrent que c'est la direction du segment reliant deux points symétriques par rapport à la droite de symétrie qui est en jeu. L'enseignant va lui aussi évoquer des angles droits, mais il ne parle pas d'orthogonalité, car son intention est qu'elle vienne des élèves. Pour réfuter la seconde droite proposée par les élèves (horizontale), l'absence d'angle droit est de nouveau évoquée, mais les échanges n'aboutissent pas non plus à exprimer la propriété d'orthogonalité. En fait, pour emporter la conviction générale sur le statut erroné de ces droites, il faudra réaliser effectivement le pliage.

Le débat sur les trois parallélogrammes (fig. 6, 7 et 8) pouvait être l'occasion de revenir sur cette propriété d'orthogonalité de la droite de symétrie. Mais, pour la figure 6, tous les arguments des élèves tournent autour de l'absence d'angles droits dans les figures. Les élèves restent sur l'idée de transformer la figure pour qu'elle admette une droite de symétrie, plutôt que de donner les raisons pour lesquelles elle n'en a pas.

Pour la figure 7 (parallélogramme), les élèves sont partagés : la majorité affirme que le problème est le même que le précédent. Ceci peut signifier qu'il y a reconnaissance de l'absence de la même propriété que pour la figure 6. Seule Patricia est convaincue qu'il existe une droite de symétrie, bien qu'elle n'arrive pas déterminer son emplacement. Elle trace une droite horizontale partageant la figure en deux parties égales. La matérialisation de la droite par le tracé lui suffit à remettre en question sa proposition, mais elle reste persuadée que cette droite de symétrie existe. L'enseignant ne parvient pas à règler ce problème. Il va être contraint de prendre une décision qui va à l'encontre des principes de preuve en géométrie : conclure que si l'on n'arrive pas à exhiber la droite de symétrie, il faut décider qu'il n'y en a pas.
Cet argument ne satisfait pas Patricia. En effet, lorsqu'on aborde la figure suivante (figure 8),

alors que les élèves reconnaissent tous que le problème est le même, elle reste convaincue que la droite passant entre les deux parties disjointes de la figure est une droite de symétrie.

V.3. Conclusion

L'analyse des deux réalisations de cette situation montre qu'elle est adaptée à l'expression des perceptions et des conceptions les plus répandues des élèves sur la notion de symétrie-pliage et celle de droite de symétrie. Elle permet de préciser la notion mathématique par rapport à la notion culturelle de symétrie bilatérale très répandue chez les élèves. La remise en question des conceptions erronées dues aux interactions des deux notions est rendue possible non seulement par un choix judicieux des caractéristiques des figures, mais aussi grâce à la situation sociale mise en place dans la classe. En témoignent les nombreux arguments échangés par les élèves lors des travaux de groupe. On peut considérer que cette situation joue le rôle de "stabilisateur du milieu" (Balacheff, 1988), dans le sens où elle permet aux élèves et à l'enseignant de s'assurer que la définition locale est bien mise en place et qu'elle peut fonctionner.

Au niveau des variables, on assite à une relativisation des directions privilégiées dans la feuille par rapport à l'activité individuelle précédente (ch.V).

Les tentatives d'explicitation des élèves, nécessaires pour valider leur réponse lors de désaccords, ont permis de repérer l'absence de prise en compte de la propriété d'orthogonalité et le fonctionnement implicite de la propriété du milieu. Cette dernière est systématiquement mise en oeuvre par les élèves, alors que le contrôle perceptif se substitue à la propriété d'orthogonalité dans des cas particuliers où la résolution de l'item est basée essentiellement sur la perception. L'enseignant doit donc porter son attention sur cette propriété, tant pour la mise en oeuvre que pour l'explicitation. Pour ce débat, le parallélogramme et ses variantes sont des figures géométriques d'un grand intérêt.

Les relations d'incidence ne peuvent pas être distinguées dans cette tâche de la propriété du milieu. En fait, la tâche de construction à main levée n'est pas adaptée à l'utilisation de ces relations. La règle d'action "le point d'intersection de deux segments correspondants est sur la droite de symétrie" est occultée par la stratégie de partage de la figure en deux parties égales : c'est ce que montrent les échanges dans la phase de bilan. Il revient donc à l'enseignant de faire prendre conscience de cette propriété aux élèves. En ce sens, une figure réduite à deux segments non parallèles, bien que ne présentant aucun intérêt pour l'activité de groupe, peut être un support privilégié lors de la phase de bilan pour introduire ces relations.

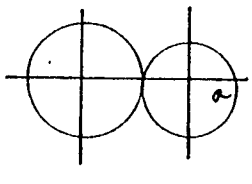
annexe : dépouillement des réponses des groupes (séquence 1)

Les figures ont été numérotées dans l'ordre que nous avions choisi pour la phase de bilan avec l'enseignant. Elles ont été traitées dans un ordre qui varie selon les groupes, car elles se présentaient dans une enveloppe et étaient tirées au hasard l'une après l'autre. Les réponses de chacun des groupes à la première question sont données en colonne 2. Une brève description des étapes du travail des élèves est faite en colonne 4. Les échanges qui nous ont semblés particulièrement intéressants (indiqués par une astérisque) ont été développés dans l'analyse qui fait l'objet de ce chapitre. La troisième colonne indique le nombre d'axes tracés.

figure 1 : la plume

groupe 1	non	Un élève propose la nervure. L'argument de réfutation est la non courbure d'un axe de symétrie. (*)
groupe 2	non	La nervure est proposée par 2 élèves; l'argument de réfutation est le problème de la courbure quand on plie. (*)
groupe 3	non	Résolution immédiate. Aucun argument explicite n'a pu être relevé.
groupe 4	non	Résolution immédiate; argument explicité :"c'est évident".
groupe 5	non	La nervure est discutée. L'argument de réfutation est le changement de courbure lorsqu'on plie.
groupe 6	non	Un élève propose la nervure. L'argument de réfutation est la non-superposition des deux lignes courbes quand on plie. (*)
groupe 7	oui	La nervure est proposée. Les élèves du groupe sont tous d'accord. Elle ne sera remise en question qu'au moment de l'affichage de la figure par l'enseignant, juste avant la discussion commune. (*)

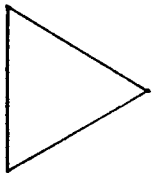
figure 2 : les deux cercles (l'axe de symétrie est noté (a))



groupe 1	oui	1	(Aucun renseignement sur les arguments des élèves)
groupe 2	oui	1	Un élève dit qu'il n'y en a pas, car les deux cercles ne sont pas de la même grandeur (évocation d'un axe vertical). Un autre montre alors (a) et tous sont d'accord. (*)
groupe 3	oui	1	(a)est donnée immédiatement. Accord général.
groupe 4	oui	3	Une première réponse est non; argument : l'un des cercles est plus petit que l'autre. Lors du retour sur les figures, les élèves reviennent sur leur réponse: l'un propose 3 axes (2 diamètres verticaux et (a)). Un autre dit que "il y en a plein".Le désaccord subsiste. Proposition définitive : trois axes. (*)
groupe 5	oui	1	La réponse est d'abord non, avec comme argument que les 2 cercles n'ont pas "même rayon" (droite verticale qui est évoquée). Un élève propose alors (a) et tous sont d'accord. (*)
groupe 6	oui	1	Un élève a d'abord répondu "non" d'un ton très convaincu. Puis il a eu accord sur (a).
groupe 7	oui	1	Un élève dit "non" et explique ensuite qu'il avait répondu ainsi en pensant à la verticale.

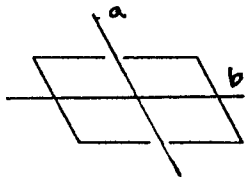
Dans les productions de cinq groupes, les tracés dépassent les cercles.

figure 3 : triangle équilatéral



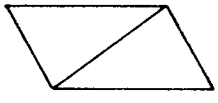
groupe 1	oui	3	Un élève dit d'abord "non", puis un autre montre l'axe horizontal(a) et immédiatement après les deux autres. (*)
groupe 2	oui	3	Le premier axe qui est reconnu est (a). Une des élèves a du mal à accepter les deux autres (b) et (c). Pour la convaincre un autre élève fait tourner la feuille. (*)
groupe 3	oui	1	Un élève parle d'abord de 2 axes, un autre n'en voit qu'un, il y a désaccord. Ce n'est que lors de la mise en commun que les trois axes seront découverts. (*)
groupe 4	oui	3	Seul l'axe horizontal est donné lors de la première résolution. Les deux autres seront reconnus lors du retour sur les figures pour vérification. (*)
groupe 5	oui	3	Les 3 axes sont tracés rapidement.
groupe 6	oui	3	Les élèves disent qu'il y en a une, puis plusieurs.
groupe 7	oui	3	Aucun problème soulevé. Les 3 axes sont tracés rapidement.

figure 4 : parallélogramme coupé



groupe 1	non		Il y a eu discussion à propos de superposition par pliage le long d'une droite de sommets.(nous ne savons pas lesquels).
groupe 2	non		Un élève est convaincu que (a)(parallèle aux petits côtés) est axe de symétrie. L'argument de réfutation renvoie à la figure 11 (parallélogramme)qu'ils ont traité avant. (*)
groupe 3	non		1 ((b)horizontale) réfutée par des essais de pliage.
groupe 4	non		Hésitations. Un élève revient sur un des parallélogrammes et conclut qu'il n'y en a pas.
groupe 5	non		Un élève propose "une au milieu" (b). Les autres ne sont pas d'accord. Un autre propose (a). De nouveau refusé. Les arguments ne sont pas explicités.
groupe 6	oui	1	La réponse était "non" lors de la première résolution. C'est lors d'un retour sur les figures que le groupe a changé d'avis, barré le "non", mis "oui" et tracé la droite (a). (*)
groupe 7	non		La réponses est "non". Puis, lors du retour sur les figures, un élève repose le problème de l'existence d'un axe : il hésite, parce que, dans ce cas, la droite "ne coupe pas"la figure. (*)

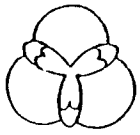
figure 5 : parallélogramme avec diagonale



groupe 1	non	(aucun renseignement sur le travail du groupe)
groupe 2	non	Un élève propose la diagonale tracée comme axe de symétrie. L'argument de réfutation utilise la non-superposition des côtés lorsqu'on plie. (*)
groupe 3	non	"non", parce que la diagonale n'est pas un axe de symétrie. Arguments liés au pliage.
groupe 4	non	A nouveau, hésitations. Aucun argument n'a été formulé.
groupe 5	non	argument exprimé : "on ne peut pas superposer tous les traits.
groupe 6	non	La diagonale est évoquée, puis refusée par détermination du

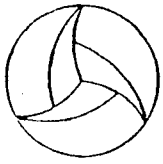
		symétrique d'un sommet. (*)
groupe 7	non	L'argument renvoie à la figure 11(parallélogramme). (*)

figure 6 : fleur de palmier-dattier



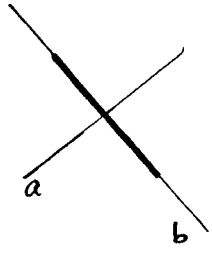
groupe 1	oui	3	L'accord se fait après une discussion qui met en jeu le double statut des axes de symétrie. (*)
groupe 2	oui	3	Aucun problème n'est soulevé explicitement. La résolution est immédiate.
groupe 3	oui	3	La résolution semble avoir été immédiate.
groupe 4	oui	3	Dans un premier temps, seul l'axe vertical est tracé. Ce n'est que lors de la récapitulation du groupe que les 2 autres axes sont reconnus. (*)
groupe 5	oui	3	Un élève propose un faux axe horizontal, refusé sans argument. Un autre montre alors les bons axes, qui sont acceptés.
groupe 6	oui	3	Un élève affirme qu'il n'y en a pas. Un autre dit qu'il y en a plusieurs. Puis, un accord se fait sur les trois axes.
groupe 7	oui	3	Les trois axes sont reconnus très vite. Il y a quand même eu des hésitations sur le nombre des axes.

figure 7 : rosace



groupe 1	non	(aucun renseignement sur les échanges des élèves)
groupe 2	non	Aucun problème. Il n'y en a pas à cause "du dessin au milieu".
groupe 3	non	D'abord, un élève voit une balle et dit qu'il y en a une infinité. Il n'y a pas de réfutation dans l'immédiat. Nous ne savons pas ce qui a provoqué le changement d'opinion. (*)
groupe 4	non	Très vite résolu. Seul argument formulé : c'est "impossible".
groupe 5	non	Image de "lames de faux"; et un élève évoque la courbure du dessin intérieur pour affirmer qu'il n'y en a pas. (*)
groupe 6	non	Un élève a essayé une droite; un autre élève a répondu que ça ne convenait pas. (Nous n'avons pas plus de renseignement)
groupe 7	non	Le seul argument explicité porte sur le dessin à l'intérieur de la figure : "s'il n'y avait rien à l'intérieur, elle serait symétrique".

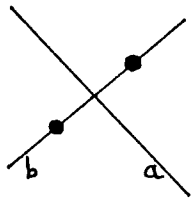
figure 8 : segment (a) est la médiatrice du segment et (b) recouvre le segment



groupe 1	oui	2	(a) et (b) sont tracés très vite.
groupe 2	oui	2	Aucun problème n'est soulevé. L'item est très vite résolu.
groupe 3	oui	2	Les élèves ne sont pas tous d'accord sur (b).
groupe 4	oui	1	La médiatrice (a) est tracée. L'axe (b) ne semble même pas avoir été évoqué.
groupe 5	oui	2	Il n'y a pas eu, semble-t-il, de discussion. Accord tacite.
groupe 6	oui	2	Au début, seule la médiatrice (a) est reconnue. (*)
groupe 7	oui	2	L'axe (b) pose problème. L'argument pour convaincre suppose que le segment a une épaisseur. (*)

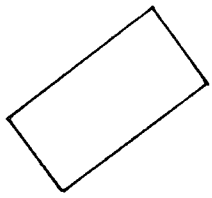
Dans quatre des productions, le tracé de (b) recouvre le segment et se prolonge au dela des extrémités. Dans deux autres, le tracé prolonge le segment sans le recouvrir.

figure 9 : deux points (a) est la médiatrice du bi-point et (b)passe par les points



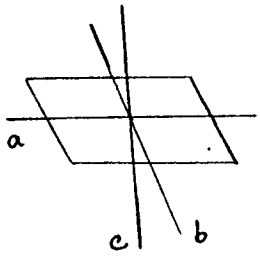
groupe 1	oui	2	Aucun problème n'est soulevé. Pour (b), un élève précise qu'il faut "traverser" les points.
groupe 2	oui	2	Aucun problème n'est soulevé. Les élèves évoquent des "roues"et des "ronds" pour résoudre la question. Pour (b), un élève précise qu'il faut passer sur les ronds. (*)
groupe 3	oui	2	Un élève dit d'abord qu'il y en a une infinité, un autre qu'il y en a deux. L'accord n'est pas unanime et un élève va revenir sur la figure pour argumenter qu'il n'y a pas d'axe, parce qu'il n'y a pas de trait entre les points. (*)
groupe 4	oui	2	Il y a un désaccord sur (b). L'argument donné pour convaincre utilise l'image d'une bille coupée en deux moitiés qui se rabattent l'une sur l'autre. (*)
groupe 5	oui	2	(aucun renseignement)
groupe 6	oui	2	L'argument d'un élève pour (b) utilise l'image de deux parties d'un rond qui se superposent quand on plie. (*)
groupe 7	oui	2	Il n'y a pas eu, semble-t'il, d'arguments exprimés.

figure 10 : rectangle



groupe 1	oui	2	Aucun problème n'a été relevé par l'observateur.
groupe 2	oui	2	Aucun problème n'a été explicité par les élèves.
groupe 3	oui	2	(pas de renseignement)
groupe 4	oui	2	Aucun problème n'a été soulevé. Résolution immédiate.
groupe 5	oui	2	Résolu rapidement. Déclaré "évident" par un élève. Cette figure a provoqué un retour sur les deux cercles. (*)
groupe 6	oui	2	Un élève parle de "plusieurs". Les diagonales sont évoquées, puis refusées immédiatement, sans argumentation.
groupe 7	oui	2	Aucune hésitation. Un élève dit qu'elles sont "symétriques".

figure 11 : parallélogramme



groupe 1	non	(aucun renseignement)
groupe 2	non	D'abord, pour un élève, il y en a au moins 2, parallèles aux côtés (a) et (b). Réfutées par arguments utilisant le pliage. Un autre élève propose alors une autre droite : (c),verticale, qui est refusée dès son évocation, sans justifications. Une des parallèles aux côtés est de nouveau évoquée et refusée, aussi sans argumentation. (*)
groupe 3	non	Un élève propose une diagonale, refusée avec un argument d'orthogonalité. (*)
groupe 4	non	Essais de pliage.
groupe 5	non	(aucun renseignement)
groupe 6	non	Une diagonale est proposée. Un élève la réfute en montrant où va l'un des sommets.
groupe 7	non	Une diagonale est évoquée, puis refusée sans arguments. (*)

Chapitre VII

Utilisation analytique des propriétés de la droite de symétrie

I. Introduction

La tâche précédente de "tracé à main levée" (analysée au chapitre VI) n'exige pas un usage analytique des propriétés de la droite de symétrie, mais seulement un respect global de celles-ci, basé essentiellement sur la perception. Il suffit en effet de tracer une droite qui passe "au milieu" de la figure et qui ne soit pas trop "penchée" par rapport à la droite joignant deux points correspondants.

L'activité décrite ici a pour objectif de faire mettre en œuvre de façon plus opératoire ces propriétés.

Au paragraphe II, nous explicitons nos choix sur les variables des figures et sur les contraintes de la tâche. Le paragraphe III a pour objet l'analyse du déroulement de l'activité dans la séquence d'enseignement. Nous proposons des hypothèses pour expliquer les écarts qui se sont produits de la construction théorique de l'activité à sa réalisation en classe, puis des modifications s'appuyant sur ces résultats, qui doivent permettre de recentrer l'activité vers l'objectif d'enseignement fixé. L'analyse de la réalisation de cette nouvelle activité (dans la deuxième séquence) est l'objet du paragraphe IV. Nous concluons (paragraphe V) sur les moyens et les contraintes nécessaires à la mise en oeuvre des propriétés de la droite de symétrie dans une séquence d'enseignement.

II. Analyse de l'activité

II.1. Analyse de la tâche

Le tracé de la droite de symétrie d'une figure au moyen d'instruments de construction exige l'utilisation analytique des propriétés de cette droite. Les propriétés mises en oeuvre dépendent

alors d'une part, des caractéristiques de la figure et, d'autre part, des instruments de construction utilisés. Précisons.

A ce niveau, les élèves savaient utiliser quatre instruments : la règle graduée, la règle non graduée, l'équerre et le compas. La règle graduée est celui qui est le plus familier aux élèves. Elle sert généralement non seulement à mesurer, mais aussi à tracer. La règle non graduée permet seulement de tracer des droites. L'équerre sert à vérifier l'orthogonalité de deux droites ou à déterminer deux directions perpendiculaires. Le compas est un outil moins familier pour les élèves de ce niveau de classe. Une des premières utilisations de cet instrument est le tracé de cercles, avant le report de longueurs ou la détermination de points à égale distance de deux points donnés.

Analysons les actions possibles avec chaque instrument dans cette tâche.

La règle graduée permet de construire la droite de symétrie dès que l'on connaît deux paires de points symétriques. C'est alors uniquement la propriété du milieu qui est mise en oeuvre.

La règle non graduée met en oeuvre les propriétés d'incidence, par la construction de l'intersection de deux segments symétriques. Elle permet de construire la droite de symétrie dès que l'on connaît deux paires de points symétriques, à condition que ceux-ci ne forment pas un rectangle. L'un des points est à l'intersection des prolongements des deux segments symétriques AB et A'B'. L'autre point est à l'intersection des segments A'B et AB'. La justification que ce point est sur la droite de symétrie fait appel en plus à la propriété d'involution de la symétrie (si A' est le symétrique de A, alors A est le symétrique de A').

L'équerre permet de déterminer la direction d'une droite perpendiculaire à une autre droite et passant par un point donné. La propriété d'orthogonalité est alors utilisée conjointement avec une autre propriété, celle qui sert à déterminer le point par lequel est mené la droite perpendiculaire.

Le compas permet de déterminer au moins deux points de la droite de symétrie dès qu'on a une paire de points symétriques. C'est la propriété d'équidistance des points de la droite de symétrie de toute paire de points symétriques qui est mise en oeuvre.

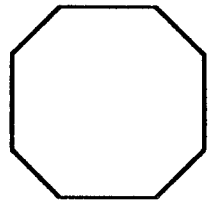
La phase précédente a montré que la propriété du milieu est privilégiée par les élèves. Il faut donc construire des situations-problèmes rendant impossible son emploi et exigeant au contraire l'usage des autres propriétés moins disponibles chez les élèves. Pour cela, nous avons choisi de jouer sur les variables des figures et sur les contraintes de la tâche.

II.2. Choix des figures et des instruments

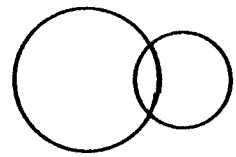
Nous avons demandé aux élèves de tracer avec les instruments mis à leur disposition toutes les droites de symétrie de figures. Le problème de l'existence de droites de symétrie n'est pas posé dans cette tâche : il est précisé aux élèves que les figures présentent toutes au moins une droite de symétrie.

Chaque figure était dessinée sur un carton rigide (rapelant l'interdiction de plier) de format 21x29.7. Les figures et les instruments fournis étaient les suivants :

groupe de figures 1 règle graduée et équerre

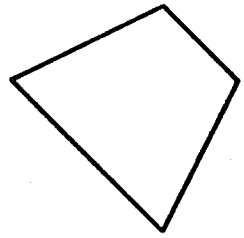


octogone

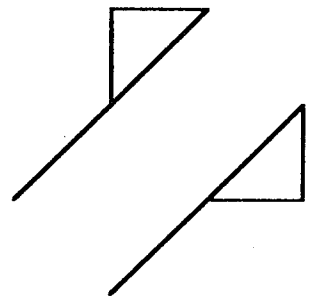


cercles sans leur centre

groupe de figures 2 règle **non** graduée et équerre

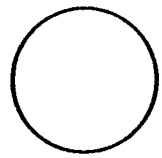


trapèze isocèle

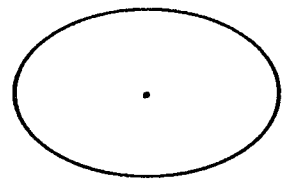


drapeaux

groupe de figures 3 règle **non** graduée et compas



cercle sans centre



ellipse avec centre

Dans chacun de ces cas il faut exhiber au moins une paire de points symétriques ce qui nécessite une anticipation de la position de la droite de symétrie. La tâche précédente de tracé à main levée peut constituer une aide à cette anticipation. Si ces points symétriques sont en évidence sur la figure, c'est à dire déjà marqués, cela nécessite leur reconnaissance. C'est le cas des quatre premières figures. Pour le cercle, ils ne sont pas marqués, mais il suffit de reconnaitre que deux points quelconques du cercle sont symétriques. Dans le cas de l'ellipse,

ils doivent être le résultat d'une construction exigeant encore la mise en œuvre de propriétés de la symétrie. La tâche est donc beaucoup plus difficile pour les élèves, puisqu'elle demande une étape de construction supplémentaire relative à des éléments intermédiaires qu'il faut choisir.

II.3. Analyse a priori des procédures des élèves

La règle graduée suffit pour tracer les droites de symétrie de l'octogone (propriété du milieu), mais on peut utiliser aussi l'équerre (propriétés du milieu et orthogonalité). La procédure la plus attendue est la recherche des milieux des côtés opposés, n'utilisant que la règle graduée. L'autre procédure attendue consiste à déterminer le milieu d'un des côtés et à tracer ensuite la droite perpendiculaire à ce côté et passant par ce point. L'une ou l'autre de ces procédures ne présente pas de difficultés, mais nous pensons que la première sera majoritaire. Cependant, le fait de disposer de l'équerre peut inciter les élèves à l'utiliser, soit dans la phase de construction, soit dans une phase éventuelle de vérification. Le tracé de deux des droites de symétrie de l'octogone détermine le point d'intersection des quatre droites à construire. Une nouvelle procédure prenant appui sur ce point est alors possible.

La droite de symétrie des deux cercles (2ème figure) ne peut être tracée qu'en utilisant à la fois la règle graduée et l'équerre. La procédure attendue est la construction de la perpendiculaire à la corde commune aux deux cercles en son milieu. Sa mise en oeuvre nécessite qu'on reconnaisse que les extrémités de cette corde sont homologues. Nous pensons que cette propriété est accessible aux élèves. Une autre procédure est possible, qui consiste à construire la droite passant par les centres des cercles. Mais il est nécessaire au préalable de construire chacun de ces deux points comme intersection des médiatrices de deux cordes quelconques. Cette procédure n'est pas économique puisqu'elle revient à utiliser quatre fois l'action de construction de la procédure précédente. De plus, elle met en oeuvre une propriété du centre d'un cercle qui n'est pas connue des élèves de ce niveau. Cependant, la règle d'action très présente chez eux, qui identifie la droite de symétrie à la "droite des milieux", peut induire cette seconde procédure.

Pour les figures du deuxième groupe, la propriété du milieu ne peut plus être utilisée comme outil de résolution. La suppression de la règle graduée est une contrainte didactique dans le sens qu'elle interdit les procédures privilégiées par les élèves.

En donnant l'équerre avec la règle non graduée pour le trapèze isocèle, nous voulons induire des procédures utilisant la propriété d'orthogonalité. L'utilisation des propriétés d'incidence est de toute façon nécessaire à la construction de la droite de symétrie. Mais, parmi les procédures

possibles, celles utilisant l'équerre peuvent surgir si, comme nous le pensons, il est plus facile pour l'élève de construire la droite perpendiculaire à une des bases plutôt que le point situé à l'intersection des deux côtés non parallèles du trapèze, à l'extérieur de la figure.

La figure "deux drapeaux" a des caractéristiques analogues, pour la tâche proposée, à celles du trapèze isocèle. La détermination d'un des points de la droite de symétrie exige la mise en oeuvre des propriétés d'incidence. Une difficulté supplémentaire est introduite dans cet item, qui tient au fait que la droite de symétrie n'est médiatrice d'aucun des segments tracés. L'utilisation de l'équerre n'est possible qu'accompagnée du tracé ou de la matérialisation d'un segment reliant deux points correspondants.

Pour ces quatre figures, les paires de points symétriques sont déjà construits et facilement identifiables. Ce n'est plus vrai pour les deux figures suivantes.

Les deux dernières configurations (groupe 3) constituent un saut dans la hiérarchie des difficultés, du à :
- la complexité des figures, d'une part : le cercle est donné sans son centre et l'ellipse est une figure qui n'est pas usuelle;
- le choix des instruments donnés, d'autre part : la règle non graduée ne permet pas résoudre le problème à elle seule et le compas est le moins familier des quatre instruments pour ces élèves.

Résoudre le problème dans le cas du cercle revient à en construire le centre, comme point d'intersection des médiatrices de deux cordes quelconques. La prégnance de la règle d'action associant une droite de symétrie à la droite des milieux doit conduire naturellement les élèves vers la recherche du centre. La difficulté de la tâche est ailleurs. Le tracé d'une médiatrice exige l'utilisation des propriétés d'équidistance de deux points du cercle de tout point de la droite de symétrie. Il faut donc aussi reconnaitre au préalable que deux points quelconques du cercle sont symétriques.

Signalons qu'il est impossible de tracer toutes les droites de symétrie du cercle. Nous avons conscience que la tâche, telle qu'elle est posée, peut poser problème aux élèves. En fait, nous pensons que ceux-ci savent qu'il y en a une infinité et qu'ils ne peuvent les construire toutes. L'enseignant a prévu d'intervenir en cas de problème pour dire aux élèves d'en tracer quelques-unes et expliquer ensuite comment on obtient les autres.

Pour construire une droite de symétrie de l'ellipse avec le compas, il faut déterminer un point, autre que le centre déjà donné, qui soit équidistant de deux points symétriques situés sur l'ellipse. Mais ces points sont eux-mêmes à construire comme points équidistants du centre de

l'ellipse, ce qui rend la tâche difficile.

Le choix de l'ordre dans lequel ces couples {figures, instruments} sont donnés aux élèves est sous-tendu par la volonté de complexifier la tâche au fur et à mesure de son avancement. Ce choix est donc inhérent à nos hypothèses sur la disponibilité de ces propriétés en tant qu'outils de résolution.

II.4. Consigne et organisation sociale

La consigne donnée aux élèves est de construire "très précisément", en utilisant les instruments mis à leur disposition, toutes les droites de symétrie des figures proposées. La raison de l'utilisation du mot "précis" est d'éviter les tracés au jugé et de favoriser les procédures de construction utilisant les possibilités des instruments.

L'organisation sociale est la même que dans la phase précédente. Il s'agit à nouveau d'une situation d'action, mettant en interaction les élèves des mêmes groupes que ceux de l'activité précédente. L'obligation de fournir une solution unique concertée dans chaque groupe devrait permettre de repérer les propriétés de la droite de symétrie les plus disponibles et les instruments de construction les plus utilisés dans cette tâche.

Après la confrontation des résultats organisée comme dans la séance précédente, l'enseignant doit introduire, dans une phase d'institutionnalisation, la notion de médiatrice en s'appuyant sur les procédures de construction utilisées par les élèves.

III. Analyse du déroulement de l'activité

L'analyse du déroulement de l'activité est menée sous deux aspects. Un bilan des procédures de construction des élèves et des propriétés mises effectivement en oeuvre est développé au paragraphe III.1. Au paragraphe III.2, nous donnons des résultats concernant le sens pour les élèves d'une activité de construction avec instruments. Nous tenterons en particulier d'analyser les causes du détournement de la tâche et du détournement des instruments.

III.1. Bilan des procédures et des instruments utilisés

La description des procédures des groupes pour chaque figure est donnée en annexe.

III.1.1. Constructions avec règle graduée et équerre

Les sept groupes fournissent des constructions justes pour la première figure, l'octogone. La procédure adoptée très majoritairement est la détermination des milieux de paires de segments. Elle n'a soulevé aucune difficulté lors des travaux des groupes. L'autre procédure prévue, mettant en oeuvre la propriété d'orthogonalité n'a été adoptée comme premier type de construction que par le groupe 2.

La propriété du milieu ne suffit pas pour résoudre le problème pour la deuxième figure (deux cercles sécants), mais elle doit intervenir à un moment de la construction. Tous les groupes, sans exception, l'ont mise en oeuvre dans les deux types de procédures repérées. Cependant, deux groupes seulement fournissent une construction exacte. Nous allons voir pourquoi.

Pour cette deuxième figure, la procédure majoritaire est celle que nous attendions : construction de la droite perpendiculaire à la corde commune aux deux cercles en son milieu. Elle a été choisi par quatre groupes d'élèves. Mais deux groupes seulement parmi eux ont utilisé l'équerre pour le choix de la direction de la droite (groupes 2 et 7). Les deux autres ont construit une droite perceptivement juste, mais de direction déterminée au jugé horizontalement dans la feuille (groupe 4), ou perpendiculaire aux bords verticaux de la feuille (groupe 5). Rappelons que l'enseignant avait précisé que les contructions auxiliaires étaient autorisées et que les élèves pouvaient en laisser leurs traces.

Une autre procédure, adoptée par les groupes 1 et 3, est induite par la règle d'action "la droite de symétrie passe par les centres des cercles". La procédure de construction des centres est la même pour les deux groupes : ils sont les milieux de diamètres déterminés par tâtonnements comme les cordes verticales de plus grande longueur dans chacun des deux cercles.

La procédure du groupe 6 n'a pu être déterminée. Nous savons seulement que le mot milieu a été prononcé. La construction qu'il fournit est perceptivement correcte.

En conclusion, la propriété du milieu est un outil disponible chez tous les élèves dans cette tâche de construction avec instruments. Elle est mise en oeuvre correctement : l'attachement des élèves à déterminer précisément le milieu d'un segment ou d'un bi-point avec la règle graduée le montre. Il n'en est pas de même pour la propriété d'orthogonalité. L'équerre est peu utilisée, bien que nécessaire à une construction exacte pour la deuxième figure. La propriété d'orthogonalité semble sous-jacente derrière les tracés effectués par les élèves, mais la position des deux cercles dans la feuille est telle que la direction horizontale et la direction orthogonale à la corde commune aux deux cercles sont confondues. Nous ne pouvons donc conclure ici sur sa mise en oeuvre effective, mais les procédures utilisées pour le deuxième groupe de figures peuvent apporter une réponse.

III.1.2. Constructions avec règle non graduée et équerre

Les deux figures proposées aux élèves sont un trapèze isocèle et deux drapeaux.

Si toutes les droites tracées sont perceptivement justes, une seule construction se révèle exacte pour la première figure (celle du groupe 2), aucune pour la seconde. La procédure associée est la construction de la droite perpendiculaire à une des bases et passant par le point d'intersection des diagonales, qui utilise à la fois les propriétés d'orthogonalité et d'incidence. Cette procédure n'a pas été réinvestie par les élèves de ce groupe pour la figure suivante, "deux drapeaux", pour une raison d'ordre chronologique. Elle a en effet été découverte pendant la phase de vérification décidée par le groupe après avoir traité toutes les figures. C'est le seul cas où le point d'intersection des deux diagonales est utilisé.

Le bilan des procédures adoptées par les élèves est inattendu. Cinq d'entre elles pour le trapèze isocèle et également cinq d'entres elles pour les deux drapeaux relèvent de la mise en oeuvre de la seule propriété du milieu. Décrivons les plus précisément.

Pour le trapèze isocèle, la procédure adoptée par cinq groupes est la construction de la droite passant par les milieux des deux bases, le sixième (groupe 4) ayant construit la droite perpendiculaire à une des bases en son milieu. Nous avons vu que seul le groupe 2 a fourni une construction exacte, mais après avoir tenté de mesurer les longueurs des bases. De même, pour la figure "deux drapeaux", cinq des six groupes qui ont abordé le problème ont construit une droite passant par les milieux de paires de bi-points homologues. Le groupe 5 n'a pas

construit de droite et le groupe 7 n'a pas traité cet item.

Ainsi, la procédure adoptée par la presque totalité des élèves est la détermination des milieux de segments ou de bi-points homologues. Or, les instruments fournis n'y sont pas adaptés. Les élèves ont résolu ce problème de deux façons différentes, soit en détournant l'usage des instruments, soit en détournant la tâche. Précisons.

Dans certains groupes, l'équerre et la règle non graduée ont été détournées de leur utilisation usuelle et transformées en instruments de mesure (graduation de l'équerre, utilisation de la section de la règle comme unité de mesure). Le milieu est déterminé ensuite, plus ou moins précisément selon les fractions d'unités obtenues.

Mais dans d'autres groupes, les instruments se révélant inadaptés ont été rejetés. Ces élèves ont résolu alors le problème en déterminant au jugé ou par tâtonnements les points ou les directions des droites à tracer. Il s'agit là d'un détournement de la tâche.

La propriété d'orthogonalité est présente seulement de manière ponctuelle. Elle intervient implicitement sous deux formes dans les groupes 1 et 4 pour construire la droite de symétrie des deux drapeaux : la distance aux deux droites parallèles est considérée le long d'une perpendiculaire à ces droites et la droite de symétrie est perpendiculaire à un segment lui-même perpendiculaire à ces deux droites. Cette propriété est aussi utilisée, par mesure d'économie, pour construire la droite de symétrie du trapèze isocèle dans le groupe 4 : après avoir déterminé (laborieusement) le milieu d'une des bases avec la règle non graduée, un élève de ce groupe suggère, pour terminer la construction, d'employer l'équerre plutôt que de reprendre la même procédure pour déterminer le milieu de l'autre base.

Ainsi, le détournement de l'usage des instruments est significatif de la place prédominante de la propriété du milieu dans cette tâche. C'est même la seule propriété qui semble disponible chez les élèves. Le détournement de la tâche pose plus généralement le problème de la signification d'une "construction précise avec instruments" pour les élèves. Nous examinons cette question au paragraphe III.3. Il nous reste à analyser comment les élèves ont mis en oeuvre la propriété d'équidistance.

III.1.3. Constructions avec règle non graduée et compas

Les deux figures données avec ces instruments étaient un cercle sans son centre et une ellipse avec son centre. Le groupe 7 n'a pas abordé ces items. Les élèves sont tous d'accord

immédiatement sur le nombre et l'emplacement de ces droites, aussi bien pour le cercle que pour l'ellipse. Pour le cercle, la procédure choisie par les six groupes est celle que nous attendions, la construction du centre. D'autre part, le centre de l'ellipse est le point de départ de toutes les constructions. Les arguments évoqués sur l'infinité du nombre de droites de symétrie du cercle et la comparaison avec l'ellipse sont décrits au paragraphe III.2.3.

Bien que tous les groupes fournissent des tracés perceptivement justes pour les deux figures, une seule construction est exacte, celle d'une droite de symétrie du cercle donnée par le groupe 4. Cependant, le détournement de l'usage des instruments ne s'est pas reproduit ici. Ce qui implique que le compas a bien été utilisé pour ses différents usages. Nous allons analyser comment.

La construction du centre du cercle ne passe pas par celle de deux médiatrices de bi-points du cercle. Seul un élève du groupe 4 est parvenu à construire de cette façon une des droites de symétrie, mais il n'a pu aller plus loin dans la résolution du problème, ne sachant pas comment déterminer l'emplacement du centre du cercle sur cette unique droite.

Deux groupes ont détourné la tâche et placé le centre du cercle au jugé.

Les trois autres ont adopté la même procédure, consistant à déterminer, à l'aide du compas, un cercle confondu avec le cercle donné, par essais successifs sur la longueur du rayon et l'emplacement du centre. Y-a t'il détournement de la tâche ? Il est difficile de répondre, car c'est la définition d'une construction précise qui est en jeu. Par contre, il n'y a pas détournement de l'usage de l'instrument, puisque le compas est utilisé pour construire des cercles. C'est la propriété d'équidistance du centre de tout point du cercle qui est mise en oeuvre, et l'unicité de ce point : il s'agit de retrouver un point à égale distance d'une courbe donnée. La propriété d'équidistance de la droite de symétrie n'est pas en jeu dans cette procédure.

Nous trouvons une procédure analogue pour la construction des droites de symétrie de l'ellipse dans deux groupes (groupes 2 et 6). Elle consiste à construire, par essais successifs d'ouvertures du compas posé sur le centre de l'ellipse, deux cercles tangents respectivement intérieurement et extérieurement à l'ellipse. Là encore, le compas sert à construire des cercles, il n'est donc pas détourné de son usage. La tâche non plus n'est pas détournée, puisque chaque droite de symétrie est définie par les deux points construits (les points de contact) et le centre de l'ellipse. La procédure est abandonnée dans la groupe 6 pour une procédure adoptée aussi par trois autres groupes (1, 3 et 4), consistant à tracer deux droites passant par le centre de l'ellipse et de directions définies au jugé. Mais ces directions ne sont pas quelconques : elles

sont soit privilégiées dans la feuille (horizontale, verticale), soit liées à l'ellipse (droites dans la plus grande ou la plus petite dimension). Une variable de la tâche a joué en faveur de cette première règle d'action : la position de la figure dans la feuille est telle que les directions des deux droites de symétrie sont confondues avec les directions privilégiées.

Cette combinaison de figures et d'instruments n'a donc permis de faire mettre en oeuvre la propriété d'équidistance spécifique à la droite de symétrie. Les comportements des élèves dans cette activité soulèvent plusieurs questions. Il s'agissait de mettre en oeuvre les propriétés de base de la droite de symétrie d'une figure. Quelle est le degré de disponibilité de ces différentes propriétés chez les élèves ? Mais la réponse est liée à une autre question : quel est le sens pour eux d'une construction exacte ou "précise" en géométrie, et donc comment les instruments proposés sont-ils adaptés à la tâche ? Des éléments de réponses sont apparus dans les échanges entre les élèves. Nous les développons maintenant.

III.2. Le sens de la tâche pour les élèves

III.2.1. La construction "précise" passe par des mesures

Pour le premier ensemble de figures, la consigne de "construction précise" a induit chez certains élèves la nécessité de faire des mesures au millimètre près avec la règle graduée. Pour le trapèze, première des figures données sans la règle graduée, tous les groupes se sont posés la question de "comment mesurer". Les extraits suivants illustrent la force de ces procédures de mesure et montrent que, lorsque la règle graduée n'est pas donnée, le problème est dans un premier temps insoluble pour les élèves.

groupe 1 - ***on doit se servir de l'équerre puisque la règle n'est pas graduée.*** *C'est un scandale!*

- Elle n'est pas graduée non plus, l'équerre !

- Tu la gradues !...

- ***C'est dur à faire sans règle graduée.***

groupe 2 - ***Comment faire avec une règle non graduée?***

groupe 7 *M - Ah ! Il n'y a plus de règle graduée !*

F- ***On en a besoin !...***

C - Ouais [...] comment tu trouveras le milieu ?

F - ***Trouve un truc pour mesurer : toutes les règles font un centimètre!***

Cet instrument va être évoqué tout au long des exercices, même pour le cercle qui est une figure ne comportant que des lignes courbes, comme le montrent les extraits suivants.

groupe 1 - *Elle est même pas graduée, cette règle...*
- ***Si seulement je pouvais avoir une petite règle bien graduée.***

groupe 6 -*Il faut trouver le centre...**on n'a pas de règle graduée, on sait rien faire !***

Rappelons que le groupe 1 a finalement construit une droite passant par le milieu du cercle déterminé au jugé, le groupe 6 a lui reconstruit le cercle avec le compas par essais successifs sur le centre et le rayon..

III.2.2. Adéquation des instruments aux figures et à la tâche

La règle graduée est l'instrument de construction le plus adapté à cette tâche. Elle permet à la fois de mesurer et de construire des droites, ce qui correspond à son usage habituel en classe. La règle non graduée est dans un premier temps un outil incomplet parce que, implicitement, une règle est toujours graduée pour les élèves. La question d'un élève du groupe 7 pour la figure 2 (cercles sécants) :

- Comment trouver quelque chose, quand c'est rond, avec une règle droite ?

peut se rapporter à l'idée que la règle n'est pas adaptée à des courbes, parce qu'il n'est pas possible de mesurer.

L'adéquation de l'équerre dans cette tâche est liée pour les élèves à l'existence d'angles droits dans la figure. Cette conception de l'équerre la place en tant qu'outil de vérification, plutôt qu'outil de construction. Elle est clairement explicitée par des élèves lors du travail sur le trapèze isocèle.

(groupe 3) - ***On ne peut pas se servir de l'équerre, puisqu'il n'y a pas d'angle droit.***

groupe 6 - *La règle n'est pas graduée, on va prendre l'équerre...on va prendre les angles.*
- *C'est pas des angles droits, c'est vrai que c'est difficile ! ".*

Finalement, les élèves du groupe 6 ne se serviront de l'équerre, ni pour la construction, ni pour une vérification.

Par contre, les élèves du groupe 3 vont utiliser l'équerre pour prouver l'inexactitude de la construction. La droite a été tracée en utilisant la section de la règle non graduée comme unité de mesure pour déterminer les longueurs, puis les milieux des bases. Sébastien intervient alors:-

Il faut voir si ça fait un angle droit

Il pose l'équerre sur le point d'intersection de la droite avec l'une des bases et marque le pied de cette perpendiculaire sur l'autre base, puis il fait la même chose avec l'autre base et obtient deux points différents.

Vous vous êtes trompés tous les deux sur le trait le meilleur. Selon la position de l'équerre, tu trouves un point faux ou l'autre.

La propriété sous-jacente est l'unicité de la médiatrice des deux segments de base d'un trapèze isocèle.

On rencontre le problème de l'inadéquation de l'équerre à une figure sans angles matérialisés dans le groupe 4 pour la figure 2 (deux cercles sécants) :

- On ne peut pas prendre l'équerre, car il n'y a pas d'angle !

Enfin, les multiples tentatives pour se servir de l'équerre montrent que l'usage de cet instrument n'est pas entièrement acquis. Par exemple, des élèves du groupe 2 ont utilisé l'angle le plus aigu de l'instrument pour tracer des angles dans le trapèze.

Le compas sert presque exclusivement à construire des cercles. La quasi totalité des élèves qui ont utilisé le compas ont placé d'abord la pointe sèche sur le centre présumé du cercle donné (5ème figure). La procédure consistait à reconstruire le cercle en jouant sur l'écartement du compas et l'emplacement du centre. De même, pour l'ellipse, le compas a toujours été pointé sur le centre de la figure. Le compas est avant tout un outil qui permet de tracer une courbe ou de déterminer des points à égale distance d'un centre. L'utilisation pour le report de longueurs égales ou la détermination de points à égale distance de deux points n'a été observée que chez un élève redoublant, qui a construit ainsi une des droites de symétrie du cercle (groupe 4).

III.2.3. Une convention de représentation

Le fait que ce nombre soit infini ne pose pas de problème aux élèves. Les échanges ont porté sur la représentation de cette infinité. Voici quelques exemples. Après avoir exprimé le problème de cette représentation,

- Toutes les droites de symétrie de la figure, mais y'en a tout plein, c'est pas possible à faire !

les élèves du groupe 1 se mettent d'accord pour en tracer une seule, oblique accompagnée d'un commentaire écrit : "il y en a une infinité".

Dans trois groupes, la question se pose par rapport à un aspect perceptif : comment les tracer toutes en gardant la possibilité de les distinguer une à une ?

groupe 2 *E - **On va colorier tout en vert, allez ! 1, 2, 3, 4 ... mais ça fera pas juste, ça fera pas des droites !***

S - Si, comme toutes les droites vont se toucher...

J - Vous en faites quelques unes et vous direz qu'il y en a plus".

groupe 3 *E - Comment les tracer toutes ?*

*S - **Faut que tu colories carrément le rond. [...]***

O - J'en fait jusqu'à ce qu'elles soient moins espacées.

groupe 6 *X - Tu dis qu'il y en a plein, tu mets l'infini.*

*X' - Mais non, ce n'est pas infini, **parce qu'à un moment, ta feuille, elle serait complètement couverte.***

Les propositions de colorier entièrement le cercle ont toutes été refusées, car les droites ne sont plus distinctes les unes des autres. Finalement, ces trois groupes ainsi que le groupe 5 adoptent une même solution : tracé de quelques droites et commentaires pour préciser le nombre. Le nombre de droites tracées va de 4 à 7. Les commentaires pour exprimer l'infinité vont de "bien plus" (groupe 6) au "nombre illimité" (groupe 2) et " une infinité" (groupe 3) en passant par le "milliard" (groupe 5). Dans le groupe 4 , les élèves ont dit qu'il y en a "des millions et des millions !" et une seule a été construite, comme médiatrice d'une corde (c'est la seule construction exacte). Le problème de la représentation de toutes les droites de symétrie du cercle a finalement été résolu dans tous les groupes par les élèves eux-mêmes.

III.2.4. Les signifiés du mot "milieu"

Le mot "milieu" a différentes significations dans le langage courant. Nous avons vu son importance lors de la tâche de construction à main levée (ch.VI), où il s'agissait de trouver une ligne frontière qui partage la figure en deux parties égales, et donc passait par le "milieu de la figure".

La conception du rôle clé du milieu est en jeu aussi dans cette activité : le "milieu de la figure" apparaît comme un élément important qui ressort souvent dans les échanges entre les élèves. Par exemple, le fait d'avoir le centre de l'ellipse est une condition suffisante pour résoudre le problème posé pour deux élèves du groupe 1 :

- y'a le milieu ! ...
*- Ils nous ont aidé avec le point, ils nous ont **tout** dit ce qu'il fallait faire !*

Nous retrouvons une idée analogue dans le groupe 6, pour les deux cercles sécants :

- tu mets le milieu et on n'en parle plus !

Ceci pose en particulier la question de la définition du milieu d'une figure. Si le signifié du milieu d'un segment est bien défini, il n'en est pas de même pour le signifié du milieu d'une figure.

Il ressort par exemple que pour plusieurs élèves, le "milieu" ou le "centre" du trapèze est le point d'intersection des diagonales. Ces mots sont évoqué aussi lors de la construction de la droite de symétrie du trapèze, dans la phase de mise en commun : un élève déclare, après avoir tracé les deux diagonales que "ça donne le centre". Pourtant, ce point n'est le milieu d'aucun élément de la figure. Cette signification du mot milieu semble liée au statut du point comme **résultat de deux constructions "symétriques".** D'autre part, ce point se situe sur la frontière du partage de la figure en deux parties égales.

III.3. Conclusion

L'activité est un échec par rapport aux objectifs d'apprentissage. Elle permet de faire un premier bilan sur les possibilités d'utilisation des propriétés de la droite de symétrie. La propriété du milieu est la seule disponible en tant qu'outil pour les élèves dans cette tâche. Pour les élèves, la règle graduée est donc l'instrument le plus adapté, quel que soit le type de figure

proposé. Les autres instruments, l'équerre et le compas, posent des problèmes d'adéquation aux figures. L'équerre est mieux adaptée à une figure présentant des angles droits. Elle est donc plutôt disponible comme outil de vérification dans cette tâche, puisque ces angles droits existent dès que la droite de symétrie est tracée. Mais les procédures de vérification étant peu répandues, elle a peu été utilisée. Le compas est principalement un outil de tracé d'arcs de cercle, et n'est pas utilisé spontanément pour le report de longueurs égales. La construction de la médiatrice d'un segment avec le compas, seule manière de mettre en oeuvre la propriété d'équidistance nécessite donc un véritable apprentissage.

Une conséquence de ces faits est la difficulté pour les élèves de s'adapter aux contraintes sur les instruments, ce qui aboutit au détournement de la tâche, nécessaire pour débloquer la situation. Le nombre des constructions utilisant effectivement les instruments donnés pour ce pour quoi ils sont faits est très faible.

Cependant, ces conclusions sont à nuancer, car une des causes de cet échec est due à une compréhension de la tâche par les élèves différente de celle que l'enseignant attendait. La consigne de "construction précise" donnée par celui-ci avait pour but de contraindre les élèves à utiliser les instruments et d'éviter les constructions à main levée. Elle a été interprétée par eux en termes de mesures, ce qui conduit à un blocage de la situation dès que la règle graduée est interdite. Deux éléments ont donc joué dans cette utilisation presque exclusive de la propriété du milieu :
- une contrainte : la demande de l'enseignant de réaliser une construction "précise".
- un handicap : la familiarité des élèves avec la règle graduée et une difficulté d'utilisation des autres instruments.

Il nous est donc difficile de conclure que les autres propriétés ne sont jamais mises en oeuvre dans une telle tâche, et donc que la tâche n'est pas adaptée aux objectifs fixés. Il ressort plutôt qu'il est illusoire de supposer que ces propriétés vont être mises en oeuvre facilement. Il faut en particulier expliciter davantage les contraintes de la situation avec les élèves. Ceci passe par une *négociation de la consigne* entre l'enseignant et les élèves et par une *meilleure connaissance des instruments*.

Afin de vérifier si cette tâche pouvait permettre effectivement de réaliser les objectifs prévus, nous avons précisé certaines contraintes, changé les valeurs de certaines variables et intégré cette nouvelle activité à la deuxième séquence d'enseignement. Nous décrivons maintenant ces modifications.

IV. Modifications de l'activité

Nous avons vu comment le sens donné par les élèves à l'expression "construction précise" a provoqué un détournement de l'usage des instruments. L'intention de l'enseignant était de faire utiliser les instruments fournis pour tracer la droite de symétrie. L'interprétation des élèves en termes de mesures correspondait à privilégier l'instrument qui leur était le plus familier. Pour recentrer l'activité vers ses objectifs, il nous faut donc d'une part expliciter clairement et différemment la consigne et, d'autre part, familiariser au préalable les élèves avec les divers instruments. Enfin, la modification de certaines variables pourrait jouer un rôle positif.

IV.1. Explicitation du contrat

Le problème posé par l'énoncé de la consigne est classique : l'enseignant ne peut dire aux élèves ce qu'il veut leur faire faire puisque cela reviendrait à leur donner la solution. Il doit donc leur annoncer un autre objectif (c'est celui qui correspond à la consigne) qui puisse amener les élèves à mettre en jeu les apprentissage cachés. Ce paradoxe est classique dans une situation d'enseignement, G. Brousseau (1986) l'a souvent décrit.

Nous avons décidé de bannir de la consigne le mot "précis". Il est prévu que l'enseignant explique aux élèves le sens des contraintes sur les instruments de la manière suivante : l'absence de règle graduée signifie que les mesures sont interdites et que les élèves doivent chercher d'autres moyens de construction en utilisant les instruments pour ce pour quoi ils sont faits. Il est précisé aussi que les procédures par tâtonnement ou au jugé, valables dans la tâche précédente, ne le sont plus ici.

IV.2. Familiarisation préalable avec le compas

Il est prévu qu'une séance précédant notre séquence en classe soit consacrée à l'utilisation du compas et de l'équerre, à travers un problème de construction d'une droite perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné. Cette activité préalable doit permettre aussi de familiariser les élèves avec le compas comme outil de report de longueurs ou de distances entre deux points. Elle devrait fournir aux élèves des moyens nécessaires pour initier, sinon mener à bien, des procédures mettant en jeu les propriétés d'orthogonalité et d'équidistance.

IV.3. Les propriétés d'incidence

Il est difficile de les introduire indépendamment de la notion de symétrie, dans une activité qui serait préalable à la séquence. Nous avons choisi de les introduire dans la première activité du processus d'enseignement, pour la deuxième séquence, lors de l'activité de construction à main levée. Nous avons décrit et analysé cette présentation au chapitre VI précédent.

IV.4. Modifications de quelques variables des figures

Le jeu sur les instruments est conservé, avec la même structure en trois ensembles {figures, instruments}.

Les objectifs propres au premier ensemble ont été partiellement atteint lors de la première séquence. La seule modification apportée concerne la position des deux cercles (figure 2) dans la feuille, pour laquelle nous voulons que la construction de la droite de symétrie nécessite la mise en oeuvre effective de la propriété d'orthogonalité. Pour cela, nous avons fait en sorte que la direction de la droite de symétrie ne puisse être confondue avec aucune direction privilégiée (horizontale ou verticale) dans la feuille.

Le second ensemble {figures, instruments} est conservé sans modification. En effet, l'échec de la tâche pour ces deux figures est surtout du à une incompréhension de la consigne. Les caractéristiques des figures nous semblent par contre correspondre à l'objectif fixé. Nous faisons le pari que l'explicitation de la consigne va permettre de débloquer au moins en partie la situation.

Dans le troisième ensemble {figures, instruments}, nous conservons seulement le cercle. Afin d'obliger les élèves à se détourner de la recherche directe du centre du cercle, nous avons joué sur la taille de la figure : la longueur de son rayon est suffisamment grande pour qu'il soit impossible de déterminer son centre par des essais de reconstruction de la figure (elle est supérieure à l'ouverture maximale du compas). De plus, la détermination au jugé de l'emplacement du centre est plus difficile perceptivement parce que la taille du cercle est plus grande.

Nous avons remplacé l'ellipse, figure trop complexe, par une figure plus familière aux élèves et dont les caractéristiques nécessitent la mise en oeuvre de la propriété d'équidistance pour résoudre le problème. En effet, la difficulté de la construction d'une droite de symétrie de l'ellipse résidait dans la détermination d'un deuxième point (le centre est donné et reconnu

comme point de la droite) ou d'une direction. La tâche contenait donc une double difficulté. Elle est simplifiée si ces deux points homologues sont donnés. Le rectangle est une figure qui présente de telles caratéristiques. Avec la règle non graduée, il est facile de construire son centre, ce point joue le même rôle que le centre de l'ellipse. Cependant les propriétés d'incidence ne peuvent suffire à elles seules à résoudre le problème, à cause du parallélime des côtés du rectangle. Il faut ensuite construire la médiatrice d'un des côtés de la figure. La position oblique dans la feuille permet d'interdire le choix d'une direction privilégiée.

Les conditions dans lesquelles les élèves qui suivent notre deuxième séquence abordent cette activité sont donc différentes de celles de la première séquence. De plus, la tâche étant difficile avec le compas, il nous a semblé plus judicieux de placer la phase de bilan entre les deux figures du troisième ensemble, c'est-à-dire après le travail sur le cercle. Cette phase débouche sur la définition de la médiatrice d'un segment ou d'un bi-point. La construction des droites de symétrie du rectangle devient alors un exercice d'application, après la phase d'institutionnalisation par l'enseignant des propriétés de la médiatrice.

IV.5. Rappel de l'organisation sociale

L'organisation sociale dans la classe est la même que pour l'activité précédente. Les six groupes rassemblent les mêmes élèves que pour l'activité de construction à main levée. L'activité se fait en quatre temps: travail en groupe puis bilan pour les cinq premiers items, puis de nouveau un travail en groupe suivi d'une correction collective pour le dernier item (rectangle).

Nous rappelons que le temps imparti est de deux heures environ, c'est à dire le double de celui prévu lors de la première séquence, qui s'était révélé très insuffisant.

V. Analyse du déroulement de l'activité modifiée

Nous tenterons dans ce paragraphe de répondre à deux questions. Les modifications que nous avons apportées à l'activité permettent-elles d'éviter les détournements de la tâche ou des instruments ? La mise en oeuvre des propriétés autres que la propriété du milieu est-elle possible dans le cadre de cette tâche, et à quelles conditions ?

V.1. Commentaires généraux sur le déroulement de la séance

L'ensemble de la séance a duré 1h.50 mn. Les deux phases de travail de groupe puis bilan se sont déroulées successivement comme prévues. Les élèves du groupe 6 ont disposé par erreur de tous les instruments pour chaque figure.

Le contrat entre les élèves et l'enseignant

La consigne donnée oralement par l'enseignant est reproduite ci-dessous.

> *...Vous allez vous mettre d'accord pour construire avec des instruments qu'on met à votre disposition toutes les droites de symétrie de la figure qu'on va vous proposer à chaque fois. Vous ne devez pas chercher de points ou de traits par tâtonnements, hein, c'est-à-dire à peu près, au pifomètre comme on dit; c'est une construction, hein ! Comprenez bien ce mot. Et vous devez utiliser les instruments qu'on met à votre disposition [...] pour la fonction pour laquelle ils ont été construits. C'est-à-dire, si on vous donne une règle qui n'a pas de graduation, ça n'est pas pour mesurer, hein ? Si on voulait que vous puissiez mesurer, on vous donnerait une règle avec des graduations. Il ne faut pas détourner l'objet de la fonction.*

Nous avons vu que les procédures au jugé ou par tâtonnements font obstacle aux apprentissages en jeu dans cette activité. Il faut donc les interdire. Il s'agit là d'un changement fondamental de contrat par rapport à l'activité précédente de construction à main levée, pour laquelle le tracé au jugé était au contraire la solution. On comprend la nécessité d'expliciter aux élèves ce que l'on entend par "construction" dans cette activité. En passant ce nouveau contrat avec les élèves, l'enseignant se donne également le droit de les refuser si elles surgissent malgré tout.

Les précisions de l'enseignant concernant l'absence de règle graduée devraient permettre d'éviter le détournement des instruments en instruments de mesure.

Cependant, le contrat n'est pas justifié vis à vis des élèves : ils doivent utiliser les instruments parce que c'est la consigne. La validité de la construction est liée à l'utilisation des instruments.

V.2. Analyse des procédures des élèves

V.2.1. Mise en oeuvre de la propriété du milieu

Nous avons une confirmation de la disponibilité dans cette tâche de la propriété du milieu chez tous les élèves et de la facilité de la tâche lorsque la règle graduée est disponible. Les

procédures de construction des droites de symétrie de l'octogone sont exactes dans tous les groupes.

Nous constatons une plus grande diversité des procédures des élèves que lors de la première réalisation. Elles s'appuient non seulement sur les propriétés du milieu et d'orthogonalité, mais aussi sur les propriétés du centre de l'octogone (une fois celui-ci construit) et sur la perpendicularité de certaines droites de symétrie entre elles. D'autre part, une procédure n'utilisant ni l'équerre ni la règle graduée a été donnée par un des groupes : les droites de symétrie sont les diagonales du carré construit en prolongeant quatre côtés égaux de la figure. Enfin, des procédures de vérification (milieu d'un côté, perpendicularité, passage par le centre), sont apparues dans tous les groupes à des moments différents de l'activité.

V.2.2. Mise en oeuvre de la propriété d'orthogonalité

La propriété d'orthogonalité a majoritairement été mise en oeuvre pour la construction de la droite de symétrie des deux cercles. Une analyse de l'évolution de procédures dans deux groupes permet d'affirmer que deux éléments ont joué en faveur de cette réussite : l'explicitation de la consigne et le changement de valeur d'une variable de la figure (direction de la droite de symétrie dans la feuille).

En effet, dans quatre groupes, la procédure initiale a consisté à construire les centres des cercles comme milieux, calculés avec la règle graduée, de diamètres définis par tâtonnements dans la plus grande dimension. Nous retrouvons la force de la propriété du milieu et les procédures inexactes des élèves de la séquence précédente. Cependant, la présence de l'équerre et la reprise de la consigne ont amené les élèves de deux de ces groupes à abandonner cette procédure et en chercher une autre. Ils sont alors arrivés à celle que nous attendions : construction de la droite perpendiculaire à la corde commune aux deux cercles en son milieu. Cette procédure a été adoptée tout de suite dans les deux groupes restants. Finalement, quatre constructions sont exactes et utilisent effectivement l'équerre.

