



**HAL**  
open science

# Calcul de la production d'une paire de bosons de jauge faible associée à un jet à l'approximation au-delà des logarithmes dominants

Grégory Sanguinetti

► **To cite this version:**

Grégory Sanguinetti. Calcul de la production d'une paire de bosons de jauge faible associée à un jet à l'approximation au-delà des logarithmes dominants. Physique des Hautes Energies - Expérience [hep-ex]. Université de Savoie, 2008. Français. NNT: . tel-00331294v1

**HAL Id: tel-00331294**

**<https://theses.hal.science/tel-00331294v1>**

Submitted on 16 Oct 2008 (v1), last revised 8 Aug 2011 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE SAVOIE  
LABORATOIRE D'ANNECY-LE-VIEUX DE PHYSIQUE THÉORIQUE

# THÈSE

présentée en vue d'obtenir le grade de Docteur,  
spécialité « Physique des particules »

par

Grégory Sanguinetti

## CALCUL DE LA PRODUCTION D'UNE PAIRE DE BOSONS DE JAUGE FAIBLE ASSOCIEE À UN JET À L'APPROXIMATION AU-DELÀ DES LOGARITHMES DOMINANTS

Thèse soutenue le 1<sup>er</sup> juillet 2008 au LAPTH devant le jury composé de :

M.	THOMAS BINOTH	University of Edinburgh	Rapporteur
M.	MATTEO CACCIARI	LPTHE	Examineur
M <sup>me</sup>	LUCIA DI CIACCIO	LAPP	Présidente du jury
M.	MICHEL FONTANNAZ	LPT Orsay	Rapporteur
M.	JEAN-PHILIPPE GUILLET	LAPTH	Directeur de thèse



*"if you're going to try, go all the way  
there is no other feeling like that  
you will be alone with the gods  
and the nights will flame with fire*

*do it, do it, do it  
do it*

*all the way*

*all the way*

*you will ride life straight to perfect laughter,  
it's the only good fight there is"*

*Charles Bukowski*



# REMERCIEMENTS

**J**E voudrais tout d'abord exprimer mes remerciements à mon directeur de thèse, Jean-Philippe Guillet, pour sa disponibilité et sa patience notamment lors de mon initiation aux langages de programmation Perl, Maple, Form et à Fortran 90. Je lui suis reconnaissant de m'avoir permis d'effectuer cette thèse avec un sujet tellement d'actualité. Cette thèse m'a permis de consolider et de compléter grandement mes connaissances en calculs de précision du Modèle Standard et en programmation.

Je souhaiterais également remercier Thomas Binoth, qui m'a permis d'effectuer un séjour de six mois à l'Université d'Edimbourg. Durant ces six mois, Thomas a été comme un second directeur de thèse. J'ai énormément apprécié notre collaboration et je le remercie pour le soutien et la motivation qu'il m'a apporté durant les quelques moments difficiles de cette thèse.

Par ailleurs, je suis reconnaissant à la Région Rhône-Alpes pour le soutien financier accordé grâce au projet Explora Doc et à l'Université d'Edimbourg pour leur accueil durant ces six mois.

J'ai particulièrement apprécié travailler avec Stefan Karg sur ce projet de thèse. Notre collaboration fut stimulante et enrichissante. Je lui en suis sincèrement reconnaissant.

Je remercie Patrick Aurenche, Ninh Le Duc, Christophe Bernicot, et Gudrun Heinrich, toujours disponibles eux aussi pour me conseiller et répondre à mes interrogations.

Je tiens également à remercier toute l'équipe du LAPTH pour son accueil chaleureux. Je souhaite remercier en particulier Dominique Turc-Poencier, Véronique Jonnery et Virginie Malaval pour leur disponibilité et leur patience à toute épreuve.

Je souhaite également remercier Isabelle de Bonis et Jacques Allemand pour leur aide lors de mon expérience de monitorat.

Je remercie Xavier Prudent pour toutes nos discussions enrichissantes et pour son aide concernant l'utilisation de Root.

Merci à Nans Baro de m'avoir supporté dans le même bureau pendant ces trois années malgré mes loufoqueries et mes sautes d'humeur quotidiennes.

Je remercie Esther Deloche pour son soutien et son réconfort durant cette thèse. Je lui suis reconnaissant de la compréhension et de la patience dont elle a fait preuve au cours des derniers mois de la thèse.

Je remercie Michel Fontannaz et Thomas Binoth d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ma thèse. Je suis également reconnaissant à Matteo Cacciari, Lucia Di Ciaccio et Jean-Philippe Guillet d'avoir participé au jury de thèse.

Enfin, un grand merci à mes parents et à mes amis qui ont été présents durant ma soutenance de thèse.

Annecy-le-Vieux, le 28 septembre 2008.

# TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	vi
LISTE DES FIGURES	viii
NOTATIONS	xi
PRÉFACE	1
<b>1 SECTIONS EFFICACES HADRONIQUES</b>	<b>3</b>
1.1 LA CHROMODYNAMIQUE QUANTIQUE . . . . .	5
1.2 LE LAGRANGIEN DE QCD . . . . .	6
1.3 LES RÈGLES DE FEYNMAN POUR QCD . . . . .	6
1.4 LA RENORMALISATION DE QCD . . . . .	9
1.5 LA LIBERTÉ ASYMPTOTIQUE . . . . .	10
1.5.1 Le groupe de renormalisation . . . . .	10
1.5.2 Les équations du groupe de renormalisation . . . . .	11
1.5.3 Résolution des équations du groupe de renormalisation . . . . .	12
1.5.4 Comportement de la solution . . . . .	13
1.6 LE MODÈLE DES PARTONS . . . . .	14
<b>2 MOTIVATIONS POUR LES CORRECTIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR</b>	<b>17</b>
2.1 BRISURE DE LA SYMÉTRIE ÉLECTRO-FAIBLE . . . . .	19
2.2 À LA RECHERCHE DU BOSON DE HIGGS AU LHC . . . . .	22
2.2.1 Contraintes sur la masse du boson de Higgs . . . . .	22
2.2.2 Mécanismes de production . . . . .	23
2.2.3 Bruits de fond de la QCD . . . . .	23
2.3 LES CORRECTIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR . . . . .	24
2.4 MOTIVATIONS POUR $pp \rightarrow VV + jet$ . . . . .	26
<b>3 OUTILS POUR LES CALCULS À UNE BOUCLE</b>	<b>29</b>
3.1 LA MÉTHODE DES AMPLITUDES D'HÉLICITÉ . . . . .	31
3.2 LE PROJET GOLEM . . . . .	33
3.2.1 Intégrales scalaires et tensorielles : notations . . . . .	34
3.2.2 Introduction des facteurs de forme . . . . .	35
3.2.3 Détermination des facteurs de forme . . . . .	36
CONCLUSION . . . . .	40



4	AUTOMATISATION DES CALCULS À UNE BOUCLE	41
4.1	ÉTUDE DE LA RÉACTION $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$	43
4.1.1	Amplitude à l'ordre de l'arbre	43
4.1.2	Amplitude à l'ordre d'une boucle	44
5	ÉTUDE DU PROCESSUS $pp \rightarrow VV + jet$	49
5.1	DÉSINTÉGRATIONS DES BOSONS DE JAUGE FAIBLE	51
5.2	PROCESSUS PARTONIQUES	51
5.2.1	Différences entre $ZZ$ et $W^+W^-$	53
5.2.2	Schéma de régularisation et traitement de $\gamma_5$	54
5.3	STRUCTURE DE L'AMPLITUDE DE TRANSITION TOTALE	55
5.3.1	Les symétries de l'amplitude	56
5.3.2	Production des 36 hélicités	57
5.3.3	Expression des vecteurs de polarisation	58
5.3.4	Factorisation d'une phase spinorielle globale	59
5.4	ORDRE DE BORN	60
5.5	CORRECTIONS VIRTUELLES	62
5.5.1	Décomposition par facteur de couleur	62
5.5.2	Divergences et Renormalisation	62
5.5.3	Création d'un code automatique	64
5.5.4	Vérification du code	68
5.6	L'ÉMISSION RÉELLE	69
5.6.1	Section efficace totale à l'ordre NLO	70
5.6.2	Éléments de matrice de l'émission réelle	71
5.6.3	La méthode de soustraction des dipôles	74
5.6.4	Expression des dipôles	75
5.6.5	Expression de l'opérateur d'insertion	78
5.7	INTÉGRATION DANS L'ESPACE DE PHASE	78
5.7.1	Définitions	78
5.7.2	Paramétrage pour un processus $2 \rightarrow 2$	79
5.7.3	Paramétrage pour un processus $2 \rightarrow 3$	80
5.7.4	Paramétrage pour un processus $2 \rightarrow 4$	81
6	ÉTUDE PHÉNOMÉNOLOGIQUE	83
6.1	COMPARAISON POUR $pp \rightarrow W^+W^- jet$	85
6.2	SECTIONS EFFICACES À L'ORDRE DE LO	89
6.3	SECTIONS EFFICACES À L'ORDRE NLO	97
A	LISTE DES DIAGRAMMES DE FEYNMAN	99
A.1	DIAGRAMMES DE FEYNMAN DE LA RÉACTION $q\bar{q} \rightarrow ZZ + jet$	101
A.1.1	Diagrammes à l'ordre de l'arbre	101
A.1.2	Diagrammes à l'ordre d'une boucle	101
A.2	DIAGRAMMES DE FEYNMAN DE LA RÉACTION $q\bar{q} \rightarrow W^+W^- + jet$	105
A.2.1	Diagrammes à l'ordre de l'arbre	105
A.2.2	Diagrammes à l'ordre d'une boucle	105

B	DÉMONSTRATION DE RELATIONS DE LA MÉTHODE DES AMPLITUDES D'HELICITÉ	107
C	FORMULAIRE DE GOLEM	109
C.1	FACTEURS DE FORME À 4 POINTS . . . . .	109
C.2	FACTEURS DE FORME À 5 POINTS . . . . .	111
C.3	RELATIONS UTILES ENTRE FACTEURS DE FORME . . . . .	111
D	DÉMONSTRATION DES RELATIONS DE COMPLÉTUDE	
	POUR LES VECTEURS DE POLARISATION	113
E	EXPRESSION DES DIPÔLES DE L'ÉMISSION RÉELLE	115
E.1	DIPÔLES DE LA RÉACTION $q_1\bar{q}_2 \rightarrow VVg_5g_6$ . . . . .	115
E.1.1	Dipôle $\mathcal{D}_{g_5}^{q_1g_6}$ . . . . .	115
E.1.2	Dipôle $\mathcal{D}^{q_1g_6,\bar{q}_2}$ . . . . .	116
E.2	DIPÔLES DE LA RÉACTION $q_1\bar{q}_2 \rightarrow VVq_5\bar{q}_6$ . . . . .	117
E.2.1	Dipôle $\mathcal{D}_{\bar{q}_6q_5}^{q_1}$ . . . . .	117
E.2.2	Dipôle $\mathcal{D}_{\bar{q}_6}^{q_1q_5}$ . . . . .	118
E.3	DIPÔLES DE LA RÉACTION $q_1q_2 \rightarrow VVq_5q_6$ . . . . .	118
E.3.1	Dipôle $\mathcal{D}^{q_1q_6,q_2}$ . . . . .	119
E.4	DIPÔLES DE LA RÉACTION $g_1q_2 \rightarrow VVq_5g_6$ . . . . .	119
E.4.1	Dipôle $\mathcal{D}_{q_5g_6}^{g_1}$ . . . . .	120
E.4.2	Dipôle $\mathcal{D}_{q_5g_6}^{q_2}$ . . . . .	120
E.4.3	Dipôle $\mathcal{D}_{q_5}^{g_1g_6}$ . . . . .	121
E.4.4	Dipôle $\mathcal{D}_{g_6}^{g_1q_5}$ . . . . .	121
E.4.5	Dipôle $\mathcal{D}_{q_5}^{q_2g_6}$ . . . . .	122
E.4.6	Dipôle $\mathcal{D}^{g_1g_6,q_2}$ . . . . .	122
E.4.7	Dipôle $\mathcal{D}^{q_2g_6,g_1}$ . . . . .	123
E.4.8	Dipôle $\mathcal{D}^{g_1q_5,q_2}$ . . . . .	123
	BIBLIOGRAPHIE	125

## LISTE DES FIGURES

1.1	Tableau récapitulatif des propriétés des six quarks . . . . .	5
1.2	Illustration du modèle des partons avec la collision de deux hadrons . . . . .	14
2.1	Sections efficaces à l'ordre de l'arbre de la production du boson de Higgs . . . . . comme fonction de sa masse au LHC [14] . . . . .	21
2.2	Dépendance des sections efficaces au LO et NLO de la production de $t\bar{t}H$ au LHC par rapport aux échelles de renormalisation et factorisation avec $\mu = \mu_F$ [17, 18]	23

3.1	Représentation graphique d'un diagramme à boucle à $N$ points . . . . .	32
4.1	Diagrammes de Feynman à l'ordre de l'arbre de $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$ . . . . .	41
4.2	Diagrammes de Feynman à l'ordre d'une boucle de $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$ . . . . .	42
5.1	Exemples de diagrammes de Feynman pour $gg \rightarrow VVg$ . . . . .	50
5.2	Un exemple de diagramme de Feynman avec le vertex $A W^+ W^-$ . . . . .	51
5.3	Organigramme du code automatique . . . . .	67
5.4	Diagrammes de Feynman caractéristiques de $q\bar{q} \rightarrow ZZgg$ . . . . .	70
5.5	Diagrammes de Feynman caractéristiques de $q\bar{q} \rightarrow ZZq'\bar{q}'$ . . . . .	71
5.6	Évolution de l'élément de matrice réel pour $q\bar{q} \rightarrow VVgg$ (en haut) et du rapport entre les dipôles et ce même élément de matrice réel (en bas) . . . en fonction de $\Delta R_{56}$ . . . . .	77
6.1	Dépendance en $\mu_R$ et $\mu_F$ de la section efficace $pp \rightarrow ZZ + jet$ . . . . . à l'ordre de l'arbre en haut : au Tevatron avec $p_{T_{jet}} = 50$ GeV et $\sqrt{s} = 1.96$ TeV, . en bas : au LHC avec $p_{T_{jet}} = 100$ GeV et $\sqrt{s} = 14$ TeV . . . . .	90
6.2	Dépendance en $\mu_R$ et $\mu_F$ de la section efficace totale . . . . . $pp \rightarrow VV + jet$ au LO pour le LHC . . . . .	91
6.3	Sections efficaces différentielles au LO en fonction . . . . . de la masse invariante de la paire $VV$ avec $V = Z$ (en haut) et $V = W^\pm$ (en bas). Le seuil de production de la paire $VV$ se situe, comme attendu, à $m_{VV} = 2 \cdot M_V$ . . . . .	92
6.4	Sections efficaces différentielles au LO en fonction . . . . . de l'impulsion transverse du jet avec $V = Z$ (en haut) et $V = W^\pm$ (en bas) . . . . .	93
6.5	Sections efficaces différentielles au LO en fonction . . . . . de l'impulsion transverse d'un des bosons $V$ . . . . . avec $V = Z$ (en haut) et $V = W^\pm$ (en bas) . . . . .	94
6.6	Sections efficaces différentielles au LO en fonction . . . . . de la rapidité d'un des bosons $V$ avec $V = Z$ (en haut) et $V = W^\pm$ (en bas) . . . . .	95
6.7	Sections efficaces différentielles au LO . . . . . en fonction de la rapidité du jet avec $V = Z$ (en haut) et $V = W^\pm$ (en bas) . . . . .	96
6.8	Dépendance en $\mu_R$ et $\mu_F$ de la section efficace $pp \rightarrow ZZ + jet$ . . . . . à l'ordre supérieur avec la contribution du terme virtuel . . . . . et de l'opérateur d'insertion (en haut : au Tevatron, et en bas : au LHC) . . . . .	98

# NOTATIONS

<i>CERN</i>	Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire
<i>LHC</i>	Large Hadron Collider
<i>SM</i>	Standard Model
<i>QCD</i>	Quantum ChromoDynamics
<i>QED</i>	Quantum ElectroDynamics
<i>EW</i>	Electro-Weak
<i>SUSY</i>	Super-Symmetry
<i>LO</i>	Leading Order
<i>HO</i>	Higher Order
<i>NLO</i>	Next-to-Leading Order
<i>NNLO</i>	Next-to-Next-to-Leading Order
<i>LH</i>	Les Houches workshop
<i>GOLEM</i>	General One Loop Evaluator for Matrix Elements
<i>IR</i>	divergence de type Infra-Rouge
<i>UV</i>	divergence de type Ultra-Violette
<i>VBF</i>	Vector Boson Fusion



# INTRODUCTION

EN 2008, le futur collisionneur du CERN, le LHC, commencera à prendre des données dans le but de comprendre la brisure de la symétrie électro-faible et de détecter des signaux d'une éventuelle nouvelle physique. Pour contraindre les différents modèles de la physique au-delà du Modèle Standard, un grand nombre de réactions incluant de nombreuses particules dans l'état final sera étudié. Ces possibilités de découverte du LHC ne pourront être pleinement exploitées que si le bruit de fond de la Chromodynamique Quantique (QCD) est bien maîtrisé. En effet, avec le gain en énergie, la multiplicité moyenne des événements va croître énormément et la production de quatre, cinq, voire six jets ne sera plus marginale. Parmi ces réactions, la production associée d'une paire de bosons vecteurs de jauge faible ( $W^\pm, Z$ ) plus un jet est particulièrement intéressante. Elle constitue un bruit de fond à la recherche du boson de Higgs au LHC. De manière à pouvoir faire des prédictions quantitatives, il est important de calculer cette réaction à l'approximation dite "au-delà des logarithmes dominants". A cette approximation, il faut calculer la première correction quantique à tous les processus partoniques participant à la réaction hadronique considérée. Cette correction comporte deux contributions :

- le calcul de la contribution virtuelle : c'est un calcul à une boucle.
- le calcul de la contribution réelle : c'est un calcul à l'ordre de l'arbre mais avec un parton de plus dans l'état final.

Le calcul de la contribution réelle est bien connu et un certain nombre d'outils généraux existe déjà. Par contre, le calcul de la contribution virtuelle est extrêmement long et difficile au-delà des amplitudes à quatre particules externes, dont certaines massives, en dépit des puissants logiciels de calcul symbolique et nécessite le développement de nouvelles méthodes.

Le but premier est de trouver une expression analytique compacte. Mais si cela s'avère impossible, un calcul numérique direct de ces amplitudes est effectué. Ce calcul nécessite par ailleurs deux approches indépendantes en parallèle pour permettre une vérification du résultat.

Cette thèse est divisée en trois parties.

La première partie présente les propriétés fondamentales de la théorie QCD et traite des motivations pour les calculs à l'approximation au-delà des logarithmes dominants. Le chapitre 1 introduit le lagrangien de QCD, sa renormalisation, la propriété de liberté asymptotique propre à la QCD, et enfin le modèle des partons. Le chapitre 2 est consacré à l'intérêt du calcul des corrections à l'ordre supérieur du bruit de fond de la QCD, notamment dans la recherche du boson de Higgs au LHC.

La deuxième partie décrit les outils qui vont nous permettre d'évaluer ces corrections, et présente une première application à titre d'exemple. En effet, le chapitre 3 expose la méthode des amplitudes d'hélicité et la méthode GOLEM de réduction semi-numérique des intégrales à une boucle, et le chapitre 4 traite d'une application simple de ces outils à la réaction  $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$ .

La troisième et dernière partie de cette thèse comporte l'étude de la production d'une paire de bosons de jauge faible associée à un jet hadronique au LHC. Le chapitre 5 détaille les caractéristiques de la réaction et du code automatique créé pour son évaluation. Enfin le chapitre 6 contient une étude phénoménologique basée sur les prédictions obtenues à l'ordre supérieur pour les sections efficaces de ce processus.

# SECTIONS EFFICACES HADRONIQUES

1

## SOMMAIRE

1.1	LA CHROMODYNAMIQUE QUANTIQUE . . . . .	5
1.2	LE LAGRANGIEN DE QCD . . . . .	6
1.3	LES RÈGLES DE FEYNMAN POUR QCD . . . . .	6
1.4	LA RENORMALISATION DE QCD . . . . .	9
1.5	LA LIBERTÉ ASYMPTOTIQUE . . . . .	10
1.5.1	Le groupe de renormalisation . . . . .	10
1.5.2	Les équations du groupe de renormalisation . . . . .	11
1.5.3	Résolution des équations du groupe de renormalisation . . . . .	12
1.5.4	Comportement de la solution . . . . .	13
1.6	LE MODÈLE DES PARTONS . . . . .	14





## 1.1 LA CHROMODYNAMIQUE QUANTIQUE

Les hadrons se classent en deux familles : **les baryons** formés de 3 quarks (proton (uud), neutron (udd), ...) et les **mésons** formés d'une paire quark-antiquark (méson  $\pi^0$ , méson  $K$ , ...). Les baryons de spin  $3/2$  sont donc constitués de trois quarks de spin  $1/2$  qui forment une fonction d'onde d'espace et de spin apparaissant alors comme symétrique. Mais puisque les baryons sont de spin demi-entier, la statistique de Fermi-Dirac leur impose une fonction d'onde totalement antisymétrique. Les quarks ne peuvent donc pas se trouver dans le même état quantique. Pour résoudre ce dilemme, on introduit un nombre quantique supplémentaire pour les quarks, **la couleur**, qui doit prendre trois valeurs. La fonction d'onde du baryon est alors antisymétrique par rapport à cette nouvelle charge de couleur. Dans le cas du hadron, chaque constituant, quark ou anti-quark, possèdera une couleur telle que le hadron parent soit un singlet de  $SU(3)$ , c'est-à-dire dépourvu de charge de couleur.

La chromodynamique quantique (QCD) est la théorie de l'interaction forte, une des quatre forces fondamentales de la nature. Elle est considérée aujourd'hui comme l'un des piliers du Modèle Standard. C'est une théorie de jauge **non abélienne** dont le groupe de jauge local est  $SU(3)$ . Comme le groupe  $SU(3)$  possède 8 générateurs, l'interaction forte comprend 8 bosons vecteur appelés gluons, de spin 1 et de masse nulle. Les constituants élémentaires de matière soumis à l'interaction forte sont des fermions de spin  $1/2$  appelés quarks. Nous rappelons dans le tableau ci-dessous les propriétés<sup>1</sup> des six quarks connus à l'heure actuelle [1] :

Saveur du quark	Charge électrique (en unité de $e$ )	Masse (Gev/ $c^2$ )
u	+2/3	$2.7 \pm 0.4 \cdot 10^{-3}$
d	-1/3	$4.8 \pm 0.5 \cdot 10^{-3}$
s	-1/3	$92 \pm 9$
c	+2/3	$1.25 \pm 0.09$
b	-1/3	$4.20 \pm 0.07$
t	+2/3	$172.5 \pm 2.7$

FIG. 1.1 – Tableau récapitulatif des propriétés des six quarks

A cause de la propriété de **liberté asymptotique** (voir section 1.5) propre à la QCD, les méthodes de la théorie perturbative développées en électrodynamique quantique (QED) ne s'appliqueront que dans le domaine des hautes énergies, ou de façon équivalente pour de courtes distances. En effet, il existe une importante différence entre ces deux théories. Les quanta de QCD (quarks, antiquarks, et gluons) sont confinés en hadrons et ne sont jamais observés à l'état de particules libres. Ainsi, les effets du **confinement** prédominent à grande distance, et une théorie non-perturbative est nécessaire.

Les quatre prochaines sections présentent de façon succincte les propriétés de la QCD.

<sup>1</sup>Les valeurs des masses sont données dans le schéma  $\overline{MS}$  pour les quarks u,d,s,c,b et celle du quark top provient d'observations directes d'événements

Pour plus de détails sur l'élégante structure de cette théorie, on renvoie le lecteur aux références standard suivantes [2] - [8].

## 1.2 LE LAGRANGIEN DE QCD

En jauge covariante, le Lagrangien de QCD s'écrit : ( $a, b = 1 \dots 8$ )

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{QCD}}(x) = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a(x) F_a^{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}_j(x) (i\mathcal{D}_{ji} - m) \psi_i(x) \\ & - \frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A_a^\mu(x))^2 + \partial_\mu \eta^{a\dagger} (D_{ab}^\mu \eta^b) \end{aligned} \quad (1.1)$$

où l'on a introduit les dérivées covariantes :

$$D_{ij}^\mu = \partial^\mu \delta_{ij} - i g_s (T^c)_{ij} A^{c\mu} \quad (1.2)$$

$$D_{ab}^\mu = \partial^\mu \delta_{ab} - i g_s (F^c)_{ab} A^{c\mu} \quad (1.3)$$

Les objets  $A, \psi, \eta$  sont respectivement des champs bosoniques, fermioniques, et de fantômes. Les indices  $a, b$  sont appelés "indices de couleur",  $g_s$  est la constante de couplage forte, et  $\xi$  est le paramètre de fixation de jauge.

Les matrices  $T^a$  sont les générateurs de  $SU(3)$  dans la représentation fondamentale, et sont définis par :

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (1.4)$$

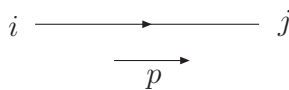
où les constantes de structure du groupe  $f^{abc}$  sont antisymétriques dans la permutation de deux indices. Les matrices  $F^a$  sont les générateurs de  $SU(3)$  dans la représentation adjointe :

$$(F^a)_{bc} = -i f^{abc} \quad (1.5)$$

### 1.3 LES RÈGLES DE FEYNMAN POUR QCD

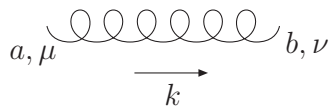
Comme pour le cas de la QED, le calcul perturbatif de l'élément de matrice de toute réaction requiert l'utilisation des règles de Feynman décrivant l'interaction des quarks et gluons. On donne ci-dessous les règles de Feynman dérivées des différents termes du Lagrangien de QCD, dans le cadre de la théorie perturbative. Elles nous permettront d'exprimer les expressions analytiques de tous les diagrammes de Feynman de la réaction étudiée. On précise que tous les moments sont considérés comme entrants.

\* Propagateur du fermion :



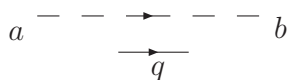
$$\frac{i(\not{p} + m)\delta^{ij}}{p^2 - m^2 + i\lambda}$$

\* Propagateur du gluon :



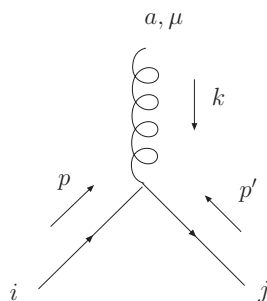
$$\frac{-i\delta^{ab}}{k^2 + i\lambda} \left( g^{\mu\nu} - (1 - \xi) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 + i\lambda} \right)$$

\* Propagateur du fantôme :



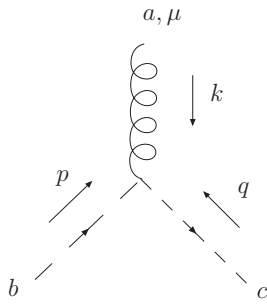
$$\frac{i\delta^{ab}}{q^2 + i\lambda}$$

\* Vertex  $A\bar{\psi}\psi$  :



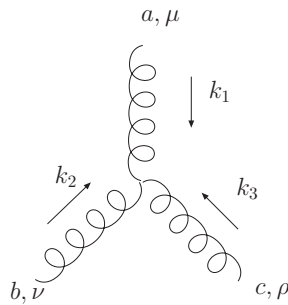
$$i g_s (T^a)_{ji} \gamma^\mu (2\pi)^4 \delta^4(p + p' + k)$$

\* Vertex  $A\bar{\eta}\eta$  :



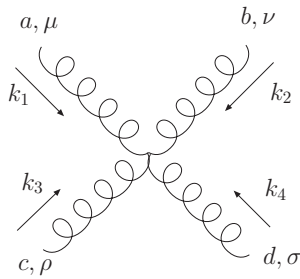
$$g_s f_{abc} q^\mu (2\pi)^4 \delta^4(p + q + k)$$

\* Vertex à 3 gluons :



$$g_s f_{abc} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3) \times [g_{\mu\nu} (k_1 - k_2)_\rho + g_{\nu\rho} (k_2 - k_3)_\mu + g_{\rho\mu} (k_3 - k_1)_\nu]$$

\* Vertex à 4 gluons :



$$-i g_s^2 (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3 + k_4) \times \left[ \begin{aligned} & f_{eab} f_{ecd} (g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \\ & f_{eac} f_{edb} (g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}) \\ & f_{ead} f_{ebc} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma}) \end{aligned} \right]$$

Lors du calcul de processus à une boucle, on fait le choix de se placer dans la jauge de Feynman  $\zeta = 1$ , qui permet notamment de simplifier l'expression du propagateur du gluon, et ainsi de réduire le nombre de termes à évaluer dans les expressions des diagrammes de Feynman.

## 1.4 LA RENORMALISATION DE QCD

Lors de calculs perturbatifs, on peut rencontrer des divergences dans les intégrales à boucles des diagrammes de Feynman. Ces divergences dites ultra-violettes (UV) proviennent de la région d'intégration à grands moments de ces intégrales. Elles peuvent être éliminées ordre par ordre en ajoutant un nombre fini de contre-termes au Lagrangien. Plus précisément,

on redéfinit la normalisation des champs, des masses et de la constante de couplage du Lagrangien afin d'absorber ces divergences. Il est alors possible de réexprimer les quantités nues du Lagrangien d'origine en fonction des quantités renormalisées (avec indice  $r$ ) :

$$\begin{aligned}
\psi &= Z_2^{1/2} \psi_r \\
A_\mu^a &= Z_3^{1/2} A_{\mu r}^a \\
\eta_{1,2}^a &= \tilde{Z}_3^{1/2} \eta_{1,2r}^a \\
g_s &= Z_g g_{s_r} \\
m &= Z_m m_r \\
\xi &= Z_3 \xi_r
\end{aligned} \tag{1.6}$$

On réécrit le Lagrangien sous la forme d'une partie qui contient tous les paramètres renormalisés (en fait, le même Lagrangien mais fonction des quantités renormalisées) et d'une partie correspondant aux contre-termes :

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^r + \delta\mathcal{L} \tag{1.7}$$

Le Lagrangien  $\delta\mathcal{L}$  est appelé Lagrangien des contre-termes, et a pour expression :

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}(x) &= -\frac{1}{4} (Z_3 - 1) (\partial_\mu A_\nu^b(x) - \partial_\nu A_\mu^b(x))^2 + i (Z_2 - 1) \bar{\psi}_i(x) \not{\partial} \psi_i(x) \\
&+ (\tilde{Z}_3 - 1) \partial_\mu \eta_b^\dagger(x) \partial^\mu \eta_b(x) \\
&+ \frac{g_s}{2} f_{abc} \mu^\varepsilon (Z_1 - 1) (\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x)) A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \\
&+ i g_s \mu^\varepsilon (\tilde{Z}_1 - 1) \partial_\mu \eta_b^\dagger(x) (F \cdot A^\mu(x))^{bc} \eta_c(x) \\
&- g_s \mu^\varepsilon (Z_1^F - 1) \bar{\psi}(x)_i (T \cdot \mathcal{A}(x))_{ij} \psi_j(x) \\
&- \frac{g_s^2}{4} f_{abc} f_{ade} \mu^{2\varepsilon} (Z_4 - 1) A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) A_\mu^d(x) A_\nu^e(x)
\end{aligned} \tag{1.8}$$

où  $Z_1^F$ ,  $\tilde{Z}_1$ ,  $Z_1$ ,  $Z_4$  sont respectivement les constantes de renormalisation, du vertex gluon-quark, du vertex fantôme-fantôme-gluon, du vertex à 3 gluons, et du vertex à 4 gluons. Dans la relation ci-dessus, nous avons introduit le paramètre  $\mu$ , dit de renormalisation, qui est une échelle de masse arbitraire trouvant son origine dans la procédure de renormalisation. Quant au paramètre  $\varepsilon_{uv}$ , il provient du calcul des intégrales à boucle effectué dans un espace à  $n = 4 - 2\varepsilon_{uv}$  (avec  $\varepsilon_{uv} > 0$ , c'est-à-dire  $n \rightarrow 4^-$ ).

Dans le schéma de renormalisation modifié de soustraction minimale ( $\overline{MS}$ ), les principales constantes de renormalisation  $Z_i$  s'écrivent en terme d'un développement en puissance de  $g_s$ ,

et ont pour valeur à l'ordre d'une boucle <sup>2</sup> :

$$Z_3^{(1)} = 1 + \frac{\alpha_s}{4\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) \left( N \left[ \frac{13}{6} - \frac{\xi}{2} \right] - \frac{4}{3} T_F \right) \quad (1.9)$$

$$Z_2^{(1)} = 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \xi \left( \frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) \quad (1.10)$$

$$Z_1^{F,(1)} = 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) \left( C_F \xi + N \left[ \frac{3}{4} + \frac{\xi}{4} \right] \right) \quad (1.11)$$

$$Z_g^{(1)} = \frac{Z_1^F}{Z_2 Z_3^{1/2}} = 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln 4\pi - \gamma \right) \frac{1}{6} (11N - 4 T_F N_f) \quad (1.12)$$

où  $\gamma = 0.5772\dots$  est la constante de Euler. Les identités de Slavnov-Taylor (qui constituent une généralisation au cas non abélien des identités de Ward) nous imposent les relations suivantes entre les constantes de renormalisation :

$$\frac{Z_1}{Z_3} = \frac{\tilde{Z}_1}{\tilde{Z}_3} = \frac{Z_1^F}{Z_2} = \frac{Z_4^{1/2}}{Z_3^{1/2}} \quad (1.13)$$

## 1.5 LA LIBERTÉ ASYMPTOTIQUE

### 1.5.1 Le groupe de renormalisation

Dans la procédure de renormalisation, il existe un arbitraire dans la façon de définir les parties divergentes dans l'ultra-violet, plus précisément la partie finie qui sera extraite avec la partie infinie. De plus, comme nous l'avons déjà vu, on introduit un paramètre de masse arbitraire  $\mu$ . Par exemple, la constante de couplage renormalisée  $g_{s_r}$  dépend de cette échelle de renormalisation  $\mu$  à laquelle la procédure d'extraction des divergences a été effectuée :

$$g_{s_r}(\mu) = Z_g^{-1}(\mu) g_s \quad (1.14)$$

Les quantités  $g_{s_r}(\mu)$  et  $g_{s_r}(\mu')$  obtenues à partir de deux procédures d'extraction différentes caractérisées par les échelles de renormalisation  $\mu$  et  $\mu'$  sont reliées entre elles par :

$$g_{s_r}(\mu') = z_g(\mu', \mu) g_{s_r}(\mu) \quad \text{avec} \quad z_g(\mu', \mu) = \frac{Z_g(\mu)}{Z_g(\mu')} \quad (1.15)$$

On peut vérifier que l'ensemble de ces transformations  $\{z_g(\mu', \mu)\}$  forme un groupe abélien appelé **groupe de renormalisation**. La même constatation peut évidemment s'appliquer à la renormalisation des champs et autres paramètres du Lagrangien.

Ainsi on a le choix entre une infinité d'expressions pour une même quantité physique ; ces différentes expressions étant reliées entre elles par des renormalisations finies. Puisqu'elles sont obtenues à partir du même Lagrangien nu (non renormalisé), elles doivent décrire le même phénomène physique, et doivent donc être équivalentes. En d'autres termes, la valeur numérique d'une quantité physique comme une section efficace, doit être invariante sous une transformation de renormalisation finie.

<sup>2</sup>où l'on a redéfini la constante de couplage  $g_s$  par  $\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi}$

### 1.5.2 Les équations du groupe de renormalisation

Avec la régularisation dimensionnelle (un des schémas de régularisation),  $g_{s_r}$  acquiert une dimension de masse. C'est pourquoi on pose<sup>3</sup> :

$$g_{s_r} = g_{s_R} \mu^{\varepsilon_{uv}} \quad \text{avec} \quad \varepsilon_{uv} = 2 - \frac{n}{2} \quad (1.16)$$

où  $g_{s_R}$  est la constante de couplage sans dimension de masse. Or les paramètres nus du Lagrangien sont fixés et ne dépendent certainement pas de l'échelle de renormalisation  $\mu$ , c'est pourquoi on doit avoir :

$$\frac{d\zeta}{d\mu} = \frac{dg_s}{d\mu} = \frac{dm}{d\mu} = 0 \quad (1.17)$$

En conséquence, ce fait s'applique à toutes les observables physiques, et notamment à l'amplitude de transition, après renormalisation, à  $n_G$  lignes externes de gluons, et à  $n_F$  lignes externes de quarks, que l'on note  $\mathcal{F}_{n_G, n_F}^R(p, g_{s_r}, \zeta, m, \mu)$  :

$$\frac{d}{d\mu} \left( Z_3^{-n_G/2}(\mu, g_s, \zeta, m) Z_2^{-n_F/2}(\mu, g_s, \zeta, m) \mathcal{F}_{n_G, n_F}^R(p, g_{s_R}, \zeta_R, m_R, \mu) \right) \Big|_{g_s, \zeta, m} = 0 \quad (1.18)$$

après le développement de la dérivée totale par rapport à  $\mu$  et multiplication de l'égalité par  $\mu Z_3^{n_G/2} Z_2^{n_F/2}$ , on obtient les équations du groupe de renormalisation :

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta \frac{\partial}{\partial g_{s_R}} - \gamma_m m_R \frac{\partial}{\partial m_R} + \delta \frac{\partial}{\partial \zeta_R} - n_G \gamma_G - n_F \gamma_F \right) \mathcal{F}_{n_G, n_F}^R = 0 \quad (1.19)$$

où l'on a introduit les "fonctions du groupe de renormalisation" suivantes :

$$\beta(g_{s_R}, \zeta_R) \equiv \mu \frac{\partial g_{s_R}}{\partial \mu} \Big|_{g_s, \zeta, m} \quad (1.20)$$

$$\gamma_m(g_{s_R}, \zeta_R) \equiv -\frac{\mu}{m_R} \frac{\partial m_R}{\partial \mu} \Big|_{g_s, \zeta, m} \quad (1.21)$$

$$\delta(g_{s_R}, \zeta_R) \equiv \mu \frac{\partial \zeta_R}{\partial \mu} \Big|_{g_s, \zeta, m} \quad (1.22)$$

$$\gamma_G(g_{s_R}, \zeta_R) \equiv \frac{\mu}{2 Z_3} \frac{\partial Z_3}{\partial \mu} \Big|_{g_s, \zeta, m} \quad (1.23)$$

$$\gamma_F(g_{s_R}, \zeta_R) \equiv \frac{\mu}{2 Z_2} \frac{\partial Z_2}{\partial \mu} \Big|_{g_s, \zeta, m} \quad (1.24)$$

Les équations du groupe de renormalisation garantissent le fait que la théorie perturbative renormalisée nous donnera des prédictions physiques uniques, c'est-à-dire indépendantes de l'échelle de renormalisation  $\mu$ .

---

<sup>3</sup> $m_R \equiv m_r$  et  $\zeta_R \equiv \zeta_r$  car  $[m_r] = [\zeta] = 1$



### 1.5.3 Résolution des équations du groupe de renormalisation

Nous nous proposons de résoudre l'équation principale du groupe de renormalisation en introduisant le paramètre d'échelle d'énergie sans dimension  $\lambda$  de telle façon que  $p \rightarrow \lambda p$  dans l'équation (1.19). Pour alléger l'écriture, les indices  $R$  seront sous-entendus.

Pour un espace-temps à 4 dimensions, on a  $[\psi] = 3/2$  et  $[A_\mu^a] = 1$ , ce qui implique  $[\mathcal{F}_{n_G, n_F}^R] = 4 - n_G - \frac{3}{2}n_F$ . On peut alors écrire :

$$\mathcal{F}_{n_G, n_F} = \mu^{4 - n_G - \frac{3}{2}n_F} \Phi_{n_G, n_F} \left( \frac{\lambda p}{\mu}, g_s, \xi, \frac{m}{\mu} \right) \quad (1.25)$$

où l'on a introduit la fonction  $\Phi_{n_G, n_F}$ , l'équivalent sans dimension d'énergie de l'amplitude de transition. On remarque que la fonction  $\mathcal{F}_{n_G, n_F}$  est une fonction homogène de degré  $(4 - n_G - \frac{3}{2}n_F)$ , et l'application du théorème d'Euler des fonctions homogènes entraîne :

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + m \frac{\partial}{\partial m} \right) \mathcal{F} = (4 - n_G - \frac{3}{2}n_F) \mathcal{F} \quad (1.26)$$

On obtient ainsi l'équation :

$$\left( \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + m \frac{\partial}{\partial m} - 4 + n_G + \frac{3}{2}n_F \right) \mathcal{F}_{n_G, n_F}(\lambda p, g_s, m, \xi, \mu) = 0 \quad (1.27)$$

Si l'on soustrait (1.19) par (1.27), on trouve :

$$\left( -\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \beta \frac{\partial}{\partial g_s} + \delta \frac{\partial}{\partial \xi} - (\gamma_m + 1) m \frac{\partial}{\partial m} + \omega(g, \xi) \right) \mathcal{F}_{n_G, n_F} = 0 \quad (1.28)$$

où l'on a posé  $\omega(g, \xi) = 4 - n_G(1 + \gamma_G) - n_F(\frac{3}{2} + \gamma_F)$ .

On pose  $t = -\ln \lambda$ , et on introduit la constante de couplage effective  $\overline{g_s}(g_s, t)$ , la masse effective  $\overline{m}(m, t)$  et le paramètre de jauge effectif  $\overline{\xi}(\xi, t)$ , définis à l'échelle de renormalisation  $\frac{\mu}{\lambda}$ . Ces nouveaux paramètres vérifient <sup>4</sup> :

$$\frac{d\overline{g_s}}{dt} = \beta(\overline{g_s}) \quad \text{avec} \quad \overline{g_s}(0) \equiv g_s \quad (1.29)$$

$$\frac{1}{\overline{m}} \frac{d\overline{m}}{dt} = -1 - \gamma_m(\overline{g_s}) \quad \text{avec} \quad \overline{m}(0) \equiv m \quad (1.30)$$

$$\frac{d\overline{\xi}}{dt} = \delta(\overline{g_s}, \overline{\xi}) \quad (1.31)$$

Par conséquent,

$$\underbrace{\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \overline{g_s}} \frac{d\overline{g_s}}{dt} + \frac{\partial}{\partial \overline{m}} \frac{d\overline{m}}{dt} + \frac{\partial}{\partial \overline{\xi}} \frac{d\overline{\xi}}{dt} \right)}_{\equiv d/dt} + \omega(\overline{g_s}, \overline{\xi}) \mathcal{F}_{n_G, n_F} = 0 \quad (1.32)$$

<sup>4</sup>en notant que  $t = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Cette équation différentielle linéaire et homogène du premier ordre admet pour solution générale ( $\lambda = e^t$ ) :

$$\mathcal{F}_{n_G, n_F}(p, \bar{g}_s(t), \bar{\xi}(t), \bar{m}(t), \mu) = \mathcal{F}_{n_G, n_F}(e^t p, g_s, \xi, m, \mu) \exp\left(-\int_0^t dt' \omega_{n_G, n_F}(\bar{g}_s(t'), \bar{\xi}(t'))\right)$$

Cette relation permet l'analyse du comportement asymptotique de l'amplitude de transition pour de grandes impulsions<sup>5</sup>. De plus, après intégration de la relation (1.29), le comportement de la constante de couplage effective est donné par :

$$t = \int_g^{\bar{g}(t)} \frac{d\bar{g}'}{\beta(\bar{g}')} \quad (1.33)$$

#### 1.5.4 Comportement de la solution

Grâce à la relation (1.33), on peut étudier le comportement de  $\bar{g}(t)$ , qui dépend évidemment de la forme de la fonction  $\beta$ , sachant que  $\beta(0) = 0$  en théorie perturbative. En combinant (1.14) et (1.16), et en faisant appel à la relation (1.12), on en déduit que :

$$\beta(g_s) = -\frac{g_s^3}{(4\pi)^2} \frac{11N - 2N_f}{3} + \mathcal{O}(g_s^5) \equiv -\beta_0 g_s^3 + \mathcal{O}(g_s^5) \quad (1.34)$$

La fonction  $\beta$  n'a pas de valeur nulle excepté à  $\bar{g}' = 0$ , et comme le nombre de saveurs de quarks  $N_f$  est inférieur à 16 (pour  $N = 3$ ), elle est à valeurs négatives. Ce qui implique d'après (1.33) :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{pour } t \rightarrow +\infty \quad \bar{g}_R(t) \rightarrow 0 \\ \text{pour } t \rightarrow -\infty \quad \bar{g}_R(t) \rightarrow +\infty \end{array}}$$

Ainsi, contrairement au cas de QED, l'intensité de la constante de couplage diminue avec l'augmentation de l'échelle d'énergie caractéristique de la réaction. On appelle cette propriété "**la liberté asymptotique**"[9, 10].

## 1.6 LE MODÈLE DES PARTONS

Les hadrons interagissent par l'intermédiaire de leurs constituants élémentaires : les partons. Ce terme générique englobe les quarks, les anti-quarks et les gluons. Il nous faut alors calculer la section efficace de la réaction partonique sous-jacente. Or les réactions directement observables expérimentalement sont les réactions hadroniques. Néanmoins, il est possible de remonter du calcul de la section efficace partonique à la section efficace hadronique, en utilisant les **fonctions de structure des hadrons**.

Le **Modèle des partons** permet de modéliser les contributions perturbatives (la réaction partonique) et non perturbatives (les fonctions de structure hadroniques), et ce, dans le cadre de réactions avec de grands moments transférés.

<sup>5</sup>en effet, si t augmente, alors  $\lambda$  diminue, et donc l'échelle d'énergie  $\mu/\lambda$  augmente

Si l'échelle d'énergie caractéristique de la collision entre deux hadrons est très importante (c'est-à-dire largement supérieure à la somme des masses hadroniques), on peut négliger la masse des hadrons <sup>6</sup>, et considérer alors chaque hadron comme un "faisceau" de partons, dans lequel chaque parton emporte avec lui une fraction  $x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) du moment  $P$  du hadron initial.

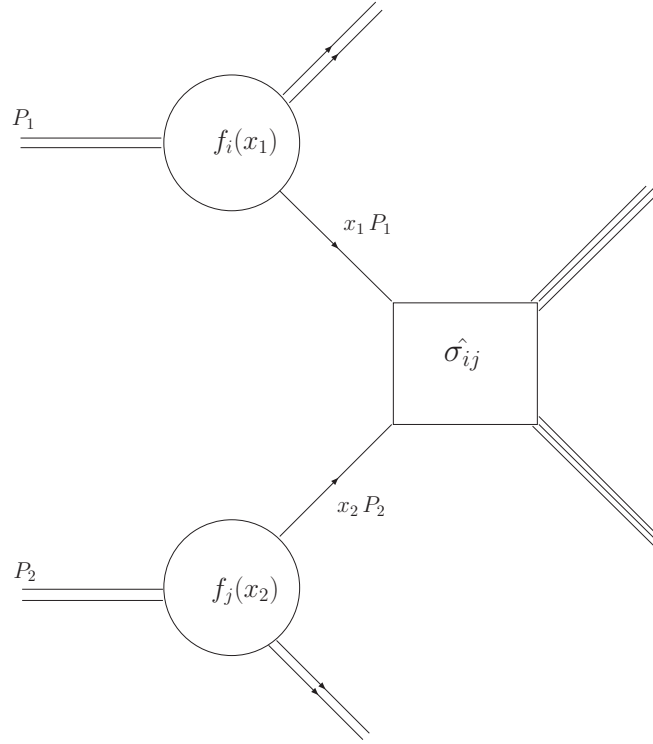


FIG. 1.2 – Illustration du modèle des partons avec la collision de deux hadrons

Ainsi, la section efficace d'un processus entre deux hadrons de moment  $P_1$  et  $P_2$ , est donnée par la section efficace  $\hat{\sigma}$  du processus partonique sous-jacent calculée perturbativement, dans lequel les partons possèdent les moments  $p_1 = x_1 P_1$  et  $p_2 = x_2 P_2$ , multipliée par les fonctions de structure hadronique, ou "densités de probabilité partonique",  $f_i(x)$ , de trouver le parton  $i$  dans le hadron emportant le moment  $x p$ , et intégrée sur toutes les valeurs de  $x_1$  et  $x_2$ . Enfin, on somme sur toutes les réactions partoniques réalisables :

$$\sigma(P_1, P_2) = \sum_{ij} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 f_i(x_1, \mu_F^2) f_j(x_2, \mu_F^2) \hat{\sigma}_{ij}(p_1, p_2, \mu_F^2, \mu_R^2) \quad (1.35)$$

Le paramètre  $\mu_F$  présent dans les densités partoniques est l'échelle d'énergie dite de factorisation.