Nous en reparlons à propos des deux figures suivantes (trapèze et drapeaux).

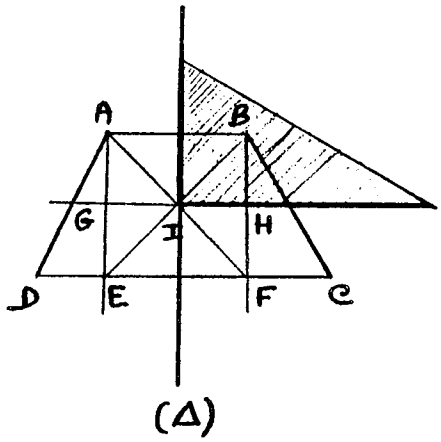
V.2.3. Procédures de construction pour le trapèze et les drapeaux

L'explicitation de la consigne a joué le rôle attendu. En effet, parmi les trois groupes qui ont donné des constructions exactes pour les deux figures du second ensemble, deux d'entre eux,

pour le trapèze, ont adopté des procédures initiales de construction au jugé ou de mesures qu'ils ont remises en question. Ces élèves partaient donc sur le même type de procédure que ceux de la séquence précédente. Ces procédures ont été abandonnées parce que trop imprécises et n'ont pas été reprises pour la figure suivante.

D'autre part, la propriété d'orthogonalité a été effectivement mise en oeuvre dans toutes les constructions de ces trois groupes.

Pour le trapèze, les groupes 2 et 3 ont construit la droite passant par le point d'intersection des diagonales du rectangle construit sur la petite base et perpendiculaire à une des bases. Le groupe 5 a adopté une construtions plus complexe : celle de la droite passant par le point d'intersection des diagonales du rectangle construit sur la petite base et perpendiculaire à la droite passant par ce même point et elle-même perpendiculaire aux autres côtés de ce rectangle (donc parallèle aux bases).



1°) Construction de AE et BF
2°) Construction de I = AF ∩ EB
3°) Construction de (GH) ⊥ AE passant par I
4°) (Δ) est perpendiculaire à GH passant par I

Pour les deux drapeaux, les trois groupes ont adopté la même procédure: la droite passe par le point d'intersection des diagonales du rectangle construit sur les hampes et elle est perpendiculaire à un des côtés. Les procédures adoptées dans le cas du trapèze ont donc été réinvesties pour cette figure. Notons que ces élèves ont tous ressenti la nécessité de s'appuyer sur une figure à angles droits, le rectangle étant la figure idéale. Il ne fait alors pas de doute que le point d'intersection des diagonales du rectangle est sur la droite de symétrie du trapèze ou des drapeaux : aucun des élèves n'a en effet soulevé cette question.

La propriété d'orthogonalité est aussi mise en oeuvre dans le groupe 4. Il s'agit du groupe dans lequel un des élèves a proposé de construire les diagonales du trapèze. Les autres élèves n'ont pas accepté et ont choisi une construction au jugé, en vérifiant malgré tout la perpendicularité avec l'équerre. Cette même procédure a été reprise pour les deux drapeaux.

Enfin, pour les deux figures, la procédure du groupe 1 est la même : construction de la droite passant par le point d'intersection de deux segments et perpendiculaire à un autre segment. Mais pour le trapèze, si le point d'intersection des diagonales est bien construit, la perpendicularité est déterminée au jugé. Pour les "deux drapeaux" au contraire, les "diagonales" n'en sont pas vraiment et par contre l'équerre est correctement utilisée. Il s'agit donc d'un demi-échec pour ce groupe. Ces procédures révèlent une absence de systématisation dans le déroulement de la construction.

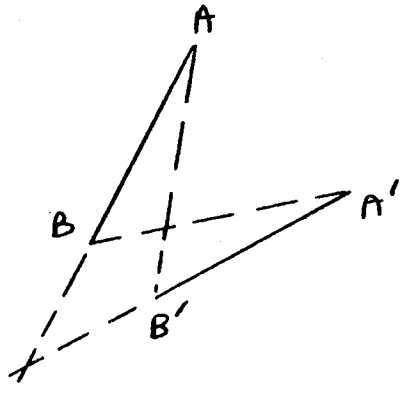
V.2.4. Un contrôle difficile de la mise en oeuvre des propriétés d'incidence

L'analyse de la mise en oeuvre de la propriété d'incidence est complexe. En effet, nous avons vu que la construction d'un point de la droite de symétrie par intersection de deux segments est faite dans tous les groupes (sauf un), pour au moins une des deux figures.

La contrainte sur les instruments semble bien jouer un rôle primordial en ce sens. En effet, le seul groupe qui n'a pas construit de tels points est celui qui, par erreur, avait à sa disposition tous les instruments (groupe 6). Plus précisément, les élèves de ce groupe ont adopté pour les deux figures du second ensemble (trapèze et drapeaux) uniquement des procédures de recherche de milieux de bi-points ou de segments. Ceci confirme que la prégnance de la propriété du milieu nuit à la mise en oeuvre des autres propriétés.

Cependant, tous les points construits ainsi sont à l'intersection de segments de types AB' et A'B. Or, ce sont les segments AB et A'B' qui sont symétriques. Pour reconnaitre que les segments AB' et A'B sont symétriques, il faut se servir de l'involution de la transformation.

Il est donc difficile de savoir si une telle construction relève réellement des propriétés d'incidence de la part des élèves. En effet, de tels points sont situés à l'intérieur de la figure, au "milieu" de celle-ci et nous sommes proches de la propriété du milieu. D'autre part, aucun point de type intersection des prolongements de AB et A'B' n'a été construit pour ces deux figures.



Nous reviendrons sur cette question dans notre conclusion générale, pour proposer un moyen de distinguer ces deux types de points.

Nous allons voir qu'il n'en est pas de même pour la mise en oeuvre de la propriété d'équidistance.

V.2.5. Mise en oeuvre de la propriété d'équidistance

La tâche de construction des droites de symétrie du cercle avec règle non graduée et compas n'a donc pas rempli son objectif. Elle n'a été réussie que par une seule élève d'un seul groupe (Caren, groupe 1), les autres élèves du groupe ne l'ayant pas suivie dans sa démarche et n'ayant pas eu le temps de discuter la procédure proposée.

Pourtant, la procédure générale est celle que nous attendions : construction du centre du cercle. Les élèves sont tous convaincus que la détermination de ce point résout le problème posé.

D'autre part, la taille de la figure joue bien son rôle. En effet, les tentatives de reconstruction du cercle par ajustement du centre et du rayon sont vite abandonnées : le rayon du cercle était trop grand pour l'ouverture du compas. De même, les procédures de recherche d'un diamètre par tâtonnements pour trouver la plus grande dimension dans le cercle ont été rejetées très vite, car la longueur de la règle n'était pas suffisante.

Mais la tâche est trop complexe et une autre procédure de détermination d'un diamètre va émerger. Elle consiste à partager le contour du cercle en arcs égaux, en essayant, par tâtonnements sur l'ouverture du compas, de trouver un découpage en nombre entier d'arcs (nombre pair pour plusieurs). L'objectif était de tracer un diamètre. Les cinq groupes qui n'avaient pas la règle graduée ont tous tenté cette procédure plusieurs fois. Ils ont tous rencontré le problème que la fin du partage ne "tombait pas juste".

Cette procédure ne semblent pas relèver du "tâtonnement" pour les élèves: en effet, les reports d'arcs sont faits soigneusement avec le compas et les élèves refusent un partage du cercle en un nombre non entier d'arcs. Aussi a-t'elle été plusieurs fois remise en question et, dans trois groupes (1, 3 et 5), elle a alterné avec une autre procédure, qui consiste à rechercher un point à égale distance de deux points du cercle en ajustant l'ouverture du compas de façon à avoir le centre ou un rayon. Les élèves ne sont pas loin de la construction attendue d'une droite de symétrie du cercle : c'est l'équidistance du centre de deux points quelconques du cercle qui est en jeu. Mais l'objectif du groupe est de déterminer le centre du cercle ou un rayon et un seul de

ces élèves a réalisé qu'il détenait une partie de la solution, mais sans parvenir à l'exprimer.

Aucun de ces groupes ne parviendra à la solution. Il aurait fallu pour cela se détacher de la recherche immédiate du centre du cercle et reconnaitre qu'ils avaient tous les éléments pour construire une droite de symétrie.

Enfin, le groupe 6 qui disposait de tous les instruments n'a pas résolu non plus le problème. Une de ses procédures a consisté à tracer un cercle recoupant le cercle donné, puis la droite perpendiculaire au milieu de la corde commune, mais sans conclure. Il semble qu'ils ont essayé de se ramener au problème de la figure 2 (deux cercles sécants avec règle graduée et équerre).

V.3. Conclusion

Un premier résultat est que le détournement de la tâche est plus localisé dans cette nouvelle réalisation : les élèves ont en grande majorité compris et respecté la consigne donnée par l'enseignant. L'explicitation de la consigne est nécessaire, car elle marque un changement radical de contrat avec la tâche de construction à main levée qui précède. La remise en question, constatée dans plusieurs groupes, de procédures initiales de type "constructions au jugé ou par tâtonnements" et l'élaboration de procédures gagnantes en témoignent. Un des effets de la négociation du contrat a donc été de provoquer une véritable mobilisation des élèves pour la recherche de procédures utilisant les instruments fournis.

Un second résultat est que les propriétés de la droite de symétrie semblent mobilisables à des degrés différents dans cette tâche, ce que n'avait pas permis de voir la première réalisation, où seule la propriété du milieu avait pu émerger. Dans cette nouvelle réalisation, la tâche a atteint ses objectifs de mise en oeuvre des propriétés d'orthogonalité et, en partie, celles d'incidence. Le rôle des modifications proposées a pu être repéré dans l'évolution des procédures de certains groupes et l'utilisation des instruments. Ces modifications concernaient l'explicitation des contraintes sur les instruments et les modifications de variables des figures.

Il est confirmé que les contraintes sur les instruments sont nécessaires pour l'objectif d'apprentissage fixé : l'analyse des procédures du groupe qui, par erreur, n'a pas été soumis à ces contraintes le montre. La possibilité d'utiliser tous les instruments a conduit les élèves de ce groupe à l'utilisation quasi systématique de la propriété du milieu pour toutes les figures proposées. La mise en oeuvre des autres propriétés de la droite de symétrie ne peut donc avoir lieu qu'au prix d'un jeu très subtil sur les instruments.

Cependant, les modifications apportées à la tâche ne suffisent pas à permettre la mise en oeuvre de la propriété d'équidistance. Mais sa complexité est différente de celle des autres propriétés évoquées. La recherche d'un point à égale distance de deux points donnés doit être détachée des notions de milieu ou de centre. Par exemple, elle n'est pas en question dans la détermination du milieu d'un segment : c'est plutôt la propriété du milieu qui est en jeu. Dans le cas du cercle, la focalisation des élèves sur la détermination du centre induit la recherche d'un point particulier à égale distance de deux points du cercle plutôt que celle de la droite des points équidistants de ces deux points. Dans cette tâche, il est aberrant de vouloir détourner l'attention des élèves de la recherche du centre du cercle, puisque sa construction est solution du problème. C'est le paradoxe de cette figure pour l'objectif que nous nous sommes fixés. Le cercle n'est peut être pas une figure adaptée pour une première approche de la propriété d'équidistance.

La question d'une situation-problème qui permette à elle seule la mise en oeuvre de la propriété d'équidistance est ouverte. L'intervention de l'enseignant est peut-être nécessaire à un moment donné pour donner un sens à cette propriété.

Dans cette séquence, l'enseignant avait prévu de s'appuyer sur les constructions des groupes pour les droites de symétrie du cercle pour introduire la notion de médiatrice. Mais une seule élève a résolu le problème. Nous allons voir ce qu'a décidé l'enseignant devant une telle situation.

V.4. Institutionnalisation de la notion de médiatrice

V.4.1. Correction de l'exercice sur le cercle

L'enseignant choisit d'envoyer au tableau la seule élève de la classe à avoir construit une droite de symétrie du cercle en utilisant la propriété d'équidistance (il s'agit de Caren).

La protestation d'un élève, dès le début de la description de la construction, est surprenante à première vue. En effet, alors que Caren propose la démarche suivante :

- choix d'un point sur le cercle,
- tracé de deux arcs égaux centrés en ce point, d'où deux autres points du cercle,
- tracé de deux arcs plus grands, centrés sur les deux points précédents, qui se recoupent à l'intérieur du cercle,

l'élève qui proteste déclare vivement que cette construction est "au jugé".

Cette réaction n'est compréhensible que si l'on se ramène à la préoccupation de la majorité des élèves pendant le travail de groupe : recherche d'une construction directe du centre du cercle. L'élève qui proteste a interprété la procédure de Caren dans ce sens : le dernier point construit est le centre cherché.
Pour se justifier, Caren trace la droite passant par le premier point choisi et le dernier point construit. Elle précise en même temps que c'est une droite de symétrie et que le dernier point construit aurait pu "se trouver dans un autre endroit", et que "ce n'est pas le point du milieu".

Mais les élèves de la classe sont restés sur le problème de la construction du centre. C'est ce que montre l'intervention d'un autre élève après cette dernière remarque de Caren : "ça ne sert à rien". Un troisième élève précise cette idée :

> *Oui, mais après, on peut en tracer d'autres; mais, euh, on peut pas toutes les tracer, il y en a une infinité !*

La nécessité d'avoir le centre est donc réaffirmée. Caren, pour se justifier encore une fois, précise qu'elle cherche bien le centre du cercle. Puis elle explique comment elle va construire ce point : il faut construire une autre droite et à l'intersection, il y aura le centre puisque toutes ces droites " elle se coupent toutes au même point, au même endroit".

Tous les élèves sont d'accord sur cette propriété, mais elle n'est porteuse de la solution que pour elle seule. En tout cas, Louis ne voit toujours pas où va Caren et l'enseignant doit user de son autorité pour obliger Louis à la laisser poursuivre. L'intervention de l'enseignant se situe au niveau de l'autorité du maitre : aucune explication n'est fournie.

> *Elle a parfaitement raison, Louis, alors tu la suis bien maintenant*

Caren et l'enseignant sont isolés de la classe : eux seuls savent où ils emmènent les autres élèves.

Caren construit une seconde droite de symétrie du cercle, en reportant des arcs de même dimension que pour la première, ce qu'elle déclare indispensable. L'enseignant remet cette question à plus tard, car il sent bien que le problème se situe à un autre niveau. Le centre est désigné à l'intersection des deux droites, ce qui ne provoque aucune réaction particulière dans la classe. Les élèves sont devant le fait accompli.

D'autre part, l'enseignant a décidé d'arrêter la phase de correction sans qu'aucune des

constructions fausses n'ait été portée au débat dans cette séance.

V.4.2. Introduction de la médiatrice

Nous ne donnons ici que les étapes principales de cette institutionnalisation. L'enseignant a tout d'abord décrit, en faisant participer les élèves, plusieurs propriétés :

- les points de la droite de symétrie sont à égale distance de deux points du cercle;
- le segment qui joint ces deux points est perpendiculaire à la droite de symétrie, et la droite partage le segment en deux parties égales;
- la médiatrice partage le segment en deux parties superposables et elle est perpendiculaire au segment; donc elle passe par le milieu du segment;
- quand on parle de deux points et non d'un segment, on dit que chaque point de la médiatrice est à égale distance des deux points.

Puis il a explicité et réalisé la construction au compas de la médiatrice d'un segment.

V.4.3. Conclusion

L'enseignant a fait le choix de s'appuyer entièrement sur la production juste donnée par une seule élève. Une conséquence est la difficulté des autres élèves de la classe à suivre la démarche de cette élève soutenue par l'enseignant. Ceci a pu empêcher la transmission de la propriété d'équidistance pendant toute la phase d'exposition de la procédure de construction.

Une autre décision de l'enseignant nous parait importante : celle de clore la phase de correction sans porter au débat les constructions fausses. Or la quasi totalité des élèves est restée en échec, ne pouvant mener jusqu'au bout leurs procédures. Mais le but de cette phase était de faire émerger la procédure nécessaire à l'introduction de la médiatrice.

La propriété d'équidistance est par contre bien mise en évidence dans la phase d'institutionnalisation de la médiatrice. Mais les élèves étaient-ils prêts à la recevoir ? L'exercice de construction des droites de symétrie du rectangle va nous permettre de cerner les apprentissages qui sont passés dans cette phase collective.

V.5. Construction des droites de symétrie du rectangle avec le compas et la règle non graduée

L'objectif de cette activité était de faire réinvestir par les élèves les propriétés de la médiatrice définie juste avant. Pour résoudre le problème, il est nécessaire de mettre en oeuvre à un moment donné les propriétés d'incidence et d'équidistance de la droite de symétrie. La construction du point d'intersection des diagonales comme point commun aux deux droites de symétrie ne doit pas soulever de difficultés.

V.5.1. Analyse des productions des groupes

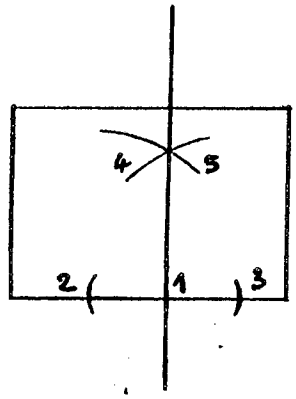
Elle révèle qu'un apprentissage a eu lieu. En effet, si deux groupes (sur six) seulement fournissent une construction juste, les autres groupes ont tous utilisé à un moment donné la propriété d'équidistance. Les procédures ayant abouti à des productions justes sont les deux attendues :
- droite passant par le point d'intersection des diagonales et un point équidistant de deux des sommets du rectangle (groupe 1 et un élève du groupe 2 qui a tenu à faire une construction séparée)
- droite passant par deux points équidistants respectivement de deux paires de sommets opposés (groupe 5).

Le groupe 4 est parti sur cette dernière procédure : deux élèves ont construit des points équidistants des bords du rectangle par intersection d'arcs égaux. Mais ils n'ont pas réalisé qu'ils avaient tous les éléments pour construire les deux droites.

Les deux autres groupes ont utilisé une procédure qui correspond à une mauvaise adaptation de celle donnée pour le cercle. Il s'agit de la construction de la droite perpendiculaire à un des côtés du rectangle passant par un point choisi sur ce côté.

Les étapes de la construction sont les suivantes : choix d'un point sur un côté du rectangle; construction de deux points sur ce même côté, à égale distance de ce premier point; puis, tracé de deux arcs plus grands, centrés sur les deux points précédents, qui se recoupent à l'intérieur du rectangle; enfin tracé de la droite passant par le premier point choisi et ce dernier point construit.

La droite ainsi construite est perpendiculaire au côté

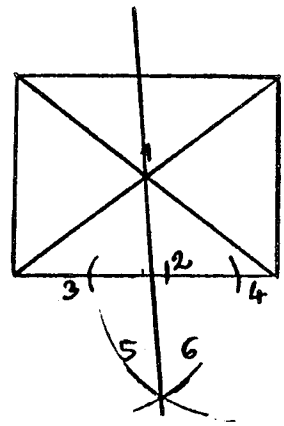


Le premier point (1) est choisi au jugé au milieu du côté du rectangle

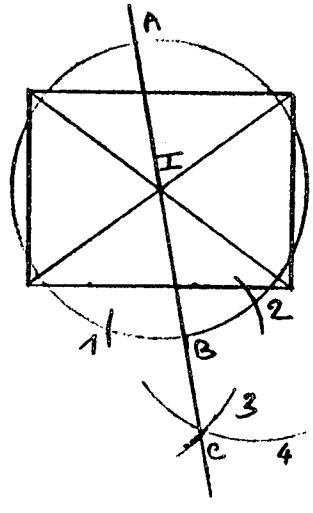
Mais si pour le cercle, le premier point peut être choisi n'importe où, puisque par tout point il passe une droite de symétrie, il n'en est pas de même pour le rectangle. En fait, les élèves savent bien où passent les droites de symétrie : ces points de départ ne sont pas choisis n'importe où. Précisons.

Dans le groupe 3, le choix s'est porté sur un point situé au milieu (au jugé) d'un des côtés; la droite construite est celle qui passe par le dernier point construit et le centre du rectangle; le problème est qu'elle ne passe pas (tout à fait) par le point choisi au départ.

La droite ainsi construite passe par le centre



Dans le groupe 6, les élèves (soumis cette fois aux contraintes sur les instruments !), ont tracé un cercle centré au centre du rectangle (déterminé correctement) et le recoupant; puis ils ont choisi deux points diamétralement opposés sur le cercle, mais sur une droite de direction non perpendiculaire aux côtés du rectangle; en fait ils reconstruisent sans s'en apercevoir le diamètre qu'ils ont choisi et qui n'est pas droite de symétrie du rectangle.



1°) Construction du cercle
2°) Choix de deux points A et B diamétralement opposés sur le cercle
3°) Construction, à partir de B, de 4 arcs d'où C
4°) tracé de BC !

V.5.2. Conclusion

L'exercice de construction des droites de symétrie du rectangle se situe dans le temps immédiatement après la construction de la médiatrice d'un segment. Les élèves n'ont pas tous réinvesti correctement cette construction. La manière dont certains le font pose le problème du sens de cette construction. La propriété d'équidistance semble difficile d'accès. Le fait qu'elle soit liée au compas peut jouer en ce sens. En effet, le compas n'est jamais posé sur un centre ou un milieu, puisqu'il sert à les construire. Or les élèves ont tendance à vouloir s'appuyer sur ces points. Nous le retrouvons dans la procédure qui consiste à choisir un point de départ situé, au jugé, au milieu d'un côté du rectangle. Un véritable apprentissage est donc nécessaire pour faire de la propriété d'équidistance un outil réellement disponible pour les élèves.

VI. Conclusion générale sur la situation

Par rapport aux objectifs

L'objectif de cette activité était de faire utiliser les propriétés de la droite de symétrie comme outil de résolution de problèmes. De nombreux résultats sont communs aux deux réalisations de cette activité (lors des deux séquences), ce qui renforce leur validité. D'autres concernent les modifications apportées à la tâche entre les deux séquences : celles-ci vont plutôt dans le sens d'un meilleur contrôle des objectifs d'apprentissage. Nous allons les préciser.

Par rapport aux propriétés

La seule propriété disponible chez les élèves est celle du milieu. L'intérêt d'une telle activité est donc essentiellement en rapport avec les conditions de mise en oeuvre des autres propriétés. Nous avons montré que pour créer ces conditions, il est nécessaire d'interdire l'emploi de la propriété du milieu. Mais la suppression de la règle graduée parmi les instruments fournis aux élèves ne s'avère pas une contrainte suffisante, car les autres propriétés ne sont pas disponibles chez eux. La tâche peut alors leur sembler impossible à résoudre.

Nous avons repéré chez les élèves deux manières de débloquer la situation : détourner la tâche (on constuit au jugé) ou détourner l'usage des instruments (tous servent à mesurer).

Le sens de la tâche

Une négociation avec les élèves du sens de la tâche et de l'usage des instruments s'impose donc. Mais cette négociation est difficile. L'exactitude de la construction a été présentée comme une convention d'usage des instruments : il faut se servir "correctement" des instruments pour avoir une construction valable. Les raisons de cette convention (pourquoi est-ce cela une construction valable ?) ne tiennent qu'à la décision de l'enseignant que c'est ainsi. On a vu que certaines constructions d'élèves utilisant correctement les instruments ne sont pas reconnues comme exactes par l'enseignant (par exemple, reconstruction du cercle par essais successifs sur le centre et le rayon).Il y a là un vrai problème pour l'enseignement.

L'étude théorique de l'activité doit donc prévoir un contrôle de ce type de difficultés. Ce contrôle est lié au choix des figures et de leurs variables. Ainsi, par exemple, une analyse consécutive à l'échec pour l'ellipse nous a amené à la remplacer par un rectangle : cette figure présente les mêmes caratéristiques que l'ellipse pour l'objectif visé et elle n'en présente pas les inconvénients.

Choix des figures et des variables

Nous avons vu la nécessité des contraintes sur les instruments associées à des caractéristiques de figures. Une variable nouvelle a eu un rôle intéressant dans cette tâche : la taille des figures. Elle peut permettre d'invalider les procédures de construction au jugé par un simple contrôle perceptif. Ce n'est pas le cas pour des "petites" figures : lorsque le centre du cercle déterminé au jugé se confond avec celui que l'on aurait construit, comment convaincre l'élève de l'intérêt de se servir des instruments ! Dans le même ordre d'idée, la direction perpendiculaire est d'autant moins facile à déterminer au jugé que le point et la matérialisation de la direction de référence (segment) sont éloignés. De même, si le cercle a un rayon plus grand que la règle ou que l'ouverture maximale du compas, les procédures de recherche par tâtonnements du plus grand diamètre ou la reconstruction du cercle sont dévalorisées. Ces nombreux exemples montrent que cette variable est peut-être à prendre en compte de manière plus systématique dans cette tâche.

Annexe pour la première séquence, paragraphe II et III.

Bilan des procédures et des instruments utilisés

a- constructions avec règle graduée et équerre

figure 1- L'octogone

groupe	procédures de construction
1	détermination du milieu des côtés opposés avec la règle graduée
2	détermination du milieu d'un côté avec la règle graduée puis de la perpendiculaire au côté opposé avec l'équerre
3	détermination du milieu des côtés opposés, puis vérification de la perpendicularité avec l'équerre
4	détermination du milieu des côtés opposés avec la règle graduée
5	procédures non déterminées, mais des milieux de segments sont marqués
6	détermination du milieu des côtés opposés avec la règle graduée
7	détermination du milieu des côtés opposés avec la règle graduée

figure 2- Les deux cercles sécants

groupe	procédures de construction
1	Détermination des diamètres verticaux des deux cercles en faisant glisser la règle verticalement, puis calcul et détermination des milieux des diamètres et de la corde commune. Tracé de la droite passant par ces points. L'équerre n'est pas utilisée.
2	Détermination du milieu de la corde avec la règle graduée, puis de la perpendiculaire à la corde en ce point, avec l'équerre.
3	Tracé de la corde refusé. Détermination des diamètres verticaux des deux cercles en faisant glisser la règle verticalement, puis calcul et détermination des milieux des diamètres. L'équerre n'est pas utilisée.
4	Détermination du milieu du bi-point avec la règle graduée, sans tracer la corde, puis tracé au jugé d'une droite horizontale passant par ce point. L'équerre n'est pas utilisée.
5	Détermination du milieu du bi-point avec la règle graduée, sans tracer la corde, puis tracé de la droite passant par ce point et perpendiculaire à l'équerre aux bords de la feuille.
6	La droite a été construite passant par le "milieu "(nous n'avons pu déterminer de quoi), sans utiliser l'équerre.
7	Détermination du milieu du bi-point avec la règle graduée, sans tracer la corde, puis tracé, avec l'équerre, de deux demi-droites perpendiculaires à la corde, de chaque côté de la corde matérialisée par la règle.

b- constructions avec règle non graduée et équerre

figure 3 - Le trapèze

groupe	procédures de construction
1	Essais de graduation de l'équerre, puis utilisation de la section de la règle comme unité (évaluée à 1 cm). Détermination avec cette unité des milieux des bases et tracé de la droite.
2	Essai d'utilisation de l'équerre pour mesurer la longueur de la petite base, puis les petits angles du trapèze. Echec, passent à la figure suivante. Lors d'une phase de vérification, tracé des deux diagonales, puis de la perpendiculaire à une base passant par le point d'intersection des diagonales.
3	Mesures des bases avec la section de la règle comme unité. Détermination des milieux des bases, puis tracé de la droite passant par ces points. Vérification avec l'équerre de
la	perpendicularité aux deux bases, ce qui pose problème, car révèle une imprécision.
4	Utilisation de l'équerre pour vérifier l'égalité des longueurs des côtés non parallèles. Détermination par tâtonnements avec la règle non graduée du milieu de la petite base et tracé de la droite passant par ce point et perpendiculaire (avec l'équerre) à l'autre base.
5	Tracé en pointillés avec l'équerre du rectangle construit à partir de la petite base. Détermination au jugé du milieu d'un des côtés. Pas de tracé de droite.
6	Essai d'utilisation de l'équerre pour mesurer des angles. Echec, car aucun angle droit. Graduation de la règle non graduée, puis recherche par tâtonnements des milieux des bases et tracé de la droite passant par ces points.
7	Tracé, avec l'équerre, du rectangle construit à partir de la petite base. Puis utilisation de la section de la règle comme unité de mesure (prise comme1cm)pour déterminer les milieux des côtés du rectangle (ou des bases) et tracé de la droite.

figure 4 -Les deux drapeaux

groupe	procédures de construction
1	Discussion sur l'emplacement de la droite de symétrie . Recherche de deux points à mi-distance des deux segments, avec la section de la règle. Puis tracé de la droite passant par ces points.
2	Le "milieu des deux droites parallèles" est évoqué. Tentatives d'utilisation de l'équerre en la posant sur différents éléments de la figure. Echec. Pas de tracé.
3	Mesure de la distance entre les deux segments parallèles avec la section de la règle, le long d'une direction perpendiculaire matérialisée par l'équerre contre laquelle est posée la règle. Détermination de deux points à mi-distance et tracé de la droite passant par ces points.
4	Essai de mesure de la distance des deux grands segments, en utilisant des marques gravées sur la règle. Hésitations sur l'utilité de l'équerre. Tracé au jugé à mi-distance des deux droites parallèles.
5	Essai de graduation de l'équerre avec la section de la règle. Pas de tracé de droite.
6	Evocation de plusieurs droites de symétrie, mais accord rapide sur la bonne. Tracé d'une droite passant par deux points déterminés au jugé à mi-distance des deux longs segments.
7	(figure non abordée)

c- constructions avec règle non graduée et compas

figure 5 - Le cercle sans le centre

groupe	procédures de construction
1	Recherche du centre (au jugé ?). Tracé d'une droite (oblique), accompagné d'un commentaire : "il y en a une infinité".
2	Reconstruction du cercle par tâtonnements avec le compas pour trouver le centre. Déclarent alors le problème résolu. Commentaire écrit : "il y a un nombre illimité de droites de symétrie". 5 sont tracées.
3	Reconstruction du cercle par tâtonnements avec le compas pour trouver le centre. Tracé de 7 droites passant par le centre. Commentaire écrit : "il passe une infinité de droites par le point O".
4	Un élève prend deux points sur le cercle et trace avec le compas la médiatrice de ces deux points. Ils disent qu'il y en a "des millions", mais ne l'écrivent pas.
5	Placent le centre au jugé. Tracent 4 droites. Commentaire écrit : "il y en a des milliards".
6	Reconstruction du cercle pour déterminer le centre par tâtonnements avec le compas. 4 droites tracées, accompagnées d'un commentaire : "il y en a bien plus".
7	(figure non abordée)

figure 6 - L'ellipse avec son centre

groupe	procédures de construction
1	Tracé immédiat, car le centre est marqué, de deux droites horizontale et verticale
2	Détermination, par des essais avec le compas, pointe sèche posée au centre de l'éllipse, des cercles tangents intérieurement et extérieurement à l'ellipse. Tracé des deux droites passant par les couples de points de contact et le centre.
3	Comme le cercle, mais "pas en diagonale". Tracé au jugé avec la règle de deux droites passant par le centre.
4	Tracé de deux droites passant par le centre, l'une verticalement (au jugé, dans la plus grande dimension) et l'autre horizontalement (au jugé aussi).
5	(figure non abordée)
6	Début de recherche par tâtonnements avec le compas de points de contact de cercles avec l'ellipse, mais ne semble pas aboutir. Tracé deux droites passant par le centre.
7	(non abordée)

Chapitre VIII

Deux situations de communication

Les activités proposées aux élèves dans les premières phases du processus d'enseignement relèvent des situations d'action telles qu'elles sont définies dans la théorie des situations. Dans la théorie des apprentissages qui lui est attachée, pour que les élèves puissent construire des connaissances, il faut non seulement qu'ils les fassent fonctionner implicitement, mais qu'ils sachent aussi les exprimer dans un langage compris par d'autres. Dans un premier temps, ces autres sont les membres de la classe, l'enseignant et les élèves y jouant évidemment des rôles très différents.

Les paragraphes I et II concernent la situation de communication de la première séquence d'enseignement. Nos choix de la situation et de ses caractéristiques et le dispositif expérimental qui lui est attaché est décrit en I. L'analyse de sa réalisation est donnée en II. En particulier, nous tentons d'expliquer les causes de sa réussite partielle.

C'est une situation de communication différente qui est proposée aux élèves lors de la deuxième séquence d'enseignement. Nous la présentons en III, en justifiant son choix par rapport à la situation précédente, et les résultats de la réalisation en classe sont présentés au paragraphe IV. Notre conclusion est tournée vers les apports d'une telle activité dans un séquence d'enseignement.

I. Description de la première situation

Nous avons choisi une situation de communication réelle c'est à dire comportant un interlocuteur physiquement existant, par opposition à une situation de communication invoquée, utilisée également dans les recherches en didactique.

La manière de formuler une connaissance dépend du statut social de l'interlocuteur par rapport à la connaissance en jeu. L'élève ne l'exprime pas de la même façon selon qu'il s'adresse à l'enseignant, à un autre élève de sa classe ou à une personne extérieure au système scolaire. Nous avons choisi une situation de communication entre pairs. L'enjeu est différent de celui des activités de formulation tournées vers l'enseignant. La validation du message n'est pas du

ressort du détenteur du savoir. Elle est soumise à l'interprétation que font les élèves récepteurs des informations données par les élèves émetteurs.

L'enjeu se situe dans la réussite de la communication. De la qualité du message envoyé dépendent aussi bien la réussite de l'élève émetteur que celle de l'élève récepteur. Au sujet de la finalité de la situation, nous citons C. Laborde (1984) :

> *La finalité sociale de permettre à un autre de réussir une activité incite l'émetteur à vouloir résoudre ce problème de communication. Le ressort de ces situations tient donc au fait que l'émetteur et le récepteur ont des problèmes différents à résoudre mais fortement dépendants et que la réussite du récepteur dépend de la production de l'émetteur.*

Nous avons choisi de mettre les élèves par binômes, les échanges pouvant être moteurs dans cette tâche plus complexe que les précédentes. En effet, dans un binôme, le partenaire peut réagir de manière intéressante à la proposition de formulation de l'autre élève, parce qu'il l'aborde de l'extérieur. Il y a ainsi localement une interprétation immédiate de l'information proposée. Cette possibilité d'échanges peut favoriser une évolution dans l'écriture du message.

I.1. Objectif

L'objectif spécifique de cette situation de communication est de faire formuler par les élèves les propriétés de la droite de symétrie d'une figure, ou leur faire utiliser l'expression "droite de symétrie". Pour cela, nous avons élaboré une situation-problème dans laquelle ces formulations étaient un outil de résolution du problème.

D'autre part, nous savons que les élèves ont une conception de la droite de symétrie comme droite partageant une figure en deux parties identiques et que cette propriété tient lieu de définition pour certains d'entre eux. La description d'une droite qui ne vérifierait que cette propriété pourrait être interprétée comme celle d'une droite de symétrie. Nous avons essayé de mettre en jeu cette équivalence erronée dans la situation proposée, afin de la déstabiliser et de faire prendre conscience aux élèves de la nécessité d'un langage commun précis.

I.2. Dispositif expérimental

Les élèves sont répartis en deux groupes A et B. Chaque groupe contient sept binômes d'élèves notés respectivement Ai et Bi, pour i allant de 1 à 7. En fait, Ai et Bi sont composés des quatre élèves du groupe i constitué au début de la séquence. Ai et Bi sont chacun d'abord

émetteur, puis récepteur pour le binôme qui lui est associé. Les élèves de chacun des groupes A et B sont répartis dans deux salles différentes, aucun contact direct n'est ainsi possible entre Ai et Bi. L'enseignant joue le rôle de *facteur* pendant cette phase.

L'enseignant n'imposait pas a priori de limites de temps pour l'élaboration du message. Les deux activités de codage et décodage et la phase de bilan devaient être réalisées dans la plage horaire prévue pour la séance.

Pour la **phase de bilan**, il revenait à l'enseignant de choisir les messages les plus à même de mettre en jeu les apprentissages fixés. Le rôle de facteur pendant la phase de communication lui laissait le temps de repérer ces messages.

I.3. Description et analyse de la tâche

Ai (resp. Bi) reçoit de l'enseignant une figure et est averti que le binôme qui lui est associé a une figure semblable à la sienne, mais de grandeur différente et ayant un élément en moins. Cet élément est désigné par une couleur particulière (vert) dans la figure. La tâche de Ai (resp. Bi) est de transmettre les informations sur cet élément dans un message écrit verbal, c'est-à-dire ne comportant que des mots, pour que le binôme récepteur Bi (resp. Ai) puisse reconstruire l'élément dans sa propre figure.

Le choix des dimensions différentes pour la figure de base de Ai et de Bi (il s'agit de la figure sans l'élément à décrire) empêche le binôme émetteur de transmettre la position de l'élément au moyen de mesures. Ainsi, la description de l'élément par rapport à ses propriétés dans la figure devient un outil privilégié pour résoudre le problème posé.

Chaque binôme étant tour à tour émetteur et récepteur, nous avons choisi deux types de figures de base pour chacun des groupes A at B, afin d'empêcher un réinvestissement immédiat dans l'activité de décodage des connaissances mises en jeu lors de l'activité de codage.

La réussite de la communication est une notion qui peut être différente pour les élèves et pour l'enseignant. Pour les élèves, la communication est réussie si l'élément proposé par les élèves décodeurs à partir du message envoyé coïncide avec celui que les élèves codeurs avaient voulu désigner. Pour l'enseignant, la réussite de la communication se situe par rapport aux apprentissages que celle-ci a effectivement mis en jeu. Or, un codage faux (ne pouvant pas logiquement décrire l'élément donné) ou incomplet (ne permettant pas de retrouver cet élément parmi d'autres) peut malgré tout aboutir à une réussite pour les élèves. Inversement, un

message juste (décrivant bien de manière unique l'élément) peut être mal décodé parce qu'il est trop complexe pour les élèves décodeurs et conduire à l'échec de la communication. La tâche doit être définie de manière à faire coïncider le mieux possible ces deux notions de réussite. Nous l'analysons ci-dessous.

Description des figures

Les figures proposées aux élèves sont reproduites en annexe (p.251). Nous les avons désignées par les mêmes numéros que ceux des binômes, de A1 à A7 et de B1 à B7. Elles sont présentées dans la position dans laquelle elles ont été données aux élèves (sur une demi-feuille de format 21x29.7).

Les deux figures de base proposées ont une propriété commune : elles admettent deux droites de symétrie. Cette double symétrie axiale induit une propriété qui joue un rôle essentiel dans cette situation : *le point d'intersection des deux droites de symétrie est un centre de symétrie de la figure et, donc, toute droite passant par ce point partage la figure en deux parties identiques.*

Parmi elles, certaines passent par des sommets, d'autres par des milieux de segments ou d'arcs. Ces figures admettent donc deux ensembles d'éléments qui ont en commun une propriété de la droite de symétrie, tout en présentant une différence fondamentale du point de vue de la symétrie axiale. Nous parlerons d'éléments de type S pour désigner les droites de symétrie et d'éléments de type NS pour les autres.

La position des figures dans la feuille a été définie de manière à éviter le recours aux directions horizontales ou verticales dans l'élaboration du message.

Chaque binôme a un élément à décrire vérifiant cette propriété, de type S ou NS. La description d'un élément de type S ne fait pas intervenir les mêmes connaissances que celle d'un élément de type NS. Pour conserver une certaine uniformité des apprentissages pour tous les élèves, chaque binôme décrivant un élément de type S est en correspondance avec un binôme décrivant un élément de type NS. Ainsi, chaque élève est confronté aux deux aspects de la tâche dans l'ensemble des activités de la situation.

Analyse de l'activité de codage

Pour décrire un élément de type S, deux informations sont nécessaires et suffisantes.

L'une de ces informations est une caractérisation de l'élément comme droite de symétrie, par l'expression de sa définition ou de ses propriétés spécifiques. La reconnaissance que l'expression "droite de symétrie" suffit pour résoudre le problème posé permet de donner une description courte, ne présentant pas de complexité d'écriture ni de lecture. L'explicitation des propriétés de l'élément, sans le nommer, permet aussi de résoudre le problème. Des indications telles que "passe par les milieux de côtés et est perpendiculaire à ces côtés", "partage la figure en deux parties superposables par pliage" sont accessibles aux élèves, puisqu'elles sont règles d'action dans les tâches de construction. Leur formulation est plus complexe que l'écriture de la définition.

L'autre information est un critère qui permet de choisir l'élément parmi les deux droites de symétrie de la figure. Nous pensons qu'il n'y a aucune difficulté dans l'expression de ce critère de choix (la droite passe par deux sommets ou par les milieux de deux segments ou de deux arcs).

La description d'un élément de type NS est plus variée. Mais certaines informations sont attendues. Nous pensons que la reconnaissance et la formulation de la propriété de partage de la figure en deux parties identiques sont accessibles aux élèves. La difficulté est de repérer l'insuffisance de cette information, même si celle-ci s'accompagne d'une information sur l'emplacement de la droite (elle passe par les sommets). Il est nécessaire d'exprimer que la droite n'est pas une droite de symétrie de la figure, ou bien que, une fois cette droite tracée, la figure n'admet plus de droite de symétrie. L'anticipation du décodage peut être un moyen de découvrir ce "piège". L'interaction entre deux élèves peut aussi jouer en ce sens, du fait que chaque élève peut juger de l'extérieur la proposition de l'autre.

Sans repérage par rapport à la feuille, il est difficile de distinguer les deux diagonales NS de la figure. Nous pensions que le problème ne serait pas soulevé par les élèves avant la confrontation des réponses. Sinon, une intervention de l'enseignant pouvait s'imposer.

Analyse de l'activité de décodage

L'activité des élèves récepteurs dépend fortement de la justesse et la précision du message qui leur est fourni. Ils doivent reconstruire l'élément à partir de sa description.

Le message peut être de type algorithmique. Il faut alors suivre les instructions dans l'ordre où elles sont données pour trouver la solution. L'élément n'est identifié qu'à la fin de la description. Il peut être de type statique et descriptif, c'est-à-dire présenter un ensemble

d'informations sans ordre laissant chacune des choix. Le choix de départ est alors conservé sauf si une information supplémentaire vient apporter une contradiction. Un message incomplet peut laisser la possibilité d'un choix. Mais il peut tout aussi bien aboutir à garder comme solution celle choisie arbitrairement au départ, si aucune contradiction n'est apparue. De même, un message présentant des informations contradictoires interdit toute solution. Mais il peut aboutir à une solution si certaines informations sont prioritaires par rapport à d'autre. L'échec d'une communication peut donc avoir des causes multiples. Il y a ainsi peu de chances que le hasard seul permette une réussite de la communication.

II. Analyse des messages des élèves

Les enjeux d'apprentissage étant différents selon le type d'élément à décrire, nous avons analysé d'une part les messages décrivant un élément de type S et, d'autre part, ceux décrivant un élément de type NS. Les messages sont reproduits intégralement, tels qu'ils ont été envoyés par les élèves émetteurs.

II.1. Description d'un élément de type S

Les sept binômes concernés sont les suivants : A1, A4, A5, A6, B2, B3, B7.

Le premier constat est qu'un seul de ces messages ne contient aucune information en rapport avec la notion de droite de symétrie. Les six autres messages contiennent l'expression "droite de symétrie" ou la description de l'une de ses propriétés.

La tâche a donc atteint son objectif de formulation des propriétés de la droite de symétrie. Nous allons analyser plus précisément les types d'informations données.

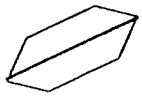
II.1.1. Messages de type "désignation"

Dans trois messages, l'expression "droite de symétrie" ou une expression analogue sert à décrire le segment et elle se suffit à elle-même. La seconde information est une indication permettant de choisir parmi les deux droites de symétrie de la figure. Voici les messages.

Message A1

C'est vert, c'est un segment qui est aussi l'axe de symétrie de cette figure. Il touche deux droites parallèles.

Message A6



-tracer la symétrie de la figure t'elle, qu'elle la traverse dans le sens de la longueur.

Message B2

Droite de symétrie coupant la figure en longueur.

Le statut de l'élément dans la figure est reconnu. Sa désignation par les expressions axe de symétrie, symétrie, ou droite de symétrie est considérée comme suffisante : aucune information complémentaire n'est donnée.

Les critères de choix entre les deux droites de symétrie se situent sur deux registres différents : le cadre mathématique (message A1) ou le cadre familier (messages A6 et B2).

Les deux informations du message A1 permettent de le décoder d'une manière unique et exacte. Il a effectivement été décodé sans difficultés.

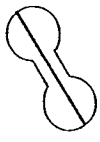
Pour décoder les messages A6 et B2, il faut savoir ce qu'est la "longueur" d'une figure. Cette expression est définie mathématiquement pour le rectangle, où la longueur désigne traditionnellement le côté de plus grande dimension. Ici, elle se rapporte à la plus grande dimension de la figure.

Ces deux messages ont été bien compris par les récepteurs et décodés sans difficultés. Un élève du binôme A2 a déclaré à propos du message de B2 que "c'était très bien expliqué". Lors de la confrontation des binômes, un élève de B2 précise qu'il y avait "deux droites de symétrie, une en longueur, une en largeur et il n'y a qu'une droite dans la longueur". De même, les élèves du binôme B6 déclarent tous deux au moment du décodage, que "c'est simple". La "longueur d'une figure" semble une définition opératoire chez les élèves.

II.1.2. Message de type "désignation et propriétés"

Ce message contient deux informations redondantes : la description d'une propriété particulière, puis l'expression "symétrie".

Message B7



Ligne verticale (de la figure) qui la partage en deux. Symétrie verticale.

La propriété décrite dans la première partie du message est le "partage en deux parties identiques". Mais l'égalité des parties est implicite et les élèves écrivent "partage en deux". Nous avons déjà rencontré cet implicite qui correspond à une expression verbale usuelle dans le langage oral. Il est utilisé ici dans une communication écrite.

La deuxième phrase du message n'est apparue que vers la fin de la phase de codage. La redondance des deux informations est donc plutôt le fait d'une évolution du message que l'expression de la nécessité pour les élèves de préciser une définition.

Le mot "verticale" est utilisé deux fois. L'élément à décrire est dirigé en oblique dans la feuille, mais pas très éloigné de la verticale. Lors de l'élaboration du message, les élèves ont écrit trois versions différentes de la première phrase :

Ligne droite verticale qui partage en deux la figure.
Ligne de la figure verticale qui la partage en deux.
Ligne verticale de la figure qui la partage en deux.

Dans cette dernière version, le mot "verticale" désigne la direction de la ligne relativement à la figure, elle s'identifierait alors à sa plus grande longueur.

Finalement, dans la version définitive, des parenthèses sont rajoutées :

Ligne verticale (de la figure) qui la partage en deux.

Ce message a bien été décodé. Les implicites "partage en deux" et "verticale" ont bien fonctionné.

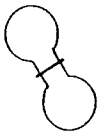
II.1.3. Messages de type "propriétés"

Nous classons dans cette catégorie les messages qui ne contiennent pas le mot "symétrie", mais utilisent des propriétés caractéristiques de la droite de symétrie. Voici les textes des deux messages de ce type.

Message A5

Rejoignez les quatre angles obtus 2 à 2 de façon à obtenir deux triangles rectangles et un quadrillatère. Puis tracez une ligne à l'intérieur du quadrilatère, parralèle à celle que vous venez de tracer et perpendiculère à celles déjà inscrite sur la feuille de façon à obtenir deux rectangles superposables.

Message B3



La figure est composée de:
-2 lignes courbes -2 segments
Les lignes courbes sont reliées par deux segments. Le trait vert coupe les deux segments (en parties égales) segments : trait droit.

Le message A5 est une description "dynamique" sous forme d'algorithme de construction de l'élément, entièrement analytique et "local" : il faut suivre pas à pas le message si l'on veut arriver à la solution. La figure est simplifiée pour être ramenée à une figure géométrique plus familière : le rectangle. Les échanges entre les élèves pendant l'élaboration du message montrent que le mot "quadrilatère" est choisi comme terme général pour désigner indifféremment un rectangle ou un carré.

L'outil "droite de symétrie" n'est pas reconnu. La propriété évoquée est celle du partage de la figure d'un quadrilatère en deux parties identiques. Elle est apparue dans le message seulement après coup, lors d'une phase de vérification consistant à mimer le décodage. Les élèves réalisent alors qu'il y a plusieurs droites parallèles possibles et rajoutent la fin de la dernière phrase : "de façon à obtenir deux rectangles superposables".

Ce message contient une information erronée sur les deux triangles construits (ils ne sont pas rectangles) qui peut être reconnue comme telle (et donc être mise de côté) car les angles aigus de l'octogone sont proches de 90°. Si l'on fait abstraction de cette information erronée, il peut être décodé de manière unique et exacte.

Ce message a été mal décodé : c'est l'autre droite de symétrie qui est tracée. Ce n'est pas l'information erronée qui est en cause, mais plutôt la complexité du message : sa lecture demande beaucoup d'attention, à cause des imbrications dans les relations qu'il décrit entre différents éléments de la figure. Une lecture (trop) rapide a abouti à une confusion entre les éléments désignés "parallèles" et ceux qui leur sont perpendiculaires.

C'est la même propriété de partage en deux parties identiques qui est utilisée dans le message B3. Elle aurait du se révéler insuffisante à elle seule pour choisir entre un élément de type S et un élément de type NS. Mais les caractéristiques de la figure entrainent l'unicité du décodage de ce message. Pour être sûrs d'éviter la confusion avec l'autre droite de symétrie, les élèves ont rappelé la définition d'un segment.
Le contenu du message ne permet pas de savoir si la notion de droite de symétrie a été mise en jeu. Mais les échanges pendant son élaboration montrent qu'en fait la propriété de symétrie a été reconnue tout de suite, et même formulée dans la première version du message :

- axe de symétrie
- il y a deux ronds se rejoignant par 2 traits lignes
- l'axe de symétrie sépare les deux lignes en deux parties égales.

Nous avons cherché à savoir pourquoi le message avait évolué de cette manière, en analysant les échanges pendant l'élaboration du message. Les élèves étaient d'accord qu'une droite de symétrie "coupe la figure en deux". Remarquons au passage que l'égalité des parties est encore une fois implicite.
A un moment donné, Emmanuelle propose la phrase suivante :

l'axe de symétrie coupe les segments en deux parties égales.

Olivier n'est pas d'accord, il veut remplacer "axe de symétrie" par "trait vert" :

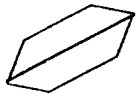
faut marquer : le trait vert coupe les segments en deux parties égales
(et, un peu plus tard)
il suffit de mettre : le trait vert

Il semble donc qu'Olivier ait reconnu que la propriété de partage en deux parties identiques suffisait, dans le cas de cette figure, pour décrire de manière unique l'élément en question. Du coup, la propriété de symétrie n'est pas explicitée dans le message. Ceci remet en cause le contrôle de la tâche par rapport aux objectifs fixés et montre l'insuffisance de l'analyse a priori.

II.1.4. Message de type "description générale"

Ce message ne fait aucune référence à la notion de droite de symétrie, ni à ses propriétés. L'élément est décrit uniquement par ses relations et ses caractéristiques par rapport aux autres éléments dans la figure.

Message A4



C'est une ligne très grande: elle est en longueur. Elle part de 2 extrémités pointues.

Ce message a été bien décodé, et immédiatement. L'implicite sur "la longueur d'une figure" a encore une fois bien fonctionné et la référence aux "extrémités pointues" déterminait bien la droite. Cette deuxième information allait en fait dans le même sens que l'interprétation attendue de la première information. Ce binôme n'ayant pas été observé, nous ne savons pas si la droite de symétrie ou l'une de ses propriétés ont été présentes d'une manière ou d'une autre au cours de la phase de codage. Son contenu n'a pas été mis au débat lors de la confrontation des binômes, parce que le décodage était exact et n'avait soulevé aucune difficulté.

II.1.5. Conclusion

Les deux séances précédentes de la séquence ont provoqué un apprentissage suffisant pour que six binômes d'élèves sur sept sachent utiliser l'expression "droite de symétrie" dans la résolution du problème. De plus, cette expression est reconnue par trois binômes comme information sufisante en elle-même pour caractériser les éléments à décrire dans la figure, même si cette reconnaissance est perceptive.

La situation de communication est donc réalisable à ce moment de la séquence et elle peut atteindre ses objectifs de formulation. Cependant, il apparait quelques erreurs dans le contrôle de la situation : les caractéristiques des figures ne permettent pas d'assurer dans tous les cas le passage obligé par les propriétés de la droite de symétrie pour résoudre le problème. Nous reviendrons sur cette question à la fin de ce chapitre.

Signalons enfin que le seul message mal décodé est aussi le seul qui proposait explicitement une construction mettant en jeu les propriétés d'orthogonalité de la droite de symétrie. Il est le seul à utiliser les désignations de nombreux objets géométriques (triangle rectangle, quadrilatère, parallèle, perpendiculaire, superposable) et l'expression de relations complexes entre ces objets. C'est justement sa complexité, liée au niveau d'expression en langage mathématique, qui est la cause de l'échec de ce message.

II.2. Description d'un élément de type NS

Ce paragraphe concerne les messages A2, A3, A7, B1, B4, B5, B6.
Un seul des sept messages contient l'information incomplète (attendue) qui met en jeu l'identification d'une droite partageant la figure en deux parties identiques à une droite de symétrie. Il s'agit du message A7 dont nous analysons le contenu et le décodage en II.2.4.

Ceci ne signifie pas que les six autres messages témoignent d'une prise de conscience de l'existence de deux types d'éléments. Ils se situent en fait très loin de cette question. En effet, les descriptions ne mettent pas du tout en jeu la propriété de partage en deux parties identiques. De plus, cinq de ces six messages ayant été "bien" décodés, la confrontation des binômes n'a pas provoqué d'échanges intéressants.

La tâche n'a donc pas rempli son rôle par rapport à la déstabilisation de cette fausse équivalence. Nous avons analysé les contenus des messages pour comprendre comment le problème avait pu être résolu sans mettre en jeu la notion de droite de symétrie.

Nous avons repéré quatre types de stratégies de description.

II.2.1. Le repérage géographique

Nous appelons ainsi les informations qui se rapportent aux directions privilégiées (horizontale, verticale, oblique, incliné) ou aux différentes régions de la feuille (bas, haut, gauche, droite).

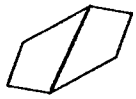
Trois messages relèvent de cette stratégie.

Message A2

Une ligne oblique traversant la figure à partir de: un point A c'est la sommet le plus haut et partir à droite et trasser une droite (cette dernière partie de la phrase est barrée)
(il faut prendre la figure dans le sens horizontal de façon à avoir A2 en haut à gauche verticale) Le trait se trouve oblique aux deux points entourant le sommet à droite (la ligne part) jusqu'au point opposé en bas.

(note : le numéro du binôme (A2) était écrit sur la feuille contenant la figure)

Message A3



C'est un rectangle sans traits verticaux, ils sont remplacés par un triangle de chaque côté dont les pointes sont dirigées vers l'extérieur. Dans le rectangle il y a une diagonale qui par dan bas pour allé vers le haut et de gauche pour allé à droite tous ça est inclinés vers le haut.

Message B1

C'est une droite qui part en diagonale à gauche de la droite du bas et qui va jusqu'à la fin de la droite du haut.

Le repérage géographique est apparu dès le début de l'activité de codage pour les binômes A2 et A3 et il n'a jamais été remis en question. Ce n'est pas le cas pour le binôme B1, où il n'est pas apparu spontanément mais comme solution à un conflit entre les deux élèves à propos des ambiguïtés possibles du message.

Dans ce binôme, un premier message avait été élaboré, sans information de type repérage géographique, mais il a été rejeté après un essai de décodage montrant qu'il y avait plusieurs possibilités. Nous l'avons reproduit ci-dessous.

C'est une droite qui part en diagonale du début d'une droite et qui va jusqu'à la fin d'une autre droite.

En essayant de décoder, les élèves se sont aperçus que trois éléments correspondaient à cette description, un segment de la figure et les deux diagonales. Ils ont alors complété avec les informations : à gauche, du bas, du haut.

Le message est bien décodé à cause en particulier de la position identique des deux figures (celle des émetteurs et celle des récepteurs) dans la feuille.

Nous retrouvons dans le message A3 une stratégie rencontrée dans le message A5 (paragraphe II.1.3) consistant à centrer l'attention sur une figure géométrique simplifiée par rapport à la figure originale, le rectangle. Le segment est alors décrit comme une diagonale de ce rectangle. La précision "inclinés vers le haut" est provoquée par la pente inhabituelle de la diagonale, moins grande lorsque le rectangle est placé avec ses côtés horizontaux et verticaux dans la feuille. D'ailleurs, les "traits verticaux" du rectangle évoqués au début du message correspondent à une perception traditionnelle de cette figure dans la feuille, qui n'est pas celle qu'ils ont sous les yeux !

Ces trois messages ont bien été décodés. Nous n'avons aucun renseignement sur les difficultés de décodage des messages B1 et A2 (non observés). Mais les élèves qui ont décodé le message A2 ont fait dans un commentaire écrit qui révèle au moins une certaine perplexité.

"on n'est pas du tout sûrs car vos explications n'étaient pas du tout clair. Expliquez-vous mieux !!"

Dans le message A3, le mot "diagonale" a servi à éliminer les droites de symétrie.

si c'est une diagonale, c'est incliné. C'est pas une droite de symétrie.

A nouveau, un implicite qui fonctionne bien a permis de résoudre le problème : les expressions "diagonale" et "droite de symétrie" sont incompatibles. Nous retrouvons cette idée exprimée par un élève lors de la phase de décodage du message B5 ci après.

II.2.2. Un repérage intrafigural

Le message B5 décrit entièrement l'élément par sa position par rapport à d'autres éléments de la figure.

Message B5

C'est une perpendiculaire, en diagonale, qui rejoint un point du centre (*) à un autre (du centre également) par côté).
(*) par côté

Ce message est peu compréhensible pour plusieurs raisons. Il contient des expressions qui ne sont pas bien définies : que désignent le "centre" et "un point du centre par côté" ? D'autre part, l'indication "perpendiculaire" ne se rapporte à aucun des éléments de la figure qui ne présente ni angle droit, ni direction perpendiculaire à une autre. Le seul rapport est la quasi verticalité dans la feuille du segment à décrire. L'indication "en diagonale" peut être une information de type repérage géographique par rapport aux bords de la feuille, mais elle peut aussi se rapporter à la figure.

Les échanges entre les élèves pendant l'élaboration du message apportent quelques éclaircissements. Tous d'abord, ceux-ci ont reconnu "une symétrie", puis une "drôle de symétrie", mais ils n'ont jamais rejeté cette idée de symétrie. Ils ont alors cherché plusieurs formulations : oblique, diagonale. L'expression "perpendiculaire en diagonale" peut alors signifier "droite de symétrie en diagonale". D'autre part, les "centres" apparaissent comme des extrémités des segments de la figure. C'est peut être pour préciser cela que Virginie rajoute l'expression "par côté" à la fin du message.

Les élèves récepteurs ont interprété l'expression "perpendiculaire en diagonale" dans le sens suggéré ci-dessus. Suivons le cheminement des réflexions de Christophe.

Corinne *Une perpendiculaire ?*
Chris. *En diagonale ! (silence)*
Chris. *Ca peut pas être perpendiculaire si c'est en diagonale.*
Ah ! C'est parce qu'ils la prennent comme ça, la perpendiculaire !
Corinne relit "un point du centre à un autre"
Christ. *attends, carrément, c'est ça ! C'est perpendiculaire à la ligne imaginaire, parce qu'ils disent qu'il y a deux centres, ça peut être que les centres des cercles. [...]*
Christ. *le centre : ils voulaient dire l'axe de symétrie !*
(Corinne n'est pas convaincue)

Ces réflexions les conduisent à considérer les deux droites de symétrie de la figure, entre lesquelles ils choisissent arbitrairement. Finalement, la solution choisie n'est pas la bonne.

La confrontation va mettre le débat essentiellement sur le mot "centre". Anne-Laure (binôme émetteur) montre une extrémité d'un segment : "le centre, c'était ça !". Un élève de l'autre binôme proteste en argumentant sur le nombre de tels "centres" : il n'y en avait pas deux, comme le laissait entendre le message, mais quatre.

Finalement, le statut dans la figure du segment décrit n'est pas discuté. Il était pourtant au centre des problèmes rencontrés par les élèves des deux binômes.

II.2.3. Une description figurative

Deux messages font référence au "N" ou au "Z" formé par le segment à décrire dans la figure. Cette stratégie résout parfaitement le problème sans mettre en jeu les propriétés de la droite de symétrie et les différences entre les segments de type S et ceux de type NS.

Message B4

C'est l'oblique qui permet de faire un N.

Message B6

La figure verte est un trait droit et il par de l'extrémité d'un ron et s'arrête à l'extrémité de l'autre ron; et si on l'enlève les rons et s'a fait la dernière lettre de l'alphabet, ou la 14ème.
tracer un trait

Ces deux messages donnaient une solution unique. Il ne pouvait pas y avoir confusion entre les deux diagonales, l'une ou l'autre des lettres "N" ou "Z" définit en effet entièrement la diagonale à tracer. Pour détourner l'interdiction de dessiner, un élève a désigné les lettres de l'alphabet par leur numéro d'ordre.
Le message B4 est le résultat de plusieurs essais allant de la description figurative d'objets de l'espace (jumelles, lunettes, Zorro), jusqu'au repérage géographique avec les quatre points cardinaux. La solution de l'évocation du Z ou N (une grande discussion a eu lieu à ce sujet) est apparue comme "géniale", car sans risques pour le décodage.

Contrairement au binôme précédent, le binôme B6 a adopté cette stratégie dès le départ et elle n'a jamais été remise en question. Les élèves n'ayant pu se mettre d'accord sur le choix entre les deux lettres Z et N ont livré les deux solutions aux récepteurs. Ce message comporte une description d'une modification de la figure dans le but de la simplifier et de ne garder que ce qui intervient dans le problème à résoudre. La figure n'est pas prise en compte dans sa

globalité. Nous avons déjà rencontré cette stratégie dans les messages A5 (§II.1.3) et A3 (§II.2.1).

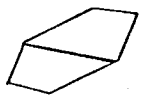
Ces deux messages ont été bien décodés, ce qui a empêché un débat sur les contenus. De plus, le message B6 entre dans le cadre des contraintes données dans la consigne : il s'agit d'un message verbal sans repérage de type géographique. Ceci pose le problème des contraintes de la tâche et du choix des caractéristiques des figures. Celles-ci ne permettent pas d'assurer le passage obligé par l'expression des propriétés de la droite de symétrie pour résoudre correctement le problème.

Nous allons analyser maintenant le seul message répondant aux objectifs de la description des éléments de type NS.

III.2.4. Utilisation d'une équivalence fausse

Ce message contient une information sur une propriété géométrique du segment à décrire : le partage de la figure en deux parties identiques. C'est la plus présente chez les élèves parmi les propriétés de la droite de symétrie. Mais elle ne définit pas que les droites de symétrie.

Message A7



Un trait coupe la figure au milieu horizontalement. Une fois le trait tracé, la moitié de figure est formée de 3 traits. L'autre moitié est pareille.

Si l'on fait exception de l'information "horizontale", ce message peut être décodé de trois façons différentes, en deux éléments de type NS ou un élément de type S. En fait, aucun de ces éléments n'est horizontal dans la feuille, mais deux d'entre eux ont des directions très proches de cette direction privilégiée, dont un élément de type S.
Comme nous l'attendions, ce message a été mal décodé. L'indication "horizontalement" a effectivement permis d'éliminer un élément de type NS. Nous avions fait l'hypothèse que le partage en deux parties identiques est plus évident à reconnaitre selon une droite de symétrie que selon une autre diagonale de la figure. C'est effectivement l'élément de type S qui a été repéré. Cette figure a donc rempli son rôle : aboutir à une solution fausse par un jeu sur l'implicite "partage en deux parties identiques" auquel les élèves ont tendance à associer une droite de symétrie.

Ce message a été repris par l'enseignant à la séance suivante pour une discussion avec l'ensemble des élèves, afin de mettre en évidence cette fausse équivalence. L'analyse des

débats est faite dans un paragraphe suivant.

II.2.5. Conclusion

Les items contenant les segments de type NS n'ont pas atteint l'objectif d'apprentissage fixé. De nombreuses solutions proposées par les élèves conduisent à une réussite de la communication, alors qu'elles ne mettent pas du tout en jeu la différenciation entre les éléments de type S et ceux de type NS. Il s'agit donc d'une mauvaise construction de la situation. Les erreurs d'élaboration se situent au niveau des contraintes de la tâche et des variables des figures. Précisons.

Les messages de type "repérage géographique" ont été bien décodés, ce qui n'aurait pas été possible si les figures des décodeurs avaient eu une position différente dans la feuille de celles des codeurs. Pour bloquer l'utilisation de cette stratégie, très courante dans ce type d'activité en géométrie, il faut jouer sur la variable "direction dans la feuille" et expliciter cette contrainte aux élèves.

Nous n'avions pas prévu les stratégies dues spécifiquement aux figures choisies (stratégies Z ou N), qui se sont révélées elles aussi très performantes, car sans ambigüités au décodage. Et elles n'ont pas non plus mis en jeu la différenciation entre les éléments de type S et NS. Les caractéristiques de la figure sont en cause. Il faudrait minimiser les possibilités de description dans un mode perceptif facile d'accès.

Deux messages seulement ont permis de repérer des éléments qui concerne la symétrie orthogonale. L'un de ces messages (A7) met justement en évidence que la propriété "partage en deux parties identiques" ne caractérise pas une droite de symétrie. Ce message a été repris par l'enseignant dans la séance de travail avec la classe entière qui a suivi. L'autre message (B5) montre l'incompatibilité qui existe pour certains élèves entre les mots "diagonale" et "perpendiculaire".

Enfin, ces messages témoignent d'un apprentissage par rapport aux conceptions des élèves au début de la séquence. En effet, aucun élément de type NS n'a été codé comme élément de type S. Or, ces éléments de type NS ont les mêmes caractéristiques que les "fausses" droites de symétrie tracées par les élèves dans la phase de diagnostic.

III. Une nouvelle situation de communication (deuxième séquence)

III.1. Elaboration d'une nouvelle tâche

La tâche précédente n'a pas permis de mettre en jeu la spécificité de la droite de symétrie parmi les droites partageant une figure en deux parties égales. Une des causes de cet échec vient d'une mauvaise analyse de la situation. On ne peut pas attendre qu'au cours de la résolution du problème, l'élève fasse spontanément l'analyse exhaustive de tous les autres objets qui pourraient vérifier la propriété de partage en deux parties égales. Si l'on veut que celui-ci réalise l'insuffisance de cette propriété, il faut que la situation elle-même le lui montre. Un moyen consiste à faire en sorte qu'il ait sous les yeux, au moment d'élaborer son message, à la fois un élément de type S et un élément de type NS. L'insuffisance de l'expression de cette propriété pour différencier les deux éléments est alors évidente. Elle n'est plus à anticiper. L'apprentissage est bien sûr théoriquement différent dans cette situation par rapport à la précédente.

En accord avec ces réflexions, nous avons élaboré une nouvelle activité, dont le cadre est une situation de communication identique à la précédente. Cette activité a été intégrée à la deuxième séquence d'enseignement. Les élèves de la classe sont répartis en deux ensembles A et B dans deux salles différentes. Chaque ensemble est formé de six binômes, Ai étant mis en correspondance avec Bi. Les binômes Ai et Bi sont formés des élèves du groupe i des deux premières séances de cette séquence d'enseignement. L'enseignant jouait le rôle de facteur durant la phase de communication.

Une plage de temps est prévue pour une phase de confrontation entre les binômes, suivi d'un débat collectif sur quelques messages choisi par l'enseignant. Rappelons que le temps imparti est 2 heures.

III.2. Description de l'activité

L'émetteur reçoit une feuille 21x29.7 partagée en deux zones par un trait horizontal. Dans la zone supérieure, sont dessinées quatre figures. L'une d'entre elles est reproduite dans la zone inférieure de la feuille. L'émetteur est averti que le récepteur dispose, quant-à-lui, des quatre figures de la zone supérieure, dans des **dimensions et des directions différentes** dans la feuille. Pour mieux faire percevoir à l'émetteur ce qu'implique la variable "direction", les figures qui lui sont proposées sont elles aussi dans des directions variées dans la feuille. Par

contre, les cinq figures de base de l'émetteur sont isométriques pour éviter d'induire l'emploi de la variable "dimension" comme critère de choix entre les figures.

La tâche de l'émetteur consiste à décrire la figure dessinée dans la zone inférieure de la feuille par un message verbal, afin que les élèves récepteurs puissent la retrouver parmi les figures dont ils disposent. Les différences de dimensions et de directions dans la feuille sont justifiées par l'enseignant en termes de contraintes : il ne faut utiliser ni mesures, ni indications de directions dans la description.

Ces figures proviennent toutes de la même figure de base et ne diffèrent entre elles que par un élément. La tâche revient donc à expliciter les propriétés qui caractérisent cet élément dans la figure par rapport aux autres. Il faut au préalable identifier la "bonne" figure.

Les quatre éléments qui différencient ces figures ont en commun de les partager en deux parties égales, mais deux d'entre eux sont de type S et les deux autres, de type NS. Enfin, le choix entre les deux éléments de même type ne peut se faire que s'ils sont en relation avec des éléments de nature géométrique différente, sommets, segments ou arcs de la figure de base.

Nous avons repris une des figures de la situation précédente, l'hexagone. Les caractéristiques de l'autre figure ne conviennent pas dans cette tâche, pour les mêmes raisons que précédemment : les statuts différents des éléments composant la figure (segments et arcs), permettent de résoudre le problème sans évoquer les propriétés liées à la droite de symétrie.

La seconde figure choisie est composée de six cercles disposés en hexagone de façon à ce que la figure admette deux droites de symétrie. Elle présente des caratéristiques analogues à l'hexagone pour cette tâche.

En particulier, dans chacun des types S et NS, la droite qui passe par deux sommets de l'hexagone correspond à celle qui coupe deux cercles. La droite qui passe par le mieux de deux segments de l'hexagone correspond à celle qui ne coupe aucun cercle.

Les figures sont reproduites en annexe, à la fin du chapitre, numérotées de A1 à A6 et de B1 à B6, en correspondance avec la numérotation des binômes.

IV. Analyse des messages

IV.1. Objectifs de l'analyse

Nous avons centré notre attention sur les différents types de formulation des propriétés de la figure à décrire. C'est donc essentiellement l'activité de codage qui est analysée ici. Cependant, quelques moments des phases de décodage et de confrontation sont aussi analysés. Ils concernent en particulier une expression ou une information dans le message qui nous semblent problématiques (incomplète, erronée ou incohérente). L'analyse des échanges entre les élèves permet alors de savoir quelle interprétation en a été donnée ou quelles difficultés ces informations ont soulevées.

Nous analysons les messages concernant les éléments de type S d'une part et ceux concernant les éléments de type NS d'autre part.

IV.2. Messages pour des éléments de type S

Les messages concernés portent les numéros B1, A2, B3, A4, B5, B6.
Les descriptions des élèves portent soit sur les propriétés de l'élément qui différencie les quatre figures proposées, soit sur les propriétés de la figure qui la différencient des trois autres.

IV.2.1. Description des propriétés de l'élément

L'élément est désigné par la même expression "droite de symétrie" dans les trois messages. Nous les reproduisons ci-dessous.

message B1 (Caren et Stéphanie1)

Il y a une droite de symétrie qui coupe 2 ronds.

message A2 (Cyril et Vincent)

la figure est coupée par une droite de symétrie qui est placée au milieux des droites les plus longue. Elle ne passe par aucun sommet

message B3 (Bruno et Madjid)

Une droite de symétrie exact la traverse. De chaque coté de la droite se trouvent trois ronds entiers.

La droite de symétrie ne fait pas partie de la "figure" dans ces trois messages. En effet, elle "traverse" la figure ou "coupe 2 ronds", ou encore la figure est "coupée" par elle. L'emplacement de la droite par rapport à la figure est exprimé par rapport aux sommets de l'hexagone ou aux cercles composant l'autre figure.

Les informations des messages B1 et B3 sont suffisantes et sans redondance, alors que le message A2 contient une information redondante. Ces trois messages ont été décodés sans aucune difficulté.

L'adjectif "exact" pour qualifier la droite de symétrie dans le message B3 est peut-être destiné à mettre l'accent sur la différence entre un élément de type S et un élément de type NS. Nous avons rencontré ailleurs cette conception de "fausses" droites de symétrie que sont les droites de type NS. Cet adjectif n'a pas été relevé lors de la phase de décodage.

IV.2.2. Description des propriétés de la figure ou de ses parties

Ce ne sont pas les propriétés de la droite qui sont désignées dans les deux messages ci-dessous, mais celle de la figure, qui est "symétrique". La droite de symétrie fait donc partie de la figure. Il faut ensuite l'en isoler pour décrire son emplacement. Celui-ci est donné par rapport à d'autres éléments de la figure : cercles, ronds. Voici les messages.

message B5 (Mathieu et Renaud)

La figure est symétrique. La droite ne coupe pas de cercles.

message B6 (Delphine et Patricia)

Le trait passe par 2 ronds. d'un coté du trait il y a 2 ronds et de l'autre coté il y a aussi 2 ronds. La figure est simétrique.

Les informations du message B5 sont suffisantes et sans redondance. Par contre, les première et seconde phrases du message B6 fournissent la même information à l'intérieur de l'ensemble des quatre figures. Ces deux messages n'ont pas soulevé de difficultés d'interprétation.

IV.2.3. Description mixte

Ce message est analogue aux trois messages analysés au paragraphe IV.2.1: l'élément est désigné par l'expression "droite de symétrie", et son emplacement est donné par rapport à

d'autres éléments de la figure. Il contient en plus une information de type général se rapportant à l'ensemble des figures poposées.

message A4 (David et Stéphanie2)
Il y a une droite de symétrie horizontale
elle passe par les deux sommets
les autres figure ne se replie pas

La démarche consiste à aller du tout au particulier, puis à revenir au tout. La dernière information prend en compte la propriété de symétrie des figures proposées. Ce message évoque donc à la fois la propriété de la droite dans la figure et la propriété de symétrie de cette figure.

L'indication de direction "horizontale" ne correspond pas à celle de la droite dans la feuille. Ce mot semble désigner ici la plus grande largeur de la figure, sens que nous avons déjà rencontré à plusieurs reprises. Cette information a provoqué pendant un temps une certaine perplexité chez les élèves décodeurs. Comme elle n'était pas nécessaire pour résoudre le problème, ils l'ont délibérément "sautée". Les échanges lors de la confrontation révèlent l'insignifiance de cette erreur pour les élèves des deux bords, confortés par la justesse du décodage.

- c'était verticale
- vous, vous l'avez de l'autre côté, quoi !
- ouais, nous, on l'avait horizontale
- ouais ! (le ton est badin)

A l'enseignant qui intervient par rapport à la consigne, la réponse de l'élève veut minimiser encore l'erreur.

enseignant *alors, qu'est ce qu'on avait dit dans la consigne ?*
élève *et oui, c'était pas la peine de marquer horizontale ...*

Le débat conclut donc à l'inutilité de cette information plus qu'à sa remise en question. Aucun débat n'a remis en question l'information erronée de ce message, parce qu'elle n'a jamais gêné les élèves.

IV.2.4. Conclusion

Dans tous les messages, les descriptions passent par les expressions "droite de symétrie" ou "figure symétrique". Ceci confime le résultat que nous avions obtenu dans l'activité

précédente, à savoir que les élèves savent utiliser ces expressions pour résoudre un problème. Celles-ci sont suffisantes en elles-mêmes. En conséquence, les propriétés de la droite de symétrie ne sont pas explicitées, à l'exception de la propriété du partage en deux parties égales (messages B6 et B3) ou en deux parties superposables par pliage (message A4).

IV.3. Messages pour les figures de type NS

Les messages concernés portent les numéros A1, B2, A3, B4, A5, A6.
Nous retrouvons les deux types d'objets géométriques dans les descriptions des élèves pour ces figures.

IV.3.1. Description des propriétés de l'élément discriminant

En décrivant l'élément comme n'étant pas une droite de symétrie, il ne reste plus qu'à indiquer le choix à faire entre les deux éléments de type NS. C'est ce qu'ont fait deux binômes pour lesquels, si on se rapporte aux échanges entre les élèves, cette information permettait effectivement d'éliminer deux des figures. L'un de ses messages contient le mot "bissectrice", qui a bien été utilisé à la place de "droite de symétrie" (les élèves du binôme A5 le disent dans la phase de confrontation et le signalent à nouveau dans la phase de bilan). Les deux messages sont reproduits ci-dessous.

message A1 (Sonia et Thomas)

le trait passe par 2 sommets, le trait ne correspond pas à une droite de symétrie. Et la droite coupe les 2 sommets en diagonale.

message A5 (Karine et Louis)

- *Une droite coupe la figure; mais se n'est pas sa bisectrice*
- *Cette droite ne passe pas par des sommets*
- *Elle coupe les deux des quatre plus petits segments.*

La dernière indication contenue dans le message A1 n'a pas posé problème au binôme récepteur. Il est vrai que les différentes interprétations possibles du mot "diagonale" que nous connaissons n'entrent pas en contradiction avec les autres informations du message. Pour les élèves qui ont rédigé le message, cette information a été "rajoutée pour le cas où", comme ils l'ont déclaré eux-mêmes. La signification de ce terme est révélée par la phrase d'un élève : il s'agit d'une indication de direction intrafigurale :

de toute façon, qu'on la tourne dans n'importe quel sens, ça la coupera toujours en diagonale.

Malgré l'emploi du terme "bissectrice", le décodage du message A5 aboutit à la solution juste. L'expression a posé problème aux élèves récepteurs, mais les autres informations du message suffisaient à déterminer sans ambiguïté une des figures. Elle a donc été délibérément "oubliée". Les échanges pendant la phase de confrontation montrent que les élèves récepteurs avaient reconnu qu'il s'agissait d'une erreur. L'élaboration et l'interprétation de ce message sont étudiées en détail dans le chapitre consacré au rôle de l'enseignant dans la classe.

IV.3.2. Description des propriétés de la figure ou de ses parties

Il est possible également de décrire l'absence de symétrie de la figure, ou la non symétrie, par rapport à la droite, des parties que celle-ci définit. Deux messages contiennent une description de ce type.

message B4 (Fabrice et Stéphanie3)
notre figure n'est pas simétrique, et notre droite transperse 2 ronds.

message B2 (Alexandra et Yann)
elle ne coupe aucun rond.
Les ronds ne sont pas symétrique de chaque côté de la droite

Les informations contenues dans ces deux messages sont suffisantes et sans redondance. Leur interprétation n'a soulevé aucune difficulté.

Dans les quatre messages que nous venons d'étudier, les formulations consistent à exprimer la négation des propriétés de symétrie axiale. Ce qui implique une reconnaissance de la différence fondamentale entre les élments de type S et les éléments de type NS dans une figure.

Les deux autres messages que nous allons voir maintenant témoignent aussi de cette reconnaissance. Mais les élèves de ces deux binômes ont rencontré des difficultés pour formuler l'absence de symétrie. Le passage de l'idée (juste) à l'expression écrite de cette idée conduit à une information fausse. Nous étudions ces messages dans les deux paragraphes suivants.

IV.3.3. Un message "faux" qui a été "bien décodé"

Ce message a permis de choisir la figure qu'il était censé décrire, alors qu'il contenait une information excluant la figure décrite de l'ensemble des figures proposées. En voici le texte.

message A3 (Marie-Laure et Sophie1)

c'est un octogone : avec deux cotés parallèles et longs qui sont rejoints par deux segments, donnant un point à égale distance des deux droites.
Elle est coupée par une droite non symétrique (ces deux derniers mots sont barrés) ne partageant pas la figure en deux parties égales, et ne passant pas par les sommets.

La première partie du message est la description de la figure de base. Elle ne permet pas de reconstruire la figure (même si l'on oublie la confusion octogone-hexagone), mais nous avons relevé des informations intéressantes. Les deux segments dont le parallélisme est reconnu sont les deux plus longs de la figure. Ceci définit quatre sommets et deux côtés. Les deux autres sommets de l'hexagone sont décrits comme étant à égale distance des extrémités de ces segments. Il y a reconnaissance d'une propriété de la symétrie, celle d'équidistance.

La deuxième partie du message décrit ce qu'il faut rajouter à la figure de base pour déterminer la figure choisie. Les mots "non symétriques" sont barrés. Pour en connaitre la cause, nous avons analysé les échanges entre les élèves pendant l'élaboration du message. Ceux-ci révèlent que l'expression "droite ne partageant pas la figure en deux parties égales" remplace l'expression "droite non symétrique" qui ne convenaient pas aux élèves. C'est donc l'association des mots "droite" et "non symétrique" qui était remise en question et non le statut de l'élément décrit. Les difficultés de formulation ont abouti à l'expression erronée d'une information juste. Voyons ce que cela a produit lors de la phase de décodage.

Bien que l'expression "non symétrique" soit largement rayée sur le message, c'est elle qui a permis aux élèves récepteurs de résoudre le problème. Elle a été lue seulement dans un deuxième temps, parce que l'information erronée posait problème (elle avait été reconnue comme telle). L'expression "droite non symétrique" est admise sans difficulté et permet de laisser "tomber" l'information fausse. Elle a provoqué l'élimination des deux figures comportant les éléments de type S.

Lors de la confrontation, les élèves émetteurs reconnaitront leur erreur :

- *les parties, elles étaient pas égales, mais enfin*
- *mais elles étaient pas symétriques, quoi !*

Ce message a été porteur d'apprentissages pour les élèves de ces deux binômes. Il a été repris par l'enseignant dans une phase collective (ch.X).

IV.3.4. Un message incohérent ... qui ne l'est pas pour les élèves

C'est le seul message à comporter une phrase incohérente du point de vue mathématique. Il a été mal décodé et l'on s'attend à ce que la cause en soit celle-ci. En fait, c'est un manque d'information qui a fait obstacle et pas du tout l'information incohérente.

> *message A6 (Jeremy et Sophie2)*
>
> *A cause de l'emplacement de la droite de symétrie, la figure n'est pas symétrique. La droite de symétrie est placée en oblique.*

Le message A6 comporte deux informations contradictoires, la figure n'est pas symétrique, et pourtant, il est question d'une droite de symétrie dans la figure. Les échanges entre les élèves montrent que cette phrase ne soulève aucun problème et conduit immédiatement les deux élèves à éliminer les deux figures symétriques.

Ce message n'a pu être complètement décodé. La réponse écrite que fournissent les récepteurs montre bien que ce n'est pas la contradiction contenue dans la première phrase qui a empêché le décodage, mais l'absence d'une deuxième information discriminante.

> *ces deux là sont elliminées* (phrase dans une accolade autour des deux figures symétriques) *Nous ne pouvons pas trouver la bonne figure car les deux droites sont en oblique.*

Les échanges entre les élèves pendant la confrontation confirment qu'il n'y a pas pour eux de contradiction ou d'incohérence dans cette phrase. L'explication est contenue dans la conception élargie de la droite de symétrie chez beaucoup d'élèves. Toute droite partageant une figure en deux parties superposables est une droite de symétrie. Mais certaines figures "ne se replient pas". Il y a donc des "fausses" et des "vraies" droites de symétrie : l'un des élèves de ce binôme l'a exprimé clairement lors de la phase de confrontation.

La signification de l'adjectif "exact" que nous avons rencontré dans l'expression "droite de symétrie exacte" du message B3 est peut-être alors à relier à cette conception : il permet de désigner une "vraie" droite de symétrie.
Ce message a aussi été choisi par l'enseignant pour la phase collective de bilan (ch. X).

IV.3.5. Conclusion

La propriété de partage en deux parties égales n'a pas vraiment été mise en jeu dans cette situation de communication. La raison principale en est que toutes celles proposées aux élèves vérifiaient cette propriété.

Dans cette activité, la tâche de description d'un élément de type NS semble plus porteuse d'apprentissages que celle consistant à décrire un élément de type S. Sa caractérisation demande plus d'analyse, parce qu'elle est perceptivement moins évidente.

La description d'une droite de symétrie dans une figure ou celle d'une figure symétrique n'a pas posé de problème aux élèves dans cette situation de communication. De plus, mêmes si ces formulations ne sont pas rigoureuses, les implicites qu'elles contiennent ont bien fonctionné et la tâche de décodage n'a pas rencontré non plus de difficultés. L'objectif qui peut être atteint avec ce type de figures (S) et de tâche est limité à la formulation d'expressions désignant une droite de symétrie ou une figure symétrique.

Par contre, décrire une droite qui n'est pas une droite de symétrie exigeait d'abord de la différencier d'une droite de symétrie, parce qu'il y avait des éléments de type S dans d'autres figures. La tâche de description d'un élément de type NS contient donc la reconnaissance du statut des éléments de type S dans la figure. D'autre part, la description d'un élément de type NS a pu mettre en jeu la propriété de partage en deux parties égales. Ce que n'a pas fait la tâche de description d'une droite de symétrie, parce que cette propriété est contenue dans sa désignation.

La tâche de description d'un élément de type NS contient donc tous les apprentissages qui étaient en jeu dans cette activité.

IV.4. Conclusion générale

L'objectif de l'activité de communication était de faire formuler les propriétés de la droite de symétrie d'une figure. En fait, ce sont les expressions "droite de symétrie" ou "figure symétrique" qui sont formulées par les élèves. La seule propriété qui est explicitée parfois est celle du partage en deux parties égales, qui intervient pour préciser une description.

La caractérisation d'une figure parmi d'autres par ses propriétés de symétrie est reconnue comme outil pertinent, puisque c'est la première information dans neuf des douze messages

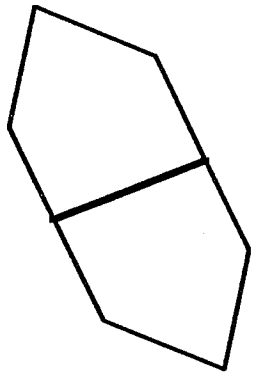
fournis par les élèves.

Le principe d'économie dans les informations est appliqué par la majorité des élèves. Cinq des douze messages ne comportent que les deux indications qui étaient nécessaires et suffisantes pour décrire les figures : la caractérisation par rapport à la symétrie et l'emplacement de la droite. Deux autres messages ne comportent qu'une information redondante et elle est reconnue explicitement comme telle. Elle est donnée pour assurer un bon décodage.

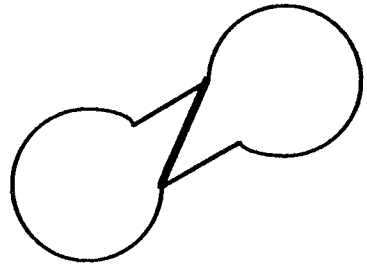
Le traitement des informations incohérentes ou contradictoires dépend des autres informations du message. Si ces dernières sont suffisantes pour choisir de manière unique une solution, l'information problématique est mise de côté.

Les incohérences mathématiques ne sont pas forcément perçues comme telles par les élèves. Ainsi, la conception chez certains d'entre eux de l'existence de "fausses" et de "vraies" droites de symétrie donne un sens à la phrase "à cause de l'emplacement de la droite de symétrie, la figure n'est pas symétrique". Une droite de symétrie "oblique" est pour certains autres une "fausse" droite de symétrie, par opposition aux droites de symétrie "exactes".

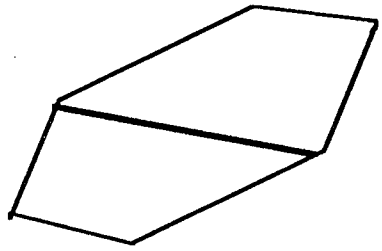
Les contraintes de la situation de communication ne suffisent donc pas à elles seules à mettre en conflit les contradictions ou les incohérences contenues dans un message. L'enjeu pour l'élève est de réussir la communication. L'enjeu pour l'enseignant est de débattre des conceptions erronées à partir des informations problématiques qu'elles induisent. Il faut donc que la réussite de la communication passe nécessairement par l'écriture correcte du message. Cette contrainte semble évidente. Mais nous avons vu combien sa mise en oeuvre est difficile, à cause du bon fonctionnement de certains implicites entre les élèves.



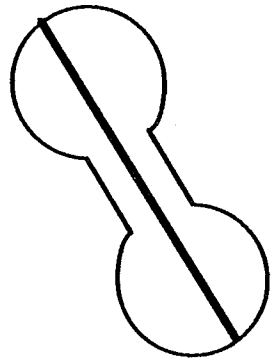
A1 A5



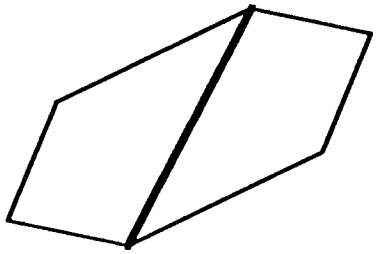
B1 B5



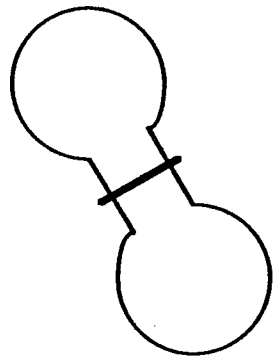
A2 A7



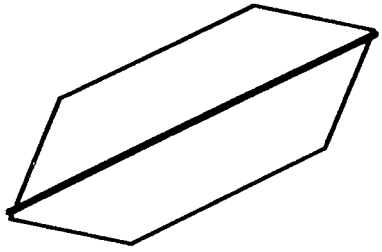
B2 B7



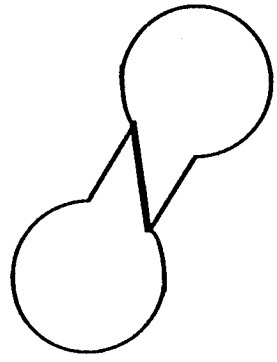
A3



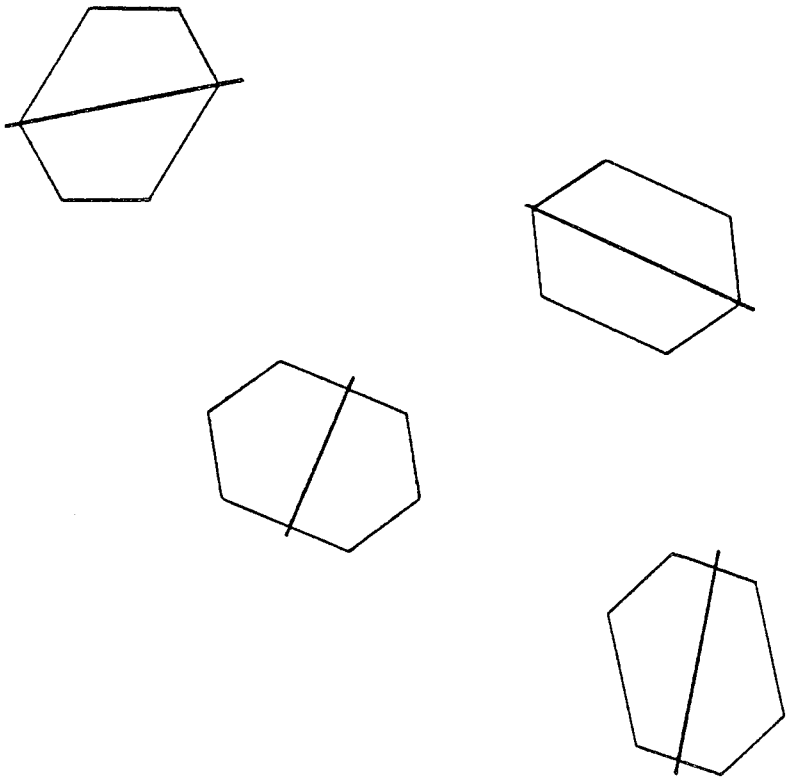
B3

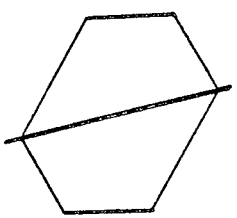


A4 A6



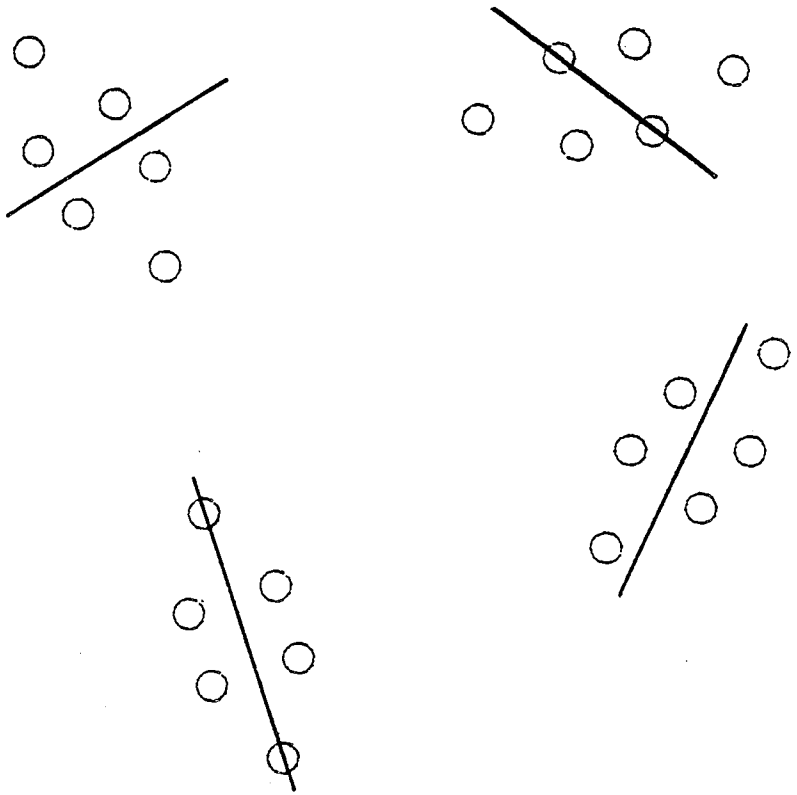
B4 B6



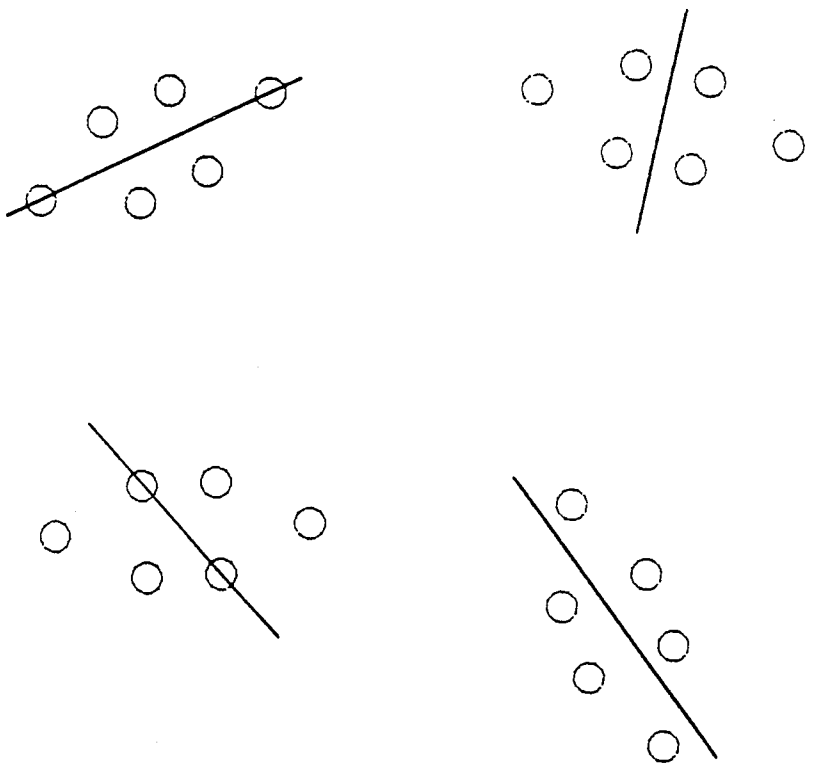


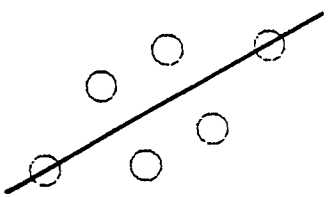
(pour codage)

binômes A1 et A6

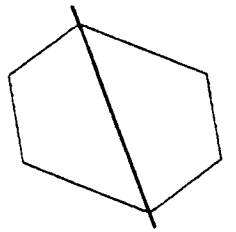


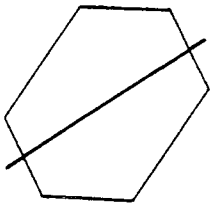
(pour décodage)

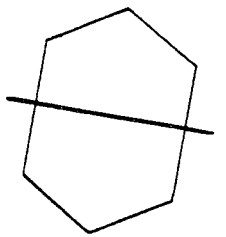


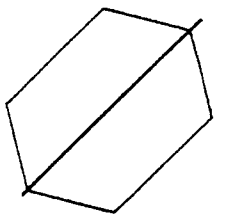


(pour codage)



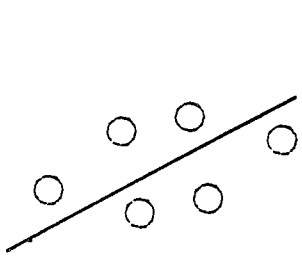


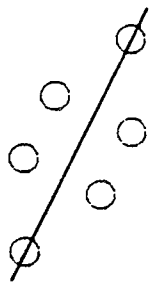


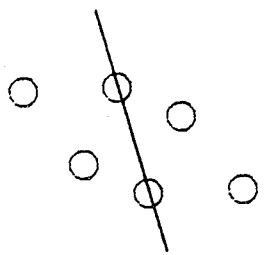


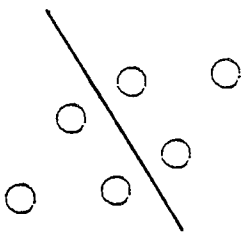
(pour décodage)

binômes B1 et B6



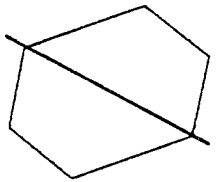


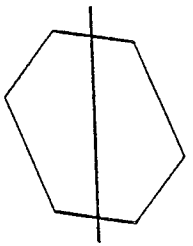


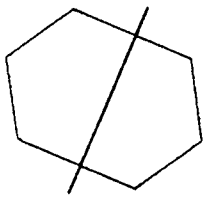


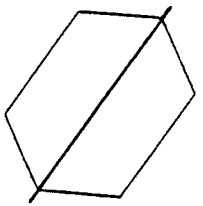
(pour décodage)

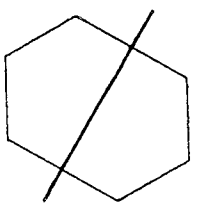
binôme A2



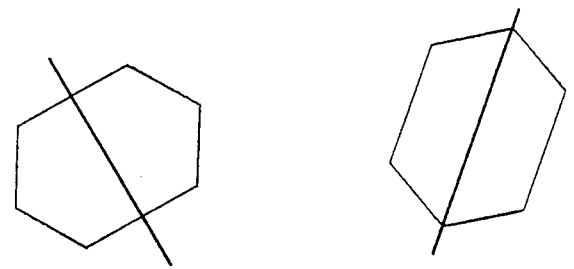


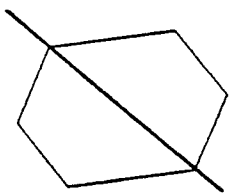


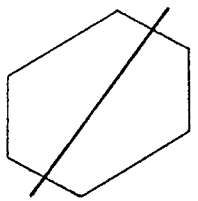




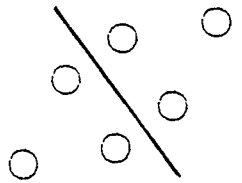
(pour Codage)

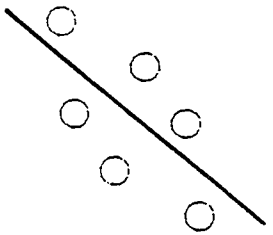


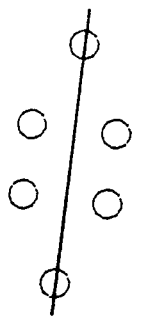


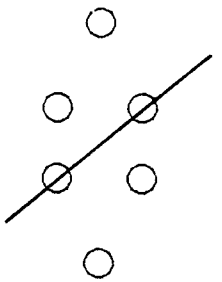


(pour décodage)

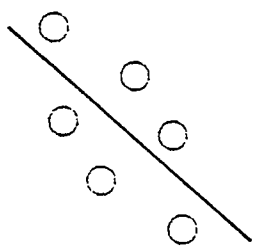






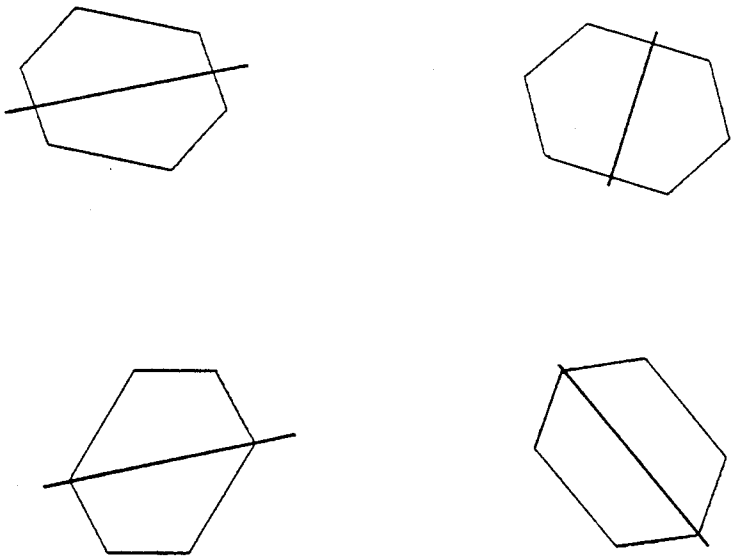


(pour codage)

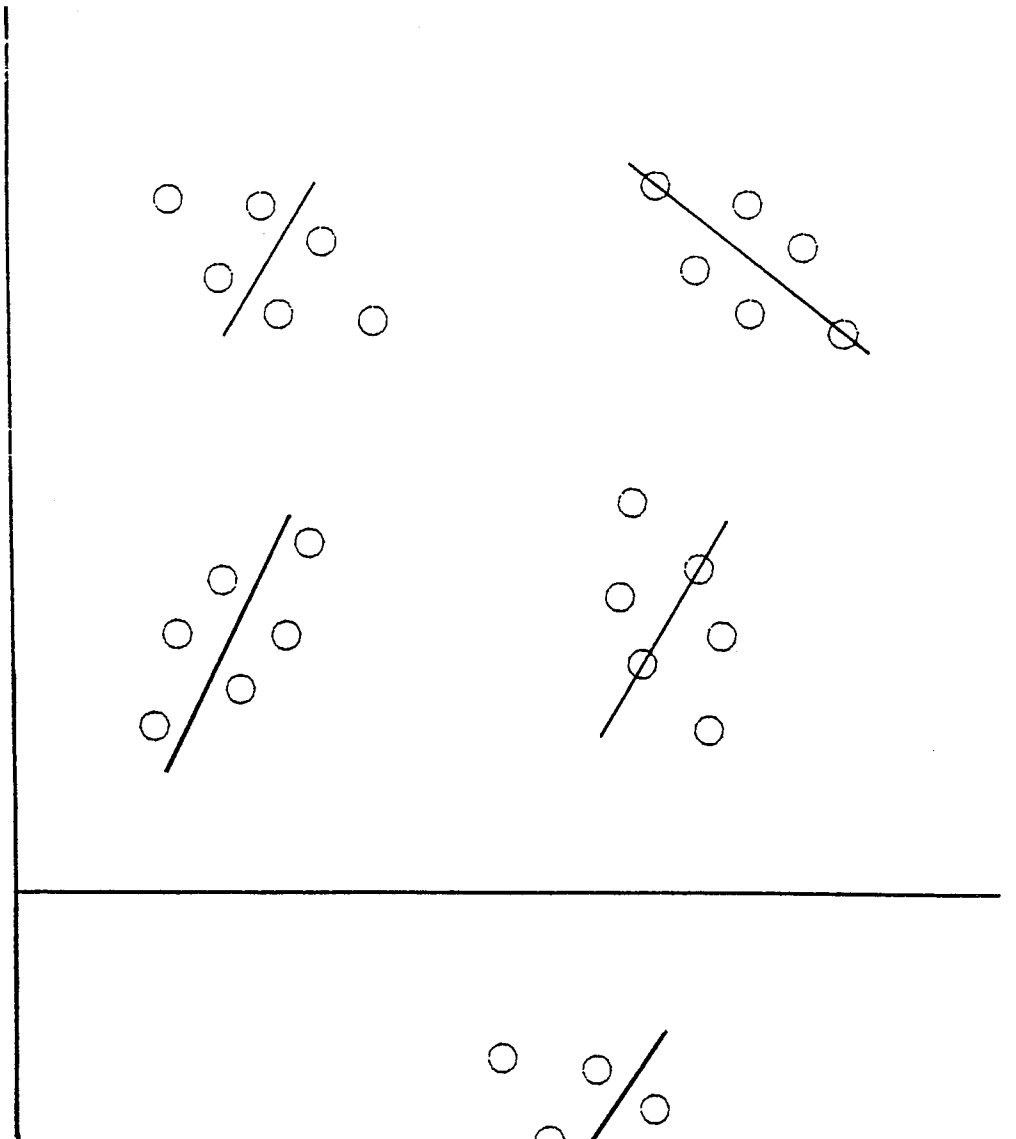


binôme B2

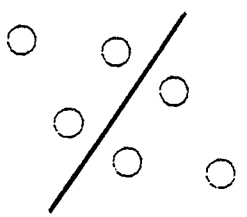
(pour codage)
binômes A3 et A5
(pour décodage)



(pour décodage)



(pour codage)

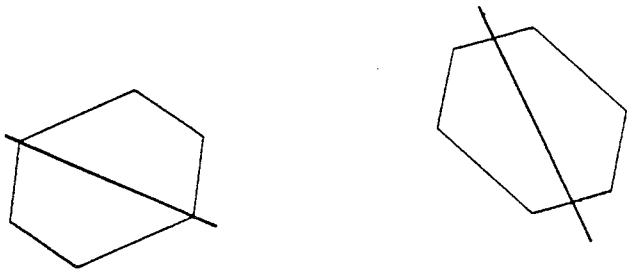


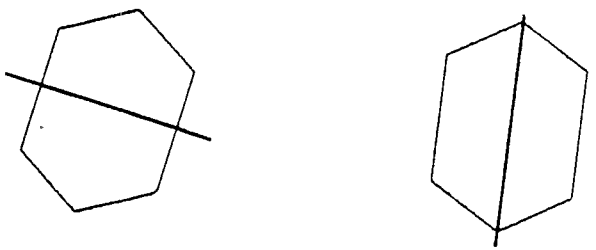
Binômes B3 et B5

Binôme A4

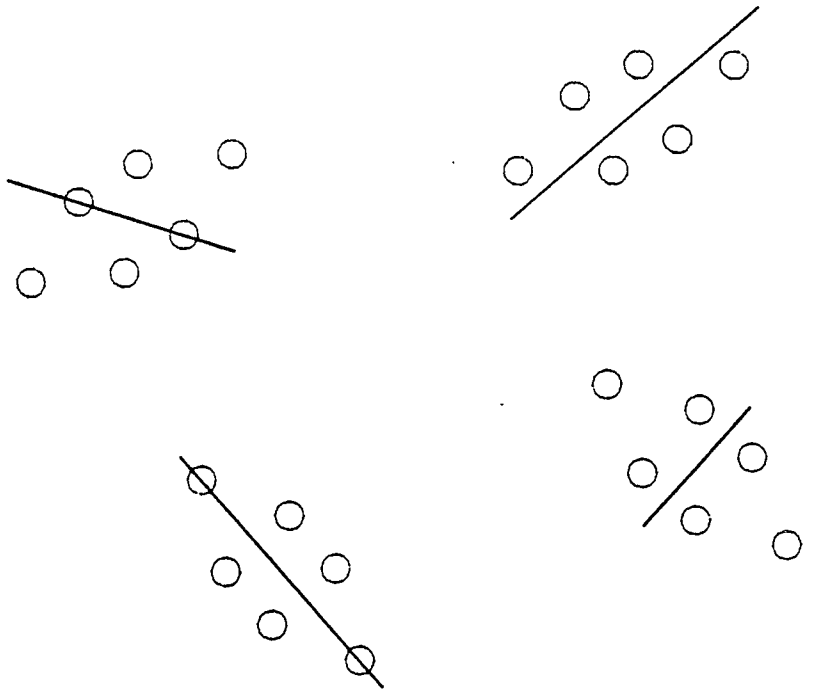
(pour codage)

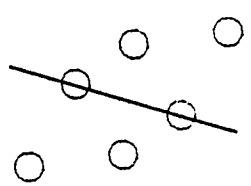
(pour décodage)





(pour décodage)





(pour codage)

binôme B4

Chapitre IX

Transformation de figures

L'objectif de cette phase est la mise en oeuvre analytique des propriétés de la transformation. Pour cela, nous avons élaboré une situation-problème dans laquelle ces propriétés sont des outils de résolution : il s'agit de la construction avec instruments du symétrique d'une figure par rapport à une droite.

Cette situation a été réalisée dans les deux séquences d'enseignement. Les paragraphes I et II concernent la première séquence et contiennent l'analyse préalable de l'activité et sa réalisation, ainsi que les apprentissages effectifs comparés à ceux prévus. Lors de la deuxième séquence, cette activité a été reprise avec quelques modifications. De plus, nous l'avons fait précéder d'une activité utilisant un autre outil de construction, le papier calque, mettant en jeu deux aspects particuliers de la transformation de figures : le retournement et la transformation du plan. La définition du symétrique d'une figure a donc été introduite de manière différente dans la deuxième séquence. Ces choix sont explicités au paragraphe III, et l'analyse du déroulement de ces activités, aux paragraphes IV et V.

I. Description de l'activité de la première séquence

I.1. Description de la tâche

Elle consiste à construire le symétrique de figures par rapport à une droite. Nous avons donné aux élèves les quatre instruments qu'ils connaissaient, règle non graduée, règle graduée, équerre et compas. Contrairement à la tâche de construction avec instruments de la droite de symétrie d'une figure, nous n'avons mis aucune contrainte sur les instruments. L'objectif est en effet de permettre l'émergence de toutes les procédures de construction usuelles. Nous faisons l'hypothèse que l'activité précédente de construction des droites de symétrie de figures a permis aux élèves de s'approprier l'utilisation de chacun des instruments.

Il n'est pas prévu d'aborder la transformation des angles. La raison essentielle en est que les élèves ne savaient pas utiliser le rapporteur; or la mise en évidence de la conservation des angles non orientés nécessite, à un moment donné, l'emploi de cet instrument.

I.2. Analyse de la tâche

Pour mener cette tâche à bien, il est nécessaire de décomposer la figure en éléments (sommets, segments, arcs, ...) dont il faut déterminer les images. Leur choix est primordial car il a une incidence sur les procédures de résolution. Il faut donc reconnaitre les éléments qui sont pertinents par rapport aux outils de résolution fournis et qui permettent de construire entièrement la figure symétrique.
Nous allons décrire les différentes constructions possibles du symétrique d'un point, puis du symétrique d'une figure.

I.2.1. Procédures de construction du symétrique d'un point

Procédure liée à l'orthogonalité

Elle met en oeuvre non seulement la propriété d'orthogonalité, mais aussi celle d'égale distance à un point de l'axe. Elle comprend la construction de la direction perpendiculaire à l'axe de symétrie en un point. Nous en résumons les actions essentielles.

(P1) - *construction de la droite D perpendiculaire à Δ et passant par M,*
- *puis, détermination du point I d'intersection de D et Δ*
- *enfin, report de la longueur MI de l'autre côté de Δ sur D, ce qui donne le point M'.*

La détermination de la direction du support de construction D nécessite l'aide de l'équerre ou du compas. Le report de distance peut se faire avec la règle graduée ou le compas (dans ce cas, cette distance n'est pas mesurée). L'équidistance à l'axe n'est pas en jeu dans la seule action de report de la longueur MI, c'est plutôt l'égale distance de M et M' à un point de l'axe.

Procédures liées à l'équidistance

Elles correspondent aux constructions avec le compas seul. Il est nécessaire d'utiliser deux points intermédiaires A et B situés sur l'axe. Le choix de ces points peut être fait de deux manières qui, nous semble-t-il, révèlent un niveau différent de compréhension de la propriété d'équidistance. Précisons.
Dans un premier cas, les points A et B sont choisis à égale distance de M. Cette procédure correspond au choix d'un écartement du compas qui sera conservé dans toute la construction. Les quatre points M, A, M', B sont les sommets d'un losange, c'est-à-dire qu'on a à la fois les deux propriétés : AB médiatrice de MM' et MM' médiatrice de AB. Le schéma de ce type de procédure est le suivant :

(P2a) - tracé d'un arc de cercle centré en M qui coupe (Δ) en A et B,
- garder la même ouverture de compas,
- tracé de deux arcs de cercle centrés respectivement en A et B.
- M' est à l'intersection des deux arcs.

Dans le second cas, les points A et B sont deux points quelconques de Δ, et M' est le point tel que AB soit médiatrice du segment [MM']. Le schéma de construction correspondant est le suivant :

(P2b) -choix de deux points arbitraires A et B sur l'axe
- tracé d'un arc de cercle (C) centré en A et passant par M.
- tracé d'un arc de cercle (C') centré en B et passant par M.
- M' est le point d'intersection des deux arcs (C) et (C').

Par rapport à (P2b), la procédure (P2a) est économique et sécurisante pour les élèves. Elle est économique parce qu'on garde la même ouverture de compas. Elle est sécurisante parce que les longueurs reportées sont toutes les mêmes, il y a donc toutes les "chances" que la propriété la plus générale "d'égale distance" soit respectée. Mais il n'est pas sûr que, pour l'élève, la propriété d'égale distance à deux points de l'axe implique la propriété d'équidistance à l'axe.

Par contre, dans la procédure (P2b), l'élève accepte de reporter des distances MA et MB différentes pour obtenir un point M' situé à égale distance que M de Δ. Sous-jacente à cette procédure, il y a la reconnaissance de l'équidistance de M et M' à **tout** point de l'axe. En ce sens, la procédure (P2b) reflète une plus grande compréhension de la propriété d'équidistance à l'axe.
Nous pensons que les procédures de type (P2), et plus particulièrement celle de type (P2b) sont plus complexes que celles de type (P1). Or, elles sont souvent proposées dans les manuels scolaires et dans l'enseignement comme si elles se situaient à un même niveau de difficulté.

I.2.2. Procédures de construction du symétrique d'une figure

Il est nécessaire, après avoir repéré les éléments particuliers de la figure qui sont pertinents pour la tâche, d'en déterminer leurs images. Pour cela, l'élève va devoir réinvestir les connaissances acquises sur la droite de symétrie d'une figure en les réorganisant et en les traduisant différemment. Précisons.

a. Réinvestissement des connaissances sur la droite de symétrie

Pour la construction de la droite de symétrie, la mise en oeuvre de la propriété du "milieu" se traduisait par une procédure de détermination du milieu I de deux points homologues M et M'. Si ces deux points sont donnés, elle n'exige la mise en oeuvre d'aucune autre propriété.

Par contre, pour la construction du symétrique d'un point par rapport à une droite Δ, **cette propriété ne peut être mise en oeuvre indépendamment de la propriété d'orthogonalité.** En effet, la propriété du "milieu" se traduit ici par une procédure de détermination du point M' situé à la même distance que M de Δ. Le milieu I de MM' est situé sur Δ, mais la construction ne peut s'appuyer sur ce point, puisqu'il faut aussi le construire, sur la droite perpendiculaire en M à Δ.

De même, pour construire un point M de la droite de symétrie par équidistance de deux point donnés A et B, la construction de deux arcs de cercles égaux centrés en A et B suffit. Pour déterminer le symétrique M' de M par rapport à Δ, la mise en oeuvre de la propriété d'équidistance exige de construire deux paires d'arcs de cercles.

Les procédures de construction de la droite de symétrie ne peuvent donc être réinvesties telles quelles dans cette tâche. En ce sens, il s'agit bien d'un problème nouveau pour les élèves, qui présente une plus grande complexité que le précédent (à cause du plus grand nombre d'actions nécessaires à la construction d'un point).

Enfin, la dernière étape de la construction consiste à relier "correctement" les points symétriques deux à deux. La propriété d'isométrie entre en jeu dans cette phase.

b. Procédures relatives à l'axe et procédures mettant en jeu l'isométrie

Les procédures de construction du symétrique d'un point isolé du plan sont forcément relatives à l'axe de la transformation. Ce n'est plus vrai pour une figure non réduite à un point,. Il est alors nécessaire de déterminer au moins un premier élément de la figure symétrique de cette manière. Cependant, pour la suite de la construction, la mise en oeuvre de la propriété d'isométrie peut suffire à déterminer les symétriques des autres éléments sans utiliser les relations à l'axe. Ainsi, si la figure est un carré, l'image de l'un des côtés peut être déterminée uniquement par rapport à ses relations aux autres côtés ou sommets de la figure (Gallou,1985).

Dans la construction du symétrique d'une figure, deux grandes catégories de procédures se

dégagent : les procédures mettant en jeu les relations à l'axe (P1 et P2) et celles mettant en jeu l'isométrie de la transformation. Nous classerons ces dernières dans la catégorie P3.

L'action initiale de construction doit relever obligatoirement de la première catégorie de procédures. Les actions mettant en jeu les propriétés d'isométrie exigent en plus de faire un choix entre deux solutions qui prend en compte la propriété de changement de direction de la transformation. En effet, les procédures relevant des relations à l'axe peuvent être définies entièrement par un algorithme, c'est d'ailleurs ainsi que nous les avons explicitées. Par contre, la détermination de l'image d'un point de la figure par isométrie nécessite de faire un choix. Illustrons cela dans le cas de la construction du symétrique d'un sommet M d'un triangle.

Dans une procédure de type P1, M' est l'autre point d'intersection de la droite D et du cercle (I, IM). Par construction, ce point M' existe (le cercle et la droite se coupent au moins en M) et il est unique (il y a au maximun deux points d'intersection et l'un est déjà connu). De même, dans une procédure de type P2, M' est l'un des points d'intersection de deux cercles qui se coupent au moins en M, et au plus en deux points. M' existe (il peut être confondu avec M) et est unique.

L'unicité n'est plus vraie si ce sommet est construit à partir, par exemple, des deux autres sommets. Les reports des longueurs des côtés du triangle conduisent à deux points qui sont les intersections de deux cercles, entre lesquels il faut choisir. Le même problème surgit si l'on construit ce sommet par rapport à un sommet et une direction de droite : il faut choisir sur quelle demi-droite on détermine le point d'intersection avec le cercle. Ce choix doit prendre en compte la propriété d'isométrie *indirecte* de la transformation.

I.2.3. Variables de la tâche

Nous avons mis en évidence, lors de nos expérimentations précédentes, les variables de la tâche de construction à main levée du symétrique d'une figure par rapport à une droite. Il s'agit, essentiellement, de la position relative de la figure et de la droite (intersection) et de la direction de la droite et des éléments composant la figure dans la feuille.

Nous faisons l'hypothèse que ces variables interviennent aussi dans cette tâche de construction avec instruments. En particulier, le choix d'une direction oblique de l'axe dans la feuille empêche la détermination des directions perpendiculaires à l'axe selon les directions privilégiées de la feuille. Cette caractéristique rend également plus imprécises les procédures de détermination de ces directions au jugé. Pour ces raisons, nous avons fixé cette variable à une

même valeur pour les deux figures proposées. Au contraire, les valeurs des autres variables ont été choisies différentes pour chacune des deux figures, afin d'établir une progression dans la complexité de la tâche. Nous allons préciser cela.

I.2.4. Analyse des figures choisies

Nous avons retenu les deux figures polygonales reproduites ci-dessous. La troisième figure prévue (voir ch. IV) n'a pas été traitée par les élèves.

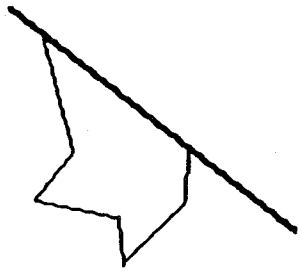


fig.1

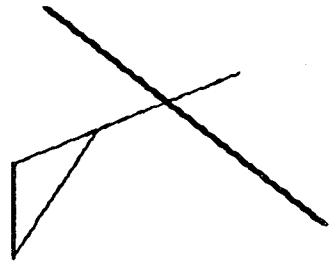


fig.2

Spécificités de la figure 1

Trois caractéristiques de la première figure sont destinées à permettre aux élèves de s'engager facilement dans le problème :

- la figure occupe un seul demi-plan par rapport à l'axe : nous allons dans le sens d'une conception (répandue) de la transformation comme action d'un demi-plan vers l'autre;
- les deux points de rencontre de la figure avec l'axe offrent une possibilité d'initialiser la construction : l'invariance de ces points est un théorème en acte disponible chez la quasi totalité des élèves;
- la figure choisie peut être associée facilement à une image usuelle (demi-feuille); la progression de la construction peut donc être contrôlée par une perception globale de la figure.

Certaines caractéristiques de la figure sont fixées pour favoriser des apprentissages précis :

- la matérialisation des deux points sur la droite devrait induire des procédures de construction de type P2, mettant en oeuvre la propriété d'équidistance, moins disponibles chez les élèves que celles de type P1;
- les lignes polygonales qui composent la figure ne font pas entre elles d'angles particuliers et sont toutes de longueurs différentes; nous pensons ainsi privilégier les procédures relatives à l'axe (de type P1 et P2) par rapport à celles mettant en oeuvre la propriété d'isométrie (de type P3).