Ces densités de probabilité partoniques sont universelles dans le sens où elles ne dépendent pas de la réaction hadronique étudiée. Malheureusement, elles ne peuvent pas être

<sup>6</sup>La masse du proton a pour valeur [1] :  $0.938\,272 \text{ GeV}/c^2$

évaluées avec la théorie des champs perturbative. Cependant, il est possible de les mesurer expérimentalement pour une certaine échelle d'énergie  $Q_0^2$ , et grâce aux équations DGLAP [11], de prédire leur évolution en fonction de l'échelle d'énergie caractéristique de la diffusion partonique  $Q^2$ . Si on note  $f_q$  la densité de quarks ou d'anti-quarks (de saveur notée  $q$ ) et  $f_g$  la densité de gluons, l'évolution de ces densités partoniques est alors donnée par une équation intégral-différentielle :

$$\frac{df_q(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \left[ P_{qq} \left( \frac{x}{y} \right) f_q(y, Q^2) + P_{qg} \left( \frac{x}{y} \right) f_g(y, Q^2) \right] \quad (1.36)$$

$$\frac{df_g(x, Q^2)}{d \ln Q^2} = \frac{\alpha_s(Q^2)}{2\pi} \int_x^1 \frac{dy}{y} \sum_q \left[ P_{gq} \left( \frac{x}{y} \right) f_q(y, Q^2) + P_{gg} \left( \frac{x}{y} \right) f_g(y, Q^2) \right] \quad (1.37)$$

où l'on somme sur toutes les saveurs des quarks et anti-quarks dans (1.37).



# MOTIVATIONS POUR LES CORRECTIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR

# 2

## SOMMAIRE

2.1	BRISURE DE LA SYMÉTRIE ÉLECTRO-FAIBLE . . . . .	19
2.2	À LA RECHERCHE DU BOSON DE HIGGS AU LHC . . . . .	22
2.2.1	Contraintes sur la masse du boson de Higgs . . . . .	22
2.2.2	Mécanismes de production . . . . .	23
2.2.3	Bruits de fond de la QCD . . . . .	23
2.3	LES CORRECTIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR . . . . .	24
2.4	MOTIVATIONS POUR $pp \rightarrow VV + jet$ . . . . .	26



Le **boson de Higgs** constitue un composant fondamental du Modèle Standard qui permettrait la compréhension de l'origine des masses des particules. Sa découverte représente donc un des plus importants défis à relever pour les grands accélérateurs de particules actuels et à venir.

Cette particule peut être produite et détectée dans les collisions à haute énergie hadron-hadron et électron-positron. À la fin des années 1990, le collisionneur **Large Electron Positron** (LEP) du CERN n'a pas réussi à le détecter (avec certitude) avec une énergie dans le centre de masse de la paire initiale  $e^+ e^-$  allant jusqu'à  $\sqrt{s} = 209$  GeV. Il a permis néanmoins de mettre une borne inférieure à la masse du boson d'environ 114 GeV.

Contrainte de postuler l'existence d'un boson plus massif, toujours permis par les contraintes théoriques du Modèle Standard, la communauté des physiciens a logiquement porté son attention sur les collisionneurs hadroniques que sont le **Tevatron** et le **Large Hadron Collider**.

## 2.1 BRISURE DE LA SYMÉTRIE ÉLECTRO-FAIBLE

Quel est le mécanisme qui permet d'attribuer des masses aux bosons de jauge faible  $W^\pm, Z^0$ , ainsi qu'aux fermions? Dans cette section, nous allons introduire le mécanisme de brisure de symétrie électro-faible le plus en vogue qui permet de répondre à cette question, à savoir le **mécanisme de Higgs** [12].

Si l'on souhaite préserver l'invariance de jauge des théories de champs de type Yang-Mills, alors il n'est pas possible d'introduire explicitement dans le lagrangien des termes de masse pour les bosons de jauge faible par exemple. Pourtant, ces bosons de jauge de la théorie des interactions électro-faible,  $W^\pm, Z^0$ , sont bien massifs :

$$\begin{aligned} M_W &= 80.425 \text{ GeV} \\ M_Z &= 91.1876 \text{ GeV} \end{aligned}$$

Pour résoudre ce problème, une solution a été proposée : le mécanisme de Higgs. Le modèle Standard électro-faible, qui est invariant sous les transformations du groupe de jauge non-abélien  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , peut être spontanément brisé si l'on introduit un champ scalaire complexe  $\hat{\Phi}$ , lequel est un doublet de  $SU(2)$  avec l'hypercharge  $Y_\Phi = 1$ , avec les composantes :

$$\hat{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

À l'origine, le Modèle Standard contient trois champs de jauge sans masse de  $SU(2)$  notés  $\hat{W}_i^\mu(x)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), et un champ de jauge sans masse de  $U(1)$  noté  $\hat{B}^\mu(x)$ . Si on associe le lagrangien  $\mathcal{L}_\Phi$  décrivant la dynamique du champ  $\hat{\Phi}$  au lagrangien électro-faible  $\mathcal{L}_{EW}$ , on obtient :

$$\mathcal{L}_{EWSB} = \mathcal{L}_\Phi + \mathcal{L}_{EW} \quad (2.2)$$

$$\text{avec } \mathcal{L}_\Phi = (\hat{D}_\mu \hat{\Phi})^\dagger (\hat{D}^\mu \hat{\Phi}) - V(\hat{\Phi}), \quad V(\hat{\Phi}) = -\mu^2 \hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi} + \frac{\lambda}{4} (\hat{\Phi}^\dagger \hat{\Phi})^2 \quad (2.3)$$

$$\text{avec } \mathcal{L}_{EW} = -\frac{1}{4} \hat{F}^{\mu\nu} \hat{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \hat{G}^{\mu\nu} \hat{G}_{\mu\nu} \quad (2.4)$$



La dérivée covariante décrivant l'interaction entre le champ scalaire et les bosons de jauge faible, est définie par :

$$\hat{D}^\mu = \partial^\mu + i \frac{g}{2} \tau \cdot \hat{W}^\mu + i \frac{g'}{2} \hat{B}^\mu \quad (2.5)$$

Tandis que les tenseurs des termes cinétiques ont pour expression :

$$\hat{F}_{\mu\nu}^i = \partial_\mu \hat{W}_\nu^i - \partial_\nu \hat{W}_\mu^i - g \epsilon^{ijk} \hat{W}_\mu^j \hat{W}_\nu^k \quad (2.6)$$

$$\hat{G}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{B}_\nu - \partial_\nu \hat{B}_\mu \quad (2.7)$$

Par ailleurs, on a introduit les constantes de couplage  $g, g'$ , les paramètres  $\lambda \neq 0, \mu^2$ , et les matrices  $\tau^a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) générateurs de  $SU(2)$  dans la représentation fondamentale définis par  $[\tau^a, \tau^b] = i \epsilon^{abc} \tau_c$  (avec  $\epsilon^{123} = 1$ ).

À l'aide des champs arbitraires  $\alpha$  et  $\beta$ , on peut écrire les transformations de jauge de  $SU(2) \times U(1)$  :

$$\hat{\Phi}(x) \rightarrow (1 + i \alpha(x) \cdot \tau) \hat{\Phi}(x) + i \beta(x) \hat{\Phi}(x) \quad (2.8)$$

$$\hat{W}_\mu^a(x) \rightarrow \hat{W}_\mu^a(x) + \frac{1}{g} \partial_\mu \alpha^a(x) + \epsilon^{abc} \hat{W}_\mu^b(x) \alpha^c(x) \quad (2.9)$$

$$B^\mu(x) \rightarrow B^\mu(x) + \frac{1}{g'} \partial^\mu \beta(x) \quad (2.10)$$

Si on décide d'introduire à la main un terme de masse pour les bosons de jauge faible de la forme  $\frac{1}{2} M_V^2 \hat{W}^\mu \hat{W}_\mu$ , on peut montrer que l'invariance de jauge locale sous les transformations ci-dessus n'est plus vérifiée. Cependant, le mécanisme de Higgs permet notamment d'engendrer une masse aux bosons de jauge faible. Ce mécanisme repose sur le choix effectué pour la valeur minimale du potentiel  $V(\hat{\Phi})$  pour l'état du vide. Plus précisément, on souhaite que cette valeur soit non-nulle, pour cela on doit considérer  $\mu^2 > 0$  :

$$\langle 0 | \hat{\Phi}^2 | 0 \rangle = \frac{2\mu^2}{\lambda} \equiv \frac{v^2}{2} \quad (2.11)$$

On choisit en conséquence de paramétrer notre champ scalaire  $\hat{\Phi}$  autour de ce minimum en introduisant le nouveau champ  $\hat{H}(x)$  :

$$\hat{\Phi} = \exp(-i \hat{\theta}(x) \cdot \frac{\tau}{2v}) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \hat{H}(x)) \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

Toutefois, il est possible d'obtenir une phase nulle en appliquant une transformation de jauge appropriée :

$$\hat{\Phi} \rightarrow \exp(+i \hat{\theta}(x) \cdot \frac{\tau}{2v}) \hat{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \hat{H}(x) \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

En introduisant cette expression dans le lagrangien  $\mathcal{L}_{EWSB}$  et en ne gardant que les termes d'ordre 2 pour le champ scalaire  $\hat{H}(x)$  (termes cinétiques et termes de masse), on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{EWSB} = & + \frac{1}{2} \partial_\mu \hat{H} \partial^\mu \hat{H} - \mu^2 \hat{H}^2 \\
& - \frac{1}{4} (\partial_\mu \hat{W}_{1\nu} - \partial_\nu \hat{W}_{1\mu}) (\partial^\mu \hat{W}_1^\nu - \partial^\nu \hat{W}_1^\mu) + \frac{1}{8} g^2 v^2 \hat{W}_{1\mu} \hat{W}_1^\mu \\
& - \frac{1}{4} (\partial_\mu \hat{W}_{2\nu} - \partial_\nu \hat{W}_{2\mu}) (\partial^\mu \hat{W}_2^\nu - \partial^\nu \hat{W}_2^\mu) + \frac{1}{8} g^2 v^2 \hat{W}_{2\mu} \hat{W}_2^\mu \\
& - \frac{1}{4} (\partial_\mu \hat{W}_{3\nu} - \partial_\nu \hat{W}_{3\mu}) (\partial^\mu \hat{W}_3^\nu - \partial^\nu \hat{W}_3^\mu) - \frac{1}{4} \hat{G}_{\mu\nu} \hat{G}^{\mu\nu} \\
& + \frac{1}{8} v^2 (g \hat{W}_{3\mu} - g' \hat{B}_\mu) (g \hat{W}_3^\mu - g' \hat{B}^\mu)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

La première ligne de (2.14) indique la présence d'un champ scalaire, le boson de Higgs, de masse égale à  $\sqrt{2}\mu$ . Les deux lignes suivantes nous révèlent que les composantes  $\hat{W}_1$  et  $\hat{W}_2$  possèdent désormais une masse :

$$M_1 = M_2 = \frac{g v}{2} \equiv M_W \tag{2.15}$$

Toutefois, les deux dernières lignes ne nous permettent pas de conclure sur la nature des champs  $\hat{W}_3$  et  $\hat{B}$ , car ces derniers apparaissent comme intriqués l'un dans l'autre. Mais il est possible d'y remédier en introduisant deux nouveaux champs, issus d'une combinaison linéaire des deux premiers :

$$\hat{Z}^\mu = \cos \theta_W \hat{W}_3^\mu - \sin \theta_W \hat{B}^\mu \tag{2.16}$$

$$\hat{A}^\mu = \cos \theta_W \hat{W}_3^\mu + \sin \theta_W \hat{B}^\mu \tag{2.17}$$

où  $\theta_W$  est l'angle de Weinberg défini par :

$$\cos \theta_W = \frac{g}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} \tag{2.18}$$

Ainsi, les deux dernières lignes de (2.14) deviennent :

$$- \frac{1}{4} (\partial_\mu \hat{Z}_\nu - \partial_\nu \hat{Z}_\mu) (\partial^\mu \hat{Z}^\nu - \partial^\nu \hat{Z}^\mu) + \frac{1}{8} v^2 (g^2 + g'^2) \hat{Z}_\mu \hat{Z}^\mu - \frac{1}{4} \hat{F}_{\mu\nu} \hat{F}^{\mu\nu} \tag{2.19}$$

avec le tenseur cinétique pour le champ  $\hat{A}$  :

$$\hat{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \hat{A}_\nu - \partial_\nu \hat{A}_\mu \tag{2.20}$$

On en déduit les masses pour les champs  $\hat{A}$  et  $\hat{Z}$  :

$$M_A = 0 \tag{2.21}$$

$$M_Z = \frac{1}{2} v (g^2 + g'^2)^{1/2} = \frac{M_W}{\cos \theta_W} \tag{2.22}$$

Il est maintenant aisé d'identifier les champs massifs  $\hat{W}_{1,2}$  et  $\hat{Z}$  comme ceux décrivant respectivement les bosons de jauge faible  $W^\pm$ ,  $Z^0$ , alors que le champ non massif  $\hat{A}$  correspond au photon. On peut alors faire l'identification suivante sur les constantes de couplage :

$$e = g \sin \theta_W \tag{2.23}$$

## 2.2 À LA RECHERCHE DU BOSON DE HIGGS AU LHC

Le Tevatron du laboratoire Fermilab à Chicago produit actuellement des collisions entre protons et anti-protons avec une énergie dans le centre de masse  $\sqrt{s} = 1.96$  TeV. Mais jusqu'à présent, aucune donnée expérimentale n'a pu confirmer l'existence du boson de Higgs. Le LHC du CERN à Genève entrera en service très prochainement et produira alors des collisions entre deux faisceaux de protons avec une énergie dans le centre de masse égale à 14 TeV. Les deux détecteurs ATLAS et CMS auront pour mission de détecter les éventuelles signatures de nouvelles particules.

Des prédictions théoriques de plus en plus précises sont alors sollicitées afin de vérifier l'accord entre les résultats expérimentaux et le Modèle Standard. En particulier, une compréhension précise de la phénoménologie concernant les bruits de fond de type QCD est nécessaire pour la découverte de nouveaux signaux, attestant la présence du fameux boson ou des partenaires supersymétriques des particules du Modèle Standard. En effet, comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, ces deux faisceaux hadroniques de très haute énergie peuvent être considérés comme deux faisceaux de partons libres. On comprend aisément que l'analyse du bruit de fond au LHC porte principalement sur l'étude de réactions partoniques avec production dans l'état final de photons, leptons, et de hadrons.

### 2.2.1 Contraintes sur la masse du boson de Higgs

Comme nous l'avons vu, le mécanisme de Higgs permet une brisure spontanée de la symétrie électro-faible, mais n'impose aucune valeur sur la masse du champ scalaire qui lui est associé. Cet arbitraire entraîne l'existence de plusieurs mécanismes privilégiés de production du boson en fonction de sa masse. Il existe cependant des contraintes théoriques et expérimentales sur la masse du boson de Higgs.

La condition d'unitarité de l'élément de matrice S dans le cas de processus de diffusion à haute énergie, notamment pour la réaction  $W^+W^- \rightarrow W^+W^-$  avec  $s \gg M_W^2$ , permet de donner une limite théorique supérieure pour la masse du Higgs :

$$M_H \lesssim 710 \text{ GeV} \quad (2.24)$$

Dans le cas d'un boson de Higgs avec une masse de l'ordre du TeV, l'intensité de l'interaction électro-faible à haute-énergie devient très grande. En conséquence, les corrections radiatives d'ordre supérieur sont tellement importantes que la théorie perturbative ne peut plus être appliquée.

Le boson de Higgs a été recherché au collisionneur  $e^+e^-$  du LEP avec une énergie dans le centre de masse allant jusqu'à  $\sqrt{s} = 209$  GeV. Dans cette région, le mécanisme de production dominant du boson de Higgs est  $e^+e^- \rightarrow ZH$ . Mais aucun excédent significatif dans le bruit de fond du Modèle Standard n'a été observé. On obtient ainsi une limite expérimentale d'exclusion pour la masse du Higgs :

$$M_H > 114.4 \text{ GeV} \quad (2.25)$$

Une seconde contrainte expérimentale provient des mesures de précision des paramètres de l'interaction électro-faible. En effet, le boson de Higgs permet l'existence de nouveaux diagrammes de Feynman et contribue ainsi aux corrections radiatives pour les observables physiques relatives à l'interaction électro-faible, notamment pour la masse du boson  $W$  ou la masse du quark top. Des mesures expérimentales précises des paramètres du Modèle Standard permettraient de déterminer un intervalle de valeurs plus ou moins privilégiées pour la masse du boson (entre 30 et 200 GeV), et de lui attribuer une limite supérieure [13] :

$$M_H \lesssim 144 \text{ GeV} \quad (2.26)$$

### 2.2.2 Mécanismes de production

En supposant une luminosité intégrée  $\int \mathcal{L} = 10^5 \text{ pb}^{-1}$  et une énergie dans le centre de masse de la paire  $pp$  égale à  $\sqrt{s} = 14 \text{ TeV}$ , le LHC sera en mesure de découvrir le boson de Higgs à condition que sa masse soit approximativement comprise entre :

$$130 \text{ GeV} < M_H < 800 \text{ GeV} \quad (2.27)$$

Par contre, si la luminosité disponible n'est que de  $\int \mathcal{L} = 10^4 \text{ pb}^{-1}$ , la limite supérieure tombe alors à 600 GeV.

La production d'un boson de Higgs de type léger sera importante, mais sera par la même occasion accompagnée d'un bruit de fond assez élevé, tandis que la production d'un boson plus massif sera moindre avec un bruit de fond moins important. Il existe quatre mécanismes de production du boson de Higgs, dont les sections efficaces sont assez grandes pour être mesurées (voir Fig. 2.1) :

- la fusion gluon-gluon :  $gg \rightarrow H$ , par l'intermédiaire d'une boucle de quark lourd.
- la fusion de bosons vecteur (VBF) :  $qq \rightarrow qqH$  via  $W^+W^- / ZZ \rightarrow H$ .
- la production accompagnée d'un boson vecteur :  $q\bar{q} \rightarrow W^\pm H, ZH$ .
- la production accompagnée d'une paire de quarks lourds :  $gg, q\bar{q} \rightarrow t\bar{t}H$ ,  
et  $gg, q\bar{q} \rightarrow b\bar{b}H$ .

### 2.2.3 Bruits de fond de la QCD

Après comparaison au premier ordre perturbatif des sections efficaces des signaux et des rapports "signal sur bruit de fond" dans différentes régions pour la valeur de la masse du boson de Higgs, on est en mesure de prédire quels seront les processus qui permettront la production du boson la plus significative. Parmi toutes les réactions qui auront lieu au LHC, celles qui offrent le plus grand potentiel de découverte du boson de Higgs sont les suivantes :

- $gg \rightarrow H \rightarrow \gamma\gamma$ , pour une masse du boson  $M_H \leq 150 \text{ GeV}$
- $gg \rightarrow H \rightarrow ZZ^{(*)} \rightarrow l^+l^-l^+l^-$ , pour une masse du boson  $M_H \geq 130 \text{ GeV}$

---

<sup>1(\*)</sup> signifie "virtuel", c'est-à-dire hors couche de masse, et  $l$  pour leptons ( $l = e, \mu$ )

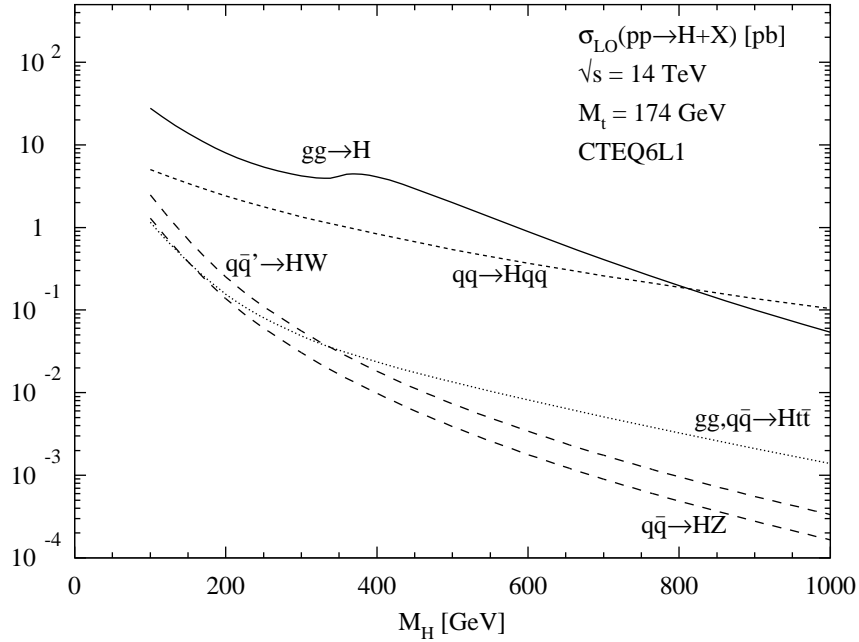


FIG. 2.1 – Sections efficaces à l'ordre de l'arbre de la production du boson de Higgs comme fonction de sa masse au LHC [14]

- $q\bar{q} \rightarrow WH \rightarrow l\bar{\nu} b\bar{b}$
- $q\bar{q} \rightarrow WH \rightarrow l\bar{\nu}_l \gamma\gamma$  et  $gg(q\bar{q}) \rightarrow t\bar{t}H \rightarrow WH + X \rightarrow l\bar{\nu}_l \gamma\gamma + X$

Tous les signaux ci-dessus coïncident avec des réactions dites de "bruit de fond", c'est-à-dire des réactions avec les mêmes particules dans l'état final, mais ne contenant pas d'état intermédiaire avec présence du boson de Higgs. Les bruits de fond correspondant aux signaux précédents sont :

- $q\bar{q}, gg \rightarrow \gamma\gamma$
- $q\bar{q} \rightarrow ZZ^{(*)} \rightarrow l^+l^-l^+l^-$
- $q\bar{q} \rightarrow WZ \rightarrow l\bar{\nu} b\bar{b}$
- $q\bar{q} \rightarrow W\gamma\gamma \rightarrow l\bar{\nu}_l \gamma\gamma$  et  $gg(q\bar{q}) \rightarrow t\bar{t}\gamma\gamma \rightarrow l\bar{\nu}_l \gamma\gamma + X$

### 2.3 LES CORRECTIONS D'ORDRE SUPÉRIEUR

Toutes les sections efficaces de réactions partoniques au premier ordre perturbatif (ou Leading Order - LO), pertinentes pour le LHC, ont déjà été évaluées [15, 16]. Cependant, la plupart des analyses requiert des calculs au-delà de l'ordre le plus bas, c'est-à-dire à l'approximation au-delà des logarithmes dominants (ou Next-to-Leading Order - NLO). Après

cette étude plus rigoureuse du bruit de fond, nous serons en mesure de tester les prédictions du Modèle Standard avec plus de précision.

Les corrections à l'ordre supérieur (ou Higher Order - HO) définies par :

$$\sigma^{NLO} = \sigma^{LO}(\alpha_s(\mu_R), \mu_F) + \sigma^{HO}(\alpha_s^2(\mu_R), \mu_R, \mu_F) \quad (2.28)$$

peuvent être non négligeables par rapport aux prédictions du LO, et modifier la section efficace d'une proportion de l'ordre de la dizaine de pour cent selon les régions de l'espace de phase. Une des causes est l'intensité à haute énergie de la constante de couplage  $\alpha_s$  de l'interaction forte (pour exemple,  $\alpha_s(M_z^2) = 0.118$ ).

De surcroît, les corrections d'ordre supérieur permettent l'ouverture de nouveaux canaux non permis à l'ordre le plus bas. Par exemple, l'émission réelle du processus  $pp \rightarrow VV + jet$  fait apparaître la réaction partonique  $q\bar{q} \rightarrow VVq'\bar{q}'$  non présente au LO.

Par ailleurs, en ajoutant la contribution du HO à la section efficace du LO, il y a compensation partielle de la dépendance de la section efficace au LO par rapport à l'échelle de renormalisation. En effet, la section efficace au LO présente une dépendance monotone provenant des densités partoniques, tandis que la section efficace au NLO possède une dépendance non monotone mais avec la possible présence d'une région relativement plate. De plus, si cette région correspond au cas où les sections efficaces au LO et NLO sont du même ordre de grandeur, alors celle-ci représentera un choix judicieux pour la valeur à donner à cette échelle (voir Fig. (2.2)). Il faut toutefois préciser que cette dépendance est non physique,

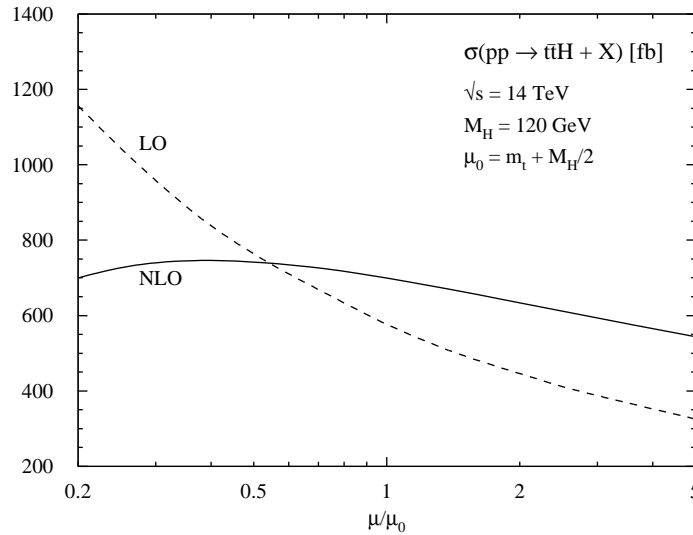


FIG. 2.2 – Dépendance des sections efficaces au LO et NLO de la production de  $t\bar{t}H$  au LHC par rapport aux échelles de renormalisation et factorisation avec  $\mu_R = \mu_F$  [17, 18]

puisque'elle provient du fait que l'on a tronqué la série perturbative en  $\alpha_s$ . En effet, la section efficace évaluée à tous les ordres perturbatifs ne présente aucune dépendance par rapport aux échelles de renormalisation et de factorisation.

Le calcul de corrections de type NLO pour une réaction comprenant  $N$  particules externes comporte plusieurs étapes plus ou moins délicates :

- l'élément de matrice à l'ordre de l'arbre. Pour cette partie, on peut utiliser de nombreux algorithmes [19, 20, 21, 24] et outils automatiques (FeynArts [25], GRACE [26, 27], QGraph [28], MadGraph [29],...) très efficaces et testés rigoureusement.
- la partie virtuelle comprenant le calcul d'amplitudes à boucle avec  $N$  particules externes, associée à la renormalisation des divergences ultra-violettes (UV).
- l'émission réelle qui consiste en la production systématique d'amplitudes à l'arbre avec  $N + 1$  particules externes, nécessaire pour la compensation des divergences infra-rouges (IR) de la partie virtuelle.
- l'évaluation numérique de l'amplitude finie, une fois l'assemblage des deux parties ci-dessus effectué.

L'évaluation des diagrammes à boucle multi-pattes constitue l'étape la plus difficile, et nécessite évidemment le traitement le plus soutenu. Bien qu'un certain nombre de processus avec cinq particules externes a déjà été calculé [30] - [50] et même récemment quelques processus de type  $2 \rightarrow 4$  [51, 52], l'automatisation de ces corrections est loin d'avoir été réalisée pour des réactions avec plus de quatre particules externes, surtout si elles comportent des divergences IR. En effet, au-delà de quatre particules externes, le nombre de diagrammes à boucle augmente sensiblement, et la complexité du calcul s'accroît énormément à cause de la taille des résultats et des instabilités numériques.

Néanmoins, les bruits de fond multi-pattes doivent être étudiés avec une grande précision, et des calculs entièrement automatiques pour une évaluation numérique stable de ces amplitudes sont grandement souhaitables.

## 2.4 MOTIVATIONS POUR $pp \rightarrow VV + jet$

Dans la liste de souhaits du workshop des Houches "*Physics at TeV colliders*" [53, 54], sont répertoriés les principaux signaux et bruits de fonds pour le LHC, dont les corrections à l'ordre supérieur n'ont pas encore été calculées, ou l'ont été récemment (voir Tab. 2.1). Au premier rang de cette liste pour les prédictions manquantes à l'ordre NLO, se trouve le processus de type bruit de fond  $^2 pp \rightarrow VV + jet$ .

En effet, il constitue un important bruit de fond pour le signal  $pp \rightarrow H + jet \rightarrow VV + jet$ , dans lequel un boson de Higgs de type léger ( $155 < M_H < 185$  Gev) se désintègre en  $H \rightarrow VV^*$ . De plus, il représente un bruit de fond pour une nouvelle physique au-delà du Modèle Standard.

Indépendamment de ce statut de bruit de fond pour les collisionneurs hadroniques, ce processus est intéressant car il permet d'étudier précisément le couplage non-abélien entre

---

<sup>2</sup>où  $V$  est un vecteur de boson de jauge faible  $\{Z, W^\pm, \gamma\}$

bosons de jauge faible, à savoir  $\gamma W^+W^-$  et  $Z W^+W^-$ .

Enfin, c'est un important test avant l'étude de processus avec plus de quatre particules externes et avec plus de particules massives.



Processus ( $V \in \{Z, W^\pm, \gamma\}$ )	Bruits de fond pour	Commentaires
Effectués depuis LH 2005		
1. $pp \rightarrow VV + jet$	recherche du Higgs nouvelle physique	$W^+W^- + jet$ évalué par [55, 56, 57]
2. $pp \rightarrow H + 2 jets$	couplage du Higgs	canal $gg$ évalué par [58] canal VBF évalué par [59, 60]
3. $pp \rightarrow VVV$	production tri-leptons SUSY	$ZZZ$ évalué par [61] $WWZ$ évalué par [62] $WWZ, WWZ, WWW$ évalués par [63]
4. $pp \rightarrow t\bar{t}Z$	nouvelle physique	évalué par [64]
5. $pp \rightarrow W/Z b\bar{b}$	production $W/Z + H$ production quark top	évalué par [65]
Restants après LH 2007		
6. $pp \rightarrow t\bar{t} b\bar{b}$	$pp \rightarrow t\bar{t}H$	contributions VBF évaluées par [66, 67, 68]
7. $pp \rightarrow t\bar{t} + 2 jets$	$pp \rightarrow t\bar{t}H$	
8. $pp \rightarrow VV b\bar{b}$	VBF $\rightarrow H \rightarrow VV, t\bar{t}H$ nouvelle physique	
9. $pp \rightarrow VV + 2 jets$	VBF $\rightarrow H \rightarrow VV$	
10. $pp \rightarrow V + 3 jets$	nouvelle physique	
11. $pp \rightarrow b\bar{b}b\bar{b}$	recherche du Higgs et nouvelle physique	

TAB. 2.1 – La liste de souhaits des Houches pour le LHC [54] mise à jour

# OUTILS POUR LES CALCULS À UNE BOUCLE

# 3

## SOMMAIRE

3.1	LA MÉTHODE DES AMPLITUDES D'HELICITE	31
3.2	LE PROJET GOLEM	33
3.2.1	Intégrales scalaires et tensorielles : notations	34
3.2.2	Introduction des facteurs de forme	35
3.2.3	Détermination des facteurs de forme	36
	CONCLUSION	40

**D**ANS ce chapitre, nous présentons d'abord la méthode des amplitudes d'hélicité qui va nous servir à exprimer la partie spinorielle et tensorielle des diagrammes de Feynman de manière compacte, puis nous présentons la méthode GOLEM <sup>1</sup>, qui nous permettra de réduire les intégrales à boucle.

---

<sup>1</sup>être humanoïde, artificiel, fait d'argile, animé momentanément de vie par l'inscription sur son front (ou sa bouche, selon les versions) d'un verset biblique. Le golem est l'état qui précède la création d'Adam.



### 3.1 LA MÉTHODE DES AMPLITUDES D'HÉLICITÉ

Afin de garder l'information pour chaque configuration d'hélicité<sup>2</sup>, il est préférable d'évaluer l'amplitude avec une hélicité fixée pour chaque particule.

On calcule donc séparément l'amplitude pour chacune de ces configurations. Comme les différentes configurations d'hélicité n'interfèrent pas entre elles, on somme le carré de toutes les amplitudes d'hélicité pour obtenir la section efficace totale. De plus, il est possible d'adopter une représentation explicite pour les vecteurs de polarisation, ce qui permet de réduire sensiblement le nombre de termes.

Soit  $u(p)$  un spineur de Dirac non-massif :

$$\not{p}u(p) = 0, \quad p^2 = 0 \quad (3.1)$$

On définit les 2 états d'hélicité par les projections chirales :

$$\Pi^\pm u(p) = u^\pm(p) \quad (3.2)$$

avec :

$$\Pi^\pm = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) \quad (3.3)$$

Les projecteurs chiraux nous permettent d'écrire :

$$\not{p} = \Pi^- \not{p} + \Pi^+ \not{p} = |p_-\rangle \langle p_-| + |p_+\rangle \langle p_+| \quad (3.4)$$

Pour les spineurs  $u_\pm(p)$ ,  $v_\pm(p)$  et leurs conjugués de charge  $\bar{u}_\pm(p)$ ,  $\bar{v}_\pm(p)$ , on utilise la convention suivante [69] :

$$u_\pm(p) = v_\mp(p) = |p_\pm\rangle \quad (3.5)$$

$$\bar{u}_\pm(p) = \bar{v}_\mp(p) = \langle p_\pm| \quad (3.6)$$

La normalisation des spineurs est :

$$\langle p_\pm | \gamma_\mu | p_\pm \rangle = 2 p_\mu \quad (3.7)$$

La transformation par conjugaison de charge  $\mathcal{C}$  s'exprime par :

$$|p_-\rangle = |p_+\rangle^c \quad (3.8)$$

Dans la suite, on donne la liste des propriétés des spineurs non-massifs (la démonstration de certaines relations est donnée en annexe B). Pour des spineurs non-massifs d'impulsion  $p$  et  $q$ , on a :

$$\langle p_+ | q_+ \rangle = \langle p_- | q_- \rangle = 0 \quad (3.9)$$

$$\langle p_- | q_+ \rangle = -\langle q_- | p_+ \rangle \quad (3.10)$$

$$\langle p_- | p_+ \rangle = \langle p_+ | p_- \rangle = 0 \quad (3.11)$$

---

<sup>2</sup>l'hélicité est la projection du spin de la particule dans la direction de l'impulsion

Pour simplifier les notations, on utilise les conventions suivantes [69] :

$$\langle p_- | q_+ \rangle \equiv \langle pq \rangle \quad (3.12)$$

$$\langle p_+ | q_- \rangle \equiv [pq] \quad (3.13)$$

Ainsi les relations ci-dessus deviennent :

$$\langle q_- | p_+ \rangle = -\langle pq \rangle \quad (3.14)$$

$$\langle q_+ | p_- \rangle = \langle pq \rangle^* \equiv [qp] \quad (3.15)$$

$$\langle p_+ | q_- \rangle = -\langle pq \rangle^* \quad (3.16)$$

et l'on a :

$$|\langle pq \rangle|^2 = 2(p \cdot q) \quad (3.17)$$

Les relations suivantes nous seront également très utiles pour la suite :

$$\langle p_+ | \gamma_\mu | q_+ \rangle = \langle p_- | \gamma_\mu | q_- \rangle^* \quad (3.18)$$

$$\langle p_+ | \gamma_\mu | q_+ \rangle = \langle q_- | \gamma_\mu | p_- \rangle \quad (3.19)$$

$$\langle p_+ | \gamma_\mu | q_+ \rangle \langle r_- | \gamma_\mu | s_- \rangle = 2 \langle p_+ | s_- \rangle \langle r_- | q_+ \rangle \quad (3.20)$$

Il est possible de construire un vecteur de polarisation non massif, noté  $\varepsilon_\mu$ , à partir de spineurs de Dirac :

$$\varepsilon_\mu^+(p) = \mathcal{N} \bar{u}_+(p) \gamma_\mu v(p) \quad (3.21)$$

$$\varepsilon_\mu^-(p) = (\varepsilon_\mu^+(p))^* \quad (3.22)$$

où  $v$  est un spineur de Dirac et  $\mathcal{N}$  une constante de normalisation. Cette dernière est fixée grâce aux relations d'orthonormalisation des vecteurs de polarisation :

$$\varepsilon^+(p) \cdot \varepsilon^+(p) = \varepsilon^-(p) \cdot \varepsilon^-(p) = 0 \quad (3.23)$$

$$\varepsilon^+(p) \cdot \varepsilon^-(p) = -1 \quad (3.24)$$

De plus, on sait que ces vecteurs de polarisation doivent satisfaire la relation :

$$\varepsilon^\pm(p) \cdot p = 0 \quad (3.25)$$

A l'aide d'un vecteur de référence  $q$  ( $q^2 = 0$ ), on trouve finalement les expressions suivantes :

$$\varepsilon_\mu^+(p, q) = \frac{\langle q_- | \gamma_\mu | p_- \rangle}{\sqrt{2} \langle qp \rangle} \quad (3.26)$$

$$\varepsilon_\mu^-(p, q) = \frac{\langle q_+ | \gamma_\mu | p_+ \rangle}{\sqrt{2} [pq]} \quad (3.27)$$

$$\not{\varepsilon}^+(p, q) = \frac{\sqrt{2}}{\langle qp \rangle} [ |p_- \rangle \langle q_- | + |q_+ \rangle \langle p_+ | ] \quad (3.28)$$

$$\not{\varepsilon}^-(p, q) = \frac{\sqrt{2}}{[pq]} [ |p_+ \rangle \langle q_+ | + |q_- \rangle \langle p_- | ] \quad (3.29)$$

Ces dernières relations vérifient :

$$\varepsilon^+(p, q) \cdot q = \varepsilon^-(p, q) \cdot q = 0 \quad (3.30)$$

Et si  $q$  s'écrit comme  $q = k + \lambda p$  (où  $k$  est un vecteur arbitraire, et  $\lambda$  une constante réelle), alors :

$$\varepsilon^\pm(p, q) = \varepsilon^\pm(p, k) + \beta^\pm(k, q, p) p \quad (3.31)$$

où

$$\beta^+(k, q, p) = \frac{\sqrt{2} \langle kq \rangle}{\langle kp \rangle \langle qp \rangle} \quad (3.32)$$

$$\beta^-(k, q, p) = (\beta^+(k, q, p))^* \quad (3.33)$$

Or l'invariance de jauge de l'amplitude par rapport au boson de jauge externe nous permet d'affirmer que le terme proportionnel à  $p$  dans la relation (3.31) donne une contribution nulle :

$$\{\mathcal{M}\}_{\varepsilon=p} = 0 \quad (3.34)$$

Ainsi, le vecteur de référence du vecteur de polarisation peut être choisi en toute liberté puisque l'amplitude reste inchangée.

## 3.2 LE PROJET GOLEM

Le but du projet GOLEM (General One Loop Evaluator for Matrix elements) est de construire un code public de type Monte-Carlo pour des prédictions phénoménologiques du Modèle Standard, qui puisse être en particulier à la disposition des expérimentateurs du LHC. Cette librairie a été développée à partir de logiciels de manipulation symbolique tels que FORM [70] et MAPLE [71], et un logiciel de calcul numérique Fortran 90.

Plusieurs calculs de corrections à une boucle réalisés par des contributeurs du projet ont déjà permis de vérifier la justesse du code de GOLEM. Parmi les processus évalués à l'aide de ce code, on trouve :  $gg \rightarrow W^+W^-$  [72],  $gg \rightarrow \gamma\gamma g$  [50],  $6\gamma \rightarrow 0$  [73, 74],  $u\bar{u} \rightarrow d\bar{d}s\bar{s}$  [54, 75]. Par ailleurs, le processus étudié au cours de cette thèse constitue également un test de la librairie GOLEM.

Présenté dans l'article [76], **GOLEM** est un formalisme algébrique et numérique qui permet l'évaluation des amplitudes à une boucle contenant un nombre arbitraire  $N$  de particules externes (ou "pattes"). La motivation pour la construction d'un tel formalisme est une évaluation stable et rapide des intégrales à une boucle qui apparaissent dans les expressions analytiques des diagrammes de Feynman dans les corrections d'ordre supérieur.

L'objectif est de réduire le nombre de points  $N$  (nombre de propagateurs internes présents au dénominateur de l'intégrand) et le rang  $r$  (nombre de propagateurs internes présents au numérateur de l'intégrand) des intégrales scalaires et tensorielles. Mais malheureusement, le prix à payer est l'augmentation, à chaque étape de la réduction, du nombre de ces intégrales de complexité inférieure et l'apparition d'instabilités artificielles (déterminants de Gram par exemple).

La méthode GOLEM présente l'avantage d'être utilisable dans le cas de particules massives ou non-massives parcourant la boucle. D'une part, la réduction tensorielle proposée permet d'isoler dès le départ les divergences de type infrarouge (IR) et ultra-violet (UV). D'autre part, elle permet de réduire les intégrales tensorielles en terme de facteurs de forme, lesquels sont décomposés sur une base d'intégrales ne contenant aucun déterminant de Gram inverse. Enfin, pour les cas de boucle avec  $N \geq 5$ , on note l'absence d'intégrales de dimension supérieure à  $n = 4 - 2\epsilon$ .

### 3.2.1 Intégrales scalaires et tensorielles : notations

On souhaite étudier les diagrammes de Feynman à une boucle de  $N$  points avec les moments externes notés  $p_1, \dots, p_N$  (voir Fig. 3.1), tous considérés comme entrants dans la boucle. La conservation de l'énergie-impulsion se traduit par :

$$\sum_{i=1}^N p_i = 0 \quad (3.35)$$

Ces diagrammes sont en partie exprimés en termes d'intégrales dans l'espace des moments, avec ou sans le moment sur lequel on intègre au numérateur de l'intégrand.

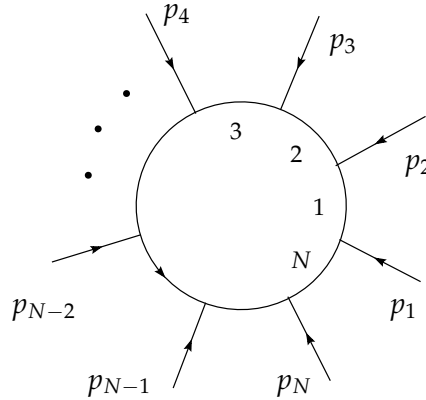


FIG. 3.1 – Représentation graphique d'un diagramme à boucle à  $N$  points

Dans un espace-temps de dimension  $n = 4 - 2\epsilon$ , on définit une intégrale tensorielle à  $N$  points de rang  $r$  par :

$$I_N^{n, \mu_1 \dots \mu_r}(a_1, \dots, a_r) = \int \frac{d^n k}{i \pi^{n/2}} \frac{q_{a_1}^{\mu_1} \dots q_{a_r}^{\mu_r}}{\prod_{i=1}^N (q_i^2 - m_i^2 + i\delta)} \quad (3.36)$$

avec  $q_i = k + r_i$  où  $k$  est le moment parcourant la boucle, et  $r_i$  une combinaison linéaire des moments externes défini par  $p_i = r_i - r_{i-1}$ . On remarque que le numérateur est exprimé en fonction des moments des propagateurs au lieu du moment  $k$  de la boucle, ceci permettant une non prolifération des termes.

L'intégrale scalaire (c'est-à-dire sans propagateur interne au numérateur) à  $N$  points et à  $n$  dimensions s'écrit <sup>3, 4</sup> :

$$I_N^n(S) = \int d\bar{k} \frac{1}{\prod_{i=1}^N (q_i^2 - m_i^2 + i\delta)} \quad (3.37)$$

Après introduction des paramètres de Feynman et intégration sur le moment, l'intégrale scalaire devient :

$$I_N^n(S) = (-1)^N \Gamma(N - \frac{n}{2}) \int \prod_{i=1}^N dz_i \delta(1 - \sum_{l=1}^N z_l) (R^2)^{\frac{n}{2} - N}$$

avec 
$$R^2 = -\frac{1}{2} z \cdot S \cdot z - i\delta = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N z_i S_{ij} z_j - i\delta \quad (3.38)$$

où l'on a introduit la matrice cinématique  $S$  défini par <sup>5</sup> :

$$S_{ij} = \underbrace{(r_i - r_j)^2}_{q_i - q_j} - m_i^2 - m_j^2 = S_{ji} \quad (3.39)$$

### 3.2.2 Introduction des facteurs de forme

On doit distinguer les cas  $N \leq 5$  et  $N \geq 6$ . En effet, dans le cas  $N \leq 5$ , on peut exprimer la structure tensorielle des intégrales comme une combinaison linéaire du tenseur métrique  $g^{\mu\nu}$  et des moments  $\Delta_{ij}^\mu = r_i^\mu - r_j^\mu = q_i^\mu - q_j^\mu$ .