Problèmes induits par des caractéristiques de la figure 2

L'intersection de la figure 2 avec l'axe apporte un problème que n'ont pas encore rencontré les élèves au cours de la séquence. En effet, les activités précédentes ne soulèvent pas ce problème. Chacune des deux parties définies par la droite de symétrie d'une figure est située dans un seul demi-plan par rapport à cette droite.

Cette caractéristique diminue la facilité d'utilisation et l'efficacité du contrôle perceptif. Pour le rendre encore plus inadapté, nous avons donné deux caractéristiques précises à la figure 2.

La première est la valeur de l'angle que fait l'axe avec le segment qui le coupe. Telle qu'elle est choisie, ce segment a une direction proche de la direction horizontale dans la feuille. Une approche perceptive peut induire des procédures de "rappel par prolongement". La seconde caractéristique est la présence d'un segment vertical dans la feuille. Dans ce cas, une approche perceptive peut induire la mise en oeuvre des règles d'action conservant le parallélisme. Nous faisons l'hypothèse que les activités précédentes ont donné aux élèves des moyens de contester les résultats de ces procédures. Cette caractéristique peut alors provoquer une remise en question de l'approche perceptive et la recherche de procédures nouvelles basées sur une autre analyse de la figure.
Pour initialiser la résolution du problème, dans le cas de la figure 2, il est nécessaire d'utiliser de manière analytique certaines propriétés de la transformation.

I.2.5. Consigne et organisation sociale de la classe

Les élèves ne savent pas comment construire le symétrique d'une figure, puisque c'est l'apprentissage en jeu dans cette activité. Le premier problème (figure 1) est donc présenté avec pour consigne de "compléter la figure de façon à la rendre symétrique par rapport à la droite donnée". L'enseignant doit, à partir de ce travail, donner la définition du symétrique d'une figure. La consigne est ensuite formulée pour le second problème en "construire le symétrique de la figure par rapport à la droite".

L'organisation de la classe est la même que dans les phases précédentes, c'est-à-dire un travail de groupe suivi d'une phase de bilan collective. Cette mise en commun doit permettre de valider ou de réfuter les procédures de construction des élèves, et d'étiqueter les "bonnes" procédures disponibles chez eux. L'institutionnalisation qui suit l'activité a pour objectif de donner la définition du symétrique d'un point, puis d'une figure par rapport à une droite et d'énoncer les propriétés essentielles qui relient la figure symétrique à la figure objet.

II . Analyse du déroulement de l'activité

Les procédures des groupes sont décrites en annexe à la fin du chapitre, dans la mesure où elles ont pu être déterminées. Dans ce chapitre, nous en donnons un résumé qui permet de suivre l'analyse que nous avons menée.

II.1. La consigne énoncée par l'enseignant

L'enseignant a demandé aux élèves de "construire avec les instruments mis à [leur] disposition le symétrique de la figure par rapport à la droite donnée".

Cette consigne n'est pas celle qui était prévue pour ce premier exercice. Elle pose tout de suite une question aux élèves, car le "symétrique d'une figure" n'a jamais été défini. Cependant, dans chacun des groupes, on assiste à une prise en charge du problème de la signification de la consigne. Au cours des échanges, plusieurs élèvent la reformulent d'eux-mêmes en explicitant son sens : "dessiner à côté, exactement pareil", "reporter de l'autre côté".

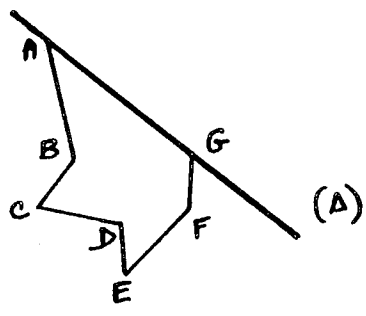
Les élèves ont donc interprété cette consigne dans le sens prévu. L'aspect figuratif de la figure 1 a certainement joué un rôle facilitateur. En effet, avant même que toute consigne soit donnée, l'élève peut avoir l'idée de compléter la figure en traçant la partie manquante de la feuille.

Lorsque l'enseignant a réalisé quelques minutes plus tard le problème qui se posait aux élèves, il a alors reformulé la consigne pour toute la classe, en la reliant à la notion de droite de symétrie, comme nous l'avions prévu.

II.2. Construction du symétrique de la "demi-feuille de lierre"

II.2.1. Analyse des productions

Pour faciliter l'analyse, nous avons nommé les points particuliers de la figure de A à G comme ci-dessous. Nous désignons par M un point quelconque et par M' son image.



Un premier constat : tous les groupes fournissent une figure perceptivement correcte. Cependant, une étude plus fine des productions (consistant à vérifier, à l'aide des instruments, l'isométrie et l'orthogonalité à l'axe des bi-points symétriques) révèle qu'une seule d'entre elles est exacte. Les six autres présentent des erreurs sur les directions de certains segments MM' relativement à l'axe ou sur les longueurs de segments composant la figure. Cependant, tous les couples de points (M,M'), à l'exception de l'un d'entre eux (et dans une seule production), vérifient que le milieu de MM' est sur la droite.

Nous avons résumé ces caractéristiques des productions dans le tableau ci-dessous. Nous indiquons pour chacune, les aspects suivants :
-si la perpendicularité de MM' avec (Δ) est respectée (à 1° près)
- si le point d'intersection de (Δ) avec MM' est situé au milieu de MM' (au millimètre près)
- si les longueurs des segments objet et image sont égales (au mm près).

numéro de groupes	1	2	3	4	5	6	7
milieu de MM' sur Δ	tous sauf CC'	tous	tous	tous	tous	tous	tous
perpendicularité à I° près	mauvaise sauf BB'	bonne sauf EE'	bonne sauf DD'	mauvaise pour EE', BB'	bonne sauf DD'	bonne sauf DD'	mauvaise
égalité des segments non vérifiée pour	BC		AB, CD	AB, DE		CD,DE,FG	AB,BC,DE
points exacts	aucun	B', C'	B', C'	E', C', D'	tous	aucun	C', D'

note : pour la production 5, c'est la somme des erreurs négligeables sur les points C', D' et E' qui finit par provoquer une erreur non négligeable sur la direction de DD'.

Les procédures des élèves semblent donc privilégier la mise en oeuvre de la "propriété du milieu" de la droite de symétrie. Mais les directions de support pour le calcul de ces distances ne sont pas toutes orthogonales à l'axe, même si elles ne s'en éloignent jamais beaucoup (maximum 4° en partant du point concerné). Le segment reliant deux points images n'est pas toujours de même longueur que le segment reliant les deux points objets correspondants. Cependant, la dimension de la figure est telle que la non isométrie n'est pas perceptivement évidente. D'autre part, toutes les erreurs ne sont pas explicables par cette procédure et, dans la production du groupe 2, l'égalité des longueurs est vérifiée pour tous les segments.

Pour connaitre le statut de ces imprécisions, nous avons analysé les procédures de construction des élèves.

II.2.2. Bilan et analyse des procédures

Les procédures sont décrites en détail en annexe à la fin de ce chapitre. Nous en résumons ici les aspects les plus intéressants.

La procédure majoritaire est la mesure, avec la règle graduée, de longueurs de segments ou de "distances" le long d'une direction choisie au jugé d'un point de la figure à l'axe. Ces mesures sont faites précisément dans tous les groupes. Ce ne sont donc pas des imprécisions de mesure qui conduisent aux erreurs sur les longueurs de segments. De même, lorsque le compas est utilisé pour déterminer des longueurs ou des distances, la mesure du rayon est soigneusement déterminée.

L'équerre est peu utilisée, il s'agit de directions choisies "au jugé" ou par approximations successives. Ce qui a entrainé parfois des erreurs sur les longueurs de segments composant la figure, par exemple, lorsque deux directions déterminées au jugé ne sont pas parallèles.

C'est donc à nouveau la propriété d'orthogonalité qui est en jeu. Le fait que les directions ne s'éloignent pas trop de la perpendiculaire à l'axe ne signifie pas que les élèves ont conscience de cette propriété. L'analyse des échanges pendant l'activité de groupe nous révèle qu'elle est cependant localement évoquée. Voici des extraits de ces échanges qui illustrent notre propos.

Stéph.B mais c'est plus juste avec une équerre ... s'il y avait l'équerre, c'était pas pour des pruneaux ! (elle n'a cependant pas été utilisée) (groupe 1)

Stéphane explique qu'il faut tenir compte de l'inclinaison. Emilie veut aussi vérifier que le trait est perpendiculaire à la droite (groupe 2)

Emma. tu prends l'équerre
Cécile c'est pas trop tôt ! (groupe 3)

Eric sans l'équerre, ils ne seront pas parallèles (groupe 4)

Christ. avec l'équerre, on peut tout faire (groupe 5)

Sébastien propose l'équerre
Yann c'est pas un angle droit [...]
Sébast. vous faites au pif
Yann ... on a vu que c'était droit (groupe 6)

François [...] avec l'équerre ! Tu vas rien trouver en faisant comme ça !
Mais il n'est pas suivi. Plus tard, François voudra vérifier avec l'équerre. (groupe 7)

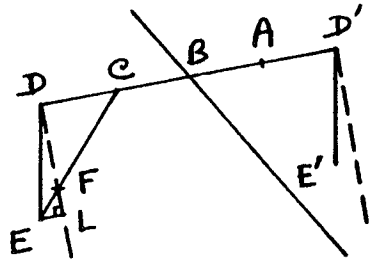
Nous avons reproduit ces extraits pour montrer que la préoccupation de l'orthogonalité à la droite est présente localement dans tous les groupes. Mais elle n'est pas assez prégnante pour entraîner les autres élèves et finalement, elle est très peu utilisée. L'insistance d'un élève a

l'angle CDE du triangle, ce qui a fourni aux élèves l'occasion de vérifier que cet angle n'est pas égal à 90°. Il s'agit alors de déterminer une direction de droite à partir de D'. Nous allons examiner les différents choix qui ont été faits.

choix 1 : le segment vertical est transformé en un segment vertical

C'est la solution fournie par les élèves du groupe 7. Elle a été adoptée après plusieurs essais. Nous les résumons ci-dessous.

(1) construction d'un angle CDF égal à 90° avec l'équerre, puis mesure de la longueurDF.
(2) tracé du segment D'E' vertical et égal à DE.
(3) enfin, détermination de L projection de E sur DF, essai de report de EL en partant de E'.
(4) mesures de la distance de B aux deux extrémités du segment matérialisant Δ. Elles sont inégales.



L'action (1) est induite par la volonté d'utiliser l'équerre; or celle-ci, semble-t-il, sert surtout à déterminer des angles droits. Cette action est abandonnée parce que les élèves ne savent pas que faire de la direction orthogonale à DD' qu'ils ont reportée à partir de D' et de la distance DF qu'ils ont calculée. Le tracé en pointillé sert peut-être à donner à ce tracé le statut d'une construction intermédiaire.

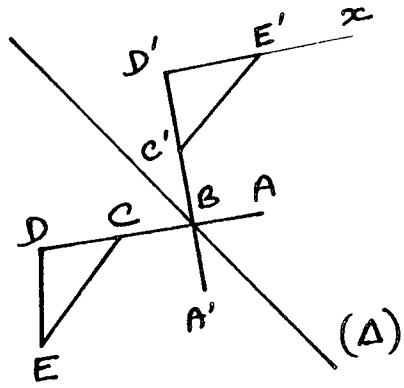
L'action (2) relève de la règle d'action très répandue chez les élèves du parallélisme des segments objet et image. Cette règle d'action permet ici de résoudre le problème du choix d'une direction, en créant une relation entre l'objet et l'image. Cependant, le segment D'E' ainsi construit ne convenait pas à tous les élèves. C'est peut-être pour vérifier sa validité qu'un élève mesure la distance EL et la reporte en partant de E' (action (3)). Remarquons que, ces deux distances étant effectivement égales, la vérification ne pouvait pas fournir d'argument pour invalider cette proposition.
C'est dans l'espoir de découvrir une autre procédure que l'action (4) est réalisée par un élève. Mais les distances de B aux "extrémités" de Δ se révèlant inégales, il abandonne la recherche.

L'enseignant a interrompu à ce moment le travail des groupes. Nous ne savons pas si cette cosntruction allait être remise en question.
Un segment vertical a aussi été tracé pour D'E' par des élèves du groupe 6, puis refusé. Nous analysons plus loin le choix fait (choix 4).

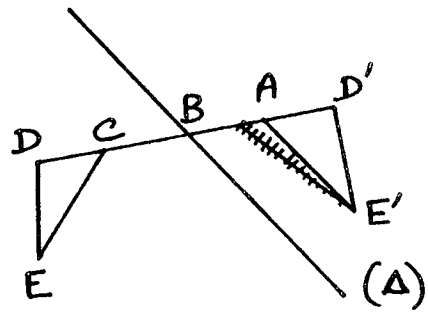
choix 2 : le segment vertical DE est transformé en un segment perpendiculaire au segment D'B.

C'est ce que présentent les productions des groupes 2 et 4. Nous avons reconstruit les étapes de cette phase de la construction dans chacun d'eux.

Le groupe 2 a construit un segment perpendiculaire en D' à B'D' après avoir placé l'équerre sur l'angle EDC. Puis E' est construit par report de la longueur de DE sur la demi-droite D'x . C' est déterminé tel que C'B=CB. Le triangle est refermé en joignant C' à E'.



Le groupe 4 a comparé l'angle EDC du drapeau avec l'angle droit de l'équerre. Les élèves ont constaté que l'angle n'est pas droit. Puis, ils ont tracé un angle droit AD'x. Enfin, ils ont déterminé le point E' sur la demi-droite D'x orientée vers le bas et tel que D'E'=DE.



En conséquence, le troisième côté du triangle-image n'est pas égal à son correspondant. Les élèves s'en sont rendus compte. La production révèle le tracé barré d'un segment de longueur EC partant de E' et dont l'autre extrémité est située sur BD'.

quand même amené le groupe 3 à adjoindre l'équerre à la règle graduée pour construire les deux (derniers) points C' et B'.

Le compas a été mal utilisé et peu souvent dans cet exercice, bien que pour certains élèves, il semble lié à la précision. Par contre, pour d'autres, le compas n'est pas utilisable dans cette tâche.

(groupe 7) Maud : "plus juste avec le compas".

(groupe 4) Franck : "on ne peut rien faire avec le compas"

En fait, plusieurs cercles ou arcs de cercles sont parfois tracés, au cours de la résolution du problème, mais ils se révèleront d'aucune utilité dans la suite de la construction (nous avons retrouvé leurs traces parce que les élèves n'avaient pas le droit de gommer). L'utilisation du compas pour reporter des longueurs est présente : la pointe sèche est posée sur des points particuliers de la figure et les ouvertures du compas correspondent à des longueurs de segments ou des distances.

Mais il faut deux arcs de cercle pour déterminer l'image d'un sommet avec le compas seul. Or, si la construction d'un arc de cercle ne pose pas de problème, celle d'un deuxième arc de cercle n'est presque jamais tentée par les élèves.

Seul le groupe 7 a mis partiellement en oeuvre la propriété d'équidistance pour la construction de deux points. Le point D' a été construit à la même distance du point invariant G que le point D et tel que C'D' soit de même longueur que CD. Le point C' a été construit de la même manière par rapport aux points G et B, mais les élèves ont reporté la longueur de CD au lieu de celle de BC.

II.2.3. Conclusion

Le réinvestissement de la propriété du milieu de la droite de symétrie est effectif chez tous les élèves. Il se traduit par la recherche d'un point-image à égale "distance" (distance le long d'une direction choisie) de la droite que le point-objet.

Sur la mise en oeuvre de la propriété d'orthogonalité, il nous est difficile de conclure. L'utilisation de l'équerre n'est pas ressentie par les élèves comme nécessaire. A cause de la dimension de la figure, il est facile de déterminer la perpendiculaire à la droite au jugé ou par

un ajustement progressif de la direction de la règle dans la feuille. C'est une caractéristique de la figure qui est en cause dans ce constat. Nous reviendrons sur cet aspect des contraintes de la tâche au paragraphe III. Mais alors, comment expliquer que les élèves soient si attentifs à mesurer au millimètre près avec la règle graduée, et si peu enclins à déterminer précisément la direction exacte ?

Cette question nous amène à formuler une hypothèse. Ce n'est pas la propriété d'orthogonalité qui sous-tend le choix d'une direction, mais un contrôle perceptif sur l'emplacement de l'image par rapport à l'objet. Ce contrôle était très facile pour cette figure à cause de deux caractéristiques : sa taille et son aspect figuratif (demi-feuille de lierre).

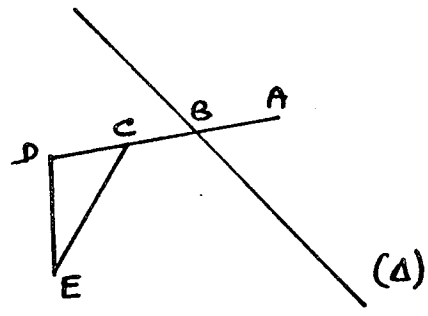
Les procédures de résolution de l'exercice suivant peuvent apporter des éléments de réponse. En effet, la figure de ce second exercice coupe l'axe de transformation : le contrôle de type perceptif de la construction est moins facile. De plus, certains points sont suffisamment éloignés de la droite pour que le tracé au jugé de leurs images soit imprécis.

Les procédures liées à la propriété d'équidistance n'ont pas émergé dans cet exercice. Le compas n'est utilisé que pour des reports de longueurs ou de distances à un point. Or, l'équidistance implique de chercher les distances à au moins deux points. La construction au compas des droites de symétrie du cercle et celles de la médiatrice d'un segment n'ont pas été réinvesties. La priorité (toujours vraie) donnée aux actions de mesures a conduit les élèves à privilégier l'emploi de la règle graduée. Nous allons voir si les caractéristiques de la figure suivante ont joué en faveur d'une utilisation de l'équerre et du compas.

II.3. Construction de la figure symétrique du "drapeau"

Pour faciliter le suivi par le lecteur de l'analyse des procédures des élèves, nous avons nommé quelques points particuliers de la figure et de l'axe comme il est indiqué ci-dessous.

dans la figure originale :
AB = BC = CD = 3 cm.
CE = 5.5 cm.
DE = 4 cm.
longueur du "segment" (Δ) : 20cm.



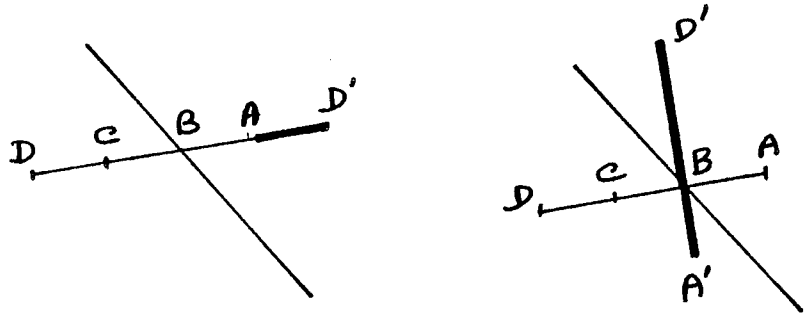
Contrairement à l'exercice précédent, l'échec massif des élèves à cet exercice est

immédiatement perceptible. Toutes les productions sont fausses de manière évidente, sauf celle du groupe 5, qui présente, en plus d'un aspect perceptif correct, des tracés de construction qui font supposer que la construction est exacte. Nous analysons les différentes étapes de la construction de ce groupe au paragraphe II.3.2.

II.3.1. Analyse des six procédures fausses

a. L'action initiale de construction

Dans les six groupes, la première action de construction concerne le même élément de la figure: le segment CD. Ces actions sont de deux types, dont l'une, très majoritaire, est le prolongement du segment AD. C'est celle adoptée par cinq de ces six groupes. Seul le groupe 2 a construit un segment perpendiculaire au segment AD.



Dans les six groupes, les longueurs des segments construits sont déterminées par des reports de longueurs de segments de la figure. Ainsi, le segment AD est prolongé de 3cm à partir de A ou de 6cm à partir de B (on a AB=BC=CD=3cm). Dans le groupe 2, le segment construit est de même longueur que AD et l'intersection de A'D' avec Δ est située dans un même rapport que AD par rapport aux extrémités (3cm et 6cm).

C'est donc la direction initiale de construction qui différencie ces deux types de procédures entre elles. Cependant, elles ont une caractéristique commune : la direction initiale est choisie relativement à la direction d'un élément de la figure (prolongement de AD ou direction perpendiculaire à AD) et non relativement à celle de l'axe.

Examinons quel est le statut des points ou segments ainsi construits.
Aucun des groupes qui ont prolongé AD ne s'est posé la question des images des points C et A. Nous voulons dire que les échanges entre les élèves ne les évoquent jamais. Tout se passe

comme si A était pour eux l'image de C. D'autre part, l'extrémité du segment construit est l'image du point D. Les procédures utilisées ultérieurement pour construire l'image du triangle CDE confirment cette interprétation. Leur analyse fait l'objet du paragraphe (b) suivant.

Ces actions initiales de construction relèvent toutes de la même règle d'action : il y a conservation de la "distance" à l'axe et des longueurs des segments de la figure. Mais cette "distance" est calculée le long de directions non orthogonales à l'axe.

C'est la même règle d'action qui est utilisée par les élèves du groupe 2 pour trouver l'image de AD. Les points A' et D' sont les extrémités du segment et AD et A'D' se coupent sur Δ. Dans un premier temps, l'image de C n'est pas marquée.

Signalons que le prolongement de AD a été proposé par un élève du groupe 2, mais il a été immédiatement remis en question par un argument faisant appel au pliage. De fait, perceptivement, la solution donnant comme image de AD un segment qui lui est perpendiculaire est plus proche de ce que donnerait le pliage que celle située dans son prolongement.

b. La construction de l'image du triangle

Il restait à construire les images du point E et du triangle CDE.

Nous ne parlerons plus du groupe 1 qui n'a pas eu le temps de poursuivre la construction au delà du segment AD'. Cinq productions sont donc analysées dans ce paragraphe.

Un premier constat : la propriété d'isométrie n'est pas respectée dans trois productions, c'est-à-dire que le triangle-image n'est pas superposable au triangle-objet. Ce qui signifie que des règles d'action ont été mises en oeuvre qui entrent en contradiction avec cette propriété. La question de l'isométrie n'a pas été évoquée explicitement par les élèves. Cependant, des actions de construction ont été modifiées dans certains groupes pour tenter de la respecter. Enfin, plusieurs élèves ont exprimé leur insatisfaction devant la production finale, sans pouvoir en formuler les raisons.

C'est la construction de l'image du segment DE qui est la cause du non respect de l'isométrie. A cette étape de la construction du symétrique du drapeau, il s'agit de construire E'.

Dans les cinq groupes, la première action est la même : l'angle droit de l'équerre est placé sur

Les échanges entre les élèves ne permettent pas de savoir pourquoi cette direction orthogonale est choisie. Ce dont nous sommes sûrs, c'est qu'il ne s'agit pas d'une erreur sur la valeur de l'angle CDE dans le triangle : les élèves ont vérifié dans les deux groupes que cet angle n'était pas droit.

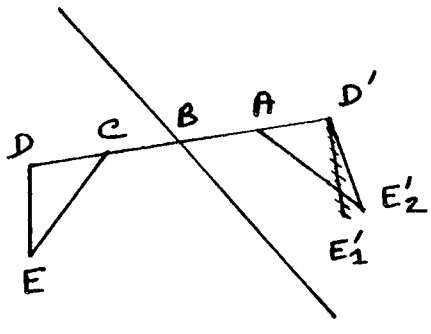
Cette solution a été adoptée pour régler la difficulté liée au choix de la direction. L'angle CDE n'ayant pas une valeur particulière, les élèves se sont intéressés aux côtés de l'angle. Les deux côtés de l'angle CDE sont d'une part CD, pour lequel l'image C'D' est construite et, d'autre part, DE qui est vertical et dont il faut déterminer la direction de l'image. La direction privilégiée de DE dans la feuille a pu induire le choix d'une direction elle aussi particulière pour D'E'.

choix 3 : le segment est défini par l'équidistance à un point de l'axe et l'isométrie

La procédure adoptée par les élèves du groupe 3 met en oeuvre simultanément deux propriétés de la transformation : l'isométrie et l'équidistance de deux points symétriques à un point de l'axe. Plus précisément, l'image d'un point est obtenue par l'intersection de deux arcs de cercle, l'un correspondant au report d'une distance d'un point à l'axe et l'autre au report d'une longueur d'un segment de la figure.
Cette procédure n'a émergé qu'après une tentative de détermination de la direction D'E'. Voici plus précisément la suite des actions correspondant à cette phase.

(1) construction d'un segment $D'E'_1$ sur la perpendiculaire à AD' en D' et de longueur égale à DE.

(2) une deuxième image de E est donnée : le point E'_2 est construit à l'intersection d'un arc de cercle de centre B, de rayon BE= 8 cm et un arc de cercle de centre A, de rayon CE.



(à la fin du travail de groupe, le triangle $A'D'E'_2$ est entièrement barré)

La distance BE n'est pas matérialisée par un segment de la figure, c'est pour cela que nous inférons de cette action la prise en compte de l'équidistance de E et E' au point B de l'axe. Il ne s'agit pas de l'équidistance à l'axe, mais de l'équidistance à un point de l'axe. D'ailleurs, le tracé de l'autre arc de cercle consiste à reporter la longueur du segment CE pour obtenir l'image de E. Cette longueur est reportée à partir du point A : nous interprétons cela comme une indication que le point A est bien considéré comme l'image de C.

choix 4 : le segment est construit au jugé sous contrôle perceptif

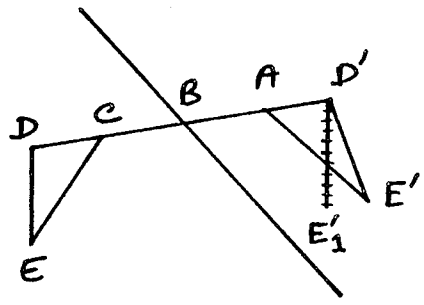
La production du groupe 6 respecte l'isométrie, mais la construction a été faite au jugé. Cette solution est adoptée après de nombreux essais, en particulier le tracé d'un segment vertical (tracé qui a été barré). L'image du point E est déterminée finalement par tâtonnements qui visent à respecter à la fois les longueurs et les angles dans le triangle.
Voici un résumé des étapes de cette construction.

(1) constat avec l'équerre que l'angle CDE n'est pas égal à un droit

(2) mesure de DE = 4,1 (mesure exacte pour cette figure) inscrite sur l'équerre

(3) tracé de $D'E'_1$ parallèle à DE (ou vertical), de longueur 4,1; problème à propos de la valeur de l'angle D'; finalement, le segment $D'E'_1$ est barré

(4) tracé de E' tel que D'E'=DE dans une direction déterminée par tâtonnements successifs pour que l'égalité des longueusr CE et C'E' soit respectée.



L'utilisation des instruments a posé un problème aux élèves de ce groupe. L'absence d'angle droit dans la figure semble rendre l'équerre inutilisable, ils l'ont exprimé durant le travail en groupe. Nous l'avions déjà repéré lors de la construction des droites de symétrie. Le compas n'est pas utilisé, pourtant il convenait parfaitement à la procédure choisie : construire le troisième sommet par le report des longueurs de deux côtés du triangle. Dans ce groupe, la propriété d'isométrie a été prioritaire pour le choix de la procédure de détermination du triangle-image.

c. Conclusion à propos des constructions fausses

Dans les six groupes, la première action de construction concerne le segment de la figure qui coupe l'axe. Le problème à résoudre est la détermination de la direction du segment-image. Les procédures de "rappel par prolongement" sont très majoritaires. Elles correspondent au choix d'une direction matérialisée par un élément de la figure. La propriété d'orthogonalité est absente dans cette procédure, mais elle est par contre sous-jacente dans celle qui consiste à choisir comme direction du segment-image la perpendiculaire au segment-objet. Elle est cependant détournée de l'axe vers le segment-objet. Les deux directions initiales ont donc été choisies en relation non pas à l'axe, mais au segment dont on cherche le symétrique.

Des caractéristiques de la figure ont induit des procédures qui entrent en contradiction avec la propriété d'isométrie de la transformation. Le problème a été résolu dans plusieurs groupes au détriment d'invariants qui pourtant sont très forts chez les élèves.

Ainsi, la verticalité d'un des segments de la figure est conservée dans un groupe. Cette solution est aussi proposée dans un autre groupe avant d'être refusée. Deux groupes ont transformé ce segment vertical en un segment perpendiculaire à un côté du triangle. Dans toutes ces productions, la figure construite n'est pas isométrique à celle donnée.

D'autre part, l'absence de valeurs particulières pour les angles du triangle a créé un problème d'utilisation de l'équerre. La multitude d'essais réalisés avec cet instrument et non réinvestis par les élèves dans la construction le montre.

Cependant, ces caractéristiques n'ont pas suffit à remettre en question les procédures utilisées. Dans plusieurs groupes, la production finale contient un triangle-image non superposable au triangle-objet. Certains élèves expriment leur insatisfaction. Il semble que le maintien de ces solutions est dû d'une part, à l'insuffisance du temps imparti pour ce problème et, d'autre part, aux difficultés des élèves d'expliciter les raisons de leurs doutes.

Il faut définir des contraintes plus fortes pour la tâche si l'on veut que ces procédures erronées soient remises en question . Nous en proposerons quelques-unes au paragraphe III.

II.3.2. Etude de la construction exacte

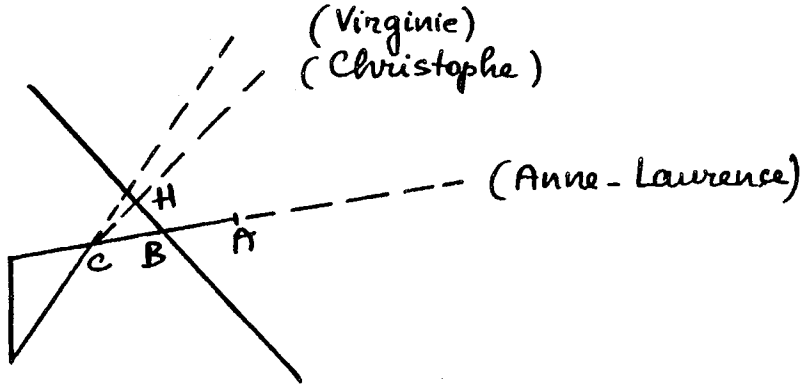
Elle a été fournie par le groupe 5, le seul à avoir utilisé la propriété d'orthogonalité à l'axe dans le premier problème (construction de la demi-feuille de lierre).

En fait, cette construction est due à un seul des élèves, Christophe. A aucun moment, les trois autres n'ont compris sa démarche. Examinons les différentes phases de cette construction.

(a) les actions initiales des élèves du groupe

Voici le résumé de cette première phase.

Anne-Laurence propose de prolonger AD de 3 cm, après avoir mesuré DB (=6cm), BA (=3cm) et DC (=3cm). Virginie matérialise avec la règle le prolongement de CE et regarde où se situe le point d'intersection. Carine ne propose rien. Christophe commence par déterminer perceptivement l'emplacement du symétrique de la hampe : il montre une direction à peu près bonne, en disant "il faudrait faire ça". Puis, tout de suite après, il détermine avec le compas une ouverture de grandeur CH, H étant déterminé approximativement sur la perpendiculaire à l'axe, en rajoutant "on a ce point".



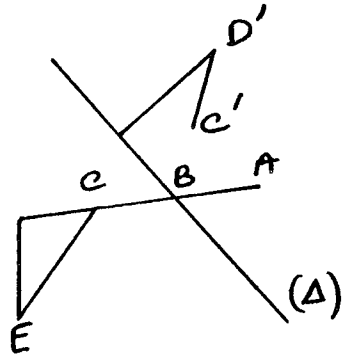
Nous retrouvons une procédure initiale qui a été majoritaire dans ce problème : le rappel par prolongement de AD pour déterminer le point D'. Cette procédure est proposée par deux élèves, Anne-Laurence et Virginie. Christophe a essayé quant-à-lui de déterminer d'abord au jugé l'emplacement de l'image de AD, puis celle de C'.

(b) tracé de l'image du segment DC

C'est Christophe qui prend en main d'autorité la résolution du problème. Il met en oeuvre son idée initiale pour construire les points D' et C'.

Christophe construit avec l'équerre la perpendiculaire à l'axe à partir de D, et détermine la distance (D, Δ) qu'il reporte de l'autre côté. Il marque le point D'. Il fait de même avec C et marque le point C', puis trace le segment D'C'.

A ce moment, la figure obtenue est celle-ci :
(sans les lettres)



Le segment construit est détaché de la figure-objet et il n'est identifiable à aucun des segments propres de la figure (c'est l'image d'une partie du segment qui coupe l'axe). Aussi, sa construction n'est-elle pas convaincante. Christophe lui-même, en la regardant, ne sait plus à quoi correspond ce qu'il vient de tracer, ce qu'il exprime ainsi :

- mais, c'est pas bon, ça ! Je ne sais même plus ce que ça représente !

Le contrôle perceptif n'est plus efficace. Le segment-objet correspondant au segment construit n'est pas facile à identifier. La netteté du trait de construction intermédiaire ne facilite pas l'analyse de la figure. Christophe va se mettre à douter.

(c) incertitudes

Les hésitations de Christophe vont obliger les autres élèves à se réinvestir dans le problème.

Anne-Laurence prend la figure et la règle graduée et mesure CE, puis CD. Mais elle ne sait quoi faire avec ces longueurs et n'ira pas plus loin.

Les autres élèves n'ayant pas d'autres idées pour résoudre le problème, Christophe va le reprendre en main.

(d) un nouveau départ et un contrôle perceptif retrouvé

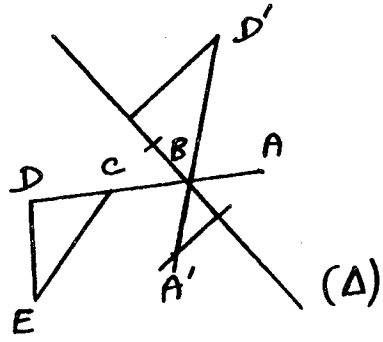
Le prolongement de D'C', qui passe par B, au delà de Δ pouvait aider à reconnaitre la validité de la construction de Christophe. Cela pouvait permettre aux élèves de retrouver le contrôle perceptif de l'image de la figure. Mais Christophe va reprendre sa procédure initiale. Il choisit le point A, parce qu'il n'arrive pas à comprendre ce qui se passe pour C' et D'. Il construit A'

sur la droite perpendiculaire à Δ passant par A et à égale distance de Δ que A, et déclare :

-voilà, on a déjà un point.

Cette remarque semble signifier que, pour le moment, C' et D' sont en attente de vérification. Les autres élèves le regardent et l'écoutent. Remarquons que la figure, telle qu'elle se présente, est toujours difficile à analyser.

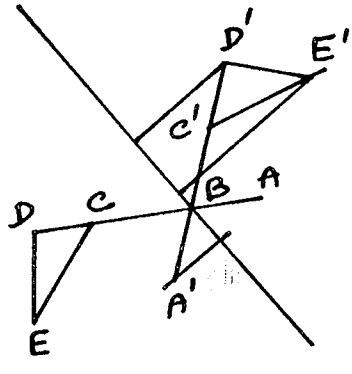
Christophe trace ensuite la demi-droite partant de A' et passant par le point B situé sur l'axe de symétrie. Il prolonge son tracé jusqu'au point D' qu'il avait construit et constate que ce trait recouvre le segment D'C' précédemment tracé. Puis il vérifie que A'D' est égale à AD (9 cm). Cette construction de A'D' s'appuie sur les propriétés d'incidence : le point B a bien été utilisé comme support de construction du segment A'D'. A ce moment, la figure est la suivante :



(e) réinvestissement de la même procédure pour E'

Les autres élèves manifestent à nouveau qu'ils ont des difficultés à suivre. Le contrôle perceptif est toujours aussi difficile à cause de la présence des traits de construction de D' et A'. C'est donc Christophe qui termine le tracé.

Chistophe mesure BC (=3cm) et montre C' en disant "ça démarre de là". Après encore des hésitations, il va finalement construire une perpendiculaire à l'axe à partir de E et reporter la distance de E à l'axe; il marque alors le point (E') et trace ensuite E'C' et E'D'.
Les trois autres élèves expriment avec conviction leur accord.



aspect de la figure finale (lettres à exclure)

Il est intéressant de noter dans cette phase la tentative de changement de procédure de Christophe pour construire E' en partant de C' et non plus par rapport à l'axe. C'est parce qu'il ne trouve pas l'action adéquate qu'il se replie sur la procédure précédente. Le compas n'a jamais été présent dans sa construction.

C'est donc la même procédure qui a été adoptée pour construire les symétriques des quatre points particuliers de la figure. Elle met en oeuvre les propriétés d'orthogonalité et d'égale distance. Dans son analyse de la figure, Chistophe privilégie les points par rapport aux segments et aux directions qu'ils matérialisent. Cette analyse a permis à plusieurs reprises de surmonter les difficultés soulevées par la perte du contrôle perceptif de l'image.

II.3.3 Conclusion sur la construction du drapeau

Quelques résultats qui avaient été inférés par la phase de construction avec instruments de la droite de symétrie sont confirmés. En particulier, nous retrouvons la disponibilité de la propriété du "milieu" de la droite de symétrie dans la procédure consistant à déterminer un point M' tel que le milieu de MM' soit sur l'axe. Elle corespond à un report de "distance" à l'axe, le long d'une direction qui ne lui est pas forcément orthogonale.

Quelle sont les critères de choix de cette direction, support de la construction du symétrique d'un point par rapport à la droite ? Lorsque les caractéristiques de la figure n'induisent aucune perturbation perceptive, cette direction est proche de l'orthogonalité à l'axe. C'était le cas de la première figure proposée aux élèves.

Dans la seconde figure, la direction de construction majoritairement adoptée est celle du segment qui coupe l'axe. La mesure de l'angle aigu que ce segment fait avec l'axe (55°) est pourtant très loin d'un droit. Cependant, la direction du segment dans la feuille est proche de l'horizontale (12°). Cette procédure est donc peut-être à rapporcher de celle de "rappel horizontal" que nous avons souvent rencontrée dans nos expérimentations précédentes.

La propriété d'isométrie peut ne pas être respectée lorsque les figures possèdent certaines caractéristiques qui induisent la mise en action des invariants erronés qui ont résisté aux apprentissages. Nous en avons repéré deux en particulier : l'image d'un segment vertical est un segment vertical et la figure doit occuper un seul demi-plan par rapport à l'axe.

Le contrôle perceptif semble donc être un obstacle à l'apprentissage de la construction du symétrique d'une figure : il retarde la prise de conscience de propriétés de la transformation.

Nous retrouvons ici un résultat qui a été pointé dans plusieurs recherches (Artigue 1984, Laborde 1982).

Durant le travail des groupes, les phases de vérification ne se sont manifestées que sous forme de tentatives ponctuelles. Les observations et les productions montrent que les élèves ne s'en sont pas servies. Les contradictions portant sur des différences de longueurs des segments-images et segments-objets auraient pu provoquer chez eux une remise en question de la construction. Cela ne s'est pas produit malgré l'insatisfaction, devant les productions, d'un grand nombre d'élèves.

La question de l'enjeu pour les élèves de l'utilisation des instruments et de sa signification est primordiale par rapport aux objectifs de l'activité. La déstabilisation du contrôle perceptif comme moyen privilégié de construction du symétrique est un problème tout aussi important puisque ce moyen semble être un obstacle aux apprentissages en jeu dans cette activité. Précisons qu'il ne s'agit pas de détruire définitivement l'outil contrôle perceptif. En effet une bonne perception globale de la figure et de son symétrique est une compétence positive, à condition qu'elle ne se substitue pas systématiquement aux autres outils plus analytiques de détermination du symétrique d'une figure.

III. Modifications apportées à l'activité

III.1. Modifications générales concernant la 2ème séquence

III.1.1. Le contrat

Comme pour la tâche de construction des droites de symétrie, l'enseignant a prévu de mieux expliciter le contrat. En particulier, il précisera que les instruments doivent être utilisés pour ce pourquoi ils sont faits et que l'absence de règle graduée interdit donc les mesures. De plus, l'enseignant rappelera que les constructions au jugé ne sont pas reconnues comme valables.

Ces précautions dans l'explicitation du contrat ont joué dans la tâche précédente (nous l'avons montré au ch.VIII) en faveur d'une meilleure compréhension de la consigne par les élèves et d'un moindre détournement de la tâche.

III.1.2. Une familiarisation avec le compas et l'équerre

Rappelons que pour cette deuxième réalisation de notre séquence, l'enseignant a prévu de familiariser les élèves avec le compas et l'équerre, cette activité devant se dérouler avant la séquence sur la symétrie orthogonale.

Ces deux précautions doivent favoriser la réalisation des objectifs de cette activité, en rendant plus accessible aux élèves la mise en oeuvre des propriétés d'orthogonalité et d'équidistance.

III.1.3. Une situation introductive de la définition du symétrique d'une figure avec le papier calque

Dans la première séquence, la définition du symétrique d'une figure par rapport à une droite a été donnée en même temps que la figure 1 (demi-feuille de lierre) et que le tâche de construction avec les instruments. L'activité ainsi proposée contient une double difficulté pour les élèves : s'approprier la définition et mettre en oeuvre les propriétés de la transformation.

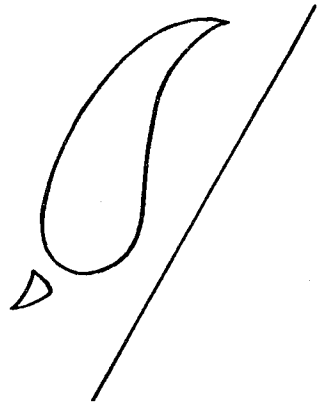
Il nous a semblé qu'il était nécessaire de séparer ces deux objectifs d'apprentissage. Dans cette nouvelle réalisation, l'activité de construction avec instruments se place dans le temps après une activité aboutissant à la définition du symétrique d'une figure.

analyse de l'activité

L'instrument de construction pour cette première activité devait être facile d'utilisation pour les élèves. Le papier calque est un outil matériel qui permet de résoudre le problème de construction posé. Son utilité et sa manipulation sont familiers aux élèves. De plus, il ne se situe pas uniquement au niveau manipulatoire dans cette tâche. Son utilisation met en jeu plusieurs propriétés de la transformation, à savoir :
- l'isométrie, dans l'action de reproduction de la figure;
- la superposition indirecte, dans l'action de retournement de la feuille calque;
- l'invariance dans la transformation des points de la droite de symétrie, dans la détermination de l'emplacement de la figure à tracer; la distance d'un point de la figure à l'axe ne pouvant être calculée ou reportée (absence des instruments adéquats), il est nécessaire de repérer au moins deux points de la droite à la fois sur la figure originale et sur la feuille calque, qui doivent être superposés après le retournement.

Deux exercices sont proposés aux élèves.

Le premier consiste à compléter, à l'aide du papier calque, une figure par rapport à une droite pour que celle-ci soit droite de symétrie de la figure globale. L'objectif est de définir le symétrique d'une figure en s'appuyant sur la notion de droite de symétrie. La figure proposée est reproduite ci-dessous.



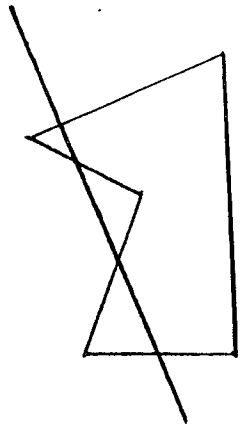
Les éléments qui composent la figure ne sont ni des courbes circulaires, ni des éléments polygonaux : le papier calque est un instrument bien adapté à ce type de figure.

D'autre part, la figure ne coupe pas l'axe. Le fait qu'elle soit dans un même demi-plan par rapport à cet axe rend la tâche facile aux élèves. Le fait qu'elle n'ait aucun point commun avec l'axe nécessite la prise en compte de l'axe dans la reproduction de la figure.

Les deux parties étant disjointes, il faut également prendre en compte leur distance, soit en les calquant l'une immédiatement après l'autre, soit en se donnant des points de repère.

La correction collective de cet exercice sera suivie de l'institutionnalisation par l'enseignant de la définition du symétrique d'une figure.

Le second exercice consiste à construire (à l'aide du papier calque) la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite. La figure proposée est reproduite ci dessous.



Contrairement à la figure précédente, celle-ci coupe l'axe. Il nous parait essentiel de déstabiliser très vite la conception erronée de la symétrie orthogonale comme une transformation d'un demi-plan vers l'autre demi-plan délimité par l'axe. Les points d'intersection peuvent servir de supports pour déterminer l'emplacement de la figure à tracer.

La figure étant polygonale, lorsque la construction est terminée, les changements de direction sont facilement perceptibles : seul le segment perpendiculaire à l'axe a son image dans son prolongement.

Pour ces deux figures, l'axe de la transformation est placé en oblique dans la feuille. Cette caractéristique assure la nécessité de prendre en compte l'axe pour résoudre le problème posé.

III.2. Modifications de la tâche avec instruments

III.2.1. Une contrainte sur les instruments

Lors de la première séquence, nous n'avions pas imposé de contrainte sur les instruments dans cette tâche. Nous pensions, en effet, que leur utilisation dans l'activité de construction de la droite de symétrie d'une figure devait les rendre tous familiers. Mais, seule la règle graduée

était disponible.

Les propriétés de la transformation les plus difficiles à faire mettre en oeuvre sont celles d'orthogonalité et d'équidistance. Pour les faire utiliser, il faut interdire l'emploi de la propriété d'égale distance à un point de l'axe qui est trop prioritaire chez les élèves. Dans cette deuxième séquence, nous avons donc supprimé la règle graduée des instruments disponibles. Les élèves ont à leur disposition une règle non graduée, une équerre et un compas.

III.2.2. Modification de la taille des figures

La direction oblique de l'axe dans la feuille avait pour objectif d'induire l'utilisation de l'équerre. Cette caractéristique de la figure n'a pas suffi à rendre nécessaire pour les élèves l'utilisation de cet instrument pour résoudre le problème. La raison essentielle est que la détermination d'une direction orthogonale à l'axe était possible de manière satisfaisante au jugé.

Nous avons déjà rencontré ce problème de la signification pour les élèves de l'usage des instruments dans une activité. Or il nous semble que l'utilisation effective de l'équerre est un élément en faveur d'une prise de conscience de cette propriété. En effet, nous avons vu, dans l'activité que nous venons de décrire, que le seul groupe qui a mis en oeuvre cette propriété pour résoudre le second problème de construction (figure 2, le drapeau) est celui qui avait effectivement utilisé l'équerre pour le premier problème (figure 1, demi-feuille).

Ceci justifie que nous tenions à imposer l'utilisation de l'équerre. Mais les élèves doivent en ressentir la nécessité. Nous avons résolu en partie ce problème dans l'activité de construction d'une droite de symétrie d'une figure, par une contrainte sur la taille de la figure : à partir d'une certaine grandeur, la détermination au jugé de la direction orthogonale à l'axe peut comporter des imprécisions repérables.

Nous avons donc dessiné la figure 1 dans une homothétie de rapport 3. De cette façon, la taille de la demi-feuille est telle que la longueur de la règle non graduée soit plus petite que la distance de certains points de la figure à l'axe.

De même la figure 2 est transformée par une homothétie de rapport 1.5. La possibilité de construire par un rappel par prolongement est conservée, c'est-à-dire que cette procédure donne un point situé dans le cadre de la feuille.

. Analyse de l'activité de construction avec papier calque

IV.1. Transition vers la transformation

Il s'agit du premier exercice proposé avec la papier calque (figure 1). Les productions des six groupes d'élèves sont justes. La tâche est perçue comme facile et agréable par les élèves. Voici quelques extraits qui illustrent ce propos.

- *c'est vachement facile avec le calque (groupe 1 Sonia)*
- *ça a l'air pas trop dur (groupe 2)*
- *c'est facile (groupe 3)*
- *oh! je peux le reproduire ? (avec enthousiasme) (groupe 4)*

IV.1.1. Quelques aspects des procédures

a. la reproduction de la figure (activité de calque)

C'est la première action dans tous les groupes, elle est immédiate (les élèves se lancent tout de suite dans cette action) et ne pose aucun problème. La raison de cette action est entièrement implicite. Signalons que malgré la complexité des courbes composant la figure, la reproduction de la figure est soigneusement effectuée.

b. le statut de l'axe de symétrie

Tous les groupes ont tracé sur le papier calque un segment de même longueur que le tracé original de l'axe de symétrie, qu'ils ont ensuite fait coïncider avec le tracé original, après avoir retourné la feuille calque. La règle d'action sous-jacente est l'invariance du segment de droite. La raison est de déterminer l'emplacement de la figure à tracer.

Dans les échanges entre deux élèves du groupe 1, Thomas exprime qu'il faut tracer tout le segment.

groupe 1 (un des élèves a calqué la figure), puis :

Thomas *le trait [...]*
Caren *mais il suffira d'un seul trait*
Thomas *Mais non, il faut que tu repasses longtemps, parce qu'après, regarde, tu ne*

sauras pas où il faut le mettre

Caren *ah, oui [...]*

Thomas *le trait, c'est le seul point de repère qu'on a !*

Le repère est le même dans les autres groupes. Dans les groupes 2 et 3, il est explicitement dit qu'il faut superposer le segment reproduit au segment original. Les groupes 4 et 5 ont aussi exprimé la nécessité de reproduire l'axe.

groupe 2

- toi, tu feras le trait

- ça sert à rien le trait

- ben, si !

- si, justement...pour que les deux traits...celui du calque soit bien sur celui du carton.

groupe 3

- ce qu'il y a, c'est qu'il faudra bien mettre par rapport à ça (en désignant la droite)

- et ben, on va dessiner le trait !

groupe 4

- la droite là, il faut bien la reproduire !

(cette phrase n'a soulevé aucun commentaire, l'élève "de service" s'est exécuté)

groupe 5

- on redécalque pas la droite ?

- si ! après on la met dessus. Après, tu saurais pas.

- ah, oui.

Ainsi, la droite ne fait pas partie de la figure, mais il est nécessaire de la reproduire en même temps qu'elle pour retrouver l'emplacement de la figure symétrique.

c. le retournement

Tous les groupes ont ensuite retourné le papier-calque et reproduit la figure en faisant très attention de faire coïncider les extrémités des deux segments de droite.

L'invariance point par point des points de l'axe n'est repérable que dans le groupe 5 : les

élèves ont marqué deux points sur le segment, autres que les extrémités, qu'ils ont calqué en même temps que lui; puis ils ont veillé très soigneusement à faire coïncider chacun des deux points avec lui-même. Ils ont ensuite reproduit la figure en repassant au crayon sur les traits des contours.

d. la direction oblique de l'axe dans la feuille

Elle n'a soulevé aucune difficulté. Deux groupes (4 et 5) ont placé la feuille originale et la feuille de papier calque en coïncidence exacte avant de calquer. Or, au moment de reproduire la figure, après le retournement, la coïncidence des deux feuilles n'est plus possible. Mais elle n'a pas été tentée et il n'y a pas eu question à ce sujet. Cette précaution au départ avait peut-être pour seul but de faciliter le calque de la figure et d'assurer de retrouver facilement des points de repère en cas de glissement des deux feuilles l'une sur l'autre.

IV.1.2. Ce que révèle de plus la phase de bilan collectif

La procédure avec calque nécessite de reproduire à la fois la figure et le segment de droite. C'est ce qu'affirme Jeremy (groupe 6).

C'est bien la conservation de la distance à l'axe d'un segment de la droite qui est reconnue. Sophie2 explicite ce qui se passerait si on ne "recopie pas le trait" :

> *en remettant de l'autre côté on aurait pu mettre plus loin du trait...par exemple si on pliait [...] ben ça superposerait pas...*
> *[après avoir retourné] on a mis le trait qu'on avait tracé sur le trait...le trait, il était de la même longueur.*

L'enseignant a lancé le débat sur la notion de "longueur d'une droite" évoquée par plusieurs élèves, dans l'objectif d'invalider le tracé de la droite toute entière. Dans une étape intermédiaire de ce débat, les élèves ont d'abord reconnu que cela marchait si les deux points étaient à égale distance du milieu (du segment matérialisant la droite). Puis l'enseignant a affirmé aux élèves qu'il suffit de décalquer deux points choisis n'importe où sur la droite. Cependant, il n'a pas expliqué le lien entre ce qui est mis en jeu avec le calque et les propriétés de la transformation.

Dans la phase d'institutionnalisation, la définition de la figure symétrique d'une figure

proposée par l'enseignant met en avant quatre propriétés : l'isométrie indirecte, la conservation des dimensions, le respect des distances à l'axe et la perpendicularité à l'axe. Les trois premières correspondent effectivement à celles qui ont été utilisées ou explicitées par les élèves. Mais ce n'est pas le cas de la propriété d'orthogonalité, qui ne peut être mise en évidence avec le calque comme outil de construction. Les élèves ne l'ont d'ailleurs jamais évoquée ni pendant les travaux de groupe, ni pendant la correction de l'exercice.

IV.2. Construction de la figure symétrique

La consigne était de construire le symétrique d'une figure par rapport à une droite à l'aide du papier calque. Cinq des six productions sont justes. Nous allons étudier les différentes procédures adoptées.

IV.2.1. Le problème de l'intersection figure-axe

La production du groupe 5 est fausse. A cause de l'intersection de la figure avec l'axe, les élèves ont déclaré le problème impossible. Ils l'ont détourné en choisissant par essais successifs un autre axe de symétrie. En effet, après avoir reproduit et calqué la figure et la droite, ils ont fait plusieurs essais faisant tous coïncider un segment de la figure avec son homologue. Leur choix s'est fait en fonction de la perception de la figure globale, satisfaisante d'une part, et possible à réaliser dans les limites de la feuille, d'autre part.

- attendez, mais qu'est ce qu'on fait, là ?
- c'est la même procédure
- et ce petit bout, qu'est ce que tu vas faire ?
- trace déjà cette droite, après !
- oui, mais si c'est faux ?
- je pense faire la même chose et puis après je mettrais deux points
- et pourquoi ? A quoi ils vont te servir ces deux points ?
- oh, mais hé ! T'as pas écouté !
- c'est pas la droite de symétrie, ça..
- y'a toujours ces deux bouts qui dépassent [...]
- disons que c'est ça, la droite de symétrie [...]
- je comprends pas. Pourquoi, c'est çui-là et pas çui-là ?

Ces extraits illustrent les difficultés rencontrées : le statut de l'axe, l'intersection de la figure avec cet axe (les "bouts qui dépassent" sont les parties de la figure situées de l'autre côté de

l'axe), le problème du réinvestissement de ce qui s'est dit dans la phase précédente (à quoi servent les "deux points" qu'il faut repérer ?).

IV.2.2. Reprise de la procédure précédente sans adaptation

Cinq groupes adoptent la même procédure que pour la tâche précédente, consistant à calquer la figure et le segment de droite, puis, après avoir retourné le calque, à tracer la figure symétrique en superposant le segment à son original. Cette procédure est reprise sans discussion dans les groupes 1, 2 et 6.

Pour les élèves du groupe 4, la question de la reproduction de la droite a été source de conflits qui ont abouti finalement à la tracer, l'argument étant que son tracé n'engageait à rien et était sécurisant.

On retrouve cette attitude dans le groupe 5 : d'abord, calquer la figure et la droite, il sera toujours temps de voir ensuite ce qu'il faut faire.

- décalque tout la figure !
puis, à un autre élève du groupe :
- quand elle aura fini, on réfléchit.

IV.2.3. Une procédure adaptée à la figure

Un seul groupe n'a pas calqué la droite, après une discussion sur la nécessité de le faire et sur le statut de cette droite par rapport à la figure. Les échanges entre les élèves illustrent bien les questions qui se sont posées aussi dans les autres groupes.

- c'est pas possible... parce qu'il va y avoir un morceau qui va pas rentrer; je suis sûr que ça se peut pas
- peut-être que si. Si ça se trouve, la droite, elle fait partie de la figure.
-oui, mais ils ont dit que c'était ça, l'axe de symétrie
- c'est pas possible
- décalque la droite ! [....]
- mais c'est pas symétrique !
- ben, oui; c'est pas symétrique (ils évoquent l'ensemble figure-droite)
ça y est, j'ai trouvé ! comme ça !

- oui, mais à ce moment là, il faut tracer la droite
moi, je dis que ça sert à rien de tracer la droite
- marque deux points, alors ! (ton agacé)

Après avoir retourné la feuille calque, ces élèves ont déterminé la position de la figure à reproduire en tâtonnant, en cherchant à faire couper deux des segments de la figure sur la droite. Les relations d'incidence sous-tendent ces actions.

IV.2.3. Quelques points de la mise en commun

Nous donnons des éléments de cette phase de bilan parce qu'ils illustrent les difficultés rencontrées par les élèves.
La réfutation de la solution fausse a été faite par rapport à la consigne :

- c'est-à-dire que vous avez peut-être mal compris ma consigne parce que je l'ai peut-être mal donnée [...] c'est pas grave [...] c'est une erreur, ça va nous rendre service.

Or, le problème est celui de l'intersection de la figure avec l'axe. Il n'a pas été explicité durant la mise en commun alors qu'il était au centre des apprentissages en jeu dans cet exercice.

La solution proposée alors par Sonia est celle adoptée par la majorité des élèves : calque de la figure et de la droite, retournement, superposition des deux segments matérialisant la droite en prenant les extrémités comme points de repère. Devant les protestations de l'enseignant sur la référence aux "extrémités" de la droite, Sophie2 propose de repérer deux points quelconques sur la droite. Mais l'objectif de l'enseignant est d'amener les élèves à considérer les points d'intersection de la figure avec l'axe : il va donc donner des arguments pour n'accepter aucun des autres points de la droite !

Finalement, l'enseignant a été contraint de formuler lui-même l'invariance de chacun des points de l'axe. D'autre part, la propriété "deux segments symétriques par rapport à une droite se coupent sur cette droite" si elle est disponible chez les élèves comme règle d'action, est difficile à expliciter pour eux.

L'enseignant a ensuite élargi la transformation de la figure à celle du plan, en demandant aux élèves de répondre à des questions sur les symétriques de points à l'intérieur et à l'extérieur de la figure. Il est dit que l'ensemble de tous les points forment un plan et qu'en le retournant, on a le plan symétrique.

IV.3. Conclusion de l'activité avec calque

Le premier exercice a rempli son rôle de transition vers la transformation. Elle semble bien adaptée aux objectifs fixés et présente en plus l'intérêt de faire jouer deux propriétés de la transformation qui ne ressortent pas dans l'activité de construction avec les instruments : l'isométrie indirecte et la transformation du plan dans le plan.

Le second exercice a mis en évidence le problème soulevé par l'intersection de la figure avec l'axe et celui du statut de l'axe de symétrie dans la transformation.

Le problème de l'intersection de la figure avec l'axe a été constaté dans nos expérimentations, à travers les tâches de construction à main levée. Il semble qu'il se pose différemment dans la tâche avec calque. Précisons.

La tâche de construction à main levée (avec seulement un stylo) exige que l'élève anticipe l'emplacement de la figure symétrique. Ce n'est plus indispensable avec le papier calque. En effet, le calque est un outil intermédaire qui offre la possibilité de recueillir des informations sans avoir forcément de stratégie. En reproduisant tout sur le calque, figure et axe, on est sûr d'avoir tous les éléments. Or cette action ne soulève aucune difficulté, car elle est induite par la propriété d'isométrie très disponible chez les élèves. Pour résoudre le problème, il faut ensuite retourner le calque, ce que font tous les élèves, puis chercher par tâtonnements la position qui convient.

Les invariants de la transformation sont les points de l'axe et l'axe lui-même. Mais les élèves ne reconnaissent pas que l'invariance de deux points est suffisante pour fixer l'axe de la symétrie. Cependant, un point ne suffit pas. Aussi choisissent-ils de laisser invariant un segment de droite et, plus précisément, le segment matérialisant le tracé de l'axe dans la feuille.

Les connaissances apportées sur la transformation par l'activité avec papier calque sont "globales". Cette activité offre un moyen intéressant d'aborder la transformation de figures.

V. Conséquences des modifications de l'activité de construction avec instruments

Nous analysons cette deuxième réalisation de l'activité en fonction des modifications que nous avons faites par rapport à la première réalisation. En particulier, nous répondrons aux questions suivantes. La contrainte sur la taille de la figure "demi-feuille de lierre" a-t'elle joué

en faveur d'une mise en oeuvre effective de la propriété d'orthogonalité ? Cette contrainte a t-elle eu des conséquences sur la résolution du problème suivant ? Comment se traduit l'absence de règle graduée dans cette tâche?
Les procédures des élèves sont résumées en annexe en fin de chapitre.

V.1. La mise en oeuvre de la propriété d'orthogonalité

V.1.1. Utilisation de l'équerre pour la figure 1

Dans cinq des six groupes, l'équerre est utilisée de manière effective pour construire le symétrique de la demi-feuille. Le sixième groupe (groupe 1) a essentiellement utilisé les procédures nécessitant le compas.

Ceci ne signifie pas que toutes les constructions sont exactes, car les procédures mises en oeuvre sont variables d'un élément de la figure à l'autre. Seul le groupe 3 a mis systématiquement en oeuvre la procédure P1 (§I.2.1) en utilisant correctement l'équerre.

Mais plusieurs indices permettent de relier l'émergence de la propriété d'orthogonalité à la contrainte de la taille de la figure. Nous allons les préciser.

L'utilisation de l'équerre comme outil de construction n'est pas immédiate. Il est intéressant en effet de noter que les procédures initiales de type P1 comportent la détermination au jugé des directions orthogonales à l'axe dans quatre de ces cinq groupes. Les élèves de cette séquence ont donc des procédures spontanées analogues à celles des élèves de la séquence précédente.

L'utilisation de l'équerre a permis dans ces quatre groupes de résoudre un problème d'imprécision des constructions. Dans le groupe 2, la rectification de la construction au jugé en se servant de l'équerre est réalisée dès le premier point-image construit. Dans les groupes 4 et 5, ce n'est qu'après la construction des images de un ou deux points au jugé que l'équerre est utilisée. La raison en est que la détermination au jugé n'est pas satisfaisante. Ensuite, les procédures de construction des derniers points-images sont exactes. Un apprentissage a donc eu lieu entre le début et la fin de la phase de résolution du problème. Enfin, dans le groupe 6, l'équerre est correctement utilisée pour déterminer le premier point-image, moins bien pour les points suivants, ce qui entraîne que les directions des lignes de construction ne sont pas parallèles. Un élève prend alors l'équerre pour vérifier l'orthogonalité à l'axe.

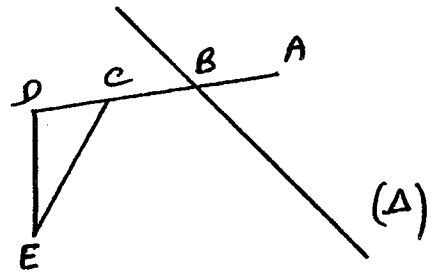
L'évolution des procédures (de la construction au jugé à la prise en compte effective de la propriété d'orthogonalité) est due à l'imprécision évidente des tracés sans l'équerre. Rappelons

que, lors de la première séquence, les figures construites au jugé étaient perceptivement correctes : nous avons du faire des mesures pour vérifier leur inexactitude.

La taille de la figure joue donc un rôle spécifique en faveur de l'utilisation de l'équerre.

V.1.2. Les conséquences de cette utilisation pour la figure 2

La réussite est bien meilleure dans cette deuxième séquence. Quatre productions sur six sont exactes, et les procédures de construction des quatre groupes concernés mettent en oeuvre de manière effective la propriété d'orthogonalité. Résumons ces procédures. Nous avons reproduit la figure ci dessous.



Les procédures des groupes 3 et 6 sont de type P1 pour les quatre points A,C,D,E : détermination de M' à égale distance de Δ que M sur la perpendiculaire en M à Δ, avec l'équerre et le compas.

Les deux autres relèvent de procédures mixtes, mettant en oeuvre les relations à l'axe et l'isométrie. Voici les principales actions dans ces deux groupes.

dans le groupe 5 :

- *détermination de A' à l'intersection de la perpendiculaire à l'axe et de l'arc (B,BA);*
- *même procédure pour D';*
- *E' à l'intersection de la perpendiculaire à l'axe et de l'arc (D',DE)*
- *C' à l'intersection de la droite (A'D') et de l'arc (B,BC).*

La propriété d'orthogonalité est mise en oeuvre pour construire les trois points A', D' et E'. Elle est combinée à la propriété d'égale distance à un point de l'axe pour A' et D' et à la propriété d'isométrie pour E'. L'image de C est construite uniquement par isométrie.

dans le groupe 2 :

- un accord : les deux segments AD et A'D' se coupent sur l'axe

- D' sur la perpendiculaire à Δ et à égale distance de Δ que D

- même procédure pour C' et E'

- tracé de E'D' et E'C', puis de D'C'

- prolongement de C'D' jusqu'à Δ, puis au delà de Δ; A' sur cette droite (C'D') tel que BA'=BA

Les relations d'incidence sont sous-jacentes à la remarque que A'D' et AD se coupent sur l'axe. Les propriétés d'orthogonalité et d'égale distance à un point de l'axe (type P1) sont mises en oeuvre pour construire les images de D, B et E. La construction de A' conjugue la mise en oeuvre des propriétés d'isométrie et d'égale distance à un point de l'axe.

Dans le groupe 4, il n'y a qu'un début de construction inexacte. Cependant, la production de ce groupe contient le tracé d'un segment AA' quasi perpendiculaire à Δ et des traces d'arcs de cercle en A et A' non centrés au même point.

Seule la procédure du groupe 1 ne met à aucun moment en oeuvre la propriété d'orthogonalité. C'est une procédure de type "rappel par prolongement" qui est l'action initiale de construction : tracé d'un segment dans le prolongement de AD, de longueur BD déterminée au compas. Cependant, cette construction n'a pas été achevée et elle a été remise en question par les élèves du groupe eux-mêmes.

En conclusion, il est incontestable que la propriété d'orthogonalité a été prise en compte par la grande majorité des élèves. Rappellons qu'elle n'avait été mise en oeuvre que par un seul groupe dans la séquence précédente. L'évolution des procédures au jugé vers des procédures de construction semble indiquer que cette différence de réussite a pu être provoquée par une combinaison de contraintes, à savoir :

- la taille de la figure 1,
- une explicitation claire du contrat,
- les apprentissages de l'activité avec calque, qui a joué un rôle de "stabilisateur du milieu" : l'activité avec calque permet de donner une signification à la définition du symétrique d'une figure, par son approche perceptive de la notion.

V.2. Les conséquences de l'absence de la règle graduée

En l'absence de règle graduée, le report des longueurs doit être réalisé au moyen du compas. Nous avons une confirmation de la disponibilité de cette utilisation du compas chez les élèves.

Elle correspond à la détermination d'un segment-image de même longueur qu'un segment donné, connaissant une de ses extrémités. Même lorsque le compas est centré sur un point de l'axe, il s'agit généralement de reporter la longueur d'un des segments composant la figure. En effet, peu de groupes utilisent les deux points invariants pour déterminer d'autres points que les sommets de la figure qui leur sont adjacents.

La contrainte d'interdiction de la règle graduée ne peut provoquer à elle seule l'émergence des procédures qui mettent en oeuvre la propriété d'équidistance (procédures de type P2). Nous avons observé des procédures "mixtes", où le point-image est défini par rapport d'une part à l'axe et d'autre part à un élément de la figure. Les deux règles d'action qui le sous-tendent sont l'isométrie de la transformation et l'égale distance d'un point et de son image à un point de l'axe. Ces deux règles d'action sont peut-être confondues pour certains élèves.

Le lien entre les propriétés d'orthogonalité et d'équidistance est soulevé dans deux groupes (1 et 4). Le problème est de comprendre comment une procédure n'utilisant que le compas peut respecter l'orthogonalité à l'axe.

V.3. Conclusion

Lors de la première séquence, l'activité n'avait pas du tout atteint ses objectifs. Les modifications apportées pour la deuxième séquence ont très bien fonctionné, et la situation a réellement mis en jeu la plupart des apprentissages visés. L'analyse des comportements des élèves de la deuxième séquence montre que ce n'est pas le fait d'une différence de niveau entre ces élèves et ceux de la séquence précédente. On a vu en effet que les procédures de départ sont les mêmes que celles des élèves précédents : ce sont bien les contraintes que nous avons rajoutées à la situation qui provoquent une évolution de ces procédures.

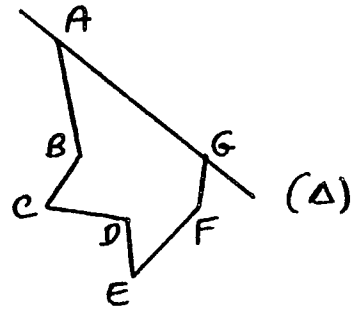
Cependant, la mise en oeuvre de la propriété d'équidistance reste problématique. Cette propriété n'est pas disponible chez les élèves et même l'utilisation du compas pour reporter des longueurs ou des distances semble plutôt sous-tendue par la propriété d'isométrie ou celle du milieu.

Plus généralement, il ressort de l'analyse de ces deux situations que la mise en oeuvre effective des propriétés de la transformation nécessite des contraintes très étudiées. Nous y reviendrons dans la conclusion générale.

première séquence
(activité décrite aux paragraphes I et II)

description des actions essentielles et des procédures de chacun des sept groupes pour le premier exercice : construction du symétrique d'une figure par rapport à une droite (figure 1, demi-feuille de lierre)

Dans la suite, M désigne un des sommets de la figure et M' est l'image donnée par les élèves (ce n'est pas forcément le symétrique de M). Les sommets de la figure sont numérotés de A à G, de la manière suivante :



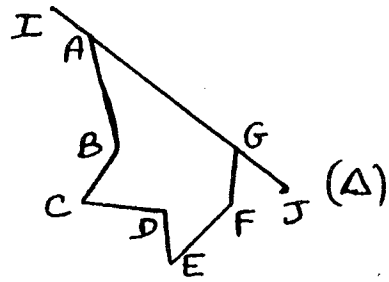
groupe	description des actions de construction
1	1ère procédure : tracés de points images de B,C et D par report avec règle graduée des distances sur des directions perpendiculaires déterminées au jugé. Les points ainsi placés sont abandonnés après un contrôle avec règle graduée (nous ne savons pas ce qui a été mesuré). 2ème procédure : départ sur le point invariant G. Construction de l'image des sommets F, E, D, C et des 4 segments GF,FE,ED,DC correspondants par report des longueurs des segments, direction au jugé. Même procédure pour B' et AB' en partant du point invariant A. Il reste deux sommets à joindre : B' et C'. Les erreurs d'approximation aboutissent à un segment B'C' de longueur différente de BC.
2	construction point par point. chaque image est déterminée par rapport à l'axe : distances calculées précisément le long de directions perpendiculaires au jugé. La perpendicularité est présente dans les échanges tout au long du travail du groupe, mais les élèves ne passent à l'acte que pour les deux derniers points : C' et B'.
3	mesures de segments, puis de la distance du sommet F à Δ, et tracé de F' par report de la distance sur une perpendiculaire au jugé. Mais un élève insiste pour utiliser l'équerre : ils retracent E' avec le contrôle de l'équerre. Essais divers avec équerre et compas : tracés de cercles et arcs de cercle qui ne serviront pas pour la suite de la construction. Par exemple, le tracé d'un cercle centré sur un point de Δ et passant par C et A (détermination du rayon par tâtonnements). Tracé ensuite de D' sur une perpendiculaire au jugé (fausse). Finalement, après divers essais avec l'équerre, C' et B' sont déterminés avec l'équerre et la règle graduée.

4	Les élèves commencent par des mesures et reports de longueurs avec règle graduée seule, à peu près orthogonalement. Le compas est déclaré inutilisable par un élève. Mais un élève prend l'équerre pour vérifier l'orthogonalité des segments MM' déjà tracés. Deux procédures sont utilisées en parallèle : l'une est la détermination des images avec l'équerre et la règle graduée utilisées conjointement (la règle glissant sur l'équerre). L'autre consiste à déterminer un point N' en reportant, à partir du point construit précédemment M', la longueur mesurée avec la règle du segment MN, la direction étant choisie au jugé. Du coup, la figure est rectifiée à plusieurs reprises car cette procédure conduit à des erreurs perceptivement évidentes. Dans la production finale, les positions des points C' et D' sont exactes, l'emplacement des segments C'D' et D'E' a été rectifié.
5	Après un essai d'utilisation, le compas n'est pas utilisé. Construction exacte, avec l'équerre et la règle graduée, de F' par report de la distance de F à Δ le long de la perpendiculaire à Δ. Le même procédé de construction est utilisé pour tous les autres sommets.
6	Mesure du segment FG. Essais d'utilisation de l'équerre et du compas. Finalement, tracé de B' par report de la distance de B à Δ le long de la perpendiculaire au jugé à Δ. Même procédure pour d'autres points. Un élève a tenté en vain de signaler que la construction était au jugé.
7	Après différents essais avec le compas, mesures et report des "distances" à l'axe des points C et D le long d'une direction perpendiculaire au jugé à Δ. B' est construit par report de la longueur du segment AB dans une direction au jugé. La nécessité de prendre en compte la perpendicularité apparait à plusieurs reprises dans les discours : "il faut que le trait soit droit" . Finalement, C' et D' sont reconstruits par intersection de deux arcs de cercles : C' à l'intersection de l'arc (G, GC) et de l'arc (B',BC); D' à l'intersection de l'arc (G,GD) et de l'arc (C',CD).

deuxième séquence (activité décrite en IV)

procédures des groupes pour la figure 1 (construction avec instruments)

figure



groupe 1

- tracé d'un arc de cercle (I,IF) de l'autre côté de Δ par rapport à F; proposition d'un point F' au jugé sur cet arc, puis prolongement de EF; F' est à l'intersection de l'arc de cercle et de (EF); tracé de GF';
- Caren trace arcs (A,AB) et (J,JB) qui se recoupent, mais leur courbure est trop semblable et les centres trop proches, d'où une imprécision sur le point d'intersection. Du coup, la procédure ne fait pas l'unanimité; un autre élève propose alors la droite perpendiculaire à Δ passant par B; B' est à l'intersection de l'arc (A,AB) et de cette droite;
- reflexion : si B' est faux, alors C' sera faux, même si la construction de C' est juste; problèmes d'utilisation de l'équerre; autre problème soulevé : où est l'orthogonalité dans ces procédures de détermination des points par intersection d'arcs ?
- tracés des arcs (G,GD) et (F',ED); protestation sur le centre du second arc de cercle; on parle du segment E'F' que l'on n'a pas; du coup, pour déterminer D', l'arc (G,GD) est repris, mais avec l'arc (I,ID); tous d'accord;
- tracé de F'E' et E'D';
- C' sur arc (I, IC) et ?
- un problème se pose au moment de joindre C' à B' : le point donné par les arcs à partir de C' n'est pas le même que le premier construit.

Caren utilise le compas pendant toute la construction. Thomas veut, lui, utiliser l'équerre.

groupe 2

- tracés d'arcs de même rayons centrés en B, puis A; ils ne serviront pas;
- tracé à l'aide de l'équerre de la droite perpendiculaire à Δ et passant par B, et report avec le compas de la distance de B à Δ, qui donne B'; le fait de ne pas pouvoir calculer cette distance pose problème; l'accord sur cette construction n'est pas immédiat;
- C' est construit de la même manière; la perpendiculaire est d'abord déterminée au jugé, puis rectifiée avec l'équerre;
- D' est construit par la même procédure; cette fois, l'équerre est utilisée tout de suite;
- E' et F' sont construits comme D'; il est dit que pour G, ce n'est pas la peine;
- tracés de B'C', puis C'D', puis des deux derniers segments;

- après une intervention de l'enseignant, la prise en compte de la perpendicularité est matérialisée sur la production par le dessin de petits rectangles.

groupe 3

tracé de C' sur la perpendiculaire à Δ (déterminée avec l'équerre) passant par C et report (avec le compas) de la distance de C à Δ;
- idem pour B', puis D', puis F';
- aucun renseignement sur la construction de E';

groupe 4

- arc (G,GF); ne savent pas quoi en faire;
- équerre sur AG, règle non graduée sur EF, tracé du prolongement de EF; F' est à l'intersection de l'arc et de cette droite; l'utilité de l'arc est reconnue au moment où l'intersection a été matérialisée;
- report de EF avec le compas, d'où E';
- tracé d'un arc (E',ED); le problème de la prise en compte de la perpendicularité dans ces procédures est posé; tracé d'une droite passant par D perpendiculaire au jugé à Δ; elle coupe l'arc en D'; tracé de D'E';
- tracé d'un arc (D',DC); puis, comme pour D', début de détermination d'une droite perpendiculaire au jugé à Δ; mais un élève réalise comment utiliser l'équerre; la construction C' est exacte;
- B' est construit comme C'; tracé des segments B'C' et B'A.

groupe 5

Nous avons moins de renseignements sur les procédures des élèves. Les données que nous avons recueillies sont les suivantes. La pertinence de l'équerre comme outil est mise en doute car la figure ne comporte pas d'angle droit. Comme dans le groupe 4, les procédures, au début de la construction, consistent à reporter les distances à l'axe au compas sur une perpendiculaire au jugé à Δ; puis, pour les derniers points, l'équerre sert à déterminer les directions orthogonales à l'axe.

groupe 6

- le premier point est construit en utilisant équerre et compas;
- les autres sont construits de la même manière, mais l'équerre n'est pas utilisée correctement (en fait elle sert de règle); du coup, les droites de support de construtions ne sont pas parrallèles entre elles ;
- tentatives locales de vérification avec l'équerre de la perpendicularité.

Conclusion relative aux chapitres V à IX

I. Les conditions d'émergence des propriétés de la symétrie orthogonale

I.1. La propriété du milieu : un obstacle

Nous avons montré le caractère primordial de la propriété du milieu chez les élèves. La conception très répandue qui lui est attachée est que toute droite partageant la figure en deux parties égales est une droite de symétrie. Cette "définition" est source d'erreurs fréquentes dans la reconnaissance de la propriété de symétrie-pliage d'une figure. La mise en oeuvre de la propriété du milieu permet de résoudre efficacement le problème de la construction à main levée d'une droite de symétrie. Par contre, dans d'autres situations, comme les activités de construction avec instruments (de la droite de symétrie d'une figure, ou du symétrique d'une figure), la prégnance de cette propriété est apparue comme un **obstacle** à la mise en oeuvre des autres propriétés.

Les actions liées à cette propriété sont très souvent explicitées et commentées pendant les travaux des groupes et, même si les expressions verbales qui la concernent (milieu, centre, moitié) contiennent beaucoup d'implicites et d'imprécisions, ceux-ci fonctionnent bien entre les élèves.

Nous avons vu dans la première séquence, les difficultés de l'enseignant à détacher les élèves de l'usage de cette propriété. Ce problème a ressurgi pour chacune des situations de la séquence. Une explicitation du contrat a permis de le résoudre en partie lors de la deuxième séquence, en particulier pour les tâches de construction avec instruments. Mais l'enseignant a rencontré les mêmes difficultés pour déstabiliser la caractérisation des droites de symétrie par la propriété du milieu. Les moyens à sa disposition pour déstabiliser cette conception erronée se révèlent insuffisants. En effet, si la définition locale sur laquelle les élèves et l'enseignant se sont mis d'accord permet bien d'invalider une proposition fausse (en réalisant effectivement le pliage), elle ne donne par contre aucun moyen simple de prouver qu'il n'existe pas de droite de symétrie dans une figure. Devant les problèmes soulevés par la figure "parallélogramme" dans la deuxième séquence, l'enseignant a choisi d'imposer sa conclusion : il faut admettre qu'il n'y en a pas, puisqu'on n'en trouve aucune. Il a fait appel à la confiance de l'élève pour que celui-ci adhère à une affirmation dont il ne parvient pas à se convaincre de la véracité.

La propriété du milieu chez les élèves est un obstacle au sens didactique. C'est une connaissance juste, mais que les élèves tentent d'utiliser de manière exclusive quelque soit le problème à résoudre.

Dans le cadre d'un processus d'enseignement, il semble donc nécessaire de mettre en place des situations-problèmes permettant de dépasser cet obstacle. Les contraintes des situations vont jouer un rôle essentiel pour réaliser cet objectif. Il y a là un problème d'enseignement qui n'est pas résolu.

I.2. La propriété d'orthogonalité : au centre des apprentissages

La propriété d'orthogonalité se situe chez les élèves à un niveau très différent de la précédente. Elle n'est pas mise en oeuvre spontanément et même alors, elle est peu ou mal explicitée. Dans les activités sur la droite de symétrie, elle se manifeste sous la forme d'un "équilibre" des deux parties de la figure situées de part et d'autre de la droite de symétrie.

Nous parlons d'équilibre des deux parties par analogie avec celui des deux plateaux d'une balance, qui est réalisé lorsque ceux-ci sont à la "même hauteur". C'est bien cette idée que nous retrouvons chez les élèves, lorsqu'ils expriment qu'il n'y a pas de droite de symétrie parce qu'une des parties est "trop haute" ou "trop basse" par rapport à l'autre, ou "pas à la bonne place". Et, inversement, lorsqu'ils justifient une droite de symétrie par l'argument que les deux parties sont sur une même horizontale dans la feuille. **En fait, la propriété d'orthogonalité est au centre de la tâche de reconnaissance de symétrie axiale dans une figure.** Elle permet de répondre à la question : qu'est ce qui fait qu'une droite des milieux est ou n'est pas une droite de symétrie?

Nous avons retrouvé les mêmes expressions concernant l'emplacement par rapport à l'axe pour justifier que deux points ne peuvent se correspondre par pliage (ils ne sont pas "en face", pour le parallélogramme), ou pour invalider une construction qui ne respecte pas la propriété d'orthogonalité.

Lors de la construction du symétrique d'une figure, de nombreuses règles d'action se substituent à la mise en oeuvre de cette propriété. Elles induisent des procédures qui lui sont analogues dans certains cas, ainsi :
- les procédures de rappels horizontal ou vertical, pour des directions privilégiées de la droite de symétrie dans la feuille;
- les procédures de rappel par prolongement, pour des directions privilégiées de segments de la

figure par rapport à l'axe;
- les procédures utilisant un contrôle perceptif de la perpendicularité, pour des figures situées dans un seul demi-plan par rapport à l'axe.

L'enseignant a beaucoup joué sur l'utilisation de l'équerre pour faire prendre conscience aux élèves de cette propriété. Il s'agit qu'elle soit associée à la construction de droites perpendiculaires à une direction donnée. Cela n'est pas évident pour les élèves qui la mettent d'abord en relation avec les angles droits de la figure. Une autre question se pose alors : à quoi doit être perpendiculaire la direction que l'on construit avec l'équerre ? Cette question est un véritable problème, si l'on se rappelle la diversité des réponses en acte des élèves à cette question (perpendiculaire à un segment de la figure, aux directions privilégiées de la feuille, construction d'un angle droit dans la figure).

Si des contraintes spécifiques sur les instruments et sur les figures ont permis sa mise en oeuvre dans les situations a-didactiques, elles n'ont pas abouti à son explicitation. Celle-ci devait être gérée par l'enseignant dans les phases de bilan. Mais il apparait chez lui les mêmes implicites que chez les élèves relativement à l'objet sur lequel porte la perpendicularité, et des prises de conscience ponctuelles (dans le temps) de ces implicites, qui l'amènent parfois à préciser cet objet. Nous avons constaté que l'enseignant demandait plutôt aux élèves de préciser cet objet lorsque l'expression "perpendiculaire" venait d'eux. Il semble qu'il réalisait donc l'existence de cet implicite dans les formulations des élèves, mais pas dans les siennes.

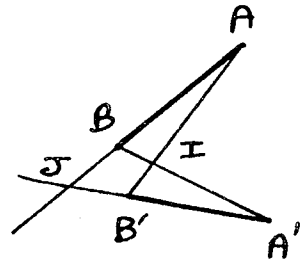
La prise de conscience par l'enseignant de ses propres implicites dans l'expression de la propriété d'orthogonalité de la symétrie *axiale* nous semble préalable à un travail possible des élèves à ce sujet.

I.3. La complexité des propriétés d'incidence

On ne peut les mettre en jeu dans une tâche de construction à main levée. Pour qu'elles soient utilisées, il ne faut pas que le point soit désigné. En effet, la reconnaissance qu'un point est sur la droite est plutôt celle de la propriété d'invariance du point dans le pliage. Il faut donc construire ces points par intersection de segments. Mais dans la tâche de construction à main levée, il est artificiel de tracer le point d'intersection de deux segments symétriques. Si aucun point de la droite n'est désigné, c'est la détermination d'une droite des milieux dans une direction convenable qui sera choisie comme stratégie. Du coup, lors de la phase de bilan, il est difficile à l'enseignant d'amener les élèves à prendre conscience de cette propriété.

La papier calque ne peut non plus permettre l'émergence de ces relations. En effet, on ne construira pas de points comme intersection de segments, parce que tout simplement, l'utilisation du calque ne conduit pas à des constructions auxiliaires. Il y a seulement repérage de points pertinents pour mettre en oeuvre la conservation de la distance à l'axe ou de l'invariance de certains points de la figure.

Il reste la tâche de construction avec instruments de la droite de symétrie. La règle non graduée est l'instrument adapté. Pour qu'elle suffise à elle seule, il faut, dans la figure, au moins deux paires de points symétriques formant un trapèze qui ne soit pas un rectangle.



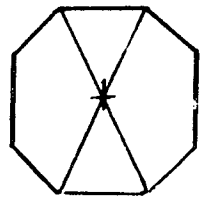
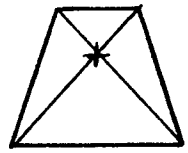
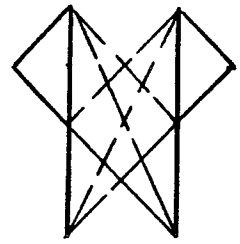
La construction de la droite revient à celle de deux points I et J tels que I est l'intersection des segments AB' et BA' reliant chacun deux points symétriques situés de part et d'autre de la droite et J, l'intersection des droites (AB) et (A'B') passant chacune par deux points situés d'un même côté de la droite de symétrie. Ces deux points sont donc de types différents.

Les élèves ont produit des constructions de points de type I, mais peu de points de type J. Nous développons des hypothèses pour expliquer cette différence.

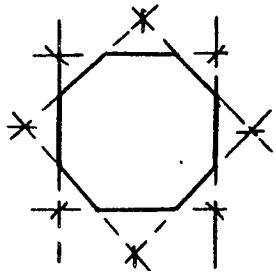
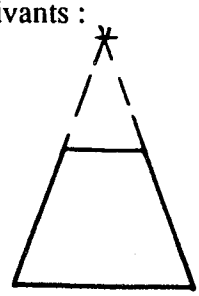
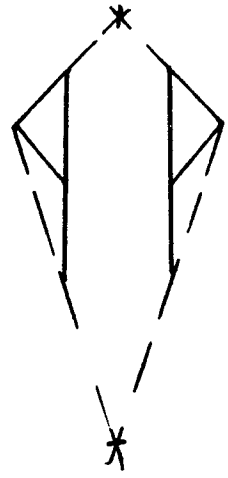
La reconnaissance que le point I est situé sur la droite de symétrie est induite par sa position à l'intérieur de la configuration AA'BB'. C'est peut-être parce qu'il est au "milieu" du trapèze qu'il est sur la droite de symétrie, et non parce qu'il a été construit à partir de bi-points symétriques. Dans ce cas, ce ne sont pas les relations d'incidence qui sont en jeu, mais la propriété du milieu.

Par contre, le point J se situe à l'extérieur de cette configuration. La reconnaissance qu'il est sur la droite de symétrie est à notre avis beaucoup plus proche des relations d'incidence.

Ainsi, pour les trois figures octogone, trapèze et deux drapeaux de notre activité avec instruments, les points de type I sont les suivants :

Les points de type J sont les suivants :

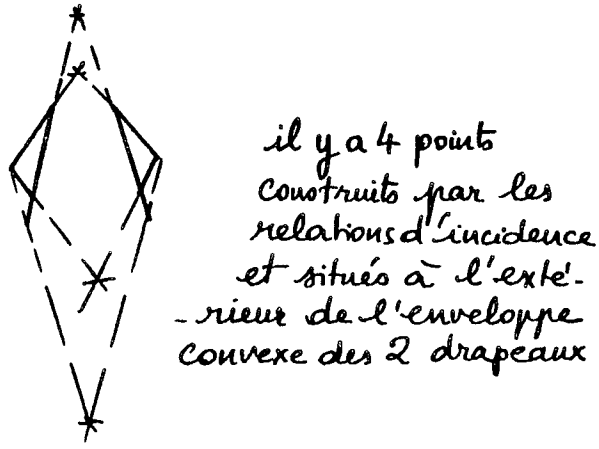
La distinction en termes de mise en oeuvre de propriétés différentes, celle du milieu pour les points de type I et celles d'incidence pour les points de type J est conforme à la prégance de la propriété du milieu et au caractère artificiel des relations d'incidence.

Mais il n'est pas possible d'élaborer une figure qui ne comporte (potentiellement) que des points de type J. En effet, il faut une configuration en trapèze et, dès que l'on a cette configuration, il est possible de construire un point de type I. Il faudrait alors une figure comportant un seul point de type I. Le deuxième point, nécessaire à la détermination de la droite de symétrie si l'on n'a que la règle non graduée, sera de type J.

L'émergence dans une activité a-didactique des propriétés d'incidence semble donc problématique. D'abord, parce que la construction de points de type J est peu apparue chez les élèves, ensuite parce que la classe de figures rendant nécessaire la mise en oeuvre de ces relations d'incidence est très réduite. On peut faire l'hypothèse que la tâche de construction de la droite de symétrie d'un trapèze isocèle non rectangle avec la seule règle non graduée est trop complexe. Il reviendrait alors à l'enseignant de faires émerger ces procédures dans une phase collective. Mais, avec quels moyens ?

La construction des droites de symétrie du trapèze et des deux drapeaux avec règle non graduée et équerre, est une bonne approche de ces relations d'incidence. Nous avons constaté que les procédures de construction de points de type I sont apparues dans la majorité des groupes. Elles permettent, au moment du bilan, d'exprimer avec les élèves que certains points de la

droite sont construits par intersection de deux segments. L'enseignant peut ensuite demander un inventaire complet de tous les points de la droite pouvant être construits ainsi. Avec les deux drapeaux, cela donne neuf points dont sept sont situés à l'intérieur de l'enveloppe convexe de la figure et deux, à l'extérieur. Une variante de cette figure avec deux drapeaux non parallèles et des hampes plus courtes par rapport aux triangles, comme ci-dessous, permet d'obtnir 10 points de cette manière (un de plus à cause du non parallélisme des hampes), dont quatre à l'extérieur.



Un enjeu de type "construire le maximum de points de la droite en expliquant pourquoi ils sont sur la droite" pourrait faire émerger ces points extérieurs.

I.4. Le paradoxe de la propriété d'équidistance

Les élèves ne l'ont pas mise en oeuvre, même en disposant d'un temps assez long et même lorsqu'elle était nécessaire à la résolution du problème. C'est de loin la plus difficile à faire émerger, aussi bien pendant les travaux en groupes que pendant les phases de bilan. Dans chacune des deux séquences, elle n'a été utilisée que par un seul élève. De plus, dans la deuxième séquence, une institutionnalisation de la construction au compas de la médiatrice d'un segment n'a pas suffi à permettre le réinvestissement de cette propriété dans l'exercice suivant de construction des droites de symétrie du rectangle (ch.VII, §IV.4 et IV.5).

La mise en oeuvre de la propriété d'équidistance est complexe car elle nécessite de réaliser avec le compas plusieurs actions de construction bien ordonnées et qui présentent des choix. Ce n'est pas l'action elle-même qui est complexe (tracé d'un arc de cercle), mais le sens de la suite de ces actions. Il est nécessaire d'anticiper la longueur des arcs et la zone de leur tracé (pour qu'ils se coupent). La pluralité des choix pour ces deux éléments est perçue par les élèves comme en contradiction avec les règles d'action qui prennent en compte la conservation des distances ou la recherche de milieux. Il est difficile de saisir comment on peut récupérer un milieu (qui lui est unique) ou deux distances égales si on choisit au hasard une longueur d'arc.

Dans les phases de bilan, l'enseignant a rencontré de nombreuses difficultés. Certaines sont liées au statut du compas. D'une part, pour les élèves, c'est avant tout un outil de report de longueurs. Mais, plus que cela, **l'utilisation du compas est un paradoxe dans les activités de construction liées à la symétrie orthogonale**. En effet, la prégnance chez les élèves de la propriété du milieu conduit à une transformation de la tâche de construction d'un point à égale distance de deux points en celle de la construction du milieu d'un bi-point ou du centre d'une figure. Nous analysons cet effet dans le chapitre X. Il est impossible d'échapper à ce détournement de la tâche parce que l'équidistance n'a pas d'autre sens pour les élèves que celui du milieu tant qu'ils n'ont pas résolu le problème posé. Autrement dit, les élèves doivent utiliser cet instrument pour une fonction qu'il ne connaissent pas, puisque c'est un des objectifs d'apprentissage visé à travers le problème.

Il faudrait faire utiliser cet instrument sur une figure n'ayant aucune régularité, c'est-à-dire pour laquelle aucun "milieu" ne soit perceptivement repérable. Cependant, pour construire la droite de symétrie, il est nécessaire de donner deux points symétriques. Mais alors, si l'on marque deux points sur la figure, la tentation de chercher le milieu du bi-point risque d'être encore plus grande, puisque la figure ne présente aucune régularité.

La question des moyens donnés à l'enseignant pour faire émerger cette propriété reste ouverte.

II. Les apprentissages constatés lors des deux séquences

II.1 Conception erronée déstabilisée

La conception que toute droite qui partage la figure en deux parties égales est une droite de symétrie a été remise en question, mais pas sous toutes ses formes. Expliquons-nous.

Dans la situation de communication de la première séquence, aucun des éléments à décrire de type NS n'a été codé comme droite de symétrie. Or, cet élément partageait la figure en deux parties égales. Mais ce n'est plus vrai dans l'autre sens. Si on demande à un élève de tracer une droite partageant une figure en deux parties égales, il tracera plutôt une droite de symétrie et protestera même si on lui propose une droite de type NS. La déstabilisation de cette équivalence est donc complexe. Il semble que la séquence ne l'a pas entièrement réglée. Il reste qu'un apprentissage a été fait à ce sujet dans les deux séquences.

II.2. Evolution des outils disponibles

L'évolution des outils (au sens de R. Douady) qui sont liés au concept de symétrie axiale s'est passée de manière différente dans les deux séquences.

Dans la première séquence, on constate que l'outil pliage est la référence jusqu'à la dernière séance. Ceci ressort dans les échanges entre élèves et les phases de bilan. Les arguments des élèves pour convaincre ou expliquer sont restés à un niveau très perceptif et matériel.

Dans la deuxième séquence, il nous a semblé que l'évolution de l'outil pliage vers des outils basés sur les propriétés de la symétrie est plus effective. Nous pouvons le repérer à travers le fait que les élèves explicitent la perpendicularité et l'égale distance. On peut le voir très bien, par exemple, pour la propriété d'orthogonalité, dans la phase de bilan sur l'activité de construction avec instruments des droites de symétrie (Ch.X). Dans la première séquence, les élèves ne prononcent jamais le mot "perpendiculaire", même quand ils se servent de l'équerre. Dans la seconde séquence, le mot est très souvent prononcé par les élèves.

L'activité individuelle que nous avons fait passer, dans chacune des classes, l'année suivante (les élèves étaient alors en cinquième) confirment que les apprentissages ont été très différents. Il s'agissait de construire le symétrique d'une figure par rapport à une droite. La réussite à la tâche a été très mauvaise pour les élèves de la première séquence, excellente pour les élèves de la deuxième séquence. Les modifications apportées aux activités d'une séquence à la suivante ont joué un rôle essentiel dans cette réussite. Elles ont en effet permis un travail des élèves en groupe bien meilleur (nous l'avons largement montré), mais aussi, comme nous allons le voir, des phases de bilan porteuses de beaucoup plus d'apprentissages.

Chapitre X

Une étude des phases collectives

I. Introduction

I.1. A propos des situations d'institutionnalisation

Nous avons tenté de faire le point, à partir de quelques travaux de didactique, sur la définition et la place de ces situations dans l'enseignement.

L'institutionnalisation diffère des autres situations de la théorie de G. Brousseau en particulier par le rôle de l'enseignant. En effet, dans les situations d'action, formulation et validation, celui-ci a essentiellement la charge de la dévolution du problème à l'élève et il revient à l'élève d'en mener à bien la résolution. Au contraire, *la conduite et la finalité des situations d'institutionnalisation sont sous la responsabilité de l'enseignant.* Ce sont "celles par lesquelles on fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif d'une connaissance ou d'un savoir" (Brousseau, 1981). L'enseignant y fixe le savoir en jeu, en référence au savoir (mathématique) extérieur à la classe, en le rendant ainsi exportable et réutilisable pour l'élève.

Dans le cadre du fonctionnement dans la classe de la dialectique outil-objet, R. Douady décrit la phase d'institutionnalisation de la manière suivante : après des phases dites "ancien", "recherche", "explicitation", dans lesquelles l'enseignant n'intervient pas, du moins en principe,

> *"Le maitre passe, dès lors, à une étape d'institutionnalisation de ce qui est nouveau et à retenir avec les conventions en cours, le cas échéant des définitions, théorèmes et démonstrations. Ce nouveau à retenir est destiné à fonctionner ultérieurement en tant qu'ancien." (Douady, 1984, p.16).*

Nous retrouvons l'idée de fixer le savoir en jeu de manière conventionnelle, les conventions étant directement liées au domaine d'exportation (ensemble des élèves d'une même classe, autre classe de même niveau...). La situation d'institutionnalisation comporte donc un aspect important de formulation du savoir.

Si le *contenu*, le langage, la forme de l'institutionnalisation s'appuient sur les programmes, les

manuels et les coutumes, les *moments* où ces phases d'institutionnalisation se situent dans la séquence dépendent, eux, essentiellement de l'enseignant. Ainsi, M. Artigue, dans les séquences sur "le cercle" (1984, p.106) repère ces actions d'institutionnalisation dans la partie "conclusion" des phases de rappel organisées par l'enseignant au début de chaque séance, et dans laquelle "il s'agit de formuler ce qui est à retenir" parmi tout ce qui s'est passé dans les activités des séances précédentes. Chez R. Douady, elle se situent plutôt en fin de certaines séances, après des activités individuelles ou de groupe et une discussion collective.

Dans tous les cas, il nous a semblé que les phases d'institutionnalisation consistent à donner un statut de *savoir* aux connaissances mises en oeuvre par les élèves. Elle se situe donc dans un cadre constructiviste de l'évolution des connaissances. Son sens, hors de la théorie des situations, par exemple dans un enseignement traditionnel, est malgré tout reconnu par certains chercheurs. C'est probablement le cours magistral qui est décrit dans cette remarque de M. Artigue (op.cit., p.105) :

Les pédagogies traditionnelles lui [l'institutionnalisation du savoir] réservaient une place importante.

Brousseau lui-même caractérise ainsi les situations classiques :

Les situations classiques sont des situations d'institutionnalisation sans prise en charge par le maître de la création du sens : on dit ce que l'on veut que l'enfant sache, on lui explique et on vérifie qu'il a appris. (Brousseau, 1987).

Dans notre processus, la situation d'institutionnalisation s'appuie sur les connaissances mises en jeu par les élèves dans des situations problèmes. Elle doit prendre en compte celles parmi ces connaissances qui ont un rapport avec le savoir en jeu, afin de les transformer en objets mathématiques (définitions, théorèmes, propriétés).

Lors de l'analyse des séances de nos deux séquences, nous nous sommes posés deux questions relativement aux phases collectives menées par l'enseignant :
- où commence l'institutionnalisation dans ces phases collectives ?
- comment les caractériser dans ces deux séquences (contenu, forme, temps, ...) ?

Nous avons alors éprouvé la nécessité de différencier certains moments de ces phases collectives. Expliquons-nous.

I.2. Phase de bilan

Les connaissances mises en oeuvre par les élèves dans les situations-problèmes sont différentes d'un élève à l'autre, ou d'un groupe d'élèves à un autre. Or, l'institutionnalisation

d'une connaissance en est une seulement si l'élève l'a mise en oeuvre au moins partiellement. Il faut donc donner à l'enseignant et aux élèves des moyens de connaître globalement les éléments importants qui sont apparus dans la classe lors de la résolution du problème : actions, réponses, difficultés rencontrées.

Entre la fin de la résolution du problème qui a été soumis à l'élève et la situation d'institutionnalisation proprement dite, il nous a semblé nécessaire d'intercaler dans le temps une phase où les connaissances mises en oeuvre par les élèves sont portées à la classe toute entière pour être discutées et validées.

Nous retrouvons d'ailleurs chez R. Douady (op.cit.) la mise en place de ce type de phases collectives dans la présentation générale qu'elle fait du plan d'une séance :

"bilan collectif : présentation des résultats à travers des exemples représentatifs, s'il s'agit de travail individuel, des résultats de chaque équipe sinon. Cette présentation est accompagnée d'un débat sur les productions comparées et suivie d'une conclusion".

Le rôle de l'enseignant n'est pas explicité dans cette description, mais certaines expressions révèlent son empreinte (exemples représentatifs, conclusion). Plus loin, Douady (op.cit., p.154) parle de "bilan et institutionnalisation" comme si ces deux phases se succédaient dans le temps. Enfin, la chronique analysée qu'elle donne d'une phase collective (op. cit., pp.157 et suivantes) illustre bien les interventions de l'enseignant, sous forme de reformulations ou de questions pour relancer le débat ou faire expliciter une intervention d'un élève.

Dans nos deux séquences, les phases de bilan des productions des élèves se sont déroulées sous le contrôle de l'enseignant, qui a pris des décisions à certains moments, soit pour ouvrir ou fermer le débat, soit pour l'alimenter ou le recentrer en invitant un groupe précis à parler. Ce phases contiennent aussi des moments où l'enseignant laisse les élèves débattre entre eux. Nos phases collectives sont donc analogues à celles que décrit R. Douady. Nous avons choisi de les distinguer des phases d'institutionnalisation proprement dites. Nous dirons comment nous avons repéré le passage d'une phase de bilan à une phase d'institutionnalisation, en définissant des indicateurs, dont certains ont été utilisés par M. Artigue (op.cit., p.108) :
"[...] nous avons isolé dans le temps didactique ce que nous reconnaissions être des phases d'institutionnalisation, à différents facteurs et en particulier à la présence dans le discours de la maitresse d'indicateurs linguistiques[...]

Nous avons repris ce terme d'indicateur et nous tenterons d'en préciser différents types.

I.3. Objectif et contenu du chapitre

Notre analyse des phases collectives des deux séquences est centrée sur les aspects suivants.

a. Déroulement des phases collectives par rapport aux objectifs fixés

Il s'agit de repérer des conditions qui permettent de réaliser un "bon" déroulement des phases de bilan. Ce déroulement dépend, bien sûr, des connaissances mises en jeu effectivement par les élèves pendant la situation-problème. Mais il dépend aussi des prises de décision de l'enseignant. Les contraintes de temps jouent un rôle important sur ces prises de décision. Mais nous verrons aussi le rôle, dans ces phases collectives, des représentations de l'enseignant sur les connaissances des élèves, sur l'apprentissage et sur la matière enseignée.

Alors que les situations a-didactiques sont entièrement construites, les phases de bilan et d'institutionnalisation sont généralement laissées plus librement à l'enseignant. Dans la première séquence, il se présentait comme utilisateur et nous lui avions laissé "carte blanche", son seul point de repère étant les objectifs d'apprentissage prévus, qui avaient été décidés d'un commun accord. Ce même enseignant se trouvait dans une situation très différente pour aborder la deuxième séquence. Sa participation active à l'analyse du déroulement de la première séquence et à l'élaboration de la seconde séquence lui avait donné des moyens supplémentaires pour gérer les phases collectives.

b. Essai de caractérisation des moments d'institutionnalisation

Les moments d'institutionnalisation ont été peu nombreux au cours de deux séquences, mais très repérables à l'analyse, bien que cette entrée dans une phase d'un autre type n'ait pas été explicitée aux élèves par l'enseignant. Nous proposons des identificateurs de ces moments et nous regardons comment ils sont perçus par les élèves. Puis, nous analysons sur quelles connaissances effectives des élèves l'institutionnalisation s'est appuyée.
Nous décrivons de tels moments aux paragraphes III et V.

Il est difficile de tirer des conclusions sur les conséquences sur les apprentissages des élèves des différentes prises de décision de l'enseignant pendant les phases collectives. Les recherches en didactique offrent peu d'outils pour une telle analyse. Mais nous soumettrons quelques hypothèses à ce sujet. Nous montrerons que le contrôle des situations-problèmes ne suffit pas à assurer un "bon" déroulement des phases collectives. Ceci pose aussi le problème de la communication et de la reproductibilité des situations didactiques.

I.4. Organisation du chapitre

Chacun des paragraphes II à V a pour objet les phases collectives de la même activité pour les deux séquences. Nous avons adopté l'ordre choisi dans le processus, afin de pouvoir suivre sans problème de logique la suite des phases de bilan. Dans chaque paragraphe, nous résumons brièvement les principaux aspects de la situation a-didactique correspondante, pour chacune des deux séquences. Ceci permet d'une part, d'analyser le déroulement des deux phases de bilan en rapport avec ce qui s'est passé dans les travaux de groupes et, d'autre part, de repérer les changements éventuels dans les comportements de l'enseignant de la première séquence à la seconde.

Le paragraphe VI est une conclusion en deux parties. D'abord, un récapitulation de l'analyse des phases de bilan pour chacune de séquences, et une synthèse de leurs différences du point de vue des apprentissages explicités. La seconde partie consiste essentiellement en des questions qui ouvrent la voie à des recherches sur le rôle de l'enseignant dans le système didactique.

II. Le bilan de l'activité de construction à main levée

II.1. Une même conception sous-jacente à toutes les réponses fausses

Rappelons que la tâche en groupe a été assez bien réussie dans les deux séquences (peu de réponses finales fausses). Cependant, certaines productions témoignent d'un changement de réponses en cours de résolution du problème. Nous avons rassemblé ci-après les productions fausses des élèves à cette tâche pour les deux séquences, plus celles qui, bien que justes, témoignent d'une réponse intermédaire fausse.

La conception sous-jacente à toutes ces réponses correspond à une caractérisation de la droite de symétrie par la propriété du milieu. Le pliage est un moyen d'invalider les solutions proposées, mais il reste à l'élève à comprendre *pourquoi* elles sont fausses et savoir utiliser les propriétés d'orthogonalité ou de superposition indirecte.

C'est donc du point de vue de l'émergence d'arguments autres que le pliage que nous avons analysé le déroulement des phases de bilan de cette activité, pour les deux séquences. Les questions que nous nous sommes posées sont les suivantes : quelle place l'enseignant a t-il faite à ces arguments et quelles difficultés a-t-il rencontrées ? Sous quelle forme ont-elles été explicitées ?

figure	séquence et groupe	production
plume	séq.1, groupe 7	la nervure est tracée, puis barrée au tout début de la phase de bilan
	séq.2, groupe 5	la nervure est tracée, puis barrée lors de la phase de vérification en groupe
deux cercles	séq.1, groupe 4	première réponse : non, barrée; seconde réponse (définitive) : oui puis trois droites tracées
parallélogramme coupé "horizontal"	séq.1, groupe 6	première réponse : non, barrée seconde réponse : oui et tracé d'une droite
parallélogramme coupé "vertical"	séq.2, groupe 4	première réponse : oui et tracé d'une droite immédiatement remise en cause seconde réponse : non, tracé barré
parallélogramme	séq.1, groupe 2	première réponse : oui, barrée droite verticale tracée, puis barrée seconde réponse : non
motif en parallélogramme coupé "horizontal"	séq.2 tous les groupes	réponse : oui, et tracé de deux droites réponse rectifiée par deux groupes (sur 6) lors de la phase de vérification

II.2. Analyse des phases de bilan

Nous présentons ces deux phases par thèmes, après en avoir sélectionné les parties qui se rapportent directement à nos questions.

II.2.1. Courbure d'une ligne de symétrie et "retournement"

La "plume" est la seule figure de l'activité qui mettait en jeu le statut de droite d'une ligne de symétrie. Toutes les réponses sont justes, sauf celle du groupe 7 dans la première séquence, mais elle est rectifiée dès l'affichage de la figure au moment de la mise en commun.

Lors de la première séquence, l'enseignant a pris la décision d'accepter les réponses données par chacun des groupes sans demander d'argument. Les élèves ne soulevant aucune question, la classe a validé la réponse par l'expression d'un accord unanime.

Lors de l'élaboration de la deuxième séquence, nous avions décidé avec l'enseignant que,

même en cas d'accord général des élèves sur la bonne réponse, il leur serait demandé d'exprimer leurs raisons. C'est ce qu'a fait l'enseignant qui a donc posé la question sous la forme suivante :

enseignant	*cette figure n'admet pas de droite de symétrie. Pour quelle raison, dis-tu ?*
élève	*elle n'est pas superposable*

La réponse de l'élève ne satisfait pas l'enseignant, qui reformule sa question pour la classe, en s'appuyant sur l'idée suggérée par l'élève :

enseignant	*est-ce que tu peux trouver un pliage qui fasse que les deux parties se superposent, c'est ça que tu veux dire ? et tu réponds que ? Tu peux pas trouver ce pliage, il n' y a donc pas pour toi de droite de symétrie.*

L'argument de l'enseignant se situe à un niveau de complexité bien "au-dessus" de celle de l'élève. Celui-ci dit seulement que la nervure ne convient pas, et l'enseignant transforme en "aucune ligne ne convient", problème qu'il n'est pas possible de résoudre à ce niveau.

Un second argument est fourni par un autre élève, que l'enseignant tente de faire préciser :

élève	*pas superposable car la droite du milieu part en biais*
enseignant	*alors, elle ne peut pas être droite de symétrie parce que ?*
élève	*parce qu'elle est courbée*
enseignant	*parce qu'elle est courbe.*

Ces échanges révèlent qu'implicitement, une seule ligne est candidate à être droite de symétrie de la figure, pour les élèves comme pour l'enseignant. L'argument avancé est celui du changement de courbure de la ligne par pliage, qui avait été évoqué dans certains groupes (ch.VI, §II.2.1). Les conditions sont favorables à un débat. Cependant, immédiatement, l'enseignant ferme la situation par un argument formaliste :

enseignant	*C'est assez évident que ça peut pas être une droite parce que c'est courbe.*

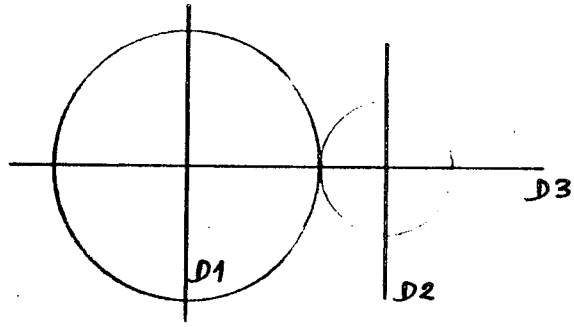
La réponse se situe d'un point de vue formel : une droite de symétrie ne peut être courbe parce que c'est une "droite". Mais nous avions posé le problème de la plume parce qu'il n'était pas évident pour nous que, pour les élèves,une droite de symétrie soit une droite. De plus, les arguments échangés dans certains groupes se rattachent au problème posé au moment du pliage par le changement de courbure. Ce choix de l'enseignant de donner un argument formel peut

s'expliquer par son interprétation propre des paroles de l'élève qui contiennent beaucoup d'implicites. Cette intervention de l'enseignant a clos le débat sur la "plume", sans que l'isométrie indirecte n'ait été invoquée.

En conclusion, nous avons repéré dans cette phase des changements de niveau provoqués par l'enseignant, lorsqu'il reformule l'argument d'un élève ou décide de clore le débat.

II.2.2. Deux cercles, ou la nécessité d'une analyse de la figure adaptée au problème

La différence de taille des cercles joue contre une reconnaissance immédiate de l'existence d'une droite de symétrie. La question s'est posée dans quelques groupes, mais le problème a été résolu sauf pour un groupe dans la séquence 1 (groupe 4), qui a proposé trois droites (les élèves de ce groupes n'étaient pas parvenus à un accord). Les tracés de D1 et D2 découlent d'une analyse de la figure en deux cercles considérés séparément.



Examinons comment le bilan sur cette figure est abordé par l'enseignant dans cette **première séquence.**

Le débat s'est porté uniquement sur l'unicité de la figure. La réponse exacte est immédiatement donnée par un élève qui la décrit ainsi :

> *horizontalement [...] qui coupe en même temps les deux cercles par leurs milieux.*

La droite D1 est rapidement invalidée par l'enseignant et par des élèves, par un argument d'*unicité de la figure* (les deux cercles ne forment qu'une seule figure). Cet argument se révèle adapté puisque les élèves qui proposent D1 avaient considéré les deux cercles séparément. Du même coup, la droite (D2) est réfutée sans difficulté. C'est l'enseignant qui conduit les élèves vers la conclusion : seule D3 convient. Elle passe par "*les deux milieux des deux cercles*".

Ainsi, tout au long de ces échanges, la figure est toujours abordée comme étant composée de

deux cercles, et les deux parties égales définies par la droite de symétrie (deux demi-cercles différents accolés) ne sont ni montrées, ni explicitées. D'autre part, l'interprétation par l'enseignant du mot "milieux" comme "centres" des cercles, renvoie encore aux éléments facilement reconnaissables de la figure.

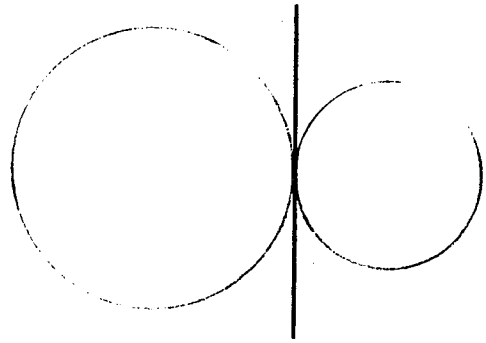
L'objectif fixé d'amener les élèves à une analyse différente de la figure n'a donc pas été atteint.

Lors de la deuxième séquence, la phase collective se présentait "bien" puisque tous les groupes avaient réussi cet item. Nous pouvions donc attendre que la phase de bilan emmène les élèves plus loin dans l'analyse de la figure. L'enseignant a fait le choix de diriger le débat sur la non superposition des deux cercles. Examinons comment :

enseignant *est-ce qu'un groupe a eu l'idée d'une autre droite ? Personne n'a eu l'idée d'une autre droite ? Personne n'a eu l'idée d'une autre droite ? Rien de plus, là ?*

Devant le silence des élèves, il propose lui-même cette "autre" droite : il s'agit de la tangente commne aux deux cercles.

enseignant *Moi j'avais envie de faire celle-ci...*



qui est refusée immédiatement par les élèves en raison de la différence de taille. Cette proposition est prise avec le sourire et l'un d'eux conclut :

élève *c'est là qu'ils ont essayé de nous piéger!*

Seule l'importance pour l'enseignant de l'enjeu de ce partage peut expliquer son insistance à focaliser le débat collectif de cette manière. Mais quel est donc cet enjeu ? La propriété d'isométrie est facilement disponible chez les élèves et ne justifie donc pas ce "coup de force". Si l'on revient aux objectifs, il s'agissait de montrer aux élèves qu'une analyse de la figure en deux cercles peut conduire à une réponse fausse ou n'est pas adaptée. Tous les groupes ayant finalement donné la réponse juste, il restait à faire expliciter ces deux "parties" de la figure. L'enseignant a fait un autre choix qui est sous-tendu par l'importance qu'il accorde à cette fausse droite de symétrie verticale.

Finalement, dans aucune des deux séquences, la phase de bilan n'a permis de faire expliciter par les élèves quelle analyse de la figure ils avaient implicitement faite (deux demi-cercles accolés), et ces deux parties ne sont pas désignées.Une explication est que l'objectif que nous avions voulu communiquer à l'enseignant n'était pas clair pour lui.

II.2.3. De l'absence d'angle droit dans le parallélogramme à la propriété d'orthogonalité

Parmi les figures de l'activité, divers parallélogrammes ont été proposés avec l'intention de mettre en défaut la conception de la droite de symétrie comme droite des milieux.

Pour la première séquence, nous avons analysé au chapitre VI (§II.2.4) ce qui s'est passé pendant la phase de bilan à propos de ces trois figures. Rappelons-en les principaux points.

D'abord la difficulté pour l'enseignant à déstabiliser chez certains élèves la conviction de l'existence d'une droite de symétrie dans le parallélogramme. Le pliage effectif a été nécessaire à certains moments pour réfuter une proposition.

Ensuite, les tentatives vaines de l'enseignant pour faire expliciter par les élèves la propriété manquante, celle d'orthogonalité de la droite au segment joignant deux points homologues. Les élèves ont surtout évoqué des angles qui ne vont pas "se rejoindre" ou se superposer, des angles "moins aigus que d'autres", des "bouts qui vont dépasser". L'enseignant a montré graphiquement la perpendicularité des directions choisies lorsqu'on cherche "où va un sommet lorsqu'on plie" et tracé un "petit carré" pour matérialiser l'angle droit.

Mais l'enseignant a les mêmes implicites sur cette propriété dans ses expressions. Nous en reproduisons quelques-uns.

Enseignant *c'est une question d'angle*
(après avoir montré l'emplacement d'un sommet par pliage le long d'une droite horizontale pour le parallélogramme coupé, figure 4)

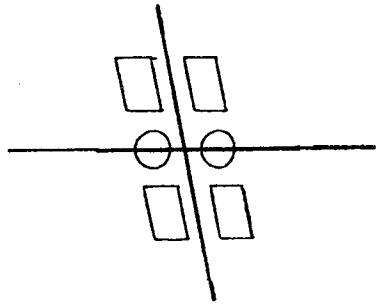
tout le monde était d'accord sur cette figure et tout le monde n'était pas d'accord sur celle-ci, alors qu'elles ont même forme !
(commentaire à la fin du bilan sur le parallélogramme avec diagonale, figure 5)

Dans la première intervention citée, il n'est pas dit de quel angle il s'agit. L'argument de la deuxième intervention se place par rapport à une analyse globale de forme. Mais qu'est ce que

cette forme a de spécifique par rapport à la tâche ? Enfin, le parallélogramme (item 11) est traité très rapidement, par analogie avec les deux précédents.

Lors de l'élaboration de la deuxième séquence, l'enseignant avait décidé d'insister sur cette propriété d'orthogonalité si peu prise en compte par les élèves. Nous allons décrire les difficultés qu'il a rencontrées et comment les élèves détournent l'expression de cette propriété.

La partie du bilan concernant cette propriété débute à propos de la figure ci-dessous (fig. 4, séquence II). Les six groupes ont tracé les deux droites ci-dessous. Deux d'entre eux les ont ensuite barrées. C'est dire que la difficulté est générale.



L'enseignant propose immédiatement à un élève de tracer l'une de ces droites en prenant la précaution de dire "on la barrera si elle est fausse". Cette décision de l'enseignant (matérialiser une réponse erronée) est intéressante car elle est différente de celle qu'il avait eu lors de la première séquence : il avait préférer tenir longtemps un crayon pour montrer l'emplacement de la droite plutôt que de la tracer.

En fait, l'enseignant est de connivence avec l'élève (Mathieu, groupe 5) qu'il a choisi d'interroger. Ils ont le même objectif qui est de montrer qu'il n'y a pas de droite de symétrie. Ceci est annoncé dès le début de la discussion par l'élève et repris par l'enseignant. C'est D1 qui est tracée.

enseignant — *alors le groupe a tracé cette droite, et puis, vous l'avez refusé après.[...] on va commencer par la première[...]. Explique pourquoi ça ne se superpose pas. Là, si on plie, qu'est ce qui va se passer ?*

L'argument de Mathieu, lié d'une certaine manière à l'absence d'orthogonalité, est interprété par d'autres élèves en relation avec les caractéristiques de la figure :

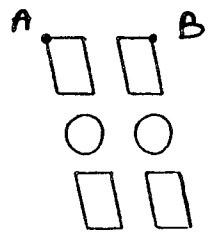
Mathieu — *Il n'y a pas d'angle droit*
Yann — *oui, mais un rond, il n'a pas d'angle droit, aussi*
enseignant — *ah, ça c'est judicieux, Yann*
autre élève — *un triangle aussi !*

L'enseignant invite donc Mathieu à préciser :

enseignant *où tu le veux ton angle droit ?*

mais il n'obtient pas de réponse. Il change alors de stratégie, en posant le problème en termes de correspondance des points, et montrant A :

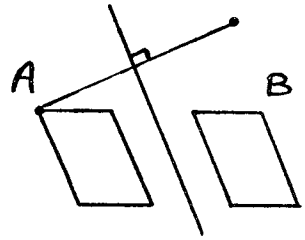
enseignant *Si on voulait avoir le symétrique...enfin le point qui corresponde à celui-là, où se trouverait-il si cette droite était une droite de symétrie ?*



Stéphanie dit d'abord : "à droite" en montrant B. Mais d'autres élèves répondent : " non, au-dessus ! ".

Stéphanie dit d'abord "à droite", en montrant le point B, mais d'autres élèves protestent et parlent immédiatement de points situés "au dessus", "plus haut", dans une direction qui est plus proche de la perpendiculaire à D1. Du coup, l'enseignant revient au problème de "l'angle droit", tout en restant peu explicite (parce qu'il souhaite que l'expression juste viennent des élèves) :

où est ce qu'il le faudrait cet angle droit pour que ça marche bien ?
[...] Où serait ton angle droit là? L'angle droit... vous m'avez parlé d'un angle droit. Alors, est-ce que vous l'avez maintenant si...?
Là, voilà ...
(le segment est alors tracé sur la figure au tableau)
on fait le petit carré habituel ? il serait là l'angle droit, hein ! Voilà, donc ça ne marche pas.



L'angle droit est donc matérialisé, mais il n'est pas dit par rapport à quoi il est tracé. La perpendicularité à la droite est donc montrée, matérialisée par un "petit carré", mais les élèves n'ont pas pu ni la nommer, ni l'expliciter.