Ainsi les intégrales tensorielles se décomposent en terme de combinaison linéaire de ces tenseurs de Lorentz multipliés par des facteurs de forme notés  $A_{l_1 \dots l_r}^{N,r}(S)$ ,  $B_{l_1 \dots}^{N,r}(S)$ ,  $C^{\dots,r}(S)$  et dont l'utilisation apparaît dans les relations (3.40) à (3.44) :

$$I_N^n(S) = A^{N,0}(S) \quad (3.40)$$

$$I_N^{n,\mu_1}(a_1; S) = \sum_{l \in S} \Delta_{l a_1}^{\mu_1} A_l^{N,1}(S) \quad (3.41)$$

$$I_N^{n,\mu_1 \mu_2}(a_1, a_2; S) = \sum_{l_1, l_2 \in S} \Delta_{l_1 a_1}^{\mu_1} \Delta_{l_2 a_2}^{\mu_2} A_{l_1 l_2}^{N,2}(S) + g^{\mu_1 \mu_2} B^{N,2}(S) \quad (3.42)$$

$$I_N^{n,\mu_1 \mu_2 \mu_3}(a_1, a_2, a_3; S) = \sum_{l_1, l_2, l_3 \in S} \Delta_{l_1 a_1}^{\mu_1} \Delta_{l_2 a_2}^{\mu_2} \Delta_{l_3 a_3}^{\mu_3} A_{l_1 l_2 l_3}^{N,3}(S) + \sum_{l \in S} \left( g^{\mu_1 \mu_2} \Delta_{l a_3}^{\mu_3} + g^{\mu_1 \mu_3} \Delta_{l a_2}^{\mu_2} + g^{\mu_2 \mu_3} \Delta_{l a_1}^{\mu_1} \right) B_l^{N,3}(S) \quad (3.43)$$

<sup>3</sup>On note  $S$  l'ensemble ordonné contenant les étiquettes des propagateurs :  $S = \{1, 2, \dots, N\}$

<sup>4</sup>On utilise la convention  $d\bar{k} = d^n k / i\pi^{n/2}$  pour la mesure de l'intégrale

<sup>5</sup>La méthode est également développée dans le cas où la matrice  $S$  n'est pas inversible



$$\begin{aligned}
I_N^{n,\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}(a_1, a_2, a_3, a_4; S) &= \sum_{l_1 \dots l_4 \in S} \Delta_{l_1 a_1}^{\mu_1} \Delta_{l_2 a_2}^{\mu_2} \Delta_{l_3 a_3}^{\mu_3} \Delta_{l_4 a_4}^{\mu_4} A_{l_1 l_2 l_3 l_4}^{N,A}(S) \\
&+ \sum_{l_1, l_2 \in S} \left( g^{\mu_1 \mu_2} \Delta_{l_1 a_3}^{\mu_3} \Delta_{l_2 a_4}^{\mu_4} + g^{\mu_1 \mu_3} \Delta_{l_1 a_2}^{\mu_2} \Delta_{l_2 a_4}^{\mu_4} + g^{\mu_1 \mu_4} \Delta_{l_1 a_2}^{\mu_2} \Delta_{l_2 a_3}^{\mu_3} + g^{\mu_2 \mu_3} \Delta_{l_1 a_1}^{\mu_1} \Delta_{l_2 a_4}^{\mu_4} \right. \\
&\quad \left. + g^{\mu_2 \mu_4} \Delta_{l_1 a_1}^{\mu_1} \Delta_{l_2 a_3}^{\mu_3} + g^{\mu_3 \mu_4} \Delta_{l_1 a_1}^{\mu_1} \Delta_{l_2 a_2}^{\mu_2} \right) B_{l_1 l_2}^{N,A}(S) \\
&+ (g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_3 \mu_4} + g^{\mu_1 \mu_3} g^{\mu_2 \mu_4} + g^{\mu_2 \mu_3} g^{\mu_1 \mu_4}) C^{N,A}(S)
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Par contre, dans le cas  $N \geq 6$ , seuls les facteurs de forme du cas  $N = 5$  apparaissent, puisque l'on peut montrer que :

$$I_N^{n,\mu_1 \dots \mu_r}(a_1, \dots, a_r; S) = - \sum_{j \in S} \mathcal{C}_{j a_1}^{\mu_1} I_{N-1}^{n,\mu_2 \dots \mu_r}(a_2, \dots, a_r; S \setminus \{j\}) \tag{3.45}$$

où l'on a introduit les coefficients  $\mathcal{C}_{j a_1}^{\mu_1}$  définis par :

$$\sum_{j \in S} \mathcal{S}_{ij} \mathcal{C}_{j a_1}^{\mu_1} = \Delta_{i a_1}^{\mu_1}, \quad a \in S \tag{3.46}$$

### 3.2.3 Détermination des facteurs de forme

On décide de dissocier l'intégrale scalaire à  $N$  points en une partie finie dans l'infra-rouge et une autre divergeant potentiellement dans l'infra-rouge :

$$\begin{aligned}
I_N^n(S) &= I_{div}(S) + I_{fin}(S) \\
&= \sum_{i \in S} b_i(S) \int d\bar{k} \frac{(q_i^2 - m_i^2)}{\prod_{j \in S} (q_j^2 - m_j^2 + i\delta)} + \int d\bar{k} \frac{1 - \sum_{i \in S} b_i(S) (q_i^2 - m_i^2)}{\prod_{j \in S} (q_j^2 - m_j^2 + i\delta)}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

On remarque que  $I_{div}$  s'écrit comme une somme d'intégrales réduites avec un propagateur pincé. Après une translation sur le moment de la boucle et une réécriture du numérateur de  $I_{fin}$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
I_{fin}(S) &= -B(S) \Gamma(N) \int_0^1 \prod_{i \in S} dz_i \delta(1 - \sum_{i \in S} z_i) \int \frac{d^n l}{i\pi^{n/2}} \frac{l^2 + R^2}{(l^2 - R^2)^N} \\
&= -B(S) (N - n - 1) I_N^{n+2}(S)
\end{aligned} \tag{3.48}$$

$$\text{avec } B(S) = \sum_{i \in S} b_i(S) = \sum_{i \in S} \left( \sum_{k \in S} \mathcal{S}_{ki}^{-1} \right) \tag{3.49}$$

On peut décomposer de la même façon une intégrale tensorielle à  $N$  points de rang  $r$  :

$$\begin{aligned}
I_N^{n, \mu_1 \dots \mu_r}(a_1, \dots, a_r; S) &= I_{div}(S) + I_{fin}(S) \\
&= \int d\bar{k} \frac{\left[ q_{a_1}^{\mu_1} + \sum_{j \in S} C_{j a_1}^{\mu_1} (q_j^2 - m_j^2) \right] q_{a_2}^{\mu_2} \dots q_{a_r}^{\mu_r}}{\prod_{i \in S} (q_i^2 - m_i^2 + i\delta)} \\
&\quad - \sum_{j \in S} C_{j a_1}^{\mu_1} \int d\bar{k} \frac{(q_j^2 - m_j^2) q_{a_2}^{\mu_2} \dots q_{a_r}^{\mu_r}}{\prod_{i \in S} (q_i^2 - m_i^2 + i\delta)}. \tag{3.50}
\end{aligned}$$

à l'aide de l'équation suivante <sup>6</sup> :

$$\begin{aligned}
I_N^{n, \mu_1 \dots \mu_r}(a_1, \dots, a_r; S) &= (-1)^r \sum_{m=0}^{[r/2]} \left( -\frac{1}{2} \right)^m \sum_{j_1 \dots j_{r-2m}=1}^N \left[ (g^{\dots})^{\otimes m} \Delta_{j_1}^{\dots} \dots \Delta_{j_r}^{\dots} \right]_{\{a_1 \dots a_r\}}^{\{\mu_1 \dots \mu_r\}} \\
&\quad \times I_N^{n+2m}(j_1, \dots, j_{r-2m}; S) \tag{3.51}
\end{aligned}$$

il est possible d'obtenir aisément par identification avec les relations (3.40) à (3.43) les expressions pour les facteurs de forme  $A^{N,r}(S)$  et  $B^{N,r}(S)$  pour  $N = 3$  et  $r = 0, \dots, 3$  :

$$\begin{aligned}
A^{3,0}(S) &= I_3^n(S) \\
A_l^{3,1}(S) &= -I_3^n(l; S) \\
B^{3,2}(S) &= -\frac{1}{2} I_3^{n+2}(S) \\
A_{l_1 l_2}^{3,2}(S) &= I_3^n(l_1, l_2; S) \\
B_l^{3,3}(S) &= \frac{1}{2} I_3^{n+2}(l; S) \\
A_{l_1 l_2 l_3}^{3,3}(S) &= -I_3^n(l_1, l_2, l_3; S) \tag{3.52}
\end{aligned}$$

Si l'on souhaite réduire les intégrales scalaires avec paramètre de Feynman ci-dessus en termes d'intégrales scalaires sans paramètre de Feynman dans le cas où la matrice cinématique  $\mathcal{S}$  est inversible, on peut utiliser les formules ci-dessous :

---

<sup>6</sup>où  $[r/2]$  correspond à l'entier inférieur ou égal à  $r/2$  le plus proche, et où le symbole  $\otimes m$  indique que le tenseur métrique est présent à la puissance  $m$

$$I_3^n(l_1; S) = \frac{b_{l_1}}{B} \left[ I_3^n(S) - \sum_{j \in S} b_j I_2^n(S \setminus \{j\}) \right] + \sum_{j \in S} \mathcal{S}_{l_1 j}^{-1} I_2^n(S \setminus \{j\}) \quad (3.53)$$

$$I_3^n(l_1, l_2; S) = -\mathcal{S}_{l_1 l_2}^{-1} I_3^{n+2}(S) + b_{l_1} (n-1) I_3^{n+2}(l_2; S) + \sum_{j \in S} \mathcal{S}_{l_1 j}^{-1} I_2^n(l_2; S \setminus \{j\}) \quad (3.54)$$

$$\begin{aligned} I_3^n(l_1, l_2, l_3; S) &= -\mathcal{S}_{l_1 l_2}^{-1} I_3^{n+2}(l_3; S) - \mathcal{S}_{l_1 l_3}^{-1} I_3^{n+2}(l_2; S) + n b_{l_1} I_3^{n+2}(l_2, l_3; S) \\ &\quad + \sum_{j \in S} \mathcal{S}_{l_1 j}^{-1} I_2^n(l_2, l_3; S \setminus \{j\}) \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$I_3^{n+2}(S) = \frac{1}{B} \frac{1}{(n-2)} \left[ I_3^n(S) - \sum_{l \in S} b_l I_2^n(S \setminus \{l\}) \right] \quad (3.56)$$

$$\begin{aligned} I_3^{n+2}(l_1; S) &= \frac{1}{B} \left[ b_{l_1} I_3^{n+2}(S) + \frac{1}{n-1} \sum_{j \in S} \mathcal{S}_{j l_1}^{-1} I_2^n(S \setminus \{j\}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{n-1} \sum_{j \in S} b_j I_2^n(l_1; S \setminus \{j\}) \right] \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} I_3^{n+2}(l_1, l_2; S) &= \frac{1}{nB} \left[ b_{l_1} I_3^{n+2}(l_2; S) + b_{l_2} I_3^{n+2}(l_1; S) + I_3^n(l_1, l_2; S) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j \in S} b_j I_2^n(l_1, l_2; S \setminus \{j\}) \right] \end{aligned} \quad (3.58)$$

Comme nous pouvons le constater, le nombre de termes de notre intégrale à boucle d'origine risque d'exploser si l'on applique les relations ci-dessus. De plus, on voit apparaître dans (3.57) par exemple, les **déterminants de Gram inverses** en facteur de notre formule de réduction. En effet, nous avons (avec  $a \in S$  et  $N$  quelconque) :

$$\frac{1}{B} = (-1)^{N+1} \frac{\det \mathcal{S}}{\det G^{(a)}} \quad (3.59)$$

où  $\det G^{(a)}$  représente le déterminant de la matrice de Gram d'élément :

$$G_{ij}^{(a)} = 2 \Delta_{ia} \cdot \Delta_{ja} \quad (3.60)$$

Dans le cas où la matrice cinématique  $\mathcal{S}$  n'est pas inversible, des divergences d'origine infrarouge apparaissent, et on choisit alors d'exprimer ces intégrales scalaires à 2 et 3 points avec

ou sans paramètre de Feynman, en introduisant un ensemble de fonctions <sup>7</sup> notées  $H_i$  [76] :

$$H_0(X, \alpha) = \frac{\bar{X}^\alpha}{X} \quad (3.61)$$

$$H_1(X, Y, \alpha) = \frac{\bar{X}^\alpha - \bar{Y}^\alpha}{X - Y} \quad (3.62)$$

$$H_2(X, Y, \alpha) = \frac{\bar{Y}^\alpha}{Y - X} + \frac{1}{1 + \alpha} \frac{\bar{Y}^{1+\alpha} - \bar{X}^{1+\alpha}}{(Y - X)^2} \quad (3.63)$$

$$H_3(X, Y, \alpha) = \frac{\bar{Y}^\alpha}{Y - X} + \frac{2}{1 + \alpha} \frac{\bar{Y}^{1+\alpha}}{(Y - X)^2} + \frac{2}{(1 + \alpha)(2 + \alpha)} \frac{\bar{Y}^{2+\alpha} - \bar{X}^{2+\alpha}}{(Y - X)^3} \quad (3.64)$$

$$H_4(X, Y, \alpha) = \frac{\bar{Y}^\alpha}{Y - X} + \frac{3}{1 + \alpha} \frac{\bar{Y}^{1+\alpha}}{(Y - X)^2} + \frac{6}{(1 + \alpha)(2 + \alpha)} \frac{\bar{Y}^{2+\alpha}}{(Y - X)^3} + \frac{6}{(1 + \alpha)(2 + \alpha)(3 + \alpha)} \frac{\bar{Y}^{3+\alpha} - \bar{X}^{3+\alpha}}{(Y - X)^4} \quad (3.65)$$

$$\text{avec } \bar{X} = -X - i\delta$$

Cette décomposition présente l'avantage non négligeable d'éviter l'apparition de dénominateurs de la forme  $1/(X - Y)^n$  (où  $X, Y$  sont en fait des variables de Mandelstam), pouvant mener à des instabilités numériques. En effet, ces fonctions  $H$  ont un comportement régulier quand  $X = Y$ .

De plus, après factorisation, si  $(X - Y)$  apparaît en facteur devant ces fonctions, il est alors possible de réduire leur rang grâce aux relations suivantes :

$$(Y - X) H_1(X, Y, \alpha) = \bar{Y}^\alpha - \bar{X}^\alpha \quad (3.66)$$

$$(Y - X) H_2(X, Y, \alpha) = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \bar{Y}^\alpha - \frac{1}{1 + \alpha} X H_1(X, Y, \alpha) \quad (3.67)$$

$$(Y - X) H_3(X, Y, \alpha) = \frac{\alpha}{2 + \alpha} \bar{Y}^\alpha - \frac{2}{2 + \alpha} X H_2(X, Y, \alpha) \quad (3.68)$$

$$(Y - X) H_4(X, Y, \alpha) = \frac{\alpha}{3 + \alpha} \bar{Y}^\alpha - \frac{3}{3 + \alpha} X H_3(X, Y, \alpha) \quad (3.69)$$

Concernant la dérivation des expressions des facteurs de forme pour  $N > 3$ , elle est effectuée en faisant appel aux relations (3.48) et (3.50) que l'on identifie avec les expressions des intégrales décomposées sur les facteurs de forme. On invite le lecteur à lire l'annexe C dans laquelle se trouvent les expressions des facteurs de forme pour  $N = 4, 5$ , ainsi que les relations de réduction de rang entre facteurs de forme.

Pour le calcul du processus qui fait l'objet de cette thèse, la base de fonctions sur laquelle on choisit de décomposer les intégrales à boucle sera la suivante :

- l'intégrale scalaire à 4 points et  $n$  dimensions :  $I_4^n(S)$

---

<sup>7</sup>cette démarche n'étant valable que dans le cas de propagateurs internes non-massifs

- l'intégrale scalaire à 3 points et  $n$  dimensions et 3 masses externes :  $I_3^n$
- les fonctions  $H_i$ , ( $i = 1, \dots, 4$ ) :  $H_i(X, Y)$
- les fonctions de type logarithme :  $\ln(\frac{X}{\mu^2})$ ,  $\ln^2(\frac{X}{\mu^2})$

C'est donc pour une approche de type semi-numérique que nous optons pour le calcul des amplitudes à boucle multi-pattes, dans la mesure où la liste ci-dessus détermine la fin de la réduction analytique des intégrales et marque le début de l'évaluation numérique.

## CONCLUSION DU CHAPITRE

Ainsi, grâce à la méthode GOLEM, il nous est permis de réduire notablement les intégrales scalaires et tensorielles, en limitant le risque de voir apparaître des dénominateurs pouvant s'annuler dans certaines régions physiques de l'espace de phase, et en permettant également de conserver la distinction entre divergences infra-rouge et ultra-violettes.

# AUTOMATISATION DES CALCULS À UNE BOUCLE

# 4

## SOMMAIRE

4.1	ÉTUDE DE LA RÉACTION $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$ . . . . .	43
4.1.1	Amplitude à l'ordre de l'arbre . . . . .	43
4.1.2	Amplitude à l'ordre d'une boucle . . . . .	44

**D**ANS ce chapitre, nous présentons le calcul des corrections à l'ordre supérieur de la réaction  $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$ . Cette évaluation constitue une mise en application de la méthode GOLEM associée à celle des amplitudes d'hélicité. Elle servira également de point de départ pour l'étude du processus plus complexe  $pp \rightarrow VV + jet$ .



## 4.1 ÉTUDE DE LA RÉACTION $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$

On souhaite évaluer l'amplitude de probabilité associée à la réaction :

$$q(p_1, \lambda_1) \bar{q}(p_2, \lambda_2) \rightarrow \gamma(p_3, \lambda_3) \gamma(p_4, \lambda_4) \quad (4.1)$$

La conservation de l'énergie-impulsion entraîne (on se place dans une configuration dite physique) :

$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4 \quad \text{avec} \quad p_i^2 = 0 \quad (i = 1, \dots, 4) \quad (4.2)$$

On se limitera à l'étude de l'une des amplitudes d'hélicité les plus complexes :  $\lambda_1 = \lambda_3 = +1$  et  $\lambda_2 = \lambda_4 = -1$ .

### 4.1.1 Amplitude à l'ordre de l'arbre

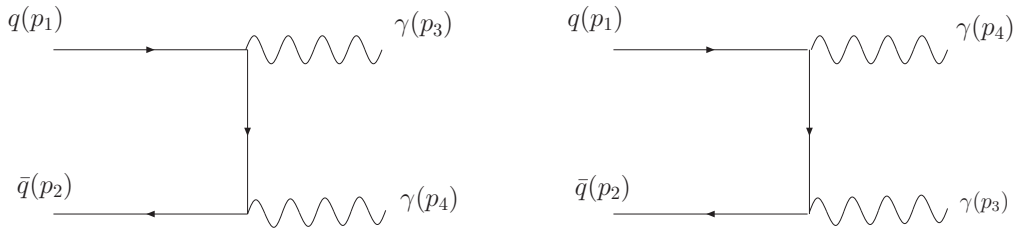


FIG. 4.1 – Diagrammes de Feynman à l'ordre de l'arbre de  $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$

Les diagrammes de Feynman qui contribuent à l'ordre de l'arbre sont représentés sur la figure (4.1). La saveur et la couleur de la paire quark-antiquark étant fixées, l'amplitude totale à l'ordre de Born s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_B^{+, -, +, -} &= -i e^2 Q^2 \left( \frac{1}{t} \bar{v}_-(p_2) \not{\epsilon}_4^-(p_4) (\not{p}_1 - \not{p}_3) \not{\epsilon}_3^+(p_3) u_+(p_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{u} \bar{v}_-(p_2) \not{\epsilon}_3^+(p_3) (\not{p}_1 - \not{p}_4) \not{\epsilon}_4^-(p_4) u_+(p_1) \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

où l'on a introduit les variables de Mandelstam  $t = (p_1 - p_3)^2$  et  $u = (p_1 - p_4)^2$ .

On peut tester l'exactitude de l'expression ci-dessus en vérifiant l'invariance de jauge de l'amplitude, c'est-à-dire en effectuant le remplacement  $\epsilon_3 \rightarrow p_3$  (ou  $\epsilon_4 \rightarrow p_4$ ) :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{M}}_B &\propto \frac{1}{t} \bar{v}(p_2) \not{\epsilon}_4(\not{p}_1 - \not{p}_3) \not{p}_3 u(p_1) + \frac{1}{u} \bar{v}(p_2) \not{p}_3 (\not{p}_1 - \not{p}_4) \not{\epsilon}_4 u(p_1) \\ &= \frac{1}{t} \bar{v}(p_2) \not{\epsilon}_4 \not{p}_1 \not{p}_3 u(p_1) + \frac{1}{u} \bar{v}(p_2) \not{p}_3 \not{p}_2 \not{\epsilon}_4 u(p_1) \\ &= \frac{2 p_1 \cdot p_3}{t} \bar{v}(p_2) \not{\epsilon}_4 u(p_1) + \frac{2 p_2 \cdot p_3}{u} \bar{v}(p_2) \not{\epsilon}_4 u(p_1) = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

où l'on a utilisé les relations (4.2) et les équations de Dirac pour les spineurs :

$$\not{p}_1 u(p_1) = 0 \quad \text{et} \quad \bar{v}(p_2) \not{p}_2 = 0 \quad (4.5)$$



Comme attendu, on trouve :  $\tilde{\mathcal{M}}_B(\varepsilon_3 \rightarrow p_3) = 0$ . Notre amplitude vérifie donc l'invariance de jauge par rapport aux photons externes.

On choisit  $p_1$  comme vecteur de référence pour  $\varepsilon_3(p_3)$  et  $p_2$  pour  $\varepsilon_4(p_4)$  :

$$\begin{aligned}\varepsilon_3^+(p_3, p_1) &= \frac{\sqrt{2}}{\langle 13 \rangle} [ |3_- \rangle \langle 1_- | + |1_+ \rangle \langle 3_+ | ] \\ \varepsilon_4^-(p_4, p_1) &= \frac{\sqrt{2}}{[41]} [ |4_+ \rangle \langle 1_+ | + |1_- \rangle \langle 4_- | ]\end{aligned}\quad (4.6)$$

En utilisant le formalisme des amplitudes d'hélicité et les relations 4.6, on est en mesure de réécrire l'amplitude de Born en termes de spineurs :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_B^{+,-,+,-} &= -ie^2 Q^2 \frac{2}{\langle 13 \rangle [41]} \left( \frac{1}{t} \langle 2_+ | 1_- \rangle \langle 4_- | (\not{p}_1 - \not{p}_3) | 3_- \rangle \underbrace{\langle 1_- | 1_+ \rangle}_{=0} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{u} \langle 2_+ | 3_- \rangle \langle 1_- | (\not{p}_1 - \not{p}_4) | 1_- \rangle \langle 4_- | 1_+ \rangle \right) \\ &= -ie^2 Q^2 \frac{2 \langle 41 \rangle [23]}{\langle 13 \rangle [41]}\end{aligned}\quad (4.7)$$

#### 4.1.2 Amplitude à l'ordre d'une boucle

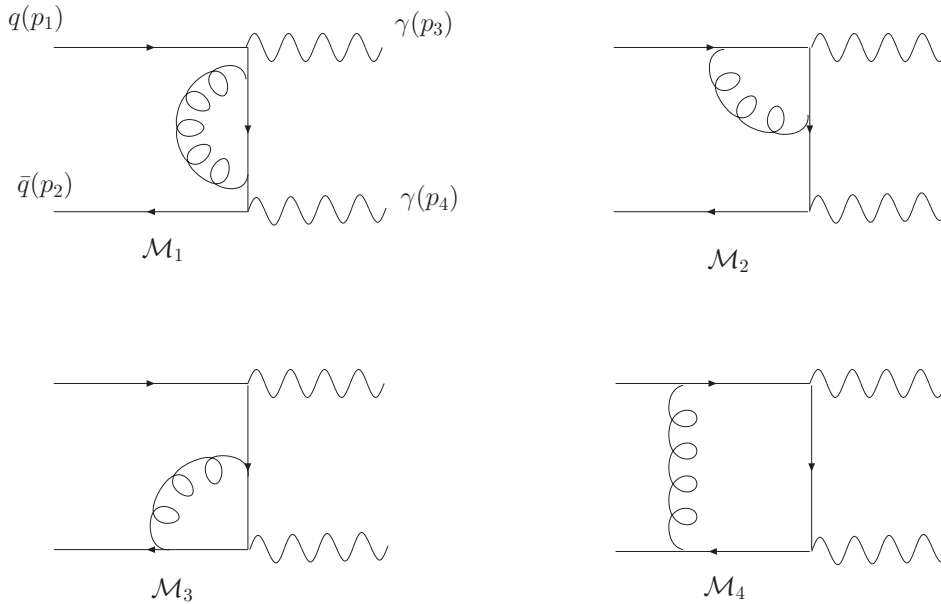


FIG. 4.2 – Diagrammes de Feynman à l'ordre d'une boucle de  $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$

À l'ordre supérieur, en considérant l'échange des 2 photons, nous avons 8 diagrammes à une boucle à évaluer (voir Fig. 4.2) :

- $\mathcal{M}_1$  contient une intégrale à 2 points de rang 1.
- $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_3$  contiennent une intégrale à 3 points de rang 2.
- $\mathcal{M}_4$  contient une intégrale à 4 points de rang 3.

Étudions le dernier diagramme à boucle  $\mathcal{M}_4$ , pour lequel on définit les quatres propagateurs internes suivants :

$$\begin{aligned}
 q_1 &= k \\
 q_2 &= k + p_2 \\
 q_3 &= k + p_2 + p_4 \\
 q_4 &= k + p_2 + p_4 + p_3 = k - p_1
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

La matrice cinématique a donc pour expression :

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & s_{24} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{34} \\ s_{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_{34} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'expression analytique di diagramme est la suivante :

$$\mathcal{M}_4 = \underbrace{-e^2 Q^2 g_s^2 C_F \mu^{4(2-n)}}_{\equiv K} \bar{v}(p_2) \gamma^\alpha \int d\bar{k} \frac{\not{q}_4}{q_4^2} \not{\epsilon}(p_4) \frac{\not{q}_3}{q_3^2} \not{\epsilon}(p_3) \frac{\not{q}_2}{q_2^2} \frac{1}{q_1^2} \gamma_\alpha u(p_1) \tag{4.9}$$

On choisit  $p_1$  comme vecteur de référence commun à  $\varepsilon_3$  et  $\varepsilon_4$  :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_3^{\mu_3-} \varepsilon_4^{\mu_4+} &= \langle 1_+ | \gamma^{\mu_3} | 3_+ \rangle \langle 1_- | \gamma^{\mu_4} | 4_- \rangle \\
 &= \langle 4_+ | \gamma^{\mu_4} \not{p}_1 \gamma^{\mu_3} | 3_+ \rangle \frac{\langle 3_+ | \not{p}_2 | 4_+ \rangle}{\langle 3_+ | \not{p}_2 | 4_+ \rangle} \\
 &= \frac{1}{[32] \langle 24 \rangle} \text{tr}(\Pi^+ \not{p}_4 \gamma^{\mu_4} \not{p}_1 \gamma^{\mu_3} \not{p}_3 \not{p}_2)
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

La relation (4.10) ci-dessus nous permet d'obtenir l'amplitude d'hélicité  $\{+, -, +, -\}$  pour ce diagramme :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_4^{+,-,+,-} &= K \int \frac{d\bar{k}}{q_1^2 q_2^2 q_3^2 q_4^2} \langle 2_+ | \gamma^\alpha \not{q}_4 \gamma_{\mu_4} \not{q}_3 \gamma_{\mu_3} \not{q}_2 \gamma_\alpha | 1_+ \rangle \varepsilon_3^{\mu_3-} \varepsilon_4^{\mu_4+} \\
 &= \frac{K}{[32] \langle 24 \rangle [13] \langle 32 \rangle} \int d\bar{k} \frac{\text{tr}(\Pi^+ \not{p}_2 \gamma^\alpha \not{q}_4 \gamma^{\mu_4} \not{q}_3 \gamma^{\mu_3} \not{q}_2 \gamma_\alpha \not{p}_1 \not{p}_3)}{q_1^2 q_2^2 q_3^2 q_4^2} \\
 &\quad \times \text{tr}(\Pi^+ \not{p}_4 \gamma^{\mu_4} \not{p}_1 \gamma^{\mu_3} \not{p}_3 \not{p}_2)
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

On définit le facteur global  $\mathcal{K}$  de  $\mathcal{M}_4^{+,-,+,-}$  :

$$\mathcal{K} = \frac{K}{[32] \langle 24 \rangle [13] \langle 32 \rangle} = \frac{-e^2 Q^2 g_s^2 C_F \mu^{4(2-n)}}{[32] \langle 24 \rangle [13] \langle 32 \rangle} \tag{4.12}$$

La prochaine étape consiste à évaluer l'intégrale à boucle à 4 points de rang 3 :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4^{+,-,+,-} &= \mathcal{K} \int d\bar{k} \frac{q_2^{v_2} q_3^{v_3} q_4^{v_4}}{q_1^2 q_2^2 q_3^2 q_4^2} \text{tr}(\Pi^+ \not{p}_2 \gamma^\alpha \gamma_{v_4} \gamma^{\mu_4} \gamma_{v_3} \gamma^{\mu_3} \gamma_{v_2} \gamma_\alpha \not{p}_1 \not{p}_3) \\ &\quad \times \text{tr}(\Pi^+ \not{p}_4 \gamma^{\mu_4} \not{p}_1 \gamma^{\mu_3} \not{p}_3 \not{p}_2) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Après décomposition de l'intégrale en fonction des facteurs de forme définis dans la méthode GOLEM, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4^{+,-,+,-} &= 8\mathcal{K} (A_{1,1,1}^{4,3} (s_{24}^3 s_{34}^2 + s_{24}^4 s_{34}) + A_{1,1,2}^{4,3} (s_{24}^2 s_{34}^3 + 3 s_{24}^3 s_{34}^2 + 2 s_{24}^4 s_{34}) + \\ &\quad A_{1,1,4}^{4,3} (2 s_{24}^3 s_{34}^2 + 2 s_{24}^4 s_{34}) + A_{1,2,2}^{4,3} (s_{24}^2 s_{34}^3 + 2 s_{24}^3 s_{34}^2 + s_{24}^4 s_{34}) + \\ &\quad A_{1,2,4}^{4,3} (s_{24}^2 s_{34}^3 + 4 s_{24}^3 s_{34}^2 + 3 s_{24}^4 s_{34}) + A_{1,4,4}^{4,3} (s_{24}^3 s_{34}^2 + s_{24}^4 s_{34}) + \\ &\quad A_{2,2,4}^{4,3} (s_{24}^2 s_{34}^3 + 2 s_{24}^3 s_{34}^2 + s_{24}^4 s_{34}) + A_{2,4,4}^{4,3} (s_{24}^3 s_{34}^2 + s_{24}^4 s_{34}) + \\ &\quad B_1^{4,3} (2 s_{24}^2 s_{34}^2 - 2 s_{24}^4) + B_2^{4,3} (-2 s_{24}^2 s_{34}^2 - 4 s_{24}^3 s_{34} - 2 s_{24}^4) + \\ &\quad B_4^{4,3} (2 s_{24}^2 s_{34}^2 - 2 s_{24}^4)) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Par ailleurs, il est possible de procéder à une réduction supplémentaire avant la décomposition sur les facteurs de forme. Elle consiste à développer la trace contenant les propagateurs internes contractés sur les matrices  $\gamma$ . On obtient alors une combinaison linéaire de produits scalaires entre les moments externes et les propagateurs de la boucle. On fait alors intervenir les relations suivantes propres à la matrice cinématique de notre réaction : (avec  $i = 1, \dots, 4$ )

$$\begin{aligned} p_1 \cdot q_i &= q_1 \cdot q_i - q_4 \cdot q_i \\ p_2 \cdot q_i &= q_2 \cdot q_i - q_1 \cdot q_i \\ p_3 \cdot q_i &= q_4 \cdot q_i - q_3 \cdot q_i \\ p_4 \cdot q_i &= q_3 \cdot q_i - q_2 \cdot q_i \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ces relations nous permettent de faire apparaître au numérateur des propagateurs au carré, qui vont ainsi se compenser avec ceux du dénominateur, ce qui nous permet de réduire le rang et le nombre de points des intégrales tensorielles : ( $i, j = 1, \dots, 4$ )

$$q_i \cdot q_j = q_i^2 + q_j^2 - \frac{1}{2} \mathcal{S}(i, j) \quad (4.16)$$

Cette relation provient de la définition de  $\mathcal{S}$  (3.39). Cette réduction additionnelle nous permet de décomposer notre diagramme de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_4^{+,-,+,-} &= 2\mathcal{K} (A^{2,0}(\mathcal{S} \setminus \{1, 3\}) (s_{34}^3 + 7 s_{24} s_{34}^2 + 10 s_{24}^2 s_{34} + 4 s_{24}^3) + \\ &\quad A^{2,0}(\mathcal{S} \setminus \{2, 4\}) (4 s_{24}^2 s_{34} + 4 s_{24}^3) + A^{3,0}(\mathcal{S} \setminus \{1\}) (6 s_{24}^2 s_{34}^2 + 6 s_{24}^3 s_{34}) + \\ &\quad A^{3,0}(\mathcal{S} \setminus \{2\}) (2 s_{24}^3 s_{34} + 2 s_{24}^4) + A^{3,0}(\mathcal{S} \setminus \{4\}) (-2 s_{24}^2 s_{34}^2 + 2 s_{24}^4) + \\ &\quad A_1^{3,1}(\mathcal{S} \setminus \{3\}) (2 s_{24}^2 s_{34}^2 + 2 s_{24}^3 s_{34}) + A_2^{3,1}(\mathcal{S} \setminus \{3\}) (-2 s_{24} s_{34}^3 - 2 s_{24}^2 s_{34}^2) + \\ &\quad A_2^{3,1}(\mathcal{S} \setminus \{4\}) (-2 s_{24}^2 s_{34}^2 - 2 s_{24}^3 s_{34}) + A_3^{3,1}(\mathcal{S} \setminus \{1\}) (6 s_{24}^2 s_{34}^2 + 6 s_{24}^3 s_{34}) + \\ &\quad A_3^{3,1}(\mathcal{S} \setminus \{4\}) (2 s_{24}^3 s_{34} + 2 s_{24}^4) + A_4^{3,1}(\mathcal{S} \setminus \{1\}) (-6 s_{24} s_{34}^3 - 6 s_{24}^2 s_{34}^2) + \\ &\quad A_{3,3}^{3,2}(\mathcal{S} \setminus \{1\}) (2 s_{24}^2 s_{34}^2 + 2 s_{24}^3 s_{34}) + A_{3,4}^{3,2}(\mathcal{S} \setminus \{1\}) (-4 s_{24} s_{34}^3 - 4 s_{24}^2 s_{34}^2) + \\ &\quad A_{4,4}^{3,2}(\mathcal{S} \setminus \{1\}) (2 s_{34}^4 + 2 s_{24} s_{34}^3) + A^{4,0} (-2 s_{24}^3 s_{34}^2 - 2 s_{24}^4 s_{34})) \end{aligned} \quad (4.17)$$

On constate que l'on a pu diminuer le rang 3 des facteurs de forme  $N = 4$  jusqu'à un rang nul. Mais la contre-partie de cette réduction est l'augmentation du nombre de termes.

Si l'on exprime les facteurs de forme en fonction de notre base d'intégrales, on trouve une expression assez compacte :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_4^{+,-,+,-} &= \frac{1}{\varepsilon_{uv}^2} (-4 s_{24}^2 s_{34} - 4 s_{24}^3) + \\
&\frac{1}{\varepsilon_{uv}} (4 s_{24} s_{34}^2 + 4 s_{24}^2 s_{34} + \ln(-s_{34}) (4 s_{24}^2 s_{34} + 4 s_{24}^3)) + \\
&I_4^{n+2}(\mathcal{S}) (-4 s_{24}^2 s_{34}^2 - 8 s_{24}^3 s_{34} - 4 s_{24}^4) + \\
&\ln(-s_{34})^2 (-2 s_{24}^2 s_{34} - 2 s_{24}^3) + \ln(-s_{34}) (6 s_{24}^2 s_{34} + 6 s_{24}^3) + \\
&\ln(-s_{24}) (-4 s_{24} s_{34}^2 - 10 s_{24}^2 s_{34} - 6 s_{24}^3) + \\
&10 s_{24} s_{34}^2 + 12 s_{24}^2 s_{34} + 2 s_{24}^3
\end{aligned} \tag{4.18}$$



# ÉTUDE DU PROCESSUS $pp \rightarrow VV + \text{jet}$

# 5

## SOMMAIRE

5.1	DÉSINTÉGRATIONS DES BOSONS DE JAUGE FAIBLE . . . . .	51
5.2	PROCESSUS PARTONIQUES . . . . .	51
5.2.1	Différences entre $ZZ$ et $W^+W^-$ . . . . .	53
5.2.2	Schéma de régularisation et traitement de $\gamma_5$ . . . . .	54
5.3	STRUCTURE DE L'AMPLITUDE DE TRANSITION TOTALE . . . . .	55
5.3.1	Les symétries de l'amplitude . . . . .	56
5.3.2	Production des 36 hélicités . . . . .	57
5.3.3	Expression des vecteurs de polarisation . . . . .	58
5.3.4	Factorisation d'une phase spinorielle globale . . . . .	59
5.4	ORDRE DE BORN . . . . .	60
5.5	CORRECTIONS VIRTUELLES . . . . .	62
5.5.1	Décomposition par facteur de couleur . . . . .	62
5.5.2	Divergences et Renormalisation . . . . .	62
5.5.3	Création d'un code automatique . . . . .	64
5.5.4	Vérification du code . . . . .	68
5.6	L'ÉMISSION RÉELLE . . . . .	69
5.6.1	Section efficace totale à l'ordre NLO . . . . .	70
5.6.2	Éléments de matrice de l'émission réelle . . . . .	71
5.6.3	La méthode de soustraction des dipôles . . . . .	74
5.6.4	Expression des dipôles . . . . .	75
5.6.5	Expression de l'opérateur d'insertion . . . . .	78
5.7	INTÉGRATION DANS L'ESPACE DE PHASE . . . . .	78
5.7.1	Définitions . . . . .	78
5.7.2	Paramétrage pour un processus $2 \rightarrow 2$ . . . . .	79
5.7.3	Paramétrage pour un processus $2 \rightarrow 3$ . . . . .	80
5.7.4	Paramétrage pour un processus $2 \rightarrow 4$ . . . . .	81



Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, le calcul des corrections à l'ordre supérieur de la réaction  $pp \rightarrow VV + jet$  constitue l'une des priorités quant à la détermination du bruit de fond pour la recherche du boson de Higgs et de la nouvelle physique au Tevatron et au LHC. Dans ce chapitre, nous détaillons les différentes étapes du calcul qui ont permis l'évaluation de ces corrections NLO, à savoir l'ordre de Born, les corrections virtuelles et l'émission réelle.

Il importe de préciser que le boson de jauge faible noté  $V$  renvoie à  $W^\pm$  et  $Z$ . Ainsi, nous allons présenter le calcul à l'ordre NLO des sections efficaces des processus  $pp \rightarrow W^+W^- + jet$  et  $pp \rightarrow ZZ + jet$ .

## 5.1 DÉSINTÉGRATIONS DES BOSONS DE JAUGE FAIBLE

Dans cette thèse, nous allons considérer les bosons de jauge faible  $W^\pm$  et  $Z$  comme étant sur couche de masse. Cela constitue une bonne approximation étant donné l'étroitesse de la largeur du pic (quelques  $\text{Gev}/c^2$ ) de la distribution de masse de ces bosons.

Les bosons de jauge faible étant très massifs ( $\sim 80\text{-}90 \text{ Gev}/c^2$ ) et donc instables, ces derniers vont se désintégrer principalement en hadrons ou leptons, avec les rapports d'embranchement  $\Gamma$  suivants [1] :

$$\begin{aligned} \Gamma(W^\pm \rightarrow l^\pm \nu) &\sim 30\% & \Gamma(Z \rightarrow l^+ l^-) &\sim 10\% \\ \Gamma(W \rightarrow hadrons) &\sim 70\% & \Gamma(Z \rightarrow hadrons) &\sim 70\% \end{aligned}$$

Si l'on souhaite relier nos prédictions aux futures mesures expérimentales des détecteurs du LHC, il faut prendre en compte par exemple les désintégrations leptoniques et semi-leptoniques des bosons de jauge faible :

$$\begin{aligned} pp \rightarrow W^+W^- + jet &\rightarrow l^+ \nu_l l^- \bar{\nu}_l + jet \\ pp \rightarrow ZZ + jet &\rightarrow l^+ l^- l^+ l^- + jet \end{aligned}$$

Pour cela, en bonne approximation, il est possible de multiplier les sections efficaces avec production de la paire de bosons de jauge faible par le rapport d'embranchement de ces mêmes bosons en leptons :

$$\sigma(pp \rightarrow ZZ + jet) \times \Gamma(Z \rightarrow l^+ l^-)^2 \simeq \sigma(pp \rightarrow l^+ l^- l^+ l^- + jet) \quad (5.1)$$

À noter qu'il est préférable d'étudier la désintégration leptonique des bosons  $Z$ , même si l'on a  $\Gamma(Z \rightarrow l^+ l^-)^2 \sim 1\%$ . En effet, la désintégration hadronique, bien que plus grande, est associée à un bruit de fond beaucoup plus important.

## 5.2 PROCESSUS PARTONIQUES

Nous nous limiterons au calcul des corrections à l'ordre NLO des sections efficaces inclusives suivantes :

$$\begin{array}{lll} p\bar{p} \rightarrow VV + jet + X & \text{avec } \sqrt{s} = 1.96 \text{ TeV} & \text{pour le Tevatron} \\ pp \rightarrow VV + jet + X & \text{avec } \sqrt{s} = 14 \text{ TeV} & \text{pour le LHC} \end{array}$$



où le terme  $+X$  signifie que l'on souhaite produire au moins un jet hadronique dans l'état final. La notion de quantité inclusive signifie que l'on prend en compte tous les états finaux possibles et que l'on intègre l'élément de matrice sur tout l'espace de phase de l'état final. Le jet de hadrons est issu du parton créé dans l'état final des trois sous-processus qui composent la réaction  $pp \rightarrow VV + jet$ , à savoir :

$$q(p_1) \bar{q}(p_2) \rightarrow V(p_3) V(p_4) g(p_5) \quad (5.2)$$

$$qg \rightarrow VVq \quad (5.3)$$

$$\bar{q}g \rightarrow VV\bar{q} \quad (5.4)$$

$$gg \rightarrow VVg \quad (5.5)$$

Les deux sous-processus, ou canaux, (5.3) et (5.4) peuvent être obtenus en effectuant de simples échanges de moments des partons, respectivement  $p_2$  avec  $p_5$  et  $p_1$  avec  $p_5$ <sup>1</sup>.

Les trois premières réactions partoniques contiennent un ordre le plus bas en fonction de  $\alpha_s$ . Par contre, la dernière réaction (5.5) ne contient pas de diagramme à l'ordre de l'arbre, et le Leading Order s'écrit en terme d'amplitudes à boucle avec au minimum une constante de couplage à la puissance  $\alpha_s^3$  :

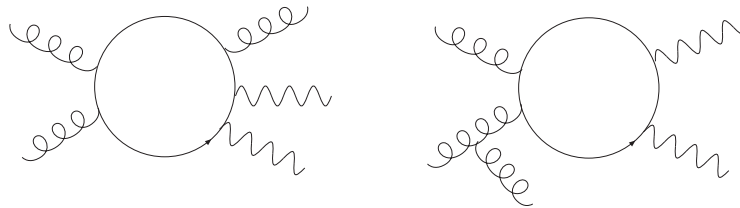


FIG. 5.1 – Exemples de diagrammes de Feynman pour  $gg \rightarrow VVg$

De plus, avec une masse invariante supérieure à  $2M_V$  et une impulsion transverse du jet non négligeable dans l'état final, le produit de deux densités de probabilité du gluon dans le proton (ou l'anti-proton) est très faible pour des valeurs à grande fraction du moment, comparé à celui de deux densités de probabilité d'un quark et d'un gluon par exemple. Ce sont les raisons pour lesquelles nous allons ignorer la contribution de ce canal.

Une fois connues les sections efficaces totales des trois sous-processus partoniques (5.2) à (5.4), il est possible d'obtenir la section efficace totale hadronique de  $pp \rightarrow VV + jet$ , et ce en utilisant la relation (1.35) du modèle des partons. Toutefois, les deux partons de l'état initial peuvent chacun provenir des deux hadrons. C'est pourquoi il est nécessaire de prendre en compte l'échange entre les partons en effectuant une permutation des moments  $p_1$  et  $p_2$  et des densités de probabilité partoniques.

<sup>1</sup>il faut également modifier la somme statistique d'hélicité et de couleur

### 5.2.1 Différences entre $ZZ$ et $W^+W^-$

La première dissemblance à relever entre les 2 processus hadroniques est la différence de masse des bosons de jauge faible. On rappelle leur masses respectives [1] :

$$\begin{aligned} M_W &= 80.403 \pm 0.029 \text{ GeV}/c^2 \\ M_Z &= 91.1876 \pm 0.0021 \text{ GeV}/c^2 \end{aligned}$$

Une autre différence importante provient du fait que nous avons deux particules identiques dans l'état final dans le cas  $V = Z$ , ce qui oblige à prendre en compte l'échange entre les 2 bosons  $Z$ . Puisque nous avons 40 diagrammes de Feynman à évaluer à l'ordre supérieur, cette symétrie engendre alors 40 autres diagrammes issus des premiers avec permutation des bosons  $Z$ .

Quant au cas  $V = W^\pm$ , les deux bosons étant distincts par leur charge électrique opposée, il n'y a donc pas d'échange à effectuer, ce qui nous donne 40 diagrammes de Feynman. Or l'existence du vertex à 3 bosons de jauge faible  $A W^+ W^-$  où  $A = \gamma, Z$ , fait apparaître 11 diagrammes supplémentaires, ce qui nous donne 51 diagrammes de Feynman.

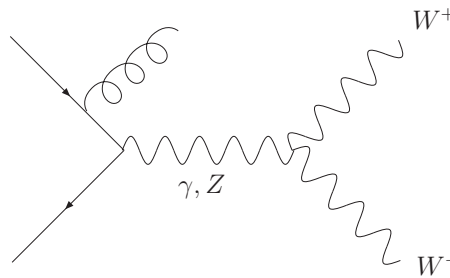


FIG. 5.2 – Un exemple de diagramme de Feynman avec le vertex  $A W^+ W^-$

De plus, comme nous allons le voir dans la section suivante, les relations pour les transformations de symétrie, telles que la parité ou la conjugaison de charge, sont différentes entre les cas  $V = Z$  et  $V = W^\pm$ .

Enfin, une dernière dissemblance réside dans la nature du couplage des bosons de jauge faible à une ligne fermionique. L'expression générale du couplage des bosons  $\gamma, Z, W^\pm$  aux fermions est [77] :

$$\text{Vertex}_{Vf\bar{f}}^\mu = -ie \gamma^\mu (a_f - b_f \gamma_5) \quad (5.6)$$

Dans le tableau (5.1), on donne les valeurs des constantes de couplage  $a_f$  et  $b_f$  en fonction

	$\gamma f \bar{f}$	$Z f \bar{f}$	$W^\pm f \bar{f}$
$a_f$	$Q_f$	$\frac{T_f^3 - 2Q_f \sin^2 \theta_W}{\sin 2\theta_W}$	$\frac{1}{2\sqrt{2} \sin \theta_W}$
$b_f$	0	$\frac{T_f^3}{\sin 2\theta_W}$	$\frac{1}{2\sqrt{2} \sin \theta_W}$

TAB. 5.1 – Constantes de couplage  $a_f, b_f$  pour chaque boson de jauge faible

	$\gamma f \bar{f}$	$Z f \bar{f}$	$W^\pm f \bar{f}$
$g_V^+$	$Q_f$	$\frac{-Q_f \sin \theta_W}{\cos \theta_W}$	0
$g_V^-$	$Q_f$	$\frac{T_f^3 - Q_f \sin^2 \theta_W}{\cos \theta_W \sin \theta_W}$	$\frac{1}{\sqrt{2} \sin \theta_W}$

TAB. 5.2 – Constantes de couplage  $g_V^\pm$  pour chaque boson de jauge faible

de la nature du boson de jauge faible <sup>2</sup>. Cependant, il est préférable de réécrire ces couplages chiraux sous une forme plus adaptée à la méthode des amplitudes d'hélicité, c'est-à-dire en faisant intervenir les projecteurs d'hélicité  $\Pi^\pm$  (3.3) :

$$\text{Vertex}_{Vf\bar{f}}^\mu = -ie \gamma^\mu (g_V^+ \Pi^+ + g_V^- \Pi^-) \quad (5.7)$$

où l'on a donc introduit les constantes de couplage pertinentes  $g_V^\pm$  définies par :

$$g_V^+ = a_f - b_f \quad (5.8)$$

$$g_V^- = a_f + b_f \quad (5.9)$$

On en déduit les nouvelles constantes de couplage  $g_V^\pm$  en fonction de la nature du boson de jauge faible, présentées dans le tableau (5.2).

### 5.2.2 Schéma de régularisation et traitement de $\gamma_5$

Parmi les différents schémas de régularisation qui existent, on choisit d'utiliser celui de 't Hooft-Veltman (schéma HV) [78], qui consiste à considérer les moments et hélicités des particules parcourant la boucle dans un espace-temps de dimension  $n \neq 4$ , tandis que les moments et hélicités des particules externes restent des objets à 4 dimensions. Ce choix de schéma est plus avantageux lorsque l'on utilise la méthode des amplitudes d'hélicité qui a été développée pour un espace-temps à 4 dimensions.

Un autre point qui justifie ce choix est le traitement réservé à la matrice  $\gamma_5$ . En effet, on remarque que les vertex entre la ligne fermionique et les bosons de jauge faible  $Z, W^\pm$  font

<sup>2</sup>où  $T_f^3$  est la troisième composante de l'isospin faible du fermion  $f$ , et  $\theta_W$  l'angle de mélange de Weinberg

intervenir la matrice  $\gamma_5$ . Le schéma HV permet un traitement de  $\gamma_5$  en  $n$  dimensions, qui demeure cohérent avec celui défini en 4 dimensions, à condition de diviser l'espace-temps de dimension  $n$  en deux sous-espaces orthogonaux, un de dimension 4 (dont l'algèbre est noté par un chapeau) et l'autre de dimension  $n - 4$  (dont l'algèbre est noté par un tilde). Ainsi, dans le schéma HV, on a [79] :

$$\begin{aligned} \text{tenseur métrique :} & \quad g^{\mu\nu} = \hat{g}^{\mu\nu} + \tilde{g}^{\mu\nu} \\ \text{matrices } \gamma \text{ de la boucle :} & \quad \gamma^\mu = \hat{\gamma}^\mu + \tilde{\gamma}^\mu \\ \text{propagateurs internes :} & \quad k = \hat{k} + \tilde{k} \end{aligned} \quad (5.10)$$

L'algèbre de Dirac dans ce schéma est le suivant :

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1} \quad \text{avec} \quad g^\mu{}_\mu = n \quad (5.11)$$

$$\{\hat{\gamma}^\mu, \gamma_5\} = 0 \quad (5.12)$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 2\tilde{\gamma}^\mu \gamma_5 \quad (5.13)$$

### 5.3 STRUCTURE DE L'AMPLITUDE DE TRANSITION TOTALE

Si nous considérons la configuration des moments dite physique, alors par conservation de l'énergie-impulsion, nous avons :  $p_1 + p_2 = p_3 + p_4 + p_5$ . Les processus partoniques qu'il nous faut en particulier étudier sont les suivants :

$$q(p_1, \lambda_1) + \bar{q}(p_2, \lambda_2) \rightarrow W^+(p_3, \lambda_3) + W^-(p_4, \lambda_4) + g(p_5, \lambda_5) \quad (5.14)$$

$$q(p_1, \lambda_1) + \bar{q}(p_2, \lambda_2) \rightarrow Z(p_3, \lambda_3) + Z(p_4, \lambda_4) + g(p_5, \lambda_5) \quad (5.15)$$

En comparaison avec l'échelle d'énergie de la collision hadronique (l'énergie dans le centre de masse de la réaction étant pour le LHC de  $\sqrt{s} = 14$  TeV), on se permet de négliger la masse des quarks et anti-quarks. De plus, les densités de probabilités partoniques dominantes pour le proton sont celles des quarks légers  $u$  et  $d$ , dont les masses sont de quelques MeV (Cf Tab. 1.1).