L'enseignant décide alors de clore la discussion sur cette droite et de considérer la seconde droite proposée (D2).

De nouveau, c'est l'absence "d'angles droits" qui est évoquée, sans référence ni à la droite, ni à la figure. Pour convaincre quelques élèves réticents, l'enseignant fait réaliser le pliage (le résultat laisse certains d'entre eux perplexes). Finalement, à nouveau, l'enseignant décide de clore le débat sans que la non-perpendicularité à (D2) n'ait été explicitée.

Ce n'est que plus tard, pour le parallélogramme avec diagonale, que les expressions vont évoquer l'orthogonalité à la droite. Il est toujours question de l'absence d'angle droit dans la figure. Marie-Laure montre les deux diagonales en évoquant l'angle droit qu'elles devraient faire entre elles. A plusieurs reprises, l'enseignant demande une autre formulation de son argument :

enseignant	*tu penses à ce que tu dis pour l'angle droit, pour voir un petit peu, pour essayer d'améliorer [...] alors, ça te fait penser à ton angle droit, Marie-Laure ? C'est quel angle droit que tu voulais ?*
élève	*[inaudible] (montre une direction)*
enseignant	*celle-ci, qu'elle vienne à angle droit avec celle-là, avec laquelle ?*
élève	***que ça devienne un rectangle***

L'élève propose en fait une transformation de la figure. Nous en sommes au même point : la référence à l'orthogonalité est relative à la figure, non à la droite de symétrie.

L'enseignant va alors reprendre la comparaison (déjà évoquée par des élèves précédemment) avec une figure sans angles droits admettant une droite de symétrie. Il choisit la figure 3 (papillon). Et, cette fois, ça marche !

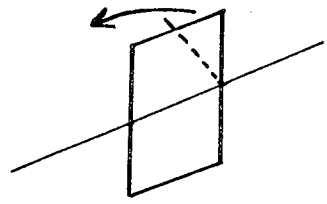
enseignant	*si je traçais là ... le segment qui va d'un sommet à son correspondant. Il serait comment par rapport à la droite de symétrie ?*
Patricia	***perpendiculaire***
enseignant	*perpendiculaire, dit Patricia. Tandis que là (montre le parallélogramme), ce sommet et son correspondant... c'est lequel ? C'est celui-là ? C'est celui-là et est-ce que l'on peut trouver une droite qui soit* ***perpendiculaire au segment****, elle serait où ?*
élève	*[inaudible...]*
enseignant	*elle serait là...et alors, est ce que les autres sommets correspondraient ? Non, ! hein ! bon ...*

Enfin, la perpendicularité a été nommée, mais remarquons que Patricia ne dit pas par rapport à quelle direction elle doit être considérée. Finalement, c'est l'enseignant qui explicite que la droite doit être perpendiculaire au segment.

Résumons les différentes étapes de la formulation dans cette phase. Dans l'expression "il n'y a pas d'angle droit", le référent est indéterminé. On ne sait s'il s'agit d'une caractéristique de la figure ou d'une relation à la droite de symétrie. Dans l'expression "il faudrait que ce soit rectangle", le référent semble être la figure : la réponse au problème consiste en une transformation de cette figure. Enfin, "le segment doit être perpendiculaire à la droite de symétrie" exprime la propriété d'orthogonalité de la droite au segment joignant deux points symétriques. Mais,l'élève ne prononce que le mot perpendiculaire, c'est l'enseignant qui exprime les référents.

Le non parallélisme ou le retournement n'a pas été mis en avant par l'enseignant. Pourtant, à un moment, un élève a montré ce changement de direction sur une figure du tableau.

élève *il faudrait que cette partie soit (geste de la main reproduit ci-dessous)*



Mais l'enseignant n'a pas relevé cette intervention de l'élève, car sa préoccupation était alors de faire expliciter l'orthogonalité à la droite.

II.3 Conclusion

Il semble se dégager plusieurs éléments qui posent question.
On se rend compte que, même si l'activité en groupe a rempli son objectif, le déroulement de la phase de bilan est très guidé par les choix de l'enseignant. Précisons.

Lorsque les élèves évoquent la courbure de la ligne centrale de la plume pour justifier que ce n'est pas une droite de symétrie, il y a la possibilité d'aborder la question du changement de direction pendant la phase de bilan. L'enseignant a fait le choix de clore le débat par un argument formaliste (une droite ne peut être courbe), donnant ainsi priorité à la définition générale, plutôt qu'au problème spécifique de la courbure par rapport au pliage.

De même, si tous les groupes ont tracé la droite de symétrie des deux cercles, c'est qu'ils ont fait une analyse de la figure différente de celle en deux cercles inégaux; et c'était l'objectif de cet item. La phase de bilan pouvait permettre de décrire ces parties isométriques (deux demi-cercles tangents par leurs extrémités) pour montrer qu'une analyse pertinente de la figure est parfois nécessaire pour résoudre ce type de problème. Mais l'enseignant a jugé plus important d'insister sur le problème posé par l'analyse de la figure en deux cercles.

Enfin, la propriété d'orthogonalité a finalement été exhibée (par l'enseignant) à propos des différents parallélogrammes. Mais celui-ci a rencontré des difficultés inattendues pour déstabiliser la conviction de certains élèves de l'existence de droites de symétrie dans cette figure. L'enseignant s'est trouvé confronté à un problème plus important que ce que lui et nous avions supposé. La question soulevée ici est celle de la connaissance des difficultés des élèves et de la force de certaines de leurs conceptions erronées.

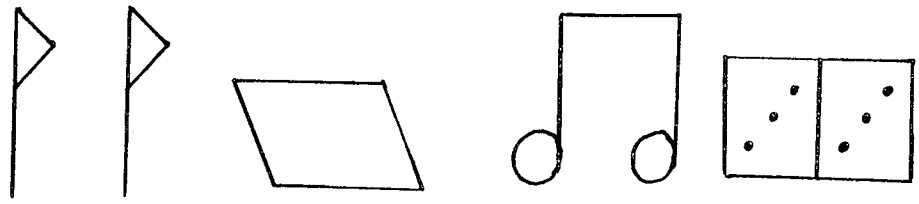
II.4. Les apprentissages constatés à travers une activité individuelle

Les conséquences sur les apprentissages des phases de bilan sont difficiles à évaluer. Cependant, nous allons analyser les résultats obtenus, lors de la deuxième séquence, à une activité individuelle passée par les élèves dans la séance suivant cette phase de bilan. La tâche consistait à regrouper treize figures en catégories selon leur nombre de droites de symétrie. Les élèves avaient toutes les figures en même temps sous les yeux (sur deux pages), chacune ayant un numéro et un nom. Le détail de la consigne, les figures et le résumé des productions des élèves sont donnés en annexe, à la fin de ce paragraphe.

Globalement, ces résultats montrent que certains apprentissages individuels ont eu lieu, en particulier :
- les droites de symétrie obliques sont cherchées et trouvées (au moins 21 élèves sur 24). Seul le "triangle isocèle" a posé problème. Il était "posé" sur un de ses côtés. La droite de symétrie n'a été donnée que par 15 élèves sur 24, mais nous pensons que l'échec est en partie du au fait que les élèves n'ont pas reconnu l'égalité des deux côtés (il n'avaient pas de règle graduée) et que le mot "isocèle" n'était pas bien compris.
- les figures invariantes par symétrie centrale ou par symétrie de rotation, ou bien composées de deux éléments translatés ou en symétrie glissée, sont différenciées de celle admettant une symétrie axiale (réussite au moins égale à 21 sur 24). Excepté deux d'entre elles, et nous allons tenté d'expliquer cela.

Quatre figures avaient des caractéristiques analogues à celles du parallélogramme (partage

possible en deux parties isométriques directement superposables). Nous avons reproduit les droites proposées comme droites de symétrie et le nombre de réussites à chacun de ces items.



	deux drapeaux	parallélogramme	croche	double trois
numéros	figure 4	figure 8	figure7	figure13
réussites	22/24	21/24	18/24	14/24

La très bonne réussite à la figure 8 peut s'expliquer par le long travail de la phase de bilan précédente (§II.2.3). Mais la différence de réussite entre la figure 4 et les deux autres ne peut s'expliquer de cette manière, aucune de ces trois figures ne faisant partie de l'activité de groupe, ni du bilan.

L'explication est à relier aux caractéristiques des figures. En effet, non seulement les figures 7 et 13 ont des segments à angle droit, mais en plus, les droites tracées par les élèves dans ces deux figures matérialisent aussi des angles droits (perpendiculaires aux segments de la figure qu'elle coupe). En comparaison, aucun angle droit n'est matérialisé dans la figure 4.

Rapellons-nous que, pendant la phase de bilan, les élèves ont évoqué souvent la notion d'angle droit en relation avec l'existence d'une droite de symétrie, mais que le changement de direction n'a pas été pris en compte. Or, les figures 7 et 13 sont les seules, parmi les huit n'admettant aucun axe de symétrie, pour lesquelles il y a eu un échec (toutes les autres sont réussies par au moins 21 élèves).

Il semble donc que la phase de bilan n'a pas réussi à préciser *l'objet de la propriété d'orthogonalité* : elle ne concerne pas un angle droit dans une figure, elle doit être associée à la droite de symétrie et à la direction joignant deux bi-points symétriques dans une figure.

III. Construction avec instruments ou la mise en oeuvre des propriétés de la droite de symétrie

L'analyse de l'activité de groupe correspondante a été développée au chapitre VII pour les deux séquences.

III.1. Analyse de la phase de bilan de la première séquence

III.1.1. Les éléments essentiels des productions des groupes

Lors de la première séquence, il s'est produit des décalages importants entre les effets attendus et les effets obtenus lors de la réalisation en classe. Le jeu des contraintes sur les instruments n'a pas permis la mise en oeuvre par les élèves des propriétés d'orthogonalité, d'incidence et d'équidistance. Il s'est produit un phénomène de détournement de la tâche ou de détournement des instruments de la part des élèves parce qu'ils étaient dans l'impossibilité de tracer les droites de symétrie avec les instruments permis. Les procédures ont consistés à mesurer au jugé ou par tâtonnements pour déterminer les milieux de bi-points ou segments. C'est donc la seule propriété du milieu qui a été mise en oeuvre.

Pendant la phase de correction, l'enseignant doit invalider les procédures qui n'ont pas utilisé de façon adéquate les instruments et essayer de construire avec eux la solution attendue. Il ne s'agit donc pas vraiment d'une phase de "bilan", puisque les élèves n'ont pas mis en oeuvre les propriétés que l'enseignant veut faire utiliser. La question essentielle que nous nous posons concerne la gestion de cette phase de bilan. Comment l'enseignant va t'il invalider les productions fausses des élèves ? Les propriétés attendues vont-elles émerger pendant la phase collective, alors qu'elles n'ont pas été utilisées dans l'activité de groupe. Le rôle de l'enseignant semble, ici, primordial.

III.1.2. Analyse de la phase de bilan

Les figures ont été reprises par l'enseignant dans l'ordre dans lequel elles ont été traitées par les groupes. Nous présentons l'analyse de cette phase par rapport aux thèmes qui se dégagent des questions ci-dessus.

a. comment est explicitée la propriété du milieu

Elle était mise en jeu dans les deux premiers items (octogone et deux cercles). Ce qui se passe

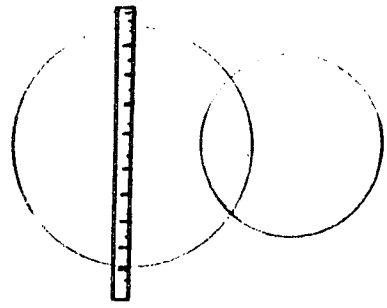
dans la phase de bilan à ce sujet est le reflet de ce qui a été observé pendant les travaux de groupe. Tout ce qui se rapporte à la propriété du milieu est cité très fréquemment, aussi bien par les élèves que par l'enseignant, en même temps que mis en oeuvre sans aucune difficulté et de manière précise par des mesures.

Puisuqe la mise en oeuvre ne posait pas de problème, l'enseignant s'est centré sur les formulations des élèves à ce sujet. Ainsi, à plusieurs reprises, la "moitié de l'angle" ou "la moitié d'un côté" est reformulée en "milieu du côté ou du segment", le "milieu du cercle" en "centre du cercle". Ces reformulations sont du ressort de l'enseignant. Elles ne sont pas toujours reprises par les élèves qui continuent à utiliser leur propres expressions. L'attitude de l'enseignant est de continuer à rectifier presque systématiquement les expressions des élèves sans commentaires, en parallèle, comme un écho "déformant". Une seule fois, cette rectification a été accompagnée d'une remarque :

enseignant *les centres des deux cercles. **On ne dit pas** les milieux des deux cercles.*

La question de la signification d'une "construction précise" est posée vers la fin de la phase de correction du deuxième item, lorsqu'un élève propose de déterminer un diamètre avec la règle graduée comme corde de plus grande dimension. C'est la procédure adoptée par trois des sept groupes. A ce moment, la construction juste (celle attendue) a déjà été donnée et l'enseignant balaie cette proposition rapidement en renvoyant l'élève à la notion de précis.

enseignant *est-ce que c'est très précis ?[...] il veut chercher le milieu ici. Est ce que c'est très précis ?*
élèves *non*
enseignant *non, hein ...est ce que ça répond à la consigne ?[...] on a demandé une construction précise !*



Mais l'enseignant ne dira pas ce qu'est une construction précise. En tout cas, il est implicite pour tous les élèves de la classe que cette précision est réalisée lorsqu'on mesure, avec la règle graduée, le milieu d'un segment. En effet, dans ces cas, elle n'a jamais soulevé de question.

Ce qui a trait à la propriété d'orthogonalité n'a été évoqué qu'à deux moments très courts, pendant les descriptions par les élèves au tableau des procédures l'utilisant pour l'octogone et pour les deux cercles. Dans les travaux de groupes, elle a peu été utilisée pour l'octogone et souvent utilisée approximativement pour les deux cercles.

Dans la phase de bilan, on constate que les élèves ne la formulent pas, même lorsqu'ils

utilisent l'équerre : ils n'expriment pas à quoi correspond l'usage de cet instrument. Pourtant, l'enseignant tente d'inciter les élèves à sa formulation :

(octogone)
enseignant *et l'équerre te donne la droite qui est comment par rapport au segment ?*
élève *perpendiculaire*
enseigant *perpendiculaire, d'accord. Bon, donc tu as tracé la droite perpendiculaire au milieu du segment (cette dernière partie est écrite au tableau)*

(plus tard, pour les deux cercles)
élève *... avec l'équerre (inaudible)*
enseignant *donc, tu traces la perpendiculaire*
élève *oui...*

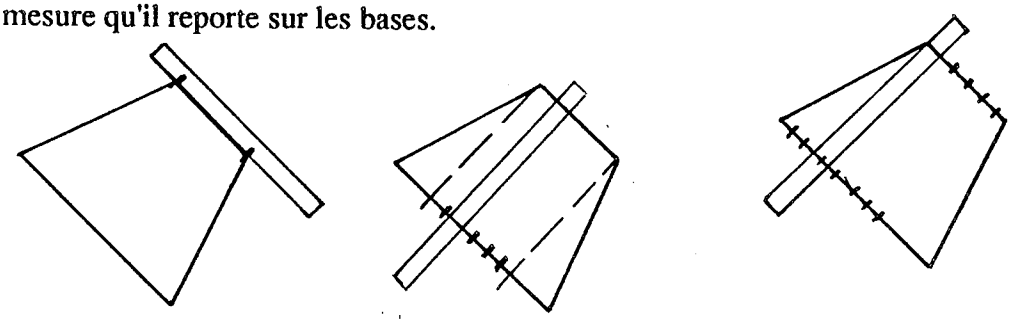
Ce sont les quatre (seules) fois où nous avons pu relever le mot "perpendiculaire" dans la partie du bilan concernant ces deux items, dont une seule fois par l'élève et sur la demande de l'enseignant. Alors que, pour ces mêmes items, les mots milieu, moitié, centre, sont prononcés plus de vingt fois par les élèves spontanément et un tout petit peu moins par l'enseignant, aussi spontanément ! On peut dire que la propriété du milieu est mise très en avant dans cette partie du bilan et qu'elle est explicitée facilement par les élèves.

Il est vrai que la propriété du milieu ne doit théoriquement plus être développée dans la suite de la phase de bilan, puisque la règle graduée n'est plus disponible. Les deux items suivants doivent faire mettre en oeuvre essentiellement le propriété d'orthogonalité et les relations d'incidence. C'est ce que nous analysons maintenant.

b. la signification de l'expression "construction précise"

L'équerre était disponible pour les deux figures suivantes : le trapèze et les deux drapeaux. Rappelons que, dans cette première séquence, une seule construction exacte a été donnée pour la droite de symétrie du trapèze, aucune pour celle des deux drapeaux. L'équerre n'a été utilisée effectivement que par deux groupes pour le trapèze et un seul groupe pour les deux drapeaux. Les constructions sont majoritairement réalisées au jugé ou par tâtonnement et ont presque exclusivement mis en oeuvre la propriété du milieu (ch.VII, §III.1.2).
L'enseignant devait donc négocier la tâche de "construction précise" avec les élèves dans la phase de bilan.

La plus grande partie du temps accordé à ces deux items a été consacrée à refuser des propositions d'élèves. Pour le trapèze, l'enseignant va refuser trois propositions avec comme seul argument "ce n'est pas précis". Mais la signification de l'expression semble échapper aux élèves. Pourtant, des tentatives sont faites pour la comprendre, comme le montre leurs différentes propositions. En voici un résumé. Le premier élève qui passe au tableau marque (au crayon) la longueur des bases sur la règle non graduée (l'idée est d'utiliser le fait que la grande base est à peu près le double de la petite base). Le second construit un rectangle avec l'équerre à l'intérieur du trapèze et détermine les milieux de deux côtés opposés en mesurant avec la section de la règle. Le troisième élève prend la section de la règle graduée comme unité de mesure qu'il reporte sur les bases.



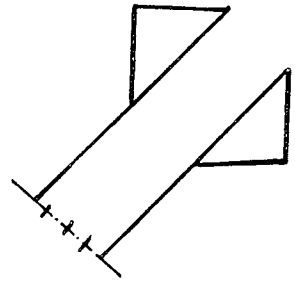
Le soin apporté aux mesures et à la manipulation de la règle sont révélateurs du sens du mot "précis" pour ces élèves et de la nécessité de débattre de ce sens. Pourtant, à aucun moment, la signification de ce mot n'est explicitée par l'enseignant. Nous pensons qu'il craignait de leur donner la solution en expliquant le sens de la consigne. Ce qui sauve la situation (pour l'enseignant) est l'arrivée au tableau d'un élève qui a la construction attendue : celle de la droite perpendiculaire aux bases et passant par le point d'intersection des diagonales. Nous reviendrons sur cette construction plus loin.

Le même phénomène s'est produit pour la figure suivante "deux drapeaux", et la question du "précis" a occupé la majorité du temps consacré à cette figure. Mais on assiste à une évolution de l'attitude des élèves devant le mot "précis", montrant qu'ils essaient de se saisir du problème. Il y a même une **surenchère sur la précisison du tracé**. Expliquons-nous.

Alors que, pour le trapèze, le mot "précis" a été utilisé presque exclusivement par l'enseignant, et sous forme négative ("ce n'est pas précis") ou interrogative négative ("est ce que c'est vraiment précis ?"), pour les deux drapeaux , ce sont surtout les élèves qui l'évoquent, sous des formes diverses :

- auto-censure :

élève *on y est allé à l'a peu près, alors...*



- ou au contraire, proposition d'une construction "plus précise" que la première que l'enseignant a reconnue comme juste (un point et une direction), en deux étapes: d'abord, construction par deux points (intersections de deux paires de bi-points), plus précise que un point et la direction, puis plus que deux points :

élève *en faisant plusieurs points, ce serait plus précis que quand ça passerait par les deux points*

L'idée de l'élève est de construire un grand nombre de points de la droite. Il place le sens du mot "précis" au niveau du *résultat* de la construction et non au niveau de la *méthode*.

c. les mots "milieu" et "centre" renvoient à des points construits par intersection de segments

On retrouve les mots "milieu" et "centre" dans le discours de l'élève qui donne une construction exacte de la droite de symétrie du trapèze, qui n'utilise pas la règle graduée. Le point ainsi désigné par l'élève est le point d'intersection des diagonales du trapèze :

élève *alors là, ça me donne le centre*
enseignant *ça te donne un point [...] ce point, tu considères*
élève *qu'il est au milieu*
enseignant *qu'il est sur ?*
élève *ça nous donne ça (en montrant la droite tracée)*
enseignant *et ça, c'est quoi ?*
élève *la droite de symétrie*

Pour l'élève, ce point est au "milieu" de la figure et c'est pour cela qu'il est sur la droite de symétrie. On retrouve la même signification de ce mot pour les "deux drapeaux", pour désigner le point d'intersection de deux segments homologues qu'il va construire.

élève *oui, j'ai d'abord fait ça pour trouver le milieu.*

Dans chacune des figures, la raison pour laquelle le point construit est sur la droite tient au fait qu'il provient d'une construction "symétrique". Mais il n'est pas sûr que la propriété particulière de symétrie de ces figures entrent en jeu. Autrement dit, cette construction serait-elle reprise par ces élèves pour construire le "centre" d'un trapèze *quelconque* ?

D'autre part, certains "milieux" sont refusés par l'enseignant car non précis (milieux des segments par tâtonnements) et d'autres acceptés et mis en avant (intersection de segments). Les élèves ont-ils les moyens de comprendre à travers ces décisions de l'enseignant la signification pour lui du mot "milieu"?

Il est difficile de conclure sur la mise en oeuvre des relations d'incidence par les élèves et l'enseignant ne les a pas fait expliciter dans cette phase, parce qu'il réalisait la grandeur du décalage entre ce qu'il avait prévu et ce qui se passait. Le temps étant limité, il a décidé d'arrêter le débat sur ces deux figures et de traiter un dernier item (le cercle). Avant d'analyser ce qui s'est passé pour le cercle (§e), examinons, comment, à travers les deux figures que nous venons de voir, la propriété d'orthogonalité a été traitée.

d. les difficultés d'explicitation de la propriété d'orthogonalité

Bien qu'un des objectifs liés à ces deux figures soit la mise en oeuvre de la propriété d'orthogonalité, elle est peu présente dans la partie de la phase de bilan sur le trapèze, encore moins dans celle sur les deux drapeaux. Une des causes de ce fait est l'importance qu'a pris le problème d'incompréhension entre les élèves et l'enseignant au sujet du sens de la consigne. Pour le trapèze, comme pour les deux cercles (figure 2), c'est l'enseignant qui formule les mots se rapportant à cette propriété. La seule fois où nous avons relevé l'expression "perpendiculaire" chez un élève, elle est citée à tort puisqu'elle désigne une diagonale du trapèze ! L'enseignant la nomme lorsqu'il résume la procédure proposée pour la droite de symétrie du trapèze :

enseignant *donc, tu as le point [intersection des diagonales], puis la perpendiculaire, et ça te donne la droite de symétrie*

Mais il ne précise pas à quoi se rapporte cette perpendiculaire, et la construction qui s'appuie sur elle n'est pas convaincante, ce que montre l'intervention d'un élève (Yann) :

Yann *m'sieur, il avait qu'un point !*
enseignant *oui, un point. et la perpendiculaire*
élève *il faut au moins deux points [...]*
enseignant *je crois que Yann a un problème, il faut l'aider.[...] tu as placé l'équerre selon le côté et tu l'as fait glisser jusqu'à ce que le point soit sur l'autre côté de l'équerre (il montre en même temps comment faire)*
donc, tu peux tracer, c'est précis.

Yann met en doute la détermination de la droite de symétrie par un point et une direction. La "démonstration" proposée par l'enseignant est difficile à saisir pour les élèves. Comment peut-il donc convaincre qu'en glissant l'équerre, c'est précis, alors qu'auparavant, en glissant la section de la règle graduée pour mesurer la base du trapèze, ça ne l'était pas ? De plus, le problème soulevé par Yann est peut-être plus fondamental : reconnaître qu'avec un point et une direction, on détermine une droite de manière unique. De toute façon, le "donc, tu peux tracer" de l'enseignant ne peut convaincre, c'est un argument d'autorité. Il traduit un malaise chez les deux partenaires : la communication enseignant-élèves est dans une impasse.

Pendant le bilan sur la figure "deux drapeaux", la perpendicularité de la droite de symétrie au segment joignant deux points homologues n'est pas explicitée du tout. Nous n'avons relevé aucun mot de type "perpendiculaire", "angle droit" ou mot analogue, dans les échanges sur cette figure. Seule l'équerre est désignée aux moments où elle est utilisée, mais ni l'enseignant, ni les élèves n'ont dit ce qu'elle mettait en jeu ou ce qu'elle matérialisait. Une (seule) fois, l'enseignant a évoqué à ce qui était en train de se faire, mais en renvoyant à la figure trapèze, comme si celle-ci avait tout résolu.

En conclusion, la mise en oeuvre de la propriété d'orthogonalité n'a pas pu se faire dans cette phase de bilan. L'une des causes essentielle est le problème soulevé par la signification de la consigne lors du travail en groupe, signification qui n'a jamais été éclairée par l'enseignant. Il n'a peut-être pas pris conscience de l'absence de prise en compte par les élèves de l'objet sur lequel porte cette orthogonalité.

e. la propriété d'équidistance (travail sur le cercle)

La construction des droites de symétrie du cercle va poser à nouveau la question du "précis". En effet, la première proposition d'un élève consiste à déterminer directement le centre par essais successifs d'ouvertures de compas et d'emplacements de ce point, de manière à faire coïncider le cercle cherché avec celui qui est donné. Mais le manque de conviction de l'élève fait qu'il renonce devant les questions de l'enseignant :

élève	*j'ai essayé de trouver le centre*
enseignant	*tu as essayé de trouver le centre, mais est-ce que tu l'as déterminé avec précision?*
élève	*oui, je l'ai posé à un endroit*
enseignant	*à un endroit*
élève	*j'ai essayé de voir si ça marchait, dans le milieu*
enseginant	*tu as essayé de voir si ça marchait. Est-ce que c'est précis ?*

L'incompréhension entre l'enseignant et les élèves est totale. Pour l'élève, ce qu'il a fait est précis puisqu'il a construit un cercle qui recouvre exactement le cercle donné. En fait, l'enseignant ne peut accepter cette procédure parce que son objectif est de faire utiliser la propriété d'équidistance. Mais le compas a bien été utilisé correctement et il est encore plus difficile pour l'enseignant de justifier pourquoi il refuse cette construction.

Nous sommes proche d'un blocage de la situation. L'enseignant est à bout d'arguments, ce que révèle le fait qu'il reprend textuellement les phrases de l'élève au tableau (voir ci-dessus). Les élèves sont perplexes parce qu'ils n'ont toujours pas compris ce qu'attend l'enseignant. Aussi, lorsqu'un élève va proposer le début d'une construction qui ressemble à celle attendue, il n'est pas entendu. Le temps imparti pour la séance étant écoulé, l'enseignant décide de clore le débat et d'évoquer très rapidement la médiatrice. L'objectif de cette phase de bilan n'a pas pu être approché : la propriété d'équidistance est loin des préoccupations des élèves.

L'enseignant a pris en même temps que la décision de clore le débat, celle de rajouter une séance supplémentaire à la séquence pour revenir sur le problème du cercle et sur la notion de médiatrice. Nous analysons cette séance au §III.2.

III.1.3. Conclusion

La signification de la tâche, liée au sens de l'expression "construction précise", qui n'a pas été saisi par les élèves au moment du travail de groupe, n'a pas été éclairci non plus lors de la phase de bilan. L'enseignant a utilisé le mot "précis" pour réfuter des productions d'élèves qu'il ne voulait pas. Or, ce mot a un sens pour lui qui n'est pas celui donné par les élèves. Par exemple, chercher le centre en essayant de reconstruire le cercle est une méthode longue en temps, mais qui peut s'avérer précise. Pour le trapèze, à l'argument "grande base égale deux fois petite base", l'enseignant répond "ce n'est pas très précis" au lieu d'expliquer que "ce n'est pas ce que l'on cherche".
Du fait de ce problème, aucune autre propriété que celle du milieu n'a vraiment été mise en oeuvre. Le temps étant limité, l'enseignant s'est appuyé le plus possible sur des élèves (isolés) ayant trouvé une construction attendue, espérant chaque fois que les autres élèves comprendraient alors ce qu'il fallait faire en "regardant". Les nombreuses propositions, et questions venant de la classe montre qu'il n'en a rien été, et que l'incompréhension de la consigne a duré jusqu'à la fin de la phase de bilan.

L'enseignant a perçu ce problème, mais il a fait trop confiance à la monstration pour débloquer la situation. Nous allons voir comment il renégocie le contrat dans la séance suivante.

III.2. Une renégociation de la tâche avec les élèves

III.2.1. Cadre et objectifs de cette séance

Cette séance est donc la suite de la phase de bilan que nous venons d'analyser. Elle se situe dans le temps après la situation de communication, car pour des raisons d'organisation des salles dans le collège, cette dernière a été réalisée à la date prévue.

Cette séance supplémentaire a pour objectif de traiter les deux sujets suivants, la construction des droites de symétrie du cercle avec le compas (abordée seulement 5mn. en fin de la phase de bilan précédente) et la définition et la construction de la médiatrice d'un segment (en s'appuyant sur les constructions faites pour le cercle).

Au moment d'élaborer cette séance supplémentaire, nous avions présents à l'esprit quelques éléments provenant des observations faites durant le bilan précédent, en particulier le problème du sens de la consigne pour les élèves.

Rapellons que, pour le cercle, dans les travaux des groupes, l'objectif de mise en oeuvre de la propriété d'équidistance n'a pas été atteint. Les procédures de construction au jugé ou par tâtonnements avec le compas donnent un tracé correct. D'autre part, le théorème en acte disponible chez tous les élèves, disant que les droites de symétrie passent toutes par le centre du cercle, a focalisé leur attention sur le tracé de ce point. Le problème est résolu pour les élèves dès lors qu'ils ont découvert le rôle du centre du cercle dans cette tâche.

Ce nouveau travail collectif sur le cercle doit donc aboutir à la mise en oeuvre de la propriété d'équidistance. L'enseignant ne peut s'appuyer sur les productions des élèves. D'autre part, il doit, au préalable, renégocier avec les élèves le sens de la consigne, s'il ne veut pas retomber dans le problème de communication précédent.

Nous allons suivre le déroulement de cette phase collective en l'analysant par rapport aux questions suivantes : comment l'enseignant négocie-t-il la tâche avec les élèves ? La propriété d'équidistance émerge t-elle de cette phase de bilan et, si oui, comment?

III.2.2. L'entrée dans le problème et le rappel de la consigne

L'enseignant, par un jeu de questions-réponses, a vérifié que tous les élèves étaient d'accord sur deux points, la consigne et le nombre de droites de symétrie du cercle. La manière de

présenter ces deux points montre la volonté de l'enseignant de prendre en compte les problèmes de la séance précédente. Examinons comment.
Au niveau de la consigne, l'enseignant choisit d'insister sur la nature des instruments disponibles, et sur l'absence de graduations de la règle, tout en bannissant de son vocabulaire l'expression "construction précise" qui avait posé tant de problème lors de la séance précédente. Voici des extraits qui illustrent cela.

ens.	*Alors, lors de la dernière séance, vous vous rappelez, on a terminé le matin sur ...certains tracés à propos du cercle et nous avons fait cela un peu vite, alors nous allons reprendre [...] nous allons retravailler sur le cercle*
	Est-ce que quelqu'un se souvient des instruments que vous aviez à votre disposition pour effectuer le tracé sur le cercle...
élève	*un compas [...]*
élève	*et une règle*
ens.	*une règle de quelle sorte ?*
élèves	*non graduée*
ens.	*non graduée, bien, et qu'est-ce que nous cherchons ? Quelle était la consigne ?*
élève	*[inaudible]*
ens.	*de construire [...] la ou toutes les droites de symétrie de cette figure; avec comme instruments mis à votre disposition la règle non graduée et le compas*

L'enseignant vérifie ensuite que la classe est d'accord sur le nombre de droites de symétrie du cercle (une infinité) et que l'on va en tracer une. La tâche est explicitée dans le sens construire une droite de symétrie, et non construire le centre. D'ailleurs, le centre du cercle n'est pas évoqué. Nous allons examiner l'impact de ces différences de formulation au niveau des élèves.

III.2.3. Construction de la première droite de symétrie

Le rappel fait au début de cette séance, permet de penser que la signification de la consigne "construire avec instruments" est maintenant la même pour les élèves et pour l'enseignant. Nous allons voir qu'il n'en est rien. Cinq propositions de construction faites successivement par les élèves vont être refusées par l'enseignant. Pourtant, elles ne correspondent pas toutes à un détournement de la tâche ou des instruments. Nous allons préciser.

a. détermination du centre par reconstruction du cercle

Christophe (groupe 5) propose de déterminer le centre du cercle par des ajustements successifs

d'écartements du compas et d'emplacement du point. Cette construction avait déjà été proposée et refusée à la fin du bilan précédent :

ens. *je mets à ta disposition les deux instruments, hein.*
Une construction, n'est-ce pas ? Tu veux peut-être
un crayon ? Alors, tu nous expliques en même temps
Christ. *Bien, j'essaie de trouver le centre du cercle*
ens. *tu essaies de trouver le centre du cercle, par quelle méthode ?*
Christ. *en, en pointant sur...*

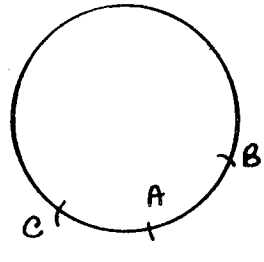
La réponse de l'enseignant consiste à prendre la classe à témoin sur le statut d'une telle construction et à demander leur accord pour rejeter ce procédé.

ens. *alors là, qu'est-ce qu'il fait là ? Est-ce vraiment une construction ?*
élèves *c'est au hasard..*
ens. *c'est au hasard, c'est par tâtonnements, alors nous n'allons pas accepter ça, parce que nous ne voulons pas de tâtonnements aujourd'hui.*
L'enseignant reprend le compas à Christophe qui retourne à sa place

Ainsi, le problème de la consigne n'est pas réglé pour Christophe. L'enseignant ne situe plus ces réfutations sur le plan de l'imprécision, mais sur celui du hasard, du tâtonnement. De plus, Christophe est reparti sur la recherche du centre du cercle, qui n'est pas la consigne donnée. L'enseignant a peut-être pensé que cet élève était un cas isolé, car il prend la décision d'interroger un autre élève plutôt que de s'expliquer avec celui-ci. Effectivement, la procédure de Sylvie est prometteuse.

b. le souci de respecter la consigne ... pour plaire à l'enseignant

Sylvie déclare avoir une construction à proposer. Dans un premier temps, sa démarche va dans le sens de ce qu'attend l'enseignant. En effet, après s'être saisie du compas, elle pose la pointe sèche sur le cercle (en A), puis repère avec une même ouverture de compas deux points situés aussi sur le cercle (B et C sur la figure ci-dessous), qu'elle "marque" avec le crayon. Après une question de l'enseignant, Sylvie confirme que la conservation de l'ouverture du compas est nécessaire.

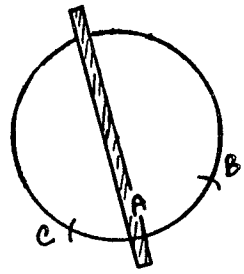


L'enseignant adhère à la proposition de Sylvie et le montre. En atteste le fait qu'il écrit au tableau pendant que l'élève trace :

la pointe sèche sur le cercle

deux points sur le cercle

Il faut maintenant passer à l'étape suivante. En fait, pour Sylvie, la construction est terminée : elle propose de tracer une droite qu'elle désigne d'un geste de la main, et qui passe par le point A et le centre du cercle qu'elle montre, au jugé. Les points B et C ne servent pas à la construction de la droite. Depuis le début, Sylvie sait en fait que la droite passe par un point quelconque et le centre du cercle, facile à déterminer au jugé.



Ainsi, ce que l'enseignant a pris comme le début de la procédure de "construction" attendue se révèle être une réponse destinée à satisfaire au contrat : en l'occurrence, se servir du compas à un moment donné. Cette procédure témoigne de la mise en oeuvre des propriétés suivantes :

- par tout point du cercle, il passe une droite de symétrie
- deux points à égale distance d'un point ont un certain "rapport" avec cette droite cherchée
- la droite cherchée passe par le centre du cercle.

Mais leur mise en oeuvre n'est plus nécessaire si l'on connaît le centre du cercle !

La suite qui était attendue par l'enseignant est la détermination d'un point équidistant des deux points B et C qui viennent d'être construits. Pour inciter l'élève à aller dans ce sens, il choisit donc de poser une question très générale sur le nombre de points nécessaires pour construire une droite, ce à quoi la classe répond unanimement : deux. Puis il montre à Sylvie le point qu'elle a choisi (A) au début de sa construction en précisant qu'il s'agit du premier point :

ens. *nous en avons un, hein. Toi, tu en as un. Il faudrait en trouver un deuxième.*

Mais il n'obtiendra pas de réponse de l'élève.

Si on examine le statut du point A accepté par l'enseignant par rapport à celui proposé par Sylvie (le centre), une question se pose. Pourquoi A, point pris au hasard sur le cercle est-il accepté, alors que le centre du cercle, qui est au contraire un point unique et déterminant dans

cette tâche, est rejeté ? La réponse à cette question n'est pas facile et nécessite de comprendre le sens du terme "construction". L'enseignant n'explique pas son choix et veut engager la recherche vers la détermination d'un second point. Mais les deux procédures qui sont proposées successivement par les élèves indiquent que l'incompréhension de la consigne est plus que jamais présente.

c. deux constructions au jugé

Le troisième élève, Stéphane, est appelé au tableau par l'enseignant parce qu'il a manifesté le désir de parler. Pourtant, sa proposition ne diffère en rien de celles du premier élève, puisqu'il se contente de désigner au jugé le centre du cercle.

ens. *Il faudrait en trouver un deuxième.*
X *les points dont elle [Sylvie] s'est servie pour...*
ens. *ben, viens, viens là.*

Stéphane vient au tableau et montre le même point que Sophie (le centre) . De nouveau , l'enseignant dit que ce n'est pas sûr que ce soit le centre, et renvoie Stéphane à sa place.

Aussi lorsque Sophie passe au tableau, l'enseignant va tenter de reprendre en main la situation. Pour essayer de détourner l'attention des élèves de la recherche du centre du cercle, il propose de reprendre le problème à partir des trois points (A, B et C) tracés par Sylvie au tout début de la séance,
d'abord, en demandant aux élèves d'expliciter la propriété qui relie A à B et à C :

Ens. *donc, ce point, il est comment par rapport à ces deux ?*
elèves *Il est...*
entre les deux
à la même longueur
Ens. *à la même longueur, hein, d'accord ?*

puis en rapellant ce que l'on cherche :

Ens. *Bon, il en faudrait maintenant un second.*

Mais la diversion ne marche pas : Sophie propose immédiatement le centre comme second point :

Sophie *ben, c'est ça ! Peut-être de celui-là, on va pouvoir tracer toutes les symétries...si par exemple, on prend la règle, on trace comme ça, comme ça, comme ça.*

et elle montre en même temps plusieurs droites en faisant pivoter sa règle autour du centre.

On est revenu au point de départ :

ens. *ah! Mais est-ce que c'est le centre ?*

Et la réponse de l'élève révèle que, pour elle, il s'agit d'un autre question :

Sophie *non, mais c'est ce point qui va nous aider à faire la symétrie. Ce point est sur la droite de symétrie*

ens. *oui, mais il faut la fixer maintemant cette droite.*

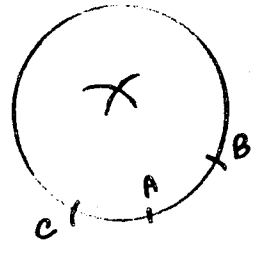
En conclusion, pour les quatre élèves qui sont passés au tableau, le problème est résolu dès lors qu'ils ont repéré le centre, ce qu'a exprimé très clairement Sophie. L'enseignant ne peut qu'être d'accord avec cela. Mais pour les élèves, il ne peut être résolu si on n'a pas d'abord le centre.

La détermination du centre du cercle est donc préalable au tracé de toute droite de symétrie. Cette règle rend le problème impossible à résoudre avec les instruments fournis.

Les explications successives de l'enseignant n'ont pas été comprises. Ses refus successifs de leurs propositions vont amener les élèves à chercher à tout prix une solution qui utilise le compas. C'est ce qui peut expliquer la proposition que Anne-Laurence donne à ce moment de la séance.

d. une procédure acceptée comme vérification et refusée comme construction

Anne-Laurence est invitée au tableau par l'enseignant parce qu'elle a manifesté qu'elle avait une idée nouvelle. Elle prend le compas et place la pointe sèche sur l'un des points construit au début de la séance (C). Elle va ensuite ajuster une ouverture de compas telle que l'arc centré en C passe à peu près par le centre du cercle.



Lorsque l'enseignant proteste,

ens. *ah ! non, ce point là n'est pas le centre, donc tu ne peux pas t'en servir !*

Anne-Laurence se défend :

Anne L. *je vais regarder où est le centre...*

ens. *tu veux regarder où est le centre[...] tu veux vérifier si* ***par hasard****, ce n'est pas le centre ?*

Anne L. *oui*

ens. *non, mais là, c'est du* ***tâtonnement****, alors*

Anne L. *voir si c'est juste. Puis après je vais faire comme ça (elle montre les deux points B et C, à partir du centre choisi).*

ens. *oui, là,* ***tu essaies de vérifier, mais ce n'est pas une construction.***

Anne L. s'en va à sa place.

En fait, l'idée de Anne-Laurence est de justifier que le point choisi est bon, en montrant l'égalité des distances de ce point aux points B et C construits sur le cercle. C'est l'équidistance du centre à deux points du cercle qui est mise en oeuvre. C'est pour cela que l'enseignant ne refuse pas complètement la procédure de Anne-Laurence, et la place sur le niveau de la vérification.

La procédure proposée nécessitait effectivement l'utilisation du compas pour le choix et la comparaison de longueurs et exigeait de faire différents ajustements. Pour Anne-Laurence, il ne s'agit pas d'une construction par tâtonnement. L'explication de l'enseignant pour justifier son refus ne peut lui être accessible, car elle exige la compréhension de ce que l'enseignant entend par "construction", préalablement à celle de la différence entre construction et vérification.

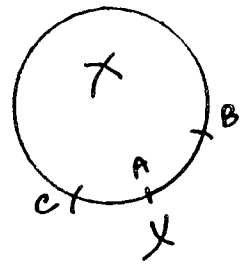
A ce moment de la séance, l'incompréhension entre la demande de l'enseignant et les réponses des élèves s'est accrue du fait que les élèves ont vu toutes leurs propositions refusées. Le dialogue est à nouveau dans une impasse. Aussi, lorsqu'un élève évoque à nouveau le premier point (A) pris au hasard par Sylvie sur le cercle, cette occasion est saisie au vol pour relancer la résolution du problème, mais cette fois en la guidant.

e où l'enseignant est contraint de guider l'élève

La construction que va faire Olivier est accompagnée pas à pas par l'enseignant. Elle consiste à tracer, à partir des deux points B et C, deux arcs de cercles égaux, puis à tracer la droite passant par le point d'intersection de ces deux arcs et le point A pris au hasard sur le cercle. L'enseignant fait remarquer au cours de la construction que l'ouverture de compas est

différente de celle qui avait permis de placer B et C. Même les deux premiers arcs de cercle sont tracés sous la direction de l'enseignant :

ens. *vous avez tracé ça (arcs AB et AC). Qu'est ce que tu pourrais tracer ?*
murmures
ens. *tu as un tracé au dessus. Est-ce que tu pourrais par hasard le tracer au dessous ?*
élève *on fait comme ça ?*
ens. *ouais, allez ! Oh, si ce n'est pas de la même longueur, ce n'est pas ...*



Cette phase de construction est très courte. L'enseignant essaie de faire expliciter par les élèves l'équidistance des points de la droite de symétrie au deux points du cercle.

ens. *c'est bien [...] regardons un petit peu maintenant. Alors, Sylvie est partie de ce point, hein (montre A) elle a tracé celui-ci et celui-là avec le*
compas (B et C). Qu'est ce que vous pouvez dire de ces deux points par rapport au point sur lequel on a posé la pointe sèche ?
élève *au milieu*
autre *à la même distance*
ens. *à la même distance, hein ! On dire plutôt à la même distance. Ce n'est pas le milieu, hein ! bon. Ensuite, on a posé la pointe sèche sur ce point et marqué cet arc de cercle, puis la pointe sèche sur l'autre point et marqué cet arc de cercle. Que pouvez vous dire de ce point par rapport à ces deux -ci ?*
élèves *il est à la même distance*
ens. *il est à la même distance. Vous avez tous bien suivi ?*
murmures

f. une récapitulation ressentie comme nécessaire

L'enseignant sent que l'accord des élèves n'est pas spontané. Le temps passé à cette construction est trop important, aussi a-t-il besoin d'obtenir une adhésion plus franche des élèves. Il choisit de prendre encore un peu de temps pour récapituler la construction et les propriétés.

Dans cette phase, la propriété de l'équidistance des points de la droite aux deux points B et C est précisée. L'enseignant fait remarquer que A n'est pas le milieu de B et C, mais que B et C sont à égale distance de A, et que cela correspond à une construction avec la même ouverture de compas. Les raisons des changements d'ouverture de compas ne sont pas abordées.

Il faut maintenant déterminer le centre du cercle.

g. détermination de l'emplacement du centre du cercle

Pour déterminer le centre, il faut construire une autre droite de symétrie. L'objectif de l'enseignant est de faire réinvestir par les élèves la construction qu'il vient de faire avec eux.

La première solution proposée consiste à chercher directement le centre au milieu du segment déterminé par la droite construite et le cercle. Cette solution privilégie (encore une fois) la propriété du milieu. La contrainte de ne pas utiliser de règle graduée va permettre à l'enseignant d'obliger les élèves à chercher une autre solution.

ens.	*alors, le centre du cercle que vous cherchiez*
élève	*il est sur cette droite [...] il faut retrouver la moitié de la droite*
ens.	*la moitié de la droite, euh... la moitié du segment, hein . [...] le milieu, est ce que tu peux le chercher ? quels sont les instruments que tu as à ta disposition ?*
élève	*règle non graduée*
ens.	*Alors, est ce que tu peux le chercher avec la règle non graduée?*
élève	*non*
ens.	*non, tu ne peux pas mesurer*

L'idée de tracer une autre droite pour déterminer le centre vient d'un élève. Le tracé de cete droite va se faire, avec l'aide de l'enseignant, par le choix d'une nouveau point E sur le cercle, puis de deux points F et G à égale distance de E sur le cercle, enfin d'un point H à égale distance de F et G avec une autre ouverture de compas.

Les élèves sont d'accord qu'il suffit maintenant d'utiliser le centre pour tracer toutes les droites de symétrie du cercle. Le fait que la construction soit exacte sans le compas n'est pas discuté : on peut légitimement se demander si maintenant les élèves accepteraient de tracer une droite avec seulement la règle non graduée, et ne passant que par un point !

III.2.4. Institutionnalisation de la médiatrice

a. les indicateurs d'un changement de phase

L'entrée dans une phase différente est révélée par un **changement dans les questions de l'enseignant** (forme, fond et objet) :

ens *si on avait ce point-ci et celui-ci, avec la droite de symétrie tracée en rouge, que forme ces deux points ?*
[...] cette droite de symétrie du cercle, pour ce segment, quel est son rôle ?
(cette question sera reprise deux fois, sous des formes très proches de celle-ci).

L'enseignant a du poser quatre fois sa question, il attendait "droite de symétrie du segment". Les élèves ont répondu en évoquant le milieu, la perpendicularité (ils sont venus vérifier au tableau avec règle graduée et équerre, de nouveau autorisées). Réalisant qu'il n'obtiendra pas ce qu'il demande, l'enseignant va isoler les éléments qui l'intéressent :

ens *je vais prendre une photographie du segment, là.*
Il dessine, à côté du cercle, un segment et une droite isolés, et demande à nouveau :
vous avez travaillé sur le segment, donnez-lui un caractère particulier

Le pas de côté par rapport à la figure est aussi un élément pour une décontextualisation. La dernière question (donner un caractère à la droite) est difficile. Pourtant un élève a compris le "jeu", et l'enseignant va en profiter pour introduire la médiatrice :

élève *droite de symétrie*
enseignant *et oui ! C'est la droite de symétrie du segment, elle répond aux caractères de la droite de symétrie, n'est-ce-pas ? Elle est perpendiculaire et elle passe par le milieu du segment. Alors, cette droite qui est perpendiculaire au segment et qui passe par le milieu du segment est la médiatrice du segment.*

Les questions portent sur l'explicitation des propriétés des objets et non leur mise en oeuvre. L'enseignant va insister encore pour faire dire aux élèves les "caractéristiques" ou les "caractères" de cette droite (milieu, perpendicularité, équidistance).

b. le contenu par rapport à la notion de médiatrice

La construction n'a pas mis en oeuvre les propriétés de milieu et perpendicularité, puisqu'elle est issue du travail sur le cercle, avec le compas. Durant cette phase, elles sont seulement vérifiées par les élèves sur la construction faite au tableau. L'équivalence entre les deux types de construction est donc laissée à l'élève, et pourtant le problème est complexe.

Cette équivalence n'est pas non plus traitée lorsque la médiatrice est définie comme droite perpendiculaire au milieu du segment, alors qu'elle a été construite par équidistance aux extrémités du segment. Elle ne l'est pas davantage lorsque l'enseignant explicite avec les élèves, et justifie par le biais de la construction au compas, la propriété que tout point de la médiatrice est à égale distance des deux extrémités du segment.

La séance se termine par un retour sur le cercle : il suffit de tracer les médiatrices de deux cordes d'un cercle pour avoir son centre.

III.2.5. Conclusion

La renégociation de la consigne n'a pas réussi et le problème d'incompréhension entre l'enseignant et les élèves a ressurgi dans cette nouvelle phase de bilan. Mais si l'on regarde comment cette renégociation est faite, ce n'est pas surprenant. Il ne suffit pas, pour l'enseignant, de bannir un mot ("précis") de son vocabulaire parce que celui-ci prête à de multiples interprétations. Il est de toute façon implicitement présent derrière ceux qui lui sont substitués. Renégocier la consigne consistait, pour cette tâche, à se mettre d'accord avec les élèves sur le **sens** d'une construction avec instruments. Nous avons vu, dans l'analyse des activités de groupe, qu'il a été possible de faire comprendre ce sens aux élèves lors de la deuxième séquence. En conséquence, la phase de bilan de cette deuxième séquence se présente sous un jour totalement différent pour l'enseignant. Nous allons analyser les conditions d'explicitation des propriétés de la droite de symétrie dans des conditions plus propices.

III.3. Analyse de la phase collective de la deuxième séquence

III.3.1. Explicitation de la propriété du milieu

a. les conditions du bilan

La phase de bilan se présente de la même manière pour ce qui concerne la propriété du milieu que dans la séquence précédente. Les élèves l'ont tous mise en oeuvre dans les travaux de groupes pour construire les droites de symétrie des deux figures, octogone et deux cercles. Pour la deuxième figure, sa prégnance a provoqué, comme lors de la première séquence, la focalisation de certains élèves sur la recherche des centres des cercles comme milieux de diamètres. Et l'on retrouve le même type de procédure attaché à ce choix, qui consiste à déterminer le diamètre par tâtonnements comme un segment de plus grande dimension dans le cercle.

Rappelons que, pour l'octogone, un groupe a fourni une construction originale, n'utilisant que les relations d'incidence (construction du carré construit en prolongeant quatre côtés égaux de l'octogone).

b. le bilan

L'objectif essentiel de la figure octogone était la mise en oeuvre de propriétés du milieu, et la phase de bilan n'a fait que valider les procédures qui s'y rapportent.

Un travail sur la désignation de points particuliers a eu lieu à l'occasion de la description de la construction de la droite de symétrie des cercles.

ens.	*[...] comment on pourrait appeler ce point là ? (en désignant un des points d'intersection des deux cercles)*
	Où se trouve t-il par rapport aux cercles, ce point ?
Bruno	*aux deux points de croisement des ronds.*
ens.	*Voilà, aux deux points d'intersection des cercles.*

On peut constater, comme cela est souvent le cas, que l'enseignant reformule l'expression de l'élève, tout en laissant croire qu'il ne fait que répéter ce que celui-ci vient de dire. Du coup, cette reformulation risque de ne pas avoir, pour les élèves, l'importance que l'enseignant lui accorde.

L'enseignant a fait le choix de ne pas prendre en compte la procédure de construction des diagonales du carré construit sur l'octogone, qui a été proposée au tableau successivement par deux élèves. Il a seulement fait une intervention déclarative : "c'est une idée qui est bonne". Pourtant, cette procédure est intéressante, car elle met en oeuvre uniquement les relations d'incidence. Mais il est prévu d'aborder ces relations à propos des figures 3 et 4. Le choix de l'enseignant a donc consisté à s'en tenir à l'objectif premier du travail sur l'octogone.

III.3.2. La recherche des centres des cercles

a. les conditions du bilan

Pour la figure "deux cercles", deux groupes ont construit un diamètre de chaque cercle pour déterminer ensuite le centre. Cette construction consiste à déterminer par tâtonnements un segment de plus grande dimension dans le cercle.

b. le bilan

Examinons comment s'est faite l'invalidation de cette procédure. Vincent, l'élève qui vient au tableau, met la règle suivant un diamètre du petit cercle en disant "au point le plus grand".

ens.	*au point le plus grand. Alors, qui est ce qui a une critique à faire? Caren ?*
Caren	*simplement, s'il fait tourner la règle, ça peut être n'importe quel point*
ens.	*ça peut être n'importe quel point s'il fait tourner la règle*
élève	*Oui, mais c'est au pif maintenant*
ens.	*[...] voilà, ce qu'on appelle du tâtonnement [...]* ***ça n'est pas une méthode de construction parce que tu tâtonnes****. Alors, on ne l'acceptera pas.*

L'enseignant prend tout de suite parti, puisqu'il demande à la classe de "critiquer". Puis, il va surenchérir sur la réponse d'un élève ("au pif") pour refuser la "méthode". Mais son argument se situe, comme dans la séquence précédente, par rapport à ce que n'est pas une construction, sans dire pour autant ce qu'elle est. L'enseignant ne peut pas expliquer aux élèves ce qu'il considérerait, lui, comme une construction du diamètre, puisqu'il résoudrait du même coup le problème du cercle (nous retrouvons le paradoxe de l'enseignement souvent repéré par Brousseau). Il choisit de clore le débat sur cette procédure et d'inviter un élève à décrire la procédure attendue (droite perpendiculaire au milieu de la corde commune aux deux cercles).

Sa décision de détourner l'attention des élèves de la recherche des centres des cercles, qui est pourtant la stratégie initiale majoritaire (quatre groupes sur six) s'explique par le souvenir des difficultés que cette stratégie a soulevées lors de la séquence précédente. Nous verrons les conséquences de ce choix (fermeture du débat sur ce sujet) lors de la mise en commun pour la figure "cercle" (exercice 5).

III.3.3. Mise en oeuvre de la propriété d'orthogonalité

a. les conditions du bilan

La phase de bilan se présente sous un jour plus favorable que dans la séquence précédente pour la mise en oeuvre de cette propriété : il s'agit bien d'en faire le bilan, car elle a majoritairement été utilisée par les élèves pour chacune des quatre premières figures.

Pour l'octogone, il n'est pas surprenant qu'elle ait été utilisée, car les caractéristiques de la figure se prêtaient à l'utilisation de l'équerre. Pour la construction de la droite de symétrie des "deux cercles", la tâche est mieux réussie que dans la séquence précédente. Quatre groupes ont donné la construction attendue, le tracé de la droite perpendiculaire à la corde commune aux deux cercles en son milieu.

Pour les deux figures suivantes, trapèze et deux drapeaux, une difficulté est venue de l'absence de règle graduée. Trois groupes donnent des procédures qui sont des combinaisons de construction exactes et de tracés au jugé ou par tâtonnements. Mais la propriété d'orthogonalité est mise en oeuvre avec l'équerre pour au moins une des deux figures, dans chacun de ces groupes (construction de la perpendiculaire à une des bases du trapèze, ou de la perpendiculaire à un segment joignant deux points homologues). Un groupe a seulement vérifié la perpendicularité, une fois la construction faite pour le trapèze (il s'agit du groupe 6 qui disposait de la règle graduée). Les constructions du groupe 1 révèlent plutôt la non-maîtrise de certaines procédures. Pour les deux figures, la procédure adoptée est la même : droite passant par le point d'intersection de deux segments et perpendiculaire à un autre segment. Mais pour le trapèze, si le point d'intersection des diagonales est bien construit, la perpendicularité est déterminée au jugé. Pour les "deux drapeaux" au contraire, les "diagonales" n'en sont pas vraiment et par contre l'équerre est correctement utilisée !

Enfin, les trois derniers groupes ont résolu correctement le problème de construction dans les deux cas de figures et chacune des procédures utilisent la propriété d'orthogonalité une fois pour chacune des figures.

b. le bilan

Il y a des différences fondamentales dans le contenu de cette phase de bilan par rapport à celle de la séquence précédente.

La propriété d'orthogonalité est présente dans la phase de bilan de manière centrale pour chacune des quatre figures. Ceci est la conséquence de sa mise en oeuvre majoritaire par les élèves durant les travaux en groupes.

Mais, de plus, elle est explicitée par les élèves et pas seulement par l'enseignant, et dès la première figure (octogone).

ens.	*[...] tu as vérifié que cette droite était comment ?*
Louis	*euh, symétrique*
élève	*perpendiculaire*
Louis	*perpendiculaire*
ens.	*perpendiculaire avec l'équerre, bon d'accord.*

Les expressions "perpendiculaire", "angle droit", sont plusieurs fois donnés par les élèves pour les trois figures suivantes. L'enseignant s'est aussi attaché à faire exprimer par les élèves les raisons de l'utilisation de l'équerre (ce qu'il n'avait pas fait dans la première séquence) :

(octogone)	
ens.	*si tu veux utiliser l'équerre, c'est que tu veux tracer une droite qui est ?*
élève	*perpendiculaire*
ens.	*perpendiculaire au côté , hein !*

On retrouve chez les élèves cet implicite concernant l'objet auquel rapporter cette perpendiculaire, et la volonté de l'enseignant ici de le faire expliciter. Lors de la description de la construction de la droite de symétrie du trapèze, Karine commente d'elle-même :

Karine	*Après, on s'est servi de l'équerre, on a voulu faire l'angle droit*

Plus tard, pour une autre construction de cette même droite, l'enseignant précise :

ens.	*on trace la droite [...] qui passe par le point d'intersection des diagonales et qui est perpendiculaire au côté*

et, encore plus tard, à propos des deux drapeaux, il dit aussi "l'équerre est faite pout tracer des angles droits".

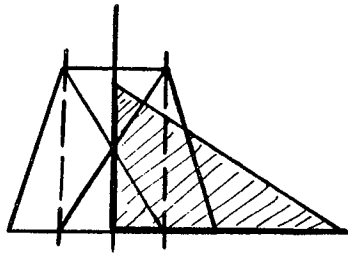
Il y a une volonté chez l'enseignant de faire expliciter aux élèves la propriété d'orthogonalité. On constate que les élèves le font plus facilement que dans la séquence précédente. Une des raisons est la réussite du travail en groupe, qui leur permet de mieux s'investir dans la phase de bilan.

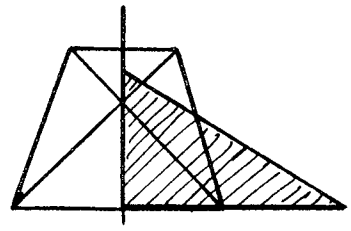
Dans cette séquence, la phase de bilan a donc rempli son rôle de stabilisation et d'explicitation de la propriété d'orthogonalité. Mais elle a permis aussi de familiariser les élèves avec l'équerre comme outil de construction, en détachant son domaine d'utilisation des propriétés intrinsèques des figures. Précisons cela.

On se souvient que beaucoup d'élèves avaient éprouvé la nécessité de construire un rectangle dans le trapèze pour déterminer sa droite de symétrie. C'est bien une nécessité qu'exprime Karine, au tableau :

Karine ***Il a fallu*** *qu'on trace un carré dans cette figure, dans le trapèze*

Mais Thomas propose une construction analogue, mais directement à partir du trapèze : le point construit est le point d'intersection des diagonales du trapèze et non du rectangle, et la direction est la perpendiculaire à une base et non à un côté du rectangle. L'équerre est utilisée sur la figure trapèze qui ne présente aucun angle droit.





Il est intéressant de noter que cette construction n'est pas issue des travaux en groupe. Il y a donc eu évolution dans les propositions des élèves pendant la phase de bilan.

III.3.4. La mise en oeuvre des propriétés d'incidence

a. les conditions du bilan

La aussi, la phase de bilan se présente de manière très différente dans cette séquence. En effet,

de la droite de symétrie pour les "drapeaux", toutes les paires de bi-points symétriques sont considérées tour à tour par différents élèves de la classe, y compris les sommets des triangles extérieurs aux hampes.