On évalue l'amplitude de probabilité totale au carré en effectuant la somme des carrés des amplitudes d'hélicité :

$$|\mathcal{M}_{q\bar{q} \rightarrow V\bar{V}g}|^2 = \overline{\sum_{a_i, \lambda_i}} |\mathcal{M}_{q(a_1, \lambda_1)\bar{q}(a_2, \lambda_2) \rightarrow V(\lambda_3)\bar{V}(\lambda_4)g(a_5, \lambda_5)}|^2 \quad (5.16)$$

Le symbole  $\overline{\sum}$  signifie que l'on effectue une moyenne sur tous les états initiaux de couleur  $(a_1, a_2)$  et d'hélicité  $(\lambda_1, \lambda_2)$ , et que l'on somme sur tous les états finaux de couleur  $(a_5)$  et d'hélicité  $(\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5)$ .

Les couples d'hélicité permis pour la paire quark-antiquark sont  $\lambda_1 = -\lambda_2 = +1$  et  $\lambda_1 = -\lambda_2 = -1$ . Les deux états d'hélicité du gluon sont  $\lambda_5 = -1$  et  $\lambda_5 = +1$ . Pour le cas des bosons de jauge faible  $V$ , nous avons les hélicités  $\lambda_3, \lambda_4 \in \{-, 0, +\}$ , avec une hélicité longitudinale  $\lambda_{3,4} = 0$  provenant du caractère massif du boson. Au final, cela nous amène à évaluer  $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$  amplitudes d'hélicité.

Appliquée à la réaction partonique (5.2), la somme statistique  $\bar{\Sigma}$  devient :

$$\bar{\Sigma}_{a_i, \lambda_i} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \underbrace{\sum_{a_1, a_2, a_5} (T^{a_5} T_{a_5})_{a_1 a_2}}_{N \times C_F} \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5} = \frac{1}{9} \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5} \quad (5.17)$$

Concernant les deux autres réactions partoniques (5.3) et (5.4), on obtient :

$$\bar{\Sigma}_{a_i, \lambda_i} = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{8}\right) N C_F \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5} = \frac{1}{24} \sum_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5} \quad (5.18)$$

De plus, dans le cas  $V = Z$ , il ne faut pas oublier de multiplier par le facteur de symétrie  $\frac{1}{2}$ , puisque l'on a deux bosons  $Z$  identiques dans l'état final.

Il reste maintenant à évaluer l'amplitude totale pour une configuration d'états d'hélicité et de couleur fixée. Cette amplitude d'hélicité peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{M}_{q(\lambda_1)\bar{q}(\lambda_2) \rightarrow V(\lambda_3)\bar{V}(\lambda_4)g(\lambda_5)} = \varepsilon_3^{\mu_3, \lambda_3} \varepsilon_4^{\mu_4, \lambda_4} \varepsilon_5^{\mu_5, \lambda_5} \langle 2, \lambda_2 | \Gamma_{\mu_3 \mu_4 \mu_5} | 1, \lambda_1 \rangle \quad (5.19)$$

où  $\Gamma_{\mu_3 \mu_4 \mu_5}$  est une chaîne tensorielle et spinorielle contenant les constantes de couplages et les facteurs de couleur, et dépendant de l'ordre perturbatif considéré.

### 5.3.1 Les symétries de l'amplitude

Avant de poursuivre cette étude, il s'avère souvent très utile d'examiner les symétries discrètes de l'amplitude de transition <sup>3</sup>. En effet, la transformation de parité, la symétrie de Bose, et la conjugaison de charge, nous permettent d'obtenir des relations entre différentes configurations d'hélicités. Ainsi, il ne sera nécessaire d'évaluer qu'un nombre réduit de ces hélicités, les autres étant obtenues via ces transformations.

#### La symétrie de Bose

La symétrie de Bose, notée  $\mathcal{B}$ , ne constitue une symétrie que pour le processus  $V = Z$ , puisque que les bosons de jauge faible  $Z$  sont identiques. Cette transformation permute simplement les 2 bosons  $Z$  d'hélicité  $\lambda_3, \lambda_4$  et de moment  $p_3, p_4$  :

$$\mathcal{B} \mathcal{M}_{ZZ}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = \mathcal{M}_{ZZ}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4, \lambda_3, \lambda_5}(p_1, p_2, p_4, p_3, p_5) \quad (5.20)$$

#### La transformation de parité

La transformation de Parité, notée  $\mathcal{P}$ , renverse le signe des hélicités ainsi que les coordonnées spatiales des moments. Elle engendre également une permutation des constantes de couplage,  $g_V^+$  devient  $g_V^-$  et vice-versa :

$$\mathcal{P} \mathcal{M}_{VV}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5; g_V^\pm) = \mathcal{M}_{VV}^{-\lambda_1, -\lambda_2, -\lambda_3, -\lambda_4, -\lambda_5}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5; g_V^\mp) \Big|_{\vec{p} \rightarrow -\vec{p}} \quad (5.21)$$

<sup>3</sup>une discussion plus détaillée de ces symétries se trouve dans [80]

Les variables de Mandelstam  $s_{ij} = (p_i + p_j)^2$  restent évidemment inchangées, par contre le tenseur antisymétrique de Levi-Civita  $\epsilon(p_1, p_2, p_3, p_4)$  se voit accompagné d'un signe moins après la transformation. Par ailleurs, il s'avère possible d'évaluer les amplitudes d'hélicité obtenues après transformation de parité sans ajouter de temps d'évaluation numérique. En effet, chaque amplitude d'hélicité peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{M}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = A(s_{ij}; g_V^\pm) + \epsilon(p_1, p_2, p_3, p_4) \cdot B(s_{ij}; g_V^\pm) \quad (5.22)$$

où les fonctions  $A$  et  $B$  contiennent l'information sur la cinématique du processus. L'amplitude d'hélicité transformée par parité a pour expression :

$$\mathcal{P} \mathcal{M}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = A(s_{ij}; g_V^\mp) - \epsilon(p_1, p_2, p_3, p_4) \cdot B(s_{ij}; g_V^\mp) \quad (5.23)$$

Après factorisation des constantes de couplages chiraux, il suffit donc d'évaluer numériquement une fois seulement ces fonctions  $A$  et  $B$  pour obtenir l'amplitude d'hélicité et sa transformée par parité. De plus, dans le cas  $V = W^\pm$ , pour les amplitudes d'hélicité obtenues par la transformation de parité, seuls les 11 diagrammes de Feynman avec vertex  $AWW$  contribuent, puisque la parité convertit le couplage chiral  $g_W^-$  en  $g_W^+ = 0$ .

### La conjugaison de charge

A un facteur de phase près, la conjugaison de charge, notée  $\mathcal{C}$ , échange particules en anti-particules et vice-versa, tout en laissant inchangées les impulsions, énergies, et hélicités. Dans la cas  $V = W^\pm$ , on a :

$$\mathcal{C} \mathcal{M}_{WW}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) \simeq \mathcal{M}_{WW}^{\lambda_2, \lambda_1, \lambda_4, \lambda_3, \lambda_5}(p_2, p_1, p_4, p_3, p_5) \quad (5.24)$$

Mais puisque la conjugaison de charge permute également les couplages chiraux, on préférera associer les transformations  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{P}$  pour annuler cette permutation, et donc utiliser la transformation dite  $\mathcal{CP}$ .

### La transformation $\mathcal{CP}$

Cette transformation résulte de la combinaison de la transformation de parité avec celle de la conjugaison de charge. Puisque la conjugaison de charge s'applique différemment dans les cas  $V = W^\pm$  et  $V = Z$ , nous avons les deux relations :

$$\mathcal{CP} \mathcal{M}_{WW}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = \mathcal{M}_{WW}^{-\lambda_2, -\lambda_1, -\lambda_4, -\lambda_3, -\lambda_5}(p_2, p_1, p_4, p_3, p_5) |_{\vec{p} \rightarrow -\vec{p}} \quad (5.25)$$

$$\mathcal{CP} \mathcal{M}_{ZZ}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5}(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = \mathcal{M}_{ZZ}^{-\lambda_2, -\lambda_1, -\lambda_3, -\lambda_4, -\lambda_5}(p_2, p_1, p_3, p_4, p_5) |_{\vec{p} \rightarrow -\vec{p}} \quad (5.26)$$

## 5.3.2 Production des 36 hélicités

En adoptant la convention de [69], nous écrirons les deux couples d'hélicité de la paire quark-antiquark comme  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$  et  $\lambda_1 = \lambda_2 = +1$ .

Pour le cas de l'amplitude  $ZZ + jet$ , nous avons 6 hélicités indépendantes à évaluer :

$$\mathcal{M}_{ZZ}^{----\pm}, \mathcal{M}_{ZZ}^{--00+}, \mathcal{M}_{ZZ}^{--0\pm}, \mathcal{M}_{ZZ}^{---++}$$

On utilise ensuite les transformations  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{CP}$ , et  $\mathcal{P}$ , afin d'obtenir les 36 hélicités. Tout d'abord, on applique la transformation  $\mathcal{B}$  sur les 3 dernières hélicités ci-dessus, ce qui nous donne 3 autres hélicités :

$$\mathcal{M}_{ZZ}^{-0-\pm}, \mathcal{M}_{ZZ}^{-+--}$$

Puis on utilise la transformation  $\mathcal{CP}$  sur ces 9 hélicités afin d'engendrer 9 autres hélicités :

$$\mathcal{M}_{ZZ}^{-++\pm}, \mathcal{M}_{ZZ}^{-00-}, \mathcal{M}_{ZZ}^{-+0\pm}, \mathcal{M}_{ZZ}^{-+--}, \mathcal{M}_{ZZ}^{-0+\pm}, \mathcal{M}_{ZZ}^{-+--}$$

avec au total toutes les 18 hélicités concernant le cas  $\lambda_{1,2} = -1$ . Enfin, grâce à l'utilisation de la transformation  $\mathcal{P}$ , nous pouvons obtenir les 18 autres et dernières hélicités correspondant au cas  $\lambda_{1,2} = +1$ .

Pour le cas de l'amplitude  $W^+W^- + jet$ , la transformation de Bose n'est pas une symétrie, et nous avons 9 hélicités indépendantes à évaluer :

$$\mathcal{M}_{WW}^{----\pm}, \mathcal{M}_{WW}^{--00+}, \mathcal{M}_{WW}^{--0\pm}, \mathcal{M}_{WW}^{--++}, \mathcal{M}_{WW}^{-0-\pm}, \mathcal{M}_{WW}^{-+--}$$

Et comme pour le cas de  $ZZ + jet$ , on applique les transformations  $\mathcal{CP}$ , et  $\mathcal{P}$  afin d'obtenir les 36 hélicités.

### 5.3.3 Expression des vecteurs de polarisation

Le formalisme de la méthode des amplitudes d'hélicité est un outil très puissant à condition de travailler avec des moments non massifs. Or dans notre réaction, les bosons  $V$  possèdent des 4-impulsions massives. Afin de continuer à pouvoir utiliser ce formalisme simple et efficace, nous remplaçons les moments des bosons  $V$  par deux nouveaux 4-vecteurs sans masse  $k_3$  et  $k_4$  tels que l'on ait  $k_3^2 = k_4^2 = 0$  et  $p_3 + p_4 = k_3 + k_4$ . On a alors les relations suivantes [81] :

$$\begin{aligned} p_3 &= \frac{1}{2}[(1 + \beta)k_3 + (1 - \beta)k_4] \\ p_4 &= \frac{1}{2}[(1 + \beta)k_4 + (1 - \beta)k_3] \end{aligned} \quad (5.27)$$

et on en déduit les relations inverses :

$$\begin{aligned} k_3 &= \frac{1}{2\beta}[(1 + \beta)p_3 - (1 - \beta)p_4] \\ k_4 &= \frac{1}{2\beta}[(1 + \beta)p_4 - (1 - \beta)p_3] \end{aligned} \quad (5.28)$$

où l'on a introduit la fonction  $\beta = \sqrt{1 - \frac{4M_V^2}{s_{34}}}$ , qui garantit la production d'une paire de bosons  $V$  réels avec  $s_{34} \geq 4M_V^2$ .

Il est important de noter que ce choix permet en outre d'évaluer le processus  $pp \rightarrow \gamma\gamma + jet$ . En effet, une fois le calcul effectué pour un boson de masse quelconque  $M_V$ , il suffira de poser  $M_V = 0$  et  $\beta = 1$ , et de ne pas prendre en compte les polarisations

<sup>4</sup>ce qui revient à dire  $k_3 \equiv p_3$  et  $k_4 \equiv p_4$

longitudinales  $\lambda_{3,4} = 0$  pour les vecteurs de polarisation de la paire de bosons.

Il est désormais possible d'exprimer les vecteurs de polarisation des bosons massifs pour les différentes hélicités à l'aide de spineurs non massifs formés à partir de  $k_3$  et  $k_4$  :

$$\varepsilon_3^{\mu_3,+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 4^- | \gamma^{\mu_3} | 3^- \rangle}{\langle 43 \rangle} \quad (5.29)$$

$$\varepsilon_3^{\mu_3,-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 3^- | \gamma^{\mu_3} | 4^- \rangle}{[34]} \quad (5.30)$$

$$\varepsilon_3^{\mu_3,0} = \frac{1}{2M_V} [(1 + \beta)k_3^{\mu_3} - (1 - \beta)k_4^{\mu_3}] \quad (5.31)$$

$$\varepsilon_4^{\mu_4,+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 3^- | \gamma^{\mu_4} | 4^- \rangle}{\langle 34 \rangle} \quad (5.32)$$

$$\varepsilon_4^{\mu_4,-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 4^- | \gamma^{\mu_4} | 3^- \rangle}{[43]} \quad (5.33)$$

$$\varepsilon_4^{\mu_4,0} = \frac{1}{2M_V} [(1 + \beta)k_4^{\mu_4} - (1 - \beta)k_3^{\mu_4}] \quad (5.34)$$

Les deux états d'hélicité du gluon sont donnés par les expressions usuelles :

$$\varepsilon_5^{\mu_5,+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle j^- | \gamma^{\mu_5} | 5^- \rangle}{\langle j 5 \rangle} \quad (5.35)$$

$$\varepsilon_5^{\mu_5,-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 5^- | \gamma^{\mu_5} | j^- \rangle}{[5j]} \quad (5.36)$$

où  $j$  renvoie au vecteur de référence choisi par convenance pour le vecteur de polarisation. Exprimés ainsi, les vecteurs de polarisation (d'indice  $i = 3, 4, 5$ ) vérifient les relations de complétude habituelles (voir la démonstration en annexe D) :

$$p_i \cdot \varepsilon_i^\pm = p_i \cdot \varepsilon_i^0 = 0 \quad (5.37)$$

$$\varepsilon_i^+ \cdot \varepsilon_i^+ = \varepsilon_i^- \cdot \varepsilon_i^- = 0 \quad (5.38)$$

$$\varepsilon_i^0 \cdot \varepsilon_i^0 = -1 \quad (5.39)$$

$$\varepsilon_i^0 \cdot \varepsilon_i^\pm = 0 \quad (5.40)$$

$$\varepsilon_i^+ \cdot \varepsilon_i^- = -1 \quad (5.41)$$

#### 5.3.4 Factorisation d'une phase spinorielle globale

Si on choisit d'évaluer les amplitudes d'hélicité avec  $\lambda_{1,2} = -1$ , un choix avantageux comme vecteur de référence pour  $\varepsilon_5^-$  consiste à prendre  $p_2$  (i.e.  $j = 2$ ), et  $p_1$  (i.e.  $j = 1$ ) pour  $\varepsilon_5^+$ . De cette façon, la chaîne spinorielle du vecteur de polarisation du gluon peut être rattachée à la chaîne spinorielle de la ligne de quark avec un nombre minimum de matrices  $\gamma$ .

En multipliant les amplitudes d'hélicité  $\mathcal{M}^{--\lambda_3\lambda_4+}$  par  $1 = \langle 5^- | 1 | 2^- \rangle / \langle 5^- | 1 | 2^- \rangle$  et  $\mathcal{M}^{--\lambda_3\lambda_4-}$  par  $1 = \langle 1^- | 2 | 5^- \rangle / \langle 1^- | 2 | 5^- \rangle$  dans l'équation (5.19), on est en mesure de fermer



la chaine spinorielle principale et d'obtenir une trace de matrices  $\gamma$  en utilisant les relations (5.35) et (5.36) :

$$\mathcal{M}^{-\lambda_3\lambda_4+} = -\frac{\varepsilon_3^{\lambda_3,\mu_3}\varepsilon_4^{\lambda_4,\mu_4}}{\sqrt{2}[12]\langle 15\rangle^2} \text{tr}(\Pi^- \not{p}_2 \Gamma_{\mu_3\mu_4\mu_5} \not{p}_1 \gamma^{\mu_5} \not{p}_5 \not{p}_1) \quad (5.42)$$

$$\mathcal{M}^{-\lambda_3\lambda_4-} = -\frac{\varepsilon_3^{\lambda_3,\mu_3}\varepsilon_4^{\lambda_4,\mu_4}}{\sqrt{2}\langle 12\rangle[25]^2} \text{tr}(\Pi^- \not{p}_2 \Gamma_{\mu_3\mu_4\mu_5} \not{p}_1 \not{p}_2 \not{p}_5 \gamma^{\mu_5}) \quad (5.43)$$

Le produit entre les vecteurs de polarisation des deux vecteurs bosons  $V$  définissent des projecteurs sur les états d'hélicité correspondants :

$$\varepsilon_3^{\mu_3,+}\varepsilon_4^{\mu_4,+} = \frac{1}{4s_{34}} \frac{[34]}{\langle 34\rangle} \text{tr}(\Pi^- \not{k}_3 \gamma^{\mu_4} \not{k}_4 \gamma^{\mu_3}) \quad (5.44)$$

$$\varepsilon_3^{\mu_3,-}\varepsilon_4^{\mu_4,-} = \frac{1}{4s_{34}} \frac{\langle 34\rangle}{[34]} \text{tr}(\Pi^- \not{k}_3 \gamma^{\mu_3} \not{k}_4 \gamma^{\mu_4}) \quad (5.45)$$

$$\varepsilon_3^{\mu_3,-}\varepsilon_4^{\mu_4,+} = -\frac{\langle 35\rangle[45]}{[35]\langle 45\rangle} \frac{\text{tr}(\Pi^- \not{k}_4 \not{p}_5 \not{k}_3 \gamma^{\mu_3}) \text{tr}(\Pi^- \not{k}_4 \not{p}_5 \not{k}_3 \gamma^{\mu_4})}{32s_{34}(k_3 \cdot p_5)(k_4 \cdot p_5)} \quad (5.46)$$

$$\varepsilon_3^{\mu_3,0}\varepsilon_4^{\mu_4,0} = \frac{1}{4M_V^2} [(1+\beta)k_3^{\mu_3} - (1-\beta)k_4^{\mu_3}] [(1+\beta)k_4^{\mu_4} - (1-\beta)k_3^{\mu_4}] \quad (5.47)$$

$$\varepsilon_3^{\mu_3,+}\varepsilon_4^{\mu_4,0} = \frac{1}{2\sqrt{8}M_V} \frac{\text{tr}(\Pi^- \not{k}_3 \not{p}_5 \not{k}_4 \gamma^{\mu_3})}{\langle 35\rangle[54]\langle 43\rangle} [(1+\beta)k_4^{\mu_4} - (1-\beta)k_3^{\mu_4}] \quad (5.48)$$

$$\varepsilon_3^{\mu_3,-}\varepsilon_4^{\mu_4,0} = \frac{1}{2\sqrt{8}M_V} \frac{\text{tr}(\Pi^- \not{k}_4 \not{p}_5 \not{k}_3 \gamma^{\mu_3})}{[34]\langle 45\rangle[53]} [(1+\beta)k_4^{\mu_4} - (1-\beta)k_3^{\mu_4}] \quad (5.49)$$

Cette représentation permet d'extraire une phase spinorielle globale pour chaque amplitude d'hélicité. De cette façon, on peut effectuer un éclatement des traces de matrices  $\gamma$  produisant des polynômes en terme de variables de Mandelstam, que l'on simplifie ensuite par factorisation avec des logiciels de manipulation symbolique, tels que MAPLE ou Mathematica [82].

## 5.4 ORDRE DE BORN

La liste des diagrammes de Feynman à l'ordre de l'arbre est donnée en annexe A. Dans cette section, on présente le calcul explicite d'un diagramme de Feynman représentatif de l'ordre de Born pour les deux processus relatifs à  $V = Z$  et  $V = W^\pm$  pour une configuration d'hélicité.

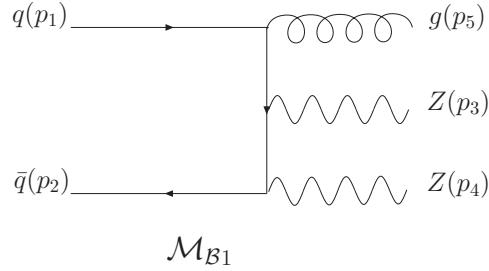
Pour le cas de la réaction  $q\bar{q} \rightarrow ZZ + jet$ , avec la configuration d'hélicité  $\mathcal{M}_B^{-\dots++}$ , étudions le diagramme à l'arbre caractéristique  $\mathcal{M}_{B1}$ .

En adoptant la représentation (5.19), son expression analytique est la suivante :

$$\mathcal{M}_{B1} = \frac{-C_0}{s_{15}s_{24}} \langle 2^- | \gamma_{\mu_4} V_Z(\not{p}_2 + \not{p}_4) \gamma_{\mu_3} V_Z(\not{p}_1 + \not{p}_5) \gamma_{\mu_5} | 1^- \rangle \varepsilon_3^{\mu_3,-} \varepsilon_4^{\mu_4,+} \varepsilon_5^{\mu_5,+} \quad (5.50)$$

$$\text{avec } V_Z = g_V^+ \Pi^+ + g_V^- \Pi^-$$

$$C_0 = i e^2 g_s (T^c)_{ij} \quad (5.51)$$

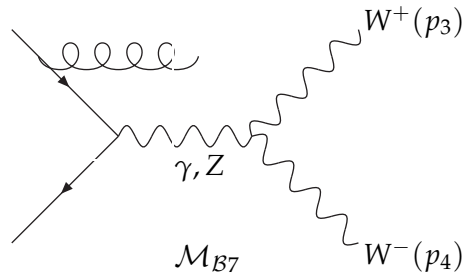


Les relations (5.30), (5.32) et (5.35) nous permettent de donner les expressions des trois vecteurs de polarisation. Dans le cas des diagrammes à l'arbre, on fait le choix de ne pas construire de trace de matrices  $\gamma$  à partir des différentes chaînes spinorielles. En effet, cette méthode rallonge en fait la longueur de l'expression, et il est inutile ici d'exprimer l'amplitude d'hélicité en terme de variables de Mandelstam, puisqu'il n'y a aucun dénominateur dangereux (déterminant de Gram par exemple) à éliminer par compensation avec le numérateur.

Les expressions analytiques des diagrammes de Feynman à l'ordre de Born sont créées à l'aide de FeynArts et sont alors transmises à un programme FORM, conçu pour évaluer automatiquement ces expressions en les exprimant directement en fonction des produits spinoriels de la méthode des amplitudes d'hélicité. Dans le cas du diagramme  $\mathcal{M}_{B1}$ , le fichier de sortie de FORM nous donne :

$$\mathcal{M}_{B1} = 2\sqrt{2}C_0(g_Z^-)^2 \frac{\langle 23 \rangle^2 [42][45][15]}{s_{24}s_{15}s_{34}} \quad (5.52)$$

Pour le cas de la réaction  $q\bar{q} \rightarrow W^+W^- + jet$ , avec la configuration d'hélicité  $\mathcal{M}_B^{----++}$ , étudions le diagramme à l'arbre caractéristique :



En prenant en compte la contribution des propagateurs internes  $\gamma$  et  $Z$ , l'expression analytique de  $\mathcal{M}_{B7}$  est la suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{B7} &= \frac{C_0}{s_{15}} \langle 2^- | \gamma^\alpha (\not{p}_1 + \not{p}_5) \gamma_{\mu_5} | 1^- \rangle \varepsilon_3^{\mu_3,-} \varepsilon_4^{\mu_4,+} \varepsilon_5^{\mu_5,+} \left( \frac{Q_f}{s_{34}} + \frac{\cos \theta_W g_Z^-}{\sin \theta_W (s_{34} - M_Z^2)} \right) \\ &\times [g_{\mu_3\mu_4}(p_3 - p_4)_\alpha + g_{\alpha\mu_4}(2p_4 + p_3)_{\mu_3} - g_{\alpha\mu_3}(2p_3 + p_4)_{\mu_4}] \end{aligned} \quad (5.53)$$

## 5.5 CORRECTIONS VIRTUELLES

Cette étape des corrections à l'ordre supérieur présente plusieurs difficultés. La liste des diagrammes de Feynman à l'ordre d'une boucle est également donnée en annexe A. Pour  $V = Z$ , en comptant la permutation des bosons, la liste des diagrammes de Feynman comprend 10 intégrales à 5 points (appelées pentagones) jusqu'au rang 4 et 22 intégrales à 4 points (appelées boîtes) jusqu'au rang 4. L'évaluation de ces diagrammes à boucle est délicate. D'une part, une évaluation numérique directe des pentagones et boîtes peut s'avérer très couteuse en temps de calcul. D'autre part, les méthodes de réduction peuvent entraîner des étapes intermédiaires de calcul avant simplification très complexes et contenant un nombre de termes énorme. Pour avoir une idée, l'expression analytique d'un pentagone comme  $\mathcal{M}_{\nu 30}$  (voir annexe A) pour une des hélicités les plus simples, via FORM, c'est-à-dire avant simplification, occupe un fichier de sortie d'environ 100 MOctets. De plus, l'écueil du choix de la réduction des intégrales est qu'il n'est pas certain que la taille des expressions puisse être notablement réduite, et surtout que les dénominateurs, comme les déterminants de Gram, puissent se compenser avec les numérateurs après les tentatives de factorisation.

### 5.5.1 Décomposition par facteur de couleur

On peut classer les diagrammes à boucle en fonction du facteur de couleur, et les placer dans un ensemble avec un facteur de couleur déterminé  $C_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ). Chaque ensemble est donc indépendant et forme une partie de l'amplitude de transition invariante de jauge. Parmi tous les diagrammes présentés en annexe A, on rencontre quatre facteurs de couleurs distincts correspondant aux cas <sup>5</sup> :

- le gluon externe se trouve à l'extérieur de la boucle :  $C_1 = C_F$
- le gluon externe se trouve à l'intérieur de la boucle :  $C_2 = -\frac{C_F}{N^2-1}$
- le gluon externe est rattaché au propagateur gluonique interne :  $C_3 = \frac{C_F}{N^2-1} - C_F$
- le gluon externe est rattaché à la boucle de quarks (elle-même reliée à l'état initial via l'échange d'un gluon virtuel) :  $C_4 = \frac{1}{2}$

### 5.5.2 Divergences et Renormalisation

Les corrections virtuelles font apparaître deux types de divergences : ultra-violette et infra-rouge. Ces dernières se décomposent en deux catégories : les singularités molles et les singularités colinéaires. Comme nous l'avons vu, la méthode GOLEM permet de séparer clairement ces divergences et donc de connaître leur nature. Opérer cette distinction est très utile si l'on souhaite vérifier explicitement leur annulation, qui s'effectue différemment dans les deux cas :

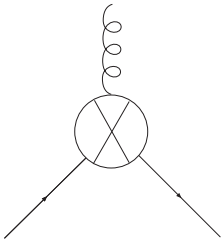
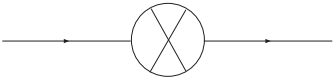

- \* les divergences UV disparaissent avec l'ajout des contre-termes du lagrangien QCD renormalisé.
- \* les divergences IR s'annulent après la combinaison de l'émission réelle avec les corrections

---

<sup>5</sup>où  $C_F = \frac{4}{3}$  et  $N = 3$  désigne le nombre de couleur

virtuelles.

L'introduction des contre-termes est nécessaire si l'on souhaite obtenir un résultat fini dans l'ultra-violet après les corrections NLO de notre processus. Dans le schéma de renormalisation dit de "soustraction minimale modifiée", noté  $\overline{MS}$ , on choisit de soustraire uniquement le pôle en  $\varepsilon_{uv}$ , ce dernier étant accompagné de la partie artificielle de la régularisation dimensionnelle  $\ln(4\pi) - \gamma$ . Après cette procédure de renormalisation, on obtient des règles de Feynman multipliées par une constante de renormalisation  $\delta_i$ . Les modifications qui nous importent sont celles apparaissant pour le vertex quark-gluon et les propagateurs du quark et du gluon :

	$i g_s \delta_1 \gamma^\mu (T^a)_{ji}$
	$i \delta_2 \not{p} \delta^{ij}$
	$- i \delta_3 \delta^{ab} (k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu)$

où l'on a introduit les constantes de renormalisation  $\delta_i = Z_i^{(1)} - 1$ . En faisant intervenir les relations (1.9) à (1.12), on en déduit :

$$\delta_1 = Z_1^{F,(1)} - 1 = -\frac{\alpha_s}{4\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) \left( C_F \zeta + N \left[ \frac{3}{4} + \frac{\zeta}{4} \right] \right) \quad (5.54)$$

$$\delta_2 = Z_2^{(1)} - 1 = -\frac{\alpha_s}{4\pi} C_F \zeta \left( \frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) \quad (5.55)$$

$$\delta_3 = Z_3^{(3)} - 1 = \frac{\alpha_s}{4\pi} \left( \frac{1}{\varepsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) \left( N \left[ \frac{13}{6} - \frac{\zeta}{2} \right] - \frac{4}{3} T_F \right) \quad (5.56)$$

L'amplitude de Born se retrouve alors modifiée par une constante générale de renormalisation. Or dans les diagrammes à boucle de la partie virtuelle contenant des corrections aux propagateurs des quarks sans masse, les intégrales à 2 points sans échelle de masse  $I_2(p^2 = 0, 0, 0)$  engendrent des pôles UV et IR sous la forme  $1/\varepsilon_{uv} - 1/\varepsilon_{ir}$ .

Toutefois, le schéma de régularisation dimensionnelle ne fait pas la distinction entre ces deux types de singularité :  $\varepsilon_{uv} \equiv \varepsilon_{ir}$ . De plus, la partie virtuelle ne contient pas de corrections au propagateur du gluon. Il n'est donc pas nécessaire d'introduire les constantes de renormalisation  $\delta_2$  et  $\delta_3$ . Puisque l'on a la relation  $Z_1 = Z_{g_s} \sqrt{Z_3} Z_2 \rightarrow Z_{g_s}$ , la procédure de

renormalisation se résume à la renormalisation de la constante de couplage avec :

$$\delta_{g_s} = -\frac{\alpha_s}{4\pi} \left( \frac{1}{\epsilon_{uv}} + \ln(4\pi) - \gamma \right) \frac{b_0}{2} \quad (5.57)$$

$$\text{avec } b_0 = \frac{1}{3} (11 N - 4 N_f T_F) \quad (5.58)$$

Ce contre-terme est en fait pris en compte dans l'expression de l'opérateur d'insertion (5.126). Par ailleurs, après renormalisation dans le schéma de 't Hooft-Veltman, la structure du vertex  $Vq\bar{q}$  est modifiée :

$$\begin{aligned} V_{q\bar{q}}^\mu &= \gamma^\mu (a_f - b_f \gamma_5) \rightarrow \gamma^\mu (a_f - Z_5 b_f \gamma_5) \\ \text{avec } Z_5 &= 1 + z_5 = 1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} 4 C_F \end{aligned} \quad (5.59)$$

En introduisant les constantes de couplage  $g_V^\pm$  définies en (5.8) et (5.9), on a pour le cas  $V = Z$  :

$$V_{Zq\bar{q}}^\mu = \gamma^\mu \left[ g_Z^+ \Pi^+ + g_Z^- \Pi^- + \frac{z_5}{2} (g_Z^- - g_Z^+) (\Pi^- - \Pi^+) \right] \quad (5.60)$$

La présence des deux vertex  $Zq\bar{q}$  nous donne le facteur de couplage suivant :

$$(g_Z^{+2} \Pi^+ + g_Z^{-2} \Pi^-) \rightarrow (1 + z_5) (g_Z^{+2} \Pi^+ + g_Z^{-2} \Pi^-) - z_5 g_Z^+ g_Z^- \quad (5.61)$$

Le cas  $V = W^\pm$  est un peu plus compliqué à cause des diagrammes avec le vertex  $AW^+W^-$ . Les différentes constantes de couplages faible deviennent :

$$g_Z^+ \rightarrow \left(1 + \frac{z_5}{2}\right) g_Z^+ - \frac{z_5}{2} g_Z^- \quad (5.62)$$

$$g_Z^- \rightarrow \left(1 + \frac{z_5}{2}\right) g_Z^- - \frac{z_5}{2} g_Z^+ \quad (5.63)$$

$$g_W^{-2} \rightarrow (1 + z_5) g_W^{-2} \quad (5.64)$$

### 5.5.3 Création d'un code automatique

Après avoir classé les amplitudes en fonction de leur configuration d'hélicité et de leur facteur de couleur, on commence par produire les expressions analytiques de tous les diagrammes de Feynman grâce à un code automatique tel que `FeynArts`.

#### Réduction avec FORM

On fait appel à un logiciel de manipulation symbolique tel que `FORM`, en écrivant un programme capable de développer les expressions des diagrammes de Feynman. Tout d'abord, il est nécessaire de traduire l'expression produite par `FeynArts` et de la réécrire pour la mettre sous la forme de (5.42) et (5.43).

Avant de développer les expressions analytiques des diagrammes, il faut les regrouper par facteur de couleur identique. En se référant à la numérotation de la liste des diagrammes de

Feynman de l'annexe A, on caractérise chaque groupe par les diagrammes numérotés  $\mathcal{M}_{\nu_i}$  qu'il contient :

$$\begin{aligned} C_1 &\ni \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 25, 26\} \\ C_2 &\ni \{13, 15, 17, 19, 20, 22, 23, 27, 28, 29\} \\ C_3 &\ni \{14, 16, 18, 21, 24, 30\} \\ C_4 &\ni \{31, 32, 33\} \end{aligned}$$

Concernant les diagrammes  $\mathcal{M}_{\nu_{34}}$  à  $\mathcal{M}_{\nu_{37}}$ , si l'on effectue leur somme, celle-ci devient nulle si l'on prend en compte les deux sens de parcours de la boucle et si l'on somme sur toutes les saveurs de la boucle de quark. De plus, la contribution des diagrammes  $\mathcal{M}_{\nu_{38,39,40}}$  est nulle, car le facteur de couleur qu'il contient est égal à  $\text{tr}(T^a) = 0$ .

On remarque qu'il est possible de réexprimer un des trois facteurs de couleur comme une combinaison linéaire des deux autres. Par exemple, le facteur de couleur  $C_3$  provenant des diagrammes avec vertex à 3 gluons est habituellement décomposé en fonction des deux premiers. Après répartition des diagrammes de  $C_3$  dans les deux autres ensembles, ces derniers forment deux ensembles invariants de jauge. Cependant, l'ensemble de  $C_3$  constitue l'un des groupes les plus difficiles à calculer, il est plus judicieux de diviser et d'ajouter deux fois l'ensemble de  $C_1$  qui lui ne comporte aucun pentagone. Les différents facteurs de couleur rencontrés précédemment peuvent s'écrire sous la forme :

$$C_2 = -\frac{1}{2N} \quad (5.65)$$

$$C_3 = \frac{N}{2} \quad (5.66)$$

$$C_1 = \frac{N}{2} - \frac{1}{2N} = C_2 + C_3 \quad (5.67)$$

Par ailleurs, on peut distinguer trois sous-ensembles dans le groupe de  $C_2$ , chacun comprenant le pentagone  $\mathcal{M}_{\nu_{27}}$ ,  $\mathcal{M}_{\nu_{28}}$  ou  $\mathcal{M}_{\nu_{29}}$  dans lequel le gluon est rattaché à l'un des trois propagateurs internes de la boucle :

$$\begin{aligned} C_{2G1} &\ni \{13, 19, 27\} \\ C_{2G2} &\ni \{17, 20, 23, 28\} \\ C_{2G3} &\ni \{15, 22, 29\} \end{aligned}$$

Chaque pentagone est défini par une matrice cinématique contenant six variables de Mandelstam qui définissent naturellement le groupe des variables avec lequel on exprime l'amplitude à boucle du diagramme. Par contre, une somme directe entre ces trois sous-ensembles n'est pas réalisée. La raison est que l'on doit modifier le groupe des variables de Mandelstam sur lequel on décompose le diagramme, et trouver un ensemble commun pour la somme, or ceci va augmenter la taille de l'expression et la complexité des dénominateurs.

Tous les diagrammes de  $C_1$  s'additionnent de façon naturelle aux diagrammes de  $C_3$ , puisque l'on peut les exprimer à l'aide du set du pentagone  $\mathcal{M}_{\nu_{30}}$  de  $C_3$ , et ce sans avoir à faire de changement de variable. En outre, on remarque que ces mêmes diagrammes peuvent

être considérés comme les diagrammes  $\mathcal{M}_{\mathcal{V}_{27}}$  et  $\mathcal{M}_{\mathcal{V}_{29}}$  du groupe  $C_2$ , et  $\mathcal{M}_{\mathcal{V}_{30}}$  du groupe  $C_3$ , mais pour lesquels un, deux, voire trois propagateurs internes auraient été compensés :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{V}_{\{1,2,6,9,10,11,25\}}} &\leftrightarrow C_{2G1} \\ \mathcal{M}_{\mathcal{V}_{\{3,4,5,7,8,12,26\}}} &\leftrightarrow C_{2G3} \end{aligned} \quad (5.68)$$

Or lors de la réduction des diagrammes  $\mathcal{M}_{\mathcal{V}_{27,29,30}}$ , des intégrales réduites à 2,3 et 4 points vont apparaître et pourront probablement se compenser avec celles de  $C_1$ .

Finalement, au niveau de FORM, nous évaluons les trois ensembles de facteur de couleur  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$  tout en insérant les diagrammes de  $C_1$  dans les deux premiers ensembles. Puisque nous avons formé trois groupes indépendants de jauge, nous pouvons espérer d'importantes simplifications.

Par ailleurs, dans la procédure de simplification du cas  $V = Z$ , on considère seulement les diagrammes de Feynman avec l'ordre des pattes 1,2,3,4,5. En effet, il n'y a pas de simplification possible avec ces mêmes diagrammes dont les bosons  $Z$  ont été permutés (l'ordre des pattes étant 1,2,4,3,5), puisque les variables de Mandelstam dans les matrices cinématiques  $\mathcal{S}$  sont modifiées par l'échange  $3 \leftrightarrow 4$ , et on ne souhaite pas faire de changements de variables cinématiques.

Une fois la chaîne spinorielle principale fermée en une trace de matrices  $\gamma$ , on éclate cette dernière tout en respectant l'algèbre de Dirac défini dans le schéma HV. L'expression obtenue est constituée de produits scalaires faisant intervenir les propagateurs internes et les moments externes, parmi lesquels on trouve  $p_i \cdot q_j$  et  $q_i \cdot q_j$ . Comme dans l'exemple du calcul de  $q\bar{q} \rightarrow \gamma\gamma$  présenté dans le chapitre précédent, on réécrit ces derniers sous la forme :

$$p_i \cdot q_j = q_k \cdot q_j - q_l \cdot q_j \quad (5.69)$$

$$q_i \cdot q_j = q_i^2 + q_j^2 - \frac{1}{2} \mathcal{S}(i, j) \quad (5.70)$$

Après décomposition de l'intégrale à boucle en fonction des facteurs de forme de la méthode GOLEM, les relations de complétude présentées en annexe C permettent d'effectuer une réduction significative du rang de ces facteurs de forme. On choisit ensuite de procéder à une réduction algébrique des intégrales scalaires avec paramètre de Feynman (à partir du formulaire de GOLEM donné en annexe C) jusqu'à l'obtention d'une expression décomposée sur la base des fonctions présentée à la fin du chapitre 3, à savoir <sup>6</sup> :

$$I_4^n(\mathcal{S}), \quad I_3^n(\mathcal{S}, 3 \text{ m}), \quad H_i(X, Y) (i = 1, \dots, 4), \quad \ln\left(\frac{X}{\mu^2}\right), \quad \ln^2\left(\frac{X}{\mu^2}\right), \quad \text{termes rationnels} \quad (5.71)$$

On utilise enfin MAPLE pour factoriser les coefficients des fonctions de la base afin de réduire leur taille et d'annuler les dénominateurs.

### Simplification et factorisation avec MAPLE

L'intervention d'un programme de type MAPLE est indispensable pour deux principales raisons. D'une part, le logiciel FORM produit des fichiers de sortie énormes car contenant

<sup>6</sup>où  $X, Y$  désigne des variables de Mandelstam et 3 m correspond à 3 masses externes

des résultats développés totalement en somme, sans aucune factorisation des polynômes de variables de Mandelstam. Il est donc impératif de réduire la taille de ces fichiers si l'on veut pouvoir évaluer numériquement ces expressions en un temps limité. D'autre part, la réduction des intégrales tensorielles entraîne l'apparition de dénominateurs (déterminants de Gram, déterminants de matrices  $S$ ) dans les coefficients des fonctions de notre base. Si l'on ne veut pas obtenir d'instabilités numériques dans les régions de l'espace de phase où ces dénominateurs s'annulent, il importe de factoriser le numérateur de ces coefficients pour faire apparaître ces dénominateurs et les compenser.

Les instabilités numériques causées par les déterminants de Gram inverses représentent en réalité des singularités fictives qui doivent disparaître pour des observables physiques, puisque celles-ci n'existent pas avant l'étape de la réduction algébrique. En effet, l'origine de ces déterminants se trouve dans la procédure de réduction :

$$I_4^{n+2}(l; S) = -\frac{\det S}{\det G} \left[ b_l I_4^{n+2}(S) + \frac{1}{2} \sum_{j \in S} S_{jl}^{-1} I_3^n(S \setminus \{j\}) - \frac{1}{2} \sum_{j \in S \setminus \{l\}} b_j S_{jl}^{-1} I_3^n(l, S \setminus \{j\}) \right] \quad (5.72)$$

Le risque provient du fait que  $\det G$  est un polynôme en  $s_{ij}$  qui est susceptible de s'annuler pour une configuration particulière des moments externes, c'est-à-dire dans une région physique de l'espace de phase, lors de l'intégration numérique de l'amplitude de transition. Par ailleurs, il est possible de montrer que ces divergences sont bien fictives, car lorsque  $\det G$  tend vers 0, le numérateur tend lui aussi vers 0 à la même vitesse que  $\det G$ . Cependant, on est contraint de regrouper pour factoriser au mieux les coefficients de chaque fonction de la base, ce qui implique, par exemple pour la relation ci-dessus (5.72), de séparer dans le terme entre crochets, les intégrales à 3 et 4 points avec leur coefficient respectif. Par conséquent, ces deux parties étant évaluées numériquement séparément, l'annulation du dénominateur n'est plus contre-balançée par le numérateur tronqué, à moins que ce dénominateur y apparaisse en facteur.

Or la principale difficulté réside dans le fait que les coefficients des fonctions de la base sont constitués de différentes sortes de dénominateurs. Une première solution serait de tout mettre sous la forme d'un dénominateur commun, c'est-à-dire de procéder à une factorisation brutale avec MAPLE. Cette méthode s'avère en fait trop gourmande en ressource mémoire (13 GigaOctets de mémoire RAM sont insuffisants pour traiter les hélicités les plus compliquées).

Il est donc nécessaire d'extraire les numérateurs de chaque type de dénominateur et de les factoriser séparément. La première étape est de reconnaître toutes les différentes sortes de dénominateurs avec des puissances variées :

$$\frac{1}{\det S'} \quad \frac{1}{(\det G_3)^{i'}} \quad \frac{1}{(\det G_4)^{j'}} \quad \frac{1}{\det S \times (\det G_4)^{k'}} \quad \frac{1}{(\det G_3)^l \times (\det G_4)^m}$$

Pour cela, on utilise la commande MAPLE : **algsubs(..., exact)**.

Pour la réaction étudiée, on remarque que l'on ne peut pas trouver une puissance supérieure à 2 pour tous ces dénominateurs. La raison est que l'intégrale à 4 points la plus difficile que l'on puisse avoir est une intégrale à 4 points avec 2 paramètres de Feynman, et on a donc des dénominateurs comme  $1/(\det G_4)^2$  qui apparaissent à la puissance 2 tout au plus dans les



coefficients.

Toutefois, on recontre des intégrales à 4 points avec 3 paramètres de Feynman ( $\rightarrow 1/(\det G_4)^3$ ), seulement pour les diagrammes à boucle de quarks dans  $C_4$ , mais ceux-ci disparaissent avec la méthode de réduction utilisée dans FORM.

On applique ensuite une factorisation des coefficients avec **factor(coeff(..., k))** devant tous les dénominateurs selon leur puissance. Puis on étudie tous ces coefficients dans le but de reconnaître (avec **algsubs(..., exact)**) une certaine puissance du dénominateur apparaissant en facteur au numérateur. Considérons par exemple les expressions  $A/((\det G_3)^i \times (\det G_4)^j)$  ou  $B/(\det S \times (\det G_4)^k)$ . Il faut donc savoir si une partie de ces dénominateurs s'annule avec le numérateur factorisé, par exemple  $\det S$ , et dans ce cas, ce terme doit être recombinaé avec un autre (par exemple avec  $C/(\det G_4)^k$ ), et ce en appliquant une autre itération du code. Enfin, il est possible de réduire de façon significative la taille des coefficients en utilisant la commande de MAPLE : **simplify(coeff, size)**.

L'organisation globale et les différentes parties du programme automatique sont illustrées à l'aide de l'organigramme de la figure (5.3).

#### 5.5.4 Vérification du code

Un des premiers moyens de s'assurer de la justesse du code est de vérifier explicitement l'annulation des divergences UV et IR. En complément, on peut procéder à la vérification de l'invariance de jauge de l'amplitude de transition totale par rapport aux bosons. Pour le gluon, l'invariance de jauge se traduit par :

$$\begin{aligned} \text{Si } \varepsilon_5^{\mu_5} &\rightarrow \varepsilon_5^{\prime\mu_5} = \varepsilon_5^{\mu_5} + \lambda p_5^{\mu_5} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \\ \text{alors } \mathcal{M}(\varepsilon_5) &= \mathcal{M}'(\varepsilon_5') \end{aligned}$$

Finalement, un moyen très efficace pour éradiquer toutes les erreurs du code est la comparaison de deux codes indépendants. Une comparaison de l'élément de matrice de la partie virtuelle pour deux points de l'espace de phase a été effectuée avec S. Karg [83] au sein du groupe de collaboration. Pour les deux réactions  $V = Z$  et  $V = W^\pm$ , un accord numérique allant de 8 jusqu'à 12 chiffres significatifs a été obtenu pour l'ordre de Born et les corrections virtuelles.

Dans le tableau (5.3), on donne pour chacune des 6 hélicités du processus  $q\bar{q} \rightarrow ZZ + jet$ , la taille des fichiers de sortie de MAPLE, et le temps d'évaluation numérique <sup>7</sup> pour 1000 points de l'espace de phase de ces expressions analytiques de la partie virtuelle, pour lesquelles on a pris en compte la permutation des quarks initiaux et des bosons Z.

Pour obtenir une estimation de la durée d'évaluation de la réaction  $pp \rightarrow ZZ + jet$  pour 1000 points de l'espace de phase, il faut multiplier la durée totale du tableau (5.3) par un facteur  $3 \times 3$ , puisqu'il y a 18 hélicités à calculer numériquement <sup>8</sup> et trois canaux partoniques

<sup>7</sup>obtenu avec un processeur Intel(R) Xeon(R) 3.00GHz

<sup>8</sup>les 18 autres obtenues avec la transformation de parité ne nécessitant pas de temps d'évaluation numérique supplémentaire

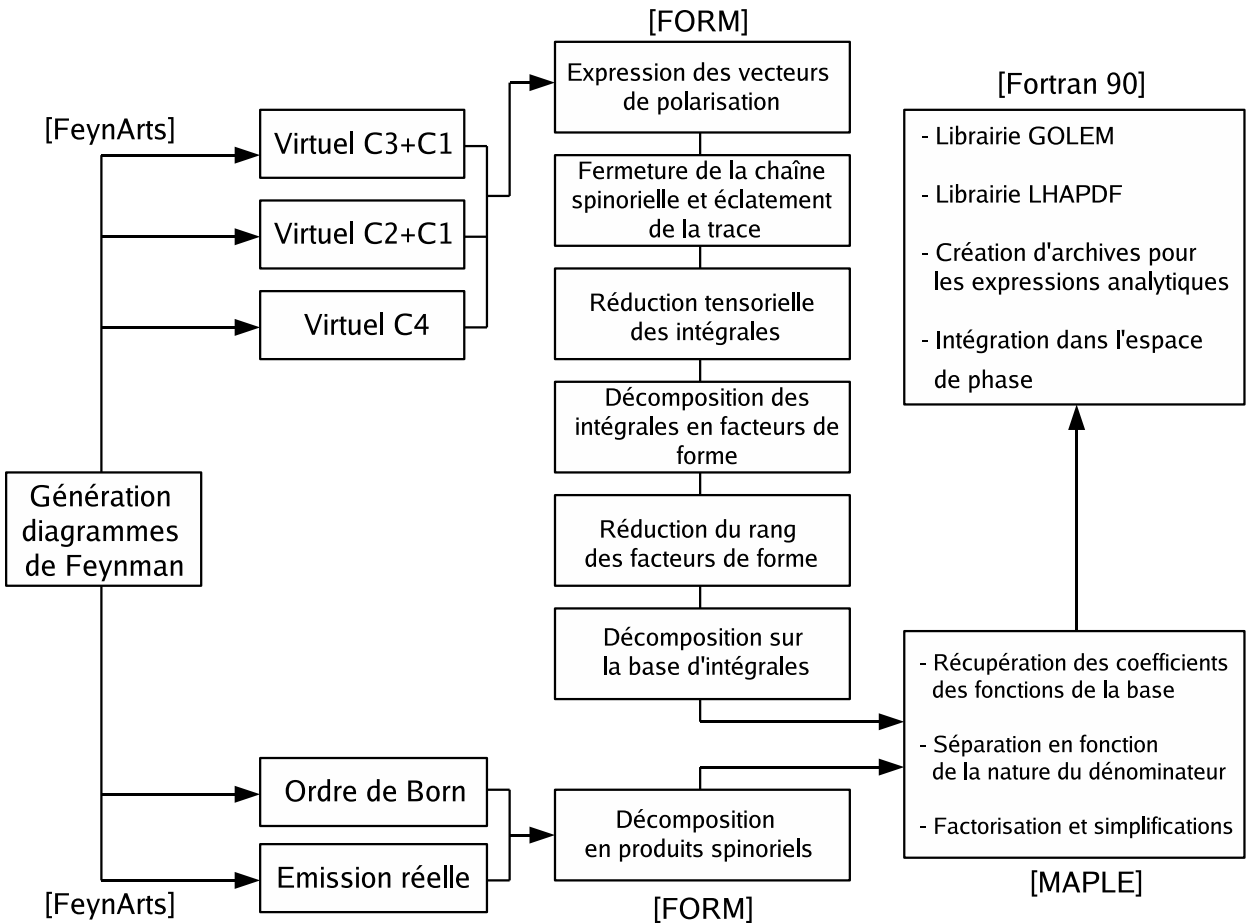


FIG. 5.3 – Organigramme du code automatique

à considérer. Ainsi l'intégration dans l'espace de phase avec 100 000 points nécessite au minimum trois jours de temps de calcul. C'est la raison pour laquelle il est nécessaire d'exécuter le programme d'intégration sur plusieurs dizaines de processeurs en parallèle.

## 5.6 L'ÉMISSION RÉELLE

L'émission réelle constitue un calcul à l'arbre pour lequel on rajoute un parton supplémentaire dans l'état final de la réaction. Il est important de prendre en compte cette contribution si l'on souhaite obtenir une observable physique inclusive. par ailleurs, dans la limite où les deux partons de l'état final deviennent colinéaires et dans le cas où les deux partons s'hadronisent en deux jets, ces derniers deviennent indissociables et on ne verra qu'un seul jet sur le détecteur.

Lors de l'intégration dans l'espace de phase sur les moments partoniques, certaines régions à faibles moments et à petits angles entre les partons produisent respectivement des

$V = Z$	Taille de la partie finie avec permutation des Z	Durée d'évaluation pour 1000 points
$\mathcal{M}^{----+}$	6.4 Mo	20 sec
$\mathcal{M}^{-----}$	7.4 Mo	25 sec
$\mathcal{M}^{--00+}$	5.2 Mo	13 sec
$\mathcal{M}^{---0+}$	12 Mo	52 sec
$\mathcal{M}^{---0-}$	14 Mo	57 sec
$\mathcal{M}^{----++}$	26 Mo	105 sec
total	71 Mo	272 sec

TAB. 5.3 – Taille et durée d'évaluation des 6 hélicités de  $q\bar{q} \rightarrow ZZ + jet$  pour la partie virtuelle $\epsilon_1$ 

singularités appelées singularités molles et singularités colinéaires. Ces singularités sont présentes dans les contributions virtuelle et réelle. Ce sont les observables inclusives de type hadronique (avec l'introduction de la notion de jet) qui s'avèrent être libres de ces divergences. En effet, la somme entre les corrections virtuelles et l'émission réelle mène à leur annulation. Cette compensation des singularités molles et colinéaires n'est pas accidentelle. Les théorèmes de Bloch, Nordsieck [22] et de Kinoshita, Lee, Nauenberg [23] établissent que des quantités inclusives ne contiennent pas de singularités infra-rouge à chaque ordre perturbatif.

### 5.6.1 Section efficace totale à l'ordre NLO

La section efficace totale à l'ordre NLO de la réaction  $pp \rightarrow VV + jet$  se décompose de la façon suivante :

$$\sigma_{NLO} = \sigma_{LO}(\alpha_s) + \sigma_{HO}(\alpha_s^2) \quad (5.73)$$

À l'ordre de l'arbre, l'intégrand étant fini dans l'ultra-violet et l'infra-rouge, on effectue l'intégration sur les moments des trois particules de l'état final, dans un espace-temps à quatre dimensions :

$$\sigma_{LO} = \int_3 d\sigma_{Born} = \int_3 |\mathcal{M}_B|^2 \quad (5.74)$$

La contribution de l'ordre supérieur à la section efficace NLO doit elle aussi être une quantité finie :

$$\sigma_{HO} \equiv \int d\sigma_{HO} = \int_{3+1} d\sigma_R + \int_3 d\sigma_V \quad (5.75)$$

où  $\sigma_R$  est la section efficace de l'émission réelle où l'on a intégré sur les moments des trois particules de l'état final associées à un parton supplémentaire, et  $\sigma_V$  représente la section efficace de la partie virtuelle :

$$\sigma_V = 2 \operatorname{Re}(\mathcal{M}_B^* \cdot \mathcal{M}_V) + I(\epsilon) \quad (5.76)$$

où l'on a introduit l'opérateur d'insertion  $I(\epsilon)$  dont le rôle est de compenser les pôles UV et IR de la partie virtuelle. Il reste donc maintenant à déterminer cet opérateur d'insertion et à évaluer la contribution de l'émission réelle.

### 5.6.2 Éléments de matrice de l'émission réelle

Comme dans le cas de l'évaluation de l'ordre de Born, on utilise FeynArts pour obtenir les expressions de tous les diagrammes de Feynman. Puis ces expressions sont traitées par un programme FORM qui va les décomposer en terme de produits spinoriels.

L'émission réelle est constituée des trois réactions partoniques à l'arbre (5.2), (5.3) et 5.4, auxquelles on rajoute un gluon dans l'état final :

$$q(p_1) \bar{q}(p_2) \rightarrow V(p_3) V(p_4) g(p_5) g(p_6) \quad (5.77)$$

$$g(p_1) q(p_2) \rightarrow V(p_3) V(p_4) q(p_5) g(p_6) \quad (5.78)$$

$$g(p_1) \bar{q}(p_2) \rightarrow V(p_3) V(p_4) \bar{q}(p_5) g(p_6) \quad (5.79)$$

Par ailleurs, l'émission réelle permet l'ouverture de nouveaux canaux n'existant pas à l'ordre de l'arbre, comme ceux avec une paire quark-antiquark dans l'état final :

$$q(p_1) \bar{q}(p_2) \rightarrow V(p_3) V(p_4) q(p_5) \bar{q}(p_6) \quad (5.80)$$

$$q(p_1) q(p_2) \rightarrow V(p_3) V(p_4) q(p_5) q(p_6) \quad (5.81)$$

$$\bar{q}(p_1) \bar{q}(p_2) \rightarrow V(p_3) V(p_4) \bar{q}(p_5) \bar{q}(p_6) \quad (5.82)$$

Il faut également prendre en compte les processus avec des quarks et anti-quarks de saveur différente, qui eux ne divergent pas dans l'infra-rouge :

$$q(p_1) \bar{q}(p_2) \rightarrow V(p_3) V(p_4) q'(p_5) \bar{q}'(p_6) \quad (5.83)$$

$$q(p_1) \bar{q}'(p_2) \rightarrow V(p_3) V(p_4) q(p_5) \bar{q}'(p_6) \quad (5.84)$$

$$q(p_1) q'(p_2) \rightarrow V(p_3) V(p_4) q(p_5) q'(p_6) \quad (5.85)$$

$$\bar{q}(p_1) \bar{q}'(p_2) \rightarrow V(p_3) V(p_4) \bar{q}(p_5) \bar{q}'(p_6) \quad (5.86)$$

Cependant, il suffit d'étudier les deux processus partoniques suivants :

$$q(p_1, \lambda_1) \bar{q}(p_2, \lambda_2) \rightarrow V(p_3, \lambda_3) V(p_4, \lambda_4) g(p_5, \lambda_5) g(p_6, \lambda_6) \quad (5.87)$$

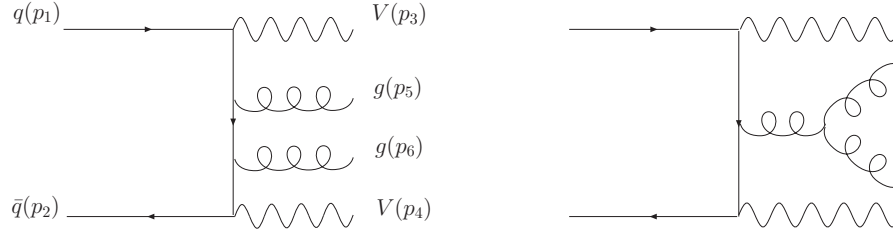
$$q(p_1, \lambda_1) \bar{q}(p_2, \lambda_2) \rightarrow V(p_3, \lambda_3) V(p_4, \lambda_4) q(p_5, \lambda_5) \bar{q}(p_6, \lambda_6) \quad (5.88)$$

Les autres amplitudes de probabilité rencontrées plus haut sont obtenues en effectuant une permutation sur les moments partoniques. Toutefois, dans le deuxième processus partonique, il faut également prendre en compte les cas où la saveur des quarks et anti-quarks est différente.

#### Organisation des amplitudes d'hélicité pour $q\bar{q} \rightarrow VVgg$

La figure (5.4) représente les diagrammes de Feynman caractéristiques de ces processus. La décomposition en fonction du facteur de couleur n'est plus triviale comparée à l'ordre de Born pour lequel un seul parton est présent dans l'état final. En effet, l'amplitude réelle pour (5.87) peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}1} = T_{ik}^a T_{kj}^b \cdot \mathcal{M}_1 + T_{ik}^b T_{kj}^a \cdot \mathcal{M}_2 + f^{abc} T_{ij}^c \cdot \mathcal{M}_3 \quad (5.89)$$

FIG. 5.4 – Diagrammes de Feynman caractéristiques de  $q\bar{q} \rightarrow ZZgg$ 

Néanmoins, il est possible de réécrire le dernier facteur de couleur en fonction des deux premiers en utilisant la relation  $[T^a, T^b] = i f^{abc} T_c$ . Lorsque l'on prend le carré de l'amplitude, on obtient les cinq facteurs de couleur suivants :

$$|T^a T^b|^2 = N C_F^2 \quad (5.90)$$

$$|f^{abc} T^c|^2 = N C_A C_F \quad (5.91)$$

$$(T^a T^b)(T^b T^a)^\dagger = N C_F (C_F - C_A T_R) \quad (5.92)$$

$$|f^{abc} T_{ij}^c T_{ik}^a T_{kj}^b|^2 = \frac{1}{2} C_A C_F N \quad (5.93)$$

$$|f^{abc} T_{ij}^c T_{ik}^b T_{kj}^a|^2 = -\frac{1}{2} C_A C_F N \quad (5.94)$$

$$\text{avec} \quad C_A = N = 3, \quad T_R = \frac{1}{2}, \quad C_F = \frac{N^2 - 1}{2N}$$

Dans le cas  $V = Z$ , l'amplitude du processus (5.87) est composé de 30 diagrammes de Feynman si l'on prend en compte l'échange des bosons  $Z$  identiques :  $\mathcal{M}_1$  comporte 12 diagrammes,  $\mathcal{M}_2$  se déduit de  $\mathcal{M}_1$  par la permutation des deux gluons, et enfin  $\mathcal{M}_3$  contient 6 diagrammes de Feynman. L'amplitude d'hélicité a pour expression générale :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6} = \varepsilon_3^{\mu_3, \lambda_3} \varepsilon_4^{\mu_4, \lambda_4} \varepsilon_5^{\mu_5, \lambda_5} \varepsilon_5^{\mu_6, \lambda_6} \langle 2, \lambda_2 | \Gamma_{\mu_3 \mu_4 \mu_5 \mu_6} | 1, \lambda_1 \rangle \quad (5.95)$$

Il y a deux hélicités permises pour la paire quark-antiquark, deux pour chaque boson  $V$ , et enfin deux pour chaque gluon. Cela nous amène à évaluer 72 configurations d'hélicité. Heureusement, les transformations de Bose, de parité et de conjugaison de charge nous permettent de restreindre le nombre de configurations indépendantes.

Pour les vecteurs de polarisation des bosons, on fait appel aux mêmes expressions (5.29) à (5.34) que celles utilisées pour l'ordre de Born. Concernant les deux gluons, on choisit les

vecteurs de polarisation suivants :

$$\varepsilon_5^{\mu_5,+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 6^- | \gamma^{\mu_5} | 5^- \rangle}{\langle 65 \rangle} \quad (5.96)$$

$$\varepsilon_5^{\mu_5,-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 5^- | \gamma^{\mu_5} | 6^- \rangle}{[56]} \quad (5.97)$$

$$\varepsilon_6^{\mu_6,+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 5^- | \gamma^{\mu_6} | 6^- \rangle}{\langle 56 \rangle} \quad (5.98)$$

$$\varepsilon_6^{\mu_6,-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\langle 6^- | \gamma^{\mu_6} | 5^- \rangle}{[65]} \quad (5.99)$$

### Organisation des amplitudes d'hélicité pour $q\bar{q} \rightarrow VVq'\bar{q}'$

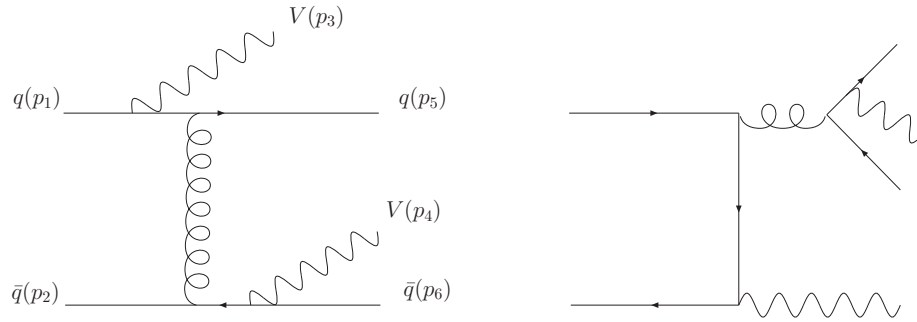


FIG. 5.5 – Diagrammes de Feynman caractéristiques de  $q\bar{q} \rightarrow Z Z q'\bar{q}'$

La figure (5.5) représente les diagrammes de Feynman caractéristiques de ce processus. Dans le cas de ce processus partonique, un propagateur de gluon relie les deux paires quark-antiquark, et il n'y a donc que deux facteurs de couleur possibles : (avec  $T_R = 1/2$ )

$$T_{12}^a T_{56}^a = T_R \left( \delta_{16} \delta_{25} - \frac{1}{N} \delta_{12} \delta_{56} \right) \quad (5.100)$$

$$T_{16}^a T_{52}^a = T_R \left( \delta_{12} \delta_{56} - \frac{1}{N} \delta_{16} \delta_{25} \right) \quad (5.101)$$

L'amplitude réelle pour ce nouveau canal partonique peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}2} = \delta_{12} \delta_{56} \cdot \mathcal{M}_1 + \delta_{16} \delta_{25} \cdot \mathcal{M}_2 \quad (5.102)$$

La décomposition des amplitudes d'hélicité est la suivante :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5', \lambda_6'} = \varepsilon_3^{\mu_3, \lambda_3} \varepsilon_4^{\mu_4, \lambda_4} \langle 2, \lambda_2 | \Gamma_{\mu_3, 4 \mu}^{\mu_4, \lambda_4} | 1, \lambda_1 \rangle \langle 6, \lambda_6' | \Gamma_{\mu_3, 4}^{\mu_3, \mu_4} | 5, \lambda_5' \rangle \quad (5.103)$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}}^{\lambda_1, \lambda_2', \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6'} = \varepsilon_3^{\mu_3, \lambda_3} \varepsilon_4^{\mu_4, \lambda_4} \langle 2, \lambda_2' | \Gamma_{\mu_3, 4 \mu}^{\mu_4, \lambda_4} | 5, \lambda_5 \rangle \langle 6, \lambda_6' | \Gamma_{\mu_3, 4}^{\mu_3, \mu_4} | 1, \lambda_1 \rangle \quad (5.104)$$

### 5.6.3 La méthode de soustraction des dipôles

Tout d'abord, il faut noter qu'il n'est pas nécessaire d'exhiber les divergences infra-rouges des fonctions d'onde des trois partons externes sans masse, puisqu'elles ne sont pas prises en compte dans les méthodes de soustraction.

Afin de retrancher les divergences des corrections virtuelles et de l'émission réelle, on utilise la méthode de soustraction de Catani-Seymour [24]. L'idée générale de la méthode de soustraction repose sur l'astuce suivante :

$$d\sigma_{HO} = [d\sigma_R - d\sigma_A] + d\sigma_A + d\sigma_V \quad (5.105)$$

où la section efficace différentielle  $d\sigma_A$  est une approximation de  $d\sigma_R$ , plus précisément, qui a le même comportement divergent (en dimension  $d$ ) que  $d\sigma_R$ . Ainsi la fonction de  $d\sigma_A$  est d'agir comme un contre-terme local de  $d\sigma_R$ . On peut donc écrire :

$$\sigma_{HO} = \int_{m+1} [d\sigma_R - d\sigma_A] + \int_{m+1} d\sigma_A + \int_m d\sigma_V \quad (5.106)$$

L'avantage de cette écriture est que la première intégrale peut être évaluée en 4 dimensions (on peut prendre la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ ) puisqu'il n'y a plus désormais de divergences.

Si l'on est capable d'extraire analytiquement de l'intégration de  $d\sigma_A$  sur le sous-espace de phase correspondant au parton supplémentaire les pôles en  $\epsilon$  qui en proviennent, on pourra alors les compenser avec ceux provenant de  $d\sigma_V$ , et ainsi écrire :

$$\sigma_{HO} = \int_{m+1} [(d\sigma_R)_{\epsilon=0} - (d\sigma_A)_{\epsilon=0}] + \int_m \left( d\sigma_V + \int_1 d\sigma_A \right)_{\epsilon=0} \quad (5.107)$$

Il reste maintenant à déterminer  $d\sigma_A$ , qui doit être définie de telle façon que sa valeur soit indépendante du nombre de partons moux et colinéaires produits dans l'état final. En notation symbolique, on a la formule factorisée dite "des dipôles" :

$$d\sigma_A = \sum_{\text{dipôles}} d\sigma_B \otimes dV_{\text{dipôles}} \quad (5.108)$$

où  $d\sigma_B$  porte l'information sur les caractéristiques du processus, et  $dV_{\text{dipôles}}$  imite le comportement singulier de  $d\sigma_R$  tout en restant un facteur universel, c'est-à-dire indépendant du processus.

Un dipôle correspond à une configuration cinématique particulière faisant intervenir  $m + 1$  partons, laquelle peut être considérée comme résultant d'un processus effectif à deux étapes. On considère d'abord une configuration avec  $m$  partons, dont l'un d'eux se scinde ensuite en deux autres partons. On peut écrire :

$$\int_{m+1} d\sigma_A = \sum_{\text{dipôles}} \int_m d\sigma_B \otimes \int_1 dV_{\text{dipôles}} = \int_m [d\sigma_B \otimes I] \quad (5.109)$$

où l'on a introduit la quantité  $I$  appelée "opérateur d'insertion" :

$$I = \sum_{\text{dipôles}} \int_1 dV_{\text{dipôles}} \quad (5.110)$$

Ce facteur universel contient donc tous les pôles pour annuler ceux de  $d\sigma_V$ . La section efficace de l'ordre supérieur se décompose en deux parties, notées  $\sigma_{HO}^{m+1}$  et  $\sigma_{HO}^m$ . Ces dernières sont libres de divergences et sont donc intégrées dans un espace-temps à 4 dimensions :

$$\begin{aligned}\sigma_{HO} &= \sigma_{HO}^{m+1} + \sigma_{HO}^m \\ &= \int_{m+1} \left[ (d\sigma_R)_{\varepsilon=0} - \left( \sum_{\text{dipôles}} d\sigma_B \otimes dV_{\text{dipôles}} \right)_{\varepsilon=0} \right] + \int_m (d\sigma_V + d\sigma_B \otimes I)_{\varepsilon=0} \quad (5.111)\end{aligned}$$

Les expressions analytiques des quantités  $dV_{\text{dipôles}}$  et de l'opérateur d'insertion  $I$  sont données dans les deux sections suivantes.

#### 5.6.4 Expression des dipôles

En considérant l'élément de matrice au carré des processus de l'émission réelle, on peut voir les deux partons de l'état final comme formant un système de parton émetteur et émis, ce dernier étant absorbé par un parton dit "spectateur" de l'amplitude complexe conjuguée. On note le dipôle du système formé par les partons  $i$  et  $j$  respectivement émetteur et émis et le parton  $k$  spectateur par la quantité suivante :

$$d\sigma_B \otimes dV_{\text{dipôle}} \rightarrow \mathcal{D}_{i,j,k} \quad (5.112)$$

Concernant le cas de la réaction partonique  $q\bar{q} \rightarrow VVgg$ , dans la limite colinéaire  $p_i \cdot p_j \rightarrow 0$ , les éléments de matrice sont approximés par les dipôles de soustraction suivants :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{g_5 g_6}^{q_1}, & \quad \mathcal{D}_{g_6}^{q_1 g_5}, & \quad \mathcal{D}^{q_1 g_5, \bar{q}_2}, \\ \mathcal{D}_{g_5 g_6}^{\bar{q}_2}, & \quad \mathcal{D}_{g_6}^{\bar{q}_2 g_5}, & \quad \mathcal{D}^{\bar{q}_2 g_5, q_1}, \\ & \quad \mathcal{D}_{g_5}^{q_1 g_6}, & \quad \mathcal{D}^{q_1 g_6, \bar{q}_2}, \\ & \quad \mathcal{D}_{g_5}^{\bar{q}_2 g_6}, & \quad \mathcal{D}^{\bar{q}_2 g_6, q_1}\end{aligned}$$

La méthode de Catani-Seymour ne différencie pas  $\mathcal{D}_{56}^1$  et  $\mathcal{D}_{65}^1$ . Les expressions étant identiques, il suffit d'inclure un facteur 2 dans les formules.

Quant aux éléments de matrice de la réaction partonique  $q\bar{q} \rightarrow VVq\bar{q}$ , ils sont approximés par les dipôles de soustraction suivants :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\bar{q}_6 q_5}^{q_1}, & \quad \mathcal{D}_{\bar{q}_6}^{q_1 q_5} \\ \mathcal{D}_{q_5 \bar{q}_6}^{\bar{q}_2}, & \quad \mathcal{D}_{q_5}^{\bar{q}_2 \bar{q}_6}\end{aligned} \quad (5.113)$$

Nous avons seulement besoin de calculer explicitement les expressions analytiques des dipôles de chaque première ligne. En effet, tous les autres dipôles sont obtenus en permutant les moments partoniques et en se souvenant du fait que les gluons ne font pas la distinction entre les quarks et anti-quarks.

#### Dipôle $\mathcal{D}_{g_5 g_6}^{q_1}$

A titre d'exemple, nous nous limiterons ici à donner l'expression analytique du premier dipôle de la première liste. Les expressions de tous les autres dipôles sont présentées en



annexe E.

Un gluon de moment  $p_6$  est émis par le gluon de l'état final et corrélé avec le quark de l'état initial. On définit les variables cinématiques suivantes pour le dipôle :

$$\tilde{z}_5 = \frac{p_1 \cdot p_5}{p_1 \cdot p_6 + p_1 \cdot p_5} \quad (5.114)$$

$$\tilde{z}_6 = \frac{p_1 \cdot p_6}{p_1 \cdot p_6 + p_1 \cdot p_5} \quad (5.115)$$

$$x_{56,1} = \frac{p_1 \cdot p_5 + p_1 \cdot p_6 - p_5 \cdot p_6}{p_1 \cdot p_5 + p_1 \cdot p_6} \quad (5.116)$$

$$\tilde{p}_1 = x_{56,1} p_1 \quad (5.117)$$

$$\tilde{p}_{56} = p_5 + p_6 - (1 - x_{56,1}) p_1 \quad (5.118)$$

Par ailleurs, on a besoin de l'amplitude de Born non contractée avec le vecteur de polarisation du gluon, que l'on note :

$$\langle \lambda_3, \lambda_4, \mu_5; \lambda_1, \lambda_2 | 3, 4, 5\tilde{6}; \tilde{1}, 2 \rangle = \langle 2^{\lambda_2} | \Gamma(\varepsilon_3^{\lambda_3*}, \varepsilon_4^{\lambda_4*}, \mu_5) | 1^{\lambda_1} \rangle \quad (5.119)$$

afin de définir le tenseur suivant :

$$T_{q\bar{q}}^{\mu\nu}(\tilde{1}, 2; 3, 4, 5\tilde{6}) = \langle \lambda_3, \lambda_4, \mu; \lambda_1, \lambda_2 | 3, 4, 5\tilde{6}; \tilde{1}, 2 \rangle \langle 3, 4, 5\tilde{6}; \tilde{1}, 2 | \lambda_3, \lambda_4, \nu; \lambda_1, \lambda_2 \rangle \quad (5.120)$$

Ce dernier est contracté avec l'élément de matrice des corrélations de spin du gluon :

$$\begin{aligned} \langle \nu | \mathbf{V}_{g_5 g_6}^{q_1} | \mu \rangle &= 16\pi\alpha_s \mu^{2\varepsilon} C_A \left[ -g^{\mu\nu} \left( \frac{1}{1 - \tilde{z}_5 + 1 - x_{56,1}} + \frac{1}{1 - \tilde{z}_6 + 1 - x_{56,1}} - 2 \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \varepsilon) \frac{1}{p_5 \cdot p_6} (\tilde{z}_5 p_5^\mu - \tilde{z}_6 p_6^\mu) (\tilde{z}_5 p_5^\nu - \tilde{z}_6 p_6^\nu) \right] \end{aligned} \quad (5.121)$$

L'expression du dipôle est donc :

$$\mathcal{D}_{g_5 g_6}^{q_1} = \frac{C_0}{2} \frac{1}{2p_5 \cdot p_6} \frac{1}{x_{56,1}} \langle \mu | \mathbf{V}_{g_5 g_6}^{q_1} | \nu \rangle T_{q\bar{q}}^{\mu\nu}(\tilde{1}, 2; 3, 4, 5\tilde{6}) \quad (5.122)$$

avec la constante  $C_0 = C_F/N$ . Si le dipôle est utilisé comme un terme de soustraction, alors  $\varepsilon$  peut être pris égal à 0.

On remarque que :

$$\mathcal{D}_{g_5 g_6}^{\bar{q}_2} = \mathcal{D}_{g_5 g_6}^{q_1} (1 \leftrightarrow 2) \quad (5.123)$$

ce qui entraîne :

$$\mathcal{D}_{g_5 g_6}^{\bar{q}_2} = \frac{C_0}{2} \frac{1}{2p_5 \cdot p_6} \frac{1}{x_{56,2}} \langle \mu | \mathbf{V}_{g_5 g_6}^{\bar{q}_2} | \nu \rangle T_{q\bar{q}}^{\mu\nu}(1, \tilde{2}; 3, 4, 5\tilde{6}), \quad (5.124)$$

en faisant la permutation  $1 \leftrightarrow 2$  dans toutes les définitions.

On considère l'élément de matrice de  $q\bar{q} \rightarrow VVgg$  pour les quatre configurations d'hélicités sommées  $\lambda_{i=1,2,3,4} = -1$  et  $\lambda_{5,6} = \pm 1$ . On étudie en particulier le comportement singulier de l'intégrand dans la limite colinéaire entre les deux gluons de moments  $p_5$  et  $p_6$ . Dans le plan rapidité - angle azimuthal, on définit la distance suivante :

$$\Delta R_{56} = \sqrt{(y_5 - y_6)^2 - (\phi_5 - \phi_6)^2} \quad (5.125)$$

La limite  $\Delta R_{56} \rightarrow 0$  permet alors d'illustrer la limite colinéaire entre les deux gluons de l'état final.

Comme attendu, on observe un comportement singulier de l'intégrand réel dans cette limite colinéaire. Par contre, si l'on retranche les deux dipôles  $\mathcal{D}_{g_5 g_6}^{\eta_1}$  et  $\mathcal{D}_{g_5 g_6}^{\eta_2}$  à ce même élément de matrice, la singularité pour  $\Delta R_{56} \rightarrow 0$  disparaît :

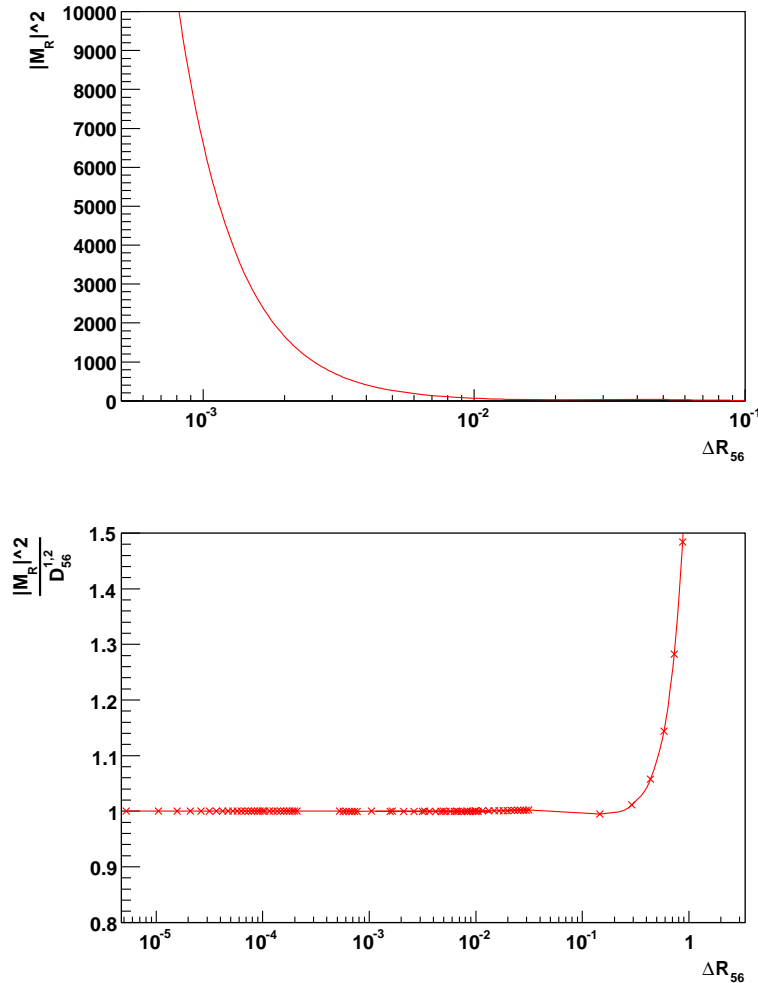


FIG. 5.6 – Évolution de l'élément de matrice réel pour  $q\bar{q} \rightarrow VVgg$  (en haut) et du rapport entre les dipôles et ce même élément de matrice réel (en bas) en fonction de  $\Delta R_{56}$

### 5.6.5 Expression de l'opérateur d'insertion

L'opérateur d'insertion à la Catani-Seymour noté  $I(\varepsilon)$  contient toutes les divergences infra-rouge d'origine molle et colinéaire qui vont se simplifier avec celles de la partie virtuelle. De plus, comme nous l'avons vu dans la section (5.5.2), il doit également contenir la renormalisation de la constante de couplage (5.58), afin de compenser les divergences d'origine ultraviolette. L'opérateur d'insertion a pour expression :

$$\begin{aligned}
I(\varepsilon) &= \int_1 dV_{\text{dipôles}} \\
&= \frac{\alpha_s}{2\pi} |\mathcal{M}_{LO}|^2 r_\Gamma (4\pi\mu^2)^\varepsilon \\
&\times \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} (2C_F + C_A) + \frac{1}{\varepsilon} \left( (C_A - 2C_F) \ln |s_{12}| - C_A (\ln |s_{15}| + \ln |s_{25}|) + 3C_F + \frac{\mathbf{b}_0}{2} \right) \right. \\
&\quad + (C_F - \frac{C_A}{2}) \ln^2 |s_{12}| - (3C_F - \frac{3}{2}C_A) \ln |s_{12}| \\
&\quad + \frac{C_A}{2} (\ln^2 |s_{15}| - \ln^2 |s_{25}|) - (\frac{3}{4}C_A + \frac{b_0}{4}) (\ln |s_{15}| + \ln |s_{25}|) \\
&\quad \left. + 2C_F (5 - \frac{\pi^2}{2}) + C_A (\frac{50}{9} - \frac{\pi^2}{2}) - \frac{8}{9}N_F \right] \tag{5.126}
\end{aligned}$$

où l'on a introduit le terme  $r_\Gamma = \frac{\Gamma(1+\varepsilon)\Gamma^2(1-\varepsilon)}{\Gamma(1-2\varepsilon)}$ . Une vérification numérique de l'annulation des pôles en  $1/\varepsilon^2$  et  $1/\varepsilon$  entre la partie virtuelle et l'opérateur d'insertion a été effectuée pour deux points aléatoires de l'espace de phase.

## 5.7 INTÉGRATION DANS L'ESPACE DE PHASE

On utilise le logiciel de calcul FORTRAN 90 pour effectuer une évaluation numérique et l'intégration dans l'espace de phase. La génération aléatoire d'événements nécessaire pour l'intégration est réalisée grâce au programme Monte-Carlo adaptatif BASES/SPRING [84].

### 5.7.1 Définitions

L'énergie dans le centre de masse est défini par la variable  $s = (p_1 + p_2)^2$ . Cette quantité étant considéré comme fixée, on doit intégrer dans l'espace de phase sur les quatre composantes des moments externes  $p_3, p_4, p_5$  de l'état final. Pour chaque particule de l'état final, il est utile de définir les grandeurs physiques suivantes :

\* l'impulsion transverse notée  $p_T$  :

$$p_T = \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \tag{5.127}$$

\* la rapidité notée  $y$  :

$$y = \operatorname{arctanh} \left( \frac{p_z}{p_0} \right) = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{p_0 + p_z}{p_0 - p_z} \right) \tag{5.128}$$

$$\text{avec } p_z = |\vec{p}| \cos \theta \tag{5.129}$$

\* la masse transverse notée  $M_T$  :

$$M_T = \sqrt{m^2 + p_T^2} \quad (5.130)$$

La section efficace différentielle d'une réaction  $p_1 + p_2 \rightarrow p_3 + \dots + p_n$  est donnée par :

$$d\hat{\sigma} = \frac{1}{4 \underbrace{\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}_{\Phi_{in}}} \overline{\sum} |\mathcal{M}|^2 d\Phi_{n-2} \quad (5.131)$$

Le symbole  $\overline{\sum}$  signifie que l'on effectue une moyenne sur tous les états de couleurs et de spin de l'état initial et que l'on somme sur tous les états finaux de l'élément de matrice au carré.  $\Phi_{in}$  et  $d\Phi_{n-2}$  représentent respectivement le flux des particules entrantes et la densité d'espace de phase des particules sortantes.

Pour un nombre  $N$  de particules sortantes, la densité d'espace de phase a pour expression :

$$d\Phi_N = (2\pi)^4 \delta^{(4)}\left(\sum_{i=1}^N p_i\right) \prod_{i=3}^N \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_i}{2E_i} \quad (5.132)$$

De plus, les mesures normalisées sur les impulsions peuvent s'écrire :

$$\frac{d^3 p_i}{2E_i} = \frac{1}{2} p_{Ti} dp_{Ti} d\phi_i dy_i = \frac{1}{2} d^2 \vec{p}_{Ti} dy_i \quad (5.133)$$

### 5.7.2 Paramétrage pour un processus $2 \rightarrow 2$

Considérons tout d'abord le cas plus simple et intuitif de l'intégration dans l'espace de phase d'un processus  $2 \rightarrow 2$ , pour lequel on a  $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$ . Cette étude préliminaire rendra plus facile celle du cas plus complexe  $2 \rightarrow 3$ . En se plaçant dans le référentiel du centre de masse de la réaction, on a :

$$\begin{aligned} d\Phi_2 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) \prod_{i=3}^4 \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_i}{2E_i} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\|\vec{p}_3^{cm}\|}{\sqrt{s}} d\Omega_3 = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\|\vec{p}_3^{cm}\|}{\sqrt{s}} d(\cos \theta_3) d\phi_3 \end{aligned}$$

où l'on introduit les quantités :

$$\|\vec{p}_3^{cm}\| = \|\vec{p}_4^{cm}\| = \frac{1}{2\sqrt{s}} \lambda^{1/2}(s, m_3^2, m_4^2) \quad (5.134)$$

$$E_3^{cm} = \frac{s + m_3^2 - m_4^2}{2\sqrt{s}} \quad E_4^{cm} = \frac{s + m_4^2 - m_3^2}{2\sqrt{s}} \quad (5.135)$$

avec la fonction  $\lambda$  définie par  $\lambda(x, y, z) = (x - y - z)^2 - 4yz$ .

Les composantes des moments de la réaction peuvent alors s'écrire :

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, 1) \\
 p_2 &= \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, -1) \\
 p_3 &= \left( \frac{\sqrt{s}}{2}, \|\vec{p}_3^{cm}\| \sin \theta \cos \phi, \|\vec{p}_3^{cm}\| \sin \theta \sin \phi, \|\vec{p}_3^{cm}\| \cos \theta \right) \\
 p_3 &= \left( \frac{\sqrt{s}}{2}, -\|\vec{p}_3^{cm}\| \sin \theta \cos \phi, -\|\vec{p}_3^{cm}\| \sin \theta \sin \phi, -\|\vec{p}_3^{cm}\| \cos \theta \right)
 \end{aligned} \tag{5.136}$$

### 5.7.3 Paramétrage pour un processus $2 \rightarrow 3$

Le paramétrage de cet espace de phase nous permet d'intégrer l'ordre de Born ainsi que la partie virtuelle. La densité d'espace de phase a pour expression :

$$\begin{aligned}
 d\Phi_3 &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5) \prod_{i=3}^5 \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_i}{2E_i} \\
 &= \frac{1}{2^3 (2\pi)^5} \delta^{(4)}(\sum_i p_i) \prod_{i=3}^5 p_{Ti} dp_{Ti} d\phi_i dy_i
 \end{aligned} \tag{5.137}$$

Finalement, après intégration sur les variables  $\phi_3, \phi_5$  et  $p_{T5}$  avec les contraintes fournies par les fonctions  $\delta$ , on obtient :

$$dx_1 dx_2 d\Phi_3 = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{1}{8s} p_{T3} p_{T4} dp_{T3} dp_{T4} d\phi_4 dy_3 dy_4 dy_5 \tag{5.138}$$

Les expressions des composantes des moments de la réaction en fonction de ce paramétrage sont les suivantes (avec  $\phi_i$  l'angle azimuthal de la particule  $i$ ) :

$$\begin{aligned}
 p_1 &= x_1 \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, -1) \\
 p_2 &= x_2 \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, -1) \\
 p_3 &= (M_{T3} \cosh(y_3), p_{T3} \cos(\phi_3), p_{T3} \sin(\phi_3), M_{T3} \sinh(y_3)) \\
 p_4 &= (M_{T4} \cosh(y_4), p_{T4} \cos(\phi_4), p_{T4} \sin(\phi_4), M_{T4} \sinh(y_4)) \\
 p_5 &= (M_{T5} \cosh(y_5), p_{T5} \cos(\phi_5), p_{T5} \sin(\phi_5), M_{T5} \sinh(y_5))
 \end{aligned} \tag{5.139}$$

On peut vérifier que les composantes de ces moments respectent la loi de conservation de l'énergie-impulsion  $p_1 + p_2 = p_3 + p_4 + p_5$ .

Les variables d'intégration sont  $y_3, y_4, y_5, p_{T3}, p_{T5}$ , et  $\phi_5$ . Les variables restantes  $\phi_4, p_{T4}, M_{T3}, M_{T4}, M_{T5}, x_1, x_2$  peuvent alors être exprimées en fonction de ces variables d'intégration.

En effet, nous avons les contraintes suivantes :

$$x_1 = \sum_{i=3}^5 \frac{M_{Ti}}{\sqrt{s}} e^{y_i} \quad (5.140)$$

$$x_2 = \sum_{i=3}^5 \frac{M_{Ti}}{\sqrt{s}} e^{-y_i} \quad (5.141)$$

$$p_{T4}^2 = p_{T3}^2 + p_{T5}^2 + 2 p_{T3} p_{T5} \cos(\phi_5) \quad (5.142)$$

$$M_{T3} = \sqrt{M_V^2 + p_{T3}^2} \quad (5.143)$$

$$M_{T4} = \sqrt{M_V^2 + p_{T4}^2} \quad (5.144)$$

$$M_{T5} = p_{T5} \quad (5.145)$$

$$\cos(\phi_4) = -\frac{p_{T3}}{p_{T4}} \cos(\phi_3) - \frac{p_{T5}}{p_{T4}} \cos(\phi_5) \quad (5.146)$$

$$\sin(\phi_4) = -\frac{p_{T3}}{p_{T4}} \sin(\phi_3) - \frac{p_{T5}}{p_{T4}} \sin(\phi_5) \quad (5.147)$$

#### 5.7.4 Paramétrage pour un processus $2 \rightarrow 4$

Le paramétrage de cet espace de phase nous permet d'intégrer l'émission réelle. La densité d'espace de phase a pour expression :

$$\begin{aligned} d\Phi_4 &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6) \prod_{i=3}^6 \frac{1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_i}{2 E_i} \\ &= \frac{1}{2^4 (2\pi)^8} \delta^{(4)}(\sum_i p_i) \prod_{i=3}^6 p_{Ti} dp_{Ti} d\phi_i dy_i \end{aligned} \quad (5.148)$$

Finalement on obtient :

$$dx_1 dx_2 d\Phi_4 = \frac{1}{(2\pi)^8} \frac{1}{8s} p_{T3} p_{T4} p_{T5} dp_{T3} dp_{T4} dp_{T5} d\phi_4 d\phi_5 dy_3 dy_4 dy_5 dy_6 \quad (5.149)$$

Les expressions des composantes des moments de la réaction en fonction de ce paramétrage sont les suivantes :

$$\begin{aligned} p_1 &= x_1 \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, -1) \\ p_2 &= x_2 \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, -1) \\ p_3 &= (M_{T3} \cosh(y_3), p_{T3} \cos(\phi_3), p_{T3} \sin(\phi_3), M_{T3} \sinh(y_3)) \\ p_4 &= (M_{T4} \cosh(y_4), p_{T4} \cos(\phi_4), p_{T4} \sin(\phi_4), M_{T4} \sinh(y_4)) \\ p_5 &= (M_{T5} \cosh(y_5), p_{T5} \cos(\phi_5), p_{T5} \sin(\phi_5), M_{T5} \sinh(y_5)) \\ p_6 &= (M_{T6} \cosh(y_6), p_{T6} \cos(\phi_6), p_{T6} \sin(\phi_6), M_{T6} \sinh(y_6)) \end{aligned} \quad (5.150)$$

On peut vérifier que les composantes de ces moments respectent la loi de conservation de l'énergie-impulsion  $p_1 + p_2 = p_3 + p_4 + p_5 + p_6$ .

Les variables d'intégration sont  $y_3, y_4, y_5, y_6, p_{T3}, p_{T5}, p_{T6}$ , et  $\phi_5, \phi_6$ . Les variables restantes  $\phi_4, p_{T4}, M_{T3}, M_{T4}, M_{T5}, M_{T6}, x_1, x_2$  peuvent alors être exprimées en fonction de ces variables d'intégration. En effet, nous avons les contraintes suivantes :

$$x_1 = \sum_{i=3}^6 \frac{M_{Ti}}{\sqrt{s}} e^{y_i} \quad (5.151)$$

$$x_2 = \sum_{i=3}^6 \frac{M_{Ti}}{\sqrt{s}} e^{-y_i} \quad (5.152)$$

$$\begin{aligned} p_{T4}^2 &= p_{T3}^2 + p_{T5}^2 + p_{T6}^2 + 2 p_{T3} p_{T5} \cos(\phi_5) \\ &+ 2 p_{T3} p_{T6} \cos(\phi_6) + 2 p_{T5} p_{T6} \cos(\phi_5 - \phi_6) \end{aligned} \quad (5.153)$$

$$M_{T3} = \sqrt{M_V^2 + p_{T3}^2} \quad (5.154)$$

$$M_{T4} = \sqrt{M_V^2 + p_{T4}^2} \quad (5.155)$$

$$M_{T5} = p_{T5} \quad (5.156)$$

$$M_{T6} = p_{T6} \quad (5.157)$$

$$\cos(\phi_4) = -\frac{p_{T3}}{p_{T4}} \cos(\phi_3) - \frac{p_{T5}}{p_{T4}} \cos(\phi_5) - \frac{p_{T6}}{p_{T4}} \cos(\phi_6) \quad (5.158)$$

$$\sin(\phi_4) = -\frac{p_{T3}}{p_{T4}} \sin(\phi_3) - \frac{p_{T5}}{p_{T4}} \sin(\phi_5) - \frac{p_{T6}}{p_{T4}} \sin(\phi_6) \quad (5.159)$$

# ÉTUDE PHÉNOMÉNOLOGIQUE

# 6

## SOMMAIRE

6.1	COMPARAISON POUR $pp \rightarrow W^+W^- jet$ . . . . .	85
6.2	SECTIONS EFFICACES À L'ORDRE DE LO . . . . .	89
6.3	SECTIONS EFFICACES À L'ORDRE NLO . . . . .	97

DANS ce chapitre, on présente une comparaison de résultats effectuée entre notre groupe de collaboration et deux autres groupes de recherche indépendants concernant les prédictions pour  $pp \rightarrow W^+W^- + jet$  au LHC. Par ailleurs, on présente les prédictions obtenues pour les sections efficaces des processus  $pp \rightarrow ZZ + jet$  et  $pp \rightarrow W^+W^- + jet$  au LHC et au Tevatron.





## 6.1 COMPARAISON POUR $pp \rightarrow W^+W^-jet$

Une comparaison des corrections à l'ordre supérieur de la réaction  $pp \rightarrow W^+W^-jet$  pour le LHC a été effectuée entre trois groupes de recherche [54]. Le premier groupe, désigné par l'acronyme **DKU**, comprend S. Dittmaier, S. Kallweit, et P. Uwer [55]. Quant au deuxième groupe, désigné par **CEZ**, il est composé de J.M. Campbell, R.K. Ellis et G. Zanderighi [56]. Enfin, notre groupe de collaboration est désigné par **BGKKS** car composé de T. Binoth, J.-P. Guillet, S. Karg, N. Kauer, et G. Sanguinetti.

Nous avons comparé la section efficace à l'ordre de l'arbre, et le terme d'interférence entre l'ordre de Born et la partie virtuelle de tous les canaux pour un point de l'espace de phase. Les résultats obtenus par les différents groupes qui ont utilisé des méthodes d'évaluation différentes présentent un accord allant de 6 à 9 chiffres significatifs.