Au cours du bilan sur les deux drapeaux, la droite de symétrie est finalement désignée comme celle passant par tous ces points, qui sont donc alignés.

Sophie	*y'en a , tous les points, quoi ! [...]*
ens.	*mais de toute façon [...] il y a qu'une droite de symétrie. Donc, tous les points que vous avez tracés, ils sont comment? [...]*
élève	*superposés*
ens	*[...] ah, non, ils sont pas superposés. Ils sont tous sur la même droite, ce sont des points alignés, hein?*

Rapellons que les procédures des groupes correspondaient toutes à la construction de la perpendiculaire en un point. La procédure de construction de la droite n'utilisant que la règle non graduée a émergé pendant la phase de bilan. Ceci révèle la réelle participation des élèves.

Cependant, nous ne sommes pas certains que les relations d'incidence aient été mises en oeuvre par les élèves. La recherche, pour les deux drapeaux, de tous les points qui pouvaient être construits par intersection de deux segments, est une étape indispensable mais non suffisante. En effet, tous ces points sont finalement situés dans l'enveloppe convexe de la figure et peuvent donc être considérés comme des points "milieux" et acceptés pour cette raison. Il n'y a pas eu de points construits par intersection de droites prolongeant deux segments symétriques, qui, eux, ne peuvent être pris pour des milieux ou centres de la figure. Il aurait été intéressant de discuter avec les élèves du statut de ces points pour eux, car reconnaitre ces points est, à notre avis, un indicateur de la prise en compte des relations d'incidence.

III.3.5. La mise en oeuvre de la propriété d'équidistance

a. les procédures des groupes

Aucun groupe n'a résolu la construction des droites de symétrie du cercle. Une seule élève (Caren) a trouvé la procédure attendue de la construction de la médiatrice de deux points, mais les autres élèves de son groupe ne l'ont pas suivie dans sa démarche et n'ont pas adhéré à la solution proposée.

dans cinq groupes sur six pour le trapèze et quatre groupes sur six pour les deux drapeaux, un point de la droite a été construit par intersection de "diagonales".

Cependant, le point ainsi construit est presque toujours le point d'intersection des diagonales d'un **rectangle**. Ainsi, pour le trapèze, il s'agit du rectangle construit à l'intérieur de la figure, à partir de la petite base. Pour les deux drapeaux, il s'agit de rectangles construits à partir de deux paires de bi-points homologues situés sur les plus grands segments. Une seule procédure de groupe contient la construction du point d'intersection des diagonales du trapèze, et les deux points homologues qui sont les pointes des triangles n'ont pas été choisis.

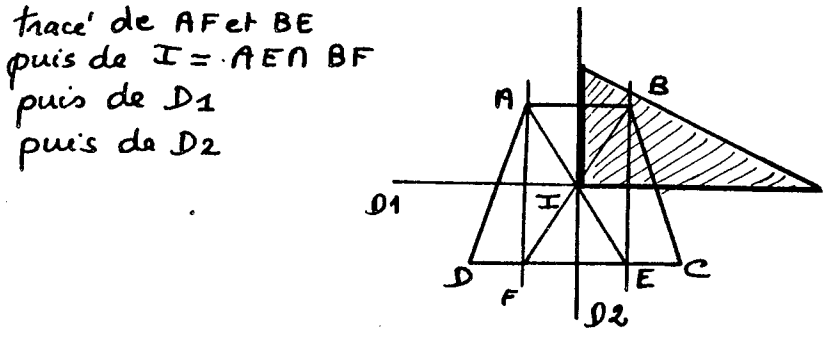
D'autre part, les points ainsi construits sont tous situés à l'intérieur de l'enveloppe convexe de la figure. Aucun n'est obtenu par prolongement de deux segments symétriques.

Il n'est donc pas sûr que les élèves aient mis en oeuvre les relations d'incidence. Ce qui ne fait aucun doute pour eux, c'est que la droite de symétrie passe par ce point, parce qu'il est au milieu de la figure. Nous avons déjà développé ce point de vue au paragraphe III.1.2.c.

b. le bilan

Il a d'abord permis d'établir que la construction du rectangle dans le trapèze n'est pas nécessaire, et que le point d'intersection des diagonales convient. Voici ce qui s'est passé.

La première construction proposée pour le "trapèze" est celle du groupe 5, qui était exacte mais très complexe, ce qui permet de la remettre en question en montrant que l'on peut faire plus simplement. La proposition de simplification vient des élèves du groupe 5 eux-mêmes, mais elle est (toujours) basée sur les diagonales du rectangle.



Puis un élève du groupe 1 propose de considérer le point d'intersection des diagonales du trapèze. Les élèves sont prêts à accepter cette procédure, comme le montre le réinvestissement immédiat qu'ils en ont fait pour la figure suivante. En effet, pour la détermination d'un point

Comme lors de la séquence précédente, l'activité des élèves est focalisée vers la recherche du centre du cercle, parce que, pour eux, la construction de ce point résout le problème posé. Les procédures de recherche d'un diamètre par tâtonnements sur la plus grande dimension dans le cercle ont été rejetées très vite, car la longueur de la règle n'était pas suffisante. De même, les tentatives de reconstruction du cercle par ajustement du centre et du rayon sont vite abandonnées : le rayon du cercle était trop grand pour l'ouverture du compas.

Ces impossibilités ont provoqué l'émergence de deux stratégies "nouvelles". Une de ces stratégies (S1) consiste à rechercher un point à égale distance de deux points du cercle, en ajustant l'ouverture du compas de façon à avoir le centre. Mais dans les trois groupes (1,3,5) qui l'ont mise en oeuvre, aucun de ces élèves (sauf un) n'a réalisé qu'il détenait une partie de la solution (construction d'une droite de symétrie) car l'objectif était à ce moment là pour eux de déterminer le centre.

Une autre stratégie (S2) consiste à partager le contour du cercle en arcs égaux, en essayant, par tâtonnements sur l'ouverture du compas, de trouver un découpage en nombre entier d'arcs (nombre pair pour plusieurs). L'objectif était de tracer un diamètre. Les cinq groupes qui n'avaient pas la règle graduée ont tenté cette procédure plusieurs fois. Ils ont tous rencontré le problème que le partage ne "tombait pas juste" (nombre non entier d'arcs). Cette procédure était liée à une idée de partage de la figure en deux parties isomètriques.

Ces deux stratégies sont apparues alternativement au cours des recherches dans les groupes; elles n'ont pas satisfait la majorité des élèves, mais aucun groupe n'a réussi à résoudre le problème.

b. le bilan

Nous avons développé cette partie de la phase de bilan au chapitre VII, §IV.4. Le lecteur est invité à s'y reporter. Nous reprenons ici les conclusions essentielles. La quasi totalité des élèves n'ont pas suivi la construction développée (par Caren) pendant la phase de bilan. Mais ce bilan n'en est pas vraiment un puisqu'une seule élève avait trouvé la procédure de construction mettant en oeuvre l'équidistance. Le choix de l'enseignant est de s'appuyer délibérément sur cette seule élève. Une conséquence est que le reste de la classe ne comprend pas la méthode présentée. L'incompréhension s'est manifestée à plusieurs reprises dans les questions des élèves sur la procédure de Caren, ainsi que le doute, voire le refus. Finalement, l'enseignant a du faire preuve d'autorité pour inviter les élèves à écouter sa proposition.

Nous retrouvons dans cette séquence un déroulement analogue à celui de la séquence précédente : l'enseignant prend appui sur le seul élève qui a résolu le problème afin de pouvoir avancer dans le bilan, en faisant éventuellement preuve d'autorité pour inviter les autres élèves de la classe à suivre, même lorsqu'ils ne sont pas d'accord. Il y a derrière cette décision l'espoir, plus que la conviction, que tous les élèves finiront bien par comprendre, s'ils acceptent d'écouter.

Nous vérifions aussi une fois de plus la difficulté de l'enseignant à faire participer les élèves à une phase collective concernant une activité qui n'a pas atteint, au moins partiellement, ses objectifs.

III.3.6. Une phase d'institutionnalisation

Le contenu de cette phase est développé au ch.VII, §IV.4. Nous invitons le lecteur à s'y reporter. En cherchant à repérer quelques éléments pour une caractérisation des phases d'institutionnalisation, nous avons retrouvé des indicateurs analogues à ceux de la séquence précédente (§III.2.3).
Ainsi, on remarque un changement dans le type de questions posées par l'enseignant, en même temps qu'il propose de nommer certains points de la figure :

ens. *Nous avons ce point, **que je vais appeler A, ça sera plus facile**, et celui-ci B [...] si je prends un point sur la droite de symétrie, qu'est ce que je peux en **dire** ?*

Nommer un point n'a un intérêt que si l'on passe à une autre activité que la précédente. L'enseignant demande maintenant aux élèves de dire quelque chose sur ce point, non plus de construire. On passe de l'action à l'explicitation.

On trouve aussi chez l'enseignant des expressions pour signaler que ce que l'on fait est important :

ens. *Bon, alors, **je voudrais qu'on réfléchisse à quelque chose**.*
*[...]bon, **je vois bien** deux choses, n'est ce pas ?*

Enfin, beaucoup de questions concernent la nature des objets géométriques ou leurs propriétés:

ens. *[...] qu'est ce que je pourrais **dire du segment** AB ?*
*[...] comment est ce que je vais la **caractériser** [la médiatrice] ?*

Là encore, il ne s'agit plus de faire quelque chose avec ces éléments, mais de dire quelque chose sur eux.

Nous verrons d'autres phases de ce type dans la suite du chapitre. A chaque fois, nous signalerons ce qui nous a semblé être spécifique des phases d'institutionnalisation.

III.4. Conclusion

Dans ce paragraphe (§III), nous avons analysé le déroulement des phases collectives de l'activité de construction avec instruments des droites de symétrie de figures. Les ressemblances et différences entre les deux séquences permettent d'apporter des éléments sur les conditions de bon déroulement d'une phase de bilan. Une condition qui nous semble primordiale est que cette phase de bilan prenne en compte effectivement le travail préalable des élèves. Nous avons vu que cela n'est pas facile pour l'enseignant. En particulier, un grand décalage entre les préoccupations des élèves et les objectifs de l'enseignant a conduit à une impossibilité de communiquer dans le première séquence. Il est donc nécessaire que le contrat lié à l'activité soit clair entre les deux partenaires, mais aussi que l'enseignant ait une bonne représentation des difficultés des élèves.

On peut penser que la manière dont se déroulent les phases de bilan est en relation avec les solutions développées par les élèves. En effet, dans la première séquence, l'enseignant a du employer des décisions d'autorité pour recentrer constamment le débat par rapport à ses objectifs. Ces décisions correspondent à un besoin de récupérer le temps perdu lorsque les élèves repartent sur leurs propres questions, par exemple : ne pas prendre en compte les procédures des élèves ou les réfuter très rapidement sans arguments convaincants, s'appuyer sur un élève qui a réussi pour mener à bien la solution en exigeant que les autres suivent. Or, la contrainte de temps n'est pas contournable dans une situation de classe.

Nous pensons que les conditions pour un "bon" déroulement de la phase de bilan étaient meilleures lors de la deuxième séquence.Ceci se manifeste de la manière suivante :
- la participation quasi générale des élèves (sauf pour le cercle), qui se manifeste par le nombre des interventions et des questions pertinentes;
- l'investissement des élèves dans le problème, que l'on peut repérer à travers le nombre et la nouveauté des procédures qu'ils proposent (qui ne sont pas toujours celles des groupes), leurs protestations lorsqu'ils ne comprennent pas, l'expression de leur avis sur ce que fait un élève ou l'enseignant;

- une plus grande disponibilité de l'enseignant, qui s'explique par le fait que les interventions des élèves vont globalement dans le sens qu'il souhaite.

Il est difficile d'évaluer les apprentissages effectifs réalisés dans une séance. Une des raisons est que ceux-ci sont soumis au temps. Nous rappelons seulement que l'activité de groupe qui a suivi immédiatement la phase collective, dans cette deuxième séquence, a montré que les élèves savaient majoritairement résoudre un problème analogue à celui du cercle pour lequel ils avaient été tous en échec auparavant. Il s'agissait de construire avec le compas et la règle non graduée, les droites de symétrie du rectangle. Les productions des élèves ont été analysées au ch. VII,§IV.5.

Les phases de bilan que nous venons de voir concernaient des situations d'action. Nous allons aborder maintenant analyser les formes et contenu de deux phases collectives qui ont suivi chacune une situation de communication (dans chacune des séquences).

IV. Discussion collective sur des messages d'élèves

IV.1. Deux messages de la première séquence

La situation de communication proprement dite a été décrite au chapitre VIII,§II.

IV.1.1. Objectif de cette phase collective

La capacité des élèves à ignorer une information contradictoire à une autre (il n'y a donc pas conflit de formulation) et le bon fonctionnement des implicites entre eux (qui permet aux décodeurs de compléter une information ou d'anticiper une information manquante) ont fait dévier la situation de communication de certains de ses objectifs. En particulier, la non équivalence entre droite de symétrie et droite partageant la figure en deux parties isométriques n'a pas été mise en jeu.

Les causes de cet échec peuvent être en relation avec la pertinence de l'activité par rapport aux objectifs : l'enjeu était peut-être trop faible. Mais on peut mettre en cause aussi le système "message-décodeur" lui-même. Il y a un grand décalage entre ce que les élèves appellent réussir et ce que nous ou l'enseignant entendons par là. Pour les élèves, réussir dans cette tâche consistait uniquement à ce que le décodage aboutisse à la réponse attendue par les codeurs, l'enseignant était lui concerné par le contenu de ces messages.

Pour mettre en défaut les implicites et interdire aux élèves d'ignorer l'incompatibilité des informations, une solution est d'introduire dans ce système "élèves (décodeurs)-message" un élément perturbateur. Cet élément ne peut être un autre élève de la classe. De plus, il doit avoir une connaissance au moins aussi grande des notions en jeu, afin de pouvoir intervenir à propos. L'enseignant peut jouer ce rôle d'élément perturbateur du système, en intervenant à des moments précis dans l'activité de décodage, pour proposer une solution différente mais plausible ou pointer les contradictions.

Dans le cadre d'une séquence d'enseignement, il est impossible à l'enseignant de jouer ce rôle pour chacun des systèmes "messages-décodeurs". Une phase collective de décodage peut répondre à cet objectif tout en restant réalisable. Le nouveau système est alors composé de la classe, de l'enseignant et du message à décoder.

L'enseignant a pris la décision de réaliser une telle situation dans une séance supplémentaire par rapport au projet de la séquence.

Pour cette activité, il fallait choisir un message qui contiennent des caractéristiques pertinentes par rapport aux objectifs visés. Ce message pouvait être "fictif", élaboré par l'enseignant, ou réel, produit par des élèves de la classe ou d'une classe de même niveau.

L'enseignant a choisi deux des messages élaborés par des élèves de la classe lors de la situation de communication. La dépersonnalisation de ces messages nous semblait préférable pour favoriser la critique objective de leurs contenus et l'investissement de tous les élèves dans le débat. Elle était possible, car cette séance ne venait pas immédiatement après la phase de communication en binômes.

IV.1.2. Analyse de l'activité collective

a. l'entrée dans l'activité

Un message est écrit au tableau par l'enseignant après qu'il ait dessiné la figure qui en est à l'origine. Puis celui-ci propose son propre décodage aux élèves en explicitant à voix haute chaque information (il fait éventuellement des choix sans le dire). Enfin, il demande aux élèves de juger cette solution.

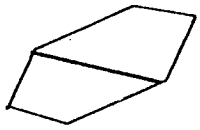
b. le choix des messages

Le premier message avait pour objectif de discuter avec les élèves du caractère de nécessité ou de suffisance d'une information. Nous avons choisi un message complet, sur le décodage duquel il était facile de se mettre d'accord. Voici le texte du message :

c'est vert, c'est un segment qui est aussi l'axe de symétrie de cette figure. Il touche deux droites parallèles.

Après avoir affiché la figure et écrit le message au tableau, l'enseignant propose une solution (la bonne) et demande l'accord des élèves. La question est ensuite de savoir si le décodage est encore valable et unique si on enlève une des informations. Il s'agissait en particulier d'évoquer l'existence de deux droites de symétrie.

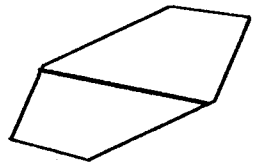
Au contraire du premier, le second message retenu est incomplet et problématique, car l'interprétation d'une des informations peut être multiple. En voici le texte.



un trait coupe la figure au milieu horizontalement. Une fois le trait tracé, la moitié de la figure est formé de trois traits. L'autre moitié est pareille.

Remarquons que, si l'on prend le mot "horizontale" dans son sens exact, le décodage est impossible. Si celui-ci est pris dans un sens très large, ou ignoré, plusieurs solutions sont alors possibles. Nous avons analysé ce message au ch.VIII (§II.2.4).

Comme pour le premier message, l'enseignant dessine la figure, écrit au tableau le message, puis propose la solution suivante :



Cette solution va à l'encontre de la solution qui prime chez les élèves (décodage comme droite de symétrie). En proposant cette solution inattendue, l'enseignant veut provoquer des réactions, éventuellement un rejet de la solution. Le débat devrait permettre d'abord de reconnaitre la pluralité des solutions, puis les différents statuts de ces droites dans la figure. Nous allons analyser ce qui s'est passé.

IV.1.3. Analyse du déroulement

a. le premier message

Après avoir écrit le texte du message, l'enseignant a donné sa solution en justifiant que c'est la seule qui convient. Puis il propose aux élèves d'enlever la dernière phrase du message :"il touche deux droites parallèles".

ens	*est-ce que maintenant, je peux décoder cette phrase comme cela ?*
Maud	*non, ce n'est pas la même chose. ça va traverser comme ça (mouvement vers le bas, Maud montre l'autre droite de symétrie).*
élève	*ça peut faire les deux. Il y aura deux solutions.*
Maud	*Parce que ce n'est plus obligatoire "touche deux droites parallèles".*
ens.	*donc, les extrémités peuvent être les sommets de la figure (il montre avec la règle le deuxième tracé. Il faut bien cette deuxième phrase.*

Ces échanges montrent que les élèves ont reconnu qu'il y a deux droites de symétrie, et deux

seulement. L'enseignant dirige ensuite le débat sur le statut de l'article défini précédant l'expression "axe de symétrie" dans le message, donc sur l'unicité d'une telle droite dans la figure.

ens. *[...] A-t-on droit à l'article "l" ?*
élève *Oui, parce qu'il n'y a qu'une droite de symétrie qui touche*

Derrière cet argument, il y a la reconnaissance qu'il n'y a qu'une seule droite partant de deux sommets qui soit droite de symétrie de la figure.

Cette phase a seulement permis de se mettre d'accord avec les élèves sur l'importance de certaines informations dans un message, et la nécessité d'une solution unique. L'activité collective confirme qu'il y a eu apprentissage dans la reconnaissance des droites de symétrie dans une figure. Mais tous les problèmes ne sont pas résolus, comme le montre la suite de la séance.

b. un message à décodage multiple

Beaucoup d'élèves ont manifesté leur désir de s'exprimer pendant que l'enseignant dessine la figure, puis écrit le message. Ils veulent donner la solution. L'enseignant leur demande de réfléchir, puis propose sa solution, sans commentaires. Les manifestations de élèves fusent pour réfuter la proposition de l'enseignant, certains par rapport à l'information "horizontale", d'autres par rapport au statut de non symétrie de la droite proposée.

élève *mais c'est marqué un trait horizontalement*
ens. *moi, je trace ça.*
plusieurs élèves s'exclament.
élève *ça peut pas être ça quand on plie*

C'est ce qu'attendait l'enseignant qui relève d'abord l'idée liée au pliage, pour essayer de la faire préciser à l'élève :

ens. *tu as lu "quand on plie" ?*
Yann *il y a plusieurs façons.*

Mais l'information de direction est aussi évoquée, pour être contestée :

élève *horizontalement, ça ne veut rien dire ici, parce qu'on peut tourner la figure.*
Yann montre la droite de symétrie qui passe par deux sommets de la figure.

ens. *est-ce que c'est plus horizontal que l'autre ?*
élève *c'est sûrement dans la longueur.*
ens. *quelque chose te le dit ?*
Chist. *ça peut être dans l'autre sens (il montre une diagonale NS).*
ens. *Oui, celui-ci est un peu plus long que les autres.*

Le problème de l'indication de direction est finalement résolu en décidant que la droite ne pouvant être horizontale dans la feuille, il s'agit donc de l'horizontale dans la figure. Il y a choix d'un référent qui permet d'accepter l'information.

Ensuite, l'enseignant défend la solution qu'il propose.

ens. *Est-ce que le trait vert est une droite de symétrie ou non ?*
F *non, ça va pas, c'est pas une droite de symétrie*
ens. *pourquoi ?*
F *le grand trait va pas se poser sur l'autre.*
ens. *à quelles conditions ?*
F *si on plie...*

Les réponses à la question de l'enseignant qui suit sont révélatrices de la conception erronée la plus répandue sur la droite de symétrie :

ens. *est-ce qu'il y a dans le message des mots qui pourrait nous faire croire à une droite de symétrie ?*
élèves *au milieu*
l'autre moitié est pareille

C'est l'enseignant qui pose le problème de la différenciation. Les élèves la traduisent en terme de superposition par pliage.

ens. *Et pourtant, ça n'en n'est pas une. Il faut donc quelque chose de plus pour parler d'une droite de symétrie. Qu'est ce qu'il faut ?*
F *il faut qu'elle coupe au milieu de la figure*
ens. *c'est pas vrai, ici ? .....*
élève *quand on plie*
ens. *les deux parties se*
élève *rejoignent*
ens. *se superposent, pas se rejoignent.*

L'enseignant a choisi de rester sur ce plan d'argument matériel (le pliage imaginé), au lieu de demander l'explicitation des propriétés qui différencient ces deux types de droites.

IV.2. Conclusion

Les élèves sont capables de repérer les droites de symétrie parmi les autres droites partageant une figure en deux parties isométriques. Rappelons que, lors de la situation de communication, aucun élément de type NS n'a été codé comme étant de type S. Il y a donc eu apprentissage depuis le début de la séquence à ce sujet. Cependant, si on décrit aux élèves un élément comme partageant la figure en deux parties isométriques, ils le décodent assez majoritairement comme une droite de symétrie. Cette erreur de choix peut s'expliquer par le caractère partiel d'un décodage (dès qu'on a une solution, on s'arrête), la première solution venant à l'esprit étant de type S. Mais cette erreur est en fait assez forte, puisque les élèves sont prêts à refuser un décodage de type NS qui convient pourtant parfaitement. Il y a là une véritable difficulté.

Lors du travail sur le deuxième message, c'est la superposition par pliage qui est désignée comme manquante, et non la propriété d'orthogonalité. Or, dans le cadre de la dialectique outil-objet (Douady, 1984), la propriété d'orthogonalité aurait du remplacer le pliage comme outil de résolution nouveau par rapport à l'ancien. On peut comprendre que, la tâche de construction avec instruments ayant été trop difficile pour les élèves, ceux-ci préfèrent utiliser encore le pliage. C'était donc à l'enseignant d'insister auprès d'eux pour qu'ils abandonnent l'outil pliage pour un outil censé être plus performant.

IV.3. Trois messages de la deuxième séquence

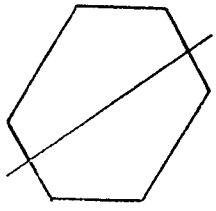
Cette phase de travail collectif concerne trois messages élaborés pendant la situation de communication de la deuxième séquence. Rappelons que la tâche des élèves, différente de celle de la première séquence, consistait à décrire une figure de manière à ce que les décodeurs puissent la reconnaitre dans un ensemble de quatre figures. Le lecteur peut de rapporter, pour la description et l'analyse de cette tâche, au ch.VIII, §III.

Le choix de ces trois messages a été fait par l'enseignant en fonction des difficultés qu'ils avaient soulevés à un moment de l'activité (codage, décodage, ou confrontation des réponses). Contrairement à la séquence précédente, cette phase collective était prévue tout de suite après la situation de communication (selon le temps restant). Pour cette raison, les messages sont nominatifs et ce sont les décodeurs qui viennent expliquer ce qu'ils ont fait.

Pour permettre au lecteur de suivre la phase collective par rapport aux questions soulevées par le message, nous en avons résumé les éléments pertinents des différentes phases.

IV.3.1. Le message de Marie-Laure et Sophie1 (binôme A3)

a. le texte du message



c'est un octogone : avec deux côtés parallèles et longs qui sont rejoints par deux segments, donnant un point à égale distance de deux droites.
Elle est coupée par une droite non symétrique (ces deux derniers mots sont barrés) ne partageant pas la figure en deux parties égales, et ne passant pas par les sommets.

b. les phases de codage, décodage, confrontation

La phrase du message qui nous intéresse est celle qui contient une information erronée :

Elle est coupée par une droite ne partageant pas la figure en deux parties égales

Cette information remplace un groupe de mots "droite non-symétrique" qui ne convenaient pas aux élèves codeurs, mais qui contenaient une information juste. Ainsi, à cause d'un problème de formulation, les élèves ont transmis une information erronée qu'elles pensent équivalente.

Au moment du décodage, les mots rayés "non symétriques" ont immédiatement été pris en compte et ont conduit les élèves décodeurs à éliminer tout de suite les deux figures présentant

une droite de symétrie. La suite de la phrase, qui contient l'information erronée, n'a été lue qu'après ce premier choix dans les figures et n'a provoqué d'abord aucune difficulté. Le problème a été soulevé par un élève lors d'une phase de vérification, mais son intervention n'a pas été prise en compte par son camarade qui a préféré sélectionner dans le message les informations, dont celle qui avait été rayée, qui lui permettaient à coup sûr de faire un choix.

Au moment de la confrontation, une discussion va s'engager sur le partage de la figure en deux parties égales, qui a permis de faire réaliser aux élèves émetteurs qu'ils avaient donné une information fausse disant autre chose que ce qu'ils voulaient dire. Pourtant, cette discussion ne redonne pas à l'expression "non symétrique" toute son importance.

Enfin, aucun des quatre élèves n'a cherché une autre formulation pour décrire cette propriété de non-symétrie. Finalement, la différence entre les deux propriétés de "partage en deux parties égales" et de symétrie n'est pas complètement explicitée et la déstabilisation de cette équivalence n'est pas assurée (sauf pour l'élève qui a soulevé le problème). Mais le travail est bien avancé, et on peut faire l'hypothèse que la phase collective va permettre la prise de conscience et l'explicitation de cette différence.

c. la phase collective

Lorsque l'enseignant demande à un des élèves de lire le message et d'expliquer les difficultés qu'ils ont rencontré en le décodant, le premier élément qui est porté à la discussion est l'expression rayée : "non symétrique", mais on en vient très vite à l'information erronée.

Elève	*Et bien, "non symétrique", elles l'avaient d'abord mis entre parenthèses et après elles l'ont barré.*
Ens.	*Donc, ça ne faisait pas partie du message ? Et ça vous a aidé quand même ?*
Elève	*ouais ! [...]*
Elève	*"ne partageant pas la figure en deux parties égales"*
Ens.	*[...] Essayer de nous expliquer ce qui ne vous convenait pas dans cette expression...*

S'engage un travail d'observation des quatre figures, affichées au tableau, qui aboutit à la conclusion :

Elève	*elles avaient toutes les mêmes parties égales*

Devant la difficulté des élèves à poursuivre, l'enseignant va formuler une question :

- est-ce qu'on les [les parties égales] obtient de la même façon ? [...] comment tu pourrais nous montrer ... en manipulant ... que ces deux parties sont égales ?

Il place donc la validation sur le plan de la preuve matérielle, ce que l'élève saisit très bien.

Elève *Si elles se superposent bien ...*

Ens. *Voilà, si on plie selon la droite de symétrie ... il y a bien superposition des deux parties. Bon. Et si tu plies ici, est ce qu'il y a superposition ?*

Elève *non !*

Ens. *Pourtant vous dites elles ont quand même la même surface ... puisqu'on ne peut pas plier ... qu'est ce qu'il faudrait faire pour arriver à les superposer ? En admettant qu'on découpe ...*

Cyril *Si on découpe là, ça et ça c'est la même chose. Ils sont superposables ...*

Elève *Cette partie on la prend comme ça ! (geste de demi-tour)*

La conclusion de l'enseignant contient beaucoup d'implicites. Nous pensons qu'elle ne permet pas aux élèves de reconnaître les propriétés qui ont été évoquées :

Ens. *voilà ... Donc, elles sont bien superposables, mais à condition de tourner. Ca n'est pas la même superposition qu'ici...*
Donc, il faut faire très attention lorsqu'on dit les parties égales finalement.

Ainsi, l'enseignant a placé le contrôle de cette différence retournement-non retournement à un niveau de manipulation et de preuve matérielle qui n'est pas réalisée : la superposition se fait par pliage le long de la droite ou par demi-tour après découpage. L'enseignant n'est pas passé au stade d'une formulation de ces caractéristiques. Il n'y a pas eu non plus l'élaboration d'un contrôle qui serait basé sur des propriétés de la droite de symétrie.

Enfin, l'enseignant n'a pas posé la question d'une réécriture du message. La formulation était pourtant la difficulté initiale rencontrée par les élèves codeurs et, plus généralement, un objectif essentiel de l'a situation de communication. Une explication est peut-être que la formulation orale lui a semblé suffisante.

d. conclusion

Nous pensons que ce débat collectif n'a pas atteint ses objectifs. En effet, l'erreur discutée avait déjà été repérée par les élèves concernés. Les autres élèves n'ayant pas le message écrit sous les yeux ont eu des difficultés à s'investir dans le problème. Le principal intérêt était une

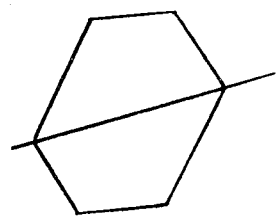
reformulation de la phrase erronée, mais l'enseignant s'est contenté de la donner oralement, par morceaux.

IV.3.2. Le message de Jeremy et Sophie2 (binôme A6)

a. texte du message

Ce message est le seul qui n'a pas été décodé entièrement. Nous le reproduisons ci-dessous.

> *A cause de l'emplacement de la droite de symétrie, la figure n'est pas symétrique. La droite de symétrie est placée en oblique.*



b. résumé des différentes phases

La reconnaissance des deux catégories de figures s'est avérée longue et difficile, avec des changements d'opinion. A plusieurs reprises, au moment de rédiger, la discussion sur la propriété de symétrie de figures a ressurgi. Il semble qu'une des causes était que l'élément NS tantôt appartenait à la figure, tantôt non. L'indication de type repérage géographique a été, elle, imposée par l'un des élèves, qui différencie par le mot "oblique" la direction de l'élément par rapport à une autre direction presque verticale.

Le message comporte donc deux éléments qui devraient poser question au moment du décodage :
- une phrase incohérente du point de vue mathématique
- une information sur l'orientation de la droite qui risque de fausser la recherche de la figure décrite, puisque l'orientation des figures a été volontairement fixée différemment pour les émetteurs et les récepteurs.

Or, au moment du décodage, la phrase "incohérente" est décodée immédiatement et ne soulève ni remarque, ni difficulté. Par contre, la lecture de la deuxième phrase du message pose tout de suite un problème, et les élèves décodeurs ne pourront pas départager les deux figures restantes. La confrontation entre les deux binômes ne porte au débat que le manque d'information qui n'a pas permis de choisir entre les deux figures non symétriques. Ce problème du choix entre les deux figures ne sera pas résolu. L'incohérence de la phrase n'est apparue dans aucune des phases de la situation de communication. C'est pourtant à cause de cette phrase que l'enseignant choisit ce message.

c. la phase collective

Patricia vient au tableau pour expliquer le problème qu'elle a rencontré. Sur la demande de l'enseignant, elle lit entièrement le message puis enchaine immédiatement sur un commentaire :

Alors c'est ça qui nous a géné parce que

Mais l'enseignant l'interrompt car Renaud, dans la salle, fait une "drôle de tête". Cette intervention de l'enseignant est capitale car elle va diriger la discussion sur la contradiction contenue dans la première phrase. Or, Patricia s'apprêtait à parler de la deuxième phrase (les échanges précédents le prouvent). Suivons un moment de ce débat.

Ens.	*Renaud ... fait une drôle de tête*
Renaud	*ben "une droite de symétrie", "elle est pas symétrique"*
Ens.	*qu'est ce qui se passe là ? ... Est ce qu'on peut parler de droite de symétrie en disant qu'il n'y a pas de symétrie ?*
Elève	*Non, mais là*
autre él	*ah, oui! C'est plus une droite de symétrie*
Ens.	*Ah ! ... C'est simplement une droite. Hein ! Donc, vous les avez induit en erreur en leur faisant penser à symétrie alors que vous dites tout de suite après qu'il n'y a pas de symétrie.*
Elève	*oui, mais il y avait*

L'enseignant se trompe sur ce qui a induit en erreur les élèves. Il soulève le vrai problème du message : la contradiction entre les deux propriétés "la figure admet une droite de symétrie" et "la figure n'est pas symétrique", qui met en jeu des connaissances qui sont au coeur même de la séquence, mais ce n'est pas le problème actuel de Patricia, comme le montre son intervention.

Elève	*C'est pas ça qui nous a gêné le plus*
Ens.	*ah ! ben, dis ..*
Elève	*La droite de symétrie est placée en oblique. Alors les deux figures qui étaient pas symétriques, les deux droites sont placées en oblique, alors on n'a pas pu deviner*

L'élève est resté sur son problème : le manque d'information pour départager les deux figures non symétriques. Ses phrases contiennent les mêmes expressions contradictoires que le message, ce qui montre qu'elle n'a pas accordé à ce sujet l'importance que l'enseignant lui donne. Elle ne semble pas accorder plus d'attention à cette incohérence que les rédacteurs du message. En ce sens, la phase collective est un échec : elle n'a pas servi à la prise de

conscience du problème par les élèves qui justement étaient concernés.

A partir de là, les interventions de l'enseignant vont consister d'une part à invalider l'utilisation des indications de directions dans les messages en rappelant le contrat et, d'autre part, à faire exprimer l'information manquante qui permet de résoudre le problème. Cette information manquante est identifiée sans difficulté par les autres élèves : la droite passe par les sommets ou par les milieux des côtés opposés. Ce que n'avaient pas pu faire les élèves du groupe. L'enseignant ne revient à aucun moment sur la rédaction de la première phrase du message. Il aurait fallu pointer tout ce que cette phrase remettait en question par rapport au travail fait en particulier dans la première séance sur les droites de symétrie de figures. C'est la définition même de figure symétrique et le statut de la droite de symétrie qui sont en jeu.

d. conclusion

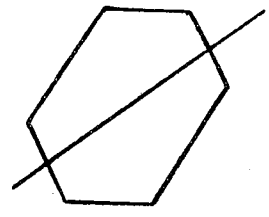
Cette phase collective est un exemple d'un décalage entre les préoccupations des élèves et celles de l'enseignant, qui fait échec à la communication entre ces partenaires. Il y a eu au départ une interprétation trop rapide de l'enseignant sur ce qui devait faire problème à l'élève. Le temps peut être une cause à cette précipitation, mais une représentation erronée des connaissances des élèves paut aussi avoir joué. L'enseignant a intrrompu l'élève parce qu'il était sûr de ce qu'il allait dire. Or, il se trompait.

Comme l'élève est resté accroché à son vrai problème, il n'a pas suivi le débat important que l'enseignant a essayé de mener avec la classe. Il n'a donc pas profité des apprentissages en jeu dans ce débat, et qui le concernait justement directement. En ce sens, cette phase n'a pas atteint les objectifs qu'elle devait.

IV.3.3. Le message de Karine et Louis (binôme A5)

a. le texte du message

- *Une droite coupe la figure; mais se n'est pas sa bisectrice*
- *Cette droite ne passe pas par des sommets*
- *Elle coupe les deux des quatre plus petits segments.*



b. les différentes phases de la communication

Le mot "bissectrice" est immédiatement adopté par les deux élèves, et en suivant les démarches des élèves codeurs, on se rend compte qu'il désigne bien une droite de symétrie. A un moment, une des élèves a essayé d'exprimer qu'une bissectrice se rapporte à des sommets, et donc que ce terme lui semblait non approprié. Mais elle n'a pas été écoutée.

La première information de ce message n'a pas de sens, parce qu'on ne sait pas ce qu'est la "bissectrice d'une figure". Les deux autres informations permettent de résoudre complètement le problème et conduisent à la bonne solution sans que soit mises en oeuvre les propriétés de la droite de symétrie.

Au moment du décodage, aprsè lecture des deux premières phrases du message, l'un des élèves désigne immédiatement les deux figures pour lesquelles la droite ne passe pas par les sommets. Ainsi, la première information retenue est celle contenue dans la deuxième phrase. Après avoir lu ensemble la dernière phrase du message, avec quelques difficultés dues à la structure de la phrase, ils se mettent d'accord sur la réponse à donner (la bonne).
Les élèves sont donc aller chercher l'information manquante dans la phrase suivante. Comme ils l'ont trouvé et qu'elle permet de résoudre le problème du choix, ils laissent de côté la première phrase du message.

La question de la signification du mot "bissectrice" est posée lors d'une relecture du message, mais elle n'est pas relevée par l'autre élève, satisfait de la réponse trouvée.

Lors de la phase de confrontation, le mot "bissectrice" est tout de suite porté à la discussion. Mais la réponse est immédiate et dite sur un ton qui veut minimiser l'erreur de formulation. De plus, l'intervention des élèves décodeurs va dans le même sens de minimisation de l'erreur, puisqu'ils précisent qu'ils ne se sont pas servi de cette information.

La confrontation a confirmé que l'information avait été mise de côté par les élèves décodeurs. Elle a permis de mettre d'accord tous les élèves du groupe sur le fait qu'elle était fausse et qu'il ne s'agissait que d'un problème de mots, l'idée sous-jacente étant juste. L'enseignant va porter ce message au débat dans la classe, probablement parce que la confusion de la bissectrice avec une droite de symétrie lui semble devoir être débusquée.

c. la phase collective

Le mot "bissectrice" est immédiatement porté au débat et l'enseignant va aider l'élève qui a lu le message à formuler ce qu'il voulait dire.

élève - *on a voulu dire symétrie*
ens. - *vous avez voulu dire, ça n'est pas ?*
élève - *sa droite*
ens. - *sa droite de symétrie. Ils ont mis bissectrice. C'est important le vocabulaire?*
élève - *oui ! [...] ça explique tout*

Finalement, le débat est rapidement clos car l'erreur est évidente pour tous les élèves, de même que le mot juste qui convenait. L'enseignant n'a pas proposé aux élèves de formuler un nouveau message juste.

IV.4. Conclusion

La phase de travail collectif menée par l'enseignant a permis de porter à la discussion les trois messages comportant des informations erronées ou incohérentes, et qui pouvaient donc poser problème. L'enseignant se donnait ainsi les moyens de discuter de la nécessité d'un langage commun (message A5) et de stabiliser les connaissances suivantes :
- il existe des droites qui partagent la figure en deux parties égales et ne sont pas des droites de symétrie (message A3);
- une figure non symétrique n'a pas de droite de symétrie (message A6).

L'analyse de ces trois messages a montré que le traitement par les élèves des informations erronées contenues dans un texte dépend des caractéristiques du texte. Ainsi, une information erronée "évidente", c'est-à-dire reconnue comme désignant autre chose, est corrigée implicitement par les élèves qui n'éprouvent pas la nécessité de l'invalider explicitement. Le rôle de l'enseignant est de la faire expliciter.
Une information qui pose problème ou est impossible à vérifier est mise de côté : les élèves essaient de résoudre le problème sans elle. Elle n'est donc pas forcément soumise au débat lors de la phase de confrontation. L'enseignant a pour tâche de trouver le moyen d'obliger les élèves à la prendre en compte (par exemple en lui donnant un statut qui la rend indispensable, dans un message non redondant).

Ainsi, pour l'expression "bissectrice", l'enseignant s'est trouvé devant un problème très local (4 élèves) et qui avait déjà été réglé dans le groupe : il ne lui restait qu'à affirmer la nécessité d'un langage précis. Mais cette affirmation ne produit pas l'effet qu'elle devrait puisque la communication a marché malgré cette confusion.

Le débat sur l'information incohérente "à cause de l'emplacement de la droite de symétrie, la figure n'est pas symétrique" n'a pas atteint ses objectifs. Elle était pourtant essentielle par rapport aux apprentissages en jeu dans la séance, puisqu'elle met en cause la définition même de figure symétrique. Mais l'incohérence mathématique de la phrase n'en n'était pas une, ni pour les rédacteurs du message, ni pour les décodeurs. Et les difficultés des élèves au moment du décodage étaient autres. L'enseignant a centré le débat sur cette question, tandis que les élèves du groupe tentaient en vain d'exprimer le problème qu'ils avaient rencontré. Le décalage entre les préoccupations de l'enseignant et celles des élèves ont abouti à l'échec de ce débat.

Par contre, l'information "la droite ne partage pas la figure en deux parties égales" a bien été différenciée de la propriété de non-symétrie. Mais l'enseignant a montré cette différence sur des arguments matériels (retournement, pliage) sans évoquer les propriétés géométriques de la droite de symétrie.

Dans aucune des deux séquences, l'enseignant n'a suggéré aux élèves de réaliser une autre formulation écrite du message. Or, on a vu que l'écriture des messages a parfois posé problème. Il nous semble que cela aurait permis d'une part, de dévoluer le débat à toute la classe et, d'autre part, d'obliger les élèves à aller plus loin dans leurs explicitations.

V. Transformation de figures

V.1. Introduction

Nous avons étudié au chapitre IX le déroulement de l'activité de construction avec instruments du symétrique d'une figure par rapport à un axe. Celui-ci a été très différent d'une séquence à l'autre du point de vue de la réussite à la tâche et des connaissances mises en jeu. Nous allons voir que cela a eu des conséquences sur le déroulement des phases de bilan, c'est-à-dire sur leur contenu et la participation des élèves.

V.2. Phase collective de la première séquence

V.2.1. Les conditions du bilan

Les élèves avaient à leur disposition les quatre instruments. Lors du travail en groupe, ils ont peu utilisé l'équerre et ce qui se rattache à la propriété d'orthogonalité est absent des échanges. Le report de "distances" et de longueurs avec la règle graduée est la procédure majoritaire. Pour la figure 1 (demi-feuille de lierre), la direction de report des distances à l'axe est choisie au jugé, sous contrôle perceptif, même si elle est très proche de la perpendiculaire à l'axe. Pour la figure 2 (drapeau), cette direction est majoritairement choisie par rapport à la figure, dans le prolongement du segment qui coupe l'axe. La propriété d'équidistance à l'axe n'est pas utilisée.

On peut donc dire qu'aucune procédure de construction juste n'a été élaborée pendant les travaux des groupes, si l'on fait exception de celle correspondant au report des distances sur la perpendicualire à l'axe, donnée par un seul groupe. L'enseignant doit donc, pendant la phase de bilan, amener les élèves à les découvrir.

V.2.2. Déroulement le bilan

a. la difficulté de faire prendre en compte la propriété d'orthogonalité

Deux causes ont joué contre l'investissement des élèves dans cette partie du bilan qui concerne la demi-feuille de lierre. La première est que tous les groupes ont fourni une production perceptivement juste. Ils ne comprennent pourquoi l'enseignant insiste pour leur dire qu'ils n'ont pas bien résolu le problème (parce que au jugé sur la direction par rapport à l'axe).

La seconde est que l'élève qui vient au tableau est le seul qui a effectivement utilisé l'équerre. Il réalise facilement sa construction devant des élèves qui l'écoutent distraitement, puisqu'ils sont persuadés d'avoir fait la même chose. En fait, on a vu qu'ils ont tous utilisé une fois ou deux cet instrument, mais pas systématiquement.

L'enseignant et Christophe travaillent donc tous les deux. Pendant que l'élève trace ainsi les symétriques de tous les sommets, puis joint les segments, l'enseignant lui fait expliciter ce qu'il fait.

Enseignant *Tu traces la droite qui est comment par rapport à la droite de symétrie ici ?*
Christophe *perpendiculaire.*
Enseignant *Perpendiculaire à la droite de symétrie. Ensuite ?*
Christophe *Je prends la règle et je mesure là.*
Enseignant *La distance de quel point à quel point ?*
Christophe *De ce point à celui-là. (du point à l'axe, 6cm., mesure le segment, reporte et joint au point invariant) puis "de ce point à celui-là"...il trace.*
Enseignant *[...]Par chaque point que tu as repéré, tu traces la droite qui est comment ?*
Christophe *perpendiculaire à l'axe de symétrie.*

La propriété d'orthogonalité a été largement développée et exprimée. Pourtant, les interventions des élèves qui suivent cette phase montrent qu'ils n'ont pas compris l'intérêt de ce travail au tableau. En tout cas, ils proposent leurs constructions au jugé comme valables. La protestation de deux élèves lorsque l'enseignant leur fait remarquer qu'ils n'avaient pas cherché la perpendiculaire l'illustrent bien.

David *On a mesuré tout ça. On a reporté soit avec le compas, soit avec la règle graduée. Ensuite, on a mesuré ici...fait un trait sur l'équerre.*
Enseignant *Oui. Vous ne vous êtes pas occupé de l'angle droit ? de la droite perpendiculaire ?*
David *Si, en mesurant ici et on reporte ici.*
Enseignant *En prenant ici l'angle droit ou n'importe comment ?*
David *Angle droit.*
Enseignant *C'est la même méthode.*

L'enseignant aurait du demander à l'élève *comment* il avait pris l'angle droit, car c'est là qu'est le noeud du problème. Il est tellement préoccupé par la mise en oeuvre de la propriété d'orthogonalité, qu'il va refuser de prendre en compte la construction au compas évoquée par un élève, en donnant comme argument qu'ils n'ont pas considéré l'angle droit :

Enseignant	*Est ce qu'un autre groupe a fait autrement?*
Un élève	*Un peu avec le compas.*
Enseignant	*Mais vous avez eu beaucoup de mal, parce que vous avez complètement oublié l'angle droit, hein ! Alors..*
Elève	*Mais non ! On l'a fait.*

Mais l'enseignant ne prend pas la proposition de l'élève en considération.

En conclusion, le paradoxe de cette phase collective est d'insister sur un élément de la transformation (perpendicularité à l'axe) dont les élèves ne disposent pas (on en a confirmation pour la figure suivante), mais qu'ils sont persuadés avoir mis en oeuvre. De plus, seul l'enseignant sait pourquoi il insiste autant : l'orthogonalité à l'axe n'a pas été utilisée pour la construction du symétrique de la figure 2. Les élèves n'ont pas conscience que cette propriété est solution d'une difficulté qu'ils ont tous rencontré : à partir d'un point, quelle direction choisir comme support de construction pour déterminer son symétrique ? Ces constatations expliquent les décalages entre les préoccupations de l'enseignant et celles des élèves.

b. la non remise en question du rappel par prolongement

Rappelons que la majorité des groupes ont adopté une procédure de rappel par prolongement pour déterminer l'image du premier point. Or, cette procédure n'a pas été portée au débat pendant la phase collective. Si les contraintes de temps en sont une des raisons (cette correction s'est faite très vite), elle ne suffit pas et nous allons analyser ce qui s'est passé.

le problème de l'intersection avec l'axe

Les premiers échanges entre l'enseignant et les élèves montrent la difficulté que crée l'intersection de la figure avec l'axe.

Un élève	*Alors, d'abord, quand on a commencé, on s'est dit que ... cette droite ça s'arrête jamais...pas symétrique. [...]*
élève	*La figure continue [...]Elle passe pas en ligne droite, mais en diagonale*
Enseignant	*Donc, la figure, qu'est ce qu'elle fait ?*
X1	*Elle est pas finie.*
X2	*Elle est pas normalement comme dans les autres figures ...*
X3	*Elle traverse la droite*
Enseignant	*Voilà. ..Elle traverse la droite de symétrie.*

L'idée exprimée est qu'il ne peut pas y avoir de symétrique, puisque la figure a été prolongée dans une direction qui ne convient pas. Ceci confirme ce que nous avions déjà relevé dans nos expérimentations, à savoir que l'élément de l'autre côté de l'axe peut être considéré comme le début de la figure symétrique. La conception que la figure est d'un seul côté par rapport à l'axe est très présente derrière ces arguments. Mais, d'autre part, la direction de cet élément est rapportée à l'axe : elle ne "passe pas en ligne droite". On peut supposer que c'est la direction perpendiculaire à l'axe qui est évoquée.

C'est encore une fois la même impression qui se dégage de ces échanges : la propriété d'orthogonalité est quelque part dans le champ de connaissances des élèves sur la notion de symétrie axiale. Mais elle est très vague : elle s'est traduite par exemple dans un groupe par la construction d'un segment-image perpendiculaire au segment-objet.

un vieil outil pour invalider une construction fausse

Cette construction a été proposée au tableau par une élève de ce groupe, Emilie. Examinons comment elle a été invalidée.

Emilie	*Après, on a pris l'équerre. On a mis l'équerre sur la droite (BE)*
	[...]on a fait le point.
Enseignant	*Alors, ce point est le symétrique de quel point ?*
Emilie	*Celui-là. (elle montre B').*
Enseignant	*C'est à dire que si on plie*
Emilie	*..[inaudible]*
Enseignant	*Tu en es sûre ?*
Emilie	*Oui !*
Enseignant	*Oui ! Vous avez essayé ?*
Emilie	*Non.*
Enseignant	*Tu ne le trouves pas un petit peu plus près ici de la droite que celui-ci ?*
autre élève	*et puis, il est plus haut aussi, là !*

Tous les arguments donnés pour invalider cette construction sont de type perceptif, et c'est l'enseignant qui donne des arguments relatifs au pliage, suivi en cela facilement par l'élève. De plus, l'enseignant n'a pas été traduit ces arguments en termes d'orthogonalité à l'axe. A aucun moment, il n'a été exprimé le fait que la perpendicularité était à prendre par rapport à l'axe, et non par rapport à certains éléments de la figure. Or, cette connaissance, justement très difficile à utiliser, était au centre du problème.

appui sur la seule construction juste

L'enseignant a choisi délibérément ensuite de faire venir au tableau le seul élève qui avait fait une construction exacte. Elle est exécutée rapidement par cet élève, qui construit les symétriques de tous les sommets sans jamais se tourner vers la classe. De plus, Emilie n'a pas pu confronter directement sa solution avec cette construction, car celle-ci a été faite sur une autre feuille. Après cette proposition, le bilan est considéré comme terminé.

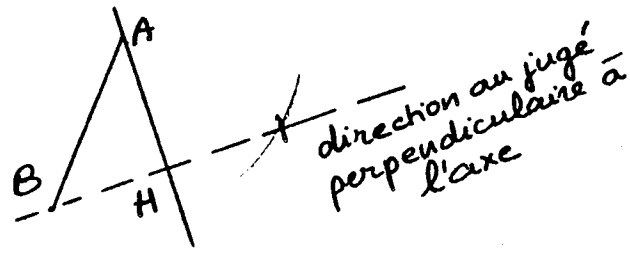
conclusion

On peut s'étonner des décisions de l'enseignant dans cette partie de la phase collective. D'abord, la procédure initiale majoritaire de rappel par prolongement n'a pas été discutée, ni les procédures erronées de transformation d'un segment vertical en un segment perpendiculaire à un autre, ou en un segment vertical. Cette décision de ne pas chercher à savoir ce qu'on fait les élèves va ici de manière flagrante à l'encontre de leurs apprentissages. Si cette décision est le résultat d'une contrainte de temps, une question se pose : comment définir un état de la situation à partir duquel on peut décider de clore un débat ? et doit-on respecter cette contrainte en tout état de cause ?

Toutes les procédures fausses des élèves relèvent d'un problème de détermination de directions de droites. Il s'agit aussi bien des directions des supports de construction que des transformées de directions dans le plan. La solution est la mise en oeuvre de la propriété d'orthogonalité. Or, la seule production fausse portée au débat est réfutée, par l'enseignant lui-même, par des arguments de pliage. Celui-ci a fait abstraction des acquisitions des élèves sur les propriétés de la droite de symétrie, en utilisant le premier outil défini au début de la séquence. Ce choix est rassurant, l'outil pliage étant facile d'emploi pour les élèves, mais il ne met pas en valeur les apprentissages qui ont eu lieu pendant la séquence.

c. deux absentes : la propriété d'équidistance et les relations d'incidence

La propriété d'équidistance n'a été ni mise en oeuvre, ni évoquée, pour la figure 2. Pour la demi-feuille de lierre, une construction au compas a été proposée par un élève, mais c'est plus la propriété d'isométrie qui était en jeu. En effet, la procédure consistait à déterminer un point comme intersection de deux arcs, l'un correspondant au report de la longueur d'un segment à partir d'une de ses extrémités, l'autre arc correspondant à la distance du point à l'axe, déterminée par tâtonnements sur une direction perpendiculaire au jugé à l'axe.



Maud	*On a pris la longueur de là à là (BH), puis la longueur de là à là (HB')..*
	reporté avec le compas (arc). Ensuite, AB reporté avec le compas.
Enseignant	*Et tu poses la pointe sèche où ?*
Maud	*Sur la droite de symétrie.*
Enseignant	*Est ce que c'est très précis le point sur la droite ? Un peu gênant. Qu'est ce*
	qu'il faudrait faire en plus pour qu'il soit bien déterminé, ce point ?
Autre élève	*On peut le déterminer avec l'équerre.*
Enseignant	*Voilà. On peut le trouver avec l'équerre, puis avec le compas... Ce qu'a fait*
	votre camarade là.

L'enseignant avait ici une occasion d'introduire les procédures utilisant le compas, mais il a profité de l'intervention d'un élève pour revenir à une procédure avec l'équerre. Ce choix correspond à un souci, prioritaire pour lui dans cette phase, de mise en oeuvre de la propriété d'orthogonalité.

Les relations d'incidence ont été peu mises en oeuvre dans les travaux de groupes. Il faut dire que les caractéristiques de la figure n'induisaient pas leur utilisation. Un point de la figure situé sur l'axe est considéré invariant de façon implicite par tous les élèves, ce qui ne signifie pas qu'il est reconnu comme point d'intersection de deux segments symétriques.

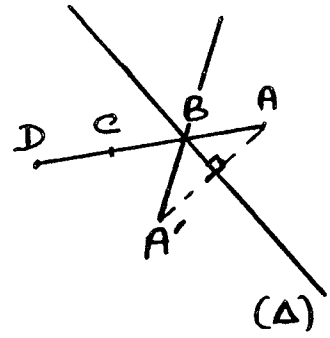
Pour la figure 2, cinq des sept groupes ont prolongé le segment qui coupe l'axe. Par suite, le point d'intersection de ce segment avec l'axe n'est pas matérialisé dans la construction du symétrique. Il est donc impossible de savoir si le segment et son image se coupent sur l'axe. Par contre, dans les deux autres productions, les deux segments se coupent au point d'intersection du segment-objet avec l'axe.

La phase de bilan n'a pas mise en évidence ces relations.

La première construction proposée est celle pour laquelle le segment symétrique au segment qui coupe l'axe lui est perpendiculaire. L'emplacement de leur intersection n'est pas examinée, car la préoccupation de l'enseignant est d'invalider globalement cette construction.

La deuxième construction est celle du seul élève qui a réussi la tâche. Au moment de la phase

collective, Christophe a repris la même procédure que celle adoptée pendant le travail du groupe (ch.IX, §II.3.2). Après avoir déterminé A' à égale distance de A, avec l'équerre et la règle graduée, Christophe trace la droite passant par A' et B, en la prolongeant au delà de Δ. L'enseignant intervient alors :



ens *Ce point (en montrant B), quel est son symétrique ?*
Christophe *lui-même*
ens. *c'est lui-même, donc tu as déjà deux points.*
Et, par deux points, il passe ? une? droite.
Christophe trace la droite passant par A' et B.
ens. *ensuite, tu viens mesurer la longueur du segment*
Christophe mesure BD et reporte la longueur. Puis il passe au triangle.

L'intervention de l'enseignant privilégie l'invariance du point B. De plus, le segment AD est décomposé en deux parties de part et d'autre de ce point, et non considéré dans son entier.

Alors que la construction élaborée pendant le travail en groupe mettait en oeuvre les relations d'incidence, elles n'apparaissent plus ici. C'est l'enseignant qui dirige la discussion vers la propriété des points de l'axe. Pour mettre en évidence la propriété que deux segments symétriques se coupent sur l'axe, il aurait fallu au contraire insister sur deux éléments de la construction :
- ce n'est pas le segment A'B qui est tracé par Christophe, mais la droite passant par A' et qui traverse Δ en B.
- c'est la longueur du segment AD à partir de A' sur cette droite qui est reportée, et non les longueurs des deux parties BD et BA du segment.

Nous pensons que l'enseignant n'avait pas tous ces éléments présents à l'esprit au moment de ce choix. Ceci montre seulement qu'il faut parfois peu de mots pour diriger un débat d'un côté ou d'un autre.

V.2.3. Une phase d'institutionnalisation

Cette phase se situe après la phase de bilan sur les constructions avec instruments (§V.2.2), mais dans une autre séance, quelques jours plus tard. L'enseignant la présente comme une phase de "bilan". Elle débute par une question générale en direction des élèves, concernant ce qu'ils "ont à dire sur la symétrie".

élève *C'est une ligne qui partage en deux une figure pour que ça soit replié, il faut que tous les angles soient égaux et les lignes aussi.*

ens. *tu parles de la symétrie ou autre chose ?*

élève *de la droite de symétrie*

ens. *[...] La droite de symétrie, c'est un objet. La symétrie, c'est une idée.*

Dans ces échanges, apparait un souci chez l'enseignant de préciser les termes. On le voit ici pour différencier la notion de symétrie de celle de droite de symétrie, puis plus tard, dans une discussion sur les signifiés des mots "milieu", "centre".

Ensuite, l'enseignant propose ce que nous considérons comme une institutionnalisation de la construction du symétrique d'un point avec l'équerre et la règle graduée. Les points sont nommés par des lettres, ce qui nous semble maintenant une caractéristique de ces phases.

ens. *Et on obtient un point qui va s'appeler A' par exemple. Une copie du point A.*

Pour marquer ce qui est important, l'enseignant propose aux élèves de "marquer sur le cahier". A un moment, l'enseignant fait même un pas de côté, en expliquant l'étymologie du mot "orthogonale". Mais il y a toujours les mêmes implicites sur l'objet de la perpendicularité.

Ecrire au tableau est aussi un indice d'une phase importante. Il va fabriquer la phrase en interpellant les élèves pour l'aider. Voici le phrase écrite.

Quelques définitions.
a)- le symétrique du point A se trouve sur la droite perpendiculaire à la droite de symétrie passant par A et à égale distance de cette droite.

Un autre indice de l'institutionnalisation : l'enseignant apporte beaucoup de soins à l'écriture et fait même rajouter une virgule pour éclairer le sens de la phrase.

ens. *Attention, notre phrase, elle n'est pas très jolie. On peut se tromper. On va mettre une virgule. Ca arrangera les choses peut-être. Il faut faire attention.*

Une seconde phrase est écrite par l'enseignant, qui précise la manière d'écrire un segment, puis relit avec les élèves en commentant.

b)- si A' est le symétrique de A, la droite de symétrie est perpendiculaire au segment [AA'] en son milieu. C'est la médiatrice du segment.

ens. *on met des crochets autour pour montrer qu'il est fini, limité des deux côtés.*

Puis, il va ensuite porter leur attention sur la propriété d'équidistance des points de l'axe d'une paire de points symétriques.

ens. *[...] la droite complète. elle est **formée de quoi** ?*
élève *une infinité de points*
ens. ***Qu'est ce qu'on pourrait dire** de chacun de ces points de la droite ?*
(Il dessine des points très rapprochés sur la droite) Ils sont tellement rapprochés que ça dessine toute la droite.
élève *C'est un trait.*
enseignant *Ca fait un trait...Chacun de ces points, **vous connaissez pas une propriété** ?*
élève *Ah ! Ils sont tous à la même distance de A et A'.*
enseignant *Voilà ! Chacun est à la même distance de A et A'. Tous les points de la médiatrice se trouvent à égale distance des extrémités du segment.*

On retrouve, dans le type des questions, le passage d'une situation d'action à une situation d'explicitation de ce qui a été utilisé. Nous avons mis en caractères gras celles qui illustrent ce fait.

Après une discussion sur le sens de la dernière phrase, l'enseignant lance le débat sur les propriétés du symétrique d'un segment. Il veut faire exprimer aux élèves la conservation de la nature de la figure, mais les élèves ne comprennent pas.

ens. *Bon ! On a deux points. Si j'ai un segment là (dessine un segment), puis une droite de symétrie, comme ça (dessine une droite oblique), le symétrique du segment AB, ce sera **quoi** ?*
(pas de réponse)
ens. *le symétrique du point , **c'est quoi** ?*
élève *A'.*
ens. *Oui, A', si tu veux. [...] Le segment AB, quel est son symétrique à lui, je le trace en rouge. C'est quoi son symétrique ?*
élève *c'est A'B'.*
ens. *C'est le **segment** A'B'. C'est quand même un peu important, ça !*

Nous avons déjà rencontré ce type de questions. Pour l'élève, dire que le symétrique d'un segment est un segment ne présente aucun intérêt, parce que cela ne fait aucun doute qu'il

s'agit d'un segment. La règle du jeu de l'institutionnalisation n'a pas été comprise : les élèves répondent par rapport à la figure (A donne A', AB donne A'B') et non de manière générale. D'ailleurs, ils n'ont pas saisi ce que l'enseignant attendait d'eux, et plus tard, on retrouve le même dialogue étrange :

ens.	*le symétrique d'un segment est ? quoi ?*
élève	*c'est A'B'.*
ens.	*c'est quoi comme objet ?*
élève	*un segment*
ens.	*un segment, un autre segment.*

Le changement de point de vue de l'enseignant n'a pas été bien perçu par les élèves. Mais il n'a pas été annoncé, et les indicateurs que nous y voyons ne sont pas perceptibles aux élèves.

V.2.4. Conclusion

Nous avons, par l'analyse de cette phase, une confirmation des difficultés de l'enseignant à gérer un débat collectif sur une activité de groupe où les élèves sont en échec. Ces difficultés se reconnaissent à différents éléments. La décision de laisser la parole aux élèves est en relation avec la pertinence, pour l'enseignant, des questions que ceux-ci soulèvent. Si ces questions sont trop éloignées de ses préoccupations ou difficiles à gérer, celui-ci a tendance à répondre rapidement, en proposant à l'élève d'y réfléchir. L'enseignant mène alors le débat en s'appuyant sur un élève qui a réussi et les procédures erronées majoritaires ne sont pas portées au débat. Nous avions déjà trouvé ces faits lors de phases précédentes qui se présentaient sous des conditions analogues.

Le temps passé à recentrer le débat est perdu pour les apprentissages. Cette phase de bilan n'a pu faire mettre en oeuvre effectivement aucune propriété de la transformation, si l'on excepte celle du report de "distance". Et l'intervention de l'élève au tableau pour expliquer sa construction juste n'a servi qu'à le conforter lui-même.

Dans la seconde séquence, les élèves ont majoritairement réussi la tâche. Nous allons voir si nos hypothèses se confirment.

V.3. Deuxième séquence

V.3.1. Les conditions du bilan

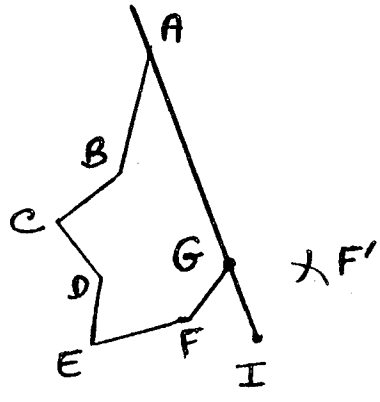
Elles sont très différentes de celles de la séquence précédente, parce que l'activité de groupe a rempli en partie ses objectifs. En particulier, l'utilisation majoritaire de l'équerre est un élément favorable à l'explicitation collective de la propriété d'orthogonalité. Par contre, la propriété d'équidistance n'a été réellement mise en oeuvre que dans un groupe. Cependant, l'usage de la règle graduée étant interdit, le compas a souvent servi pour le report de distances ou de longueurs. Ceci peut permettre d'aborder la propriété d'équidistance pendant la phase de bilan. Les relations d'incidence n'ont pas été utilisées. Seuls des élèves du groupe 2 ont dit clairement, que les hampes des deux drapeaux symétriques devaient se couper sur l'axe. Mais leur procédure de construction ne s'appuie pas sur cette propriété, puisque la direction support du segment symétrique a été déterminée sans ce point.

V.3.2. Le déroulement du bilan pour la première figure

La première procédure proposée à la classe est une procédure au compas, pour la figure 1. Les procédures utilisant l'équerre pour cette même figure sont discutées ensuite. Or, elles étaient largement majoritaires pendant les travaux en groupes. Nous allons analyser les conséquences de cette décision de l'enseignant.

a. coup de force pour une procédure isolée utilisant le compas

Il s'agit de celle de Caren (groupe 1) qui est la seule élève à avoir mis en oeuvre la propriété d'équidistance. Sa procédure est expliquée par Thomas, un autre élève du groupe. Celui-ci commence par raconter le problème qu'ils ont rencontré au début, à propos de l'intersection de deux arcs dont les centres étaient trop rapprochés. Puis, Thomas propose la construction du symétrique de F comme intersection des arcs (G,GF) et (I,IF).



De nombreuses réactions dans la classe arrivent d'élèves qui expriment leur désaccord ou demandent des explications. Mais l'enseignant ne leur donne pas la parole et les invite autoritairement à écouter. Voici un extrait qui illustre parfaitement nos propos.

ens.	*chut. Cyril, tu ne lèves pas ta main, tu écoutes ce qu'il dit et tu essaies de voir. Regarde, ici, il a obtenu le point qu'il désirait (en montrant F')*
Cyril	*Oui, mais*
ens.	*ah, ah, attends*
Cyril	*il n'est pas sûr qu'en rejoignant les deux points, ça*
ens.	*il n'est pas sûr dis-tu, alors* ***écoute le, parce que lui, il est sûr de ce qu'il va faire***
élève	*mais, si on est sûr*
ens.	***voulez-vous être un petit peu moins entêtés et écouter les autres.*** *Explique-nous pourquoi ce point ?*
Thomas	*ben, d'ici à là, c'est. Il y a une distance, alors si on prend une ouverture de compas, comme ça (il montre GF avec les doigts, puis le compas, puis reporte de l'autre côté)*
ens.	*tu as bien reporté la même distance de l'autre côté*
Thomas	*on est sûr que [inaudible]*
ens.	*nous sommes d'accord.*

Les interventions des élèves révèlent une difficulté à faire le lien entre leurs procédures avec équerre, dont ils sont sûrs qu'elle est juste, et celle proposée avec le compas. Mais l'enseignant choisit de continuer à développer la procédure au compas. Lorsqu'il déclare "nous sommes d'accord", il n'a pas répondu aux questions de la majorité des élèves de la classe. La conséquence est que plusieurs d'entre eux n'ont pas écouté.

ens.	*Cyril, tu n'écoutais pas quand il a bien expliqué [...] Je voudrais bien que tu écoutes, et puis tout le monde, hein?*

Aussi, l'enseignant explique à nouveau ce qu'a fait Thomas. Mais l'utilité de son intervention n'est pas prouvée.

Thomas répète cette procédure pour les trois points F', E' et D', en se référant à chaque fois aux deux mêmes points de Δ : G et I. Par contre, pour les deux derniers points C' et B', les centres de arcs sont pris soit en A, soit sur des points déjà construits.

C'est seulement quand la construction est finie que l'enseignant redonne la parole aux élèves.

Et c'est pour leur demander de juger la procédure exposée par Thomas ! Il n'est pas surprenant que leurs réponses soient négatives.

ens.	*alors, est ce que c'est très méthodique, on peut peut-être se poser la question, hein ?*
élève	*c'est du tâtonnement*
ens.	*Non, ce n'est pas du tâtonnement du tout.*
élève	*n'importe quoi !*
murmures	
ens.	*c'est tout-à-fait... Chaque point est bien construit, hein ?*
élèves	*oui (timides)*

Les protestations chuchotées dans la classe montrent que les élèves ne sont pas convaincus de la validité de cette construction.

b. prise en compte de la procédure majoritaire

C'est encore l'enseignant qui décide de prendre en compte cette procédure majoritaire, et il l'introduit en la comparant à la précédente, mais pour donner raison aux élèves qui insistaient.

ens.	*[...] Nous passons à une autre construction qui vous a paru plus rigoureuse, hein ? Et qui l'est peut-être tout-à-fait, hein ?*

Il est difficile de savoir comment les élèves peuvent juger, car ils ne se sont pas investis dans celle qui leur a été imposée.

En même temps que Sophie propose sa solution au tableau, construction avec équerre et compas (pour reporter les distances) du symétrique de chaque point, l'enseignant l'aide à expliciter ses actions. Les mots "perpendiculaire" et "égale distance" sont énoncés sur la demande de l'enseignant de compléter des phrases qu'il commence. Durant cette construction, les élèves de la classe n'osent pas intervenir car celui-ci a exprimé à plusieurs reprises qu'il ne voulait pas y consacrer du temps.

c. une comparaison des deux types de procédures

Lorsque la construction de Sophie est terminée, une discussion s'engage sur une comparaison

des deux procédures proposées. L'enseignant exprime clairement qu'il privilégie la deuxième, celle avec l'équerre. Ce qui est peut paraître en contradiction avec le peu de place et de temps accordés à cette procédure. Mais les discours qu'il tient à ce moment là peuvent donner quelques indications sur les raisons de cette préférence :
- d'abord, dans la construction au compas, les élèves ont pris appui sur les extrémités du segment matérialisant l'axe :

ens. *on ne fait pas référence ... aux extrémités du segment visible de la droite, hein?* ***Je crois qu'il faut abandonner cette idée de se servir des extrémités de la partie visible de la droite [...]***
c'est plus rigoureux, ça paraît évident, hein ? *parfois*
élève *et c'est moins compliqué*

- ensuite, dans la construction au compas, on peut se trouver devant la difficulté à déterminer avec précision l'intersection de deux arcs :

autre élève *la même distance que l'autre côté, mais ça pourrait être décalé, ça pourrait*
ens. *non, c'était, c'était assez ... non, non, c'était juste, hein ? C'était exact comme construction.* ***On a vu que par moments, ça pose problème quand les arcs sont... se coupent... se superposent trop longtemps.***

- enfin, dans la construction à l'équerre, la procédure est algorithmique et basée sur une analyse systématique de la figure en sommets :

ens. *donc, là, qu'est ce qu'on utilise, là ?*
élève *l'équerre et le compas*
ens. *et bien,* ***on utilise chaque sommet, c'est ça qui est, qui est intéressant.*** *Et pour chaque sommet, qu'est ce que vous avez construit ?*
[...] son symétrique.

Analysons ces raisons. Les deux premières se placent sur un plan général de questions relatives à la construction en géométrie, et ne met pas en jeu la notion étudiée.

Le refus de l'enseignant d'accepter l'utilisation des "extrémités" du tracé d'une droite avait peut-être pour objectif de faire prendre conscience aux élèves que tout point de l'axe convient. On serait alors revenu aux propriétés de la transformation, mais ceci n'est pas explicité.

Le problème pointé ensuite peut être rencontré dans toute construction. Il ne justifie pas un

jugement de la méthode, puisqu'il suffit de prendre deux points de l'axe suffisamment éloignés pour le résoudre.

Autrement dit, dans ces deux interventions, c'est la procédure qui semble remise en cause plutôt que l'inadaptation à la figure de certains choix de points lors de la construction. Nous ne prétendons pas que l'enseignant ait voulu justifier sa préférence, mais les élèves ont pu le comprendre ainsi.

Enfin, la troisième raison montre qu'un des objectifs de l'enseignant était de privilégier une procédure algorithmique reproductible pour toutes les figures.

Ces interventions de l'enseignant ont pu induire chez les élèves l'idée que, dans l'absolu, la construction à l'équerre est plus rigoureuse que la construction au compas. Ceci est important du point de vue des conceptions que se font les élèves de la tâche de construction.

V.3.3. Un moment d'institutionnalisation

Après la phase de bilan sur la figure 3, l'enseignant avait prévu de donner les définitions des symétriques d'un point et d'un segment, en s'appuyant sur ce qui vient d'être réaliser. Nous retrouvons à nouveau les indicateurs précédents d'un passage vers la décontextualisation, à savoir : le changement dans la forme du dialogue, dans le contenu des questions, la nommination de points qui seront utilisés dans la généralisation d'une propriété, les exigences de précision du langage. Voici un extrait où l'on retrouve tous ces indicateurs :

ens.	***qu'est ce que c'est** que le symétrique d'un point ?*
	*qu'est ce que c'est comme **objet géométrique ?** [...]*
Patricia	*un point*
ens.	*c'est un point, oui. Alors, si je **nomme ce point**, ce sommet A et celui-ci A', son symétrique, **qu'est ce que vous pouvez dire du segment AA' ?***
élève	*[...] Ben, qu'ils sont à égale distance*
ens.	***tu dis pas "hé ben"**, tu lèves ta main [...]*
(plus tard)	
ens.	*alors qu'est ce que vous allez **retenir** [...] ?*
ens.	*et le symétrique de ce segment ? C'est quoi comme **objet géométrique** ?*
	(pas de réponse)
ens.	*C'est un segment, qui a quelle **qualité** ?*
élève	*ben , il est limité*

ens. *c'est pas une **propriété***

(plus tard encore)

ens. *quelle est leur **qualité** à ces deux droites ?*

On retrouve ainsi les mots *objets géométriques, qualité, propriété*, qui indiquent qu'on en est maintenant à expliciter ce que l'on a utilisé. D'autres mots sont bannis : ainsi, le mot *limité*. On ne doit plus dire *hé ben*. D'autre part, il y a des choses à *retenir*.

Le type de question aussi indique un changement de tâche. Le dialogue n'est plus direct (tu, vous, je, etc...), il passe à une troisième personne neutre (il, on) qui est censé aussi inviter à un pas de côté par rapport à ce qui a été fait.

Il est important que les élèves comprennent qu'on entre dans une phase essentielle, dans laquelle tous les apprentissages que veut privilégier l'enseignant y sont nommés. Nous avons l'impression que, cette fois encore, les élèves ne comprennent pas vraiment la règle du jeu. En témoignent leurs hésitations, non-réponses, embarras.

Signalons les propriétés qui ont été mises en avant :

> Le symétrique d'un point A est un point A' tel que A et A' sont à égale distance de Δ et le segment AA' est perpendiculaire à Δ. Δ est la médiatrice du segment AA'.
> Le symétrique d'un segment AB est un segment A'B' de même longueur. Les segments AA' et BB' sont parallèles entre eux, puisque tous les deux perpendiculaires à Δ.

Nous allons analyser maintenant le bilan sur la figure 2.

V.3.4. Correction de l'exercice sur le drapeau

L'enseignant a choisi de diriger cette phase vers un réinvestissement du travail précédent, sans prendre en compte les travaux des groupes. La raison est clairement exprimée : les élèves doivent s'appuyer sur les derniers apprentissages pour répondre.

> *- maintenant que vous avez été éclairés par le travail sur la première figure, qu'est ce que vous proposez pour la seconde figure ?*

C'est la première fois que l'enseignant prend une telle décision dans la séquence. Nous allons voir comment il a été suivi.

Thomas entre dans le jeu, en proposant de "faire pareil" que pour la figure précédente, d'employer la "même méthode". A la question de l'enseignant, "laquelle ?", Caren répond "la nôtre" (compas seul) et Thomas "la méthode proposée, je trouve qu'elle est plus simple" (équerre et compas). Thomas a adhéré à la préférence exprimée de l'enseignant et l'enseignant surenréchit :

> *elle est plus simple, plus directe, dirons-nous. Et puis, **elle fait mieux penser à ce qu'on sait sur la symétrie**. C'est-à-dire que ... la droite de symétrie est la médiatrice du segment formé [...] **la droite de symétrie est perpendiculaire quand on rejoint un point et son symétrique** ...*

Les intentions de l'enseignant sont claires : mettre en avant la propriété d'orthogonalité de la transformation. Et il tiendra son objectif jusqu'au bout, puisque c'est la seule procédure qui sera explicitée. Elle l'est abondamment, c'est-à-dire que les termes s'y rapportant sont prononcés de nombreuses fois. Le rôle du compas est réduit au report de distances ou de longueurs.

Enfin, les relations d'incidence ne sont qu'évoquées brièvement :

ens.	*si je prend ce segment là, son symétrique va se trouver où ?*
murmures	
ens.	*il va passer par ?*
élève	*le point d'intersection*
ens.	*le point d'intersection. Bien, alors là je prends la perpendiculaire.*

Elles ne sont pas utilisées pour la construction. L'enseignant est revenu sans transition à la construction de la perpendiculaire à l'axe.

V.3.5. Un nouveau moment d'institutionnalisation

Nous l'avons reconnu par les mêmes indicateurs. Passer à l'écriture signifie qu'on va parler de l'essentiel, ce qui est à retenir.

ens.	*on va peut être écrire les phrases quand même [...]*

Puis, les points sont de nouveau désignés par des lettres, et l'enseignant demande aux élèves de "réfléchir" avant de parler !

Enfin,les questions concernent des notions géométriques plus vastes :

ens. ***[...] dans l'idée de médiatrice, il y a quoi ?***
[...] si j'ai le point A, *il y a combien de perpendiculaires sur la droite ?*
est-ce qu'on peut *le faire avec d'autres instruments, ce report de distance?*

L'enseignant va faire participer les élèves à la rédaction des éléments à retenir, mais leur participation est "réduite" à compléter les phrases commencées par l'enseignant. Après avoir écrit la définition du symétrique d'un point, l'enseignant décrit une méthode de construction du symétrique d'un point qui ne laisse aucun doute sur la procédure qu'il juge prioritaire ici.

> le symétrique d'un point A, c'est un point A' tel que la droite de symétrie est la médiatrice de [AA'].
> Pour le construire, on trace la perpendiculaire à la droite (Δ) et on reporte la même distance de l'autre côté.

Il est précisé que le report se fait au compas ou à la règle graduée, et la perpendiculaire avec l'équerre. La procédure de construction au compas n'est donc pas reprise dans cette dernière phase.

V.3.6. Conclusion

Dans cette deuxième séquence, la phase de bilan n'a pas permis de faire émerger toutes les propriétés de la transformation qui étaient prévues. En particulier, la seule construction du symétrique d'un point qui a été institutionnalisée est celle correspondant au report de la distance sur une perpendiculaire à l'axe passant par le point. La construction au compas par équidistance n'a pas été reprise. Bien sûr, elle n'a été mise en oeuvre que par une seule élève, mais on a vu à plusieurs reprises l'enseignant mettre en avant des procédures isolées. Derrière ce choix, il y une préférence avouée de l'enseignant pour la procédure mettant en oeuvre la propriété d'orthogonalité de la transformation. L'échec de la mise en oeuvre durant la séquence précédente peut avoir induit l'enseignant à affirmer cette priorité.

Nous pensons que l'histoire d'une classe est en effet soumise en partie aux souvenirs des histoires précédentes vécues par l'enseignant. Nous avons eu vraiment l'impression ici que c'était le cas.

VI. Conclusion

VI.1. Le rôle de l'enseignant dans les phases collectives

Dans les deux séquences, une grande marge de manoeuvre avait été laissée à l'enseignant pour la gestion des phases collectives. Celui-ci disposait, avant la séance, de points de repères :
- les objectifs d'apprentissage prévus pour chacune des activités en groupe;
- une analyse préalable des difficultés des élèves et des différentes procédures de résolution, que nous avions faite ensemble;
- la répartition du temps d'une séance, entre l'activité de groupe et la phase collective, fixée a priori, l'enseignant se réservant le droit de le modifier un peu selon le déroulement.

Bien sûr, l'observation des élèves en situation-problème pouvait conduire l'enseignant à modifier quelques éléments de la phase collective. Cela ne pouvait qu'être laissé à son choix. Pour la gestion du débat, nous avions fait des suggestions à l'enseignant, qu'il pouvait prendre en compte librement : veiller à donner la parole à chacun des groupes, à laisser les élèves débattre entre eux le plus possible avant d'intervenir.

Une analyse globale des deux séquences montre qu'il y a des différences et des constantes entre le déroulement des phases collectives à l'intérieur d'une même séquence ou d'une séquence à l'autre. Nous allons les développer.

VI.1.1. Le choix de l'enseignant de s'en tenir aux objectifs prévus

Pour chacune des phases collectives, dans les deux séquences, l'enseignant a choisi d'essayer de réaliser les objectifs prévus. Nous avons observé plusieurs conséquences de ce choix.

a. la nécessité de recentrer le débat

Lorsque les apprentissages visés n'ont pas été mis en oeuvre dans les groupes (par exemple, dans les cas de détournement de la tâche de construction avec instruments, séquence 1), la phase collective a consisté à essayer d'amener les élèves sur la voie que l'enseignant attendait. Ceci s'est révélé difficile, presque impossible. Le temps imparti étant compté, l'enseignant ne pouvait à la fois prendre en compte les solutions des élèves et mettre en oeuvre avec eux celles attendues. Il en a résulté des échanges en parallèle qui n'ont permis ni d'invalider les solutions fausses (l'enseignant n'a eu que le temps de les refuser de manière autoritaire), ni de faire entrer les élèves dans le problème posé par l'enseignant. Finalement, c'est l'enseignant qui a donné la solution, en s'appuyant sur le soutien de quelques élèves isolés.

b. le refus de procédures qui n'entrent pas dans le cadre des objectifs

Même dans le cas où l'activité a atteint ses objectifs, la décision de recentrer le débat a conduit l'enseignant à refuser de prendre en compte des procédures de résolution intéressantes, mais non prévues dans le cadre de l'activité. Nous l'avons constaté à plusieurs reprises : l'utilisation des relations d'incidence n'est pas retenue par l'enseignant, parce qu'elle ne faisait pas partie des objectifs de l'exercice (octogone, séq.2), les constructions au compas ne sont pas relevées dans la phase collective parce que l'enseignant privilégie à ce moment là l'utilisation de l'équerre (demi-feuille de lierre, séq.2).

c. des accélérations et des coups de force en fin de séance

Ces coups de force, en fin de séance, avaient pour but de tenter de "boucler la séance" comme elle était prévue. Nous avons surtout remarqué ces décisions lors de la première séquence, les raisons en étant l'insuffisance du temps imparti ou les déviations du débat collectif par rapport aux objectifs fixés.

VI.1.2. Une prise en compte très inégale des procédures des élèves

D'une manière générale, pour la première séquence, l'enseignant s'est plus attaché à mettre en avant les productions justes, alors que dans la deuxième séquence, il a davantage pris en compte les productions erronées. Ce changement d'attitude est peut-être dû au travail d'analyse didactique que l'enseignant avait fait avec nous entre les deux séquences.

Cependant, dans chacune des deux séquences, nous avons constaté des variations dans les décisions de l'enseignant à ce sujet. Ainsi, la décision de ne pas prendre en compte une solution majoritaire ou, au contraire, celle de privilégier une solution très minoritaire sont liées à la situation dans laquelle se trouve l'enseignant.

a. des procédures majoritaires fausses non portées au débat

Des procédures majoritaires fausses n'ont pas été prises en considération ou ont été refusées trop rapidement. Les raisons en sont multiples. Par exemple, la proposition des élèves risque de mener le débat dans une impasse (construction des diamètres des deux cercles, séquences 1 et 2). Autre cas, l'enseignant n'a pas réalisé que cette procédure erronée est majoritaire chez les élèves (rappel par prolongement pour la construction du symétrique du drapeau, séq2).

b. des procédures très minoritaires privilégiées par l'enseignant

A l'opposé de ce choix, des procédures minoritaires justes ont été privilégiées à plusieurs reprises. Il s'agissait soit de sortir le débat d'une impasse (trapèze, séq1, impasse du précis; cercle, Caren, séq2, qui sauve la situation), soit parce qu'elle est considérée à tort comme majoritaire par l'enseignant.

Ces reflexions nous ont conduit à examiner le rôle des représentations de l'enseignant sur les connaissances des élèves.

VI.1.3. L'impact dans la classe des représentations de l'enseignant sur les connaissances des élèves

Les représentations de l'enseignant peuvent provoquer chez les élèves **un refus de rentrer dans le problème posé.** Une conséquence est que les apprentissages que celui-ci voulait faire passer ne sont pas pris en charge par les élèves. Il ne peut donc y avoir évolution de connaissance. Nous en avons repéré un exemple flagrant dans la phase de bilan concernant le message de Jeremy et Sophie2 (séquence 2). Ce message comportait une phrase incohérente pour l'enseignant, mais qui n'avait pas posé problème pour les élèves, ni au moment du codage, ni au moment du décodage. Du coup, les élèves n'ont pas accepté d'écouter l'enseignant, parce qu'ils voulaient exprimer le problème qu'ils avaient effectivement rencontré et qui n'avait rien de commun avec celui mis au débat.

Il y a rarement refus, mais il peut être **impossible pour l'élève de comprendre le problème soulevé par l'enseignant.** Reprenons le cas, lors de la première séquence, du bilan des procédures de construction du symétrique de la demi-feuille de lierre. L'insistance de l'enseignant sur la nécessité d'utiliser l'équerre n'a pas été comprise par les élèves, parce que leur construction ressemblait en tout point à celle proposée au tableau, même s'ils n'avaient pas utilisé l'équerre. Les raisons d'insister de l'enseignant étaient connues de lui seul : il pensait que, pour être sûr de la mise en oeuvre de la propriété d'orthogonalité, il fallait effectivement faire utiliser l'équerre aux élèves.

Enfin, nous avons vu l'impossibilité pour l'enseignant de gérer le bilan d'une situation-problème ayant subi un détournement important de ses objectifs. Il est donc nécessaire de contrôler la complexité d'une situation-problème, c'est-à-dire les possibilités des élèves à la résoudre. Nous pensons qu'une représentation juste des difficultés des élèves permet, aussi bien au chercheur qu'à l'enseignant, de faire ce contrôle.

Plusieurs exemples illustrent la nécessité pour l'enseignant de bien connaitre le fonctionnement de ses élèves.

Le bon fonctionnement de certains implicites entre les élèves et leur manière de trier les informations parmi celles qu'on leur donne peut faire échouer une phase de validation. Seul l'enseignant peut mettre en défaut ces implicites, mais encore faut-il qu'il les reconnaisse. L'analyse que nous avons faite des phases collectives sur les messages des deux situations de communication illustrent bien cette question.

La manière dont les élèves s'adaptent à la tâche renseigne sur les raisons de ruptures de contrat de la part des élèves dans certaines situations. L'utilisation du repérage géographique dans la situation de communication de la séquence 1, alors qu'il était interdit, permettait de résoudre le problème posé. Le détournement de la tâche et des instruments dans la construction avec instruments des droites de symétrie de figures (séquence 1) avait le même objectif.

L'enjeu de la dévolution d'un problème est lié au sens de ce problème pour l'élève. L'évaluation a priori par l'enseignant de la validité de cet enjeu passe par la connaissance des conceptions disponibles chez les élèves. Or, cet enjeu est primordial. Nous avons vu, lors des deux situations de communication, combien la notion de réussite telle que la concoivent les élèves est éloignée de celle conçue par l'enseignant.

Les problèmes de communication entre l'enseignant et les élèves peuvent être dus à la coexistence de signifiants différents pour un même signifié. Mais ils peuvent aussi provenir d'une trop grande subjectivité de l'enseignant dans l'écoute de ses élèves, qui conduit à des interprétations erronées. L'objectivité de cette écoute de l'enseignant peut être favorisée par une bonne connaissance des conceptions des élèves et de leurs préoccupations.

VI.2. Quelques directions de recherche sur l'enseignant dans la classe

a. pour le contrôle d'une situation didactique

L'enseignant étant un des trois éléments du système didactique "élève-maître-savoir", l'étude de sa place et de son rôle dans ce système passe par l'analyse de ses relations avec les élèves et avec le savoir.

Nous avons vérifié, lors de l'analyse de nos séquences, que les représentations de l'enseignant

sur les connaissances des élèves et la matière enseignée, ainsi que ses conceptions sur l'apprentissage, interviennent dans la gestion des activités et des phases collectives.

Or les phases de bilan et d'institutionnalisation dépendent essentiellement de choix et décisions de l'enseignant. Dans un souci de reproductibilité des situations didactiques, on ne peut donc pas faire l'économie de l'étude de l'enseignant.

L'observation de l'enseignant dans la classe peut permettre de relever quelques-unes de ses représentations et leur éventuelle évolution. En effet, l'enseignant fait une analyse préalable plus ou moins consciente de la situation d'enseignement. Cette analyse est basée sur ses propres représentations de l'élève et de la tâche. Il va faire des paris sur la transmission du savoir et l'acquisition de connaissances par les élèves. Les décalages, dans les phases collectives, entre le déroulement prévu et celui observé sont des moyens de repérer les représentations de l'enseignant à la fois sur les élèves et sur la notion enseignée. D'autre part, si les programmes d'enseignement sont fixés, les choix de l'enseignant de privilégier certains aspects de la notion enseignée sont personnels. En ce sens, leur analyse peut apporter aussi des renseignements sur les représentations qu'a l'enseignant de l'objet d'enseignement.

b. objets d'étude pour une analyse du rôle de l'enseignant

Plusieurs directions de recherche semblent se dessiner, étroitement liées les unes aux autres.

Il est intéressant de cerner la place que l'enseignant laisse à l'extériorisation des conceptions des élèves et le rôle qu'il leur fait jouer (ignorer, faire semblant, prendre en compte). Ces éléments peuvent nous renseigner sur les représentations de l'enseignant sur l'apprentissage.
Lorsque les élèves ont détourné l'activité, quels choix fait-il (ignorer, prendre en compte) ? Quelles sont les variables ou évènements qui modifient l'orientation du débat (pédagogiques, didactiques)?

Repérer quels sont les savoirs privilégiés par l'enseignant donne des indications sur ses représentations de la notion enseignée.

L'observation de l'enseignant en situation de bilan collectif nous semble très adaptée pour repérer les représentations de l'enseignant à la fois sur les élèves et sur le savoir. En particulier, observer l'enseignant dans des situations détournées par les élèves, peut permettre de confronter ses représentations (déjà repérées par ailleurs ou exprimées par lui), à sa façon d'enseigner.

Conclusion

Les questions que nous posions dans l'introduction de cette recherche étaient les suivantes :

Peut-on élaborer une suite de situations-problèmes susceptibles de remettre en question les conceptions erronées sur la symétrie orthogonale qui persistent chez les élèves après l'enseignement ?

Quels sont les moyens didactiques et pédagogiques dont dispose l'enseignant qui permettent la dévolution du problème à l'élève et une gestion des phases d'institutionnalisation adaptée aux objectifs d'apprentissage ? Quelles conditions sont nécessaires pour que ces moyens soient effectivement utilisables par l'enseignant ?

Ces questions se situent selon des points de vue différents par rapport aux objets d'étude de la didactique, bien que les trois éléments du système didactique, élève, maître, savoir, soient indissociables dans une séquence d'enseignement.

La première question concerne surtout le savoir en jeu et son rapport avec les élèves, mais l'enseignant intervient pour la dévolution du problème. Nous avons tenté d'y répondre en étudiant les effets des variables et des contraintes de situations problèmes susceptibles de provoquer la mise en oeuvre des connaissances visées. Nous sommes en mesure de donner des résultats d'une part du point de vue du concept mathématique (§I) et, d'autre part, du point de vue des difficultés de son acquisition par les élèves dans des situations problèmes (§II). Nous avons relevé aussi des éléments concernant d'autres concepts de géométrie (§III).

La deuxième question concerne essentiellement l'enseignant dans la classe. Nous avons tenté d'y répondre en analysant son rôle et ses décisions dans les séquences que nous avons réalisées, en particulier lors la dévolution des problèmes aux élèves et pendant la gestion des phases collectives (§IV).

I. Du point de vue de la notion de symétrie orthogonale

I.1. conceptions des élèves et variables des situations

Nos travaux ont permis de confirmer les conceptions déjà repérées dans d'autres recherches et de les rattacher plus précisément à des caractéristiques de quelques situations.

La propriété d'isométrie de la transformation fait partie des connaissances des élèves avant l'enseignement en 6ème, sous la forme suivante : le symétrique d'une figure est une figure "égale" située de l'autre côté de l'axe, à une même "distance" de l'axe que la figure objet. Il y a conservation de la nature de la figure, des dimensions et de la forme (ch.I, II et IX).

Cette propriété se traduit par une conception de l'axe de symétrie d'une figure liée au partage de la figure en deux parties égales. L'axe de symétrie est une droite d'équilibre entre les deux parties, une "droite des milieux". L'idée très répandue que c'est une action d'un demi plan sur l'autre est à relier avec la notion culturelle de symétrie-pliage ou symétrie-miroir. La propriété d'invariance des points de l'axe est aussi dans le champ des conceptions des élèves, ainsi que la conservation des alignements (ch.VI,VII).

Ces caractérisations de la symétrie axiale comportent des implicites qui sont responsables de la majorité des erreurs des élèves aussi bien dans la reconnaissance d'axes de symétrie dans une figure que lors de la construction de figures symétriques. Ces erreurs sont liées aux différentes significations de la conservation de la *distance à l'axe* chez l'élève. Précisons.

Dans la tâche de construction du symétrique d'une figure, l'élève prend toujours en compte, d'une certaine manière, la conservation de la distance à l'axe (ch.I,II). Mais la règle d'action qui la sous-tend peut se rapporter d'une part, à la figure globale et non à chacun de ses points particuliers et, d'autre part, à une "distance" le long d'une direction qui n'est pas forcément perpendiculaire à l'axe. Ces deux règles d'action permettent d'expliquer la majorité des réponses erronées des élèves. Prenons un exemple. Le tracé d'un segment parallèle au segment objet, partant d'un point image déterminé par une procédure de rappel horizontal avec report des distances le long de cette direction, ne présente a priori aucune contradiction pour l'élève avec la propriété de conservation des distances. Globalement, la figure image est "bien placée" par rapport à la figure objet de l'autre côté de l'axe. Il faut que le non respect de la distance à l'axe d'un des éléments de la figure soit flagrant, une fois le symétrique tracé, pour qu'une remise en question puisse (éventuellement) avoir lieu (par exemple, si le tracé du segment image coupe l'axe lorsqu'on veut respecter la conservation des longueurs).

On voit la nécessité d'amener l'élève à considérer la figure de manière plus analytique. Le papier quadrillé semble a priori un moyen pour cela et c'est probablement une des raisons de son utilisation fréquente dans certains manuels (ch.III). Cependant, nous avons montré que si effectivement, il provoque chez les élèves des procédures "point par point" qui vont dans ce sens, il comporte l'inconvénient majeur de faire émerger des procédures de comptage le long des carreaux du quadrillage, qui remplacent celles utilisant les propriétés de la transformation (ch.I). Il nuit donc à la mise en oeuvre par les élèves de ces propriétés.

Les conceptions et les procédures que nous venons d'évoquer sont durables, en partie parce que leur domaine de validité effectif dans le cadre scolaire est grand. Par exemple, une procédure utilisant le rappel horizontal pour déterminer le symétrique d'un point est valable tant que l'axe est vertical dans la feuille. C'est très souvent le cas dans l'enseignement traditionnel, qui risque donc involontairement de stabiliser une règle d'action fausse. La même remarque peut être faite pour la conception erronée de la conservation des directions, qui n'a a priori qu'un domaine de validité restreint.

Ceci justifie que notre typologie des erreurs pour la construction du symétrique d'un point (ch.II) fasse référence uniquement à la direction de support de la construction, et non à la distance à l'axe. De même, les variables des différentes situations que nous avons repérées sont essentiellement de type *directionnelles*, à savoir la direction de l'axe ou des éléments de la figure dans la feuille, et l'angle que fait un segment de la figure avec l'axe. Cependant, nous avons montré le rôle important d'une variable de *position* , l'intersection de la figure et de l'axe. Cette variable est à relier à la conception très répandue de la symétrie orthogonale comme transformation d'un demi plan sur l'autre.

II. Evolution des connaissances par les situations problèmes

Un de nos objectifs était de déterminer les conditions d'évolution des connaissances des élèves à partir de situations problèmes. Nous avons montré que cette évolution est possible, mais à des degrés divers, selon les propriétés du concept mises en jeu dans la situation. En particulier, nous avons repéré une hiérarchie dans la disponibilité et l'apprentissage chez les élèves des quatre propriétés de la transformation que nous avons choisi d'étudier (milieu, orthogonalité, équidistance et incidence). Précisons cette hiérarchie.

II.1. La propriété du milieu est un obstacle à l'émergence des autres propriétés

La propriété du milieu est disponible chez les élèves avant tout enseignement et mise en oeuvre quelle que soit la situation. Elle constitue un **obstacle** au sens de Brousseau, dans la mesure où elle empêche ou remplace la mise en oeuvre des autres propriétés, en particulier celle d'orthogonalité.

Nous avons montré, en effet, qu'elle est exclusivement utilisée, dès qu'elle permet de résoudre le problème, lors de la détermination des axes de symétrie de figures (il suffit d'avoir deux paires de points symétriques). La majorité des erreurs faites par les élèves sur la notion d'axe

de symétrie provient du théorème en acte que toute droite partageant la figure en deux parties "égales" est axe de symétrie de la figure (ch.V et VI), conception liée à la propriété du milieu.

Dans la construction du symétrique d'une figure avec instruments, ce qui est primordial pour l'élève est de reporter des mesures avec la règle graduée ou le compas. L'attention des élèves se porte donc avant tout, sinon exclusivement, sur le respect de cette propriété (le symétrique M' du point M est tel que le milieu de MM' soit sur l'axe). Or, la mise en oeuvre de la seule propriété du milieu permet de résoudre ce problème de construction dès que le contrôle perceptif permet de déterminer l'emplacement de la figure symétrique (axe vertical, figure dessinée sur papier quadrillé). Il y a donc un vrai problème d'enseignement.

Nous pensons que ce qui conduit la propriété du milieu à devenir un obstacle dans l'apprentissage de l'élève est la fréquence des situations où elle suffit à résoudre le problème, associée à des règles d'action liées à la perception. Pour favoriser le dépassement de cet obstacle, des situations-problèmes combinant l'interdiction des mesures et l'inefficacité d'un contrôle de type perceptif sont nécessaires. Celle que nous proposons au chapitre VII dans le cadre de notre processus d'enseignement semble répondre à la question.

II.2. Les difficultés relatives à la propriété d'orthogonalité

Nos travaux montrent qu'il est difficile de repérer sa mise en oeuvre par les élèves, à cause de son remplacement par une règle d'action liée à la perception, lorsque celle-ci est efficace. Ainsi, les tracés des élèves respectent l'orthogonalité à l'axe lors de la construction de symétriques de figures dont les caractéristiques permettent à la perception de fonctionner. Cependant, dès que la perception ne peut plus fonctionner, la propriété d'orthogonalité à l'axe n'est plus respectée.

Ceci pose la question de la présence et du sens de cette propriété dans l'ensemble des connaissances des élèves. Nous avons repéré plusieurs règles d'action qui nous semblent remplacer cette propriété. Ces *règles de substitution* de la propriété d'orthogonalité sont repérables dans des problèmes où elles conduisent à des réponses erronées. Ainsi, le rappel horizontal évoque la perpendicularité à la verticale de la feuille ou à la ligne d'équilibre du corps humain. Le contrôle perceptif permet quant à lui de déterminer l'emplacement du point image sans entrainer forcément la prise de conscience par l'élève qu'il s'agit de la perpendicularité à l'axe. Nous en avons vu un exemple pour la demi-feuille de lierre (ch.IX) : bien que perceptivement, le tracé soit juste, les élèves n'utilisent pas l'équerre mise à leur disposition alors qu'ils utilisent systématiquement la règle graduée. De plus, ils ne

réinvestissent pas cette procédure pour la figure suivante (échec massif à la construction du symétrique du drapeau coupant l'axe).

Le problème que pose cette propriété du point de vue de l'enseignement est double :

- à cause de *l'illusion de son emploi*, qui se produit chaque fois que les règles de substitution conduisent à des réponses justes (par exemple, les procédures de "rappel horizontal" pour des axes verticaux). Si ces règles de substitution ont un domaine de validité trop grand (voir l'étude des manuels faite au chapitre III), l'enseignement ne peut mesurer l'acquisition par les élèves de cette propriété.

- à cause de *la difficulté à obtenir sa mise en oeuvre effective* , dont nous avons montré qu'elle nécessite un contrôle des contraintes des situations. Il ne suffit pas d'interdire l'emploi de la règle graduée ou de fixer des variables telles que le contrôle perceptif ne fonctionne plus (ch.VII). Il faut élaborer des problèmes où le rappel horizontal conduit à des solutions que l'élève ne peut accepter, parce que, par exemple, l'isométrie est rompue (déformation importante de la figure), ou bien qui induisent fortement l'emploi de l'équerre en jouant sur la taille de la figure (tracé trop imprécis si on le fait au jugé).

II.3. La question du sens de la propriété d'équidistance et des relations d'incidence

Les règles d'action que l'on a tendance à attribuer à ces deux propriétés sont souvent induites, de fait, par la propriété du milieu et non par elles.

La propriété d'incidence ne semble pas présente chez les élèves, alors que les deux propriétés dont elle découle, la conservation de l'alignement et l'invariance des points de l'axe, sont au contraire très présentes. Nos situations problèmes n'ont pas permis d'assurer leur mise en oeuvre, parce que les contraintes n'étaient pas adaptées. Par exemple, les conditions pour la construction de la droite de symétrie du trapèze (ch.VII) n'imposaient pas à l'élève de "sortir" de l'enveloppe convexe de la figure pour tracer un point de la droite. Nous proposons une nouvelle situation, que nous n'avons pas testée, qui permet de caractériser la mise en oeuvre de la propriété d'incidence, *en excluant toute confusion possible avec celle de la propriété du milieu* (cf. conclusion générale aux chapitres IV à IX).

Il y a des difficultés chez les élèves à saisir le sens de la propriété d'équidistance (ch.VII et IX). Cette difficulté se traduit ainsi : lors du tracé d'un axe de symétrie d'une figure, comment

peut-on construire des points de l'axe à partir de deux points symétriques si on ne peut déterminer le milieu de ce bi-point ? Elle peut provenir aussi du fait que la mise en oeuvre de cette propriété exige de faire une double construction (deux fois deux arcs de cercle) et, donc, demande une double anticipation.
L'équivalence entre les deux propriétés usuelles de la notion de médiatrice d'un bi-point ou d'un segment est en jeu ici. La médiatrice est une droite perpendiculaire au segment en son milieu. C'est aussi l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment. Le lien entre ces deux propriétés est souvent fait par monstration dans l'enseignement (on constate que..., on vérifie que..) si l'on se réfère aux manuels que nous avons étudiés (ch.III).

Il nous semble que ce lien doit être problématisé et que la prise de conscience par l'élève de l'équivalence de ces deux propriétés peut participer à l'élaboration du sens de la propriété d'équidistance.La question de cette problèmatisation reste ouverte.

III. A propos d'autres concepts de géométrie

III.1. Le sens de la notion de construction pour l'élève

Le statut de la construction géométrique est défini pour le mathématicien par les propriétés qui sont sous-jacentes à l'utilisation des instruments. Les difficultés rencontrées dans une situation d'apprentissage sont dues au paradoxe créé par la différence entre l'objectif réel de la tâche de construction et celui avoué aux élèves (ch.VII et IX). En effet, l'enseignant ne peut pas évoquer ces propriétés puisqu'il veut les faire mettre en oeuvre par les élèves. Le contrat ou la consigne ne peuvent contenir l'explication du sens de la construction car cela reviendrait à donner la solution du problème aux élèves. Nous retrouvons un type de paradoxe souvent évoqué par G. Brousseau (1986).

La construction de figures joue un grand rôle dans les nouveaux programmes de géométrie du collège, en particulier dans l'enseignement des transformations du plan. La question du sens pour l'élève de la tâche de construction dépasse donc largement le cadre de la symétrie orthogonale.

Nous avons vu combien la transmission de ce sens aux élèves est un élément important de la dévolution d'un problème de construction. L'enseignant y a été confronté dans nos deux séquences. Il est relativement facile de se mettre d'accord avec les élèves sur ce à quoi sert un instrument, afin qu'il n'y ait pas détournement de son usage. Mais ceci ne suffit pas à expliquer pourquoi il est "légitime" de glisser l'équerre le long d'une droite pour en tracer la

perpendiculaire passant par un point donné, alors qu'il n'est pas "licite" d'ajuster l'emplacement de la pointe sèche et l'ouverture du compas pour construire un cercle superposé à celui donné pour en retrouver le centre. De même que la recherche d'un diamètre par détermination d'une corde de plus grande dimension dans le cercle avec la règle graduée n'est pas considérée comme une construction.

Pour l'enseignant, l'exactitude d'une construction est repérée par les propriétés qu'elle a mises en jeu. Pour l'élève, elle se confond avec la précision du tracé résultant de la construction. Nous avons vu la nécessité de prendre en compte une contrainte sur la nature et les dimensions des objets géométriques qui soit susceptible d'empêcher qu'un tracé précis provienne d'une construction au jugé ou par tâtonnements.

III.2. Les nombreuses significations du mot milieu

Nous avons repéré de nombreuses utilisations de cette notion chez les élèves. Elle se rapporte à toute figure et dépasse largement le cadre de la définition mathématique. Pour l'élève, le milieu d'une figure peut être une droite, ou un ensemble de points, ou encore le point d'intersection de deux diagonales (trapèze). Ces différentes utilisations peuvent provoquer des incompréhensions ou au contraire permettre aux élèves de "jouer sur les mots" pour communiquer avec l'enseignant, comme nous l'avons constaté à plusieurs reprises dans les échanges (ch.X).
La validité de certaines réponses d'élèves est directement liée au sens que ceux-ci attribuent au mot "milieu". Par exemple, pour les élèves, l'existence de la seconde droite de symétrie du segment (celle qui n'est pas médiatrice) ne tient qu'au fait qu'elle partage ce segment au "milieu", c'est-à-dire qu'elle passe au milieu de l'épaisseur du trait.

L'enseignement de la symétrie orthogonale peut être un lieu de débat sur le sens de ce mot, à cause du rôle particulier que joue la propriété du milieu dans cette transformation. Mais l'attribution par les élèves d'un sens précis au mot "milieu" incombe à l'enseignant, car le bon fonctionnement chez ceux-ci des implicites au sujet de ce mot ne permet pas d'en remettre en cause les différentes significations.

IV. Questions relatives au rôle de l'enseignant dans la classe

Notre processus a été élaboré dans le cadre de la théorie des situations de G. Brousseau. Si nous pensons avoir apporté des éléments solides pour la construction de situations problèmes

dans le cadre d'un enseignement sur la symétrie orthogonale, il reste des questions non résolues, qui concernent essentiellement l'enseignant dans la classe. Nous avons analysé en particulier deux moments des interventions de l'enseignant, celui où il pose le problème aux élèves et celui des phases collectives. Cette analyse nous conduit à soumettre quelques remarques ainsi que des questions.

IV.1. Conditions pour la dévolution d'un problème

La dévolution d'un problème est liée bien sûr à l'adaptation du problème aux connaissances des élèves et aux apprentissages en jeu. Elle contient donc une part de contrôle de la situation que nous avons largement développée au cours de cette recherche. Cependant, d'autre éléments interviennent, nous en avons relevé deux.

La signification de la notion de réussite

Réussir, pour les élèves, consiste essentiellement à fournir une solution juste, alors que la notion de réussite pour l'enseignant est plus complexe, car elle est liée au statut des connaissances mises en oeuvre et qui ont permis d'aboutir à la solution. Pour que ces deux significations coincident, il faudrait qu'une réponse juste ne puisse provenir que d'une procédure juste et attendue, ce qui n'est pas toujours le cas. En effet, une réponse juste peut provenir d'une procédure juste mais qui ne met pas en oeuvre les connaissances visées, ou d'une procédure localement vraie, voire fausse. Nous avons rencontré des exemples de ces deux types de décalages à plusieurs reprises dans nos séquences. Ils ont provoqué un désinvestissement des élèves par rapport au problème posé. Ainsi, l'analyse de la validité d'un message n'a d'intérêt pour l'élève que s'il n'a pas permis au décodeur de découvrir la réponse juste (ch.VIII). De même, une construction avec instruments n'a d'intérêt pour les élèves que si elle apporte une meilleure précision dans le tracé par rapport à une construction au jugé (ch.VII). Se pose alors la question du sens de la tâche.

Le sens de la tâche pour les élèves

Nous avons étudiée au (§III.1) la difficulté que les élèves ont rencontré pour saisir le sens de la tâche de construction avec instruments. La dévolution de ce problème aux élèves n'a pas pu se faire lors de la première séquence et il y eu détournement de la tâche ou des instruments (ch.VII). Lors de la deuxième séquence, l'explicitation de la tâche par l'enseignant a permis d'éviter en grande partie ces divers détournements. Cependant, lorsque l'enseignant ne peut pas dire quel est le sens réel de la tâche, c'est le respect de la consigne qui en tient lieu pour l'élève. Il est important que ces deux sens ne soient pas trop éloignés l'un de l'autre. Une connaissance trop partielle de l'enseignant à propos des difficultés de ses élèves et des outils effectivement disponibles chez eux peut provoquer un décalage important entre les

connaissances que l'élève met en oeuvre et celles qu'attendait l'enseignant.

IV.2. Eléments pour une analyse des phases collectives

Nous avons rencontré au moment de l'analyse des deux séquences une difficulté dans la reconnaissance des situations d'institutionnalisation. Nous avons ressenti la nécessité de distinguer deux types de moments dans les phases collectives dont les objectifs se révèlent différents.

L'un de ces moments correspond à une phase d'homogénéisation des savoirs mis en jeu par les élèves dans la situation problème. Nous l'avons nommé phase de bilan, expression déjà employée par plusieurs chercheurs (Douady, 1984) sans qu'elle ait été vraiment définie par rapport à l'intitutionnalisation. Nous avons repéré deux caractéristiques de cette phase :
- elle est le lieu de débat sur toutes les connaissances et procédures utilisées par les élèves, dont celles qui dépassent le cadre des apprentissages fixés;
- elle permet une homogénéisation des connaissances mises en jeu dans les groupes (dépersonnalisation), qui deviennent des connaissances collectives sur lesquelles va s'appuyer la phase d'institutionnalisation.

Cette différenciation de deux types de phases est importante aussi du point de vue de l'élève. En effet, il y a un véritable changement de niveau d'activité d'une phase à l'autre, changement que nous avons repéré en particulier dans le type de questions posées par l'enseignant et les réponses qu'il en attend et dans ses exigences vis à vis des élèves.

Mais le passage de l'une à l'autre de ces phases reste implicite. Une des conséquences de ce fait est l'apparition momentanée d'un décalage dans les échanges entre l'enseignant et les élèves, voire d'une incompréhension entre eux (ch.X). Prenons un exemple. A la question de l'enseignant "le point A, il a quoi comme image ?", l'élève peut répondre en désignant le point-image A' qu'il vient de tracer sur la figure. Mais l'enseignant peut attendre la réponse "un point" si son intention est d'institutionnaliser une propriété de la transformation. Or, il y a peu de chance que l'élève donne cette réponse, car il applique la règle d'action "l'image d'un point est un point" depuis longtemps et personne, dans la classe, n'a jamais remis cela en question.

Il nous semble donc que ces changements d'attentes de l'enseignant doivent être explicités aux élèves par l'enseignant. Dans un premier temps, il nous faut dentifier ces types de phases dans une séance de classe pour en faire une étude. Pour cela, nous proposons quelques éléments, que nous avons relevé dans les deux séquences, qui peuvent jouer le rôle d'*indicateurs* de ces

changements de phase.

Un moyen indispensable à l'enseignant pour gérer les phases collectives est le contrôle des variables de commande des situations problèmes. Nous avons montré les difficultés de l'enseignant à conduire des phases de bilan pour des situations problèmes qui n'ont pas fait fonctionner les connaissances prévues (ch.X).

Cependant, l'analyse du déroulement des deux séquences a révélé l'insuffisance de l'étude des situations problèmes dans la perspective d'une communication aux enseignants d'un processus d'apprentissage. Le déroulement d'une phase collective est soumis à d'autres variables qui sont liées à l'enseignant. Ses propres représentations du savoir en jeu induisent des choix sur les directions qu'il fait prendre au débat. Elles peuvent être repérées à travers les prises de position de l'enseignant sur les interventions des élèves.

Nous avons repéré quelques effets des contraintes de temps (changements de rythme ou fermetures prématurées du débat). Cependant, les fermetures de débat ne s'expliquent pas toutes ainsi, d'autres éléments interviennent qui sont en relation avec les priorités de l'enseignant.

Il peut y avoir contradiction entre la décision de donner la parole à tous les élèves, c'est-à-dire de permettre à toutes les réponses d'être portées au débat et celle de ne pas s'éloigner des objectifs prévus. Nous avons repéré des éléments dans les choix de l'enseignant par rapport à ces deux décisions. Par exemple, le décalage entre les connaissances mises en oeuvre lors de la résolution du problème et celles attendues par l'enseignant est un élément pour ignorer la production de l'élève.

Un autre élément indispensable à l'exportation d'un processus est la connaissance des représentations des enseignants sur les difficultés des élèves. Ces représentations sont présentes très souvent, tant en ce qui concerne la dévolution du problème que la gestion des débats dans la classe.

En conclusion, nous soutenons l'idée qu'un processus n'est communicable que s'il comporte, non seulement une étude des conceptions des élèves sur la notion, ce qui est assez classique en didactique, puisque le processus est construit généralement à partir de cette étude, mais aussi une étude des représentations qu'a l'enseignant d'une part du contenu du savoir en jeu et d'autre part, de ses élèves, de leurs connaissances antérieures et de leur mode de construction des connaissances.

Références bibliographiques

Arsac G., Germain G., Mante M., 1988, *Problème ouvert et situation-problème.* IREM, Lyon.

Artigue M., Robinet J., 1982, Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherche en Didactique des Mathématiques,* vol.3.1,pp.5-64, éditions La pensée Sauvage, Grenoble.

Artigue M., 1984, *Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques,* Thèse d'état, Université de Paris VII.

Balacheff N., 1988, *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège.* Thèse d'état, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Bautier Th., 1986, Les activités expérimentales introductives à la symétrie orthogonale en collège . *Actes de la 4ème école d'été de didactique des mathématiques* , pp.352-4 , Ed. IREM de Paris VII.

Berdonneau C., 1981, *Quelques remarques sur l'introduction à la géométrie démontrée à travers les manuels en usage dans l'enseignement post-élémentaire en France au vingtième siècle.* Thèse de troisième cycle, Université de Paris VII.

Bessot A., Richard F., 1980, Une étude sur le fonctionnement du schéma arbre par la commande de variables d'une situation. *RDM, 1.3.,* éditions La pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau G.,1981, Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en didactique des mathématiques,* Vol. 2,1, pp.37-127, éditions La pensée Sauvage, Grenoble.

Brousseau G., 1983, Etudes de questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique,* n°45, Institut IMAG, Grenoble.

Brousseau G., 1984, Le rôle du maître et l'institutionnalisation. *Actes de la IIIème école d'été de Didactique des Mathématiques,* Institut IMAG, Grenoble.

Brousseau G., 1987, Les différents rôles du maitre. *Actes du XIV° colloque Inter-Irem des PEN,* pp.37-67, Angers.

Chevalier A., 1986, La résolution d'un problème non routinier en géométrie. *Petit x n°9,* pp. 41-62, ed. IREM de Grenoble.

Denys B., 1985, The teaching of reflection in France and in Japan. *Proceedings of the ninth international conference for the psychology of mathematics education,* ed. L. Streefland, Research Group OW &OC, State University of Utrecht, Pays-Bas.

Denys B., Grenier D., 1986, Symétrie orthogonale : des élèves français et japonais face à une même tâche de construction. *Petit x, n°12,* pp. 33-56, ed. IREM de Grenoble.

Doise W. et Mugny G., 1981, *Le développement social de l'intelligence.* Interéditions, Paris.

Douady R. ,1984, *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques.* Thèse d'état, Université de Paris VII.

Gallou-Dumiel E., 1985, *Symétrie orthogonale et angles.* Thèse de 3ème cycle, Université 1 Grenoble.

Gras R. 1983, Instrumentation de notions mathématiques. Un exemple: la symétrie. *Petit x, n°1,* I.R.E.M. de Grenoble.

Grenier D., 1985a, Quelques aspects de la symétrie orthogonale pour des élèves de classes de 4ème et 3ème. *Petit x, n°7,* I.R.E.M. de Grenoble.

Grenier D.,1985b, Conceptions des élèves de collèges à propos de la symétrie orthogonale. *Séminaire de l'équipe de didactique des mathématiques et de l'informatique,* n°63 .IMAG Grenoble.

Grenier D., 1987, Construction d'un processus d'apprentissage de la notion de symétrie orthogonale pour des élèves de 11 ans. *Actes de la XI °Conférence PME,* Montréal.

Grenier D., Guillerault M., 1984, *Conceptions liées à la symétrie orthogonale chez des élèves de collège*. Actes de la IIIème école d'été de Didactique des Mathématiques, Université de Grenoble 1.

Grenier D., Laborde C., 1988, Transformations géométriques : le cas de la symétrie orthogonale. *Actes du Colloque du GRECO Didactique.*

Grenier D., Legrand M., Richard F.,1984, L'introduction du débat scientifique chez les étudiants. *Séminaire de l'équipe de didactique des mathématiques et de l'informatique de Grenoble*, n°25.

Hart K., 1981, *Children's understanding of mathematics: 11-16*. Alden Press, Oxford, London .

Laborde C., 1982, *Langue naturelle et écriture symbolique, deux codes en interaction dans l'enseignement des mathématiques*. Thèse, Université de Grenoble.

Laborde C., 1985, Quelques problèmes d'enseignement de la géométrie dans la scolarité obligatoire, *For the learning of mathematics*, 5. 3, pp. 27-34.

Métrégiste R., 1984, La géométrie des transformations : une approche en classe de 4ème et 3ème, *Petit x, n°4*, pp.35-71.

Piaget J., Garcia R., 1983, *Psychogenèse et histoire des sciences*, Flammarion, Paris.

Rosen. J., *1975, Symmetry discovered. Concepts and applications in nature and science.* Cambridge University Press.

Vergnaud. G., 1981, Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *RDM II.2*, pp.215-231.

Vergnaud G., 1984. Interactions sujets situations. *Actes de la IIIème école d'été de Didactique des Mathématiques*. Grenoble : Institut IMAG.

Weyl H., 1964, *symétrie et mathématique moderne*. Nouvelle bibliothèque scientifique, dirigée par Fernand Braudel Flammarion .

Manuels scolaires (utilisés pour le chapitre III)

Collection P. Louquet, 1986 : P. Aguilar, P. Louquet, L. Moulia., Mathématiques, classe de sixième, programmes 1986, Armand Colin, Paris.

Collection Digamath, 1986, Mathématiques, 6°, Didier, Paris, programmes 1986.

A. Deledicq, C. Lassave, 1986, Faire des Mathématiques, Maths 6°, nouvelle collection, Cedi Nathan, programmes 1986.

H. Bareil, C. Zehren, 1986, Mathématique 6°, nouvelle édition, Hachette, Paris, programmes 1986.

IREM.Strasbourg, collection collèges, F. Mollet-Petit, 1986, mathématiques 6°, Istra, éditions Casteilla, Paris, programmes 1986.

Collection Evariste, 1986, Mathématiques 6°, Delagrave, Paris, programmes 1986.

IREM de Grenoble, Jeomatri, Mathématiques 6°, Ophrys, Gap, programmes 1986.

S.Pouts-Lajus, 1986, connaître et pratiquer les mathématiques, 6°, Nathan, programmes 1986.

AUTORISATION DE SOUTENANCE

DOCTORAT 3ème CYCLE, DOCTORAT-INGENIEUR, DOCTORAT USTMG

Vu les dispositions de l'Arrêté du **16 avril 1974**,

Vu les dispositions de l'Arrêté du **5 juillet 1984**,

Vu les rapports de M.me Sylvette MAURY

M.r Charles PAYAN

M.elle GRENIER Denise est autorisée

à présenter une thèse en vue de l'obtention du Doctorat d'Université de Grenoble I - Maths Appliquées et Informatique

Grenoble, le 30 JUIN 1988

Le Président de l'Université Scientifique Technologique et Médicale

J.J PAYAN

La recherche présentée a pour objet les connaissances d'élèves du premier cycle de l'enseignement secondaire sur la symétrie orthogonale et les conditions d'évolution de ces connaissances en situation scolaire. Le cadre théorique a été élaboré à partir de modèles et d'outils de la didactique permettant de rendre compte de conceptions d'élèves à propos d'une notion et à partir de la théorie des situations au sens de Brousseau.

Dans un premier temps, une étude expérimentale des conceptions d'élèves de collège a permis d'établir des liens entre certaines caractéristiques de situations problèmes proposées aux élèves et leurs productions. Puis, la question de l'évolution des connaissances a été abordée par l'élaboration et la réalisation d'un processus complet d'enseignement de la symétrie orthogonale en classe de sixième. Nous avons testé des hypothèses sur les caractéristiques des situations problèmes du processus qui permettent d'en contrôler les effets sur les connaissances mises en oeuvre. Notre démarche pour cela a consisté à analyser les objectifs d'apprentissage atteints lors de la réalisation de la séquence en classe par rapport à ceux que nous avions prévus. Nous avons ensuite tenté de réduire les décalages observés en modifiant les situations problèmes et testé les consquences de ces modifications. Nous avons mis en évidence d'une part une hiérarchie dans la disponibilité et la mise en oeuvre par les élèves des différentes propriétés de la transformation et, d'autre part, les difficultés et obstacles qui s'y rattachent. Enfin, nous posons, en l'argumentant, la question de la nécessité d'étudier le rôle de l'enseignant sur le déroulement du processus et, sur un autre plan, en vue de la transmission des situations didactiques.

enseignement des mathématiques - symétrie orthogonale - constructions géométriques - résolution de problème - conceptions - évolution des connaissances - situation didactique - rôle de l'enseignant dans la classe - communication