Pour le calcul de la section efficace à l'ordre de l'arbre, on utilise les densités partoniques données par CTEQ6L1 [85]. Pour des prédictions au LHC, on prend une énergie dans le centre de masse de la collision hadronique  $\sqrt{s} = 14$  TeV. On choisit les paramètres d'entrée suivants :

$$\begin{aligned}
 M_W &= 80.425 \text{ GeV} \\
 M_Z &= 91.1876 \text{ GeV} \\
 \alpha &= 0.0075435957 \\
 (\hbar c)^2 &= 0.389379304 \cdot 10^{12} \text{ GeV}^2 \text{ fbarn}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

On considère tous les quarks sans masse, et on ne prend pas en compte la contribution du quark bottom. Le nombre de saveurs de quarks actives est  $N_F = 5$ . Les valeurs prises par la constante de couplage forte au LO et NLO sont :

$$\begin{aligned}
 \alpha_s^{\text{LO}}(M_W) &= 0.13241687663294 \\
 \alpha_s^{\text{NLO}}(M_W) &= 0.12026290039064
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Les échelles de renormalisation et de factorisation sont prises égales à  $M_W$ . Enfin, on applique une coupure sur l'impulsion transverse du jet hadronique égale à 100 GeV.

On considère la réaction partonique générale  $a(p_1) b(p_2) \rightarrow W^+(p_3) W^-(p_4) c(p_5)$ , où  $a, b, c$  sont trois partons. Le point de l'espace de phase choisi pour la comparaison du terme d'interférence est le suivant :

$$\begin{aligned}
 p_1 &= (7000, 0, 0, 7000), \\
 p_2 &= (7000, 0, 0, -7000), \\
 p_3 &= (6921.316234371218, 3840.577592920205, 0, 5757.439881432096), \\
 p_4 &= (772.3825553565997, -67.12960601170266, -279.4421082776151, -712.3990141151700), \\
 p_5 &= (6306.301210272182, -3773.447986908503, 279.4421082776151, -5045.040867316925),
 \end{aligned}$$

On peut vérifier que ce point de l'espace de phase respecte entre autres la conservation de l'énergie-impulsion :

$$\begin{aligned}
 p_1 + p_2 &= p_3 + p_4 + p_5 \\
 \sqrt{s} &= 14 \text{ TeV} \quad \text{avec} \quad s = (p_1 + p_2)^2 \\
 p_3^2 &= p_4^2 = M_W^2
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

	$ \mathcal{M}_{\text{LO}} ^2/e^4/g_s^2 [\text{GeV}^{-2}]$
$u\bar{u} \rightarrow W^+W^-g$	$0.9963809154477200 \cdot 10^{-3}$
$d\bar{d} \rightarrow W^+W^-g$	$0.3676289952184384 \cdot 10^{-5}$
$ug \rightarrow W^+W^-u$	$0.1544340549124799 \cdot 10^{-3}$
$d\bar{g} \rightarrow W^+W^-d$	$0.1537758419168101 \cdot 10^{-5}$
$g\bar{u} \rightarrow W^+W^-u$	$0.7491333451663728 \cdot 10^{-4}$
$g\bar{d} \rightarrow W^+W^-d$	$0.2776156068243590 \cdot 10^{-4}$

TAB. 6.1 – Résultats pour l'élément de matrice LO au carré avec (6.3).

$pp \rightarrow W^+W^- + jet + X$	$\sigma_{\text{LO}} [\text{fb}]$
DKU	10371.7(12)
CEZ	10372.26(97)
BGKKS	10371.7(11)

TAB. 6.2 – Résultats pour la section efficace au LO de  $pp \rightarrow W^+W^- jet$ 

Le tableau 6.1 présente les résultats obtenus en utilisant MadGraph [29], pour l'élément de matrice au carré (sommés sur la couleur et les hélicités), à l'ordre de l'arbre pour le point de l'espace de phase ci-dessus. Les nombres obtenus par les trois groupes s'accordent avec au moins 13 chiffres significatifs. Quant au tableau (6.2), il illustre l'accord obtenu entre les différents groupes pour la section efficace inclusive à l'ordre de l'arbre de  $pp \rightarrow W^+W^- jet$  au LHC.

Le terme d'interférence entre l'ordre de Born et l'amplitude virtuelle peut schématiquement s'écrire :

$$2\text{Re}\{\mathcal{M}_V^* \cdot \mathcal{M}_B\} = e^4 g_s^2 f(\mu_R) \left( c_{-2} \frac{1}{\varepsilon^2} + c_{-1} \frac{1}{\varepsilon} + c_0 \right) \quad (6.4)$$

avec  $f(\mu_R) = \Gamma(1 + \varepsilon)(4\pi\mu_R^2/M_W^2)^\varepsilon$  et le nombre de dimensions de l'espace-temps étant défini par  $D = 4 - 2\varepsilon$ .

Par la suite, on choisit de distinguer dans les coefficients de la partie finie et des pôles double et simple, c'est-à-dire dans  $c_0$  et  $c_{-2}, c_{-1}$ , une partie dite bosonique ("bos") sans diagramme de Feynman avec boucle de quark (du groupe de couleur noté  $C_4$ ) et la partie restante dite fermionique.

Le tableau (6.3) présente les résultats des différents groupes pour la partie bosonique concernant les coefficients  $c_{-2}$ ,  $c_{-1}$ , and  $c_0$  ( $c_{-2}$  ne contient pas de contributions de la part des diagrammes à boucle de quark).

L'accord entre les trois groupes pour les résultats correspondant au coefficient  $c_0$  varie entre 7 et 11 chiffres significatifs. Celui concernant les coefficients  $c_{-2}$  et  $c_{-1}$  est bien meilleur car leur évaluation est beaucoup plus simple.

Les résultats obtenus pour la partie fermionique avec les deux premières générations de quarks sont donnés dans le tableau (6.4). En comparaison avec les corrections bosoniques, ces contributions sont plus faibles d'un facteur 1000. Si l'on considère ce facteur de suppression qui résulte de larges compensations, en tant que chiffre significatif, l'accord pour la partie finie varie entre 6 et 9 décimales.

	$c_{-2}[\text{GeV}^{-2}]$	$c_{-1}^{\text{bos}}[\text{GeV}^{-2}]$	$c_0^{\text{bos}}[\text{GeV}^{-2}]$
$u\bar{u} \rightarrow W^+W^-g$			
DKU	$-1.080699305508758 \cdot 10^{-4}$	$7.842861905263072 \cdot 10^{-4}$	$-3.382910915425372 \cdot 10^{-3}$
CEZ	$-1.080699305505865 \cdot 10^{-4}$	$7.842861905276719 \cdot 10^{-4}$	$-3.382910915464027 \cdot 10^{-3}$
BGKKS	$-1.080699305508814 \cdot 10^{-4}$	$7.842861905263293 \cdot 10^{-4}$	$-3.382910915616242 \cdot 10^{-3}$
$d\bar{d} \rightarrow W^+W^-g$			
DKU	$-3.987394716797222 \cdot 10^{-7}$	$2.893736116870099 \cdot 10^{-6}$	$-1.252531649334637 \cdot 10^{-5}$
CEZ	$-3.987394716665197 \cdot 10^{-7}$	$2.893736115389983 \cdot 10^{-6}$	$-1.252531614999332 \cdot 10^{-5}$
BGKKS	$-3.987394716798342 \cdot 10^{-7}$	$2.893736117550454 \cdot 10^{-6}$	$-1.252531647620369 \cdot 10^{-5}$
$ug \rightarrow W^+W^-u$			
DKU	$-1.675029833503229 \cdot 10^{-5}$	$1.236268430131559 \cdot 10^{-4}$	$-5.417120947927877 \cdot 10^{-4}$
CEZ	$-1.675029833501256 \cdot 10^{-5}$	$1.236268430124113 \cdot 10^{-4}$	$-5.417120948004078 \cdot 10^{-4}$
BGKKS	$-1.675029833503285 \cdot 10^{-5}$	$1.236268430131930 \cdot 10^{-4}$	$-5.417120948184518 \cdot 10^{-4}$
$d\bar{g} \rightarrow W^+W^-d$			
DKU	$-1.667890693078443 \cdot 10^{-7}$	$1.231000679615805 \cdot 10^{-6}$	$-5.402644808236175 \cdot 10^{-6}$
CEZ	$-1.667890693268847 \cdot 10^{-7}$	$1.230999331981130 \cdot 10^{-6}$	$-5.402644353170802 \cdot 10^{-6}$
BGKKS	$-1.667890693077475 \cdot 10^{-7}$	$1.230999333576065 \cdot 10^{-6}$	$-5.402644211736123 \cdot 10^{-6}$
$g\bar{u} \rightarrow W^+W^-u$			
DKU	$-8.125284951799448 \cdot 10^{-6}$	$7.047108864062224 \cdot 10^{-5}$	$-3.525581727244482 \cdot 10^{-4}$
CEZ	$-8.125284951286924 \cdot 10^{-6}$	$7.047108863931619 \cdot 10^{-5}$	$-3.525581728065669 \cdot 10^{-4}$
BGKKS	$-8.125284951799859 \cdot 10^{-6}$	$7.047108864102780 \cdot 10^{-5}$	$-3.525581727287365 \cdot 10^{-4}$
$g\bar{d} \rightarrow W^+W^-d$			
DKU	$-3.011087314520321 \cdot 10^{-6}$	$2.611534269956032 \cdot 10^{-5}$	$-1.326197552139531 \cdot 10^{-4}$
CEZ	$-3.011087314528406 \cdot 10^{-6}$	$2.611534269870494 \cdot 10^{-5}$	$-1.326197549152728 \cdot 10^{-4}$
BGKKS	$-3.011087314520429 \cdot 10^{-6}$	$2.611534269951226 \cdot 10^{-5}$	$-1.326197552106838 \cdot 10^{-4}$

TAB. 6.3 – Résultats pour la partie bosonique du terme d'interférence pour un point de l'espace de phase

	$c_{-1}^{\text{ferm1+2}}[\text{GeV}^{-2}]$	$c_0^{\text{ferm1+2}}[\text{GeV}^{-2}]$
$u\bar{u} \rightarrow W^+W^-g$		
DKU	$2.542821895320379 \cdot 10^{-5}$	$4.372323372044527 \cdot 10^{-7}$
CEZ	$2.542821895311753 \cdot 10^{-5}$	$4.372790378087550 \cdot 10^{-7}$
BGKKS	$2.542821895314862 \cdot 10^{-5}$	$4.372324288356448 \cdot 10^{-7}$
$d\bar{d} \rightarrow W^+W^-g$		
DKU	$9.382105211529244 \cdot 10^{-8}$	$2.383985481697933 \cdot 10^{-8}$
CEZ	$9.382105220158816 \cdot 10^{-8}$	$2.381655056763332 \cdot 10^{-8}$
BGKKS	$9.382105215996126 \cdot 10^{-8}$	$2.383986138730693 \cdot 10^{-8}$
$ug \rightarrow W^+W^-u$		
DKU	$3.941246664484964 \cdot 10^{-6}$	$2.261655163318730 \cdot 10^{-7}$
CEZ	$3.941246667066658 \cdot 10^{-6}$	$2.261900862449825 \cdot 10^{-7}$
BGKKS	$3.941246667066566 \cdot 10^{-6}$	$2.261651778836927 \cdot 10^{-7}$
$dg \rightarrow W^+W^-d$		
DKU	$3.924449049876280 \cdot 10^{-8}$	$-3.340508442179341 \cdot 10^{-8}$
CEZ	$3.924448807787651 \cdot 10^{-8}$	$-3.341842650545260 \cdot 10^{-8}$
BGKKS	$3.924448689594072 \cdot 10^{-8}$	$-3.340505335889721 \cdot 10^{-8}$
$g\bar{u} \rightarrow W^+W^-\bar{u}$		
DKU	$1.911831753319591 \cdot 10^{-6}$	$-3.332688444715011 \cdot 10^{-7}$
CEZ	$1.911831753400357 \cdot 10^{-6}$	$-3.332770821153847 \cdot 10^{-7}$
BGKKS	$1.911831753364673 \cdot 10^{-6}$	$-3.332688443882355 \cdot 10^{-7}$
$g\bar{d} \rightarrow W^+W^-\bar{d}$		
DKU	$7.084911328500216 \cdot 10^{-7}$	$-3.420298601940541 \cdot 10^{-7}$
CEZ	$7.084911328417316 \cdot 10^{-7}$	$-3.419939732016338 \cdot 10^{-7}$
BGKKS	$7.084911328283340 \cdot 10^{-7}$	$-3.420298578631734 \cdot 10^{-7}$

TAB. 6.4 – Résultats pour la partie fermionique du terme d'interférence pour un point de l'espace de phase

## 6.2 SECTIONS EFFICACES À L'ORDRE DE LO

Pour les paramètres d'entrée, on prend les valeurs ci-dessous [1] :

$$\begin{aligned}
 M_W &= 80.403 \text{ GeV} \\
 M_Z &= 91.1876 \text{ GeV} \\
 \alpha &= 0.0075435957 \\
 (\hbar c)^2 &= 0.389379304 \times 10^{12} \text{ GeV}^2 \text{ fbarn}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

La constante de couplage  $\alpha_s$  est fournie par les routines de LHAPDF [85]. Pour le calcul de la section efficace à l'ordre de l'arbre, on utilise les densités partoniques données par CTeq6L1. Pour des prédictions au LHC, on prend une énergie dans le centre de masse de la collision hadronique  $\sqrt{s} = 14 \text{ TeV}$ , et pour le Tevatron, on prend  $\sqrt{s} = 1.96 \text{ TeV}$ .

On considère tous les quarks sans masse, et on prend en compte la contribution du quark bottom. Enfin, on applique une coupure sur l'impulsion transverse du jet hadronique égale à 100 GeV pour le LHC et 50 GeV pour le Tevatron <sup>1</sup>.

Les sections efficaces totales à l'ordre de l'arbre des processus  $pp \rightarrow ZZ + jet$  et  $pp \rightarrow W^+W^- + jet$  en fonction du paramètre de renormalisation  $\mu$  sont représentées sur les graphiques de la figure (6.2).

Les graphiques des figures (6.3) à (6.7) représentent les sections efficaces différentielles à l'ordre de l'arbre pour les processus  $pp \rightarrow ZZ + jet$  et  $pp \rightarrow W^+W^- + jet$  où l'on a intégré l'élément de matrice pour 100 000 points de l'espace de phase.

$V = Z$	$\sigma_{LO}[\text{fb}]$ au Tevatron	$\sigma_{LO}[\text{fb}]$ au LHC
$q\bar{q} \rightarrow ZZ + jet$	$67.24 \pm 0.16$	$317.81 \pm 1.44$
$qg \rightarrow ZZ + jet$	$3.58 \pm 0.01$	$513.33 \pm 2.86$
$\bar{q}g \rightarrow ZZ + jet$	$3.58 \pm 0.01$	$166.35 \pm 0.67$
$pp \rightarrow ZZ + jet$	$74.37 \pm 0.18$	$994.68 \pm 4.75$

TAB. 6.5 – Sections efficaces totales au LO de  $pp \rightarrow ZZ + jet$  au Tevatron et au LHC

$V = W^\pm$	$\sigma_{LO}[\text{fb}]$ au Tevatron	$\sigma_{LO}[\text{fb}]$ au LHC
$q\bar{q} \rightarrow W^+W^- + jet$	$554.12 \pm 1.68$	$2171.9 \pm 12.8$
$qg \rightarrow W^+W^- + jet$	$51.93 \pm 0.15$	$6516.8 \pm 61.8$
$\bar{q}g \rightarrow W^+W^- + jet$	$51.88 \pm 0.17$	$1723.4 \pm 10.2$
$pp \rightarrow W^+W^- + jet$	$658.07 \pm 2.10$	$10333.9 \pm 80.7$

TAB. 6.6 – Sections efficaces totales au LO de  $pp \rightarrow W^+W^- + jet$  au Tevatron et au LHC

<sup>1</sup>en effet, les coupures utilisées par les expérimentateurs du groupe Atlas pour l'impulsion transverse du jet débutent à 40 GeV pour le détecteur Atlas

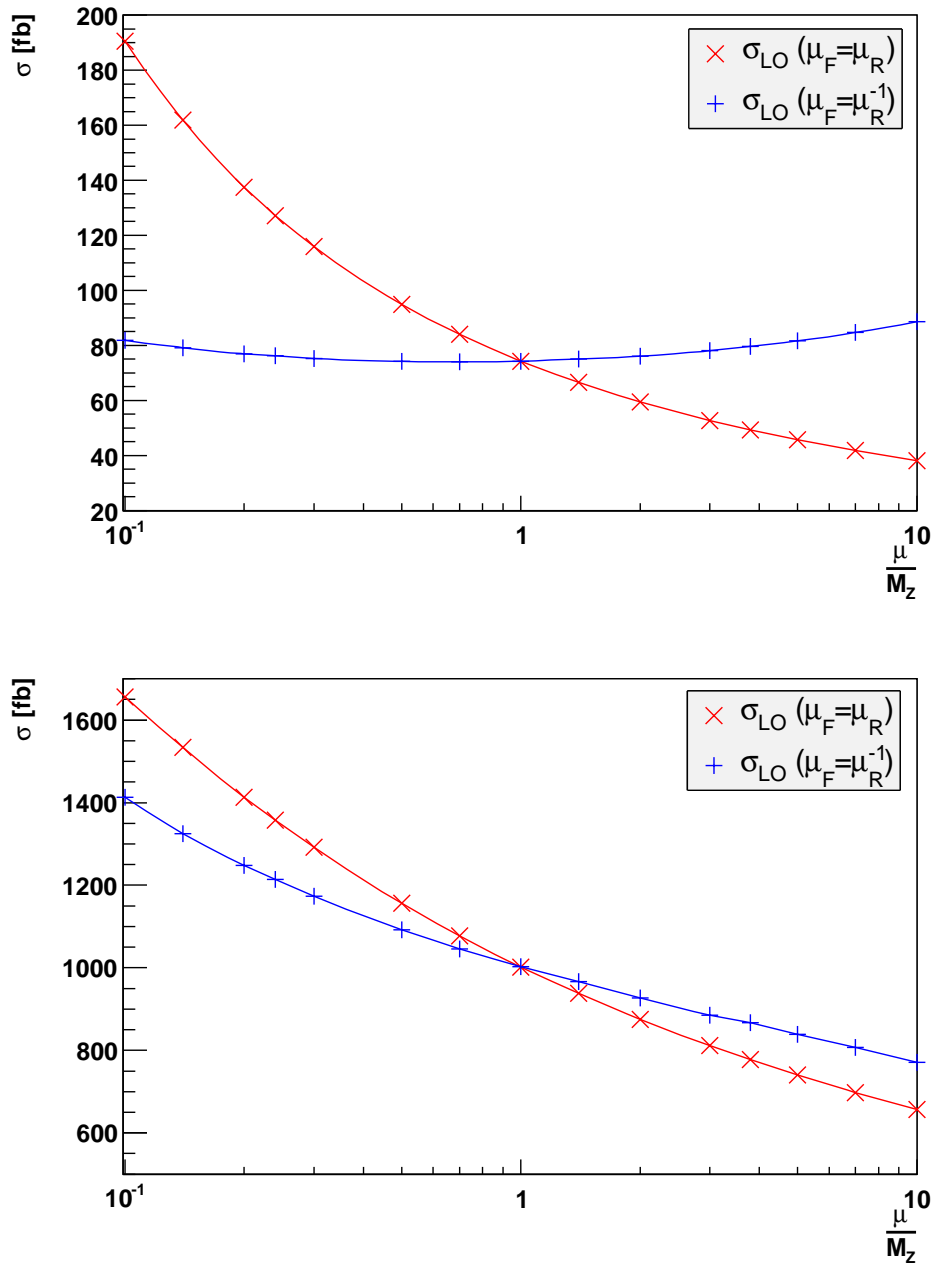


FIG. 6.1 – Dépendance en  $\mu_R$  et  $\mu_F$  de la section efficace  $pp \rightarrow ZZ + \text{jet}$  à l'ordre de l'arbre  
 en haut : au Tevatron avec  $p_{T_{\text{jet}}} = 50 \text{ GeV}$  et  $\sqrt{s} = 1.96 \text{ TeV}$ ,  
 en bas : au LHC avec  $p_{T_{\text{jet}}} = 100 \text{ GeV}$  et  $\sqrt{s} = 14 \text{ TeV}$

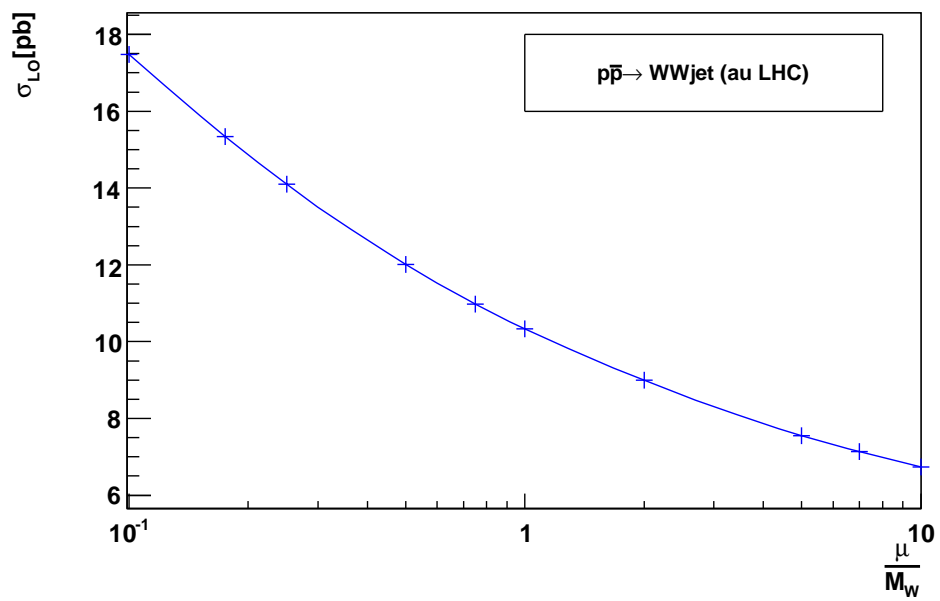


FIG. 6.2 – Dépendance en  $\mu_R$  et  $\mu_F$  de la section efficace totale  $pp \rightarrow VV + jet$  au LO pour le LHC



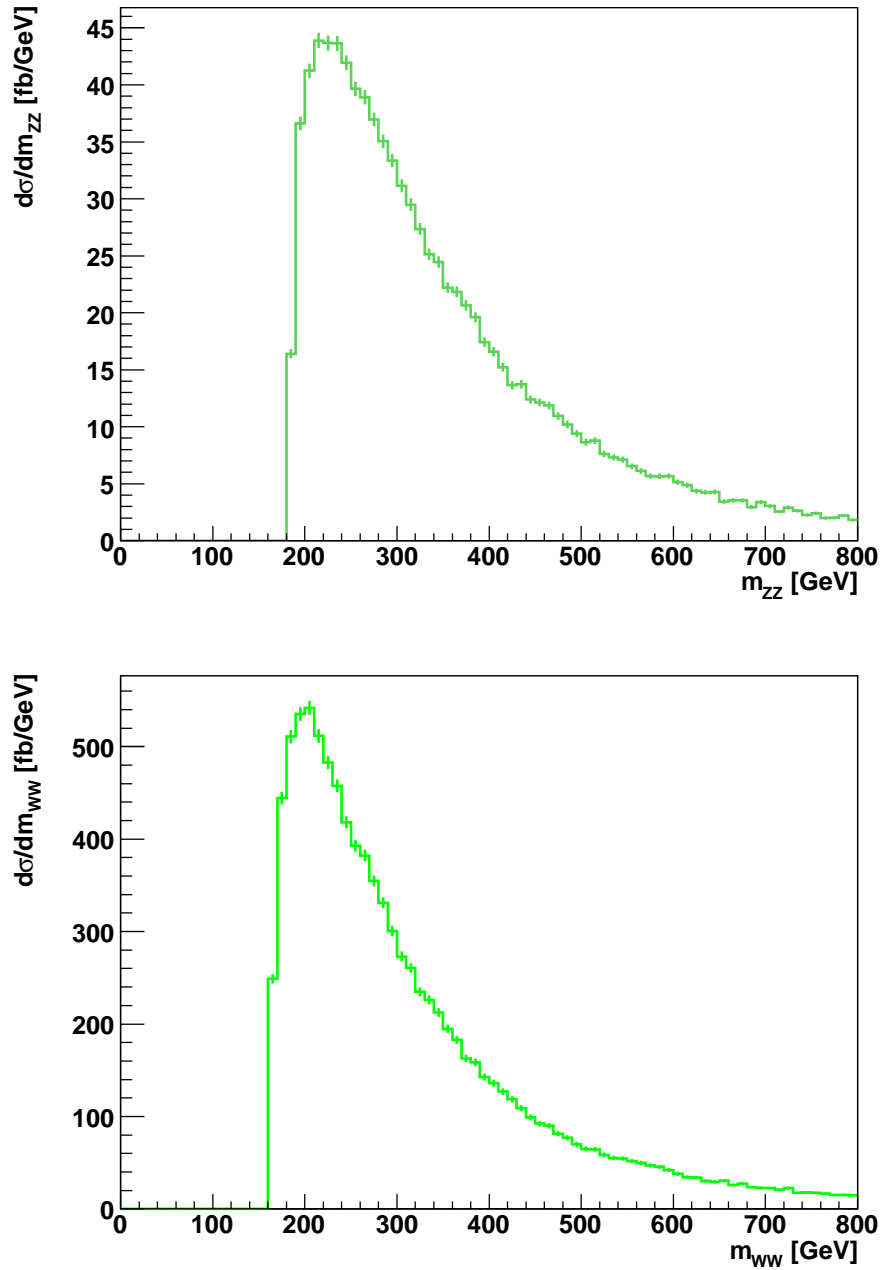


FIG. 6.3 – Sections efficaces différentielles au LO en fonction de la masse invariante de la paire  $VV$  avec  $V = Z$  (en haut) et  $V = W^\pm$  (en bas). Le seuil de production de la paire  $VV$  se situe, comme attendu, à  $m_{VV} = 2 \cdot M_V$

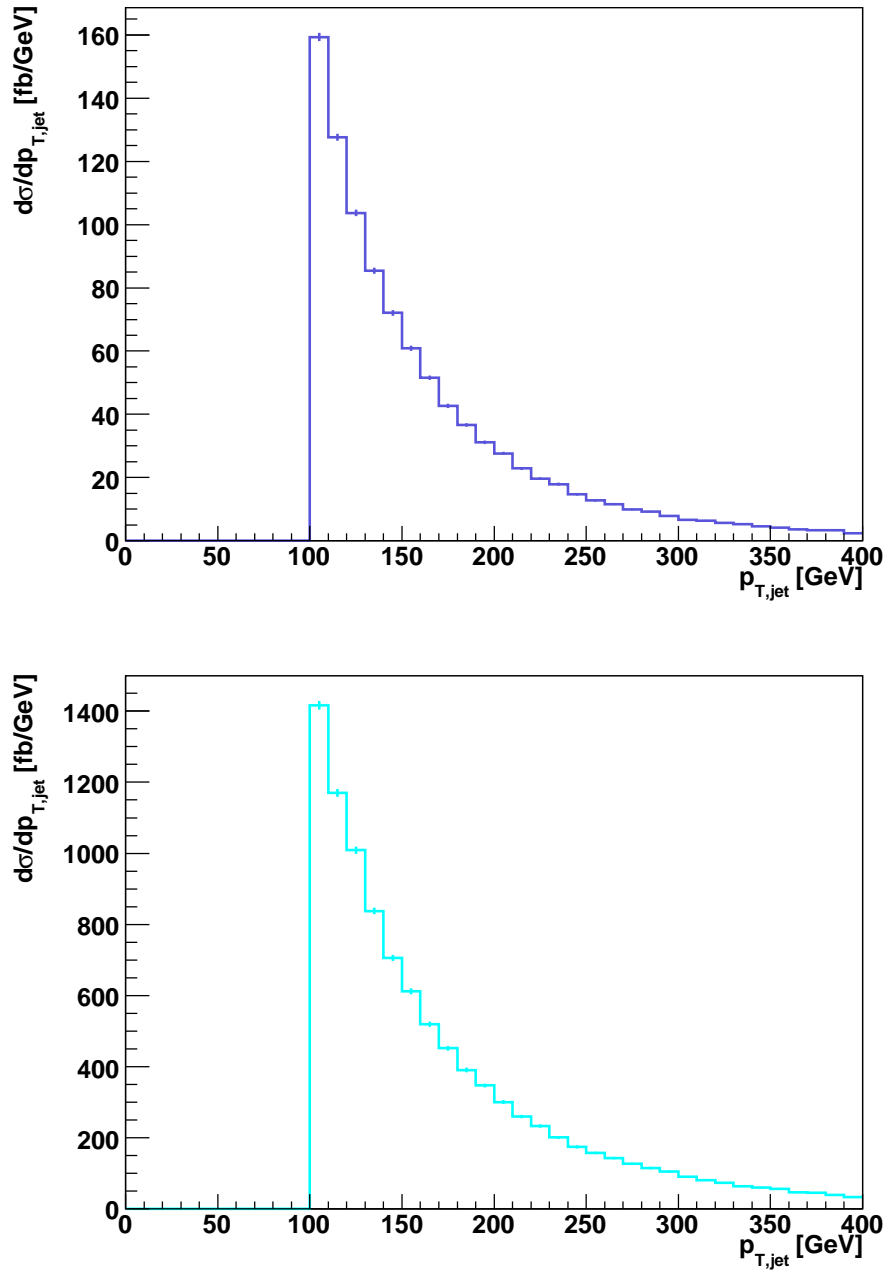


FIG. 6.4 – Sections efficaces différentielles au LO en fonction de l'impulsion transverse du jet avec  $V = Z$  (en haut) et  $V = W^\pm$  (en bas)

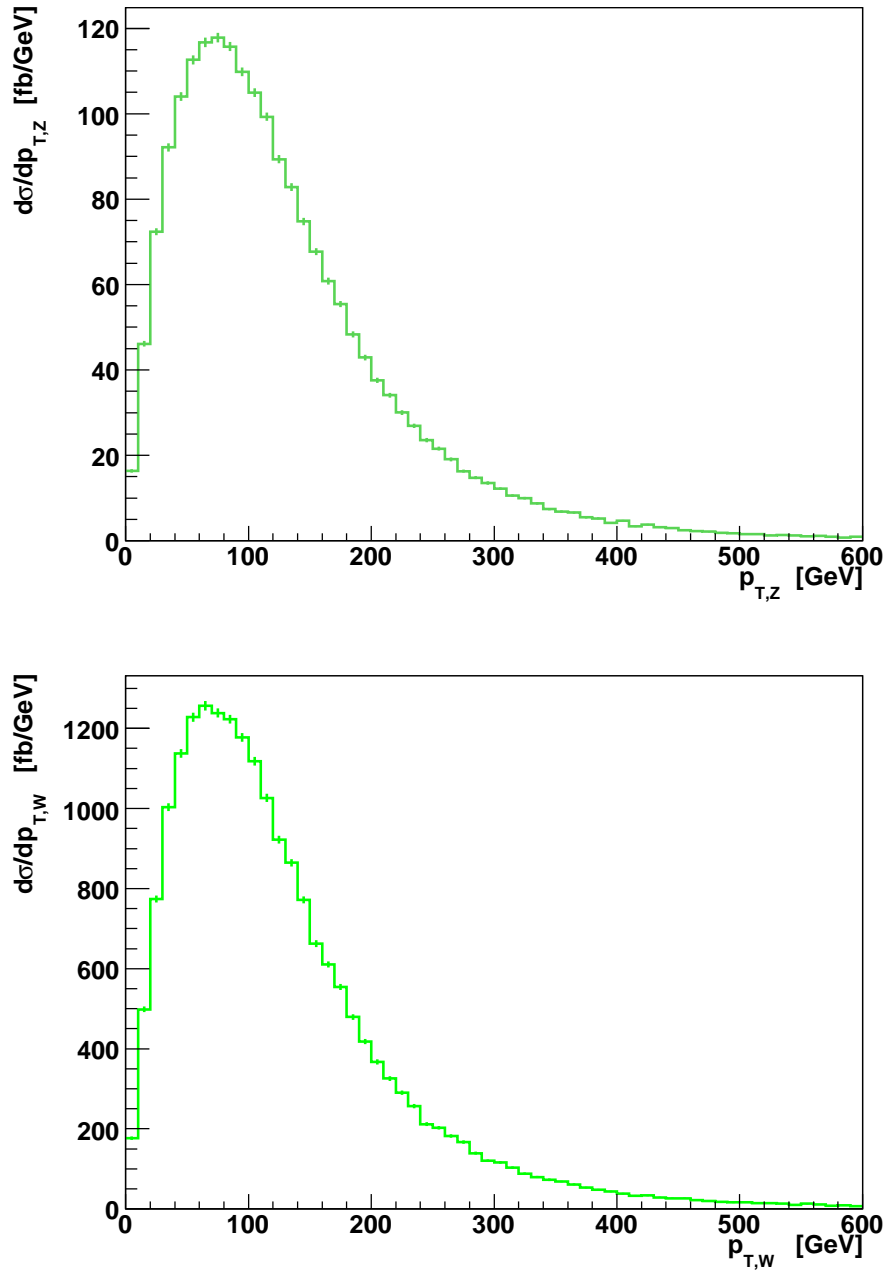


FIG. 6.5 – Sections efficaces différentielles au LO en fonction de l'impulsion transverse d'un des bosons  $V$  avec  $V = Z$  (en haut) et  $V = W^\pm$  (en bas)

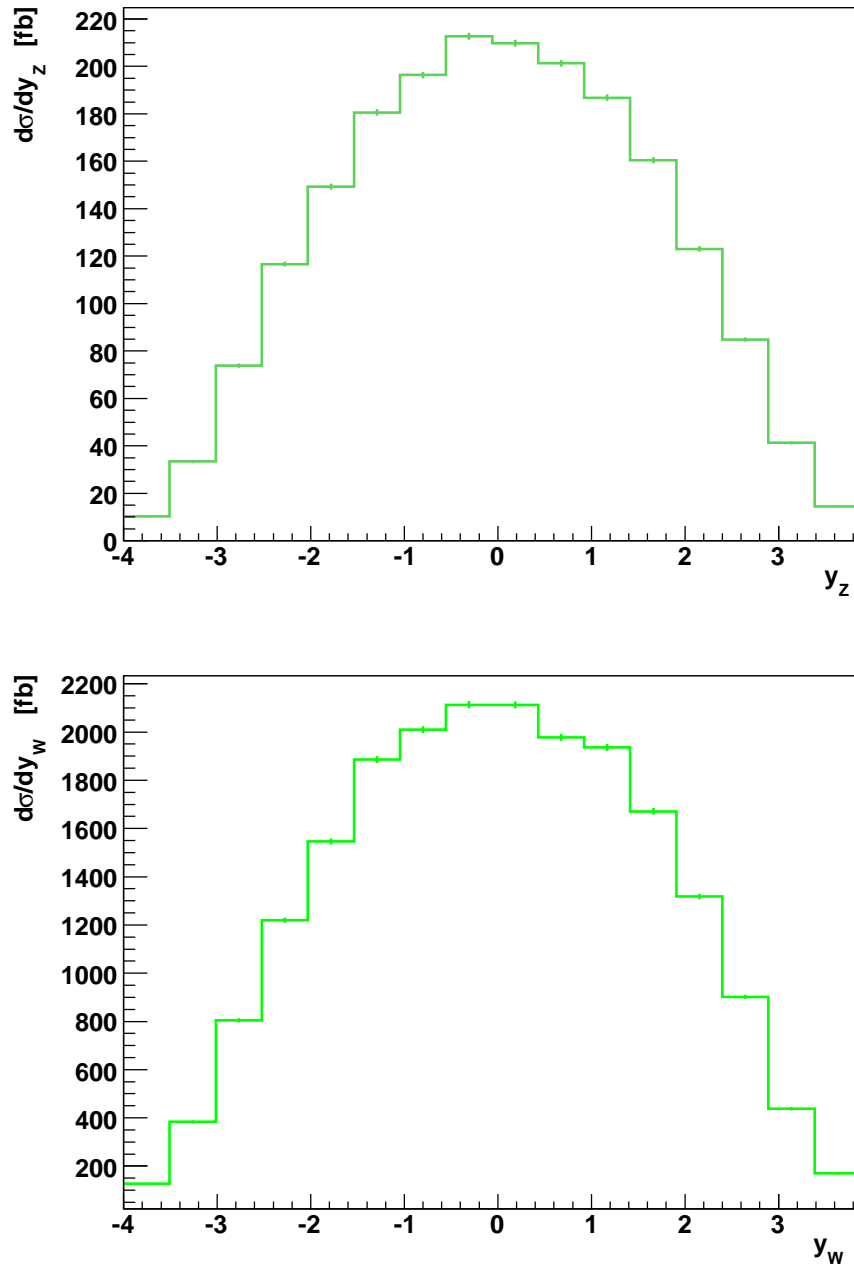


FIG. 6.6 – Sections efficaces différentielles au LO en fonction de la rapidité d'un des bosons  $V$  avec  $V = Z$  (en haut) et  $V = W^\pm$  (en bas)

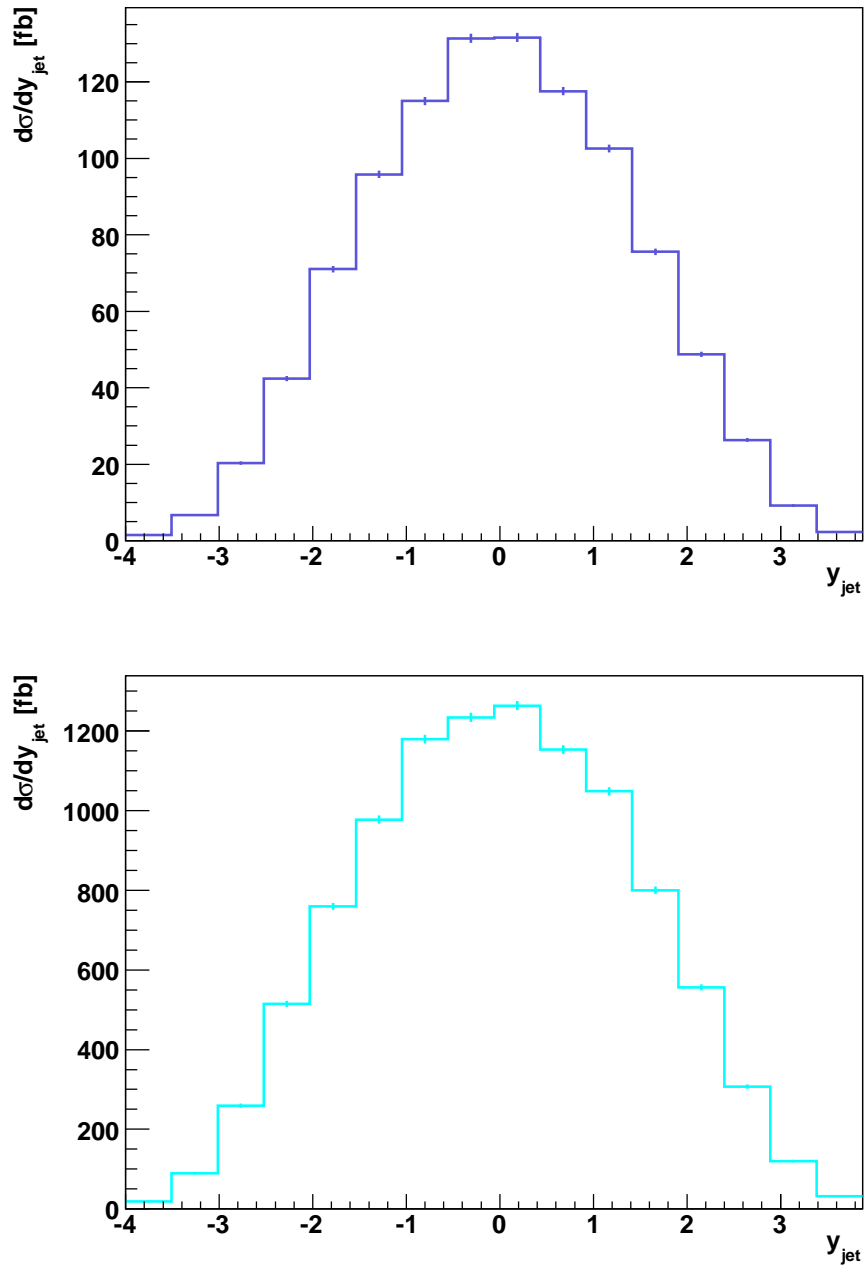


FIG. 6.7 – Sections efficaces différentielles au LO en fonction de la rapidité du jet avec  $V = Z$  (en haut) et  $V = W^\pm$  (en bas)

### 6.3 SECTIONS EFFICACES À L'ORDRE NLO

On prend les mêmes valeurs pour les paramètres d'entrée que celles utilisées pour le calcul de la section efficace à l'ordre de l'arbre. On utilise les densités partoniques données par CTEQ6M. On applique une coupure sur l'impulsion transverse du jet hadronique égale à 100 GeV pour le LHC.

Les sections efficaces totales à l'ordre de NLO du processus  $pp \rightarrow ZZ + jet$  en fonction des paramètres de renormalisation  $\mu_R$  et de factorisation  $\mu_F$  pour le Tevatron et le LHC sont représentées <sup>2</sup> sur les graphiques de la figure (6.8).

L'élément de matrice contient l'ordre de Born, les corrections virtuelles et l'opérateur d'insertion. L'intégration a été effectuée pour 300 000 points de l'espace de phase.

---

<sup>2</sup>Ces dépendances par rapport aux échelles ne prennent pas en compte les contributions de l'émission réelle et des dipôles intégrés

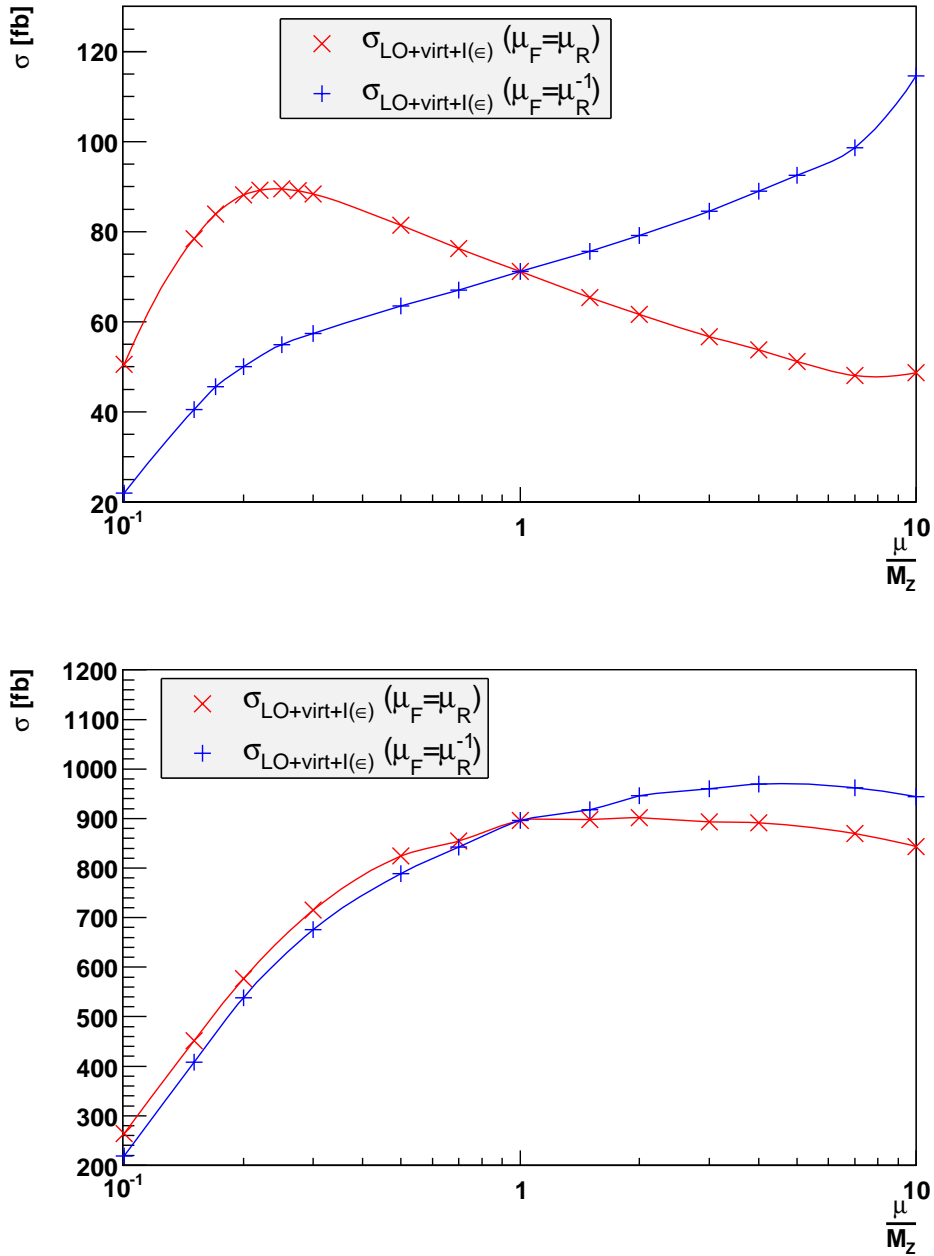


FIG. 6.8 – Dépendance en  $\mu_R$  et  $\mu_F$  de la section efficace  $pp \rightarrow ZZ + \text{jet}$  à l'ordre supérieur avec la contribution du terme virtuel et de l'opérateur d'insertion. (en haut : au Tevatron, et en bas : au LHC)

# LISTE DES DIAGRAMMES DE FEYNMAN

# A

## SOMMAIRE

A.1	DIAGRAMMES DE FEYNMAN DE LA RÉACTION $q\bar{q} \rightarrow ZZ + jet$ . . . . .	101
A.1.1	Diagrammes à l'ordre de l'arbre . . . . .	101
A.1.2	Diagrammes à l'ordre d'une boucle . . . . .	101
A.2	DIAGRAMMES DE FEYNMAN DE LA RÉACTION $q\bar{q} \rightarrow W^+W^- + jet$ . . . . .	105
A.2.1	Diagrammes à l'ordre de l'arbre . . . . .	105
A.2.2	Diagrammes à l'ordre d'une boucle . . . . .	105

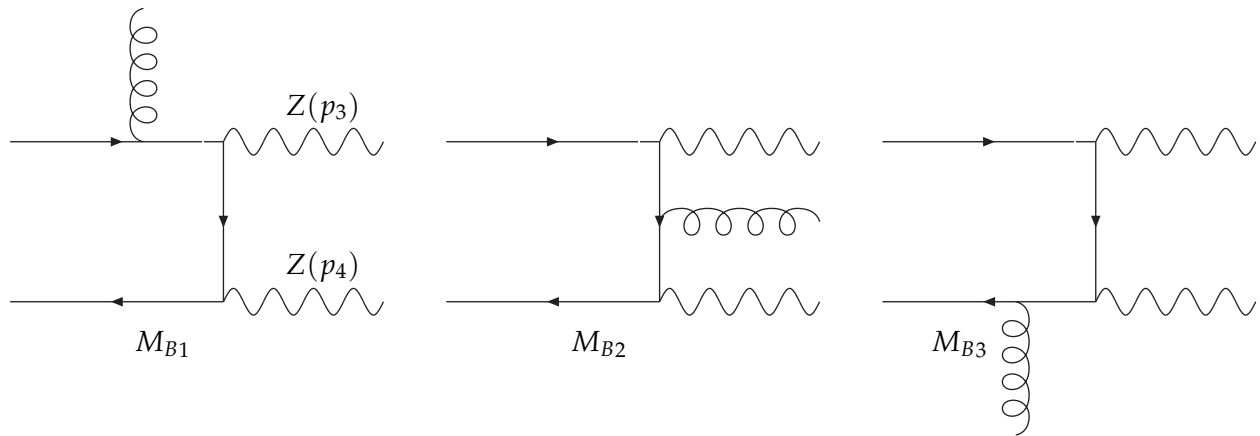




## A.1 DIAGRAMMES DE FEYNMAN DE LA RÉACTION $q\bar{q} \rightarrow ZZ + jet$

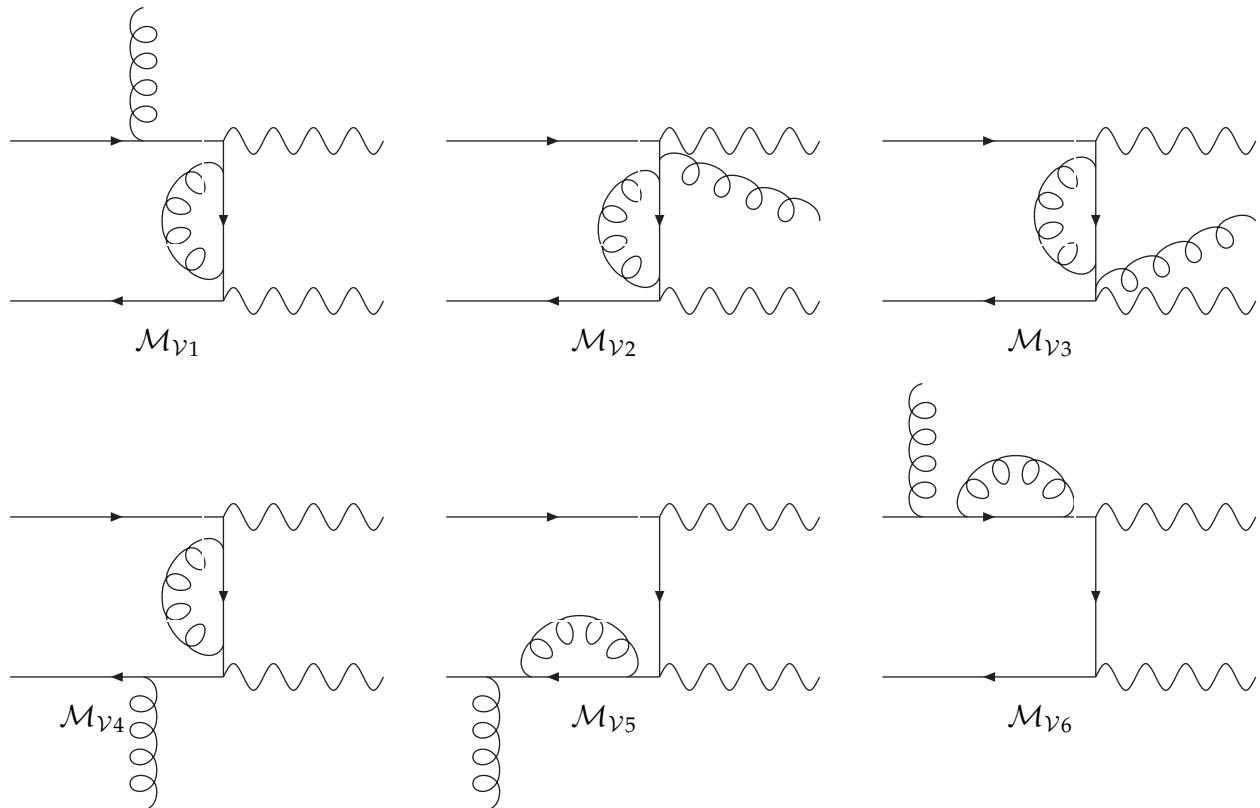
### A.1.1 Diagrammes à l'ordre de l'arbre

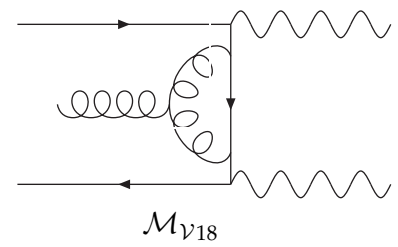
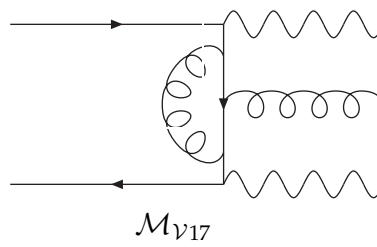
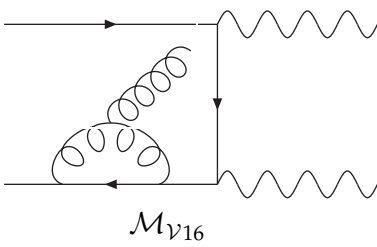
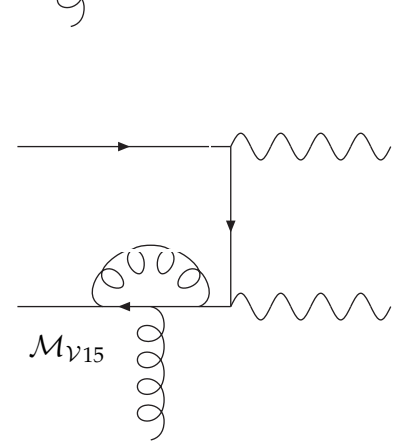
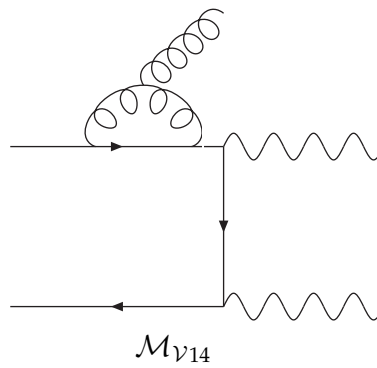
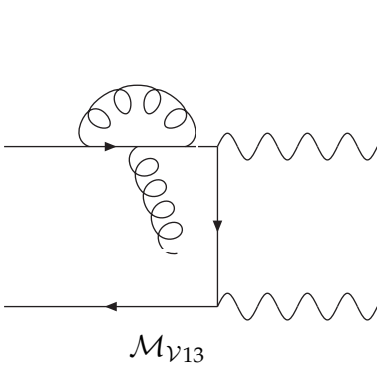
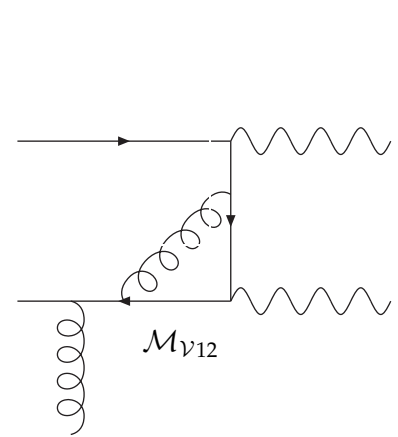
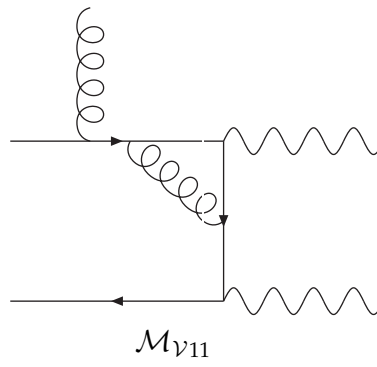
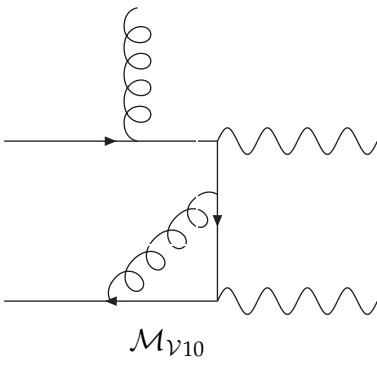
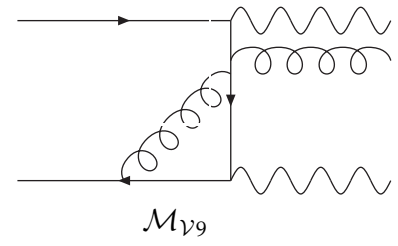
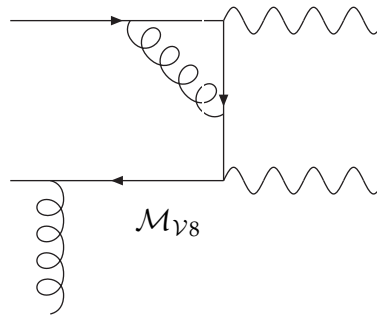
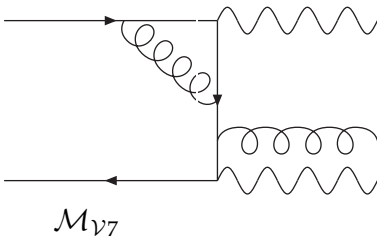
On représente ci-dessous les diagrammes de Feynman de la réaction partonique  $q\bar{q} \rightarrow ZZ + jet$  qui contribuent à l'ordre de l'arbre, auxquels s'ajoutent les diagrammes avec permutation des deux bosons  $Z$  :

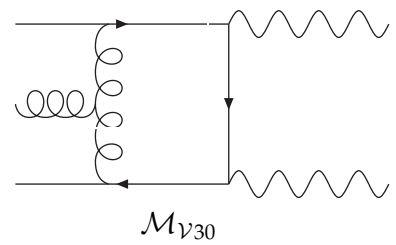
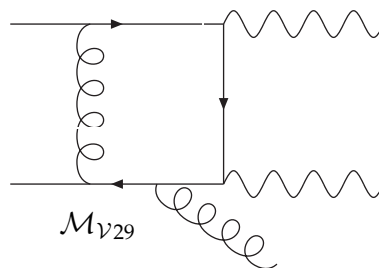
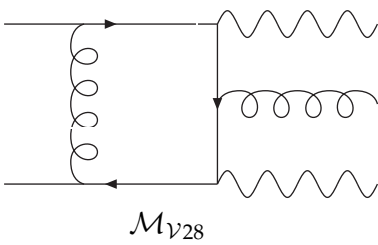
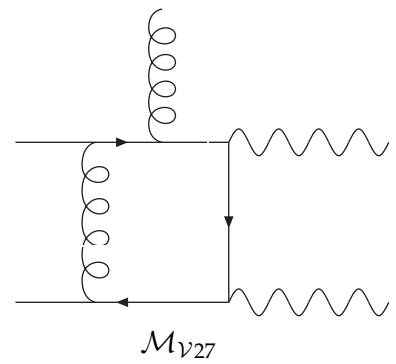
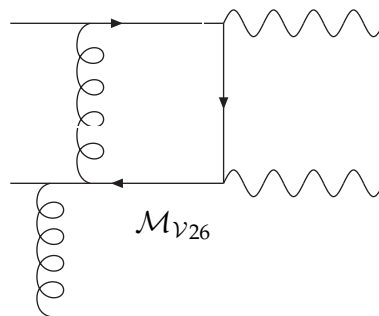
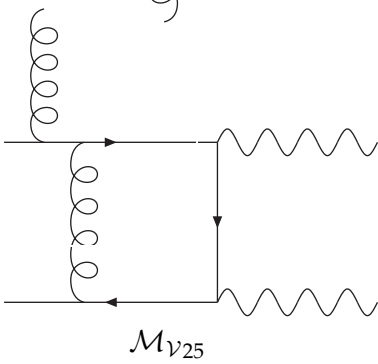
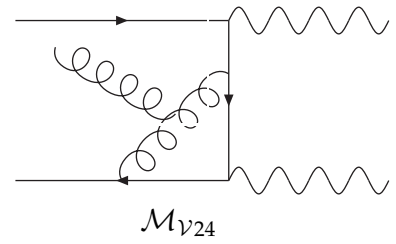
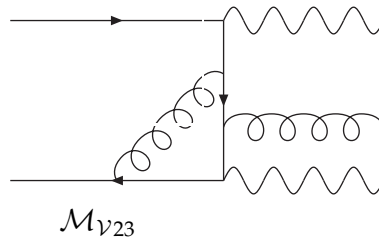
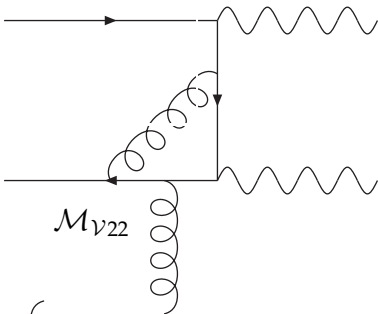
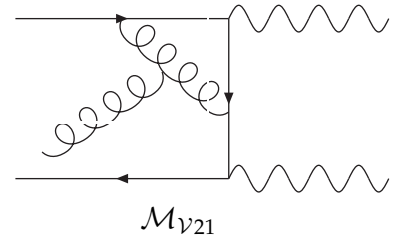
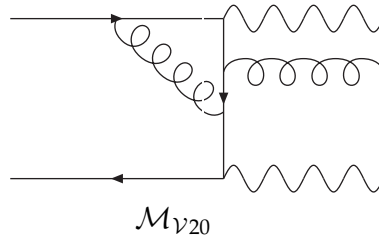
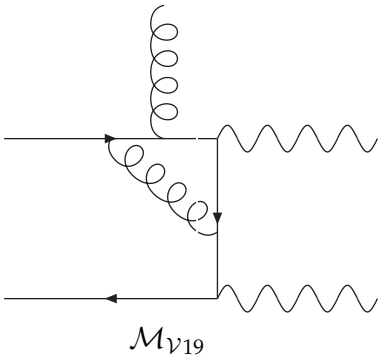


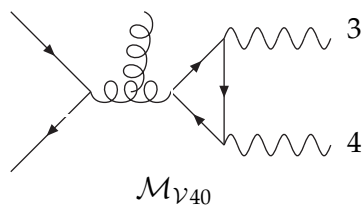
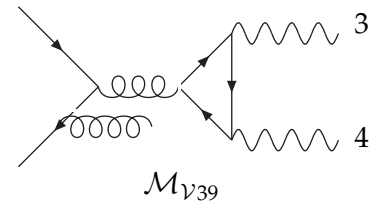
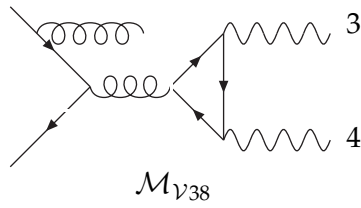
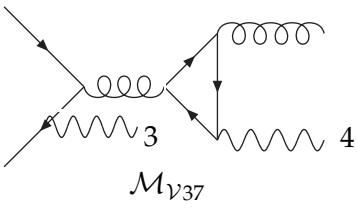
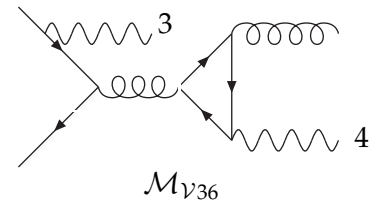
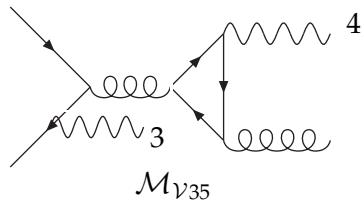
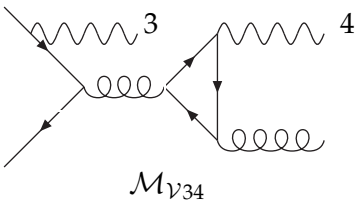
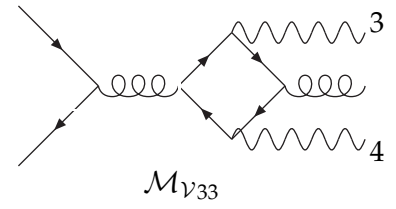
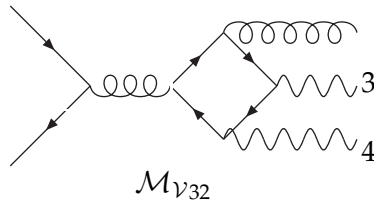
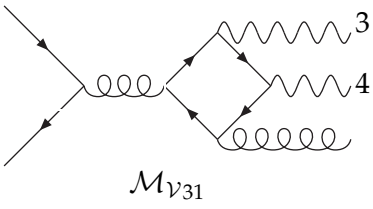
### A.1.2 Diagrammes à l'ordre d'une boucle

On représente ci-dessous les diagrammes de Feynman de la réaction partonique  $q\bar{q} \rightarrow ZZ + jet$  qui contribuent à l'ordre d'une boucle, auxquels s'ajoutent les diagrammes avec permutation des deux bosons  $Z$  :





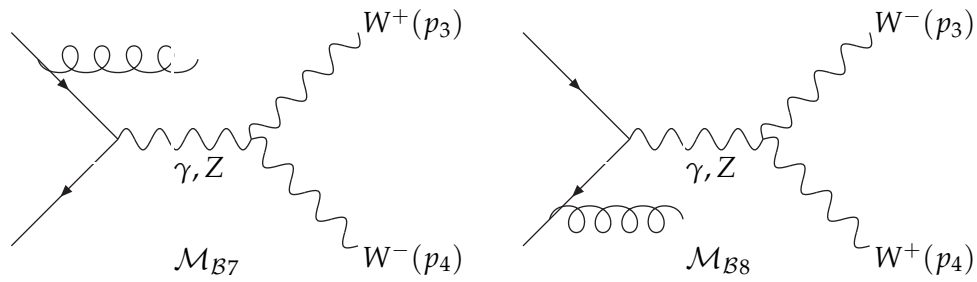




## A.2 DIAGRAMMES DE FEYNMAN DE LA RÉACTION $q\bar{q} \rightarrow W^+W^- + jet$

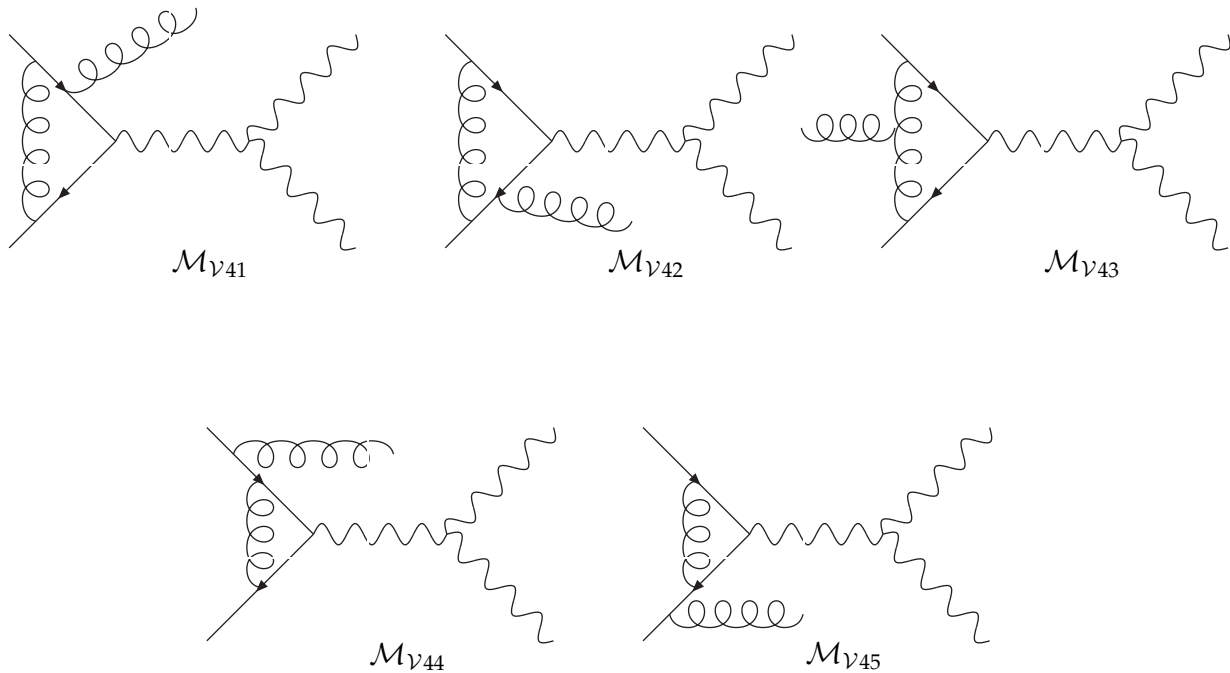
### A.2.1 Diagrammes à l'ordre de l'arbre

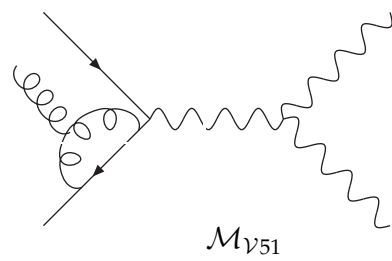
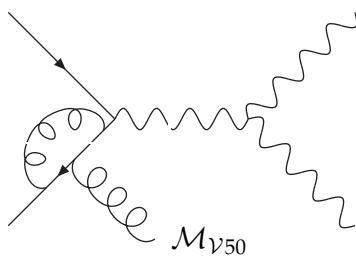
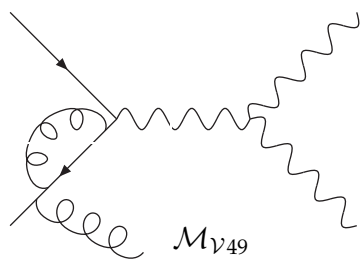
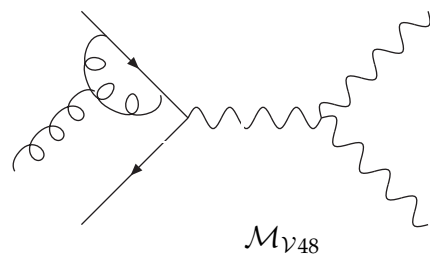
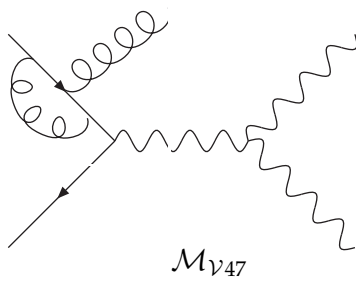
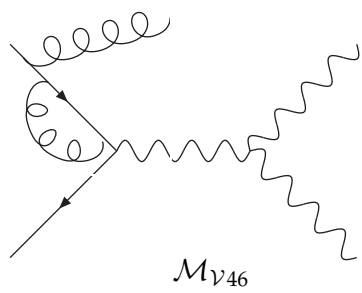
On représente ci-dessous les diagrammes de Feynman de la réaction partonique  $q\bar{q} \rightarrow W^+W^- + jet$  avec le vertex  $AW^+W^-$ , qui contribuent à l'ordre de l'arbre, auxquels s'ajoutent les diagrammes vus précédemment pour  $q\bar{q} \rightarrow ZZ + jet$ , sans la permutation des deux bosons :



### A.2.2 Diagrammes à l'ordre d'une boucle

On représente ci-dessous les diagrammes de Feynman de la réaction partonique  $q\bar{q} \rightarrow W^+W^- + jet$  avec le vertex  $AW^+W^-$ , qui contribuent à l'ordre d'une boucle, auxquels s'ajoutent les diagrammes vus précédemment pour  $q\bar{q} \rightarrow ZZ + jet$ , sans la permutation des deux bosons :





# DÉMONSTRATION DE RELATIONS DE LA MÉTHODE DES AMPLITUDES D'HÉLICITÉ

# B

Dans cette annexe, on donne la démonstration de certaines relations de la section "La méthode des amplitudes d'hélicité" du chapitre 2.

\* Preuve de (3.10) : Pour cela, on utilise la relation  $C^2 = -\mathbb{1}$

$$\begin{aligned}\langle p_- | q_+ \rangle &= \bar{u}_-(p) u_+(q) = (\bar{u}_-(p) u_+(q))^T \\ &= u_+^T(q) \bar{u}_-^T(p) = -u_+^T(q) C C \bar{u}_-^T(p) = -\bar{u}_+^c(q) u_-^c(p) \\ &= -\bar{u}_-(q) u_+(p) = -\langle q_- | p_+ \rangle\end{aligned}$$

\* Preuve de (3.17) :

$$\begin{aligned}|\langle pq \rangle|^2 &= \langle p_- | q_+ \rangle \langle q_+ | p_- \rangle \\ &= \text{tr}(|p_- \rangle \langle p_- | |q_+ \rangle \langle q_+ |) = \text{tr}\left(\frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \not{p} \frac{1}{2}(1 + \gamma_5) \not{q}\right) \\ &= \frac{1}{4} \text{tr}(2 \not{p} \not{q}) = 2(p \cdot q)\end{aligned}$$

\* Preuve de (3.19) :

$$\begin{aligned}\langle p_+ | \gamma^\mu | q_+ \rangle &= \bar{u}_+(p) \gamma^\mu u_+(q) = [\bar{u}_+(p) \gamma^\mu u_+(q)]^T \\ &= u_+^T(p) (\gamma^\mu)^T \bar{u}_+^T(q) = u_+^T(p) \gamma^0 \gamma^2 \gamma^\mu \gamma^2 \gamma^0 \bar{u}_+^T(q) \\ &= -u_+^T(p) i \gamma^0 \gamma^2 \gamma^\mu i \gamma^2 \gamma^0 \bar{u}_+^T(q) = u_+^T(p) \underbrace{i \gamma^2 \gamma^0}_C \gamma^\mu \underbrace{i \gamma^2 \gamma^0}_C \bar{u}_+^T(q) \\ &= \bar{u}_+^c(p) \gamma^\mu u_+^c(q) = \bar{u}_-(p) \gamma^\mu u_-(q) = \langle p_- | \gamma^\mu | q_- \rangle\end{aligned}$$



\* Preuve de (3.26) : détermination de la constante de normalisation  $\mathcal{N}$

On sait que :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\mu}^{+}(p) &= \mathcal{N} \langle q_{-} | \gamma_{\mu} | p_{-} \rangle \\ \varepsilon_{\mu}^{-}(p) &= (\varepsilon_{\mu}^{+}(p))^{*}\end{aligned}$$

et en faisant appel à (3.24), on écrit :

$$\begin{aligned}\varepsilon^{+}(p) \cdot \varepsilon^{-}(p) &= |\mathcal{N}|^2 \langle q_{-} | \gamma_{\mu} | p_{-} \rangle \langle q_{+} | \gamma^{\mu} | k_{+} \rangle \\ &= 2 |\mathcal{N}|^2 \langle q_{+} | p_{-} \rangle \langle q_{-} | p_{+} \rangle = -2 |\mathcal{N}|^2 |\langle qp \rangle|^2 = -1\end{aligned}$$

on en déduit :

$$\mathcal{N} = \frac{1}{\sqrt{2} \langle qp \rangle}$$

\* Preuve de (3.32) : détermination de la fonction  $\beta$

On se limitera ici à la démonstration de  $\beta^{+}$ , celle de l'expression de  $\beta^{-}$  étant du même acabit. On utilise la propriété  $q \cdot \varepsilon^{+}(p, q) = 0$  et la relation (3.31) :

$$\begin{aligned}q \cdot \varepsilon^{+}(p, q) &= \varepsilon^{+}(p, k) \cdot q + \beta^{+}(k, q, p) \cdot q \\ \Leftrightarrow 0 &= \frac{\langle k_{-} | \not{q} | p_{-} \rangle}{\sqrt{2} \langle kp \rangle} + \frac{1}{2} \beta^{+}(k, q, p) |\langle qp \rangle|^2 \\ \Rightarrow \beta^{+}(k, q, p) &= -\frac{2 \langle k_{-} | \not{q} | p_{-} \rangle}{\sqrt{2} \langle kp \rangle |\langle qp \rangle|^2} = \frac{\sqrt{2} \langle kq \rangle \langle qp \rangle^{*}}{\langle kp \rangle \langle qp \rangle \langle qp \rangle^{*}} = \frac{\sqrt{2} \langle kq \rangle}{\langle kp \rangle \langle qp \rangle}\end{aligned}$$

# FORMULAIRE DE GOLEM

# C

## C.1 FACTEURS DE FORME À 4 POINTS

Tous les facteurs de forme issus de la décomposition d'intégrales tensorielles à 4 points sont exprimés en termes d'intégrales scalaires à 4 points de dimensions  $(n+2)$  et  $(n+4)$ , et d'intégrales à 3 points avec jusqu'à 3 paramètres de Feynman au numérateur :

$$A^{4,0}(S) = B I_4^{n+2}(S) + \sum_{j \in S} b_j I_3^n(S \setminus \{j\}) \quad (\text{C.1})$$

$$A_l^{4,1}(S) = -b_l I_4^{n+2}(S) - \sum_{j \in S} \mathcal{S}_{jl}^{-1} I_3^n(S \setminus \{j\}) \quad (\text{C.2})$$

$$\begin{aligned} A_{l_1 l_2}^{4,2}(S) &= b_{l_1} I_4^{n+2}(l_2; S) + b_{l_2} I_4^{n+2}(l_1; S) - \mathcal{S}_{l_1 l_2}^{-1} I_4^{n+2}(S) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j \in S} \left[ \mathcal{S}_{j l_2}^{-1} I_3^n(l_1; S \setminus \{j\}) + \mathcal{S}_{j l_1}^{-1} I_3^n(l_2; S \setminus \{j\}) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$$B^{4,2}(S) = -\frac{1}{2} I_4^{n+2}(S) \quad (\text{C.4})$$

$$\begin{aligned} A_{l_1 l_2 l_3}^{4,3}(S) &= \frac{2}{3} \left[ \mathcal{S}_{l_2 l_3}^{-1} I_4^{n+2}(l_1; S) + \mathcal{S}_{l_1 l_3}^{-1} I_4^{n+2}(l_2; S) + \mathcal{S}_{l_1 l_2}^{-1} I_4^{n+2}(l_3; S) \right] \\ &\quad - \left[ b_{l_1} I_4^{n+2}(l_2, l_3; S) + b_{l_2} I_4^{n+2}(l_1, l_3; S) + b_{l_3} I_4^{n+2}(l_1, l_2; S) \right] \\ &\quad - \frac{1}{3} \sum_{j \in S} \left[ \mathcal{S}_{j l_1}^{-1} I_3^n(l_2, l_3; S \setminus \{j\}) + \mathcal{S}_{j l_2}^{-1} I_3^n(l_1, l_3; S \setminus \{j\}) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{S}_{j l_3}^{-1} I_3^n(l_1, l_2; S \setminus \{j\}) \right] \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

$$B_l^{4,3}(S) = \frac{1}{2} I_4^{n+2}(l; S) \quad (\text{C.6})$$

$$\begin{aligned} A_{l_1 l_2 l_3 l_4}^{4,4}(S) &= f^{4,4}(l_1, l_2; l_3, l_4) + f^{4,4}(l_1, l_3; l_2, l_4) + f^{4,4}(l_1, l_4; l_3, l_2) \\ &\quad + f^{4,4}(l_2, l_3; l_1, l_4) + f^{4,4}(l_2, l_4; l_3, l_1) + f^{4,4}(l_3, l_4; l_1, l_2) \\ &\quad + g^{4,4}(l_1; l_2, l_3, l_4) + g^{4,4}(l_2; l_1, l_3, l_4) \\ &\quad + g^{4,4}(l_3; l_2, l_1, l_4) + g^{4,4}(l_4; l_2, l_3, l_1) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

$$B_{l_1 l_2}^{4,4}(S) = -\frac{1}{2} I_4^{n+2}(l_1, l_2; S) \quad (\text{C.8})$$

$$C^{4,4}(S) = \frac{1}{4} I_4^{n+4}(S) \quad (\text{C.9})$$

où l'on a introduit les fonctions :

$$f^{4A}(l_1, l_2; l_3, l_4) = -\frac{1}{2} \mathcal{S}_{l_1 l_2}^{-1} I_4^{n+2}(l_3, l_4; S) \quad (\text{C.10})$$

$$g^{4A}(l_1; l_2, l_3, l_4) = b_{l_1} I_4^{n+2}(l_2, l_3, l_4; S) + \frac{1}{4} \sum_{j \in S} \mathcal{S}_{j l_1}^{-1} I_3^n(l_2, l_3, l_4; S \setminus \{j\}) \quad (\text{C.11})$$

Les facteurs de forme ci-dessus ne contiennent aucun déterminant de Gram inverse, et il est souhaitable d'arrêter la réduction à cette étape. Les intégrales qui composent ces facteurs de forme constituent donc une base de fonctions idéale pour démarrer une évaluation numérique de l'amplitude.

Néanmoins, il est tout à fait possible de poursuivre la réduction algébrique afin d'obtenir une expression avec des intégrales contenant un nombre inférieur de paramètres de Feynman, ou avec une dimension d'espace-temps plus petite. Cependant, le choix d'une telle représentation augmente le nombre de termes, et entraîne malheureusement l'apparition de déterminants de Gram sous la forme cachée en  $1/B$  (3.59) :

$$I_4^{n+2}(l; S) = \frac{1}{B} \left\{ b_l I_4^{n+2}(S) + \frac{1}{2} \sum_{j \in S} \mathcal{S}_{j l}^{-1} I_3^n(S \setminus \{j\}) - \frac{1}{2} \sum_{j \in S} b_j I_3^n(l; S \setminus \{j\}) \right\} \quad (\text{C.12})$$

$$\begin{aligned} I_4^{n+2}(l_1, l_2; S) &= \frac{2}{3B} \left\{ b_{l_1} I_4^{n+2}(l_2; S) + b_{l_2} I_4^{n+2}(l_1; S) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \mathcal{S}_{l_1 l_2}^{-1} I_4^{n+2}(S) + \frac{1}{4} \sum_{j \in S} \mathcal{S}_{j l_2}^{-1} I_3^n(l_1; S \setminus \{j\}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \sum_{j \in S} \mathcal{S}_{j l_1}^{-1} I_3^n(l_2; S \setminus \{j\}) - \frac{1}{2} \sum_{j \in S} b_j I_3^n(l_1, l_2; S \setminus \{j\}) \right\} \quad (\text{C.13}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4^{n+2}(l_1, l_2, l_3; S) &= \frac{1}{2B} \left\{ b_{l_3} I_4^{n+2}(l_1, l_2; S) + b_{l_2} I_4^{n+2}(l_1, l_3; S) + b_{l_1} I_4^{n+2}(l_2, l_3; S) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{3} \left( \mathcal{S}_{l_1 l_2}^{-1} I_4^{n+2}(l_3; S) + \mathcal{S}_{l_1 l_3}^{-1} I_4^{n+2}(l_2; S) + \mathcal{S}_{l_2 l_3}^{-1} I_4^{n+2}(l_1; S) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6} \left( \sum_{i \in S} \mathcal{S}_{i l_3}^{-1} I_3^n(l_1, l_2; S \setminus \{i\}) + \sum_{i \in S} \mathcal{S}_{i l_2}^{-1} I_3^n(l_1, l_3; S \setminus \{i\}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{i \in S} \mathcal{S}_{i l_1}^{-1} I_3^n(l_2, l_3; S \setminus \{i\}) \right) - \frac{1}{2} \sum_{i \in S} b_i I_3^n(l_1, l_2, l_3; S \setminus \{i\}) \right\} \quad (\text{C.14}) \end{aligned}$$

$$I_4^{n+4}(S) = \frac{1}{(n-1)B} \left\{ I_4^{n+2}(S) - \sum_{j \in S} b_j I_3^{n+2}(S \setminus \{j\}) \right\} \quad (\text{C.15})$$

$$I_4^{n+4}(l; S) = \frac{1}{nB} \left\{ b_l I_4^{n+4}(S) + I_4^{n+2}(l; S) - \sum_{j \in S} b_j I_3^{n+2}(l; S \setminus \{j\}) \right\} \quad (\text{C.16})$$

## C.2 FACTEURS DE FORME À 5 POINTS

On se limitera ici à donner les expressions des facteurs de forme dont nous avons besoin dans le processus étudié lors de cette thèse :

$$A^{5,0}(S) = \sum_{j \in S} b_j B^{\{j\}} I_4^{n+2}(S \setminus \{j\}) + \sum_{j \in S} \sum_{k \in S \setminus \{j\}} b_j b_k^{\{j\}} I_3^n(S \setminus \{j, k\}) \quad (\text{C.17})$$

$$A_l^{5,1}(S) = - \sum_{j \in S} \mathcal{S}_{jl}^{-1} B^{\{j\}} I_4^{n+2}(S \setminus \{j\}) - \sum_{j \in S} \sum_{k \in S \setminus \{j\}} \mathcal{S}_{jl}^{-1} b_k^{\{j\}} I_3^n(S \setminus \{j, k\}) \quad (\text{C.18})$$

$$\begin{aligned} A_{l_1 l_2}^{5,2}(S) &= \sum_{j \in S} \left( \mathcal{S}_{j l_1}^{-1} b_{l_2} + \mathcal{S}_{j l_2}^{-1} b_{l_1} - 2 \mathcal{S}_{l_1 l_2}^{-1} b_j + b_j \mathcal{S}^{\{j\}-1}_{l_1 l_2} \right) I_4^{n+2}(S \setminus \{j\}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j \in S} \sum_{k \in S \setminus \{j\}} \left[ \mathcal{S}_{j l_2}^{-1} \mathcal{S}^{\{j\}-1}_{k l_1} + \mathcal{S}_{j l_1}^{-1} \mathcal{S}^{\{j\}-1}_{k l_2} \right] I_3^n(S \setminus \{j, k\}) \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

$$B^{5,2}(S) = -\frac{1}{2} \sum_{j \in S} b_j I_4^{n+2}(S \setminus \{j\}) \quad (\text{C.20})$$

$$\begin{aligned} A_{l_1 l_2 l_3}^{5,3}(S) &= \frac{2}{3} \sum_{j \in S} \left[ I_4^{n+2}(l_3; S \setminus \{j\}) \right. \\ &\quad \times \left( 2 \mathcal{S}_{l_1 l_2}^{-1} b_j - \mathcal{S}_{j l_1}^{-1} b_{l_2} - \mathcal{S}_{j l_2}^{-1} b_{l_1} - b_j \mathcal{S}^{\{j\}-1}_{l_1 l_2} \right) + l_2 \leftrightarrow l_3 + l_1 \leftrightarrow l_3 \left. \right] \\ &\quad + \frac{1}{3} \sum_{j \in S} I_4^{n+2}(S \setminus \{j\}) \left[ \mathcal{S}_{j l_3}^{-1} \mathcal{S}^{\{j\}-1}_{l_1 l_2} + \mathcal{S}_{j l_1}^{-1} \mathcal{S}^{\{j\}-1}_{l_2 l_3} + \mathcal{S}_{j l_2}^{-1} \mathcal{S}^{\{j\}-1}_{l_1 l_3} \right] \\ &\quad - \frac{1}{6} \sum_{j \in S} \sum_{k \in S \setminus \{j\}} \left[ I_3^n(l_1; S \setminus \{j, k\}) \left( \mathcal{S}_{j l_3}^{-1} \mathcal{S}^{\{j\}-1}_{k l_2} + \mathcal{S}_{j l_2}^{-1} \mathcal{S}^{\{j\}-1}_{k l_3} \right) \right. \\ &\quad \left. + l_1 \leftrightarrow l_2 + l_1 \leftrightarrow l_3 \right] \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

$$B_l^{5,3}(S) = \frac{1}{3} \sum_{j \in S} \left( b_j I_4^{n+2}(l; S \setminus \{j\}) + \frac{1}{2} \mathcal{S}_{jl}^{-1} I_4^{n+2}(S \setminus \{j\}) \right) \quad (\text{C.22})$$

On remarque qu'il n'y a pas d'intégrales supplémentaires à rajouter à la base de fonctions que l'on a introduite pour le cas des facteurs de forme  $N = 4$ .

## C.3 RELATIONS UTILES ENTRE FACTEURS DE FORME

Dans ce paragraphe, nous donnons une liste (non exhaustive) d'identités entre facteurs de forme implémentées dans le programme FORM afin de réduire leur rang :

Pour les facteurs de forme  $N = 4$ , nous avons les relations suivantes :

$$\sum_{l \in S} A_l^{4,1}(S) = -A^{4,0}(S) \quad (\text{C.23})$$

$$\sum_{l_2 \in S} A_{l_1 l_2}^{4,2}(S) = -A_{l_1}^{4,1}(S) \quad (\text{C.24})$$

$$\sum_{l_3 \in S} A_{l_1 l_2 l_3}^{4,3}(S) = -A_{l_1 l_2}^{4,2}(S) \quad (\text{C.25})$$

$$\sum_{l \in S} B_l^{4,3}(S) = -B^{4,2}(S) \quad (\text{C.26})$$

$$\sum_{l_4 \in S} A_{l_1 l_2 l_3 l_4}^{4,4}(S) = -A_{l_1 l_2 l_3}^{4,3}(S) \quad (\text{C.27})$$

$$\sum_{l_2 \in S} B_{l_1 l_2}^{4,4}(S) = -B_{l_1}^{4,3}(S) \quad (\text{C.28})$$

Pour les facteurs de forme  $N = 5$ , nous avons également des relations de même nature :

$$\sum_{l \in S} A_l^{5,1}(S) = -A^{5,0}(S) \quad (\text{C.29})$$

$$\sum_{l_2 \in S} A_{l_1 l_2}^{5,2}(S) = -A_{l_1}^{5,1}(S) \quad (\text{C.30})$$

$$\sum_{l \in S} B_l^{5,3}(S) = -B^{5,2}(S) \quad (\text{C.31})$$

$$\sum_{l_3 \in S} A_{l_1 l_2 l_3}^{5,3}(S) = -A_{l_1 l_2}^{5,2}(S) \quad (\text{C.32})$$

# DÉMONSTRATION DES RELATIONS DE COMPLÉTUDE POUR LES VECTEURS DE POLARISATION

# D

On démontre les relations (5.37) à (5.41) en considérant le cas du vecteur de polarisation du boson de jauge faible  $V(p_3, \lambda_3)$ . La démonstration pour les 2 autres vecteurs est équivalente. En utilisant les expressions des vecteurs de polarisations pour chaque hélicité, et en se souvenant que les vecteurs  $k_3$  et  $k_4$  sont de type light-like  $k_3^2 = k_4^2 = 0$ , nous trouvons :

Preuve de (5.37) :

$$p_3 \cdot \varepsilon_3^+ = \frac{\langle 4^- | \not{p}_3 | 3^- \rangle}{\sqrt{2} \langle 43 \rangle} = \frac{(1+\beta)}{2\sqrt{2}} \frac{\langle 4^- | \not{k}_3 | 3^- \rangle}{\sqrt{2} \langle 43 \rangle} + \frac{(1-\beta)}{2\sqrt{2}} \frac{\langle 4^- | \not{k}_4 | 3^- \rangle}{\sqrt{2} \langle 43 \rangle} = 0 \quad (\text{D.1})$$

$$p_3 \cdot \varepsilon_3^- = \frac{\langle 4^+ | \not{p}_3 | 3^+ \rangle}{\sqrt{2} [34]} = \frac{(1+\beta)}{2\sqrt{2}} \frac{\langle 4^+ | \not{k}_3 | 3^+ \rangle}{\sqrt{2} [34]} + \frac{(1-\beta)}{2\sqrt{2}} \frac{\langle 4^+ | \not{k}_4 | 3^+ \rangle}{\sqrt{2} [34]} = 0 \quad (\text{D.2})$$

$$p_3 \cdot \varepsilon_3^0 = \frac{1}{4M_V} \{ (1-\beta^2) k_3 \cdot k_4 - (1-\beta^2) k_3 \cdot k_4 + (1+\beta)^2 k_3^2 - (1-\beta)^2 k_4^2 \} = 0 \quad (\text{D.3})$$

Preuve de (5.38) et (5.39) :

$$\varepsilon_3^+ \cdot \varepsilon_3^+ = \frac{\langle 4^- | \gamma^\mu | 3^- \rangle \langle 4^- | \gamma_\mu | 3^- \rangle}{2 \langle 43 \rangle^2} = \frac{\langle 44 \rangle [33]}{\langle 43 \rangle^2} = 0 \quad (\text{D.4})$$

$$\varepsilon_3^- \cdot \varepsilon_3^- = \frac{\langle 4^+ | \gamma^\mu | 3^+ \rangle \langle 4^+ | \gamma_\mu | 3^+ \rangle}{2 [34]^2} = \frac{\langle 33 \rangle [44]}{[34]^2} = 0 \quad (\text{D.5})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_3^0 \cdot \varepsilon_3^0 &= \frac{1}{4M_V^2} \{ (1+\beta)^2 k_3^2 - 2(1-\beta^2) k_3 \cdot k_4 + (1-\beta)^2 k_4^2 \} \\ &= \frac{-1}{4M_V^2} (1-\beta^2) s_{34} = \frac{-1}{4M_V^2} \left( \frac{4M_V^2}{s_{34}} \right) s_{34} = -1 \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Preuve de (5.40) et (5.41) :

$$\varepsilon_3^0 \cdot \varepsilon_3^+ = \frac{(1+\beta)}{2\sqrt{2}M_V} \frac{\langle 4^- | k_3 | 3^- \rangle}{\langle 43 \rangle} - \frac{(1-\beta)}{2\sqrt{2}M_V} \frac{\langle 4^- | k_4 | 3^- \rangle}{\langle 43 \rangle} = 0 \quad (\text{D.7})$$

$$\varepsilon_3^0 \cdot \varepsilon_3^- = \frac{(1+\beta)}{2\sqrt{2}M_V} \frac{\langle 4^+ | k_3 | 3^+ \rangle}{[34]} - \frac{(1-\beta)}{2\sqrt{2}M_V} \frac{\langle 4^+ | k_4 | 3^+ \rangle}{[34]} = 0 \quad (\text{D.8})$$

$$\varepsilon_3^+ \cdot \varepsilon_3^- = \frac{\langle 4^- | \gamma^\mu | 3^- \rangle \langle 4^+ | \gamma_\mu | 3^+ \rangle}{2 \langle 43 \rangle [34]} = \frac{2 [43] \langle 43 \rangle}{2 \langle 43 \rangle [34]} = -1 \quad (\text{D.9})$$

# EXPRESSION DES DIPÔLES DE L'ÉMISSION RÉELLE

# E

Dans cette annexe, on donne les expressions des dipôles à la Catani-Seymour utilisés comme termes de soustraction des divergences infra-rouge de l'émission réelle.

## E.1 DIPÔLES DE LA RÉACTION $q_1\bar{q}_2 \rightarrow VVg_5g_6$

On rappelle que les dipôles de soustraction à évaluer sont les suivants :

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}_{g_5g_6}^{q_1}, \quad \mathcal{D}_{g_6}^{q_1g_5}, \quad \mathcal{D}^{q_1g_5\bar{q}_2}, \\ & \mathcal{D}_{g_5g_6}^{\bar{q}_2}, \quad \mathcal{D}_{g_6}^{\bar{q}_2g_5}, \quad \mathcal{D}^{\bar{q}_2g_5q_1}, \\ & \quad \mathcal{D}_{g_5}^{q_1g_6}, \quad \mathcal{D}^{q_1g_6\bar{q}_2}, \\ & \quad \mathcal{D}_{g_5}^{\bar{q}_2g_6}, \quad \mathcal{D}^{\bar{q}_2g_6q_1} \end{aligned}$$

### E.1.1 Dipôle $\mathcal{D}_{g_5}^{q_1g_6}$

Le gluon supplémentaire de moment  $p_6$  est émis par le quark entrant de moment  $p_1$ , tandis que le gluon sortant de moment  $p_5$  est le parton spectateur. On fait appel aux quantités  $\tilde{z}_6$ ,  $x_{56,1}$ ,  $\tilde{p}_{16}$ ,  $\tilde{p}_5$  :

$$\begin{aligned} \tilde{z}_6 &= \frac{p_1 \cdot p_6}{p_1 \cdot p_6 + p_1 \cdot p_5} \\ x_{56,1} &= \frac{p_1 \cdot p_5 + p_1 \cdot p_6 - p_5 \cdot p_6}{p_1 \cdot p_5 + p_1 \cdot p_6} \\ \tilde{p}_{16} &= x_{56,1} p_1 \\ \tilde{p}_5 &= p_5 + p_6 - (1 - x_{56,1}) p_1 \end{aligned} \tag{E.1}$$

L'élément de matrice des corrélations de spin est diagonal dans ce cas, et l'on obtient seulement une fonction en facteur :

$$V_{g_5}^{q_1g_6} = 8\pi\alpha_s\mu^{2\epsilon}C_F \left[ \frac{2}{1 - x_{56,1} + \tilde{z}_6} - (1 + x_{56,1}) - \epsilon(1 - x_{56,1}) \right] \tag{E.2}$$



et le dipôle s'écrit alors :

$$\mathcal{D}_{g_5}^{q_1 g_6} = C_0 \frac{1}{2p_1 \cdot p_6} \frac{1}{x_{56,1}} V_{g_5}^{q_1 g_6} |\mathcal{M}_{q\bar{q}}(\tilde{1}\bar{6}, 2; 3, 4, \bar{5})|^2 \quad (\text{E.3})$$

Puisque l'on utilise le dipôle comme un terme de soustraction pour l'émission réelle, on prend la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

On obtient l'expression des autres dipôles en effectuant simplement une permutation sur les moments des partons :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{g_6}^{q_1 g_5} &= \mathcal{D}_{g_5}^{q_1 g_6} (5 \leftrightarrow 6) \\ \mathcal{D}_{g_5}^{\bar{q}_2 g_6} &= \mathcal{D}_{g_5}^{q_1 g_6} (1 \leftrightarrow 2) \\ \mathcal{D}_{g_6}^{\bar{q}_2 g_5} &= \mathcal{D}_{g_5}^{q_1 g_6} (1 \leftrightarrow 2, 5 \leftrightarrow 6) \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

Par exemple, le dernier dipôle de la liste s'écrit :

$$\mathcal{D}_{g_6}^{\bar{q}_2 g_5} = C_0 \frac{1}{2p_2 \cdot p_5} \frac{1}{x_{56,2}} V_{g_6}^{\bar{q}_2 g_5} |\mathcal{M}_{q\bar{q}}(1, \bar{2}\bar{5}; 3, 4, \bar{6})|^2 \quad (\text{E.5})$$

### E.1.2 Dipôle $\mathcal{D}^{q_1 g_6, \bar{q}_2}$

Le gluon supplémentaire de moment  $p_6$  est émis par le quark entrant de moment  $p_1$ , tandis que l'anti-quark entrant de moment  $p_2$  est le parton spectateur. On définit les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} x_{6,12} &= \frac{p_1 \cdot p_2 - p_2 \cdot p_6 - p_1 \cdot p_6}{p_1 \cdot p_2} \\ K^\mu &= p_1 + p_2 - p_6 \\ \tilde{K}^\mu &= \tilde{p}_{16} + p_2 \\ \Lambda^{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - \frac{2(K + \tilde{K})^\mu (K + \tilde{K})^\nu}{(K + \tilde{K})^2} + \frac{2\tilde{K}^\mu K^\nu}{K^2} \\ \tilde{p}_{16} &= x_{6,12} p_1 \\ \tilde{p}_{j=3,4,5}^\mu &= \Lambda_\nu^\mu p_j^\nu \end{aligned} \quad (\text{E.6})$$

L'élément de matrice des corrélations de spin est diagonal dans ce cas, et l'on obtient seulement une fonction en facteur :

$$V^{q_1 g_6, \bar{q}_2} = 8\pi\alpha_s \mu^{2\varepsilon} C_F \left[ \frac{2}{1 - x_{6,12}} - (1 + x_{6,12}) - \varepsilon(1 - x_{6,12}) \right] \quad (\text{E.7})$$

Le dipôle a pour expression :

$$\mathcal{D}^{q_1 g_6, \bar{q}_2} = C_0 \left( 1 - \frac{T_R C_A}{C_F} \right) \frac{1}{2p_1 \cdot p_6} \frac{1}{x_{6,12}} V^{q_1 g_6, \bar{q}_2} |\mathcal{M}_{q\bar{q}}(\tilde{1}\bar{6}, 2; \bar{3}, \bar{4}, \bar{5})|^2 \quad (\text{E.8})$$

où l'on peut prendre la limite quand  $\varepsilon$  tend vers 0.

Les autres dipôles sont obtenus par échange des moments des partons :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^{q_1 g_5, \bar{q}_2} &= \mathcal{D}^{q_1 g_6, \bar{q}_2} (5 \leftrightarrow 6) \\ \mathcal{D}^{\bar{q}_2 g_6, q_1} &= \mathcal{D}^{q_1 g_6, \bar{q}_2} (1 \leftrightarrow 2) \\ \mathcal{D}^{q_1 g_6, \bar{q}_2} &= \mathcal{D}^{q_1 g_6, \bar{q}_2} (1 \leftrightarrow 2, 5 \leftrightarrow 6) \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

## E.2 DIPÔLES DE LA RÉACTION $q_1\bar{q}_2 \rightarrow VVq_5\bar{q}_6$

On rappelle que les dipôles de soustraction à évaluer sont les suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\bar{q}_6q_5}^{q_1} &, \quad \mathcal{D}_{\bar{q}_6}^{q_1q_5} \\ \mathcal{D}_{q_5\bar{q}_6}^{\bar{q}_2} &, \quad \mathcal{D}_{q_5}^{\bar{q}_2\bar{q}_6} \end{aligned} \quad (\text{E.10})$$

### E.2.1 Dipôle $\mathcal{D}_{\bar{q}_6q_5}^{q_1}$

La paire quark anti-quark de moments respectifs  $p_5$  et  $p_6$  est émise à partir d'un gluon, et le quark entrant de moment  $p_1$  est le parton spectateur. On a besoin des variables cinématiques suivantes pour définir le dipôle :

$$\begin{aligned} \tilde{z}_5 &= \frac{p_1 \cdot p_5}{p_2 \cdot p_6 + p_1 \cdot p_5} \\ \tilde{z}_6 &= \frac{p_1 \cdot p_6}{p_1 \cdot p_6 + p_1 \cdot p_5} \\ x_{56,1} &= \frac{p_1 \cdot p_5 + p_1 \cdot p_6 - p_5 \cdot p_6}{p_1 \cdot p_5 + p_1 \cdot p_6} \\ \tilde{p}_1 &= x_{56,1} p_1 \\ \tilde{p}_{56} &= p_5 + p_6 - (1 - x_{56,1}) p_1 \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

Par ailleurs, on a besoin de l'amplitude de Born non contractée avec le vecteur de polarisation du gluon, que l'on note :

$$\langle \lambda_3, \lambda_4, \mu_5; \lambda_1, \lambda_2 | 3, 4, \tilde{5}\tilde{6}; \tilde{1}, 2 \rangle = \langle 2^{\lambda_2} | \Gamma(\varepsilon_3^{\lambda_3*}, \varepsilon_4^{\lambda_4*}, \mu_5) | 1^{\lambda_1} \rangle \quad (\text{E.12})$$

afin de définir le tenseur suivant :

$$T_{q\bar{q}}^{\mu\nu}(\tilde{1}, 2; 3, 4, \tilde{5}\tilde{6}) = \langle \lambda_3, \lambda_4, \mu; \lambda_1, \lambda_2 | 3, 4, \tilde{5}\tilde{6}; \tilde{1}, 2 \rangle \langle 3, 4, \tilde{5}\tilde{6}; \tilde{1}, 2 | \lambda_3, \lambda_4, \nu; \lambda_1, \lambda_2 \rangle \quad (\text{E.13})$$

Ce dernier est contracté avec l'élément de matrice des corrélations de spin :

$$\langle \nu | \mathbf{V}_{\bar{q}_6q_5}^{q_1} | \mu \rangle = 8\pi\alpha_s \mu^{2\varepsilon} T_R \left[ -g^{\mu\nu} - \frac{2}{p_5 \cdot p_6} (\tilde{z}_5 p_5^\mu - \tilde{z}_6 p_6^\mu) (\tilde{z}_5 p_5^\nu - \tilde{z}_6 p_6^\nu) \right] \quad (\text{E.14})$$

L'expression du dipôle est donc :

$$\mathcal{D}_{\bar{q}_6q_5}^{q_1} = \frac{C_0}{2} \frac{1}{2p_5 \cdot p_6} \frac{1}{x_{56,1}} \langle \mu | \mathbf{V}_{\bar{q}_6q_5}^{q_1} | \nu \rangle T_{q\bar{q}}^{\mu\nu}(\tilde{1}, 2; 3, 4, \tilde{5}\tilde{6}) \quad (\text{E.15})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{q_5\bar{q}_6}^{\bar{q}_2} &= \mathcal{D}_{g_5g_6}^{q_1} (1 \leftrightarrow 2) \\ &= \frac{C_0}{2} \frac{1}{2p_5 \cdot p_6} \frac{1}{x_{56,2}} \langle \mu | \mathbf{V}_{q_5\bar{q}_6}^{\bar{q}_2} | \nu \rangle T_{q\bar{q}}^{\mu\nu}(1, \tilde{2}; 3, 4, \tilde{5}\tilde{6}) \end{aligned} \quad (\text{E.16})$$

### E.2.2 Dipôle $\mathcal{D}_{\bar{q}_6}^{q_1 q_5}$

Le quark de moment  $p_5$  est émis à partir du quark entrant, et l'anti-quark sortant est le parton spectateur. Les variables cinématiques sont :

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_5 &= \frac{p_1 \cdot p_5}{p_1 \cdot p_6 + p_1 \cdot p_5} \\
x_{56,1} &= \frac{p_1 \cdot p_5 + p_1 \cdot p_6 - p_5 \cdot p_6}{p_1 \cdot p_5 + p_1 \cdot p_6} \\
\tilde{p}_{15} &= x_{56,1} p_1 \\
\tilde{p}_6 &= p_5 + p_6 - (1 - x_{56,1}) p_1
\end{aligned} \tag{E.17}$$

L'élément de matrice des corrélations de spin est :

$$\begin{aligned}
\langle \mu | V_{\bar{q}_6}^{q_1 q_5} | \nu \rangle &= 8\pi\alpha_s \mu^{2\varepsilon} C_F \left[ -g^{\mu\nu} x_{56,1} + \frac{1 - x_{56,1}}{x_{56,1}} \frac{2u_5(1 - u_5)}{p_5 \cdot p_6} \right. \\
&\quad \left. \times \left( \frac{p_5^\mu}{u_5} - \frac{p_6^\mu}{1 - u_5} \right) \left( \frac{p_5^\nu}{u_5} - \frac{p_6^\nu}{1 - u_5} \right) \right]
\end{aligned} \tag{E.18}$$

lequel est contracté avec le tenseur suivant :

$$T_{g\bar{q}}^{\mu\nu}(\tilde{1}\tilde{5}, 2; 3, 4, \tilde{6}) = \langle \lambda_3, \lambda_4, \lambda_6; \mu, \lambda_2 | 3, 4, \tilde{6}; \tilde{1}\tilde{5}, 2 \rangle \langle 3, 4, \tilde{6}; \tilde{1}\tilde{5}, 2 | \lambda_3, \lambda_4, \lambda_6; \nu, \lambda_2 \rangle \tag{E.19}$$

L'expression du dipôle est donc :

$$\mathcal{D}_{\bar{q}_6}^{q_1 q_5} = \frac{C_0}{2} \frac{1}{2p_1 \cdot p_5} \frac{1}{x_{56,1}} \langle \mu | \mathbf{V}_{\bar{q}_6}^{q_1 q_5} | \nu \rangle T_{g\bar{q}}^{\mu\nu}(\tilde{1}\tilde{5}, 2; 3, 4, \tilde{6}) \tag{E.20}$$

et on en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{q_5}^{\tilde{q}_2 \tilde{q}_6} &= \mathcal{D}_{\bar{q}_6}^{q_1 q_5} (1 \leftrightarrow 2, 5 \leftrightarrow 6) \\
&= \frac{C_0}{2} \frac{1}{2p_2 \cdot p_6} \frac{1}{x_{56,2}} \langle \mu | \mathbf{V}_{q_5}^{\tilde{q}_2 \tilde{q}_6} | \nu \rangle T_{qg}^{\mu\nu}(1, \tilde{2}\tilde{6}, 2; 3, 4, \tilde{5})
\end{aligned} \tag{E.21}$$

### E.3 DIPÔLES DE LA RÉACTION $q_1 q_2 \rightarrow VV q_5 q_6$

Les dipôles dont nous avons besoin pour approximer les éléments de matrice de la réaction  $qq \rightarrow VVqq$  dans la limite colinéaire sont les suivants :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{q_1 q_6, q_2} \quad , \quad \mathcal{D}^{q_2 q_6, q_1} \\
\mathcal{D}^{q_1 q_5, q_2} \quad , \quad \mathcal{D}^{q_2 q_5, q_1}
\end{aligned} \tag{E.22}$$

Nous avons seulement besoin de calculer l'expression analytique du premier dipôle. En effet, tous les autres dipôles sont obtenus grâce à une permutation sur les moments des partons.

**E.3.1 Dipôle  $\mathcal{D}^{q_1 q_6, q_2}$** 

Le quark de moment  $p_6$  est émis à partir du quark entrant, et l'autre quark entrant est le parton spectateur. Les variables cinématiques sont :

$$\begin{aligned}
x_{6,12} &= \frac{p_1 \cdot p_2 - p_2 \cdot p_6 - p_1 \cdot p_6}{p_1 \cdot p_2} \\
\tilde{p}_{16} &= x_{6,12} p_1 \\
K^\mu &= p_1 + p_2 - p_6 \\
\tilde{K}^\mu &= \tilde{p}_{16} + p_2 \\
\Lambda^{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - \frac{2(K + \tilde{K})^\mu (K + \tilde{K})^\nu}{(K + \tilde{K})^2} + \frac{2\tilde{K}^\mu K^\nu}{K^2} \\
\tilde{p}_{j=3,4,5}^\mu &= \Lambda_\nu^\mu p_j^\nu
\end{aligned} \tag{E.23}$$

On utilise l'amplitude de Born non contractée avec le vecteur de polarisation du gluon, pour définir le tenseur :

$$T_{gq}^{\mu\nu}(\tilde{1}\tilde{6}, 2; \tilde{3}, \tilde{4}, \tilde{5}) = \langle \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5; \mu, \lambda_2 | \tilde{3}, \tilde{4}, \tilde{5}; \tilde{1}\tilde{6}, 2 \rangle \langle \tilde{3}, \tilde{4}, \tilde{5}; \tilde{1}\tilde{6}, 2 | \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5; \nu, \lambda_2 \rangle \tag{E.24}$$

lequel est contracté avec l'élément de matrice des corrélations de spin :

$$\begin{aligned}
\langle \nu | \mathbf{V}^{q_1 q_6, q_2} | \mu \rangle &= 8\pi\alpha_s \mu^{2\varepsilon} C_F \left[ -g^{\mu\nu} x_{6,12} + \frac{1 - x_{6,12}}{x_{6,12}} \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot p_6 p_2 \cdot p_6} \right. \\
&\quad \left. \times \left( p_6^\mu - \frac{p_1 \cdot p_6}{p_1 \cdot p_2} p_2^\mu \right) \left( p_6^\nu - \frac{p_1 \cdot p_6}{p_1 \cdot p_2} p_2^\nu \right) \right]
\end{aligned} \tag{E.25}$$

L'expression du dipôle est donc :

$$\mathcal{D}^{q_1 q_6, q_2} = \frac{C_0}{2} \frac{1}{2p_1 \cdot p_6} \frac{1}{x_{12,6}} \langle \mu | \mathbf{V}^{q_1 q_6, q_2} | \nu \rangle T_{gq}^{\mu\nu}(\tilde{1}\tilde{6}, 2; \tilde{3}, \tilde{4}, \tilde{5}) \tag{E.26}$$

et on en déduit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{q_1 q_5, q_2} &= \mathcal{D}^{q_1 q_6, q_2} (5 \leftrightarrow 6) \\
\mathcal{D}^{q_2 q_6, q_1} &= \mathcal{D}^{q_1 q_6, q_2} (1 \leftrightarrow 2) \\
\mathcal{D}^{q_2 q_5, q_1} &= \mathcal{D}^{q_1 q_6, q_2} (1 \leftrightarrow 2, 5 \leftrightarrow 6)
\end{aligned} \tag{E.27}$$

**E.4 DIPÔLES DE LA RÉACTION  $g_1 q_2 \rightarrow VV q_5 g_6$** 

Après la moyenne sur les états de couleur initiaux et la somme sur les états de couleur finaux, on trouve un facteur de couleur égal à  $C_0 = 1/(2N)$  pour l'amplitude à l'arbre. Les éléments de matrice de cette réaction partonique sont approximés par les dipôles de soustraction suivants :

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{q_5 g_6}^{g_1}, \quad \mathcal{D}_{g_6}^{g_1 q_5}, \quad \mathcal{D}^{g_1 q_5, q_2} \\
\mathcal{D}_{q_5 g_6}^{q_2}, \quad \mathcal{D}_{g_6}^{q_2 q_5}, \quad \mathcal{D}^{q_2 q_5, g_1} \\
\mathcal{D}_{q_5}^{g_1 g_6}, \quad \mathcal{D}^{g_1 g_6, q_2} \\
\mathcal{D}_{q_5}^{q_2 g_6}, \quad \mathcal{D}^{q_2 g_6, g_1}
\end{aligned} \tag{E.28}$$

Puisque l'on ne peut pas trouver deux quarks dans l'état initial, les deux dipôles  $\mathcal{D}_{g_6}^{q_2 q_5}$  et  $\mathcal{D}^{q_2 q_5, g_1}$  ne sont pas nécessaires.

#### E.4.1 Dipôle $\mathcal{D}_{q_5 g_6}^{g_1}$

Le gluon de moment  $p_6$  est émis à partir du quark sortant, et le gluon entrant est le parton spectateur. Les variables cinématiques sont :

$$\begin{aligned}\tilde{z}_5 &= \frac{p_1 \cdot p_5}{p_1 \cdot p_6 + p_1 \cdot p_5} \\ x_{56,1} &= \frac{p_1 \cdot p_5 + p_1 \cdot p_6 - p_5 \cdot p_6}{p_1 \cdot p_5 + p_1 \cdot p_6} \\ \tilde{p}_1 &= x_{56,1} p_1 \\ \tilde{p}_{56} &= p_5 + p_6 - (1 - x_{56,1}) p_1\end{aligned}\quad (\text{E.29})$$

L'élément de matrice des corrélations de spin est diagonal dans ce cas, et l'on obtient seulement une fonction en facteur :

$$V_{q_5 g_6}^{g_1} = 8\pi\alpha_s \mu^{2\epsilon} C_F \left[ \frac{2}{1 - \tilde{z}_5 + (1 - x_{56,1})} - (1 + \tilde{z}_5) - \epsilon(1 - \tilde{z}_5) \right] \quad (\text{E.30})$$

L'expression du dipôle est donc :

$$\mathcal{D}_{q_5 g_6}^{g_1} = \frac{C_0 C_A}{2 C_F} \frac{1}{2p_5 \cdot p_6} \frac{1}{x_{56,1}} V_{q_5 g_6}^{g_1} |\mathcal{M}_{gq}(\tilde{1}, 2; 3, 4, \tilde{5}6)|^2 \quad (\text{E.31})$$

#### E.4.2 Dipôle $\mathcal{D}_{q_5 g_6}^{q_2}$

Le gluon de moment  $p_6$  est émis à partir du quark sortant, et le quark entrant est le parton spectateur. Les variables cinématiques sont :

$$\begin{aligned}\tilde{z}_5 &= \frac{p_2 \cdot p_5}{p_2 \cdot p_6 + p_2 \cdot p_5} \\ x_{56,2} &= \frac{p_2 \cdot p_5 + p_2 \cdot p_6 - p_5 \cdot p_6}{p_2 \cdot p_5 + p_2 \cdot p_6} \\ \tilde{p}_2 &= x_{56,2} p_2 \\ \tilde{p}_{56} &= p_5 + p_6 - (1 - x_{56,2}) p_2\end{aligned}\quad (\text{E.32})$$

L'élément de matrice des corrélations de spin est diagonal dans ce cas, et l'on obtient seulement une fonction en facteur :

$$V_{q_5 g_6}^{q_2} = 8\pi\alpha_s \mu^{2\epsilon} C_F \left[ \frac{2}{1 - \tilde{z}_5 + (1 - x_{56,2})} - (1 + \tilde{z}_5) - \epsilon(1 - \tilde{z}_5) \right] \quad (\text{E.33})$$

L'expression du dipôle est donc :

$$\mathcal{D}_{q_5 g_6}^{q_2} = \frac{C_0 (C_F - T_R C_A)}{C_F} \frac{1}{2p_5 \cdot p_6} \frac{1}{x_{56,2}} V_{q_5 g_6}^{q_2} |\mathcal{M}_{gq}(1, \tilde{2}; 3, 4, \tilde{5}6)|^2 \quad (\text{E.34})$$

**E.4.3 Dipôle  $\mathcal{D}_{q_5}^{g_1 g_6}$** 

Le gluon de moment  $p_6$  est émis à partir du gluon entrant, et le quark sortant est le parton spectateur. Les variables cinématiques sont :

$$\begin{aligned} u_6 &= \frac{p_1 \cdot p_6}{p_1 \cdot p_6 + p_1 \cdot p_5} \\ x_{56,1} &= \frac{p_1 \cdot p_5 + p_1 \cdot p_6 - p_5 \cdot p_6}{p_1 \cdot p_5 + p_1 \cdot p_6} \\ \tilde{p}_{16} &= x_{56,1} p_1 \\ \tilde{p}_5 &= p_5 + p_6 - (1 - x_{56,1}) p_1 \end{aligned} \quad (\text{E.35})$$

On utilise l'amplitude de Born non contractée avec le vecteur de polarisation du gluon :

$$\langle \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5; \mu, \lambda_2 | 3, 4, \tilde{5}; \tilde{16}, 2 \rangle = \langle 5^{\lambda_5} | \Gamma(\varepsilon_3^{\lambda_3 *}, \varepsilon_4^{\lambda_4 *}, \mu) | 2^{\lambda_2} \rangle \quad (\text{E.36})$$

pour définir le tenseur :

$$T_{gq}^{\mu\nu}(\tilde{16}, 2; 3, 4, \tilde{5}) = \langle \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5; \mu, \lambda_2 | 3, 4, \tilde{5}; \tilde{16}, 2 \rangle \langle 3, 4, \tilde{56}; \tilde{1}, 2 | \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5; \nu, \lambda_2 \rangle \quad (\text{E.37})$$

lequel est contracté avec l'élément de matrice des corrélations de spin :

$$\begin{aligned} \langle \nu | \mathbf{V}_{q_5}^{g_1 g_6} | \mu \rangle &= 16\pi\alpha_s \mu^{2\varepsilon} C_A \left[ -g^{\mu\nu} \left( \frac{1}{1 - x_{56,1} + u_6} - 1 + x_{56,1}(1 - x_{56,1}) \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \varepsilon) \frac{1 - x_{56,1}}{x_{56,1}} \frac{u_6(1 - u_6)}{p_5 \cdot p_6} \left( \frac{p_6^\mu}{u_6} - \frac{p_5^\mu}{1 - u_6} \right) \left( \frac{p_6^\nu}{u_6} - \frac{p_5^\nu}{1 - u_6} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{E.38})$$

L'expression du dipôle est donc :

$$\mathcal{D}_{q_1}^{g_5 g_6} = \frac{C_0}{2} \frac{1}{2p_1 \cdot p_6} \frac{1}{x_{56,1}} \langle \mu | \mathbf{V}_{q_5}^{g_5 g_6} | \nu \rangle T_{gq}^{\mu\nu}(\tilde{16}, 2; 3, 4, \tilde{5}) \quad (\text{E.39})$$

**E.4.4 Dipôle  $\mathcal{D}_{g_6}^{g_1 q_5}$** 

Le quark de moment  $p_5$  est émis à partir du gluon entrant, et le gluon sortant est le parton spectateur. Les variables cinématiques sont :

$$\begin{aligned} x_{56,1} &= \frac{p_1 \cdot p_5 + p_1 \cdot p_6 - p_5 \cdot p_6}{p_1 \cdot p_5 + p_1 \cdot p_6} \\ \tilde{p}_{15} &= x_{56,1} p_1 \\ \tilde{p}_6 &= p_5 + p_6 - (1 - x_{56,1}) p_1 \end{aligned} \quad (\text{E.40})$$

L'élément de matrice des corrélations de spin est diagonal dans ce cas, et l'on obtient seulement une fonction en facteur :

$$V_{g_6}^{g_1 q_5} = 8\pi\alpha_s \mu^{2\varepsilon} T_R \left[ 1 - \varepsilon - 2x_{56,1}(1 - x_{56,1}) \right] \quad (\text{E.41})$$

L'expression du dipôle est donc :

$$\mathcal{D}_{g_6}^{g_1 q_5} = \frac{C_0 C_A}{2 C_F} \frac{1}{2p_1 \cdot p_5} \frac{1}{x_{56,1}} V_{g_6}^{g_1 q_5} |\mathcal{M}_{\bar{q}q}(\tilde{15}, 2; 3, 4, \tilde{6})|^2 \quad (\text{E.42})$$

#### E.4.5 Dipôle $\mathcal{D}_{q_5}^{q_2 g_6}$

Le gluon de moment  $p_6$  est émis à partir du quark entrant, et le quark sortant est le parton spectateur. Les variables cinématiques sont :

$$\begin{aligned}\tilde{u}_6 &= \frac{p_2 \cdot p_6}{p_2 \cdot p_6 + p_2 \cdot p_5} \\ x_{56,2} &= \frac{p_2 \cdot p_5 + p_2 \cdot p_6 - p_5 \cdot p_6}{p_2 \cdot p_5 + p_2 \cdot p_6} \\ \tilde{p}_{26} &= x_{56,2} p_2 \\ \tilde{p}_5 &= p_5 + p_6 - (1 - x_{56,2}) p_2\end{aligned}\quad (\text{E.43})$$

L'élément de matrice des corrélations de spin est diagonal dans ce cas, et l'on obtient seulement une fonction en facteur :

$$V_{q_5}^{q_2 g_6} = 8\pi\alpha_s \mu^{2\varepsilon} C_F \left[ \frac{2}{1 - x_{56,2} + u_6} - (1 + x_{56,2}) - \varepsilon(1 - x_{56,2}) \right] \quad (\text{E.44})$$

L'expression du dipôle est donc :

$$\mathcal{D}_{q_5}^{q_2 g_6} = \frac{C_0 (C_F - T_R C_A)}{C_F} \frac{1}{2p_2 \cdot p_6} \frac{1}{x_{56,2}} V_{q_5}^{q_2 g_6} |\mathcal{M}_{gq}(1, \tilde{2}; 3, 4, \tilde{5})|^2 \quad (\text{E.45})$$

#### E.4.6 Dipôle $\mathcal{D}^{g_1 g_6, q_2}$

Le gluon de moment  $p_6$  est émis à partir du gluon entrant, et le quark entrant est le parton spectateur. Les variables cinématiques sont :

$$\begin{aligned}x_{6,12} &= \frac{p_1 \cdot p_2 - p_2 \cdot p_6 - p_1 \cdot p_6}{p_1 \cdot p_2} \\ K^\mu &= p_1 + p_2 - p_6 \\ \tilde{K}^\mu &= \tilde{p}_{16} + p_2 \\ \Lambda^{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - \frac{2(K + \tilde{K})^\mu (K + \tilde{K})^\nu}{(K + \tilde{K})^2} + \frac{2\tilde{K}^\mu K^\nu}{K^2} \\ \tilde{p}_{16} &= x_{6,12} p_1 \\ \tilde{p}_{j=3,4,5}^\mu &= \Lambda_\nu^\mu p_j^\nu\end{aligned}\quad (\text{E.46})$$

On utilise l'amplitude de Born non contractée avec le vecteur de polarisation du gluon, pour définir le tenseur :

$$T_{gq}^{\mu\nu}(\tilde{1}, 2; \tilde{3}, \tilde{4}, \tilde{5}) = \langle \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5; \mu, \lambda_2 | \tilde{3}, \tilde{4}, \tilde{5}; \tilde{1}, 2 \rangle \langle \tilde{3}, \tilde{4}, \tilde{5}; \tilde{1}, 2 | \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5; \nu, \lambda_2 \rangle \quad (\text{E.47})$$

lequel est contracté avec l'élément de matrice des corrélations de spin :

$$\begin{aligned}\langle \nu | \mathbf{V}^{g_1 g_6, q_2} | \mu \rangle &= 16\pi\alpha_s \mu^{2\varepsilon} C_A \left[ -g^{\mu\nu} \left( \frac{x_{6,12}}{1 - x_{6,12}} + x_{6,12}(1 - x_{6,12}) \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \varepsilon) \frac{1 - x_{6,12}}{x_{6,12}} \frac{p_1 \cdot p_2}{p_1 \cdot p_6 p_2 \cdot p_6} \right. \\ &\quad \left. \times \left( p_6^\mu - \frac{p_1 \cdot p_6}{p_1 \cdot p_2} p_2^\mu \right) \left( p_6^\nu - \frac{p_1 \cdot p_6}{p_1 \cdot p_2} p_2^\nu \right) \right]\end{aligned}\quad (\text{E.48})$$

L'expression du dipôle est donc :

$$\mathcal{D}^{g_1 g_6, q_2} = \frac{C_0}{2} \frac{1}{2p_1 \cdot p_6} \frac{1}{x_{12,6}} \langle \mu | \mathbf{V}^{g_1 g_6, q_2} | \nu \rangle T_{gq}^{\mu\nu}(\tilde{1}\tilde{6}, 2; \tilde{3}, \tilde{4}, \tilde{5}) \quad (\text{E.49})$$

#### E.4.7 Dipôle $\mathcal{D}^{q_2 g_6, g_1}$

Le gluon de moment  $p_6$  est émis à partir du quark entrant, et le gluon entrant est le parton spectateur. Les variables cinématiques sont :

$$\begin{aligned} x_{6,12} &= \frac{p_1 \cdot p_2 - p_2 \cdot p_6 - p_1 \cdot p_6}{p_1 \cdot p_2} \\ K^\mu &= p_1 + p_2 - p_6 \\ \tilde{K}^\mu &= \tilde{p}_{26} + p_1 \\ \Lambda^{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - \frac{2(K + \tilde{K})^\mu (K + \tilde{K})^\nu}{(K + \tilde{K})^2} + \frac{2\tilde{K}^\mu K^\nu}{K^2} \\ \tilde{p}_{26} &= x_{6,12} p_2 \\ \tilde{p}_{j=3,4,5}^\mu &= \Lambda_\nu^\mu p_j^\nu \end{aligned} \quad (\text{E.50})$$

L'élément de matrice des corrélations de spin est diagonal dans ce cas, et l'on obtient seulement une fonction en facteur :

$$V^{q_2 g_6, g_1} = 8\pi\alpha_s \mu^{2\varepsilon} C_F \left[ \frac{2}{1 - x_{6,12}} - (1 + x_{6,12}) - \varepsilon(1 - x_{6,12}) \right] \quad (\text{E.51})$$

L'expression du dipôle est donc :

$$\mathcal{D}^{q_2 g_6, g_1} = \frac{C_0 C_A}{2 C_F} \frac{1}{2p_2 \cdot p_6} \frac{1}{x_{6,12}} V^{q_2 g_6, g_1} |\mathcal{M}_{gq}(1, \tilde{2}\tilde{6}; \tilde{3}, \tilde{4}, \tilde{5})|^2 \quad (\text{E.52})$$

#### E.4.8 Dipôle $\mathcal{D}^{g_1 q_5, q_2}$

Le quark de moment  $p_5$  est émis à partir du gluon entrant, et le quark entrant est le parton spectateur. Les variables cinématiques sont :

$$\begin{aligned} x_{5,12} &= \frac{p_1 \cdot p_2 - p_2 \cdot p_5 - p_1 \cdot p_5}{p_1 \cdot p_2} \\ K^\mu &= p_1 + p_2 - p_5 \\ \tilde{K}^\mu &= \tilde{p}_{25} + p_1 \\ \Lambda^{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} - \frac{2(K + \tilde{K})^\mu (K + \tilde{K})^\nu}{(K + \tilde{K})^2} + \frac{2\tilde{K}^\mu K^\nu}{K^2} \\ \tilde{p}_{15} &= x_{5,12} p_1 \\ \tilde{p}_{j=3,4,5}^\mu &= \Lambda_\nu^\mu p_j^\nu \end{aligned} \quad (\text{E.53})$$

L'élément de matrice des corrélations de spin est diagonal dans ce cas, et l'on obtient seulement une fonction en facteur :

$$V^{g_1 q_5, q_2} = 8\pi\alpha_s \mu^{2\varepsilon} T_R \left[ 1 - \varepsilon - 2x_{5,12}(1 - x_{5,12}) \right] \quad (\text{E.54})$$



L'expression du dipôle est donc :

$$\mathcal{D}^{g_1 q_5, q_2} = \frac{C_0 (C_F - T_R C_A)}{C_F} \frac{1}{2p_1 \cdot p_5} \frac{1}{x_{5,12}} V^{g_1 q_5, q_2} |\mathcal{M}_{\bar{q}q}(\tilde{1}, 2; \tilde{3}, \tilde{4}, \tilde{5})|^2 \quad (\text{E.55})$$

Enfin, les dipôles des réactions partoniques  $g\bar{q} \rightarrow VV\bar{q}g$  et  $\bar{q}\bar{q} \rightarrow VV\bar{q}\bar{q}$  peuvent être obtenus à partir de ceux de  $gq \rightarrow VVqg$  et  $qq \rightarrow VVqq$  respectivement.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] W.-M. Yao et al. (Particle Data Group), *J. Phys. G* 33, 1 (2006) and 2007 partial update for the 2008 edition (Cité pages 5, 14, 51, 53 et 89.)
- [2] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*, McGraw-Hill Book Compagny, 1965 (Cité page 6.)
- [3] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Editions, 1980
- [4] M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Westview Press, 1995
- [5] R. K. Ellis, W. J. Stirling and B. R Webber, *QCD and Collider Physics*, Cambridge monographs on particle physics, nuclear physics and cosmology, 1996
- [6] I. J. R. Aitchison, A. J. G. Hey, *Gauge Theories in Particle Physics, Volume II : QCD and the Electroweak Theory*, Institute of Physics Publishing, 2004
- [7] E. Leader, E. Predazzi, *An introduction to gauge theories and modern particle physics*, Cambridge University Press, 1996
- [8] T. Muta, *Foundations of Quantum Chromodynamics*, World Scientific, 1987 (Cité page 6.)
- [9] D.J. Gross and F. Wilczek, *Phys. Rev. D*9 (1974) 980 (Cité page 13.)
- [10] H. Georgi and H.D. Politzer, *Phys. Rev. D*9 (1974) 416 (Cité page 13.)
- [11] L. N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* 20 (1975) 95 ;  
V. N. Gribov and L. N. Lipatov, *Sov. J. Nucl. Phys.* 15 (1972) 438 ;  
G. Altarelli and G. Parisi, *Nucl. Phys. B*126 (1977) 298 ;  
Yu. L. Dokshitzer, *Sov.Phys. JETP* 46 (1977) 641 (Cité page 15.)
- [12] P. W. Higgs, *Phys. Rev. Lett.* 12 (1964) 132 and *Phys. Rev.* 145 (1966) 1156 ;  
F. Englert and R. Brout, *Phys. Rev. Lett.* 13 (1964) 321 ;  
G. S. Guralnik, C. R. Hagen and T.W. Kibble, *Phys. Rev. Lett.* 13 (1964) 585. (Cité page 19.)
- [13] LEP Electroweak Working Group, [http ://lepewwg.web.cern.ch/LEPEWWG](http://lepewwg.web.cern.ch/LEPEWWG) (Cité page 23.)
- [14] V. Buescher, K. Jakobs, *Int.J.Mod.Phys. A*20 (2005) 2523-2602 [arXiv :hep-ph/0504099]. (Cité pages viii et 24.)

- [15] S. Catani *et al.*, arXiv :hep-ph/0005025. (Cité page 24.)
- [16] P. D. Draggiotis, R. H. P. Kleiss and C. G. Papadopoulos, Eur. Phys. J. C **24** (2002) 447 [arXiv :hep-ph/0202201]. (Cité page 24.)
- [17] W. Beenakker, S. Dittmaier, M. Krämer, B. Plümper, M. Spira and P.M. Zerwas, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 201805 ; W. Beenakker, S. Dittmaier, M. Krämer, B. Plümper, M. Spira and P.M. Zerwas, Nucl. Phys. B **653** (2003) 151, [arXiv :hep-ph/0211352] (Cité pages viii et 25.)
- [18] L. Reina, S. Dawson, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 201804 ; L. Reina, S. Dawson, D. Wackerroth, Phys. Rev. D **65** (2002) 053017 ; S. Dawson, L.H. Orr, L. Reina, D. Wackerroth, Phys. Rev. D **67** (2003) 071503 (Cité pages viii et 25.)
- [19] W. T. Giele and E. W. N. Glover, Phys. Rev. D **46** (1992) 1980 ; W. T. Giele, E. W. N. Glover and D. A. Kosower, Nucl. Phys. B **403** (1993) 633 [hep-ph/9302225]. (Cité page 26.)
- [20] S. Frixione, Z. Kunszt and A. Signer, Nucl. Phys. B **467** (1996) 399 [hep-ph/9512328]. (Cité page 26.)
- [21] Z. Nagy and Z. Trócsányi, Nucl. Phys. B **486** (1997) 189 [hep-ph/9610498]. (Cité page 26.)
- [22] F. Bloch and A. Nordsieck, Phys. Rev. **52** (1937) 54. (Cité page 70.)
- [23] T. Kinoshita, J. Math. Phys. **3** (1962) 650.  
T. D. Lee and M. Nauenberg, Phys. Rev. **133B** (1964) 1549. (Cité page 70.)
- [24] S. Catani and M. H. Seymour, Nucl. Phys. B **485** (1997) 291 [Erratum-ibid. B **510** (1997) 291] [hep-ph/9605323]. (Cité pages 26 et 74.)
- [25] T. Hahn, Comput. Phys. Commun. **140** (2001) 418 [hep-ph/0012260]. (Cité page 26.)
- [26] G. Belanger, F. Boudjema, J. Fujimoto, T. Ishikawa, T. Kaneko, K. Kato and Y. Shimizu, Phys. Rept. **430** (2006) 117 [hep-ph/0308080]. (Cité page 26.)
- [27] T. Kaneko, Comput. Phys. Commun. **92** (1995) 127 [hep-th/9408107]. (Cité page 26.)
- [28] P. Nogueira, J. Comput. Phys. **105** (1993) 279. (Cité page 26.)
- [29] MadGraph/MadEvent v4 : The New Web Generation J. Alwall, P. Demin, S. de Vischer, R. Frederix, M. Herquet, F. Maltoni, T. Plehn, D. L. Rainwater and T. Stelzer JHEP **0709** :028,2007, [arXiv :0706.2334] (Cité pages 26 et 86.)
- [30] Z. Bern, L. J. Dixon and D. A. Kosower, Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 2677 [hep-ph/9302280]. (Cité page 26.)
- [31] Z. Kunszt, A. Signer and Z. Trocsanyi, Phys. Lett. B **336** (1994) 529 [hep-ph/9405386].
- [32] W. B. Kilgore and W. T. Giele, Phys. Rev. D **55** (1997) 7183 [hep-ph/9610433].
- [33] J. M. Campbell, E. W. N. Glover and D. J. Miller, Phys. Lett. B **409** (1997) 503 [hep-ph/9706297].

- [34] Z. Bern, L. J. Dixon and D. A. Kosower, Nucl. Phys. B **513** (1998) 3 [hep-ph/9708239].
- [35] L. Reina and S. Dawson, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 201804 [hep-ph/0107101].
- [36] W. Beenakker, S. Dittmaier, M. Krämer, B. Plümper, M. Spira and P. M. Zerwas, Nucl. Phys. B **653** (2003) 151 [hep-ph/0211352].
- [37] G. Bélanger, F. Boudjema, J. Fujimoto, T. Ishikawa, T. Kaneko, K. Kato and Y. Shimizu, Phys. Lett. B **559** (2003) 252 [hep-ph/0212261].
- [38] A. Denner, S. Dittmaier, M. Roth and M. M. Weber, Nucl. Phys. B **660** (2003) 289 [hep-ph/0302198].
- [39] G. Bélanger *et al.*, Phys. Lett. B **576** (2003) 152 [hep-ph/0309010].
- [40] G. Bélanger *et al.*, Phys. Lett. B **571** (2003) 163 [hep-ph/0307029].
- [41] A. Denner, S. Dittmaier, M. Roth and M. M. Weber, Phys. Lett. B **575** (2003) 290 [hep-ph/0307193].
- [42] A. Denner, S. Dittmaier, M. Roth and M. M. Weber, Phys. Lett. B **560** (2003) 196 [hep-ph/0301189].
- [43] H. Chen, W. G. Ma, R. Y. Zhang, P. J. Zhou, H. S. Hou and Y. B. Sun, Nucl. Phys. B **683** (2004) 196 [hep-ph/0309106].
- [44] A. Denner, S. Dittmaier, M. Roth and M. M. Weber, Nucl. Phys. B **680** (2004) 85 [hep-ph/0309274].
- [45] Z. Nagy, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 122003 [hep-ph/0110315].
- [46] Z. Nagy, Phys. Rev. D **68** (2003) 094002 [hep-ph/0307268].
- [47] J. Campbell and R. K. Ellis, Phys. Rev. D **65** (2002) 113007 [hep-ph/0202176].
- [48] Y. Yasui, Phys. Rev. D **66** (2002) 094012 [hep-ph/0203163].
- [49] V. Del Duca, W. Kilgore, C. Oleari, C. Schmidt and D. Zeppenfeld, Nucl. Phys. B **616** (2001) 367 [hep-ph/0108030].
- [50] T. Binoth, J. P. Guillet and F. Mahmoudi, JHEP **0402** (2004) 057 [hep-ph/0312334]. (Cité pages 26 et 33.)
- [51] F. Boudjema, J. Fujimoto, T. Ishikawa, T. Kaneko, K. Kato, Y. Kurihara and Y. Shimizu, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **135** (2004) 323 [hep-ph/0407079]. (Cité page 26.)
- [52] A. Denner, S. Dittmaier, M. Roth and L. H. Wieders, Phys. Lett. B **612** (2005) 223 [hep-ph/0502063]; Nucl. Phys. B **724** (2005) 247 [hep-ph/0505042]. (Cité page 26.)
- [53] C. Buttar *et al.*, “Les Houches physics at TeV colliders 2005, standard model, QCD, EW, and Higgs working group : Summary report,” arXiv :hep-ph/0604120. (Cité page 26.)

- [54] Z. Bern *et al.* [NLO Multileg Working Group], *The NLO multileg working group : summary report of the Les Houches 2007 workshop "Physics at TeV Colliders"*, arXiv :0803.0494 [hep-ph]. (Cité pages 26, 28, 33 et 85.)
- [55] S. Dittmaier, S. Kallweit, P. Uwer, [arXiv :hep-ph/0712.3163v1] (Cité pages 28 et 85.)
- [56] J.M. Campbell, R.K. Ellis, G. Zanderighi, [arXiv :hep-ph/0710.1832v3] (Cité pages 28 et 85.)
- [57] T. Binoth, J.-P. Guillet, S. Karg, N. Kauer, G. Sanguinetti, (en cours) (Cité page 28.)
- [58] J.M. Campbell, R.K. Ellis, G. Zanderighi, JHEP 10 (2006) 028, [arXiv :hep-ph/0608194] (Cité page 28.)
- [59] M. Ciccolini, A. Denner, and S. Dittmaier, Phys. Rev. Lett. 99 (2007) 161803, [arXiv :hep-ph/0707.0381] (Cité page 28.)
- [60] M. Ciccolini, A. Denner, and S. Dittmaier, Phys. Rev. D77 (2008) 013002, [arXiv :hep-ph/0710.4749] (Cité page 28.)
- [61] A. Lazopoulos, K. Melnikov, and F. Petriello, Phys. Rev. D76 (2007) 014001, [arXiv :hep-ph/0703273] (Cité page 28.)
- [62] V. Hankele and D. Zeppenfeld, [arXiv :hep-ph/0712.3544] (Cité page 28.)
- [63] T. Binoth, G. Ossola, C. G. Papadopoulos and R. Pittau, arXiv :0804.0350 [hep-ph]. (Cité page 28.)
- [64] A. Lazopoulos, T. McElmurry, K. Melnikov and F. Petriello, arXiv :0804.2220 [hep-ph]. (Cité page 28.)
- [65] F. F. Cordero, L. Reina and D. Wackerroth, arXiv :0806.0808 [hep-ph]. (Cité page 28.)
- [66] B. Jager, C. Oleari, and D. Zeppenfeld, JHEP 07 (2006) 015, [arXiv :hep-ph/0603177] (Cité page 28.)
- [67] B. Jager, C. Oleari, and D. Zeppenfeld, Phys. Rev. D73 (2006) 113006, [arXiv :hep-ph/0604200] (Cité page 28.)
- [68] G. Bozzi, B. Jager, C. Oleari, and D. Zeppenfeld, Phys. Rev. D75 (2007) 073004, [arXiv :hep-ph/0701105] (Cité page 28.)
- [69] Z. Xu, D. H. Zhang and L. Chang, Nucl. Phys. B 291 (1987) 392 (Cité pages 31, 32 et 57.)
- [70] J. A. M. Vermaseren, [arXiv :math-ph/0010025], [http ://www.nikhef.nl/form/](http://www.nikhef.nl/form/) (Cité page 33.)
- [71] MAPLE, [http ://www.maplesoft.com](http://www.maplesoft.com) (Cité page 33.)
- [72] T. Binoth, M. Ciccolini, N. Kauer and M. Kramer, JHEP 0612 (2006) 046 [arXiv :hep-ph/0611170]. (Cité page 33.)

- [73] T. Binoth, G. Heinrich, T. Gehrmann and P. Mastrolia, Phys. Lett. B **649** (2007) 422 [arXiv :hep-ph/0703311]. (Cité page 33.)
- [74] C. Bernicot and J. P. Guillet, JHEP **0801** (2008) 059 [arXiv :0711.4713 [hep-ph]]. (Cité page 33.)
- [75] T. Binoth, T. Reiter, J. R. Andersen, G. Heinrich, J. M. Smillie, J. -Ph. Guillet, G. Sanguinetti, S. Karg, N. Kauer,  
*Talk given at the 8th international Symposium on Radiative Corrections (RADCOR), October 1-5 2007, Florence, Italy*, [arXiv :hep-ph/08011616] (Cité page 33.)
- [76] T. Binoth, J. P. Guillet, G. Heinrich, E. Pilon and C. Schubert, JHEP **0510** (2005) 015 [arXiv :hep-ph/0504267] (Cité pages 33 et 39.)
- [77] F. M. Renard, *textslBasics of Electron Positron Collisions*, Editions Frontières, 1981 (Cité page 53.)
- [78] G. 't Hooft and M.J.G. Veltman, Nucl. Phys. B **44** (1972) 189 (Cité page 54.)
- [79] G. Bonneau, Physics Letters **96B** (1980) 147 (Cité page 55.)
- [80] S. Dittmaier, Phys. Rev. D **59** (1999) 016007 [arXiv :hep-ph/9805445]. (Cité page 56.)
- [81] V. Lafage, thèse de doctorat en Physique théorique (Cité page 58.)
- [82] Mathematica, <http://www.wolfram.com> (Cité page 60.)
- [83] S. Karg, thèse de doctorat en Physique théorique (Cité page 68.)
- [84] BASES, <http://minami-home.kek.jp/> (Cité page 78.)
- [85] LHAPDF, <http://hepforge.cedar.ac.uk/lhapdf/> (Cité pages 85 et 89.)
- [86] F. Mahmoudi, thèse de doctorat en Physique théorique
- [87] S. Catani, M. H. Seymour and Z. Trocsanyi, Phys. Rev. D **55** (1997) 6819 [arXiv :hep-ph/9610553].



**Résumé** En 2008, le futur collisionneur du CERN, le Large Hadron Collider (LHC), commencera à récolter les données issues des collisions entre protons à l'échelle du TeV, dans le but de comprendre la brisure de la symétrie électro-faible. Un grand nombre de réactions incluant de nombreuses particules dans l'état final doit être étudié avec précision. Ces possibilités de découverte du LHC ne pourront être pleinement exploitées que si le bruit de fond de la Chromodynamique Quantique est bien maîtrisé.

Parmi les réactions comprenant plus de quatre particules, la production associée d'une paire de bosons de jauge faible ( $W, Z$ ) associée à un jet constitue un des bruits de fond pour la recherche du boson de Higgs au LHC. Il est important de calculer cette réaction à l'approximation dite "au-delà des logarithmes dominants", qui consiste à ajouter à l'ordre dominant le plus bas les deux contributions suivantes : la correction virtuelle (c'est un calcul d'amplitudes à une boucle) et l'émission réelle (c'est un calcul d'amplitudes à l'arbre mais avec un parton de plus dans l'état final).

Des expressions analytiques suffisamment compactes pour être évaluées numériquement ont été obtenues et sont en parfait accord avec les résultats de deux autres groupes de recherche indépendants. Quant à l'émission réelle, toutes les contributions ont été évaluées à l'aide de programmes de génération automatique d'amplitudes à l'arbre. Ainsi, nous sommes en mesure de présenter des prédictions précises concernant les corrections à l'ordre supérieur de la section efficace totale de cette réaction au LHC.

**Mots-clés** Chromodynamique quantique, haute énergie, collision hadronique, LHC, corrections radiatives

**Title** NLO QCD corrections to the production of a weak boson pair with a jet

**Abstract** The upcoming Large Hadron Collider (LHC) will get soon the first data from the collisions between protons at the TeV energy scale, in order to understand the electroweak symmetry breaking. Precise phenomenological studies for processes involving many particles in the final state are then required. A detailed theoretical knowledge of the Quantum Chromodynamics backgrounds is indispensable for these studies at the LHC.

Among the processes with more than four particles, the production of a weak boson pair ( $W, Z$ ) associated by a hadronic jet is identified as one of the Higgs searches background at the LHC. It is important to calculate the next-to-leading order QCD corrections to this process, which are composed of two parts : the virtual correction (a one-loop amplitude calculation) and the real emission (a tree level amplitude calculation but with one more parton in the final state).

Compact analytical expressions have been evaluated numerically for the virtual part and are in agreement with the results obtained by two other independent research groups. Concerning the real emission, all contributions have been calculated by using packages for the generation of tree-level amplitudes. Thus, we are able to give precise predictions about the next-to-leading order corrections to the total cross section of this process at the LHC.

**Keywords** Quantum Chromodynamics, high energy, hadronic collisions, LHC, higher order corrections